

Машинное обучение
Лекция № 11, осень 2023

Методы кластеризации данных

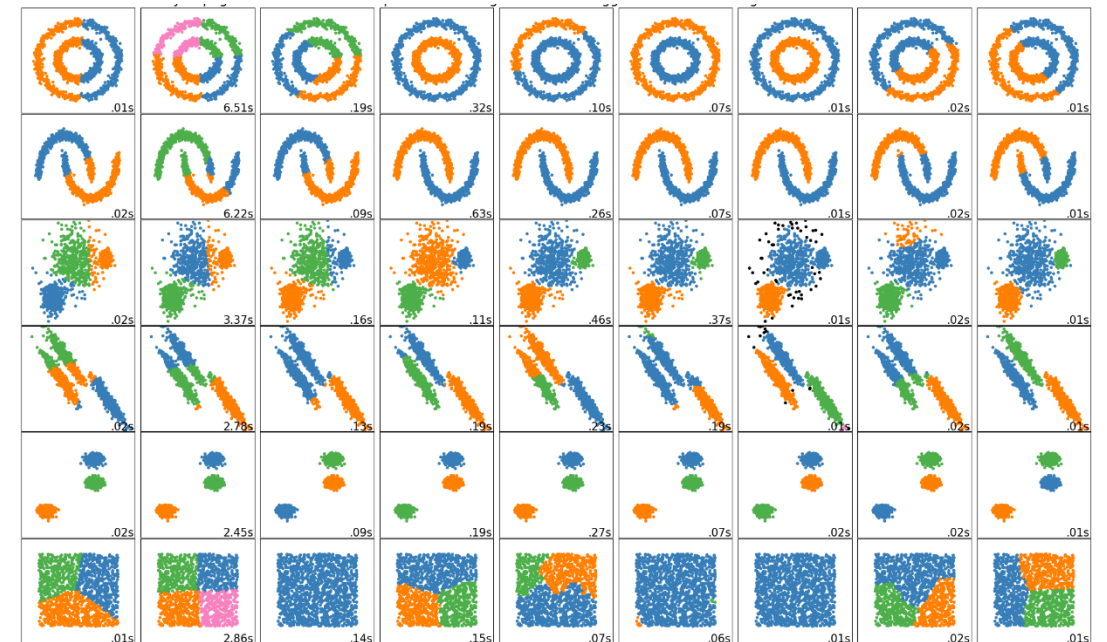
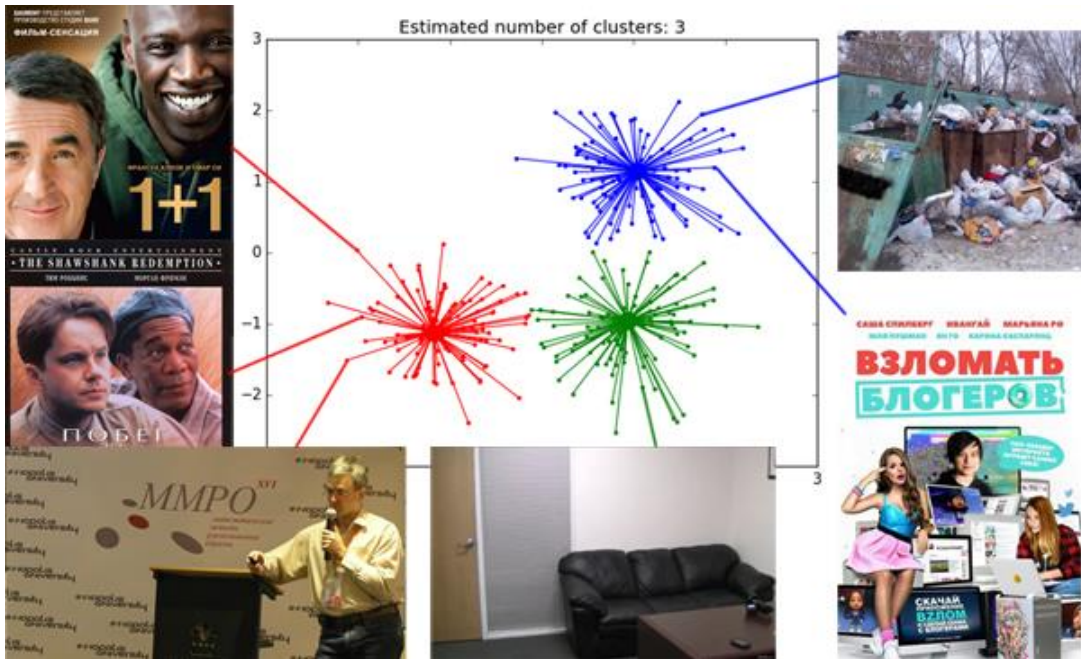


План лекции

- Введение в кластеризацию и сегментацию
- Agglomerative clustering
- Mean-shift clustering
- DBSCAN
- Визуализация кластеров – t-SNE

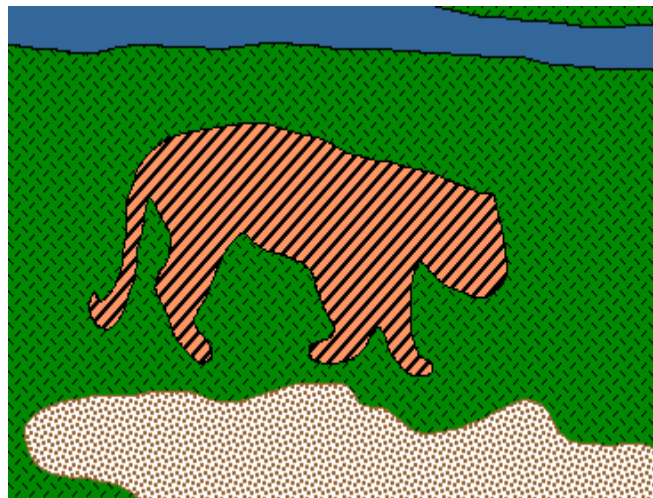
Кластеризация массива данных

- Цель: определить семантически похожие объекты в группы



Сегментация изображений

- Цель: определить похожие группы пикселей



Один из способов к сегментации - Кластеризация

Кластеризация: сгруппировать похожие точки данных и представить их одним токеном

Ключевые задачи:

- 1) Что делает похожими два пункта/изображения/патча?
- 2) Как вычислить общую группировку из парного сходства?

Зачем мы кластеризируем?

- **Суммаризация данных**

- Анализ большого объема данных
- Сжатие или шумоподавление
- Представление большого непрерывного вектора к номеру кластера

- **Подсчёт по критериям**

- **Сегментация**

- **Прогнозирование**

- Изображения в одном кластере могут иметь одинаковые метки

План лекции

- Введение в кластеризацию и сегментацию
- **Agglomerative clustering**
- Mean-shift clustering
- DBSCAN
- Визуализация кластеров – t-SNE

Кластеризация: измерение расстояния

Кластеризация - это метод обучения без учителя. Цель состоит в том, чтобы сгруппировать $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^D$ по кластерам.

Нам нужна функция парного расстояния/подобия между элементами, а иногда и желаемое количество кластеров.

Когда данные (например, изображения, объекты, документы) представлены характерными векторами, обычно используемой мерой сходства является косинусное сходство.

Пусть будут два вектора данных x, x' . Между двумя векторами есть угол θ .

Определение мер расстояния

Пусть x и x' будут двумя объектами из вселенной возможных объектов. Расстояние (подобие) между x и x' - это вещественное число, обозначаемое $\text{sim}(x, x')$.

Евклидова мера:

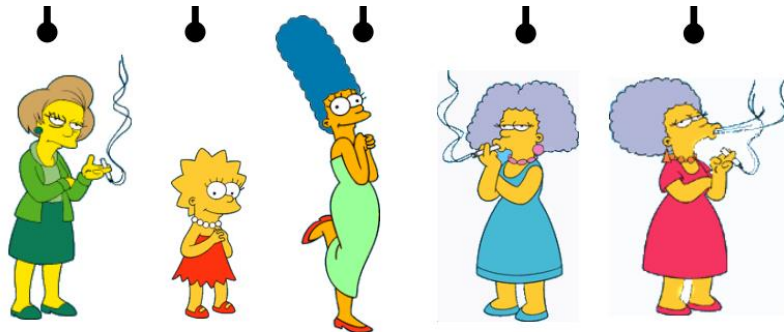
$$\text{sim}(x, x') = x^\top x'$$










Косинусное расстояние:

$$\begin{aligned}\text{sim}(x, x') &= \cos(\theta) \\ &= \frac{x^\top x'}{\|x\| \cdot \|x'\|} \\ &= \frac{x^\top x'}{\sqrt{x^\top x} \sqrt{x'^\top x'}}.\end{aligned}$$

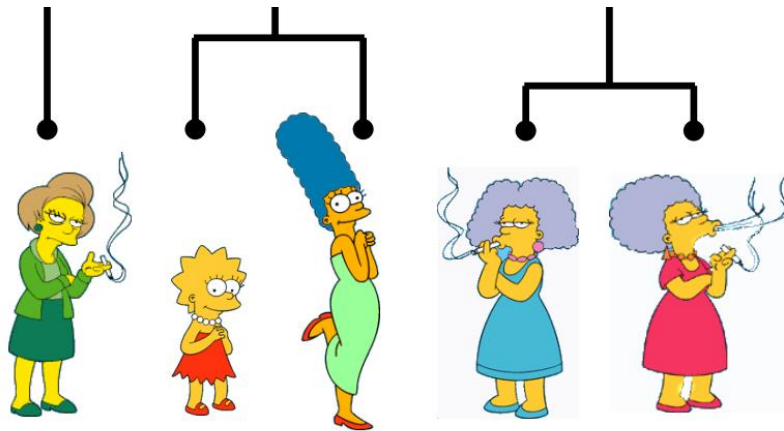
Пример группировки

- Матрица попарных расстояний
- Обычно предполагается, что расстояние является обратной величиной сходства
- Низкое расстояние означает большое сходство



				
0	8	8	7	7
	0	2	4	4
		0	3	3
			0	1
				0

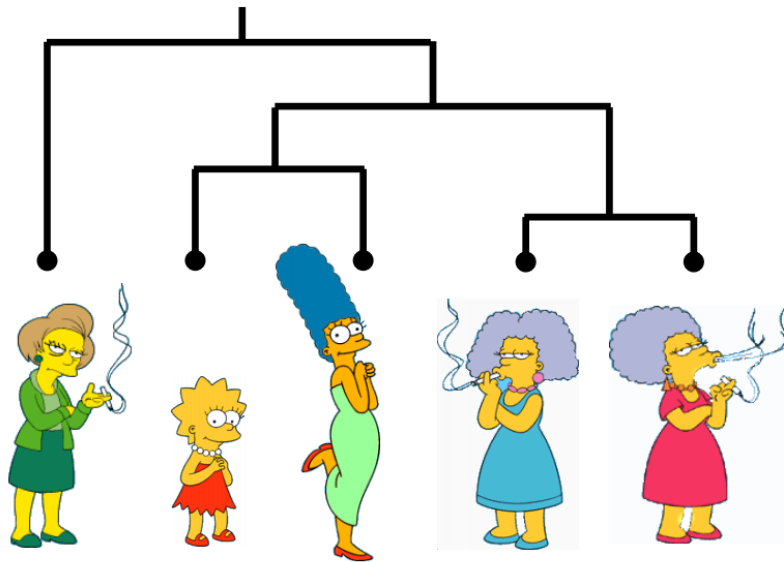
Пример группировки








The diagram shows the five cartoon characters standing in a row, corresponding to the columns of the table below. From left to right: Marge Simpson (green dress), Lisa Simpson (red dress), Marge Simpson (green dress), Mrs. Krabappel (blue dress), and Mrs. Krabappel (pink dress).

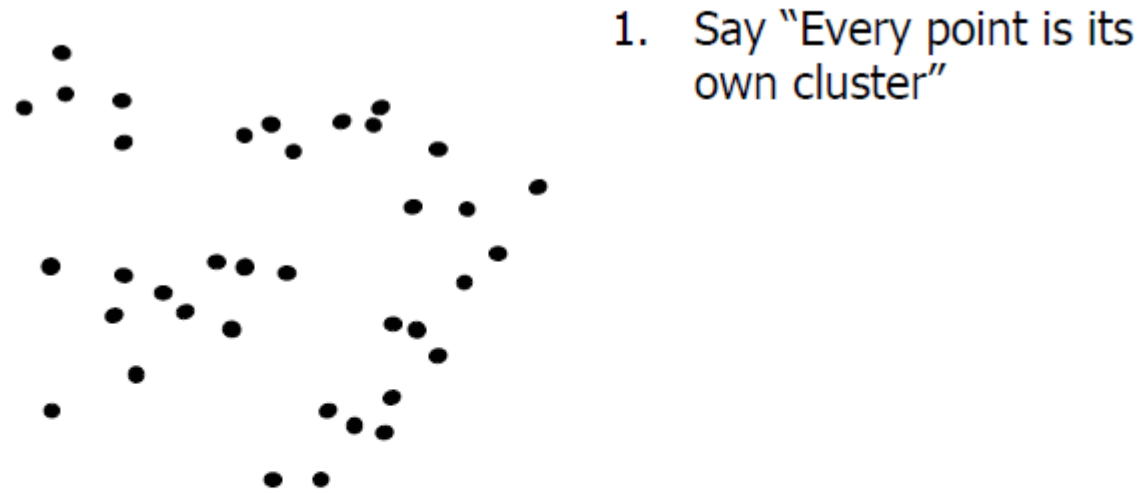
0	8	8	7	7
	0	2	4	4
		0	3	3
			0	1
				0

Пример группировки

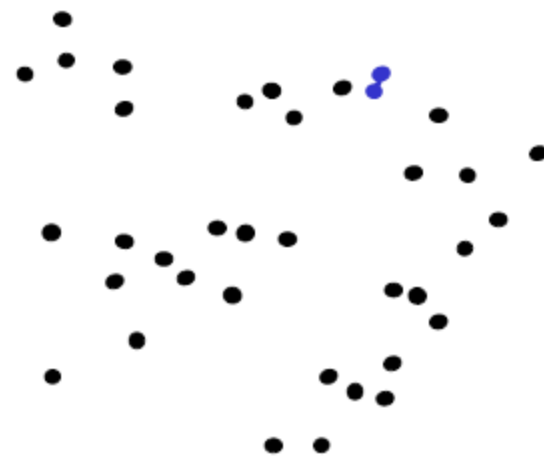


				
0	8	8	7	7
	0	2	4	4
		0	3	3
			0	1
				0

Agglomerative clustering



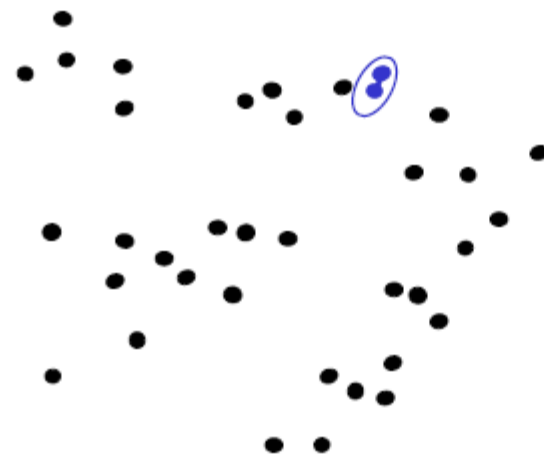
Agglomerative clustering



1. Say "Every point is its own cluster"
2. Find "most similar" pair of clusters



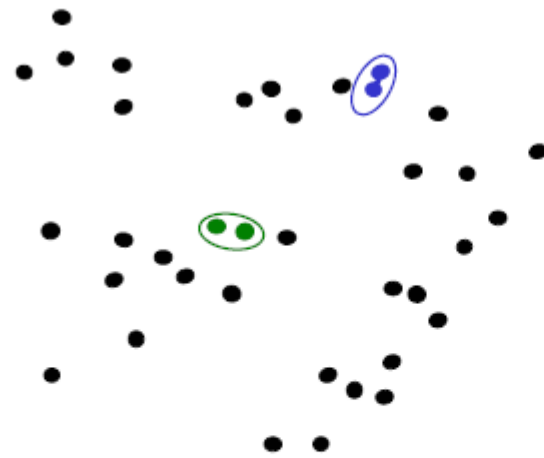
Agglomerative clustering



1. Say "Every point is its own cluster"
2. Find "most similar" pair of clusters
3. Merge it into a parent cluster



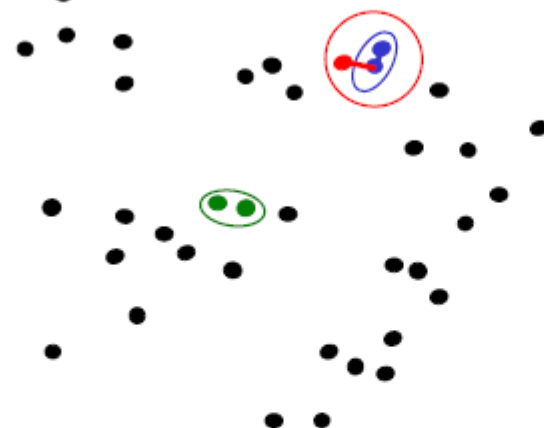
Agglomerative clustering



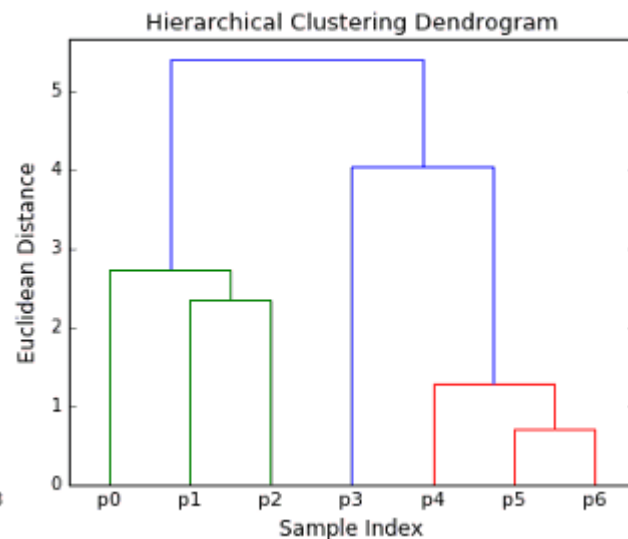
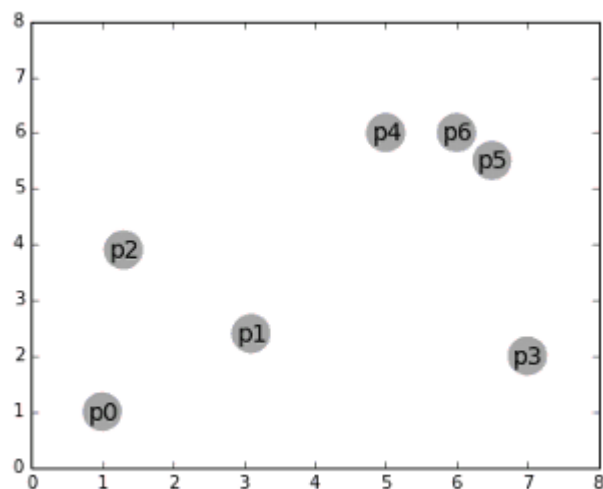
1. Say "Every point is its own cluster"
2. Find "most similar" pair of clusters
3. Merge it into a parent cluster
4. Repeat



Agglomerative clustering



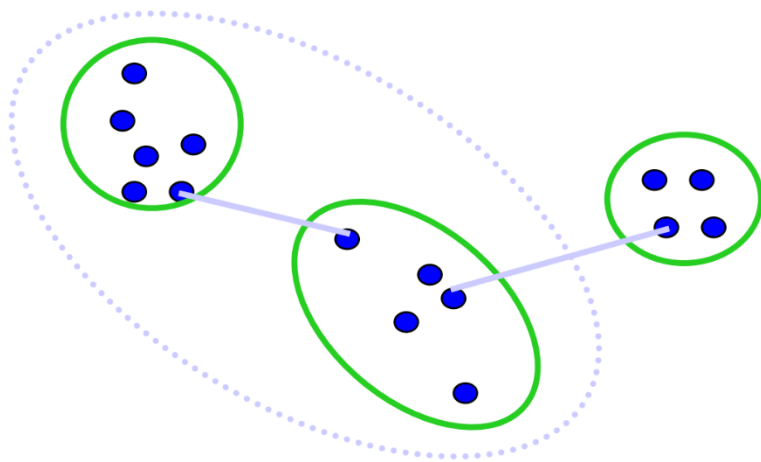
1. Say "Every point is its own cluster"
2. Find "most similar" pair of clusters
3. Merge it into a parent cluster
4. Repeat



Различные меры ближайших кластеров

Single Link

- $d(C_i, C_j) = \min_{x \in C_i, x' \in C_j} d(x, x')$. This is known as *single-linkage*. It is equivalent to the minimum spanning tree algorithm. One can set a threshold and stop clustering once the distance between clusters is above the threshold. Single-linkage tends to produce long and skinny clusters.

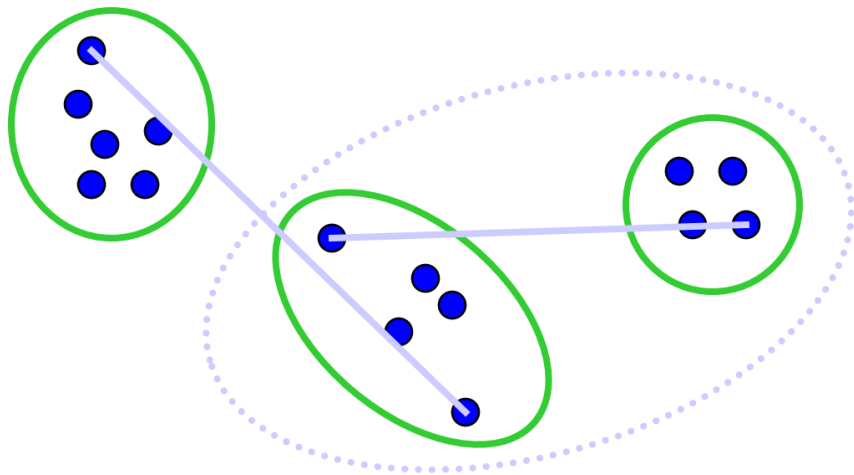


Длинные, тощие
кластеры

Различные меры ближайших кластеров

Complete Link

- $d(C_i, C_j) = \max_{x \in C_i, x' \in C_j} d(x, x')$. This is known as *complete-linkage*. Clusters tend to be compact and roughly equal in diameter.

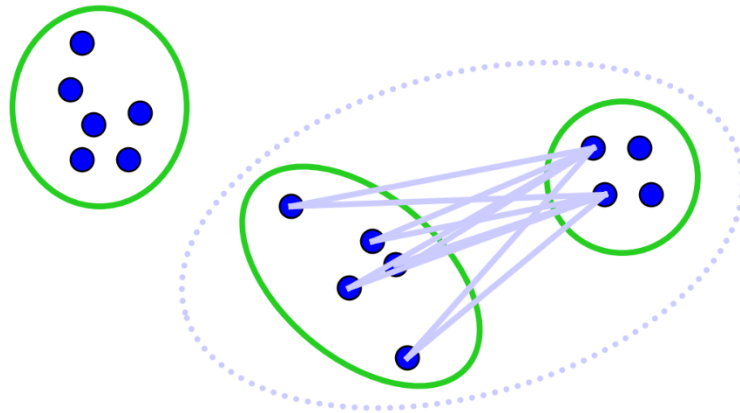


Тесные кластеры

Различные меры ближайших кластеров

Average Link

- $d(C_i, C_j) = \frac{\sum_{x \in C_i, x' \in C_j} d(x, x')}{|C_i| \cdot |C_j|}$. This is the average distance between items. Somewhere between single-linkage and complete-linkage.



Устойчивость к
шуму

Agglomerative Hierarchical Clustering - Algorithm

1. Initially each item x_1, \dots, x_n is in its own cluster C_1, \dots, C_n .
2. Repeat until there is only one cluster left:
3. Merge the nearest clusters, say C_i and C_j .

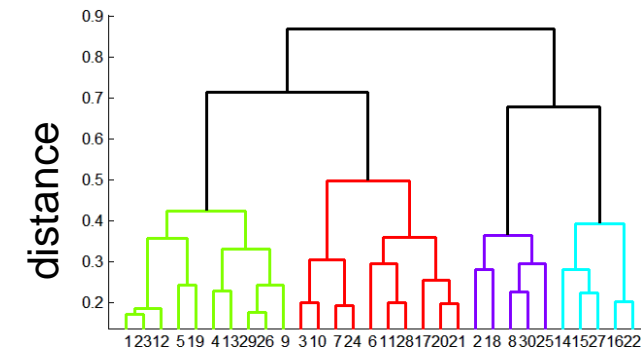
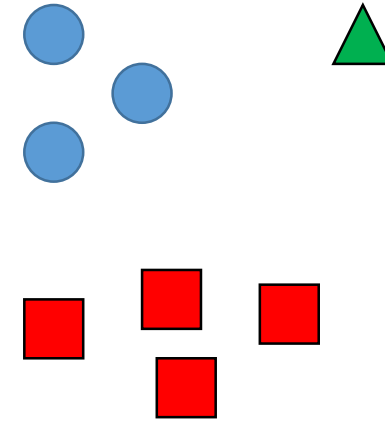
Agglomerative clustering

Как определить кластерное сходство?

- Среднее расстояние между точками,
- максимальное расстояние
- минимальная дистанция

Сколько кластеров?

- Кластеризация создает дендрограмму (дерево)
- Порог, основанный на максимальном количестве кластеров или на расстоянии между слияниями



Итоги: Agglomerative Clustering

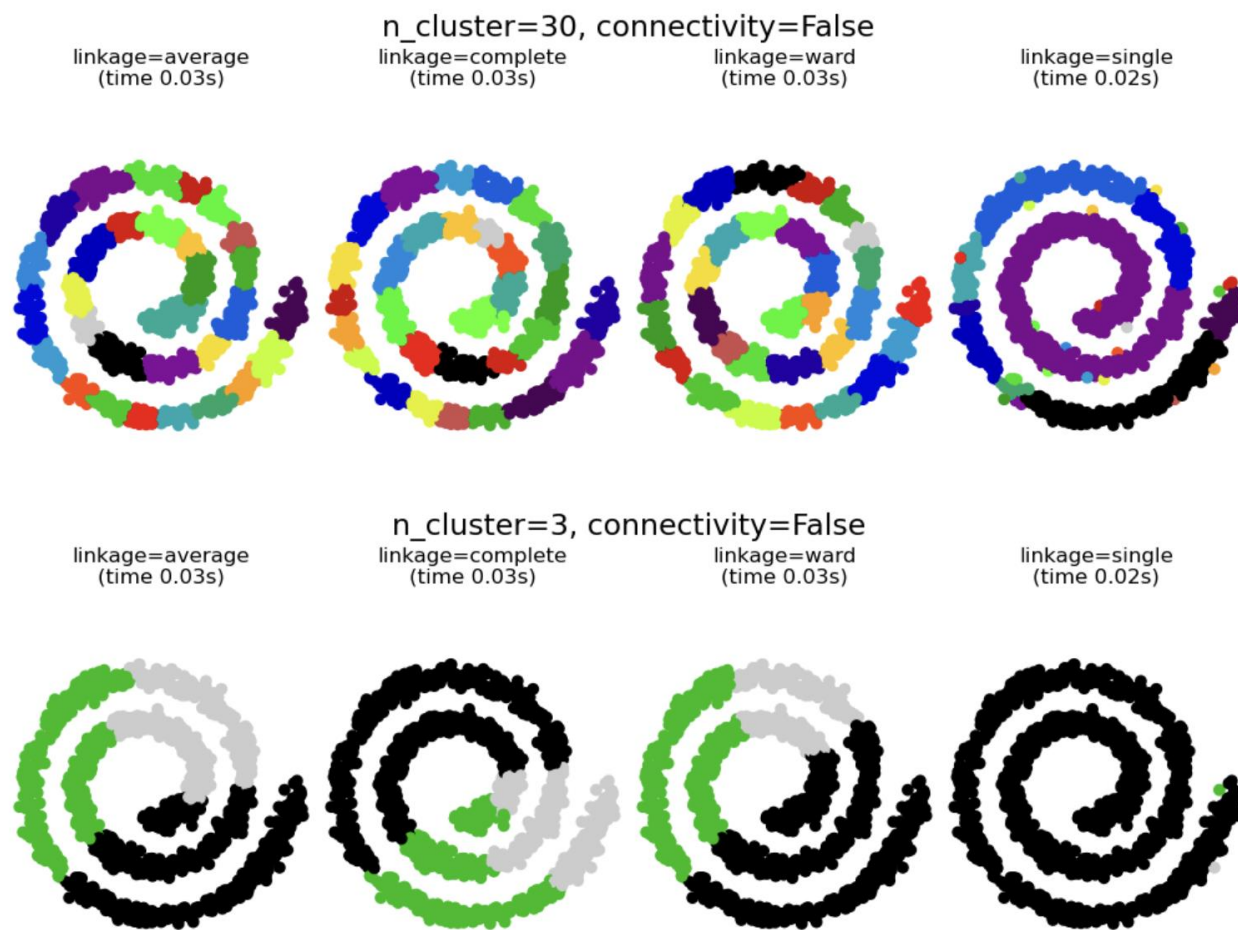
Плюсы:

- Простое в реализации, широкое применение.
- Кластеры имеют адаптивные формы.
- Обеспечивает иерархию кластеров.
- Нет необходимости заранее указывать количество кластеров.

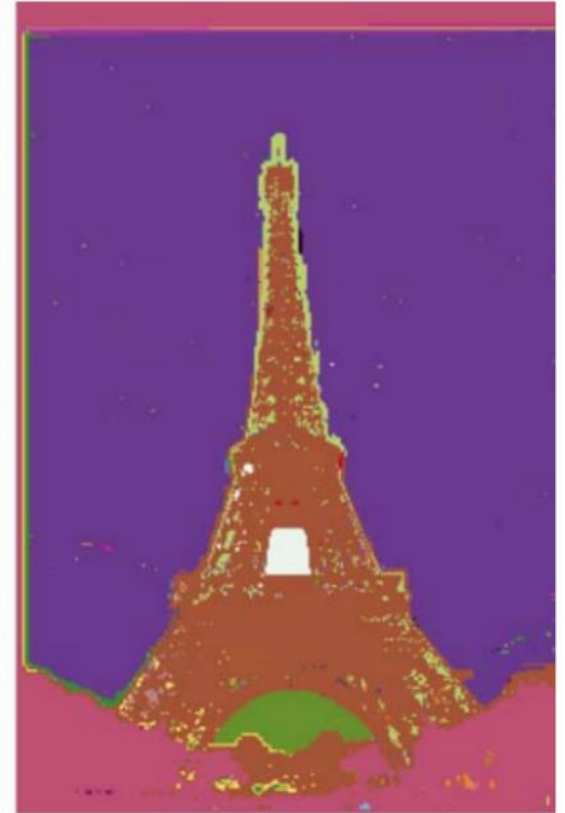
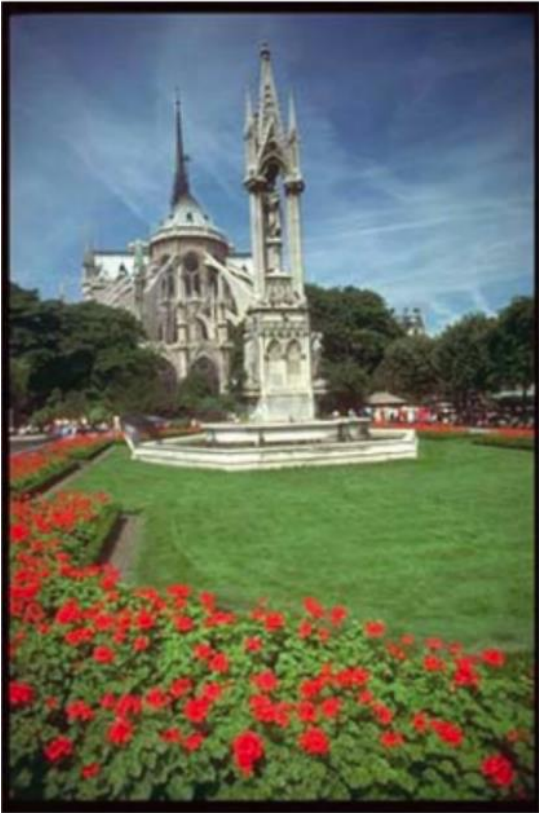
Минусы:

- Могут быть несбалансированные кластеры.
- Все равно придется выбирать количество кластеров или порог.
- Не очень хорошо масштабируется. Время выполнения $O(n^3)$.

Результаты кластеризации



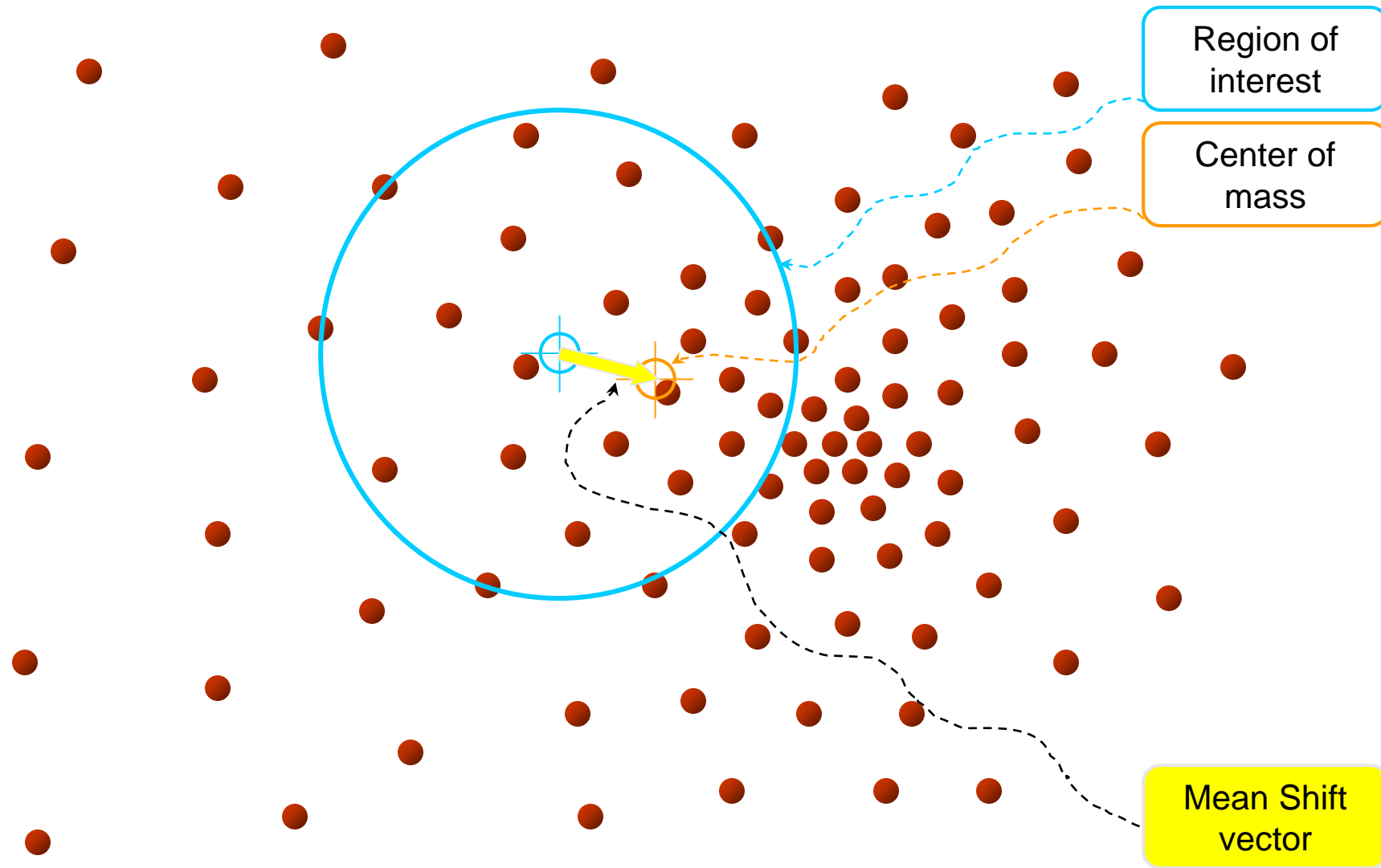
Результаты кластеризации



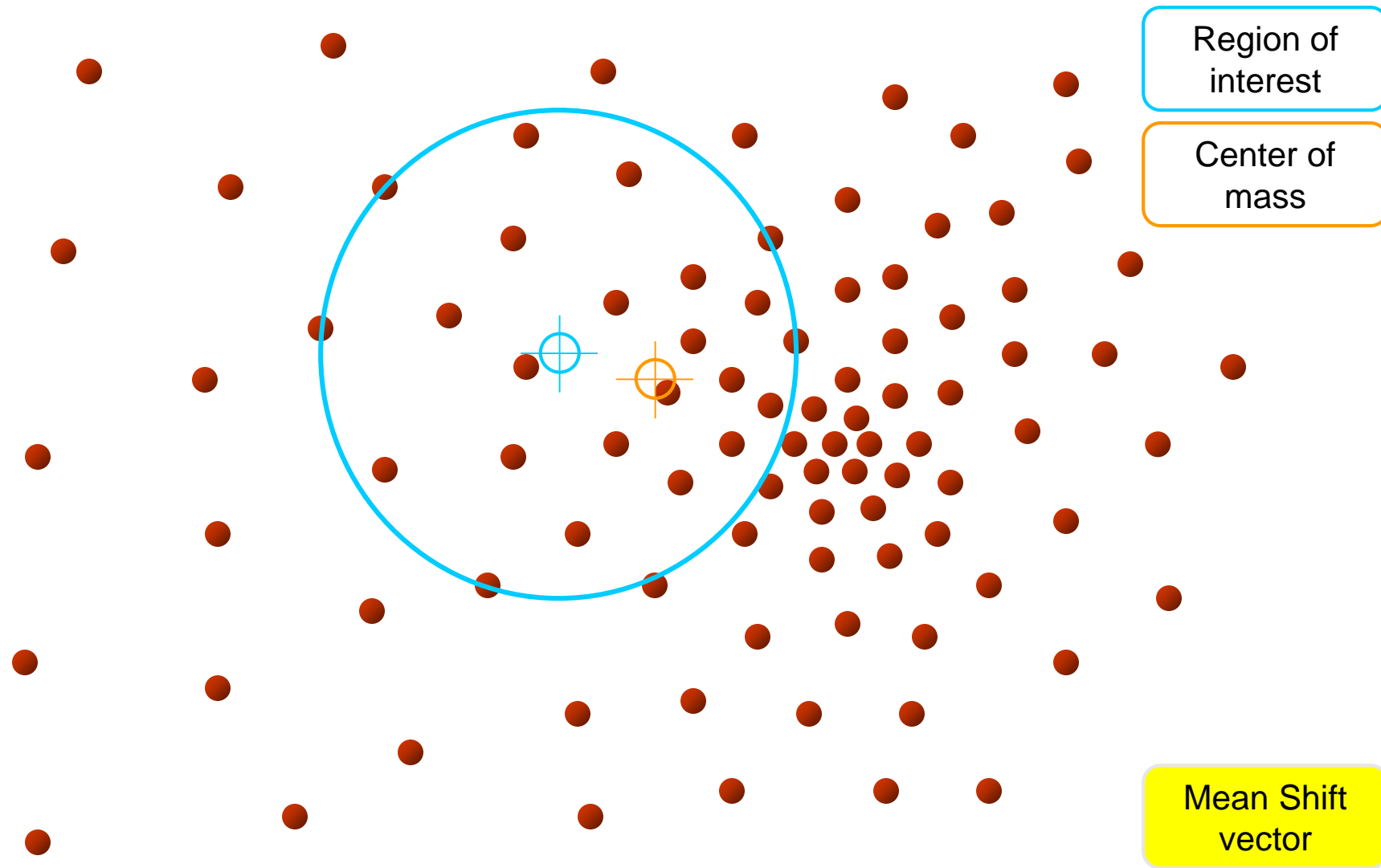
План лекции

- Введение в кластеризацию и сегментацию
- Agglomerative clustering
- **Mean-shift clustering**
- DBSCAN
- Визуализация кластеров – t-SNE

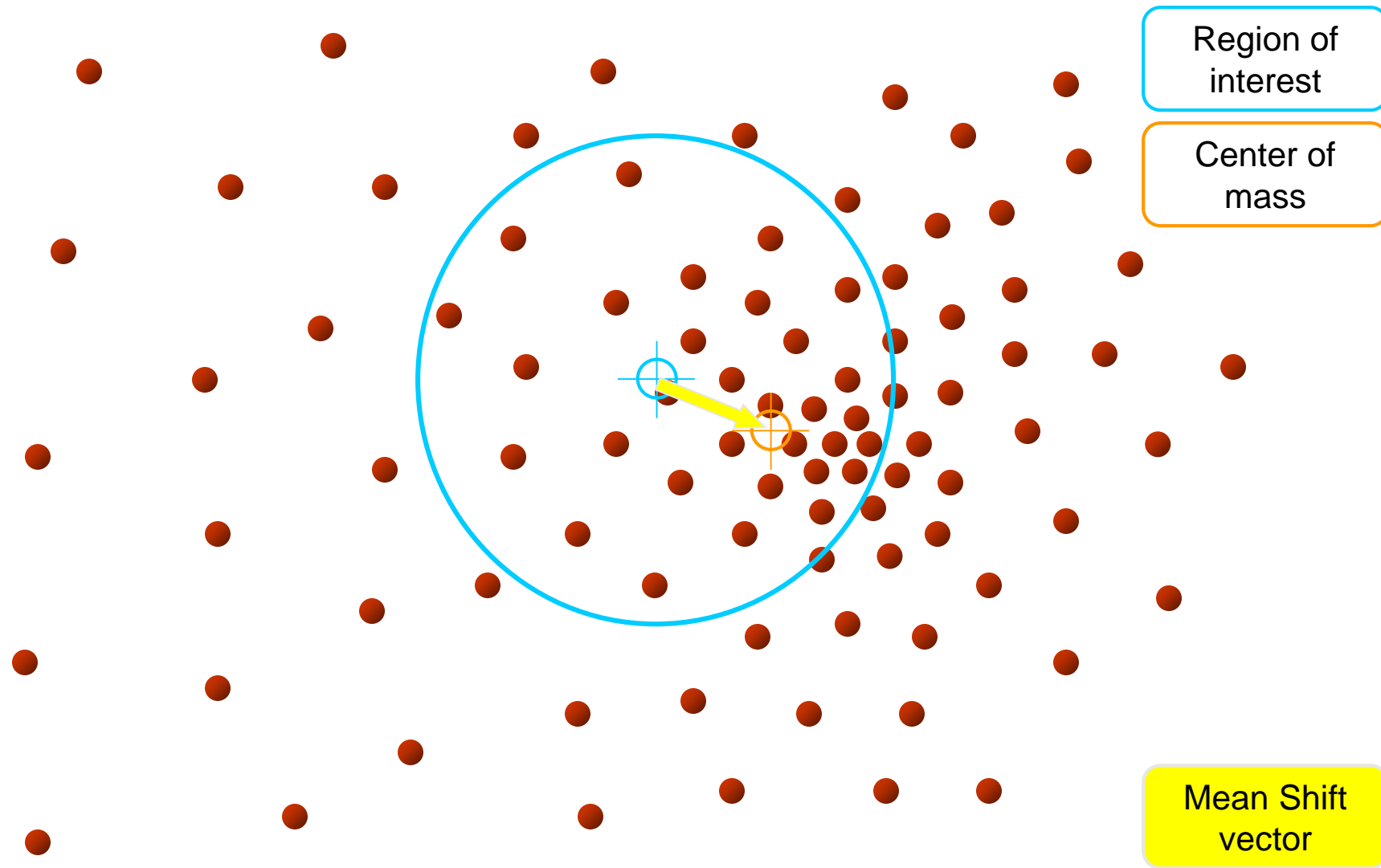
Mean-Shift



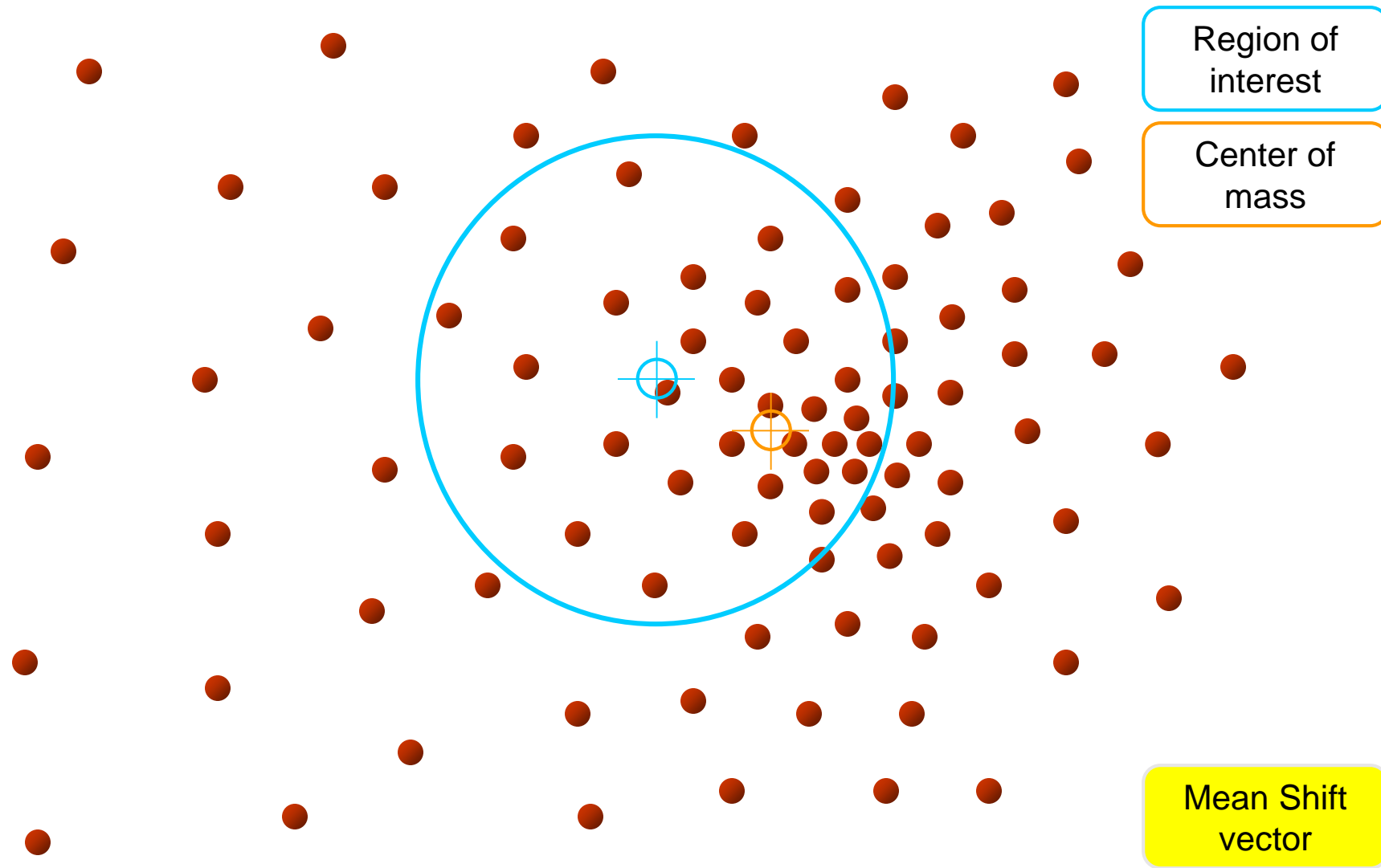
Mean-Shift



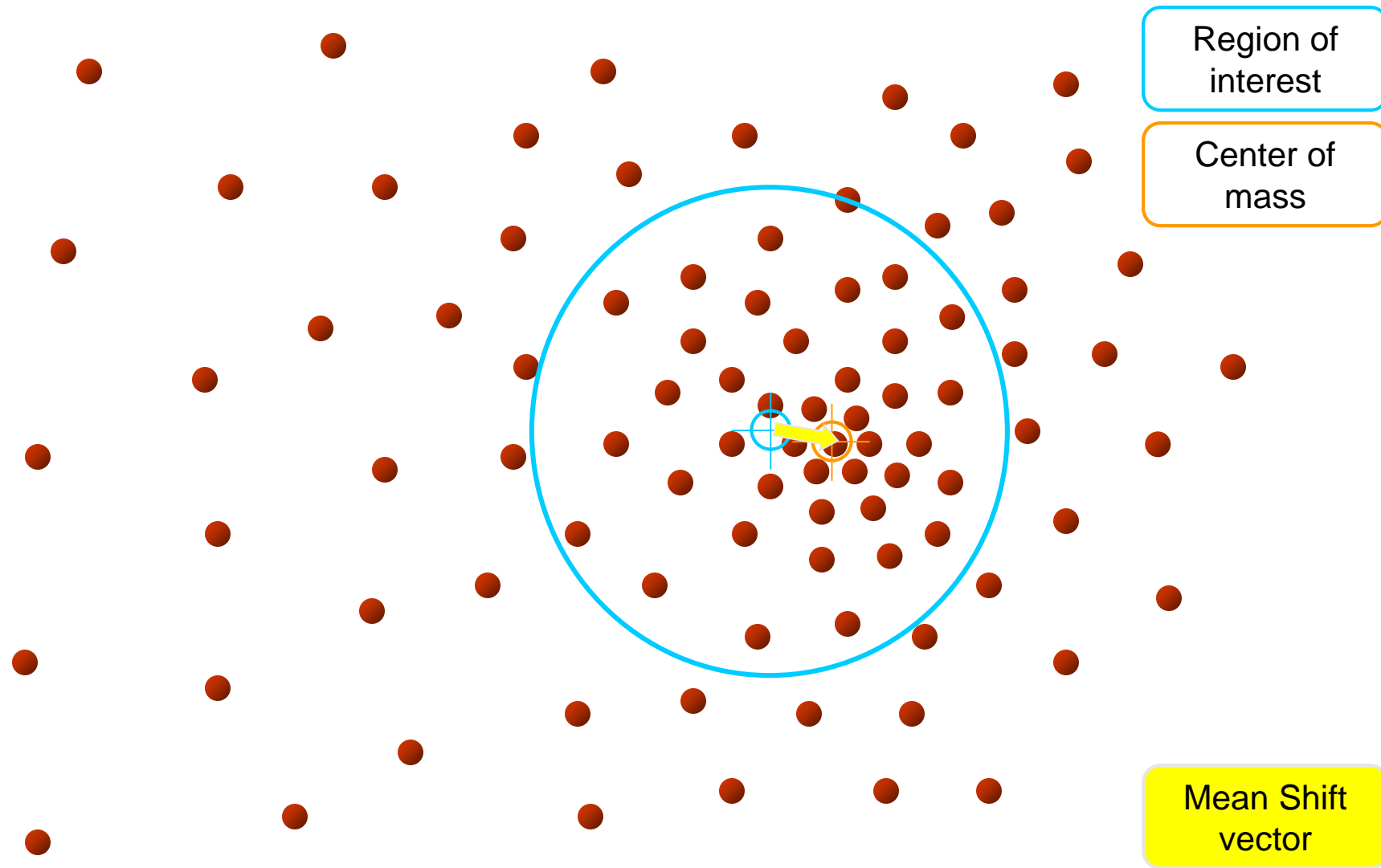
Mean-Shift



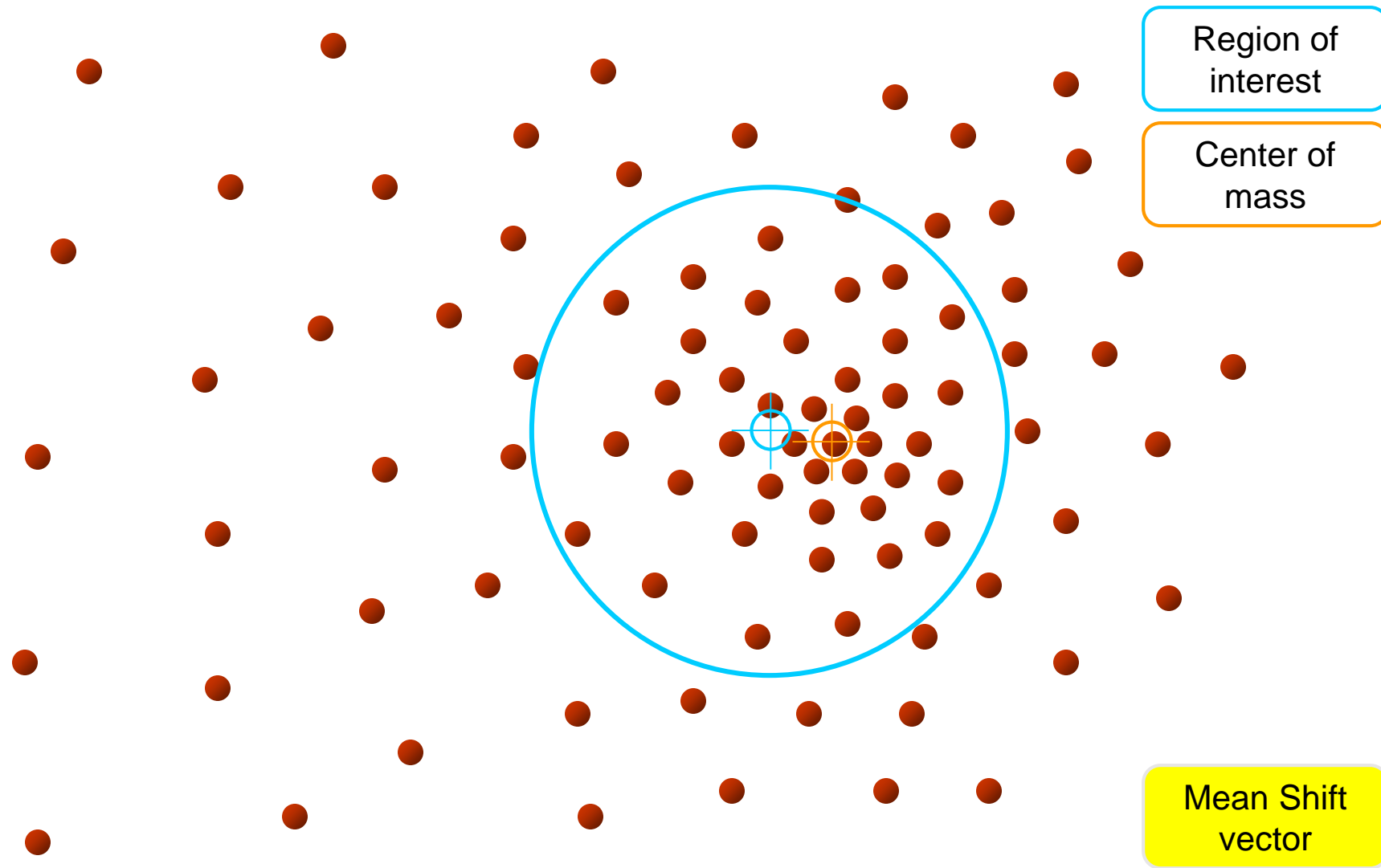
Mean-Shift



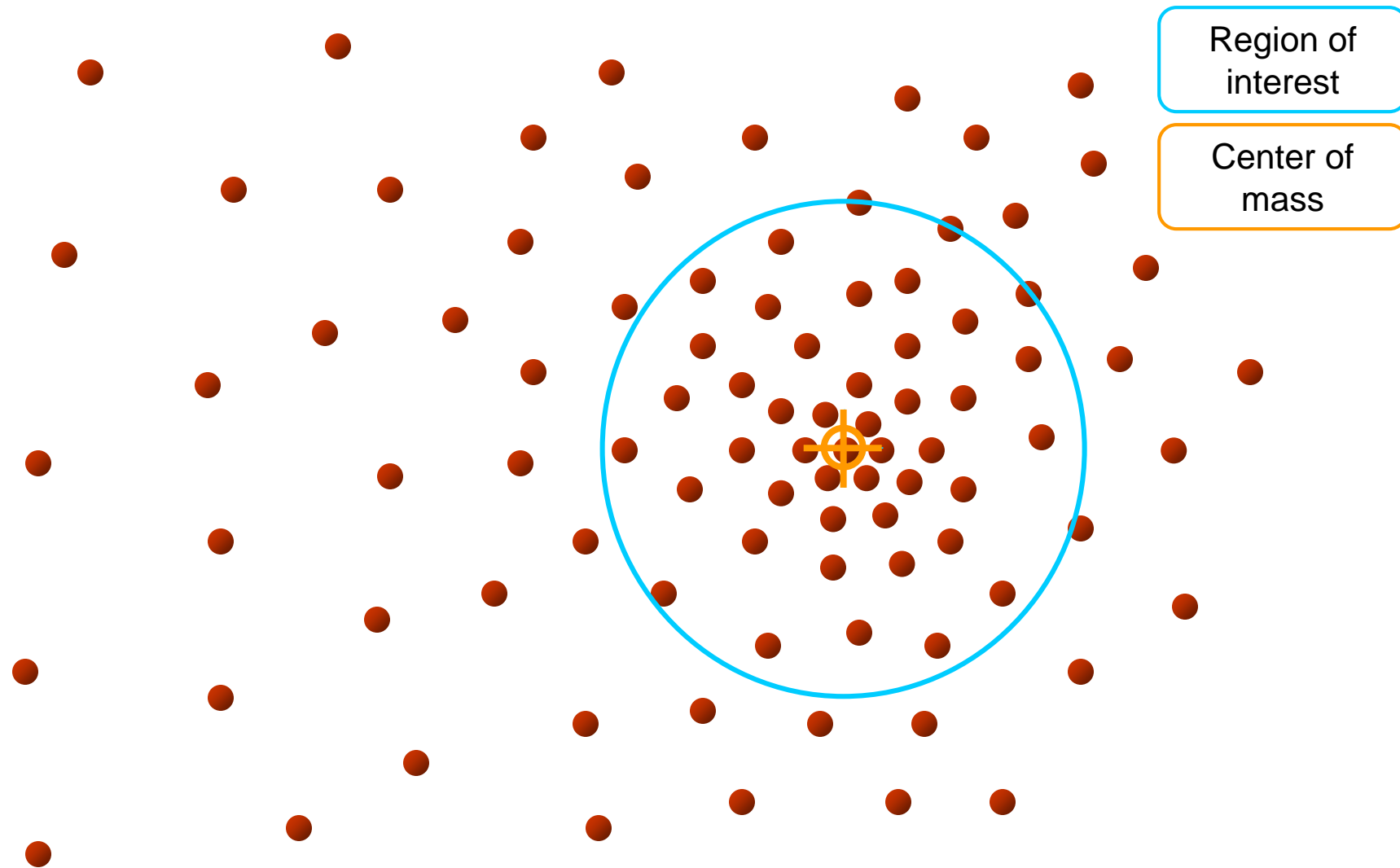
Mean-Shift



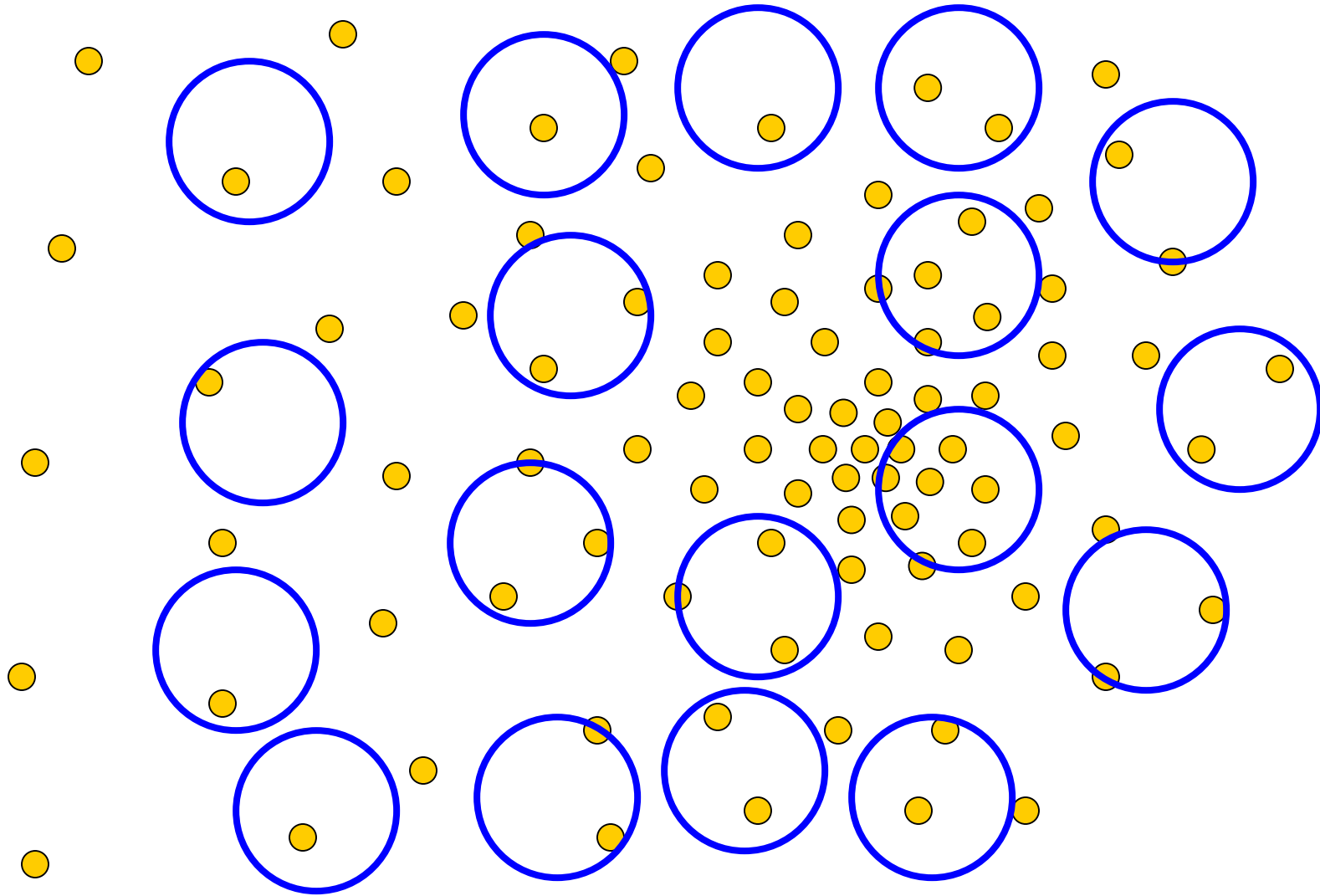
Mean-Shift



Mean-Shift



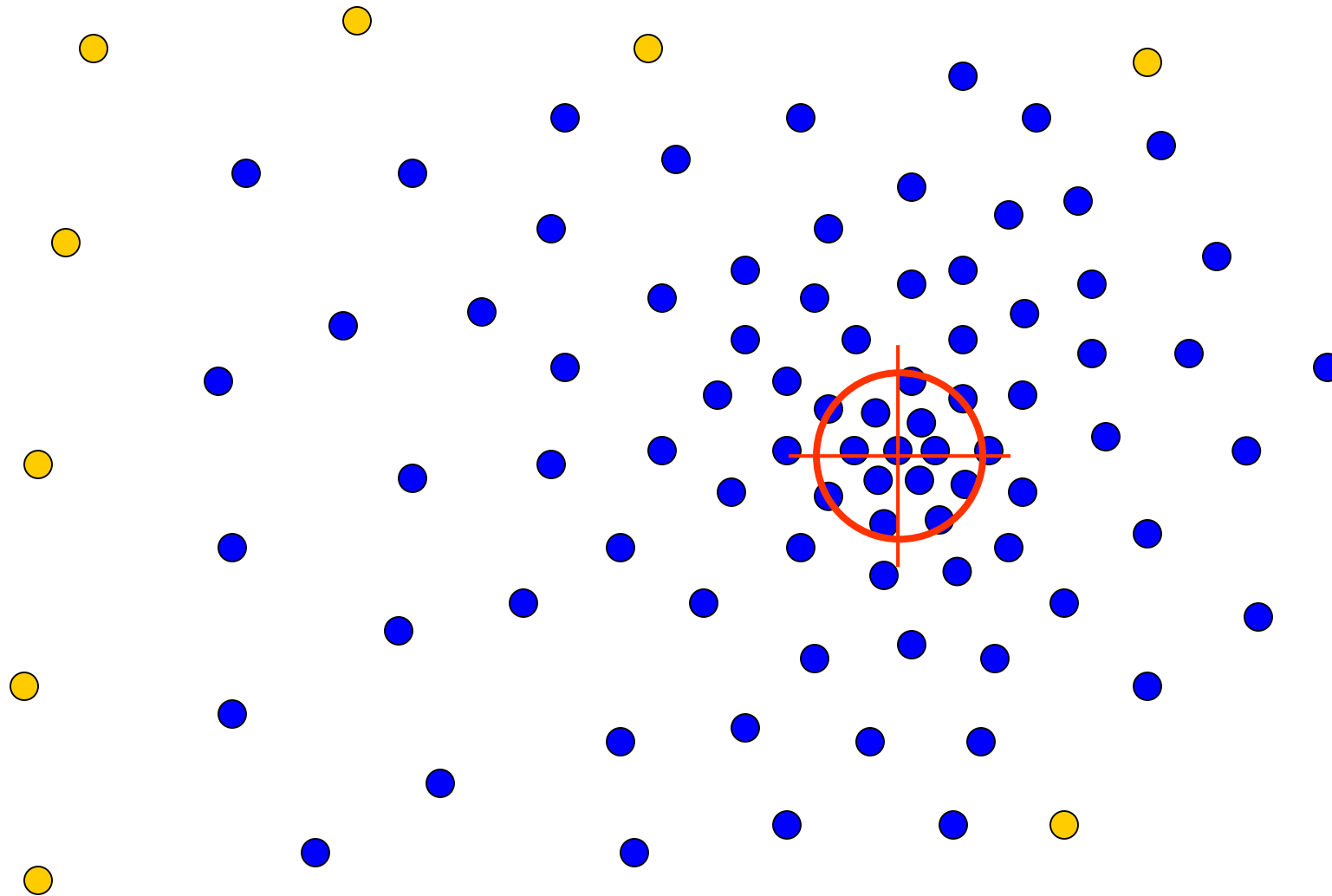
Real Modality Analysis



Tessellate the space with windows

Run the procedure in parallel

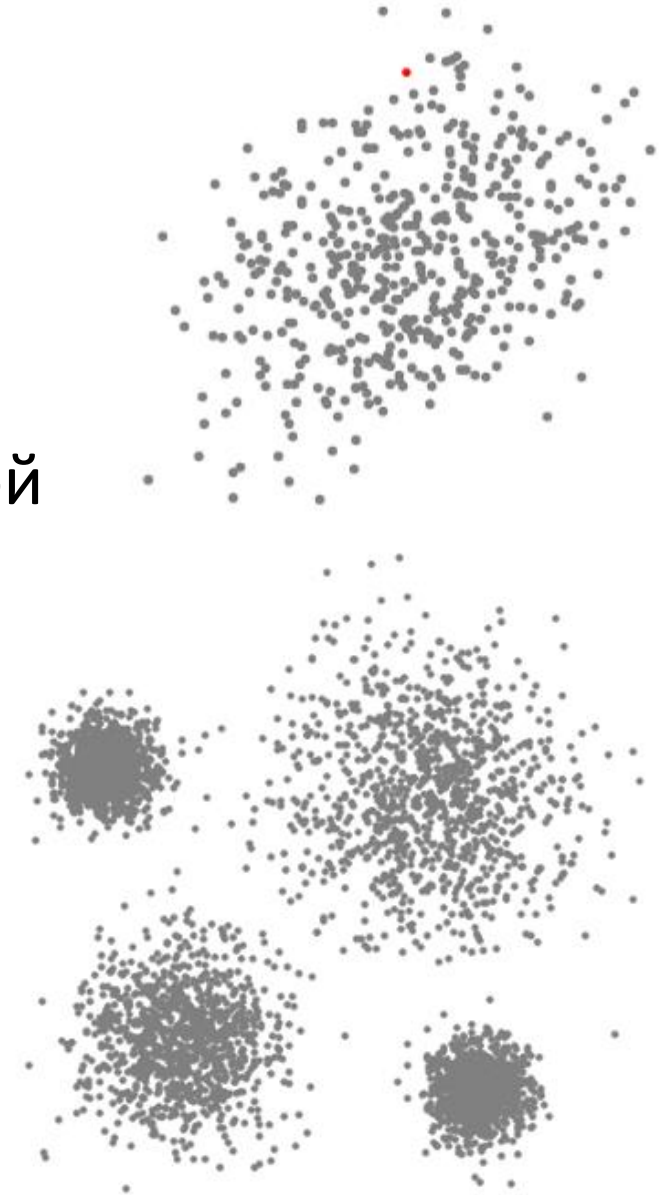
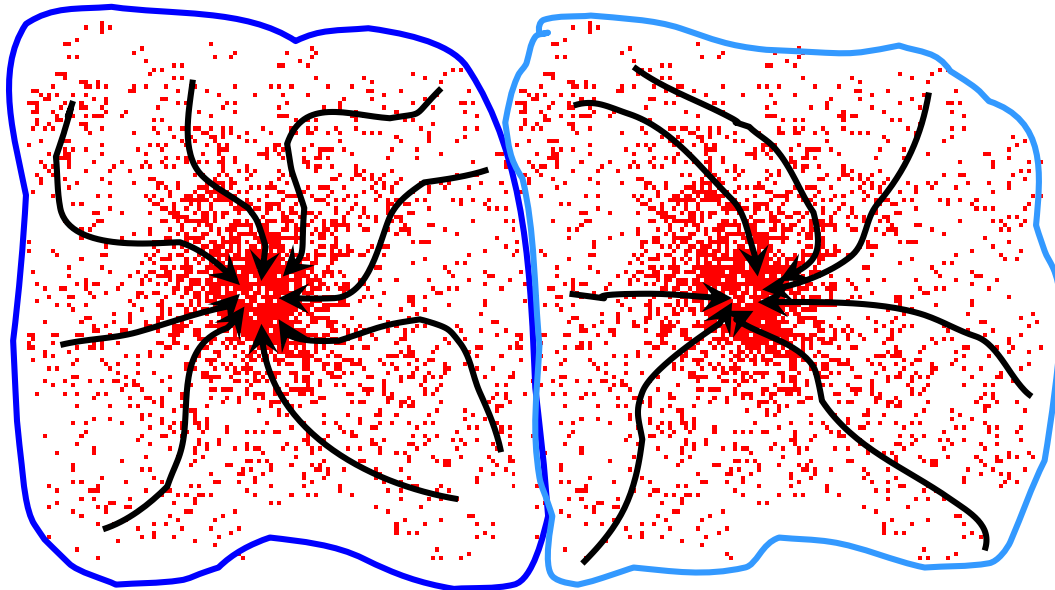
Real Modality Analysis



Голубые точки данных перемещались по окнам в одну сторону

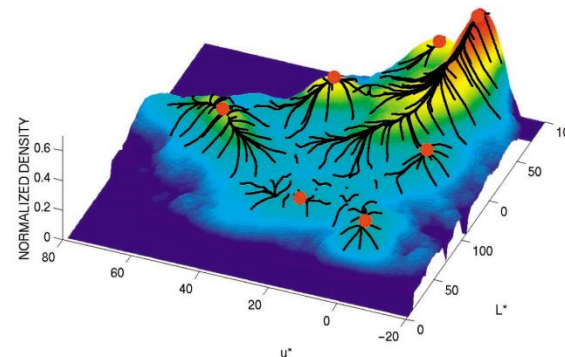
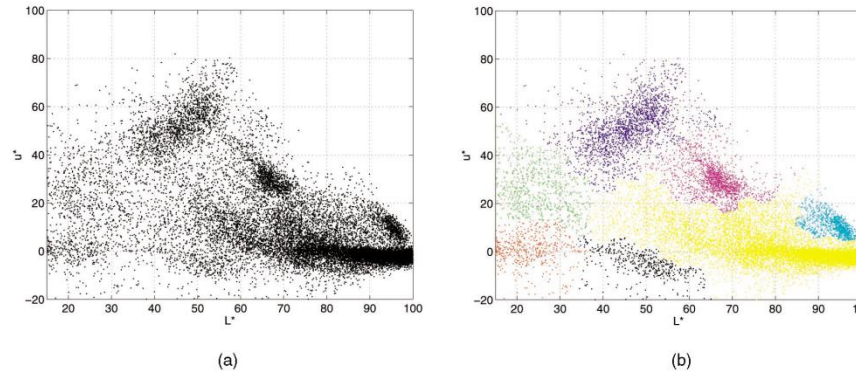
Mean-Shift Clustering

- Кластер: все точки данных в бассейне аттракционов режима
- Привлекательный бассейн: область, для которой все траектории ведут в один и тот же режим.

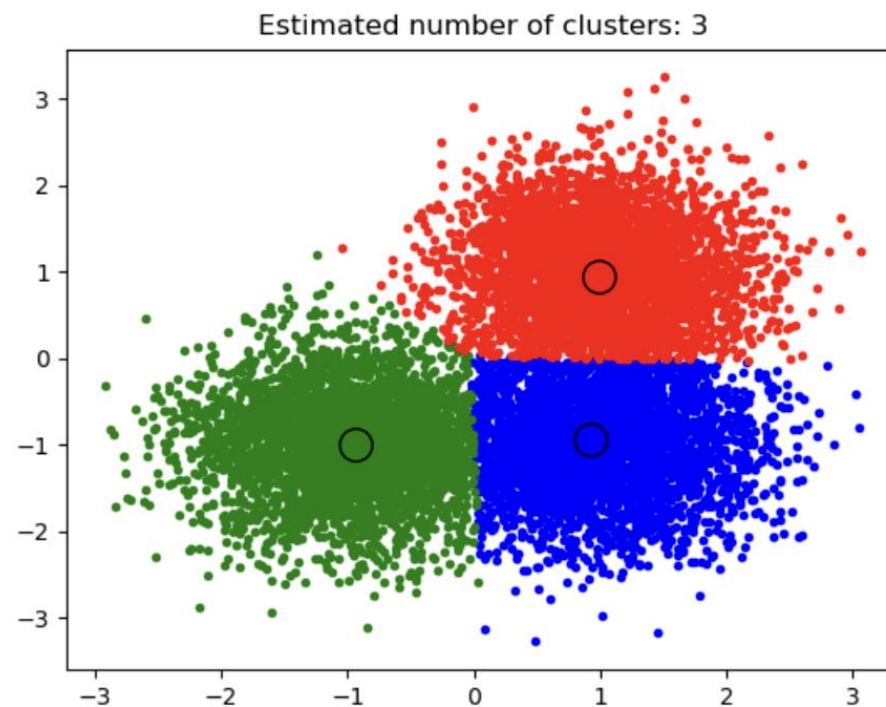
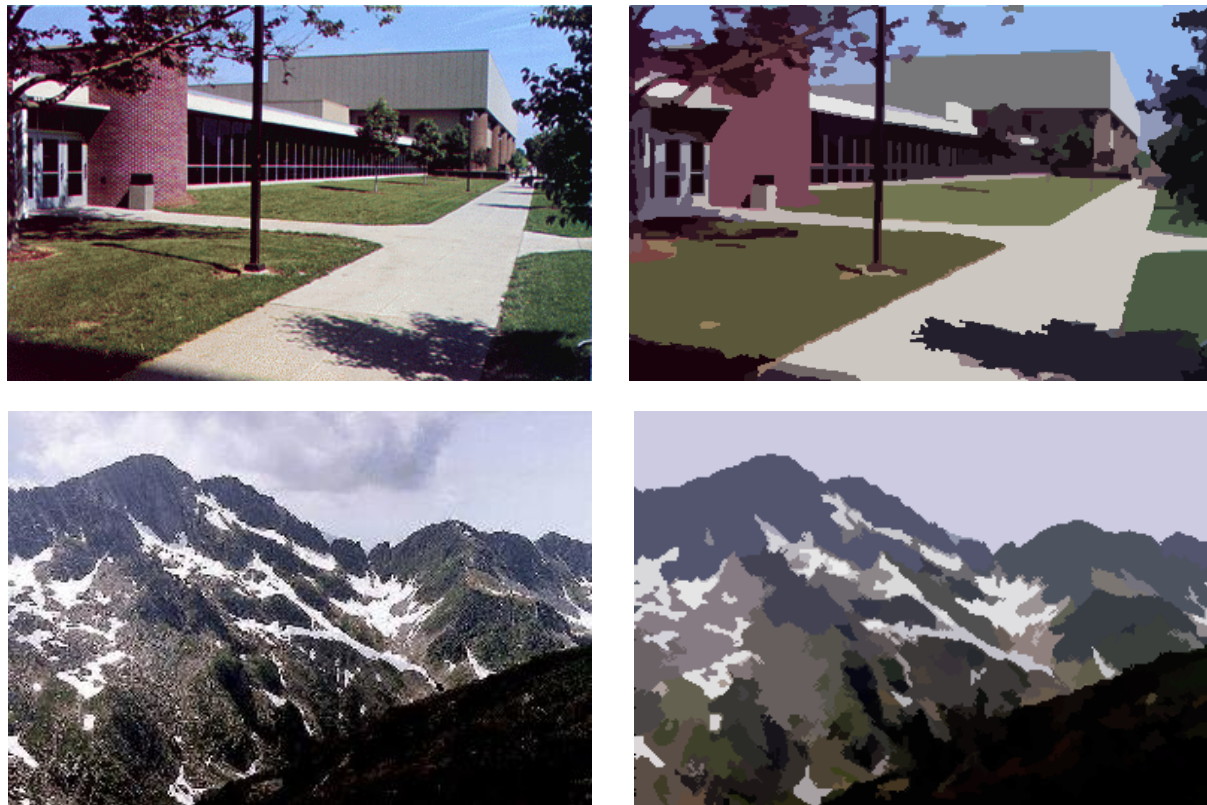


Mean-Shift Clustering/Segmentation

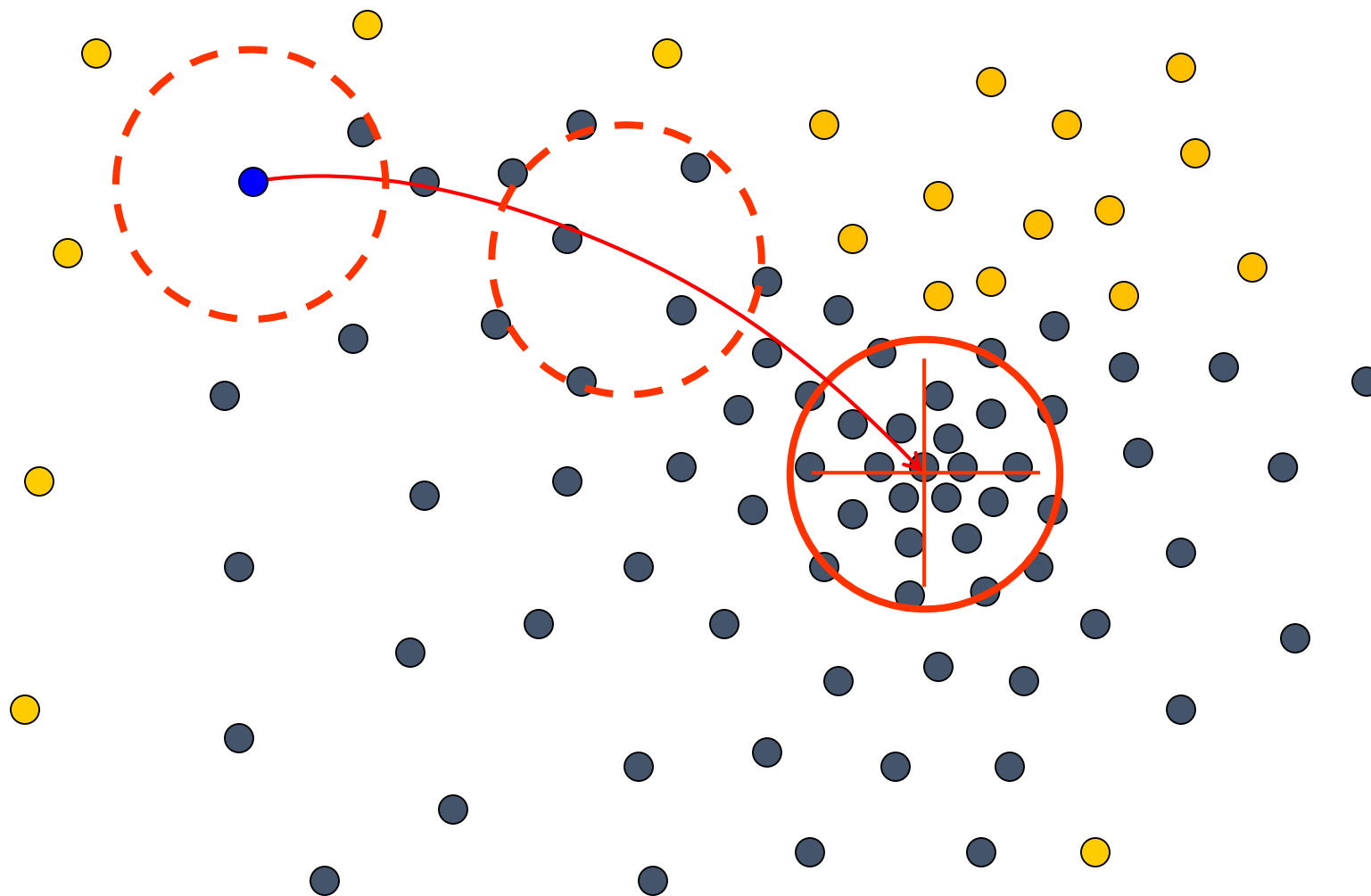
- Находить особенности (цвет, градиенты, текстура и т.д.).
- Инициализируйте окна в отдельных пикселях.
- Выполните среднее смещение для каждого окна до сходимости
- Объединить окна, которые заканчиваются в одном и том же "пике" или режиме.



Mean-Shift Segmentation Results

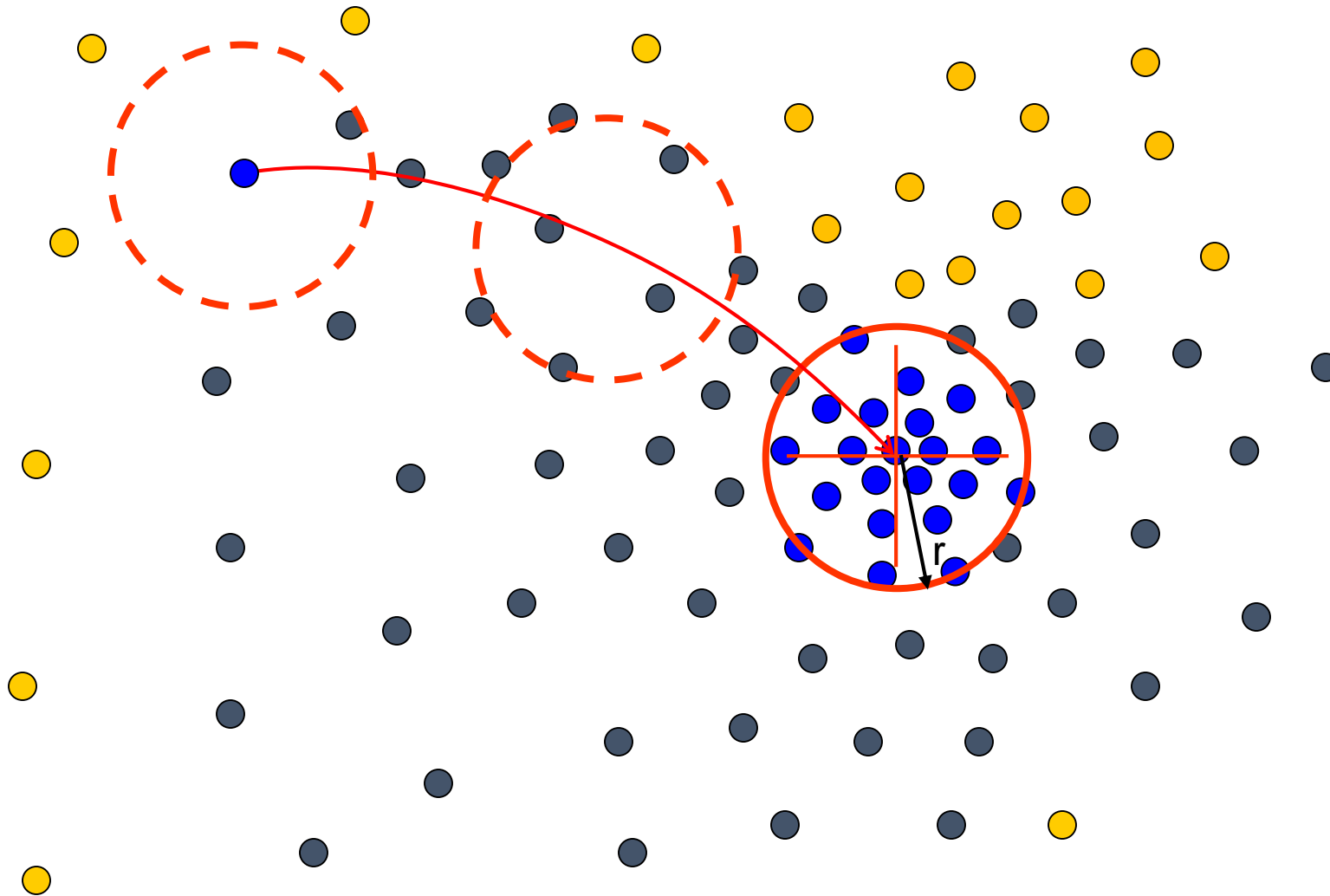


Проблема: Вычислительная сложность



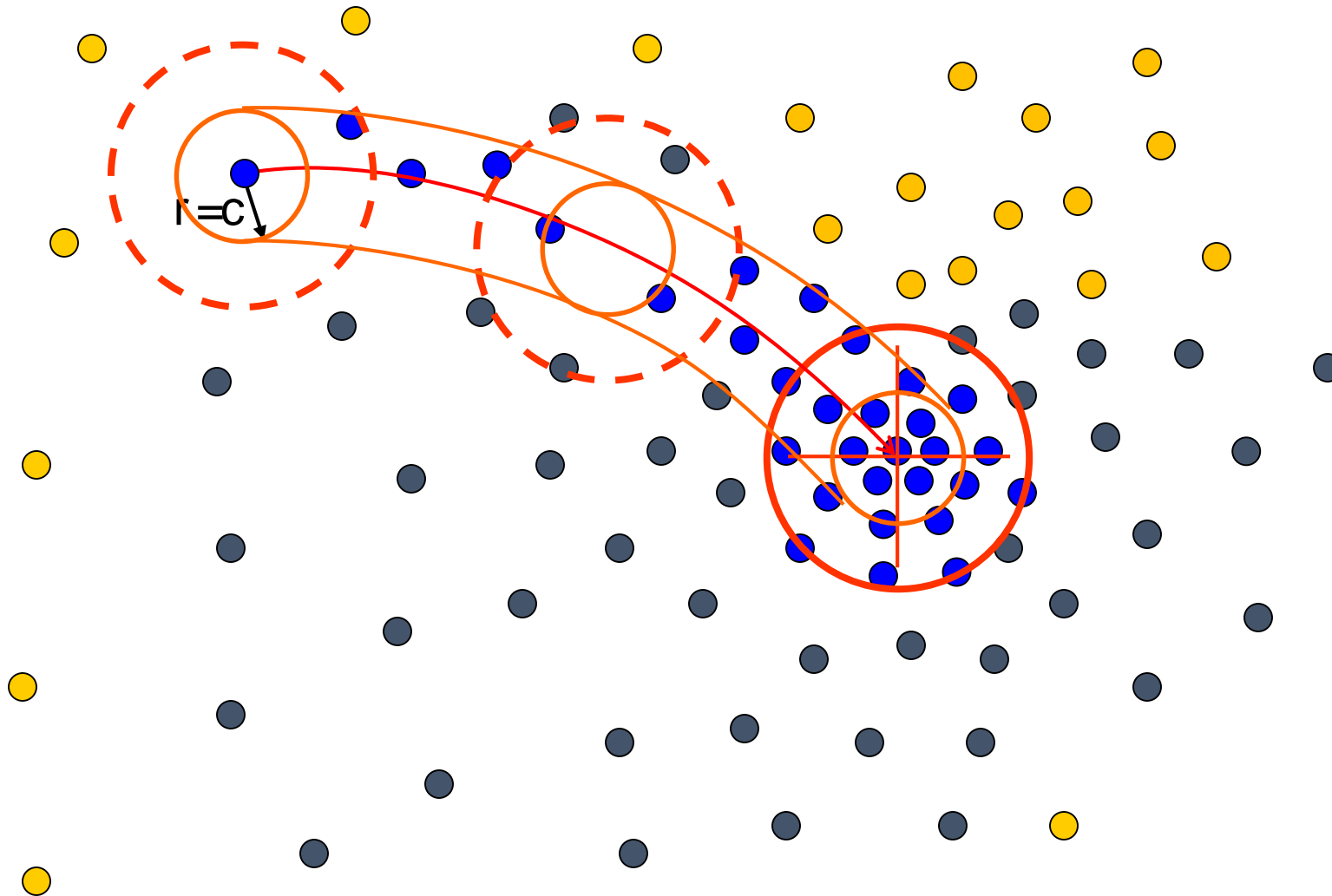
- Нужно переставить много окон...
- Многие вычисления будут излишними.

Скорость сходимости



1. Придать режим работы всем точкам, находящимся в радиусе r от конечной точки.

Скорость сходимости



2. Присвойте всем точкам в радиусе r/c пути поиска режим -> уменьшить количество точек данных для поиска.

Технические нюансы

Given n data points $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$, the multivariate kernel density estimate using a radially symmetric kernel¹ (e.g., Epanechnikov and Gaussian kernels), $K(\mathbf{x})$, is given by,

$$\hat{f}_K = \frac{1}{nh^d} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{h}\right), \quad (1)$$

where h (termed the *bandwidth* parameter) defines the radius of kernel. The radially symmetric kernel is defined as,

$$K(\mathbf{x}) = c_k k(\|\mathbf{x}\|^2), \quad (2)$$

where c_k represents a normalization constant.

Другие ядра

A kernel is a function that satisfies the following requirements :

1. $\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) = 1$

2. $\phi(x) \geq 0$

Some examples of kernels include :

1. Rectangular $\phi(x) = \begin{cases} 1 & a \leq x \leq b \\ 0 & else \end{cases}$

2. Gaussian $\phi(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

3. Epanechnikov $\phi(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1 - x^2) & if |x| \leq 1 \\ 0 & else \end{cases}$

Технические нюансы

Взять производную: $\hat{f}_K = \frac{1}{nh^d} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{h}\right)$

$$\nabla \hat{f}(\mathbf{x}) = \underbrace{\frac{2c_{k,d}}{nh^{d+2}} \left[\sum_{i=1}^n g\left(\left\|\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{h}\right\|^2\right) \right]}_{\text{term 1}} \underbrace{\left[\frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i g\left(\left\|\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{h}\right\|^2\right)}{\sum_{i=1}^n g\left(\left\|\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{h}\right\|^2\right)} - \mathbf{x} \right]}_{\text{term 2}}, \quad (3)$$

where $g(x) = -k'(x)$ denotes the derivative of the selected kernel profile.

- Term 1: это пропорционально оценке плотности при \mathbf{x} (аналогично уравнению 1 - два слайда назад).
- Term 2: это вектор среднего сдвига, который указывает в направлении максимальной плотности.

Comaniciu & Meer, 2002

Технические нюансы

Наконец, процедура среднего сдвига от заданной точки \mathbf{x}^t :

1. Компьютер средний вектор сдвига \mathbf{m} :

$$\mathbf{m}_{h,G}(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i g\left(\left\|\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_i}{h}\right\|^2\right)}{\sum_{i=1}^n g\left(\left\|\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_i}{h}\right\|^2\right)} - \mathbf{x},$$

2. Переведите окно плотности:

$$\mathbf{x}_i^{t+1} = \mathbf{x}_i^t + \mathbf{m}(\mathbf{x}_i^t).$$

3. Итерируйте шаги 1 и 2 до сходимости.

$$\nabla f(\mathbf{x}_i) = 0.$$

Итоги: Mean-Shift

- **Плюсы:**

- Общий, независимый от применения инструмент
- Не содержит моделей, не принимает никакой предшествующей формы (сферической, эллиптической и т.д.) на кластеры данных
- Только один параметр (размер окна h)
 - h имеет физическое значение (в отличие от k -средних)
- Находит переменное количество режимов
- Надежен на прорыв

- **Минусы:**

- Выход зависит от размера окна
- Выбор размера окна (полосы пропускания) не тривиален
- Вычислительно (относительно) дорого (~ 2 с/изображение)
- Плохо масштабируется в зависимости от размера художественного пространства

План лекции

- Введение в кластеризацию и сегментацию
- Agglomerative clustering
- Mean-shift clustering
- **DBSCAN**
- Визуализация кластеров – t-SNE

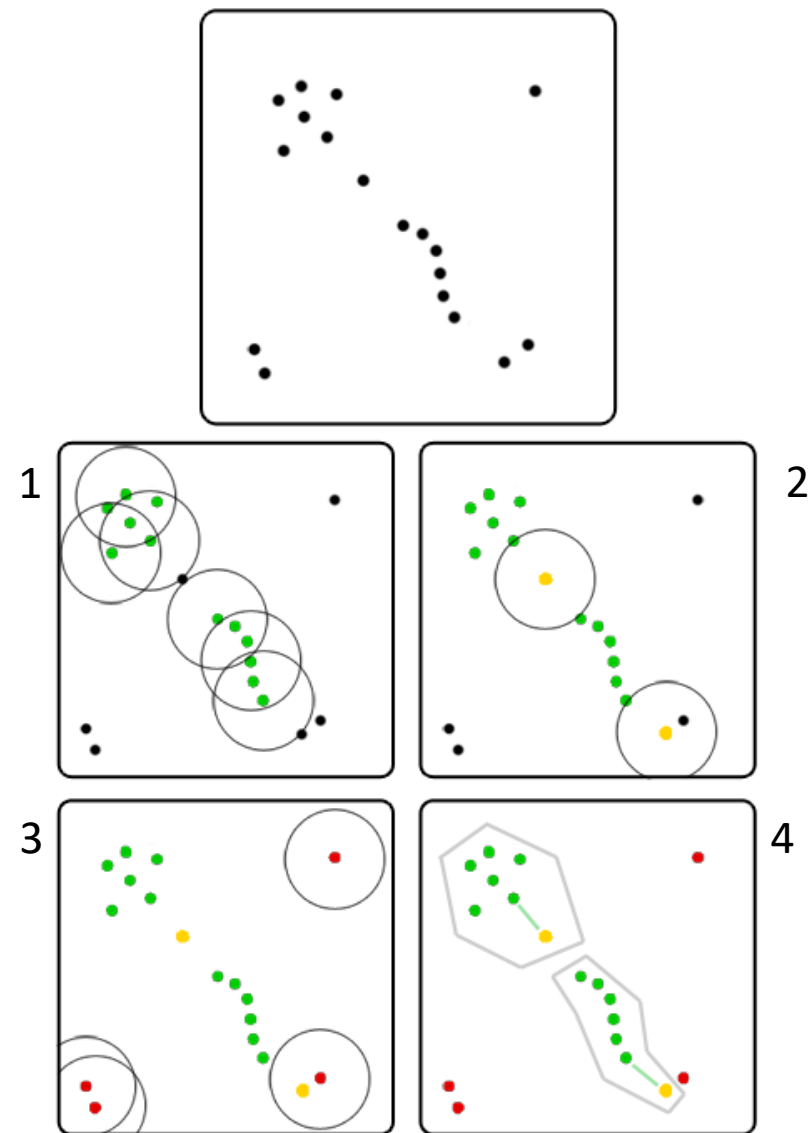
DBSCAN

Алгоритм на основе оценки плотности объектов

Пусть задана симметричная функция расстояния $\rho(x, y)$, ϵ – радиус окрестности и m – количество соседей.

1. Назовём область $E(x)$: $\forall y: \rho(x, y) \leq \epsilon$
2. Корневой объект степени m – объект в области которого не менее m объектов ($|E(x)| \geq m$)
3. Объект p непосредственно плотно-достижим из объекта q , если $p \in E(q)$ и q – корневой объект
4. Объект p плотно-достижим из объекта q , если $\exists p_1, p_2, \dots, p_n, p_1 = q, p_n = p: \forall i \in 1 \dots n - 1: p_{i+1}$ непосредственно плотно-достижим из p_i

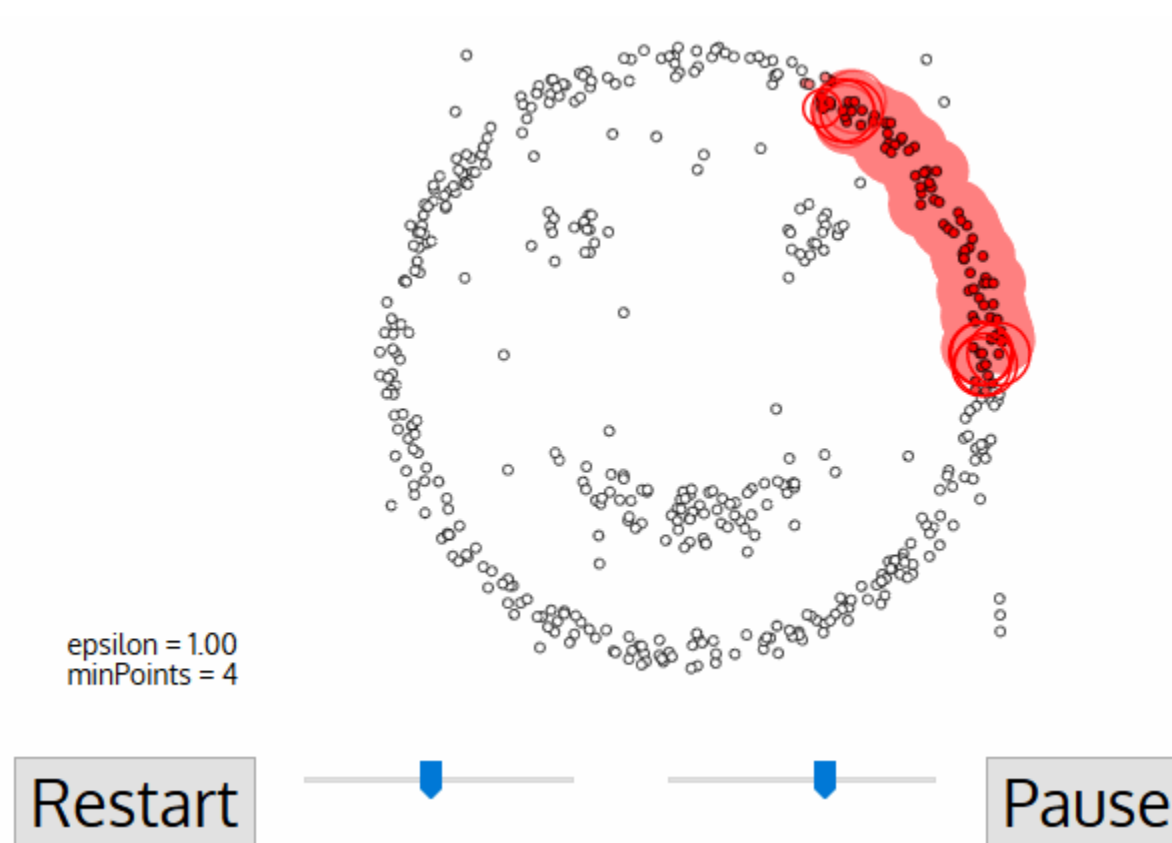
Выберем какой-нибудь корневой объект p из датасета, пометим его и поместим всех его непосредственно плотно-достижимых соседей в список обхода. Теперь для каждого q из списка: пометим эту точку, и, если она тоже корневая, добавим всех её соседей в список обхода.



- Core points (зеленые точки)
- Noise points (красные точки)
- Border points (желтые точки)

DBSCAN

Визуализация сходимости DBSCAN



DBSCAN

Используйте DBSCAN, когда

- Заранее известна функция близости, симметричная, желательно, не очень сложная. KD-Tree оптимизация часто работает только с евклидовым расстоянием.
- Вы ожидаете увидеть сгустки данных экзотической формы: вложенные и аномальные кластеры, складки малой размерности.
- Плотность границ между сгустками меньше плотности наименее плотного кластера. Лучше если кластеры вовсе отделены друг от друга.
- Сложность элементов датасета значения не имеет. Однако их должно быть достаточно, чтобы не возникало сильных разрывов в плотности (см. предыдущий пункт).
- Количество элементов в кластере может варьироваться сколь угодно.
- Количество выбросов значения не имеет (в разумных пределах), если они рассеяны по большому объёму.
- Количество кластеров значения не имеет.

План лекции

- Введение в кластеризацию и сегментацию
- Agglomerative clustering
- Mean-shift clustering
- DBSCAN
- Визуализация кластеров – t-SNE

t-SNE

Алгоритм снижения размерности и визуализации многомерных данных

Задача построить отображение распределение исходных многомерных данных p в 2D/3D распределение q так, чтобы отображение сохраняло пропорцию расположение объектов в распределении

1. Преобразование многомерной евклидовой дистанции **для исходных данных** в условные вероятности, отражающие сходство точек:

$$p_{j|i} = \frac{\exp(-\|x_i - x_j\|^2 / 2\sigma_i^2)}{\sum_{k \neq i} \exp(-\|x_i - x_k\|^2 / 2\sigma_i^2)}$$

Дисперсия для каждой точки σ_i определяют из минимума дисперсии:

$$\text{Perp}(P_i) = 2^{H(P_i)} \quad H(P_i) = - \sum_j p_{j|i} \log_2 p_{j|i}$$

2. Преобразование многомерной евклидовой дистанции **для точек отображения** в условные вероятности, отражающие сходство точек:

$$q_{j|i} = \frac{\exp(-\|y_i - y_j\|^2)}{\sum_{k \neq i} \exp(-\|y_i - y_k\|^2)}$$

3. **Оптимизационная задача** – сходство двух распределение по мере Кульбака-Лейбнера:

$$\text{Cost} = \sum_i KL(P_i \parallel Q_i) = \sum_i \sum_j p_{j|i} \log \frac{p_{j|i}}{q_{j|i}} \quad \frac{\partial \text{Cost}}{\partial y_i} = 2 \sum_j (p_{j|i} - q_{j|i} + p_{i|j} - q_{i|j})(y_i - y_j)$$

4. **Градиентный спуск** с моментом:

$$Y^{(t)} = Y^{(t-1)} + \eta \frac{\partial \text{Cost}}{\partial Y} + \alpha(t) (Y^{(t-1)} - Y^{(t-2)}),$$

Преобразования для улучшение сходимости (t-SNE):

$$q_{ij} = \frac{(1 + \|y_i - y_j\|^2)^{-1}}{\sum_{k \neq l} (1 + \|y_k - y_l\|^2)^{-1}} \quad p_{ij} = \frac{p_{j|i} + p_{i|j}}{2n},$$

$$\text{Cost} = KL(P \parallel Q) = \sum_i \sum_j p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{q_{ij}},$$

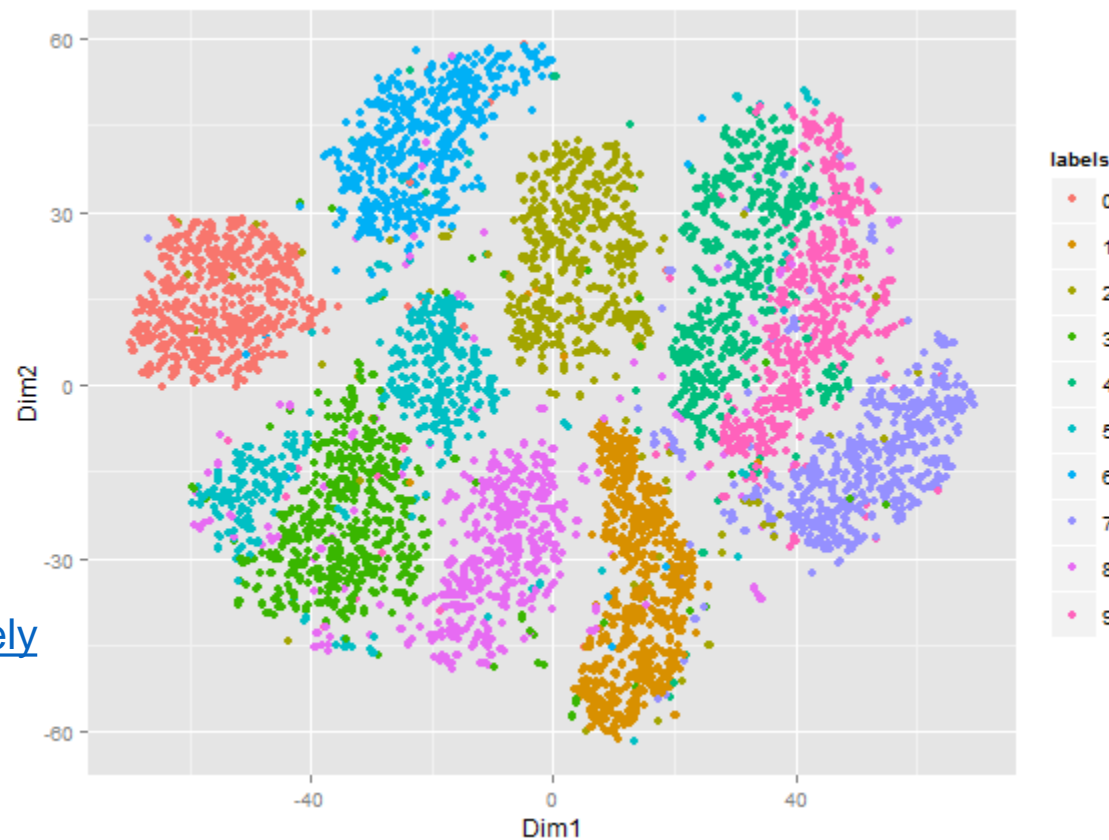
$$\frac{\partial \text{Cost}}{\partial y_i} = 4 \sum_j (p_{ij} - q_{ij})(y_i - y_j)(1 + \|y_i - y_j\|^2)^{-1}$$

t-SNE

Визуализация распределения рукописных цифр (R^{64})
на плоскости (R^2)



Больше примеров в статье: [How to Use t-SNE Effectively](#)



Заключение

- Рассмотрены алгоритмы кластеризации
 - Agglomerative
 - Mean-shift
 - DBSCAN
 - t-SNE