Olasılık ve Raslantı Değişkenleri

Olasılık

Yrd.Doç.Dr. Halil YİĞİT

Rassal Değişkenler (Random Variables)

- Bir deney ya da gözlemin şansa bağlı sonucu bir değişkenin aldığı değer olarak düşünülürse, olasılık ve istatistikte böyle bir değişkene **rassal değişken** adı verilir.

Rassal Değişkenler

Sahip Olunan Otomobil Sayılarına Göre Ailelerin frekans ve relatif frekans dağılımları.

Otomobil Sayısı	Frekans	Relatif frekans
0	30	30 / 2000 = 0.015
1	470	470 / 2000 = 0.235
2	850	850 / 2000 = 0.425
3	490	490 / 2000 = 0.245
4	160	160 / 2000 = 0.080
	N = 2000	Toplam = 1000

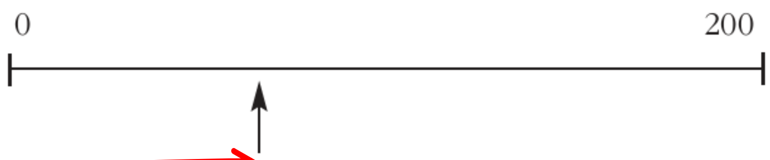
- Bu gruptan rassal bir aile seçilmiş ve ailenin sahip olduğu otomobil sayısı X ile gösterilmiş olsun. Yukarıdaki tablonun ilk sütununda da görüleceği gibi X (değişken)'in alabileceği beş değer (0,1,2,3, 4) bulunmaktadır ve X 'in değeri seçilen aileye göre değişim göstermektedir. Yani bu değer rassal deneyin sonuçlarına bağlı ve bu X değişkenine "rassal değişken" verilmektedir.

Rassal Değişkenler

- Bir rassal değişken, kesikli (discrete) ya da sürekli (continuous) olabilmektedir.
  - Bir kesikli değişken, değerleri sayımla elde edilen değişkendir. Başka bir deyişle bir kesikli değişkenin birbirini izleyen değerleri arasında belirli boşluklar vardır.
  - Genel anlamda bir rassal değişken sayılabilir değerler alıyorsa, bu değişkene kesikli rassal değişken denir.
    - Bir galerinin herhangi bir ayda satmış olduğu otomobil sayısı.
    - Herhangi bir günde bir tiyatroya gelen izleyici sayısı.
    - Bir kişinin sahip olduğu ayakkabı sayısı.
    - Bir para üç kez atıldığında yazı gelme sayısı.
    - Bir ailenin çocuk sayısı.
    - İndirimlerin sayısı
    - Çağrıların sayısı

Rassal Değişkenler

- Değerleri ölçüm ya da tartımla elde edilen, bir başka anlatımla sayımla elde edilemeyen bir değişkene **sürekli rassal değişken** denir. Sürekli bir rassal değişkenin değerleri aralıklar halinde tanımlanır.
- Sürekli Rassal Değişken: alacağı herhangi bir değerle, bir ya da daha fazla aralıkta tanımlanan değişkene, sürekli **rassal değişken** denir.
  - Bir kişinin boy uzunluğu.
  - Sınavda bir sorunun çözülme süresi.
  - Bir bebeğin ağırlığı.
  - Bir evin değeri (fiyatı).
  - Bir şişe sütün ağırlığı.
  - Bir pilin ömrü



Kesikli Rassal Değişkenler

- **Örnek:** Bir zarın atılması deneyini düşünelim. Bu deney için örnek uzay:

  $$S= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ dır.}$$

  Bu örnek uzayda sonlu sayıda eleman (örnek nokta) vardır, bu örnek uzay üzerinde tanımlanan X rassal değişkeni kesikli rassal değişkendir.

- **Örnek:** Bir paranın iki kez atılması deneyini düşünelim. Bu deney için örnek uzay:

  $$S= \{YY, TY, YT, TT\} \text{ dir.}$$

  X rasgele değişkeni "Bulunan turaların sayısı" olsun. Böylece X'in alabileceği değerler 0, 1 ve 2'dir . O halde X sonlu sayıda değer aldığından kesikli rassal değişkendir.

Kesikli Rassal Değişkenin Olasılık Dağılımı

- Bir kesikli rassal değişkenin olasılık dağılımı ya da olasılık fonksiyonu, rassal değişkenin alabileceği değerlerin karşılık gelen olasılıklarla birlikte belirtilmesidir.

- Rassal değişkenleri X, Y, Z,… gibi büyük harflerle ve belirtilen değerlerini de x, y, z, … gibi küçük harflerle gösteririz.

Kesikli Rassal Değişkenin Olasılık Dağılımı

- **Örnek:** Bir paranın iki kez atılması deneyini düşünelim. Bu deneyde "Bulunan turaların sayısı" X rassal değişkeni olsun. Bu deney için örnek uzay,

S={YY, YT, TY, TT} dir.

X'in alabileceği değerler 0, 1 ve 2' dir.

X'in x değerini alması olasılığını $f(x)$ ile gösterilir.

$f(x)=P(X=x)$ **dir.**

Kesikli Rassal Değişkenin Olasılık Dağılımı

$X=x$	**0**	**1**	**2**
$P(X=x)$	1/4	1/2	1/4

$$f(0)=P(X=0)=1/4$$

$$f(1)=P(X=1)=1/2$$

$$f(2)=P(X=2)=1/4$$

Kesikli Rassal Değişkenin Olasılık Dağılımı

Sahip Olunan Otomobil Sayılarına Göre Ailelerin Sıklık ve Göreli Sıklık Dağılımları.

Otomobil Sayısı (x)	Frekans	Relatif frekans	Olasılık, $P(x)$
0	30	0.015	0.015
1	470	0.235	0.235
2	850	0.425	0.425
3	490	0.245	0.245
4	160	0.080	0.080
	N = 2000	Toplam = 1.000	$P(x)$ = 1.00

- Rassal seçilen bir ailenin iki otomobili olma olasılığı 0.425 olup,

$$P(X = 2) = 0.425$$

- Seçilen bir ailenin ikiden çok otomobile sahip olma olasılığı

$$P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0.245 + 0.080 = 0.325$$

Kesikli Rassal Değişkenin Olasılık Dağılımı

- **Örnek :**

Eski verilerden yararlanılarak bir makinenin birer hafta süresince yaptığı arıza sayıları listelenerek aşağıda verilmiştir.

Haftalık arıza	0	1	2	3
Olasılık	0.15	0.20	0.35	0.30

a) Olasılık dağılımını grafiksel olarak gösteriniz.

b) Bu makinenin verilen bir hafta içerisinde aşağıdaki arıza sayılarına ilişkin olasılıkları bulunuz.

i) Kesinlikle iki

ii) Sıfır iki arası

iii) Birden çok

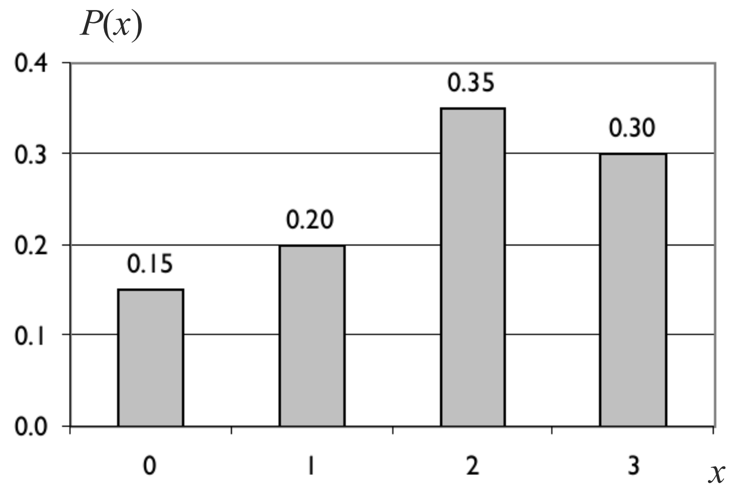
iv) En çok bir

Kesikli Rassal Değişkenin Olasılık Dağılımı

- Yukarda verilmiş olan bilgilerden yararlanılarak, X: verilen bir hafta içerisinde makinenin arıza sayılarını göstermek üzere olasılık dağılımı,

x	$P(x)$
0	0.15
1	0.20
2	0.35
3	0.30
	$\sum P(x) = 1.00$

- Olasılık dağılımı bilgilerinden yararlanarak olasılık dağılım grafiği aşağıdaki biçimde çizilir.



Kesikli Rassal Değişkenin Olasılık Dağılımı

- b) Yukarıda verilmiş olan Tablo'dan yararlanarak istenen olasılıklar bulunur.

- **i)** Kesinlikle iki arıza olma olasılığı;

  P (Kesinlikle iki arıza) = $P(X = 2) = 0.35$
- **ii)** Sıfır-iki arıza olma olasılığı

  (0, 1 ve 2 arıza durumlarının toplamıdır).

  P (0 - 2 arıza) = $P(0 \leq X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

  $= 0.15 + 0.20 + 0.35 = 0.70$
- **iii)** Birden çok arıza olma olasılığı

  (2 ve 3 arıza durumlarının toplamıdır).

  P (Birden çok arıza) = $P(X > 1) = P(X = 2) + P(X = 3)$

  $= 0.35 + 0.30 = 0.65$
- **iv)** En çok bir arıza olma olasılığı

  (0 ve 1 arıza durumlarının toplamıdır)

  P (En çok bir arıza) = $P(X \leq 1) = P(X= 0) + P(X = 1) = 0.15 + 0.20 = 0.35$

Kesikli Rassal Değişkenin Olasılık Dağılımı

- **Örnek :** Yapılan bir araştırmaya göre; üniversite öğrencilerinin **% 60** 'ının matematik derslerini sevmedikleri (fobi) ve sınavlarından korktukları elde edilmiştir. X matematik derslerini sevmeyen öğrenci sayısını göstermek üzere, bu gruptan rassal seçilen iki öğrenci için deneyin olasılık dağılımını yazınız.

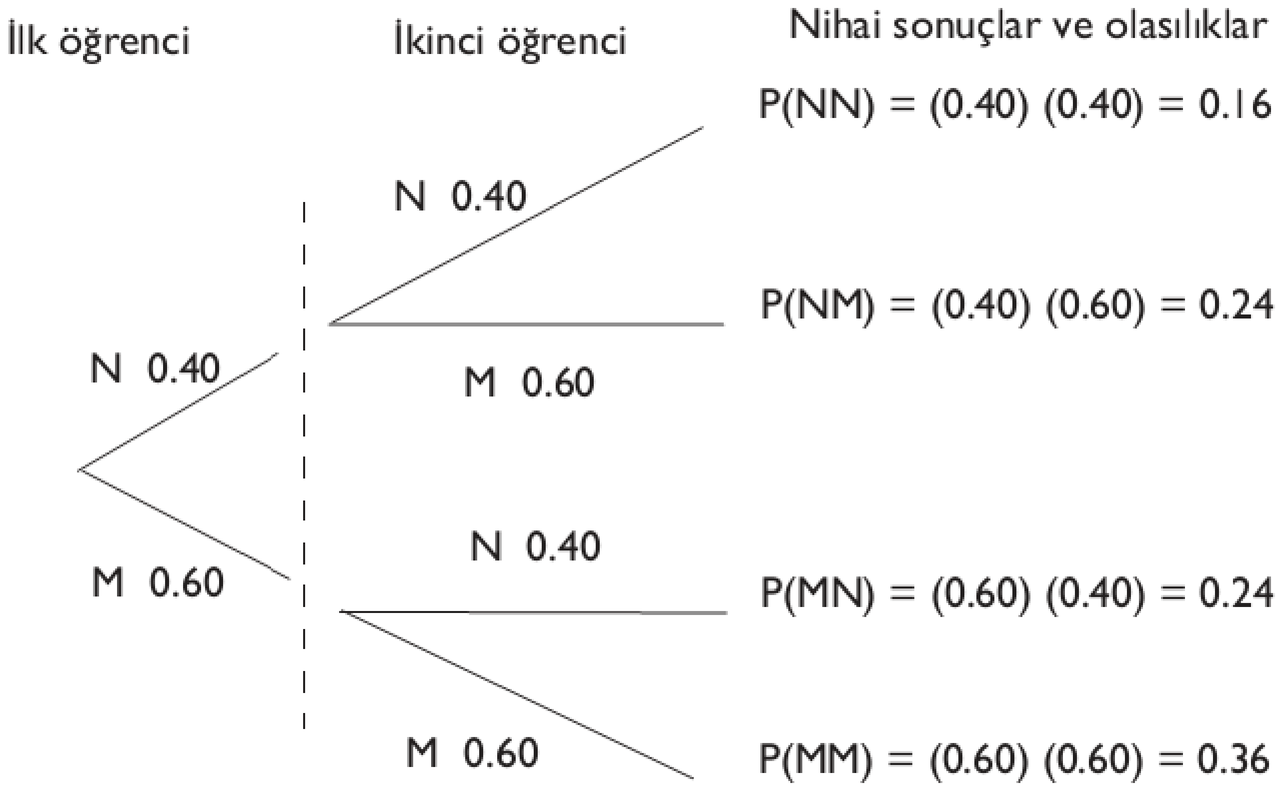
Kesikli Rassal Değişkenin Olasılık Dağılımı

- **Cevap :** Deney için tanımlanması gereken iki olay;

  N = Seçilen öğrencide matematik fobisi yok

  M = Seçilen öğrencide matematik fobisi var

Ağaç yapısı



Kesikli Rassal Değişkenin Olasılık Dağılımı

- Ağaç yapısından da görüleceği gibi bu deneyin dört olası sonucu bulunmaktadır.
  - NN - her iki öğrencide de matematik fobisi yok,
  - NM - ilk öğrencide matematik fobisi yok ikincide var,
  - MN - ilk öğrencide matematik fobisi var ikincide yok,
  - MM - her iki öğrencide de matematik fobisi var.

  P(M) = 0.60 olduğu bilinmektedir

  P(N) = 1 - P (M) = 1 - 0.60 = 0.40

- Bu durumda deneyin sonuçları,

  $P(X = 0) = P(NN) = 0.16$

  $P(X = 1) = P(NM \text{ ya da } MN) = P(NM) + P(MN) = 0.24 + 0.24 = 0.48$

  $P(X = 2) = P(MM) = 0.36$

Kesikli Rassal Değişkenin Olasılık Fonksiyonu

- **Tanım :** X, sonlu sayıdaki $x_1, x_2, \ldots, x_N$ değerlerini $f(x_i)=P(X=x_i)$, $i=1, 2,\ldots, N$ olasılıkları ile alabilen kesikli rasgele değişken olsun. Bu durumda aşağıdaki koşulları sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna X'in olasılık fonksiyonu (olasılık kütle fonk., olasılık dağılımı) denir.

$$f(x) \geq 0 \quad , \qquad \text{tüm } x\text{'ler için}$$

$$\sum_{i=1}^{N} f(x_i) = 1$$

$X=x$	x_1	x_2	....	x_N
$f(x)=P(X=x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	.....	$f(x_N)$

Kesikli Rassal Değişkenin Olasılık Fonksiyonu

- Örnek : Düzgün altı yüzlü bir zar bir kez atılıyor. Üste gelen yüzdeki noktaların sayısının olasılık fonksiyonunu bulunuz.

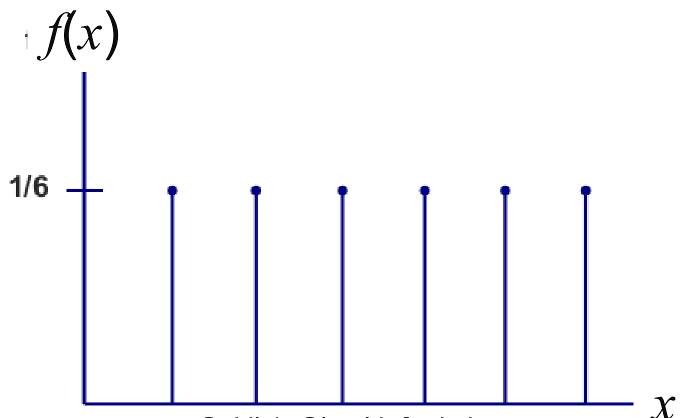
Kesikli Rassal Değişkenin Olasılık Fonksiyonu

- Çözüm: Bu deney için örnek uzay:

  S={1, 2, 3, 4, 5, 6}

- Zarın üst yüzüne gelen noktaların sayısını X ile gösterirsek, X 1 den 6' ya kadar herhangi bir tam sayı olacaktır. Örnek uzayda 6 örnek nokta vardır ve her biri 1/6 olasılıkla elde edildiğine göre X rassal değişkenin olasılık fonksiyonu:

$X=x$	1	2	3	4	5	6
$f(x)=P(X=x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6



Şekil 1. Olasılık fonksiyonu

$f(x)$=1/6, x=1, 2, …, 6

şeklinde de yazılabilir.

Kesikli Rassal Değişkenin Olasılık Fonksiyonu

- X rassal değişkeninin bir tek x değerine eşit olması olasılığı ile ilgilendiğimiz gibi, x'e eşit ya da küçük olması olasılığı ile de ilgileneceğiz. Bu toplamalı olasılığa X rasgele değişkeninin kümülatif (birikimli, eklemeli) dağılım fonksiyonu yada kısaca dağılım fonksiyonu denir.

- **Tanım :** (CDF) Bir X rassal değişkeninin dağılım fonksiyonu $F(x)$ ile gösterilir ve X'in x'e eşit ya da daha küçük olması olasılığıdır.

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$F(x) = \sum_{y : y \leq x} P(X = y)$$

Kesikli Rassal Değişkenin Olasılık Fonksiyonu

$$F(x) = \sum_{y: y \leq x} P(X = y)$$

- Bir önceki örneğin birikimli dağılım fonksiyonu (CDF) ve grafiği

F(1)=P(x≤1) = P(x<1) + P(x = 1) = 0 + 1/6 = 1/6

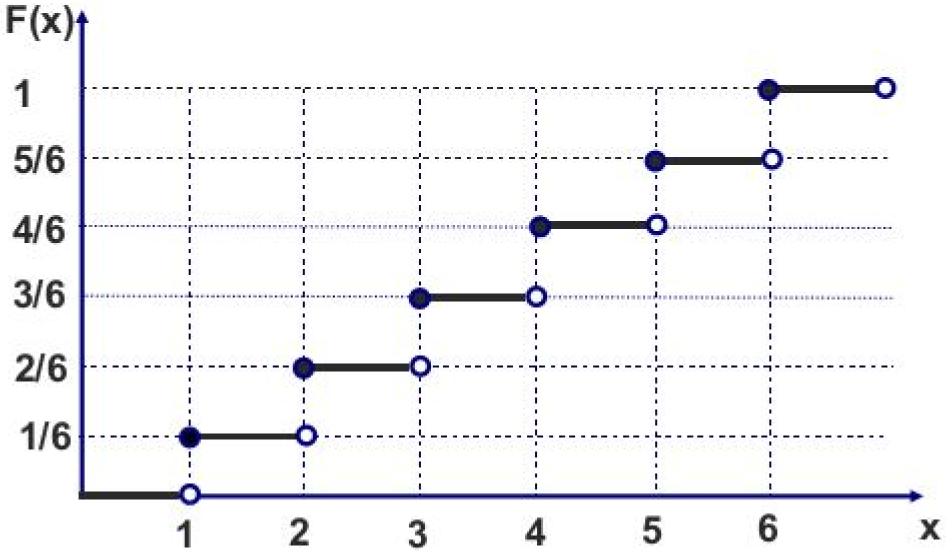
F(2)=P(x≤2) = F(1) + P(x = 2) = 1/6 + 1/6 = 2/6

F(3)=P(x≤3) = F(2) + P(x = 3) = 2/6 + 1/6 = 3/6

F(4)=P(x≤4) = F(3) + P(x = 4) = 3/6 + 1/6 = 4/6

F(5)=P(x≤5) = F(4) + P(x = 5) = 5/6 + 1/6 = 5/6

F(6)=P(x≤6) = F(5) + P(x = 6) = 5/6 + 1/6 = 6/6



$$F(x) = \begin{cases} 0, & x<1 \quad \text{ise} \\ \dfrac{j}{6}, & j \leq x < j+1,\ j=1,2,\dots,5 \\ 1, & x \geq 6 \quad \text{ise} \end{cases}$$

Kesikli Rassal Değişkenin Olasılık Fonksiyonu

- **Tanım :** X sayılabilir sonsuzluktaki $x_1, x_2, \ldots, x_N, \ldots$ değerlerini alan kesikli bir rassal değişken olsun. Bu değerlere karşılık gelen olasılıklar $f(x_i)=P(X=x_i)$, $i=1, 2, \ldots, N, \ldots$ olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna X rassal değişkeninin olasılık dağılımı ya da olasılık fonksiyonu denir.

$$f(x) \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1$$

O halde, X rassal değişkeninin olasılık fonksiyonu yandaki formdadır .

$X=x$	x_1	x_2	....
$f(x)=P(X=x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	.....

Kesikli Rassal Değişkenin Olasılık Fonksiyonu

- **Örnek :** Bir para tura gelinceye kadar atılıyor. X gereken atışların sayısını gösteren rassal değişken olsun. X rassal değişkeninin olasılık fonksiyonunu bulunuz.
- **Çözüm:** T turayı, Y yazıyı gösterirse bu deney için elde edilebilecek sonuçlar ve karşılık gelen olasılıklar aşağıdadır.

Atış No	Sonuç	Olasılığı
1. Atış	T	1/2
2. Atış	YT	1/2.1/2
3. Atış	YYT	1/2.1/2 .1/2
.	.	.
.	.	.
.	.	.
N. Atış	YY…YT	$(1/2)^{N-1}.1/2$
.	.	.
.	.	.

Kesikli Rassal Değişkenin Olasılık Fonksiyonu

- Böylece X'in olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi olur.

$X=x$	**1**	**2**	**…**	$\boldsymbol{x}$	**…**
$f(x)=P(X=x)$	$1/2$	$(1/2)^2$	…	$(1/2)^x$	…

- X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x,$$ x = 1,2,... gibi de yazılır.

Kesikli Rassal Değişkenin Olasılık Fonksiyonu

Olasılıklar toplamının 1 olduğunu göstermek için toplam

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2}}+\ldots$$ yazılır. Bu bir sonsuz geometrik seridir.

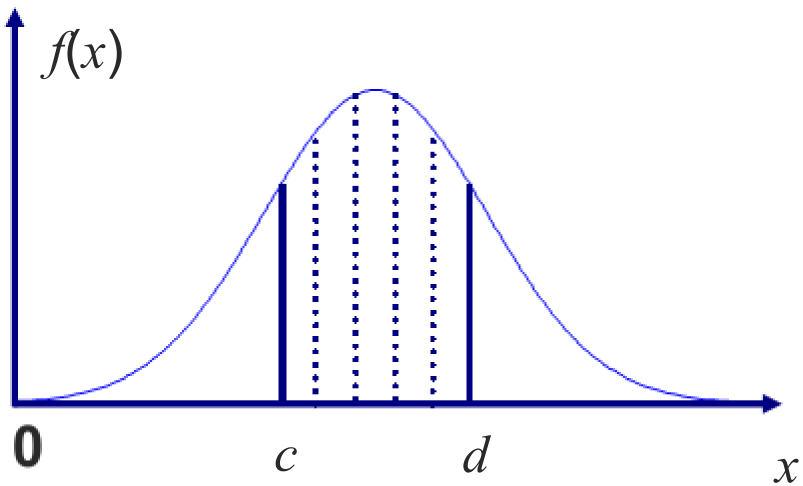
Böyle bir seri için $a+ar+ar^{2}+\ldots=\dfrac{a}{1-r}$ dir.

a ilk terim ve r (-1 ≤ r ≤ 1) ortak çarpandır. Problemde a=1/2, r=1/2 olduğundan

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(x)=\frac{1/2}{1-1/2}=1 \text{ bulunur.}$$

Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

- **Tanım :** X, şekil de gösterilen (-∞, +∞) aralığında tanımlanan sürekli rassal değişken olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu denir.



$$1. f(x) \geq 0, \quad -\infty < x < \infty$$

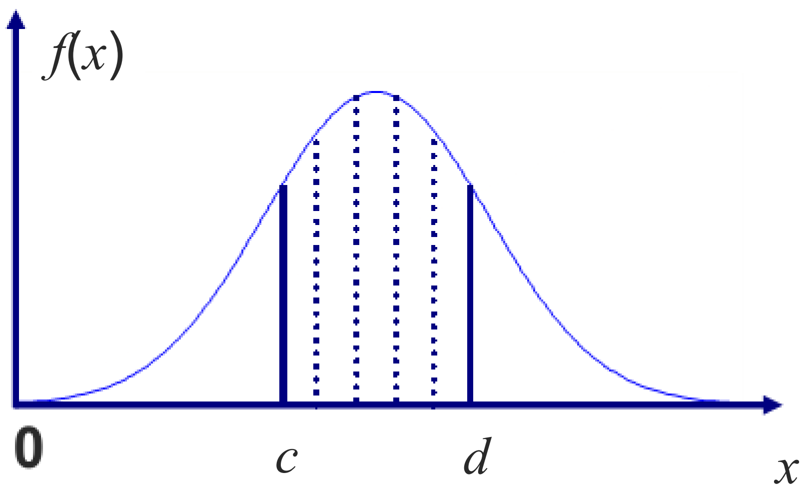
$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1,$$

$f(x)$ eğrisi altında kalan ve x-ekseni ile sınırlanan alan 1'e eşittir.

Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

$$P(c < X < d) = \int_c^d f(x)dx \; f(x) \text{ eğrisi,}$$

- x-ekseni ve $x=c$, $x=d$ doğruları ile sınırlı alandır.

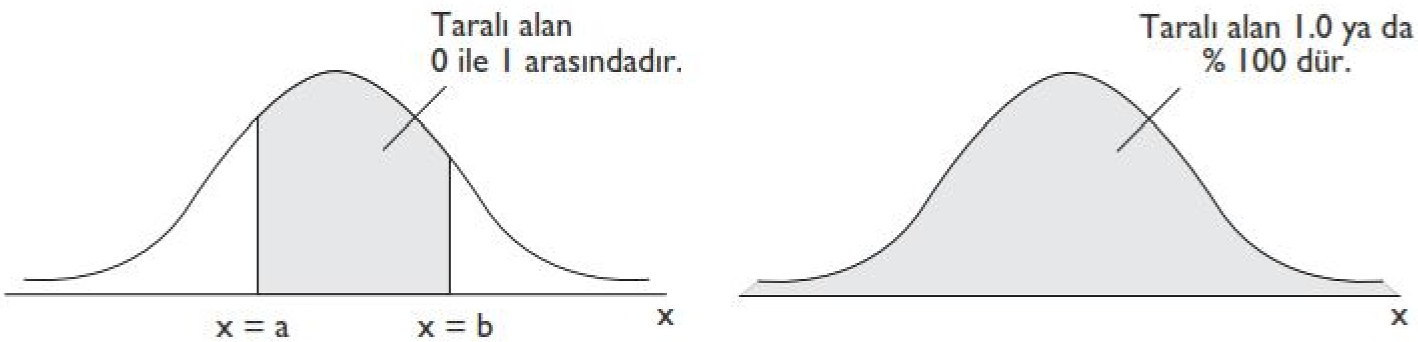


Sürekli X rassal değişkeninin belli bir x değeri alması olasılığı sıfırdır.

$P(X=x)=0$

Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

- Sürekli bir rassal değişkenin olasılık dağılımı iki özelliği sağlamalıdır:
  - Bir aralıkta herhangi bir değer alan *X*'in olasılığı 0-1 arasındadır.
  - *X*'in aldığı tüm değerlerin olasılıklarının toplamı 1'dir.



Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

- Örnek $f(x)=1$, $0<x<1$ olasılık yoğunluk fonksiyonu verilsin. Aşağıdaki olasılıkları bulunuz.

a) $P(0,25<X<0,75)$

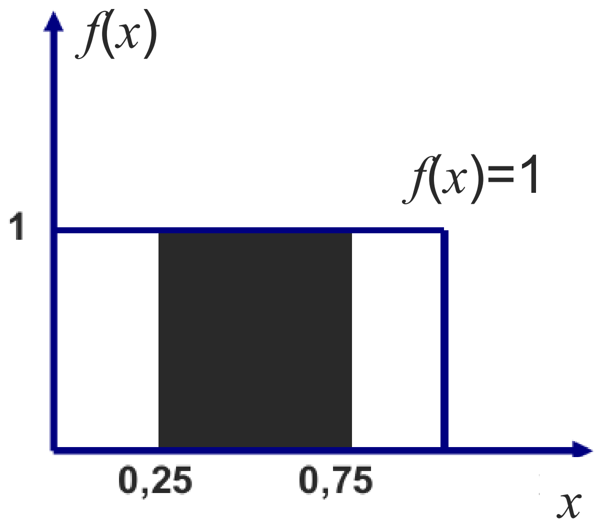
b) $P(X>0,25)$

Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

- Çözüm: $x=0$, $x=1$ doğruları, $f(x)=1$ doğrusu ve x-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanı 1'dir.

a) $P(0,25<X<0,75)=1.\ (0,50)=0,5$

(uzunluğu 1, genişliği 0,50 olan dikdörtgenin alanıdır.)



b) $P(X>0,25)=1.(0,75)=0,75$

(uzunluğu 1, genişliği 0,75 olan dikdörtgenin alanıdır.)

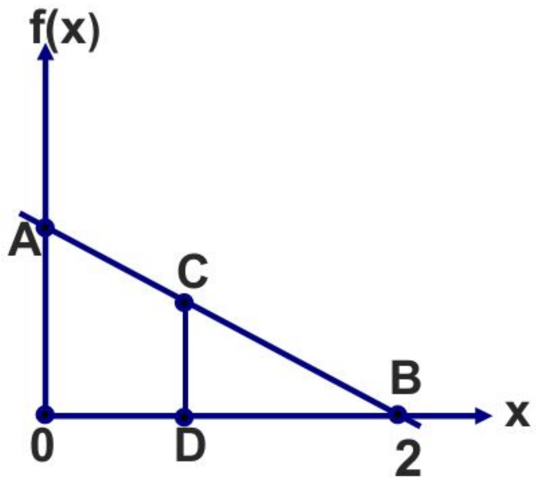
Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

- **Örnek:** X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

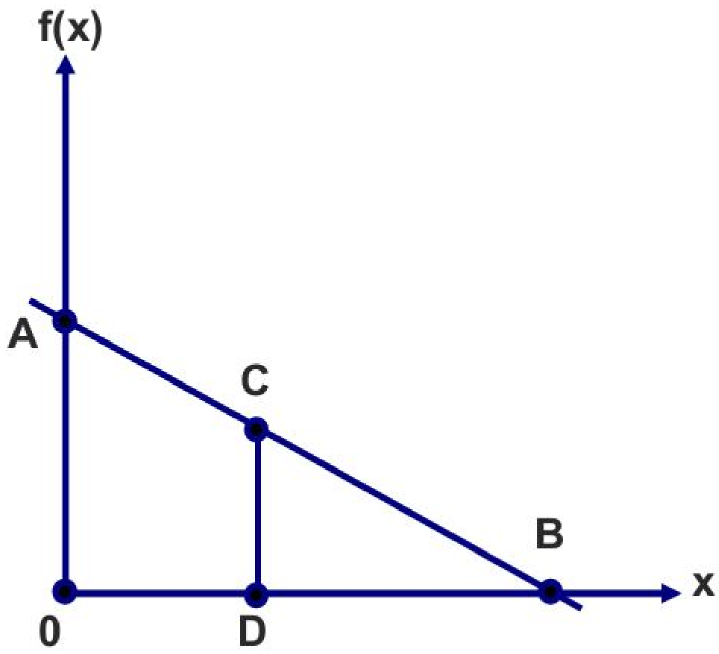
  $f(x)=1-x/2,\ 0<x<2$ aşağıdaki şekilde verilmiştir.

  a) $P(0<X<1)$

  b) $P(1<X<2)$ olasılıklarını bulunuz.



Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu



a) $P(0<X<1)$ = OACD yamuğunun alanı

= 1/2 (OA+CD).OD

= 1/2 (1,0+0,5).(1,0)=0,75

b) $P(1<X<2)$ = DCB üçgeninin alanı

= 1/2 (DB).CD

= 1/2 (1).(0,5)

= 0,25

Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

- Belli bir tipteki elektrik ampullerinin dayanma süresi (saat olarak) X olsun. X sürekli bir rassal değişken olmak üzere X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir. a'yı bulunuz.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x^3}, & 1500 \leq x \leq 2500 \\ 0, & x < 1500 \ veya \ x > 2500 \end{cases}$$

Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

- A={x<1500} ve B={x>2500} olaylarına sıfır olasılıkları karşılık gelecektir. a'yı hesaplamak için aşağıdaki eşitlik kullanılırsa a=7031250 bulunur.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1500}^{2500} \frac{a}{x^3} dx = 1$$