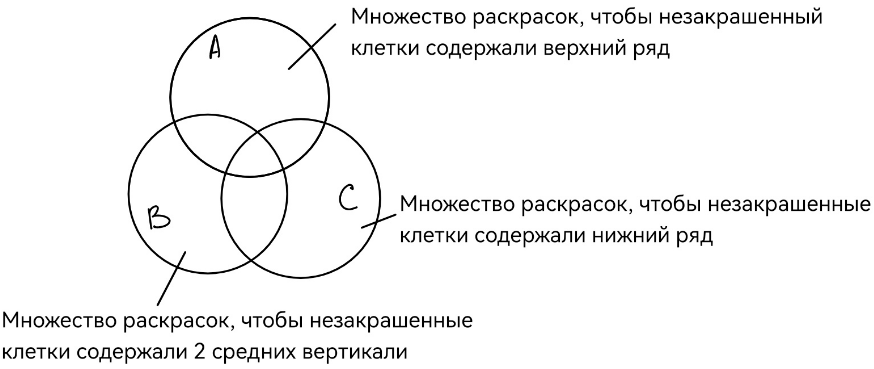
Комбинаторика: формула включений-исключений

домашнее задание

Костылев Влад, Б01-208

13 ноября 2022 г.

№1



Количество способов раскрасить нашу таблицу по условию |А $\cup B \cap C$|
По формуле включений-исключений:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$|A| = 2^8$, т.к. верхний ряд точно не закрашен, а остальные клетки могут быть как закрашены, так и не закрашены.

Аналогично:
$|B| = 2^8$, $|C| = 2^6$, $|A \cap B| = 2^4$, $|A \cap C| = 2^4$, $|B \cap C| = 2^4$, $|A \cap B \cap C| = 2^2$

$$\Rightarrow |A \cup B \cup C| = 2^8 + 2^8 + 2^6 - 2^4 - 2^4 - 2^4 + 2^2 = 532$$

№2 Пусть множества: C - повар(cook), M - медик(medic), P - пилот (pilot), A - астроном(astronomer).

По условию:

$$|C| = |M| = |P| = |A| = 6$$

$$|C \cap M| = |C \cap P| = |C \cap A| = |M \cap P| = |M \cap A| = |P \cap A| = 4$$

$$|C \cap M \cap P| = |C \cap P \cap A| = |M \cap P \cap A| = |C \cap M \cap A| = 2$$

$$|C \cap M \cap P \cap A| = 1$$

По формуле включений-исключений:

$$|C \cup M \cup P \cup A| = (6 \times 4) - (4 \times 6) + (2 \times 4) - (1 \times 1) = 7$$

Из них 6 владеют профессией повара, и 6 владеют профессией медика, но тогда минимум 5 человек владеют профессией и повара и медика (т.к. есть ровно 1 человек, который не владеет профессией медика, и ровно 1, который не владеет профессией повара, а всего человек 7)

Но по условию только 4 человека владеют профессией и повара и медика, получаем противоречие, значит техническое задание не выполнено.

№3 Т.к. для $f : A \to B$ существует инъекция, то $|B| \geq |A|$, также существует сурьекция, следовательно: $|A| \geq |B|$.

Значит $|A| = |B| = n$, тогда число инъекций и сурьекций будет равно $n!$.

№4 Возьмем элемент x такой, что $x \in X$ и $x \in X_i \Rightarrow$ x принадлежит всем множествам X_j (j $>$ i), получается каждому элементу из X можно поставить в соответствие число i - номер множества в котором этот элемент встречается в первый раз. ($i \in \{1, 2, ..., k+1\}$, если $i = k + 1$, то элемент не принадлежит ни одному множеству, где k+1 это само множество X).

$\Rightarrow$ число способов взять k подмножеств равно количеству способов сопоставить число i каждому элементу множества X.

Т.к. $i \in \{1, 2, ..., k+1\}$ и $X = \{1, ..., n\}$, то кол-во способов сопоставить число i каждому элементу множества X равно $(k + 1)^n$

№5 Рассмотрим 20 учеников, как граф с 20 вершинами, где каждая вершина - это один ученик. Соединим вершины ребром одного цвета, если ученики дружат и другого если нет. Всего у нас получается $C_20^3 = \dfrac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!} = 1140$ треугольников. Какое-то количество разноцветных, какое-то одноцветных. Нам нужно найти именно количество одноцветных треугольников. Разноцветных треугольников: $\dfrac{20 \cdot 6 \cdot 13}{2} = 780$ (т.к. из каждой вершины может исходить 6 ребер одного цвета и 13 другого). Тогда вычитая из общего количества треугольников количество разноцветных, получим количество одноцветных:

$$1140 - 780 = 360 \text{ компаний.}$$

№6 Условие неубывающей функции следующее: $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. Возьмем последовательность x_n, что $f(k) = x_k$, для всех $k \in \{1, \ldots, n\}$. Так как f - неубывающее отображение, то $\{x_n\}$ - неубывающая последовательность. Все элементы нашей последовательности - это числа от 1 до m, количество таких последовательностей - это количество способов выбрать n чисел из m с повторениями, т.е C_{n+m-1}^m.