Ćwiczenie 1: RRZ - metody jawne: Eulera, RK2, RK4

Tomasz Chwiej

19 października 2018

1 Problem autonomiczny

Rozwiążemy numerycznie równanie

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad f(t, y) = \lambda y \tag{1}$$

Jego rozwiązaniem analitycznym dla warunku początkowego $y(0) = 1$ jest $y(t) = e^{\lambda t}$, przyda nam się ono do sprawdzenia poprawności rozwiązania numerycznego.

1. Metoda jawna Eulera

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot f(t_n, y_n), \quad t_n = \Delta t \cdot n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2}$$

daje przepis

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot \lambda y_n \tag{3}$$

Rozwiązać równanie (1) przy użyciu schematu Eulera dla parametrów: $y_0 = 1$, $\lambda = -1$, $t \in [0, 5]$. Obliczenia wykonać dla trzech kroów czasowych $\Delta t = 0.01$; 0.1; 1.0. Na jednym rysunku pokazać trzy rozwiązania numeryczne i rozwiązanie analityczne. (5 pkt) Na drugim rysunku pokazać zmiany błędu globalnego $\delta(t) = y_{num}(t) - y_{dok}(t)$ dla trzech kroków czasowych (5 pkt)

2. Metoda jawna RK2 (trapezów)

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n) = \lambda y_n & (4)\\ k_2 &= f(t_n + \Delta t, y_n + \Delta t k_1) = \lambda (y_n + \Delta t k_1) & (5)\\ y_{n+1} &= y_n + \frac{\Delta t}{2}(k_1 + k_2) & (6) \end{aligned}$$

Powtórzyć obliczenia jak w punkcie 1 stosując schemat RK2. Za komplet wyników (20 pkt).

3. Metoda jawna RK4

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n) = \lambda y_n & (7)\\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t}{2} k_1\right) = \lambda \left(y_n + \frac{\Delta t}{2} k_1\right) & (8)\\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t}{2} k_2\right) = \lambda \left(y_n + \frac{\Delta t}{2} k_2\right) & (9)\\ k_4 &= f(t_n + \Delta t, y_n + \Delta t k_3) = \lambda (y_n + \Delta t k_3) & (10)\\ y_{n+1} &= y_n + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) & (11) \end{aligned}$$

Powtórzyć obliczenia jak w punkcie 1 stosując schemat RK4. Za komplet wyników (20 pkt).

1.1 RRZ 2 rzędu

Rysunek 1: Szeregowy obwód RLC podłączony do źródła napięcia V.

Korzystając z napięciowego prawa Kirchoffa dla układu szeregowego RLC pokazanego na rys.1 możemy zapisać równanie opisujące zmiany (przepływ) ładunku $Q(t)$

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V(t) \tag{12}$$

Jest to równanie RRZ 2 rzędu, aby je rozwiązać numerycznie, przeształcimy je do układu RRZ 1 rzędu ($\frac{dQ}{dt} = I$ - prąd płynący w układzie)

$$\frac{dQ}{dt} = f(t,Q,I) = I \tag{13}$$

$$\frac{dI}{dt} = g(t,Q,I) = \frac{V(t)}{L} - \frac{R}{L}I - \frac{1}{LC}Q \tag{14}$$

Do jego rozwiązania wykorzystamy jawny schemat RK4. Oba równania musimy rozwiązywać w tym samym czasie, dlatego należy sukcesywnie wyznaczać pary funkcji

$$(k_1^Q, k_1^I) \to (k_2^Q, k_2^I) \to (k_3^Q, k_3^I) \to (k_4^Q, k_4^I) \to (Q_{n+1}, I_{n+1}) \tag{15}$$

jak poniżej

$$k_1^Q = f(t_n, Q_n, I_n) = I_n \tag{16}$$

$$k_1^I = g(t_n, Q_n, I_n) = \frac{V_n}{L} - \frac{1}{LC}Q_n - \frac{R}{L}I_n \tag{17}$$

$$k_2^Q = f(t_{n+\frac{1}{2}}, Q_n + \frac{\Delta t}{2}k_1^Q, I_n + \frac{\Delta t}{2}k_1^I) = I_n + \frac{\Delta t}{2}k_1^I \tag{18}$$

$$k_2^I = g(t_{n+\frac{1}{2}}, Q_n + \frac{\Delta t}{2}k_1^Q, I_n + \frac{\Delta t}{2}k_1^I) = \frac{V_{n+\frac{1}{2}}}{L} - \frac{1}{LC}\left(Q_n + \frac{\Delta t}{2}k_1^Q\right) - \frac{R}{L}\left(I_n + \frac{\Delta t}{2}k_1^I\right) \tag{19}$$

$$k_3^Q = f(t_{n+\frac{1}{2}}, Q_n + \frac{\Delta t}{2}k_2^Q, I_n + \frac{\Delta t}{2}k_2^I) = I_n + \frac{\Delta t}{2}k_2^I \tag{20}$$

$$k_3^I = g(t_{n+\frac{1}{2}}, Q_n + \frac{\Delta t}{2}k_2^Q, I_n + \frac{\Delta t}{2}k_2^I) = \frac{V_{n+\frac{1}{2}}}{L} - \frac{1}{LC}\left(Q_n + \frac{\Delta t}{2}k_2^Q\right) - \frac{R}{L}\left(I_n + \frac{\Delta t}{2}k_2^I\right) \tag{21}$$

$$k_4^Q = f(t_{n+1}, Q_n + \Delta t k_3^Q, I_n + \Delta t k_3^I) = I_n + \Delta t k_3^I \tag{22}$$

$$k_4^I = g(t_{n+1}, Q_n + \Delta t k_3^Q, I_n + \Delta t k_3^I) = \frac{V_{n+1}}{L} - \frac{1}{LC}\left(Q_n + \Delta t k_3^Q\right) - \frac{R}{L}\left(I_n + \Delta t k_3^I\right) \tag{23}$$

$$Q_{n+1} = Q_n + \frac{\Delta t}{6}\left(k_1^Q + 2k_2^Q + 2k_3^Q + k_4^Q\right) \tag{24}$$

$$I_{n+1} = I_n + \frac{\Delta t}{6}\left(k_1^I + 2k_2^I + 2k_3^I + k_4^I\right) \tag{25}$$

Należy rozwiązać równanie (12) używając schematu RK4 dla następujących parametrów: $\Delta t = 10^{-4}$, $R = 100$, $L = 0.1$, $C = 0.001$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $T_0 = 2\pi/\omega_0$, $t \in [0, 4T_0]$.
Warunki początkowe: $Q(t=0) = Q_0 = 0$, $I(t=0) = I_0 = 0$
Potencjał $V(t)$ źródła napięcia

$$V(t) = 10\,sin(\omega_V t) \tag{26}$$

Obliczenia wykonać dla czterech częstości źródła tj. $\omega_V = 0.5\omega_0$; $0.8\omega_0$; $1.0\omega_0$; $1.2\omega_0$.
Na jednym rysunku umieścić wykresy uzyskanych rozwiązań. (50 pkt)