Численное решение уравнений с производной дробного порядка

Рассмотрим уравнение следующего вида:

$$y^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{y(s)}{(t-s)^\alpha}\, ds = f(t) \tag{1}$$

где

$$t \in [0, \tau], \quad \tau > 0, \quad \alpha \in (0, 1)$$

Функцию $f(t)$ приблизим функцией вида

$$f(t) \approx \sum_{k=0}^{m} a_k t^{k+1-\alpha} \tag{2}$$

подставим в (1) $y(s) = s^k$, где k - целое неотрицательное число

$$\int\limits_0^t \frac{y(s)}{(t-s)^\alpha}\, ds = \int\limits_0^t \frac{s^k}{(t-s)^\alpha}\, ds = \left| \begin{matrix} u = s^k & dv = \frac{1}{(t-s)^\alpha}\, ds \\ du = ks^{k-1} & v = -\frac{(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \end{matrix} \right| =$$

$$-\frac{s^k (t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_0^t + \frac{k}{1-\alpha} \int\limits_0^t s^{k-1} (t-s)^{1-\alpha}\, ds = \frac{k}{1-\alpha} \int\limits_0^t s^{k-1} (t-s)^{1-\alpha}\, ds =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{Интегрируем по частям пока } s \\ \text{не исчезнет} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{k!}{\prod\limits_{j=0}^{k-1} (j+1-\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{k-\alpha}\, ds = \frac{k!}{\prod\limits_{j=0}^{k} (j+1-\alpha)} t^{k+1-\alpha}$$

Тогда подставляя в (1) $y(s) = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k s^k$ получим

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{k!}{\Gamma(1-\alpha) \prod\limits_{j=0}^{k} (j+1-\alpha)} b_k t^{k+1-\alpha} = \sum_{k=0}^{m} a_k t^{k+1-\alpha} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad b_k = a_k \frac{\Gamma(1-\alpha) \prod\limits_{j=0}^{k} (j+1-\alpha)}{k!}, \quad \forall k$$

Теперь вернемся к приближению (2) и рассмотрим построение его правой части методом наименьших квадратов. Пусть дан набор

t:	t_0	t_1	$\dots$	t_n
y:	y_0	y_1	$\dots$	y_n

Обозначим

$$Q_{m,\alpha}\left(t\right) = a_0 t^{1-\alpha} + a_1 t^{2-\alpha} + \dots + a_m t^{m+1-\alpha}$$

И рассмотрим

$$S = \sum_{i=0}^{n} \left(Q_{m,\alpha}\left(t_i\right) - y_i\right)^2 \to \min$$

Получаем следующую систему для нахождения коэффициентов a_k

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum\limits_{i=0}^{n} t_i^{1-\alpha}\left(Q_{m,\alpha}\left(t_i\right) - y_i\right) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum\limits_{i=0}^{n} t_i^{2-\alpha}\left(Q_{m,\alpha}\left(t_i\right) - y_i\right) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial S}{\partial a_m} = 2\sum\limits_{i=0}^{n} t_i^{m+1-\alpha}\left(Q_{m,\alpha}\left(t_i\right) - y_i\right) = 0 \end{cases} = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{n} t_i^{1-\alpha}\left(a_0 t_i^{1-\alpha} + \dots + a_m t_i^{m+1-\alpha}\right) = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i x_i^{1-\alpha} \\ \sum\limits_{i=0}^{n} t_i^{2-\alpha}\left(a_0 t_i^{1-\alpha} + \dots + a_m t_i^{m+1-\alpha}\right) = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i x_i^{2-\alpha} \\ \dots \\ \sum\limits_{i=0}^{n} t_i^{m+1-\alpha}\left(a_0 t_i^{1-\alpha} + \dots + a_m t_i^{m+1-\alpha}\right) = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i x_i^{m+1-\alpha} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} a_0 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{2-2\alpha} + a_1 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{3-2\alpha} + \dots + a_m \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{m+2-2\alpha} = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i x_i^{1-\alpha} \\ a_0 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{3-2\alpha} + a_1 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{4-2\alpha} + \dots + a_m \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{m+3-2\alpha} = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i x_i^{2-\alpha} \\ \dots \\ a_0 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{m+2-2\alpha} + a_1 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{m+3-2\alpha} + \dots + a_m \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{2m+2-2\alpha} = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i x_i^{m+1-\alpha} \end{cases}$$

Работа с программой

Программа решает уравнение, описанное выше, с параметрами, которые задает пользователь. По нажатию кнопки **"Approximate"** решается уравнение и выводится в столбец функция $y(t)$, степень которого указывается в поле **"m"**. Каждая строка имеет вид

$$a_k t^k, \quad k = 0, \ldots, m$$

По нажатию кнопки **"Draw"** рисуется график прибилиженной функции $y(t)$, а также, для сравнения, точное решение, которое указывается в соответствующем поле. Точное решение рисуется - красным, приближенное - зеленым, причем приближенное решение рисуется поверх точного. Для отрисовки точного решение, необходимо поставить галочку в соседнем поле, в ином случае оно не отрисуется. Отрисовка происходит на промежутке $[0, \tau]$ по Ox, в поле **"n"** указывается количество точек, на которое он разбивается. В полях **"Right"**, **"Left"**, **"Bottom"**, **"Top"** указываются границы отрисовки по осям: $[\mathbf{Left}, \mathbf{Right}]$ - ось x, $[\mathbf{Bottom}, \mathbf{Top}]$ - ось y. При нажатии кнопки **"Approximate"** они заполняются автоматически.

В полях "$\boldsymbol{\alpha}$" и "$\boldsymbol{f}\ (\boldsymbol{t})$" задаются соответственно порядок производной и правая часть уравнения (1). По-умолчанию заданы порядок $\alpha = \dfrac{1}{2}$ и функция $\dfrac{4t^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}}$, для которой $y\,(t) = t$.

Важно: в полях ввода функций, дроби нужно вводить в обыкновенном или в десятичном виде **через точку**, в остальных же полях дроби нужно вводить только в десятичном виде **через запятую**

Описание ошибок:

- **"Incorrect function f(t)"** - неверный формат ввода функции $f\,(t)$
- **"Incorrect function y(t)"** - неверный формат ввода функции $y\,(t)$
- **"Incorrect values"** - неверный формат ввода одной или несколько из следующих величин: n, m, α, τ
- **"Incorrect borders"** - неверный формат ввода границ отрисовки(**Left** $<$ **Right** и **Bottom** $<$ **Top**)