Facharbeit im Grundkurs Informatik

Implementation des Gauß-Algorithmus

Georg-Büchner-Gymnasium

Joel Mantik

Pablo Sonnauer

März 2023

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

> "The simplest model in applied mathematics is a system of linear equations. It is also by far the most important."
> - GILBERT STRANG

Die lineare Algebra stellt eines der wichtigsten Felder der Mathematik dar. Wie aus dem Zitat des Mathematikers Gilbert Strang hervorgeht, sind die linearen Gleichungssysteme trotz ihrer Simplizität eines der wichtigsten Konzepte in der angewandten Mathematik. Eines der faszinierendsten Lösungsverfahren dieser Gleichungssysteme ist der Gauß-Algorithmus, da er das Lösen auf einfachste Weise möglich macht. Seit seiner Entdeckung im frühen 19. Jahrhundert durch den Mathematiker Carl Friedrich Gauß stellt er eines der elementarsten Lösungsverfahren Linearer Gleichungssysteme dar. Auch in der Informatik spielt der Algorithmus eine große Rolle, beispielsweise in der Computergrafik. Aus diesen Gründen wird im Folgenden eine Implementationsmöglichkeit vorgestellt. Zuerst wird der mathematische Hintergrund erläutert, anschließend der Quellcode des Algorithmus vorgestellt und Vor- und Nachteile abgewogen. Weiterhin werden spezifische Anwendungsmöglichkeiten in der Informatik aufgezeigt und zuletzt wird ein Fazit gezogen.

Kapitel 2

Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem ist eine Sammlung von Gleichungen, in denen jede Unbekannte mit höchstens dem ersten Grad vorkommt. Es kann in der Form $A_x = b$ geschrieben werden, wobei A eine Matrix der Form $m * n$, x ein n-dimensionaler Vektor von Unbekannten und b ein m-dimensionaler Vektor von Konstanten sei. Ein allgemeines lineares Gleichungssystem lässt sich wie folgt definieren.: [Gra21]

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{2.1}$$

Das Ziel eines solchen linearen Gleichungssystems ist es, eine Lösung für x zu finden, die alle Gleichungen erfüllt. Hierbei gibt es drei Arten von Lösungen:

1. Das Gleichungssystem hat genau *eine* Lösung; es gibt genau eine Lösung, welche alle Gleichungen im System erfüllt. Die Lösungsmenge ist zum Beispiel: $\mathbb{L} = \{(x, y, z)|(1, 2, 3)\}$.

2. Das Gleichungssystem hat *keine* Lösung, wenn es keine Lösung gibt, die alle Gleichungen erfüllt. Die Lösungsmenge ist eine leere Menge: $\mathbb{L} = \emptyset$.

3. Das Gleichungssystem hat *unendlich viele* Lösungen, wenn es mehrere Lösungen

gibt, die alle Gleichungen im System erfüllen. Hierbei sind die verschiedenen Variablen möglicherweise voneinander abhängig. Die Lösungsmenge sieht beispielsweise wie folgt aus:
$\mathbb{L} = \{(x, y, z)|(x = ay + z, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R})\}$.

Kapitel 3

Gauß'sches Eliminationsverfahren

Gegeben sei das Allgemeine lineare Gleichungssystem 2.1. Gesucht ist nun die Menge der $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, die alle Gleichungen erfüllen. Um diese Menge zu finden, wird folgendermaßen vorgegangen:

1. Das Gleichungssystem in die erweiterte Koeffizientenmatrix (A, b) umschreiben, [Fis14]:
$$(A, b) := \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{3.1}$$
2. (A, b) durch elementare Zeilentransformationen, also Vertauschen von Zeilen, Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $\neq 0$ oder Addition des Vielfachen von einer Zeile zu einer anderen Zeile auf Zeilenstufenform bringen.

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1,n} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Eine $m * n$-Matrix (A, b), wie in 3.2 wird *Zeilenstufenform* genannt. Das a steht für eine beliebige reelle Zahl, alle anderen Plätze ohne ein a sind von Nullen besetzt. Der erste von null verschiedene Eintrag in jeder Zeile ist eins. Dieser Eintrag wird das Pivot-Element der Zeile genannt.
Das Pivot-Element der $(i + 1)$-ten Zeile steht immer rechts des Pivot-Elements der I-ten Zeile, alle Einträge oberhalb eines Pivot-Elements sind gleich null. Vgl. [Zwe22].

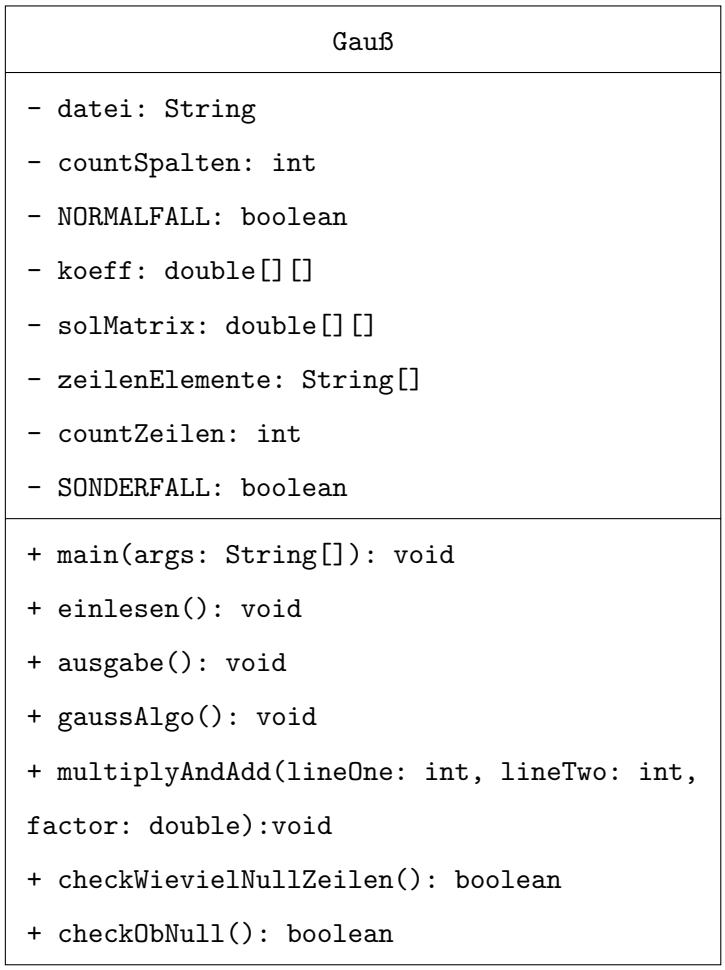
3. Nun lassen sich durch Rücksubstitution die Werte für die Variablen ermitteln. Es wird die letzte Spalte durch den Wert des Koeffizienten geteilt, sodass die Variable alleine steht. Der gefundene Wert wird dann in die nächst höhere Zeile eingesetzt, anschließend wird analog zum ersten Schritt vorgegangen.

Kapitel 4

Erläuterung des Quellcodes

Für die im Folgenden dargelegte Implementation und Analyse des Algorithmus wurde die Programmiersprache `"Java"` verwendet.

Das Implementationsdiagramm zeigt den Aufbau:



Es wurden aussagefähige Methodennamen gewählt. In der Main Methode des Programms wird ein Parameter übernommen, welcher die Datei mit der Koeffizientenmatrix annimmt. Außerdem werden in dieser die Methoden `einlesen()`, `ausgabe()` und `gaussAlgo()` ausgeführt. Die Methode `ausgabe()` gibt in der Main Methode die Eingangsmatrix, die triangularisierte Matrix und die Lösungsmatrix aus.

Die Methode `einlesen()` liest die Koeffizientenmatrix aus der Datei ein, dabei wird eine Liste erstellt, in welcher alle Zeilen der eingelesenen Datei gespeichert werden. Die Datei kann Kommentare und Leerzeilen enthalten, daher werden durch eine For-Schleife alle Leerzeichen und Kommentare entfernt. Des Weiteren werden die Kommata in Punkte umgewandelt, um das Funktionieren des

Algorithmus auch auf anderen Systemen zu gewährleisten. Weiterhin wird die Anzahl der Spalten in der Variable `countSpalten`, und die Anzahl der Zeilen in `countZeilen` gespeichert und im Zuge dessen werden auch die *Eingangsmatrix* `koeff[][]` und die *Lösungsmatrix* `solMatrix[][]` initialisiert. Die Methode `ausgabe()` nimmt zwei Parameter an, das zweidimensionale Array `double mx` und den String `matrixName`. Beide werden durch eine For-Schleife auf der Konsole ausgegeben. Die Methode `multiplyAndAdd()`, welche die Parameter `lineOne, lineTwo (Integer)` und den `double factor` annimmt, wird verwendet, um die Koeffizienten auf den Wert null zu bringen. Dabei wird durch eine For-Schleife über die Spalten der Matrix iteriert und dabei der Koeffizient an der Stelle von `lineTwo` und `spalten` auf den Wert null gebracht. Dies geschieht, indem die Matrix an der Stelle `lineOne` und `spalten` mit dem Parameter `factor` multipliziert und zu dem zu verändernden Koeffizienten addiert wird. Weiter gibt es die Methode `checkObNull()`, welche den Parameter `zeile (Integer)` annimmt und über die Eingangsmartix iteriert und prüft, ob ein Koeffizient den Wert null hat. In diesem Fall wird `true` zurückgegeben, andernfalls `false`. Diese Methode wird später für die Sonderbehandlung von Matrizen verwendet, die entweder eine Null-Zeile haben oder gleich null sind. Anknüpfend gibt es noch die Methode `checkWievielNullZeilen()`. Diese iteriert, ausgehend von der letzten Zeile, über alle Zeilen und prüft, ob alle Koeffizienten in der Zeile gleich null sind. Für jede gefundene Null-Zeile wird ein Counter `nullCounter` erhöht. Wenn diese Zählvariable am Ende der Iteration ungleich Null ist, wird die Konstante `SONDERFALL` zurückgegeben und die Anzahl der Null-Zeilen auf der Konsole ausgegeben, andernfalls wird die Konstante `NORMALFALL` zurückgegeben. Wenn die Matrix an jeder Stelle eine Null hat, wird ebenfalls interveniert und der Sonderfall auf der Konsole ausgegeben. Die Methode arbeitet sehr effektiv, denn durch die Pivotisierung kann nach erfolgter Triangularisierung von der letzten Zeile aus iteriert werden, denn wenn es Null-Zeilen gibt, so sind diese am Ende.

Die Methode `gaussAlgo()` führt den eigentlichen Algorithmus aus. Als Erstes wird die Eingangsmartix, also `koeff[][]`, durch eine For-Schleife in die Lösungsmatrix

`solMatrix[][]` kopiert, damit am Ende beide ausgegeben werden können. Anschließend findet die Pivotisierung der Matrix statt. Dies geschieht, indem zuerst eine Variable `maxZeile (Integer)` erzeugt und mit der Zählvariable `zeile` initialisiert wird. Diese wird verwendet, um die Zeile mit dem größten Koeffizienten zu finden. In der darauf folgenden For-Schleife findet die eigentliche Pivotisierung statt. Sie sucht in der aktuellen Spalte nach dem Element mit dem größten, absoluten Wert und speichert diesen, wenn der größere Wert in der Zeile unter der aktuellen Zeile ist, in der Variable `maxZeile`. Anschließend wird geprüft, ob die zuvor initialisierte maxZeile ungleich dem Wert der Variable `zeile` ist. Wenn dem so ist, werden die Zeilen mithilfe einer temporären Variable getauscht, sodass am Ende die Zahl mit dem größten Koeffizienten oben steht. Als Nächstes wird der Faktor berechnet, mit dem die Koeffizienten gleich null werden. Dies geschieht durch die nächste For-Schleife, welche den Faktor `factor` berechnet, indem die Lösungsmatrix mit negativem Vorzeichen an der Stelle der Zählvariable i und `zeile` (die Zählvariable der ersten for-Schleife), durch die Lösungsmatrix an der Stelle `zeile, zeile` geteilt wird. Dieser Faktor wird dann an die Methode `multiplyAndAdd` zusammen mit `zeile, i` als Parameter übergeben. Nachdem die For-Schleife durchgelaufen ist, wird die entstandene triangularisierte Matrix ausgegeben.

Anschließend prüft der Algorithmus die triangularisierte Matrix auf Sonderfälle, also ob die Matrix Null-Zeilen hat oder komplett gleich Null ist, indem durch eine Wenn-dann prüfung abgefragt wird, ob die Methode `checkWievielNullZeilen` einen Sonderfall zurückgibt. Wenn sie dies tut, bricht der Algorithmus ab.

Der letzte Schritt wird verwendet, um die Matrix durch Rücksubstitution zu lösen. Eine For-Schleife läuft von der letzten bis zur ersten Spalte. Zuerst wird in dieser Schleife eine Variable `double diagonale` erstellt, in welcher das aktuelle Diagonalelement gespeichert wird. In der nächsten Zeile iteriert eine weitere For-Schleife über die Matrix und teilt bei jeder Iteration den Wert des aktuellen Koeffizienten durch den Wert in `diagonale`. Dadurch entsteht die Dreiecksform, bei welcher jedes Element in dieser den Wert Eins haben soll. Weitergehend wird

der Wert des Tupels in der Variable `double result` gespeichert. Durch eine weitere For-Schleife wird die über alle Zeilen unter der aktuellen iteriert, bei jeder Iteration wird der Wert der rechten Zeile um das Produkt aus dem Wert von `result` und dem Wert des Elements aus der aktuellen Spalte der Zeile subtrahiert. Als Letztes wird der Wert der aktuellen Zeile auf null gesetzt, damit das Gleichungssystem in der Dreiecksform bleibt.

Kapitel 5

Abwägungen

5.1 Vorteile des Algorithmus

Der Gauß-Algorithmus hat klar den Vorteil, dass er bei Gleichungssystemen mit wenig Koeffizienten sehr effektiv ist, das heißt er kann die Lösung schnell und einfach berechnen. Auch ist der Algorithmus in der Programmierung relativ leicht umzusetzen, da er nach einfachen Schemata funktioniert, bei welchen wenige Schritte benötigt werden. Ein weiterer Vorteil ist, dass der Algorithmus durch die Pivotisierung eine gute numerische Stabilität bekommt.

5.2 Nachteile des Algorithmus

Zum einen kann es durch die Verwendung vom Datentyp `double` und die mehrfache Rechnung mit denselben Werten zu Rundungsfehlern kommen. Zum anderen hat der Algorithmus bei komplizierten Matrizen mit vielen Zeilen und Spalten eine große Laufzeit, die Worstcase Laufzeit würde aufgrund von doppelten For-Schleifen $O(n^2)$ betragen. Außerdem kann der Algorithmus bei vielen Koeffizi-

enten eine sehr hohe Rechenleistung in Anspruch nehmen. Ein weiterer Nachteil dieser Implementation ist, dass bei einer Matrix wie in `beispiel2.txt`, eine Singularität auftritt, es wird -9.223372036854776E14 und sonst zwei Null-Zeilen ausgegeben, was daran liegen könnte das der Computer aufgrund der vorher gerundeten Zahlen numerisch ungenau rechnet. Dies herauszufinden ist allerdings nicht im Rahmen dieser Arbeit.

Kapitel 6

Anwendungsbereiche des Gauß'schen Eliminationsverfahrens in der Informatik

Der Algorithmus spielt in der Informatik aufgrund seiner Simplizität in vielen Teilbereichen, wie der Kryptografie, der Computergrafik oder der Datenanalyse eine tragende Rolle. Eine Auswahl von Anwendungsbereichen wird im Folgenden umrissen.

6.1 Kryptografie

Das Gauß'sche Eliminationsverfahren kann verwendet werden, um modulare Gleichungen zu lösen, die in der Kryptografie häufig auftreten. Zum Beispiel wird das Verfahren bei der Berechnung von Schlüsseln in asymmetrischen Kryptosystemen wie RSA eingesetzt. Hierbei wird mit dem Gauß-Algorithmus eine Primfaktorzerlegung durchgeführt, die dann verwendet wird, um Schlüssel in asymmetrischen Kryptosystemen zu verwenden. Vgl. [KK10] Kapitel 11.4.3.

6.2 Computergrafik

In der 3D-Computergrafik werden 4x4-Matrizen verwendet, um Objekte im Raum zu transformieren. Diese Matrizen enthalten Informationen über Translationen, Rotationen und Skalierungen von Objekten. Das Gauß'sche Eliminationsverfahren wird verwendet, um die inverse Matrix zu berechnen, die dann angewendet wird, um die Transformationsoperationen umzukehren. Sie wird auch dazu benutzt, um Normale von 3D-Objekten zu transformieren, um sie in eine konsistente Richtung zu bringen, was wichtig für Beleuchtungs- und Schattierungsberechnungen ist. Vgl. [scr].

Kapitel 7

Fazit

Die lineare Algebra und das Lösen Linearer Gleichungssysteme sind fundamentale Konzepte in der angewandten Mathematik und finden auch in der Informatik weitreichende Anwendungen. Der Gauß-Algorithmus ist eines der elementarsten und faszinierendsten Verfahren zur Lösung Linearer Gleichungssysteme und hat seit seiner Entdeckung im frühen 19. Jahrhundert große Bedeutung erlangt. Der mathematische Hintergrund und die Definitionen Linearer Gleichungssysteme sowie des Gaußschen Algorithmus wurden erläutert sowie eine Implementierungsmöglichkeit des Algorithmus vorgestellt. Er hat den Vorteil, dass er das Lösen Linearer Gleichungssysteme auf einfachste Weise ermöglicht, aber es gibt auch Nachteile, wie die Notwendigkeit einer hohen Rechenleistung bei großen Matrizen. Dennoch sind die Anwendungsmöglichkeiten in der Informatik zahlreich. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass der Gauß-Algorithmus ein wichti-

ges Werkzeug für Mathematiker und Informatiker ist, um komplexe Probleme zu lösen und praktische Anwendungen zu ermöglichen.

Anhang

```java
/**
 * @author Joel Mantik
 */
import java.nio.charset.StandardCharsets;
import java.nio.file.Files;
import java.nio.file.Path;
import java.nio.file.Paths;
import java.io.IOException;
import java.util.List;


public class Gauss {
    static String datei; // der Parameter der Datei
    static double[][] koeff; // Initialierung der erweiterten Koeffizienten Matrix
    static double[][] solMatrix; // Initialierung der Loesungsmatrix
    static String[] zeilenElemente;
    static int countSpalten = 0;
    static int countZeilen;
    static final boolean SONDERFALL = true;
    static final boolean NORMALFALL = false;

    /**
     * main Methode in welcher alle Methoden ausgefuehrt werden
     * @param args liest die Datei mit der Matrix ein
     */
    public static void main(String[] args) throws IOException {
        /*
         * Hier wird der Dateiname als Parameter eingelesen
         */
        if (args.length < 1) {
            System.out.println("Bitte Dateiname als Parameter uebergeben!");
            return;
        } else {
            datei = args[0];
        }

        einlesen();
        ausgabe(koeff, "Eingangsmatrix");
        gaussAlgo();
        ausgabe(solMatrix, "Loesungsmatrix");
    }

    /**
     * Diese Methode liest die Koeffizienten aus der Datei ein
     */
    private static void einlesen() throws IOException {
```

```
47
48          List<String> f = Files.readAllLines(Paths.get(datei));
49          int zeilenIndex = 0;
50
51          for (int i = 0; i < f.size(); i++) {
52              String zeile = f.get(i);
53               // Kommentare und Whitespaces der input Datei werden ignoriert
54              if (zeile.isEmpty() || zeile.charAt(0) == '#') {
55                  continue;
56              }
57
58              zeilenElemente = zeile.replace(',', '.').split("\\s+"); // Kommata werden zu Punkten
59              // Speichert Spaltenanzahl
60              if (countSpalten == 0){
61                  countSpalten = zeilenElemente.length;
62                  koeff     = new double[countSpalten - 1][countSpalten];
63                  solMatrix = new double[countSpalten - 1][countSpalten];
64              }
65              for (int spaltenIndex = 0; spaltenIndex < countSpalten; spaltenIndex++) {
66                  String element = zeilenElemente[spaltenIndex];
67                  double wert = Double.parseDouble(element);
68                  // Der Koeffizientenmatrix werden die double Werte zugewiesen, welche in wert gespeichert
    wurden
69                  koeff[zeilenIndex][spaltenIndex] = wert;
70
71              }
72
73              zeilenIndex++;
74           }
75          /*double[][] hilfMat = koeff;
76          if(hilfMat.length != countSpalten){
77              System.out.println("Falsche Matrix!");
78              return;
79          }*/
80
81          // Speichert Zeilenanzahl
82          countZeilen = koeff.length;
83          System.out.println(countSpalten);
84          System.out.println(countZeilen);
85      }
86
87      /**
88       * Methode ausgabe gibt die Eingangsmatrix und die Loesungsmatrix aus
89       * @param mx nimmt die Eingangsmatrix oder die Loesungsmatrix an
90       * @param matrixName nimmt den Namen der Matrix an
91       */
92      private static void ausgabe(double[][] mx, String matrixName){ // Ausgabe der Matrizen
93
94          System.out.println("Die " + matrixName + ":");
95          for (int j = 0; j < mx.length; j++) {
96              for (int k = 0; k < mx[j].length; k++) {
97                  System.out.print(Math.round(mx[j][k] * 10000d) / 10000d + " "); // TODO: GILT NUR FUER
    NETTE ZAHLEN
98              }
99              System.out.println();
100         }
101         System.out.println();
102     }
103
104
105     /**
106      * Die Methode gaussAlgo fuehrt den eigentlichen Algorithmus aus
```

```
107      */
108     private static void gaussAlgo() {
109         for (int i = 0; i < countZeilen; i++) {
110             for (int j = 0; j < countSpalten; j++) {
111                 solMatrix[i][j] = koeff[i][j];
112             }
113         }
114        // copyLine(0);// Erste Zeile der Originalmatrix wird in Loesungs Matrix kopiert
115         //copyLine(1);
116         //copyLine(2);
117         /**
118          * Diese for-Schleife triangularisiert die Matrix
119          */
120         for (int zeile = 0; zeile < countZeilen - 1; zeile++) {
121             int maxZeile = zeile;
122 
123             /*
124             *  Diese Schleife sucht in der aktuellen Spalte (durch die Variable zeile indiziert)
125             *  nach dem Element mit dem groessten absoluten Wert und merkt sich die Zeilennummer dieses
     Elements in der Variable maxZeile.
126             */
127             for (int i = zeile + 1; i < countZeilen; i++) {
128                 // Der spaltenIndex der solMatrix rueckt nacht jeder Vertauschung einen weiter deswegen
     kann als spaltenIndex zeile benutzt werden
129                 if (Math.abs(solMatrix[i][zeile]) > Math.abs(solMatrix[maxZeile][zeile])) {
130                     maxZeile = i;
131                 }
132             }
133             /*
134             * Wenn das Element mit dem groessten absoluten Wert in einer anderen Zeile als in der aktuellen
      Zeile (maxZeile) gefunden wurde
135             * werden die maxZeile und die oberste Zeile vertauscht vertauscht. Dies ist die Pivotisierung.
136             */
137             if (maxZeile != zeile) {
138                 double[] temp = solMatrix[zeile];
139                 solMatrix[zeile] = solMatrix[maxZeile];
140                 solMatrix[maxZeile] = temp;
141             }
142 
143             // Die Koeffizienten werden durch x = -b/a 0
144             for (int i = zeile + 1; i < countZeilen; i++) {
145                 // TODO: Vielleicht wird durch 0 geteilt
146                 double factor = -solMatrix[i][zeile] / solMatrix[zeile][zeile];
147                 multiplyAndAdd(zeile, i, factor);
148             }
149         }
150 
151         ausgabe(solMatrix, "Triangularisierte Matrix");
152 
153         /*
154          * Untersuchung der Triangularisierten Matrix: 1.: wvl 0 Zeilen gibt es am Ende
155          */
156         if(checkWievielNullZeilen() == SONDERFALL){
157             System.exit(-1);
158         }
159 
160         /*
161          *  Durch ruecksubstitution werden die gefundenen Werte RUECKWAERTS in die uebere Zeile eingesetzt
162          *  und so x und y errechnet
163          */
164         for(int zeilen = countZeilen-1; zeilen >= 0; zeilen--){
165             double diagonale = solMatrix[zeilen][zeilen];
```

```
166             // TODO: Teilen durch Diagonale
167             for(int spalte = 0; spalte < countSpalten; spalte++){
168                 solMatrix[zeilen][spalte] /= diagonale;
169             }
170             double result = solMatrix[zeilen][solMatrix[zeilen].length - 1];
171             for(int rueckZeilen = zeilen - 1; rueckZeilen >= 0; rueckZeilen--){
172                 solMatrix[rueckZeilen][countSpalten - 1] -= result * solMatrix[rueckZeilen][zeilen];
173                 solMatrix[rueckZeilen][zeilen] = 0.0;
174             }
175         }
176     }
177
178
179
180     /**
181      * multiplyAndAdd bringt die Koeffizienten auf 0
182      * @param lineOne  nimmt die 1. Zeile welche benutzt werden soll an
183      * @param lineTwo  nimmt die 2. Zeile welche benutzt werden soll an
184      * @param factor   der Wert mit dem multiplizert wird, so dass der Koeffzient 0 wird
185      */
186     private static void multiplyAndAdd(int lineOne, int lineTwo, double factor) { // x = -b/a wird
        durchgefuehrt
187         for(int spalten = 0; spalten < solMatrix[lineOne].length; spalten++){
188             solMatrix[lineTwo][spalten] = (solMatrix[lineOne][spalten] * factor) + solMatrix[lineTwo][
        spalten];
189         }
190
191     }
192
193     /**
194      * Die Methode prueft wieviele Nullzeilen die Matrix hat.
195      * @return SONDERFALL wird zurckgegeben wenn die Matrix ein Sonderfall ist.
196      * @return NORMALFALL wird sonst zurueckgegeben
197      *
198      *
199      */
200
201     private static boolean checkWievielNullZeilen() {
202         int nullCounter = 0;
203         for(int i = countZeilen - 1; i >= 0; i--){
204             if(checkObNull(i) == true){
205                 nullCounter++;
206             } else {
207                 if(nullCounter != 0){
208                     System.out.println("Sonderfall gefunden: Es gibt " + nullCounter + " Nullzeilen " );
209                     return SONDERFALL;
210                 }else{
211                     return NORMALFALL;
212                 }
213             }
214         }
215         System.out.println("Sonderfall gefunden, Matrix besteht aus Nullen!");
216         return SONDERFALL;
217     }
218
219     /**
220      * @param zeile Die Zeile welchhe geprueft wird
221      * Die Methode prueft fuer jedes Element ob es den Wert Null hat
222      */
223     private static boolean checkObNull(int zeile){
224         for(int i= 0; i < countSpalten; i++){
225             if(solMatrix[zeile][i] != 0){
```

```
226                 return false;
227             }
228         }
229         return true;
230     }
231
232 }
```

Listing 7.1: Quellcode des Gauß-Algorithmus

Literatur

[Fis14] Gerd Fischer. *Lineare Algebra: Eine Einführung für Studien Anfänger*. Springer Spektrum, 2014.

[Gra21] Günther Gramlich. *Lineare Algebra: Eine Einführung*. Carl Hanser Verlag GmbH Co KG, 2021.

[KK10] Christian Karpfinger und Hubert Kiechle. *Kryptologie, Algebraische Methoden und Algorithmen*. Vieweg+Teubner, 2010.

[scr] scratchapixel. *The Perspective and Orthographic Projection Matrix*. Letzter Zugriff: 2023-03-26. URL: `https://www.scratchapixel.com/lessons/3d-basic-rendering/perspective-and-orthographic-projection-matrix/projection-matrix-introduction.html`.

[Zwe22] Prof. Dr. Sander Zwegers. *Lineare Algebra, Notizen zur Vorlesung*. Universität zu Köln, Juli 2022.

Satz: LaTeX

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst und keine anderen als die im Literaturverzeichnis angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.
Insbesondere versichere ich,dass ich alle wörtlichen und sinngemäßen Übernahmen aus anderen Werken als solche kenntlich gemacht habe.

Köln, den 29.03.2023 _____
Unterschrift