Бинарные отношения и их графы. Отношения эквивалентности

домашнее задание

Костылев Влад, Б01-208

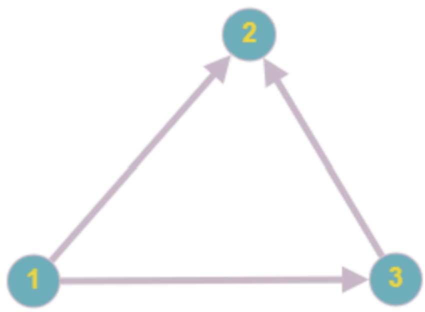
23 ноября 2022 г.

№1

$R \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$

а)

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(1,3),(3,2)\}$$



R - рефлексивно ($\forall a \in \{1,2,3\}$ выполнено $(a,a) \in R$)

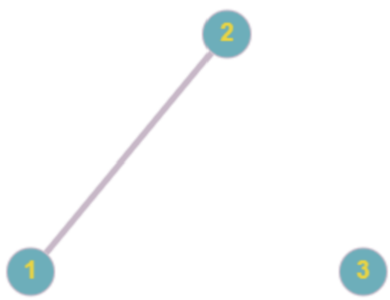
R - не симметрично ($(1,2) \in R$, а $(2,1) \notin R$)

R - транзитивно

R - не отношение эквивалентности

б)

$$R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$



R - не рефлексивно ($(3,3) \notin R$)

R - симметрично (граф неориентированный)

R - транзитивно

R - не отношение эквивалентности

№2

c_1, c_2 (child 1, 2) - дети m(mother), f(father)

c_{c_2} - ребёнок c_2, тогда c_{c_2} - племянник для c_1

Пусть бинарные отношения F - «Be father», M - «Be mother»

Значит, fFc_1, $fFc_2 \Rightarrow c_1F^{-1}f \wedge fFc_2 \Rightarrow (c_1, c_2) \in F^{-1} \circ F$

mMc_1, $mMc_2 \Rightarrow c_1M^{-1}m \wedge mMc_2 \Rightarrow (c_1, c_2) \in M^{-1} \circ M$

Значит, $(c_1, c_2) \in (F^{-1} \circ F) \cap (M^{-1} \circ M)$

$c_2Fc_{c_2}$ или $c_1Mc_{c_2} \Rightarrow (c_2, c_{c_2}) \in F \cup M$

$(c_1, c_2) \in (F^{-1} \circ F) \cap (M^{-1} \circ M)$ и $(c_2, c_{c_2}) \in F \cup M$

$\Rightarrow (c_1, c_{c_2}) \in ((F^{-1} \circ F) \cap (M^{-1} \circ M)) \circ (F \cup M)$

№3

1. $\overline{P_1}$ не транзитивно. Например: $P_1 :=$, тогда $\overline{P_1} :\neq$

   $=$ транзитивно, а $\neq$ - нет

2. $P_1 \cap P_2$ транзитивно, так как если (a, b) и $(b, c) \in P_1$ и P_2, то $(a, c) \in P_1$ и $(a, c) \in P_2 \Rightarrow$ $(a, c) \in P_1 \cap P_2$

3. $P_1 \cup P_2$ не транзитивно. Например: $P_1 = \{(a, b)\}, P_2 = \{(b, c)\}$

   Тогда P_1, P_2 транзитивны, а $P_1 \cup P_2 = \{(a, b), (b, c)\}$ - нет

4. $P_1 \circ P_2$ не транзитивно. Например: $P_1 = \{(a, b), (c, d)\}, P_2 = \{(b, c), (d, e)\}$

   Тогда P_1, P_2 транзитивны, а $P_1 \circ P_2 = \{(b, c), (c, e)\}$ - нет

№4

Максимум пар в бинарном отношении: $6 \cdot 6 = 36$

а) Может. Например, уберем из бинарного отношения, где есть все пары(назовём его P), три пары - (1, 1), (2, 2) и (3, 3)

   Тогда если в паре (a, b) $a \neq b$, то $(a, b) \in P$ и $(b, a) \in P$, так как мы эти пары не убирали. Если $a = b$, то у нас такой пары либо в P нет, либо она там лежит.

б) Не может, т.к. если мы из P удалим пару (a, b), то нам нужно удалить одну из пар (a, c) или (c, b), где $c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, значит нам нужно будет удалить 6 пар, но тогда их останется $30 < 33$

№7

$f(g(f(a))) = a$ для $\forall a \in A$

Допустим $\exists a_0 \in A : f^{-1}(a_0) = \emptyset$

$f(g(f(a_0))) = a_0$, но $f(g(a_0)) = b \in A \Rightarrow f(b) = a_0 \Rightarrow b = f^{-1}(a_0)$ - противоречие, так как по предположению $f^{-1}(a_0) = \emptyset$

$\Rightarrow f^{-1}(a) \neq \emptyset$ для $\forall a \in A$

$\Rightarrow f$ - сюрьекция

Dom(f) = Range(f) = A $\Rightarrow f$ - биекция.

№8

Построим такое множество B и функцию f:

Занумеруем все классы эквивалентности и i-тому элементу из B сопоставим i-тый по счёту класс эквивалентности

Т.к. либо классы эквивалентности одинаковые (у них один номер), либо пересечение классов эквивалентности пусто, то обратная функция от i-того элемента вернёт i-тый класс эквивалентности (только его), значит мы построили такое множество B и функцию f (f - функция, т.к. либо классы эквивалентности одинаковые, либо их пересечение пусто, т.е. одному элементу из A не могут быть сопоставлены 2 элемента из B).