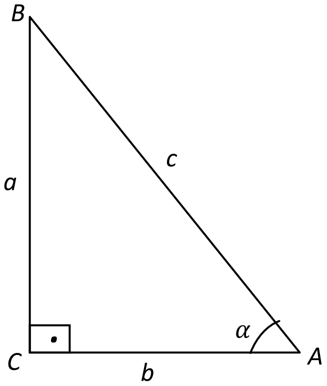
TRİGONOMETRİ

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

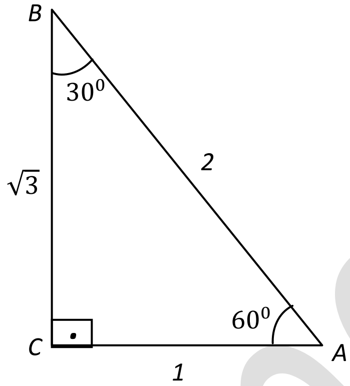


- $sin\alpha = \dfrac{a}{c} = \dfrac{karşı\ dik\ kenar}{hipotenüs}$
- $cos\alpha = \dfrac{b}{c} = \dfrac{komşu\ dik\ kenar}{hipotenüs}$
- $tan\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{karşı\ dik\ kenar}{komşu\ dik\ kenar}$
- $cot\alpha = \dfrac{b}{a} = \dfrac{komşu\ dik\ kenar}{karşı\ dik\ kenar}$

TRİGONOMETRİK ÖZDEŞLİKLER

- $tan\alpha = \dfrac{sin\alpha}{cos\alpha}$
- $cot\alpha = \dfrac{cos\alpha}{sin\alpha}$
- $sec\alpha = \dfrac{1}{cos\alpha}$
- $cosec\alpha = \dfrac{1}{sin\alpha}$
- $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$
- $1 + tan^2\alpha = sec^2\alpha$
- $1 + cot^2\alpha = cosec^2\alpha$
- $tan\alpha . cot\alpha = 1$

$30^0, 45^0 ve\ 60^0$ NİN TRİGONOMETRİK DEĞERLERİ

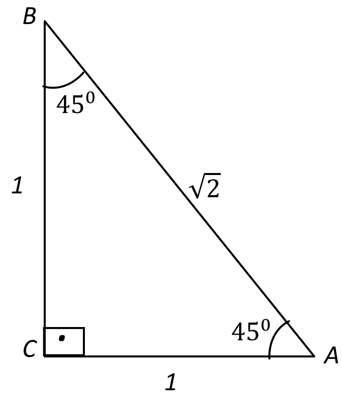


$sin30^0 = \dfrac{1}{2} = cos60^0$

$sin60^0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = cos30^0$

$tan30^0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = cot60^0$

$cot30^0 = \sqrt{3} = tan60^0$

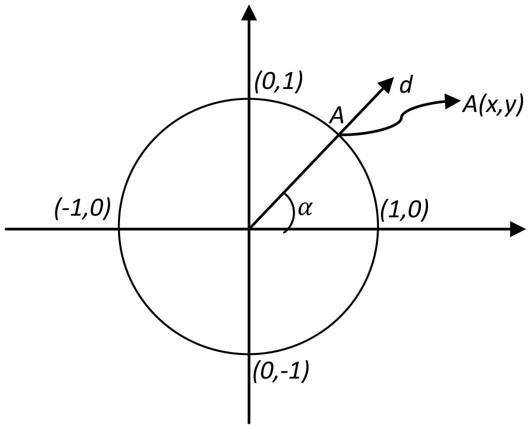


$sin45^0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = cos45^0$

$tan45^0 = 1 = cot45^0$

NOT: $\boldsymbol{\alpha + \beta = 90^0}$ ise
$\boldsymbol{sin\,\alpha = cos\beta\ ve\ tan\alpha = cot\beta}$ dır.

BİRİM ÇEMBER



d doğrusunun birim çemberi kestiği noktanın x koordinatı α açısının cos değerini , y koordinatı α açısının sin değerini verir.

$cos\alpha = x \quad ve \quad sin\alpha = y \; dir.$

$cos0^0 = 1$ $\qquad$ $sin0^0 = 0$

$cos90^0 = 0$ $\qquad$ $sin90^0 = 1$

$cos180^0 = -1$ $\qquad$ $sin180^0 = 0$

$cos270^0 = 0$ $\qquad$ $sin270^0 = -1$

BÖLGELERE GÖRE TRİGONOMETRİK ORANLAR

1. *İsim değişikliği olmayanlar*

$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$ $\cos(\pi-\alpha) = -cos\alpha$ $\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$ $\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$	$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(\pi+\alpha) = -cos\alpha$ $\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$ $\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$
$\sin(2\pi-\alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(2\pi-\alpha) = cos\alpha$ $\tan(2\pi-\alpha) = -\tan\alpha$ $\cot(2\pi-\alpha) = -\cot\alpha$	$\sin(2\pi+\alpha) = \sin\alpha$ $\cos(2\pi+\alpha) = cos\alpha$ $\tan(2\pi+\alpha) = \tan\alpha$ $\cot(2\pi+\alpha) = \cot\alpha$

2. *İsim değişikliği olanlar*

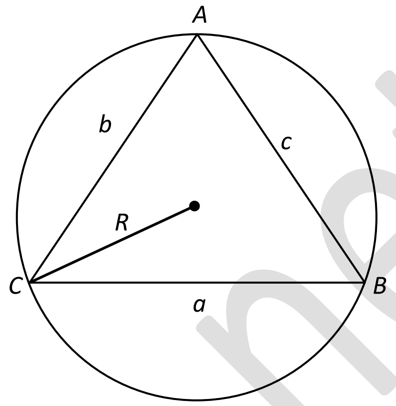
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = sin\alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \tan\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -sin\alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan\alpha$
$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\cos\alpha$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -sin\alpha$ $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha$ $\cot\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = \tan\alpha$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\cos\alpha$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = sin\alpha$ $\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha$ $\cot\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan\alpha$

ÜÇGENDE TRİGONOMETRİK BAĞINTILAR

Sinüs Teoremi

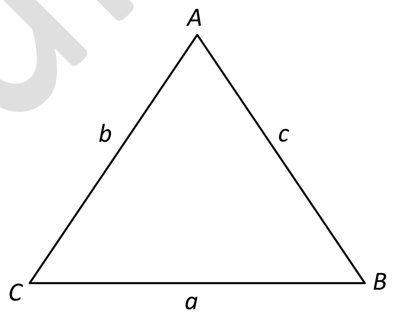
Herhangi bir ABC üçgeninde, çevrel çemberin yarıçapı R olmak üzere;

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \; dir.$$



Kosinüs Teoremi

Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları a, b, c ve bu kenarlara ait açılar A, B, C olmak üzere;



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$ dir.

İKİ YAY TOPLAM VEYA FARKININ TRİGONOMETRİK ORANLARI

- $\sin(a+b) = sina.cosb + cosa.sinb$
- $\sin(a-b) = sina.cosb - cosa.sinb$
- $\cos(a+b) = cosa.cosb - sina.sinb$
- $\cos(a-b) = cosa.cosb + sina.sinb$
- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a.\tan b}$
- $\cot(a+b) = \dfrac{cota.cotb - 1}{cota + cotb}$

YARIM AÇI FORMÜLLERİ

- $sin(2a) = 2\,sin\,a\,.cos\,a$
- $cos(2a) = cos^2a - sin^2a$
  $= 2cos^2a - 1$
  $= 1-2sin^2a$
- $tan(2a) = \dfrac{2tana}{1-tan^2a}$

DÖNÜŞÜM FORMÜLLERİ

Toplam şeklindeki ifadeleri çarpım şekline dönüştürmek için kullanılır.

- $sin\,a + sin\,b = 2\,sin\frac{a+b}{2}.cos\frac{a-b}{2}$
- $sin\,a - sin\,b = 2\,cos\frac{a+b}{2}.sin\frac{a-b}{2}$
- $cos\,a + cos\,b = 2\,cos\frac{a+b}{2}.cos\frac{a-b}{2}$
- $cos\,a - cos\,b = -2\,sin\frac{a+b}{2}.sin\frac{a-b}{2}$

TERS DÖNÜŞÜM FORMÜLLERİ

Çarpım şeklindeki ifadeleri toplam şekline dönüştürmek için kullanılır.

- $sina.cosb = \frac{1}{2}\,[sin(a+b) + sin(a-b)]$
- $sina.sinb = \frac{1}{2}\,[cos(a-b) - cos(a+b)]$
- $cosa.cosb = \frac{1}{2}\,[cos(a+b) + cos(a-b)]$

Pratik Yol

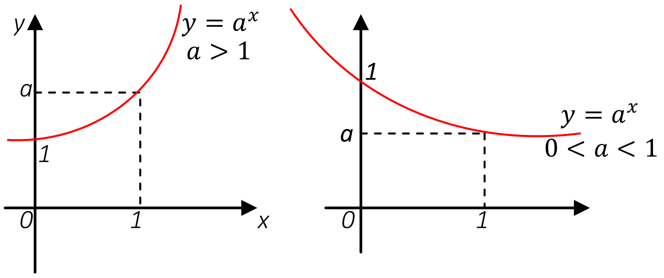
$b = \dfrac{a+c}{2}$ ise

$\dfrac{sin\,a+sin\,b+sin\,c}{cos\,a+cos\,b+cos\,c} = tan\,b$ dir

LOGARİTMA

ÜSTEL FONKSİYON

$a \in R^+$ ve $a \neq 1$ $olmak$ $üzere, f: R \to R^+, f(x) = a^x$
$şeklindeki$ $fonksiyonlara$ $üstel$ $fonksiyon$ $denir.$



LOGARİTMA FONKSİYONU

$a \in R^+$ ve $a \neq 1$ olmak üzere, $f: R \to R^+, f(x) = a^x$ fonksiyonunun ters fonksiyonuna, a tabanına göre logaritma fonksiyonu denir.

$f^{-1}: R^+ \to R$, $f^{-1}(x) = log_a x$ şeklinde gösterilir.

Uyarı:
Logaritma fonksiyonunun tanımlı olması için aşağıdaki üç koşulu sağlaması gerekir.
1. $\boldsymbol{a > 0}$
2. $\boldsymbol{a \neq 1}$
3. $\boldsymbol{x > 0}$

- Tabanı 10 olan logaritmaya bayağı logaritma denir ve $log_{10} x = log\, x$ şeklinde gösterilir.
- Tabanı $e \cong 2{,}718281 \ldots$ olan logaritmaya doğal logaritma denir ve $log_e x = ln\, x$ şeklinde gösterilir.

Logaritmanın Özellikleri

$a > 0, a \neq 1$ ve $x, y \in R^+$ olmak üzere;

- $log_a 1 = 0$
- $log_a a = 1$
- $log_a (x.y) = log_a x + log_a y$
- $log_a (\frac{x}{y}) = log_a x - log_a y$
- $log_a x^n = n. log_a x$
- $log_{a^m} x = \frac{1}{m}. log_a x$

$\left.\begin{array}{l} log_a x^n = n.log_a x \\ log_{a^m} x = \frac{1}{m}.log_a x \end{array}\right\} log_{a^m} x^n = \frac{n}{m}. log_a x$

- $a^{log_b c} = c^{log_b a} \quad \Longrightarrow \quad a^{log_a b} = b$
- $log_a b = \dfrac{log_c b}{log_c a} \quad (c > 0, \; c \neq 1)$
- $log_a b = \dfrac{1}{log_b a}$
- $log_a b \,. log_b c \,. log_c d = log_a d$
- $co\, log_a b = log_a \frac{1}{b} = - log_a b$

Logaritmalı Denklem ve Eşitsizlikler

$a \in R^+, \; a \neq 1, \; f(x) > 0$ ve $g(x) > 0$ olmak üzere;

- $log_a f(x) = log_a g(x) \iff f(x) = g(x)$
- $a > 1$ ise $log_a f(x) < log_a g(x) \iff f(x) < g(x)$
- $0 < a < 1$ ise $log_a f(x) < log_a g(x) \iff f(x) > g(x)$
- $a > 0$ ise $log_a f(x) < b \iff f(x) < a^b$
- $0 < a < 1$ ise $log_a f(x) < b \iff 0 < f(x) < a^b$

Karakteristik ve Mantis

$x \in R^+, k \in Z$ ve $0 \leq m < 1$ olmak üzere;

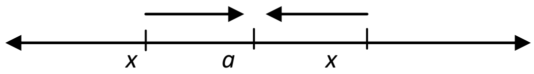
$log_a x = k + m$ şeklinde yazılabilir.

Burada k sayısına karakteristik, m sayısına mantis denir.

- $x > 1$ ve $x \in Z$ ise x'in basamak sayısı k+1 dir.
- $0 < x < 1$ ise $k < 0$ dır ve x in ondalık yazılışında sıfırdan farklı ilk rakamdan önceki sıfırların sayısı $|k|$ dır.
  Yani $log_a x = \underbrace{0{,}0000}_{4 \text{ tane sıfır}}65$ ise $k = -4$ dür.

LİMİT FORMÜLLERİ

Tanım:



- ✓ x değişkeni a sayısına, a dan küçük değerlerle yaklaşıyorsa bu tür yaklaşmaya soldan yaklaşma deriz ve $x \to a^-$ şeklinde gösteririz.

- ✓ x değişkeni a sayısına, a dan büyük değerlerle yaklaşıyorsa bu tür yaklaşmaya sağdan yaklaşma deriz ve $x \to a^+$ şeklinde gösteririz.

- ✓ x değişkeni bir a noktasına sağdan yaklaştığında bir limiti varsa buna fonksiyonun sağdan limiti denir ve $lim_{x\to a^+} f(x) = L$ biçiminde gösterilir.

- ✓ x değişkeni bir a noktasına soldan yaklaştığında bir limiti varsa buna fonksiyonun soldan limiti denir ve $lim_{x\to a^-} f(x) = K$ biçiminde gösterilir.

- ✓ $lim_{x\to a^+} f(x) = lim_{x\to a^-} f(x)$ ise $lim_{x\to a} f(x) = L$

- ✓ $lim_{x\to a^+} f(x) \neq lim_{x\to a^-} f(x)$ ise limit yoktur.

Limitin Özellikleri

$lim_{x\to a} f(x) = L_1$, $lim_{x\to a} g(x) = L_2$ ve $L_1, L_2, c \in R$ olmak üzere.

- ➢ $lim_{x\to a} c = c$
- ➢ $lim_{x\to a}(f(x) \mp g(x)) = L_1 \mp L_2$
- ➢ $lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, $L_2 \neq 0$
- ➢ $lim_{x\to a}(c.f(x)) = c.lim_{x\to a} f(x) = c.L_1$
- ➢ $lim_{x\to a}[f(x)]^n = [lim_{x\to a} f(x)]^n = (L_1)^n$
- ➢ $lim_{x\to a}(f(x).g(x)) = L_1.L_2$
- ➢ $lim_{x\to a}|f(x)| = |lim_{x\to a} f(x)| = |L_1|$
- ➢ $lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$
- ➢ $lim_{x\to a} c^{f(x)} = c^{lim_{x\to a} f(x)} = c^{L_1}$

Not:

$$lim_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^n} = \begin{cases} +\infty & , \quad n \text{ çift sayı} \\ yoktur & , \quad n \text{ tek sayı} \end{cases}$$

$$lim_{x\to \mp\infty} \frac{1}{(x-a)^n} = 0 \qquad , \qquad (n \in Z^+)$$

Sıkıştırma Teoremi

f,g,h fonksiyonları bir A kümesinde tanımlı ve $\forall x \in A$ için
$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ ve
$lim_{x\to a} f(x) = lim_{x\to a} g(x) = l$ ise
$lim_{x\to a} h(x) = l$ dir.

Trigonometrik Fonksiyonların Limiti

$a \in R$ olmak üzere ;

- ➢ $lim_{x\to a} \sin x = \sin a$
- ➢ $lim_{x\to a} \cos x = \cos a$
- ➢ $lim_{x\to a} \tan x = \tan a \quad (\cos a \neq 0)$
- ➢ $lim_{x\to a} \cot x = \cot a \quad (\sin a \neq 0)$
- ➢ $lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$
- ➢ $lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$ dir.
- ➢ $lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$

Genişletilmiş Reel Sayılar Kümesinde Limit

Tanım:

Reel sayılar kümesine $-\infty$ ve $+\infty$ un katılmasıyla elde edilen kümeye genişletilmiş reel sayılar kümesi denir ve $\bar{R}$ ile gösterilir.

Yani $\bar{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$ dur. Genişletilmiş reel sayılar kümesinde $x \to \pm\infty$ için limitleri inceleriz.

- ✓ $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polinom fonksiyonunda,
  $lim_{x\to\infty} f(x) = lim_{x\to\to\infty} a_n x^n$ dir.

- $a > 1$ *ise*
  $lim_{x\to\infty} a^x = \infty \quad , \quad lim_{x\to-\infty} a^x = 0$

- $0 < a < 1$ *ise*
  $\lim_{x\to\infty} a^x = 0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$

Belirsizlikler:

- $\frac{0}{0}$ *Belirsizliği*

  $lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ *oluyorsa kesrin pay ve paydası (x-a) parantezine alınarak sadeleştirme yapılarak sonuç bulunur. Sadeleştirme yapılamıyorsa L'HOSPİTAL yöntemi kullanılır.*

L'HOSPİTAL YÖNTEMİ

$f:[a,b] \to R$ ve $g:[a,b] \to R$ olmak üzere (a,b) aralığında sürekli ve türevlenebilen iki fonksiyon olsun.

$$\boldsymbol{lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ ise } lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}}$$

$$\boldsymbol{lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ ise } lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

- $\frac{\infty}{\infty}$ *Belirsizliği*

  $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$ *olsun*

$$lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad n < m \\ \frac{a_n}{b_m} & , \quad n = m \\ \pm\infty & , \quad n > m \end{cases}$$

- $0.\infty$ *Belirsizliği*

  Bu tür belirsizliklerde çarpanlardan birinin çarpmaya göre tersi alınarak $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliklerinden birine dönüştürülerek çözüm yapılır.

- $\infty - \infty$ *Belirsizliği*

  - $lim_{x\to\infty}\sqrt{ax^2 + bx + c} = lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{a}.\left|x + \frac{b}{2a}\right|\right)$

  - $f(x) = \sqrt{a_1x^2 + b_1x + c_1} - \sqrt{a_2x^2 + b_2x + c_2}$
    olsun.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & , \quad a_1 > a_2 \\ \dfrac{b_1 - b_2}{2\sqrt{a}} & , \quad a_1 = a_2 \\ -\infty & , \quad a_1 < a_2 \end{cases}$$

TÜREV FORMÜLLERİ

Tanım:

$f:[a,b] \to R, y = f(x) bir\ fonksiyon\ \ ve\ x_0 \epsilon\ (a,b)$ $olsun.\ \ y = f(x)\ için$

$lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

değeri varsa bu değere $y = f(x)$ *fonksiyonunun* $x = x_0$ *noktasındaki türevi denir.*

$x = x_0 + h$ *alındığında* $x \to x_0$ *için* $h \to 0$ *olur.*
O halde f fonksiyonunun x_0 *noktasındaki türevi*

$f'(x_0) = lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

şeklinde tanımlanabilir.

- $f'(x_0^-) = lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ *soldan türev*
  $f'(x_0^+) = lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ *sağdan türev*
  olmak üzere $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$ *ise*
  $f'(x_0)$ *vardır ve* $f'(x_0) = f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$

NOT:

f fonksiyonu x_0 *noktasında türevli ise bu noktada süreklidir. Fakat sürekli olduğu her noktada türevli olmayabilir.*

Türev Alma Kuralları

- $f(x) = c\ ise\ f'(x) = 0\ dır. (c \in R)$
- $f(x) = x^n\ ise\ f'(x) = \ n.x^{n-1}$
- $f(x) = g(x) + h(x)\ ise\ f'(x) = g'(x) + h'(x)$
- $f(x) = g(x).h(x)\ ise$
  $f'(x) = g'(x).h(x) + h'(x).g(x)$
- $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ ise $f'(x) = \frac{g'(x).h(x)-g(x).h'(x)}{(h(x))^2}$
- $f(x) = \sqrt{g(x)}$ ise $f'(x) = \frac{g'(x)}{2.\sqrt{g(x)}}$
- $f(x) = g(ax+b)\ ise\ f'(x) = a.g'(ax+b)$

Bileşke Fonksiyonun Türevi

- $f(x) = (goh)(x)\ ise\ f'(x) = g'\big(h(x)\big).h'(x)$

Üstel Fonksiyonun Türevi

- $f(x) = a^{g(x)}\ ise\ f'(x) = g'(x).a^{g(x)}.lna$
- $f(x) = e^{g(x)}\ ise\ f'(x) = g'(x).e^{g(x)}$

Logaritmik Fonksiyonun Türevi

- $f(x) = log_a\, g(x)\ \ ise\ f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}.log_a\, e$
- $f(x) = ln\, g(x)\ \ ise\ f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

Trigonometrik Fonksiyonların Türevi

- $f(x) = sin\, g(x)\ \ ise\ f'(x) = g'(x).cos\, g(x)$
- $f(x) = cos\, g(x)\ \ ise\ f'(x) = -g'(x).sin\, g(x)$
- $f(x) = tan\, g(x)\ \ ise\ f'(x) = g'(x).[1 + tan^2 g(x)]$
- $f(x) = cot\, g(x)\ \ ise\ f'(x) = -g'(x).[1 + cot^2 g(x)]$

Ters Fonksiyonun Türevi

$A, B \subset R$ *olmak üzere,* $f\ :A \longrightarrow B$ *fonksiyonu* $1-1$ *ve örten olsun. f fonksiyonu* $x_0\ \epsilon\ A$ *noktasında türevli ve* $f'(x_0) \neq 0$ *ise,* $f^{-1}: B \to A$ *fonksiyonu da* x_0 *ın f altındaki görüntüsü olan* y_0 *noktasında türevlidir ve*

$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ *dır.*

Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevi

- $f(x) = arc\, sin\, g(x)\ \ ise\ f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}}$
- $f(x) = arc\, cos\, g(x)\ \ ise\ f'(x) = -\frac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}}$
- $f(x) = arc\, tan\, g(x)\ \ ise\ f'(x) = \frac{g'(x)}{1+g^2(x)}$
- $f(x) = arc\, cot\, g(x)\ \ ise\ f'(x) = -\frac{g'(x)}{1+g^2(x)}$

Parametrik Fonksiyonların Türevi

$x = u(t)\ ,\ \ y = v(t)$ *olmak üzere*

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$ *dir.*

Kapalı Fonksiyonun Türevi

F (x , y) = 0 ise

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

NOT:

x e göre türev alırken y sabittir
y ye göre türev alırken x sabittir.

İNTEGRAL FORMÜLLERİ

Tanım:

Türevi f(x) olan F(x) ifadesine f(x) in belirsiz integrali veya f(x) in ilkel fonksiyonu denir ve

$\int f(x)\,dx = F(x) + c$

şeklinde gösterilir.

İntegral Alma Kuralları

- $\int a dx = a\int dx = ax + c\,,(a \in R)$
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , \ (n \neq -1)$
- $\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + c$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\,a} + c \quad , \ (a > 0)$
- $\int e^x\,dx = e^x + c$
- $\int sin\,x\,dx = -\,cos\,x + c$
- $\int cos\,dx = sin\,x + c$
- $\int \frac{dx}{sin^2 x} = \int (1 + cot^2 x)dx = -cotx + c$
- $\int \frac{dx}{cos^2 x} = \int (1 + tan^2 x)dx = tanx + c$
- $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctan\frac{x}{a} + c = -\frac{1}{a} arccot\frac{x}{a} + c$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin\,x + c = -\,arccos\,x + c$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + c$

Belirsiz İntegralin Özellikleri

- $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$
- $\int \left(\frac{d}{dx} f(x)\right) dx = f(x) + c$
- $\int d(f(x)) = f(x) + c$
- $\int af(x)dx = a\int f(x)dx \quad ,(a \in R)$
- $\int [f(x) \mp g(x)]dx = \int f(x)dx \mp \int g(x)dx$
- $\int f(x)dx = \int f(u)\,du = \int f(t)dt = \cdots$

İntegral Alma Yöntemlari

Değişken Değiştirme Yöntemi

Bu yöntem bir fonksiyon ve onun diferansiyelini içeren bileşke fonksiyonların integrali alınırken kullanılır.

$I = \int f(x)dx$ *integralinde* $x = u(t)$ *dönüşümü yapılırsa* $dx = u'(t)dt$ *olur. Buradan;*

$I = \int f\big(u(t)\big).u'(t)dt$ *olur.*

Not:

Belirsiz integralde değişken değiştirme yöntemi uygulandıktan sonra sonucun ilk değişken türünde yazılması gerekir.

- $\int [f(x)]^n.f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln|f(x)| + c$
- $\int e^{f(x)} f'(x)dx = e^{f(x)} + c$
- $\int a^{f(x)} f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{ln\,a} + c$
- $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} dx = arcsin\,f(x) + c$
- $\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = arctan\,f(x) + c$

Kısmi İntegrasyon Yöntemi

$\int f(x).g(x)\,dx$ *integralinde* $f(x) = u$ *ve* $g(x)dx = dv$ *olacak şekilde* u *ve* dv *seçilir.*

Buradan;

$\int u.dv = u.v - \int v.du$ *elde edilir.*

✓ *Kısmi integralde u yu seçerken LAPTÜ yöntemini kullanabiliriz. Yani sırasıyla aşağıdaki fonksiyonlardan ilk gördüğümüz* u *diğeri* dv *olarak alınır.*

Logaritmik fonksiyon

Arc (ters trigonometrik fonksiyonlar)

Polinom fonksiyon

Trigonometrik fonksiyon

Üstel fonksiyon

Rasyonel Fonksiyonların İntegrali

- $\int \frac{m}{(ax+b)^n} dx$ integrali için $ax+b=t$ dönüşümü yapılır.
  Buradan $a.dx = dt$ olur.

- $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ için $der(p(x)) \geq der(q(x))$ ise pay paydaya bölünür ve integrali alınır.

- $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ integralinde;

  1. Payda çarpanlarına ayrılabiliyorsa ifade basit kesirlere ayrılır.

  2. Çarpanlarına ayrılamıyorsa ,
     $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctan \frac{x}{a} + c$
     ifadesinen yararlanılarak integral alınır.

Trigonometrik Fonksiyonların İntegralleri

Trigonometrik fonksiyonların integralini bulmak için genel bir kural yoktur. Ancak belli yapıdaki trigonometrik integraller için değişken değiştirmesi veya trigonometrik özdeşlikleri kullanabilir.

- $\int Q(\sin x, \cos x)dx$ şeklindeki integraller:
  İntegrali alınacak fonksiyon sinx ve cosx in rasyonel fonksiyonu şeklinde ise;
  $\tan\frac{x}{2} = t$ değişken değiştirmesi yapılır.
  $\tan\frac{x}{2} = t \Rightarrow \frac{x}{2} = \arctan t$
  $\Rightarrow x = 2\arctan t$
  $\Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$ olur.
  Verilen integralde;
  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ve $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ yazarız.

  Buradan t ye bağlı rasyonel fonksiyonun integrali elde edilir. İntegrali aldıktan sonra fonksiyonda t yerine $\tan\frac{x}{2}$ yazılır.

- $\int Q(\tan x)\, dx$ şeklindeki integraller:
  İntegrali alınacak fonksiyon tanx in rasyonel fonksiyonu şeklinde ise;
  $\tan x = t$ değişken değiştirmesi yapılır.
  $\tan x = t \Rightarrow x = \arctan t$
  $\Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2} dt$ olur.
  $\int Q(t).\frac{dt}{1+t^2}$ integraline dönüşür.

- $\int Q(\sin^{2n} x, \cos^{2n} x)dx$ şeklindeki integraller:
  integrali alınacak fonksiyon $\sin^{2n} x$ ve $\cos^{2n} x$ in rasyonel fonksiyonu şeklinde ise;
  $\tan x = t$ değişken değiştirmesi yapılır.
  $\tan x = t \Rightarrow x = \arctan t$
  $\Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2} dt$ olur.

  Verilen integralde ;
  $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ ve $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ yazarız.
  Buradan t ye bağlı rasyonel fonksiyonun integrali elde edilir. İntegrali aldıktan sonra fonksiyonda t yerine $\tan x$ yazılır.

- $\int \sin^m x . \cos^n x dx$ şeklindeki integraller:
  Bu tür integrallerde üslerin tek veya çift olmasına göre 3 farklı durum vardır.

  1. m çift n tek olsun.
     $n = 2p+1$ şeklinde yazılır.
     $\int \sin^m x . \cos^n x dx = \int \sin^m x . \cos^{2p+1} x dx$
     $= \int \sin^m x . \cos^{2p} \cos x dx$
     $= \int \sin^m x . (1-\sin^2 x)^p \cos x dx$
     Buradan $\sin x = t$ dönüşümü yapılır.

  2. m ve n nin her ikisi de çift olsun.
     Bu durumda trigonometrik özdeşliklerden yararlanılır.
     $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ ve $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$
     özdeşlikleri kullanılır.

  3. m ve n nin her ikisi de tek olsun.
     Bu durumda üstü küçük olan fonksiyon parçalanır.
     Örneğin;
     $\int \sin^5 x . \cos^3 x dx$ integralini alırken
     $\int \sin^5 x . \cos^2 x . \cos x\, dx$ şeklinde parçalanır.
     $\int \sin^5 x . (1-\sin^2 x)^2 \cos x\, dx$
     daha sonra $\sin x = t$ dönüşümü yapılarak sonuca ulaşılır.

- $\int \sin mx . \cos nx\, dx$, $\int \cos mx \cos nx\, dx$,
  $\int \sin mx . \sin nx\, dx$ şeklindeki integraller:

  Bu tür integralleri hesaplamak için ters dönüşüm formülleri kullanılır.

Ters Dönüşüm Formülleri

- ✓ $\sin x . \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$
- ✓ $\sin x . \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$
- ✓ $\cos x . \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

Belirli İntegral

Bir eğri parçasının uzunluğu, sınırladığı bölgenin alanı ve hacim hesaplarında kullanılır.

$\int f(x) = F(x) + c$ *olsun.*

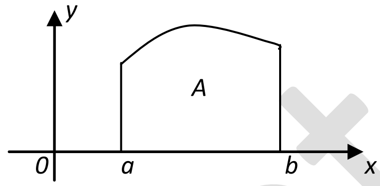
$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$ *integraline* f *fonksiyonunun* $[a,b]$ *aralığında belirli integrali denir.*

Belirli İntegralin Özellikleri

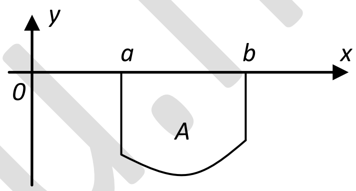
- $\int_a^b A.f(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$ *dir.*
- $\int_a^b [f(x) \mp g(x)] = \int_a^b f(x) \mp \int_a^b g(x)$
- $a, b, c \in R$ *ve* $c \in [a,b]$ *ise*
  $\int_a^b f(x) = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)$
- $\int_a^a f(x) = 0$
- $\int_a^b f(x) = -\int_b^a f(x)$
- $a < b$ *olmak üzere* $[a,b]$ *aralığında* $f(x) \le g(x)$ *ise*
  $\int_a^b f(x) \le \int_a^b g(x)$ *dir.*
- $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$
- *f fonksiyonu sürekli ve tek fonksiyon ise,*
  $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$ *dır.*
- *f fonksiyonu sürekli ve çift fonksiyon ise,*
  $\int_{-a}^a f(x)dx = 2.\int_0^a f(x)\,dx$ *dir.*
- $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x)\,dx$ *ise,*
  $F'(x) = f(v(x)).v'(x) - f(u(x)).u'(x)$ *dir.*

Alan Hesabı

- $f:[a,b] \to R$ *fonksiyonu için [a,b] aralığında* $f(x) \ge 0$ *ise* $y = f(x)$ *eğrisi* $x = a$ *ve* $x = b$ *doğruları ile x-ekseni arasında kalan düzlemsel bölgenin alanı*
  $A = \int_a^b f(x)\,dx$ *dir.*



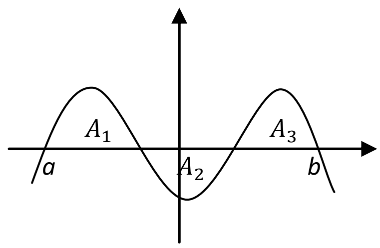
- *[a,b] aralığında* $f(x) \le 0$ *ise* $y = f(x)$ *eğrisi* $x = a$ *ve* $x = b$ *doğruları ve x- ekseni arasında kalan düzlemsel bölgenin alanı*
  $A = -\int_a^b f(x)\,dx$ *dir.*



- $f:[a,b] \to R$ *fonksiyonu [a,b] aralığında işaret değiştiriyorsa,* $y = f(x)$ *eğrisi,* $x = a$ *ve* $x = b$ *doğruları ve x- ekseni tarafından sınırlanan düzlemsel bölgelerin alanları* A_1, A_2, A_3 *ise*

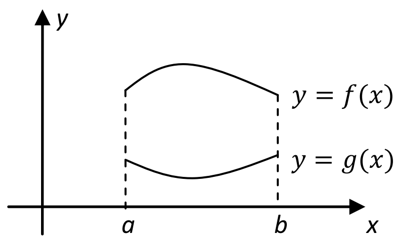
  $A_1 + A_2 + A_3 = \int_a^b |f(x)|\,dx$ *dir.*

  $\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3$



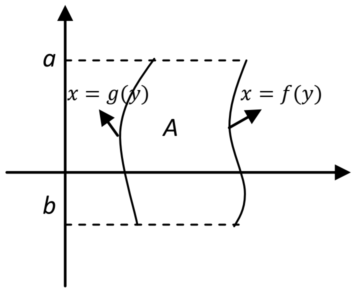
- $y = f(x)$ *ve* $y = g(x)$ *eğrileri ile* $x = a$ *ve* $x = b$ *doğrularının sınırladığı taralı alan A ise*

  $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$ *olur.*



- $x = f(y)$ ve $x = g(y)$ eğrileri ile $y = a$ ve $y = b$ doğrularının sınırladığı taralı alan A ise

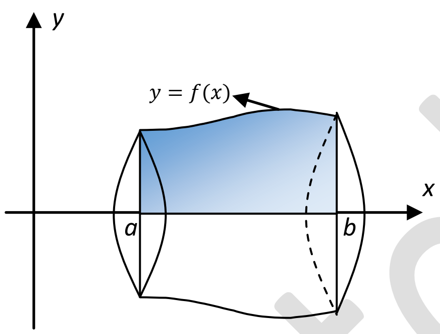
$A = \int_a^b [f(y) - g(y)]\,dy$ olur.



Hacim Hesabı

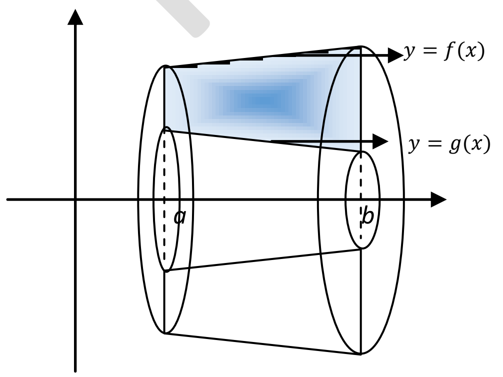
- $y = f(x)$ eğrisi, $x = a$ ve $x = b$ doğruları ve x- ekseni ile sınırlanan taralı bölgenin x- ekseni etrafında 360^o döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmi V ise

$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx$ dir.



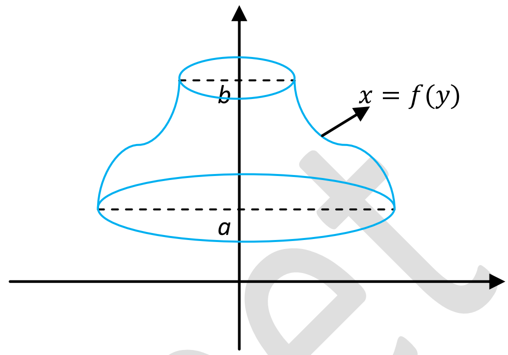
- $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ eğrileri , $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan taralı bölgenin x- ekseni etrafında 360^o döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmi V ise

$V = \pi \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}dx$ dir.



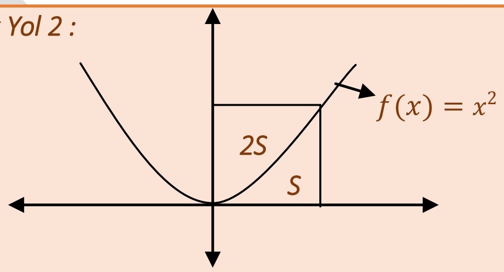
- $x = f(y)$ eğrisi, $y = a$ ve $y = b$ doğruları ile y- ekseni arasında kalan bölgenin y- ekseni etrafında 360^o döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi V ise

$V = \pi \int_a^b f^2(y)\,dy$ dir.



Pratik Yol 1 :
$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ integrali yarıçapı a br olan bir çeyrek çemberin alanına eşittir.

Pratik Yol 2 :



Parabol grafiğinde alanlar $1/2$ oranında ayrılır