İşaretler ve Sistemler

Ödev Teslim Tarihi: <u>18 Aralık 2012</u>

S.1) Mutlak integrallenebilir *x(t)* işaretine ait Laplace dönüşümünün *X(s)*, *s= -2* de bir kutba sahip olduğu bilinmektedir. Buna göre aşağıdaki soruları açıklamalı olarak cevaplayınız.

a) x(t) sonlu bir işaret olabilir mi?

b) x(t) sol tarafa dayalı bir işaret olabilir mi?

c) x(t) sağ tarafa dayalı bir işaret olabilir mi?

d) x(t) çift taraflı bir işaret olabilir mi?

S.2) a) y(t) = x(t) * h(t) ve g(t) = x(3t) * h(3t), $x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(jw)$, $h(t) \overset{F}{\leftrightarrow} H(jw)$

olarak verilmiştir. $g(t) = Ay(Bt)$ olarak belirtildiğine göre Fourier dönüşüm özelliklerini kullanarak A ve B katsayılarını hesaplayınız, A=?, B=? .

b) $x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(jw)$ olmak üzere aşağıdaki işaretlerin Fourier dönüşümlerini $X(jw)$ cinsinden ifade ediniz.

$i)\ x_1(t) = x(1-t) + x(-1-t)$

$ii)\ x_2(t) = x(3t-6)$

$iii)\ x_3(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t-1)$

S.3) Doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemin girişi x[n], çıkışı y[n] olsun. Giriş-çıkış ilişkisi aşağıda verilmektedir:

y[n]-(1/4)y[n-1]=x[n]

y[n]'in Fourier serisi gösterilimini a)x[n]=sin (3πn/4), b)x[n]=cos(πn/4)+2cos(πn/2) için elde ediniz.

Yrd.Doç.Dr.Gökçen ÇETİNEL Yrd.Doç.Dr. İrfan YAZICI

İŞARETLER VE SİSTEMLER DERSİ

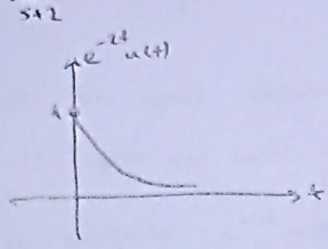
ÖDEVİ

CEVAPLAR

C.1) a) Bir $x(t)$ işaretinin Laplace dönüşümünün var olabilmesi için $x(t).e^{-\sigma t}$ işaretinin fourier dönüşümü yakınsamalıdır. Verilen bir $x(t)$ işareti için, Laplace dönüşümünün var olduğu σ değerleri kümesine YAKINSAKLIK BÖLGESİ denir. Sonlu bir değere yakınsadığı için de $x(t)$ sonlu bir işaret olabilir.

$$x(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$x(s) = \frac{1}{s+2}$ olsun $\Rightarrow x(t) = e^{-2t}u(t)$



$x(t)$ işareti $0,\infty$ aralığında sonlu bir değere yakınsar.

b) $x(t)$ sol tarafa dayalı bir işaret olabilir.

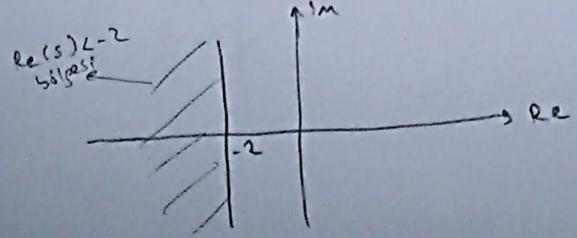
$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$x(t)$ işareti $-\infty, 0$ aralığında tanımlanmışsa ve $x(t)$ tersleniyorsa sol tarafa dayalı bir işaret olur.

$x(t) = -e^{-2t}u(-t)$

$$x(s) = -\int_{-\infty}^{0} e^{-2t}.e^{-st}.u(-t)\,dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-t(s+2)}.u(-t)\,dt$$

$$x(s) = \frac{1}{s+2} \qquad Re\{s\} < -2$$

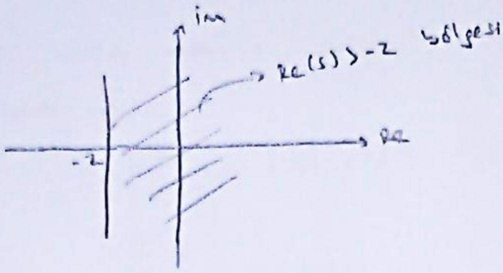


c) $x(t)$ sağ tarafa dayalı bir işaret olabilir

$X(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)}$ $x(t)$ işareti $0, \infty$ arasında tanımlanmışsa ve işareti pozitifse sağa dayalı bir işaret olur.

$x(t) = e^{-2t} . u(t)$

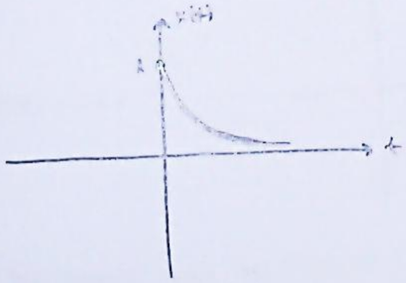
$$X(s) = \int_0^\infty e^{-2t} . e^{-st} . u(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-(s+2)t} . u(t)\, dt \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s+2}$$



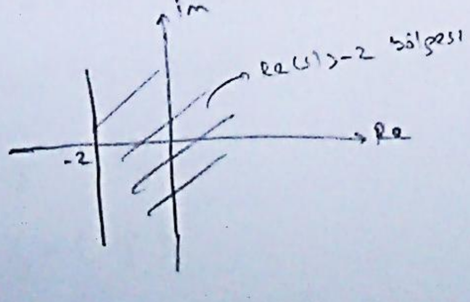
d) $x(t)$ çift taraflı bir işaret olabilir

$x(t) = e^{-2|t|} . u(t)$ gibi bir işaret olsun

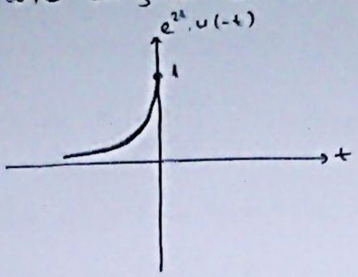
Bu işaret $0, \infty$ aralığında $e^{-2t} u(t)$ olur. Bu ifadenin şeklini çizersek



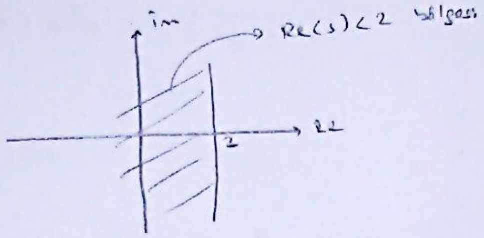
$e^{-2t} . u(t)$ 'nin laplace'ı alınırsa $\dfrac{1}{s+2}$ olur. Bu işaret sağa dayalı bir işaret olur.



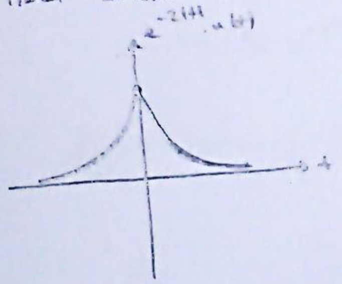
Bu işaret $-\infty, 0$ aralığında $e^{2t}.u(-t)$ olur.

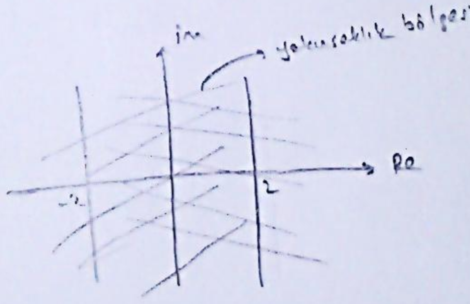


$e^{2t}.u(-t)$ işaretinin verilen aralıkta laplace'ı alınırsa $-\frac{1}{s-2}$ olur. Bu işaret sola dayalı bir işaret olur.



iki işaret birleştirilirse





Bu işaret çift bir işaret olur.

C.2) a) $y(t) = x(t) * h(t)$ (konvolüsyon özelliği) $\Rightarrow Y(jw) = X(jw).H(jw)$

$x(t) \xleftrightarrow{F} X(jw) \Rightarrow x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|}.X\left(\frac{jw}{a}\right)$ (zaman frekans ölçekleme)

$x(3t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{3}.X\left(\frac{jw}{3}\right)$

$h(3t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{3}H\left(\frac{jw}{3}\right)$

$g(jw) = \frac{1}{9}.H\left(\frac{jw}{3}\right).X\left(\frac{jw}{3}\right)$

$g(jw) = \frac{A}{B}\,Y\left(\frac{jw}{B}\right)$

$Y\left(\frac{jw}{B}\right) = \frac{1}{B}.X\left(\frac{jw}{B}\right).\frac{1}{B}.H\left(\frac{jw}{B}\right)$

$g(jw) = \frac{A}{B^3}$ $^{1/9}$ $.X\left(\frac{jw}{B}\right)_{\to 3}.H\left(\frac{jw}{B}\right)$

$\boxed{B=3}$ $\quad \frac{A}{27} = \frac{1}{9} \Rightarrow \boxed{A=3}$

④

b) $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$

i) $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) \Rightarrow x(t-t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$ (Zamanda öteleme)

$x(-t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|-1|} \cdot X\left(\frac{j\omega}{-1}\right)$

$x(1-t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) \Rightarrow x(-t+1) \xleftrightarrow{F} e^{j\omega} \cdot X(-j\omega)$

$x(-1-t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) \Rightarrow x(-t-1) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega} \cdot X(-j\omega)$

$x_1(t) = e^{j\omega} \cdot X(-j\omega) + e^{-j\omega} \cdot X(-j\omega) = X(-j\omega) \cdot \left(e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right)$

ii) $x_2(t) = x(3t-6) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{3} \cdot X\left(\frac{j\omega}{3}\right) \cdot e^{-6j\omega}$ (Zamanda öteleme ve zaman frekans ölçekleme)

iii) $x_3(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t-1)$

$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) \Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega X(j\omega) \cdot e^{j\omega}$ (Zamanda türev alma)

$x(t-1) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega} \cdot X(j\omega)$

$\frac{d^2}{dt^2} x(t-1) \xleftrightarrow{F} (j\omega)^2 \cdot e^{-j\omega} \cdot X(j\omega)$