Лабораторная работа №2

Численное вычисление интеграла

Задача численного интегрирования состоит в том, чтобы найти численное значение определенного интеграла

$$I = \int_b^a f(x)dx, \quad (1)$$

где $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке интегрирования $[a,b]$. Формулы для решения этой задачи называются квадратурными. Квадратурная формула позволяет вместо точного значения интеграла (1) найти некоторое его приближенное значение $\tilde{I}$. Разность точного и приближенного значений интеграла называется абсолютной погрешностью квадратурной формулы (или численного метода),

$$R = I - \tilde{I}.$$

Квадратурные формулы используют для вычисления интеграла (1) значения $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, …, $y_n = f(x_n)$ функции $f(x)$ в точках $x_0, x_1, ..., x_n$ отрезка $[a,b]$. Квадратурная формула имеет вид

$$I \approx \sum_{i=0}^{n} c_i y_i, \quad (2)$$

где c_i - некоторые коэффициенты, которые называют весовыми.

Напомним геометрический смысл определенного интеграла: I выражает площадь соответствующей криволинейной трапеции (фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a, x = b$ и осью $0x$).

Рассмотрим два подхода к решению задачи численного интегрирования.

1) Разобьем отрезок интегрирования $[a,b]$ на n частичных отрезков, вычислим интегралы на частичных отрезках. Интеграл на всем отрезке интегрирования $[a,b]$ равен сумме интегралов на частичных отрезках (свойство аддитивности определенного интеграла).
2) Вычислим $\int_a^b f(x)dx$, заменяя подынтегральную функцию $f(x)$ на всем отрезке интегрирования $[a,b]$ интерполяционным полиномом Лагранжа $P_n(x)$, построенным на $n+1$ узлах $x_0, x_1, ..., x_n$.

Обозначим через M_n максимальное по модулю значение производной n - го порядка функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$:

$$M_n = \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(n)}(x) \right|$$

Рассмотрим варианты решения данной задачи.

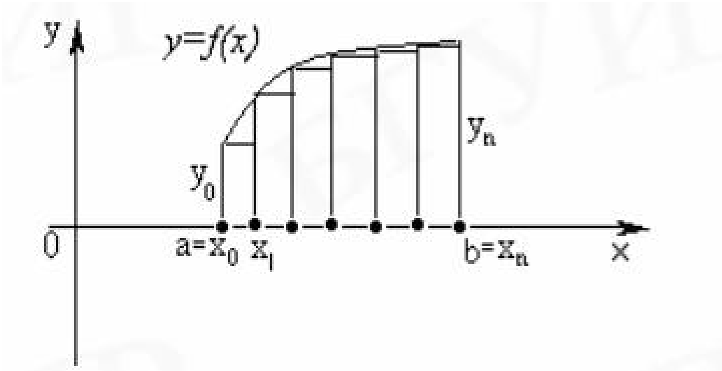
Формулы прямоугольников

Для простоты разобьем отрезок интегрирования $[a,b]$ на n частей точками, равноудаленными друг от друга: $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ так, что будет выполняться равенство: $x_k = x_0 + kh, k = \overline{0,n}$, где $h = \frac{b-a}{n}$.

Аппроксимируем площадь под графиком функции $f(x)$ суммой площадей прямоугольников с основанием h и высотой $f(\xi)$, где $x_k \le \xi \le x_{k+1}$.

Причем, если взять $\xi = x_k, k = \overline{0,n-1}$ (левую крайнюю точку частичного отрезка), то получим формулу **левых прямоугольников**:

$$\int_b^a f(x)dx \approx h(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}) \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}) = h\sum_{k=0}^{n-1} y_k .$$



Мы видим, что весовые коэффициенты формулы левых прямоугольников в случае равностоящих узлов равны h, кроме коэффициента при y_n, который равен 0.

Абсолютная погрешность формулы левых прямоугольников определяется выражением:

$$|R| \le \frac{M_1(b-a)}{2} h ,$$

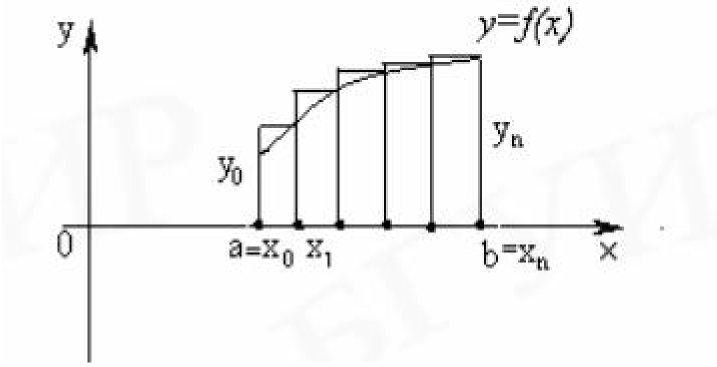
где $M_1 = \max\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|$.

Мы видим, что погрешность метода левых прямоугольников имеет тот же порядок, что шаг интегрирования h (первый порядок по h). Поскольку для функций вида $f(x) = const$ $M_1 = 0$, то для таких функций формула левых прямоугольников является точной.

А если взять $\xi = x_k, k = \overline{1,n}$ (правую крайнюю точку частичного отрезка), то получим формулу **правых прямоугольников**:

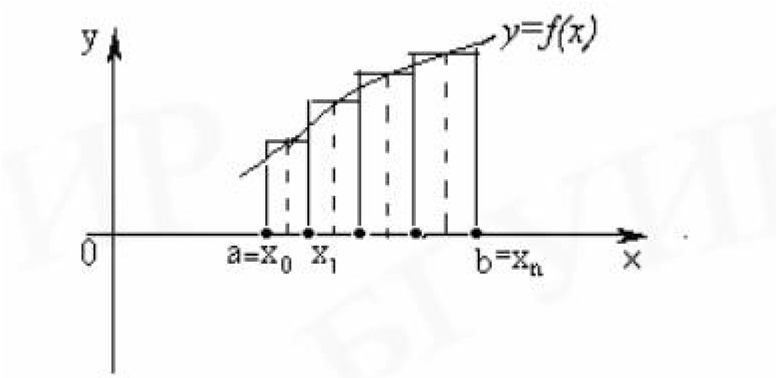
$$\int_a^b f(x)dx \approx h(y_1 + y_2 + ... + y_n) \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + ... + y_n) = h\sum_{k=1}^{n} y_k .$$

Погрешность метода правых прямоугольников имеет тот же порядок, что и шаг интегрирования h.



В случае, когда мы берем среднюю точку $\xi = \frac{(x_{k-1} + x_k)}{2}, k = \overline{1,n}$, получаем формулу средних прямоугольников:

$$\int_b^a f(x) \approx h[f(\overline{x_1}) + ... + f(\overline{x_1})], \quad \overline{x_k} = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}.$$



Абсолютная погрешность формулы средних прямоугольников оценивается выражением:

$$|R| \le \frac{M_2(b-a)}{24} h^2,$$

Погрешность формулы средних прямоугольников имеет второй порядок по h ($0(h^2)$).

Наиболее употребительной является формула средних прямоугольников.

Формула трапеций

Заменим площадь криволинейной трапеции суммой площадей прямолинейных трапеций, построенных на частичных отрезках $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$. Площадь элементарной прямолинейной трапеции равна:

$$s_k = \frac{y_k + y_{k+1}}{2} h ,$$

а интеграл равен:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(\frac{y_0 + y_m}{2} + y_1 + ... + y_{n-1}) \approx \frac{b-a}{n}(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + ... + y_{n-1}) = h(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} y_k) .$$

Оценка абсолютной погрешности на всем отрезке интегрирования определяется выражением:

$$|R| = \frac{M_2(b-a)}{12}h^2$$

Погрешность метода трапеций имеет тот же порядок, что и h^2. Для функций вида $f(x) = c_0 + c_1 x$ (полиномов первой степени) формула трапеций является точной.

Формула Симпсона (формула парабол).

Теперь аппроксимируем функцию на элементарном отрезке параболой. По сравнению с предыдущими способами вдвое уменьшим расстояние между узлами $h = \frac{b-a}{2n}$. Таким образом, получаем $2n$ частичных отрезков и $(2m+1)$ узлов интегрирования. Значения функции в узлах: $y_0, y_1, ..., y_{2n}$. Квадратурная формула Симпсона имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + ... + y_{2n-2}) + 4(y_1 + ... + y_{2n-1})] = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_{2n} + 2\sum_{k=2}^{2n-2} y_{2k-2} + 4\sum_{k=1}^{2k-1} y_{2k-1} \right)$$

Абсолютная погрешность формулы Симпсона оценивается выражением:

$$|R| \le \frac{M_4(b-a)}{180}h^4$$

Абсолютная погрешность формулы Симпсона имеет тот же порядок, что и h^4 (четвертый порядок точности). Формула Симпсона точна для полиномов степени $n \le 3$.

При приближенном вычислении определенного интеграла на компьютере оценка точности вычислений по приведенным выше формулам для погрешностей, как правило, не применяется ввиду трудности нахождения M_n. В таких случаях используют *правило Рунге*.

Правило Рунге основано на соотношении:

$$\frac{\left|\tilde{I}_{2n} - \tilde{I}_{2n}\right|}{2^p - 1} < \varepsilon, \qquad (3)$$

где $\tilde{I}_n$, $\tilde{I}_{2n}$ - приближенные значения определенного интеграла, вычисленные при разбиении отрезка интегрирования на *n* и *2n* частей соответственно; p - порядок метода; ε - заданная точность. При каждом последующем приближении число отрезков разбиения удваивается. Если условие ( ) выполнено, за приближенное значение интеграла принимается значение $\tilde{I}_{2n}$, т.е. $I = \tilde{I}_{2n} \pm \varepsilon$.Так как оценка осуществляется после вычисления, то она является апостериорной.

Напомним порядки методов (по h):

Задание:

1. Реализовать программу вычисления приблизительным методом. Частота n = 10, 20, 50,100, 500 (количество отрезков на которые разбивается интервал интегрирования).

2. Сравнить результат работы реализованного метода с разными частотами.

№Интеграла:

1. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$.
2. $\int_1^2 \frac{x}{1+x^2} dx$.
3. $\int_0^{\pi} x \sin x dx$.
4. $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$.
5. $\int_0^1 x e^{2x} dx$.

Методами:

1. левых прямоугольников.
2. правых прямоугольников.
3. средних прямоугольников.
4. трапеций.

Варианты

№ Варианта	№ Интеграла	№ Метода
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	1
6	1	2
7	2	3
8	3	4
9	4	1
10	5	2
11	1	3
12	2	4
13	3	2
14	1	4
15	2	3

16	3	2
17	4	1
18	5	4
19	1	3
20	2	2
21	3	1
22	4	4
23	5	3
24	1	2
25	2	1
26	3	4
27	4	3