$Lecture2$

$rrison$

- 2.1 $Ax = b$,有且只有一个解的条件是$rank(A) = rank([A\ b]) =$ 未知解的个数
- 2.2 高斯消元法的原理是通过初等行变换把A变换为上三角矩阵，然后递归的求解未知量
- 2.3 QR分解的原理是把A分解成正交矩阵Q和上三角矩阵R的乘积。然后最小化欧几里得范数：
$min(\|Ax - b\|)$，左乘正交矩阵$Q^{`}$，$min(\|Q^{'}QRx - Q^{`}b\|) = min(\|Rx - Q^{'}b\|)$
- 2.4 Cholesky 分解把矩阵分解为一个下三角矩阵及其共轭转置矩阵的乘积，$A = LL^*$.
- 2.5 见matrix_decomp文件夹

---

3 见calc_quat文件夹

---

4 证明罗德里格斯公式 $R = cos\theta \cdot I + (1 - cos\theta)nn^T + sin\theta \cdot n\hat{}$
已知三重叉乘公式：

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c) \cdot b - (a \cdot b) \cdot c \tag{1}$$

证明公式(1):
$(a \times (b \times c))_x = (a \cdot c) \cdot b_x - (a \cdot b) \cdot c_x$

$(a \times (b \times c))_x = (a \cdot c) \cdot b_y - (a \cdot b) \cdot c_y$

$(a \times (b \times c))_x = (a \cdot c) \cdot b_z - (a \cdot b) \cdot c_z$

可以得到公式(1).

设n为旋转轴的单位向量，v为任意一个被n旋转了θ角度的向量，那么v可以分解为两个平行于n和垂直于n的向量，$v_{\|}$和$v_{\perp}$，有$v = v_{\|} + v_{\perp}$.
那么

$$v_{\|} = (v \cdot n) \cdot n \tag{2}$$

由公式(1)可得，$v_{\perp} = v - v_{\|} = v - (v \cdot k) \cdot k = -k \times (k \times v)$
我们知道，旋转的时候$v_{\|}$保持不变，而$v_{\perp}$转过θ角度，得到
$v_{\|}^{rot} = v_{\|}$
$v_{\perp}^{rot} = cos\theta \cdot v_{\perp} + sin\theta \cdot (n \times v_{\perp}) = cos\theta \cdot v_{\perp} + sin\theta \cdot (n \times v)$

$v^{rot} = v_{\|}^{rot} + v_{\perp}^{rot}$

$= v_{\|} + cos\theta \cdot v_{\perp} + sin\theta \cdot (n \times v)$

$= v_{\|} + cos\theta \cdot (v - v_{\|}) + sin\theta \cdot (n \times v)$

$= cos\theta \cdot v + (1 - cos\theta) \cdot v_{\|} + sin\theta \cdot (n \times v)$

$= cos\theta \cdot v + (1 - cos\theta) \cdot n \cdot (n \cdot v) + sin\theta \cdot (n \times v)$

另外对于旋转矩阵，$v^{rot} = R \cdot v$，并且$n \times v$可以改写成反对称矩阵的形式$n^{\wedge} \cdot v$，

那么$R \cdot v = cos\theta \cdot v + (1 - cos\theta) \cdot n \cdot (n \cdot v) + sin\theta \cdot (n^{\wedge} \cdot v)$

得到$R = cos\theta \cdot I + (1 - cos\theta)nn^T + sin\theta \cdot n^{\wedge}$

---

5 四元数运算性质

假设$p = [0, a, b, c]^T$,$q = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T$,$p' = [0, a', b', c']^T$

已知对于四元数有$p' = q \cdot p \cdot q'$；

对于旋转矩阵有 $[a', b', c']^T = R \cdot [a, b, c]^T$。

可知$\begin{bmatrix} I & 0^T \\ 0 & R \end{bmatrix} \cdot p = p'$，得到

$$Q = \begin{bmatrix} I & 0^T \\ 0 & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2q_2^2 - 2q_3^2 & 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & 2q_1q_3 + 2q_0q_1 \\ 0 & 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & 1 - 2q_1^2 - 2q_3^2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 \\ 0 & 2q_1q_3 - 2q_0q_2 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 & 1 - 2q_1^2 - 2q_2^2 \end{bmatrix}$$

---

6 C++11新特性

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>

using namespace std;

class A {
public:
    A(const int& i ) : index(i) {}
    int index = 0;
};

int main() {
    A a1(3), a2(5), a3(9);
    vector<A> avec{a1, a2, a3};
    std::sort(avec.begin(), avec.end(), [](const A&a1, const A&a2) {return a1.index<a2.index;});
    for ( auto& a: avec ) cout<<a.index<<" ";
    cout<<endl;
    return 0;
}
```

for循环

vector 初始化

lambda表达式

auto类型推导