Теоретические домашние задания

Математическая логика, ИТМО, M3232-M3239, осень 2025 года

О нумерации заданий: отдельным заданием считается самый вложенный занумерованный пункт (цифрой или буквой). Пункты без нумерации (если они присутствуют в условии) считаются частью одного задания.

Задание №1. Знакомство с классическим исчислением высказываний.

1. Докажите:
   (a) $\vdash (A \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
   (b) $\vdash \neg(A \,\&\, \neg A)$
   (c) $\vdash A \,\&\, B \rightarrow B \,\&\, A$
   (d) $\vdash A \vee B \rightarrow B \vee A$
   (e) $A \,\&\, \neg A \vdash B$
2. Докажите:
   (a) $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$
   (b) $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$
   (c) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
   (d) $A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$
   (e) $\neg A, B \vdash A \rightarrow B$
3. Докажите:
   (a) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
   (b) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ *(правило контрапозиции)*
   (c) $\vdash \neg(\neg A \,\&\, \neg B) \rightarrow (A \vee B)$ *(вариант I закона де Моргана)*
   (d) $\vdash A \vee B \rightarrow \neg(\neg A \,\&\, \neg B)$
   (e) $\vdash (\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \,\&\, B)$ *(II закон де Моргана)*
   (f) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$
   (g) $\vdash A \,\&\, B \rightarrow A \vee B$
   (h) $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ *(закон Пирса)*
   (i) $\vdash A \vee \neg A$
   (j) $\vdash (A \,\&\, B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \rightarrow C)$
   (k) $\vdash A \,\&\, (B \vee C) \rightarrow (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$ *(дистрибутивность)*
   (l) $\vdash (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \,\&\, B \rightarrow C)$
   (m) $\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$
   (n) $\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$
4. Покажите, что если $\alpha \vdash \beta$ и $\neg\alpha \vdash \beta$, то $\vdash \beta$.
5. Давайте вспомним, что импликация правоассоциативна: $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \equiv \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$. Но рассмотрим иную расстановку скобок: $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma$. Возможно ли доказать логическое следствие между этими вариантами расстановки скобок — и каково его направление?
6. Возможно ли, что какая-то из аксиом задаётся двумя разными схемами аксиом? Опишите все возможные коллизии для какой-то одной такой пары схем аксиом. Ответ обоснуйте (да, тут потребуется доказательство по индукции).

7. Заметим, что можно вместо отрицания ввести в исчисление ложь. Рассмотрим *исчисление высказываний с ложью.* В этом языке будет отсутствовать одноместная связка ($\neg$), вместо неё будет присутствовать нульместная связка «ложь» ($\perp$), а 9 и 10 схемы аксиом будут заменены на одну схему:

   ($9_\perp$) $\quad ((\alpha \to \perp) \to \perp) \to \alpha$

   Будем записывать доказуемость в новом исчислении как $\vdash_\perp \alpha$, а доказуемость в исчислении высказываний с отрицанием как $\vdash_\neg \beta$. Также определим операцию трансляции между языками обычного исчисления высказываний и исчисления с ложью как операции рекурсивной замены $\perp := A \,\&\, \neg A$ и $\neg\alpha := \alpha \to \perp$ (и обозначим их как $|\varphi|_\neg$ и $|\psi|_\perp$ соответственно).

   Докажите:

   (a) $\vdash_\perp \alpha$ влечёт $\vdash_\neg |\alpha|_\neg$
   (b) $\vdash_\neg \alpha$ влечёт $\vdash_\perp |\alpha|_\perp$

Задание №2. Теоремы об исчислении высказываний. Знакомство с интуиционистским исчислением высказываний.

1. Покажите, что в классическом исчислении высказываний $\Gamma \models \alpha$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha$.

2. *Базой* топологического пространства $\langle X, \Omega\rangle$ назовём множество $\mathcal{B} \subseteq \Omega$, что $\Omega = \{\cup S \mid S \subseteq \mathcal{B}\}$ — любое открытое множество получается объединением некоторого подмножества базы. Например, для дискретной топологии $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$.

   Назовём минимальной базой топологии такую базу, что в ней никакое множество не может быть получено объединением семейства других множеств из базы.

   (a) Покажите, что топологическое пространство на вещественных числах с базой $\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ совпадает с топологическим пространством $\mathbb{R}$ из матанализа (то есть, совпадают множества открытых множеств).
   (b) Существует ли минимальная база для топологии стрелки?
   (c) Существует ли минимальная база для топологии Зарисского (носитель — $\mathbb{R}$, открыты $\varnothing$, $\mathbb{R}$ и все множества с конечным дополнением)?

3. Заметим, что определения стараются давать как можно более узкими: если некоторое свойство вытекает из других, то это уже не свойство из определения, а теорема. Поэтому приведите примеры $\langle X, \Omega\rangle$, нарушающие только первое, только второе и только третье условие на топологию.

4. Напомним, что замкнутое множество — такое, дополнение которого открыто. Заметим, что на $\mathbb{R}$ ровно два множества одновременно открыты и замкнуты — $\varnothing$ и всё пространство. Постройте другую (не евклидову) топологию на $\mathbb{R}$, чтобы в ней было ровно четыре множества, которые одновременно открыты и замкнуты. А возможно ли построить топологическое пространство, в котором было бы ровно три открыто-замкнутых множества?

5. Предложите пример топологического пространства, в котором пересечение произвольного семейства открытых множеств — открыто. Топологическое пространство должно иметь бесконечный носитель (чтобы задача имела содержательный смысл) и не должно иметь дискретную или антидискретную топологию (не должно быть в каком-то смысле вырожденным).

6. Наибольшим (наименьшим) значением в каком-то множестве назовём такое, которое больше (меньше) всех других элементов множества. Несложно заметить, что для отношения включения множеств далеко не всегда такое можно определить: например, на $\mathbb{R}^2$ не существует наибольшего круга с радиусом 1, хотя такой круг существует на $\{z \mid z \in \mathbb{R}^2, |z| \leqslant 1\}$.

   Внутренностью множества A° назовём наибольшее открытое множество, содержащееся в A. *замкнутое* множество — такое, дополнение которого открыто. *Замыканием* множества $\overline{A}$ назовём наименьшее замкнутое множество, содержащее A. Назовём *окрестностью* точки x такое открытое множество V, что $x \in V$. Будем говорить, что точка $x \in A$ *внутренняя*, если существует окрестность V, что $V \subseteq A$. Точка x — *граничная*, если любая её окрестность V пересекается как с A, так и с его дополнением.

   (a) • Покажите, что A открыто тогда и только тогда, когда все точки A — внутренние. Также покажите, что $A^\circ = \{x | x \in A \,\&\, x \text{ — внутренняя точка}\}$;

- Покажите, что A замкнуто тогда и только тогда, когда содержит все свои граничные точки. Также покажите, что $\overline{A} = \{x \mid x$ — внутренняя или граничная точка$\}$.
- Верно ли, что $\overline{A} = X\backslash((X\backslash A)^{\circ})$?

(b) Пусть $A \subseteq B$. Как связаны A° и B°, а также $\overline{A}$ и $\overline{B}$? Верно ли $(A \cap B)^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$ и $(A \cup B)^{\circ} = A^{\circ} \cup B^{\circ}$?

(c) *Задача Куратовского.* Будем применять операции взятия внутренности и замыкания к некоторому множеству всевозможными способами. Сколько различных множеств может всего получиться? *Указание.* Покажите, что $\overline{\left(\overline{A^{\circ}}\right)^{\circ}} = \overline{A^{\circ}}$.

7. Задача проверки высказываний на истинность в ИИВ сложнее, чем в КИВ. Тем не менее, если формула опровергается, то она опровергается на $\mathbb{R}$ с евклидовой топологией. Если же такого опровержения нет, то формула доказуема (то есть, ИИВ семантически полно на $\mathbb{R}$). Например, формула $A \vee \neg A$ опровергается при $[\![A]\!] = (0, +\infty)$, так как $[\![A \vee \neg A]\!] = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

   Очевидно, что любая интуиционистская тавтология общезначима и в классической логике:

   - формула общезначима в интуиционистской логике;
   - значит, истинна при всех оценках;
   - значит, в частности, при всех оценках на $\mathbb{R}$;
   - то есть, по теореме, упомянутой выше, доказуема в ИИВ;
   - а схема аксиом 10и — частный случай схемы аксиом 10.

   Обратное же неверно. Определите, являются ли следующие формулы тавтологиями в КИВ и ИИВ (предложите опровержение или доказательство общезначимости/выводимости для каждого из исчислений). В качестве доказательств формул приводите их натуральный вывод.

   (a) $((A \to B) \to A) \to A$;
   (b) $\neg\neg A \to A$;
   (c) $(A \to B) \vee (B \to A)$ (из двух утверждений одно непременно следует из другого: например, «я не люблю зиму» и «я не люблю лето»);
   (d) $(A \to B) \vee (B \to C)$;
   (e) $(A \to (B \vee \neg B)) \vee (\neg A \to (B \vee \neg B))$;
   (f) $\alpha \vee \beta \vdash \neg(\neg\alpha \,\&\, \neg\beta)$ и $\neg(\neg\alpha \,\&\, \neg\beta) \vdash \alpha \vee \beta$;
   (g) $\neg\alpha \,\&\, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$ и $\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \,\&\, \neg\beta$;
   (h) $\alpha \to \beta \vdash \neg\alpha \vee \beta$ и $\neg\alpha \vee \beta \vdash \alpha \to \beta$.

8. Известно, что в КИВ все связки могут быть выражены через операцию «и-не» («или-не»). Также, они могут быть выражены друг через друга (достаточно, например, отрицания и конъюнкции). Однако, в ИИВ это не так.

   Покажите, что никакие связки не выражаются друг через друга: то есть, нет такой формулы $\varphi(A, B)$ из языка интуиционистской логики, не использующей связку $\star$, что $\vdash A \star B \to \varphi(A, B)$ и $\vdash \varphi(A, B) \to A \star B$. Покажите это для каждой связки в отдельности:

   (a) конъюнкция;
   (b) дизъюнкция;
   (c) импликация;
   (d) отрицание.

Задание №3. Изоморфизм Карри-Ховарда. Дополнительные топологические определения. Решётки.

1. Непрерывной функцией называется такая, для которой прообраз открытого множества всегда открыт. Путём на топологическом пространстве X назовём непрерывное отображение вещественного отрезка $[0, 1]$ в X. Опишите пути (то есть, опишите, какие функции могли бы являться путями):

   (a) на $\mathbb{N}$ (с дискретной топологией);
   (b) в топологии Зарисского;

(c) на дереве (с топологией с лекции);

2. Всегда ли непрерывным образом связного пространства является другое связное (под)пространство? Докажите или опровергните.

3. Как мы помним с лекции, возможно доказывать интуиционистские утверждения, воспользовавшись изоморфизмом Карри-Ховарда, то есть написав соответствующую программу на каком-нибудь статически типизированном языке программирования.

   Например, на C++ так можно доказать $A \to A$:

```
A identity (A x) { return x; }
```

   Докажите следующие утверждения, не пользуясь в коде тем фактом, что обычно языки программирования противоречивы (то есть, не используйте исключений, функций, не возвращающих управления, и других подобных конструкций).

   (a) $A \to B \to A$
   (b) $A \,\&\, B \to A \vee B$
   (c) $(A \,\&\, (B \vee C)) \to ((A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C))$
   (d) $(A \to C) \to (B \to C) \to ((A \vee B) \to C)$
   (e) $(B \vee C \to A) \to (B \to A) \,\&\, (C \to A)$
   (f) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
   (g) $((A \to B) \to C) \to (A \to (B \to C))$
   (h) $(A \to B) \,\&\, (A \to \neg B) \to \neg A$
   (i) Выразимые в интуиционистском исчислении высказываний аналоги правил де Моргана для импликации.

4. Рассмотрим подмножество частично упорядоченного множества, и рассмотрим следующие свойства: (а) наличие наибольшего элемента; (б) наличие супремума; (в) наличие единственного максимального элемента. Всего можно рассмотреть шесть утверждений ((а) влечёт (б), (а) влечёт (в), и т.п.) — про каждое определите, выполнено ли оно в общем случае, и приведите либо доказательство, либо контрпример. Задача состоит из одного пункта, для получения баллов все шесть утверждений должны быть разобраны.

5. Покажите следующие утверждения для импликативных решёток:

   (a) монотонность: пусть $a \preceq b$ и $c \preceq d$, тогда $a + c \preceq b + d$ и $a \cdot c \preceq b \cdot d$;
   (b) *законы поглощения:* $a \cdot (a + b) = a$; $a + (a \cdot b) = a$;
   (c) $a \preceq b$ выполнено тогда и только тогда, когда $a \to b = 1$;
   (d) из $a \preceq b$ следует $b \to c \preceq a \to c$ и $c \to a \preceq c \to b$;
   (e) из $a \preceq b \to c$ следует $a \cdot b \preceq c$;
   (f) $b \preceq a \to b$ и $a \to (b \to a) = 1$;
   (g) $a \to b \preceq ((a \to (b \to c)) \to (a \to c))$;
   (h) $a \preceq b \to a \cdot b$ и $a \to (b \to (a \cdot b)) = 1$
   (i) $a \to c \preceq (b \to c) \to (a + b \to c)$
   (j) импликативная решётка дистрибутивна: $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

6. Докажите, основываясь на формулах предыдущих заданий, что интуиционистское исчисление высказываний корректно, если в качестве модели выбрать алгебру Гейтинга.

7. Покажите, что на конечном множестве дистрибутивная решётка всегда импликативна.

8. Постройте пример дистрибутивной, но не импликативной решётки.

9. Покажите, что в дистрибутивной решётке всегда $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$.

10. Пусть $R \subseteq A \times A$ — отношение эквивалентности (то есть транзитивное, рефлексивное и симметричное). Тогда фактор-множество $A/_R := \{[x]_R \mid x \in A\}$ — множество *классов эквивалентности*, где $[x]_R = \{t \in A \mid tRx\}$.

    Покажите, что каждый элемент множества A принадлежит в точности одному классу эквивалентности. Два класса эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают.

11. Пусть $R \subseteq A \times A$ — отношение нестрогого предпорядка (транзитивное и рефлексивное). И пусть $a \approx b$, если aRb и bRa. Покажите, что

    (a) Если aRb и $a \approx a'$, $b \approx b'$, то $a'Rb'$.

    (b) $R^{\approx}$ — отношение нестрогого порядка на $A/_{\approx}$ в следующем смысле: $[a]_{\approx} R^{\approx} [b]_{\approx}$ выполнено, если aRb (корректность определения также необходимо показать).

12. Покажите, что $(\preceq)$ из определения алгебры Линденбаума — отношение нестрогого предпорядка, $(\approx)$ — отношение эквивалентности, а $(\preceq)/_{\approx}$ — отношение нестрогого порядка.

13. Покажите, что $[\alpha]_{\mathcal{L}} + [\beta]_{\mathcal{L}} = [\alpha \vee \beta]_{\mathcal{L}}$. Зависит ли результат от выбора представителей классов эквивалентности $[\alpha]$ и $[\beta]$? Ответ также докажите.

14. Покажите, что $[\alpha \to \beta]_{\mathcal{L}}$ — псевдодополнение $[\alpha]_{\mathcal{L}}$ до $[\beta]_{\mathcal{L}}$.

Задание №4. Модели для ИИВ

1. Определение: противоречивая теория — такая, в которой доказуема любая формула. Покажите, что для КИВ (а равно и для ИИВ) определение имеет следующие эквивалентные формулировки:

    - доказуема любая формула исчисления;
    - $\vdash \alpha \,\&\, \neg\alpha$ при некотором α;
    - $\vdash A \,\&\, \neg A$;
    - для некоторой формулы α имеет место $\vdash \alpha$ и $\vdash \neg\alpha$.

    Также покажите, что КИВ непротиворечиво (расшифруйте слово «очевидно», использованное в четвёртой лекции).

2. Опровергните формулы с помощью какой-нибудь модели Крипке:

    (a) $((A \to B) \to A) \to A$;

    (b) $(A \to B) \to \neg A \vee B$;

    (c) $(A \to (B \vee \neg B)) \vee (\neg A \to (B \vee \neg B))$.

3. Покажите, что любая модель Крипке обладает свойством: для любых W_i, W_j, α, если $W_i \preceq W_j$ и $W_i \Vdash \alpha$, то $W_j \Vdash \alpha$.

4. Несколько задач на упрощение структуры миров моделей Крипке.

    (a) Покажите, что формула опровергается моделью Крипке тогда и только тогда, когда она опровергается древовидной моделью Крипке.

    (b) Верно ли, что если формула опровергается некоторой конечной древовидной моделью Крипке (причём у каждой вершины не больше двух сыновей), то эту древовидную модель можно достроить до полного бинарного дерева, с сохранением свойства опровержимости?

    (c) Верно ли, что если некоторая модель Крипке опровергает некоторую формулу, то добавление любого мира к модели в качестве потомка к любому из узлов оставит опровержение в силе?

5. Покажите, что модель Крипке $\mathcal{M}$ из одного узла эквивалентна классической модели. То есть, по каждой такой модели можно найти эквивалентную ей классическую модель $\mathcal{T}$, что $\models_{\mathcal{M}} \alpha$ тогда и только тогда, когда $\models_{\mathcal{T}} \alpha$. Напомним, что для задания классической модели необходимо указать значения всех пропозициональных переменных. Сохранится ли это свойство для модели, заданной на лесе несвязных узлов?

6. Покажите, что формула опровергается моделью Крипке тогда и только тогда, когда она опровергается конечной моделью Крипке.

7. Постройте опровержимую в ИИВ формулу, которая не может быть опровергнута моделью Крипке (ответ требуется доказать):

    (a) (*) глубины 0 или 1;

    (b) (*) глубины $n \in \mathbb{N}$ и меньше.

8. Давайте разберёмся во взаимоотношениях различных формулировок закона исключенного третьего и подобных законов. Для этого определим *минимальное* исчисление высказываний как ИИВ без 10 схемы аксиом. Заметим, что переход от $\vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$ при всех α к $\vdash ((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$ уже был ранее доказан (закон Пирса следует из закона снятия двойного отрицания).

   Давайте продолжим строить кольцо:

$$\begin{tikzcd}
& \vdash ((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha \arrow[dr, bend left] & \\
\vdash \neg\neg\alpha \to \alpha \arrow[ur, bend left] & & \vdash \alpha \vee \neg\alpha \arrow[ll, dashed, bend left, "\text{если } \vdash \alpha \to \neg\alpha \to \beta \text{ при всех } \alpha,\ \beta"]
\end{tikzcd}$$

   для чего покажите, что в минимальном исчислении:

   (a) Если $\vdash ((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$ при всех α и β, то $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$ (закон исключённого третьего следует из закона Пирса).

   (b) Если $\vdash \alpha \to \neg\alpha \to \beta$ («из лжи следует, что угодно», он же *принцип взрыва*) и $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$ при всех α и β, то $\vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$.

   (c) (*) Из закона Пирса не следует закон снятия двойного отрицания и из закона исключённого третьего не следует закон Пирса.

   (d) (*) Закон Пирса и принцип взрыва независимы (невозможно доказать один из другого).