Аналитическая геометрия
1. Векторы
1.1 Коллинеарные, компланарные векторы

Определение 1.7. *Направленным отрезком* называется отрезок, концы которого упорядоченны. Обозначение — $\overline{AB}$.

Определение 1.8. Направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются *равными*, если они сонаправленны и их длины равны. Равенство является отношением эквивалентности.

Определение 1.9. *Вектором* называется класс эквивалентности направленных отрезков. Формально, если $\overline{AB}$ — представитель класса $\overline{v}$, то $\overline{AB} \in \overline{v}$, но в дальнейшем будем обозначать это как $\overline{AB} = \overline{v}$. Вектор отличается от направленного отрезка тем, что его можно отложить от заданной точки: если $A \in P_i$, то $\exists! B \in P_i : \overline{AB} = \overline{v}$ ($\overline{v}$ — откладываемый вектор).

Определение 1.16. Система векторов называется *коллинеарной*, если все ее векторы параллельны одной прямой.

Определение 1.17. Система векторов называется *компланарной*, если все ее векторы параллельны одной плоскости.

Утверждение 1.11.

1. *Пусть $\overline{a} \neq \overline{0}$, $\overline{b}$ коллинеарен $\overline{a}$. Тогда $\overline{b}$ выражается через $\overline{a}$.*
2. *Пусть $\overline{a}, \overline{b}$ — неколлинеарные векторы, $\overline{c}$ компланарен $\overline{a}, \overline{b}$. Тогда $\overline{c}$ выражается через $\overline{a}, \overline{b}$.*
3. *Пусть $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ — некомпланарные векторы, $\overline{d}$ — произвольный вектор пространства. Тогда $\overline{d}$ выражается через $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.*

1.2 Линейные операции с векторами и их свойства

Определение 1.11. Основные операции с векторами:

1. *Сложение.* Отложим вектор $\overline{u}$ от некоторой точки $A \in P_i$, получим $\overline{AB} = \overline{u}$. Теперь отложим $\overline{v}$ от точки $B \in P_i$, получим $\overline{BC}$. Тогда суммой $\overline{u}$ и $\overline{v}$ называется такой класс эквивалентности $\overline{u} + \overline{v}$, представителем которого является $\overline{AC}$.

2. *Умножение на число.* Отложим вектор $\overline{u}$ от некоторой точки $A \in P_i$, получим $\overline{AB} = \overline{v}$. Тогда результатом умножения $\overline{v}$ на число λ называется такой класс эквивалентности $\lambda\overline{v}$, представителем которого является направленный отрезок $\overline{AC}$, длина которого равна длине $\overline{AB}$, умноженной на $|\lambda|$, а направление совпадает с $\overline{AB}$, если $\lambda > 0$, и противоположно $\overline{AB}$, если $\lambda < 0$ (если $\lambda = 0$, то положим $0\overline{v} := \overline{0}$).

Утверждение 1.6. *Операции с векторами обладают следующими свойствами:*

- $\overline{u} + \overline{v} = \overline{v} + \overline{u}$
- $(\overline{u} + \overline{v}) + \overline{w} = \overline{u} + (\overline{v} + \overline{w})$
- $\exists\overline{0} : \forall\overline{a} : \overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$
- $\forall\overline{a} : \exists(-\overline{a}) : \overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$
- $(\lambda + \mu)\overline{a} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{a}$
- $\lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}$
- $(\lambda\mu)\overline{a} = \lambda(\mu\overline{a})$
- $1\overline{a} = \overline{a}$

Доказательство. Доказательство производится непосредственной проверкой: например, первое свойство сводится к использованию свойств параллелограмма, для доказательства второго достаточно показать, что в оба случая представляют собой последовательное откладывание следующего вектора от конца предыдущего, свойства, связанные с умножением на число, требуют рассмотрения всех случаев выбора знаков у чисел и во всех случаях очевидно выполняются. □

1.3 Линейно зависимые и независимые системы векторов

Определение 1.12. Система векторов $(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_n})$ называется *линейно независимой*, если:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{v_i} = \overline{0} \Leftrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$$

Определение 1.13. Линейная комбинация $\alpha_1\overline{v_1} + \cdots + \alpha_n\overline{v_n}$ называется *нетривиальной*, если $\exists i : \alpha_i \neq 0$.

Определение 1.14. Система векторов $(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_n})$ называется *линейно зависимой*, если существует ее нетривиальная линейная комбинация, равная $\overline{0}$.

Утверждение 1.8. *Если система линейно независима, то любая ее подсистема тоже линейно независима. Если система линейно зависима, то любая ее надсистема тоже линейно зависима.*

Доказательство. Без ограничения общности предположим, что у линейно независимой системы $(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_n})$ есть линейно зависимая подсистема $(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_k})$. Тогда существует нетривиальная линейная комбинация $\alpha_1\overline{v_1} + \cdots + \alpha_k\overline{v_k}$. Но если эту линейную комбинацию дополнить линейной комбинацией $0\overline{v_{k+1}} + \cdots + 0\overline{v_n}$, то получится нетривиальная линейная комбинация векторов $(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_n})$, равная $\overline{0}$ — противоречие.

Если же система $(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_n})$ линейно зависима, то ее нетривиальную линейную комбинацию, равную $\overline{0}$, можно аналогично дополнить до нетривиальной линейной комбинации любой ее надсистемы. $\square$

Определение 1.15. Пусть $\overline{u}$ — вектор, $(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_n})$ — система векторов. $\overline{u}$ *выражается* через $(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_n})$, если $\overline{u}$ является линейной комбинацией этой системы.

Утверждение 1.9. *Система $(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_n})$ линейно зависима $\Leftrightarrow$ один из ее векторов выражается через остальные.*

Доказательство. Доказательство $\Leftarrow$: пусть без ограничения общности $\overline{v_n}$ выражается через остальные векторы системы. Тогда:

$$\overline{v_n} = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \overline{v_i}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \overline{v_i} + (-1)\overline{v_n} = \overline{0}$$

Таким образом, $(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_n})$ линейно зависима.

Доказательство $\Rightarrow$: пусть без ограничения общности в тривиальной линейной комбинации, равной $\overline{0}$, $\alpha_n \neq 0$. Тогда:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \overline{v_i} + \alpha_n \overline{v_n} = \overline{0}$$

$$\overline{v_n} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(-\frac{\alpha_i}{\alpha_n}\right) \overline{v_i}$$

Таким образом, $\overline{v_n}$ выражается через остальные векторы системы. $\square$

Утверждение 1.10. *Пусть система $(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_n})$ линейно независима, а $(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_{n+1}})$ — линейно зависима. Тогда $\overline{v_{n+1}}$ выражается через $(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_n})$.*

Доказательство. Так как система $(\overline{v_1}, \dots, \overline{v_{n+1}})$ линейно зависима, то существует нетривиальная линейная комбинация, равная $\overline{0}$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \overline{v_i} = \overline{0}$$

Если $\alpha_{n+1} = 0$, то у $(\overline{v_1}, \dots, \overline{v_n})$ также существует равная $\overline{0}$ нетривиальная линейная комбинация, но это противоречит условию линейной независимости, поэтому $\alpha_{n+1} \neq 0$. Тогда:

$$\overline{v_{n+1}} = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\alpha_i}{\alpha_{n+1}} \right) \overline{v_i}$$

□

1.4 Связь между линейной зависимостью, коллинеарностью и компланарностью векторов

1. *Система $(\overline{a})$ линейно независима $\Leftrightarrow$ $\overline{a} \neq \overline{0}$.*

2. *Система $(\overline{a_1}, \overline{a_2})$ линейно независима $\Leftrightarrow$ она неколлинеарна.*

3. *Система $(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3})$ линейно независима $\Leftrightarrow$ она некомпланарна.*

4. *Система $(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4})$ всегда линейно зависима.*

Доказательство. Доказательство $\Rightarrow$:

1. Пусть $\overline{a} = \overline{0}$. Тогда $1\overline{a} = \overline{0}$ — система $(\overline{a})$ линейно зависима.

2. Пусть система $(\overline{a_1}, \overline{a_2})$ коллинеарна. Если $\overline{a_1} = \overline{0}$, то вся система линейно зависима по п. 1, иначе — $\overline{a_2}$ выражается через $\overline{a_1}$, тогда система тоже линейно зависима.

3. Пусть система $(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3})$ компланарна. Если система $(\overline{a_1}, \overline{a_2})$ коллинеарна, то вся система линейно зависима по п. 2, иначе — $\overline{a_3}$ выражается через $\overline{a_1}, \overline{a_2}$, тогда система тоже линейно зависима.

4. Если система $(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3})$ компланарна, то вся система линейно зависима по п. 3, иначе — $\overline{a_4}$ выражается через $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$, тогда система тоже линейно зависима.

Доказательство $\Leftarrow$:

1. Если $\overline{a} \neq \overline{0}$, то при умножении его на любое число $\alpha \neq 0$ получится ненулевой вектор, т е. система $(\overline{a})$ линейно независима.

2. Пусть система $(\overline{a_1}, \overline{a_2})$ линейно зависима. Тогда без ограничения общности $\overline{a_2}$ выражается через $\overline{a_1}$, т. е. эти векторы коллинеарны.

3. Пусть система $(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3})$ линейно зависима. Тогда без ограничения общности $\overline{a_3}$ выражается через $\overline{a_1}, \overline{a_2}$, т. е. эти векторы компланарны.

1.5 Базис, координаты вектора в базисе

Определение 1.18. *Базисом* в V_i называется линейно независимая система векторов, через которую выражаются все векторы V_i.

Утверждение 1.12. *Пусть $e = (\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n})$ — базис в V_i, $\overline{v} \in V_i$. Тогда существует единственный столбец коэффициентов α такой, что $\overline{v} = e\alpha$.*

Доказательство. По определению базиса α существует. Если также существует $\alpha' \neq \alpha$, удовлетворяющий условию, то:

$$\overline{v} = e\alpha = e\alpha'$$
$$e(\alpha - \alpha') = \overline{0}$$

Т. к. e — линейно независимая система, то линейная комбинация $e(\alpha - \alpha')$ должна быть тривиальной, т. е. $\forall i : \alpha_i = \alpha'_i$. □

Определение 1.19. Пусть e — базис в V_i, $\overline{v} \in V_i$, $\overline{v} = e\alpha$. Столбец α называется *координатным столбцом* $\overline{v}$ в базисе e. Обозначение — $\overline{v} \underset{e}{\leftrightarrow} \alpha$.

1.6 Описание базисов на плоскости и в пространстве

1. *Базиса в V_0 (нулевом пространстве) не существует.*

2. *Базис в V_1 — это система из одного ненулевого вектора.*

3. *Базис в V_2 — это система из двух неколлинеарных векторов.*

4. *Базис в V_3 — это система из трех некомпланарных векторов.*

Доказательство.

1. Единственный вектор в V_0 — это $\overline{0}$, и он образует линейно зависимую систему.

2. Система из $\geqslant 2$ векторов в V_1 коллинеарна и потому линейно зависима, система из 0 векторов выражает не все векторы V_1. При этом вектор $\overline{a} \neq \overline{0}$ образует линейно независимую систему, и через него выражаются все векторы V_1. Если же $\overline{a} = \overline{0}$, то он образует линейно зависимую систему.

3. Система из $\geqslant 3$ векторов в V_2 компланарна и потому линейно зависима, система из $\leqslant 1$ векторов коллинеарна и потому выражает не все векторы V_2. При этом неколлинеарная система $(\overline{a_1}, \overline{a_2})$ линейно независима, и через нее выражаются все векторы V_2. Если же $(\overline{a_1}, \overline{a_2})$ коллинеарна, то она линейно зависима.

4. Система из $\geqslant 4$ векторов в V_3 линейно зависима, система из $\leqslant 2$ векторов компланарна и потому выражает не все векторы V_3. При этом некомпланарная система $(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3})$ линейно независима, и через нее выражаются все векторы V_3. Если же $(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3})$ компланарна, то она линейно зависима.

1.7 Действия над векторами в координатах

Утверждение 1.13. *Пусть $\overline{u} \underset{e}{\leftrightarrow} \alpha$, $\overline{v} \underset{e}{\leftrightarrow} \beta$. Тогда справедливо свойство линейности сопоставления координат: $\overline{u} + \overline{v} \underset{e}{\leftrightarrow} \alpha + \beta$, $\lambda\overline{u} \underset{e}{\leftrightarrow} \lambda\alpha$.*

Доказательство.

1. $\overline{u} + \overline{v} = e\alpha + e\beta = e(\alpha + \beta)$.

2. $\lambda\overline{u} = \lambda e\alpha = e(\lambda\alpha)$.

1.8 Изменение координат при замене базиса

Определение 1.20. Пусть e, e' — базисы в V_i. Тогда каждый вектор из e' раскладывается по e:

$$e' = e(\alpha'_1 \dots \alpha'_i) = eS$$

Матрица $S \in M_{i\times i}$ называется *матрицей перехода* от базиса e к базису e'.

Теорема 1.3. *Пусть e, e' — базисы в V_i, $e' = eS$. Пусть $\overline{v} \in V_i$, $\overline{v} \underset{e}{\leftrightarrow} \alpha$, $\overline{v} \underset{e'}{\leftrightarrow} \alpha'$. Тогда:*

$$\alpha = S\alpha'$$

Доказательство. $\overline{v} = e\alpha = e'\alpha' = eS\alpha'$. Вектор $\overline{v}$ имеет в базисе e координатные столбцы α и $S\alpha'$, но разложение вектора по базису единственно, поэтому $\alpha = S\alpha'$. $\square$

Утверждение 1.14. *Пусть e, e' и e'' — базисы в V_i, матрицы перехода S_1, S_2 и S_3 таковы, что $e' = eS_1$, $e'' = e'S_2$, $e'' = eS_3$. Тогда:*

$$S_3 = S_1S_2$$

Доказательство. $e'' = e'S_2 = eS_1S_2$, при этом $e'' = eS_3$, но каждый из координатных столбцов векторов $\overline{e''_1}, \dots, \overline{e''_i}$ в базисе e единственен, поэтому $S_1S_2 = S_3$. $\square$

2. Системы координат

2.1 Общая декартова система координат, прямоугольная (ортонормированная) система координат

Определение 1.21. Базис в V_i называется *ортогональным*, если его векторы попарно ортогональны.

Определение 1.22. Ортогональный базис в V_i называется *ортонормированным*, если его все векторы имеют единичную длину.

Определение 1.23. *Декартовой системой координат* в P_i называется набор (O, e), где $O \in P_i$ — начало системы координат, e — базис в V_i. $A \in P_i$ имеет координатный столбец α в данной системе координат, если $\overline{OA} \underset{e}{\leftrightarrow} \alpha$. Обозначение — $A \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \alpha$.

Определение 1.24. Декартова система координат называется *прямоугольной*, если базис e ортонормированный.

2.2 Связь между координатами направленного отрезка и координатами его конца и начала, задание отрезка и прямой в декартовой системе координат

Утверждение 1.15. *Пусть* $A \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \alpha$, $B \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \beta$. *Тогда:*

$$\overline{AB} \underset{e}{\leftrightarrow} \beta - \alpha$$

Доказательство.

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = e\beta - e\alpha = e(\beta - \alpha)$$

Утверждение 1.16. *Пусть* $A \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \alpha$, $B \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \beta$. $C \in AB$ *— такая точка на отрезке* AB, *что* $AC : BC = \lambda : (1-\lambda)$. *Тогда:*

$$C \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} (1-\lambda)\alpha + \lambda\beta$$

Доказательство.

$$\overline{AC} = \lambda\overline{AB}$$

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OA} + \lambda\overline{AB} = e\alpha + \lambda e(\beta - \alpha)$$

$$\overline{OC} = e((1-\lambda)\alpha + \lambda\beta)$$

2.3 Замена декартовой системы координат, формулы перехода

Определение 1.20. Пусть e, e' — базисы в V_i. Тогда каждый вектор из e' раскладывается по e:

$$e' = e(\alpha'_1 \dots \alpha'_i) = eS$$

Матрица $S \in M_{i\times i}$ называется *матрицей перехода* от базиса e к базису e'.

Теорема 1.3. *Пусть* e, e' *— базисы в* V_i, $e' = eS$. *Пусть* $\overline{v} \in V_i$, $\overline{v} \underset{e}{\leftrightarrow} \alpha$, $\overline{v} \underset{e'}{\leftrightarrow} \alpha'$. *Тогда:*

$$\alpha = S\alpha'$$

Доказательство. $\overline{v} = e\alpha = e'\alpha' = eS\alpha'$. Вектор $\overline{v}$ имеет в базисе e координатные столбцы α и $S\alpha'$, но разложение вектора по базису единственно, поэтому $\alpha = S\alpha'$. □

Утверждение 1.14. *Пусть* e, e' *и* e'' *— базисы в* V_i, *матрицы перехода* S_1, S_2 *и* S_3 *таковы, что* $e' = eS_1$, $e'' = e'S_2$, $e'' = eS_3$. *Тогда:*

$$S_3 = S_1S_2$$

Доказательство. $e'' = e'S_2 = eS_1S_2$, при этом $e'' = eS_3$, но каждый из координатных столбцов векторов $\overline{e''_1}, \dots, \overline{e''_i}$ в базисе e единственен, поэтому $S_1S_2 = S_3$. □

3. Скалярное произведение

3.1 Скалярное произведение, его свойства,

выражение в ортонормированном и произвольном базисе

Определение 2.1. Пусть $\overline{a}, \overline{b} \in V_i$. Их *скалярным произведением* называется величина:

$$(\overline{a}, \overline{b}) = \overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}| \cos\angle(\overline{a}, \overline{b})$$

Если $\overline{a} = \overline{0}$ или $\overline{b} = \overline{0}$, то $(\overline{a}, \overline{b}) := 0$.

Утверждение 2.1.

1. $(\overline{a}, \overline{a}) = |\overline{a}|^2$

2. $(\overline{a}, \overline{b}) = 0 \Leftrightarrow \overline{a} \perp \overline{b}$

Доказательство.

1. $(\overline{a}, \overline{a}) = |\overline{a}|^2 \cos\angle(\overline{a}, \overline{a}) = |\overline{a}|^2$.

2. Можно считать, что $\overline{0}$ перпендикулярен любому вектору. Если же $\overline{a} \neq 0, \overline{b} \neq 0$:

$$(\overline{a}, \overline{b}) = 0$$

$$|\overline{a}||\overline{b}| \cos\angle(\overline{a}, \overline{b}) = 0$$

$$\cos\angle(\overline{a}, \overline{b}) = 0$$

$$\angle(\overline{a}, \overline{b}) = \frac{\pi}{2}$$

1. $\overline{a} \neq \overline{0} \Leftrightarrow (\overline{a}, \overline{a}) > 0$

2. $(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{a})$ *(симметричность)*

3. $(\overline{a_1} + \overline{a_2}, \overline{b}) = (\overline{a_1}, \overline{b}) + (\overline{a_2}, \overline{b})$

4. $(\lambda\overline{a}, \overline{b}) = \lambda(\overline{a}, \overline{b})$ *(это и предыдущее свойства вместе отражают линейность скалярного произведения относительно первого аргумента)*

Доказательство.

1. $\overline{a} \neq \overline{0} \Leftrightarrow |\overline{a}| > 0 \Leftrightarrow (\overline{a}, \overline{a}) = |\overline{a}|^2 > 0$

2. $(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}||\overline{b}| \cos\angle(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{a})$

3. Для случаев $\overline{a_1} \parallel \overline{a_2} \parallel \overline{b}$ и $\overline{b} = 0$ утверждение, очевидно, верно. Иначе:
$$(\overline{a_1} + \overline{a_2}, \overline{b}) = (\operatorname{pr}_{\overline{b}}(\overline{a_1} + \overline{a_2}), \overline{b}) = (\operatorname{pr}_{\overline{b}} \overline{a_1} + \operatorname{pr}_{\overline{b}} \overline{a_2}, \overline{b})$$
Т. к. $\operatorname{pr}_{\overline{b}} \overline{a_1} \parallel \operatorname{pr}_{\overline{b}} \overline{a_2} \parallel \overline{b}$, то:
$$(\operatorname{pr}_{\overline{b}} \overline{a_1} + \operatorname{pr}_{\overline{b}} \overline{a_2}, \overline{b}) = (\operatorname{pr}_{\overline{b}} \overline{a_1}, \overline{b}) + (\operatorname{pr}_{\overline{b}} \overline{a_2}, \overline{b}) = (\overline{a_1}, \overline{b}) + (\overline{a_2}, \overline{b})$$

4. Для случаев $\overline{a} \parallel \overline{b}$ и $\overline{b} = 0$ утверждение, очевидно, верно. Иначе:
$$(\lambda\overline{a}, \overline{b}) = (\operatorname{pr}_{\overline{b}}(\lambda\overline{a}), \overline{b}) = (\lambda \operatorname{pr}_{\overline{b}} \overline{a}, \overline{b}) = \lambda(\operatorname{pr}_{\overline{b}} \overline{a}, \overline{b}) = \lambda(\overline{a}, \overline{b})$$

Утверждение 2.5. *Пусть e — ортонормированный базис в V_n, $\overline{a}, \overline{b} \in \in V_n$, $\overline{a} \underset{e}{\leftrightarrow} \alpha$, $\overline{b} \underset{e}{\leftrightarrow} \beta$. Тогда:*
$$(\overline{a}, \overline{b}) = \alpha^T \beta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$$

Доказательство.
$$(\overline{a}, \overline{b}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{e_i}, \sum_{j=1}^{n} \beta_j \overline{e_j} \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j (\overline{e_i}, \overline{e_j})$$
Т. к. $(\overline{e_i}, \overline{e_j}) = 0$, если $i \neq j$ и $(\overline{e_i}, \overline{e_j}) = 1$, если $i = j$, то:
$$(\overline{a}, \overline{b}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j (\overline{e_i}, \overline{e_j}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$$

Определение 2.3. Пусть $e = (\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n})$ — базис в V_n. *Матрицей Грама* называется следующая матрица:

$$\Gamma = ((\overline{e_i}, \overline{e_j})) = \begin{pmatrix} (\overline{e_1}, \overline{e_1}) & (\overline{e_1}, \overline{e_2}) & \dots & (\overline{e_1}, \overline{e_n}) \\ (\overline{e_2}, \overline{e_1}) & (\overline{e_2}, \overline{e_2}) & \dots & (\overline{e_2}, \overline{e_n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\overline{e_n}, \overline{e_1}) & (\overline{e_n}, \overline{e_2}) & \dots & (\overline{e_n}, \overline{e_n}) \end{pmatrix}$$

Утверждение 2.6. *Пусть e — базис в V_n, $\overline{a}, \overline{b} \in V_n$, $\overline{a} \underset{e}{\leftrightarrow} \alpha$, $\overline{b} \underset{e}{\leftrightarrow} \beta$. Тогда:*

$$(\overline{a}, \overline{b}) = \alpha^T \Gamma \beta$$

Доказательство.

$$(\overline{a}, \overline{b}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{e_i}, \sum_{j=1}^{n} \beta_j \overline{e_j} \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j (\overline{e_i}, \overline{e_j})$$

С другой стороны:

$$\alpha^T (\Gamma \beta) = \alpha^T \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j (\overline{e_1}, \overline{e_j}) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j (\overline{e_2}, \overline{e_j}) \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j (\overline{e_n}, \overline{e_j}) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j (\overline{e_i}, \overline{e_j}) = (\overline{a}, \overline{b})$$

3.2 Формулы для определения расстояния между точками и угла между векторами

Утверждение 2.7. *Пусть e — ортонормированный базис в V_n, $\overline{a}, \overline{b} \in \in V_n$, $\overline{a} \underset{e}{\leftrightarrow} \alpha$, $\overline{b} \underset{e}{\leftrightarrow} \beta$. Тогда:*

1. $|\overline{a}| = \sqrt{\alpha^T \alpha}$

2. *Если* $a \neq 0, b \neq 0$, *то* $\cos \angle(\overline{a}, \overline{b}) = \frac{\alpha^T \beta}{|\overline{a}||\overline{b}|}$

Доказательство.

1. $|\overline{a}|^2 = (\overline{a}, \overline{a}) \Rightarrow |\overline{a}| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})} = \sqrt{\alpha^T \alpha}$

2. $(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}||\overline{b}| \cos \angle(\overline{a}, \overline{b}) \Rightarrow \cos \angle(\overline{a}, \overline{b}) = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{a}||\overline{b}|} = \frac{\alpha^T \beta}{|\overline{a}||\overline{b}|}$

Утверждение 2.8. *Пусть (O, e) — прямоугольная декартова система координат в P_n, $A, B \in P_n$, $A \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \alpha$, $B \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \beta$. Тогда:*

$$AB = \sqrt{(\beta - \alpha)^T (\beta - \alpha)}$$

Доказательство.

$$\overline{AB} \underset{e}{\leftrightarrow} \beta - \alpha$$

$$AB = |\overline{AB}| = \sqrt{(\beta - \alpha)^T (\beta - \alpha)}$$

4. Ориентация на плоскости и в пространстве

4.1 Ориентация на плоскости и в пространстве

Определение 2.5. Рассмотрим плоскость P_2, предполагая, что $P_2 \subset \subset P_3$, и выделим одно из полупространств P_3 относительно этой плоскости. Базис $(\overline{a}, \overline{b})$ в V_2 будем называть *положительно ориентированным*, если поворот на кратчайший угол, который переводит $\overline{a}$ в $\overline{a'} \parallel \overline{b}$, происходит против часовой стрелки (при взгляде из выделенного полупространства). В противном случае будем базис называть *отрицательно ориентированным.*

Замечание. Базисы $(\overline{a}, \overline{b})$ и $(\overline{b}, \overline{a})$ всегда ориентированы по-разному.

Определение 2.6. Рассмотрим базис $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ в V_3. Рассмотрим плоскость, содержащую $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Если при взгляде из полупространства, содержащего $\overline{c}$, базис $(\overline{a}, \overline{b})$ ориентирован в V_2 положительно, то будем называть тройку $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ *правой*, в противном случае — *левой*.

Утверждение 2.10.

1. *Базисы* $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ *и* $(\overline{b}, \overline{a}, \overline{c})$ *всегда ориентированы по-разному.*

2. *Базисы* $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ *и* $(\overline{a}, \overline{c}, \overline{b})$ *всегда ориентированы по-разному.*

Доказательство.

1. Т. к. базисы $(\overline{a}, \overline{b})$ и $(\overline{b}, \overline{a})$ ориентированы по-разному, то и $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ и $(\overline{b}, \overline{a}, \overline{c})$ ориентированы по-разному.

2. Пусть $\overline{OA} = \overline{a}, \overline{OB} = \overline{b}, \overline{OC} = \overline{c}$. Будем поворачивать $\overline{OC}$ в плоскости (BOC), пока он не перейдет в такой направленный отрезок $\overline{OC'} = \overline{c'}$, что C и C' лежат по разные стороны от OB. Ориентация базиса $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c'})$ противоположна ориентации $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ и совпадает с ориентацией $(\overline{a}, \overline{c}, \overline{b})$.

4.2 Ориентированные площадь и объем (смешанное произведение)

Определение 2.7. *Ориентированной площадью* $S(\overline{a}, \overline{b})$ называется площадь параллелограмма, натянутого на эти вектора, взятая со знаком, соответствующим ориентации $(\overline{a}, \overline{b})$ (считаем, что ориентация в плоскости, содержащей $\overline{a}$ и $\overline{b}$, задана).

Определение 2.8. *Ориентированным объемом* $V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ называется объем параллелепипеда, натянутого на эти вектора, взятая со знаком, соответствующим ориентации $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$.

Определение 2.9. *Смешанным произведением* $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ называется ориентированный объем $V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$.

Замечание.

1. $S(\overline{a}, \overline{b}) = 0 \Leftrightarrow \overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны.

2. $V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = 0 \Leftrightarrow \overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны.

4.3 Свойства ориентированных площади и объема

Теорема 2.2. *Ориентированный объем обладает следующими свойствами:*

1. $V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = -V(\overline{a}, \overline{c}, \overline{b})$, *и аналогичное утверждение справедливо для любой пары перестановок из различных классов, отмеченных выше (кососимметричность ориентированного объема)*

2. $V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c_1} + \overline{c_2}) = V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c_1}) + V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c_2})$

3. $V(\overline{a}, \overline{b}, \lambda\overline{c}) = \lambda V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ *(это и предыдущее свойства вместе отражают линейность ориентированного объема относительно третьего аргумента)*

Доказательство.

1. Если $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны, то утверждение очевидно. Иначе — оно следует из свойств ориентации: объем параллелепипеда при перестановке векторов базиса не меняется, а знак соответствует его ориентации.

2. Если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, то утверждение очевидно. Иначе: пусть $\overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{OB} = \overline{b}$, $\overline{OC} = \overline{c}$. Введем вектор $\overline{d}$ (и $\overline{OD} = \overline{d}$) такой, что $|\overline{d}| = 1$, $\overline{d} \perp (AOB)$ и $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{d})$ — правая тройка. Тогда $\forall \overline{c}$: $V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = |S(\overline{a}, \overline{b})|(\overline{c}, \overline{d})$, т. к. $(\overline{c}, \overline{d}) = (\operatorname{pr}_{\overline{d}} \overline{c}, \overline{d}) = \pm|\operatorname{pr}_{\overline{d}} \overline{c}| = \pm h$ — высота параллелепипеда, знак которой всегда соответствует ориентации $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$. Свойства 2 и 3 следуют из их справедливости для скалярного произведения.

$\square$

Замечание. Линейность ориентированного объема относительно первого и второго аргументов также верна в силу кососимметричности.

Замечание. Аналогичным образом доказываются свойства ориентированной площади:

1. $S(\overline{a}, \overline{b}) = -S(\overline{b}, \overline{a})$ (кососимметричность ориентированной площади)

2. $S(\overline{a}, \overline{b_1} + \overline{b_2}) = S(\overline{a}, \overline{b_1}) + S(\overline{a}, \overline{b_2})$

3. $S(\overline{a}, \lambda\overline{b}) = \lambda S(\overline{a}, \overline{b})$ (это и предыдущее свойства вместе отражают линейность ориентированной площади относительно второго аргумента, и, с учетом комосимметричности, первого аргумента)

4.4 Выражение ориентированных площадь и объема в произвольном базисе

Теорема 2.3. *Пусть* $e = (\overline{e_1}, \overline{e_2})$ *— базис в* V_2, $\overline{a}, \overline{b} \in V_2$, $\overline{a} \underset{e}{\leftrightarrow} \alpha$, $\overline{b} \underset{e}{\leftrightarrow} \beta$. *Тогда:*

$$S(\overline{a}, \overline{b}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} (\overline{e_1}, \overline{e_2})$$

Доказательство.

$$S(\overline{a}, \overline{b}) = S\left(\sum_{i=1}^{2} \alpha_i \overline{e_i}, \sum_{j=1}^{2} \beta_j \overline{e_j}\right) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \alpha_i \beta_j S(\overline{e_i}, \overline{e_j})$$

Т. к. $S(\overline{e_i}, \overline{e_j}) = 0$ при $i = j$, то:

$$S(\overline{a}, \overline{b}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} S(\overline{e_1}, \overline{e_2})$$

Теорема 2.4. *Пусть* $e = (\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3})$ *— базис в* V_3, $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V_3$, $\overline{a} \underset{e}{\leftrightarrow} \alpha$, $\overline{b} \underset{e}{\leftrightarrow} \beta$, $\overline{c} \underset{e}{\leftrightarrow} \gamma$. *Тогда:*

$$V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} V(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3})$$

Доказательство.

$$V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = V\left(\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \overline{e_i}, \sum_{j=1}^{3} \beta_j \overline{e_j}, \sum_{k=1}^{3} \gamma_k \overline{e_k}\right) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \alpha_i \beta_j \gamma_k V(\overline{e_i}, \overline{e_j}, \overline{e_k})$$

Т. к. $V(\overline{e_i},\overline{e_j},\overline{e_k}) = 0$ при $i = j$, $i = k$ или $j = k$, то:

$$V(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} V(\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3})$$

5. Векторное произведение

5.1 Векторное произведение, его свойства, выражение в правом ортонормированном базисе

Определение 2.12. Пусть $\overline{a},\overline{b} \in V_3$. Вектор $\overline{c}$ называется *векторным произведением* $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если:

1. $\overline{c} \perp \overline{a}$, $\overline{c} \perp \overline{b}$
2. $|\overline{c}| = |S(\overline{a},\overline{b})|$
3. $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$ — правая тройка

Вектор $\overline{c}$ определяется однозначно. Обозначение — $\overline{c} = [\overline{a},\overline{b}] = \overline{a} \times \overline{b}$.

Теорема 2.6. $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = ([\overline{a},\overline{b}],\overline{c}) = (\overline{a},[\overline{b},\overline{c}])$.

Доказательство. Если $\overline{a} \parallel \overline{b}$, то $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = ([\overline{a},\overline{b}],\overline{c}) = 0$. Если же $\overline{a} \nparallel \overline{b}$, то выберем такой вектор $\overline{d}$, что $[\overline{a},\overline{b}] = |S(\overline{a},\overline{b})|\overline{d}$, и уже доказывалось, что $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = |S(\overline{a},\overline{b})|(\overline{c},\overline{d})$, тогда $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = (|S(\overline{a},\overline{b})|\overline{d},\overline{c}) = ([\overline{a},\overline{b}],\overline{c})$. Наконец, $(\overline{a},[\overline{b},\overline{c}]) = ([\overline{b},\overline{c}],\overline{a}) = (\overline{b},\overline{c},\overline{a}) = (\overline{a},\overline{b},\overline{c})$. □

Утверждение 2.13. *Если $\overline{x},\overline{y} \in V_3$ — векторы такие, что $\forall \overline{c} \in V_3 : (\overline{x},\overline{c}) = (\overline{y},\overline{c})$, то $\overline{x} = \overline{y}$.*

Доказательство. $(\overline{x},\overline{c}) = (\overline{y},\overline{c}) \Leftrightarrow (\overline{x}-\overline{y},\overline{c}) = 0$. Равенство, в частности, должно выполняться для $\overline{c} = \overline{x}-\overline{y}$: $(\overline{x}-\overline{y},\overline{x}-\overline{y}) = 0 \Leftrightarrow \overline{x}-\overline{y} = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y}$. □

Замечание. Данное утверждение гарантирует, что равенство для всех $\overline{c} \in V_3$ значений $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$ и $([\overline{a},\overline{b}],\overline{c})$ однозначно задает $[\overline{a},\overline{b}]$.

Теорема 2.7. *Векторное произведение обладает следующими свойствами:*

1. $[\overline{a}, \overline{b}] = -[\overline{b}, \overline{a}]$ *(кососимметричность векторного произведения)*

2. $[\overline{a_1} + \overline{a_2}, \overline{b}] = [\overline{a_1}, \overline{b}] + [\overline{a_2}, \overline{b}]$

3. $[\lambda\overline{a}, \overline{b}] = \lambda[\overline{a}, \overline{b}]$ *(это и предыдущее свойства вместе отражают линейность векторного произведения относительно первого аргумента)*

Доказательство.

1. Данное равенство верно, поскольку пары $(\overline{a}, \overline{b})$ и $(\overline{b}, \overline{a})$ отличаются только ориентацией.

2. Для доказательства этого равенства достаточно проверить, что $\forall\overline{c} \in V_3 : ([\overline{a_1} + \overline{a_2}, \overline{b}], \overline{c}) = ([\overline{a_1}, \overline{b}], \overline{c}) + ([\overline{a_2}, \overline{b}], \overline{c})$:

$$([\overline{a_1} + \overline{a_2}, \overline{b}], \overline{c}) = (\overline{a_1} + \overline{a_2}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a_1}, \overline{b}, \overline{c}) + (\overline{a_2}, \overline{b}, \overline{c}) = \\ = ([\overline{a_1}, \overline{b}], \overline{c}) + ([\overline{a_2}, \overline{b}], \overline{c})$$

3. Для доказательства этого равенства достаточно проверить, что $\forall \overline{c} \in V_3 : ([\lambda\overline{a}, \overline{b}], \overline{c}) = (\lambda[\overline{a}, \overline{b}], \overline{c})$:
$$([\lambda\overline{a}, \overline{b}], \overline{c}) = (\lambda\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \lambda(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \lambda([\overline{a}, \overline{b}], \overline{c}) = (\lambda[\overline{a}, \overline{b}], \overline{c})$$

□

Замечание. Линейность векторного произведения относительно второго аргумента также верна в силу кососимметричности.

Теорема 2.8. *Пусть $e = (\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3})$ — произвольный базис в V_3, $\overline{a}, \overline{b} \in V_3$, $\overline{a} \underset{e}{\leftrightarrow} \alpha$, $\overline{b} \underset{e}{\leftrightarrow} \beta$. Тогда:*

$$[\overline{a}, \overline{b}] = \begin{vmatrix} [\overline{e_2}, \overline{e_3}] & [\overline{e_3}, \overline{e_1}] & [\overline{e_1}, \overline{e_2}] \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} [\overline{e_2}, \overline{e_3}] + \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \beta_1 \end{vmatrix} [\overline{e_3}, \overline{e_1}] + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} [\overline{e_1}, \overline{e_2}]$$

Доказательство.
$$[\overline{a}, \overline{b}] = \left[\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \overline{e_i}, \sum_{j=1}^{3} \beta_j \overline{e_j}\right] = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \alpha_i \beta_j [\overline{e_i}, \overline{e_j}]$$

Т. к. $[\overline{e_i}, \overline{e_i}] = 0$, то:
$$[\overline{a}, \overline{b}] = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} [\overline{e_2}, \overline{e_3}] + \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \beta_1 \end{vmatrix} [\overline{e_3}, \overline{e_1}] + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} [\overline{e_1}, \overline{e_2}]$$

Замечание. Т. к. в правом ортонормированном базисе $[\overline{e_1}, \overline{e_2}] = \overline{e_3}$, $[\overline{e_2}, \overline{e_3}] = \overline{e_1}$, $[\overline{e_3}, \overline{e_1}] = \overline{e_2}$, то:
$$[\overline{a}, \overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} & \overline{e_3} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

5.2 Критерии коллинеарности и компланарность векторов

Утверждение 2.12. $\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow [\overline{a}, \overline{b}] = \overline{0}$.

Доказательство.
$$\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow S(\overline{a}, \overline{b}) = 0 \Leftrightarrow |[\overline{a}, \overline{b}]| = 0 \Leftrightarrow [\overline{a}, \overline{b}] = \overline{0}$$

1. $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны $\Leftrightarrow |\alpha\beta| = 0$ (в произвольном базисе).

2. $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны $\Leftrightarrow |\alpha\beta\gamma| = 0$ (в произвольном базисе).

5.3 Двойное векторное произведение

Теорема 2.9. $[\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]] = \overline{b}(\overline{a}, \overline{c}) - \overline{c}(\overline{a}, \overline{b})$.

Доказательство. Выберем такой правый ортонормированный базис e, что $\overline{e_1} \parallel \overline{a}$, векторы $\overline{b}$, $\overline{e_1}$ и $\overline{e_2}$ компланарны (следовательно, вектор $\overline{e_3} = [\overline{e_1}, \overline{e_2}]$ определен однозначно). Тогда:

$$\overline{a} \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{b} \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{c} \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$$

Определим значение $[\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]]$:

$$[\overline{b}, \overline{c}] = \begin{vmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} & \overline{e_3} \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = (\beta_2\gamma_3)\overline{e_1} + (-\beta_1\gamma_3)\overline{e_2} + (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)\overline{e_3}$$

$$[\overline{b}, \overline{c}] \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} \beta_2\gamma_3 \\ -\beta_1\gamma_3 \\ \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix}$$

$$[\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]] = \begin{vmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} & \overline{e_3} \\ \alpha & 0 & 0 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{vmatrix} = 0\overline{e_1} + (-\alpha\delta_3)\overline{e_2} + (\alpha\delta_2)\overline{e_3}$$

$$[\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]] \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha\delta_3 \\ \alpha\delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha(\beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2) \\ -\alpha\beta_1\gamma_3 \end{pmatrix}$$

Теперь определим значение $\overline{b}(\overline{a},\overline{c}) - \overline{c}(\overline{a},\overline{b})$:

$$\overline{b}(\overline{a},\overline{c}) \underset{e}{\leftrightarrow} (\alpha\gamma_1)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\beta_1\gamma_1\\ \alpha\beta_2\gamma_1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\overline{c}(\overline{a},\overline{b}) \underset{e}{\leftrightarrow} (\alpha\beta_1)\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\beta_1\gamma_1\\ \alpha\beta_1\gamma_2\\ \alpha\beta_1\gamma_3\end{pmatrix}$$

$$\overline{b}(\overline{a},\overline{c}) - \overline{c}(\overline{a},\overline{b}) \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix}0\\ \alpha(\beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2)\\ -\alpha\beta_1\gamma_3\end{pmatrix}$$

Таким образом, $[\overline{a},[\overline{b},\overline{c}]] = \overline{b}(\overline{a},\overline{c}) - \overline{c}(\overline{a},\overline{b})$. □

6. Уравнения

6.1 Понятие об уравнении множества

рассмотрим соотношение вида: F(x,y)=0 (1)

уравнение (1) будем называть ***уравнением множества точек*** (x;y), если этому уравнению удовлетворяют координаты x и y любой точки множества и не удовлетворяют координатам никакой точки, не Принадлежащей этому множеству.

6.2 Алгебраические линии и поверхности; пересечение и оюъединение алгебраических линий (поверхностей)

Определение 4.6. *Алгебраической кривой* называется множество всех точек в P_2, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению $P(x,y) = 0$, где P — фиксированный многочлен. *Порядком кривой* называется наименьшая степень многочлена, задающего данную кривую.

Аналогичным образом можно определить *алгебраические поверхности* и их порядок в P_3.

Утверждение 4.4. *Объединение и пересечение алгебраических кривых также являются алгебраическими кривыми.*

Доказательство. Пусть две кривые задаются многочленами $P_1(x, y)$ и $P_2(x, y)$ соответственно. Тогда их объединение и пересечение задаются следующим образом:

$$\left[\begin{aligned} &P_1(x, y) = 0 \\ &P_2(x, y) = 0 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow P_1(x, y)P_2(x, y) = 0$$

$$\begin{cases} P_1(x, y) = 0 \\ P_2(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (P_1(x, y))^2 + (P_2(x, y))^2 = 0$$

Видно, что оба полученных выражения также являются многочленами. $\square$

6.3 Сохранение порядка при переходе к другой системе координат

Замечание. Порядок алгебраической кривой не зависит от выбора системы координат.

7. Прямая на плоскости

7.1 Прямая на плоскости, различные способы задания, их эквивалентность

Рассмотрим различные способы задания прямой l в плоскости. Пусть $M(\overline{r_0})$ — точка на прямой l, $\overline{a}$ — направляющий вектор прямой ($\overline{a} \parallel l$, $\overline{a} \neq 0$). Тогда $X(\overline{r}) \in l \Leftrightarrow \overline{MX}$ коллинеарен $\overline{a}$. Введем базис e и декартову систему координат (O, e):

$$M \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \; X \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \; \overline{a} \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Определение 3.1. *Векторно-параметрическим уравнением прямой* называется следующее уравнение:

$$\overline{r} = \overline{r_0} + t\overline{a} \; (t \in \mathbb{R})$$

Определение 3.2. *Параметрическим уравнением прямой* называется следующая система:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha_1 \\ y = y_0 + t\alpha_2 \end{cases}$$

Определение 3.3. *Каноническим уравнением прямой* называется следующее уравнение:

$$\frac{x - x_0}{\alpha_1} = \frac{y - y_0}{\alpha_2}$$

Замечание. Если, например, $\alpha_1 = 0$ (тогда $\alpha_2 \neq 0$), то считаем, что $\forall t \in \mathbb{R} : x = x_0$.

Определение 3.4. *Общим уравнением прямой* называется следующее уравнение:

$$Ax + By + C = 0 \; (A^2 + B^2 \neq 0)$$

Следствие. В произвольной декартовой системе координат направляющим вектором l служит вектор $\overline{a}$:

$$\overline{a} \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix}$$

Следствие. В прямоугольной декартовой системе координат вектором нормали l служит вектор $\overline{n}$:

$$\overline{n} \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

Это позволяет получить еще один способ задания прямой.

Определение 3.5. *Нормальным уравнением прямой* называется следующее уравнение:

$$(\overline{r} - \overline{r_0}, \overline{n}) = 0 \Leftrightarrow (\overline{r}, \overline{n}) = \alpha \ (\overline{n} \neq \overline{0})$$

Замечание. Непосредственная проверка позволяет убедиться, что различные уравнения, задающие прямую, эквивалентны, поскольку из каждого из них можно получить любое другое.

7.2 Формула для расстояния от точки до прямой в прямоугольной системе координат

Утверждение 3.3. *Пусть прямая l задана в прямоугольной системе координат (O, e) общим уравнением $Ax + By + C = 0$, точка*

$M(\overline{r_0})$ имеет координаты $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Тогда расстояние ρ от M до l равно:

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Доказательство. Пусть $\overline{n}$ — вектор нормали к l, $X(\overline{r})$ — произвольная точка на l. Тогда:

$$\rho = |\operatorname{pr}_{\overline{n}}(\overline{r_0} - \overline{r})| = \left| \frac{(\overline{r_0} - \overline{r}, \overline{n})}{|\overline{n}|^2} \overline{n} \right| = \left| \frac{(\overline{r_0} - \overline{r}, \overline{n})}{|\overline{n}|} \right| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

7.3 Условия пересечения и параллельности двух прямых

Замечание. Рассмотренные способы задания прямой позволяют определить *взаимное расположение прямых на плоскости*. Пусть прямые l_1, l_2 заданы векторно-параметрическими уравнениями $\overline{r} = \overline{r_1} + t\overline{a_1}$, $\overline{r} = \overline{r_2} + t\overline{a_2}$. Тогда:

- $l_1 \cap l_2 \Leftrightarrow \overline{a_1} \nparallel \overline{a_2}$
- $l_1 \parallel l_2$ и $l_1 \neq l_2 \Leftrightarrow \overline{r_1} - \overline{r_2} \nparallel \overline{a_1} \parallel \overline{a_2}$
- $l_1 = l_2 \Leftrightarrow \overline{r_1} - \overline{r_2} \parallel \overline{a_1} \parallel \overline{a_2}$

7.4 Пучок прямых

Определение 3.6. *Пучком пересекающихся прямых* называется множество всех прямых, проходящих через данную точку.

Определение 3.7. *Пучком параллельных прямых* называется множество всех прямых, параллельных данной прямой.

Замечание. Любые две прямые лежат ровно в одном пучке.

Теорема 3.1. *Пусть в произвольной декартовой системе координат прямые $l_1 \neq l_2$ заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Тогда прямые, лежащие в том же пучке, что и l_1 и l_2, — это прямые, задаваемые уравнениями вида:*

$$\alpha_1(A_1x + B_1y + C_1) + \alpha_2(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

Доказательство. Пусть прямая l задается данным уравнением. Если $l_1 \cap l_2 = P$, то координаты точки P удовлетворяют данному уравнению, т. е. $P \in l$. Если же $l_1 \parallel l_2$, то из данного уравнения направляющий вектор l параллелен направляющим векторам l_1 и l_2

(в этом случае уравнение выше задает прямую не всегда, но если и задает, то лежащую в данном пучке).

Теперь пусть прямая l лежит в данном пучке. Если $l_1 \cap l_2 = P$, то выберем на l точку $Q \neq P$ с координатами $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Тогда Q удовлетворяет уравнению с коэффициентами $\alpha_1 = A_2x_0 + B_2y_0 + C_2$, $\alpha_1 = -(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1)$, причем хотя бы один из коэффициентов ненулевой (т. к. Q лежит не более, чем на одной из прямых l_1, l_2). Тогда данное уравнение задает l, т. к. ему удовлетворяют две различных точки этой прямой. Если же $l \parallel l_1 \parallel l_2$, то аналогичным образом можно выбрать любую точку $Q \in l$ и соответствующие коэффициенты, тогда данное уравнение задает l при условии, что оно задает прямую, но это верно всегда, поскольку множество его решений содержит Q (т. е. непусто) и не содержит хотя бы одну из прямых l_1, l_2. $\square$

8. Плоскость в пространстве

8.1 Плоскость в пространстве, различные способы задания, их эквивалентность

Рассмотрим различные способы задания плоскости ν в пространстве. Пусть $M(\overline{r_0})$ — точка на плоскости ν, $\overline{a}\,\overline{b}$ — векторы в плоскости ν ($\overline{a} \nparallel \overline{b}$, $\overline{a}, \overline{b} \in \nu$). Тогда $X(\overline{r}) \in \nu \Leftrightarrow \overline{MX}$ компланарен $\overline{a}, \overline{b}$. Введем базис e и декартову систему координат (O, e):

$$M \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, X \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \overline{a} \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \overline{b} \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

Определение 3.8. *Векторно-параметрическим уравнением плоскости* называется следующее уравнение:

$$\overline{r} = \overline{r_0} + t\overline{a} + s\overline{b} \ (t,s \in \mathbb{R})$$

Данное уравнение можно также переписать в виде:

$$(\overline{r} - \overline{r_0}, \overline{a}, \overline{b}) = 0 \Leftrightarrow (\overline{r}, \overline{a}, \overline{b}) = \alpha$$

Определение 3.9. *Параметрическим уравнением плоскости* называется следующая система:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha_1 + s\beta_1 \\ y = y_0 + t\alpha_2 + s\beta_2 \\ z = z_0 + t\alpha_3 + s\beta_3 \end{cases}$$

Если в явном виде расписать смешанное произведение $(\overline{r} - \overline{r_0}, \overline{a}, \overline{b})$ как определитель соответствующей матрицы, можно получить еще одно уравнение плоскости.

Определение 3.10. *Общим уравнением плоскости* называется следующее уравнение:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \ (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$$

Утверждение 3.4. *Пусть ν задана в (O, e) общим уравнением плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, вектор $\overline{b} \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \beta$. Тогда $\overline{b} \parallel$ $\parallel \nu \Leftrightarrow A\beta_1 + B\beta_2 + C\beta_3 = 0$.*

Доказательство. Пусть точка $M \in \nu$, а точка N такова, что $\overline{MN} =$ $= \overline{b}$. Тогда:

$$M \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_o \end{pmatrix}, N \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x_0 + \beta_1 \\ y_0 + \beta_2 \\ z_o + \beta_3 \end{pmatrix}$$

$$\overline{b} \parallel \nu \Leftrightarrow N \in \nu \Leftrightarrow A(x_0 + \beta_1) + B(y_0 + \beta_2) + C(z_0 + \beta_3) + D = 0$$

Теперь, т. к. $M \in \nu$:

$$A(x_0 + \beta_1) + B(y_0 + \beta_2) + C(z_0 + \beta_3) + D = 0 \Leftrightarrow A\beta_1 + B\beta_2 + C\beta_3 = 0$$

Определение 3.11. *Нормальным уравнением плоскости* называется следующее уравнение:

$$(\overline{r} - \overline{r_0}, \overline{n}) = 0 \Leftrightarrow (\overline{r}, \overline{n}) = \alpha \ (\overline{n} \neq \overline{0})$$

Замечание. Непосредственная проверка позволяет убедиться, что различные уравнения, задающие плоскость, эквивалентны, поскольку из каждого из них можно получить любое другое.

Замечание. В прямоугольной декартовой системе координат нормальное уравнение плоскости преобразуется к виду $Ax + By + Cz + D = 0$, и это означает, что в такой системе координат нормальный вектор плоскости имеет вид:

$$\overline{n} \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

Определение 3.12. Пусть в произвольной декартовой системе координат плоскость ν задана уравнением $Ax+By+Cz+D = 0$. Тогда *сопутствующим вектором* плоскости ν в данной системе координат называется следующий вектор:

$$\overline{n} \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

8.2 Условие параллельности двух плоскостей

Утверждение 3.6. *Пусть плоскости* ν_1, ν_2 *заданы общими уравнениями* $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. *Тогда:*

- $\nu_1 \cap \nu_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} \nparallel \overline{n_2}$
- $\nu_1 \parallel \nu_2$ *и* $\nu_1 \neq \nu_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} \parallel \overline{n_2}$, *но уравнения непропорциональны*
- $l_1 = l_2 \Leftrightarrow$ *уравнения пропорциональны*

Доказательство.

- По условию $\overline{n_1} \nparallel \overline{n_2}$, тогда без ограничения общности $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq$ $\neq 0$. Рассмотрим систему уравнений относительно x и y:
$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1z - D_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2z - D_2 \end{cases}$$
Согласно правилу Крамера, эта система имеет единственное решение $\forall z$. Значит, плоскости имеют общие точки, но не все их точки общие, и это означает, что они пересекаются.

- Коэффициенты A_i, B_i, C_i пропорциональны из параллельности $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$, а уравнения — нет, поэтому можно считать, что они отличаются только коэффициентом D_i. Тогда они не имеют общих решений, т. е. $\nu_1 \parallel \nu_2$ и $\nu_1 \neq \nu_2$.

- Уравнения пропорциональны, поэтому можно считать, что они совпадают. Тогда совпадают и их множества решений, т. е. $\nu_1 = \nu_2$.

8.3 Направляющий вектор пересечения двух плоскостей

Утверждение 3.7. *Пусть в произвольной декартовой системе координат (O, e) пересекающиеся плоскости ν_1 и ν_2 заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Тогда направляющий вектор их прямой пересечения имеет координаты:*

$$\overline{v} \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Доказательство. Докажем, что $\overline{v}$ — направляющий вектор прямой пересечения. Во-первых, он ненулевой, поскольку из непараллельности ν_1 и ν_2 следует, что хотя бы один из определителей, указанных в координатном столбце $\overline{v}$, ненулевой. Во-вторых, $\overline{v} \parallel \nu_1$ и $\overline{v} \parallel \nu_2$. Покажем это на примере ν_1:

$$A_1 \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + B_1 \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} + A_1 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

Заметим теперь, что определитель матрицы не меняется при транспонировании:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & A_1 & A_2 \\ B_1 & B_1 & B_2 \\ C_1 & C_1 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

Данный определитель равен нулю, поскольку он соответствует ориентированному объему от тройки векторов, среди которых есть два одинаковых. Значит, $\overline{v}$ удовлетворяет критерию параллельности ν_1. Аналогично показывается, что $\overline{v} \parallel \nu_2$. $\square$

8.4 Пучок плоскостей

Определение 3.13. *Пучком пересекающихся плоскостей* называется множество всех плоскостей, проходящих через данную прямую.

Определение 3.14. *Пучком параллельных плоскостей* называется множество всех плоскостей, параллельных данной плоскости.

Замечание. Любые две прямые плоскости ровно в одном пучке.

Теорема 3.2. *Пусть в произвольной декартовой системе координат плоскости $\nu_1 \neq \nu_2$ заданы уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Тогда плоскости, лежащие в том же пучке, что и ν_1 и ν_2, — это плоскости, задаваемые уравнениями вида:*

$$\alpha_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \alpha_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

Доказательство. Пусть плоскость ν задается данным уравнением. Если $\nu_1 \cap \nu_2 = l$, то координаты точки каждой точки на прямой l удовлетворяют данному уравнению, т. е. $l \subset \nu$. Если же $\nu_1 \parallel \nu_2$, то из данного уравнения сопутствующий вектор ν параллелен сопутствующим векторам ν_1 и ν_2 (в этом случае уравнение выше задает плоскость не всегда, но если и задает, то лежащую в данном пучке).

Теперь пусть плоскость ν лежит в данном пучке. Если $\nu_1 \cap \nu_2 = l$, то выберем на ν точку $Q \notin l$ с координатами $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. Тогда Q удовлетворяет уравнению с коэффициентами $\alpha_1 = A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_0$, $\alpha_1 = -(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_2)$, причем хотя бы один из коэффициентов ненулевой (т. к. Q лежит не более, чем на одной из плоскостей ν_1, ν_2). Тогда данное уравнение задает ν, т. к. ему удовлетворяют все точки прямой и точка, не лежащая на этой прямой. Если же $\nu \parallel \nu_1 \parallel \nu_2$, то аналогичным образом можно выбрать любую точку $Q \in \nu$ и соответствующие коэффициенты, тогда данное уравнение задает ν при условии, что оно задает плоскость, но это верно всегда, поскольку множество его решений содержит Q (т. е. непусто) и не содержит хотя бы одну из плоскостей ν_1, ν_2. $\square$

9. Прямая в пространстве

9.1 Прямые в пространстве, различные способы их

задания, их эквивалентность

Рассмотрим различные способы задания прямой l в пространстве. Пусть $M(\overline{r_0})$ — точка на прямой l, $\overline{a}$ — направляющий вектор прямой ($\overline{a} \parallel l$, $\overline{a} \neq 0$). Тогда $X(\overline{r}) \in l \Leftrightarrow \overline{MX}$ коллинеарен $\overline{a}$. Введем базис e и декартову систему координат (O, e):

$$M \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \; X \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \; \overline{a} \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Определение 3.15. *Векторно-параметрическим уравнением прямой* называется следующее уравнение:

$$\overline{r} = \overline{r_0} + t\overline{a} \;\; (t \in \mathbb{R})$$

Определение 3.16. *Параметрическим уравнением прямой* называется следующая система:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha_1 \\ y = y_0 + t\alpha_2 \\ z = z_0 + t\alpha_3 \end{cases}$$

Определение 3.17. *Каноническим уравнением прямой* называется следующее уравнение:

$$\frac{x - x_0}{\alpha_1} = \frac{y - y_0}{\alpha_2} = \frac{z - z_0}{\alpha_3}$$

Замечание. Если, например, $\alpha_1 = 0$ (тогда $\alpha_2 \neq 0$ или $\alpha_3 \neq 0$), то считаем, что $\forall t \in \mathbb{R} : x = x_0$.

Определение 3.18. *Векторным уравнением прямой* называется следующее уравнение:

$$[\overline{r} - \overline{r_0}, \overline{a}] = \overline{0} \Leftrightarrow [\overline{r}, \overline{a}] = \overline{b}$$

Замечание. В пространстве прямую также можно задать как пересечение двух плоскостей.

9.2 Формулы для расстояния от точки до плоскости и расстояния между скрещивающимися прямыми в прямоугольной системе координат

Утверждение 3.11. *Пусть прямая l задана в прямоугольной системе координат (O, e) векторно-параметрическим уравнением $\overline{r} = \overline{r_0} + \overline{a}t$, точка $A(\overline{r_A})$ не лежит на данной прямой. Тогда расстояние ρ от A до l равно:*

$$\rho = \frac{|[\overline{r_A} - \overline{r_0}, \overline{a}]|}{|\overline{a}|}$$

Доказательство. Искомое расстояние ρ является высотой параллелограма, построенного на векторах $\overline{r_A} - \overline{r_0}$ и $\overline{a}$, что и дает требуемую формулу. □

Утверждение 3.12. *Пусть скрещивающиеся прямые l_1, l_2 заданы в прямоугольной системе координат (O, e) уравнениями $\overline{r} = \overline{r_1} + \overline{a_1}t$, $\overline{r} = \overline{r_2} + \overline{a_2}t$. Тогда расстояние ρ между ними равно:*

$$\rho = \frac{|(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{r_1} - \overline{r_2})|}{|[\overline{a_1}, \overline{a_2}]|}$$

Доказательство. Искомое расстояние ρ является высотой параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$ и $\overline{r_1} - \overline{r_2}$ (эти векторы гарантированно некомпланарны), что и дает требуемую формулу. □

10. Эллипс, гипербола, парабола

10.1 Эллипс, гипербола, парабола, их канонические уравнения

Определение 4.11. *Эллипсом* называется кривая второго порядка, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задается уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a \geqslant b > 0)$. Дальнейшие определения, связанные с эллипсом, даются именно в этой системе координат.

Определение 4.12. *Вершинами* эллипса называются точки с координатами $\begin{pmatrix} \pm a \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm b \end{pmatrix}$. Число a называется *длиной большой полуоси* эллипса, b — *длиной малой полуоси* эллипса.

Определение 4.13. *Фокусным расстоянием* эллипса называется величина:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Точки $F_1 \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$, $F_2 \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$ называются *фокусами* эллипса.

Определение 4.14. *Эксцентриситетом* эллипса называется величина:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$$

Определение 4.15. *Директрисами* эллипса называются прямые $d_1 : x = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{a^2}{c}$ и $d_2 : x = -\frac{a}{\varepsilon} = -\frac{a^2}{c}$.

Определение 4.16. *Гиперболой* называется кривая второго порядка, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задается уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0, b > 0)$. Дальнейшие определения, связанные с гиперболой, даются именно в этой системе координат.

Определение 4.17. *Вершинами* гиперболы называются точки с координатами $\begin{pmatrix} \pm a \\ 0 \end{pmatrix}$. Число a называется *длиной действительной полуоси* гиперболы, b — *длиной мнимой полуоси* гиперболы.

Определение 4.18. *Фокусным расстоянием* гиперболы называется величина:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Точки $F_1 \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$, $F_2 \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$ называются *фокусами* гиперболы.

Определение 4.19. *Эксцентриситетом* гиперболы называется величина:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$$

Определение 4.20. *Директрисами* гиперболы называются прямые $d_1 : x = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{a^2}{c}$ и $d_2 : x = -\frac{a}{\varepsilon} = -\frac{a^2}{c}$.

Определение 4.22. *Параболой* называется кривая второго порядка, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задается уравнением $y^2 = 2px$ $(p > 0)$. Дальнейшие определения, связанные с параболой, даются именно в этой системе координат.

Определение 4.23. *Вершиной* параболы называется точка с координатами $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Определение 4.24. *Фокусом* гиперболы называется точка с координатами $\begin{pmatrix} \frac{p}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Определение 4.25. *Эксцентриситетом* гиперболы называется величина:

$$\varepsilon = 1$$

Определение 4.26. *Директрисой* параболы называется прямая $d: x = -\frac{p}{2}$.

10.2 Теоремы о фокусах и директрисах

Теорема 4.3. *Точка* $A \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *лежит на эллипсе* $\Leftrightarrow AF_1 = |a - \varepsilon x| \Leftrightarrow AF_2 = |a + \varepsilon x|$.

Доказательство.

$$AF_1^2 - |a - \varepsilon x|^2 = (x - c)^2 + y^2 - |a - \varepsilon x|^2 = b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

Значит, $AF_1 = |a - \varepsilon x| \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Вторая равносильность показывается аналогично. □

Теорема 4.4. *Эллипс — геометрическое место точек* $A \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *таких, что:*

$$\frac{AF_1}{\rho(A, d_1)} = \frac{AF_2}{\rho(A, d_2)} = \varepsilon$$

Доказательство.

$$\rho(A, d1) = |x - \frac{a}{\varepsilon}| = \frac{1}{\varepsilon}|a - \varepsilon x|$$

Уже было доказано, что A лежит на эллипсе $\Leftrightarrow |a - \varepsilon x| = AF_1$, поэтому утверждение данной теоремы также верно. Вторая равносильность показывается аналогично. □

Теорема 4.6. *Точка* $A \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *лежит на гиперболе* $\Leftrightarrow AF_1 = |a - \varepsilon x| \Leftrightarrow AF_2 = |a + \varepsilon x|$.

Доказательство.

$$AF_1^2 - |a - \varepsilon x|^2 = (x - c)^2 + y^2 - |a - \varepsilon x|^2 = b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

Значит, $AF_1 = |a - \varepsilon x| \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Вторая равносильность показывается аналогично. □

Теорема 4.7. *Гипербола — геометрическое место точек* $A \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *таких, что:*

$$\frac{AF_1}{\rho(A, d_1)} = \frac{AF_2}{\rho(A, d_2)} = \varepsilon$$

Доказательство.

$$\rho(A, d1) = |x - \frac{a}{\varepsilon}| = \frac{1}{\varepsilon}|a - \varepsilon x|$$

Уже было доказано, что А лежит на гиперболе $\Leftrightarrow |a - \varepsilon x| = AF_1$, поэтому утверждение данной теоремы также верно. Вторая равносильность показывается аналогично. □

Теорема 4.9. *Точка* $A \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *лежит на параболе* $\Leftrightarrow AF = \rho(A, d)$.

Доказательство.

$$AF^2 - \rho^2(A, d) = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 - \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = y^2 - 2px$$

Значит, $AF = \rho(A, d) = |x + \frac{p}{2}| \Leftrightarrow y^2 = 2px$. □

10.3 Асимптоты гиперболы

Определение 4.21. *Асимптотами* гиперболы называются прямые $l_1 : \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ и $l_2 : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$.

Утверждение 4.8. *Пусть A — точка на гиперболе. Тогда:*

$$\rho(A, l_1)\rho(A, l_2) = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

Доказательство. Пусть $A \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. По формуле расстояния от точки до прямой в плоскости:

$$\rho(A, l_1) = \frac{\left|\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} = \frac{|bx - ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\rho(A, l_2) = \frac{\left|\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} = \frac{|bx + ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\rho(A, l_1)\rho(A, l_2) = \frac{b^2x^2 - a^2y^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}{a^2+b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

□

10.4 Сопряженные диаметры

Теорема 4.10. *Пусть C — некоторая кривая второго порядка (эллипс, гипербола или парабола), заданная в своей канонической системе координат (O, e), $\overline{v} \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ — выбранное направление. Тогда центры всех хорд данной кривой, параллельных $\overline{v}$, лежат на одной прямой.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда C — гипербола. Пусть $A \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ — середина некоторой хорды, параллельной $\overline{v}$. Рассмотрим прямую, заданную параметрическим уравнением, содержащую данную хорду:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

Точки пересечения этой прямой с заданной гиперболой удовлетворяют уравнению:

$$\frac{(x_0+\alpha t)^2}{a^2} - \frac{(y_0+\beta t)^2}{b^2} = 1$$

Т. к. точка A является серединой хорды, то значения параметра t, удовлетворяющие уравнению, должны быть противоположными числами, т. е. если привести данное уравнение к виду квадратного относительно t, по теореме Виета коэффициент при t должен быть равен нулю. Преобразовав уравнение, получим значение данного коэффициента:

$$\alpha b^2 x_0 - \beta a^2 y_0 = 0$$

Таким образом, центры всех хорд, параллельных $\overline{v}$ удовлетворяют уравнению прямой:

$$\frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta y}{b^2} = 0$$

Аналогичным образом получаются уравнения соответствующих прямых для случев эллипса и параболы. $\square$

Определение 4.27. *Диаметром*, сопряженным к направлению $\overline{v}$ относительно кривой C, называется прямая, содержащая середины всех хорд C, параллельных $\overline{v}$.

Замечание. Пусть в системе координат (O, e), канонической для C, $\overline{v} \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Тогда уравнения диаметров, сопряженных к направлению $\overline{v}$, имеют вид:

- C — эллипс: $\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} = 0$, направляющий вектор $\overline{a} \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} \frac{\beta}{b^2} \\ -\frac{\alpha}{a^2} \end{pmatrix}$
- C — гипербола: $\frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta y}{b^2} = 0$, направляющий вектор $\overline{a} \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} \frac{\beta}{b^2} \\ \frac{\alpha}{a^2} \end{pmatrix}$
- C — парабола: $\beta y = \alpha p$, направляющий вектор $\overline{a} \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Утверждение 4.9. *Пусть C — эллипс или гипербола. Если диаметр, сопряженный к $\overline{v}$, имеет направляющий вектор $\overline{u}$, то диаметр, сопряженный к $\overline{u}$, имеет направляющий вектор $\overline{v}$ (т. е. сопряжение обладает свойством двойственности).*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда C — гипербола. Пусть $\overline{v} \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Диаметр, сопряженный к направлению $\overline{v}$, имеет направляющий вектор $\overline{u} \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} \frac{\beta}{b^2} \\ \frac{\alpha}{a^2} \end{pmatrix}$. Диаметр, сопряженный к направлению $\overline{u}$, имеет направляющий вектор $\overline{w} \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{a^2b^2} \\ \frac{\beta}{a^2b^2} \end{pmatrix}$. Остается заметить, что $\overline{w} \parallel \overline{v}$. Аналогичным образом получается результат для случая эллипса. $\square$

10.5 Касательные к эллипсу, параболе и гиперболе

Определение 4.28. *Касательной* к кривой в точке A называется предельное положение секущей AB при $B \to A$.

Утверждение 4.10. *Пусть C — эллипс или гипербола. Касательная к C в точке A параллельна диаметру, сопряженному к направлению диаметра, содержащего A.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда C — гипербола. Пусть $A \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Когда точка B на гиперболе стремится к A, середина хорды AB также стремится к A. Поэтому диаметр, содержащий середину хорды AB, в предельном случае проходит через A. Диаметр, сопряженный к данному, параллелен AB в силу двойственности, и в предельном случае его направление совпадает с направлением касательной. Рассуждения в случае эллипса аналогичны. $\square$

Следствие. Уравнения касательных к C (эллипсу или гиперболе) в точке $A \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ имеют вид:

- C — эллипс: $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$
- C — гипербола: $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$

Утверждение 4.11. *Уравнение касательной к параболе C в точке $A \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ имеет вид:*

$$y_0 y = p(x_0 + x)$$

Доказательство. Диаметр, проходящий через A, задается уравнением $y = y_0$. Если касательная в точке A имеет направляющий вектор $\overline{v} \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, то $\beta y_0 = \alpha p$. Если $X \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ — произвольная точка на касательной, то:

$$\frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{y_0}{p}$$

Преобразуя полученное равенство с учетом того, что $y_0^2 = 2px_0$, получим:

$$y_0 y = p(x_0 + x)$$

11. Кривые второго порядка

11.1 Классификация линий второго порядка

Определение 4.7. *Кривой второго порядка* называется алгебраическая кривая, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задается уравнением:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \ (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$$

Теорема 4.2. *Любое уравнение кривой второго порядка в некоторой прямоугольной декартовой системой координат имеет один из девяти следующих видов:*

- *Кривые эллиптического типа:*
  - $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ — *эллипс*
  - $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ — *точка*
  - $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ — *мнимый эллипс*

  $(a \geqslant b > 0)$

- *Кривые гиперболического типа:*
  - $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ — *гипербола*
  - $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ — *пара пересекающихся прямых*

  $(a > 0, b > 0)$
- *Кривые параболического типа:*
  - $y^2 = 2px$ — *парабола*
  - $\frac{y^2}{a^2} = 1$ — *пара параллельных прямых*
  - $\frac{y^2}{a^2} = 0$ — *пара совпадающих прямых*
  - $\frac{y^2}{a^2} = -1$ — *пара мнимых параллельных прямых*

  $(p > 0, a > 0)$

11.2 Приведение уравнения второго порядка с двумя переменными к каноническому виду в прямоугольной системе координат

Доказательство. Изначально имеется уравнение $Ax^2+2Bxy+Cy^2+$ $+2Dx+2Ey+F=0$. Процесс перехода в требуемую систему координат можно разделить на три этапа:

1. Избавимся от монома $2Bxy$ (если он ненулевой). Для этого произведем поворот системы координат на угол α против часовой стелки. При этом матрица перехода S ($e'=eS \Leftrightarrow \alpha = S\alpha'$) имеет вид:
$$S=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha\\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha\end{cases}$$
Определим, чему должно быть равно α, чтобы коэффициент при $x'y'$ стал нулевым:
$$-2A\sin\alpha\cos\alpha + 2B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2C\sin\alpha\cos\alpha = 0$$
$$2B\cos 2\alpha = (A-C)\sin 2\alpha$$
Если $A=C$, выберем $\alpha=\frac{\pi}{4}$, иначе — такой α, что $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A-C}$. В обоих случаях в новой системе координат гарантированно получаем выражение $A'x'^2+C'y'^2+2D'x'+2E'y'+F'=0$.

2. Избавимся от монома вида $2Dx'$ (если $A'\neq 0$). Для этого сместим начало системы координат так, чтобы:
$$\begin{cases} x'' = x' - \dfrac{D'}{A'}\\ y'' = y'\end{cases}$$
После этого мы получим выражение $A''x''^2+C''y''^2+2E''y''+$ $+F''=0$.

3. Аналогичным образом избавимся от монома вида $2E''y''$ (если $C''\neq 0$), снова сместив начало системы координат:
$$\begin{cases} x''' = x''\\ y''' = y'' - \dfrac{E''}{C''}\end{cases}$$

Для удобства опустим штрихи в записи уравнения в полученной системе координат. После того, как произведены описанные выше операции, могут быть получены три различных результата:

1. $AC > 0$ (это также означает, что ни один из мономов x^2, y^2 не сократился). Тогда полученное уравнение имеет вид:
$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0$$
Если $A, C < 0$, домножим уравнение на -1. Перенесем F в другую часть и, если $F \neq 0$, разделим уравнение на $|F|$. Возможные результаты:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left[\begin{array}{r} 1 \\ 0 \\ -1 \end{array}\right. \quad \left(a = \sqrt{\frac{|F|}{|A|}}, b = \sqrt{\frac{|F|}{|C|}}\right)$$
Если $a < b$, то поменяем координаты местами. Таким образом, получены уравнения кривых эллиптического типа.

2. $AC < 0$ (это также означает, что ни один из мономов x^2, y^2 не сократился). Тогда полученное уравнение имеет вид:
$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0$$
Аналогичными описанным в предыдущем пункте преобразованиями, получим один из результаты:
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left[\begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array}\right.$$
Таким образом, получены уравнения кривых гиперболического типа.

3. $AC = 0$. Т. к. рассматриваемая кривая — второго порядка, то одно из чисел A, C осталось ненулевым. Заменой системы координат можно добиться того, чтобы это было число C. Тогда полученное уравнение имеет вид:
$$Cy^2 + 2Dx + F = 0$$
Если $D \neq 0$, то можно смещением начала координат избавиться от F и получить уравнение:
$$y^2 = 2px$$
Если $D = 0$, то возможны три случая:
$$\frac{y^2}{a^2} = \left[\begin{array}{r} 1 \\ 0 \\ -1 \end{array}\right.$$

Таким образом, получены уравнения кривых параболического типа.

Итак, заменой системы координат и алгебраическими преобразованиями уравнение любой кривой второго порядка приводится к одному из девяти видов. $\square$

Определение 4.8. *Канонической системой координат* для кривой второго порядка называется такая прямоугольная декартова система координат, в которой данная кривая задается одним из девяти описанных выше уравнений.

11.3 Центр многочлена второго порядка

Определение 4.9. *Центром многочлена* $P(x, y)$ в произвольной декартовой системе координат (O, e) называется такая точка $A \in P_2$, $A \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, что:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : P(\alpha - x, y - \beta) = P(\alpha + x, y + \beta)$$

Определение 4.10. Кривая второго порядка называется *центральной*, если у нее существует единственный центр. Этому условию удовлетворяют кривые эллиптического и гиперболического типов.

Замечание. Согласно правилу Крамера, кривая второго порядка центральна $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0$.

Утверждение 4.6. *Если в некоторой декартовой системе координат* (O, e) *точка* $A \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ *— центр многочлена* $P(x, y)$, *то* A *— центр симметрии кривой, заданной уравнением* $P(x, y) = 0$.

Доказательство. Из условия, что A — центр многочлена $P(x, y)$ следует, что точки $A_1 \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \alpha - x \\ \beta - y \end{pmatrix}$, $A_2 \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \alpha + x \\ \beta + y \end{pmatrix}$, симметричные относительно A, или одновременно принадлежат данной кривой, или одновременно не принадлежат ей. $\square$

Линейные пространства. Матрицы и определители

1. Матрицы, операции с матрицами, их свойства

Определение 1.1. *Матрицей размера* $n \times k$ называется таблица из n строк и k столбцов, заполненная числами (или другими элементами). Обозначение множества матриц данного размера — $A \in M_{n\times k}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

Определение 1.2. *Строкой длины* k называется матрица размера $1 \times k$. d-ая строка произвольной матрицы (a_{ij}) обозначается как a_{d*}.

Определение 1.3. *Столбцом высоты* n называется матрица размера $n \times 1$. d-ый столбец произвольной матрицы (a_{ij}) обозначается как a_{d*}.

Определение 1.4. *Подматрицей* матрицы A называется матрица, полученная из A удалением некоторых ее строк или столбцов.

Определение 1.5. Основные операции с матрицами:

1. *Сложение матриц.* Пусть $A, B \in M_{n\times k}$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Тогда определим сумму $A + B \in M_{n\times k}$:
$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$
2. *Умножение матрицы на число.* Пусть $A \in M_{n\times k}$, $A = (a_{ij})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда определим $\lambda A \in M_{n\times k}$:
$$\lambda A = (\lambda a_{ij})$$
3. *Транспонирование матрицы.* Пусть $A \in M_{n\times k}$, $A = (a_{ij})$. Тогда

определим $A^T \in M_{k\times n}$:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1k} & a_{2k} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} = (a_{ji})$$

4. *Умножение строки на столбец.* Пусть $A \in M_{1\times n}$, $A = (a_{ij})$, $B \in M_{n\times 1}$, $B = (b_{ij})$. Тогда определим $AB \in M_{1\times 1}$:

$$AB = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1}\right)$$

5. *Умножение матриц.* Пусть $A \in M_{n\times k}$, $A = (a_{ij})$, $B \in M_{k\times m}$, $B = (b_{ij})$. Тогда определим $AB \in M_{n\times m}$:

$$AB = (c_{ij}),\ c_{ij} = \sum_{t=1}^{k} a_{it}b_{tj}$$

Утверждение 1.1. *Сложение матриц обладают следующими свойствами:*

- $A + B = B + A$ *(коммутативность сложения матриц)*
- $(A+B)+C = A+(B+C)$ *(ассоциативность сложения матриц)*
- $\exists 0 \in M_{n\times k} : \forall A \in M_{n\times k} : A+0 = A$ *(существование нейтрального элемента относительно сложения)*
- $\forall A \in M_{n\times k} : \exists (-A) \in M_{n\times k} : A + (-A) = 0$ *(существование противоположного элемента относительно сложения)*

Доказательство. Доказательство производится непосредственной проверкой, если указать, что $0 \in M_{n\times k}$ — это матрица из нулей, $(-A) \in M_{n\times k}$ — матрица, каждый элемент которой является противоположным соответствующему элементу A. $\square$

Утверждение 1.2. *Умножение матрицы на число обладает следующими свойствами:*

- $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ *(дистрибутивность сложения матриц относительно умножения на число)*
- $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$ *(дистрибутивность сложения чисел относительно умножения на матрицу)*
- $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ *(ассоциативность умножения чисел и умножения матрицы на число)*
- $1A = A$

Доказательство. Доказательство производится непосредственной проверкой. □

Утверждение 1.3. *Транспонирование матрицы обладает следующими свойствами:*

- $(A+B)^T = A^T + B^T$ *(дистрибутивность транспонирования относительно сложения матриц)*
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
- $(A^T)^T = A$ *(идемпотентность транспонирования)*
- $(AB)^T = B^T A^T$

Утверждение 1.4. *Умножение матриц обладает следующими свойствами:*

- $(AB)C = A(BC)$ *(ассоциативность умножения матриц)*

- $\exists E_n \in M_{n\times n},\ \exists E_k \in M_{k\times k} : \forall A \in M_{n\times k} : E_n A = A E_k = A$ *(существование нейтрального элемента относительно умножения матриц)*
- $(A+B)C = AC+BC,\ A(B+C) = AB+AC$ *(дистрибутивность умножения матриц относительно сложения матриц)*
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ *(ассоциативность умножения матрицы на число и умножения матриц)*

Утверждение 1.5. *Пусть* $A \in M_{n\times k}$, $B \in M_{k\times m}$, $AB = C \in M_{n\times m}$. *Тогда столбцы* C *являются линейными комбинациями столбцов* A, *а строки* C *являются линейными комбинациями строк* B.

2. Алгебраические структуры

2.1 Понятия группы, кольца и поля, примеры

Определение 5.1. *Группой* называется множество G с введенной на нем бинарной операцией $\cdot : G \times G \to G$ $((a, b) \mapsto a \cdot b = ab)$, удовлетворяющей следующим свойствам:

- $\forall a, b, c \in G : (ab)c = a(bc)$ (ассоциативность)
- $\exists e \in G : \forall a \in G : ae = ea = a$ (существование нейтрального элемента)
- $\forall a \in G : \exists a^{-1} \in G : aa^{-1} = a^{-1}a = e$ (существование обратного элемента)

Определение 5.2. Группа называется $(G, \cdot)$ *абелевой*, если умножение в ней коммутативно:

$$\forall a, b \in G : ab = ba$$

Пример. Абелевыми группами являются:

- $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ (в отличие от $(\mathbb{N}, +)$, в котором нет обратных элементов)
- $(M_{n\times k}, +)$, $(V_i, +)$
- $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot) \equiv (\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot) \equiv (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \cdot) \equiv (\mathbb{C}^*, \cdot)$

Пример. Неабелевой группой является *группа перестановок* $(S_n, \circ)$ (при условии, что $n \geqslant 3$):

$$S_n = \{\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} \mid \sigma - \text{биекция}\}$$

Определение 5.6. *Кольцом* называется множество R с введенными на нем двумя бинарными операциями $+$ и $\cdot$, удовлетворяющими следующим условиям:

- $(R, +)$ — абелева группа, нейтральный элемент в которой обозначается как 0
- $\forall a, b, c \in R : (ab)c = a(bc)$ (ассоциативность умножения)
- $\forall a, b, c \in R : a(b + c) = ab + ac, (a + b)c = ac + bc$ (дистрибутивность умножения относительно сложения)
- $\exists 1 \in R : \forall a \in R : a1 = 1a = a$ (существование нейтрального элемента относительно умножения)

Определение 5.7. Кольцо называется $(R, +, \cdot)$ *коммутативным*, если умножение в нем коммутативно:

$$\forall a, b \in R : ab = ba$$

Пример. Коммутативными кольцами являются:

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ (в отличие от $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, поскольку $(\mathbb{N}, +)$ — не группа)
- $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$
- $\mathbb{R}[x, y, \dots]$ — многочлены от переменных $x, , \dots$ (с коэффициентами из $\mathbb{R}$)

Пример. Некоммутативным кольцом является $M_{n\times n}$ (при условии, что $n \geqslant 2$). Более того, некоммутативным кольцом также является $M_{n\times n}(R)$ — множество матриц с элементами из произвольного кольца, т. е. необязательно из $\mathbb{R}$.

Определение 5.9. Пусть R — кольцо. Элемент $a \in R$ называется *обратимым* (относительно умножения), если $\exists a^{-1} \in R : aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.

Определение 5.10. *Группой обратимых элементов* кольца R называется множество R^* его обратимых элементов.

Утверждение 5.6. $(R^*, \cdot)$ — *группа.*

Доказательство. Множество R^* непусто, поскольку $1 \in R^*$ (элемент 1 является обратным сам себе). Умножение в R^* определено корректно, поскольку если $a, b \in R^*$, то $\exists a^{-1}, b^{-1} \in R$, тогда $\exists (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \in R$, т. е. $ab \in R^*$. Проверим теперь свойства группы:

- $\forall a, b, c \in R^* : (ab)c = a(bc)$ (как следствие ассоциативности в R)
- $\exists 1 \in R^* : \forall a \in R^* : a1 = 1a = a$
- $\forall a \in R^* : \exists a^{-1} \in R^* : aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ (оба элемента a и a^{-1} обратимы, поскольку являются обратными друг другу)

Определение 5.11. *Полем* называется множество F такое, что $(F, +, \cdot)$ — коммутативное кольцо и $F^* = F \setminus \{0\}$.

Пример. Полями являются:

- $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$
- $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

2.2 Поле комплексных чисел

Комплексные числа с операциями сложения и умножения образуют поле. Доказывается проверкой свойств поля.

2.3 Характеристика поля, простое подполе

Определение 5.14. Пусть F — поле. Его *характеристикой* называется наименьшее $k \in \mathbb{N}$ такое, что $k_F = 0$. Если такого k нет, принято считать характеристику равной нулю. Обозначение — $\operatorname{char} F$.

Утверждение 5.9. *Если* $\operatorname{char} F > 0$, *то* $\operatorname{char} F$ — *простое число.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{char} F = n$. Если $n = 1$, то 0 и 1 в F совпадают, а $F^* = F$ — это не удовлетворяет определению поля.

Пусть n — составное число, $n = ab$ $(a, b \in \mathbb{N},\ a, b > 1)$. Тогда $a_F, b_F \neq 0$, но при этом $a_F \cdot b_F = 0$. Из этого следует, что $a_F \notin F^*$: если $a_F \in F^*$, то, домножив слева на a_F^{-1}, можно получить, что $b_F = 0$, а это не так. Значит, случай составного n невозможен. □

Определение 5.15. Поле называется *простым*, если оно не имеет подполей, отличных от него самого.

Теорема 5.1. *Пусть F — поле. Тогда:*

1. *Если* $\operatorname{char} F = p > 0$, *то в F существует простое подполе, изоморфное* $\mathbb{Z}_p$.

2. *Если* $\operatorname{char} F = 0$, *то в F существует простое подполе, изоморфное* $\mathbb{Q}$.

Доказательство.

1. Пусть $\operatorname{char} F = p$. Рассмотрим $K = \{n_F \in F \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Определим отображение $\varphi : \mathbb{Z}_p \to K : \varphi(\overline{a}) = a_F$. Покажем, что определенное отображение корректно: если $a' \in \overline{a}$, то $a' = a + kp$ $(k \in \mathbb{Z})$ и $a'_F = a_F + (kp)_F = a_F$.

   Отображение φ сохраняет операции:
   $$\varphi(\overline{a} + \overline{b}) = \varphi(\overline{a + b}) = (a + b)_F = a_F + b_F = \varphi(\overline{a}) + \varphi(\overline{b})$$
   $$\varphi(\overline{a} \cdot \overline{b}) = \varphi(\overline{a \cdot b}) = (a \cdot b)_F = a_F \cdot b_F = \varphi(\overline{a}) \cdot \varphi(\overline{b})$$

   Наконец, φ — биекция. Сюръективность очевидна: $\forall a_F \in K : \exists \overline{a} \in \mathbb{Z}_p : \varphi(\overline{a}) = a_F$. Покажем инъективность: если $\varphi(\overline{a}) = \varphi(\overline{b})$ (без ограничения общности можно считать, что $a \geqslant b$ и

$a, b \in \{0, \ldots, p-1\}$), то $(a-b)_F = \varphi(\overline{a-b}) = \varphi(\overline{a}) - \varphi(\overline{b}) = 0$. Это возможно, только если $\overline{a} = \overline{b}$.

Из доказанного также следует, что K — подполе в F. Например, замкнутость относительно взятия обратного элемента по умножению можно показать, используя свойства отображения φ:

$$\forall a_F \in K, a_F \neq 0 : \exists \varphi(\overline{a}^{-1}) \in K : \\ \varphi(\overline{a}^{-1}) a_F = \varphi(\overline{a}^{-1})\varphi(\overline{a}) = \varphi(\overline{1}) = 1_F$$

Проверка остальных свойств подполя позволяет убедиться, что K — поле, тогда φ — изоморфизм полей.

2. Пусть $\operatorname{char} F = 0$. Рассмотрим $K = \{\frac{a_F}{b_F} = a_F(b_F)^{-1} \mid a, b \in \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ ($(b_F)^{-1}$ существует, поскольку $b \neq 0$ и $\operatorname{char} F = 0$). Определим отображение $\varphi : \mathbb{Q} \to K : \varphi\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a_F}{b_F}$. Покажем, что определенное отображение корректно. Пусть $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, тогда $\frac{a}{b} = \frac{aa'}{a'b} = \frac{aa'}{ab'} = \frac{a'}{b'}$. В то же время, $a_F(b_F)^{-1} = (ak)_F((bk)_F)^{-1}$ ($k \neq 0$), поскольку $(ak)_F((bk)_F)^{-1} = a_F k_F (k_F)^{-1}(b_F)^{-1}$. Следовательно, $\frac{a_F}{b_F} = \frac{(aa')_F}{(a'b)_F} = \frac{(aa')_F}{(ab')_F} = \frac{a'_F}{b'_F}$.

   Отображение φ сохраняет операции:

$$\varphi\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = \varphi\left(\frac{ad+bc}{bd}\right) = (ad+bc)_F((bd)_F)^{-1} = \\ = (ad)_F)((bd)_F)^{-1} + ((bc)_F)((bd)_F)^{-1} = \\ = \varphi\left(\frac{ad}{bd}\right) + \varphi\left(\frac{bc}{bd}\right) = \varphi\left(\frac{a}{b}\right) + \varphi\left(\frac{c}{d}\right)$$

$$\varphi\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) = \varphi\left(\frac{ac}{bd}\right) = (ac)_F((bd)_F)^{-1} = \\ = a_F(b_F)^{-1}c_F(d_F)^{-1} = \varphi\left(\frac{a}{b}\right)\varphi\left(\frac{c}{d}\right)$$

Наконец, φ — биекция. Сюръективность очевидна: $\forall a_F(b_F)^{-1} \in$ $\in K : \exists \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : \varphi(\frac{a}{b}) = a_F(b_F)^{-1}$. Покажем инъективность: если $\varphi\left(\frac{a}{b}\right) = \varphi\left(\frac{c}{d}\right)$, то $\varphi\left(\frac{ad-bc}{bd}\right) = (ad-bc)_F((bd)_F)^{-1} = 0$. Это возможно, только если $ad - bc = 0$, т. е. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Из доказанного также следует, что K — подполе в F. Например, замкнутость относительно взятия обратного элемента по умножению можно показать, используя свойства отображения φ:

$$\forall a_F(b_F)^{-1} \in K, a_F \neq 0 : \exists \varphi\left(\frac{b}{a}\right) \in K :$$
$$a_F(b_F)^{-1}\varphi\left(\frac{b}{a}\right) = \varphi\left(\frac{a}{b}\right)\varphi\left(\frac{b}{a}\right) = \varphi\left(\frac{1}{1}\right) = 1_F(1_F)^{-1}$$

Проверка остальных свойств подполя позволяет убедиться, что K — поле, тогда φ — изоморфизм полей.

2.4 Группа перестановок, знак перестановки

Определение 8.1. *Группой перестановок* S_n называется следующее множество:

$$S_n = \{\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} \mid \sigma \text{ — биекция}\}$$

Данное множество является группой с операцией композиции $\circ$. Элементы группы $\sigma \in S_n$ называются *перестановками*.

Замечание. Уже упоминалось, что перестановки можно записывать в следующем виде:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Определение 8.2. Пусть $a_1, \dots, a_k \in \{1, \dots, n\}$ — различные числа. *Циклом* $(a_1, \dots, a_k)$ называется такая перестановка σ, что:

$$\sigma(a_1) = a_2, \sigma(a_2) = a_3, \dots, \sigma(a_k) = a_1$$
$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \backslash \{a_1, \dots, a_k\} : \sigma(i) = i$$

Определение 8.3. Циклы $(a_1, \dots, a_k)$ и $(b_1, \dots, b_l)$ называются *независимыми*, если $\{a_1, \dots, a_k\} \cap \{b_1, \dots, b_l\} = \varnothing$.

Определение 8.4. *Транспозицией* называется цикл вида (i, j).

Определение 8.5. Пусть $\sigma \in S_n$. *Беспорядком*, или *инверсией*, называется пара индексов (i, j) такая, что $i < j$ и $\sigma(i) > \sigma(j)$. Обозначение для количества беспорядков в σ — $N(\sigma)$.

Определение 8.6. *Знаком* перестановки $\sigma \in S_n$ называется величина $(-1)^{N(\sigma)}$. Обозначения — $\operatorname{sgn} \sigma$, $(-1)^{\sigma}$.

Определение 8.7. Перестановка $\sigma \in S_n$ называется *четной*, если $\operatorname{sgn} \sigma = 1$, *нечетной*, если $\operatorname{sgn} \sigma = -1$.

Утверждение 8.3. *Пусть* $\sigma \in S_n$. *Тогда* $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$ $(i < j)$: $\operatorname{sgn} \sigma = -\operatorname{sgn}(\sigma(i, j))$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $j = i+1$. Пусть $\tau = \sigma(i, i+1)$. Тогда $\tau(i+1) = \sigma(i)$, $\tau(i) = \sigma(i+1)$ $\forall k \notin \{i, i+1\}$: $\tau(k) = \sigma(k)$. Тогда:

- $(i, i+1)$ — беспорядок в $\sigma \Leftrightarrow (i, i+1)$ — не беспорядок в τ (и наоборот)
- (i, k) $(k \notin \{i, i+1\})$ — беспорядок в $\sigma \Leftrightarrow (i+1, k)$ — беспорядок в τ (и наоборот)
- $(i+1, k)$ $(k \notin \{i, i+1\})$ — беспорядок в $\sigma \Leftrightarrow (i, k)$ — беспорядок в τ (и наоборот)
- (k, l) $(k, l \notin \{i, i+1\})$ — беспорядок в $\sigma \Leftrightarrow (k, l)$ — беспорядок в τ (и наоборот)

Таким образом, $N(\tau) = N(\sigma) \pm 1$, и утверждение доказано. В случае, если $j \neq i+1$, разложим (i, j) в произведение нечетного числа транспозиций вида $(k, k+1)$, тогда, применяя утверждение нечетное число раз, снова получим, что $\operatorname{sgn} \sigma = -\operatorname{sgn}(\sigma(i, j))$. $\square$

2.5 Изоморфизм групп, теорема Кэли

Определение 9.4. Пусть G, H — группы. *Гомоморфизмом* групп G и H называется такое отображение $\varphi : G \to H$, что $\forall a,b \in G$: $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. Гомоморфизм называется *изоморфизмом*, если он также является биекцией.

Если изоморфизм $\varphi : G \to H$ существует, то группы G и H называются *изоморфными*. Обозначение — $G \cong H$.

Замечание. Аналогичным образом можно определить изоморфизм и для других алгебраических структур.

Утверждение 9.3. *Если $\varphi : G \to H$ — гомоморфизм групп, то:*

- $\varphi(e) = e$
- $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$

Доказательство.

- $\varphi(e) = \varphi(ee) = \varphi(e)\varphi(e) \Rightarrow \varphi(e) = e$
- $\varphi(e) = \varphi(aa^{-1}) = \varphi(a)\varphi(a^{-1}) \Rightarrow \varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}\varphi(e) = (\varphi(a))^{-1}$

Теорема 9.1 (Кэли)**.** *Пусть G — произвольная конечная группа, $|G| = n$. Тогда $\exists H \leqslant S_n : H \cong G$ (G вкладывается в S_n).*

Доказательство. Рассмотрим группу $S(G)$ всех перестановок множества G (т. е. биекций $G \to G$). $S(G) \cong S_n$, поскольку можно построить биекцию $G \to \{1, \ldots, n\}$. Найдем требуемую подгруппу в $S(G)$. $\forall a \in G$ определим $\sigma_a \in S(G) : \forall b \in G : \sigma_a(b) = ab$. Перестановка, обратная к σ_a — это $(\sigma_a)^{-1} \in S(G) : \forall b \in G : (\sigma_a)^{-1}(b) = a^{-1}b$. Положим $H = \{\sigma_a \in S(G) \mid a \in G\}$.

Заметим, что $\forall x \in G : (\sigma_a \circ \sigma_b)(x) = abx = \sigma_{ab}(x)$, $\sigma_e = \mathrm{id}$, $\forall x \in G : (\sigma_a \circ \sigma_{a^{-1}})(x) = ex = x = \sigma_e(x)$. Следовательно, $H \leqslant S(G)$,

и, более того, $\varphi : G \to H$, $\forall a \in G : \varphi(a) = \sigma_a$ — гомоморфизм, т. к. $\varphi(ab) = \sigma_{ab} = \sigma(a) \circ \sigma(b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$. Наконец, φ сюръективно (каждому $\sigma_a \in H$ соответствует $a \in G$) и инъективно (при $a \neq b$ $\sigma_a(e) \neq \sigma_b(e)$, т. е. $\sigma_a \neq \sigma_b$). Итак, φ — изоморфизм G и $H \leqslant S(G)$, причем $S(G) \cong S_n$. □

2.6 Циклические группы, их подгруппы

Определение 9.6. Пусть G — группа, $a \in G$. *Степень* $n \in \mathbb{Z}$ элемента a определяется следующим образом:

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{a \dots a}_{n}, \text{ если } n > 0 \\ e, \text{ если } n = 0 \\ \underbrace{a^{-1} \dots a^{-1}}_{-n}, \text{ если } n < 0 \end{cases}$$

Определение 9.7. *Порядком* элемента a называется наименьшее $n \in \mathbb{N}$ такое, что $a^n = e$. Если такого n не существует, то порядок считается равным ∞. Обозначения — $\operatorname{ord} a$, $|a|$.

Определение 9.8. Группа G называется *циклической*, если $\exists a \in \in G : \langle a \rangle = G$.

Пример. Циклическими группами являются:

- $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$
- $\mathbb{Z}_n = \langle \overline{1} \rangle$

1. *Подгруппа циклической группы тоже является циклической.*
2. *Если $G = \langle a \rangle$ — циклическая группа, $|G| = n \in \mathbb{N}$, то $\forall k \mid n$ в G есть ровно одна подгруппа порядка k, и других подгрупп в G нет.*

$(\forall n \in \mathbb{N} : n\mathbb{Z} \leqslant \mathbb{Z}, \forall k \mid n : \frac{n}{k}\mathbb{Z}_n \leqslant \mathbb{Z}_n)$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $|G| = \infty$. Тогда можно считать, что это группа $\mathbb{Z}$. Пусть $H \leqslant \mathbb{Z}$. Если $H = \{0\}$, утверждение уже доказано. Иначе — H содержит ненулевые элементы, в частности, натуральные числа. Пусть n — наименьшее из них. Поскольку H — группа, то $\langle n \rangle = n\mathbb{Z} \leqslant H$. Теперь рассмотрим $k \in H$. Разделим k с остатком на n: $k = qn + r$, тогда $r = k - qn \in H$. Если $r \neq 0$, то n — не наименьшее натуральное число, значит, $r = 0$ и $n \mid k$. Итак, $n\mathbb{Z} \leqslant H$, при этом $\forall k \in H : k \in n\mathbb{Z}$, тогда $H = n\mathbb{Z}$: все подгруппы $\mathbb{Z}$ имеют вид циклических групп $n\mathbb{Z}$.

Теперь пусть $|G| = n \in \mathbb{N}$. Тогда можно считать, что это группа $\mathbb{Z}_n$. Пусть $H \leqslant \mathbb{Z}$. Если $H = \{\overline{0}\}$, утверждение уже доказано. Иначе — H содержит ненулевые элементы. Выберем наименьшее $l > 0$

такое, что $\bar{l} \in H$. Разделим n с остатком на l: $n = ql + r$, тогда $r = n - ql$ и $\bar{r} = -q\bar{l} \in H$. Если $r \neq 0$, то l — не наименьшее натуральное число, значит, $r = 0$ и $l \mid n$. Тогда положим $k = \frac{n}{l}$ и заметим, что $\operatorname{ord}\bar{l} = k$ (поскольку $k\bar{l} = \bar{0}$ и $\forall m \in \{1, \ldots, k-1\} : 0 < ml < n$). Покажем теперь, что $H = \langle\bar{l}\rangle = l\mathbb{Z}_n$. H — группа, поэтому $\langle\bar{l}\rangle \leqslant H$. Аналогично, из соображений деления с остатком, $\forall\bar{d} \in H : l \mid d$, значит, $\forall\bar{d} \in H : \bar{d} \in l\mathbb{Z}_n$, тогда $H = l\mathbb{Z}_n$: все подгруппы $\mathbb{Z}_n$ имеют вид циклических групп $\frac{n}{k}\mathbb{Z}_n$ порядка k. $\square$

2.7 Теорема Лагранжа о порядке подгруппы, ее следствие

Определение 9.9. Пусть G — группа, $A, B \subset G$. Определим следующие операции с множествами:

- $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$
- $A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}$

Определение 9.10. Пусть G — группа, $H \leqslant G$, $a \in G$. Тогда для элемента a определим *левый смежный класс* по подгруппе H как aH, *правый смежный класс* — как Ha.

Определение 9.11. *Множество левых смежных классов* по подгруппе H в группе G обозначается как G/H, *множество правых смежных классов* — $H\backslash G$.

Замечание. Если $a \in H$, то $aH = H$, поскольку H — группа.

Теорема 9.4 (Лагранжа). *Пусть G — конечная группа, $H \leqslant G$. Тогда:*

$$|G| = |H| \cdot |G/H|$$

В частности, $|H| \mid |G|$.

Доказательство. G разбивается на $|G/H|$ непересекающихся смежных классов, и мощность каждого из них равна H (поскольку умножение на фиксированный элемент a инъективно). Следовательно, $|G| = |H| \cdot |G/H|$. $\square$

Следствие. Пусть G — конечная группа, $a \in G$. Тогда $\operatorname{ord} a \mid |G|$.

Доказательство. По теореме Лагранжа, $\operatorname{ord} a = |\langle a \rangle| \mid |G|$. $\square$

Следствие. Пусть G — конечная группа, $a \in G$. Тогда $a^{|G|} = e$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{ord} a = k$, при этом $k \mid |G|$, следовательно, $a^{|G|} = e$. $\square$

Следствие (Малая теорема Ферма). Пусть p — простое число, $\overline{a} \in \mathbb{Z}_p$, $\overline{a} \neq \overline{0}$. Тогда $\overline{a}^{p-1} = \overline{1}$.

Доказательство. Рассмотрим группу $(\mathbb{Z}_p \backslash \{\overline{0}\}, \cdot)$, $|\mathbb{Z}_p \backslash \{\overline{0}\}| = p - 1$. Применяя предыдущее следствие, получим $\overline{a}^{p-1} = \overline{1}$. $\square$

3, Линейные пространства

3.1 Линейное пространство

Определение 6.1. *Линейным (векторным) пространством* над полем F называется абелева группа $(V, +)$, на котором определено умножение на элементы поля $\cdot : F \times V \to V$ $((\alpha, \overline{v}) \mapsto \alpha\overline{v})$, удовлетворяющее следующим свойствам:

- $\forall \alpha, \beta \in F : \forall \overline{v} \in V : (\alpha + \beta)\overline{v} = \alpha\overline{v} + \beta\overline{v}$
- $\forall \alpha \in F : \forall \overline{u}, \overline{v} \in V : \alpha(\overline{u} + \overline{v}) = \alpha\overline{u} + \alpha\overline{v}$
- $\forall \alpha, \beta \in F : \forall \overline{v} \in V : (\alpha\beta)\overline{v} = \alpha(\beta\overline{v})$
- $\forall \overline{v} \in V : 1\overline{v} = \overline{v}$

Элементы F назвыаются *скалярами*, элементы V — *векторами.*

Пример. Линейными пространствами являются:

- V_1, V_2, V_3
- $F^n = M_{n\times 1}(F)$
- $M_{n\times k}(F)$
- $F[x]$ — многочлены от переменной x (с коэффициентами из F)

Пример. Пусть F — поле, K — его подполе. Тогда F является линейным пространством над K.

Утверждение 6.1.

- $\forall \overline{v} \in V : 0\overline{v} = \overline{0}$
- $\forall \alpha \in F : \alpha\overline{0} = \overline{0}$
- $\forall \overline{v} \in V : (-1)\overline{v} = -\overline{v}$

3.2 Понятие линейно (не)зависимой системы векторов

Аналогично пункту 1.3 из аналитической геометрии, только теперь вектор - элемент линейного пространства

3.3 Подпространство линейного пространства

Определение 6.2. *Подпространством* линейного пространства V над полем F называется такое непустое его подмножество U, что:

- $(U, +)$ — подгруппа в $(V, +)$
- $\forall \alpha \in F : \forall \overline{u} \in U : \alpha\overline{u} \in U$ (U замкнуто относительно умножения на скаляр)

U является пространством над F. Обозначение — $U \leqslant V$.

Пример. Подпространствами в соответствующих линейных пространствах являются:

- $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n \;\middle|\; x_1 + \dots + x_n = 0 \right\} \leqslant F^n$
- $U = \{A \in M_{n\times k} \mid a_{11} = 0\} \leqslant M_{n\times k}$
- $U = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(0) = 0\} \leqslant \mathbb{R}[x]$

3.4 Линейная оболочка системы векторов, ее характеризация

Определение 6.3. Пусть V — линейное пространство над F, векторы $\overline{v_1}, \dots, \overline{v_k}$ — элементы V. *Линейной оболочкой* векторов $\overline{v_1}, \dots, \overline{v_k}$ называется множество всевозможных линейных комбинаций этих векторов:

$$\langle \overline{v_1}, \dots, \overline{v_k} \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overline{v_i} \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in F \right\}$$

Замечание. Линейную оболочку можно определить и для бесконечного набора векторов. В этом случае следует брать всевозможные линейные комбинации конечного числа векторов из набора.

Утверждение 6.2. *Пусть V — линейное пространство, $\overline{v_1}, \dots, \overline{v_k} \in V$. Тогда $U = \langle \overline{v_1}, \dots, \overline{v_k} \rangle \leqslant V$, и, более того, U — наименьшее по включению подпространство в V, содержащее все векторы $\overline{v_1}, \dots, \overline{v_k}$.*

Доказательство. Сначала проверим, что U является линейным пространством (т. е. подпространством в V):

- $(U, +)$ — подгруппа в $(V, +)$:
$$\forall a = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overline{v_i}, b = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \overline{v_i} \in U : a + b = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i + \beta_i) \overline{v_i} \in U$$
$$\forall a = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overline{v_i} : (-a) = \sum_{i=1}^{k} (-\alpha_i) \overline{v_i} \in U$$

- U замкнуто относительно умножения на скаляр:
$$\forall a = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overline{v_i} : \forall \gamma \in F : \gamma a = \sum_{i=1}^{k} (\gamma \alpha_i) \overline{v_i} \in U$$

Наконец, если $W \leqslant V$ и $\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_k} \in W$, то и $U = \langle \overline{v_1}, \ldots, \overline{v_k} \rangle \subset \subset W$. $\square$

4. Системы линейных уравнений

4.1 Системы линейных уравнений

Определение 6.7. Пусть $A \in M_{k\times n}(F)$, $b, x \in M_{n\times 1}(F)$, $A = (a_{ij})$, $b = (b_{ij})$, $x = (x_{ij})$. Тогда *системой линейных уравнений* $Ax = b$ называется система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

Определение 6.8. A называется *матрицей системы* $Ax = b$, $(A|b)$ — *расширенной матрицей системы* $Ax = b$.

Определение 6.9. Система линейных уравнений $Ax = b$ называется *совместной*, если множество ее решений непусто.

Определение 6.10. Система линейных уравнений $Ax = b$ называется *однородной*, если $b = 0$.

Утверждение 6.5. *Множество решений однородной линейной системы уравнений $Ax = 0$ является линейным пространством.*

Доказательство. Пусть V — множество решений. Если $v_1, v_2 \in V$, то $A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2 = 0$, т. е. $v_1 + v_2 \in V$. Аналогично показывается, что $\forall v \in V : \forall \alpha \in F : \alpha v \in V$ и $\forall v \in V : -v \in V$. ($V$ непусто, т. к. $0 \in V$.) □

Замечание. Чтобы найти все решения однородной системы линейных уравнений, достаточно найти базис пространства решений.

Утверждение 6.6. *Рассмотрим совместную систему линейных уравнений $Ax = b$. Если x_0 — решение $Ax = b$, V — пространство решений $Ax = 0$. Тогда множество решений $Ax = b$ — это $x_0 + V = \{x_0 + v \mid v \in V\}$.*

Доказательство. Пусть U — множество решений $Ax = b$. Если $v \in V$, то $x_0 + v$ — решение $Ax = b$: $A(x_0 + v) = Ax_0 + Av = b$. Напротив, если $u \in U$, то $u - x_0$ — решение $Ax = 0$: $A(u - x_0) = b - b = 0$. Значит, $U = x_0 + V$. □

Определение 6.11. Системы линейных уравнений $Ax = b$ и $A'x = b'$ называются *эквивалентными*, если множества их решений совпадают.

4.2 Элементарные преобразования строк и

столбцов матрицы, элементарные матрицы, их свойства

Определение 6.12. *Элементарными преобразованиями* строк матрицы $A \in M_{n\times k}(F)$ называются:

- прибавление к i-й строке матрицы j-й строки, умноженной на скаляр $\alpha \in F$ $(i \neq j)$
- умножение i-й строки на скаляр $\lambda \in F^*$
- замена i-й и j-й строк местами $(i \neq j)$

Определение 6.13. *Элементарными матрицами* называются матрицы, домножение слева на которые приводит к осуществлению соответствующего элементарного преобразования строк:

- $D_{ij}(\alpha) = E + \alpha E_{ij}$
- $T_i(\lambda) = E + (\lambda - 1)E_{ii}$
- $P_{ij} = E - (E_{ii} + E_{jj}) + (E_{ij} + E_{ji})$

Определение 6.14. Матрица $A \in M_n(F)$ называется *обратимой*, если $\exists A^{-1} \in M_n(F) : AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Утверждение 6.7. *Элементарные матрицы обратимы.*

Доказательство. Обратными к данным элементарным матрицам будет такие элементарные матрицы, которым соответствуют преобразования, обратные к данным (т. е. такие, которые возвращают матрицу, к которой применено преобразование, в исходный вид):

- $(D_{ij}(\alpha))^{-1} = D_{ij}(-\alpha)$
- $(T_i(\lambda))^{-1} = T_i(\lambda^{-1})$
- $(P_{ij})^{-1} = P_{ij}$

$\square$

4.3 Приведение матрицы к ступенчатому и упрощенному виду

Определение 6.15. *Главным* элементом строки называется ее первый ненулевой элемент (у нулевой строки главного элемента нет).

Определение 6.16. Матрица A имеет *ступенчатый вид*, если номера главных элементов ее строк строго возрастают (если в матрице есть нулевые строки, то они расположены внизу).

Теорема 6.1 (Метод Гаусса)**.** *Любую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к ступенчатому виду.*

Доказательство. Пусть $A \in M_{n\times k}(F)$ — матрица. Запустим следующий алгоритм:

1. Если $A = 0$, она уже имеет ступенчатый вид.
2. Выберем i — наименьший номер ненулевого столбца. Переставим строки так, чтобы a_{1i} стал ненулевым.
3. Для всех $j \in \{2, \dots, n\}$ к j-й строке прибавим первую, умноженную на $-a_{ji}(a_{1i})^{-1}$. Тогда все элементы $a_{2i}, \dots, a_{ni}$ станут нулевыми.
4. Пусть после преобразований матрица A была приведена к виду A'. Повторим указанные действия для подматрицы $B \subset \subset A'$, расположенной на пересечении строк $a'_{2*}, \dots, a'_{n*}$ и столбцов $a'_{*(i+1)}, \dots, a'_{*k}$. Все дальнейшие преобразования не изменят элементов за пределами этой подматрицы.

$\square$

Определение 6.17. Алгоритм приведения к ступенчатому виду назвыается *прямым ходом метода Гаусса.*

Определение 6.19. Матрица A имеет *упрощенный вид*, если она является ступенчатой, и всякий ее столбец, содержащий главный элемент, состоит из одной единицы (соответствующей главному элементу) и нулей.

Теорема 6.3. *Любую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к упрощенному виду.*

Доказательство. Пусть $A \in M_{n\times k}(F)$ — матрица. Приведем ее к ступенчатому виду, и далее запустим следующий алгоритм:

- Если $A = 0$, она уже имеет упрощенный вид.
- Выберем i — наибольший номер ненулевой строки, и a_{ik} — главный элемент в ней. Умножим i-ю строку на $(a_{ik})^{-1}$, чтобы коэффициент a_{ik} стал равным 1.
- Для всех $j \in \{1, \ldots, i-1\}$ к j-й строке прибавим i-ю, умноженную на $-a_{jk}$. Тогда все элементы $a_{1k}, \ldots, a_{(i-1)k}$ станут нулевыми.
- Пусть после преобразований матрица A была приведена к виду A'. Повторим указанные действия для подматрицы $B \subset A'$, расположенной на пересечении строк $a'_{1*}, \ldots a'_{(i-1)*}$ и столбцов $a'_{*1}, \ldots, a'_{*(k-1)}$. Все дальнейшие преобразования не изменят элементов за пределами этой подматрицы.

□

Определение 6.20. Алгоритм приведения к упрощенному виду назвыается *обратным ходом метода Гаусса.*

4.4 Достаточное условие существования нетривиального решения у однородной системы линейных уравнений

Утверждение 6.8. *Рассмотрим произвольную однородную систему линейных уравнений $Ax = 0$, $A \in M_{k\times n}(F)$ $(n > k)$. Тогда у этой системы есть нетривиальное решение.*

Доказательство. Приведем A к упрощенному виду A'. Главных переменных в ней не больше, чем k, значит, есть свободные переменные. Каждому набору свободных переменных соответствует единственное решение, значит, если выбрать нетривиальный набор свободных переменных, то можно получить нетривиальное решение. $\square$

4.5 Основная лемма о линейной зависимости

Теорема 6.5 (Основная лемма о линейной зависимости)**.** *Пусть V — линейное пространство над F, $V = \langle \overline{v_1}, \ldots, \overline{v_k} \rangle$. Рассмотрим набор векторов $\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_n} \in V$, $n > k$. Тогда система $(\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_n})$ линейно зависима.*

Доказательство. Векторы $\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_n}$ выражаются через $\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_k}$, поскольку $\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_n} \in V = \langle \overline{v_1}, \ldots, \overline{v_k} \rangle$. Следовательно, $(\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_n}) = (\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_k})A$, где $A \in M_{k \times n}(F)$. Т. к. $n > k$, то $\exists \gamma \in F^n, \gamma \neq 0 : A\gamma = 0 \Rightarrow (\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_n})\gamma = \overline{0}$, значит, система линейно зависима. $\square$

Следствие. Пусть V — линейное пространство с базисом из n векторов. Тогда любая система из $n+1$ вектора в V линейно зависима.

Доказательство. Пусть $e = (\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n})$ — базис в V, тогда $V = \langle \overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n} \rangle$. Поэтому любой набор векторов $\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_{n+1}} \in V$ линейно зависим. $\square$

Следствие. Любые два базиса в конечно порожденном линейном пространстве V равномощны.

Доказательство. Пусть e_1, e_2 — базисы в V. Если без ограничения общности $|e_1| < |e_2|$, то $e_2 \subset \langle e_1 \rangle$ и e_2 состоит из большего числа векторов, чем e_1, поэтому e_2 линейно зависим. Но e_2 — базис, значит, это невозможно. $\square$

4.6 Фундаментальная система решений и общее решение однородной системы линейных уравнений

Определение 6.21. *Фундаментальной системой решений* однородной системы линейных уравнений называется базис ее пространства решений. Матрица, образованная базисными столбцами фундаментальной системы решений, называется *фундаментальной матрицей системы* и обозначается Φ.

Замечание. Любое решение системы $Ax = b$ имеет вид $x_0 + \Phi\gamma$, где $x_0 \in F^n$ — частное решение системы $Ax = b$, $\Phi \in M_{n\times m}(F)$ — фундаментальная матрица системы $Ax = 0$, $\gamma \in F^m$ — произвольный столбец коэффициентов.

Теорема 6.4. *Пусть расширенная матрица системы $Ax = b$ имеет упрощенный вид $(E_k|B|b)$. Тогда фундаментальная матрица Φ системы $Ax = 0$ и частное решение x_0 системы $Ax = b$ имеют вид:*

$$\Phi = \left(\frac{-B}{E_{n-k}}\right),\ x_0 = \left(\frac{b}{0}\right)$$

Доказательство. Покажем, что каждый столбец Φ является решением системы $Ax = 0$:

$$A\Phi = (E_k|B)\left(\frac{-B}{E_{n-k}}\right) = E_k(-B) + BE_{n-k} = 0$$

Столбцы Φ линейно независимы, поскольку любая их линейная комбинация имеет вид:

$$\Phi\gamma = \left(\frac{-B\gamma}{E_{n-k}\gamma}\right) = \left(\frac{-B\gamma}{\gamma}\right)$$

Это значит, что $\Phi\gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0$. Наконец, если α — решение системы $Ax = 0$, то его можно переписать в виде:

$$\alpha = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)$$

Рассмотрим линейную комбинацию $\Phi\gamma$. Это решение $Ax = 0$, причем с теми же значениями свободных переменных, что и в α, но главные переменные однозначно выражаются через свободные, поэтому $\Phi\gamma = \alpha$. Таким образом, Φ — фундаментальная матрица системы $Ax = 0$.

Остается проверить, что x_0 является частным решением $Ax = b$:

$$Ax_0 = (E_k|B)\left(\frac{b}{0}\right) = E_kb + B0 = b$$

4.7 Общее решение неоднородной системы

Замечание. Любое решение системы $Ax = b$ имеет вид $x_0 + \Phi\gamma$, где $x_0 \in F^n$ — частное решение системы $Ax = b$, $\Phi \in M_{n\times m}(F)$ — фундаментальная матрица системы $Ax = 0$, $\gamma \in F^m$ — произвольный столбец коэффициентов.

5. Базис и размерность

5.1 Базис и размерность линейного пространства, их свойства

Определение 6.22. Пусть V — конечно порожденное линейное пространство. Его *размерностью* называется количество векторов в любом его базисе. Обозначение — $\dim V$.

Утверждение 6.9. *Пусть V — линейное пространство,* $\dim V = n$. *Тогда:*

1. *Если $V = \langle \overline{v_1}, \ldots, \overline{v_n} \rangle$, то $(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_n})$ — базис.*
2. *Если система $(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_n})$ линейно независима, то она является базисом.*

Доказательство.

1. Предположим $(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_n})$ не является базисом. Следовательно, она линейно зависима, тогда без ограничения общности

   $\overline{v_n}$ выражается через $(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_{n-1}})$. Значит, $V = \langle \overline{v_1}, \ldots, \overline{v_n} \rangle = \langle \overline{v_1}, \ldots, \overline{v_{n-1}} \rangle$, но из этого следует, что в V нет линейно независимых систем из n векторов — противоречие с тем, что $\dim V = n$.

2. Предположим $(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_n})$ не является базисом. Следовательно, она выражает не все векторы пространства V, т. е. $\exists \overline{v} \in V : \overline{v} \notin \langle \overline{v_1}, \ldots, \overline{v_n} \rangle$. Но тогда система $(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_n}, \overline{v})$ линейно независима — противоречие с тем, что $\dim V = n$.

Утверждение 6.10. *Пусть V — конечно порожденное линейное пространство над F, $U \leqslant V$. Тогда U тоже конечно порожденное, и, более того, $\dim U \leqslant \dim V = n$.*

Доказательство. Будем выбирать из U векторы $\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots$ так, чтобы система $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots)$ оставалась линейно независимой. Процесс закончится не позднее, чем после n шагов, поскольку в V нет линейно независимой системы из $n+1$ вектора. Пусть полученная система — $(\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_k})$ $(k \leqslant n)$. Она линейно независима, и $\forall \overline{u} \in U$: $(\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_k}, \overline{u})$ линейно зависима, значит, все векторы U выражаются через $(\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_k})$, тогда эта система — базис в U. □

5.2 Теорема об изоморфизме

Теорема 6.6. *Пусть U и V — конечно порожденные пространства над полем F. Тогда $U \cong V \Leftrightarrow \dim U = \dim V$.*

Доказательство. Доказательство $\Rightarrow$: рассмотрим изоморфизм φ : $U \to V$. Пусть $(\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n})$ — базис в U. Покажем, что $(\varphi(\overline{e_1}), \ldots, \varphi(\overline{e_n}))$ базис в V:

$$\forall \gamma \in F^n : (\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n})\gamma \neq \overline{0} \Rightarrow \varphi((\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n})\gamma) \neq \varphi(\overline{0}) = \overline{0}$$

Но $\varphi((\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n})\gamma) = (\varphi(\overline{e_1}), \ldots, \varphi(\overline{e_n}))\gamma$, т. к. φ — изоморфизм, поэтому любая нетривиальная линейная комбинация $\varphi(\overline{e_1}), \ldots, \varphi(\overline{e_n})$ не равна нулю, значит, $(\varphi(\overline{e_1}), \ldots, \varphi(\overline{e_n}))$ — линейно независимая система. Кроме того, $\forall \overline{v} \in V$ выражается через $(\varphi(\overline{e_1}), \ldots, \varphi(\overline{e_n}))$:

$$\forall \overline{v} = V : \exists \overline{u} \in U : \overline{v} = \varphi(\overline{u}) = \varphi\left(\sum_{i-1}^{n} \alpha_i \overline{e_i}\right) = \sum_{i-1}^{n} \alpha_i \varphi(\overline{e_i})$$

Таким, образом, $(\varphi(\overline{e_1}), \ldots, \varphi(\overline{e_n}))$ — базис из n векторов в V, следовательно, $\dim U = \dim V = n$.

Доказательство $\Leftarrow$: пусть $\dim U = \dim V = n$, тогда:

$$\begin{cases} U \cong F^n \\ V \cong F^n \end{cases} \Rightarrow U \cong V$$

5.3 Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса

Утверждение 6.11. *Пусть V — конечно порожденное линейное пространство над F, $\dim V = n$, $\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_k} \in V$ $(k < n)$ — векторы, образующие линейно независимую систему. Тогда $(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_k})$ можно дополнить до базиса в V.*

Доказательство. Выберем $\overline{v_{k+1}} \in V$ такой, что $\overline{v_{k+1}} \notin \langle \overline{v_1}, \ldots, \overline{v_k} \rangle$, при этом система остается линейно независимой. Затем аналогично выберем $\overline{v_{k+2}} \in V$ такой, что $\overline{v_{k+2}} \notin \langle \overline{v_1}, \ldots, \overline{v_{k+1}} \rangle$. Процесс будет

продолжаться, пока не будет получена система $(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_n})$, которая и является базисом. Он не может остановиться раньше, потому что пока в системе менее n векторов, она не выражает все пространство V, и не может продолжиться далее, потому что в V нет линейно независимой системы из $n+1$ векторов. $\square$

5.4 Координаты вектора в базисе, запись операций над векторами через координаты

5.5 Изменение координат вектора при изменении базиса

5.6 Матрица перехода

Замечание. Аналогично случаю V_i, для базисов e и e' векторного пространства V определяется матрица перехода S от e к e': $e' = eS$.

Если $\dim V = n$, то $S \in M_n(F)$.

Если $\overline{v} \underset{e}{\leftrightarrow} \alpha$ и $\overline{v'} \underset{e'}{\leftrightarrow} \alpha'$, то $\alpha = S\alpha'$.

Утверждение 6.13. *Матрица перехода S от базиса e к базису e' обратима.*

Доказательство. Т. к. возможен также обратный переход от e' к e, то $\exists T \in M_n(F) : e = e'T = e(ST)$, т. е. $ST = E$. Аналогично, $e' = eS = e'(TS)$, т. е. $ST = TS = E$. $\square$

5.7 Мощность конечного векторного пространства и конечного поля

6. Ранг

6.1 Ранг системы векторов, его связь с размерностью линейной оболочки

Определение 6.23. Пусть V — конечно порожденное линейное пространство над F. $X \subset V$ — произвольный набор векторов V. *Рангом* системы X называется наибольший размер линейно независимой подсистемы в X. Обозначение — $\operatorname{rk} X$.

Утверждение 6.12. $\operatorname{rk} X = \dim \langle X \rangle$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{rk} X = k$ и $(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_k})$ — линейно независимая система в X. Тогда $\forall \overline{v} \in X : (\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_k}, \overline{v})$ линейно зависима, значит, $X \subset \langle \overline{v_1}, \ldots, \overline{v_k} \rangle$, тогда $\langle X \rangle \subset \langle \overline{v_1}, \ldots, \overline{v_k} \rangle \subset \langle X \rangle$, т. е. $\langle X \rangle = \langle \overline{v_1}, \ldots, \overline{v_k} \rangle$, $(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_k})$ — базис в $\langle X \rangle$, поэтому $\dim \langle X \rangle = k = \operatorname{rk} X$. $\square$

6.2 Ранг матрицы

Определение 6.24. *Строчным рангом* матрицы $A \in M_{n\times k}(F)$ называется ранг системы ее строк. Обозначение — $\mathrm{rk}_r A$.

Определение 6.25. *Столбцовым рангом* матрицы $A \in M_{n\times k}(F)$ называется ранг системы ее столбцов. Обозначение — $\mathrm{rk}_c A$.

Утверждение 6.15. $\mathrm{rk}_c AB \leqslant \mathrm{rk}_c A$, $\mathrm{rk}_r AB \leqslant \mathrm{rk}_r B$.

Доказательство. Пусть U — линейная оболочка столбцов A, V — линейная оболочка столбцов AB. Уже было доказано, что столбцы AB являются линейными комбинациями столбцов A, значит, они лежат в U, тогда $V \leqslant U$. Следовательно, $\mathrm{rk}_r(AB) = \dim V \leqslant \dim U = \mathrm{rk}_r A$. Второе неравенство доказывается аналогично. □

Определение 6.26. *Рангом матрицы* $A \in M_{n\times k}(F)$ называется ее строчный или столбцовый ранг. Обозначение — $\mathrm{rk}\, A$.

6.3 Теорема о ранге матрицы

Теорема 6.7 (О ранге матрицы)**.** $\mathrm{rk}_r A = \mathrm{rk}_c A$.

Доказательство. Пусть $r = rk_c A$, т. е. все столбцы A выражаются через некоторые r столбцов. Составим из этих r столбцов матрицу B, тогда каждый столбец A имеет вид $B\gamma$ ($\gamma \in F^r$). Следовательно, A можно представить в виде $B(\gamma_1|\ldots|\gamma_k)$. Уже было доказано, что $\mathrm{rk}_r A \leqslant \mathrm{rk}_r(\gamma_1|\ldots|\gamma_k) \leqslant r$, потому что в каждом столбце γ_i ровно r элементов. Аналогично показывается, что $\mathrm{rk}_c A \leqslant \mathrm{rk}_r A$. Таким образом, $\mathrm{rk}_r A = \mathrm{rk}_c A$. □

6.4 Теорема о базисном миноре

Теорема 6.8 (О базисном миноре)**.** *Пусть $A \in M_{n\times k}(F)$, $\operatorname{rk} A = r$. Тогда в A найдется подматрица размера $r \times r$ ранга r. Более того, если выбрать линейно независимую систему из r строк A и линейно независимую систему из r столбцов A, то на их пересечении будет расположена искомая матрица.*

Доказательство. Докажем сразу более сильное утверждение. Без ограничения общности можно считать, что искомая матрица M расположена в левом верхнем углу A. Пусть $R \in M_{r\times k}$ — подматрица из первых r строк A, $C \in M_{n\times r}$ — подматрица из первых r столбцов A. Столбцы A выражаются через столбцы C, поэтому $A = CB$, $B \in M_{r\times n}(F)$. Из этого следует, что столбцы R выражаются через столбцы M с теми же коэффициентами, что и столбцы A через столбцы C, т. е. $R = MB$. Кроме того, строки A выражаются через строки R, т. е. $A = SR$, $S \in M_{n\times r}(F)$. Таким образом, $A = SMB$, тогда $\operatorname{rk} A \leqslant \operatorname{rk} M \leqslant r$. Наконец, т. к. $\operatorname{rk} A = r$, то $\operatorname{rk} M = r$. □

6.5 Нахождение ранга с помощью элементарных преобразований

Следствие. При элементарных преобразованиях строк не меняется ранг матрицы и линейная зависимость столбцов.

Утверждение 6.20. *Ранг ступенчатой матрицы равен числу ступеней.*

Доказательство. Если в $A \in M_{n\times k}(F)$ всего r ступеней, то в ней всего r ненулевых строк, значит, $\operatorname{rk} A \leqslant r$. С другой стороны, эти строки образуют линейно независимую систему. Предположим, что это не так, тогда существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю:

$$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in F : \sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_{1*} = 0$$

Пусть j — наименьший индекс такой, что $\alpha_j \neq 0$, k — индекс главного элемента в строке a_{j*}, тогда на k-й позиции в данной линейной комбинации стоит элемент $\alpha_j a_{jk} \neq 0$ — противоречие. Значит, система r строк линейно независима, тогда $\operatorname{rk} A = r$. □

Следствие. Для нахождения ранга матрицы следует привести ее к ступенчатому виду, и число ступеней в полученной матрице будет равно искомому рангу.

6.6 Теорема Кронекера-Капелли

Теорема 6.10 (Кронекера-Капелли)**.** *Система линейных уравнений* $Ax = b$ *совместна* $\Leftrightarrow \operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(A|b)$.

Доказательство. Приведем расширенную матрицу системы $(A|b)$ к ступенчатому виду $(A'|b')$. Поскольку перестановки столбцов не происходит, то матрица A' — это упрощенный вид матрицы A. Система совместна $\Leftrightarrow$ в $(A'|b')$ нет ступеньки, начинающейся в столбце b' $\Leftrightarrow$ у A' и $(A'|b')$ одно и то же число ступенек $\Leftrightarrow \operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(A|b)$. □

6.7 Невырожденные и обратимые матрицы

Определение 6.27. Матрица $A \in M_n(F)$ называется *невырожденной*, если $\operatorname{rk} A = n$.

Теорема 6.11. *Пусть* $A \in M_n(F)$. *Тогда равносильны следующие утверждения:*

1. *A невырожденна.*
2. *A элементарными преобразованиями строк приводится к* E.
3. *A является произведением элементарных матриц.*
4. *A обратима.*
5. *A обратима слева (т. е.* $\exists B \in M_n(F) : BA = E$*) или справа.*

Доказательство. Доказательство $1 \Rightarrow 2$. Приведем A к упрощенному виду A'. Т. к. $\operatorname{rk} A' = \operatorname{rk} A = n$, то $A' = E$.

Доказательство $2 \Rightarrow 3$. Пусть последовательности преобразований, приводящих A к E, соответствует последовательность элементарных матриц $M_1, \ldots, M_k \in M_n(F)$, т. е. $M_k \ldots M_1 A = E$. Тогда $A = M_1^{-1} \ldots M_k^{-1}$ — произведение элементарных матриц.

Доказательство $3 \Rightarrow 4$. Если $A = M_1^{-1} \ldots M_k^{-1}$, то A обратима: $\exists B = M_k \ldots M_1 \in M_n(F) : AB = BA = E$.

Доказательство $4 \Rightarrow 5$. Если A обратима, то, в частности, A обратима слева или справа.

Доказательство $5 \Rightarrow 1$. Пусть без ограничения общности A обратима слева, т. е. $\exists B \in M_n(F) : BA = E$. Тогда $n = \operatorname{rk} E = \operatorname{rk} BA \leqslant \operatorname{rk} A$. Поскольку $\operatorname{rk} A \leqslant n$, то $\operatorname{rk} A = n$. $\square$

6.8 Нахождение обратной матрицы при помощи элементарных преобразований

Следствие. Пусть A — невырожденная матрица. Тогда матрицу, обратную к ней, можно определить, приведя $(A|E)$ к упрощенному виду $(E|C)$: матрица C и будет искомой.

Доказательство. Пусть последовательности преобразований, приводящих $(A|E)$ к $(E|C)$, соответствует последовательность элементарных матриц $M_1, \ldots, M_k \in M_n(F)$, т. е. $M_k \ldots M_1(A|E) = (E|C)$. Преобразуем произведение в левой части равенства:

$$M_k \ldots M_1(A|E) = (M_k \ldots M_1 A | M_k \ldots M_1 E) = (M_k \ldots M_1 A | M_k \ldots M_1)$$

Следовательно, $M_k \ldots M_1 = C$ и $CA = E$. $\square$

Замечание. В общем случае, для матрицы $A \in M_{n \times k}(F)$ не существует обратной матрицы $B \in M_{k \times n}(F)$: $\operatorname{rk}(AB)$ и $\operatorname{rk}(BA)$ не превосходят $\min(n, k)$, и потому не могут равняться $\operatorname{rk} E_{\max(n,k)} = \max(n, k)$.

7. Подпространства

7.1 Подпространства в линейном пространстве

Определение 6.2. *Подпространством* линейного пространства V над полем F называется такое непустое его подмножество U, что:

- $(U, +)$ — подгруппа в $(V, +)$
- $\forall \alpha \in F : \forall \overline{u} \in U : \alpha\overline{u} \in U$ (U замкнуто относительно умножения на скаляр)

U является пространством над F. Обозначение — $U \leqslant V$.

Пример. Подпространствами в соответствующих линейных пространствах являются:

- $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n \;\middle|\; x_1 + \cdots + x_n = 0 \right\} \leqslant F^n$
- $U = \{A \in M_{n\times k} \mid a_{11} = 0\} \leqslant M_{n\times k}$
- $U = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(0) = 0\} \leqslant \mathbb{R}[x]$

7.2 Сумма и пересечение подпространств

Утверждение 6.21. *Пусть V — линейное пространство над полем F, $U_1, U_2 \leqslant V$. Тогда $U_1 \cap U_2 \leqslant V$.*

Доказательство. Если $\overline{u}, \overline{v} \in U_1 \cup U_2$, то $\overline{u} \in U_1, U_2$ и $\overline{v} \in U_1, U_2$. Тогда и $\overline{u} + \overline{v} \in U_1, U_2$. Аналогично, $\forall \overline{u} \in U : \forall \alpha \in F : \alpha\overline{u} \in U_1, U_2$. Наконец, $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, т. к. $\overline{0} \in U_1, U_2$. □

Определение 6.28. Пусть V — линейное пространство над полем F, $U_1, U_2 \leqslant V$. Тогда их *суммой* называется $U_1 + U_2 = \{\overline{u_1} + \overline{u_2} \mid \overline{u_1} \in U_1, \overline{u_2} \in U_2\}$. Сумма $U_1 + \dots + U_k$ определяется аналогично.

Утверждение 6.22. *Пусть V — линейное пространство над полем F, $U_1, \dots, U_k \leqslant V$. Тогда $U_1 + \dots + U_k \leqslant V$.*

Доказательство. Сначала докажем справедливость утверждения для $U_1 + U_2$. $U_1 + U_2 \neq \varnothing$, т. к. $U_1 \neq \varnothing$, $U_2 \neq \varnothing$. Если $\overline{u_1} + \overline{u_2}, \overline{v_1} + \overline{v_2} \in U_1 + U_2$ ($\overline{u_1}, \overline{v_1} \in U_1$, $\overline{u_2}, \overline{v_2} \in U_2$), то $\overline{u_1} + \overline{u_2} + \overline{v_1} + \overline{v_2} = (\overline{u_1} + \overline{v_1}) + (\overline{u_2} + \overline{v_2}) \in U_1 + U_2$. Аналогично, $\forall \overline{u_1} \in U_1, \overline{u_2} \in U_2 : \forall \alpha \in F : \alpha(\overline{u_1} + \overline{u_2}) \in U_1 + U_2$.

Чтобы обобщить утверждение на $U_1, \dots, U_k \leqslant V$, заметим, что из ассоциативности сложения в V следует ассоциативность сложения подпространств. Тогда достаточно показать по индукции, что $U_1 + U_2 \leqslant V$, $(U_1 + U_2) + U_3 \leqslant V$, и т. д. □

Замечание. Определить сумму $U_1 + \dots + U_k$ можно и другим способом:

$$U_1 + \dots + U_k = \langle U_1 \cup \dots \cup U_k \rangle$$

Утверждение 6.23. *Если $\forall i \in \{1, \dots, k\} : U_i = \langle A_i \rangle$, то $U_1 + \ldots + U_k = \langle A_1 \cup \dots \cup A_k \rangle$.*

Доказательство. Доказательство $\subset$. Если $\overline{u_1} + \dots + \overline{u_k} \in U_1 + \ldots + U_k$ ($\overline{u_1} \in U_1, \dots, \overline{u_k} \in U_k$), то $\overline{u_i}$ выражается через A_i $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, тогда $\overline{u_1} + \dots + \overline{u_k} \in \langle A_1 \cup \dots \cup A_k \rangle$.

Доказательство $\supset$. $\forall i \in \{1, \dots, k\} : A_i \subset U_i \subset U_1 + \dots + U_k$, тогда $A_1 \cup \dots \cup A_k \subset U_1 + \dots + U_k$. Но, т. к. сумма подпространств — это линейное пространство, то $\langle A_1 \cup \dots \cup A_k \rangle \subset U_1 + \dots + U_k$. □

Следствие. $\dim(U_1 + \dots + U_k) \leqslant \dim U_1 + \dots + \dim U_k$.

Доказательство. Возьмем в качестве A_i (систем векторов, порождающих U_i) базисы в соответствующих подпространствах. Тогда $U_1 + \dots + U_k$ порождено системой из не более, чем $\dim U_1 + \dots + \dim U_k$ векторов. □

7.3 Прямая сумма подпространтсв, ее характеризация

Определение 6.29. Пусть $U_1, \dots, U_k \leqslant V$. Сумма $U = U_1 + \dots + U_k$ называется *прямой*, если $\forall \overline{u} \in U : \exists! \overline{u_1} \in U_1, \dots, \overline{u_k} \in U_k : \overline{u} = \overline{u_1} + \dots + \overline{u_k}$. Обозначение — $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$.

Утверждение 6.24. *Сумма $U_1 + \dots + U_k$ прямая $\Leftrightarrow \exists! \overline{u_1} \in U_1, \dots, \overline{u_k} \in U_k : \overline{u_1} + \dots + \overline{u_k} = \overline{0}$.*

Доказательство. Доказательство $\Rightarrow$. Данное утверждение верно по определению прямой суммы: единственное разложение для $\overline{0}$ — это $\overline{0} + \dots + \overline{0}$.

Доказательство $\Leftarrow$. Пусть для некоторого $\overline{u} \in U$ разложение не единственно: $\overline{u} = \overline{u_1} + \dots + \overline{u_k} = \overline{w_1} + \dots + \overline{w_k}$. Тогда $\overline{0} = (\overline{u_1} - \overline{w_1}) + \dots + (\overline{u_k} - \overline{w_k})$ $((\overline{u_1} - \overline{w_1}) \in U_1, \dots, (\overline{u_k} - \overline{w_k}) \in U_k)$. Но вектор $\overline{0}$ раскладывается единственным образом, поэтому $\overline{u_1} = \overline{w_1}, \dots, \overline{u_k} = \overline{w_k}$. □

Теорема 6.12. *Пусть $U_1, \dots, U_k \in V$. Тогда сумма $U_1 + \dots + U_k$ прямая $\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, k\} : U_i \cap (U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + U_k) = \{\overline{0}\}$.*

Доказательство. Доказательство $\Rightarrow$. Предположим, что $\exists \overline{u_i} \neq \overline{0} : \overline{u_i} \in U_i, \overline{u_i} = \overline{u_1} + \dots + \overline{u_{i-1}} + \overline{u_{i+1}} + \dots + \overline{u_k} \in U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + U_k$. Но тогда $\overline{0} = \overline{u_1} + \dots + \overline{u_{i-1}} + \overline{u_i} + \overline{u_{i+1}} + \dots + \overline{u_k}$ — разложение для нуля, отличное от суммы нулей — противоречие.

Доказательство $\Leftarrow$. Предположим, что сумма не прямая, т. е. $\overline{0} = \overline{u_1} + \dots + \overline{u_k}$ и $\exists i : \overline{u_i} \neq \overline{0}$. Но тогда $-\overline{u_i} = \overline{u_1} + \dots + \overline{u_{i-1}} + \overline{u_{i+1}} + \ldots + \overline{u_k}$ — некоторый ненулевой вектор лежит и в U_i, и в $U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + U_k$ — противоречие. □

Теорема 6.13. *Пусть $U_1, \dots, U_k \leqslant V$. Тогда равносильны следующие утверждения:*

1. *Сумма $U = U_1 + \ldots U_k$ прямая.*
2. $\dim (U_1 + \dots + U_k) = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$.
3. *Для любого набора базисов $e_1, \dots, e_k$ в $U_1, \dots, U_k$ верно, что $(e_1, \dots, e_k)$ — базис в U.*
4. *Существует такой набор базисов $e_1, \dots, e_k$ в $U_1, \dots, U_k$, что $(e_1, \dots, e_k)$ — базис в U.*

Доказательство. Доказательство $1 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4$. Пусть e_1 — базис в $U_1, \ldots, e_k$ — базис в U_k. Докажем, что сумма прямая $\Leftrightarrow (e_1, \ldots, e_k)$ — базис в U. Т. к. $U_i = \langle e_i \rangle$, то $U = \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$. Значит, остается проверить, что система $(e_1, \ldots, e_k)$ линейно независима. Предположим, что сумма U не прямая, тогда $\exists \overline{u_i} \in U_i : \overline{u_1} + \cdots + \overline{u_k} = \overline{0}$, при этом не все векторы в сумме нулевые. Разложив каждый $\overline{u_i}$ по базису e_i, получим нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю, значит, система линейно зависима.

Напротив, если система $(e_1, \ldots, e_k)$ линейно зависима, то сгруппируем нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю, по базисам, и получим $\overline{u_1} + \cdots + \overline{u_k} = \overline{0}$, причем не все векторы нулевые, значит, сумма не прямая.

Доказательство $2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4$. Если $(\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_k})$ — базис в U, то $\dim U = \dim U_1 + \cdots + \dim U_k$. Если $(\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_k})$ — не базис в U, то эта система линейно зависима, тогда, т. к. она выражает все пространство U, $\dim U < \dim U_1 + \cdots + \dim U_k$. $\square$

7.4 Прямое дополнение подпространства

Определение 6.30. Пусть $U \leqslant V$. Тогда $W \leqslant V$ называется *прямым дополнением* подпространства U в пространстве V, если сумма $U + W$ прямая и $U \oplus W = V$.

Замечание. $\dim U + \dim W = \dim V$.

Утверждение 6.25. *Пусть $U \leqslant V$. Тогда существует прямое дополнение U в V.*

Доказательство. Выберем базис $(\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_k})$ — базис в U. Уже было доказано, что любую линейно независимую систему, значит, в частности, e, можно дополнить до базиса. Пусть $(\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_k}, \overline{e_{k+1}}, \ldots, \overline{e_n})$ — базис в V. Тогда рассмотрим $W = \langle \overline{e_{k+1}}, \ldots, \overline{e_n} \rangle$. $U + W = V$, и, более того, объединение базисов U и W является базисом в V, значит, сумма $U \oplus W$ прямая. $\square$

7.5 Связь размерностей суммы и пересечения подпространств

Теорема 6.14. *Пусть* $U_1, U_2 \leqslant V$. *Тогда* $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$.

Доказательство. Пусть $U = U_1 \cap U_2$, тогда $U \leqslant U_1, U_2$. Выберем W_1, W_2 — прямые дополнения U в U_1 и U_2 соответственно. Уже было доказано, что $\dim W_i + \dim U = \dim U_i$.

Докажем теперь, что $U_1 + U_2 = U \oplus W_1 \oplus W_2$. $U_1 + U_2 = (U + W_1) + (U + W_2) = U + W_1 + W_2$. Эта сумма прямая, т. к. если $\overline{0} = \overline{u} + \overline{w_1} + \overline{w_2}$, то $-\overline{w_1} = \overline{u} + \overline{w_2}$, т. е. $\overline{w_1} \in W_1, U_1, U_2 \Rightarrow \overline{w_1} \in W_1 \cap U \Rightarrow \overline{w_1} = \overline{0}$. Аналогично, $\overline{w_2} = \overline{0}$, тогда и $\overline{u} = \overline{0}$.

Таким образом, $\dim(U_1 + U_2) = \dim U + \dim W_1 + \dim W_2$, $\dim U_1 = \dim U + \dim W_1$, $\dim U_2 = \dim U + \dim W_2$. Используя эти равенства, получаем требуемый результат. □

8. Линейные функции

8.1 Линейные функции (функционалы)

Определение 7.1. Пусть V — линейное пространство над полем F. Отображение $f : V \to F$ называется *линейной функцией* (*линейным функционалом*), если оно обладает свойством линейности:

- $\forall \overline{v_1}, \overline{v_2} \in V : f(\overline{v_1} + \overline{v_2}) = f(\overline{v_1}) + f(\overline{v_2})$
- $\forall \overline{v} \in V : \forall \alpha \in F : f(\alpha \overline{v}) = \alpha f(\overline{v})$

8.2 Сопряженное (двойственное) пространство, его размерность

Определение 7.2. Множество линейных функционалов на V называется пространством, *сопряженным* к V. Обозначение — V^*. На этом множестве можно определить операции сложения и умножения на скаляр:

- $\forall \overline{f_1}, \overline{f_2} \in V^* : (f_1 + f_2)(\overline{v}) = f_1(\overline{v}) + f_2(\overline{v})$
- $\forall \overline{f} \in V^* : \forall \alpha \in F : (\alpha f)(\overline{v}) = \alpha f(\overline{v})$

Утверждение 7.1. *V^* — линейное пространство над F.*

Доказательство. Покажем сначала, что $(V^*, +)$ — абелева группа:

- Ассоциативность и коммутативность следуют из их выполнимости в $(F, +)$.
- Нейтральный элемент — 0: $\forall \overline{v} \in V : 0(\overline{v}) = \overline{0}$.
- Обратный к f элемент — это $-f$.

Теперь проверим свойства линейного пространства:

- $((\alpha+\beta)f)(\overline{v}) = (\alpha+\beta)f(\overline{v}) = \alpha f(\overline{v}) + \beta f(\overline{v}) = (\alpha f)(\overline{v}) + (\beta f)(\overline{v})$
- $(\alpha(f_1 + f_2))(\overline{v}) = \alpha(f_1 + f_2)(\overline{v}) = \alpha(f_1(\overline{v}) + f_2(\overline{v})) = \alpha f_1(\overline{v}) + \alpha f_2(\overline{v}) = (\alpha f_1 + \alpha f_2)(\overline{v})$

Пример. Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис в V. Тогда для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ определим $f_i \in V^*$:

$$\text{Если } \overline{v} \underset{e}{\leftrightarrow} \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \text{ то } f_i(\overline{v}) = \alpha_i$$

Утверждение 7.2. *$(f_1, \dots, f_n)$ — базис в V^*.*

Доказательство. Сначала докажем, что система $(f_1, \dots, f_n)$ линейно независима. Действительно, если существует нетривиальная линейная комбинация $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n$, равная нулю, то, в частности, она принимает нулевое значение на базисных векторах e. Из того, что $f_i(\overline{e_j}) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j \\ 0, \text{ если } i \neq j \end{cases}$, следует, что все $\lambda_i = 0$.

Теперь покажем, что $\langle f_1, \dots, f_n \rangle = V^*$. Выберем произвольный функционал $f \in V^*$:

$$f(\overline{v}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{e_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\overline{e_i}) = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{e_i}) f_i(\overline{v}) = \left(\sum_{i=1}^{n} f(\overline{e_i}) f_i\right)(\overline{v})$$

Для каждого f значения $f(\overline{e_i})$ зафиксированы, поэтому каждый функционал f представим в виде линейной комбинации f_i. Таким образом, $(f_1, \dots, f_n)$ — базис в V^*. $\square$

Следствие. $\dim V^* = \dim V$.

8.3 Взаимный (биортогональный) базис, координаты в нем, замена координат при замене базиса

Определение 7.3. Базис $\mathcal{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ в V^* называется *взаимным* (*сопряженным*) к базису $e = (\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n})$ в V.

Замечание. Если для V базисные вектора записываются в строку, а координаты — в столбец, в V^* удобнее делать это наоборот.

Утверждение 7.3. *Пусть e и e' — базисы в V, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$ — взаимные к ним базисы в V^*. Если $e' = eS$, то $\mathcal{F} = S\mathcal{F}'$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный вектор $\overline{v} \in V$ с координатными столбцами α и α' в базисах e и e' соответственно: $\overline{v} = e\alpha = e'\alpha'$, $\alpha = S\alpha'$. Тогда:

$$\mathcal{F}(\overline{v}) = \begin{pmatrix} f_1(\overline{v}) \\ \vdots \\ f_n(\overline{v}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha$$

$$S\mathcal{F}'(\overline{v}) = S\begin{pmatrix} f_1'(\overline{v}) \\ \vdots \\ f_n'(\overline{v}) \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{pmatrix} = S\alpha' = \alpha$$

□

8.4 Канонический изоморфизм пространства и дважды сопряженного к нему

Определение 7.4. Пространством, *дважды сопряженным* к V, называется пространство, сопряженное к V^*: $V^{**} = (V^*)^*$.

Пример. Пусть $\overline{v} \in V$. Определим $v^{**} \in V^{**}$ следующим образом: $v^{**}(f) = f(\overline{v})$. Проверим, что v^{**} — линейный функционал:

- $v^{**}(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)(\overline{v}) = f_1(\overline{v}) + f_2(\overline{v}) = v^{**}(f_1) + v^{**}(f_2)$
- $v^{**}(\alpha f) = (\alpha f)(\overline{v}) = \alpha f(\overline{v}) = \alpha v^{**}(f)$

Теорема 7.1. *Отображение $\varphi : V \to V^{**}$ такое, что $\varphi(\overline{v}) = v^{**}$ — изоморфизм линейных пространств V и V^{**}.*

Доказательство. Покажем сначала, что φ линейно:

$$\varphi(\overline{v_1}+\overline{v_2})(f) = (\overline{v_1}+\overline{v_2})^{**}(f) = f(\overline{v_1}+\overline{v_2}) = \\ = f(\overline{v_1}) + f(\overline{v_2}) = v_1^{**}(f) + v_2^{**}(f) = \varphi(\overline{v_1}) + \varphi(\overline{v_2})$$

$$\varphi(\alpha\overline{v})(f) = (\alpha\overline{v})^{**}(f) = f(\alpha\overline{v}) = \alpha f(\overline{v}) = \alpha v^{**}(f) = \alpha\varphi(\overline{v})$$

Теперь докажем, что φ — биекция. Пусть $e = (\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n})$ — базис в V. Тогда $(e_1^{**}, \ldots, e_n^{**})$ — линейно независимая система: если некоторая ее линейная комбинация равна нулю, то:

$$\forall f \in V^* : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^{**}(f) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{e_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\overline{e_i}) = 0$$

Равенство должно выполняться, в частности, для функционалов из базиса $\mathcal{F}$, взаимного к e, следовательно, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Уже было доказано, что $\dim V = \dim V^* = \dim (V^*)^* = n$, поэтому $(e_1^{**}, \ldots, e_n^{**})$ — базис в V^{**}. Итак, φ отображает $\overline{v} \underset{e}{\leftrightarrow} \alpha$ в $v^{**} \underset{e^{**}}{\longleftrightarrow} \alpha$, т. к. φ линейно, поэтому φ — биекция. $\square$

Определение 7.5. Изоморфизм V и V^{**} такой, что $\overline{v} \mapsto v^{**}$, называется *каноническим изоморфизмом* V и V^{**}.

Замечание. Канонический изоморфизм φ построен инвариантно: он не опирается на выбор базиса.

8.5 Аннуляторные подпространства, их свойства

Определение 7.6. Если $f : A \to B$ — отображение, $A' \subset A$, то *образом* A' называется $\{f(a) \mid a \in A'\}$. Обозначение — $f(A')$.

Определение 7.7.

1. Пусть V — линейное пространство над F, $W \leqslant V$. Тогда *аннулятором* W называется $W^0 = \{f \in V^* \mid f(W) = \{0\}\}$.

2. Пусть V^* — пространство, сопряженное к V, $U \leqslant V^*$. Тогда *аннулятором* U называется $U^0 = \{v^{**} \in V^{**} \mid v^{**}(U) = \{0\}\} = \{\overline{v} \in V \mid \overline{v}(U) = \{0\} \Leftrightarrow \forall f \in U : f(\overline{v}) = 0\}$.

Замечание. Т. к. $V \cong F^n$, то U^0 $(U \leqslant V^*)$ — это пространство решений однородной системы линейных уравнений, заданной базисом U.

Утверждение 7.5. $W^0 \leqslant V^*$, $U^0 \leqslant V$.

Доказательство. Если $f_1, f_2 \in W^0$, то $(f_1 + f_2)(W) \subset f_1(W) + f_2(W) = \{0\} \Rightarrow (f_1 + f_2) \in W^0$. Аналогично, если $f \in W^0$, то $\alpha f \in W^0$. □

Теорема 7.2. *Пусть* $\dim V = n$, $W \in V$. *Тогда* $\dim W + \dim W^0 = n$.

Доказательство. Пусть $\dim W = k$, $(\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_k})$ — базис в W. Дополним его до базиса $(\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_k}, \overline{e_{k+1}}, \ldots, \overline{e_n})$ в V. Пусть $(f_1, \ldots, f_n)$ — взаимный к нему базис в V^*. Пусть $f \in V^*$, α — координатный столбец f в $(f_1, \ldots, f_n)$. Тогда $f \in W^0 \Leftrightarrow f(\overline{e_1}) = \cdots = f(\overline{e_k}) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0 \Leftrightarrow f \in \langle f_{k+1}, \ldots, f_n \rangle$. Таким образом, $W^0 = \langle f_{k+1}, \ldots, f_n \rangle$, и, т. к. $f_{k+1}, \ldots, f_n$ образуют линейно независимую систему, то $\dim W^0 = n - k$. □

Теорема 7.3. *Пусть* V *— линейное пространство,* $W, W_1, W_2 \leqslant V$. *Тогда:*

1. $(W^0)^0 = W$
2. $W_1 \leqslant W_2 \Leftrightarrow W_2^0 \leqslant W_1^0$
3. $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$
4. $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$

Доказательство.

1. $\overline{v} \in W \Rightarrow \forall f \in W^0 : f(\overline{v}) = 0 \Leftrightarrow \forall f \in W^0 : \overline{v}(f) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \overline{v} \in (W^0)^0$. Значит, $W \subset (W^0)^0$. При этом, $\dim W + \dim W^0 =$ $= \dim V = n$ и $\dim W^0 + \dim (W^0)^0 = \dim V^* = n$, следовательно, $\dim W = \dim (W^0)^0$, а это возможно, только если $W = (W^0)^0$.

2. Доказательство $\Rightarrow$: пусть $W_1 \leqslant W_2$. Тогда $f \in W_2^0 \Rightarrow f(W_1) \subset$ $\subset f(W_2) = \{0\} \Rightarrow f \in W_1$.

   Доказательство $\Leftarrow$: пусть $W_2^0 \leqslant W_1^0$. Тогда $(W_1^0)^0 \leqslant (W_2^0)^0$, и, следовательно, $W_1 = (W_1^0)^0 \leqslant (W_2^0)^0 = W_2$.

3. Доказательство $\subset$: $W_1 \leqslant W_1 + W_2 \Rightarrow (W_1 + W_2)^0 \leqslant W_1^0$, и, аналогично, $(W_1 + W_2)^0 \leqslant W_2^0$.

   Доказательство $\supset$: Если $f \in W_1^0 \cap W_2^0$, то $\forall \overline{w_1} \in W_1, \overline{w_2} \in W_2 :$ $f(\overline{w_1}) = f(\overline{w_2}) = \overline{0} \Rightarrow f(\overline{w_1} + \overline{w_2}) = 0 \Rightarrow f \in (W_1 + W_2)^0$.

4. $(W_1^0 + W_2^0)^0 = (W_1^0)^0 \cap (W_2^0)^0 = W_1 \cap W_2 \Rightarrow ((W_1^0 + W_2^0)^0)^0 =$ $= W_1^0 + W_2^0 = (W_1 \cap W_2)^0$.

9. Линейные отображения

9.1 Линейные отображения (операторы) и линейные преобразования линейного пространства

Определение 7.8. Пусть U, V — линейные пространства над полем F. *Линейным отображением* (*линейным оператором*) называется такое отображение $\varphi : U \to V$, что:

- $\forall \overline{u_1}, \overline{u_2} \in U : \varphi(\overline{u_1} + \overline{u_2}) = \varphi(\overline{u_1}) + \varphi(\overline{u_2})$
- $\forall \overline{u}, \in U : \forall \alpha \in F : \varphi(\alpha \overline{u}) = \alpha \varphi(\overline{u})$

Определение 7.9. Линейное отображение $\varphi : V \to V$ называется *линейным преобразованием.*

Пример. Линейными отображениями являются:

- Поворот вокруг точки (прямой), отражение относительно прямой (плоскости), проекция на прямую (плоскость) в V_2 (V_3)
- Линейные функционалы (можно считать, что F — одномерное линейное пространство над самим собой)
- Изоморфизм линейных пространств
- $\varphi : F^n \to F^k, \forall \alpha \in F^n : \varphi(\alpha) = A\alpha, A \in M_{k \times n}(F)$

9.2 Их матрицы

Определение 7.12. Пусть $\varphi : U \to V$ — линейное отображение. Пусть $e = (\overline{e_1}, \dots, \overline{e_k})$ — базис в U, $\mathcal{F} = (\overline{f_1}, \dots, \overline{f_n})$ — базис в V. Тогда *матрицей отображения* φ в базисах e и $\mathcal{F}$ называется следующая матрица $A \in M_{n \times k}(F)$:

$$\forall i \in \{1, \dots, k\} : \varphi(\overline{e_i}) = \mathcal{F}\alpha_i \Rightarrow A = (\alpha_1 | \dots | \alpha_k)$$

Обозначение — $\varphi \underset{e,\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} A$.

Замечание. Если φ — линейное преобразование, матрица отображения определяется в одном базисе.

Замечание. Соответствие $\varphi \underset{e,\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} A$ взаимно однозначно: каждому отображению соответствует некоторая матрица, различным отображениям — различные матрицы, и, более того, каждой матрице соответствует некоторое отображение.

9.3 Ядро и образ линейного отображения, их размерности

Определение 7.10. Пусть $\varphi : U \to V$ — линейное отображение. Его *образом* называется $\varphi(U)$. Обозначение — $\operatorname{Im}\varphi$.

Определение 7.11. Пусть $\varphi : U \to V$ — линейное отображение. Его *ядром* называется $\{\overline{u} \in U \mid \varphi(\overline{u}) = \overline{0}\}$. Обозначение — $\operatorname{Ker}\varphi$.

Утверждение 7.7. *Пусть $U' \leqslant U$, $V' \leqslant V$. Тогда:*

1. $\varphi(U') \leqslant V$
2. $\varphi^{-1}(V') = \{\overline{u} \in U \mid \varphi(\overline{u}) \in V'\} \leqslant U$

Доказательство.

1. Пусть $\overline{v_1}, \overline{v_2} \in \varphi(U')$, т. е. $\exists \overline{u_1}, \overline{u_2} \in U' : \varphi(\overline{u_1}) = \overline{v_1}, \varphi(\overline{u_2}) = \overline{v_2}$. Тогда $(\overline{u_1} + \overline{u_2}) \in U'$ и $\varphi(\overline{u_1} + \overline{u_2}) = \overline{v_1} + \overline{v_2} \Rightarrow (\overline{v_1} + \overline{v_2}) \in \varphi(U')$. Аналогично, $\forall \alpha \in F : \alpha\overline{u_1} \in U', \varphi(\alpha\overline{u_1}) = \alpha\overline{v_1} \Rightarrow \alpha\overline{v_1} \in \varphi(U')$. Наконец, $\varphi(U') \neq \varnothing$, т. к. $\overline{0} \in \varphi(U')$.

2. Пусть $\overline{u_1}, \overline{u_2} \in \varphi^{-1}(V')$, т. е. $\varphi(\overline{u_1}), \varphi(\overline{u_2}) \in V'$. Тогда $\varphi(\overline{u_1} + \overline{u_2}) = \varphi(\overline{u_1}) + \varphi(\overline{u_2}) \in V'$. Аналогично, $\forall \alpha \in F : \varphi(\alpha\overline{u_1}) = \alpha\varphi(\overline{u_1}) \in V'$. Наконец, $\varphi^{-1}(V') \neq \varnothing$, т. к. $\overline{0} \in \varphi^{-1}(V')$.

□

Следствие. $\operatorname{Im}\varphi \leqslant V, \operatorname{Ker}\varphi \leqslant U$.

Теорема 7.4. $\dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi = \dim U$.

Доказательство. Выберем $W \leqslant U$ такое, что $\operatorname{Ker}\varphi \oplus W = U$, тогда $W \cong \operatorname{Im}\varphi$. Тогда, по свойству прямой суммы $\dim U = \dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim W = \dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi$. □

9.4 Критерий инъективности линейного отображения

Утверждение 7.9. *Пусть $\varphi : U \to V$ — линейное отображение. Тогда φ инъективно $\Leftrightarrow \operatorname{Ker}\varphi = \{\overline{0}\}$.*

Доказательство. Доказательство $\Rightarrow$: если φ инъективно, то $\exists! \overline{u} = \overline{0} \in U : \varphi(\overline{u}) = \overline{0}$.

Доказательство $\Leftarrow$: Предположим, что φ не инъективно, то есть $\exists \overline{u_1}, \overline{u_2} \in U : \varphi(\overline{u_1}) = \varphi(\overline{u_2})$. Но тогда $\varphi(\overline{u_1} - \overline{u_2}) = \overline{0}$ и $(\overline{u_1} - \overline{u_2}) \in \operatorname{Ker}\varphi$, при этом $\overline{u_1} - \overline{u_2} \neq \overline{0}$. □

Утверждение 7.10. *Пусть $\varphi : U \to V$ — линейное отображение. Тогда φ инъективно $\Leftrightarrow$ φ переводит линейно независимые системы в линейно независимые.*

Доказательство. Доказательство $\Rightarrow$: пусть система $(\varphi(\overline{u_1}), \ldots, \varphi(\overline{u_n}))$ линейно зависима. Тогда существует ее нетривиальная линейная комбинация, равная нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(\overline{u_i}) = \overline{0} \Leftrightarrow \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{u_i}\right) = \overline{0}$$

Но φ инъективно, поэтому $\alpha_1\overline{u_1} + \cdots + \alpha_n\overline{u_n} = \overline{0}$ — система $(\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_n})$ тоже линейно зависима. Итак, если образ системы линейно зависим, то и сама система линейно зависима, поэтому образ линейно независимой системы линейно независим.

Доказательство $\Leftarrow$: Предположим, что φ не инъективно, то есть $\exists \overline{u_1}, \overline{u_2} \in U : \varphi(\overline{u_1}) = \varphi(\overline{u_2})$. Тогда $\overline{u} = \overline{u_1} - \overline{u_2} \neq \overline{0}$ и $\varphi(\overline{u}) = \overline{0}$. Т. к. $\overline{u}$ ненулевой, он соответствует нетривиальной линейной комбинации базисных векторов $(\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_k})$ в U:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overline{e_i} = \overline{u} \Rightarrow \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overline{e_i}\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varphi(\overline{e_i}) = \overline{0}$$

Таким образом, система $(\varphi(\overline{e_1}), \ldots, \varphi(\overline{e_k}))$ линейно зависима. Итак, если φ не инъективно, то существует линейно независимая система, которую оно переводит в линейно зависимую систему. □

9.5 Операции над линейными преобразованиями и их матрицами

9.6 Изменение матриц линейного отображения и линейного преобразования при замене базисов

Утверждение 7.17. *Пусть* e, e' — *два базиса в* U, $e' = eS$ ($S \in M_{k\times k}(F)$), $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ — *два базиса в* V, $\mathcal{F}' = \mathcal{F}T$ ($T \in M_{n\times n}(F)$). *Рассмотрим линейное отображение* $\varphi : U \to V$, $\varphi \underset{e,\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} A$, $\varphi \underset{e',\mathcal{F}'}{\longleftrightarrow} A'$. *Тогда:*

$$A' = T^{-1}AS$$

Доказательство. Уже известно, что $\varphi(e) = \mathcal{F}A$, $\varphi(e') = \mathcal{F}'A'$. С другой стороны, $\varphi(e') = \varphi(eS) = \varphi(e)S$ (в силу линейности). Итак, $\varphi(e') = \mathcal{F}AS = \mathcal{F}'T^{-1}AS$, значит, $A' = T^{-1}AS$. $\square$

Следствие. Если $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, e, e' — два базиса в V, $e' = eS$, $\varphi \underset{e}{\leftrightarrow} A$, $\varphi \underset{e'}{\leftrightarrow} A'$, то $A' = S^{-1}AS$.

10. Определитель

10.1 Полилинейные и кососимметричный функции

Определение 8.8. Пусть V — линейное пространство над F. Отображение $g : V^n \to F$ называется *полилинейным*, если оно линейно по каждому из n аргументов, т. е. $\forall i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\forall \overline{v_i}, \overline{v_i'} \in V : g(\dots, \overline{v_i} + \overline{v_i'}, \dots) = g(\dots, \overline{v_i}, \dots) + g(\dots, \overline{v_i'}, \dots)$$
$$\forall \overline{v_i} \in V : \forall \alpha \in F : g(\dots, \alpha\overline{v_i}, \dots) = \alpha g(\dots, \overline{v_i}, \dots)$$

Определение 8.9. Отображение $g : V^n \to F$ называется *кососимметричным*, если $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ $(i < j)$:

1. $\forall \overline{v_i}, \overline{v_j} \in V : g(\dots, \overline{v_i}, \dots, \overline{v_j}, \dots) = -g(\dots, \overline{v_j}, \dots, \overline{v_i}, \dots)$
2. $\forall \overline{v} \in V : g(\dots, \overline{v}, \dots, \overline{v}, \dots) = 0$

Замечание. Если свойство 1 выполнено, то свойство 2 выполняется автоматически, если $\operatorname{char} F \neq 2$.

10.2 Определитель матрицы, задание определителя его свойствами, явное выражение определителя через элементы матрицы

Определение 8.10. Пусть $A \in M_n(F)$ — квадратная матрица. Тогда ее *определителем* (*детерминантом*) называется следующая величина:

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

Другое обозначения — $\det A$.

Замечание. Определитель A полилинеен и кососимметричен как функция столбцов матрицы A.

Теорема 8.2. $\det A^T = \det A$.

Доказательство.

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}$$
$$\det A^T = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \ldots a_{\sigma(n)n}$$

Заменим в выражении $\det A^T$ переменную суммирования σ на $\tau = \sigma^{-1}$, тогда выражение примет вид:

$$\det A^T = \sum_{\tau \in S_n} (-1)^{\tau^{-1}} a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \ldots a_{n\tau(n)}$$

Поскольку $(-1)^\tau = (-1)^{\tau^{-1}}$, то формулы для $\det A$ и $\det A^T$ совпадают. $\square$

Следствие. Определитель A полилинеен и кососимметричен как функция строк матрицы A.

Утверждение 8.6. *Пусть $A \in M_n(F)$ — верхнетреугольная матрица, т. е.:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \ldots & * & * \\ 0 & a_{22} & \ldots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-1n-1} & * \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Тогда $\det A = a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$.

Доказательство. Если в перестановке $\sigma \in S_n$ $\exists i \in \{1, \ldots, n\}$: $\sigma(i) < i$, то соответствующее слагаемое в формуле определителя равно нулю, поскольку $a_{i\sigma(i)} = 0$. Единственная перестановка, в которой нет такого индекса i, — это id, поэтому $\det A = a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$.

10.3 Поведение определителя при элементарных преобразованиях

Утверждение 8.7. *Пусть* $A \in M_n(F)$, L *— элементарная матрица. Тогда* $\det AL = \det A \det L$.

Доказательство. Рассмотрим все три случая различных элементарных преобразований столбцов:

- $L = D_{ij}(\alpha) = E + \alpha E_{ji}$ — прибавление к i-му столбцу j-го, умноженного на α, тогда $\det L = 1$ (L — или верхнетреугольная, или нижнетреугольная). Поскольку определитель — полилинейная

  функция столбцов матрицы, то:

  $$\det AL = \det(a_{*1}, \ldots, a_{*i} + \alpha a_{*j}, \ldots a_{*n}) = \\ = \det(a_{*1}, \ldots, a_{*i}, \ldots a_{*n}) + \alpha \det(a_{*1}, \ldots, a_{*j}, \ldots a_{*n})$$

  Первое слагаемое в полученном выражении — это $\det A$, а второе равно нулю, поскольку два столбца в наборе аргументов определителя совпадают и равны a_{*j}. Значит, $\det AL = \det A = \det A \det L$.

- $L = T_i(\lambda) = E + (\lambda - 1)E_{ii}$ — умножение i-го столбца на λ, тогда $\det L = \lambda$ (L — и верхнетреугольная, и нижнетреугольная). Поскольку определитель — полилинейная функция столбцов матрицы, то:

  $$\det AL = \det(a_{*1}, \ldots, \lambda a_{*i}, \ldots a_{*n}) = \lambda \det(a_{*1}, \ldots, a_{*i}, \ldots a_{*n})$$

  Определитель в последней части равенства — это $\det A$. Значит, $\det AL = \lambda \det A = \det A \det L$.

- $P_{ij} = E - (E_{ii} + E_{jj}) + (E_{ij} + E_{ji})$ — перестановка i-го и j-го столбца местами, тогда $\det L = -1$ (из кососимметричности: L отличается от единичной матрицы перестановкой двух столбцов местами). Т. к AL отличается от A перестановкой двух столбцов местами, то $\det AL = -\det A = \det A \det L$.

Итак, во всех трех случаях требуемое равенство выполнено. $\square$

10.4 Определитель произведения матриц и транспонированной матрицы

Теорема 8.4. *Пусть* $A, B \in M_n(F)$. *Тогда* $\det AB = \det A \det B$.

Первый способ доказательства. Если хотя бы одна из матриц A, B вырожденна, то ее определитель равен нулю, и, кроме того, $\operatorname{rk} AB < < n$, тогда $\det AB = \det A \det B = 0$. Рассмотрим теперь случай, когда A и B невырожденны. Тогда A и B представимы в виде произведения элементарных матриц: $A = U_1 \dots U_k$, $B = S_1 \dots S_l$, следовательно:

$$\det A = \prod_{i=1}^{k} \det U_i, \; \det B = \prod_{i=1}^{l} \det S_i$$

$$\det AB = \prod_{i=1}^{k} \det U_i \prod_{i=1}^{l} \det S_i = \det A \det B$$

Второй способ доказательства. Зафиксируем матрицу A. Рассмотрим функцию $f : M_n(F) \to F$ такую, что $f(X) = \det AX$. Тогда f является полилинейной и кососимметричной функцией от столбцов матрицы X (если два столбца X поменять местами, местами поменяются и соответствующие столбцы AX, поэтому кососимметричность следует из кососимметричности определителя, линейность проверяется аналогично). Значит, по теореме о полилинейной и кососимметричной функции, $f(X) = C \det X = f(A) \det X = \det A \det X$.

Теорема 8.2. $\det A^T = \det A$.

10.5 Определитель с углом нулей

Теорема 8.5 (Об определителе с углом нулей)**.** *Пусть матрица $A \in M_n(F)$ имеет следующий вид:*

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right),\ B \in M_k(F),\ D \in M_{n-k}(F)$$

Тогда $\det A = \det B \det D$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f : M_k(F) \to F$ такую, что:

$$f(X) = \left|\begin{array}{c|c} X & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right|$$

Тогда f является полилинейной и кососимметричной функцией от столбцов матрицы X. Следовательно:

$$f(X) = f(E)\det X = \left|\begin{array}{c|c} E & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right| \det X$$

Аналогично рассмотри функцию $g : M_{n-k}(F) \to F$ такую, что:

$$g(Y) = \left|\begin{array}{c|c} E & C \\ \hline 0 & Y \end{array}\right|$$

Тогда g является полилинейной и кососимметричной функцией от строк матрицы Y. Следовательно:

$$g(X) = g(E)\det Y = \left|\begin{array}{c|c} E & C \\ \hline 0 & E \end{array}\right| \det Y = \det Y$$

Итак, $f(X) = \det D \det X$, поэтому $\det A = \det B \det D$. □

10.6 Разложение определителя по строке, столбцу

Определение 8.11. Пусть $A \in M_n(F)$. *Минором* порядка k называется определитель ее подматрицы размера $k \times k$ (в некоторых случаях минором называют саму подматрицу).

Определение 8.12. Пусть a_{ij} — элемент матрицы $A \in M_n(F)$. Тогда *минором, дополнительным к* a_{ij} называется величина $M_{ij} = \det A'$, где A' получена вычеркиванием из A i-й строки и j-го столбца.

Определение 8.13. Пусть a_{ij} — элемент матрицы $A \in M_n(F)$. Тогда *алгебраическим дополнением* к a_{ij} называется величина $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Замечание. Теорему о базисном миноре можно переформулировать так: $\operatorname{rk} A$ — это наибольший порядок его ненулевого минора.

Утверждение 8.8. *Пусть матрица $A \in M_n(F)$ имеет следующий вид:*

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} * & * & * \\ \hline 0 & a_{ij} & 0 \\ \hline * & * & * \end{array}\right)$$

Тогда $\det A = a_{ij} A_{ij}$.

Доказательство. Последовательными перестановками строк и столбцов добьемся того, A приняла следующий вид:

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} a_{ij} & 0 \\ \hline * & M'_{ij} \end{array}\right), \ M'_{ij} \text{ — подматрица, дополнительная к } a_{ij}$$

Этот результат достигается $i-1$ транспозицией строк и $j-1$ транспозицией столбцов. Значит, $\det A = (-1)^{i+j-2} \det A'$. Тогда, по теореме об определителе с углом нулей, $\det A = (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = a_{ij} A_{ij}$. □

Теорема 8.6 (О разложении по строке или столбцу)**.** *Пусть* $A \in M_n(F), A = (a_{ij})$. *Тогда:*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

Доказательство. Докажем без ограничения общности вторую формулу (первая доказывается аналогично или может быть получена транспонированием). Рассмотрим i-ю строку матрицы A:

$$a_{i*} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) = (a_{i1}, 0, \ldots, 0) + (0, a_{i2}, \ldots, 0) + \cdots + (0, 0, \ldots, a_{in})$$

Тогда, в силу линейности определителя как функции от строк A и предыдущего утверждения, получим:

$$detA = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in}$$

10.7 Решение систем линейных уравнений и

нахождение обратных матриц методом Крамера

Теорема 8.7 (Правило Крамера). *Пусть* $A \in M_n(F)$, $\Delta = |A| \neq 0$, $b \in F^n$. *Тогда система* $Ax = b$ *имеет единственное решение* x, *в котором* $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, $\Delta_i = |a_{*1}, \ldots, a_{*i-1}, b, a_{*i+1}, \ldots, a_{*n}|$.

Доказательство. Поскольку $A \neq 0$, то A невырожденна, а значит, обратима. Тогда $x = A^{-1}b$ — единственное решение системы. Рассмотрим это решение:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; b = \sum_{j=1}^{n} x_j (a_{*j})$$

Тогда:

$$\Delta_i = \left| a_{*1}, \ldots, a_{*i-1}, \sum_{j=1}^{n} x_j (a_{*j}), a_{*i+1}, \ldots, a_{*n} \right|$$

В силу линейности определителя как функции от строк:

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^{n} x_j \, |a_{*1}, \ldots, a_{*i-1}, a_{*j}, a_{*i+1}, \ldots, a_{*n}|$$

В силу кососимметричности определителя как функции от строк:

$$\Delta_i = x_i \, |a_{*1}, \ldots, a_{*i-1}, a_{*i}, a_{*i+1}, \ldots, a_{*n}| = x_i \Delta \Rightarrow x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

$\square$

Утверждение 8.9. *Если* $\Delta = 0$, *но при этом* $\exists i \in \{1, \ldots, n\} : \Delta_i \neq$ $\neq 0$, *то система несовместна.*

Доказательство. Т. к. $\Delta = 0$, то A вырожденна, т. е. $\operatorname{rk} A < n$. При этом $\exists i \in \{1, \ldots, n\} : \Delta_i \neq 0$, значит, в $(A|b)$ есть n линейно независимых столбцов, тогда $\operatorname{rk}(A|b) > \operatorname{rk} A$. Следовательно, по теореме Кронекера-Капелли, система несовместна. □

Следствие (Формула Крамера)**.** Пусть $A \in M_n(F)$ — обратимая матрица. Тогда, если $B = A^{-1}$, $B = (b_{ij})$, то $b_{ij} = \frac{A_{ji}}{|A|}$.

Доказательство. Каждый из столбцов матрицы B удовлетворяет — единственное решение системы линейных уравнений $Ab_{*j} = e_{*j}$, где e_{*j} — j-й столбец единичной матрицы. Тогда:

$$b_{ij} = \frac{|a_{*1}, \ldots, a_{*i-1}, e_{*j}, a_{*i+1}, \ldots, a_{*n}|}{|A|}$$

По уже доказанному утверждению, определитель в выражении выше равен $A_j i$, т. к. e_{*j} — i-й столбец матрицы, и он имеет единственный ненулевой элемент на j-й строке. □