(6. Hafta) 2/4/2019

Lineer Transformasyon

- $L: X \to Y$ X ve Y vektör uzayı
- $L(\alpha \bar{x}) = \alpha L(\bar{x})$ $\bar{x} \in X$
- $L(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = L(\bar{x}_1) + L(\bar{x}_2)$ $\bar{y} \in Y$

$\alpha \in R$

Örnek $X = \{$sürekli zaman gerçek değerlikli fonksiyonlar$\}$

$x(t) \in X$

$x(t) \to \square \to$

$$L(x(t)) = \int_0^t h(\tau)\, x(t-2)\, d\tau$$

Konvolüsyon işlemi bir lineer transformasyondur

Örnek $L: R^3 \to R^2$

$\bar{x} \in R^3$ $L(\bar{x}) = \bar{y}$

$\bar{y} \in R^2$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{3\times1} \Rightarrow L(x_1\ x_2\ x_3) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 & 3x_2 + 4x_3 \end{bmatrix}^T$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_2 + 4x_3 \end{bmatrix}_{2\times1}$$

Soru: lineer transformasyon olduğunu gösteriniz?

(1)

$$L = \begin{bmatrix} ? \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{3\times1} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_2 + 4x_3 \end{bmatrix}_{2\times}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times3}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

Değer Uzayı (Range Space) → fonksiyonun ~~tanım~~ değer kümesi gibi düşün.

$L: X \to Y$

$$R(L) = \{ \bar{y} = L\bar{x} \mid \bar{x} \in X \}$$

öyleki

Boş Uzay (Null space)

$$N[L] = \{ \bar{x} \in X \mid L\bar{x} = \bar{0} \}$$

çıkışta 0 üreten giriş değerleri bir boş uzayı diyoruz.

(2)

Örnek

$$\underset{n\times m}{\bar{A}} = [\bar{P}_1 \;\; \bar{P}_2 \;\; \ldots \;\; \bar{P}_m] = \Big[\quad\Big]_{n\times m}$$

$$\bar{P}_i \rightarrow n\times 1$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

$$\underset{n\times m}{\bar{A}}\,\underset{m\times 1}{\bar{x}} = \underset{n\times 1}{\bar{y}} = [P_1 \;\; P_2 \;\; \ldots \;\; P_m] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

$$= \bar{P}_1 x_1 + \bar{P}_2 x_2 + \ldots \bar{P}_m x_m$$

range space

$$R(\bar{A}) = \text{Span}(\{\bar{P}_1, \bar{P}_2 \ldots \bar{P}_m\}) \qquad y \in R(A)$$

null space

$$N(A) = \{\bar{x} \in R^m \mid \bar{A}\bar{x} = \bar{0}\}$$

Örnek 1

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R(A) = ?$

$N(A) = ?$

Notasyon

A → matris

a → vektör

a → skaler

$$\underset{3\times 3}{A}\,\underset{3\times 1}{\bar{x}} = \bar{y}_{3\times 1} \Rightarrow \bar{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \bar{P}_1 x_1 + \bar{P}_2 x_3$$

$\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_1+x_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3$$

$$\Rightarrow R(A) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Örnek 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = P_1 x_1 + 2 P_1 x_3$$

$$\bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad R(A) = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

Örnek 1'de

$N(A) = \{ \bar{x} \in X \mid \bar{A}\bar{x} = \bar{0} \}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \bar{x} = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 0$

$x_1 + x_3 = 0 \qquad x_2 = \alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{x_3 = 0}$

null space
$N(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

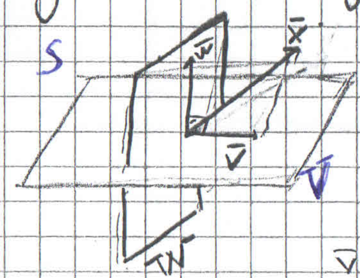
$\alpha \in \mathbb{R}$

Bu formdaki herhangi bir vektör matris işleminin sonucunu 0 yapar

5

Vektör iz düşümü

$\bar{S}$ vektör uzayı olsun $V \subset \bar{S}$, $W \subset \bar{S}$ bu vektör uzayının iki alt uzayı olsun.



$\bar{x} \in \bar{S}$

$\bar{S} \to V$

$\bar{P}\bar{x} = \bar{v} \in V$

$\bar{v} \perp \bar{w}$
dik (ortogonal)

$\bar{P}$, izdüşüm matrisi

$\bar{x} = \bar{v} + \bar{w}$

$\bar{x} = \bar{P}\bar{x} + \bar{w} = \bar{v} + \bar{P}\bar{x}$

Not ! $\underset{n\times1}{\bar{x}} = \underset{n\times n}{\bar{I}}\ \underset{n\times1}{\bar{x}}$

birim matris

$\cancel{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$ $I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}_{n\times n}$

$\Rightarrow \underset{n\times1}{\bar{w}} = \underset{n\times n}{\bar{I}}\ \underset{n\times1}{\bar{x}} - \underset{n\times n}{\bar{P}}\ \underset{n\times1}{\bar{x}}$

$\bar{w} = \underline{(\bar{I} - \bar{P})}\,\bar{x}$

$\bar{P}^{\perp} \to W$ alt uzayına olan izdüşüm matrisi

6

$\bar{P}^{\perp} \cdot \bar{P} = (\bar{I} - \bar{P})\bar{P}$

$\bar{I}\bar{P} - \underbrace{\bar{P}\bar{P}}_{\bar{P}} = \bar{P} - \bar{P} = \bar{0}$

Not: $\bar{P}\bar{P} = \bar{P}$ 'dir

P $\bar{V}$ altuzayına olan izdüşüm matrisi

$\bar{P}$ izdüşüm matrisi için

$\bar{P}\bar{x} = \bar{V}$

Range space $R(\bar{P}) = \bar{V} \in \bar{V}$

Null space $N(\bar{P})$

$\bar{P} \cdot \bar{x} = 0$ ($\bar{V}$ düzlemlerinde bileşeni yok)

düzleme dik olması gerekir.

$\bar{x} \in W$

$R(\bar{P}) \perp N(\bar{P})$

7

İzdüşüm matrisi

$\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_n$ birbirinden lineer bağımsız vektörler olsun.

Bu vektörlerin tarattığı alt uzay

$\bar{V}$ olsun $\bar{V} = span(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_n)$

S uzayında

Herhangi bir x vektörünü, bu V alt uzaya izdüşümünü

oluşturan matrise izdüşüm matrisi denir.

$\bar{P} = \bar{A}(\bar{A}^H \bar{A})^{-1} \bar{A}^H$

$\bar{A} = [\bar{P}_1 \; \bar{P}_2 \; \ldots \; \bar{P}_m]$

8