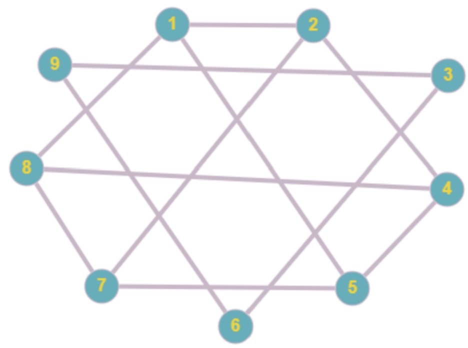
Неориентированные графы
домашнее задание

Костылев Влад, Б01-208

9 октября 2022 г.

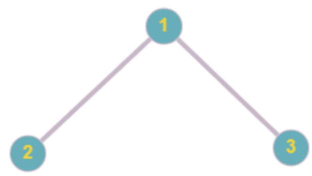
№1 Если у нас есть 1 вершина степени 1, то на остальных 7 ребрах должно быть 22 ребра, но такого быть не может, так как максимальное кол-во ребер на 7 вершинах равно $C_7^2 = \dfrac{7 \cdot 6}{2} = 21$(такое количество ребер в K_7) $\Rightarrow$

№2 Изобразим наш граф:



В нём есть 2 компоненты связности: (3-6-9) и (1-2-4-5-7-8), значит мы никак не можем добраться из вершины 1 в вершину 9.

№3 Изобразим граф с выделенной вершиной 1 и двумя ребрами:



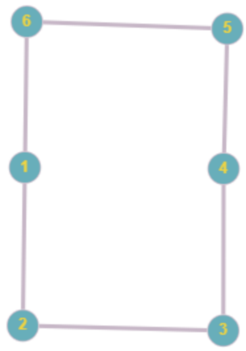
Соединив вершины 2 и 3, мы больше добавить вершин не можем, т.к. если есть еще одна вершина, то при соединении ее с вершиной 1, 2 или 3 это ребро не будет иметь общей вершины с ребром (2-3), (3-1) или (1-2) соответственно.

Если мы не будем проводить ребро (2-3), то при добавлении новой вершины мы обязаны соединить её с 1 и никакие другие рёбра мы проводить не сможем, ситуация выше. Таким образом, мы получим граф - звезду.

$\Rightarrow$ возможны только: K_3 и граф-звезда на произвольном количестве вершин ≥ 3.

№4 Предположим в графе с 400 вершинами степени 201 каждая нет цикла длины 3. Возьмем любые 2 точки, соединенные ребром, каждая из них соединена еще с $201 - 1 = 200$ различными точками, причем среди них нет точек, общих для этих двух. Для выполнения условия, в графе должно находится, кроме этих двух точек, еще $200 \cdot 2 = 400$ различных точек. Но в данном графе их осталось $400 - 2 = 398, 400 > 398$, из чего это невозможно. Из этого следует, что такой подграф обязательно найдется $\Rightarrow$ ч.т.д.

№5 Контр пример:



$$H_1 = (\{1, 2, 3, 5, 6\}, \{(1, 2), (2, 3), (1, 6), (5, 6)\})$$

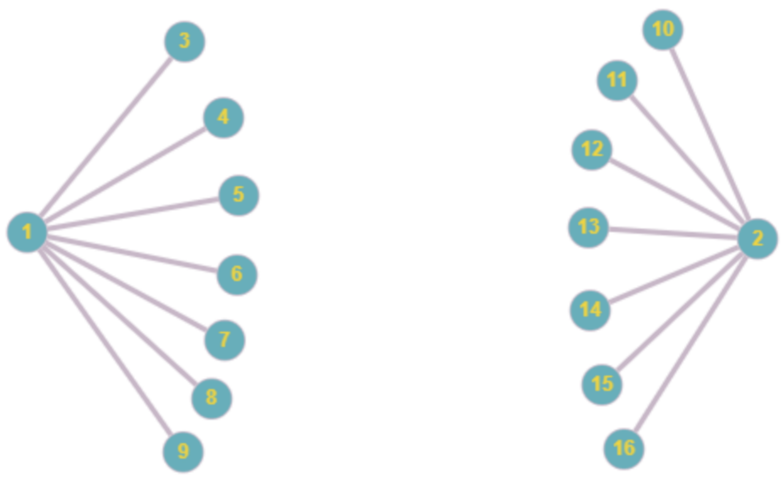
$$H_2 = (\{2, 3, 4, 5, 6\}, \{(2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}$$

H_1 и H_2 связны

$$H_1 \cap H_2 = (\{2, 3, 5, 6\}, \{(2, 3), (5, 6)\} \neq \emptyset$$

Но подграф $H_1 \cap H_2$ не связан.

№6 Предположим, что существуют 2 города, из которых нельзя доехать друг до друга (город 1 и город 2). Тогда граф страны разбивается на 2 компоненты связности:



Но тогда в каждой компоненте связности у нас должно быть минимум по 8 вершин, ведь из городов 1 и 2 выходит по 7 рёбер и эти рёбра не могут быть инцидентны, ведь вершины лежат в разных компонентах связности.

Но тогда суммарно у нас будет $8 + 8 = 16$ вершин, а всего их 15, значит, наше предположение неверно. Значит из любого города можно добраться до любого другого.