

Производящие функции

домашнее задание

Костылев Влад, Б01-208

17 декабря 2022 г.

№1

$$a) F_n = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 0; \\ 1 & \text{при } n = 1; \\ F_{n-1} + 2F_{n-2} & \text{при } n \geq 2. \end{cases}$$

$$f(x) = F_0 + F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + \dots + F_nx^n + \dots +$$

$$2x \cdot f(x) = 2F_0x + 2F_1x^2 + 2F_2x^3 + 2F_3x^4 + \dots + 2F_nx^{n+1} + \dots +$$

$$f(x) + 2x \cdot f(x) = F_0 + (F_1 + 2F_0)x + (F_2 + 2F_1)x^2 + (F_3 + 2F_2)x^3 + \dots + (F_n + 2F_{n-1})x^n + \dots +$$

$$(1 + 2x) f(x) = F_2x + F_3x^2 + F_4x^3 + \dots + F_{n+1}x^n + \dots + (F_{n+1} = F_n + 2F_{n-1})$$

$$x(1 + 2x)f(x) + x + 0 = F_0 + F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + \dots + F_nx^n + \dots +$$

$$x(f(x)(1 + 2x) + 1) = f(x) \Rightarrow f(x) = \frac{x}{(1 - 2x)(1 + x)}$$

$$b) F_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0; \\ 3 & \text{при } n = 1; \\ 4F_{n-1} - 4F_{n-2} & \text{при } n \geq 2. \end{cases}$$

$$f(x) = F_0 + F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + \dots + F_nx^n + \dots +$$

$$4f(x) = 4F_0 + 4F_1x + 4F_2x^2 + 4F_3x^3 + \dots + 4F_nx^n + \dots +$$

$$4f(x) \cdot x = 4F_0x + 4F_1x^2 + 4F_2x^3 + 4F_3x^4 + \dots + 4F_nx^{n+1} + \dots +$$

$$4f(x) - 4f(x) \cdot x = 4F_0 + (4F_1 - 4F_0)x + (4F_2 - 4F_1)x^2 + (4F_3 - 4F_2)x^3 + \dots + (4F_n - 4F_{n-1})x^n + \dots +$$

$$4f(x)(1 - x) = 4 + F_2x + F_3x^2 + F_4x^3 + \dots + F_{n+1}x^n + \dots + (F_{n+1} = 4F_n - 4F_{n-1})$$

$$1 + x \cdot (4f(x)(1 - x) - 1) = F_0 + F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + \dots + F_nx^n + \dots +$$

$$1 + x(4f(x)(1 - x) - 1) = f(x) \Rightarrow f(x) = \frac{1 - x}{(1 - 2x)^2}$$