Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский университет аэрокосмического приборостроения

КАФЕДРА № 2

Зачтено

ОТЧЕТ
ЗАЩИЩЕН С ОЦЕНКОЙ
ПРЕПОДАВАТЕЛЬ

доц., канд. техн. наук	14.05.2023	С.Л. Козенко
должность, уч. степень, звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

ОТЧЕТ О ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЕ

Решение СЛАУ

по дисциплине: ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

РАБОТУ ВЫПОЛНИЛ

СТУДЕНТ ГР. № 4134к	14.03.23	Столяров Н.С.
	подпись, дата	инициалы, фамилия

Санкт – Петербург, 2023

Цель работы:

а) освоение основных методов решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ);
б) совершенствование навыков по алгоритмизации и программированию вычислительных задач.

Постановка задачи:

19. Решить систему линейных уравнений $AX = B$ методом Гаусса, где

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 2 & 7 \\ 4 & 9 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & 5 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Математическая часть:

Одним из наиболее широко используемых прямых методов является метод *последовательного исключения неизвестных*, или метод Гаусса. Согласно этому методу, исходная система линейных уравнений (1.7) преобразуется путем последовательного исключения неизвестных в эквивалентную систему уравнений, имеющую так называемый «треугольный» вид.

Последнее уравнение «треугольной» системы должно содержать лишь одно неизвестное (C_m), предпоследнее – два (C_m, $C_{m\text{-}1}$) и т.д. Решение полученной системы уравнений осуществляется последовательным («снизу вверх») определением C_m из последнего уравнения «треугольной» системы, $C_{m\text{-}1}$ из предпоследнего и т.д. Применительно к системе уравнений (1.7) преобразование к «треугольному» виду осуществляется за $(m-1)$ шагов.

Процедура описанного выше преобразования будет следующая.

- *На первом шаге* выделяется первое уравнение системы (1.7). Это уравнение не преобразуется, и оно объявляется *ведущим* уравнением.

Затем исключается неизвестное C_1 из второго уравнения. Для этого ведущее уравнение умножается на коэффициент $q_{21} = \dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ и вычитается из второго уравнения.

В результате получим следующее уравнение:

$$(a_{21} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{11}) C_1 + (a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}) C_2 +$$
$$+ \ldots + (a_{2m} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1m}) C_m = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1 .$$

Очевидно, что коэффициент $(a_{21} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}} a_{11})$ при C_1 равен нулю.

Аналогичную процедру можно проделать с третьим уравнением системы (1.7).

Умножая ведущее уравнение на $q_{31} = \dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ и вычитая результат умножения из третьего уравнения, получим эквивалентное уравнение

$$(a_{31}-\frac{a_{31}}{a_{11}}a_{11})C_1+(a_{32}-\frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12})C_2+$$

$$+\ldots+(a_{3m}-\frac{a_{31}}{a_{11}}a_{1m})C_m=b_3-\frac{a_{31}}{a_{11}}b_1 \ .$$

Очевидно, что коэффициент при C_1 также равен нулю.

Для исключения C_1 из m-го уравнения необходимо умножить ведущее уравнение на $q_{m1}=\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ и вычесть результат из m-го уравнения.

В результате получим

$$(a_{m1}-\frac{a_{m1}}{a_{11}}a_{11})C_1+(a_{m2}-\frac{a_{m1}}{a_{11}}a_{12})C_2+$$

$$+\ldots+(a_{mm}-\frac{a_{m1}}{a_{11}}a_{1m})C_m=b_3-\frac{a_{m1}}{a_{11}}b_1 \ .$$

Вводя новые обозначения для коэффициентов

$$a_{lk}^{(1)}=a_{lk}-q_{l1}\,a_{1k},\ k=(2,\ \ldots,\ m),\ l=(2,\ldots,\ m)$$

и свободного члена

$$b_l^{(1)}=b_l-q_{l1}\,b_1,$$

можно представить систему уравнений (1.7) в виде

$$\begin{aligned}
&a_{11}C_1+a_{12}C_2+\ldots+a_{1m}C_m=b_1\\
&0C_1+a_{22}^{(1)}C_2+\ldots+a_{2m}^{(1)}C_m=b_2^{(1)}\\
&0C_1+a_{32}^{(1)}C_2+\ldots+a_{33}^{(1)}C_m=b_3^{(1)}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&0C_1+a_{m2}^{(1)}C_2+\ldots+a_{mm}^{(1)}C_m=b_m^{(1)}.
\end{aligned}\tag{2.1}$$

- *На втором шаге* ведущим объявляется второе уравнение системы (2.1) и исключается неизвестное C_2 из уравнений с номерами от третьего до последнего. Исключение неизвестного проводится по схеме, описанной на первом шаге. Для исключения C_2 из третьего уравнения системы (2.1) ведущее уравнение умножается на $q_{32} = \dfrac{a_{32}}{a_{22}}$, и результат умножения вычитается из третьего уравнения. Результирующий коэффициент при C_2 будет равен нулю.

Аналогично первому шагу введем новые обозначения для коэффициентов

$$a_{lk}^{(2)} = a_{lk} - q_{l2}\, a_{2k},\; k = (2,\, ...,\, m),\, l = (2,...,\, m)$$

и свободного члена

$$b_l^{(2)} = b_l - q_{l2}\, b_2\;.$$

В результате второго шага (исключения неизвестного C_2) будет получена система уравнений, также эквивалентная исходной системе (1.7):

$$\begin{array}{l}
a_{11} C_1 + a_{12} C_2 + a_{13} C_3 + \ldots + \; a_{1m} C_m = b_1 \\
0C_1 + a_{22}^{(1)} C_2 + a_{23}^{(1)} C_3 + \ldots + a_{2m}^{(1)} C_m = b_2^{(1)} \\
0C_1 + \; 0C_2 \; + a_{33}^{(2)} C_3 + \ldots + a_{3m}^{(2)} C_m = b_3^{(2)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0C_1 + \; 0C_2 \; + a_{m3}^{(2)} C_3 + \ldots + a_{mm}^{(2)} C_m \; = b_m^{(2)}.
\end{array} \qquad (2.2)$$

Отметим, что неизвестное C_1 входит только в первое уравнение, а неизвестное C_2 — в первое и второе уравнения.

- На $(m–1)$ шаге исключается неизвестное $C_{m\text{-}1}$ из последнего m-го уравнения, и в результате система уравнений принимает окончательный «треугольный» вид.

Определим обобщенные формулы для расчета коэффициентов системы в процессе прямого хода метода Гаусса. На i–м шаге неизвестное C_i исключается из всех уравнений с номерами l, где $i + 1 \le l \le m$, при этом ведущее уравнение (с номером i) умножается на

$q_{li} = a_{li}^{(i-1)} \,/\, a_{ii}^{(i-1)}$, и результат умножения вычитается из l-го уравнения. Новые значения коэффициентов (в уравнении с номером l) при неизвестных C_k, $(i + 1 \le k \le m)$ равны

$$a_{lk}^{(i)} = a_{lk}^{(i-1)} - q_{li}\, a_{ik}^{(i-1)}, \qquad (2.3)$$

новое значение свободного члена

$$b_l^{(i)} = b_l^{(i-1)} - q_{li}\, b_l^{(i-1)}. \tag{2.4}$$

Система уравнений (2.5) эквивалентна исходной системе уравнений (1.7).

$$\begin{aligned}
&a_{11} C_1 + a_{12} C_2 \ + a_{13} C_3 \ + \ldots + a_{1m} C_m = b_1 \\
&0C_1 \ + a_{22}^{(1)} C_2 + a_{23}^{(1)} C_3 + \ldots + a_{2m}^{(1)} C_m = b_2^{(1)} \\
&0C_1 \ + \ 0C_2 \ + a_{33}^{(2)} C_3 + \ldots + a_{3m}^{(2)} C_m = b_3^{(2)} \\
&0C_1 \ + 0C_2 \ \ + 0C_3 + \ldots \ + a_{mm}^{(m-1)} C_m = b_m^{(m-1)}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Приведенный процесс последовательного исключения неизвестных носит название *прямого хода* метода Гаусса.

Решение треугольной системы уравнений (2.5) носит название *обратного хода* метода Гаусса и заключается в последовательном определении всех неизвестных, начиная с последнего C_m. Действительно, из последнего уравнения системы (2.5) следует, что

$$C_m = b_m^{(m-1)} / a_{mm}^{(m-1)}.$$

Значение $C_{m\text{-}1}$ находится при решении предпоследнего уравнения

$$a_{m-1,\,m-1}^{(m-2)}\, C_{m-1} + a_{m-1,m}^{(m-2)}\, C_m = b_{m-1}^{(m-2)}.$$

Так как C_m уже определено, то

$$C_{m-1} = \frac{\left(b_{m-1}^{(m-2)} - a_{m-1,m}^{(m-2)}\, C_m\right)}{a_{m-1,m-1}^{(m-2)}}.$$

Приведенная процедура применяется последовательно ко всем уравнениям, включая и первое, из которого определяется

$$C_1 = \frac{\left(b_1 - a_{12} C_2 - \ldots - a_{1m} C_m\right)}{a_{11}}.$$

Обобщенная формула вычисления C_i имеет вид

$$C_i = \frac{\left(b^{i-1} - a_{i,i+1}^{(i-1)} C_{i+1} - \ldots - a_{i,m}^{i-1} C_m\right)}{a_{i,i}^{(i-1)}}. \tag{2.6}$$

В процессе прямого хода метода Гаусса может оказаться, что коэффициент $a_{ii}^{(i-1)}$ ведущего уравнения равен нулю. Тогда исключить C_i из остальных уравнений рассмотренным методом нельзя. Однако уравнения системы можно поменять местами и объявить ведущим то уравнение, у которого коэффициент при неизвестном C_i отличен от нуля. Отметим, что системы, отличающиеся лишь взаимным расположением образующих их уравнений, являются эквивалентными. Перестановка уравнений не только допустима, но часто и полезна для уменьшения погрешности арифметических вычислений. Для уменьшения погрешности вычислений в качестве ведущего обычно выбирается уравнение с максимальным по модулю коэффициентом при C_i. Это уравнение и уравнение с номером i меняют местами, и процесс исключения продолжается обычным образом. Поиск максимального по модулю коэффициента при C_i носит название *определение ведущего элемента*.

Аналитические расчёты:

Решение СЛАУ методом Гаусса.
Запишем систему в виде расширенной матрицы:

7	6	2	7	3
4	9	5	5	2
2	3	4	9	0
1	5	6	9	2

Работаем со столбцом №1.
Умножим 1-ю строку на (4). Умножим 2-ю строку на (-7). Добавим 2-ю строку к 1-й:

0	-39	-27	-7	-2
4	9	5	5	2
2	3	4	9	0
1	5	6	9	2

Умножим 3-ю строку на (-2). Добавим 3-ю строку к 2-й:

0	-39	-27	-7	-2
0	3	-3	-13	2
2	3	4	9	0
1	5	6	9	2

Умножим 4-ю строку на (-2). Добавим 4-ю строку к 3-й:

0	-39	-27	-7	-2
0	3	-3	-13	2
0	-7	-8	-9	-4
1	5	6	9	2

Работаем со столбцом №2.
Умножим 2-ю строку на (13). Добавим 2-ю строку к 1-й:

0	0	-66	-176	24
0	3	-3	-13	2
0	-7	-8	-9	-4
1	5	6	9	2

Умножим 2-ю строку на (7). Умножим 3-ю строку на (3). Добавим 3-ю строку к 2-й:

0	0	-66	-176	24
0	0	-45	-118	2
0	-7	-8	-9	-4
1	5	6	9	2

Работаем со столбцом №3.
Умножим 1-ю строку на (45). Умножим 2-ю строку на (-66). Добавим 2-ю строку к 1-й:

0	0	0	-132	948
0	0	-45	-118	2
0	-7	-8	-9	-4
1	5	6	9	2

Теперь исходную систему можно записать так:
$x_4 = 948/(-132)$
$x_3 = [2-(- 118x_4)]/(-45)$
$x_2 = [-4-(- 8x_3 - 9x_4)]/(-7)$
$x_1 = 2-(5x_2 + 6x_3 + 9x_4)$
Из 1-й строки выражаем x_4

$$x_4 = \frac{948}{-132} = -7.182$$

Из 2-й строки выражаем x_3

$$x_3 = \frac{2-(-118)\cdot(-7.182)}{-45} = \frac{-845.455}{-45} = 18.788$$

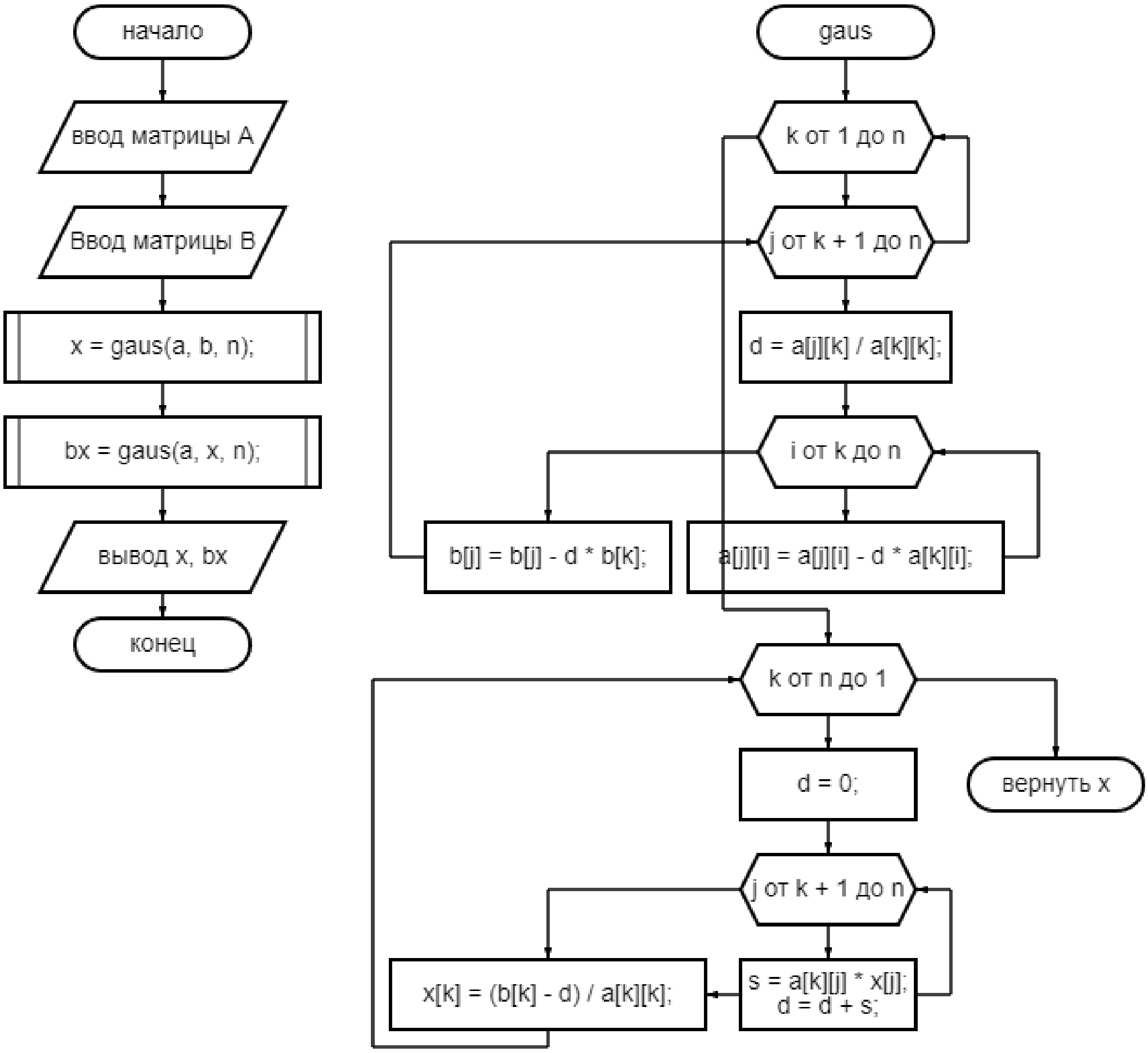
Из 3-й строки выражаем x_2

$$x_2 = \frac{-4-(-8)\cdot 18.788-(-9)\cdot(-7.182)}{-7} = \frac{81.667}{-7} = -11.667$$

Из 4-й строки выражаем x_1

x_1 = 2 - 5*(-11.667) - 6*18.788 - 9*(-7.182) = 12.242

Схема алгоритма:



Текст программы:

```
#include <iostream>
using namespace std;

#include <iomanip>

#define AUTO false

int n, i, j, k;
double d, s;

double* gaus(double** a, double* b, int n) {
  double * x = new double[n];
  for (k = 1; k <= n; k++) {
    for (j = k + 1; j <= n; j++) {
```

```
      d = a[j][k] / a[k][k]; // формула (1)
      for (i = k; i <= n; i++) {
        a[j][i] = a[j][i] - d * a[k][i]; // формула (2)
      }
      b[j] = b[j] - d * b[k]; // формула (3)
    }
  }
  for (k = n; k >= 1; k--) {
    d = 0;
    for (j = k + 1; j <= n; j++) {
      s = a[k][j] * x[j]; // формула (4)
      d = d + s; // формула (4)
    }
    x[k] = (b[k] - d) / a[k][k]; // формула (4)
  }
  return x;
}

int main() {
  // смена кодировки
  system("chcp 65001");

  if (AUTO) {
    n = 4;
  } else {
    cout << "Размер матрицы A: ";
    cin >> n;
  }

  double ** a = new double * [n];
  for (i = 0; i <= n; i++)
    a[i] = new double[n];
  double ** a1 = new double * [n];
  for (i = 0; i <= n; i++)
    a1[i] = new double[n];
  double * b = new double[n];
  double * x = new double[n];
  double * bx = new double[n];

  if (AUTO) {
    // a = {{7, 2, 6, 7}, {4, 9, 5, 5}, {2, 3, 4, 9}, {1, 5, 6, 9}};
    // a1 = a;
    // b = {3, 2, 0, 2};
  } else {
    cout << "Ввод матрицы A" << endl;
    for (i = 1; i <= n; i++) {
      for (j = 1; j <= n; j++) {
        cout << "a[" << i << "][" << j << "]= ";
        cin >> a[i][j];
        a1[i][j] = a[i][j];
      }
    }
    cout << "Ввод матрицы B" << endl;
    for (i = 1; i <= n; i++) {
      cout << "b[ " << i << "]= ";
      cin >> b[i];
    }
  }

  x = gaus(a, b, n);
  bx = gaus(a, x, n);

  cout << "Корни системы: " << endl;
  cout << std::setw(8 * n) << "A";
```

```cpp
  cout << std::setw(12) << "B";
  cout << std::setw(12) << "X";
  // cout << std::setw(12) << "X=>B";
  cout << endl;
  for (i = 1; i <= n; i++) {
    for (j = 1; j <= n; j++) {
      cout << std::setw(8) << a[i][j] << " ";
    }
    cout << std::setw(12) << b[i] << " ";
    cout << std::setw(12) << x[i] << " ";
    // cout << std::setw(12) << bx[i] << " ";
    cout << endl;
  }
  return 0;
}
```

Скриншоты программы:

```
C:\Windows\system32\cmd.exe

C:\Users\nikit\Desktop\[ ПРОЕКТЫ ]\Programming-GUAP\computational_mathematics\2>g++ main.cpp -o main.exe

C:\Users\nikit\Desktop\[ ПРОЕКТЫ ]\Programming-GUAP\computational_mathematics\2>main.exe
Active code page: 65001
Размер матрицы A: 4
Ввод матрицы A
a[1][1]= 7
a[1][2]= 6
a[1][3]= 2
a[1][4]= 7
a[2][1]= 4
a[2][2]= 9
a[2][3]= 5
a[2][4]= 5
a[3][1]= 2
a[3][2]= 3
a[3][3]= 4
a[3][4]= 9
a[4][1]= 1
a[4][2]= 5
a[4][3]= 6
a[4][4]= 9
Ввод матрицы B
b[ 1]= 3
b[ 2]= 2
b[ 3]= 0
b[ 4]= 2
Корни системы:
                                       A           B           X
       7       6       2       7           3     12.2424
       0 5.57143 3.85714       1    0.285714    -11.6667
       0       0 2.53846 6.76923   -0.923077     18.7879
       0       0       0 -0.333333     2.39394    -7.18182

C:\Users\nikit\Desktop\[ ПРОЕКТЫ ]\Programming-GUAP\computational_mathematics\2>pause
Press any key to continue . . .
```

Сравнение результатов: Разницы между аналитическим и программным расчетом нет, значит программа работает исправно.

	Аналитический	Программный
X1	12.242	12.2424
X2	-11.667	-11.6667
X3	18.788	18.7879
X4	-7.182	-7.18182

Вывод: Я освоил основные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и усовершенствовал навыки по алгоритмизации и программированию вычислительных задач.