Теоремы об интуиционистском исчислении высказываний

Непротиворечивость

Определение

Теория противоречива, если найдётся такая формула α, *что* $\vdash \alpha$ *и* $\vdash \neg\alpha$.

Теорема

Следующие условия эквивалентны (выполнено для КИВ и ИИВ):

- *теория непротиворечива;*
- $\nvdash A \,\&\, \neg A$;
- *Найдётся* α, *что* $\nvdash \alpha$.

Разрешимость

Определение

Язык $\mathcal{L} \subseteq A^*$ *разрешим, если существует алгоритм, который завершает работу при любом* $a \in A^*$*, поданном на вход, причём алгоритм возвращает «истину» при* $a \in \mathcal{L}$*, и возвращает «ложь» при* $a \notin \mathcal{L}$*.*

Определение

Теория неразрешима, если язык всех истинных (доказуемых) формул неразрешим.

Понятие неразрешимости совпадает для истины и доказуемости в случае полной и корректной теории. Иначе можно отдельно рассматривать разрешимость истины и разрешимость доказуемости.

Общие результаты об исчислениях высказываний

	К.И.В.	И.И.В. + алгебры Гейтинга
корректность	да (лекция 1)	да (ДЗ 3)
непротиворечивость	да (очев.)	да (из непр. КИВ)
полнота	да (лекция 2)	да (лекция 3)
разрешимость	да (лекция 2)	да (сегодня)

Интуиционистская логика как возможные реальности

- Научное знание соответствует истине.
- Однако, мы не знаем всей истины.
- Некоторые факты *пока* неизвестны: $P = NP$?
- Когда-то они будут известны (возможно), и либо как «да», либо как «нет»

Модели Крипке

Определение

Модель Крипке $\langle \mathcal{W}, (\preceq), (\Vdash) \rangle$*:*

- $\mathcal{W}$ *— множество миров,* $(\preceq)$ *— нестрогий частичный порядок на* $\mathcal{W}$*;*
- $(\Vdash) \subseteq \mathcal{W} \times P$ *— отношение вынуждения между мирами и переменными, причём, если* $W_i \preceq W_j$ *и* $W_i \Vdash X$*, то* $W_j \Vdash X$*.*

Доопределим вынужденность:

- $W \Vdash \alpha \mathbin{\&} \beta$, если $W \Vdash \alpha$ и $W \Vdash \beta$;
- $W \Vdash \alpha \vee \beta$, если $W \Vdash \alpha$ или $W \Vdash \beta$;
- $W \Vdash \alpha \rightarrow \beta$, если всегда при $W \preceq W_1$ и $W_1 \Vdash \alpha$ выполнено $W_1 \Vdash \beta$
- $W \Vdash \neg\alpha$, если всегда при $W \preceq W_1$ выполнено $W_1 \not\Vdash \alpha$.

Будем говорить, что $\Vdash \alpha$, если $W \Vdash \alpha$ при всех $W \in \mathcal{W}$. Будем говорить, что $\models_{\kappa} \alpha$, если $\Vdash \alpha$ во всех моделях Крипке.

Исключённое третье

Пример

Покажем, что $\not\models_\kappa A \vee \neg A$.

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & W_2\ (\Vdash A) \\
W_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & W_3
\end{tikzcd}
$$

Тогда, $W_3 \Vdash \neg A$, *но* $W_1 \nVdash A$ *(по определению) и* $W_1 \nVdash \neg A$ *(так как* $W_1 \preceq W_2$ *и* $W_2 \Vdash A$*). Значит,* $W_1 \nVdash A \vee \neg A$.

Корректность моделей Крипке

Лемма

Если $W_1 \Vdash \alpha$ *и* $W_1 \preceq W_2$, *то* $W_2 \Vdash \alpha$

Теорема

Пусть $\langle \mathcal{W}, (\preceq), (\Vdash) \rangle$ *— некоторая модель Крипке. Тогда она есть корректная модель интуиционистского исчисления высказываний.*

Доказательство.

Доказательство для древовидного $(\preceq)$, обобщение на произвольный порядок легко построить.

Заметим, что $V(\alpha) := \{w \in \mathcal{W} \mid w \Vdash \alpha\}$ открыто в топологии для деревьев.

Значит, положив $V = \{\ S \mid S \subseteq \mathcal{W}\ \ \&\ \ S \text{ — открыто }\}$ и $[\![\alpha]\!] = V(\alpha)$, получим алгебру Гейтинга. $\square$

Табличные модели

Определение

Пусть задано V, значение $T \in V$ («истина»), функция $f_P : P \to V$, функции $f_\&, f_\vee, f_\to : V \times V \to V$, функция $f_\neg : V \to V$.
Тогда оценка $[\![X]\!] = f_P(X)$, $[\![\alpha \star \beta]\!] = f_\star([\![\alpha]\!], [\![\beta]\!])$, $[\![\neg\alpha]\!] = f_\neg([\![\alpha]\!])$ — табличная.
Если $\vdash \alpha$ влечёт $[\![\alpha]\!] = T$ при всех оценках пропозициональных переменных f_P, то $\mathcal{M} := \langle V, T, f_\&, f_\vee, f_\to, f_\neg \rangle$ — табличная модель.

Определение

Табличная модель конечна, если V конечно.

Теорема

Не существует полной конечной табличной модели для интуиционистского исчисления высказываний

Доказательство нетабличности: α_n

Пусть существует полная конечная табличная модель $\mathcal{M}$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. То есть, если $\models_{\mathcal{M}} \alpha$, то $\vdash \alpha$.
Рассмотрим

$$\alpha_n = \bigvee_{1 \le p < q \le n+1} A_p \to A_q$$

Рассмотрим оценку $f_P : \{A_1 \dots A_{n+1}\} \to \{v_1 \dots v_n\}$. По принципу Дирихле существуют $p \neq q$, что $[\![A_p]\!] = [\![A_q]\!]$. Значит,

$$[\![A_p \to A_q]\!] = f_\to([\![A_p]\!], [\![A_q]\!]) = f_\to(v, v)$$

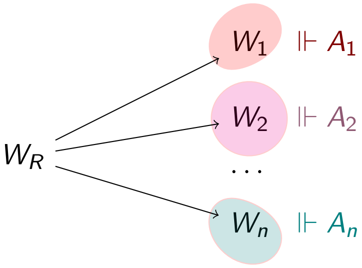
С другой стороны, $\vdash X \to X$ — поэтому $f_\to([\![X]\!], [\![X]\!]) = T$, значит,

$$[\![A_p \to A_q]\!] = f_\to(v, v) = f_\to([\![X]\!], [\![X]\!]) = T$$

Аналогично, $\vdash \sigma \vee (X \to X) \vee \tau$, отсюда $[\![\alpha_n]\!] = [\![\sigma \vee (X \to X) \vee \tau]\!] = T$.

Доказательство нетабличности: противоречие

Однако, в такой модели $\not\Vdash \alpha_n$:



Если $q > 1$, то $W_1 \not\Vdash A_q$ и $W_1 \not\Vdash A_1 \to A_q$

Если $q > 2$, то $W_2 \not\Vdash A_q$ и $W_2 \not\Vdash A_2 \to A_q$

$W_n \not\Vdash A_{n+1}$; $W_n \not\Vdash A_n \to A_{n+1}$

Если $p < q$, то $W_p \not\Vdash A_q$ и $W_p \not\Vdash A_p \to A_q$

Если $p < q$, то $W_p \not\Vdash A_p \to A_q$, то есть $W_R \not\Vdash A_p \to A_q$.
Отсюда: $W_R \not\Vdash \bigvee_{p<q} A_p \to A_q$, $W_R \not\Vdash \alpha_n$, потому $\not\models \alpha_n$ и $\nvdash \alpha_n$.

Дизъюнктивность ИИВ

Определение

Исчисление дизъюнктивно, если при любых α *и* β *из* $\vdash \alpha \vee \beta$ *следует* $\vdash \alpha$ *или* $\vdash \beta$*.*

Определение

Решётка гёделева, если $a + b = 1$ *влечёт* $a = 1$ *или* $b = 1$*.*

Теорема

Интуиционистское исчисление высказываний дизъюнктивно

$\mathcal{L}$ — импликативная решётка с 0, согласованная с ИИВ

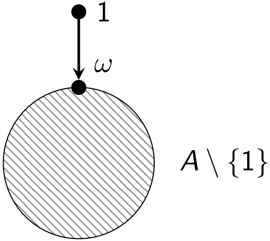
- *(импликативная ...)* Покажем $[\alpha] \to [\beta] = [\alpha \to \beta]$:
  в самом деле, $[\alpha] \to [\beta] = \text{наиб}\ \{[\sigma] \mid [\alpha \,\&\, \sigma] \le [\beta]\}$. Покажем требуемое двумя включениями:
  1. $\alpha \,\&\, (\alpha \to \beta) \vdash \beta$ (карринг + транзитивность импликации)
  2. Если $\alpha \,\&\, \sigma \vdash \beta$, то $\sigma \vdash \alpha \to \beta$ (карринг + теорема о дедукции)
- *(... с нулём ...)* Покажем, что $0 = [A \,\&\, \neg A]$:
  в самом деле, $A \,\&\, \neg A \vdash \sigma$ при любом σ.
- *(... согласованная с ИИВ)*
  1. Из доказательства видно, что $[\alpha \,\&\, \beta] = [\alpha] \cdot [\beta]$, $[\alpha \vee \beta] = [\alpha] + [\beta]$, $[\alpha \to \beta] = [\alpha] \to [\beta]$, $[A \,\&\, \neg A] = 0$.
  2. $[A \to A] = [A] \to [A] = 1$ по свойствам алгебры Гейтинга
  3. $[\neg\alpha] = [\alpha \to A \,\&\, \neg A] = [\alpha] \to 0 = \sim [\alpha]$

«Гёделевизация» (операция $\Gamma(\mathcal{A})$)

Определение

Для алгебры Гейтинга $\mathcal{A} = \langle A, (\preceq) \rangle$ *определим операцию «гёделевизации»:* $\Gamma(\mathcal{A}) = \langle A \cup \{\omega\}, (\preceq_{\Gamma(\mathcal{A})}) \rangle$, *где отношение* $(\preceq_{\Gamma(\mathcal{A})})$ *— минимальное отношение порядка, удовлетворяющее условиям:*

- $a \preceq_{\Gamma(\mathcal{A})} b$, *если* $a \preceq_{\mathcal{A}} b$ *и* $a, b \notin \{\omega, 1\}$;
- $a \preceq_{\Gamma(\mathcal{A})} \omega$, *если* $a \neq 1$;
- $\omega \preceq_{\Gamma(\mathcal{A})} 1$



Теорема

$\Gamma(\mathcal{A})$ *— гёделева алгебра.*

Доказательство.

Проверка определения алгебры Гейтинга и наблюдение: если $a \preceq \omega$ и $b \preceq \omega$, то $a + b \preceq \omega$. □

Оценка $\Gamma(\mathcal{L})$

Определение

Определим $[\![\cdot]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} : \mathcal{F} \to \Gamma(\mathcal{L})$. *Положим* $[\![X]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} := [\![X]\!]_{\mathcal{L}}$. *Связки определим естественным образом:* $[\![\alpha \,\&\, \beta]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} := [\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} \cdot [\![\beta]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})}$ *и т.п.*

Теорема

Оценка является алгеброй Гейтинга, согласованной с ИИВ.

Доказательство.

$\Gamma(\mathcal{L})$ — алгебра Гейтинга. Также заметим, что:

- $[\![\alpha \to \alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = [\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} \to [\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1_{\Gamma(\mathcal{L})}$
- $[\![\alpha \,\&\, \neg\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = [\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} \cdot ([\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} \to 0) = 0_{\Gamma(\mathcal{L})}$.

Согласованность оценки следует из определения и указанных выше соображений. $\square$

Гомоморфизм алгебр

Определение

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — алгебры Гейтинга. Тогда $g : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — гомоморфизм, если $g(a \star b) = g(a) \star g(b)$, $g(0_{\mathcal{A}}) = 0_{\mathcal{B}}$ и $g(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$.

Определение

Будем говорить, что оценка $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{A}}$ согласована с $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{B}}$ и гомоморфизмом g, если $g(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ и $g([\![\alpha]\!]_{\mathcal{A}}) = [\![\alpha]\!]_{\mathcal{B}}$.

Доказательство дизъюнктивности ИИВ

Определение ($\mathcal{G} : \Gamma(\mathcal{L}) \to \mathcal{L}$)

$$\mathcal{G}(a) = \begin{cases} a, & a \neq \omega \\ 1, & a = \omega \end{cases}$$

Лемма

$\mathcal{G}$ — гомоморфизм $\Gamma(\mathcal{L})$ и $\mathcal{L}$, причём оценка $[\![\cdot]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})}$ согласована с $\mathcal{G}$ и $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{L}}$.

Теорема

Если $\vdash \alpha \vee \beta$, то либо $\vdash \alpha$, либо $\vdash \beta$.

Доказательство.

Пусть $\vdash \alpha \vee \beta$. Тогда $[\![\alpha \vee \beta]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1$ (так как данная оценка согласована с ИИВ).
Тогда $[\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1$ или $[\![\beta]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1$ (так как $\Gamma(\mathcal{L})$ гёделева).
Пусть $[\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1$, тогда $\mathcal{G}([\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})}) = [\![\alpha]\!]_{\mathcal{L}} = 1$, тогда $\vdash \alpha$ (по полноте $\mathcal{L}$). $\square$

Построение дистрибутивных подрешёток

Определение

Решётка $\mathcal{L}' = \langle L', \preceq \rangle$ *— подрешётка решётки* $\mathcal{L} = \langle L, \preceq \rangle$, *если* $L' \subseteq L$, $(\preceq') \subseteq (\preceq)$ *и при* $a, b \in L'$ *выполнено* $a +_{\mathcal{L}'} b = a +_{\mathcal{L}} b$ *и* $a \cdot_{\mathcal{L}'} b = a \cdot_{\mathcal{L}} b$.

Лемма

Существует дистрибутивная подрешётка $\mathcal{L}'$, *содержащая* $a_1, \ldots, a_n$, *что* $|L'| \leq 2^{2^n}$.

Доказательство.

Пусть $\mathcal{L}' = \langle \{\varphi(a_1, \ldots, a_n) \mid \varphi \text{ составлено из } (+) \text{ и } (\cdot)\}, (\preceq) \rangle$. Заметим, что если $p, q \in L'$, то $p \star_{\mathcal{L}} q \in L'$ (так как $\varphi_p(\overrightarrow{a}) \star \varphi_q(\overrightarrow{a}) = \psi(\overrightarrow{a})$). Также ясно, что если $\sup_L\{p, q\} \in L'$ (или $\inf_L\{p, q\} \in L'$), то $p \star_{\mathcal{L}} q = p \star_{\mathcal{L}'} q$. Значит, $\mathcal{L}'$ также дистрибутивна. Построим «ДНФ»:

$$\varphi(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{\text{Кн} \in \text{ДНФ}(\varphi)} \prod_{i \in \text{Кн}} a_i$$

Всего не больше 2^n возможных компонент и 2^{2^n} возможных формул $\varphi(\overrightarrow{a})$. $\square$

Разрешимость ИИВ

Теорема

Если $\nvdash \alpha$ *в ИИВ, то существует* $\mathcal{G}$*, что* $\mathcal{G} \not\models \alpha$*, причём* $|\mathcal{G}| \le 2^{2^{|\alpha|+2}}$*.*

Доказательство.

Если $\nvdash \alpha$, то по полноте найдётся алгебра Гейтинга $\mathcal{H}$, что $\mathcal{H} \not\models \alpha$.
Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — подформулы α. Пусть $\mathcal{G}$ — дистрибутивная подрешётка $\mathcal{H}$, построенная по $[\![\varphi_1]\!], \dots, [\![\varphi_n]\!]$, 0 и 1.
Очевидно, что $\mathcal{G}$ — алгебра Гейтинга, и можно показать, что $\mathcal{G} \not\models \alpha$ (псевдодополнения не обязаны сохраниться). Тогда по лемме, $|\mathcal{G}| \le 2^{2^{n+2}}$. □

Теорема

ИИВ разрешимо.

Доказательство.

По формуле α построим все возможные алгебры Гейтинга $\mathcal{G}$ размера не больше $2^{2^{|\alpha|+2}}$, если $\mathcal{G} \models \alpha$, то $\vdash \alpha$. □