深蓝学院
shenlanxueyuan.com

视觉SLAM：从理论到实践
第五次课 特征点法视觉里程计

主讲人 高翔

清华大学 自动控制与工程 博士
慕尼黑工业大学计算机视觉组 博士后
Email: gao.xiang.thu@gmail.com

2017年冬

第五讲 特征点法VO

1. 特征点提取与匹配
2. 2D-2D 对极几何
3. 3D-2D PnP
4. 3D-3D ICP
5. 三角化与深度估计
6. 实践穿插于各小节中间

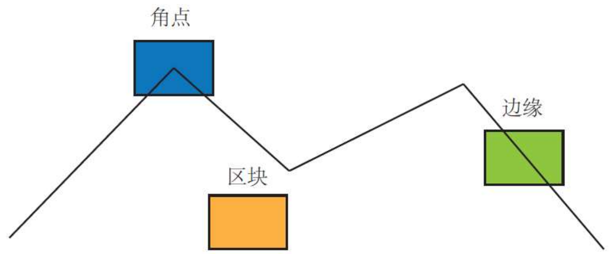
1. 特征点提取与匹配

1. 特征点提取与匹配

- 经典SLAM模型中以位姿——路标（Landmark）来描述SLAM过程
  - 路标是三维空间中固定不变的点，能够在特定位姿下观测到
  - 数量充足，以实现良好的定位
  - 较好的区分性，以实现数据关联
- 在视觉SLAM中，可利用图像特征点作为SLAM中的路标

1. 特征点提取与匹配

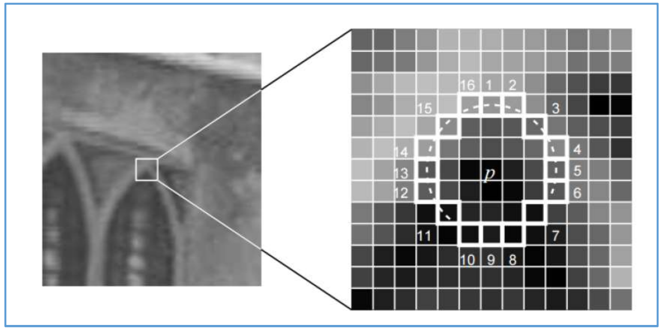
- 特征点：图像当中具有代表性的部分
  - 可重复性
  - 可区别性
  - 高效
  - 本地
- 特征点的信息
  - 位置、大小、方向、评分等——关键点
  - 特征点周围的图像信息——描述子（Descriptor）
- 例子：SIFT/SURF/ORB　　见OpenCV features2d模块



特征描述应该在光照、视角发生少量变化时仍能保持一致

1. 特征点提取与匹配

- 例子：ORB特征
  - 关键点：Oriented FAST
  - 描述：BRIEF
- FAST
  - 连续N个点的灰度有明显差异
- Oriented FAST
  - 在FAST基础上计算旋转



1. 在一个小的图像块 B 中，定义图像块的矩为：

$$m_{pq} = \sum_{x,y \in B} x^p y^q I(x,y), \quad p,q = \{0,1\}.$$

2. 通过矩可以找到图像块的质心：

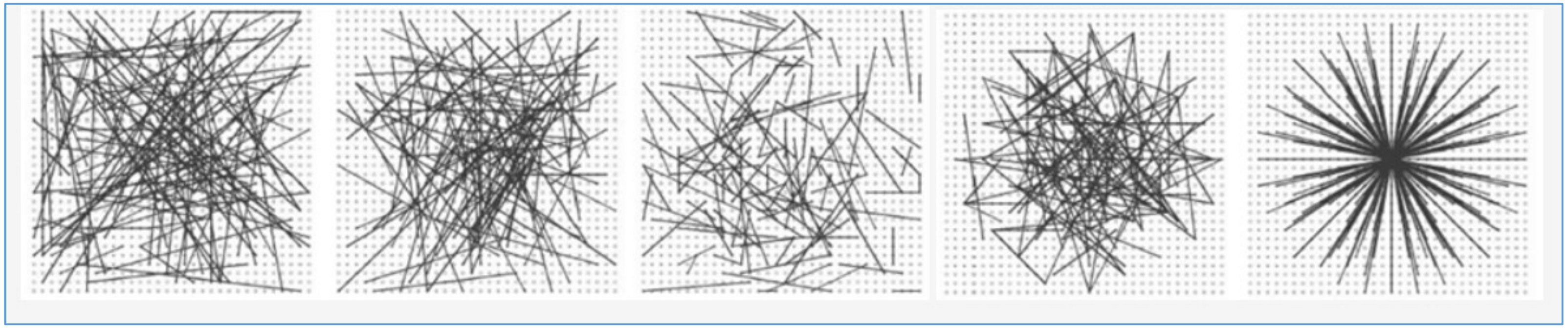
$$C = \left(\frac{m_{10}}{m_{00}}, \frac{m_{01}}{m_{00}}\right).$$

3. 连接图像块的几何中心 O 与质心 C，得到一个方向向量 $\overrightarrow{OC}$，于是特征点的方向可以定义为：

$$\theta = \arctan(m_{01}/m_{10}).$$

1. 特征点提取与匹配

- BRIEF
  - BRIEF-128：在特征点附近的128次像素比较

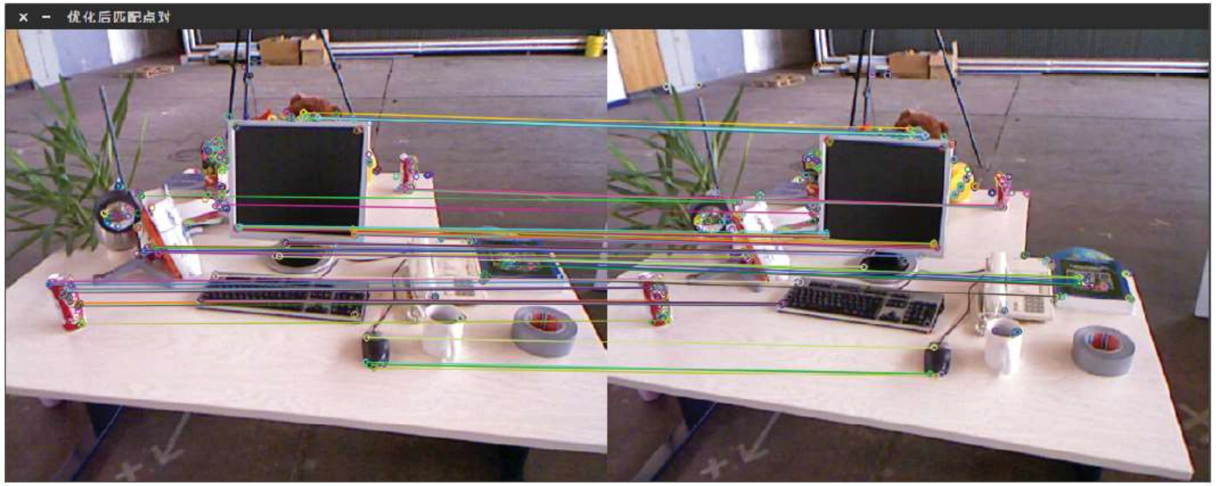


BRIEF的比较pattern

  - ORB：旋转之后的BRIEF描述
  - BRIEF是一种二进制描述，需要用汉明距离度量

1. 特征点提取与匹配

- 特征匹配
  - 通过描述子的差异判断哪些特征为同一个点
  - 暴力匹配：比较图1中每个特征和图2特征的距离
  - 加速：快速最近邻（FLANN）



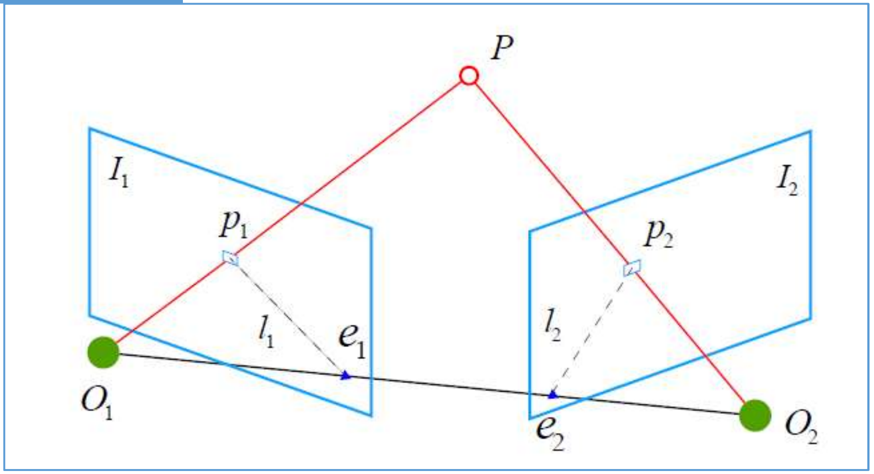
2. 2D-2D 对极几何

2. 2D-2D 对极几何

- 特征匹配之后，得到了特征点之间的对应关系
  - 如果只有两个单目图像，得到2D-2D间的关系 ——对极几何
  - 如果匹配的是帧和地图，得到3D-2D间的关系 ——PnP
  - 如果匹配的是RGB-D图，得到3D-3D间的关系 ——ICP

2. 2D-2D 对极几何

- 几何关系：
  - P在两个图像的投影为 p_1, p_2
  - 两个相机之间的变换为 T_{12}
  - O_1P 在第二个图像上投影为 e_2p_2
    - 记 l_2，称为极线，反之亦然
  - e_1, e_2 称为极点
- 实践当中：
  - p_1, p_2 通过特征匹配得到，P未知，e_1, e_2 未知
  - T_{12} 待求



2. 2D-2D 对极几何

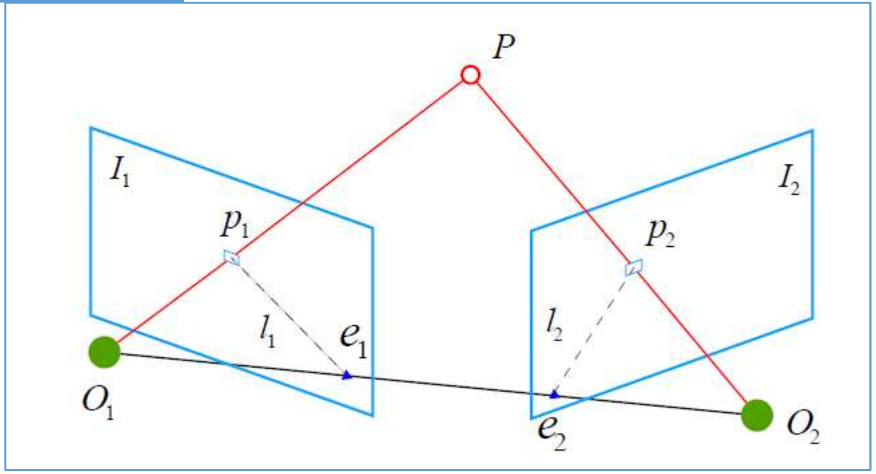
- 世界坐标： $P = [X, Y, Z]^T.$
- 以第一个图为参考系，投影方程：

$$s_1 p_1 = KP, \quad s_2 p_2 = K(RP + t).$$

- 使用归一化坐标（去掉内参）：

$$x_1 = K^{-1} p_1, \quad x_2 = K^{-1} p_2.$$

- 齐次关系： $x_2 = Rx_1 + t.$
- 两侧左乘： $t^\wedge x_2 = t^\wedge R x_1.$
- 再一步左乘： $x_2^T t^\wedge x_2 = x_2^T t^\wedge R x_1.$



对极约束：

$$x_2^T t^\wedge R x_1 = 0.$$

带内参的形式：

$$p_2^T K^{-T} t^\wedge R K^{-1} p_1 = 0.$$

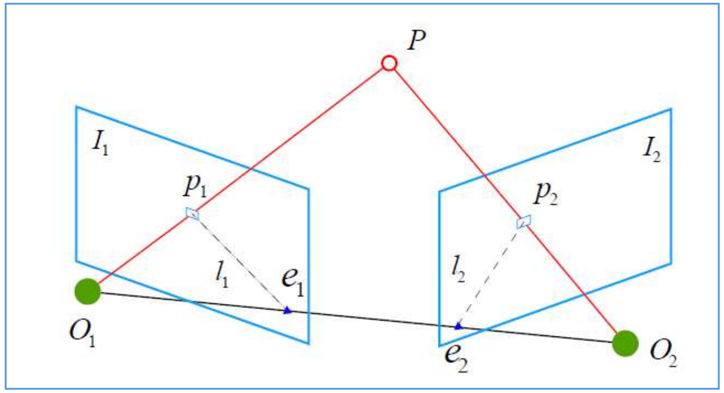
2. 2D-2D 对极几何

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

- 对极约束刻画了 O_1, O_2, P 共面的关系
- 定义：

$$\boxed{E = t^\wedge R, \quad F = K^{-T} E K^{-1}, \quad x_2^T E x_1 = p_2^T F p_1 = 0.}$$

  - Essential矩阵
  - Fundamental矩阵
  - 在内参已知的情况下，可以使用E
- 两步计算位姿：
  - 由匹配点计算E
  - 由E恢复R,t



$$\boxed{x_2^T t^\wedge R x_1 = 0.}$$

$$\boxed{p_2^T K^{-T} t^\wedge R K^{-1} p_1 = 0.}$$

- 对极约束的性质：
  - 乘任意非零常数依然满足
  - E共五个自由度
    - 当成普通矩阵的话，有八个自由度
    - 可用八点法求解

2. 2D-2D 对极几何

- 八点法求E
  - 将E看成通常3x3的矩阵，去掉因子后剩八个自由度
  - 一对匹配点带来的约束：

$$\begin{pmatrix} u_1, v_1, 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_4 & e_5 & e_6 \\ e_7 & e_8 & e_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

  - 向量形式： $e = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9]^T,$

$$[u_1u_2, u_1v_2, u_1, v_1u_2, v_1v_2, u_2, v_2, 1] \cdot e = 0.$$

八对点构成方程组

$$\begin{pmatrix} u_1^1u_2^1 & u_1^1v_2^1 & u_1^1 & v_1^1u_2^1 & v_1^1v_2^1 & v_1^1 & u_2^1 & v_2^1 & 1 \\ u_1^2u_2^2 & u_1^2v_2^2 & u_1^2 & v_1^2u_2^2 & v_1^2v_2^2 & v_1^2 & u_2^2 & v_2^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ u_1^8u_2^8 & u_1^8v_2^8 & u_1^8 & v_1^8u_2^8 & v_1^8v_2^8 & v_1^8 & u_2^8 & v_2^8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \\ e_9 \end{pmatrix} = 0.$$

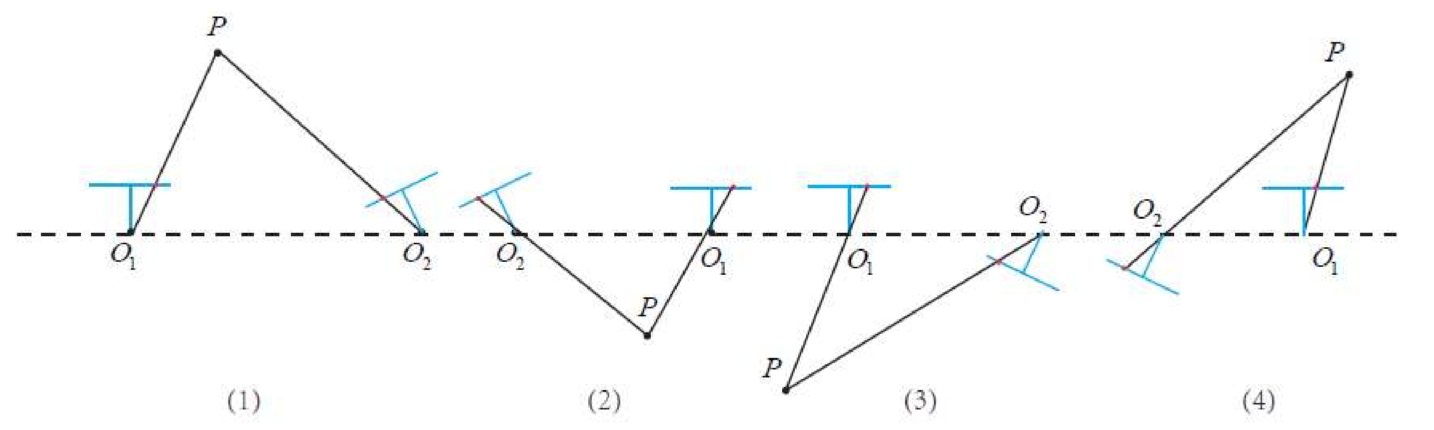
2. 2D-2D 对极几何

- 从E计算R, t：奇异值分解

$$E = U\Sigma V^T,$$

$$t_1^\wedge = UR_Z(\tfrac{\pi}{2})\Sigma U^T, \quad R_1 = UR_Z^T(\tfrac{\pi}{2})V^T$$
$$t_2^\wedge = UR_Z(-\tfrac{\pi}{2})\Sigma U^T, \quad R_2 = UR_Z^T(-\tfrac{\pi}{2})V^T.$$

四个可能的解，但只有一个深度为正



2. 2D-2D 对极几何

- SVD过程中：
  - 取 $E = U \mathrm{diag}(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0) V^T.$ 因为E的内在性质要求它的奇异值为 $\sigma, \sigma, 0$
- 最少可使用五个点计算R,t，称为五点法
  - 但需要利用E的非线性性质，原理较复杂

2. 2D-2D 对极几何

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

- 八点法的讨论
  - 用于单目SLAM的初始化
  - 尺度不确定性：归一化 t 或特征点的平均深度
  - 纯旋转问题：t=0 时无法求解
  - 多于八对点时：最小二乘
  - 有外点时：RANSAC

2. 2D-2D 对极几何

- 从单应矩阵恢复R,t：
  - 八点法在特征点共面时会退化
  - 设特征点位于某平面上： $n^T P + d = 0.$ 或 $-\frac{n^T P}{d} = 1.$
  - 两个图像特征点的坐标关系：

$$\begin{aligned} p_2 &= K(RP + t) \\ &= K\left(RP + t \cdot \left(-\frac{n^T P}{d}\right)\right) \\ &= K\left(R - \frac{tn^T}{d}\right)P \\ &= K\left(R - \frac{tn^T}{d}\right)K^{-1}p_1. \end{aligned}$$

中间记为H

$$p_2 = Hp_1.$$

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_4 & h_5 & h_6 \\ h_7 & h_8 & h_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. 2D-2D 对极几何

- 该式是在非零因子下成立的
  - 去掉第三行：
    $$u_2 = \frac{h_1 u_1 + h_2 v_1 + h_3}{h_7 u_1 + h_8 v_1 + h_9}$$
    $$v_2 = \frac{h_4 u_1 + h_5 v_1 + h_6}{h_7 u_1 + h_8 v_1 + h_9}.$$
  - 一对点提供两个约束
  - 写成关于H的线性方程：
- 类似八点法
  - 先计算H
  - 再用H恢复R,t,n,d,K （8选1）

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_4 & h_5 & h_6 \\ h_7 & h_8 & h_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}
u_1^1 & v_1^1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_1^1 u_2^1 & -v_1^1 u_2^1 \\
0 & 0 & 0 & u_1^1 & v_1^1 & 1 & -u_1^1 v_2^1 & -v_1^1 v_2^1 \\
u_1^2 & v_1^2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_1^2 u_2^2 & -v_1^2 u_2^2 \\
0 & 0 & 0 & u_1^2 & v_1^2 & 1 & -u_1^2 v_2^2 & -v_1^2 v_2^2 \\
u_1^3 & v_1^3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_1^3 u_2^3 & -v_1^3 u_2^3 \\
0 & 0 & 0 & u_1^3 & v_1^3 & 1 & -u_1^3 v_2^3 & -v_1^3 v_2^3 \\
u_1^4 & v_1^4 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_1^4 u_2^4 & -v_1^4 u_2^4 \\
0 & 0 & 0 & u_1^4 & v_1^4 & 1 & -u_1^4 v_2^4 & -v_1^4 v_2^4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \\ h_7 \\ h_8 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} u_2^1 \\ v_2^1 \\ u_2^2 \\ v_2^2 \\ u_2^3 \\ v_2^3 \\ u_2^4 \\ v_2^4 \end{pmatrix}.$$

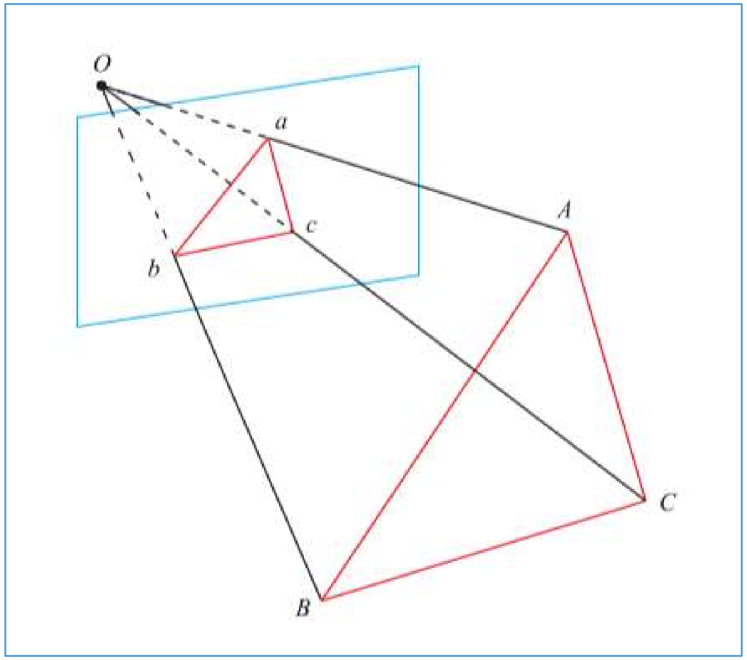
2. 2D-2D 对极几何

- 小结
- 2D-2D情况下，只知道图像坐标之间的对应关系
  - 当特征点在平面上时（例如俯视或仰视），使用H恢复R,t
  - 否则，使用E或F恢复R,t
  - t 没有尺度
- 求得R,t后：
  - 利用三角化计算特征点的3D位置（即深度）
- 实际中用于单目SLAM的初始化部分

3. 3D-2D PnP

3. 3D-2D PnP

- 已经3D点的空间位置和相机上的投影点，求相机的旋转和平移（外参）
- 代数的解法/优化的解法
- 代数的
  - DLT
  - P3P
  - EPnP/UPnP/…
- 优化的：Bundle Adjustment



3. 3D-2D PnP

- DLT
  - 设空间点 $P = (X, Y, Z, 1)^T$
  - 投影点为：$x = (u, v, 1)$ 归一化坐标
  - 投影关系：$sx = [R|t]p$
  - 展开：

$$s\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ t_5 & t_6 & t_7 & t_8 \\ t_9 & t_{10} & t_{11} & t_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  - 将它看成一个关于t的线性方程，求解t

- 注意最下一行为

$$s = [t_9, t_{10}, t_{11}, t_{12}][X, Y, Z, 1]^T$$

- 用它消掉前两行中的s，则一个特征点提供两个方程：

$$\boldsymbol{t}_1 = (t_1, t_2, t_3, t_4)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{t}_2 = (t_5, t_6, t_7, t_8)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{t}_3 = (t_9, t_{10}, t_{11}, t_{12})^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{t}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{t}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}u_1 = 0, \qquad \boldsymbol{t}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{t}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}v_1 = 0.$$

- 为求解12个未知数，需要12/2=6对点。（超定时求最小二乘解）

3. 3D-2D PnP

- DLT将R,t看成独立的未知量，所以在求出结果后，需要将t组成的矩阵投影回SO(3)（通常用QR分解实现）
- 此外，也可代入内参矩阵K，但SLAM中一般假设K已知，所以这里没有代入。

$$s\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ t_5 & t_6 & t_7 & t_8 \\ t_9 & t_{10} & t_{11} & t_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

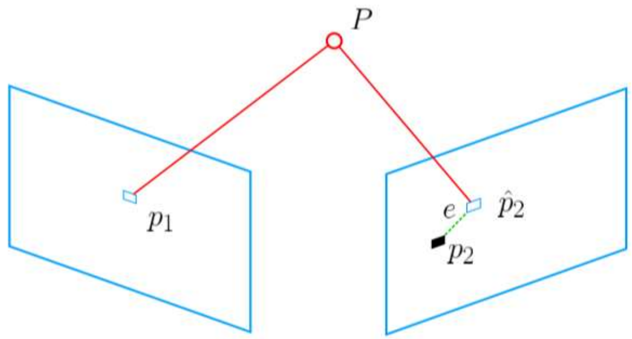
- 除DLT外：
  - P3P：利用三对点求相机外参
  - EPnP
  - ……

3. 3D-2D PnP

- PnP的优化解法：Bundle Adjustment
  - 最小化重投影误差（Minimizing a reprojection error）
  - 投影关系：$s_i \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{K} \exp\left(\boldsymbol{\xi}^\wedge\right) \boldsymbol{P}_i.$
  - 定义重投影误差并取最小化：

$$\boldsymbol{\xi}^* = \arg\min_{\boldsymbol{\xi}} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left\| \boldsymbol{u}_i - \frac{1}{s_i} \boldsymbol{K} \exp\left(\boldsymbol{\xi}^\wedge\right) \boldsymbol{P}_i \right\|_2^2 .$$

P：3d点，ξ 相机位姿 K 内参 u 投影



3. 3D-2D PnP

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

- 线性化和雅可比
  - 考虑单个投影点误差：$e_i = u_i - \frac{1}{s_i} K\exp(\xi^\wedge) P_i$
  - 线性化：$e_i(x + \Delta x) \approx e_i(x) + J(x)\Delta x$
  - 雅可比的形式？

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial \delta \boldsymbol{\xi}} = \lim_{\delta \boldsymbol{\xi} \to 0} \frac{\boldsymbol{e}(\delta \boldsymbol{\xi} \oplus \boldsymbol{\xi})}{\delta \boldsymbol{\xi}} = \frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial \boldsymbol{P}'} \frac{\partial \boldsymbol{P}'}{\partial \delta \boldsymbol{\xi}}.$$

第一项：

$$\begin{bmatrix} su \\ sv \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}.$$

$$u = f_x \frac{X'}{Z'} + c_x, \quad v = f_y \frac{Y'}{Z'} + c_y.$$

P’为P在相机坐标系下的坐标：

$$\boldsymbol{P}' = \left(\exp\left(\boldsymbol{\xi}^\wedge\right) \boldsymbol{P}\right)_{1:3} = [X', Y', Z']^{\mathrm{T}}.$$

对P’进行投影：

$$s\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{P}'.$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial \boldsymbol{P}'} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X'} & \frac{\partial u}{\partial Y'} & \frac{\partial u}{\partial Z'} \\ \frac{\partial v}{\partial X'} & \frac{\partial v}{\partial Y'} & \frac{\partial v}{\partial Z'} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{f_x}{Z'} & 0 & -\frac{f_x X'}{Z'^2} \\ 0 & \frac{f_y}{Z'} & -\frac{f_y Y'}{Z'^2} \end{bmatrix}.$$

3. 3D-2D PnP

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial \delta \boldsymbol{\xi}} = \lim_{\delta \boldsymbol{\xi} \to 0} \frac{e(\delta \boldsymbol{\xi} \oplus \boldsymbol{\xi})}{\delta \boldsymbol{\xi}} = \frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial \boldsymbol{P}'} \frac{\partial \boldsymbol{P}'}{\partial \delta \boldsymbol{\xi}}.$$

- 第二项： $$\frac{\partial (\boldsymbol{TP})}{\partial \delta \boldsymbol{\xi}} = (\boldsymbol{TP})^{\odot} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{P}'^{\wedge} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}.$$
- 非齐次形式： $$\frac{\partial \boldsymbol{P}'}{\partial \delta \boldsymbol{\xi}} = [\boldsymbol{I}, -\boldsymbol{P}'^{\wedge}].$$
- 两项相乘：

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial \delta \boldsymbol{\xi}} = -\begin{bmatrix} \frac{f_x}{Z'} & 0 & -\frac{f_x X'}{Z'^2} & -\frac{f_x X' Y'}{Z'^2} & f_x + \frac{f_x X^2}{Z'^2} & -\frac{f_x Y'}{Z'} \\ 0 & \frac{f_y}{Z'} & -\frac{f_y Y'}{Z'^2} & -f_y - \frac{f_y Y'^2}{Z'^2} & \frac{f_y X' Y'}{Z'^2} & \frac{f_y X'}{Z'} \end{bmatrix}.$$

3. 3D-2D PnP

- 也可以对3D点求导：

$$e_i = u_i - \frac{1}{s_i} K \exp(\xi^{\wedge}) P_i$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial \boldsymbol{P}} = -\begin{bmatrix} \frac{f_x}{Z'} & 0 & -\frac{f_x X'}{Z'^2} \\ 0 & \frac{f_y}{Z'} & -\frac{f_y Y'}{Z'^2} \end{bmatrix} \boldsymbol{R}.$$

4. 3D-3D ICP

4. 3D-2D ICP

- 给定配对好的两组3D点，求其旋转和平移，可用迭代最近点（Iterative Closest Point，ICP求解）
- 设： $\boldsymbol{P} = \{\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n\}, \quad \boldsymbol{P}' = \{\boldsymbol{p}'_1, \cdots, \boldsymbol{p}'_n\},$
- 运动关系： $\forall i, \boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{R}\boldsymbol{p}'_i + \boldsymbol{t}.$
- 同样定义误差项： $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{p}_i - (\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}'_i + \boldsymbol{t}).$
- 以及最小二乘问题：

$$\boxed{\min_{\boldsymbol{R},\boldsymbol{t}} J = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \|(\boldsymbol{p}_i - (\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}_i{}' + \boldsymbol{t}))\|_2^2.}$$

4. 3D-2D ICP

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

$$\min_{\boldsymbol{R},\boldsymbol{t}} J = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \|(\boldsymbol{p}_i - (\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}_i{}' + \boldsymbol{t}))\|_2^2.$$

- 稍加推导：

1. 定义质心：

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{p}_i), \quad \boldsymbol{p}' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{p}_i').$$

2. 改写目标函数：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\|\boldsymbol{p}_i - (\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}_i{}' + \boldsymbol{t})\|^2 &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\|\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{R}\boldsymbol{p}_i{}' - \boldsymbol{t} - \boldsymbol{p} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{p}' + \boldsymbol{p} - \boldsymbol{R}\boldsymbol{p}'\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\|(\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p} - \boldsymbol{R}(\boldsymbol{p}_i{}' - \boldsymbol{p}')) + (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{R}\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{t})\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\|\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p} - \boldsymbol{R}(\boldsymbol{p}_i{}' - \boldsymbol{p}')\|^2 + \|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{R}\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{t}\|^2 + \\
&\qquad 2(\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p} - \boldsymbol{R}(\boldsymbol{p}_i{}' - \boldsymbol{p}'))^T(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{R}\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{t})).
\end{aligned}$$

交叉项部分求和为零 =>

4. 3D-2D ICP

- 目标函数简化为：

$$\min_{\boldsymbol{R},\boldsymbol{t}} J = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p} - \boldsymbol{R}(\boldsymbol{p}_i{}' - \boldsymbol{p}')\|^2 + \|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{R}\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{t}\|^2.$$

只和R有关

和R,t都有关

- 最小化第一项，然后取t，使得后一项为零。

- 左侧项如何求？

4. 3D-2D ICP

$$\min_{\boldsymbol{R},\boldsymbol{t}} J = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p} - \boldsymbol{R}(\boldsymbol{p}_i' - \boldsymbol{p}')\|^2 + \|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{R}\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{t}\|^2.$$

- 旋转的求取
  - 定义去质心坐标：

$$\boldsymbol{q}_i = \boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{q}_i' = \boldsymbol{p}_i' - \boldsymbol{p}'.$$

  - 最小化：

$$\boldsymbol{R}^* = \arg\min_{\boldsymbol{R}} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{R}\boldsymbol{q}_i'\|^2.$$

- 推导：

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{R}\boldsymbol{q}_i'\|^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{q}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_i + \boldsymbol{q}_i'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{q}_i' - 2\boldsymbol{q}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{q}_i'.$$

- 最右一项：

$$\sum_{i=1}^{n} -\boldsymbol{q}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{q}_i' = \sum_{i=1}^{n} -\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{q}_i'\boldsymbol{q}_i^{\mathrm{T}}\right) = -\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{R}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{q}_i'\boldsymbol{q}_i^{\mathrm{T}}\right).$$

- SVD解法：

$$\boldsymbol{W} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{q}_i\boldsymbol{q}_i'^{\mathrm{T}}. \qquad \boldsymbol{W} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}. \quad \boldsymbol{R} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}.$$

4. 3D-2D ICP

- ICP也可以从非线性优化角度求解，但：
  - 已知匹配时，ICP问题存在唯一解或无穷多解的情况。在唯一解的情况下，只要能找到极小值解，那么这个极小值就是全局最优值。
  - 所以正常情况下，SVD结果和优化一样，且优化很快收敛。

- 注：
  - 在激光情况下，匹配点未知，将指定最近点为匹配点。此时问题非凸，极小值不一定为最小值。
  - 利用非线性优化可以将ICP与PnP结合在一起求解。

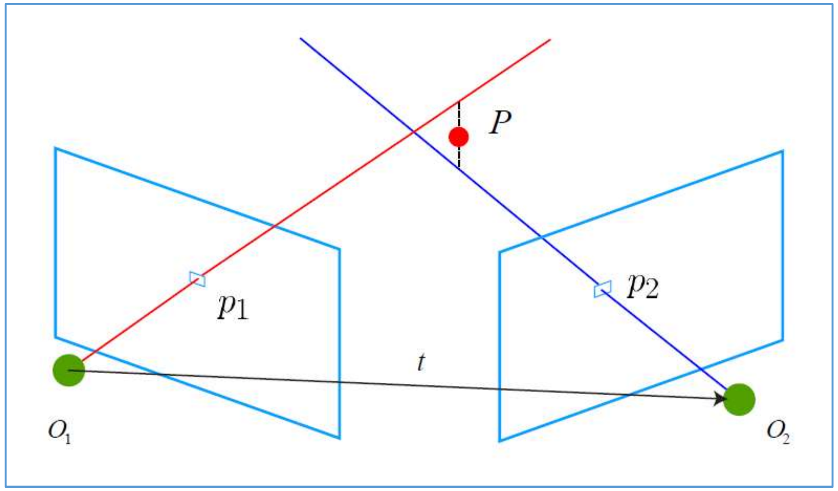
5. 三角化与深度估计

5. 三角化与深度估计

- 已知运动时，求解特征点的3D位置
- 几何关系：$\boxed{s_1 x_1 = s_2 R x_2 + t.}$
- 求 s_2 时，两侧乘 $x_1^\wedge$

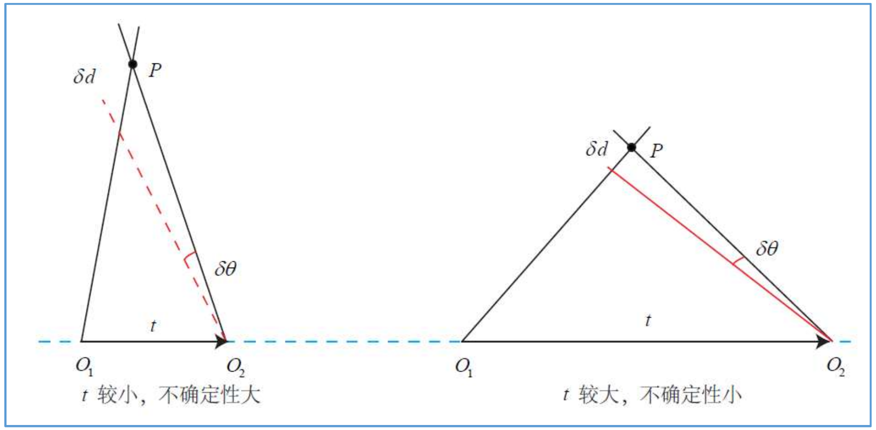
$$\boxed{s_1 x_1^\wedge x_1 = 0 = s_2 x_1^\wedge R x_2 + x_1^\wedge t.}$$

  - 反之亦然
- 或者同时解 s_1, s_2 ：
  - 求 $[-Rx_2, x_1]\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = t$ 的最小二乘解 $x = (A^T A)^{-1} A^T b$



5. 三角化与深度估计

- 三角化中的问题：
  - 解得深度的质量与平移相关
  - 但是平移大时特征匹配可能不成功
- 方程 $[-Rx_2, x_1]\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = t$
  - 系数矩阵伪逆不可靠
  - $A^T A$ 行列式近零
  - 例如：相机前进时，虽然有位移，但位于图像中心的点无法三角化（没有视差）



5. 三角化与深度估计

- 小结：
- 本章介绍了与特征点相关的视觉里程计部分算法，包括：
  - 特征点是如何提取并匹配的；
  - 如何通过2D-2D的特征点估计相机运动；
  - 三角化原理；
  - 3D-2D的PnP问题，线性解法与BA解法；
  - 3D-3DICP问题，线性解法与BA解法。