# *SAYISAL İNTEGRAL* ( SİMPSON YÖNTEMİ)

*[a,b] aralığında tanımlı f(x) fonksiyonunu ele alalım.*

*Bazen f(x) fonksiyonunun* $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ ***(1)*** *belirli integralinin yaklaşık hesaplanması gerekiyor.[a,b] aralığında*

$$w_h = \{ x_i / x_{i+1} = x_i + h,\ x_0 = a,\ x_n = b,\ h = \frac{b-a}{n},\ i = \overline{0, n-1} \}$$

*eşit adımlı kafesini tanımlayalım.*

*Bellidirki* $x_i \in w_h$*,* $i = \overline{0, n}$ *noktalarında f(x) fonksiyonunun* $f_i = f(x_i)$ *değerleri verildiğinde bu fonksiyona karşılık gelen Lagrange enterpolasyon polinomunu yazabiliriz. O halde enterpolasyon polinomundan yararlanadak bu fonksiyonu*

$$f(x) = L_n(x) + R_n(x) \quad \textbf{(2)}$$

*şeklinde yazabiliriz. (2)' nin her iki tarafını [a,b] de integrallersek,*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_n(x)dx + \int_a^b R_n(x)dx \quad \textbf{(3)}$$

*yazarız.* $R_n(x)$ *enterpolasyon polinomunun hatası olduğundan integralin değeri yaklaşık olarak*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx \quad \textbf{(4)}$$

*Şeklinde hesaplanabilir.*

*İntegralin toplamsallık özelliğine göre*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \quad \textbf{(5)}$$

*Yazabiliriz.*

*Bu nedenle önce* $f(x)$ *fonksiyonunun* $[x_i, x_{i+1}]$ *aralığında integralini hesaplayalım.*

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{n,i}(x)dx$$

*Burada* $L_{n,i}(x)$ *ifadesi* $[x_i, x_{i+1}]$ *aralığında n. Dereceden Lagrange polinomudur.*

*$[x_i, x_{i+1}]$ aralığında Lagrange polinomunu sıfırıncı (n=0) dereceden ele aldığımız zaman dikdörtgenler formülünü, n=1 ele alındığında yamuk formülü elde edilirdi.*

*Polinomun derecesi arttıkca hatanın azaldığı bellidir. Bu nedenle $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında $L_{n,i}(x)$ polinomunu ikinci dereceden Lagrange enterpolasyon olarak ele alalım.*

Şimdi ise $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında $f(x)$ fonksiyonunun 2. dereceden Lagrange polinomunu yazalım.

Bu polinomu tanımlamak için üç noktada değer verilmesi gerekmektedir. Sadece aralığın uç noktalarındaki değerler verildiğinden, ek olarak üçüncü bir noktaya ihtiyaç vardır.

Aralığın $x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$ şeklinde tanımlanan orta noktasında $f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)$ değerinin de belli olduğunu varsayalım. $x_i, x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+1}$ noktalarından yararlanmakla ikinci dereceden $L_{2,i}(x)$ polinomunu tanımlayalım:

$$L_{2,i}(x)=\frac{\left(x-x_{i+\frac{1}{2}}\right)(x-x_{i+1})}{\left(x_i-x_{i+\frac{1}{2}}\right)(x_i-x_{i+1})} f(x_i) + \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{\left(x_{i+\frac{1}{2}}-x_i\right)(x_{i+\frac{1}{2}}-x_{i+1})} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + \frac{(x-x_i)(x-x_{i+\frac{1}{2}})}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+\frac{1}{2}})} f(x_{i+1})$$

Kafes eşit adımlı olduğundan,

$$L_2(x) = \frac{2}{h^2}\left(x - x_{i+\frac{1}{2}}\right)(x - x_{i+1}) f(x_i) - \frac{4}{h^2}(x - x_i)(x - x_{i+1}) f(x_{i+\frac{1}{2}})$$

$$+\frac{2}{h^2}(x - x_i)(x - x_{i+\frac{1}{2}}) f(x_{i+1}) = \frac{2}{h^2}\left[ f(x_i)\left(x - x_{i+\frac{1}{2}}\right)(x - x_{i+1}) - 2f(x_{i+\frac{1}{2}})(x - x_i)(x - x_{i+1}) + f(x_{i+1})(x - x_i)\left(x - x_{i+\frac{1}{2}}\right)\right] \qquad \textbf{(16)}$$

$[x_i, x_{i+1}]$ aralığında f(x) fonksiyonunun yaklaşık integrali (16) polinomunun integraline eşittir

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{2}{h^2}\left[ f(x_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(x - x_{i+\frac{1}{2}}\right)(x - x_{i+1})dx - 2f(x_{i+\frac{1}{2}})\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x - x_i)(x - x_{i+1})dx + f(x_{i+1})\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x - x_i)\left(x - x_{i+\frac{1}{2}}\right)dx\right]$$

Kolaylık için yukarıdaki ifadeyi

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{2}{h^2}\left[f(x_1)I_1 - 2f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)I_2 + f(x_{i+1})I_3\right] \qquad \textbf{(17)} \quad .$$

Şeklinde yazalım ve her bit integrali ayrı- ayrı hesaplayalım:

$$I_1 = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(x - x_{i+\frac{1}{2}}\right)(x - x_{i+1})dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [x^2 - \left(x_{i+\frac{1}{2}} + x_{i+1}\right)x + x_{i+\frac{1}{2}} x_{i+1}]dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 |_{x_i}^{x_{i+1}} - \frac{1}{2} x^2 \left(x_{i+\frac{1}{2}} + x_{i+1}\right)|_{x_i}^{x_{i+1}} + x_{i+\frac{1}{2}} x_{i+1} x|_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$= \frac{1}{3} (x_{i+1}^3 - x_i^3) - \frac{1}{2} (x_{i+\frac{1}{2}} + x_{i+1})(x_{i+1}^2 - x_i^2) + x_{i+\frac{1}{2}} x_{i+1} (x_{i+1} - x_i)$$

$$= \frac{(x_{i+1} - x_i)}{6} \left[2 (x_{i+1}^2 + x_i x_{i+1} + x_i^2) - 3(x_{i+\frac{1}{2}} + x_{i+1})(x_{i+1} + x_i) + 6x_{i+\frac{1}{2}} x_{i+1}\right]$$

$$= \frac{\mathrm{h}}{6} \left[2 x_{i+1}^2 + 2x_i x_{i+1} + 2x_i^2 - 3x_{i+\frac{1}{2}} x_{i+1} - 3x_{i+\frac{1}{2}} x_i - 3x_{i+1}^2 - 3x_{i+1} x_i + 6x_{i+\frac{1}{2}} x_{i+1}\right]$$

$$= \frac{h}{6} \left[-x_{i+1}^2 - x_i x_{i+1} + 2x_i^2 + 3x_{i+\frac{1}{2}} x_{i+1} - 3x_{i+\frac{1}{2}} x_i\right]$$

$$= \frac{h}{6} [-x_{i+1}^2 + x_i^2 - x_{i+1} x_i + x_i^2 + 3x_{i+\frac{1}{2}} (x_{i+1} - x_i)]$$

$$= \frac{h}{6} [-(x_{i+1}^2 - x_i^2) - x_i(x_{i+1} - x_i) + 3x_{i+\frac{1}{2}} (x_{i+1} - x_i)] = \frac{h^2}{6} [-x_{i+1} - x_i - x_i + 3x_{i+\frac{1}{2}}]$$

$$= \frac{h^2}{6} [-x_{i+1} - x_i - x_i + 2x_{i+\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}}] \quad = \frac{h^2}{6} [-x_{i+1} - x_i - x_i + 2\frac{x_{i+1} + x_i}{2} + x_{i+\frac{1}{2}}]$$

$$= \frac{h^2}{6} \left[-x_{i+1} - x_i - x_i + x_i + x_{i+1} + x_{i+\frac{1}{2}}\right] = \frac{h^2}{6} \left(x_{i+\frac{1}{2}} - x_i\right) = \frac{h^3}{12} \qquad \textbf{(18)}$$

elde ederiz.

Yukarıda $\frac{h^2}{6} [-x_{i+1} - x_i - x_i + 2x_{i+\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}}]$ ifadesini farklı şekilde aşağıdaki gibi de basitleştirebiliriz.

$$\frac{h^2}{6} \left[-x_{i+1} - 2x_i + 2x_{i+\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}}\right] = \frac{h^2}{6} \left[-\left(x_{i+1} - x_{i+\frac{1}{2}}\right) - 2\left(x_i - x_{i+\frac{1}{2}}\right)\right] = \frac{h^2}{6} \left[-\frac{h}{2} + h\right] = \frac{h^3}{12}$$

(17) ifadesindeki ikinci integrali yani $I_2$ değerini hesaplayalım.

$$I_2 = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1})dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [x^2 - (x_i + x_{i+1})x + x_i x_{i+1}]dx$$

$$= [\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 (x_i + x_{i+1}) + x_i x_{i+1} x]|_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$= \frac{1}{3} (x_{i+1}^3 - x_i^3) - \frac{1}{2} (x_{i+1}^2 - x_i^2)(x_i + x_{i+1}) + x_i x_{i+1} (x_{i+1} - x_i)$$

$$= \frac{h}{6} [2x_{i+1}^2 + 2x_i x_{i+1} + 2x_i^2 - 3x_i^2 - 3x_i^2 - 6x_i x_{i+1} - 3x_{i+1}^2 + 6x_i x_{i+1}]$$

$=\frac{h}{6}[-x_{i+1}^2 - x_i^2 + 2x_i x_{i+1}] = -\frac{h}{6}(x_{i+1} - x_i)^2 = -\frac{h^3}{6}$ **(19)**

$I_3$ integralini benzer şekilde **KENDİMİZ** hesaplarsak $I_3 = \frac{h^3}{12}$ **(20)**

Elde ederiz.

(18),(19) ve (20) ifadelerini (17)'de yazalım.

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{2}{h^2}\left[f(x_i)\frac{h^3}{12} - 2f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)\left(-\frac{h^3}{6}\right) + f(x_{i+1})\frac{h^3}{12}\right]$$

$$= \frac{h}{6}\left[f(x_i) + 4f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + f(x_{i+1})\right] \quad \mathbf{(21)}$$

Şimdi ise (21) ifadesini (5) te göz önüne alalım:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{6}\left[f(x_i) + 4f\left(x_{i+\frac{i}{2}}\right) + f(x_{i+1})\right] =$$

$$\frac{h}{6}\left\{f(x_0) + 2[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})] + 4\left[f\left(x_{\frac{1}{2}}\right) + f\left(x_{\frac{3}{2}}\right) + \cdots + f\left(x_{n-\frac{1}{2}}\right)\right] + f(x_n)\right\} \quad (22)$$

(21) ifadesi $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında $f(x)$fonksiyonunun yaklaşık integrali için,' **SİMPSON YÖNTEMİ '**nin ifadesidir.

(22) ye ise'**GENELLEŞMİŞ SİMPSON'** FORMÜLÜ denir.

Simpson yöntemi farklı şekilde (Lise öğrencileri için) aşağıdaki şekilde elde edebiliriz.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ şekilde bir parabol olarak fonksiyonumuzu tanımlayalım. Şimdi ise $f(x)$ i (0,h) aralığında integralleyelim.

$$\int_0^h f(x)dx = \int_0^h (ax^2 + bx + c)\,dx = \left[\frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx\right]\Big|_0^h = \frac{1}{3}ah^3 + \frac{1}{2}bh^2 + ch$$

$$= \frac{h}{6}[2ah^2 + 3bh + 6c] \; *$$

$f_0 = f(0) = c$ **

$f_{\frac{1}{2}} = f\left(\frac{h}{2}\right) = a\frac{h^2}{4} + b\frac{h}{2} + c$ ***

$f_1 = f(h) = ah^2 + bh + c$ ****

*** ifadesini 4 ile çarpalım ve ** ve **** ile toplayalım.

$f_0 + 4f_{\frac{1}{2}} + f_1 = c + ah^2 + 2bh + 4c + ah^2 + bh + c = 2ah^2 + 3bh + 6c$ *****

(*****)' ı (*) da yerine koyarsak $\int_0^h f(x)dx = \frac{h}{6}[f_0 + 4f_{\frac{1}{2}} + f_1]$ elde edilir.