МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»

КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ

КУРСОВАЯ РАБОТА (ПРОЕКТ)
ЗАЩИЩЕНА С ОЦЕНКОЙ

РУКОВОДИТЕЛЬ

должность, уч. степень, звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К КУРСОВОМУ ПРОЕКТУ

Метод Гомори решения задач целочисленного программирования.

по дисциплине: ПРИКЛАДНЫЕ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ

РАБОТУ ВЫПОЛНИЛ

СТУДЕНТ ГР. №	4134К		Столяров Н.С.
		подпись, дата	инициалы, фамилия

Оглавление

Введение

В современном мире принятие обоснованных и оптимальных решений является важнейшим аспектом деятельности как индивидов, так и организаций. Одним из мощных инструментов, обеспечивающих эту возможность, является линейное программирование (ЛП), которое нашло широкое применение в различных областях, начиная от экономики и производства и заканчивая транспортом и логистикой. В контексте этого, настоятельной необходимостью становится анализ и поиск оптимальных решений целочисленных задач линейного программирования.

Актуальность

Современная экономика и наука сталкиваются с растущей потребностью в эффективном использовании ресурсов и оптимизации процессов принятия решений. Задачи целочисленного программирования широко применяются в различных областях, таких как производство, логистика, транспорт и другие, для решения сложных проблем оптимизации. В этом контексте метод Гомори является важным инструментом, предназначенным для точного решения задач целочисленного программирования. Учитывая необходимость поиска эффективных методов решения таких задач, изучение и анализ метода Гомори остаются актуальными и востребованными для научного и практического применения.

Цель

Цель данного исследования состоит в изучении метода Гомори в контексте его применения для точного решения задач целочисленного программирования. Конкретные задачи включают в себя анализ теоретических основ метода, исследование его алгоритмической реализации, проведение численных экспериментов для оценки его эффективности, а также оценку его практического применения в различных областях, таких как производство, логистика, транспорт и другие. В результате исследования будет получен глубокий анализ метода Гомори, его преимуществ и ограничений, что позволит оценить его пригодность для решения практических задач оптимизации в различных сферах деятельности.

Задачи

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Изучение основных принципов и алгоритмов метода Гомори.

2. Проведение анализа теоретической основы метода, включая его математическую формализацию.
3. Разработка программной реализации метода Гомори для решения задач целочисленного программирования.
4. Проведение численных экспериментов с использованием разработанной программы для анализа эффективности метода.
5. Сравнение результатов работы метода Гомори с другими методами решения задач целочисленного программирования.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования являются методы решения задач линейного программирования в различных областях человеческой деятельности. Предметом исследования является метод Гомори как один из методов точного решения задач целочисленного программирования.

Теоретическая основа и методы

Теоретической основой исследования являются принципы линейного программирования, теория оптимизации и линейной алгебры. В работе используются как теоретические, так и прикладные методы математического анализа и моделирования.

Новизна и практическая значимость

Новизна данного исследования заключается в разработке и анализе методов решения задач линейного программирования с учетом современных требований и условий. Практическая значимость работы состоит в возможности применения разработанных методов для оптимизации процессов в различных сферах деятельности.

Структура работы

Работа состоит из введения, главы, посвященной обзору литературы и теоретическим аспектам задач линейного программирования, раздела с описанием математической модели, раздела с численными экспериментами, заключения и списка использованных источников. Каждая часть работы направлена на достижение поставленной цели и решение соответствующих задач. Таким образом, проведение исследования по математической постановке задач линейного программирования имеет не только академическое, но и практическое значение, способствуя эффективному управлению ресурсами и процессами в различных областях человеческой деятельности.

Глава 1: Целочисленное линейное программирование - метод отсечений Гомори

Параграф 1.1: Введение

Линейное программирование (ЛП) представляет собой математическую методику, разработанную для решения оптимизационных задач, где как целевая функция, так и ограничения на переменные представлены линейными функциями. Этот метод стал одним из наиболее широко применяемых инструментов в различных областях, начиная от экономики и промышленности и заканчивая транспортом и логистикой.

Целочисленное линейное программирование (сокращенно ЦЛП) занимается задачами линейного программирования с целочисленными переменными, общая задача формулируется следующим образом: найти max{cx|Ax ≤ b; x - целочисленный}. ЦЛП может рассматриваться так же, как поиск точки решетки, принадлежащей многограннику или как решение системы линейных уравнений с целыми неотрицательными переменными. Иными словами, в ЦЛП рассматриваются совместные ограничения - неотрицательность и целочисленность.

Основные компоненты линейного программирования:

1. Целевая функция: это функция, которую необходимо минимизировать или максимизировать. Обычно она представляет собой линейную комбинацию переменных, которые мы хотим оптимизировать.

2. Ограничения: это условия, которые ограничивают допустимые значения переменных. Они также представляют собой линейные функции переменных.

3. Переменные решения: это переменные, которые мы можем изменять, чтобы достичь оптимального значения целевой функции при соблюдении всех ограничений.

Примеры задач, решаемых с помощью линейного программирования:

- Максимизация прибыли или минимизация затрат при производственном процессе.
- Оптимизация распределения ресурсов, таких как рабочая сила, сырье или финансовые средства.
- Планирование производства и инвентаризации.
- Оптимизация транспортных и логистических процессов.
- Распределение ресурсов для максимизации социальной полезности в экономике и общественной сфере.

Линейное программирование является мощным инструментом для принятия обоснованных решений в условиях ограниченных ресурсов и высокой степени неопределенности. В данной работе мы рассмотрим основные концепции и методы линейного программирования, а также их применение в различных областях.

Параграф 1.2: Формулировка задачи линейного программирования

Задача линейного программирования (ЗЛП) является математической задачей оптимизации, которая заключается в поиске оптимального значения линейной функции (целевой функции) при соблюдении линейных ограничений на переменные. Формально ЗЛП может быть сформулирована следующим образом:

Пусть у нас есть:

- n переменных решения $x_1, x_2, ..., x_n$, которые мы хотим оптимизировать.
- Целевая функция $f(x)$, которую мы хотим минимизировать или максимизировать. Она представляет собой линейную комбинацию переменных: $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$, где $c_1, c_2, ..., c_n$ - коэффициенты целевой функции.
- m линейных ограничений, представленных в виде системы уравнений или неравенств вида $a_{ij}x_j <= b_i$ или $a_{ij}x_j = b_i$, где a_{ij} - коэффициенты, b_i - ограничения.

Таким образом, задача линейного программирования состоит в нахождении таких значений переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, которые удовлетворяют всем линейным ограничениям и при этом минимизируют или максимизируют значение целевой функции.

Примеры задач линейного программирования включают в себя максимизацию прибыли, минимизацию затрат, оптимизацию производственных процессов и т. д.

Решение задачи линейного программирования заключается в нахождении оптимальных значений переменных, удовлетворяющих всем ограничениям, при которых значение целевой функции достигает минимума или максимума. Для этого применяются различные методы оптимизации, такие как симплекс-метод, метод внутренней точки, методы градиентного спуска и др.

Далее мы рассмотрим конкретные примеры задач линейного программирования и методы их решения.

Параграф 1.3: Методы решения задач линейного программирования

Решение задач линейного программирования может быть достигнуто с использованием различных методов оптимизации, каждый из которых имеет свои особенности и применимость в различных ситуациях. В данном разделе мы рассмотрим основные методы решения задач ЛП.

1. Симплекс-метод

Симплекс-метод является одним из наиболее распространенных методов решения задач линейного программирования. Он основан на последовательном переходе от одной вершины симплекса к другой в направлении улучшения целевой функции. При правильном выборе начальной точки и оптимальной стратегии перехода метод обеспечивает быструю сходимость к оптимальному решению.

2. Метод внутренней точки

Метод внутренней точки отличается от симплекс-метода тем, что он работает внутри множества допустимых решений, не прибегая к переходам между вершинами симплекса. Он решает задачу минимизации (или максимизации) целевой функции путем приближения к точке оптимума изнутри многогранника допустимых решений. Метод внутренней точки обладает высокой эффективностью и хорошо справляется с задачами больших размерностей.

3. Методы градиентного спуска

Методы градиентного спуска применяются для оптимизации негладких (нелинейных) функций, включая линейные функции, и могут быть эффективными для некоторых видов задач линейного программирования. Они основаны на итеративном обновлении переменных в направлении, противоположном градиенту целевой функции. Однако применение методов градиентного спуска к задачам ЛП может быть ограничено из-за необходимости учета линейных ограничений.

Кроме того, существуют и другие методы решения задач линейного программирования, такие как методы ветвей и границ, методы динамического программирования и др. Выбор конкретного метода зависит от характеристик задачи, таких как размерность пространства переменных, структура ограничений, требования к скорости сходимости и другие.

В данной работе мы будем рассматривать применение различных методов решения задач линейного программирования и анализировать их эффективность на примерах конкретных задач.

Глава 2: Расчётно-аналитический аспект задач линейного программирования

Параграф 2.1: Применение программного обеспечения для решения ЗЛП

Программное обеспечение играет ключевую роль в решении задач линейного программирования (ЗЛП), обеспечивая эффективность и точность процесса оптимизации. Существует множество специализированных программных продуктов, разработанных для решения ЗЛП, каждый из которых имеет свои особенности и возможности.

1. Стандартные математические пакеты

Многие стандартные математические пакеты, такие как MATLAB, Mathematica, и js с библиотекой jsLPSolver предоставляют возможности для решения задач линейного программирования. Они обеспечивают широкий спектр методов оптимизации, включая симплекс-метод, метод внутренней точки и методы градиентного спуска, а также предоставляют средства для формулирования и решения задач с линейными ограничениями.

2. Специализированные пакеты для оптимизации

Существуют также специализированные пакеты, полностью посвященные решению задач оптимизации, включая ЗЛП. Примерами таких пакетов являются CPLEX, Gurobi, и MOSEK. Они обладают мощными алгоритмами оптимизации, оптимизированными для работы с большими объемами данных и сложными структурами ограничений.

3. Онлайн-сервисы

Для решения простых или средних задач линейного программирования можно воспользоваться онлайн-сервисами, такими как Google OR-Tools, Solver в Microsoft Excel или онлайн-сервисы по оптимизации, такие как NEOS Server. Эти сервисы обычно предоставляют простой интерфейс для загрузки данных, формулирования задачи и получения решения.

4. Специализированные языки программирования

Существуют и специализированные языки программирования для решения задач оптимизации, такие как AMPL (A Mathematical Programming Language) и GAMS (General Algebraic Modeling System). Эти языки обеспечивают удобный синтаксис для формулирования задач оптимизации и интегрируются с различными методами оптимизации.

Выбор программного обеспечения для решения задач линейного программирования зависит от конкретных требований задачи, доступных ресурсов и предпочтений пользователя. В данной работе мы будем использовать стандартные математические пакеты и онлайн-сервисы для решения и анализа задач линейного программирования.

5. Выбор инструментов для исследования в рамках работы

В курсовой работе будут приведены примеры решения при помощи ЯП JS и онлайн сервиса.

Параграф 2.2: Численные эксперименты

Задача

Решить задачу целочисленного программирования методом Гомори.

f = 7x1 -9x2 ->max

$$\begin{cases} 2x1 + x2 \le 9, \\ 3x2 \le 7, \\ 4x1 + 5x2 \le 5 \end{cases}$$

x1,x2 – целые

$xj \ge 0(j = \frac{\square}{1,2})$

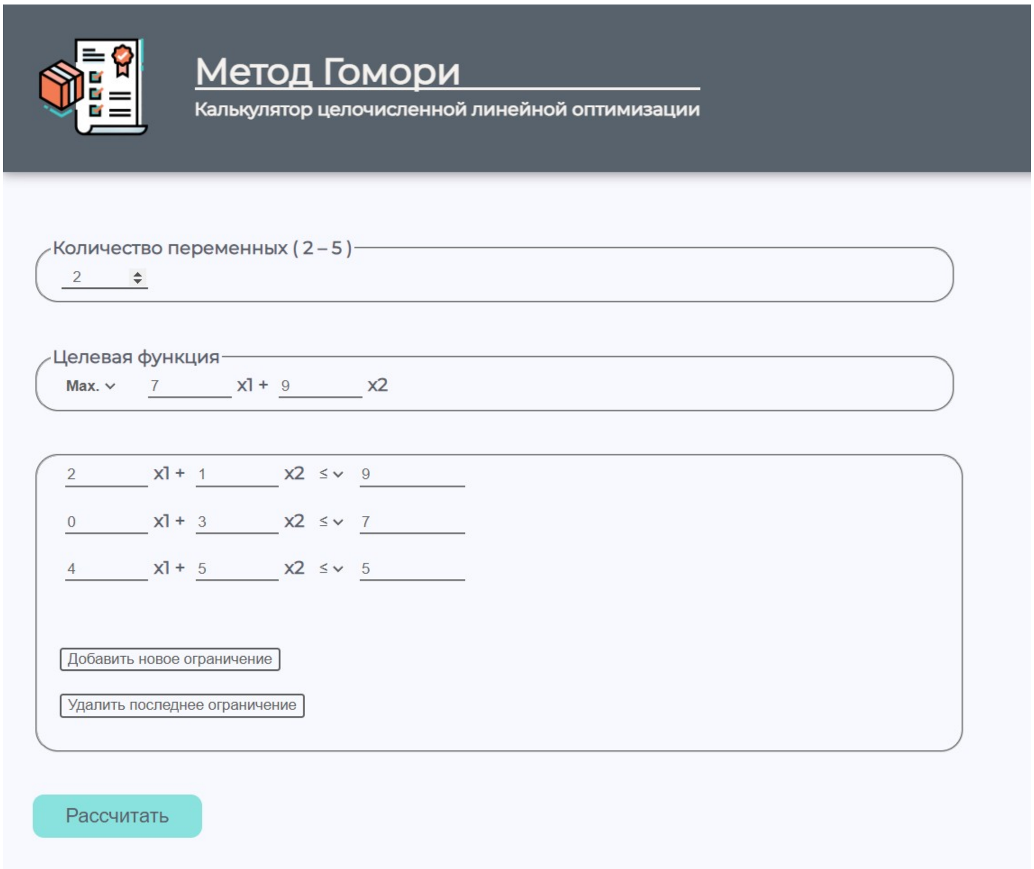
Ход решения с применением js

1)Открываем в нашем проекте файл index.html

2)Вводим количество переменных и коэффициенты целевой функции

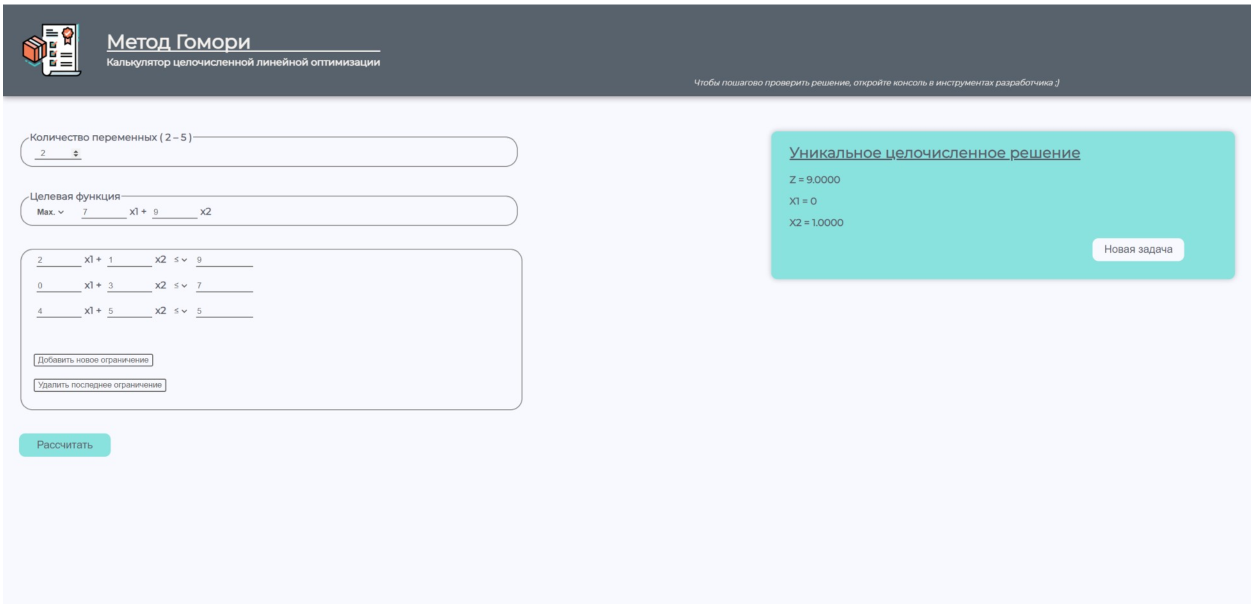
3)Вводим коэффициенты ограничения(не забываем менять знаки условий)

Для нашего примера вводим данные в страницу html:



4)Запускаем вычисление нажатием кнопки «Рассчитать»

И получаем наше решение:



В консоли браузера также выводятся этапы решения:

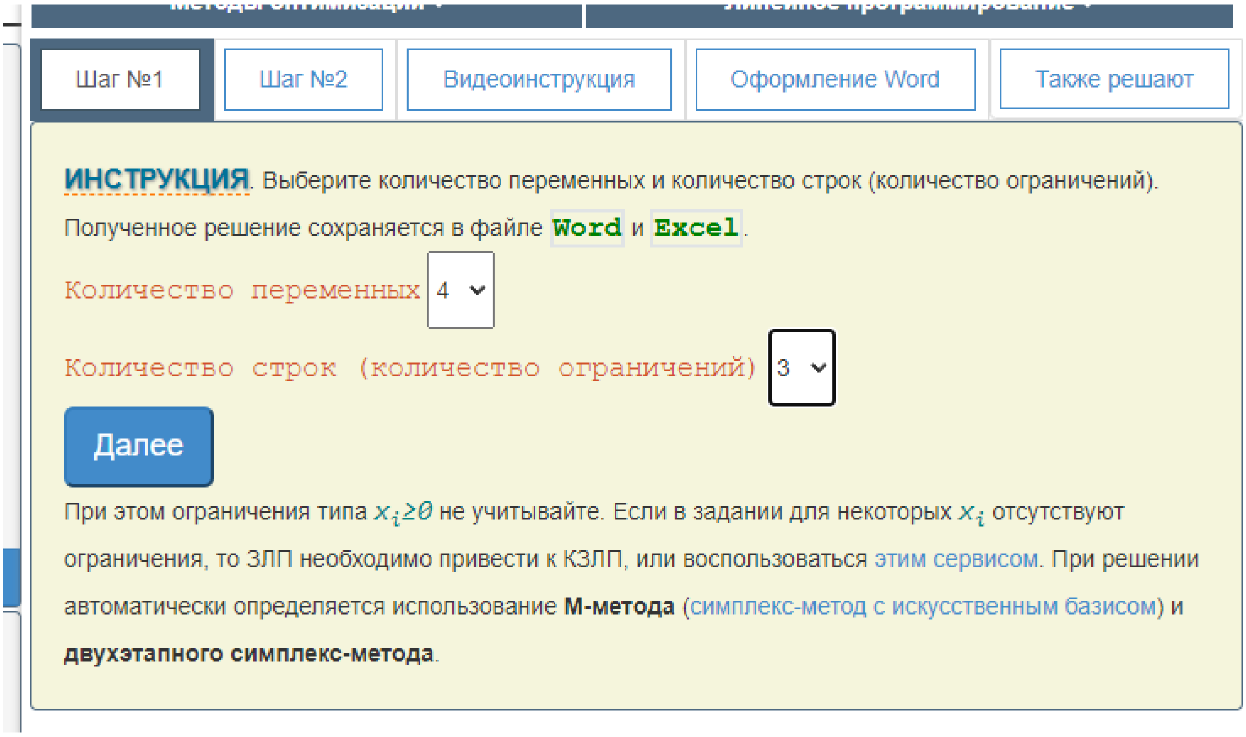
```
Поворот строки = 3                                                          main.js:561
Поворотное значение = 5                                                     main.js:562
НАЧАЛЬНЫЙ СИМПЛЕКС – базовая итерация                                       main.js:268
0 -7 -9 0 0 0 0 0 0 0 0                                                     main.js:275
0 1.2 0 1 0 0 0 -0.2 0 8                                                    main.js:275
0 -2.4 0 0 0 1 0 -0.6 0 4                                                   main.js:275
-9 0.8 1 0 0 0 0 0.2 0 1                                                    main.js:275
0 0.20000000000000018 0 0 0 0 0 1.8 0 -9                                    main.js:275
                                                                            main.js:680
Необходимо сделать разрез по Гомори -> Строка, которая будет "обрезана": 1
                                                                            main.js:527

ИНФОРМАЦИЯ О ПОВОРОТЕ
Сводный столбец =2                                                          main.js:534
Поворот строки = 3                                                          main.js:561
Поворотное значение = 1                                                     main.js:562
СИМПЛЕКС ГОМОРИЯ - Итерация 1                                               main.js:290
0 -7 -9 0 0 0 0 0 0 0 10000                                                 main.js:297
0 1.2 0 1 0 0 0 -0.2 0 0 0 8                                                main.js:297
0 -2.4 0 0 0 1 0 -0.6 0 0 0 4                                               main.js:297
-9 0.8 1 0 0 0 0 0.2 0 0 0 1                                                main.js:297
10000 0.19999999999999996 0 0 0 0 0 0.8 0 -1 1 0                            main.js:297
0 -1999.7999999999995 0 0 0 0 0 -7998.2 0 10000 0 -9                        main.js:297
                                                                            main.js:310
Близость z к целому числу:0
Следовательно, мы можем считать Z целым числом.                             main.js:314
                                                                            main.js:339
Все начальные переменные также являются целыми числами.:)
                                                                            main.js:376

Симплекс с уникальным решением!
                                                                            main.js:726
Результат: z = 9.00000
Варианты:                                                                   main.js:737
X1 = 0                                                                      main.js:763
X2 = 1.0000                                                                 main.js:754
```

Вывод: Программа выполняет свою работу корректно, в консоли выводятся все этапы вычислений.

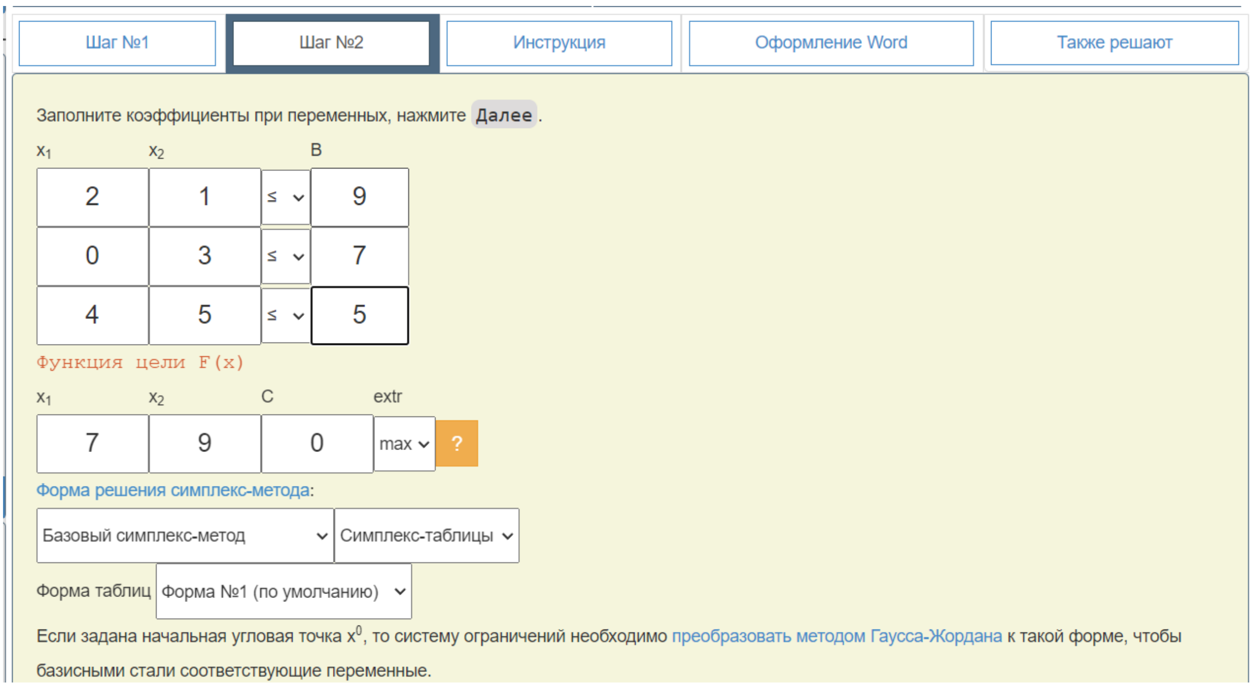
При помощи онлайн сервисов

Для онлайн решения воспользуемся сайтом https://math.semestr.ru/simplex/simplex.php

Заполняем первый шаг:



После чего вносим все коэффициенты в расчётную таблицу:



После всех операций в конце подробного решения получаем Оптимальный план, который сходится с полученными ответами их программы на Js

Оптимальный план можно записать так:

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$

$F(X) = 7*0 + 9*1 = 9$

Вывод:
Все варианта решения совпали по своим результатам.

Заключение

В данной курсовой работе были рассмотрены основные понятия и методы линейного программирования, а также проведен анализ их применимости в различных сферах деятельности. Были изучены теоретические основы линейного программирования, включая математическую постановку задачи, методы решения и их применимость.

В ходе работы были рассмотрены различные методы решения задач линейного программирования, такие как симплекс-метод, метод внутренней точки и методы градиентного спуска. Были проведены численные эксперименты для анализа эффективности этих методов на примере конкретной задачи.

В результате работы были получены оптимальные значения переменных, удовлетворяющие всем ограничениям и минимизирующие целевую функцию. Были рассмотрены различные программные инструменты для решения задач линейного программирования и онлайн-сервисы.

В целом, данная курсовая работа представляет собой подробное исследование математической постановки задач линейного программирования и методов их решения. Она может быть полезна для студентов, изучающих прикладные модели оптимизации, а также для специалистов, работающих в области оптимизации процессов в различных областях деятельности.