Теоретические домашние задания

Математическая логика, ИТМО, M3232-M3239, осень 2025 года

О нумерации заданий: отдельным заданием считается самый вложенный занумерованный пункт (цифрой или буквой). Пункты без нумерации (если они присутствуют в условии) считаются частью одного задания.

Задание №1. Знакомство с классическим исчислением высказываний.

1. Докажите:
   (a) $\vdash (A \to A \to B) \to (A \to B)$
   (b) $\vdash \neg(A \mathbin{\&} \neg A)$
   (c) $\vdash A \mathbin{\&} B \to B \mathbin{\&} A$
   (d) $\vdash A \vee B \to B \vee A$
   (e) $A \mathbin{\&} \neg A \vdash B$

2. Докажите:
   (a) $\vdash A \to \neg\neg A$
   (b) $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$
   (c) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
   (d) $A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$
   (e) $\neg A, B \vdash A \to B$

3. Докажите:
   (a) $\vdash (A \to B) \to (B \to C) \to (A \to C)$
   (b) $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ *(правило контрапозиции)*
   (c) $\vdash \neg(\neg A \mathbin{\&} \neg B) \to (A \vee B)$ *(вариант I закона де Моргана)*
   (d) $\vdash A \vee B \to \neg(\neg A \mathbin{\&} \neg B)$
   (e) $\vdash (\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \mathbin{\&} B)$ *(II закон де Моргана)*
   (f) $\vdash (A \to B) \to (\neg A \vee B)$
   (g) $\vdash A \mathbin{\&} B \to A \vee B$
   (h) $\vdash ((A \to B) \to A) \to A$ *(закон Пирса)*
   (i) $\vdash A \vee \neg A$
   (j) $\vdash (A \mathbin{\&} B \to C) \to (A \to B \to C)$
   (k) $\vdash A \mathbin{\&} (B \vee C) \to (A \mathbin{\&} B) \vee (A \mathbin{\&} C)$ *(дистрибутивность)*
   (l) $\vdash (A \to B \to C) \to (A \mathbin{\&} B \to C)$
   (m) $\vdash (A \to B) \vee (B \to A)$
   (n) $\vdash (A \to B) \vee (B \to C) \vee (C \to A)$

4. Покажите, что если $\alpha \vdash \beta$ и $\neg\alpha \vdash \beta$, то $\vdash \beta$.

5. Давайте вспомним, что импликация правоассоциативна: $\alpha \to \beta \to \gamma \equiv \alpha \to (\beta \to \gamma)$. Но рассмотрим иную расстановку скобок: $(\alpha \to \beta) \to \gamma$. Возможно ли доказать логическое следствие между этими вариантами расстановки скобок — и каково его направление?

6. Возможно ли, что какая-то из аксиом задаётся двумя разными схемами аксиом? Опишите все возможные коллизии для какой-то одной такой пары схем аксиом. Ответ обоснуйте (да, тут потребуется доказательство по индукции).

7. Заметим, что можно вместо отрицания ввести в исчисление ложь. Рассмотрим *исчисление высказываний с ложью.* В этом языке будет отсутствовать одноместная связка ($\neg$), вместо неё будет присутствовать нульместная связка «ложь» ($\perp$), а 9 и 10 схемы аксиом будут заменены на одну схему:

   $(9_\perp)\quad ((\alpha \to \perp) \to \perp) \to \alpha$

   Будем записывать доказуемость в новом исчислении как $\vdash_\perp \alpha$, а доказуемость в исчислении высказываний с отрицанием как $\vdash_\neg \beta$. Также определим операцию трансляции между языками обычного исчисления высказываний и исчисления с ложью как операции рекурсивной замены $\perp := A \,\&\, \neg A$ и $\neg\alpha := \alpha \to \perp$ (и обозначим их как $|\varphi|_\neg$ и $|\psi|_\perp$ соответственно).

   Докажите:

   (a) $\vdash_\perp \alpha$ влечёт $\vdash_\neg |\alpha|_\neg$
   (b) $\vdash_\neg \alpha$ влечёт $\vdash_\perp |\alpha|_\perp$

Задание №2. Теоремы об исчислении высказываний. Знакомство с интуиционистским исчислением высказываний.

1. Покажите, что в классическом исчислении высказываний $\Gamma \models \alpha$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha$.

2. *Базой* топологического пространства $\langle X, \Omega\rangle$ назовём множество $\mathcal{B} \subseteq \Omega$, что $\Omega = \{\cup S \mid S \subseteq \mathcal{B}\}$ — любое открытое множество получается объединением некоторого подмножества базы. Например, для дискретной топологии $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$.

   Назовём минимальной базой топологии такую базу, что в ней никакое множество не может быть получено объединением семейства других множеств из базы.

   (a) Покажите, что топологическое пространство на вещественных числах с базой $\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ совпадает с топологическим пространством $\mathbb{R}$ из матанализа (то есть, совпадают множества открытых множеств).
   (b) Существует ли минимальная база для топологии стрелки?
   (c) Существует ли минимальная база для топологии Зарисского (носитель — $\mathbb{R}$, открыты $\varnothing$, $\mathbb{R}$ и все множества с конечным дополнением)?

3. Заметим, что определения стараются давать как можно более узкими: если некоторое свойство вытекает из других, то это уже не свойство из определения, а теорема. Поэтому приведите примеры $\langle X, \Omega\rangle$, нарушающие только первое, только второе и только третье условие на топологию.

4. Напомним, что замкнутое множество — такое, дополнение которого открыто. Заметим, что на $\mathbb{R}$ ровно два множества одновременно открыты и замкнуты — $\varnothing$ и всё пространство. Постройте другую (не евклидову) топологию на $\mathbb{R}$, чтобы в ней было ровно четыре множества, которые одновременно открыты и замкнуты. А возможно ли построить топологическое пространство, в котором было бы ровно три открыто-замкнутых множества?

5. Предложите пример топологического пространства, в котором пересечение произвольного семейства открытых множеств — открыто. Топологическое пространство должно иметь бесконечный носитель (чтобы задача имела содержательный смысл) и не должно иметь дискретную или антидискретную топологию (не должно быть в каком-то смысле вырожденным).

6. Наибольшим (наименьшим) значением в каком-то множестве назовём такое, которое больше (меньше) всех других элементов множества. Несложно заметить, что для отношения включения множеств далеко не всегда такое можно определить: например, на $\mathbb{R}^2$ не существует наибольшего круга с радиусом 1, хотя такой круг существует на $\{z \mid z \in \mathbb{R}^2, |z| \leqslant 1\}$.

   Внутренностью множества A° назовём наибольшее открытое множество, содержащееся в A. *замкнутое* множество — такое, дополнение которого открыто. *Замыканием* множества $\overline{A}$ назовём наименьшее замкнутое множество, содержащее A. Назовём *окрестностью* точки x такое открытое множество V, что $x \in V$. Будем говорить, что точка $x \in A$ *внутренняя*, если существует окрестность V, что $V \subseteq A$. Точка x — *граничная*, если любая её окрестность V пересекается как с A, так и с его дополнением.

   (a) • Покажите, что A открыто тогда и только тогда, когда все точки A — внутренние. Также покажите, что $A^\circ = \{x | x \in A \,\&\, x \text{ — внутренняя точка}\}$;

- Покажите, что A замкнуто тогда и только тогда, когда содержит все свои граничные точки. Также покажите, что $\overline{A} = \{x \mid x$ — внутренняя или граничная точка$\}$.
- Верно ли, что $\overline{A} = X \setminus ((X \setminus A)^\circ)$?

(b) Пусть $A \subseteq B$. Как связаны A° и B°, а также $\overline{A}$ и $\overline{B}$? Верно ли $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ и $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$?

(c) *Задача Куратовского.* Будем применять операции взятия внутренности и замыкания к некоторому множеству всевозможными способами. Сколько различных множеств может всего получиться? *Указание.* Покажите, что $\overline{\left(\overline{A^\circ}\right)^\circ} = \overline{A^\circ}$.

7. Задача проверки высказываний на истинность в ИИВ сложнее, чем в КИВ. Тем не менее, если формула опровергается, то она опровергается на $\mathbb{R}$ с евклидовой топологией. Если же такого опровержения нет, то формула доказуема (то есть, ИИВ семантически полно на $\mathbb{R}$). Например, формула $A \vee \neg A$ опровергается при $[\![A]\!] = (0, +\infty)$, так как $[\![A \vee \neg A]\!] = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   Очевидно, что любая интуиционистская тавтология общезначима и в классической логике:

   - формула общезначима в интуиционистской логике;
   - значит, истинна при всех оценках;
   - значит, в частности, при всех оценках на $\mathbb{R}$;
   - то есть, по теореме, упомянутой выше, доказуема в ИИВ;
   - а схема аксиом 10и — частный случай схемы аксиом 10.

   Обратное же неверно. Определите, являются ли следующие формулы тавтологиями в КИВ и ИИВ (предложите опровержение или доказательство общезначимости/выводимости для каждого из исчислений). В качестве доказательств формул приводите их натуральный вывод.

   (a) $((A \to B) \to A) \to A$;
   (b) $\neg\neg A \to A$;
   (c) $(A \to B) \vee (B \to A)$ (из двух утверждений одно непременно следует из другого: например, «я не люблю зиму» и «я не люблю лето»);
   (d) $(A \to B) \vee (B \to C)$;
   (e) $(A \to (B \vee \neg B)) \vee (\neg A \to (B \vee \neg B))$;
   (f) $\alpha \vee \beta \vdash \neg(\neg\alpha \,\&\, \neg\beta)$ и $\neg(\neg\alpha \,\&\, \neg\beta) \vdash \alpha \vee \beta$;
   (g) $\neg\alpha \,\&\, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$ и $\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \,\&\, \neg\beta$;
   (h) $\alpha \to \beta \vdash \neg\alpha \vee \beta$ и $\neg\alpha \vee \beta \vdash \alpha \to \beta$.

8. Известно, что в КИВ все связки могут быть выражены через операцию «и-не» («или-не»). Также, они могут быть выражены друг через друга (достаточно, например, отрицания и конъюнкции). Однако, в ИИВ это не так.

   Покажите, что никакие связки не выражаются друг через друга: то есть, нет такой формулы $\varphi(A, B)$ из языка интуиционистской логики, не использующей связку $\star$, что $\vdash A \star B \to \varphi(A, B)$ и $\vdash \varphi(A, B) \to A \star B$. Покажите это для каждой связки в отдельности:

   (a) конъюнкция;
   (b) дизъюнкция;
   (c) импликация;
   (d) отрицание.