www.iubh-fernstudium.de

Mathematatik Grundlagen II

Repetitorium

IMT102-01

IUBH
International University
of Applied Sciences
Internationale Hochschule
Fernstudium
Fern, aber nah!

KOSTENLOSE HOTLINE
0800 9023456

Impressum

Herausgeber:
IUBH Internationale Hochschule GmbH
IUBH International University of Applied Sciences
Juri-Gagarin-Ring 152
D-99084 Erfurt

Postanschrift:
Albert-Proeller-Straße 15-19
D-86675 Buchdorf

media@iubh.de
www.iubh.de

IMT102-01
Version Nr.: 001-2020-0804

Herzlich willkommen!

Im folgenden Fragenkatalog erwarten Sie umfangreiche Übungsaufgaben und damit eine gute Möglichkeit, das Erlernte zu festigen. Hier ein paar grundsätzliche Tipps zur Handhabung:

- Dieser Fragenkatalog muss nicht von vorne bis hinten durchgearbeitet werden und auch nicht in einer festen Reihenfolge.
- Die Fragen sind zur Übung und Wissensfestigung gedacht und müssen nicht mit den Klausurfragen identisch sein.
- Der Fragenkatalog ist so aufgebaut, dass auf der Vorderseite die Frage und auf der Rückseite der Lösungshinweis mit dazugehöriger Lösung und ausführlichen Lösungswegen zu finden sind.
- Versuchen Sie zuerst, die Frage zu lösen, bevor Sie sich die Lösung ansehen. Sonst geht der Lerneffekt verloren.
- Falls Sie eine Frage nicht ohne Hilfe lösen können, sehen Sie sich zuerst einmal nur den Lösungshinweis an. Versuchen Sie dann nochmals, die Frage zu beantworten.
- Falls Sie immer noch zu keiner eigenen Lösung kommen, sehen Sie sich die Lösung auf der Lösungsseite an und versuchen Sie es wieder.
- Sehen Sie sich erst zum Schluss den vollständigen Lösungsweg an. Somit kommen Sie der Lösung Schritt für Schritt näher.
- Der Schwierigkeitsgrad der Fragen ist mit verschiedenen Icons gekennzeichnet.
- Sie können einzelne Fragen mit verschiedenen Schwierigkeitsgraden herausnehmen und diese üben, oder sich zuerst nur auf einen Schwierigkeitsgrad fokussieren, genau wie es Sie und Ihre Lernstrategie am besten unterstützt.

Definition der Schwierigkeitsgrade

Leichte Frage

Streng am Skript orientiert, bestehender Aufgabentypus aus Skript nur mit neuen Werten, kein Transfer nötig.

Mittelschwere Frage

Am Skript orientiert, aber Aufgabentypus neu, nicht bereits im Skript genauso gelöst, trotzdem nur recht geringer Transfer nötig.

Schwere Frage

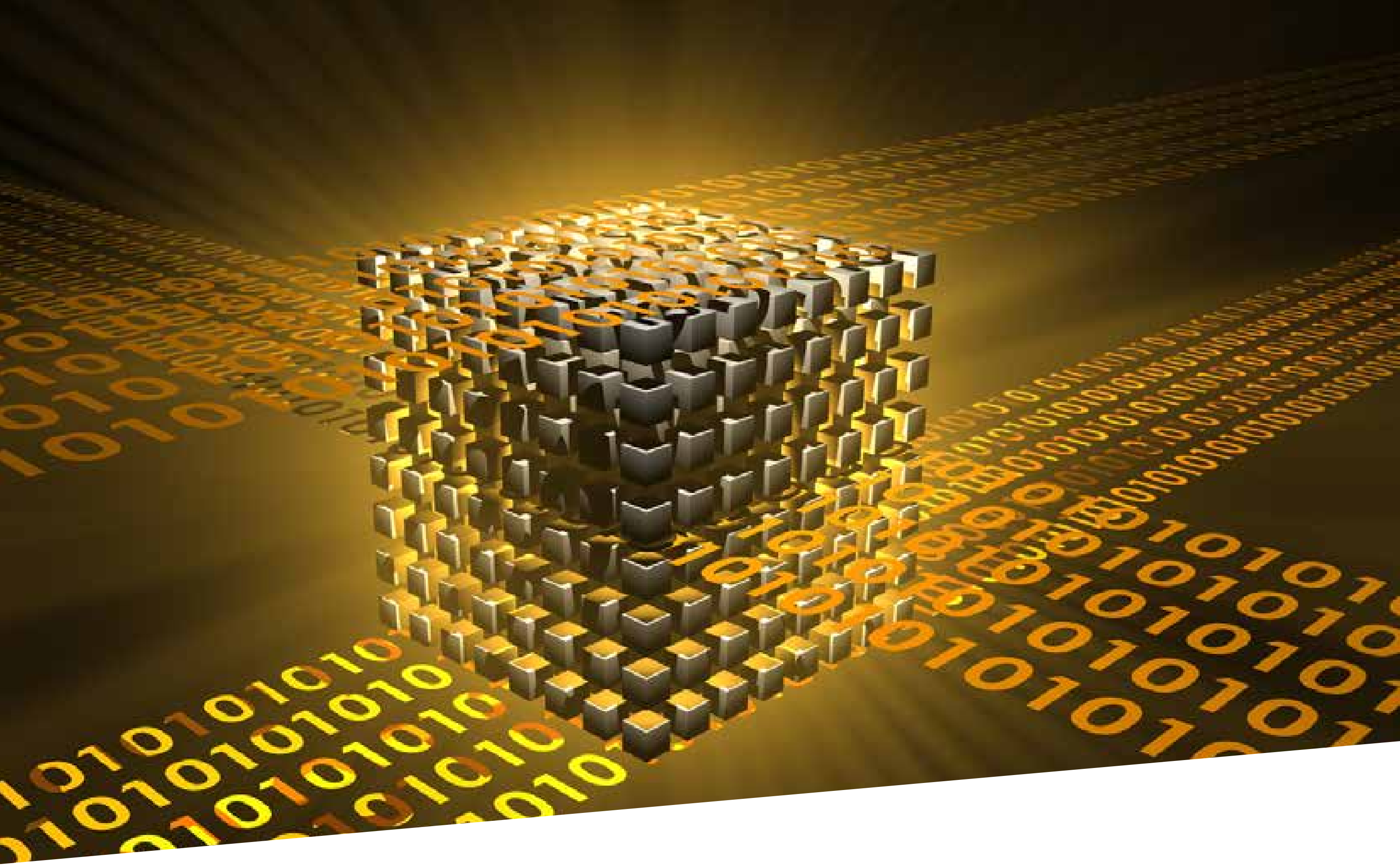
Auf Basis des Skriptes und eigenen Nachdenkens lösbar, erfordert also gewisse Transferleistung.

Leichte Frage

Mittelschwere Frage

Schwere Frage

UND JETZT VIEL ERFOLG UND SPASS BEIM ÜBEN!



Lektion 1
Einführung in Matrizen

1. Einführung in Matrizen

1.1 Grundbegriffe der Matrizen

Frage 1

Stellen Sie folgende Tabelle als Grafik dar.

	Norden	Mitte	Süden
Produkt A	120	150	100
Produkt B	277	259	310

Frage 2

Geben Sie zu folgender Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ die transponierte Matrix an.

Lösung 1

Lösungshinweis

Bei einer Matrix gibt es keine Kopfzeilen und keine Randspalten.

Kurze Lösung

$$\begin{pmatrix} 120 & 150 & 100 \\ 277 & 259 & 310 \end{pmatrix}$$

Ausführliche Lösung
Die Zahlen werden genau in der gleichen Reihenfolge wie in den Zeilen und Spalten übertragen, ohne die Kopfzeile und Randspalte:

$$\begin{pmatrix} 120 & 150 & 100 \\ 277 & 259 & 310 \end{pmatrix}$$

Lösung 2

Lösungshinweis

Spalten und Zeilen werden vertauscht.

Kurze Lösung

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Ausführliche Lösung
Die Spalten und Zeilen werden vertauscht:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Frage 3

Geben Sie jeweils einen Spalten- und einen Zeilenvektor an.

Frage 4

Bestimmen Sie für die angegebene Matrix die Hauptdiagonale. Geben Sie den Typ der Matrix an. Stellt die Matrix eine Sonderform dar? Wenn ja, welchen Namen hat sie?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung 3

Lösungshinweis

Zeilenvektoren sind folgendermaßen darzustellen: $\vec{v}^T$.

Kurze Lösung

Spaltenvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, Zeilenvektor $\vec{b}^T = (4 \;\; 5 \;\; 6)$

Ausführliche Lösung

Beim Spaltenvektor wird nur eine Spalte dargestellt und beim Zeilenvektor nur eine Zeile.

Spaltenvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, Zeilenvektor $\vec{b}^T = (4 \;\; 5 \;\; 6)$

Lösung 4

Lösungshinweis

Betrachten Sie die Diagonalelemente und die Werte, die sich oberhalb und unterhalb der Diagonalen befinden. Der Typ ist mxn.

Kurze Lösung

$a_{11} = 1$, $a_{22} = 7$, $a_{33} = 9$, Typ 4x3, obere Dreiecksmatrix

Ausführliche Lösung

Die Diagonalelemente lauten: $a_{11} = 1$, $a_{22} = 7$, $a_{33} = 9$. Die Matrix hat vier Zeilen und drei Spalten, also ist der Typ 4x3. Da sich die Werte oberhalb der Diagonalen befinden, spricht man von einer oberen Dreiecksmatrix.

Frage 5

Überlegen Sie, ob folgende Aussagen falsch sind:

- Wenn A^T eine Diagonalmatrix ist, dann ist auch A eine Diagonalmatrix.
- Wenn A eine Nullmatrix ist, dann ist auch A^T eine Nullmatrix.

Lösung 5

Lösungshinweis

Schauen Sie sich den Aufbau der Matrix genau an.

Kurze Lösung
richtig; richtig

Ausführliche Lösung
Das Transponieren einer Diagonalmatrix erhält die Eigenschaft Diagonalmatrix zu sein. Wenn A eine Nullmatrix ist, dann beinhaltet sie nur Nullen. Damit ist die transponierte Matrix dazu auch wieder eine Nullmatrix.

1.2 Addition von Matrizen

Frage 6

Gegeben sind folgende Matrizen A und B. Berechnen Sie A + B.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Frage 7

Gegeben sind folgende Matrizen A und B. Ist die Rechenoperation A – B möglich? Falls ja, bestimmen Sie das Ergebnis.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\ 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung 6

Lösungshinweis

Addieren Sie die einzelnen Elemente.

Kurze Lösung

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 11 \\ 2 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

Ausführliche Lösung
Addieren Sie jeweils die einzelnen Elemente der Matrizen:

$$C_{11} = -1 + 2 = 1.$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 11 \\ 2 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

Lösung 7

Lösungshinweis

Überprüfen Sie, von welchem Typ die Matrizen sind.

Kurze Lösung
Rechenoperation nicht möglich

Ausführliche Lösung
Matrix A ist eine 2x3-Matrix und Matrix B ist eine 2x2-Matrix. Die Matrizen müssen vom gleichen Typ sein, um sie addieren zu können.

Frage 8

Folgende Matrizen sind gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ & & \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & - & 1 \\ 0 & & 4 \\ 1 & & 5 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $A - B^T$.

Frage 9

Gegeben sind folgende untere Dreiecksmatrizen. Zeigen Sie, dass die Summe von beiden wieder eine untere Dreiecksmatrix ist.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 8

Lösungshinweis

Bestimmen Sie zunächst B^T.

Kurze Lösung

$$A - B^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ausführliche Lösung

$$B^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A - B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung 9

Lösungshinweis

Addieren Sie beide Matrizen.

Kurze Lösung

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Ausführliche Lösung

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Da sich nur Zahlen ungleich null unterhalb der Diagonalen befinden, ist die Summe auch eine untere Dreiecksmatrix.

Frage 10

Es sind zwei Diagonalmatrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass $A + B^T$ wieder eine Diagonalmatrix ergibt.

Lösung 10

Lösungshinweis

Bestimmen Sie zunächst B^T. Addieren Sie danach A und B^T.

Kurze Lösung

$$C = A + B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Ausführliche Lösung

$$B^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C = A + B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Die neue Matrix ist wieder eine Diagonalmatrix.

1.3 Skalarmultiplikation und -produkt

Frage 11

Gegeben sind folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $2 \cdot A + B$.

Frage 12

Gegeben sind folgende Vektoren: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{a}^T \cdot \vec{b}$.

Lösung 11

Lösungshinweis

Bestimmen Sie zunächst 2 · A.

Kurze Lösung

$$C=\begin{pmatrix}2 & 7 & 2\\ 4 & 9 & 10\end{pmatrix}$$

Ausführliche Lösung

$$2A+B=2\cdot\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 1 & 4 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 4 & -2\\ 2 & 8 & 10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 7 & 2\\ 4 & 9 & 10\end{pmatrix}$$

Lösung 12

Lösungshinweis

Bestimmen Sie zunächst $\vec{a}^T$. Das Ergebnis ist ein Skalar.

Kurze Lösung

$$\vec{a}^T\cdot\vec{b}=23$$

Ausführliche Lösung

$$\vec{a}^T\cdot\vec{b}=(1\ \ 2\ \ 3)\cdot\begin{pmatrix}0\\ 4\\ 5\end{pmatrix}=0+8+15=23$$

Frage 13

Gegeben sind zwei Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $2 \cdot A - 3 \cdot B^T$.

Frage 14

Gegeben sind folgende Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Überprüfen Sie, ob folgende Rechenoperationen definiert sind. Falls ja, geben Sie das Ergebnis an.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

b) $\vec{b} \cdot \vec{c}$

c) $\vec{b}^T \cdot \vec{c}$

Lösung 13

Lösungshinweis

Bestimmen Sie zunächst B^T. Danach berechnen Sie $2 \cdot A$ und $3 \cdot B^T$.

Kurze Lösung

$$2 \cdot A - 3 \cdot B^T = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 4 \\ -7 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Ausführliche Lösung

$$B^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot B^T = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot A - 3 \cdot B^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -4 & 4 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 4 \\ -7 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösung 14

Lösungshinweis

Betrachten Sie den Typ und die Definition des Skalarproduktes.

Kurze Lösung

a) nein

b) nein

c) ja:

$$\vec{b}^{T} \cdot \vec{c} = 14$$

Ausführliche Lösung

a) Beide Vektoren sind nicht vom gleichen Typ.

b) Beide Vektoren sind vom gleichen Typ, allerdings können zwei Spaltenvektoren nicht miteinander multipliziert werden.

c) ja:

$$\vec{b}^{T} \cdot \vec{c} = (3 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 12 + 2 = 14$$

Frage 15

Gegeben ist die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Kann die Matrix als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix dargestellt werden?

Lösung 15

Lösungshinweis

Betrachten Sie den Typ der Matrix.

Kurze Lösung
Nein

Ausführliche Lösung
Die Matrix kann nicht als Summe einer symmetrischen und schiefsymmetrischen Matrix dargestellt werden, da sie nicht quadratisch ist.

Lektion 2
Invertieren von Matrizen

2. Invertieren von Matrizen

2.1 Multiplikation von Matrizen

Frage 16

Gegeben sind drei Matrizen. Überprüfen Sie, ob folgende Rechenoperationen definiert sind. Falls ja, berechnen Sie.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) $A \cdot B$
b) $B \cdot C$

Frage 17

Gegeben sind zwei Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $A \cdot B$. Begründen Sie, warum die Rechenoperation möglich ist.

Lösung 16

Lösungshinweis

Schauen Sie sich die Typen der Matrizen an.

Kurze Lösung
a) möglich:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

b) nicht möglich

Ausführliche Lösung
A ist vom Typ 2x3, B ist vom Typ 3x2 und C ist vom Typ 3x2. Die Spaltenanzahl der ersten Matrix muss mit der Zeilenanzahl der zweiten Matrix übereinstimmen. Jede Zeile wird mit jeder Spalte multipliziert.

a) möglich:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

b) nicht möglich

Lösung 17

Lösungshinweis

Jeweils Zeile mit Spalte multiplizieren. Betrachten Sie die Typen der Matrizen.

Kurze Lösung
Spaltenanzahl von A stimmt mit Zeilenanzahl von B überein:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ausführliche Lösung
A hat zwei Spalten und B hat zwei Zeilen. Die Anzahl stimmt überein. Multiplikation der Zeilen mit den Spalten:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Frage 18

Berechnen Sie das dyadische Produkt der beiden Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Frage 19

Gegeben sind zwei untere Dreiecksmatrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass $C = A \cdot B$ auch eine untere Dreiecksmatrix ist.

Lösung 18

Lösungshinweis

Dyadisches Produkt $\vec{a} \cdot \vec{b}^T$; es entsteht eine Matrix.

Kurze Lösung

$$\vec{a} \cdot \vec{b}^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Ausführliche Lösung

$$\vec{a} \cdot \vec{b}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösung 19

Lösungshinweis

Berechnen Sie A · B.

Kurze Lösung

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ausführliche Lösung

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Die entstandene Matrix ist wieder eine untere Dreiecksmatrix.

Frage 20

Zeigen Sie anhand der beiden Matrizen, dass $B^T \cdot A^T = (A \cdot B)^T$ gilt.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 20

Lösungshinweis

Rechnen Sie die linke und rechte Seite aus.

Kurze Lösung

$$B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(B \cdot A)^T = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Ausführliche Lösung

$$B^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{D. h., } B^T \cdot A^T = (A \cdot B)^T.$$

2.2 Eigenschaften der Matrixmultiplikation

Frage 21

Gegeben sind zwei Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $C = A \cdot B$. Welche Schlussfolgerung kann daraus gezogen werden?

Frage 22

Gegeben sind zwei Diagonalmatrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Wie lautet $C = A \cdot B$? Was können Sie daraus schließen?

Lösung 21

Lösungshinweis

Welche Sonderform stellt Matrix B dar?

Kurze Lösung

Wird eine Matrix mit einer Einheitsmatrix multipliziert, so ändert sich die Matrix nicht:

$$C = A$$

Ausführliche Lösung

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = A \cdot E = A$$

Wird eine Matrix mit einer Einheitsmatrix multipliziert, so bleibt sie gleich.

Lösung 22

Lösungshinweis

Multiplizieren Sie die beiden Matrizen.

Kurze Lösung

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Es entsteht eine Diagonalmatrix.

Ausführliche Lösung

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Es werden die Diagonalelemente multipliziert. Es entsteht wieder eine Diagonalmatrix.

Frage 23

Gilt bei einer Matrixmultiplikation das Kommutativgesetz? Erläutern Sie Ihre Aussage anhand eines Beispiels.

Frage 24

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

wird mit einer Nullmatrix multipliziert. Welchen Typ muss die Nullmatrix haben? Geben Sie ein Beispiel und das Ergebnis an. Was können Sie daraus schlussfolgern?

Lösung 23

Lösungshinweis

Das Kommutativgesetz lautet $A \cdot B = B \cdot A$.

Kurze Lösung
Das Kommutativgesetz gilt nicht.

Ausführliche Lösung
Wählen Sie zwei Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$$

D. h., $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Das Kommutativgesetz gilt nicht.

Lösung 24

Lösungshinweis

Überlegen Sie zunächst, welchen Typ die Nullmatrix aufweisen muss. Führen Sie danach die Matrixmultiplikation durch.

Kurze Lösung
Die Nullmatrix muss drei Zeilen aufweisen. Es entsteht eine Nullmatrix, die so viele Zeilen aufweist wie A und so viele Spalten wie die Nullmatrix.

Ausführliche Lösung
Da die Matrix A vom Typ 3x3 ist, muss die Nullmatrix drei Zeilen aufweisen. Die Spaltenanzahl ist egal.

Beispiel:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot O = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es entsteht eine Nullmatrix, die so viele Zeilen aufweist wie A und so viele Spalten wie die 0.

Frage 25

Die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ x & x & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit jeweils den Platzhaltern x werden multipliziert.

An welchen Stellen kann $C = A \cdot B$ Werte annehmen, die ungleich von null sind?

Lösung 25

Lösungshinweis

Führen Sie die Matrixmultiplikation durch.

Kurze Lösung
Folgende Elemente von C sind ungleich null: c_{22}, c_{23}, c_{32}, c_{33}.

Ausführliche Lösung

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ x & x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & y \\ 0 & y & y \end{pmatrix}$$

Nur folgende Elemente der Matrix C können ungleich von null sein: c_{22}, c_{23}, c_{32}, c_{33}.

2.3 Inverse Matrizen

Frage 26

Überprüfen Sie, ob von folgenden Matrizen die Inversen gebildet werden können:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Frage 27

Ist folgende Matrix invertierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung 26

Lösungshinweis

Überlegen Sie, welche Voraussetzungen erfüllt sein müssen, damit eine Matrix invertierbar ist.

Kurze Lösung

a) nein

b) nein

Ausführliche Lösung

a) Nein, denn A ist eine quadratische Diagonalmatrix. Allerdings sind nicht alle Diagonalwerte ungleich null.

b) Nein, denn nur quadratische Matrizen sind invertierbar.

Lösung 27

Lösungshinweis

Welche Voraussetzung für eine quadratische 2x2-Matrix muss gegeben sein, damit die Inverse existiert?

Kurze Lösung

det ungleich null → invertierbar

Ausführliche Lösung

$\det = ad - bc = 8 - 3 = 5 \neq 0$. Da die Determinante ungleich null ist, existiert die Inverse.

Frage 28

Bestimmen Sie die Inverse der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Frage 29

Bestimmen Sie die Inverse der Matrix:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung 28

Lösungshinweis

Erinnern Sie sich an die Formel, die darstellt, wie die Inverse einer quadratischen 2x2-Matrix bestimmt werden kann.

Kurze Lösung

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$$

Ausführliche Lösung

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{-8-3} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$$

Lösung 29

Lösungshinweis

Erinnern Sie sich an die Formel, die darstellt, wie eine quadratische Diagonalmatrix invertiert werden kann.

Kurze Lösung

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Ausführliche Lösung

Eine quadratische Matrix ist invertierbar, wenn seine Diagonalelemente ungleich von null sind. Die Inverse wird bestimmt, indem der Kehrwert der Diagonalelemente ermittelt wird.

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Frage 30

Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass, wenn A^{-1} die Inverse von A ist, A die Inverse von A^{-1} ist.

Lösung 30

Lösungshinweis

Wählen Sie eine einfache quadratische Matrix aus und zeigen Sie, dass $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A$ gilt.

Kurze Lösung

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Ausführliche Lösung

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D. h., $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Lektion 3
Lineare Gleichungssysteme

3. Lineare Gleichungssysteme

3.1 Gauß-Algorithmus

Frage 31

Entscheiden Sie, ob das folgende Gleichungssystem linear ist:

$$2x_1 - 3x_2 = 5$$

$$3(x_1 - 2)^2 + x_2 = x_1$$

Frage 32

Welche Möglichkeiten der Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems gibt es?

Lösung 31

Lösungshinweis

Betrachten Sie die Potenzen von x_1 und x_2.

Kurze Lösung
Nein

Ausführliche Lösung
Nein, da x_1^2 und x_1x_2 vorhanden sind. Damit ein Gleichungssystem linear ist, dürfen die Variablen nur in erster Potenz vertreten sein und nicht miteinander multipliziert werden.

Lösung 32

Lösungshinweis

Es gibt drei Möglichkeiten.

Lösung
Es gibt genau eine Lösung, unendlich viele Lösungen oder keine Lösung.

Frage 33

Was können Sie aufgrund der Struktur folgender erweiterten Matrix zur Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems sagen?

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Frage 34

Was können Sie aufgrund der Struktur folgender erweiterten Matrix zur Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems sagen?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Lösung 33

Lösungshinweis

Nullzeilen können weggelassen werden.

Lösung

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Die dritte Zeile, also die Nullzeile, kann weggelassen werden. Nach Umformung der zweiten Zeile erhält man den Widerspruch $0 = -1$. D. h., das Gleichungssystem ist nicht lösbar.

Lösung 34

Lösungshinweis

Wie viele Unbekannte und wie viele Gleichungen sind gegeben?

Kurze Lösung
unendlich viele Lösungen

Ausführliche Lösung
Es gibt drei Unbekannte und nur zwei Gleichungen. Damit das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, müssen genauso viele Gleichungen vorhanden sein wie Unbekannte.

Frage 35

Geben Sie eine erweiterte Matrix mit vier Gleichungen und zwei Unbekannten an, sodass das zugehörige Gleichungssystem eindeutig lösbar ist. Geben Sie die Lösung des Gleichungssystems an.

Lösung 35

Lösungshinweis

Zwei Gleichungen sollten als Kombination der anderen beiden dargestellt werden können.

Kurze Lösung

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{array}\right)$$

Ausführliche Lösung

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow x_2 = 2, x1 = -1$$

Mehrere Lösungen möglich.

3.2 Lösungsbeispiele mit dem Gauß-Algorithmus

Frage 36

Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Frage 37

Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Lösung 36

Lösungshinweis

Führen Sie die erlaubten Zeilenoperationen durch, sodass eine obere Dreiecksmatrix entsteht.

Kurze Lösung

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 4$$

$$x_3 = -5$$

Ausführliche Lösung

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow x_3 = -5, -3x_2 + 10 = -2 \rightarrow x_2 = 4, x_1 + 8 - 10 = 1 \rightarrow x_1 = 3$$

$$\rightarrow x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = -5$$

Lösung 37

Lösungshinweis

Führen Sie die erlaubten Zeilenoperationen durch, sodass eine obere Dreiecksmatrix entsteht.

Lösung

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightarrow x_2 = 0 \text{ und } x_2 = -1$$

Widerspruch! Das Gleichungssystem ist nicht lösbar.

Frage 38

Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Frage 39

Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Lösung 38

Lösungshinweis

Führen Sie die erlaubten Zeilenoperationen durch, sodass eine obere Dreiecksmatrix entsteht.

Kurze Lösung

$$x_1 = \frac{5}{7}$$

$$x_2 = -\frac{3}{7}$$

$$x_3 = \frac{6}{7}$$

Ausführliche Lösung

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{array}\right) \to x_3 = \frac{6}{7}, x_2 = \frac{-3}{7}, x_1 = \frac{5}{7}$$

Lösung 39

Lösungshinweis

Führen Sie die erlaubten Zeilenoperationen durch, sodass eine obere Dreiecksmatrix entsteht.

Kurze Lösung

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -1$$

$$x_3 = 0$$

Ausführliche Lösung

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \to x_3 = 0, x_2 = -1, x_1 = 2$$

Frage 40

Bestimmen Sie die Inverse folgender Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 40

Lösungshinweis

Erweitern Sie die rechte Seite mit der Einheitsmatrix. Formulieren Sie die erweiterte Matrix so um, dass links die Einheitsmatrix entsteht.

Kurze Lösung

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & +\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ausführliche Lösung

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\to A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & +\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Lektion 4
Einführung zu Graphen

4. Einführung zu Graphen

4.1 Ungerichteter Graph

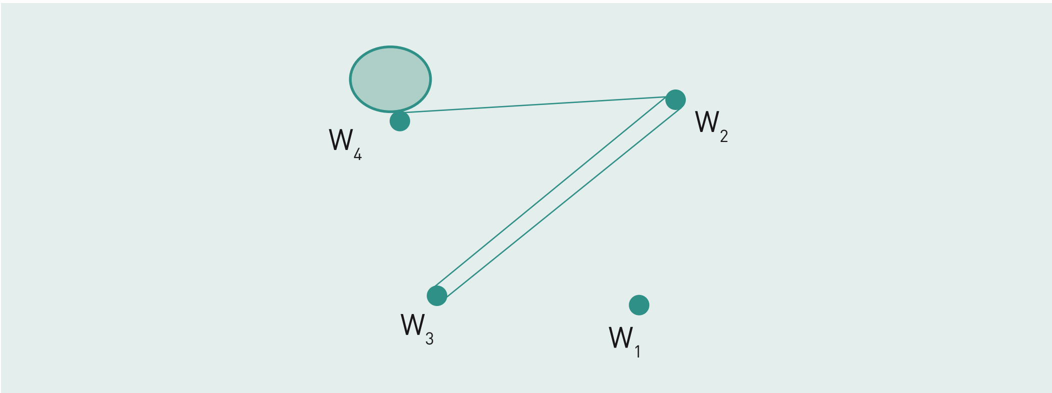
Frage 41

Gegeben ist folgender Graph. Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Aussagen richtig oder falsch sind:

a) Der Graph ist ein einfacher Graph.

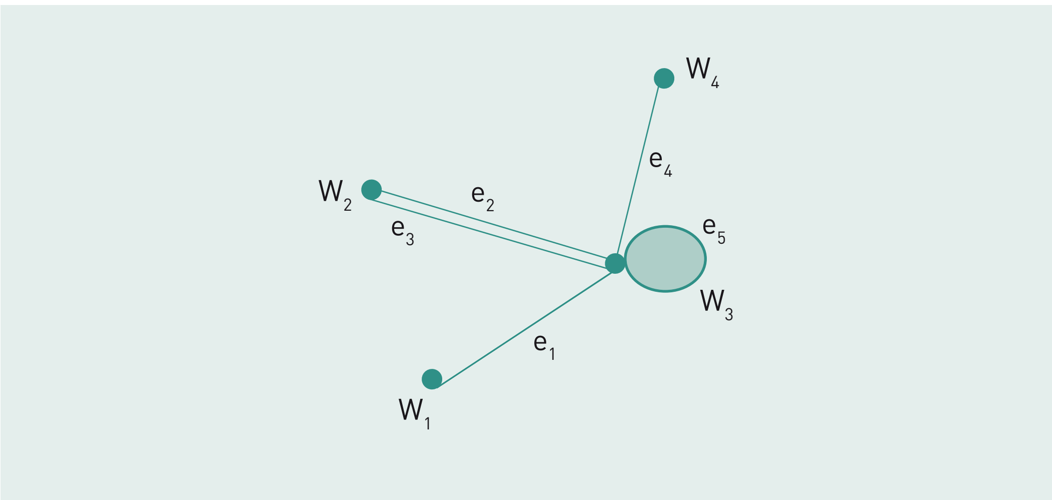
b) Der Graph besteht aus vier Knoten und vier Kanten.

c) w_3 und w_4 sind benachbart.



Frage 42

Geben Sie für den Graphen die Knotenmenge V, die Kantenmenge E und die Inzidenzabbildung ϕ an.



Lösung 41

Lösungshinweis

Machen Sie sich mit den Definitionen der Graphentheorie vertraut.

Kurze Lösung

a) falsch

b) richtig

c) falsch

Ausführliche Lösung

a) falsch, da der Graph Mehrfachkanten und eine Schlinge besitzt.

b) richtig

c) falsch, da beide Knoten nicht durch eine Kante miteinander verbunden sind.

Lösung 42

Lösungshinweis

Machen Sie sich mit der richtigen Schreibweise vertraut.

Kurze Lösung

$$V = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

$$\begin{aligned} \varphi\colon e_1 &\longrightarrow \{w_1, w_3\} \\ e_2 &\longrightarrow \{w_2, w_3\} \\ e_3 &\longrightarrow \{w_2, w_3\} \\ e_4 &\longrightarrow \{w_3, w_4\} \\ e_5 &\longrightarrow \{w_3\} \end{aligned}$$

Ausführliche Lösung

$$\text{Knotenmenge } V = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$$

$$\text{Kantenmenge } E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

$$\begin{aligned} \text{Inzidenzabbildung } \varphi\colon e_1 &\longrightarrow \{w_1, w_3\} \\ e_2 &\longrightarrow \{w_2, w_3\} \\ e_3 &\longrightarrow \{w_2, w_3\} \\ e_4 &\longrightarrow \{w_3, w_4\} \\ e_5 &\longrightarrow \{w_3\} \end{aligned}$$

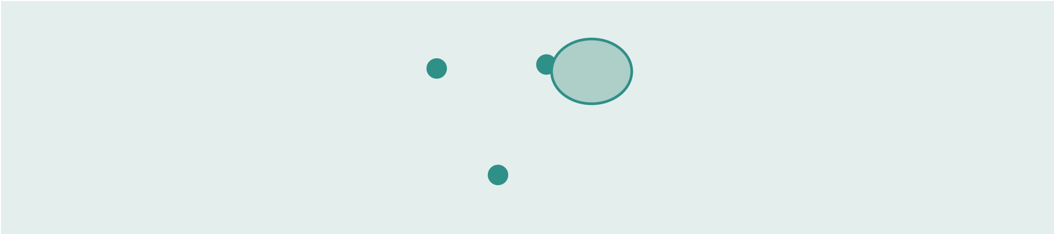
Frage 43

Gegeben ist der folgende Graph. Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Aussagen richtig oder falsch sind:

a) Der Graph ist ein endlicher Graph.

b) Der Graph ist ein einfacher Graph.

c) Der Graph ist ein zusammenhängender Graph.



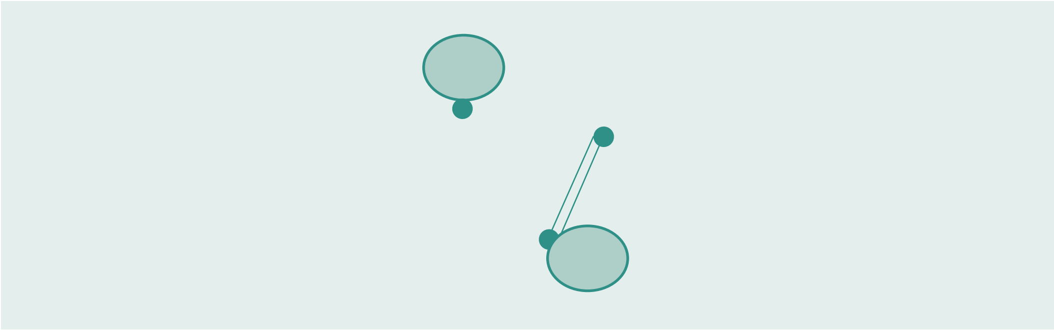
Frage 44

Gegeben ist der folgende Graph. Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Aussagen richtig oder falsch sind:

a) Alle Knoten sind benachbart.

b) Der Graph verfügt über eine Schlinge.

c) Der Graph besteht aus zwei Teilgraphen.



Lösung 43

Lösungshinweis

Machen Sie sich mit den Definitionen der Graphentheorie vertraut.

Kurze Lösung

a) richtig

b) falsch

c) falsch

Ausführliche Lösung

a) Richtig, da es eine endliche Anzahl an Knoten und Kanten gibt.

b) Falsch, da er eine Schlinge besitzt.

c) Falsch, da isolierte Knoten existieren.

Lösung 44

Lösungshinweis

Machen Sie sich mit den Definitionen der Graphentheorie vertraut.

Kurze Lösung

a) falsch

b) richtig

c) richtig

Ausführliche Lösung

a) Falsch, da es Knoten gibt, die nicht durch eine Kante miteinander verbunden sind.

b) Richtig, da der Graph über zwei Schlingen verfügt.

c) Richtig, da zwei Graphen nicht miteinander verbunden sind.

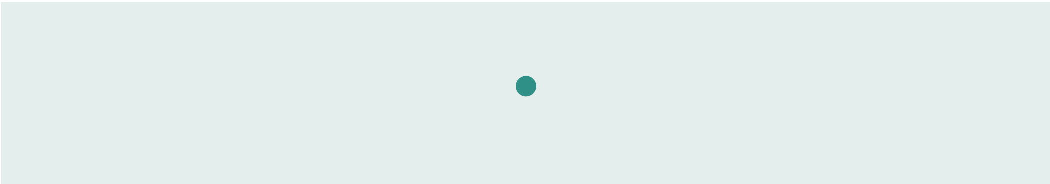
Frage 45

Gegeben ist der folgende Graph. Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Aussagen richtig oder falsch sind:

a) Der Graph ist ein einfacher Graph.

b) Es handelt sich um keinen Graphen.

c) Der Graph ist zusammenhängend.



Lösung 45

Lösungshinweis

Machen Sie sich mit den Definitionen der Graphentheorie vertraut.

Kurze Lösung

a) richtig

b) falsch

c) richtig

Ausführliche Lösung

a) Richtig, da es keine Mehrfachkanten und Schlingen gibt.

b) Falsch, da er einen Knoten besitzt.

c) Richtig, da der Graph von einem anderen Graphen nicht isoliert ist.

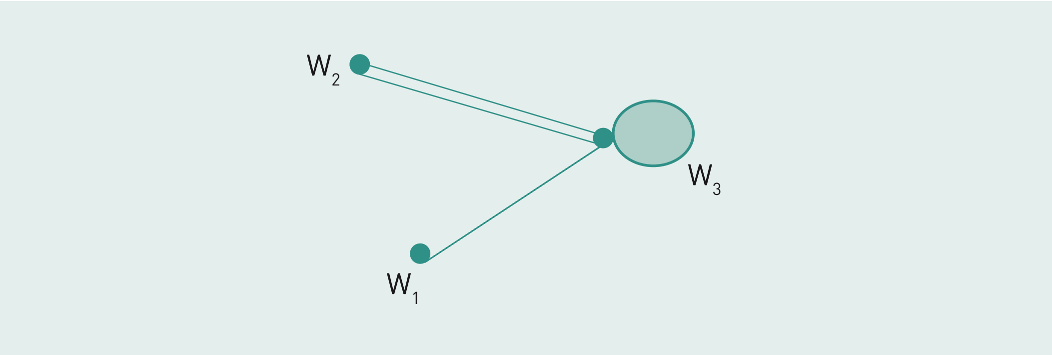
4.2 Weitere Eigenschaften von Graphen

Frage 46

Zeichnen Sie einen Graphen mit vier Knoten, wobei ein Knoten den Grad 1 hat und drei Knoten den Grad 3 haben.

Frage 47

Bestimmen Sie den Grad jedes Knotens.

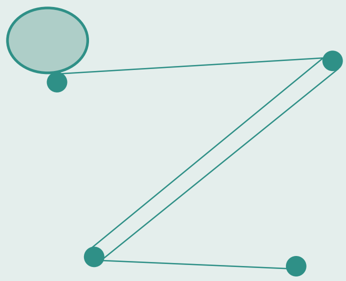


Lösung 46

Lösungshinweis

Verwenden Sie Mehrfachkanten und Schlingen, falls notwendig.

Lösung
Mehrere Lösungen sind möglich.



(Schlinge wird doppelt gezählt).

Lösung 47

Lösungshinweis

Die Schlinge wird doppelt gezählt.

Kurze Lösung

- Grad von w_1: 1
- Grad von w_2: 2
- Grad von w_3: 5

Ausführliche Lösung

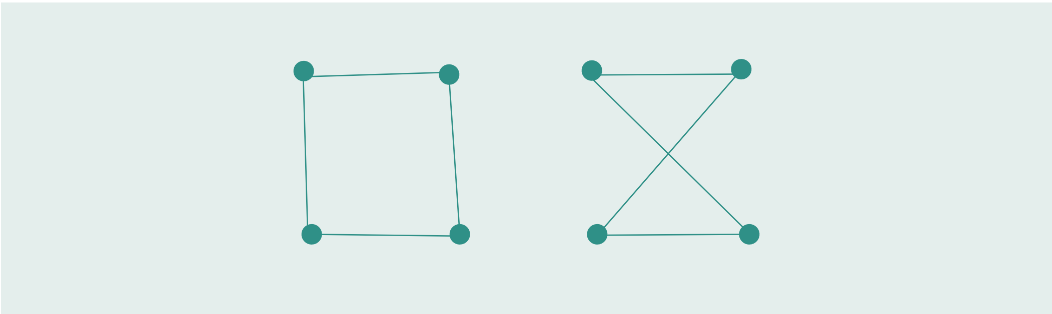
- Grad von w_1: 1
- Grad von w_2: 2
- Grad von w_3: 5 (Schlinge wird doppelt gezählt).

Frage 48

Was versteht man darunter, wenn zwei Graphen isomorph sind? Reicht es hierzu aus, wenn sie die gleiche Anzahl an Knoten und Kanten aufweisen?

Frage 49

Sind beide Graphen isomorph? Falls ja, begründen Sie.



Lösung 48

Lösungshinweis
Machen Sie sich mit der Definition der Isomorphie vertraut.

Kurze Lösung
Zwei Graphen sind isomorph, wenn der eine Graph durch Umzeichnung des anderen Graphen entsteht; nein

Ausführliche Lösung
Zwei Graphen sind isomorph, wenn der eine durch Umzeichnung des anderen entsteht. Die Kanten dürfen verbogen, gedehnt oder zusammengezogen, aber nicht durchgeschnitten oder verknotet werden. Für Isomorphie ist es nicht ausreichend, dass zwei Graphen gleich viele Knoten, Kanten und gleiche Grade aufweisen.

Lösung 49

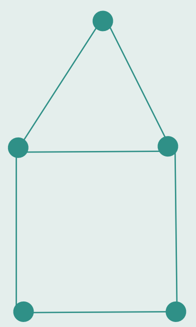
Lösungshinweis
Machen Sie sich mit der Definition der Isomorphie vertraut.

Kurze Lösung
Ja. Bezeichnen Sie die Kanten und Knoten.

Ausführliche Lösung
Die Graphen sind isomorph. Um Isomorphie erkennbar zu machen, können die Knoten und Kanten bezeichnet werden.

Frage 50

Überprüfen Sie für folgenden Graphen die Eulersche Formel.



Lösung 50

Lösungshinweis

Die Fläche außerhalb des Graphen wird mitgezählt.

Kurze Lösung

$v - e + f = 2$; $5 - 6 + 3 = 2$

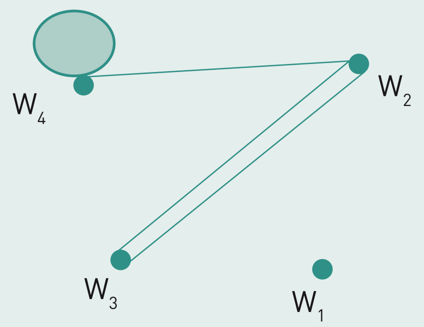
Ausführliche Lösung

Anzahl der Knoten v – Anzahl der Kanten e + Anzahl der Flächen $f = 5 - 6 + 3 = 2$. Das Ergebnis entspricht der Eulerschen Formel.

4.3 Adjazenzmatrix

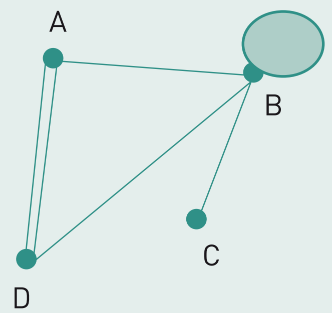
Frage 51

Geben Sie zu folgendem Graphen die Adjazenzmatrix an.



Frage 52

Geben Sie zu folgendem Graphen die Adjazenzmatrix an.



Lösung 51

Lösungshinweis

Schlingen werden doppelt gezählt.

Lösung

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung 52

Lösungshinweis

Schlingen werden doppelt gezählt.

Lösung

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Frage 53

Ein Graph ist durch folgende Adjazenzmatrix gegeben. Fertigen Sie eine Zeichnung an.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Frage 54

Ein Graph ist durch folgende Adjazenzmatrix gegeben. Fertigen Sie eine Zeichnung an.

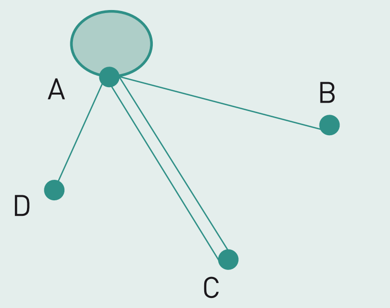
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung 53

Lösungshinweis

Zeichnen Sie zunächst die Knoten A, B, C und D.

Lösung

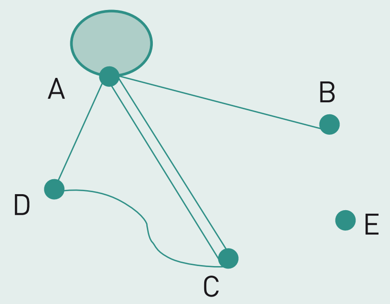


Lösung 54

Lösungshinweis

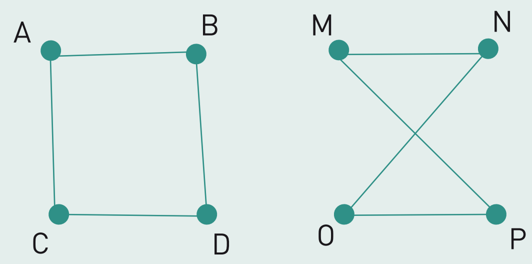
Zeichnen Sie zunächst die Knoten A, B, C, D und E.

Lösung



Frage 55

Überprüfen Sie anhand der Adjazenzmatrix, ob folgende Graphen isomorph zueinander sind.



Lösung 55

Lösungshinweis

Geben Sie dazu eine bijektive Abbildung der Knotenmenge von G auf die Knotenmenge von H an und kontrollieren Sie, ob die beiden Adjazenzmatrizen gleich sind.

Lösung
Die beiden Graphen sind isomorph:

$$A \longrightarrow M, B \longrightarrow N, C \longrightarrow P, D \longrightarrow O$$

$$A_{\text{links}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{\text{rechts}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

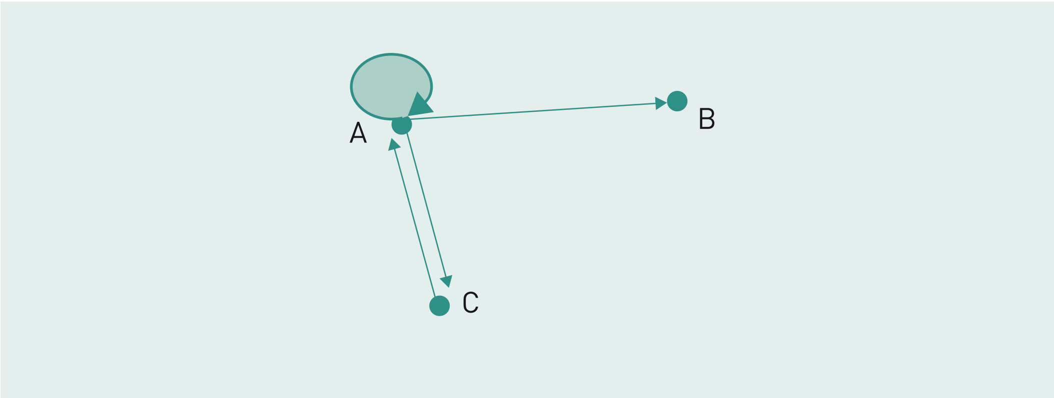
Lektion 5
Das Problem der kürzesten Wege

5. Das Problem der kürzesten Wege

5.1 Gerichteter Graph oder Digraph

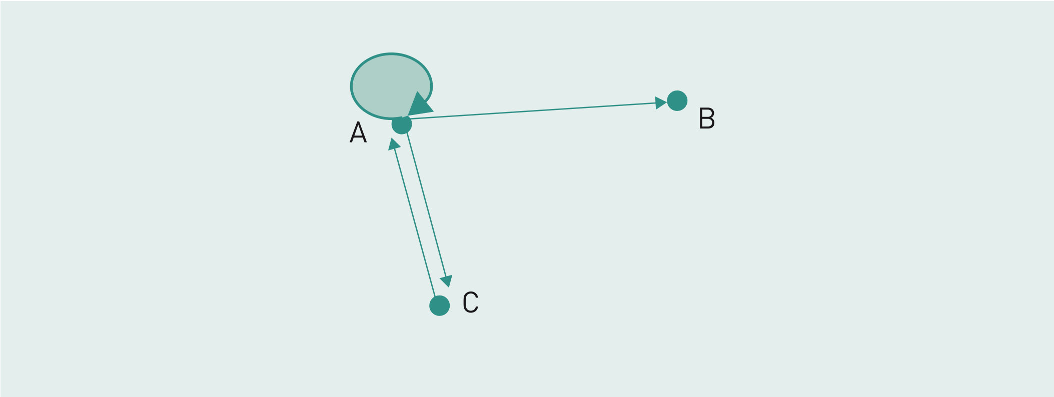
Frage 56

Gegeben ist der folgende Digraph. Geben Sie die Ein- und Ausgangsgrade für alle Knoten an.



Frage 57

Gegeben ist der folgende Digraph. Zeichnen Sie seinen Schatten.



Lösung 56

Lösungshinweis

Schauen Sie nach, wie viele Kanten (Pfeile) in die jeweiligen Knoten herein- und herausführen.

Lösung

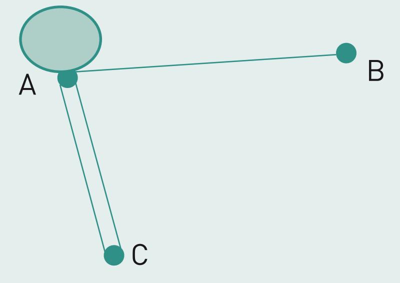
	Eingangsgrad	Ausgangsgrad
A	2	3
B	1	0
C	1	1

Lösung 57

Lösungshinweis

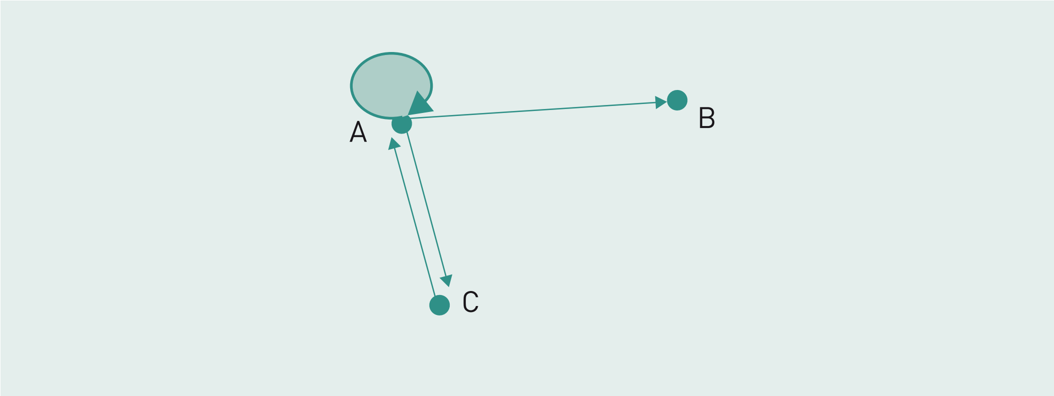
Der Schatten eines Digraphen ist ein ungerichteter Graph.

Lösung



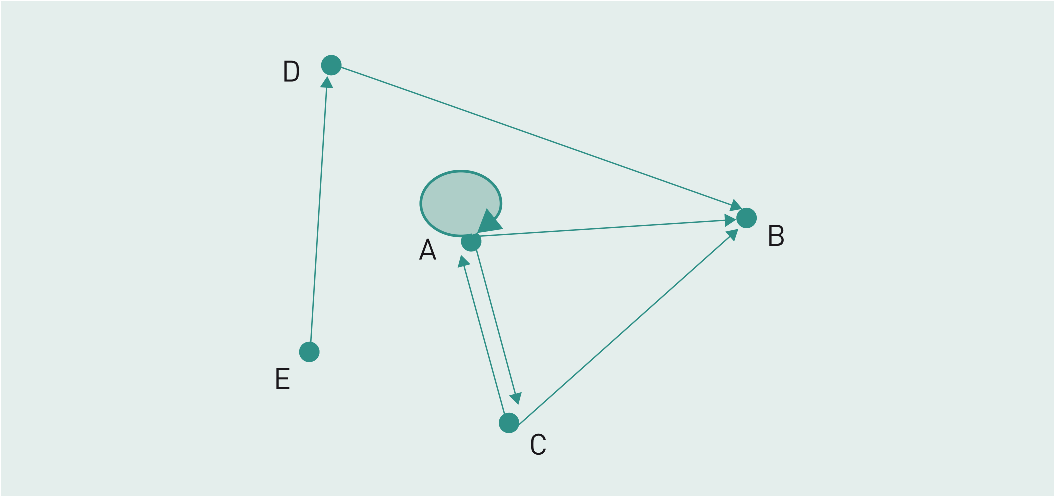
Frage 58

Geben Sie die Adjazenzmatrix des angegebenen Digraphen an.



Frage 59

Geben Sie die Adjazenzmatrix des angegebenen Digraphen an.



Lösung 58

Lösungshinweis

Die Adjazenzmatrix gibt an, wie viele gerichtete Kanten von einem Knoten aus jeweils in die anderen Knoten einlaufen.

Lösung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung 59

Lösungshinweis

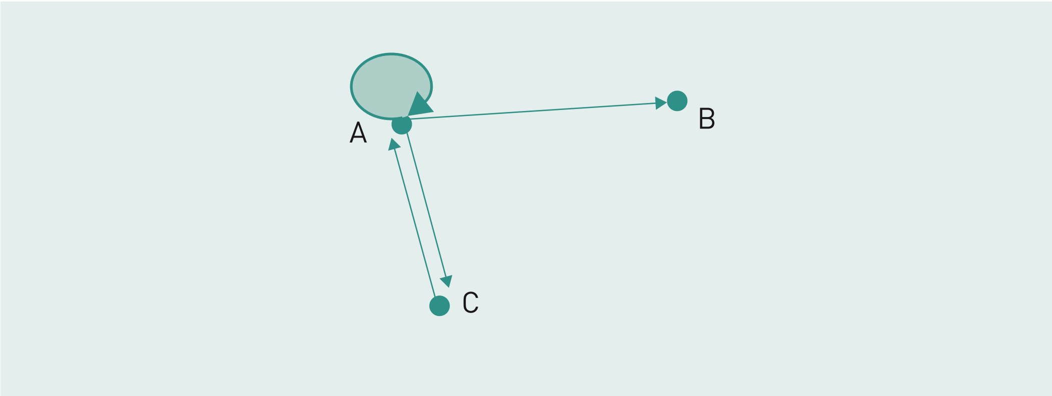
Die Adjazenzmatrix gibt an, wie viele gerichtete Kanten von einem Knoten aus jeweils in die anderen Knoten einlaufen.

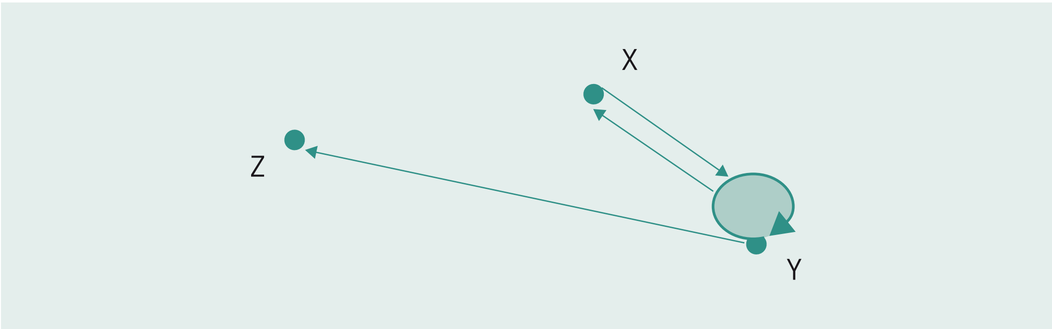
Lösung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Frage 60

Sind die beiden angegebenen Graphen isomorph zueinander? Wenn ja, geben Sie die bijektive Abbildung an, die beide Graphen ineinander überführt.





Lösung 60

Lösungshinweis

Geben Sie eine bijektive Abbildung der Knotenmenge des ersten Graphen auf die Knotenmenge des zweiten Graphen an.

Lösung
Die beiden Graphen sind isomorph:

$$A \rightarrow Y$$

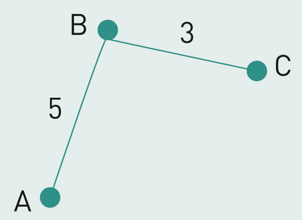
$$B \rightarrow Z$$

$$C \rightarrow X$$

5.2 Gewichteter Graph

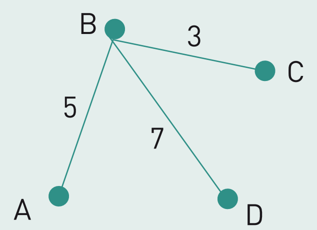
Frage 61

Geben Sie zu folgendem Graphen die Gewichtsmatrix C an.



Frage 62

Geben Sie zu folgendem Graphen die Gewichtsmatrix C an.



Lösung 61

Lösungshinweis

Sortieren Sie die Knoten in alphabetischer Reihenfolge und verwenden Sie die Sortierung beim Aufbau der Matrix.

Lösung

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & \infty \\ 5 & 0 & 3 \\ \infty & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung 62

Lösungshinweis

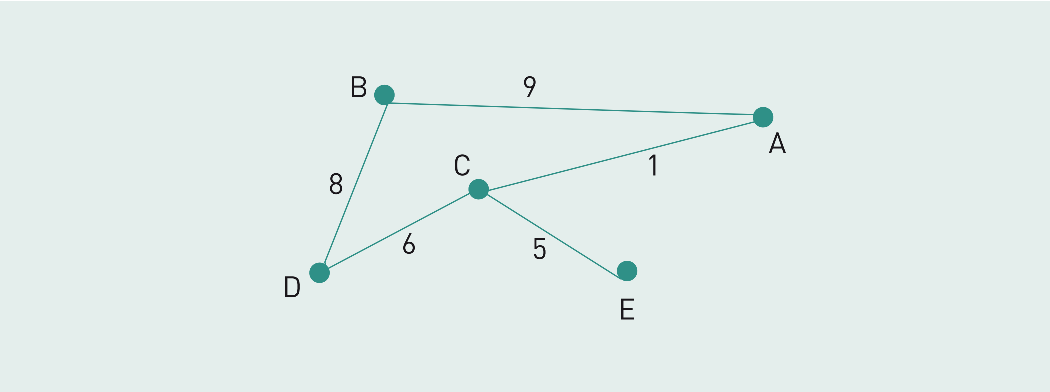
Sortieren Sie die Knoten in alphabetischer Reihenfolge und verwenden Sie die Sortierung beim Aufbau der Matrix.

Lösung

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & \infty & \infty \\ 5 & 0 & 3 & 7 \\ \infty & 3 & 0 & \infty \\ \infty & 7 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

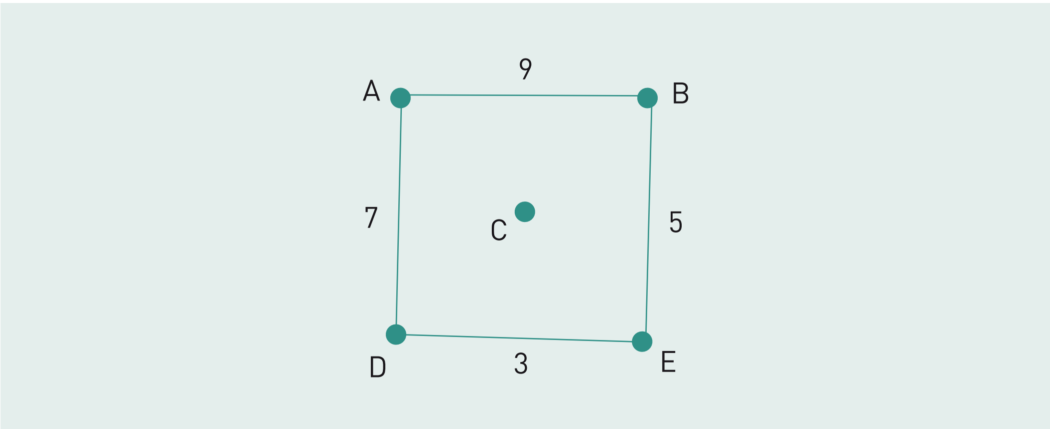
Frage 63

Geben Sie zu folgendem Graphen die Gewichtsmatrix C an.



Frage 64

Geben Sie zu folgendem Graphen die Gewichtsmatrix C an.



Lösung 63

Lösungshinweis

Sortieren Sie die Knoten in alphabetischer Reihenfolge und verwenden Sie die Sortierung beim Aufbau der Matrix.

Lösung

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 1 & \infty & \infty \\ 9 & 0 & \infty & 8 & \infty \\ 1 & \infty & 0 & 6 & 5 \\ \infty & 8 & 6 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 5 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung 64

Lösungshinweis

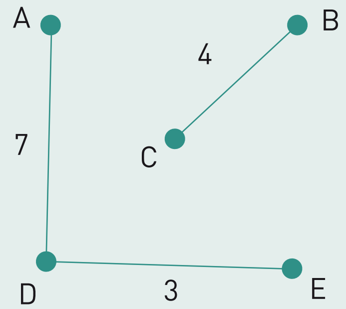
Sortieren Sie die Knoten in alphabetischer Reihenfolge und verwenden Sie die Sortierung beim Aufbau der Matrix.

Lösung

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 9 & \infty & 7 & \infty \\ 9 & 0 & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \\ 7 & \infty & \infty & 0 & 3 \\ \infty & 5 & \infty & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Frage 65

Geben Sie zu folgendem Graphen die Gewichtsmatrix C an.



Lösung 65

Lösungshinweis

Sortieren Sie die Knoten in alphabetischer Reihenfolge und verwenden Sie die Sortierung beim Aufbau der Matrix.

Lösung

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & 7 & \infty \\ \infty & 0 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 7 & \infty & \infty & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

5.3 Algorithmus von Dijkstra

Frage 66

Gegeben sei ein Graph mit seiner Gewichtsmatrix, wobei die Kanten alphabetisch sortiert sind:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ \infty & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die kürzesten Wege vom Startknoten A zu allen anderen Knoten.

Frage 67

Gegeben sei ein Graph mit seiner Gewichtsmatrix, wobei die Knoten alphabetisch sortiert sind:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & \infty \\ \infty & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die kürzesten Wege vom Startknoten A zu allen anderen Knoten.

Lösung 66

Lösungshinweis

Wenden Sie den Algorithmus von Dijkstra an.

Lösung

Knoten	Kürzester Weg	Kürzeste Entfernung
B	$A \rightarrow B$	4
C	$A \rightarrow C$	5

Knoten	1	2
A		
B	4 A	
C	5 A	5 A
M	A, B	A, B, C
P	C	

Lösung 67

Lösungshinweis

Wenden Sie den Algorithmus von Dijkstra an.

Lösung

Knoten	Kürzester Weg	Kürzeste Entfernung
B	$A \rightarrow B$	5
C	$A \rightarrow C$	6

Knoten	1	2
A		
B	5 A	
C	6 A	6 A
M	A, B	A, B, C
P	C	

Frage 68

Gegeben sei ein Graph mit seiner Gewichtsmatrix, wobei die Kanten alphabetisch sortiert sind: A, B, C, D.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 & 8 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & \infty & 0 & 1 \\ 4 & 3 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die kürzesten Wege vom Startknoten A zu allen anderen Knoten.

Frage 69

Gegeben sei ein Graph mit seiner Gewichtsmatrix, wobei die Kanten alphabetisch sortiert sind: A, B, C, D.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & \infty \\ \infty & 0 & 2 & \infty \\ \infty & 1 & 0 & 1 \\ 4 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die kürzesten Wege vom Startknoten A zu allen anderen Knoten.

Lösung 68

Lösungshinweis

Wenden Sie den Algorithmus von Dijkstra an.

Lösung

Knoten	Kürzester Weg	Kürzeste Entfernung
B	$A \rightarrow B$	5
C	$A \rightarrow B \rightarrow C$	6
D	$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$	7

Knoten	1	2	3
A			
B	5 A		
C	7 A	6 B	
D	8 A	8 A	7 C
M	A, B	A, B, C	A, B, C, D
P	C, D	D	

Lösung 69

Lösungshinweis

Wenden Sie den Algorithmus von Dijkstra an.

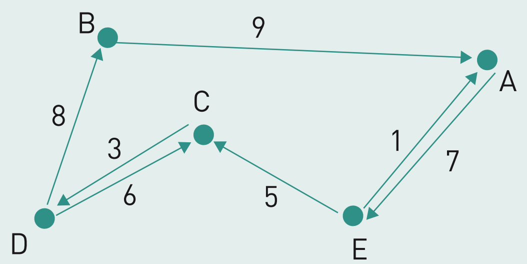
Lösung

Knoten	Kürzester Weg	Kürzeste Entfernung
B	$A \rightarrow C \rightarrow B$	4
C	$A \rightarrow C$	3
D	$A \rightarrow C \rightarrow D$	4

Knoten	1	2
A		
B	5 A	4 C
C	3 A	
D	∞	4 C
M	A, C	A, B, C, D
P	B	

Frage 70

Gegeben ist folgender gewichteter Digraph. Ordnen Sie die Knoten in alphabetischer Reihenfolge. Bestimmen Sie mithilfe des Algorithmus von Dijkstra die kürzesten Wege von Knoten A zu allen anderen Knoten.



Lösung 70

Lösungshinweis

Stellen Sie die Gewichtsmatrix C auf und wenden Sie den Algorithmus von Dijkstra an.

Lösung

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & 7 \\ 9 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 3 & \infty \\ \infty & 8 & 6 & 0 & \infty \\ 1 & \infty & 5 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Knoten	Kürzester Weg	Kürzeste Entfernung
B	$A \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$	23
C	$A \rightarrow E \rightarrow C$	12
D	$A \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow D$	15
E	$A \rightarrow E$	7

Knoten	1	2	3	4
A				
B	∞			23 D
C	∞	12 E		
D	∞		15 C	
E	7 A			
M	A, E	A, E, C	A, E, C, D	A, E, C, D, B
P				

Lektion 6
Das Königsberger Brückenproblem

6. Das Königsberger Brückenproblem

6.1 Kantenzug

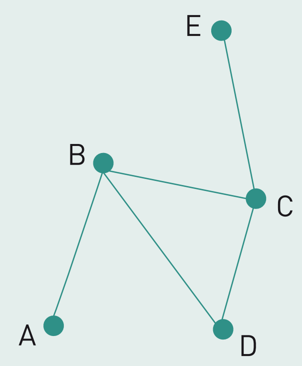
Frage 71

Entscheiden Sie, ob es sich um einen offenen oder geschlossenen Kantenzug handelt und geben Sie jeweils die Länge an:

a) ABCE

b) BDCB

c) BDCE



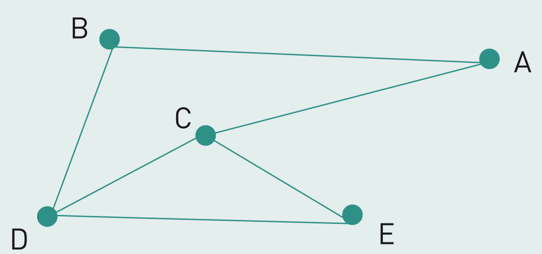
Frage 72

Entscheiden Sie, ob es sich um einen offenen oder geschlossenen Kantenzug handelt und geben Sie jeweils die Länge an:

a) DBAC

b) CEDCABDC

c) DBACD



Lösung 71

Lösungshinweis

Zählen Sie die Anzahl der Kanten und überprüfen Sie, ob der Kantenzug wieder zum Ausgangsknoten zurückkehrt.

Lösung

a) offener Kantenzug der Länge 3
b) geschlossener Kantenzug der Länge 3
c) offener Kantenzug der Länge 3

Lösung 72

Lösungshinweis

Zählen Sie die Anzahl der Kanten und überprüfen Sie, ob der Kantenzug wieder zum Ausgangsknoten zurückkehrt.

Lösung

a) offener Kantenzug der Länge 3
b) geschlossener Kantenzug der Länge 7
c) geschlossener Kantenzug der Länge 4

Frage 73

Zu einem Graphen gehören folgende Kantenzüge:

- DCAD geschlossener Kantenzug der Länge 3,
- ABDCA geschlossener Kantenzug der Länge 4,
- CADB offener Kantenzug der Länge 3.

Zeichnen Sie dazu einen möglichen Graphen.

Frage 74

Zu einem Graphen gehören folgende Kantenzüge:

- BACD offener Kantenzug der Länge 3,
- ACDA geschlossener Kantenzug der Länge 3,
- CADCAB offener Kantenzug der Länge 5.

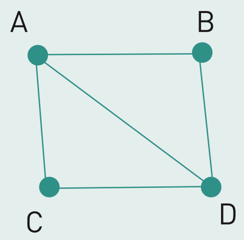
Zeichnen Sie dazu einen möglichen Graphen.

Lösung 73

Lösungshinweis

Zeichnen Sie zunächst die Knoten.

Lösung
Mehrere Lösungen sind möglich.

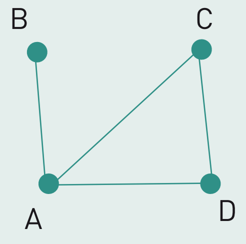


Lösung 74

Lösungshinweis

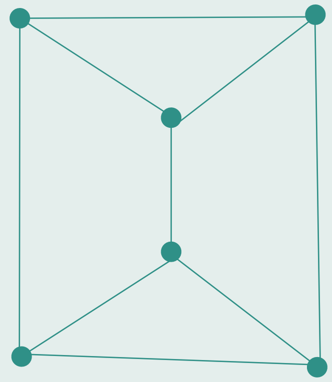
Zeichnen Sie zunächst die Knoten.

Lösung
Mehrere Lösungen sind möglich.



Frage 75

Zeigen Sie, dass der folgende Graph zu einem stark zusammenhängenden Digraphen gemacht werden kann, indem Sie allen Kanten geeignete Richtungen geben.

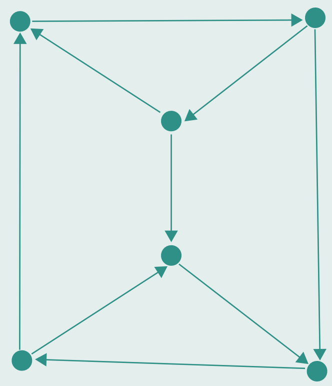


Lösung 75

Lösungshinweis

Schauen Sie nach, was unter einem stark zusammenhängenden Digraphen verstanden wird.

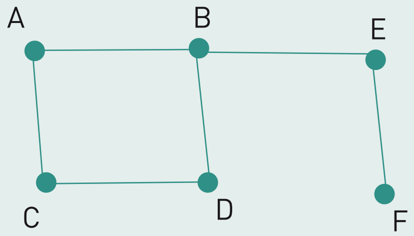
Lösung



6.2 Eulerscher Graph

Frage 76

Fügen Sie folgendem Graphen eine Kante hinzu, sodass er eulersch wird.



Frage 77

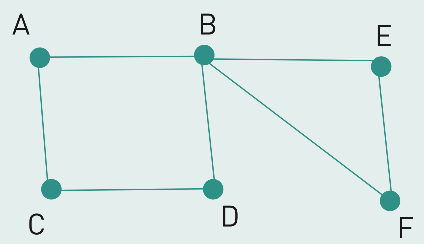
Ist das Nikolaushaus ein Eulerscher Graph? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung 76

Lösungshinweis

Falls die beiden Knoten mit ungeradem Grad durch eine zusätzliche Kante verbunden werden, ist es möglich, zum Anfangspunkt zurückzukehren und einen bzw. mehrere Eulersche Kreise zu zeichnen.

Lösung
Damit alle Knotengrade gerade sind, muss eine zusätzliche Kante zwischen Knoten B und F eingefügt werden:



Lösung 77

Lösungshinweis

Alle Knotengrade müssen gerade sein.

Lösung
Nein, denn zwei Knoten haben einen ungeraden Grad.

Frage 78

Ist der Radgraph W_5 ein Eulerscher Weg, ein Eulerscher Kreis oder keines von beiden?

Frage 79

Ist der vollständige Graph K_5 ein Eulerscher Kreis? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung 78

Lösungshinweis

Zeichnen Sie W_5. Welche Voraussetzungen müssen gegeben sein, damit ein Eulerscher Weg bzw. ein Eulerscher Kreis vorliegt?

Lösung
Der Radgraph W_5 ist weder ein Eulerscher Weg noch ein Eulerscher Kreis. Er hat vier Knoten mit dem ungeraden Grad 3. Voraussetzung für einen Eulerschen Weg sind max. zwei Knoten mit ungeradem Grad. Voraussetzung für einen Eulerschen Kreis sind nur Knoten mit geradem Grad.

Lösung 79

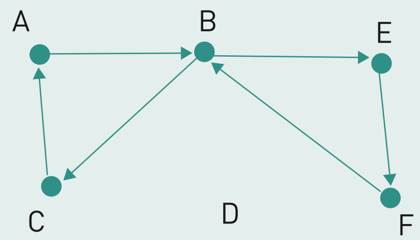
Lösungshinweis

Zeichnen Sie den vollständigen Graphen. Welche Voraussetzungen müssen gegeben sein, damit ein Eulerscher Kreis vorliegt?

Lösung
Ja, da er nur Knoten mit geradem Knotengrad besitzt. Alle vollständigen Graphen mit n ungerade sind eulersch.

Frage 80

Ist folgender Digraph eulersch? Begründen Sie Ihre Antwort.



Lösung 80

Lösungshinweis

Ein Digraph ist genau dann eulersch, wenn er stark zusammenhängend ist und für jeden Knoten gilt, dass der Eingangsgrad gleich dem Ausgangsgrad ist.

Lösung
Ja, der Digraph ist stark zusammenhängend und für jeden Knoten stimmen Eingangs- und Ausgangsgrad überein.

6.3 Algorithmus von Hierholzer

Frage 81

Wozu wird der Algorithmus von Hierholzer angewandt? Erläutern Sie die Vorgehensweise dieses Algorithmus.

Frage 82

Wie wird der Algorithmus von Hierholzer noch genannt? Warum wird er so genannt?

Lösung 81

Lösungshinweis

Eulerscher Kreis

Lösung
Mit dem Algorithmus von Hierholzer werden in einem ungerichteten Graphen Eulersche Kreise bestimmt. Voraussetzungen: zusammenhängender Graph, der nur Knoten mit geradem Grad besitzt.

1. Wähle einen Knoten und konstruiere davon ausgehend einen Unterkreis K, der keine Kante zweimal durchläuft.
2. Wenn K ein Eulerscher Kreis ist, dann breche ab. Andernfalls:
3. Vernachlässige alle Kanten von K.
4. Am ersten Eckpunkt von K lässt man einen zweiten Unterkreis K_2 entstehen, der keine Kante von K enthält und keine Kante des ursprünglichen Graphen zweimal enthält.
5. Füge in K den zweiten Kreis K_2 ein.
6. Fahre mit Schritt 2 fort.

Lösung 82

Lösungshinweis

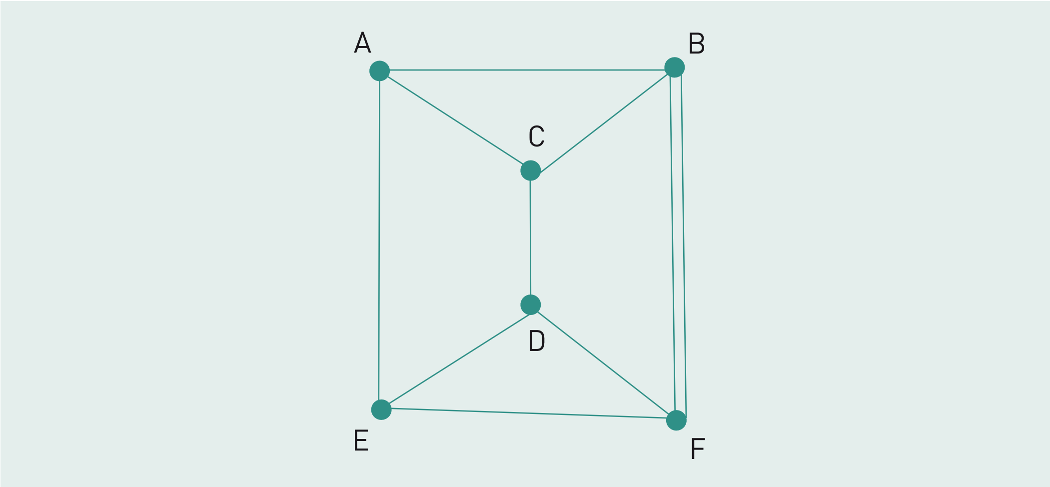
Machen Sie sich mit der Vorgehensweise des Algorithmus vertraut.

Lösung
Zwiebelschalen-Algorithmus:

Die konstruierten geschlossenen Kantenzüge erinnern an ineinander geschachtelte Zwiebelschalen.

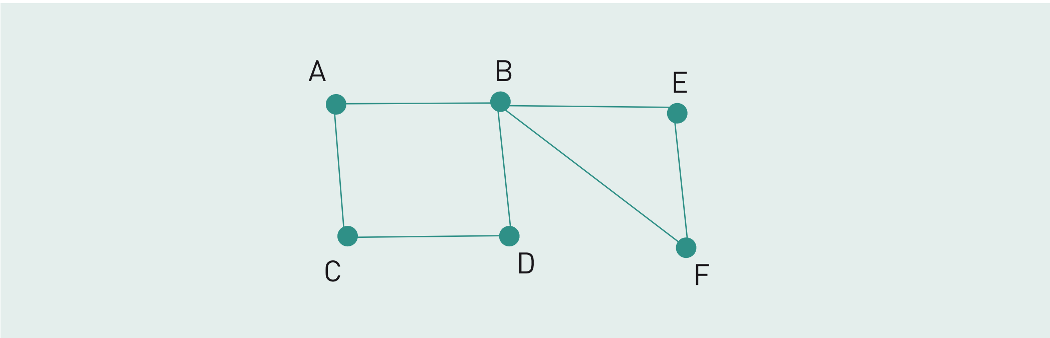
Frage 83

Überprüfen Sie zunächst, ob der gegebene ungerichtete Graph eulersch ist. Wenn ja, dann führen Sie den Algorithmus von Hierholzer durch und bestimmen Sie einen Eulerschen Kreis.



Frage 84

Überprüfen Sie zunächst, ob der gegebene Graph eulersch ist. Wenn ja, dann führen Sie den Algorithmus von Hierholzer durch und bestimmen Sie einen Eulerschen Kreis.



Lösung 83

Lösungshinweis

Welche Voraussetzungen müssen für einen Eulerschen Kreis gegeben sein? Schauen Sie sich die Vorgehensweise für den Algorithmus von Hierholzer an.

Kurze Lösung
Da der Graph nicht Eulersch ist, gibt es keinen Eulerschen Kreis.

Ausführliche Lösung
Der Graph ist nicht Eulersch, da nicht alle Grade gerade sind. Es gibt kein Eulersche Kreis.

Lösung 84

Lösungshinweis

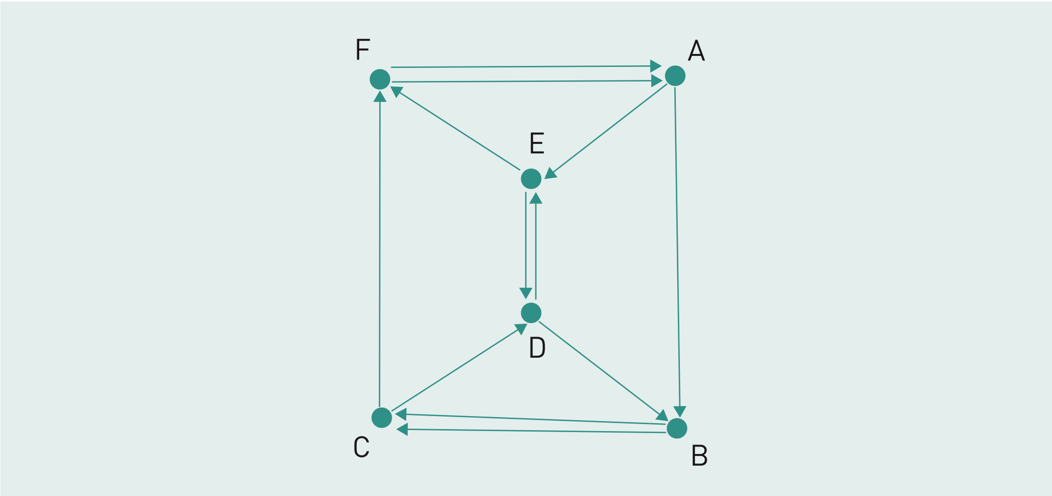
Welche Voraussetzungen müssen für einen Eulerschen Kreis gegeben sein? Schauen Sie sich die Vorgehensweise für den Algorithmus von Hierholzer an.

Kurze Lösung
Ja; ABEFBDCA

Ausführliche Lösung
Der gegebene Graph ist eulersch, da er nur Knoten mit geradem Knotengrad enthält. Der Algorithmus von Hierholzer liefert einen Eulerschen Kreis ABEFBDCA. Mehrere Lösungen sind möglich.

Frage 85

Überprüfen Sie zunächst, ob der gegebene gerichtete Graph eulersch ist. Wenn ja, dann führen Sie den Algorithmus von Hierholzer durch und bestimmen Sie einen Eulerschen Kreis.



Lösung 85

Lösungshinweis

Welche Voraussetzungen müssen für einen Eulerschen Kreis gegeben sein? Schauen Sie sich die Vorgehensweise für den Algorithmus von Hierholzer an.

Kurze Lösung
Ja; ABCDBCFAEDEFA

Ausführliche Lösung
Der gegebene Graph ist eulersch, da er stark zusammenhängend ist und bei jedem Knoten der Eingangs- mit dem Ausgangsgrad übereinstimmt. Der Algorithmus von Hierholzer liefert einen Eulerschen Kreis ABCDBCFAEDEFA.

6.4 Briefträgerproblem

Frage 86

Erläutern Sie das Briefträgerproblem. Geben Sie zwei konkrete Beispiele aus der Praxis an.

Frage 87

Erläutern Sie vereinfacht die Vorgehensweise beim Briefträgerproblem.

Lösung 86

Lösungshinweis

Versetzen Sie sich in die Lage eines Briefträgers.

Kurze Lösung
Gehen Sie alle Straßen mit minimalem Aufwand ab und kommen Sie zum Ausgangspunkt zurück.

Beispiele

- Auslieferungsdienste
- Straßenreinigung

Ausführliche Lösung
Ein Briefträger muss seine Arbeitszeit genau einteilen. Sein Zustellgebiet umfasst mehrere Straßen, durch die er mindestens einmal durchgehen muss. Umwege bzw. Rückwege, wenn sie sich nicht vermeiden lassen, sollten dabei möglichst kurz sein. Die Straßen werden als Kanten und die Kreuzungen sowie Einmündungen als Knoten aufgefasst. Der Graph ist gewichtet, da die Länge der Straßen eine Rolle spielt. Gesucht wird ein geschlossener Kantenzug, der alle Straßen des Zustellgebiets enthält und ein minimales Gesamtgewicht hat. Ähnliche Probleme finden sich allgemein bei Sammel- und Auslieferungsdiensten wie der Müllabfuhr, der Straßenreinigung oder im Werksverkehr, aber auch bei Stadtrundfahrten etc.

Lösung 87

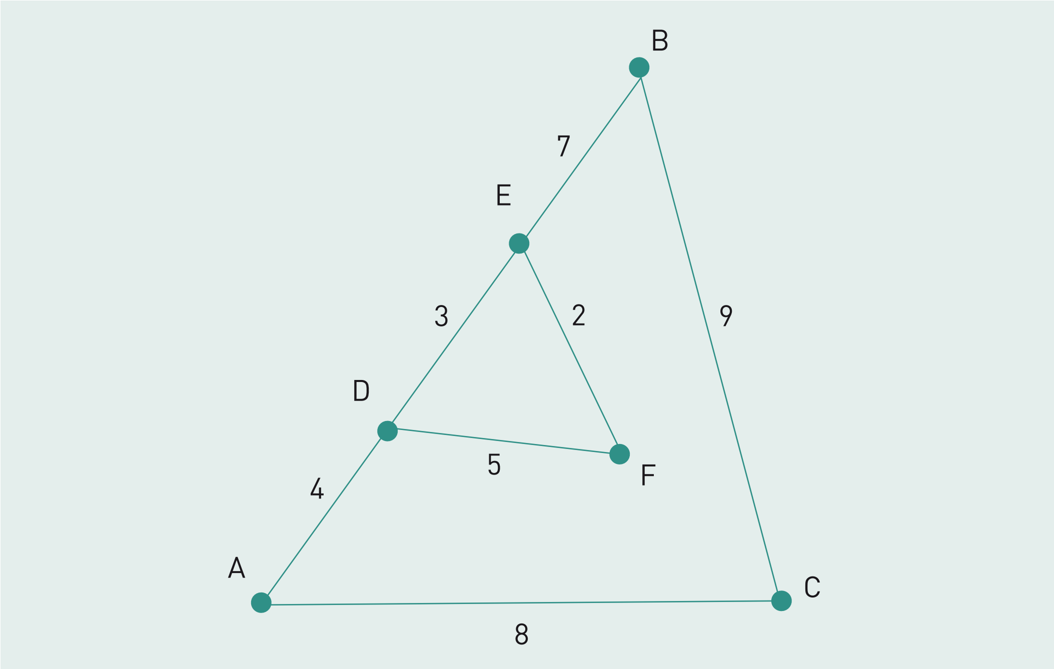
Lösungshinweis

Finden Sie den kürzesten Kantenzug zwischen je zwei Knoten mit ungeradem Grad.

Lösung
Der kürzeste Kantenzug zwischen je zwei Knoten mit ungeradem Grad, also jedem Paar, ist durch die Anwendung des Algorithmus von Dijkstra zu finden. Die Kanten dieses Kantenzugs sind zu verdoppeln. Der neu entstandene Graph ist eulersch, sodass darin ein Eulerscher Kreis mit dem Algorithmus von Hierholzer zu suchen ist.

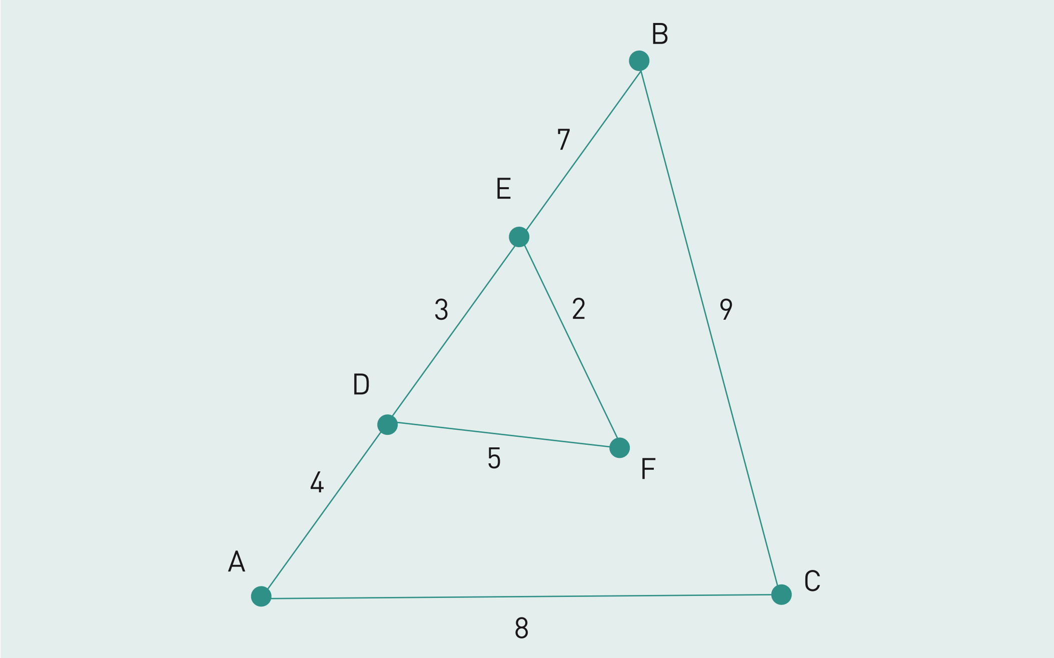
Frage 88

Erläutern Sie die Lösung des Briefträgerproblems mithilfe der Graphentheorie.



Frage 89

Geben Sie für den folgenden Graphen die optimale Lösung für das Briefträgerproblem an.



Lösung 88

Lösungshinweis

Die kürzeste Route entspricht einem Eulerschen Kreis.

Kurze Lösung
Ein Eulerscher Kreis ist optimal. Ist der Graph nicht eulersch, muss er durch das Hinzufügen von Kanten eulersch gemacht werden.

Ausführliche Lösung
In Eulerschen Graphen entspricht die kürzeste Route einem Eulerschen Kreis. Ein Eulerscher Kreis enthält laut Definition jede Kante genau einmal. Das Problem fordert jedoch, dass jede Kante mindestens einmal enthalten sein soll. Daher ist jede Lösung, die jede Kante genau einmal enthält, in jedem Fall optimal. Ist der Graph nicht eulersch, wird das Problem gelöst, indem der Graph durch das Hinzufügen von optimalen Kanten eulersch gemacht wird. Verdoppelte Kanten bedeuten für den Briefträger, dass diese Straßen zweimal gegangen werden müssen. Ist der Graph eulersch, wird wie oben beschrieben vorgegangen und ein Eulerscher Kreis als optimale Lösung gesucht. Bei einem zusammenhängenden Graphen, der nicht eulersch ist, gibt es eine gerade Anzahl von Knoten, die einen ungeraden Grad haben. Werden jeweils zwei Knoten ungeraden Grades durch einen zusätzlichen kürzesten Kantenzug verbunden, indem bei diesem Kantenzug alle Kanten verdoppelt werden, so werden die ehemals ungeraden Knotengrade gerade. Knoten mit bereits geradem Knotengrad innerhalb des Kantenzugs bleiben durch die Verdopplung gerade. Der kürzeste Kantenzug zwischen je zwei Knoten ungeraden Grads kann mithilfe des Algorithmus von Dijkstra bestimmt werden.

Lösung 89

Lösungshinweis

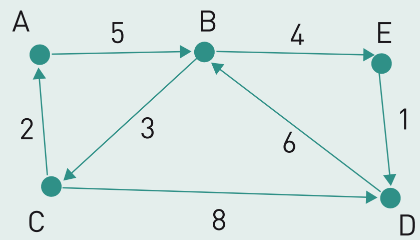
Verdoppeln Sie die Kanten mit ungeradem Knotengrad.

Kurze Lösung
Kante zwischen D und E verdoppeln; Eulerscher Kreis: ADEFDEBCA

Ausführliche Lösung
D und E sind Knoten mit ungeradem Grad. Der kürzeste Kantenzug von D nach E ist der direkte. Diese Kante ist somit zu verdoppeln. Der Algorithmus von Hierholzer liefert folgenden Eulerschen Kreis: ADEFDEBCA. Dies ist ein minimaler Briefträgerweg. Beachte: Der Eulersche Kreis muss nicht eindeutig sein.

Frage 90

Geben Sie für den folgenden Digraphen eine kostenminimale Lösung für das Briefträgerproblem an.



Lösung 90

Lösungshinweis

Ein- und Ausgangsgrad müssen übereinstimmen.

Kurze Lösung
Zusätzliche Pfeile sind (D, B) und (B, C); Eulerscher Digraph: $ABCDBEDBCA$

Ausführliche Lösung
Bei den Knoten C und D stimmen Ein- und Ausgangsgrad nicht überein. Bei C müsste noch ein Pfeil ankommen, bei D ein Pfeil abgehen. Also wird der kürzeste gerichtete Kantenzug von D nach C gesucht. Dieser führt über B mit der Länge 9. Die zusätzlichen Pfeile sind also (D, B) und (B, C). Ein Eulerscher Kreis im modifizierten Eulerschen Digraphen ist $ABCDBEDBCA$.

Lektion 7
Eine Städtetour, bei der jede Stadt genau einmal besucht wird

7. Eine Städtetour, bei der jede Stadt genau einmal besucht wird

7.1 Spezielle Graphen

Frage 91

Was versteht man unter einem Sterngraphen? Wie viele Knoten und Kanten hat der Sterngraph S_n? Zeichnen Sie den Sterngraphen S_4.

Frage 92

Was versteht man unter Kreisgraphen? Welche Eigenschaften haben diese?

Lösung 91

Lösungshinweis

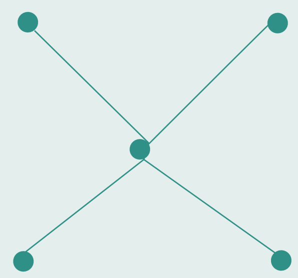
Machen Sie sich mit der Theorie über Sterngraphen vertraut.

Kurze Lösung

Zentraler Knoten, der mit allen anderen Knoten verbunden ist; n Kanten und $n + 1$ Knoten

Ausführliche Lösung

Ein Sterngraph S_n besitzt einen zentralen Knoten, der mit allen anderen Knoten durch eine Kante verbunden ist. Die anderen Knoten besitzen außer dem zentralen Knoten keine weiteren Nachbarn. Ein Sterngraph S_n hat n Kanten und daher $n + 1$ Knoten.



Lösung 92

Lösungshinweis

Machen Sie sich mit der Theorie der Kreisgraphen vertraut.

Kurze Lösung

Gleich viele Knoten wie Kanten; regulär vom Grad 2; planar und eulersch

Ausführliche Lösung

Ein Kreisgraph C_n mit n (im Allgemeinen wird $n \geq 3$ vorausgesetzt) Knoten besitzt gleich viele Knoten wie Kanten, wobei alle Knoten in einem (geometrischen) Kreis miteinander verbunden sind. Alle Kreisgraphen sind regulär vom Grad 2, planar und eulersch.

Frage 93

Was versteht man unter einem vollständigen Graphen? Sind alle vollständigen Graphen eulersch? Wie viele Kanten hat ein vollständiger Graph K_n?

Frage 94

Was versteht man unter einem bipartiten Graphen? Welche Eigenschaften muss er haben? Geben Sie ein Beispiel dafür an.

Lösung 93

Lösungshinweis

Machen Sie sich mit der Theorie über vollständige Graphen vertraut.

Kurze Lösung
Von jedem Knoten führt eine Kante zu jedem anderen Knoten. Nicht alle vollständigen Graphen sind eulersch. Anzahl der Kanten:

$$n \cdot \frac{n-1}{2}$$

Ausführliche Lösung
Ein ungerichteter einfacher Graph mit n Knoten, in dem von jedem Knoten zu jedem anderen Knoten eine Kante existiert, heißt vollständiger Graph (oder auch vollständiges Vieleck) K_n. Alle vollständigen Graphen K_n mit n ungerade sind eulersch. Die Anzahl sämtlicher Kanten eines vollständigen Graphen ist die Dreieckszahl:

$$n \cdot \frac{n-1}{2}$$

Lösung 94

Lösungshinweis

Machen Sie sich mit der Theorie über bipartite Graphen vertraut.

Kurze Lösung
Die Menge seiner Knoten kann in zwei disjunkte Teilmengen aufgeteilt werden. Voraussetzung: mindestens zwei Knoten und keine Schlinge. Beispiel: Kreisgraphen mit gerader Knotenanzahl.

Ausführliche Lösung
Ein ungerichteter Graph ist bipartit, wenn die Menge seiner Knoten in zwei disjunkte, nichtleere Teilmengen M und N aufgeteilt werden kann, sodass es nur Kanten zwischen Knoten aus M und Knoten aus N gibt, aber keine Kanten zwischen den Knoten innerhalb der Menge M oder der Menge N. Ein Graph, dessen Kantenmenge die Vereinigung von zwei nichtleeren disjunkten Mengen M und N ist, sodass jede Kante ein Ende in M und ein Ende in N hat, ist ein bipartiter Graph. Aufgrund dieser Definition ist es notwendig, dass ein bipartiter Graph mindestens zwei Knoten hat und keine Schlingen (er kann aber Mehrfachkanten besitzen). Anders ausgedrückt, ist ein Graph bipartit, wenn man seine Knoten auf eine Art und Weise schwarz und weiß färben kann, sodass jede Kante einen schwarzen und einen weißen Knoten verbindet (mit zwei Farben färbbar). Die beiden Teilmengen M und N werden auch Bipartition genannt. Alle Kreisgraphen C_n mit gerader Knotenanzahl sind bipartit.

Frage 95

Erläutern Sie den Satz von Kuratowski. Was wird aufgrund dieses Satzes ersichtlich?

Lösung 95

Lösungshinweis

Machen Sie sich mit der Theorie vertraut. Was bedeutet planar?

Kurze Lösung

Ein Graph G ist genau dann planar, wenn G keinen Teilgraphen G′ enthält, sodass K_5 oder $K_{3,3}$ ein Minor von G′ ist. Aufgrund des Satzes von Kuratowski wird ersichtlich, dass K_5 und $K_{3,3}$ die kleinsten nicht planaren Graphen sind.

Ausführliche Lösung

Ein Graph G_1 wird Minor des Graphen G_2 genannt, falls G_1 isomorph zu einem durch Knotenverschmelzung entstandenen Teilgraphen von G_2 ist. Knotenverschmelzung bedeutet, dass zwei benachbarte Knoten unter Entfernung einer dieser beiden Knoten verbindenden Kante zu einem Knoten verschmolzen werden, wobei alle restlichen Kanten beibehalten werden. Mithilfe der Definition von Minor kann der Satz von Kuratowski wie folgt formuliert werden: Ein Graph G ist genau dann planar, wenn G keinen Teilgraphen G′ enthält, sodass K_5 oder $K_{3,3}$ ein Minor von G′ ist. Aufgrund des Satzes von Kuratowski wird ersichtlich, dass K_5 und $K_{3,3}$ die kleinsten nicht planaren Graphen sind.

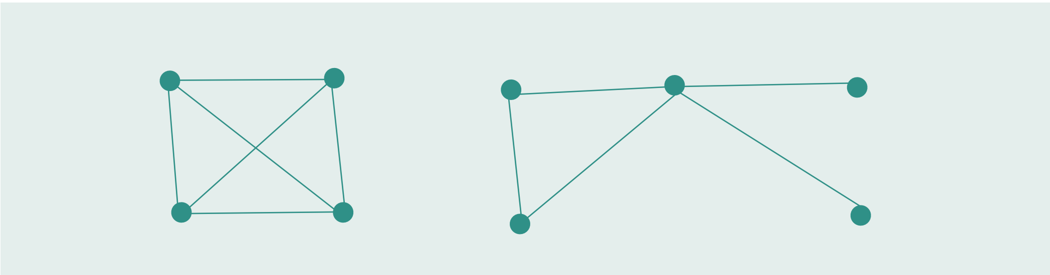
7.2 Hamiltonscher Graph

Frage 96

Was versteht man unter einem Hamiltonschen Weg und unter einem Hamiltonschen Kreis?

Frage 97

Besitzen folgende Graphen einen Hamiltonschen Weg und einen Hamiltonschen Kreis?



Lösung 96

Lösungshinweis

Machen Sie sich mit der Theorie des Hamiltonschen Graphens vertraut.

Kurze Lösung
Der Kantenzug enthält jeden Knoten nur einmal. Weg: nicht geschlossen; Kreis: geschlossen

Ausführliche Lösung
Falls ein Kantenzug jeden Knoten eines Graphen genau einmal enthält, aber nicht notwendigerweise geschlossen ist, so handelt es sich um einen Hamiltonschen Weg. Bei einem gerichteten Graphen auch als gerichteter Hamiltonscher Weg bezeichnet. Ein Graph, der einen Hamiltonschen Weg enthält, wird Semi-Hamiltonscher Graph genannt. Ein Hamiltonscher Kreis ist insbesondere ein geschlossener Hamiltonscher Weg.

Lösung 97

Lösungshinweis

Der Kantenzug enthält jeden Knoten nur einmal.

Kurze Lösung

- Graph links: Hamiltonscher Weg und Hamiltonscher Kreis
- Graph rechts: keines von beiden

Ausführliche Lösung

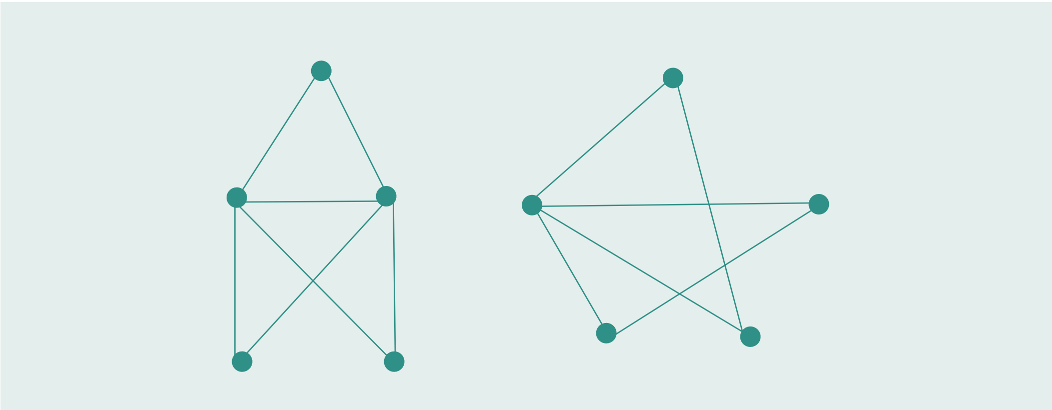
- Graph links: Hamiltonscher Weg und Hamiltonscher Kreis. Es existiert ein geschlossener Kantenzug, der jeden Knoten nur einmal enthält.
- Graph rechts: Es existiert weder ein offener noch ein geschlossener Kantenzug, der jeden Knoten nur einmal enthält.

Frage 98

Sind Weggraphen, Kreisgraphen, Sterngraphen und Radgraphen eulersch und/oder hamiltonsch?

Frage 99

Besitzen folgende Graphen einen Hamiltonschen Weg und einen Hamiltonschen Kreis?



Lösung 98

Lösungshinweis

Was bedeutet eulersch und hamiltonsch?

Lösung

- Weggraphen sind nicht eulersch und nicht hamiltonsch;
- Kreisgraphen sind eulersch und hamiltonsch;
- Sterngraphen sind nicht eulersch und nicht hamiltonsch;
- Radgraphen ($n \geq 4$) sind nicht eulersch, aber hamiltonsch.

Lösung 99

Lösungshinweis

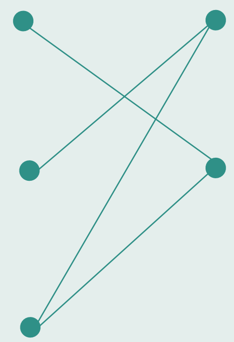
Der Kantenzug enthält jeden Knoten nur einmal.

Kurze Lösung
Beide Graphen besitzen einen Hamiltonschen Weg.

Ausführliche Lösung
In beiden Graphen existiert ein offener Kantenzug, der jeden Knoten nur einmal enthält, also ein Eulerscher Weg. Allerdings kann der Kantenzug nicht geschlossen werden.

Frage 100

Zeigen Sie, dass der Graph nicht hamiltonsch ist. Verwenden Sie dazu das Resultat in Bezug auf bipartite Graphen.



Lösung 100

Lösungshinweis

Falls ein Graph hamiltonsch ist mit mehr als zwei Knoten und bipartit, dann sind die beiden Knotenmengen, die die bipartite Aufteilung bilden, gleichmächtig.

Kurze Lösung
Disjunkte Teilmengen sind nicht gleichmächtig.

Ausführliche Lösung
Der Graph ist bipartit. Da die disjunkten Teilmengen drei und zwei Knoten enthalten und damit nicht gleichmächtig sind, kann der Graph nicht hamiltonsch sein.

7.3 Die Ore- und Dirac-Bedingung

Frage 101

Ist ein Graph nicht hamiltonsch, falls er die Ore-Bedingung nicht erfüllt? Geben Sie ein Beispiel dafür an.

Frage 102

Falls ein Graph die Dirac-Bedingung erfüllt, erfüllt er dann auch die Ore-Bedingung? Falls ein Graph die Ore-Bedingung erfüllt, erfüllt er dann auch die Dirac-Bedingung?

Lösung 101

Lösungshinweis

Machen Sie sich mit der Ore-Bedingung vertraut.

Kurze Lösung
Es bedeutet nicht, dass er nicht hamiltonsch ist. Beispiel: C_5

Ausführliche Lösung
Falls ein einfacher Graph die Ore-Bedingung nicht erfüllt, bedeutet dies nicht, dass er kein Hamiltonscher Graph ist. So ist C_5 ein einfacher Hamiltonscher Graph, aber für je zwei nicht adjazente Knoten u und v gilt, dass $\delta(u)+\delta(v)=2+2\geq n=5$ ist. Das heißt, dass der Kreisgraph C_5 die Ore-Bedingung nicht erfüllt.

Lösung 102

Lösungshinweis

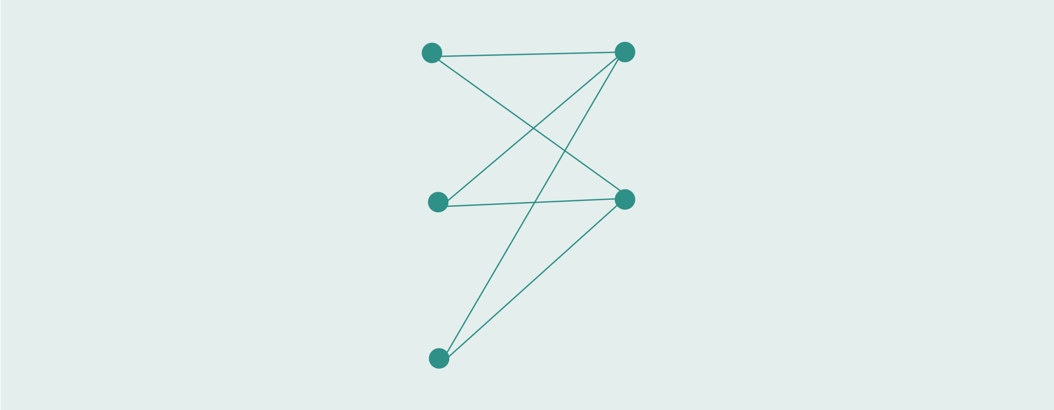
Machen Sie sich mit der Ore- und Dirac-Bedingung vertraut.

Kurze Lösung
Ja; nein

Ausführliche Lösung
Wenn ein Graph die Dirac-Bedingung erfüllt, dann erfüllt er gleichzeitig auch die Ore-Bedingung. Falls jedoch ein Graph die Ore-Bedingung erfüllt, so muss er nicht auch die Dirac-Bedingung erfüllen.

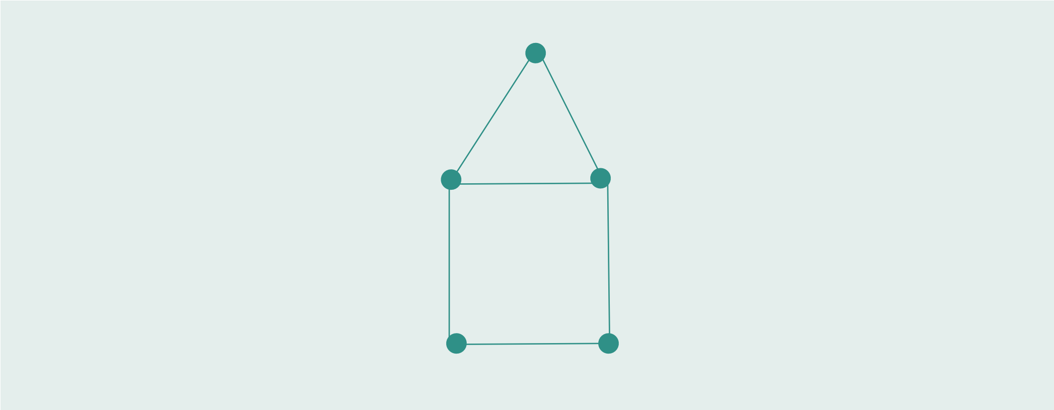
Frage 103

Wenden Sie die Ore- und Dirac-Bedingung beim folgenden Graphen an. Was können Sie daraus schließen?



Frage 104

Wenden Sie die Ore- und Dirac-Bedingung beim folgenden Graphen an. Was können Sie daraus schließen?



Lösung 103

Lösungshinweis

Machen Sie sich mit den beiden Bedingungen vertraut.

Kurze Lösung
Beide Gleichungen wurden nicht erfüllt. Damit kann keine Entscheidung getroffen werden.

Ausführliche Lösung
Ore-Bedingung: $\delta(u)+\delta(v)=\geq n$ mit u und v nicht adjazente Knoten, $\delta(u)+\delta(v)=3+3=6$ bzw. $\delta(u)+\delta(v)=2+2=4\geq 5$. D. h., die Ore-Bedingung gilt nicht für alle nicht adjazenten Knotenpaare. Dirac-Bedingung: $\delta(G)\geq \frac{n}{2}$ mit $\delta(G)$ Minimalgrad, $\delta(G)=2\geq \frac{5}{2}$. D. h., die Dirac-Bedingung ist nicht erfüllt. Daraus ergibt sich, dass mit der Ore- und Dirac-Bedingung keine Entscheidung darüber getroffen werden kann, ob der Graph hamiltonsch ist.

Lösung 104

Lösungshinweis

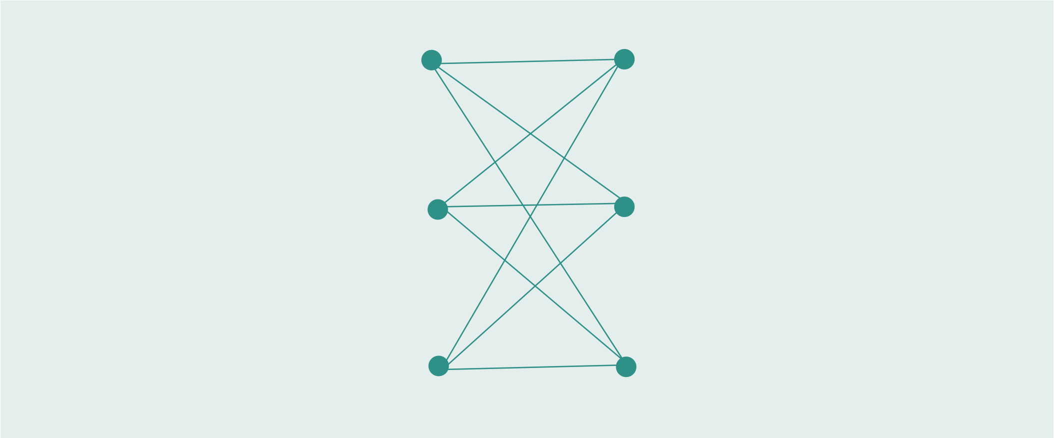
Machen Sie sich mit den beiden Bedingungen vertraut.

Kurze Lösung
Beide Gleichungen wurden nicht erfüllt. Damit kann keine Entscheidung getroffen werden.

Ausführliche Lösung
Ore-Bedingung: $\delta(u)+\delta(v)=\geq n$ mit u und v nicht adjazente Knoten, $\delta(u)+\delta(v)=3+2=5$ bzw. $\delta(u)+\delta(v)=2+2=4\geq 5$. D. h., die Ore-Bedingung gilt nicht für alle nicht adjazenten Knotenpaare. Dirac-Bedingung: $\delta(G)\geq \frac{n}{2}$ mit $\delta(G)$ Minimalgrad, $\delta(G)=2\geq \frac{5}{2}$. D. h., die Dirac-Bedingung ist nicht erfüllt. Daraus ergibt sich, dass mit der Ore- und Dirac-Bedingung keine Entscheidung darüber getroffen werden kann, ob der Graph hamiltonsch ist. Ohne Beweis sei erwähnt, dass der Graph hamiltonsch ist.

Frage 105

Wenden Sie die Ore- und Dirac-Bedingung beim folgenden Graphen an. Was können Sie daraus schließen?



Lösung 105

Lösungshinweis

Machen Sie sich mit den Bedingungen vertraut.

Kurze Lösung
Beide Bedingungen sind erfüllt. Der Graph ist hamiltonsch.

Ausführliche Lösung
Ore-Bedingung: $\delta(u)+\delta(v)=\ngeq n$ mit u und v nicht adjazente Knoten, $\delta(u)+\delta(v)=3+3=6\geq 6$. D. h., die Ore-Bedingung ist für alle nicht adjazenten Knotenpaare erfüllt. Dirac-Bedingung: $\delta(G)\geq\frac{n}{2}$ mit $\delta(G)$ Minimalgrad, $\delta(G)=3\geq\frac{6}{2}$. D. h., die Dirac-Bedingung ist erfüllt. Daraus ergibt sich, dass der Graph hamiltonsch ist.

7.4 Problem des Handlungsreisenden

Frage 106

Was wird unter dem Problem des Handlungsreisenden verstanden? Wo findet es in der Praxis Anwendung? Geben Sie ein Beispiel an.

Frage 107

Worin besteht das Problem bei der Vorgehensweise zum Problem des Handlungsreisenden?

Lösung 106

Lösungshinweis

Hamilton-Kreis-Problem bei gewichtetem Graphen

Kurze Lösung
Rundreise durch alle Knoten, die die Summe der Gewichte minimiert. Beispiel: elektronische Leiterplatten.

Ausführliche Lösung
Eng verwandt mit dem Hamilton-Kreis-Problem ist das Problem des Handlungsreisenden (auch Traveling-Salesman-Problem oder TSP genannt). Es unterscheidet sich vom Hamilton-Kreis-Problem nur dadurch, dass die zugrundeliegenden Graphen gewichtet sind. Die Aufgabe besteht darin, eine Rundreise durch alle Knoten zu finden, die die Summe der zurückgelegten Entfernungen minimiert. Es gilt also einen Hamiltonschen Kreis in einem gewichteten Graphen zu finden, sodass die Summe der Gewichte minimal ist. Beispiel: Herstellung von elektronischen Leiterplatten.

Lösung 107

Lösungshinweis

Heuristiken

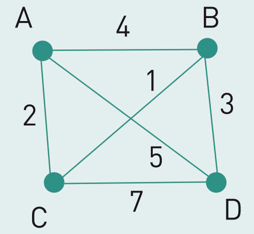
Kurze Lösung
Es gibt keine exakte Lösung.

Ausführliche Lösung
Es gibt keinen exakten Algorithmus, der das Problem in akzeptabler Zeit lösen kann. Natürlich ist es möglich, alle Hamiltonschen Kreise zu bestimmen, jeweils die Summe der Gewichte zu vergleichen und am Ende den Kreis mit dem kleinsten Gewicht auszuwählen. Wie jedoch bereits beschrieben, kann ein einfacher Graph mit n Knoten bis zu $\frac{(n-1)!}{2}$ Hamiltonsche Kreise haben. Dies sind sehr viele Möglichkeiten zum Vergleichen.

Daher wurden in den letzten Jahrzehnten eine Reihe effizienter Approximationsalgorithmen, sogenannte Heuristiken, entwickelt, die das Problem des Handlungsreisenden auch mit vielen Knoten mit akzeptabler Güte in akzeptabler Zeit lösen können. Bei einer Heuristik kann jedoch nicht garantiert werden, dass tatsächlich die optimale Lösung gefunden werden kann.

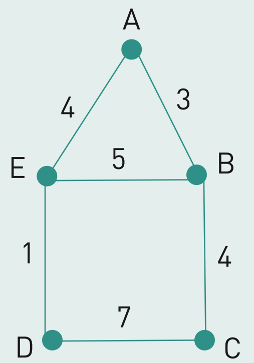
Frage 108

Wie lautet die Lösung zum Problem des Handlungsreisenden, wenn im Knoten A gestartet wird?



Frage 109

Wie lautet die Lösung zum Problem des Handlungsreisenden, wenn im Knoten A gestartet wird?



Lösung 108

Lösungshinweis
Hamiltonscher Kreis mit minimaler Gewichtung

Kurze Lösung
Z. B. ADBCA mit dem Gesamtgewicht 11

Ausführliche Lösung
Es ist ein Hamiltonscher Kreis zu suchen mit dem geringsten Gesamtgewicht. Eine mögliche Lösung lautet ADBCA mit dem Gesamtgewicht 11.

Lösung 109

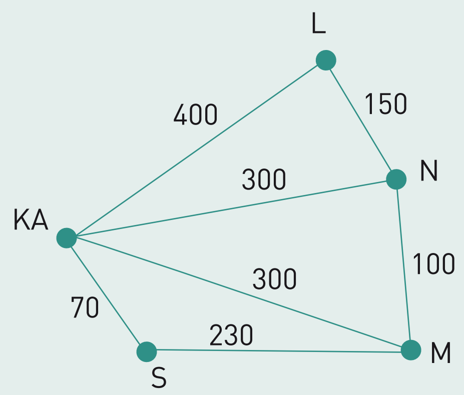
Lösungshinweis
Hamiltonscher Kreis mit minimaler Gewichtung

Kurze Lösung
Z. B. AEDCBA mit dem Gesamtgewicht 19

Ausführliche Lösung
Es ist ein Hamiltonscher Kreis zu suchen mit dem geringsten Gesamtgewicht. Eine mögliche Lösung lautet AEDCBA mit dem Gesamtgewicht 19.

Frage 110

Ein Handlungsreisender muss alle Städte besuchen. Finden Sie den optimalen Rundweg, wenn er in KA startet.



Lösung 110

Lösungshinweis

Hamiltonscher Kreis mit minimaler Gewichtung

Kurze Lösung
Z. B. KA S M N L KA mit dem Gesamtgewicht 950

Ausführliche Lösung
Es ist ein Hamiltonscher Kreis zu suchen mit dem geringsten Gesamtgewicht. Eine mögliche Lösung lautet KA S M N L KA mit dem Gesamtgewicht 950.

Lektion 8
Bäume

8. Bäume

8.1 Eigenschaften von Bäumen

Frage 111

Wie viele Kanten hat ein Baum mit n Knoten? Erläutern Sie bitte Ihre Antwort.

Frage 112

Ein Baum mit n Knoten hat genau $n - 1$ Kanten. Was kann daraus hergeleitet werden?

Lösung 111

Lösungshinweis

Sukzessives Abpflücken von Blättern

Kurze Lösung
$n - 1$ Kanten; Technik des sukzessiven Abpflückens von Blättern

Ausführliche Lösung
Jeder Baum mit n Knoten hat genau $n - 1$ Kanten. Dies kann sehr gut mit der Technik des sukzessiven Abpflückens von Blättern nachvollzogen werden. Die Anzahl der Knoten in dem betrachteten Baum sei n. Wird nun das Blatt und die dazugehörige Kante abgepflückt, entsteht ein Baum mit je einem Knoten und einer Kante weniger. Jedoch ist die Differenz der Anzahl der Knoten und der Anzahl der Kanten im alten Baum und die entsprechende Differenz im neuen Baum gleichgeblieben. Dieser Vorgang des Abpflückens von einzelnen Blättern wird wiederholt und zwar so lange, bis nach $n - 1$ Schritten ein Baum mit einem Knoten entstanden ist. Dieser Baum hat keine Kante. Dies bedeutet, dass die Differenz zwischen der Anzahl der Knoten und der Anzahl der Kanten gleich 1 ist. Oder eben anders ausgedrückt, dass ein Baum mit n Knoten genau $n - 1$ Kanten enthält.

Lösung 112

Lösungshinweis

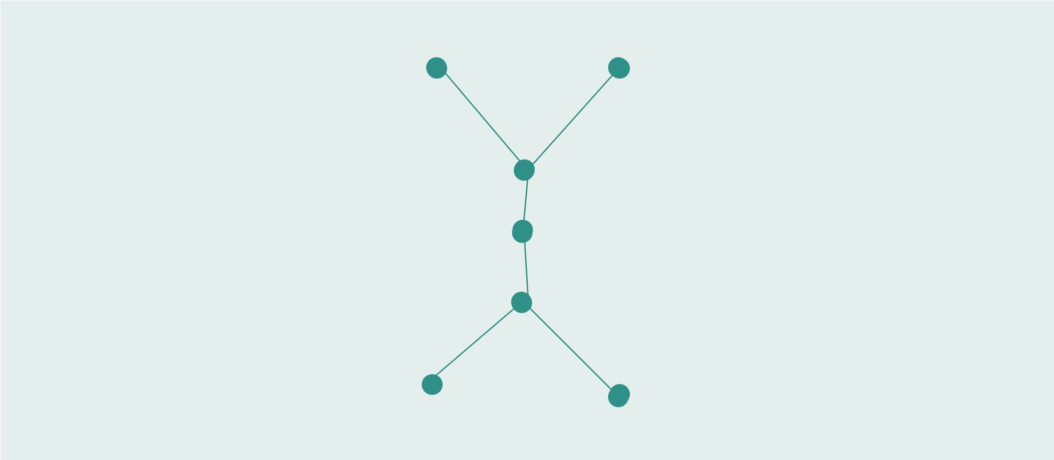
Machen Sie sich mit der Theorie über Bäume vertraut.

Lösung
Ein Graph ist dann und nur dann ein Baum, wenn er keinen geschlossenen Kantenzug enthält, aber durch das Hinzufügen genau einer neuen Kante an die vorhandenen Knoten ein geschlossener Kantenzug entsteht.

Hat ein Baum einen Knoten mit dem Grad k, so hat er mindestens k Blätter. Ein zusammenhängender Graph ist genau dann ein Baum, wenn er dadurch, dass eine beliebige Kante entfernt wird, nicht mehr zusammenhängend ist. Ein zusammenhängender Graph ist genau dann ein Baum, wenn alle seine Kanten Brücken sind.

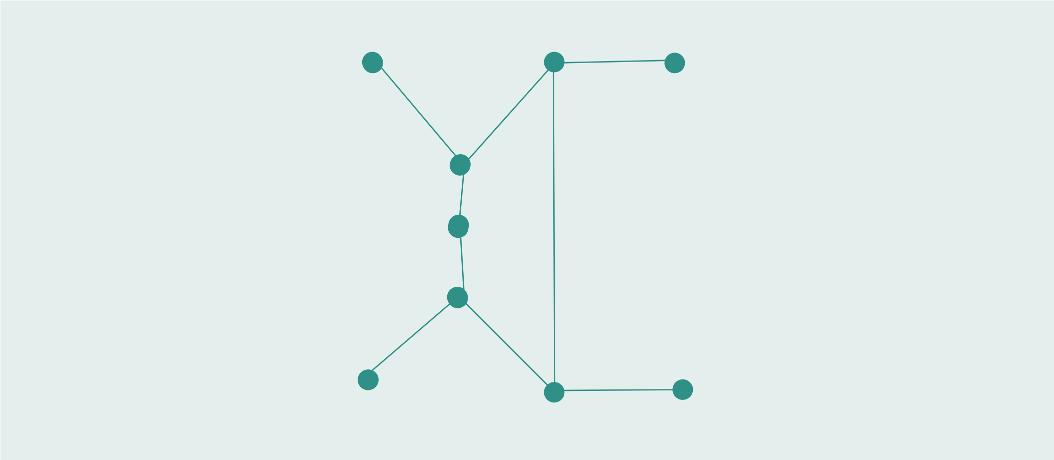
Frage 113

Entscheiden Sie, ob es sich um einen Baum handelt. Begründen Sie Ihre Antwort.



Frage 114

Entscheiden Sie, ob es sich um einen Baum handelt. Begründen Sie Ihre Antwort.



Lösung 113

Lösungshinweis

Ein Graph mit n Knoten hat $n - 1$ Kanten.

Lösung
Der Graph enthält sieben Knoten und sechs Kanten, daher muss er ein Baum sein.

Lösung 114

Lösungshinweis

Ein Graph mit n Knoten hat $n - 1$ Kanten.

Lösung
Der Graph enthält neun Knoten und neun Kanten, daher kann er kein Baum sein. Darüber hinaus ist ersichtlich, dass er einen geschlossenen Kantenzug enthält.

Frage 115

Ist der folgende Satz wahr? Wenn aus einem zusammenhängenden Graphen mit Mehrfachkanten diese Mehrfachkanten entfernt werden, so entsteht ein Baum.

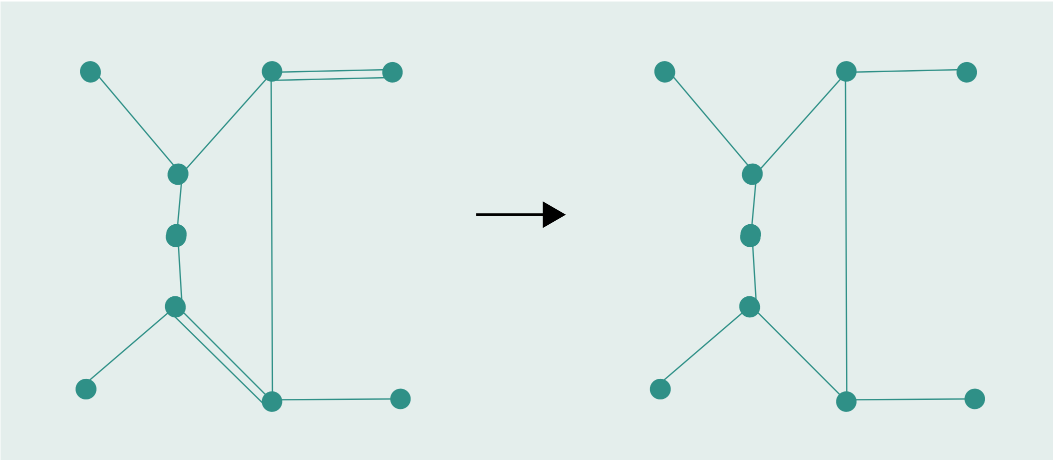
Lösung 115

Lösungshinweis

Machen Sie sich mit den Voraussetzungen für einen Baum vertraut.

Kurze Lösung
Nein.

Ausführliche Lösung
Werden z. B. beim unten aufgeführten Graphen die Mehrfachkanten entfernt, so entsteht folgender Graph:

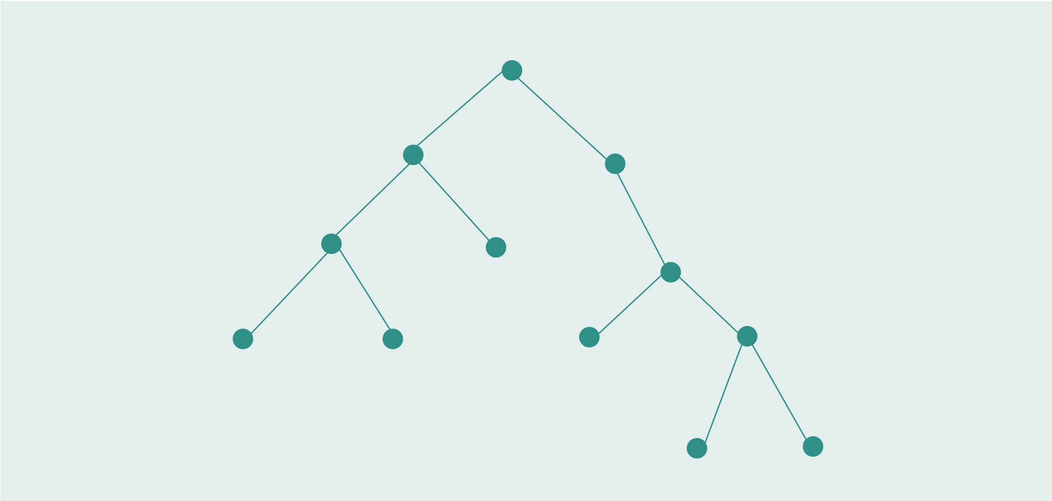


Der so entstandene Graph ist kein Baum.

8.2 Wurzelbaum

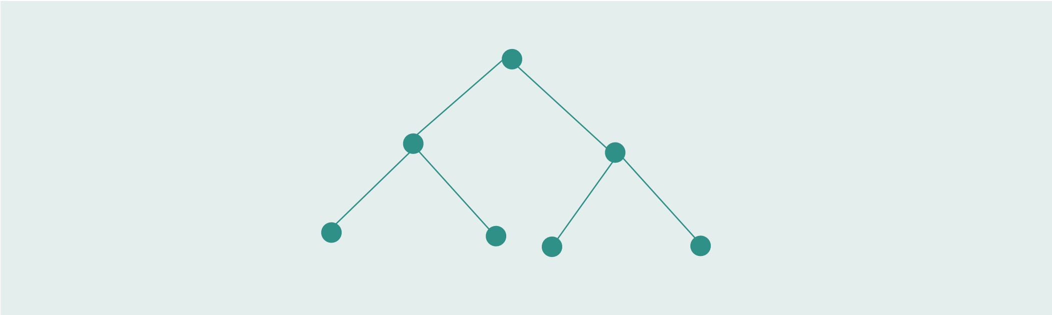
Frage 116

Gegeben ist der Wurzelbaum der Ordnung 2. Entscheiden Sie, ob er vollständig und/oder ausgefüllt ist. Begründen Sie.



Frage 117

Gegeben ist der Wurzelbaum der Ordnung 2. Entscheiden Sie, ob er vollständig und/oder ausgefüllt ist. Begründen Sie.



Lösung 116

Lösungshinweis

Bei einem ausgefüllten Wurzelbaum haben alle inneren Knoten die höchstmögliche Anzahl an Kindern, wodurch der Grad entweder gleich der Ordnung des Baumes (innerer Knoten) oder aber null (Blatt) ist. Ein vollständiger Wurzelbaum hat auf jedem Niveau die höchstmögliche Anzahl an Knoten, wenn alle inneren Knoten zuvor die maximale Anzahl an Kindern hatten. Jeder vollständige Wurzelbaum ist auch ausgefüllt.

Kurze Lösung
Er ist nicht ausgefüllt und damit auch nicht vollständig.

Ausführliche Lösung
Der angegebene Wurzelbaum ist nicht ausgefüllt, da der Knoten auf Tiefe 1 nicht genug Kinder hat. Damit ist der Wurzelbaum auch nicht vollständig.

Lösung 117

Lösungshinweis

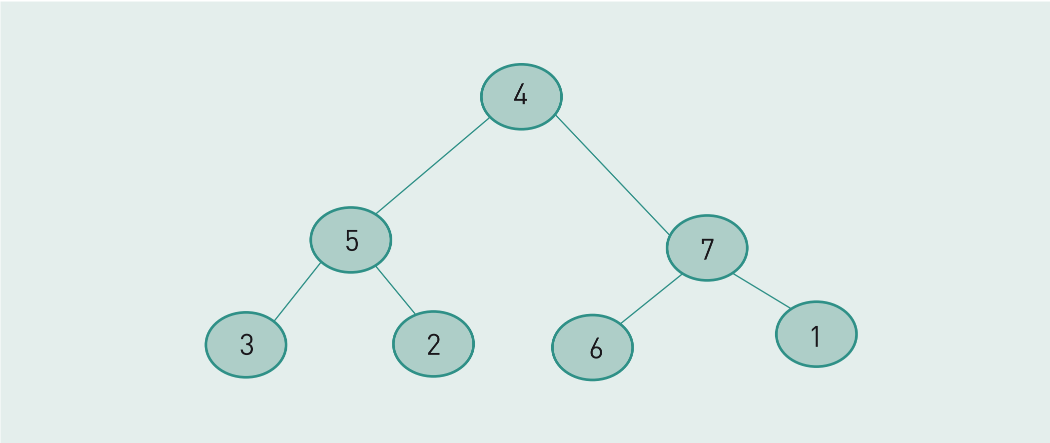
Bei einem ausgefüllten Wurzelbaum haben alle inneren Knoten die höchstmögliche Anzahl an Kindern, wodurch der Grad entweder gleich der Ordnung des Baumes (innerer Knoten) oder aber null (Blatt) ist. Ein vollständiger Wurzelbaum hat auf jedem Niveau die höchstmögliche Anzahl an Knoten, wenn alle inneren Knoten zuvor die maximale Anzahl an Kindern hatten. Jeder vollständige Wurzelbaum ist auch ausgefüllt.

Kurze Lösung
Er ist vollständig und ausgefüllt.

Ausführliche Lösung
Er ist vollständig, da es auf jedem Niveau zwei Kinder gibt und er damit ausgefüllt ist.

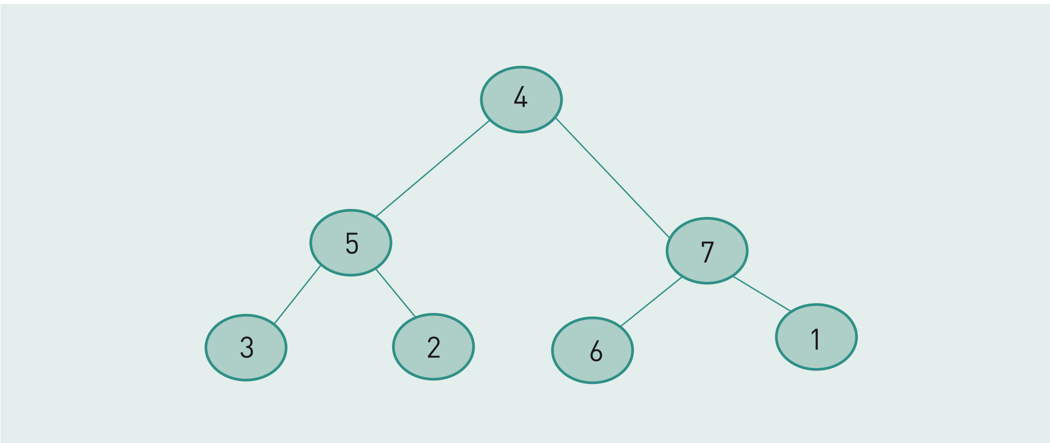
Frage 118

Geben Sie bei folgendem binären Suchbaum die Preorder-Reihenfolge an.



Frage 119

Geben Sie bei folgendem binären Suchbaum die Inorder-Reihenfolge an.



Lösung 118

Lösungshinweis

Machen Sie sich mit den verschiedenen Traversierungsverfahren vertraut.

Kurze Lösung
4 5 3 2 7 6 1

Ausführliche Lösung
Zuerst die Wurzel, dann der linke und dann der rechte Teilbaum: 4 5 3 2 7 6 1.

Lösung 119

Lösungshinweis

Machen Sie sich mit den verschiedenen Traversierungsverfahren vertraut.

Kurze Lösung
3 5 2 4 6 7 1

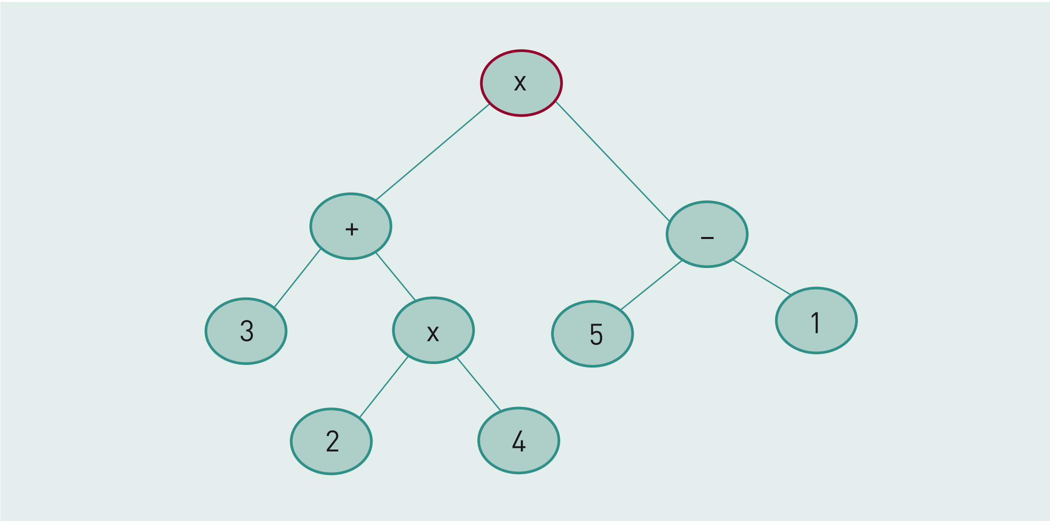
Ausführliche Lösung
Erst der linke Teilbaum, dann die Wurzel und schließlich der rechte Teilbaum: 3 5 2 4 6 7 1.

Frage 120

Gegeben ist der folgende abstrakte Syntaxbaum. Mit einer passenden Traversierung des Syntaxbaumes ist es möglich, auch den mathematischen Ausdruck auszulesen, der im Binärbaum dargestellt ist.

a) Welche Durchlaufordnung wird dabei angewandt?

b) Wie lautet der mathematische Ausdruck, der durch den Syntaxbaum repräsentiert wird?



Lösung 120

Lösungshinweis

Machen Sie sich mit der Traversierung vertraut.

Kurze Lösung

a) Inorder-Reihenfolge

b) 44

Ausführliche Lösung

a) Die Durchlaufordnung nach Inorder-Reihenfolge führt zum mathematischen Ausdruck.

a) $(3 + (2 \cdot 4)) \cdot (5 - 1) = 44.$

8.3 Aufspannender Baum

Frage 121

Was versteht man unter einem Baum? Erläutern Sie, wie man diesen aus einem beliebigen Graphen, der kein Baum ist, erhält.

Frage 122

Wie viele aufspannende Bäume hat der vollständige Graph K_5?

Lösung 121

Lösungshinweis

Machen Sie sich mit der Theorie des aufspannenden Baums vertraut. Ein Baum darf keine geschlossenen Kantenzüge erhalten.

Kurze Lösung
Ein Baum, der alle Knoten eines Graphen enthält. Suchen Sie aus einem Graphen, der kein Baum ist, einen geschlossenen Kantenzug heraus und beseitigen Sie diesen durch Entfernen einer Kante usw.

Ausführliche Lösung
Ein Baum, der alle Knoten eines Graphen enthält, ist ein aufspannender Baum (auch Spannbaum oder Gerüst) des Graphen. Dieser entsteht, wenn aus einem beliebigen Graphen, der kein Baum ist, ein geschlossener Kantenzug herausgesucht wird und aus diesem eine Kante entfernt wird, wodurch der geschlossene Kantenzug beseitigt wird. Wenn im Graphen noch weitere geschlossene Kantenzüge vorhanden sind, wird aus diesen eine weitere Kante herausgenommen und so die Anzahl der geschlossenen Kantenzüge weiter verringert. Auf diese Weise werden so lange Kanten entfernt, bis keine geschlossenen Kantenzüge mehr vorliegen und aus dem Graphen ein „abgemagerter" Baum entstanden ist.

Lösung 122

Lösungshinweis

Formel von Cayley

Kurze Lösung
125

Ausführliche Lösung
Die Formel von Cayley (1889) gibt eine Obergrenze an. Sie besagt: Ein vollständiger Graph K_n hat n^{n-2} aufspannende Bäume. Damit hat K_5 125 aufspannende Bäume.

Frage 123

Erläutern Sie den Algorithmus der Breitensuche zum Auffinden von aufspannenden Bäumen.

Frage 124

Erläutern Sie den Algorithmus der Tiefensuche zum Auffinden von aufspannenden Bäumen.

Lösung 123

Lösungshinweis

Der Algorithmus geht von einem Knoten aus alle möglichen Kantenzüge der Länge 1 ab.

Kurze Lösung

Dabei geht der Algorithmus von einem Knoten aus alle möglichen Kantenzüge mit Länge 1 ab. Von den neu erreichten Knoten folgt er wieder Kantenzügen der Länge 1 zu noch unerreichten Knoten. Das wird fortgesetzt, bis keine unerreichten Knoten mehr vorhanden sind. Da der Graph zusammenhängend ist, findet der Algorithmus nach endlich vielen Schritten einen aufspannenden Baum.

Ausführliche Lösung

- Schritt 1
  Setze E_0 als die leere Menge und definiere zwei Listen L_1 und L_2 ebenfalls als leere Listen. Ein beliebiger Startknoten v_1 ist zu wählen und in die Listen L_1 und L_2 zu schreiben.
- Schritt 2
  Falls L_1 leer ist, dann Stopp und $T = (V, E_0)$ ist ein aufspannender Baum. Sonst nehme den ersten Knoten v aus L_1.
- Schritt 3
  Wenn alle benachbarten Knoten von v in L_2 sind, wird v aus L_1 gelöscht. Sonst wird der „kleinste" benachbarte Knoten w gewählt, der nicht in L_2 ist und dieser an das Ende der Listen L_1 und L_2 geschrieben. Die Kante $\{v, w\}$ wird zu E_0 hinzugefügt.
- Schritt 4
  Gehe zu Schritt 2.

Lösung 124

Lösungshinweis

Vom Startknoten aus wird ein möglichst langer Kantenzug gesucht.

Kurze Lösung
Es wird versucht, vom Startknoten aus einen möglichst langen Kantenzug zu finden, der möglichst weit vom Startknoten, d. h. „tief" in den Baum hineinführt. Wenn der Kantenzug nicht mehr verlängert werden kann, da er sonst geschlossen würde, kehrt der Algorithmus auf dem Kantenzug zurück, bis er auf einen Knoten trifft, von dem aus noch ein weiterer unbesuchter Knoten erreicht werden kann. Mit diesem Knoten startet er wieder in die „Tiefe" des Graphen. Wenn kein unbesuchter Knoten mehr übrig ist, stoppt der Algorithmus und ein aufspannender Baum ist das Resultat.

Ausführliche Lösung

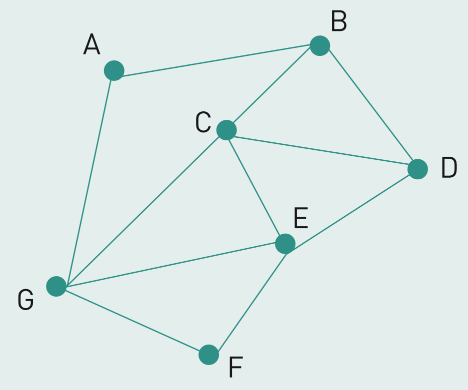
- Schritt 1
  Setze E_0 als die leere Menge und definiere zwei Listen L_1 und L_2 ebenfalls als leere Listen. Ein beliebiger Startknoten v1 ist zu wählen und in die Listen L_1 und L_2 zu schreiben.
- Schritt 2
  Falls L_1 leer ist, dann Stopp und $T = (V, E_0)$ ist ein aufspannender Baum. Sonst nehme den ersten Knoten v aus L_1.
- Schritt 3
  Wenn alle benachbarten Knoten von v in L_2 sind, wird v aus L_1 gelöscht. Sonst wird der „kleinste" benachbarte Knoten w gewählt, der nicht in L_2 ist und dieser an den Anfang der Listen L_1 und L_2 geschrieben. Die Kante $\{v, w\}$ wird zu E_0 hinzugefügt.
- Schritt 4
  Gehe zu Schritt 2.

Frage 125

Geben Sie für den Graphen jeweils einen aufspannenden Baum an. Starten Sie mit dem Knoten A.

a) Mithilfe der Breitensuche

b) Mithilfe der Tiefensuche



Lösung 125

Lösungshinweis

a) Von einem Knoten aus werden alle möglichen Kantenzüge der Länge 1 abgegangen.
b) Vom Startknoten aus wird ein möglichst langer Kantenzug gesucht.

Lösung

a) $\{\{A, B\}, \{A, G\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{G, E\}, \{G, F\}$
b) $\{A, B\}, \{B, D\}, \{D, C\}, \{C, E\}, \{E, F\}, \{F, G\}\}$

Mehrere Lösungen sind möglich.

8.4 Minimal aufspannender Baum

Frage 126

Erläutern Sie den Algorithmus von Kruskal.

Frage 127

Erläutern Sie das Problem der günstigsten Verbindung. Wie wird dieses Problem noch genannt? Was versteht man unter einem minimal aufspannenden Baum? Geben Sie ein Beispiel dafür an.

Lösung 126

Lösungshinweis

Greife „gierig“ nach einer der billigsten Varianten.

Kurze Lösung
Der Algorithmus von Kruskal (1956) gehört zu den Greedy-Algorithmen, benannt nach dem englischen Wort greedy, das übersetzt gierig heißt. Hier wird stets gierig nach einer der billigsten Kanten gegriffen.

Ausführliche Lösung
Für einen zusammenhängenden gewichteten Graphen mit n Knoten bestimmt der Algorithmus von Kruskal einen minimal aufspannenden Baum T:.

- Schritt 1
  Setze $T := \emptyset$, $i := 0$.
- Schritt 2
  Besuche unter den noch nicht besuchten Kanten diejenige mit dem kleinsten Gewicht. Falls diese einen Kantenzug in T schließt, verwerfe sie, ansonsten füge sie zu T hinzu und setze $i := i + 1$.
- Schritt 3
  Falls $i = n - 1$, dann Stopp, sonst weiter mit Schritt 2.

Lösung 127

Lösungshinweis

Minimal aufspannender Baum

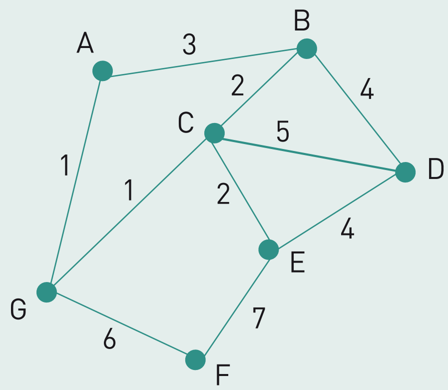
Kurze Lösung
Minimal aufspannender Baum; Connector Problem; Eisenbahnnetz mit minimalem Gesamtgewicht

Ausführliche Lösung
Das Problem der günstigsten Verbindung (Connector Problem) soll graphentheoretisch durch einen minimal aufspannenden Baum dargestellt werden. Ein aufspannender Baum für einen gewichteten Graphen, dessen Gesamtgewicht minimal ist, wird minimal aufspannender Baum T (auch Minimum Spanning Tree oder MST) genannt.

Beispiel: Eisenbahnnetz; alle Städte sollen mit minimalem Gesamtgewicht erreicht werden.

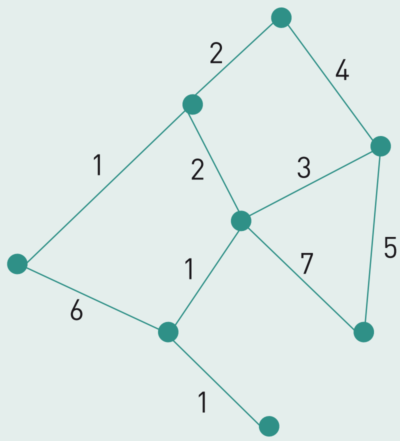
Frage 128

Zwischen folgenden Ortschaften sollen neue Straßen gebaut werden. Die Baukosten sind in Millionen Euro angegeben. Da diese Summe zurzeit nicht zur Verfügung steht, ist geplant, dass zwar jeder Ort von jedem anderen auf einer der neuen Straßen erreicht werden soll, aber jeweils nur durch eine einzige Straße. Die Baukosten sollen außerdem so gering wie möglich gehalten werden. Daher wird ein minimal aufspannender Baum des Graphen gesucht.



Frage 129

In diesem Graphen soll ein minimal aufspannender Baum gefunden werden. Geben Sie das Gesamtgewicht an.



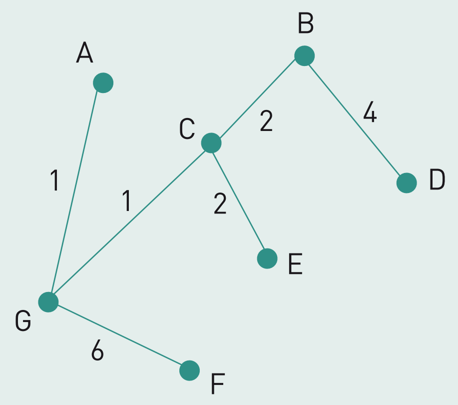
Lösung 128

Lösungshinweis

Algorithmus von Kruskal

Kurze Lösung
Das Gesamtgewicht ist 16.

Ausführliche Lösung
Um diesen zu finden, wird der Algorithmus von Kruskal verwendet und dazu alle Gewichte in aufsteigender Reihenfolge als Liste notiert: 1 1 2 2 3 4 4 5 6 7. Dann wird zuerst die günstigste Straße gebaut, danach die nächst günstigste und so weiter. Bei gleichen Gewichten spielt es keine Rolle, welche gewählt wird. Es muss nur darauf geachtet werden, dass keine geschlossenen Kantenzüge entstehen. Wenn alle Orte eine Straßenverbindung haben, ist die Aufgabe gelöst. Gesamtgewicht: 16.



Lösung 129

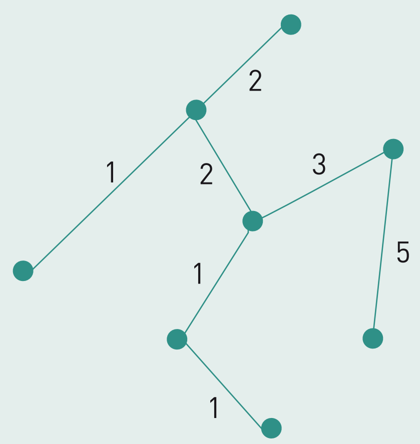
Lösungshinweis

Ein Baum, der alle Knoten enthält und bei dem das Gesamtgewicht minimal ist.

Kurze Lösung
Das Gesamtgewicht ist 15.

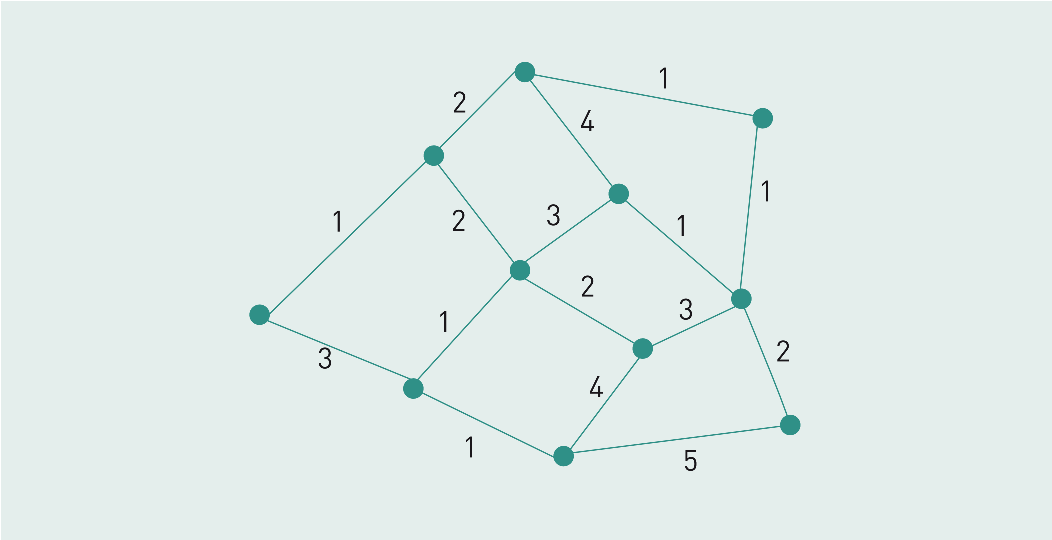
Ausführliche Lösung

1 1 1 2 2 3 4 5 6 7 Gesamtgewicht: 15.



Frage 130

In diesem Graphen soll ein minimal aufspannender Baum gefunden werden. Geben Sie das Gesamtgewicht an.



Lösung 130

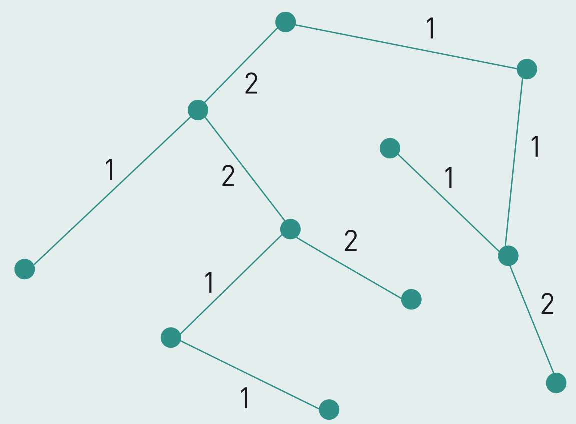
Lösungshinweis

Ein Baum, der alle Knoten enthält und bei dem das Gesamtgewicht minimal ist.

Kurze Lösung
Das Gesamtgewicht ist 14.

Ausführliche Lösung

1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 3 4 4 5 Gesamtgewicht: 14.



www.iubh-fernstudium.de

IUBH
Internationale Hochschule GmbH
Fernstudium

Postanschrift:
Albert-Proeller-Straße 15-19
D-86675 Buchdorf

Telefon: +49 30 311 988 55
media@iubh-fernstudium.de

IUBH
International University
of Applied Sciences
Internationale Hochschule
Fernstudium
Fern, aber nah!