Комбинаторика: правило суммы и произведения

домашнее задание

Костылев Влад, Б01-208

30 октября 2022 г.

№1 Первого кандидата поставим на 6 вакансий, второго - на 5 и.т.д. $\Rightarrow N = 6! = 720$ способов.

№2

а) Возьмем любое n-значное число. Тогда на первое место мы можем поставить 8 чисел (не учитывая 0 и 1), на оставшиеся места мы можем поставить 9 чисел (не учитывая 1). Тогда количество чисел без единицы $= \sum_i^6 (8 \cdot 9^{n-1}) + 1$ (самый первый 0) $= \dfrac{8(9^n - 1)}{8} + 1 = 9^6 = 531441$. Чисел с 1: 1000001 (Количество чисел от 0 до 1000000) - $531441 = 468560 \Rightarrow$ чисел без 1 больше.

б) Аналогично пункту а) количество чисел без 1: $9^7 = 4782969$. Чисел с 1: 10000001 - $4782969 = 5217032 \Rightarrow$ чисел с 1 больше.

№3 Найдем вероятность того, что в представленной записи 6-ти значного числа все цифры разные. Тогда на первое место мы можем поставить 9 чисел (не учитывая 0), на второе место тоже 9 чисел (учитывая 0, но не учитывая цифру, которая стоит на первой позиции), далее мы можем поставить 8 чисел, затем 7 и так далее. $N = 99{\cdot}8{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5 = 136080$. Всего 6-ти значных чисел: $1000000 - 100000 = 900000$. Тогда искомая вероятность:

$$P = \frac{900000 - 136080}{900000} = 0,8488.$$

№4 Всего у нас 36 карт, 18 из которых красные, 18 - черные. Мы можем выбрать 4 карты из 36 C_{36}^4 способами. 2 карты из 18 можем выбрать C_{18}^2 способами:

$$P = \frac{C_{18}^2 \cdot C_{18}^2}{C_{36}^4} = \frac{(\frac{18!}{16! \cdot 2!})^2}{\frac{36!}{32! \cdot 4!}} = \frac{18^2 \cdot 17^2 \cdot 3 \cdot 2}{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33} = \frac{153}{385}.$$

№5 Количество способов выбрать места для четных цифр $C_6^3 = 20$. Мы имеем 5 четных и 5 нечетных цифр, тогда всего вариантов: $5^3 \cdot 5^3 \cdot 20 = 312500$.

Осталось вычесть случай, когда на первой позиции стоит 0. Для данного случая, мест для четных: $C_5^2 = 10 \Rightarrow$ вариантов для данного случая: $10 \cdot 5^2 \cdot 5^3 = 31250$, вычитая получаем:

$$312500 - 31250 = 281250.$$

№6 Из условия следует, что четная цифра не может стоять на первой позиции. Выделим две пары НЧ (Н - нечетное число, Ч - четное), кроме них ещё будут три цифры типа

Н. Итого 5 мест, на двух из них мы ставим НЧ - это можно сделать: $C_5^2 = 10$ способами. Выбрать каждую из цифр заданной чётности можно 5 способами. Итого получается:

$$10 \cdot 5^7 = 781250 \text{ чисел.}$$

№7 В одноместную комнату мы можем поселеть одного из 7 студентов: $C_7^1 = 7$. В двуместную комнату 2 из 6 студентов: $C_6^2 = 15$, а в четырехместную комнату 4 из 4 студентов: $C_4^4 = 1$.

$$\Rightarrow 7 \cdot 15 \cdot 1 = 105.$$