Hafta 10:
Laplace Dönüşümü

Ele Alınacak Ana Konular

- Laplace dönüşümü
- Laplace dönüşümünün yakınsaklık bölgesi
- Ters Laplace dönüşümü
- Laplace dönüşümünün özellikleri
- Laplace dönüşümü kullanarak LTI sistemlerin analizi

Laplace Dönüşümü

- İmpuls yanıtı h(t) olan bir LTI sistemin, e^{st} girişine olan yanıtının $y(t)$ = H(s) e^{st} olduğunu görmüştük. $H(s)$ aşağıdaki gibi hesaplanıyordu:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$$

- $s=jw$ için yukarıda verilen integral ifadesi h(t)'nin Fourier dönüşümünü verir. s'in genel karmaşık değişken (s=□+jw) olması durumunda integral ifadesine ***Laplace dönüşümü*** denir.

- s karmaşık bir sayı olmak üzere, bir sürekli-zaman işaret $x(t)$'nin Laplace dönüşümü

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

denklemiyle tanımlanır. Laplace dönüşümünü belirtmek için $\mathcal{L}\{x(t)\}$ kullanacak, işaret ile Laplace dönüşümü arasındaki ilişkiyi, aşağıdaki şekilde belirteceğiz.

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$$

Laplace Dönüşümü

- Laplace dönüşümü ile sürekli-zaman Fourier dönüşümü arasındaki ilişki aşağıda gösterilmiştir.

- $s=jw$ için, $X(s)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \xrightarrow{s=jw} X(jw)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jwt}dt$

- Dolayısı ile $X(s)\big|_{s=jw} = F\left\{x(t)\right\}$

- $s=$□$+jw$ için, $X(s)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \xrightarrow{s=jw} X(\sigma+jw)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+jw)t}dt$

$$X(\sigma+jw)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-jwt}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left[x(t)e^{-\sigma t}\right]e^{-jwt}dt$$

Bu durumda eşitliğin sağ tarafının *x(t) e*$^{-□t}$ ‘nin Fourier dönüşümüne eşit olduğu görülür.

Laplace Dönüşümü

- Görüldüğü gibi Laplace dönüşümü, karmaşık *s*-düzleminde jω-ekseni üzerinde hesaplandığında sürekli-zaman Fourier dönüşümünü verir. !!!

$$X(s)\big|_{s=jw} = F\{x(t)\}$$

- $x(t)e^{-\square t}$ işaretinin Fourier dönüşümü de $x(t)$ işaretinin Laplace dönüşümünü verir.

- Bu durumda:
  1-) Bir x(t) işaretinin Laplace dönüşümünün var olabilmesi için $x(t)e^{-\square t}$ işaretinin Fourier dönüşümü yakınsamalıdır. Verilen bir $x(t)$ işareti için, Laplace dönüşümünün var olduğu □ değerleri kümesine YAKINSAKLIK BÖLGESİ (Region Of Converge, ROC) denir.
  2-) Eğer ROC imajiner ekseni (s=jω) içeriyorsa, işaretin Fourier dönüşümü de vardır.
  3-) Bazı işaretler için Fourier dönüşümü yakınsamaz iken Laplace dönüşümü yakınsayabilir.

Laplace Dönüşümü

ÖRNEK 1 : $x(t)=e^{-at}u(t)$ işaretinin Laplace dönüşümünü hesaplayınız.

ÇÖZÜM: Bu işaret için Fourier dönüşümü önceki haftalarda aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{a+j\omega}, \qquad a>0$$

İşaretin Laplace dönüşümü ise,

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-(s+a)t}dt$$

$$X(s)\big|_{s=\sigma+jw}=\int_{0}^{\infty} e^{-(\sigma+a)t}e^{-jwt}dt=\frac{1}{(\sigma+a)+jw}, \quad \sigma+a>0$$

veya,

$$s=\sigma+jw \rightarrow X(s)=\frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}\{s\}>-a$$

Laplace Dönüşümü

ÖRNEK 2: $x(t) = -e^{-at}u(-t)$ işaretinin Laplace dönüşümünü hesaplayınız.

ÇÖZÜM:

$$X(s) = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} e^{-s\,t} u(-t)dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-(s+a)t} dt$$

$$-e^{-at}u(-t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}\{s\} < -a$$

Laplace Dönüşümü

Örnekler incelediğinde farklı iki işarete ait Laplace dönüşümlerinin cebirsel olarak birbirine eşit olduğu görülür.

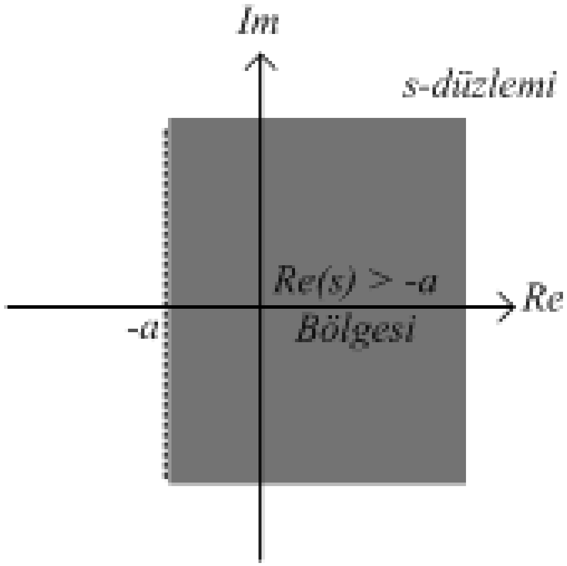
$$-e^{-at}u(-t) \xrightarrow{L} X(s)=\frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}\{s\}<-a$$

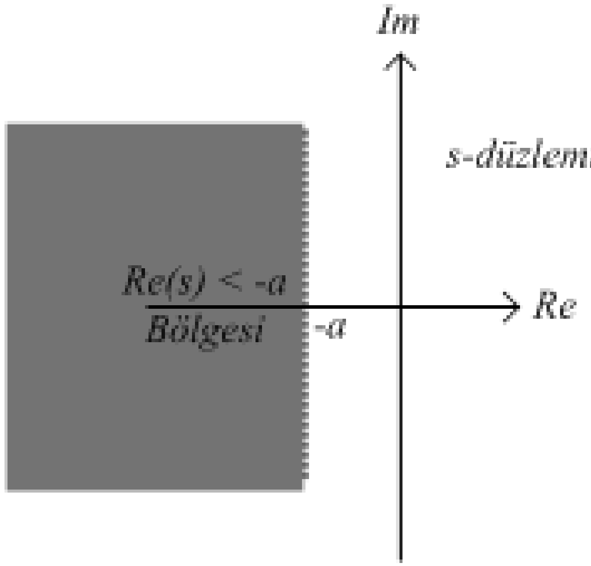
$$e^{-at}u(t) \xrightarrow{L} X(s)=\frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}\{s\}>-a$$

Fakat eşitliklerin geçerli olduğu tanım aralıklarının (yakınsaklık bölgesinin) $\{\mathrm{Re}\{s\}<-a\}$ ve $\{\mathrm{Re}\{s\}>-a\}$ birbirinden farklı olduğuna dikkat ediniz.

Bu durumda Laplace dönüşümü için cebirsel ifadenin yanısıra tanım aralığıda belirtilmelidir.

Laplace Dönüşümü





$$e^{-at}u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

$$-e^{-at}u(-t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}\{s\} < -a$$

Laplace Dönüşümü

ÖRNEK: $x(t) = 3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)$ işaretinin Laplace dönüşümünü hesaplayınız..

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t) \right] e^{-s\,t} dt = 3\int_{0}^{\infty} e^{-2t} e^{-s\,t} dt - 2\int_{0}^{\infty} e^{-t} e^{-s\,t} dt$$

$$e^{-2t}u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -2$$

$$e^{-t}u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

$$X(s) = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1} = \frac{s-1}{s^2+3s+2} \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

her iki koşulun sağlandığı bölge…

Laplace Dönüşümü

ÖRNEK: $x(t)=e^{-2t}u(t)+e^{-t}(\cos 3t)u(t)$ işaretinin Laplace dönüşümünü hesaplayınız..

$$x(t)=\left[e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-(1-3j)t}+\frac{1}{2}e^{-(1+3j)t}\right]u(t)$$

$$e^{-2t}u(t)\xrightarrow{L}X(s)=\frac{1}{s+2},\qquad \mathrm{Re}\{s\}>-2$$

$$e^{-(1-3j)t}u(t)\xrightarrow{L}X(s)=\frac{1}{s+(1-3j)},\qquad \mathrm{Re}\{s\}>-1$$

$$e^{-(1+3j)t}u(t)\xrightarrow{L}X(s)=\frac{1}{s+(1+3j)},\qquad \mathrm{Re}\{s\}>-1$$

$$X(s)=\frac{1}{s+2}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+(1+3j)}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+(1-3j)}=\frac{2s^2+5s+12}{\left(s^2+2s+10\right)(s+2)},\mathrm{Re}\{s\}>-1$$

Laplace Dönüşümü

Örneklerden görüldüğü gibi reel veya karmaşık üstel işaretlerin doğrusal kombinasyonu olarak tanımlanan işaretin Laplace dönüşümü;

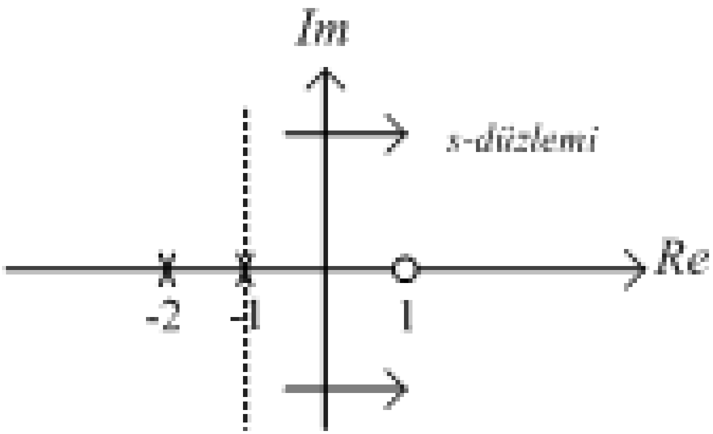
$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

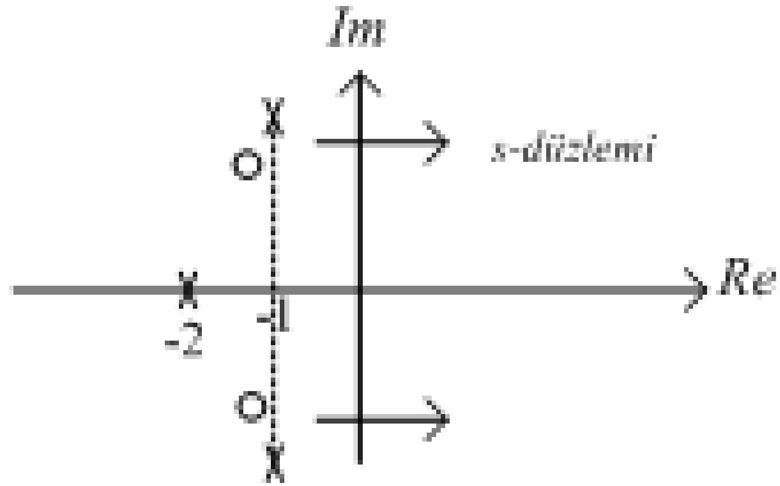
yapısındadır.

Pay *N(s)* ve payda *D(s)* için tanımlanan polinomlara ait köklerin s-düzleminde yerine yerleştirilmesi ve ROC bölgesinin tanımlanması Laplace dönüşümünün ifadesi için alternatif bir yöntemdir.

Bu tip gösterimde *N(s)*'in kökleri "o", *D(s)*'in kökleri ise "x" ile belirtilir.

Laplace Dönüşümü





$$X(s) = \frac{s-1}{s^2+3s+2} \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

$$X(s) = \frac{2s^2+5s+12}{\left(s^2+2s+10\right)(s+2)}, \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

N(s)'in kökleri *X(s)*'in **sıfırları** olarak adlandırılır. Çünkü s'in bu değerleri için *X(s) =0* değerini alır. *D(s)*'in kökleri ise **kutup** olarak adlandırılır ve *X(s)* =□ *olur*

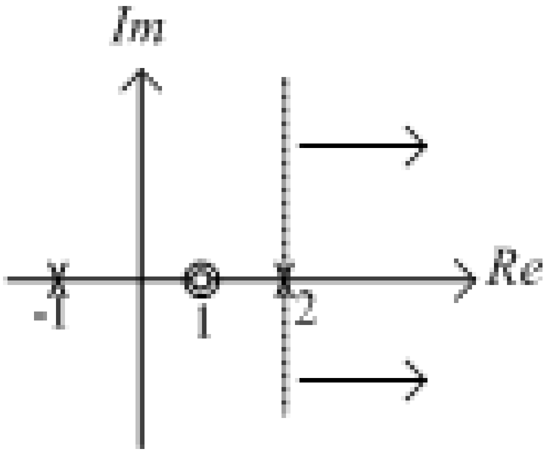
Laplace Dönüşümü

Örnek: $x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t)$ işaretinin Laplace dönüşümünü hesaplayınız..

$$\delta(t) \xrightarrow{L} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = 1 \qquad \text{ROC ?}$$

$$e^{-t}u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1 \qquad e^{2t}u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s-2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > 2$$

$$X(s) = 1 - \frac{4}{3}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} = \frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)} \quad \mathrm{Re}\{s\} > 2$$



Soru: *x(t)* işaretinin Fourier dönüşümü için ne söylenebilir?

Laplace Dönüşümü

Özellik 1: Laplace dönüşümü X(s)' e ait ROC jw eksenine paralel bir şerittir.

Daha önce belirtildiği gibi $s=\sigma+jw$ olmak üzere $x(t)$ nin Laplace dönüşümünün var olabilmesi için $x(t)e^{-\sigma t}$ işaretinin Fourier dönüşümü yakınsamalıdır.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$$

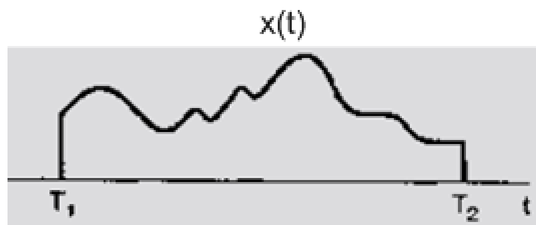
Dolayısı ile koşul sadece s'in gerçel kısmına σ bağlıdır.

Özellik 2: X(s)' e ait ROC kutup içermez.

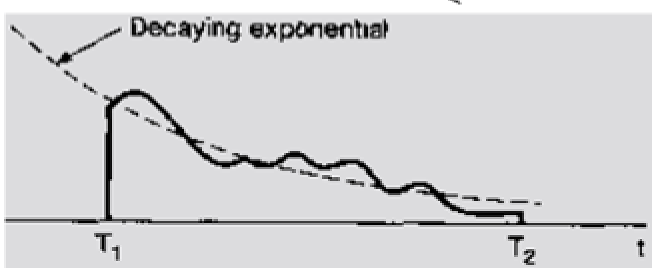
Kutup noktalarında X(s)=∞ olduğundan $X(s)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$ integrali yakınsamayacaktır.

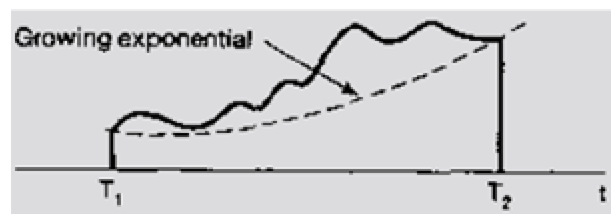
Laplace Dönüşümü

Özellik 3: *x(t)* sonlu bir işaret ve mutlak integrallanabilir ise X(s)'e ait ROC tüm *s*-düzlemidir.



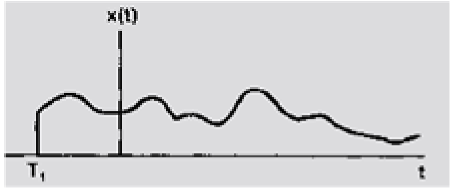
$$x(t)e^{-\sigma t}$$





Laplace Dönüşümü

Özellik 4: *x(t)* sağ tarafa dayalı bir işaret ise ve $Re\{s\}=\sigma_0$ ROC bölgesinde ise $Re\{s\}>\sigma_0$ şartını sağlayan tüm *s* noktalarıda ROC alanındadır.



$$\int_{T_1}^{\infty}|x(t)|e^{-\sigma_0 t}dt<\infty$$ ise $\sigma_0<\sigma_1$ şartını sağlayan σ_1 içinde $$\int_{T_1}^{\infty}|x(t)|e^{-\sigma_1 t}dt<\infty$$ geçerli olacaktır.

Özellik 5: *x(t)* sol tarafa dayalı bir işaret ise ve $Re\{s\}=\sigma_0$ ROC bölgesinde ise $Re\{s\}<\sigma_0$ şartını sağlayan tüm *s* noktalarıda ROC alanındadır.