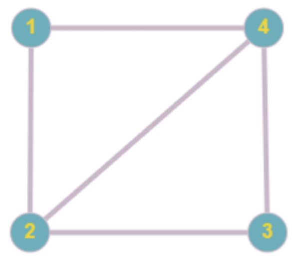
Ориентированные графы и отношения порядка

домашнее задание

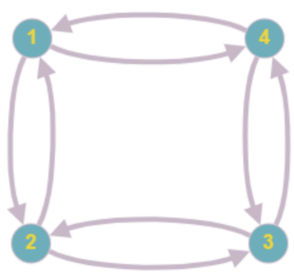
Костылев Влад, Б01-208

27 ноября 2022 г.

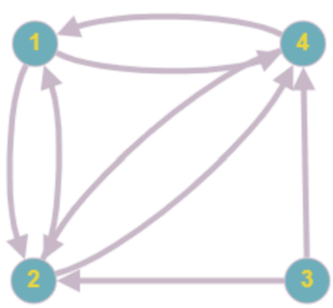
№1 Нет, контр пример:



№2 1 КСС, удовлетворяющая условиям:



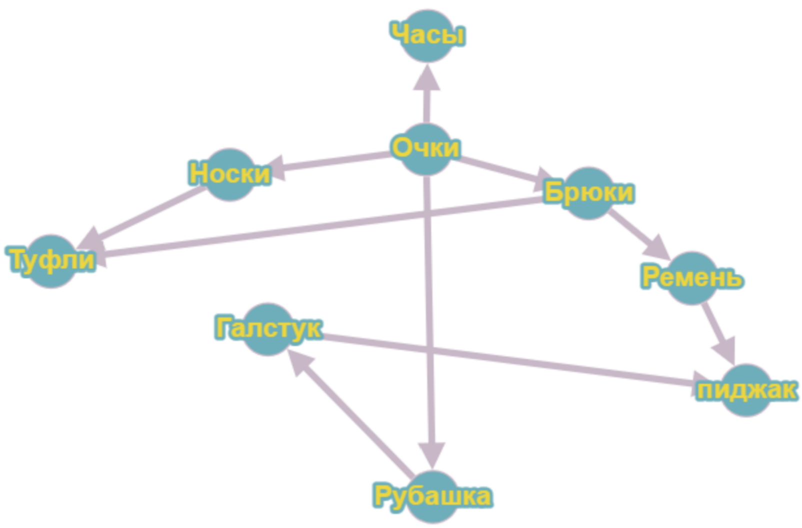
2 КСС:



Более чем две компоненты сильной связности в указанном графе быть не может, возьмем вершину a, из которой нельзя попасть в b. Получается из a есть рёбра во все вершины кроме b. Из этих вершин в b тоже не попасть. В итоге получаются две компоненты: $\{b\}$, а из остальных вершин можно попасть друг в друга.

№3 Докажем по индукции:
Для n = 2 - очевидно.
Предположим, что мы знаем путь с n вершинами: $v(1)- > v(2)- > \dots - > v(n-1)- > v(n)$. Добавим (n + 1) вершину v. Если имеется ориентированное ребро $v- > v(1)$ или $v(n)- > v$, то все очевидно. Рассмотрим случай, когда это не так. Раскрасим вершины $v(1)- > \dots - > v(n)$ по следующему правилу. Если $v(i)- > v$, то v(i) - белая, иначе, если $v- > v(i)$, то v(i) черная. Первая вершина белая, последняя черная. Получается, что есть переход от белого цвета к черному. Найдем такое i, когда это происходит, т.е. v(i)->v - белая, а v->v(i) - черная $\Rightarrow v(1)- > v(2)- > \dots - > v(i)- > v- > v(i+1)- > \dots - > v(n)$, ч.т.д.

№4



Линейный порядок: очки <р носки <р брюки <р туфли <р рубашка <р галстук <р ремень <р пиджак <р часы.

№6 По условию, aPa никогда не выполняется. Из двух условий aPb, bPa ($b \neq a$), выполнено ровно одно $\Rightarrow$ на всех рёбрах полного графа расставлены стрелки (от a к b при aPb).

Если отношение P транзитивно, то мы имеем линейный порядок. Если же оно не транзитивно, то условие нарушается для некоторой тройки элементов, где aPb, bPc, но при этом aPc неверно ($a \neq c$), тогда cPa.

№7 Будем рассматривать строгий порядок. Предположим, что a и b не сравнимы, тогда временно исключим b, а на оставшемся подмножестве порядок будет линейным: $a(1) < a(2) < \dots < a(i) < \dots < a(n-2) < a(n-1)$, в котором a(i) это a, при $1 \leq i \leq (n-1)$.

b сравним со всеми элементами, кроме a(i). При j < i: a(j) < b, в противном случае b < a(j) < a(i) = a, элементы оказываются сравнимыми. Аналогично, при j > i получается a(j) > b.

$C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ способами задаем неупорядоченную пару элементов, которые будут не сравнимы. Далее (n-2)! способами задаём линейный порядок на множестве из n-2 элементов (не считая a, b). И в конце n-1 способом вставляем пару a, b в какое-то место (до всех элементов, или после, или где-то между) $\Rightarrow$ получается

$$\frac{n!(n-1)}{2}.$$