МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ

«Брестский государственный технический университет»

Кафедра высшей математики

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Методические рекомендации и варианты заданий по курсу «Высшая математика» для студентов технических специальностей.

Брест 2002

1-й семестр

1. Определители 2,3 и п-го порядков. Их свойства, вычисление.
2. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом определителей.
3. Матрицы. Действия над ними.
4. Обратная матрица, ее нахождение.
5. Решение систем линейных алгебраических уравнений матричным способом.
6. Метод Гаусса. Элементарные преобразования матриц.
7. Решение однородных систем линейных алгебраических уравнений.
8. Собственные векторы и собственные значения матриц.
9. Решение произвольных линейных систем. Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли.
10. Векторы на плоскости и в пространстве. Линейные операции. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис. Разложение вектора по базису в R_2, R_3.
11. Скалярное произведение векторов, свойства, выражение через координаты перемножаемых векторов.
12. Векторное произведение векторов, свойства, выражение через координаты перемножаемых векторов.
13. Смешанное произведение векторов, свойства, выражение через координаты перемножаемых векторов.
14. Евклидово пространство R_n. Длина вектора, скалярное произведение. Неравенство Коши-Буняковского, неравенство треугольника.
15. Прямая в R_2. Различные виды уравнений прямой. Угол между двумя прямыми. Условия перпендикулярности, параллельности. Расстояние от точки до прямой.
16. Окружность.
17. Эллипс: вывод уравнения, исследование формы, параметры эллипса, его директрисы.
18. Гипербола: вывод уравнения, исследование формы, директрисы и асимптоты гиперболы.
19. Парабола: вывод уравнения, исследование формы, параметр параболы, ее директриса.
20. Преобразование координат (параллельный перенос, поворот осей координат).
21. Уравнение плоскости (общее, нормальное). Расстояние от точки до плоскости.
22. Взаимное расположение двух плоскостей (аналитические условия).

23. Прямая в R_3. Различные виды уравнений прямой.
24. Взаимное расположение прямой и плоскости (аналитические условия).
25. Взаимное расположение двух прямых (аналитические условия).
26. Канонические уравнения поверхностей второго порядка. Исследование формы поверхностей методом параллельных сечений.
27. Функции (основные, элементарные, гиперболические). Их свойства и графики.
28. Предел числовой последовательности.
29. Предел функции.
30. Свойства бесконечно малых функций.
31. Основные теоремы о пределах функции.
32. Замечательные пределы.
33. Непрерывность функции в точке. Действия над непрерывными функциями.
34. Точки разрыва функции, их классификация.
35. Свойства непрерывных на отрезке функций.
36. Определение производной. Ее геометрический и механический смысл.
37. Теоремы о производных.
38. Производная сложной, неявной, параметрической функций.
39. Обратные функции и их дифференцирование.
40. Производные обратных тригонометрических функций.
41. Таблица основных производных.
42. Теорема о непрерывности дифференцируемой функции.
43. Дифференциал функции, его свойства. Применение в приближенных вычислениях.
44. Производные и дифференциалы высших порядков.
45. Теоремы Ферма, Ролля, Коши и Лагранжа.
46. Правило Лопиталя.
47. Формула Тейлора.
48. Формула Маклорена для основных элементарных функций.
49. Условия монотонности функции.
50. Необходимое и достаточные условия локального экстремума.
51. Глобальные экстремумы функции.
52. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба кривой.
53. Асимптоты кривой.
54. Векторные функции скалярного аргумента, их дифференцирование.
55. Кривизна плоской и пространственной кривых.
56. Различные формы записи комплексного числа.
57. Основные действия над комплексными числами (сложение, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня).

Перечень основных задач по темам первого семестра.

Вычислить определители:

1. $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$, 2. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

Выполнить действия над матрицами:

3. $A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; 4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = ?$

Решить системы линейных алгебраических уравнений методом определителей, методом Гаусса и матричным методом.

5. $\begin{cases} x - y + 3z = 13, \\ 2x + y + z = 0, \\ 3x - 2y - 4z = -15. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x - y + z - t = 1, \\ 2x - y - 3t = 2, \\ 3x - z + t = -3. \\ 2x + 2y - 2z + 5t = -6 \end{cases}$ 7. $\begin{cases} x + 5y + z = 0, \\ 2x - 4y - 3z = -1, \\ 3x + 4y + 2z = 8. \end{cases}$

8. *Даны векторы:* $\vec{a} = (3;-6;-1)$, $\vec{b} = (1;4;-5)$, $\vec{c} = (3;-4;12)$. *Найти:*
   а) проекцию вектора $\vec{a} + \vec{b}$ *на вектор* $\vec{c}$ *;*
   б) $\vec{a}\cdot\vec{b} + 4\vec{b}\cdot\vec{c}$;
   в) $\vec{a}\times\vec{b} + 2\vec{a}\times\vec{c} - 3\vec{b}\times\vec{c}$;
   г) смешанное произведение трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

9. *Доказать, что четыре точки* $A(1;2;-1), B(0;1;5), C(-1;2;1)$ *и* $D(2;1;3)$ *лежат в одной плоскости. Составить уравнение этой плоскости.*

10. *Найти собственные векторы и собственные числа матриц:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

11. *Найти расстояние от точки M(3;1;-1) до плоскости:*

$$22x + 4y - 20z - 45 = 0.$$

12. *Определить двугранный угол, образованный плоскостями*

$$6x + 3y - 2z = 0 \quad \text{и} \quad x + 2y + 6z - 12 = 0.$$

13. *Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат, перпендикулярную к плоскости* $5x-2y+5z-10=0$ *и образующую с плоскостью* $x-4y-8z+12=0$ *угол* 45^0.

14. *Даны вершины треугольника* ABC: $A(4;4)$, $B(-6;-1)$ *и* $C(-2;-4)$. *Записать уравнения биссектрисы внутреннего угла треугольника при вершине С; медианы* AD *и высоты* BH.

15. *Даны уравнения двух сторон прямоугольника* $3x-2y-5=0$ *и* $2x+3y+7=0$ *и одна из его вершин* $A(-2;1)$. *Вычислить площадь этого прямоугольника.*

16. *Проверить, пересекаются ли прямые* $\frac{x}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-2}$ *и* $\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{1}$. *Записать уравнение плоскости, в которой они лежат.*

17. *Найти точку, симметричную точке* $P(4;3;10)$ *относительно прямой* $x=1+2t,\ y=2+4t,\ z=3+5t$.

18. *Какую линию определяют следующие уравнения:*

а) $3x^2+3y^2-2x+7y+1=0$;

б) $16x^2+25y^2-32x+50y-359=0$;

в) $x^2-y^2-6x+10=0$;

г) $x=2y^2-12y+14$;

д) $x=1-\frac{1}{4}\sqrt{y-3}$;

е) $4x^2-y^2+32x+6y+55=0$.

19. *Определить тип указанной поверхности и построить ее:*

а) $z=2+x^2+y^2$;

б) $x^2+y^2=2x$;

в) $y^2=x^2+z^2$;

г) $x^2-y^2-z^2-4=0$;

д) $x^2=4z$.

20. *Найти пределы:*

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2+(x-1)^2}$; *б*) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^3+2x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$; *б*) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}(1+tg^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$; *е*) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{3x^2}}$.

21. Исследовать на непрерывность функции:

а) $y=\begin{cases}x^2-1, \text{ если } x\le0,\\ x+2, \text{ если } x>0.\end{cases}$ *б*) $y=\begin{cases}2-x, \text{ если } x>0,\\ 2^{\frac{1}{x+1}}, \text{ если } x<0.\end{cases}$

в) $y=\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}|x|}$, *г*) $y=\begin{cases}x+2, \text{ если } x\le-1,\\ x^2+1, \text{ если } -1<x\le1,\\ 3-x, \text{ если } x>1.\end{cases}$

22. Найти производные функций:

а) $y=\ln\dfrac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}}+2arctg\sqrt{\sin x}$; *б*) $y=7^{\frac{x\sin x}{1-x}}$;

в) $y=\sqrt{x^2+\sqrt{x^4-5}}$; *г*) $y=\dfrac{tgx}{\sqrt{1+tg^2x}}$; *д*) $y=\dfrac{tgx}{\sqrt{x}}$;

е) $\begin{cases}x=\arcsin t,\\ y=\ln(1-t^2),\end{cases}$ $t\in(-1;1)$, $y'_x=?$ $y''_{xx}=?$

ж) $xy=arctg\dfrac{y}{x}$, $y'=?$ $y''=?$

23. Записать уравнения касательной и нормали в точке $M_0(2;2)$ *к кривой*

$x=\dfrac{1+t}{t^3}$, $y=\dfrac{3}{2t^2}+\dfrac{1}{2t}$.

24. Показать, что функция $y=c_1e^{2x}\sin3x+c_2e^{2x}\cos3x$ *удовлетворяет уравнению* $y''-4y'+13y=0$ (c_1 *и* $c_2-\forall$ *const*).

25. Используя правило Лопиталя, найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to0}(x+e^x)^{1/x}$; *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi-2arctgx)\cdot\ln x$; *в*) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}$.

26. Провести полное исследование функций и построить их графики:

а) $y=\dfrac{x^4}{4}-2x^3+\dfrac{11}{2}x^2-6x+\dfrac{9}{4}$; *б*) $y=\dfrac{2x^2-9}{x+2}$; *в*) $y=\dfrac{x^2}{e^x}$.

Аттестационная работа

«Дифференцирование»

Теоретические вопросы

1. Определение, геометрический и механический смысл производной.
2. Правила дифференцирования. Таблица производных основных элементарных функций.
3. Производная сложной функции. Логарифмическая производная.
4. Непрерывность дифференцируемой функции.
5. Приращение и дифференциал функции.
6. Производные параметрически заданных функций.
7. Гиперболические функции, их свойства, производные.
8. Необходимое и достаточные условия локального экстремума.
9. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба кривой.
10. Асимптоты.

Практические задания

Задание 1. Найти производные функций:

1 *а*) $y = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}) + \arcsin e^{-x};$

б) $y = \dfrac{x-3}{2}\sqrt{6x - x^2 - 8} + \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{2} - 2};$

в) $y = \dfrac{ctg\left(\sin\dfrac{1}{3}\right)\cdot \sin^2 17x}{17\cos 34x};$

г) $y = -\dfrac{shx}{2ch^2 x} + \dfrac{3}{2}\arcsin(thx).$

2 *а*) $y = \dfrac{x+1}{2} - \ln(1 + e^x);$

в) $y = \sqrt{x^2 - 8x + 17}\cdot arctg(x-4) - \ln(x - 4 + \sqrt{x^2 - 8x + 17});$

б) $y = \dfrac{\cos(ctg 3)\cdot \cos^2 14x}{28\sin 28x};$

г) $y = \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}} + arctg\sqrt{x}.$

3

а) $y = x - 3\ln\left((1+e^{x/6})\cdot\sqrt{1+e^{x/3}}\right) - 3arctg\, e^{x/6};$

б) $y = \dfrac{1+8ch^2x\cdot\ln chx}{2ch^2x};$

в) $y = \dfrac{\cos\left(tg\, 1/3\right)\cdot\sin^2 15x}{15\cos 30x};$

г) $y = 2\arcsin\dfrac{2}{3x+1} + \sqrt{9x^2+6x-3},\ \ 3x+1>0.$

4

а) $y = \dfrac{1}{3}\cos tg\,\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{\sin^2 10x}{\cos 20x};$

б) $y = (2x+3)^4\arcsin\dfrac{1}{2x+3} + \dfrac{2}{3}(4x^2+12x+11)\cdot\sqrt{x^2+3x+2},\quad 2x+3>0;$

в) $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1+x}{2x}arctg\sqrt{x};$

г) $y = \sqrt[4]{\dfrac{1+thx}{1-thx}}.$

5

а) $y = \dfrac{\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha x};$

б) $y = \dfrac{shx}{1+chx};$

в) $y = \ln\sin\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{24}\dfrac{\cos^2 12x}{\sin 24x};$

г) $y = \ln\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{x} + \sqrt{3}arctg\,\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}.$

6

а) $y = 5x - \ln(1+\sqrt{1-e^{10x}}) - e^{-5x}\arcsin(e^{5x});$

б) $y = \dfrac{chx}{\sqrt{sh2x}};$

в) $y = 8\sin(ctg3) + \dfrac{\sin^2 5x}{5\cos 10x};$

г) $y = \dfrac{1}{12}\ln\dfrac{x^4+x^2+1}{(x^2+1)^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}arctg\,\dfrac{\sqrt{3}}{2x^2-1}.$

7

а) $y = 2\left(\sqrt{2^x - 1} - arctg\sqrt{2^x - 1}\right)\cdot\dfrac{1}{\ln 2}$;

б) $y = \dfrac{1}{6}\ln\dfrac{1 - sh2x}{1 + sh2x}$;

в) $y = ctg\cos 2 + \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{\sin^2 6x}{\cos 12x}$;

г) $y = \sqrt{1 - 3x - 2x^2} + \dfrac{3}{2\sqrt{2}}\arcsin\dfrac{4x + 3}{\sqrt{17}}$.

8

а) $y = 2(x - 2)\sqrt{1 + e^x} - 2\ln\dfrac{\sqrt{1 + e^x} - 1}{\sqrt{1 + e^x} + 1}$;

в) $y = \dfrac{(1 + x)arctg\sqrt{x}}{x^3} + \dfrac{1}{3x\sqrt{x}}$;

б) $y = \sqrt[3]{ctg 2} - \dfrac{1}{20}\cdot\dfrac{\cos^2 10x}{\sin 20x}$;

г) $y = arctg\dfrac{\sqrt{sh2x}}{chx - shx}$.

9

а) $y = e^{2x}(2 - \sin 2x - \cos 2x)$;

б) $y = \dfrac{shx}{4ch^4 x} + \dfrac{3shx}{8ch^2 x} + \dfrac{3}{8}arctg(shx)$;

в) $y = \cos\ln 2 - \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\cos^2 3x}{\sin 6x}$;

г) $y = 4\ln\dfrac{x}{1 + \sqrt{1 - 4x^2}} - \dfrac{\sqrt{1 - 4x^2}}{x^2}$.

10

а) $y = \dfrac{1}{2}e^x((x^2 - 1)\cos x + (x - 1)^2\sin x)$;

б) $y = \dfrac{1}{4}\arcsin\dfrac{5 + 3chx}{3 + 5chx}$;

в) $y = \cos\ln 13 - \dfrac{1}{44}\cdot\dfrac{\cos^2 2x}{\sin 44x}$;

г) $y = (2 + 3x)\sqrt{x - 1} + \dfrac{3}{2}arctg\sqrt{x - 1}$.

11

$a)\quad y=\frac{1}{\ln 4}\ln\frac{1+2^x}{1-2^x};$

$б)\ y=\frac{3}{8\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+thx}{\sqrt{2}-thx}-\frac{thx}{4(2-th^2x)};$

$в)\ y=ctg\sqrt[3]{5}-\frac{1}{8}\cdot\frac{\cos^2 4x}{\sin 8x};$

$г)\ y=x^3 a\arcsin x+\frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}.$

12

$a)\quad y=2\sqrt{e^x+1}+\ln\frac{\sqrt{e^x+1}+1}{\sqrt{e^x+1}-1};$

$б)\ y=\frac{1}{2}thx+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{1+\sqrt{2}thx}{1-\sqrt{2}thx};$

$в)\quad y=\frac{\cos(\sin 5)\cdot\sin^2 2x}{2\cos 4x};$

$г)\ y=3\arcsin\frac{3}{4x+1}+2\sqrt{4x^2+2x-2},\quad 4x+1>0.$

13

$a)\ y=\sqrt{1+x^2}arctgx-\ln(x+\sqrt{1+x^2};$

$б)\ y=\frac{1}{2}\ln th\frac{x}{2}-\frac{chx}{2sh^2x};$

$в)\quad y=\frac{\sin(\cos 3)\cdot cos^2 2x}{4\sin 4x};$

$г)\ y=\frac{x^4}{81}\arcsin\frac{3}{x}+\frac{1}{81}(x^2+18)\sqrt{x^2-9},\quad x>0.$

14

$a)\ y=\frac{1}{4}\ln\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{2}arctgx;$

$б)\ y=\frac{1}{2a\sqrt{1+a^2}}\ln\frac{a+\sqrt{1+a^2}\cdot thx}{a-\sqrt{1+a^2}\cdot thx};$

$в)\quad y=\cos(\ln 7)\frac{\sin^2 7x}{7\cos 14x};$

$г)\ y=2\arcsin\frac{2}{3x+4}+\sqrt{9x^2+24x+12},\quad 3x+4>0.$

15

а) $y=\ln(e^{x}+1)+\dfrac{18e^{2x}+27e^{x}+11}{6(e^{x}+1)^{3}}$;

б) $y=\dfrac{1}{18\sqrt{2}}\ln\dfrac{1+\sqrt{2}\cdot cthx}{1-\sqrt{2}\cdot cthx}$;

в) $y=\cos ctg\,2-\dfrac{1}{16}\cdot\dfrac{\cos^{2}8x}{\sin 16x}$;

г) $y=x\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}-\sqrt{x}+arctg\sqrt{x}$.

16

а) $y=\sin\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sin^{2}3x}{\cos 6x}$;

б) $y=arctg\,\dfrac{thx-cthx}{\sqrt{2}}$;

в) $y=\dfrac{1}{4\sqrt{5}}\ln\dfrac{2+\sqrt{5}\cdot tgx}{2-\sqrt{5}\cdot tgx}$;

г) $y=\dfrac{1}{24}(x^{2}+8)\sqrt{x^{2}-4}+\dfrac{x^{4}}{16}\arcsin\dfrac{2}{x}$.

17

а) $y=-\dfrac{1}{3}e^{-x^{2}}(x^{4}+2x^{2}+2)$;

б) $y=-\dfrac{chx}{2shx}-\dfrac{1}{2}\ln th\dfrac{x}{2}$;

в) $y=\sin^{3}\cos 2-\dfrac{cos^{2}30x}{60\sin 60x}$;

г) $y=x\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}-\sqrt{x}\ \ arctg\sqrt{x}$.

18

а) $y=(2x^{2}-x+1)arctg\,\dfrac{x^{2}-1}{x\sqrt{3}}-\dfrac{x^{3}}{2\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$;

б) $y=\dfrac{shx}{2ch^{2}x}+\dfrac{1}{2}arctg(shx)$;

в) $y=\sin^{3}\sqrt[3]{tg\,2}-\dfrac{cos^{2}28x}{56\sin 56x}$;

г) $y=\ln\left(e^{3x}+\sqrt{e^{6x}-1}\right)+\arcsin e^{-3x}$.

19 а) $y=\arcsin e^{x}-\sqrt{1-e^{2x}}$;

б) $y=\frac{1}{2}\left(\frac{shx}{ch^{2}x}+arctg(shx)\right)$;

в) $y=\cos^{2}\sin 3x+\frac{\sin^{2}29x}{29\cos 58x}$;

г) $y=\sqrt{49x^{2}+1}\ arctg\,7x-\ln\left(7x+\sqrt{49x^{2}+1}\right)$.

20 а) $y=(2x^{2}+6x+5)\cdot arctg\,\frac{x+1}{x+2}-x$;

б) $y=\frac{3}{2}\ln th\frac{x}{2}+chx-\frac{chx}{2sh^{2}x}$;

в) $y=\sqrt[3]{\cos 2}-\frac{1}{52}\cdot\frac{cos^{2}26x}{\sin 52x}$;

г) $y=(3x+1)^{4}\arcsin\frac{1}{3x+1}+(3x^{2}+2x+1)\sqrt{9x^{2}+16},\qquad 3x+1>0.$

21 а) $y=3e^{3\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^{5}}-5\sqrt[3]{x^{4}}+20x-60\sqrt[3]{x^{2}}+120\sqrt[3]{x}-120\right)$;

б) $y=-\frac{shx}{2ch^{2}x}-\frac{1}{shx}-\frac{3}{2}arctg(shx)$;

в) $y=\sqrt[7]{tg\cos 2}+\frac{\sin^{2}27x}{27\cos 54x}$;

г) $y=\frac{x}{2\sqrt{1-4x^{2}}}\arcsin 2x+\frac{1}{8}\ln(1-4x^{2})$.

22 а) $y=e^{\sin x}\left(x-\frac{1}{\cos x}\right)$;

б) $y=\frac{8}{3}cth2x-\frac{1}{3chx\ sh^{3}x}$;

в) $y=ctg\sin\frac{1}{3}-\frac{cos^{2}24x}{48\sin 48x}$;

г) $y=\ln\left(5x+\sqrt{25x^{2}+1}\right)-\sqrt{25x^{2}+1}\cdot arctg\,5x$.

23

$a)\quad y=\frac{e^{x}}{2}((x^{2}+1)\cos x+(x^{2}+1)\sin x);$

$б)\quad y=\frac{1}{2}arctg(shx)-\frac{shx}{2ch^{2}x;};$

$в)\quad y=\sin\ln\frac{1}{2}+\frac{\sin^{2}25x}{25\cos 50x};$

$г)\quad y=\frac{2}{3x-2}\sqrt{9x^{2}+12x-3}+\ln\frac{1+\sqrt{9x^{2}+12x-3}}{3x-2}.$

24

$a)\quad y=3e^{3\sqrt{x}}\left(\sqrt[3]{x^{2}}-2\sqrt[3]{x}+2\right);$

$б)\quad y=\frac{1-8ch^{2}x}{4ch^{4}x};$

$в)\quad y=\cos\ln 13-\frac{cos^{2}22x}{44\sin 44x};$

$г)\quad y=\frac{2x-1}{4x^{2}-4x+3}+\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{2}}.$

25

$a)\quad y=\ln\frac{\sqrt{1+e^{x}+e^{2x}}-e^{x}-1}{\sqrt{1+e^{x}+e^{2x}}-e^{x}+1};$

$б)\quad y=\frac{2}{shx}-\frac{1}{3sh^{2}x}+\frac{shx}{2ch^{2}x}+\frac{5}{2}arctgshx;$

$в)\quad y=\ln\cos\frac{1}{3}-\frac{\sin^{2}23x}{23\cos 46x};$

$г)\; y=\sqrt{1-x^{2}}-x\arcsin\sqrt{1-x^{2}}.$

26

$a)\quad y=\frac{2x-5}{4}\sqrt{5x-4-x^{2}}+\frac{9}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-1}{3}};$

$б)\quad y=\frac{1}{4}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{4}\ln\frac{3+chx}{shx};$

$в)\quad y=ctg\cos\frac{1}{3}-\frac{cos^{2}20x}{40\sin 40x};$

$г)\quad y=\frac{1+\sqrt{-3-4x-x^{2}}}{-x-2}-\frac{2}{x+2}\sqrt{-3-4x-x^{2}}.$

27 *а*) $y=\frac{1}{m\sqrt{ab}}arctg\left(e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}}\right);$

б) $y=\frac{1}{4}\arcsin\frac{5+3chx}{3+5shx};$

в) $y=\sqrt{tg4}-\frac{\sin^2 21x}{21\cos 42x};$

г) $y=\frac{2}{3}\left(4x^2-4x+3\right)\sqrt{x^2-x}+(2x-1)^4\arcsin\frac{1}{2x-1},\quad 2x-1>0.$

28 *а*) $y=x-e^{-x}\arcsin e^x-\ln\left(1+\sqrt{1-e^{2x}}\right);$

б) $y=\frac{1}{\sqrt{8}}\arcsin\frac{3+chx}{1+3shx};$

в) $y=\frac{\sqrt[5]{ctg\,2}\cdot cos^2 18x}{36\sin 36x};$

г) $y=\frac{(1+x)arctg\sqrt{x}-\sqrt{x}}{x}.$

29 *а*) $y=x-\ln(1+e^x)-2e^{\frac{x}{2}}arctge^{-\frac{x}{2}}-arctg^2e^{\frac{x}{2}};$

б) $y=\frac{1}{\sqrt{8}}\ln\frac{4+\sqrt{8}\ th\frac{x}{2}}{4-\sqrt{8}\ th\frac{x}{2}};$

в) $y=\frac{tg\ln 2\cdot\sin^2 19x}{19\cos 38x};$

г) $y=\frac{2\sqrt{1-x}\ \arcsin\sqrt{x}}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}.$

30 *а*) $y=x+\frac{8}{1+e^{x/4}};$

б) $y=-\frac{12sh^2x+1}{3sh^3x};$

в) $y=\sin\lg\frac{1}{7}+\frac{cos^2 16x}{32\sin 32x};$

г) $y=(3x^2-4x+2)\cdot\sqrt{9x^2-12x+3}+(3x-2)^4\cdot\arcsin\frac{1}{3x-2},\quad 3x-2>0.$

Задание 2. Найти дифференциал функции.

1	$y=\sqrt{(4+x)(1+x)}+3\ln\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{1+x}\right).$	**2**	$y=\dfrac{shx}{\sqrt{chx}}.$
3	$y=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-1}-\sqrt{\dfrac{\arccos x}{2x^2}}.$	**4**	$y=\arccos\dfrac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}}.$
5	$y=\dfrac{x+2}{x^2+4x+6}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}arctg\,\dfrac{x+2}{\sqrt{2}}.$	**6**	$y=\dfrac{4+x^4}{x^3}\cdot arctg\,\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{4}{x}.$
7	$y=\ln\left\lvert\cos\sqrt{x}\right\rvert+\sqrt{x}\,tg\sqrt{x}.$	**8**	$y=\arcsin\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{5x}}.$
9	$y=\dfrac{x^3}{3}\arccos x-\dfrac{x^2+2}{9}\cdot\sqrt{1-x^2}.$	**10**	$y=arctg\,\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}.$
11	$y=\ln\left(e^{5x}+\sqrt{e^{10x}-1}\right)+\arcsin e^{-5x}.$	**12**	$y=\arccos\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^2+16}}.$
13	$y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}arctg\,\dfrac{3x-1}{\sqrt{2}}+\dfrac{3x-1}{3(3x^2-2x+1)}.$	**14**	$y=\sqrt{2/3}\,arctg\,\dfrac{3x-1}{\sqrt{6x}}.$
15	$y=(x-4)\dfrac{\sqrt{8x-x^2-7}}{2}-9\arccos\sqrt{\dfrac{x-1}{6}}.$	**16**	$y=\left(\sqrt{x-4}-\dfrac{1}{2}\right)\cdot e^{2\sqrt{x-1}}.$
17	$y=\dfrac{1}{x}\sqrt{1-4x^2}+\ln\dfrac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2x}.$	**18**	$y=xarctgx-\ln\sqrt{1+x^2}.$
19	$y=\dfrac{x}{4}(10-x^2)\sqrt{4-x^2}+6\arcsin\dfrac{x}{2}.$	**20**	$y=x\arcsin\dfrac{1}{x}+\ln\sqrt{1-x^2}.$
21	$y=\dfrac{\sqrt{2+x^2}}{x^2}-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{x^2+2}}{x}.$	**22**	$y=tg\left(\arccos\sqrt{1-2x^2}\right).$
23	$y=(2+3x)\sqrt{x-1}+\dfrac{3}{2}arctg\sqrt{x-1}.$	**24**	$y=\ln\left(\cos^2x+\sqrt{1+\cos^4x}\right).$
25	$y=x\sqrt{4-x^2}+4\arcsin\dfrac{x}{2}.$	**26**	$y=\dfrac{e^{x^3}}{1+x^3}.$
27	$y=arctg\sqrt{x^2-1}-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}.$	**28**	$y=\ln tg\,\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{\sin x}.$
29	$y=\sqrt{x^2+1}-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}.$	**30**	$y=arctg\,\dfrac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}.$

Задание 3. Найти производные y'_x и y''_{xx} параметрически заданной функции.

1	$x=\sqrt{t-3},\quad y=\ln(t-2).$	**2**	$x=sht,\quad y=th^2t.$
3	$x=\sqrt{t-1},\quad y=\dfrac{1}{\sqrt{t}}.$	**4**	$x=t^2+t,\quad y=\sqrt[3]{t-1}.$
5	$x=\dfrac{\cos t}{1+2\cos t},\quad y=\dfrac{\sin st}{1+2\sin t}.$	**6**	$x=\sqrt{t^3-1},\quad y=\ln t.$
7	$x=tgt,\quad y=1/\sin 2t.$	**8**	$x=\sqrt{t-1},\quad y=\dfrac{1}{\sqrt{t-1}}.$
9	$x=\sqrt{1-t^2},\quad y=\dfrac{1}{t}.$	**10**	$x=e^t,\ y=\arcsin t.$
11	$x=8-12\cos\dfrac{\pi t}{3},\quad y=14-16\sin^2\dfrac{\pi t}{6}.$	**12**	$x=\sin t,\quad y=\sec t.$
13	$x=\cos 2t,\quad y=2\sec^2 t.$	**14**	$x=\cos t+\sin t,\quad y=\sin 2t.$
15	$x=2(t-\sin t),\quad y=4(2+\cos t).$	**16**	$x=\cos t,\quad y=\sin^2\dfrac{t}{2}.$
17	$x=t+\sin t,\quad y=2+\cos t.$	**18**	$x=\cos^2 t,\quad y=tg^2t.$
19	$x=\cos t,\quad y=\ln\sin t.$	**20**	$x=-4-\cos\dfrac{\pi t}{3},\quad y=-3\sin^2\dfrac{\pi t}{6}.$
21	$x=4-\sin\dfrac{\pi t}{6},\quad y=-4\cos^2\dfrac{\pi t}{6}.$	**22**	$x=\sqrt{t},\ y=\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}.$
23	$x=8\sin\dfrac{\pi t}{6},\quad y=-6\cos\dfrac{\pi t}{3}.$	**24**	$x=arcgt,\quad y=\dfrac{t^2}{2}.$
25	$x=6-8\cos\dfrac{\pi t}{6},\quad y=8\sin\dfrac{\pi t}{6}-2.$	**26**	$x=2-3\cos\dfrac{\pi t}{6},\quad y=9\cos\dfrac{\pi t}{3}+5.$
27	$x=2-\cos\dfrac{\pi t}{6},\quad y=-4-6\cos\dfrac{\pi t}{3}.$	**28**	$x=4\cos\dfrac{\pi t}{6},\quad y=9\sin\dfrac{\pi t}{6}-4.$
29	$x=\cos t+t\sin t,\quad y=\sin t-t\cos t.$	**30**	$x=cht,\quad y=\sqrt[3]{sh^2t}.$

Задание 4. Вычислить $y'''(x_0)$ для функции и x_0.

1	$y = x \cdot \sin^2 x,\ x_0 = 0{,}5\pi.$	**2**	$y = arctgx,\ x_0 = 1.$
3	$y = \ln(2 + x^2),\ x_0 = 0.$	**4**	$y = e^x \cos x,\ x_0 = 1.$
5	$y = e^x \sin 2x,\ x_0 = 0.$	**6**	$y = e^{-x} \cos x,\ x_0 = 0.$
7	$y = (x^2 - 2x)\sin 2x,\ x_0 = \pi.$	**8**	$y = x^2 \sin 2x,\ x_0 = 0{,}25\pi.$
9	$y = x\ln(1 + x),\ x_0 = 2.$	**10**	$y = x^2 e^{3x+1},\ x_0 = 0.$
11	$y = \arccos x,\ x_0 = 0{,}5.$	**12**	$y = (3x + 1) \cdot arctg(x + 3),\ x_0 = 0.$
13	$y = (x^2 - 3x + 1) \cdot \sin x,\ x_0 = 0{,}5\pi.$	**14**	$y = x^2 \ln(2x + 1),\ x_0 = 1.$
15	$y = e^x \sin 2x,\ x_0 = 0.$	**16**	$y = x\cos 2x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{12}.$
17	$y = x^4 \ln x,\ x_0 = 1{,}5.$	**18**	$y = x + arctgx,\ x_0 = 1.$
19	$y = \sqrt{8 - 3x - x^2},\ x_0 = 1.$	**20**	$y = \ln(x^2 - 4),\ x_0 = 3.$
21	$y = x^2 \cos x,\ x_0 = 0{,}25\pi.$	**22**	$y = x\arcsin x,\ x_0 = 0{,}5\sqrt{3}.$
23	$y = (x + 1)\ln(1 + x),\ x_0 = -0{,}5.$	**24**	$y = x^3 \cos 5x,\ x_0 = 0{,}2\pi.$
25	$y = e^{4x} \cos 3x,\ x_0 = 0.$	**26**	$y = \dfrac{\ln(5 + 2x)}{5 + 2x},\ x_0 = 0.$
27	$y = x \cdot arctgx,\ x_0 = 2.$	**28**	$y = \ln(5x + x^2),\ x_0 = 2.$
29	$y = (x^2 - 3x + 4)e^{-3x},\ x_0 = 1.$	**30**	$y = x\sqrt{x^2 - 3},\ x_0 = 2.$

Задание 5. Записать уравнения касательной и нормали к кривой $y = y(x)$ в точке с абсциссой $x = x_0$.

1	$y = x^2 - 7x + 3,\ x_0 = 1.$	**2**	$y = x^2 - 16x + 7,\ x_0 = 1.$
3	$y = \sqrt{x - 4},\ x_0 = 8.$	**4**	$y = \sqrt{x + 4},\ x_0 = -3.$
5	$y = x^3 - 2x^2 + 4x - 7,\ x_0 = 2.$	**6**	$y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2,\ x_0 = 1.$
7	$y = x^2 - 6x + 2,\ x_0 = 4.$	**8**	$y = 0{,}25x^2 - x + 5,\ x_0 = 3.$
9	$y = 0{,}25x^4 - 27x + 6,\ x_0 = 2.$	**10**	$y = -0{,}25x^2 + 7x - 8,\ x_0 = 3.$

11	$y = 3tg2x + 1,\ \ x_0 = 0{,}5\pi.$	**12**	$y = 4tg3x + 1,\ \ x_0 = \dfrac{\pi}{9}.$
13	$y = 4\sin 6x + 1,\ \ x_0 = \dfrac{\pi}{18}.$	**14**	$y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{2} + 7x + 4,\ \ x_0 = 1.$
15	$y = 2x^3 - 3x^2 + 7x - 8,\ \ x_0 = 2.$	**16**	$y = 3x^2 - 4x + 6,\ \ x_0 = -0{,}5.$
17	$y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{9x^2}{2} + 20x - 7,\ \ x_0 = -1.$	**18**	$y = \dfrac{4 + 15x}{5x + 1},\ \ x_0 = -1.$
19	$y = \sqrt{8 - 3x - x^2},\ \ x_0 = 1.$	**20**	$y = \sqrt{x^2 + 4x - 1},\ \ x_0 = 1.$
21	$y = \dfrac{11 + 4x}{6x + 5},\ \ x_0 = -\dfrac{1}{2}.$	**22**	$y = x\sin x,\ \ x_0 = -\dfrac{\pi}{4}.$
23	$y = x^3 - 4x^2 + 3x - 1,\ \ x_0 = 1.$	**24**	$y = x^4 \ln x,\ \ x_0 = e.$
25	$y = (2x + 1)\ln(x + 2),\ \ x_0 = 1.$	**26**	$y = 6 - 8x + x^4,\ \ x_0 = 0{,}5.$
27	$y = \dfrac{x^2}{1 - x},\ \ x_0 = 3.$	**28**	$y = \dfrac{x^3 - x + 1}{x},\ \ x_0 = -2.$
29	$y = 3x^2 - 5x + 11,\ \ x_0 = 0{,}75.$	**30**	$y = -7x^2 + 6x + 5,\ \ x_0 = 0{,}5.$

Задание 6. Решить задачу на экстремум.

1. Полотняный шатер объемом V имеет форму прямого конуса. Каково должно быть отношение высоты конуса к радиусу его основания, чтобы на шатер пошло наименьшее количество полотна?
2. В равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α вписать параллелограмм наибольшей площади так, чтобы одна из его сторон лежала на основании, а другая – на боковой стороне треугольника. Найти длины сторон параллелограмма.
3. Сопротивление балки прямоугольного поперечного сечения на сжатие пропорционально площади этого сечения. Каковы должны быть размеры сечения балки, вырезанной из круглого бревна диаметром d, чтобы ее сопротивление на сжатие было наибольшим?
4. Найти соотношение между радиусом R и высотой H цилиндра, имеющего при данном объеме V наименьшую полную поверхность.

5. Требуется сделать коническую воронку с образующей *l*. Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наименьшим?

6. Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$. Каково должно быть его основание, чтобы объем тела, полученного вращением этого треугольника вокруг его основания, был наибольшим?

7. Проволокой, длина которой *l* метров, необходимо огородить клумбу, имеющую форму кругового сектора. Каким должен быть радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей?

8. Требуется изготовить открытый цилиндрический бак данного объема *V*, причем стоимость $1\,м^2$ материала, из которого изготавливается дно бака, равно p_1 руб., а стоимость $1\,м^2$ материала, идущего на стенки, равна p_2 рублей. При каком отношении радиуса дна к высоте бака затраты на материал будут наименьшими?

9. Бревно длиной 20 *м* имеет форму усеченного конуса, диаметры оснований которого равны 2 *м* и 1 *м*. Требуется вырубить из бревна балку с квадратным поперечным сечением, ось которого совпадала бы с осью бревна, а объем был бы наибольшим. Каковы должны быть размеры балки?

10. С корабля, который стоит на якоре в 9*км* от берега, нужно послать гонца в лагерь, расположенный в 15*км* от ближайшей к кораблю точки берега. Скорость посыльного при движении пешком 5*км/час*, на лодке - 4*км/час*. В каком месте он должен пристать к берегу, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время?

11. Из полосы жести шириной 11*см* требуется сделать открытый сверху желоб, поперечное сечение которого имеет форму равнобедренной трапеции. Дно желоба должно иметь ширину 7*см*. Какова должна быть ширина желоба сверху, чтобы он вмещал наибольшее количество воды?

12. Сопротивление балки прямоугольного поперечного сечения на изгиб пропорционально произведению ширины этого сечения на квадрат его высоты. Каковы должны быть размеры сечения балки, вырезанной из круглого бревна диаметром *d*, чтобы ее сопротивление на изгиб было наибольшим?

13. Стоимость железнодорожной перевозки груза на 1*км* (*AB*) равна k_1 руб., а автомобильной (*PC*) - k_2 руб. ($k_2 > k_1$). В каком месте *P* надо начать строительство шоссе, чтобы доставка груза из пункта *A* в пункт *C* была наиболее дешевой? Известно, что $|AB| = a,\ |BC| = b,\ AB \perp BC.$

14. На прямоугольном отрезке AB, соединяющем два источника света: A (силой р) и B (силой q), найти точку M ,наименее освещенную, если $|AB| = a$. Освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.

15. Из круглого бревна диаметром d надо вырезать балку прямоугольного сечения. Каковы должны быть ширина b и высота h этого сечения, чтобы балка, будучи горизонтально расположенной и равномерно нагруженной, имела наименьший прогиб? Величина прогиба обратно пропорциональна произведению ширины поперечного сечения и куба высоты.

16. Из всех цилиндров, вписанных в данный конус, найти тот, у которого боковая поверхность наибольшая. Высота конуса H, радиус основания R.

17. Из бумажного круга вырезан сектор, а из оставшейся его части склеена коническая воронка. Какой угол должен иметь вырезанный сектор, чтобы объем воронки был наибольшим?

18. Из всех конусов с данной боковой поверхностью S найти тот, у которого объем наибольший.

19. Из полосы жести шириной *30 см* требуется сделать открытый сверху желоб, поперечное сечение которого имеет форму равнобочной трапеции. Дно желоба должно иметь ширину 10*см.* Каков должен быть угол, образуемый стенками желоба с дном, чтобы вместимость желоба была наибольшей?

20. От канала шириной 32*м* отходит под прямым углом другой канал шириной 4*м*. Определить наибольшую длину бревен, которые можно сплавлять по этой системе каналов.

21. Требуется изготовить открытый сверху цилиндрический сосуд максимальной вместимости. Каковы должны быть размеры сосуда, если на его изготовление имеется $S = 84{,}82\,дм^2$ материала $(S \approx 27\pi)$?

22. Требуется вырыть яму конической формы (воронку) с образующей $a = 3м$. При какой глубине объем воронки будет наибольшим?

23. Канал шириной $a_м$ под прямым углом впадает в другой канал шириной $b_м$. Определить наибольшую длину бревен, которые можно сплавлять по этой системе каналов.

24. Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак максимальной вместимости. Каковы должны быть размеры бака, если на его изготовление имеется $S = 6\pi \approx 18{,}84 м^2$ материала?

25. Стрела прогиба балки прямоугольного поперечного сечения обратно пропорциональна произведению ширины этого сечения на куб его высоты. Каковы должны быть размеры сечения балки, вырезанной из круглого бревна диаметром d, с наименьшей стрелой прогиба?

26. Найти отношение радиуса цилиндра к его высоте, при котором цилиндр имеет при данном объеме V наименьшую полную поверхность.

27. Найти высоту прямого кругового конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса R.

28. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен 15 *м.* При каком радиусе полукруга окно будет пропускать наибольшее количество света?

29. При каком наклоне боковых сторон равнобедренной трапеции ее площадь будет наибольшей, если боковые стороны равны b, а меньшее основание - a?

30. На странице книги печатный текст занимает площадь S; ширина верхнего и нижнего полей равна a, а правого и левого - b. При каком отношении ширины к высоте текста площадь всей страницы будет наименьшей?

Задание 7. Провести полное исследование функции и построить ее график.

1	$y = \dfrac{x+1}{(x-2)^2}.$	**2**	$y = x + \ln(x^2 - 4)$
3	$y = \dfrac{4x}{x^2+4}.$	**4**	$y = x\ln^2 x.$
5	$y = 4 - e^{-x^2}.$	**6**	$y = \dfrac{4x - x^2 - 4}{x}.$
7	$y = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}.$	**8**	$y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}.$

9	$y=\dfrac{x^2}{x+2}.$	**10**	$y=x^3e^{-\frac{x^2}{2}}.$
11	$y=\dfrac{x^2}{x-1}.$	**12**	$y=\dfrac{x^2-5}{x-3}.$
13	$y=\dfrac{x^2-x-1}{x^2-4x}.$	**14**	$y=\dfrac{x+3}{(x-3)^2}.$
15	$y=x+\dfrac{\ln x}{x}.$	**16**	$y=\dfrac{(x-3)^2}{x+2}.$
17	$y=(x-1)e^{3x+1}.$	**18**	$y=\dfrac{x^3}{x^2+1}.$
19	$y=\dfrac{x^4}{x^3-1}.$	**20**	$y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}.$
21	$y=\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right).$	**22**	$y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}.$
23	$y=\dfrac{x}{e^{x^2}}.$	**24**	$y=e^{2x-x^2}.$
25	$y=\dfrac{4x^3}{x^2-1}.$	**26**	$y=\dfrac{2x^2+4x+2}{2-x}.$
27	$y=-x\ln^2 x.$	**28**	$y=(x-1)e^{4x+2}.$
29	$y=\dfrac{4-2x}{1-x^2}.$	**30**	$y=\dfrac{x+2}{(x+1)^2}.$

Решение типового варианта АР №2

Теория.

При нахождении производной заданной функции следует пользоваться таблицей производных основных элементарных функций, правилами дифференцирования и теоремой о дифференцировании сложной функции.

Приведем некоторые формулы:

1. $\left(u^n(x)\right)' = n\cdot u^{n-1}(x)\cdot u'(x);$ **2.** $\left(a^{u(x)}\right)' = a^{u(x)}\cdot \ln a\cdot u'(x);$

3. $\left(e^{u(x)}\right)' = e^{u(x)}\cdot u'(x);$ *4.* $\left(\ln u(x)\right)' = \dfrac{u'(x)}{u(x)};$

5. $\left(\sin u(x)\right)' = \cos u(x)\cdot u'(x);$ **6.** $\left(\cos u(x)\right)' = -\sin u(x)\cdot u'(x);$

7. $\left(tgu(x)\right)' = \dfrac{u'(x)}{\cos^2 u(x)};$ **8.** $\left(ctg\, u(x)\right)' = -\dfrac{u'(x)}{\sin^2 u(x)};$

9. $\left(\arcsin u(x)\right)' = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}};$ **10.** $\left(\arccos u(x)\right)' = -\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}};$

11. $\left(arctgu(x)\right)' = \dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)};$ **12.** $\left(arcctgu(x)\right)' = -\dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)};$

13. $\left(ch u(x)\right)' = sh u(x)\cdot u'(x);$ **14.** $\left(sh u(x)\right)' = ch u(x)\cdot u'(x);$

15. $\left(th u(x)\right)' = \dfrac{u'(x)}{ch^2 u(x)};$ **16.** $\left(cth\, u(x)\right)' = -\dfrac{u'(x)}{sh^2 u(x)};$

Правила дифференцирования:

1. $\left(C\cdot u(x)\right)' = C\cdot u'(x);\ C$ - $const$;

2. $\left(u(x)\pm v(x)\right)' = u'(x)\pm v'(x);$

3. $\left(u(x)\cdot v(x)\right)' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)v'(x);$

4. $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)\cdot v(x)+u(x)v'(x)}{v^2(x)},\ \ v(x)\neq 0.$

Задание 1. Найти производные функций:

а) $y = x + \dfrac{8}{1 + e^{x/4}}$;

б) $y = \sin \lg \dfrac{1}{7} + \dfrac{\cos^2 16x}{32 \sin 32x}$;

в) $y = -\dfrac{12 sh^2 x + 1}{3 sh^3 x}$;

г) $y = (3x^2 - 4x + 2) \cdot \sqrt{9x^2 - 12x + 3} + (3x - 2)^4 \cdot \arcsin \dfrac{1}{3x - 2}, \ 3x - 2 > 0.$

Решение:

$$а)\ y' = 1 + 8\left(\frac{1}{1 + e^{x/4}}\right)' = 1 + 8 \cdot \left(-\frac{1}{(1 + e^{x/4})^2}\right) \cdot (1 + e^{x/4})' = 1 - \frac{8}{(1 + e^{x/4})^2} \cdot e^{x/4} \cdot \frac{1}{4} =$$

$$= 1 - \frac{2e^{x/4}}{1 + 2e^{x/4} + e^{x/2}} = \frac{1 + 2e^{x/4} + e^{x/2} - 2e^{x/4}}{1 + 2e^{x/4} + e^{x/2}} = \frac{1 + e^{x/2}}{1 + 2e^{x/4} + e^{x/2}};$$

$$б)\ y' = \left(\sin \lg \frac{1}{7}\right)' + \frac{1}{32}\left(\frac{\cos^2 16x}{2 \sin 16x \cdot cos 16x}\right)' = 0 + \frac{1}{64}\left(\frac{\cos 16x}{\sin 16x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{64}(ctg 16x)' = \frac{1}{64}\left(-\frac{1}{\sin^2 16x}\right) \cdot 16 = -\frac{1}{4 \sin^2 16x};$$

1-й способ:

$$в)\ y' = -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{12 sh^2 x + 1}{sh^3 x}\right)' = -\frac{1}{3} \cdot \frac{(12 sh^2 x + 1)' \cdot sh^3 x - (12 sh^2 x + 1) \cdot (sh^3 x)'}{sh^6 x} =$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{12 \cdot 2 shx \cdot chx \cdot sh^3 x - 3 sh^2 x \cdot chx (12 sh^2 x + 1)}{sh^6 x} =$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{24 sh^4 x \cdot chx - 36 sh^4 x \cdot ch\, x - 3 \cdot sh^2 x \cdot ch\, x}{sh^6 x} =$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{3 sh^2 x \cdot ch\, x (8 sh^2 x - 12 sh^2 x - 1)}{sh^6 x} = \frac{chx \cdot (4 sh^2 x + 1)}{sh^4 x}.$$

2-й способ:

$$в)\ y' = -\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{12sh^2x+1}{sh^3x}\right)' = -\frac{1}{3}\cdot\left(12\cdot(shx)^{-1}+(shx)^{-3}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\left(-12\cdot(shx)^{-2}\cdot chx - 3(shx)^{-4}\cdot chx\right) = \frac{3}{3}chx\left(\frac{4}{sh^2x}+\frac{1}{sh^4x}\right) = chx\cdot\frac{4\cdot sh^2x+1}{sh^4x}.$$

При необходимости следует использовать формулы:

$$ch^2x - sh^2x = 1;\qquad sh^2x = \frac{1}{2}(ch\,2x-1);\qquad ch^2x = \frac{1}{2}(ch\,2x+1);$$

$$2sh\,x\cdot ch\,x = sh\,2x;\quad ch^2x + sh^2x = ch\,2x.$$

$$г)\ y = (3x^2-4x+2)\cdot\sqrt{9x^2-12x+3} + (3x-2)^4\cdot\arcsin\frac{1}{3x-2},\ 3x-2>0.$$

1-й способ:

$$y' = (3x^2-4x+2)'\cdot\sqrt{9x^2-12x+3} + (3x^2-4x+2)\cdot\left(\sqrt{9x^2-12x+3}\right)' +$$

$$+((3x-2)^4)'\cdot\arcsin\frac{1}{3x-2} + (3x-2)^4\cdot\left(\arcsin\frac{1}{3x-2}\right)' =$$

$$= (6x-4)\cdot\sqrt{9x^2-12x+3} + (3x^2-4x+2)\cdot\frac{1\cdot(18x-12)}{2\cdot\sqrt{9x^2-12x+3}} +$$

$$+4(3x-2)^3\cdot 3\arcsin\frac{1}{3x-2} + (3x-2)^4\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{3x-2}\right)^2}}\cdot\left(-\frac{3}{(3x-2)^2}\right) =$$

$$= (6x-4)\cdot\sqrt{9x^2-12x+3} + \frac{(3x^2-4x+2)(9x-6)}{\sqrt{9x^2-12x+3}} + 12(3x-2)^3\arcsin\frac{1}{3x-2} -$$

$$-\frac{3(3x-2)^2(3x-2)}{\sqrt{(3x-2)^2-1}} = \frac{(6x-4)(9x^2-12x+3)+(3x^2-4x+2)(9x-6)-3(3x-2)^3}{\sqrt{9x^2-12x+3}} +$$

$$+12(3x-2)^3\arcsin\frac{1}{3x-2} =$$

$$= \frac{54x^3-72x^2+18x-36x^2+48x-12+27x^3-18x^2-36x^2+24x+18x-12}{\sqrt{9x^2-12x+3}} -$$

$$-\frac{81x^3-162x^2+108x-24}{\sqrt{9x^2-12x+3}}+12(3x-2)^3\arcsin\frac{1}{3x-2}=12(3x-2)^3\arcsin\frac{1}{3x-2}.$$

2-й способ:

$$y=(3x^2-4x+2)\cdot\sqrt{9x^2-12x+3}+(3x-2)^4\cdot\arcsin\frac{1}{3x-2},\ \ 3x-2>0.$$

$$y(x)=y_1(x)+y_2(x),$$

воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции.

$$y_1(x)=(3x^2-4x+2)\cdot\sqrt{9x^2-12x+3}=(t+2)\cdot\sqrt{3t+3},\ \textit{где}\ \ t=3x^2-4x.$$

$$y_1'=\left(\sqrt{3t+3}+(t+2)\cdot\frac{3}{2\sqrt{3t+3}}\right)\cdot t_x'=\frac{2(3t+3)+3(t+2)}{2\sqrt{3t+3}}(6x-4)=$$

$$=\frac{(9t+12)\cdot 2(3x-2)}{2\sqrt{3t+3}}=\frac{3(3t+4)\cdot(3x-2)}{\sqrt{3t+3}}=\frac{3(9x^2-12x+4)(3x-2)}{\sqrt{9x^2-12x+3}}=$$

$$=\frac{3\cdot(3x-2)^3}{\sqrt{9x^2-12x+3}};$$

$$y_2(x)=u^4\cdot\arcsin\frac{1}{u},\textit{где}\ \ u=3x-2>0.$$

$$y_2'(x)=\left(4u^3\cdot\arcsin\frac{1}{u}+u^4\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{u^2}}}\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right)\right)\cdot u'=3\left(4u^3\arcsin\frac{1}{u}-\frac{u^3}{\sqrt{u^2-1}}\right)=$$

$$=12(3x-2)^3\arcsin\frac{1}{3x-2}-\frac{3\cdot(3x-2)^3}{\sqrt{9x^2-12x+4-1}}=2(3x-2)^3\arcsin\frac{1}{3x-2}-$$

$$-\frac{3\cdot(3x-2)^3}{\sqrt{9x^2-12x+3}};$$

Складываем полученные производные:

$$y'(x)=y_1'(x)+y_2'(x)=\frac{3\cdot(3x-2)^3}{\sqrt{9x^2-12x+3}}+12(3x-2)^3\arcsin\frac{1}{3x-2}-$$

$$-\frac{3\cdot(3x-2)^3}{\sqrt{9x^2-12x+3}}=12(3x-2)^3\arcsin\frac{1}{3x-2},\textit{где}\ \ 3x-2>0.$$

Задание 2. Найти дифференциал функции:

$$y = (2+3x)\sqrt{x-1} + \frac{3}{2} arctg\sqrt{x-1}.$$

Решение:

Если $y = f(x)$, то дифференциал этой функции $dy = f'(x)dx$.

$$dy = \left(3\sqrt{x-1} + (2+3x)\frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+(\sqrt{x-1})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)dx =$$

$$= \left(\frac{6(x-1)+2+3x}{2\sqrt{x-1}} + \frac{3}{4\sqrt{x-1}\cdot x}\right)dx = \frac{2x(6x-6+2+3x)+3}{4\sqrt{x-1}\cdot x} =$$

$$= \frac{12x^2-8x+6x^2+3}{4x\sqrt{x-1}}dx = \frac{18x^2-8x+3}{4x\sqrt{x-1}}dx.$$

Можно найти дифференциал функции с помощью его свойств, включая свойство инвариантности формы дифференциала:

$$dy = d((2+3x)\sqrt{x-1}) + \frac{3}{2}d(arctg\sqrt{x-1}) = 3dx\cdot\sqrt{x-1} + (2+3x)d\sqrt{x-1} +$$

$$+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+x-1}\cdot d\sqrt{x-1} = 3\sqrt{x-1}\ dx + \frac{2+3x}{2\sqrt{x-1}}\ dx + \frac{3}{2x\cdot 2\sqrt{x-1}}\ dx =$$

$$= \left(3\sqrt{x-1} + \frac{2+3x}{2\sqrt{x-1}} + \frac{3}{4x\sqrt{x-1}}\right)dx = \left(\frac{12x(x-1)+2x(2+3x)+3}{4x\sqrt{x-1}}\right)dx =$$

$$= \frac{18x^2-8x+3}{4x\sqrt{x-1}}dx.$$

Задание 3. Найти производные y'_x *и* y'_{xx} **параметрически заданной функции** $x = cht,\ y = \sqrt[3]{sh^2t}.$

Решение:

По определению первой производной для функции, заданной параметрически, получим

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Производная второго порядка определится по формуле

$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}\quad или\quad y''_{xx}=\frac{1}{x'(t)}\left(\frac{y'(t)}{x'(y)}\right)'=\frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3}.$$

В нашем случае, имеем

$$\begin{cases}x=cht,\\ y=\sqrt[3]{sh^2t},\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=cht,\\ y=(sh\,t)^{2/3}.\end{cases}$$

$$y'_t=\frac{2}{3}(sht)^{-1/3}\cdot cht,\qquad x'_t=sht,$$

$$y'_x=\frac{2/3\,(sht)^{-1/3}\cdot cht}{sht}=\frac{2cht}{3sh^{4/3}t},$$

$$(y'_x)'_t=\frac{2}{3}\left(\frac{cht}{\sqrt[3]{sh^4t}}\right)'=\frac{2}{3}\left(\frac{sht\cdot\sqrt[3]{sh^4t}-cht\cdot\frac{4}{3}\cdot\sqrt[3]{sht}\cdot cht}{\sqrt[3]{sh^8t}}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{sht}\cdot(sh^2t-4/3\,ch^2t)}{\sqrt[3]{sh^8t}}=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{3sh^2t-4ch^2t}{3\sqrt[3]{sh^7t}}=\frac{2}{9}\cdot\frac{3sh^2t-4ch^2t}{\sqrt[3]{sh^7t}}.$$

$$y''_{xx}=\frac{2}{9}\cdot\frac{3sh^2t-4ch^2t}{\sqrt[3]{sh^7t}}:sht=\frac{2}{9}\cdot\frac{3sh^2t-4ch^2t}{\sqrt[3]{sh^7t}\cdot sht}=\frac{2}{9}\cdot\frac{3sh^2t-4ch^2t}{sh^3t\cdot\sqrt[3]{sht}}=$$

$$=\frac{2}{9}\cdot\frac{3sh^2t-4(1+sh^2t)}{sh^3t\cdot\sqrt[3]{sht}}=-\frac{2}{9}\cdot\frac{4+sh^2t}{sh^3t\cdot\sqrt[3]{sht}}.$$

Задание 4. Вычислить $y'''(x_0)$, *если* $y=\sqrt{x^2-3x},\ x_0=-2;\ x_1=4.$

Решение:

Дифференцируем данную функцию последовательно 3 раза.

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x^2-3x}}(x^2-3x)'=\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}},$$

$$y''=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{x^2-3x}-(2x-3)\cdot\dfrac{1\cdot(2x-3)}{2\sqrt{x^2-3x}}}{\left(\sqrt{x^2-3x}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4(x^2-3x)-(2x-3)^2}{(x^2-3x)\cdot 2\sqrt{x^2-3x}}=$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{4x^2 - 12x - 4x^2 + 12x - 9}{\sqrt{\left(x^2 - 3x\right)^3}} = \frac{9}{4} \cdot \frac{-1}{\sqrt{\left(x^2 - 3x\right)^3}} = -\frac{9}{4}\left(x^2 - 3x\right)^{-3/2},$$

$$y'''(x) = -\frac{9}{4}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x^2 - 3x\right)^{-5/2}(2x-3) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \frac{2x-3}{\sqrt{(x^2-3x)^5}}.$$

При $x = -2$

$$y'''(-2) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \frac{2(-2)-3}{\sqrt{((-2)^2 - 3\,(-2)^5}} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \frac{1}{\sqrt{10^5}} = \frac{27}{8 \cdot 100\sqrt{10}} = \frac{27\sqrt{10}}{800 \cdot 10} = \frac{27\sqrt{10}}{8000},$$

При $x_1 = 4,\ y'''(4) = \dfrac{27}{8} \cdot \dfrac{8-3}{\sqrt{(16-12)^5}} = \dfrac{27 \cdot 5}{8 \cdot 32} = \dfrac{135}{256}.$

Задание 5. Записать уравнения касательной и нормали к кривой $y = -7x^2 + 6x + 5$ в точке с абсциссой $x = 0{,}5$.

Решение:

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0,\ f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Уравнение нормали к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0,\ f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0).$$

При $f'(x_0) = 0$ уравнение нормали имеет вид $x = x_0$. Для нашего случая

$$f'(x) = -14x + 6,$$
$$f'(0{,}5) = -14 \cdot 0{,}5 + 6 = -1,$$
$$f(0{,}5) = -7(0{,}5)^2 + 6(0{,}5) + 5 = \frac{25}{4}.$$

Тогда уравнение касательной: $y - \dfrac{25}{4} = -1(x - 0{,}5)$ или после преобразования $4x + 4y - 27 = 0$.

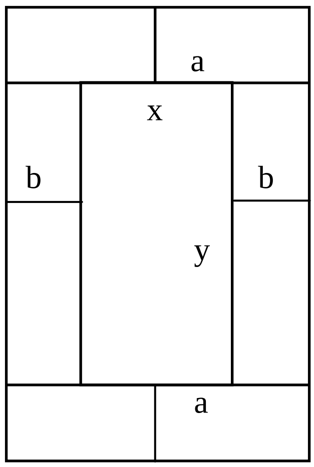
Уравнение нормали: $y - \dfrac{25}{4} = \dfrac{1}{-1}(x - 0{,}5)$ или $4x - 4y + 23 = 0$.

Ответ: $4x + 4y - 27 = 0$ и $4x - 4y + 23 = 0$.

Задание 6. Текстовые задачи на экстремум.

1. На странице книги печатный текст занимает площадь S. Ширина верхнего и нижнего полей равна a, а правого и левого - b. При каком отношении ширины к высоте текста площадь всей страницы будет наименьшей?

Решение:



Обозначим ширину текста через x, а высоту через y; тогда площадь печатного текста

$$S = xy \qquad (*)$$

Площадь всей страницы обозначим через S_1; она равна:

$$S_1 = S + 2a(x+2b) + 2by = (x+2b)\cdot(y+2a).$$

Из (*) $\Rightarrow$, что $y = \dfrac{S}{x}$, *тогда*

$$S_1(x) = S + 2a(x+2b) + 2b\frac{S}{x}.$$

Исследуем полученную функцию на экстремум:

$$S_1'(x) = 2a - 2b\frac{S}{x^2}.$$

Если $S_1'(x) = 0,$ то $2a - \dfrac{2bS}{x^2} = 0.$ Отсюда $x_1 = \sqrt{\dfrac{bS}{a}}$ - критическая точка.

$$S_1''(x) = -2bS(-2)x^{-3} = \frac{4bS}{x^3},$$

$$S_1''\left(\sqrt{\frac{bS}{a}}\right) = \frac{4bS}{\sqrt{\left(\frac{bS}{a}\right)^3}} = \frac{4\sqrt{a^3}}{\sqrt{bS}} > 0.$$

Т. к. $S_1''(x_1) > 0,$ то это означает, что при $x_1 = \sqrt{\dfrac{bS}{a}}$ функция $S_1(x)$ достигает минимального значения.

$$S_{1_{min}}\left(\sqrt{\frac{bS}{a}}\right) = S + 2a\left(\sqrt{\frac{bS}{a}} + 2b\right) + \frac{2bS}{\sqrt{\frac{bS}{a}}} = S + \sqrt{abS} + 4ab.$$

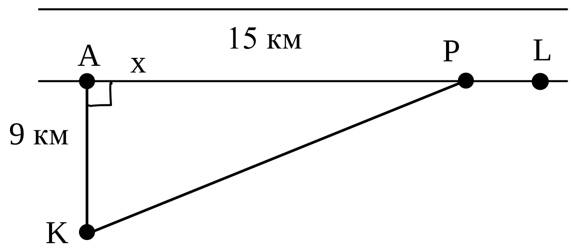
Отношение ширины к высоте текста $\frac{x}{y}$:

$$y=\frac{S}{x}=\frac{S}{\sqrt{\frac{bS}{a}}}=\frac{\sqrt{Sa}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{Sa}{b}};\quad \frac{x}{y}=\frac{\sqrt{\frac{bS}{a}}}{\sqrt{\frac{Sa}{b}}}=\frac{b}{a}.$$

Ответ: $\frac{b}{a}$.

2. С корабля, который стоит на якоре в 9 км от берега, нужно послать гонца в лагерь, расположенный в 15 км от ближайшей к кораблю точки берега. Скорость посыльного при движении пешком – 5 км/ч, а на лодке – 4 км/ч. В каком месте он должен пристать к берегу, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время?

Решение.



$|AK|=9\textit{км},\quad |AL|=15\textit{км}.$

Пусть гонец пристал к берегу в точке P. Обозначим расстояние AP *через* x. Отрезок пути

$$KP=\sqrt{AK^2+AP^2}=\sqrt{81+x^2}$$

гонец преодолевает на лодке со скоростью 4 км/ч, а отрезок $PL=15-x$ - пешком со скоростью 5км/ч.

Таким образом, время, затраченное на дорогу от корабля до лагеря, будет равно

$$t=\frac{\sqrt{81-x^2}}{4}+\frac{15-x}{5}.$$

Исследуем функцию $t=t(x)$ на экстремум:

$$t'(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1\cdot 2x}{2\sqrt{81+x^2}}-\frac{1}{5}=\frac{x}{4\sqrt{81+x^2}}-\frac{1}{5}.$$

$$t'(x)=0\Rightarrow\ \frac{x}{4\sqrt{81+x^2}}=\frac{1}{5}\Rightarrow 5x=4\sqrt{81+x^2}\Rightarrow 25x^2=16\cdot(81+x^2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x^2=16\cdot 81\Rightarrow x=12.$$

Проверим, достигает ли функция $t(x)$ минимального значения при $x=12$.

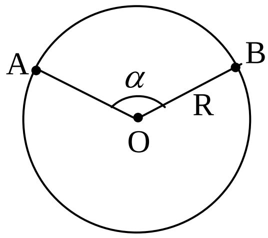
$$t''(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{81+x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{81+x^2}}}{81+x^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{81+x^2-x^2}{\left(81+x^2\right)^{3/2}}=\frac{81}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(81+x^2\right)^3}}.$$

Тогда $t'(12)>0$.

Итак, чтобы в кратчайшее время прибыть в лагерь, гонец должен пристать к берегу на расстоянии 3 км от лагеря.

3. Проволокой, длина которой l м, необходимо отгородить клумбу, имеющую форму круглого сектора. Каким должен быть радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей?

Решение.



Обозначим радиус круга через R.
Площадь сектора в α радиан

$$S=\frac{1}{2}R^2\alpha.$$

По условию задачи:

$$L_{\cup AB}+OB+OA=l\,м.\ \text{Т.к.}\ L_{\cup AB}=R\alpha, то$$

$$R\alpha+2R=l\ ,$$

тогда

$$\alpha=\frac{l-2R}{R}.$$

Зная α, получим функцию

$$S(R)=\frac{1}{2}\cdot R^2\,\frac{l-2R}{R}=\frac{1}{2}\cdot R(l-2R),$$

которую исследуем на экстремум.

$$S'(R)=\frac{1}{2}(l-2R)-R=\frac{1}{2}l-2R.$$

Если $S'(R)=0,\ то\ \frac{1}{2}l-2R\ \ и\ \ R=\frac{1}{4}l.$

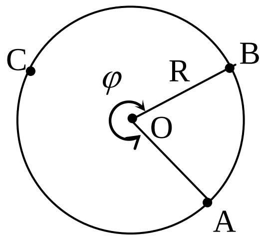
$$S''(R)=-2<0.$$

Т.к. $S''(R)<0,$ то при $R=\frac{1}{4}l$ функция $S(R)$ достигает наибольшего значения.

Ответ: $R=\frac{1}{4}м.$

4. Из бумажного круга вырезан сектор, а из оставшейся его части склеена коническая воронка. Какой угол должен иметь вырезанный сектор, чтобы объем воронки был наибольшим?

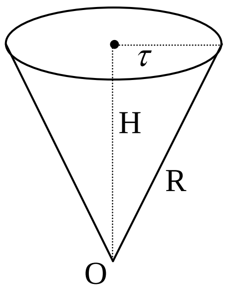
Решение.



Обозначим радиус круга через R. Тогда $L_{\cup ABC} = R\varphi$. Обозначим радиус воронки через r, а высота – через Н. Тогда

$$V_{кон.в.} = \frac{1}{3}\pi r^2 H., где\ H = \sqrt{R^2 - r^2}.$$

$L_{\cup ABC} = R\varphi = 2\pi r -$ длина окружности конуса. Из последнего равенства $r = \frac{R\varphi}{2\pi}$. Подставляем r и H в формулу объема конуса:



$$V = \frac{1}{3}\pi\ \frac{R^2\varphi^2}{4\pi^2}\sqrt{R^2 - \frac{R^2\varphi^2}{4\pi^2}} = \frac{R^3\varphi^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 - \varphi^2}.$$

Вводя обе части в квадрат, получим:

$$V^2 = \frac{R^6\varphi^4}{24^2\pi^4}(4\pi^2 - \varphi^2) = W(\varphi).$$

Функцию $W(\varphi)$ исследуем на экстремум:

$$W'_\varphi = \frac{R^6}{24^2\pi^4}(4\varphi^3(4\pi^2 - \varphi^2) + \varphi^4(-2\varphi)) = \frac{R^6\varphi^3}{24\cdot 12\pi^4}(8\pi^2 - 3\varphi^2).$$

$$W' = 0 \Rightarrow 8\pi^2 - 3\varphi^2 = 0;\ \varphi^2 = \frac{8}{3}\pi^2;\ \varphi = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\ \pi.$$

$$W''_\varphi = \frac{R^6}{24\cdot 12\pi^4}(3\varphi^2(8\pi^2 - 3\varphi^2) + \varphi^3(-6\varphi)) = \frac{R^6\varphi^2}{24\cdot 4\pi^4}(8\pi^2 - 5\varphi^2).$$

$$W''\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\pi\right) = \frac{R^6\cdot 4\cdot {}^2\!/_3\,\pi^2}{24\cdot 4\pi^2}(8\pi^2 - 5\cdot\frac{4\cdot 2}{3}\pi^2) = \frac{R^6}{36}\left(-\frac{16}{3}\pi^2\right) < 0.$$

Это означает, что, при полученном значении $\varphi = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\ \pi$, объем воронки будет наибольшим. Значит, вырезан сектор с углом $2\pi - \varphi$.

Ответ: $2\pi\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$

Задание 7. Провести полное исследование функции и построить ее график $y = \dfrac{x+2}{(x+1)^2}$.

Решение.

1. Областью определения функции является множество

$$x \in (-\infty;-1) \cup (-1;+\infty);$$

2. Функция не является четной и не является нечетной; т.е. это функция общего вида;
3. Найдем точки пересечения графика с осями координат:

$$x = 0, \quad y = \frac{2}{1} = 2, \qquad т.A(0;2);$$

$$y = 0, \quad x + 2 = 0, \; x = 2, \; т.B(-2;0).$$

4. При $x = -1$ функция не существует.

$$\lim_{x \to -1-0} y = \lim_{x \to -1-0} \frac{x+2}{(x+1)^2} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -1+0} y = \lim_{x \to -1+0} \frac{x+2}{(x+1)^2} = +\infty;$$

Значит, $x = -1$ - вертикальная асимптота.

Найдем наклонные асимптоты $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+2}{(x+1)^2 x} = 0,$$

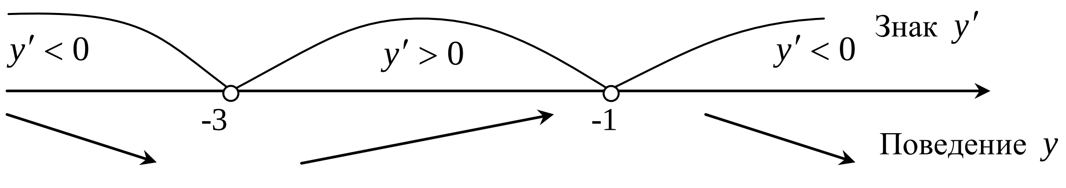
$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+2}{(x+1)^2 x} = 0;$$

$$y = 0 - горизонтальная\ асимптота.$$

5. Исследуем функцию на экстремум:

$$y' = \frac{(x+1)^2 - (x+2)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{x+1-2x-4}{(x+1)^3} = \frac{-x-3}{(x+1)^3} = -\frac{x+3}{(x+1)^3};$$

из $y' = 0$ *следует, что* $x = -3$ – *критическая точка* 1 *рода.*



На интервалах $(-\infty;\ -3)$ *и* $(-1;\ +\infty)$ функция убывает; на интервале $(-3;\ -1))$ возрастает.

В точке $x=-3$ функция достигает локального минимума:

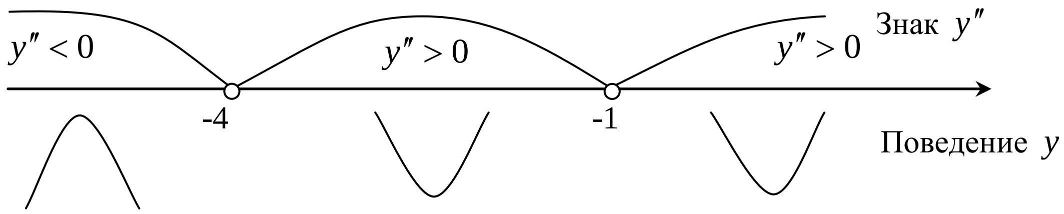
$$y_{\min}(-3)=\frac{-3+2}{(-3+1)^2}=-\frac{1}{4}.$$

6. Исследуем функцию на выпуклость, вогнутость и найдем точки перегиба:

$$y''=\frac{(x+1)^3-(x+3)\cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6}=\frac{(x+1)-3\cdot(x+3)}{(x+1)^4}=\frac{x+1-3x-9}{(x+1)^4}=$$

$$=-\frac{-2x-8}{(x+1)^4}=\frac{2(x+4)}{(x+1)^4}.$$

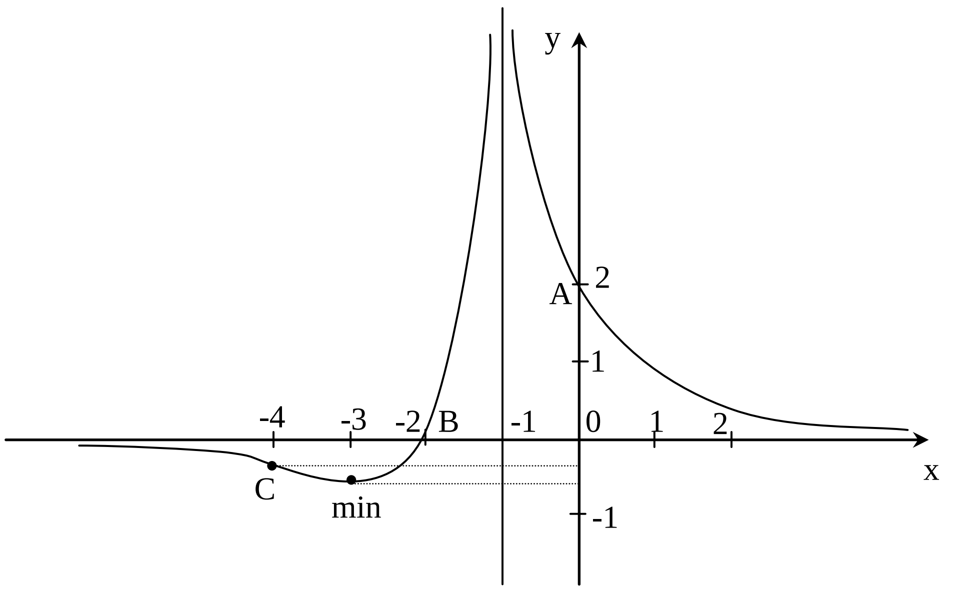
$y''=0 \Rightarrow x=-4$ - критическая точка 2-го рода



На интервалах $(-4;-1)$ *и* $(-1;+\infty)$ - функция вогнутая. На интервале $(-\infty;-4)$ - функция выпуклая.

$$y(-4)=\frac{-4+2}{(-4+1)^2}=\frac{-2}{9}.$$

Точка $C\left(-4;-{}^{2}\!/_{9}\right)$ - точка перегиба.



Литература.

1. Беклемешев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. -М., Наука, 1980.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. –М., Наука, 1980.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. –М., Наука, 1980.
4. Гурский Е.И. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии. - Мн., Выш. шк., 1982.
5. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. В пяти частях. Часть1.- Мн., Выш. шк., 1992.
6. Мантуров О.В., Матвеев Н.М. Курс высшей математики: Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. - М., Высш. шк., 1986.
7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Том 1. –М., Наука, 1985.
8. Русак В.М., Шлома Л.I. i iнш. Курс вышэйшай матэматыкi. Алгебра i геаметрыя. Аналiз функцый адной зменнай. - Мн., Выш. шк., 1994.
9. Тузiк А.I., Тузiк Т.А. Асновы лiнейнай алгебры i аналiтычнай геаметрыi.- Брэст, БрПI, 1994.
10. Тузiк А.I., Тузiк Т.А. Уводзiны у матэматычны аналiз. Дыферэнцыяльное злiчэнне функцый адной пераменнай. .- Брэст, БрПI, 1996.
11. Гусак А.А. Задачи и упражнения по высшей математике. Часть 1. – Мн., Выш. шк., 1988.
12. Гурский Е.И. и др. Руководство к решению задач по высшей математике. Часть 1. – Мн., Выш. шк., 1989.
13. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1. - М., Высш. шк., 1997.
14. Индивидуальные задания по высшей математике. В трех частях. Часть 1/ Под редакцией Рябушко А.П. – Мн., Выш. шк., 2000.
15. Сухая Т.А., Бубнов В.Ф. Задачи по высшей математике. В двух частях. Часть 1. – Мн., Выш. шк., 1993.
16. Гусак А.А , Гусак Г.М., Бричикова Е.А. Справочник по высшей математике. – Мн., Тетра Системс, 1999-2000.
17. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. –М., Наука, 1968.