SAYISAL İNTEGRAL

[a,b] aralığında tanımlı f(x) fonksiyonunu ele alalım.

Bazen f(x) fonksiyonunun $I(f)=\int_a^b f(x)dx$ ***(1)*** *belirli integralinin yaklaşık hesaplanması gerekiyor.[a,b] aralığında*

$$w_h=\{x_i / x_{i+1}=x_i+h,\ x_0=a,\ x_n=b,\ h=\frac{b-a}{n},\ i=\overline{0,n-1}\}$$

eşit adımlı kafesini tanımlayalım.

Bellidirki $x_i \in w_h$, $i=\overline{0,n}$ *noktalarında f(x) fonksiyonunun* $f_i=f(x_i)$ *değerleri verildiğinde bu fonksiyona karşılık gelen Lagrange enterpolasyon polinomunu yazabiliriz. O halde enterpolasyon polinomundan yararlanadak bu fonksiyonu*

$$f(x)=L_n(x)+R_n(x) \quad \textbf{(2)}$$

şeklinde yazabiliriz. (2)' nin her iki tarafını [a,b] de integrallersek,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b L_n(x)dx+\int_a^b R_n(x)dx \quad \textbf{(3)}$$

yazarız. $R_n(x)$ *enterpolasyon polinomunun hatası olduğundan integralin değeri yaklaşık olarak*

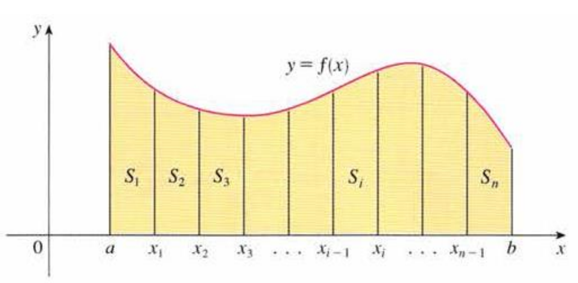
$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx \quad \textbf{(4)}$$

Şeklinde hesaplanabilir.

İntegralin toplamsallık özelliğine göre

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \quad \textbf{(5)}$$

Yazabiliriz.



Bu nedenle önce $f(x)$ *fonksiyonunun* $[x_i, x_{i+1}]$ *aralığında integralini hesaplayalım.*

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx=\int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{n,i}(x)dx$$

Burada $L_{n,i}(x)$ *ifadesi* $[x_i, x_{i+1}]$ *aralığında n. Dereceden Lagrange polinomudur.*

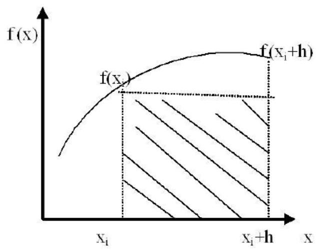
Basitlik için $[x_i, x_{i+1}]$ *aralığında Lagrange polinomunu sıfırıncı (n=0) dereceden ele alalım.*

$f(x_i) = L_{0,i}(x)$ *yazalım. Önce* $L_{0,i}(x)$ *yerine* $f(x_i)$ *yazalım:*

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{0,i}(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)dx = f(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx =$$

$$f(x_i)\,(x_{i+1} - x_i) = \quad h\, f(x_i) \qquad \textbf{(6)}$$

(6) ifadesine $f(x)$ *fonksiyonunun* $[x_i, x_{i+1}]$ *aralığında yaklaşık integral hesabı için*



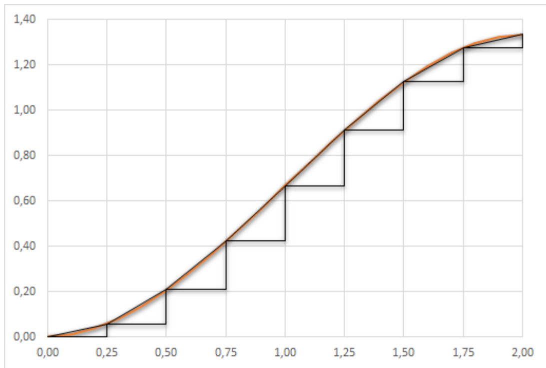
"SOL DİKDÖRTGENLER FORMÜLÜ " *denir.*

(6)' yı (5)' te göz önüne alırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_a^b f(x)dx == \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} h\, f(x_i) = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) =$$

$$h\,[\, f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\,] \qquad \textbf{(7)}$$

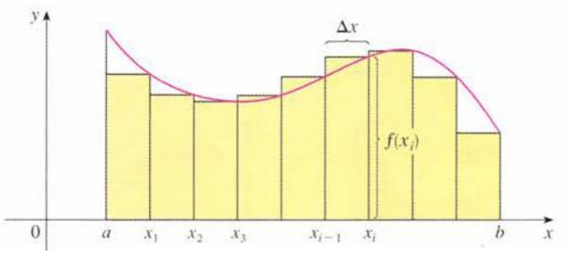


(7) ifadesi yaklaşık integral hesaplaması için ***' GENELLEŞMİŞ SOL DİKDÖRTGENLER FORMÜLÜ'*** *dür.*

Şimdi ise sıfırıncı dereceden polinom olarak $L_{0,i}(x) = f(x_{i+1})$ *ele alalım. Bu durumda* $[x_i, x_{i+1}]$ *yaklaşık integral hesabı için (6) ya benzer olan ifadeyi elde ederiz:*

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{0,i}(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_{i+1})dx = f(x_{i+1}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx = h\, f(x_{i+1}) \qquad \textbf{(8)}$$

(8) ifadesi yaklaşık integral hesabı için ***'SAĞ DİKDÖRTGENLER FORMÜLÜ'*** *dür. (8)' i (5)' te yazarsak , [a,b] de yaklaşık integral hesabı için* ***GENELLEŞMIŞ SAĞ DIKDÖRTGENLER FORMÜLÜNÜ*** *elde ederiz.*



$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} h\, f(x_{i+1}) = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) =$$

$$h\,[\, f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)\,]$$

(9) *olur.*

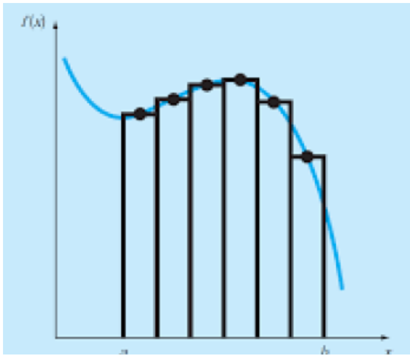
Şimdi ise $x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$ *olmakla* $L_{0,i}(x) = f(x_{i+\frac{1}{2}})$ *ele alalım.*

Bu durumda

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{0,i}(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)dx = f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)h \qquad \textbf{(10)}$$

olur.

(10) u (5) te yazalım.



$$\int_a^b f(x)dx ==$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{0,i}(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} h\, f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) = h\,[f\left(x_{\frac{1}{2}}\right) + f\left(x_{\frac{3}{2}}\right) + f\left(x_{\frac{5}{2}}\right) + \ldots + f\left(x_{n-\frac{1}{2}}\right)] \qquad \textbf{(11)}$$

(10) ifadesine yaklaşık integral için ***'MERKEZ DİKDÖRTGENLER FORMÜLÜ'****,* *(11) e ise* ***'GENELLEŞMİŞ MERKEZ DİKDÖRTGENLER FORMÜLÜ'*** *denir.*

Örneğin $y=x^2$ *fonksiyonunun [0,1] aralığında Sol ve sağ dikdörtgenler formülü ile hesaplanması tekniği geometric olarak aşağıda gösterilmiştir.*