Logika prvog reda. Zapisivanje rečenica.

Danijela Simić

April 10, 2020

Logika prvog reda

- Osnovna novina u odnosu na iskaznu logiku – uvođenje egzistencijalnog i univerzalnog kvantifikatora.

Logika prvog reda

- Osnovna novina u odnosu na iskaznu logiku – uvođenje egzistencijalnog i univerzalnog kvantifikatora.
- *NIJE ODLUČIVO* – da li je formula valjana

Logika prvog reda

- Osnovna novina u odnosu na iskaznu logiku – uvođenje egzistencijalnog i univerzalnog kvantifikatora.
- *NIJE ODLUČIVO* – da li je formula valjana
- *POLUODLUČIVO* – može da se pokaže da je formula valjana

Logika prvog reda

- Osnovna novina u odnosu na iskaznu logiku – uvođenje egzistencijalnog i univerzalnog kvantifikatora.
- *NIJE ODLUČIVO* – da li je formula valjana
- *POLUODLUČIVO* – može da se pokaže da je formula valjana
- Ne može za svaku formulu koja NIJE valjana da se pokaže da NIJE valjana

Table of Contents

Logički deo jezika prvog reda čine

- prebrojiv skup promenljivih

Logički deo jezika prvog reda čine

- prebrojiv skup promenljivih
- veznici: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

Logički deo jezika prvog reda čine

- prebrojiv skup promenljivih
- veznici: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- kvantifikatori: $\forall$, $\exists$

Logički deo jezika prvog reda čine

- prebrojiv skup promenljivih
- veznici: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- kvantifikatori: $\forall$, $\exists$
- logičke konstante: $\top$ i $\bot$

Logički deo jezika prvog reda čine

- prebrojiv skup promenljivih
- veznici: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- kvantifikatori: $\forall$, $\exists$
- logičke konstante: $\top$ i $\perp$
- pomoćni simboli: $\{, \}, (,)$

- $\mathcal{L}(\Pi, \Sigma, ar)$ – rečnik ili signatura

- $\mathcal{L}(\Pi, \Sigma, ar)$ – rečnik ili signatura
- Π – predikatski simboli

- $\mathcal{L}(\Pi, \Sigma, ar)$ – rečnik ili signatura
- Π – predikatski simboli
- Σ – funkcijski simboli

- $\mathcal{L}(\Pi, \Sigma, ar)$ – rečnik ili signatura
- Π – predikatski simboli
- Σ – funkcijski simboli
- ar – funkcija arnosti za predikatske i funkcijske simbole

- $\mathcal{L}(\Pi, \Sigma, ar)$ – rečnik ili signatura
- Π – predikatski simboli
- Σ – funkcijski simboli
- ar – funkcija arnosti za predikatske i funkcijske simbole
- *konstanta* – funkcijski simbol arnosti 0

Termovi nad signaturom $\mathcal{L}(\Pi, \Sigma, ar)$

- svaki simbol konstante je term

Termovi nad signaturom $\mathcal{L}(\Pi, \Sigma, ar)$

- svaki simbol konstante je term
- svaki simbol promenljive je term

Termovi nad signaturom $\mathcal{L}(\Pi, \Sigma, ar)$

- svaki simbol konstante je term
- svaki simbol promenljive je term
- ako je f funkcijski simbol, arnosti k i $t_1, \ldots t_k$ su termovi, onda je i $f(t_1, \ldots, t_k)$ takođe term

Termovi nad signaturom $\mathcal{L}(\Pi, \Sigma, ar)$

- svaki simbol konstante je term
- svaki simbol promenljive je term
- ako je f funkcijski simbol, arnosti k i $t_1, \dots t_k$ su termovi, onda je i $f(t_1, \dots, t_k)$ takođe term
- term se može dobiti samo primenom prethodnih pravila

Atomička formula nad $\mathcal{L}(\Pi, \Sigma, ar)$

- $\top$ i $\bot$

Atomička formula nad $\mathcal{L}(\Pi, \Sigma, ar)$

- $\top$ i $\bot$
- ako je p predikatski simbol i $ar(p) = k$ i $t_1, \ldots t_k$ su termovi, onda je i $p(t_1, \ldots, t_k)$ takođe atomička formula

Atomička formula nad $\mathcal{L}(\Pi, \Sigma, ar)$

- $\top$ i $\bot$
- ako je p predikatski simbol i $ar(p) = k$ i $t_1, \ldots t_k$ su termovi, onda je i $p(t_1, \ldots, t_k)$ takođe atomička formula
- atomička formula se može dobiti samo primenom prethodnih pravila

Skup dobro zasnovanih formula nad $\mathcal{L}(\Pi, \Sigma, ar)$

- atomička formula

Skup dobro zasnovanih formula nad $\mathcal{L}(\Pi, \Sigma, ar)$

- atomička formula
- ako su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ dobro zasnovane formule, onda su i $\neg\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$

Skup dobro zasnovanih formula nad $\mathcal{L}(\Pi, \Sigma, ar)$

- atomička formula
- ako su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ dobro zasnovane formule, onda su i $\neg\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$
- ako je $\mathcal{A}$ dobro zasnovana formula i x promeljiva, onda su $((\exists x)\mathcal{A})$ i $((\forall x)\mathcal{A})$ dobro zasnovane formule

Skup dobro zasnovanih formula nad $\mathcal{L}(\Pi, \Sigma, ar)$

- atomička formula
- ako su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ dobro zasnovane formule, onda su i $\neg\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$
- ako je $\mathcal{A}$ dobro zasnovana formula i x promeljiva, onda su $((\exists x)\mathcal{A})$ i $((\forall x)\mathcal{A})$ dobro zasnovane formule
- dobro zasnovane formule se mogu dobiti samo primenom prethodnih pravila

- *Bazni term* – term koji ne sadrži ni jednu promeljivu

- *Bazni term* – term koji ne sadrži ni jednu promeljivu
- *Bazna formula* – formula koja ne sadrži ni jednu promenljivu

- *Bazni term* – term koji ne sadrži ni jednu promeljjivu
- *Bazna formula* – formula koja ne sadrži ni jednu promenljivu
- *Literal* – atomička formula ili negacija atomičke formule

- *Bazni term* – term koji ne sadrži ni jednu promeljivu
- *Bazna formula* – formula koja ne sadrži ni jednu promenljivu
- *Literal* – atomička formula ili negacija atomičke formule
- *Klauza* – disjunkcija literala

Slobodno i vezano pojavljivanje promenljive u formuli

- svako pojavljivanje promenljive u atomičkoj formuli je slobodno u toj formuli

Slobodno i vezano pojavljivanje promenljive u formuli

- svako pojavljivanje promenljive u atomičkoj formuli je slobodno u toj formuli
- svako pojavljivanje promenljive koja je slobodna u $\mathcal{A}$, slobodno je i u $\neg\mathcal{A}$;
  svako pojavljivanje promenljive koja je vezana u $\mathcal{A}$, vezana je i u $\neg\mathcal{A}$;

Slobodno i vezano pojavljivanje promenljive u formuli

- svako pojavljivanje promenljive u atomičkoj formuli je slobodno u toj formuli
- svako pojavljivanje promenljive koja je slobodna u $\mathcal{A}$, slobodno je i u $\neg\mathcal{A}$;
  svako pojavljivanje promenljive koja je vezana u $\mathcal{A}$, vezana je i u $\neg\mathcal{A}$;
- svako pojavljivanje promenljive koja je slobodna u $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, slobodno je i u $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$;
  svako pojavljivanje promenljive koja je vezana u $\mathcal{A}$ ili $\mathcal{B}$, vezano je i u $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$;

Slobodno i vezano pojavljivanje promenljive u formuli

- svako pojavljivanje promenljive u atomičkoj formuli je slobodno u toj formuli
- svako pojavljivanje promenljive koja je slobodna u $\mathcal{A}$, slobodno je i u $\neg\mathcal{A}$;
  svako pojavljivanje promenljive koja je vezana u $\mathcal{A}$, vezana je i u $\neg\mathcal{A}$;
- svako pojavljivanje promenljive koja je slobodna u $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, slobodno je i u $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$;
  svako pojavljivanje promenljive koja je vezana u $\mathcal{A}$ ili $\mathcal{B}$, vezano je i u $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$;
- svako slobodno pojavljivanje promenljive različite od x u formuli $\mathcal{A}$ je takođe slobodno u formuli $(\forall x)\mathcal{A}$;
  svako slobodno pojavljivanje promenljive x u $\mathcal{A}$ je vezano (vođenim kvantifikatorom) u $(\forall x)\mathcal{A}$;
  analogno za egzistencijalni kvantifikator.

Promenljiva je *vezana (slobodna)* u formuli ako ima vezano (slobodno) pojavljivanje u toj formuli.

- *zatvorena formula* – formula bez slobodnih promenljivih

- *zatvorena formula* – formula bez slobodnih promenljivih
- *univerzalno zatvorena* – ako je oblika $(\forall x_1) \dots (\forall x_n)\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}$ ne sadrži kvantifikatore, ni slobodne promenljive

- *zatvorena formula* – formula bez slobodnih promenljivih
- *univerzalno zatvorena* – ako je oblika $(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}$ ne sadrži kvantifikatore, ni slobodne promenljive
- *egzistencijalno zatvorena* – ako je oblika $(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}$ ne sadrži kvantifikatore, ni slobodne promenljive

- *zatvorena formula* – formula bez slobodnih promenljivih
- *univerzalno zatvorena* – ako je oblika $(\forall x_1) \dots (\forall x_n)\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}$ ne sadrži kvantifikatore, ni slobodne promenljive
- *egzistencijalno zatvorena* – ako je oblika $(\exists x_1) \dots (\exists x_n)\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}$ ne sadrži kvantifikatore, ni slobodne promenljive
- *Klauza* – disjunkcija literala

Sadržaj

- *Generalna tvrđenja*, ona koja su uopštena, važe za svaki slučaj – to zapisujemo koristeći $\forall$.

  Primer: Ljudi idu u kupovinu. – ovo je generalno tvrdjenje važi za sve ljude
  $p(x)$ – x ide u kupovinu
  $(\forall x)p(x)$

- *Generalna tvrđenja*, ona koja su uopštena, važe za svaki slučaj – to zapisujemo koristeći $\forall$.

  Primer: Ljudi idu u kupovinu. – ovo je generalno tvrdjenje važi za sve ljude
  $p(x)$ – x ide u kupovinu
  $(\forall x)p(x)$

- *Da bi nešto bilo rečenica* mora da ide sa $\forall$ ili sa $\exists$.

  Primer: Ljudi idu u kupovinu i jedu povrće.
  $p(x)$ – x ide u kupovinu
  $q(x)$ – x jede povrće
  $p(x) \wedge q(x)$ – nema nikakvog smisla, ovo znači *"x ide u kupovinu i jede povrće"*. Šta je x, ko je x?? x je promenljiva i nema smisla sama za sebe.
  $(\forall x)(p(x) \wedge q(x))$ – ovo već ima smisla.

- *Generalna tvrđenja*, ona koja su uopštena, važe za svaki slučaj – to zapisujemo koristeći $\forall$.

  Primer: Ljudi idu u kupovinu. – ovo je generalno tvrdjenje važi za sve ljude
  $p(x)$ – x ide u kupovinu
  $(\forall x)p(x)$

- *Da bi nešto bilo rečenica* mora da ide sa $\forall$ ili sa $\exists$.

  Primer: Ljudi idu u kupovinu i jedu povrće.
  $p(x)$ – x ide u kupovinu
  $q(x)$ – x jede povrće
  $p(x) \wedge q(x)$ – nema nikakvog smisla, ovo znači *"x ide u kupovinu i jede povrće"*. Šta je x, ko je x?? x je promenljiva i nema smisla sama za sebe.
  $(\forall x)(p(x) \wedge q(x))$ – ovo već ima smisla.

- *Predikatski simboli* – u principu, to su predikati u rečenici.

Zadatak 1

- Svako zadovoljstvo se plaća.

$z(x)$ – x je zadovoljstvo
$p(x)$ – x se plaća
$(\forall x)(z(x) \Rightarrow p(x))$

Zadatak 1

- Svako zadovoljstvo se plaća.

$z(x)$ – x je zadovoljstvo
$p(x)$ – x se plaća

$(\forall x)(z(x) \Rightarrow p(x))$
Netačno: $(\forall x)(z(x) \wedge p(x))$
Jer ovako ispada da svako x se plaća i da je svako x zadovoljstvo, a to nije slučaj, u našoj rečenici to nigde ne stoji; možda x može biti i nešto treće.
Mi samo tvrdimo da ako x jeste zadovoljstvo onda se plaća.
Takođe, prva rečenica je tačna ako x nije zadovoljstvo a plaća se (recimo kazna za parking), dok druga nije.

Zadatak 1

- Postoji zadovoljstvo koje se plaća.

$z(x)$ – x je zadovoljstvo
$p(x)$ – x se plaća

$(\exists x)(z(x) \wedge p(x))$
Netačno: $(\exists x)(z(x) \Rightarrow p(x))$
Ovde je situacija drugačija. Menja se zbog *postoji* u odnosu na *svako* kao u prethodnom primeru. Kada kažemo *postoji* mislimo na neko konkretno x, na neku jedinku, a ne na uopšteni slučaj. I za razliku od malo pre gde je x moglo biti i nešto treće (nešto što niti se plaća, niti je zadovoljstvo), ovde to nije slučaj. Ovde znamo da je ova jedinka upravo sa tim osobinama i nije nikako drugačija.

Zadatak 1

- Ni jedno zadovoljstvo nije posao.

$z(x)$ – x je zadovoljstvo
$p(x)$ – x se je posao

Pitanje smisla – "bilo koje zadovoljstvo nije posao"
$(\forall x)(z(x) \Rightarrow \neg p(x))$
Netačno: $(\forall x)(z(x) \wedge \neg p(x))$
Isto kao i malo pre – imamo $\forall$.

Zadatak 2

- Sve što leti to ima krila i lagano je.
- Sve što pliva to nema krila.
- Sve što pliva to ne leti.

Pokazati da je poslednja rečenica logička posledica prve dve rečenice.

Zadatak 2

- Sve što leti to ima krila i lagano je.
- Sve što pliva to nema krila.
- Sve što pliva to ne leti.

$l(x)$ – x leti
$k(x)$ – x ima krila
$p(x)$ – x pliva
$lag(x)$ – x je lagano

$\Pi = \{l, p, k, lag\}$
$\Sigma = \{\}$
$ar(l) = 1, ar(p) = 1, ar(k) = 1, ar(lag) = 1$

Zadatak 2

- *Sve što leti to ima krila i lagano je.*

$$(\forall x)(l(x) \Rightarrow (k(x) \land lag(x)))$$

Zadatak 2

- Sve što leti to ima krila i lagano je.
- *Sve što pliva to nema krila.*

$(\forall x)(l(x) \Rightarrow (k(x) \wedge lag(x)))$
$(\forall x)(p(x) \Rightarrow \neg k(x))$

Zadatak 2

- Sve što leti to ima krila i lagano je.
- Sve što pliva to nema krila.
- *Sve što pliva to ne leti.*

$$(\forall x)(l(x) \Rightarrow (k(x) \wedge lag(x)))$$
$$(\forall x)(p(x) \Rightarrow \neg k(x))$$
$$(\forall x)(p(x) \Rightarrow \neg l(x))$$

Zadatak 3

- Dve nemimoilazne prave se seku ili su paralelene.
- Prave koje se seku leže u istoj ravni.
- Prave koje su paralelene leže u istoj ravni.
- Dve nemimoilazne prave leže u istoj ravni.

Korišćem metode rezolucije pokazati da iz prve tri rečenice sledi četvrta rečenica.

Zadatak 3

- Dve nemimoilazne prave se seku ili su paralelene.
- Prave koje se seku leže u istoj ravni.
- Prave koje su paralelene leže u istoj ravni.
- Dve nemimoilazne prave leže u istoj ravni.

$m(x, y)$ – x i y su nemimoilazne prave
$s(x, y)$ – x i y se seku
$p(x, y)$ – x i y su paralelne
$r(x, y)$ – x i y leže u istoj ravni

$\Pi = \{m, s, p, r\}$
$\Sigma = \{\}$
$ar(m) = 2, ar(s) = 2, ar(p) = 2, ar(r) = 2$

Zadatak 3

- *Dve nemimoilazne prave se seku ili su paralelene.*

$$(\forall x)(\forall y)(m(x,y) \Rightarrow (s(x,y) \vee p(x,y))$$

Zadatak 3

- Dve nemimoilazne prave se seku ili su paralelene.
- *Prave koje se seku leže u istoj ravni.*

$(\forall x)(\forall y)(m(x,y) \Rightarrow (s(x,y) \vee p(x,y))$
$(\forall x)(\forall y)(s(x,y) \Rightarrow r(x,y))$

Zadatak 3

- Dve nemimoilazne prave se seku ili su paralelene.
- Prave koje se seku leže u istoj ravni.
- *Prave koje su paralelene leže u istoj ravni.*

$$(\forall x)(\forall y)(m(x,y) \Rightarrow (s(x,y) \vee p(x,y))$$
$$(\forall x)(\forall y)(s(x,y) \Rightarrow r(x,y))$$
$$(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \Rightarrow r(x,y))$$

Zadatak 3

- Dve nemimoilazne prave se seku ili su paralelene.
- Prave koje se seku leže u istoj ravni.
- Prave koje su paralelene leže u istoj ravni.
- *Dve nemimoilazne prave leže u istoj ravni.*

$(\forall x)(\forall y)(m(x,y) \Rightarrow (s(x,y) \vee p(x,y))$
$(\forall x)(\forall y)(s(x,y) \Rightarrow r(x,y))$
$(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \Rightarrow r(x,y))$
$(\forall x)(\forall y)(m(x,y) \Rightarrow r(x,y))$

Zadatak 4

- Svaka dva brata imaju zajedničkog roditelja.
- Roditelj je stariji od deteta.
- Postoje braća.
- Ni jedna osoba nije starija od druge.

Metodom rezolucije pokazati da je prethodni skup rečenica nezadovoljiv.

$b(x, y)$ – x i y su braća
$r(x, y)$ – x je roditelj od y
$s(x, y)$ – x je stariji od y

$\Pi = \{b, r, s\}$
$\Sigma = \{\}$
$ar(b) = 2, ar(r) = 2, ar(s) = 2$

Zadatak 4

- *Svaka dva brata imaju zajedničkog roditelja.*

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(b(x, y) \Rightarrow (r(z, x) \wedge r(z, y)))$$

Zadatak 4

- Svaka dva brata imaju zajedničkog roditelja.
- *Roditelj je stariji od deteta.*

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(b(x,y) \Rightarrow (r(z,x) \wedge r(z,y)))$$
$$(\forall x)(\forall y)(r(x,y) \Rightarrow s(x,y))$$

Zadatak 4

- Svaka dva brata imaju zajedničkog roditelja.
- Roditelj je stariji od deteta.
- *Postoje braća.*

$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(b(x, y) \Rightarrow (r(z, x) \wedge r(z, y)))$
$(\forall x)(\forall y)(r(x, y) \Rightarrow s(x, y))$
$(\exists x)(\exists y)b(x, y)$

Zadatak 4

- Svaka dva brata imaju zajedničkog roditelja.
- Roditelj je stariji od deteta.
- Postoje braća.
- *Ni jedna osoba nije starija od druge.*

$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(b(x,y) \Rightarrow (r(z,x) \land r(z,y)))$
$(\forall x)(\forall y)(r(x,y) \Rightarrow s(x,y))$
$(\exists x)(\exists y)b(x,y)$
$(\forall x)(\forall y)\neg s(x,y)$

Zadatak 5

- Svako ima rođaka na moru ili na planini.
- Ko ima rođaka na moru, bio je na moru.
- Ko ima rođaka na planini, bio je na planini.
- Neko nije bio ni na moru, ni na planini.

Pokazati da ako važe prve tri rečenice ne može da važi poslednja, četvrta rečenica.

$rm(x)$ – x ima rođaka na moru
$rp(x)$ – x ima rođaka na planini
$m(x)$ – x je bio na moru
$p(x)$ – x je bio na planini

$\Pi = \{rm, rp, m, p\}$
$\Sigma = \{\}$
$ar(rm) = 1, ar(rp) = 1, ar(m) = 1, ar(p) = 1$

Zadatak 5

- *Svako ima rođaka na moru ili na planini.*

$(\forall x)(rm(x) \lor rp(x))$

Zadatak 5

- Svako ima rođaka na moru ili na planini.
- *Ko ima rođaka na moru, bio je na moru.*

$(\forall x)(rm(x) \vee rp(x))$
$(\forall x)(rm(x) \Rightarrow m(x))$

Zadatak 5

- Svako ima rođaka na moru ili na planini.
- Ko ima rođaka na moru, bio je na moru.
- *Ko ima rođaka na planini, bio je na planini.*

$(\forall x)(rm(x) \vee rp(x))$
$(\forall x)(rm(x) \Rightarrow m(x))$
$(\forall x)(rp(x) \Rightarrow p(x))$

Zadatak 5

- Svako ima rođaka na moru ili na planini.
- Ko ima rođaka na moru, bio je na moru.
- Ko ima rođaka na planini, bio je na planini.
- *Neko nije bio ni na moru, ni na planini.*

$(\forall x)(rm(x) \vee rp(x))$
$(\forall x)(rm(x) \Rightarrow m(x))$
$(\forall x)(rp(x) \Rightarrow p(x))$
$(\exists x)(\neg m(x) \wedge \neg p(x))$

Zadatak 6

- Svako ruča kod kuće ili u restoranu.
- Ko ruča u restoranu i nema novaca, taj pere sudove u restoranu.
- Janko nema novaca.
- Janko ruča kod kuće ili pere sudove u restoranu.

Metodom rezolucije pokazati da je poslednja rečenica logička posledica prva tri rečenice.

Zadatak 6

- Svako ruča kod kuće ili u restoranu.
- Ko ruča u restoranu i nema novaca, taj pere sudove u restoranu.
- Janko nema novaca.
- Janko ruča kod kuće ili pere sudove u restoranu.

$rk(x)$ – x ruča kod kuće
$rr(x)$ – x ruča u restoranu
$nn(x)$ – x nema novaca
$ps(x)$ – x pere sudove u restoranu
j – Janko

$$\Pi = \{rk, rr, nn, ps\}$$
$$\Sigma = \{j\}$$
$$ar(rk) = 1, ar(rr) = 1, ar(nn) = 1, ar(ps) = 1, ar(j) = 0$$

Zadatak 6

- *Svako ruča kod kuće ili u restoranu.*

$(\forall x)(rk(x) \vee rr(x))$

Zadatak 6

- Svako ruča kod kuće ili u restoranu.
- *Ko ruča u restoranu i nema novaca, taj pere sudove u restoranu.*

$(\forall x)(rk(x) \lor rr(x))$
$(\forall x)((rr(x) \land nn(x)) \Rightarrow ps(x))$

Zadatak 6

- Svako ruča kod kuće ili u restoranu.
- Ko ruča u restoranu i nema novaca, taj pere sudove u restoranu.
- *Janko nema novaca.*

$(\forall x)(rk(x) \vee rr(x))$
$(\forall x)((rr(x) \wedge nn(x)) \Rightarrow ps(x))$
$nn(j)$

Zadatak 6

- Svako ruča kod kuće ili u restoranu.
- Ko ruča u restoranu i nema novaca, taj pere sudove u restoranu.
- Janko nema novaca.
- *Janko ruča kod kuće ili pere sudove u restoranu.*

$(\forall x)(rk(x) \vee rr(x))$
$(\forall x)((rr(x) \wedge nn(x)) \Rightarrow ps(x))$
$nn(j)$
$rk(j) \vee ps(j)$

Zadatak 7

- Ko rano rani, ceo dan je pospan.
- Ko rano rani ceo dan je pospan ili dve sreće grabi.
- Ko dve sreće grabi, ceo dan je pospan.

U logici prvog reda pokazati da je prva rečenica logička posledica druge i treće rečenice.

Zadatak 7

- Ko rano rani, ceo dan je pospan.
- Ko rano rani ceo dan je pospan ili dve sreće grabi.
- Ko dve sreće grabi, ceo dan je pospan.

$rr(x)$ – x rano rani
$p(x)$ – x je ceo dan pospan
$ds(x)$ – x dve sreće grabi

$\Pi = \{rr, p, ds\}$
$\Sigma = \{\}$
$ar(rr) = 1, ar(p) = 1, ar(ds) = 1$

Zadatak 7

- *Ko rano rani, ceo dan je pospan.*

$$(\forall x)(rr(x) \Rightarrow p(x))$$

Zadatak 7

- Ko rano rani, ceo dan je pospan.
- *Ko rano rani ceo dan je pospan ili dve sreće grabi.*

$$(\forall x)(rr(x) \Rightarrow p(x))$$
$$(\forall x)(rr(x) \Rightarrow (p(x) \vee ds(x)))$$

Zadatak 7

- Ko rano rani, ceo dan je pospan.
- Ko rano rani ceo dan je pospan ili dve sreće grabi.
- *Ko dve sreće grabi, ceo dan je pospan.*

$(\forall x)(rr(x) \Rightarrow p(x))$
$(\forall x)(rr(x) \Rightarrow (p(x) \vee ds(x)))$
$(\forall x)(ds(x) \Rightarrow p(x))$

Zadatak 8

- Ko se vozi avionom dosta zarađuje.
- Ko dosta zarađuje puno radi.
- Janko se vozi avionom.
- Janko ne radi puno.

Metodom rezolucije pokazati da su zajedno prethodne rečenice kontradiktorne.

Zadatak 8

- Ko se vozi avionom dosta zarađuje.
- Ko dosta zarađuje puno radi.
- Janko se vozi avionom.
- Janko ne radi puno.

$va(x)$ – x se vozi avionom
$dz(x)$ – x dosta zarađuje
$pr(x)$ – x puno radi
j – Janko

$\Pi = \{va, dz, pr\}$
$\Sigma = \{j\}$
$ar(va) = 1, ar(dz) = 1, ar(pr) = 1, ar(j) = 0$

Zadatak 8

- *Ko se vozi avionom dosta zarađuje.*

$$(\forall x)(va(x) \Rightarrow dz(x))$$

Zadatak 8

- Ko se vozi avionom dosta zarađuje.
- *Ko dosta zarađuje puno radi.*

$$(\forall x)(va(x) \Rightarrow dz(x))$$
$$(\forall x)(dz(x) \Rightarrow pr(x))$$

Zadatak 8

- Ko se vozi avionom dosta zarađuje.
- Ko dosta zarađuje puno radi.
- *Janko se vozi avionom.*

$(\forall x)(va(x) \Rightarrow dz(x))$
$(\forall x)(dz(x) \Rightarrow pr(x))$
$va(j)$

Zadatak 8

- Ko se vozi avionom dosta zarađuje.
- Ko dosta zarađuje puno radi.
- Janko se vozi avionom.
- *Janko ne radi puno.*

$(\forall x)(va(x) \Rightarrow dz(x))$
$(\forall x)(dz(x) \Rightarrow pr(x))$
$va(j)$
$\neg pr(j)$

Zadatak 9

Ako postoji cipela koja u svakom trenutku odgovara svakoj nozi, onda za svaku nogu postoji cipela koja joj u nekom trenutku odgovara i za svaku nogu postoji trenutak takav da postoji cipela koja joj u tom trenutku odgovara.

Metodom rezolucije pokazati da je prethodna rečenica valjana.

Zadatak 9

Ako postoji cipela koja u svakom trenutku odgovara svakoj nozi, onda za svaku nogu postoji cipela koja joj u nekom trenutku odgovara i za svaku nogu postoji trenutak takav da postoji cipela koja joj u tom trenutku odgovara.

$p(x, y, z)$ – nogi X odgovara cipela Y u trenutku Z

$\Pi = \{p\}$
$\Sigma = \{\}$
$ar(p) = 3$

Zadatak 9

Ako postoji cipela koja u svakom trenutku odgovara svakoj nozi, onda za svaku nogu postoji cipela koja joj u nekom trenutku odgovara i za svaku nogu postoji trenutak takav da postoji cipela koja joj u tom trenutku odgovara.

$p(x, y, z)$ – nogi X odgovara cipela Y u trenutku Z

$(\exists y)(\forall z)(\forall x)p(x, y, z) \Rightarrow$

Zadatak 9

Ako postoji cipela koja u svakom trenutku odgovara svakoj nozi, onda *za svaku nogu postoji cipela koja joj u nekom trenutku odgovara* i za svaku nogu postoji trenutak takav da postoji cipela koja joj u tom trenutku odgovara.

$p(x, y, z)$ – nogi X odgovara cipela Y u trenutku Z

$$(\exists y)(\forall z)(\forall x)p(x, y, z) \Rightarrow ((\forall x)(\exists y)(\exists z)p(x, y, z))$$

Zadatak 9

Ako postoji cipela koja u svakom trenutku odgovara svakoj nozi, onda za svaku nogu postoji cipela koja joj u nekom trenutku odgovara *i za svaku nogu postoji trenutak takav da postoji cipela koja joj u tom trenutku odgovara.*

$p(x, y, z)$ – nogi X odgovara cipela Y u trenutku Z

$$(\exists y)(\forall z)(\forall x)p(x, y, z) \Rightarrow$$
$$((\forall x)(\exists y)(\exists z)p(x, y, z) \wedge (\forall x)(\exists z)(\exists y)p(x, y, z))$$

Zadatak 10

- Ko radi taj ima ili troši.
- Ko ima taj peva.
- Ko trosi taj peva.
- Ko radi taj peva.

Pokazati da je poslednja rečenica logička posledica prve tri rečenice.

Zadatak 10

- Ko radi taj ima ili troši.
- Ko ima taj peva.
- Ko trosi taj peva.
- Ko radi taj peva.

$r(x)$ – x radi
$i(x)$ – x ima
$t(x)$ – x trosi
$p(x)$ – x peva

$\Pi = \{r, i, t, p\}$
$\Sigma = \{\}$
$ar(r) = 1, ar(r) = 1, ar(r) = 1, ar(p) = 1$

Zadatak 10

- *Ko radi taj ima ili troši.*

$$(\forall x)(r(x) \Rightarrow (i(x) \vee t(x)))$$

Zadatak 10

- Ko radi taj ima ili troši.
- *Ko ima taj peva.*

$(\forall x)(r(x) \Rightarrow (i(x) \vee t(x)))$
$(\forall x)(i(x) \Rightarrow p(x))$

Zadatak 10

- Ko radi taj ima ili troši.
- Ko ima taj peva.
- *Ko trosi taj peva.*

$$(\forall x)(r(x) \Rightarrow (i(x) \vee t(x)))$$
$$(\forall x)(i(x) \Rightarrow p(x))$$
$$(\forall x)(t(x) \Rightarrow p(x))$$

Zadatak 10

- Ko radi taj ima ili troši.
- Ko ima taj peva.
- Ko trosi taj peva.
- *Ko radi taj peva.*

$$(\forall x)(r(x) \Rightarrow (i(x) \vee t(x)))$$
$$(\forall x)(i(x) \Rightarrow p(x))$$
$$(\forall x)(t(x) \Rightarrow p(x))$$
$$(\forall x)(r(x) \Rightarrow p(x))$$

Zadatak 11

- Ko laže taj krade.
- Ko krade i uhvaćen je u krađi, taj ide u zatvor.
- Al Kapone laže.
- Al Kapone je uhvaćen u krađi.
- Laki Lućiano laže.

Zadatak 11

- Ko laže taj krade.
- Ko krade i uhvaćen je u krađi, taj ide u zatvor.
- Al Kapone laže.
- Al Kapone je uhvaćen u krađi.
- Laki Lućiano laže.

$l(x)$ – x laže
$k(x)$ – x krade
$u(x)$ – x uhavaćen u krađi
$z(x)$ – x ide u zatvor
AK – Al Kapone
LL – Laki Lućiano

$\Pi = \{l, k, u, z\}$
$\Sigma = \{AK, LL\}$
$ar(l) = 1, ar(k) = 1, ar(u) = 1, ar(z) = 1, ar(AK) = 0, ar(LL) = 0$

Zadatak 11

- *Ko laže taj krade.*

$(\forall x)(l(x) \Rightarrow k(x))$

Zadatak 11

- Ko laže taj krade.
- *Ko krade i uhvaćen je u krađi, taj ide u zatvor.*

$(\forall x)(l(x) \Rightarrow k(x))$
$(\forall x)((l(x) \wedge u(x)) \Rightarrow z(x))$

Zadatak 11

- Ko laže taj krade.
- Ko krade i uhvaćen je u krađi, taj ide u zatvor.
- *Al Kapone laže.*

$(\forall x)(l(x) \Rightarrow k(x))$
$(\forall x)(((l(x) \land u(x)) \Rightarrow z(x))$
$l(AK)$

Zadatak 11

- Ko laže taj krade.
- Ko krade i uhvaćen je u krađi, taj ide u zatvor.
- Al Kapone laže.
- *Al Kapone je uhvaćen u krađi.*

$(\forall x)(l(x) \Rightarrow k(x))$
$(\forall x)((l(x) \wedge u(x)) \Rightarrow z(x))$
$l(AK)$
$u(AK)$

Zadatak 11

- Ko laže taj krade.
- Ko krade i uhvaćen je u krađi, taj ide u zatvor.
- Al Kapone laže.
- Al Kapone je uhvaćen u krađi.
- *Laki Lućiano laže.*

$(\forall x)(l(x) \Rightarrow k(x))$
$(\forall x)((l(x) \wedge u(x)) \Rightarrow z(x))$
$l(AK)$
$u(AK)$
$l(LL)$

Zadatak 12

Ako onaj ko laže taj i krade i ako bar neko laže, onda neko i krade.

U logici prvog reda pokazati da je ova rečenica valjana.

Zadatak 12

Ako onaj ko laže taj i krade i ako bar neko laže, onda neko i krade.

$l(x)$ – x laže
$k(x)$ – x krade

$\Pi = \{l, k\}$
$\Sigma = \{\}$
$ar(l) = 1, ar(k) = 1$

Zadatak 12

Ako *onaj ko laže taj i krade* i ako bar neko laže, onda neko i krade.

$$(\forall x)(l(x) \Rightarrow k(x))$$

Zadatak 12

Ako onaj ko laže taj i krade *i ako bar neko laže*, onda neko i krade.

$(\forall x)(l(x) \Rightarrow k(x)) \wedge (\exists x)l(x)$

Zadatak 12

Ako onaj ko laže taj i krade i ako bar neko laže, *onda* neko i krade.

$$((\forall x)(l(x) \Rightarrow k(x)) \wedge (\exists x)l(x)) \Rightarrow$$

Zadatak 12

Ako onaj ko laže taj i krade i ako bar neko laže, onda *neko i krade*.

$$((\forall x)(l(x) \Rightarrow k(x)) \wedge (\exists x)l(x)) \Rightarrow (\exists x)k(x)$$

Zadatak 13

- Ako je X prijatelj osobe Y, onda je Y prijatelj osobe X.
- Ako je X prijatelj osobe Y, onda X voli Y.
- Ne postoji neko ko je povredio osobu koju voli.
- Janko je povredio svog prijatelja Marka.

Pokazati da je ovaj skup rečenica nezadovoljiv.

Zadatak 13

- Ako je X prijatelj osobe Y, onda je Y prijatelj osobe X.
- Ako je X prijatelj osobe Y, onda X voli Y.
- Ne postoji neko ko je povredio osobu koju voli.
- Janko je povredio svog prijatelja Marka.

$p(x, y)$ – x je prijatelj osobe y
$v(x, y)$ – x voli y
$pov(x, y)$ – x je povredio y
m – Marko j – Janko

$\Pi = \{p, v, pov\}$
$\Sigma = \{m, j\}$
$ar(p) = 2, ar(v) = 2, ar(pov) = 2, ar(m) = 0, ar(j) = 0$

Zadatak 13

- *Ako je X prijatelj osobe Y, onda je Y prijatelj osobe X.*

$$(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \Rightarrow p(y,x))$$

Zadatak 13

- Ako je X prijatelj osobe Y, onda je Y prijatelj osobe X.
- *Ako je X prijatelj osobe Y, onda X voli Y.*

$$(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \Rightarrow p(y,x))$$
$$(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \Rightarrow v(x,y))$$

Zadatak 13

- Ako je X prijatelj osobe Y, onda je Y prijatelj osobe X.
- Ako je X prijatelj osobe Y, onda X voli Y.
- *Ne postoji neko ko je povredio osobu koju voli.*

$(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \Rightarrow p(y,x))$
$(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \Rightarrow v(x,y))$
$\neg[(\exists x)(\exists y)(pov(x,y) \wedge v(x,y))]$

Zadatak 13

- Ako je X prijatelj osobe Y, onda je Y prijatelj osobe X.
- Ako je X prijatelj osobe Y, onda X voli Y.
- Ne postoji neko ko je povredio osobu koju voli.
- *Janko je povredio svog prijatelja Marka.*

$(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \Rightarrow p(y,x))$
$(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \Rightarrow v(x,y))$
$\neg[(\exists x)(\exists y)(pov(x,y) \wedge v(x,y))]$
$pov(j,m) \wedge p(m,j)$

Zadatak 14

Možete lagati neke ljude sve vreme i možete lagati sve ljude neko vreme, ali ne možete lagati sve ljude sve vreme.

Zadatak 14

Možete lagati neke ljude sve vreme i možete lagati sve ljude neko vreme, ali ne možete lagati sve ljude sve vreme.

$p(x, y)$ – možete lagati x u vremenu y

$\Pi = \{p\}$

$\Sigma = \{\}$

$ar(p) = 2$

Zadatak 14

Možete lagati neke ljude sve vreme i možete lagati sve ljude neko vreme, ali ne možete lagati sve ljude sve vreme.

$(\exists x)(\forall y)p(x, y)$

Zadatak 14

Možete lagati neke ljude sve vreme i možete lagati sve ljude neko vreme, ali ne možete lagati sve ljude sve vreme.

$(\exists x)(\forall y)p(x, y)$

Zadatak 14

Možete lagati neke ljude sve vreme *i* možete lagati sve ljude neko vreme, ali ne možete lagati sve ljude sve vreme.

$(\exists x)(\forall y)p(x, y) \wedge$

Zadatak 14

Možete lagati neke ljude sve vreme i *možete lagati sve ljude neko vreme*, ali ne možete lagati sve ljude sve vreme.

$$(\exists x)(\forall y)p(x,y) \land (\forall x)(\exists y)p(x,y)$$

Zadatak 14

Možete lagati neke ljude sve vreme i možete lagati sve ljude neko vreme, *ali* ne možete lagati sve ljude sve vreme.

$(\exists x)(\forall y)p(x,y) \wedge (\forall x)(\exists y)p(x,y) \wedge$

Zadatak 14

Možete lagati neke ljude sve vreme i možete lagati sve ljude neko vreme, ali *ne možete lagati sve ljude sve vreme*.

$$(\exists x)(\forall y)p(x, y) \wedge (\forall x)(\exists y)p(x, y) \wedge \neg[(\forall x)(\forall y)p(x, y)]$$

Zadatak 15

Svako voli nekog i niko ne voli svakog ili neko voli svakog i niko ne voli nikoga.

Zadatak 15

Svako voli nekog i niko ne voli svakog ili neko voli svakog i niko ne voli nikoga.

$p(x, y)$ – x voli y
$\Pi = \{p\}$
$\Sigma = \{\}$
$ar(p) = 2$

Zadatak 15

Svako voli nekog i niko ne voli svakog ili neko voli svakog i niko ne voli nikoga.

$p(x, y)$ – x voli y

$(\forall x)(\exists y)p(x, y)$

Zadatak 15

Svako voli nekog *i* niko ne voli svakog ili neko voli svakog i niko ne voli nikoga.

$p(x, y)$ – x voli y

$(\forall x)(\exists y)p(x, y) \wedge$

Zadatak 15

Svako voli nekog i *niko ne voli svakog* ili neko voli svakog i niko ne voli nikoga.

Pitanje smisla – niko i dvostruka negacija, možda prevesti na engleski
"there is no person that loves everybody"
niko – ni jedna osoba, ne postoji soba
"ne važi da postoji osoba tako da voli svakog"
ili
"za svaku osobu postoji osoba takva da je ne voli"
$p(x, y)$ – x voli y
$((\forall x)(\exists y)p(x, y) \wedge \neg[(\exists x)(\forall y)p(x, y)]$

Zadatak 15

Svako voli nekog i niko ne voli svakog *ili* neko voli svakog i niko ne voli nikoga.

$p(x, y)$ – x voli y

$(((\forall x)(\exists y)p(x, y) \wedge \neg[(\exists x)(\forall y)p(x, y)])\vee$

Zadatak 15

Svako voli nekog i niko ne voli svakog ili *neko voli svakog* i niko ne voli nikoga.

$p(x, y)$ – x voli y

$$(((\forall x)(\exists y)p(x, y) \wedge \neg[(\exists x)(\forall y)p(x, y)]) \vee ((\exists x)(\forall y)p(x, y))$$

Zadatak 15

Svako voli nekog i niko ne voli svakog ili neko voli svakog i *niko ne voli nikoga*.

Pitanje smisla – trostruka negacija
da li znači – bilo koja dva čoveka se ne vole – $(\forall x)(\forall y)\neg p(x, y)$
ili znači – ne postoji osoba tako da ne voli ni jednu drugu osobu – $\neg[(\exists x)(\forall y)\neg p(x, y)]$ (biram da je ovo smisao)

$(((\forall x)(\exists y)p(x, y) \wedge \neg[(\exists x)(\forall y)p(x, y)]) \vee ((\exists x)(\forall y)p(x, y) \wedge \neg[(\exists x)(\forall y)\neg p(x, y)])$