DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Ders Notları

EKİM 10, 2013

PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ, MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ, MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
Denizli

Önsöz

Bu diferansiyel denklemler notları Pamukkale Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü öğrencilerinin eline Türkçe çözümlü bir kaynak vermek amacıyla hazırlandı. Verilen misaller mümkün olduğunca kolaydan zora doğru sıralandı.

Çözümlerde analitik yöntemler kullanıldı. Dolayısıyla, Diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri yer almamaktadır. Sadece "Euler Metodu" bir problem çözümünü göstermek için verildi. Diğer metotlar "Sayısal Analiz" dersi kapsamında olduğu için burada yer almamaktadır.

Türkçe bilen tüm öğrencinin derste vaktini yazmakla geçirmek yerine, dersi takip etmekle geçirmesi öğrenci açısından daha yararlı olacağı düşünüldüğünden, bu notlar web sayfasında verilmiştir.

Bu Ders Notları son haliyle değildir. Yapılan değişiklikler web sayfasında tekrar yayınlanacaktır. Çözümlerde çıkan hatalar veya önerilerinizi email adresime gönderirseniz memnun olurum. Çünkü sizin önerilerinizle notların daha yararlı hale geleceği kanaatindeyim.

Ekim, 2013

Doç.Dr. Zekeriya GİRGİN
Pamukkale Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Makine Mühendisliği Bölümü
Kınıklı Kampüsü 20070
Denizli, Türkiye
Web page:
Email: zgirgin@pau.edu.tr
http://zgirgin.pau.edu.tr/

"Ahirette seni kurtaracak bir eserin olmadığı takdirde, fâni dünyada bıraktığın şeylere de kıymet verme!"

İçindekiler

1. Diferansiyel Denklemlere Giriş

Diferansiyel Denklemler, dünyadaki birçok fiziksel olayın matematik modeli, ortaya çıkartıldığında, karşımıza çıkmaktadır. Bunu akışkanlar mekaniğinde bir sıvının hareketinden tutun (Navier-Stokes denklemleri), mukavemette bir kirişin eğilmesi ve titreşimi veya bir kolonun burkulması gibi birçok problemin çözümü aslında diferansiyel denklemin çözümüdür. Bu konu ile ilgili bazı temel kavramların da önce iyi bilinmesi gereklidir.

1.1 Diferansiyel Denklemin Tanımı

Öyle bir denklemdir ki; kendisi, kendisinin birinci veya daha fazla türevleri ve/veya bazı değişken ve sabitleri ihtiva eden bir denklemdir. Matematik diliyle ifade edilmek istenildiğinde aşağıdaki gibi;

$$F\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, \frac{d^2y(x)}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny(x)}{dx^n}\right) = c, \qquad x \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty) \tag{1.1}$$

gibidir. Özel çözümü için başlangıç veya sınır şartlarının verilmiş olması gerekir ve aşağıdaki şekilde ifade edilir.

Bir diferansiyel denklemdeki en büyük türeve, o diferansiyel denklemin **mertebesi** denir ve bu diferansiyel denklemde bulunan *en yüksek mertebeli türevin üssüne* de, bu diferansiyel denklemin **derecesi** denir.
Aşağıdaki misalleri inceleyiniz.

$3\frac{dy}{dx}+2y=\sin(x)$ (1. merteben, 1. dereceden diferansiyel denklem)

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5-\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+2y^6=x$ (2. merteben, 5. dereceden diferansiyel denklem)

$\frac{d^4y}{dx^4}=q(x)$ (4. merteben, 1. dereceden diferansiyel denklem)

Yukarıda verilen misaller, sadece bir değişkene (x) bağlı olduğundan "**Adi Diferansiyel Denklem (ADD)**" olarak adlandırılırlar. Değişken sayısı birden fazla olduğu takdirde "**Kısmî Diferansiyel Denklem (KDD)**" olarak adlandırılırlar. Ayrıca, bir diferansiyel denklemdeki bağımlı değişken ve tüm türevleri birinci dereceden ise, diferansiyel denkleme "Lineer Diferansiyel Denklem" denir.
Eğer bağımlı değişken ve/veya değişkenin tüm türevlerinden biri bile ikinci veya daha yüksek dereden ise buna "Lineer Olmayan Diferansiyel Denklem" denir ve bu tür denklemlerin analitik çözümü zor veya daha henüz bulunamadığından, sayısal çözüm yoluna gidilir.

Bundan sonraki işlemlerde nokta (·) zamana göre türevi ifade edecektir.($\dot{y}=\frac{dy}{dt}$)

Ve $y'=\frac{dy}{dx}$ (x e göre türev olarak algılanacaktır. Aşağıda sırasıyla her bir diferansiyel denklem türü, açıklamalarıyla birlikte verilecektir. Diferansiyel denklemin çözümünden katsayılı (c, c_1, c_2, gibi) olarak elde edilen çözüme "**Genel Çözüm**" denir. Diferansiyel denklem ile birlikte verilen başlangıç veya sınır şartlarının yerine yazılmasıyla elde edilen çözüme "**Özel Çözüm**" denir ve bu çözümde, c, c_1, c_2, gibi katsayı bulunmaz. Bunun yerine sayı ve/veya sayılar bulunur.

1.2 Genel Çözümden Diferansiyel Denklemin Hesaplanması:

Genel çözümden diferansiyel denklemi hesaplamak için 2 yol vardır.

1.Yol:

Denklemin türevi alınarak çözüme gidilir.

Misaller:

1. Misal:

$y=c\cdot x^2$ denkleminden, diferansiyel denklemi hesaplayınız.

Çözüm: $y'=2c\cdot x$ → $c=\frac{y'}{2x}$ Bu değer genel çözümde yerine yazıldığında;

$y = \frac{y'}{2x} \cdot x^2 \quad \rightarrow \quad x^2 \cdot y' - 2x \cdot y = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{y' - \frac{2}{x} \cdot y = 0}$

2. Misal:

$y = c_1 \cdot x^2 + c_2 \cdot x^3$ denkleminden diferansiyel denklemi hesaplayınız.

Çözüm: Genel çözümün 1. türevi alındığında; $y' = 2c_1 \cdot x + 3c_2 \cdot x^2$

ve 2. türevi alındığında; $y'' = 2c_1 + 6c_2 \cdot x$

değeri elde edilir. $3y - x \cdot y'$ değeri ile $-y' + x \cdot y''$ değeri alt alta yazılıp toplandığında;

$$\begin{array}{r|cccc} -3\cdot & y & = & c_1 \cdot x^2 & +c_2 \cdot x^3 \\ +x\cdot & y' & = & 2c_1 x & +3c_2 \cdot x^2 \\ \hline + & x \cdot y' - 3y & = & -c_1 \cdot x^2 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|cccc} -1\cdot & y' & = & +2c_1 \cdot x & +3c_2 \cdot x^2 \\ +x\cdot & y'' & = & +2c_1 & +6c_2 \cdot x \\ \hline + & x \cdot y'' - y' & = & 0 & +3c_2 \cdot x^2 \end{array}$$

$c_1 = \frac{3y - x \cdot y'}{x^2}$ ve $c_2 = \frac{x \cdot y'' - y'}{3x^2}$ elde edilir. Bu değerler genel çözümde yerine yazıldığında;

$$y = \frac{3y - x \cdot y'}{x^2} \cdot x^2 + \frac{x \cdot y'' - y'}{3x^2} \cdot x^3 \quad \rightarrow \quad y = 3y - x \cdot y' + \frac{x \cdot y'' - y'}{3} \cdot x$$

$$6y - 3 \cdot x \cdot y' + (x \cdot y'' - y') \cdot x = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 \cdot y'' - 4x \cdot y' + 6y = 0$$

şeklinde genel çözüme ait diferansiyel denklem elde edilmiş olur.

2.Yol:

Genel çözümde kaç tane sabit varsa o kadar türev alınır ve denklemin determinantı sıfıra eşitlenerek diferansiyel denklem hesaplanır. Bu usül daha uygundur.

3. Misal:

$y = c \cdot e^x$ genel çözümünden diferansiyel denklemi hesaplayınız.

$\begin{bmatrix} y & e^x \\ y' & e^x \end{bmatrix} = 0, \Rightarrow y \cdot e^x - y' \cdot e^x = 0, \Rightarrow y' - y = 0$ elde edilir.

4. Misal:

$y = c_1 \cdot x^2 + c_2 \cdot x^3$ denkleminden diferansiyel denklemi hesaplayınız.

Çözüm: Genel çözümün 1. türevi alındığında; $y' = 2c_1 \cdot x + 3c_2 \cdot x^2$ ve 2. türevi alındığında; $y'' = 2c_1 + 6c_2 \cdot x$ değeri elde edilir. Bunlar (3×3) lük determinantta yerine yazıldığında;

$$\begin{bmatrix} y & x^2 & x^3 \\ y' & 2x & 3x^2 \\ y'' & 2 & 6x \end{bmatrix} = 0$$

$$y(12x^2 - 6x^2) - y'(6x^3 - 2x^3) + y''(3x^4 - 2x^4) = 0$$

$$y\cdot 6x^2 - y'\cdot 6x^3 + y''\cdot x^4 = 0 \rightarrow \left[y\cdot 6 - y'\cdot 4x + y''\cdot x^2\right]\cdot \cancel{x^2} = 0$$

$x^2\cdot y'' - 4x\cdot y' + 6y = 0 \rightarrow y'' - \dfrac{4}{x}\cdot y' + \dfrac{6}{x^2}\cdot y = 0$ elde edilir.

5. Misal:

Genel çözümü $y = c_1\cdot e^{2\cdot t} + c_2\cdot e^{-3t}$ olan y fonksiyonunun diferansiyel denklemini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{bmatrix} y & e^{2t} & e^{-3t} \\ \dot{y} & 2e^{2t} & -3e^{-3t} \\ \ddot{y} & 4e^{2t} & 9e^{-3t} \end{bmatrix} = 0 \qquad \rightarrow \qquad y\left(18e^{-t} + 12e^{-t}\right) - \dot{y}\left(9e^{-t} - 4e^{-t}\right) + \ddot{y}\left(-3e^{-t} - 2e^{-t}\right) = 0$$

$$y\left(30e^{-t}\right) - \dot{y}\left(5e^{-t}\right) + \ddot{y}\left(-5e^{-t}\right) = 0 \qquad \rightarrow \qquad 30\cdot e^{-t}\cdot y - 5\cdot e^{-t}\cdot \dot{y} - 5\cdot e^{-t}\cdot \ddot{y} = 0$$

$\left(5\cdot \ddot{y} + 5\cdot \dot{y} - 30\cdot y\right)\cdot \cancel{e^{-t}} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \ddot{y} + \dot{y} - 6\cdot y = 0$ şeklinde diferansiyel denklem elde edilir. Veya $y = c_1\cdot e^{2\cdot t} + c_2\cdot e^{-3t}$ fonksiyonunda kökler bilindiğinden karakteristik denklemden yararlanarak diferansiyel denklem bulunabilir.

$$\left(r - r_1\right)\cdot\left(r - r_2\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \left(r - 2\right)\cdot\left(r + 3\right) = 0 \quad \rightarrow \quad r^2 + r - 6 = 0 \quad \rightarrow$$

$\ddot{y} + \dot{y} - 6\cdot y = 0$ olduğu görülür.

2. Ayrılabilir Diferansiyel denklemler ve uygulamaları (Separable Differential Equations and their applications)

Tanımlama:

Bir diferansiyel denklemde bağımlı değişkenler (genellikle y) bir tarafta ve bağımsız değişkenler (genellikle x) bir tarafta kalacak şekilde, cebirsel olarak yazılabiliyorsa, integral alınarak fonksiyon hesaplanabilir ve buna 1. mertebeden ayrılabilir diferansiyel denklem denir.

Birinci mertebeden bir diferansiyel denklem x ve y ler bir tarafta olacak şekilde ayrılabiliyorsa buna ayrılabilir diferansiyel denklem denir.

Diferansiyel Denklemlerin en basit halidir ve Birinci mertebeden değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denklem:

$$A\left(x\right)\cdot dx + B\left(y\right)\cdot dy = 0 \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlıdır. Her iki tarafın integrali alınarak çözüm yapılır.

$$\int A\left(x\right)\cdot dx + \int B\left(y\right)\cdot dy = c \tag{2.2}$$

Burada c integral sabitini göstermektedir.

2.1 Misal:

Aşağıdaki diferansiyel denklemin genel çözümünü hesaplayınız.

$$\frac{dy}{dx}=2\cdot x\cdot y \;\rightarrow\; \frac{dy}{y}=2\cdot x\cdot dx \;\rightarrow\; \left(\frac{1}{y}\right)dy-(2\cdot x)dx=0$$

Her iki tarafın integrasyonu alınmasıyla

$$\int\left(\frac{1}{y}\right)\cdot dy-\int(2x)\cdot dx=c \;\rightarrow\; \ln(y)=x^2+c$$

Elde edilir. Exponansiyeli alındığında (e üzerili yazıldığında):

$$e^{\ln(y)}=e^{x^2+c} \rightarrow e^{\ln(y)}=e^{x^2}\cdot e^{C}$$

$(c=e^{C}) \rightarrow e^{\ln(y)}=c\cdot e^{x^2}$ → Genel çözüm: $\boxed{y=c\cdot e^{x^2}}$ şeklindedir.

2.2 Misal:

Aşağıdaki diferansiyel denklemin genel çözümünü hesaplayınız.

$$x\cdot\frac{dy}{dx}=\left(1-2\cdot x^2\right)\cdot\tan(y) \;\rightarrow\; \frac{dy}{\tan(y)}=\frac{\left(1-2\cdot x^2\right)}{x}dx$$

$$\left(\frac{1}{\tan(y)}\right)dy-\left(\frac{1}{x}-2\cdot x\right)dx=0 \;\rightarrow\; \left(\frac{\cos(y)}{\sin(y)}\right)dy-\left(\frac{1}{x}-2x\right)dx=0$$

Her iki tarafın integrasyonu alındığında;

$$\int\left(\frac{\cos(y)}{\sin(y)}\right)dy-\int\left(\frac{1}{x}-2x\right)dx=c \;\rightarrow\; \ln(\sin(y))-\ln(x)+x^2=c$$

$$e^{\ln(\sin(y))}=e^{\ln(x)-x^2+c} \rightarrow e^{\ln(\sin(y))}=e^{\ln(x)}\cdot e^{-x^2}\cdot e^{C}$$

$\sin(y)=c\cdot x\cdot e^{-x^2},\quad (c=e^{C})$ veya sonuçlar: $\boxed{y=\arcsin\left(c\cdot x\cdot e^{-x^2}\right)}$ şeklinde gösterilebilir.

Dikkat: Her diferansiyel denklemin genel çözümü, eşitliğin bir tarafında değişkenler ve diğer tarafında sadece fonksiyonun kendisi kalacak şekilde (Explicit form) ifade edilemez, mesela:

$x^2\cdot y+x\cdot y^2=\sin(x\cdot y)$ denkleminde olduğu gibi

2.3 Misal:

Aşağıdaki diferansiyel denklemin genel çözümünü hesaplayınız.

Çözüm: $x \cdot dx - y^2 \cdot dy = 0 \rightarrow \int x dx - \int y^2 dy = c \rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} = c \rightarrow 3\frac{x^2}{2} - y^3 = 3c$

$\rightarrow \quad y^3 = 3\frac{x^2}{2} - 3c \quad \rightarrow \quad y = \left[3\frac{x^2}{2} + C\right]^{\frac{1}{3}}$

2.4 Misal:

Aşağıdaki diferansiyel denklemin genel çözümünü hesaplayınız.

$$y' = y^2 x^3 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 x^3}{1} \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y^2} = x^3 dx \quad \rightarrow \quad x^3 dx - \frac{dy}{y^2} = 0$$

Açıklama: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, \quad \left(-\frac{1}{y}\right)' = \frac{1}{y^2}$

$$\int x^3 dx - \int \frac{dy}{y^2} = c \quad \rightarrow \quad \frac{x^4}{4} - \left(-\frac{1}{y}\right) = c \quad \rightarrow \quad \frac{x^4}{4} + \frac{1}{y} = c$$

$$\frac{1}{y} = c - \frac{x^4}{4} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{y} = \frac{4c - x^4}{4} \quad \rightarrow \quad y = \frac{4}{4c - x^4} = \frac{-4}{-4c + x^4}$$

Çözümü: $y = \frac{-4}{C + x^4}, \quad (C = -4c)$

2.5 Misal:

Aşağıdaki diferansiyel denklemin genel çözümünü hesaplayınız.

$$y' = \frac{x+1}{y^4+1} \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y^4+1} \quad \rightarrow \quad \left(y^4+1\right)dy - (x+1)dx = 0$$

$$\int \left(y^4+1\right)dy - \int (x+1)dx = c \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{y^5}{5} + y - \frac{x^2}{2} - x = c}$$

Yukarıda görüldüğü gibi sonuçları her zaman açık (explicit) formda vermek mümkün olmadığından kapalı (implicit) formda göstermek daha uygundur.

2.6 Misal:

$\dot{y} = 2t \cdot \left(y^2 + 9\right)$ şeklinde verilen diferansiyel denklemin genel çözümünü hesaplayınız.

Çözüm: $\dot{y} = \frac{dy}{dt} = 2t \cdot \left(y^2 + 9\right) \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{y^2+9}\right)dy - (2t)dt = 0$

Integral tablosundaki kural (10)→ $\int \left(\frac{1}{x^2 + a^2}\right)dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$ uygulandığında:

$$\int\left(\frac{1}{y^2+3^2}\right)dy-\int(2t)dt=c \rightarrow \quad \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{y}{3}\right)-t^2=c$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{y}{3}\right)-3t^2=3c \rightarrow \quad \tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{y}{3}\right)\right]=\tan\left[3t^2+3c\right]$$

$$\frac{y}{3}=\tan\left[3t^2+3c\right] \rightarrow \quad \boxed{y=3\cdot\tan\left[3t^2+C\right]}\ ,\ (C=3c)$$

2.7 Misal:

Aşağıdaki diferansiyel denklemin genel çözümünü hesaplayınız.

$x\cdot\cos(x)\cdot dx+(1-6y^5)\langle dy=0,\ \ y(\pi)=0 \rightarrow$ Integral tablosundaki kural (84) $\int x\cdot\cos(x)\cdot dx=\cos(x)+x\cdot\sin(x)$ uygulandığında; $\int x\cdot\cos(x)dx+\int(1-6y^5)dy=c$

$$\cos(x)+x\sin(x)+y-y^6=c \rightarrow \quad \cos(x)+x\sin(x)-c=y^6-y$$

x yerine π konduğunda; $\cos(\pi)+\pi\sin(\pi)-c=y^6-y \rightarrow \cos(\pi)+\pi\sin(\pi)-c=0^6-0$

$-1+\pi\cdot 0-c=0^6-0 \rightarrow \quad c=-1 \quad \boxed{\cos(x)+x\sin(x)+1=y^6-y}$ elde edilir. Görüldüğü gibi bir diferansiyel denklemi her zaman açık formda yazmak mümkün değildir

2.8 Misal:

$y'=\frac{y+x}{x}$ diferansiyel denklemin genel çözümünü hesaplayınız.

Çözüm: $y'=\frac{y+x}{x} \rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y+x}{x} \rightarrow (y+x)\cdot dx=x\cdot dy \rightarrow \quad (y+x)\cdot dx-x\cdot dy=0$

$A(x)\cdot dx+B(y)\cdot dy=0$ ayrılabilir diferansiyel denklem türüne uymamaktadır. Lineer diferansiyel ve homojen diferansiyel denklem türüne uygundur. Çözümü daha sonra yapılacaktır

2.9 Misal:

Aşağıda verilen birinci mertebeden diferansiyel denklemin genel çözümünü ve verilen başlangıç şartı için özel çözümünü hesaplayınız.

$e^x\cdot dx-y\cdot dy=0,\ \ y(0)=1 \rightarrow \quad \int e^x dx-\int y dy=c \rightarrow \quad \boxed{e^x-\frac{y^2}{2}=c}$ Genel çözümdür.

$\frac{y^2}{2}=e^x-c \rightarrow \quad y^2=2e^x-C \rightarrow \quad 1=2e^0-C \rightarrow \quad C=2-1=1 \rightarrow \quad \boxed{y=\sqrt{2e^x-1}}$ özel çözümdür. $y\neq-\sqrt{2e^x-1}$ çünkü verilen başlangıç şartını sağlamaz.

3. Birinci Mertebeden Homojen Diferansiyel Denklemler ve uygulamaları (First-order homogeneous Differential Equations and their applications)

$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ ve $f(x,y) = f(tx,ty)$ şeklinde ise buna 1.mertebeden homojen diferansiyel denklem denir ve aşağıdaki şekilde indirgeme yapılarak 1. mertebeden ayrılabilir diferansiyel denkleme dönüştürülüp çözümü yapılır.

$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ ise $y = u \cdot x$ değişken dönüşümü uygulanabilir. Buradan;

$\frac{dy}{dx} = u + x \cdot \frac{du}{dx}$ elde edilir. Bu çözüm yapıldıktan sonra tekrar geri dönüşüm ($u = \frac{y}{x}$) yapılarak çözüm tamamlanır. Veya $\frac{dx}{dy} = f(x,y)$ ise $x = v \cdot y$ değişken dönüşümü uygulanabilir. Buradan;

$\frac{dx}{dy} = v + y \cdot \frac{dv}{dy}$ elde edilir. Bu çözüm yapıldıktan sonra tekrar geri dönüşüm ($v = \frac{x}{y}$) yapılarak çözüm tamamlanır.

3.1 Misal:

2.8 de verilen $y' = \frac{y+x}{x}$ diferansiyel denklemin genel çözümünü ve $y(1) = 0$ sınır şartı için de özel çözümünü hesaplayınız.

$y' = f(x,y) = \frac{y+x}{x}$ → $f(x,y) = f(tx,ty)$ olup olmadığı test edilmelidir.

$f(x,y) = \frac{y+x}{x}$, $f(t \cdot x, t \cdot y) = \frac{t \cdot y + t \cdot x}{t \cdot x} = \frac{\cancel{t} \cdot (y+x)}{\cancel{t} \cdot x}$ olduğundan 1. mertebeden homojen diferansiyel denklemdir ve $y = u \cdot x$ dönüşümü uygulanmalıdır.

$$u + x \cdot \frac{du}{dx} = \frac{u \cdot x + x}{x} = \frac{\cancel{x} \cdot (u+1)}{\cancel{x}} = u+1 \quad \rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = u+1-u \qquad x\frac{du}{dx} = 1$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)dx = du \quad \int\left(\frac{1}{x}\right) \cdot dx - \int du = c \quad \ln(x) - c = u \quad \ln(x) - c = \frac{y}{x} \qquad \boxed{y = [\ln(x) - c] \cdot x}$$

Şeklinde genel çözüm elde edilir. Verilen sınır şartları kullanılarak özel çözüm bulunur.

$y = [\ln(x) - c] \cdot x$ → $0 = [\ln(1) - c] \cdot 1$ → $0 = [0 - c] \cdot 1$ → $c = 0$ → $\boxed{y = x \cdot \ln(x)}$ Özel çözümüdür.

3.2 Misal:

$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y^4+x^4}{xy^3}$ ile diferansiyel denklemi çözünüz. (Bernoulli ile de çözülebilir.)

$y'=f(x,y)=\dfrac{2y^4+x^4}{xy^3}$ ve $f(tx,ty)=\dfrac{2(ty)^4+(tx)^4}{(tx)(ty)^3}=\dfrac{t^4(2y^4+x^4)}{t^4(xy^3)}=f(x,y)$ olduğundan homojen diferansiyel denklemdir. $y=u\cdot x$ değişken dönüşümü uygulandığında;

$$dy=u\cdot dx+x\cdot du \qquad \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$$

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{2(ux)^4+x^4}{x(ux)^3} \rightarrow u+x\frac{du}{dx}=\frac{2(ux)^4+x^4}{x(ux)^3}=\frac{2u^4x^4+x^4}{x^4u^3}=\frac{\cancel{x^4}\cdot(2u^4+1)}{\cancel{x^4}\cdot(u^3)}=\frac{2u^4+1}{u^3}$$

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{2u^4+1}{u^3} \rightarrow x\frac{du}{dx}=\frac{2u^4+1}{u^3}-u \rightarrow x\frac{du}{dx}=\frac{2u^4+1-u^4}{u^3} \rightarrow x\frac{du}{dx}=\frac{u^4+1}{u^3}$$

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{du}=\frac{u^3}{u^4+1} \rightarrow \left(\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{u^3}{u^4+1}\right)du \rightarrow \int\left(\frac{1}{x}\right)\cdot dx-\int\left(\frac{u^3}{u^4+1}\right)du=c$$

$$\ln(x)\cdot\ln(u^4+1)^{-\frac{1}{4}}=c \rightarrow e^{\ln(x)}\cdot e^{\ln(u^4+1)^{-\frac{1}{4}}}=e^c \rightarrow x\cdot(u^4+1)^{-\frac{1}{4}}=e^c \qquad x\cdot\left(\frac{y^4}{x^4}+\frac{x^4}{x^4}\right)^{-\frac{1}{4}}=e^c$$

$$x^4\cdot\frac{1}{\left(\frac{y^4+x^4}{x^4}\right)^{\frac{1}{4}\cdot 4}}=c_1^4 \rightarrow x^4\cdot\frac{1}{\frac{y^4+x^4}{x^4}}=c_1^4 \qquad (C=c_1^4) \rightarrow \boxed{\frac{x^8}{x^4+y^4}=C}$$ elde edilir.

3.3 Misal:

$(y^2+2xy)\cdot dx-x^2\cdot dy=0$ diferansiyel denklemin genel çözümünü hesaplayınız.

$(y^2+2xy)-x^2\dfrac{dy}{dx}=0 \rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2+2xy}{x^2}$ homojen olması için $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ ve $f(x,y)=f(tx,ty)$ olup olmalıdır.

$$f(x,y)=\frac{y^2+2xy}{x^2} \text{ ve } f(tx,ty)=\frac{t^2y^2+2tx\cdot ty}{t^2x^2}=\frac{\cancel{t^2}\cdot(y^2+2xy)}{\cancel{t^2}\cdot x^2} \rightarrow f(x,y)=f(tx,ty) \text{ dir.}$$

$$y=u\cdot x \rightarrow u+x\frac{du}{dx}=\frac{(u\cdot x)^2+2x\cdot(u\cdot x)}{x^2}=\frac{\cancel{x^2}\cdot(u^2+2u)}{\cancel{x^2}}$$

$$u+x\frac{du}{dx}=u^2+2u \rightarrow x\frac{du}{dx}=u^2+u \rightarrow \frac{du}{u^2+u}=\frac{dx}{x} \rightarrow \int\frac{du}{u^2+u}=\int\frac{dx}{x}+c$$

$$\ln\left(\frac{u}{u+1}\right)=\ln(x)+c \rightarrow e^{\ln\left(\frac{u}{u+1}\right)}=e^{\ln(x)}\cdot e^c \rightarrow \frac{u}{u+1}=e^c\cdot x, \qquad (e^c=C)$$

$$\frac{u}{u+1}=C\cdot x \;\rightarrow\; \frac{\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}+1}=C\cdot x \;\rightarrow\; \frac{y}{\cancel{x}}\cdot\frac{\cancel{x}}{x+y}=C\cdot x \qquad \frac{y}{x+y}=C\cdot x \;\rightarrow\; \frac{x+y}{y}=\frac{1}{C\cdot x}$$

$$\frac{x}{y}=\frac{1}{C\cdot x}-1 \;\rightarrow\; y=\frac{C\cdot x^2}{1-C\cdot x} \;\rightarrow\; y=\frac{x^2}{\frac{1}{C}-x} \;\rightarrow\; \boxed{y=\frac{x^2}{C_1-x}}$$ elde edilir.

3.4 Misal:

$x\cdot dy-y\cdot dx=x\cdot\cot\left(\frac{y}{x}\right)\cdot dx$ diferansiyel denklemini çözünüz.

$y=u\cdot x$ ve $dy=u\cdot dx+x\cdot du$ dönüşümleri uygulandığında;

$$x\cdot(u\cdot dx+x\cdot du)-u\cdot x\cdot dx=x\cdot\cot\left(\frac{u\cdot\cancel{x}}{\cancel{x}}\right)\cdot dx \;\rightarrow\; \cancel{u\cdot x\cdot dx}+x^2\cdot du-\cancel{u\cdot x\cdot dx}=x\cdot\cot(u)\cdot dx$$

$$x^{\cancel{2}}\cdot du=\cancel{x}\cdot\cot(u)\cdot dx \;\rightarrow\; x\cdot du=\cot(u)\cdot dx \;\rightarrow\; \int\frac{\cos(u)}{\sin(u)}\cdot du=\int\frac{1}{x}\cdot dx+c \;\rightarrow\; -\ln(\cos(u))=\ln(x)+c$$

$$\ln(\cos(u))+\ln(x)=-c \rightarrow \boxed{\ln\left(\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)+\ln(x)=C}$$ olarak bulunur.

4. Birinci Mertebeden Değişkenlerine Ayrılabilen veya Homojen Hale İndirgenebilen Diferansiyel Denklemler (First Order Differential Equations which can be separable or converted into homogenous)

Bu bölümde ilk bakışta homojen olmadığı halde değişken dönüşümü yapılarak homojen hale indirgenebilen diferansiyel denklemler incelenecektir. Aşağıda bunlarla ilgili her bir tür ve bu tür ile ilgili değişken dönüşümü verilmiştir.

1 $\frac{dy}{dx}=f(a\cdot x+b\cdot y+c),\quad b\neq 0,\quad a,b,c$ sabitler, $\Rightarrow\; u=a\cdot x+b\cdot y+c$ (4.1)

2. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+g(x)\cdot f\left(\frac{y}{x}\right),\quad\Rightarrow\; u=\frac{y}{x}$ (4.2)

3. $y\cdot f(x\cdot y)\cdot dx+x\cdot g(x\cdot y)\cdot dy=0\quad\Rightarrow\; u=x\cdot y$ (4.3)

4. $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right),\quad b\neq 0,\quad a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2$ sabitler (4.4)

Olmak üzere üç durum söz konusudur.

a) $$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\alpha\ ,\Rightarrow \frac{dy}{dx}=g(\alpha) \qquad (4.5)$$

olur. Ve diferansiyel denklemin çözümü, $y=g(\alpha)\cdot x+c$ şeklindedir

b) $$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}\Rightarrow \frac{dy}{dx}=F(a\cdot x+b\cdot y) \qquad (4.6)$$

olur ve $z=a\cdot x+b\cdot y$ değişken dönüşümü yapılarak çözüme gidilir. Burada kullanılan **a** ve **b** katsayıları keyfi seçildiği halde, denklem sonucu değişmemektedir. Bu durum aynı problemde farklı katsayılar kullanılarak misaller kısmında gösterilmiştir. Genelde **z=x+y** veya **z=x-y** kullanmak en pratik çözümlerden birisidir.

c) $$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}\Rightarrow x=u+h,\ \ y=v+k \qquad (4.7)$$

değişken dönüşümü yapılır. Bilinmeyen katsayıları (**h** ve **k**) bulmak için,

$a_1\cdot h+b_1\cdot k+c_1=0$ ve $a_2\cdot h+b_2\cdot k+c_2=0$ ve denklemleri kullanılır.

Bunlar dışında özel dönüşümler yapılarak değişkenlere ayrılabilen diferansiyel denklemler elde edilebilir Aşağıda bunlar ile ilgili misaller verilmiştir.

4.1 Misal:

$(3\cdot x-2\cdot y+1)^2\cdot dx-dy=0$ şeklinde verilen diferansiyel denklemin genel çözümünü elde ediniz.

Çözüm: $(3\cdot x-2\cdot y+1)^2\cdot\frac{dx}{dx}-\frac{dy}{dx}=0 \rightarrow (3\cdot x-2\cdot y+1)^2-\frac{dy}{dx}=0 \rightarrow \frac{dy}{dx}=(3\cdot x-2\cdot y+1)^2$

$u=3\cdot x-2\cdot y+1$ değişken dönüşümü uygulanmalıdır. $du=3\cdot dx-2\cdot dy \rightarrow$

$$\frac{du}{dx}=3\cdot\frac{\cancel{dx}}{\cancel{dx}}-2\cdot\frac{dy}{dx}\rightarrow \frac{1}{2}\frac{du}{dx}=\frac{3}{2}-\frac{dy}{dx}\rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{du}{dx}\rightarrow \frac{dy}{dx}=(3\cdot x-2\cdot y+1)^2$$

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{du}{dx}=u^2 \rightarrow \cancel{2}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}-\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{du}{dx}=2\cdot u^2 \rightarrow \frac{du}{dx}=3-2\cdot u^2 \rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{3-2\cdot u^2}{1}\rightarrow$$

$$\frac{du}{3-2\cdot u^2}=dx$$

$\int\frac{1}{3-2\cdot u^2}\cdot du=\int dx+c \rightarrow \frac{1}{6}\cdot\sqrt{6}\cdot\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{3}\cdot u\cdot\sqrt{6}\right)=x+c$ olur. u değeri yerine yazıldığında,

$\frac{1}{6}\cdot\sqrt{6}\cdot\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{3}\cdot(3\cdot x-2\cdot y+1)\cdot\sqrt{6}\right)=x+c$ şeklinde genel çözüm elde edilir.

4.2 Misal:

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+(x-1)\cdot\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)$, $y(1)=1$ şeklinde verilen diferansiyel denklemin genel ve özel çözümünü hesaplayınız.

Çözüm: Diferansiyel denkleme dikkat edildiğinde $\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+g(x)\cdot f\left(\frac{y}{x}\right)}$ türüne benzediği görülmektedir. Bu sebepten dolayı $u=\frac{y}{x}$ dönüşümü uygulanmalıdır. Buradan $y=u\cdot x$ yazılabilir. $dy=x\cdot du+u\cdot dx \rightarrow \frac{dy}{dx}=x\cdot\frac{du}{dx}+u\cdot\frac{\cancel{dx}}{\cancel{dx}} \rightarrow \frac{dy}{dx}=x\cdot\frac{du}{dx}+u$

Bu değerler verilen diferansiyel denklemde yerine yazıldığında,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+(x-1)\cdot\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) \rightarrow x\cdot\frac{du}{dx}+\cancel{u}=\cancel{u}+(x-1)\cdot(1+u^2) \rightarrow x\cdot\frac{du}{dx}=(x-1)\cdot(1+u^2)$$

$$\frac{du}{1+u^2}=\left(\frac{x-1}{x}\right)\cdot dx \rightarrow \frac{du}{1+u^2}=\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot dx \rightarrow \int\left(\frac{1}{1+u^2}\right)\cdot du=\int\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot dx+c$$

$\arctan(u)=x-\ln(x)+c \rightarrow \boxed{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)=x-\ln(x)+c}$ şeklinde genel çözümü bulunur

$y(1)=1$ şartının genel çözümde yerine yazılmasıyla özüm çözüm elde edilir.

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right)=x-\ln(x)+c \rightarrow \arctan\left(\frac{1}{1}\right)=1-\ln(1)+c \rightarrow \frac{\pi}{4}=1-0+c \rightarrow c=\frac{\pi}{4}-1$$

$$\boxed{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)=x-\ln(x)+\frac{\pi}{4}-1}$$

şeklinde verilen diferansiyel denklemin özel çözümü elde edilir.

4.3 Misal:

$y\cdot(1-x\cdot y)\cdot dx+x\cdot(x^2\cdot y^2-1)\cdot dy=0$ şeklinde verilen diferansiyel denklemin genel çözümünü ve $y(1)=0$ şartını kullanarak özel çözümünü hesaplayınız.

Çözüm: Diferansiyel denkleme dikkat edildiğinde yukarıda verilen,

$y\cdot f(x\cdot y)\cdot dx+x\cdot g(x\cdot y)\cdot dy=0$ üçüncü türe benzediği görülmektedir. Dolayısıyla $u=x\cdot y$ dönüşümü yapılarak çözüme gidilmelidir. $u=x\cdot y \rightarrow du=y\cdot dx+x\cdot dy \quad y=\frac{u}{x}$

$$\frac{du}{dx}=y\cdot\frac{\cancel{dx}}{\cancel{dx}}+x\cdot\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{du}{dx}=y+x\cdot\frac{dy}{dx} \rightarrow x\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-y \rightarrow x\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-\frac{u}{x}$$

$$y\cdot(2-x\cdot y)\cdot dx+x\cdot\left(x^2\cdot y^2-1\right)\cdot dy=0 \rightarrow y\cdot(2-u)\cdot\frac{\cancel{dx}}{\cancel{dx}}+\left(u^2-1\right)\cdot x\cdot\frac{dy}{x}=0$$

$$\frac{u}{x}\cdot(1-u)+\left(u^2-1\right)\cdot\left(\frac{du}{dx}-\frac{u}{x}\right)=0 \rightarrow \left(\frac{du}{dx}-\frac{u}{x}\right)=\frac{u}{x}\cdot\frac{u-1}{u^2-1} \rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{u}{x}\cdot\frac{\cancel{u-1}}{\left(\cancel{u-1}\right)\cdot(u+1)}+\frac{u}{x}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{u}{x}\cdot\frac{1}{u+1}+\frac{u}{x} \rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{u}{x}\cdot\frac{1}{u+1}+\frac{u}{x}=\frac{u+u+1}{x\cdot(u+1)} \rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{2\cdot u+1}{x\cdot(u+1)}$$

$$\left(\frac{u+1}{2\cdot u+1}\right)\cdot du=\frac{1}{x}\cdot dx \rightarrow \frac{1}{2}\cdot u+\frac{1}{4}\cdot u\cdot\ln(2\cdot u+1)=\ln(x)+c$$

$\boxed{\frac{1}{2}\cdot x\cdot y+\frac{1}{4}\cdot x\cdot y\cdot\ln(2\cdot x\cdot y+1)=\ln(x)+c}$ şeklinde genel çözüm bulunur. Özel çözümünü bulmak için verilen değerler yerine yazılmalıdır.

$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot 1\cdot 0\cdot\ln(2\cdot x\cdot y+1)=\ln(1)+c$ → Buradan $c=0$ olduğu görülür. Böylece özel çözüm,

$$\boxed{\frac{1}{2}\cdot x\cdot y+\frac{1}{4}\cdot x\cdot y\cdot\ln(2\cdot x\cdot y+1)=\ln(x)}$$

4.4 Misal:

$(6\cdot x-4\cdot y+2)\cdot dx+(3\cdot x-2\cdot y+1)\cdot dy=0$ şeklinde verilen diferansiyel denklemin genel çözümünü hesaplayınız.

Çözüm: katsayılar oranı kontrol edildiğinde **4**'ün **a)** türüne benzediği görülmektedir.

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2} \Rightarrow \frac{6}{3}=\frac{-4}{-2}=\frac{2}{1}=\lambda=2 \Rightarrow y=\lambda\cdot x+c \rightarrow \boxed{y=2\cdot x+c}$$

Çözümün doğru olup olmadığı verilen diferansiyel denklemde yerine yazılarak sağlaması yapılabilir.

$$(6\cdot x-4\cdot y+2)\cdot\frac{\cancel{dx}}{\cancel{dx}}+(3\cdot x-2\cdot y+1)\cdot\frac{dy}{dx}=0 \rightarrow (6\cdot x-4\cdot y+2)+(3\cdot x-2\cdot y+1)\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$(6\cdot x-4\cdot(2\cdot x+c)+2)+(3\cdot x-2\cdot(2\cdot x+c)+1)\cdot 2=0$$

$$(6\cdot x-8\cdot x-4\cdot c+2)+(3\cdot x-4\cdot x-2\cdot c+1)\cdot 2=0$$

$\left(\cancel{-2\cdot x-4\cdot c}+2\right)+\left(\cancel{-2\cdot x-4\cdot c}+2\right)=0 \rightarrow 0=0$ çözümün olduğu görülür.

4.5 Misal:

$(2\cdot x-2\cdot y+1)\cdot dx+(x-y-1)\cdot dy=0$ şeklinde verilen diferansiyel denklemin genel çözümünü ve $y(1)=0$ hesaplayınız.

Çözüm 1: katsayılar oranı kontrol edildiğinde **4**'ün **b)** türüne benzediği görülmektedir.

$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}\Rightarrow\frac{2}{2}=\frac{-2}{-2}\neq\frac{1}{-1} \rightarrow z=a\cdot x+b\cdot y \rightarrow \boxed{a=1,b=-1}$ olarak kabul edildiğinde,

$z=x-y \rightarrow y=x-z$ olur. Bu durumda $dz=dx-dy \rightarrow dy=dx-dz$ haline gelir.

Bu değerler verilen diferansiyel denklemde yerine yazıldığında,

$$(2\cdot x-2\cdot y+1)\cdot dx+(x-y-1)\cdot dy=0$$

$$(2\cdot x-2\cdot(x-z)+1)\cdot dx+(x-(x-z)-1)\cdot(dx-dz)=0$$

$$(2\cdot x-2\cdot x+2\cdot z+1)\cdot dx+(x-x+z-1)\cdot dx+(-x+x-z+1)\cdot dz=0$$

$$(3\cdot z)\cdot dx-(z-1)\cdot dz=0 \rightarrow 3\cdot dx=\frac{z-1}{z}\cdot dz \rightarrow \int 3\cdot dx=\int\left(1-\frac{1}{z}\right)\cdot dz+c$$

$$3\cdot x=z-\ln(z)+c \rightarrow 3\cdot x=z-\ln(z)+c \rightarrow \boxed{3\cdot x=(x-y)-\ln(x-y)+c}$$

Şeklinde genel çözüm elde edilir. Verilen sınır şartının uygulanmasıyla;

$$3\cdot x=(x-y)-\ln(x-y)+c \rightarrow y(1)=0 \rightarrow 3\cdot 1=(1-0)-\ln(1-0)+c \rightarrow 3=1-\ln(1)+c$$

$3=1-0+c \rightarrow c=2 \rightarrow \boxed{2\cdot x+y+\ln(x-y)=+2}$ verilen sınır şartına uygun özel çözümdür.

Çözüm 2: katsayılar oranı kontrol edildiğinde **4**'ün **b)** türüne benzediği görülmektedir.

$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}\Rightarrow\frac{2}{2}=\frac{-2}{-2}\neq\frac{1}{-1} \rightarrow z=a\cdot x+b\cdot y \rightarrow \boxed{a=-1,b=1}$ olarak kabul edildiğinde,

$z=-x+y \rightarrow y=x+z$ olur. Bu durumda $dy=dx+dz$ haline gelir.

Bu değerler verilen diferansiyel denklemde yerine yazıldığında,

$$(2\cdot x-2\cdot y+1)\cdot dx+(x-y-1)\cdot dy=0$$

$$(2\cdot x-2\cdot(x+z)+1)\cdot dx+(x-(x+z)-1)\cdot(dx+dz)=0$$

$$(2\cdot z+1-z-1)\cdot dx+(-z-1)\cdot dz=0 \rightarrow z\cdot dx-(z+1)\cdot dz=0$$

$$z\cdot dx=(z+1)\cdot dz \rightarrow dx=\left(\frac{z+1}{z}\right)\cdot dz \rightarrow dx=\left(1+\frac{1}{z}\right)\cdot dz \rightarrow \int 1\cdot dx=\int\left(1+\frac{1}{z}\right)\cdot dz+c$$

$$x=z+\ln(z)+c \rightarrow x=y-x+\ln(y-x)+c \rightarrow 2\cdot x=y-\ln(x-y)+c$$

$$\boxed{2\cdot x=y-\ln(x-y)+c} \rightarrow 2\cdot 1=0-\ln(1-0)+c \rightarrow 2=-0+c \rightarrow c=2$$

$\boxed{2\cdot x=y-\ln(x-y)+2}$ şeklinde özel çözüm elde edilir.

4.6 Misal:

$(2\cdot x-y-1)\cdot dx+(x-2\cdot y+1)\cdot dy=0$ şeklinde verilen diferansiyel denklemin genel çözümünü hesaplayınız.

Çözüm: katsayılar oranı kontrol edildiğinde **4**'ün **c)** türüne benzediği görülmektedir.

$$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2} \Rightarrow \frac{2}{3}\neq\frac{-1}{-2} \Rightarrow x=u+h,\ \ y=v+k$$ değişken dönüşümü uygulanmalıdır.

İlk olarak **h** ve **k** katsayıları hesaplanmalıdır. Bunun için yukarıda verilen iki denklemden faydalanılır.

$$\begin{matrix}a_1\cdot h+b_1\cdot k+c_1=0\\ a_2\cdot h+b_2\cdot k+c_2=0\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}2\cdot x-y-1=0\\ x-2\cdot y+1=0\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}2\cdot h-k-1=0\\ h-2\cdot k+1=0\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}h=1\\ k=1\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}x=u+h\\ y=v+k\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}x=u+1\\ y=v+1\end{matrix}$$

Buradan

$$(2\cdot x-y-1)\cdot dx+(x-2\cdot y+1)\cdot dy=0$$

$$(2\cdot(u+1)-(v+1)-1)\cdot du+((u+1)-2\cdot(v+1)+1)\cdot dv=0$$

$$(2\cdot u-v)\cdot du+(u-2\cdot v)\cdot dv=0$$

Yukarıdaki diferansiyel denklemde üsler toplamı eşit olduğundan, homojen diferansiyel denklem türüne benzemektedir. Bunun için $u=r\cdot v$ değişken dönüşümü uygulanabilir.

Buradan $du=v\cdot dr+r\cdot dv$ olduğu görülür. Bu iki değer yerine yazıldığında,

$$(2\cdot u-v)\cdot du+(u-2\cdot v)\cdot dv=0 \rightarrow (2\cdot r\cdot v-v)\cdot(v\cdot dr+r\cdot dv)+(r\cdot v-2\cdot v)\cdot dv=0$$

$$v\cdot(2\cdot r-1)\cdot dr+(2\cdot r^2-2)\cdot dv=0 \rightarrow \frac{2\cdot r-1}{2\cdot r^2-2}\cdot dr+\frac{1}{v}\cdot dv=0$$

$$\ln(v)+\frac{1}{4}\cdot\ln(r-1)+\frac{3}{4}\cdot\ln(r+1)+C=0 \rightarrow \ln(v)+\frac{1}{4}\cdot\ln\left(\frac{u}{v}-1\right)+\frac{3}{4}\cdot\ln\left(\frac{u}{v}+1\right)+C=0$$

$$\ln(v)+\frac{1}{4}\cdot\ln\left(\frac{u}{v}-1\right)+\frac{3}{4}\cdot\ln\left(\frac{u}{v}+1\right)+C=0 \rightarrow \begin{matrix} x=u+1 \\ y=v+1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} u=x-1 \\ v=y-1 \end{matrix}$$

$$\boxed{\ln(y-1)+\frac{1}{4}\cdot\ln\left(\frac{x-1}{y-1}-1\right)+\frac{3}{4}\cdot\ln\left(\frac{x-1}{y-1}+1\right)+C=0}$$ Şeklinde genel çözüm elde edilir.

4.7 Misal:

$(x-2\cdot y-1)\cdot dx+(2\cdot x-y+1)\cdot dy=0$ şeklinde verilen diferansiyel denklemin genel çözümünü hesaplayınız.

Çözüm: katsayılar oranı kontrol edildiğinde **4**'ün **c)** türüne benzediği görülmektedir.

$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2} \Rightarrow \frac{1}{2}\neq\frac{-2}{1} \Rightarrow x=u+h,\ \ y=v+k$ değişken dönüşümü uygulanmalıdır.

İlk olarak **h** ve **k** katsayıları hesaplanmalıdır. Bunun için yukarıda verilen iki denklemden faydalanılır.

$$\begin{matrix} a_1\cdot h+b_1\cdot k+c_1=0 \\ a_2\cdot h+b_2\cdot k+c_2=0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x-2\cdot y-1=0 \\ 2\cdot x-y+1=0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} h-2\cdot k-1=0 \\ 2\cdot h-k+1=0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} h=-1 \\ k=-1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x=u+h \\ y=v+k \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x=u-1 \\ y=v-1 \end{matrix}$$

Buradan

$$(x-2\cdot y-1)\cdot dx+(2\cdot x-y+1)\cdot dy=0$$

$$((u-1)-2\cdot(v-1)-1)\cdot du+(2\cdot(u-1)-(v-1)+1)\cdot dv=0$$

$$(u-1-2\cdot v+2-1)\cdot du+(2\cdot u-2-v+1+1)\cdot dv=0$$

$$(u-2\cdot v)\cdot du+(2\cdot u-v)\cdot dv=0$$

Yukarıdaki diferansiyel denklemde üsler toplamı eşit olduğundan, homojen diferansiyel denklem türüne benzemektedir. Bunun için $u=r\cdot v$ değişken dönüşümü uygulanabilir.

Buradan $du=v\cdot dr+r\cdot dv$ olduğu görülür. Bu iki değer yerine yazıldığında,

$$(u-2\cdot v)\cdot du+(2\cdot u-v)\cdot dv=0 \rightarrow (r\cdot v-2\cdot v)\cdot(v\cdot dr+r\cdot dv)+(2\cdot r\cdot v-v)\cdot dv=0$$

$$(r\cdot v-2\cdot v)\cdot dr+(r^2-1)\cdot dv=0 \rightarrow \left(\frac{r-2}{r^2-1}\right)\cdot dr+\frac{1}{v}\cdot dv=0$$

$$\int\left(\frac{r-2}{r^2-1}\right)\cdot dr+\int\frac{1}{v}\cdot dv=c \rightarrow \ln(v)-\frac{1}{2}\cdot\ln(r-1)+\frac{3}{2}\cdot\ln(r+1)+c=0$$

$$\ln(v)-\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{u}{v}-1\right)+\frac{3}{2}\cdot\ln\left(\frac{u}{v}+1\right)+c=0$$

$$\ln(v)-\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{u}{v}-1\right)+\frac{3}{2}\cdot\ln\left(\frac{u}{v}+1\right)+c=0 \rightarrow \begin{matrix} x=u+1 \\ y=v+1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} u=x-1 \\ v=y-1 \end{matrix}$$

$\boxed{\ln(y-1)-\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{x-1}{y-1}-1\right)+\frac{3}{2}\cdot\ln\left(\frac{x-1}{y-1}+1\right)+c=0}$ Şeklinde genel çözüm elde edilir.

5. Birinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler ve uygulamaları (First-order Linear Differential Equations and their applications)

Diferansiyel denklem;

$$\frac{dy}{dx}+p(x)\cdot y=q(x)\rightarrow y'+p(x)\cdot y=q(x) \tag{5.1}$$

şeklinde ise buna 1. mertebeden lineer diferansiyel denklem denir ve çözümü aşağıdaki gibi yapılabilir.

1.Yol:

$$y=u(x)\cdot v(x) \tag{5.2}$$

değişken dönüşümü uygulandığında $y'+p(x)\cdot y=q(x)$ denklemi;

$$[u'\cdot v+u\cdot v']+p(x)\cdot u\cdot v=q(x) \tag{5.3}$$

$$[u'\cdot v+u\cdot v']+p(x)\cdot u\cdot v=q(x)$$

$$u\cdot v'+u'\cdot v+p(x)\cdot u\cdot v=q(x) \qquad u\cdot v'+[u'+p(x)\cdot u]\cdot v=q(x)$$

haline gelir.

$$u'+p(x)\cdot u=0 \tag{5.4}$$

olacak şekilde seçildiğinde; $u'=-p(x)\cdot u$ olur ve buradan;

$$\frac{du}{dx}=-p(x)\cdot u \rightarrow \frac{du}{u}=-p(x)\cdot dx \rightarrow \ln(u)=-\int p(x)\cdot dx$$

$e^{\ln(u)}=e^{-\int p(x)\cdot dx}$ yazılabilir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldığında;

$$u=e^{-\int p(x)\cdot dx} \tag{5.5}$$

olduğu görülür. Denklem (4.3) açılarak tekrar yazıldığında;

$u' \cdot v(x) + u(x) \cdot v' + p(x) \cdot u(x) \cdot v(x) = q(x)$ veya

$\underbrace{\left[u' + p(x) \cdot u(x)\right]}_{0} \cdot v(x) + u(x) \cdot v' = q(x)$ elde edilir. Denklem (4.4) ten dolayı sıfır olan terim atıldığında geriye;

$$u(x) \cdot v' = q(x) \tag{5.6}$$

$$u(x) \cdot v' = q(x)$$

ifadesi kalır. Buradan v(x) ifadesi, $v' = \frac{1}{u(x)} \cdot q(x)$ olur. u(x) yerine denklem (5.4) kullanıldığında, $v' = e^{\int p(x) \cdot dx} \cdot q(x)$ → $\int v' = \int e^{\int p(x) \cdot dx} \cdot q(x) \cdot dx + c$ veya

$$v = \int e^{\int p(x) \cdot dx} \cdot q(x) \cdot dx + c \tag{5.7}$$

Elde edilir. Denklem (3.2) den dolayı,

$$y(x) = e^{-\int p(x) \cdot dx} \cdot \left[\int e^{\int p(x) \cdot dx} \cdot q(x) \cdot dx + c\right] \tag{5.8}$$

Genel çözümü elde edilir. Çözümler bu son denklem vasıtasıyla yapılır. Veya

2. Yol:

Öyle bir u(x) fonksiyonu seçelim ki;

$\frac{d}{dx}[u \cdot y] = u \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{du}{dx} \cdot y$ olsun. Bunun için 1. mertebeden lineer diferansiyel denklem u ile aşağıdaki gibi çarpılır.

$$u \cdot \left[\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y\right] = u \cdot q(x) \quad \rightarrow \quad u \cdot \frac{dy}{dx} + \left[u \cdot p(x)\right] \cdot y = u \cdot q(x)$$

Buradan görüldüğü gibi $\frac{du}{dx} = u \cdot p(x)$ → $\frac{du}{u} = p(x) \cdot dx$ olmalıdır. İntegral alındığında

$\ln(u) = \int p(x) dx$ → $e^{\ln(u)} = e^{\int p(x) \cdot dx}$ → $u = e^{\int p(x) \cdot dx}$ sonucuna varılır. Ayrıca;

$\frac{d}{dx}[u \cdot y] = u \cdot q(x)$ olduğundan her iki tarafın integrali alındığında;

$$\int \frac{d}{dx}[u \cdot y] = \int u \cdot q(x) \cdot dx + c \quad \rightarrow \quad u \cdot y = \int u \cdot q(x) \cdot dx + c \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{u}\left[\int u \cdot q(x) \cdot dx + c\right]$$

veya;

$$y(x) = e^{-\int p(x) \cdot dx} \cdot \left[\int e^{\int p(x) \cdot dx} \cdot q(x) \cdot dx + c\right]$$

olduğu görülür. Her iki usulle hesaplanan neticeler birbirinin aynısıdır.

5.1 Misal:

Misal 2.8 de verilen $y'=\dfrac{y+x}{x}$ diferansiyel denklemin genel çözümünü hesaplayınız.

Çözüm 1: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+x}{x}$ $\quad \dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{x}y=1$ Buradan denklemin $y'+p(x)y=q(x)$ yapısına uygun olduğu görülür. Böylece $p(x)=-\dfrac{1}{x}$, $q(x)=1$ dir.

$y(x)=e^{-\int p(x)\cdot dx}\cdot\left[\int e^{\int p(x)\cdot dx}\cdot q(x)\cdot dx+c\right]$ denkleminde yerine yazıldığında;

$$p(x)=-\int\left(\frac{1}{x}\right)\cdot dx=-\ln(x)$$

$$y(x)=e^{\int\left(\frac{1}{x}\right)\cdot dx}\cdot\left[\int e^{-\int\left(\frac{1}{x}\right)\cdot dx}\cdot 1\cdot dx+c\right] \qquad y(x)=e^{\ln(x)}\cdot\left[\int e^{-\ln(x)}\cdot 1\cdot dx+c\right]$$

$$y(x)=x\cdot\left[\int\frac{1}{e^{\ln(x)}}\cdot 1\cdot dx+c\right] \qquad y(x)=x\cdot\left[\int\left(\frac{1}{x}\right)\cdot dx+c\right]$$

$y(x)=x\cdot\left[\ln(x)+c\right]$ olduğu görülür.

Çözüm 2: $y=u\cdot x$ → $y'=u'\cdot x+u\cdot 1$ dönüşümü sisteme uygulanır.

$$y'=\frac{y+x}{x} \rightarrow y'\cdot x=y+x \rightarrow y'\cdot x-y=x \rightarrow (u'\cdot x+u)\cdot x-u\cdot x=x$$

$$u'\cdot x^2+\cancel{u\cdot x}-\cancel{u\cdot x}=x \rightarrow u'\cdot x=1 \rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{x} \rightarrow \int du=\int\left(\frac{1}{x}\right)dx+c$$

$u=\ln(x)+c$ → $\dfrac{y}{x}=\ln(x)+c$ → $y(x)=x\cdot\left[\ln(x)+c\right]$ olduğu görülür.

5.2 Misal:

$x^2\cdot y'+x\cdot y=x^2\cdot\sin(x)$ halinde diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm 1: denkleme bakıldığında x^2 li terimler dikkati çekmektedir. Her taraf x^2 ye bölündüğünde;

$y'+\dfrac{1}{x}\cdot y=\sin(x)$ elde edilir ve burada. $p(x)=\int\left(\dfrac{1}{x}\right)\cdot dx=\ln(x)$ ve $q(x)=\sin(x)$ dir.

Genel denklem $y(x)=e^{-\int p(x)\cdot dx}\cdot\left[\int e^{\int p(x)\cdot dx}\cdot q(x)\cdot dx+c\right]$ de yerine yazıldığında;

$y(x)=\frac{1}{x}\cdot\left[\int x\cdot\sin(x)\cdot dx+c\right]$ ve $\int x\cdot\sin(x)\cdot dx=\sin(x)-x\cdot\cos(x)$ olduğundan dolayı:

$y(x)=\frac{1}{x}\left[\sin(x)-x\cdot\cos(x)+c\right]$ veya

$y(x)=\frac{\sin(x)}{x}-\cos(x)+\frac{c}{x}$ şeklinde elde edilir.

Çözüm 2: $y=u\cdot x$ → $y'=u'\cdot x+u\cdot 1$ dönüşümü sisteme uygulanır.

$x^2\cdot y'+x\cdot y=x^2\cdot\sin(x)$ → $y'+\frac{1}{x}\cdot y=\sin(x)$ → $u'\cdot x+u+\frac{1}{x}\cdot u\cdot x=\sin(x)$

$u'\cdot x+2\cdot u=\sin(x)$ → $u'+\frac{2}{x}\cdot u=\frac{\sin(x)}{x}$ → $y(x)=e^{-\int p(x)\cdot dx}\cdot\left[\int e^{\int p(x)\cdot dx}\cdot q(x)\cdot dx+c\right]$

$u(x)=e^{-2\int\frac{1}{x}\cdot dx}\cdot\left[\int e^{2\int\frac{1}{x}\cdot dx}\cdot\frac{\sin(x)}{x}\cdot dx+c\right]$ → $u(x)=e^{\ln(x^{-2})}\cdot\left[\int e^{\ln(x^2)}\cdot\frac{\sin(x)}{x}\cdot dx+c\right]$

$u(x)=\frac{1}{x^2}\cdot\left[\int x^2\cdot\frac{\sin(x)}{x}\cdot dx+c\right]$ → $u(x)=\frac{1}{x^2}\cdot\left[\int x\cdot\sin(x)\cdot dx+c\right]$

$u=\frac{1}{x^2}\cdot\left[\sin(x)-x\cdot\cos(x)+c\right]$ → $\frac{y}{x}=\frac{1}{x^2}\cdot\left[\sin(x)-x\cdot\cos(x)+c\right]$

$y=\frac{\sin(x)}{x}-\cos(x)+\frac{c}{x}$ genel çözümdür. Her iki çözümün de aynı olduğu görülür.

5.3 Misal:

$y'+\frac{1}{x}\cdot y=e^x$ halinde verilen diferansiyel denklemin genel çözümünü hesaplayınız.

$p(x)=\int\left(\frac{1}{x}\right)\cdot dx=\ln(x)$ ve $q(x)=e^x$ olduğu görülür.

$y(x)=e^{-\int p(x)\cdot dx}\cdot\left[\int e^{\int p(x)\cdot dx}\cdot q(x)\cdot dx+c\right]$ genel denklemde yerine yazıldığında;

$y(x)=\frac{1}{x}\cdot\left[\int x\cdot e^x\cdot dx+c\right]$ integral tablosundan kural (54): $\int x\cdot e^x\cdot dx=(x-1)\cdot e^x$ olduğundan;

$y(x)=\frac{1}{x}\cdot\left[(x-1)\cdot e^x+c\right]$ elde edilir.

5.4 Misal:

$y'+2x\cdot y=x$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü hesaplayınız.

Çözüm: $p(x)=2x \Rightarrow \int p(x)\cdot dx=\int 2x\cdot dx=x^2$ ve $q(x)=x$ olduğu görülür.

$y(x)=e^{-\int p(x)\cdot dx}\cdot\left[\int e^{\int p(x)\cdot dx}\cdot q(x)\cdot dx+c\right]$ genel denkleminde yerine yazıldığında;

$y(x)=e^{-x^2}\cdot\left[\int e^{x^2}\cdot x\cdot dx+c\right]$ integral tablosundan: $\int e^{x^2}\cdot x\cdot dx=\frac{1}{2}e^{x^2}$ olduğundan;

$y(x)=e^{-x^2}\cdot\left[\frac{1}{2}e^{x^2}+c\right]$ $\boxed{y(x)=\frac{1}{2}+c\cdot e^{-x^2}}$ olarak genel çözüm elde edilir.

5.5 Misal:

$\left(x^2y+x^4\cos(x)\right)\cdot dx-x^3\cdot dy=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü hesaplayınız.

$x^3\frac{dy}{dx}=x^2y+x^4\cos(x) \rightarrow \frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}\cdot y=x\cos(x) \rightarrow p(x)=-\frac{1}{x} \rightarrow p(x)=-\int\left(\frac{1}{x}\right)dx$

$p(x)=-\ln(x) \rightarrow g(x)=x\cdot\cos(x) \rightarrow y=e^{-\int p(x)\cdot dx}\cdot\left[\int e^{\int p(x)\cdot dx}\cdot q(x)\cdot dx+c\right]$

$y=e^{\ln(x)}\cdot\left[\int e^{-\ln(x)}\cdot(x\cdot\cos(x))\cdot dx+c\right] \rightarrow y=x\cdot\left[\int\frac{1}{x}\cdot x\cdot\cos(x)\cdot dx+c\right]$

$y(x)=x\cdot\left[\int\cos(x)\cdot dx+c\right] \rightarrow y=x\cdot\left[\sin(x)+c\right]$

6. Bernoulli Denklemi

$$\frac{dy}{dx}+p(x)\cdot y=q(x)\cdot y^n \tag{6.1}$$

şeklinde verilen denklemlere "Bernoulli denklemi" denir ve çözümü için denklemin her iki tarafı y^{-n} ile çarpıldığında;

$y^{-n}\cdot\frac{dy}{dx}+p(x)\cdot y\cdot y^{-n}=q(x)\cdot y^n y^{-n}$ veya $y^{-n}\cdot\frac{dy}{dx}+p(x)\cdot y^{1-n}=q(x)$ haline gelir.

$$u=y^{1-n} \tag{6.2}$$

dönüşümü uygulandığında;

$\frac{du}{dx}=(1-n)\cdot y^{-n}\cdot\frac{dy}{dx}$ olur. Buradan; $y^{-n}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(1-n)}\cdot\frac{du}{dx}$ olduğu görülür.

$\frac{1}{(1-n)}\cdot\frac{du}{dx}+p(x)\cdot u=q(x)$ her iki taraf $(1-n)$ ile çarpıldığında;

$$\frac{du}{dx}+(1-n)\cdot p(x)\cdot u=(1-n)\cdot q(x)$$

Böylece 1. mertebeden lineer diferansiyel denklem elde edilmiş olur. Burada çözüm tamamlandıktan sonra denklem (6.2) den faydalanarak sonra $u=y^{1-n}$ ile y fonksiyonu hesaplanmış olur.

6.1 Misal:

$y'+x\cdot y=x\cdot y^2$ şeklinde verilen diferansiyel denklemin çözümünü hesaplayınız.

Çözüm: denklemin her iki tarafı y^{-2} ile çarpıldığında; $y^{-2}\cdot\frac{dy}{dx}+x\cdot y^{-1}=x$ → $u=y^{1-2}=y^{-1}$

$\frac{du}{dx}=-1\cdot y^{-2}\cdot\frac{dy}{dx}=-y^{-2}\cdot\frac{dy}{dx}$ → $y^{-2}\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{du}{dx}$ değişken dönüşümü uygulandığında;

$-\frac{du}{dx}+x\cdot u=x$ → $\frac{du}{dx}-x\cdot u=-x$ elde edilir. Buradan;

$$u(x)=e^{-\int p(x)\cdot dx}\cdot\left[\int e^{\int p(x)\cdot dx}\cdot q(x)\cdot dx+c\right]$$

$$u(x)=e^{\int x\cdot dx}\cdot\left[-\int e^{-\int x\cdot dx}\cdot x\cdot dx+c\right]\quad u(x)=e^{\frac{1}{2}x^2}\cdot\left[-\int e^{-\frac{1}{2}x^2}\cdot x\cdot dx+c\right]$$

$$u(x)=e^{\frac{1}{2}x^2}\cdot\left[e^{-\frac{1}{2}x^2}+c\right]\qquad u(x)=\left(1+e^{\frac{1}{2}x^2}\cdot c\right)\quad \frac{1}{y}=\left(1+e^{\frac{1}{2}x^2}\cdot c\right)$$

Elde edilir. Buradan $y=\dfrac{1}{\left(1+e^{\frac{1}{2}x^2}\cdot c\right)}$ olduğu görülür.

6.2 Misal:

$\frac{dy}{dx}+2y=x\cdot y^{-2}$ şeklinde verilen diferansiyel denklemin çözümünü hesaplayınız.

Denklemin her iki tarafı y^2 ile çarpıldığında;

$y^2\frac{dy}{dx}+2y\cdot y^2=x\cdot y^2\cdot y^{-2}$ → $y^2\frac{dy}{dx}+2y^3=x$ → $u=y^3$ değişken dönüşümü uygulanmalıdır. $\frac{du}{dx}=3y^2\frac{dy}{dx}$ → $y^2\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}\frac{du}{dx}$

$\frac{1}{3}\cdot\frac{du}{dx}+2u=x$ → $\frac{du}{dx}+6u=3x$ elde edilir. Buradan;

$$u=e^{-\int p(x)\cdot dx}\cdot\left[\int e^{\int p(x)\cdot dx}\cdot q(x)\cdot dx+c\right]\quad\rightarrow\quad u=e^{-\int 6dx}\cdot\left[\int e^{\int 6\cdot dx}\cdot 3x\cdot dx+c\right]$$

$u=e^{-6x}\cdot\left[\frac{1}{12}(6x-1)e^{6x}+c\right] \rightarrow u=\frac{1}{12}(6x-1)+c\cdot e^{-6x} \rightarrow \boxed{y^3=\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}+c\cdot e^{-6x}}$ elde edilir.

6.3 Misal:

$\frac{dy}{dx}-5y=-\frac{5}{2}x\cdot y^3$ halinde verilen Bernoulli diferansiyel denklemin genel çözümünü hesaplayınız.

Çözüm: Denklemin her iki tarafı y^{-3} ile çarpıldığında;

$y^{-3}\cdot\frac{dy}{dx}-5y\cdot y^{-3}=-\frac{5}{2}x\cdot y^3\cdot y^{-3} \rightarrow y^{-3}\cdot\frac{dy}{dx}-5y^{-2}=-\frac{5}{2}x \rightarrow u=y^{-2}$ değişken dönüşümü uygulanmalıdır. Buradan; $\frac{du}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx} \rightarrow y^{-3}\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}\frac{du}{dx}$

$-\frac{1}{2}\frac{du}{dx}-5u=-\frac{5}{2}x \rightarrow \frac{du}{dx}+10u=5x$ elde edilir. Bu denklem birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem olduğundan, çözümü doğrudan yazılabilir.

$$u=e^{-\int p(x)\cdot dx}\cdot\left[\int e^{\int p(x)\cdot dx}\cdot q(x)\cdot dx+c\right] \rightarrow u=e^{-\int 10\cdot dx}\cdot\left[\int e^{\int 10\cdot dx}\cdot 5x\cdot dx+c\right]$$

$$u=e^{-10x}\cdot\left[\int e^{10x}\cdot 5x\cdot dx+c\right] \rightarrow u=e^{-10x}\left(1/2e^{10x}x-1/20e^{10x}+c\right)$$

$u=\frac{1}{2}x-\frac{1}{20}+c\cdot e^{-10x} \rightarrow \boxed{\frac{1}{y^2}=\frac{1}{2}x-\frac{1}{20}+c\cdot e^{-10x}}$ sonucu elde edilir.

6.4 Misal:

$(x-y^2)\cdot dx+(2\cdot x\cdot y)\cdot dy=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: ilk önce Bernoulli şekline çevirmek gereklidir.

$$(x-y^2)\cdot dx+(2xy)\cdot dy=0 \rightarrow (x-y^2)+(2xy)y'=0 \rightarrow y'+\frac{x}{2xy}=\frac{y^2}{2xy}$$

$$y'+\frac{1}{2y}=\frac{y}{2x} \rightarrow y'-\frac{y}{2x}=-\frac{1}{2}y^{-1} \rightarrow y\cdot y'-\frac{1}{2x}y\cdot y=-\frac{1}{2}y\cdot y^{-1}$$

$$y\cdot y'-\frac{1}{2x}y^2=-\frac{1}{2} \rightarrow u=y^2 \rightarrow u'=2\cdot y\cdot y' \rightarrow y\cdot y'=\frac{1}{2}u'$$

$$\frac{1}{2}u'-\left(\frac{1}{2x}\right)u=-\frac{1}{2} \rightarrow u'-\left(\frac{1}{x}\right)u=-1 \rightarrow \int\left(-\frac{1}{x}\right)dx=-\ln(x)$$

$$u=e^{-\int p(x)\cdot dx}\cdot\left[\int e^{\int p(x)\cdot dx}\cdot q(x)\cdot dx+c\right] \rightarrow u=e^{\ln(x)}\cdot\left[\int e^{-\ln(x)}\cdot(-1)\cdot dx+c\right]$$

$$u = x\cdot\left[\int\left(\frac{1}{x}\right)\cdot(-1)\cdot dx + c\right] \rightarrow \quad u = x\cdot\left[-\ln(x)+c\right] \rightarrow \quad \boxed{y^2 = x\cdot\left[-\ln(x)+c\right]}$$

olduğu görülür.

6.5 Misal:

$2\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}\cdot y=-y^3$ Bernoulli diferansiyel denkleminin genel çözümünü hesaplayınız.

$$2\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}\cdot y=-y^3 \rightarrow \quad 2\cdot y^{-3}\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}\cdot y^{-3}\cdot y=-y^{-3}\cdot y^3$$

$$2\cdot y^{-3}\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}\cdot y^{-2}=-1 \rightarrow \quad u=y^{-2} \rightarrow \quad \frac{du}{dx}=-2\cdot y^{-3}\cdot\frac{dy}{dx} \rightarrow \quad -\frac{du}{dx}=2\cdot y^{-3}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$-\frac{du}{dx}-\frac{1}{x}\cdot u=-1 \rightarrow \quad \frac{du}{dx}+\frac{1}{x}\cdot u=1 \rightarrow \quad u(x)=e^{-\int p(x)\cdot dx}\cdot\left[\int e^{\int p(x)\cdot dx}\cdot q(x)\cdot dx+c\right]$$

$$u(x)=e^{-\int\frac{1}{x}\cdot dx}\cdot\left[\int e^{\int\frac{1}{x}\cdot dx}\cdot 1\cdot dx+c\right] \rightarrow \quad u(x)=e^{-\ln(x)}\cdot\left[\int e^{\ln(x)}\cdot 1\cdot dx+c\right]$$

$$u(x)=\frac{1}{x}\cdot\left[\int x\cdot 1\cdot dx+c\right] \rightarrow \quad u(x)=\frac{1}{x}\cdot\left[\frac{x^2}{2}+c\right] \rightarrow \quad u(x)=\frac{x}{2}+\frac{c}{x}$$

$$y^2=\frac{1}{u} \rightarrow \quad \boxed{y^2=\frac{1}{\frac{x}{2}+\frac{c}{x}}}$$ Genel çözümdür.

6.6 Misal:

$(2+y^2+2x)\cdot dx+2y\cdot dy=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü hesaplayınız.

Çözüm: Denklemi her iki tarafı dx e bölündüğünde,

$$(2+y^2+2x)\cdot\frac{dx}{dx}+2y\cdot\frac{dy}{dx}=0 \rightarrow (2+y^2+2x)+2y\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{1}{2y}\cdot\left[2+y^2+2x+2y\cdot\frac{dy}{dx}\right]=0 \rightarrow \frac{1}{y}+\frac{y}{2}+\frac{x}{y}+\frac{dy}{dx}=0 \rightarrow \frac{dy}{dx}+\frac{y}{2}=-\frac{1}{y}-\frac{x}{y} \rightarrow \frac{dy}{dx}+\frac{y}{2}=-(1+x)\cdot\frac{1}{y}$$

$$y\cdot\frac{dy}{dx}+y\cdot\frac{y}{2}=-(1+x)\cdot y^{-1}\cdot y \rightarrow y\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}y^2=-(1+x) \rightarrow \boxed{u=y^2} \rightarrow \frac{du}{dx}=2y\frac{dy}{dx} \rightarrow y\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{1}{2}u=-(1+x) \rightarrow \frac{du}{dx}+u=-2(1+x) \rightarrow u(x)=e^{-\int p(x)\cdot dx}\cdot\left[\int e^{\int p(x)\cdot dx}\cdot q(x)\cdot dx+c\right]$$

$$u(x)=e^{-\int 1\cdot dx}\cdot\left[-\int e^{\int 1\cdot dx}\cdot 2(1+x)\cdot dx+c\right] \rightarrow u(x)=e^{-x}\cdot\left[-2\int e^x\cdot(1+x)\cdot dx+c\right] \rightarrow d(u\cdot v)=v\cdot du+u\cdot dv$$

$\int v\cdot du=\int d(u\cdot v)-\int u\cdot dv$ kuralı uygulanabilir. $v=(1+x)$ ve $u=e^x$ olarak seçildiğinde;

$\int(1+x)\cdot e^x=(1+x)\cdot e^x-\int e^x\cdot 1 \rightarrow \int(1+x)\cdot e^x=(1+x)\cdot e^x-e^x=\cancel{e^x}+x\cdot e^x-\cancel{e^x}=x\cdot e^x$ olduğu görülür.

Bu değerler yerine yazıldığında;

$u(x)=e^{-x}\cdot\left[-2\left(x\cdot e^{x}\right)+c\right]=-2x+c\cdot e^{-x} \rightarrow \boxed{y^2=c\cdot e^{-x}-2x}$ şeklinde genel çözüm elde edilir.

6.7 Misal:

$\left(2\cdot x^3-y^4\right)\cdot dx+x\cdot y^3\cdot dy=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü hesaplayınız.

Çözüm: $2\cdot x^3-y^4+x\cdot y^3\cdot\dfrac{dy}{dx}=0 \rightarrow x\cdot y^3\cdot\dfrac{dy}{dx}-y^4=-2\cdot x^3 \rightarrow \dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y^4}{x\cdot y^3}=\dfrac{-2\cdot x^3}{x\cdot y^3}$

$$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}\cdot y=-2\cdot x^2\cdot y^{-3} \rightarrow y^3\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}\cdot y^3\cdot y=-2\cdot x^2\cdot y^3\cdot y^{-3} \rightarrow y^3\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}\cdot y^4=-2\cdot x^2 \rightarrow \boxed{u=y^4}$$

$$\frac{du}{dx}=4\cdot y^3\cdot\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{1}{4}\cdot\frac{du}{dx}=y^3\cdot\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{du}{dx}-\frac{4}{x}\cdot u=-8\cdot x^2 \rightarrow p(x)=-\frac{4}{x},\ q(x)=-8\cdot x^2$$

$$u(x)=e^{-\int p(x)\cdot dx}\cdot\left[\int e^{\int p(x)\cdot dx}\cdot q(x)\cdot dx+c\right] \rightarrow u(x)=e^{\int 4\cdot\frac{1}{x}\cdot dx}\cdot\left[-\int e^{-\int 4\cdot\frac{1}{x}\cdot dx}\cdot\left(8\cdot x^2\right)\cdot dx+c\right]$$

$$u(x)=e^{\ln\left(x^4\right)}\cdot\left[-\int e^{\ln\left(x^{-4}\right)}\cdot\left(8\cdot x^2\right)\cdot dx+c\right] \rightarrow u(x)=x^4\cdot\left[-\int\left(8\cdot x^{-2}\right)\cdot dx+c\right] \rightarrow u(x)=x^4\cdot\left[\frac{8}{x}+c\right]$$

$\boxed{y^4=8\cdot x^3+c\cdot x^4}$ şeklinde genel çözüm elde edilir.

7. Riccati Diferansiyel Denklemi

$$\frac{dy}{dx}=a(x)\cdot y^2+b(x)\cdot y+c(x) \tag{7.1}$$

şeklindeki denklemlere Riccati denklemi denir ve $a(x)=0$ olduğu zaman çözümü aşağıdaki gibi 1. mertebeden lineer diferansiyel denklem gibi olur.

$$\frac{dy}{dx}=b(x)\cdot y+c(x) \rightarrow \quad \frac{dy}{dx}-b(x)\cdot y=c(x)$$

Denklem (7.1) de $y=y_1$ bir özel çözüm olmak üzere;

$$y=y_1+\frac{1}{u} \tag{7.2}$$

dönüşümü yapılmalıdır. $y=y_1$ bir özel çözüm olduğundan denklem (7.1) de yerine yazıldığında;

$$y_1'=a(x)\cdot y_1^2+b(x)\cdot y_1+c(x) \tag{7.3}$$

olur. Denklem (7.2) den dolayı x e göre türev alındığında; $y'=y_1'-\dfrac{u'}{u^2}$ olur.

$y=y_1+\frac{1}{u}$ olduğundan $y^2=y_1^2+2\frac{y_1}{u}+\frac{1}{u^2}$ yazılabilir. Denklem (7.3) de yerine yazıldığında;

$$y_1'-\frac{u'}{u^2}=a(x)\cdot\left(y_1^2+2\frac{y_1}{u}+\frac{1}{u^2}\right)+b(x)\cdot\left(y_1+\frac{1}{u}\right)+c(x) \tag{7.4}$$

y_1' yerine denklem (7.3) kullanıldığında;

$$a(x)\cdot y_1^2+b(x)\cdot y_1+\cancel{c(x)}-\frac{u'}{u^2}=a(x)\cdot\left(y_1^2+2\frac{y_1}{u}+\frac{1}{u^2}\right)+b(x)\cdot\left(y_1+\frac{1}{u}\right)+\cancel{c(x)} \tag{7.5}$$

elde edilir.

$$a(x)\cdot y_1^2+b(x)\cdot y_1=\frac{u'}{u^2}+a(x)\cdot\left(y_1^2+2\frac{y_1}{u}+\frac{1}{u^2}\right)+b(x)\cdot\left(y_1+\frac{1}{u}\right) \tag{7.6}$$

her taraf u^2 ile çarpıldığında;

$$a(x)\cdot y_1^2\cdot u^2+b(x)\cdot y_1\cdot u^2=u'+a(x)\cdot\left(y_1^2+2\frac{y_1}{u}+\frac{1}{u^2}\right)\cdot u^2+b(x)\cdot\left(y_1+\frac{1}{u}\right)\cdot u^2$$

haline gelir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldığında;

$$\cancel{a(x)\cdot y_1^2\cdot u^2}+\cancel{b(x)\cdot y_1\cdot u^2}=u'+\cancel{a(x)\cdot y_1^2\cdot u^2}+2\cdot a(x)\cdot y_1\cdot u+a(x)+\cancel{b(x)\cdot y_1\cdot u^2}+b(x)\cdot u$$

veya; $u'+2\cdot a(x)\cdot y_1\cdot u+a(x)+b(x)\cdot u=0$ → $u'+\left[2\cdot a(x)\cdot y_1+b(x)\right]\cdot u+a(x)=0$

$$u'+\left[2\cdot a(x)\cdot y_1+b(x)\right]\cdot u=-a(x) \tag{7.7}$$

elde edilir. Bu da 1. mertebeden lineer diferansiyel denklemdir. çözümü elde edildiğinde, denklem (7.2) den dolayı u yerine;

$\frac{1}{u}=y-y_1$ → $u=\frac{1}{y-y_1}$ yazılarak genel çözüm elde edilmiş olur.

7.1 Misal:

$\frac{dy}{dx}=y^2-y-2$ Riccati diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm:

$y_1=2$ ve $y_1=-1$ bu denklemin birer özel çözümüdür. Bunlardan birisini kullanarak genel çözüm elde edilir. $y=2+\frac{1}{u}$ Denklem (7.1) den dolayı

$\frac{dy}{dx}=a(x)\cdot y^2+b(x)\cdot y+c(x)$ → $a(x)=1,\ b(x)=-1,\ c(x)=-2$ olduğu görülür. Bu değerler, denklem (7.7) de kullanıldığında;

$u'+\left[2\cdot a(x)\cdot y_1+b(x)\right]\cdot u=-a(x) \quad \rightarrow \quad u'+\left[2\cdot 1\cdot 2-1\right]\cdot u=-1 \quad \rightarrow \quad u'+3\cdot u=-1$

$u(x)=e^{-\int p(x)\cdot dx}\cdot\left[\int e^{\int p(x)\cdot dx}\cdot q(x)\cdot dx+c\right] \quad \rightarrow \quad u(x)=e^{-3x}\cdot\left[\int e^{3x}\cdot(-1)\cdot dx+c\right]$

$u(x)=e^{-3x}\cdot\left[-\frac{1}{3}e^{3x}+c\right] \quad \rightarrow \quad u(x)=-\frac{1}{3}+c\cdot e^{-3x} \quad \rightarrow \quad y=y_1+\frac{1}{u}$

$y=2+\dfrac{1}{-\frac{1}{3}+c\cdot e^{-3x}}$ şeklinde genel çözüm elde edilir. Aynı işlemler $y_1=-1$ alınarak da hesaplanabilir. $\rightarrow$ $y=-1+\frac{1}{u}$

$u'+\left[2\cdot a(x)\cdot y_1+b(x)\right]\cdot u=-a(x) \quad \rightarrow \quad u'+\left[2\cdot 1\cdot(-1)-1\right]\cdot u=-1 \quad \rightarrow \quad u'-3\cdot u=-1$

$u(x)=e^{-\int p(x)\cdot dx}\cdot\left[\int e^{\int p(x)\cdot dx}\cdot q(x)\cdot dx+c\right] \quad \rightarrow \quad u(x)=e^{3x}\cdot\left[\int e^{-3x}\cdot(-1)\cdot dx+c\right]$

$u(x)=e^{3x}\cdot\left[\frac{1}{3}e^{-3x}+c\right] \quad \rightarrow \quad u(x)=\frac{1}{3}+c\cdot e^{3x}$

$\boxed{y=-1+\dfrac{1}{\frac{1}{3}+c\cdot e^{3x}}}$ şeklinde genel çözüm elde edilir

7.2 Misal:

$\frac{dy}{dx}+y^2=\frac{2}{x^2}$ Riccati diferansiyel denkleminin çözümünü hesaplayınız.

Çözüm:

$\frac{dy}{dx}+y^2=\frac{2}{x^2} \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=-1\cdot y^2+0\cdot y+\frac{2}{x^2} \quad \rightarrow \quad y_1=\frac{c}{x}$ bu denklemin bir özel çözümüdür. Bunlardan birisini kullanarak genel çözüm elde edilir.

Denklem (7.1) den dolayı; $\frac{dy}{dx}+y^2=\frac{2}{x^2} \quad \rightarrow \quad -\frac{c}{x^2}+\frac{c^2}{x^2}=\frac{2}{x^2} \quad \rightarrow \quad c^2-c-2=0$

$c_{1,2}=-1,2$ olur. Bu değerlerden birisi kullanıldığında; $y_1=\frac{2}{x} \quad \rightarrow \quad y=\frac{2}{x}+\frac{1}{u}$ olur. Denklem (7.7) den dolayı değerler yerine yazıldığında;

$u'+\left[2\cdot a(x)\cdot y_1+b(x)\right]\cdot u=-a(x) \quad \rightarrow \quad u'+\left[2\cdot(-1)\cdot\left(\frac{2}{x}\right)+0\right]\cdot u=1 \rightarrow \quad u'-\frac{4}{x}\cdot u=1$

$u(x)=e^{-\int p(x)\cdot dx}\cdot\left[\int e^{\int p(x)\cdot dx}\cdot q(x)\cdot dx+c\right] \quad u(x)=e^{\int\left(\frac{4}{x}\right)\cdot dx}\cdot\left[\int e^{-\int\left(\frac{4}{x}\right)\cdot dx}\cdot(1)\cdot dx+c\right]$

$$u(x)=x^4\cdot\left[\int x^{-4}\,dx+c\right] \qquad u(x)=x^4\cdot\left[-\frac{x^{-3}}{3}+c\right] \qquad \rightarrow \qquad u(x)=-\frac{x}{3}+cx^4$$

$$u(x)=\frac{-x+3cx^4}{3}$$

$y=\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{u}$ olduğundan u değeri yerine yazıldığında;

$$y=\frac{2}{x}+\frac{3}{-x+3cx^4} \qquad \rightarrow \qquad y=\frac{1+2Cx^3}{x\left(-1+Cx^3\right)},\quad (C=3c)$$

Sağlaması yapıldı ve doğru olduğu görüldü. Aynı işlemler $y_1=-\dfrac{1}{x}$ özel çözümü alınarak da hesaplanabilir. $y=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{u}$ olur. Denklem (7.7) den dolayı değerler yerine yazıldığında;

$$u'+\left[2\cdot a(x)\cdot y_1+b(x)\right]\cdot u=-a(x) \qquad \rightarrow \qquad u'+\left[2\cdot(-1)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)+0\right]\cdot u=1 \qquad \rightarrow \qquad u'+\frac{2}{x}\cdot u=1$$

$$u(x)=e^{-\int p(x)\cdot dx}\cdot\left[\int e^{\int p(x)\cdot dx}\cdot q(x)\cdot dx+c\right] \qquad u(x)=e^{-\int\left(\frac{2}{x}\right)\cdot dx}\cdot\left[\int e^{\int\left(\frac{2}{x}\right)\cdot dx}\cdot(1)\cdot dx+c\right]$$

$$u(x)=x^{-2}\cdot\left[\int x^2\,dx+c\right] \qquad u(x)=x^{-2}\cdot\left[\frac{x^3}{3}+c\right] \qquad \rightarrow \qquad u(x)=\frac{x}{3}+\frac{c}{x^2}$$

$\dfrac{1}{u(x)}=\dfrac{3x^2}{x^3+3c} \qquad \rightarrow \qquad y=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{u}$ olduğundan u değeri yerine yazıldığında;

$$y=\frac{3x^2}{x^3+3c}-\frac{1}{x}=\frac{3x^3-\left(x^3+3c\right)}{x\left(x^3+3c\right)} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{y=\frac{2x^3-3c}{x\left(x^3+3c\right)}}$$

elde edilir. Bu denklem de çözümü sağlamaktadır.

7.3 Misal:

$\dfrac{dy}{dx}=y^2-x\cdot y+1$ Riccati diferansiyel denkleminde, $y_1=x$ özel çözümü olduğuna göre, genel çözümünü hesaplayınız.

Çözüm: $y=x$ alındığında, $y'=y^2-xy+1=x^2-x\cdot x+1=1$ çözümü sağladığı görülmektedir.

$$u'+\left[2\cdot a(x)\cdot y_1+b(x)\right]\cdot u=-a(x) \qquad \rightarrow \qquad u'+\left[2\cdot 1\cdot x-x\right]\cdot u=-1 \qquad \rightarrow \qquad u'+x\cdot u=-1$$

$$u(x)=e^{-\int p(x)\cdot dx}\cdot\left[\int e^{\int p(x)\cdot dx}\cdot q(x)\cdot dx+c\right]$$

$$u(x)=e^{-\int x\cdot dx}\cdot\left[\int e^{\int x\cdot dx}\cdot(-1)\cdot dx+c\right] \quad\rightarrow\quad u(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\left[-\int e^{\frac{x^2}{2}}\cdot dx+c\right]$$

$$\int e^{ax^2}dx=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}\cdot \operatorname{erf}\left(\sqrt{-a}\,x\right)}{\sqrt{-a}} \quad\rightarrow\quad \int e^{\frac{1}{2}x^2}dx=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}\cdot \operatorname{erf}\left(\sqrt{-\frac{1}{2}}\,x\right)}{\sqrt{-\frac{1}{2}}}$$

$$u(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\left[-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}\cdot \operatorname{erf}\left(\sqrt{-\frac{1}{2}}\,x\right)}{\sqrt{-\frac{1}{2}}}+c\right]$$

$y=y_1+\dfrac{1}{u}$ olduğundan, $y=x+\dfrac{1}{e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\left[-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}\cdot \operatorname{erf}\left(\sqrt{-\frac{1}{2}}\,x\right)}{\sqrt{-\frac{1}{2}}}+c\right]}$

7.4 Misal:

$\left(1+x^2-2\cdot x\cdot y+y^2\right)\cdot dx-dy=0$ diferansiyel denkleminde $y_1=x$ özel çözümü bilindiğine göre genel çözümü çözümü hesaplayınız.

Çözüm: $y=x$ alındığında, $\dfrac{dy}{dx}=1\cdot y^2-(2\cdot x)\cdot y+\left(1+x^2\right)$ → $1=\cancel{x^2}-\cancel{2\cdot x\cdot x}+1+\cancel{x^2}$ çözümü sağladığı görülmektedir. $y=y_1+\dfrac{1}{u}$ → $y=x+\dfrac{1}{u}$. Bulunması gereken u fonksiyonudur.

$$u'+\left[2\cdot a(x)\cdot y_1+b(x)\right]\cdot u=-a(x) \quad\rightarrow\quad u'+\left[2\cdot 1\cdot x-2\cdot x\right]\cdot u=-1 \quad\rightarrow\quad \frac{du}{dx}=-1$$

$\int du=\int(-1)\cdot dx+c$ → $u=-x+c$. Buradan genel çözüm: $y=x+\dfrac{1}{u}$ → $\boxed{y=x+\dfrac{1}{c-x}}$

Şeklinde hesaplanır.

7.5 Problem:

$\dfrac{dy}{dx}=1-(y-x+1)^2$, $y_1=x-1$ Riccati diferansiyel denkleminin verilen özel çözümü için genel çözümünü hesaplayınız.

Çözüm: $\dfrac{dy}{dx}=1-(y-x+1)^2$ → $\dfrac{dy}{dx}=1-\left(y^2-x\cdot y+y-x\cdot y+x^2-x+y-x+1\right)$

$$\frac{dy}{dx}=1-y^2+x\cdot y-y+x\cdot y-x^2+x-y+x-1 \rightarrow \frac{dy}{dx}=-1\cdot y^2+2\cdot(x\cdot y-1)\cdot y+(2\cdot x-x^2)$$

7.6 Problem:

$\frac{dy}{dx}=(1-x)\cdot y^2+(2\cdot x-1)\cdot y-x,\ y_1=1$ Riccati diferansiyel denkleminin verilen özel çözümü için genel çözümünü hesaplayınız.

Çözüm: $\frac{dy}{dx}=(1-x)\cdot y^2+(2\cdot x-1)\cdot y-x,\ y_1=1 \rightarrow a(x)=(1-x),\ b(x)=(2\cdot x-1),\ c(x)=-x, y_1=1$

7.7 Problem:

$x^2\cdot\frac{dy}{dx}=-x^2\cdot y^2+x\cdot y-1,\ y_1=\frac{1}{x}$ Riccati diferansiyel denkleminin verilen özel çözümü için genel çözümünü hesaplayınız.

Çözüm: $x^2\cdot\frac{dy}{dx}=-x^2\cdot y^2+x\cdot y-1,\ y_1=\frac{1}{x} \rightarrow a(x)=-x^2, b(x)=x, c(x)=-1, y_1=\frac{1}{x}$

7.8 Problem:

$(1-x^3)\cdot\frac{dy}{dx}=y^2+x^2\cdot y-2\cdot x,\ y_1=x^2$ Riccati diferansiyel denkleminin verilen özel çözümü için genel çözümünü hesaplayınız.

Çözüm: $(1-x^3)\cdot\frac{dy}{dx}=y^2+x^2\cdot y-2\cdot x \rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-x^3}y^2+\frac{x^2}{1-x^3}\cdot y-\frac{2\cdot x}{1-x^3}$

8. Clairaut Diferansiyel Denklemi

$$y=x\cdot\frac{dy}{dx}+f(\frac{dy}{dx}) \tag{8.1}$$

şeklindeki diferansiyel denklemlere Clairaut Denklemi denir. Denklem (8.1) in, x e göre türevi alınıp tekrar düzenlendiğinde;

$$[x+f'(dy/dx)]\frac{d^2y}{dx^2}=0 \tag{8.2}$$

elde edilir. Çözümü:

$$y=c\cdot x+f(c) \tag{8.3}$$

şeklindedir.

8.1 Misal:

$y=x\cdot\frac{dy}{dx}+2\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ Clairaut diferansiyel denkleminin çözümünü hesaplayınız.

Çözüm: denklemde $\frac{dy}{dx}=c$ yazılarak genel çözüm hesaplanır.

$y=c\cdot x+2\cdot c^2$ şeklindedir.

8.2 Misal:

$y=x\cdot y'+\frac{a^2}{y'}$ Clairaut diferansiyel denkleminin çözümünü hesaplayınız.

Çözüm: denklemde $\frac{dy}{dx}=p$ olsun. Bu durumda; $y=x\cdot p+\frac{a^2}{p}=f(x,p)$ olur. Her tarafın x e göre türevi alındığında;

$p=p+\left(x-\frac{a^2}{p^2}\right)\cdot\frac{dp}{dx}$ → $\left(x-\frac{a^2}{p^2}\right)\cdot\frac{dp}{dx}=0$ Burada iki farklı durum karşımıza çıkmaktadır. 1. Durum: $\frac{dp}{dx}=0$ olursa; $p=C$ → olur. Bu değer ilk denklemde yerine yazıldığında; $y=C\cdot x+\frac{a^2}{C}$ elde edilir. Bu genel çözümdür. Veya

2. Durum: $x-\frac{a^2}{p^2}=0$ olursa; $p^2=\frac{a^2}{x}$ → olur. Bu değer ilk denklemde yerine yazıldığında; $p\cdot y=x\cdot p^2+a^2$ → $(p\cdot y)^2=\left(x\cdot p^2+a^2\right)^2$ → $\frac{a^2}{x}\cdot y^2=\left(x\cdot\frac{a^2}{x}+a^2\right)^2$

$\frac{a^2}{x}\cdot y^2=\left(2a^2\right)^2$ → $\frac{a^2}{x}\cdot y^2=4a^4$ → $y^2=4a^2x$ → elde edilir. Bu tekil (sadece bir durum için geçerli, özel) bir çözümdür ve yukarıda (durum:1 de) elde edilen denklemdeki C nin herhangi bir değeri için bu sonuç asla elde edilemez. Yani özel çözümdür. Halbuki birinci merteden bir diferansiyel denklemde 1 tane sabit bulunmalıdır.

9. Tam Diferansiyel Denklemler (Exact Differential Equations)

Birinci mertebeden bir diferansiyel denklem $f(x,y)=c$ şeklinde tanımlı olsun. Türevi alındığında;

$$df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy=0 \qquad (9.1)$$

olur. Bu kısaca aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$M(x,y)\cdot dx+N(x,y)\cdot dy=0 \qquad (9.2)$$

veya

$M(x,y)+N(x,y)\cdot\frac{dy}{dx}=0$ haline gelir.

Şeklinde ve $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ (9.3)

ise buna tam diferansiyel denklem denir. Çözümü aşağıdaki gibidir:

$$f(x,y)=\int M(x,y)\cdot dx+g(y) \quad (9.4)$$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)\cdot dx\right]+\frac{dg(y)}{dy}=N(x,y)$ olduğundan;

$\frac{dg(y)}{dy}=N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)\cdot dx\right]$ olur. Her iki tarafın integrali alındığında;

$g(y)=\int\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)\cdot dx\right]\right]\cdot dy$ hesaplanır. Bu değer denklem (9.4) de yerine yazıldığında çözüm elde edilmiş olur. Veya benzer işlemler;

$$f(x,y)=\int N(x,y)\cdot dx+g(x) \quad (9.5)$$

alınarak tekrarlanır. $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\int N(x,y)\cdot dy+\frac{dg(x)}{dx}\right]=M(x,y)$

$$f(x,y)=\int N(x,y)\cdot dx+g(x)$$

9.1 Misal:

$(2\cdot x+y)\cdot dx+(x-2\cdot y)\cdot dy=0$ şeklinde verilen diferansiyel denklemin genel çözümünü hesaplayınız. Ayrıca $y(0)=0$ başlangıç şartını kullanarak özel çözümünü hesaplayınız.

Çözüm 1: $M(x,y)\cdot dx+N(x,y)\cdot dy=0$ şeklinde bulunduğundan tam diferansiyel denklem olup olmadığı test edilmelidir.

$\frac{\partial M}{\partial y}=1$ ve $\frac{\partial N}{\partial x}=1$ → $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan tam diferansiyeldir.

$$f(x,y)=\int M(x,y)\cdot dx+g(y)=\int(2\cdot x+y)\cdot dx+g(y)=c$$

$f(x,y)=(x^2+xy)+g(y)$ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$ olduğundan;

$N(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(x^2+xy)+\frac{dg(y)}{dy}$ → $x-2\cdot y=x+\frac{dg(y)}{dy}$ → $\frac{dg(y)}{dy}=-2y$

$g(y)=-y^2$ → $f(x,y)=x^2+x\cdot y-y^2=c$ → $\boxed{x^2+x\cdot y-y^2=c}$ olarak elde edilir.

Çözüm 2: Veya $f(x,y)=\int N(x,y)\cdot dy+g(x)=\int(x-2\cdot y)\cdot dy+g(x)=x\cdot y-y^2=c$

$$M(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x\cdot y-y^2\right)+\frac{dg(x)}{dx} \quad \rightarrow \quad M(x,y)=y+\frac{dg(x)}{dx}=2x+y$$

$$\cancel{y}+\frac{dg(x)}{dx}=2x+\cancel{y} \rightarrow \quad \int\frac{dg(x)}{dx}\cdot dx=\int 2x\cdot dx \quad \rightarrow \quad g(x)=x^2$$

$f(x,y)=x\cdot y-y^2+g(x)=c \quad \rightarrow \quad \boxed{x\cdot y-y^2+x^2=c}$ olarak aynı sonuç bulunur. $y(0)=0$ başlangıç şartı uygulandığında, $0\cdot 0-0^2+0^2=c \rightarrow c=0 \rightarrow \boxed{x\cdot y-y^2+x^2=0}$ şeklinde özel çözüm bulunur.

9.2 Misal:

$\left(2\cdot x+y^2\right)\cdot dx+\left(2\cdot x\cdot y\right)\cdot dy=0$ diferansiyel denkleminin tam diferansiyel olup olmadığını test ediniz. Tam diferansiyel ise genel çözümünü hesaplayınız.

$\frac{\partial M}{\partial y}=2y$ ve $\frac{\partial N}{\partial x}=2y$ ve $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan tam diferansiyeldir. Çözümü:

$$f(x,y)=\int M(x,y)\cdot dx+g(y)=\int\left(2\cdot x+y^2\right)\cdot dx+g(y)=c$$

$f(x,y)=\left(x^2+x\cdot y^2\right)+g(y) \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$ olduğundan;

$$N(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+xy^2\right)+\frac{dg(y)}{dy} \quad \rightarrow \quad 2xy=2xy+\frac{dg(y)}{dy} \quad \rightarrow \quad \frac{dg(y)}{dy}=0$$

$f(x,y)=x^2+xy^2=c$ şeklindedir. Sağlama için;

$df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy=0$ olmalıdır.

$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+xy^2\right)\cdot dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+xy^2\right)\cdot dy=0 \quad \rightarrow \quad \left(2x+y^2\right)\cdot dx+\left(+2xy\right)\cdot dy=0$ olur. Bu da diferansiyel denklemin kendisidir. Aynı problem diğer şekilde de çözülebilir.

$f(x,y)=\int N(x,y)\cdot dy+g(x)=\int(2xy)\cdot dy+g(x) \quad \rightarrow \quad f(x,y)=xy^2+g(x)$ olur.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$ olduğundan; $\quad M(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(xy^2\right)+\frac{dg(x)}{dx}$

$$2x+\cancel{y^2}=\cancel{y^2}+\frac{dg(x)}{dx} \quad \rightarrow \quad \frac{dg(x)}{dx}=2x \quad \rightarrow \quad g(x)=x^2$$

$f(x,y)=\boxed{xy^2+x^2=c}$ olduğu görülür. Elde edilen sonuçların ikisi de aynıdır.

9.3 Misal:

$\left(x^2+y^2\right)\cdot dx+\left(2xy\right)\cdot dy=0$ ile verilen diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $M(x,y)\cdot dx+N(x,y)\cdot dy=0$ şeklinde bulunduğundan tam diferansiyel denklem olup olmadığı test edilmelidir.

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial N}{\partial x}=2y \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$ olduğundan tam diferansiyeldir.

$$f(x,y)=\int M(x,y)\cdot dx+g(y)=\int\left(x^2+y^2\right)\cdot dx+g(y)=c$$

$$f(x,y)=\left(\frac{x^3}{3}+xy^2\right)+g(y) \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$$ olduğundan;

$$N(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3}+xy^2\right)+\frac{dg(y)}{dy} \quad \rightarrow \quad 2xy=2xy+\frac{dg(y)}{dy} \quad \rightarrow \quad \frac{dg(y)}{dy}=0$$

$$f(x,y)=\frac{x^3}{3}+xy^2=c \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{3}+y^2=\frac{c}{x}$$ olarak elde edilir. Ayrıca 1. mertebeden homojen diferansiyel olup olmadığı da test edilebilir.

$$\left(x^2+y^2\right)\cdot dx+\left(2xy\right)\cdot dy=0 \rightarrow \quad \left(x^2+y^2\right)\cdot dx+\left(2xy\right)\cdot\frac{dy}{dx}=0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x^2+y^2}{2xy}$$

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=-\frac{x^2+y^2}{2xy} \quad \rightarrow \quad f(x,y)=-\frac{x^2+y^2}{2xy} \quad \rightarrow \quad f(tx,ty)=-\frac{t^2x^2+t^2y^2}{2\cdot tx\cdot ty}=-\frac{\cancel{t^2}\cdot\left(x^2+y^2\right)}{\cancel{t^2}\cdot(2xy)}$$

$f(x,y)=f(t\cdot x,t\cdot y)$ olduğundan 1. mertebeden homojen diferansiyel denklemdir ve $y=u\cdot x$ dönüşümü ile de çözülebilir.

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}=\frac{x^2+(u\cdot x)^2}{-2x(u\cdot x)} \quad \rightarrow \quad u+x\frac{du}{dx}=\frac{x^2+x^2\cdot u^2}{-2x^2\cdot u}=\frac{x^2\cdot\left(1+u^2\right)}{-2x^2\cdot u}$$

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{u^2+1}{-2u} \quad \rightarrow \quad x\frac{du}{dx}=\frac{u^2+1+2u^2}{-2u} \quad \rightarrow \quad x\frac{du}{dx}=\frac{3u^2+1}{-2u}$$

$$\left(\frac{-2u}{3u^2+1}\right)du=\left(\frac{1}{x}\right)dx \quad \rightarrow$$ şeklinde yazıldığında;

$$\int\left(\frac{-2u}{3u^2+1}\right)du=\int\left(\frac{1}{x}\right)dx+c \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3}\ln\left(3u^2+1\right)=\ln\left(\frac{1}{x}\right)+c \qquad e^{\frac{1}{3}\ln\left(3u^2+1\right)}=e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}\cdot e^c$$

$$\left(3u^2+1\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{e^c}{x} \qquad \left(3\frac{y^2}{x^2}+1\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{e^c}{x} \quad \rightarrow \quad \left(3\frac{y^2+x^2}{x^2}\right)=\frac{e^{3c}}{x^3} \quad \rightarrow \quad \left(3\frac{y^2+x^2}{x^2}\right)\cdot x^2=\frac{e^{3c}}{x^3}\cdot x^2$$

$\boxed{3y^2+x^2=\frac{C}{x}}$ olarak aynı sonuç elde edilir. Benzer işlemler

$\frac{dx}{dy}=\frac{-2\cdot x\cdot y}{x^2+y^2}$ ve $x=v\cdot y$ dönüşümü yapılarak da hesaplanır.

$$\frac{dx}{dy}=v+y\frac{dv}{dy}=\frac{-2v\cdot y^2}{(v\cdot y)^2+y^2} \rightarrow v+y\frac{dv}{dy}=\frac{-2v}{v^2+1} \rightarrow y\frac{dv}{dy}=\frac{-3v-v^3}{v^2+1}$$

$$\left(\frac{1}{y}\right)dy=\left(\frac{v^2+1}{-3v-v^3}\right)dv \rightarrow \left(\frac{1}{y}\right)dy=\left(-\frac{v}{3v+v^2}-\frac{1}{3v+v^3}\right)dv$$

$$\int\left(\frac{1}{y}\right)dy=\int\left(-\frac{v}{3v+v^2}-\frac{1}{3v+v^3}\right)dv+c \rightarrow \ln(y)=-1/2\ln(3+v^2)-1/3\ln(v)+1/6\ln(3+v^2)$$

$$\ln(y)=-\ln(3+v^2)^{\frac{1}{2}}-\ln(v)^{\frac{1}{3}}+\ln(3+v^2)^{\frac{1}{6}} \qquad \ln(y)=-\ln(3+v^2)^{\frac{1}{3}}-\ln(v)^{\frac{1}{3}}$$

$$\ln(y)=-\frac{1}{3}\left[\ln(3+v^2)+\ln(v)\right] \rightarrow \ln(y)=\ln\left(v(3+v^2)\right)^{-\frac{1}{3}} \rightarrow e^{\ln(y)}=e^{\ln\left(v(3+v^2)\right)^{-\frac{1}{3}}}$$

$$y=\left[v(3+v^2)\right]^{-\frac{1}{3}} \rightarrow y=\frac{1}{\left[v(3+v^2)\right]^{\frac{1}{3}}} \qquad y^3\cdot\left[v(3+v^2)\right]=1 \qquad y^3\cdot\left[\frac{x}{y}\left(3+\frac{x^2}{y^2}\right)\right]=1$$

$$y^3\cdot\left[\frac{x}{y}\left(\frac{3y^2+x^2}{y^2}\right)\right]=1 \rightarrow x\cdot(3y^2+x^2)=c \rightarrow \boxed{3y^2+x^2=\frac{C}{x}}$$

olur. Aynı denklem Bernoulli olarak çözüldüğünde, $y'+p(x)\cdot y=q(x)\cdot y^n$ yapısına uymalıdır.

$$(x^2+y^2)dx+(2xy)dy=0 \rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x^2+y^2}{2xy} \rightarrow \frac{dy}{dx}+\left(\frac{1}{2x}\right)y=\left(-\frac{x}{2}\right)y^{-1}$$

$$y\cdot\frac{dy}{dx}+\left(\frac{1}{2x}\right)y\cdot y=\left(-\frac{x}{2}\right)y\cdot y^{-1} \rightarrow y\cdot\frac{dy}{dx}+\left(\frac{1}{2x}\right)y^2=-\frac{x}{2} \qquad u=y^2$$

$$\frac{du}{dx}=2\cdot y\cdot\frac{dy}{dx} \rightarrow y\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\frac{du}{dx} \rightarrow \frac{1}{2}\frac{du}{dx}+\left(\frac{1}{2x}\right)u=-\frac{x}{2} \rightarrow \frac{du}{dx}+\left(\frac{1}{x}\right)u=-x$$

$\int p(x)dx=\int\left(\frac{1}{x}\right)dx=\ln(x)$ $\quad e^{\int p(x)dx}=e^{\ln(x)}=x$ olduğu görülür. Değerler yerine yazıldığında;

$u(x)=e^{-\int p(x)\cdot dx}\cdot\left[\int e^{\int p(x)\cdot dx}\cdot q(x)\cdot dx+c\right]$ olmalıdır. Yani;

$$u=\frac{1}{x}\cdot\left[\int x\cdot(-x)\cdot dx+c\right] \quad\rightarrow\quad u=\frac{1}{x}\cdot\left[-\frac{x^3}{3}+c\right] \quad\rightarrow\quad \boxed{y^2+\frac{x^2}{3}=\frac{c}{x}}$$

Üç farklı usulle elde edilen neticeler birbirinin aynıdır.

9.4 Misal:

$\left(2xy-\sec^2(x)\right)\cdot dx+\left(x^2+2y\right)\cdot dy=0$ ile verilen diferansiyel denklemin genel çözümünü hesaplayınız.

Çözüm: $M(x,y)\cdot dx+N(x,y)\cdot dy=0$ şeklinde bulunduğundan tam diferansiyel denklem olup olmadığı test edilmelidir.

$\frac{\partial M}{\partial y}=2x,\ \frac{\partial N}{\partial x}=2x \quad\rightarrow\quad \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ tam diferansiyeldir. $f(x,y)=\int M(x,y)\cdot dx+g(y)=c$

$$f(x,y)=\int\left(2xy-\sec^2(x)\right)\cdot dx+g(y)=c \quad\rightarrow\quad f(x,y)=\left(x^2y-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)+g(y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N(x,y) \quad\rightarrow\quad N(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)+\frac{dg(y)}{dy} \quad\rightarrow\quad x^2+2y=x^2+\frac{dg(y)}{dy}$$

$$\frac{dg(y)}{dy}=2y \quad\rightarrow\quad g(y)=y^2 \quad\rightarrow\quad f(x,y)=x^2y-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}+y^2=c$$

$\boxed{x^2y-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}+y^2=c}$ şeklinde genel çözüm bulunur.

9.5 Misal:

$\left(\frac{1}{x}+2\cdot x\cdot y^2\right)\cdot dx+\left(2\cdot x^2\cdot y-\cos(y)\right)\cdot dy=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

$M(x,y)\cdot dx+N(x,y)\cdot dy=0$ şeklinde bulunduğundan tam diferansiyel denklem olup olmadığı test edilmelidir.

$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}+2xy^2\right)=4xy$ ve $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[2x^2y-\cos(y)\right]=4xy \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan tam diferansiyeldir.

$$f(x,y)=\int\left(\frac{1}{x}+2\cdot x\cdot y^2\right)\cdot dx+g(y) \rightarrow f(x,y)=\ln(x)+x^2y^2+g(y) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\ln(x)+x^2y^2+g(y)\right]$$

$\frac{\partial f}{\partial y}=2x^2y+\frac{dg(y)}{dy} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial y}$ olduğundan $\cancel{2x^2y}+\frac{dg(y)}{dy}=\cancel{2x^2y}-\cos(y) \rightarrow \frac{dg(y)}{dy}=-\cos(y)$

$\int dg(y) = -\int \cos(y)\cdot dy$ → $g(y) = -\sin(y)$ → $\boxed{\ln(x) + x^2y^2 - \sin(y) = c}$ şeklinde genel çözüm elde edilir.

9.6 Misal:

$\left(3\cdot x^2 + 6\cdot x\cdot y^2\right)\cdot dx + \left(6\cdot x^2\cdot y + 4\cdot y^3\right)\cdot dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

$M(x,y)\cdot dx + N(x,y)\cdot dy = 0$ şeklinde bulunduğundan tam diferansiyel denklem olup olmadığı test edilmelidir.

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3\cdot x^2 + 6\cdot x\cdot y^2\right) = 12\cdot x\cdot y$ ve $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[6\cdot x^2\cdot y + 4\cdot y^3\right] = 12\cdot x\cdot y$ → $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan tam diferansiyeldir.

$f(x,y) = \int\left(3\cdot x^2 + 6\cdot x\cdot y^2\right)\cdot dx + g(y)$ → $f(x,y) = x^3 + 3\cdot x^2\cdot y^2 + g(y)$ → $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[x^3 + 3\cdot x^2\cdot y^2 + g(y)\right]$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 6\cdot x^2\cdot y + \frac{dg(y)}{dy}$ → $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial y}$ olduğundan $\cancel{6\cdot x^2\cdot y} + \frac{dg(y)}{dy} = \cancel{6\cdot x^2\cdot y} + 4\cdot y^3$ → $\frac{dg(y)}{dy} = 4\cdot y^3$

$\int dg(y) = \int 4\cdot y^3\cdot dy$ → $g(y) = y^4$ → $\boxed{x^3 + 3\cdot x^2\cdot y^2 + y^4 = c}$ şeklinde genel çözüm elde edilir.

10. İntegrasyon Çarpanı ile Tam Diferansiyel Hale Getirilebilen Denklemler

Birinci mertebeden bir diferansiyel denklem $f(x,y) = c$ şeklinde tanımlı olsun. Diferansiyeli alındığında;

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy = 0 \qquad (10.1)$$

olur ve kısaca aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$M(x,y)\cdot dx + N(x,y)\cdot dy = 0 \qquad (10.2)$$

Tam diferansiyel denklem, denklem (9.3) ile gösterilen

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ şartını sağlıyordu. $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan bu şart;

$$\mu(x,y)\cdot M(x,y)\cdot dx + \mu(x,y)\cdot N(x,y)\cdot dy = 0 \qquad (10.3)$$

denkleminde bulunan $\mu(x,y)$ integrasyon çarpanı ile sağlanmış olsun. Bu durumda tam diferansiyellik şartı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial(\mu\cdot M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu\cdot N)}{\partial x} \qquad (10.4)$$

Bu şartın daha açık yazılmasıyla;

$\mu\frac{\partial M}{\partial y}+M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\frac{\partial N}{\partial x}+N\frac{\partial\mu}{\partial x}$ olur. Buradan; $\mu\frac{\partial M}{\partial y}-\mu\frac{\partial N}{\partial x}=N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}$ olur. Her iki tarafın $\mu(x,y)$ ye bölünmesiyle;

$$\frac{1}{\mu}\left(N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x} \tag{10.5}$$

olur Burada bir çok tür karşımıza çıkar. Bunlardan 6 adedi aşağıda verilmiştir.

$$\mu=e^{\int\phi(\nu)\cdot d\nu}$$

Yukarıdaki denklem ile ilgili integrasyon çarpanını bulmak için aşağıda verilen Tablo 1 den faydalanılabilir.

Tablo 1: İntegrasyon çarpanı ile ilgili hazır değerler

ν	x	y	$x-y$	$x\cdot y$	$\frac{x}{y}$	x^2+y^2
$\phi(\nu)$	$\frac{M_y-N_x}{N}$	$\frac{M_y-N_x}{-M}$	$\frac{M_y-N_x}{N+M}$	$\frac{M_y-N_x}{y\cdot N-x\cdot M}$	$\frac{(M_y-N_x)\cdot y^2}{y\cdot N+x\cdot M}$	$\frac{(M_y-N_x)}{2(x\cdot N-y\cdot M)}$

Bu değerlerin nasıl hesaplandığı aşağıda verilmiştir.

10.1 $\mu=\mu(x)$ integrasyon çarpanı sadece x e bağımlı olduğu durum:

Burada yapılan tüm çözümler Denklem (10.5) den yararlanarak hesaplanmaktadır. $\mu(x,y)$ fonksiyonu sadece x e bağlı olduğunda; $\mu=\mu(x)$ şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla $\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$ olacaktır. Bu değer yerine yazıldığında;

$$\frac{1}{\mu}\left(N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\cancel{\frac{\partial\mu}{\partial y}}\right)=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x} \quad\rightarrow\quad \frac{1}{\mu}N\frac{d\mu}{dx}=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}$$ olur. Buradan;

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=p(x)$$ elde edilir. Böylece; $$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx}=p(x) \quad\rightarrow\quad \int\frac{d\mu}{\mu}=\int p(x)dx$$

$$\ln(\mu)=\int p(x)dx \quad\rightarrow\quad e^{\ln(\mu)}=e^{\int p(x)dx} \quad\rightarrow\quad \mu=e^{\int p(x)dx}$$

Dikkat: işlemler sonucunda elde edilen $\mu(x)$ integrasyon çarpanı, $\mu(x,y)$ şeklinde çıkarsa yukarıdaki denklem uygulanamaz ve aşağıdaki 2. yol izlenir.

Burada $\quad p(x)=\frac{M_y-N_x}{N}\quad$ ile tanımlıdır ve sadece x in fonksiyonu olmalıdır.

10.1.1 Misal:

$(x\cdot y-1)\cdot dx+\left(x^2-x\cdot y\right)\cdot dy=0$ şeklinde verilen diferansiyel denklemin, ilk önce tam diferansiyel olup olmadığını test ediniz ve tam diferansiyel değilse, integrasyon çarpanını hesaplayıp, çözümünü yapınız.

$\frac{\partial M}{\partial y}=x$ ve $\frac{\partial N}{\partial x}=2x-1$ ve $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan tam diferansiyel değildir. Çözümü: ilk önce integrasyon çarpanı hesaplanmalıdır.

$$p(x)=\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{x-(2x-y)}{x^2-xy}=-\frac{y-x}{x(y-x)}=-\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\mu=e^{\int p(x)dx}$ $\quad \mu=e^{-\int\left(\frac{1}{x}\right)dx}$ → $\mu=e^{-\ln(x)}$ → $\mu=\frac{1}{x}$ olduğundan;

$\frac{1}{x}\cdot(xy-1)\cdot dx+\frac{1}{x}\cdot\left(x^2-xy\right)\cdot dy=0$ → $\left(y-\frac{1}{x}\right)\cdot dx+(x-y)\cdot dy=0$

$\frac{\partial M}{\partial y}=1$ ve $\frac{\partial N}{\partial x}=1$ → $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan tam diferansiyeldir

$df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy=0$ olmalıdır. → $\left(y-\frac{1}{x}\right)\cdot dx+(x-y)\cdot dy=0$

$f(x,y)=\int M(x,y)\cdot dx+g(y)$ → $f(x,y)=\int\left(y-\frac{1}{x}\right)dx+g(y)$

$f(x,y)=xy-\ln(x)+g(y)$ → $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)\cdot dx\right]+\frac{dg(y)}{dy}=N(x,y)$ olduğundan;

$x+\frac{dg(y)}{dy}=x-y$ → $\frac{dg(y)}{dy}=-y$ → $g(y)=-\int y\,dy$ → $g(y)=-\frac{y^2}{2}$

$f(x,y)=\int M(x,y)\cdot dx+g(y)$ olduğundan, yerine yazıldığında;

$f(x,y)=xy-\ln(x)-\frac{y^2}{2}=c$ → $xy-\ln(x)-\frac{y^2}{2}=c$ olduğu görülür.

İntegrasyon çarpanı için 2.yol tercih edildiğinde;

$p(y)=\frac{N_x-M_y}{M}=\frac{(2x-y)-x}{xy-1}=\frac{x-y}{xy-1}$ → $p(y)=\frac{x-y}{xy-1}$

$p=p(x,y)$ fonksiyonu hem x hem de y ye bağımlı olduğundan, integrasyon katsayısı geçerli değildir.

Bernoulli denklemine uygun olup olmadığının test edilmesi için, Bernoulli denklemi şekline dönüştürmek gereklidir.

$(xy-1)\cdot dx+(x^2-xy)\cdot dy=0 \quad \rightarrow \quad xy-1+(x^2-xy)y'=0 \quad \rightarrow \quad x(x-y)y'+xy=1$

$(x-y)\cdot y'+y=\dfrac{1}{x} \quad \rightarrow \quad y'+\dfrac{1}{x-y}y=\dfrac{1}{x(x-y)}$ uygun değildir. Aşağıda tam diferansiyel hali denendi ve onun da uygun olmadığı görüldü.

$\left(y-\dfrac{1}{x}\right)\cdot dx+(x-y)\cdot dy=0 \quad \rightarrow \quad \left(y-\dfrac{1}{x}\right)+(x-y)\dfrac{dy}{dx}=0 \quad \rightarrow \quad (x-y)\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}-y$

$(x-y)\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-xy}{x} \qquad (x-y)\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}-y$ uygun olmadığı görülmektedir.

10.1.2 Misal:

Misal 6.4 te verilen $(x-y^2)\cdot dx+(2xy)\cdot dy=0$ diferansiyel denklemin tam diferansiyel olup olmadığını test ediniz ve tam diferansiyel değilse, integrasyon çarpanını hesaplayıp, çözümünü yapınız.

$\dfrac{\partial M}{\partial y}=-2y$ ve $\dfrac{\partial N}{\partial x}=2y$ ve $\dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan tam diferansiyel değildir. Çözümü: ilk önce integrasyon çarpanı hesaplanmalıdır.

$p(x)=\dfrac{M_y-N_x}{N}=\dfrac{-2y-(2y)}{2xy}=\dfrac{-4y}{2xy}=-\left(\dfrac{2}{x}\right) \quad \rightarrow \quad \mu=e^{\int p(x)dx} \quad \rightarrow \quad \mu=e^{-\int\left(\frac{2}{x}\right)dx}$

$\mu=e^{-2\ln(x)} \quad \rightarrow \quad \mu=\dfrac{1}{x^2}$ olduğundan;

$\dfrac{1}{x^2}\cdot(x-y^2)\cdot dx+\dfrac{1}{x^2}\cdot(2xy)\cdot dy=0 \quad \rightarrow \quad \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{y^2}{x^2}\right)\cdot dx+\left(\dfrac{2y}{x}\right)\cdot dy=0$ haline gelir ve

$\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{y^2}{x^2}\right)=-2\dfrac{y}{x^2}$ ve $\dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{2y}{x}\right)=-2\dfrac{y}{x^2} \rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan tam diferansiyeldir ve çözümü tam diferansiyel denklem gibi yapılır.

$f(x,y)=\int M(x,y)\cdot dx+g(y) \quad \rightarrow \quad f(x,y)=\int\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{y^2}{x^2}\right)dx+g(y)$

$f(x,y)=\ln(x)+\dfrac{y^2}{x}+g(y) \quad \rightarrow \quad \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)\cdot dx\right]+\dfrac{dg(y)}{dy}=N(x,y)$ olduğundan;

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\ln(x)+\dfrac{y^2}{x}\right]+\dfrac{dg(y)}{dy}=N(x,y) \quad \rightarrow \quad \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\left[\dfrac{2y}{x}\right]+\dfrac{dg(y)}{dy}=N(x,y)$

$\dfrac{2y}{x}+g'(y)=N(x,y) \rightarrow \dfrac{2y}{x}+g'(y)=\dfrac{2y}{x} \quad \rightarrow \quad g'(y)=0$

$g(y)=c$ ve $f(x,y)=\ln(x)+\dfrac{y^2}{x}+g(y)$ olduğundan;

$\ln(x)+\dfrac{y^2}{x}+c=0 \quad \rightarrow \quad y^2+(\ln(x)+c)x=0$ elde edilir.

10.1.3 Misal:

$\left(2x+\dfrac{y}{x}\right)\cdot dx+(xy-1)\cdot dy=0$ diferansiyel denkleminin $\mu=\mu(x)$ integrasyon çarpanını bularak genel çözümünü elde ediniz.

Çözüm 1:

$$\left(2x+\frac{y}{x}\right)\cdot dx+(xy-1)\cdot dy=0 \quad \rightarrow \quad M_y=\frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad N_x=y$$

$$p(x)=\frac{M_y-N_x}{N} \quad \rightarrow \quad p(x)=\frac{\frac{1}{x}-y}{xy-1} \quad \rightarrow \quad p(x)=\frac{\frac{1-xy}{x}}{xy-1}=\frac{1-xy}{x}\cdot\frac{1}{xy-1} \quad \rightarrow \quad p(x)=-\frac{1}{x}$$

$$\mu=e^{\int p(x)dx} \qquad \mu=e^{-\int\left(\frac{1}{x}\right)dx} \quad \rightarrow \quad \mu=e^{-\ln(x)} \quad \rightarrow \quad \mu=\frac{1}{x}$$ olduğundan;

$$\frac{1}{x}\cdot\left(2x+\frac{y}{x}\right)\cdot dx+\frac{1}{x}\cdot(xy-1)\cdot dy=0 \quad \rightarrow \quad \left(2+\frac{y}{x^2}\right)\cdot dx+\left(y-\frac{1}{x}\right)\cdot dy=0 \quad \rightarrow \quad M_y=\frac{1}{x^2}$$

$N_x=\dfrac{1}{x^2} \quad \rightarrow \quad \dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan tam diferansiyeldir.

$df(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot dy=0$ olmalıdır. $\rightarrow \quad \left(2+\dfrac{y}{x^2}\right)\cdot dx+\left(y-\dfrac{1}{x}\right)\cdot dy=0$

$$f(x,y)=\int M(x,y)\cdot dx+g(y) \quad \rightarrow \quad f(x,y)=\int\left(2+\frac{y}{x^2}\right)dx+g(y)$$

$f(x,y)=2x-\dfrac{y}{x}+g(y) \quad \rightarrow \quad \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left[2x-\dfrac{y}{x}\right]+\dfrac{dg(y)}{dy}=N(x,y)$ olduğundan;

$$-\frac{1}{x}+\frac{dg(y)}{dy}=y-\frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{dg(y)}{dy}=y \quad \rightarrow \quad g(y)=\int y\cdot dy \quad \rightarrow \quad g(y)=\frac{y^2}{2}$$

$f(x,y)=\int M(x,y)\cdot dx+g(y)$ olduğundan, yerine yazıldığında;

$f(x,y)=2x-\dfrac{y}{x}+\dfrac{y^2}{2}=c$ şeklinde genel çözüm elde edilir.

Çözüm 2: $y=u\cdot x \quad \rightarrow \quad dy=du\cdot x+u\cdot dx$ dönüşümü uygulansın.

$$\left(2x+\frac{y}{x}\right)\cdot dx+(xy-1)\cdot dy=0 \quad \rightarrow \quad \left(2x+\frac{u\cdot x}{x}\right)\cdot dx+(x\cdot u\cdot x-1)\cdot(du\cdot x+u\cdot dx)=0$$

$(2x+u)\cdot dx+\left(x^2\cdot u-1\right)\cdot(du\cdot x+u\cdot dx)=0$ $\quad(2x+u)\cdot dx+\left(x^2\cdot u^2-u\right)\cdot dx+\left(x^3\cdot u-x\right)\cdot du=0$

$\left(2x+x^2\cdot u^2\right)\cdot dx+\left(x^3\cdot u-x\right)\cdot du=0$ → Her taraf x e bölündüğünde (çünkü bütün terimlerde x bulunmaktadır);

$\frac{1}{x}\cdot\left[\left(2x+x^2\cdot u^2\right)\cdot dx+\left(x^3\cdot u-x\right)\cdot du\right]=0$ → $\left(2+x\cdot u^2\right)\cdot dx+\left(x^2\cdot u-1\right)\cdot du=0$

$\frac{\partial M}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\left(2+x\cdot u^2\right)=2\cdot x\cdot u$ ve $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\cdot u-1\right)=2\cdot x\cdot u$ → $\frac{\partial M}{\partial u}=\frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan tam diferansiyeldir.

$f(x,u)=\int M(x,u)\cdot dx+g(u)$ → $f(x,u)=\int\left(2+x\cdot u^2\right)dx+g(u)$

$f(x,y)=2\cdot x+\frac{x^2}{2}\cdot u^2+g(u)$ → $\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\left[2\cdot x+\frac{x^2}{2}\cdot u^2\right]+\frac{dg(u)}{du}=N(x,u)$ olduğundan;

$x^2\cdot u+\frac{dg(u)}{du}=x^2\cdot u-1$ → $\frac{dg(u)}{du}=-1$ → $\int\frac{dg(u)}{du}=-u$ → $g(u)=-u$

$f(x,u)=2\cdot x+\frac{x^2}{2}\cdot u^2+g(u)$ → $f(x,u)=2\cdot x+\frac{x^2}{2}\cdot u^2-u$ → $y=u\cdot x$ → $u=\frac{y}{x}$

$f(x,y)=2\cdot x+\frac{x^2}{2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{y}{x}$ → $f(x,y)=2\cdot x+\frac{y^2}{2}-\frac{y}{x}=c$ genel çözümdür.

10.1.4 Misal:

$\left(2\cdot x+y^2+2\right)dx+2y\cdot dy=0$ diferansiyel denkleminin $\mu=\mu(x)$ integrasyon çarpanını hesaplayarak genel çözümünü elde ediniz.

Çözüm: İlk önce diferansiyel denklemin tam diferansiyel olup olmadığı test edilmelidir. $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(2\cdot x+y^2+2\right)=2y$ ve $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}[2y]=0$ → $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan tam diferansiyel değildir. O halde integrasyon çarpanı bulunmalıdır. Eğer $\mu=\mu(x)$ ise $\mu=e^{\int p(x)dx}$ ve $p(x)=\frac{M_y-N_x}{N}$ sadece x in fonksiyonu olmalıdır.

$p(x)=\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{\frac{\partial}{\partial y}\left[2+y^2+2x\right]-\frac{\partial}{\partial x}[2y]}{2y}$ → $p(x)=\frac{\cancel{2y}-0}{\cancel{2y}}=1$ şart sağlandı.

$\mu=e^{\int p(x)dx}=e^{\int 1\cdot dx}=e^x$

$e^x\cdot\left(2+y^2+2x\right)dx+e^x\cdot 2ydy=0$ → $\left(2e^x+e^xy^2+2xe^x\right)\cdot dx+\left(2e^xy\right)\cdot dy=0$

$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[2e^x+e^xy^2+2xe^x\right]=2e^xy$ ve $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[2e^xy\right]=2e^xy$ → $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan tam diferansiyeldir.

$$f(x,y)=\int\left(2e^x+e^xy^2+2xe^x\right)\cdot dx+g(y) \rightarrow f(x,y)=2e^x+e^xy^2+2e^x(x-1)+g(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[e^x\cdot\left(2x+y^2\right)+g(y)\right] \quad\rightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2e^xy+\frac{dg(y)}{dy} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial y}$$ olduğundan;

$$\cancel{2e^xy}+\frac{dg(y)}{dy}=\cancel{2e^xy} \rightarrow \frac{dg(y)}{dy}=0 \rightarrow \int\frac{d}{dy}g(y)=c \quad\rightarrow\quad g(y)=-c$$

$$f(x,y)=e^x\cdot\left(2x+y^2\right)-c \rightarrow \boxed{2\cdot e^x\cdot x+e^x\cdot y^2=c}$$ şeklinde genel çözüm elde edilir.

Aynı denklem Bernoulli ile önceki bölümlerde çözüldü.

10.1.5 Misal:

$\left(x^4+x\cdot y\right)\cdot dx-\left(x\cdot y^3-x^2\right)\cdot dy=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü hesaplayınız.

$M(x,y)\cdot dx+N(x,y)\cdot dy=0$ şeklinde bulunduğundan tam diferansiyel denklem olup olmadığı test edilmelidir.

$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^4+x\cdot y\right)=x$ ve $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2-x\cdot y^3\right)=2\cdot x-y^3 \quad\rightarrow\quad \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan tam diferansiyel değildir. Tablo 1 den yararlanarak x e bağlı olup olmadığı test edilmelidir.

$$\phi(x)=\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{x-\left(2\cdot x-y^3\right)}{x^2-x\cdot y^3}=\frac{\cancel{y^3-x}}{-x\cdot\left(\cancel{y^3-x}\right)}=-\frac{1}{x} \rightarrow \mu=e^{\int\phi(x)dx}=e^{\int-\frac{1}{x}dx}=e^{\ln\left(x^{-1}\right)}=\frac{1}{x}$$

$$x^{-1}\cdot\left(x^4+x\cdot y\right)\cdot dx-x^{-1}\cdot\left(x\cdot y^3-x^2\right)\cdot dy=0 \rightarrow \left(x^3+y\right)\cdot dx+\left(x-y^3\right)\cdot dy=0$$

$$f(x,y)=\int\left(x^3+y\right)\cdot dx+g(y) \rightarrow f(x,y)=\frac{x^4}{4}+x\cdot y+g(y) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x^4}{4}+x\cdot y+g(y)\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left[x+\frac{dg(y)}{dy}\right] \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial y}$$ olduğundan $\cancel{x}+\frac{dg(y)}{dy}=\cancel{x}-y^3 \rightarrow \frac{dg(y)}{dy}=-y^3$

$$\int dg(y)=\int-y^3\cdot dy \quad\rightarrow\quad g(y)=-\frac{y^4}{4} \rightarrow \boxed{\frac{x^4}{4}+x\cdot y-\frac{y^4}{4}=c}$$ şeklinde genel çözüm elde edilir.

10.2 $\mu=\mu(y)$ integrasyon çarpanı sadece y ye bağımlı olduğu durum:

$\mu(x,y)$ fonksiyonun sadece y ye bağlı olduğunda; $\mu=\mu(y)$ şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla $\frac{\partial\mu}{\partial x}=0$ olacaktır. Bu değer yerine yazıldığında;

$$\frac{1}{\mu}\left(N\cancel{\frac{\partial\mu}{\partial x}}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x} \quad\rightarrow\quad \frac{1}{\mu}M\frac{d\mu}{dy}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y} \quad\rightarrow\quad \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy}=\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=p(y)$$

elde edilir. $\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy}=p(y)$ → $\int\frac{d\mu}{\mu}=\int p(y)dy$ → $\ln(\mu)=\int p(y)dy$

$e^{\ln(\mu)}=e^{\int p(y)dy}$ → $\mu=e^{\int p(y)dy}$ burada $p(y)=\frac{N_x-M_y}{M}$ ile tanımlıdır.

10.2.1 Misal:

$y\cdot dx+\left(y^2-x\right)\cdot dy=0$ ile verilen diferansiyel denklemin, ilk önce $\mu=\mu(y)$ integrasyon çarpanını bulunuz ve daha sonra genel çözümünü elde ediniz

Çözüm: $M(x,y)\cdot dx+N(x,y)\cdot dy=0$ şeklinde bulunduğundan tam diferansiyel denklem olup olmadığı test edilmelidir.

$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(y)=1$ ve $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(y^2-x\right)=-1$ → $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan tam diferansiyel değildir. Tablo 1 den yararlanarak y e bağlı olup olmadığı test edilmelidir.

$$\phi(y)=\frac{N_x-M_y}{M}=\frac{-1-(1)}{y}=-\frac{2}{y}\rightarrow\mu=e^{\int\phi(y)dy}=e^{\int-\frac{2}{y}dy}=e^{2\cdot\ln\left(y^{-1}\right)}=\frac{1}{y^2}$$

$$\frac{1}{y^2}\cdot(y)\cdot dx+\frac{1}{y^2}\cdot\left(y^2-x\right)\cdot dy=0\rightarrow\frac{1}{y}\cdot dx+\left(1-\frac{x}{y^2}\right)\cdot dy=0$$

$$f(x,y)=\int\left(\frac{1}{y}\right)\cdot dx+g(y)\rightarrow f(x,y)=\frac{x}{y}+g(y)\rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x}{y}+g(y)\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left[-\frac{x}{y^2}+\frac{dg(y)}{dy}\right]=1-\frac{x}{y^2}\rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial y}\text{ olduğundan }\cancel{-\frac{x}{y^2}}+\frac{dg(y)}{dy}=1\cancel{-\frac{x}{y^2}}\rightarrow\frac{dg(y)}{dy}=1$$

$$\int dg(y)=\int 1\cdot dy\rightarrow g(y)=y\rightarrow\boxed{f(x,y)=\frac{x}{y}+y=c}$$ şeklinde genel çözüm elde edilir.

10.3 Eğer M ve N aynı dereceden homojen fonksiyonlar ve $x\cdot M+y\cdot N=0$ ise, integrasyon çarpanı $\mu=\frac{1}{x\cdot y}$ şeklindedir.

$x\cdot M+y\cdot N=0$ olmak üzere $M(x,y)\cdot dx+N(x,y)\cdot dy=0$ diferansiyel denkleminin integrasyon çarpanı; $\mu=\frac{1}{x\cdot y}$ şeklindedir. Çünkü; $x\cdot M+y\cdot N=0$ → $\frac{M}{N}=-\frac{y}{x}$ olur.

$$\mu\cdot M\cdot dx+\mu\cdot N\cdot dy=0\rightarrow x\cdot\frac{M}{N}\cdot dx+y\cdot dy=0\rightarrow x\cdot\left(-\frac{y}{x}\right)\cdot dx+y\cdot dy=0$$

$-y\cdot dx+x\cdot dy=0$ diferansiyel denklemiyle aynıdır. Dolayısıyla bu denklemin bulunan integrasyon çarpanı, önceki denklem için de geçerlidir.

$-y \cdot dx + x \cdot dy = 0 \quad \rightarrow \quad \mu \cdot (-y \cdot dx + x \cdot dy) = 0$

Tam diferansiyel şartını sağlaması için, $\frac{\partial(\mu \cdot M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu \cdot N)}{\partial x}$ olmalıdır. Dolayısıyla;

$\frac{1}{x \cdot y} \cdot (-y \cdot dx + x \cdot dy) = 0 \quad \rightarrow \quad \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot dx + \left(\frac{1}{y}\right) \cdot dy = 0$

$\frac{\partial(\mu \cdot M)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ ve $\frac{\partial(\mu \cdot N)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{y}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial(\mu \cdot M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu \cdot N)}{\partial x}$ tam diferansiyel şartı sağlanmaktadır. Böylece integrasyon çarpanının $\mu = \frac{1}{x \cdot y}$ olduğu görülür.

Aşağıda verilen diferansiyel denklem bu türe bir misaldir.

10.3.1 Misal:

$(xy) \cdot dx - (x^2) \cdot dy = 0$ diferansiyel denklemin ilk önce tam diferansiyel olup olmadığını test ediniz. Tam diferansiyel değil ise, integrasyon çarpanını bularak çözünüz.

Çözüm: $\frac{\partial M}{\partial y} = x,$ ve $\frac{\partial N}{\partial x} = -2x \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \boxed{x \cdot M + y \cdot N = 0}$ şartı test edilmelidir.

$x \cdot (xy) - y \cdot (x^2) = 0 \rightarrow \quad x^2 \cdot y - x^2 \cdot y = 0$ şart sağlanıyor. Bu durumda integrasyon çarpanı $\mu = \frac{1}{x \cdot y}$ olduğundan, diferansiyel denklem;

$$\left(\frac{xy}{xy}\right)dx - \left(\frac{x^2}{xy}\right)dy = 0 \quad \rightarrow \quad 1 \cdot dx - \left(\frac{x}{y}\right)dy = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{x}{y} \cdot dy = dx \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + c \quad \rightarrow \quad \ln(y) = \ln(x) + c \quad \rightarrow \quad e^{\ln(y)} = e^{\ln(x)} \cdot e^C \quad \rightarrow \quad y = e^C \cdot x$$

$c = e^C \quad \rightarrow \quad \boxed{y = c \cdot x}$ şeklinde genel çözüm bulunur.

10.3.2 Misal:

$(xy^2) \cdot dx - (x^2 y) \cdot dy = 0$ şeklinde verilen diferansiyel denklemin, tam diferansiyel olup olmadığını test ediniz ve tam diferansiyel değilse, integrasyon çarpanını hesaplayıp, çözümünü yapınız.

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy$ ve $\frac{\partial N}{\partial x} = -2xy$ ve $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan tam diferansiyel değildir.

$\boxed{x \cdot M + y \cdot N = 0}$ şartı test edilmelidir. $\rightarrow \ x \cdot (xy^2) - y \cdot (x^2 y) = 0$

$$\frac{1}{x \cdot y} \cdot \left[(xy^2) \cdot dx - (x^2 y) \cdot dy\right] = 0 \quad \rightarrow \quad (y) \cdot dx - (x) \cdot dy = 0 \quad \rightarrow \quad y - x \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$\frac{1}{y}\cdot dy=\frac{1}{x}\cdot dx \rightarrow \qquad \int\frac{dy}{y}=\int\left(\frac{1}{x}\right)dx+c \quad \rightarrow \quad \ln(y)=\ln(x)+c \quad \rightarrow \quad e^{\ln(y)}=e^{\ln(x)}\cdot e^{c}$

$C=e^{c} \quad \rightarrow \quad y=C\cdot x$ genel çözümdür.

10.3.3 Misal:

$(12x^2y)\cdot dx+(12x^3)\cdot dy=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü hesaplayınız.

Çözüm:

$\frac{\partial M}{\partial y}=12x^2$ ve $\frac{\partial N}{\partial x}=36x^2$ ve $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan tam diferansiyel değildir

a) integrasyon çarpanı $\mu=\mu(x)$ olarak alındığında;

$p(x)=\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{12x^2-(36x^2)}{12x^3}=\frac{\cancel{12x^2}\cdot(1-3)}{\cancel{12x^2}\cdot x}=-\frac{2}{x} \quad \rightarrow \quad p=p(x)$ olduğundan geçerlidir.

$\mu=e^{\int p(x)dx} \quad \rightarrow \quad \mu=e^{-\int\left(\frac{2}{x}\right)dx} \quad \rightarrow \quad \mu=e^{\ln(x^{-2})} \quad \rightarrow \quad \mu=\frac{1}{x^2}$ olduğundan;

$\frac{1}{x^2}(12x^2y)\cdot dx+\frac{1}{x^2}(12x^3)\cdot dy=0 \quad \rightarrow \quad (12y)\cdot dx+(12x)\cdot dy=0 \quad \rightarrow \quad \int(12y)dx+\int(12x)dy=c$

$12xy+12xy=c \quad \rightarrow \quad 24xy=c \quad \rightarrow \quad x\cdot y=C \quad \left(C=\frac{c}{24}\right)$

b) integrasyon çarpanı $\mu=\mu(x,y)=\frac{1}{x\cdot y}$ olarak alındığında;

$\frac{1}{x\cdot y}\cdot(12x^2y)\cdot dx+\frac{1}{x\cdot y}\cdot(12x^3)\cdot dy=0 \quad \rightarrow \quad (12x)\cdot dx+\left(\frac{12x^2}{y}\right)\cdot dy=0 \quad \rightarrow \quad -12x\cdot dx=\frac{12x^2}{y}\cdot dy$

$-\cancel{12x}\cdot dx=\frac{\cancel{12x}\cdot x}{y}\cdot dy \quad \rightarrow \quad -dx=\frac{x}{y}\cdot dy \quad \rightarrow \quad \int\frac{dy}{y}+\int\frac{dx}{x}=c \qquad \ln(y)+\ln(x)=c$

$x\cdot y=C \quad \rightarrow \quad df(x,y)=y\cdot dx+x\cdot dy=0 \quad \rightarrow \quad 12x^2\cdot[y\cdot dx+x\cdot dy]=0$

Not: her iki çözümde de diferansiyel denklemin aynısı elde edilmiştir. Buradan farklı integrasyon çarpanı kullanılsa bile çözümün değişmediği görülmektedir. Ayrıca, bir diferansiyel denklemin, tam diferansiyel hale getirilmesi için farklı integrasyon çarpanlarının olabildiği görülmektedir.

10.4 Eğer M ve N aynı dereceden homojen fonksiyonlar ve $x\cdot M+y\cdot N\neq 0$ ise, integrasyon çarpanı $\mu=\dfrac{1}{x\cdot M+y\cdot N}$ şeklindedir.

$x\cdot M+y\cdot N\neq 0$ olmak üzere $M(x,y)\cdot dx+N(x,y)\cdot dy=0$ diferansiyel denkleminin integrasyon çarpanı; $\mu=\dfrac{1}{x\cdot M+y\cdot N}$ şeklindedir. Homojen olma şartı; Eğer $M(x,y)$ ve $N(x,y)$ m. mertebeden homojen ise $M(x,y)=\lambda^m\cdot M(x,y)$ ve $N(x,y)=\lambda^m\cdot N(x,y)$ olur. Homojen olma şartından dolayı;

$x\dfrac{\partial M}{\partial x}+y\dfrac{\partial M}{\partial y}=mM$ ve $x\dfrac{\partial N}{\partial x}+y\dfrac{\partial N}{\partial y}=mN$ bağıntıları geçerlidir. Misal olarak;

$\left(x^2+xy+y^2\right)\cdot dx+\left(x^2\right)\cdot dy=0$ diferansiyel denkleminde görülebilir.

$$x\frac{\partial M}{\partial x}+y\frac{\partial M}{\partial y}=x\cdot(2x+y)+y\cdot(x+2y)=2x^2+xy+xy+2y^2=2\cdot\left(x^2+xy+y^2\right)=2\cdot M$$

$x\dfrac{\partial N}{\partial x}+y\dfrac{\partial N}{\partial y}=x\cdot(2x)+y\cdot 0=2\cdot\left(x^2\right)=2\cdot N$ Bu bağıntılar ispatlandığında, integrasyon çarpanı da ispatlanmış olur. Çünkü integrasyon çarpanı alınan kabul üzerine uygulanmaktadır.

$\mu(x,y)\cdot\left[M(x,y)\cdot dx+\mu(x,y)\cdot N(x,y)\cdot dy\right]=0$ → $\dfrac{M}{xM+yN}\cdot dx+\dfrac{M}{xM+yN}\cdot dy=0$ olur

Tam diferansiyel şartını sağlaması için, $\dfrac{\partial(\mu\cdot M)}{\partial y}=\dfrac{\partial(\mu\cdot N)}{\partial x}$ olacağından;

$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{M}{xM+yN}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{N}{xM+yN}\right)$ şartı sağlanmalıdır. Bu şartın daha açık yazılmasıyla;

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}\cdot(xM+yN)-\dfrac{\partial}{\partial y}(xM+yN)\cdot M}{(xM+yN)^2}=\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}\cdot(xM+yN)-\dfrac{\partial}{\partial x}(xM+yN)\cdot N}{(xM+yN)^2}$$

veya $\dfrac{\partial M}{\partial y}\cdot(xM+yN)-\dfrac{\partial}{\partial y}(xM+yN)\cdot M=\dfrac{\partial N}{\partial x}\cdot(xM+yN)-\dfrac{\partial}{\partial x}(xM+yN)\cdot N$ yazılabilir.

$$x\cdot M\cdot\frac{\partial M}{\partial y}+y\cdot N\cdot\frac{\partial M}{\partial y}-M\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x\cdot M)-M\cdot\frac{\partial}{\partial y}(y\cdot N)=x\cdot M\cdot\frac{\partial N}{\partial x}+y\cdot N\cdot\frac{\partial N}{\partial x}-N\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x\cdot M)-N\cdot\frac{\partial}{\partial x}(y\cdot N)$$

$$x\cdot M\cdot\frac{\partial M}{\partial y}+y\cdot N\cdot\frac{\partial M}{\partial y}-M\cdot x\cdot\frac{\partial M}{\partial y}-M\cdot N-M\cdot y\frac{\partial N}{\partial y}=x\cdot M\cdot\frac{\partial N}{\partial x}+y\cdot N\cdot\frac{\partial N}{\partial x}-N\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x\cdot M)-N\cdot\frac{\partial}{\partial x}(y\cdot N)$$

$$\cancel{M\cdot x\cdot\frac{\partial M}{\partial y}}+y\cdot N\cdot\frac{\partial M}{\partial y}-\cancel{M\cdot x\cdot\frac{\partial M}{\partial y}}-\cancel{M\cdot N}-M\cdot y\cdot\frac{\partial N}{\partial y}=x\cdot M\cdot\frac{\partial N}{\partial x}+\cancel{y\cdot N\cdot\frac{\partial N}{\partial x}}-\cancel{M\cdot N}-N\cdot x\frac{\partial M}{\partial x}-\cancel{N\cdot y\cdot\frac{\partial N}{\partial x}}$$

$$y\cdot N\cdot\frac{\partial M}{\partial y}-M\cdot y\cdot\frac{\partial N}{\partial y}=x\cdot M\cdot\frac{\partial N}{\partial x}-N\cdot x\frac{\partial M}{\partial x}\quad\rightarrow\quad N\cdot x\frac{\partial M}{\partial x}+y\cdot N\cdot\frac{\partial M}{\partial y}=x\cdot M\cdot\frac{\partial N}{\partial x}+M\cdot y\cdot\frac{\partial N}{\partial y}$$

$$N\cdot\left(x\frac{\partial M}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial M}{\partial y}\right)=M\cdot\left(x\cdot\frac{\partial N}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial N}{\partial y}\right)\rightarrow\qquad N\cdot(m\cdot M)=M\cdot(m\cdot N)$$

$m\cdot(M\cdot N)=m\cdot(M\cdot N)$ olduğu görülür. Böylece ispatlanmış olur.

Aşağıda verilen misal bu türdendir.

10.4.1 Misal:

$\left(x^2+x\cdot y+y^2\right)\cdot dx+\left(x^2\right)\cdot dy=0$ ile verilen diferansiyel denklemin genel çözümünü hesaplayınız.

$$\frac{\partial M}{\partial y}=x+2y,\ \text{ve}\ \frac{\partial N}{\partial x}=2x\rightarrow\qquad\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

$x\cdot M+y\cdot N\neq 0$ şartı test edilmelidir.

$x\cdot\left(x^2+xy+y^2\right)+y\cdot\left(x^2\right)=0\quad\rightarrow\quad x^3+2\cdot x^2\cdot y+x\cdot y^2\neq 0$ şart sağlanıyor. Bu durumda integrasyon çarpanı $\mu=\dfrac{1}{x\cdot M+y\cdot N}=\dfrac{1}{x^3+2x^2y+xy^2}=\dfrac{1}{x(x+y)^2}$ olduğundan diferansiyel denklem;

$\left(\dfrac{x^2+xy+y^2}{x(x+y)^2}\right)\cdot dx+\left(\dfrac{x^2}{x(x+y)^2}\right)\cdot dy=0$ haline gelir ve tam diferansiyeldir. Çözümü tam diferansiyel gibidir.

10.5 $M(x,y)\cdot dx+N(x,y)\cdot dy=0$ **diferansiyel denklemi** $M(x,y)=y\cdot f_1(x\cdot y)$ **ve** $N(x,y)=x\cdot f_2(x\cdot y)$ **şeklinde ifade edilebiliyor ve** $f_1(x\cdot y)\neq f_2(x\cdot y)$ **ise, integrasyon çarpanı** $\mu=\dfrac{1}{x\cdot M-y\cdot N}$ **şeklindedir.**

Aşağıda bununla ilgili misali inceleyiniz.

10.5.1 Misal:

$y\cdot(2xy+1)\cdot dx+x\cdot\left(2xy+1-x^3y^3\right)\cdot dy=0$ ile verilen diferansiyel denklemin genel çözümünü hesaplayınız.

Çözüm: $M(x,y)=y\cdot f_1(x\cdot y)$ → $M(x,y)=y\cdot(2xy+1)$ ve $N(x,y)=x\cdot(2xy+1-x^3y^3)$ $N(x,y)=x\cdot f_2(x,y)$ ve $(2xy+1)\neq(2xy+1-x^3y^3)$ → $f_1(x,y)\neq f_2(x,y)$ şartı sağlandığından dolayı integrasyon çarpanı, $\mu=\dfrac{1}{x\cdot M-y\cdot N}$ şeklinde alınabilir. Buradan,

$$\mu=\frac{1}{x\cdot M-y\cdot N}=\frac{1}{x\cdot(2xy^2+y)-y\cdot(x+2x^2y-x^4y^3)}\to\mu=\frac{1}{2x^2y^2+xy-xy-2x^2y^2+x^4y^4}\to\mu=\frac{1}{x^4y^4}$$

olduğu görülür. Bu ifade verilen diferansiyel denklem ile çarpıldığında,

$$\frac{1}{x^4y^4}\cdot y\cdot(2xy+1)dx+\frac{1}{x^4y^4}\cdot x\cdot(2xy+1-x^3y^3)=0\to\frac{1}{x^4y^3}\cdot(2xy+1)dx+\frac{1}{x^3y^4}\cdot(2xy+1-x^3y^3)=0$$

veya,

$$\left(\frac{2xy}{x^4y^3}+\frac{1}{x^4y^3}\right)dx+\frac{1}{x^3y^4}\cdot\left(\frac{2xy}{x^3y^4}+\frac{1}{x^3y^4}-\frac{x^3y^3}{x^3y^4}\right)dy=0\to\left(\frac{2}{x^3y^2}+\frac{1}{x^4y^3}\right)dx+\left(\frac{2}{x^2y^3}+\frac{1}{x^3y^4}-\frac{1}{y}\right)dy=0$$

elde edilir.

$$f(x,y)=\int\left(\frac{2}{x^3y^2}+\frac{1}{x^4y^3}\right)dx+g(y)\to\qquad f(x,y)=-\frac{1}{x^2y^2}-\frac{1}{3(x^3y^3)}+g(y)\to\qquad\frac{\partial f}{\partial y}=N$$

$$f(x,y)=\frac{1}{x^2y^2}-\frac{1}{x^3y^3}-\ln(y)=C$$

10.6 $M(x,y)\cdot dx+N(x,y)\cdot dy=0$ **diferansiyel denkleminde** $\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)$ **ifadesi** $\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)=N\cdot a(x)-M\cdot b(y)$ **şeklinde ifade edilebiliyor ise, integrasyon çarpanı** $\mu=e^{-\int a(x)dx}\cdot e^{-\int b(y)dy}$ **şeklindedir.**

Aşağıda verilen diferansiyel denklem bu türdendir.

10.6.1 Misal:

$x(x+2y-1)dy-y(2x+y+1)dx=0$ şeklinde verilen diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $x(x+2y-1)dy-y(2x+y+1)dx=0$ → $\dfrac{\partial M}{\partial y}=-2x-2y-1,\ \dfrac{\partial N}{\partial x}=2x+2y-1$

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=2x+2y-1-(-2x-2y-1)\to\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=4x+4y=4(x+y)\to a(x)=\frac{4}{3x}\text{ ve}$$

$$b(y)=\frac{4}{3y}\to\mu=e^{-\int a(x)dx}\cdot e^{-\int b(y)dy}\to\mu=e^{-\frac{4}{3}\ln(x)}\cdot e^{-\frac{4}{3}\ln(y)}\to\mu=(xy)^{-\frac{4}{3}}$$

$(xy)^{-\frac{4}{3}} \cdot x(x+2y-1)dy-(xy)^{-\frac{4}{3}} \cdot y(2x+y+1)dx=0$ denklemi tam diferansiyeldir. Çözümü tam diferansiyel denklem gibidir.

10.6.2 Misal:

$M(x,y)\cdot dx+\left(\sec^2(y)-\dfrac{x}{y}\right)\cdot dy=0$ diferansiyel denkleminin tam diferansiyel olması için $M(x,y)$ ifadesini hesaplayınız. Çözüm: tam diferansiyel olması için $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ olmalıdır. Denklemde $N(x,y)$ bilindiğinden çözüme buradan başlamalıdır.

$$N(x,y)=\frac{1}{\cos^2(y)}-\frac{x}{y} \quad \to \quad \frac{\partial N}{\partial x}\left(\frac{1}{\cos^2(y)}-\frac{x}{y}\right)=-\frac{1}{y} \quad \to \quad \frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{1}{y}$$

$$f(x,y)=\int N(x,y)\cdot dy+g(x) \quad \to \quad f(x,y)=\int\left(\frac{1}{\cos^2(y)}-\frac{x}{y}\right)dy+g(x)$$

$f(x,y)=\dfrac{\sin(y)}{\cos(y)}-x\ln(y)+g(x)$ olduğu görülür. Ayrıca $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$ olduğundan;

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N(x,y)=\frac{1}{\cos^2(y)}-\frac{x}{y} \quad \to \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\sin(y)}{\cos(y)}+\int M(x,y)dx\right]$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=1+\frac{\sin^2(y)}{\cos^2(y)}+\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right] \quad \to \quad \frac{1}{\cos^2(y)}-\frac{x}{y}=1+\frac{\sin^2(y)}{\cos^2(y)}+\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right]=\frac{1}{\cos^2(y)}-\frac{x}{y}-1-\frac{\sin^2(y)}{\cos^2(y)} \quad \to \quad \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right]=\frac{1}{\cos^2(y)}-\frac{x}{y}-1-\frac{\sin^2(y)}{\cos^2(y)}$$

$\int M(x,y)dx=\dfrac{\sin(y)}{\cos(y)}-x\ln(y)-\tan(y) \quad \to \quad M(x,y)=-\ln(y)$ olur. Buradan $f(x,y)$ fonksiyonunun, $f(x,y)=\dfrac{\sin(y)}{\cos(y)}-x\cdot\ln(y)=c$ olduğu görülür. Sağlaması yapılabilir.

$df(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot dy=0$ olmalıdır.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\sin(y)}{\cos(y)}-x\cdot\ln(y)\right] \quad \to \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=-\ln(y) \quad \to \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{1}{\cos^2(y)}-\frac{x}{y}$$

Diferansiyel denklem; $-\ln(y)\cdot dx+\left(\dfrac{1}{\cos^2(y)}-\dfrac{x}{y}\right)\cdot dy=0$ şeklindedir.

= =

$x \cdot M - y \cdot N = 0$ şartı sağlanıyorsa integrasyon çarpanı $\mu = \dfrac{1}{x \cdot y}$ alınabilir. İspatı aşağıdadır.

$$\frac{1}{\mu} \cdot \left(N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \quad \rightarrow \quad xy \cdot \left(\frac{1}{xy^2} M - \frac{1}{x^2 y} N \right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\left(\frac{1}{y} M - \frac{1}{x} N \right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \frac{\overbrace{xM - yN}^{=0}}{xy} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \quad \rightarrow \quad 0 = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

11. Lineer Diferansiyel Denklem Sistemleri (Linear Differential Equation Systems)

Bazen birden fazla birinci mertebeden denklem sistemleri birbiri içerisinde denklem sistemi şeklinde verilebilir. x ve y, t nin fonksiyonu olmak üzere iki denklem verilsin

$$\begin{aligned} &\frac{d \cdot x}{dt} + a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = 0 \\ &\frac{d \cdot y}{dt} + a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad D = \frac{d}{dt} \text{ alındığında} \rightarrow \frac{d \cdot x}{dt} \rightarrow \quad \begin{aligned} &D \cdot x + a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = 0 \\ &D \cdot y + a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(D + a_{11}) \cdot x + a_{12} \cdot y = 0 \\ &a_{21} \cdot x + (D + a_{22}) \cdot y = 0 \end{aligned} \quad \rightarrow$$ Bu denklemler matris halinde yazıldığında;

$$\begin{bmatrix} (D + a_{11}) & a_{12} \\ a_{21} & (D + a_{22}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow$$ elde edilir. Bu denklemde x ve y değerleri her zaman sıfır olmayacağından dolayı, matrisin determinantı sıfıra eşit olmalıdır.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (D + a_{11}) & a_{12} \\ a_{21} & (D + a_{22}) \end{bmatrix}}_{=0} \underbrace{\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}}_{\neq 0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} (D + a_{11}) & a_{12} \\ a_{21} & (D + a_{22}) \end{vmatrix} = 0$$

$(D + a_{11}) \cdot (D + a_{22}) - a_{21} \cdot a_{12} = 0 \quad \rightarrow$ Buradan elde edilen kök değerleri ile çözüm elde edilir.

$D^2 + a_{11} \cdot D + a_{22} \cdot D + a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} = 0 \quad \rightarrow \quad D^2 + (a_{11} + a_{22}) \cdot D + (a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}) = 0$ Bu karakteristik denklemin köklerinden genel çözüm elde edililir. Fakat $x_h = c_1 \cdot e^{r_1 \cdot t} + c_2 \cdot e^{r_2 \cdot t}$ ve $y_h = c_3 \cdot e^{r_1 \cdot t} + c_4 \cdot e^{r_2 \cdot t}$ olacağından 4 adet keyfi sabit olur. Bunlardan 2 tanesi diğerinin cinsinden yazılarak sadeleştirilir ve sadece 2 adet keyfi sabit kalır. Aynı çözümler matris özelliklerinden faydalanılarak da yapılabilir. Bu denklem sistemlerinin anlaşılması için aşağıda misaller verilmiştir.

11.1 Misal:

$$\frac{dx}{dt}-3\cdot x-6\cdot y=0 \qquad (1)$$
$$\frac{dy}{dt}+3\cdot x+3\cdot y=0 \qquad (2)$$

olarak verilen diferansiyel denklem sisteminin genel çözümünü elde ediniz. Çözüm: $D\equiv\frac{d}{dt}$ operatörü kullanarak (1) ve (2) denklemi tekrar yazıldığında;

$(D-3)\cdot x-6\cdot y=0$ (3) ve $3\cdot x+(D+3)\cdot y=0$ (4) şekli elde edilir. Bu iki denklem matris şeklinde yazıldığında;

$$\begin{bmatrix}(D-3) & -6\\ 3 & (D+3)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x\\ y\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \qquad (5)$$

halini alır katsayılar matrisinin determinant sıfıra eşitlendiğinde;

$\phi(D)=\begin{bmatrix}(D-3) & -6\\ 3 & (D+3)\end{bmatrix}=0$ (6) → $(D-3)\cdot(D+3)-(-18)=0$ → $D^2+9=0$ Buradan Karakteristik denklemin köklerinin, $r_{1,2}=\pm 3\cdot i$ olur. Buradan homojen kısmın çözümü önceki bölümlerde verildiği gibi (tamamlayıcı çözüm) denklemin köklerinden dolayı;

$x_h=c_1\cdot e^{r_1\cdot t}+c_2\cdot e^{r_2\cdot t}$ ve $y_h=c_3\cdot e^{r_1\cdot t}+c_4\cdot e^{r_2\cdot t}$ şeklinde yazılmalıdır. Böylece;

$x_h=c_1\cdot\cos(3\cdot t)+c_2\cdot\sin(3\cdot t)$ (7) ve $y_h=c_3\cdot\cos(3\cdot t)+c_4\cdot\sin(3\cdot t)$ (8) olur.

Buradan görüldüğü gibi 4 adet farklı keyfi sabit gelmektedir. Halbuki $\phi(D)$ determinantı $(2x2)$ boyutunda olduğundan sadece 2 adet katsayı bulunmalıdır. Bundan dolayı c_3 ve c_4 katsayıları c_1 ve c_2 cinsinden ifade edilmelidir. Bu amaçla $\boxed{x_h=c_1\cdot\cos(3\cdot t)+c_2\cdot\sin(3\cdot t)}$ ve $y_h=c_3\cdot\cos(3\cdot t)+c_4\cdot\sin(3\cdot t)$ ile verilen çözümler ilk verilen (1) veya (2) denkleminde yerine yazılıdığında çözüm elde edilir. Burada ilk olarak (1) denkleminde yerine yazıldı.

$$\frac{dx_h}{dt}-3\cdot x_h-6\cdot y_h=0$$

$$\left[-3c_1\cdot\sin(3\cdot t)+3c_2\cdot\cos(3\cdot t)\right]-3\cdot\left[c_1\cdot\cos(3\cdot t)+c_2\cdot\sin(3\cdot t)\right]-6\cdot\left[c_3\cdot\cos(3\cdot t)+c_4\cdot\sin(3\cdot t)\right]=0$$

$[-3\cdot c_1-3\cdot c_2-6\cdot c_4]\cdot\cancel{\sin(3\cdot t)}=0$ ve $[3\cdot c_2-3\cdot c_1-6\cdot c_3]\cdot\cancel{\cos(3\cdot t)}=0$ olur. Veya,

$-c_1-c_2-2\cdot c_4=0$ ve $c_2-c_1-2\cdot c_3=0$ olur. Buradan c_3 ve c_4 yerine; $\boxed{c_3=\frac{c_2-c_1}{2}}$ $\boxed{c_4=\frac{-(c_1+c_2)}{2}}$ yazılmalıdır. Böylece $y_h=c_3\cdot\cos(3\cdot t)+c_4\cdot\sin(3\cdot t)$ yerine;

$y_h = \dfrac{c_2 - c_1}{2} \cdot \cos(3 \cdot t) - \dfrac{(c_1 + c_2)}{2} \cdot \sin(3 \cdot t)$ olur. Aynı çözüm (2) denkleminde yerine yazılmasıyla da elde edilebilir. $\dfrac{dy_h}{dt} + 3 \cdot x_h + 3 \cdot y_h = 0$

$$\left[-3 \cdot c_3 \cdot \sin(3 \cdot t) + 3 \cdot c_4 \cdot \cos(3 \cdot t)\right] + 3 \cdot \left[c_1 \cdot \cos(3 \cdot t) + c_2 \cdot \sin(3 \cdot t)\right] + 3 \cdot \left[c_3 \cdot \cos(3 \cdot t) + c_4 \cdot \sin(3 \cdot t)\right] = 0$$

$\left[-3 \cdot c_3 + 3 \cdot c_2 + 3 \cdot c_4\right] \cdot \cancel{\sin(3 \cdot t)} = 0$ ve $\left[3 \cdot c_4 + 3 \cdot c_1 + 3 \cdot c_3\right] \cdot \cancel{\cos(3 \cdot t)} = 0$ olur. Veya,

$-c_3 + c_2 + c_4 = 0$ ve $c_4 + c_1 + c_3 = 0$ olur. $\begin{matrix} c_3 - c_4 = c_2 \\ c_3 + c_4 = -c_1 \end{matrix}$ $\rightarrow$ $2 \cdot c_3 = c_2 - c_1$ $\rightarrow$ $\boxed{c_3 = \dfrac{c_2 - c_1}{2}}$

$\begin{matrix} c_3 - c_4 = c_2 \\ -c_3 - c_4 = c_1 \end{matrix}$ $\rightarrow$ $-2 \cdot c_4 = c_1 + c_2$ $\rightarrow$ $\boxed{c_4 = \dfrac{-(c_1 + c_2)}{2}}$

Görüldüğü gibi hangi denklem seçilirse seçilsin, sonuç değişmemektedir. Bu değerler $y_h = c_3 \cdot \cos(3 \cdot t) + c_4 \cdot \sin(3 \cdot t)$ denkleminde yerine yazıldığında aynı sonuçlar elde edilmektedir. Yani,

$\boxed{y_h = \dfrac{c_2 - c_1}{2} \cdot \cos(3 \cdot t) - \dfrac{(c_1 + c_2)}{2} \cdot \sin(3 \cdot t)}$ olur.

11.2 Misal:

Denklem 11.1 de verilen

$$\begin{matrix} \dfrac{dx}{dt} - 3 \cdot x - 6 \cdot y = 0 & (1) \\ 3 \cdot x + \dfrac{dy}{dt} + 3 \cdot y = 18 \cdot t \cdot e^{-3 \cdot t} & (2) \end{matrix}$$

sistemin sağ tarafı sıfırdan farklı olduğunda çözümünü hesaplayınız. Bunun anlaşılması için "Cramer Kuralı" nı aşağıda n adet cebirsel denklem verildiğinde

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \dots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \dots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & \dots & +a_{nn}x_n & = & b_n \end{matrix}$$

Çözümü; $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ ile elde edilmektedir. Burada $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ ile tanımlanan katsayılar determinantıdır. Diğer $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ ise aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & \underset{i.kolon}{b_n} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ Böylece çözüm kolaylıkla elde edilir.

Bu özellik $\begin{bmatrix} (D-3) & -6 \\ 3 & (D+3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 18 \cdot t \cdot e^{-3 \cdot t} \end{Bmatrix}$ denklem takımında uygulandığında;

$$\Delta = \begin{bmatrix} (D-3) & -6 \\ 3 & (D+3) \end{bmatrix} \qquad \Delta_x(t) = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 18 \cdot t \cdot e^{-3 \cdot t} & (D+3) \end{bmatrix} \rightarrow \quad \Delta_x(t) = 108 \cdot t \cdot e^{-3 \cdot t}$$

$$x(t) = \frac{\Delta_x(t)}{\Delta} \rightarrow \quad x = \frac{108 \cdot t \cdot e^{-3 \cdot t}}{D^2 + 9} \quad \rightarrow \quad (D^2 + 9) \cdot x = 108 \cdot t \cdot e^{-3 \cdot t}$$

$(D^2 + 9) \cdot x = 0$ yazılarak homojen kısım elde edilir. Bu kısım daha önce hesaplanmıştı.

$$\boxed{x_h = c_1 \cdot \cos(3 \cdot t) + c_2 \cdot \sin(3 \cdot t)}$$

"Parametrelerin değişimi metodu" (Bakınız: 13.2) kullanıldığında tamamlayıcı kısım elde edilir.

$$\boxed{x_p = v_1 \cdot \cos(3 \cdot t) + v_2 \cdot \sin(3 \cdot t)}$$

$$\begin{aligned} & v_1' \cdot [\cos(3 \cdot t)] + v_2' \cdot [\sin(3 \cdot t)] = 0 \\ & v_1' \cdot [-3 \cdot \sin(3 \cdot t)] + v_2' \cdot [3 \cdot \cos(3 \cdot t)] = 108 \cdot t \cdot e^{-3 \cdot t} \end{aligned} \rightarrow \begin{Bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(3 \cdot t) & \sin(3 \cdot t) \\ -3 \cdot \sin(3 \cdot t) & 3 \cdot \cos(3 \cdot t) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 108 \cdot t \cdot e^{-3 \cdot t} \end{Bmatrix}$$

$\begin{Bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -36 \cdot \sin(3 \cdot t) \cdot t \cdot e^{-3t} \\ 36 \cdot \cos(3 \cdot t) \cdot t \cdot e^{-3t} \end{Bmatrix}$ olur. Bu ifadelerin integralinin alınmasıyla;

$$v_1 = -36 \cdot \left(-\frac{1}{6} t - \frac{1}{18} \right) \cdot e^{-3 \cdot t} \cdot \cos(3 \cdot t) + 6 \cdot \sin(3 \cdot t) t e^{-3 \cdot t}$$

$v_2 = -6 \cdot \cos(3 \cdot t) \cdot t \cdot e^{-3 \cdot t} - 36 \cdot \left(-\frac{1}{6} t - \frac{1}{18} \right) \cdot e^{-3 \cdot t} \cdot \sin(3 \cdot t)$ olur. $\boxed{x_p = v_1 \cdot \cos(3 \cdot t) + v_2 \cdot \sin(3 \cdot t)}$ den dolayı

$$\begin{aligned} x_p = & \left[-36 \cdot \left(-\frac{1}{6} t - \frac{1}{18} \right) \cdot e^{-3 \cdot t} \cdot \cos(3 \cdot t) + 6 \cdot \sin(3 \cdot t) t e^{-3 \cdot t} \right] \cdot \cos(3 \cdot t) \\ & + \left[-6 \cdot \cos(3 \cdot t) \cdot t \cdot e^{-3 \cdot t} - 36 \cdot \left(-\frac{1}{6} t - \frac{1}{18} \right) \cdot e^{-3 \cdot t} \cdot \sin(3 \cdot t) \right] \cdot \sin(3 \cdot t) \end{aligned}$$ olur

Burada ifadelerin sadeleştirilmesiyle;

$x_p = 2 \cdot e^{-3 \cdot t} \cdot (3 \cdot t + 1)$ olduğu görülür. Genel çözüm $x = x_h + x_p$ şeklinde olduğundan;

$\boxed{x = c_1 \cdot \cos(3\cdot t) + c_2 \cdot \sin(3\cdot t) + 2\cdot e^{-3\cdot t}\cdot(3\cdot t+1)}$ şeklinde elde edilir.

Benzer işlemler y için de uygulandığında y nin genel çözümü bulunur.

$$\Delta_y(t) = \begin{bmatrix} (D-3) & 0 \\ 3 & 18\cdot t\cdot e^{-3\cdot t} \end{bmatrix} \rightarrow \Delta_y(t) = (D-3)\cdot\left(18\cdot t\cdot e^{-3\cdot t}\right) \qquad \Delta_y(t) = \frac{d}{dt}\left[18\cdot t\cdot e^{-3\cdot t}\right] - 3\cdot\left(18\cdot t\cdot e^{-3\cdot t}\right)$$

$$\Delta_y(t) = 18\cdot e^{-3\cdot t} - 108\cdot t\cdot e^{-3\cdot t}$$

$$y(t) = \frac{\Delta_y(t)}{\Delta} \rightarrow \qquad y = \frac{18\cdot e^{-3\cdot t} - 108\cdot t\cdot e^{-3\cdot t}}{D^2+9} \qquad \rightarrow \qquad \left(D^2+9\right)\cdot y = 18\cdot e^{-3\cdot t} - 108\cdot t\cdot e^{-3\cdot t}$$

$$\left(D^2+9\right)\cdot y = 0 \qquad \rightarrow \qquad y_h = c_3\cdot\cos(3\cdot t) - c_4\cdot\sin(3\cdot t)$$

$$\boxed{y_p = v_3\cdot\cos(3\cdot t) + v_4\cdot\sin(3\cdot t)} \rightarrow \begin{array}{l} v_3'\cdot\left[\cos(3\cdot t)\right] + v_4'\cdot\left[\sin(3\cdot t)\right] = 0 \\ v_3'\cdot\left[-3\cdot\sin(3\cdot t)\right] + v_4'\cdot\left[3\cdot\cos(3\cdot t)\right] = 18\cdot e^{-3\cdot t} - 108\cdot t\cdot e^{-3\cdot t} \end{array}$$

$$\begin{Bmatrix} v_3' \\ v_4' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(3\cdot t) & \sin(3\cdot t) \\ -3\cdot\sin(3\cdot t) & 3\cdot\cos(3\cdot t) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 18\cdot e^{-3\cdot t} - 108\cdot t\cdot e^{-3\cdot t} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} v_3' \\ v_4' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6\cdot e^{-3t}(-1+6\cdot t)\cdot\sin(3\cdot t) \\ -6\cdot e^{-3t}(-1+6\cdot t)\cdot\cos(3\cdot t) \end{Bmatrix}$$ olur. Bu ifadelerin integralinin alınmasıyla;

$$v_3 = 6\cdot\left(-\frac{1}{6}-t\right)e^{-3\cdot t}\cos(3\cdot t) + 6\cdot\left(\frac{1}{6}-t\right)\cdot e^{-3\cdot t}\sin(3\cdot t)$$

$v_4 = -6\cdot\left(\frac{1}{6}-t\right)e^{-3\cdot t}\cos(3\cdot t) + 6\cdot\left(-\frac{1}{6}-t\right)\cdot e^{-3\cdot t}\sin(3\cdot t)$ olur. $\boxed{y_p = v_3\cdot\cos(3\cdot t) + v_4\cdot\sin(3\cdot t)}$ den dolayı

$$\begin{aligned} y_p = &\left[6\cdot\left(-\frac{1}{6}-t\right)e^{-3\cdot t}\cos(3\cdot t) + 6\cdot\left(\frac{1}{6}-t\right)\cdot e^{-3\cdot t}\sin(3\cdot t)\right]\cdot\cos(3\cdot t) \\ &+\left[-6\cdot\left(\frac{1}{6}-t\right)e^{-3\cdot t}\cos(3\cdot t) + 6\cdot\left(-\frac{1}{6}-t\right)\cdot e^{-3\cdot t}\sin(3\cdot t)\right]\cdot\sin(3\cdot t) \end{aligned}$$ olur

Burada da ifadelerin sadeleştirilmesiyle;

$y_p = -e^{-3\cdot t}(1+6\cdot t)$ olduğu görülür. Genel çözüm $y = y_h + y_p$ şeklinde olduğundan;

$\boxed{y = c_3\cdot\cos(3\cdot t) + c_4\cdot\sin(3\cdot t) - e^{-3\cdot t}(1+6\cdot t)}$ şeklinde elde edilir. c_3 ve c_4 keyfi sabitlerinin yok edilmesi için soruda verilen (1) veya (2) denkleminin kullanılmasıyla yok edilir.

$\boxed{y = \frac{c_2-c_1}{2}\cdot\cos(3\cdot t) - \frac{(c_1+c_2)}{2}\cdot\sin(3\cdot t) - e^{-3\cdot t}(1+6\cdot t)}$ genel çözümdür.

11.3 Misal:

$$\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}=2\cdot x-3\cdot y \qquad (1)$$
$$2\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=4\cdot x+3\cdot y \qquad (2)$$
$$\rightarrow \quad \begin{aligned}&(D\cdot x-D\cdot y)-2\cdot x-3\cdot y=0\\&(2\cdot D\cdot x+D\cdot y)-4\cdot x-3\cdot y=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(D\cdot x-D\cdot y)-2\cdot x-3\cdot y=0\\&(2\cdot D\cdot x+D\cdot y)-4\cdot x-3\cdot y=0\end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{dx}{dt}\\ \frac{dy}{dt}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 4 & 3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x\\ y\end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{dx}{dt}\\ \frac{dy}{dt}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2 & -3\\ 4 & 3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x\\ y\end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix}\frac{dx}{dt}\\ \frac{dy}{dt}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\ 4 & 3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x\\ y\end{Bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{Bmatrix}x\\ y\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x\\ y\end{Bmatrix} \rightarrow \quad \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}^{-1}\frac{d}{dt}\begin{Bmatrix}x\\ y\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x\\ y\end{Bmatrix} \quad \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\frac{d}{dt}\begin{Bmatrix}x\\ y\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}x\\ y\end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{dx}{dt}=x\\&\frac{1}{3}\frac{dy}{dt}=y\end{aligned} \rightarrow \begin{aligned}&\frac{dx}{dt}-2x=0\\&\frac{dy}{dt}-3y=0\end{aligned} \rightarrow \begin{aligned}&r-2=0\\&r-3=0\end{aligned} \rightarrow \begin{aligned}&x=c_1e^{2t}\\&y=c_2e^{3t}\end{aligned}$$

Bu neviden denklemlerin çözümü başlangıç veya sınır koşulları verildiği takdirde, sayısal olarak da yapılabilmektedir. Sayısal çözümler her türden diferansiyel denkleme uygulanabilir. Fakat her sayısal denklem, hepsini çözemez. Birçoğu sadece başlangıç değer problemlerini çözebilmektedir (Euler metodu gibi). Sınır değer problemini çözenler daha da önem kazanmaktadır.

11.4 Misal:

Diğer önemli bir misal de, aynı adada yaşayan kurt-tavşan hikâyesidir.

Tavşan ve kurtların, herhangi bir t anındaki sayısı sırasıyla, r ve f ile ifade edilsin. Diferansiyel denklemi kurmak için aşağıdaki kabuller yapılacaktır.

1 Kurtların yokluğunda tavşanların zamana bağlı artma miktarı, mevcut tavşan sayısıyla orantılıdır. Bu durum: $\frac{dr}{dt}=a\cdot r, \quad (a>0 \;\; f=0 \text{ iken})$

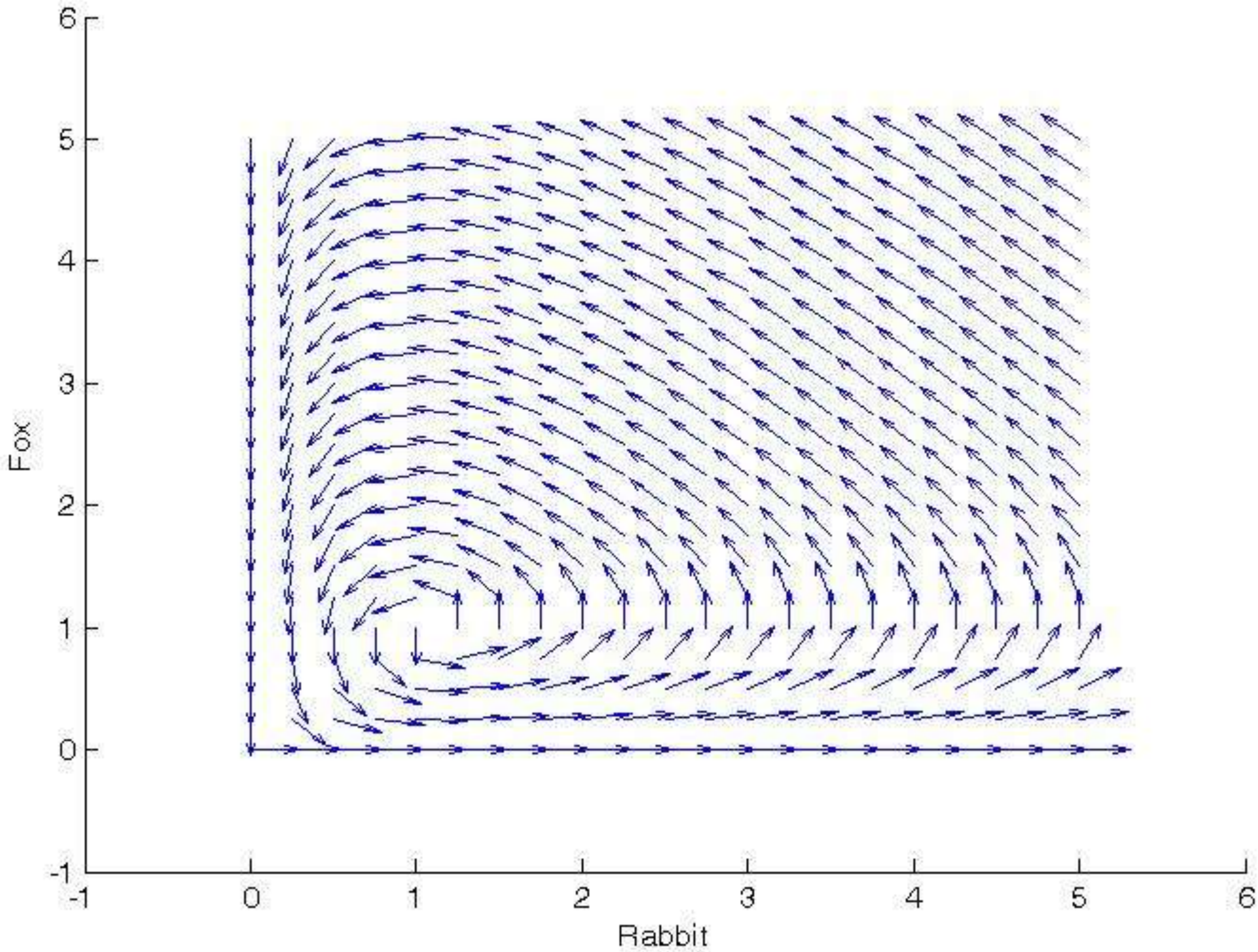
2 Tavşanların yokluğunda kurtların ölüp azalıp kaybolup gidecektir. Bunu da $\frac{df}{dt}=-b\cdot f, \quad (b>0 \;\; r=0 \text{ iken})$ şeklinde diferansiyel denklem ile ifade edebiliriz.

3 Kurt ve tavşanların karşılaşma sayısı, $(r \cdot f)$ çarpımı ile doğru orantılıdır. Böylece Kurtların gelişme miktarı $\left[c \cdot (r \cdot f)\right]$ şeklinde ifade edilir iken tavşanların azalma miktarı $\left[-d \cdot (r \cdot f)\right]$ ile ifade edilir. Buradaki c ve d pozitif sabitlerdir.

Bu kabuller doğrultusunda;

$$\frac{df}{dt} = -b \cdot f + d \cdot r \cdot f = f \cdot (-b + d \cdot r)$$
$$\frac{dr}{dt} = a \cdot r - c \cdot r \cdot f = r \cdot (a - c \cdot f)$$

Buradaki katsayılara bağlı olarak r ve f nin zamana bağlı grafiği de değişmektedir. Herhangi bir r ve f değerine karşılık, faz diyagramı çizilebilir. Çünkü;



Şekil 1: Tavşan-Kurt diyagramı

$$\frac{\frac{df}{dt}}{\frac{dr}{dt}} = \frac{df}{\cancel{dt}} \cdot \frac{\cancel{dt}}{dr} = \frac{df}{dr} = \frac{-b \cdot f + d \cdot r \cdot f}{a \cdot r - c \cdot r \cdot f}$$

Bunu sayısal değerlerle daha iyi görebiliriz.

$a = 1.0$, $b = 1.0$, $c = 1.0$ ve $d = 0.9$ alındığında, $(0 \le r \le 5)$ ve $(0 \le f \le 5)$ bölgesinde r ve f ye bağlı olarak $\frac{df}{dr}$ oranı her noktada hesaplanabilir. Bu durum aşağıda belirtilmiştir.

$$\frac{df}{dr}=\frac{-b\cdot f+d\cdot r\cdot f}{a\cdot r-c\cdot r\cdot f}=\frac{f\cdot(-b+d\cdot r)}{r\cdot(a-c\cdot f)} \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dr}=\frac{f\cdot(-1+0.9\cdot r)}{r\cdot(1.0-1.0\cdot f)}$$ elde edilir.

Tavşan-Kurt değişim diyagramı Şekil 1 de verilmiştir. Bu grafiğin elde edilişi yukarıdaki denklemde sayısal değerler kullanılarak hesaplanmıştır. (a, b, c ve d) değerlerine bağlı olarak çok değişik grafikler elde edilmektedir.

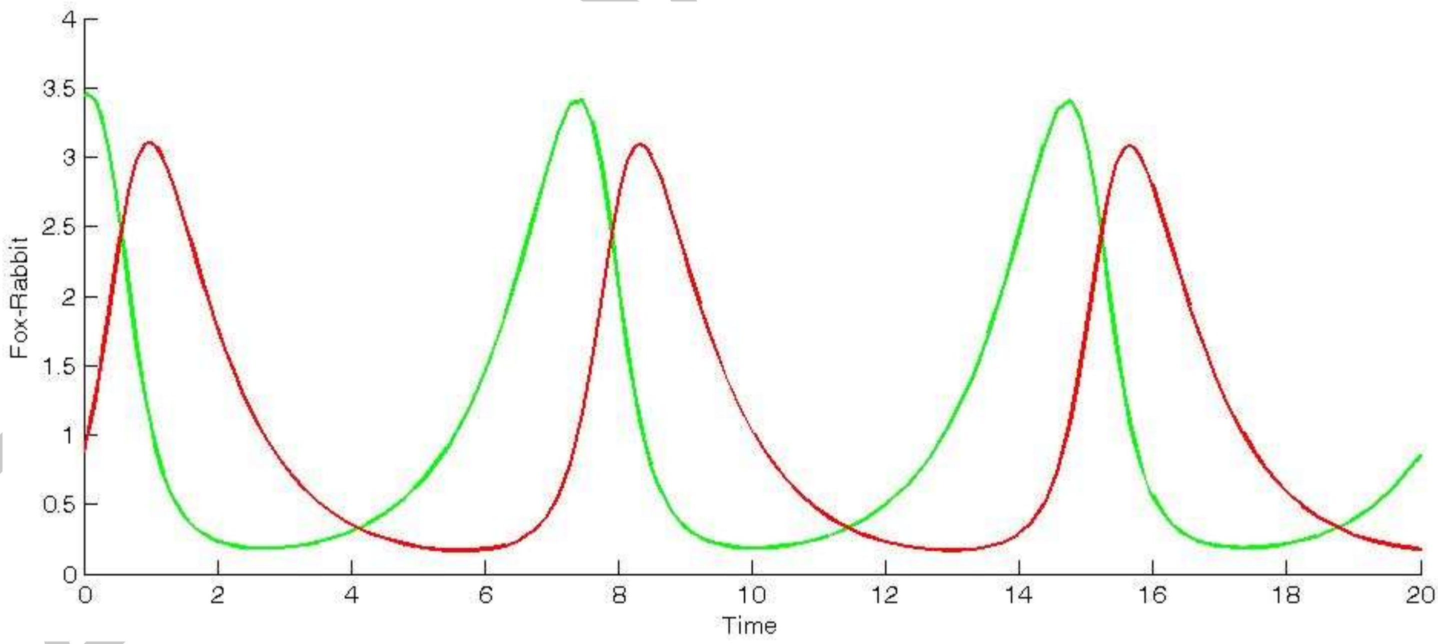
Runga-kutta gibi sayısal metotlar kullanılarak Tavşan ve Kurtların zamana göre değişimi de aşağıda verilmiştir.(Matlab ile yazılan "rabbit_fox.m" dosyası ile sonuçlar hesaplandı.)

The Lotka–Volterra predator–prey modeli ilk olarak Alfred J. Lotka tarafından 1910 yılında ortaya atıldı.

a = 0.04, b = 0.0005, c = 0.2, d = 0.00005 değerleri ve r=1.1, f=0.98 için farklı grafikler elde edildi.

Kritik değer $\frac{dr}{dt}=\frac{df}{dt}=0$ olan nokta koordinatı $(r,f)=\left[\frac{c}{d},\frac{a}{b}\right]$ olan noktadır. Bu nokta başlangıç değeri olarak alındığı takdirde kurt ve tavşanların zamana göre değişim grafiği eğimi olmayan sabit bir çizgidir.

Şekil 2 de r=3.44 ve f=0.88 başlangıç değerleri için t=20 ye kadar grafiği çizildi.



Şekil 2: Tavşan ve Kurt sayısının zamana göre değişimi

Birinci mertebeden diferansiyel denklemler başlangıç değer problemi (**I**nitial **V**alue **P**roblem, **IVP**) olduğu takdirde, en basit olan tanjant çizgi metodu (tangent line method) veya ***Euler metodu*** (1768 yılında ilk olarak Euler tarafından ortaya atıldığı için)ile sayısal çözümü de yapılabilir. Basit olarak $y = m \cdot x + n$ doğru denkleminden faydalanarak yapılan çözüm gibi de algılanabilir. Bir fonksiyonun bir noktadaki değeri ve bu noktadaki eğimi (1. metreden türevi bilindiği takdirde, bu noktadan küçük bir h kadar uzaktaki diğer noktanın değeri;

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=i} \tag{9.1}$$

denklemi ile hesaplanabilir. Buna Euler metodu denir. Burada önemli olan adım büyüklüğünü (h=step size) küçük tutmak gerekir. x değeri arttıkça, hata miktarı da buna bağlı olarak artar

11.5 Misal:

$\frac{dy}{dt} = 3 + e^{-t} - \frac{1}{2} \cdot y, \quad y(0) = 1$ birinci mertebeden diferansiyel denklemin sayısal çözümünü t=0.4 e kadar h=0.1 aralıklarla Euler metodunu kullanarak hesaplayınız ve sonuçları analitik çözüm ile kıyaslayınız.

Çözüm: verilen denklemin analitik çözümü; $y(t) = 6 - 2e^{-t} - 3 \cdot e^{-\frac{t}{2}}$ şeklindedir. Euler formülü kullanıldığında; $y(0) = 1$ ve $h = 0.1$ bilinmektedir. $t = 0$ için fonksiyonun türevi hesaplandığında;

$$\frac{dy}{dt} = 3 + e^{-t} - \frac{1}{2} \cdot y \quad \rightarrow \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 3 + e^{-0} - \frac{1}{2} \cdot (1) \quad \rightarrow \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 3.5$$

olduğu görülür. Bu değerler Euler formülünde yerine yazıldığında;

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=i} \quad \rightarrow \quad y(0.1) = y(0) + 0.1 \cdot \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} \quad \rightarrow \quad y(0.1) = 1 + (0.1) \cdot (3.5)$$

$y(0.1) = 1.35$ olarak elde edilir. ikinci adımda $y(0.1) = 1.35$ alınır ve türevi için

$$\frac{dy}{dt} = 3 + e^{-t} - \frac{1}{2} \cdot y \quad \rightarrow \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0.1} = 3 + e^{-0.1} - \frac{1}{2} \cdot y(0.1) \rightarrow \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0.1} = 3 + e^{-0.1} - \frac{1}{2} \cdot (1.35)$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0.1} = 3 + e^{-0.1} - \frac{1}{2} \cdot (1.35) = 3.4048 \quad \rightarrow \quad y(0.2) = y(0.1) + 0.1 \cdot \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0.1}$$

$$y(0.2) = (1.35) + (0.1) \cdot (3.4048) \quad \rightarrow \quad y(0.2) = 1.3405$$

olarak elde edilir. Bu işlemler bilgisayar programı yardımı ile kolayca hesaplananilir.

Yine bir sayısal çözüm tekniği olan, Diferansiyel Quadrature Metodu ile aynı problem çözüldü. Sonuçların daha hassas olarak elde edildiği görüldü.

Bu metodun avantajı, her türden diferansiyel denkleme uygulanabilmesidir. Sınır değer veya başlangıç değer problemi olması fark etmez. Ayrıca diferansiyel denklemin adi diferansiyel veya doğrusal olmayan olması da çözümü etkilemez. Sadece doğrusal olmayanlarda tekrar (iterasyon) sayısının artmasından dolayı hesaplama süresi artar.

Kısmî diferansiyel denklemlere de kolaylıkla uygulanabilmektedir. Fakat bunlarda boyut sayısı arttığından dolayı hesaplama süresi de bunun orantılı olarak artmaktadır.

Matlab lisanında yazılan "euler.m" dosyası, Euler metodu ile yapılan çözüme bir misaldir.

Tablo 2: Euler metodu ile sayısal çözüm

		Euler Metodu ile Çözüm		
t	Gerçek Çözüm	h=0.1	h=0.01	h=0.0000001
0	1	1.0000000	1.00000000	1.00000000
0.1	1.33663689	1.3500000	1.33792643	1.33663690
0.2	1.64802624	1.6729837	1.65043617	1.64802626
0.3	1.93623963	1.97120763	1.93961834	1.93623966
0.4	2.20316765	2.24672907	2.20737940	2.20316769
0.5	2.45053633	2.50142462	2.45545969	2.45053638

Yine matlab lisanında yazılan "ode_dqm.m" dosyası, Diferansiyel Quadrature Metodu ile yapılan çözüme bir misaldir.

Görüldüğü gibi t=0.5 için bile elde edilen sonuçlar oldukça yüksek uyumluluk göstermektedir.

Tablo 3: Diferansiyel Quadrature metodu ile sayısal çözüm

t	Diferansiyel Quadrature Metodu ile Çözüm		Gerçek Çözüm
	h=0.1	h=0.01	
0.0	1.0000000	1.00000000	1
0.1	1.33663639	1.33663639	1.33663689
0.2	1.64802580	1.64802624	1.64802624
0.3	1.93623920	1.93623963	1.93623963
0.4	2.20316725	2.20316765	2.20316765
0.5	2.45053592	2.45053633	2.45053633

Matlab dilinde yazılan "euler.m" programı aşağıda verilmiştir. Bu programdan faydalanarak başka problemler de çözülebilir.

```
%  Numerical Solution of Differential Equations by Using Euler Method
%  y(0) = y0 (given initial value)
```

```
%  h : Step size
%  ts: Last point to be calculated
% ========================================
clear all;
close all;
clc;
% ========================================
ts = 0.5;
h = 0.1;
if ( h > ts)
   sprintf('please enter correct value');
   pause;
   return;
end
t = (0:h:ts)';
n = size(t,1);
f = zeros(n,1);
g = zeros(n,1);
% ========================================
% Initial condition is imposed here
% ========================================
y = 1;
f(1) = y;
% ========================================
for i=1:n-1,
   dy = 3+exp(-t(i))-1/2*y;
   f(i+1) =y+h*dy;
   y=f(i+1);
end
for i=1:n,
   g(i) = 6-2*exp(-t(i))-3*exp(-t(i)/2);
end
for i=1:(1/h*0.1):n,
   display(sprintf('%8.4f %12.8f %12.8f',t(i),g(i),f(i)));
end
```

12. İkinci Mertebeden Homojen Diferansiyel Denklemler (Second Order Homogeneous Differential Equations)

Şimdiye kadar incelenen diferansiyel denklemler birinci mertebeden idi. Mühendislikteki birçok problem yüksek mertebendir. Hatta bir çoğu, 3. ve 4. merteben diferansiyel denklem ile ifade edilebilmektedir. Homojen diferansiyel denklemin daha genel hali **Cauchy-Euler** denklemidir ve aşağıdaki şekildedir.

$$a\cdot x^2\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+b\cdot x\cdot\frac{dy}{dx}+c\cdot y=0 \qquad (12.1)$$

Çözüm için; $y=e^{k\cdot x}$ değişken dönüşümü uygulanır. Bu durumda;

$y=e^{k\cdot x}$, $\frac{dy}{dx}=k\cdot e^{k\cdot x}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=k^2\cdot e^{k\cdot x}$ değerleri elde edilir. Buradan da; $\frac{dy}{dx}=k\cdot e^{k\cdot x}$ olur.

Bu değerler yukarıdaki denklemde yerine yazıldığında;

$$a\cdot x^2\cdot k^2\cdot e^{k\cdot x}+b\cdot x\cdot k\cdot e^{k\cdot x}+c\cdot e^{k\cdot x}=0 \rightarrow \left(a\cdot x^2\cdot k^2+b\cdot x\cdot k+c\right)\cdot \cancel{e^{k\cdot x}}=0$$

$$\left(a\cdot x^2\right)\cdot k^2+\left(b\cdot x\right)\cdot k+c=0 \rightarrow k_{1,2}=\frac{-b\cdot x\pm\sqrt{b^2\cdot x^2-4\cdot a\cdot x^2\cdot c}}{2\cdot a\cdot x^2} \rightarrow k_{1,2}=\frac{-b\cdot x\pm x\cdot\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a\cdot x^2}$$

$k_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a\cdot x}$ olarak elde edilir. Diğer bir dönüşüm için $y=x^k$ alınır. Buradan;

$y=x^k,\ \dfrac{dy}{dx}=k\cdot x^{k-1},\ \dfrac{d^2y}{dx^2}=k\cdot(k-1)\cdot x^{k-2}$ olur. Ayrıca;

$\dfrac{dy}{dx}=k\cdot x^{k-1} \rightarrow \dfrac{dy}{dx}=k\cdot x^k\cdot\dfrac{1}{x} \rightarrow x\cdot\dfrac{dy}{dx}=k\cdot x^k$ Benzer şekilde; $\dfrac{d^2y}{dx^2}=k\cdot(k-1)\cdot x^k\cdot\dfrac{1}{x^2}$

$x^2\cdot\dfrac{d^2y}{dx^2}=k\cdot(k-1)\cdot x^k$ olur. Bu değerler asıl denklemde yerine yazıldığında;

$$a\cdot k\cdot(k-1)\cdot x^k+b\cdot k\cdot x^k+c\cdot x^k=0$$

Bu değerler asıl denklemde yerine yazılıdığında;

$a\cdot k\cdot(k-1)\cdot\cancel{x^k}+b\cdot k\cdot\cancel{x^k}+c\cdot\cancel{x^k}=0 \rightarrow a\cdot k\cdot(k-1)+b\cdot k+c=0$ olur. Buradan k değerleri hesaplanır.

İki farklı gerçek kök olması durumunda y fonksiyonunun çözümü aşağıdaki gibidir.

$$y=c_1\cdot x^{k_1}+c_2\cdot x^{k_2} \qquad (12.2)$$

Köklerin tekrarlanması durumunda;

$y=u(x)\cdot x^\lambda$ dönüşümü uygulanır. $\dfrac{dy}{dx}=u\cdot\lambda\cdot x^{\lambda-1}+\dfrac{du}{dx}\cdot x^\lambda$ ve

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=u\cdot\lambda\cdot(\lambda-1)\cdot x^{\lambda-2}+\dfrac{du}{dx}\cdot\lambda\cdot x^{\lambda-1}+\dfrac{du}{dx}\cdot\lambda\cdot x^{\lambda-1}+\dfrac{d^2u}{dx^2}\cdot x^\lambda$ olur. Bu değerler (12.1) denkleminde yerine yazıldığında;

$$a\cdot x^2\cdot\left[u\cdot\lambda\cdot(\lambda-1)\cdot x^{\lambda-2}+\frac{du}{dx}\cdot\lambda\cdot x^{\lambda-1}+\frac{du}{dx}\cdot\lambda\cdot x^{\lambda-1}+\frac{d^2u}{dx^2}\cdot x^\lambda\right]+b\cdot x\cdot\left[u\cdot\lambda\cdot x^{\lambda-1}+\frac{du}{dx}\cdot x^\lambda\right]+c\cdot y=0 \quad (12.3)$$

$$a\cdot x\cdot\frac{d^2u}{dx^2}\cdot x^{\lambda+1}+2\cdot a\cdot\frac{du}{dx}\cdot\lambda\cdot x^{\lambda+1}+b\cdot\frac{du}{dx}\cdot x^{\lambda+1}+b\cdot u\cdot\lambda\cdot x^\lambda+a\cdot u\cdot\lambda\cdot(\lambda-1)\cdot x^\lambda+c\cdot y=0$$

$$\left[a\cdot x\cdot\frac{d^2u}{dx^2}+2\cdot a\cdot\frac{du}{dx}\cdot\lambda+b\cdot\frac{du}{dx}\right]\cdot x^{\lambda+1}+\left[b\cdot\lambda\cdot x^\lambda+a\cdot\lambda\cdot(\lambda-1)\cdot x^\lambda\right]\cdot u+c\cdot y=0$$

Olur. $y = c_1 \cdot x^k + c_2 \cdot x^k \cdot \ln(x)$ denkleminin türevleri alınıp denklem (12.1) de yerine yazıldığında;

$$a \cdot x^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + (1 - 2 \cdot k) \cdot x \cdot \frac{dy}{dx} + k^2 \cdot y = 0 \tag{12.4}$$

elde edilir.

Fakat basit incelenmesi bakımından lisans seviyesinde verilenler aşağıdaki gibi genel olarak sabit katsayılardan oluşmaktadır.

$a \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + b \cdot \frac{dy}{dt} + c \cdot y = 0 \quad \rightarrow \quad a \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + c \cdot y = 0$ ile gösterilebilir.

$y = y(x)$ ise $a \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + b \cdot \frac{dy}{dx} + c \cdot y = 0 \quad \rightarrow \quad a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0$

olur. Denklemin çözümünü elde etmek için $y = e^{r \cdot t}$ bir çözüm olsun. Bu değer, denklem (12.3) de yerine yazıldığında;

$$y = e^{r \cdot t} \quad \rightarrow \quad \dot{y} = r \cdot e^{r \cdot t} \quad \rightarrow \quad \ddot{y} = r^2 \cdot e^{r \cdot t}$$

$$a \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + c \cdot y = 0 \quad \rightarrow \quad a \cdot r^2 \cdot e^{r \cdot t} + b \cdot r \cdot e^{r \cdot t} + c \cdot e^{r \cdot t} = 0$$

$$\left(a \cdot r^2 + b \cdot r + c\right) \cdot e^{r \cdot t} = 0 \tag{12.5}$$

elde edilir. Denklemde $e^{r \cdot t} \neq 0$ olduğundan;

$$a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0 \tag{12.6}$$

olmalıdır ve buna denklem (12.3) ün, "karakteristik denklemi" denir. Denklem (12.6) nın kökleri r_1 ve r_2 olsun. Bu durumda çözüm;

$$y = c_1 \cdot e^{r_1 \cdot t} + c_2 \cdot e^{r_2 \cdot t} \tag{12.7}$$

şeklindedir. Burada üç farklı kök hali vardır.

1 Kökler gerçek ve birbirinden farklı olması hali: $r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

$$r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

2 Kökler gerçek ve birbirine eşit olması hali: $r_1 = r_2 = r = -\frac{b}{2 \cdot a}$

3 Köklerin sanal olması hali: $r_1 = m + i \cdot n$ ve $r_2 = m - i \cdot n$

Bu üç durumda homojen denklemin çözümü aşağıdaki gibidir.

1. Hal: $y = c_1 \cdot e^{r_1 \cdot t} + c_2 \cdot e^{r_2 \cdot t}$

2. Hal: $y = c_1 \cdot e^{r \cdot t} + c_2 \cdot t \cdot e^{r \cdot t}$

3. Hal: $y = c_1 \cdot e^{r_1 \cdot t} + c_2 \cdot e^{r_2 \cdot t} = c_1 \cdot e^{(m+i \cdot n) \cdot t} + c_2 \cdot e^{(m-i \cdot n) \cdot t}$

$$y = c_1 \cdot e^{m \cdot t} \cdot e^{i \cdot n \cdot t} + c_2 \cdot e^{m \cdot t} \cdot e^{-i \cdot n \cdot t} \quad \rightarrow \quad y = e^{m \cdot t} \cdot \left[c_1 \cdot e^{i \cdot n \cdot t} + c_2 \cdot e^{-i \cdot n \cdot t} \right]$$

Euler denkleminden $\left[e^{\mp i \cdot \theta} = \cos(\theta) \mp i \cdot \sin(\theta) \right]$ faydalanarak tekrar yazıldığında;

$$y = e^{m \cdot t} \cdot \left\{ c_1 \cdot \left[\cos(n \cdot t) + i \cdot \sin(n \cdot t) \right] + c_2 \cdot \left[\cos(n \cdot t) - i \cdot \sin(n \cdot t) \right] \right\}$$

$$y = e^{m \cdot t} \cdot \left[(c_1 + c_2) \cdot \cos(n \cdot t) + (c_1 - c_2) \cdot i \cdot \sin(n \cdot t) \right]$$

$c_1 = a + i \cdot b$, $c_2 = a - i \cdot b$ olduğunda ancak; $C_1 = (c_1 + c_2)$ ve $C_2 = (c_1 - c_2) \cdot i$ alınabilir ve ifadede sanal terim bulunmaz. Böylece genel çözüm;

$$y = e^{m \cdot t} \cdot \left[C_1 \cdot \cos(n \cdot t) + C_2 \cdot \sin(n \cdot t) \right]$$

şeklindedir. Görüldüğü gibi diferansiyel denklem ikinci mertebeden olduğundan iki tane sabit katsayı bulunmaktadır.

12.1 Misal:

$2 \cdot x^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + 3 \cdot x \cdot \frac{dy}{dx} - y = 0$ diferansiyel denklemin genel çözümünü hesaplayınız.

Çözüm: ilk olarak $y = x^k$, $\frac{dy}{dx} = k \cdot x^{k-1}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = k \cdot (k-1) \cdot x^{k-2}$ çözümü denensin.

$$a \cdot k \cdot (k-1) + b \cdot k + c = 0 \rightarrow 2 \cdot k \cdot (k-1) + 3 \cdot k - 1 = 0 \rightarrow 2 \cdot k^2 - 2 \cdot k + 3 \cdot k - 1 = 0$$

$$2 \cdot k^2 + k - 1 = 0 \rightarrow 2 \cdot k^2 + k - 1 = 0 \rightarrow k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \mp 3}{4} = -1, \frac{1}{2}$$

Ve buradan genel çözümün; $y = c_1 \cdot x^{k_1} + c_2 \cdot x^{k_2} \rightarrow \boxed{y = c_1 \cdot x^{-1} + c_2 \cdot x^{\frac{1}{2}}}$

olduğu görülür.

12.2 Misal:

$x^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + 3 \cdot x \cdot \frac{dy}{dx} + y = 0$ diferansiyel denklemin genel çözümünü hesaplayınız.

Çözüm: ilk olarak $y = x^k$, $\frac{dy}{dx} = k \cdot x^{k-1}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = k \cdot (k-1) \cdot x^{k-2}$ çözümü denensin.

$$a \cdot k \cdot (k-1) + b \cdot k + c = 0 \rightarrow 1 \cdot k \cdot (k-1) + 3 \cdot k + 1 = 0 \rightarrow k^2 + 2 \cdot k + 1 = 0$$

$k_{1,2} = -1, -1$ olur Buradan genel çözümün; $y = c_1 \cdot x^k + c_2 \cdot x^k \cdot \ln(x)$

$\boxed{y = c_1 \cdot x^{-1} + c_2 \cdot x^{-1} \cdot \ln(x)}$ olduğu görülür.

12.3 Misal:

$\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5 \cdot \dfrac{dy}{dx} - 6 \cdot y = 0$ ikinci mertebeden diferansiyel denklemin genel çözümünü hesaplayınız.

Çözüm: $r^2 + 5 \cdot r - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad r_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

$$r_1 = \frac{-5 + \sqrt{25 + 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{-5 + \sqrt{49}}{2} = \frac{-5 + 7}{2} \rightarrow \quad r_1 = 1$$

ve $r_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$ olduğundan;

$$r_2 = \frac{-5 - \sqrt{25 + 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{-5 - \sqrt{49}}{2} = \frac{-5 - 7}{2} \quad \rightarrow \quad r_2 = -6$$

$$y = c_1 \cdot e^{r_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{r_2 \cdot x} \rightarrow \quad y = c_1 \cdot e^{x} + c_2 \cdot e^{-6 \cdot x}$$

şeklinde genel çözüm elde edilir.

12.4 Misal:

$\dfrac{d^2y}{dt^2} - 6 \cdot \dfrac{dy}{dt} + 9 \cdot y = 0$ ikinci mertebeden diferansiyel denklemin genel çözümünü hesaplayınız.

Çözüm: $r^2 - 6 \cdot r + 9 = 0 \quad \rightarrow \quad r_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

$$r_1 = \frac{6 + \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = \frac{6 + 0}{2} \rightarrow \quad r_1 = 3$$

$$r_1 = \frac{6 - \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = \frac{6 - 0}{2} \quad \rightarrow \quad r_2 = 3 \rightarrow \quad r = r_1 = r_2$$

Kökler tekrarlamalı olduğundan genel çözüm;

$y = c_1 \cdot e^{r \cdot t} + c_2 \cdot t \cdot e^{r \cdot t} \rightarrow \quad y = c_1 \cdot e^{3 \cdot t} + c_2 \cdot t \cdot e^{3 \cdot t}$ şeklindedir.

12.5 Misal:

$\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2 \cdot \dfrac{dy}{dt} + 2 \cdot y = 0$ ikinci mertebeden diferansiyel denklemin genel çözümünü hesaplayınız.

Çözüm: $r^2 + 2 \cdot r + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad r_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

$$r_1=\frac{-2+\sqrt{4-4\cdot1\cdot2}}{2}=\frac{-2+\sqrt{-4}}{2}\rightarrow\quad r_1=\frac{-2+2\cdot i}{2}\rightarrow\quad r_1=-1+i$$

$$r_2=\frac{-2-\sqrt{4-4\cdot1\cdot2}}{2}=\frac{-2-\sqrt{-4}}{2}\rightarrow\quad r_2=\frac{-2-2\cdot i}{2}\rightarrow\quad r_2=-1-i$$

Kökler sanal olduğundan;

$y=c_1\cdot e^{r_1\cdot t}+c_2\cdot e^{r_2\cdot t}\rightarrow\quad y=c_1\cdot e^{(-1+i)\cdot t}+c_2\cdot e^{(-1-i)\cdot t}$ veya $y=e^{-t}\cdot\left[C_1\cdot\cos(t)+C_2\cdot\sin(t)\right]$ şeklinde genel çözüm elde edilir. Sağlamasını yapmak için iki defa türevini alıp diferansiyel denklemde yerine yazmak gerekir. Sonuç sıfır çıktığı takdirde çözümün doğru olduğu anlaşılır.

$$\frac{dy}{dt}=-e^{-t}\left(C_1\cos(t)+C_2\sin(t)\right)+e^{-t}\left(-C_1\sin(t)+C_2\cos(t)\right)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=e^{-t}\left(C_1\cos(t)+C_2\sin(t)\right)-2e^{-t}\left(-C_1\sin(t)+C_2\cos(t)\right)+e^{-t}\left(-C_1\cos(t)-C_2\sin(t)\right)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\cdot\frac{dy}{dt}+2\cdot y=0$$

$$\begin{aligned}&e^{-t}\left(C_1\cos(t)+C_2\sin(t)\right)-2e^{-t}\left(-C_1\sin(t)+C_2\cos(t)\right)+e^{-t}\left(-C_1\cos(t)-C_2\sin(t)\right)\\&+2\cdot\left[-e^{-t}\left(C_1\cos(t)+C_2\sin(t)\right)+e^{-t}\left(-C_1\sin(t)+C_2\cos(t)\right)\right]\\&+2\cdot e^{-t}\left(C_1\cos(t)+C_2\sin(t)\right)=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\cancel{e^{-t}\left(C_1\cos(t)+C_2\sin(t)\right)}-\cancel{2\cdot e^{-t}\left(-C_1\sin(t)+C_2\cos(t)\right)}+\cancel{e^{-t}\left(-C_1\cos(t)-C_2\sin(t)\right)}\\&-\cancel{2\cdot e^{-t}\left(C_1\cos(t)+C_2\sin(t)\right)}+\cancel{2\cdot e^{-t}\left(-C_1\sin(t)+C_2\cos(t)\right)}\\&+\cancel{2\cdot e^{-t}\left(C_1\cos(t)+C_2\sin(t)\right)}=0\end{aligned}$$

$0=0\rightarrow$ çıktığından diferansiyel denklemi sağladığı görülmektedir.

başlangıç veya sınır değerleri verildiği takdirde özel çözüm elde edilir. Yani genel çözümde verilen c1 ve c2 katsayıların yerini sabit sayılar alır.

12.6 Misal:

$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-2\cdot y=0,\quad y(0)=1,\ \dot{y}(0)=1$ şeklinde başlangıç şartları ile birlikte verilen ikinci mertebeden diferansiyel denklemin özel çözümünü hesaplayınız.

Çözüm: $r^2+r-2=0\rightarrow\quad r_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$

$$r_1=\frac{-1+\sqrt{1+4\cdot1\cdot2}}{2}=\frac{-1+3}{2}\rightarrow\quad r_1=\frac{2}{2}\rightarrow\quad r_1=1$$

$$r_2=\frac{-1-\sqrt{1+4\cdot1\cdot2}}{2}=\frac{-1-3}{2} \quad\rightarrow\quad r_1=-\frac{4}{2} \quad\rightarrow\quad r_2=-2$$

Kökler gerçek ve birbirinden farklı olduğundan;

$$y=c_1\cdot e^{r_1\cdot t}+c_2\cdot e^{r_2\cdot t} \quad\rightarrow\quad y=c_1\cdot e^{t}+c_2\cdot e^{-2\cdot t}$$

şeklinde genel çözüm elde edilir. $y(0)=1$ şartı genel çözümde yerine yazıldığında;

$c_1\cdot e^{0}+c_2\cdot e^{-2\cdot0}=1 \quad\rightarrow\quad c_1+c_2=1$ elde edilir. ikinci şartın uygulanması için genel çözümün türevi alınmalıdır.

$$\frac{dy}{dt}=c_1\cdot e^{t}-2\cdot c_2\cdot e^{-2\cdot t} \quad\rightarrow\quad c_1\cdot e^{0}-2\cdot c_2\cdot e^{-2\cdot0}=1 \quad\rightarrow\quad c_1-2\cdot c_2=1$$

$-3\cdot c_2=0 \quad\rightarrow\quad c_2=0 \rightarrow \quad c_1=1 \rightarrow \quad y=e^{t}$ özel çözümdür.

$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-2\cdot y=0 \quad\rightarrow\quad e^{t}+e^{t}-2\cdot e^{t}=0 \quad\rightarrow\quad 0=0 \rightarrow$ sonuç doğrudur.

13. İkinci Mertebeden Homojen olmayan Diferansiyel Denklemler (Second Order Nonhomogeneous Differential Equations)

Şimdiye kadar incelenen ikinci mertebeden diferansiyel denklemler sıfıra eşitleniyordu.

$$a\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+b\cdot\frac{dy}{dt}+c\cdot y=g(t) \qquad (13.1)$$

şeklindeki denklemlerin genel çözümleri 2 tane çözümün toplamı şeklindedir. $y=y_h+y_p$ Şimdiye kadar yapılan çözümler $y=y_h$ şeklinde idi. yani kısmî (veya tamamlayıcı) çözümler (y_p) yok idi.

13.1 Belirsiz Katsayılar Metodu ile Homojen Olmayan Diferansiyel Denklemin Çözümü (Undetermined Coefficients Method)

Bu usulde $y_p(t)$ fonksiyonu, $g(t)$ ye bağlı olarak aşağıda verilen tablodaki gibi kabul edilir. (Not: Eğer fonksiyon x e bağlı ise $y_p(t)$ yerine $y_p(x)$ ve $g(t)$ yerine $g(x)$ yazılır.) Diferansiyel denkleme bağlı olarak türevler alınır ve yerine yazılarak katsayılar hesaplanır. Böylece $y_p(t)$ sayısal olarak elde edilir. $y=y_h+y_p$ denkleminde yerine yazılarak genel çözüm elde edilir.

Tablo 4: Belirsiz katsayılar metodunda, kısmî (tamamlayıcı) fonksiyonun belirlenmesi

$g(t)$	$y_p(t)$

$A \cdot e^{b \cdot t}$	$a \cdot e^{b \cdot t}$
$A \cdot \cos(n \cdot t)$	$a \cdot \cos(n \cdot t) + b \cdot \sin(n \cdot t)$
$A \cdot \sin(n \cdot t)$	$a \cdot \cos(n \cdot t) + b \cdot \sin(n \cdot t)$
$A \cdot \cos(n \cdot t) + C \cdot \sin(n \cdot t)$	$a \cdot \cos(n \cdot t) + b \cdot \sin(n \cdot t)$
$A_2 \cdot t^2$	$a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2$
$A_0 + A_2 \cdot t^2$	$a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2$
$A_0 + A_1 \cdot t + A_2 \cdot t^2$	$a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2$
$A_2 \cdot t^2 \cdot e^{b \cdot t}$	$\left(a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2\right) \cdot e^{b \cdot t}$

$y_p(t)$ çözümü, $y_h(t)$ de aynen bulunduğu takdirde t ile çarpım yapılır. yani yeni kısmî çözüm; $y_p = t \cdot y_p(t)$ şeklinde alınır. Burum devam ederse; $y_p = t^2 \cdot y_p(t)$ alınır. Böylece işlem devam eder.

13.1.1 Misal

$\frac{d^2y}{dt^2} - 4 \cdot \frac{dy}{dt} - 12 \cdot y = 3 \cdot e^{5 \cdot t}, \quad y(0) = \frac{18}{7}, \; \dot{y}(0) = -\frac{1}{7}$ başlangıç koşulları ile verilen diferansiyel denklemin özel çözümünü hesaplayınız.

Çözüm: İlk önce genel çözüm bilinmelidir. Daha sonra buradan özel çözüme geçilir. Genel çözüm homojen ve kısmî çözümün toplamı olduğundan; $y = y_h + y_p$ → y_h ve y_p hesaplanmalıdır. $\frac{d^2y}{dt^2} - 4 \cdot \frac{dy}{dt} - 12 \cdot y = 0$ denkleminden y_h aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$r^2 - 4 \cdot r - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \quad \rightarrow \quad r_1 = \frac{4 - \sqrt{16 + 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2} = \frac{4-8}{2}$$

$$r_1 = -2 \quad \rightarrow \quad r_2 = \frac{4 + \sqrt{16 + 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2} = \frac{4+8}{2} \quad \rightarrow \quad r_1 = 6$$

Kökler gerçek ve birbirinden farklı olduğundan homojen kısmın çözümü;

$y_h = c_1 \cdot e^{r_1 \cdot t} + c_2 \cdot e^{r_2 \cdot t}$ → $y_h = c_1 \cdot e^{-2 \cdot t} + c_2 \cdot e^{6 \cdot t}$ şeklinde genel çözüm elde edilir.

$y_h = c_1 \cdot e^{-2 \cdot t} + c_2 \cdot e^{6 \cdot t}$ → $g(t) = 3 \cdot e^{5 \cdot t}$ olduğundan dolayı $y_p = a \cdot e^{5 \cdot t}$

$$\frac{dy_p}{dt} = 5a \cdot e^{5 \cdot t} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2y_p}{dt^2} = 25a \cdot e^{5 \cdot t} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2y_p}{dt^2} - 4 \cdot \frac{dy_p}{dt} - 12 \cdot y_p = 3 \cdot e^{5 \cdot t}$$

$$25a \cdot e^{5 \cdot t} - 4 \cdot \left(5a \cdot e^{5 \cdot t}\right) - 12 \cdot \left(a \cdot e^{5 \cdot t}\right) = 3 \cdot e^{5 \cdot t} \quad \rightarrow \quad [25a - 20a - 12a] \cdot e^{5 \cdot t} = 3 \cdot e^{5 \cdot t}$$

$-7\cdot a=3$ → $a=-\frac{3}{7}$ → $y_p=a\cdot e^{5\cdot t}$ → $y_p=-\frac{3}{7}\cdot e^{5\cdot t}$

$y=y_h+y_p$ → $y=c_1\cdot e^{-2\cdot t}+c_2\cdot e^{6\cdot t}-\frac{3}{7}\cdot e^{5\cdot t}$ şeklinde genel çözüm elde edilir. Bu denklemde başlangıç şartları yerine yazılarak özel çözüm elde edilir. $y(0)=\frac{18}{7},\ \dot{y}(0)=-\frac{1}{7}$

$y=c_1\cdot e^{-2\cdot t}+c_2\cdot e^{6\cdot t}-\frac{3}{7}\cdot e^{5\cdot t}$ → $c_1\cdot e^{-0}+c_2\cdot e^{0}-\frac{3}{7}\cdot e^{0}=\frac{18}{7}$ → $c_1+c_2=\frac{18}{7}+\frac{3}{7}$

$c_1+c_2=3$ → $\dot{y}=-2c_1\cdot e^{-2\cdot t}+6c_2\cdot e^{6\cdot t}-\frac{15}{7}\cdot e^{5\cdot t}$ → $-2c_1\cdot e^{-0}+6c_2\cdot e^{0}-\frac{15}{7}\cdot e^{0}=-\frac{1}{7}$

$-2c_1+6c_2=-\frac{1}{7}+\frac{15}{7}$ → $-2c_1+6c_2=2$ → $-c_1+3c_2=1$ → $c_1=2,\ c_2=1$

Bu değerler genel çözümde yerine yazıldığında, özel çözüm elde edilir.

$\boxed{y=2\cdot e^{-2\cdot t}+e^{6\cdot t}-\frac{3}{7}\cdot e^{5\cdot t}}$ istenilen cevaptır.

13.1.2 Misal

$\frac{d^2y}{dt^2}-4\cdot\frac{dy}{dt}-12\cdot y=\sin(2\cdot t)$ diferansiyel denklemin genel çözümünü hesaplayınız.

Çözüm: Bir önceki misalde homojen kısım, karakteristik denklemden çözüldüğünden y_h ; $y_h=c_1\cdot e^{-2\cdot t}+c_2\cdot e^{6\cdot t}$ şeklindedir. $g(t)=\sin(2\cdot t)$ olduğundan dolayı;

$y_p=a\cdot\sin(2\cdot t)+b\cdot\cos(2\cdot t)$ olmalıdır. → $\frac{d^2y_p}{dt^2}-4\cdot\frac{dy_p}{dt}-12\cdot y_p=\sin(2\cdot t)$

$\frac{dy_p}{dt}=2a\cdot\cos(2\cdot t)-2b\cdot\sin(2\cdot t)$ → $\frac{d^2y_p}{dt^2}=-4a\cdot\sin(2\cdot t)-4b\cdot\cos(2\cdot t)$

$-4a\cdot\sin(2\cdot t)-4b\cdot\cos(2\cdot t)-4\cdot[2a\cdot\cos(2\cdot t)-2b\cdot\sin(2\cdot t)]-12\cdot[a\cdot\sin(2\cdot t)+b\cdot\cos(2\cdot t)]=\sin(2\cdot t)$

$[-4a+8b-12\cdot a]\cdot\sin(2\cdot t)=\sin(2\cdot t)$ → $8\cdot b-16\cdot a=1$ → $[-4b-8a-12b]\cdot\cos(2\cdot t)=0$

$-16b-8a=0$ → $-8\cdot b-4\cdot a=0$ → $a=-\frac{1}{20},\ b=\frac{1}{40}$ → $y=y_h+y_p$

$y=c_1\cdot e^{-2\cdot t}+c_2\cdot e^{6\cdot t}-\frac{1}{20}\cdot\sin(2\cdot t)+\frac{1}{40}\cdot\cos(2\cdot t)$ genel çözümdür.

Açıklama: Bu problemde $y_p=a\cdot\sin(2\cdot t)+b\cdot\cos(2\cdot t)$ yerine $y_p=a\cdot\sin(2\cdot t)$ kısmî çözüm olarak alınsaydı, çözümün sağlamadığı görülürdü. $\frac{dy_p}{dt}=2a\cdot\cos(2\cdot t)$ $\frac{d^2y_p}{dt^2}=-4a\cdot\sin(2\cdot t)$

$-4a\cdot\sin(2\cdot t)-4\cdot 2a\cdot\cos(2\cdot t)-12\cdot a\cdot\sin(2\cdot t)=\sin(2\cdot t)$

$[-4\cdot a-12\cdot a]\cdot\sin(2\cdot t)=\sin(2\cdot t)$ → $-16\cdot a=1$ ayrıca $-8\cdot a=0$ olur. Dolayısıyla a için doğru bir değer hesaplanamaz.

13.1.3 Misal

$\frac{d^2}{dt^2}y(t)-4\cdot\frac{d}{dt}y(t)+4\cdot y(t)=2\cdot e^{2\cdot t}$ ikinci mertebeden homojen olmayan diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

$r^2-4\cdot r+4=0$ → $r_1=r_2=2$ → $y_h=c_1\cdot e^{2\cdot t}+c_2\cdot t\cdot e^{2\cdot t}$ → $g(t)=2e^{2\cdot t}$ olduğundan $y_p=a\cdot e^{2\cdot t}$ olarak görünür. Fakat bu terim homojen kısımda $y_h=\boxed{c_1\cdot e^{2\cdot t}}+c_2\cdot t\cdot e^{2\cdot t}$ mevcuttur. Bu yüzden t ile çarpılarak alınır. $y_p=a\cdot t\cdot e^{2\cdot t}$ ve tekrar homojen çözümde böyle bir terim olup olmadığı kontrol edilir. $y_h=c_1\cdot e^{2\cdot t}+\boxed{c_2\cdot t\cdot e^{2\cdot t}}$

Bu terim de mevcuttur. Dolayısıyla tekrar t ile çarpılmalıdır. → $y_p=a\cdot t^2\cdot e^{2\cdot t}$

$\frac{dy_p}{dt}=2\cdot a\cdot t\cdot e^{2\cdot t}+2\cdot a\cdot t^2\cdot e^{2\cdot t}$ → $\frac{d^2y_p}{dt^2}=2\cdot a\cdot e^{2\cdot t}+8\cdot a\cdot t\cdot e^{2\cdot t}+4\cdot a\cdot t^2\cdot e^{2\cdot t}$

$$\frac{d^2y_p}{dt^2}-4\cdot\frac{dy_p}{dt}+4\cdot y_p=2\cdot e^{2\cdot t}$$

$$\left[2\cdot a\cdot e^{2\cdot t}+8\cdot a\cdot t\cdot e^{2\cdot t}+4\cdot a\cdot t^2\cdot e^{2\cdot t}\right]-4\cdot\left[2\cdot a\cdot e^{2\cdot t}+2\cdot a\cdot t^2\cdot e^{2\cdot t}\right]+4\cdot a\cdot t^2\cdot e^{2\cdot t}=2\cdot e^{2\cdot t}$$

$$2\cdot a\cdot e^{2\cdot t}+8\cdot a\cdot t\cdot e^{2\cdot t}+4\cdot a\cdot t^2\cdot e^{2\cdot t}-8\cdot a\cdot e^{2\cdot t}-8\cdot a\cdot t^2\cdot e^{2\cdot t}+4\cdot a\cdot t^2\cdot e^{2\cdot t}=2\cdot e^{2\cdot t}$$

$$2\cdot a\cdot e^{2\cdot t}+\cancel{8\cdot a\cdot t\cdot e^{2\cdot t}}+\cancel{4\cdot a\cdot t^2\cdot e^{2\cdot t}}-\cancel{8\cdot a\cdot e^{2\cdot t}}-\cancel{8\cdot a\cdot t^2\cdot e^{2\cdot t}}+\cancel{4\cdot a\cdot t^2\cdot e^{2\cdot t}}=2\cdot e^{2\cdot t}$$

$\cancel{2}\cdot a\cdot\cancel{e^{2\cdot t}}=\cancel{2}\cdot\cancel{e^{2\cdot t}}$ → $a=1$ → $y_p=t^2\cdot e^{2\cdot t}$ olduğu görülür.

$y=c_1\cdot e^{2\cdot t}+c_2\cdot t\cdot e^{2\cdot t}+t^2\cdot e^{2\cdot t}$ genel çözümdür.

13.1.4 Misal

$\frac{d^2}{dt^2}y(t)-4\cdot\frac{d}{dt}y(t)+5\cdot y(t)=2\cdot e^{2\cdot t}\cdot\sin(t)$ ikinci mertebeden homojen olmayan diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

$r^2-4\cdot r+5=0$ → $r_{1,2}=2\mp i$ → $y_h=e^{2\cdot t}\cdot\left[c_1\cdot\cos(t)+c_2\cdot\sin(t)\right]$

$g(t)=2\cdot e^{2\cdot t}\cdot\sin(t)$ → İlk bakışta kısmî çözüm $g(t)$ ye bağlı olarak;

$y_p = e^{2\cdot t}\cdot\left[a\cdot\sin(t)+b\cdot\cos(t)\right]$ şeklinde seçilir ve homojen kısımda benzer terimlerin olup olmadığı kontrol edilir. → $y_h = e^{2\cdot t}\cdot c_1\cdot\cos(t)+\boxed{e^{2\cdot t}\cdot c_2\cdot\sin(t)}$ → Benzer terim bulunmaktadır. Bu yüzden t ile çarpılmalıdır. → $y_p = t\cdot e^{2\cdot t}\cdot\left[a\cdot\sin(t)+b\cdot\cos(t)\right]$

$$\frac{dy_p}{dt} = e^{2\cdot t}\cdot\left[a\cdot\sin(t)+b\cdot\cos(t)+2\cdot t\cdot a\cdot\sin(t)+2\cdot t\cdot b\cdot\cos(t)+t\cdot a\cdot\sin(t)-t\cdot b\cdot\cos(t)\right]$$

$$\frac{d^2y_p}{dt^2} = \cdot e^{2\cdot t}\cdot\begin{bmatrix}4\cdot a\cdot\sin(t)+4\cdot b\cdot\cos(t)+2\cdot a\cos(t)-2\cdot b\cdot\sin(t)+3\cdot t\cdot a\cdot\sin(t)\\ +3\cdot t\cdot b\cos(t)+4\cdot t\cdot a\cos(t)-4\cdot t\cdot b\cdot\sin(t)\end{bmatrix}$$

$\frac{d^2y_p}{dt^2}-4\cdot\frac{dy_p}{dt}+5\cdot y_p = 2\cdot e^{2\cdot t}\cdot\sin(t)$ Hesaplanan değerler yerine yazılıp gerekli sadeleştirmeler yapıldığında; $2\cdot e^{2\cdot t}\cdot\left[a\cdot\cos(t)-b\cdot\sin(t)\right] = 2\cdot e^{2\cdot t}\cdot\sin(t)$

$-2\cdot b\cdot e^{2\cdot t}\cdot\sin(t) = 2\cdot e^{2\cdot t}\cdot\sin(t)$ → $b=-1$ → $2\cdot e^{2\cdot t}\cdot a\cdot\cos(t)=0$ → $a=0$

$y_p = -t\cdot e^{2\cdot t}\cdot\cos(t)$ → $y = e^{2\cdot t}\cdot\left[c_1\cdot\cos(t)+c_2\cdot\sin(t)\right]-t\cdot e^{2\cdot t}\cdot\cos(t)$ Genel çözümdür.

13.1.5 Misal

$x\cdot\frac{dy}{dx}-2\cdot y = x^3$ birinci mertebeden homojen olmayan diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: Genel çözüm homojen ve kısmî çözümün toplamı olduğundan;

$y = y_h + y_p$ → y_h ve y_p hesaplanmalıdır.

Homojen çözüm; $x\cdot\frac{dy}{dx}-2\cdot y=0$ diferansiyel denkleminden elde edilir.

$x\cdot\frac{dy}{dx}-2\cdot y=0$ → $x\cdot\frac{dy}{dx}=2\cdot y$ → $\frac{dy}{2\cdot y}=\frac{dx}{x}$ → $\frac{1}{2}\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}$

$\frac{1}{2}\ln(y)=\ln(x)+C$ → $e^{\ln\left(y^{\frac{1}{2}}\right)} = e^{\ln(x)}\cdot e^C$ → $\sqrt{y_h} = x\cdot e^C$ → $y_h = c\cdot x^2$

$y_p = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ → $\frac{dy_p}{dx} = a_1+2a_2x+3a_3x^2$ → $x\cdot\frac{dy_p}{dx}-2\cdot y_p = x^3$

$x\cdot\left[a_1+2a_2x+3a_3x^2\right]-2\cdot\left[a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\right]=x^3$ → $a_3x^3-a_1x-2\cdot a_0 = x^3$

$a_0=0,\ a_1=0,\ a_2=0,\ a_3=1$ → $y_p = x^3$ → $\boxed{y=c\cdot x^2+x^3}$ genel çözümdür.

Aynı problem önceki metotlarla da çözülebilir. her taraf x e bölündüğünde;

$\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2}{x}\cdot y=x^2 \quad \rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx}+p(x)\cdot y=g(x) \rightarrow \quad y(x)=e^{-\int p(x)\cdot dx}\cdot\left[\int e^{\int p(x)\cdot dx}\cdot g(x)\cdot dx+c\right]$

$y=e^{\int \frac{2}{x}\cdot dx}\cdot\left[\int e^{-\int \frac{2}{x}\cdot dx}\cdot x^2\cdot dx+c\right] \quad \rightarrow \quad y=e^{2\cdot\ln(x)}\cdot\left[\int e^{-2\cdot\ln(x)}\cdot x^2\cdot dx+c\right]$

$y=x^2\cdot\left[\int x^{-2}\cdot x^2\cdot dx+c\right] \quad \rightarrow \quad y=x^2\cdot[x+c] \quad \rightarrow \quad \boxed{y=c\cdot x^2+x^3}$

13.1.6 Misal

$\dfrac{d^3y}{dx^3}+\dfrac{dy}{dx}=\sin(x)+x\cdot\cos(x)$ üçüncü mertebeden homojen olmayan diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: Genel çözüm homojen ve kısmî çözümün toplamı olduğundan;

$y=y_h+y_p \quad \rightarrow$ y_h ve y_p hesaplanmalıdır.

$(D^3+D)\cdot y=0 \;\rightarrow\; D\cdot(D^2+1)=0 \;\rightarrow\; r_1=0$ ve $r_{2,3}=+i,-i$ olduğundan dolayı homojen kısmın çözümü;

$y_h=c_1+c_2\cdot\cos(x)+c_3\cdot\sin(x)$ şeklindedir. Tamamlayıcı çözüm ilk etapta $g(x)$ fonksiyonuna bağlı olarak;

$y_p=a_1\cdot\cos(x)+a_2\cdot\sin(x)+(a_3+a_4\cdot x)\cdot\cos(x)+(a_5+a_6\cdot x)\cdot\sin(x)$ şeklinde yazılır ve bu değerlerin homojen kısımda olup olmadığı test edilir. Benzer terimler varsa x ile çarpılır.

$$y_p=a_1\cdot\cos(x)+a_2\cdot\sin(x)+a_4\cdot x\cdot\cos(x)+a_6\cdot x\cdot\sin(x)+a_3\cdot\cos(x)+a_5\cdot\sin(x)$$

$$y_p=(a_1+a_3)\cdot\cos(x)+(a_2+a_5)\cdot\sin(x)+a_4\cdot x\cdot\cos(x)+a_6\cdot x\cdot\sin(x)$$

$$y_p=(a_1)\cdot\cos(x)+(a_2)\cdot\sin(x)+a_3\cdot x\cdot\cos(x)+a_4\cdot x\cdot\sin(x)$$

$$y_p=(a_1)\cdot\cos(x)+\boxed{(a_2)\cdot\sin(x)}+\boxed{a_3\cdot x\cdot\cos(x)}+a_4\cdot x\cdot\sin(x)$$

$y_p=\left[(a_1)\cdot\cos(x)+(a_2)\cdot\sin(x)\right]\cdot x+\left[a_3\cdot x\cdot\cos(x)+a_4\cdot x\cdot\sin(x)\right]\cdot x$, tekrar düzenlendiğinde;

$y_p=\boxed{a\cdot x^2\cdot\cos(x)+b\cdot x^2\cdot\sin(x)+c\cdot x\cdot\cos(x)+d\cdot x\cdot\sin(x)}$ olarak elde edilir. Türevleri alınıp yerine yazıldığında;

$$\frac{dy_p}{dx}=\begin{cases}2\cdot a\cdot x\cdot\cos(x)-a\cdot x^2\cdot\sin(x)+2\cdot b\cdot x\cdot\sin(x)+b\cdot x^2\cdot\cos(x)\\ +c\cdot\cos(x)-c\cdot x\cdot\sin(x)+d\cdot\sin(x)+dx\cos(x)\end{cases}$$

$$\frac{d^2y_p}{dx^2}=\begin{cases}2a\cos(x)-4ax\sin(x)-ax^2\cos(x)+2b\sin(x)+4bx\cos(x)\\ -bx^2\sin(x)-2c\sin(x)-cx\cos(x)+2d\cos(x)-dx\sin(x)\end{cases}$$

$$\frac{d^3y_p}{dx^3}=\begin{cases}-6a\sin(x)-6ax\cos(x)+ax^2\sin(x)+6b\cos(x)-6bx\sin(x)\\ -bx^2\cos(x)-3c\cos(x)+cx\sin(x)-3d\sin(x)-dx\cos(x)\end{cases}$$ olur.

$\frac{d^3y_p}{dx^3}+\frac{dy_p}{dx}=\sin(x)+x\cdot\cos(x)$ veya,

$$(6b-2c-4ax)\cos(x)+(-6a-2d-4bx)\sin(x)=\sin(x)+x\cdot\cos(x)$$

$-6a-2d=1$, $-4b=0$, $6b-2c=0$, $-4a=1$ → $a=-\frac{1}{4}, b=0, c=0, d=\frac{1}{4}$ olarak hesaplanır.

$y_p=a\cdot x^2\cdot\cos(x)+b\cdot x^2\cdot\sin(x)+c\cdot x\cdot\cos(x)+d\cdot x\cdot\sin(x)$ olduğundan değerler yerine yazıldığında; $y_p=\boxed{-\frac{1}{4}\cdot x^2\cdot\cos(x)+\frac{1}{4}\cdot x\cdot\sin(x)}$ olarak elde edilir. Böylece;

$$y=y_h+y_p \rightarrow \boxed{y=c_1+c_2\cdot\cos(x)+c_3\cdot\sin(x)-\frac{1}{4}\cdot x^2\cdot\cos(x)+\frac{1}{4}\cdot x\cdot\sin(x)}$$

Şeklinde genel çözüm bulunur.

13.2 Parametrelerin Değişimi Metodu ile Homojen Olmayan Diferansiyel Denklemin Çözümü (The Method of Variation of Parameters)

İkinci mertebeden homojen olmayan diferansiyel denklemlerin çözümünde, kısmî çözüm $y_p(t)$ yi bulmak için kullanılan farklı bir tarz ve usuldür. Bunun için;

$\frac{d^2}{dt^2}y(t)+p(t)\cdot\frac{d}{dt}y(t)+q(t)\cdot y(t)=g(t)$ diferansiyel denklemi göz önüne alınsın. Bunun ile ilgili misaller aşağıda verilmiştir.

13.2.1 Misal

$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=\frac{e^x}{x}$ ikinci mertebeden homojen olmayan diferansiyel denklemin genel çözümünü parametrelerin değişimi metoduyla hesaplayınız.

Çözüm: Homojen çözüm $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=0$ karakteristik denkleminden hesaplanacağından;

$r^2-2r+1=0$ → $r=r_1=r_2=1$ → $y_h=c_1\cdot e^x+c_2\cdot x\cdot e^x$ olur. Kısmî çözüm homojen çözüme benzetilerek yazıldığından dolayı;

$y_p=v_1\cdot e^x+v_2\cdot x\cdot e^x$ Burada; $y_1=e^x$, $y_2=x\cdot e^x$, $\phi(x)=\frac{e^x}{x}$

$$\begin{aligned}&v_1'\cdot[e^x]+v_2'\cdot[x\cdot e^x]=0\\ &v_1'\cdot[e^x]+v_2'\cdot[e^x+x\cdot e^x]=\frac{e^x}{x}\end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix}e^x & xe^x\\ e^x & e^x+xe^x\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1'\\ v_2'\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ \frac{e^x}{x}\end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix}v_1'\\ v_2'\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}e^x & xe^x\\ e^x & e^x+xe^x\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}0\\ \frac{e^x}{x}\end{Bmatrix}$$

Buradan; $v_1'=-1,\ v_2'=\frac{1}{x}$ olarak hesaplanır. *Veya matris tersi yerine* v_1' *ifadesi önce yok edilerek* v_2' *hesaplanır ve hesaplanan bu değer denklemlerden birinde yerine yazılarak* v_1' *hesaplanır. İşlem aşağıdadır.;*

$$\begin{array}{llll} & \cancel{\mp v_1'\cdot\left[e^x\right]} & \mp v_2'\cdot\left[x\cdot e^x\right] & = 0 \\ + & \cancel{+v_1'\cdot\left[e^x\right]} & +v_2'\cdot\left[e^x+x\cdot e^x\right] & = \dfrac{e^x}{x} \\ \hline & 0 & v_2'\cdot\left[e^x+x\cdot e^x-x\cdot e^x\right] & = \dfrac{e^x}{x} \end{array} \rightarrow \begin{array}{llll} & \mp v_1'\cdot\left[e^x\right] & \mp v_2'\cdot\left[x\cdot e^x\right] & = 0 \\ + & +v_1'\cdot\left[e^x\right] & +v_2'\cdot\left[e^x+x\cdot e^x\right] & = \dfrac{e^x}{x} \\ \hline & 0 & v_2'\cdot\left[e^x\right] & = \dfrac{e^x}{x} \end{array}$$

$$v_2'\cdot\left[\cancel{e^x}\right]=\frac{\cancel{e^x}}{x} \rightarrow \boxed{v_2'=\frac{1}{x}} \rightarrow v_1'\cdot\left[\cancel{e^x}\right]+v_2'\cdot\left[x\cdot\cancel{e^x}\right]=0$$

$$\rightarrow v_1'\cdot\left[\cancel{e^x}\right]+\frac{1}{\cancel{x}}\cdot\left[\cancel{x}\cdot\cancel{e^x}\right]=0 \rightarrow v_1'+\frac{1}{x}\cdot x=0 \rightarrow \boxed{v_1'=-1}$$

Böylece; $v_1=\int v_1'\cdot dx=\int(-1)\cdot dx=-x$ ve $v_2=\int v_2'\cdot dx=\int\left(\frac{1}{x}\right)\cdot dx=\ln(x)$ olur. Bu değerler kısmî çözümde yerine yazıldığında; $y_p=-x\cdot e^x+\ln(x)\cdot x\cdot e^x$ olur. Buradan genel çözümün;

$y=c_1\cdot e^x+c_2\cdot x\cdot e^x-x\cdot e^x+\ln(x)\cdot x\cdot e^x$ şeklinde olduğu görülür.

13.2.2 Misal

$\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos(x)}$ ikinci mertebeden homojen olmayan diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: Genel çözüm homojen ve kısmî çözümün toplamı olduğundan;

$$r^3+r=0 \rightarrow r\cdot\left(r^2+1\right)=0 \rightarrow r_1=0,\ r_{2,3}=\mp i \rightarrow y_h=c_1+c_2\cdot\cos(x)+c_3\cdot\sin(x)$$

$y_p=v_1+v_2\cdot\cos(x)+v_3\cdot\sin(x)$ Burada; $y_1=1$, $y_2=\cos(x)$, $y_3=\sin(x)$, $\phi(x)=\sec(x)$

$$v_1'\cdot[1]+v_2'\cdot\left[\cos(x)\right]+v_3'\cdot\left[\sin(x)\right]=0 \qquad (1)$$
$$v_1'\cdot[0]+v_2'\cdot\left[-\sin(x)\right]+v_3'\cdot\left[\cos(x)\right]=0 \qquad (2)$$
$$v_1'\cdot[0]+v_2'\cdot\left[-\cos(x)\right]+v_3'\cdot\left[-\sin(x)\right]=\sec(x) \qquad (3)$$

(1) ve (3) nolu denklemlerin taraf tarafa toplanmasıyla;

$$\begin{array}{llllll}
+v_1'\cdot[1] & +v_2'\cdot[\cos(x)] & +v_3'\cdot[\sin(x)] & = & 0 & \\
+v_1'\cdot[0] & +v_2'\cdot[-\sin(x)] & +v_3'\cdot[\cos(x)] & = & 0 & \\
+v_1'\cdot[0] & +v_2'\cdot[-\cos(x)] & +v_3'\cdot[-\sin(x)] & = & \dfrac{1}{\cos(x)} & \rightarrow \boxed{v_1'=\dfrac{1}{\cos(x)}} \\ \hline
v_1'\cdot[1] & +0 & +0 & = & \dfrac{1}{\cos(x)} &
\end{array}$$

elde edilir. (2) ve (3) nolu denklemlerin sırasıyla $\sin x$ ve $\cos x$ terimleriyle çarpılasıyla;

$$\begin{array}{lllll}
+v_2'\cdot[-\sin(x)\cdot\sin(x)] & +v_3'\cdot[\cos(x)\cdot\sin(x)] & = & 0 & \\
+v_2'\cdot[-\cos(x)\cdot\cos(x)] & +v_3'\cdot[-\sin(x)\cdot\cos(x)] & = & \dfrac{\cos(x)}{\cos(x)} & \rightarrow \boxed{v_2'=-1} \\ \hline
-v_2'\cdot[\cancel{\sin^2(x)+\cos^2(x)}] & +0 & = & 1 &
\end{array}$$

Benzer işlemler v_3' için de yapıldığında; $v_3'=-\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ olarak bulunur. Aynı sonuçlar matris işlemleri ile de elde edilebilir. Aşağıda verilmiştir.

$$\begin{bmatrix}1 & \cos x & \sin x\\ 0 & -\sin x & \cos x\\ 0 & -\cos x & -\sin x\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1'\\ v_2'\\ v_3'\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ \sec x\end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix}v_1'\\ v_2'\\ v_3'\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \cos x & \sin x\\ 0 & -\sin x & \cos x\\ 0 & -\cos x & -\sin x\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ \sec x\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}v_1'\\ v_2'\\ v_3'\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -\sin x & -\cos x\\ 0 & \cos x & -\sin x\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ \dfrac{1}{\cos(x)}\end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix}v_1'\\ v_2'\\ v_3'\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{1}{\cos(x)}\\ -1\\ -\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\end{Bmatrix}$$

Buradan; $v_1'=\dfrac{1}{\cos(x)},\ v_2'=-1,\ v_3'=-\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ olarak hesaplanır.

$$v_1=\int v_1'\cdot dx=\int\frac{1}{\cos(x)}\cdot dx=\ln[\sec(x)+\tan(x)]\ , \qquad v_2=\int v_2'\cdot dx=\int(-1)\cdot dx=-x$$

$v_3=\int v_3'\cdot dx=\int -\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\cdot dx=\ln[\cos(x)]$ bu değerler kısmî çözümde yerine yazıldığında;

$y_p=\ln[\sec(x)+\tan(x)]-x\cdot\cos(x)+\ln[\cos(x)]\cdot\sin(x)$ Genel çözüm; $y=y_h+y_p$ olduğundan

$y=c_1+c_2\cdot\cos(x)+c_3\cdot\sin(x)+\ln[\sec(x)+\tan(x)]-x\cdot\cos(x)+\ln[\cos(x)]\cdot\sin(x)$ şeklinde genel çözüm elde edilir. Parametrelerin değişimi metodunda matrisin tersi yerine aşağıdaki şekilde de aynı sonuçları bulabilirsiniz. *Aşağıdaki 2 misali dikkatlice inceleyiniz.*

13.2.3 Misal

$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-2\cdot y=e^{3x}$ ikinci mertebeden homojen olmayan diferansiyel denklemin genel çözümünü parametrelerin değişimi metoduyla hesaplayınız.

Çözüm: Homojen çözüm; $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-2y=e^{3x}$ karakteristik denkleminden hesaplanacağından;

$r^2-r-2=0 \rightarrow \quad r_1=-1,\ r_2=2 \rightarrow \quad y_h=c_1\cdot e^{-x}+c_2\cdot e^{2x}$ olur. Kısmî çözüm homojen çözüme benzetilerek yazıldığından dolayı;

$y_p=v_1\cdot e^{-x}+v_2\cdot e^{2x}$ Burada; $y_1=e^{-x}$, $y_2=e^{2x}$, $\phi(x)=e^{3x}$

$$\begin{aligned} v_1'\cdot\left[e^{-x}\right]+v_2'\cdot\left[e^{2x}\right]&=0\\ v_1'\cdot\left[-e^{-x}\right]+v_2'\cdot\left[2e^{2x}\right]&=e^{3x}\end{aligned} \rightarrow \begin{array}{rrrcl} & +v_1'\cdot\left[e^{-x}\right] & +v_2'\cdot\left[e^{2x}\right] & = & 0\\ + & -v_1'\cdot\left[e^{-x}\right] & +v_2'\cdot\left[2e^{2x}\right] & = & e^{3x}\\ \hline & 0 & +v_2'\cdot\left[3\cdot e^{2x}\right] & = & e^{3x}\end{array} \rightarrow v_2'\cdot\left[3\cdot e^{2x}\right]=e^{3x}$$

$$\boxed{v_2'=\frac{e^x}{3}} \rightarrow \quad v_1'\cdot\left[e^{-x}\right]+v_2'\cdot\left[e^{2x}\right]=0 \quad\rightarrow\quad v_1'\cdot\left[e^{-x}\right]+\frac{e^x}{3}\cdot\left[e^{2x}\right]=0$$

$$v_1'\cdot\left[e^{-x}\right]+\frac{e^{3x}}{3}=0 \quad\rightarrow\quad v_1'\cdot\left[e^{-x}\right]=-\frac{e^{3x}}{3} \quad\rightarrow\quad \boxed{v_1'=-\frac{e^{4x}}{3}}$$

veya;

$$\begin{aligned} v_1'\cdot\left[e^{-x}\right]+v_2'\cdot\left[e^{2x}\right]&=0\\ v_1'\cdot\left[-e^{-x}\right]+v_2'\cdot\left[2e^{2x}\right]&=e^{3x}\end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} e^{-x} & e^{2x}\\ -e^{-x} & 2e^{2x}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1'\\ v_2'\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0\\ e^{3x}\end{Bmatrix} \quad\rightarrow\quad \begin{Bmatrix} v_1'\\ v_2'\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{-x} & e^{2x}\\ -e^{-x} & 2e^{2x}\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} 0\\ e^{3x}\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} v_1'\\ v_2'\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3e^{-x}} & -\frac{1}{3e^{-x}}\\ \frac{1}{3e^{2x}} & \frac{1}{3e^{2x}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0\\ e^{3x}\end{Bmatrix} \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} v_1'\\ v_2'\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -\frac{e^{4x}}{3}\\ \frac{e^x}{3}\end{Bmatrix}$$

Buradan; $v_1'=-\frac{e^{4x}}{3},\ v_2'=\frac{e^x}{3}$ olarak hesaplanır. Böylece; $v_1=\int v_1'\cdot dx=\int\left(-\frac{e^{4x}}{3}\right)\cdot dx=-\frac{e^{4x}}{12}$ ve $v_2=\int v_2'\cdot dx=\int\left(\frac{e^x}{3}\right)\cdot dx=\frac{e^x}{3}$ olur. Bu değerler kısmî çözümde yerine yazıldığında; $y_p=v_1\cdot e^{-x}+v_2\cdot e^{2x} \rightarrow y_p=-\frac{e^{4x}}{12}\cdot e^{-x}+\frac{e^x}{3}\cdot e^{2x}$

$y_p=-\frac{1}{12}\cdot e^{3x}+\frac{1}{3}\cdot e^{3x} \quad\rightarrow\quad y_p=\frac{1}{4}\cdot e^{3x}$ olur. Bu değerler yerine yazıldığında;

$y=c_1\cdot e^{-x}+c_2\cdot e^{2x}+\frac{1}{4}\cdot e^{3x}$ genel çözümdür.

13.2.4 Misal

$\frac{d^2y}{dx^2}+5\cdot\frac{dy}{dx}+4\cdot y=18\cdot x\cdot e^{-x}$ ikinci mertebeden homojen olmayan diferansiyel denklemin genel çözümünü parametrelerin değişimi metoduyla hesaplayınız.

Çözüm: Homojen kısım; $\frac{d^2y}{dx^2}+5\cdot\frac{dy}{dx}+4\cdot y=0$ → $D^2+5\cdot D+4=0$ → $D_{1,2}=-1,-4$ olarak karakteristik denklemin kökleri bulunur. Buradan homojen çözüm; $y_h=c_1\cdot e^{-x}+c_2\cdot e^{-4\cdot x}$ şeklinde bulunur. Kısmî çözüm homojen çözüme benzetilerek yazıldığından dolayı;

$y_p=v_1\cdot e^{-x}+v_2\cdot e^{-4\cdot x}$ Burada; $y_1=e^{-x}$, $y_2=e^{-4\cdot x}$, $\phi(x)=18\cdot x\cdot e^{-x}$

$$\begin{aligned} &v_1'\cdot\left[e^{-x}\right]+v_2'\cdot\left[e^{-4x}\right]=0\\ &v_1'\cdot\left[-e^{-x}\right]+v_2'\cdot\left[-4\cdot e^{-4x}\right]=18\cdot x\cdot e^{-x}\end{aligned} \rightarrow \begin{array}{ccccc} & +v_1'\cdot\left[e^{-x}\right] & +v_2'\cdot\left[e^{-4\cdot x}\right] & = & 0\\ + & -v_1'\cdot\left[e^{-x}\right] & +v_2'\cdot\left[-4\cdot e^{-4\cdot x}\right] & = & 18\cdot x\cdot e^{-x}\\ \hline & 0 & +v_2'\cdot\left[-3\cdot e^{-4\cdot x}\right] & = & 18\cdot x\cdot e^{-x}\end{array}$$

$$v_2'=\frac{18\cdot x\cdot e^{-x}}{-3\cdot e^{-4\cdot x}} \rightarrow \boxed{v_2'=-6\cdot x\cdot e^{3\cdot x}} \rightarrow v_1'\cdot\left[e^{-x}\right]+v_2'\cdot\left[e^{-4\cdot x}\right]=0 \rightarrow v_1'\cdot\left[e^{-x}\right]-6\cdot x\cdot e^{3\cdot x}\cdot\left[e^{-4\cdot x}\right]=0$$

$\boxed{v_1'=6\cdot x}$ Buradan; $\int dv_1=\int 6\cdot x\cdot dx$ → $\boxed{v_1=3\cdot x^2}$ olarak hesaplanır. Benzer şekilde; $\int dv_2=\int\left(-6\cdot x\cdot e^{3\cdot x}\right)\cdot dx$ $\boxed{v_2=\frac{2}{3}\cdot(1-3\cdot x)\cdot e^{3\cdot x}}$ ve olur. Bu değerler kısmî çözümde yerine yazıldığında; $y_p=v_1\cdot e^{-x}+v_2\cdot e^{-4\cdot x}$ → $y_p=3\cdot x^2\cdot e^{-x}+\frac{2}{3}\cdot(1-3\cdot x)\cdot e^{3\cdot x}\cdot e^{-4\cdot x}$

$y_p=3\cdot x^2\cdot e^{-x}+\frac{2}{3}\cdot(1-3\cdot x)\cdot e^{-x}$ → $y_p=\left(3\cdot x^2+\frac{2}{3}-2\cdot x\right)\cdot e^{-x}$ olur. Bu değerler yerine yazıldığında;

$y=c_1\cdot e^{-x}+c_2\cdot e^{-4\cdot x}+\left(3\cdot x^2+\frac{2}{3}-2\cdot x\right)\cdot e^{-x}$ → $y=c_1\cdot e^{-x}+c_2\cdot e^{-4\cdot x}+\left(3\cdot x^2-2\cdot x\right)\cdot e^{-x}$ genel çözüm bulunur.

13.2.5 Misal

$\frac{d^2y}{dx^2}+4y=\sin^2(x)$ ikinci mertebeden homojen olmayan diferansiyel denklemin genel çözümünü parametrelerin değişimi metoduyla hesaplayınız.

Çözüm: Homojen çözüm $\frac{d^2y}{dx^2}+4y=0$ karakteristik denkleminden hesaplanacağından;

$r^2+4=0$ → $r_1=+2i,\ r_2=-2i$ → $y_h=c_1\cdot\cos(2x)+c_2\cdot\sin(2x)$ olur. Kısmî çözüm homojen çözüme benzetilerek yazıldığından dolayı;

$y_p=v_1\cdot\cos(2x)+v_2\cdot\sin(2x)$ Burada; $y_1=\cos(2x)$, $y_2=\sin(2x)$, $\phi(x)=\sin^2(x)$

$$\begin{aligned} v_1' \cdot [\cos(2x)] + v_2' \cdot [\sin(2x)] &= 0 \\ v_1' \cdot [-2\sin(2x)] + v_2' \cdot [2\cos(2x)] &= \sin^2(x) \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \sin^2(x) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ \sin^2(x) \end{Bmatrix}$$ Buradan; $v_1' = -\frac{1}{2}\sin^3(2x)$, $v_2' = -\frac{1}{2}\sin^2(2x)\cos(2x)$

olarak hesaplanır. Böylece; $v_1 = \int v_1' \cdot dx = \int\left(-\frac{1}{2}\sin^3(2x)\right) \cdot dx = \frac{1}{4}\cos(2x) - \frac{1}{12}\cos^3(2x)$

ve $v_2 = \int v_2' \cdot dx = \int\left(-\frac{1}{2}\sin^2(2x)\cos(2x)\right) \cdot dx = \frac{1}{12}\sin^3(2x)$ olur. Bu değerler kısmî çözümde yerine yazıldığında $y_p = v_1 \cdot \cos(2x) + v_2 \cdot \sin(2x)$ veya

$$y_p = \left[\frac{1}{4}\cos(2x) - \frac{1}{12}\cos^3(2x)\right] \cdot \cos(2x) + \frac{1}{12}\sin^3(2x) \cdot \sin(2x)$$

$$y_p = \frac{1}{4}\cos^2(2x) - \frac{1}{12}\cos^4(2x) + \frac{1}{12}\sin^4(2x) \quad \rightarrow \quad y_p = \frac{1}{4}\cos^2(2x) - \frac{1}{12}\left[\cos^4(2x) - \sin^4(2x)\right]$$

$$y_p = \frac{1}{4}\cos^2(2x) - \frac{1}{12}\left[\left(\cos^2(2x) - \sin^2(2x)\right) \cdot \left(\cos^2(2x) + \sin^2(2x)\right)\right] \quad \rightarrow$$

$$y_p = \frac{3}{12}\cos^2(2x) - \frac{1}{12}\left[\cos^2(2x) - \sin^2(2x)\right] \quad \rightarrow \quad y_p = \frac{1}{6}\cos^2(2x) + \frac{1}{12}\sin^2(2x)$$ olur.

$$y = c_1 \cdot \cos(2x) + c_2 \cdot \sin(2x) + \frac{1}{6}\cos^2(2x) + \frac{1}{12}\sin^2(2x)$$ genel çözümdür.

13.2.6 Misal

$\frac{d^2y}{dt^2} - 2 \cdot \frac{dy}{dt} + y = 7 \cdot e^t \cdot \sin(t)$ ikinci mertebeden homojen olmayan diferansiyel denklemin genel çözümünü parametrelerin değişimi metoduyla hesaplayınız.

Çözüm: Homojen kısım $\frac{d^2y}{dt^2} - 2 \cdot \frac{dy}{dt} + y = 0$ karakteristik denkleminden hesaplanacağından;

$r^2 - 2r + 1 = 0 \rightarrow \quad r_{1,2} = 1 \rightarrow \quad y_h = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot t \cdot e^t$ olur. Kısmî çözüm homojen çözüme benzetilerek yazıldığından dolayı; $y_p = v_1 \cdot y_1 + v_2 \cdot y_2$

$y_p = v_1 \cdot e^t + v_2 \cdot t \cdot e^t$ Burada; $y_1 = e^t$, $y_2 = t \cdot e^t$, $\phi(t) = 7 \cdot e^t \cdot \sin(t)$

$$\begin{aligned} v_1' \cdot [e^t] + v_2' \cdot [t \cdot e^t] &= 0 \\ v_1' \cdot [e^t] + v_2' \cdot [e^t + t \cdot e^t] &= 7 \cdot e^t \cdot \sin(t) \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} -v_1' \cdot [e^t] - v_2' \cdot [t \cdot e^t] &= 0 \\ v_1' \cdot [e^t] + v_2' \cdot [e^t + t \cdot e^t] &= 7 \cdot e^t \cdot \sin(t) \end{aligned} \rightarrow$$

$$v_2' \cdot [e^t + t \cdot e^t] - v_2' \cdot [t \cdot e^t] = 7 \cdot e^t \cdot \sin(t) \quad \rightarrow \quad v_2' \cdot e^t = 7 \cdot e^t \cdot \sin(t) \quad \rightarrow \quad v_2' = 7 \cdot \sin(t)$$

$\int dv_2 = \int 7\cdot\sin(t)\cdot dt \rightarrow \boxed{v_2 = -7\cdot\cos(t)} \rightarrow v_1'\cdot\left[e^t\right]+v_2'\cdot\left[t\cdot e^t\right]=0$

$v_1'\cdot\left[\cancel{e^t}\right]+7\cdot\sin(t)\cdot\left[t\cdot\cancel{e^t}\right]=0 \rightarrow v_1'\cdot\cancel{e^t} = -7\cdot t\cdot\sin(t)\cdot\cancel{e^t} \rightarrow \int dv_1 = -7\cdot\int t\cdot\sin(t)\cdot dt$

$v_1 = -7\cdot\sin(t)+7\cdot t\cdot\cos(t)$

$y_p = v_1\cdot e^t + v_2\cdot t\cdot e^t \rightarrow y_p = \left[-7\cdot\sin(t)+7\cdot t\cdot\cos(t)\right]\cdot e^t - 7\cdot\cos(t)\cdot t\cdot e^t$

$\rightarrow \boxed{y_p = -7\cdot\sin(t)\cdot e^t}$ olarak elde edilir. Veya;

$$\begin{bmatrix} e^t & t\cdot e^t \\ e^t & e^t+t\cdot e^t \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 7\cdot e^t\cdot\sin(t) \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & t\cdot e^t \\ e^t & e^t+t\cdot e^t \end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} 0 \\ 7\cdot e^t\cdot\sin(t) \end{Bmatrix}$$

$\begin{Bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7\cdot\sin(t) \\ -7\cdot t\cdot\sin(t) \end{Bmatrix}$ olarak hesaplanır. Buradan genel çözüm;

$y = y_h + y_p \rightarrow y = c_1\cdot e^t + c_2\cdot t\cdot e^t - 7\cdot\sin(t)\cdot e^t$ olarak hesaplanır.

13.3 D Operator Metodu (The Method of Operators)

İkinci mertebeden homojen olmayan diferansiyel denklemlerin çözümünde, kısmî çözümü $y_p(t)$ bulmak için kullanılan farklı bir tarz ve usuldür. Bunun için Diferansiyel operator D;

$D(\cdot)\equiv\dfrac{d(\cdot)}{dt}$ veya $D(\cdot)\equiv\dfrac{d(\cdot)}{dx}$ gibi tanımlıdır. D nin tersi (inversi) D^{-1} ile gösterilir ve;

$\left(D\cdot D^{-1}\right)\cdot y = y$ özelliğine sahiptir. Ayrıca;

$D^{-1}(\cdot)=\dfrac{1}{D}(\cdot)\equiv\int(\cdot)\cdot dx$ yani D^{-1} integral operatörüdür. Benzer şekilde diferansiyel denklemler için;

$\phi(D)\cdot y = F(x)$ şeklinde tanımlandığında;

$\left[\phi^{-1}(D)\cdot\phi(D)\right]\cdot y = y$ veya $\left[\dfrac{1}{\phi(D)}\cdot\phi(D)\right]\cdot y = y$ yazılabilir. $\phi(D)\cdot y = F(x)$ formu

$\phi(D) = a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_1 D + a_0 \quad (a_n, a_{n-1},\cdots,a_1,a_0 : \text{sabit})$ şeklinde olduğunda;

$\phi(D)\cdot y = F(x) \rightarrow y = \dfrac{1}{\phi(D)}\cdot F(x)$ olur. $\phi^{-1}(D)$ değeri aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1 $$\frac{1}{\phi_1(D)\cdot\phi_2(D)}\cdot F(x) = \frac{1}{\phi_1(D)}\left[\frac{1}{\phi_2(D)}\cdot F(x)\right] = \frac{1}{\phi_2(D)}\left[\frac{1}{\phi_1(D)}\cdot F(x)\right]$$

2. $\frac{1}{\phi(D)}\cdot\left[F_1(x)+F_2(x)\right]=\frac{1}{\phi(D)}\cdot F_1(x)+\frac{1}{\phi(D)}\cdot F_2(x)$

Ayrıca 2 adet Teoremin de bilinmesi lazımdır.

Teorem 1: $\phi(a)\neq 0$ olduğu sürece $\boxed{\frac{1}{\phi(D)}\cdot e^{a\cdot x}=\frac{1}{\phi(a)}\cdot e^{a\cdot x}}$ yazılabilir. Yani D ile a değişebilir.

Teorem 2: $\boxed{\frac{1}{\phi(D)}\cdot\left[e^{a\cdot x}\cdot f(x)\right]=e^{a\cdot x}\cdot\frac{1}{\phi(D+a)}\cdot f(x)}$ ($e^{a\cdot x}$ ifadesini $\phi^{-1}(D)$ nin dışına çıkarınız.)

Daha genel bir ifade ile yapılacak işlemler şu şekilde tanımlanabilir.

$$y(t)=\frac{L_m(D)}{L_n(D)} \qquad (1)$$

şeklinde tanımlı ve burada;

$$L_m(D)=b_0+b_1\cdot D+b_2\cdot D^2+\cdots+b_{m-1}\cdot D^{m-1}+D^m \qquad (2)$$

Ve;

$$L_n(D)=a_0+a_1\cdot D+a_2\cdot D^2+\cdots+a_{n-1}\cdot D^{n-1}+D^n \qquad (3)$$

şeklinde tanımlı ise; tamamlayıcı çözümü bulmak için karakteristik denklem aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$L_n(D)=(D-r_1)\cdot(D-r_2)\cdot(D-r_3)\cdot\ldots(D-r_{n-1})\cdot(D-r_n) \qquad (4)$$

$$\frac{L_m(D)}{L_n(D)}=\frac{K_1}{(D-r_1)}+\frac{K_2}{(D-r_2)}+\ldots+\frac{K_i}{(D-r_i)}+\ldots+\frac{K_n}{(D-r_n)} \qquad (5)$$

Buradaki K_i sabitlerinin hesaplanması için, (5) denkleminin her iki tarafı $(D-r_i)$ ile çarpılır. Yani;

$$(D-r_i)\cdot\frac{L_m(D)}{L_n(D)}=\frac{(D-r_i)}{(D-r_1)}\cdot K_1+\frac{(D-r_i)}{(D-r_2)}\cdot K_2+\ldots+\underbrace{\frac{(D-r_i)}{(D-r_i)}}_{=1}\cdot K_i+\ldots+\frac{(D-r_i)}{(D-r_n)}\cdot K_n \qquad (6)$$

Bunun sonucu $D=r_i$ olduğunda K_i yalnız kalmaktadır ve böylece;

$$K_i=\lim_{D\to r_i}\left[(D-r_i)\cdot\frac{L_m(D)}{L_n(D)}\right] \qquad (7)$$

Köklerin tekrarlamalı olması durumunda;

$\frac{L_m(D)}{L_n(D)}=\frac{K_q}{(D-r_q)^q}+\frac{K_{q-1}}{(D-r_q)^{q-1}}+\ldots+\frac{K_2}{(D-r_q)^2}+\frac{K_1}{(D-r_q)}$ şeklinde olduğunda;

$$K_q = \lim_{D\to r_q}\left[(D-r_q)^q \cdot \frac{L_m(D)}{L_n(D)}\right]$$

$$K_{q-1} = \lim_{D\to r_q}\left[\frac{d}{dD}\left\{(D-r_q)^q \cdot \frac{L_m(D)}{L_n(D)}\right\}\right]$$

$K_{q-k} = \lim_{D\to r_q}\left[\frac{1}{k!}\cdot\frac{d^k}{dD^k}\left\{(D-r_q)^q \cdot \frac{L_m(D)}{L_n(D)}\right\}\right]$ şeklinde yazılabilir. Köklerin sanal olması durumu:

$$\frac{L_m(D)}{L_n(D)} = \frac{K_c}{(D-(a+i\cdot b))} + \frac{K_{-c}}{(D-(a-i\cdot b))}$$

Bunun ile ilgili misaller aşağıda verilmiştir.

13.3.1 Misal

$(D^2+3\cdot D+2)\cdot y = 4\cdot t$ denkleminin genel çözümünü operatör metodunu kullanarak çözünüz.

$D^2+3\cdot D+2=0 \rightarrow r_{1,2}=-1,-2$ olduğundan dolayı homojen kısmın çözümü;

$y_h = c_1\cdot e^{-t} + c_2\cdot e^{-2\cdot t}$ şeklindedir. Veya bu değer aşağıdaki şekilde de hesaplanabilir.

$$y = \frac{1}{(D^2+3\cdot D+2)}\cdot(4\cdot t) = \left[\frac{1}{(D+1)\cdot(D+2)}\right]\cdot(4\cdot t) = \left[\frac{K_1}{(D+1)}+\frac{K_2}{(D+2)}\right]\cdot(4\cdot t)$$

$$\frac{1}{(D+1)\cdot(D+2)} = \frac{K_1}{(D+1)}+\frac{K_2}{(D+2)} = \frac{(D+2)\cdot K_1}{(D+1)}+\frac{(D+1)\cdot K_2}{(D+2)} = \frac{(K_1+K_2)\cdot D + (2\cdot K_1+K_2)}{(D+1)\cdot(D+2)}$$

$K_1+K_2=0$ ve $2\cdot K_1+K_2=1 \rightarrow K_2=-K_1$ ve $2\cdot K_1-K_1=1 \rightarrow \boxed{K_1=1}$ ve $\boxed{K_2=-1}$

olarak hesaplanır. Aynı K_i değerleri aşağıdaki gibi de hesaplanabilir.

$$K_1 = \lim_{D\to r_1}\left[(D-r_1)\cdot\frac{L_m(D)}{L_n(D)}\right] = \lim_{D\to -1}\left[\cancel{(D+1)}\cdot\frac{1}{\cancel{(D+1)}\cdot(D+2)}\right] \rightarrow K_1 = \lim_{D\to -1}\left[\frac{1}{(D+2)}\right] = \frac{1}{-1+2} = 1$$

$$K_2 = \lim_{D\to r_2}\left[(D-r_2)\cdot\frac{L_m(D)}{L_n(D)}\right] = \lim_{D\to -2}\left[\cancel{(D+2)}\cdot\frac{1}{(D+1)\cdot\cancel{(D+2)}}\right] \rightarrow K_2 = \lim_{D\to -2}\left[\frac{1}{(D+1)}\right] = \frac{1}{-2+1} = -1$$

değerleri elde edilir. Buradan;

$y_1 = \frac{4\cdot t}{(D+1)}$ ve $y_2 = \frac{4\cdot t}{(D+2)}$ olmak üzere; $y = y_1 + y_2$ denkleminden hesaplanır.

$$(D+1)\cdot y_1 = 4\cdot t \rightarrow \frac{dy_1}{dt} + y_1 = 4\cdot t \rightarrow y_1(t) = e^{-\int p(t)\cdot dt}\cdot\left[\int e^{\int p(t)\cdot dt}\cdot q(t)\cdot dt + c\right]$$

$$y_1(t)=e^{-\int 1\cdot dt}\cdot\left[\int e^{\int 1\cdot dt}\cdot(4\cdot t)\cdot dt+c\right] \rightarrow \ y_1=-4+4\cdot t+c_1\cdot e^{-t}$$

$$(D+2)\cdot y_2=4\cdot t \ \rightarrow \frac{dy_2}{dt}+2\cdot y_2=4\cdot t \ \rightarrow \ y_2(t)=e^{-\int p(t)\cdot dt}\cdot\left[\int e^{\int p(t)\cdot dt}\cdot q(t)\cdot dt+c\right]$$

$$y_2(t)=e^{-\int 2\cdot dt}\cdot\left[\int e^{\int 2\cdot dt}\cdot(4\cdot t)\cdot dt+c\right] \rightarrow \ y_2=-1+2\cdot t+c_2\cdot e^{-2\cdot t}$$

$$y=y_1+y_2 \ \rightarrow y=-1+2\cdot t+c_2\cdot e^{-2\cdot t}-4+4\cdot t+c_1\cdot e^{-t} \ \rightarrow \ \boxed{y=\underbrace{c_1\cdot e^{-t}+c_2\cdot e^{-2\cdot t}}_{y_h}\underbrace{-5+6\cdot t}_{y_p}}$$

şeklinde genel çözüm elde edilir.

13.3.2 Misal

$(D^3-3\cdot D)\cdot y=9\cdot t$ denkleminin genel çözümünü operatör metodunu kullanarak çözünüz.

$D\cdot(D^2-3)=0 \ \rightarrow \ r_1=0, r_2=r_3=\sqrt{3}$ olduğundan dolayı homojen kısmın çözümü;

$y_h=c_1+c_2\cdot e^{\sqrt{3}\cdot t}+c_3\cdot t\cdot e^{\sqrt{3}\cdot t}$ şeklindedir. Veya bu değer aşağıdaki şekilde de hesaplanabilir.

$$y=\frac{1}{D\cdot(D^2-3)}\cdot(9\cdot t)=\left[\frac{1}{D\cdot(D+\sqrt{3})\cdot(D-\sqrt{3})}\right]\cdot(9\cdot t)=\left[\frac{K_1}{(D-0)}+\frac{K_2}{(D+\sqrt{3})}+\frac{K_3}{(D-\sqrt{3})}\right]\cdot(9\cdot t)$$

$$K_1=\lim_{D\to 0}\left[\cancel{(D-0)}\cdot\frac{1}{\cancel{(D-0)}\cdot(D+\sqrt{3})\cdot(D-\sqrt{3})}\right]=\frac{1}{(0+\sqrt{3})\cdot(0-\sqrt{3})}=-\frac{1}{3}$$

$$K_2=\lim_{D\to -\sqrt{3}}\left[\cancel{(D+\sqrt{3})}\cdot\frac{1}{D\cdot(D-\sqrt{3})\cdot\cancel{(D+\sqrt{3})}}\right] \rightarrow \ K_2=\lim_{D\to -\sqrt{3}}\left[\frac{1}{D\cdot(D-\sqrt{3})}\right]=\frac{1}{6}$$

$$K_3=\lim_{D\to \sqrt{3}}\left[\cancel{(D-\sqrt{3})}\cdot\frac{1}{D\cdot\cancel{(D-\sqrt{3})}\cdot(D+\sqrt{3})}\right] \rightarrow \ K_3=\lim_{D\to \sqrt{3}}\left[\frac{1}{D\cdot(D+\sqrt{3})}\right]=\frac{1}{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{3})}=\frac{1}{6}$$

$$y=\frac{1}{D\cdot(D^2-3)}\cdot(9\cdot t)=\left[\frac{1}{D\cdot(D+\sqrt{3})\cdot(D-\sqrt{3})}\right]\cdot(9\cdot t)=\left[\frac{K_1}{(D-0)}+\frac{K_2}{(D+\sqrt{3})}+\frac{K_3}{(D-\sqrt{3})}\right]\cdot(9\cdot t)$$

$$y=\left[-\frac{1}{3\cdot D}+\frac{1}{6\cdot(D+\sqrt{3})}+\frac{1}{6\cdot(D-\sqrt{3})}\right]\cdot(9\cdot t)$$

$y_1=\frac{-3\cdot t}{D}$, $y_2=\frac{3\cdot t}{2\cdot(D+\sqrt{3})}$, $y_3=\frac{3\cdot t}{2\cdot(D-\sqrt{3})}$, → Genel Çözüm: → $y=y_1+y_2+y_3$

$$y_1=-\frac{3}{2}\cdot t^2+c_1$$

$$y_2=c_2\cdot e^{-\sqrt{3}\cdot t}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot t$$

$$y_3=c_3\cdot e^{\sqrt{3}\cdot t}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot t$$

$$y=c_1-\frac{3}{2}\cdot t^2+c_2\cdot e^{-\sqrt{3}\cdot t}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot t+c_3\cdot e^{\sqrt{3}\cdot t}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot t$$

$y=\left[c_1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right]+c_2\cdot e^{-\sqrt{3}\cdot t}+c_3\cdot e^{\sqrt{3}\cdot t}+\cancel{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot t}-\cancel{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot t}-\frac{3}{2}\cdot t^2$ burada $C_1=c_1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$ alındığında;

$\boxed{y=C_1+c_2\cdot e^{-\sqrt{3}\cdot t}+c_3\cdot e^{\sqrt{3}\cdot t}-\frac{3}{2}\cdot t^2}$ şeklinde genel çözüm elde edilir.

13.3.3 Misal

$(D^2+5\cdot D+4)\cdot y=e^{2\cdot x}+x^2\cdot e^{-2\cdot x}$ denkleminin genel çözümünü operatör metodunu kullanarak çözünüz.

$D^2+5\cdot D+4=0 \rightarrow r_{1,2}=-4,-1$ olduğundan dolayı homojen kısmın çözümü;

$y_h=c_1\cdot e^{-4\cdot x}+c_2\cdot e^{-x}$ şeklindedir. Kısmî çözüm ise; $y_p=\frac{1}{(D^2+5\cdot D+4)}\cdot\left(e^{2\cdot x}+x^2\cdot e^{-2\cdot x}\right)$ veya

$y_p=\frac{1}{(D^2+5\cdot D+4)}\cdot e^{2\cdot x}+\frac{1}{(D^2+5\cdot D+4)}\cdot x^2\cdot e^{-2\cdot x}$ şeklinde yazılabilir. Bu da 2 kısma ayrıldığında;

$$y_{p1}=\frac{1}{(D^2+5\cdot D+4)}\cdot e^{2\cdot x}=\frac{1}{(2^2+5\cdot 2+4)}=\frac{1}{18}\cdot e^{2\cdot x}$$

$$y_{p2}=\frac{1}{(D^2+5\cdot D+4)}\cdot x^2\cdot e^{-2\cdot x}\rightarrow y_{p2}=e^{-2\cdot x}\cdot\frac{1}{(D-2)^2+5\cdot(D-2)+4}\cdot x^2$$

$y_{p2}=e^{-2\cdot x}\cdot\frac{1}{D^2+D-2}\cdot x^2 \quad\rightarrow\quad y_{p2}=-\frac{e^{-2\cdot x}}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{D}{2}-\frac{D^2}{2}}\cdot x^2$ gerekli işlemlerin yapılmasıyla;

$$y_{p2}=\frac{e^{-2\cdot x}}{2}\cdot\left(x^2+x+\frac{3}{2}\right)\rightarrow y_p=y_{p1}+y_{p2}$$

$y_p=\frac{1}{18}\cdot e^{2\cdot x}+\frac{e^{-2\cdot x}}{2}\cdot\left(x^2+x+\frac{3}{2}\right)$ elde edilir. $y=y_h+y_p$ olduğundan;

$y_h=c_1\cdot e^{-4\cdot x}+c_2\cdot e^{-x}+\frac{1}{18}\cdot e^{2\cdot x}+\frac{e^{-2\cdot x}}{2}\cdot\left(x^2+x+\frac{3}{2}\right)$ şeklinde genel çözüm bulunur.

13.3.4 Misal

$\left(D^2+6\cdot D+9\right)\cdot y=\left(x^3+2\cdot x\right)\cdot e^{-3x}$ denkleminin kismî çözümünü operatör metodunu kullanarak hesaplayınız.

$$y_p=\frac{1}{\left(D^2+6\cdot D+9\right)}\cdot\left(x^3+2\cdot x\right)\cdot e^{-3x} \quad\rightarrow\quad y_p=e^{-3x}\cdot\frac{1}{(D-3)^2+6\cdot(D-3)+9}\cdot\left[x^3+2\cdot x\right]$$

(Kaydırma teoremi kullanıldı a=-3)

$$y_p=e^{-3x}\cdot\frac{1}{D^2}\cdot\left[x^3+2\cdot x\right] \quad\rightarrow\quad y_p=e^{-3x}\cdot\int\int x^3+2\cdot x\cdot dx=e^{-3x}\cdot\int\left(\frac{x^4}{4}+x^2\right)\cdot dx=e^{-3x}\cdot\left(\frac{1}{20}\cdot x^5+\frac{1}{3}\cdot x^3\right)$$

$D^2+6\cdot D+9=0 \rightarrow r_{1,2}=3,3$ olduğundan dolayı homojen kısmın çözümü;

$y_h=c_1\cdot e^{-3x}+c_2\cdot x\cdot e^{-3x}$ şeklindedir. Kısmî çözüm ise; $y_p=e^{-3x}\cdot\left(\frac{1}{20}\cdot x^5+\frac{1}{3}\cdot x^3\right)$ veya

$y_p=c_1\cdot e^{-3x}+c_2\cdot x\cdot e^{-3x}+e^{-3x}\cdot\left(\frac{1}{20}\cdot x^5+\frac{1}{3}\cdot x^3\right)$ şeklinde elde edilir.

13.3.5 Misal

$\left(D^2+2\cdot D+1\right)\cdot y=4\cdot t$ denkleminin genel çözümünü operatör metodunu kullanarak çözünüz.

$y=\frac{1}{\left(D^2+2\cdot D+1\right)}\cdot(4\cdot t)=\left[\frac{1}{(D+1)\cdot(D+1)}\right]\cdot(4\cdot t)=\left[\frac{K_2}{(D+1)^2}+\frac{K_1}{(D+1)}\right]\cdot(4\cdot t)$ olur.

Buradaki katsayıları hesaplamak için aşağıdaki formülden yararlanılır.

$$K_{q-k}=\lim_{D\to r_q}\left[\frac{1}{k!}\cdot\frac{d^k}{dD^k}\left\{(D-r_q)^q\cdot\frac{L_m(D)}{L_n(D)}\right\}\right]$$

$$K_2=\lim_{D\to -1}\left[\left\{\cancel{(D+1)^2}\cdot\frac{1}{\cancel{(D+1)\cdot(D+1)}}\right\}\right]=1$$

$$K_1=\lim_{D\to r_q}\left[\frac{1}{1!}\cdot\frac{d}{dD}\left\{(D+1)^2\cdot\frac{1}{(D+1)\cdot(D+1)}\right\}\right]=\lim_{D\to r_q}\left[\frac{1}{1!}\cdot\frac{d}{dD}\{1\}\right]=0$$

$$y=\left[\frac{K_2}{(D+1)^2}+\frac{K_1}{(D+1)}\right]\cdot(4\cdot t)=\left[\frac{1}{(D+1)^2}+\frac{0}{(D+1)^2}\right]\cdot(4\cdot t)=\frac{1}{(D+1)^2}\cdot(4\cdot t)$$

Görüldüğü gibi bu tür problemlere pek uygun görülmüyor. Çünkü aynı sonuç elde edildi ve bir kolaylık sağlamadı.

$$y = \frac{1}{(D+1)^2}\cdot(4\cdot t)$$

$$y = \left[\frac{K_2}{(D+1)^2} + \frac{K_1}{(D+1)}\right]\cdot(4\cdot t) = \left[\frac{1}{(D+1)^2} + \frac{0}{(D+1)^2}\right]\cdot(4\cdot t) = \frac{1}{(D+1)^2}\cdot(4\cdot t)$$

14. Tekrarlama Soruları (Review Problems)

Burada bazı diferansiyel denklemler ve çözümleri verilmiştir. Bir diferansiyel denklemin birden fazla çözüm metodu (usulü) olabilir. Fakat sonuçlar hep aynı çıkar. Yani sonuçlar değişmez. Bu durum aşağıdaki problemlerde daha açık görülmektedir.

14.1 Problems:

Aşağıda verilen 1-4 diferansiyel denklemlerinin genel çözümünü "belirsiz katsayılar" veya "parametrelerin değişimi" yöntemini kullanarak hesaplayınız

1 $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x\cdot e^x$ Cevap: $\boxed{y = x\cdot(c+e^x)}$ (14.1)

Çözüm: Parametrelerin değişimi metodu kullanılarak çözüm yapılabilir. Bu durumda,

$y = y_h + y_p$ şeklinde yazılabilir. Homojen kısmın çözümü için,

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \rightarrow \int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x} + C \rightarrow \ln(y) = \ln(x) + c$$

$e^{\ln(y)} = e^{\ln(x)+c} \rightarrow e^{\ln(y)} = e^{\ln(x)+c} \rightarrow e^{\ln(y)} = e^{\ln(x)}\cdot e^c \rightarrow c = e^c \rightarrow y_h = c\cdot x$ elde edilir. Tamamlayıcı çözüm, homojen kısmın yazılışı ile elde edildiğinden dolayı,

$$y_p = v\cdot x \rightarrow v'\cdot\cancel{x} = \cancel{x}\cdot e^x \rightarrow v' = e^x \rightarrow v = e^x \rightarrow y_p = v\cdot x \rightarrow y_p = e^x\cdot x \rightarrow y = y_h + y_p$$

$y = c\cdot x + e^x\cdot x \rightarrow y = x\cdot(c+e^x)$ halinde genel çözüm elde edilir. Belirsiz katsayılar metodu kullanıldığında;

$$y_p = (a+b\cdot x)\cdot e^x \rightarrow \frac{dy_p}{dx} = b\cdot e^x + (a+b\cdot x)\cdot e^x \rightarrow \frac{dy_p}{dx} = (b+a+b\cdot x)\cdot e^x \rightarrow \frac{dy_p}{dx} - \frac{y_p}{x} = x\cdot e^x$$

$$(b+a+b\cdot x)\cdot\cancel{e^x} - \frac{(b+a+b\cdot x)\cdot\cancel{e^x}}{x} = x\cdot\cancel{e^x} \rightarrow (b+a+b\cdot x) - \frac{(b+a+b\cdot x)}{x} = x$$

$$\cancel{b} + a + b\cdot x - (b+a)\cdot x^{-1} - \cancel{b} = x \rightarrow b\cdot x - (b+a)\cdot x^{-1} + a\cdot x^0 = 1\cdot x^1 + 0\cdot x^0 + 0\cdot x^{-1}$$

$$b = 1,\ a = 0,\ b+a = 0 \rightarrow y_p = (a+b\cdot x)\cdot e^x \rightarrow y_p = x\cdot e^x$$

$y = c\cdot x + e^x\cdot x \rightarrow y = x\cdot(c+e^x)$ şeklinde aynı genel çözüm elde edilir.

2 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{3}{x}\cdot y=3\cdot x-2$ Cevap: $\boxed{y=\dfrac{3}{5}x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{C}{x^3}}$

Çözüm: Bu denklem, 1. mertebeden lineer diferansiyel denklem olarak çözülebilir. Bu durumda,

$y'+p(x)\cdot y=q(x)$ şekline benzetilerek çözülebilir. Fakat burada Belirsiz Katsayılar Metodu kullanılacaktır. Genel çözüm; $y=y_h+y_p$ şeklinde olduğundan ilk önce homojen kısmın çözümü elde edilmelidir.

$$\frac{dy}{dx}+\frac{3}{x}\cdot y=0 \rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{3}{x}\cdot y \rightarrow \frac{dy}{y}=-3\frac{dx}{x} \rightarrow \int\frac{1}{y}\cdot dy=-3\cdot\int\frac{1}{x}\cdot dx+c \rightarrow \ln(y)=-3\cdot\ln(x)+c$$

$$\ln(y)=\ln\left(x^{-3}\right)+c \rightarrow e^{\ln(y)}=e^{\ln\left(x^{-3}\right)+c} \rightarrow e^{\ln(y)}=e^{\ln\left(x^{-3}\right)}\cdot e^{c} \rightarrow y=\frac{c}{x^3} \rightarrow y_h=\frac{c}{x^3}$$

$$g(x)=3\cdot x-2 \rightarrow y_p=a\cdot x^2+b\cdot x+c \rightarrow \frac{dy_p}{dx}=2\cdot a\cdot x+b \rightarrow \frac{dy_p}{dx}+\frac{3}{x}\cdot y_p=3\cdot x-2$$

$$[2\cdot a\cdot x+b]+\frac{3}{x}\cdot\left[a\cdot x^2+b\cdot x+c\right]=3\cdot x-2 \rightarrow 2\cdot a\cdot x+b+3\cdot a\cdot x+3\cdot b+3\cdot c\cdot x^{-1}=3\cdot x-2$$

$$(2\cdot a+3\cdot a)\cdot x^1+4\cdot b\cdot x^0+3\cdot c\cdot x^{-1}=3\cdot x^1-2\cdot x^0$$

$$5\cdot a=3,\quad 4\cdot b=-2,\quad 3\cdot c=0 \rightarrow a=\frac{3}{5},\quad b=-\frac{1}{2},\quad c=0$$

olduğu görülür. Bu değerler yerine yazıldığında,

$$y_p=a\cdot x^2+b\cdot x+c \rightarrow y_p=\frac{3}{5}\cdot x^2-\frac{1}{2}\cdot x \rightarrow y=y_h+y_p \rightarrow \boxed{y=\frac{c}{x^3}+\frac{3}{5}\cdot x^2-\frac{1}{2}\cdot x}$$

şeklinde genel çözüm elde edilir. Aynı sonuç "Parametrelerin Değişimi Metodu" ile de bulunabilir.

$$y_h=\frac{c}{x^3} \rightarrow y_p=v\cdot\frac{1}{x^3} \rightarrow v'\cdot\frac{1}{x^3}=3\cdot x-2 \rightarrow v'=x^3\cdot(3\cdot x-2) \rightarrow v'=3\cdot x^4-2\cdot x^3$$

$$v=\frac{3}{5}\cdot x^5-\frac{2}{4}\cdot x^2 \rightarrow y_p=v\cdot\frac{1}{x^3} \rightarrow y_p=\left(\frac{3}{5}\cdot x^5-\frac{1}{2}\cdot x^2\right)\cdot\frac{1}{x^3} \rightarrow y_p=\left(\frac{3}{5}\cdot x^2-\frac{1}{2}\cdot x\right)$$

$y=y_h+y_p \rightarrow \boxed{y=\dfrac{c}{x^3}+\dfrac{3}{5}\cdot x^2-\dfrac{1}{2}\cdot x}$ olarak bulunur.

3 $\sin(x)\cdot\dfrac{dy}{dx}+y\cdot\cos(x)=x\cdot\sin(x)$ Cevap: $\boxed{y=\dfrac{\sin(x)-x\cdot\cos(x)+C}{\sin(x)}}$

Aşağıda verilen (4-7) diferansiyel denklemlerinin genel çözümünü hesaplayınız.

4 $\frac{d^2y}{dx^2}+6\cdot\frac{dy}{dx}+10\cdot y=3\cdot x\cdot e^{-3x}-2\cdot e^{3x}\cdot\cos(x)$

Cevap: $\boxed{y=c_2\cdot e^{-3x}\sin(x)+c_1\cdot e^{-3x}\cos(x)-\frac{1}{60}\left(\sin(x)+3\cdot\cos(x)\right)\cdot e^{-3x}\cdot e^{6x}+3xe^{-3x}}$

5 $\frac{d^2y}{dx^2}-2\cdot\frac{dy}{dx}+2\cdot y=\left(x+e^x\right)\cdot\sin(x)$

Cevap: $\boxed{y=c_1\cdot\sin(x)e^x+c_2\cdot e^x\cos(x)+\frac{1}{50}\left(20x+28-25\cdot x\cdot e^x\right)\cdot\cos(x)+\frac{1}{50}\cdot(10x+4)\cdot\sin(x)}$

6 $\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{dy}{dx}=\sin(x)+x\cdot\cos(x)$

Cevap: $\boxed{y=-c_1\cdot\cos(x)+c_2\cdot\sin(x)+\frac{1}{4}\cdot\cos(x)+\frac{1}{4}\cdot x\cdot\sin(x)-\frac{1}{4}\cdot x^2\cdot\cos(x)+c_3}$

7 $\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{d^2y}{dx^2}=7\cdot x-3\cdot\cos(x)$

Cevap: $\boxed{y=-c_1\cdot\sin(x)-c_2\cdot\cos(x)+\frac{7}{6}\cdot x^3+\frac{9}{2}\cdot\cos(x)+\frac{3}{2}\cdot x\cdot\sin(x)+c_3\cdot x+c_4}$

8 $\frac{d^3y}{dx^3}-3\cdot\frac{dy}{dx}=9\cdot x^2$ denkleminin tamamlayıcı çözümünü hesaplayınız.

Cevap: $\boxed{y_p=-x^3-2\cdot x}$

9 $\frac{d^2y}{dx^2}+3\cdot\frac{dy}{dx}+2\cdot y=\sin\left(e^x\right)$ Cevap: $y=\boxed{C_1\cdot e^{-x}+C_2\cdot e^{-2x}-e^{-2x}\cdot\sin\left(e^x\right)}$

10 $x\cdot y^2\cdot\left(x\cdot\frac{dy}{dx}+y\right)=\frac{x}{y}$ Bernoulli diferansiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

Cevap: $\boxed{y^4-1-\frac{C}{x^4}=0}$

11 $(1+x)\cdot\left(\frac{dy}{dx}+y^2\right)-y=0$ Bernoulli diferansiyel denkleminin sıfırdan farklı çözümü nedir?

Cevap: $\boxed{\frac{1}{y}=\frac{1}{1+x}\cdot\left(\frac{x^2}{2}+x+C\right)}$

12 $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}\cdot y=e^{x\cdot y}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü hesaplayınız.

Cevap: $\boxed{x^2 + \frac{2}{e^{x \cdot y}} = C}$

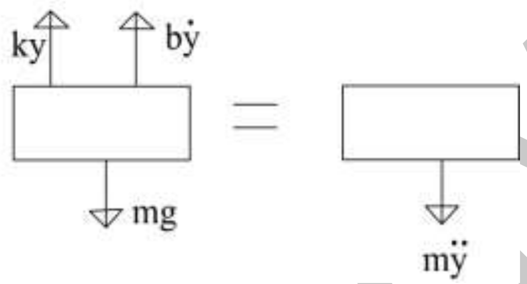
15. Diferansiyel Denklemlerin Mühendislik Uygulamaları (Engineeering Applications of Differential Equations)

Mühendisliğin birçok alanında, fiziksel problemin matematik modeli çıkartılırken karşımıza diferansiyel denklem olarak çıkar. Bu denklemler, doğrusal olmayan kısmî diferansiyel denklem takımı da olabilir. (Burgers, Navier-Stokes, Lid-driven cavity gibi). Bazıları da lineer olmayan diferansiyel denklem şeklindedir. Fakat kabuller yapılarak, adi diferansiyel denklem haline getirilirler. (Kirişlerin çökme denklemi gibi)

15.1 Misal

Kütlesi m=75kg olan bir paraşütçü, 4000m yükseklikten yere atlıyor ve paraşütünü 1 dakika sonra açıyor. yer çekimi ivmesi sabit ve g=9.81m/s^2 alınıyor. Paraşüt kapalı iken hava direnci b_1=15N.s/m ve paraşüt açıldığında hava direnci b_2=150N.s/m dir. Paraşütçü yere atladığında ininceye kadar geçen süreyi hesaplayınız. Ayrıca yere ayağı dokunduğu anda düşme hızını hesaplayınız.

Çözüm:



Şekil 3: Paraşütçüye etkiyen iç ve dış kuvvetler

Newton prensibine göre sisteme etkiyen dış kuvvetler, iç kuvvetler eşit olacağından, Şekil 3 den faydalanarak kuvvetler dengesi aşağıdaki gibi yazılır.

$$m \cdot g - b_1 \cdot \frac{dy}{dt} = m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \quad \rightarrow \quad m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + b_1 \cdot \frac{dy}{dt} = m \cdot g \quad \rightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{b_1}{m} \cdot \frac{dy}{dt} = g \qquad (15.1)$$

$$r^2 + \frac{b_1}{m} \cdot r = 0 \quad \rightarrow \quad r \cdot \left(r + \frac{b_1}{m} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad r_1 = 0,\ r_2 = -\frac{b_1}{m}$$

Buradan diferansiyel denklemin homojen kısmı bulunur. $y_h = c_1 + c_2 \cdot e^{-\frac{b}{m} \cdot t}$

Kısmî çözümü için belirsiz katsayılar metodu (usulü) kullanıldığında;

$$y_p = a \cdot t \quad \rightarrow \quad \frac{dy_p}{dt} = a \quad \rightarrow \quad \frac{d^2y_p}{dt^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2y_p}{dt^2} + \frac{b_1}{m} \cdot \frac{dy_p}{dt} = g$$

$$0+\frac{b_1}{m}\cdot a=g \quad\rightarrow\quad a=\frac{m\cdot g}{b_1} \quad\rightarrow\quad y_p=\frac{m\cdot g}{b_1}\cdot t \quad\rightarrow\quad y=y_h+y_p$$

$$y=c_1+c_2\cdot e^{-\frac{b_1}{m}\cdot t}+\frac{m\cdot g}{b_1}\cdot t \quad\rightarrow\quad y(0)=0 \quad\rightarrow\quad y=c_1+c_2\cdot e^{-\frac{b_1}{m}\cdot 0}+\frac{m\cdot g}{b_1}\cdot 0$$

$c_1+c_2=y_0$ ve $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=v_0$ şartı uygulandığında; $\rightarrow$ $\frac{dy}{dt}=-\frac{b_1}{m}\cdot c_2\cdot e^{-\frac{b_1}{m}\cdot t}+\frac{m\cdot g}{b_1}$

$$-\frac{b_1}{m}\cdot c_2\cdot e^{-\frac{b_1}{m}\cdot 0}+\frac{m\cdot g}{b_1}=v_0 \quad\rightarrow\quad \frac{b_1}{m}\cdot c_2=\frac{m\cdot g}{b_1}-v_0 \quad\rightarrow\quad c_2=\frac{m^2\cdot g}{b_1^2}-v_0\frac{m}{b_1}$$

$$c_1=y_0-c_2 \quad\rightarrow\quad c_1=y_0-\left(\frac{m^2\cdot g}{b_1^2}-v_0\frac{m}{b_1}\right) \quad c_1=y_0-\frac{m^2\cdot g}{b_1^2}+v_0\frac{m}{b_1}$$

$$y=y_0-\frac{m^2\cdot g}{b_1^2}+v_0\frac{m}{b_1}+\left(\frac{m^2\cdot g}{b_1^2}-v_0\frac{m}{b_1}\right)\cdot e^{-\frac{b_1}{m}\cdot t}+\frac{m\cdot g}{b_1}\cdot t$$

sayısal değerler yerine yazıldığında;

$$y=0-\frac{75^2\cdot 9.81}{225}+0\frac{75}{15}+\left(\frac{75^2\cdot 9.81}{225}-0\frac{75}{15}\right)\cdot e^{-0.2\cdot t}+\frac{75\cdot 9.81}{15}\cdot t$$

$y=-245.25+245.25\cdot e^{-0.2\cdot t}+49.05\cdot t$ t=60 alındığında; $y(60)=2697.751507\text{m}$

$\frac{dy}{dt}=-49.05\cdot e^{-0.2\cdot t}+49.05$ ve paraşüt açıldığı andaki hızı $v(60)=49.04969863\text{m/s}$ dir.

İkinci durum için (paraşüt açılı vaziyette yere inene kadar) konum denklemi;

$$y=y_0-\frac{m^2\cdot g}{b_2^2}+v_0\frac{m}{b_2}+\left(\frac{m^2\cdot g}{b_2^2}-v_0\frac{m}{b_2}\right)\cdot e^{-\frac{b_2}{m}\cdot t}+\frac{m\cdot g}{b_2}\cdot t$$

$$4000=2697.751507-2.4525+24.52484932+(2.4525-24.52484932)\cdot e^{-2\cdot t}+4.905\cdot t$$

$$1304.700993=24.52484932-22.07234932\cdot e^{-2\cdot t}+4.905\cdot t$$

Buradan Newton-Rapson metodu yardımıyla; $t=260.994\text{s}$ olarak kalan süre bulunur.

$t=260.994+60=320.994\text{s}$ toplam süredir.

15.2 Misal

$E\cdot I\cdot\frac{d^4y}{dx^4}=q(x)$ Diferansiyel denklemiyle verilen kirişin düzgün yayılı yük altında ve iki tarafı ankastre bağlantılı iken çökmesi, eğilme momenti ve kesme kuvveti diyagramlarını elde ediniz.(E: Elastisite modülü, I: kesit atalet momenti ve q(x) yayılı yüktür)

Çözüm: denklemin integrali alındığında, çökme fonksiyonu ve diğerleri bulunabilir.

$E\cdot I\cdot\dfrac{d^4y}{dx^4}=0 \quad\rightarrow\quad E\cdot I\cdot\int\dfrac{d^4y}{dx^4}\cdot dx=c_1 \quad\rightarrow\quad E\cdot I\cdot\dfrac{d^3y}{dx^3}=c_1 \quad\rightarrow\quad E\cdot I\cdot\dfrac{d^2y}{dx^2}=c_1x+c_2$

$E\cdot I\cdot\dfrac{dy}{dx}=c_1\dfrac{x^2}{2}+c_2x+c_3 \quad\rightarrow\quad E\cdot I\cdot y=c_1\dfrac{x^3}{6}+c_2\dfrac{x^2}{2}+c_3x+c_4$ → Homojen kısmın çözümüdür.

Kısmî çözüm homojen çözüme benzetilerek yazıldığından dolayı;

$y_p=v_1\dfrac{x^3}{6}+v_2\dfrac{x^2}{2}+v_3x+v_4$ Burada; $y_1=\dfrac{x^3}{6}$, $y_2=\dfrac{x^2}{2}$, $y_3=x$, $y_4=1$, ve $\phi(x)=q(x)$ olur.

$$v_1'\cdot\left[\frac{x^3}{6}\right]+v_2'\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]+v_3'\cdot[x]+v_4'\cdot[1]=0$$
$$v_1'\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]+v_2'\cdot[x]+v_3'\cdot[1]+v_4'\cdot[0]=0$$
$$v_1'\cdot[x]+v_2'\cdot[1]+v_3'\cdot[0]+v_4'\cdot[0]=0$$
$$v_1'\cdot[1]+v_2'\cdot[0]+v_3'\cdot[0]+v_4'\cdot[0]=q(x)$$

$$\begin{bmatrix}\frac{x^3}{6} & \frac{x^2}{2} & x & 1\\ \frac{x^2}{2} & x & 1 & 0\\ x & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1'\\ v_2'\\ v_3'\\ v_4'\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\q(x)\end{Bmatrix} \quad\rightarrow\quad \begin{Bmatrix}v_1'\\ v_2'\\ v_3'\\ v_4'\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -x\\ 0 & 1 & -x & \frac{x^2}{2}\\ 1 & -x & \frac{x^2}{2} & -\frac{x^3}{6}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\q(x)\end{Bmatrix}\ \begin{Bmatrix}v_1'\\ v_2'\\ v_3'\\ v_4'\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}q(x)\\ -x\cdot q(x)\\ \frac{1}{2}x^2q(x)\\ -\frac{1}{6}x^2q(x)\end{Bmatrix}$$

Böylece; $v_1=\int v_1'\cdot dx=\int(-1)\cdot dx=-x$, $v_2=\int v_2'\cdot dx=\int\left(-x\cdot(-1)\right)\cdot dx=\dfrac{x^2}{2}$

→ $v_3=\int v_3'\cdot dx=\int\left(\dfrac{x^2}{2}\right)\cdot dx=\dfrac{x^3}{6}$ → ve $v_3=\int v_3'\cdot dx=\int\left(\dfrac{x^3}{6}\right)\cdot dx=-\dfrac{x^4}{24}$ olur. Bu değerler kısmî çözümde yerine yazıldığında; $y_p=v_1\dfrac{x^3}{6}+v_2\dfrac{x^2}{2}+v_3x+v_4$ $\quad y_p=-x\cdot\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}\cdot x+\dfrac{x^4}{24}$

$$y_p=\frac{-4\cdot x^4}{24}+\frac{6x^4}{24}-\frac{4x^4}{24}+\frac{x^4}{24} \quad\rightarrow\quad y_p=\frac{-4\cdot x^4}{24}+\frac{6x^4}{24}-\frac{4x^4}{24}+\frac{x^4}{24} \quad\rightarrow\quad y_p=-\frac{x^4}{24}$$

$E\cdot I\cdot y=c_1\dfrac{x^3}{6}+c_2\dfrac{x^2}{2}+c_3x+c_4-\dfrac{x^4}{24} \quad\rightarrow\quad y=\dfrac{1}{E\cdot I}\left(c_1\dfrac{x^3}{6}+c_2\dfrac{x^2}{2}+c_3x+c_4-\dfrac{x^4}{24}\right)$ genel çözümdür. Sınır şartlarının yerine yazılmasıyla özel çözüm elde edilir. İki tarafı ankastre olunca uçlarda çökme ve eğim sıfır olur. Bu şartlar yerine yazıldığında çökme denklemindeki bilinmeyen katsayılar yerine özel çözüm elde edilir. Çözüm aşağıdadır.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{E\cdot I}\left(c_1\frac{x^2}{2}+c_2x+c_3+-\frac{x^3}{6}\right)$$

1. $y(0)=0,\qquad 0=\dfrac{1}{E\cdot I}\left(c_1\dfrac{0}{6}+c_2\dfrac{0}{2}+c_3\cdot 0+c_4-\dfrac{0}{24}\right) \quad\rightarrow\quad c_4=0$

2. $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0, \Rightarrow 0=c_1\dfrac{0}{2}+c_2\cdot 0+c_3+-\dfrac{0}{6} \quad \rightarrow \quad c_3=0$

3. $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=L}=0, \Rightarrow 0=c_1\dfrac{L^2}{2}+c_2\cdot L-\dfrac{L^3}{6} \quad \rightarrow \quad 0=\cancel{L^2}\cdot\left(c_1\dfrac{1}{2}+c_2\cdot\dfrac{1}{L}-\dfrac{L}{6}\right),\ c_1\dfrac{1}{2}+c_2\cdot\dfrac{1}{L}=\dfrac{L}{6}$

4. $y(L)=0, \Rightarrow 0=c_1\dfrac{L^3}{6}+c_2\dfrac{L^2}{2}-\dfrac{L^4}{24} \rightarrow \quad 0=\cancel{L^2}\cdot\left(c_1\dfrac{L}{6}+c_2\dfrac{1}{2}-\dfrac{L^2}{24}\right) \quad \rightarrow \quad c_1\dfrac{L}{6}+c_2\dfrac{1}{2}=\dfrac{L^2}{24}$

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{L} \\ \frac{L}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} \frac{L}{6} \\ \frac{L^2}{24} \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & -\frac{12}{L} \\ -2L & 6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \frac{L}{6} \\ \frac{L^2}{24} \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \frac{L}{2} \\ -\frac{L^2}{12} \end{Bmatrix}$$

Elde edilen bu değerler genel çözümde yerine yazıldığında, kirişin çökme denklemi elde edilmiş olur.

$$y=\frac{1}{E\cdot I}\left(c_1\frac{x^3}{6}+c_2\frac{x^2}{2}+c_3x+c_4-\frac{x^4}{24}\right) \quad \rightarrow \quad y=\frac{1}{E\cdot I}\left(\frac{L}{12}x^3-\frac{L^2}{24}x^2-\frac{x^4}{24}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{E\cdot I}\left(\frac{L}{4}x^2-\frac{L^2}{12}x-\frac{x^3}{6}\right) \quad \rightarrow \quad \text{(Eğim denklemi)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{E\cdot I}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{L}{2}x-\frac{L^2}{12}\right) \quad \rightarrow \quad \text{(Moment denklemi)}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{E\cdot I}\left(\frac{L}{2}-x\right) \quad \rightarrow \quad \text{(Kesme kuvveti denklemi)}$$

x=0 da ankastre ve x=L de basit mesnetli kirişin, q=-1 yükü altında çökme denklemi;

$$y=\frac{1}{E\cdot I}\left(\frac{5}{48}L\cdot x^3-\frac{1}{16}L^2\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\right)$$

x=0 ve x=L de basit mesnetli kirişin, q=-1 yükü altında çökme denklemi;

$$y=-\frac{1}{24}x^4+\frac{L}{12}\cdot x^3-\frac{L^3}{24}x$$

15.3 Misal:

Yay, sönümleme ve $F_0\sin(\omega\cdot t)$ zorlama kuvveti altında salınım (titreşim) hareketi yapan m kütlesinin hareket denklemini elde ediniz ve köklerin farklı durumuna karşılık hareketi inceleyiniz.(m: kütle, c: sönümleme katsayısı, k: yay katsayısı)

Çözüm: her taraf m kütlesine bölündüğünde; $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{c}{m}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{k}{m}\cdot x=\dfrac{F_0}{m}\sin(\omega\cdot t)$ haline gelir. Sistemde zorlayıcı kuvvet bulunmadığı takdirde dinamik kuvvet analizi aşağıdaki gibidir.

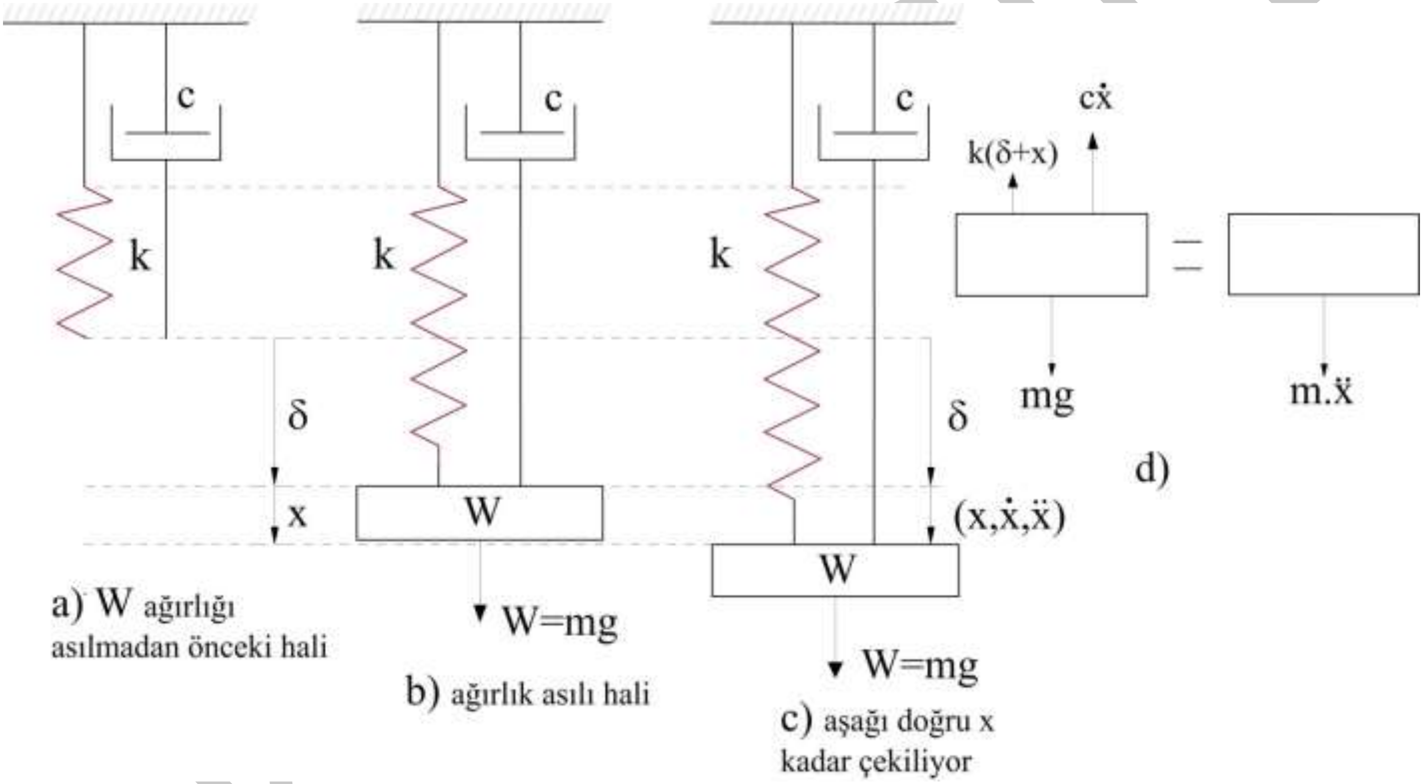
Newton prensibi uygulandığında (Dış kuvvetler = İç kuvvetler) hareket denklemi elde edilir. Yay ve sönümleyici harekete zıt yönde kuvvet oluşturur.

$$-c\cdot\frac{dx}{dt}-k\cdot x=m\frac{d^2x}{dt^2} \quad\rightarrow\quad m\frac{d^2x}{dt^2}+c\cdot\frac{dx}{dt}+k\cdot x=0 \quad\rightarrow\quad \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{c}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}\cdot x=0$$

$$\ddot{x}+\frac{c}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}\cdot x=0 \quad\rightarrow\quad x_{1,2}=\frac{-\frac{c}{m}\mp\sqrt{\frac{c^2}{m^2}-4\frac{k}{m}}}{2} \quad\rightarrow\quad x_{1,2}=-\frac{c}{2m}\mp\sqrt{\frac{c^2}{4m^2}-\frac{k}{m}}$$

$$\Delta=\sqrt{\frac{c^2}{4m^2}-\frac{k}{m}} \quad\rightarrow\quad \frac{c^2}{4m^2}-\frac{k}{m}=0 \quad\rightarrow\quad \frac{c^2}{4m^2}=\frac{k}{m} \quad\rightarrow\quad c^2=4\cdot k\cdot m$$

$c_{cr}=2\sqrt{k\cdot m}$ (kritik sönümleme katsayısı)



Şekil 4: Yay ve sönümleme etkisi altındaki kütlenin hareket denkleminin elde edilmesi

Kısaltma amacıyla; $\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$ (doğal frekans), ve $\zeta=\frac{c}{c_{cr}}$ (sönümleme oranı = damping ratio) alındığında hareket denklemi; $\ddot{x}+2\zeta\omega_n\dot{x}+\omega_n^2\cdot x=0$ halini alır.

$$x_{1,2}=\frac{-2\zeta\omega_n\mp\sqrt{(2\zeta\omega_n)^2-4\omega_n^2}}{2} \quad\rightarrow\quad x_{1,2}=-\zeta\cdot\omega_n\mp\sqrt{\zeta^2\omega_n^2-\omega_n^2} \quad\rightarrow\quad x_{1,2}=-\zeta\cdot\omega_n\mp\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$$

olur. $\sqrt{\zeta^2-1}$ değerine bağlı olarak üç farklı kök durumu olabilir.

I. $\sqrt{\zeta^2-1}>0$ ise iki tane gerçek kök vardır ve homojen kısmın çözümü;

$x_{1,2} = -\zeta \cdot \omega_n \mp \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$ şeklindedir. Bu değerler homojen çözümde yerine yazıldığında;

$x_h = c_1 \cdot e^{\left(-\zeta \cdot \omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2-1}\right) \cdot t} + c_2 \cdot e^{\left(-\zeta \cdot \omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2-1}\right) \cdot t}$ elde edilir. başlangıç şartları verildiği takdirde;

$x(0) = x_0$ (başlangıç konumu) ve $\dot{x}(0) = v_0$ (başlangıç hızı) özel çözüm elde edilir.

$$c_1 \cdot e^{\left(-\zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2-1}\right) \cdot 0} + c_2 \cdot e^{\left(-\zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2-1}\right) \cdot 0} = x_0$$

$$c_1 + c_2 = x_0$$

$$\frac{dx}{dt} = c_1 \cdot \left(-\zeta \cdot \omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2-1}\right) \cdot e^{\left(-\zeta \cdot \omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2-1}\right) \cdot t} + c_2 \cdot \left(-\zeta \cdot \omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2-1}\right) \cdot e^{\left(-\zeta \cdot \omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2-1}\right) \cdot t}$$

$$c_1 \cdot \left(-\zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2-1}\right) \cdot e^{\left(-\zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2-1}\right) \cdot 0} + c_2 \cdot \left(-\zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2-1}\right) \cdot e^{\left(-\zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2-1}\right) \cdot 0} = v_0$$

$$c_1 \cdot \left(-\zeta \cdot \omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2-1}\right) + c_2 \cdot \left(-\zeta \cdot \omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2-1}\right) = v_0$$

$c_1 = \dfrac{-\zeta \cdot \omega_n \cdot x_0 - \omega_n \sqrt{\zeta^2-1} \cdot x_0 + v_0}{2 \cdot \omega_n \sqrt{\zeta^2-1}}$ ve $c_2 = \dfrac{\zeta \cdot \omega_n \cdot x_0 + \omega_n \sqrt{\zeta^2-1} \cdot x_0 + v_0}{2 \cdot \omega_n \sqrt{\zeta^2-1}}$ olur.

$$x_h = \frac{-\zeta \cdot \omega_n \cdot x_0 - \omega_n \sqrt{\zeta^2-1} \cdot x_0 + v_0}{2 \cdot \omega_n \sqrt{\zeta^2-1}} \cdot e^{\left(-2\zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2-1}\right) \cdot t} +$$
$$\frac{\zeta \cdot \omega_n \cdot x_0 + \omega_n \sqrt{\zeta^2-1} \cdot x_0 + v_0}{2 \cdot \omega_n \sqrt{\zeta^2-1}} \cdot e^{\left(-2\zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2-1}\right) \cdot t}$$

Dış kuvvet olmadan sönümlü titreşim hareketinin özel çözümüdür. Kökler gerçek olduğu için salınım olmaz. Bu durum grafik çizildiği takdirde açıkça görülür. Bu duruma sönüm üstü (over damped) durum denir.

II. $\sqrt{\zeta^2 - 1} = 0$ ise iki tane gerçek kök vardır ve bu kökler birbirine eşittir. Bu durumda da titreşim hareketi gerçekleşmez ve kökler;

$x_1 = x_2 = -2\zeta\omega_n$ şeklindedir. Bu değerler homojen çözümde yerine yazıldığında;

$x_h = c_1 \cdot e^{(-2\zeta\omega_n) \cdot t} + c_2 \cdot t \cdot e^{(-2\zeta\omega_n) \cdot t}$ elde edilir. başlangıç şartları verildiği takdirde;

$x(0) = x_0$ (başlangıç konumu) ve $\dot{x}(0) = v_0$ (başlangıç hızı) özel çözüm elde edilir.

III. $\sqrt{\zeta^2 - 1} < 0$ ise iki tane sanal kök vardır ve homojen kısmın çözümü;

$x_{1,2} = -\zeta \cdot \omega_n \mp \omega_n \cdot i \cdot \sqrt{1-\zeta^2}$ şeklindedir. $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ sönümlü doğal frekans olarak tanımlandığında; $x_{1,2} = -\zeta \cdot \omega_n \mp \omega_d \cdot i$ olur. Bu değerler homojen çözümde yerine yazıldığında;

$x_h = e^{-\zeta\cdot\omega_n\cdot t}\cdot\left[c_1\cdot\cos(\omega_d\cdot t)+c_2\cdot\sin(\omega_d\cdot t)\right]$ elde edilir. Dış kuvvet olmadığı takdirde kısmî çözüm sıfır olacağından $x = x_h$ olur. Başlangıç şartları verildiği takdirde;

$x(0)=x_0\,(\text{başlangıç konumu})$ ve $\dot{x}(0)=v_0\,(\text{başlangıç hızı})$ özel çözüm elde edilir.

$$e^{-\zeta\cdot\omega_n\cdot 0}\cdot\left[c_1\cdot\cos(\omega_d\cdot 0)+c_2\cdot\sin(\omega_d\cdot 0)\right]=x_0 \quad\rightarrow\quad c_1\cdot\cos(0)+c_2\cdot\sin(0)=x_0$$

$c_1 = x_0$ olduğu görülür. Hız şartı uygulandığında;

$$\frac{dx}{dt}=-\zeta\cdot\omega_n\cdot e^{-\zeta\cdot\omega_n\cdot t}\cdot\left[c_1\cdot\cos(\omega_d\cdot t)+c_2\cdot\sin(\omega_d\cdot t)\right]$$
$$+e^{-\zeta\cdot\omega_n\cdot t}\cdot\left[-c_1\cdot\omega_d\cdot\sin(\omega_d\cdot t)+c_2\cdot\omega_d\cdot\cos(\omega_d\cdot t)\right]$$

$$-\zeta\cdot\omega_n\cdot[c_1+0]+[0+c_2\cdot\omega_d]=v_0 \quad\rightarrow\quad -\zeta\cdot\omega_n\cdot x_0+c_2\cdot\omega_d=v_0$$

$c_2=\dfrac{v_0+\zeta\cdot\omega_n\cdot x_0}{\omega_d}$ olduğu görülür. Bu değerler yerine yazıldığında;

$x=e^{-\zeta\cdot\omega_n\cdot t}\cdot\left[x_0\cdot\cos(\omega_d\cdot t)+\dfrac{v_0+\zeta\cdot\omega_n\cdot x_0}{\omega_d}\cdot\sin(\omega_d\cdot t)\right]$ olur ve sönümlü titreşim meydana gelir. Sayısal değerler girilerek bu durum denenebilir.

Ayrıca değişik bir çözüm olarak $x=A\cdot e^{-\zeta\cdot\omega_n\cdot t}\cdot\sin(\omega_d\cdot t+\phi)$ denklemi de alınabilir. Çünkü

$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$ olduğundan;

$x=A\cdot e^{-\zeta\cdot\omega_n\cdot t}\cdot\left[\sin(\phi)\cdot\cos(\omega_d\cdot t)+\sin(\omega_d\cdot t)\cdot\cos(\phi)\right]$ yazılabilir. Yukarıda verilen çözümle karşılaştırıldığında;

$x=A\cdot e^{-\zeta\cdot\omega_n\cdot t}\cdot\left[\underbrace{\sin(\phi)}_{C_1}\cdot\cos(\omega_d\cdot t)+\underbrace{\cos(\phi)}_{C_2}\cdot\sin(\omega_d\cdot t)\right]$ olur. Buradan;

$\tan\phi=\dfrac{c_1}{c_2}=\dfrac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)}=\dfrac{x_0}{\dfrac{v_0+\zeta\cdot\omega_n\cdot x_0}{\omega_d}}=\dfrac{x_0\cdot\omega_d}{v_0+\zeta\cdot\omega_n\cdot x_0}$ olduğu görülür.

$A=\sqrt{x_0^2+\left(v_0+\dfrac{\zeta\cdot\omega_n\cdot x_0}{\omega_d}\right)^2}$ ve $\phi=\tan^{-1}\left(\dfrac{x_0\cdot\omega_d}{v_0+\zeta\cdot\omega_n\cdot x_0}\right)$ şeklindedir.

$$x=\sqrt{x_0^2+\left(v_0+\frac{\zeta\cdot\omega_n\cdot x_0}{\omega_d}\right)^2}\cdot e^{-\zeta\cdot\omega_n\cdot t}\cdot\sin(\omega_d\cdot t+\phi)$$

sönümlü serbest titreşimin hareket denklemidir.

16. Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklem Problemleri (First Order Differential Equation Problems)

Bu bölümde 1. Mertebeden diferansiyel denklemler ile ilgili sorular ve cevapları verilmiştir.

16.1 Misal:

$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{e^{-x}-y}$ ile diferansiyel denklemin genel çözümünü elde ediniz.

Çözüm: $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{e^{-x}-y} \rightarrow \frac{dy}{dx}=e^{-x}-y \rightarrow \frac{dy}{dx}+y=e^{-x} \rightarrow p(x)=1, q(x)=e^{-x}$

$$y(x)=e^{\int\left(\frac{1}{x}\right)\cdot dx}\cdot\left[\int e^{-\int\left(\frac{1}{x}\right)\cdot dx}\cdot 1\cdot dx+c\right] \rightarrow y(x)=e^{\int(1)\cdot dx}\cdot\left[\int e^{-\int(1)\cdot dx}\cdot e^{-x}\cdot dx+c\right]$$

$$y(x)=e^{x}\cdot\left[\int e^{-x}\cdot e^{-x}\cdot dx+c\right] \rightarrow y(x)=e^{x}\cdot\left[\int e^{-2\cdot x}\cdot dx+c\right] \rightarrow \boxed{y(x)=e^{x}\cdot\left[-\frac{1}{2}\cdot e^{-2\cdot x}+c\right]}$$

Şeklinde genel hesaplanır.

16.2 Misal:

Aşağıda verilen başlangıç değer problemini çözünüz.

$$\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}y=\begin{cases}-2x-\frac{4}{x}, & x\in[1,2) \\ x^2, & x\in(2,4]\end{cases}, \quad y(1)=1 \tag{16.1}$$

Çözüm: Parçalı fonksiyon olduğundan 2 farklı bölge için, 2 farklı çözüm elde edilir. $\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}y=-2x-\frac{4}{x}$ ve $\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}y=x^2$

16.3 Misal:

Bir kişi bir bankadan m=55000TL ev kredisi alıyor ve bunun ödemesi 10 sene ve her ay ödenmesi gereken miktar v=750TL olduğuna göre bankanın kişiye uyguladığı aylık kâr miktarı yüzde kaçtır, hesaplayınız.

Çözüm:

$$\frac{dy}{dt}=k\cdot y \rightarrow \frac{dy}{y}=k\cdot dt \rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int k\cdot dt+C \rightarrow \ln(y)=k\cdot t+C \rightarrow y=e^{k\cdot t+C} \rightarrow y=e^{C}\cdot e^{k\cdot t}$$

$y=c\cdot e^{k\cdot t}$ olduğu görülür. Başlangıçta (t=0 iken) para miktarı m olduğundan;

$y(0)=m=55000$ şartından, $y=c\cdot e^{k\cdot t} \rightarrow m=c\cdot e^{0} \rightarrow c=m$ olduğu görülür. Bu değer denklemde yerine yazıldığında,

$y=m\cdot e^{k\cdot t}$ olur. 1 ay sonra (t=1 için) y değeri,

$y_1 = m \cdot e^{k \cdot 1} - v$ → 2 ay sonra yeni m değeri, $y_2 = y_1 \cdot e^{k \cdot 1} - v$ olacaktır.

$$\ln\left(e^{k \cdot t}\right) = \ln\left(\frac{v \cdot t}{m}\right)$$

$k \cdot t \cdot \underbrace{\ln(e)}_{=1} = \ln\left(\frac{v \cdot t}{m}\right)$ → $k = \dfrac{\ln\left(\frac{v \cdot t}{m}\right)}{t}$ formülü ile hesaplanır. Bilinen değerler yerine yazıldığında;

$$k = \frac{\ln\left(\frac{v \cdot t}{m}\right)}{t} = \frac{\ln\left(\frac{750 \cdot 120}{55000}\right)}{120} \rightarrow$$

16.4 Misal:

Bir bakteri kültürü sayısı artmasının, mevcut miktarıyla doğru orantılı olduğu bilinmektedir. 1 saat sonra sayıldığında 1000 ve bundan 3 saat sonra sayıldığında 3000 bakteri kültürü olduğu görülmüştür. Buna göre;

a)bakteri kültürün sayısını zamana göre veren formülü elde ediniz.

b) 10,000,000 bakteri üremesi için ne kadar zaman gereklidir?

Kaynaklar:

[1] Bernard V. Liengme, Guide to Microsoft Excel 2002 for Scientists and Engineers, Third Edition, Elsevier, 2002

[2] Bill Goodwine, Engineering Differential Equations Theory and Applications, Springer, 2011

[3] Mehmet Sezer, Ayşegül Daşcıoğlu, Diferansiyel Denklemler I, Dora yayınları, 2010

[4] İbrahim Çelik, Şevket Civelek, Diferansiyel Denklemler I, Pamukkale Üniversitesi, 2008

[5] Morris Tenenbaum, H. Pollard, Ordinary Differential Equations, Dover Publications, 1985

[6] R. Kent Nagle, Edward B. Saff, Arthur David Snider, Fundamentals of Differential Equations, 8thEdition, Paerson, 2012

[7] R. Bronson, G. Costa, Differential Equations, Schaum's Outlines 3rd edition, McGraw-Hill, 2006

[8] Ravi P. Agarwal, Donal O'Regan, An Introduction to Ordinary Differential Equations, Springer, 2008

[9] Tahsin Engin, Yunus A. Çengel, Mühendisler için Diferansiyel Denklemler, Sakarya Üniversitesi, Makina Müh. Bölümü, 2008

[10] Wei Chau Xie, Differential Equations for Engineers, Cambridge University Press, 2010

[11] William E. Boyce, Richard C. DiPrima, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, John Wiley and Sons, 2001

[12] Mircea V. Soare, Petre P. Teodorescu, Ileana Toma, Ordinary Differential Equations with Applications to Mechanics, Springer, 2000