Hafta 8:
Ayrık-zaman Fourier Dönüşümü

Ele Alınacak Ana Konular

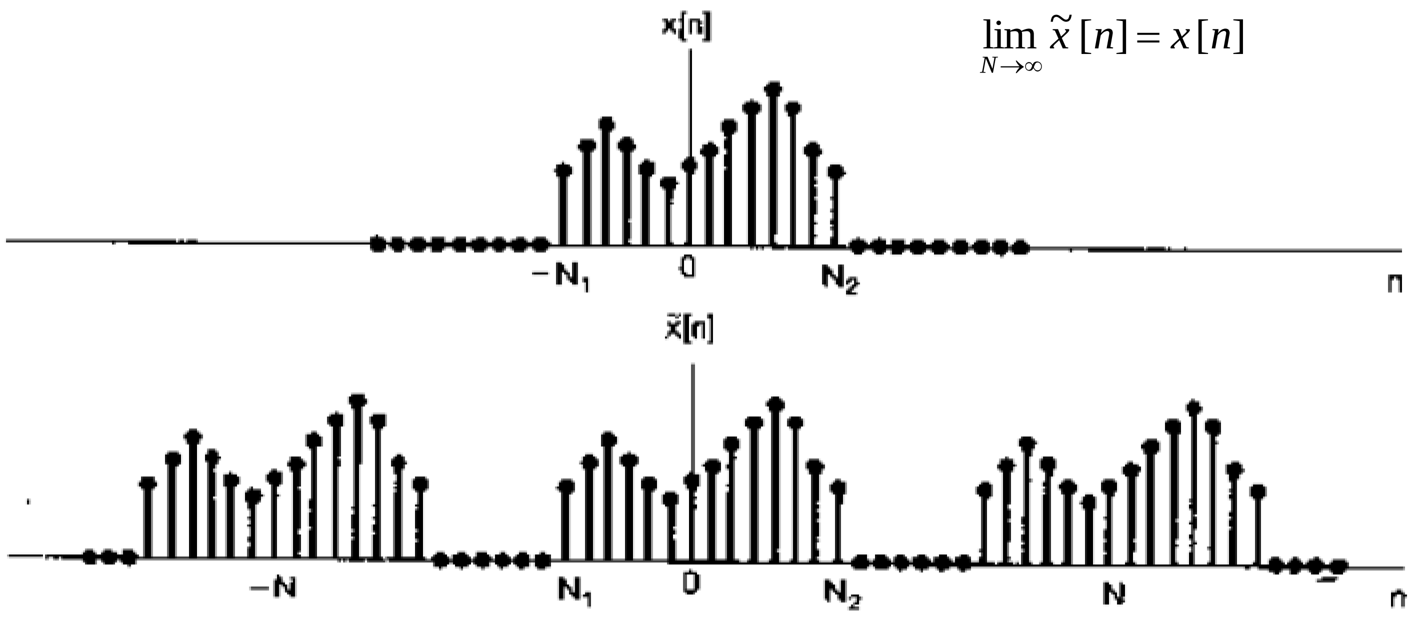
- Ayrık-zaman Fourier dönüşümü
- Ayrık-zaman periyodik işaretler için Fourier dönüşümü
- Ayrık-zaman Fourier dönüşümünün özellikleri
- Doğrusal, sabit katsayılı fark denklemleriyle tanımlanan sistemler

Ayrık-zaman Fourier Dönüşümü

- Aperiyodik bir işaret, periyodik bir işaretin periyod sonsuza giderken limit hali gibi düşünülebilir. Periyodik işaret Fourier serisine açılır ve periyodun sonsuza gitmesi durumunda serinin davranışı incelenir.

- Aşağıda, periyodik olmayan sonlu süreli bir işaret $x[n]$ ile bu işaretten türetilen ve bir periyodu sonlu süreli işarete eşit olan periyodik bir işaret $\tilde{x}[n]$ verilmiştir.

$$\lim_{N\to\infty} \tilde{x}[n] = x[n]$$



Ayrık-zaman Fourier Dönüşümü

- $\tilde{x}[n]$ Fourier serisine açılabilir. $-N_1 \le n \le N_2$ için , $x[n] = \tilde{x}[n]$ ve aralığın dışında $x[n]$ =0 olduğundan

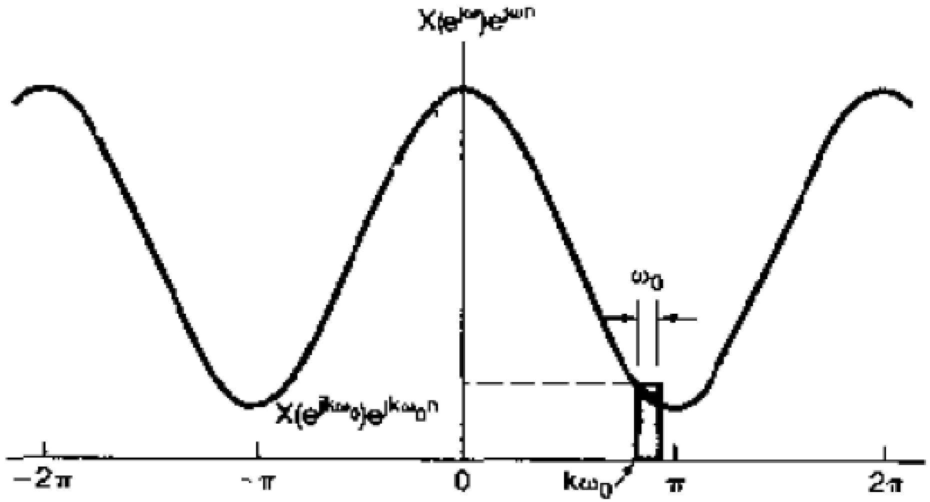
$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \tilde{x}[n] e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_2} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

- $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$ şeklinde tanımlansın.
- O halde, $a_k = \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0})$
- Bulunan katsayılar, Fourier serisinde yerine konulur ve $2\pi/N=\omega_0$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=<N>} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \omega_0$$

Ayrık-zaman Fourier Dönüşümü



- Son toplamadaki her bir terim, yüksekliği $X(e^{jk\omega_0})e^{jk\omega_0 n}$ ve genişliği ω_0 olan bir dikdörtgenin alanıdır. $\omega_0 \rightarrow 0$ limit durumunda, toplama $X(e^{j\omega})e^{j\omega n}$ fonksiyonunun integraline yakınsar. O halde, $N \rightarrow \infty$ için $\tilde{x}[n] \rightarrow x[n]$ gerçeğini kullanırsak, aşağıda verilen ayrık-zaman Fourier dönüşüm çiftini elde ederiz.

$$\boxed{\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \\ X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \end{aligned}}$$

Ayrık-zaman Fourier Dönüşümü

- Sürekli-zaman ve ayrık-zaman Fourier dönüşümleri incelendiğinde önemli farklar olduğu göze çarpmaktadır.

- İlk olarak, sürekli-zaman durumunda analiz ve sentez denklemlerinin ikisi de integral olup, integral aralığı sonsuzdur. Ayrık-zaman durumunda, analiz denklemi sonsuz bir toplama iken sentez denklemi 2π aralığında sonlu bir integraldir.

- İkinci olarak, sürekli-zaman Fourier dönüşümü periyodik değilken (özel durumlar hariç), ayrık-zaman Fourier dönüşümü 2π ile periyodiktir.

- Bu farklılıkların nedeni, harmonik ilişkili sonlu sayıda karmaşık üstel işaret olmasıdır.

- Ayrıca, ayrık-zamanda 0 veya 2π'nın katlarına yakın frekanslar yavaş değişen işaretlerden, π'nin katlarına yakın frekanslar ise hızlı değişen işaretlerden kaynaklanmaktadır.

Ayrık-zaman Fourier Dönüşümü

- Şimdiye kadar yapılan tartışmadan, periyodik bir ayrık-zaman işaretin Fourier serisi katsayılarının, işaretin bir periyodunun ayrık-zaman Fourier dönüşümü cinsinden ifade edilebileceği anlaşılmaktadır.

- $\tilde{x}[n]$, N ile periyodik olsun ve Fourier serisi katsayıları a_k ile gösterilsin. $\tilde{x}[n]$ nin bir periyoduna eşit sonlu süreli bir işaret $x[n]$ ve Fourier dönüşümü $X(e^{j\omega})$ ile belirtilsin. O halde,

$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{j\omega})\Big|_{\omega = k\omega_0}$$

- Tartışma, sonlu süreli işaretler için yapılmıştır. İşaret sonlu olmasa bile, analiz denklemindeki toplama yakınsayabilir ve bu tür işaretler için ayrık-zaman Fourier dönüşümü bulunabilir.

- Ayrık-zaman Fourier dönüşümünün yakınsaması için yeterli olan koşullar sürekli durumdakinden farklıdır.

Ayrık-zaman Fourier Dönüşümü

Ayrık-zaman Fourier dönüşümü için yakınsama koşulu

Koşul : İşaret mutlak toplanabilir veya sonlu enerjiye sahip olmalıdır:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty, \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

Sentez denklemi için yakınsama problemi yoktur çünkü sentez denklemi sonlu bir integraldir.

O halde, sentez denklemi hesaplanırken sürekli-zaman durumunda karşılaşılan Gibbs olayı ile ayrık-zaman durumunda karşılaşılmaz.

Ayrık-zaman Fourier Dönüşümü

ÖRNEK: $x[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1$ işaretinin Fouier dönüşümünü hesaplayınız, genlik ve faz spektrumunu çiziniz.

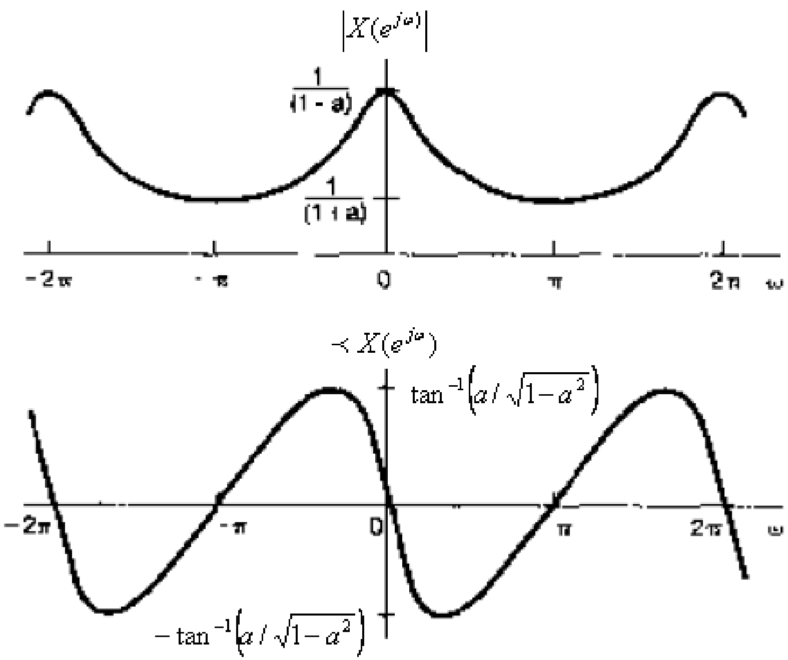
ÇÖZÜM: Fourier dönüşüm denkleminden

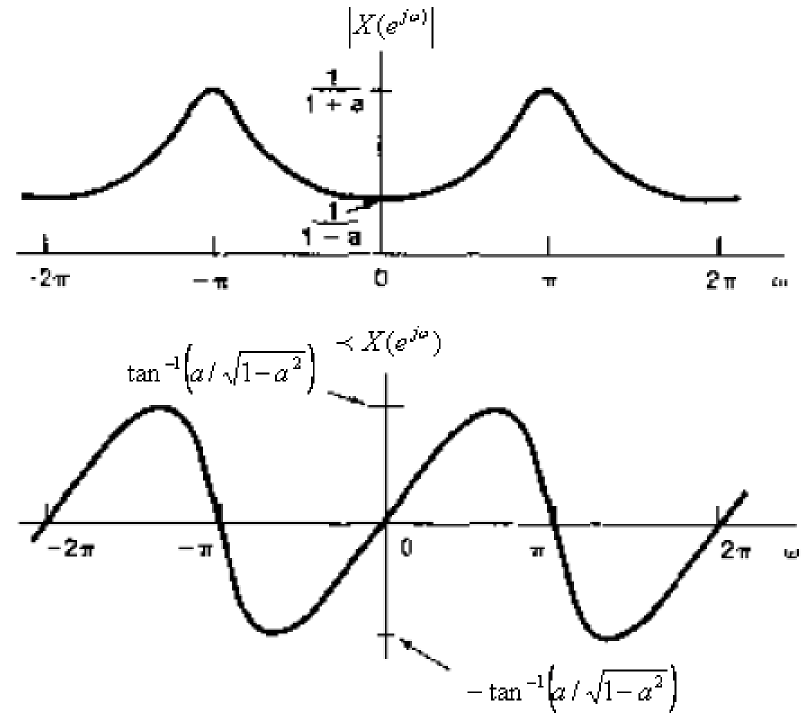
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a e^{-j\omega}\right)^n = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$$

Görüldüğü gibi, işaret gerçel olmasına rağmen Fourier dönüşümü karmaşık değerli olabilmektedir. O halde, ω'nın fonksiyonu olarak Fourier dönüşümünün genliğini (genlik spektrumu) ve fazını (faz spektrumunu) belirleyebilir ve çizebiliriz.

Pozitif ve negatif *a* değerleri için genlik ve faz spektrumları aşağıda çizilmiştir. Her iki durumda da spektrumların 2π ile periyodik olduğuna dikkat ediniz.

$a > 0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $a < 0$





$a > 0$ için işaretin tüm değerleri pozitif olup işaret yavaş değiştiğinden Fourier dönüşümü 0 ve 2π'nin katlarında bileşenlere sahiptir. $a < 0$ için işaretin değeri bir pozitif, bir negatif olup işaret hızlı değiştiğinden Fourier dönüşümü π'nin katlarında frekans bileşenlerine sahiptir.

Ayrık-zaman Fourier Dönüşümü

ÖRNEK: $x(t) = a^{|n|}, \quad |a| < 1$ işaretinin Fouier dönüşümünü hesaplayınız ve frekansın fonksiyonu olarak çiziniz.

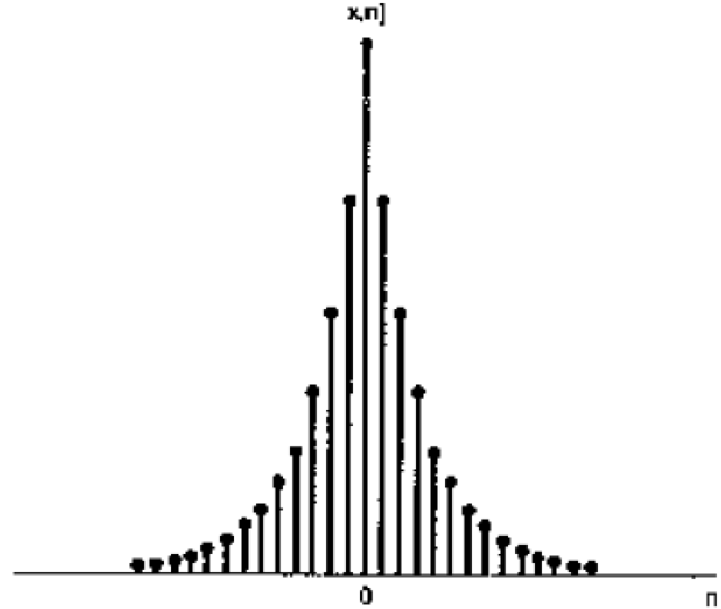
ÇÖZÜM: Fourier dönüşüm denkleminden

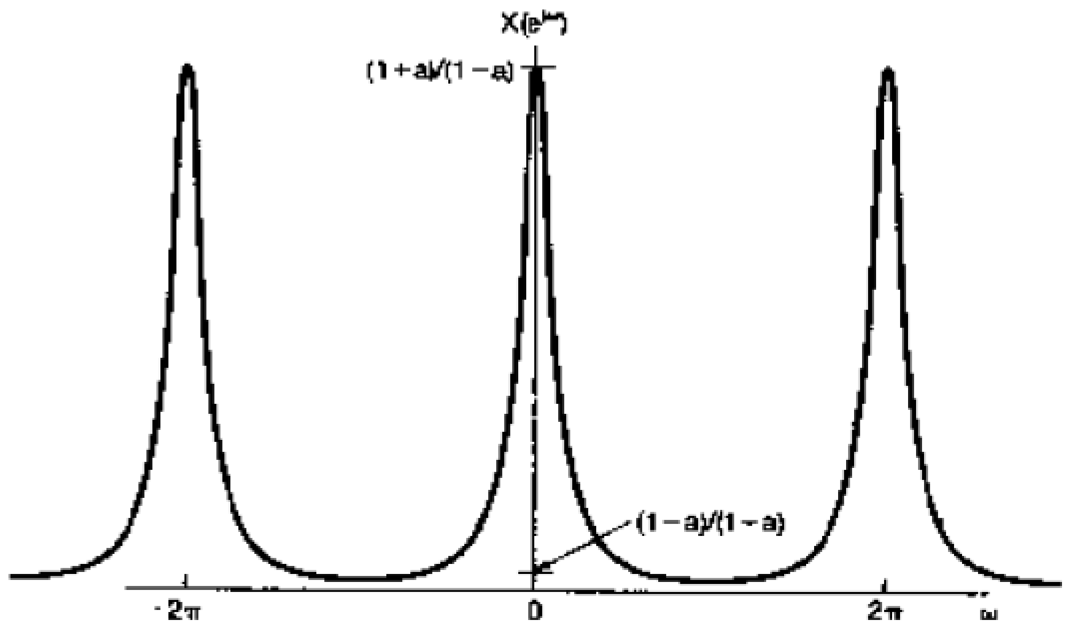
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^{n} e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(a e^{-j\omega}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a e^{j\omega}\right)^n$$

$$= \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}} + \frac{a e^{j\omega}}{1 - a e^{j\omega}} = \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos(\omega) + a^2}$$

Bu durumda Fourier dönüşümü gerçel çıkmıştır. İşaret ve Fourier dönüşümü aşağıda $0 < a < 1$ için çizilmiştir.


x[n]
0
n


X(e^jω)
(1 + a)/(1 − a)
(1 − a)/(1 − a)
-2π
0
2π
ω

Ayrık-zaman Fourier Dönüşümü

ÖRNEK: Ayrık-zaman impuls işaretinin Fouier dönüşümünü hesaplayınız

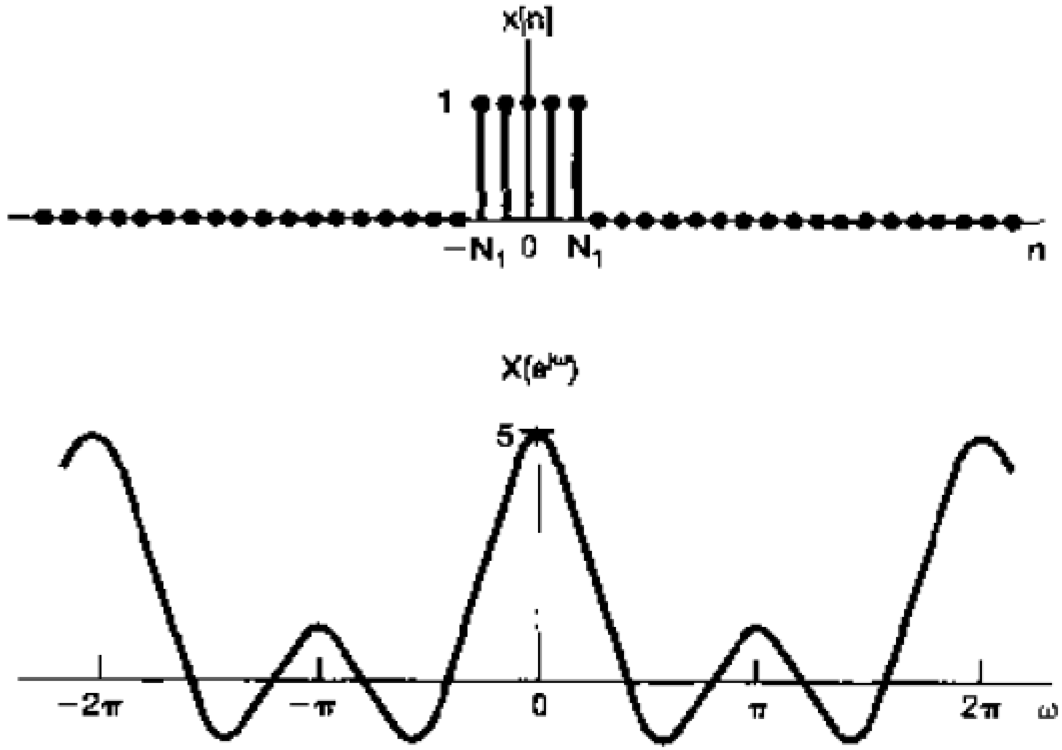
ÇÖZÜM: $$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = 1e^{-j\omega 0} = 1$$

İmpuls işaretinin Fourier dönüşümü tüm frekanslarda eşit bileşenlere sahiptir.

ÖRNEK: Dikdörtgen darbenin Fourier dönüşümünü hesaplayınız

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| < N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}$$

ÇÖZÜM: $$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n} = \frac{\sin[\omega(N_1 + 1/2)]}{\sin(\omega/2)}$$



Sürekli durumda olduğu gibi, darbenin Fourier dönüşümü sinc fonksiyonudur. Ancak, sürekli-zamanda yan lobların genliği devamlı azalırken ayrık-zamanda periyodiklikten dolayı bu durum geçerli değildir.

Periyodik İşaretlerin için Fourier Dönüşümü

- Ayrık-zaman periyodik işaretlerinde Fourier dönüşümünü hesaplamak mümkündür. periyodik işaretlerin Fourier dönüşümü impuls fonksiyonu içermek zorundadır.

- Fourier dönüşümü $X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$ olan işareti bulalım

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)\right)e^{j\omega n}d\omega = \int_{-\pi}^{\pi}\delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega n}d\omega = e^{j\omega_0 n}$$

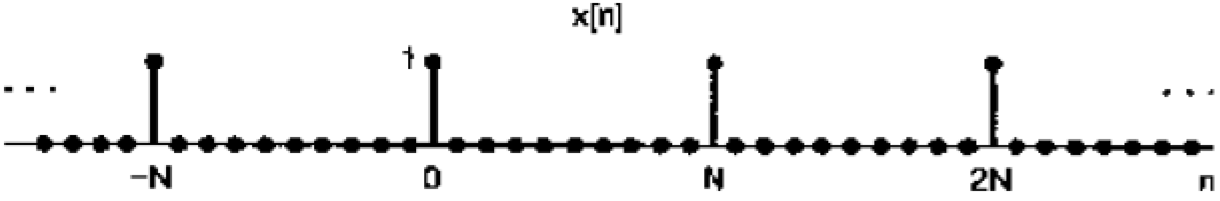
- Periyodik bir ayrık-zaman işaret Fourirer serisine açılabilir: $x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$

- Açılımındaki karmaşık üstel terimlerin Fourier dönüşümü temel frekansın katlarında impulslardır. Doğrusallık özelliğinden, sonsuz adet işaretin toplamının Fourier dönüşümü, tek tek Fourier dönüşümlerinin toplamına eşittir. O halde,

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right)$$

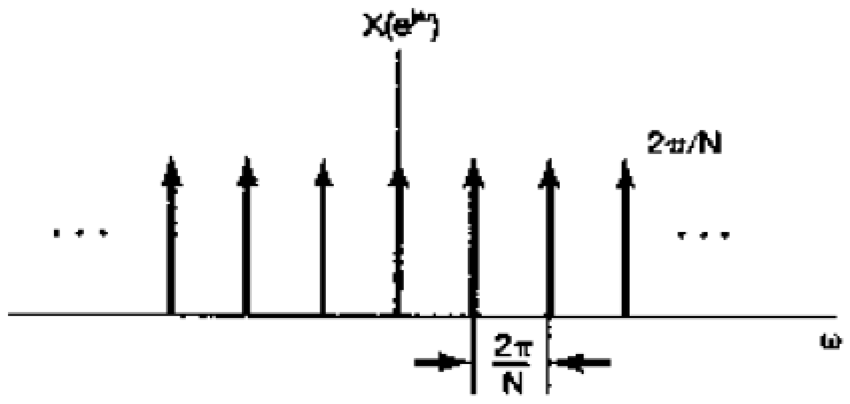
Periyodik İşaretlerin için Fourier Dönüşümü

ÖRNEK: $x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN]$ ile verilen periyodik işaretin Fourier dönüşümü nedir?



ÇÖZÜM: Fourier serisi katsayıları tüm *n* değerleri için 1/*N* olarak bulunmuştu.

$$X(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi\, a_k\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{N}\right)=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{N}\right)$$



Periyodik İşaretlerin için Fourier Dönüşümü

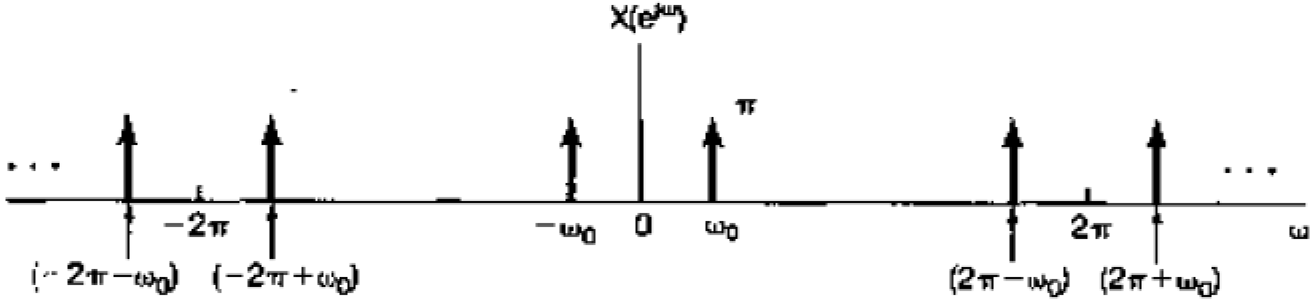
ÖRNEK: $x[n]=\cos(\omega_0 n)$ periyodik işaretinin Fourier dönüşümü nedir?

ÇÖZÜM:

$$x[n]=\cos(\omega_0 n)=\frac{1}{2}e^{j\omega_0 n}+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{l=-\infty}^{\infty}2\pi a_1\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)+\sum_{l=-\infty}^{\infty}2\pi a_{-1}\delta(\omega+\omega_0-2\pi l)$$

$$=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)+\sum_{l=-\infty}^{\infty}\pi\delta(\omega+\omega_0-2\pi l)$$



İşaret	Fourier Dönüşümü	Fourier Serisi Katsayıları
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	a_k
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$	$\omega_0 = 2\pi m / N \Rightarrow$ periyodik $a_k = \begin{cases} 1, & k = m, m \pm N, m \pm 2N, \ldots \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$
$\cos(\omega_0 n)$	$\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)\right)$	$\omega_0 = 2\pi m / N \Rightarrow$ periyodik $a_k = \begin{cases} 1/2, & k = \pm m, \pm m \pm N, \pm m \pm 2N, \ldots \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$
$\sin(\omega_0 n)$	$\frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) - \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)\right)$	$\omega_0 = 2\pi m / N \Rightarrow$ periyodik $a_k = \begin{cases} 1/2j, & k = m, m \pm N, m \pm 2N, \ldots \\ -1/2j, & k = -m, -m \pm N, -m \pm 2N, \ldots \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$
$x[n] = 1$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi l)$	$a_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$
Periyodik kare dalga $x[n] = \begin{cases} 1, & \lvert n \rvert < N_1 \\ 0, & N_1 < \lvert n \rvert < N/2 \end{cases}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \begin{cases} \frac{\sin[(2\pi k/N)(N_1 + 1/2)]}{N \sin(\pi k / N)}, & k \neq 0, \pm N, \ldots \\ (2N_1 + 1)/N, & k = 0, \pm N, \ldots \end{cases}$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN)$	$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N})$	$a_k = \frac{1}{N}, \quad \forall k$

İşaret	**Fourier Dönüşümü**	**Fourier Serisi Katsayıları**
$a^n u[n], \quad \lvert a\rvert < 1$	$\dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}$	İşaret periyodik değil
$x[n] = \begin{cases} 1, & \lvert n\rvert \le N_1 \\ 0, & \lvert n\rvert > N_1 \end{cases}$	$\dfrac{\sin[\omega(N_1+1/2)]}{\sin(\omega/2)}$	İşaret periyodik değil
$\dfrac{\sin(Wn)}{\pi n} = \dfrac{W}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\dfrac{Wn}{\pi}\right)$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \le \lvert\omega\rvert \le W \\ 0, & W < \lvert\omega\rvert \le \pi \end{cases}$	İşaret periyodik değil
$\delta[n]$	1	İşaret periyodik değil
$u[n]$	$\dfrac{1}{1-e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega - 2\pi k)$	İşaret periyodik değil
$\delta[n-n_0]$	$e^{-\omega n_0}$	İşaret periyodik değil
$(n+1)a^n u[n], \quad \lvert a\rvert < 1$	$\dfrac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$	İşaret periyodik değil
$\dfrac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} a^n u[n], \quad \lvert a\rvert < 1$	$\dfrac{1}{(1-ae^{-j\omega})^r}$	İşaret periyodik değil

Ayrık-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

- Kolaylık olması bakımından, ayrık-zaman Fourier dönüşümü ve tersini belirtmek için sırasıyla $F\{x[n]\}$ ve $F^{-1}\{X(e^{j\omega})\}$ kısa gösterilimini kullanacağız. Ayrıca, sürekli-zaman Fourier dönüşüm çiftini belirtmek için

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(\mathrm{e}^{j\omega})$$

notasyonunu kullanacağız.

- Ayrık-zaman Fourier dönüşümünün aşağıda verilen özellikleri aracılığıyla, Fourier dönüşümü bilinen işaretlerden çoğu işaretin Fourier dönüşümünü elde etmek kolaylaşmaktadır.

- Aşağıda sadece en önemli özelliklerin ispatı verilecektir. Diğer özelliklerin ispatı benzer şekilde yapılabilir.

Ayrık-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Zamanda öteleme: $x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) \Rightarrow x[n-n_0] \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$

İspat: Ters Fourier dönüşüm denkleminden $x[n] = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$

Eşitliğin her iki tarafında *n* yerine n-n_0 yazılırsa

$$x[n-n_0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega(n-n_0)} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(X(e^{j\omega}) e^{-j\omega n_0}\right) e^{j\omega n} d\omega$$

Yorum: Bir sürekli-zaman işaret ötelendiğinde, Fourier dönüşümünün genliği değişmez, fazı ise öteleme ile doğru orantılı bir şekilde ötelenir.

$$F\{x[n]\} = X\left(e^{j\omega}\right) = \left|X(e^{j\omega})\right| e^{j\sphericalangle X(e^{j\omega})}$$

$$F\{x[n-n_0]\} = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right| e^{j\left[\sphericalangle X(e^{j\omega}) - \omega n_0\right]}$$

Ayrık-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Frekansta türev alma: $x[n] \stackrel{F}{\longleftrightarrow} X(\mathrm{e}^{j\omega}) \Rightarrow nx[n] \stackrel{F}{\longleftrightarrow} j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

İspat: Fourier dönüşüm denkleminden $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$

Eşitliğin her iki tarafında ω'ya göre türevi alınırsa

$$\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-jnx[n]\right) e^{-j\omega n}$$

Son eşitliğin her iki tarafı j ile çarpılırsa sonuç elde edilmiş olur.

Ayrık-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Konvolüsyon özelliği: $y[n] = x[n] * h[n] \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$

İspat: Konvolüsyon denkleminden $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$

O halde,

$$Y(e^{j\omega}) = F\{y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]\right]e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-k]e^{-j\omega n}\right]$$

Zamanda öteleme özelliğinden parantez içindeki terim $e^{-j\omega k}H(e^{j\omega})$ dir. O halde,

$$Y(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\omega k}H(e^{j\omega})$$

$$= H(e^{j\omega})\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\omega k} = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

Yorum: İki işaretin konvolüsyonunun Fourier dönüşümü, Fourier dönüşümlerinin çarpımına eşittir. Yani, iki işaretin konvolüsyonunu bulmak için, Fourier dönüşümleri çarpılır ve çarpımın ters Fourier dönüşümü alınır.

Ayrık-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

ÖRNEK: $x[n]=\beta^n u[n]$ $|\beta|<1$ ve $h[n]=\alpha^n u[n]$ $|\alpha|<1$ işaretlerinin konvolüsyonunu Fourier dönüşümünden yararlanarak hesaplayınız.

ÇÖZÜM: $$X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-\beta e^{-j\omega}},\ H(j\omega)=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}},\ Y(j\omega)=\frac{1}{\left(1-\beta e^{-j\omega}\right)\left(1-\alpha e^{-j\omega}\right)}$$

$Y(e^{j\omega})$ basit kesirlere açılırsa $Y(e^{j\omega})=\dfrac{A}{1-\alpha e^{-j\omega}}+\dfrac{B}{1-\beta e^{-j\omega}}=\dfrac{1}{\alpha-\beta}\left[\dfrac{\alpha}{1-\alpha e^{-j\omega}}-\dfrac{\beta}{1-\beta e^{-j\omega}}\right]$

$y[n]$'yi elde etmek için ters Fourier dönüşümü almak yeterlidir.

$$\begin{aligned} y[n] &= F^{-1}\left\{Y(e^{j\omega})\right\}=F^{-1}\left\{\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\frac{\alpha}{1-\alpha e^{-j\omega}}-\frac{\beta}{1-\beta e^{-j\omega}}\right]\right\} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\alpha^n u[n]-\frac{\beta}{\alpha-\beta}\beta^n u[n] \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right]u[n] \end{aligned}$$

Ayrık-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Çarpma (modülasyon) özelliği: $y[n] = x_1[n]x_2[n] \xleftrightarrow{F} Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\left[X_1(e^{j\omega}) * X_2(e^{j\omega})\right]$

İspat: Fourier dönüşüm denkleminden $Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2[n]e^{-j\omega n}$

$x_1[n]$ yerine ters Fourier dönüşüm ifadesi kullanılır ve toplama ile integralin sırası değiştirilirse

$$
\begin{aligned}
Y(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})e^{j\theta n}d\theta\right\}x_2[n]e^{-j\omega n} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n]e^{-j(\omega-\theta)n}\right]d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[X_1(e^{j\omega}) * X_2(e^{j\omega})\right]
\end{aligned}
$$

Ayrık-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Özellik	**Aperiyodik İşaret**	**Fourier dönüşümü**
	$x[n]$ $y[n]$	$X(e^{j\omega})$ $Y(ej\omega)$
Doğrusallık	$ax[n]+by[n]$	$aX(e^{j\omega})+bY(e^{j\omega})$
Zamanda öteleme	$x[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$
Frekansta öteleme	$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
Eşlenik alma	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
Zamanda tersine çevirme	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
Zamanda ölçekleme	$x_{\lvert k\rvert}[n]=\begin{cases} x[n/k], & \text{n, k'nınkatı} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$	$X\left(e^{jk\omega}\right)$
Konvolüsyon	$x[n]*y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
Zamanda çarpma	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi}\left[X(e^{j\omega})*Y(e^{j\omega})\right]$

Özellik	**Aperiyodik İşaret**	**Fourier Dönüşümü**
Zamanda fark alma	$x[n]-x[n-1]$	$(1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$
Zamanda toplama	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}}X(e^{j\omega})+\pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$
Frekansta türev alma	$nx[n]$	$j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
Gerçel işaretler için eşlenik simetriklik	$x[n]$ gerçel	$\begin{cases} X(e^{j\omega})=X^{*}(e^{-j\omega}) \\ \Re e\{X(e^{j\omega})\}=\Re e\{X(e^{-j\omega})\} \\ \Im m\{X(e^{j\omega})\}=-\Im m\{X(e^{-j\omega})\} \\ \lvert X(e^{j\omega})\rvert=\lvert X(e^{-j\omega})\rvert \\ \prec X(e^{j\omega})=-\prec X(e^{-j\omega}) \end{cases}$
Gerçel ve çift işaretler Gerçel ve tek işaretler	$x(t)$ gerçel ve çift $x(t)$ gerçel ve tek	$X(e^{j\omega})$ gerçel ve çift $X(e^{j\omega})$ saf karmaşık ve tek
Gerçel işaretlerin çift-tek ayrıştırması	$x_e[n]=\mathrm{Ev}\{x[n]\}$ $[x[n]$ gerçel$]$ $x_o[n]=\mathrm{Od}\{x[n]\}$ $[x[n]$ gerçel$]$	$\Re e\{X(e^{j\omega})\}$ $j\Im m\{X(e^{j\omega})\}$
Aperiyodik İşaretler için Parseval İlişkisi $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lvert x[n]\rvert^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\lvert X(e^{j\omega})\rvert^2 d\omega$		

Doğrusal, Sabit Katsayılı Fark Denklemleriyle Tanımlanan Sistemler

- Girişi-çıkış ilişkisi aşağıda verilen ayrık-zaman sistemin frekans yanıtını bulalım

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- Konvolüsyon özelliğinden, $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \dfrac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$

- Fark denkleminin her iki tarafının Fourier dönüşümü alınır ve Fourier dönüşümünün öteleme özelliği kullanılırsa frekans yanıtı bulunabilir:

$$F\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k]\right\} = F\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]\right\} \Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k F\{y[n-k]\} = \sum_{k=0}^{M} b_k F\{x[n-k]\}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k} Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k} X(e^{j\omega}) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}}$$

Doğrusal, Sabit Katsayılı Diferansiyel Denklemlerle Tanımlanan Sistemler

ÖRNEK: Giriş-çıkış ilişkisi aşağıda verilen sistemin frekans yanıtını ve impuls yanıtını bulunuz.

$$y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=2x[n]$$

ÇÖZÜM: Her iki tarafın Fourier dönüşümü alınırsa

$$Y(e^{j\omega})-\frac{3}{4}e^{-j\omega}Y(e^{j\omega})+\frac{1}{8}e^{-j2\omega}Y(e^{j\omega})=2X(e^{j\omega})$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega})=\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\frac{2}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-j2\omega}}$$

$H(e^{j\omega})$'nın ters Fourier dönüşümü alınırsa impuls yantı elde edilir.

$$h[n]=F^{-1}\left\{H(e^{j\omega})\right\}=F^{-1}\left\{\frac{4}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}-\frac{2}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\right\}$$

$$\Rightarrow h[n]=4\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]-2\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]$$