

Отчет о выполнении лабораторной работы 1.2.5

Исследование вынужденной прецессии гироскопа

Костылев Влад, Б01-208

16 ноября 2022 г.

Аннотация

Цель работы: исследовать вынужденную прецессию гироскопа; установить зависимость скорости вынужденной прецессии от величины момента сил, действующих на ось гироскопа; определить скорость вращения ротора гироскопа и сравнить ее со скоростью, рассчитанной по скорости прецессии.

В работе используются: гироскоп в кардановом подвесе, секундомер, набор грузов, отдельный ротор гироскопа, цилиндр известной массы, крутильный маятник, штангенциркуль, линейка.

1 Теоретическая справка

Уравнение движения твердого тела:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (2)$$

Так как сила \vec{F} не зависит от угловой скорости, а момент сил \vec{M} - от скорости поступательного движения, то уравнения движения можно рассматривать отдельно.

$$\vec{L} = \vec{i} I_x \omega_x + \vec{j} I_y \omega_y + \vec{k} I_z \omega_z \quad (3)$$

Гироскоп - быстро вращающееся тело, для которого, например:

$$I_z \omega_z \gg I_x \omega_x, I_y \omega_y \quad (4)$$

Уравновешенный гироскоп - тот, у которого центр масс неподвижен. Если момент внешних сил действует в течение короткого промежутка времени, то:

$$|\Delta \vec{L}| = \left| \int \vec{M} dt \right| \ll |\vec{L}| \quad (5)$$

Рассмотрим маховик, вращающийся вокруг оси z (рис. 1). Будем считать, что:

$$\omega_x = \omega_0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = 0 \quad (6)$$

Пусть ось вращения повернулась на угол $d\varphi$ в плоскости zx :

$$d\varphi = \Omega dt$$

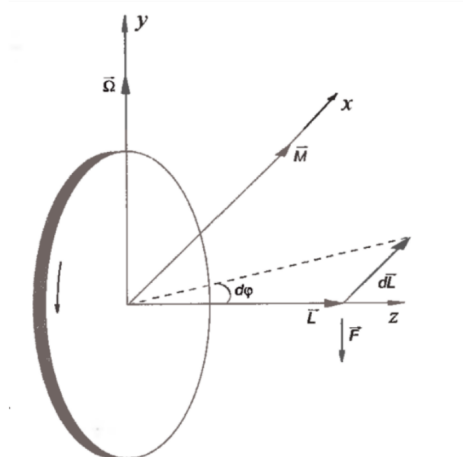


Рис. 1. Маховик

Будем считать, что $L_\Omega \ll L_{\omega_0}$. Это означает, что момент импульса маховика изменится только по направлению:

$$|d\vec{L}| = Ld\varphi = L\Omega dt \quad (7)$$

Изменение направлено вдоль оси x , поэтому $d\vec{L}$ можно представить:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L} \quad (8)$$

С учетом уравнения вращательного движения:

$$\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L} \quad (9)$$

Под действием момента \vec{M} ось гироскопа медленно вращается вокруг оси y с угловой скоростью Ω - регулярная прецессия гироскопа. Скорость в случае движения уравновешенного гироскопа под действием моментов сил подвешенных грузов:

$$\Omega = \frac{mgl}{I_z\omega_0}, \quad (10)$$

где l - расстояние от центра карданова подвеса до точки крепления груза на оси гироскопа (рис. 2)

Силы трения не лежат в плоскости осей вращения, поэтому они могут изменять момент импульса и по направлению, и по величине. Для ротора действие сил трения скомпенсировано действием электромотора. В результате действия нескомпенсированных сил трения в осях карданова подвеса ось гироскопа будет опускаться в направлении груза.

Момент инерции ротора относительно оси симметрии I_0 измеряется по крутильным колебаниям на жесткой проволоке.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{f}}, \quad (11)$$

где f - модуль кручения проволоки. Чтобы исключить f можно подвесить цилиндр с известными размерами и массой:

$$I_0 = I_{\text{ц}} \frac{T_0^2}{T_{\text{ц}}^2} \quad (12)$$

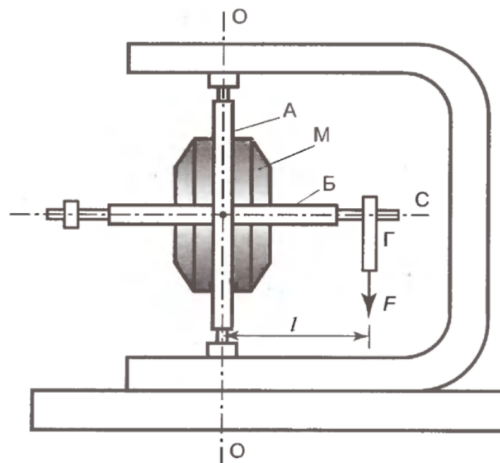


Рис. 2. Схема экспериментальной установки

2 Используемое оборудование

В работе используются: гироскоп в кардановом подвесе, секундомер, набор грузов, отдельный ротор гироскопа, цилиндр известной массы, крутильный маятник, штангенциркуль, линейка.

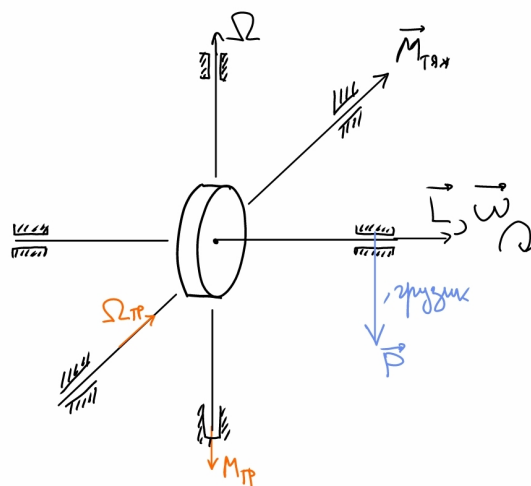
3 Методика измерений

Все измерения были получены с использованием вышеперечисленного оборудования. Все полученные измерения были внесены в таблицу и были произведены соответствующие вычисления, результаты которых также были занесены в таблицу.

4 Результаты измерений и обработка данных

4.1 Определение направления вращений ротора гироскопа

Направление вращения ротора гироскопа определяется достаточно просто, необходимо посмотреть, в какую сторону направлен вектор угловой скорости прецессии. Это видно по рисунку:



4.2 Определение момента инерции ротора гироскопа

Определим момент инерции ротора, путем измерения его у пробного цилиндра и, воспользовавшись пропорциональностью их моментов инерции и масс вычислим нужную нам величину.

Момент инерции цилиндра можно вычислить по следующей формуле:

$$I_{\text{ц}} = \frac{1}{2} m_{\text{ц}} \left(\frac{d_{\text{ц}}}{2} \right)^2,$$

где $m_{\text{ц}} = (1,616 \pm 0,001)$ кг – масса цилиндра, $d_{\text{ц}} = (0,077 \pm 0,001)$ м – его диаметр.

$$I_{\text{ц}} = 0,00125 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Погрешность вычисления момента инерции цилиндра может быть найдена по следующей формуле:

$$\sigma_{I_{\text{ц}}} = I_{\text{ц}} \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m_{\text{ц}}} \right)^2 + \left(2 \frac{\sigma_d}{d_{\text{ц}}} \right)^2} \approx 0,00004 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Получаем:

$$I_{\text{ц}} = (0,00125 \pm 0,00004) \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Далее вычислим **период крутильных колебаний цилиндра**, подвесив его на проволоке и измерив время его 7 колебаний.

	N	t, с (7 кол)	T, с (1 кол)	T_ср, с
	1	21,2	3,028	3,031
	2	21,08	3,011	
	3	21,3	3,042	

Случайную погрешность периода крутильных колебаний рассчитываем по формуле:

$$\sigma_T^{\text{сл}} = \sqrt{\frac{1}{N_{\text{оп}} - 1} \sum_{i=1}^{N_{\text{оп}}} (T_i - \langle T \rangle)^2}.$$

Полная погрешность может быть вычислена по формуле, где $\Delta_{\text{сек}}$ - время реакции человека(0,5с):

$$\sigma_T = \sqrt{(\sigma_T^{\text{сл}})^2 + (\Delta_{\text{сек}})^2}$$

В конечном итоге получаем:

$$T_{\text{ц}} = (3,031 \pm 0,078) \text{ с}$$

Измерим **период крутильных колебаний ротора гироскопа**:

Производим измерение времени $N_{\text{кол}}$ крутильных колебаний цилиндра и повторяем опыт $N_{\text{оп}} = 3$ раза. Полученные результаты заносим в таблицу.

	N	t, с (7 кол)	T, с (1 кол)	T_ср, с
	1	16,36	2,187	2,215
	2	16,8	2,255	
	3	16,6	2,204	

Вычисления средних значений периода колебаний и погрешностей проводим по формулам, описанным выше.

Тогда для ротора:

$$T_0 = (2,215 \pm 0,033) \text{ с}$$

Вычислим **момент инерции ротора** гироскопа:

Так как моменты инерции пропорциональны отношению квадратов периодов:

$$I_0 = I_{\text{ц}} \frac{T_0^2}{T_{\text{ц}}^2} = 0,00078 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Погрешность вычисления момента инерции ротора гироскопа можно вычислить по формуле:

$$\sigma_{I_0} = I_0 \sqrt{(\varepsilon_{I_{\text{ц}}})^2 + (2\varepsilon_{T_0})^2 + (2\varepsilon_{T_{\text{ц}}})^2} \approx 0,00003 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

В итоге получаем:

$$I_0 = (0,00078 \pm 0,00003) \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

4.3 Вычисление момента сил трения

Проведем серию измерений, отклоняя носик гироскопа на одинаковый угол в 5 градусов и измеряя время, за которое он вернется в горизонтальное положение. Так как мы знаем момент инерции ротора, достаточно найти угловую скорость во всех измерениях.

$$M = \Omega I_0 \omega_0$$

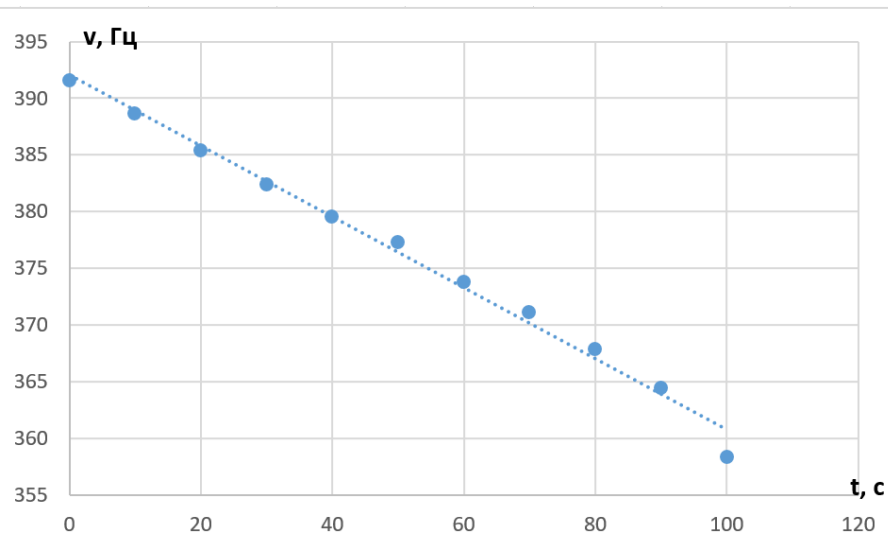
m, гр	57	74	92	116	142	180	219	273	341
T, с	178	132	109	86	71	60	46	39	30
Ω , 1/с	0,005618	0,007576	0,009174	0,011628	0,014085	0,016667	0,021739	0,025641	0,033333
M, Н*м	0,010732	0,014471	0,017525	0,022212	0,026905	0,031837	0,041527	0,04898	0,063674

4.4 Определение частоты гироскопа по затуханию

Произведем следующие действия, отключим гироскоп от питания, тем самым ротор будет постепенно останавливаться, вплоть до полной остановки. Будем подбирать такую частоту на генераторе, чтобы на экране осциллографа оставался эллипс(насколько это возможно убрать его дерганье). Прделаем данные действия каждые 10 секунд на протяжении 100 секунд и внесем данные в таблицу, тем самым получив зависимость частоты от времени.

ν , гц	391,52	388,6	385,4	382,4	379,5	377,3	373,8
t, с	0	10	20	30	40	50	60
ν , гц	371,1	367,8	364,4	358,3			
t, с	70	80	90	100			

Проаппроксимируем полученные данные и построим график:



5 Обсуждение результатов

Все выше полученные результаты можно считать довольно точными, так как лежат в пределах погрешности.

6 Заключение

Проделав данную лабораторную работу, мы изучили такой прибор как гироскоп. Выяснили, что чем больший вес мы прикладываем к концу оси гироскопа, чем больше становится прецессионная угловая скорость.