# Вопрос 1.1 Предварительные поняятия газовой динамики

Заметные изменения плотности жизкостей и твердых тел достигается лишь при огромном давлении в 10 ÷100 тысяч атмосфер.

В газодинамики при изучении сжимаемых сред под внешними силами или сил давления самого вечества, считается выполненым неравенства λ << L, где λ – длина свободного пробега, L – размер области, само неравенство – условие сплошной среды.

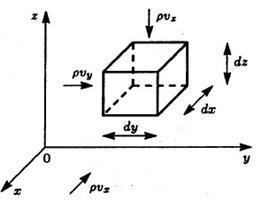
Считается также выполнена гипотеза о локальном термодинамическом равновесии – ЛТР. При ЛТР сжимаемая среда рассматривается как совокупность числ жидких частиц с размерами l: λ << l << L.

Для каждой такой частицы, связанной с небольшой фиксированной массой среды, вводятся характеризирующие её средние величины: плотность, давление, температура.

Внутренняя энергия скорость макроскопического движения как единого целого

Эти характеристики зависят от 3-х координат и времени.

# Вопрос 1.2 Уравнение неразрывности для сжимаемого газа

Рассмотрим в движущейся жидкости пространство в виде кубика.

– приращение потока массы при переходе от x к x+dx.

Аналогично определяется

При фиксированном объеме кубика измение находящейся в нём массы газа выражается в изменении плотности по времени

При свободном движении газа его динамика определяетяс лишь параметрами газа.

# Вопрос 1.3 Вывод уравнения непрерывности в курсе теоретической физики

Рассматрим объём в пространстве. Количество жидкости в нём - . Через элемент , ограничивающий рассматриваемый объем в единицу времени протикает количество жидкости .

Вектор это абсолютая величина равная площади элемента поверности, направленного по нормали к ней. Условися направлять по внешней нормали. Тогда >0, если жидкость вытекает из объёма, и <0, если жидкость втекает в него.

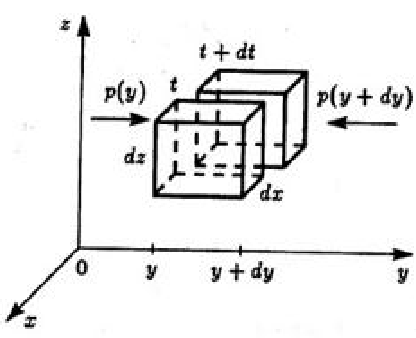
Полное количество жидкости, вытекающей в единицу временив объёем, есть величина , где происходит интегрирование по замкнутой поверности.

С другой стороны уменьшение количесва жидкости в объёме пишется как . Приравниваем выражения

Интеграл по поверхности делаем интегралом по объёму

*В связи с произвольностью объёма ->*

# Вопрос 1.4 Уравнение движения газа

Применим второй закон Ньютоона к элементарной жидкой частице, имеющей в некоторый момент времени форму кубика.

Жидкая частица – перемещающейся в пространстве и меняющий свою форму объем, содержащий в разные моменты времени одти и те же молекулы газа.

Тем самым его масса dm постоянная. Для простоты вывода будем считать, что за короткое время dt куб не меняет своей формы и смещается по всем направлениям на расстояние, много меньшее его размеров.

Определим сначала силу, действующую на куб, например в направлении оси Y. Она, очевидно, равна разности давлений на левой и правой границах, умноженной на их площади (иных сил по предположению нет):

Сила равна ускорению жидкой частицы в направлении y, умноженному на его массу dm.

*В выведенных уравнениях через обозначается полная (субстанциональная, т.е связанная частицами газа) производная по времени какой-либо величины, характеризующей данную неизменную массу газа.*

*Раскрыв через производные по координатам и времени в соответствии с правилом , придем к уравнениям движения Эйлера*

*Можно записать покоординатно*

*и т.д. по координатам*

# Вопрос 1.5 Уравнение Эйлера

Выделим в жидкости некоторый объём. Полная сила, действующая на этот объём . Преобразуем в интеграл по V - .

Видно, что на каждый элемент объема действует со стороны окружающей жидкости сила . Т.е. на одну единицу объёма действует сила -.

Теперь уравнение движения элемента объёма жидкости, приравняв силу - произведеного массы ρ и одной единицы объема жидкости на ускорение:

Стоящая здесь производная определяет не изменение скорости жидкости в данной подвижной точки пространства, а изменение скрости определенной передвигающийся в пространстве жидкости. Эту производную надо выразить через величины, относящиеся к неподвижным точкам. Заметим, что изменение скорости dv данной частицы жидкости в dt время, складывается из двух частей: изменение v в данной точке пространства в течение времени dt и из разности скоростей в одни и тот же момент времени в двух точках резделенных растоянием dr, пройденным рассматриваемой частицей жидкости в течении времени dt. Первая из частей равна

Производная передтся при постоянных x, y, z, т.е. в заданной точке пространства. Вторая часть изменения скорости равна

Тогда. Разделив обе стороны неравенства на dt: . Конечное соотношение - - что и есть искомое уравнение движения жидкости, установленное впервые Эйлером в 1755.

Если жидкость в поле тяжести, то а каждую единицу объёма действует сила ρg, добавляется к правой части уравнения

# Вопрос 1.6 Уравнение энергии

Рассматриваем изменение внутренней энергии, вызванной массой газа. Нужно определить аботу сил давления.

– уравнение энергии

# Вопрос 1.7 Дивергентный вид уравнения энергии

# Вопрос 1.8 Поток энергии (другой вывод)

Выберем какой-нибудь неподвижный в пространстве элемент объема и определим, как меняется со временем энергия находящейся в этом объеме жидкости. Энергия единицы объема жидкости равна , где первый член есть кинетическая энергия, а второй — внутренняя энергия ( — внутренняя энергия единицы массы жидкости).

Изменение этой энергии определяется частной производной

Для вычисления этой величины пишем:

Воспользовавшись уравнением непрерывности и уравнением движения,

Согласно термодинамическому соотношению , где – тепловая функция единицы массы жидкости,

*Для преобразовани производной от*

*Имея ввиду, что сумма - тепловая фунция. Находим дифференциал по*

*Воспользовавшись общим уравнение адиабатичности и уравнением непрерывности получим*

*Для выяснения смысла равенства проинтегрируем его по объёму*

*Или преобразовав стоящий справа объёмный интеграл в интеграл по поверхности, поучим*

*Интеграл по повехности определяет количество вытекшей энергии через единицу объёма. Следовательно - вектор плотности потока энергии.*

*Факт, что тут , а не имеет простой физический смысл: подставив вместо w его выражение мы получим*

*Первый интеграл – энергия, кинетическая и внутренняя, непосредственно переносимая в единицу времени, второй – работа, производимая силами давления над жидкостью.*

# Вопрос 1.9 Уравнение газовой динамики в лагранжевых координатах.

Уравнения, где газодинамические величины есть функции от координат и времени – уравнения в эйлеровой форме. Эйлеров подход трактует движение среды с точки зрения неподвижного наблюдателя и удобен при изучении обтекания газом моделей летательных аппаратов в газодинамических трубах.

В случае одномерных движений(плоское, цилиндрическое, сферическое) часто используются другие, лагранжевые координаты.

В отличие от эйлеровых, лагранжевы связаны не с определенной точкой пространства, а с единственной точкой вещества. Лагранжевы координаты особенно удобны для внутренних процессов: химическая реакция от температуры и плотности и т.д.

Введение ЛК в ряде случаев позволяет более коротким и легким путём находить решение уравнения газодинамики или упрощает численное интегрирование.

Производная по времени в ЛК – субстанциональная производная d/dt.

Частицу можно характеризовать массой вещества, отделяющей её от какой-то другой фиксированной частицы/координаты в момент времени t нулевое.

Особенно просто введение ЛК в плоском случае. В качестве ЛК можно выбрать массу столба единичного сечения между рассматриваемой единицей и фиксированной.

Эта связь координат дает наиболее естественный и простой способ введения ЛК – массовой координаты.

Теперь все газодинамические переменные трактуются как зависимые от m и t.

Получим для них уравнение движения из одномерных уравнений в Эйлеровых формах.

1. Уравнение непрерывности

Если V=1/ρ ->

Субстанциональную производную d/dt в ЛК записывают в виде частной производной по t чтобы подчеркнуть, что она берется при m=conts

1. Уравнение движения
2. Уравнение энергии

*Выпишем одномерное уравнение газовой динамики в массовых координатах для различных случаев.*

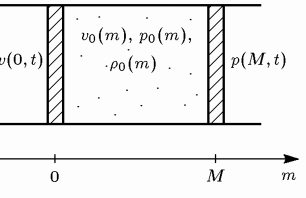
n = 0 – плоское, n = 1 – цилиндрическое, n = 2 – сферическое. Для n = 0 дополнительно решается , но для решения нужно ввести в ЭК. В двумерном случае всё сложно.

# Вопрос 1.10 Замыкание систем и краевые условия для уравнений газовой динамики

Т.к. термодинамические свойсва вещества преполагаются известными, то недостающую связь обычно выбирают в виде p=p(ρ,ξ), а в случае теплового потока T=T(ρ,ξ)

p=(γ-1) ρξ

Для определения течений необходимо задать начальные граничные условия, т.е. задать состояние газа во всей рассматриваемой области в t=0 и в зависимости от времени. Например, закон изменения давления, закон изменения границ.

Возможны комбинации граничных условий. Рассмотрим следующее:

M – масса газа

1. Начальные условия в t=0  
   Задаем v(m,0)
2. Граничные условия

Либо задать давление, скорость и т.д.:

Существуют задачи, когда граничные условия не важны, тогда решается задача Коши – задача эволюции со временем некоторых газодинамических величи в неограниченном пространства (-∞<=m<=∞). Пример – мощный взрыв в пространстве. Важый класс краевых условий – условия на гранце с вакуумом, когда давление и плотность пространства, куда истекает газ, равны нулю.

# Вопрос 1.11. Изоэнтропическое течение

Упростим уравнение газовой динамики, используя:

1. Отсутствие в среде потерь энергии из-за других процессов

С термодинамической точки процесс адиобатический и энтропия S каждой фиксированной жидкой частицы со временем не меняется. Тогда уравение эергии заменяется как .

1. Особенная простота выражения энтропии через давление и плотность.

, где >1 – показатель адиабаты, равный отношению удельных теплоёмкости при достоянном давлении и объёме.

Из условия и энтропии , что эквивалетно , т.е. людая частица газа от времени не зависит.

*Отнимая*

# Вопрос 1.12. Акустическое приближение

Гиперболичность уравнения изоэнтропического течения в случаях уравнения газовой динамики легко установить не прибегая к вычислению характеристик, а получив его линейный аналог. Для этого рассмотрим малые возмущения газодинамических величин в окрестности постоянного решения

Представляя возмущенное решение в виде и предполагая малым возмущение , получим уравнение для : – скорость. Это линейно уравнение полностью аналогично уравнению колебания струны (лин. Типа). Это уравнение описывает распространение малых (звуковых) возмущений в газе – уравнение акустики со скоростью звука

# Вопрос 1.13. Уравнение Копфа

Еще одно упрощение получаем предполагая, что течение имеет характер простой волны, т.е. любые газодинамические величины – функции какой-то одной выбранной величины, например, плотности.

Учитывая, что то уравнение непрерывности запишется как ; Тогда уравнение движения

Исключая из последних двух уравнений величину , приходим к ур-ю Копфа

Уравнение первого порядка, не содержит типичную газодинамическую нелинейность, поэтому служит моделью для нелинейных эффектов, характерных для сжимаемого газа.

Самый яркий из них – градиентная катастрофа, заключающаяся в появлении в волнах сжатия бесконечных градиентов газодинамических величин.

Уравнение Копфа может быть записано в характеристическом виде

Индекс s - полная производная по времени – берется вдоль характеристик, т.е. вдоль линий в координатах m,t, на которых значение остается постоянным по все моменты времени.

Раскрывая производную имеем

значение коэффициента m на s в разные моменты времени. Сравнивая его с ур-ем Копфа, находим уравнение характеристики

Из этого видно, что состояния большей плотности располагаются на массе газа с большей плотность. Появляется неоднозначность: его градиенты в точке слияния с различными плотностями неограниченно возрастают.

Градиентная катастрофа – нелинейный эффект, приводит к рассмотрению разрывного решения. При прохождении разрыва через жидкую частицу изменяется ее энтропия

# Вопрос 2.1. Описание совокупности частиц с помощью функции распределения

Задавая в момент t=0 положения и скорости частиц и зная действующие а них силы можно решать основную задачу механики. Такой подход к описанию газа называется молекулярной динамикой, дает исчерпывающую информацию и занимает высшие места в иерархии математического описания газов. Однако практически это сделать невозможно. Кроме того, интересны лишь средние характеристики среды. Поэтому применение первого закона Ньютона к каждой частице используется лишь в специальных случаях. Следующее звено в иерархических моделях основывается на отказе от изучения индивидуального поведения частиц – вводится статистические вероятностные описания их ансамбля с помощью функции распределения . Функция зависит от

Через функцию распределения вычисляются средние величины

- число частиц в единице физического объема с координатой r в момент времени t;

В общем случае средние величины находятся следующим образом: пусть -произвольная функция скорости. Обозначим через сумму значений этой функции по всем элементарным единицам объема . Тогда среднее, приходящееся на одну частицу значение есть деление суммы на количество частиц

Учтем, что частицы в физическом объеме могут иметь любые скорости

Средняя скорость частицы равна

# Вопрос 2.2. Уравнение Больцмана для функции распределения

Предположения:

* Время столкновения много меньше времени между столкновениями
* Влиянием внешних сил можно пренебречь
* Частицы не расщепляются и не соединяются

Рассмотрим частицы в фазовом объеме в момент t. Пусть столкновения отсутствуют, тогда скорости частиц к моменту не изменятся, а их координаты получат приращения в соответствии с начальными скоростями ;

Т.е. фазовый объем не изменяется.

Учтем теперь возможности столкновения, введя интеграл столкновений - S(t)

По своему смыслу величина есть разность между числом частиц вышедших благодаря столкновениям за время dt из объема drdv и не попавших в объем и числом частиц ,попавших из-за столкновений в объем и не находившихся первоначально в drdv. Тогда уравнение сохранения числа частиц при переходе от drdv к записывается

Разложим левую часть в ряд Тейлора, опуская и выше

В получившемся равенстве

Если выбрать dt достаточно малым, то частицы не сталкиваются, то фазовый объем сохраняется

Можно прийти к уравнению Больцмана: – следующая по сложности модель в иерархии математических моделей газов

# Вопрос 2.3. Распределение Максвелла

Один из наиболее употребляемых интегралов столкновений

и – скорости сталкивающихся частиц

g – модуль относительной скорости

b – так называемый “прицельный параметр” - расстояние наибольшего сближения между частицами

– угловая характеристика их взаимодействия

Интегрирование в производится о всем возможным величинам

Интеграл столкновения в форме Больцмана – суммирование элементарных актов столкновения

При этом предполагается:

* Столкновения упруги – сохраняется суммарная масса, импульс, момент импульса, энергия частиц
* Сила взаимодействия между частицами зависит лишь от расстояния между ними м значительно больше внешних сил
* Число столкновений с участием больше 2 частиц пренебрежимо мало

Используя свойства , получим простое волновое решение уравнения Больцмана

Рассмотрим газ в термодинамическом равновесии, т.е. все макро характеристики постоянны по пространству и не зависят от времени

При этом очевидно, что

Это выполняется только при

Это можно записать как при

Сумма логарифмов функции является инвариантом столкновений

Эти свойства дают способ нахождения функциональной зависимости f от v

Можем получить равенство

Это равенство выполняется лишь при

Получаем

В силу свойств

Имеет место равенство

n – концентрация частиц, k – постоянная Больцмана, T – средняя температура при движении с хаотичной скоростью

Исключим из - - распределение Максвелла

# Вопрос 2.4. H-теорема Больцмана

Она есть следствие кинетического уравнения Больцмана, по которому функция , где f – одночастичная функция распределения, удовлетворяющая уравнению Больцмана, является невозрастающей функцией времени t, и следовательно энтропия системы, которая равна S=-H(t), является неубывающей функцией

Пусть распределение частиц по пространству однородно, но зависит от времени.

, так как однородное, то

Получаем

Аналогично, принимая во внимание симметрию относительно f и получаем

Производная и знак определяются знаком функции

Видно, что при x>y и x<y f(x,y)>0, причем f(x,y)=0 когда интеграл равен нулю, то есть в равновесном состоянии

Кинетическое уравнение Больцмана в отличие от уравнений классической механики, из которых оно выведено, описывает необратимый процесс

Это – следствие перехода от моделей на первопринципах к моделям, использующим определенное статистическое описание проведения частиц через функцию распределения

Против H-теоремы был выдвинут ряд противоречий:

* Противоречие обратимости – движению убывания соответствует движение увеличения
* Парадокс возврата - у состояния есть обратный путь и можно возвратится

Больцман выдвинул статистическое трактование H-теоремы, так как она – не следствие одних лишь законов механики, а использует предположение о молекулярном хаосе, имеющее вероятностный характер

Согласно Больцману, энтропия – мера вероятности пребывания системы в неравновестном состоянии. Возрастание энтропии – стремление к переходу из менее вероятностного в более вероятностное

# Вопрос 2.5. Свойства интеграла столкновений

Следующее уравнение в иерархии математического описания совокупности частиц – гидродинамическая модель газа

Используем интегралы не только для Больц. газа, как в общем случае. Требуем лишь упругих столкновений.

1) – из определения интеграла столкновений

Скорость изменения функции распределения в следствие столкновения связана с уходом частиц из ФП при прямых столкновениях и пополнения ФП частицами после обратного столкновения. В данный момент нет прихода и ухода, меняется лишь скорость, по которой интегрировать

2) изменение импульса по столкновению, а так как импульс сохраняется при упругих столкновениях, то выражение равно 0

3)

4) Определим, чему равен

5)

Основываясь на этих формулах получим уравнения для моментов функции распределения, т.е. для величин вида

# Вопрос 2.6. Уравнение неразрывности

Умножая уравнение Больцмана и интегрируя по скорости, получим

- не равен 0

Используя получим

- макроскопическая скорость V

->

# Вопрос 2.7. Уравнение движения

Пусть – импульс молекул - =mv

Хаотическая скорость дает температуру частицам, c=v-u – хаотическая

Используя это выражение имеем

3-x мерный

# Вопрос 2.8. Уравнение энергии

Возьмем

Фигурирующая величина – энергия хаотического движения частиц, заключенная в единице объема

Внутренняя энергия , тогда

Которое можно записать в виде

– одномерный случай

– многомерный случай

В последних выражениях – вектор потока тепла

; ;

Получим уравнение энергии, давление связано со средней энергией, т.е. с температурой

# Вопрос 2.9. Замыкание системы газодинамических уравнений

Уравнение неразрывности, движения и энергии для моментов зависит от средних гидродинамических величин (плотность, скорость, давление, внутренняя энергия). При их выводе не привлекались какие-либо существенные или дополнительные и в этом смысле они принадлежат этому же исследуемому уравнению.

Их еще нельзя представить моделью газа, так как они не замкнуты.

Для получения и необходимо выразить их через искомые гидродинамические параметры -

Один из способов – задание полуэмпирических зависимостей. Более строгий – способ, состоящий в приближенном решении исходного кинетического уравнения. Для этого вводится предположение, что длина свободного пробега l много меньше характерных L задачи, т.е. система близка к состоянию локального термодинамического равновесия, а функция распределения f несколько отличается от локальной.

Запишем решение в виде бесконечного ряда -Максвеловская функция. Считая члены после пренебрежимо малыми по отношению к и подставляя в уравнение Больцмана можно найти явный вид возмущения . Далее можно найти тепловую скорость c=u+v и определить величины и

Заметим, что при –> и =0, т.е. в газе с Максвеловским распределением вязкость и потоки тепла отсутствуют.

Приведем конечный результат

– скалярные const, вид которых зависит от вида интеграла столкновений.

Выражение для содержит неизвестные макроскопические величины. Поэтому получение нельзя назвать решением уравнения Больцмана в полном виде.

# Вопрос 2.10. Системы гидродинамических уравнений

Использование двух последних формул дает

А для компонент тензора напряжений

Величина – коэффициент теплопроводности – коэффициенты вязкости. Коэффициенты переноса могут зависеть от и r. Формула для W – запись закона Фурье для теплопроводных сред, а формулы для - закон Мавье (тока для вязких жидкостей и газа, связывающий компоненты тензора вязких напряжений со скоростью деформации – обобщение закона вязкости Ньютона)

Уравнение для потока тепла и для компонент тензора вязкости напряжений позволяет замкнуть выведенные уравнения для моментов и получить модель газа в гидродинамическом приближении, их подстановка приводит к системе уравнений

При известных краевых условиях из этих уравнений можно найти нужные величины.

Система представляет из себя следующий после уравнения Больцмана уровень в иерархии математических описаний большого числа взаимодействующих частиц - модели сжимаемого, вязкого, теплопроводного газа

# Вопрос 2.11. Использование гидродинамических моделей

Модели более низких уровней получают из моделей высоких уровней при упрощении. Число образующих цепочек может быть велико



