Hafta 5:
Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

Ele Alınacak Ana Konular

- LTI sistemlerin karmaşık üstel işaretlere yanıtı
- Sürekli-zaman periyodik işaretlerin Fourier serisi gösterilimi
- Fourier serisinin yakınsaklığı
- Sürekli-zaman Fourier serisinin özellikleri

LTI Sistemlerin Karmaşık Üstel İşaretlere Yanıtı

- LTI sistemlerin analizinde faydalı bir yaklaşım, işaretleri aşağıdaki iki özelliği sağlayan temel işaretlerin doğrusal kombinasyonu şeklinde temsil etmektir:

  1. Temel işaretler, geniş ve faydalı bir işaret kümesini oluşturabilmelidir.
  2. Bir LTI sistemin temel bir işarete yanıtı basit olmalıdır. Böylece, LTI sistemin bir girişe yanıtı, basit yanıtların doğrusal kombinasyonu olacaktır.

- Bu iki özelliği, hem sürekli hem de ayrık durumda karmaşık üstel işaretler sağlamaktadır.

- LTI bir sistemin çıkışı, girişin karmaşık bir sabitle çarpımına eşitse girişe SİSTEMİN ÖZFONKSİYONU, karmaşık sabite SİSTEMİN ÖZDEĞERİ denilir.

- s ve z karmaşık sayılar olmak üzere, aşağıda gösterildiği gibi sürekli-zamanda e^{st}, ayrık-zamanda z^n LTI sistemlerin özfonksiyonudur.

LTI Sistemlerin Karmaşık Üstel İşaretlere Yanıtı

- İmpuls yanıtı $h(t)$ olan bir sürekli-zaman LTI sistemin girişine e^{st} uygulandığında sistemin çıkışı konvolüsyon integralinden hesaplanabilir:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau$$
$$= e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

- Eşitliğin sağındaki integralin yakınsadığını varsayalım. İntegralin değeri s'e bağlıdır ve karmaşık bir sayıdır. İntegralin sonucunu $H(s)$ ile gösterlim:

$$\boxed{H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau}$$

- O halde, $y(t) = H(s)e^{st}$ (çıkış, girişin karmaşık bir sayı ile çarpımına eşittir). Yani, karmaşık üstel e^{st} işaretinin sürekli-zaman LTI sistemlerin özfonksiyonu olduğunu göstermiş olduk.

LTI Sistemlerin Karmaşık Üstel İşaretlere Yanıtı

- Benzer işlemler ayrık-zamanda yapılabilir. İmpuls yanıtı $h[n]$ olan bir ayrık-zaman LTI sistemin z^n girişine olan yanıtı konvolüsyon toplamından hesaplanır:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k}$$
$$= z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}$$

- Eşitliğin sağındaki toplamanın yakınsadığını varsayalım. Toplamanın değeri z'ye bağlıdır ve karmaşık bir sayıdır. Toplamanın sonucunu $H(z)$ ile gösterlim:

$$\boxed{H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}}$$

- O halde, $y[n] = H(z)z^n$ (çıkış, girişin karmaşık bir sayı ile çarpımına eşittir). Yani, karmaşık üstel z^n işaretinin ayrık-zaman LTI sistemlerin özfonksiyonu olduğunu göstermiş olduk.

LTI Sistemlerin Karmaşık Üstel İşaretlere Yanıtı

- İmpuls yanıtı $h(t)$ olan bir sürekli-zaman LTI sisteme üç adet karmaşık üstel işaretin toplamına eşit olan bir giriş uygulayalım.

$$x(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + a_3 e^{s_3 t}$$

- Özfonksiyon özelliğinden, sistemin karmaşık üstel işaretlere yanıtı şöyledir:

$$a_1 e^{s_1 t} \rightarrow a_1 H(s_1) e^{s_1 t}$$
$$a_2 e^{s_2 t} \rightarrow a_2 H(s_2) e^{s_2 t}$$
$$a_3 e^{s_3 t} \rightarrow a_3 H(s_3) e^{s_3 t}$$

- Sistem doğrusal olduğundan, karmaşık üç üstel işaretin toplamından oluşan girişe olan yanıtı üstel işaretlere olan yanıtlarının toplamına eşittir:

$$y(t) = a_1 H(s_1) e^{s_1 t} + a_2 H(s_2) e^{s_2 t} + a_3 H(s_3) e^{s_3 t}$$

LTI Sistemlerin Karmaşık Üstel İşaretlere Yanıtı

- Yukarıdaki sonucu genelleştirebiliriz. Bir sürekli-zaman LTI sistemin girişi $x(t)$, karmaşık üstel işaretlerin ağırlıklı toplamı (doğrusal kombinasyonu) olsun:

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t}$$

- Doğrusallık ve özfonksiyon özelliklerinden, sistemin çıkışı aşağıdaki gibi olur:

$$y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

- Benzer şekilde, bir ayrık-zaman LTI sistemin girişi $x[n]$, ayrık-zaman karmaşık üstel işaretlerin doğrusal kombinasyonu olsun:

$$x[n] = \sum_k a_k z_k{}^n$$

- Sistemin çıkışı aşağıdaki gibi olur:

$$y[n] = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n$$

LTI Sistemlerin Karmaşık Üstel İşaretlere Yanıtı

- GÖZLEM: Bir LTI sistemin girişi karmaşık üstel işaretlerin doğrusal kombinasyonu ise, çıkışı da aynı üstel işaretlerin doğrusal bir kombinasyonudur. Çıkış işaretinin gösterilimindeki katsayılar, giriş işaretinin gösterilimindeki katsayılar ile karmaşık üstel işaretlere karşılık gelen sistem özdeğerlerinin çarpımına eşittir.

- Bu gözlem, Fourier ve kendisinden sonra gelenlerin herhangi bir işaretin karmaşık üstel işaretlerin doğrusal kombinasyonu şeklinde nasıl yazılabileceği hakkında araştırma yapmalarına ön ayak olmuştur.

- Bu ve önümüzdeki haftalar, soruyu sırasıyla sürekli ve ayrık-zaman periyodik işaretler için yanıtlayacak, daha sonraki haftada periyodik olmayan işaretler durumunu ele alacağız.

- s ve z herhangi bir karmaşık sayı olabilir. Ancak, Fourier analizinde s ve z sırasıyla $s = j\omega$ ve $z = e^{j\omega}$ varsayılacaktır. Laplace ve z-dönüşümü konularında s ve z herhangi bir karmaşık sayıya genelleştirilecektir.

LTI Sistemlerin Karmaşık Üstel İşaretlere Yanıtı

ÖRNEK: Bir sürekli-zaman LTI sistemin girişi ile çıkışı arasındaki ilişki $y(t)=x(t\text{-}3)$ ve sisteme uygulanan giriş $x(t) = e^{j2t}$ olsun. Sistemin çıkışı şöyledir:

$$y(t) = e^{j2(t-3)} = e^{-j6}e^{j2t}$$

Uygulanan giriş bir özfonksiyon olduğundan bu sonucu aslında bekliyorduk. Girişe karşılık gelen özdeğeri hesaplayalım. Sistemin impuls yanıtının $h(t) = \delta(t\text{-}3)$ olduğu açıktır. O halde,

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-3)e^{-s\tau}d\tau = e^{-3s}$$

Örneğimizde $s = j2$ olduğundan, girişe karşılık gelen özdeğer $H(j2) = e^{-j6}$ olarak elde edilir. Görüldüğü gibi çıkış, giriş ile girişe karşılık gelen ödeğerin çarpımına eşittir.

.

Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

- Harmonik ilişkili karmaşık üstel işaretlerin doğrusal kombinasyonu şeklinde yazılan bir sürekli-zaman işareti ele alalım:

$$\boxed{x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}}$$

- Harmonik ilişkili üstel işaretlerin herbirinin T ile periyodik olduğunu görmüştük. O halde, $x(t)$'de T ile periyodiktir.

- $k = 0$ için, toplamadaki üstel işaret sabittir. $k = \pm 1$ için üstel işaretlerin temel frekansı ω_0'dır ve bu terimlere TEMEL veya BİRİNCİ HARMONİK bileşenler denir. $k = \pm 2$ için üstel işaretlerin temel frekansı $2\omega_0$'dır ve bu terimlere ikinci harmonik bileşenler denir. Genel olarak, $k = \pm N$ için toplamadaki karmaşık üstel işaretlere N. HARMONİK bileşenler denir.

- Periyodik bir işaretin yukarıdaki gibi toplama şeklinde ifade edilmesine FOURİER SERİSİ gösterilimi denir.

Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

ÖRNEK: Temel frekansı 2π olan bir sürekli-zaman periyodik işaretin Fourier serisi gösterilimi aşağıda verilmiştir:

$$x(t) = \sum_{k=-3}^{3} a_k e^{jk2\pi t}$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4}, \quad a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}, \quad a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}$$

Katsayılar toplamada yerine konularak işaretin analitik ifadesi elde edilebilir:

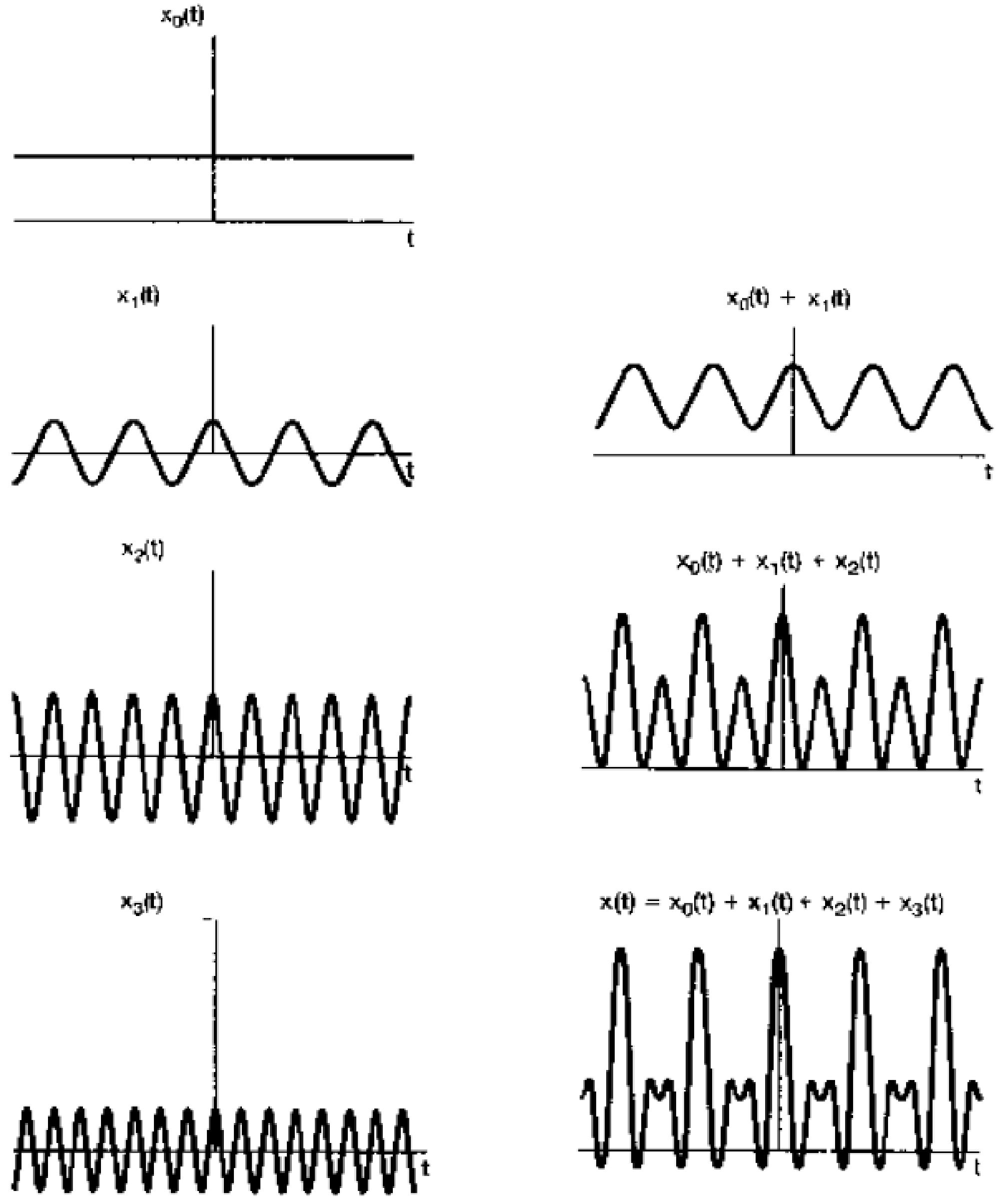
$$x(t) = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}\right) + \frac{1}{3}\left(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}\right)$$

Euler ilişkisi kullanılarak, işaret trigonometrik fonksiyonlar cinsinden de yazılabilir:

.

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{2}{3}\cos(6\pi t)$$

Harmonik bileşenlerin işareti nasıl olusşturduğu aşağıda gösterilmiştir.



Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

- Sürekli-zaman gerçel periyodik işaretler için Fourier serisinin diğer bir gösterilimi vardır. Gerçel bir işaret için $x^*(t) = x(t)$ olduğundan

$$x(t) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \right)^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t}$$

- Son ifade, Fourier serisi gösterilimi ile karşılaştırılırsa $a_k = a^*_{-k}$ veya eşdeğer olarak $a^*_k = a_{-k}$ sonucu çıkar. Bu sonuçtan yararlanılarak Fourier serisi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\omega_0 t} \right] \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k e^{jk\omega_0 t} + a_k^* e^{-jk\omega_0 t} \right] \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left\{ a_k e^{jk\omega_0 t} \right\} \end{aligned}$$

Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

- Son ifadede a_k kutupsal koordinatlarda $A_k\, e^{j\theta k}$ şeklinde yazılırsa aşağıda verilen eşdeğer trigonometrik gösterilim elde edilir:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left\{A_k e^{j\theta_k} e^{jk\omega_0 t}\right\}$$
$$= a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$

- a_k kartezyen koordinatlarda $B_k + jC_k$ şeklinde yazılırsa aşağıda verilen diğer bir trigonometrik gösterilim elde edilir:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left\{(B_k + jC_k)e^{jk\omega_0 t}\right\}$$
$$= a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(B_k \cos(k\omega_0 t) - C_k \sin(k\omega_0 t)\right)$$

Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

- Şimdi de, periyodik bir işaret için Fourier serisi katsayılarının nasıl hesaplanabileceğini tartışacağız.

- Fourier serisi gösteriliminde, eşitliğin her iki tarafı $e^{-jn\omega 0t}$ ile çarpıldıktan sonra çarpımın $[0,T]$ aralığında integrali alınırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left[\int_0^T e^{j[k-n]\omega_0 t} dt\right]$$

- Köşeli parantez içindeki ifade Euler formülü kullanılarak yeniden düzenlenebilir:

$$\int_0^T e^{j[k-n]\omega_0 t}dt = \int_0^T \cos[(k-n)\omega_0 t]dt + j\int_0^T \sin[(k-n)\omega_0 t]dt$$

Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

- $k \neq n$ için $\cos[(k-n)\omega_0 t]$ ve $\sin[(k-n)\omega_0 t]$ işaretleri $T/|k-n|$ temel periyodu ile periyodiktir. İntegralın alındığı aralık T uzunluğunda olup temel periyodun $|k-n|$ katıdır.

- Sinüs ve kosinüs işaretlerinin bir periyodunda, işaretlerin sıfırın üstünde ve altında kalan kısımları aynı alana sahip olup bu işaretlerin bir periyod ve dolayısıyla da bir periyodun tamsayı katı uzunluğundaki bir aralıktaki integrali sıfıra eşittir. $k \neq n$ için her iki integral sıfıra eşittir.

- $k = n$ için, integrand 1 olup integralin sonucu T'ye eşittir. Özetle,

$$\int_0^T e^{j[k-n]\omega_0 t} dt = \begin{cases} T, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

- O halde, seri gösterilimindeki katsayılar şöyle hesaplanır:

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

- Yukarıda bulunan sonucun, T uzunluklu herhangi bir aralık için geçerli olduğuna dikkat ediniz. T uzunluklu herhangi bir aralık boyunca integral $\int_T$ notasyonu ile gösterilmek üzere, sürekli-zaman periyodik işaretin Fourier serisine açılımı ve açılımdaki katsayıların hesabı aşağıdaki eşitliklerde verilmiştir:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

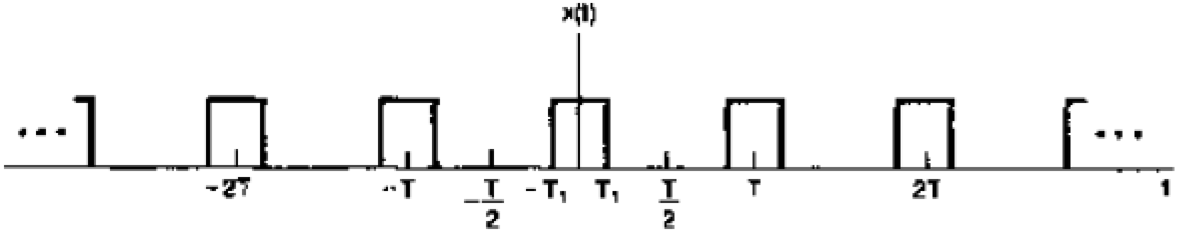
$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk(2\pi/T)t}dt$$

- İşaretin seri şeklinde gösterilimine SENTEZ, katsayıların nasıl hesaplanacağını veren eşitliğe ise ANALİZ denklemi denilir. a_0 katsayısı, işaretteki sabit veya DC bileşen olup işaretin bir periyod boyunca ortalama değeridir:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt$$

Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

ÖRNEK: Temel periyodu T ve temel frekansı $\omega_0 = 2\pi/T$ olan periyodik kare dalganın Fourier serisi gösterilimini elde ediniz.



ÇÖZÜM: İşaretin bir periyodunun matematiksel ifadesi şöyledir:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$

Fourier serisi katsayılarını bulmak için T uzunluklu herhangi bir aralık seçilebilir. İşaret, $t = 0$ etrafında simetrik olduğundan aralık olarak $-T/2 \leq t \leq T/2$ seçilmesi mantıklıdır.

Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

İlk önce a_0'ı belirleyelim.

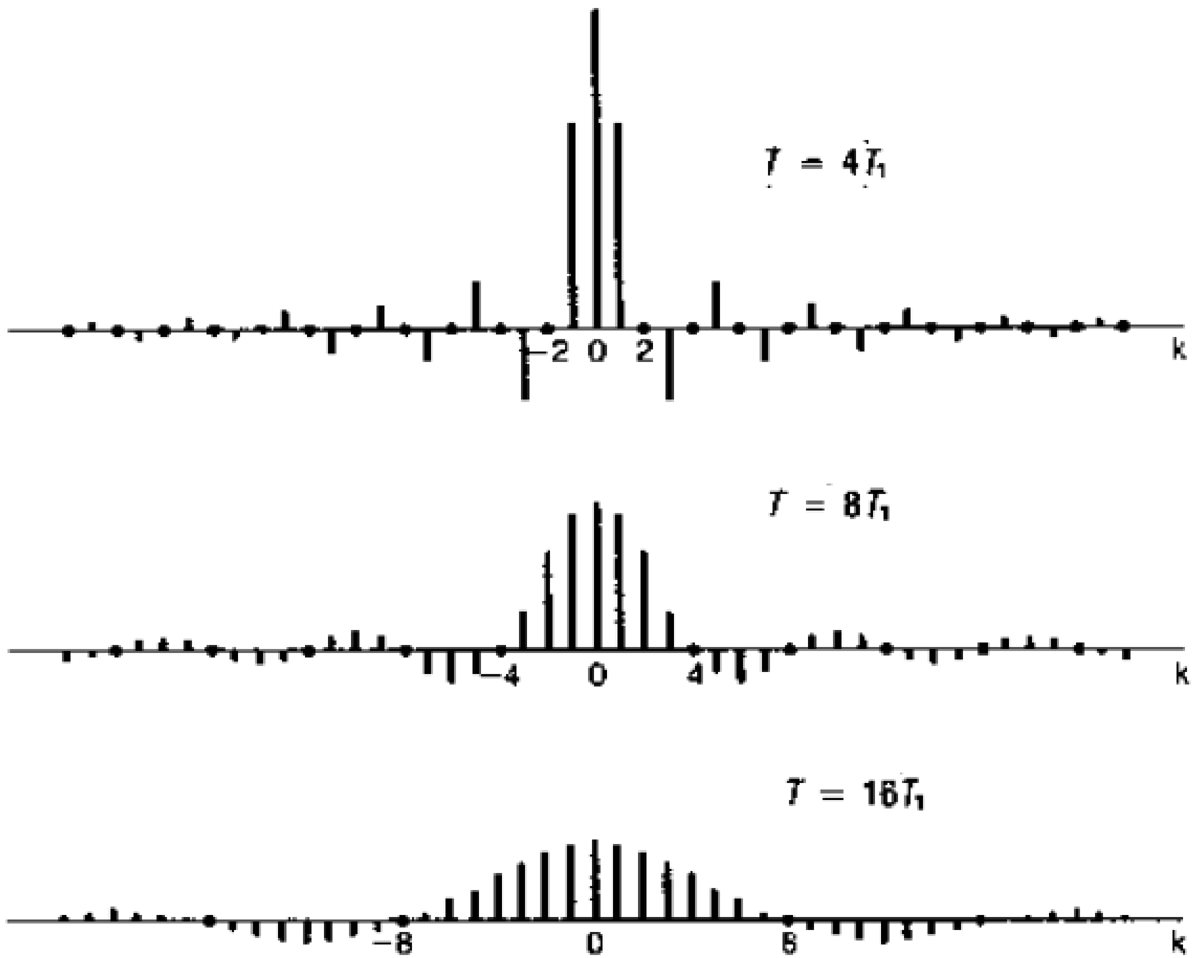
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T}$$

Diğer katsayılar ($a_k,\ k \neq 0$) benzer şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t}dt \\ &= \frac{2}{k\omega_0 T}\left[\frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j}\right] \\ &= \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} \end{aligned}$$

Katsayılar sabit bir T1 ve değişik T değerleri için aşağıda çizilmiştir. Bu örnek için katsayılar gerçel çıktığından katsayılar için bir grafik yeterli olmuştur. Katsayıların karmaşık sayı olması halinde, gerçel ve sanal kısımları çizmek için iki grafiğin gerekli olacağına dikkat ediniz.

Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi



Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

ÖRNEK: Sinüzoidal işaretler için Fourier serisi doğrudan hesaplanabilir. Aşağıda verilen işaretin Fourier serisi gösterilimini elde edelim.

$$x(t) = 1 + \sin(\omega_0 t) + 2\cos(\omega_0 t) + \cos(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4})$$

Çözüm: Euler ilişkisiden işaret karmaşık üstel işaretlerin toplamı şeklinde yazılabilir:

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right) + \left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{j(2\omega_0 t + \pi/4)} - e^{-j(2\omega_0 t + \pi/4)}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2j}\right)e^{j\omega_0 t} + \left(1 - \frac{1}{2j}\right)e^{-j\omega_0 t} + \left(\frac{1}{2}e^{j\pi/4}\right)e^{j2\omega_0 t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}\right)e^{-j2\omega_0 t}$$

O halde $x(t)$'nin Fourier serisi katsayıları ifadeye bakılarak doğrudan yazılabilir

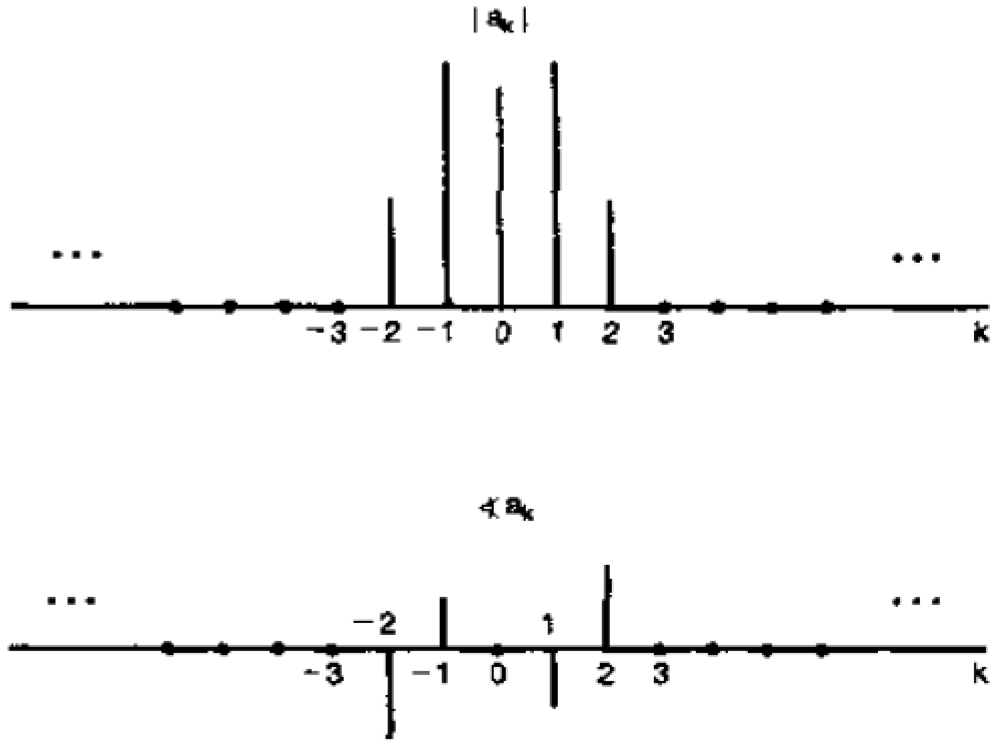
$$a_0 = 1,\ a_1 = 1 + \frac{1}{2j} = 1 - \frac{1}{2}j,\ a_{-1} = 1 - \frac{1}{2j} = 1 + \frac{1}{2}j$$

$$a_2 = e^{j\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + j),\ a_{-2} = e^{-j\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - j)$$

$$a_k = 0,\ k \geq 3.$$

Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

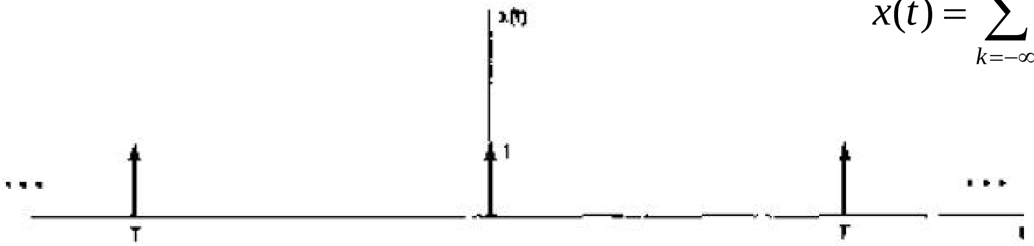
Katsayıların genliği ve fazı, *k*'ya bağlı olarak aşağıda çizilmiştir.



Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

ÖRNEK: Örnekleme bahsinde kullanılacak periyodik impuls dizisininFourier serisi katsayılarını bulalım.

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$$



ÇÖZÜM: İşaret, analiz denkleminde yerine konularak katsayılar hesaplanabilir. İşaret simetrik olduğundan integral aralığı olarak $-T/2 \le t \le T/2$ almak uygundur.

$$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt=\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\,e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt$$

$-T/2 \le t \le T/2$ aralığında $x(t) = \delta(t)$ olduğundan, $a_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt=\frac{1}{T}e^{-jk\frac{2\pi}{T}0}=\frac{1}{T}$

Not: Yukarıdaki sonucu bulurken şu özelliği kullandık: $\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)\,f(t)dt=f(0)$

Sürekli-zaman Fourier Serisinin Yakınsaklığı

- Kare dalgada süreksizlikler vardır. Halbuki seri gösterilimindeki harmonik ilişkili karmaşık üstel işaretlerin hepsi süreklidir. Süreksiz bir işaretin sürekli işaretlerle temsil edilebileceğine şüpheyle bakılmıştır.

- Fourier'in tespitleri dönemin usta matematikçisi Lagranage tarafından veto edilmiştir. Hatta, dönemin diğer matematikçileri Lacroix, Monge ve Laplace'nin Fourier'e desteği bile araştırmaların yayınlanması için yeterli olmamıştır. Fourier'in araştırmaları vefatından sonra yayınlanabilmiştir.

- Fourier serisinin geçerliliğini göstermek için, bir sürekli-zaman periyodik işaretin sonlu sayıda harmonik ilişkili karmaşık üstel işaretle temsilini ele alalım:

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

- $e_N(t)$ yaklaşıklık hatasını göstersin: $e_N(t) = x(t) - x_N(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}$

Sürekli-zaman Fourier Serisinin Yakınsaklığı

- Farklı yaklaşıklıkları birbiriyle karşılaştırabilmek için, yaklaşıklık hatasının boyutunu veren bir ölçüt kullanmamız gereklidir. Ölçüt olarak, bir periyot boyunca hatanın enerjisini kullanacağız.

$$E_N = \int_T \left| e_N(t) \right|^2 dt$$

- Hatanın enerjisini minimum yapan katsayıların

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{jk\omega_0 t} dt$$

olduğu gösterilebilir (ödevlerin birinde bu sonuç ispatlanacaktır!). Yani, hatayı minimum yapan katsayılar Fourier serisi katsayılarına eşittir. O halde, $x(t)$'nin Fourier serisi gösterilimi varsa, N büyüdükçe hata azalır ve $N \to \infty$ limit durumunda E_N sıfıra eşit olur.

- Şimdi de periyodik bir işaretin hangi koşullar altında Fourier serisi gösterilimine sahip olacağını belirlemeye çalışalım.

Sürekli-zaman Fourier Serisinin Yakınsaklığı

- İki durumla karşılaşmak mümkündür: (i) katsayıların hesaplanmasına imkan veren integral yakınsamayabilir (bazı katsayılar sonsuz olabilir), (ii) katsayıların hepsi sonlu olsa bile, bu katsayılar sentez denkleminde yerine konulduğunda elde edilen seri orijinal işareti vermeyebilir.

- Periyodik bir işaret, bir periyod boyunca sonlu enerjiye sahi, yani $\int_T |x(t)|^2 dt < \infty$ ise, Fourier serisi katsayılarının sonlu olacağı gösterilebilir. Bu durumda, işaret ile Fourier serisi gösterilimi arasındaki hatanın enerjisi bir periyot boyunca sıfır olacaktır.

$$e(t) = x(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow \int_{\mathrm{T}} |e(t)|^2 dt = 0$$

- Bu sonuç, Fourier serisi gösteriliminin işarete eşit olduğu anlamına gelmediğini, ancak ikisi arasındaki farkta enerji olmadığını belirtmektedir.

- Fiziksel sistemler, işaretin enerjisine yanıt verdiğinden, bu anlamda işaret ile Fourier serisi gösterilimi eşdeğerdir. İlgilendiğimiz çoğu periyodik işaretin enerjisi sonlu olup bu işaretler için Fourier serisi gösterilimi mevcuttur.

Sürekli-zaman Fourier Serisinin Yakınsaklığı

- Dirichlet, periyodik bir işaret ile Fourier serisi gösteriliminin, işaretin süreksiz olduğu noktalar hariç eşit olabilmesi için koşulları belirlemiştir. Süreksizlik noktalarında seri, işaretin süreksizlik noktasında soldan ve sağdan limitlerinin ortalamasına eşit olur. Dirichlet koşulları aşağıda verilmiştir.

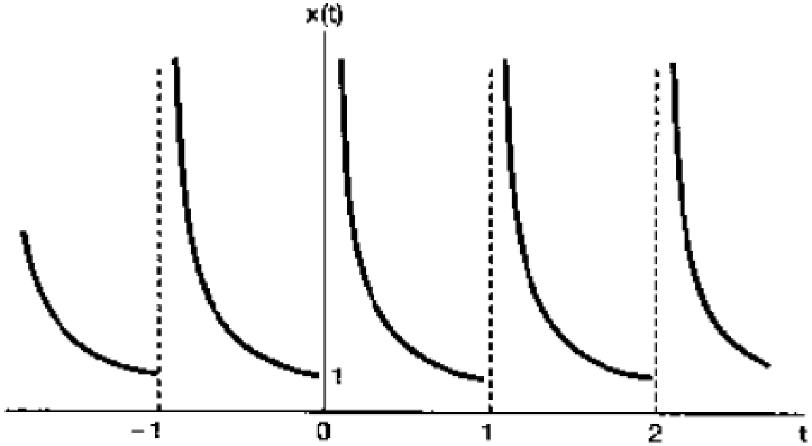
- Koşul 1: İşaret bir periyod boyunca mutlak integrallenebilir olmalıdır:

$$\int_T |x(t)| dt < \infty$$

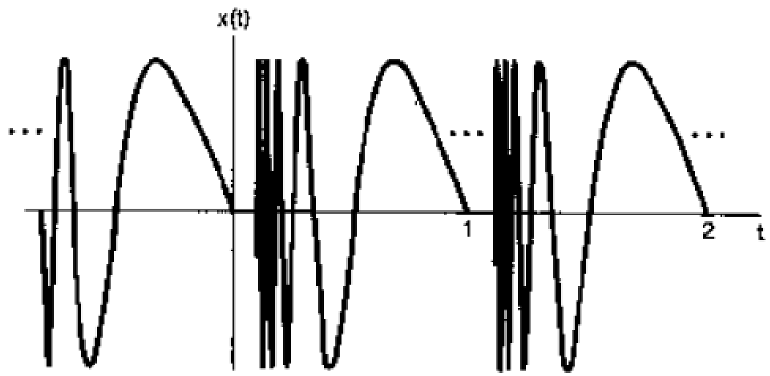
- Koşul 2: Bir periyot boyunca, işaretin sonlu sayıda minimum ve maksimumu olmalıdır.

- Koşul 3: Sonlu bir aralıkta, işarette sonlu sayıda süreksizlik olmalı ve ayrıca süreksizlik noktalarında işaretin değeri de sonlu olmalıdır.

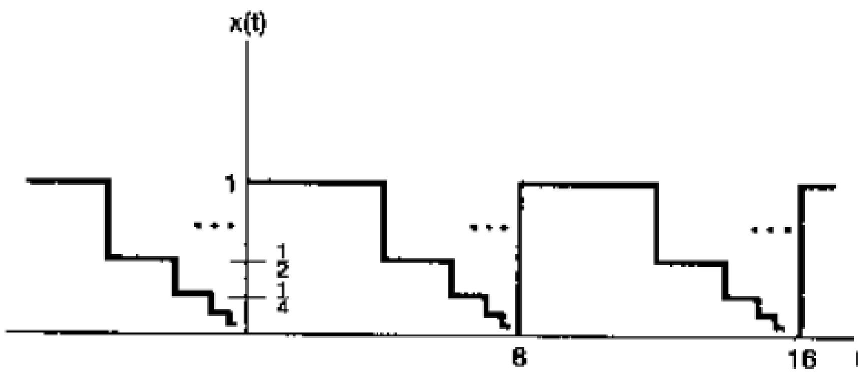
- Dirichlet koşullarını ihlal eden işaretler örnekler aşağıda verilmiştir.



Koşul 1'i ihlal eden bir işaret



Koşul 2'yi ihlal eden bir işaret



Koşul 3'ü ihlal eden bir işaret

Sürekli-zaman Fourier Serisinin Yakınsaklığı

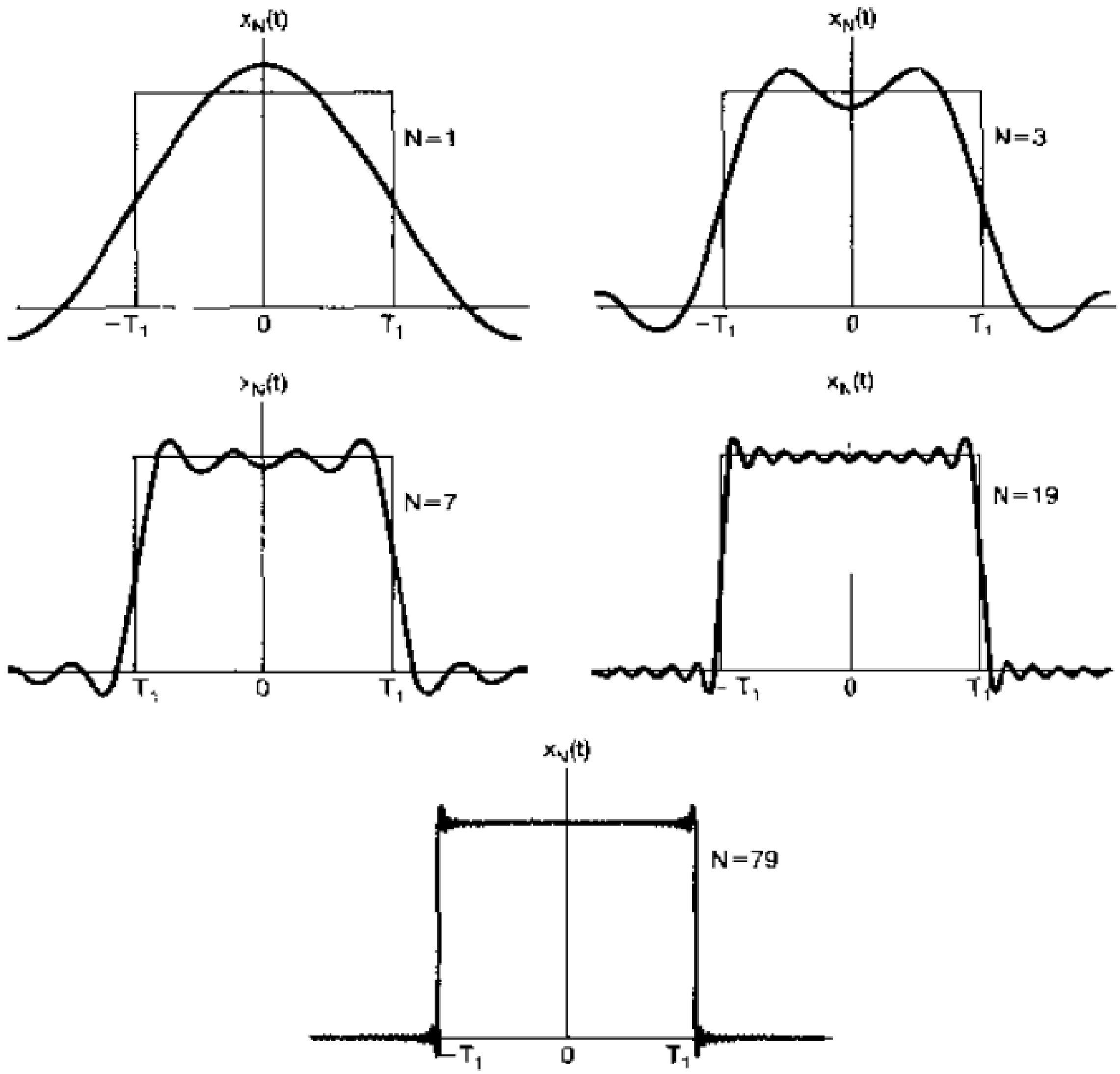
- Dirichlet koşullarını sağlamayan işaretlerin fiziksel sistemlerde karşımıza çıkma olasılığının oldukça az olduğu örneklerden görülmektdir.

- 1898 yılında, Amerikan fizikçi Albert Michelson, sonlu Fourier serisini N = 80’e kadar hesaplayan bir aygıt (modern adıyla harmonik analizör) geliştirmiştir.

- Michelson, aygıtını pek çok periyodik işaret için test etmiştir. Michelson, kare dalga için ummadığı sonuçlar elde edince geliştirdiği aygıtın hatalı olabileceğini düşünmüş ve konuyu matematiksel fizikçi Josiah Gibbs ile paylaşmıştır.

- Gibbs, problemi derinlemesine incelemiş ve düşüncelerini 1899 yılında Michelson ile paylaşmıştır.

- Periyodik kare dalga, Dirichlet koşullarını sağladığından, sonlu serideki terim sayısı sonsuza giderken süreksizlik noktalarında serinin limiti süreksizlik değerinin ortalamasına eşit olmalıdır. Diğer noktalarda, seri işarete yakınsamalıdır. Çeşitli N değerleri için yaklaşık işaret ve kare dalga aşağıda çizilmiştir.



x_N(t)
N=1
−T_1
0
T_1
x_N(t)
N=3
−T_1
0
T_1
x_N(t)
N=7
T_1
0
T_1
x_N(t)
N=19
−T_1
0
T_1
x_N(t)
N=79
−T_1
0
T_1

Sürekli-zaman Fourier Serisinin Yakınsaklığı

- Michelson'un Gözlemi: Sonlu seri, süreksizlik noktalarında dalgalanmalar vermektedir. Dalgalanmaların tepe genliği N'den bağımsızdır ve N arttıkça azalmamaktadır.

- Gibbs'in Açıklaması: İşaretin süreksiz olmadığı bir t_1 noktası süreksizlik noktasına yaklaştıkça hatanın küçük olması için N büyük olmalıdır. Bu nedenle, N arttıkça dalgalanmalar süreksizlik noktası etrafında yoğunlaşır ancak dalgalanmanın maksimum genliği sabit kalır.

- Bu gözleme GIBBS OLAYI denir. Yani, süreksiz bir işaretin sonlu terimli Fourier serisi yaklaşıklığı yüksek frekanslı dalgalanmalar içerir ve süreksizlik noktasında işaretten daha yüksek değer alır.

- Sonlu terimli Fourier serisi kullanılacaksa, dalgalanmalardaki toplam enerji ihmal edilebilecek kadar küçük olacak şekilde yeterince büyük N değeri seçilmelidir. Limit durumunda, hatasının enerjisi sıfır olur ve Fourier serisi yakınsar.

Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

- Temel periyodu T ve temel frekansı $\omega_0 = 2\pi/T$ olan periyodik bir işaretin Fourier serisi katsayılarının a_k olduğunu belirtmek için

$$x(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} a_k$$

notasyonunu kullanacağız.

- Sürekli-zaman Fourier serisinin aşağıda verilen özellikleri aracılığıyla, Fourier serisi katsayıları bilinen işaretler yardımıyla çoğu işaretin Fourier serisi açılımını elde etmek kolaylaşmaktadır.

- Fourier dönüşümü konusunda da göreceğimiz gibi, çoğu özellik Fourier dönüşümünün özelliklerinden elde edilebilir. Bu nedenle, sadece en önemli özellikleri sıralayacak ve yorumlayacağız.

Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

Özellik 1 (Zamanda öteleme): $x(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} a_k$ ise, $x(t-t_0) \overset{FS}{\leftrightarrow} e^{jk\omega_0 t_0} a_k = e^{jk(2\pi/T)t_0} a_k$

İspat: Periyodik bir işaret, zamanda ötelenirse periyodikliği korunur ve periyodu değişmez. Ötelenmiş $y(t) = x(t-t_0)$ işaretinin Fourier serisi katsayıları b_k olsun:

$$b_k = \frac{1}{T}\int_T y(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}\int_T x(t-t_0) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

İntegralde, $\tau = t-t_0$ değişken dönüşümü yapalım. t, uzunluğu T olan bir aralıkta değişiyorsa τ'da uzunluğu T olan bir aralıkta değişecektir. O halde,

$$b_k = \frac{1}{T}\int_T x(\tau) e^{-jk\omega_0(\tau+t_0)} d\tau = e^{-jk\omega_0 t_0}\frac{1}{T}\int_T x(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau$$
$$= e^{-jk\omega_0 t_0} a_k = e^{-jk(2\pi/T)t_0} a_k$$

Yorum: $\left|e^{jk(2\pi/T)t_0}\right| = 1$ olduğundan, $|b_k| = |a_k|$.

(Periyodik bir işaret ötelendiğinde Fourier serisi katsayılarının genliği değişmez!)

Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

Özellik 2 (Zamanda tersine çevirme): $x(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} a_k$ ise, $x(-t) \overset{FS}{\leftrightarrow} a_{-k}$

İspat: Periyodik bir işaret, zamanda tersine çevrilirse periyodikliği korunur ve periyodu değişmez. Fourier serisi açılımından $x(-t)$ işareti

$$x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk2\pi t/T}$$

şeklinde yazılabilir. Toplamada, $k = -m$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$x(-t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{-m} e^{jm2\pi t/T}$$

Son eşitlik, $x(-t)$ işaretinin Fourier serisi açılımı olup açılımdaki katsayılar a_{-k}'dır.

Yorum: Bir sürekli-zaman periyodik işaret zamanda tersine çevrilirse, karşılık gelen Fourier serisi katsayıları da tersine çevrilir. O halde, çift işaretlerin ($x(t)=x(-t)$) Fourier serisi katsayıları çift ($a_k=a_{-k}$), tek işaretlerinki ise tek ($a_k= -a_{-k}$) olacaktır.

Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

Özellik 3 (Zamanda ölçekleme): $x(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} a_k$ ise, $x(\alpha t) \overset{FS}{\leftrightarrow} a_k$

İspat: Periyodik bir işaret, ölçeklendiğinde periyodu değişir. $x(t)$'nin temel periyodu T ve temel frekansı $\omega_0 = 2\pi/T$ ise, $x(\alpha t)$'nin temel periyodu T/α ve temel frekansı $\alpha\omega_0$'dır. $x(t)$'nin Fourier serisi açılımında t yerine αt yazılırsa

$$x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\alpha\omega_0 t)}$$

Son eşitlik, temel frekansı $\alpha\omega_0$ olan işaretin Fourier serisi gösterilimi olup açılımdaki katsayılar a_k'dır.

Yorum: Bir sürekli-zaman periyodik işareti zamanda ölçekleme Fourier serisi katsayılarını değiştirmez.

Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

Özellik 4 (Zamanda türev alma): $x(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} a_k$ ise, $\frac{dx(t)}{dt} \overset{FS}{\leftrightarrow} jk\omega_0 a_k = jk\frac{2\pi}{T}a_k$

İspat: Periyodik bir işaretin türevi alınırsa yine periyodik olur ve periyodu değişmez. $x(t)$'nin Fourier serisi açılımında, eşitliğin her iki tarafının t'ye göre türevi alınırsa

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}\left[a_k e^{jk\omega_0 t}\right]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} jk\omega_0 a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Son eşitlik, temel frekansı $\omega_0 = 2\pi/T$ olan işaretin Fourier serisi gösterilimi olup açılımdaki katsayılar $jk\omega_0 a_k = jk(2\pi/T)a_k$ olarak görülmektedir.

Yorum: Bir sürekli-zaman periyodik işaretin türevini almak, Fourier serisi katsayılarının hem genliğini hem de fazını değiştirmektedir.

Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

Özellik 5 (Parseval ilişkisi): $\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$

İspat: İntegralde , $|x(t)|^2 = x(t)x^*(t)$ yazıp, $x(t)$ ile eşleniği için Fourier serisi gösterilimlerini kullanırsak

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)x^*(t)dt = \frac{1}{T}\int_T \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}\right]\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l^* e^{-jl\omega_0 t}\right]dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_k a_l^* \left[\frac{1}{T}\int_T e^{j(k-l)\omega_0 t} dt\right]$$

Köşeli parantez içindeki integrali daha önce hesaplamıştık: $\int_T e^{j(k-l)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$

O halde, son eşitlikte sonsuz tane integral olmasına rağmen integrallerin sonucu sadece $l = k$ için T, diğer l değerlerinde 0'a eşittir. Sonuç olarak, iki toplama bir toplamaya indirgenir ve $l = k$ olur:

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k a_k^* \frac{1}{T} T = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

Parseval İlişkisinin Yorumu:

- Bir işareti değişik şekillerde temsil etmek aslında ilave bir bilgi vermemektedir.
- Bir bakış açısında gizli olan bir bilgi, diğer bir bakış açısında ortaya çıkabilir.
- İşaretin enerjisi kullanılan gösterilimden bağımsıztır. Diğer bir deyişle, işaretin enerjisini zaman veya frekans uzayında hesaplamak aynı sonucu vermelidir.

Diğer Özellikler:

- Sürekli-zaman Fourier serisinin ispatını vermediğimiz başka özellikleri de vardır.
- Diğer özelliklerin ispatı benzer şekilde yapılabilir. Özelliklerin tümü aşağıdaki tabloda listelenmiştir.

Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

Özellik	**Periyodik İşaret**	**Fourier Serisi Katsayıları**
	$\left.\begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix}\right\}$ $\omega_0 = 2\pi / T$ temel frekansı ve T temel periyoduile periyodik	a_k b_k
Doğrusallık	$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
Zamanda öteleme	$x(t - t_0)$	$a_k e^{-jk\omega_0 t_0} = a_k e^{-jk(2\pi/T)t_0}$
Frekansta öteleme	$e^{jM\omega_0 t} x(t) = e^{jM(2\pi/T)t} x(t)$	a_{k-M}
Eşlenik alma	$x^*(t)$	a^*_{-k}
Zamanda tersine çevirme	$x(-t)$	a_{-k}
Zamanda ölçekleme	$x(\alpha t)$ α>0 (T/α ile periyodik)	a_k
Periyodik konvolüsyon	$\int_T x(\tau) y(t - \tau) d\tau$	$Ta_k b_k$
Zamanda çarpma	$x(t) y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$

Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

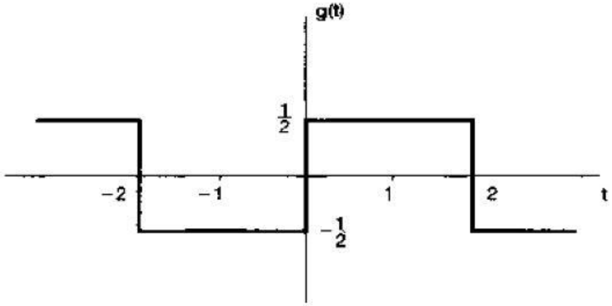
Özellik	**Periyodik İşaret**	**Fourier Serisi Katsayıları**
Zamanda türev alma	$\dfrac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0 a_k = jk\dfrac{2\pi}{T}a_k$
Zamanda integral alma	$\int_{-\infty}^{t} x(t)dt$	$\left(\dfrac{1}{jk\omega_0}\right)a_k = \left(\dfrac{1}{jk(2\pi/T)}\right)a_k$
Gerçel işaretler için eşlenik simetriklik	$x(t)$ gerçel	$\begin{cases} a_k = a_{-k}^{*} \\ \Re e\{a_k\} = \Re e\{a_{-k}\} \\ \Im m\{a_k\} = -\Im m\{a_{-k}\} \\ \lvert a_k \rvert = \lvert a_{-k} \rvert \\ \prec a_k = -\prec a_{-k} \end{cases}$
Gerçel ve çift işaretler Gerçel ve tek işaretler	$x(t)$ gerçel ve çift $x(t)$ gerçel ve çift	a_k gerçel ve çift a_k saf karmaşık ve çift
Gerçel işaretlerin çift-tek ayrıştırması	$x_e(t) = \mathrm{Ev}\{x(t)\}$ [$x(t)$ gerçel] $x_o(t) = \mathrm{Od}\{x(t)\}$ [$x(t)$ gerçel]	$\Re e\{a_k\}$ $j\Im m\{a_k\}$

Periyodik İşaretler için Parseval İlişkisi

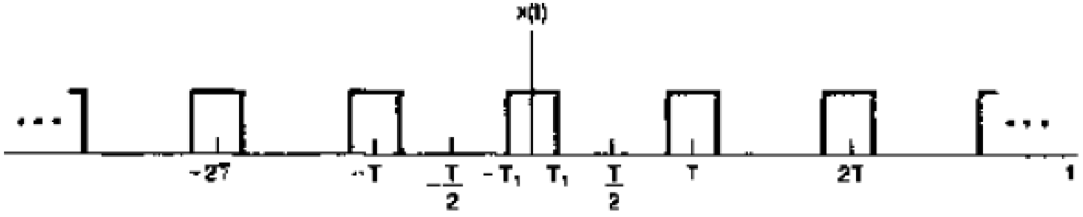
$$\frac{1}{T}\int_T \lvert x(t)\rvert^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert a_k \rvert^2$$

Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

ÖRNEK: Sürekli-zaman Fourier serisinin özelliklerinden yararlanarak aşağıda verilen $g(t)$ işaretinin (T = 4 ile periyodik) Fourier serisi katsayılarını bulalım.



ÇÖZÜM: $g(t)$ işaretini analiz denkleminde yerine koyarak, Fourier serisi katsayılarını belirleyebiliriz. Ancak, $g(t)$ işaretini daha önce Fourier serisini hesapladığımız periyodik simetrik kare dalga cinsinden ifade edip sonucu bulacağız. Kare dalga ve Fourier serisi katsayıları, hatırlatma amacıyla aşağıda verilmiştir:



$$a_0 = \frac{2T_1}{T}$$

$$a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}, \quad k \neq 0$$

Periyodik kare dalga işaretinde $T = 4$ ve $T_1 = 1$ alalım. Şekillerden, $g(t)$ ile $x(t)$ arasındaki ilişkinin $g(t) = x(t\text{-}1) – 1/2$ olduğu görülmektedir. $x(t\text{-}1)$ işaretinin Fourier serisi katsayıları b_k olsun. Öteleme özelliğinden,

$$b_k = a_k e^{-jk\pi/2}$$

DC terimin (-1/2) Fourier serisi katsayıları c_k olsun. DC işaretin sıfırdan farklı bir Fourier serisi katsayısı vardır:

$$c_k = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ -1/2, & k = 0 \end{cases}$$

$g(t)$ işaretinin Fourier serisi katsayıları d_k olsun. Doğrusallık özelliğinden

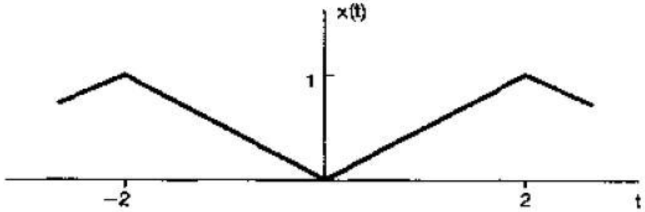
$$d_k = b_k + c_k = \begin{cases} a_k e^{-jk\pi/2}, & k \neq 0 \\ a_0 - 1/2, & k = 0 \end{cases}$$

Son ifadede a_k yerine konulursa

$$d_k = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi k/2)}{k\pi} e^{-jk\pi/2}, & k \neq 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases}$$

Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

ÖRNEK: Sürekli-zaman Fourier serisinin özelliklerinden yararlanarak aşağıda verilen $x(t)$ işaretinin ($T = 4$ ile periyodik) Fourier serisi katsayılarını bulalım.



ÇÖZÜM: Bu işaretin türevi, önceki örnekte ele alınan $g(t)$ işaretine eşittir. $g(t)$ ve $x(t)$ işaretlerinin Fourier serisi katsayılarını sırasıyla d_k ve e_k ile gösterelim. Türev özelliğinden,

$$d_k = jk(2\pi/4)e_k \Rightarrow e_k = \frac{2d_k}{jk\pi}$$

İfade, $k \neq 0$ için geçerlidir. d_k eşitlikteyerine konulursa $e_k = \dfrac{2\sin(\pi k/2)}{j(k\pi)^2} e^{-jk\pi/2}, \quad k \neq 0$

e_0, bir periyot boyunca $x(t)$'nin altındaki alan periyoda bölünerek elde edilebilir:

$$e_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} x(t)dt = \frac{1}{2}$$

<<<<<<<<<<<VİZE BURAYA KADAR>>>>>>>>>>>>>