Отчет о выполнении лабораторной работы 3.1.3
Измерение магнитного поля Земли

Костылев Влад, Б01-208

17 ноября 2023 г.

Аннотация

Цель работы: исследовать свойства постоянных неодимовых магнитов, измерить с их помощью горизонтальную и вертикальную составляющие индукции магнитного поля Земли и магнитное наклонение.

В работе используются: неодимовые магниты; тонкая нить для изготовления крутильного маятника; медная проволока; электронные весы; секундомер; измеритель магнитной индукции; штангенциркуль; брусок, линейка и штатив из немагнитных материалов; набор гирь и разновесов.

1 Теоретическая справка

Простейший магнитный диполь может быть образован витком с током или постоянным магнитом. По определению, магнитный момент $\vec{\mathfrak{m}}$ тонкого витка площадью S с током I равен (в СИ)

$$\vec{\mathfrak{m}} = I\vec{S},$$

где $\vec{S} = S\vec{n}$ – вектор площади контура, образующий с направлением тока правовинтовую систему, $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к площадке (это же направление $\vec{\mathfrak{m}}$ принимается за направление $S \to N$ от южного S к северному N полюсу магнита). Если размеры контура с током или магнитной стрелки малы по сравнению с расстоянием до диполя, то соответствующий магнитный диполь $\vec{\mathfrak{m}}$ называют *элементарным* или *точечным*.

Магнитное поле точечного диполя определяется по формуле, аналогичной формуле для поля элементарного электрического диполя:

$$\vec{B}_{\text{дип}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3\left(\vec{\mathfrak{m}}\cdot\vec{r}\right)\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{\mathfrak{m}}}{r^3}\right).$$

Во внешнем магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ на точечный магнитный диполь $\vec{\mathfrak{m}}$ действует механический момент сил

$$\vec{\mathcal{M}} = \left[\vec{\mathfrak{m}} \times \vec{B}\right].$$

При этом потенциальная энергия, которой обладает диполь с постоянным $\vec{\mathfrak{m}}$, равна

$$W = -\left(\vec{\mathfrak{m}}\cdot\vec{B}\right).$$

Когда диполь ориентирован вдоль внешнего поля ($\mathfrak{m} \parallel \vec{B}$), он находится в состоянии *равновесия* ($\vec{\mathcal{M}} = 0$). При этом *устойчивым* будет только состояние, в котором диполь *сонаправлен* с полем $\vec{\mathfrak{m}} \uparrow\uparrow \vec{B}$, поскольку его потенциальная энергия достигает *минимума* ($W_{min} = -\mathfrak{m}B$). При противоположной ориентации энергия будет иметь максимум $W_{max} = \mathfrak{m}B$, и состояние равновесия будет неустойчивым.

В *неоднородном* внешнем поле выражение для энергии постоянного диполя сохраняется. При этом кроме момента сил на диполь действует ещё и сила

$$\vec{F} = -\nabla W = (\vec{\mathfrak{m}} \cdot \nabla)\,\vec{B}.$$

В частности, проекция этой силы на ось x имеет вид

$$F_x = \mathfrak{m}_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + \mathfrak{m}_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + \mathfrak{m}_z \frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

Таким образом, *свободный* магнитный диполь в неоднородном магнитном поле ориентируется вдоль силовых линий магнитного поля и втягивается в область более сильного поля, поскольку это ведёт к уменьшению энергии диполя.

Рассчитаем силу взаимодействия магнитов с моментами $\vec{\mathfrak{m}}_1$ и $\vec{\mathfrak{m}}_2$ в рамках модели точечных диполей. В частном случае, когда моменты двух небольших магнитов направлены вдоль соединяющей их прямой: $\vec{\mathfrak{m}}_{1,2} \parallel \vec{r}$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор между ними, магниты взаимодействуют с силой

$$F_{12} = \mathfrak{m}_1 \frac{\partial B_2}{\partial r} = \mathfrak{m}_1 \frac{\partial \left(\frac{2\mathfrak{m}_2}{r^3}\right)}{\partial r} = -\frac{6\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2}{r^4} \text{ (ед. СГС).}$$

Здесь магниты притягиваются, если их магнитные моменты сонаправлены ($\vec{\mathfrak{m}}_1 \uparrow\uparrow \vec{\mathfrak{m}}_2$), и отталкиваются, если направлены противоположно ($\vec{\mathfrak{m}}_1 \uparrow\downarrow \vec{\mathfrak{m}}_2$).

Если магнитные моменты направлены перпендикулярно соединяющей их прямой: $\vec{\mathfrak{m}}_{1,2} \perp \vec{r}$, то нетрудно показать, что сила их взаимодействия окажется в два раза меньшей и будет иметь противоположный знак:

$$F_{12} = \frac{3\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2}{r^4} \text{ (ед. СГС)}$$

(диполи притягиваются при $\vec{\mathfrak{m}}_1 \uparrow\downarrow \vec{\mathfrak{m}}_2$ и отталкиваются при $\vec{\mathfrak{m}}_1 \uparrow\uparrow \vec{\mathfrak{m}}_2$).

Для проведения эксперимента важно, что, во-первых, вещество, из которого изготовлены магниты, является *магнитожёстким* материалом, и, во-вторых, шары намагничены однородно.

"Магнитожёсткость"материала означает, что магнитные моменты шаров в процессе работы не изменяются под действием внешних магнитных полей, т. е. шар ведёт себя как постоянный ("жёсткий") диполь. В том числе, магнитные моменты не изменяются при контакте магнитов друг с другом.

Магнитное поле однородно намагниченного шара радиусом R может быть вычислено точно. На расстояниях $r \geq R$ от центра шара оно совпадает с полем точечного магнитного диполя, расположенного в центре, магнитный момент $\mathfrak{m}$ которого совпадает с полным моментом шара. Внутри шара магнитное поле однородно – нетрудно получить, что при $r < R$

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 \vec{\mathfrak{m}}}{2\pi R^3} \text{ [СИ]}.$$

В качестве ещё одной характеристики материала магнита используют остаточную *намагниченность* $\vec{M}$. По определению, намагниченность равна *объёмной плотности магнитного момента*, поэтому для однородно намагниченного шара

$$\vec{\mathfrak{m}} = \vec{M}V,$$

где $V = \frac{4\pi}{3}R^3$ – объём магнита. Величину $\vec{B}_r = \mu_0 \vec{M}$ называют *остаточной индукцией* материала.

Нетрудно видеть, что индукция $\vec{B}_p$ *на полюсах* однородно намагниченного шара направлена по нормали к поверхности и совпадает поэтому с индукцией внутри шара: $\vec{B}_p = \vec{B}_0$. Тогда величина B_p связана с остаточной индукцией B_r соотношением

$$B_p = B_0 = \frac{2}{3}B_r.$$

Экспериментальная установка

Определение величины магнитного момента шариков

Величину магнитного момента $\mathfrak{m}$ одинаковых шариков можно рассчитать, зная их массу m и определив максимальное расстояние r_{max}, на котором они ещё удерживают друг друга в поле тяжести. При максимальном расстоянии сила тяжести шариков равна силе их магнитного притяжения:

$$\frac{6\mathfrak{m}^2}{r_{max}^4} = mg \implies \mathfrak{m} = \sqrt{\frac{mgr_{max}^4}{6}}.$$

По величине магнитного момента $\mathfrak{m}$ можно рассчитать величину индукции магнитного поля вблизи любой точки на поверхности шара радиуса R. Максимальная величина индукции наблюдается на полюсах:

$$\vec{B}_p = \frac{2\vec{\mathfrak{m}}}{R^3}.$$

Величину магнитного момента шариков можно определить также по силе их сцепления. Она определяется как сила, необходимая для разрыва двух сцепившихся магнитных шариков. Сила сцепления максимальна, если шары соединяются своими противоположными полюсами.

Максимальную силу сцепления можно определить по весу магнитной цепочки, которую способен удержать самый верхний магнитный шарик. Если цепь состоит из одинаковых магнитных шариков, то при определённой длине она она оторвётся от верхнего шарика. При этом, учитывая, что сила притяжения убывает как $F \sim \frac{1}{r^4}$, для расчёта прочности цепочки достаточно учитывать силу взаимодействия верхнего шара с тремя-четырьмя ближайшими соседями.

Если сила сцепления двух одинаковых шаров диаметром d с магнитными моментами $\mathfrak{m}$ равна

$$F_0 = \frac{6\mathfrak{m}^2}{d^4},$$

то минимальный вес цепочки, при которой она оторвётся от верхнего шарика, равен

$$F = F_0 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} F_0 \approx 1,08 F_0.$$

Таким образом, сила сцепления двух шаров равна

$$F_0 = \frac{90}{\pi^4} F = 0,924F.$$

Измерение горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли

Магнитное поле в настоящей работе определяется по периоду крутильных колебаний магнитной стрелки вокруг вертикальной оси.

"Магнитная стрелка"образована из сцепленных друг с другом противоположными полюсами шариков и с помощью Λ-образного подвеса подвешена в горизонтальном положении. Магнитные моменты шариков направлены в одну сторону вдоль оси "стрелки". Под действием вращательного момента $\vec{M} = \vec{\mathfrak{m}}_0 \times \vec{B}$ магнитный момент "стрелки"$\vec{\mathfrak{m}}_0$ выстроится вдоль горизонтальной составляющей магнитного поля Земли $\vec{B}_h$ в направлении $S \to N$. При отклонении "стрелки"на угол θ от равновесного положения в горизонтальной плоскости возникают крутильные колебания вокруг вертикальной оси, проходящей через середину "стрелки". Если пренебречь упругостью нити, то уравнение крутильных колебаний такого маятника при малых амплитудах ($\sin\theta \approx \theta$) имеет вид

$$I_n\ddot{\theta} + \mathfrak{m}_0 B_h \theta = 0,$$

где $I_n = \frac{1}{12} m_{\text{ст}} l_{\text{ст}}^2 = \frac{1}{12} n^3 m d^2$ – момент инерции "стрелки состоящей из n шариков, который можно с хорошей точностью приблизить моментом инерции тонкого однородного стержня соответствующей массы и длины, а $\mathfrak{m}_0 = n\mathfrak{m}$ – полный магнитный момент стрелки.

Таким образом, период колебаний маятника оказывается равен

$$T(n) = 2\pi\sqrt{\frac{md^2}{3\mathfrak{m}B_h}} n = kn,$$

где $k = 2\pi\sqrt{\frac{md^2}{3\mathfrak{m}B_h}}$.

Измерение вертикальной составляющей индукции магнитного поля Земли. Магнитное наклонение.

Для измерения вертикальной составляющей B_v вектора индукции поля Земли используется та же установка, что и для измерения горизонтальной составляющей с тем лишь отличием, что магнитная "стрелка"подвешивается на нити без Λ-образного подвеса. В этом случае магнитная "стрелка составленная из чётного числа шариков и подвешенная на тонкой нити за середину, расположится не горизонтально, а под некоторым отличным от нуля углом к горизонту. Это связано с тем, что вектор $\vec{B}$ индукции магнитного поля Земли в общем случае не горизонтален, а образует с горизонтом угол β, зависящий от географической широты φ места, где проводится опыт. Величина угла β называется магнитным наклонением.

С помощью небольшого дополнительного грузика "стрелку"можно "выровнять расположив её горизонтально. В этом случае момент силы тяжести груза относительно точки подвеса будет равен моменту сил, действующих на "стрелку"со стороны магнитного поля. Если масса уравновешивающего груза равна $m_{\text{гр}}$, плечо силы тяжести $r_{\text{гр}}$, а полный магнитный момент "стрелки"$\mathfrak{m}_0 = n\mathfrak{m}$, то в равновесии

$$m_{\text{гр}} g r_{\text{гр}} = n\mathfrak{m}B_v,$$

где B_v – вертикальная составляющая поля Земли. Видно, что момент $M(n)$ силы тяжести уравновешивающего груза пропорционален числу n шариков, образующих магнитную "стрелку":

$$M(n) = An,$$

где $A = \mathfrak{m}B_v$.

2 Используемое оборудование

В работе используются: неодимовые магниты; тонкая нить для изготовления крутильного маятника; медная проволока; электронные весы; секундомер; измеритель магнитной индукции; штангенциркуль; брусок, линейка и штатив из немагнитных материалов; набор гирь и разновесов.

3 Результаты измерений и обработка данных

Задание 1

Метод А

$$8m = 6.840 \pm 10^{-3} г \qquad d = 6 \pm 0.05 мм$$

Прокладывая листы бумаги между магнитами, измерим $h_{отрыва}$:

$$h = 16.7 \pm 0.05 мм \Rightarrow r_{max} = h + d$$

Найдем величину магнитного момента магнитика P_m:

$$F = \frac{6P_m^2}{r_{max}^4} = mg \Rightarrow P_m = \sqrt{\frac{mgr_{max}^4}{6}} = 60,89 \pm 2.12 эрг/Гс$$

$$p_m = \frac{P_m}{\frac{4}{3}\pi(\frac{d}{2})^3} = 538.6 \pm 12.4 эрг/Гс * см^3$$

Тогда найдем магнитное поле:

$$B_p = \frac{8\pi}{3} p_m = 4504 \pm 63 Гс$$

На практике:

$$B_p \approx 2900 Гс$$

Найдем остаточную магнитную индукцию:

$$B_r = 4\pi p_m = 6757 \pm 84 Гс$$

Метод Б

Найдем максимальную массу цепочки (до отрыва):

$$M = 313.21 г$$

$$F_0 = \frac{F}{1.08} = 2.84 * 10^5 дин$$

Найдем магнитный момент:

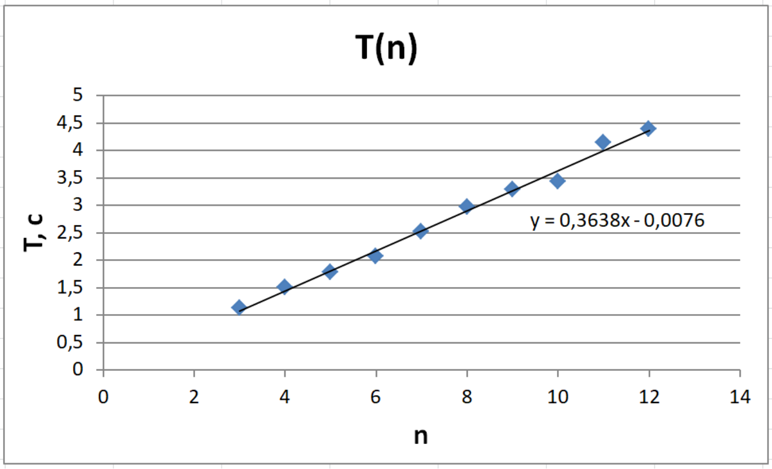
$$P_m = \sqrt{\frac{F_0 d^4}{6}} = 78.3 \pm 6.2 эрг/Гс$$

$$\Rightarrow B_p = 5800 \pm 89 Гс$$

$$B_r = 8700 \pm 121 Гс$$

Задание 2

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10T, с	11,35	15,02	17,86	20,68	25,16	29,7	32,83	34,28	41,35	43,9
T, с	1,135	1,502	1,786	2,068	2,516	2,97	3,283	3,428	4,135	4,39



$$T(n) = k * n$$

Определим горизонтальную составляющую магнитного поля Земли:

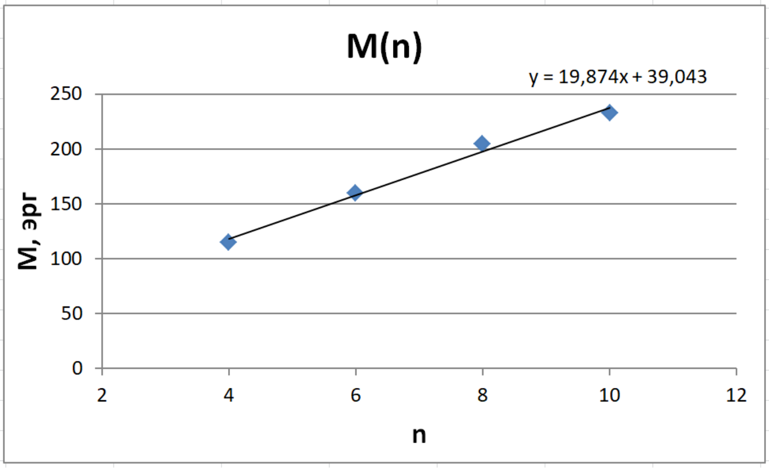
$$B_h = \frac{\pi^2 m d^2}{3k^2 P_m} = 0.128 \pm 0.002 Гс$$

Задание 3

Найдем массу уравновешивающего грузика (n = 10):

$$m_{гр} = 0.099 \pm 0.001 г$$

n	10	8	6	4
m_гр, г	0,099	0,116	0,136	0,196
l, см	2,4	1,8	1,2	0,6
M, эрг	232,848	204,624	159,936	115,248



$$M = An \Rightarrow B_v = \frac{A}{P_m} = 0.323 \pm 0.012 Гс$$

Определим магнитное наклонение и полное магнитное поле:

$$\beta = arctg(\frac{B_v}{B_h}) = 68.4 \pm 3.7^\circ \qquad B = \sqrt{B_h^2 + B_v^2} = 0.347 \pm 0.15 Гс$$

$$P_з =$$

4 Заключение

В заключение можно сказать, что в данной лабораторной работе мы научились исследовать свойства постоянных неодимовых магнитов, измерить с их помощью горизонтальную и вертикальную составляющие индукции магнитного поля Земли и магнитное наклонение.