Lineer Olmayan Denklem Sisteminin Yaklaşık ÇözümYöntemleri

Basit İterasyon YÖNTEMİ

Gauss-Seidel YÖNTEMİ

Lineer Olmayan Denklem Sisteminin Yaklaşık ÇözümYöntemleri

Basit İterasyon YÖNTEMİ

$$F_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0, \qquad i = \overline{1,n}$$

sistemini aşağıdaki şekilde de yazabiliriz:

$x_i = \varphi_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n),\ i = \overline{1,n}$ (1)

lineer olmayan denklemler sistemini ele alalım.

(1) sisteminin çözümü $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ olsun.

Yani,

$$x_i = \alpha_i\,, \qquad i = \overline{1,n}$$

(1) sisteminin çözümü olsun.

$$F_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0, \qquad i = \overline{1,n}$$

φ_i fonksiyonları belli koşulları sağladığında α_i , $i = \overline{1,n}$ çözümlerinin yakın civarında ele alınan $x_i^{(0)}$, $i = \overline{1,n}$ başlangıç yaklaşımları ile (1) sisteminin çözümünü $\varepsilon > 0$ kesinliği ile bulabiliriz.

Bu durumda yaklaşımlar

$$x_i^{(k+1)} = \varphi_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \; i = \overline{1,n} \qquad (2)$$

şeklinde olacaktır. $k \to \infty$ olduğunda (2) şeklinde tanımlanan $x^{(k)}$ vektörler dizisi (1) sisteminin çözümü olan α vektörüne yaklaşıyor. Yani,

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} \longrightarrow \alpha_i \,, \qquad i = \overline{1,n}$$

oluyor.

Basitlik için

$$\begin{cases} x = \varphi(x,y) \\ y = \psi(x,y) \end{cases} \qquad (3)$$

sistemini ele alalım. φ ve ψ fonksiyonları

$$D = \{(x,y) |\, a \leq x \leq b\,, \qquad c \leq y \leq d\}$$

bölgesinde tanımlı fonksiyonlar olsun. φ ve ψ fonksiyonları D bölgesinde

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \psi}{\partial x}\right| < 1 \qquad\qquad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial \psi}{\partial y}\right| < 1$$

koşullarını sağladığını varsayalım.

Yukarıdaki koşullar sağlandığı durumda $\forall\,(x_0, y_0) \in D$ için

$$\begin{cases} x_{k+1} = \varphi(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = \psi(x_k, y_k) \end{cases}, \qquad k = 1,2,\ldots \qquad (4)$$

şeklinde tanımlanan (x_k, y_k) vektörler dizisi (3) sisteminin (α, β) çözümüne yaklaşıyor. Yani, $k \to \infty$ olduğunda $(x_k, y_k) \longrightarrow (\alpha, \beta)$ yaklaşıyor.

Basit iterasyon yönteminde genel halde işlemler

$$\max_i \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| < \varepsilon$$

olduğunda durdurulur ve $\left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k+1)}, \ldots, x_n^{(k+1)}\right)$ yaklaşık çözüm olarak ele alınır. $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$başlangıç yaklaşımı grafik yardımıyla belirlenebilir.

$$\begin{cases} x_{k+1} = \varphi(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = \psi(x_k, y_k) \end{cases}, \qquad k = 1,2,\ldots \qquad (4)$$

Yaklaşımlarında (x_0, y_0) başlangıç yaklaşımı grafik yardımıyla belirlenebilir.

(4) Sistemi için

$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ ve $|y_{k+1} - y_k| < \varepsilon$

Koşulları sağlandığında işlemler durdurulur ve (x_{k+1}, y_{k+1}) yaklaşık çözüm olarak ele alınır.

Lineer Olmayan Denklem Sisteminin Yaklaşık ÇözümYöntemleri

Gauss-Seidel YÖNTEMİ

Gauss-Seidel yöntemi

$$F_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0, \qquad i = \overline{1,n}$$

sistemini aşağıdaki şekilde de yazabiliriz:

$$x_i = \varphi_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \qquad i = \overline{1,n}$$

lineer olmayan denklemler sistemini ele alalım.

(1) sisteminin çözümü $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ olsun.

Yani,

$$x_i = \alpha_i\,, \qquad i = \overline{1,n}$$

(1) sisteminin çözümü olsun.

$$x_i = \varphi_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \qquad i = \overline{1,n}$$

Gauss-Seidel yöntemi

Bellidir ki $x_i^{(k+1)}$ ler $x_i^{(k)}$ lara göre α_i çözümlerine daha yakın değerlerdir. Bu nedenle (2) yaklaşımlarını aşağıdaki şekilde yazarak yöntemin yaklaşım hızını arttırabiliriz.

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2\left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \varphi_3\left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_n^{(k+1)} = \varphi_n(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k+1)}, \dots, x_{n-1}^{(k+1)}, x_n^{(k)}) \end{cases}$$

yaklaşımları lineer olmayan denklemler sisteminin yaklaşık çözümünü bulmak için Gauss- Seidel yöntemidir

Basitlik için yine

$$\begin{cases} x = \varphi(x, y) \\ y = \psi(x, y) \end{cases}$$

sistemini ele alalım. φ ve ψ fonksiyonları

$$D = \{(x, y) |\, a \leq x \leq b\,, \qquad c \leq y \leq d\}$$

bölgesinde tanımlı fonksiyonlar olsun. φ ve ψ fonksiyonları D bölgesinde

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \psi}{\partial x}\right| < 1 \qquad\qquad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial \psi}{\partial y}\right| < 1$$

koşullarını sağladığını varsayalım.

Yukarıdaki koşullar sağlandığı durumda $\forall\,(x_0, y_0) \in D$ için yaklaşımları

$$\begin{cases} x_{k+1} = \varphi(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = \psi(x_{k+1}, y_k) \end{cases}, \quad k = 1,2,\ldots \text{ ve ya } \begin{cases} y_{k+1} = \psi(x_k, y_k) \\ x_{k+1} = \varphi(x_k, y_{k+1}) \end{cases}, \quad k = 1,2,\ldots$$

şeklinde tanımlarsak lineer olmayan sistemlerin çözümü için Gauss-Seidel yaklaşımlarını elde ederiz.

Sonuçta elde edilen (x_k, y_k) vektörler dizisi verilen sisteminin (α, β) çözümüne yaklaşıyor. Yani, $k \to \infty$ olduğunda $(x_k, y_k) \longrightarrow (\alpha, \beta)$ yaklaşıyor.

Yaklaşımlarında (x_0, y_0) başlangıç yaklaşımı grafik yardımıyla belirlenebilir.

İşlemler $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ ve $|y_{k+1} - y_k| < \varepsilon$ koşulları sağlandığında durdurulur ve (x_{k+1}, y_{k+1}) yaklaşık çözüm olarak ele alınır.

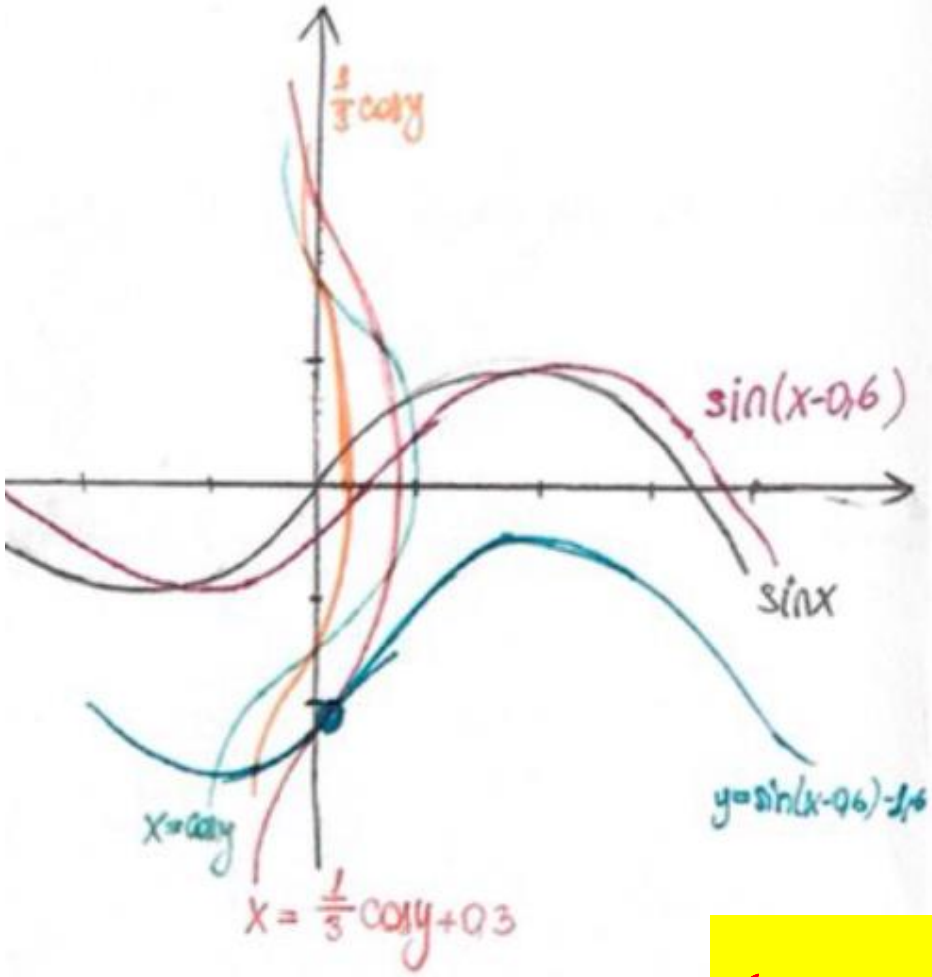
Örnek: $\begin{cases} \sin(x-0{,}6) - y = 1{,}6 \\ 3x - cosy = 0{,}9 \end{cases}$ sistemini Basit iterasyon yöntemiyle çözünüz.

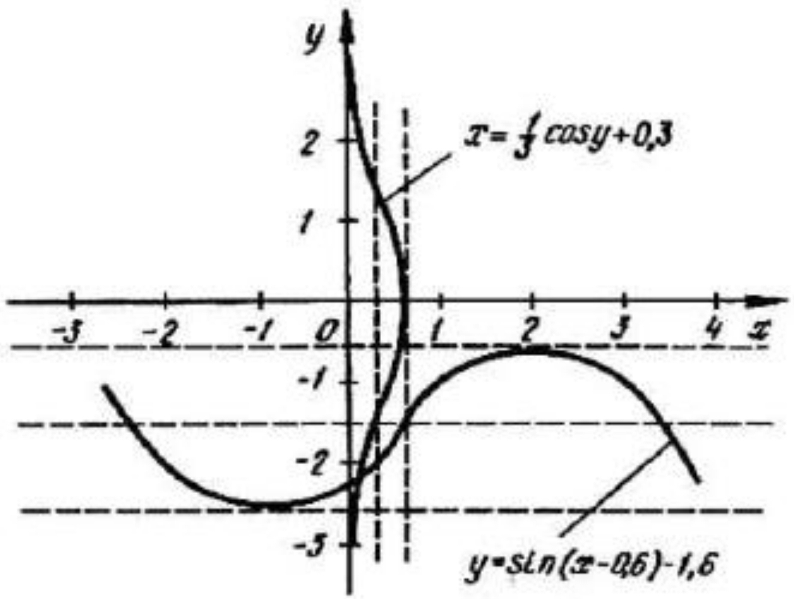
$$\begin{cases} y = \sin(x-0{,}6) - 1{,}6 \\ x = 0{,}3333cosy + 0{,}3 \end{cases}$$

(x_0, y_0) başlangıç yaklaşımını grafik yardımıyla belirleyebiliriz.

$$\begin{cases} \sin(x-0{,}6) - y = 1{,}6 \\ 3x - cosy = 0{,}9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \sin(x-0{,}6) - 1{,}6 \\ x = 0{,}3333cosy + 0{,}3 \end{cases}$$





(x_0, y_0)= $(0{,}1; -2)$ olsun

$$\begin{cases} \sin(x-0{,}6) - y = 1{,}6 \\ 3x - cosy = 0{,}9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \sin(x-0{,}6) - 1{,}6 \\ x = 0{,}3333cosy + 0{,}3 \end{cases}$$

$(x_0, y_0) = (0{,}1; -2)$

$$\begin{cases} x = 0{,}3333cosy + 0{,}3 = \varphi(x,y) \\ y = \sin(x-0{,}6) - 1{,}6 = \psi(x,y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = 0{,}3333cosy + 0{,}3 \\ \psi(x,y) = \sin(x-0{,}6) - 1{,}6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} = \mathrm{cox}(x-0{,}6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -0{,}3333\sin(y) \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right| = 0 + \left|\mathrm{cox}(x-0{,}6)\right| < 1$$

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial\psi}{\partial y}\right| = 0 + \left|-0{,}3333\sin(y)\right| < 1$$

$$\begin{cases} x_{k+1} = \varphi(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = \psi(x_k, y_k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{k+1} = 0{,}3333cosy_k + 0{,}3 \\ y_{k+1} = = \sin(x_k - 0{,}6) - 1{,}6 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}10 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}3333cosy_0 + 0{,}3 \\ y_1 = \sin(x_0 - 0{,}6) - 1{,}6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}3333cos(-2) + 0{,}3 \\ y_1 = \sin(0{,}1 - 0{,}6) - 1{,}6 \end{cases}$$

$$= 0{,}1614$$
$$= -2{,}0794$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1614 \\ -2{,}0794 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0614 \\ 0{,}0794 \end{bmatrix} > \varepsilon$$

$$\begin{cases} x_2 = 0{,}3333cosy_1 + 0{,}3 \\ y_2 = \sin(x_1 - 0{,}6) - 1{,}6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0{,}3333cos(-2{,}0794) + 0{,}3 \\ y_2 = \sin(0{,}1614 - 0{,}6) - 1{,}6 \end{cases}$$

$$= 0{,}1377$$
$$= -2{,}0246$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1366 \\ -2{,}0246 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0237 \\ 0{,}0548 \end{bmatrix} > \varepsilon$$

$$\begin{cases} x_{k+1} = \varphi(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = \psi(x_k, y_k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{k+1} = 0{,}3333cosy_k + 0{,}3 \\ y_{k+1} = = \sin(x_k - 0{,}6) - 1{,}6 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}10 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1614 \\ -2{,}0794 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1366 \\ -2{,}0246 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_3 = 0{,}3333cosy_2 + 0{,}3 \\ y_3 = \sin(x_2 - 0{,}6) - 1{,}6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 0{,}3333cos(-2{,}0246) + 0{,}3 \\ y_3 = \sin(0{,}1366 - 0{,}6) - 1{,}6 \end{cases} \quad \begin{matrix} = 0{,}1538 \\ = -2{,}046 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1538 \\ -2{,}046 \end{bmatrix} \quad \begin{vmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0172 \\ 0{,}0114 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_4 = 0{,}3333cosy_3 + 0{,}3 \\ y_4 = \sin(x_3 - 0{,}6) - 1{,}6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 0{,}3333cos(-2{,}046) + 0{,}3 \\ y_4 = \sin(0{,}1538 - 0{,}6) - 1{,}6 \end{cases} \quad \begin{matrix} = 0{,}1474 \\ = -2{,}0315 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1474 \\ -2{,}0315 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_4 - x_3 \\ y_4 - y_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0064 \\ 0{,}0145 \end{bmatrix}$$

Devamı öğrencilere……

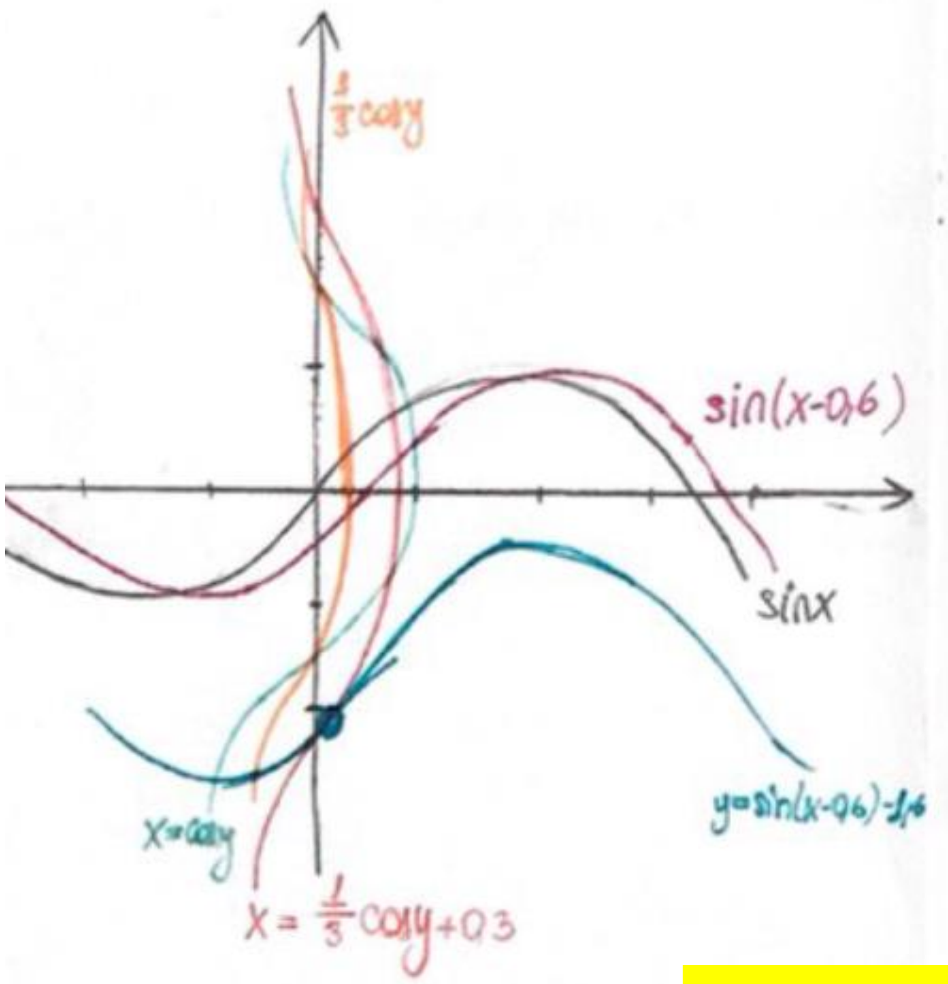
Örnek: $\begin{cases} \sin(x-0{,}6)-y=1{,}6 \\ 3x-cosy=0{,}9 \end{cases}$ sistemini Gauss-Seidel yöntemiyle çözünüz.

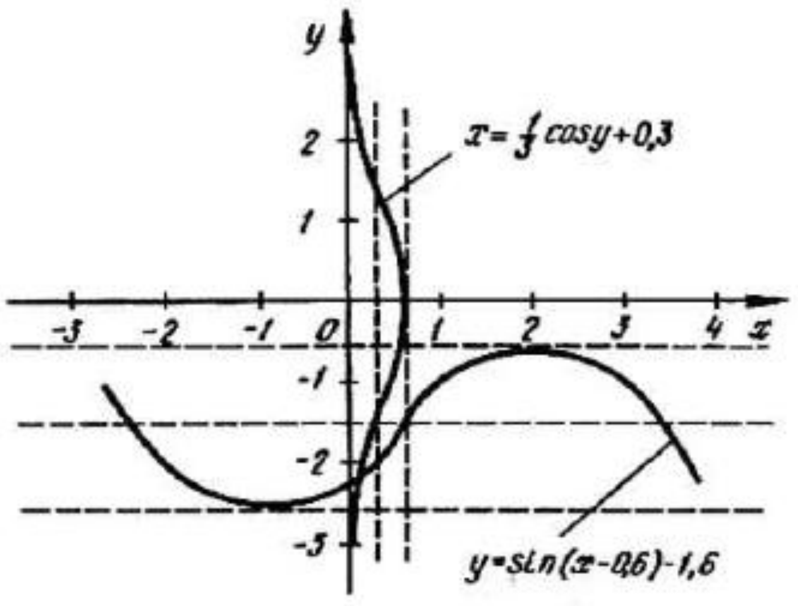
$$\begin{cases} y=\sin(x-0{,}6)-1{,}6 \\ x=0{,}3333cosy+0{,}3 \end{cases}$$

(x_0, y_0) başlangıç yaklaşımını grafik yardımıyla belirleyebiliriz.

$$\begin{cases} \sin(x-0{,}6) - y = 1{,}6 \\ 3x - cosy = 0{,}9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \sin(x-0{,}6) - 1{,}6 \\ x = 0{,}3333cosy + 0{,}3 \end{cases}$$





$(x_0, y_0) = (0{,}1; -2)$ olsun

$$\begin{cases} \sin(x-0{,}6) - y = 1{,}6 \\ 3x - cosy = 0{,}9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \sin(x-0{,}6) - 1{,}6 \\ x = 0{,}3333cosy + 0{,}3 \end{cases}$$

$(x_0, y_0) = (0{,}1; -2)$

$$\begin{cases} x = 0{,}3333cosy + 0{,}3 = \varphi(x,y) \\ y = \sin(x-0{,}6) - 1{,}6 = \psi(x,y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = 0{,}3333cosy + 0{,}3 \\ \psi(x,y) = \sin(x-0{,}6) - 1{,}6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x} = \mathrm{cox}(x-0{,}6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = -0{,}3333\sin(y) \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right| = 0 + \left|\mathrm{cox}(x-0{,}6)\right| < 1$$

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial\psi}{\partial y}\right| = 0 + \left|-0{,}3333\sin(y)\right| < 1$$

$$\begin{cases} x_{k+1} = \varphi(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = \psi(x_{k+1}, y_k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{k+1} = 0{,}3333cosy_k + 0{,}3 \\ y_{k+1} = \sin(x_{k+1} - 0{,}6) - 1{,}6 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}10 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}3333cosy_0 + 0{,}3 \\ y_1 = \sin(x_1 - 0{,}6) - 1{,}6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0{,}3333cos(-2) + 0{,}3 \\ y_1 = \sin(0{,}1614 - 0{,}6) - 1{,}6 \end{cases} \begin{matrix} = 0{,}1614 \\ = -2{,}0246 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1614 \\ -2{,}0246 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0614 \\ 0{,}0246 \end{bmatrix} > \varepsilon$$

$$\begin{cases} x_2 = 0{,}3333cosy_1 + 0{,}3 \\ y_2 = \sin(x_2 - 0{,}6) - 1{,}6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0{,}3333cos(-2{,}0246) + 0{,}3 \\ y_2 = \sin(0{,}1474 - 0{,}6) - 1{,}6 \end{cases} \begin{matrix} = 0{,}1474 \\ = -2{,}0427 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1474 \\ -2{,}0427 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0140 \\ 0{,}0181 \end{bmatrix} > \varepsilon$$

$$\begin{cases} x_3 = 0{,}3333cosy_2 + 0{,}3 \\ y_3 = \sin(x_3 - 0{,}6) - 1{,}6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 0{,}3333cos(-2{,}0427) + 0{,}3 \\ y_3 = \sin(0{,}1485 - 0{,}6) - 1{,}6 \end{cases} \begin{matrix} = 0{,}1485 \\ = -2{,}0364 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1485 \\ -2{,}0364 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}001 \\ 0{,}006 \end{bmatrix} < 10^{-2}$$