SAYISAL İNTEGRALLEME FORMÜLLERİNİN HATASI

Bellidir ki [a,b] aralığında tanımlı ve (n+1). mertebeye dek sürekli diferansiyellenebilir f(x) fonksiyonunu ele alalım. Eğer [a,b]'de tanımlı eşit adımlı

$$W_h = \left\{ x_i \middle| x_{i+1} = x_i + h,\ x_0 = a,\ x_n = b,\ i = \overline{0, n-1},\ h = \frac{b-a}{n} \right\}$$

Eşit adımlı kafesinin x_i noktalarında $f(x_i)=f_i$ değerleri verilmiş ise, o halde $f(x_i) = L_n(x_i)$ koşullarını sağlayan n. dereceden $L_n(x)$ Lagrange polinomunu yazabiliriz.

O halde bu fonksiyonu Lagrange enterpolasyon polinomu yardımı ile

$$f(x) = L_n(x) + R_n(x) \qquad \textbf{(1)}$$

şeklinde tanımlayabiliriz .

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \qquad \textbf{(2)}$$

integralini hesaplamak için (1) ifadesinin her iki tarafının [a,b] aralığında integralini hesaplarsak

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_n(x)dx + \int_a^b R_n(x)dx$$

yazabiliriz. . $R_n(x)$ ifadesinin polinomun hatası olduğunu göz önüne alırsak, bu hatayı göz ardı edersek, integralin yaklaşık değerini hesaplamak için

$$\tilde{I}(f) \approx \int_a^b L_n(x)dx \qquad \textbf{(3)}$$

elde ederiz. Bu durumda hata için

$$\Psi(\mathrm{I}) = I(f) - \tilde{I}(f) = \int_a^b R_n(x)dx = \int_a^b [f(x) - L_n(x)]dx$$

olacaktır.

Bellidir ki, Lagrange enterpolasyon polinomunun hatası

$$f(x) - L_n(x) = R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \dots .(x - x_n)$$
(4)

Şeklinde hesaplanır. Yani (4) ifadesini verilen aralıkta integrallersek sayısal integralleme formüllerinin hatasını değerlendirebiliriz.

Önce sol dikdörtgenler formülünün hatasını değerlendirelim.

SOL DİKDÖRTGENLER FORMÜLÜNÜN HATASI:

$M_i(f) = \max\limits_{x\in[x_i, x_{i+1}]} |f'(x)|\ dir,\ \ Yani\ M_i(f)$, $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında fonksiyonun birinci türevinin en büyük değeri olmakla, sol dikdörtgenler yönteminin hatası $O(h^2)$ dir.

$\left|\psi_{sol}(f_i)\right| \le \frac{h^2}{2}\left|f'(x_i)\right|$ değerlendirmesine göre göre

Genelleşmiş sol dikdörtgenler formülünün hatasını ise

$$\left|\psi(I^{sol})\right| = \sum_{i=1}^{n-1}\left|\psi(f_i)\right| \le \sum_{i=1}^{n-1}\frac{h^2}{2} f'(x_i) \le M(f)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{h^2}{2} = M(f)(n-1)\frac{h^2}{2} = \frac{1}{2}M(f)(b-a)h$$

Yani O(h) dır.

Burada $M(f) = \max\limits_{i} M_i(f) = \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

<u>Benzer şekilde genelleşmiş sağ dikdörtgenler yönteminin hatasının O(h) olduğunu kendimiz (yani öğrenciler) yapabiliriz.</u>

(B) MERKEZ DİKDÖRTGENLER FORMÜLÜNÜN HATASI:

Merkez dikdörtgenler formülünün hatasını değerlendirmek için $L_{0,i}(x) = f(x_{i+\frac{1}{2}})$ ele alındığından

$$\Psi_{mer}(L_{0,i}) = \int_{x_i}^{x_{i+1}}[f(x) - f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)]dx$$

integralinin hesaplanması gerekiyor.

$M_i(f) = \max\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]} |f''(x)|$ olmakla

$\Psi_{merkez}\left(L_{0,i}\right) \leq = \frac{M_i(f)}{24} h^3$

Olduğu gösterilebilir.

Genelleşmiş merkez dikdörtgenler formülünün hatası ise

$$|\Psi(I)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |\Psi_i\,(L_{0,i})| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{M_i(f)}{24} h^3 \leq M(f) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^3}{24} = M(f)\,\frac{b-a}{24} h^2$$

Burada $M(f) = \max\limits_{[a,b]} |f"(x)|$ dir.

(C) YAMUK YONTEMİNİN HATASI:

Yamuk Yonteminin Hatasını birinci dereceden $L_{1,i}$ (x) Lagrange enterpolasyon polinomunun hatasını integrallemekle elde edebiliriz.

f(x)- $L_{1,i}$ (x)=$\frac{f''(\xi)}{2}$(x-x_i)(x-x_{i+1})

.

Son eşitsizlikten mutlak değere geçersek yamuk yönteminin hatası için $M_i(f) = \max\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]} |f''(x)|$ olmakla

$$|\Psi(I_i)| \leq \frac{1}{12} M(f_i) h^3$$

Değerlendirmesini bulmuş oluruz. Buradan ise genelleşmiş yamuk formülünün hatası için

$$\left|\Psi(I^{yamuk})\right| = \sum_{i=1}^{n-1} \left|\Psi(f_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{12} M(f_i) h^3 \leq \frac{1}{12} M(f)(n-1) h^3 = \frac{1}{12} M(f)(b-a) h^2$$

Elde ederiz.

Lagrange polinomunun yardımıyla Simpson yönteminin hatasının değerlendirilmesi imkansız olduğundan, Hermite polinomlarının yardımıyla hata değerlendirilebilir.
Simpson yönteminin hatası

$$|R_n^i(x)| \leq \frac{h^5}{2880}|f^{IV}(\xi)|$$

Genelleşmiş Simpson yönteminin hatası ise

$$|R_n(x)| \leq \frac{h^4}{2880}(b-a)|f^{IV}(\xi)|$$

Olur.

$f(x) = (ax+b)$ - **Lineer fonksiyonları için merkez dikdörtgenler ve yamuk formülünün hatasız sağlandığını kolaylıkla ispatlayabiliriz.**

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}(ax+b)dx = \left[\frac{1}{2}ax^2+bx\right]\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = \frac{1}{2}a({x_{i+1}}^2-{x_i}^2)+b(x_{i+1}-x_i)$$

$$= h[a\frac{x_{i+1}+x_i}{2}+b] = h\left[ax_{i+\frac{1}{2}}+b\right] = hf\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}(ax+b)dx = \left[\frac{1}{2}ax^2+bx\right]\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = \frac{1}{2}a({x_{i+1}}^2-{x_i}^2)+b(x_{i+1}-x_i)$$

$$= h[a\frac{x_{i+1}+x_i}{2}+b] = h\left[\frac{1}{2}ax_i+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}ax_{i+1}+\frac{1}{2}b\right] = \frac{h}{2}[f(x_i)+ f(x_{i+1})]$$

Sevgili Öğrenciler.

Biliyorum. Evde kalmak çok sıkıcı. Özellikle yapacak bir iş olmadıkta. Benim görevim sadece sizlere matematik öğretip, sınavda yazdıklarınızı puanlamak değil. Aynı zamanda dönem boyunca sizlerin mutlu olmanız için katkıda bulunmaktır. Bu zor günlerde Nümerik analiz aşkı ile yandığınız zaman, üçüncü dereceden polinomlar için Simpson yönteminin hatasız sağlandığını, yani aşağıdaki eşitliğin doğru olduğunu ispatlayın.

(İSPATI YAPTIĞINIZ ZAMAN GÖZLERİNİZDEKİ O MUTLULUĞU ŞİMDİDEN GÖRÜYORUM)

ÖRNEK:

$\int_{0.5}^{1.5} \frac{x^2+1}{sin(x+1)} dx$ integralini h=0.2 yardımıyla hesaplayınız.

i	x_i	${x_i}^2+1$	$sin(x_i+1)$	$f(x_i)$
x_0	0.5	1.25	0.9975	1.2531
$x_{\frac{1}{2}}$	0.6	1.36	0.9996	1.3605
x_1	0.7	1.49	0.9917	1.5025
$x_{\frac{3}{2}}$	0.8	1.64	0.9738	1.6841
x_2	0.9	1.81	0.9463	1.9127
$x_{\frac{5}{2}}$	1	2	0.9093	2.1995
x_3	1.1	2.21	0.8632	2.5605
$x_{\frac{7}{2}}$	1.2	2.44	0.8084	3.0179
x_4	1.3	2.69	0.7457	3.6073
$x_{\frac{9}{2}}$	1.4	2.96	0.6755	4.3819
x_5	1.5	2.25	0.5985	5.4302

$I_{simpson=}$ $\frac{h}{6}$ [f_0+2($f_1+f_2+f_3+f_4$)+4($f_{\frac{1}{2}}$+$f_{\frac{3}{2}}+f_{\frac{5}{2}}+f_{\frac{7}{2}}+f_{\frac{9}{2}}$)+ f_5]=2.5449

ÖRNEK:

$\int_{0.5}^{1.5} \frac{COSX}{1+\sqrt{X}} dx$ integralini h=0.2 yardımıyla hesaplayınız.

i	x_i	$cos\, x_i$	$\sqrt{x_i}+1$	$f(x_i)$
x_0	0.5	0.8776	1.7071	0.5141
$x_{\frac{1}{2}}$	0.6	0.8253	1.7746	0.4651
x_1	0.7	0.7648	1.8363	0.4164
$x_{\frac{3}{2}}$	0.8	0.6967	1.8944	0.3678
x_2	0.9	0.6216	1.9487	0.3190
$x_{\frac{5}{2}}$	1	0.5403	2	0.2702
x_3	1.1	0.4536	2.0488	0.2214
$x_{\frac{7}{2}}$	1.2	0.3624	2.0954	0.1730
x_4	1.3	0.2675	2.1402	0.1125

$x_{\frac{9}{2}}$	1.4	0.1700	2.1832	0.0779
x_5	1.5	0.0707	2.2247	0.0318

$I_{sol=}$ h (f_0 + $f_1 + f_2 + f_3 + f_4$) =0.2(0.5141+0.4164+0.319+0.2214+0.1250)=0.3192

$I_{sağ=}$ h ($f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5$)=0.2(0.4164+0.319+0.2214+0.125+0.0318)=0.2227

$I_{merkez=}$ h ($f_{\frac{1}{2}}$+$f_{\frac{3}{2}} + f_{\frac{5}{2}} + f_{\frac{7}{2}} + f_{\frac{9}{2}}$)=0.2(0.4651+0.3678+0.2701+0.1729+0.0779)=0.2708