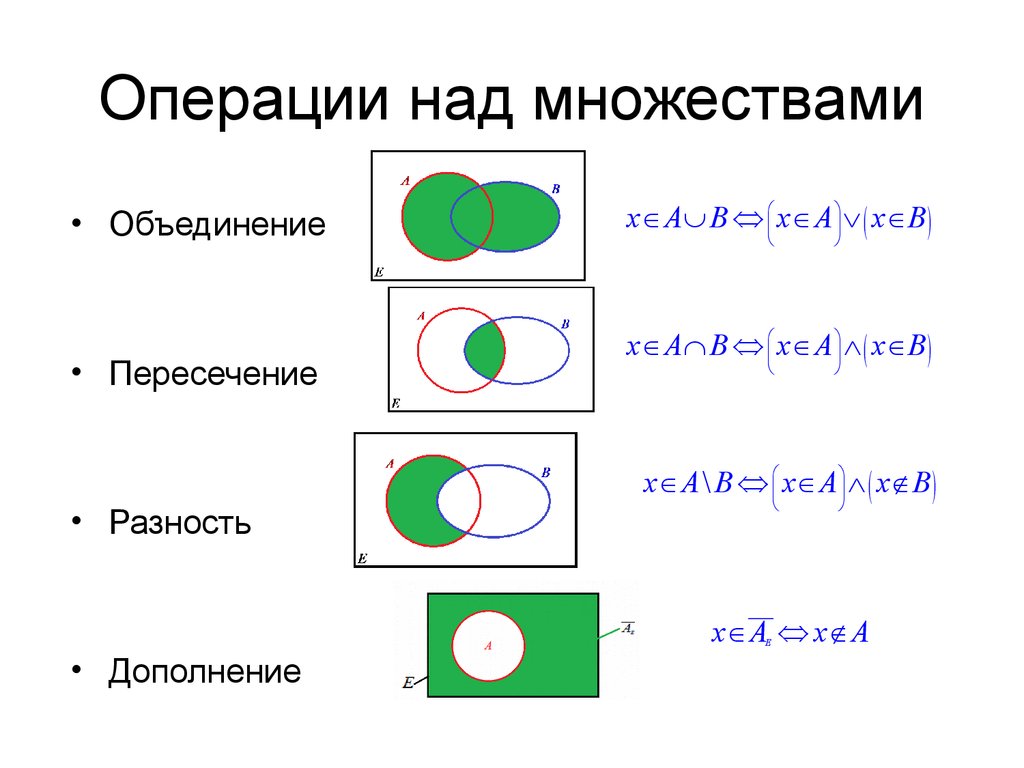
**1.операции над множествами. Диаграммы Эйлера-Венна.**

****

****

**2.способы задания множеств. Понятие подмножества.**

Чтобы задать множество, нужно указать, какие элементы ему принадлежат. Это можно сделать различными способами.

• **перечислением элементов**: М ={a, b, c, d};

**• указанием характеристического свойства**, которому удовлетворяют элементы данного множества, и только они: М = {х | Р(х)} или {х: Р(х)} При задании множеств перечислением обозначения элементов обычно заключают в фигурные скобки и разделяют запятыми.

Характеристическое свойство задается с помощью предиката. Предикат Р(х) – это логическая функция, принимающая два значения «истина» или «ложь» в зависимости от значения своего аргумента, принадлежащего некоторому множеству

**3.Разбиения,покрытия.Булеан,мощность булеана.**

Пусть ε={Ei} — некоторое семейство подмножеств множества M, Ei⊂M.

Семейство ε называется **покрытием** множества M, если каждый элемент M принадлежит хотя бы одному из множеств Ei.

**Разбиением** множества MM называется дизъюнктивное покрытие εε.

Пример

Пусть M={1,2,3}M={1,2,3}, тогда семейство {{1,2},{2,3},{3,1}}{{1,2},{2,3},{3,1}} является покрытием, но не разбиением; {{1},{2},{3}}{{1},{2},{3}} является разбиением (и покрытием)

Множество всех подмножеств множества A называется булеаном множества A и обозначается P(A) или A 2 .

Для конечного множества A мощность его булеана: | P(A)|= .

**4.Понятие прямого произведения множеств, его мощность.**

Прямым (декартовым) произведением двух множеств A и B называется множество упорядоченных пар, в котором первый элемент каждой пары принадлежит множеству A, а второй принадлежит множеству B: A× B = {(a,b) | a∈ A ∧ b∈B}.

Если мощность множества А равна n, а мощность множества B равна m, то мощность прямого произведения: | A× B |= n ⋅m. Соответственно, | |= .

**5.Свойства операций над множествами.**

1. Коммутативность. x ∧ y = y ∧ x .

x ⊕ y = y ⊕ x

2. Ассоциативность. (x ∨ y)∨ z = x ∨ ( y ∨ z).

(x ~ y) ~ z = y ~ (x ~ z)

3. Дистрибутивность. (x ∨ y) ∧ z = (x ∧ z) ∨ ( y ∧ z) .

(x ∧ y) ∨ z = (x ∨ z) ∧ ( y ∨ z) .

4. Закон двойного отрицания. x = x .

5. Законы де Моргана. x ∨ y = x ∧ y

6. Законы идемпотентности. x∨ x = x, x ∧ x = x

7. Законы поглощения. (x ∨ y) ∧ x = x (x ∧ y) ∨ x = x

**6.понятие отношения. Способы задания отношений**

**Отноше́ние** — математическая структура, которая формально определяет свойства различных объектов и их взаимосвязи

Отношение между конечными множествами может задаваться различными способами: 1. с помощью подходящего предиката; 2. как матрица (или таблица); 3. как орграф; 4. как множество упорядоченных пар (перечислением)

**7.область определения, область значений отношений; обратное отношение**

Введем несколько понятий, связанных с отношениями.

Пусть R есть отношение на A× B : R ⊆ A× B , (a,b) ∈ R и a∈ A, b∈B.

Область определения отношения: D(R) = {a | (a,b) ∈ R– множество всех первых элементов a упорядоченных пар из R. Для нашего отношения R1 ⊆ A× A, A = {2,3,4,5,6}:

D(R1 ) ={3,4,5,6}

Множество значений отношения: E(R) = {b | (a,b) ∈ R}– множество всех вторых элементов b упорядоченных пар из R.

E(R1 ) ={2,3,4,5}.

Обратное отношение: Обратное отношение −1 R на множестве B × A определяется следующим образом:

= {(b, a) |( a, b) ∈R}

Таким образом, (b, a) ∈ тогда и только тогда, когда (a,b) ∈ R , другими словами связывает те же элементы, но в обратном порядке.

**8.операции над отношениями. Операции композиции отношений**

Поскольку R – это множество упорядоченных пар, то над отношениями можно выполнять операции объединения, пересечения, разности, дополнения.

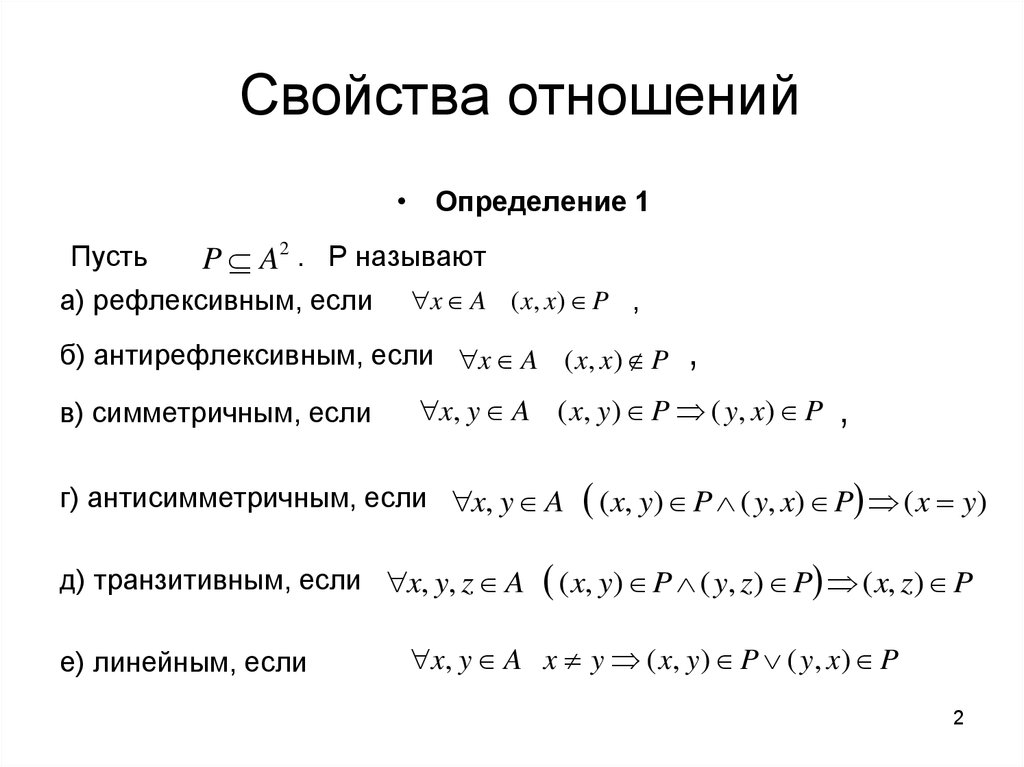
Для бинарных отношений определена специальная операция, называемая композицией.

Пусть R – отношение между множествами A и B, R ⊆ A× B и S – отношение между множествами B и C, S ⊆ B×C . Композицией отношений S и R называется бинарное отношение между A и C, которое обозначается S ο R и определяется следующим образом: S ο R ={(a,c)| a∈ A,c∈C ∧ ∃ b∈ B (a,b)∈ R ∧ (b,c)∈S}

Для двух бинарных отношений R и S, заданных на множестве A, их композиция является бинарным отношением на том же множестве.

из записи следует, что отношения применяются справа налево: вначале применяется R, затем S, т.е. справедливо соотношение: (S ο R)(a) = S(R(a)).

**9.свойства отношений.**

****

**10.замыкание отношений относительно свойств.**

Если отношение R на множестве A не обладает тем или иным свойством P, то его можно попытаться продолжить до отношения R \* , которое будет иметь нужное свойство. Под «продолжением» мы понимаем присоединение некоторых упорядоченных пар к подмножеству R ⊂ A× A так, что новое полученное множество уже будет обладать требуемым свойством. Ясно, что исходное множество R будет подмножеством R \* . В том случае, если вновь построенное множество R \* будет минимальным среди всех расширений R с выделенным свойством, то говорят, что R \* является замыканием относительно данного свойства P.

Дано множество A = {a,b,d,l} на котором задано отношение R = {(a,b),(b,d),(d,l)}. Отношение не рефлексивно, не симметрично и не транзитивно. Рефлексивным замыканием будет отношение: R′ = {(a,b),(b,d),(d,l),(a,a),(b,b),(d,d),(l,l)}. Симметричным замыканием будет отношение: R′′ = {(a,b),(b,d),(d,l),(b,a),(d,b),(l,d)}.

Транзитивным замыканием будет отношение: R = {(a,b),(b,d), (d,l),(a,d),(b,l), (a, l)}

**11.отношение эквивалентности. классы эквивалентности. Фактор множество.**

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение на множестве A называется отношением эквивалентности. Отношениями эквивалентности, определенными на соответствующих множествах, являются: отношения равенства чисел и множеств, отношение равномощности множеств, отношение подобия треугольников, || прямых на множестве прямых плоскости и т.д.

Пусть R – эквивалентность на множестве A и a ∈ A. Множество всех элементов множества A эквивалентных a, называется классом эквивалентности для a по отношению R и обозначается: [a] = {b∈A | bRa} или [a] ={b∈A|(b,a)∈ R}

Множество всех классов эквивалентности называется фактор множеством множества A по эквивалентности R и обозначается .

Построим фактор множество для нашего отношения эквивалентности.={{2,4.6},(3,5}}. Фактор множество, является разбиением множества A и является также подмножеством булеана: ⊂

**12.отношение порядка . отношение частичного порядка. Понятие ЧУ-множества.**

Рефлексивное, антисимметричное, транзитивное отношение называется отношением частичного (нестрогого) порядка. Отношение частичного порядка принято обозначать знаком ≤ , это обозначение является условным. Если отношение R на множестве A является отношением частичного порядка, то (A, ≤) называют частично-упорядоченным множеством или ЧУмножеством.

Рассматриваемое нами отношение S ={(a,b)| a,b∈ N ∧ a − делитель b}, определенное на множестве натуральных чисел N, является отношением частичного порядка, а (N, ≤) – ЧУ-множеством.

Множество A , на котором задано отношение частичного порядка, называется полностью упорядоченным (линейно упорядоченным, цепью), если каждые два элемента ЧУ-множества (A, ≤) сравнимы.

**13.сравнимые и несравнимые элементы. Диаграмма Хассе. Наибольший/наименьший и максимальный/минимальный элемент ЧУ-множества.**

Два элемента a и b ЧУ-множества (A, ≤) называются сравнимыми по отношению порядка R, если выполняется a ≤ b или b ≤ a.

**Несравнимые** **элементы** - Такие **элементы** в частично упорядоченном **множестве**, которые не состоят в отношении частичной упорядоченности

Отношения частичного порядка на множестве удобно задавать диаграммами Хассе. Диаграмма Хассе представляет собой граф (иногда орграф), в котором петли не указываются. Вершины графа изображают элементы частично упорядоченного множества A, и если a ≤ c , для элементов а и с множества A, то вершина a помещается ниже вершины c и соединяется с ней ребром, если не существует такое b ≠ a, c что a ≤ b ≤ c . Если же такое b существует и a ≤ b ≤ c , то линия от a к c не указывается.

****

1)элемент a∈A называется наибольшим если для всех элементов b ∈A выполняется b ≤ a. Для любых b ∈A

2)элемент a∈A называется наименьшим если для любых b ∈A : a ≤ b

3) элемент a∈A называется максимальным если не существует b ∈A: b больше a, то есть выполняется 3 условия b меньше a, b=а,а и b –несравнимые

4) элемент a∈A называется минимальным если не существует b ∈A: b меньше a

**14.Понятие функции . Области определения и значений функции , множество значений функции**

Определим функцию как специальное отношение на множестве A× B , на которое наложено дополнительное ограничение. Отношение f на множестве A× B называется функцией из A в B и обозначается f : A → B , если для каждого a∈ A существует единственный элемент b∈B такой, что (a,b) ∈ f .

Множество A называется областью определения функции и обозначается D f . Множество E {b B | a A\_ b f (a)} f = ∈ ∃ ∈ = называется множеством значений функции f. Множество B называется областью значений функции

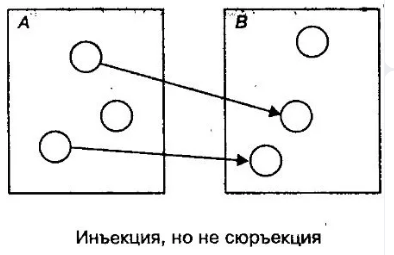
**Множество значений функции** — множество всех значений, которые функция принимает на области определения

**Область значений функции**— это множество значений, которые принимает переменная.

**15.Свойства функции: инъекция, сюръекция, биекция.**

Функция называется инъективной (инъекцией), если из f )следует a1 = a2 . Функция f называется отображением «на» или сюръективной функцией (сюръекцией), если для каждого b∈B существует некоторое a∈ A , такое что f (a) = b . Функция, которая является одновременно и инъективной и сюръективной называется биективной (биекцией). Если f : A → B биективная функция, то говорят, что f осуществляет взаимно однозначное соответствие между множествами A и B.

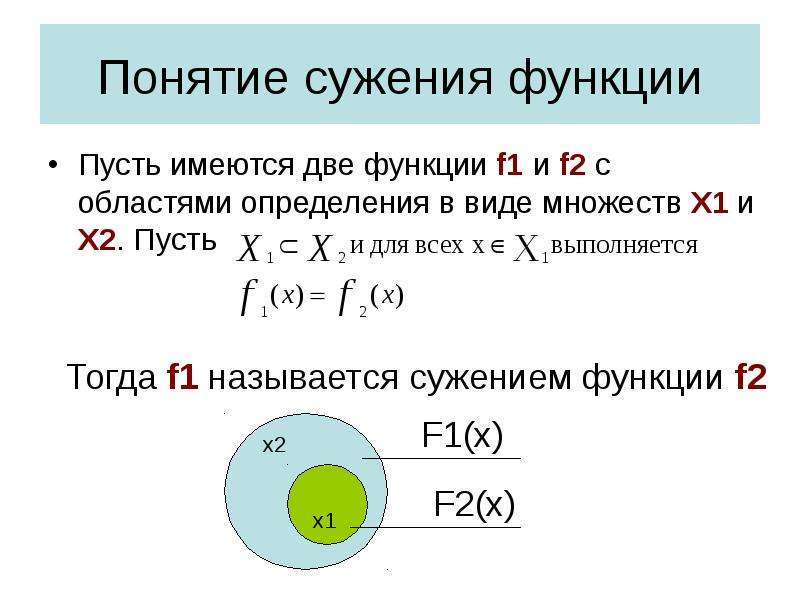
****

****

**16.** **Обратная функция, тождественная функция. Сужение функции на множество.**

Пусть задана функция f : A → B и – отношение, обратное f . Если отношение является функцией, то ее называют обратной функцией к f и она отображает множество B во множество A :B → A . Функция f имеет обратную тогда и только тогда, когда f – биекция, причем также является биекцией

Тождественной функцией (отображением) множества A на себя называется функция : A→ A , такая что ∀a∈ A\_ (a) = a.



**17.** **композиция функций. Свойства операции композиции.**

определим для функции операцию композиции. Пусть f : A → B и g : B → C . Тогда композиция двух функций g и f есть функция и она отображает множество A во множество С: g ο f : A → C . Если a∈ A , то (g ο f )(a) = g(f (a)). Композиция функций как и композиция отношений выполняется справа налево.

Композиция функций ассоциативна. И в общем случае не коммутативна : 1. h ο (g ο f ) = (h ο g) ο f ;

2. g ο f ≠ f ο g

композиция биективных функций есть также биективная функция

**18.** **Рекурсивный способ задания функции. Примеры.**

Рекурсивная процедура задает функцию, определенную на множестве (или \_N) следующим образом:

1. задается значение f(1) или f(0);

2. значение f(n+1) определяется через суперпозицию f(n) и других, считающихся известными, функций; Зададим, например, функцию f(n) = , определенную на множестве , рекурсивно:

f(0)=1;

f(n+1)=a умножить f(n);

Как видим, указанная функция может быть задана как аналитически (с помощью формулы), так и рекурсивно. Функция факториал f (n) = n!, определенная рекурсивно, имеет вид:

f(0)=1;

f(n+1) =(n+1) умножить f(n);

Последовательности чисел Фибоначчи и Каталана также могут быть заданы рекурсивно.

**19.Счётно бесконечные множества. Несчетные бесконечные множества.**

За основу для сопоставления бесконечных множеств берется множество натуральных чисел N. Множество A называется счетно бесконечным, если существует взаимно однозначное соответствие между множеством A и множеством натуральных чисел N.

Множество называется счетным, если оно конечно или счетно бесконечно.

Если бесконечное множество A нельзя поставить во взаимно однозначное соответствие с множеством натуральных чисел N, то множество A называется несчетным.

**20.Взаимно однозначное соответствие. Мощность множеств.**

Взаимно однозначным соответствием между двумя непустыми множествами A и B называется такое правило (или закон) f, по которому каждому элементу a∈ A ставится в соответствие единственный элемент f (a) ∈ B и для любого элемента b∈B существует единственный элемент a∈ A, такой что f (a) = b , другими словами, f задает биекцию между A и B.

Между непустыми конечными множествами A и B существует взаимно однозначное соответствие тогда и только тогда, когда | A |=| B |.

****

****

**21.Принцип Дирихле. Примеры использования.**

Пусть f : A → B – функция, причем A и B – конечные множества. Предположим, что A состоит из n элементов:,,…. Принцип Дирихле гласит, что если |A| > |B|, то, по крайней мере, одно значение f встретится более одного раза. Иначе, найдется пара элементов ai ≠ a j , для которых f() = f() . Принцип Дирихле иногда называют принципом клеток и формулируют в легко запоминающей форме: Невозможно рассадить 10 кроликов в 9 клетках так, чтобы в каждой клетке сидел один кролик

**Пример**

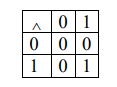
В коробке лежат 2 пары одинаковых ботинок. Какое наименьшее число ботинок нужно вынуть не глядя, чтобы среди них обязательно оказалась одна пара? Решение.

В таких задачах мы рассматриваем худший случай: за первые два раза мы вытащили 2 левых или 2 правых ботинка ( левый и правый – это лучший случай). Тогда, какой ботинок мы бы не вытащили в третий раз, мы обязательно получим пару одинаковых ботинок. Итак, ответ 3.

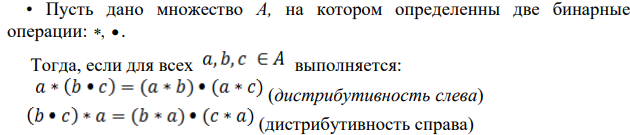
**22.понятие операции . таблица Кэли для задания операции. свойства операций**

Операцией над множеством A называется функция f → А. Поскольку мы определили операцию как функцию, то результат операции однозначно определен и т. к. ⊆ A операция замкнута на A. Определенная таким образом операция имеет арность (порядок) n. При n = 1 операция называется унарной, например, операция отрицания. При n = 2 операция называется бинарной. Бинарной операцией на множестве A называется функция f : A× A → A .

Одним из способов задания бинарных операций является таблица Кэли

****

свойства бинарных операций. • Бинарная операция называется коммутативной, если справедливо равенство: a\*b = b\*a, ∀a,b ∈ A . Коммутативными являются операции сложения и умножения на числовых множествах, операции сложения матриц одного порядка. Некоммутативны операции: вычитания на Z, деления на R, разности множеств, векторное произведения векторов• Бинарная операция называется ассоциативной, если справедливо равенство: (a \*b) \*c = a \* (b \* c) , ∀a,b,c ∈ A. Ассоциативными являются операции: сложение и умножение на Z, умножение матриц, объединение и пересечение множеств .Не ассоциативными являются операции разности множеств, векторное умножение векторов пространства.

****

**23.Принцип математической индукции.**

Инструментом для доказательства истинности утверждений относительно всех натуральных чисел является принцип математической индукции. Сформулируем его. Пусть P(n) есть такое утверждение, что: a) P(1) истинно, и b) для каждого k, если P(k) истинно, то P(k+1) истинно. Тогда P(n) истинно для любого натурального числа n. В символической записи принцип математической индукции имеет вид: (P(1) ∧ ((∀k)P(k) → P(k +1)) → (∀n)P(n). Рассмотрим примеры.

Пример 1.

Докажем методом математической индукции, что −1 делится на 6 при любом натуральном показателе n, т. е. имеет место равенство: −1 = 6 m , где m∈ N .

**1**. При n = 1 имеем: -1=7-1=6. И, следовательно, P(1) – истинно. **2**. Теперь покажем, что для ∀k ∈N , если P(k) истинно, то P(k+1) истинно. Предположим, что-1 делится на 6, т. е. -1 = 6m для некоторого натурального числа m. Запишем утверждение для (k+1) и выполним эквивалентные преобразования. Имеем:-1=7()-1=7()+7-1=7()+6=7\*6m+6=6(7m+1)=6l , где l = (7m +1) и l ∈ N .

**24.понятие булевой функции. основные булевы функции 2-х переменных .**

Пусть задано множество B = {0, 1}. Тогда, отображение f : → B множества на множество B называется булевой функцией n переменных и ее можно записать в виде f() . Булеву функцию называют также переключательной функцией.

Рассмотрим основные булевы функции.

1. конъюнкция или «логическое и » (логическое умножение). Обозначение: x ∧ y , x & y , x ⋅ y , xy.
2. сложением по модулю два (исключающее или) x ⊕ y .
3. дизъюнкция или «логическое или» (логическое сложение). Обозначение: x ∨ y , x + y
4. операцией Пирса или стрелкой Пирса. Обозначение: x ↓ y . Ее можно выразить через операции отрицания и дизъюнкции двух переменных
5. эквивалентность (логическая равнозначность). Обозначение: x ~ y .
6. импликация от y к x. Обозначение: y → x

**25.Основные эквивалентности для булевых функций.**

Коммутативность. x ∨ y = y ∨ x , x ∧ y = y ∧ x , x ⊕ y = y ⊕ x , x ~ y = y ~ x

2. Ассоциативность. (x ∨ y}∨ z = x ∨ ( y ∨ z), (x ∧ y) ∧ z = x ∧ ( y ∧ z), (x ⊕ y) ⊕ z = x ⊕ ( y ⊕ z) , (x ~ y) ~ z = y ~ (x ~ z)

3. Дистрибутивность. (x ∨ y) ∧ z = (x ∧ z) ∨ ( y ∧ z) , (x ∧ y) ∨ z = (x ∨ z) ∧ ( y ∨ z) , (x ⊕ y) ∧ z = (x ∧ z) ⊕ ( y ∧ z).

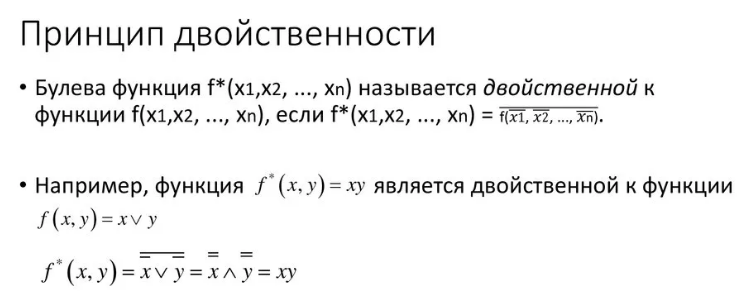
4. Закон двойного отрицания. x = x .

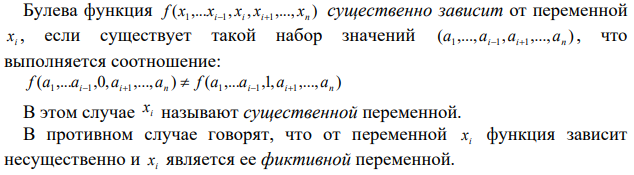
5. Законы де Моргана. x ∨ y = x ∧ y . x ∧ y = x ∨ y

6. Законы идемпотентности. x∨ x = x, x ∧ x = x

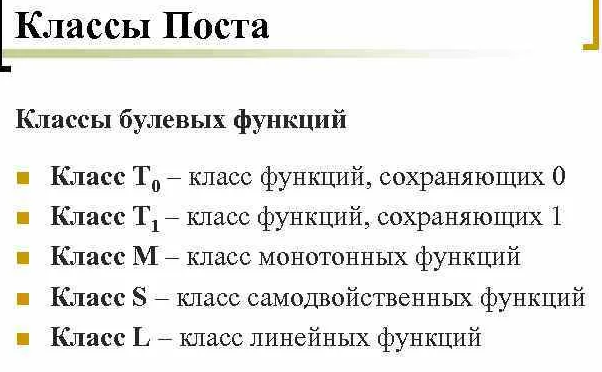
7. Законы поглощения. (x ∨ y) ∧ x = x, (x ∧ y) ∨ x = x 8. Другие эквивалентности. x ∨ не x =1 ,x ∧ не x = 0 ,x ∨1=1 ,x ∧0 = 0 ,x ∧1= x ,x ∨ 0 = x

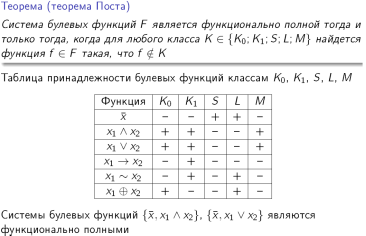
**26.Существенные и мнимые переменные. Двойственные функции**

****

****

**27.классы булевых функций. Теорема Поста-Яблонского.**

****



**28.конституэнта единицы. СДНФ булевой функции.**

****

Дизъюнкция конституент единицы, равных единице на тех же наборах, что и заданная функция, называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой булевой функции, сокращенно СДНФ. Любую булеву функцию f(), кроме константы 0, можно представить в виде СДНФ и это представление единственно.

Чтобы получить совершенную дизъюнктивную нормальную форму (СДНФ), надо взять все наборы, на которых значение функции равно 1 и записать для каждого из них конъюнкцию переменных и их отрицаний. Если в наборе значение переменной равно 0 – то переменную надо взять с отрицанием, если 1 – без отрицания

**29.конституэнта нуля. СКНФ булевой функции.**

****

Конъюнкция конституент нуля, которые равны нулю на тех же наборах, что и заданная функция, называется совершенной конъюнктивной нормальной формой, сокращенно СКНФ. Любую булеву функцию f(), кроме константы 1, можно представить в виде СКНФ и это представление единственно.

Чтобы получить совершенную конъюнктивную нормальную форму, надо взять все наборы, на которых значение функции равно 0 и записать для каждого из них дизъюнкцию переменных и их отрицаний. Если в наборе значение переменной равно 0, то переменную надо взять без отрицания, если 1 – с отрицанием.

**30.Полином Жегалкина. алгоритм построения.**

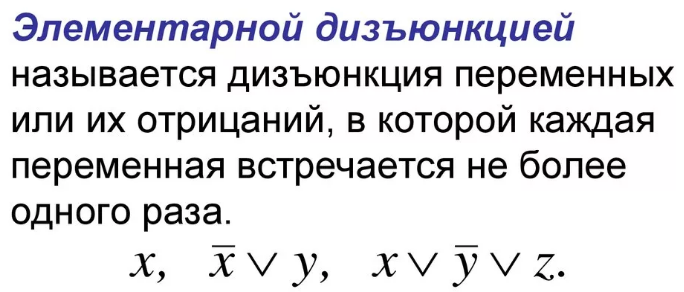
Справедлива следующая теорема Жегалкина. Любая булева функция может быть представлена в виде полинома, т. е. записана в форме.

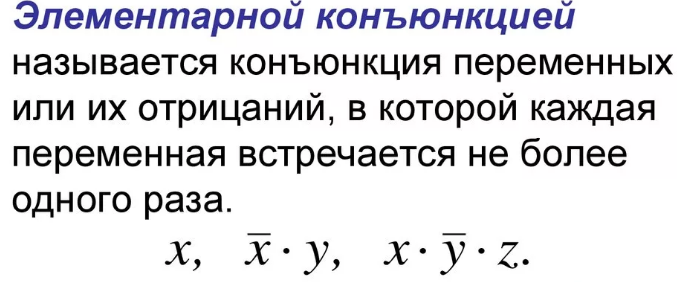
****

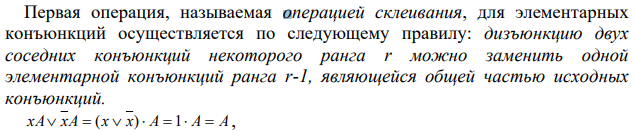
Слагаемое отсутствует, если коэффициент при нем равен нулю. Как мы видим, полином Жегалкина строится с помощью операций: сложение по модулю два, конъюнкции и константы 1. Полином Жегалкина для каждой булевой функции единственен.

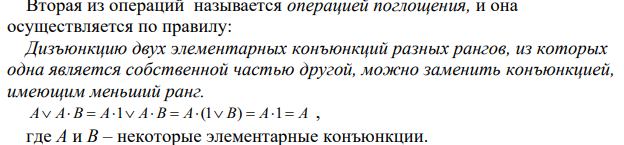
Полином Жегалкина можно построить различными способами: используя таблицу истинности (через СДНФ), методом неопределенных коэффициентов, методом треугольника.

**31.Понятие элементарной конъюнкции, дизъюнкции. Операции склеивания , неполного склеивания, поглощения.**

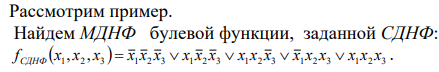
****

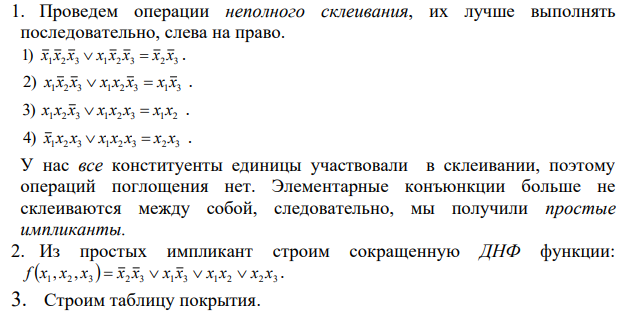
****

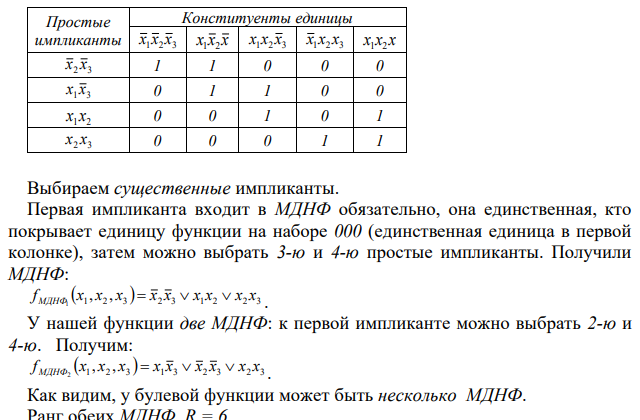
****

****

**32.Минимизация булевых функций методом Квайна.**

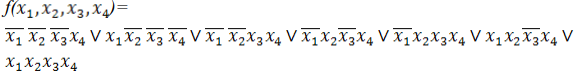
****

****

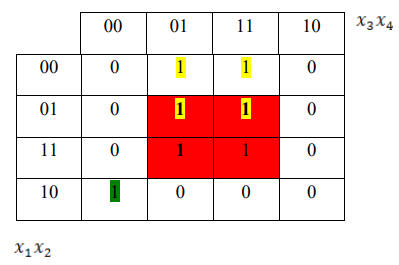
****

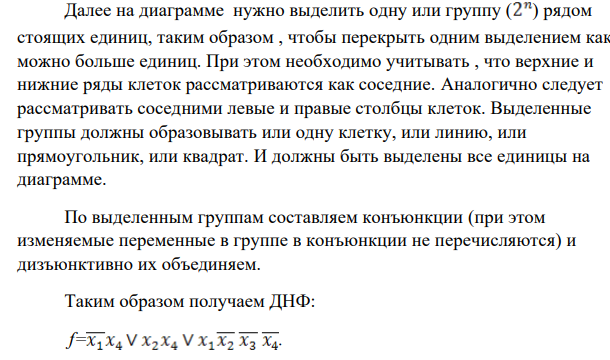
**33.Минимизация булевых функций методом Карно-Вейча.**

Диаграмма Карно выглядит как прямоугольная таблица с количеством клеток, зависящим от числа переменных булевой функции, для которой она строится. Например: для булевой функции

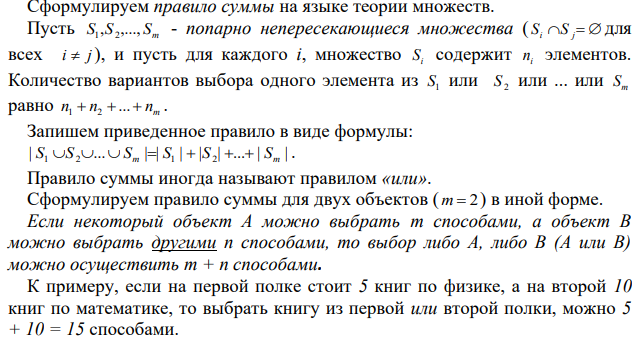


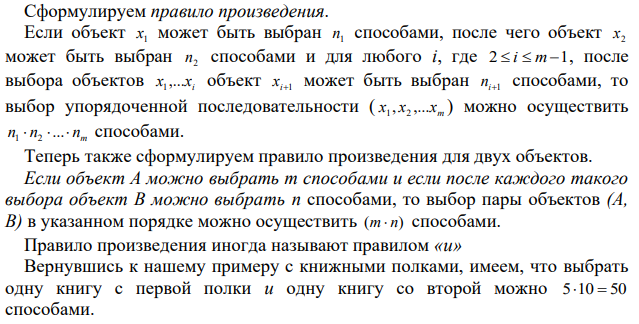
Построим диаграмму Карно



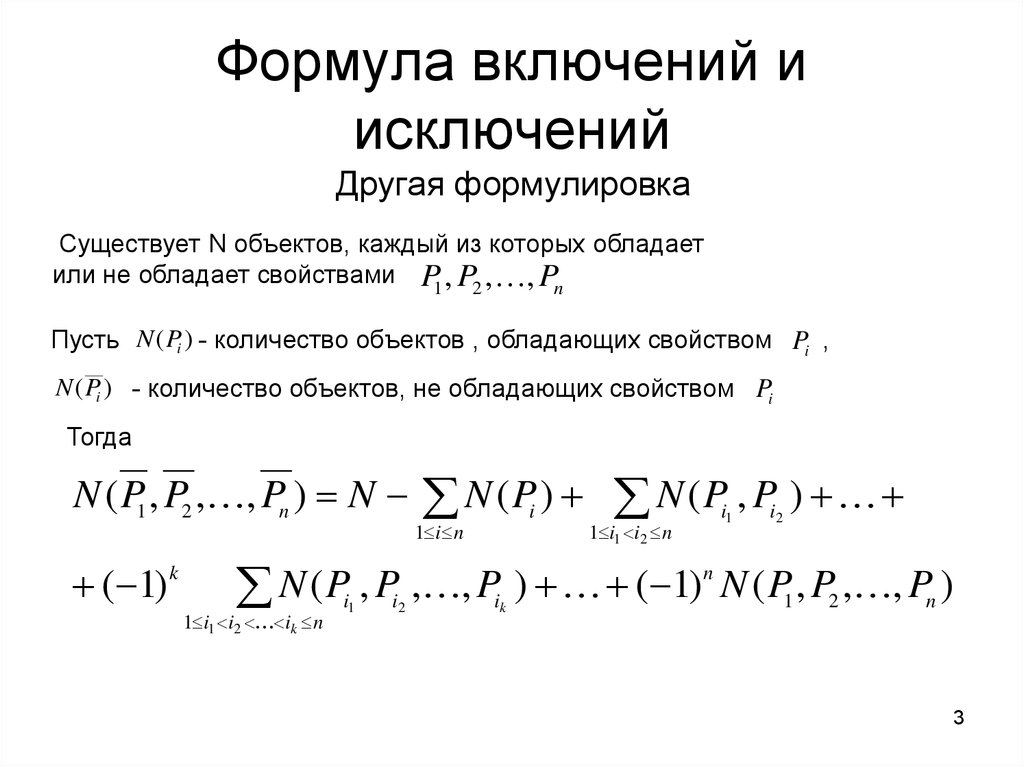


**34.Правило суммы. Правило произведения.**

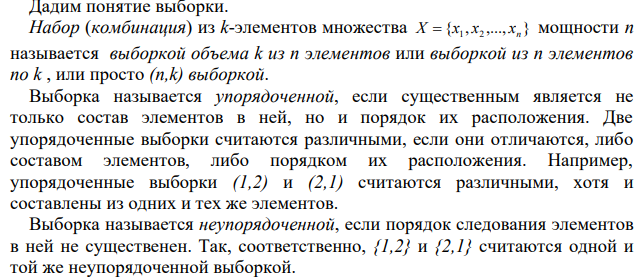
****

****

**35.Формула включений и исключений в комбинаторике и в теории множеств.**



**36.понятие выборки, примеры различных выборок.**

****

Рассмотрим пример, составим всевозможные (3,2)-выборки из элементов множества M = {a,b,c}.

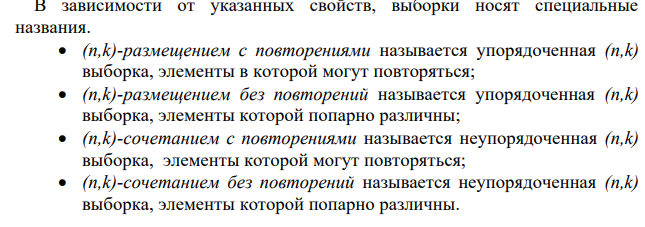
1. (a,a), (a,b), (a,c), (b,b), (b,a), (b,c), (c,c), (c,a), (c,b) – это размещения с повторениями. Их всего 9.

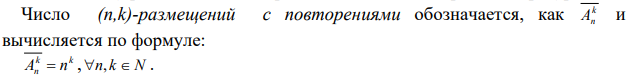
2. (a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (b,c), (c,b) – это размещения без повторений. Их, очевидно, всего 6.

3. (a,b), (a,a), (a,c), (b,b), (b,c), (c,c) - сочетания с повторениями. Их всего 6.

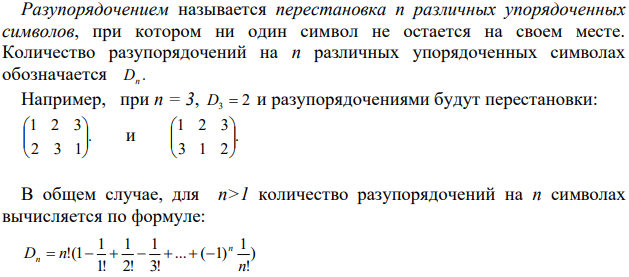
4. (a,b), (a,c), (b,c) – сочетания без повторений. Их всего 3.

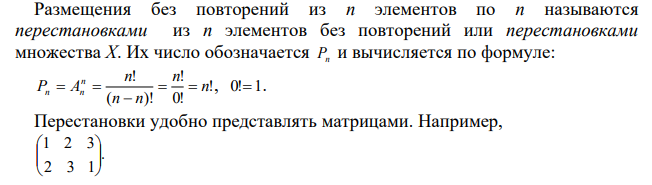
**37.Размещение с повторением и без.**

****

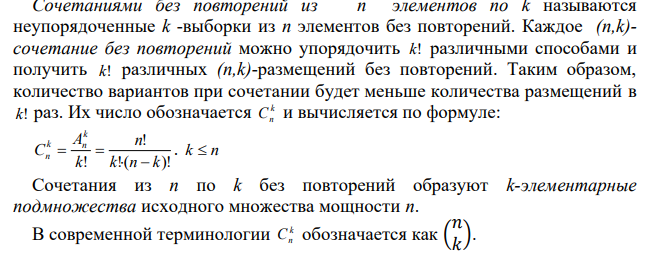
****

**38.Перестановки.Разупорядочения.**

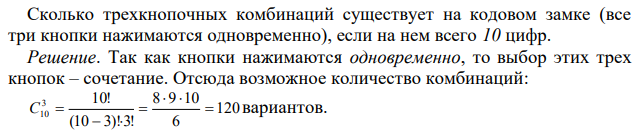
****

****

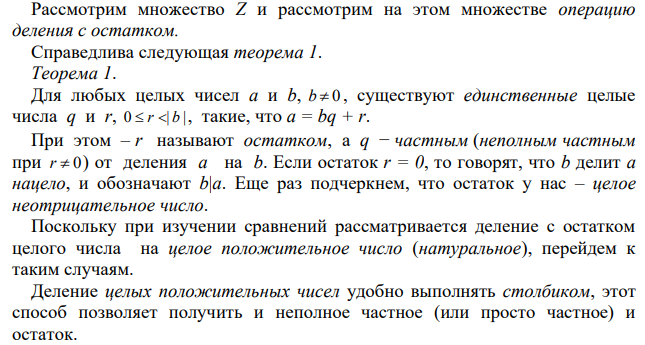
**39.Сочетания.**

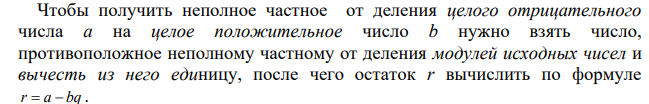
****

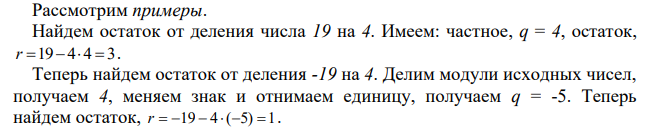
**Пример:**

****

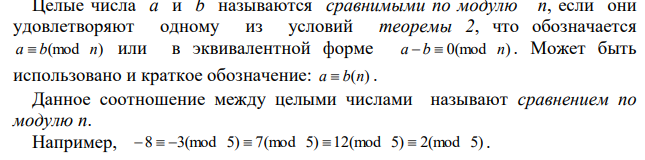
**40.Деление с остатком на множестве целых чисел Z. Алгоритмы деления.**

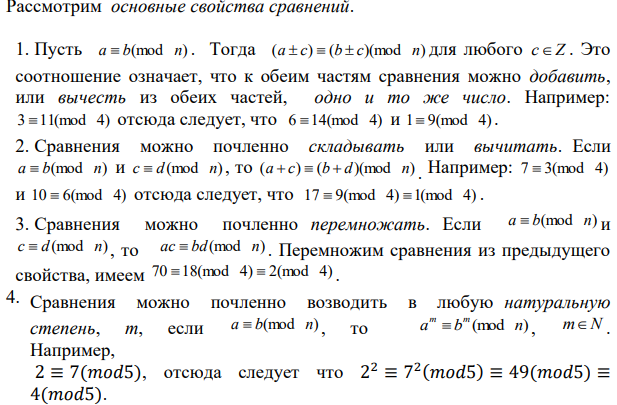
****

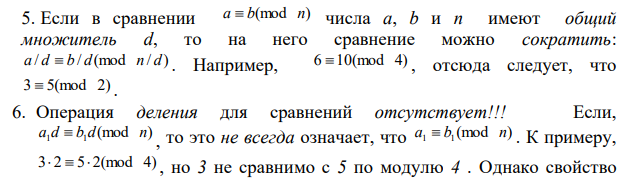
****

****

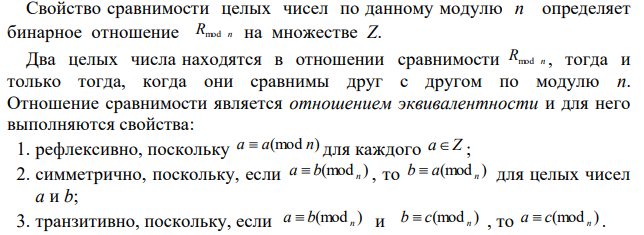
**41.Понятие сравнения. основные свойства сравнений.**

****

****

****

**42.Отношение сравнимости на множестве целых чисел Z. Классы вычетов.**

****

Классы вычетов с определенными выше операциями сложения и умножения по модулю составного числа n образуют кольцо классов вычетов, если n – простое число, то получаемая алгебраическая система – поле Галуа. Классы вычетов с операцией сложения образуют абелевую группу.