Мотивационный пример про интуиционистскую логику

BHK-интерпретация — про конструкции, построенные объекты. А пусть конструкция — тип значения, которое может быть вычислено. Тогда:

- $\alpha \,\&\, \beta$ — тип упорядоченной пары значений
- $\alpha \vee \beta$ — алгебраический тип (тип-сумма)
- $\alpha \to \beta$ — тип функций из α в β
- $\perp$ — значение, не имеющее построения.

Доказательство — значение, *обитающее* в указанном типе. Вот и давайте подоказываем:

$$\vdash 3 : \mathtt{int}$$

$$\vdash \mathtt{fun\ x\ \text{->}\ x+1} : \mathtt{int} \to \mathtt{int}$$

Алгебраический тип (тип-сумма)

Определение

Отмеченное (дизъюнктное) объединение:
$A \uplus B := \{\langle x, 0\rangle \mid x \in A\} \cup \{\langle y, 1\rangle \mid y \in B\}$

Значение типа $\alpha \vee \beta$ — значение либо типа α, либо типа β, и мы знаем, какого именно. `std::variant` в C++.

Пример

α `option` — *это* $\alpha \vee ()$

```
type 'a option = Some of 'a | None

let print_int_option v = match v with
    Some x -> print_int x
  | None   -> print_string "None"
let csqrt x = if x >= 0. then Some (sqrt x) else None
```

Ложь (необитаемый тип)

Перепишем старый пример чуть иначе:

```
let csqrt x =
   if x >= 0. then sqrt x
              else failwith "Cannot compute square root"
```

Какой тип у `csqrt`? Рассмотрим ветки `if`

- `then`: $\sqrt{x} : \texttt{float}$
- `else`: $\text{failwith s} : \bot$, и поэтому $\text{failwith s} : \bot \vdash \text{failwith s} : \texttt{float}$

Ветка `else` не возвращает результата — поэтому возвращает любой тип; «из лжи следует всё, что угодно».

Изоморфизм Карри-Ховарда

Обычно формулируется для лямбда исчисления — формального алгоритма, хорошо абстрагирующего синтаксис языков программирования (пока не будем углубляться в подробности).

Программа (λ-выражение)	Исчисление высказываний
Выражение	доказательство
Тип выражения	высказывание
Тип функции	импликация
Упорядоченная пара	Конъюнкция
Алгебраический тип	Дизъюнкция
Необитаемый тип	Ложь

Непрерывность

Определение

Функция $f : X \to Y$ *непрерывна, если прообраз любого открытого множества открыт.*

Пример

Функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *всегда непрерывна (при дискретной топологии на* $\mathbb{N}$*), поскольку любое множество в* $\mathbb{N}$ *открыто.*

Компактность

Определение

Будем говорить, что множество компактно, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие

Пример

Множество $\{0, 1\}$ *в дискретной топологии компактно.*

Пример

Интервал $(0, 1)$ *в* $\mathbb{R}$ *не компактен — например, рассмотрим покрытие* $\{(\varepsilon, 1) \mid \varepsilon \in (0, 1)\}$

Подпространства и связные множества

Определение

Пространство $\langle X_1, \Omega_1 \rangle$ *— подпространство пространства* $\langle X, \Omega \rangle$, *если* $X_1 \subseteq X$ *и* $\Omega_1 = \{A \cap X_1 | A \in \Omega\}$.

Пример

$[0,1]$ *с евклидовой топологией на отрезке — подпространство* $\mathbb{R}$. $[0,0.5)$ *открыто в* $[0,1]$, *так как* $[0,0.5) = (-0.5,0.5) \cap [0,1]$.

Определение

Пространство $\langle X, \Omega \rangle$ *связно, если нет* $A, B \in \Omega$, *что* $A \cup B = X$, $A \cap B = \varnothing$ *и* $A, B \neq \varnothing$.

Пример

Пространство $(0,1] \cup [2,3)$ *в* $\mathbb{R}$ *несвязно: возьмём* $A = (0,1]$ *и* $B = [2,3)$.
Дискретное топологическое пространство $\langle X, \mathcal{P}(X) \rangle$ *несвязно при* $|X| > 1$: *пусть* $a \in X$, *тогда* $A = \{a\}$ *и* $B = X \setminus A$.

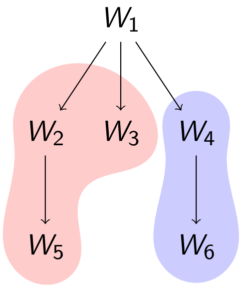
Топология на деревьях

Определение

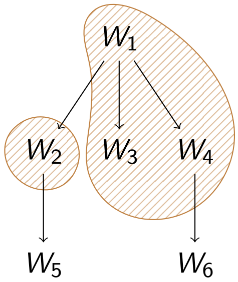
Пусть некоторый лес задан конечным множеством вершин V и отношением $(\preceq)$, связывающим предков и потомков ($a \preceq b$, если b — потомок a). Тогда подмножество его вершин $X \subseteq V$ назовём открытым, если из $a \in X$ и $a \preceq b$ следует, что $b \in X$.

Пример

Открыты



Не открыты



Связность деревьев

Лемма

Лес связен (является одним деревом) тогда и только тогда, когда соответствующее ему топологическое пространство связно.

Доказательство.

1. Лес связен: пусть не так и найдутся открытые непустые A, B, что $A \cup B = V$ и $A \cap B = \varnothing$. Пусть $v \in V$ — корень дерева и пусть $v \in A$ (для определённости). Тогда $A = \{x \mid v \preceq x\}$ и $B = \varnothing$.
2. Пусть лес топологически связен, но есть несколько разных корней $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Возьмём $A_i = \{x \mid v_i \preceq x\}$. Тогда все A_i открыты, непусты, дизъюнктны и $V = \cup A_i$.

□

Пишем скобки или нет?

Вы как пишете: $\sin x$ или $\sin(x)$?

Пишем скобки или нет?

Вы как пишете: $\sin x$ или $\sin(x)$?

```
int main () {
    return sizeof 0;
}
```

Пишем скобки или нет?

Вы как пишете: $\sin x$ или $\sin(x)$?

```
int main () {
    return sizeof 0;
}
```

Соглашение о записи:

$$\mathrm{sizeof}\ \varnothing = \mathrm{sizeof}(\varnothing) = 0$$

но:

$$\mathrm{sizeof}\{\varnothing\} = \mathrm{sizeof}(\{\varnothing\}) = 1$$

Минимальные и максимальные элементы

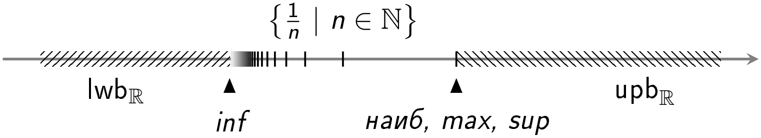
Определение

Множество нижних граней $X \subseteq \mathcal{U}$: $\mathrm{lwb}_{\mathcal{U}} X = \{y \in \mathcal{U} \mid y \preceq x \text{ при всех } x \in X\}$.
Множество верхних граней $X \subseteq \mathcal{U}$: $\mathrm{upb}_{\mathcal{U}} X = \{y \in \mathcal{U} \mid x \preceq y \text{ при всех } x \in X\}$.

Определение

минимальный $(m \in X)$: *нет меньшего*	*при всех* $y \in X$, $y \preceq m$ *влечёт* $y = m$
максимальный $(m \in X)$: *нет большего*	*при всех* $y \in X$, $m \preceq y$ *влечёт* $y = m$
наименьший $(m \in X)$: *меньше всех*	*при всех* $y \in X$ *выполнено* $m \preceq y$
наибольший $(m \in X)$: *больше всех*	*при всех* $y \in X$ *выполнено* $y \preceq m$
инфимум: наибольшая нижняя грань	$\inf_{\mathcal{U}} X = \text{наиб}(\mathrm{lwb}_{\mathcal{U}} X)$
супремум: наименьшая верхняя грань	$\sup_{\mathcal{U}} X = \text{наим}(\mathrm{upb}_{\mathcal{U}} X)$

Пример



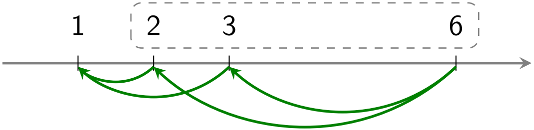
Пример: делимость

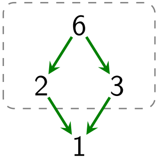
На $\mathbb{N}$ положим $a \preceq b$, если $b \,\vdots\, a$.

Пример

Множество $\{2, 3, 6\}$

Минимальные:	*2,3*	$2 \,\vdots\, x$ *влечёт* $x = 1$ *или* $x = 2$, *то же про 3*
Наименьший:	*отсутствует*	$2 \not\preceq 3$ и $3 \not\preceq 2$
Инфимум:	*1*	$1 \preceq x$ *при всех* $x \in \mathbb{N}$





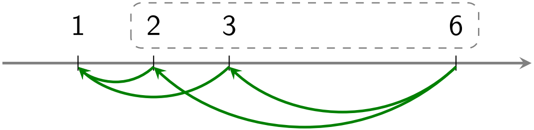
Пример: делимость

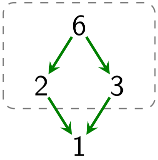
На $\mathbb{N}$ положим $a \preceq b$, если $b \,\vdots\, a$.

Пример

Множество $\{2, 3, 6\}$

Минимальные:	*2,3*	$2 \,\vdots\, x$ *влечёт* $x = 1$ *или* $x = 2$*, то же про 3*
Наименьший:	*отсутствует*	$2 \not\preceq 3$ *и* $3 \not\preceq 2$
Инфимум:	*1*	$1 \preceq x$ *при всех* $x \in \mathbb{N}$





Пример

Рассмотрим $X = \{1; 1.4; 1.41; 1.414; 1.4142; \ldots\}$ *— множество десятичных приближений* $\sqrt{2}$*,* $\preceq\, = \,\leqslant$*. Тогда* $\mathrm{upb}_{\mathbb{Q}} X$ *состоит из рациональных чисел, бо́льших* $\sqrt{2}$*. При этом* $\sqrt{2} \notin \mathrm{upb}_{\mathbb{Q}} X$*, а значит* $\sup_{\mathbb{Q}} X$ *не определён.*

Пример: внутренность множества

Определение (внутренность множества)

Рассмотрим $\langle X, \Omega \rangle$ и возьмём $(\subseteq)$ как отношение частичного порядка на $\mathcal{P}(X)$. Тогда $A^\circ := \inf_\Omega(\{A\})$.

Теорема

A° определена для любого A.

Доказательство.

Пусть $V = \mathrm{lwb}_\Omega\{A\} = \{Q \in \Omega \mid Q \subseteq A\}$. Тогда $\inf_\Omega\{A\} = \bigcup V$.
Напомним, $\inf_\mathcal{U} T = \text{наиб}(\mathrm{lwb}_\mathcal{U} T)$.

1. Покажем принадлежность: $\bigcup V \subseteq A$ и $\bigcup V \in \Omega$ как объединение открытых.
2. Покажем, что все из V меньше или равны: пусть $X \in V$, то есть $V = \{X, \dots\}$, тогда $X \subseteq X \cup \dots$, тогда $X \subseteq \bigcup V$

$\square$

Решётка

Определение

Решёткой называется упорядоченная пара: $\langle X, (\preceq)\rangle$*, где* X *— некоторое множество, а* $(\preceq)$ *— частичный порядок на* X*, такой, что для любых* $a, b \in X$ *определены* $a + b = \sup\{a, b\}$ *и* $a \cdot b = \inf\{a, b\}$*.*

То есть, $a + b$ — наименьший элемент c, что $a \preceq c$ и $b \preceq c$.

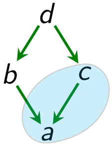
Пример

$\langle \Omega, (\subseteq)\rangle$ *— решётка.* $\langle \mathbb{N} \setminus \{1\}, (\vdots)\rangle$ *— не решётка.*

Псевдодополнение

Псевдодополнением $a \to b$ называется наибольший из $\{x \mid a \cdot x \preceq b\}$.

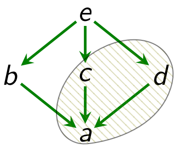
Пример



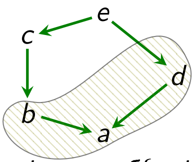
$$a \cdot b = a$$
$$b \cdot b = b$$
$$c \cdot b = a$$
$$d \cdot b = b$$

Здесь $b \to c = \textit{наиб}\{x \mid b \cdot x \preceq c\} = \textit{наиб}\{a, c\} = c$

Пример (нет псевдодополнения: диамант и пентагон)



$b \to c = \textit{наиб}\{a, c, d\}$



$c \to b = \textit{наиб}\{a, b, d\}$

Особые решётки

Определение

Дистрибутивной решёткой называется такая, что для любых a, b, c *выполнено* $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Определение

Импликативная решётка — такая, в которой для любых элементов есть псевдодополнение.

Лемма

Любая импликативная решётка — дистрибутивна.

Ноль и один

Определение

0 — наименьший элемент решётки, а 1 — наибольший элемент решётки

Лемма

В любой импликативной решётке $\langle X, (\preceq)\rangle$ есть 1

Доказательство.

Рассмотрим $a \to a$, тогда $a \to a = \text{наиб}\{c \mid a \cdot c \preceq a\} = \text{наиб} X = 1$. $\square$

Определение

Импликативная решётка с 0 — псевдобулева алгебра (алгебра Гейтинга). В такой решётке определено $\sim a := a \to 0$

Определение

Булева алгебра — псевдобулева алгебра, в которой $a + \sim a = 1$ *для всех* a.

Булева алгебра является булевой алгеброй в смысле решёток

Доказательство.

Символы булевой алгебры: $(\&), (\vee), (\neg)$, Л, И.
Символы решёток: $(+), (\cdot), (\rightarrow), (\sim), 0, 1$
Упорядочивание: Л $\leq$ И.

1. $a \,\&\, b = \min(a, b)$, $a \vee b = \max(a, b)$ (анализ таблицы истинности), отсюда $a \cdot b = a \,\&\, b$ и $a + b = a \vee b$.
2. $a \rightarrow b = \neg a \vee b$, так как:

$$a \rightarrow b = \text{наиб}\{c | c \,\&\, a \leq b\} = \begin{cases} \neg a, & b = \text{Л} \\ \text{И}, & b = \text{И} \end{cases}$$

3. $0 = \min\{\text{И}, \text{Л}\} = \text{Л}$, $1 = \max\{\text{И}, \text{Л}\} = \text{И}$, $\sim a = a \rightarrow 0 = \neg a \vee \text{Л} = \neg a$.
Заметим, что $a + \sim a = a \vee \neg a = \text{И}$.

Итого: булева алгебра — импликативная решётка с 0 и с $a + \sim a = 1$.

$\square$

Множества и топологии как решётки

Лемма
$\langle \mathcal{P}(X), (\subseteq) \rangle$ — *булева алгебра.*

Доказательство.
$a \to b = $ наиб$\{c \subseteq X \mid a \cap c \subseteq b\}$. Т.е. наибольшее, не содержащее точек из $a \setminus b$.
Т.е. $X \setminus (a \setminus b)$. То есть $(X \setminus a) \cup b$.
$a + \sim a = a \cup (X \setminus a) \cup \varnothing = X$ $\square$

Лемма
$\langle \Omega, (\subseteq) \rangle$ — *псевдобулева алгебра.*

Доказательство.
$a \to b = $ наиб$\{c \in \Omega \mid a \cap c \subseteq b\}$. Т.е. наибольшее открытое, не содержащее точек из $a \setminus b$. То есть, $(X \setminus (a \setminus b))^\circ$. То есть, $((X \setminus a) \cup b)^\circ$. $\square$

Решётки и исчисление высказываний

Определение

Пусть некоторое исчисление высказываний оценивается значениями из некоторой решётки. Назовём оценку согласованной с исчислением, если $[\![\alpha \,\&\, \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \cdot [\![\beta]\!]$, $[\![\alpha \vee \beta]\!] = [\![\alpha]\!] + [\![\beta]\!]$, $[\![\alpha \rightarrow \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \rightarrow [\![\beta]\!]$, $[\![\neg\alpha]\!] = \sim [\![\alpha]\!]$, $[\![A \,\&\, \neg A]\!] = 0$, $[\![A \rightarrow A]\!] = 1$.

Теорема

Любая псевдобулева алгебра, являющаяся согласованной оценкой интуиционистского исчисления высказываний, является его корректной моделью: если $\vdash \alpha$, *то* $[\![\alpha]\!] = 1$.

Теорема

Любая булева алгебра, являющаяся согласованной оценкой классического исчисления высказываний, является его корректной моделью: если $\vdash \alpha$, *то* $[\![\alpha]\!] = 1$

Алгебра Линденбаума

Определение

Определим предпорядок на высказываниях: $\alpha \preceq \beta := \alpha \vdash \beta$ в интуиционистском исчислении высказываний. Также $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \preceq \beta$ и $\beta \preceq \alpha$.

Определение

Пусть L — множество всех высказываний. Тогда алгебра Линденбаума $\mathcal{L} = L/_{\approx}$.

Теорема

$\mathcal{L}$ — псевдобулева алгебра.

Схема доказательства.

Надо показать, что $(\preceq)$ есть отношение порядка на $\mathcal{L}$, что $[\alpha \vee \beta]_{\mathcal{L}} = [\alpha]_{\mathcal{L}} + [\beta]_{\mathcal{L}}$, $[\alpha \mathbin{\&} \beta]_{\mathcal{L}} = [\alpha]_{\mathcal{L}} \cdot [\beta]_{\mathcal{L}}$, импликация есть псевдодополнение, $[A \mathbin{\&} \neg A]_{\mathcal{L}} = 0$, $[\alpha]_{\mathcal{L}} \to 0 = [\neg\alpha]_{\mathcal{L}}$. $\square$

Полнота псевдобулевых алгебр

Теорема

Пусть $[\![\alpha]\!] = [\alpha]_{\mathcal{L}}$. *Такая оценка интуиционистского исчисления высказываний алгеброй Линденбаума является согласованной.*

Теорема

Интуиционистское исчисление высказываний полно в псевдобулевых алгебрах: если $\models \alpha$ *во всех псевдобулевых алгебрах, то* $\vdash \alpha$.

Доказательство.

Возьмём в качестве модели исчисления алгебру Линденбаума: $[\![\alpha]\!] = [\alpha]_{\mathcal{L}}$. Пусть $\models \alpha$. Тогда $[\![\alpha]\!] = 1$ во всех псевдобулевых алгебрах, в том числе и $[\![\alpha]\!] = 1_{\mathcal{L}}$. То есть $[\alpha]_{\mathcal{L}} = [A \to A]_{\mathcal{L}}$. То есть $A \to A \approx \alpha$. Значит, в частности, $A \to A \vdash \alpha$. Значит, $\vdash \alpha$. $\square$