Теоретические домашние задания

Математическая логика, ИТМО, M3232-M3239, осень 2025 года

Задание №1. Знакомство с классическим исчислением высказываний.

1. Докажите:
   (a) $\vdash (A \to A \to B) \to (A \to B)$
   (b) $\vdash \neg(A \,\&\, \neg A)$
   (c) $\vdash A \,\&\, B \to B \,\&\, A$
   (d) $\vdash A \vee B \to B \vee A$
   (e) $A \,\&\, \neg A \vdash B$
2. Докажите:
   (a) $\vdash A \to \neg\neg A$
   (b) $\neg A, B \vdash \neg(A\&B)$
   (c) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
   (d) $A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$
   (e) $\neg A, B \vdash A \to B$
3. Докажите:
   (a) $\vdash (A \to B) \to (B \to C) \to (A \to C)$
   (b) $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ *(правило контрапозиции)*
   (c) $\vdash \neg(\neg A \,\&\, \neg B) \to (A \vee B)$ *(вариант I закона де Моргана)*
   (d) $\vdash A \vee B \to \neg(\neg A \,\&\, \neg B)$
   (e) $\vdash (\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \,\&\, B)$ *(II закон де Моргана)*
   (f) $\vdash (A \to B) \to (\neg A \vee B)$
   (g) $\vdash A \,\&\, B \to A \vee B$
   (h) $\vdash ((A \to B) \to A) \to A$ *(закон Пирса)*
   (i) $\vdash A \vee \neg A$
   (j) $\vdash (A \,\&\, B \to C) \to (A \to B \to C)$
   (k) $\vdash A \,\&\, (B \vee C) \to (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$ *(дистрибутивность)*
   (l) $\vdash (A \to B \to C) \to (A \,\&\, B \to C)$
   (m) $\vdash (A \to B) \vee (B \to A)$
   (n) $\vdash (A \to B) \vee (B \to C) \vee (C \to A)$
4. Покажите, что если $\alpha \vdash \beta$ и $\neg\alpha \vdash \beta$, то $\vdash \beta$.
5. Давайте вспомним, что импликация правоассоциативна: $\alpha \to \beta \to \gamma \equiv \alpha \to (\beta \to \gamma)$. Но рассмотрим иную расстановку скобок: $(\alpha \to \beta) \to \gamma$. Возможно ли доказать логическое следствие между этими вариантами расстановки скобок — и каково его направление?
6. Возможно ли, что какая-то из аксиом задаётся двумя разными схемами аксиом? Опишите все возможные коллизии для какой-то одной такой пары схем аксиом. Ответ обоснуйте (да, тут потребуется доказательство по индукции).
7. Заметим, что можно вместо отрицания ввести в исчисление ложь. Рассмотрим *исчисление высказываний с ложью.* В этом языке будет отсутствовать одноместная связка $(\neg)$, вместо неё будет присутствовать нульместная связка «ложь» $(\perp)$, а 9 и 10 схемы аксиом будут заменены на одну схему:

   $(9_\perp)\quad ((\alpha \to \perp) \to \perp) \to \alpha$

   Будем записывать доказуемость в новом исчислении как $\vdash_\perp \alpha$, а доказуемость в исчислении высказываний с отрицанием как $\vdash_\neg \beta$. Также определим операцию трансляции между языками обычного исчисления высказываний и исчисления с ложью как операции рекурсивной замены $\perp := A \,\&\, \neg A$ и $\neg\alpha := \alpha \to \perp$ (и обозначим их как $|\varphi|_\neg$ и $|\psi|_\perp$ соответственно).

   Докажите:

(a) $\vdash_{\perp} \alpha$ влечёт $\vdash_{\neg} |\alpha|_{\neg}$

(b) $\vdash_{\neg} \alpha$ влечёт $\vdash_{\perp} |\alpha|_{\perp}$