

1. Структурные особенности вычислительных алгоритмов, ориентированных на решение дифференциальных задач.
2. Основные источники и составные части погрешностей пошаговых методов численного решения начальных задач.
3. Явный метод Эйлера: способы построения, геометрический смысл, свойства.
4. Понятие локальной производной (производная на шаге) численного решения начальных задач.
5. Математическое представление локальной погрешности в случае явного метода Эйлера.
6. Постановка задачи для локальной погрешности явного метода Эйлера.
7. Неявный метод Эйлера: построение, геометрическая интерпретация, свойства.
8. Отличительные особенности локальной производной для случая неявного метода Эйлера.
9. Постановка задачи для локальной производной в случае неявного метода Эйлера.
10. Особенности задачи для локальной погрешности неявного метода Эйлера.
11. Локальная производная приближенного решения в общем случае одношаговых методов численного решения задачи Коши.
12. Принцип обратной связи в случае методов последовательного уточнения приближенного решения уравнения  $f(u) = 0$ .
13. Условия на шаг дискретизации неявных методов численного решения начальных задач, обусловленные требованием корректности аппроксимирующей задачи.
14. Дополнительные условия на шаг дискретизации, обусловленные требованием согласованности на модельных примерах операторов перехода дифференциальной и соответствующей разностной задач.
15. Математическое описание погрешности аппроксимации дифференциального уравнения разностным.
16. Сравнительная характеристика известных способов описания погрешности аппроксимации дифференциального уравнения разностным.
17. Математическое описание связи локальной погрешности метода и погрешности аппроксимации дифференциального уравнения.
18. Понятие обратной дифференциальной невязки и ее связь с локальной погрешностью метода.
19. Апостериорный подход к описанию уровня замены исходной дифференциальной задачи.
20. Представление для обратной дифференциальной невязки приближенного решения классической задачи неопределенного интегрирования через производные подынтегральной функции.
21. Проблема разного уровня локального приближения в случае систем обыкновенных дифференциальных уравнений.
22. Проблема разного уровня локальной согласованности в случае систем обыкновенных дифференциальных уравнений.
23. Главные причины возникновения проблемы жесткости в случае систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

## 1. Структурные особенности вычислительных алгоритмов, ориентированных на решение дифференциальных задач.

Численные методы для обыкновенных дифференциальных уравнений - это методы, используемые для нахождения числовых приближений к решениям обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Их использование также известно как «численное интегрирование», хотя иногда этот термин используется для обозначения вычисления интегралов.

Многие дифференциальные уравнения не могут быть решены с помощью символьных вычислений («анализ»). Однако для практических целей - например, в инженерных - числовое приближение к решению часто бывает достаточно. Изученные здесь алгоритмы могут быть использованы для вычисления такого приближения.

Альтернативный метод заключается в использовании методов из исчисления для получения последовательного расширения решения.

Обычные дифференциальные уравнения встречаются во многих научных дисциплинах, например, в физике, химии, биологии и экономике. Кроме того, некоторые методы в численных дифференциальных уравнениях в частных производных преобразуют дифференциальное уравнение в частных производных в обыкновенное дифференциальное уравнение, которое затем должно быть решено.

Численные методы решения IVP первого порядка часто попадают в одну из двух больших категорий: линейные многошаговые методы или методы Рунге-Кутты. Дальнейшее разделение может быть реализовано путем разделения методов на явные и неявные. Например, неявные линейные многошаговые методы включают в себя методы Адамса-Моултона и методы обратной дифференциации (BDF), в то время как неявные методы Рунге-Кутты [2] включают диагонально неявные Рунге-Кутта (DIRK), однонаправленные диагонально неявные ступенчатые кутты (SDIRK) и Численные методы Гаусса-Радау (на основе квадратуры Гаусса). Явные примеры из линейного многоступенчатого семейства включают методы Адамса-Башфорта, и любой метод Рунге-Кутты с более низкой диагональной таблицей Бучера является явным. Эмпирическое правило гласит, что жесткие дифференциальные уравнения требуют использования неявных схем, в то время как нежесткие задачи могут быть решены более эффективно с помощью явных схем.

Для некоторых дифференциальных уравнений применение стандартных методов, таких как метод Эйлера, явные методы Рунге-Кутты или многошаговые методы (например, методы Адамса-Башфорта), демонстрирует нестабильность в решениях, хотя другие методы могут давать стабильные решения. Это «трудное поведение» в уравнении (которое само по себе необязательно может быть сложным) описывается как жесткость и часто вызвано наличием различных временных масштабов в основной проблеме. Например, столкновение в механической системе, такой как в ударном генераторе, обычно происходит в гораздо меньшем масштабе времени, чем время для движения объектов; это расхождение приводит к очень «резким поворотам» на кривых параметров состояния.

Жесткие проблемы широко распространены в химической кинетике, теории управления, механике твердого тела, прогнозировании погоды, биологии, физике плазмы и электронике. Одним из способов преодоления жесткости является распространение понятия дифференциального уравнения на понятие дифференциального включения, которое учитывает и моделирует негладкость. [6] [7]

## 2. Основные источники и составные части погрешностей пошаговых методов численного решения начальных задач.

**Ошибка округления** в численном методе - ошибка, вызванная использованием дискретного числа значащих цифр для представления реальных чисел на компьютере. Поскольку компьютеры могут сохранять большое количество цифр в вычислении, ошибка округления проблематична только когда приближение

требует, чтобы компьютер вывел два числа, которые почти идентичны. Это почти точно произойдет, если мы применим аппроксимацию к слишком маленьким интервалам. Таким образом, усилия уменьшения локальной погрешности может иметь непреднамеренное последствие введения значительной ошибки округления.

[https://en.wikipedia.org/wiki/Truncation\\_error\\_\(numerical\\_integration\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Truncation_error_(numerical_integration))

Погрешности при численном интегрировании бывают двух видов: локальная погрешность - ошибка, вызванная одной итерацией, и глобальная погрешность - совокупная ошибка, вызванная многими итерациями.

Предположим, у нас есть непрерывное дифференциальное уравнение  $y' = f(t, y)$ ,  $y(t_0) = y_0$ ,  $t \geq t_0$  и мы хотим вычислить аппроксимацию  $y_n$  истинного решения  $y(t_n)$  с дискретными временными шагами  $t_1, t_2, \dots, t_N$ . Для простоты предположим, что временные шаги расположены одинаково:  $h = t_n - t_{n-1}$ ;  $n = 1, 2, \dots, N$ . Предположим, что мы вычисляем последовательность  $y_n$  с помощью одношагового метода вида  $y_n = y_{n-1} + hA(t_{n-1}, y_{n-1}, h, f)$

Функция  $A$  называется функцией приращения и может быть интерпретирована как оценка наклона  $\frac{y(t_n) - y(t_{n-1})}{h}$

**Локальная погрешность**  $\tau_n$  - это ошибка, которую наша инкрементная функция  $A$  вызывает в течение одной итерации, предполагая, что мы знаем точное решение на предыдущей итерации.

Более формально, локальная ошибка усечения,  $\tau_n$ , на этапе  $n$  вычисляется из разницы между левой и правой частью уравнения для приращения

$$y_n \approx y_{n-1} + hA(t_{n-1}, y_{n-1}, h, f); \tau_n = y(t_n) - y(t_{n-1}) - hA(t_{n-1}, y(t_{n-1}), h, f)$$

Численный метод непротиворечив, если погрешность равна  $O(h)$ . Если функция приращения  $A$  непрерывна, то метод является согласованным, если и только если  $A(t, y, 0, f) = f(t, y)$

Кроме того, мы говорим, что численный метод имеет порядок  $p$ , если для любого достаточно гладкого решения начальной задачи локальная погрешность равна  $O(h^{p+1})$

**Глобальная погрешность** - это накопление локальной погрешности на всех итерациях, предполагая знание истинного решения на начальном временном шаге.

Более формально, глобальная погрешность  $e_n$  в момент времени  $t_n$  определяется как

$$e_n = y(t_n) - y_n = y(t_n) - (y_0 + hA(t_0, y_0, h, f) + hA(t_1, y_1, h, f) + \dots + hA(t_{n-1}, y_{n-1}, h, f))$$

Численный метод сходится, если глобальная погрешность стремится к нулю при размере шага стремящемся к нулю; другими словами, численное решение сходится к точному решению, когда:  $\lim_{h \rightarrow 0} \max_n |e_n| = 0$

### **Связь между локальной и глобальной погрешностью**

Иногда можно вычислить верхнюю границу глобальной погрешности, если мы уже знаем локальную погрешность. Это требует, чтобы наша функция приращения была достаточно корректной.

Глобальная погрешность удовлетворяет рекуррентному отношению:

$$e_{n+1} = e_n + h(A(t_n, y(t_n), h, f) - A(t_n, y_n, h, f)) + \tau_{n+1}$$

Это сразу следует из определений. Теперь предположим, что функция приращения непрерывна по Липшицу во втором аргументе, то есть существует константа  $L$ , такая что для всех  $t$  и  $y_1$  и  $y_2$ , мы имеем:

$$|A(t, y_1, h, f) - A(t, y_2, h, f)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Тогда глобальная погрешность удовлетворяет  $|e_n| \leq \frac{\max_j \tau_j}{hL} (e^{L(t_n - t_0)} - 1)$

Из приведенной выше оценки глобальной погрешности следует, что если функция  $f$  в дифференциальном уравнении непрерывна в первом аргументе, а липшицева непрерывна во втором аргументе (условие из теоремы Пикара – Линделёфа), и функция приращения  $A$  непрерывна во всех аргументах, а липшицева непрерывна во втором аргументе, то глобальная погрешность стремится к нулю, когда размер шага  $h$  приближается к нулю (другими словами, числовой метод сходится к точному решению).

3. Явный метод Эйлера: способы построения, геометрический смысл, свойства.

[https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical\\_methods\\_for\\_ordinary\\_differential\\_equations](https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_methods_for_ordinary_differential_equations)

[https://en.wikipedia.org/wiki/Euler\\_method](https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_method)

Иногда этот метод называют методом Рунге-Кутты первого порядка точности. Данный метод одношаговый. Табулирование функции происходит поочередно в каждой точке. Для расчета значения функции в очередном узле необходимо использовать значение функции в одном предыдущем узле.

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка:  $y' = f(x, y)$  с начальным условием  $y(x_0) = y_0$

Выберем шаг  $h$  и введём обозначения:  $x_i = x_0 + ih$  и  $y_i = y(x_i)$ , где  $i = 0, 1, 2, \dots$ ,  $x_i$  - узлы сетки;  $y_i$  - значение интегральной функции в узлах.

Проведем прямую АВ через точку  $(x_i, y_i)$  под углом  $\alpha$ . При этом  $\operatorname{tg} \alpha = f(x_i, y_i)$

В соответствии с геометрическим смыслом задачи, прямая АВ является касательной к интегральной функции. Произведем замену точки интегральной функции точкой, лежащей на касательной АВ.

Тогда  $y_{i+1} = y_i + \Delta y$

Из прямоугольного треугольника ABC  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{h}$

Приравняем правые части  $\operatorname{tg} \alpha = f(x_i, y_i)$  и  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{h}$ . Получим  $\frac{\Delta y}{h} = f(x_i, y_i)$

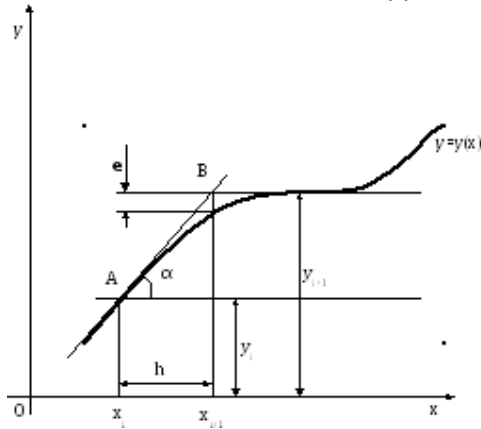
Отсюда  $\Delta y = h * f(x_i, y_i)$

Подставим в это выражение формулу  $y_{i+1} = y_i + \Delta y$ , а затем преобразуем его. В результате получаем формулу расчета очередной точки интегральной функции:

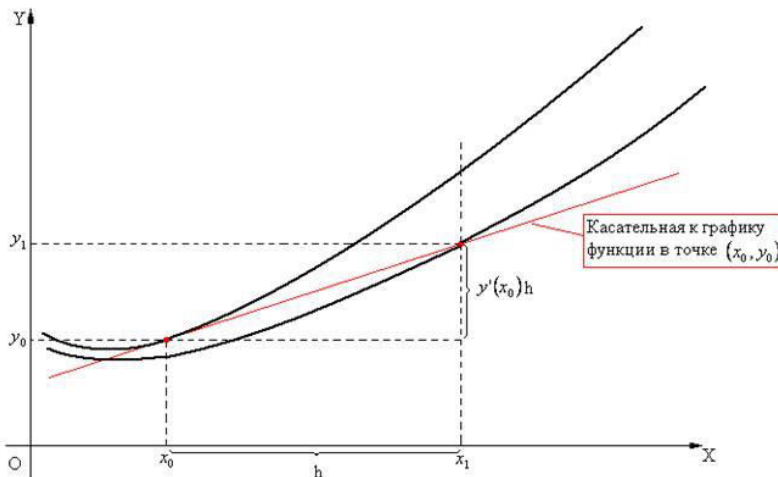
$$y_{i+1} = y_i + h * f(x_i, y_i)$$

Из формулы  $y_{i+1} = y_i + h * f(x_i, y_i)$  видно, что для расчета каждой следующей точки интегральной функции необходимо знать значение только одной предыдущей точки. Таким образом, зная начальные условия, можно построить интегральную кривую на заданном промежутке.

Метод Эйлера - один из простейших методов численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Но существенным его недостатком является большая погрешность вычислений. На рисунке погрешность вычислений для  $i$ -го шага обозначена  $\varepsilon$ . С каждым шагом погрешность вычислений увеличивается.



Геометрический смысл



В общем случае на каждом шаге приближения приближенное решение переходит на новую кривую из представленного множества решений. Для некоторых дифференциальных уравнений это вызывает большие погрешности. Например, если мы имеем уравнение  $y' = y$ , погрешность, которую мы имели на первых шагах

приближения, будет сильно возрастать. Такое явление называется неустойчивостью дифференциального уравнения.

4. Понятие локальной производной (производная на шаге) численного решения начальных задач.

<http://www.mathnet.ru/links/799ba1f9876bd8b0721d4c3503484c5a/de9459.pdf>

При разработке методов численного решения задачи Коши для системы  $u' = f(u)$  с целью повышения уровня согласованности дифференциальной и разностной задач введем в рассмотрение в пределах шага дискретизации связанную с разностным решением дифференцируемую функцию  $z(x) = y(t+x)$  непрерывного аргумента  $x \in [0, \tau]$  ( $z(0) = y(t) = y \approx u(t), z(\tau) = y(t+\tau) = \hat{y} \approx u(t+\tau)$ ). Тогда можно ввести понятие локальной производной  $z'(x) = y'(t+x)$  приближенного решения (производной на шаге).

Рассмотрим начальную задачу для одного обыкновенного дифференциального уравнения  $u'(x) = f(x, u(x)), t \leq x \leq t + \tau; u(t) = y(1)^*$

Все, в главном, может быть перенесено и на системы таких уравнений, а также использовано в случае других дифференциальных задач.

Условия существования и единственности решения задачи (1)\* будем считать выполненными. Для численного нахождения ее приближенного решения аппроксимирующее уравнение станем искать, скажем, в форме  $\frac{\hat{y}-y}{\tau} = g(t, \tau, y, \hat{y})$  (2)\* где  $\hat{y} \approx u(t+\tau)$ , а заданная конструкция функции  $g$  зависит, конечно, и от вида  $f$

Так как  $\frac{u(t+\tau)-u(t)}{\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} u'(t)$ , то в качестве одного из необходимых условий такой аппроксимации можно выставить требование

$$g(t, \tau, u(t), u(t+\tau)) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} f(t, u(t)) \quad (3)^*$$

Обычно под погрешностью аппроксимации дифференциального уравнения понимают невязку  $\psi(\tau)$ , которая (применительно к нашему случаю) возникает при подстановке в (2)\* соответствующих значений точного решения уравнения из (1)\*:  $\psi(\tau) = \frac{u(t+\tau)-u(t)}{\tau} - g(t, \tau, u(t), u(t+\tau))$  (4)\*

Чтобы ослабить очевидные недостатки используемого способа математического описания погрешности аппроксимации, предлагается учесть и дифференциальные свойства приближенного решения на отрезке дискретизации. Так как в (2)\* переменными величинами на этом отрезке можно считать лишь  $\tau$  и  $\hat{y}$  то с данной аппроксимирующей задачей естественно связать функцию непрерывного аргумента  $x$  (приближенное решение)  $y(x) = y + (x-t)q(x, y(x)), t \leq x \leq t + \tau$  (5)\*

заданную, вообще говоря, неявно, где зависимость  $g$  от  $t$  и  $y$  для краткости записи отражена уже через конструкцию функции  $q$ . При каждом фиксированном  $x = t + \xi$  ( $0 < \xi \leq \tau$ ) соответствующее уравнение из (5)\* эквивалентно (2)\* с  $\tau = \xi$

На основании (5)\* формально можно записать:

$$y'(x) = q(x, y(x)) + (x - t)[q_x(x, y(x)) + q_y(x, y(x))y'(x)] \quad (6)^*$$

Отсюда находим **выражение для локальной (на отрезке дискретизации) производной приближенного решения:**

$$y'(x) = [1 - (x - t)q_y(x, y(x))]^{-1}[q(x, y(x)) + (x - t)q_x(x, y(x))] \quad (7)^*$$

Если правая часть (7)\*, которую обозначим через  $\varphi(x, y(x))$  удовлетворяет условиям существования и единственности решения задачи Коши

$$y'(x) = \varphi(x, y(x)), \quad t \leq x \leq t + \tau, \quad y(t) = y \quad (8)^*$$

то задачу (2)\* с учетом (3)\* можно признать аппроксимирующей для исходной дифференциальной задачи (1)\*. Использование же (1)\* в качестве приближающей для (1)\* в противном случае лишено оснований.

5. Математическое представление локальной погрешности в случае явного метода Эйлера.

[https://en.wikipedia.org/wiki/Euler\\_method](https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_method)

Локальная погрешность метода Эйлера - это ошибка, сделанная за один шаг.

Это разница между числовым решением после одного шага,  $y_1$ , и точным решением во время  $t_1 = t_0 + h$ . Численное решение вычисляется как  $y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)$

Для точного решения мы используем разложение Тейлора

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + hy'(t_0) + \frac{1}{2}h^2y''(t_0) + O(h^3)$$

Локальная погрешность ( $e$ ) в методе Эйлера определяется разностью между этими уравнениями:  $e = y(t_0 + h) - y_1 = \frac{1}{2}h^2y''(t_0) + O(h^3)$

Этот результат действителен, если  $y$  имеет ограниченную третью производную. Это показывает, что для малого  $h$  локальная ошибка усечения приблизительно пропорциональна  $h^2$ . Это делает метод Эйлера менее точным (для  $h$ ), чем другие методы более высокого порядка, такие как методы Рунге-Кутты и линейные многошаговые методы, для которых локальная погрешность пропорциональна в большей степени размеру шага.

Несколько иная формулировка локальной погрешности может быть получена с помощью формы Лагранжа для остаточного члена в теореме Тейлора. Если  $y$  имеет непрерывную вторую производную, то существует  $\xi \in [t_0, t_0 + h]$  такой, что  $e = y(t_0 + h) - y_1 = \frac{1}{2}h^2y''(\xi)$

В вышеприведенных выражениях для погрешности вторая производная неизвестного точного решения  $y$  может быть заменена выражением,

включающим правую часть дифференциального уравнения. Действительно, из уравнения  $y' = f(t, y)$  следует, что

$$y''(t_0) = \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y(t_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y(t_0))f(t_0, y(t_0))$$

6. Постановка задачи для локальной погрешности явного метода Эйлера.

[https://en.wikipedia.org/wiki/Euler\\_method](https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_method)

Локальная погрешность метода Эйлера - это ошибка, сделанная за один шаг.

Это разница между числовым решением после одного шага,  $y_1$ , и точным решением во время  $t_1 = t_0 + h$ . Численное решение вычисляется как  $y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)$

Для точного решения мы используем разложение Тейлора

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + hy'(t_0) + \frac{1}{2}h^2y''(t_0) + O(h^3)$$

Локальная погрешность ( $e$ ) в методе Эйлера определяется разностью между этими уравнениями:  $e = y(t_0 + h) - y_1 = \frac{1}{2}h^2y''(t_0) + O(h^3)$

Этот результат действителен, если  $y$  имеет ограниченную третью производную. Это показывает, что для малого  $h$  локальная ошибка усечения приблизительно пропорциональна  $h^2$ . Это делает метод Эйлера менее точным (для  $h$ ), чем другие методы более высокого порядка, такие как методы Рунге-Кутты и линейные многошаговые методы, для которых локальная погрешность пропорциональна в большей степени размеру шага.

Несколько иная формулировка локальной погрешности может быть получена с помощью формы Лагранжа для остаточного члена в теореме Тейлора. Если  $y$  имеет непрерывную вторую производную, то существует  $\xi \in [t_0, t_0 + h]$  такой, что  $e = y(t_0 + h) - y_1 = \frac{1}{2}h^2y''(\xi)$

В вышеприведенных выражениях для погрешности вторая производная неизвестного точного решения  $y$  может быть заменена выражением, включающим правую часть дифференциального уравнения. Действительно, из уравнения  $y' = f(t, y)$  следует, что

$$y''(t_0) = \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y(t_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y(t_0))f(t_0, y(t_0))$$

7. Неявный метод Эйлера: построение, геометрическая интерпретация, свойства.

В численном анализе обратный метод Эйлера (или неявный метод Эйлера) является одним из самых основных численных методов для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Он похож на метод Эйлера, но отличается тем, что это неявный метод. Обратный метод Эйлера имеет первый порядок.



Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение  $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$  с начальным значением  $y(t_0) = y_0$ . Здесь функция  $f$  и начальные данные  $y_0, t_0$  известны, функция  $y$  зависит от действительной переменной  $t$  и неизвестна.

Численный метод создает последовательность  $y_0, y_1, y_2, \dots$ , такую, что  $y_k$  аппроксимирует  $y(t_0 + kh)$ , где  $h$  называется размером шага.

Обратный метод Эйлера вычисляет приближения, используя  $y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1})$

Это отличается от (прямого) метода Эйлера тем, что последний  $f(t_k, y_k)$  вместо  $f(t_{k+1}, y_{k+1})$ .

Обратный метод Эйлера является неявным методом: новая аппроксимация  $y_{k+1}$  появляется по обе стороны уравнения, и, таким образом, метод должен решить алгебраическое уравнение для неизвестной  $y_{k+1}$ . Для не жестких задач это можно сделать с помощью итерации с фиксированной точкой:

$$y_{k+1}^{[0]} = y_k, \quad y_{k+1}^{[i+1]} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1}^{[i]})$$

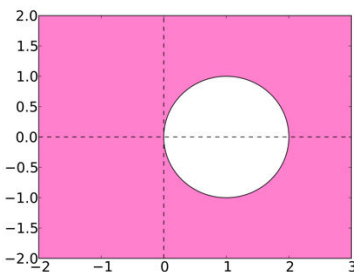
Если эта последовательность сходится (в пределах заданного допуска), то метод принимает предел в качестве нового приближения  $y_{k+1}$

В качестве альтернативы можно использовать (некоторую модификацию) метод Ньютона для решения алгебраического уравнения.

Обратный метод Эйлера имеет порядок один. Это означает, что локальная погрешность (определяемая как ошибка, сделанная за один шаг) -  $O(h^2)$ .

Ошибка в определенное время  $O(h)$ .

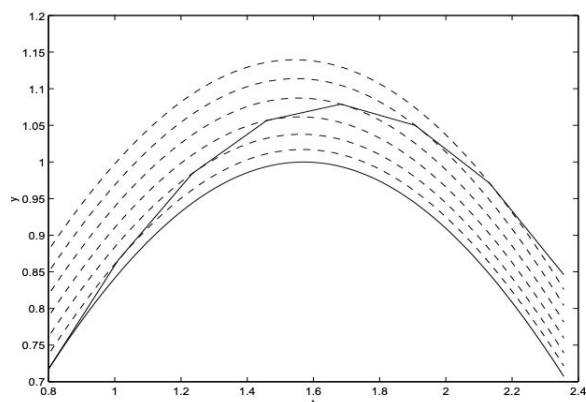
Область абсолютной устойчивости для обратного метода Эйлера является дополнением в комплексной плоскости диска с радиусом 1 с центром в 1, изображенной на рисунке. Это включает в себя всю левую половину комплексной плоскости, что делает его пригодным для решения жестких уравнений. На самом деле обратный метод Эйлера даже L-стабилен.



Область для дискретной устойчивой системы по методу Обратного Эйлера - это круг с радиусом 0,5, который расположен в точке (0,5, 0) в плоскости  $z$ .

### Геометрический смысл

Сделайте шаг размера  $h$  в направлении касательной



Каждый шаг вносит ошибку и заканчивается на другой траектория решения (пунктирные кривые)

#### 8. Отличительные особенности локальной производной для случая неявного метода Эйлера.

При разработке методов численного решения задачи Коши для системы  $u' = f(u)$  с целью повышения уровня согласованности дифференциальной и разностной задач введем в рассмотрение в пределах шага дискретизации связанную с разностным решением дифференцируемую функцию  $z(x) = y(t + x)$  непрерывного аргумента  $x \in [0, \tau]$  ( $z(0) = y(t) = y \approx u(t)$ ,  $z(\tau) = y(t + \tau) = \hat{y} \approx u(t + \tau)$ ). Тогда можно ввести понятие локальной производной  $z'(x) = y'(t + x)$  приближенного решения (производной на шаге).

Рассмотрим начальную задачу для одного обыкновенного дифференциального уравнения  $u'(x) = f(x, u(x))$ ,  $t \leq x \leq t + \tau$ ;  $u(t) = y$  (1)\*

Все, в главном, может быть перенесено и на системы таких уравнений, а также использовано в случае других дифференциальных задач.

Условия существования и единственности решения задачи (1)\* будем считать выполненными. Для численного нахождения ее приближенного решения аппроксимирующее уравнение станем искать, скажем, в форме  $\frac{\hat{y} - y}{\tau} = f(t + \tau, \hat{y})$  (2)\* где  $\hat{y} \approx u(t + \tau)$

Так как в (2)\* переменными величинами на этом отрезке можно считать лишь  $\tau$  и  $\hat{y}$  то с данной аппроксимирующей задачей естественно связать функцию непрерывного аргумента  $x$  (приближенное решение)  $y(x) = y + (x - t)q(x, y(x))$ ,  $t \leq x \leq t + \tau$  (5)\*

заданную, вообще говоря, неявно, где зависимость  $g$  от  $t$  и  $y$  для краткости записи отражена уже через конструкцию функции  $q$ . При каждом фиксированном  $x = t + \xi$  ( $0 < \xi \leq \tau$ ) соответствующее уравнение из (5)\* эквивалентно (2)\* с  $\tau = \xi$

На основании (5)\* формально можно записать:

$$y'(x) = q(x, y(x)) + (x - t)[q_x(x, y(x)) + q_y(x, y(x))y'(x)] \quad (6)^*$$

Отсюда находим **выражение для локальной (на отрезке дискретизации) производной приближенного решения:**

$$y'(x) = [1 - (x - t)q_y(x, y(x))]^{-1}[q(x, y(x)) + (x - t)q_x(x, y(x))] \quad (7)^*$$

Если правая часть (7)\*, которую обозначим через  $\varphi(x, y(x))$  удовлетворяет условиям существования и единственности решения задачи Коши

$$y'(x) = \varphi(x, y(x)), \quad t \leq x \leq t + \tau, \quad y(t) = y \quad (8)^*$$

то задачу (2)\* с учетом (3)\* можно признать аппроксимирующей для исходной дифференциальной задачи (1)\*. Использование же (1)\* в качестве приближающей для (1)\* в противном случае лишено оснований.

## 9. Постановка задачи для локальной производной в случае неявного метода Эйлера.

При разработке методов численного решения задачи Коши для системы  $u' = f(u)$  с целью повышения уровня согласованности дифференциальной и разностной задач введем в рассмотрение в пределах шага дискретизации связанную с разностным решением дифференцируемую функцию  $z(x) = y(t + x)$  непрерывного аргумента  $x \in [0, \tau]$  ( $z(0) = y(t) = y \approx u(t), z(\tau) = y(t + \tau) = \hat{y} \approx u(t + \tau)$ ). Тогда можно ввести понятие локальной производной  $z'(x) = y'(t + x)$  приближенного решения (производной на шаге).

Рассмотрим начальную задачу для одного обыкновенного дифференциального уравнения  $u'(x) = f(x, u(x)), t \leq x \leq t + \tau; u(t) = y \quad (1)^*$

Все, в главном, может быть перенесено и на системы таких уравнений, а также использовано в случае других дифференциальных задач.

Условия существования и единственности решения задачи (1)\* будем считать выполненными. Для численного нахождения ее приближенного решения аппроксимирующее уравнение станем искать, скажем, в форме  $\frac{\hat{y} - y}{\tau} = f(t + \tau, \hat{y}) \quad (2)^*$  где  $\hat{y} \approx u(t + \tau)$

Так как в (2)\* переменными величинами на этом отрезке можно считать лишь  $\tau$  и  $\hat{y}$  то с данной аппроксимирующей задачей естественно связать функцию непрерывного аргумента  $x$  (приближенное решение)  $y(x) = y + (x - t)q(x, y(x)), t \leq x \leq t + \tau \quad (5)^*$

заданную, вообще говоря, неявно, где зависимость  $g$  от  $t$  и  $y$  для краткости записи отражена уже через конструкцию функции  $q$ . При каждом

фиксированном  $x = t + \xi (0 < \xi \leq \tau)$  соответствующее уравнение из (5)\* эквивалентно (2)\* с  $\tau = \xi$

На основании (5)\* формально можно записать:

$$y'(x) = q(x, y(x)) + (x - t)[q_x(x, y(x)) + q_y(x, y(x))y'(x)] \quad (6)^*$$

Отсюда находим **выражение для локальной (на отрезке дискретизации) производной приближенного решения:**

$$y'(x) = [1 - (x - t)q_y(x, y(x))]^{-1}[q(x, y(x)) + (x - t)q_x(x, y(x))] \quad (7)^*$$

Если правая часть (7)\*, которую обозначим через  $\varphi(x, y(x))$  удовлетворяет условиям существования и единственности решения задачи Коши

$$y'(x) = \varphi(x, y(x)), \quad t \leq x \leq t + \tau, \quad y(t) = y \quad (8)^*$$

то задачу (2)\* с учетом (3)\* можно признать аппроксимирующей для исходной дифференциальной задачи (1)\*. Использование же (1)\* в качестве приближающей для (1)\* в противном случае лишено оснований.

10. Особенности задачи для локальной погрешности неявного метода Эйлера.

<https://users.soe.ucsc.edu/~hongwang/AMS147/Notes/Lecture09.pdf>

[https://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT3440/v18/pensumliste/numerical\\_methods.pdf](https://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT3440/v18/pensumliste/numerical_methods.pdf)

$$y_{n+1} = y_n + hF(y_{n+1}, t_{n+1})$$

$$e_n(h) = y(t_{n+1}) - y(t_n) - hF(y(t_{n+1}), t_{n+1})$$

Делаем разложения в ряд Тейлора для  $y(t_n) = y(t_{n+1} - h)$  около  $t_{n+1}$

$$e_n(h) = y(t_{n+1}) - \left[ y(t_{n+1}) - y'(t_{n+1})h + \frac{y''(t_{n+1})}{2}h^2 + \dots \right] - hF(y(t_{n+1}), t_{n+1})$$

$$= -\frac{y''(t_{n+1})}{2}h^2 + \dots = O(h^2)$$

11. Локальная производная приближенного решения в общем случае одношаговых методов численного решения задачи Коши.

Рассмотрим начальную задачу для одного обыкновенного дифференциального уравнения  $u'(x) = f(x, u(x)), t \leq x \leq t + \tau; u(t) = y \quad (1)^*$

Все, в главном, может быть перенесено и на системы таких уравнений, а также использовано в случае других дифференциальных задач.

Условия существования и единственности решения задачи (1)\* будем считать выполненными. Для численного нахождения ее приближенного решения аппроксимирующее уравнение станем искать, скажем, в форме  $\frac{\hat{y} - y}{\tau} = g(t, \tau, y, \hat{y}) \quad (2)^*$  где  $\hat{y} \approx u(t + \tau)$ , а заданная конструкция функции  $g$  зависит, конечно, и от вида  $f$

Так как  $\frac{u(t+\tau)-u(t)}{\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} u'(t)$ , то в качестве одного из необходимых условий такой аппроксимации можно выставить требование

$$g(t, \tau, u(t), u(t + \tau)) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} f(t, u(t)) \quad (3)^*$$

Обычно под погрешностью аппроксимации дифференциального уравнения понимают невязку  $\psi(\tau)$ , которая (применительно к нашему случаю) возникает при подстановке в  $(2)^*$  соответствующих значений точного решения уравнения из  $(1)^*$ :  $\psi(\tau) = \frac{u(t+\tau)-u(t)}{\tau} - g(t, \tau, u(t), u(t + \tau)) \quad (4)^*$

Чтобы ослабить очевидные недостатки используемого способа математического описания погрешности аппроксимации, предлагается учесть и дифференциальные свойства приближенного решения на отрезке дискретизации. Так как в  $(2)^*$  переменными величинами на этом отрезке можно считать лишь  $t$  и  $\hat{y}$  то с данной аппроксимирующей задачей естественно связать функцию непрерывного аргумента  $x$  (приближенное решение)  $y(x) = y + (x - t)q(x, y(x)), t \leq x \leq t + \tau \quad (5)^*$

заданную, вообще говоря, неявно, где зависимость  $g$  от  $t$  и  $y$  для краткости записи отражена уже через конструкцию функции  $q$ . При каждом фиксированном  $x = t + \xi (0 < \xi \leq \tau)$  соответствующее уравнение из  $(5)^*$  эквивалентно  $(2)^*$  с  $\tau = \xi$

На основании  $(5)^*$  формально можно записать:

$$y'(x) = q(x, y(x)) + (x - t)[q_x(x, y(x)) + q_y(x, y(x))y'(x)] \quad (6)^*$$

Отсюда находим **выражение для локальной (на отрезке дискретизации) производной приближенного решения:**

$$y'(x) = [1 - (x - t)q_y(x, y(x))]^{-1}[q(x, y(x)) + (x - t)q_x(x, y(x))] \quad (7)^*$$

Если правая часть  $(7)^*$ , которую обозначим через  $\varphi(x, y(x))$  удовлетворяет условиям существования и единственности решения задачи Коши

$$y'(x) = \varphi(x, y(x)), \quad t \leq x \leq t + \tau, \quad y(t) = y \quad (8)^*$$

то задачу  $(2)^*$  с учетом  $(3)^*$  можно признать аппроксимирующей для исходной дифференциальной задачи  $(1)^*$ . Использование же  $(1)^*$  в качестве приближающей для  $(1)^*$  в противном случае лишено оснований.

## 12. Принцип обратной связи в случае методов последовательного уточнения приближенного решения уравнения $f(u) = 0$ .

<http://www.elib.bsu.by/bitstream/123456789/159190/1/%D0%91%D0%BE%D0%B1%D0%BA%D0%BE%D0%B2.pdf>

Рассмотрим начальную задачу

$$u'(x) = f(x, u(x)); u(t) = y; y \leq x \leq t + \tau. \quad (1)$$

с её локальной ошибкой  $\varepsilon(x) = u(x) - y(x)$  (и её производной), позволяющая строить процессы последовательных приближений к искомому решению с учетом достигнутого уровня выполнения (1). В качестве простого примера начального приближения рассматривается решение линеаризованной задачи  $y'(x) = Ay(x) + a$ ,  $y(t) = y$  где  $A = f_u(t, y)$ ;  $a = f(t, y) - Ay$ . Последующие уточнения решения и его производной конструируются с использованием соотношений

$$\varepsilon(x) = -\xi(x) + \int_t^x [f(z, y(z) + \varepsilon(z)) - f(z, y(z))] dz$$

$$\varepsilon'(x) = -r(x) + f(x, y(x) + \varepsilon(x)) - f(x, y(x))$$

где интегральная невязка  $\xi(x)$  имеет вид

$$\xi(x) = y(x) - y - \int_t^x f(z, y(z)) dz$$

А соответствующая дифференциальная задается в форме

$$r(x) = Ay(x) + a - f(x, y(x))$$

13. Условия на шаг дискретизации неявных методов численного решения начальных задач, обусловленные требованием корректности аппроксимирующей задачи.

<http://elib.bsu.by/bitstream/123456789/102078/1/75-82.pdf>

страница 79



В случае неявного метода Эйлера (30) для приближенного решения в силу линейности исходной задачи (34) также можно получить явное выражение

$$y(x) = y / (1 - (x - t)\lambda), \quad (38)$$

дифференцируя которое, находим, что

$$y'(x) = \lambda y / (1 - (x - t)\lambda)^2. \quad (39)$$

Уравнение же (11) в этом случае принимает вид

$$y'(x) = (1 - (x - t)\lambda)^{-1} \lambda y(x) = \varphi(x, y(x)), \quad (40)$$

что с учетом (38) также приводит к равенству (39) для производной  $y'(x)$ . Однако если при  $\lambda \leq 0$  соотношения (38)–(40) хорошо согласуются со случаем точного решения (см. (34), (35)), то при  $\lambda > 0$  подобное согласование приводит к ограничению (см. (16))

$$h < h^* = 1/\lambda. \quad (41)$$

Поэтому разностную схему неявного метода Эйлера в случае  $\lambda > 0$  можно признать моделирующей для задачи Коши (34) лишь при следующих ограничениях на область изменения независимой переменной  $x$  (ср. (37), (41)):

$$t \leq x < t + 1/\lambda. \quad (42)$$

Согласно (4), (12), (34), (40) в случае неявного метода Эйлера (по аналогии с формулами (32), (33) для явного метода) будем иметь

$$\psi(x) = [u(x) - u(t)] / (x - t) - u'(x) = -\frac{1}{2}(x - t)u''(\eta), \quad t \leq \eta \leq x, \quad (43)$$

$$r(x) = u'(x) - \varphi(x, u(x)) = [1 - (1 - (x - t)\lambda)^{-1}] u'(x) = -(x - t) (1 - (x - t)\lambda)^{-1} u''(x). \quad (44)$$

Как и в случае (32), (33), невязки (43), (44) не совпадают между собой, при этом, если  $x \rightarrow t + 1/\lambda$  (см. (42)), разностная невязка  $\psi(x)$  продолжает оставаться ограниченной в противовес поведению приближенного решения (см. (38)–(40)), в то же время дифференциальная невязка  $r(x)$  априори сигнализирует о неприемлемом поведении  $y(x)$  для  $x \geq t + 1/\lambda$  ( $\lambda > 0$ ).

Заметим, что при  $x > t + 2/\lambda$  (ср. (42)) в силу (38) для  $y(x)$  справедливо неравенство  $|y(x)| < |y|$ , которое противоречит поведению точного решения при  $\lambda > 0$  (см. (35)) и не позволяет признать в этом случае разностную схему (30) в качестве моделирующей для задачи (34). Необоснованное использование такого рода неравенств нередко приводит к допускающим ложные толкования утверждениям, в частности относительно свойств устойчивости неявного метода Эйлера (см., например, [1, с. 253], [5, с. 53]).

Введение с целью строгого описания погрешности аппроксимации дифференциального уравнения вместо разностной невязки  $\psi(x)$  (см. (4)) понятия дифференциальной невязки позволило для локальной погрешности метода  $\varepsilon(x)$  (см. (7)) поставить начальную задачу (24), на основании которой при малых  $x - t$  можно уже легко найти главную часть величины  $\varepsilon'(x)$ , а следовательно, и величины  $\varepsilon(x)$ . Тем самым можно уточнить приближенное решение (и его производную), что позволяет для нового приближения в свою очередь записать задачу типа (24) и т. д. Такой подход позволяет решать проблему повышения точности не только ценой уменьшения шага дискретизации, но и за счет увеличения числа последовательных приближений. При этом и само начальное приближение может быть выбрано с использованием принципа дифференциальных невязок. Продемонстрируем сказанное на конкретных примерах построения такого рода последовательных уточнений.

14. Дополнительные условия на шаг дискретизации, обусловленные требованием согласованности на модельных примерах операторов перехода дифференциальной и соответствующей разностной задач.

<https://studfiles.net/preview/438902/page:3/>

15. Математическое описание погрешности аппроксимации дифференциального уравнения разностным.

<http://elib.bsu.by/bitstream/123456789/102078/1/75-82.pdf>

Будем предполагать, что задача Коши 
$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)), t \leq x \leq t + \tau & (1) \\ u(t) = y & (2) \end{cases}$$

имеет единственное решение, обладающее необходимой гладкостью. Для ее численного анализа станем использовать методы вида

$$\frac{y(t+h) - y}{h} = p(t, h, y, y(t+h)); 0 < h < \tau \quad (3)$$

Функция  $y(x) = y(t+h)$  призвана численно моделировать решение  $u(x)$  задачи (1)-(2) с сохранением наиболее важных его характеристик. Часто об уровне приближения дифференциального уравнения (1) разностным вида (3) судят по величине невязки  $\psi(t+h)$  последнего на точном решении исходной задачи:

$$\frac{u(t+h) - u(t)}{h} = p(t, h, u(t), u(t+h)) + \psi(t+h); \quad (4)$$

Наряду с невязкой  $\psi(t+h)$  из (4) станем рассматривать и другую разностную невязку  $\xi(t+h) = h\psi(t+h)$  (5) связанную с записью (3) в форме

$$y(t+h) = y + hp(t, h, y, y(t+h)) \quad (6)$$

Разность  $\varepsilon(x) = u(x) - y(x)$  (7) является локальной погрешностью метода (6) на отрезке  $t \leq x \leq t+h$

Поскольку  $y(t) = y = u(t)$  (8) то единственным источником ошибки  $\varepsilon(x)$  остается погрешность аппроксимации исходного дифференциального уравнения (1) разностным вида (3) или (6)

Погрешность аппроксимации дифференциального уравнения избранной разностной схемой должна отражать, насколько этот закон искажается в случае соответствующего приближенного решения  $y(x)$ . Для ответа на такой вопрос привлечем информацию о производной функции

$y(x) = y + (x-t)p(t, x-t, y, y(x))$  (9) на отрезке  $t \leq x \leq t+h$ .

Непосредственным дифференцированием (9) приходим к линейному относительно  $y'(x)$  уравнению

$$y'(x) = p(t, x-t, y, y(x)) + (x-t)[p_{x-t}(t, x-t, y, y(x)) + p_{y(x)}(t, x-t, y, y(x))y'(x)] \quad (10)$$

Отсюда формально находим, что  $y'(x) = \varphi(x, y(x))$  (11)

Теперь можно ввести и невязку  $r(x) = u'(x) - \varphi(x, u(x)) = f(x, u(x)) - \varphi(x, u(x))$  (12)

Такая дифференциальная невязка представляет собой величину искажения исходного уравнения (1) при его замене уравнение (11), однозначно поставленным в соответствие разностному уравнению вида (3):

$$u'(x) = f(x, u(x)) = \varphi(x, u(x)) + r(x) \quad (13)$$



Отметим, что представление решения разностной схемы (3) через решение дифференциальной задачи (11),(8) дает поставить для погрешности  $\varepsilon(x)$  задачу Коши вида

$$\varepsilon'(x) = f(x, y(x) + \varepsilon(x)) - \varphi(x, y(x)), \varepsilon(t) = 0; t \leq x \leq t + h \quad (14)$$

Учитывая (7), (12), задачу (14) можно записать в форме

$$\varepsilon'(x) = r(x) + \varphi(x, y(x) + \varepsilon(x)) - \varphi(x, y(x)); \varepsilon(t) = 0 \quad (15)$$

16. Сравнительная характеристика известных способов описания

погрешности аппроксимации дифференциального уравнения разностным.

**Возможно (точно) требуется полностью переписать весь пункт 15**

Длина отрезка  $t \leq x \leq t + h$ , на котором имеет смысл говорить о начальной задаче (14), связана с вопросом разрешимости уравнения (10)

В (14) должно выполняться условие  $h < h^*$

Заметим, что вопрос о разрешимости уравнения (10) не встает в случае явных методов вида (6), когда функция  $p$  не зависит от  $y(t+h)$ . В этом случае не зависит от  $y(x)$  и функция  $\varphi$  из (11)

Тогда задача (15) принимает вид  $\varepsilon'(x) = r(x); \varepsilon(t) = 0 \quad (17)$

Откуда находим  $\varepsilon(x) = \int_t^x r(z)dz = \int_0^h r(t + \alpha)d\alpha = \varepsilon(t + h) \quad (18)$

С другой стороны, так как в дополнение к (5), (6) справедливо и равенство

$$u(t + h) = u(t) + hp(t, h, u(t), u(t + h)) + \xi(t + h) \quad (19)$$

То для упомянутого класса явных методов имеем  $\varepsilon(t + h) = \xi(t + h) \quad (20)$

Следовательно,  $\varepsilon(t + h) = \int_0^h r(t + \alpha)d\alpha = \xi(t + h) \quad (21)$

И  $\psi(t + h) = \frac{1}{h} \int_0^h r(t + \alpha)d\alpha$

Точные соотношения (17),(18),(21) справедливы в классе явных методов из (6).

В общем же случае (6) вместо (17) имеем задачу (15), которая может быть записана в форме

$$\varepsilon'(x) = r(x) + \varphi\left(x, y(x) + \int_t^x \varepsilon'(z)dz\right) - \varphi(x, y(x)); \varepsilon(t) = 0 \quad (23)$$

Откуда следует приближенное равенство  $\varepsilon'(x) \approx r(x)$ , имеющее асимптотический по  $x$ - $t$  характер

Аналогично (с использованием формулы Лагранжа о конечном приращении) можно обосновать и справедливость приближенных равенств

$$\varepsilon(x) \approx \int_t^x r(z)dz; \varepsilon(t + h) \approx \xi(t + h)$$

Практическое применение выписанных выше приближенных формул, как и соответствующих случаю явных методов точных равенств (17), (21), затруднено прежде всего тем, что представления для невязок  $r(x)$  и  $\xi(x)$  существенно опираются на использование точного решения исходной задачи. Чтобы облегчить трудности такого рода, преобразуем (15) к виду

$$\varepsilon'(x) = \rho(x) + f(x, y(x) + \varepsilon(x)) - f(x, y(x)); \quad \varepsilon(t) = 0 \quad (24)$$

$$\text{Где } \rho(x) = f(x, y(x)) - \varphi(x, y(x)) \quad (25)$$

Аналогично случаю (23) с использованием (24) можно показать, что главной (при  $x \rightarrow t$ ) частью  $\varepsilon'(x)$  является и величина  $\rho(x)$ , которая уже не выражается через точное решение исходной задачи. Очевидно, что  $\rho(x)$  можно истолковать как взятую с обратным знаком в условиях (8) невязку (дифференциальную) исходного уравнения (1) на решении уравнения (11):

$$y'(x) = f(x, y(x)) - \rho(x) \quad (26)$$

Так как величина  $\rho(x)$ , в отличие от случая  $r(x)$  может быть вычислена, то приближенные равенства

$$\varepsilon'(x) \approx \rho(x) \quad (27)$$

$$\varepsilon(x) \approx \int_t^x \rho(z) dz \quad (28)$$

Могут быть уже непосредственно применены в вычислительной практике. При использовании формул (27), (28) дополнительно к (16) могут возникать (в том числе в классе явных методов) и другого типа ограничения на  $h=x-t$ , если в (11) наряду с условием непрерывности  $y'(x)$  добиваться сохранения и иных важных свойств уравнения (1)

17. Математическое описание связи локальной погрешности метода и погрешности аппроксимации дифференциального уравнения.

После того, как описали математически, что такое погрешность аппроксимации ( $r(x) = f(x, u(x)) - \varphi(x, u(x))$ ) можем установить связь между локальной ошибкой и погрешностью аппроксимации.

$$u'(x) = f(x, u(x)); \quad u(t) = y$$

Привлекаем некий метод для решения

(функция  $p$  должна зависеть от  $f$  + такие методы, чтобы не только начальные условия совпадали - в  $p \lim_{n \rightarrow 0}$  совпадал с  $f$ )

$$\frac{\hat{y}-y}{h} = p(\quad); \quad \frac{\hat{u}-u}{h} = p(\quad) + r(t+h);$$

$$\varepsilon(x) = u(x) - y(x)$$

$$\begin{cases} \varepsilon'(x) = u'(x) - y'(x) = f(x, u(x)) - \varphi(x, y(x)) \\ \varepsilon(t) = 0 \end{cases}$$

Т.е. нет связи  $\varepsilon$  с  $r$ , но есть связь  $\varepsilon$  с приближенным решением.

$$\varepsilon'(x) = r(x) + \varphi(x, u(x)) - \varphi(x, y(x))$$

Посмотрим на добавку - в какую сторону она нас уводит (сравним на  $\gg \varepsilon(x)$  и  $r(x)$ )

Оценим  $\varphi(x, u(x)) - \varphi(x, y(x))$ :

$$\varepsilon'(x) = r(x) + \tilde{\varphi}_{y(x)} \varepsilon(x) \quad (\tilde{\varphi}_{y(x)} \varepsilon(x) - \text{функция Лагранжа})$$

$$\varepsilon'(x) = r(x) + \tilde{\varphi}_{y(x)} \int_t^x \varepsilon'(z) dz$$

Если  $(x-t)$  мало, то подынтегральная функция на порядок меньше

Если  $x \rightarrow t \Rightarrow \int_x^t \rightarrow 0$  быстрее чем  $\varepsilon'(x)$

Теперь сравниваем  $\varepsilon'(x)$  с  $\varepsilon(x)$

С уменьшением  $(x-t)$  добавка уменьшается быстрее

Если  $\tilde{f}$  ограничена, то все это  $\rightarrow 0$  быстрее  $\Rightarrow \varepsilon'(x) \approx r(x)$

Если  $\varepsilon'(x) \approx r(x) \Rightarrow \varepsilon(x) = 0$  и  $\varepsilon'(x) = 0$  для методов, в которых в точке  $t$  равны производные (т.е. хотя бы в начальной точке сохраняется закон эволюции)

Вывод: какой бы порядок не имела погрешность аппроксимации, порядок локальной ошибки будет на 1 выше (лучше)

18. Понятие обратной дифференциальной невязки и ее связь с локальной погрешностью метода.

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) \\ u(t) = y \end{cases};$$

Метод:  $y'(x) = \varphi(x, y(x))$ ;  $y(x) = y + (x - t)p(t, x + t, y, y(x))$ ;  $y(t) = y$

Обратная дифференциальная невязка:  $r^*(x) = -p(x) = \varphi(x, y(x)) - f(x, y(x))$

Эта невязка вычислима и имеет связь с локальной погрешностью.

$$\varepsilon'(x) = -r^*(x) + f(x, y(x) + \varepsilon(x)) - f(x, y(x))$$

Так как можем вычислить  $r^*$  - можем вычислить и локальную погрешность.

Методы с обратной связью лучше, так как не ищем решение с большей точностью, а уточняем ошибку (ищем поправку к точному решению), а это легче технически.

**Дифференциальная обратная невязка:**

- Получаем приближенное решение  $y(x)$
- Находим  $-r^*(x)$
- Получаем  $\varepsilon(x)$  из соотношения  $\varepsilon(x) \approx \int_t^x -r^*(z)dz$
- Прибавляем к приближенному решению  $\varepsilon(x)$  и получаем более точное решение.

19. Апостериорный подход к описанию уровня замены исходной дифференциальной задачи.

$$y'(x) = f(x, u(x)); u(t) = y$$

$a \sim \tilde{a}$ ;  $a - \tilde{a}$  — погрешность приближения

Допустим, есть уравнение  $f(u) = 0$ . Заменим  $f$  линейным приближением, то есть искажением.

Решаем уравнение:  $\tilde{f}(y) = 0$  - получим приближение. Посмотрим на разность уравнения  $a - \tilde{a}$ ; решая его, находим приближение  $\tilde{a} + a - \tilde{a} = a$ ;  $f(u)$  — объект искажения.

$$0 = f(u) = \tilde{f}(u) + f(u) - \tilde{f}(u)$$

$$f(y) + \tilde{f}(y) - f(y) = 0$$

$$u' = f(x, u(x))$$

$$\hat{y} = y + hf$$

$$u(t+h) = y + hu'(t) + \frac{h^2}{2}u''(\xi)$$

$$\frac{u(t+h)-u(t)}{h} = u'(t) + \frac{h}{2}u''(\xi)$$

Рассмотрим явный метод Эйлера.  $\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)); \\ u(t) = y \end{cases}$

Но в нашем случае  $y'(x) = f(t, y) \rightarrow \text{const} = 1$

Уравнение Эйлера равносильно решению задачи  $\begin{cases} y'(x) = f(t, y); \\ y(t) = y \end{cases}$

$$y'(x) = f$$

$$u'(x) = f + f(x, u(x)) - f = f(x, u(x))$$

$$r(x) = f(x, u(x)) - f - \text{погрешность аппроксимации.}$$

Все очень хорошо для явного метода Эйлера, где  $y'(x) = f - \text{const}$

Но все плохо для неявного метода Эйлера.

$$\hat{y} = y + h\hat{f} - \text{неявный метод Эйлера}$$

$y' = \varphi(x, y(x))$ , где  $\varphi(x, y(x))$  – точная производная приближенного решения.

Записываем неявный метод Эйлера:

$$y(x) = y + (x - t)f(x, y(x))$$

$$y'(x) = 0 + f(x, y(x)) + (x - t)[f_x(x, y(x)) + f_{y(x)}(x, y(x))]$$

$$y'(x) = \frac{f(x, y(x)) + (x-t)f_x(x, y(x))}{1 - (x-t)f_{y(x)}(x, y(x))} \rightarrow r(x) = f(x, u(x)) - \varphi(x, y(x))$$

Но, таким образом, неявный метод Эйлера может быть плох тем, что знаменатель может = 0  $\rightarrow$  нарушается корректность постановки начальной задачи (то есть мы корректную задачу заменяем некорректной)  $\rightarrow$  не при каждом  $x$  можем находить приближенное решение  $\rightarrow x - t \neq \frac{1}{\lambda}; \lambda > 0$

Нельзя большие шаги, так как перескакиваем ноль и нарушаем исходную корректность  $\rightarrow$  дальше идти нельзя.

20. Представление для обратной дифференциальной невязки приближенного решения классической задачи неопределенного интегрирования через производные подинтегральной функции.

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)); \\ u(t) = y \end{cases};$$

Метод:  $y'(x) = \varphi(x, y(x)); y(x) = y + (x - t)p(t, x + t, y, y(x)); y(t) = y$

Обратная дифференциальная невязка с интегралом:  $\xi^*(x) = \int_t^x f(z, y(x) + \varepsilon(x))dz - (x - t)p(t, x - t, y, y(x))$

Эта невязка вычислима и имеет связь с локальной погрешностью.

$$\varepsilon(x) = -\xi^*(x) + \int_t^x [f(z, y(x) + \varepsilon(x)) - f(z, y(x))] dz$$

Так как можем вычислить  $\xi^*$  - можем вычислить и локальную погрешность. Методы с обратной связью лучше, так как не ищем решение с большей точностью, а уточняем ошибку (ищем поправку к точному решению), а это легче технически.

### Дифференциальная обратная невязка с интегралом:

При вычислении  $\varepsilon(x)$  с помощью этого метода добавляется процедура выбора шага. Мы можем приступить к вычислению  $\varepsilon(x)$ , когда убедимся, что при уменьшении шага уменьшается и  $-\xi^*(x)$  (лишь тогда можно говорить о корректности).

- Получаем приближенное решение  $y(x)$
- Находим  $-\xi^*(x)$  и выбираем шаг
- Получаем  $\varepsilon(x)$  из соотношения  $\varepsilon(x) \approx \xi^*(x)$
- Прибавляем к приближенному решению  $\varepsilon(x)$  и получаем более точное решение.

21. Проблема разного уровня локального приближения в случае систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$u'(x) = Au(x)$$

$$u(t) = y$$

$$\hat{y} = y + hAy = (I + hA)y$$

Чтобы нам было удобнее “наблюдать” при решении явного метода Эйлера, раскладываем  $y$  в базис из собственных векторов матрицы  $A$ .

$$y = \sum C_i \xi^i e^{\lambda_i t}; \xi^i - \text{базис матрицы } A$$

$$u(t+h) = e^{Ah}y = \sum C_i \xi^i e^{\lambda_i t} e^{\lambda_i h}$$

Если исходим из вектора  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ , то его тоже можно разложить по базису из

$$\text{векторов } y^i = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow y = \sum y_i y^i$$

Но  $y^i$  – не собственные векторы матрицы  $A$  и поэтому

$u(t+h) = e^{Ah}y$  – не можем затащить  $e^{Ah}$  в сумму так как рассматриваем не по базису собственного вектора  $A$ .

$\lambda_i$  при одном и том же шаге разные.

$e^{\lambda h}$  - спектральная функция (функция скалярного аргумента  $\lambda$ )

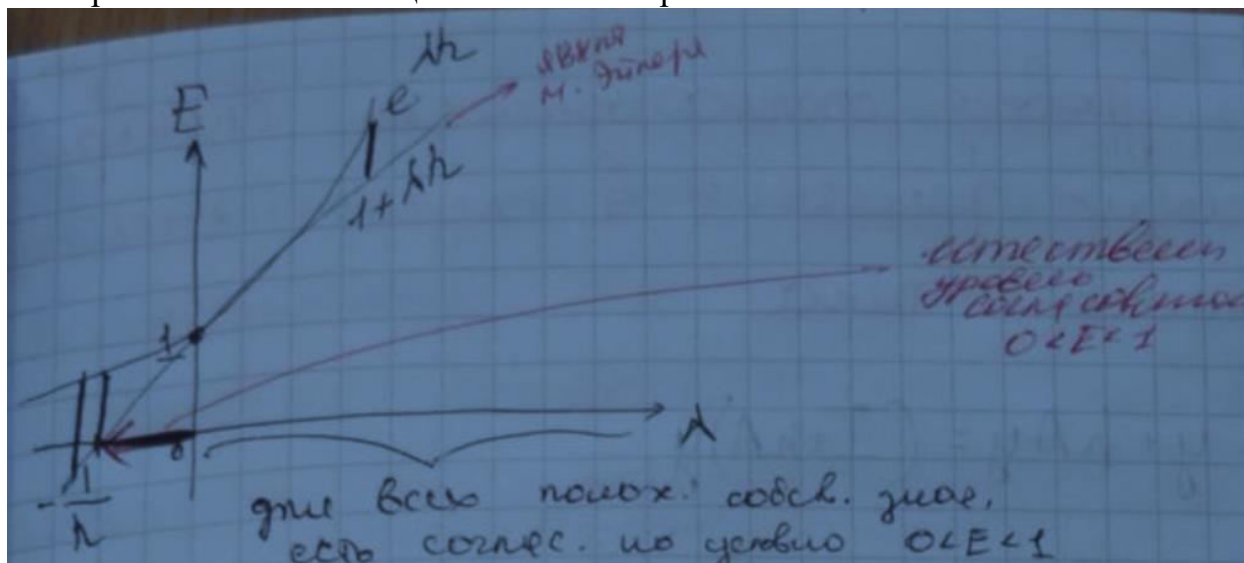
$e^{\lambda_i h}$  - множитель точности

Явный метод Эйлера принадлежит к такому классу методов, для которых

множитель перехода  $E(Ah)$  обладает свойством

$$E(Ah)\xi^i = E(\lambda_i h)\xi^i = (1 + \lambda_i h)\xi^i$$

В случае системы трудность заключается в том, что собственные значения сильно разбросаны. Для разных  $\lambda_i$  уровень локального приближения спектральных составляющих оказывается разным.



$\lambda$  — переменная величин, которые могут приближать значение  $\lambda_i$ ;  $h$  — фиксирован

Если продифференцировать  $(e^{\lambda h})'_\lambda = h e^{\lambda h}$

В случае явного метода Эйлера  $(1 + \lambda h)'_\lambda = h$

Есть проблема разного уровня локального приближения спектральных составляющих.

Для тех спектральных составляющих, где  $\lambda_i \rightarrow 0$  уровень локального приближения значительно лучше, чем там, где  $\lambda_i$  далеки от 0

Очевидна следующая трудность: в спектральном разложении приближенного решения  $y(t + h) = \sum C_i \xi^i (1 + \lambda_i h)$  будет разный уровень локального приближения спектральной составляющей.

Одним и тем же методом на одном и том же шаге мы по-разному приближаем разные спектральные составляющие.

22. Проблема разного уровня локальной согласованности в случае систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$u'(x) = Au(x)$$

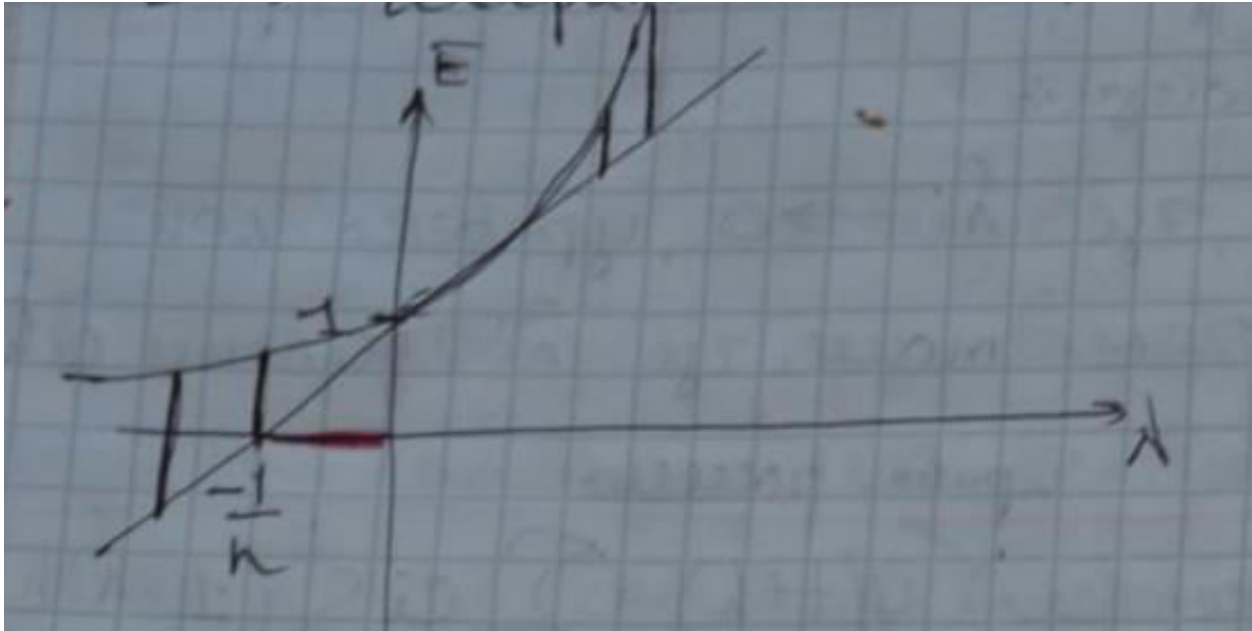
$$u(t) = y$$

$$\hat{y} = y + hAy = (I + hA)y$$

$$y = \sum C_i \xi^i e^{\lambda_i t}; \xi^i - \text{базис матрицы } A$$

$$u(t + h) = \sum C_i \xi^i e^{\lambda_i t} e^{\lambda_i h}$$

Существует проблема разного уровня согласованности спектральных составляющих. [Мы говорим о согласованности по какому-то условию]



### Множитель перехода н/д 0 и 1

1)  $0 > \lambda_i \geq -1$

2) Если  $\lambda_i < -\frac{1}{h}$ , то для этих спектральных составляющих согласованности по монотонности нет.

Т.е на  $0 > \lambda_i > -\frac{1}{h}$  согласованность по требованию монотонности есть.

**Множитель перехода н/д 1 и -1** – это согласованность по условию выхода решения на 0 (по устойчивости)

Если  $\lambda_i < -\frac{2}{h}$ , то согласованность будет отсутствовать.

Если хотя бы одно собственное значение находится левее точки  $-\frac{2}{h}$ , то явный метод Эйлера не будет на бесконечности выводить решение на 0. Из этого следует, что метод будет работать в целом неверно.

Т. е. согласованность должна быть по всему спектру.

**В случае положительных  $\lambda$**  целевая согласованность выполняется при множителе перехода  $>1$

Уровень согласованности для больших и малых значений  $\lambda_i$  разный.

### 23. Главные причины возникновения проблемы жесткости в случае систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Сущность же явления жесткости состоит в том, что решение, которое необходимо вычислить, меняется медленно, однако в любой его окрестности существуют быстро затухающие возмущения. Наличие таких возмущений затрудняет получение медленно меняющегося решения численным способом.

$$u'(x) = Au(x)$$

$$u(t) = y$$

$$\hat{y} = y + hAy = (I + hA)y$$

$$y = \sum C_i \xi^i e^{\lambda_i t} ; \xi^i - \text{базис матрицы } A$$

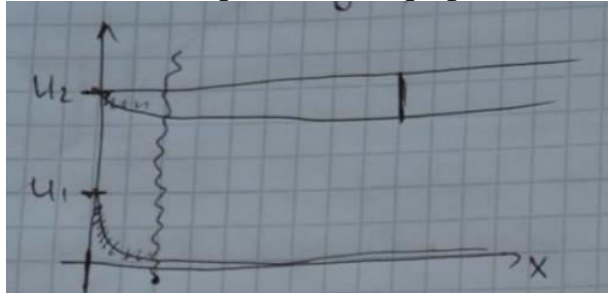
$$u(t+h) = \sum C_i \xi^i e^{\lambda_i t} e^{\lambda_i h}$$

Очередная трудность явных методов в случае системы – проблема жесткости.

Пусть имеется 2 ДУ:

$$u_1'(x) = \lambda_1^* u_1(x) \quad \text{и} \quad u_2'(x) = \lambda_2^* u_2(x) \quad \text{при этом} \quad \lambda_1^* \ll \lambda_2^* \ll 0$$

Решения изображены на графике:



Если  $\lambda_2^*$  маленькое, шаг может быть большим ( $u_2$ ).

Если  $\lambda_1^*$  большое, соответственно шаг может быть маленьким ( $u_1$ ).

$$\begin{cases} u_1'(x) = \lambda_1^* u_1(x) + \varepsilon u_2(x) \\ u_2'(x) = \lambda_2^* u_2(x) + \varepsilon u_1(x) \end{cases}$$

$$u_2'(x) = \lambda_2^* u_2(x) + \varepsilon u_1(x)$$

$$u'(x) = Au(x), \text{ где } A = \begin{bmatrix} \lambda_1^* & \varepsilon \\ \varepsilon & \lambda_2^* \end{bmatrix}$$

Собственные значения матрицы  $\alpha_1, \alpha_2$ . Они будут близки к  $\lambda_1^*, \lambda_2^*$ .

Теперь у нас  $u_1$  и  $u_2$  зависят друг от друга, т.е. не можем искать  $u_2$  при больших значениях.

Шаг будет мелким, и, когда решение приблизится к 0, увеличение шага приведет к нарушению условия согласованности.

1-ая составляющая выгорает быстрее, а 2-ая будет ещё далека от 0. Мы вынуждены считать её долго (так как мелкий шаг). **Это и иллюстрирует проблему жесткости.**

Жесткая система – система, в которой составляющие отличаются разнотемпным нахождением решения.

В жестких системах 2 проблемы:

- 1) Выбор шага в соответствии с наиболее быстро изменяющейся составляющей (мелкий шаг)
- 2) Когда быстрая составляющая уже вышла на 0 в пределах требуемой точки, шаг увеличить нельзя.