

TD9 - Arbre binaire de recherche et rotation

Exercice 1 - Rotation gauche et rotation droite

Soit A un ABR, et x un sommet de celui-ci. Soit y le fils gauche de x . Notons B et C les sous-arbres gauche et droit de y ; et D le sous-arbre droit de x . L'arbre $A' = Rotd(x)$ résultant de la rotation droite autour du noeud x est obtenu de la manière suivantes :

- y prend la position de x ;
- x devient le fils droit de y ;
- C devient le sous-arbre gauche de x .

1. Montrer que $Rotd(x)$ est un ABR.
2. La transformation inverse de $Rotd$ est une rotation gauche notée $Rotg$. En supposant qu'un sommet de l'arbre porte les champs g , d et $pere$, écrire les algorithmes correspondant à une rotation gauche et une rotation droite qui mettent à jour ces informations.
3. Montrer que la hauteur du sous-arbre modifié par $Rotd$ varie de Δ avec :

$$\Delta = \begin{cases} -1 & \text{si } h(B) > \max(h(D), h(C)) \\ 1 & \text{si } h(D) > \max(h(B), h(C)) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. Soit v un noeud de A . Étudier la variation de hauteur de $A(v)$ selon que $A_d[v]$ ou $A_g[v]$ augmente ou diminue d'une unité.
5. En supposant que les sommets de l'arbre portent également un champ h contenant leur hauteur, ajouter des instructions à la procédure $Rotd$ pour mettre à jour cette information dans tout l'arbre après la rotation. Indiquer la complexité de l'algorithme.

Exercice 2 - Enracinement dans un arbre binaire de recherche

Soit A un ABR et e la clé d'un noeud x de A . On cherche à construire à partir des éléments de A un ABR dont la racine est x .

1. Si $A_g[r]$ a pour racine x , quelle rotation permet de modifier l'arbre pour que sa racine soit x ? Et si $A_d[r]$ a pour racine x ?
2. En déduire une fonction récursive $enraciner(r : \text{Racine}, e : \text{entier})$ qui transforme un ABR A de racine r en un ABR dont la racine porte la clé e , en renvoyant l'arbre modifié.
3. Prouver la fonction et donner sa complexité.