深蓝学院
shenlanxueyuan.com

视觉SLAM：从理论到实践
第三次课 李群与李代数

主讲人 高翔

清华大学 自动控制与工程 博士
慕尼黑工业大学计算机视觉组 博士后
Email: gao.xiang.thu@gmail.com

2017年冬

第三讲 李群与李代数

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

1. 群
2. 李群与李代数
3. 指数映射与对数映射
4. 求导与扰动模型
5. 实践：Sophus

往期内容回顾

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

1. SLAM的运动与观测模型
2. x的具体表达
3. 当x的估计值不够准确时？

运动 观测

$x \quad (R, t) \quad T$

$R, t \xrightarrow{\Delta R, \Delta t} R' \quad t'$ $\quad \|\xi\| = 1$

$t' = t + \Delta t$

$R' = \underline{R + \Delta R}$ $\quad \left(\begin{array}{l} R^T R = I \\ \det(R) = +1 \end{array} \right)$

$u(R) \quad \frac{du}{dR} = \lim_{\Delta R \to 0} \frac{u(R+\Delta R) - u(R)}{\Delta R}$

?

1. 群

1. 群

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

SO(3)

- 三维旋转矩阵构成了特殊正交群 (Special Orthogonal Group)

$$SO(3) = \{\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{3\times 3} | \boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{I}, det(\boldsymbol{R}) = 1\}.$$

SE(3)

- 三维变换矩阵构成了特殊欧氏群 (Special Euclidean Group)

$$SE(3) = \left\{ \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} | \boldsymbol{R} \in SO(3), \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

1. 群

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

- 什么是群? $SO(3)$ $(R, RR^T=I, \det R=1)$ $R_1 \cdot R_2 \in SO(3)$
- 群（Group）是一种集合加上一种运算的代数结构。
- 记集合为A，运算为 · ，那么当运算满足以下性质时，称 (A, ·)成群：

交

1. 封闭性: $\forall a_1, a_2 \in A, \quad a_1 \cdot a_2 \in A.$
2. 结合律: $\forall a_1, a_2, a_3 \in A, \quad (a_1 \cdot a_2) \cdot a_3 = a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3).$
3. 幺元: $\exists a_0 \in A, \quad s.t. \quad \forall a \in A, \quad a_0 \cdot a = a \cdot a_0 = a.$
4. 逆: $\forall a \in A, \quad \exists a^{-1} \in A, \quad s.t. \quad a \cdot a^{-1} = a_0.$

封结幺逆 交
“凤姐咬你” 脚

1. 群

- 容易验证
  - 旋转矩阵集合与矩阵乘法构成群
  - 变换矩阵集合与矩阵乘法构成群
  - 因此称它们为旋转矩阵群和变换矩阵群
- 其他群的例子：$(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{Z},+)$

抽象代数

近世代数

一般线性群 $GL(n)$ 指 $n \times n$ 的可逆矩阵，它们对矩阵乘法成群。

特殊正交群 $SO(n)$ 也就是所谓的旋转矩阵群，其中 $SO(2)$ 和 $SO(3)$ 最为常见。

特殊欧氏群 $SE(n)$ 也就是前面提到的 n 维欧氏变换，如 $SE(2)$ 和 $SE(3)$。

1. 群

- 群结构保证了在群上的运算具有良好的性质。
- 群论是研究群的各种结构和性质的理论，具体介绍见各抽象代数或近世代数教材。

2. 李群与李代数

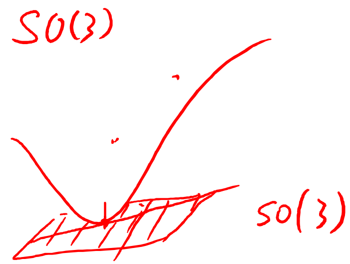
2. 李群与李代数

$R \in \mathbb{R}^{3\times3}$　　3个自由度

- 李群（Lie Group）：
  - 具有连续（光滑）性质的群。
  - 既是群也是流形。
  - 直观上看，一个刚体能够连续地在空间中运动，故SO(3)和SE(3)都是李群。
  - 但是，SO(3)和SE(3)只有定义良好的乘法，没有加法，所以难以进行取极限、求导等操作。

2. 李群与李代数

- 李代数：与李群对应的一种结构，位于向量空间。
  - 通常记作小写的so(3)和se(3)。书中以哥特体突出显示。
  - 事实上是李群单位元处的正切空间。



- 下面从旋转矩阵引出李代数
- 考虑任意旋转矩阵R，满足 $\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{I}.$

2. 李群与李代数

- 令R随时间变化（连续运动），有： $\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{R}(t)^T = \boldsymbol{I}.$
- 两侧对时间求导：

$$\dot{\boldsymbol{R}}(t)\boldsymbol{R}(t)^T + \boldsymbol{R}(t)\dot{\boldsymbol{R}}(t)^T = 0.$$

- 整理：

$$\dot{\boldsymbol{R}}(t)\boldsymbol{R}(t)^T = -\left(\dot{\boldsymbol{R}}(t)\boldsymbol{R}(t)^T\right)^T.$$

反对称 $A^T = -A$

2. 李群与李代数

$$\dot{\boldsymbol{R}}(t)\boldsymbol{R}(t)^T = -\left(\dot{\boldsymbol{R}}(t)\boldsymbol{R}(t)^T\right)^T.$$

- 可以看出这是一个反对称矩阵，记：

$$\dot{\boldsymbol{R}}(t)\boldsymbol{R}(t)^T_R = \phi(t)^\wedge \cdot \cdot R$$

$-(\phi^\wedge)^T = \phi^\wedge$

反对称符号

$$\boldsymbol{a}^\wedge = \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^\vee = \boldsymbol{a}.$$

- 两侧右乘R(t)：

$$\dot{\boldsymbol{R}}(t) = \phi(t)^\wedge \boldsymbol{R}(t)$$

- 可看成对R求导后，左侧多出一个 $\phi(t)$

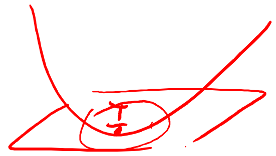
$$\frac{d e^{ax}}{dx} = a \cdot e^{ax}$$

2. 李群与李代数

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{R}}(t) = \phi(t)^{\wedge}\boldsymbol{R}(t)}$$

- 单位元附近： $t_0 = 0, R(0) = I$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}(t) &\approx \boldsymbol{R}(t_0) + \dot{\boldsymbol{R}}(t_0)(t - t_0) \\ &= \boldsymbol{I} + \phi(t_0)^{\wedge}(t). \end{aligned}$$



- 可见 ϕ 反映了一阶导数性质，它位于正切空间（tangent space）上

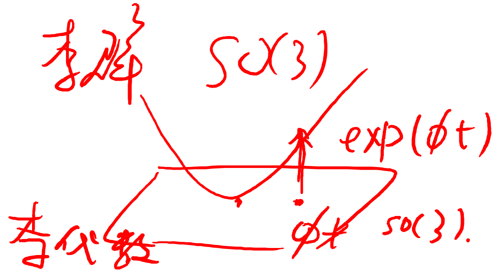
$\dot{x}(t) = a \cdot x(t)$　　$x = e^{at}$

- 在 t_0 附近，假设 ϕ 不变，有微分方程： $\dot{\boldsymbol{R}}(t) = \phi(t_0)^{\wedge}\boldsymbol{R}(t) = \phi_0^{\wedge}\boldsymbol{R}(t).$
- 已知初始情况：$R(0) = I$，解之，得： $\boxed{\boldsymbol{R}(t) = \exp\left(\phi_0^{\wedge}t\right).}$

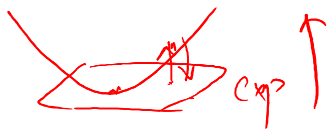
2. 李群与李代数

$R(t) = \exp(\phi_0 t)$

- 该式说明，对任意t，都可以找到一个R和一个 ϕ 的对应关系
- 该关系称为指数映射（Exponential Map）
- 这里的 ϕ 称为SO(3)对应的李代数：so(3)
- 问题：
  - so(3)的定义和性质?
  - 指数映射如何求?



$\exp(\phi^\wedge)$



2. 李群与李代数

- 李代数（Lie Algebra）：
  - 每个李群都有与之对应的李代数。李代数描述了李群单位元附近的正切空间性质。

$SO(3) \to so(3)$

$SE(3) \to se(3)$.

李群 李代数

李代数由一个集合 $\mathbb{V}$，一个数域 $\mathbb{F}$ 和一个二元运算 $[,]$ 组成。如果它们满足以下几条性质，称 $(\mathbb{V}, \mathbb{F}, [,])$ 为一个李代数，记作 $\mathfrak{g}$。

1. 封闭性 $\forall \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathbb{V}, [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] \in \mathbb{V}$.
2. 双线性 $\forall \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \mathbb{V}, a, b \in \mathbb{F}$, 有：
$$[a\boldsymbol{X} + b\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}] = a[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}] + b[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}], \quad [\boldsymbol{Z}, a\boldsymbol{X} + b\boldsymbol{Y}] = a[\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{X}] + b[\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Y}].$$
3. 自反性[①] $\forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{V}, [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}] = \boldsymbol{0}$.
4. 雅可比等价 $\forall \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \mathbb{V}, [\boldsymbol{X}, [\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}]] + [\boldsymbol{Z}, [\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}]] + [\boldsymbol{Y}, [\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{X}]] = \boldsymbol{0}$.

2. 李群与李代数

- 二元运算[,]被称为李括号（Lie Bracket）。
  - 直观上说，李括号表达了两个元素的差异。
- 例子：三维空间向量+叉积运算 构成李代数
- 李代数 so(3)： $\mathfrak{so}(3) = \left\{ \phi \in \mathbb{R}^3, \boldsymbol{\Phi} = \phi^\wedge \in \mathbb{R}^{3\times 3} \right\}.$
- 其中：

so(3)

$$\boldsymbol{\Phi} = \phi^\wedge = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_3 & \phi_2 \\ \phi_3 & 0 & -\phi_1 \\ -\phi_2 & \phi_1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

李括号：

$$[\phi_1, \phi_2] = (\boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{\Phi}_2 - \boldsymbol{\Phi}_2\boldsymbol{\Phi}_1)^\vee.$$

2. 李群与李代数

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

- 同理，SE(3)亦有李代数se(3)：

$$\mathfrak{se}(3) = \left\{ \xi = \begin{bmatrix} \rho \\ \phi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6, \rho \in \mathbb{R}^3, \phi \in \mathfrak{so}(3), \xi^\wedge = \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} \right\}.$$

se(3).

- 上尖尖^ 不再是反对称矩阵，但仍保留记法：

$$\xi^\wedge = \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

李括号：

$$[\xi_1, \xi_2] = \left(\xi_1^\wedge \xi_2^\wedge - \xi_2^\wedge \xi_1^\wedge\right)^\vee.$$

2. 李群与李代数

- 习题部分请你验证se(3)和so(3)的李代数性质
- 注：
  - 不同书籍对se(3)的平移/旋转分量的先后顺序定义不同。这里使用平移在前的方式，也有地方是旋转在前的。
  - 把李代数理解成向量形式或矩阵形式都是可以的。向量形式更加自然一些。

$R \underset{}{\overset{\exp}{\rightleftarrows}} \phi^\wedge$

$T \longrightarrow \xi^\wedge = \begin{bmatrix} \rho \\ \phi \end{bmatrix}$

3. 指数映射和对数映射

3. 指数映射和对数映射

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

$R \quad SO(3) \xleftarrow{\exp(\phi^\wedge)} so(3),\ \phi$

- 指数映射反映了从李代数到李群的对应关系： $\boxed{R = \exp(\phi^\wedge)}$
- 但是 $\phi^\wedge$ 是一个矩阵，对于矩阵，如何定义求指数运算？
- 由于 ϕ 是向量，定义其角度和模长：
  - 角度乘单位向量： $\phi = \theta a$
  - 关于 a，可以验证以下性质：

$\|a\| = 1$

$$\exp(\phi^\wedge) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\phi^\wedge)^n.$$

$$a^\wedge a^\wedge = aa^T - I,$$

$$\underbrace{a^\wedge a^\wedge a^\wedge}_{(a^\wedge)^3} = -a^\wedge.$$

这为化解Taylor展式中的高阶项提供了有效方法

3. 指数映射和对数映射

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

exp ($\phi^\wedge$)

- Taylor展开：

$$
\begin{aligned}
\exp(\phi^\wedge) &= \exp(\theta a^\wedge) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\theta a^\wedge)^n \\
&= I + \theta a^\wedge + \frac{1}{2!}\theta^2 a^\wedge a^\wedge + \frac{1}{3!}\theta^3 a^\wedge a^\wedge a^\wedge + \frac{1}{4!}\theta^4 (a^\wedge)^4 + \ldots \\
&= a a^T - a^\wedge a^\wedge + \theta a^\wedge + \frac{1}{2!}\theta^2 a^\wedge a^\wedge - \frac{1}{3!}\theta^3 a^\wedge - \frac{1}{4!}\theta^4 (a^\wedge)^2 + \ldots \\
&= a a^T + \left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \ldots\right) a^\wedge - \left(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \ldots\right) a^\wedge a^\wedge \\
&= a^\wedge a^\wedge + I + \sin\theta a^\wedge - \cos\theta a^\wedge a^\wedge \\
&= (1 - \cos\theta) a^\wedge a^\wedge + I + \sin\theta a^\wedge \\
&= \cos\theta I + (1 - \cos\theta) a a^T + \sin\theta a^\wedge.
\end{aligned}
$$

- 结果：

$$
\exp(\theta a^\wedge) = \cos\theta I + (1 - \cos\theta) a a^T + \sin\theta a^\wedge.
$$

3. 指数映射和对数映射

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

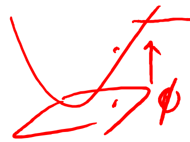
$\phi \underset{\ln\ \log}{\overset{\exp}{\rightleftarrows}} R$

- 上一讲的罗德里格斯公式： $\exp(\theta \boldsymbol{a}^\wedge) = \cos\theta \boldsymbol{I} + (1-\cos\theta)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T + \sin\theta \boldsymbol{a}^\wedge.$
- 这说明 so(3) 的物理意义就是旋转向量　　so(3)
- 反之，给定旋转矩阵时，亦能求李代数：

$$\phi = \ln(\boldsymbol{R})^\vee = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{I})^{n+1}\right)^\vee.$$

对数映射

- 但实际当中没必要这样求，在旋转向量小节已经介绍了矩阵到向量的转换关系： $\theta = \arccos\left(\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{R})-1}{2}\right).$　　$\boldsymbol{R}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}.$　　$\lambda = 1$
- 至此，说明了 SO(3) 与 so(3) 的对应关系。



3. 指数映射和对数映射

- se(3)到SE(3)的指数映射：

$\xi = \begin{bmatrix} \rho \\ \phi \end{bmatrix}$

$$\exp\left(\xi^\wedge\right) = \begin{bmatrix} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\phi^\wedge)^n & \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(\phi^\wedge)^n \boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

$$\triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{J}\boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}.$$

其中J为雅可比矩阵（留作习题）

$$\boldsymbol{J} = \frac{\sin\theta}{\theta}\boldsymbol{I} + \left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T + \frac{1-\cos\theta}{\theta}\boldsymbol{a}^\wedge.$$

3. 指数映射和对数映射

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

三维旋转

李群

$SO(3)$

$R \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$RR^T = I$

$\det(R) = 1$

$\exp(\theta a^\wedge) = \cos\theta I + (1-\cos\theta) a a^T + \sin\theta a^\wedge$ 指数映射

对数映射 $\theta = \arccos \frac{tr(R)-1}{2}$ $\quad Ra = a$

李代数

$\mathfrak{so}(3)$

$\phi \in \mathbb{R}^3$

$$\phi^\wedge = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_3 & \phi_2 \\ \phi_3 & 0 & -\phi_1 \\ -\phi_2 & \phi_1 & 0 \end{bmatrix}$$

三维变换

李群

$SE(3)$

$T \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

$$T = \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

$$\exp(\xi^\wedge) = \begin{bmatrix} \exp(\phi^\wedge) & J\rho \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

$$J = \frac{\sin\theta}{\theta} I + \left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right) a a^T + \frac{1-\cos\theta}{\theta} a^\wedge$$

指数映射

对数映射 $\theta = \arccos \frac{tr(R)-1}{2}$ $\quad Ra = a \quad t = J\rho$

李代数

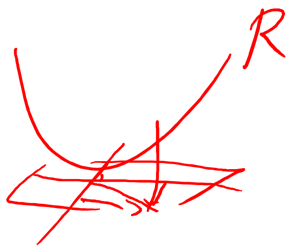
$\mathfrak{se}(3)$

$$\xi = \begin{bmatrix} \rho \\ \phi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

$$\xi^\wedge = \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}$$

4. 李代数求导与扰动模型

4. 求导与扰动模型



- SLAM的定位即位姿估计
- 但李群无加法： $\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2 \notin SO(3)$. 导数无从定义
- 解决办法：
  - 利用李代数上加法定义李群元素的导数？
  - 使用指数映射和对数映射完成变换关系。
- 基本问题：当在李代数中做加法时，是否等价于在李群上做乘法？

$\phi_1 + \phi_2 = \phi$

$R_1 \cdot R_2 = R_1 \cdot R_2$?

$$\underbrace{\exp\left(\phi_1^\wedge\right)}_{R_1} \underbrace{\exp\left(\phi_2^\wedge\right)}_{R_2} = \exp\left(\left(\phi_1 + \phi_2\right)^\wedge\right). \quad ?$$

$e^a \cdot e^b = e^{a+b}$.

$\phi^\wedge$ 3x3

4. 求导与扰动模型

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

$$\exp\left(\phi_1^{\wedge}\right)\exp\left(\phi_2^{\wedge}\right) = \exp\left(\left(\phi_1 + \phi_2\right)^{\wedge}\right).$$

- 在使用标量的情况下，该式明显成立
- 但这里的 $\phi^{\wedge}$ 为矩阵！
- 完整形式由 BCH（Baker-Campbell-Hausdorff）公式给出：
  - 完整形式非常复杂，见：https://en.wikipedia.org/wiki/Baker-Campbell-Hausdorff_formula
  - 部分展开式：（方括号为李括号）

BCH

$$\ln\left(\exp\left(A\right)\exp\left(B\right)\right) = A + B + \frac{1}{2}\left[A, B\right] + \frac{1}{12}\left[A, \left[A, B\right]\right] - \frac{1}{12}\left[B, \left[A, B\right]\right] + \cdots$$

4. 求导与扰动模型

- 当其中一个量为小量时，忽略其高阶项，BCH具有线性近似形式：

$(\cdot)T_{cw}$

$T_{wc}(\cdot)$

$$\ln\left(\exp\left(\phi_1^\wedge\right)\exp\left(\phi_2^\wedge\right)\right)^\vee \approx \begin{cases} \boldsymbol{J}_l(\phi_2)^{-1}\phi_1 + \phi_2 & \text{if } \phi_1 \text{ is small,} \\ \boldsymbol{J}_r(\phi_1)^{-1}\phi_2 + \phi_1 & \text{if } \phi_2 \text{ is small.} \end{cases}$$

- 这里的

$SE(3) \xleftarrow{exp} se(3)$

$$\boldsymbol{J}_l = \boldsymbol{J} = \frac{\sin\theta}{\theta}\boldsymbol{I} + \left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T + \frac{1-\cos\theta}{\theta}\boldsymbol{a}^\wedge.$$

左雅可比

$$\boldsymbol{J}_l^{-1} = \frac{\theta}{2}\cot\frac{\theta}{2}\boldsymbol{I} + \left(1 - \frac{\theta}{2}\cot\frac{\theta}{2}\right)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T - \frac{\theta}{2}\boldsymbol{a}^\wedge.$$

$$\boldsymbol{J}_r(\phi) = \boldsymbol{J}_l(-\phi).$$

右雅可比

4. 求导与扰动模型

- 直观写法（以左乘为例）

$$\exp\left(\Delta\phi^\wedge\right)\exp\left(\phi^\wedge\right)=\exp\left(\left(\phi+\boldsymbol{J}_l^{-1}\left(\phi\right)\Delta\phi\right)^\wedge\right).$$

  - 在李群上左乘小量时，李代数上的加法相差左雅可比的逆
- 反之

$$\exp\left(\left(\phi+\Delta\phi\right)^\wedge\right)=\exp\left(\left(\boldsymbol{J}_l\Delta\phi\right)^\wedge\right)\exp\left(\phi^\wedge\right)=\exp\left(\phi^\wedge\right)\exp\left(\left(\boldsymbol{J}_r\Delta\phi\right)^\wedge\right).$$

  - 李代数上进行小量加法时，相当于李群上左（右）乘一个带左（右）雅可比的量
- SE(3)比SO(3)更复杂：

$$\exp\left(\Delta\xi^\wedge\right)\exp\left(\xi^\wedge\right)\approx\exp\left(\left(\mathcal{J}_l^{-1}\Delta\xi+\xi\right)^\wedge\right),$$

$$\exp\left(\xi^\wedge\right)\exp\left(\Delta\xi^\wedge\right)\approx\exp\left(\left(\mathcal{J}_r^{-1}\Delta\xi+\xi\right)^\wedge\right).$$

这里不展开花体雅可比

$\mathcal{J}_l^{-1}$ state estimation

4. 求导与扰动模型

- 通过BCH线性近似，可以定义李代数上的导数
- 考虑一个基本问题：旋转后的点关于旋转的导数

ϕ

$$\frac{\partial(Rp)}{\partial(R)}$$

不严谨地记为：$\frac{\partial(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{R}}$.

- 由于R没有加法，导数无从定义

$$\lim_{\Delta\phi \to 0} \phi + \Delta\phi$$

- 存在两种解决办法：
  - 对 R 对应的李代数加上小量，求相对于小量的变化率（导数模型）；
  - 对 R 左乘或右乘一个小量，求相对于小量的李代数的变化率（扰动模型）。

$$\lim_{\Delta\phi \to 0} \frac{\Delta R \cdot R}{\Delta\phi}$$

4. 求导与扰动模型

- 导数模型：

$$\frac{\partial \left(\exp\left(\phi^{\wedge}\right) \boldsymbol{p}\right)}{\partial \boldsymbol{\phi}} = \lim_{\delta\boldsymbol{\phi}\to 0} \frac{\exp\left(\left(\boldsymbol{\phi}+\delta\boldsymbol{\phi}\right)^{\wedge}\right) \boldsymbol{p} - \exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right) \boldsymbol{p}}{\delta\boldsymbol{\phi}}$$

$$= \lim_{\delta\boldsymbol{\phi}\to 0} \frac{\exp\left(\left(\boldsymbol{J}_l\delta\boldsymbol{\phi}\right)^{\wedge}\right) \exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right) \boldsymbol{p} - \exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right) \boldsymbol{p}}{\delta\boldsymbol{\phi}}$$

$$\approx \lim_{\delta\boldsymbol{\phi}\to 0} \frac{\left(\boldsymbol{I} + \left(\boldsymbol{J}_l\delta\boldsymbol{\phi}\right)^{\wedge}\right) \exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right) \boldsymbol{p} - \exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right) \boldsymbol{p}}{\delta\boldsymbol{\phi}}$$

$$= \lim_{\delta\boldsymbol{\phi}\to 0} \frac{\left(\boldsymbol{J}_l\delta\boldsymbol{\phi}\right)^{\wedge} \exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right) \boldsymbol{p}}{\delta\boldsymbol{\phi}}$$

$$= \lim_{\delta\boldsymbol{\phi}\to 0} \frac{-\left(\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right) \boldsymbol{p}\right)^{\wedge} \boldsymbol{J}_l\delta\boldsymbol{\phi}}{\delta\boldsymbol{\phi}} = -\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}\right)^{\wedge}\boldsymbol{J}_l.$$

R

$$\frac{\partial Rp}{\partial R}$$

x

- 希望避免雅可比计算

4. 求导与扰动模型

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

- 扰动模型（左乘）
  - 左乘小量，令其李代数为零

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial (\boldsymbol{R}\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{\varphi}} &= \lim_{\boldsymbol{\varphi}\to 0} \frac{\exp(\boldsymbol{\varphi}^\wedge)\exp(\boldsymbol{\phi}^\wedge)\boldsymbol{p} - \exp(\boldsymbol{\phi}^\wedge)\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{\varphi}} \\
&\approx \lim_{\boldsymbol{\varphi}\to 0} \frac{(1+\boldsymbol{\varphi}^\wedge)\exp(\boldsymbol{\phi}^\wedge)\boldsymbol{p} - \exp(\boldsymbol{\phi}^\wedge)\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{\varphi}} \\
&= \lim_{\boldsymbol{\varphi}\to 0} \frac{\boldsymbol{\varphi}^\wedge \boldsymbol{R}\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{\varphi}} = \lim_{\boldsymbol{\varphi}\to 0} \frac{-(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p})^\wedge \boldsymbol{\varphi}}{\boldsymbol{\varphi}} = -(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p})^\wedge.
\end{aligned}
$$

- 更加简洁实用

$\Delta R \; R$

$-(Rp)^\wedge J_l.$

4. 求导与扰动模型

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

- SE(3)上的扰动模型：

$$\frac{\partial (Tp)}{\partial T}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial (\boldsymbol{T}\boldsymbol{p})}{\partial \delta \boldsymbol{\xi}} &= \lim_{\delta \boldsymbol{\xi} \to 0} \frac{\exp(\delta \boldsymbol{\xi}^\wedge)\exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge)\boldsymbol{p} - \exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge)\boldsymbol{p}}{\delta \boldsymbol{\xi}} \\
&\approx \lim_{\delta \boldsymbol{\xi} \to 0} \frac{(\boldsymbol{I} + \delta \boldsymbol{\xi}^\wedge)\exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge)\boldsymbol{p} - \exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge)\boldsymbol{p}}{\delta \boldsymbol{\xi}} \\
&= \lim_{\delta \boldsymbol{\xi} \to 0} \frac{\delta \boldsymbol{\xi}^\wedge \exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge)\boldsymbol{p}}{\delta \boldsymbol{\xi}} \\
&= \lim_{\delta \boldsymbol{\xi} \to 0} \frac{\begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\phi}^\wedge & \delta \boldsymbol{\rho} \\ \boldsymbol{0}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{t} \\ 1 \end{bmatrix}}{\delta \boldsymbol{\xi}} \\
&= \lim_{\delta \boldsymbol{\xi} \to 0} \frac{\begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\phi}^\wedge (\boldsymbol{R}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{t}) + \delta \boldsymbol{\rho} \\ 0 \end{bmatrix}}{\delta \boldsymbol{\xi}} = \boxed{\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & -(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{t})^\wedge \\ \boldsymbol{0}^T & \boldsymbol{0}^T \end{bmatrix}} \triangleq (\boldsymbol{T}\boldsymbol{p})^\odot.
\end{aligned}
$$

4. 求导与扰动模型

- 小结　　思路　李群　李代数
  - 利用BCH线性近似，可以推导so(3)与se(3)上的导数和扰动模型
  - 通常情况下，扰动模型更为简洁实用

$$\boxed{\begin{matrix}\delta x\cdot x\\ \delta R\cdot R\end{matrix}}$$

5. 实践：Sophus库的使用