ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN CAUCHY PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

$$\begin{cases} y' = f(x,y) & (1) \\ y(x_0) = y_0 & (2) \end{cases}$$

(1)-(2) Cauchy problemini ele alalım.

Cauchy probleminin çözümü geometrik olarak (1) diferansiyel denklemini çözümü olan eğriler ailesinden grafiği (x_0, y_0) noktasından geçen fonksiyonun bulunması anlamına gelir.

PİCARD TEOREMİ: *Eğer f(x,y) fonksiyonu* $|x - x_0| \le a$ *,* $|y - y_0| \le b$ *eşitsizlikleri ile tanımlanan G dikdörtgen bölgesinde sürekli ise ve y değişkenine göre*

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le M|y_1-y_2| \quad (3)$$

Lipschitz *koşulunu sağlıyor ise, (1)-(2) probleminin* $|x - x_0| \le d$ *bölgesinde tek bir çözümü vardır.*

Burada $d \le a$, M ise a ve b değerlerine bağlı sabittir. Eğer f(x,y) fonksiyonunun y'ye göre 1.türevi sınırlı ise o halde;

$$M=\max|f_y(x,y)| \quad \text{olarak ele alınabilir.}$$

Yüksek mertebeden denklemleri her zaman birinci mertebeden denklemler gibi tanımlayabiliriz. Bu nedenle yalnız 1.mertebeden denklemler için Cauchy problemini inceleyeceğiz.

Diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemleri genel olarak 3 gruba bölünüyor.

- Analitik Yöntemler
- Grafik Yöntemleri
- Çözümün noktada değerlerini veren tablo yöntemleri

PİCARD YÖNTEMİ

$$\begin{cases} y' = f(x,y) & (1) \\ y(x_0) = y_0 & (2) \end{cases}$$

(1) - (2) Cauchy problemini ele alalım.

(1)'in her iki tarafını [x_0 ,x] aralığında integralleyelim.

$$\int_{xo}^{x} y^{I}(t)dt = \int_{xo}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

Son eşitlikten,

$$y(x) = y(xo) + \int_{x_0}^{x} f(t,y)\, dt \qquad (3)$$

elde ederiz. (3) ifadesinden yararlanarak aşağıdaki yaklaşımları yazalım.

$$y_1(x) = y_o + \int_{xo}^{x} f(t,y_o)\, dt$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{xo}^{x} f(t,y_1)\, dt$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (4)$$

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{xo}^{x} f(t,y_n)\, dt$$

(4) ifadeleri (1) - (2) Cauchy probleminin yaklaşık çözümünün bulunması için için **Picard Yönteminin** ifadeleridir. (4) şeklinde tanımlanan y_1, y_2, ….., y_n fonksiyonlar dizisi $n \to \infty$ yaklaştığında (1) - (2) probleminin çözümüne yaklaşıyor. Bu durumda k'ıncı yaklaşımın hatası

$$|\, y(x) - y_k(x)\, | \leq M^k N \frac{d^{k+1}}{(k+1)!}$$

şeklinde hesaplanıyor. Burada;

$$M = \max_{(x,y)\in G} \left| f_y'(x,y) \right|$$

$$N = \max_{(x,y)\in G} \left| f(x,y) \right|$$

$$d = min\,(\, a\, ,\ \frac{b}{N}\ )$$

şeklinde belirlenir.

Örnek: $y' = x^2 + 3y$ denkleminin $y(0) = 2$ koşulunu sağlayan çözümünü bulunuz.

$$y_1(x) = y_o + \int_{xo}^{x} f(t, y_o)\,dt = 2 + \int_{o}^{x} (t^2+6)\,dt = 2 + \left[\frac{t^3}{3} + 6t\right]_o^x$$

$$= 2 + \frac{x^3}{3} + 6x = \frac{x^3}{3} + 6x + 2$$

$$y_2(x) = y_o + \int_{xo}^{x} f(t, y_1)\,dt = 2 + \int_{o}^{x} (t^2 + t^3 + 18t + 6)\,dt$$

$$= 2 + \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + 9t^2 + 6t\right]_o^x = 2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + 9x^2 + 6x$$

**** G bölgesi $|x-x_o| \le 1$, $|y-y_o| \le 2$ şeklinde tanımlanan dikdörtgen olsun.**

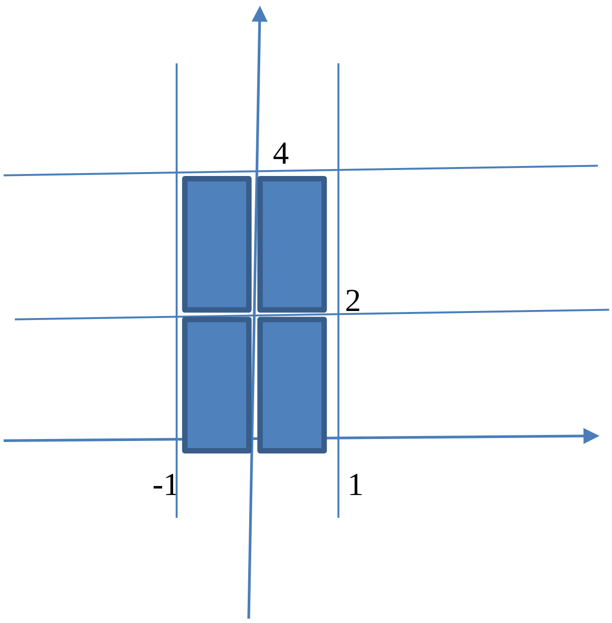
$x_o=0$, $y_o=2$

$$M = \max_{(x,y)\in G} \left| f_y'(x,y) \right| = 3$$

$$N = \max_{(x,y)\in G} \left| f(x,y) \right| = 1 + 3*4 = 13$$

$$d = min\left(a\ ,\ \frac{b}{N}\right) = min\left(1\ ,\ \frac{2}{13}\right) = \frac{2}{13}$$

$$|\ y(x) - y_k(x)\ | \le M^k N \frac{d^{k+1}}{(k+1)!} = 3^2 \times 13 \times \left(\frac{2}{13}\right)^3 \frac{1}{3!} = 0{,}0237$$



$$\begin{cases} y' = f(x,y) & (1) \\ y(x_0) = y_0 & (2) \end{cases}$$

Başlangıç değer problemini yaklaşık olarak çözmek için **farklı yöntemler** de elde edebiliriz.

Her hangi h>0 olmakla $x_0 + h$ noktasını ele alalım ve (1) denkleminin her iki tarafını $[x_0, x_0 + h]$ aralığında integralliyelim.

$$\int_{x_0}^{x_0+h} y'(x)dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x,y)dx \qquad (*)$$

Sol tarafta (2) koşulunu göz önüne alırsak

$$\int_{x_0}^{x_0+h} y'(x)dt = y(x_0 + h) - y_0 \qquad (3)$$

bulunur. Byradan .

$$y(x_0 + h) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0+h} y'(x)dt$$

Son ifadede (*)’ı göz önüne alırsak;

$$y(x_0 + h) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0+h} \boldsymbol{f(x,y)}dx$$

Her hangi $[x \ \ , x \ \ + h]$ aralığında son eşitliği

$$y(x + h) = y(x) + \int_{x}^{x \ \ +h} f(x,y)dx \qquad (4)$$

Şeklinde yazabiliriz.

(4) ifadesindeki integrali yaklaşık olarak hesaplarsak (1),(2) probleminin çözümünü belli bir hata ile bulmuş oluruz.

Önce İntegrale **sol dikdörtgenler** formülünü uygularsak;

$$y(x + h) = y(x) + f\big(x, y(x)\big).h \qquad (5)$$

elde ederiz. (5) ifadesinde x yerine x_i yazarsak;

$$\boldsymbol{y_{i+1} = y_i + hf(x_{i,}y_i)} \qquad \textbf{(i=0,1,…,n)} \qquad (6)$$

Euler yaklaşımlarını elde ederiz. Bu durumda çözümün hatası $O(h^2)$ olacaktır.

Şimdi ise bu (3) ifadesindeki integrali **yamuk yönteminin** yardımıyla hesaplayalım.

$$y(x + h) = y(x) + \frac{h}{2}[f\big(x, y(x)\big) + f(x + h, y(x + h))] \qquad (7)$$

Eğer f(x,y) fonksiyonu y değişkenine göre lineer fonksiyon ise o halde (7) ifadesinden y(x+h)’ı çekerek ,x noktasındaki değerden yararlanarak x+h’daki değeri kolaylıkla hesaplayabiliriz. (7) eşitliğinde x yerine x_i yazarsak;

$$\boldsymbol{y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]} \qquad (8)$$

elde ederiz.

(8) ifadesine $y_{i+1}{}'e$ göre **kapalı şema** denir. (*Çünki f(x,y) fonksiyonunun değeri belli olmayan (x_{i+1}, y_{i+1}) noktasında hesaplanmalıdır)* Bu durumda (8)’i

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^*{}_{i+1})] \quad (9)$$

şeklinde yazalım ve $y^*{}_{i+1}$ değerini Euler yönteminin yardımıyla hesaplayalım.

$$y^*{}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (10)$$

(10) ve (9) ifadelerini ardışık olarak uygulamakla

$$\begin{cases} \boldsymbol{y^*{}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)} \\ \boldsymbol{y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^*{}_{i+1})]} \end{cases}$$

(1),(2) probleminin yaklaşık çözümünün bulunması yöntemine **"h adımlı Adams yöntemi**" denir.

Şimdi ise (4) ifadesindeki integrali **merkez dikdörtgenler formülünün** yardımıyla hesaplayalım.

$$y(x+h) = y(x) + hf(x + h/2, y(x + h/2)) \quad (11)$$

elde ederiz.

X yerine x_i yazarsak;

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}) \quad (12)$$

(12) ifadesindeki $y_{i+\frac{1}{2}}$ değeri h/2 adımı ile Euler yönteminden yararlanarak hesaplanabilir. Sonuçta y_{i+1} değerini;

$$\begin{cases} y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + h/2 f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}) \end{cases} \quad (13)$$

ifadelerinin yardımıyla hesaplayabiliriz. (13) ifadelerine (1),(2) Cauchy probleminin yaklaşık çözümünün bulunması için için **"$\frac{h}{2}$ adımlı Adams yöntemi"** denir.

ÖRNEK:

$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ $y(4) = 0{,}75$ $y(7) = ?$

EULER YÖNTEMİ ile çözelim;

Analitik çözüm:

$\int \frac{dy}{y} = -\int_c^x \frac{dx}{x} \Rightarrow$

$lny = -(lnx - lnc) \Rightarrow lny = ln\frac{c}{x} \Rightarrow y = \frac{c}{x}$

$y(4) = 0{,}75$ koşulunu kullanırsak, $0{,}75 = \frac{c}{4} \Rightarrow c = 3$

ve böylece $\boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{x}}$ bulunur. Buradan $y(7) = \frac{3}{7} = 0{,}4285714$

Sayısal çözüm:

$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$

$f(x_i, y_i) = -\frac{y_i}{x_i}$ ve h=1 alınırsa, $x_0=4$, $x_1=5$, $x_2=6$, $x_3=7$

$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$

$y(5) = y(4) + \left(-\frac{y(4)}{4}\right) * 1 = 0{,}75 - (0{,}75/4)$ $y(5) \Rightarrow 0{,}5625$

$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$

$y(6) = y(5) + \left(-\frac{y(5)}{5}\right) * 1 = 0{,}5625 - (0{,}5625/5)$ $y(6) \Rightarrow 0{,}45$

$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2)$

$y(7) = y(6) + \left(-\frac{y(6)}{6}\right) * 1 = 0{,}45 - (0{,}45/6)$ $y(7) \Rightarrow 0{,}375$

$\varepsilon_t = \frac{|0{,}42857 - 0{,}375|}{|0{,}42857|} 100\% = 12{,}5\%$

ÖRNEK:$y' = -\frac{y}{1+x}$ denkleminin y(0)=1 koşulunu sağlayan çözümünü [0,1] aralığında h=0,2 adımı ile çözünüz.

$x_0 = 0 \quad , y_0 = 1$

H ADIMLI ADAMS YÖNTEMİ ile çözelim.

$y^*_{i+1} = hf(x_i, y_i) + y_i$

$y_{i+1} = y_i + h/2[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^*_{i+1})]$

$y^*_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$

$f(x_0, y_0) = -1 \quad y^*_1$=1-0,2=0,8

$y_1 = y_0 + h/2[f(x_0, y_0) + f(x_1, y^*_1)]$

$f(x_1, y^*_1) = -\frac{0,8}{1+0,2} = -0,6667$

$\boldsymbol{y_1}$ **=1+0,2/2[-1-0,6667]=0,8333**

$y^*_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$

$f(x_1, y_1) = -\frac{0,8333}{1+0,2} = -0,6944$

y^*_2=0,8333-0,2*0,6944=0,6944

$y_2 = y_1 + h/2[f(x_1, y_1) + f(x_2, y^*_2)]$

$f(x_2, y^*_2) = -\frac{0,6944}{1+0,4} = -0,496$

$\boldsymbol{y_2}$ **= 0,8333+0,2/2[-0,6944-0,496]=0,7143**

$y^*_3 = y_2 + hf(x_2, y_2)$

$f(x_2, y_2) = -\frac{0,7143}{1,4} = -0,5102$

$y_3 = y_2 + h/2[f(x_2, y_2) + f(x_3, y^*_3)]$

$\boldsymbol{y_3 = 0,7143 + \frac{0,2}{2[-0,5102-0,3827]} = 0,6250}$

$y^*_4 = y_3 + hf(x_3, y_3)$

$f(x_3, y_3) = -\frac{0,6250}{1+0,6} = -0,3906$

$y^*{}_4 =$ 0,625+0,2*(-0,3906)=0,5469

$y_4 = y_3 + h/2[f(x_3, y_3) + f(x_4, y^*{}_4)]$

$f(x_4, y^*{}_4) = -\frac{0,5469}{1+0,8} = -0,3038$

y_4=0,625+0,2/2[-0,3906+(-0,3008)]=-0,5556

$y^*{}_5 = y_4 + hf(x_4, y_4)$

$f(x_4, y_4) = -\frac{0,5556}{1,8} = -0,3087$

$y^*{}_5 =$ 0,5556+0,2*(-0,3087)=0,4939

$y_5 = y_4 + h/2[f(x_4, y_4) + f(x_5, y^*{}_5)]$

$f(x_5, y^*{}_5) = -\frac{0,4939}{2} = -0,247$

y_5 =0,5556+0,1[-0,3087-0,247]=0,5

$\boldsymbol{\frac{h}{2}}$ **ADIMI ADAMS YÖNTEMİ** ile çözelim.

$y_{i+1/2} = \frac{h}{2f(x_i, y_i)} + y_i \qquad x_o = 0 \;\;,\; y_0 = 1$

$y_{i+1} = y_i + h_i f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$

$y_{1/2} = 1 + 0,2/2f(0,1) \quad , \; f(0,1) = -\frac{1}{0+1} = -1$

$y_{1/2} = 1 + 0,1(-1) = 0,9$

$f(x_{1/2}, y_{1/2}) = f(0,1; 0,9) = -0,8182$

$\boldsymbol{y_1 = 1 + 0,2(-0,8182) = 0,8364}$

$x_1 = 0,2 \quad y_1 = 0,8364$

$f(x_1, y_1) = -\frac{0,8364}{1+0,2} = -0,697$

$y_{3/2} = y_1 + \frac{h}{2} f(x_1, y_1) = 0,8364 + \frac{0,2}{2(-0,697)} = 0,7667$

$f(x_{3/2}, y_{3/2}) = f(0,3; 0,7667) = -\frac{0,7667}{1+0,3} = -0,5898$

$\boldsymbol{y_2}$=$\boldsymbol{y_1 + hf\left(x_{3/2}, y_{3/2}\right)}$**=0,8364+0,2(-0,5898)=0,7184**

$x_2 = 0{,}4 \quad y_2 = 0{,}7184$

$f(x_2,y_2) = f(0{,}4; 0{,}7184) = -\frac{0{,}7184}{1+0{,}4} = -0{,}5131$

$y_{5/2} = y_2 + \frac{h}{2} f(x_2, y_2) = 0{,}7184 + 0{,}1(-0{,}5131) = 0{,}6671$

$f\left(x_{5/2}, y_{5/2}\right) = f(0{,}5; 0{,}6651) = -\frac{0{,}6671}{1+0{,}5} = -0{,}4447$

$\boldsymbol{y_3 = 0,7184 + 0,2(-0,4447) = 0,6295}$