Lineer olmayan Denklemlerin Sayısal Çözümü

Basit İterasyon YÖNTEMİ

Basit İterasyon Yöntemi

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

lineer olmayan denklemini ele alalım. (1) denkleminin $x = \alpha$ çözümü $x = \alpha \in [a, b]$ olsun. Yani,

$$f(a)f(b) < 0 \qquad (2)$$

koşulu sağlanır. Bellidir ki (1) denklemini her zaman

$$x = \varphi(x) \qquad (3)$$

şeklinde yazabiliriz.

Belli koşullar dahilinde

$$x_k = \varphi(x_{k-1}) \qquad (4)$$

yaklaşımı ile elde edilen x_k'lar dizisi denklemin α çözümüne yaklaşıyor.

(4) yaklaşımlarında başlangıç nokta olarak α noktasının yakın civarında herhangi x_0 noktası ele alınabilir.

Çözüm civarında $\{|\varphi'(x)| < 1\}$ olduğundan

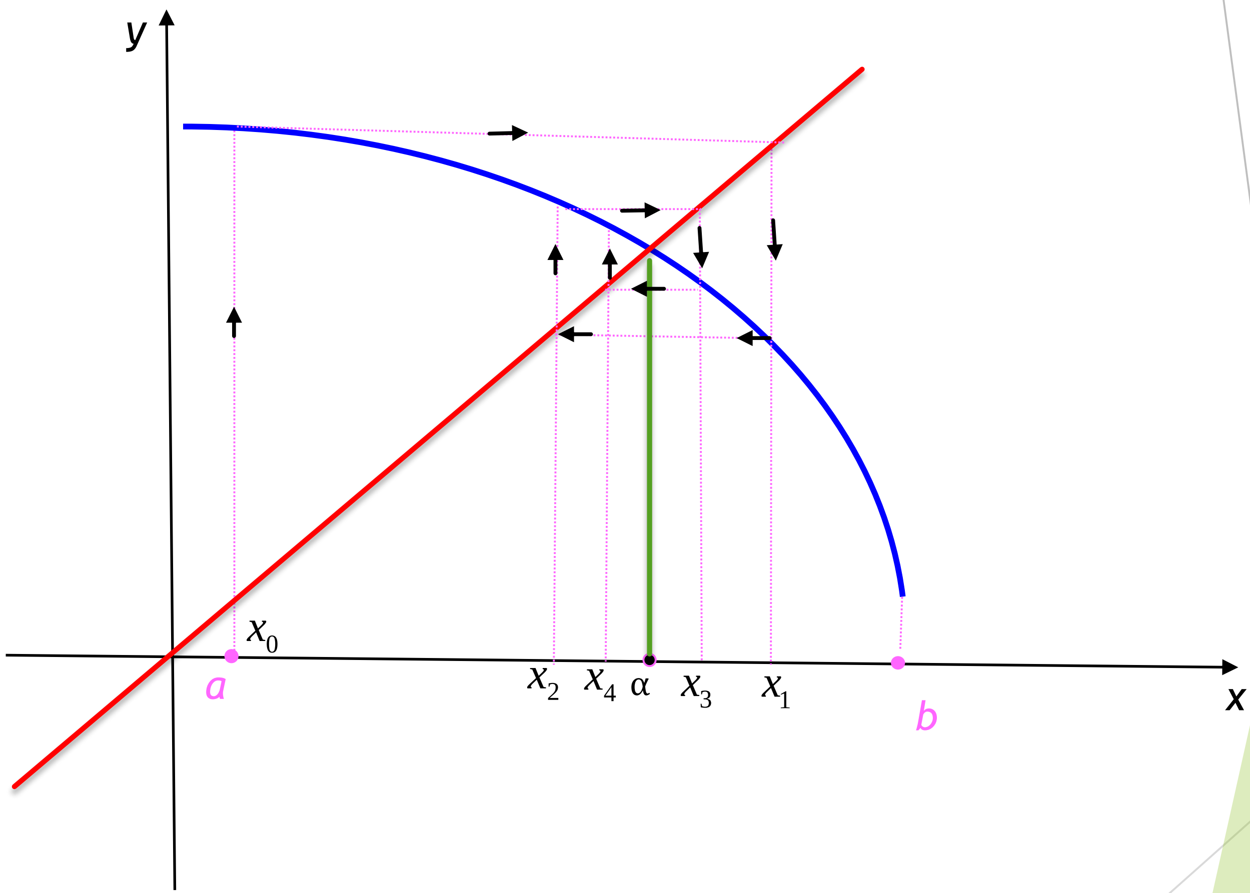
$x_{k+1} = \varphi(x_k),\ k = 0,1,2, \ldots$

İşlemler $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ olduğunda durdurulur.

$0 < \varphi'(x) \leq P < 1$ olduğunda çözüme x_0 başlangıç yaklaşımının olduğu taraftan, diğer durumda ise her iki taraftan yaklaşımlar söz konusudur.

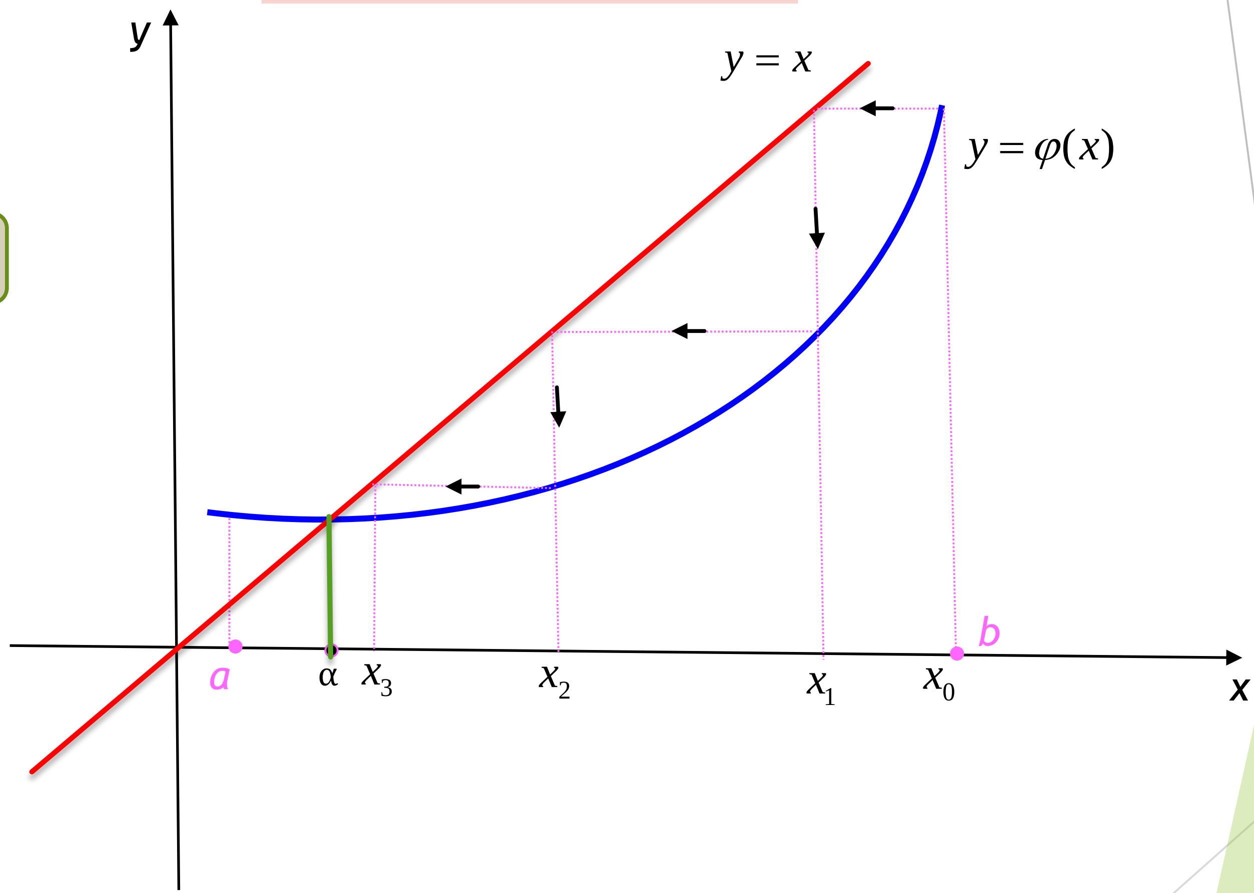
BASİT İTERASYON a)

$x_0 = a$



BASİT İTERASYON b)

$x_0 = b$



$x - x^3 = 0 \qquad x = 1 \qquad [\tfrac{1}{2}; 2]$

$x = x^3 \qquad\qquad x_0 = 2$

$x_0 = \frac{1}{2} \qquad\qquad x_1 = x_0^3 = 8$

$x_1 = x_0^3 = \frac{1}{8}. \qquad\qquad x_2 = x_1^3 = 512$

$x_2 = x_1^3 = \frac{1}{512} \qquad\qquad x_3 = x_2^3 = \ldots$

$x_3 = x_2^3 = \ldots \qquad\qquad x_4 = x_3^3 = \ldots$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$0 \qquad\qquad \infty$

$\frac{x - x^3}{50} = 0. \qquad\qquad x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_k^3}{50}.$

$x = x + \frac{x - x^3}{50}$

$\varphi(x) = x + \frac{x - x^3}{50}$

$\varphi'(x) = 1 + \frac{1 - 3x^2}{50}.$

$\varphi'(2) = 1 - \frac{11}{50} < 1. \qquad \varphi'(\tfrac{1}{2}) < 1$

ÖRNEK $x - cosx = 0$ **denkleminin çözümünü İkiye bölme yöntemi yardımı ile $\varepsilon = 10^{-2}$ kesinliği ile bulunuz.**

$$x = cosx$$

denkleminin çözümünün $[0, \pi/2]$ **aralığında olduğunu grafik yardımı ile belirleyebiliriz.**

Gerçekten $f(x) = x - cosx$ **fonksiyonu için**

$$f(0) = 0 - cos0 = -1 < 0$$

$$f(1) = 1 - cos1 = 0.4397 > 0$$

$f(0)f(1) < 0$ **elde edilir.**

Yani denkleminin **[0,1]** **aralığında çözümü vardır.**

X=cos x

$$\varphi(x) = cos\ x$$

$$\varphi'(x) = -\sin\ x$$

$$\left|\varphi'(x)\right| = \left|-\sin\ x\right| < 1$$

$$x_{\mathrm{k+1}} = \cos x_{\mathrm{k}}$$

x_0 =0 olsun

$x_0 = 0$ olsun

$x_{k+1} = \cos x_k$

$x_1 = cos x_0$ = cos0 = 1	$\lvert x_1 - x_0 \rvert = \lvert 1-0 \rvert = 1 > \varepsilon$
$x_2 = cos x_1$ = cos1 = 0.5403	$\lvert x_2 - x_1 \rvert = \lvert 0.5403 - 1 \rvert > \varepsilon$
$x_3 = cos x_2$ = cos 0.5403 = 0.8576	$\lvert x_3 - x_2 \rvert = \lvert 0.8576 - 0.5403 \rvert > \varepsilon$
$x_4 = cos x_3$ = cos 0.8576 = 0.6542	$\lvert x_4 - x_3 \rvert = \lvert 0.6542 - 0.8576 \rvert > \varepsilon$
$x_5 = cos x_4$ = cos 0.6542 = 0.7936	$\lvert x_5 - x_4 \rvert = \lvert 0.7936 - 0.6542 \rvert > \varepsilon$
$x_6 = cos x_5$ = cos 0.7936 = 0.7012	$\lvert x_6 - x_5 \rvert = \lvert 0.7012 - 0.7936 \rvert > \varepsilon$
$x_7 = cos x_6$ = cos 0.7012 = 0.7641	$\lvert x_7 - x_6 \rvert = \lvert 0.7641 - 0.7012 \rvert > \varepsilon$
$x_8 = cos x_7$ = cos 0.7641 = 0.7221	$\lvert x_8 - x_7 \rvert = \lvert 0.7221 - 0.7641 \rvert > \varepsilon$
$x_9 = cos x_8$ = cos 0.7221 = 0.7504	$\lvert x_9 - x_8 \rvert = \lvert 0.7641 - 0.7504 \rvert > \varepsilon$
$x_{10} = cos x_9$ = cos 0.7504 = 0.7314	$\lvert x_{10} - x_9 \rvert = \lvert 0.7314 - 0.7641 \rvert > \varepsilon$
$x_{11} = cos x_{10}$ = cos 0.7314 = 0.7442	$\lvert x_{11} - x_{10} \rvert = \lvert 0.7442 - 0.7314 \rvert = 0.0128 > \varepsilon$
$x_{12} = cos x_{11}$ = cos 0.7442=0.7356	$\lvert x_{12} - x_{11} \rvert = \lvert 0.7356 - 0.7442 \rvert = 0.0086 < \varepsilon$