Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский университет аэрокосмического приборостроения

КАФЕДРА № 2

ОТЧЕТ
ЗАЩИЩЕН С ОЦЕНКОЙ

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ

доц., канд. тех. наук		С.Л. Козенко
должность, уч. степень, звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

ОТЧЕТ О ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЕ №4

“Численное интегрирование”

по курсу: ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

РАБОТУ ВЫПОЛНИЛ

СТУДЕНТ ГР. №	4134к		Столяров Н.С.
		подпись, дата	инициалы, фамилия

Санкт-Петербург 2023

1 Цель работы

а) Освоение методов численного интегрирования;

б) совершенствование навыков по алгоритмизации и программированию вычислительных задач.

2 Постановка задачи

19	$\int_a^b \frac{\sin(0.7x+0.5)dx}{1.1+\cos(x^3+0.5)}$	Симпсона	$a = 0.3;\ b = 1.0;\ n = 8$

3 Математическая часть

Пусть требуется найти определенный интеграл. Где функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b].

$$\int_a^b f(x)dx$$

При вычислении интеграла следует помнить, каков геометрический смысл определенного интеграла. Если f(x)≥0 на отрезке [a,b], то

$$\int_a^b f(x)dx$$

численно равен площади фигуры, ограниченной графиком функции y=f(x), отрезком оси абсцисс, прямой x=a и прямой x=b (рисунок 1).

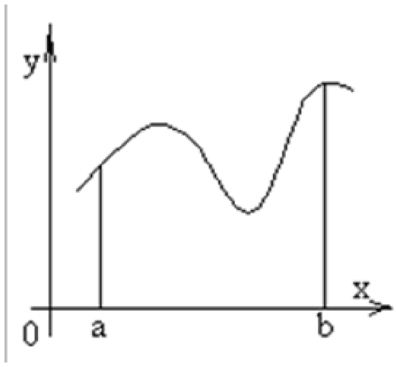


Рисунок 1 – Геометрический смысл численного интеграла

Таким образом, вычисление интеграла равносильно вычислению

Геометрически иллюстрация формулы Симпсона состоит в том, что на каждом из сдвоенных частичных отрезков заменяем дугу данной кривой дугой графика квадратного тричлена.

Разобьем отрезок интегрирования *[a,b]* на *2n* равных частей длины *h=(b-a)/2n*. Обозначим точки разбиения $x_0=a$, $x_1=x_0+h$, … , $x_i=x_0+i*h$, … , $x_{2n}=b$. Значения функции *f* в точках x_i обозначим y_i, *т.е.* $y_i=f(x_i)$. Тогда согласно методу Симпсона:

$$S \approx \int_b^a f(x)dx \approx (b-a)/6n*(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \ldots + 4y_{2n-1} + y_{2n}) =$$

$$= (b - a/6n*(y_0 + y_{2n} + \sum_{i=0}^{2n-1} (3+(-1)^{i-1})*y_i \qquad (2.7)$$

Пусть функция *y* = *f(x)* непрерывна на отрезке *[a,b]* и нам требуется вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Разобьем отрезок *[a,b]* на *n* элементарных отрезков $[x_{2i-2}; x_{2i}]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ длины $2h = \frac{b-a}{n}$

точками $a = x_0 < x_2 < x_4 < \ldots < x_{2n-2} < x_{2n} = b$. Пусть точки x_{2i-1}, $i = 1, 2, \ldots, n$ являются серединами отрезков $[x_{2i-2}; x_{2i}]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ соответственно. В этом случае все "узлы" определяются из равенства $x_i = a + i \cdot h$, $i = 0, 1, \ldots, 2n$.

<u>Суть метода парабол</u>

На каждом интервале $[x_{2i-2}; x_{2i}]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ подынтегральная функция приближается квадратичной параболой $y = a_i x^2 + b_i x + c_i$, проходящей через точки $(x_{2i-2}; f(x_{2i-2}))$, $(x_{2i-1}; f(x_{2i-1}))$, $(x_{2i}; f(x_{2i}))$. Отсюда и название метода - метод парабол.

Это делается для того, чтобы в качестве приближенного значения определенного интеграла $\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx$ взять $\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} (a_i x^2 + b_i x + c_i)dx$, который мы

можем вычислить по формуле Ньютона-Лейбница. В этом и заключается *суть метода парабол*.

Геометрически это выглядит так (рис.2.4):

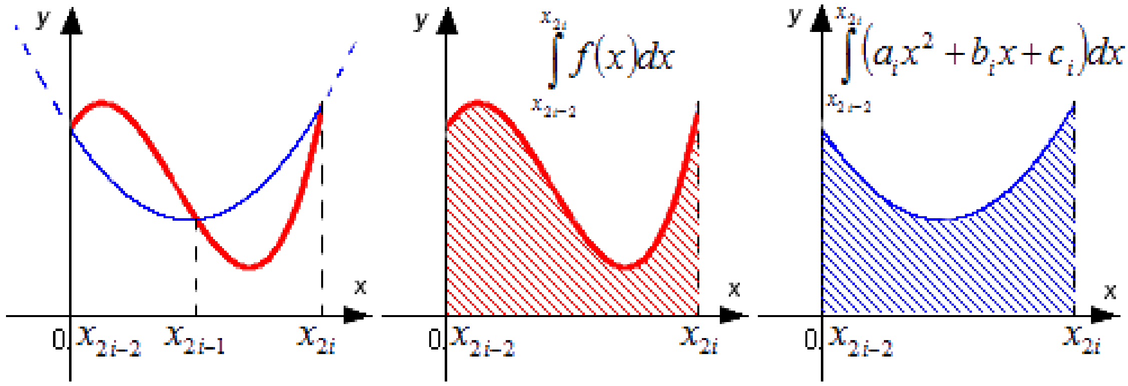


Рис. 2.4. Интервальное приближение

Красной линией изображен график функции *y=f(x)*, синей линией показано приближение графика функции *y=f(x)* квадратичными параболами на каждом элементарном отрезке разбиения (рис.2.5).

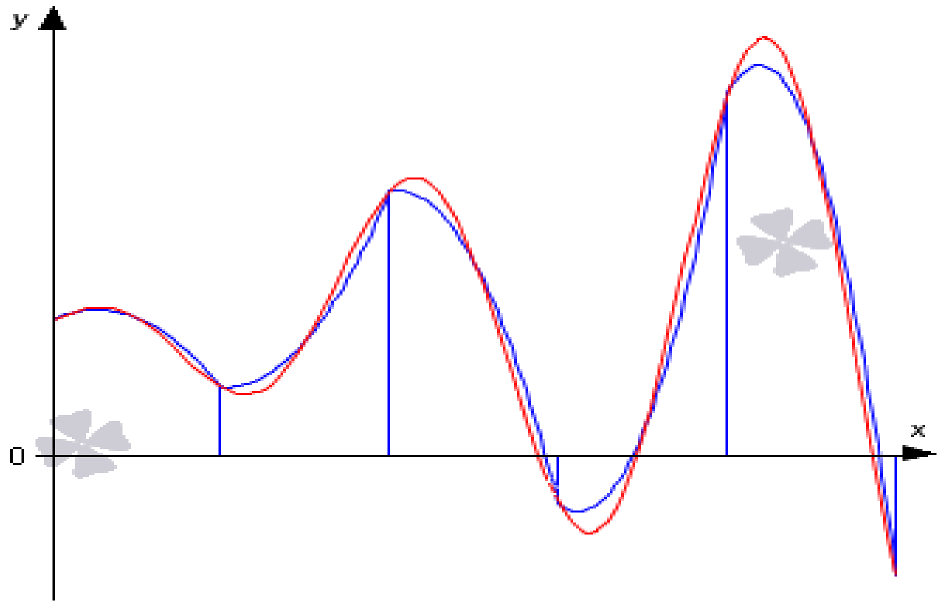


Рис. 2.5. Графическая иллюстрация метода парабол (Симпсона)

4Аналитические расчеты

Для проведения аналитических расчетов был использован онлайн-калькулятор. На рисунке 2 представлен результат расчетов. На рисунке 3 представлена графическая иллюстрация решения.

Найдем максимальное значение четвертой производной функции на интервале [0.3;1].

i	x_i	y_i
0	0.3	0.3318
1	0.388	0.3578
2	0.475	0.385
3	0.563	0.4148
4	0.65	0.4498
5	0.738	0.4941
6	0.825	0.5548
7	0.913	0.6459
8	1	0.7961

$$\int_{0.3}^{1} \frac{sin(0.7*x+0.5)}{1.1+cos(x*x*x+0.5)}dx \approx \frac{2*0.0875}{6}(0.332+0.796+4*1.913+2*1.39) = \frac{0.0875}{3}*11.557 = 0.337$$

Найдем максимальное значение четвертой производной функции на интервале [0.3;1].

$$R_n = -\frac{b-a}{180} \cdot h^4 \cdot f^{(4)}(c) = \frac{1-0.3}{180} \cdot 0.0875^4 \cdot = 0$$

Таким образом, I = 0.337 ± 0

Рисунок 2 - результат расчетов

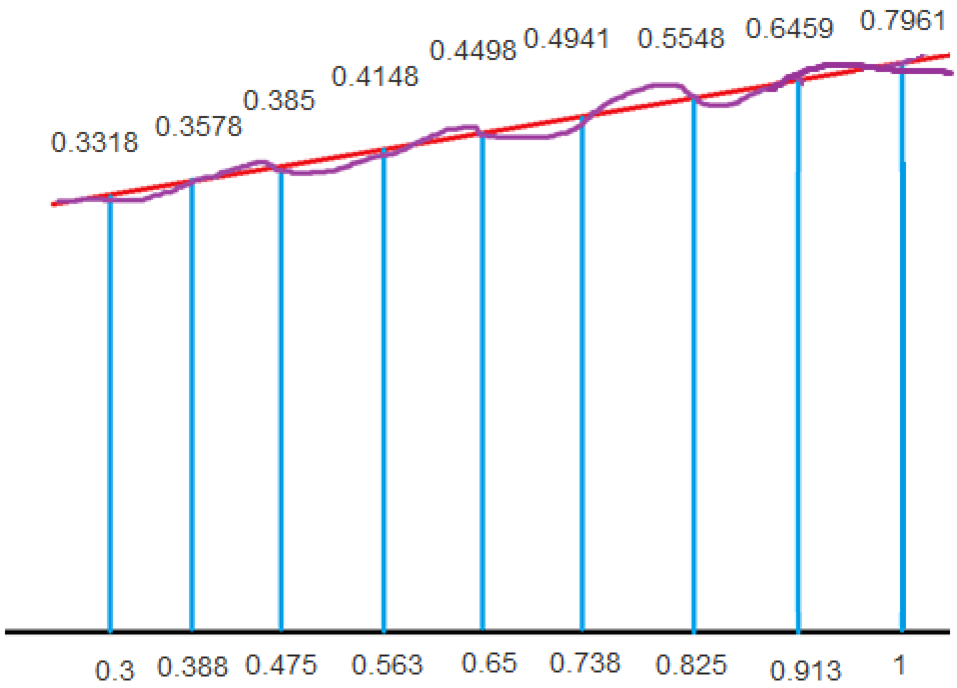
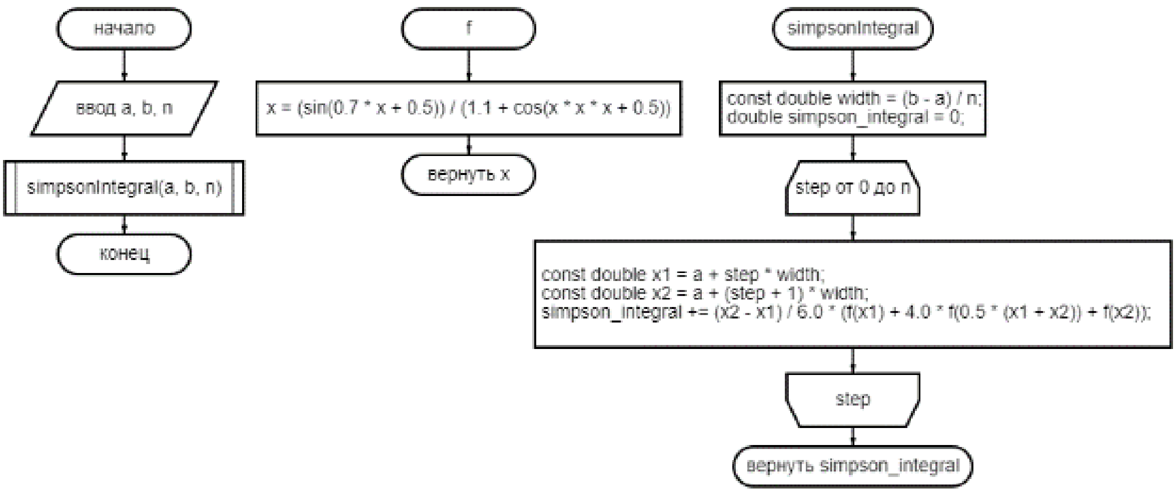


Рисунок 3 – графическая иллюстрация

Расчёты были проведены
на сайте planetcalc.ru

5 Схема алгоритма



6 Текст программы на C++

```cpp
#include<iostream>
#include<cmath>

using namespace std;

double f(double x) {
  return (sin(0.7 * x + 0.5)) / (1.1 + cos(x * x * x + 0.5));
}

double simpsonIntegral(double a, double b, int n) {
  const double width = (b - a) / n;

  double simpson_integral = 0;
  for (int step = 0; step < n; step++) {
    const double x1 = a + step * width;
    const double x2 = a + (step + 1) * width;

    simpson_integral += (x2 - x1) / 6.0 * (f(x1) + 4.0 * f(0.5 * (x1 + x2)) +
f(x2));
  }

  return simpson_integral;
}

// a = 0.3
// b = 1.0
// n = 8

int main() {
  system("chcp 65001");

  double a, b;
  int n;
  cout << "Введите a: ";
  cin >> a;
  cout << "Введите b: ";
  cin >> b;
  cout << "Введите n: ";
  cin >> n;
  cout << "Метод Симпсона" << endl;
  cout << simpsonIntegral(a, b, n);
  return 0;
}
```

Скриншоты с результатами программных расчетов

На рисунке 5 приведен результат работы программы.

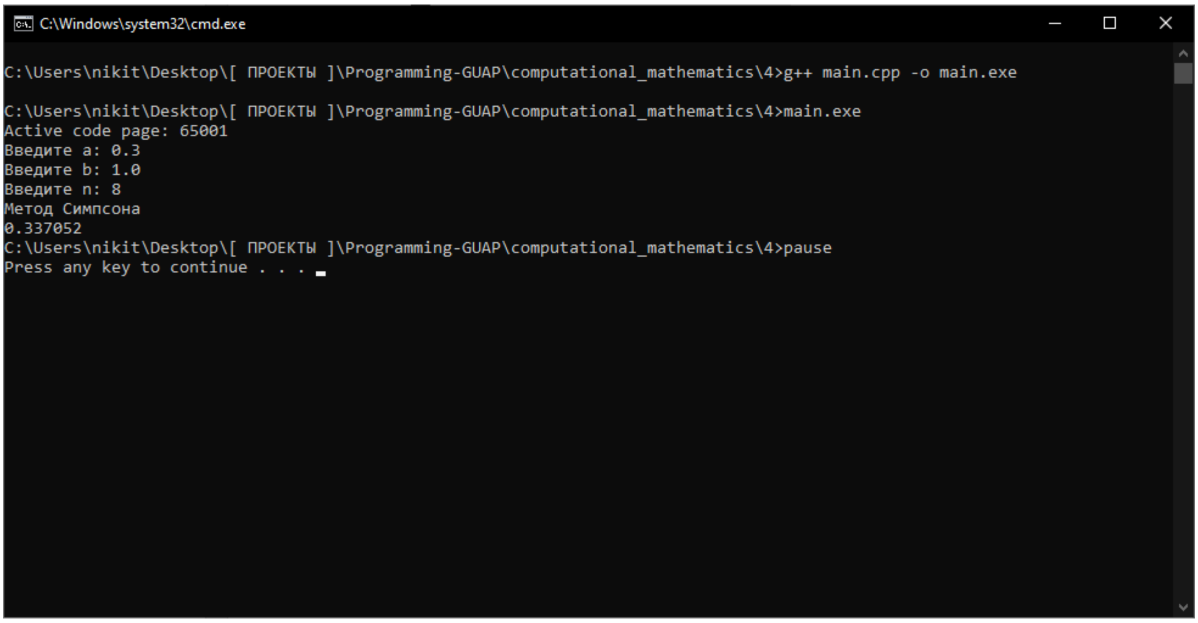


Рисунок 5 – Результат работы программы

Значение полученное аналитически не отличаются от значений, полученных программным путем.

7 Сравнение результатов программных и аналитических расчётов

Результат программы	Результат онлайн калькулятора
0.337052	0.33707

Как видим значения не отличаются, значит программа работает корректно!

8 Выводы

Я освоил методы численного интегрирования , усовершенствовал свои навыки по алгоритмизации и программированию вычислительных задач.