Lineer olmayan Denklemlerin Sayısal Çözümü

Teğetler ve Kirişler

Yönteminin

Aynı zamanda uygulanması

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

lineer olmayan denklemini ele alalım. (1) denkleminin $x = \alpha$ çözümü $x = \alpha \in [a, b]$ olsun. Yani,

$$f(a)f(b) < 0 \qquad (2)$$

koşulu sağlanır. Bellidir ki (1) denklemini her zaman

$$x = \varphi(x) \qquad (3)$$

şeklinde yazabiliriz.

(1) denkleminin her iki tarafını $-\psi(x)$ fonksiyonu ile çarpalım ve elde edilen eşitliğin her iki tarafına x ekliyelim. O halde

$$x = x - \psi(x)f(x) \qquad (4)$$

(4) denkleminin çözümü de

$$x = \alpha$$

olacaktır.

Lineer olmayan denkleminin çözümünü daha az hatalı bulmak ve yaklaşım hızını arttırmak için Teğetler ve Kirişler yöntemi aynı zamanda uygulanabilir. Bunun için:

Eğer $\boxed{f(a)\times f''(a)>0 \quad \Rightarrow}$

$$x_0 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \qquad x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \qquad (A)$$

Eğer $\boxed{f(b)\times f''(b)>0 \quad \Rightarrow}$

$$x_0 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}, \quad x_1 = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)} \qquad \text{(B)}$$

olarak ele alınır.

$f(a)\times f''(a)>0 \quad \Rightarrow$	$f(b)\times f''(b)>0 \quad \Rightarrow$
$x_0 = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$, $x_1 = \dfrac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$	$x_0 = b - \dfrac{f(b)}{f'(b)}$, $x_1 = \dfrac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$

Diğer yaklaşımlar ise

$$x_{2n} = x_{2n-2} - \frac{f(x_{2n-2})}{f'(x_{2n-2})},$$

$$x_{2n+1} = \frac{x_{2n-2}f(x_{2n-1}) - x_{2n-1}f(x_{2n-2})}{f(x_{2n-1}) - f(x_{2n-2})} \qquad \text{(C)}$$

Şeklinde olacaktır.

$$x_{2n} = x_{2n-2} - \frac{f(x_{2n-2})}{f'(x_{2n-2})}$$

Yani, x_{n+1} noktasının geometrik olarak **"$f(x)$ fonksiyonunun grafiğine $(x_{2n-2}, f(x_{2n-2}))$ noktasında çizilen teğetin *x*- ekseni ile kesişme noktasıdır "** olduğu söylene bilir.

$$x_{2n+1} = \frac{x_{2n-2}f(x_{2n-1}) - x_{2n-1}f(x_{2n-2})}{f(x_{2n-1}) - f(x_{2n-2})}$$

x_{2n+1} noktası, geometrik olarak $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği üzerinde ele alınan (x_{2n-1} ,f(x_{2n-1})) ve (x_{2n-2},f(x_{2n-2})) noktalarından geçen doğrunun (kirişin) x ekseni ile kesişme noktasıdır.

$$f(a)\times f''(a)>0 \quad \Rightarrow \quad \text{(A),(C)}$$

$$f(b)\times f''(b)>0 \quad \Rightarrow \quad \text{(B),(C)}$$

İşlemler

$$|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$$

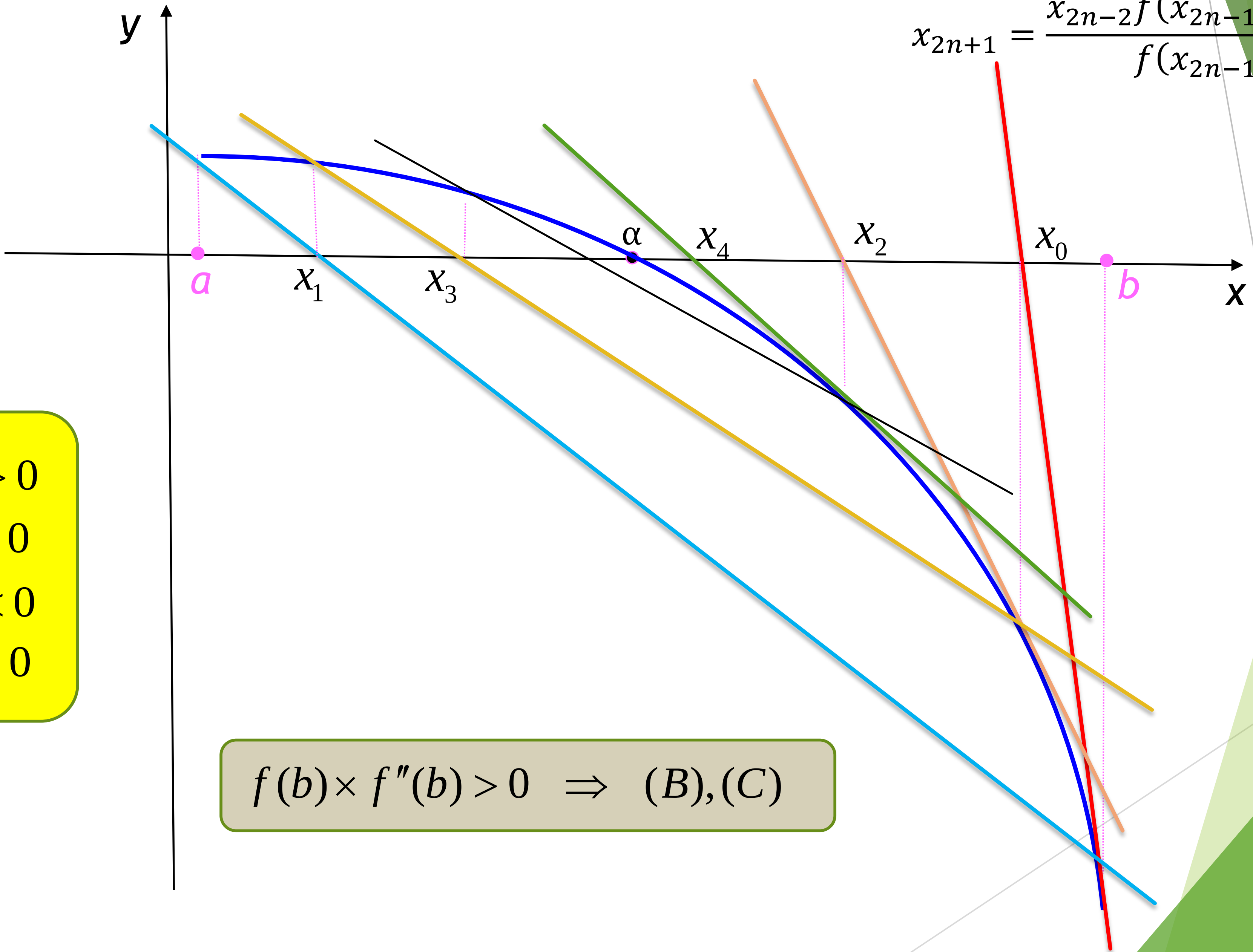
olduğunda durdurulur.

Teğetler ve kirişler yönteminin aynı zamanda uygulanmasının geometrik yorumunu aşağıdaki şekilde verebiliriz:

TEĞETLER +KİRİŞLER a)

$$x2_n = x_{2n-2} - \frac{f(x_{2n-2})}{f'(x_{2n-2})},$$

$$x_{2n+1} = \frac{x_{2n-2}f(x_{2n-1}) - x_{2n-1}f(x_{2n-2})}{f(x_{2n-1}) - f(x_{2n-2})}$$



$f(a) > 0$
$f(b) < 0$
$f'(x) < 0$
$f''(x) < 0$

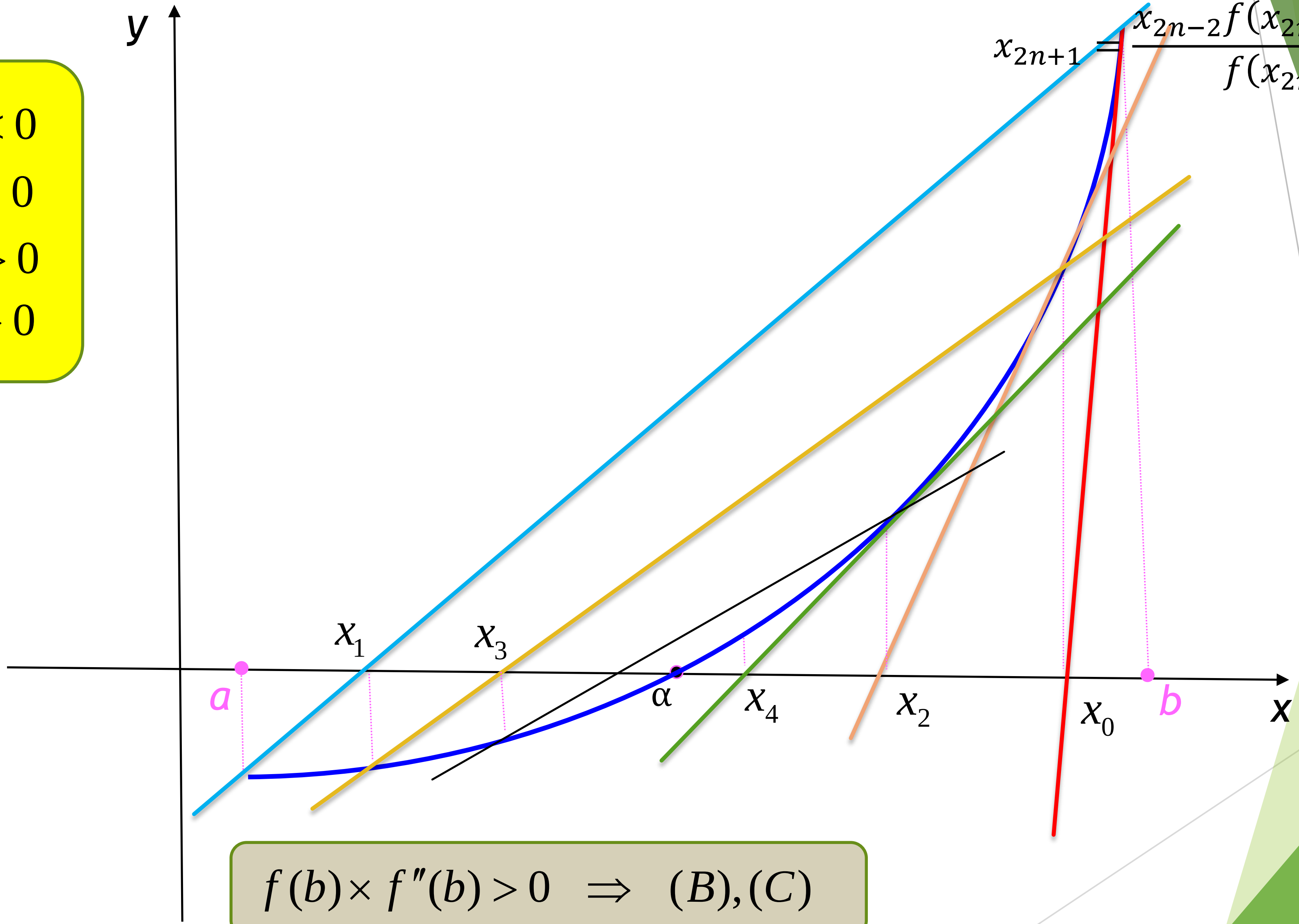
$f(b) \times f''(b) > 0 \Rightarrow (B),(C)$

TEĞETLER +KİRİŞLER b)

$$x_{2n} = x_{2n-2} - \frac{f(x_{2n-2})}{f'(x_{2n-2})},$$

$$x_{2n+1} = \frac{x_{2n-2} f(x_{2n-1}) - x_{2n-1} f(x_{2n-2})}{f(x_{2n-1}) - f(x_{2n-2})}$$

$f(a) < 0$
$f(b) > 0$
$f'(x) > 0$
$f''(x) > 0$



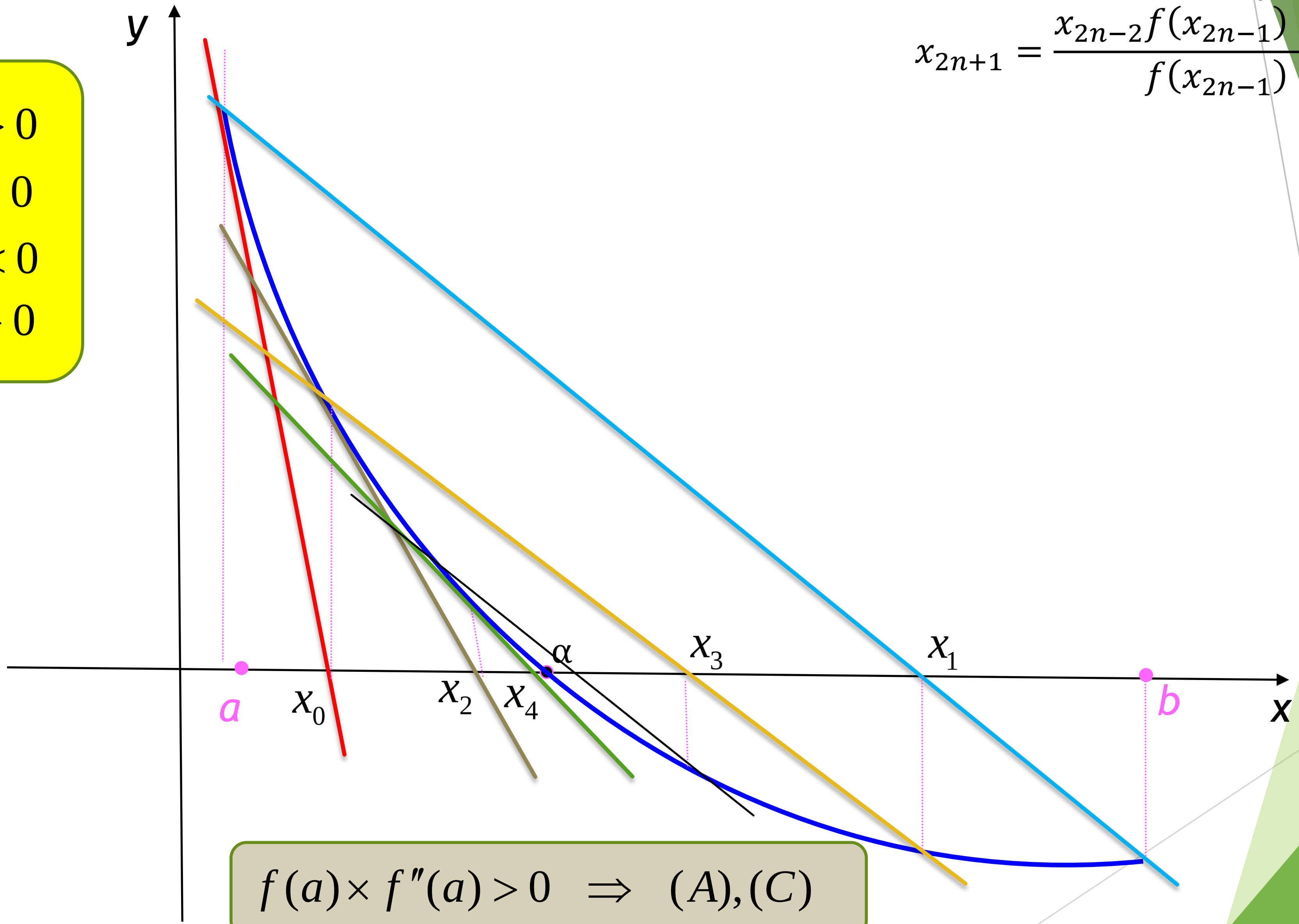
$$f(b) \times f''(b) > 0 \quad \Rightarrow \quad (B),(C)$$

TEĞETLER +KİRİŞLER c)

$$x_{2n} = x_{2n-2} - \frac{f(x_{2n-2})}{f'(x_{2n-2})},$$

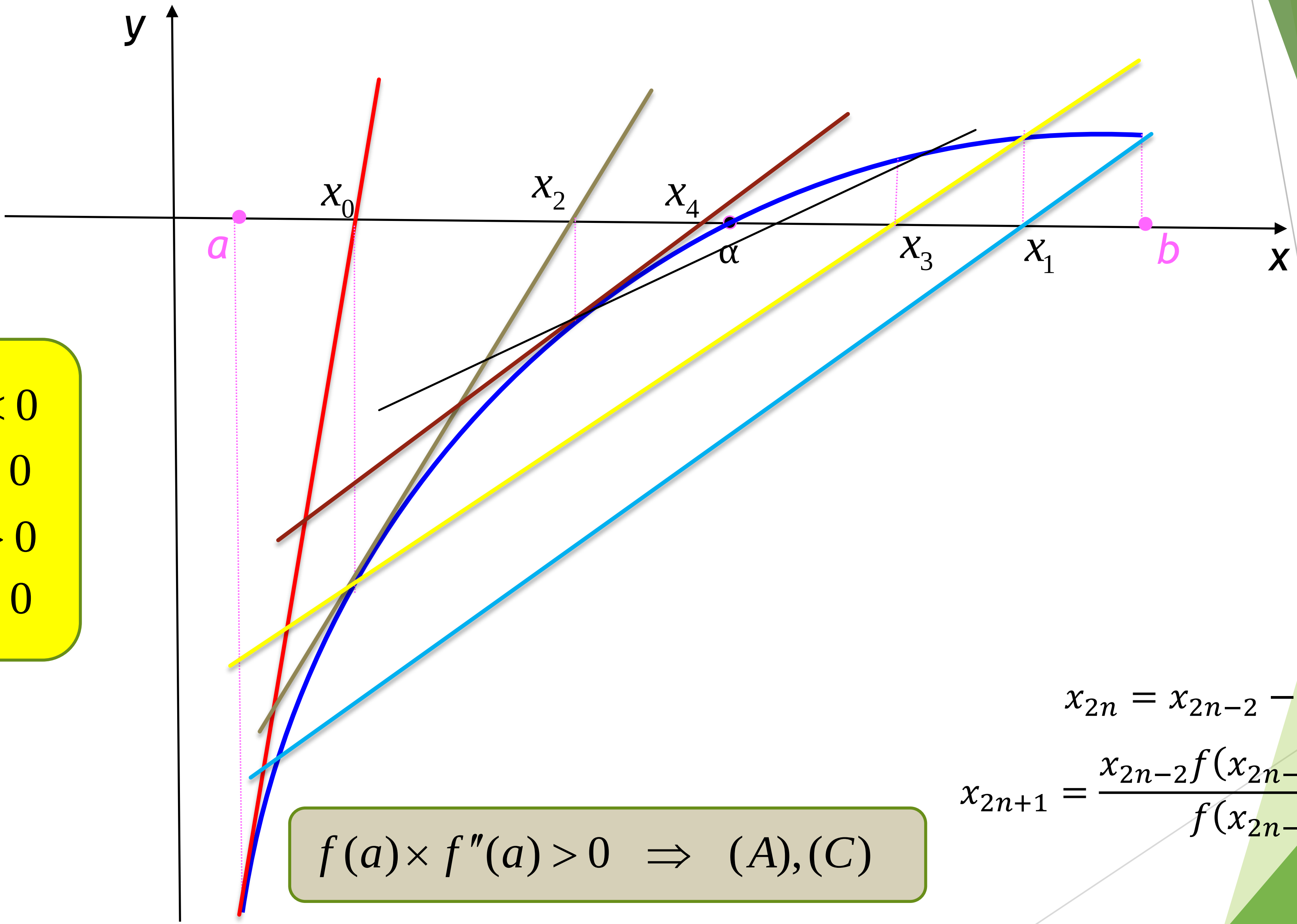
$$x_{2n+1} = \frac{x_{2n-2}f(x_{2n-1}) - x_{2n-1}f(x_{2n-2})}{f(x_{2n-1}) - f(x_{2n-2})}$$

$f(a) > 0$
$f(b) < 0$
$f'(x) < 0$
$f''(x) > 0$



$$f(a) \times f''(a) > 0 \quad \Rightarrow \quad (A),(C)$$

TEĞETLER +KİRİŞLER d)



$f(a) < 0$
$f(b) > 0$
$f'(x) > 0$
$f''(x) < 0$

$$x_{2n} = x_{2n-2} - \frac{f(x_{2n-2})}{f'(x_{2n-2})},$$

$$x_{2n+1} = \frac{x_{2n-2} f(x_{2n-1}) - x_{2n-1} f(x_{2n-2})}{f(x_{2n-1}) - f(x_{2n-2})}$$

$f(a) \times f''(a) > 0 \;\Rightarrow\; (A),(C)$

ÖRNEK: x-cosx=0 denkleminin çözümünü teğetler ve kirişler yöntemini aynı zamanda uygulamakla $\varepsilon = 10^{-3}$ kesinliği ile bulunuz.

$$x = \cos x$$

denkleminin çözümünün $[0, \pi/2]$ aralığında olduğunu grafik yardımı ile belirleyebiliriz.

Gerçekten $f(x) = x - \cos x$ fonksiyonu için

$$f(0) = 0 - \cos 0 = -1 < 0$$

$$f(1) = 1 - \cos 1 = 0.4397 > 0$$

$f(0)f(1)<0$ elde edilir.

Yani denkleminin $[0,1]$ aralığında çözümü vardır.

$$f(x) = x - cos\ x$$

$$f'(x) = 1 + \sin\ x$$

$$f''(x) = \cos\ x$$

$$f(0) = 0 - cos\ 0 = -1$$

$$f''(0) = \cos\ 1 = 1 > 0$$

$$f(1) = 1 - cos\ 1 = 0.4597 > 0$$

$$f''(1) = \cos\ 1 = 0.5403 > 0$$

$$f''(x)\ > 0 \qquad (iç\ bükey)$$

$$f(1)\,f''(1) > 0 \quad \text{olduğundan} \quad \Rightarrow \quad (B),(C)$$

$$f(b)\times f''(b)>0 \quad \Rightarrow$$

$$x_0 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}, \quad x_1 = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)} \qquad \text{(B)}$$

$$x_0 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)}, \qquad x_1 = \frac{0\text{x}f(1) - 1\text{x}f(0)}{f(1) - f(0)}$$

$$f(0) = 0 - cos\ 0 = -1$$

$$f(1) = 1 - cos\ 1 = 0.4597$$

$$f'(1) = 1 + \sin\ 1 = 1.8415$$

$$x_0 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{0.4597}{1.8415} = \mathbf{0.7504}$$

$$x_1 = \frac{0\text{x}f(1)-1\text{x}f(0)}{f(1)-f(0)} = \frac{0\text{x}0.4597-1\text{x}(-1)}{0.4597-(-1)} = 0.6851$$

$$|x_1 - x_0| > \varepsilon$$

$$x_{2n} = x_{2n-2} - \frac{f(x_{2n-2})}{f'(x_{2n-2})},$$
$$x_{2n+1} = \frac{x_{2n-2}f(x_{2n-1}) - x_{2n-1}f(x_{2n-2})}{f(x_{2n-1}) - f(x_{2n-2})}$$

$$x_2 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$
$$x_3 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

x_0 =0.7504

x_1=0.6851

$f(x_0) = f(0.7504) = 0.7504 - cos\ 0.7504$=0.019

$f(x_1) = f(0.6851) = 0.6851 - cos\ 0.6851$=-0.0892

$f'(x_0) = f'(0.7504) = 0.7504 + \sin\ 0.7504$=1.6819

$$x_2 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.7504 - \frac{f(0.7504)}{f'(0.7504)} = 0.7504 - \frac{0.019}{1.6819} = \boxed{0.7391}$$

$$|x_2 - x_1| > \varepsilon$$

$$x_3 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{0.7504\text{x}f(0.6851) - 0.6851\text{x}f(0.7504)}{f(0.6851) - f(0.7504)}$$
$$= \frac{0.7504\text{x}(-0.0892) - 0.6851\text{x}0.019}{-0.0892 - 0.019} = \boxed{0.7389}$$

$$|x_3 - x_2| = 0.0002 < \varepsilon$$

$$\alpha \approx x_4 = 0.7389$$