OLASILIK VE RASTLANTI DEĞİŞKENLERİ

DERS NOTLARI

Yrd. Doç. Dr. Bülent Çavuşoğlu

Yrd. Doç. Dr. Emin Argun Oral

Şubat 2009
II. Sürüm

ÖNSÖZ (II.SÜRÜM)

Türkçe kaynakların azlığı biz öğretim üyelerini kendi ders notlarımızı düzgün bir formatta hazırlayarak öğrenciye sunma yönünde motive etmektedir. Ancak ders notlarının bir kitap kadar detaylı ve kapsamlı hale gelmesi için ayrıca özenli bir çalışma gerekmektedir. Bu çalışma ise bir süreci gerektirmektedir. Şu andaki haliyle ikinci sürümden amaçladığımız öğrencinin rahatlıkla takip edebileceği bir yardımcı kaynak oluşturmaktır. Dolayısıyla bu ders notlarının bir ders kitabı yerine geçemeyeceği ve dersin öğretim üyesi tarafından tavsiye edilen yerli ve yabancı kaynaklarla beraber düşünüldüğünde katkısının amaçlandığı yönde olacağı göz önünde bulundurularak bu notlardan faydalanılmalıdır.

Oldukça kısa süre içerisinde hazırlanan bu ilk sürüme ilaveler ve düzeltmelerin yapıldığı bu ikinci sürümde ***"Probability, Random Variables and Stochastic Processes by Athanasious Papoulis", "Probability, Random Processes, and Estimation Theory for Engineers by Henry Stark and John W. Woods", "Lecture Notes on Probability Theory and Random Processes by Jean Walrand Department of Electrical Engineering and Computer Sciences University of California Berkeley, CA 94720 August 25, 2004", "İşaret ve Sistem Analizinde Olasılık Yöntemleri" by Prof. George Cooper and Claire McGillem*** olmak üzere çeşitli yabancı ve Türkçe kaynaklardan faydalanılmıştır.

Atatürk Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği 1. sınıf 2. yarıyılında okutulan "Olasılık ve Rastlantı Değişkenleri" dersi içerisinde bir elektrik-elektronik mühendisi için gerekli olan ve olasılıkta temel teşkil eden konular üzerinde durulmaya dikkat edilmiş ve öğrencinin rahatlıkla takip edebileceği bir yardımcı kaynak oluşturulmaya çalışılmıştır. Bu ders notlarının daha iyi bir kaynak haline gelmesi için, bu dersi alan öğrencilerden ve bu notları inceleme fırsatı bulan öğretim üyelerinden eksik gördükleri yönlerin düzeltilmesine ilişkin katkılarını beklediğimizi özellikle belirtmek istiyoruz.

Bu kaynağın ilk sürümünün bilgisayara aktarılmasında emeği geçen öğrencimiz Ömer Çoban'a ve II. sürümün kalite kontrolünü yaparak eksik yönlerinin düzeltilmesini sağlayan Arş. Gör. M. Alptekin Engin'e teşekkür ederiz.

Şubat 2009

Yrd. Doç. Dr. Bülent Çavuşoğlu
Yrd. Doç. Dr. Emin Argun Oral

DERS İÇERİĞİ

1. Olasılık
    a. Olasılık nedir?
    b. Olasılığın klasik, bağıl frekans ve aksiyomatik tanımları
2. Kümeler ve Olaylar
    a. Küme İşlemleri
    b. Bileşik olasılık
    c. Koşullu olasılık
    d. Baye's teoremi
    e. Bağımsızlık
3. Tekrar Edilen Denemeler
    a. Birleştirilmiş deneyler
    b. Çoklu denemeler
4. Rastlantı Değişkenleri (Tek Rastlantı Değişkeni)
    a. Beklendik değer ve varyans
    b. Olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonları, Gaussian ve diğer yoğunluk fonksiyonları
    c. Koşullu Dağılımlar
    d. Baye's teoremi (yoğunluk ve dağılım fonksiyonlarına genişletim)
5. Tek Bir Rastlantı Değişkeninin Fonksiyonları
    a. Rastlantı değişkeni g(x)
    b. g(x)' in dağılım fonksiyonları
    c. Momentler
    d. Karakteristik fonksiyonlar
6. İki Rastlantı Değişkeni
    a. Birleşik dağılım ve yoğunluk fonksiyonları
    b. İki rastlantı değişkenine ait fonksiyonlar
        i. İki rastlantı değişkeninin tek bir fonksiyonu
        ii. İki rastlantı değişkeninin iki fonksiyonu
        iii. Birleşik momentler, beklendik değer
        iv. Koşullu İstatistikler
7. Merkezi Limit Teoremi
8. Kovaryans ve İlişki.

1. Olasılığa Giriş

Olasılık teorisi belirsizliğin matematiksel olarak modellenmesi ile ilgilenir. Evrende gerçekleşen bütün olayların “GİZLİ” bir değişkenin fonksiyonları olduğunu düşünürsek, bu değişken ve fonksiyonların bilinmesi/tanımlanabilmesi halinde “belirsizlikler” ortadan kalkar. Tabiiki bu değişkenin ve fonksiyonların “KESİN” olarak bilinmesi pratikte mümkün değildir. Bunun için “OLASILIK TEORİSİ” “TEKRARLANAN” olayların ortalama davranışlarına odaklanır.

“TEKRARLANAN” olaylar için gözlemler yapıldığında ve özellikle gözlemlerin sayısı artırıldığında belli ortalamaların sabit değerlere yaklaştığı ve bu ortalama değerin daha sonraki olayların katılmasıyla dahi değişmeme eğiliminde olduğu gözlemlenmiştir. Tekrarlanan olaylara örnek olarak; elektron yayınımı, telefon aramaları, radar algılaması, kalite kontrolü, sistem çökmesi, yazı-tura atılması vb. olayları verebiliriz. ***Basitçe anlatmak gerekirse, bu teorinin amacı olayların ortalama davranışlarını olayların olasılıkları cinsinden tanımlamak ve kestirmektir.***

1.1. Olasılığın Mühendislikteki Uygulamaları

Olasılık mühendislik alanında birçok uygulama alanına sahiptir. Elektrik-Elektronik Mühendisliği alanına giren uygulamalarından bazıları

- Elektrik devrelerde ısıl gürültü
- Zayıf radar ve radyo sinyallerinin algılanması
- Enformasyon Teorisi
- Haberleşme Sistem Tasarımı
- Sistemlerin Güvenilirliği
- Sistem/Cihaz Hata/Başarısızlık Oranları ve Olasılıkları
- Haberleşme Ağları, ör: Ağ Trafiği

şeklinde sıralanabilir.

1.2. Çeşitli Olasılık Tanımları

Olasılığın tanımı genel olarak 3 temel yaklaşımla yapılır.

1.2.1. Klasik Tanım

Deneye dayalı olmayan bu tanımda bir “A” olayının olasılığı, o olayın gerçekleşebileceği farklı durumları sayıp (N_A), bu sayının mümkün olan bütün sonuçlara oranını “ÖNCEDEN” hesaplayarak bulunur. 2 kere arka arkaya yazı-tura atılmasını ele alalım,

	2.PARA		
1. PARA		Yazı (Y)	Tura (T)
	Yazı (Y)	YY	YT
	Tura (T)	TY	TT

Bu durumda görüldüğü gibi toplam 4 tane olası sonuç var. Eğer biz her iki paranında yazı gelmesi olasılığını "YY" arıyorsak, bu durumda bu olayın olasılığı 1/4 olur. Eğer an az bir paranın Y gelmesi olasılığını arıyorsak, bu durumda YY,TY ve YT sonuçlarından herbiri bizim aradığımız sonuçlarıdır. Dolayısıyla bu olayın olasılığı bu kez 3/4 olur.

Klasik teori iki açıdan yetersizdir

1. Eşit şansa sahip olmayan olaylar için doğru sonuç vermez.

Mesela atılan iki zarın toplamının 3 olması olasılığını arayalım. Bu durumda mümkün toplamlar {2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12} olabilir. Yani 11 farklı sonuç mümkündür. Dolayısıyla toplamın 3 olması olasılığı 1/11 dir diyebiliriz. Ancak tabiiki bu sonuç YANLIŞ'tır. Çünkü toplamın 2 olması ve 3 olması aynı şansa sahip değildir. Yukarıdaki gibi bir tablo yaparak doğru sonucun 1/18 olduğu çok rahatlıkla görülebilir.

2. Sayılamayacak kadar çok olası sonucu olan durumlarda yaklaşımlara başvurmadan çözüm üretemez.

1.2.2. Bağıl Frekans Tanımı

Bir A olayının olasılığını bağıl frekans yoluyla belirlemek bir denemeyi n kere tekrarlamaktan geçer. Bu n deneme esnasında A olayının görüldüğü durumlar sayılır ve bu n_A olarak kaydedilir ve A olayının olasılığı

$$P(A)= n_A/n \text{ olarak verilir.}$$

$n_A<n$ olduğundan P(A) 0 ve 1 arasındadır ($0<P(A) <1$). Bu teoriyle ilgili problemlerden bir tanesi hiç bir zaman sonsuz sayıda deneme yapamayacak olmamızdır. Bu durumda P(A)' yı sonlu sayıdaki denemelerden kestirmek durumunda kalırız. Daha sonrada bu oranının n sonsuz olduğu durumda bir limit değerine yaklaştığını savunuruz. Yani

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} (n_A/n) \text{ olarak verilir.}$$

Bu probleme rağmen bağıl frekans yaklaşımı, olasılık teorisini gerçek dünyadaki olaylara uygulamada önemli bir yere sahiptir.

1.2.3. Aksiyomatik Tanım

Çoğu modern olasılık kitabında kullanılan tanım bu tanımdır. Ancak bu tanımı yapmadan önce temel birkaç kavram üzerinde durmamız gerekmektedir.

1.3. Kümeler ve Olaylar

Küme: Belirlenmiş nesneler topluluğuna küme denir. Örnek olarak;

A={sınıfta boyu 1.80'nin üzerinde olan öğrenciler} , B={3,5,8} kümeleri verilebilir.

Alt Küme: Bütün elemanları daha büyük bir kümenin içinde yer alan küme. Örneğin $C=\{5,8\}$ kümesi $B=\{3,5,8\}$ kümesinin bir alt kümesidir.
Boş Küme: Hiç bir elemanı olmayan küme. $\varnothing$ yada { } ile gösterilir.
Örnek Uzayı: Bir Ή deneyinin bütün olası sonuçlarını içeren kümeye örnek uzayı denir. Genelde bu küme Ω ile gösterilir. Her küme aynı zamanda kendinin alt kümesi olduğundan, Ω da bir olaydır.
Olay: Örnek uzayının alt kümeleri **olay** olarak adlandırılır.
Kesin Olay: Örnek uzayının kendisi kesin olaydır.
İmkansız Olay: Olması mümkün olmayan olaydır. Küme teorisinde boş kümeye tekabül eder.

Örnek:

1. Yazı-Tura atma deneyi
   $\Omega=\{Y,T\}$→ Örnek uzayı
   $A=\{Y\}$ → Yazı gelmesi OLAYI
2. 2 kere Yazı-Tura atma deneyi
   $\Omega=\{YY,YT,TY,TT\}$→ Örnek uzayı
   $A=\{YT,TY\}$ → Bir yazı ve bir tura gelmesi OLAYI
3. Bir direncin gücünü ölçme deneyi
   $\Omega=\{P:P\geq 0\}$→ Yani 0'dan büyük bütün sayılar örnek uzayımızı oluşturuyor.
4. Elastik bir çarpışmada nükleer bir parçacığın, çarpışma sonrası ayrılış açısını gözlemleme deneyi
   $\Omega=\{\theta: -\pi \leq \theta \leq \pi\}$→ Örnek uzayı
   $B=\{-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2\}$→ Ayrılma açısının $-\pi/4$ ve $\pi/2$ arasında olması olayı.

<u>Küme İşlemleri</u>

$p\in A$: p, A kümesinin bir elemanıdır.
$A\subset B$: A kümesi B kümesinin alt kümesidir (A kümesinin bütün elemanları B kümesinin de elemanıdır).
$A=B$: A'nın her elemanı B'nin ve B'nin her elemanı da A'nın da elemanı ise A ve B kümeleri eşittir.

$p\in A$, $A\subset B$, $A=B$ ifadelerinin karşıtarı sırasıyla $p\notin A$, $A\not\subset B$, $A\neq B$ şeklinde yazılır.
$\varnothing$: Boş küme.
Ω : Evrensel Küme (Örnek Uzayı).
Not: Herhangi bir A kümesi için $\varnothing \subset A \subset \Omega$ ifadesi yazılabilir.

GİRİŞ

A ve **B** herhangi iki küme olsun **A∪B** ile gösterilen **A** ve **B** kümelerinin birleşimi **A**'ya ya da **B**'ye bağlı elemanlar kümesidir.

BİRLEŞİM => $A\cup B=\{x: x \in A \text{ ya da } x\in B\}$

Örnek: $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,4,8\}$ => $A\cup B=\{1,2,3,4,8\}$

$A\cap B$ ile gösterilen A ve B nin arakesiti (kesişimi) A ve B kümelerinin her ikisine birden bağlı elemanların kümesidir

KESİŞİM => $A\cap B=\{x: x\in A \text{ ve } x\in B\}$

Örnek: $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,5\}$, $A\cap B=\{3\}$

Eğer $A\cap B=\emptyset$ ise yani A ve B nin ortak elemanı yoksa A ve B ye "AYRIK" kümeler denir.

A ve B arasındaki ayrım ya da $A\setminus B$ biçiminde gösterilen B kümesinin A ya bağlı olup B ye bağlı olmayan elemanların kümesidir.

FARK => $A\setminus B=\{x: x\in A \text{ ve } x\notin B\}$

Burada $A\setminus B$ ve B nin ayrık olduğuna yani $(A\setminus B)\cap B=0$ olduğuna dikkat ediniz.

Örnek: $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,5\}$ => $A\setminus B=\{1,2\}$, $B\setminus A=\{5\}$

$(A\setminus B)\cap B=\{1,2\}\cap\{3,5\}=\emptyset$

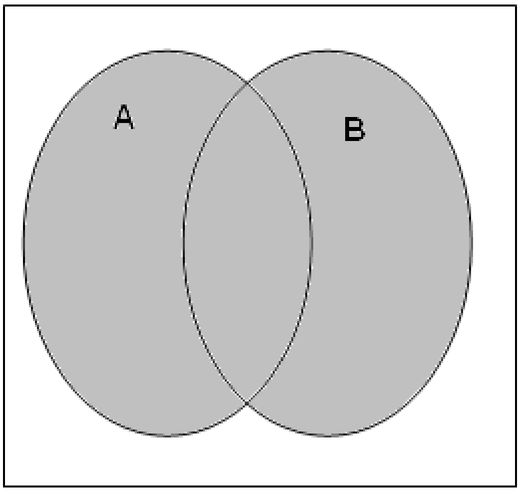
$(B\setminus A)\cap A=\{5\}\cap\{1,2,3\}=\emptyset$

A^c biçiminde gösterilen A'nın salt tümleyeni A ya bağlı olmayan ve örnek uzayına bağlı olan elemanların kümesidir.

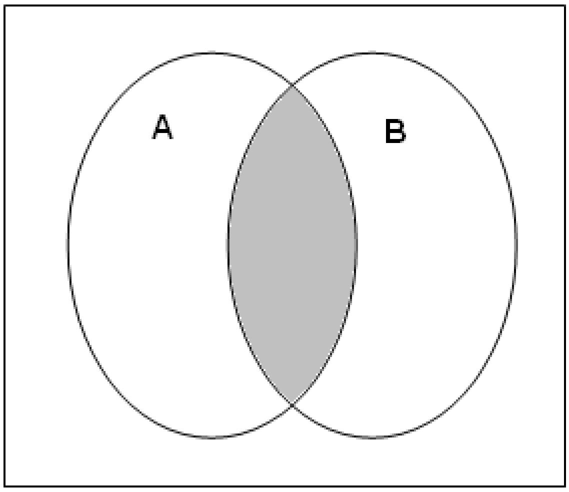
TÜMLEYEN=> $A^c=\{x: x\in\Omega \text{ ve } x\notin A\}$

Örnek : $A=\{3,5\}$, $\Omega=\{1,3,5,7\}$=> $A^c=\{1,7\}$

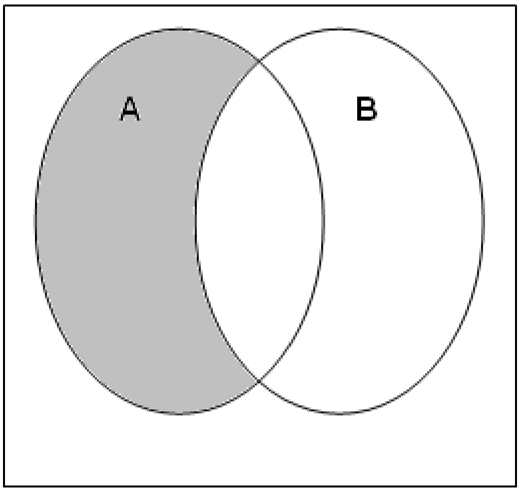
Ω: Evrensel küme.



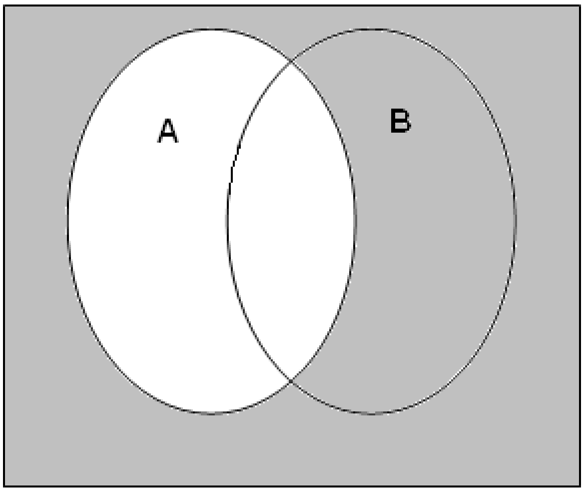
Taralı Alan: $A \cup B$



Taralı Alan: $A \cap B$



Taralı Alan: $A \setminus B$



Taralı Alan: A^c

KÜME İŞLEM KURALLARI

1) Tanımlama Kuralı: **$A \cup A = A$, $A \cap A = A$**

2) Birliktelik : **$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$**

3) Değişme : **$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$**

4) Dağılma : **$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$**

5) Özdeşlik : **$A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \Omega = \Omega$, $A \cap \Omega = A$**

6) Tümleme : **$A \cup A^c = \Omega$, $A \cap A^c = \emptyset$, $(A^c)^c = A$, $\Omega^c = \emptyset$, $\emptyset^c = \Omega$**

7) De Morgan : **$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$**

OLASILIĞIN AKSİYOMATİK TANIMI

Olasılık bir P[ ] küme fonksiyonudur ve bu fonksiyon her bir A olayına "A olayının olasılığı" diye adlandırılan bir P[A] değeri atar. Bu P[A] değeri aşağıdaki aksiyomlara uyar.

1) $P[A] \geq 0$
2) $P[\boldsymbol{\Omega}]=1$
3) $P[A \cup B]=P[A]+P[B]$ Eğer $A \cap B=\emptyset$

Bu aksiyomlar aşağıdaki sonuçları oluşturmak için yeterlidir.

4) $P[\emptyset]=0$
5) $P[A \cap B^c]= P[A] - P[A \cap B]$
6) $P[A]=1- P[A^c]$
7) $P[A \cup B]=P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

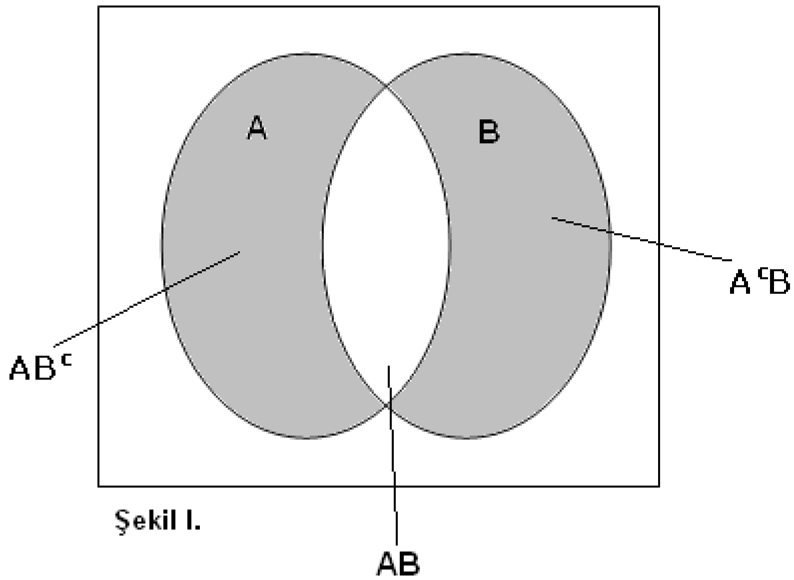
Bu noktadan itibaren $A \cup B$ yerine $A+B$ ve $A \cap B$ yerine AB notasyonunu değişimli olarak kullanacağız.

Örnek:

7. Özelliği aksiyomları kullanarak ispatlayalım

$A \cup B=AB^c \cup A^cB \cup AB$ {$A \cup B$ olayını 3 ayrık olaya böldük}

Şekil I. Görüldüğü gibi bu üç olayın birbiriyle hiç bir ortak noktası yoktur. Dolayısıyla bu olaylar ayrık olaylardır.



Şekil I.

Üçüncü aksiyomu kullanırsak ,

$P[A \cup B] = P[AB^c \cup A^cB] + P[AB]$

$=P[AB^c]+P[A^cB]+P[AB]$

$=P[A]-P[AB]+P[B]-P[AB]+P[AB]$

$=P[A]+P[B]-P[AB]$

Örnek:

Bir torbadan 1 ile 12 arasında numaralandırılmış topları çekme deneyini ele alalım.

$\mathbf{\Omega}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ olur.

A olayını 1 ile 6 arasındaki topları çekme, **B** olayını da 3 ile 9 arasındaki topları olarak tanımlayalım.

Yani

$A=\{1,2,3,4,5,6\}$ ve $B=\{3,4,5,6,7,8,9\}$

$A \cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $AB=\{3,4,5,6\}$, $AB^c=\{1,2\}$

$B^c=\{1,2,10,11,12\}$, $A^c=\{7,8,9,10,11,12\}$, $A^cB^c=\{10,11,12\}$

$(AB)^c=\{1,2,7,8,9,10,11,12\}$

Dolayısıyla ,

$P[A] =P[\{1\}] + P[\{2\}]+\ldots\ldots\ldots\ldots+ P[\{6\}]$

$P[B] =P[\{3\}] + P[\{4\}]+\ldots\ldots\ldots\ldots+P[\{9\}]$

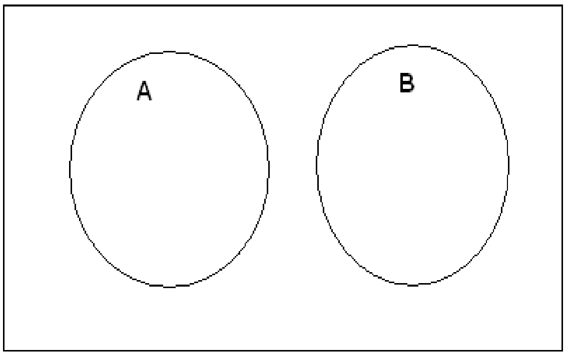
$P[AB]=P[\{3\}] + P[\{4\}]+\ldots\ldots\ldots\ldots+P[\{6\}]$

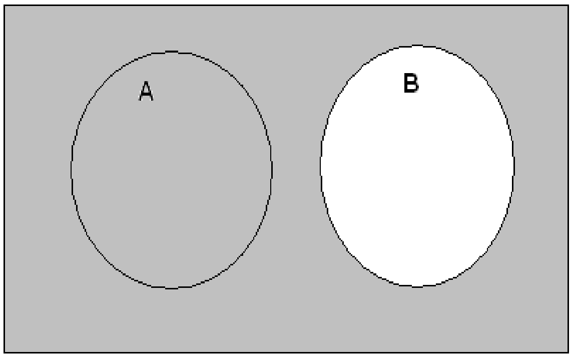
Eğer $P[\{1\}]=\ldots\ldots\ldots=P[\{12\}]=1/12 \Rightarrow P[A]=1/12$, $P[B]=7/12$ ve $P[AB]=4/12$ olur.

NOT : $\{1,2,3\ldots\ldots\ldots\ldots N\}$ gibi N elemanı olan kümeden bu N elemanında eşit şansla bu kümede bulunması koşuluyla bir eleman seçme olayının olasılığı $P=1/N$ dir.

Örnek:

$A \cap B=\emptyset$ iken $A \subset B^c$ olduğunu ispatlayınız?





A∩B=∅ **B^c taralı alandır dolayısıyla A⊂B^c**

Örnek:

A={0} ise ∅=A doğrumudur?

A kümesi elemanı "0" olan 1 elemanlı bir kümedir. Dolayısıyla A kümesi hiçbir elemanı olmayan ∅ kümeye eşit olamaz.

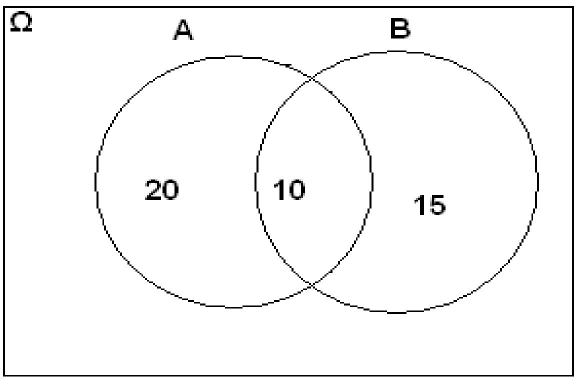
Örnek:

Bir fabrikadaki çalışanların 30'u baskı devre, 25'i tasarım ve 10 tanesi de hem baskı devre hem de tasarım kısmında çalışabilecek durumda işçilerdir. Bu işletmeden rastgele seçilen bir kişinin baskı devre bölümünde çalışabilme ihtimali nedir?

A={x: x, baskı devre kısmında çalışabilecek kişi}
B={ x: x, tasarım kısmında çalışabilecek kişi }

A kümesi 30 eleman içeriyor s(A)=30
B kümesi 25 eleman içeriyor s(B)=25
A∩B kümesi 10 eleman içeriyor s(A∩B)=10

7. Özellikten s(A∪B)=s(A)+s(B)-s(A∩B) => s(A∪B)=30+25-10=45



Not: Ω= A∪B

P(A)=n_A/n =30/45 olur.

BİLEŞİK, KOŞULLU,TOPLAM OLASILIKLAR VE BAĞIMSIZLIK

Aşağıdaki A , B ve C olaylarını ele alalım
A:{Erzurum da herhangi bir günde sıcaklığın 15^{o}C'nin üzerinde olması}
B:{ Erzurum da herhangi bir günde 1_{cm} üzeri yağış olması}
C:{A ve B olaylarının her ikisinin de aynı günde gerçekleşmelsi}
Yani **C≜AB**

Bu C olayına A ve B'nin "Birleşik olasılığı" denir. Bu kavram 2 den fazla olay için de geçerlidir. Örneğin herhangi bir E,F,G olayların bileşik olasılığı H=EFG olarak verilir.

Olasılığın Frekans tanımından hareketle,

$P[A] = n_A / n$, $P[B] = n_B / n$ ve $P[AB] = n_{AB} / n$

Şimdi n_{AB}/n_A oranına bakalım.Bu oran A olayının ve AB olayının gerçekleşmesi arasındaki bağıl frekanstır.

Bu oran sıcaklığın 15^{o}C olduğu günlerde yağışın da 1 cm'nin üzerine çıktığı günlerin oranını verir. Yani başka bir olayın olması "koşuluna" dayalı bir olasılık var karşımızda.

Ufak bir matematiksel düzenlemeyle,

$n_{AB} / n = (n_{AB} / n) / (n_A / n) = P[AB] / P[B]$ olduğu görülür.

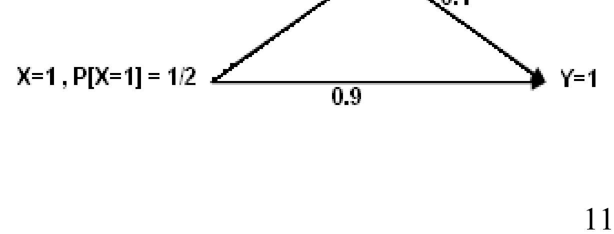
Bu olayda A olayının olması koşuluyla B olayının olması ihtimali $P(B|A)$ tanımlamamızı sağlar.

$n_{AB} / n_A = P(B|A) = P(AB) / P(A)$, tabiî ki $P(A) > 0$ olmalı

ve benzer yolla

$P(A|B) = P(AB) / P(B)$ ifadesi yazıla bilir. Tabiî ki $P(B) > 0$ olmalı.

Örnek:



Yandaki şekilde gösterilen bir ikili haberleşme sisteminde 0 ve 1 sembollerinin iletildiği bir sayısal haberleşme yapılmaktadır. Bu sistemde "Y" alınan sembolü, "X" ise gönderilen sembolü göstermektedir.

Bu sistemin Örnek Uzayı olan "Ω"

Ω={(x,y): x= 0 veya 1, y= 0 veya 1}={(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)}

X olayı X = {(x,0),(x,1)} ile verilmektedir.
Y olayı Y = {(0,y),(1,y)} ile verilmektedir.

P[(x,y) = (i,j)] = P[x=i] P[y=j ǀ x=i]   ; i,j= 0 , 1

Bu sistemde haberleşme sistemindeki gürültüden dolayı gönderilen 0 bazen 1 bazen 0 olarak alınabilmektedir. Aynı zaman da gönderilen 1'de bazen 0 bazen 1 olarak alınabilmektedir.

Yapılan ölçümler neticesinde aşağıdaki olasılıklar bilinmektedir.

P[y=1ǀx=1]=0.9   ;   P[y=1ǀx=0]=0.1
P[y=0ǀx=1]=0.1   ;   P[y=0ǀx=0]=0.9

Aynı zamanda haberleşme sisteminin tasarımından gelen bir özellikle 0 üretilme olasılığı 1 üretilme olasılığına eşit olup

P[x=0]=P[x=1]=1/2

=>Bazı bileşik olasılıklara bakalım

P[x=0,y=0] = P[y=0ǀx=0] P[x=0]=0,9 * 0,5= 0,45
P[x=0,y=1] = P[y=1ǀx=0] P[x=0]=0,1 * 0,5= 0,05

Aynı şekilde P[x=1,y=0]=0,05 ve P[x=1,y=1]=0,45

<u>KOŞULSUZ OLASILIK</u>

Çoğu mühendislik veya bilimsel problemde başka olaylara bağlı olmayan "KOŞULSUZ OLASILIĞI" bulmak isteriz. Bir B olayına ilişkin bu koşulsuz olasılık koşullu olasılıkların ağırlıklı ortalaması cinsinden verilebilir. Bu hesaplama aşağıdaki teorem vasıtasıyla yapılır.

<u>Teorem:</u>

A_1,A_2………………………..A_n ayrık olaylar ve (($\coprod_{i=1}^{n} A_i = \Omega$)) olsun. B olayı da A_i'lerin oluşturduğu bu olasılık uzayında tanımlanmış bir olay olsun. O zaman P[A_i]≠0 olmak koşuluyla

P[B]=P[BǀA_1].P[A_1] + P[BǀA_2].P[A_2] +………………….+ P[BǀA_n].P[A_n]

Bazen P[B], eşitliğin sağ tarafındaki hesaplamanın doğası gereği ortalama olasılık olarak da adlandırılır.

İspat:

A_i'ler ayrık olduğundan $A_iA_J=\emptyset$, $i\neq j$ iken ve ($\coprod_{i=1}^{n} A_i = \Omega$) ve

$B\Omega=B=B\coprod_{i=1}^{n} A_i = \coprod_{i=1}^{n} BA_i$

$BA_i\subset A_i$ dir. Dolayısıyla $(BA_i)(BA_j)=\emptyset$, her $i\neq j$ için.

Aksiyom 3'ü kullanırsak (n olaya genişletilerek);

$P[B]=P[\cup_{i=1}^{n}BA_i]=P[BA_1]+P[BA_2]+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+P[BA_n]$

$= P[B|A_1].P[A_1] + P[B|A_2].P[A_2] +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+ P[B|A_n].P[A_n]$

Örnek:

Bir önceki örnekle verilen ikili haberleşme sistemi için P[y=0] (0 alınma) ve P[y=1] (1 alınma) olasılıklarını hesaplayalım.

$P[y=0] = P[y=0|x=0]\ P[x=0] + P[y=0|x=1]\ P[x=1]$

$= 0,9 \ .\ 0,5 + 0,1\ .\ 0,5 =0,5$

$P[y=1] = P[y=1|x=0]\ P[x=0] + P[y=1|x=1]\ P[x=1]$

$= 0,9\ .\ 0,5 + 0,1\ .\ 0,5 =0,5$

P[y=1] i ayrıca $\{y=0\} \cup \{y=1\}=\Omega$ olduğundan dikkat ederek,

P[y=0]+P[y=1]=1 den {Aksiyom 2} hesaplayabiliriz.

BAĞIMSIZLIK:

Olasılığın oldukça önemli kavramlarından biridir. Ayrı örnek uzayında tanımlı A ve B olayına yalnız ve yalnız

P[AB]=P[A].P[B] ise "BAĞIMSIZ" dır.

Genel ifadesiyle P[AB]=P[B|A].P[A]=P[A|B].P[B] olduğundan

Bağımsız olaylar için

P[B|A]=P[B]

P[A|B]=P[A] dir.

Dolayısıyla bağımsızlık tanımı A, B olaylarının bağımsız olduğu durum için A olayının üzerinde ve B olayının da A üzerinde hiçbir etkisi olmadığını söylemektedir. Bu tanımda temel kavramlarımızla aynı doğrultudadır

3 farklı A,B,C olayı için {P(A)≠0, P(B)≠0, P(C)≠0 olmak kaydıyla}

Bağısız olma Şartı (P(A)≠0 P(B)≠0 P(C)≠0 olmak kaydıyla)

P[ABC]=P[A] P[B] P[C]

P[AB]=P[A] P[B] , P[BC]= P[B] P[C] , P[AC]=P[A] P[C]

3 olayın bağımsız olması için sadece P[ABC]=P[A] P[B] P[C] ' nin yeterli olmadığına ve her ikilinin de bağımsız olması gerektiğine dikkat edin.

BAYES TEOREMİ:

Önceki sonuçların ışığında oldukça basit ve aynı zamanda çok geniş kullanım alanına sahip olan BAYES formülünü yazabiliriz.

$P[B]>0$ ve $P[A_i]\neq 0$, $\forall i$ için

$$P[A_j\,|B] = \frac{P[B|A_j].P[A_j]}{\sum_{i=1}^{n} P[B|A_i].P[A_i]}$$

İspat:

Paydadaki ifade *P[B]* ye eşittir. Dolayısıyla BAYES teoremi koşullu olasılığın bir uygulamasıdır.

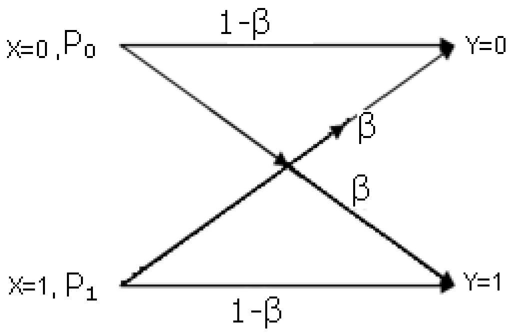
NOT:

$P\,[A_j|B]$'ye A_j 'nin B koşuluna bağlı "sonradan" olasılığı denir. $P[B|A_j]$'ye ise B'nin A_j'ye koşuluna bağlı "önceden" olasılığı denir.

Genelde pratikte "sonradan" olasılıklar gözlemler sonucunda hesaplanır, "önceden" olasılıklar ise geçmiş ölçümlere dayanılarak kestirilir(Tahmin edilir.)

Örnek:

Bir haberleşme kanalında P_0 ihtimalle 0, P_1 ihtimalle 1 gönderilmektedir.
(P_1=1-P_0) Kanaldaki gürültü dolayısıyla β olasılığı ile 0 , 1-β olasılığıyla da 1 alınıyor. Alıcıda 1 gözlemlendiğine göre 1 gönderilmiş olma olasılığı nedir?



Cevap:

Kanalın yapısı yukarıda verilmiştir. P[X=1|Y=1] olasılığını arıyoruz.

$$P[X=1|Y=1] = \frac{P[X=1|Y=1]}{P[Y=1]}$$

$$= \frac{P[Y=1|X=1].P[X=1]}{P[Y=1|X=1].P[X=1]+P[Y=1|X=0].P[X=0]}$$

$$= \frac{P_1(1-\beta)}{P_1(1-\beta)+P_0\beta}$$

Örnek:

Bir kanser testine ilişkin aşağıdaki sonuçlar tanımlanıyor olsun

A : Teste göre test edilen kişi kanser.

B : Kişi gerçekten kanser.

A^c: Teste göre test edilen kişi kanser değil.

B^c: Kişi gerçekten kanser değil.

Ve aşağıdakilerin de bilindiğini varsayalım.

$$P[A|B] = P[A^c|B^c] = 0.95 \qquad ve \qquad P[B] = 0.005$$

Bu test "İYİ" bir test midir?

Cevap:

Bu soruyu cevaplamak için testin kanser teşhisi koyduğu kişinin gerçekten kanser olma ihtimalinin ne olduğunu bilmemiz gerekir. Yani P[B|A] ya bakmalıyız.

$$P[B|A] = \frac{P[A|B].P[B]}{P[A|B].P[B] + P[A|B^c].P[B^c]}$$

$$= \frac{(0{,}005).(0{,}95)}{(0{,}005).(0{,}95) + (0{,}05).(0{,}995)}$$

$$= 0{,}087$$

Yan sadece testlerin olduğunu söylediği kişilerin gerçekten kanser olma ihtimali %8,7 dır. Geri kalan %91,3 lük kısımda kanser teşhisi konulan kişi kanser olmayacaktır.Dolayısıyla "İYİ BİR TEST DEĞİL"

Bu sonuç şaşırtıcı gibi gözükse de kanser olan ve olmayanların sayısı arasındaki dengesizlik (yani kanser olanların azlığı) testi başarısız kılmaktadır.

SAYMA FORMÜLLERİ

Yerine koyarak örnekleme:

Bir torbadaki numaralandırılmış toplar önce çekiliyor numarası kaydediliyor sonra tekrar torbaya konuluyor. Bu durumda ilk örneklemede "n" tane (torbada n tane top olduğu varsayımıyla) farklı seçenek ve ikinci örneklemede yine "n" tane farklı seçenek söz konusudur. Sonuç olarak "n" elemanı olan torbadan "r" elemanlı "n^r " tane farklı sıralanmış örnekler elde edilebilir.

Yerine koymadan örnekleme:

Yine yukarıda bahsedilen durun için bu sefer çekilen topların yerine geri konulmadığını düşünelim. Dolayısıyla ilk için "n" top varken ikinci çekim için "n-1" top üçüncüde "n-2" şeklinde azalan sayıda top olacaktır.

Sonuç olarak:

$$(n)_r \triangleq n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

Bu durumda oluşabilecek şekillerin sayısı $(n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ kadar "farklı sıralanmış" örnek elde edilebilir.

<u>"n" elemanlı bir popülâsyondan oluşabilecek "r" elemanlı alt popülâsyonlar:</u>

Olasılıkta oluşabilecek temel sorulardan biridir. Örneğin 1'den 4'e kadar numaralandırılmış topları ele alalım. Bu toplardan 2'li kaç grup oluşturulabilir?

(1,2)	(2,3)	(3,4)	6 tane grup — Bu yerine koymadan örnekleme yapılan elde edeceğimiz 4x3=12 den küçüktür.
(1,3)	(2,4)		
(1,4)			

(1,2)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	12 → Yerine koymadan
(1,3)	(2,3)	(3,2)	(4,2)	
(1,4)	(2,4)	(3,3)	(4,3)	

(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	Yerine koyarak örneklemede ise 4x4=16 grup elde edilir.
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	

Bize 6 farklı grup veren dizilim için genel bir formül elde edilir. Bu dizilime **n**'in **r**'li kombinasyonu denir ve C_r^n sembolü ile gösterilir.

"r" tane elemandan oluşan popülasyon için **r!** tane farklı dizilim söz konusudur. Dolayısıyla C_r^n alt popülâsyonu için C_r^n.**r!** tane farklı sıralamadan bahsedebiliriz.

Bu durumda,

$$C_r^n.r! = (n)_r$$

$$C_r^n = \frac{(n)_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!.r!} \triangleq \binom{n}{r}$$

$C_r^n \triangleq \binom{n}{r}$ ye aynı zamanda binom katsayısı denir.

Ve $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!.r!} \triangleq \binom{n}{n-r} = C_{n-r}^n$

Yani $\boxed{C_r^n = C_{n-r}^n}$

$$Not: \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n$$

BERNOULLI DENEMELERİ

Sonucu "P" olasılığı ile başarı $\{\xi_1=s\}$ ve q=1-p olasılığı ile başarısızlık$\{\xi_1=f\}$ olsun ve tek bir deneme içeren bir denemeyi ele alalım. Bu durumda örnek uzayı $\Omega=\{s,f\}$ olur. Bu deneyi tekrarladığımızı varsayalım bu durumda yeni örnek uzayı $\Omega_2=\Omega x\Omega$ olur ve $\Omega_2=\{ss, sf, fs, ff\}$. Bu uzay $2^2=4$ tane olay içerir $\Omega x\Omega$ çarpımı "KARTEZYEN ÇARPIM" olarak adlandırılır. Eğer n tane "bağımsız" deneme yaparsak örnek uzayı

$\Omega_n=\underbrace{\Omega x\Omega x\Omega x\Omega x\ldots\ldots\ldots\ldots x\Omega}_{n\,-\,kere}$, olur ve bu örnek uzay 2^n eleman içerir.

$\Omega_n=\{a_1,\ldots\ldots\ldots\ldots a_\mu\}$ $\mu=2^n$

$a_i = Zi_1 \ldots\ldots\ldots.. Zi_n$, $Z_{ij} = s\ veya\ f$

Her bir Zij sonucu diğerlerinden bağımsız olduğundan

$\boldsymbol{P[Zi_1 \ldots\ldots\ldots.. Zi_n\ ] = P[Zi_1].P[Zi_2] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. P[Zi_n]}$ olur. Dolayısıyla "k" başarı ve "n-k" başarısızlık içeren bir sıralı kümenin olasılığı "$p^k q^{n-k}$"dır. Örneğin 3 kez yazı, tura attığımızı düşünelim. "p=P{Y} ve q=P{T}" olsun.

P{YTY}=pqp=p^2q olur. Bize aynı başarı olasılığını verecek farklı sıralamalar da mümkün. Bunların sayısı da

$\boldsymbol{C_k^n = \binom{n}{k}}$ dır.

Yani "n" denemeden "k" başarı ve "n-k" başarısızlık ihtimali var. Bu da

$\boldsymbol{P(k\ başarı, n-k\ başarısızlık) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \triangleq b(k;n,p)}$

Tanımladığımız bu "b(k;n,p)" ye "*Binom Kanunu*" denir. "n" deneme yaparak "k" başarı elde etme ihtimali arama olayına da "*Binom Denemeleri*" denir.

Örnek:

Saniyede 10 bağımsız bit üreten alınmaktadır. Hatalı bit alınma olasılığı (0 gönderilip 1alınması yada tam tersi) 0,001 dir. Saniyede “En Az” bir hata olma olasılığı nedir.

Cevap:

$$P(En\ az\ bir\ hata) = 1 - P(hiç\ hata\ olmama)$$

$$= 1 - \binom{10}{0}(0{,}001)^0(0{,}999)^{10}$$

$$= 1 - (0{,}999)^{10}$$

$$\cong 0{,}01$$

Binom kanunu ile ilgili formüller:

1) “k” yada daha az başarı olma ihtimali

$$= \sum_{i=0}^{k} b(i;n,p) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$

2) En az “k” başarı olma ihtimali

$$= \sum_{i=k}^{n} b(i;n,p) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$

3) En az “j” en fazla “k” başarı olma ihtimali

$$= \sum_{i=j}^{k} b(i;n,p) = \sum_{i=j}^{k} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$

Örnek:

Ω={1,2,3,4} , A={1,2} , B={2,3} , C={3,4}

$P(ABC) = P(A|B)P(B|C)P(C)$ Eşitliği acaba sağlanır mı? Ona bakalım.

Cevap:

AB={2} , BC={3} , AC=∅

$$P(A)=P(B)=P(C) = \frac{1}{2} \qquad P(AB)=P(BC) = \frac{1}{4}$$

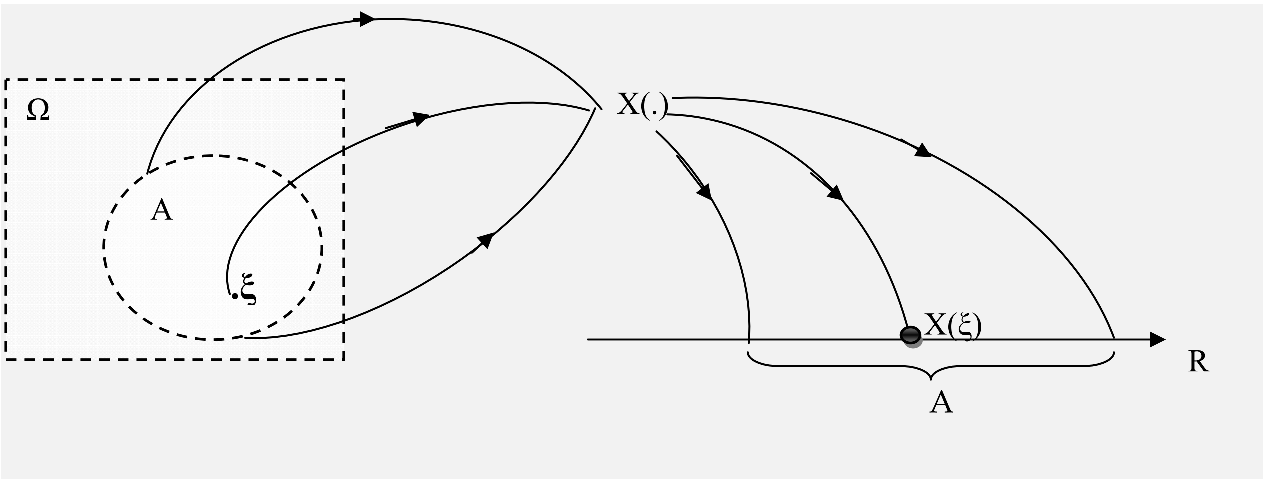
$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} \quad , \quad P(B|C) = \frac{P(BC)}{P(C)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

$$P(A|B)P(B|C)P(C) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{8} \qquad ABC = \emptyset \quad olduğundan \quad P(ABC) = 0 \quad olur.$$

RASLANTI DEĞİŞKENLERİ

Raslantı değişkeni kavramı orijinal örnek(olasılık)uzayının yerine olayların rakam kümelerinden oluşturduğu bir uzayı kullanmamızı yani reel(R) eksende çalışabilmemizi mümkün kılacaktır.

Örnek uzayı "Ω" olan bir H deneyini ele alalım. Ω örnek uzayının elemanları (ξ) H deneyinin rasgele sonuçlarıdır. Eğer her bir eleman (ξ) için reel bir sayı kullanırsak ξ'ler ve reel(R) eksen arasında bir karşılık bulma kuralı buluruz. Bu kuralı X(ξ) ile gösterelim. Böyle belirli kısıtlamalara sahip kurala "**RASLANTI DEĞİŞKENİ**" diyoruz. Dolayısıyla "X(.)" yada kısaca "X" rasgele değişkeni Ω domeninde çalışan ve reel eksende değerler alabilen bir fonksiyondur.



Şekildeki açıklandığı gibi bir eşleştirme sonucunda X reel eksende değerler almaktadır. Özellikle;

$\{\, \xi \,:\, X(\xi) \le x\}$ $\quad$ *yada kısaca* $\{X \le x\}$ $\quad$ $\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{X}: \text{raslantı değişkeni} \\ \boldsymbol{x}: \text{reel sayılardaki karşılığı} \end{array} \right\}$

özel bir olaya karşılık gelmektedir ve biz bu olaya bir olasılık değeri atamak isteriz. Bu olasılık,

$P[X \le x] \triangleq F_x(x)$ dir ve bu olasılığa "OLASILIK DAĞILIM FONKSİYONU(PDF)" deriz.

Örnek:

İki farklı paranın birlikte atılması durumunda örnek uzayı

$\Omega = \{(T,T),(Y,Y),(T,Y),(Y,T)\}$ Bu örnek uzayında farklı raslantı değişkenleri tanımlamak mümkündür.

X: Gelen tura sayısı olarak ele alındığında

$X(T,T)=2$ $\quad$ $X(Y,T)=1$

$X(T,Y)=1$ $\quad$ $X(Y,Y)=0$

X: Gelen yazsı sayısı olarak alındığında

$X(T,T)=0$ $\quad$ $X(Y,T)=1$

$X(T,Y)=1$ $\quad$ $X(Y,Y)=2$

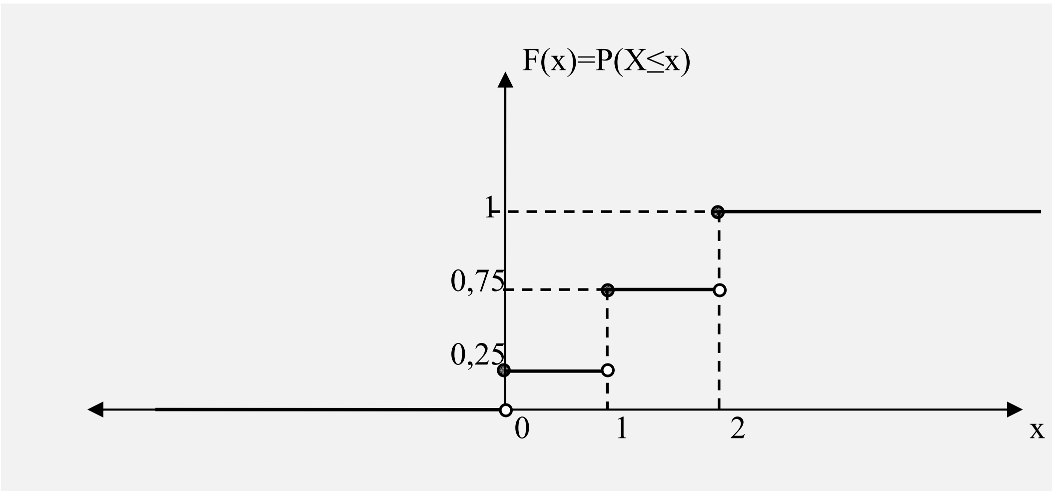
$P(X=1)=1/2$ $\quad$ $F(0)=P(X \leq 0)$

$P(X=0)=1/4$ $\quad$ $F(1)=P(X \leq 1)$

$P(X=2)=1/4$

Bu durumda atılan iki paranın da yazı olma olasılığı $P(x=0)$, birinin tura birini yazı olma olasılığı $P(x=1)$, ve her ikisinin de yazı olma olasılığı $P(x=2)$, ile ifade ederiz.

Eğer "olasılık dağılım fonksiyonunu (PDF)" çizmeye çalışırsak şöyle bir grafik elde ederiz.



Raslantı değişkenin tanımında esas olan örnek uzayının her bir öğesi karşılığında Reel sayı ekseninde (R) bir karşılık bulabilmesidir.

Örnek:

Sınıftaki öğrenciler için

O_1: Boyu 150cm'den küçük olanlar

O_2: Boyu 169cm'den küçük olanlar

O_3: Boyu 160cm'den büyük olanlar

şeklinde tanımlanmış olayları ele alalım.

X: Bir öğrencinin boyunun uzunluğu ise

$X(O_1)=A_1=\{x \mid x < 150\} \longrightarrow P(X < 150)$

$X(O_2)=A_2=\{x \mid x < 169\} \longrightarrow P(X < 169)$

$X(O_3)=A_3=\{x \mid x < 160\} \longrightarrow P(X < 160)$

Bu olaylar değişken olasılıklardır.

Raslantı değişkeni reel eksende aldığı değerlere göre "süreksiz" ve "sürekli" raslantı değişkeni olmak üzere ikiye ayrılırlar.

Eğer X raslantı değişkeninin R deki değer kümesi sayılabilir olarak sonsuz bir küme ise X "süreksiz" bir raslantı değişkenidir.

Örneğin reel eksendeki değer kümesi {x | x = 1,2,3,…} olan bir raslantı değişkeni süreksizdir.

Eğer değer kümesi sayılamıyor ise o zaman X sürekli bir raslantı değişkenidir. Örneğin {x | a ≤ x ≤ b}şeklinde ise bu raslantı değişkeni süreklidir.

OLASILIK DAĞILIM FONKSİYONU (PDF):

$P[X = 0 \; veya \; 1] = 1$, $P[X = 0] = \frac{3}{4}$, $P[X = 1] = \frac{1}{4}$ olan bir raslantı değişkenini ele aldığımızda P[X ≤ x] şeklinde yazabileceğimiz bütün olasılık değerlerini elde edebilir.

Mesela **P[X ≤ 0,5]=3/4** olur.

Bir çok durumda her bir olasılık için tek tek olasılık fonksiyonu P[.] 'yi yazmak garip olabilir. Bunun için PDF (olasılık dağılım fonksiyonunu) kullanmaya ihtiyaç duyarız.

PDF : $F_x(x)$=P[X ≤ x] şeklinde tanımlanır.

NOT:
Raslantı değişkenlerinin büyük "X" (Y,Z vs. olabilir), Bu ralantı değişkeninin aldığı değerlerin ise küçük "x" ile gösterildiğine dikkat edin bu durumda $F_x(y)$ yazmamız notasyonda herhangi bir problem oluşturmaz. Fx(y)=P[X≤y] olur.

Olasılık Dağılım Fonksiyonunun $F_x(x)$'in özellikleri:

1) $F_x(\infty)=1$ $F_x(-\infty)=0$

2) $0 \leq F_x(x) \leq 1$

3) $x_1 \leq x_2 \rightarrow F_x(x_1) \leq F_x(x_2)$

4) $P(x_1 < X \leq x_2) = F_x(x_2) - F_x(x_1) \geq 0$

Örnek:

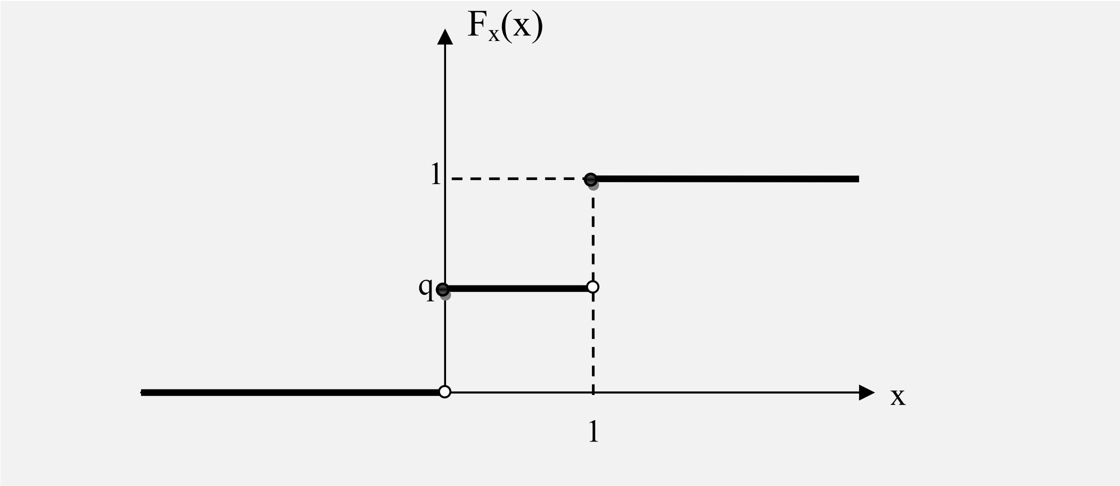
Bir bilgisayarın hafızasındaki bit dizisini inceleyelim. Eğer bit "1" ise X=1 ve "0" ise X=0 dir. Bitin 0 olma olasılığının "q", 1 olma olasılığının da "1-q" olduğunu varsayalım.

Bu durumda Ω={0,1} olur. Bu olasılığın dağılım fonksiyonu $F_x(x)$'i hesaplayalım

i) x < 0 : Bu durumda {X ≤ x}=Ø bir ve $F_x(x)=0$

ii) $0 \leq x < 1$: Bu durumda $\{X \leq x\}$=q dur.

iii) $x \geq 1$: Bu durumda $\{X \leq x\}=\Omega$ olur yani $P(X\leq 1)=1$



Örnek:

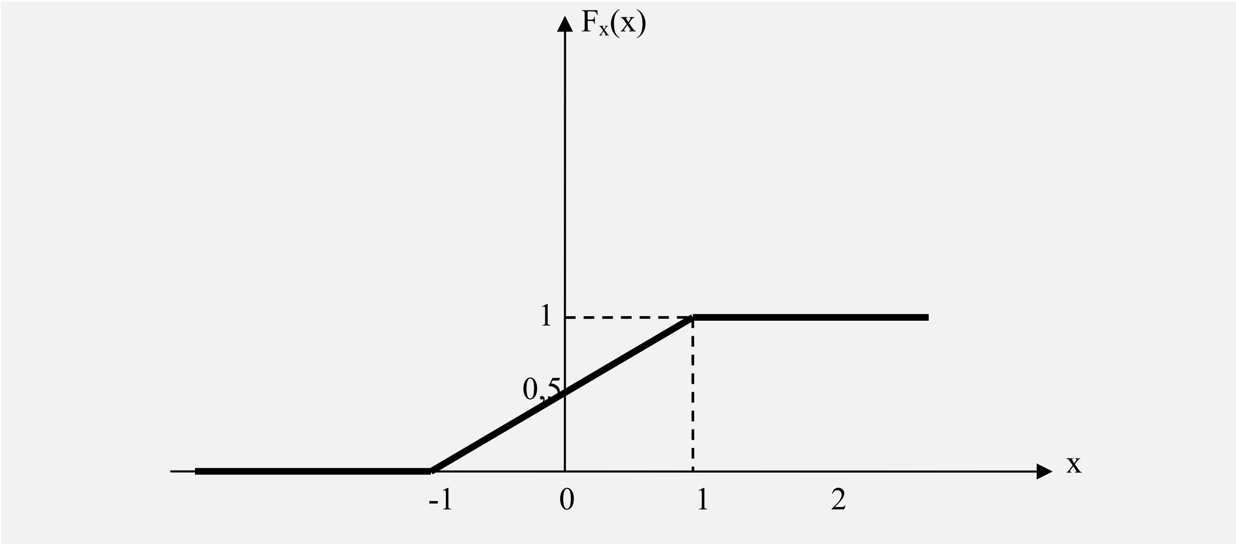
Bir raslantı değişkeni aşağıdaki olasılık dağılım fonksiyonuna sahiptir.

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\infty < x \leq -1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x & , \quad -1 < x < 1 \\ 1 & , \quad 1 \leq x < \infty \end{cases}$$

a) X =1/4

b) X > 3/4

Önce bu olasılık dağılım fonksiyonunu çizelim



"a" şıkkını çözmek için $F(x^-) = \lim_{\varepsilon \to 0} F(x - \varepsilon) \qquad ,0 < \varepsilon$
Yani olasılık dağılım fonksiyonunun x noktasındaki soldan limitini tanımlayalım.

Burada şunu iddia ediyoruz P{X=x}= F(x)-F(x^-)

İspat:

$x_1 = x - \varepsilon \qquad ve \qquad x_2 = x$ ele alalım

4. Özelliği kullanarak $P(x_1 < X \leq x_2) = F_x(x_2) - F_x(x_1)$

$$P(x - \varepsilon < X \leq x) = F_x(x) - F_x(x - \varepsilon)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0}(F_x(x) - F_x(x - \varepsilon)) = F_x(x) - F_x(x^-) \qquad dir.$$

Sürekli fonksiyonlarda fonksiyonun sağdan ve soldan limitleri fonksiyonun o noktadaki değerine eşit olduğundan $F_x(x)=F_x(x^-)$ olacağından P(X=x) sürekli fonksiyonlar için "0" olur. Yani P(X=1/4)=0

b) P(X > 3/4) = 1 – P(X ≤ 3/4) = 1 - F_x(3/4) = 1/8 olur.

OLASILIK YOĞUNLUK FONKSİYONU (pdf)

$$f(x) = \frac{dF_x(x)}{dx}$$

Olasılık yoğunluk fonksiyonu.

Özellikleri:

1) $\int_{-\infty}^{\infty} f(r)dr = F(\infty) - F(-\infty) = 1$

$$2)\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(r)dr = P[X \leq x]$$

$$3)\ F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} f(r)dr - \int_{-\infty}^{x_1} f(r)dr = \int_{x_1}^{x_2} f(r)dr = P[x_1 < X \leq x_2]$$

f(x)'in yorumu:

$$P[x < X \leq x + \Delta x] = F(x + \Delta x) - F(x)$$

Yeterince küçük bir Δx değeri için

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_{x}^{x+\Delta x} f(r)\, dr = f(x)\Delta x$$

dolayısıyla küçük Δx için ***P[x<X≤x+Δx]=F(x)Δx*** eğer Δx→0'a giderse P[X=x]=f(x)Δx→0 olur.

BEKLENDİK DEĞER

$$\overline{X} = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Burada beklendik değer olarak nitelendirdiğimiz değer ,X raslantı değişkeninin ortalama değeridir.

MOMENT

$$\overline{X^n} = E[x^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx$$

$\overline{X^n}$ e X rasgele değişkeninde görüldüğü üzere "n=1" olunca bu moment beklendik değer, **"n=2"** olunca **karesel beklendik değer** adını alır ve bu da bizim için önemlidir.

$$\overline{X^2} = E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$$

Karesel beklendik değer eğer ragele değişkenimiz bir direnç üzerindeki gerilimi ifade ediyorsa direncin üzerinde harcanan güç bu karesel beklendik değerle orantılıdır.

Merkezi moment diye tanımlayacağımız momentlerde rasgele değişkenden beklendik değerin çıkartıldıktan sonra elde edilen momentlerdir.

$$\overline{(\mathrm{X}-\overline{\mathrm{X}})^{\mathrm{n}}} = E[(x-\overline{\mathrm{x}})^{n}] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\overline{\mathrm{x}})^{n} f(x)dx$$

n=1 için merkezi momentin "0" olacağı açıktır.

n=2 için ise oldukça önemlidir. Buna "varyans" denilir.

$$\sigma^2 = \overline{(\mathrm{x}-\overline{\mathrm{x}})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\overline{\mathrm{x}})^2 f(x)dx$$

$$\sigma^2 = E[(x-\bar{x})^2] = E[x^2 - 2x\bar{x} + (\bar{x})^2]$$

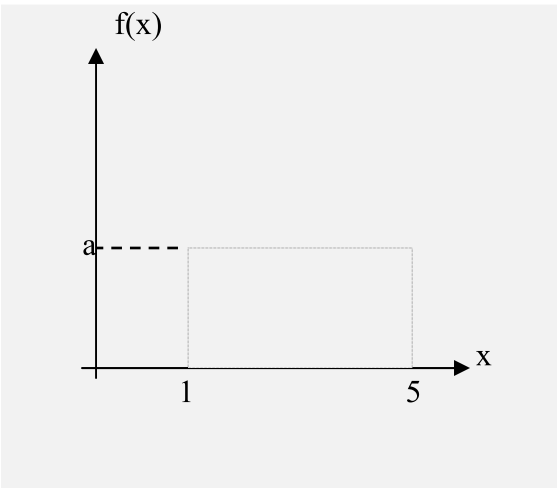
$$= E[x^2] - 2E[x]\bar{x} + (\bar{x})^2$$

$$= \overline{x^2} - 2\bar{x}\bar{x} + (\bar{x})^2$$

$$= \overline{x^2} - (\bar{x})^2$$

$\sqrt{\sigma^2} = \sigma \;\; ve \;\; \sigma$ değeri de standart sapma olarak adlandırılır.

Örnek:



a) Şekilde verilen olasılık yoğunluk fonksiyonunun geçerli bir "pdf" olması için "a" ne olmalı?

b) E[x]

c) σ^2

d) σ

Çözüm:

"a" şıkkının çözümü için olasılık yoğunluk fonksiyonunun 1. Özelliğini kullanacağız.

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \;\; olduğunu\ biliyoruz.$$

$$\int_{1}^{5} a\,dx = 1 \Rightarrow ax|_1^5 = 1 \Rightarrow a(5-1) = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \ olur.$$

$$b)\quad E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{1}^{5} x\frac{1}{4}\,dx = \frac{x^2}{8}|_1^5 = \frac{1}{8}(25-1) = 3$$

$$c)\quad \sigma^2 = E[x^2] - (E[x])^2$$

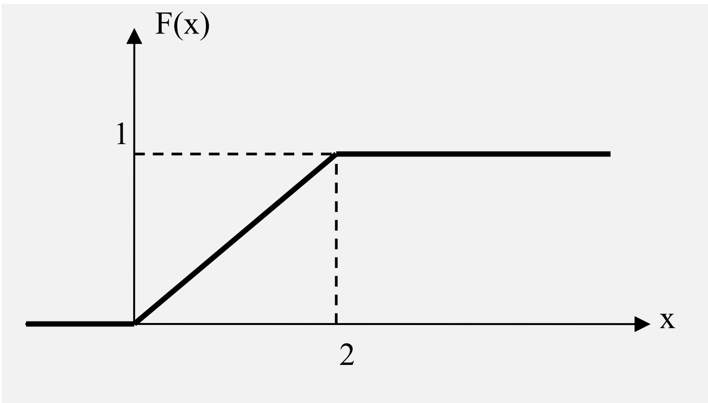
$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{1}^{5} \frac{1}{4}x^2dx = \frac{x^3}{12}|_1^5 = \frac{1}{12}(125-1) = \frac{124}{12}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{124}{12} - 3^2 = \frac{124}{12} - \frac{108}{12} \quad \Rightarrow \quad \sigma^2 = \frac{4}{3}$$

$$d)\quad \sigma = \sqrt{\sigma^2} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad olur.$$

Örnek:

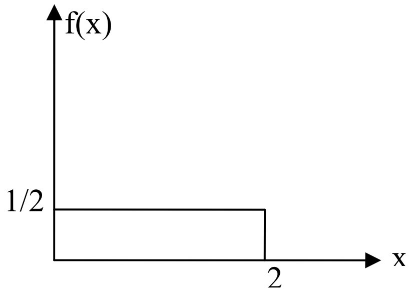
Aşağıda olasılık dağılım fonksiyonu verilen X raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu çiziniz.



$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \ olduğunu\ biliyoruz.$$

Dolayısıyla olasılık dağılım fonksiyonunun türevi bize olasılık yoğunluk fonksiyonunu verir.

Cevap:



DIRAC DELTA FONKSİYONU:

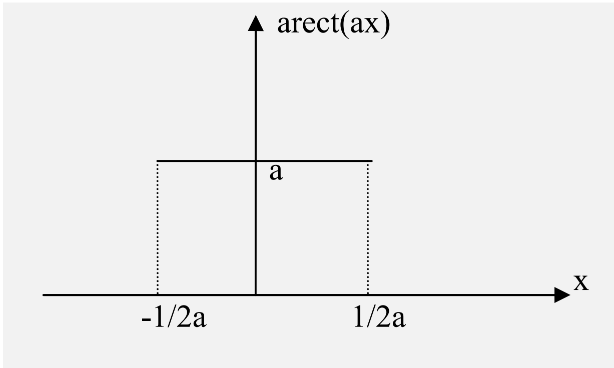
Delta fonksiyonu δ(x) genellikle x=0 dışındaki bütün noktalarda 0 değerini alır ve x=0 da ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1 \; değerini\ sağlayacak\ şekilde\ sonsuza\ uzanan\ bir\ fonksiyon\ dur.$$

Diğer bir tanımda rect (dikdörtgen) fonksiyonu kullanılarak verilir.

$$\delta(x) = \lim_{a\to\infty} a\, rect(ax)$$

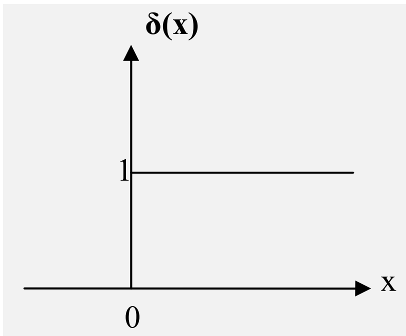
Şekilde a→∞ gittiğinde dikdörtgen genişliği azalarak 0'a gider ve yüksekliği artarak ∞'a gider.



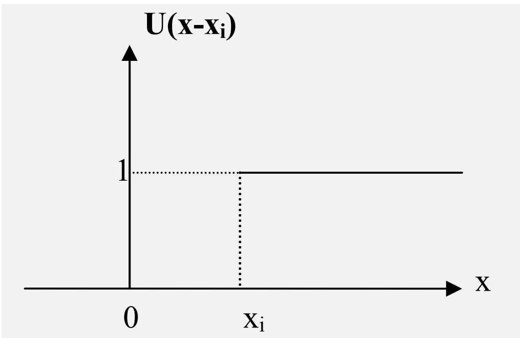
$X=X_i$ noktasındaki süreksizliğin türevi:

Elimizde birim basamak fonksiyonu olsun.

$$birim\ basamak\ fonksiyonu = U(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



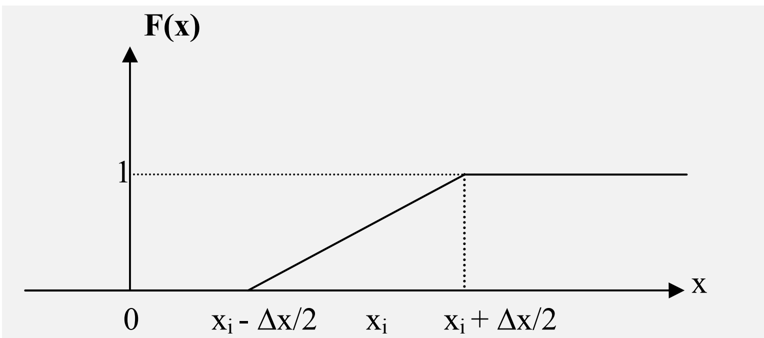
Şekil a



Şekil b

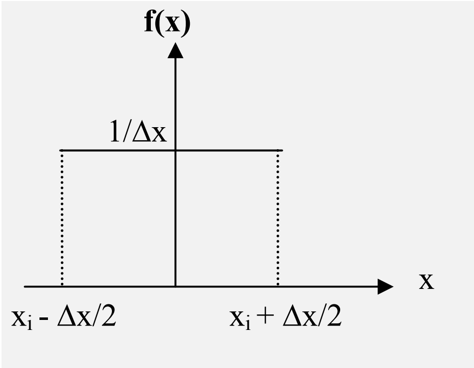
Solda gösterdiğimiz fonksiyon $U(x-x_i)$ yani birim basamak fonksiyonunun x_i kadar büyük şeklidir. (Şekil b)

Sağdaki şekilde (şekil c) ise şekil b'nin Δx→0 giderken bir yaklaşım gösterimidir.



Şekil c

Şekil c deki fonksiyonun türevini alırsak aşağıdaki grafiği elde ederiz.



$$\frac{dF(x)}{dx}|_{x_i} \triangleq \frac{dF(x)}{dx_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{1}{\Delta x_i} rect[\frac{x - x_i}{\Delta x_i}]$$

$$\frac{dF(x)}{dx}|_{x_i} = \delta(x - x_i) \qquad olur.$$

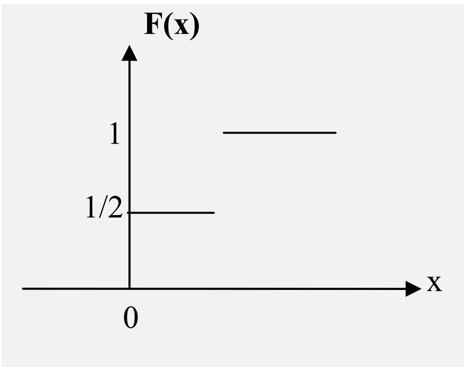
Yani $x = x_i$ noktasındaki bir süreksizliğin türevi $x = x_i$ noktasında tanımlı ve yüksekliği süreksizliği ile doğru orantılı olan bir δ fonksiyonu ile verilir.

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P_x(x_i) \text{ olduğunu hatırlayarak aynı şekilde}$$

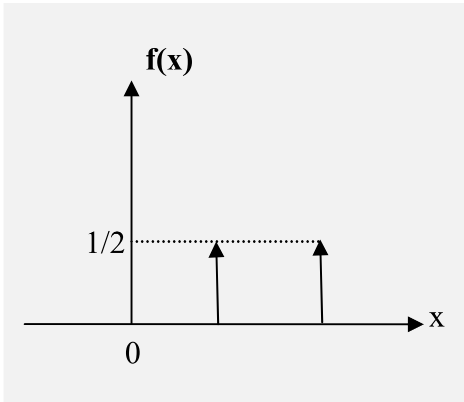
$$F(x) = \sum_i P_x(x_i)\, U(x - x_i) \text{ şeklinde yazabiliriz}$$

$$\text{dolayısıyla } f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \sum_i P_x(x_i)\, \delta(x - x_i) \quad olur.$$

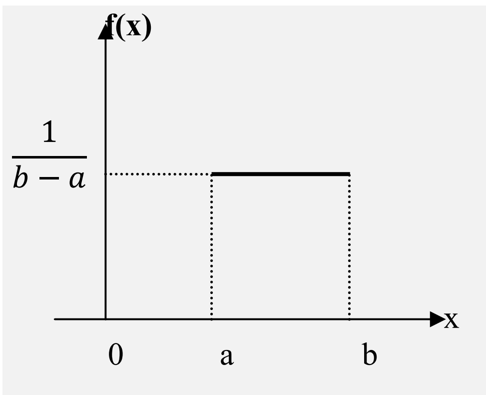
<u>Örnek:</u>



→PDF ise



<u>Sık Kullanılan Olasılık Yoğunluk Fonksiyonları:</u>



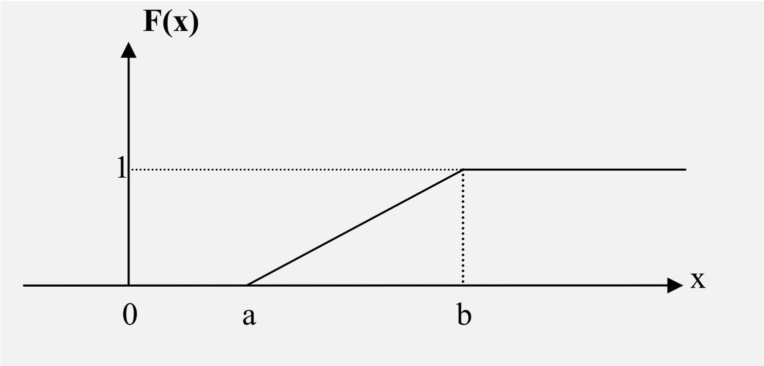
1) ***Uniform pdf (düzgün)***

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

Bu dağılım daha önceden bilgi sahibi

olmadığımız durumda belli aralıklarda olabilecek olayların eşit şansla olabileceğini kabul etmemize
karşılık gelen pdf dir.

Bu olasılık yoğunluk fonksiyonunun PDF'sini çizecek olursak



$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

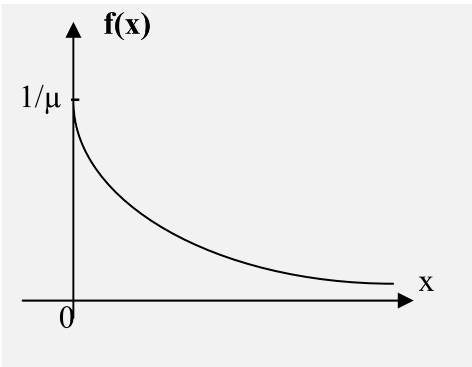
$$ortalama\ değer\ \ E[x] = \mu = \frac{a+b}{2}\quad olur.$$

$$varyansı\ \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

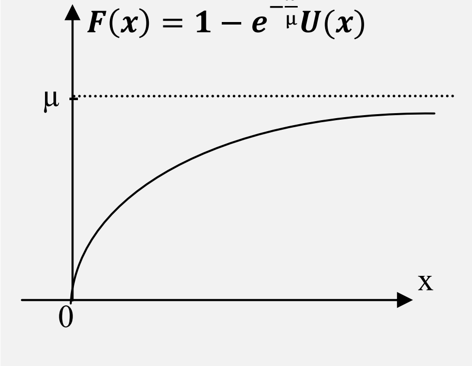
2) ***Exponansiyel (Üstsel dağılım)(μ>0)***

$$f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} U(x)$$

Ortalama değer = μ
Varyans $\sigma^2 = \mu^2$

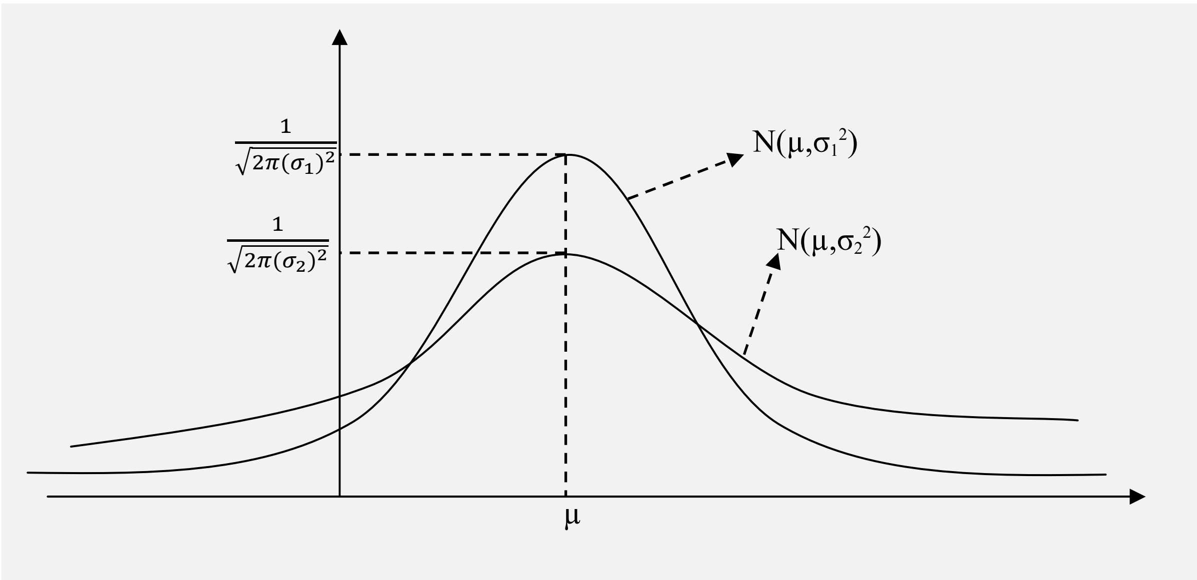


Üstsel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunun PDF'sini çizersek



3) Normal (Gaussian)pdf

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$



Ortalama değer E[x]=μ
Varyans = σ^2
Bu olasılık yoğunluk fonksiyonunun PDF'si ise

$$F(x) = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{erf}\,(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}))$$

$$P(a < X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}\,dx$$

Bu integrali almak zor bunun için "erf" fonksiyonundan yaklaşım yapacağız.

$$\mathrm{erf}(x) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$

$$P(a < X \le b) = \mathrm{erf}\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \mathrm{erf}\,(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

<u>erf fonksiyonunun birkaç özelliği:</u>

1) $\mathrm{erf}(-x) = -\mathrm{erf}\,(x)$

2) $P(X \le x) = \frac{1}{2} + \mathrm{erf}\,(x)$

3) $P(X > x) = \frac{1}{2} - \mathrm{erf}(x)$

4) $P(X > -x) = \frac{1}{2} + \text{erf}(x)$

5) $F(-x < X \leq x) = 2\text{erf}\,(x)$

6) $P(|X| > x) = 1 - 2\text{erf}\,(x)$

Örnek:

N(0,4) gaussian bir dağılım için P(2<X≤4)=?

Cevap:

$$P(2 < X \leq 4) = \text{erf}\left(\frac{4-0}{2}\right) - \text{erf}\left(\frac{2-0}{2}\right)$$

$= \text{erf}\,(2) - \text{erf}\,(1)$

$= 0{,}477 - 0{,}341$

$= 0{,}136$ olur.

Örnek:

Sınıf mevcudunun 66 kişi olduğunu düşünelim μ=30 ve σ=20 bu sınıfta 20 ile 40 arasında not alan kaç kişi vardır?

Cevap:

$$P(20 < X \leq 40) = \text{erf}\left(\frac{40-30}{20}\right) - \text{erf}\,\left(\frac{20-30}{20}\right)$$

$= \text{erf}(0{,}5) - \text{erf}(-0{,}5)$

$= 2\text{erf}(0{,}5)$

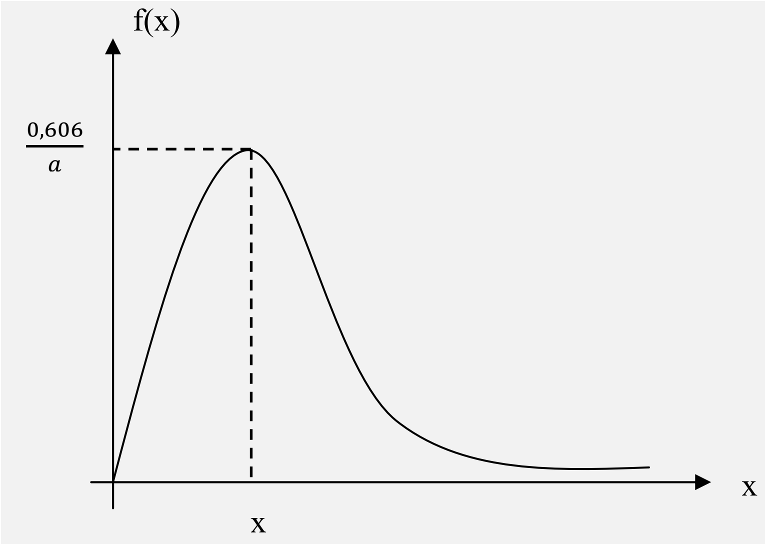
$=2(0{,}191)$

$=0{,}382$

66.0,382 = 25,08 ≈ 25 kişi 20 ile 40 arasında not alır.

4) Rayleigh (a > 0) ve (n ≥ 0)

$$f(x) = \frac{x}{a^2} e^{\frac{-x^2}{2a^2}} U(x)$$



Ortalama değer $\mu = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Varyans $\sigma^2 = (\frac{4-\pi}{2})a^2$

Bu pdf haberleşmede gecikmeli (fading) kanalın modellenmesinde kullanılır.

Belirsiz İntegral Tablosu

$$\int x\cos ax\,dx = \frac{1}{a^2}(\cos ax + ax\sin ax)$$

$$\int x^2\sin ax\,dx = \frac{1}{a^3}(2ax\sin ax + 2\cos ax - a^2x^2\cos ax)$$

$$\int x^2\cos ax\,dx = \frac{1}{a^3}(2ax\cos ax - 2\sin ax + a^2x^2\sin ax)$$

$$\int \sin ax\sin bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \qquad a^2 \neq b^2$$

$$\int \sin ax\cos bx\,dx = -\left[\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)}\right] \qquad a^2 \neq b^2$$

$$\int \cos ax\cos bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \qquad a^2 \neq b^2$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$$

$$\int x^2e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2)$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int f(x)\dot{g}(x)\,dx = f(x)g(x) - \int \dot{f}(x)g(x)\,dx$$

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax \qquad \int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax$$

$$\int \sin^2 ax\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} \qquad \int \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int x\sin ax\,dx = \frac{1}{a^2}(\sin ax - ax\cos ax)$$

5 - EK-1

33

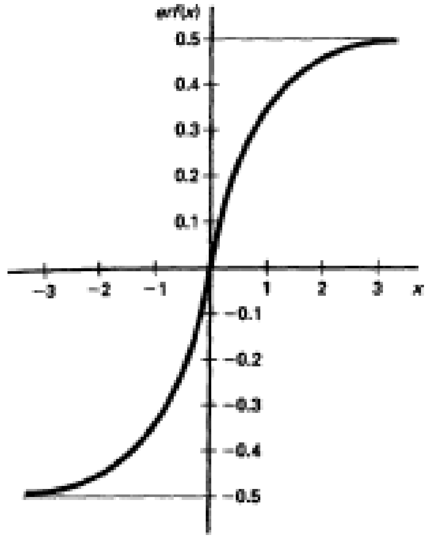


Figure 2.4–2 erf(x) versus x.

Table 2.4–1

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp(-\tfrac{1}{2}t^2)\, dt$$

x	erf(x)	x	erf(x)
0.05	0.01994	2.05	0.47981
0.10	0.03983	2.10	0.48213
0.15	0.05962	2.15	0.48421
0.20	0.07926	2.20	0.48609
0.25	0.09871	2.25	0.48777
0.30	0.11791	2.30	0.48927
0.35	0.13683	2.35	0.49060
0.40	0.15542	2.40	0.49179
0.45	0.17364	2.45	0.49285
0.50	0.19146	2.50	0.49378
0.55	0.20884	2.55	0.49460
0.60	0.22575	2.60	0.49533
0.65	0.24215	2.65	0.49596
0.70	0.25803	2.70	0.49652
0.75	0.27337	2.75	0.49701
0.80	0.28814	2.80	0.49743
0.85	0.30233	2.85	0.49780
0.90	0.31594	2.90	0.49812
0.95	0.32894	2.95	0.49840
1.00	0.34134	3.00	0.49864
1.05	0.35314	3.05	0.49884
1.10	0.36433	3.10	0.49902
1.15	0.37492	3.15	0.49917
1.20	0.38492	3.20	0.49930
1.25	0.39434	3.25	0.49941
1.30	0.40319	3.30	0.49951
1.35	0.41149	3.35	0.49958
1.40	0.41924	3.40	0.49965
1.45	0.42646	3.45	0.49971
1.50	0.43319	3.50	0.49976
1.55	0.43942	3.55	0.49980
1.60	0.44519	3.60	0.49983
1.65	0.45052	3.65	0.49986
1.70	0.45543	3.70	0.49988
1.75	0.45993	3.75	0.49990
1.80	0.46406	3.80	0.49992
1.85	0.46783	3.85	0.49993
1.90	0.47127	3.90	0.49994
1.95	0.47440	3.95	0.49995
2.00	0.47724	4.00	0.49996

But $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$ (deduced from Equation 2.4–8). Hence

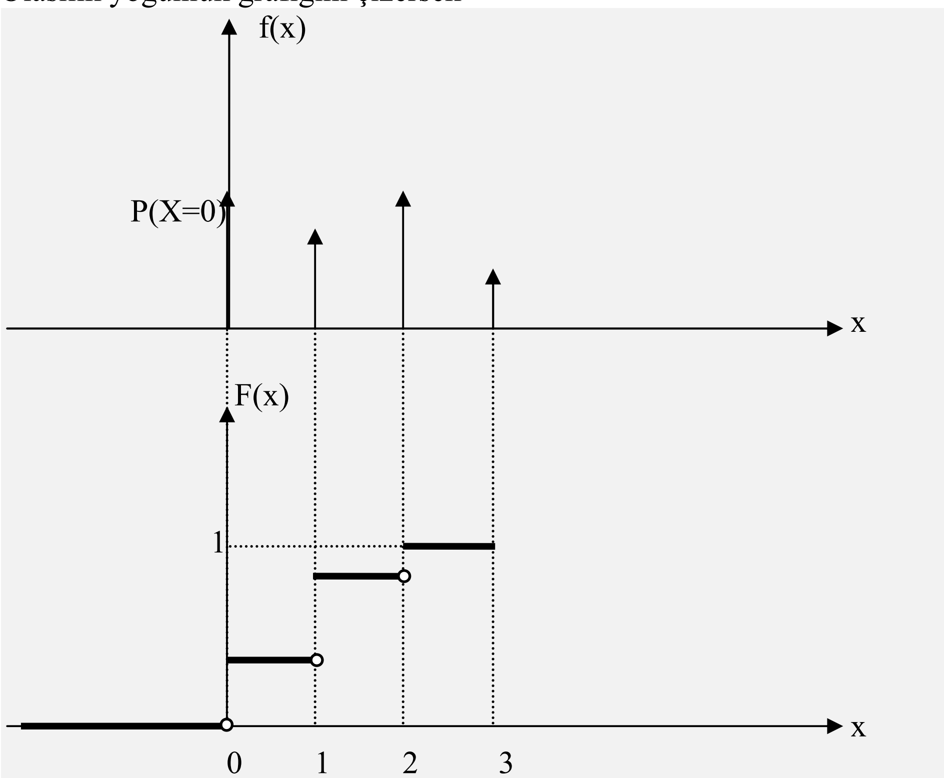
5) ***Binom olasılık yoğunluk fonsiyonu (n>m):***

$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$ $\quad ve \quad p+q=1 \quad olmak$ üzere.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}.\delta(x-k)$$

$$F(x)=\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}p^nq^{n-k} \qquad m\le x<m+1$$

Olasılık yoğunluk grafiğini çizersek



"n" eğer çok büyükse $\begin{cases} Ortalama\ değer & \mu=n.p \\ Standart\ sapması & \sigma=\sqrt{npq}\end{cases}$

6) ***Poisson (a>0) :***

$$P\{X=k\}=\frac{a^k}{k!}e^{-a} \qquad k=0,1,2,\dots$$

buna göre:

$$f(x)=e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}\delta(x-k)$$

$$F(x) = e^{-a} \sum_{k=0}^{m} \frac{a^k}{k!} \qquad\qquad m \le x < m+1$$

Şimdi bunların nasıl elde edildiğine bakalım.

İspat:

$\Rightarrow \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad ve \qquad p + q = 1$

$\Rightarrow \quad n \gg 1 \quad , \quad p \ll 1 \quad , \quad n.p = a \quad olsun$

$$\Rightarrow \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \left(\frac{a}{n}\right)^k \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{k!} n(n-1)(n-2) \dots\dots\dots\dots (n-k+1). \left(\frac{a}{n}\right)^k \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{k!} \frac{n^k}{n^k} a^k \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{a^k}{k!} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-k} \qquad paydadaki\ \boldsymbol{n}\ sonsuza\ giderse\ \ (n \to \infty)$$

Taylor serisinden

$$\Rightarrow \frac{1}{k!} a^k e^{-a}$$

$$\Rightarrow e^{-a} \frac{a^k}{k!} \qquad\qquad olarak\ bulunur.$$

Örnek:

Bir bilgisayarda 10 bin tane elektronik eleman vardır. Her bir eleman diğerinden bağımsız bir yılda bozulma olasılığı ($p=10^{-4}$) olarak veriliyor. Bilgisayarın yıl sonunda çalışıyor olma olasılığı nedir? Bir eleman bozulduğunda bilgisayarında bozulduğu kabul ediliyor.

Cevap:

$P=10^{-4}$ $\qquad$ n=10000 $\qquad$ k=0 $\qquad$ ve $\qquad$ a = n.p = 1 olduğunu biliyoruz.

$$e^{-a} \frac{a^k}{k!} = \frac{1^0}{0!} e^{-1} = 0{,}368 \qquad\qquad olur.$$

$$a = \lambda\tau$$

λ: birim zamandaki olayların sayısı

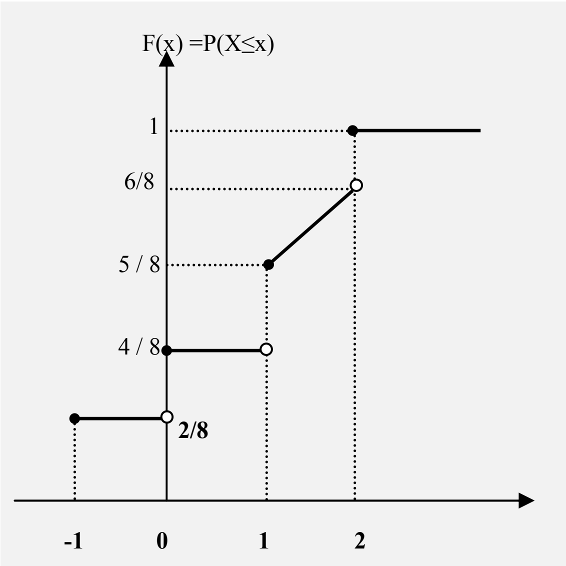
τ: aralığın uzunluğu (t , t + τ)

$$P(k;t,t+\tau) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!}\, e^{-\lambda\tau}$$

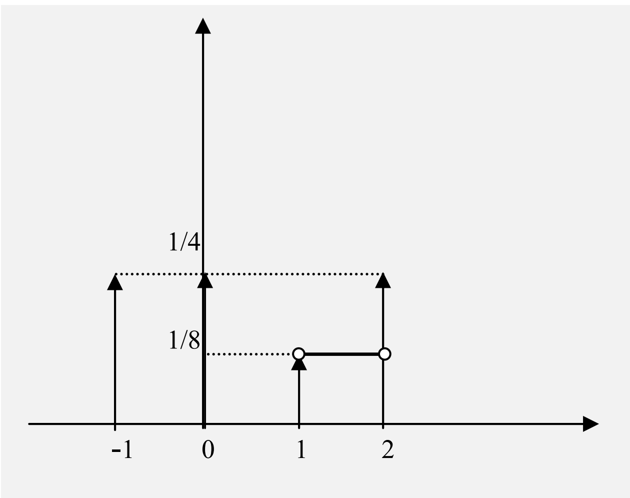
Trafik modellemelerinde çokca kullanılan yoğunluk ifadesi

Örnek:

Şeklinde verilen bir pdf için PDF yi bulunuz.



Cevap:



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\delta(x+1)}{4} + \frac{\delta(x)}{4} + \frac{\delta(x-1)}{8} + \frac{\delta(x-2)}{4}\right) dx + \int_{1}^{2} \frac{1}{8} dx$$

toplamın integrali integrallerin toplamına eşittir. Dolayısıyla

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x+1)}{4} dx = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x+1)dx = \frac{1}{4}.1 = \frac{1}{4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x)}{4} dx \;=\; \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx \;=\; \frac{1}{4}.1 \;= \frac{1}{4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x-1)}{8} dx = \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-1)dx = \frac{1}{8}.1 = \frac{1}{8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x-2)}{4} dx = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-2)dx = \frac{1}{4}.1 = \frac{1}{4}$$

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{8} dx = \frac{1}{8}$$

Sonuçların hepsini toplarsak sonucun 1 olması gerekir.

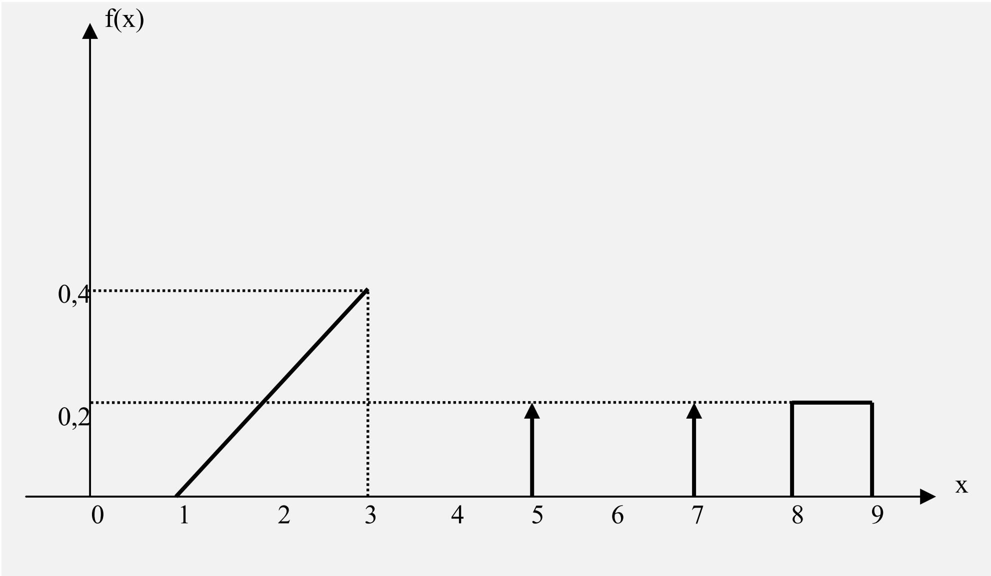
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

Eğer F(x)=P(-1 ≤ x ≤ 1) sorulmuş olsaydı cevap 1/4 + 1/4 + 1/8 = 5/8 olacaktı.

Örnek:

a) pdf grafiği verilen fonksiyonun PDF ‘sini çiziniz

b) P(4<x≤8,5) değerini bulunuz.



<u>Cevap:</u>

a) Her bir aralık için ayrı ayrı hesaplama yaparsak

1 ≤ x ≤ 3 Aralığı için F(x)'i yazacak olursak.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{1} f(r)dr + \int_{1}^{x} 0{,}2(r-1)dr$$

$\int_{-\infty}^{1} f(r)dr$ *integrali* 0 *olur* çünkü *bu aralıkta* $(-\infty, 1)$ $f(r) = 0$ *dır*.

Dolayısıyla sadece ikinci integral kalır.

$$F(x) = \int_{1}^{x} 0{,}2(r-1)dr = 0{,}2\left(\frac{r^2}{2} - r\right)\Bigg|_{1}^{x}$$

$$= 0{,}2\left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right]$$

$$= 0{,}2\left[\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}\right] \text{ şeklinde } 2. \text{ dereceden bir denklem oluşur.}$$

3<x<5 Aralığı için F(x)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(r)dr = \int_{-\infty}^{1} 0dr + \int_{1}^{3} 0{,}2\delta(r-1)dr + \int_{3}^{\infty} 0dr$$

$$= 0{,}2\left[\frac{r^2}{2} - r\right]\Bigg|_{1}^{3} = 0{,}2\left[\left(\frac{9}{2} - 3\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] = 0{,}4 \text{ olur}$$

5<x≤7 Aralığı için F(x)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(r)dr = \int_{-\infty}^{1} 0dr + \int_{1}^{3} 0{,}2\delta(r-1)dr + \int_{3}^{\infty} 0dr + \int_{5}^{7} 0{,}2\delta(r-5)dr$$

$$F(x) = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6 \quad olur.$$

7<x≤8 Aralığı için F(x)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{1} 0dr + \int_{1}^{3} 0{,}2\delta(r-1)dr + \int_{3}^{\infty} 0dr + \int_{5}^{7} 0{,}2\delta(r-5)dr + \int_{7}^{8} 0{,}2\delta(r-7)dr$$

F(x)=0,4+0,2+0,2=0,8 olur.

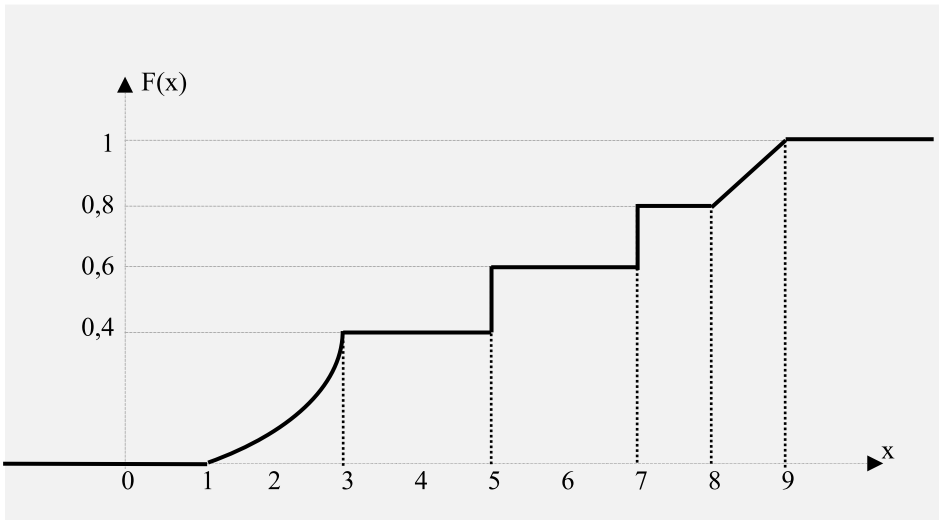
8<x≤9 Aralığı için F(x)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(r)dr = 0{,}8 + \int_{8}^{x} 0{,}2dr = 0{,}8 + 0{,}2x \quad olur.$$

9<x<∞ Aralığı için F(x)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(r)dr = 0{,}8 + \int_{8}^{9} 0{,}2dr = 0{,}8 + 0{,}2 = 1 \quad olur.$$

Her aralık için hesaplama yaptık bunları çizelim çizilen grafik bizden istenen PDF olacaktır.



b)

$$P(4 < x \leq 8{,}5) = \int_{4}^{8{,}5} f(x)dx = \int_{4}^{8} 0{,}2[\delta(x-5)+\delta(x-8)]dx + \int_{8}^{8{,}5} 0{,}2dx$$

$$= 0{,}4 + 0{,}2x|_{8}^{8{,}5} = 0{,}5$$

Yada

P(4 < x ≤ 8,5) = F(8,5) - F(4) = 0,9 - 0,4 = 0,5 olur.

__Koşullu Yoğunluklar Ve Dağılımlar:__

"Ω" Evrensel kümesine ait bütün ξ elemanlarını içeren bir C olayını ve bu Ω kümesinin elemanlarını reel eksene atayan bir X raslantı değişkeni ele alalım. Bu durumda yine bu evrensel kümenin alt kümesi olan bir B kümesi tanımlayalım
{ξ : X (ξ) ≤ x } , { ξ : ξ ∈ B }

B olayına bağlı şartlı dağılım

$$F(x|B) \triangleq \frac{P[C]}{P[B]} = \frac{P[X \leq x, B]}{P[B]} \qquad şeklinde\ tanımlanır.$$

Burada *P[X≤x,B]* ………………….*{ X ≤ x }* ve B olayının bileşik olasılığıdır. Eğer *x→∞* *{X≤∞}* kesin olaya denk olur ve *F(∞,B)=1* olur.

F(x|B) Normal bir dağılım fonksiyonunun bütün özelliklerine sahiptir.
Koşullu yoğunluk fonksiyonu da aynı şekilde

$$f(x|B) \triangleq \frac{dF(x|B)}{dx} \quad dir.$$

Örnek:

B olayını $B \triangleq \{X \leq 10\}$ şeklinde tanımlayalım ve *F(x|B)*'yi hesaplayalım.

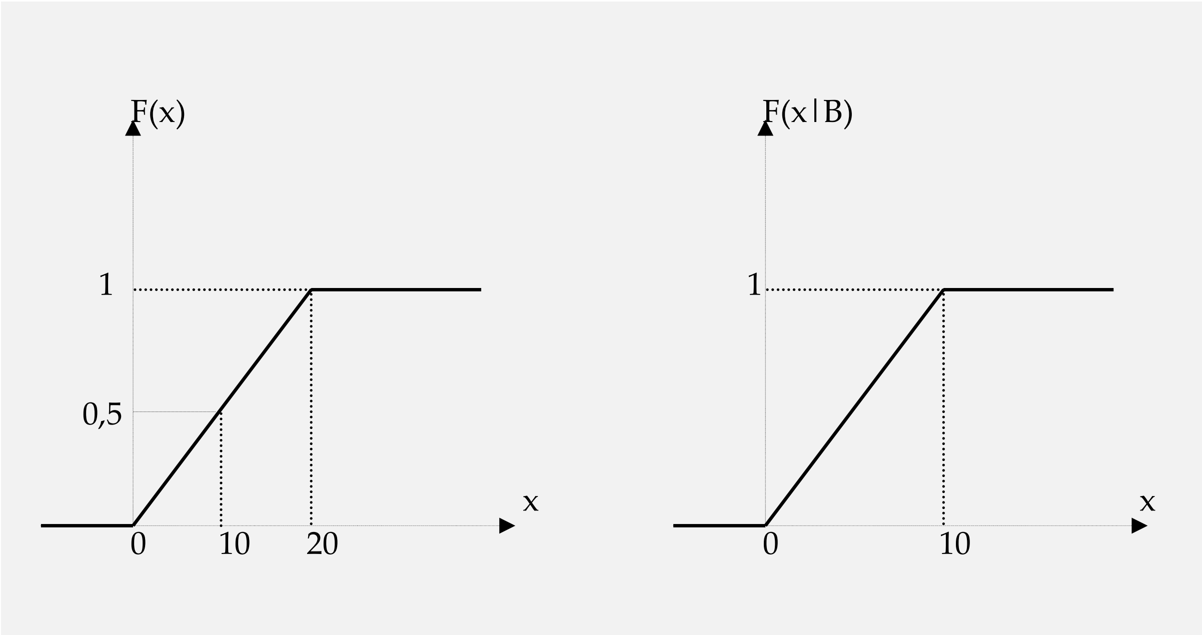
i) ***x≥10*** *için* ***{X≤10}*** *olayı* ***{X≤x}*** olayının bir alt kümesidir. Dolayısıyla

$$P[X \leq 10, X \leq x] = P[X \leq 10] \quad olur.$$

$$F[x|B] = \frac{P[X \leq x, X \leq 10]}{P[X \leq 10]} = 1$$

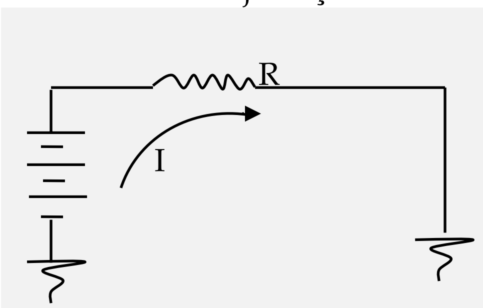
ii) ***x ≤ 10*** *için* ***{X ≤ x}*** *olayı* ***{X ≤ 10}*** olayının alt kümesidir dolayısıyla
P[X ≤ 10, X ≤ x]=P[X ≤ x]

$$F(x|B) = \frac{P[X \leq x]}{P[X \leq 10]}$$



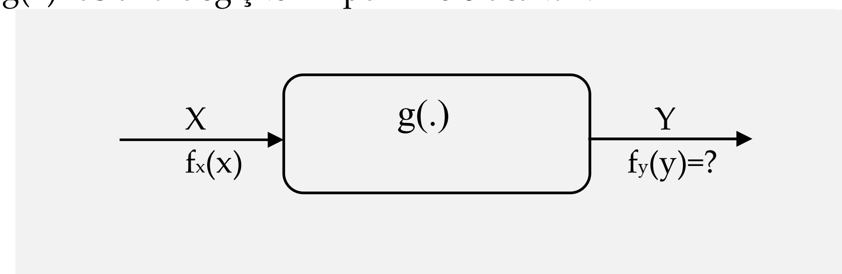
BİR RASLANTI DEĞİŞKENİNİN FONKSİYONLARI

Mühendislik uygulamalarında klasik bir problem; bir sistemin girişine uygulanan giriş için çıkışın hesaplanmasıdır. Böylesi bir sistemin girişi bir raslantı değişkeni ise çıkışı da genellikle bir raslantı değişkeni olacaktır. Bu durumda eğer giriş ralantı değişkenleri için PDF veya pdf ifadeleri de biliniyorsa sistemin çıkışındaki raslantı değişkeni için PDF veya pdf hesaplanabilir.
Bu durumu bir örnekle açıklayalım.
Bir direnç (R) elemanı üzerinden akan akım (I) büyüklüğü w ile ifade edilen miktarda bir enerji oluşturmaktadır.



$W \triangleq W(I) = I^2 R$

Burada W veya W(.) bazen de W(I) ifadesi ile tanımlanan ve fonksiyon olarak adlandırılan büyüklük her I değeri için oluşan enerjiyi belirler Bu durumda, eğer I bir raslantı değişkeni olarak tanımlanmış $W=I^2R$ şeklinde tanımlı büyüklük yeni bir raslantı değişkeni oluşturmaktadır. <u>O zaman çözülmesi gereken soru:</u>
Verilen bir kuralı (fonksiyon) ve pdf'i **$f_x(x)$** tanımlanan X raslantı değişkeni için , yeni Y=g(x) raslantı değişkenin pdf'i ne olacaktır?



Y=g(x) tipi bir problem çözümü;

Tek bir raslantı değişkeninin (fonksiyonu):

X(0,1) aralığında tanımlı uniform bir raslantı değişkeni ifade edilsin. Ve Y=2X+3 yeni raslantı değişkeni $F_y(y)$=?

$\{Y \leq y\} = \{2X + 3 \leq y\} = \{X \leq 1/2(y-3)\}$ $\quad$ *olacaktır.*

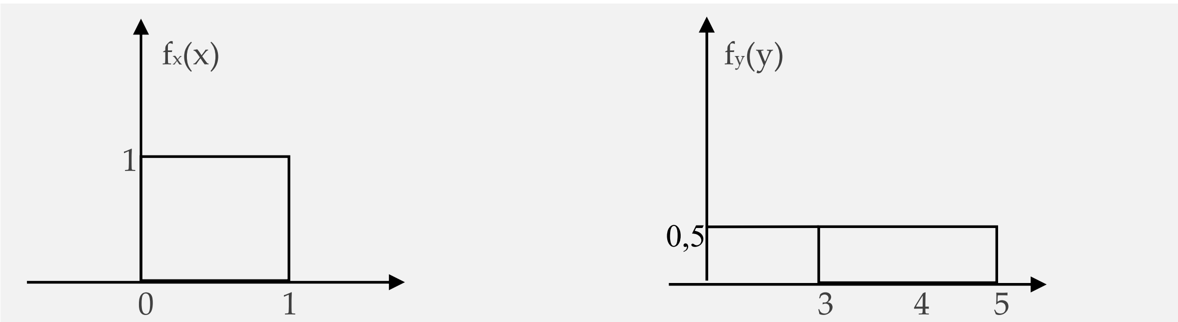
Dolayısıyla

$F_y(y) = F_x\left(\frac{y-3}{2}\right)$ $\quad$ *ifadesiyle kolaylıkla eldeedilebilir.*

Buradan hareketle,

Y'nin pdf'si için:

$f_y(y) = \frac{d}{dy}[F_y(y)] = \frac{d}{dy}\left[F_x\left(\frac{y-3}{2}\right)\right]$ *olur.*



$u = \frac{y-3}{2}$ *olmak üzere* $\quad$ $f_y(y) = \frac{d}{dy}\left[F_x\left(\frac{y-3}{2}\right)\right] = \frac{d}{du}[F_x(u)].\frac{du}{dx}$ $\quad$ *ise*

$f_y(y) = f_x(u).\frac{1}{2}$ $\quad \Rightarrow \quad$ $f_y(y) = f_x\left(\frac{y-3}{2}\right).\frac{1}{2}$ $\quad$ *olur.*

<u>Genelleme</u>

Y=aX+b şeklinde pdf'i $f_x(x)$olan sürekli bir X raslantı değişkeni

a > 0 için

$\{Y \leq y\} = \{aX + b \leq y\} = \left\{X \leq \frac{y-b}{a}\right\}$ $\Rightarrow$

$\left| F_y(y) = F_x\left(\frac{y-b}{a}\right) \right|$ *ve* $\left| f_y(y) = \frac{1}{a} f_x\left(\frac{y-b}{a}\right) \right|$ $\quad$ *olacaktır.*

a<0 için

$\{Y \leq y\} = \{aX + b \leq y\} = \left\{X \geq \frac{y-b}{a}\right\}$ *olur.*

$\left\{X < \frac{y-b}{a}\right\} ve \left\{X \geq \frac{y-b}{a}\right\} olay$ *kümeleri ayrık ve bileşkeleri Ω* örnek *uzayını*
Oluşturdukları için

$$P\left[X < \frac{y-b}{a}\right] + P\left[X \geq \frac{y-b}{a}\right] = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .I \qquad olacaktır.$$

Sürekli bir raslantı değişkeni için

$$P\left[X < \frac{y-b}{a}\right] = P\left[X \leq \frac{y-b}{a}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ..II$$

Bizim için gerekli değil ama doğru

$$P\left[X \geq \frac{y-b}{a}\right] = P\left[X > \frac{y-b}{a}\right] \ olur$$

I ve II den

$$P\left[X \leq \frac{y-b}{a}\right] + P\left[X \geq \frac{y-b}{a}\right] = 1 \qquad \Rightarrow$$

$$P\left[X \geq \frac{y-b}{a}\right] = 1 - P\left[X \leq \frac{y-b}{a}\right] \qquad \Rightarrow$$

$$Fy(y) = 1 - Fx\left(\frac{y-b}{a}\right) \qquad ve$$

$$f_y(y) = \frac{1}{|a|} f_x\left(\frac{y-b}{a}\right) \qquad\qquad a \neq 0$$

Bileşke fonksiyon:

f(x) ve g(x) verilsin f(g(x)) ifadesi fog(x) olarak gösterilir. Ve buna bileşke fonksiyon adı verilir.

$$\frac{d}{dx} fog(x) = \frac{df(g(x))}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)\Big|_{y=g(x)} \frac{d}{dx} g(x)$$

__Mesela:__

$$f(x) = x^2 + 1 \qquad ve \qquad g(x) = 3x + 1 \ olsun$$

$$f\big(g(x)\big) = (3x+1)^2 + 1$$

$$\frac{d}{dx} f\big(g(x)\big) = 6(3x+1) \qquad veya$$

$$\frac{d}{dx} f\big(g(x)\big) = 2(3x+1).3 \ olarak \ yazılabilir.$$

<u>Lineer Olmayan Bir fonksiyon örneği:</u>

PDF'i $F_x(x)$ olarak tanımlı sürekli bir raslantı değişkeni için **Y=X²**olsun.

$$P\{Y \leq y\} = P\{x^2 \leq y\} = P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\}$$

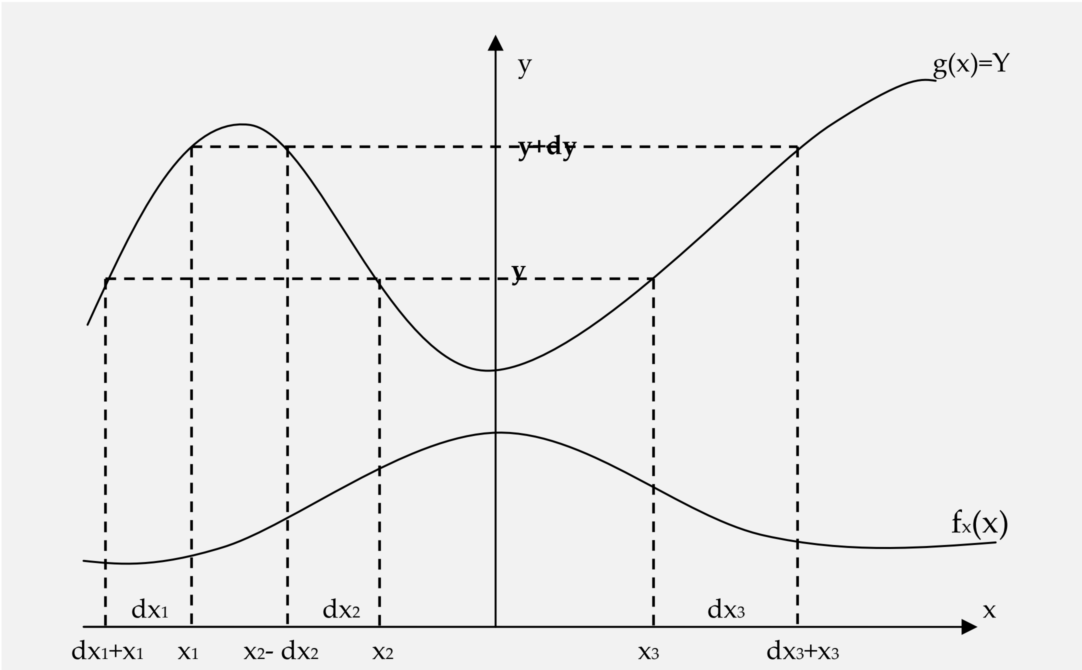
Bu durumda

$$P\{Y \leq y\} = F_y(y) = F_x\big(\sqrt{y}\big) - F_x\big(-\sqrt{y}\big) \ olur. \quad X \ sürekli \ bir \ rasl. değ.$$

y > 0 için;

$$f_y(y) = \frac{d}{dy}F_y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}f_x(\sqrt{y}) - \frac{-1}{2\sqrt{y}}f_x(-\sqrt{y})$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{y}}f_x(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}}f_x(-\sqrt{y})$$

y ≤ 0 için → tanımsız.



$P\{y < Y \leq y + dy\} = f_y(y)|dy|$

$= P\{x_1 < X \leq x_1 + dx_1\} + P\{x_2 - dx_2 < X \leq x_2\} + P\{x_3 < X \leq x_3 + dx_3\}$

$\Rightarrow f_x(x_1)dx_1 + f_x(x_2)dx_2 + f_x(x_3)dx_3 = f_y(y)dy$

$$f_y(y) = f_x(x_1)\frac{dx_1}{dy} + f_x(x_2)\frac{dx_2}{dy} + f_x(x_3)\frac{dx_3}{dy}$$

$$y = g(x) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1} = \left.\frac{g'(x)}{1}\right|_{x=x_1} = \frac{dy}{dx_1} = g'(x_1) = \frac{1}{g'(x_1)}$$

$$\Rightarrow f_y(y) = \frac{f_x(x_1)}{g'(x_1)} + \frac{f_x(x_2)}{g'(x_2)} + \frac{f_x(x_3)}{g'(x_3)}$$

$$genel\ olarak\ \rightarrow f_y(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_x(x_i)}{|g'(x_i)|} \qquad , \qquad g(x_i) \neq 0$$

<u>Y=g(x) fonksiyonu için genel çözüm:</u>

pdf si $f_x(x)$ olan türevi alınabilir reel raslantı değişkeninin fonksiyonu g(x) verilsin Y=g(x) için pdf=?

{ $y < Y \le y + dy$ } kümesi kesişimleri boş küme olan { Ei } kümelerinin bileşkesi olarak da yazılabilir. Burada eğer

Y=g(x) fonksiyonunun n tane reel kökü $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots x_n$ ise

E_i={ $x_i - |dx_i| < X < x_i$ } , $g'(x_i)<0$

E_i={ $x_i < X < x_i + |dx_i|$ } , $g'(x_i)>0$

Şeklinde tanımlanan kümeleri göz önüne alalım Her iki durumda da pdf tanımından $P[E_i] = f_x(x_i).|d x_i|$ olarak yazılır.

Sonuç olarak

$$P[y < Y \le y + dy] = f_y(y).|dy|$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f_x(x_i).|dx_i| \qquad olur.$$

Veya bu eşitliğin her iki tarafını |dy| ile böersek,

$$f_y(y) = \sum_{i=1}^{n} f_x(x_i).\left|\frac{dx_i}{dy}\right| = \sum_{i=1}^{n} f_x(x_i).\left|\frac{dy}{dx_i}\right|^{-1} \; olur.$$

Bu durumda y=g(x) ifadesinin kökleri için $dy/dx_i=g'(x)$ alarak

$$f_y(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_x(x_i)}{|g'(x_i)|} \quad şeklinde\ genel\ bir\ fonksiyon\ elde\ eilir$$

$x_i=x_i(y)$, $g'(x_i)\neq 0$

Bu elde edilen ifade g(x) ifadesinin birçok kökü olduğundan bu tarz problemlerin çözümünü kolaylaştıran bir yöntemdir. Eğer verilen bir y için Y=g(x) ifadesinin kökü yoksa $f_y(g)=0$ olacaktır.

<u>Örnek:</u>

X:[0,1] uniform dağılıma uyuyor. Y=2X+3 şeklinde tanımlanan fonksiyon için $f_y(y)$=?

g(x) = 2x+3 $\qquad$ 2x + 3 = y → x = (y-3)/2

g′(x)=2

$$f_y(y) = \sum_{i=1}^{1} \frac{f_x(\frac{y-3}{2})}{2} = \frac{f_x(\frac{y-3}{2})}{2} \quad olur.$$

<u>Y=g(x) in beklendik değeri ve standart sapması</u>

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx$$

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x)dx \qquad ve \qquad \sigma^2 = E[x^2] - (E[x])^2 \quad olduğunu\ biliyoruz.$$

Y = g(x) için bu hesaplamaları yaparsak

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_x(x)dx \qquad ve$$

$$E[y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} [g(x)]^2 f_x(x)dx \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_y^2 = E[y^2] - (E[y])^2 \quad olur.$$

<u>İspat:</u>

Y=ax+b şeklinde bir fonksiyon verilmiş olsun.

$$E[y] = \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b) f_x(x)d \ = \int_{-\infty}^{\infty} ax f_x(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} b f_x(x)dx$$

$$= aE[x] + b$$

$$E[y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} [ax+b]^2 f_x(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} a^2x^2 f_x(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} b^2 f_x(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} 2abx f_x(x)dx$$

$$= a^2\overline{x^2} + 2ab\bar{x} + b^2 \qquad standart\ sapmayı\ yazarsak$$

$$\sigma^2 = a^2\overline{x^2} + 2ab\bar{x} + b^2 - a^2x^2 - b^2 - 2ab\bar{x}$$

$$= a^2\underbrace{\{E[x^2] - (E[x])^2\}}_{}$$

$$\sigma_x^2 \quad olduğunu\ öğrenmiştik. Dolayısıyla\ \ \sigma^2 = a^2\sigma_x^2\ olur.$$

<u>Örnek:</u>

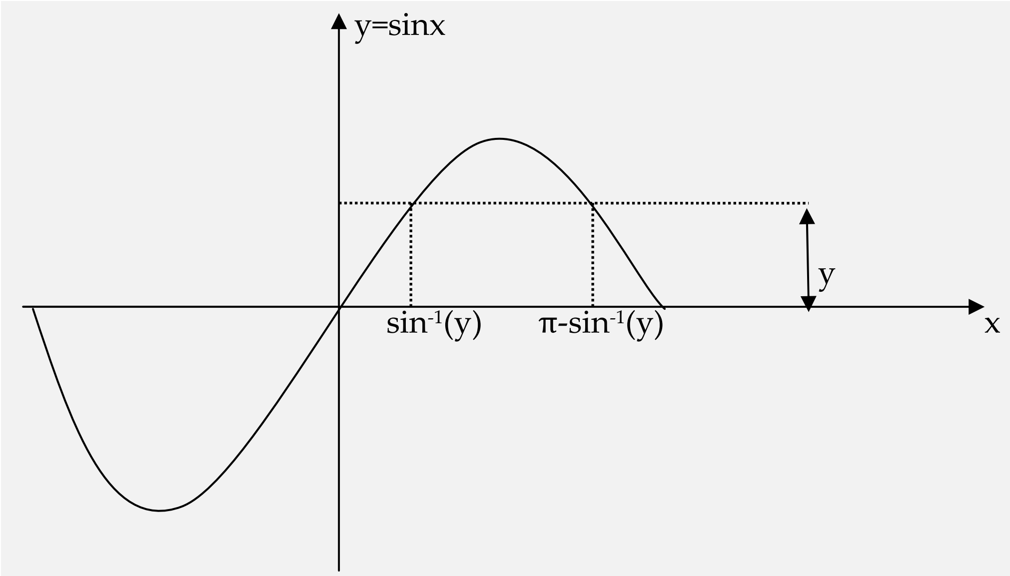
pdf'i hesaplanacak fonksiyon uygulamalarında $Y = \sin(x)$ türü bir fonksiyon klasik bir uygulamadır. Burada X rast. değ.'nin

$$f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & , \ -\pi < x < \pi \\ 0 & \qquad diğer. \end{cases}$$

Şeklinde Uniform dağıldığı kabul edilecektir.

<u>Çözüm I:</u>

(Klasik yaklaşımla çözersek) önce bu fonksiyonunun şeklini çizelim.



P[Y ≤ y] = ?   Bunun için   { Y ≤ y } = ?

a) 0 ≤ y ≤ 1 için

$$\{Y \le y\} = \{\sin(x) \le y\} = \{\pi - \sin^{-1}(y) < x \le \pi\} \cup \{0 < x \le \sin^{-1}(y)\}$$

$$F_y(y) = F_x(\pi) - F_x\big(\pi - \sin^{-1}(y)\big) + F\big(\sin^{-1}(y)\big) - F(0)$$

$$f_y(y) = \frac{dF_y(y)}{dy} = f_x\big(\pi - \sin^{-1}(y)\big).\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + f_x\big(\sin^{-1}(y)\big).\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad 0 \le y \le 1 \ aralığı \ için.$$

b) -1 ≤ y ≤ 0 için

Benzer işlemler yapılırsa sonuç şu hali alır.

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} & , \quad |y| < 1 \\ 0 & diğer\ durumlar \end{cases}$$

<u>Çözüm II:</u>

(genel çözüm) Y=sin(x) için pdf = ?

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & , \quad -\pi < x \le \pi \\ 0 & diğer \end{cases}$$

Burada g(x) fonksiyonu g(x) = sin(x) olarak tanımlanacaktır. Bu durumda Y-sin(x)=0 denkleminin kökleri için.

a) $\quad \boldsymbol{y} > 0 \ iken \begin{cases} \boldsymbol{x_1 = \sin^{-1}(y)} \\ \boldsymbol{x_2 = \pi - \sin^{-1}(y)} \end{cases}$

Ayrıca

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{d\sin(x)}{dx} = \cos(x) \qquad olacaktır.$$

Genel formül uyarınca g'(x) ifadesinin köklerdeki değeri hesaplanmalıdır. Bunun için;

$$\left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_1} = \left.\frac{\cos(x)}{1}\right|_{x=x_1} = \cos(sin^{-1}(y))$$

$$\left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_2} = \left.\frac{\cos(x)}{1}\right|_{x=x_2} = \cos(\pi - sin^{-1}(y))$$

$$= \cos(\pi).\cos(sin^{-1}(y)) + \sin(\pi).\sin(sin^{-1}(y))$$

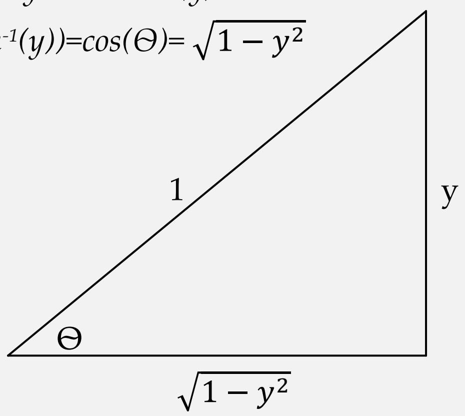
$$= -\cos(sin^{-1}(y)) \quad olacaktır.$$

"0" olduğunu biliyoruz tabi.

Not:

sin(Θ)= y → Θ=sin⁻¹(y)

cos(sin⁻¹(y))=cos(Θ)= $\sqrt{1-y^2}$



Bu durumda

$$\left|\left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_1}\right| = \left|\left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_2}\right| = \sqrt{1-y^2} \quad olur.$$

Son olarak

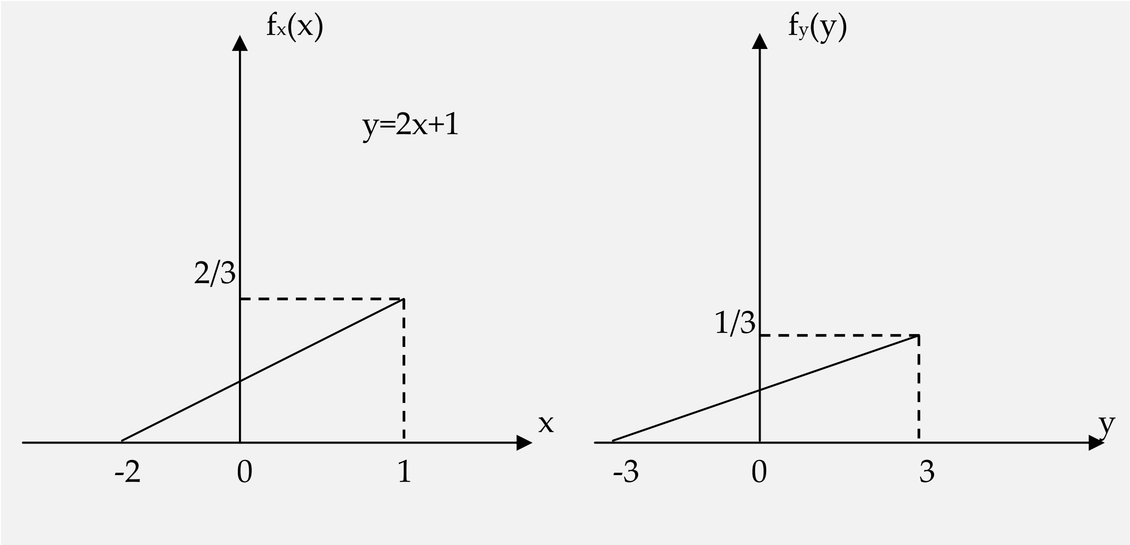
$$f_y(y) = \sum_{i=1}^{2} f_x(x_i).\frac{1}{|g'(x_i)|} = \frac{f_x(sin^{-1}(y))}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{f_x(\pi - sin^{-1}(y))}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$f_y = 2.\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \qquad 0 \le y \le 1 \; olur.$$

b) y < 0 iken de benzer şekilde işlemler tekrarlanacaktır.

<u>*Örnek:*</u>

y=2x+1 olarak verilmiş olsun.



$$f_y(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_x(x_i)}{|g'(x_i)|} \quad , \quad y = 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{f_x(\frac{y-1}{2})}{2} = f_y(y)$$

y = - 3 için $f_x(-2) = 0$

y = 3 için $f_x(1)=2/3$

$f_y(y) = (1/2)\ (2/3) = 1/3$ $\quad f_y(3) = 1/3$

$$\bar{X} = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-2}^{1} x\frac{2}{9}(x+2)dx = \frac{2}{9}\int_{-2}^{1}(x^2+x)dx$$

$$= \frac{2}{9}(\frac{x^3}{3} + x^2)\Big|_{-2}^{1} = 0\ olur.$$

$$E[y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx = \int_{-2}^{1}(x+2)f_x(x)dx = \int_{-2}^{1}(2x+1)\frac{2}{9}(x+2)dx$$

$$= \frac{2}{9}\int_{-2}^{1}(2x+1)(x+2)dx = 1\ olur$$

$$E[x^2] = \frac{1}{2} \quad , \quad \sigma_x^2 = \frac{1}{2} \quad , \quad \sigma_x = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \sigma_y = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

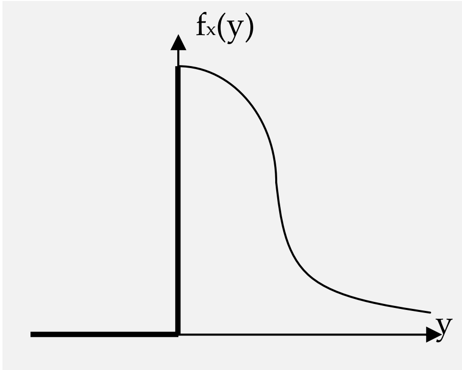
<u>Örnek:</u>

$f_x(x) \rightarrow N(0,1)$ yani $\mu=0$ ve $\sigma^2=1$ olarak veriliyor.

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ x & , \quad x > 0 \end{cases} \qquad diye\ tanımlı\ olsun.$$

$f_y(y) = \frac{f_x(x_i)}{g'(x_i)} = f_x(x)$ *olduğunu hatırlayarak*

Tanımlı olduğu aralığa göre önce grafiğini çizersek yandaki şekil oluşur.

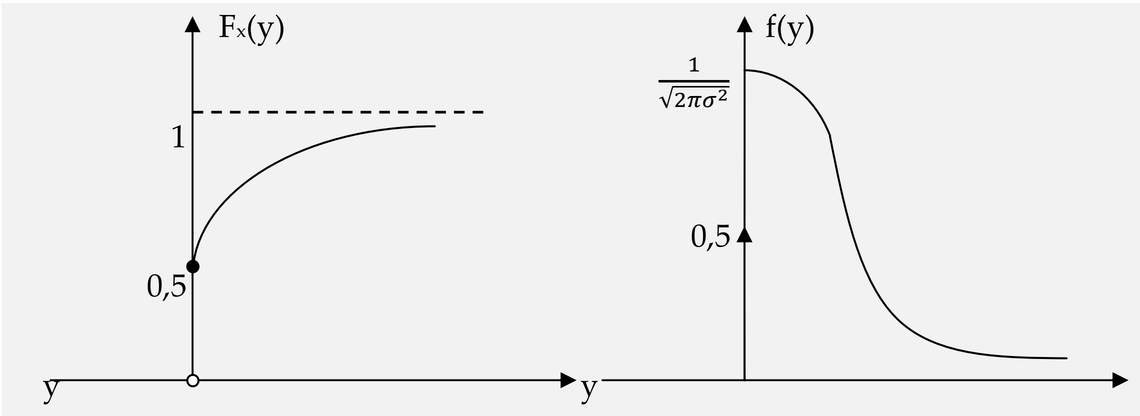


Çözüme geçelim:

P{ Y ≤ y } = P{ X ≤ y } → x > 0 = $F_x(y)$

P{ Y ≤ y } = P{ X ≤ 0 } = 1/2 olur. Gausian olduğundan dolayı.

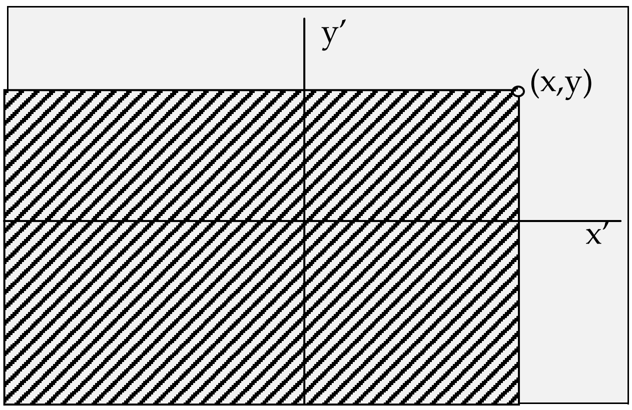
Şimdi $F_x(y)$ ve f(y) yi çizlim.



BİLEŞİK DAĞILIM VE YOĞUNLUK FONKSİYONLARI

Bir olasılık uzayında birden çok raslantı değişkeni tanımlamak mümkündür. Örneğin:

{ X ≤ x ,Y ≤ y } = { X ≤ x } ∩ { Y ≤ y } kümesi ξ Є Ω olaylarından oluşsun ve X(ξ)≤x, Y(ξ)≤y olsun. Bu durumda { X ≤ x , Y ≤ y } olayı ile tanımlı noktalar x′ ve y′ düzlemlerinde altta verilen şekildeki taralı bölgeye denk gelir.



Bu gösterimde x ve y değerleri gelişi güzel olarak seçilmiştir. Ancak en genel durumda bunlar herhangi bir denkleme dönüştürülürler.

Bu durumda *bileşik olasılık dağılım fonk.* $F_{xy}(x,y)$=P[X ≤ x , Y ≤ y] olarak tanımlanır. Tanımı gereği $F_{xy}(x,y)$ bir ihtimali belirttiği için $F_{xy}(x,y) \geq 0$ şartını tüm **x** ve **y** değerleri için sağlanmalıdır.

i) { X ≤ ∞ , Y ≤ ∞ } olması kesin olayı, durumu ifade ettiği için $F_{xy}(\infty,\infty)=1$ olmalıdır. Öte yandan { X ≤ -∞ , Y ≤ -∞} olması söz konusu olmayan olayı ifade eder ve bundan dolayı $F_{xy}(-\infty,-\infty) = 0$ olacaktır.

ii) Öte yandan { X≤ ∞ } ve { Y ≤ ∞ } kümeleri de kesin olayları ifade ettikleri için
{ X ≤ x , Y ≤ ∞ } = { X ≤ x } ve
{ X ≤ ∞, Y ≤ y } = { Y ≤ y } olacağından
$F_{xy}(x, \infty) = F_x(x)$
$F_{xy}(\infty,y) = F_y(y)$ olur.

iii) Eğer $F_{xy}(x,y)$ sürekli ve türevi alınabilen bir fonksiyon olarak tanımlanmışsa *bileşik olasılık yoğ. Fonksiyonu*

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{xy}(x,y) \ olarak\ hesaplanabilir.$$

Dolayısıyla $f_{xy}(x,y)\, dx\, dy = P[\, x < X \leq x + dx\ ,\ \ y < Y \leq y + dy]$ olacağı için tüm x ve y değerleri için $f_{xy}(x,y) \geq 0$ olur.

iiii) Yukarıdaki eşitliği integral alarak ifade edersek

$$F_{xy}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} d\xi \int_{-\infty}^{y} d\mu f_{xy}(\xi,\mu)$$

Eşitliği elde edilir. Bu durumda $F_{xy}(x,y)$ fonksiyonu negatif olmayan bir fonksiyonun integrali olarak tanımlandığına göre azalan karakterde olamaz. Yani, ***(*** x_1 ***,*** y_1 ***)*** ve ***(*** x_2 ***,*** y_2 ***)*** iki tane sayı çifti olmak üzere $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$ şartı da sağlanırsa
$F_{xy}(x_1 , y_1) \leq F_{xy}(x_2 , y_2)$ olmalıdır.
Ayrıca bir süreksizlik noktasında $F_{xy}(x,y)$ sağdaki ve üstteki değerleri alır. Yani

$$F_{xy}(x_0, y_0) = \lim_{\substack{\varepsilon \to \infty \\ \delta \to \infty}} F_{xy}(x_0 + \varepsilon\ , y_0 + \delta)\ \ olur.$$

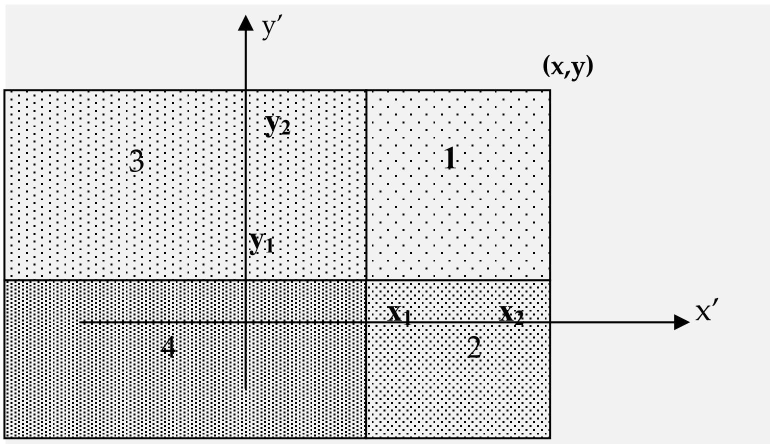
Tüm bu özellikleri özetlersek

I) $F_{xy}(\infty,\infty)=1$, $F_{xy}(x, -\infty) = F_{xy}(-\infty,y) = F_{xy}(-\infty,-\infty) =0$
$F_{xy}(\infty,y) = F_y(y)$; $F_{xy}(x, \infty) = F_x(x)$

II) $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$ ise $F_{xy}(x_1 , y_1) \leq F_{xy}(x_2 , y_2)$

III) $F_{xy}(x_0, y_0) = \lim_{\substack{\varepsilon \to \infty \\ \delta \to \infty}} F_{xy}(x_0 + \varepsilon\ , y_0 + \delta)\ \ olur.$

{ $x_1 < X \leq x_2$, $y_1 < Y \leq y_2$} kümesinin elemanlarını göz önüne alalım.



$F_{xy}(x_2 ,y_2) = \{1\}+\{2\}+\{3\}+\{4\}$ olur. Biz bu toplamın her bir öğesini ayrı ayrı yazacağız. Yani:

$F_{xy}(x_2,y_2) = P[x_1<X\leq x_2\ ,\ y_1<Y\leq y_2\ ] + P[x_1<X\leq x_2\ ,\ Y\leq y_1] + P[X\leq x_1\ ,\ y_1<Y\leq y_2] + F_{xy}(x_1,y_1)$

İse

$F_{xy}(x_2,y_2) = P[\ x_1< X \leq x_2\ ,\ y_1< Y \leq y_2\ ]+\{\ F_{xy}(x_2,y_1) - F_{xy}(x_1,y_1)\ \} + \{\ F_{xy}(x_1,y_2) - F_{xy}(x_1,y_1)\ \}$
$+ F_{xy}(x_1,y_1) \ \rightarrow$

$P[x_1<X\leq x_2\ ,\ y_1<Y\leq y_2\ ] = F_{xy}(x_2,y_2) - F_{xy}(x_2,y_1) - F_{xy}(x_1,y_2) + F_{xy}(x_1,y_1)$ *olur.*

$F_x(x)$ ve$F_y(y)$ fonksiyonları bir bileşik dağılım fonksiyonundan elde edilirse bunlar ***marjinal dağılım fonksiyonları*** olarak adlandırılırlar. Yani:

$$F_x(x) = F_{xy}(x,\infty) = \int_{-\infty}^{x} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f_{xy}(\xi,y)$$

$$F_y(y) = F_{xy}(\infty,y) = \int_{-\infty}^{y} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f_{xy}(x,\mu)$$

marjinal yoğunluk fonksiyonları ise

$$f_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx} \qquad ve \qquad f_y(y) = \frac{dF_y(y)}{dy} \qquad olacakları\ için\ yularıdaki$$

eşitliklerin türevi alındığında,

$$f_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx} = \frac{df_{xy}(x,\infty)}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)dy$$

$$f_y(y) = \frac{dF_y(y)}{dy} = \frac{df_{xy}(\infty,y)}{dy} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)dx$$

Buradan hareketle bazı sonuçlar:

I) f (x,y) ≥ 0 , tüm x ve y değerleri için

$$\boldsymbol{II}) \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)dx.dy = 1 \qquad (\ kesin\ olay\ )$$

III) $f_{xy}(x\ ,\ y)$ bir olasılığı ifade etmezken:

$f_{xy}(x\ ,\ y)dx.dy = P[\ x < X \leq x+dx_1\ ,\ y < Y \leq y+dy\ ]$ bir olasılık ifade eder.

BAĞIMSIZ RASLANTI DEĞİŞKENLERİ

X ve Y gibi iki raslantı değişkeni, her x,y değer ikilisi için { X≤x } ve{ Y≤y } olayları birbirinden bağımsız iseler kendileri de bağımsız olarak adlandırılırlar. Daha önceki tanımlardan A ve B gibi iki olay P[AB] = P[A].P[B] şartı sağlanması halinde birbirlerinden bağımsız olarak tanımlanmışlardı. Burada

A.B = { X ≤ x }∩{ Y≤ y } tanımı

A = { X ≤ x } ve B = { Y≤ y } olmak üzere yapılırsa, eğer sadece ve sadece her x,y değer ikilisi için:

$F_{xy}(\ x,y) = F_x(x).F_y(y)$

Şartı sağlanırsa X ve Y raslantı değişkenleri bağımsız olacaklardır: Ayrıca,

$$f_{xy}(x,y) = \frac{d^2F_{xy}(x,y)}{dxdy} = \frac{dF_x(x)}{dx}.\frac{dF_y(y)}{dy} \qquad \rightarrow \qquad f_{xy}(x,y) = f_x(x).f_y(y)$$

Sonucuna ulaşılır. Şartlı olasılık tanımlarında bağımsız X,Y raslantı değişkenleri için…;

$$F_x(x \mid Y \leq y) = \frac{F_{xy}(x,y)}{F_y(y)} = F_x(x) \qquad veya$$

$$F_y(y \mid X \leq x) = \frac{F_{xy}(x,y)}{F_x(x)} = F_y(y) \qquad olacaktır$$

Bu sonuçlar ışığında türev alınarak

$f_x(x \mid Y \leq y) = f_x(x)\ \ ve\ \ f_y(y \mid X \leq x) = f_y(y) elde\ edilirki\ buradan$

Bağımsız olaylar için şartlı olasılık yoğunluk fonksiyonlarının marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını vereceği sonucunu elde ederiz. Ayrıca daha önce elde ettiğimiz bir sonuçtan…:

$P[x_1<X\leq x_2\ ,\ y_1<Y\leq y_2\ ] = F_{xy}(x_2\ ,y_2) - F_{xy}(x_2\ ,y_1) - F_{xy}(x_1\ ,y_2) + F_{xy}(x_1\ ,y_1)$

$P[x_1<X\leq x_2\ ,\ y_1<Y\leq y_2\ ] = F_x(x_2).F_y(y_2) - F_x(x_2).F_y(y_1) - F_x(x_1).F_y(y_2) + F_x(x_1).F_y(y_1)$

$= F_x(x_2)\ [\ F_y(y_2) - F_y(y_1)\ ] - F_x(x_1)\ [\ F_y(y_2) - F_y(y_1)\ ]$

$= [\ F_x(x_2)- F_x(x_1)\ ]\ [\ F_y(y_2) - F_y(y_1)\ ]$

$P[x_1<X\leq x_2\ ,\ y_1<Y\leq y_2\ ]= P[x_1<X\leq x_2].P[\ y_1<Y\leq y_2\ ]$ sonucu elde edilir.

<u>Örnek:</u>

Aşağıda verilen f_{xy} fonksiyonu için X ve Y raslantı değ. Bağımsız olduğunu gösteriniz.

$$f_{xy}(x,y) = \frac{1}{2\pi G^2}\ e^{-\left(1/_{2G^2}\right)(x^2+y^2)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}G^2}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{G^2}\right)}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}G^2}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{G^2}\right)}$$

Olacağı için X ve Y bağımsız olacaklardır.

<u>Örnek:</u>

$$f_{xy}(x,y) = \begin{cases} A(x+y)\ , & 0 < x \leq 1\ ve\ \ 0 < y \leq 1 \\ 0 \qquad\quad , & diğer\ durumlar \end{cases}$$

Şeklinde tanımlanmış olsun.

<u>Cevap:</u>

I) A=?

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)dx.dy = 1 \qquad =>$$

$$A\int_0^1 dy\int_0^1 (x+y)dx = A.\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}+xy\right)\Bigg|_0^1 dy = A\int_0^1\left(\frac{1}{2}+y\right)dy$$

$$= A\left(\frac{y}{2}+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = A\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = A \qquad =>$$

A = 1 olmalıdır.

II) Marjinal pdf ler = ?

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)dy = \int_0^1 (x+y)dy = \left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = x+\frac{1}{2} \quad olur.$$

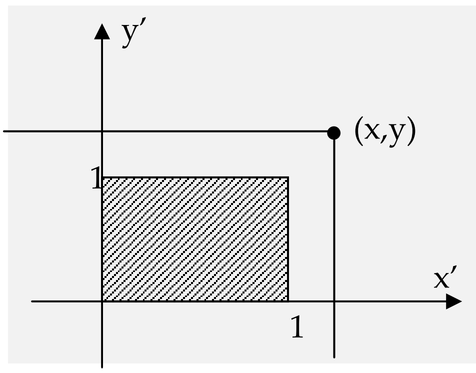
$$o\ zaman \qquad f_x(x) = \begin{cases} x+\frac{1}{2} & , \quad 0<x\leq 1 \\ 0 & , \quad diğer\ durumlar \end{cases}$$

$$benzer\ şekilde \qquad f_y(y) = \begin{cases} y+\frac{1}{2} & , \quad 0<y\leq 1 \\ 0 & , \quad diğer\ durumlar \end{cases}$$

III) $F_{xy}(x,y)$ = ?

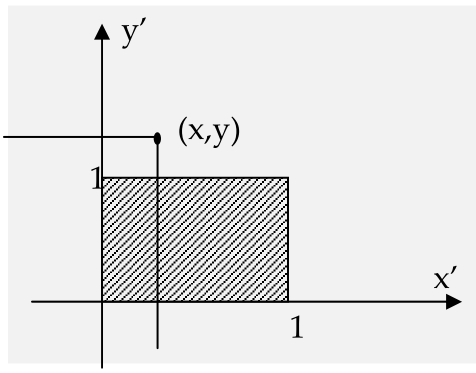
$F_{xy}(x,y)$ = P[X≤x,Y≤y] tanımı yapılırsa söz konusu olasılığı hesaplamak için farklı durumları göz ününe almak gerekir. Buna göre ,

a) **x ≥ 1 ve y ≥ 1** olması durumunda…;



$$F_{xy}(x,y) = \int_0^1\int_0^1 f_{xy}(x'+y')dx'.dy' = 1$$

b) **0 < x ≤ 1 , y ≥ 1** olması durumunda…;



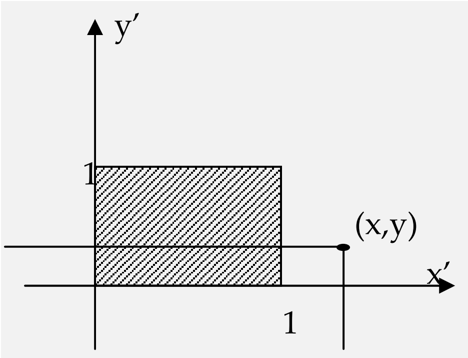
$$F_{xy}(x,y) = \int_{y'=0}^{1}\int_{x'=0}^{x} f_{xy}(x'+y')dx'.dy'$$

$$= \int_{y'=0}^{1}\left(\frac{(x')^2}{2}+y'x'\right)\Bigg|_0^x .dy$$

$$= \int_{y'=0}^{1}\left(\frac{x^2}{2}+y'x\right).dy$$

$F_{xy}(x,y) = (x+1).\frac{x}{2}$ *olarak bulunur.*

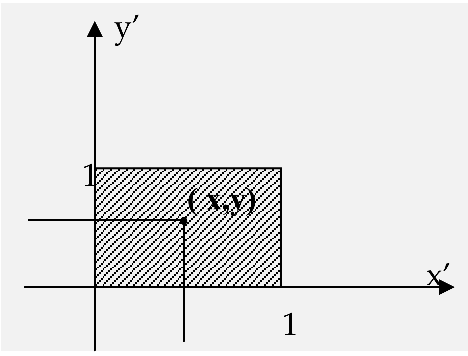
c) $\mathbf{0 < y \leq 1}$, $\mathbf{x \geq 1}$ olması durumunda…;



$$F_{xy}(x,y) = \int_{y'=0}^{y} \int_{x'=0}^{1} f_{xy}(x'+y')dx'.dy'$$

$$F_{xy}(x,y) = (y+1).\frac{y}{2} \quad olarak\ bulunur.$$

d) $\mathbf{0 < x \leq 1}$, $\mathbf{0 < y \leq 1}$ olması durumunda…;

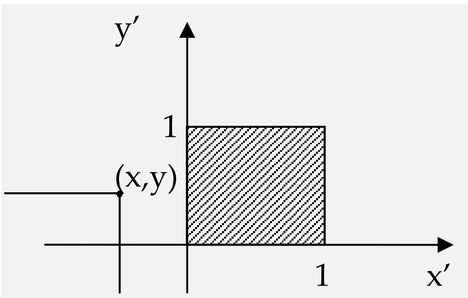


$$F_{xy}(x,y) = \int_{y'=0}^{y} \int_{x'=0}^{x} f_{xy}(x'+y')dx'.dy'$$

$$F_{xy}(x,y) = (x+y).\frac{x.y}{2} \quad olarak\ bulunur.$$

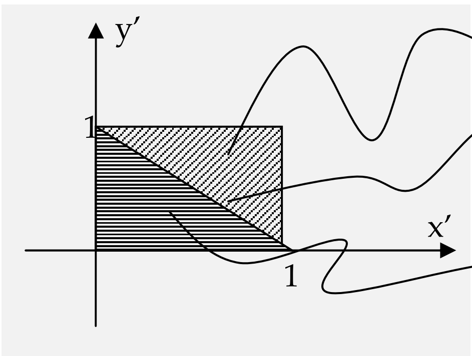
e) $\begin{cases} \boldsymbol{x} < 0 & , y\ nin\ her\ değeri\ \ veya \\ \boldsymbol{y} < 0 & , \quad x\ in\ her\ değeri \end{cases}$

Olması durumunda…;



$F_{xy}(x,y) = 0$ olur.

f) **P[X+Y ≤ 1] =?** İfadesinin ne anlama geldiğine bakalım.



X+Y=1 doğrusunun üstü X+Y>1 bölgesini belirtiyor

X+Y=1 doğrusu

X+Y=1 doğrusunun altı X+Y<1 bölgesini belirtiyor

$$P[\,X+Y \leq 1\,] = \iint_{x'+y' \leq 1} f_{xy}(x',y').dx'.dy' = \int_{x'=0}^{1} \int_{y'=0}^{1-x'} (x'+y')dy'.dx'$$

$$= \int_{x'=0}^{1} \frac{1-(x')^2}{2}.dx' = \frac{1}{3}\ olur.$$

<u>*Örnek:*</u>

Bir önceki örnekte çarpım halinde ifade edilemeyen bir pdf gördük. Şimdi de bu tür başka bir fonksiyona bakalım;

$$f_{xy}(x,y) = \frac{1}{2\pi B^2\sqrt{1-\mu^2}} \exp\left(\frac{-1}{2B^2(1-\rho^2)}(x^2+y^2-2\rho xy)\right)$$

Bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu $\rho \neq 0$ için tanımlanmış olsun. Bu durumda X ve Y bağımsız olması için:

$\rho = 0$ durumunda $f_{xy}(x,y)= f_x(x).f_y(y)$ şeklinde ifade edilip bağımsız olacaklardır.

<u>İKİ RASLANTI DEĞİŞKENİNİN TEK FONKSİYONU [Z=g(X,Y)]</u>

Çoğu mühendislik uygulamalarında bir Z raslantı değişkeni belli bir aralıkta X ve Y gibi iki (hatta daha çok) raslantı değişkenine bağlı olarak ifade edilebilir. Mesela:

- Bir kuvvetlendirici girişindeki Z sinyali, X gibi bir işaret ve bundan bağımsız olarak tanımlanan Y gürültü cinsinden Z=X+Y şeklinde tanımlanbilir.

-iki işareti çarpan bir sistemde, X bu çarpıcının bir girişindeki, Y de bu çarpıcının diğer girişindeki sinyal olmak üzere Z=X.Y şeklinde tanımlı çıkış sinyali Z'nin pdf, nasıl tanımlanabilir?

- X ve Y doğrultularında bağımsız hareket eden bir parçacık için X ve Y ile bu eksenlerdeki hareketi ifade eden raslantı değişkenleri tanımlanırsa $Z=(X^2+Y^2)^{1/2}$ şeklinde tanımlı ve toplam yer değiştirmeyi ifade eden Z rast. değişkeninin pdf si nasıl hesaplanabilir?

Genel olarak Z=g(X,Y) şeklinde tanımlanacağımız bu tür problemlerin çözümü daha önce çözdüğümüz Y=g(X) şeklinde tanımlı problemleri çözümünden farklı değildir. Burada öyle bir C_z çözüm kümesi bulunmalıdır ki bunun için

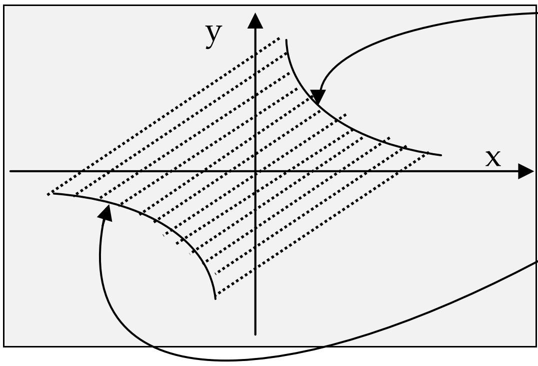
$\{ Z \leq z \},\{ (X,Y) \in C_z \}$ olayları aynı durumu ifade etmelidir. Bu durumda

$$F_z(z) = \iint_{(x,y)\in Cz} f_{xy}(x,y).dx.dy \qquad olacaktır.$$

Bu tür problemleri çözümü Y = g(X) şeklinde tanımlanan problemlerin çözümünden daha karmaşıktır. Ancak ***i) yardımcı eksen , ii) karakteristik fonksiyon***ların kullanımı ile bu problemler çözülebilirler. Önce bazı örnekleri inceleyelim.

Örnek:

Z=X.Y şeklinde X ve Y raslantı değişkenleri cinsinden tanımlı Z raslantı değişkenileri için çözüm kümesi C_z yi elde edin. *$F_z(z)$ ve $f_z(z)$ =?*



{ X.Y ≤ z } şeklinde tanımlı olacaktır. Yani her herhangi bir "z" değeri için (z > 0), x.y ≤ z => y ≤ z/x olacaktır. Bu şartı sağlayan çözüm kümesi yukarıda gösterilen taralı bölgedir. Bu durumda…;

$F_z(z)$= P[Z ≤ z] = P[X.Y ≤ z] =>

$F_z(z)$= P[Y ≤ z/x] =>

$$F_z(z) = \int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{z/y} f_{xy}(x,y).dx\right).dy + \int_{-\infty}^{0}\left(\int_{z/y}^{\infty} f_{xy}(x,y).dx\right).dy$$

Burada $G_{xy}(x,y) \triangleq \int f_{xy}(x,y)dx$ *belirsiz integralini tanımlarsak bu durumda*

$$F_z(z) = \int_0^{\infty}\left[G_{xy}({}^{z}/_{y},y) - G_{xy}(-\infty,y)\right].dy + \int_{-\infty}^{0}\left[G_{xy}(-\infty,y) - G_{xy}({}^{z}/_{y},y)\right].dy \quad olur.$$

Buradan hareketle,

$$f_z(z) = \frac{dF_z(z)}{dz} = ? \quad sorusunu\ nasıl\ cevaplarız?$$

Yukarıda elde edilen $F_z(z)$ eşitliği için,

$K_{xy}(x,y) \triangleq \int G_{xy}(x,y)dy$ *bellirsiz integralini tanımlayıp yazalım. Böylece*

$$F_z(z) = K_{xy}({}^{z}/_{y},y)\Big|_0^{\infty} - K_{xy}(-\infty,y)\Big|_0^{\infty} + K_{xy}(\infty,y)\Big|_{-\infty}^{0} - K_{xy}({}^{z}/_{y},y)\Big|_{-\infty}^{0} \quad olur.$$

$$\frac{dF_z(z)}{dz} = \left(\frac{dK_{xy}({}^{z}/_{y},y)}{dz} - \frac{dK_{xy}(-\infty,y)}{dz}\right)\Bigg|_{y=0}^{\infty} + \left(\frac{dK_{xy}(\infty,y)}{dz} - \frac{dK_{xy}({}^{z}/_{y},y)}{dz}\right)\Bigg|_{y=-\infty}^{0}$$

$$f_z(z) = \left(\frac{dK_{xy}({}^{z}/_{y},y)}{dz}\right)\Bigg|_{y=0}^{\infty} - \left(\frac{dK_{xy}({}^{z}/_{y},y)}{dz}\right)\Bigg|_{y=-\infty}^{0} \Rightarrow$$

$$f_z(z) = \left(\int \frac{1}{y} f_{xy}({}^{z}/_{y},y).dy\right)\Bigg|_{y=0}^{\infty} - \left(\int \frac{1}{y} f_{xy}({}^{z}/_{y},y).dy\right)\Bigg|_{-\infty}^{0}$$

$$f_z(z) = \left(\int \frac{1}{|y|} f_{xy}\left({}^{z}/_{y}, y\right).dy\right)\Bigg|_{y=0}^{\infty} + \left(\int \frac{1}{|y|} f_{xy}\left({}^{z}/_{y}, y\right).dy\right)\Bigg|_{-\infty}^{0}$$

$$f_z(z) = \int \frac{1}{|y|} f_{xy}\left({}^{z}/_{y}, y\right).dy \quad olarak\ bulunur.$$

Özel bir durum olarak X ve Y bağımsız ve benzer olmak üzere

$$f_x(x) = f_y(y) \triangleq \frac{{}^{\alpha}/_{\pi}}{\alpha^2 + (x)^2} \quad olarak\ tanımlanmış\ olsun. Bu\ durumda,$$

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|y|} \ \frac{{}^{\alpha}/_{\pi}}{\alpha^2 + \left({}^{z}/_{y}\right)^2} \ \frac{{}^{\alpha}/_{\pi}}{\alpha^2 + y^2} \ dy \ =>$$

$$f_z(z) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 . \int_{0}^{\infty} \frac{1}{z^2 + \alpha^2 u} \ \frac{1}{\alpha^2 + u} \ du \qquad =>$$

$$f_z(z) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{1}{z^2 - \alpha^4} \lim_{.} \left(\frac{x^2}{\alpha^4}\right) \qquad olur.$$

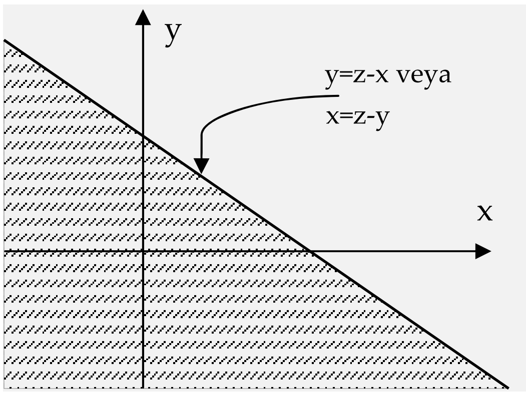
Örnek:

Z=X+Y şeklinde tanımlı bir raslantı değişkeni için $f_z(z)$'nin hesaplanması Z=g(X,Y) şeklindeki problemlerin en yaygın olanıdır.

{ Z ≤ z } = {X+Y≤z } olarak tanımlı iki ayrı küme aynı tanım bölgesine sahiptirler. Bu durumda,

P[Z≤z]=P[X+Y≤z] =>

$$F_z(z) = \iint\limits_{x+y\le z} f_{xy}(x,y).dx.dy \qquad olacaktır.$$



Çözüm kümesi y=z-x eğrisinin solunda kalan bölge olacağına göre

$$F_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{z-y} f_{xy}(x,y)dx \right) dy \qquad =>$$

$$F_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[G_{xy}(z-y, y) - G_{xy}(-\infty, y)\right] dy \qquad olur.$$

$$Burada \quad G_{xy}(x,y) \triangleq \int f_{xy}(xy)dx \qquad olarak\ tanımlandığını\ kabul\ ediyoruz.$$

Burada $F_z(z)$ fonksiyonunu elde etmek için ,

$$\frac{d}{dz}F_z(z) \quad değerini\ hesaplamak\ gerekir. O\ zaman$$

$$f_z(z) = \frac{d}{dz}F_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{d}{dz}G_{xy}(z-y,y)\right]dy \qquad =>$$

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(z-y,y).dy \qquad sonucu\ elde\ edilir.$$

Çoğu durumda X ve Y birbirinden bağımsız iki raslantı değişkeni tanımlı olabilirler. O zaman

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(z-y,y).f_y(y).dy \quad şeklinde\ tanımlı\ bu\ pdf\ aynı\ zamanda\ f_x\ ile\ f_y$$

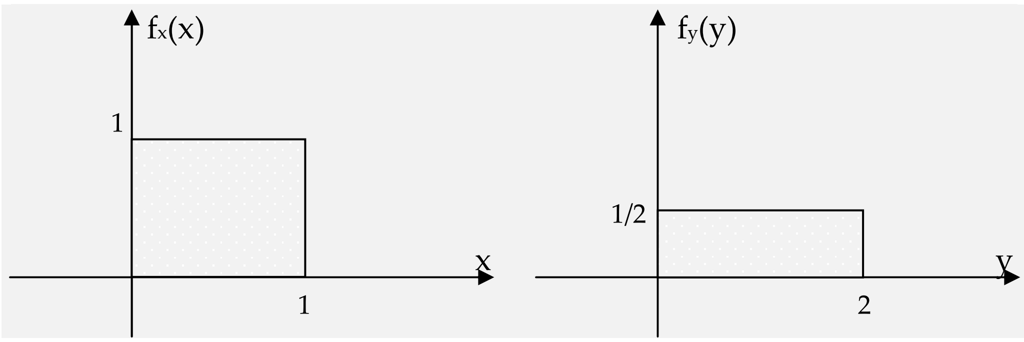
fonksiyonlarının ***konvolüsyonu*** olarak da bilinir.

Görüldüğü gibi bu tip problemleri tanımlardan yararlanarak çözmek her zaman için mümkün olabilmektedir.

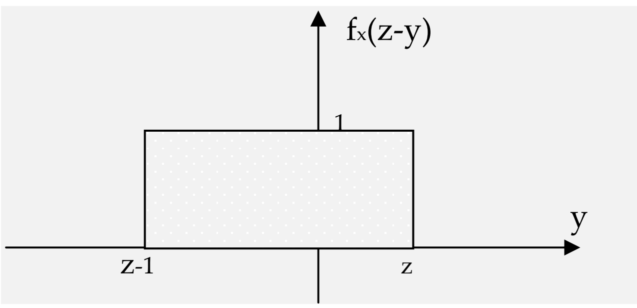
Örnek:

"X" raslantı değ. [0,1] aralığında, "Y" raslantı değ. İse [0,2] aralığında Uniform dağılıma sahip olsun buna göre şu sorulara cevap arayalım.

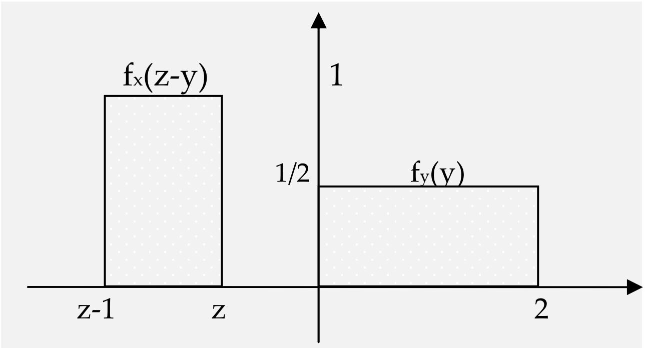
a) **$f_x(x)$** ve **$f_y(y)$** fonksiyonlarını çizelim.



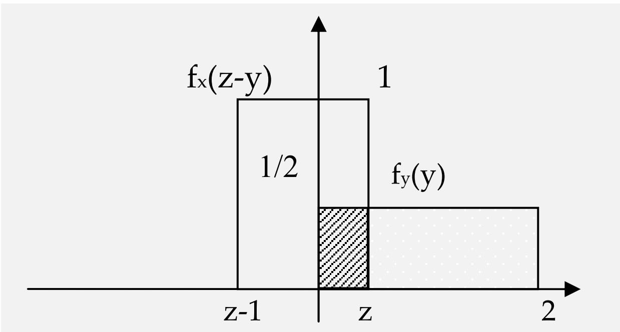
b) $f_x(x)$ fonksiyonunun y eksenine göre simetrisini alıp grafiğin parametresini değişelim ve grafiği z kadar öteleyelim. Biz bununla $f_x(z-y)$ yi elde ederiz.



c) z < 0 için $f_x(z\text{-}y)$ ile $f_y(y)$ çakışan kısmına bakalım

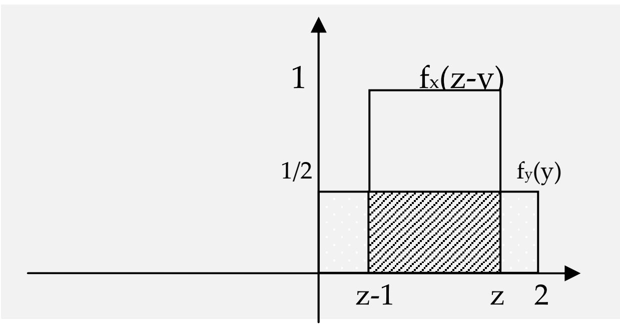


d) 0 < z < 1 için



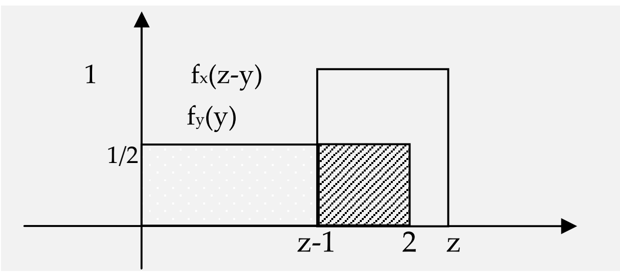
$$= \int_0^z 1.\frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}z \quad olur.$$

e) 1 < z < 2 için



$$= \int_{z-1}^{z} 1.\frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}y\Big|_{z-1}^{z} = \frac{1}{2} \quad olur$$

f) 2 < z < 3 için



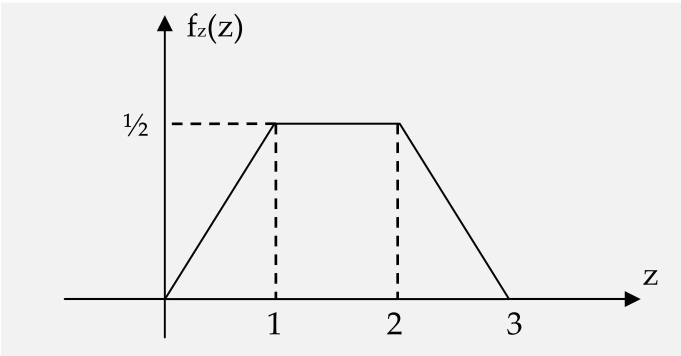
$$= \int_{z-1}^{2} 1.\frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}y\Big|_{z-1}^{2}$$

$$= \frac{3-z}{2} \; olur.$$

g) z > 3 $f_z(z)$ çakışan alan olmadığı için 0 olur.

$$f_z(z) = \begin{cases} 0\ ; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots z<0 \\ \frac{1}{2}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0<z<1 \\ \frac{1}{2}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1<z<2 \\ (3-z)/2; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2<z<3 \\ 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots z>3 \end{cases}$$ elde edilir.

$f_z(z)$ nin olasılık yoğunluk fonksiyonunu çizersek



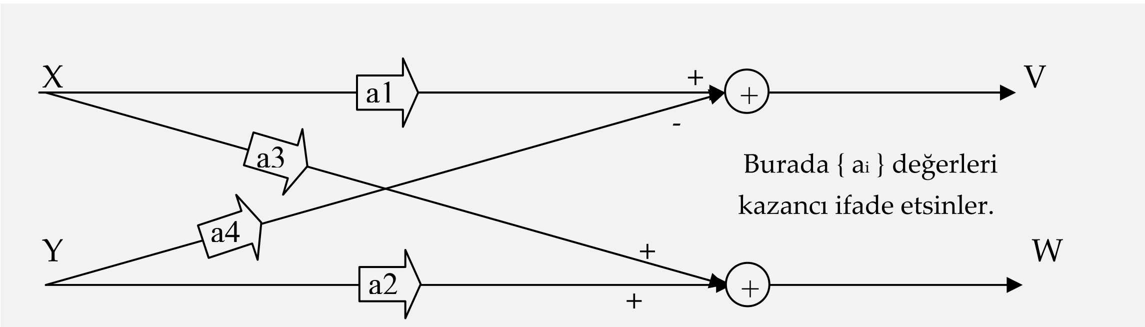
P[z<2] => 3/4

P[z<3] =>1

elde ederiz.

<u>İki Raslantı Değişkeninin İki Fonksiyonu:</u>

V=g(x,y) ve W=h(x,y) tipindeki problemlerdir



Yukarıdaki şekil ile belirli bir haberleşme sistemi (steryo temel-bantlı sistem oluşumu gibi) ifade edilmektedir. Veya { a_i } değerleri 1 olarak seçildiklerinde, belirli bir haberleşme sisteminde V ve W sinyalleri (sırasıyla X ve Y sinyallerinin farkı ve toplamları) gönderilen sinyali tespit etmekte kullanılır.

Kısaca V=g(x,y) ve W=h(x,y) fonksiyonları tanımlı iken, $f_{xy}(x,y)$ birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonları ile türevi alınabilen g(x,y) ve h(x,y) fonksiyonları için $F_{vw}(v,w)$ ve $f_{vw}(v,w)$=?

Bu tür problemlerin çözümlerinde

$$f_{vw}(v,w) = \left.\frac{f_{xy}(x,y)}{|\,j|}\right|_{\substack{x=\emptyset(v,w)\\ y=\psi(v,w)}} = \left. f_{xy}(x,y).|\tilde{j}|\right|_{\substack{x=\emptyset(v,w)\\ y=\psi(v,w)}} \quad tanımlamasından\ faydalanılır.$$

v=g(x,y) ve w=h(x,y) olmak üzere tanımlanan

x=ϕ(v,w) ve y=ψ(v,w) fonksiyonları cinsinden

$$J \triangleq \frac{\partial(g,h)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix} matrisine$$

g(x,y)=v

h(x,y)=w dönüşüm matrisinin *jacobyen matrisi,*

$$\tilde{J} \triangleq \frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(v,w)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial w} \\ \frac{\partial \phi}{\partial v} & \frac{\partial \phi}{\partial w} \end{bmatrix} matrisine$$

x=ϕ(v,w)

y=ψ(v,w) dönüşümünün *jacobyen matrisi* denir.

Örnek:

V=g(x,y)=3x+5y

W=h(x,y)=x+2y fonksiyonları X ve Y raslantı değişkenleri için tanımlanmış olsun.

$$f_{xy}(x,y) = \frac{1}{2\pi} exp\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right]$$

İçin f_{vw}(v,w)=?

Çözüm:

X=ϕ(v,w)=2v-5w ve

Y=ψ(v,w)=-v+3w olacaktır.

$$\frac{\partial \phi}{\partial v} = 2, \quad \frac{\partial \phi}{\partial w} = -5, \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} = -1 \quad ve \quad \frac{\partial \psi}{\partial w} = 3 \quad olarak\ hesaplan\imath r.$$

Bu durumda

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} => \tilde{J} = 2*3-(-5)*(-1) = 1$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{1}{2\pi} exp\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right]$$

$$f_{vw}(v,w) = \frac{1}{2\pi} exp\left[-\frac{1}{2}((2v-5w)^2+(-v+3w)^2)\right] =>$$

$$f_{vw}(v,w) = \frac{1}{2\pi} exp\left[-\frac{1}{2}(5v^2-26vw+34w^2)\right] \ olur.$$

Yani bu dönüşüm korelasyonu olmayan iki raslantı değişkenini korelasyonu olan ye iki raslantı değişkenine dönüştürmüştür.

Şu ana kadar gördüğümüz formüller V=g(x,y) ve W=h(x,y) fonksiyonları birebir fonksiyon oldukları zaman yazılabilirler. Ancak (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3)…………… (x_n,y_n) gibi n-tane $V=g(x_i,y_i)$, $W=h(x_i ,y_i)$ kökünün olması durumunda çözüm;

$$f_{vw}(v,w) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f_{xy}(x_i,y_i)}{|J_i|} = \sum_{i=0}^{n} f_{xy}(x_i,y_i)\,|\tilde{J}_i|$$

Şeklinde elde edilir. Buradaki "i" indisi jacobyen matrisinin *i.* kökte değerlendirileceğini ifade eder.

Örnek:

$$V = g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \quad ve$$

$$W = h(x,y) = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0 \end{cases} \quad olarak\ verilsin.$$

Eğer X ve Y birbirinden bağımsız ve benzer şekilde değişiyorsa ve

$f_{xy}(x,y) = \frac{1}{2\pi G^2} exp\left[-\frac{1}{2G^2}(x^2+y^2)\right]$ $olarak\ verilmişse$ $f_{vw}(v,w)$=?

Çözüm:

Öncelikle verilen iki denklemin köklerini bulalım.

$$V = g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$W = h(x,y) = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0 \end{cases} \quad burada\ \tan^{-1} {}^{y}/_{x}\ ifadesi\ \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

aralığında tanımlık olduğu için w ifadesi de 2π aralıkta tanımlıdır.

Burada $x \geq 0$ iken $-\pi/2 \leq w \leq \pi/2$ ve $\cos(w) \geq 0$ olur.

$X<0$ iken $\pi/2 < w < 3\pi/2$ ve $\cos(w)<0$ olur.

Dolayısıyla buradaki tek çözüm

$X=V.\cos(W)=\phi(v,w)$ ve

$Y=V.\sin(w)=\psi(v,w)$ dır.

$$\tilde{J} = \frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(v,w)} = \begin{vmatrix} cos\,w & -v.sin\,w \\ sin\,w & v.cos\,w \end{vmatrix} = v$$

$f_{vw}(v,w)= v.f_{xy}[v.\cos(w) ,v.\sin(w)]$

$$f_{vw}(v,w) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\frac{v}{G^2} exp\left[-\frac{1}{G^2}\right], & v > 0, -\frac{\pi}{2} \leq w < \frac{\pi}{2} \\ 0, & diğer\ durumlar \end{cases}$$

$f_{vw}(v,w)=f_v(v).f_w(w)$ olacaktır.

Yani V ve W birbirinden bağımsız raslantı değişkenleridir. Burada V Rayleigh, W da 2π aralığında Uniform dağılmış iki raslantı değişkenidir.

KARAKTERİSTİK FONKSİYON:

Bir X raslantı değişkenine ait karakteristik fonksiyon

$$Q_x(w) = E\left[e^{jwx}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x).\,e^{jwx}.\,dx$$

Şeklinde tanımlıdır. Bu tanım e^{jwx} terimindeki kullanılmayan (-) işareti dışında $f_x(x)$fonksiyonu fourier transformu olarak ta adlandırılabilir.

Karakteristik fonksiyon bağımsız raslantı değişkenlerinin toplamının hesaplandığı problemlerde sıkça kullanılır. Daha önce görmüş olduğumuz iki raslantı değişkeninin fonksiyonu şeklindeki uygulamaların bir örneği $Z=X_1+X_2$ şeklinde tanımlı bir toplam fonksiyonu için gerekli olan işlemler yapılacak olursa,

$$f_z(z) = f_{x_1}(\tau).\,f_{x_2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x_1}(\tau).\,f_{x_2}(z-\tau).\,d\tau$$

Şeklinde toplam raslantı değ. olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_{x_1}(x)\ ve\ f_{x_2}(z)$ cinsinden ifade edilirler. Yukarıdaki gibi tanımlanmış integral işlemine ***konvolüsyon*** adı verilir ve analitik olarak hesaplamak her zaman pratik olmayabilir.

Ancak yukarıdaki gibi tanımlı karakteristik fonksiyonlar cinsinden bu konvolüsyon işlemi basit bir çarpma işlemine dönüştürülecektir. Yani:

$$Q_z(w) = Q_{x_1}(w).\,Q_{x_2}(w)$$

Şeklindeki tanım Z raslantı değişkeninin karakteristik fonksiyonu olup hesaplanması daha basittir. Sonrasında $f_z(z)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunu elde etmek için:

$$f_z(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Q_z(w).\,e^{-jwz}\ dw \qquad şeklinde$$

tanımlı ters dönüşüm formülünden faydalanılırsa En genel halde:

$$Z = X_1 + X_2 + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .. + X_N$$

$$f_z(z) = f_{x_1}(z) * f_{x_2}(z) * \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ..* f_{x_N}(z) \quad veya$$

$$Q_z(w) = Q_{x_1}(w) * Q_{x_2}(w) * \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .* Q_{x_N}(w) \qquad olacaktır.$$

$$\frac{dQ_z(w)}{dw} = \frac{d}{dw}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_z(z)e^{jwz}\,dz\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_z(z)\frac{d}{dw}\left(e^{jwz}\right)dz$$

$$= j\int_{-\infty}^{\infty} z.\,f_z(z)e^{jwz}\,dz$$

$$= E[z^n] = \frac{1}{j^2}\frac{d^n Q_z(w)}{dw^n}\Bigg|_{w=0} \quad bu \text{ n.}dereceden\ momenti\ verir.$$

n=1 için integralin sonucu;

$$E[z] = \frac{1}{j}\left.\frac{dQ_z(w)}{dw}\right|_{w=0} = \int_{-\infty}^{\infty} z.f_z(z)e^{jwz}\,dz\Bigg|_{w=0} \quad olur.$$

BİLEŞİK KARAKTERİSTİK FONKSİYON

$$Q_{x_1,x_2,\ldots\ldots\ldots,x_N}(w_1,w_2,\ldots\ldots\ldots\ldots,w_N) = E\left[e^{j(w_1x_1,w_2x_2,\ldots\ldots\ldots\ldots,w_Nx_N)}\right] \quad ve$$

$$f_{x_1,x_2,\ldots\ldots\ldots,x_N}(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_N)) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}..\int_{-\infty}^{\infty} Q_{x_1,x_2,\ldots\ldots,x_N}(w_1,w_2,\ldots\ldots,w_N) * (e^{j(w_1x_1,w_2x_2,\ldots\ldots\ldots,w_Nx_N)})$$

Eşitlikleri yukarıda yapılan tanımlamanın bileşik olasılık dağılım fonksiyonu için çok boyutlu genişletilmiş halidir.

BİRLEŞİK MOMENTLER

Z=g(x,y) ve

$$E[z] = E[g(x,y)] = \int_{-\infty}^{\infty} z.f_z(z)\,dz\Bigg|_{w=0} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y).f_{xy}(x,y)dx\,dy$$

Eğer X ve Y birbirinden bağımsızsa z=g(x) ve w=h(Y) de bağımsızdır. E[g(x) h(y)] = E[g(x)].E[h(Y)] olur.

Örnek:

$$E[xy^3] = \int\int xy^3 f_{xy}(x,y)dx\,dy \quad olarak\ veriliyor$$

X ve Y bağımsız iki raslantı değişkeni ise $E[xy^3]$ ifadesini yazınız.

Cevap:

Bağımsız olduklarından E[xy]=E[x].E[y] yazılabilir. Dolayısıyla

$E[xy^3] = E[x].E[y^3]$ olur.

KOVARYANS

X ve Y iki raslantı değişkeni olmak üzere

$$Cov(X,Y) = E[(x-\mu_x)(y-\mu_y)]$$
$$= E[xy - \mu_y x - \mu_x y + \mu_x\mu_y]$$
$$= E[xy] - \mu_y E[x] - \mu_x E[y] + \mu_x\mu_y$$

$$= E[xy] - \mu_x\mu_y - \mu_x\mu_y + \mu_x\mu_y$$
$$= E[xy] - \mu_x\mu_y$$
$$= E[xy] - E[x].E[y] \quad olarak\ tanımlanır.$$
$|Cov(x,y)| \leq \sigma_x\sigma_y$ *olmalıdır.*

$\rho_{xy} = \dfrac{Cov(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}$ *buradaki* ρ_{xy} *ilişki katsayısı denir. bu kolerasyon katsayısı*

$-1 \leq p_{xy} \leq 1$ arasındadır.

Eğer X ve Y bağımsız ise

Cov(x,y) =E[xy]-E[x].E[y]

= E[x].E[y]- E[x].E[y]

= 0 ve $p_{xy} = 0$ olur.

X ve Y bağımsız ise Cov(x,y)=0 , p_{xy}=0 olur. Yani kolerasyon yoktur

→ Eğer Cov(x,y)=0 ise her zaman X ve Y bağımsızdır. Ama

→Eğer p_{xy}=0 ise X ve Y her zaman **bağımsız olmaz.**

Örnek:

Z=aX+bY ise $(\sigma_z)^2$ 'yi, σ_x , σ_y ve p_{xy} cinsinden ifade ediniz.

Cevap:

E[z]=E[ax+by]=aE[x]+bE[y]

$=a\mu_x + b\mu_y$

Ve σ^2 =E[(z-μ_z)] = E[{(ax+by)-($a\mu_x+b\mu_y$)}^{2}]

=E[{ a(x-μ_x)+b(y-μ_y)}^{2}]

=a^2E[(x-μ_x)^2] + b^2E[(y-μ_y)^2] + 2abCov(xy)

= $a^2(\sigma_x)^2 + b^2(\sigma_y)^2 + 2ab\, p_{xy}(\sigma_x \sigma_y)$

Özel olarak X ve Y bağımsız ise

a = b = 1 ise Z=X+Y => $(\sigma_z)^2 = (\sigma_x)^2 + (\sigma_y)^2$ olur.

MERKEZİ LİMİT TEOREMİ

Tanım olarak normalize edilmiş çok sayıda birbirinden bağımsız raslantı değişkenleri için X_1, X_2, X_3………………X_N için sıfır ortalama ve $(\sigma_1)^2$, $(\sigma_2)^2$,……… $(\sigma_N)^2$ ile ifade edilen sonlu varyans değerleri

$\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2$ *toplam değerinden küçükken bu raslantı değişkenlerinin toplamı*

Normal dağılıma yakınsar

Teorem: X_1, X_2, X_3………………X_N olasılık dağılım fonksiyonları $f_1(x_1)$, $f_2(x_2)$, $f_3(x_3)$,…………… $f_n(x_n)$ olarak tanımlanmış "n" tane birbirinden bağımsız raslantı değişkeni tanımlanmış olsunlar. Bunlar için;

$\overline{X_k} = 0$ *ve* $Var[\,X_k\,] = \sigma_k^2$ *olmak* üzere

$S_n^2 \triangleq \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \sigma_n^2$ *tanımlansın*

Verilen bir **ε >0** değeri için yeterli sonsuz "n" sayı için (σ_k) değeri (σ_k) > εS_n k=1,2,……….n şartını sağlar ve bu durumda

$Z_n \triangleq (X_1 + X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. + X_n)/S_n$

Normalize toplamı mormal dağılım PDF'sine yakınsar

$\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(z) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..\mathit{normal\ dağılım\ olmaktatdır}.$

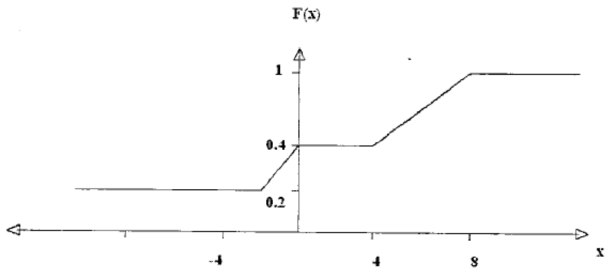
<u>*Teorem:*</u> $\overline{X_\iota} = 0 \quad ve \quad Var[X_i] = 1 \qquad i = 0,1,2 \ldots\ldots\ldots..n$ olmak üzere tanımlı bağımsız ve benzer dağılımı olan X_1, X_2, X_3………………X_N raslantı değişkenleri verilsin

$$Z_n \triangleq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad tanımlanırsa$$

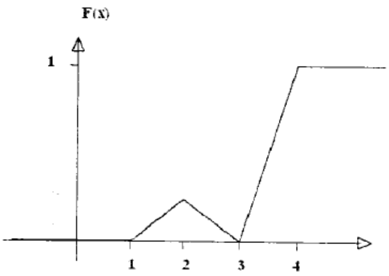
$$\lim_{n\to\infty} Z_n = N(0,1) \qquad olacaktır.$$

Çözümlü Set-1

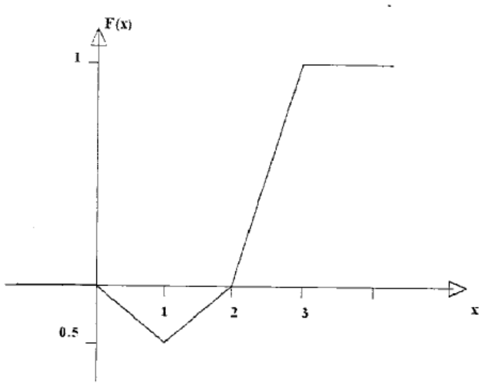
1) Bir zar atılması deneyinde oluşabilecek sonuçlar i=1,2,3,4,5,6 olsun. bu deneyle ilişkili olarak $X=i^2$ rastlantı değişkeni tanımlanıyor.
   a) Bu rastlantı değişkenine ilişkin olasılık dağılım fonksiyonunu (PDF) çiziniz.
   b) F(12) değerini bulunuz.
   c) $P(5<X\leq 7)$ olma ihtimalini bulunuz.
   d) $P(7<X\leq 11)$ olma ihtimalini bulunuz.
2) Aşağıdaki grafiklerden hangileri olasılık dağılım fonksiyonu grafiği olabilirler, neden?
   a)



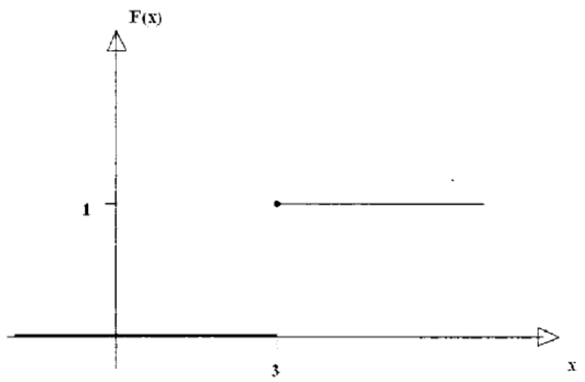
   b)



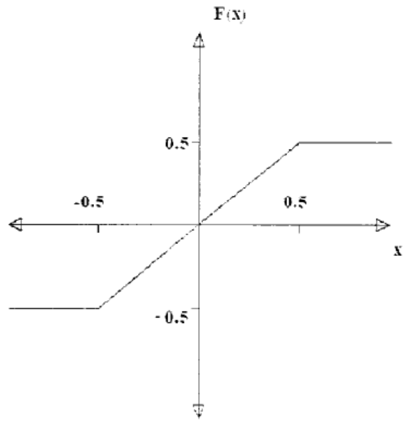
   c)



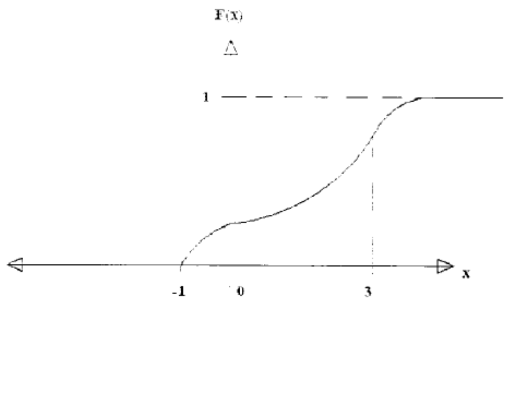
d)



e)

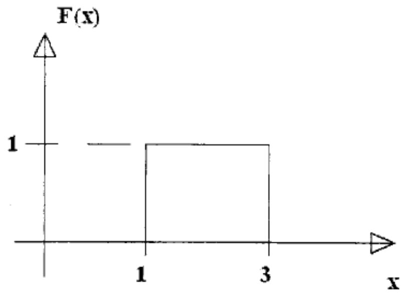


f)

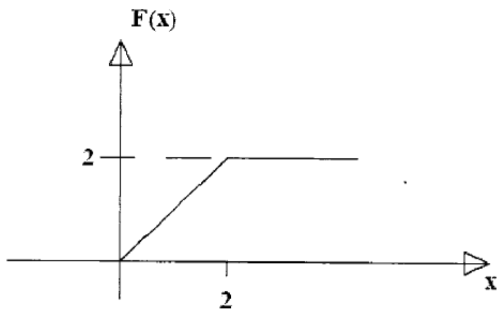


67

g)



h)



3) Üretilen bir direncin üzerinde gösterilen hata değerinin üzerinde olması ihtimali p=0.02 dir. Bu durumda üretim bandından rasgele 10 tane direnç seçtiğimizi düşünelim.

X(k): k tane direncin bozuk olması rastlantı değişkeni olsun ve bu rastlantı değişkeni;

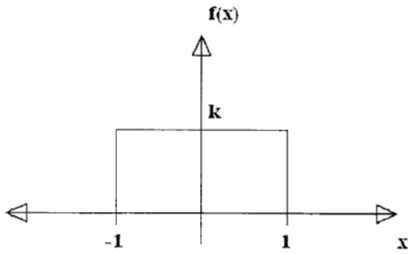
$$X(k) = f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le k \le 2 \\ 2, & 2 < k \le 5 \\ 3, & 5 < k \le 8 \\ 4, & 8 < k \le 10 \end{cases}$$ değerlerini alsın.

a) P[x=j] yi j=1,2,3,4 için hesaplayın.

b) Olasılık dağılım fonksiyonu (PDF) F(x)'i çizin.

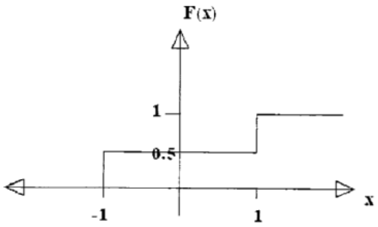
68

4) Olasılık yoğunluk fonksiyonu (pdf) aşağıda verilen fonksiyon için;



a) k ' yı bulunuz.
b) E[x] ' i bulunuz.
c) Varyansı bulunuz. (σ^2)
d) Olasılık dağolım fonksiyonunu (PDF) bulunuz.
e) $P(0<X\leq 1)$ olasılığını bulunuz.

5) Aşağıda PDF i verilen X rastlantı değişkeni için,



a) Olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.
b) E[x] i bulunuz.
c) Varyansı (σ^2) bulunuz.
d) $P(0<X\leq 1)$ olasılığını bulunuz.

CEVAPLAR

1) X raslantı değişkeni eşit olasılıklarla (1/16) 1,4,9,16,25,36 değerlerini alacaktır. Gerekli fonksiyon noktalarının olasılık değerlerini bulalım.

$F(0)=P(X\leq 0)=0$

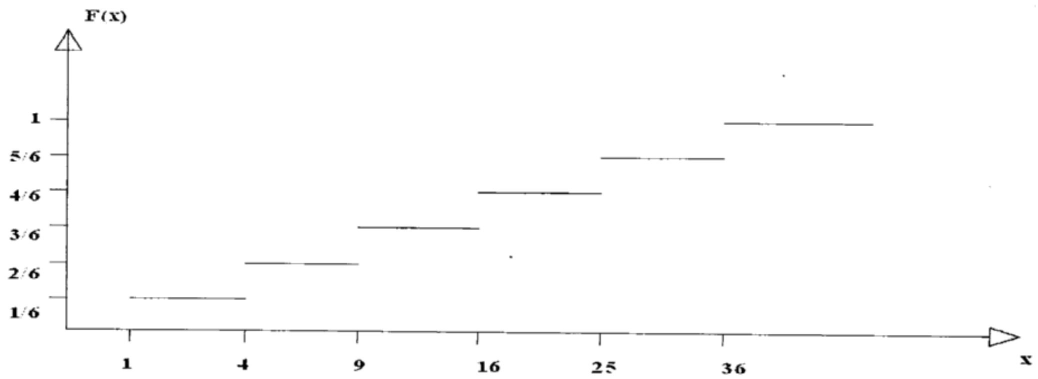
$F(1)= P(X\leq 1)=1/6$

$F(4)= P(X\leq 4)= 1/6+1/6=2/6$ [yani ya 1 yada 2 gelmesi ihtimali]

.

.

$F(36)=P(X\leq 36)=1$



b) $F(12)=4/6$

c) $P(5<X\leq 7)=F(7)-F(5)=2/6-2/6=0$

d) $P(7<X\leq 11)=F(11)-F(7)=3/6-2/6=1/6$

2)d ve f şıklarındakiler geçerlidir. Diğerleri F(x) olamaz

3) Burada direncin belirtilen hata değerinin üzerinde çıkmasını bernoulli kuralını kullanarak hesaplayabiliriz.

X(1) => 2 den az direnç hatalı olmalı, yani;

$$\sum_{i=0}^{2} b(i,10;0.02) = \sum_{i=0}^{2} \binom{10}{i} (0.02)^i (0.98)^{10-i}$$
$$= \binom{10}{0}(0.02)^0(0.98)^{10} + \binom{10}{1}(0.02)^1(0.98)^9 + \binom{10}{2}(0.02)^2(0.98)^8$$
$$= 0.817 + 0.166 + 0.015$$

$= 0.998$

X(2), X(3) ve X(4) de bulunup fonksiyon çizilir.

4)

a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \Longrightarrow \int_{-1}^{1} kdx = 1 \Longrightarrow kx\Big|_{-1}^{1} = 1 \Longrightarrow \quad 2k = 1, \quad k = 1/2$

b) $E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}xdx = \frac{x^2}{4}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \Longrightarrow \bar{x} = 0$

c) $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^3}{6}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$.

d) $-\infty < x < -1 \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(r)dr = \int_{-\infty}^{x} 0dr = 0$

$-1 < x < 1 \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(r)dr = \int_{-\infty}^{-1} 0dr + \int_{-1}^{x} \frac{1}{2}dr = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

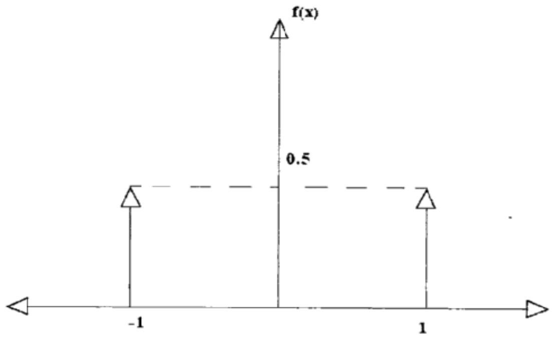
$1 < x < \infty \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(r)dr = \int_{-\infty}^{-1} 0dr + \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}dr + \int_{1}^{\infty} 0dr = 1$

$$=> F(x) = \begin{cases} 0 & , -\infty < x \leq -1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & , -1 < x \leq 1 \\ 1 & , x \geq \infty \end{cases}$$

e) P(0<x≤1)=F(1)-F(0)= $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

5)

a)



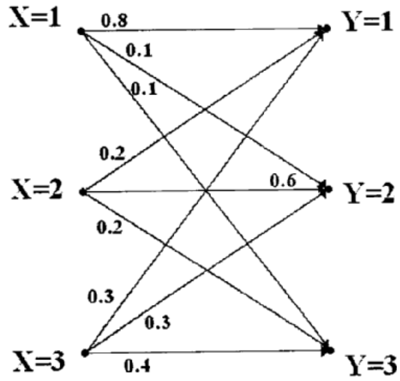
b) $E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} 0.5[\delta(x-1) + \delta(x+1)]x = 0.5 - 0.5 = 0$

c) $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 0.5[\delta(x-1) + \delta(x+1)]dx = 0.5 + 0.5 = 1$

d) P(0<x≤1)=F(1)-F(0)= 1-0.5=0.5

Çözümlü Set-2

1)



Yukarıdaki şekilde gösterilen 3 sembolün (1,2 ve 3) iletildiği bir haberleşme kanalında 3 ile 2 aynı oranda 1 ise bunlardan 3 kat daha fazla sıklıkla gönderiliyor. P[Y=1| X=1]=0.8 P[Y=2|X=1]=0.1 P[Y=3|X=1]=0.1

Buna göre alıcıda Y=1 alındığına göre 1 gönderilmiş olma olasılığı nedir?

2) Üretilen bir direncin üzerinde gösterilen hata değerinin üzerinde olması ihtimali 0.02 dir. bu durumda üretim bandından rasgele 3 tane direnç seçtiğimizi düşünelim. X rastgele değişkeni aşağıdaki şekilde tanımlandığına göre;

X(k): k tane direncin bozuk olması

$$X(k)=\begin{cases}0 & 0\le k<1\\ 1 & 1\le k<2\\ 2 & 2\le k<3\\ 3 & k=3\end{cases}$$

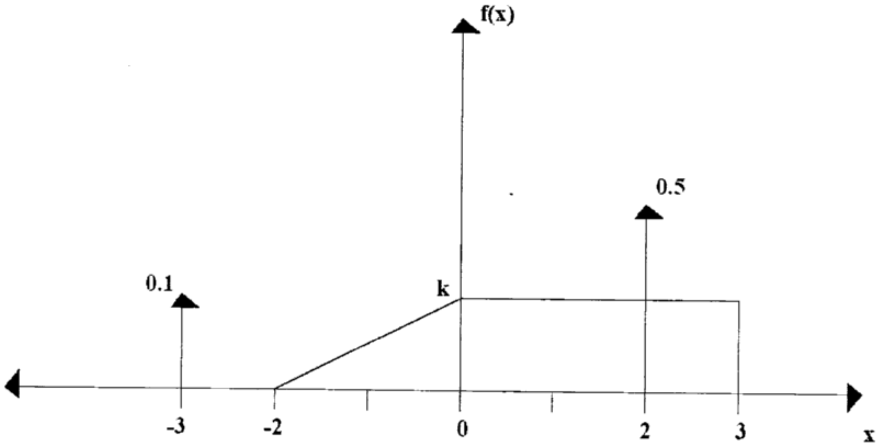
a) P[x=j] yi hesaplayın, j=0,1,2,3

73

b) F(x) 'i çizin.

c) f(x)' i çizin.

3)



Yukarıda X rastlantı değişkeninin pdf i verilmiştir. Buna göre;

a) k=?
b) P[X=2]=?
c) P[X=1]=?
d) P[-2≤X<0]=?
e) P[-3≤X≤-2]=?
f) P[-3<X≤-2]=?
g) E[X]=?
h) $\sigma^2 = ?$
i) F(1)=?
j) F(X)' i çizin

4) Kullanmakta olduğumuz radyo için bir pil aldığınızı ve bu pilin ömrünün (gün olarak) X rastlantı değişkeni ile değiştiğini düşünelim. Bu rastlantı değişkeninin pdf' i $fx(x) = ke^{-x/2}$, $x \in (0,\infty)$ şeklinde verilsin.

a) k=?

b) P(X≥t) için bir ifade elde ediniz.

c) P(X≥t+s | X≥t) yi bulunuz. Bu fonksiyonu nasıl yorumlarsınız?

d) Pilinizi ilk aldığınızda 10 gün ömrünün olması, 1 ay kullandıktan sonra 10 gün daha ömrünün kalması ve 1 yıl kullandıktan sonra 10 gün daha ömrünün kalması ihtimalleri arasında büyüklük küçüklük açısında nasıl bir ilişki vardır?

CEVAPLAR

1) P[X=1]=0.6, P[X=2]=0.2, P[X=3]=0.2
P[X=1 | Y=1]=?

P[X=1|Y=1] =

$$= \frac{P[Y=1|X=1]*P[X=1]}{P[Y=1|X=1]*P[X=1]+P[Y=1|X=2]*P[X=2]+P[Y=1|X=3]*P[X=3]}$$

$$= \frac{0.8*0.6}{0.8*0.6+0.2*0.2+0.3*0.2} = \frac{0.8*0.6}{0.48+0.04+0.06} = \frac{0.48}{0.58}$$

75

2)

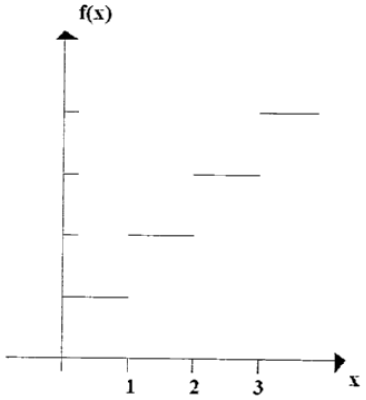
a) P[X=0]= $\binom{3}{0}(0.02)^0 * (0.98)^3 = (0.98)^3$

P[X=1]= $\binom{3}{1}(0.02)^1 * (0.98)^2$

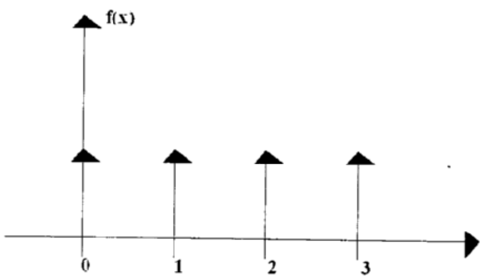
P[X=2]= $\binom{3}{2}(0.02)^2 * (0.98)^1$

P[X=3]= $\binom{3}{3}(0.02)^3 * (0.98)^0 = (0.02)^3 = 8 * 10^{-6}$

b)



c)



3)

76

a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)=1 \Rightarrow \int_{-3}^{-3} 0.1\delta(x+3)+\int_{-2}^{0}\frac{k}{2}(x+2)+\int_{0}^{3}k+\int_{2}^{2}0.5\delta(x-2)$$

$$=0.1+\frac{k}{2}\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-2}^{0}+kx\Bigg|_{0}^{3}+0.5$$

$$=0.6+\frac{k}{2}\left(0-\left(\frac{4}{2}-4\right)\right)+3k$$

$$=0.6+\frac{k}{2}(2)+3k=0.6+4k=1 \Rightarrow k=0.1$$

b) P[X=2]=0.5

c) P[X=1]=0

d) P[-2≤X<0]=Üçgenin Alanı=(2*0.1)/2=0.1

e) P[-3≤X≤-2]=P[X=-3]=0.1

f) P[-3<X≤-2]=0

g)

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)=0.1\int_{-3}^{-3} x\delta(x+3)dx+\int_{-2}^{0}0.05x(x+2)dx+\int_{0}^{3}0.1xdx+\int_{2}^{2}0.5x\delta(x-2)dx$$

$$=0.1x\Big|_{x=-3}+0.05\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Bigg|_{-2}^{0}+\frac{0.1x^2}{2}\Bigg|_{0}^{3}+0.5x\Big|_{x=2}$$

$$=-0.3+0.05\left[0-\left(\frac{-8}{3}+4\right)\right]+0.05(9-0)+1$$

$$=0.7-\frac{0.2}{3}+0.45=1.15-\frac{0.2}{3}=\frac{3.25}{3}$$

h)

$$E[X^2]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx = 0.1\int_{-3}^{3}x^2\delta(x+3)+\int_{-2}^{0}0.05x^2(x+2)+\int_{0}^{3}0.1x^2+\int_{2}^{2}0.5x^2 d(x-2)$$

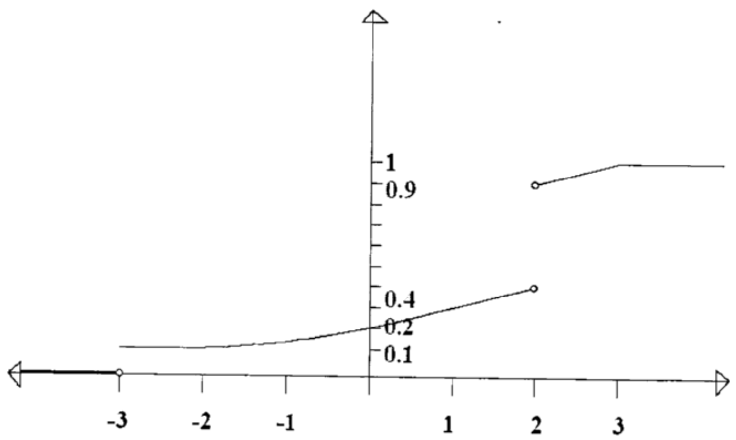
$$=0.1x^2\Big|_{x=-3}+0.05\left(\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{0}+\frac{0.1x^3}{3}\Big|_{0}^{3}+0.5x^2\Big|_{x=2}$$

$$=0.9+0.05[0-(4-\frac{16}{3})]+0.9+2$$

$$=3.8+\frac{0.2}{3}=\frac{11.2}{3}$$

$$\sigma^2=\frac{11.2}{3}-\left(\frac{3.25}{3}\right)^2=\frac{11.2}{3}-\frac{10.5625}{9}=\frac{23.0375}{9}$$

i)



j) F(1)=0.3

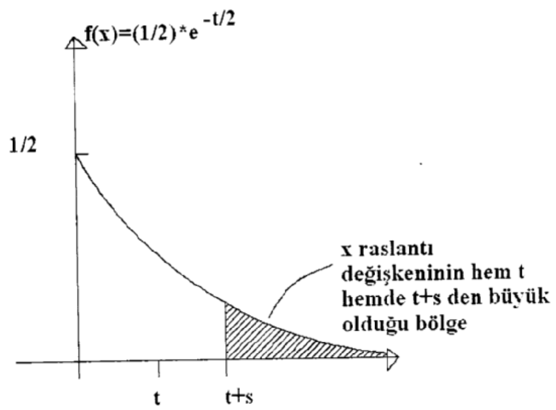
78

4)

a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{0}^{\infty} ke^{-x/2}dx = 1 \Rightarrow -2ke^{-x/2}\Big|_0^{\infty} = 1 \Rightarrow -2k\left[e^{-\infty/2} - e^{-0/2}\right] = 1 \Rightarrow 2k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

b) $P(X \geq t) = \int_{t}^{\infty} f(x)dx = \int_{t}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-x/2} = -e^{-x/2}\Big|_t^{\infty} = e^{-\infty/2} + e^{-t/2} \Rightarrow P(X \geq t) = e^{-t/2}$

c)



P(X≥t+s | X≥t)= $\dfrac{P(X \geq t+s\, X \geq t)}{P(X \geq t)}$

P(X≥t+s , X≥t)= P(X≥t+s) ⇒ P(X≥t+s | X≥t)= $\dfrac{P(X \geq t+s)}{P(X \geq t)} = \dfrac{e^{-(t+s)/2}}{e^{-t/2}} = e^{-s/2}$

d) Hepsi Eşit (e^{-5})

79

Çözümlü Set-3

1) X ve Y rastlantı değişkenlerinin birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{xy}(x,y)=\begin{cases} c_{xy}, x\in\{1,2,4\} \ ve \ \ y\in\{1,3\} \\ 0, \qquad\qquad diger \end{cases}$$

olarak veriliyor. Buna göre,

a) c=?
b) P(Y<X)=?
c) P(Y>X)=?
d) P(Y=X)=?
e) P(Y=3)=?
f) fx(X)=?, fy(y)=?
g) E[X]=?, E[Y]=?
h) $\sigma_x^2=?,\sigma_y^2=?$

Cevap-1:

6 tane 0'dan farklı olasılığı olan durum var. Bu durumlar; (1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (4,1) ve (4,3).

$\iint fxy\ dxdy=1$ olmalı. Buradaki olaylar için integral toplama dönüşeceğinden;

$\sum\sum fxy(xy)=1$ olmalı.

a) c[1.1+1.3+2.1+2.3+4.1+4.3]=1 => c=1/28
b) Y<X olan 3 örnek noktası var.

P(Y<X)= $P(\{2,1\})+P(\{4,1\})+P(\{4,3\})=\frac{1}{28}(2.1+4.1+4.3)=\frac{18}{28}$

c) Y>X olan 2 örnek noktası var.

P(Y>X)= $P(\{1,3\})+P(\{2,3\})=\frac{1}{28}(1.3+2.3)=\frac{9}{28}$

d) Y=X olan tek örnek noktası var.

P(Y=X)= $P(\{1,1\})=\frac{1}{28}(1.1)=\frac{1}{28}$

e) y=3 olan 3 örnek noktası var.

P(Y=3)= $P(\{1,3\})+P(\{2,3\})+P(\{4,3\})=\frac{3}{28}+\frac{6}{28}+\frac{12}{28}=\frac{21}{28}$

f)

80

$$fx(x) = \begin{cases} 1/7 \,,\, x=1 \\ 2/7 \,,\, x=2 \\ 4/7 \,,\, x=4 \\ 0 \,\,\,\, , diger \end{cases} \qquad fy(y) = \begin{cases} 1/4 \,,\, y=1 \\ 3/4 \,,\, y=3 \\ 0 \,\,\,\, , diger \end{cases}$$

Örneğin;

X=2 ise $fx(2) = P(\{2,1\}) + P(\{2,3\}) = \frac{8}{28}$

g) E[X]=3 E[Y]=5/2

h) $\sigma_x^2 = \frac{10}{7}, \sigma_y^2 = \frac{5}{8}$

g ve h şıklarının çözümleri için elimizde fx(x) ve fy(y) olduğundan artık bu değerleri hesaplamak çok kolay olmalı !!! (Çözümü size bırakıyorum.)

2) X ve Y rastlantı değişkenleri için;

$$fxy(x,y) = \begin{cases} cx^2\sqrt{y} \,,\, x = -5,-4,\ldots,4,5 \quad ve \quad y = 0,1,\ldots,10 \\ 0 \quad , \qquad\qquad\qquad diger \end{cases}$$

veriliyor. Buna göre $E[XY^3]$=?

Cevap 2:

$$E[XY^3] = \sum_{x=-5}^{5}\sum_{y=10}^{10} xy^3\, fxy(x,y) = 0$$

3) X ve Y $\{1,2,3\}$ değerlerini alan düzgün yoğunluk fonksiyonuna sahip rastlantı değişkenleri olsun. Buna göre;

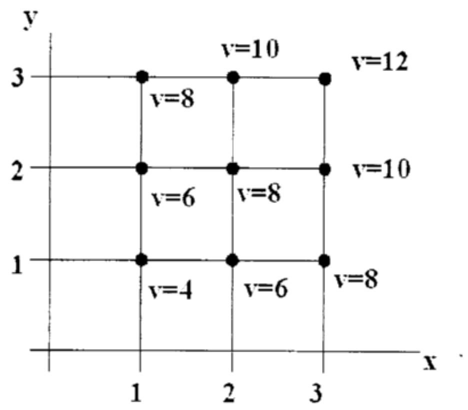
a) V=2X+2Y => fv(v)=?

b) W=X-Y => fw(w)=?

Cevap 3:

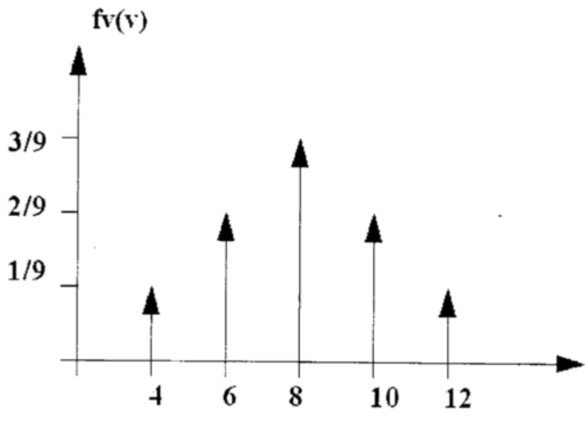
Bu probleme iki çözüm şekliyle yaklaşılabilir.

a-1)



X ve Y düzgün dağılıma sahip olduklarında (yani her 3 değeri olma olasılıkları eşit olduğunda v rastlantı değişkeninde bu 9 durumu alma olasılığı eşit yani 1/9 olacaktır.)

Buna göre ;



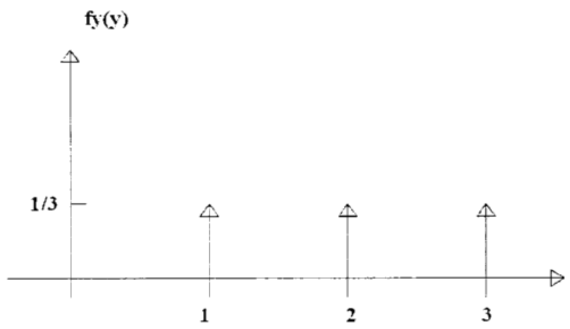
Örneğin;

4 değeri 1 kere alınabildiğinden 1/9

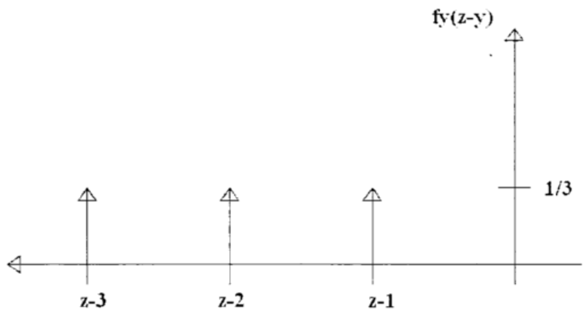
8 değeri 3 kere alınabildiğinden 3/9

a-2) Diğer Çözüm yolu;

Konvolüsyon almak

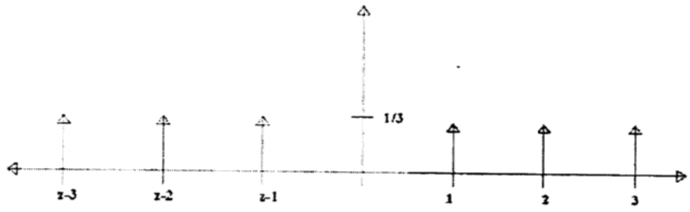


Önce Z=X+Y yi bulalım



I) Z<2

83



$f_z(z)=0,\ z<2$

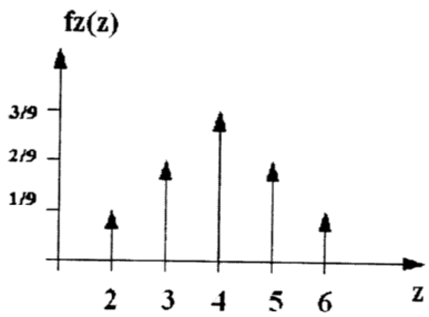
II) $z=2$ bu durumda sadece z-1 ve 1 üst üste gelecek $f_z(z)=\frac{1}{3}*\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$, $z=2$

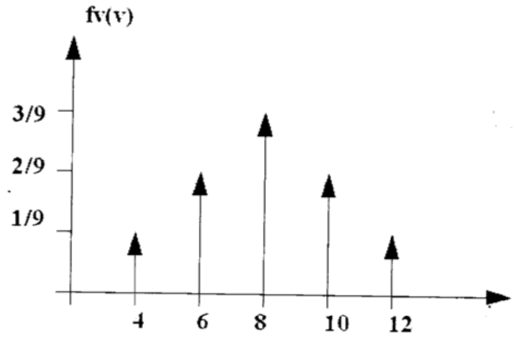
$z=3$ z-1 ve 2, z-2 ve 1 üst üste gelecek $f_z(z)=\frac{1}{3}*\frac{1}{3}+\frac{1}{3}*\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$, $z=3$

$z=4$ z-1 ve 3, z-2 ve 2, z-3 ve 1 üst üste gelecek $f_z(z)=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{3}{9}$, $z=4$

benzer şekilde, $f_z(z)=\frac{2}{9}$,$z=5$ ve $f_z(z)=\frac{1}{9}$,$z=6$

$V=2(X+Y)=2Z$ olduğundan





b şıkkı benzer şekilde çözülür.

4) X ve Y rasgele değişkenleri için;

$$fx(x)=\begin{cases}1-\frac{x}{2}, x\in[0,2]\\ 0\ ,\ diger\end{cases}$$ ve $$fy(y)=\begin{cases}2-2y, y\in[0,1]\\ 0\ ,\ diger\end{cases}$$ ise,

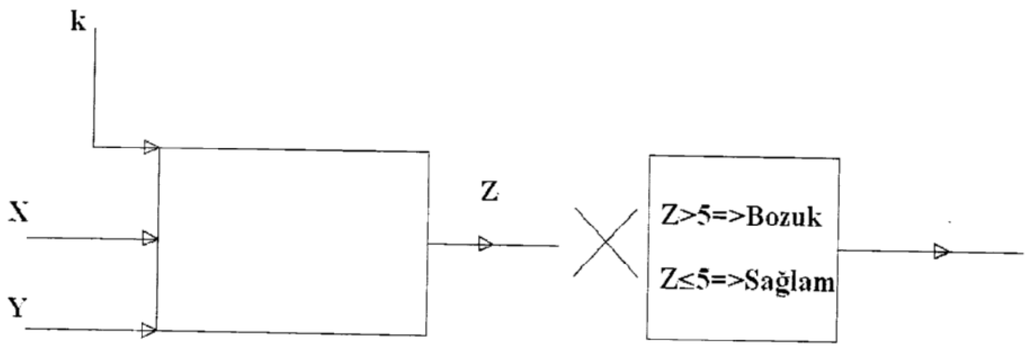
W=X+Y ile verilen W rastlantı değişkeni için fw(w) yi bulunuz.

Cevap 4:

Konvolüsyon olarak cevap aşağıdaki gibi bulunur.

$$fw(w)=\begin{cases}2w-\frac{3}{2}w^2+\frac{1}{6}w^3 & ,0\le w\le 1\\ \frac{7}{6}-\frac{1}{2}w & ,1\le w\le 2\\ \frac{9}{2}-\frac{9}{2}w+\frac{3}{2}w^2-\frac{1}{6}w^3 & ,2\le w\le 3\\ 0 & ,diger\end{cases}$$

5) X [0,2] aralığında Y ise [0,2] aralığında Uniform dağılıma sahip rastlantı değişkenleri olsun. Buna göre;



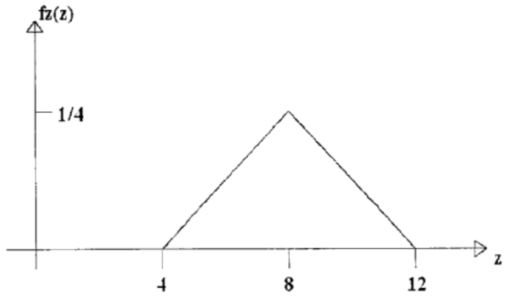
yukarıdaki sistemde k değerine sahip dirençler kararlılık testinden geçiriliyorlar ve sistem çıkışında Z>5 olursa bozuk, Z≤5 olursa sağlam olduklarına karar veriliyor. k girişi sıcaklık tolerans değeri olup k=2 olarak biliniyor, sistemde bunu 50^0C de test ederek çıkışa 2k olacak şekilde verilmesi tasarlanmış. Ancak X ve Y gürültüleri yüzünden sistem çıkışı Z=2(k+X+Y) oluyor. Buna göre sisteme giren dirençlerin tolerans değerlerinin sistem çıkışındaki ortalama değeri ve giren bir direncin bozuk olma ihtimali nedir? (P(Z>5)=?)

NOT: X ve Y bağımsız.

Cevap 5:

Önce X ve Y nin konvolüsyonunu alarak V=X+Y yi bulmak için sadece V rastlantı değişkeninin başlangıç bitir değerini 2 ile öteleyin sonra Z=2W rastlantı değişkenini bulun.

Sonuç;



Burada P(z≥5)= $\frac{31}{32}$

$$E[z]=\frac{1}{16}\int_{4}^{8} z(z-4)dz+\frac{1}{16}\int_{8}^{12}(-z+12)dz$$

$$=\frac{1}{16}\left[\frac{z^3}{3}-2z^2\Big|_4^8+\left(\frac{-z^3}{3}+6z^2\Big|_8^{12}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{16}\left[\frac{512}{3}-128-\left(\frac{64}{3}-32\right)+\left(\frac{-1728}{3}+864-\left(\frac{-512}{3}+384\right)\right)\right]$$

$$=\frac{1}{16}\left[\frac{128}{3}+\frac{32}{3}+\frac{864}{3}+\frac{640}{3}\right]=8$$

E[z]=8 Yada;

$$E[2(k+x+z)]=2[E[k]+E[X]+E[Y]]=2[2+1+1]=8$$

Çözümlü Set-4

1)

$$fxy(x,y)=\frac{1}{2\Pi\sigma^2}\exp(-(x^2+y^2)/2\sigma^2)$$

$$\left.\begin{array}{l} V = X\cos\theta + Y\sin\theta \\ W = X\sin\theta + Y\cos\theta \end{array}\right\} fvw(v,w)=?$$

$$fvw(v,w)=\left|\tilde{j}\right| f_{XY}(x,y)\Bigg|_{\substack{x=\phi(v,w)\\ y=\varphi(v,w)}}$$

$\cos\theta \quad v = x\cos^2\theta + Y\sin\theta\cos\theta \qquad \sin\theta \quad v = x\cos\theta\sin\theta + Y\sin^2\theta$

$\sin\theta \quad w = x\sin^2\theta - Y\sin\theta\cos\theta \qquad -\cos\theta \quad w = -x\sin\theta\cos\theta + Y\cos^2\theta$

$x = v\cos\theta + w\sin\theta$
$x=\phi(v,w)$

$y = v\sin\theta - w\cos\theta$
$y=\varphi(v,w)$

$$\left|\tilde{j}\right| = \begin{vmatrix} \partial\phi/\partial v & \partial\phi/\partial w \\ \partial\varphi/\partial v & \partial\varphi/\partial w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{vmatrix} = \left|-\cos^2\theta-\sin^2\theta\right| = 1$$

$$fvw(v,w)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp(-[X^2\cos^2\theta+Y^2\sin^2\theta+2XY\sin\theta\cos\theta+$$

$$X^2\sin^2\theta+Y^2\cos^2\theta-2XY\sin\theta\cos\theta]/2\sigma^2)$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp(-(v^2+w^2)/2\sigma^2)$$

2)

$$fxy(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}(x^2-2pxy+y^2)\right]$$

z=ax+by

w=cx+dy

a) fzw(z,w)=?
b) a,b,c,d nin hangi kombinasyonu için z ve w bağımsız olur.

cZ=acX+bcY

aW=acX+adY

—

cz-aw=Y(bc-ad)

$$Y=\frac{cZ-aW}{bc-ad}$$

dZ=adX+bdY

bW=bcX+bdY

—

dZ-bW=X(ad-bc)

$$X=\frac{dZ-bW}{ad-bc}=\frac{bW-dZ}{bc-ad}$$

89

$Y = \varphi(z, w)$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $X = \phi(z, w)$

$$\tilde{j} = \begin{vmatrix} \partial\phi / \partial z & \partial\phi / \partial w \\ \partial\varphi / \partial z & \partial\varphi / \partial w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{-d}{bc-ad} & \dfrac{b}{bc-ad} \\ \dfrac{c}{bc-ad} & \dfrac{-a}{bc-ad} \end{vmatrix} = \frac{1}{bc-ad}(ad-bc) = -1$$

$$|\tilde{j}| = 1$$

$$fvw(v,w) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)} * \frac{1}{bc-ad} \begin{pmatrix} d^2z^2 + b^2w^2 - 2bdwz + c^2z^2 + a^2w^2 - 2acwz \\ -2\rho\left[cdz^2 - bcwz - adwz + abw^2\right] \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)} * \frac{1}{bc-ad} \begin{bmatrix} z^2(c^2d^2) + w^2(b^2+a^2) - 2wz(ac+bd) \\ -2\rho\left[cdz^2 + abw^2 - wz(bc+ad)\right] \end{bmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)} * \frac{1}{bc-ad} \begin{bmatrix} z^2(c^2+d^2-2\rho cd) + w^2(b^2a^2 - 2\rho ab) \\ -2wz(ac+bd-\rho(bc+ad)) \end{bmatrix} \right]$$

b) ac+bd= ρ (bc+ad) => bağımsız normal olur.

3) X ve Y bağımsız değişkenleri X~[0 3] ve Y~[0 4] Uniform dağılıma sahipler. Z=X+Y şeklinde tanımlandığına göre

a) $\phi_x(w) = ?$

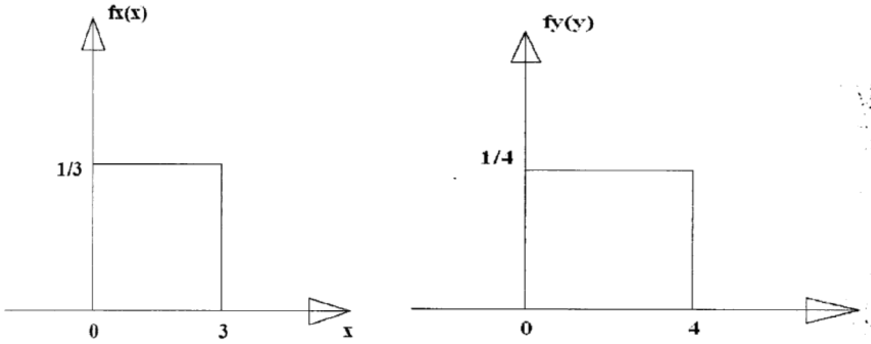
b) $\phi_y(w) = ?$

c) $\phi_z(w) = ?$

d) fz(z)=?

e) E[z]=?

f) $\sigma_z^2 = ?$



a)

$$\phi_x(w)=\int_0^3 \frac{1}{3}e^{jwx}dx=\frac{1}{3jw}e^{jwx}\Big|_0^3=\frac{1}{3jw}(e^{3jw}-1)=\frac{e^{\frac{3}{2}jw}}{\frac{3}{2j}jw}\left(\frac{e^{\frac{3}{2}jw}-e^{\frac{-3}{2}jw}}{2j}\right)=e^{\frac{3}{2}jw}\frac{\sin(\frac{3}{2}w)}{\frac{3}{2}w}$$

$$\phi_x(w)=e^{\frac{3}{2}jw} * \sin c\left(\frac{3}{2}w\right)$$

b) Benzer şekilde $\phi_y(w)=e^{2jw}\sin c(2w)$

c)

91

$$\phi_z(w) = \phi_x(w) * \phi_y(w) = e^{\frac{3}{2}jw}\sin c\left(\frac{3}{2}w\right)e^{2jw}\sin c(2w) = e^{\frac{7}{2}jw}\sin c\left(\frac{3}{2}w\right)\sin c(2w)$$

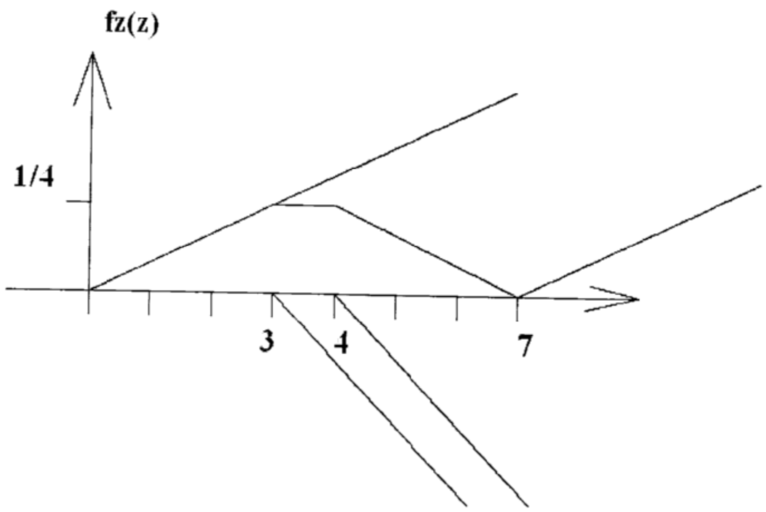
$$= e^{\frac{7}{2}jw}\frac{\sin(2w)\sin\left(\frac{3}{2}w\right)}{2w\frac{3}{2}w} = \frac{e^{\frac{7}{2}jw}}{3w^2}\frac{1}{2}\left[\cos\frac{w}{2} - \cos\frac{7}{2}w\right] = \frac{e^{\frac{7}{2}jw}}{6w^2}\left[\frac{e^{j\frac{w}{2}}+e^{\frac{-jw}{2}}}{2} - \frac{e^{j\frac{7}{2}w}+e^{\frac{-j7}{2}w}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{12w^2}\left[e^{j4w}+e^{j3w}-e^{j7w}-1\right]$$

d) $u(t)te^{-\alpha t} \xrightarrow{F} \frac{1}{(\alpha + jw)^2} \Rightarrow -u(t)t \xrightarrow{F} \frac{1}{w^2}$ $\qquad (\alpha = 0)$

$f(t-t_0) \rightarrow F(w)e^{jwt_0}$ (Tabloda farklı "w" yerine "–w" koy)

$$\frac{1}{12w^2}\left[e^{j4w}+e^{j3w}-e^{j7w}-1\right] \xrightarrow{F} \frac{1}{12}[-(t-4)u(t-4)-(t-3)u(t-3)+(t-7)u(t-7)+u(t)t]$$



e)

$$E[z]=\frac{1}{j}\frac{d}{dw}\phi_z(w)\Big|_{w=0}\Rightarrow\frac{d}{dw}\left[\frac{1}{12w^2}\left(e^{j4w}+e^{j3w}-e^{j7w}-1\right)+\frac{1}{12w^2}\left(j4e^{j4w}+3je^{j3w}-j7e^{j7w}\right)\right]$$

$$E[z]=E[X]+E[Y]=1.5+2=3.5$$

$$\sigma_z^2=\sigma_x^2+\sigma_y^2=\frac{9}{12}+\frac{16}{12}=\frac{25}{12}$$

4-) $\phi_x(w)=\frac{1}{2}\left[\frac{12-a}{4-jw}+\frac{a-6}{2-jw}\right]$ şeklinde verilmiş ise;

a) a için bir değer bulunuz.

b) P(x≥0.5)=?

c) fz(z) yi kullanarak E[z]=?

d) E[z]=? ($\phi_x(w)$ yı kullanarak.)

e) $\sigma_z^2=?$ (fz(z)'den)

f) $\sigma_z^2=?$ (Dx(w) den)

a) $\phi_x(w)=E(e^{jwx})$ olduğundan w yerine 0 koyarsak;

E[e^0]=E[1]=1 olmalı

$$\phi_x(0)=\frac{1}{2}\left[\frac{12-a}{4}+\frac{a-6}{2}\right]=1\Rightarrow a=8\Rightarrow\phi_x(w)=\frac{1}{2}\left[\frac{4}{4-jw}+\frac{2}{2-jw}\right]$$

b) $fx(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_x(w)e^{-jwx}dw$ tablodan $u(t)e^{-\alpha t}\leftrightarrow\frac{1}{\alpha+jw}$

93

$w \to -w$ bizim için $u(t)e^{-\alpha t} \leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha - jw}$

$$fx(x) = \begin{cases} 2e^{-4x} + e^{-2x} & , x \geq 0 \\ 0 & , diger \end{cases}$$

$$\mathrm{P(x \geq 0.5)} = \int_{0.5}^{\infty} 2e^{-4x} + e^{-2x} dx = \frac{-e^{-4x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{2} \Bigg|_{0.5}^{\infty} = \frac{1}{2}(e^{-2} + e^{-1})$$

c)

$$E[x] = \int_0^{\infty} x(2e^{-4x} + e^{-2x})dx = \int_0^{\infty} 2xe^{-4x} dx + \int_0^{\infty} xe^{-2x} dx =$$

$$u = x \qquad dv = e^{-4x} \Rightarrow$$

$$du = dx \qquad v = \frac{e^{-4x}}{-4}$$

$$\int_0^{\infty} 2xe^{-4x} = 2\left[\frac{xe^{-4x}}{-4} - \int \frac{e^{-4x}}{-4} dx\right] = 2\left[\frac{xe^{-4x}}{-4} - \frac{e^{-4x}}{16}\right] \Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{8}$$

Aynı şekilde diğer taraftan da $\frac{2}{8}$ gelecek ve E[z]= $\frac{3}{8}$

d)

94

$$E[x]=\frac{1}{j}\frac{d}{dw}\phi_x(w)\Big|_{w=0}=\frac{1}{j}\left[\frac{2j}{(4-jw)^2}+\frac{j}{(2-jw)^2}\right]\Big|_{w=0}$$
$$=\frac{2}{16}+\frac{1}{4}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

e) $E[x^2]=\int_0^{\infty}x^2(2e^{-4x}+e^{-2x})=\frac{5}{16}$ (dönüşümler yapıldığında)

$$\sigma_x^2=\frac{5}{16}-\left(\frac{3}{8}\right)^2=\frac{11}{64}$$

f)

$$E[x^2]=\frac{1}{j^2}\frac{d^2}{dw^2}\phi_x(w)\Big|_{w=0}=\frac{1}{j^2}\left(\frac{4j^2}{(4-jw)^3}+\frac{2j^2}{(2-jw)^3}\right)\Big|_{w=0}$$
$$=\frac{4}{64}+\frac{2}{8}=\frac{20}{64}=\frac{5}{16}$$
$$\sigma^2=\frac{11}{64}$$

Örnek

5)

X~U(0,1) , Y~U(0,1) ve X ve Y bağımsız olsun.

Z=X+Y

W=X-Y olsun. z ve w nun bağımlı fakat ilişkisiz olduğunu göster.

$x=\frac{z+w}{2}$, $y=\frac{z-w}{2}$ olur. $0<z<2$, $-1<w<1$

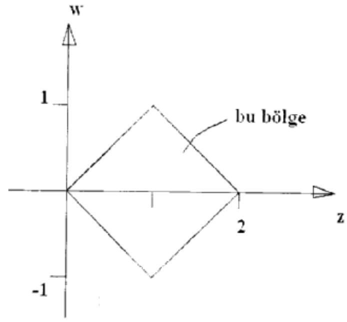
$z+w\leq 2$, $z-w\leq 2$ $z>|w|$

95

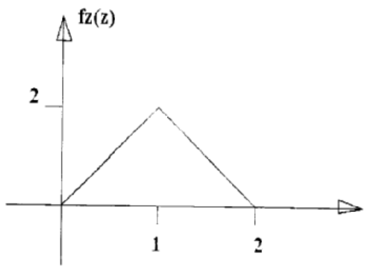
$$\left|\tilde{j}(z,w)\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\delta x}{\delta z} & \dfrac{\delta x}{\delta w} \\ \dfrac{\delta y}{\delta z} & \dfrac{\delta x}{\delta z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = \left| \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

$$fzw(z,w) = \left|\tilde{j}(z,w)\right| fxy(x_i, y_i)$$

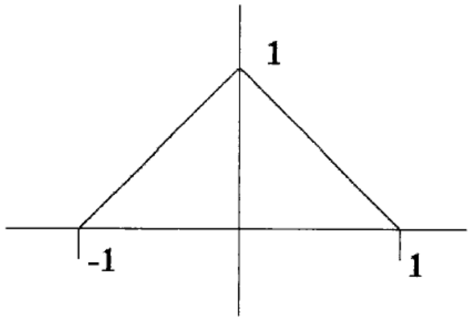
$$fzw(z,w) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & ,0 < z < 2, \quad -1 < w < 1, \quad z + w \leq 2, \quad z - w \leq 2 \quad |w| < 7 \\ 0 & ,diger \end{cases}$$



$$fz(z) = \int fzw(z,w)dw = \begin{cases} \displaystyle\int_{-z}^{z} \frac{1}{2} dw = z & ,0 < z < 1 \\ \displaystyle\int_{z-2}^{2-z} \frac{1}{2} dw = 2 - z & ,1 < z < 2 \end{cases}$$



$$fw(w) = \int fzw(z,w)dz = \int_{|w|}^{2-|w|} dz = \begin{cases} 1-|w| & ,-1<w<1 \\ 0 & ,diger \end{cases}$$



Açıkca fzw(z,w)≠fz(z)*fw(w)

E[zw]=E[(x+y)(x-y)]=E[x^2]-E[y^2]=0

E[w]=E[x-y]=0   E[z]=1

Cov(z,w)=E[zw]-E[z]E[w]=0

ÖDEV -1-

1) Bir torbadan 1 ile 9 arasında numaralandırılmış topların çekilerek oynandığı bir oyunda, çift sayı gelirse bir ödül kazanılıyor. Ödül kazanma olasılığı nedir?
2) Bir madeni para ile 3 kez arka arkaya yazı-tura atılıyor. Bu 3 atış sonucunda 2 tura ve 1 yazı elde etme olasılığı nedir?
3) Bir torbadan arka arkaya çekilen iki top deneyini ele alalım. Bu torbada 1 den 6 ya kadar numaralandırılmış toplar var.
   a) Çekilen top torbaya geri konulmadığı durum için,
   b) Çekilen top torbaya geri konulduğu durum için,

Ω örnek uzayını tanımlayınız.

4) Bir torba 1 ile 10 arasında numaralandırılmış toplar içersin. A olayı 5 den küçük top çekme, B olayı da 3 ten büyük fakat 9 dan küçük top çekme olayı olsun. Buna göre aşağıdaki kümeleri oluşturun ve bu olayları kelimelerle ifade edin.
   a) A^c
   b) B^c
   c) AB
   d) AUB
   e) AB^c
   f) A^cUB^c
   g) AB^cUA^cB
   h) $ABUA^cB^c$
   i) $(AUB)^c$
   j) $(AB)^c$

5) 1,2 ve 3 nolu aksiyomları kullanarak aşağıdakileri gösterin,
   a) $P[\emptyset]=0$
   b) $P[AB^c]=P[A]-P[AB]$
   c) $P[A]=1-P[A^c]$

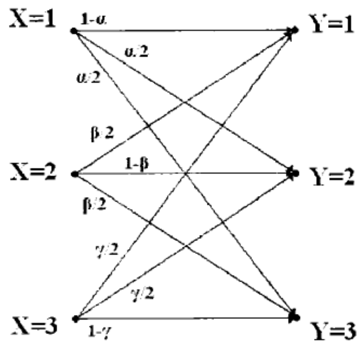
6) Eğer $AB=\emptyset$ ise $P(A)\leq P(B^c)$ olduğunu gösterin

7) Bir TV yarışma oyununda 3 adet kapı bulunmaktadır ve bu kapılardan sadece 1 tanesinin arkasında ödül vardır. Yarışmacılardan kapılardan bir tanesini seçmesi istendikten sonra sunucu tarafından geri kalan kapılardan boş olanı açılıyor ve yarışmacıya seçtiği kapıyı şimdi değiştirmek isteyip istemediği soruluyor. Siz olsaydınız ne yapardınız? Yarışmacının seçtiği kapıyı değiştirmesi, şansını hangi yönde etkiler. Seçimini değişirse yüzde kaç, değişmezse yüzde kaç ihtimalle kazanma şansı vardır?

ÖDEV 2

1) Bir zar iki kere atılıyor. İlk atışta 3 gelirse iki atış sonucunda toplamın 7 olma ihtimali nedir?

2)



Yukarıdaki şekilde gösterilen 3 sembolün (1,2 ve 3) iletildiği bir haberleşme kanalında genelde (ortalama davranışlar göz önüne alındığında) 3, 2 ′ den, 2′ de 1′ den 2 kat daha fazla sıklıkta gönderiliyor.

P[Y=1|X=1]=1-α, P[Y=2|X=1]=α/2, P[Y=3|X=1]=α/2 olarak verilmiş ve diğer olabilecek ihtimallerle beraber şekil üzerinde gösterilmiştir. Burda P[Y=1|X=1] 1 gönderildiğinde 1 alınması koşullu ihtimalidir. Buna göre, alıcı tarafta Y=1 alındığına göre 1 göderilmiş olma ihtimali nedir?

3) Bir torbada 2 kırmızı ve 3 beyaz top bulunmaktadır. Bu torbadan bir top çekilip rengi kaydediliyor ve yerine geri koyuluyor. Buna göre yapılan 4 çekim sonucunda en az 2 kırmızı top çwkilmiş olma olasılığı nedir?

4) Bir çift zar 10 kere atılıyor. Bu zarların toplamlarının en az bir kere 7 olma ihtimali nedir?

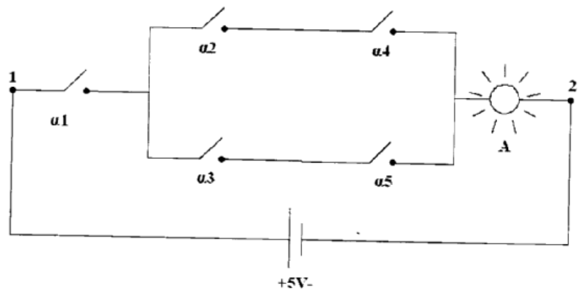
5) Bir sınıfta4 erkek ve 3 kız öğrenci vardır. Bu öğrenciler teker teker sınava alınıyorlar. Öğrencilerin bir erkek bir kız şeklinde giden bir sıralamayla sınava alınma olasılıkları nedir?

6) A ve B ayrık olaylar ise bağımsız olabilirlermi?

7) Tek sayıda (mesela 7 kişi) bir grup insan eşit sayıda iki takıma bölünmelerini (mesela 3 kişi) gerektiren bir oyun oynayacaklar. Artan kişinin hakem olmasına karar veriyolar ve bu hakemin kim olacağını belirlemek için herkes yazı tura atıyor. Bu yazı tura atma işlemi sadece bir kişi hariç diğerlerinin attığı taraf aynı olana kadar (örneğin altısı yazı biri tura, yada altısı tura sadece biri yazı) devam ediyor. Farklı olanı atan hakem olarak belirleniyor. Buna göre ilk turda (yani ilk denemede) hakemin belirlenmesi olasılığı nedir? (oyuncuların sayısını 7 alarak problemi çözün.)

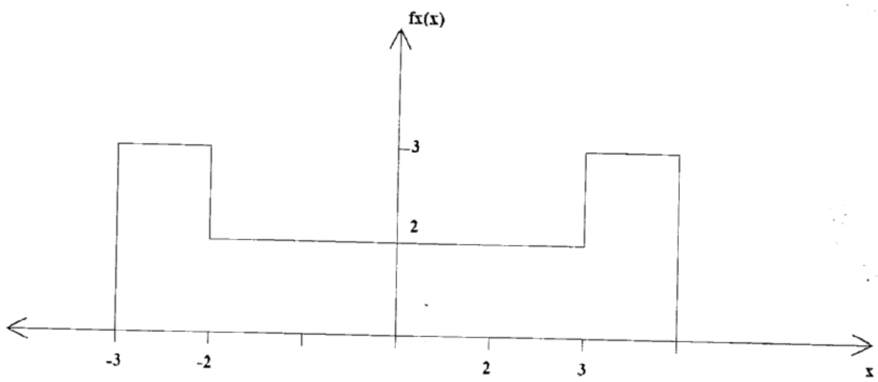
8) Anestezi de kullanılan otomatik bir nefes düzenleme aygıtı (B), P_B olasılığla bozuluyor. Bu bozulma, izleme sistemi (M) bu bozukluğu algılamazsa, hastanın ölümüne sebep veriyor. İzleme sistemi (M) de P_M olasılığıyla bozuluyor. İki sistemin bozulmaları tamamen bağımsız olaylardır. Hastanenin profesörü eğer $P_M > P_B$ ise izleme cihazı kullanmanın tamamen gereksiz olduğunu savunuyor. Bu prefösöre katılırmısınız. Yoksa ona bir olasılık kursu almasını mı tavsiye edersiniz? $P_M=0.1$ ve $P_B=0.05$ olarak cevabınızı destekleyici işlemi gösterin.

9) Aşağıdaki şekildeki sistemde 12 uçları arasına bağlanan 5V ' luk bir pille "A" ampülü yakılmak istenmektedir. Anahtarların herbiri için kapalı konumda olma ihtimali "p" dir ve hepsi birbirinden bağımsız çalışmaktadır. p=0.4 olarak lambanın yanma ihtimalini hesaplayınız.



ÖDEV-3

1) Y=27X-13 şeklinde tanımlanıyor. X değişkeninin pdf' i aşağıdaki şekilde verildiğine göre;



100

a) E[Y]=? (Cevap: -13)

b) $\sigma_y = ?$ (Cevap: $27\sqrt{46}$)

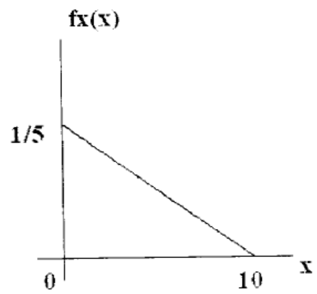
c) P(Y>-13) (Cevap: 0.5)

2) $Y=X^2+3$ ve X≈[-2,2] aralığında düzgün dağılıma sahipse;

a) E[Y]=? (Cevap: 13/3)

b) $\sigma_y = ?$ (Cevap: 7.88)

3) Bir LCD ekran üreticisi, istatiksel bir çalışma sonucunda LCD ekranların ömrünün aşağıdaki şekilde gösterilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna uyduğunu gözlemlemiştir. Buna göre bu fabrikanın ürettiği bir LCD ekran ortalama olarak kaç yıl ömre sahiptir?



(Cevap: 3.33 yıl)

ÖDEV-4

Soru 1)

$V \triangleq g(X,Y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$W \triangleq h(X,Y) = f(x) = \begin{cases} \tan^{-1}(Y/X), & x > 0 \\ \tan^{-1}(Y/X) + \pi, & x < 0 \end{cases}$.

Rastlantı değişkenleri tanımlanmış olsunlar. Eğer; $f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2)\right]$ verilmişse;

$f_{VW}(v,w) = ?$

***Bir önceki problemin modifiye edilmiş bir formunu göz önüne alalım. Burda;

$V \triangleq \sqrt{x^2+y^2}$

$W \triangleq Y/X$ Şeklinde tanımlanmış olsunlar. Eğer ; $f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp[-(x^2+y^2)/2\sigma^2]$ olarak tanımlanmış ise $f_{VW}(v,w)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu nedir?

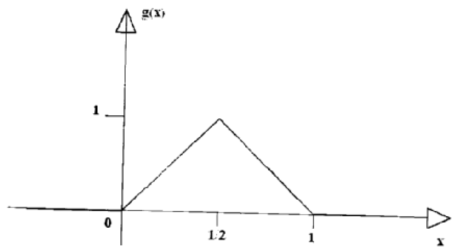
Soru 2) X rastlantı değişkeni N(1,1) şeklinde tanımlanmış olsun. bu durumda Y=2X-3 şeklinde tanımlanan yeni rastlantı değişkeni için $f_Y(y)$=? P(-2<Y<1)=?

Soru 3) $Z \triangleq X^2+Y^2$

$W \triangleq X$ Şeklinde tanımlı Z ve W rastlantı değişkenleri için $f_{ZW}(z,w)$=?

Bu cevabınızı kullanarak $f_Z(z)$=? NOT: $f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2)\right]$ olarak verilsin.

Soru 4) X rastlantı değişkeni [0,2] aralığında uniform olarak tanımlanmış olsun. g(x) fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmış ise Y=g(x) şeklinde tanımlı Y rastlantı değişkeni için $f_Y(y)$=?



102

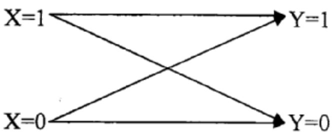
ESKİ SORULAR

Atatürk Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik-Elektronik Müh. Bölümü

Olasılık ve Raslantı Değişkenleri Dersi
1. Quiz
9 Mart 2007

İsim:
No:

puan) 1.



Yandaki ikili haberleşme sisteminde gönderilen 0 ve 1 ler bazen hatalı (0 yerine 1, ya da 1 yerine 0 olarak) olarak algılanabiliyor. Bu sisteme ilişkin "1" gönderme **ve** "1" alma **bileşik** olasılığı $P(X=1,Y=1)=0.4$ olarak, "0" gönderme **ve** "0" alma bileşik olasılığı ise $P(X=0,Y=0)=0.1$ olarak veriliyor.
Ayrıca sistemde "1" ler "0" ların 3 katı miktarda üretiliyor (yani $P(X=1)=4*P(X=0)$). Bu durumda alıcı tarafta $Y=1$ gözlemlendiğine göre "0" gönderilmiş olma ihtimali nedir?

puan) 2. 9 arkadaş, 4'er kişilik iki takım halinde oynanacak bir oyun için iki gruba ayrılacaklar ve fazla olan bir kişi hakem olacaktır. Bunun için yazı tura atmaya karar verirler ve hakemi belirlemek için şu yöntemi seçerler:

Eğer 8 kişi yazı bir kişi tura atarsa tura atan, eğer 8 kişi tura bir kişi yazı atarsa yazı atan hakem olacak ve geriye kalanlar oyuna dahil olacaktır. Diğer durumlar sözkonusu olduğunda hakem seçimi için yazı-tura atma işlemi tekrarlanacaktır.

Bu durumda ilk turda (yani ilk denemede) hakemin tespit edilebilmesi olasılığını hesaplayınız.

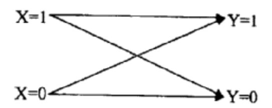
Başarılar.
Yrd. Doç Dr. Bülent Çavuşoğlu

Atatürk Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik-Elektronik Müh. Bölümü

Olasılık ve Raslantı Değişkenleri Dersi
1. Quiz
9 Mart 2007

İsim: CEVAP ANAHTARI No:

(70 puan) 1.



Yandaki ikili haberleşme sisteminde gönderilen 0 ve 1 ler bazen hatalı olarak algılanabiliyor. Bu sisteme ilişkin "1" gönderme ve "1" alma **bileşik** olasılığı P(X=1,Y=1)=0.4 olarak, "0" gönderme ve "0" alma bileşik olasılığı ise P(X=0,Y=0)=0.1 olarak veriliyor.

Ayrıca sistemde "1" ler "0" ların 4 katı miktarda üretiliyor (yani P(X=1)=4*P(X=0)). Bu durumda alıcı tarafta Y=1 gözlemlendiğine göre "0" gönderilmiş olma ihtimali nedir?

$$P[X=0]+P[X=1]=1 \Rightarrow P[X=0]+4P[X=0]=1 \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} P(X=0)=0,2 \\ P[X=1]=0,8 \end{array}} \quad 10p$$

$$P[Y=1|X=1]=\frac{P[X=1,Y=1]}{P[X=1]}=\frac{0,4}{0,8}=0,5 \quad 10p$$

$$P[Y=0|X=0]=\frac{P[X=0,Y=0]}{P[X=0]}=\frac{0,1}{0,2}=0,5 \quad 10p, \quad P[Y=1|X=0]=1-P[Y=0|X=0]=1-0,5=0,5 \quad 10p$$

$$P[X=0|Y=1]=\frac{P[Y=1|X=0]P[X=0]}{P[Y=1|X=0]P[X=0]+P[Y=1|X=1]P[X=1]}=\frac{0,5 \cdot 0,2}{0,5 \cdot 0,2+0,5 \cdot 0,8}=\frac{0,1}{0,5}=0,2 \quad 30p$$

(30 puan) 2. 9 arkadaş, 4'er kişilik iki takım halinde oynanacak bir oyun için iki gruba ayrılacaklar ve fazla olan bir kişi hakem olacaktır. Bunun için yazı tura atmaya karar verirler ve hakemi belirlemek için şu yöntemi seçerler:

Eğer 8 kişi yazı bir kişi tura atarsa tura atan, eğer 8 kişi tura bir kişi yazı atarsa yazı atan hakem olacak ve geriye kalanlar oyuna dahil olacaktır. Diğer durumlar sözkonusu olduğunda hakem seçimi için yazı-tura atma işlemi tekrarlanacaktır.

Bu durumda ilk turda (yani ilk denemede) hakemin tespit edilebilmesi olasılığını hesaplayınız.

İki olay tanımlayalım $A=\{8Y, 1T\}$ (8 yazı 1 tura) ve $B=\{8T, 1Y\}$ (8 tura 1 yazı) 10p

Bu durumda aradığımız olasılık $P(A)+P(B)$ dir.

$$P(A)+P(B)=\binom{9}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^8\cdot\frac{1}{2}+\binom{9}{1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{9!}{8!\,1!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9+\frac{9!}{1!\,8!}\left(\frac{1}{2}\right)^9$$

$$=\frac{18}{2^9}=\frac{18}{512}=0,0352$$

$\boxed{\text{yani } \%3,52}$ 20p

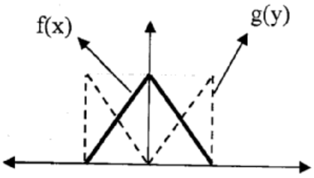
Başarılar.
Yrd. Doç Dr. Bülent Çavuşoğlu

Atatürk Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik-Elektronik Müh. Bölümü

Olasılık ve Raslantı Değişkenleri Dersi
2. Quiz
30 Mart 2007

İsim:
No:

puan) 1.



Yandaki şekilde sürekli çizgiyle gösterilen X raslantı değişkenine ait f(x) ve kesikli çizgilerle gösterilen Y raslantı değişkenine ait g(y) olasılık yoğunluk fonksiyonlarının (pdf) varyansları hakkında aşağıdakilerden hangisi doğrudur? **Cevabınızı destekleyici açıklamalarınızı veya işlemlerinizi göstermelisiniz. (Cevabı destekleyici bilgi olmadığı takdirde soruya puan verilmeyecektir).**

a. $(\sigma_Y)^2 > (\sigma_X)^2$ b. $(\sigma_Y)^2 < (\sigma_X)^2$ c. $(\sigma_Y)^2 = (\sigma_X)^2$

d. Verilen bilgilerle varyanslar arasında bir karşılaştırma yapmak mümkün değildir. (Hangi bilgilere ihtiyaç duyduğunuzu belirtin).

2. Kullanmakta olduğunuz radyo için bir pil aldığınızı ve bu pilin ömrünün (gün olarak) X raslantı değişkeni ile gösterildiğini düşünelim. Bu raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_X(x)=ke^{-(x/2)} \quad , x \in (0,\infty) \qquad \text{şeklinde verilsin}$$

an) a. k=?

an) b. $P(X \geq t)$ için bir ifade elde ediniz. (*Not: t zaman birimi*).

an) c. $P(X \geq t+s \mid X \geq t)$' i bulunuz , $s \in (0,\infty)$. (*Not: t ve s gün cinsinden zaman birimi*). Bu bulduğunuz olasılık fonksiyonu t ve s zaman parametrelerinden hangilerine bağlıdır? Bu olasılık fonksiyonunu nasıl yorumlarsınız? ***(İpucu: Bayes teoreminden faydalanabilirsiniz. Önce $f_X(x)$ fonksiyonunu çizerseniz, Bayes teoreminde ihtiyaç duyacağınız $P(X \geq t+s, X \geq t)$ değeri için çizim size yardımcı olacaktır).***

an) d. Pilinizi ilk aldığınızda 10 gün ömrünün olması, 1 ay (30 gün) kullandıktan sonra 10 gün daha ve 1 yıl (365 gün) kullandıktan sonra 10 gün daha ömrünün olması ihtimalleri arasında büyüklük küçüklük açısından nasıl bir ilişki vardır? ***(İpucu: c şıkkında bulduğunuz cevabı dikkate alarak bu soruyu cevaplandırın)***

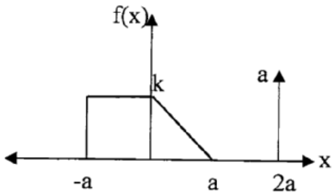
Başarılar.
Yrd. Doç Dr. Bülent Çavuşoğlu

Atatürk Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik-Elektronik Müh. Bölümü

Olasılık ve Raslantı Değişkenleri Dersi
3. Quiz
6 Nisan 2007

İsim:
No:

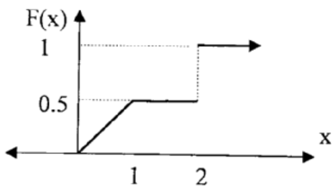
puan) 1.



Yandaki şekilde X raslantı değişkenine ait f(x) olasılık yoğunluk fonksiyonu (pdf) verilmiştir. Buna göre;

a) k'yı "a" cinsinden hesaplayınız.
b) P(X>0) olasılığını "a" cinsinden bulunuz.

puan) 2.



Yandaki şekilde X raslantı değişkenine ait F(x) olasılık dağılım fonksiyonu (PDF) verilmiştir. Buna göre;

a) Beklendik değer E[X]=?
b) Standard sapma σ =?
c) $P(0.5<X\leq 1)$=?

Başarılar.

Atatürk Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik-Elektronik Müh. Bölümü

Olasılık ve Rastlantı Değişkenleri Dersi
B Şubesi 1. Quiz
21 Mart 2008

İsim:
No:

Notlar Açık
Süre 20 dakika

1. Olasılık ve Rastlantı değişkenleri dersinde istatistiklere göre sorulan **herhangi bir** soruyu **herhangi** bir öğrencinin doğru cevaplama olasılığı **p= 0.3** olarak biliniyor. Dersin hocası bir öğrenci soruyu doğru cevaplayana kadar rasgele seçtiği öğrencilere bir soru soruyor ve soru bilindiğinde yeni soru sorarak devam ediyor . Buna göre toplam 10 kişilik bir sınıfta; (***Not: Şıklar birbirinden bağımsızdır***)

puan) a. İlk sorulan soruyu 1. öğrenci bilemediğine göre 2. öğrencinin bilmesi olasılığı nedir?

puan) b. İlk sorunun doğru cevabını ilk 2 öğrencinin bilememesi ve ancak 3'üncü sorulan öğrencinin doğru cevabı verebilmesi olasılığı nedir?

puan) c. Sınıfın toplam mevcudu 10 kişi ise sınıfta ilk sorunun doğru cevabını sadece iki kişinin bilmesi olasılığı nedir?

puan) d. 7'inci öğrenciye ikinci sorunun sorulması ve 7'inci öğrencinin ikinci soruyu doğru cevaplaması olasılığı nedir?

LÜTFEN SONUÇLARINIZI KUTU İÇİNE ALIN

Başarılar.
Yrd. Doç Dr. Bülent Çavuşoğlu

Atatürk Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik-Elektronik Müh. Bölümü

Olasılık ve Raslantı Değişkenleri Dersi
A Şubesi 1. Quiz
26 Mart 2008

İsim:	
No:	

Notlar Açık
Süre 20 dakika

1. Bir haberleşme kanalında "0" gönderilme ihtimali p(X=0)=0.6 ve "1" gönderilme ihtimali p(X=1)=0.4'tür. Teknik bir arızadan dolayı "1" gönderildiğinde %30 ihtimalle "0", %70 ihtimalle "1" alınıyor. "0" gönderildiğinde ise herhangi bir hata olmuyor.

puan) a. Alıcıda 0 alındığında vericiden 1 gönderilmiş olma olasılığı nedir?

puan) b. Alıcıya gelen ilk 5 bitten hepsi "0" olduğuna göre vericiden gönderilen ilk 5 bitten **4 tanesinin "0" ve sadece bir tanesinin "1"** olma olasılığı nedir?

LÜTFEN SONUÇLARINIZI KUTU İÇİNE ALIN

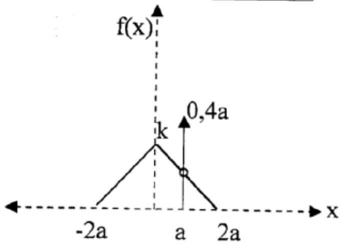
Başarılar.
Yrd. Doç Dr. Bülent Çavuşoğlu

Atatürk Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik-Elektronik Müh. Bölümü

Olasılık ve Rastlantı Değişkenleri Dersi
A Şubesi 2. Quiz
09 Nisan 2008

İsim:
No:

Notlar Açık
Süre 20 dakika



Yandaki şekilde X raslantı değişkenine ait f(x) olasılık yoğunluk fonksiyonu (pdf) verilmiştir. Buna göre;

(20puan) a) "a" nın alabileceği **en büyük** değer nedir?

b,c,d ve e şıkları için a=1 alarak

(30 puan) b) k'yı hesaplayınız.
(10 puan) c) X rastlantı değişkeninin alabileceği **en küçük** değer nedir?
(30 puan) d) PDF (Dağılım) fonksiyonunu çiziniz
(10 puan) e) P(X>2) ve P(X=1.5) olasılıklarını bulunuz.

LÜTFEN SONUÇLARINIZI KUTU İÇİNE ALIN

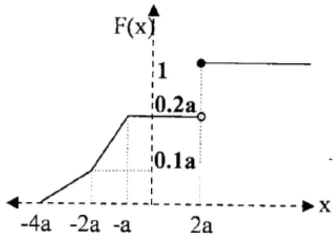
Başarılar.
Yrd. Doç Dr. Bülent Çavuşoğlu

Atatürk Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik-Elektronik Müh. Bölümü

Olasılık ve Rastlantı Değişkenleri Dersi
B Şubesi 2. Quiz
11 Nisan 2008

İsim:
No:

Notlar Açık
Süre 20 dakika



Yandaki şekilde X raslantı değişkenine ait F(x) olasılık dağılım fonksiyonu (PDF) verilmiştir. Buna göre;

(15 puan) a) "a" nın alabileceği **en büyük** değer nedir?,

(15 puan) b) a=0 alınırsa P(X=0)=?

c,d,e ve f şıkları için a=1 alarak

(10 puan) c) X rastlantı değişkeninin alabileceği **en büyük** değer nedir?

(30 puan) d) pdf (yoğunluk) fonksiyonunu çiziniz.

(10 puan) e) P(X<-1) ve P(X=-0.5) olasılıklarını bulunuz.

(20 puan) f) P(-3<X<-1)=?

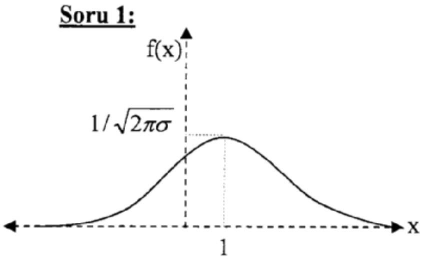
Atatürk Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik-Elektronik Müh. Bölümü

Olasılık ve Rastlantı Değişkenleri Dersi
3. Quiz
18 Nisan 2008

İsim:
No:

Notlar Açık
Süre 20 dakika

Soru 1:



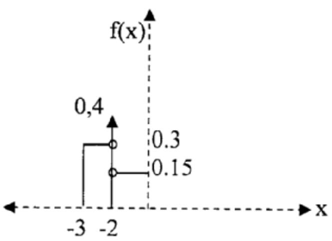
Yandaki şekilde X rastlantı değişkenine ait f(x) olasılık yoğunluk fonksiyonu **"Normal"** yoğunluk fonksiyonu olup, N(1,4) şeklinde tanımlanmıştır. Buna göre;

(20 puan) a) $P(0<X<1)=?$

(20 puan) b) Olasılık dağılım fonksiyonunda $F(1)=?$

(10 puan) c) X rastlantı değişkeni için bir aralık belirleyin. Bu aralıktaki değerleri alma olasılığı 0.5 olsun. ***(Cevabı*** $a<X\leq b$ ***şeklinde veriniz)***

Soru 2:



Yandaki şekilde X raslantı değişkenine ait f(x) olasılık yoğunluk fonksiyonu (pdf) verilmiştir. Buna göre;

(25 puan) a) $E[X]=?$

(25 puan) b) $\sigma=?$

Atatürk Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik-Elektronik Müh. Bölümü

Olasılık ve Rastlantı Değişkenleri Dersi
4. Quiz
16 Mayıs 2008

İsim:
No:

Notlar Açık
Süre 20 dakika

Soru 1:

X ve Y rastlantı değişkenine ait $f_{XY}(x,y)$ birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} axy & 0<x\leq 1,\ 0<y\leq 1 \\ a(x+y) & 0<x\leq 1,\ 1<y\leq 2 \\ 0 & di\breve{g}er \end{cases}$$

şeklinde verilmiştir. Buna göre;

40 puan) a) a=?
40 puan) b) $P(X\leq 0.5,\ Y\leq X)=?$
20 puan) c) $P(X<1)=?$

Atatürk Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik-Elektronik Müh. Bölümü

Olasılık ve Rastlantı Değişkenleri Dersi
4. Quiz (Mazaret Sınavı)
23 Mayıs 2008

İsim:
No:

Notlar Açık
Süre 20 dakika

Soru 1:

X ve Y rastlantı değişkenine ait $f_{XY}(x,y)$ birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu

$f_{XY}(x,y)=\{4xy \quad ; 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$
şeklinde verildiğine ve aşağıdaki dönüşümler yapıldığına göre;

W=X+Y
V=X-Y

40 puan) a) $f_{WV}(w,v)=?$
60 puan) b) V ve W rastlantı değişkenleri bağımsız mıdır? ***(Not: cevabınızı destekleyici hesaplamaları göstermelisiniz)***

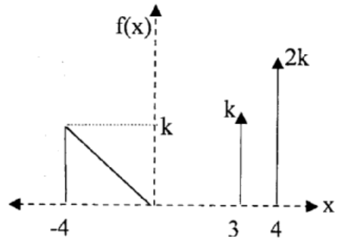
Atatürk Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik-Elektronik Müh. Bölümü

Olasılık ve Rastlantı Değişkenleri Dersi
Vize Sınavı
01 Mayıs 2008

İsim:
No:

Notlar Açık
Süre 50 dakika

Soru 1:



Yandaki şekilde X raslantı değişkenine ait f(x) olasılık yoğunluk fonksiyonu (pdf) verilmiştir. Buna göre;

(15 puan) a) k=?
(15 puan) b) E[X]=?
(10 puan) c) F(2)=?

Soru 2:

Bir X rastlantı değişkeni [1,5] aralığında uniform (düzgün) dağılıma sahiptir. Buna göre;

$Y = \frac{(X-3)}{2}$ ile verilen Y rastlantı değişkeni için

:uan) a) f(Y)'yi çiziniz.
:uan) b) E[Y]=?
:uan) c) $\sigma_Y = ?$

:uan) Soru 3:

Deney düzeneğinizde kullandığınız bir elektronik cihazın ömrünün üstel dağılıma sahip olduğunu kabul edin. Ortalama olarak böyle bir cihaz 2 yıl ömre sahiptir. Buna göre sizin deney düzeneğinizde kullandığınız bu cihazın ömrünün 4 yıldan fazla olması ihtimali nedir? (Not: Birimleri yıl cinsinden alın)

Atatürk Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü
2007-2008 Bahar Dönemi
Olasılık ve Rastlantı Değişkenleri Dersi

Final Sınavı

Soru 1:

a) Elimizde bulunan A ve B diye etiketlendirdiğimiz iki ampülden bir tanesini rasgele seçiyoruz. Her iki ampülün de ömrü üstel dağılıma uyuyor. A ampülünün ortalama ömrü 4 gün, B ampülünün ortalama ömrü de 6 gün olarak veriliyor. Seçtiğimiz ampül 12 saat sonra hala daha çalıştığına göre A ampülünü seçmiş olma olasılığımız nedir?

b) Aşağıdaki ifadelerin doğru ya da yanlış diye işaretleyin.

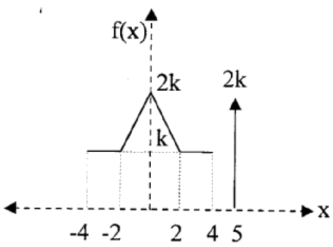
i. $E[X] > E[Y]$ ise $E[X^2] > E[Y^2]$

ii. $P(X>c)=0.5$ ise $E[X]>0.5$

iii. $P(B)>0$ ise $P(A|B) \geq P(B)$.

iv. B ve C birbirine bağımlı olaylar ve A olayı bunlardan bağımsız bir olay ise. $P(A,B,C)=P(A|B).P(B|C).P(C)$

Soru 2:



Yandaki şekilde X raslantı değişkenine ait f(x) olasılık yoğunluk fonksiyonu verilmiştir. Buna göre;

(10 puan) a) $P(1<X<7)=?$

(10 puan) b) $P(3<|X|\leq 4)$, $P(2<|X|\leq 3)$, $P(1<|X|\leq 2)$, $P(0<|X|\leq 1)$ olasılıklarını büyüklük küçüklük ilişkisine göre sıralayın.

Soru 3:

Bir X rastlantı değişkeni varyansı 4 olan üstel (exponential) dağılıma sahiptir. Buna göre;

$X+Y=\dfrac{(3X-5)}{2}$ ile verilen Y rastlantı değişkeni için

uan) a) f(Y) nin ifadesini bulun ve f(Y) yi çizin. ***(not: f(Y) nin tam ve açık ifadesini yazın)***

an) b) E[Y]=?

an) c) σ_Y=?

Soru 4:

X ve Y rastlantı değişkenine ait $f_{XY}(x,y)$ birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu

$f_{XY}(x,y)=\{4xy \quad ; 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$

şeklinde verildiğine ve aşağıdaki dönüşümler yapıldığına göre;

$$W=\frac{X+Y}{2} \qquad V=\frac{X-Y}{2}$$

(8 puan) a) $f_{WV}(w,v)$=? ***(Not: sınırları da belirtmelisiniz)***

(8 puan) b) P(0<V<1)=?

(10 puan) c) V ve W rastlantı değişkenleri ilişkili midir? ***(Not: cevabınızı destekleyici hesaplamaları göstermelisiniz)***

Soru 5:

X, ve Y rastlantı değişkenleri bağımsız rastlantı değişkenleri olup ikisi de [0 1] aralığında düzgün (uniform) dağılıma sahiptirler. Buna göre;

V=2X+3Y şeklinde tanımlanan V rastlantı değişkeni için

10 puan) a) V rastlantı değişkeninin karakteristik fonksiyonunu bulunuz?

5 puan) b) V rastlantı değişkeninin standart sapması σ_V=?

5 puan) c) $W=V^2$ şeklinde tanımlanan W rastlantı değişkeninin bekledik değeri E[W]=?

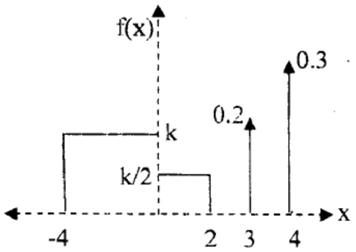
Atatürk Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik-Elektronik Müh. Bölümü

Olasılık ve Rastlantı Değişkenleri Dersi
Vize Sınavı
17 Nisan 2009

İsim:
No:

Notlar Açık
Süre 50 dakika

Soru 1:



Yandaki şekilde X raslantı değişkenine ait f(x) olasılık yoğunluk fonksiyonu (pdf) verilmiştir. Buna göre;

(10 puan) a) k=?
(10 puan) b) E[X]=?
(10 puan) c) σ^2=?
(15 puan) d) Olasılık dağılım fonksiyonu F(x)'i çizin.
(5 puan) e) P(X=2)=?
(5 puan) f) P(1<X<4)=?
(5 puan) g) X rastlantı değişkeninin alabileceği maksimum değer kaçtır?

a) Alandan $= 4k + k + 0,2 + 0,3 = 1$
$5k = 0,5$
$k = 0,1$

b) $E[x] = \int x f(x)\,dx = \int_{-4}^{0} 0,1x\,dx + \int_{0}^{2} 0,05x\,dx + \int_{x=3} 0,2x\,\delta(x-3)\,dx + \int_{x=4} 0,3x\,\delta(x-4)\,dx$

$= \frac{0,1x^2}{2}\Big|_{-4}^{0} + \frac{0,05x^2}{2}\Big|_{0}^{2} + 0,2x\Big|_{x=3} + 0,3x\Big|_{x=4}$

$= -0,1.8 + 0,05.2 + 0,6 + 1,2 = 1,1$

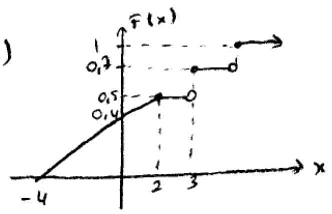
c) $E[x^2] = \int_{-4}^{0} 0,1x^2\,dx + \int_{0}^{2} 0,05x^2\,dx + \int_{x=3} 0,2x^2\delta(x-3)\,dx + \int_{x=4} 0,3x^2\delta(x-4)\,dx$

$= \frac{0,1x^3}{3}\Big|_{-4}^{0} + \frac{0,05x^3}{3}\Big|_{0}^{2} + 0,2x^2\Big|_{x=3} + 0,3x^2\Big|_{x=4}$

$= \frac{6,4}{3} + \frac{0,4}{3} + 1,8 + 4,8 = 8,87$

$\sigma^2 = E[x^2] - (E[x])^2 = 8,87 - (1,1)^2 = 8,87 - 1,21 = 7,66$

d)



e) $P(x=2) = 0$

f) $P(1<x<4) = 0,05.1 + 0,2 = 0,25$

g) $x = 4$

Soru 2:

Bir örnek uzayı sadece A ve B olaylarını içermektedir. P(A)+P(B)=1 ve P(A|B)=P(B|A)=0.5 olarak veriliyor. Buna göre aşağıdakilerden hangileri **KESİNLİKLE** doğrudur? (Cevabı nasıl bulduğunuza dair işlemleri ya da açıklamaları göstermediğiniz cevaplara puan verilmeyecektir.)

(10 puan) a) P(A)=P(B)

(10 puan) b) A ve B olayları bağımsızdır?

Soru 3:

Bir sınıftaki not dağılımının N(50,225) dağılımına uyduğu belirtildiğine göre;

(10 puan) a) Sınıfta 100 kişi olduğu bilindiğine göre bu sınıfta 68 kişinin bulunabileceği bir not aralığı verin.

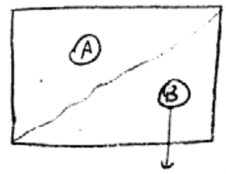
(10 puan) b) Sınıfta 50 ile 60 arasında alan kaç kişi vardır?

c-2) a) $P(B/A) = P(A/B) = 0.$

$$\frac{P(A,B)}{P(A)} = \frac{P(A,B)}{P(B)}$$

$\Rightarrow P(A) = P(B)$

b)



$P(B) = 0{,}5$

$P(A,B) = P(A).P(B)$

$P(A,B) = P(A/B).\ P(B) = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$

$0{,}25 = \underbrace{P(A)}_{0{,}5} . \underbrace{P(B)}_{0{,}5}$

c-3) $N(\underbrace{50}_{\mu},\underbrace{225}_{\sigma^2})$ a) % 68, ...

1σ aralığı olmalı $(50-15,\ 50+15) = (35,65)$

b) $erf\left(\frac{60-50}{15}\right) - erf\left(\frac{50-50}{15}\right)$

$= erf(0{,}66) - erf(0)$

$\cong 0{,}242$

$100 \times 0{,}242 \cong 24$ //

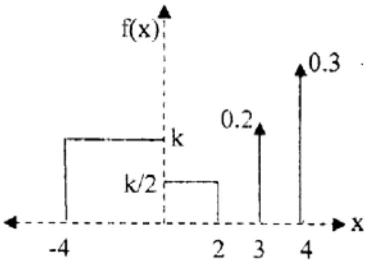
Atatürk Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik-Elektronik Müh. Bölümü

Olasılık ve Rastlantı Değişkenleri Dersi
Vize Sınavı
17 Nisan 2009

İsim:
No:

Notlar Açık
Süre 50 dakika

Soru 1:



Yandaki şekilde X raslantı değişkenine ait f(x) olasılık yoğunluk fonksiyonu (pdf) verilmiştir. Buna göre;

(10 puan) a) k=?

(10 puan) b) E[X]=?

(10 puan) c) σ^2=?

(15 puan) d) Olasılık dağılım fonksiyonu F(x)'i çizin.

(5 puan) e) P(X=2)=?

(5 puan) f) P(1<X<4)=?

(5 puan) g) X rastlantı değişkeninin alabileceği maksimum değer kaçtır?

Soru 2:

Bir örnek uzayı sadece A ve B olaylarını içermektedir. $P(A)+P(B)=1$ ve $P(A|B)=P(B|A)=0.5$ olarak veriliyor. Buna göre aşağıdakilerden hangileri **KESİNLİKLE** doğrudur? (Cevabı nasıl bulduğunuza dair işlemleri ya da açıklamaları göstermediğiniz cevaplara puan verilmeyecektir.)

(10 puan) a) $P(A)=P(B)$

(10 puan) b) A ve B olayları bağımsızdır?

Soru 3:

Bir sınıftaki not dağılımının N(50,225) dağılımına uyduğu belirtildiğine göre:

(10 puan) a) Sınıfta 100 kişi olduğu bilindiğine göre bu sınıfta 68 kişinin bulunabileceği bir not aralığı verin.

(10 puan) b) Sınıfta 50 ile 60 arasında alan kaç kişi vardır?