

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ**  
*Математическая логика, ИТМО, М3232-М3239, осень 2025 года*

О нумерации заданий: отдельным заданием считается самый вложенный занумерованный пункт (цифрой или буквой). Пункты без нумерации (если они присутствуют в условии) считаются частью одного задания.

**Задание №1. Знакомство с классическим исчислением высказываний.**

1. Докажите:

- (a)  $\vdash (A \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- (b)  $\vdash \neg(A \& \neg A)$
- (c)  $\vdash A \& B \rightarrow B \& A$
- (d)  $\vdash A \vee B \rightarrow B \vee A$
- (e)  $A \& \neg A \vdash B$

2. Докажите:

- (a)  $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$
- (b)  $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$
- (c)  $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
- (d)  $A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$
- (e)  $\neg A, B \vdash A \rightarrow B$

3. Докажите:

- (a)  $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
- (b)  $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$  (*правило контрапозиции*)
- (c)  $\vdash \neg(\neg A \& \neg B) \rightarrow (A \vee B)$  (*вариант I закона де Моргана*)
- (d)  $\vdash A \vee B \rightarrow \neg(\neg A \& \neg B)$
- (e)  $\vdash (\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \& B)$  (*II закон де Моргана*)
- (f)  $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$
- (g)  $\vdash A \& B \rightarrow A \vee B$
- (h)  $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$  (*закон Пирса*)
- (i)  $\vdash A \vee \neg A$
- (j)  $\vdash (A \& B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \rightarrow C)$
- (k)  $\vdash A \& (B \vee C) \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C)$  (*дистрибутивность*)
- (l)  $\vdash (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \& B \rightarrow C)$
- (m)  $\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$
- (n)  $\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$

4. Покажите, что если  $\alpha \vdash \beta$  и  $\neg\alpha \vdash \beta$ , то  $\vdash \beta$ .

5. Давайте вспомним, что импликация правоассоциативна:  $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \equiv \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ . Но рассмотрим иную расстановку скобок:  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma$ . Возможно ли доказать логическое следствие между этими вариантами расстановки скобок — и каково его направление?

6. Возможно ли, что какая-то из аксиом задаётся двумя разными схемами аксиом? Опишите все возможные коллизии для какой-то одной такой пары схем аксиом. Ответ обоснуйте (да, тут потребуется доказательство по индукции).

7. Заметим, что можно вместо отрицания ввести в исчисление ложь. Рассмотрим *исчисление высказываний с ложью*. В этом языке будет отсутствовать одноместная связка ( $\neg$ ), вместо неё будет присутствовать нульместная связка «ложь» ( $\perp$ ), а 9 и 10 схемы аксиом будут заменены на одну схему:

$$(9_{\perp}) \quad ((\alpha \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \rightarrow \alpha$$

Будем записывать доказуемость в новом исчислении как  $\vdash_{\perp} \alpha$ , а доказуемость в исчислении высказываний с отрицанием как  $\vdash_{\neg} \beta$ . Также определим операцию трансляции между языками обычного исчисления высказываний и исчисления с ложью как операции рекурсивной замены  $\perp := A \ \& \ \neg A$  и  $\neg \alpha := \alpha \rightarrow \perp$  (и обозначим их как  $|\varphi|_{\neg}$  и  $|\psi|_{\perp}$  соответственно).

Докажите:

- (a)  $\vdash_{\perp} \alpha$  влечёт  $\vdash_{\neg} |\alpha|_{\neg}$
- (b)  $\vdash_{\neg} \alpha$  влечёт  $\vdash_{\perp} |\alpha|_{\perp}$

## Задание №2. Теоремы об исчислении высказываний. Знакомство с интуиционистским исчислением высказываний.

- Покажите, что в классическом исчислении высказываний  $\Gamma \models \alpha$  влечёт  $\Gamma \vdash \alpha$ .
- Базой* топологического пространства  $\langle X, \Omega \rangle$  назовём множество  $\mathcal{B} \subseteq \Omega$ , что  $\Omega = \{\cup S \mid S \subseteq \mathcal{B}\}$  — любое открытое множество получается объединением некоторого подмножества базы. Например, для дискретной топологии  $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ .

Назовём минимальной базой топологии такую базу, что в ней никакое множество не может быть получено объединением семейства других множеств из базы.

- (a) Покажите, что топологическое пространство на вещественных числах с базой  $\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  совпадает с топологическим пространством  $\mathbb{R}$  из матанализа (то есть, совпадают множества открытых множеств).
  - (b) Существует ли минимальная база для топологии стрелки?
  - (c) Существует ли минимальная база для топологии Зарисского (носитель —  $\mathbb{R}$ , открыты  $\emptyset$ ,  $\mathbb{R}$  и все множества с конечным дополнением)?
- Заметим, что определения стараются давать как можно более узкими: если некоторое свойство вытекает из других, то это уже не свойство из определения, а теорема. Поэтому приведите примеры  $\langle X, \Omega \rangle$ , нарушающие только первое, только второе и только третье условие на топологию.
  - Напомним, что замкнутое множество — такое, дополнение которого открыто. Заметим, что на  $\mathbb{R}$  ровно два множества одновременно открыты и замкнуты —  $\emptyset$  и всё пространство. Постройте другую (не евклидову) топологию на  $\mathbb{R}$ , чтобы в ней было ровно четыре множества, которые одновременно открыты и замкнуты. А возможно ли построить топологическое пространство, в котором было бы ровно три открыто-замкнутых множества?
  - Предложите пример топологического пространства, в котором пересечение произвольного семейства открытых множеств — открыто. Топологическое пространство должно иметь бесконечный носитель (чтобы задача имела содержательный смысл) и не должно иметь дискретную или антидискретную топологию (не должно быть в каком-то смысле вырожденным).
  - Наибольшим (наименьшим) значением в каком-то множестве назовём такое, которое больше (меньше) всех других элементов множества. Несложно заметить, что для отношения включения множеств далеко не всегда такое можно определить: например, на  $\mathbb{R}^2$  не существует наибольшего круга с радиусом 1, хотя такой круг существует на  $\{z \mid z \in \mathbb{R}^2, |z| \leq 1\}$ .

*Внутренностью* множества  $A^{\circ}$  назовём наибольшее открытое множество, содержащееся в  $A$ . *Замкнутое* множество — такое, дополнение которого открыто. *Замыканием* множества  $\bar{A}$  назовём наименьшее замкнутое множество, содержащее  $A$ . Назовём *окрестностью* точки  $x$  такое открытое множество  $V$ , что  $x \in V$ . Будем говорить, что точка  $x \in A$  *внутренняя*, если существует окрестность  $V$ , что  $V \subseteq A$ . Точка  $x$  — *граничная*, если любая её окрестность  $V$  пересекается как с  $A$ , так и с его дополнением.

- (a) • Покажите, что  $A$  открыто тогда и только тогда, когда все точки  $A$  — внутренние. Также покажите, что  $A^{\circ} = \{x \mid x \in A \ \& \ x \text{ — внутренняя точка}\}$ ;

- Покажите, что  $A$  замкнуто тогда и только тогда, когда содержит все свои граничные точки. Также покажите, что  $\overline{A} = \{x \mid x \text{ — внутренняя или граничная точка}\}$ .
  - Верно ли, что  $\overline{A} = X \setminus ((X \setminus A)^\circ)$ ?
- (b) Пусть  $A \subseteq B$ . Как связаны  $A^\circ$  и  $B^\circ$ , а также  $\overline{A}$  и  $\overline{B}$ ? Верно ли  $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$  и  $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$ ?
- (c) *Задача Куратовского.* Будем применять операции взятия внутренности и замыкания к некоторому множеству всевозможными способами. Сколько различных множеств может всего получиться? *Указание.* Покажите, что  $\overline{(A^\circ)^\circ} = \overline{A}$ .
7. Задача проверки высказываний на истинность в ИИВ сложнее, чем в КИВ. Тем не менее, если формула опровергается, то она опровергается на  $\mathbb{R}$  с евклидовой топологией. Если же такого опровержения нет, то формула доказуема (то есть, ИИВ семантически полно на  $\mathbb{R}$ ). Например, формула  $A \vee \neg A$  опровергается при  $\llbracket A \rrbracket = (0, +\infty)$ , так как  $\llbracket A \vee \neg A \rrbracket = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Очевидно, что любая интуиционистская тавтология общезначима и в классической логике:

- формула общезначима в интуиционистской логике;
- значит, истинна при всех оценках;
- значит, в частности, при всех оценках на  $\mathbb{R}$ ;
- то есть, по теореме, упомянутой выше, доказуема в ИИВ;
- а схема аксиом 10и — частный случай схемы аксиом 10.

Обратное же неверно. Определите, являются ли следующие формулы тавтологиями в КИВ и ИИВ (предложите опровержение или доказательство общезначимости/выводимости для каждого из исчислений). В качестве доказательств формул приводите их натуральный вывод.

- (a)  $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ ;
- (b)  $\neg \neg A \rightarrow A$ ;
- (c)  $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$  (из двух утверждений одно непременно следует из другого: например, «я не люблю зиму» и «я не люблю лето»);
- (d)  $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C)$ ;
- (e)  $(A \rightarrow (B \vee \neg B)) \vee (\neg A \rightarrow (B \vee \neg B))$ ;
- (f)  $\alpha \vee \beta \vdash \neg(\neg\alpha \& \neg\beta)$  и  $\neg(\neg\alpha \& \neg\beta) \vdash \alpha \vee \beta$ ;
- (g)  $\neg\alpha \& \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$  и  $\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \& \neg\beta$ ;
- (h)  $\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg\alpha \vee \beta$  и  $\neg\alpha \vee \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$ .
8. Известно, что в КИВ все связки могут быть выражены через операцию «и-не» («или-не»). Также, они могут быть выражены друг через друга (достаточно, например, отрицания и конъюнкции). Однако, в ИИВ это не так.

Покажите, что никакие связки не выражаются друг через друга: то есть, нет такой формулы  $\varphi(A, B)$  из языка интуиционистской логики, не использующей связку  $\star$ , что  $\vdash A \star B \rightarrow \varphi(A, B)$  и  $\vdash \varphi(A, B) \rightarrow A \star B$ . Покажите это для каждой связки в отдельности:

- (a) конъюнкция;
- (b) дизъюнкция;
- (c) импликация;
- (d) отрицание.

### Задание №3. Изоморфизм Карри-Ховарда. Дополнительные топологические определения. Решётки.

1. Непрерывной функцией называется такая, для которой прообраз открытого множества всегда открыт. Путём на топологическом пространстве  $X$  назовём непрерывное отображение вещественного отрезка  $[0, 1]$  в  $X$ . Опишите пути (то есть, опишите, какие функции могли бы являться путями):
- (a) на  $\mathbb{N}$  (с дискретной топологией);
- (b) в топологии Зарисского;

(с) на дереве (с топологией с лекции);

2. Всегда ли непрерывным образом связного пространства является другое связное (под)пространство? Докажите или опровергните.
3. Как мы помним с лекции, возможно доказывать интуиционистские утверждения, воспользовавшись изоморфизмом Карри-Ховарда, то есть написав соответствующую программу на каком-нибудь статически типизированном языке программирования.

Например, на C++ так можно доказать  $A \rightarrow A$ :

```
A identity (A x) { return x; }
```

Докажите следующие утверждения, не пользуясь в коде тем фактом, что обычно языки программирования противоречивы (то есть, не используйте исключений, функций, не возвращающих управления, и других подобных конструкций).

- (a)  $A \rightarrow B \rightarrow A$
  - (b)  $A \& B \rightarrow A \vee B$
  - (c)  $(A \& (B \vee C)) \rightarrow ((A \& B) \vee (A \& C))$
  - (d)  $(A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$
  - (e)  $(B \vee C \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow A) \& (C \rightarrow A)$
  - (f)  $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
  - (g)  $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$
  - (h)  $(A \rightarrow B) \& (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$
  - (i) Выразимые в интуиционистском исчислении высказываний аналоги правил де Моргана для импликации.
4. Рассмотрим подмножество частично упорядоченного множества, и рассмотрим следующие свойства:  
(а) наличие наибольшего элемента; (б) наличие супремума; (в) наличие единственного максимального элемента. Всего можно рассмотреть шесть утверждений ((а) влечёт (б), (а) влечёт (в), и т.п.) — про каждое определите, выполнено ли оно в общем случае, и приведите либо доказательство, либо контрпример. Задача состоит из одного пункта, для получения баллов все шесть утверждений должны быть разобраны.
  5. Покажите следующие утверждения для импликативных решёток:  
(а) монотонность: пусть  $a \leq b$  и  $c \leq d$ , тогда  $a + c \leq b + d$  и  $a \cdot c \leq b \cdot d$ ;  
(б) законы поглощения:  $a \cdot (a + b) = a$ ;  $a + (a \cdot b) = a$ ;  
(с)  $a \leq b$  выполнено тогда и только тогда, когда  $a \rightarrow b = 1$ ;  
(д) из  $a \leq b$  следует  $b \rightarrow c \leq a \rightarrow c$  и  $c \rightarrow a \leq c \rightarrow b$ ;  
(е) из  $a \leq b \rightarrow c$  следует  $a \cdot b \leq c$ ;  
(ф)  $b \leq a \rightarrow b$  и  $a \rightarrow (b \rightarrow a) = 1$ ;  
(г)  $a \rightarrow b \leq ((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c))$ ;  
(х)  $a \leq b \rightarrow a \cdot b$  и  $a \rightarrow (b \rightarrow (a \cdot b)) = 1$   
(и)  $a \rightarrow c \leq (b \rightarrow c) \rightarrow (a + b \rightarrow c)$   
(j) импликативная решётка дистрибутивна:  $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$
  6. Докажите, основываясь на формулах предыдущих заданий, что интуиционистское исчисление высказываний корректно, если в качестве модели выбрать алгебру Гейтинга.
  7. Покажите, что на конечном множестве дистрибутивная решётка всегда импликативна.
  8. Постройте пример дистрибутивной, но не импликативной решётки.
  9. Покажите, что в дистрибутивной решётке всегда  $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ .
  10. Пусть  $R \subseteq A \times A$  — отношение эквивалентности (то есть транзитивное, рефлексивное и симметричное). Тогда фактор-множество  $A/R := \{[x]_R \mid x \in A\}$  — множество классов эквивалентности, где  $[x]_R = \{t \in A \mid tRx\}$ .

Покажите, что каждый элемент множества  $A$  принадлежит в точности одному классу эквивалентности. Два класса эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают.

11. Пусть  $R \subseteq A \times A$  — отношение нестрогого предпорядка (транзитивное и рефлексивное). И пусть  $a \approx b$ , если  $aRb$  и  $bRa$ . Покажите, что
- (а) Если  $aRb$  и  $a \approx a'$ ,  $b \approx b'$ , то  $a'Rb'$ .
  - (б)  $R^\approx$  — отношение нестрогого порядка на  $A/\approx$  в следующем смысле:  $[a]_\approx R^\approx [b]_\approx$  выполнено, если  $aRb$  (корректность определения также необходимо показать).
12. Покажите, что  $(\leq)$  из определения алгебры Линденбаума — отношение нестрогого предпорядка,  $(\approx)$  — отношение эквивалентности, а  $(\leq)/\approx$  — отношение нестрогого порядка.
13. Покажите, что  $[\alpha]_{\mathcal{L}} + [\beta]_{\mathcal{L}} = [\alpha \vee \beta]_{\mathcal{L}}$ . Зависит ли результат от выбора представителей классов эквивалентности  $[\alpha]$  и  $[\beta]$ ? Ответ также докажите.
14. Покажите, что  $[\alpha \rightarrow \beta]_{\mathcal{L}}$  — псевдодополнение  $[\alpha]_{\mathcal{L}}$  до  $[\beta]_{\mathcal{L}}$ .