Logloss

$$\sum_{i=1}^{C} p_i \log a_i \to \max_{a:\ \sum a_i = 1}$$

$$L = \sum_{i=1}^{C} p_i \log a_i + \lambda\left(\sum_{i=1}^{C} a_i - 1\right) \to \max_{a,\lambda}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial a_i} = \frac{p_i}{a_i} + \lambda = 0 \\ \sum_{i=1}^{C} a_i = 1 \end{cases}$$

Отсюда получаем, что $a_i = p_i$ и $\lambda = -1$

MSE

$$L = \int\limits_y (y - a)^2 \; P(y \mid x) dy \to \min_a$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial a} = 2 \int\limits_y (y - a) \; P(y \mid x) dy$$

Отсюда

$$\int\limits_y y \; P(y \mid x) dy = \int\limits_y a \; P(y \mid x) dy$$

$$E(y \mid x) = a$$

MAE

$$L = \int\limits_y |y - a| \; P(y \mid x) dy \to \min_a$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial a} = \int\limits_y \mathsf{sign}(y - a) \; P(y \mid x) dy$$

Отсюда

$$\int\limits_{y<a} \mathsf{sign}(y - a) P(y \mid x) dy = - \int\limits_{y>a} \mathsf{sign}(y - a) P(y \mid x) dy$$

$$\int\limits_{y<a} P(y \mid x) dy = \int\limits_{y>a} P(y \mid x) dy$$

$$\mathrm{med}(y \mid x) = a$$

Percentile

$$\mathrm{L} = \int\limits_{\mathrm{y}} (\alpha(\mathrm{y}-\mathrm{a})[\mathrm{y}>\mathrm{a}] + (1-\alpha)(\mathrm{a}-\mathrm{y})[\mathrm{y}<\mathrm{a}])\ \mathrm{P}(\mathrm{y} \mid \mathrm{x})d\mathrm{y} \to \min_{\mathrm{a}}$$

$$0 = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{a}} = -\int\limits_{\mathrm{y}>\mathrm{a}} \alpha\ \mathrm{P}(\mathrm{y} \mid \mathrm{x})d\mathrm{y} + \int\limits_{\mathrm{y}<\mathrm{a}} (1-\alpha)\ \mathrm{P}(\mathrm{y} \mid \mathrm{x})d\mathrm{y}$$

Отсюда

$$\alpha \mathrm{P}(\mathrm{y}>\mathrm{a} \mid \mathrm{x}) = (1-\alpha)\mathrm{P}(\mathrm{y}<\mathrm{a} \mid \mathrm{x})$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{y}<\mathrm{a} \mid \mathrm{x}) = \alpha$$

$$\mathrm{a} = \mathrm{Z}_{\alpha}(\mathrm{y} \mid \mathrm{x})$$

MAPE

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|y_i - a(x_i)|}{y_i} \to \mathsf{min}$$

Первый способ

$$\sum_{i=1}^{n} w_i |y_i - a(x_i)| \to \mathsf{min}, \text{ где } w_i = \frac{1}{y_i}$$

Второй способ

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|y_i - a(x_i)|}{y_i} \approx \sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(a(x_i))| \approx$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n} |f'(y_i)||y_i - a(x_i)|$$

Откуда $f'(y_i) = \frac{1}{y_i}$, а, значит, $f(y) = \mathsf{log}\, y$