Лабораторная работа №6

Оптимизация путей на графах с помощью муравьиных алгоритмов

Общие сведения

Муравьиные алгоритмы (МА) основаны на использовании популяции потенциальных решений и разработаны для решения задач комбинаторной оптимизации, прежде всего, поиска различных путей на графах. Кооперация между особями (искусственными муравьями) здесь реализуется на основе моделирования. При этом каждый агент, называемый искусственным муравьем, ищет решение поставленной задачи. Искусственные муравьи последовательно строят решение задачи, передвигаясь по графу, откладывают феромон и при выборе дальнейшего участка пути учитывают концентрацию этого фермента. Чем больше концентрация феромона в последующем участке, тем больше вероятность его выбора.

Простой муравьиный алгоритм

Рассмотрим простой муравьиный алгоритм (ПМА) (simple ant colony optimization − SACO), в котором фактически формализованы приведенные выше экспериментальные исследования и представлены основные аспекты муравьиных алгоритмов (МА).

В качестве иллюстрации возьмем задачу поиска кратчайшего пути между двумя узлами графа G=(V,E), где V – множество узлов (вершин), а E – матрица, которая представляет связи между узлами. Пусть $n_G = |V|$ – число узлов в графе. Обозначим L^k – длину пути в графе, пройденного k-м муравьем, которая равна числу пройденных дуг (ребер) от первой до последней вершины пути. Пример графа с выделенным путем представлен на рис.6.1. С каждой дугой, соединяющей вершины (i,j) ассоциируем концентрацию феромона τ_{ij}.

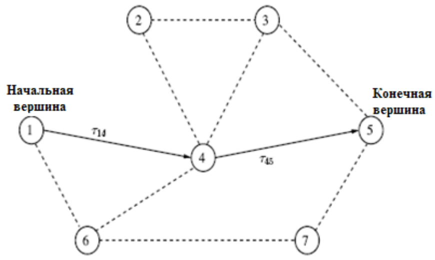

Рис.6.1. Пример графа.

Строго говоря, в начальный момент времени концентрация феромона для каждой дуги графа нулевая, но мы для удобства каждой дуге присвоим небольшое случайное число $\tau_{ij}(0)$.

Муравей выбирает следующую дугу пути следующим образом. Множество муравьев k=1, ..., n_k помещаются в начальную вершину. В кажой итерации ПМА каждый муравей пошагово строит путь до конечной вершины. При этом в каждой вершине каждый муравей должен выбрать следующую дугу пути. Если k-й муравей находится в i-ой вершине, то он выбирает следующую вершину $j \in N_i^k$ на основе вероятностей перехода:

$$p_{ij}^k(t) = \begin{cases} \dfrac{\tau_{ij}^{\alpha}(t)}{\sum_{j \in N_i^k} \tau_{ij}^{\alpha}(t)}, & \text{если } j \in N_i^k \\ 0, & \text{если } j \notin N_i^k \end{cases} \tag{6.1}$$

Здесь N_i^k представляет множество возможных вершин, связанных с i-й вершиной, для k-го муравья. Если для любого i-го узла и k-го муравья $N_i^k \equiv \varnothing$, тогда предшественник узла i включается в N_i^k. В этом случае в пути возможны петли. Эти петли удаляются при достижении конечного города пути. В (6.1) α - положительная константа, которая определяет влияние концентрации феромона. Очевидно большие значения α повышают влияние концентрации феромона. Это особенно существенно в начальной стадии для начальных случайных значений концентрации, что может привести к преждевременной сходимости к субоптимальным решениям. Когда все муравьи построили полный путь от начальной до конечной вершины, удаляются петли в путях, и каждый муравей помечает свой построенный путь, откладывая для каждой дуги феромон в соответствии со следующей формулой:

$$\Delta\tau_{ij}^{k}(t) \propto \frac{1}{L^{k}(t)} \tag{6.2}$$

Здесь $L^k(t)$ – длина пути, построенного k-м муравьем в момент времени t.

Таким образом, для каждой дуги графа концентрация феромона определяется следующим образом:

$$\tau_{ij}(t+1) = \tau_{ij}(t) + \sum_{k=1}^{n_k} \Delta\tau_{ij}^{k}(t) \tag{6.3}$$

где n_k – число муравьев. Из (4.2) следует, что общая концентрация феромона для данной дуги пропорциальна «качеству» путей, в которые входит эта дуга, поскольку откладываемое количество феромона согласно (4.2) отражает «качество» соответствующего пути. В данном случае «качество» обратно пропорционально длине пути (числу дуг, вошедших в путь). Но в общем случае может быть использована и другая мера качества (например, стоимость проезда по данному пути или геометрическое расстояние и т.п.). Пусть $x^k(t)$ обозначает решение в момент t, и некоторая функция $f(x^k(t))$ выражает качество решения. Если $\Delta\tau^k$ не пропорционально качеству решения и все муравьи откладывают одинаковое количество феромона ($\Delta\tau_{ij}^{1} = \Delta\tau_{ij}^{2} = \ldots = \Delta\tau_{ij}^{n_k}$), то существует только один фактор, который зависит от длины пути и способствует выбору коротких путей. Это ведет к двум основным способам оценки качества решений, которые используются в МА:

- неявная оценка, где муравьи используют отличие в длине путей относительно построенных путей другими муравьями;
- явная оценка, количество феромона пропорционально некоторой мере качества построенного решения.

В нашем случае (6.2) мы имеем явную оценку качества решения согласно, которая ведет к тому, что дуги, входящие в длинные пути, становятся менее привлекательными для окончательных решений.

Алгоритм:

```
Инициализация τij(0) малыми случайными значениями;
t=0;
поместить nk муравьев на начальную вершину;
repeat
    for каждого муравья k=1,…,nk do
         // построение пути xk(t)
    xk(t)=0;
        repeat
        выбрать следующую вершину согласно вероятности,
        определяемой (4.1);
        добавить дугу (i,j) в путь xk(t);
        until    конечная вершина не достигнута;
    удалить петли из xk(t);
    вычислить длину пути f(xk(t))
    end
    for каждой дуги графа (i,j) do
    //испарение феромона
    Уменьшить концентрацию феромона согласно (4.3);
    end
    for каждого муравья k=1,…,nk do
        for каждой дуги (i,j) пути xk(t)  do
            Δτk = 1/f(xk(t)) ;
            Коррекция  τij  согласно (4.4);
        End
    end
    t=t+1;
until    не выполнен критерий останова;
Возврат решения – пути с наименьшим значением f(xk(t));
```

В описанном алгоритме могут быть использованы различные критерии окончания, например,

- окончание при превышении заданного числа итераций;
- окончание по найденному приемлемому решению $f(x^k(t)) \le \varepsilon$;
- окончание, когда все муравьи следуют одним и тем же путем.

Для предотвращения преждевременной сходимости и расширения пространства поиска можно ввести искусственное испарение феромона на каждой итерации алгоритма следующим образом:

$$\tau_{ij}(t) \leftarrow (1-\rho)\tau_{ij}(t) \qquad (4.4)$$

где $\rho \in [0,1]$. При этом константа ρ определяет скорость испарения, которое заставляет муравьи «забывать» предыдущие решения. Очевидно, что при больших значениях ρ феромон испаряется быстро, в то время как малые значения ρ способствуют медленному испарению. Отметим, что чем больше испаряется феромон, тем поиск становится более случайным.

Так при $\rho = 1$ мы имеем случайный поиск.

Порядок выполнения лабораторной работы

Часть 1

1. Создать программу, использующую МА для решение задачи поиска гамильтонова пути. Индивидуальное заданию выбирается по таблице В.1 в приложении В согласно номеру варианта.
2. Представить графически найденное решение. Предусмотреть возможность пошагового просмотра процесса поиска решения.
3. Сравнить найденное решение с представленным в условии задачи оптимальным решением.

Часть 2

Реализовать с использованием муравьиных алгоритмов решение задачи коммивояжера по индивидуальному заданию согласно номеру варианта (см. таблицу 3.1. и приложение Б.).

Представить графически найденное решение

Сравнить найденное решение с представленным в условии задачи оптимальным решением и результатами, полученными в лабораторной работе №3..

.

Проанализировать время выполнения и точность нахождения результата в зависимости от вероятности различных видов кроссовера, мутации.

Содержание отчета.

1. Титульный лист.
2. Индивидуальное задание по варианту.
3. Краткие теоретические сведения.
4. Программа и результаты выполнения индивидуального задания с комментариями и выводами.

Контрольные вопросы

1. Как представляется потенциальное решение задачи в МА?
2. Что отражает и как определяется концентрация феромона в простом МА?
3. Зачем нужно и как определяется испарение феромона в простом МА?
4. Опишите простой МА.
5. Объясните влияние параметров α, β в правиле выбора следующей вершины (12.2).
6. Как оценивается качество построенного решения в МА?
7. Какие критерии окончания могут быть использованы в простом МА?
8. Опишите основные параметры МА.
9. Приведите общий алгоритм МА.
10. Что общего между генетическими и муравьиными алгоритмами.
11. Чем отличаются муравьиные и генетические алгоритмы?