Отчет о выполнении лабораторной работы 1.4.1
Изучение физического маятника

Костылев Влад, Б01-208

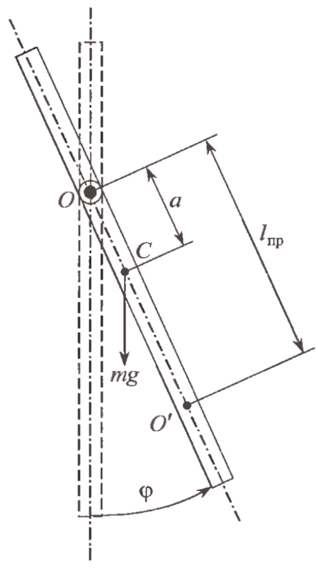
27 октября 2022 г.

Аннотация

Цель работы: исследовать зависимость периода колебаний физического маятника от момента его инерции.

В работе используются: физический маятник (однородный стальной стержень), опорная призма, математический маятник, счётчик числа колебаний, линейка, секундомер.

1 Теоретическая справка



Физическим маятником называют любое твердое тело, которое под действием силы тяжести может свободно качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. Движение маятника описывается уравнением

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M, \tag{1}$$

где I – момент инерции маятника, φ – угол отклонения маятника от положения равновесия, t - время, M - момент сил, действующих на маятник.

В данной работе в качестве физического маятника используется однородный стальной стержень длиной l. На стержне закрепляется опорная призма, острое ребро которой является осью качания маятника. Призму можно перемещать вдоль стержня, меняя таким образом расстояние OC от точки опоры маятника до его центра масс. Пусть это расстояние равно a. Тогда по теореме Гюйгенса-Штейнера момент инерции маятника

$$I = \frac{ml^2}{12} + ma^2, \tag{2}$$

где m – масса маятника. Момент силы тяжести, действующий на маятник,

$$M = -mga \sin\varphi. \tag{3}$$

Если угол φ мал, то $\sin\varphi \approx \varphi$, так что

$$M \approx -mga\varphi \tag{4}$$

В исправной установке маятник совершает несколько сот колебаний без заметного затухания. Поэтому моментом силы трения в первом приближении можно пренебречь. Подставляя выражение для I и M в (1), получим уравнение

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0, \tag{5}$$

где

$$\omega^2 = \frac{ga}{a^2 + \frac{l^2}{12}}. \tag{6}$$

Тогда период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + \frac{l^2}{12}}{ag}} \tag{7}$$

Таким образом, период малых колебаний не зависит ни от начальной фазы, ни от амплитуды колебаний. Это утверждение (изохорность) справедливо для колебаний, подчиняющихся уравнению (5). Движение маятника описывается по этой формуле только для малых углов φ.

Период колебаний математического маятника определяется формулой

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}}, \tag{8}$$

где l' – длина математического маятника. Поэтому величину

$$l_{\text{пр}} = a + \frac{l^2}{12a} \tag{9}$$

называют приведённой длиной математического маятника. Поэтому точку O', отстоящую от точки опоры на расстояние $l_{\text{пр}}$, называют центром качания физического маятника. Точка опоры и центр качания маятника обратимы, т.е. при качании маятника вокруг точки O' период будет таким же, как и при качании вокруг точки O.

2 Используемое оборудование

В работе используются: физический маятник (однородный стальной стержень), опорная призма, математический маятник, счётчик числа колебаний, линейка, секундомер.

3 Методика измерений

1. Перемещая опорную призму вдоль стержня, исследуем зависимость периода колебаний T от расстояния a между точкой опоры и центром масс.

2. Построение графика функции $T^2 a$ от a^2. Аппроксимируя полученную зависимость прямой линией, находим по этому графику величины $\frac{g}{4\pi^2}$ и $\frac{l^2}{12}$, используя формулу (4). Сравнение найденного значение g с табличным, а величины l - с результатом непосредственных измерений.

3. Для одного из положений призмы подбор длины математического маятника так, чтобы в пределах точности измерений периоды колебаний обоих маятников совпали.

4. Измерение длины математического маятника и сравнение ее с приведенной длиной физического маятника, вычисленной по формуле (5).

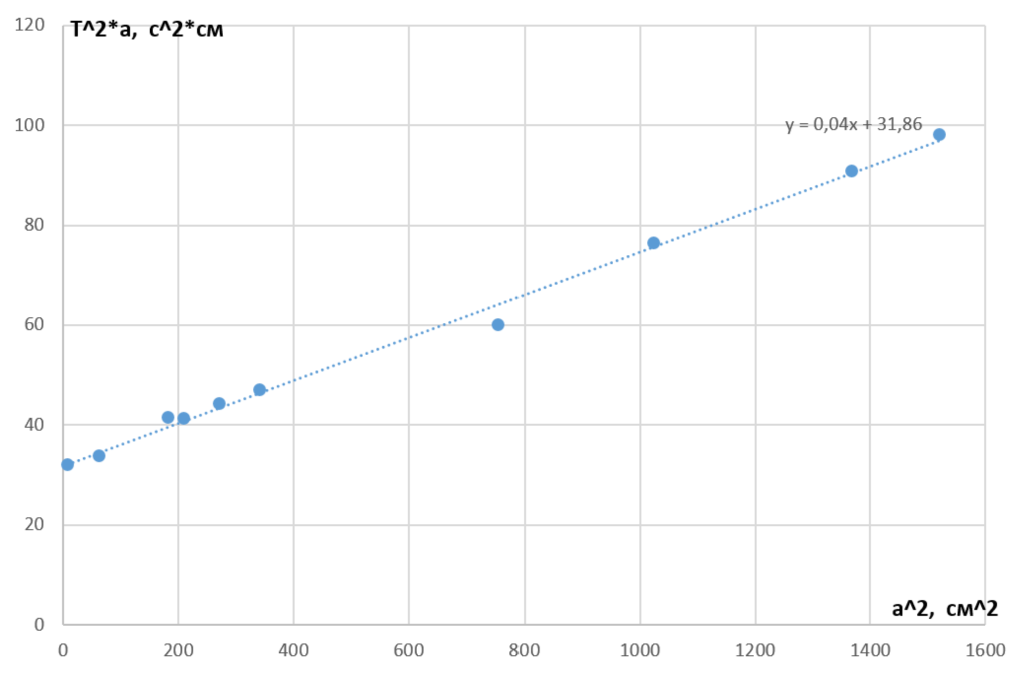
4 Результаты измерений и обработка данных

Давайте установим призму на стержне (изначально близко к его краю), рассчитаем расстояние от нее до центра масса, подвесим на установку, отклоним стержень на некий угол ($\approx 10°$), и отпустив, подсчитаем за какое время, стержень совершит 20 полных колебаний. Начнем перемещать нашу призму по стержню и выполнять вышесказанные действия. Внесем полученные данные в таблицу:

Измерение периода колебаний в зависимости от расстояния от призмы до центра масс

Центр масс, см	39	37	32	27,5	18,5	16,5	14,5	13,5	7,9	2,8
Период, с (20)	31,75	31,32	30,97	29,5	31,85	32,97	33,85	35,01	41,37	67,62
	31,56	31,34	30,85	29,69	31,81	32,59	33,65	35,02	41,42	67,46
	31,81	31,28	30,92	29,47	31,92	32,72	33,68	35,09	41,35	67,52
	//	//	//	//	//	//	//	//	//	//
T_ср, с (20)	31,71	31,31	30,91	29,553	31,86	32,76	33,73	35,04	41,38	67,53
T_ср, с (1)	1,585	1,566	1,546	1,4777	1,593	1,638	1,686	1,752	2,069	3,377

Усреднив период 20 колебаний и, подсчитав период одного колебания, построим график зависимости $T^2 a$ от a^2.



Используя формулу для периода физического маятника (7) получаем следующее соотношение:

$$T^2a = \frac{4\pi^2}{g}a^2 + \frac{\pi^2 l^2}{3g}.$$

Отсюда можно сделать вывод о том, что T^2a линейно зависит от a^2, поэтому это зависимость можно представить в виде

$$T^2a = ka^2 + b,$$

где

$$k = \frac{4\pi^2}{g} \text{ и } b = \frac{\pi^2 l^2}{3g}.$$

Используя метод наименьших квадратов найдем коэффициенты k и b:

$$k \approx 0,0402\frac{см}{с} \qquad b \approx 31,8601 см \cdot с^2$$

Найдем ошибки вычислений:

$$\sigma_k = k\sqrt{(\varepsilon_{aT^2})^2 + (\varepsilon_{a^2})^2} \approx 0,0001 \ \frac{\text{с}^2}{\text{см}},$$

$$\sigma_b = b\sqrt{(\varepsilon_{aT^2})^2 + (\varepsilon_{a^2})^2} \approx 0,1026 \text{ см} \cdot \text{с}^2.$$

Зная k, можно легко подсчитать ускорение свободного падения:

$$g = \frac{4\pi^2}{k} \approx 986\frac{см}{с^2}$$

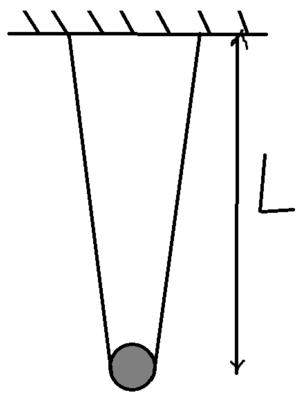
$$\sigma_g = g \cdot \varepsilon_k \approx 6 \ \frac{\text{см}}{\text{с}^2},$$

Зная коэффициент b, подсчитаем длину стержня:

$$l = \sqrt{\frac{3gb}{\pi^2}} \approx 97,8 см$$

$$\sigma_l = l\sqrt{\left(\frac{1}{2}\varepsilon_b\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\varepsilon_g\right)^2} \approx 2,4 \text{ см}.$$

Теперь, найдем длину нити для второй установки(математического маятника) так, чтобы совпали периоды колебаний данного шарика и стержня:



Возьмем период колебания стержня T = 1,47 с (расстояние от центра масс до призмы 27,5 см) и приравняем его к периоду математического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Откуда:

$$l = (\frac{T}{2\pi})^2 g \approx 53,8 см$$

$$\sigma_l = l\sqrt{(2\varepsilon_T)^2} = 3.7 см$$

Сравним посчитанное значение с приведенной длиной математического маятника(по формуле(9)):

$$l_{пр} = 57,8 см$$

Величины лежат в пределах погрешности.

5 Обсуждение результатов

Мы подсчитали ускорение свободного падения, осталось сравнить его с табличным значением $g \approx 981\frac{см}{с^2}$. Подсчитаем относительную ошибку при расчетах g: $\sigma = \frac{986-981}{981}100\% = 0,5\%$.

При формульном подсчете длины стержня мы получаем значение равное $97,8 см$, измеренная же длина равна $100 см$, тогда мы получаем следующее: $\sigma = \frac{100-97,8}{100}100\% = 2,2\%$

6 Заключение

После того как мы подсчитали значения и сравнили их с табличными данными, можно сделать вывод, что опыт проведен успешно, ведь относительные погрешности довольно маленькие. Несоответствие табличным данным может быть связано с неточностью измерения периодов колебаний, связанной с неидеальной реакцией человека, а также неаккуратного измерения расстояния от призмы до центра масс стержня.