SAYISAL TÜREV

[a,b] aralığında tanımlı f(x) fonksiyonunun verildiğini varsayalım. [a,b] aralığında,

$$w=\{x_i \mid x_{i+1}=x_i+h,\ h=\frac{b-a}{n},\ x_0=0\ ;\ x_n=b\}$$

eşit adımlı kafesini tanımlayalım. $x_i \in w$ noktalarında f(x) fonksiyonunun $f(x_i)=f_i$ değerlerinin belli olduğunu varsayalım. Türev formüllerini elde etmeden önce **sonlu fark** tanımlarını verelim.

$$\Delta f_i=f_{i+1}-f_i \qquad (1)$$

şeklinde tanımlanan Δf_i değerine "sağ sonlu fark " denir.

$$\nabla f_i=f_i-f_{i-1} \qquad (2)$$

şeklinde tanımlanan ∇f_i değerine "sol sonlu fark" denir.

$$\delta f_i=\frac{1}{2}(\Delta f_i+\nabla f_i)=\frac{1}{2}(f_{i+1}-f_{i-1}) \qquad (3)$$

şeklinde tanımlanan δf_i ye "merkez sonlu fark " denir.

(1)-(3) ifadeleri **birinci dereceden sonlu fark** ifadeleri olarak adlandırılır. Birinci dereceden sonlu fark ifadelerinden yararlanarak 2. dereceden sonlu farkları da tanımlayabiliriz:

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i) = f_{i+2} - f_{i+1} - f_{i+1} + f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i \quad (4)$$

$$\nabla^2 f_i = \nabla(\nabla f i) = \nabla(f_i - f_{i-1}) = f_i - f_{i-1} - f_{i-1} + f_{i-2} = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2} \quad (5)$$

$$\Delta(\nabla f i) = \Delta(f_i - f_{i-1}) = f_{i+1} - f_i - f_i + f_{i-1} = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1} \quad (6)$$

$$\nabla(\Delta f_i) = \nabla(f_{i+1} - f_i) = f_{i+1} - f_i - f_i + f_{i-1} = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1} \quad (7)$$

(4)-(7) ifadelerine göre;

$$\Delta^2(f_{i-1}) = \nabla^2(f_{i+1}) = \Delta(\nabla f_i) = \nabla(\Delta f_i)$$

Eşitliklerinin sağlandığını söyleyebiliriz. Benzer şekilde istenilen dereceden sonlu fark ifadelerini yazabiliriz.

[a,b] aralığında tanımlı ve (n+1). Mertebeye kimi sürekli diferansiyellenebilir f(x) fonksiyonunun x_0 noktası civarında Taylor serisine açılımı yazılım.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad (8)$$

O halde (8) e bezer şekilde sürekli diferansiyellenebilir u(x) fonksiyonunun x_i noktasında Taylor serisine açılımını aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$u(x) = u(x_i) + u'(x_i)(x - x_i) + \frac{u''(x_i)}{2!}(x - x_i)^2 + \frac{u'''(x_i)}{3!}(x - x_i)^3 + \frac{u^{IV}(\xi)}{4!}(x - x_i)^4 \quad (9)$$

(9) ifadesinde x yerine $\mathbf{x_{i+1}}$ ve $\mathbf{x_{i-1}}$ yazarsak ve $x_{k+1} = x_k + h$ olduğunu göz önüne alırsak

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + o(h^4) \quad (10)$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{3}u'''(x_i) + o(h^4) \quad (11)$$

elde ederiz.

(10) ifadesinde $u(x_i)$ yi sol tarafa geçirelim ve her tarafı h ile bölelim:

$$\frac{u(x_{i+1})-u(x_i)}{h} = u'(x_i)+\frac{h}{2}u''(x_i)+\frac{h^2}{6}u'''(x_i)+o(h^3) \qquad (12)$$

Benzer şekilde (11) ifadesinde $u(x_i)$ yi sol tarafa geçirelim ve her tarafı (–h) ile bölelim:

$$\frac{u(x_i)-u(x_{i-1})}{h} = u'(x_i)-\frac{h}{2}u''(x_i)+\frac{h^2}{6}u'''(x_i)-o(h^3) \qquad (13)$$

Sonuçta (12) ve (13) ifadelerinde toplam hatanın **o(h)** (- yani h adımın birinci derece hızı ile sıfıra yaklaşan sonsuz küçülen fonksiyon) olduğunu göz önüne alırsak bu ifadeleri farklı şekilde yazabiliriz:

$$u'(x_i)= \frac{(u_{i+1})-(u_i)}{h}+o(h) \qquad (12')$$

$$u'(x_i)=\frac{(u_i)-(u_{i-1})}{h}+o(h) \qquad (13')$$

$$u(x_{i+1})= u(x_i)+hu'(x_i)+\frac{h^2}{2}u''(x_i)+\frac{h^3}{6}u'''(x_i)+o(h^4) \qquad (10)$$

$$u(x_{i-1})=u(x_i)-hu'(x_i)+\frac{h2}{2}u''(x_i)-\frac{h^3}{3}u'''(x_i)+o(h^4) \qquad (11)$$

Şimdi ise (10) ve (11) ifadelerini taraf tarafa çıkaralım ve eşitliğin her iki tarafını 2h ile bölelim. Sonuçta

$$\frac{u(x_{i+1})-u(x_{i-1})}{2h} = u'(x_i) + \frac{h^2}{3!}u'''(x_2) + O(h^4) \qquad (14)$$

ifadesini elde ederiz. Buradan ise,

$$u'(x_i) = \frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h} + O(h^2) \qquad (14')$$

ifadesini yazabiliriz.

İkinci mertebeden türev ifadesini elde etmek için benzer işlemler yapabiliriz. (10) ve (11) ifadelerini taraf tarafa toplayalım:

$$u(x_{i+1})= u(x_i)+hu'(x_i)+\frac{h^2}{2}u''(x_i)+\frac{h^3}{6}u'''(x_i)+o(h^4) \qquad (10)$$

$$u(x_{i-1})=u(x_i)-hu'(x_i)+\frac{h2}{2}u''(x_i)-\frac{h^3}{3}u'''(x_i)+o(h^4) \qquad (11)$$

$$u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) = 2u(x_i) + h^2u''(x_i) + O(h^4)$$

Elde edilen eşitliğinin her iki tarafından $2u(x_i)$ yi çıkaralım ve her tarafı h^2 ye bölelim.

Bu durumda

$$u''(x_i) = \frac{u_{i+1}-2u_{i+1}+u_{i-1}}{h^2} + o(h^2) \qquad (15)$$

elde ederiz.

(12), (13), (14) ve (15)i sembolik olarak aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\frac{du}{dx} \sim u_{x,i} = \frac{u_{i+1}-u_i}{h} = \frac{\Delta u_i}{h} \qquad (16)$$

$$\frac{du}{dx} \sim u_{\bar{x},i} = \frac{u_i-u_{i-1}}{h} = \frac{\nabla u_i}{h} \qquad (17)$$

$$\frac{du}{dx} \sim u_{\overset{\circ}{x},i} = \frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h} = \frac{\delta u_i}{h} \qquad (18)$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} \sim u_{\bar{x}x,i} = \frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2} = \frac{\Delta(\nabla u_i)}{h^2} = \frac{\nabla(\Delta u_i)}{h^2} \qquad (19)$$

(16)-(19) ifadelerinden yararlanarak istenen mertebeden sayısal türev formüllerini elde edebiliriz. Burada (16)ya “sağ türev”, (17) ye “sol türev”, (18) e ise “merkez türev” denir.

<u>Yukarıda elde edilen sayısal türev formüllerinden yararlanarak istenilen mertebeden türev formüllerini elde edebiliriz.</u>

Örneğin: Dördüncü mertebeden türevin yaklaşık ifadesini :

$u_{x\bar{x}\bar{x}x,i}$ **şeklinde bulunuz**

$$u_{x\bar{x}\bar{x}x,i}=\left\{\frac{u_{i+1}-u_i}{h}\right\}_{\bar{x}\bar{x}x,i}=\left\{\frac{1}{h}\left[\frac{(u_{i+1}-u_i)-(u_i-u_{i-1})}{h}\right]\right\}_{\bar{x}x,i}$$

$$=\left\{\frac{1}{h}\left[\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h}\right]\right\}_{\bar{x}x,i}=\left\{\frac{1}{h^2}\left[u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}\right]_{\bar{x}}\right\}_{x,i}$$

$$=\left\{\frac{1}{h^2}\left[\frac{(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1})-(u_i-2u_{i-1}+u_{i-2})}{h}\right]\right\}_{x,i}=$$

$$=\left\{\frac{1}{h^3}\left[u_{i+1}-3u_i+3u_{i-1}-u_{i-2}\right]\right\}_{x,i}$$

$$=\frac{1}{h^3}\left[\frac{(u_{i+2}-3u_{i+1}+3u_i-u_{i-1})-(u_{i+1}-3u_i+3u_{i-1}-u_{i-2})}{h}\right]=$$

$$=\frac{1}{h^4}\left[u_{i+2}-4u_{i+1}+6u_i-4u_{i-1}+u_{i-2}\right]$$

Benzer şekilde $u_{x\bar{x}xx,i}=?$, $u_{x\bar{x}x\bar{x},i}=?$, $u_{\overline{xxxx},i}=?$, $u_{xxxx,i}=?$ gibi farklı türev formüllerini öğrenciler elde edebilirler.

$$\frac{du}{dx}\sim u_{x,i}=\frac{u_{i+1}-u_i}{h} \qquad (16)$$

$$\frac{du}{dx} \sim u_{\bar{x},i} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \quad (17)$$

$$\frac{du}{dx} \sim u_{\overset{\circ}{x},i} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \quad (18)$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} \sim u_{\bar{x}x,i} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \quad (19)$$