Билет 1

Счетность мн-ва рац. чисел, несчетность мн-ва действ. чисел

Опред: рац. числом (Q) назыв. дробь $\frac{p}{q}$, $p \in N$, $q \in Z$

Опред: мн-во A назыв. счетным, если между его эл-тами и эл-тами мн-ва N можно установить взаимнооднозначное соот-вие

Примеры: $A \leftrightarrow N \quad a_n \to n$

$$A = \left\{\frac{1}{2^n}, n \in N\right\}$$

Теорема: мн-во Q - счетно

Док-во: $\frac{p}{q}$ - полож. несокр. дробь

$H = p + q$ - высота дроби

$\forall \frac{p}{q}$ соот. H, $\forall H \geq 2$

Любому целому полож. H соот-вует конечное число полож. несокр. дробей

$H = p + q$ (решаем в целых числах)

Рассмотрим $H = 12$:

$p = 1 \quad q = 11$
$p = 2 \quad q = 10$
$p = 3 \quad q = 9$
$p = 4 \quad q = 8$
$p = 5 \quad q = 7$
$p = 6 \quad q = 6$ - сокр.

($p = 2, 3, 4$): не подх p/q - сокр.

Получается $H = 12 \to \left[\frac{1}{11}, \frac{5}{7}, \frac{7}{5}, \frac{11}{1}\right]$ - в порядке возраст.

$$\frac{p}{q}: \quad \left[\overset{a_1}{\frac{1}{1}}\right] \quad \left[\overset{a_2}{\frac{1}{2}}, \overset{a_3}{\frac{2}{1}}\right] \quad \left[\overset{a_4}{\frac{1}{3}}, \overset{a_5}{\frac{3}{1}}\right] \quad \left[\overset{a_6}{\frac{1}{4}}, \overset{a_7}{\frac{2}{3}}, \overset{a_8}{\frac{3}{2}}, \overset{a_9}{\frac{4}{1}}\right] \ldots$$

$$H: \quad 2 \qquad 3 \qquad 4 \qquad 5$$

Дальше располагаем так:

$$0, a_1, -a_1, a_2, -a_2, a_3, -a_3$$

Получается, все дроби пересчитаны

Действ. числа.

Опред: **сечением** мн-ва рац. чисел $\mathbb{Q}$ назовем разбиение мн-ва $\mathbb{Q}$ на такие два непустых мн-ва A_* и A^*, что выполнены след. аксиомы:

1) $A_* \cup A^* = \mathbb{Q}$
2) $A_* \cap A^* = \varnothing$
3) $[\forall x \in A_*] \& [\forall y \in A^*] \longmapsto y > x$

(аналогично для $\mathbb{R}$)

A_* - нижний класс сечения
A^* - верхний —"—

Опред: **действ.** числом называется любое сечение мн-ва рац. чисел вида Ⓐ и Ⓒ

Ⓐ: (A_*, A^*) A_* не им. наиб. рац. числа
A^* имеет наим. рац. число

Ⓒ: (A_*, A^*) $\left.\begin{matrix} A_* \\ A^* \end{matrix}\right\}$ не им. наиб/наим. рац. числа

Обознач. действ. чисел:

$$\alpha = (A_*, A^*)$$

Лемма: Любое беск. подмножество счетного мн-ва A - счетно

Док-во: A - счетно

1. располагаем эл-ты A в порядке возраст. номера:

$a_1, a_2, a_3 \ldots a_n \ldots$

2. $B \subset A$

Из упорядоченного мн-ва A выбираем эл-ты мн-ва B

$a_{n_1}, a_{n_2} \ldots a_{n_k} \ldots$

$n_1 < n_2$

Получаем $a_{n_k} \longleftrightarrow k$

B- счетно.

Опред: Если A не явл конечным и A не явл счетным, то A - **несчетное**.

Теорема: $\mathbb{R}$ - несчетное

Док-во: нужно доказать, что интервал $(0,1)$ - несчетный

от противного: $(0,1)$ - счетное

тогда можно пронумеровать все числа

$\alpha_1 = 0{,}a_1^1 a_2^1 \ldots a_n^1 \ldots$

$\ldots$

$\alpha_k = 0{,}a_1^k a_2^k \ldots a_k^k \ldots$

(мы можем представить д.ч. в виде беск. десятич. дробей по теореме:

| между мн-вом д.ч. $\mathbb{R}$ и мн-вом беск. десятич. дробей можно установ взаим. однознач. соот-вие, если использ. отождествление:

$$\alpha = \begin{cases} a_0, a_1 a_2 \ldots a_n(0) \\ a_0, a_1 a_2 \ldots (a_n - 1)(9) \end{cases}$$)

Создадим γ : $\gamma = 0{,}c_1 c_2 c_3 \ldots c_n$, где

$c_i \neq a_i^i$, $c_i \neq 9 \Rightarrow \gamma \neq \alpha_i \ \forall i \in \mathbb{N}$

Получается $(0,1)$ - несчетно

Подмножество несчетно $\Rightarrow$ мн-во несчетно

Билет 2.
Теорема о существовании точной верхней (нижней) грани мн-ва

Опред: мн-во $X \subset \mathbb{R}$ называв. ограниченным сверху, если сущ. д.ч. α такое, что для любого эл-та $x \in X$, $\alpha \geq x$

$$[X \text{ ор. сверху}] \overset{def}{=} [\exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall x \in X \mapsto \alpha \geq x]$$

α - верхн. грань мн-ва X

Опред: действ. число α_0 называв. точной верхней гранью мн-ва $X \in \mathbb{R}$, если:

$$[\alpha_0 = \sup X] \overset{def}{=} [\forall x \in X \mapsto \alpha_0 \geq x] \& [\forall \alpha < \alpha_0 \ \exists x_\alpha \in X : x_\alpha > \alpha]$$

Опред: действ. число β_0 называв. точной нижней гранью мн-ва $X \in \mathbb{R}$, если:

$$[\beta_0 = \inf X] \overset{def}{=} [\forall x \in X \mapsto x \geq \beta_0] \& [\forall \beta > \beta_0 \ \exists x_\beta \in X : x_\beta < \beta]$$

Теорема Дедекинда: среди сечений мн-ва д.ч. $\mathbb{R}$ сечений, где A_* и A^* не имеют наиб/наим числа, нет

Теорема о существовании точной верхней (нижней) грани:

если $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, ограниченное сверху (снизу) мн-во, то существует точн. верх (нижн.) грань мн-ва X

Док-во: $X \neq \emptyset$, X-огранич. сверху
(для верхн.) Рассмотр. 2 варианта:

I. $X \subset \mathbb{R}$ имеет наиб. число α_0.
Тогда $\forall x \in X \mapsto x \leq \alpha_0$, т.е. α_0 - верхн. грань X
$\forall \alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow \alpha_0$ - наименьш. из всех верхн. граней

$\alpha_0 = \sup X$

II. $X \subset \mathbb{R}$ не имеет наиб. числа

Построим сеч. мн-ва д.ч.: (A_*, A^*):

A^* - мн-во всех верхних граней X,
$A^* \neq \emptyset$, т.к. X огранич. сверху

A_* - все остальные д.ч., $A_* \neq \emptyset$, т.к. $X \subset A_*$ и $X \neq \emptyset$

1. По построению : $A_* \cup A^* = \mathbb{R}$
2. в X нет наиб. числа $\Rightarrow A_* \cap A^* = \emptyset$
3. для $\forall x_* \in A_*$ и $\forall y \in A^*$ выполн. $y > x$, т.к. в против. случае x будет верх. гранью, а поэтому должно принадлеж. A^*

Получается (A_*, A^*) - действительно сечение

По т. Дедекинда сущ. д.ч. α_0, которое производит сеч. (A_*, A^*)

Мн-во A_* не им. наиб. числа т.к. если бы $\alpha_0 \in A_*$ то для чисел мн-ва X число α_0 было бы верх. гранью, а поэтому $\alpha_0 \in A^*$

Т.к. в A_* нет наиб. числа, значит, A^* имеет наим. число α_0, к-рое явл. точной гранью X

Предложение: если $X \neq \emptyset, X \subset \mathbb{R}$ обладает точной верхней (нижней) гранью, то эта грань единственна.

Док-во: от противного:
пусть $\alpha_0 = \sup X$ и $\alpha_0' = \sup X$
для определенности $\alpha_0 > \alpha_0'$

По опред. точн. верх. грани: α_0 мн-ва X найдется $x \in X$ такой, что $x > \alpha_0'$

Т.о. α_0' не может быть точной верх. гранью X.

Предложение: не сущ. сечений (A_*, A^*) таких, что A_* имеет наиб. число и одновременно A^* имеет наим. число

Док-во: пусть такое сеч. сущ.
$a_* \in A_*$ наиб. числ. A_*
$a^* \in A^*$ - наим. числ. A^*
по опред: $a^* > a_*$

Из плотности $\mathbb{Q}$ след, что $\exists c \in \mathbb{Q}$:
$a^* > c > a_*$

Число c не может ни A^*, ни A_*

Получается $A^* \cup A_* \neq \mathbb{R}$ - противоречие $\Rightarrow$

Такого сечения нет

Билет 3.
Теорема об отделимости мн-ств.

Теорема: об отделимости множеств:

если $A \subset \mathbb{R}$ и $B \subset \mathbb{R}$ - непустые мн-ва и $\forall \alpha \in A$ & $\beta \in B$ выполн.: $\beta \geq \alpha$, то $\exists \alpha_0 = \sup A$ и $\exists \beta_0 = \inf B$: $\beta_0 \geq \alpha_0$

Док-во: существование таких α_0 и β_0 вытекает из теорема о сущ. точн. верх. (нижн.) грани

A - огранич. сверху, пусть $\alpha_0 = \sup A$
B - огранич. снизу, пусть $\beta_0 = \inf B$

$\forall \beta \in B$ - верхн. грань A, тогда $\beta \geq \alpha_0 \Rightarrow$ α_0 - нижн. грань B

Поскольку $\beta_0 = \inf B$ - наиб. из всех нижн. граней $\beta_0 \geq \alpha_0$

Сканировано с CamScanner

Билет 4.

Единственность предела сходящ. пос-ти. Ограниченность сходящ. пос-ти.

Опред: пусть по опред. правилу каждому натур. числу n ставится в соотв-вие д.ч. x_n, совокупность занумерованных x_n: $x_1, x_2 \dots, x_n$ — числовая пос-ть.

Опред: $[\{x_n\}$ огранич$] \overset{def}{=} [\exists \alpha > 0 : \forall n \mapsto |x_n| < \alpha]$

Опред: пос-ть $\{x_n\}$ называ. б.м., если:

$$[\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \mapsto |x_n| < \varepsilon]$$

Опред: Пос-ть $\{x_n\}$ называ. сходящ., если сущ. д.ч. α такое, что пос-ть $\{x_n - \alpha\}$ явл. б.м.
α — предел $\{x_n\}$

или

$$[\alpha = \lim_{n \to \infty} \{x_n\}] \overset{def}{=} [\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \mapsto |x_n - \alpha| < \varepsilon]$$

или

Пос-ть $\{x_n\}$ называ. сходящ., если сущ. д.ч. α, что в $\forall$ ε-окрестности т. α содерж. все члены $\{x_n\}$, начиная с $N = N(\varepsilon)$.

Пример: $x_n = \sqrt[n]{a}$, $a > 1$

Предположим, что $\alpha = 1$ $(\lim_{n \to \infty} \{x_n\} = \alpha)$

$\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n \Rightarrow a = (1 + \alpha_n)^n > n\alpha_n$ — нерав. Бернулли

$\alpha_n < \frac{a}{n}$ — б.м.

Получается $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > \frac{a}{\varepsilon} : \forall n \geq N \mapsto \alpha_n < \frac{a}{n} \leq \frac{a}{N} < \varepsilon$

$\{x_n\}$ - сходящ. пос-ть

Свойства сходящ. пос-тей

Теорема 1: если $\{x_n\}$ - сходящ., то она имеет единств. предел

Док-во: от противного

пусть $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

$\alpha \neq \beta$

Тогда $\begin{cases} x_n = \alpha + \alpha_n \\ x_n = \beta + \beta_n \end{cases}$ $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ - б.м (по предполож. о том, что любой член $\{x_n\}$ можно распис. $x_n = \alpha + \alpha_n$ (α - предел, α_n - б.м.))

$\gamma = \overbrace{\beta - \alpha}^{const} = \alpha_n - \beta_n = \gamma_n$

по св. б.м пос-тей $\{\gamma_n\}$ - б.м

Получается $\forall n: \gamma_n = \gamma \Rightarrow \gamma = 0$
(по теореме: если все члены, начин. с некоторого номера, б.м пос-ти равны γ, то $\gamma = 0$)

т.е. $\alpha = \beta$ - противореч. предполож. $\Rightarrow$ предел единств.

Теорема 2: если $\{x_n\}$ сходящ., то $\{x_n\}$ огранич.

Док-во: пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, тогда $x = \alpha + \alpha_n$
$\{\alpha_n\}$ - б.м $\Rightarrow$ огранич.

$\exists \beta > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \mapsto |\alpha_n| \leq \beta$

$|x_n| = |\alpha + \alpha_n| \leq |\alpha| + |\alpha_n| \leq |\alpha| + |\beta| = \gamma > 0$

Получается: $\exists \gamma > 0 : \forall n \mapsto |x_n| < \gamma$

$\{x_n\}$ - огранич. по опред.

Билет 5.
Бм пос-ти и их свойства.

Опред: пос-ть $\{x_n\}$ назыв **бм**, если
$$[\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon): \forall n \geq N \longmapsto |x_n| < \varepsilon]$$

Пример: $x_n = q^n$, $0 < |q| < 1$

$$\frac{1}{|q|} > 1 \Rightarrow \frac{1}{|q|} = 1 + \delta, \ \delta > 0$$

$$\left(\frac{1}{|q|}\right)^N = (1+\delta)^N > N\delta$$ - нерав. Бернулли

Получается $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: N > \frac{1}{\delta \varepsilon} \Rightarrow$

$$\forall n \geq N \longmapsto |q|^n \leq |q|^N < \frac{1}{N\delta} < \varepsilon$$

$\{x_n\}$ - бм

Свойства бм пос-тей

Теорема 1: сумма (разность) двух бм пос-тей есть бм пос-ть

Док-во: пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бм пос-ти

Тогда $$\left[\forall \varepsilon > 0 \ \begin{matrix} \exists N_1 = N_1(\varepsilon): \forall n \geq N_1 \longmapsto |x_n| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists N_2 = N_2(\varepsilon): \forall n \geq N_2 \longmapsto |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} \end{matrix}\right]$$

$N = \max(N_1, N_2)$

тогда $\forall n \geq N: |x_n \pm y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Получается $\{x_n \pm y_n\}$ - бм

Теорема 2: бм пос-ть ограничена

Док-во: зафиксируем $\varepsilon = 1$

$\{x_n\}$ - бм $\Rightarrow \exists n_1: \forall n \geq n_1 \longmapsto |x_n| < 1$

Рассмотрим $\gamma = \max\{|x_1|, |x_2| \dots |x_n|\}$

Тогда для $\forall n \longmapsto |x_n| \leq \gamma \Rightarrow \{x_n\}$ - огранич.

Теорема 3: произвед огр пос-ти и бм пос-ти есть бм пос-ть

Док-во: $[\{y_n\}\text{ огр}] \overset{def}{=} [\exists \gamma > 0 : \forall n \mapsto |y_n| < \gamma]$

$[\{x_n\}\text{ бм}] \overset{def}{=} [\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \mapsto |x_n| < \frac{\varepsilon}{\gamma}]$

$|x_n y_n| = |x_n||y_n| < \frac{\varepsilon}{\gamma} \cdot \gamma = \varepsilon$

Получается:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \mapsto |x_n y_n| < \varepsilon$

$\{x_n y_n\}$ - бм

Теорема 4: если все члены бм. пос-ти, начиная с некоторого номера, равны числу γ, то $\gamma = 0$

Док-во: пусть $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \mapsto x_n = \gamma$

от противного: пусть $\gamma \neq 0$

Тогда для $\varepsilon = \frac{|\gamma|}{2} > 0$ $\exists N = N(\varepsilon) > n_0$, что $\forall n \geq N \mapsto |x_n| < \varepsilon$

Получается $|\gamma| < \frac{|\gamma|}{2}$ - противореч.

$\gamma = 0$

Опред: пос-ть $\{x_n\}$ назыв бб, если
$[\forall \gamma > 0\ \exists N = N(\gamma) : \forall n \geq N \mapsto |x_n| > \gamma]$

Теорема 5: 1° Если $\{x_n\}$ - бб пос-ть, то начиная с некоторого номера, определена $\{\frac{1}{x_n}\}$, к-рая представляет собой бм пос-ть.

2°. Если $\{x_n\}$ - бм пос-ть и $\forall n \mapsto x_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$, тогда $\{\frac{1}{x_n}\}$ - бб пос-ть

Док-во: 1° ФАКТ: для всех бб пос-тей $\{x_n\}$: может сущ. лишь конечное число членов бб пос-ти равных 0.

Для $\gamma = 1$ всегда $\exists n_1 : n \geq n_1 \mapsto |x_n| > 1$

Пусть $|x_n| \neq 0$ $\forall n \geq n_0$

Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \geq n_0$, что $\forall n \geq N \mapsto |x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$

$\left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon \Rightarrow \{x_n\}$ - бм

2°. $\forall \gamma > 0\ \exists N = N(\gamma)$, что $\forall n \geq N \mapsto |x_n| < \frac{1}{\gamma}$

Тогда $\forall n \geq N : \left|\frac{1}{x_n}\right| > \gamma \Rightarrow \{\frac{1}{x_n}\}$ - бб

следствие:
1. $\frac{\text{огр}}{\text{ББ}} = \text{БМ}$
2. $\frac{\text{ОГРаниз}}{\text{БМ}} = \text{ББ}$

Билет 6.

Арифм. операции со сходящ. пос-тями

Определения и т.п. см. билет 4.

Теорема 1: $\left[\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha\right] \& \left[\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \beta\right] \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \alpha \pm \beta$

Док-во:

по предположению: $x_n = \alpha + \alpha_n$, $y_n = \beta + \beta_n$ $\quad \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ - б.м. пос-ти

пос-ть $\gamma_n = (x_n \pm y_n) - (\alpha \pm \beta) = \alpha_n \pm \beta_n$

$\{\gamma_n\}$ - б.м. пос-ть по теор 1 (§5)

Теорема 2: $\left[\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha\right] \& \left[\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \beta\right] \Rightarrow \left[\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \alpha\beta\right]$

Док-во:

по предположению: $x_n = \alpha + \alpha_n$, $y_n = \beta + \beta_n$ $\quad \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ - б.м. пос-ти

пос-ть $\gamma_n = y_n x_n - \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha_n + \alpha \beta_n + \alpha_n \beta_n$

$\{\gamma_n\}$ - б.м. пос-ть по теор 1,2,3 (§5)

Теорема 6: $\left[\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha\right] \& \left[\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \beta \neq 0\right] \Rightarrow$ 1. $\exists n_0 : \forall n \geq n_0$ определен. $z_n = \frac{x_n}{y_n}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \frac{\alpha}{\beta}$

Док-во: 1. пусть $\varepsilon = \frac{|\beta|}{2} > 0$

Тогда $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) : \forall n \geq n_0 \mapsto |y_n - \beta| < \frac{|\beta|}{2}$

$||y_n| - |\beta|| \leq |y_n - \beta| < \frac{|\beta|}{2}$

$-\frac{|\beta|}{2} < |y_n| - |\beta|$, т.е. $|y_n| > \frac{|\beta|}{2} \Rightarrow \frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|\beta|}$

Т.о., начиная с n_0, все $y_n \neq 0$ и $\{y_n\}$ - огранич., и имеет смысл $z_n = x_n / y_n$

2. Пусть $x_n = \alpha + \alpha_n$, $y_n = \beta + \beta_n$ $\quad \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ - б.м. пос-ти

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{(\alpha + \alpha_n)\beta - (\beta + \beta_n)\alpha}{y_n \beta} = \frac{1}{y_n}\left(\alpha_n - \frac{\alpha}{\beta}\beta_n\right) = \frac{1}{y_n}\gamma_n$$

$\{\gamma_n\}$ - б.м. по теор. 1,3 (§5) $\quad \left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ - огранич.

Тогда, по теор 3 (§5): $\left\{\frac{\gamma_n}{y_n}\right\}$ - б.м. пос-ть

Билет 7
Свойства пределов, связанные с неравенствами

Теорема 1: $\left[\forall n \geq n_0 \mapsto x_n \underset{[\leq]}{\geq} \beta\right] \& \left[\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha\right] \Rightarrow \alpha \underset{[\leq]}{\geq} \beta$

Док-во: Пусть $\exists n_0 : n \geq n_0 \mapsto x_n \geq \beta$

от противного: $\alpha < \beta$

Тогда для $\varepsilon = \beta - \alpha > 0$ $\quad \exists N : N > n_0 : n \geq N \mapsto |x_n - \alpha| < \varepsilon$

$x_n - \alpha < \beta - \alpha$

$x_n < \beta$ — противоречие

Следствие: $\left[\forall n \geq n_0 \mapsto x_n \geq y_n\right] \& \left[\{x_n\}, \{y_n\} \text{-сходящ.}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} y_n\right]$

Док-во: Рассмотрим $z_n = x_n - y_n \geq 0$ (нерав. выполн. с некоторого n_0)

Тогда по теор. 1: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \geq 0$

по теор. 1 (б6): $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n - \lim\limits_{n\to\infty} y_n \geq 0$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

Следствие: $\left[\forall n \mapsto x_n \in [a,b]\right] \& \left[\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha\right] \Rightarrow \left[\alpha \in [a,b]\right]$

Док-во: $a \leq x_n \leq b$ для всех номеров, начиная с некоторого

Тогда по теор 1: $a \leq \alpha \leq b$,

т.е. $\alpha \in [a,b]$

Теорема 2: (о двух милиц.) $\left[\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \alpha\right] \& \left[\forall n \geq n_0 \mapsto x_n \leq y_n \leq z_n\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \alpha\right]$

Док-во: Для $\forall n \geq n_0$:

$x_n - \alpha \leq y_n - \alpha \leq z_n - \alpha$

$|y_n - \alpha| \leq \max\{|x_n - \alpha|, |z_n - \alpha|\}$

Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_1$ и $\exists N_2$: $n \geq N_1 \mapsto |x_n - \alpha| < \varepsilon$

$n \geq N_2 \mapsto |z_n - \alpha| < \varepsilon$

$N = \max\{n_0, N_1, N_2\}$, тогда $\forall n \geq N \mapsto |y_n - \alpha| < \varepsilon$

ε-произвол. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \alpha$

Билет 8
Теорема о пределе огранич. монот пос-ти

$$\left[\{x_n\} \text{ - } \underset{(\text{убыв.})}{\text{возр}}\right] \overset{def}{=} \left[\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \longmapsto x_n \underset{(>)}{<} x_{n+1}\right]$$

Замечание: а) возр. и неубыв. пос-ти ВСЕГДА огранич. снизу
б) убыв. и невозр. пос-ти ВСЕГДА огранич. сверху

Теорема: если $\{x_n\}$ - монот. и огранич., то она сходится

Док-во: докажем для возраст. пос-ти
$\{x_n\}$ - возр. и огранич. $\Rightarrow$ сущ. точная верхняя грань $d = \sup x_n$ (по теор. о сущ. точн. грани)

$$[d = \sup x_n] \Rightarrow [\forall n \in \mathbb{N} \longmapsto x_n \leq d] \,\&\, [\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \longmapsto x_N > d - \varepsilon]$$

Получается: $0 \leq d - x_N < \varepsilon$
$\{x_n\}$ - возраст, поэтому $\forall n \geq N \longmapsto x_N \leq x_n \leq d$
Т.о. $0 \leq d - x_n \leq d - x_N < \varepsilon$
$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = d = \sup x_n$

! огранич. не всегда сходим.: например $(-1)^n$

Ограниченность монот. пос-ти является необх. (теор. 2 (§4)) и достаточн. (теор. (§8))

Тогда справедливо высказ.: монот. пос-ть сходится тогда и только тогда, когда она огранич.

Сканировано с CamScanner

Билет 10
Теорема Кантора.

Опред: система $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ отрезков назыв стягивающейся, если:

1. $\forall n^{\in \mathbb{N}} \mapsto [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

Лемма Кантора: система стягивающ. отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ имеет единств. точку, принадлежащую всем отрезкам

Док-во: докажем сущ. такой точки:

заметим $\{a_n\}$ - неубыв, $\{b_n\}$ - невозр и обе пос-ти ограничены,

т.к. $a_1 \le a_n \le b_1$, $a_1 \le b_n \le b_1$ $\forall n$

Тогда по теор. (83): $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a_n = \alpha$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \inf b_n = \beta$

Т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \beta - \alpha$, по опред. стяг. отрезков $\beta - \alpha = 0$, т.е. $\beta = \alpha$

Это и есть точка, принадлеж всем отрезкам сис-мы

единственность доказ. от противного

Пусть $\exists \gamma \ne \alpha$: $\gamma \in \{a_n\}$, $\gamma \in \{b_n\}$

Тогда может быть 2 ситуац: $\gamma > \alpha$ или $\gamma < \alpha$

Предполож. $\alpha > \gamma$, тогда $\forall n$: $\underbrace{b_n - a_n}_{\text{длина } [a;b]} \geq \underbrace{\alpha - \gamma}_{\text{длина } [\gamma;\alpha]} = \varepsilon > 0$

Получается, в этой ε-окрестности не лежит ни один член пос-ти $\{b_n - a_n\}$, но по усл. $\{b_n - a_n\}$ - б/м - противореч. $\Rightarrow$ α - единств. точка, принадл всем отр

ВНИМАНИЕ!: лемма Кантора не работает для интервала

например: $(a_n, b_n) = (0, \frac{1}{n})$: $\forall n \mapsto (a_{n+1}, b_{n+1}) \subset (a_n, b_n)$

$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

Док-во: от противного:

пусть $\exists x_0 > 0$ x_0 - принадл всем интервалам сис-мы

Получается, $(0, x_0)$ содерж. в каждом интервале $(0, 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$

По акс. Архимеда $\exists n_0 : n_0 > \frac{1}{x_0}$

Т.о. $(0, 1/n_0) \subset (0, x_0)$ - противореч.

Билет 11
Подпоследовательности и частн. пределы. Критерий частного предела.

Опред: пусть $\{x_n\}$ - произв. пос-ть
$\{k_n\}$ - возраст. пос-ть натур. чисел
Из $\{x_n\}$ выберем ее члены с номерами, соот. членам пос-ти $\{k_n\}$ и расположим в порядке $x_{k_1}, x_{k_2} \dots x_{k_n}$. Полученная пос-ть - подпоследовательность $\{x_n\}$

В $\{x_{k_n}\}$: n - порядковый номер члена пос-ти $\{x_{k_n}\}$
k_n - порядковый номер члена пос-ти $\{x_n\}$

Поэтому $k_n \geq n$

Предложение 1: если $\{x_n\}$ сход. к d, то и любая ее поднос-ть сход. к d

Предложение 2: если все поднос-ти $\{x_n\}$ сход, то они сход. к одному числу

Основ. идея док-ва: $\{x_n\}$ - поднос-ть самой себе
$\{x_n\}$ - сход $\Rightarrow$ предлож. 1

Предложение 3: любая поднос-ть бб пос-ти - бб

Основ. идея док-ва (как и в предлож. 1): $k_N \geq N$

Предложение 4: из любой сходящ. пос-ти можно выделить монотон. сходящ. поднос-ть

Опред: если поднос-ть $\{x_{k_n}\}$ пос-ти $\{x_n\}$ сходится к d, то d назыв. частичным пределом $\{x_n\}$

Опред: точка назыв. предельной точкой пос-ти $\{x_n\}$, если в любой точки ее окрестности лежит беск. много членов пос-ти $\{x_n\}$

Критерий частного предела: число d явл. частн. пределом пос-ти $\{x_n\}$ т. и т.т., когда d - предел. точка пос-ти $\{x_n\}$

Док-во: необходимость:

пусть d - частн. предел $\{x_n\}$, т.е. $\exists \{x_{k_n}\}$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = d$

Значит $\exists N : \forall n \geq N : |x_{k_n} - d| < \varepsilon$ - беск. кол-во эл-тов $\{x_{k_n}\} \Rightarrow$ и $\{x_n\}$ лежат в окрестности т. d

d - предел. точка $\{x_n\}$

достаточность:

пусть d - предел точка $\{x_n\}$

для $\varepsilon = 1$ $\exists k_1$ (k_1 - номер подпос-ти $\{x_n\}$, лежащей на $(d-1, d+1)$)

для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\exists k_2 > k_1 : x_{k_2} \in (d - \frac{1}{2}, d + \frac{1}{2})$

для $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $\exists k_n > k_{n-1} : x_{k_n} \in (d - \frac{1}{n}, d + \frac{1}{n})$

Таким образом, построили подпос-ть $\{x_{k_n}\}$, сходящ. к d.

Билет 13.
Теорема Больцано-Вейерштрасса.

Теорема Больцано-Вейерштрасса:
из любой ограниченной пос-ти можно сделать сходящ. подпос-ть.

Док-во: 1. $\{x_n\}$ - огранич. $\Rightarrow \exists \alpha, \beta : \forall n \in \mathbb{N} \mapsto \beta \le x_n \le \alpha$

Разобьем $[\beta, \alpha]$ т.к. пополам. Тогда хотя бы в одной половине есть беск число членов $\{x_n\}$.

Пусть $[\beta_1, \alpha_1]$ - та половина, где беск число эл-тов $\{x_n\}$

Разобьем ее на 2 половины и выберем ту, где беск. число эл-тов $\{x_n\}$

На n шаге выбираем $[\beta_n, \alpha_n]$, где беск. много эл-тов $\{x_n\}$

Тогда каждый из построенных эл-тов содержится в предыдущем

и $[\beta_n, \alpha_n] \subset [\beta_{n-1}, \alpha_{n-1}]$

$\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha_n - \beta_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha-\beta}{2^n} = 0$

Таким образом, имеем сис-му стягивающихся отрезков $[\beta_n, \alpha_n]$:

$\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \gamma_0$ (из лемма Кантора) сущ. и единств.

2 Теперь построим $\{x_{k_n}\} \to \gamma_0$

1. x_{k_1} - первый член $\{x_n\}$ $x_{k_1} \in [\beta_1, \alpha_1]$

2. $x_{k_2}: (k_2 > k_1)$ $x_{k_2} \in [\beta_2, \alpha_2]$

⋮

n $x_{k_n}: (k_n > k_{n-1})$ $x_{k_n} \in [\beta_n, \alpha_n]$

Получается $\beta_n \le x_{k_n} \le \alpha_n$ $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \gamma_0$

по лемме о 2^{ух} милиц: $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = \gamma_0$

$\{x_{k_n}\}$ - сходящ. пос-ть

Билет 14

Теорема о единственном част. пределе

Теорема о единств. част. пределе: если пос-ть огранич. и имеет единств. частичн. предел, то она сходится к этому част. пределу.

Док-во: Пусть $\forall n: \alpha \geq x_n \geq \beta$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = \gamma$

Тогда $\alpha \geq \gamma \geq \beta$ (по теор 1 (87))

докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \gamma$

от противного: γ - не предел $\{x_n\}$

Тогда $\exists \varepsilon_0$: вне $(\gamma - \varepsilon_0, \gamma + \varepsilon_0)$ беск много эл-тов $\{x_n\}$

Для определенности пусть беск. много членов на $[\gamma + \varepsilon_0, \alpha]$

По теор. Больцано-Вейерш. на $[\gamma + \varepsilon_0, \alpha]$ $\exists$ част. предел $\neq \gamma$ - противореч. усл. (единств. час. предела)

Получается $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \gamma$

Мн-во част. пределов любой пос-ти НЕПУСТО.

Билет 15.
Критерий Коши сходимости числ. пос-ти

Опред: пос-ть $\{x_n\}$ назыв. фундаментальной, если

$$[\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \;\&\; \forall m \geq N \mapsto |x_n - x_m| < \varepsilon]$$

или $$[\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \;\&\; p \in \mathbb{N} \mapsto |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon]$$

Лемма: любая фунд. пос-ть огранич.

Док-во: пусть $\varepsilon = 1$

по опред: $\exists n_1$, что $p \in \mathbb{N} \mapsto |x_{n_1+p} - x_{n_1}| < 1$

Т.о. $\forall n \geq n_1 \mapsto |x_n - \underbrace{x_{n_1}}_{const}| < 1$ (*)

$$|x_{n_1+p}| = |x_{n_1+p} + x_{n_1} - x_{n_1}| \leq |x_{n_1+p} - x_{n_1}| + |x_{n_1}| < 1 + |x_{n_1}|$$

Тогда $\gamma = \max\{\underbrace{|x_1|, |x_2| \dots, |x_{n_1-1}|, |x_{n_1}|}_{\text{числа, лежащие вне (*)}}, |x_{n_1}| + 1\}$

Для $\forall n \in \mathbb{N} \mapsto |x_n| \leq \gamma$

$\{x_n\}$ - огранич.

Критерий Коши: $\{x_n\}$ сходится т. и т.т., когда она фунд.

Док-во: необходимость:

$\{x_n\}$ - сход. и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = d$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) : n \geq N \mapsto |x_n - d| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|x_{n+p} - d| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$|x_{n+p} - x_n| = |(x_{n+p} - d) - (x_n - d)| \leq$$
$$\leq |x_{n+p} - d| - |x_n - d| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\{x_n\}$ - фунд.

достаточность:

$\{x_n\}$ - фунд. $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ огранич. по лемме

По теор. Больц. - Вейер.: $\exists \{x_{k_n}\}$ - сходящ.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = d$

докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = d$

$$\forall \varepsilon > 0 \begin{cases} \exists N_1 = N_1(\varepsilon) : \forall n \geq N_1 \;\&\; \forall m \geq N_1 \mapsto |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists N_2 = N_2(\varepsilon) : \forall n \geq N_2 \mapsto |x_{k_n} - d| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$

Выберем и зафиксируем $k_n > N$, тогда $\forall n \geq N$

$$|x_n - \alpha| = |x_n - x_{k_n} + x_{k_n} - \alpha| \leq |x_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - \alpha| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\{x_n\}$ - сходящ. и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \alpha$

Билет 17

Определение предела ф-ии в точке по Коши и по Гейне, их эквивалентность

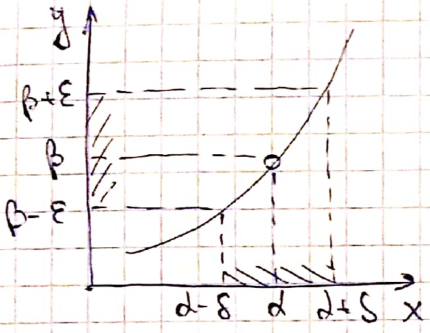
!!! Пусть $y=f(x)$ определ. в некоторой проколотой окрестности т. α, т.е. $f: X\to R$ $X=\{x: 0<|x-\alpha|<\Delta\}$

Опред: **По Гейне:**

$$\left[\beta=\lim_{x\to\alpha} f(x)\right] \overset{def}{=} \left[\forall\{x_n\}: \left[x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha\right] \,\&\, \left[x_n\neq\alpha\ \forall n\right] \longmapsto \left[f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\beta\right]\right]$$

По Коши:

$$\left[\beta=\lim_{x\to\alpha}f(x)\right] \overset{def}{=} \left[\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0: \forall x\ \ 0<|x-\alpha|<\delta \longmapsto |f(x)-\beta|<\varepsilon\right]$$



Важно, что окрестность проколота (иначе нельзя определить производ.)

Замечание: ф-ия $y=f(x)$ в т. α может иметь только единств. предел

Эквивалентность: опред. предела ф-ии по Гейне и Коши эквивалентны

Док-во: 1. Коши $\Rightarrow$ Гейне

Пусть $\{x_n\}$ - произвол. пос-ть: $\{x_n\}\xrightarrow[n\to\infty]{}\alpha$ и $x_n\neq\alpha\ \forall n$

Т.к. $\{x_n\}\to\alpha$ то для указанного $\delta>0$ $\exists N=N(\delta)$: $n\geq N$: $0<|x_n-\alpha|<\delta \longmapsto |f(x_n)-\beta|<\varepsilon$

Т.о. $\{f(x_n)\}$ - сход. к β при $n\to\infty$ для произвольной $\{x_n\}$ ($\{x_n\}\xrightarrow[n\to\infty]{}\alpha$ и $x_n\neq\alpha\ \forall n$)

2. Гейне $\Rightarrow$ Коши

от противного: пусть $\overset{\text{по Гейне}}{\lim_{x\to\alpha}} f(x) \neq \overset{\text{по Коши}}{\lim_{x\to\alpha}} f(x)$

Для $\delta_n=\frac{1}{n}$ $\exists x_n: 0<|x_n-\alpha|<\frac{1}{n} \longmapsto |f(x_n)-\beta|\geq\varepsilon_0$

означ., что $\{x_n\}$ - сход. и $x_n\neq\alpha$ — отрицание Коши

$f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\beta$ - противореч. $|f(x_n)-\beta|\geq\varepsilon_0$

Билет 18.
Критерий Коши существования предела ф-ии

Условие Коши: ф-ия удовл. усл. Коши в т. $x=\alpha$, если:

$$\left[\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\forall x',x'':\ \begin{matrix}0<|x'-\alpha|<\delta\\ 0<|x''-\alpha|<\delta\end{matrix}\mapsto|f(x')-f(x'')|<\varepsilon\right]$$

Теорема Коши: ф-ия $y=f(x)$ имеет конечн. предел в т. $x=\alpha$ т. и т.т., когда f удовл. в т. $x=\alpha$ условию Коши.

Док-во: необходимость

пусть для $y=f(x)$: $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=\beta$

По Коши $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\forall x',x'':\ \begin{matrix}0<|x'-\alpha|<\delta\\ 0<|x''-\alpha|<\delta\end{matrix}\mapsto$

$$\begin{matrix}|f(x')-\beta|<\frac{\varepsilon}{2}\\ |f(x'')-\beta|<\frac{\varepsilon}{2}\end{matrix}$$

Т.о. $|f(x')-f(x'')|=|(f(x')-\beta)-(f(x'')-\beta)|\le$

$\le|f(x')-\beta|+|f(x'')-\beta|<\varepsilon$

$y=f(x)$ – удовл. усл. Коши

достаточность

пусть $y=f(x)$ – удовл. усл. Коши

Возьмем произвол. $\{x_n\}$: $[\{x_n\}\xrightarrow[n\to\infty]{}\alpha]\ \&\ [x_n\ne\alpha\ \forall n]$

докажем, что $\{f(x_n)\}$ – сход.

аналогич. Гейне и Коши

Возьмем $\forall\varepsilon>0$: по Коши: $\exists\delta=\delta(\varepsilon)$: $\exists N\ \forall n\ge N\mapsto 0<|x_n-\alpha|<\delta$

а также $0<|x_{n+p}-\alpha|<\delta$ для $\forall p\in\mathbb{N}$

Т.о. по усл. Коши справедливо:

$$|f(x_n)-f(x_{n+p})|<\varepsilon$$

$\{f(x_n)\}$ – фунд $\Rightarrow$ по Критерию Коши для числ. пос-тей она сходится

докажем, что $\{f(x_n')\}$ и $\{f(x_n'')\}$, соот-щие разным $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$, сходятся

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n')=\beta'$ и $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n'')=\beta''$

$\{\bar{x}_n\}=\{x_1',x_1'',x_2',x_2''\ldots x_n',x_n''\ldots\}$ – сходится к α

Тогда $\{f(\bar{x}_n)\}$ тоже сходится (по Гейне)

Получается, все посл-ти $\{f(\bar{x}_n)\}$ сход. к одному числу

$\beta' = \beta''$

Теорема справедлива, если α заменить $a \pm 0, \infty, \pm\infty$

Билет 19. Существование односторонних пределов у монот ф-ций

Опред: ф-ция $y=f(x)$ на мн-ве X назыв. неубыв [невозр], если для $\forall x_1, x_2 \in X: x_1 < x_2$ выполняется $f(x_1) \le f(x_2)$ [$f(x_1) \ge f(x_2)$]

по Коши

Опред: $\left[\lim\limits_{x\to\alpha+0} f(x) = \beta = f(\alpha+0)\right] \overset{def}{=} [\forall \varepsilon>0\ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0 : \forall x:$
$0 < x-\alpha < \delta \mapsto |f(x)-\beta| < \varepsilon]$ - правый предел

$\left[\lim\limits_{x\to\alpha-0} f(x) = \beta = f(\alpha-0)\right] \overset{def}{=} [\forall \varepsilon>0\ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0 : \forall x:$
$0 < \alpha-x < \delta \mapsto |f(x)-\beta| < \varepsilon]$ - левый предел

по Гейне

$\left[\lim\limits_{x\to\alpha+0} f(x) = \beta = f(\alpha+0)\right] \overset{def}{=} \left[\forall \{x_n\} : [x_n \to \alpha] \& [x_n > \alpha\ \forall n \in \mathbb{N}] \mapsto [f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta]\right]$ - правый предел

$\left[\lim\limits_{x\to\alpha-0} f(x) = \beta = f(\alpha-0)\right] \overset{def}{=} \left[\forall \{x_n\} : [x_n \to \alpha] \& [x_n < \alpha\ \forall n \in \mathbb{N}] \mapsto [f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta]\right]$ - левый предел

Теорема: если ф-я f определен. и монот на (a,b), то в каждой т. $x_0 \in (a,b)$ эта ф-ия имеет конечн. предел слева и справа. 1) Если $f(x)$ неубыв. [невозр.] на (a,b), то $\forall x_0 \in (a,b)$: $f(x_0-0) \le f(x_0) \le f(x_0+0)$ [$f(x_0+0) \le f(x_0) \le f(x_0-0)$]

Док-во: пусть $f(x)$ неубыв на (a,b)

рассмотрим $x_0 \in (a,b)$, тогда $\forall x\ (a, x_0) \mapsto f(x) \le f(x_0)$
получается $f(x)$ - ограничен.

По теор. о точной верхней грани (б2)
$\exists \sup\limits_{(a,x_0)} f(x) = \alpha$, $\alpha \le f(x_0)$

точная верх грань; верхняя грань

Опред sup: $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in (a, x_0) : f(x_\varepsilon) > \alpha - \varepsilon$

Тогда $\exists \delta = \delta(\varepsilon) = x_0 - x_\varepsilon > 0 \Rightarrow \forall x : \boxed{0 < x_0 - x < \delta \Leftrightarrow x \in (x_\varepsilon, x_0)}$
$\mapsto \alpha - \varepsilon < f(x) \le \alpha$ $\quad -\varepsilon < f(x) - \alpha \le 0$
$|f(x)-\alpha| < \varepsilon$

$[\sim] \overset{def}{=} \left[\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0) = \alpha\right]$

Мы доказали $\exists f(x_0-0) : f(x_0-0) \le f(x_0)$

$[f$ огранич на $X] \overset{def}{=} [\exists C>0 : \forall x \in X \mapsto |f(x)| \le C]$
$[\alpha = \sup\limits_{x\in X} f(x)] \overset{def}{=} [\forall x \in X \mapsto f(x) \le \alpha] \& [\forall \varepsilon>0\ \exists x_\varepsilon \in X : f(x_\varepsilon) > \alpha - \varepsilon]$

Билет 20.
Непрерывность ф-ии в точке
Непрерывность сложной ф-ии

Опред: ф-ия $y = f(x)$ назыв непрерыв в т α, если $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha)$

Замечание:
1. $f(x)$ опред в т α
2. $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \beta$
3. $f(\alpha) = \beta$

Например: $y = f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$ $f(0) = 0 \Rightarrow |f(x) - f(0)| = |f(x)| = |x| < \delta = \varepsilon$

Получается $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon : \forall x : |x| < \delta \longmapsto |f(x) - f(0)| < \varepsilon$

$f(x)$ в т $x = 0$ - непрерыв

Опред: по Гейне
$$[y = f(x) \text{ непрерыв в } \alpha] \overset{def}{=} [\forall \{x_n\} : [x_n \underset{n\to\infty}{\to} \alpha] \longmapsto [f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(\alpha)]]$$

по Коши
$$[\lim_{x \to \alpha} f(x) = f(a)] \overset{def}{=} [\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x : |x - \alpha| < \delta \longmapsto |f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon]$$

Опред: $y = f(x)$ непрерыв справа (слева) в т α, если правый (левый) предел этой ф-ии сущ. и равен значению ф-ии в этой точке

Предложение: если $y = f(x)$ непрерыв слева и справа в т. α, то она непрерыв. и в α

Теорема (о предельном переходе под знаком непрерыв. ф-ии):

$X = \{x : 0 < |x - \alpha| < \Delta_1\}$ $f : X \to \tilde{Y}$ $\tilde{Y} \subseteq Y$

$Y = \{y : |y - \beta| < \Delta_2\}$ $g : Y \to \mathbb{R}$

теорема: $[[\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \beta] \& [\lim\limits_{y \to \beta} g(y) = g(\beta)]] \Rightarrow [\lim\limits_{x \to \alpha} h(x) = \lim\limits_{x \to \alpha} g(f(x)) = g(\beta)]$

Док-во: Возьмем произвол $\{x_n\}$ - по - Гейне:
$\{x_n\} : [x_n \to \alpha] \& [x_n \neq \alpha\ \forall n]$

Сканировано с CamScanner

$y_n = f(x_n) \to \beta \Rightarrow g(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(\beta)$ непрерыв.

$h(x_n) = g(f(x_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(\beta)$

Получается, $\lim\limits_{x\to\alpha} g(f(x)) = g(\lim\limits_{x\to\alpha} f(x))$

Теорема о суперпозиции непрерыв. ф-ии (следствие):

$\left[\left[\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)\right] \& \left[\lim\limits_{y\to\beta} g(y) = g(\beta)\right] \& \left[f(\alpha) = \beta\right]\right] \Rightarrow \left[\lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = h(\alpha)\right]$

усл. непрерыв. усл. непрерыв.

Док-во:

$$\lim_{x\to\alpha} h(x) = \lim_{x\to\alpha} g(f(x)) = g(f(\alpha)) = h(\alpha)$$

$$\lim_{x\to\alpha} g(f(x)) = g(\lim_{x\to\alpha} f(x)) = g(f(\alpha))$$

Билет 21.
Ограниченность ф-ии, непрерыв. на отрезке

Опред: ф-ия называется непрерыв. на $[a,b]$, если она непрерыв. в каждой точке интервала (a,b) и $[\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)]$ & $[\lim_{x \to b-0} f(x) = f(b)]$

Теорема (Первая теор. Вейерштрасса):

$[f$ непрерыв на $[a,b]] \Rightarrow [f$ огранич на $[a,b]]$

Док-во: от противного

$[f$ не огранич на $[a,b]] \overset{def}{=} [\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in [a,b] : |f(x_n)| > n]$

Получается $\{y_n = f(x_n)\}$ - бб

Действительно, $[\forall \gamma > 0 \ \exists N = N(\gamma) : N > \gamma$ (по акс. Архимеда) $: \forall n \geq N \mapsto$

$|y_n| = |f(x_n)| > n \geq N > \gamma]$ опред. бб пос-ти

$\{x_n\}$ - огранич. (т.к. $x_n \in [a,b] \ \forall n$)

По теор Больцано-Вейер. $\exists \{x_{k_n}\}$ - сходящ. подпос-ть

пусть $\lim_{n \to \infty} x_{k_n} = c$ и $c \in [a,b]$ (по теор 1 (δ7))

Тогда, если $y = f(x)$ - непрерыв на $[a,b]$, то

$$\lim_{n \to \infty} f(x_{k_n}) = f(c)$$

т.е. $\{y_{k_n} = f(x_{k_n})\}$ - сходится, а $\{y = f(x_n)\}$ - бб

противоречие
($\forall$ подпос-ть бб пос-ти - бб).

Билет 22

Достижение точной верхней и точной нижней граней ф-ции, непрерыв. на отрезке

Теорема (Вторая теорема Вейерштрасса):

$$\left[f \text{ непрерыв на } [a,b]\right] \Rightarrow \left[\exists c_1, c_2 \in [a,b],\ \alpha = \sup_{[a,b]} f(x) = f(c_1),\ \beta = \inf_{[a,b]} f(x) = f(c_2)\right]$$

Док-во. α и β сущ., т.к. по 1ой теор Вейерш. f непрерыв на $[a,b] \Rightarrow$ огранич. $\Rightarrow$ есть $\sup f(x)$ и $\inf f(x)$ см (б2)

От противного: пусть $\alpha = \sup\limits_{a \le x \le b} f(x)$ и $f(x) \ne \alpha$ $\forall x \in [a,b]$

Введем $y = g(x) = \dfrac{1}{\alpha - f(x)}$ - непрерыв на $[a,b] \Rightarrow$ огранич на $[a,b]$

Тогда $\exists A > 0 : \forall x \in [a,b] \mapsto g(x) \le A$ и

$$\frac{1}{\alpha - f(x)} \le A \Rightarrow f(x) \le \alpha - \frac{1}{A} < \alpha$$

Отсюда α не явл. $\sup f(x)$ - противореч

Замечание: если усл в теор. заменить на (a,b), то теор перестанет быть верной

Билет 23
Теорема о промежут. значениях непрерыв. ф-ции

Теорема Больцано – Коши:

$$\big[[f \text{ непрерыв на } [a,b]] \& [f(a)\cdot f(b)<0]\big] \Rightarrow [\exists c\in(a,b) : f(c)=0]$$

Док-во: для определенности $f(a)<0$, $f(b)>0$

Введем $X=\{x\in[a,b] : f(x)<0\}$, $X\neq\varnothing$, т.к. $a\in X$

$X\subset[a,b] \Rightarrow X$ - огранич.

По теор. (2 теор. Вейерш.) $\exists$ точная грань X

пусть $\underline{c=\sup X}$

1. докажем, что $c\in(a,b)$ и $f(c)=0$

f - непрерыв на (a,b) и $f(a)<0$, $f(b)>0 \Rightarrow$

$\exists\delta_1>0, \exists\delta_2>0 : \forall x\in[a,a+\delta_1) \mapsto f(x)<0$ — по теор. о локальн. сохран. знака

$\forall x\in(b-\delta_2,b] \mapsto f(x)>0$

Получается, $c\in(a,b)$

2. докажем, что $f(c)=0$

от противного: либо $f(c)>0$, либо $f(c)<0$

по теор о локал. сохран знака: $\exists\delta>0 : \forall x\in(c-\delta,c+\delta) \mapsto f(x)\cdot f(c)>0$

Но для указанного δ $\exists x'\in(c-\delta,c] : f(x')<0$

$\forall x\in(c,c+\delta) : f(x)>0$

Противореч. с этим

Тогда $f(c)=0$

Теорема: (о локальном сохран. знака непрерыв ф-ции):

$$\big[\underbrace{\lim_{x\to d} f(x)=f(d)}_{\text{непрерыв.}}\big] \& [f(d)\neq 0] \Rightarrow [\exists\delta>0, \forall x : |x-d|<\delta \mapsto f(x)f(d)>0]$$

Док-во: По опред. Коши ($\lim_{x\to d} f(x)=f(d)$) $\Rightarrow$

$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0 \quad \forall x : |x-d|<\delta \mapsto f(d)-\varepsilon<f(x)<f(d)+\varepsilon$

Выберем $\varepsilon<|f(d)|$, тогда

$f(d)-\varepsilon$, $f(d)$, $f(d)+\varepsilon$ имеют один знак

Теорема: [f непрерыв на $[a,b]$] & [$f(a)=\alpha\neq\beta=f(b)$] $\Rightarrow$ [$\forall\gamma$: лежащ. между α и β $\mapsto \exists c\in(a,b) : f(c)=\gamma$]

Док-во: для определенности $\alpha>\beta$, тогда $\alpha>\gamma>\beta$

Рассмотрим $y=g(x)=f(x)-\gamma$ - непрерыв. на $[a,b]$

$g(a)=\alpha-\gamma>0$
$g(b)=\beta-\gamma<0$ $\Rightarrow$ по теор. Больц.-Коши $\exists c\in(a,b): g(c)=0$

$g(c)=0=f(c)-\gamma \Rightarrow f(c)=\gamma$