Descripción de Acciones de Gravedad en el Lenguaje de Formas Diferenciales

Cuevas Gómez Eduardo[1] **Díaz Saldaña Alberto Isaac**[1] **Lopez Dominguez Julio Cesar**[1] **Rosales Quintero José Eduardo**[2]

[1]Universidad Autónoma de Zacatecas [2]Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Resumen

En este trabajo se presenta de manera breve los ingredientes fundamentales para la **construcción de acciones de gravedad utilizando el lenguaje de formas diferenciales** en donde se hace uso extensivo de los denominados haces fibrados los cuales han sido exitosos para la descripción de las interacciones fundamentales de la naturaleza.

Haces Fibrados?

Un **haz fibrado** (*fiber bundle*) sirve para relacionar espacios de cualquier tipo usualmente se relaciona un **espacio topológico** (*topological manifold*) con otro espacio, se suelen usar **espacios vectoriales** y se les llama **haces vectoriales** (*vector bundles*) permitiendo describir interacciones.

Conexión y Curvatura

Parte de considerar un haz es definir una **conexión**, un **mapeo** entre las fibras de modo que se **codifique** la información de la variedad y sus propiedades de interés, que posteriormente se verán reflejadas en lo que entendemos como **curvatura** o bien como **torsión** (tras realizar un transporte paralelo).

En **RG** se considera el haz tangente denotado como TM (donde M es el espaciotiempo) y se usa una conexión libre de torsión llamada conexión de Levi-Civita, de modo que la derivada covariante es:

$$\nabla_\mu x^\nu = \partial_\mu x^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\rho}x^\rho \tag{1}$$

Tétrada y Conexión de Espín

Haciendo uso de la tétrada e se puede hacer una especie de mapeo entre lo que se entiende de las fibras, preservando su información ante el transporte paralelo y se llega que de la ecuación (1) se puede reemplazar por:

$$Dv^I = dv^I + \omega^I{}_J \wedge v^J \tag{2}$$

donde D es la derivada exterior covariante, d es la derivada exterior, ω es la 1-*forma* de conexión de espín, esto se entiende como pasando de espacios vectoriales a formas diferenciales:

$$\nabla x = \partial x + \Gamma x \underset{e}{\mapsto} Dv = dv + \omega \wedge v$$

De modo que se puede incluir la 2-*forma* de torsión y de curvatura como:

$$T^A = d\theta^A + \omega^A_B \wedge \theta^B = D\theta \tag{3}$$

La cual, por el postulado de la tétrada en este caso $T_A = 0$ y la 2-*forma* de curvatura

$$R^a{}_b \equiv d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b = \frac{1}{2}R_{\mu\nu}{}^a{}_b\, dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{4}$$

donde $\theta = e^I_\mu\, dx^\mu$ y $\omega^I{}_J = \omega_\mu{}^I{}_J\, dx^\mu$ son 1-*formas* y aparte existe la relación entre formas:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma = d^4x \tag{5}$$

donde ϵ es el símbolo de Levi-Civita.

Acciones de Gravedad

Acción de Einstein-Hilbert (en el vacío y sin constante cosmológica)

$$S_{EH} = \int_M \sqrt{-g}R\, d^4x = \frac{1}{2}\int_M \epsilon_{ABCD}\,\theta^A \wedge \theta^B \wedge R^{CD} \tag{6}$$

Einstein-Cartan, formulación de primer orden

$$S_{EC}[\theta,\omega] = \frac{1}{32\pi G}\int \epsilon_{IJKL}\,\theta^I \wedge \theta^J \wedge \left(R^{KL}(\omega) - \frac{\Lambda}{6}\theta^K \wedge \theta^L\right) \tag{7}$$

Acción de MacDowell–Mansouri

$$\mathcal{F}^{IJ} = R^{IJ}(\omega) - \frac{\Lambda}{3}\theta^I \wedge \theta^J \tag{8}$$

donde

$$S_{MM}[e,\omega] = -\frac{3}{64\pi G\Lambda}\int \epsilon_{IJKL}\,\mathcal{F}^{IJ} \wedge \mathcal{F}^{KL} \tag{9}$$

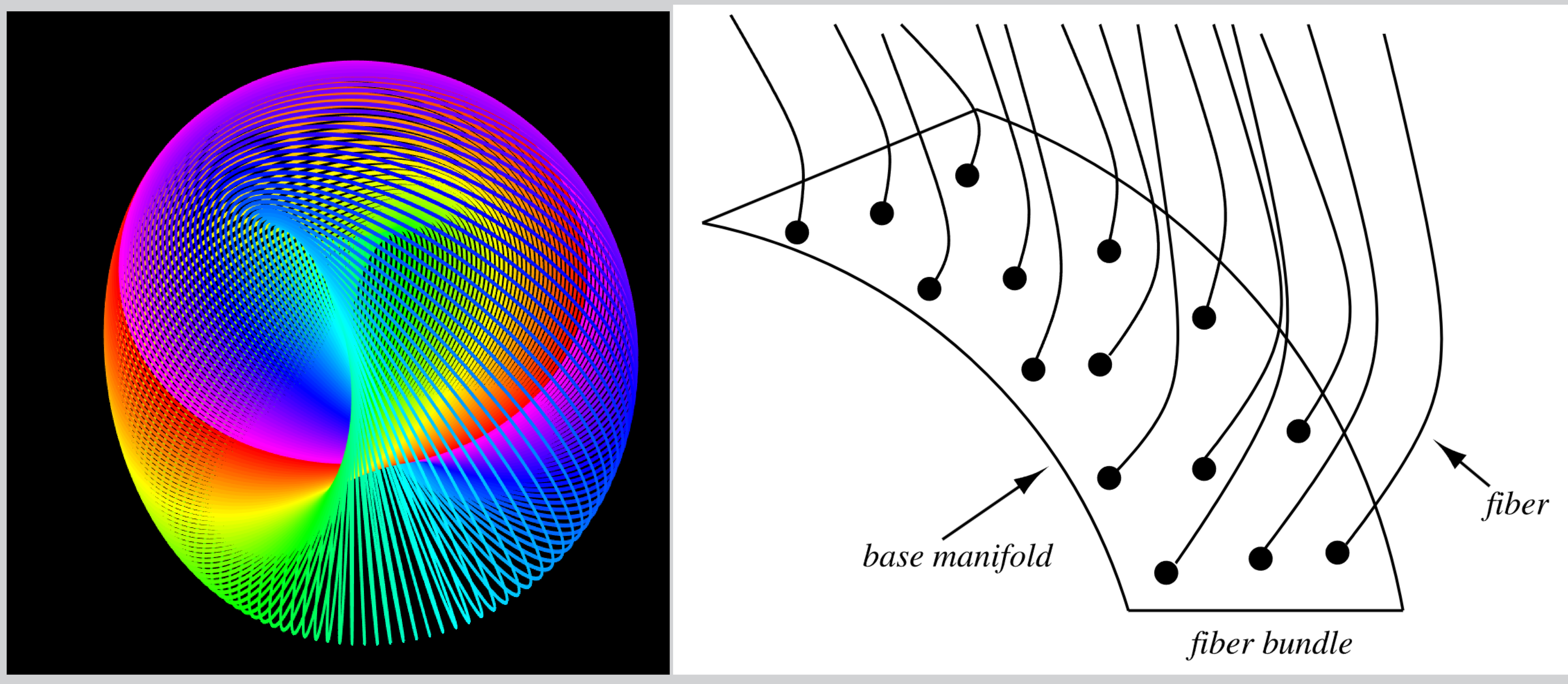

Figure 1: Haces Fibrados y vibracion de Hopf

Resultados

Ecuaciones de campo

$$\epsilon_{ABCD}\,\theta^A \wedge R^{CD} = 0 \tag{10}$$

$$\epsilon_{ABCD}\,\theta^A \wedge \left(R^{CD} - \frac{\Lambda}{3}\theta^C \wedge \theta^D\right) = \epsilon_{ABCD}\,\theta^A \wedge \mathcal{F}^{CD} = 0 \tag{11}$$

$$\epsilon_{ABCD}\, D\mathcal{F}^{AB} = 0 \tag{12}$$

Euler topológico en lenguaje tensorial usual

$$\epsilon_{ABCD}\, R^{AB} \wedge R^{CD} = \left(R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2\right) d^4x \tag{13}$$

Conclusiones

- Este formalismo compacta y simplifica la descripción de teorías gravitacionales, facilitando su análisis geométrico.
- optimiza cálculos numéricos y mejora eficiencia computacional.
- El enfoque permite extender las teorías gravitacionales y explorar nuevos modelos en gravitación cuántica.

Universidad Autónoma de Zacatecas
Unidad Académica de Física

Contacto y Referencias: