LANGRANGE ENTERPOLASYON POLİNOMU

[a,b] kapalı aralığında tanımlı f(x) fonksiyonunu ele alalım.[a,b] kapalı aralığında w_h kafesini
tanımlayalım :

$$W_h = \left\{ x_i \mid x_{i+1} = x_i + h_{i+1}, x_0 = a, x_n = b, i = \overline{0, n-1} \right\}$$

W_h kafesi eşit adımlı olmayan kafes olarak adlandırılır.

$h_i = h$ ise

$w_h = \{ x_i | x_{i+1} = x_i + h,\ x_0 = a, x_n = b, h = \frac{b-a}{n}, i = \overline{0, n-1} \}$
Eşit adımlı kafesini elde ederiz.

w_h ' da olan x_i ' ler için

$(x_i \in w_h)$, $f_i = f(x_i)$

değerlerinin verildiğini varsayalım.Bu verilerden yararlanarak ;

$L_n(x_i) = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$ (1)

koşullarını sağlayan n. dereceden $L_n(x)$ polinomunu tanımlayalım.
Eğer aynı zamanda sıfır olmayan $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ sabitleri için;

$$c_0 \vartheta_0(x) + c_1 \vartheta_1(x) + c_2 \vartheta_2(x) + \ldots + c_n \vartheta_n(x) = \mathbf{0}$$

koşulları sağlanıyor ise ; o halde $\vartheta_i(x)$, $i = \overline{0, n}$, fonksiyonlarına 'lineer bağımlı fonksiyolar' denir.Lineer bağımsız $1, x, x^2, x^3, \ldots$ fonksiyonlarından yararlanarak n. dereceden $L_n(x)$ polinomunu

$L_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ (2)

olarak tanımlayalım.(1) koşulllarına göre (2) polinomu aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$$L_n(x_i)=a_0+a_1x_i+a_2x_i^2+a_3x_i^3+\ldots+a_nx_i^n \quad , \; i=\overline{0,n} \qquad (3)$$

sisteminin determinantı ;

$$W=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots\ldots\ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots\ldots\ldots & x_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots\ldots\ldots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j) \neq 0$$

Wondermonde determinantıdır ve $W \neq 0$ dır.Yani ; (3) sisteminin tek bir tane çözümü vardır.Bu sürekli fonksiyonlar için (2) şeklindeki polinomun tek tanımlanması anlamına gelir.

(2) polinomu farklı şekilde;

$$L_n(x) = a_0(x)f(x_0) + a_1(x)f(x_1) + a_2(x)f(x_2) + \ldots\ldots\ldots$$
$$+ a_n(x)f(x_n) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)f(x_k) \qquad (4)$$

şeklinde yazabiliriz.Burada $a_k(x)$ katsayıları n.dereceden polinomlardır ve bu polinomlar (1) koşullarına göre;

$$a_k(x_i) = \begin{cases} 1, & k=i \\ 0, & k \neq i \end{cases} \quad , \; k,i=\overline{0,n} \qquad (5)$$

koşulları sağlanır.

(5) koşullarına göre $a_k(x)$ polinomunu aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$a_k(x) = \lambda_k(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots\ldots(x-x_n) \qquad (6)$$

$$\lambda_k = \frac{1}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)......(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})....(x_k - x_n)} \qquad (7)$$

yazarsak (5) koşullarının birinciside sağlanır.

$$a_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1).......(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})......(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1).....(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})....(x_k - x_n)} \qquad (8)$$

(4) de yazarsak ;

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x - x_i)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x_k - x_i)} \cdot f(x_k) \qquad (9)$$

ifadesine '**Langrange Enterpolasyon Polinomu'** denir.(9) ifadesini farklı şekilde aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\phi(x) = (x - x_0)(x - x_1)........(x - x_n) \qquad (10)$$

$$\phi'(x_k) = (x_k - x_0)(x_k - x_1).......(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})......(x_k - x_n) \qquad (11)$$

(10) ve (11) ifadelerinin yardımıyla $a_k(x)$ polinomunu

$$a_k(x) = \frac{\phi(x)}{(x - x_k)\phi'(x_k)}$$ elde ederiz.Bu durumda (9) langrange

polinomu

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\phi(x)}{(x-x_k)\phi'(x_k)}f(x_k) \qquad (12)$$

elde edebiliriz.Langrange polinomunu açık şekilde aşağıdaki gibi yazabiliriz;

$$L_n(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2).....(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)....(x_0-x_n)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)......(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)....(x_1-x_n)}f(x_1)$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)......(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3).....(x_2-x_n)}f(x_2)+\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1).......(x-x_{k-1})(x-x_{k+1}).....(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1).....(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1}).....(x_k-x_n)}f(x_k)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1).....(x-x_{k-1})(x-x_k)(x-x_{k+1}).....(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1).....(x_n-x_{k-1})(x_n-x_k)(x_n-x_{k+1}).....(x_n-x_{n-1})}f(x_n)$$

Örnek:

i	x_i	y_i
x_0	0	1
x_1	2	3
x_2	4	6
x_3	5	4

değerlerinden yararlanarak Langrange polinomunu bulunuz ve f(1)=?

Çözüm:

$$L_3(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}\,f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\,f(x_1)$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\,f(x_2)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\,f(x_3)$$

$$L_3(x)=\frac{(x-2)(x-4)(x-5)}{(0-2)(0-4)(0-5)}\cdot 1+\frac{x.(x-4)(x-5)}{2.(2-4)(2-5)}\cdot 3+\frac{x.(x-2)(x-5)}{4.(4-2)(4-5)}\cdot 6+\frac{x.(x-2)(x-4)}{5.(5-2)(5-4)}\cdot 4$$
$$=\frac{(x-2)(x^2-9x+20)}{-40}+\frac{x(x^2-9x+20)}{12}\cdot 3+\frac{x(x^2-7x+10)}{-8}\cdot 6+\frac{x(x^2-6x+8)}{15}\cdot 4$$
$$=-\frac{1}{40}\cdot(x^3-9x^2+20x-2x^2+18x-40)+\frac{1}{4}\cdot(x^3-9x^2+20x)-\frac{3}{4}\cdot(x^3-7x^2+10x)$$
$$+\frac{4}{15}\cdot(x^3-6x^2+8x)$$
$$L_3(x)=\left(-\frac{1}{40}+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+\frac{4}{15}\right)\cdot x^3+\left(\frac{11}{40}-\frac{9}{4}+\frac{21}{4}-\frac{24}{15}\right)\cdot x^2+\left(-\frac{38}{40}+\frac{20}{4}-\frac{30}{4}+\frac{32}{15}\right)\cdot x+1$$
$$=\frac{-3+30-90+32}{120}\cdot x^3+\frac{33-270+630-192}{120}\cdot x^2+\frac{-144+600-900+256}{120}\cdot x+1$$
$$=-\frac{31}{120}\cdot x^3+\frac{201}{120}\cdot x^2-\frac{158}{120}\cdot x+1$$
$$=f(x)$$

$$x=1\Rightarrow f(1)=-\frac{31}{120}+\frac{201}{120}-\frac{158}{120}+1=\frac{-31+201-158}{120}+1=0.1+1=1.1$$

Langrange Enterpolasyon Polinomunun hatası

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots\ldots(x - x_n)$$

Şeklinde değerlendirilir.

Eğer $M_{n+1} = \max_{[a.b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$ yazılırsa

$$\left| R_n(x) \right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| (x - x_0)(x - x_1)\ldots\ldots(x - x_n) \right|$$

Olur.

ÖRNEK : $\ln(10)$, $\ln(11)$, $\ln(12)$, $\ln(13)$ değerleri verildiğinde $\ln(12{,}6)$ değerini Lagrange polinomunun yardımıyla hangi hatada hesaplayabiliriz ?

ÇÖZÜM : $x_0 = 10$, $x_1 = 11$, $x_2 = 12$, $x_3 = 13$

$f(x) = \ln x$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}$ $\quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$

$$M_4 = \max_{[a,b]} \left| f^{(4)}(x) \right| = \left| -\frac{6}{10^4} \right| = \frac{6}{10^4}$$

$$R_4(x) = \frac{6}{10^4} \cdot \frac{1}{4!} \left| (12{,}6 - 10)\,(12{,}6 - 11)\,(12{,}6 - 12)\,(12{,}6 - 13) \right| =$$

$$= \frac{1}{4.10^4} . (2{,}6)(1{,}6)(0{,}6)(0{,}4) = \frac{0{,}9984}{4.10^4} = 2{,}496.10^{-5}$$