БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики

Стефанович Константин Андреевич

**Лабораторная работа №3**

**«Отображения в нормированных векторных пространствах»**

Студента 2 курса 6 группы

**Преподаватель**

*Чеб Елена Сергеевна*

Минск, 2017

Постановка задачи

1. Приводя уравнение к виду, для которого справедлив принцип сжимающих отображений, найти корни уравнения с точностью .
2. Выяснить, при каких значениях параметра к интегральному уравнению Фредгольма второго рода применим принцип сжимающих отображений в пространстве и в пространстве . При найти приближенное решение уравнения с точностью и сравнить его с точным решением

# Задача 1

Приведём уравнение к уравнению вида и применим локальный принцип сжимающих отображений. Для этого найдём шар , инвариантный относительно отображения , на котором отображение будет сжимающим.   
Перепишем уравнение в виде

Тогда . Поскольку функция является дифференцируемой, то в качестве константы Липшица можно взять . В нашем случае . Согласно локальному принципу сжимающих отображений, условие выполнено, если .  
Построим шар с центром в точке . Радиус шара , в котором существует неподвижная точка, выберем из следующих условий:

, где ,

Наши условия примут вид:

Выберем одно из решений этой системы. Пусть . Тогда отрезок [-1,1] инвариантен относительно отображения , на нем отображение – сжимающее и коэффициент сжатия .

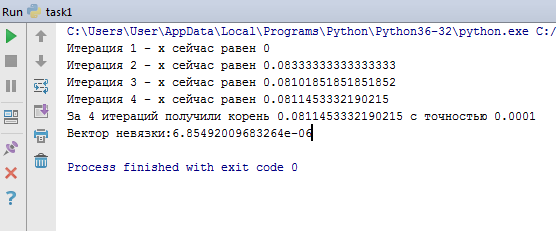
Оценим расстояние .

Следовательно, n = 14 и  является приближенным решением уравнения с заданной точностью.

Приведу код для вычисления данного корня:  
/task1.py

**from** numpy **import** \*  
phi=**lambda** x0 : (1-4\*x0\*\*2)/12  
x0=0  
e=1e-4  
n=0  
**while** (**True**):  
 n += 1  
 print(**"Итерация {0} - x сейчас равен {1}"**.format(n, x0))  
 x=phi(x0)  
 **if** abs(x0 - x) <= e:**break** x0=x  
print(**"За {0} итераций получили корень {1} с точностью {2}"**.format(n,x0,e))  
print(**"Вектор невязки:{0}"**.format(x0-phi(x0)))

А также результат работы программы:



Для вычисления второго корня перепишем уравнение в виде ,

Действуя аналогично прошлому пункту, получаем, что . Такого быть не может, следовательно, получить данный корень методом последовательных приближений невозможно.

# Задача 2

Приведем уравнение к виду тогда можно применить принцип сжимающих отображений при условии, что в банановых пространствах и отображение является сжимающим.Пусть . Рассмотрим пространство .

Отображение F задает отображение на , так как представляет собой сумму двух непрерывных функций. Покажем, что отображение на является сжимающим, т. е. существует постоянная такая, что для всех непрерывных функций и ) выполняется неравенство

Тогда является коэффициентом сжатия и прик исходному интегральному уравнению в пространстве можно применить принцип сжимающих отображений.

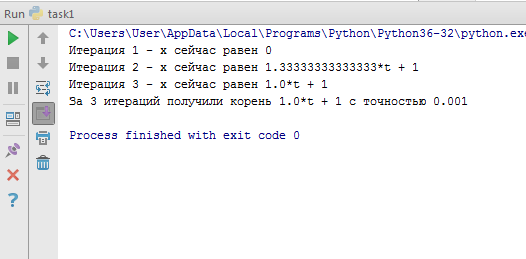
Рассмотрим приближенное решение уравнения при λ = 1/4. Для этого оценим количество приближений по формуле

Пусть , тогда ,

Для определения n решаем неравенство

Откуда n = 8.

Следовательно, является приближенным решением интегрального уравнения с точностью ε.Вычислим его программно:



//task2.py

**from** sympy **import** \*  
**from** sympy.core.relational **import** Relational  
x0=0  
e=1e-3  
n=0  
s = Symbol(**'s'**)  
t = Symbol(**'t'**)  
**while** (**True**):  
 n += 1  
 print(**"Итерация {0} - x сейчас равен {1}"**.format(n, x0))  
 l = integrate(s \* (t \*\* 2 - 1) \* x0, (t, -1, 1))  
 h = lambdify(s, l)  
 l=l.subs(s,t)\*(1/4)+1+(4/3)\*t  
 **if** (Relational(x0 - l, e, **'<'**) == **True and** n>1): **break** x0=l  
print(**"За {0} итераций получили корень {1} с точностью {2}"**.format(n,x0,e))

Видим, что получили ответ уже на третьей итерации.

Поскольку данное уравнение представляет собой интегральное уравнение с вырожденным ядром, то можно найти его точное решение.

Обозначим через

Тогда

Подставляя его в исходное уравнение, получаем

Значит, точное решение уравнение имеет вид , а это значит, что в результате работы программы мы также получили точное решение.

Рассмотрим пространство . Оценим ядро

Отображение F отображает пространство на себя и является сжимающим, если . Поэтому при λ = 1/4 можно применить принцип сжимающих отображений. В этом случае понадобится число итераций, определяемое соотношением

Из последнего неравенства следует, что n = 6.