Hafta 6:
Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

Ele Alınacak Ana Konular

- Ayrık-zaman periyodik işaretlerin Fourier serisi gösterilimi
- Ayrık-zaman Fourier serisinin özellikleri
- Fourier serisi ve LTI sistemler
- Filtreleme
- Sürekli-zaman filtre örnekleri
- Ayrık-zaman filtre örnekleri

Ayrık-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

- Ayrık-zaman Fourier serisindeki amaç, periyodik bir ayrık-zaman işareti harmonik ilişkili ayrık-zaman karmaşık üstel işaretler cinsinden yazmaktır. Ancak, $\phi_k[n] = e^{jk\omega_0 n} = e^{jk(2\pi/N)n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ile verilen harmonik ilişkili karmaşık üstel kümesinde birbirinden farklı *N* adet işaret olduğunu hatırlayınız.

- *N* ile periyodik bir ayrık-zaman işareti, harmonik ilişkili üstel işaretlerin doğrusal kombinasyonu şeklinde yazmaya çalışalım:

$$x[n] = \sum_{k} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

- Birbirinden farklı *N* adet üstel işaret olduğundan, toplama *N* terim içermelidir. Toplamaya herhangi bir *k* değerinden başlanabilir (örneğin, *k* = 0,1,…, *N*-1 veya *k* = 3,4, *N*+2). Bu durumu belirtmek için *k* = <*N*> notasyonu kullanılırsa

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

- Periyodik bir ayrık-zaman işaretin bu şekilde yazılmasına ayrık-zaman Fourier serisi gösterilimi ve a_k katsayılarına Fourier serisi katsayıları denir.

Ayrık-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

- Ayrık-zaman Fourier serisi katsayılarının hesaplanmasında aşağıda verilen eşitliği kullanacağız.

$$\sum_{n=<N>} e^{jk(2\pi/N)n} = \begin{cases} N, & k = 0, \pm N, \pm 2N \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

- Fourier serisinin iki yanını $e^{-jr(2\pi/N)\,n}$ ile çarpıp, N terim üzerinden toplarsak

$$\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{n=<N>} \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n} e^{-jr(2\pi/N)n}$$
$$= \sum_{k=<N>} a_k \sum_{n=<N>} e^{j(k-r)(2\pi/N)n}$$

- İçteki toplama k = r için N, $k \neq r$ için 0'dır. O halde, iki toplama tek toplamaya indirgenir ve $k = r$ olur. Sonuç olarak,

$$\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{k=<N>} a_r N \Rightarrow a_r = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n]e^{-jr(2\pi/N)n}$$

Ayrık-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

- Ayrık-zaman periyodik işaretin Fourier serisine açılımı ve açılımdaki katsayıların hesabı aşağıdaki eşitliklerde özetlenmiştir.

Sentez denklemi: $$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

Analiz denklemi: $$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

- $\phi_k[n] = e^{-jk(2\pi/N)\,n}$ olsun. Sentez denklemi, k = 0,1,…, N-1 veya k = 1,2,…, N için yazılırsa aynı sonucu vereceğinden

$$x[n] = a_0\phi_0[n] + a_1\phi_1[n] + \cdots + a_{N-1}\phi_{N-1}[n]$$
$$x[n] = a_1\phi_1[n] + a_2\phi_2[n] + \cdots + a_N\phi_N[n]$$

- Ancak, $\phi_0[n] = \phi_N[n]$ olduğundan, yukarıdaki eşitliklerden $a_0 = a_N$ sonucu çıkar. Benzer işlemler, arka arakaya gelen N adet k için yapılırsa $a_k = a_{k+N}$ elde edilir. Yani, periyodik bir ayrık-zaman işaretin Fourier serisi katsayıları da periyodiktir!

Ayrık-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

ÖRNEK: Sinüzoidal işaretler için Fourier serisi doğrudan hesaplanabilir. Aşağıda verilen işaretin Fourier serisi gösterilimini elde edelim.

$$x[n] = \sin(\omega_0 n)$$

Çözüm: $2\pi/\omega_0$ rasyonel bir sayı ise $x[n]$ periyodiktir. Bu koşulun sağlanması halinde iki durum vardır:

Durum 1: N bir tamsayı olmak üzere, $2\pi/\omega_0 = N$
Durum 2: N ve M tamsayılar olmak üzere, $2\pi/\omega_0 = N/M$

Durum1: Euler ilişkisinden

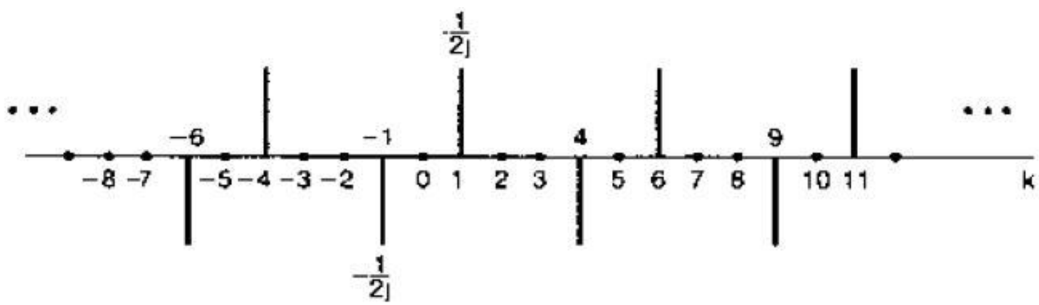
$$x[n] = \sin(\omega_0 n) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}\right)$$

$$= \frac{1}{2j} e^{j(2\pi/N)n} - \frac{1}{2j} e^{-j(2\pi/N)n} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2j},\ a_{-1} = -\frac{1}{2j},\ a_k = 0,\ k \neq \pm 1$$

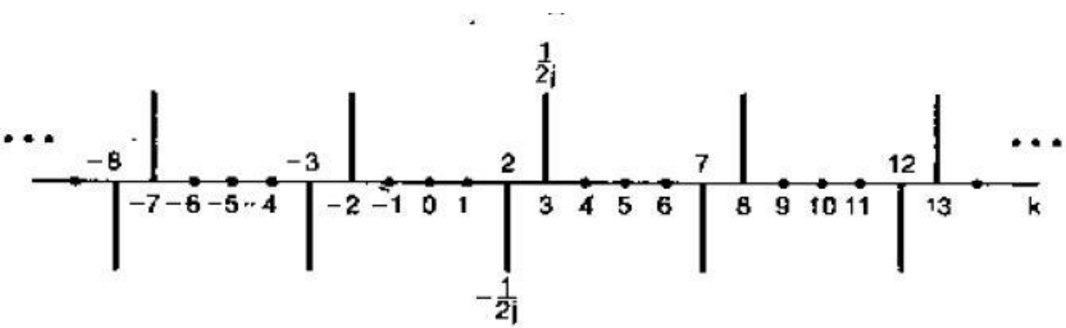
<u>Durum2:</u> Euler ilişkisinden

$$x[n]=\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 n}-e^{-j\omega_0 n}\right)=\frac{1}{2j}e^{jM(2\pi/N)n}-\frac{1}{2j}e^{-jM(2\pi/N)n}\Rightarrow a_M=\frac{1}{2j},\ a_{-M}=-\frac{1}{2j},\ a_k=0,\ k\neq\pm M$$

Fourier serisi katsayıları her iki durum için aşağıda çizilmiştir. Katsayıların periyodik olduğuna dikkat ediniz.



Durum 1: N = 5



Durum 2: M=3, N=5

Ayrık-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

ÖRNEK: Aşağıdaki işaretin ayrık-zaman Fourier serisi gösterilimini elde edelim

$$x[n]=1+\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)+3\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{N}n+\frac{\pi}{2}\right)$$

ÇÖZÜM: İşaret N ile periyodiktir. Euler ilişkisinden

$$x[n]=1+\frac{1}{2j}\left[e^{j(2\pi/N)n}-e^{-j(2\pi/N)n}\right]+\frac{3}{2}\left[e^{j(2\pi/N)n}+e^{-j(2\pi/N)n}\right]+\frac{1}{2}\left[e^{j(4\pi/N+\pi/2)n}+e^{-j(4\pi/N+\pi/2)n}\right]$$

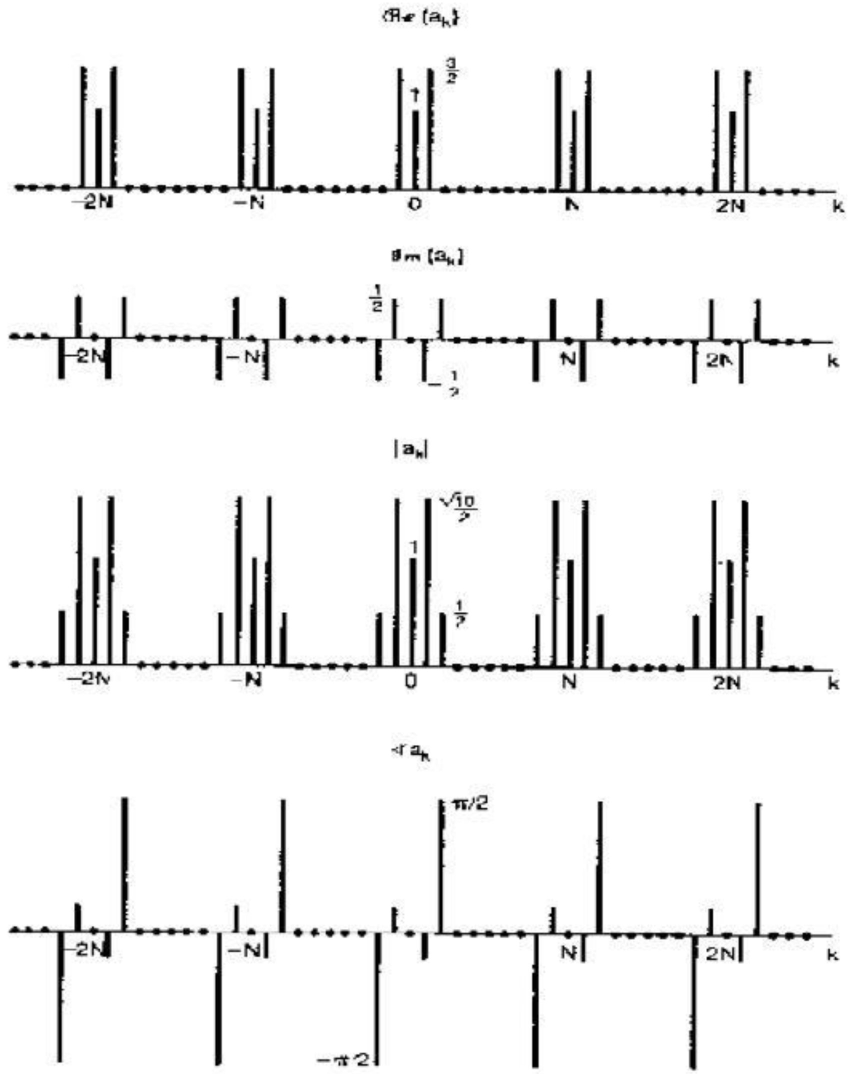
$$=1+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2j}\right)e^{j(2\pi/N)n}+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2j}\right)e^{-j(2\pi/N)n}+\left(\frac{1}{2}e^{j\pi/2}\right)e^{j2(2\pi/N)n}+\left(\frac{1}{2}e^{-j\pi/2}\right)e^{-j2(2\pi/N)n}$$

Fourier serisi katsayıları doğrudan yazılabilir:

$$a_0=1,\ a_1=\frac{3}{2}+\frac{1}{2j}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}j,\ a_{-1}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2j}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}j$$

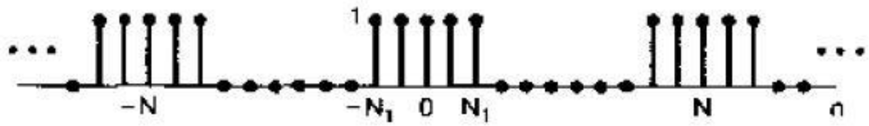
$$a_2=\frac{1}{2}j,\ a_{-2}=-\frac{1}{2}j,\ a_k=0,\ k\neq 0,\pm1,\pm2.$$

Fourier serisi katsayılarının gerçel ve sanal kısımları, genliği ve fazı aşağıda çizilmiştir.



Ayrık-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

ÖRNEK: Aşağıdaki verilen periyodik ayrık-zaman kare dalganın Fourier serisi gösterilimini elde edelim



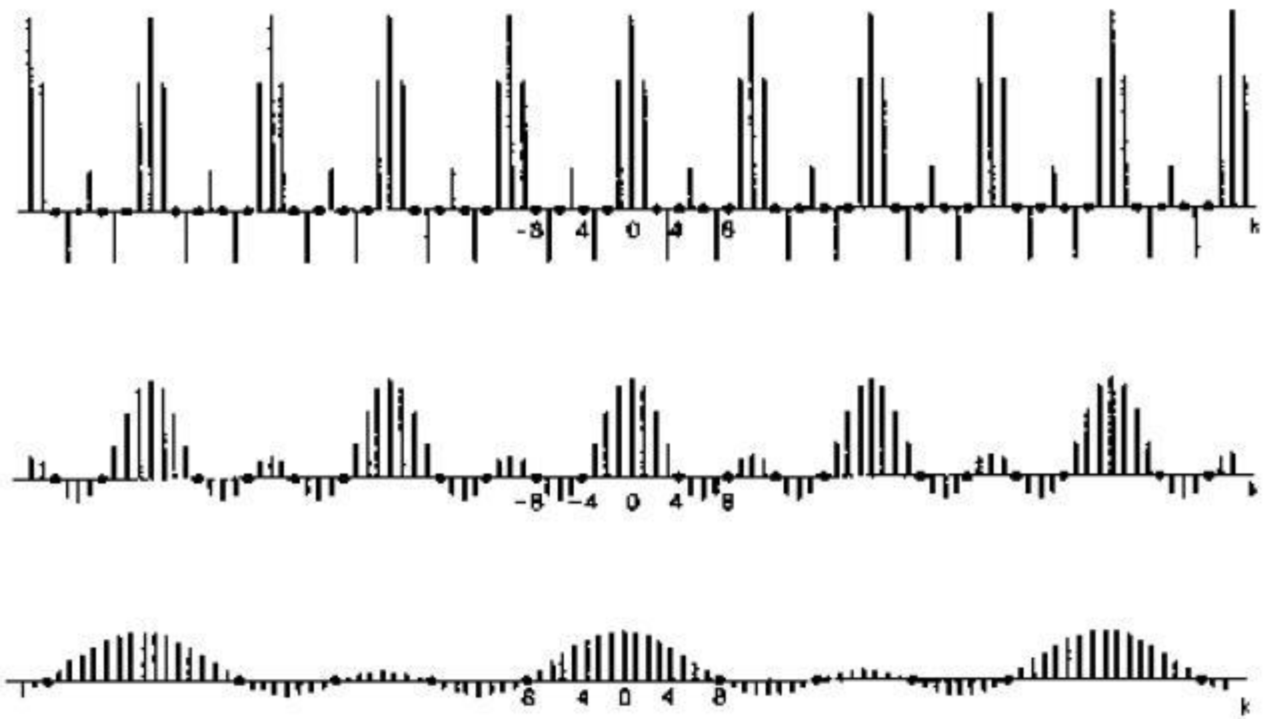
ÇÖZÜM:

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)(m-N_1)} = \frac{1}{N}e^{-jk(2\pi/N)N_1}\sum_{m=-0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)m}$$

$$= \frac{1}{N}e^{-jk(2\pi/N)N_1}\left(\frac{1-e^{-jk2\pi(2N_1+1)/N}}{1-e^{-jk(2\pi/N)}}\right) = \frac{1}{N}\frac{e^{-jk(2\pi/2N)}\left[e^{jk2\pi(N_1+1/2)/N}-e^{-jk2\pi(N_1+1/2)/N}\right]}{e^{-jk(2\pi/2N)}\left[e^{jk(2\pi/2N)}-e^{-jk(2\pi/2N)}\right]}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{N}\dfrac{\sin[2\pi k(N_1+1/2)/N]}{\sin(\pi k/N)}, & k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \cdots \\[2ex] \dfrac{2N_1+1}{N} & k = 0, \pm N, \pm 2N, \cdots \end{cases}$$

Fourier serisi katsayıları $2N_1+1=5$ ve $N = 10, 20, 40$ için aşağıda çizilmiştir.



$N = 10$

$N = 20$

$N = 40$

Ayrık-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

- Temel periyodu N ve temel frekansı $\omega_0 = 2\pi/N$ olan periyodik bir ayrık-zaman işaretin Fourier serisi katsayılarının a_k olduğunu belirtmek için

$$x[n] \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$$

  notasyonunu kullanacağız.

- Ayrık-zaman Fourier serisinin aşağıda verilen özellikleri aracılığıyla, Fourier serisi katsayıları bilinen işaretler yardımıyla çoğu işaretin Fourier serisi açılımını elde etmek kolaylaşmaktadır.

- Özellikler, sürekli durumdakine benzer bir şekilde kolaylıkla ispatlanabilir.

Ayrık-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

Özellik	**Periyodik İşaret**	**Fourier Serisi Katsayıları**
	$\left.\begin{matrix} x[n] \\ y[n] \end{matrix}\right\}$ $\omega_0 = 2\pi / N$ temel frekansı ve N temel periyodu ile periyodik	a_k b_k
Doğrusallık	$Ax[n] + By[n]$	$Aa_k + Bb_k$
Zamanda öteleme	$x[n - n_0]$	$a_k e^{-jk\omega_0 n_0} = a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0}$
Frekansta öteleme	$e^{jM\omega_0 t} x[n] = e^{jM(2\pi/N)t} x[n]$	a_{k-M}
Eşlenik alma	$x^*[n]$	a^*_{-k}
Zamanda tersine çevirme	$x[-n]$	a_{-k}
Zamanda ölçekleme	$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m], & n, m \text{ nin tam katı} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$	$\frac{1}{m} a_k$
Periyodik konvolüsyon	$\sum_{r=<N>} x[r] y[n-r]$	$N a_k b_k$
Zamanda çarpma	$x[n]y[n]$	$\sum_{l=<N>} a_l b_{k-l}$

Ayrık-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

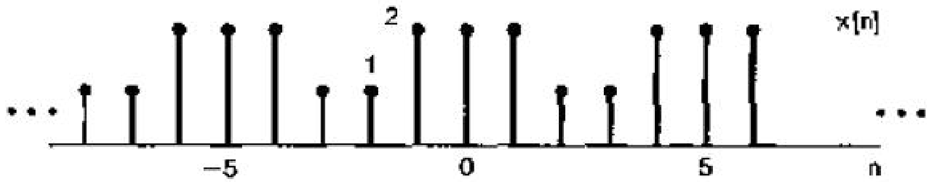
Özellik	**Periyodik İşaret**	**Fourier Serisi Katsayıları**
Zamanda fark alma	$x[n]-x[n-1]$	$\left(1-e^{-jk(2\pi/N)}\right)a_k$
Zamanda toplama	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\left(\frac{1}{1-e^{-jk(2\pi/N)}}\right)a_k$
Gerçel işaretler için eşlenik simetriklik	$x[n]$ gerçel	$\begin{cases} a_k = a_{-k}^* \\ \Re e\{a_k\} = \Re e\{a_{-k}\} \\ \Im m\{a_k\} = -\Im m\{a_{-k}\} \\ \lvert a_k \rvert = \lvert a_{-k} \rvert \\ \prec a_k = -\prec a_{-k} \end{cases}$
Gerçel ve çift işaretler Gerçel ve tek işaretler	$x[n]$ gerçel ve çift $x[n]$ gerçel ve tek	a_k gerçel ve çift a_k saf karmaşık ve tek
Gerçel işaretlerin çift-tek ayrıştırması	$x_e[n] = \mathrm{Ev}\{x[n]\}$ $[x[n]$ gerçel $]$ $x_o[n] = \mathrm{Od}\{x[n]\}$ $[x[n]$ gerçel$]$	$\Re e\{a_k\}$ $j\Im m\{a_k\}$

Periyodik İşaretler için Parseval İlişkisi

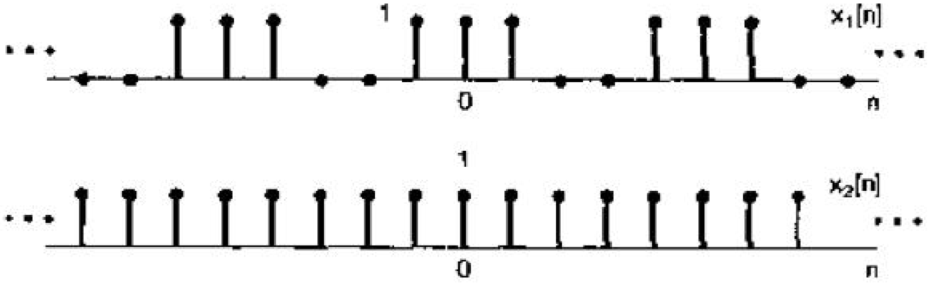
$$\frac{1}{T}\sum_{n=<N>} \lvert x[n] \rvert^2 = \sum_{k=<N>} \lvert a_k \rvert^2$$

Ayrık-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

ÖRNEK: Ayrık-zaman Fourier serisinin özelliklerinden yararlanarak aşağıda verilen $x[n]$ işaretinin ($N = 5$ ile periyodik) Fourier serisi katsayılarını bulalım.



ÇÖZÜM: $x[n]$ işareti, aşağıda gösterildiği gibi $x_1[n]$ ve $x_2[n]$ işaretlerinin toplamı olarak yazılabilir.



$$x[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

$x[n]$, $x_1[n]$ ve $x_2[n]$ işaretlerinin Fourier serisi katsayıları sırasıyla a_k ,b_k ve c_k olsun. Doğrusallık özelliğinden $a_k = b_k + c_k$

b_k daha önce bulunmuştu (N_1=1, N = 5): $b_k = \begin{cases} \dfrac{1}{5}\dfrac{\sin[3\pi k/5]}{\sin(\pi k/5)}, & k \neq 0, \pm 5, \pm 10, \cdots \\ \dfrac{3}{5} & k = 0, \pm 5, \pm 10, \cdots \end{cases}$

$x_2[n]$ işareti sabit (DC) olup sıfırdan farklı bir Fourier serisi katsayısına sahiptir:

$$c_k = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ 1, & k = 0 \end{cases}$$

Fourier serisi katsayıları 5 ile periyodik olduğundan $c_k = \begin{cases} 0, & k \neq 0, \pm 5, \pm 10, \cdots \\ 1, & k = 0, \pm 5, \pm 10, \cdots \end{cases}$

O halde,

$$a_k = b_k + c_k = \begin{cases} \dfrac{1}{5}\dfrac{\sin(3\pi k/5)}{\sin(\pi k/5)}, & k \neq 0, \pm 5, \pm 10, \cdots \\ \dfrac{8}{5}, & k = 0, \pm 5, \pm 10, \cdots \end{cases}$$

Ayrık-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

ÖRNEK: Hakkında aşağıdaki bilgiler bilinen bir ayrık-zaman işareti bulunuz.

1. $x[n]$, $N = 6$ ile periyodiktir,

2. $\sum_{n=0}^{5} x[n] = 2$

3. $\sum_{n=2}^{7} (-1)^n x[n] = 1$

4. Yukarıdaki üç koşulu sağlayan işaretler arasından, periyot başına en küçük enerjiye $x[n]$ sahiptir.

ÇÖZÜM:

2 nolu bilgiden a_0=1/3.

$(-1)^n = e^{-j\pi n} = e^{-j(2\pi/6)3n}$ olduğundan, 3 nolu bilgiden a_3=1/3 .

İşaretteki ortalama güç Parseval ilişkisi kullanılarak hesaplanabilir:

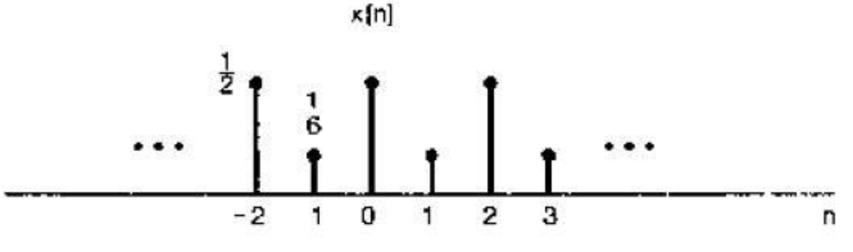
$$P = \sum_{k=0}^{5} \left| a_k \right|^2$$

a_k katsayılarının her birinin P'ye katkısı pozitif bir sayıdır. a_0 ve a_3 değerleri belli olduğundan, P'nin en küçük olabilmesi için $a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = 0$ olmalıdır. Tüm katsayılar belirlendiğinden, sentez denklemi kullanılarak işaret belirlenebilir.

$$x[n] = \sum_{k=0}^{5} a_k e^{jk(2\pi/N)n} = \sum_{k=0}^{5} a_k e^{jk(2\pi/6)n}$$

$$= a_0 + a_3 e^{j\pi n} = (1/3) + (1/6)(-1)^n$$

Bir periyot boyunca işaretin değişimi aşağıda verilmiştir



Fourier Serisi ve LTI Sistemler

- İmpuls yanıtı $h(t)$ olan bir sürekli-zaman LTI sistemin girişine e^{st} uygulandığında sistemin çıkışı $H(s)$

$$\boxed{H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt}$$

olmak üzere, $y(t) = H(s)e^{st}$ ile veriliyordu.

- Benzer şekilde, impuls yanıtı $h[n]$ olan bir ayrık-zaman LTI sistemin z^n girişine olan yanıtı $H(z)$

$$\boxed{H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}}$$

olmak üzere, $y[n] = H(z)z^n$ eşitliğinden hesaplanmaktaydı.

- s ve z genel karmaşık sayılar olduğunda $H(s)$ ve $H(z)$'ye SİSTEM FONKSİYONU denir.

Fourier Serisi ve LTI Sistemler

- $s = j\omega$ özel durumunda (giriş ω frekanslı karmaşık üstel işaretse) sürekli-zaman sistem fonksiyonuna sistemin FREKANS YANITI denir ve $H(j\omega)$ ile gösterilir:

$$\boxed{H(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt}$$

- Benzer şekilde, $z = e^{j\omega}$ ise, ayrık-zaman sistem fonksiyonuna frekans yanıtı denir ve $H(e^{j\omega})$ ile belirtilir:

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega n}}$$

- LTI bir sistemin periyodik bir işarete yanıtı, sistemin frekans yanıtından kolaylıkla belirlenebilir. Adımlar aşağıda verilmiştir.

Fourier Serisi ve LTI Sistemler

- Sürekli-zaman: Periyodik $x(t)$ işareti impuls yanıtı $h(t)$ olan bir LTI sisteme uygulandığında çıkışı hesaplayalım.

- $x(t)$ periyodik olduğundan Fourier serisine açılabilir: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$

- Herhangi bir karmaşık üstel $(a_k e^{jk\omega_0 t})$ işarete yanıt: $a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$

- Sistem doğrusal oduğundan, sistemin karmaşık üstel işaretlerin toplamına olan yanıtı, karmaşık üstel işaretlere tek tek yanıtlarının toplamına eşittir.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

- Gözlem: Çıkış da periyodiktir. Girişin Fourier serisi katsayıları a_k ise çıkışın Fourier serisi katsayıları $H(jk\omega_0)a_k$'dır. Yani, giriş katsayıları frekans yanıtının karşılık gelen frekanstaki değeriyle çarpılmaktadır.

Fourier Serisi ve LTI Sistemler

- Ayrık-zaman: Periyodik $x[n]$ işareti impuls yanıtı $h[n]$ olan bir LTI sisteme uygulandığında çıkışı hesaplayalım.

- $x[n]$ periyodik olduğundan Fourier serisine açılabilir: $x[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$

- Herhangi bir karmaşık üstel ($a_k e^{jk(2\pi/N)n}$) işarete yanıt: $a_k H(e^{j2\pi k/N})e^{jk(2\pi/N)n}$

- Sistem doğrusal oduğundan, sistemin karmaşık üstel işaretlerin toplamına olan yanıtı, karmaşık üstel işaretlere tek tek yanıtlarının toplamına eşittir.

$$x[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \Rightarrow y[n]=\sum_{k=<N>} a_k H(e^{j2\pi k/N})e^{jk(2\pi/N)n}$$

- Gözlem: Çıkış da periyodiktir. Girişin Fourier serisi katsayıları a_k ise çıkışın Fourier serisi katsayıları $H(e^{j2\pi k/N})a_k$ 'dır. Yani, giriş katsayıları frekans yanıtının karşılık gelen frekanstaki değeriyle çarpılmaktadır.

Fourier Serisi ve LTI Sistemler

ÖRNEK: Aşağıda verilen sürekli-zaman periyodik işaret, impuls yanıtı $h(t) = e^{-t}\, u(t)$ olan sisteme uygulandığında, çıkışın Fourier serisi katsayılarını bulunuz.

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{2}{3}\cos(6\pi t)$$

ÇÖZÜM: Giriş ve çıkışın katsayıları a_k ve b_k olsun. İlk önce frekans yanıtını hesaplayalım.

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-t}e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{1+j\omega}$$

Girişin temel periyodu $T = 1$ ($\omega_0 = 2\pi$) olduğundan çıkışın da temel periyodu 1'dir. Ayrıca, girişin $k \neq 0, \pm1, \pm2, \pm3$ için Fourier serisi katsayıları sıfırdır. O halde,

$$y(t) = \sum_{k=-3}^{3} b_k e^{jk2\pi t}, \quad b_k = a_k H(jk2\pi), \quad b_0 = 1,$$

$$b_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+j2\pi}\right), \quad b_{-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-j2\pi}\right)$$

$$b_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+j4\pi}\right), \quad b_{-2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-j4\pi}\right)$$

$$b_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+j6\pi}\right), \quad b_{-3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-j6\pi}\right)$$

Fourier Serisi ve LTI Sistemler

ÖRNEK: İmpuls yanıtı $h[n] = \alpha^{-n}u[n]$, ($-1 < \alpha < 1$) olan sisteme $x[n] = \cos(2\pi n / N)$ uygulandığında, çıkışın Fourier serisi katsayılarını bulunuz.

ÇÖZÜM: Çıkışın katsayıları b_k olsun. İlk önce frekans yanıtını hesaplayalım.

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha e^{-j\omega}\right)^n = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

Euler ilişkisinden $x[n] = \frac{1}{2}e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2}e^{-j(2\pi/N)n}$

O halde,

$$y[n] = \frac{1}{2}H\left(e^{j2\pi N}\right)e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2}H\left(e^{-j2\pi N}\right)e^{-j(2\pi/N)n}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j2\pi N}}\right)e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{j2\pi N}}\right)e^{-j(2\pi/N)n}$$

Diğer bir deyişle, $b_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j2\pi N}}\right)$, $b_{-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{j2\pi N}}\right)$, $b_k = 0, \quad k \neq \pm 1$