第三节课习题

高翔

2017 年 12 月 10 日

1 习题说明

- 第 i 节课习题所有材料打包在 Li.zip 中，$\forall i = 1 \dots 8$。
- 习题分为若干种：**计算类**习题，需要读者编程计算一个实际问题，我们会附有参考答案以供自测。**操作类**习题，会指导读者做一个具体的实验，给出中间步骤截图或结果。**简述类**习题则提供阅读材料，需要读者阅读材料后，回答若干问题。
- 每个习题会有一定的分值。每次习题分值加和为 10 分。你需要获得 8 分以上才能得到"通过"的评价。带 $*$ 的习题为附加题，会在总分之外再提供一定的分值，所以总和可能超过 10 分。换句话说，你也可以选择一道附加题，跳过一道正常题。
- 每道习题的给分由助教评判，简述类习题可能存在一定开放性，所以评分也存在主观因素。
- 请利用深蓝学院系统提交习题。每次习题我们会记通过与否。提交形式为 word 或 pdf 格式报告，如有编程习题请提交可编译的源码。
- 为方便读者，我通常会准备一些阅读材料，放在 books/或 papers/目录下。请读者按个人需求使用这些材料。它们多数是从网络下载的，如果侵犯到你的权利，请及时告诉我。
- 每个习题会标注大致用时，但视同学个人水平可能会有出入。
- 习题的完成情况会影响你对本课程内容的掌握程度，请认真、独立完成。**习题总得分较高的同学将获得推荐资格**。

2 验证向量叉乘的李代数性质（2 分，约 1 小时）

我们说向量和叉乘运算构成了李代数，现在请你验证它。书中对李代数的定义为：李代数由一个集合 $\mathbb{V}$，一个数域 $\mathbb{F}$ 和一个二元运算 $[,]$ 组成。如果它们满足以下几条性质，称 $(\mathbb{V}, \mathbb{F}, [,])$ 为一个李代数，记作 $\mathfrak{g}$。

1. 封闭性 $\forall \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathbb{V}, [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] \in \mathbb{V}$.
2. 双线性 $\forall \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \mathbb{V}, a, b \in \mathbb{F}$, 有：

$$[a\boldsymbol{X} + b\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}] = a[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}] + b[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}], \quad [\boldsymbol{Z}, a\boldsymbol{X} + b\boldsymbol{Y}] = a[\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{X}] + b[\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Y}].$$

3. 自反性[1] $\forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{V}, [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}] = \boldsymbol{0}$.
4. 雅可比等价 $\forall \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \mathbb{V}, [\boldsymbol{X}, [\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}]] + [\boldsymbol{Z}, [\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}]] + [\boldsymbol{Y}, [\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{X}]] = \boldsymbol{0}$.

其中二元运算被称为**李括号**。

现取集合 $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$，数域 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$，李括号为：

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}. \tag{1}$$

请验证 $\mathfrak{g} = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, \times)$ 构成李代数。

[1] 自反性是指自己与自己的运算为零。

3　推导 SE(3) 的指数映射（3 分，约 1 小时）

课上给出了 SO(3) 的指数映射推导，但对于 SE(3)，仅介绍了结论，没有给出详细推导。请你完成 SE(3) 指数映射部分，有关左雅可比的详细推导。

设 $\boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\phi}]^{\mathrm{T}} \in \mathfrak{se}(3)$，它的指数映射为：

$$\exp\left(\boldsymbol{\xi}^{\wedge}\right) = \begin{bmatrix} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\boldsymbol{\phi}^{\wedge})^n & \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(\boldsymbol{\phi}^{\wedge})^n \boldsymbol{\rho} \\ 0^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

令 $\boldsymbol{\rho} = \theta \boldsymbol{a}$，那么：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(\boldsymbol{\phi}^{\wedge})^n = \frac{\sin\theta}{\theta} I + \left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right) \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T + \frac{1-\cos\theta}{\theta} \boldsymbol{a}^{\wedge} \triangleq \boldsymbol{J}. \tag{3}$$

这也正是课件里提到的左雅可比。

提示：类比于 SO(3) 的泰勒展开，然后合并奇偶数项级数即得。

4 伴随（2 分，约 1 小时）

在 SO(3) 和 SE(3) 上，有一个东西称为伴随（Adjoint）。下面请你证明 SO(3) 伴随的性质。

对于 SO(3)，有：

$$\boldsymbol{R} \exp\left(\boldsymbol{p}^{\wedge}\right) \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \exp\left((\boldsymbol{R}\boldsymbol{p})^{\wedge}\right). \tag{4}$$

此时称 $\mathrm{Ad}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R}$。

提示：首先你需要证明 $\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3, \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{R}\boldsymbol{a})^{\wedge}$，页面`https://math.stackexchange.com/questions/2190603/derivation-of-adjoint-for-so3`提示了一种简洁的途径。

对于 SE(3)，有：

$$\boldsymbol{T} \exp(\boldsymbol{\xi}^{\wedge}) \boldsymbol{T}^{-1} = \exp\left((\mathrm{Ad}(\boldsymbol{T})\boldsymbol{\xi})^{\wedge}\right) \tag{5}$$

其中 $\mathrm{Ad}(\boldsymbol{T})$ 定义为：

$$\mathrm{Ad}(\boldsymbol{T}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t}^{\wedge}\boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{R} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

这个性质将在后文的 Pose Graph 优化中用到。但是 SE(3) 的证明较为复杂，不作要求。

5 轨迹的描绘（3 分，约 1 小时）

我们通常会记录机器人的运动轨迹，来观察它的运动是否符合预期。大部分数据集都会提供标准轨迹以供参考，如 kitti、TUM-RGBD 等。这些文件会有各自的格式，但首先你要理解它的内容。记世界坐标系为 W，机器人坐标系为 C，那么机器人的运动可以用 $\boldsymbol{T}_{WC}$ 或 $\boldsymbol{T}_{CW}$ 来描述。现在，我们希望画出机器人在世界当中的运动轨迹，请回答以下问题：

1. 事实上，$\boldsymbol{T}_{WC}$ 的平移部分即构成了机器人的轨迹。它的物理意义是什么？为何画出 $\boldsymbol{T}_{WC}$ 的平移部分就得到了机器人的轨迹？
2. 我为你准备了一个轨迹文件（code/trajectory.txt）。该文件的每一行由若干个数据组成，格式为

$$[t, t_x, t_y, t_z, q_x, q_y, q_z, q_w],$$

   其中 t 为时间，t_x, t_y, t_z 为 $\boldsymbol{T}_{WC}$ 的平移部分，q_x, q_y, q_z, q_w 是四元数表示的 $\boldsymbol{T}_{WC}$ 的旋转部分，q_w 为四元数实部。同时，我为你提供了画图程序 draw_trajectory.cpp 文件。该文件提供了画图部分的代码，请你完成数据读取部分的代码，然后书写 CMakeLists.txt 以让此程序运行起来。注意我们需要用到 Pangolin 库来画图，所以你需要事先安装 Pangolin（如果你做了第一次作业，那么现在已经安装了）。CMakeLists.txt 可以参照 ORB-SLAM2 部分。

6 * 轨迹的误差（2 分，约 1 小时）

本题为附加题。

除了画出真实轨迹以外，我们经常需要把 SLAM 估计的轨迹与真实轨迹相比较。下面说明比较的原理，请你完成比较部分的代码实现。

设真实轨迹（ground-truth）为 $\boldsymbol{T}_g$，估计轨迹 $\boldsymbol{T}_e$。它们都以 $\boldsymbol{T}_{WC}$ 的形式存储，格式同上题。现在，你需要计算估计轨迹的误差。我们假设每一个 $\boldsymbol{T}_g$ 都与给定的 $\boldsymbol{T}_e$ 对应。那么，对于任意第 i 个位姿，它的误差可定义为：

$$e_i = \| \log(\boldsymbol{T}_{gi}^{-1}\boldsymbol{T}_{ei})^{\vee} \|_2. \tag{7}$$

即两个位姿之差的李代数二范数。于是，可以定义两条轨迹的均方根（Root-Mean-Square-Error, RMSE）误差为：

$$\mathrm{RMSE}(g, e) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i^2}. \tag{8}$$

我为你准备了 code/ground-truth.txt 和 code/estimate.txt 两条轨迹。请你根据上面公式，实现 RMSE 的计算代码，给出最后的 RMSE 结果。作为验算，参考答案为：0.0889745。

注：

1. 实际当中的轨迹比较还要更复杂一些。通常 ground-truth 由其他传感器记录（如 vicon），它的采样频率通常高于相机的步骤，所以在处理之前还需要按照时间戳对齐。另外，由于传感器坐标系不一致，还需要计算两个坐标系之间的差异。这件事也可以用 ICP 解得，我们将在后面的课程中讲到。
2. 你可以用上题的画图程序将两条轨迹画在同一个图里，看看它们相差多少。