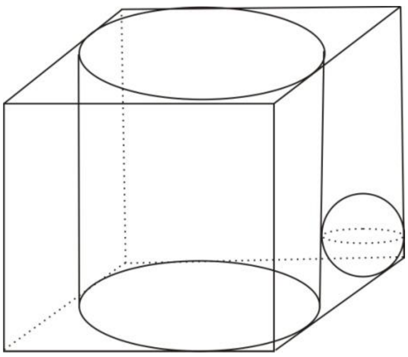
SAYISAL HATALAR

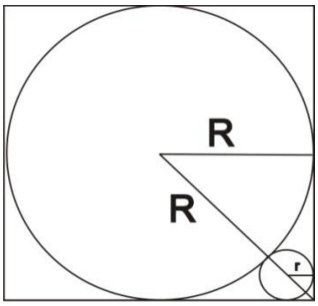
Hataların Kaynakları ve Sınıflandırılması: Sayısal hesaplamalar sonucunda elde edilen değerler başlangıç verileri hatalı olduğu durumda her zaman belli bir hata içermiş olacaktır. Hataların ortaya çıkma nedenleri aşağıdaki şekilde sınıflandırılabilir:

1. Başlangıç verileri genel olarak deney sonucu elde edilmiş oluyor ve bu nedenle hata içerir.
2. İşlemler zamanı $\sqrt{2}, \sqrt{3}, e, \pi, \ldots$ gibi irrasyonel sayılar kullanıldığından bu sayılar devirsiz ondalık sayılar olduğundan yuvarlama işlemi yapılmak zorunda kalınır.
3. Birçok durumda problemin sonucu sonsuz sayıda işlemlerin yardımıyla elde edilir. Fakat bu imkânsız olduğundan işlemler belli adımdan sonra durdurulur. İşlemler zamanı kolaylık için yuvarlama işlemleri yapılıyor.

Aşağıdaki örneği inceleyelim:

Düzgün kare prizmanın içine kenarlarına teğet olmak koşuluyla bir silindir yerleştirilmiştir. Köşede kalan boşluk kısmına silindire ve yanlara teğet olan bir küre atılmıştır. Silindirin kesitinin yarıçapı **R**, kürenin yarıçapı ise **r** dir. Kürenin hacmini **R** cinsinden bulunuz.





$$R^2 + R^2 = \left(R + r + r\sqrt{2}\right)^2$$

$$2R^2 = \left(R + \left(1 + \sqrt{2}\right)r\right)^2$$

$$\sqrt{2R^2} = \sqrt{\left(R + \left(1 + \sqrt{2}\right)r\right)^2}$$

$$R\sqrt{2} = R + \left(1 + \sqrt{2}\right)r$$

$$r\left(1 + \sqrt{2}\right) = R\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

$$r = \frac{R\left(\sqrt{2} - 1\right)}{1 + \sqrt{2}}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}}\right)^3 R^3 \qquad (*)$$

(*) ifadesindeki $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}}\right)^3$ değerini basitleştirelim.

$$\left(\frac{\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}}\right)^3 = \left(\sqrt{2}-1\right)^6 = \left(\left(\sqrt{2}-1\right)^2\right)^3 = \left(3-2\sqrt{2}\right)^3 = 99-70\sqrt{2}$$

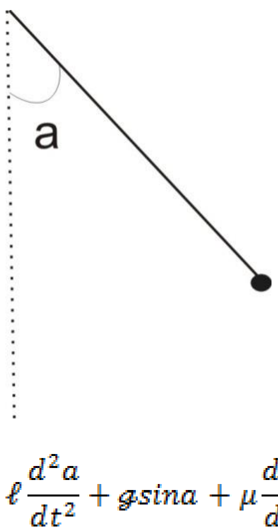
$\sqrt{2}$	$\left(\sqrt{2}-1\right)^6$	$\left(3-2\sqrt{2}\right)^3$	$99-70\sqrt{2}$
1,41421354…	0,00505063171…	0,00505063822…	0,00505232811…
$\frac{7}{5} = \frac{1}{4}$	$\frac{64}{15675} = 0{,}004096$	$\frac{1}{125} = 0{,}008$	1
$\frac{17}{12} = 1{,}4166\ldots$	$\frac{15625}{2985354} = 0{,}005238$	$\frac{1}{216} = 0{,}0046296$	$-\frac{1}{6} = -0{,}1666\ldots$

Ortaya çıkma nedenlerine göre hatalar aşağıdaki şekilde sınıflandırılır:

1. Probleme karşılık gelen matematiksel model hatalı olabilir (Modelin Hatası).
2. Başlangıç verileri deney ve ölçme sonucu bu veriler hatalıdır.
   NOT: (1) ve (2) giderilmeyen (aradan kaldırılamayan) hatalardır.
3. Matematiksel modelin çözümü için kullanılan yöntemler kesin olmuyor (Yöntemin Hatası).
4. Aritmetik işlemler zamanı her zaman ara veriler veya sonuç yuvarlanabilir (Yuvarlama veya Hesaplama Hatası).

Aşağıdaki örneği ele alalım.

Örnek: $t = t_0$ anında harekete başlayan sarkacın herhangi $t = t_1$ anında durumunu ve yerini bulunuz.



$$\ell\frac{d^2a}{dt^2} + g\sin a + \mu\frac{da}{dt} = 0 \qquad (1)$$

Burada ℓ sarkacın uzunluğu, g yerçekimi ivmesi, μ ise kayma katsayısıdır.

Gerçek problemde kayma ile hız düz orantılı (lineer) olmadığından matematiksel model olan (1) denklemi belli hata içermektedir. Gerçek problemin çözümü I (gerçek), (1) denkleminin çözümü I_1 ile gösterirsek, o halde

$$\delta_1 = \mathrm{I} - \mathrm{I}_1$$

modelin hatası olacaktır. Giderilemez hataların ortaya çıkmasının nedeni ℓ, g, μ, a_0 ve a_0' değerlerinin ölçme sonucu elde edilmesidir. (1) denklemi lineer olmayan bir diferansiyel denklemdir ve bu denklemin kesin çözümünün bulunması imkansızdır. Bunun için (1) diferansiyel denklemine karşılık gelen ayrık modelin fark denkleminin elde edilmesi gerekiyor. Bu durumda ayrık modelin hatası ortaya çıkıyor.

Fark denkleminin çözümünü I_2 ile yazarsak,

$$\delta_2 = \mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_2$$

sayısal yöntemin hatası olacaktır.

Ayrık modelin çözümünü herhangi bir yaklaşık yöntem ile elde edebiliriz. Elde edilen yaklaşık çözümü I_3 ile gösterirsek,

$$\delta_3 = \mathrm{I}_2 - \mathrm{I}_3$$

yaklaşık yöntemin hatası olacaktır. Bu işlemler yapıldığı zaman sürekli yuvarlamalar yapıldığı için sonuç yuvarlama hatalarını da içermektedir. Bu durumda toplam hata

$$\delta = |\mathrm{I} - \mathrm{I}_3|$$

olacaktır.

$$\delta = |\mathrm{I} - \mathrm{I}_3| = |\mathrm{I} - \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_2 - \mathrm{I}_3|$$

$$\leq |\mathrm{I} - \mathrm{I}_1| + |\mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_2| + |\mathrm{I}_2 - \mathrm{I}_3|$$

$$\leq \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$$

Aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

Örnek 1. $\sin 10000$ **değerinin işaretini bulunuz.**

Çözüm: $\pi = 3.14$ alırsak $\dfrac{10000}{\pi} \approx \dfrac{10000}{3.14} = 3184,7...$ olur.

Yani

$3184\pi < 10000 < 3185\pi$

koşulu sağlanır.

Bellidir ki,

$x \in [0, \pi]$ noktalarında $\sin x > 0$

$x \in [\pi, 2\pi]$ noktalarında $\sin x < 0$

$x \in [2\pi, 3\pi]$ noktalarında $\sin x > 0$

$x \in [3\pi, 4\pi]$ noktalarında $\sin x < 0$

....

$x \in [(2k-1)\times\pi, \quad 2k\times\pi]$ noktalarında $\sin x < 0$

$x \in [2k\times\pi, \quad (2k+1)\pi]$ noktalarında $\sin x > 0$

O halde $3184\pi < 10000 < 3185\pi$ olduğundan

$\sin 10000 > 0$

Bulunmuş oluyor.

Fakat $\pi = 3.1416$ alırsak $\dfrac{10000}{\pi} \approx \dfrac{10000}{3.1416} = 3183,091...$ olur.

$$3183,09... = \frac{10000}{3.1416} < \frac{10000}{\pi} < \frac{10000}{3.1415} = 3183,19...$$

Buradan

$3183\pi < 10000 < 3184\pi$ olduğu görülmektedir.

YANİ $\sin 10000 < 0$

Bulunmuş oluyor.

Örnek 2. $\begin{cases} x+10y=11.01 \\ 100x+1001y=1101 \end{cases}$ **sistemini inceliyelim.**

$\begin{cases} x+10y=11.01 \\ 100x+1001y=1101 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 100x+1000y=1101 \\ 100x+1001y=1101 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=11.01 \end{cases}$ Bulunuyor.

Eğer sistemin birinci denkleminde sağ tarafıta yuvarlama işlemi yaparsak sistem

$$\begin{cases} x+10y=11 \\ 100x+1001y=1101 \end{cases}$$

Şekline dönüşecektir.

$\begin{cases} x+10y=11 \\ 100x+1001y=1101 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 100x+1000y=1100 \\ 100x+1001y=1101 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases}$ bulunuyor.

Küçük bir yuvarlamanın çözüme etkisini görmüş oluyoruz.