**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА Графы, часть 2.**

***Нахождение кратчайшего пути в графе***

Присвоим каждому ребру графа *вес*, некоторую меру. Например, это может быть расстояние между вершинами (городами в конкретной задаче). Такой граф называется *взвешенным*.

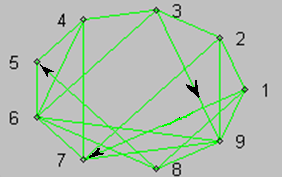
Матрица смежности преобразуется, таким образом, в матрицу весов и элемент  матрицы весов будет равен весу соответствующего ребра (дуги).

Ставится задача: определить кратчайшее расстояние от заданной вершины до всех остальных вершин. Рассмотрим алгоритм *Дейкстры* для решения этой задачи на примере *смешанного* графа.

*Граф, имеющий и ребра и дуги, газывается смешанным*.

Алгоритм позволяет найти кратчайший путь между некоторой вершиной и остальными вершинами при условии, что в графе нет дуг (ребер) с *отрицательным* весом. Рассмотрим основную идею алгоритма на примере графа на *рис. 1*.,с матрицей весов дуг *рис.2* (в которой по строкам и столбцам отмечены номера вершин, а на пересечении *i* строки и *j* столбца указана длинна (вес) дуги (ребра) соединяющей *i-ю* и *j-ю* вершины).Требуется найти все кратчайшие пути от вершины  ко всем остальным вершины.

Поскольку граф смешанный, по дугам мы двигаемся строго по направлениям стрелок.



*рис.1.*  *рис.2*

Суть алгоритма состоит в том, что мы будем искать кратчайший путь сначала от вершины  до одной из смежных вершин. Затем от вершин с найденными кратчайшими путями до одной из следующих смежными с ними вершин, пока не найдем кратчайшие пути до всех вершин или до заранее заданной вершины.

Составим вспомогательную таблицу, в которой будем записывать найденные пути от вершины до соответствующих вершин..

*На первом шаге* вычисляем пути от вершины до смежных с ней вершин. Каждый такой путь равенвесу дуги (ребра), соединяющейи соответствующую вершину, записываем их в таблицу. Путь от  до  считаем равным *0* и помечаем его *«\*»* как далее не вычисляемый. Для вершин,несмежныхс вершиной , путь принимаем равный



В нижнюю строку записываем для найденных путей вершину, от которой высчитывали пути (т.е. ). Впоследний столбец записываем вершину, путь до которой был кратчайшим и величину самого пути (рассматриваются все пути в таблице, за исключением,помеченныхсимволом *«\*»*). В нашем случае это  и в таблице помечаем ее *«\*»*.

Получаем следующее заполнение таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *№*  *итерации* |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *Кратч. расстояние отдо* |
| *1* | *0\** | *10* |  |  |  |  | *3\** | *6* | *12* |  |
| *…* |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *Предшест-вующая вершина* |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Путь от  до ,равный *3*, будет кратчайшим в графе, поскольку пути от до всех остальных смежных вершин изначально длиннее. Соответственно, любой обходной путь будет также длиннее.

*На втором шаге* берем вершину для которой на предыдущем шаге был вычислен наикратчайший путь (в нашем случае это ) и вычисляем для смежных с ней вершин (кроме вершин помеченных *«\*»*) пути, равные сумме наикратчайшего пути до и весу дуги ( ребра ) до соответствующей смежной вершины. Далее сравниваем вычисленный путь с путем в таблице. Если вычисленный путь оказался больше, то для данной вершины все оставляем по-прежнему. Если же вычисленный путь оказался меньше, то в таблице записываем новое значение пути для данной вершины, а в последней строке заменяем значение предшествующей вершины на.

После вычисления всех путей к вершинам, смежным с , выбираем кратчайший путь и помечаем соответствующую вершину \*. В последний столбец таблицызаписываем вершину с соответствующим ей кратчайшим из вычисленных путей. В нашем случае это 

Получаем следующее заполнение таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *№*  *итерации* |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *Кратч.*  *расстояние*  *от до* |
| *1* | *0\** | *10* |  |  |  |  | *3\** | *6* | *12* |  |
| *2* |  | *5\** |  | *7* |  | *17* |  | *6* | *12* |  |
| *…* |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *Предшест-вующая вершина* |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Далее повторяем действия в шаге *2* для новой вершины, и т.д., до тех пор, пока не найдем кратчайшие пути ко всем вершинам.

В конечном итоге получим следующую таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *№*  *итерации* |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *Кратч.*  *расстояние*  *от до* |
| *1* | *0\** | *10* |  |  |  |  | *3\** | *6* | *12* |  |
| *2* |  | *5\** |  | *7* |  | *17* |  | *6* | *12* |  |
| *3* |  |  |  | *7* |  | *17* |  | *6\** | *12* |  |
| *4* |  |  | *23* | *7\** | *23* | *17* |  |  | *11* |  |
| *5* |  |  | *23* |  | *12* | *17* |  |  | *11\** |  |
| *6* |  |  | *23* |  | *12\** | *17* |  |  |  |  |
| *7* |  |  | *23* |  |  | *17\** |  |  |  |  |
| *8* |  |  | *23\** |  |  |  |  |  |  |  |
| *Предшест-вующая вершина* |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

В данной таблице в крайнем правом столбце перечислены значения кратчайших путей от вершины до всех вершин графа. А для нахождения вершин, через которые проходит кратчайший путь к данной вершине, поступают следующим образом: для вершины к которой необходимо найти путь из последней строки таблицы находится предыдущая вершина, для данной предыдущей вершины из последней строки таблицы находим для нее предыдущую вершину и т.д., до начальной вершины.

Для отрицательных весов используют, например, алгоритм *Флойда-Уоршолла*

***Задание.***

1. Нарисовать граф.
2. Программно алгоритмом *Дейкстры* вычислить кратчайшие пути от вершины  ко всем вершинам графа. Варианты графов указаны в таблице 1. Графы заданы списком ребер, в квадратных скобках указаны веса соответствующих ребер.
3. Нарисовать таблицу пошагового выполнения алгоритма *Дейкстры*.
4. Программно алгоритмом Флойда-Уоршолла вычислить кратчайшие пути от вершины ко всем вершинам графа.
5. Сравнить скорость выполнения обоих алгоритмов для заданного графа.

*Таблица 1*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *№*  *№* | *Кол.*  *вер-*  *шин* | *Кол.*  *ре-*  *бер* | *Ребра*  *и веса* |
| *1.* | *6* | *9* | *{1,2},{1,4}{2,3},{2,4},{3,4}*  *{3,5},{3,6},{4,5},{5,6};*  *[4,3,6,5,4,7,8,5,6];* |
| *2.* | *6* | *9* | *{1,2],{1,3},{1,4},{2,4},{2,6}*  *{3,4},{3,5}{4,5}{4,6};*  *[5,7,4,3,2,5,8,6,4];* |
| *3.* | *7* | *10* | *{1,2},{1,4},{1,5},{2,3},{2,4},*  *{3,4},{4,5},{4,6},{6,7},{7,5};*  *[5,6,8,6,3,6,4,2,3,5];* |
| *4.* | *7* | *11* | *{1,2},{1,5},{2,3},{2,4},{2,6}.{2,7},*  *{3,6},{4,5},{4,7},{5,7},{6,7};*  *[5,3,6,4,7,9,5,3,6,4,2];* |
| *5.* | *7* | *11* | *{1,2},{1,3},{1,4},{2,4},{3,4},{3,6},*  *{3,7},{4,5},{4,6},{5,7},{6,7};*  *[5,4,6,3,3,5,9,5,4,3,6];* |
| *6.* | *7* | *11* | *{1,2},{1,3},{2,4},{2,5},{2,6}.{2,7},*  *{2,5},{3,6}{4,6},{5,6},{6,7};*  *[5,4,3,6,6,8,5,7,4,4,3];* |
| *7.* | *7* | *11* | *{1,2},{1,3},{1,4},{2,4},{2,3},{2,7},*  *{3,6}{4,5},{5,6},{5,7}{6,7};*  *[3,7,4,2,5,10,4,4,5,6,7];* |
| *8.* | *7* | *9* | *{1,2},{1,5},{2,3},{2,4},{3,6},{4,6},*  *{4,5},{5,6},{6,7};*  *[3,5,5,4,4,2,3,2,3];* |
| *9.* | *7* | *10* | *{1,2},{1,3},{2,5},{2,4},{3,7},{4,6},*  *{4,5},{4,6},{5,6}.{6,7};*  *[10,7,6,5,5,7,7,8,6,8];* |
| *10.* | *7* | *9* | *{1,2},{1,4},{2,3},{3,4},{3,5},{3,6},*  *{4,5},{5,6}.{6,7};*  *[10,8,7,11,5,6,8,4,9];* |
| *11.* | *6* | *9* | *{1,2},{1,4},{1,3},{2,4},{3,4},{3,6},*  *{4,5},{4,6}.{5,6,};*  *[7,12,5,6,6,10,4,6,7];* |
| *12.* | *6* | *9* | *{1,2},{1,4},{1,3},{2,3},{2,6},{3,4},*  *{4,5},{4,6}.{5,6,};*  *[9,12,7,8,11,6,9,10,12];* |
| *13.* | *6* | *8* | *{1,2},{1,4},},{2,3},{3,4},{3,5}*  *{4,5},{4,6}.{5,6,};*  *[7,6,5,8,6,10,14,11];* |
| *14.* | *5* | *8* | *{1,2},{1,4},{1,3},{2,3},{2,4}*  *{3,5},{3,4},{4,5};*  *[3,5,6,8,6,10,10,8];* |

***Вопрсы к лабораторной работе.***

*Отвечать письменно, ответы обосновывать.*

1. Что такое *«жадный»* алгоритм и какой из указанных алгоритмов является *«жадным»*? Указать *«О большое»* для обоих алгоритмов.
2. Почему классический алгоритм *Дейкстры* не работает для отрицательных весов?
3. Описать алгоритм *А стар (А\*)* и область его применения

***Литература***

1. Андерсон, Д. Дискретная математика и комбинаторика.
2. Липский, В. Комбинаторика для программистов.
3. Кормен Т. Алгоритмы. Построение и анализ.