FACULTAD DE INGENIERÍA

Expresiones booleanas

Contenido

Palabras clave: Proposición, operadores lógicos, conjunción, disyunción, implicación

Introducción

Con el objetivo de construir un sistema que permita establecer la verdad de una afirmación o sentencia, es necesario disponer de una representación de la misma que evite las ambigüedades del lenguaje, permita identificar su estructura subyacente y relación con otras afirmaciones. Para ello se presentará una forma de simbolizar las proposiciones que cumple con lo descrito anteriormente, además, sobre esta representación se construyen las reglas que establecen la interacción de la verdad de una afirmación con el valor de verdad de otras afirmaciones.

1. Proposiciones

Una *proposición* es una sentencia u oración que se puede clasificar como verdadera o falsa. Por ejemplo:

- El producto entre 3 y 5 es 16.
- La plata (Ag) es el elemento 47 de la tabla periódica.
- Existen solo dos tipos de números en el lenguaje de programación Java.
- Si un número entero es par entonces su cuadrado es un número entero par.

Las proposiciones son objetos que aparecen en diferentes situaciones en ciencias de la computación, por ejemplo, para expresar las características de los datos a consultar dentro de una base de datos o para establecer las condiciones en las cuales un programa ejecuta una "acción" o para identificar la estructura de un argumento y poder definir si es válido o no. Por lo tanto, estudiar este objeto es fundamental para su aplicación en diferentes contextos.

Para determinar el valor de verdad (Verdadero o Falso) de una proposición se emplea un sistema formal, denominado cálculo proposicional, que define las reglas para decidir si una proposición dada es verdadera o falsa a partir de la estructura que ella expone. En lo que sigue de la lectura se desarrollan los elementos básicos de este sistema.

1.1. Proposiciones simples y compuestas

Observe con detalle las siguientes proposiciones:

- Cartagena es una ciudad costera.
- Las regiones costeras son de clima cálido.
- Si Cartagena es una ciudad costera entonces su clima es cálido.

Cada una es una afirmación sobre la cual se puede indicar su valor de verdad, pero al analizar con detalle la tercera proposición se observa que está compuesta por las dos primeras proposiciones y enlazadas por las palabras "Si ... entonces ... ". Por lo tanto, es natural suponer que la asignación de verdad para esta sentencia depende del valor de verdad de cada proposición que la compone y alguna regla que indique la asignación de verdad en una proposición con el conector "Si ... entonces ..."

En el cálculo proposicional se establecen los siguientes conectores lógicos de proposiciones:

Conjunción: corresponde al conector "... y ...".

Disyunción: corresponde al conector "... o ...".

Implicación: corresponde al conector "Si ... entonces ...".

Además, se considera el operador **Negación** que aparece en una proposición en la forma "no ..." y cuyo símbolo es $\neg$.

Se asume que toda proposición que se construye con los operadores mencionados anteriormente es una *proposición compuesta*.

Ejemplo 1. Las siguientes proposiciones son compuestas:

- Ronald Antonio O'Sullivan tiene una edad mayor a 40 años **y** nació en Inglaterra.
- El último dígito del resultado de la operación $12^{132} - 15^{121}$ es 0 **o** 1.
- **Si** $2^{15} > x$ **entonces** $\log_2(x) < 15$.
- Daniela bebe chocolate al desayuno **únicamente si** es lunes.
- Ximena **no** es feliz en su trabajo.

1.2. Representación de proposiciones

Con el fin de evitar las ambigüedades del lenguaje español (o de cualquier otro idioma) y poder reconocer la estructura de una proposición se emplean símbolos proposicionales y símbolos de conectivos para su representación en el cálculo proposicional. Por ejemplo, la proposición *Si Cartagena es una ciudad costera entonces su clima es cálido* está compuesta por las proposiciones *Cartagena es una ciudad costera* y *una ciudad costera es de clima cálido*, además, el conector es la **implicación**. Si a cada una de las proposiciones que componen la proposición se asigna un símbolo, por ejemplo, p y r respectivamente y al conector el símbolo $\rightarrow$ entonces la proposición inicial se representa, en el cálculo proposicional, de la forma

$$p \rightarrow r$$

Las proposiciones simples o atómicas[1] se denotan con las letras $p, q, r, s, t, \ldots$ o $p_1, p_2, p_3, \ldots$ y los conectores según la tabla 1.

En los siguientes ejemplos se expone la forma de representar proposiciones compuestas, lo invito a revisar con detalle cada uno.

[1] aquellas proposiciones que no son compuestas

Tabla 1. Símbolos de los conectores lógicos

Conector	Símbolo
y	$\wedge$
o	$\vee$
si ... entonces ...	$\rightarrow$
... si y solo si ...	$\leftrightarrow$

Fuente: elaboración propia.

Ejemplo 2. Sea la proposición *Ronald Antonio O'Sullivan tiene una edad mayor a 40 años* ***y*** *nació en Inglaterra*, entonces las proposiciones que la componen son:

- p: *Ronald Antonio O'Sullivan tiene una edad mayor a 40*
- q: *Ronald Antonio O'Sullivan nació en Inglaterra*

El conector lógico presente es la palabra **y**. Por lo tanto, la representación de esta proposición es:

$$p \wedge q$$

Ejemplo 3. Sea la proposición *El último dígito del resultado de la operación* $12^{132} - 15^{121}$ *es 0* ***o*** *1*, entonces las proposiciones que la componen son:

- p: *El último dígito del resultado de la operación* $12^{132} - 15^{121}$ *es 0*
- q: *El último dígito del resultado de la operación* $12^{132} - 15^{121}$ *es 1*

El conector lógico presente es la palabra **o**. Por lo tanto, la representación de esta proposición es:

$$p \vee q$$

Ejemplo 4. Sea la proposición: ***si*** $2^{15} > 100$ ***entonces*** $\log_2(100) < 15$, las proposiciones que la componen son:

- r_1: $2^{15} > 100$
- r_2: $\log_2(100) < 15$

El conector lógico presente es **si** ... **entonces**. Por lo tanto, la representación de esta proposición es:

$$r_1 \rightarrow r_2$$

Ejemplo 5. Sea la proposición: *Ximena* ***no*** *es feliz en su trabajo*, la proposición que la compone es:

- p: Ximena es feliz en su trabajo.

El operador lógico presente es **no**. Por lo tanto, la representación de esta proposición es:

$$\neg p$$

Las proposiciones compuestas pueden contener varios conectores, además dada la riqueza de expresividad del lenguaje español algunos conectores podrían no estar presentes de forma explícita.

Ejemplo 6. Sea la proposición: ***si*** *Ximena* ***no*** *es feliz con su trabajo* ***entonces*** *busca un nuevo empleo* ***o*** *un ascenso*, las proposición que la componen son:

- p: Ximena es feliz con su trabajo.
- q: Ximena busca un nuevo empleo.
- r: Ximena busca un ascenso en su empleo.

Los operadores lógicos presentes son la negación, implicación y disyunción. Por lo tanto, la representación de esta proposición es:

$$(\neg p) \to (q \vee r)$$

Ejemplo 7. Sea la proposición: *porque hoy es sábado voy al cine*, entonces las proposiciones que la componen son:

- p: *Hoy es sábado*
- q: *Hoy voy a cine*

El conector lógico presente es la implicación. Por lo tanto, la representación de esta proposición es:

$$p \to q$$

Ejemplo 8. Sea la proposición: *para mantenerse seco Juan, es suficiente que él lleve un impermeable*, entonces las proposiciones que la componen son:

- p: *Juan se mantiene seco*
- q: *Juan lleva un impermeable*

El conector lógico presente es la implicación. Dado que al analizar la oración se observa que llevar un impermeable implica que se mantendrá seco, la representación de esta proposición es:

$$q \to p$$

Ejemplo 9. Sea la proposición: *es necesario que Daniela compre una boleta de lotería para ganar la lotería*, entonces las proposiciones que la componen son:

- t_1: *Daniela compra una boleta de lotería*
- t_2: *Daniela gana la lotería*

El conector lógico presente es la implicación. Dado que al analizar la oración, se observa que ganar la lotería implica haber comprado una boleta, la representación de la proposición es:

$$t_2 \to t_1$$

2. Tablas de verdad

En esta sección se establece cómo la estructura de una proposición compuesta y las proposiciones atómicas definen su valor de verdad. Inicialmente se estudia el caso en que aparece un solo operador en la proposición, para luego abordar las situaciones donde aparecen múltiples conectores.

2.1. Negación

Cuando se tiene una proposición de la forma $\neg p$ (que se lee: "no p") su valor de verdad es falso (**F**) si la proposición p es verdadera (**T**) y su valor de verdad es verdadero cuando p es una proposición falsa. El comportamiento de este operador corresponde a la interpretación de la palabra **no**.

Ejemplo 10. *La tierra no gira alrededor del sol*, es una proposición **falsa**, dado que la proposición *la tierra gira alrededor del sol* es **verdadera**.

Ejemplo 11. *El martes no está antes que el lunes*, es una proposición **verdadera** puesto que la proposición *el martes está antes que el lunes* es una proposición **falsa**.

El comportamiento del operador negación se resume en la tabla 2

Tabla 2. Tabla de verdad del operador negación

Valor de verdad p	Valor de verdad de $\neg p$
T	F
F	T

Fuente: elaboración propia.

2.2. Conjunción

La conjunción de dos proposiciones p, q corresponde a una proposición de la forma $p \wedge q$ (se lee: "p y q"), para que esta proposición sea verdadera es necesario que ambas proposiciones sean verdaderas y es falsa en cualquier otra situación.

Ejemplo 12. La proposición: *El número 30 es divisible por 3 y por 6* es verdadera dado que las proposiciones *el número 30 es divisible por 3* y *el número 30 es divisible por 6* son verdaderas.

Ejemplo 13. La proposición: *Colombia tiene más de 33 departamentos y uno de ellos se llama Amazonas* es falsa dado que la proposición *Colombia tiene más de 33 departamentos* es falsa.

El comportamiento del operador conjunción se resume en la tabla 3

Ejemplo 14. Si q es una proposición cuyo valor de verdad es falso, r una proposición que es verdadera, entonces, la proposición $r \wedge q$ es una proposición falsa.

Tabla 3. Tabla de verdad del operador conjunción

Valor de verdad p	Valor de verdad de q	Valor de verdad de $p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Fuente: elaboración propia.

2.3. Disyunción

Una proposición de la forma $p \vee q$ (se lee: "p o q") es verdadera si alguna de las proposiciones p o q es verdadera o ambas. La siguiente tabla resume el comportamiento de este operador:

Tabla 4. Tabla de verdad del operador disyunción

Valor de verdad p	Valor de verdad de q	Valor de verdad de $p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Fuente: elaboración propia.

Ejemplo 15. Si r_1 es una proposición falsa, r_2 es una proposición verdadera, entonces, $r_1 \vee r_2$ es una proposición verdadera.

Ejemplo 16. La proposición *El número 30 es divisible por 7 o por 6* es verdadera, dado que la proposición *El número 30 es divisible por 6* es verdadera.

2.4. Implicación

Una proposición de la forma $p \to q$ se lee como: "p entonces q", a la proposición p se le denomina el *antecedente* y a la proposición q se denomina *consecuente* de la implicación. Un uso de este tipo de expresiones es representar situaciones de causalidad: si el evento p se cumple entonces sucederá el evento q.

El comportamiento de este operador, en términos en como asigna la verdad, se describe en la tabla 5.

Tabla 5. Tabla de verdad del operador implicación

Valor de verdad p	Valor de verdad de q	Valor de verdad de $p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Fuente: elaboración propia.

Observe que el único caso donde la proposición $p \to q$ será falsa es cuando su antecedente sea verdadero y el consecuente sea falso.

Ejemplo 17. La proposición "*Si* 6 *es un número par entonces su cuadrado es divisible por el número* 4" es verdadera, dado que el antecendete "6 *es un número par*" es verdadera y el consecuente "*el cuadrado de* 6 *es divisible por* 4" es una proposición verdadera.

Ejemplo 18. La proposición "*si el sol gira alrededor de la tierra entonces la luna gira alrededor de la tierra*" es verdadera, dado que el antecedente "*el sol gira alrededor de la tierra*" es falso.

Ejemplo 19. La proposición "*si el primer teléfono movil se desarrolló en 1973 entonces las personas no se comunicaban en 1972*" es falsa, debido a que el antecedente es verdadero pero el consecuente es falso.

Se invita al estudiantex apropiar la tabla de verdad de este operador, debido a la dificultad que exponen algunos estudiantes para recordarla.

3. Expresiones booleanas

Una expresión booleana corresponde a una proposición atómica o a una proposición construida con las proposiciones atómicas y los operadores lógicos $(\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow)$. En la sección anterior se exploró cómo determinar el valor de verdad de una expresión booleana cuando está compuesta por un solo operador. Ahora, se abordará el caso de proposiciones más complejas y se definirán relaciones entre proposiciones.

3.1. Valor de verdad de una expresión booleana

Suponga que conoce que el valor de verdad de la proposición atómica p es falso (**F**), de la proposición q es verdadero (**T**), de la proposición r es **F** y se desea conocer el valor de verdad de la expresión $E : q \to (p \vee (\neg r))$. Note que E contiene las expresiones booleanas $\neg r$, $(p \vee (\neg r))$ y $q \to (p \vee (\neg r))$, como r es falso entonces $\neg r$ es verdadero, como p es falso y $\neg r$ es verdadero entonces $p \vee (\neg r)$ es verdadera y por último como q es verdadera y $p \vee (\neg r)$ es verdadera, se sigue que $q \to (p \vee (\neg r))$ es una proposición verdadera. La figura 1 presenta la forma de evaluar el valor de verdad de la expresión E.

$$\underbrace{\underbrace{q}_{T} \longrightarrow \underbrace{(\underbrace{p}_{F} \vee \underbrace{(\neg \underbrace{r}_{F})}_{T})}_{T}}_{T}$$

Figura 1. Evaluación de una expresión booleana

Fuente: elaboración propia.

En general, para determinar el valor de verdad de una proposición compuesta Q, a partir de sus proposiciones atómicas, es necesario ir calculando el valor de verdad de las expresiones contenidas en Q. Los siguientes ejemplos deben servir de guía para comprender el proceso de evaluación de una expresión booleana compleja.

Ejemplo 20. Si se conoce que p es una proposición verdadera, q una proposición verdadera y r una proposición falsa, entonces el valor de verdad de la proposición $p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge r))$ es falsa, el cálculo del valor de verdad se presenta en la figura 2

$$\underbrace{\underbrace{p}_{T} \longrightarrow \underbrace{(\underbrace{q}_{T} \longrightarrow \underbrace{(\underbrace{p}_{T} \wedge \underbrace{r}_{F})}_{F})}_{F}}_{F}$$

Figura 2. Evaluación de la expresión $p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge r))$

Fuente: elaboración propia.

Ejemplo 21. Si se conoce que t_1 es una proposición falsa, t_2 una proposición verdadera, t_3 una proposición verdadera y t_4 es una proposición falsa, entonces el valor de verdad de la proposición $\neg\left(\neg(t_1 \vee \neg t_2) \wedge (t_4 \rightarrow t_3)\right)$ es falsa, el cálculo del valor de verdad se presenta en la figura 3

$$\underbrace{\neg \underbrace{(\underbrace{\neg \underbrace{(\underbrace{t_1}_{F} \vee \underbrace{\neg \underbrace{t_2}_{T}}_{F})}_{F}}_{T} \wedge \underbrace{(\underbrace{t_4}_{F} \longrightarrow \underbrace{t_3}_{T})}_{T})}_{T}}_{F}$$

Figura 3. Evaluación de la expresión $\neg\left(\neg(t_1 \vee \neg t_2) \wedge (t_4 \rightarrow t_3)\right)$

Fuente: elaboración propia.

En algunas situaciones es necesario conocer el valor de verdad de una expresión booleana E frente a todas las posibles asignaciones de verdad de sus proposiciones atómicas, para lo cual se construye una tabla de verdad para la expresión E.

Ejemplo 22. Construir la tabla de verdad de la expresión $s \rightarrow (r \rightarrow s)$.

En este caso lo que se hace es construir una tabla que contenga 3 columnas, las dos primeras hacen referencia a los valores de verdad de las proposiciones atómicas de la expresión y la tercera contiene el valor de verdad de la expresión completa. Cada fila de la tabla contiene una posible asignación de las proposiciones atómicas y el valor de verdad de la proposición E asociado a la asignación de las proposiciones básicas.

Tabla 6. Tabla de verdad de la expresión $s \rightarrow (r \rightarrow s)$

Valor de verdad s	Valor de verdad de r	Valor de verdad de $s \rightarrow (r \rightarrow s)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

Fuente: elaboración propia.

Cuando el valor de verdad de una expresión E es siempre verdadero (**T**), para cualquier asignación de las proposiciones atómicas que la componen, se dice que E es una **tautología**

Ejemplo 23. Construir la tabla de verdad de la expresión $\neg(q \vee t) \wedge x$.

Tabla 7. Tabla de verdad de la expresión $\neg(q \vee t) \wedge x$

q	t	x	$\neg(q \vee t) \wedge x$
T	T	T	F
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	F

Fuente: elaboración propia.

3.2. Expresiones booleanas equivalentes

Observe las siguientes tablas de verdad (8 y 9) de las expresiones $p \to q$ y $\neg p \vee q$:

Tabla 8. Tabla de verdad de la expresión $p \to q$

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Fuente: elaboración propia.

Tabla 9. Tabla de verdad de la expresión $\neg p \vee q$

p	q	$\neg p \vee q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Fuente: elaboración propia.

Podrá notar que para una asignación de verdad de p y q el valor de verdad de las expresiones $p \to q$ y $\neg p \vee q$ es igual. En esta situación se dice que las expresiones son equivalentes y se denota como:

$$(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$$

De manera más formal:

Definición 1. Sea E y Q expresiones booleanas, con proposiciones atómicas $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Si para cualquier asignación de verdad de las proposiciones atómicas el valor de verdad de las proposiciones E y Q es igual, entonces se dice que E es equivalente a Q y se denota por:

$$E \leftrightarrow Q$$

Ejemplo 24. Comprobar que $\neg(\neg(\neg p))$ es equivalente a $\neg p$.

En este caso construimos una tabla de verdad cuyas primeras columnas están asociadas a los valores de verdad de las proposiciones atómicas y las últimas columnas sean las proposiciones dadas, luego, en cada fila se hace una asignación de verdad a las proposiciones atómicas y se evalúa cada proposición E y Q.

Las dos expresiones son equivalentes si las columnas de las proposiciones dadas son iguales.

Tabla 10. Comprobación de la equivalencia de las expresiones $\neg(\neg(\neg p))$ y $\neg p$

p	$\neg(\neg(\neg p))$	$\neg p$
T	F	F
F	T	T

Fuente: elaboración propia.

Ejemplo 25. Comprobar que $\neg(p \wedge q)$ es equivalente a $(\neg p) \vee (\neg q)$.

En este caso se construye una tabla con 4 columnas, donde las dos primeras corresponden a los valores de verdad de las proposiciones atómicas, que para este ejemplo son p y q; la tercera columna corresponde al valor de verdad de la proposición $\neg(p \wedge q)$ y la cuarta al valor de verdad de $(\neg p) \vee (\neg q)$.

Cada fila de la columna se completa, realizando una asignación de verdad a las proposiciones atómicas y evaluando las proposiciones dadas.

Tabla 11. Comprobación de la equivalencia de las expresiones $\neg(p \wedge q)$ y $(\neg p) \vee (\neg q)$

p	q	$\neg(p \wedge q)$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	T	T

Fuente: elaboración propia.

En la siguiente sección se explora una aplicación de lo desarrollado hasta ahora en la lectura, en los ejercicios al final podrá encontrar otros usos.

4. Argumentos

Un argumento corresponde a un conjunto de premisas (proposiciones) seguidas de una proposición denominada conclusión, por ejemplo:

Si estudio entonces aprendo. Estudio. Por lo tanto, aprendo

En este argumento, las premisas son: Si estudio entonces aprendo, yo estudio. La conclusión es la proposición: Yo aprendo.

La forma de representar un argumento como una expresión booelana, asumiendo que las premisas son las proposiciones $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m$ y t es la conclusión, es construir la expresión:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_m) \rightarrow t$$

En el ejemplo anterior, se tiene que su representación como expresión booleana es:

$$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$$

Ejemplo 26. Construir una expresión booleana que represente el argumento:

Los jugadores entrenan poco tiempo o el equipo de fútbol no juega bien. Si el director técnico es exigente entonces los jugadores no entrenan poco tiempo. El equipo de fútbol juega bien. Si el director técnico no es exigente entonces se tendrán malos resultados. Por lo tanto, se tendrán malos resultados.

Solución: en este caso las premisas son:

- Los jugadores entrenan poco o el equipo de fútbol no juega bien.
- Si el director técnico es exigente entonces los jugadores no entrenan poco tiempo.
- El equipo de fútbol juega bien.
- Si el director técnico no es exigente entonces se tendrán malos resultados.

La conclusión es la proposición *el equipo tendrá malos resultados*. Si cada premisa se representa como una expresión booleana entonces:

- Los jugadores entrenan poco o el equipo de fútbol no juega bien: $p_1 \vee \neg p_2$
- Si el director técnico es exigente entonces los jugadores no entrenan poco tiempo: $p_3 \rightarrow \neg p_1$
- El equipo de fútbol juega bien: p_2
- Si el director técnico no es exigente entonces se tendrán malos resultados: $\neg p_3 \rightarrow p_4$

Con lo cual la representación del argumento es:

$$((p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_3 \rightarrow \neg p_1) \wedge p_2 \wedge (\neg p_3 \rightarrow p_4)) \rightarrow p_4$$

$\diamondsuit$

Definición 2. Un argumento se dice **válido** si la expresión booleana que lo representa es una **tautología**

Ejemplo 27. El argumento "Si estudio entonces aprendo. Estudio. Por lo tanto, aprendo" es válido, dado que al construir la tabla de verdad de su representación booleana se obtiene:

Tabla 12. Tabla de verdad de la expresión $((p \to q) \wedge p) \to q$

p	q	$((p \to q) \wedge p) \to q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

Fuente: elaboración propia.

lo que demuestra que es una tautología.

Ejemplo 28. El argumento "Si el lunes tengo clase entonces voy a la escuela. El lunes no tengo clase. Por lo tanto no voy a la escuela" **no es válido**, dado que al construir la tabla de verdad de la representación booleana del argumento se obtiene:

Tabla 13. Tabla de verdad de la expresión $((p \to q) \wedge \neg p) \to \neg q$

p	q	$((p \to q) \wedge \neg p) \to \neg q$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

Fuente: elaboración propia.

Lo que demuestra que no es una tautología.

En las siguientes lecturas aprenderá técnicas más eficientes para determinar si un argumento es válido, dado que la presentada en esta sección no es efectiva si la cantidad de proposiciones atómicas presentes es grande.

5. Ejercicios

1. Representar en términos de símbolos proposicionales y conectores lógicos cada una de las siguientes proposiciones.

    a) Si Juan tiene dinero entonces va al cine.

    b) El número 12^{34} es divisible por 8 y 27.

    c) Si un jugador de futbol asiste a los entrenamientos y tiene talento entonces apoya al equipo.

    d) Haga sol o no, yo salgo a caminar.

    e) Es necesario tener sueño para dormir.

    f) Es suficiente que la suma de los dígitos de 15^3 sea múltiplo de 9, para que 15^3 sea divisible por 9

2. Sean las proposiciones p : la edad de x es mayor o igual a 20 años, s : x estudia ingeniería de sistemas y r : x estudia ingeniería de telecomunicaciones. Construya una proposición, utilizando las proposiciones p, q, r, que sea verdadera cuando x tenga una edad menor a 20 años y estudie ingeniería de telecomunicaciones o sistemas.

3. Construya la tabla de verdad de la proposición: *Si Daniela busca mejorar su movilidad en la ciudad, entonces deberá comprar una moto o una bicicleta.*

4. Construya una expresión en lenguaje español, cuya representación en el cálculo proposicional sea $(\neg p \wedge q) \rightarrow (s \vee r)$.

5. Determine cuáles de las siguientes expresiones es una tautología.

    a) $p \rightarrow \neg p$

    b) $p \vee \neg p$

    c) $p \wedge p$

    d) $(p \wedge q) \rightarrow q$

6. Compruebe que las expresiones $\neg(p \rightarrow q)$ y $p \wedge \neg q$ son equivalentes.

7. Sin construir la tabla de verdad de la proposición $(p \rightarrow (q \vee r)) \vee q$, determine para que valor de verdad de las proposiciones atómicas se tiene que la proposición es falsa.

8. Sean p y q los enunciados

    p: Conduces a más de 100 km por hora.

    q: Te multan por exceso de velocidad.

    Escribe los enunciados siguientes usando p,q y conectivos lógicos

    a) No conduces a más de 100 km por hora.

    b) Conduces a más de 100 km por hora pero no te multan por exceso de velocidad.

    c) Te multarán por exceso de velocidad si conduces a más de 100 km por hora.

    d) Si no conduces a más de 100 km por hora no te multarán por exceso de velocidad.

    e) Conducir a más de 100 km por hora es suficiente para que te multen por exceso de velocidad.

    f) Te multan por exceso de velocidad pero no conduces a más de 100 km por hora.

g) Siempre que te multan por exceso de velocidad conduces a más de 100 km por hora

9. Construir una expresión booleana equivalente a la proposición $p \vee (r \to p)$ que use las mismas proposiciones atómicas pero solo los conectores $\neg, \wedge$ y $\vee$.

10. Los siguientes ejercicios están relacionados con la isla de los caballeros y de los villanos inventada por Smullyan, donde los caballeros siempre dicen la verdad y los villanos siempre mienten. Te encuentras a dos personas, A y B en cada problema. Si no puedes determinar qué son estas personas, ¿puedes deducir alguna conclusión?

    a) A dice "al menos uno de los dos es un villano" y B no dice nada
    b) A dice "los dos somos caballeros" y B dice "A es un villano"
    c) A dice "Yo soy un villano o B es un caballero" y B no dice nada.
    d) Tanto A como B dicen "Yo soy un caballero".
    e) A dice "Ambos somos villanos " y B no dice nada.

11. Escribe cada uno de los siguientes enunciados de la forma "si p entonces q"

    a) La playa se erosiona siempre que azota una tormenta.
    b) El manzano florecerá si el tiempo se mantine calido durante una semana.
    c) Es necerario andar 12 km para llegar a la cima del pico.
    d) Para ser cantante es suficiente con usar Auto-Tune.
    e) Si conduces más de 600 km seguido, necesitarás reabastecerte de gasolina.
    f) Tu garantía es valida sólo si hiciste la compra hace menos de 90 días.

12. Los siguientes ejercicios se refieren a los habitantes de una isla en la que hay tres tipos de personas: caballeros que siempre le dicen a la la verdad, los villanos que siempre mienten y los espías (llamados normales por Smullyan) que puede mentir o decir la verdad. Tú te encuentras con tres personas, A, B y C. Sabes que una de estas personas es un caballero, otro villano y el otro espía. Cada una de las tres personas saben el tipo de persona que es cada una de las otras dos. Para cada una de estas situaciones, si es posible, determine si hay una solución única y determinar quién es el caballero, villanos y espía, respectivamente. Cuando no haya una solución única, enumerar todas las soluciones posibles o afirmar que no hay soluciones.

    a) A dice "C es el villano", B dice "A es el caballero" y C dice "Yo soy el espía".
    b) A dice "Yo soy el caballero", B dice "Yo soy el villano", y C dice "B es el caballero".
    c) A dice "Yo soy el villano", B dice "Yo soy el villano" y C dice "Yo soy el villano".
    d) A dice "Yo soy el caballero", B dice "A está diciendo la verdad", y C dice "Yo soy el espía".
    e) A dice "Yo soy el caballero", B dice "A no es el villano", y C dice "B no es el villano".
    f) A dice "Yo soy el caballero", B dice "Yo soy el caballero", y C dice "Yo soy el caballero".
    g) A dice "Yo no soy el espía", B dice "Yo no soy el espía" y C dice "A es el espía".

h) *A* dice “Yo no soy el espía”, *B* dice “Yo no soy el espía” y *C* dice “Yo no soy el espía”.

13. La policia tiene tres sospechosos del asesinato del señor Carlos: El señor Santiago, el señor Juan y el señor William. Cada uno de ellos declaro que no mató a Carlos. Santiago declara además que Carlos era amigo de Juan y que William no lo apreciaba. Juan también declara que él no conocía a Carlos y que estaba fuera de la Ciudad cuando Carlos fue asesinado. William declara también que vió a Santiago y Juan con Carlos el día del asesinato y que Santiago o Juan debió matar a Carlos. ¿Puedes determinar quién lo mato si: uno de los tres hombres es culpable, los dos inocentes dicen la verdad, pero las declaraciones del culpable pueden ser o no verdad?

14. Un detective ha tomado declaración a 4 testigos de un crimen. De las declaraciones concluye que si el mayordomo dice la verdad, también lo hace el cocinero; el cocinero y el jardinero no pueden ambos decir la verdad; el jardinero y el empleado de mantenimiento no están mintiendo ambos, y si el empleado de manteniento dice la verdad, entonces el cocinero miente. Para cada uno de los testigos, ¿puede el detective determinar si miente o dice la verdad? Explica tu razonamiento.

15. Escribe cada uno de los siguientes enunciados de la forma “p si y sólo si q”

    a) Para sacar un 5 en este curso es necesario y suficiente que aprendas a resolver problemas de lógica.

    b) El articulado llega con retraso exactamente los días que tengo que tomarlo.

    c) Sólo puedes ver el mago si no está, y el mago no está sólo si puedes verlo.

    d) Tendrás amigos duraderos si compartes tiempo con ellos, y reciprocamente.

Referencias

Suppes, P. *Introduccion a la logica matematica*. Reverte, 1982.

Huth, Michael and Ryan, Mark, *Logic in Computer Science: Modelling and Reasoning About Systems*, New York, Cambridge University Press, 2004.

Rosen, K.H. and Morales, J.M.P., *Matemática discreta y sus aplicaciones*, McGraw-Hill,2004.

INFORMACIÓN TÉCNICA

Autor: María Isabel David