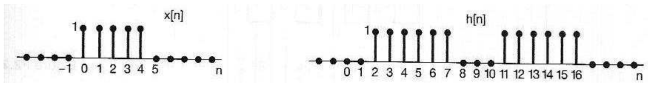
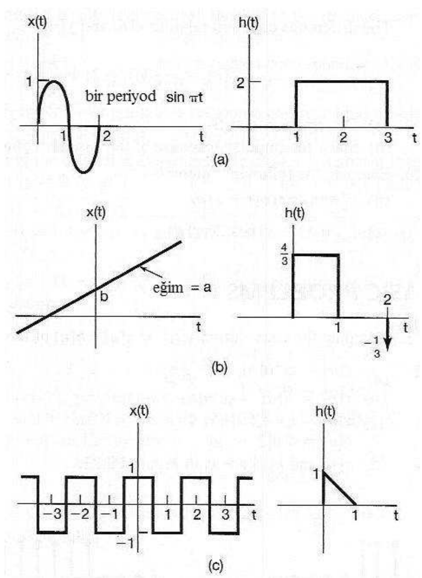
Sakarya Üniversitesi
Elektrik-Elektronik Mühendisliği
EEM 305-İşaretler ve Sistemler
Ödev 2

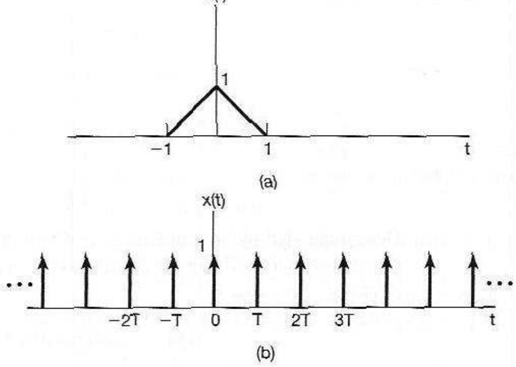
1. Aşağıda verilen ayrık-zaman işaret çiftleri için $y[n] = x[n] * h[n]$ konvolüsyon toplamını hesaplayınız.
   (a) $x[n] = \alpha^n u[n],\ h[n] = \beta^n u[n],\ \alpha \neq \beta$
   (b) $x[n] = h[n] = \alpha^n u[n]$
   (c) $x[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n-4],\ h[n] = 4^n u[2-n]$
   (d) $x[n]$ ve $h[n]$ aşağıda verilmiştir



2. Aşağıda verilen sürekli-zaman işaret çiftleri için $y(t) = x(t) * h(t)$ konvolüsyon integralini hesaplayınız.
   (a) $x(t) = e^{-\alpha t}u(t),\ h(t) = e^{-\beta t}u(t),\ \alpha \neq \beta$
   (b) $x(t) = u(t) - 2u(t-2) + u(t-5),\ h(t) = e^{2t}u(1-t)$
   (c) $x(t)$ ve $h(t)$ aşağıda Şekil (a), (b) ve (c)'de verilmiştir



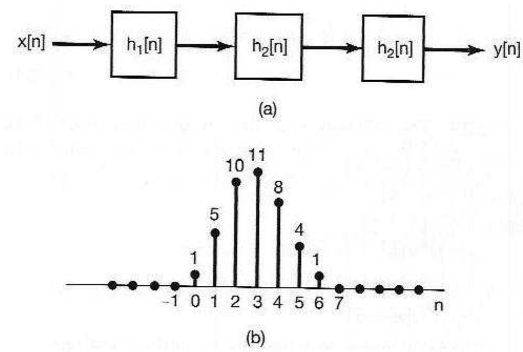
3. $h(t)$ Şekil (a)'da gösterilen üçgen darbe, $x(t)$ Şekil (b)'deki impuls dizisi, yani $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ olsun. $y(t) = x(t) * h(t)$ konvolüsyonunu aşağıdaki T değerleri için hesaplayınız.
   (a) $T = 4$ (b) $T = 2$ (c) $T = 3/2$ (d) $T = 1$



4. Şekil (a)'da doğrusal ve zamanla değişmeyen (LTI) üç sistemin seri bağlandığı görülmektedir. $h_2[n]$ impuls yanıtı $h_2[n] = u[n] - u[n-2]$ olarak verilmiştir ve seri bağlamaya karşılık gelen toplam impuls yanıtının grafiği Şekil (b)'de gösterilmiştir.

   (a) İmpuls yanıtı $h_1[n]$'yi bulunuz.

   (b) Toplam sistemin $x[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ girişine yanıtını bulunuz.



5. $x[n] = 3^n u[-n-1] + (\frac{1}{3})^n u[n]$ ve $h[n] = (\frac{1}{4})^n u[n+3]$ olmak üzere, $y[n] = x[n] * h[n]$ işaretini

   (a) konvolüsyonun dağılma özelliğini kullanmadan belirleyiniz.

   (b) konvolüsyonun dağılma özelliğini kullanarak belirleyiniz.

6. $x_1[n] = (0.5)^n u[n]$, $x_2[n] = u[n+3]$, $x_3[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ olmak üzere, $y[n] = x_1[n] * x_2[n] * x_3[n]$ konvolüsyonunun hesaplanmasını ele alalım.

   (a) $x_1[n] * x_2[n]$ konvolüsyonunu hesaplayınız.

   (b) $y[n]$'yi belirlemek için (a) şıkkında bulduğunuz sonuç ile $x_3[n]$'nin konvolüsyonunu hesaplayınız.

   (c) $x_2[n] * x_3[n]$ konvolüsyonunu hesaplayınız.

   (d) $y[n]$'yi belirlemek için (c) şıkkında bulduğunuz sonuç ile $x_1[n]$'nin konvolüsyonunu hesaplayınız.

7. Bir sürekli-zaman işaret $v(t)$'nin altındaki alanı $A_v = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)dt$ olsun. $y(t) = x(t) * h(t)$ ise $A_y = A_x A_h$ olduğunu gösteriniz.

8. Aşağıda ayrık-zaman LTI sistemlerin impuls yanıtları verilmiştir. Her bir sistemin nedensel ve/veya kararlı olup olmadığını belirleyiniz. Yanıtlarınızın gerekçesini veriniz.

   (a) $h[n] = (\frac{1}{5})^n u[n]$

   (b) $h[n] = (0.8)^n u[n+2]$

   (c) $h[n] = (\frac{1}{2})^n u[-n]$

   (d) $h[n] = (5)^n u[3-n]$

   (e) $h[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n] + (1.01)^n u[n-1]$

   (f) $h[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n] + (1.01)^n u[1-n]$

   (g) $h[n] = n(\frac{1}{3})^n u[n-1]$

9. Önceki soruyu, impuls yanıtları aşağıda verilen sürekli-zaman sistemler için tekrarlayınız.

   (a) $h(t) = e^{-4t} u(t-2)$

   (b) $h(t) = e^{-6t} u(3-t)$

   (c) $h(t) = e^{-2t} u(t+50)$

   (d) $h(t) = e^{2t} u(-1-t)$

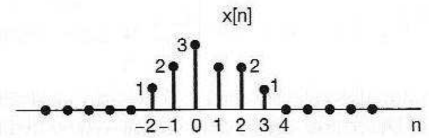
   (e) $h(t) = e^{-6|t|}$

   (f) $h(t) = te^{-t} u(t)$

   (g) $h(t) = (2e^{-t} - e^{(t-100)/100}) u(t)$

10. $y[n] + 2y[n-1] = x[n]$ fark denklemini ele alalım. Başlangıçta sükünette (yani $n < n_0$ için $x[n] = 0$ ise, $n < n_0$ için $y[n] = 0$) koşulunu varsayarak, giriş-çıkış ilişkisi bu fark denklemiyle verilen sistemin impuls yanıtını bulunuz. $y[n]$'yi $y[n-1]$ ve $x[n]$ cinsinden ifade ederek fark denklemini yeniden düzenleyebilirsiniz. Yeni fark denklemi, $y[0]$, $y[1]$, $y[2]$, ... değerlerini verilen sırada hesaplamanıza imkan verir.

11. Başlangıçta sükünette olan ve $y[n]+2y[n-1] = x[n]+2x[n-2]$ fark denklemiyle tanımlanan ayrık-zaman LTI sistemi ele alalım. Fark denklemini çözerek sistemin aşağıda verilen işarete yanıtını belirleyiniz.



12. $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$ fark denkleminde ve $x[n] = (\frac{1}{3})^n u[n]$ olsun. Derste tartıştığımız gibi, çözüm özel çözüm ($y_p[n]$) ve homojen çözüm ($y_h[n]$) olarak adlandırılan iki bileşenden oluşmaktadır.

(a) Homojen çözümün $y_h[n] = A(\frac{1}{2})^n$ olduğunu gösteriniz.

(b) Özel çözümün $n \geq 0$ için $y_p[n] = B(\frac{1}{3})^n$ şeklinde olduğunu varsayıp, çözümü fark denkleminde yerine koyarak B'nin değerini belirleyiniz.

(c) Soruda verilen fark denklemiyle tanımlanan bir LTI sistemin başlangıçta sükünette olduğunu varsayalım. $n < 0$ için $x[n] = 0$ olduğundan, $n < 0$ için $y[n] = 0$. (a) ve (b) şıklarından $n \geq 0$ için çözümün $y[n] = A(\frac{1}{2})^n + B(\frac{1}{3})^n$ olduğunu biliyoruz. A katsayısının değerini belirleyebilmek için $y[n]$ herhangi bir $n \geq 0$ değerinde belirtilmelidir. Sistemin başlangıçta sükünette olduğu ve uygulanan giriş işareti bilgisinden yararlanark $y[0]$ başlangıç koşulunu ve daha sonra A katsayısının değerini bulunuz.

13. Başlangıçta sükünette olan ve $\frac{dy(t)}{dt}+2y(t) = x(t)$ diferansiyel denklemiyle tanımlanan sürekli-zaman sistemi ele alalım.

(a) α ve β gerçel sayılar olmak üzere, sistemin $x_1(t) = e^{3t}u(t)$, $x_2(t) = e^{2t}u(t)$, $x_3(t) = \alpha e^{3t}u(t) + \beta e^{2t}u(t)$ girişlerine yanıtlarını hesaplayınız. Yanıtların sırasıyla $y_1(t)$, $y_2(t)$ ve $y_3(t)$ olduğunu varsayarak $y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ olduğunu gösteriniz. Şimdi de, $t < t_1$ için $x_1(t) = 0$ ve $t < t_2$ için $x_2(t) = 0$ olmak üzere keyfi iki işaret $x_1(t)$, $x_2(t)$ ele alalım. Yaptıklarınızı $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ işaretleri için tekrarlayarak bu durumda da $y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ olduğunu gösteriniz. O halde, ele alınan sistemin doğrusal olduğunu söyleyebiliriz.

(b) Sistemin $x_1(t) = Ke^{2t}u(t)$ girişine yanıtı $y_1(t)$'yi, $x_2(t) = Ke^{2(t-T)}u(t)$ girişine yanıtı $y_2(t)$'yi bularak $y_2(t) = y_1(t-T)$ olduğunu gösteriniz. Şimdi de $t < t_0$ için $x_1(t) = 0$ özelliğini sağlayan keyfi bir $x_1(t)$ işaretini ele alalım. Sistemin $x_1(t)$'ye yanıtı $y_1(t)$ ve $x_2(t) = x_1(t-T)$'ye olan yanıtı $y_2(t)$ ile gösterilirse, $y_2(t) = y_1(t-T)$ olduğunu gösteriniz. O halde, ele alınan sistemin zamanla değişmeyen olduğu sonucunu çıkartabiliriz. (a) şıkkındaki sonuç da göz önünde bulundurulduğunda sistemin LTI olduğu anlaşılır. Sistem, başlangıçta sükünette koşulunu da sağladığından aynı zamanda nedenseldir.

14. Başlangıçta sükünette varsayımı, giriş işareti tarafından belirlenen bir anda sıfıra eşit başlangıç koşuluna karşılık gelmektedir. Bu problemde, başlangıç koşulunun sıfır olmaması veya giriş işaretinden bağımsız olarak başlangıç koşulunun sabit bir anda daima uygulandığı durumunda, karşılık gelen sistemin LTI olamayacağını göstereceğiz. Giriş-çıkış ilişkisi

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

diferansiyel denklemiyle tanımlanan bir sürekli-zaman sistemi ele alalım.

(a) Başlangıç koşulunu $y(1) = 1$ varsayıp, sistemin doğrusal olmadığını gösteren bir örnek verin.

(b) Başlangıç koşulunu $y(1) = 1$ varsayıp, sistemin zamanla değiştiğini gösteren bir örnek verin.

(c) Başlangıç koşulunu $y(1) = 1$ varsayıp, sistemin artışsal doğrusal olduğunu gösterin.

(d) Başlangıç koşulunu $y(1) = 0$ varsayıp, sistemin doğrusal fakat zamanla değiştiğini gösterin.

(e) Başlangıç koşulunu $y(0)+y(4) = 0$ varsayıp, sistemin doğrusal fakat zamanla değiştiğini gösterin.

15. Önceki problemde, başlangıç koşulunun giriş işaretinden bağımsız olarak sabit bir zamanda uygulanmasının karşılık gelen sistemin zamanla değişen olmasına neden olduğunu gördük. Bu problemde, sabit başlangıç koşullarının sistemin nedenselliği üzerindeki etkisini inceleyeceğiz. Bir sistemin giriş-çıkış ilişkisinin önceki soruda verilen birinci dereceden diferansiyel denklemi sağladığını ve başlangıç koşulunun $y(0) = 0$ ile verildiğini varsayalım. Aşağıda verilen giriş işaretleri için sistemin çıkışını hesaplayınız

   (a) Tüm t değerleri için $x_1(t) = 0$.

   (b) $x_2(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ 1, & t > 1 \end{cases}$

   $x_1(t)$ ve $x_2(t)$'ye olan yanıtlar sırasıyla $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ olsun. $t < -1$ için, $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ özdeş olmasına rağmen $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ işaretlerinin farklı olduğuna dikkat ediniz. Bu gözlemden yola çıkarak, verilen sistemin nedensel olamayacağı sonucunu çıkartınız.

16. Giriş-çıkış ilişkisi $y[n] = (\frac{1}{2})y[n-1] + x[n]$ fark denklemiyle verilen bir ayrık-zaman sistemi ele alalım.

   (a) Sistemin, başlangıçta sükünette koşulunu sağlaması halinde LTI olduğunu gösteriniz.

   (b) Sistemin başlangıçta sükünette koşulunu sağlamadığı ancak $y[0] = 0$ başlangıç koşulunun kullanlması halinde, sistemin nedensel olmadığını gösteriniz (İpucu: 15. sorudakine benzer bir yol izleyin).

17. Giriş-çıkış ilişkisi $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$ diferansiyel denklemiyle verilen bir sürekli-zaman sistemi ele alalım. Sonda sükünette ($t > t_0$ için $x(t) = 0$ ise, $t > t_0$ için $y(t) = 0$) koşulunun sağlandığını varsayarak sistemin nedensel olmadığını gösteriniz (İpucu: Sisteme $x_t = 0$ ve $x_2(t) = e^t(u(t) - u(t-1))$ girişleri uygulandığındaki yanıtlar sırasıyla $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ olsun. $t < 0$ için $y_1(t) \neq y_2(t)$ olduğunu ispatlayınız).

18. Aşağıdaki fark denklemleriyle tanımlanan ayrık-zaman nedensel LTI sistemlerin blok diyagram gösterilimini elde ediniz.

   (a) $y[n] = \frac{1}{3}y[n-1] + \frac{1}{2}x[n]$

   (b) $y[n] = \frac{1}{3}y[n-1] + x[n-1]$

19. Aşağıdaki diferansiyel denklemlerle tanımlanan sürekli-zaman nedensel LTI sistemlerin blok diyagram gösterilimini elde ediniz.

   (a) $y(t) = -(\frac{1}{2})\frac{dy(t)}{dt} + 4x(t)$

   (b) $\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$

C.1) a) $x[n]=\alpha^n u[n]$, $h[n]=\beta^n u[n]$, $\alpha \neq \beta$ $\qquad x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k]$

$$y[n]=\beta^n \sum_{k=0}^{n} (\alpha/\beta)^k \qquad n\geq 0$$

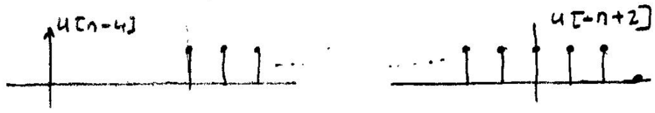
$$=\left[\frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}\right]u[n] \ , \ \alpha\neq\beta$$

b) $x[n]=h[n]=\alpha^n u[n]$

$$y[n]=\alpha^n \sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1)\alpha^n u[n]$$

c) $x[n]=(-1/2)^n u[n-4]$, $h[n]=4^n u[2-n]$

($u[n-4]$ ve $u[2-n]$ çizilmeli!)

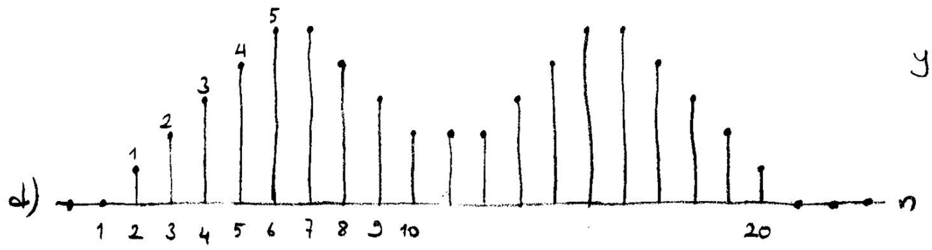


$$n\leq 6 \quad y[n]=4^n\left\{\sum_{k=0}^{\infty}(-1/8)^k-\sum_{k=0}^{3}(-1/8)^k\right\}$$

$$n>6 \quad y[n]=4^n\left\{\sum_{k=0}^{\infty}(-1/8)^k-\sum_{k=0}^{n-1}(-1/8)^k\right\}$$

$$y[n]=\begin{cases}(8/9)(-1/8)^4 4^n & n\leq 6\\ (8/9)(-1/2)^n & n>6\end{cases}$$

d)

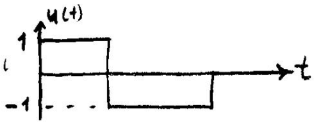


C.2) $y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

a) $y(t)=\int_0^t e^{-\alpha\tau}e^{-\beta(t-\tau)}d\tau \qquad t\geq 0$

$$\Rightarrow \quad y(t)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\beta t}\left(e^{-(\alpha-\beta)t}-1\right)}{\beta-\alpha}\cdot u(t) & \alpha\neq\beta\\ t e^{-\beta t}u(t) & \alpha=\beta\end{cases}$$

b)



$$\Rightarrow \quad y(t)=\int_0^2 h(t-\tau)d\tau-\int_2^5 h(t-\tau)d\tau$$

$$y(t)=\begin{cases}\int_0^2 e^{2(t-\tau)}d\tau-\int_2^5 e^{2(t-\tau)}d\tau & t\leq 1\\ \int_{t-1}^2 e^{2(t-\tau)}d\tau-\int_2^5 e^{2(t-\tau)}d\tau & 1\leq t\leq 3\\ -\int_{t-1}^5 e^{2(t-\tau)}d\tau & 3\leq t\leq 6\\ 0 & t>6\end{cases}$$

$$y(t)=\begin{cases}(1/2)\left[e^{2t}-2e^{2(t-2)}+e^{2(t-5)}\right] & t\leq 1\\ (1/2)\left[e^{2}+e^{2(t-5)}-2e^{2(t-2)}\right] & 1\leq t\leq 3\\ (1/2)\left[e^{2(t-5)}-e^{2}\right] & 3\leq t\leq 6\end{cases}$$

c) $y(t) = \int_0^2 \sin(\pi\tau) h(t-\tau) d\tau \Rightarrow y(t) = \begin{cases} 0 & t<1 \\ (2/\pi)\left[1-\cos(\pi(t-1))\right] & 1<t<3 \\ (2/\pi)\left[\cos(\pi(t-3))-1\right] & 3<t<5 \\ 0 & 5<t \end{cases}$

d) $h(t) = h_1(t) - \frac{1}{3}\delta(t-2)$

$h_1(t) = \begin{cases} 4/3 & 0\leq t\leq 1 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$

$y(t) = h(t) * x(t) = \left[h_1(t) * x(t)\right] - \frac{1}{3}x(t-2)$

$h_1(t) * x(t) = \int_{t-1}^{t} \frac{4}{3}(a\tau + b) d\tau = \frac{4}{3}\left[\frac{1}{2}at^2 - \frac{1}{2}a(t-1)^2 + bt - b(t-1)\right]$

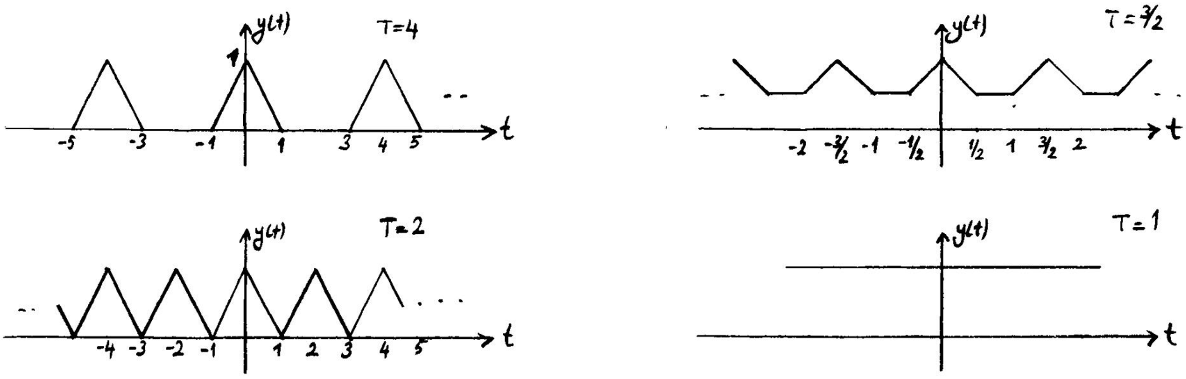
$y(t) = \frac{4}{3}\left[\frac{1}{2}at^2 - \frac{1}{2}a(t-1)^2 + bt - b(t-1)\right] - \frac{1}{3}\left[a(t-2)+b\right] = at+b = x(t)$

e) $x(t)$ periyodik olduğundan $y(t) = x(t) * h(t)$'de periyodik olacaktır. Sadece 1 periyot için $y(t)$'yi hesaplayalım.

$-1/2 < t < 1/2 \quad y(t) = \int_{t-1}^{-1/2} (t-\tau-1) d\tau + \int_{-1/2}^{t} (1-t+\tau) d\tau = 1/4 + t - t^2$

$1/2 < t < 3/2 \quad y(t) = \int_{t-1}^{1/2} (1-t+\tau) d\tau + \int_{1/2}^{t} (t-1-\tau) d\tau = t^2 - 3t + 7/4$

C3

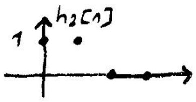


C.4 $y[n] = x[n] * h[n]$

$h[n] = h_1[n] * h_2[n] * h_2[n]$

$h_2[n] = u[n] - u[n-2] = \delta[n] + \delta[n-1]$

$h_2[n] \Rightarrow$



$h_2[n] * h_2[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$

$h[n] = h_1[n] * (\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2])$

$h[n] = h_1[n] + 2h_1[n-1] + h_1[n-2]$

$h[0] = h_1[0] \Rightarrow h_1[0] = 1$

$h[1] = h_1[1] + 2h_1[0] = 5 \Rightarrow h_1[1] = 3$

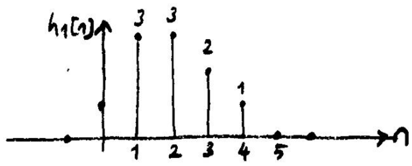
$h[2] = h_1[2] + 2h_1[1] + h_1[0] = 10 \Rightarrow h_1[2] = 3$

$h[3] = h_1[3] + 2h_1[2] + h_1[1] = 11 \Rightarrow h_1[3] = 2$

$h[4] = h_1[4] + 2h_1[3] + h_1[2] = 8 \Rightarrow h_1[4] = 1$

$h[5] = h_1[5] + 2h_1[4] + h_1[3] = 4 \Rightarrow h_1[5] = 0$

$h[6] = h_1[6] + 2h_1[5] + h_1[4] = 1 \Rightarrow h_1[6] = 0$



b) $x[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$

$y[n] = h[n] - h[n-1]$

C5 $x[0] = 1$

$x[1] = 1/3 \qquad x[-1] = 1/3$

$x[2] = 1/9 \qquad x[-2] = 1/9$

$\vdots \qquad \vdots$

$x[n] = (1/3)^{|n|}$

a) $$y[n] = x[n] * h[n] = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\tfrac{1}{3}\right)^{-k} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-k} u[n-k+3]}_{\Downarrow} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{3}\right)^{k} (1/4)^{n-k} u[n-k+3]$$

$$(1/12) \sum_{k=0}^{1} (1/3)^k (1/4)^{n+k} u[n+k+4]$$

$$y[n] = \begin{cases} (12^4/11)\, 3^n & n < -4 \\ (1/11)\, 4^4 & n = -4 \\ (1/4)^n (1/11) - 3\,(1/4)^n + 3(256)(1/3)^n & n \geq -3 \end{cases}$$

b) $y_1[n] = \{(1/3)^n u[n]\} * \{(1/4)^n u[n+3]\}$

$$y_1[n] = \begin{cases} -3(1/4)^n + 3(256)(1/3)^n, & n \geq -3 \\ 0 & , n < -3 \end{cases}$$

$y_2[n] = [3^n u[-n-1]] * [(1/4)^n u[n+3]]$

$$y_2[n] = \begin{cases} (12^4/11)\, 3^n & , n < -4 \\ (1/4)^n (1/11) & , n \geq -3 \end{cases}$$

$\boxed{y[n] = y_1[n] + y_2[n]}$

C.6 $y[n] = \underbrace{x_1[n] * x_2[n]}_{y_1[n]} * x_3[n]$

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]\, x_2[n-k]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (0.5)^k\, u[n+3-k]$$

$$= \begin{cases} 2\{1-(1/2)^{n+4}\} & n \geq -3 \\ 0 & n < -3 \end{cases}$$

$y[n] = y_1[n] * x_3[n] \quad y_1[n] + y_1[n-1]$

$$\begin{cases} 2(1-(1/2)^{n+4}) + 2(1-(1/2)^{n+3}) = (1/2)^{n+3} & , n \geq -2 \\ 1 & , n = -3 \\ 0 & , \text{diğer} \end{cases}$$

$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} u[n+3]$

c) $x_2[n] * x_3[n] = u[n+3] - u[n+2] = \delta[n+3]$

d $y[n] = x_1[n] * \delta[n+3] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} u[n+3]$

C.7 $A_y = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) * h(t))\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau)\,d\tau\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\,dt\,d\tau$

$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) A_h\, d\tau = A_h \cdot A_x$

C.8

	Nedensel	Kararlı
a) $h[n] = (0.2)^n u[n]$	✓	✓
b) $h[n] = (0.8)^n u[n+2]$	X	✓
c) $h[n] = (0.5)^n u[-n]$	X	X
d) $h[n] = 5^n u[3-n]$	X	✓
e) $h[n] = (-1/2)^n u[n] + (1.01)^n u[n-1]$	✓	X
f) $h[n] = (-1/2)^n u[n] + (1.01)^n u[1-n]$	X	✓
g) $h[n] = n(1/3)^n u[n-1]$	✓	✓

$h[n] = 0 \ , \ n < 0 \rightarrow$ nedensel

$\sum_{n=-2}^{\infty} (0.8)^n < \infty$

$\sum_{n=-\infty}^{0} (1/2)^n = \infty$

$\sum_{n=-\infty}^{3} 5^n < \infty$

C.9

	Nedensel	Kararlı
a) $h(t) = e^{-4t} u(t-2)$	✓	✓
b) $h(t) = e^{-6t} u(3-t)$	X	X
c) $h(t) = e^{-2t} u(t+50)$	X	✓
d) $h(t) = e^{2t} u(-1-t)$	X	✓
e) $h(t) = e^{-6\lvert t\rvert}$	X	✓
f) $h(t) = t e^{-t} u(t)$	✓	✓
g) $h(t) = (2e^{-t} - e^{(t-100)/100}) \cdot u(t)$	✓	X

$h(t) = 0 \ , \ t < 0 \rightarrow$ nedensel

$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert h(t)\rvert\,dt < \infty \rightarrow$ kararlı

C.10) $y[n] = x[n] - 2y[n-1]$

$x[n] = \delta[n] \rightarrow$
$$\left.\begin{aligned} y[0] &= x[0] - 2y[-1] = 1 \\ y[1] &= x[1] - 2y[0] = -2 \\ y[2] &= x[2] - 2y[1] = 4 \\ y[3] &= x[3] - 2y[2] = -8 \end{aligned}\right\} \quad y[n] = (-2)^n u[n]$$

C.11) $y[n] = x[n] + 2x[n-2] - 2y[n-1]$, $y[n] = 0$, $n < -2$

$x[n] = \delta[n] \Rightarrow$
$$\begin{aligned} y[-2] &= x[-2] + 2x[-4] - 2y[-3] = 1 \\ y[-1] &= x[-1] + 2x[-3] - 2y[-2] = 0 \\ y[0] &= x[0] + 2x[-2] - 2y[-1] = 5 \\ y[1] &= x[1] + 2x[-1] - 2y[0] = -4 \end{aligned}$$

C.12) $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$

a) eğer $A(1/2)^n$ homojen çözüm ise $A\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2}A\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ olmalı.

$$A\left(\tfrac{1}{2}\right)^n - \tfrac{1}{2}A\left(\tfrac{1}{2}\right)^n \cdot (1/2)^{-1} = 0 \ \checkmark$$

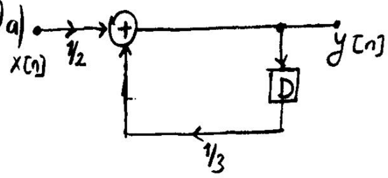
b) $y_p[n] = B\left(\frac{1}{3}\right)^n$, $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \Rightarrow B(1/3)^n - \frac{1}{2}B(1/3)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, $n > 0$

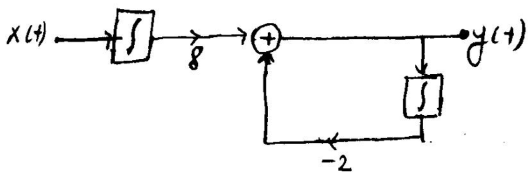
$$B\left(\tfrac{1}{3}\right)^n - \tfrac{1}{2}B\,3\left(\tfrac{1}{3}\right)^n = \left(\tfrac{1}{3}\right)^n$$

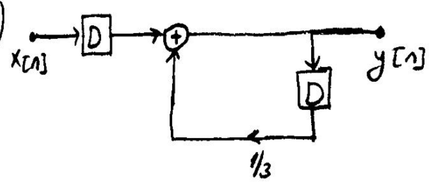
$$\left(B - \tfrac{3B}{2}\right)\left(\tfrac{1}{3}\right)^n = (1/3)^n \Rightarrow B - \tfrac{3B}{2} = 1$$

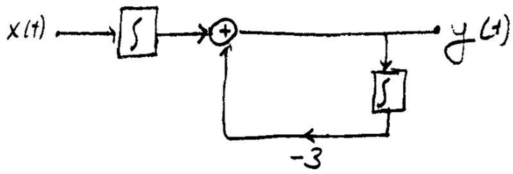
$$\underline{B = -2}$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow y[n] &= A(1/2)^n - 2(1/3)^n \\ y[n] &= x[n] + 1/2\, y[n-1] \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &y[0] = A - 2 = 1 \Rightarrow A = 3 \\ &y[0] = x[0] + 1/2\, y[-1] = 1 \end{aligned}$$

C.18) a)


C.19) a)


b)


b)


C13) a) $x_1(t) = e^{3t}u(t)$ için $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$ denkleminin çözümü

$y_1(t) = \frac{1}{5}(e^{3t} - e^{-2t})u(t)$ olarak 4. haftada örnek üzerinde gösterilmişti.

ii) $x_2(t) = e^{2t}u(t)$ için çözelim.

$y_p(t) = Ae^{2t}$ formunda olacaktır, $A = ?$

$2Ae^{2t} + 2Ae^{2t} = e^{2t} \Rightarrow A = 1/4$

$y_h(t) = Be^{-2t}$ (4. haftadaki örnek inceleyin)

$y(t) = Be^{-2t} + \frac{1}{4}e^{2t}$

$t=0 \Rightarrow y(0)=0 \Rightarrow B + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow B = -1/4$

$y_2(t) = -\frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4}e^{2t}$

iii) $x_3(t) = \alpha e^{3t}u(t) + \beta e^{2t}u(t)$

$y_p(t) = A_1\alpha e^{3t} + A_2\beta e^{2t}$, $A_1 = ?, A_2 = ?$

$3A_1\alpha e^{3t} + 2A_2\beta e^{2t} + 2A_1\alpha e^{3t} + 2A_2\beta e^{2t} = \alpha e^{3t} + \beta e^{2t}$

$A_1 = 1/5 \quad A_2 = 1/4$

$y_h(t) = Be^{-2t}$

$y(t) = \frac{1}{5}\alpha e^{3t} + \frac{1}{4}\beta e^{2t} + Ae^{-2t}$

$t=0 \Rightarrow y(0) = 0 = \frac{1}{5}\alpha + \frac{1}{4}\beta + A$

$A = -(\alpha/5 + \beta/4)$

$x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$

$y_3(t) = \alpha . y_1(t) + \beta y_2(t)$ $\Leftarrow$ $y_3(t) = \frac{1}{5}\alpha e^{3t} + \frac{1}{4}\beta e^{2t} - \frac{\alpha}{5}e^{-2t} - \frac{\beta}{4}e^{-2t}$

b) i) $x_1(t) = Ke^{2t}u(t) \longrightarrow y_1(t) = \frac{K}{4}\left[e^{2t} - e^{-2t}\right]u(t)$

ii) $x_2(t) = Ke^{2(t-T)}u(t)$

$y_p(t) = KAe^{2(t-T)} \Rightarrow A = 1/4 \quad t > T$

$y_h(t) = Be^{-2t}$

$y_2(t) = Be^{-2t} + \frac{K}{4}e^{2(t-T)} \quad t > T$

$t = T,\ y_2(T) = Be^{-2T} + \frac{K}{4} = 0 \Rightarrow B = -\frac{K}{4}e^{2T}$

$y_2(t) = \left[-\frac{K}{4}e^{-2(t-T)} + \frac{K}{4}e^{2(t-T)}\right]u(t-T)$

$y_2(t) = y_1(t-T)$

C.14) a) Sistemin $x_1(t)$'ye cevabı $y_1(t)$
$x_2(t)$'ye 〃 $y_2(t)$
$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$'ye 〃 $y_3(t)$

$y_1(1) = 1$, $y_2(1) = 1$, $y_3(1) = 1$ veriliyor.

$y_3(1) \neq y_1(1) + y_2(1)$! Doğrusal Değil!

<u>Örnek</u>: $x_1(t) = e^{2t}u(t)$ için

$$y_1(t) = \frac{1}{4}e^{2t} + Be^{-2t} \Rightarrow y_1(1) = \frac{1}{4}e^{2} + Be^{-2} = 1$$

$$B = \left(1 - \frac{1}{4}e^{2}\right).e^{2}$$

$$y_1(t) = \frac{1}{4}e^{2t} + \left(1 - \frac{1}{4}e^{2}\right)e^{-2(t-1)}$$

$x_2(t) = 0$ için $\Rightarrow y_2(t) = Ae^{-2t}$

$y_2(1) = 1 = Ae^{-2} \Rightarrow \underline{A = e^{2}}$

$$\underline{y_2(t) = e^{-2(t-1)}}$$

$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) = x_1(t)$ olsun!

Bu durumda $y_3(t) = y_1(t) + y_2(t) = y_1(t)$

olmalı! Fakat

$$y_3(t) \neq y_1(t) + y_2(t)$$

Dolayısıyla doğrusal değil!

b) $x_1(t) = e^{2t}u(t)$ olsun! $\Rightarrow y_1(t) = \frac{1}{4}e^{2t} + \left(1 - \frac{e^{2}}{4}\right)e^{-2(t-1)}$

$x_2(t) = x_1(t-T) = e^{2(t-T)}u(t-T)$ olsun!

$$y_2(t) = \frac{1}{4}e^{2(t-T)} + Ae^{-2t}$$

$$y_2(1) = 1 = \frac{1}{4}e^{2(1-T)} + Ae^{-2} \Rightarrow A = \left(1 - \frac{1}{4}e^{2(1-T)}\right)e^{2}$$

$$y_2(t) = \frac{1}{4}e^{2(t-T)} + \left(1 - \frac{1}{4}e^{2(1-T)}\right)e^{-2(t-1)}$$

$y_2(t) \neq y_1(t-T) \Rightarrow$ Zamanla değişen!

c) Sistemin artışsal doğrusal doğrusal olduğunu göstermek için, önce sistemin başlangıç durumunun $y(1) = 0$ olması halinde doğrusal olduğunu gösterelim.

$y(1) = 0$ için $\dfrac{dy_1(t)}{dt} + 2y_1(t) = x_1(t)$ $\qquad$ $\dfrac{dy_2(t)}{dt} + 2y_2(t) = x_2(t)$

$x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \longrightarrow y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ olmalı!

$$\frac{d(\alpha y_1(t) + \beta y_2(t))}{dt} + 2(\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)) = \alpha_1 x_1(t) + \beta x_2(t)$$

$$\underbrace{\alpha \frac{dy_1(t)}{dt} + \alpha 2y_1(t)}_{\alpha y_1(t)} + \underbrace{\beta \frac{dy_2(t)}{dt} + \beta 2y_2(t)}_{\beta y_2(t)} = \alpha_1 x_1(t) + \beta x_2(t)$$

d) $y(1)=0$ için sistemin doğrusal olduğu önceki kısımda gösterildi.
Zamanla değişen olduğunu göstermek için;

$x_1(t) = e^{2t}u(t)$ ve $y(1)=0$ için $y_1(t) = \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{-2(t-2)}$

$x_2(t) = x_1(t-1) \Rightarrow y_2(t) = \frac{1}{4}e^{2(t-1)} - \frac{1}{4}e^{-2(t-1)} \neq y_1(t-1)$

e) c ve d şıkkında yapılan işlemler tekrar edilerek sistemin doğrusal fakat zamanla değişen (verilen koşullar için) olduğu gösterilebilir.

C15) a) $x_1(t)=0 \rightarrow y_1(t)=0$

b) $x_2(t) = \begin{cases} 0, & t<-1 \\ 1, & t>-1 \end{cases} \Rightarrow$ $t>1$ için $y_p(t) = Y$ $\left\{ \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \right\}$

$0 + 2Y = 1 \Rightarrow Y = 1/2$

$y_h(t) = Ae^{-2t} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2} + Ae^{-2t} \Rightarrow y(0)=0 \Rightarrow A = -1/2$

$t>1$ için $y_1(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$

$t<-1$ için $y_p(t) = 0$ $y_2(t) = y_h(t) = Ae^{-2t}$ $t<-1$

$t=-1$'de $y_1(t) = y_2(t)$ olmalı $\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2} = Ae^{2}$

$A = \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}$

$$\boxed{t<-1 \quad y_2(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2}\right)e^{-2(t+1)}}$$

$t<-1$ için $x_1(t) = x_2(t) \Rightarrow y_1(t) = y_2(t)$ olmalı fakat $y_1(t) \neq y_2(t)$!
Nedensel değil.

C.16) a) $x_1[n]=0$ $n<n_1$ olsun. $\rightarrow y_1[n] = \frac{1}{2}y_1[n-1] + x_1[n]$ $y_1[n]=0$ $n<n_1$

$x_2[n]=0$ $n<n_2$ " $\rightarrow y_2[n] = \frac{1}{2}y_2[n-1] + x_2[n]$ $y_2[n]=0$ $n<n_2$

$x_3[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$ $\rightarrow y_3[n] = \frac{\alpha}{2}y_1[n-1] + \alpha x_1[n] + \frac{\beta}{2}y_2[n-1] + \beta x_2[n]$

b) $x_1[n]=0$ ve $x_2[n]=\begin{cases}0 & n<-1\\ 1 & n\geq -1\end{cases}$ olsun!

Sistem doğrusal olduğu için $y_1[n]=0$

$x_2[n]$ için $y_2[n]=?$ $\{y_2[0]=0!\}$ $\Rightarrow$ $y_2[1]=\frac{1}{2}y_2[0]+x_2[1]=1$

C.17) $x_1(t)=0 \rightarrow y_1(t)=0$

$x_2(t)=e^t\,(u(t)-u(t-1))$.

$y_p(t)=Ae^t$ $\quad \underline{0<t<1 \text{ için}}$

$Ae^t+2Ae^t=e^t \Rightarrow A=1/3$

$y(t)=\frac{1}{3}e^t+\underbrace{Be^{-2t}}_{y_h(t)}$

$y(1)=0=\frac{1}{3}e+Be^{-2} \Rightarrow B=-\frac{e^3}{3}$

$y(t)=\frac{1}{3}e^t-\frac{1}{3}e^{-2t+3} \quad 0<t<1$

$\underline{t<0 \text{ için}}$ $\quad x_2(t)=0 \quad y_p(t)=0$

$y_h(t)=y_2(t)=Ce^{-2t}, \quad t<0$

$t=0$ da $\quad \frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^3=C$ olur!

Bu durumda $y_2(t)=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^3\right)e^{-2t}$ $\underline{t<0 \text{ için}}$

$t<0$ için $x_1(t)=x_2(t)$ dolayısıyla

nedensel sistem için $y_1(t)=y_2(t)$ ($t<0$ için) olmalı. fakat $y_1(t)\neq y_2(t)$ $t<0$ için

Dolayısıyla nedensel değil.