Ćwiczenie 2: RRZ - metody niejawne: trapezów, nRK2. Iteracja Picarda i Newtona.

Tomasz Chwiej

26 października 2018

1 Wstęp

Dynamikę rozprzestrzeniania się choroby zakaźnej opisuje model SIS

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} & = & -\beta z u + \gamma u \\ \frac{du}{dt} & = & \beta z u - \gamma u \end{cases}, \quad \frac{dz}{dt} + \frac{du}{dt} = 0, \quad z(t) + u(t) = N \tag{1}$$

Zakładamy że suma nosicieli choroby (u) i osób zdrowych/zarażonych (z) jest stała i równa N (liczba osób w populacji), wobec tego można rozpatrywać tylko jedno równanie

$$\frac{du}{dt} = f(t,u) = (\beta N - \gamma)u - \beta u^2 \tag{2}$$

które jest nieliniowe. Pozostałe parametry: β częstość kontaktów osób zarażonych ze zdrowymi, γ średni czas trwania choroby. Rozwiązanie analityczne

$$u(t) = \frac{u_\infty}{1 + v\exp(-(\beta N - \gamma)\cdot(t - t_0))} \tag{3}$$

$$u_\infty = \frac{\beta N - \gamma}{\beta}, \quad v = \frac{u_\infty}{u_0} - 1 \tag{4}$$

$$\frac{\beta N}{\gamma} \leqslant 1 \rightarrow \lim_{t\to\infty} u(t) = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\beta N}{\gamma} > 1 \rightarrow \lim_{t\to\infty} u(t) = \frac{\beta N - \gamma}{\beta} \tag{6}$$

Równanie 2 rozwiążemy używając schematów niejawnych: trapezów i nRK2.

2 Metoda trapezów

W schemacie trapezów

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta t}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})\right] \tag{7}$$

w chwili t_n (aktualnej) nie jest znana wartość $f(t_{n+1}, u_{n+1})$ ponieważ nie znamy u_{n+1}. Wartość u_{n+1} w każdym kroku wyznaczymy iteracyjnie

1. Metoda Picarda. Jako punkt startowy (μ - numer iteracji) wybieramy

$$u_{n+1}^{\mu=0} = u_n \tag{8}$$

a następnie iteracyjnie poprawiamy rozwiązanie

$$u_{n+1}^{\mu+1} = u_n + \frac{\Delta t}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1}^{\mu})\right] \tag{9}$$

co daje przepis

$$u_{n+1}^{\mu+1} = u_n + \frac{\Delta t}{2}\Big[(\alpha u_n - \beta u_n^2) + (\alpha u_n^{\mu} - \beta (u_n^{\mu})^2)\Big] \tag{10}$$

gdzie: $\alpha = \beta N - \gamma$.
Przyjmujemy dwa warunki stopu: $|u_{n+1}^{\mu+1} - u_{n+1}^{\mu}| < TOL$ lub $\mu \leqslant 20$. Po uzyskaniu samouzgodnienia przechodzimy do kolejnej chwili czasowej i powtarzamy iterację, aż do uzyskania $n = n_{max}$ czyli $t = t_{max}$.

2. Iteracja Newtona. Równanie (7) zapisujemy jak równanie nieliniowe (przenosimy prawą stronę na lewą i przyrównujemy całość do zera)

$$F(u_{n+1}) = u_{n+1} - u_n - \frac{\Delta t}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})\right] = 0 \tag{11}$$

które będzie prawdziwe gdy znajdziemy jego pierwiastek (u_{n+1} traktujemy jako zmienną). W tym celu stosujemy metodę Newtona (też iteracyjną)

$$u_{n+1}^{\mu+1} = u_{n+1}^{\mu} - \frac{F(u_{n+1}^{\mu})}{\left.\frac{dF(u_{n+1})}{du_{n+1}}\right|_{u_{n+1}=u_{n+1}^{\mu}}} \tag{12}$$

co prowadzi do wzoru iteracyjnego

$$u_{n+1}^{\mu+1} = u_{n+1}^{\mu} - \frac{u_{n+1}^{\mu} - u_n - \frac{\Delta t}{2}\left[(\alpha u_n - \beta u_n^2) + (\alpha u_{n+1}^{\mu} - \beta (u_{n+1}^{\mu})^2)\right]}{1 - \frac{\Delta t}{2}\left[\alpha - 2\beta u_{n+1}^{\mu}\right]} \tag{13}$$

gdzie: $\alpha = \beta N - \gamma$. W metodzie Newtona punkt startowy oraz warunek stopu są identyczne jak w metodzie Picarda.

3. Zadania do wykonania.

   - Przyjąć następujące wartości parametrów: $\beta = 0.001$, $N = 500$, $\gamma = 0.1$, $t_{max} = 100$, $\Delta t = 0.1$, $u_0 = 1$ (co najmniej jeden osobnik musi być zarażony), $TOL = 10^{-6}$, $\mu \leqslant 20$.
   - Rozwiązać równanie (2) stosując metodę trapezów z iteracją Picarda (wzór 10). Sporządzić wykresy $u(t)$ oraz $z(t) = N - u(t)$ i umieścić je na jednym rysunku. (25 pkt)
   - Rozwiązać równanie (2) stosując metodę trapezów z iteracją Newtona (wzór 13). Sporządzić wykresy $u(t)$ oraz $z(t) = N - u(t)$ i umieścić je na jednym rysunku. (25 pkt)

3 Niejawna metoda RK2

Użyjemy dwuodsłonowej metody RK o tablicy Butchera

$$\begin{array}{c|cc} c_1 & a_{1,1} & a_{1,2} \\ c_1 & a_{2,1} & a_{2,2} \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array} = \begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \tag{14}$$

Do rozwiązania równania $du/dt = f(t, u)$ używamy dwóch równań predyktora (niejawne)

$$U_1 = u_n + \Delta t \left[a_{1,1} f(t_n + c_1 \Delta t, U_1) + a_{1,2} f(t_n + c_2 \Delta t, U_2)\right] \tag{15}$$
$$U_2 = u_n + \Delta t \left[a_{2,1} f(t_n + c_1 \Delta t, U_1) + a_{2,2} f(t_n + c_2 \Delta t, U_2)\right] \tag{16}$$

które po wstawieniu do równania korektora dają rozwiązanie w chwili $n + 1$

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \left[b_1 f(t_n + c_1 \Delta t, U_1) + b_2 f(t_n + c_2 \Delta t, U_2)\right] \tag{17}$$

Aby znaleźć U_1 i U_2, równania predyktora zapiszemy jako układ równań nieliniowych, który rozwiążemy metodą Newtona. Dla chwili t_{n+1} wygląda to następująco

$$F_1(U_1, U_2) = U_1 - u_n - \Delta t \left[a_{1,1}(\alpha U_1 - \beta U_1^2) + a_{1,2}(\alpha U_2 - \beta U_2^2)\right] \tag{18}$$
$$F_2(U_1, U_2) = U_2 - u_n - \Delta t \left[a_{2,1}(\alpha U_1 - \beta U_1^2) + a_{2,2}(\alpha U_2 - \beta U_2^2)\right] \tag{19}$$

W metodzie Newtona kolejne przybliżenia (μ - numer iteracji) mają postać

$$U_1^{\mu+1} = U_1^{\mu} + \Delta U_1 \tag{20}$$
$$U_2^{\mu+1} = U_2^{\mu} + \Delta U_2 \tag{21}$$

gdzie ΔU_1 i ΔU_2 są rozwiązaniami układu równań liniowych (wyjaśnienie na wykładzie)

$$\begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_1(U_1, U_2) \\ -F_2(U_1, U_2) \end{bmatrix}, \quad (U_1 = U_1^{\mu},\, U_2 = U_2^{\mu}) \tag{22}$$

o elementach macierzowych

$$m_{1,1} = \frac{\partial F_1}{\partial U_1} = 1 - \Delta t\, a_{1,1}(\alpha - 2\beta U_1) \tag{23}$$
$$m_{1,2} = \frac{\partial F_1}{\partial U_2} = -\Delta t\, a_{1,2}(\alpha - 2\beta U_2) \tag{24}$$
$$m_{2,1} = \frac{\partial F_2}{\partial U_1} = -\Delta t\, a_{2,1}(\alpha - 2\beta U_1) \tag{25}$$
$$m_{2,2} = \frac{\partial F_2}{\partial U_2} = 1 - \Delta t\, a_{2,2}(\alpha - 2\beta U_2) \tag{26}$$

Rozwiązanie układu znajdziemy stosując np. metodę wyznacznikową

$$\Delta U_1 = \frac{F_2 \cdot m_{1,2} - F_1 \cdot m_{2,2}}{m_{1,1} \cdot m_{2,2} - m_{1,2} \cdot m_{2,1}} \tag{27}$$
$$\Delta U_2 = \frac{F_1 \cdot m_{2,1} - F_2 \cdot m_{1,1}}{m_{1,1} \cdot m_{2,2} - m_{1,2} \cdot m_{2,1}} \tag{28}$$

Jako wartości startowe w każdej iteracji przyjmujemy: $U_1^{\mu=0} = u_n$ oraz $U_2^{\mu=0} = u_n$.
Zadania do wykonania.

- Przyjąć następujące wartości parametrów: $\beta = 0.001$, $N = 500$, $\gamma = 0.1$, $t_{max} = 100$, $\Delta t = 0.1$, $u_0 = 1$ (co najmniej jeden osobnik musi być zarażony), $TOL = 10^{-6}$, $\mu \leqslant 20$.

- Rozwiązać równanie (2) stosując metodę niejawną metodę RK, tj. zastosować wzór korektora (17) w którym U_1 i U_2 wyznaczane są w każdym kroku iteracyjnie według wzorów (20, 21) oraz (27, 28). Sporządzić wykresy $u(t)$ oraz $z(t) = N - u(t)$ i umieścić je na jednym rysunku. (50 pkt)