

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»

КАФЕДРА № 2

ОТЧЕТ
ЗАЩИЩЕН С ОЦЕНКОЙ
ПРЕПОДАВАТЕЛЬ

Должность, уч. Степень, звание

подпись, дата

С.Л. Козенко
инициалы, фамилия

ОТЧЕТ О ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЕ №3

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

по курсу: ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

РАБОТУ ВЫПОЛНИЛ
СТУДЕНТ ГР. 4134К

подпись, дата

Столяров Н.С.
инициалы, фамилия

Санкт-Петербург 2023

Цель работы

- а) освоение методов интерполяции функций;
- б) совершенствование навыков по алгоритмизации и программированию вычислительных задач.

Задание

Составить схему алгоритма и программу на языке C/C++ решения задачи по теме «Интерполяция» в соответствии с индивидуальным заданием.

Вариант 5

Значения x : 1.0 0.7 0.4 0.1 -0.2

Значения y : 2.5 3.7 4.2 2.0 0.0

Метод интерполяции: метод Ньютона

Описание метода решения

Для интерполяции функций, заданных таблицами с равноотстоящими значениями аргумента

$$X_{i+1} - X_i = h, \text{ где } i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

построение интерполяционных формул и вычисление по формулам заметно упрощается. В записях этих интерполяционных алгоритмов используются разности между значениями функции в соседних узлах интерполяции.

Конечной разностью первого порядка называется

$$\Delta y_i = (Y_{i+1} - Y_i), \text{ где } i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Из конечных разностей первого порядка образуются конечные разности второго порядка:

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i, \text{ где } i=0, 1, 2, \dots, n-1$$

Аналогично определяются конечные разности третьего, четвёртого и более высоких порядков.

Для функций, заданных таблицами с постоянным шагом изменения аргумента, наиболее часто используются первая или вторая формулы Ньютона, в которых интерполяционная функция определяется как многочлен вида:

$$P_n(I)(x) = a_0 + a_1(x-X_0) + a_2(x-X_0)(x-X_1) + \dots + a_n(x-X_0)\dots(x-X_{n-1}) \quad (1)$$

при интерполяции от нулевого узла X_0 или

$$P_n(II)(x) = b_0 + b_1(x-X_n) + b_2(x-X_n)(x-X_{n-1}) + \dots + b_n(x-X_n)\dots(x-X_0) \quad (2)$$

при интерполяции от узла X_n .

Значения коэффициентов a_i и b_i в формулах (1) или (2) находятся из условий Лагранжа, определяющих в узлах интерполяции совпадение значений интерполирующей функции со значением табличнозаданной функции

$$P_n(x_i) = Y_i$$

Полагая $X=X_0$, в формуле (1) получим

$$P_n(X_0) = a_0 = Y_0$$

Аналогично для

$$X=X_1 \quad P_n(X_1) = a_0 + a_1(X_1 - X_0) = Y_1$$

и далее a

$$1 = Y_1 - Y_0 \quad X_1 - X_0$$

или, используя введённые обозначения,

$$a_1 = \Delta y_0!h$$

Продолжая подстановки значений X_i , получим

$$P_n(X_2) = a_0 + a_1(X_2 - X_0) + a_2(X_2 - X_0)(X_2 - X_1) = Y_2$$

$$\text{и далее } a_2 * 2h^2 = Y_2 - a_0 - a_1 * 2h = Y_2 - Y_0 - \Delta y_0 h * 2h = Y_2 - 2Y_1 + Y_0 = \Delta^2 y_0$$

$$\text{откуда } a_2 = \Delta^2 y_0!h^2$$

Проведя аналогичные преобразования для $X = X_3$ и $X = X_4$, получим

$$a_3 = \Delta^3 y_0!h^3, a_4 = \Delta^4 y_0!h^4, \dots, a_k = \Delta^k y_0!h^k$$

Найденные коэффициенты подставляются в формулы (1) или (2) для вычисления значений интерполируемой функции.

Аналитические расчеты

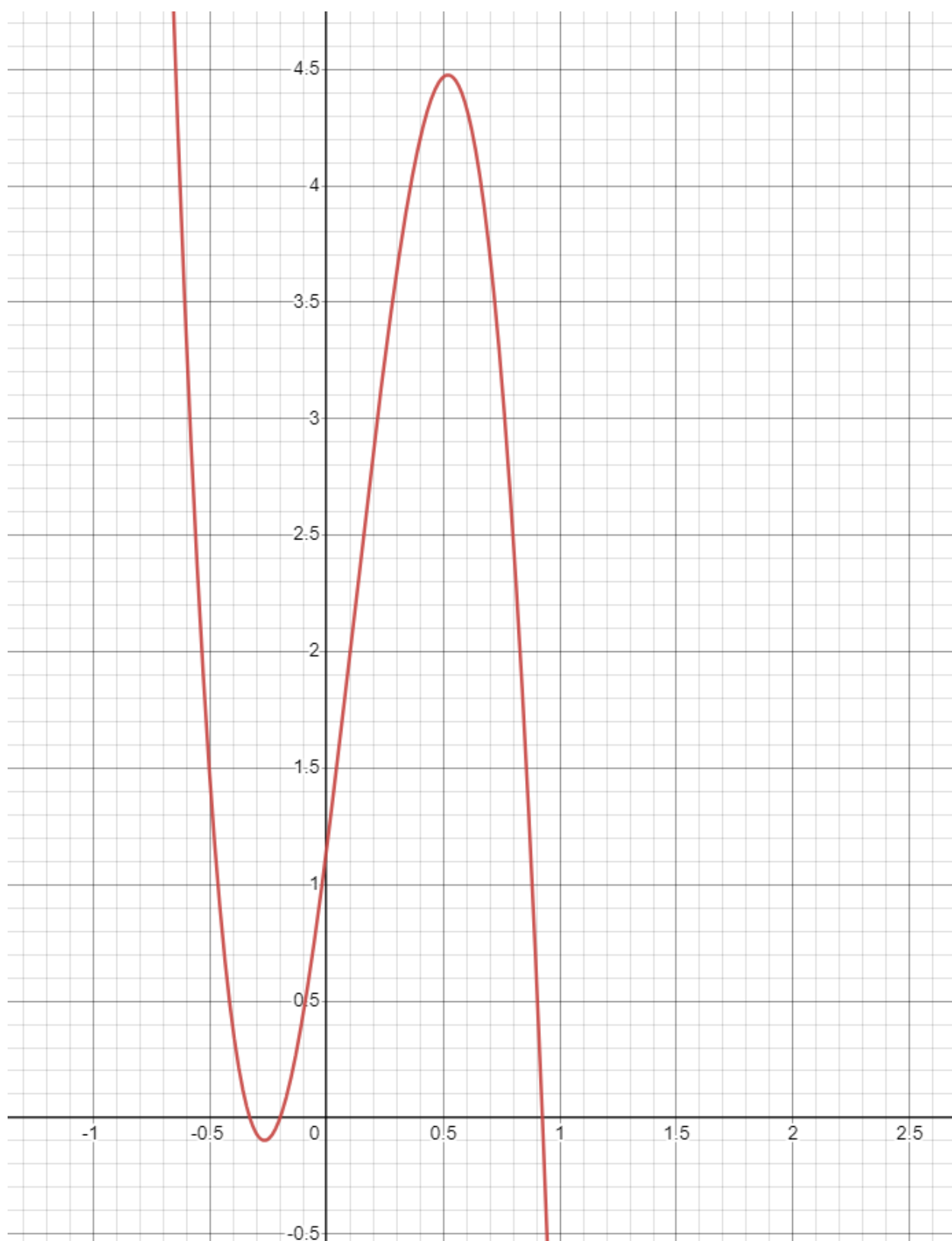
$$\begin{aligned}
 P_n(x) = & \frac{5}{2} + \left(\frac{\frac{5}{2}}{11 - \frac{7}{10}} + \frac{\frac{37}{10}}{\frac{7}{10} - 11} \right) (x - 11) + \left(\frac{\frac{5}{2}}{(11 - \frac{7}{10})(11 - \frac{2}{5})} + \frac{\frac{37}{10}}{(\frac{7}{10} - 11)(\frac{7}{10} - \frac{2}{5})} + \frac{\frac{21}{5}}{(\frac{2}{5} - 11)(\frac{2}{5} - \frac{7}{10})} \right) \left((x - 11) \left(x - \frac{7}{10} \right) \right) \\
 & + \left(\frac{\frac{5}{2}}{((11 - \frac{7}{10})(11 - \frac{2}{5}))(11 - \frac{1}{10})} + \frac{\frac{37}{10}}{((\frac{7}{10} - 11)(\frac{7}{10} - \frac{2}{5}))(\frac{7}{10} - \frac{1}{10})} + \frac{\frac{21}{5}}{((\frac{2}{5} - 11)(\frac{2}{5} - \frac{7}{10}))(\frac{2}{5} - \frac{1}{10})} + \frac{2}{((\frac{1}{10} - 11)(\frac{1}{10} - \frac{7}{10}))(\frac{1}{10} - \frac{2}{5})} \right) \left((x - 11) \left(x - \frac{7}{10} \right) \right) \left(x - \frac{2}{5} \right) \\
 & + \left(\frac{\frac{5}{2}}{(((11 - \frac{7}{10})(11 - \frac{2}{5}))(11 - \frac{1}{10}))(11 + \frac{1}{5})} + \frac{\frac{37}{10}}{(((\frac{7}{10} - 11)(\frac{7}{10} - \frac{2}{5}))(\frac{7}{10} - \frac{1}{10}))(\frac{7}{10} + \frac{1}{5})} + \frac{\frac{21}{5}}{(((\frac{2}{5} - 11)(\frac{2}{5} - \frac{7}{10}))(\frac{2}{5} - \frac{1}{10}))(\frac{2}{5} + \frac{1}{5})} \right. \\
 & \left. + \frac{2}{(((\frac{1}{10} - 11)(\frac{1}{10} - \frac{7}{10}))(\frac{1}{10} - \frac{2}{5}))(\frac{1}{10} + \frac{1}{5})} + \frac{0}{(((\frac{1}{5} - 11)(\frac{1}{5} - \frac{7}{10}))(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}))(\frac{1}{5} - \frac{1}{10})} \right) \left((x - 11) \left(x - \frac{7}{10} \right) \right) \left(x - \frac{2}{5} \right) \left(x - \frac{1}{10} \right)
 \end{aligned}$$

После упрощения

$$\begin{aligned}
 & \text{Полином Ньютона после упрощений} \\
 & \frac{2324421125}{1349530308} x^4 - \frac{26482679725}{1349530308} x^3 + \frac{4042497275}{599791248} x^2 + \frac{42850132417}{5398121232} x + \frac{446600387}{385580088}
 \end{aligned}$$

Интерполированные значения

x	0.85	0.55	0.25	-0.05
y	1.6228059359381088	4.46	3.264097651651838	0.7806705805802705



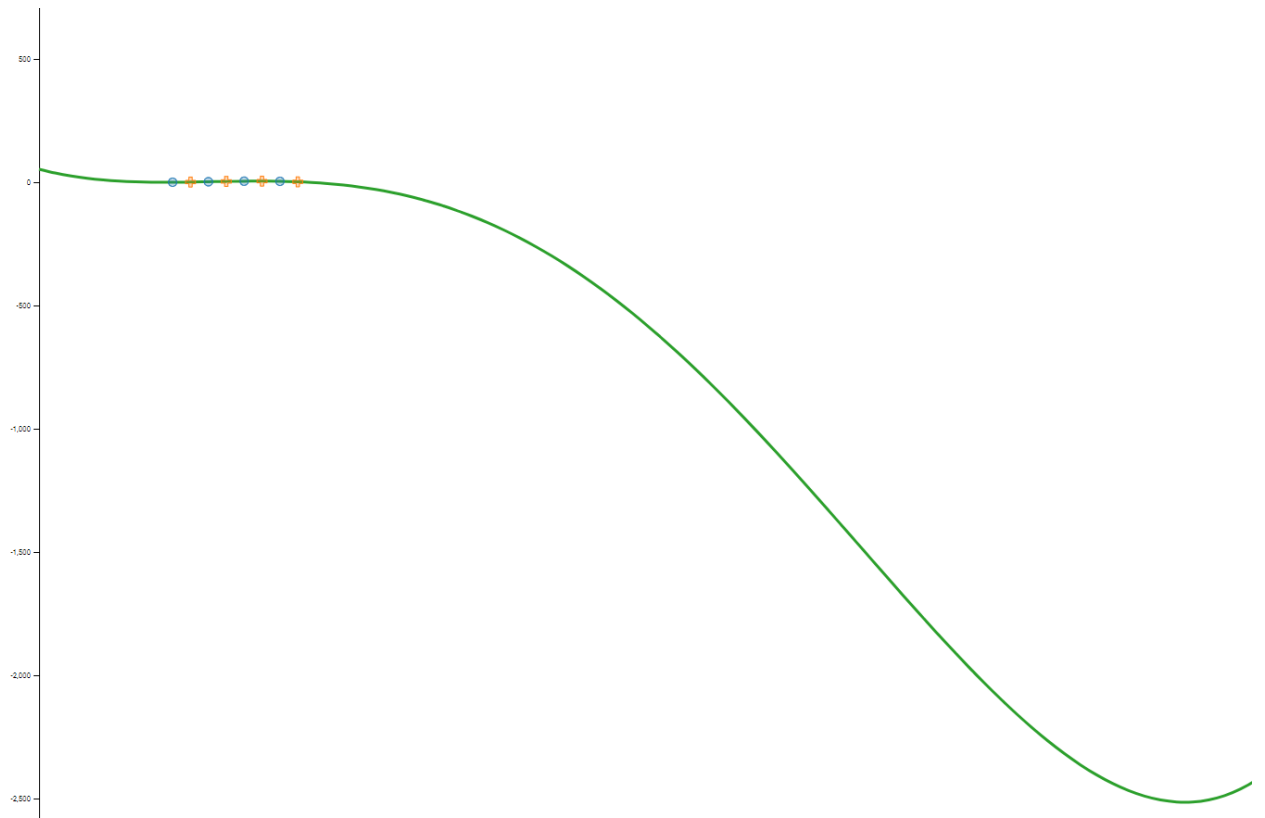
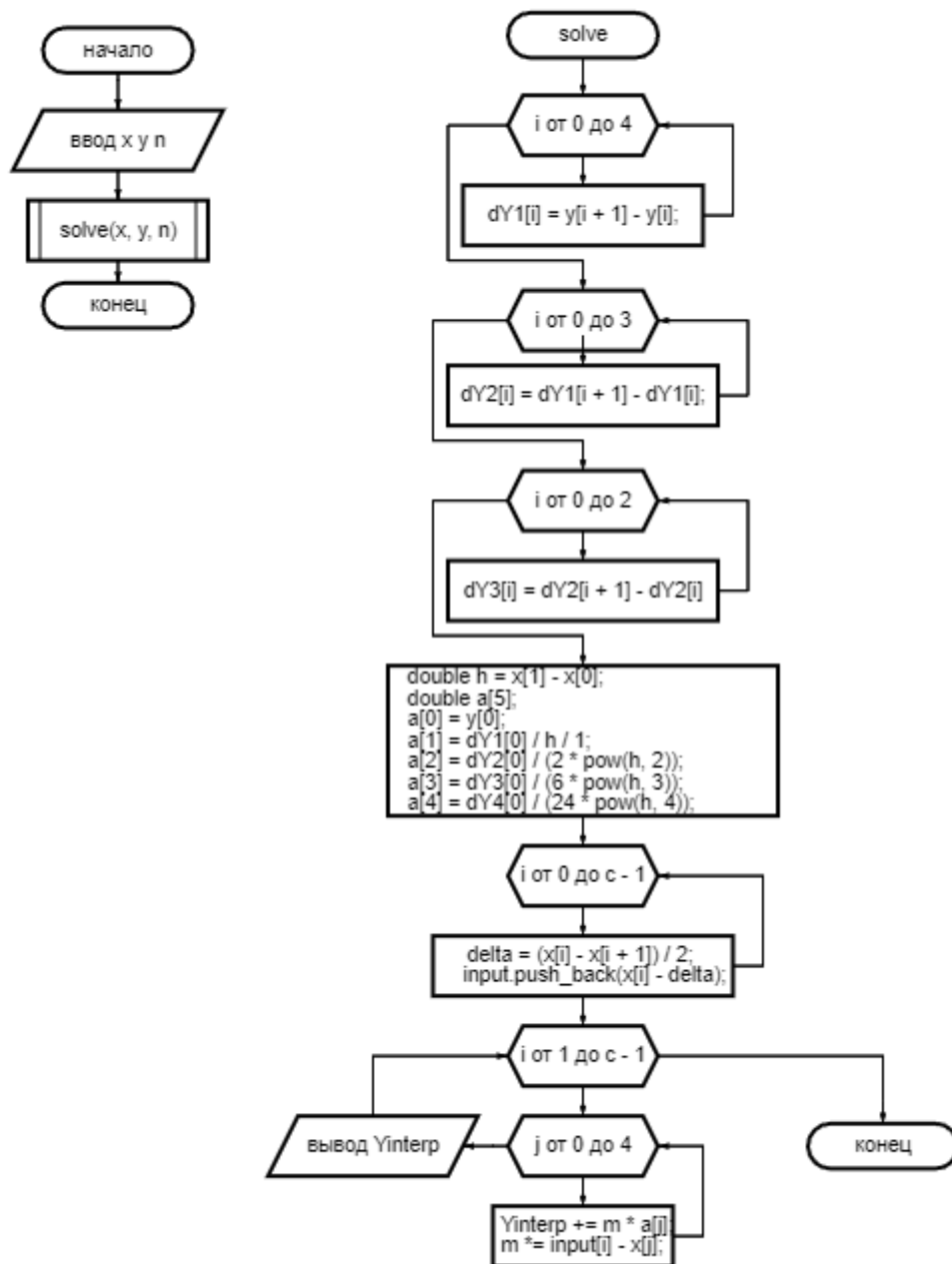


Схема алгоритма решения задачи



Листинг кода программы

```

#include <iostream>
#include <vector>
#include <cmath>
using namespace std;

#define AUTO_INPUT true

void solve(double x[], double y[], int n) {
    //вычисление конечных разностей
    double dY1[4];
    double dY2[3];
    double dY3[2];
    double dY4[1];

    for (int i = 0; i < 4; i++) {

```

```

    dY1[i] = y[i + 1] - y[i];
}

for (int i = 0; i < 3; i++) {
    dY2[i] = dY1[i + 1] - dY1[i];
}

for (int i = 0; i < 2; i++) {
    dY3[i] = dY2[i + 1] - dY2[i];
}
dY4[0] = dY3[1] - dY3[0];

//вычисление значений коэффициента полинома
double h = x[1] - x[0];
double a[5];
a[0] = y[0];
a[1] = dY1[0] / h / 1;
a[2] = dY2[0] / (2 * pow(h, 2));
a[3] = dY3[0] / (6 * pow(h, 3));
a[4] = dY4[0] / (24 * pow(h, 4));

int c;
double iX, Yinterp, m;
vector <double> input;

input.clear();

double delta = 0;
c = n;
for (int i = 0; i < c - 1; i++) {
    delta = (x[i] - x[i + 1]) / 2;
    input.push_back(x[i] - delta);
}

// cout << "Введите количество дополнительных точек: ";
// cin >> c;
// for (int i = 0; i < c; i++) {
//     cout << "x[" << i << "] = ";
//     cin >> iX;
//     input.push_back(iX);
// }

cout << endl;
//вычисления y по первой формуле ньютона

for (int i = 0; i < c - 1; i++) {
    m = 1;
    Yinterp = 0;

    for (int j = 0; j < 5; j++) {
        Yinterp += m * a[j];
        m *= input[i] - x[j];
    }
    cout << "Yinterp[" << input.at(i) << "] = " << Yinterp << endl;
}

}

int main() {
    system("chcp 65001");

    int n;
    double *x;

```



```

double *y;
if (AUTO_INPUT) {
    n = 5;
    x = (double*)malloc(n * sizeof(double));
    y = (double*)malloc(n * sizeof(double));
    x[0] = 1.0;
    x[1] = 0.7;
    x[2] = 0.4;
    x[3] = 0.1;
    x[4] = -0.2;

    y[0] = 2.5;
    y[1] = 3.7;
    y[2] = 4.2;
    y[3] = 2.0;
    y[4] = 0.0;

    cout << "x = { ";
    for (int i = 0; i < n; i++)
        cout << x[i] << " ";
    cout << "}\ny = { ";
    for (int i = 0; i < n; i++)
        cout << y[i] << " ";
    cout << "}";

} else {
    cout << "количество уловых точек: ";
    cin >> n;
    x = (double*)malloc(n * sizeof(double));
    y = (double*)malloc(n * sizeof(double));
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        cout << "x[" << i << "] = ";
        cin >> x[i];
        cout << "y[" << i << "] = ";
        cin >> y[i];
        cout << endl;
    }
}

solve(x, y, n);

return 0;
}

```

Результат работы программы

```
C:\Windows\System32\cmd.exe
Microsoft Windows [Version 10.0.19045.2965]
(c) Корпорация Майкрософт (Microsoft Corporation). Все права защищены.

C:\Users\nikit\Desktop\[ ПРОЕКТЫ ]\Programming-GUAP\computational_mathematics\3>g++ main.cpp -o main.exe && main.exe
Active code page: 65001
x = { 1 0.7 0.4 0.1 -0.2 }
y = { 2.5 3.7 4.2 2 0 }
Yinterp[0.85]= 2.87109
Yinterp[0.55]= 4.27734
Yinterp[0.25]= 3.37109
Yinterp[-0.05]= 0.602344

C:\Users\nikit\Desktop\[ ПРОЕКТЫ ]\Programming-GUAP\computational_mathematics\3>_
```

Рисунок 16 – Результат работы программы

Сравнение результатов аналитического и программного расчета

Таблица 1 – Сравнение результатов аналитического и программного расчета

	аналитический	программный
x=0	2.79375	2.79375
x=0.2	1.58125	1.58125
x=0.4	0.91875	0.91875
x=0.6	0.50625	0.50625
x=0.8	0.04375	0.04375
x=1	-0.76875	-0.76875
x=1.2	-2.23125	-2.23125
x=1.4	-4.64375	-4.64375

Исходя из данных таблицы 1 (все данные совпадают), мы можем сделать вывод, что программа работает верно.

Вывод

В ходе выполнения практической работы №3 была написана программа, которая решает задачу интерполяции функции используя при этом метод Ньютона. Результат программного расчета при одинаковых входных данных полностью совпал с результатом аналитического расчета, что говорит о том, что программа работает корректно и выдает правильные результаты.