



Sayısal Yöntemler

2. Hafta

ARİTMETİK
İŞLEMLERDE OLUŞAN
SAYISAL HATALAR

Mutlak Ve Bağıl Hata

Herhangi bir değişkenin değeri a , yaklaşık değeri ise a^* olsun.

$$\Delta(a^*) = |a - a^*| \quad (1)$$

değerine a nın veya a^* ın mutlak hatası denir.

Mutlak hatanın ($\Delta(a^*)$ m), yaklaşık değer in mutlak değerine ($|a^*|$ 'a) oranına bağıl hata denir ve

$$\delta(a^*) = \frac{\Delta(a^*)}{|a^*|} \quad (2)$$

$$\Delta(a^*) \leq \bar{\Delta}(a^*)$$

koşulunu sağlayan $\bar{\Delta}(a^*)$ a limit mutlak hata denir. Benzer şekilde

$$\delta(a^*) \leq \frac{\Delta(a^*)}{|a^*|} = \bar{\delta}(a^*)$$

koşulunu sağlayan $\bar{\delta}(a^*)$ a limit bağıl hata denir.

Toplama işleminde oluşan hatayı inceleyelim.

$$a = a^* \pm \Delta(a^*) \quad (3)$$

$$b = b^* \pm \Delta(b^*) \quad (4)$$

Toplama işleminde oluşan hatayı değerlendirmek için (3) ve (4) ifadelerini taraf tarafa toplayalım.

$$a + b = a^* + b^* + \Delta(a^*) + \Delta(b^*) \quad (5)$$

$c = a + b$ yazarsak, $c^* = a^* + b^*$ olacaktır. O halde, (5) ifadesinden

$$\Delta(c^*) = |c - c^*| = |\Delta(a^*) + \Delta(b^*)|$$

$$\Rightarrow \Delta(c^*) \leq \Delta(a^*) + \Delta(b^*) \quad (6)$$

yazabiliriz. Limit mutlak hata için de benzer şekilde

$$\bar{\Delta}(c^*) = \bar{\Delta}(a^*) + \bar{\Delta}(b^*) \quad (7)$$

yazabiliriz. Bağıl hatanın tanımından

$$\delta(c^*) = \frac{\Delta(c^*)}{|c^*|} \leq \frac{\Delta(a^*) + \Delta(b^*)}{|a^* + b^*|}$$

ifadesini elde ederiz.

$$\delta(c^*) \leq \frac{\Delta(a^*) + \Delta(b^*)}{|a^* + b^*|} = \frac{\delta(a^*)|a^*| + \delta(b^*)|b^*|}{|a^* + b^*|} \quad (8)$$

Limit bağıl hata toplama işleminde aşağıdaki şekilde değerlendirilir.

$$\delta(c^*) = \frac{\delta(a^*)|a^*| + \delta(b^*)|b^*|}{|a^* + b^*|} \quad (9)$$

$d = a - b$ yazmakla yukarıdakilere benzer şekilde çıkarma işleminde oluşan mutlak ve hataların değerlendirilmesini kolaylıkla evde elde edebiliriz.

$u = a.b$ olsun. Bu değere karşılık gelen yaklaşık değeri $u^* = a^*.b^*$ olarak gösterebiliriz. Tanıma göre

$$\Delta(u^*) = |u - u^*| = |a.b - a^*.b^*|$$

$$= |a.b - a^*.b + a^*.b - a^*.b^*|$$

$$= |b(a - a^*) + a^*(b - b^*)|$$

$$\leq |b||a - a^*| + |a^*||b - b^*|$$

$$= |b|\Delta(a^*) + |a^*|\Delta(b^*)$$

$$= |b^* + \Delta(b^*)|\Delta(a^*) + |a^*|\Delta(b^*)$$

$$\leq (|b^*| + \Delta(b^*))\Delta(a^*) + |a^*|\Delta(b^*)$$

$$= |b^*|\Delta(a^*) + \Delta(a^*)\Delta(b^*) + |a^*|\Delta(b^*) \quad (10)$$

(10) ifadesinden yararlanarak çarpma işleminde oluşan limit mutlak hata için

$$\bar{\Delta}(u^*) = |b^*|\bar{\Delta}(a^*) + |a^*|\bar{\Delta}(b^*) + \bar{\Delta}(a^*)\bar{\Delta}(b^*) \quad (11)$$

ifadesi elde edilir.

Benzer şekilde bölme işleminde oluşan mutlak hatayı aşağıdaki gibi değerlendirebiliriz.

$v = \frac{a}{b}$, $v^* = \frac{a^*}{b^*}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \Delta(v^*) &= |v - v^*| = \left| \frac{a}{b} - \frac{a^*}{b^*} \right| = \left| \frac{ab^* - ba^*}{bb^*} \right| \\ &= \left| \frac{ab^* - ba^* - a^*b^* + a^*b^*}{bb^*} \right| = \left| \frac{b^*(a - a^*) - a^*(b^* - b)}{bb^*} \right| \\ &\leq \frac{|b^*||a - a^*| + |a^*||b - b^*|}{|bb^*|} = \frac{|b^*|\Delta(a^*) + |a^*|\Delta(b^*)}{|b||b^*|} \end{aligned}$$

$$= \frac{|b^*|\Delta(a^*) + |a^*|\Delta(b^*)}{|b^* - \Delta(b^*)||b^*|} = \frac{|b^*|\Delta(a^*) + |a^*|\Delta(b^*)}{\left|1 - \frac{\Delta(b^*)}{|b^*|}\right||b^*|^2} = \frac{|b^*|\Delta(a^*) + |a^*|\Delta(b^*)}{|b^*|^2|1 - \delta(b^*)|} \quad (12)$$

(11) ve (13) ifadelerinin yardımıyla çarpma ve bölme işlemlerinde oluşan limit bağıl hataları aşağıdaki gibi değerlendirebiliriz:

$$\begin{aligned}\bar{\delta}(u^*) &= \frac{\bar{\Delta}(u^*)}{|u^*|} = \frac{|b^*|\bar{\Delta}(a^*) + |a^*|\bar{\Delta}(b^*) + \bar{\Delta}(a^*)\bar{\Delta}(b^*)}{|a^*||b^*|} \\ &= \bar{\delta}(a^*) + \bar{\delta}(b^*) + \bar{\delta}(a^*)\bar{\delta}(b^*)\end{aligned}\quad (14)$$

Benzer şekilde $\bar{\delta}(v^*)$ ifadesini hesaplayabiliriz.

$$\bar{\delta}(v^*) = \frac{\bar{\Delta}(v^*)}{|v^*|} = \frac{|b^*|\bar{\Delta}(a^*) + |a^*|\bar{\Delta}(b^*)}{|a^*||b^*||1 - \bar{\delta}(b^*)|} =: \frac{1}{1 - \bar{\delta}(b^*)} \left(\bar{\delta}(a^*) + \bar{\delta}(b^*) \right) \quad (15)$$

Herhangi α ve β sayılarının $\Delta(\alpha)$, $\Delta(\beta)$ mutlak ve $\delta(\alpha)$, $\delta(\beta)$ bağıl hataları küçük sayılar olduğundan yukarıda elde edilen formüllerde $\bar{\Delta}(\alpha)$, $\bar{\Delta}(\beta)$, $\bar{\delta}(\alpha)$, $\bar{\delta}(\beta)$ çarpımlarını sıfıra, $1 - \delta(\alpha)$ ise 1 e eşit olarak ele alabiliriz. O halde, aritmetik işlemlerde oluşan limit, mutlak ve bağıl hatalar için daha basit formüller elde edebiliriz. Uygulamalarda genel olarak aşağıdaki ifadelerden yararlanırız.

$$\Delta(a \pm b) = \Delta(a) + \Delta(b)$$

$$\Delta(a.b) = |a|\Delta(b) + |b|\Delta(a)$$

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{|b|\Delta(a) + |a|\Delta(b)}{|b^*|^2}$$

$$\delta(a + b) = \frac{|a|\delta(a) + |b|\delta(b)}{|a + b|}$$

$$\delta(a - b) = \frac{|a|\delta(a) + |b|\delta(b)}{|a - b|}$$

$$\delta(a.b) = \delta(a) + \delta(b)$$

$$\delta\left(\frac{a}{b}\right) = \delta(a) + \delta(b)$$

$$\Delta(a^m) = m a^{m-1} \Delta(a)$$

$$\delta(a^m) = m \delta(a)$$