Математические определения, утверждения и доказательства

домашнее задание

Костылев Влад, Б01-208

2 октября 2022 г.

№1 В 4 пункте имеется в виду, что x - одинаковый для всех скобок. При переходе от 4 пункта к 5 подразумевается, что x разный для левой и правой скобок $\Rightarrow$ доказательство неверное.

№2 Истинное выражение означает, что человек смотрит телевизор, ложное - не смотрит, тогда:

$$\begin{cases} A \to B = 1; (1) \\ D \vee E = 1; (2) \\ B + C = 1; (3) \\ C \leftrightarrow D = 1; (4) \\ E \to (A \wedge D) = 1; (5) \end{cases}$$

Посмотрим, что будет при A = 0:

$$\begin{cases} E = 0; (5) \\ D = 1; (2) \\ C = 1; (4) \\ B = 0; (3) \end{cases} \Rightarrow (1) \text{ - иситно}$$

Посмотрим, что будет при A = 1:

$$\begin{cases} B = 1; (1) \\ C = 0; (3) \\ D = 0; (4) \\ E = 1; (2) \end{cases} \Rightarrow (5) \text{ - ложно, значит } A \neq 1$$

$\Rightarrow$ C, D - смотрят телевизор, а A, B, E - нет

№3

$$((x^2 - 6x + 5) \vdots 2) \to (x \not\vdots 2)$$

Воспользуемся контрапозицией:

$$(x \vdots 2) \to ((x^2 - 6x + 5) \not\vdots 2)$$

$$x = 2k \Rightarrow (4k^2 - 12k + 5) \not\vdots 2 \Rightarrow \text{ч.т.д.}$$

№4 Доказательство от противного, пусть $i \in I, a \in R$, тогда:

$$a = \frac{m}{n}, \text{ где } m \in Z, n \in N.$$

$$\Rightarrow i\frac{m}{n} = \frac{p}{q},\ \text{где } p \in Z, q \in N.$$

$$\text{Тогда: } i = \frac{pn}{qm} \Rightarrow i \text{ - рациональное, } \textit{противоречие}.$$

№5 По условию: $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, C \neq \emptyset; A \neq B, B \neq C, C \neq A$

$$\Rightarrow \exists x : x \in C \setminus A$$

Значит $x \in C, x \notin A, x \in B$ (т.к.$C \setminus A \subseteq B$)

$$\Rightarrow x \notin A \cap C(\text{ т.к } x \notin A)$$

Значит если $B = A \cap C$, то $x \notin B$, но по выше доказанному $x \in B \Rightarrow$ получаем противоречие, значит $B \neq A \cap B$.

№6 **а)** Доказать, что:

$$1 \cdot (n-1) + 2 \cdot (n-2) + \dots + (n-1) \cdot 1 = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

Докажем методом математической индукции:

1) База: n = 1 $\Rightarrow 0 = 0$ - верно

2) Предположим, что верно для n = m:

$$\sum_{k=1}^{m-1} k(m-k) = \frac{(m-1)m(m+1)}{6}$$

Переход: m $\rightarrow$ m + 1
$k \cdot (m+1-1) - k \cdot (m-1) = k$

$$\sum_{k=1}^{m} k(m+1-k) = \sum_{k=1}^{m-1} k(m-k) + \sum_{k=1}^{m-1} k + (m+1-1) \cdot 1 =$$

$$= \frac{(m-1)m(m+1)}{6} + \frac{m(m-1)}{2} + m = \frac{(m-1)m(m+1)}{6} + \frac{3 \cdot m(m+1)}{3 \cdot 2} =$$

$$= \frac{(m+1)m(m+2)}{6} \Rightarrow \textit{ч.т.д.}$$

б) Доказать, что:

$$\cos(x) + \cos(2x) + \ldots + \cos(nx) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2})} - \frac{1}{2}$$

$sin(\frac{x}{2}) \neq 0 \Rightarrow x \neq 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Пусть } z = \cos(x) + i\sin(x)$$

$$\Rightarrow \cos(x) + \cos(2x) + \ldots + \cos(nx) = Re(z^1 + z^2 + \ldots + z^n)$$

Т.к. $x \neq 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, то $z \neq 1$

$\Rightarrow z^1 + z^2 + \ldots + z^n$ - геометрическая прогрессия, в которой первый член не равен 1

$z^1 + z^2 + \ldots + z^n = \dfrac{z^{n+1}-1}{z-1} - 1$

$$Re\left(\frac{z^{n+1}-1}{z-1}\right) = Re\left(\frac{(\cos((n+1)x)-1)+i\sin((n+1)nx)}{(\cos(x)-1)+i\sin(x)}\right) =$$

$$= Re\left(\frac{((\cos((n+1)x)-1)+i\sin((n+1)x))((\cos(x)-1)-i\sin(x))}{(\cos(x)-1)^2+\sin(x)^2}\right)$$

$$= Re(\frac{(\cos((n+1)x)-1)(\cos(x)-1)+\sin((n+1)x)\sin(x)}{(\cos(x)-1)^2+(\sin(x))^2}+$$

$$+\frac{-i\sin(x)(\cos((n+1)x)-1)+i\sin(x)(\cos(x)-1)}{(\cos(x)-1)^2+(\sin(x))^2}) =$$

$$= \frac{\cos((n+1)x)\cos(x)-\cos((n+1)x)-\cos(x)+1+\sin((n+1)x)\sin(x)}{2(1-\cos(x))}$$

$$= \frac{\cos(nx)-\cos((n+1)x)-\cos(x)+1}{2(1-\cos(x))} =$$

$$= \frac{2\sin((n+\frac{1}{2})x)\sin(\frac{x}{2})+(1-\cos(x))}{2(1-\cos(x))} \text{ т.к. } 1-\cos(x) = 2\sin(\frac{x}{2})^2$$

$$\Rightarrow= \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2})}+\frac{1}{2}$$

$\Downarrow$

$z^1 + z^2 + \ldots + z^n = \mathrm{R}\ -1 = \dfrac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2})} - \dfrac{1}{2}$

$\Downarrow$

$\cos(x) + \cos(2x) + \ldots + \cos(nx) = \dfrac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2})} - \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ ч.т.д.

№7 Рассмотрим двух студентов, студента $S_{перв.}$, который вышел из комнаты первым в момент времени t_1, и студента $S_{посл.}$, который вошел последним в момент времени t_2. Логично, если $S_{посл.}$ пришел тогда, когда $S_{перв.}$, еще не вышел ($t_1 > t_2$), то все студенты были в комнате. Предположим это не так, то есть $t_1 < t_2$, тогда любой преподаватель успел поговорить и с $S_{перв.}$, и с $S_{посл.}$, значит между t_1 и t_2 в аудитории присутствовали все преподаватели $\Rightarrow$ *ч.т.д.*

№8 Ошибка заключается в переходе A(1) → A(2), т.к. если мы уберем 1 лошадь из 2, у нас останется лошадь одного цвета, а если другую - другого цвета, эти цвета не обязаны совпадать.