

Математическая логика
КТ ИТМО, осень 2025 года

Что такое правильное рассуждение?

- ▶ Органон, Аристотель: 384-322 гг. до н.э.
- ▶ Средневековые («фигуры», терминология).
- ▶ Например, категорический силлогизм:

Каждый человек смертен	Сократ есть человек
<hr/>	
Сократ смертен	

- ▶ Это не формальная логика — сделать неформальный текст на естественном языке понятным.

Пример

(Приводится по учебнику Ивлева Ю.В. «Логика», 2006 год) Определите состав, фигуру, модус силлогизма и проверьте его.

*Некоторые учащиеся являются троечниками. Все студенты — учащиеся.
Следовательно, некоторые студенты — троечники.*

Математический анализ и его формализация

- ▶ Ньютон, Лейбниц — неформальная идея (1664+).
(Критика: Джордж Беркли. Аналитик, или Рассуждение, адресованное неверующему математику. Опыт новой теории зрения)
- ▶ Коши — последовательности вместо бесконечно-малых, пределы
- ▶ Вейерштрасс — вещественные числа
- ▶ Кантор — теория множеств (1875), формализующая вещественные числа.
- ▶ Парадокс Рассела (1901). «Никто не изгонит нас из рая, который основал Кантор» (Давид Гильберт).

Парадокс брадобреля, парадокс Рассела

- ▶ На некотором острове живёт брадобрей, который бреет всех, кто не бреется сам. Бреется ли сам брадобрей?

Парадокс брадобреля, парадокс Рассела

- ▶ На некотором острове живёт брадобрей, который бреет всех, кто не бреется сам. Бреется ли сам брадобрей?
- ▶ Если

$$X = \{x \mid x \notin x\}$$

Парадокс брадобреля, парадокс Рассела

- ▶ На некотором острове живёт брадобрей, который бреет всех, кто не бреется сам. Бреется ли сам брадобрей?
- ▶ Если

$$X = \{x \mid x \notin x\}$$

то что можно сказать про

$$X \in X$$

Парадокс бородбрея, парадокс Рассела

- ▶ На некотором острове живёт бородбрей, который бреет всех, кто не бреется сам. Бреется ли сам бородбрей?
- ▶ Если

$$X = \{x \mid x \notin x\}$$

то что можно сказать про

$$X \in X$$

- ▶ ▶ Пусть $X \in X$. Тогда $X : X \notin X$

Парадокс бородбрея, парадокс Рассела

- ▶ На некотором острове живёт бородбрей, который бреет всех, кто не бреется сам. Бреется ли сам бородбрей?
- ▶ Если

$$X = \{x \mid x \notin x\}$$

то что можно сказать про

$$X \in X$$

- ▶
 - ▶ Пусть $X \in X$. Тогда $X : X \notin X$
 - ▶ Пусть $X \notin X$. Тогда X должен принадлежать X

Парадокс бородбрея, парадокс Рассела

- ▶ На некотором острове живёт бородбрей, который бреет всех, кто не бреется сам. Бреется ли сам бородбрей?
- ▶ Если

$$X = \{x \mid x \notin x\}$$

то что можно сказать про

$$X \in X$$

- ▶ ▶ Пусть $X \in X$. Тогда $X : X \notin X$
- ▶ ▶ Пусть $X \notin X$. Тогда X должен принадлежать X
- ▶ Не совсем парадокс: откуда мы знаем, что X существует?

Парадокс бородбрея, парадокс Рассела

- ▶ На некотором острове живёт бородбрей, который бреет всех, кто не бреется сам. Бреется ли сам бородбрей?
- ▶ Если

$$X = \{x \mid x \notin x\}$$

то что можно сказать про

$$X \in X$$

- ▶
 - ▶ Пусть $X \in X$. Тогда $X : X \notin X$
 - ▶ Пусть $X \notin X$. Тогда X должен принадлежать X
- ▶ Не совсем парадокс: откуда мы знаем, что X существует? Не совсем разрешение парадокса: а откуда мы знаем, что вещественные числа существуют?

Программа Гильберта

- ▶ Программа Гильберта: полностью формализовать математику, доказать непротиворечивость: Neubegründung der Mathematik: Erste Mitteilung”, Abhandlungen aus dem Seminar der Hamburgischen Universität, 1: 157–177. Series of talks given at the University of Hamburg, July 25–27, 1921
 - ▶ формализация всей математики;
 - ▶ доказательство полноты формализации (все факты могут быть доказаны в формализации);
 - ▶ непротиворечивость (невозможно вывести противоречие);
 - ▶ консервативность (любое доказательство о реальных объектах может быть сформулировано без использования идеальных объектов);
 - ▶ разрешимость (существует алгоритм, проверяющий истинность любого математического факта).
- ▶ Теоремы Гёделя о неполноте формальной арифметики (1930) не дали реализовать её в полном объёме.
- ▶ В данном курсе мы будем следовать этой программе в некоторой степени, формализуя некоторые разделы математики — и изучая проблемы, которые возникают в связи с этой формализацией.

Общее о логических исчислениях

- ▶ Задание логического исчисления мы будем начинать с определения предметного языка. Мы всегда должны чётко отличать предметный и метаязыки:
 - ▶ Предметный язык — формальный язык, тексты на котором мы будем анализировать.
 - ▶ Метаязык (язык исследователя) — язык, с помощью которого мы анализируем предметный язык.
 - ▶ Например, при изучении программирования, предметный язык — собственно изучаемый язык программирования (скажем, Хаскель), языки исследователя — русский, английский, язык грамматик для задания языка, язык блоксхем и т.п.
- ▶ Для задания исчисления мы, помимо предметного языка, должны задать теорию моделей и теорию доказательств.
- ▶ Начнём с очень простой теории: классическое исчисление высказываний (гильбертовского типа).

Классическое исчисление высказываний: предметный язык

Основой предметного языка КИВ является высказывание (иначе: формула).
Высказывание — это строка, сформированная по следующим правилам.

Классическое исчисление высказываний: предметный язык

Основой предметного языка КИВ является высказывание (иначе: формула).
Высказывание — это строка, сформированная по следующим правилам.

- ▶ Атомарное высказывание (пропозициональная переменная): A, B', C_{1234}

Классическое исчисление высказываний: предметный язык

Основой предметного языка КИВ является высказывание (иначе: формула).

Высказывание — это строка, сформированная по следующим правилам.

- ▶ Атомарное высказывание (пропозициональная переменная): A, B', C_{1234}
- ▶ Составное высказывание: если α и β — высказывания, то высказываниями являются:
 - ▶ Отрицание: $(\neg\alpha)$

Классическое исчисление высказываний: предметный язык

Основой предметного языка КИВ является высказывание (иначе: формула).

Высказывание — это строка, сформированная по следующим правилам.

- ▶ Атомарное высказывание (пропозициональная переменная): A, B', C_{1234}
- ▶ Составное высказывание: если α и β — высказывания, то высказываниями являются:
 - ▶ Отрицание: $(\neg\alpha)$
 - ▶ Конъюнкция: $(\alpha \& \beta)$ или $(\alpha \wedge \beta)$

Классическое исчисление высказываний: предметный язык

Основой предметного языка КИВ является высказывание (иначе: формула).

Высказывание — это строка, сформированная по следующим правилам.

- ▶ Атомарное высказывание (пропозициональная переменная): A, B', C_{1234}
- ▶ Составное высказывание: если α и β — высказывания, то высказываниями являются:
 - ▶ Отрицание: $(\neg\alpha)$
 - ▶ Конъюнкция: $(\alpha \& \beta)$ или $(\alpha \wedge \beta)$
 - ▶ Дизъюнкция: $(\alpha \vee \beta)$

Классическое исчисление высказываний: предметный язык

Основой предметного языка КИВ является высказывание (иначе: формула).

Высказывание — это строка, сформированная по следующим правилам.

- ▶ Атомарное высказывание (пропозициональная переменная): A, B', C_{1234}
- ▶ Составное высказывание: если α и β — высказывания, то высказываниями являются:
 - ▶ Отрицание: $(\neg\alpha)$
 - ▶ Конъюнкция: $(\alpha \& \beta)$ или $(\alpha \wedge \beta)$
 - ▶ Дизъюнкция: $(\alpha \vee \beta)$
 - ▶ Импликация: $(\alpha \rightarrow \beta)$ или $(\alpha \supset \beta)$

Классическое исчисление высказываний: предметный язык

Основой предметного языка КИВ является высказывание (иначе: формула).

Высказывание — это строка, сформированная по следующим правилам.

- ▶ Атомарное высказывание (пропозициональная переменная): A, B', C_{1234}
- ▶ Составное высказывание: если α и β — высказывания, то высказываниями являются:
 - ▶ Отрицание: $(\neg\alpha)$
 - ▶ Конъюнкция: $(\alpha \& \beta)$ или $(\alpha \wedge \beta)$
 - ▶ Дизъюнкция: $(\alpha \vee \beta)$
 - ▶ Импликация: $(\alpha \rightarrow \beta)$ или $(\alpha \supset \beta)$

Пример:

$$(((A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C)) \vee (C \rightarrow A))$$

Соглашения о записи (метаязык)

- ▶ Для упрощения изложения давайте договоримся о некоторых сокращениях записи и метаязыковых конструкциях.
- ▶ Метаварiables:

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots$$

Соглашения о записи (метаязык)

- ▶ Для упрощения изложения давайте договоримся о некоторых сокращениях записи и метаязыковых конструкциях.
- ▶ Метаварiables:

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots$$

Если α — высказывание, то $(\neg\alpha)$ — высказывание

Соглашения о записи (метаязык)

- ▶ Для упрощения изложения давайте договоримся о некоторых сокращениях записи и метаязыковых конструкциях.
- ▶ Метаварьиные:

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots$$

Если α — высказывание, то $(\neg\alpha)$ — высказывание

- ▶ Метаварьиные для пропозициональных переменных:

$$X, Y_n, Z'$$

Соглашения о записи (метаязык)

- ▶ Для упрощения изложения давайте договоримся о некоторых сокращениях записи и метаязыковых конструкциях.
- ▶ Метаварьиные:

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots$$

Если α — высказывание, то $(\neg\alpha)$ — высказывание

- ▶ Метаварьиные для пропозициональных переменных:

$$X, Y_n, Z'$$

Пусть дана пропозициональная переменная X , тогда $(X \ \& \ (\neg X))$ — высказывание

Способы упростить запись

- ▶ Приоритет связок: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация

Способы упростить запись

- ▶ Приоритет связок: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация
- ▶ Ассоциативность: левая для конъюнкции и дизъюнкции, правая для импликации

Способы упростить запись

- ▶ Приоритет связок: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация
- ▶ Ассоциативность: левая для конъюнкции и дизъюнкции, правая для импликации

Пример:

$$((((A \rightarrow B) \& Q) \vee (((\neg B) \rightarrow B) \rightarrow C)) \vee (C \rightarrow (C \rightarrow A)))$$

можем записать так:

$$(A \rightarrow B) \& Q \vee ((\neg B \rightarrow B) \rightarrow C) \vee (C \rightarrow C \rightarrow A)$$

Теория моделей: оценка высказываний

Чтобы задать оценку высказываний:

- ▶ Зафиксируем множество истинностных значений $V = \{И, Л\}$
- ▶ Определим функцию оценки переменных (*интерпретацию*) $f : \mathcal{P} \rightarrow V$ (\mathcal{P} — множество пропозициональных переменных).
- ▶ Для удобства определим синтаксис для указания функции оценки переменных

$$\llbracket \alpha \rrbracket^{X_1:=v_1, \dots, X_n:=v_n}$$

- ▶ Это всё метаязык — потому полагаемся на здравый смысл

$$\llbracket A \& B \& (C \rightarrow C) \rrbracket^{A:=И, B:=\llbracket \neg A \rrbracket}$$

- ▶ Оценку выражений мы будем вести рекурсивно, а именно ...

Оценим высказывания рекурсивно

► Переменные

$$\llbracket X \rrbracket = f(X)$$

$$\llbracket X \rrbracket^{X:=a} = a$$

Оценим высказывания рекурсивно

► Переменные

$$\llbracket X \rrbracket = f(X) \qquad \llbracket X \rrbracket^{X:=a} = a$$

► Отрицание

$$\llbracket \neg \alpha \rrbracket = \begin{cases} Л, & \text{если } \llbracket \alpha \rrbracket = И \\ И, & \text{иначе} \end{cases}$$

Оценим высказывания рекурсивно

- ▶ Переменные

$$\llbracket X \rrbracket = f(X) \qquad \llbracket X \rrbracket^{X:=a} = a$$

- ▶ Отрицание

$$\llbracket \neg \alpha \rrbracket = \begin{cases} Л, & \text{если } \llbracket \alpha \rrbracket = И \\ И, & \text{иначе} \end{cases}$$

- ▶ Конъюнкция

$$\llbracket \alpha \ \& \ \beta \rrbracket = \begin{cases} И, & \text{если } \llbracket \alpha \rrbracket = \llbracket \beta \rrbracket = И \\ Л, & \text{иначе} \end{cases}$$

Оценим высказывания рекурсивно

- ▶ Переменные

$$\llbracket X \rrbracket = f(X) \qquad \llbracket X \rrbracket^{X:=a} = a$$

- ▶ Отрицание

$$\llbracket \neg \alpha \rrbracket = \begin{cases} Л, & \text{если } \llbracket \alpha \rrbracket = И \\ И, & \text{иначе} \end{cases}$$

- ▶ Конъюнкция

$$\llbracket \alpha \ \& \ \beta \rrbracket = \begin{cases} И, & \text{если } \llbracket \alpha \rrbracket = \llbracket \beta \rrbracket = И \\ Л, & \text{иначе} \end{cases}$$

- ▶ Дизъюнкция

$$\llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket = \begin{cases} Л, & \text{если } \llbracket \alpha \rrbracket = \llbracket \beta \rrbracket = Л \\ И, & \text{иначе} \end{cases}$$

Оценим высказывания рекурсивно

- ▶ Переменные

$$\llbracket X \rrbracket = f(X) \qquad \llbracket X \rrbracket^{X:=a} = a$$

- ▶ Отрицание

$$\llbracket \neg \alpha \rrbracket = \begin{cases} Л, & \text{если } \llbracket \alpha \rrbracket = И \\ И, & \text{иначе} \end{cases}$$

- ▶ Конъюнкция

$$\llbracket \alpha \& \beta \rrbracket = \begin{cases} И, & \text{если } \llbracket \alpha \rrbracket = \llbracket \beta \rrbracket = И \\ Л, & \text{иначе} \end{cases}$$

- ▶ Дизъюнкция

$$\llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket = \begin{cases} Л, & \text{если } \llbracket \alpha \rrbracket = \llbracket \beta \rrbracket = Л \\ И, & \text{иначе} \end{cases}$$

- ▶ Импликация

$$\llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket = \begin{cases} Л, & \text{если } \llbracket \alpha \rrbracket = И, \llbracket \beta \rrbracket = Л \\ И, & \text{иначе} \end{cases}$$

Тавтологии

Если α истинна при любой оценке переменных, то она *общезначима* (является *тавтологией*):

$$\models \alpha$$

Тавтологии

Если α истинна при любой оценке переменных, то она *общезначима* (является *тавтологией*):

$$\models \alpha$$

Выражение $A \rightarrow A$ — тавтология. Переберём все возможные значения единственной переменной A :

$$\begin{aligned} \llbracket A \rightarrow A \rrbracket^{A:=И} &= И \\ \llbracket A \rightarrow A \rrbracket^{A:=Л} &= И \end{aligned}$$

Тавтологии

Если α истинна при любой оценке переменных, то она *общезначима* (является *тавтологией*):

$$\models \alpha$$

Выражение $A \rightarrow A$ — тавтология. Переберём все возможные значения единственной переменной A :

$$\begin{aligned} \llbracket A \rightarrow A \rrbracket^{A:=И} &= И \\ \llbracket A \rightarrow A \rrbracket^{A:=Л} &= И \end{aligned}$$

Выражение $A \rightarrow \neg A$ тавтологией не является:

$$\llbracket A \rightarrow \neg A \rrbracket^{A:=И} = Л$$

Ещё определения

- ▶ Если α истинна при любой оценке переменных, при которой истинны высказывания $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, будем говорить, что α — *следствие* этих высказываний:

$$\gamma_1, \dots, \gamma_n \models \alpha$$

Ещё определения

- ▶ Если α истинна при любой оценке переменных, при которой истинны высказывания $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, будем говорить, что α — *следствие* этих высказываний:

$$\gamma_1, \dots, \gamma_n \models \alpha$$

- ▶ Истинна при какой-нибудь оценке — *выполнима*.

Ещё определения

- ▶ Если α истинна при любой оценке переменных, при которой истинны высказывания $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, будем говорить, что α — *следствие* этих высказываний:

$$\gamma_1, \dots, \gamma_n \models \alpha$$

- ▶ Истинна при какой-нибудь оценке — *выполнима*.
- ▶ Не истинна ни при какой оценке — *невыполнима*.

Ещё определения

- ▶ Если α истинна при любой оценке переменных, при которой истинны высказывания $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, будем говорить, что α — *следствие* этих высказываний:

$$\gamma_1, \dots, \gamma_n \models \alpha$$

- ▶ Истинна при какой-нибудь оценке — *выполнима*.
- ▶ Не истинна ни при какой оценке — *невыполнима*.
- ▶ Не истинна при какой-нибудь оценке — *опровержима*.

Теория доказательств. Схемы высказываний: определение

Определение (схема высказывания)

Строка, строящаяся по правилам для построения высказываний, с одним отличием — вместо пропозициональных переменных можно указывать маленькие греческие буквы.

Теория доказательств. Схемы высказываний: определение

Определение (схема высказывания)

Строка, строящаяся по правилам для построения высказываний, с одним отличием — вместо пропозициональных переменных можно указывать маленькие греческие буквы.

По-простому: схемы высказываний — высказывания с метапеременными

Теория доказательств. Схемы высказываний: определение

Определение (схема высказывания)

Строка, строящаяся по правилам для построения высказываний, с одним отличием — вместо пропозициональных переменных можно указывать маленькие греческие буквы.

По-простому: схемы высказываний — высказывания с метаварiableными

Пример

► $(A \rightarrow \alpha) \vee (\beta \rightarrow B)$

Теория доказательств. Схемы высказываний: определение

Определение (схема высказывания)

Строка, строящаяся по правилам для построения высказываний, с одним отличием — вместо пропозициональных переменных можно указывать маленькие греческие буквы.

По-простому: схемы высказываний — высказывания с метаварiableными

Пример

- ▶ $(A \rightarrow \alpha) \vee (\beta \rightarrow B)$
- ▶ $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$

Теория доказательств. Схемы высказываний: определение

Определение (схема высказывания)

Строка, строящаяся по правилам для построения высказываний, с одним отличием — вместо пропозициональных переменных можно указывать маленькие греческие буквы.

По-простому: схемы высказываний — высказывания с метаварiableными

Пример

- ▶ $(A \rightarrow \alpha) \vee (\beta \rightarrow B)$
- ▶ $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$
- ▶ $A \vee B \ \& \ A$

Схемы высказываний: определение

Определение

Будем говорить, что высказывание σ строится (иначе: задаётся) по схеме \mathbb{W} , если существует такая замена метабпеременных $ч_1, ч_2, \dots, ч_n$ в схеме \mathbb{W} на какие-либо выражения $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, что после её проведения получается высказывание σ :

$$\sigma = \mathbb{W}[ч_1 := \varphi_1][ч_2 := \varphi_2] \dots [ч_n := \varphi_n]$$

Схемы высказываний: примеры

Схема

$$A \rightarrow \alpha \vee B \vee \alpha$$

задаёт, к примеру, следующие высказывания:

- ▶ $A \rightarrow X \vee B \vee X$, при $\alpha := X$.
- ▶ $A \rightarrow (M \rightarrow N) \vee B \vee (M \rightarrow N)$, при $\alpha := M \rightarrow N$.

Схемы высказываний: примеры

Схема

$$A \rightarrow \alpha \vee B \vee \alpha$$

задаёт, к примеру, следующие высказывания:

- ▶ $A \rightarrow X \vee B \vee X$, при $\alpha := X$.
- ▶ $A \rightarrow (M \rightarrow N) \vee B \vee (M \rightarrow N)$, при $\alpha := M \rightarrow N$.

и **НЕ** задаёт следующие высказывания:

- ▶ $A \rightarrow X \vee B \vee Y$ — все вхождения α должны заменяться одинаково во всём выражении.
- ▶ $(A \rightarrow (M \rightarrow N) \vee B \vee M) \rightarrow N$ — структура скобок должна сохраняться.

Аксиомы исчисления высказываний

Определение

Назовём следующие схемы высказываний схемами аксиом исчисления высказываний:

- (1) $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
- (2) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$
- (3) $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \& \beta$
- (4) $\alpha \& \beta \rightarrow \alpha$
- (5) $\alpha \& \beta \rightarrow \beta$
- (6) $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$
- (7) $\beta \rightarrow \alpha \vee \beta$
- (8) $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma)$
- (9) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \neg \alpha$
- (10) $\neg \neg \alpha \rightarrow \alpha$

Все высказывания, которые задаются схемами аксиом, назовём аксиомами исчисления высказываний.

Правило вывода Modus Ponens

Первый, упомянувший правило — Теофраст (древнегреческий философ, IV-III век до н.э.).

Правило вывода Modus Ponens

Первый, упомянувший правило — Теофраст (древнегреческий философ, IV-III век до н.э.).

Переход по следствию: «сейчас сентябрь; если сейчас сентябрь, то сейчас осень; следовательно, сейчас осень».

Правило вывода Modus Ponens

Первый, упомянувший правило — Теофраст (древнегреческий философ, IV-III век до н.э.).

Переход по следствию: «сейчас сентябрь; если сейчас сентябрь, то сейчас осень; следовательно, сейчас осень».

Если имеет место α и $\alpha \rightarrow \beta$, то имеет место β .

$$\frac{\alpha \quad \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

Доказательство

Определение (доказательство в исчислении высказываний)

Доказательством (выводом) назовём конечную последовательность высказываний

$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n,$

Доказательство

Определение (доказательство в исчислении высказываний)

Доказательством (выводом) назовём конечную последовательность высказываний $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, причём каждое δ_i либо:

- ▶ *является аксиомой — существует замена метаварiableных для какой-либо схемы аксиом, позволяющая получить формулу δ_i , либо*

Доказательство

Определение (доказательство в исчислении высказываний)

Доказательством (выводом) назовём конечную последовательность высказываний $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, причём каждое δ_i либо:

- ▶ является аксиомой — существует замена метаварiable для какой-либо схемы аксиом, позволяющая получить формулу δ_i , либо
- ▶ получается из $\delta_1, \dots, \delta_{i-1}$ по правилу *Modus Ponens* — существуют такие индексы $j < i$ и $k < i$, что $\delta_k \equiv \delta_j \rightarrow \delta_i$.

Доказательство

Определение (доказательство в исчислении высказываний)

Доказательством (выводом) назовём конечную последовательность высказываний $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, причём каждое δ_i либо:

- ▶ является аксиомой — существует замена метaperменных для какой-либо схемы аксиом, позволяющая получить формулу δ_i , либо
- ▶ получается из $\delta_1, \dots, \delta_{i-1}$ по правилу *Modus Ponens* — существуют такие индексы $j < i$ и $k < i$, что $\delta_k \equiv \delta_j \rightarrow \delta_i$.

Пример:

$A \rightarrow (A \rightarrow A),$

$(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A),$

$(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A),$

$A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A),$

$A \rightarrow A$

Доказательство подробнее

Почему это доказательство? То же подробнее:

Доказательство подробнее

Почему это доказательство? То же подробнее:

$$(1) \quad A \rightarrow (A \rightarrow A)$$

$$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \quad [\alpha, \beta := A]$$

Сх. акс. 1

Доказательство подробнее

Почему это доказательство? То же подробнее:

- (1) $A \rightarrow (A \rightarrow A)$ Сх. акс. 1
 $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$ [$\alpha, \beta := A$]
- (2) $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ Сх. акс. 2
 $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$ [$\alpha, \gamma := A; \beta := A \rightarrow A$]

Доказательство подробнее

Почему это доказательство? То же подробнее:

- (1) $A \rightarrow (A \rightarrow A)$ Сх. акс. 1
 $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$ [$\alpha, \beta := A$]
- (2) $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ Сх. акс. 2
 $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$ [$\alpha, \gamma := A; \beta := A \rightarrow A$]
- (3) $(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ М.Р. 1,2
 $A \rightarrow (A \rightarrow A) \quad (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$

 $(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$

Доказательство подробнее

Почему это доказательство? То же подробнее:

- (1) $A \rightarrow (A \rightarrow A)$ Сх. акс. 1
 $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \ [\alpha, \beta := A]$
- (2) $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ Сх. акс. 2
 $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma) \ [\alpha, \gamma := A; \beta := A \rightarrow A]$
- (3) $(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ М.Р. 1,2
$$\frac{A \rightarrow (A \rightarrow A) \quad (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)}{(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)}$$
- (4) $A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$ Сх. акс. 1
 $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \ [\alpha := A, \beta := A \rightarrow A]$

Доказательство подробнее

Почему это доказательство? То же подробнее:

$$(1) \quad A \rightarrow (A \rightarrow A) \quad \text{Сх. акс. 1}$$

$$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \quad [\alpha, \beta := A]$$

$$(2) \quad (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A) \quad \text{Сх. акс. 2}$$

$$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma) \quad [\alpha, \gamma := A; \beta := A \rightarrow A]$$

$$(3) \quad (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A) \quad \text{М.Р. 1,2}$$

$$\frac{A \rightarrow (A \rightarrow A) \quad (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)}{(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)}$$

$$(4) \quad A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A) \quad \text{Сх. акс. 1}$$

$$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \quad [\alpha := A, \beta := A \rightarrow A]$$

$$(5) \quad A \rightarrow A \quad \text{М.Р. 4,3}$$

$$\frac{A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A) \quad (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)}{A \rightarrow A}$$

Дополнительные определения

Определение (доказательство формулы α)

— такое доказательство (вывод) $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, что $\alpha \equiv \delta_n$.

Формула α доказуема (выводима), если существует её доказательство.

Обозначение:

$$\vdash \alpha$$

Дополнительные определения

Определение (доказательство формулы α)

— такое доказательство (вывод) $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, что $\alpha \equiv \delta_n$.

Формула α доказуема (выводима), если существует её доказательство.

Обозначение:

$$\vdash \alpha$$

Определение (вывод формулы α из гипотез $\gamma_1, \dots, \gamma_k$)

— такая последовательность $\delta_1, \dots, \delta_n$, причём каждое δ_i либо:

- ▶ является аксиомой;
- ▶ либо получается по правилу *Modus Ponens* из предыдущих;
- ▶ либо является одной из гипотез: существует $t : \delta_i \equiv \gamma_t$.

Формула α выводима из гипотез $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, если существует её вывод.

Обозначение:

$$\gamma_1, \dots, \gamma_k \vdash \alpha$$

Корректность и полнота

Определение (корректность теории)

Теория корректна, если любое доказуемое в ней утверждение общезначимо. То есть, $\vdash \alpha$ влечёт $\models \alpha$.

Определение (полнота теории)

Теория полна, если любое общезначимое в ней утверждение доказуемо. То есть, $\models \alpha$ влечёт $\vdash \alpha$.

Корректность исчисления высказываний

Лемма (корректность)

Если $\vdash \alpha$, то $\models \alpha$

Доказательство.

Индукция по длине вывода n . Для каждого высказывания δ_n из вывода разбор случаев:

1. Аксиома — убедиться, что все аксиомы общезначимы.
2. Modus Ponens j, k — убедиться, что если $\models \delta_j$ и $\models \delta_j \rightarrow \delta_n$, то $\models \delta_n$.



Общезначимость схемы аксиом №9

Общезначимость схемы аксиом — истинность каждой аксиомы, задаваемой данной схемой, при любой оценке:

$$\llbracket (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha \rrbracket = \text{И}$$

Построим таблицу истинности формулы в зависимости от оценки α и β :

$\llbracket \alpha \rrbracket$	$\llbracket \beta \rrbracket$	$\llbracket \neg\alpha \rrbracket$	$\llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket$	$\llbracket \alpha \rightarrow \neg\beta \rrbracket$	$\llbracket (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha \rrbracket$	$\llbracket (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha \rrbracket$
Л	Л	И	И	И	И	И
Л	И	И	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	И	Л	И
И	И	Л	И	Л	И	И

Общезначимость заключения правила Modus Ponens

Пусть в выводе есть формулы $\delta_j, \delta_k = \delta_j \rightarrow \delta_n, \delta_n$ (причём $j < n$ и $k < n$).

Общезначимость заключения правила Modus Ponens

Пусть в выводе есть формулы δ_j , $\delta_k = \delta_j \rightarrow \delta_n$, δ_n (причём $j < n$ и $k < n$).

Фиксируем какую-нибудь оценку. По индукционному предположению, δ_j и $\delta_j \rightarrow \delta_n$ общезначимы. Поэтому при данной оценке $\llbracket \delta_j \rrbracket = \text{И}$ и $\llbracket \delta_j \rightarrow \delta_n \rrbracket = \text{И}$.

Общезначимость заключения правила Modus Ponens

Пусть в выводе есть формулы δ_j , $\delta_k = \delta_j \rightarrow \delta_n$, δ_n (причём $j < n$ и $k < n$).

Фиксируем какую-нибудь оценку. По индукционному предположению, δ_j и $\delta_j \rightarrow \delta_n$ общезначимы. Поэтому при данной оценке $\llbracket \delta_j \rrbracket = \text{И}$ и $\llbracket \delta_j \rightarrow \delta_n \rrbracket = \text{И}$.

Построим таблицу истинности для импликации:

$\llbracket \delta_j \rrbracket$	$\llbracket \delta_n \rrbracket$	$\llbracket \delta_j \rightarrow \delta_n \rrbracket$
Л	Л	И
Л	И	И
И	Л	Л
И	И	И

Общезначимость заключения правила Modus Ponens

Пусть в выводе есть формулы δ_j , $\delta_k = \delta_j \rightarrow \delta_n$, δ_n (причём $j < n$ и $k < n$).

Фиксируем какую-нибудь оценку. По индукционному предположению, δ_j и $\delta_j \rightarrow \delta_n$ общезначимы. Поэтому при данной оценке $\llbracket \delta_j \rrbracket = \text{И}$ и $\llbracket \delta_j \rightarrow \delta_n \rrbracket = \text{И}$.

Построим таблицу истинности для импликации:

$\llbracket \delta_j \rrbracket$	$\llbracket \delta_n \rrbracket$	$\llbracket \delta_j \rightarrow \delta_n \rrbracket$
Л	Л	И
Л	И	И
И	Л	Л
И	И	И

Из таблицы видно, что $\llbracket \delta_n \rrbracket = \text{Л}$ только если $\llbracket \delta_j \rightarrow \delta_n \rrbracket = \text{Л}$ или $\llbracket \delta_j \rrbracket = \text{Л}$. Значит, это невозможно, и $\llbracket \delta_n \rrbracket = \text{И}$

Теорема о дедукции

Соглашение о записи (метаязык): будем большой греческой буквой (Γ , Δ , ...) обозначать набор гипотез.

Theorem (О дедукции, Жак Эрбран, 1930)

$\Gamma, \alpha \vdash \beta$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Доказательство у данной теоремы — конструктивное, то есть, если дан некоторый вывод $\delta_1, \dots, \delta_{n-1}, \beta$ из гипотез Γ, α , то теорема предложит метод перестроения его в вывод $\eta_1, \dots, \eta_{k-1}, \alpha \rightarrow \beta$ из гипотез Γ .

Само доказательство будет приведено на следующей лекции.