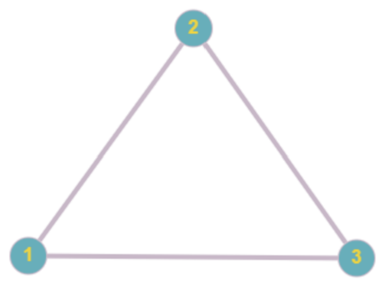
Деревья и раскраски
домашнее задание

Костылев Влад, Б01-208

19 октября 2022 г.

№1 Нет, неверно, контр пример:



№2 Пусть X - множество вершин, расстояние от которых до начала дерева - четное число, а Y - множество вершин, расстояние от которых до начала дерева - нечетное число.

$|X| + |Y| = 2n \Rightarrow |X| \geq n$ или $|Y| \geq n$.

Заметим, что X и Y - независимые множества, так как если бы существовало ребро между вершинами одного множества, то из начала дерева в какую-то вершину можно было бы добраться двумя способами, а в дереве такое невозможно. Значит мы получили 2 независимых множества в одном из которых как минимум n элементов.

№3 В данном графе $2022 - 1 = 2021$ ребро. Суммарная степень равна $2021 \cdot 2$

Так как у нас 3 вершины степени 1, то сумма степеней оставшихся вершин равна $2021 \cdot 2 - 3 = 2019 \cdot 2 + 1$

Минимальная степень оставшихся вершин = 2, которых 2022 - 3 = 2019 $\Rightarrow$ минимальная суммарная степень оставшихся вершин равна $2019 \cdot 2$

Мы должны увеличить эту сумму на 1, а сделать это можно только если заменить 1 вершину степени 2 на вершину степени 3 $\Rightarrow$ только 1 вершина степени 3.

№4 Предположим, что мы можем добавить ребро между двумя деревьями, что длина диаметра нового дерева останется d.

Рассмотрим одно из деревьев: длина пути от вершины с «новым» ребром - A до одного из концов диаметра - E1 и E2 $\geq \dfrac{d}{2}$ т.к. если нет, то маршрут E1-A-E2 длиной будет меньше d, но такого быть не может, т.к. путь E1-E2 имеет длину d(в дереве между любыми двумя вершинами существует единственный путь). Для определённости длина пути E1-A $\geq \dfrac{d}{2}$.

Аналогично рассмотрим 2 дерево. Пусть во 2 дереве длина пути E3-B $\geq \dfrac{d}{2}$(E3 - один из концов диаметра, b - вершина с «новым» ребром)

Получаем, что длина пути E1-E3 $\geq \dfrac{d}{2} + \dfrac{d}{2} + 1 > d \Rightarrow$ противоречие

№6 Граф является 2-раскрашиваемым $\iff$ в нем нет циклов нечетной длины $\Rightarrow$ граф минимально не 2-раскрашиваемый когда в нем есть один единственный цикл нечетной длины, причем удаление любого ребра уничтожит этот цикл. Если в графе нет вершин степени 0, это значит что все вершины находятся в одном цикле нечетной длины. Но это невозможно, поскольку вершин 1000, и цикл будет четной длины (1000). Значит, в нем обязательно есть хотя бы одна вершина степени 0, чтобы получился цикл нечетной длины (999, 997 и т.д.), ч.т.д.