Комбинаторика: биномиальные коэффициенты
домашнее задание

Костылев Влад, Б01-208

6 ноября 2022 г.

№1 Решим задачу динамически. Изобразим нашу координатную плоскость, а в каждой ячейке будем писать сколько способов добраться до (4; 5). Будем считать, что из (4; 5) в саму себя - добраться один способ, а все остальные клетки сначала ноль. Таблицу будем заполнять следующим образом: в клетку (x; y) запишем сумму (x + 2; y + 2), (x + 1; y) и (x; y + 1). Заполнять будем с клетки (4; 5) будем проходить сначала по одной оси, потом по другой. Т.е. сначала заполняем ось OX: 4 Потом OY: 5, OX: 4 и так далее.

y/x	0	1	2	3	4
0	189	76	25	6	1
1	101	47	18	5	1
2	47	26	12	4	1
3	18	12	7	3	1
4	5	4	3	2	1
5	1	1	1	1	1

Мы получаем в координате (0; 0) число 189 - это и есть ответ.

№2 Заметим, что данная задача и есть задача о количестве сочетаний с повторениями из 10 элементов по 100:

$$\overline{C}_{10}^{100} = C_{109}^{100} = \frac{109!}{9! \cdot 100!}$$

№3

$$(1+2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 1^{n-k} \cdot 2^k$$

Возьмем k в интервале (0; n]. Нам нужно найти наибольшее слагаемое из $C_n^k \cdot 2^k$ при всех k из заданного интервала. Оно будет наибольшим, когда k наибольшее из следующего неравенства:

$$\frac{C_n^k \cdot 2^k}{C_n^{k-1} \cdot 2^{k-1}} > 1$$

Решаем его и получаем, что:

$$k < \frac{2}{3}(n+1)$$

Тогда ответом будет являться max округленного вниз и вверх от $\frac{2}{3}(n+1)$.

№4 Пусть F(n) это функция зависимости длины слова от n. a_n - количество слов длины n заканчивающихся на 0, b_n - количество слов длины n заканчивающихся на 1. Тогда:

$$a_{n+1} = a_n + b_n \qquad b_{n+1} = a_n$$

$F(n) = a_n + b_n$. Найдем тогда F(n + 2):

$$F(n+2) = a_{n+2} + b_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} + a_n + b_n = F(n+1) + F(n)$$

Мы получили числа Фибоначчи.

№6

$$C_{F_{1000}}^{F_{998}+1} ? C_{F_{1000}}^{F_{999}+1}$$

$$\frac{F_{1000}!}{(F_{998}+1)!(F_{1000}-F_{998}-1)!} ? \frac{F_{1000}!}{(F_{999}+1)!(F_{1000}-F_{999}-1)!}$$

$$\frac{1}{(F_{998}+1)!(F_{999}-1)!} ? \frac{1}{(F_{999}+1)!(F_{998}-1)!}$$

$$F_{998}(F_{999}+1) ? F_{998}(F_{998}+1)$$

Получается вместо знака вопроса мы должны поставить знак больше ($>$), так как числа Фибоначчи возрастают.

№8 Давайте заменим 5 полок на одну, тогда мы должны поставить 4 перегородки, чтобы получить 5 секций, каждая из которых вмещает в себя ≤ 20 книг. Обозначим книги за букву b_i (book), где i - номер книги [1; 20]. $b_1, b_2, ..., b_{20}\ |\ |\ |\ |$. Где '|' - перегородка. Осталось найти количество способов переставить данные перегородки и книги, с учетом того, что перегородки не уникальны:

$$N = \frac{24!}{4!} \text{ способа.}$$

№9 Заметим, что данная задача и есть задача о количестве сочетаний с повторениями из 8 по 8:

$$\overline{C}_8^8 = C_{15}^8 = 6435 \text{ способов.}$$