LİNEER CEBİR

Ders Sorumlusu:
Doç.Dr.Kemal HACIEFENDİOĞLU

Ders Notu:
Prof. Dr. Şaban EREN

1.BOLUM DOGRUSAL CEBIR VE DIFERANSIYEL DENKLEMLER

LİNEER EŞİTLİKLER

1.1. LİNEER EŞİTLİKLERİN TANIMI

$x_1, x_2, \ldots, x_n$'in n değişkeni tanımladığını varsayalım.

Eğer n değişkenden oluşan bir eşitlik, $\boldsymbol{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b}$ şeklinde ifade edilebiliyorsa bu eşitlik **lineer (doğrusal) bir eşitlik** olarak tanımlanmaktadır.

Eşitlikte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ve b sabitleri ifade etmektedir.

Bir lineer eşitlikte, tüm değişkenler birinci dereceden olmalıdır. Değişkenler birbirinin çarpımı veya bölümü şeklinde ifade edilemezler.

Eğer bir eşitlik lineer (doğrusal) değilse, **doğrusal olmayan eşitlik** olarak adlandırılır.

Bölümlerimizde bundan sonra **lineer** ve **doğrusal** ifadeleri aynı anlamda kullanılacaktır.

a | b | c | d | e | f

Örnek : x, y ve z'nin değişken olduğu varsayılarak şıklardaki eşitliklerin lineer (doğrusal) olup olmadığını belirleyiniz.

Soru : $x - y + z = 5$

Çözüm : Doğrusal, çünkü x, y ve z birinci dereceden.

Sabitler $a_1=1$, $a_2= -1$, $a_3=1$ ve $b=5$'tir.

b

Soru : $x + y - z^2 = 4$

Çözüm : Doğrusal değil, çünkü z^2 birinci dereceden değil.

c

Soru : $x + \sqrt{z^2} = 7$

Çözüm : Doğrusal değil çünkü;

$\sqrt{z^2}$'nin değeri $z \geq 0$ için y, $z<0$ için -y'dir.

d

Soru : $3x + 5y - 2z = 0$

Çözüm : Doğrusal, tüm değişkenler birinci dereceden ve

$a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = -2$ ve $b = 0$'dır.

e

Soru : $x + yz + z = 5$

Çözüm : Doğrusal değil, değişken yz çarpımı şeklinde olmamalıdır.

f

Soru : $\frac{x}{y} + y - z = \pi$

Çözüm : Doğrusal değil, değişken $\frac{x}{y}$ şeklinde ifade edilmemeli.

1.2. LİNEER EŞİTLİKLER SİSTEMİ

Lineer eşitlikler sistemi kapsamında;

- **1.2.1. Lineer Eşitlikler Sisteminin Tanımı**
- **1.2.2. Lineer Eşitlikler Sisteminin Çözümü**

konuları işlenecektir.

1.2.1. Lineer Eşitlikler Sisteminin Tanımı

n değişkenli iki veya daha fazla lineer eşitlikten oluşan bir sonlu kümeye **lineer eşitlikler sistemi** denir. Lineer denklem (eşitlikler) sistemimizde $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, $x_3 = s_3$,...,$x_n = s_n$ konulduğunda bu değerler tüm eşitlikleri sağlıyorsa, s_1, s_2, ..., s_n'e **sistemin bir çözümüdür** denir.

Örneğin, yandaki doğrusal sistemde olduğu gibi, $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, $x_3 = s_3$ gibi değerler her iki eşitliği de sağlıyorsa, s_1, s_2, s_3 kümesi ele alınan lineer eşitlikler sisteminin bir çözümüdür. Bu örnek için $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ ve $x_3 = -1$ her iki eşitlikte de yerine konduğunda eşitlikleri sağladığından bir çözüm kümesini oluştururlar.

- Bir veya birden fazla çözümü mevcut olan sisteme (doğrusal eşitlikler sistemi) **consistent** denir.
- Eğer sistemin bir çözümü mevcut değil ise sisteme **inconsistent** denir.

$$4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1$$

$$3x_1 + x_2 + 9x_3 = -4$$

1.2.1. Lineer Eşitlikler Sisteminin Tanımı (Devam)

Doğrusal eşitlikler sisteminin çözümünde ortaya çıkacak durumları daha iyi görebilmek için iki bilinmeyenli (*x*, *y*),

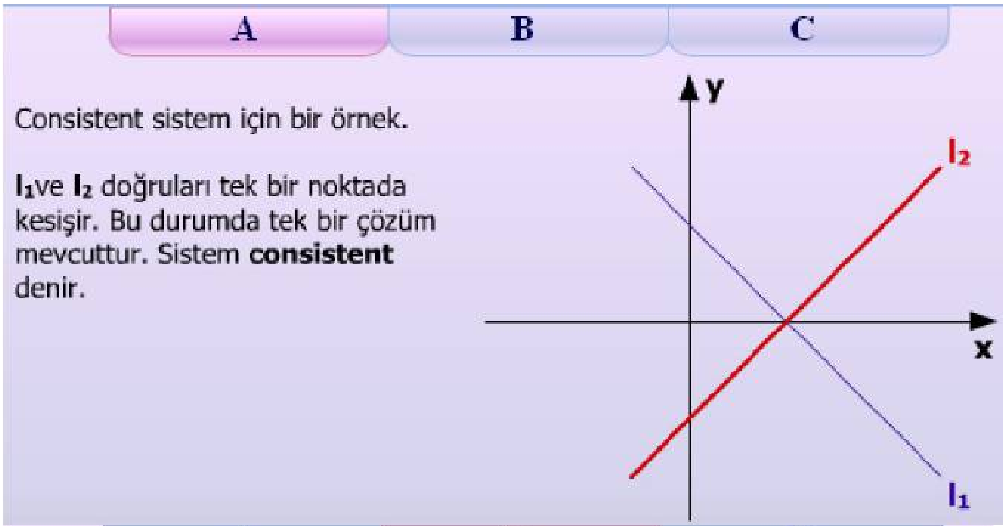
$a_1x + b_1y = c_1$ (**l_1 doğrusu**)
$a_2x + b_2y = c_2$ (**l_2 doğrusu**)

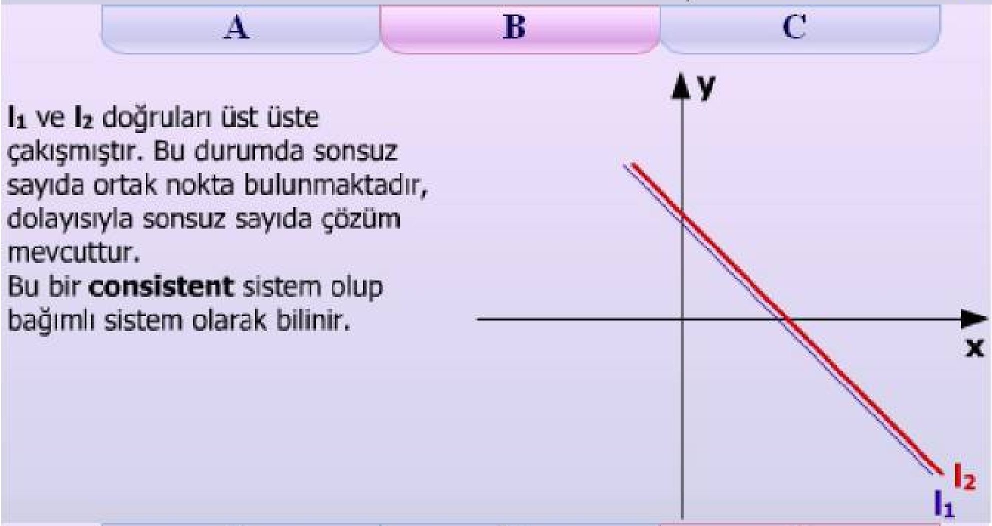
iki doğrusal eşitlik sistemini göz önüne alalım. Burada a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 ve c_2 sabitlerdir. Her iki eşitlikte de *x* ve *y* değişkenlerinin katsayıları birlikte sıfır değildir.

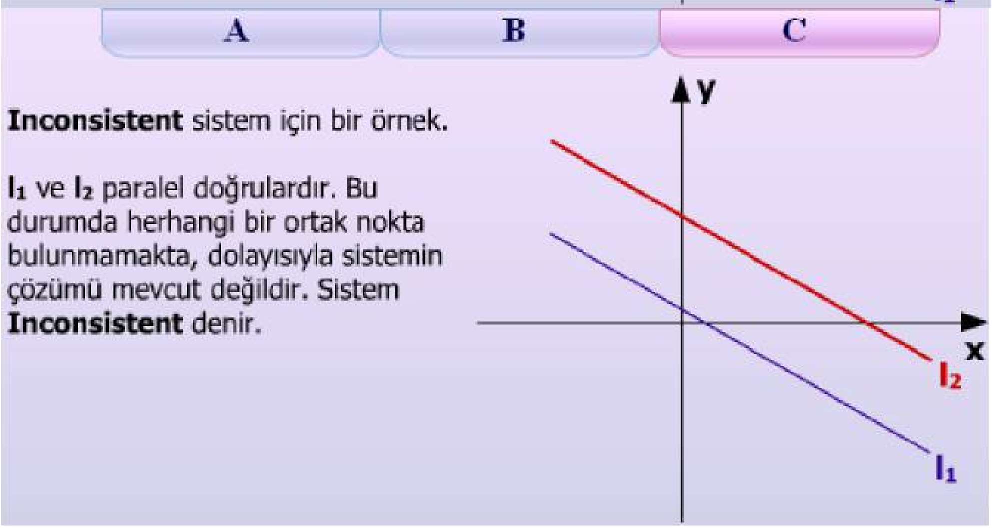
Eşitliklerin her biri *xy* düzleminde bir doğru ile ifade edilmektedir.

Sistemin çözümü, her iki eşitliği de sağlayan bir değer çifti (x, y) olduğundan, çözüm iki doğrunun ortak bir noktasına karşı gelmektedir.

İki bilinmeyenli iki doğrusal eşitlikten oluşan doğrusal sistemimizin çözümüne ilişkin üç durum ortaya çıkmaktadır.







Biz sadece iki değişkenli iki doğrusal eşitlikten oluşan bir doğrusal eşitlikler sistemini göz önüne aldık.

Genelde *m* eşitlik ve *n* bilinmeyenden oluşan sistemler göz önüne alınacaktır. Bu sistemlerin ya **sadece bir çözümü**, ya **sonsuz sayıda çözümü** veya **hiçbir çözümü** mevcut olmayabilir.

m doğrusal eşitlik ve *n* bilinmeyenden oluşan bir doğrusal eşitlikler sistemi (Lineer sistem)

$$\boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1}$$

$$\boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2}$$

: : : :

: : : :

$$\boldsymbol{a_{m1}x + +a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m}$$

şeklinde yazılabilir.

Burada x_1, x_2, ..., x_n bilinmeyenleri, *a*'lar ve *b*'ler sabitleri belirtmektedir.

1.2.2. Lineer Eşitlikler Sisteminin Çözümü

Bir lineer eşitlikler sisteminin çözümünün elde edilmesinde kullanılan temel yaklaşım verilen sistemin aynı çözüm kümesine sahip fakat çözülmesi daha kolay yeni bir sistem ile değiştirilmesidir.

Yeni sistem genel olarak aşağıda belirtilen işlemlerin bilinmeyenleri sistematik bir şekilde elimine edecek şekilde uygulanmasıyla elde edilir.

1) Bir eşitlik sıfırdan farklı bir sabit ile çarpılır.
2) İki eşitlik yer değiştirir.
3) Bir sabit ile çarpılan eşitlik diğer eşitliğe eklenir.

Önceki sayfada verilen genel lineer denklem sisteminde her bir eşitlik bir satır olarak ifade edilmektedir. Dolayısıyla yukarıda verilen işlemler,

1) Bir sıra sıfırdan farklı bir sabit ile çarpılır.
2) İki sıra yer değiştirir.
3) Bir sabit ile çarpılan sıra diğer bir sıraya eklenir.

şeklinde ifade edilir. Bu işlemler **elementer sıra işlemleri** olarak bilinir. Bu işlemlerin temel mantığı daha az bilinmeyenli alt denklemler elde ederek ve bulunan değerleri adım adım yerine koyarak tüm bilinmeyenlerin bulunmasıdır. Takip eden ekrandaki örnek bu işlemlerin lineer denklem sistemlerinin çözümünde nasıl kullanılacağını gösterecektir.

1.2.2.1. Örnek 2

Örnek 2 : Eliminasyon yöntemi **(yok etme metodu)** yardımıyla

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 2x + y + z &= 3 \\ 5y - 7z &= -11 \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin çözümünü elde ediniz.

1. Adım : İkinci sıraya birinci sıranın -2 ile çarpımını ekleyelim.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 5y - 5z &= -5 \\ 5y - 7z &= -11 \end{aligned}$$

2. Adım : İkinci ve üçüncü sıraların yerlerini değiştirelim.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 5y - 7z &= -11 \\ 5y - 5z &= -5 \end{aligned}$$

3. Adım : İkinci sırayı -1 ile çarpıp üçüncü sıraya ekleyelim.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 5y - 7z &= -11 \\ 2z &= 6 \end{aligned}$$

4. Adım : Üçüncü sırayı ½ ile çarpalım.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 5y - 7z &= -11 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Böylece **z**'yi elde etmiş olduk.
Şimdi adım adım **x** ve **y**'yi de bulacağız.

5. Adım : z = 3 değerini birinci ve ikinci eşitliklerde yerine koyalım.

$$\begin{aligned} x - 2y + 9 &= 4 \\ 5y - 21 &= -11 \text{ veya} \\ x - 2y &= -5 \\ 5y &= 10 \quad \text{veya} \\ x - 2y &= -5 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Buradan $x - 4 = -5$
$x = -1$ elde edilir.

Dolayısıyla verilen lineer denklem sisteminin çözüm kümesi **(-1, 2, 3)**'tür.

Daha önce ifade edildiği gibi elementer satır dönüşümleri yardımıyla verilen lineer denklem sistemi her aşamada çözümü daha kolay olan ve aynı çözüm kümesine sahip yeni bir denklem sistemine dönüştürülmüş olur. Örneğin 1., 2., 3. ve 4. aşamalardaki lineer denklem sistemleri aynı çözüm kümelerine sahip denk sistemlerdir.

1.3. MATRİSLER

Matrisler kapsamında;

- **1.3.1. Matris Tanımı**
- **1.3.2. İki Matrisin Eşitliği**
- **1.3.3. Matrisin Bir Sayı (Skalar) ile Çarpılması**
- **1.3.4. Matris Toplamının ve Skalar Çarpımının Özellikleri**
- **1.3.5. İki Matrisin Çarpımı**
- **1.3.6. Matris Çarpımının Özellikleri**
- **1.3.7. Özel Matrisler** konuları işlenecektir.

1.3.1. Matris Tanımı

m satır ve *n* sütundan oluşan soldaki tabloya **matris** adı verilir.

Matristeki her bir sayıya **eleman** denir. Soldaki matriste $m \times n$ tane eleman vardır.

Matrisin yatay bir doğru boyunca sıralanan elemanlarına **sıra elemanları**, dikey bir doğru boyunca sıralanan elemanlarına **sütun elemanları** denir. Soldaki matris *m* sıra ve *n* sütundan oluşmaktadır.

Matristeki bir elemanın yerini belirlemede iki indis kullanılır. Bunlardan biri elemanın hangi satırda, diğeri de hangi sütunda olduğunu belirtir. Örneğin a_{ij} elemanı, elemanın ***i***'inci sıra ve ***j***'inci sütunda olduğunu belirtir. Benzer şekilde a_{23} elemanı ikinci satır ve üçüncü sütundadır.

Matris genelde $[a_{ij}]$ şeklinde ifade edilir.

m satır ve *n* sütundan oluşan bir matrise $m \times n$ matris denir. Eğer matrisin satır ve sütun sayıları birbirine eşit ise, örneğin $m=n$ ise, matrise **kare matris** adı verilir.

Örneğin $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ matrisinde satır ve sütun sayıları $m = n = 3$ olduğundan bu bir kare matrisidir.

$a_{11} = 1$, $a_{22} = 4$, $a_{33} = -3$ elemanlarına matrisin asal köşegeni denir.

Satır matris:

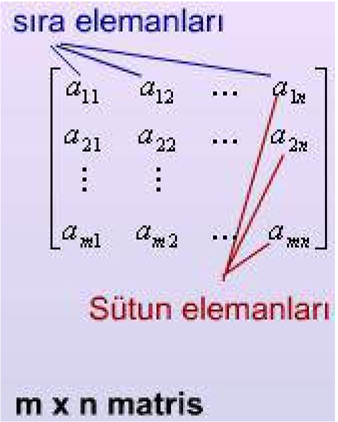
Bir satırdan oluşan matrise **satır matris** denir.

Örneğin $A = [1, 7, -2, 3]$ satır matristir. Bir satır ve dört sütundan oluşmuştur. 1×4 matristir.

Sütun matris:

Bir sütundan oluşan bir matrise **sütun matris** denir.

Örneğin $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ matrisi sütun matristir. Üç satır ve bir sütundan oluşmuştur. **3**×**1** matristir.



1.3.1.1. Örnek 3

Örnek 3 a, b, c, d ve e düğmelerindeki matrisleri boyutlarına göre sınıflayınız.

a

Soru : $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Çözüm : A, 2x3 matristir, 2 satır ve 3 sütundan oluşmuştur.

b

Soru : $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

Çözüm : B, 2x2 kare matristir, satır veya sütun sayısı 2'dir.

c

Soru : $C = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

Çözüm : C, 3x1 matristir. 3 satır ve 1 sütundan oluşmuştur. Bir sütun matris veya bir vektördür.

d

Soru : D = [-3, 2, 8]

Çözüm : D, 1x3 matristir. 1 satır ve 3 sütundan oluşan bir satır matristir.

e

Soru : E = [3]

Çözüm : E, 1x1 kare matristir. Tek elemanlı matris olarak da bilinir.

1.3.2. İki Matrisin Eşitliği

A ve B gibi iki matrisin boyutları, yani satır ve sütun sayıları ve elemanları benzer ise; iki matris eşittir $(A = B)$

denir.

Örnek 4

$A=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

matrislerinin boyutları (**A, 2 x 2 ve B, 2 x 2**) ve karşılıklı elemanları eşit olduğundan iki matris eşittir.

Örnek 5

$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ burada ***A* 2 x 2 ve *B* 2 x 3** matrisler olduğundan, boyutları birbirine eşit olmadığından ***A≠B*** dir.

Örnek 6

$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ *A* ve *B*'nin boyutları aynı olmasına karşın, elemanları farklı değerler olduğundan *A≠B*'dir.

1.3.2.1. İki Matrisin Toplamı

İki Matrisin Toplamı:

A ve *B* boyutları aynı olan iki matris olsun. *A+B* toplamı, matrislerin karşılıklı elemanlarının toplamı olarak oluşan bir matristir ve *C=A+B* şeklinde ifade edilir.

Örnek 7 | Örnek 8 | Örnek 9

$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & -3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ ise

$$C=\begin{bmatrix} 1+0 & 2+4 & 5+6 \\ 4+3 & 6+5 & -3+7 \\ 5+2 & 4+1 & 8+4 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 6 & 11 \\ 7 & 11 & 4 \\ 7 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

Çözüm : Görüldüğü gibi *A* 3 x 3 ve *B* 3 x 3 boyutlu matrisler olup karşılıklı elemanları toplanmış ve aynı boyutlu bir *C* 3 x 3 matrisinin aynı pozisyondaki elemanlarını oluşturmuştur.

Örnek 7 | Örnek 8 | Örnek 9

$A=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ olduğuna göre **A + B toplamı mümkün müdür?**

Çözüm : *A* 2 x 2, *B* 2 x 3 matrislerdir. Boyutları farklı olduğundan *A+B* toplamı mümkün değildir.

$A=\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ ise

C= A - B'nin cevabı ne olmalıdır?

Çözüm : $=\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 5-3 & 7-1 \\ 8-2 & 2-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

Örnek 9 elde edilir.

İki matrisin birbirinden çıkarılması için toplama özelliklerinin olması gerekir. Gerçekte iki matrisin birbirinden çıkarılması demek, bu matrislerden birinin (-1) ile çarpılıp diğeriyle toplanması demektir:

A-B = A + (-1)B

İki matrisin birbirinden çıkarılmasında da matrislerin karşılıklı elemanları çıkarılır.

1.3.3. Matrisin Bir Sayı (Skalar) İle Çarpılması

Solda görülen A matrisini göz önüne alalım

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A matrisinin *k* ile belirtilen bir sayı (skalar) ile çarpımı olan *kA* matrisi, *A*'nın her elemanının *k* ile çarpılmasıyla elde edilir.

Örnek 10 $3\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ çarpımını elde ediniz.

Çözüm : $3\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 15 \\ 3 & -6 & 12 \end{bmatrix}$

Örnek 11 $-5\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ çarpımını elde ediniz.

Çözüm : $-5\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -10 & 10 \\ -20 & -25 & -15 \\ 15 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

1.3.4. Matris Toplamının ve Skalar Çarpımının Özellikleri

a) A + B = B + A

b) (A + B) + C = A + (B + C)

c) a(A + B) = aA + aB

d) (a + b) A = aA + bA

e) a(bA) = (ab)A

f) Eğer ${}_m0_n$ tüm elemanları sıfır olan mxn boyutlu bir matris ise

A + 0 = 0 + A'dır.

1.3.4.1. Örnek 12

Özellik : A + B = B + A

İspat : $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$B + A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Örnek 12 a

Buradan A + B = B + A olduğu görülmektedir.

Özellik : (A + B) + C = A + (B + C)

İspat : $(A + B) + C = \left(\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

$A + (B + C) = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right)$

$= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

b

$\therefore (A + B) + C = A + (B + C)$

Özellik : a(A + B) = aA + aB

İspat : $a(A + B) = 3\left(\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\right)$

$= 3\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 24 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$

$(aA + aB) = 3A + 3B$

$= 3\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6 & 15 \\ -9 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 9 & 24 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$

c

$\therefore a(A + B) = aA + aB$

Özellik : (a + b) A = aA + bA

İspat : $(a + b)A = (3+2)\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

$= 5\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 25 \\ -15 & 20 \end{bmatrix}$

$aA + bA = 3\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

$= 3\begin{bmatrix} 6 & 15 \\ -9 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$

d

$= \begin{bmatrix} 10 & 25 \\ -15 & 20 \end{bmatrix}$

e

Özellik : $a(bA) = (ab)A$

İspat :

$$a(bA) = 3\left(2\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\right) = 3\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 30 \\ -18 & 24 \end{bmatrix}$$

$$(ab)A = (3)(2)\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= 6\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 30 \\ -18 & 24 \end{bmatrix}$$

$$\therefore a(bA) = (ab)A$$

f

Özellik : Eğer ${}_m0_n$ tüm elemanları sıfır olan m x n boyutlu bir matris ise A + 0 = 0 + A'dır.

İspat :

$$A + {}_20_2 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$${}_20_2 + A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A + {}_20_2 = {}_20_2 + A$$

1.3.5. İki Matrisin Çarpımı

Eğer $A = [a_{ij}]$ $m{\times}n$ ve $B=[b_{ij}]$ $n{\times}p$ boyutlu matrisler ise *A* ve *B*'nin çarpımı $AB = C = [c_{ij}]$ $m{\times}p$ boyutlu bir matristir. Burada çarpımın gerçekleşebilmesi için *A* matrisinin sütun sayısı (*n*) ile *B* matrisinin satır sayısı (*n*)'nın aynı olması gerekir.

Örneğin *A* matrisi 4×3 ve *B* matrisi 3×5 boyutlu matrisler ise $A{\cdot}B$ mümkündür ve $AB = C$ matrisi 4×5 boyutlu bir matristir.

Eğer *A* matrisi 4×3 ve *B* matrisi 2×5 boyutlu ise *A* matrisinin sütun sayısı (n=3) ile *B* matrisinin satır sayısı (n=2) aynı olmadığından matrislerin çarpım işlemi gerçekleşmez.

$A=[a_{ij}]$ ve $B=[b_{ij}]$ matrislerinin çarpımı sonucunda (*AB*) oluşan $C=[c_{ij}]$ matrisinin elemanları,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{ij}$$

eşitliği yardımıyla elde edilir.

Çarpım işleminin nasıl gerçekleştiğini anlayabilmek için ilgili matris çarpımını aşağıdaki şekilde yazarsak *A* matrisinin *i*'inci sıra elemanları ile *B* matrisinin *j*'inci sütun elemanlarının çarpımlarının toplamı bize *C* matrisinin c_{ij}'inci elemanını verecektir.

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots & b_{1j} \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} \cdots & b_{2j} \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} \cdots & b_{nj} \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \boxed{c_{ij}} & \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix} = C$$

C matrisinin diğer elemanları da benzer şekilde *A* matrisinin ilgili satır elemanları ile *B* matrisinin ilgili sütun elemanlarının çarpımının toplamı şeklinde elde edilir.

1.3.5.1. Örnek 13

Örnek 13

$$\begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 4} \\ 2 \quad 6 \quad 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

1 2 4	4	1	4	3	= 1 X 4 + 2 X 0 + 4 X 2 = 12
	0	-1	3	1	= 1 X 1 + 2 X (-1) + 4 X 7 = 27
	2	7	5	2	= 1 X 4 + 2 X 3 + 4 X 5 = 30
					= 1 X 3 + 2 X 1 + 4 X 2 = 13

1 2 4 4 = 1 X 4 +
0
2

1 2 4 4 = 1 X 4 + 2 X 0 +
0
2

1 2 4 4 = 1 X 4 + 2 X 0 + 4 X 2
0
2

1.3.5.2. Örnek 14

Örnek 14

Soru : A (3x2)'lik, B (2x4)'lük, C (4x5)'lik matrisler ise a , b, c ve d seçeneklerinde verilen çarpımların gerçekleşip gerçekleşmediğini kontrol ediniz.

Özellik : A B

Çözüm : (3x2) x (2x4)

a çarpım gerçekleşir ve sonuç (3x4)'lük bir matristir.

b

Özellik : B A

Çözüm : (2x4) x (3x2)

çarpım gerçekleşmez, çünkü 4≠3'tür.

c

Özellik : A C

Çözüm : (3x2) x (4x5)

2≠4 olduğundan çarpım gerçekleşmez.

d

Özellik : (A B) C

Çözüm : [(3x2) x (2x4)] x (4x5)

(3x4) x (4x5)

4=4 olduğundan çarpım gerçekleşir ve sonuç (3x5)'lik bir matristir.

1.3.6. Matris Çarpımının Özellikleri

a) A (B C) = (A B) C

b) A (B + C) = A B + A C

c) (A + B) C = A C + B C

d) a (A B) = (a A) B = A (a B)

1.3.6.1. Örnek 15

Örnek 15

a b c d

Özellik : A (B C) = (A B)

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1)(4)+(-3)(-1) & (1)(0)+(-3)(2) \\ (2)(4)+(5)(-1) & (2)(0)+(5)(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(7)+(3)(3) & 2(-6)+3(10) \\ (1)(7)+(4)(3) & 1(-6)+4(10) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 23 & 18 \\ 19 & 34 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 9 & 17 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 9 & 17 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 18 \\ 19 & 34 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ A(BC) = (AB)C

Örnek 15

a b c

Özellik : A (B + C) = A B + A C

$$B+C = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A(B+C) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 15 \\ 9 & 25 \end{bmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 9 & 17 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 15 \\ 9 & 25 \end{bmatrix}$$

$\therefore A(B+C) = AB + AC$

Örnek 15

a | b | c

Özellik : (A + B) C = A C + B C

$$A+B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 3 & 9\end{bmatrix}$$

$$(A+B)C=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 3 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -0\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & 0\\ 3 & 18\end{bmatrix}$$

$$AC=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 0 & 8\end{bmatrix}$$

$$BC=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -6\\ 3 & 10\end{bmatrix}$$

$$AC+BC=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 0 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7 & -6\\ 3 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & 0\\ 3 & 18\end{bmatrix}$$

$$\therefore (A+B)C=AC+BC$$

Örnek 15

a | b | c | d

Özellik : a (A B) = (a A) B = A (a B)

$$AB=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 9\\ 9 & 17\end{bmatrix}$$

$$2(AB)=2\begin{bmatrix}8 & 9\\ 9 & 17\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & 18\\ 18 & 34\end{bmatrix}$$

$$(2A)B=\left(2\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & 5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & 6\\ 2 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & 5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}16 & 18\\ 18 & 34\end{bmatrix}$$

$$2B=2\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -6\\ 4 & 10\end{bmatrix}$$

$$A(2B)=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -6\\ 4 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & 18\\ 18 & 34\end{bmatrix}$$

$$\therefore 2(AB)=(2A)B=A(2B)$$

1.3.7. Özel Matrisler

Özel Matrisler kapsamında;

- **1.3.7.1. Sıfır Matris**
- **1.3.7.2. Transpoze Matris**
- **1.3.7.3. Kare Matris**

- **1.3.7.4. Köşegen Matris**
- **1.3.7.5. Skalar Matris**
- **1.3.7.6. Birim Matris**
- **1.3.7.7. Üç Köşegenli Matris**
- **1.3.7.8. Üst Üçgen Matris**
- **1.3.7.9. Alt Üçgen Matris**
- **1.3.7.10. Simetrik Matris**
- **1.3.7.11. Antisimetrik (skew-symmetric) Matris** konuları işlenecektir.

1.3.7.1. Sıfır Matris

Tüm elemanları sıfır olan matristir. Eğer ele alınan sıfır matris $m \times n$ boyutlu ise ${}_m0_n$ şeklinde yazılmalıdır.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.3.7.2. Transpoze Matris

Bir matrisin transpozesini elde etmek için matrisin satır ve sütunları yer değiştirir. Eğer matrisimiz A ise transpozesi A^T'dir.

Örnek 16 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ matrisinin transpozesini elde ediniz.

ÇÖZÜM:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

A matrisinin 1.sıra elemanları A^T matrisinin 1.sütun elemanları, A matrisi 2.sıra elemanları A^T matrisinin 2.sütun elemanları olarak yer değiştirmiştir.

Örnekten görüldüğü gibi A matrisinin 1.sıra elemanları A^T matrisinin 1.sütun elemanları, A matrisinin 2.sıra elemanları A^T matrisinin 2.sütun elemanları olarak yer değiştirmiştir.

1.3.7.3. Kare Matris

Satırlarının sayısı sütunlarının sayısına eşit olan matrise **kare matris** denir.

Örnek 17 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 9 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin satır ve sütun sayıları m=n=3 olduğundan bir kare matristir.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 9 & 7 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \qquad A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 9 & 7 & 2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array} \qquad A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 9 & 7 & 2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array} \qquad m = n = 3$$

1.3.7.4. Köşegen Matris

Sol tarafta görülen matrisi göz önüne alalım.

Asal Köşegen:

Burada a_{11}, a_{22}, a_{33},..., a_{nn} elemanlarına **asal köşegen** elemanları denir.

Yandaki kare matriste $a_{11} = 1$, $a_{22} = 5$ ve $a_{33} = 9$ elemanları asal köşegen elemanlarıdır.

Köşegen Matris:

Asal köşegen dışında kalan elemanları sıfır olan kare matrise **köşegen matris** denir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

1.3.7.4.1. Örnek 18

Örnek 18

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ kare matrisinde $a_{11} = 1$, $a_{22} = 5$ ve $a_{33} = 9$ elemanları asal köşegen elemanlarıdır

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

1.3.7.4.2. Örnek 19

Örnek 19

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ kare matrisinin asal köşegen dışında kalan elemanlar sıfır olduğundan köşegen matristir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

1.3.7.5. Skalar Matris

Asal köşegen elemanları birbirine eşit olan köşegen matrise **skalar matris** denir.

Örnek 20

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$ köşegen matrisinin asal köşegen elemanları $a_{11}=3$, $a_{22}=3$, $a_{33}=3$ aynı değere(3) eşit olduğundan skalar matristir.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

1.3.7.6. Birim Matris

Köşegen bir matriste asal köşegen elemanları 1'e eşitse bu matrise **birim matris** denir.

Eğer matris $n \times n$ boyutlu ise bu I_n ile gösterilir.

Örnek 21

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ matrisi bir birim matris olup, I_3 olarak gösterilir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.3.7.7. Üç Köşegenli Matris

Bir kare matrisin asal köşegeni ve ona bitişik köşegenlerdeki elemanları hariç diğer elemanları sıfır ise bu matrise **Üç Köşegenli Matris** (tridiogonal) adı verilir. Bu köşegenlerin bazı elemanları (tümü değil), sıfır değeri olabilir.

Örnek 22

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$ matrisi üç köşegenli bir matristir.

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\2&2&-2&0\\0&-1&3&1\\0&0&-2&4\end{bmatrix}\quad A=\begin{bmatrix}&-1&0&0\\2&&-2&0\\0&-1&&1\\0&0&-2&\end{bmatrix}\quad A=\begin{bmatrix}&-1&0&0\\2&&-2&0\\0&-1&&1\\0&0&-2&\end{bmatrix}\quad A=\begin{bmatrix}&-1&0&0\\&&-2&0\\0&-1&&1\\0&0&-2&\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}&&0&0\\&&-2&0\\0&&&1\\0&0&&\end{bmatrix}\quad A=\begin{bmatrix}&&0&0\\&&&0\\0&&&\\0&0&&\end{bmatrix}$$

1.3.7.8. Üst Üçgen Matris

Bir kare matrisin asal köşegeninin altında kalan tüm elemanları sıfır ise bu matrise **üst üçgen matris** denir.

Örnek 23

$A=\begin{bmatrix}1&3&-5\\0&4&2\\0&0&-7\end{bmatrix}$ matrisi, asal köşegenin altında kalan elemanları sıfır olduğundan üçgen matristir.

$$A=\begin{bmatrix}1&3&-5\\0&4&2\\0&0&-7\end{bmatrix}\quad A=\begin{bmatrix}&3&-5\\0&4&2\\0&0&-7\end{bmatrix}\quad A=\begin{bmatrix}&&-5\\0&&2\\0&0&\end{bmatrix}\quad A=\begin{bmatrix}&&-5\\0&&\\0&0&\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}&&\\0&&\\0&0&\end{bmatrix}\quad A=\begin{bmatrix}&&\\0&&\\0&0&\end{bmatrix}$$

1.3.7.9. Alt Üçgen Matris

Bir kare matrisin asal köşegeninin üstünde kalan tüm elemanları sıfır ise bu matrise **alt üçgen matris** denir.

Örnek 24

$A=\begin{bmatrix}3&0&0\\-5&9&0\\2&0&7\end{bmatrix}$ matrisi, asal köşegenin üstünde kalan elemanları sıfır olduğundan alt üçgen matristir.

$$A=\begin{bmatrix}3&0&0\\-5&9&0\\2&0&7\end{bmatrix}\quad A=\begin{bmatrix}&0&0\\-5&9&0\\2&0&7\end{bmatrix}\quad A=\begin{bmatrix}&0&0\\-5&&0\\2&0&\end{bmatrix}\quad A=\begin{bmatrix}&0&0\\&&0\\2&0&\end{bmatrix}\quad A=\begin{bmatrix}&0&0\\&&0\\&&\end{bmatrix}$$

1.3.7.10. Simetrik Matris

Bir kare matriste $A^T=A$ ise matris **simetrik matris**'tir denir.

Örnek 25 $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 5 & -3 & 6 \\ 7 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ matrisinin transpozesini elde ediniz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 5 & -3 & 6 \\ 7 & 6 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & & \\ 5 & & \\ 7 & & \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 6 \\ & & \\ 7 & 6 & 8 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 5 & -3 & 6 \\ 7 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

A^T=A olduğundan A matrisi **simetrik matris**'tir denir. Görüldüğü gibi asal köşegene göre simetrik elemanlar birbirine eşittir.

A^T=A olduğundan A matrisi **simetrik matris**'tir denir. Örneklerden de görüldüğü gibi asal köşegene göre simetrik elemanlar birbirine eşittir.

1.3.7.10.1. Örnek 26

Örnek 26 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ matrisinin transpozesini elde ediniz.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & & \\ 0 & & \\ 4 & & \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ & & \\ -1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$A^T \neq A$ olduğundan A matrisi simetrik değildir.

1.3.7.11. Antisimetrik (skew-symmetric)Matris

Bir kare matriste A^T=-A şartı gerçekleşiyorsa, A matrisine **antisimetrik matris** denir.

Örnek 27 $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 8 \\ -6 & -8 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin transpozesini elde ediniz.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & -0 & 8 \\ -6 & -8 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & & \\ -2 & & \\ 6 & & \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -0 & 8 \\ & & \\ -6 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & -8 \\ 6 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Buradan A^T = -A olduğu görülür. Dolayısıyla A matrisi **antisimetriktir** denir. Antisimetrik bir matriste asal köşegene göre simetrik elemanlar, birbirlerine mutlak değerce eşit fakat ters işaretlidirler.

Buradan $A^T = -A$ olduğu görülür. Dolayısıyla *A* matrisi antisimetriktir denir. Antisimetrik bir matriste asal köşegene göre simetrik elemanlar, birbirlerine mutlak değerce eşit fakat ters işaretlidirler.

1.BOLUM DEĞERLENDİRME SORULARI

SORU 1

Aşağıdaki eşitliğin lineer olup olmadığını belirleyiniz.

$8x - 6y = 5$

(A) Lineer (B) Lineer Değil

SORU 2

Aşağıdaki eşitliğin lineer olup olmadığını belirleyiniz.

$5x - 4y + z^2 = -2$

(A) Lineer (B) Lineer Değil

SORU 3

Aşağıdaki eşitliğin lineer olup olmadığını belirleyiniz.

$3x + \sqrt{y^2} = 6$

(A) Lineer (B) Lineer Değil

SORU 4

Aşağıdaki eşitliğin lineer olup olmadığını belirleyiniz.

$x + 2x^3y + z = -3$

(A) Lineer (B) Lineer Değil

SORU 5

Aşağıdaki eşitliğin lineer olup olmadığını belirleyiniz.

$\frac{x}{y} + 3y = \pi$

(A) Lineer (B) Lineer Değil

SORU 6

Aşağıdaki eşitliğin lineer olup olmadığını belirleyiniz.

$-x + |y| = 8$

(A) Lineer (B) Lineer Değil

SORU 7

Aşağıdaki lineer denklem sisteminin çözümünü elementer dönüşümler (eliminasyon) yardımıyla elde ediniz.

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

A (1, -2, -3) B (-1, 2, -3) C (1, 2, 3)

SORU 8

Aşağıdaki lineer denklem sisteminin çözümünü elementer dönüşümler (eliminasyon) yardımıyla elde ediniz.

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 2 \\ 4x + 2y + 2z &= 8 \\ x - y + z &= 4 \end{aligned}$$

A (1, -1, 3) B (-4, 2, 10) C (-4, 2, 9)

SORU 9

Aşağıdaki lineer denklem sisteminin çözümünü elementer dönüşümler (eliminasyon) yardımıyla elde ediniz.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 13 \\ x - 2y &= 3 \\ 5x + 2y &= 27 \end{aligned}$$

A (-5, -1) B (-1, 5) C (5, 1)

SORU 10

Aşağıda verilen matrislere göre **A+B** toplamını elde ediniz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

A $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 9 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ B $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 9 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ C $\begin{bmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 9 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

SORU 11

Aşağıda verilen matrislere göre **A-C** farkını elde ediniz.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 5 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$$

A $\begin{bmatrix}-3 & 1 & -5\\ 5 & -3 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$ B $\begin{bmatrix}-3 & 1 & 5\\ 5 & -3 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$ C $\begin{bmatrix}-3 & 1 & -5\\ 5 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$

SORU 12

Aşağıdaki işlemin sonucunu elde ediniz.

$$A=2\begin{bmatrix}3 & -2 & 4\\ 1 & 2 & -1\\ -3 & 5 & 6\end{bmatrix}$$

A $\begin{bmatrix}6 & -4 & 8\\ 2 & 4 & 2\\ -6 & 10 & 12\end{bmatrix}$ B $\begin{bmatrix}6 & -4 & 4\\ 2 & -4 & -2\\ -6 & 10 & 12\end{bmatrix}$ C $\begin{bmatrix}6 & -4 & 8\\ 2 & 4 & -2\\ -6 & 10 & 12\end{bmatrix}$

SORU 13

Aşağıdaki işlemin sonucunu elde ediniz.

$$A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6 & -2\\ 8 & 10\end{bmatrix}$$

A $\begin{bmatrix}3 & -1\\ 8 & 5\end{bmatrix}$ B $\begin{bmatrix}3 & -1\\ 4 & 5\end{bmatrix}$ C $\begin{bmatrix}-3 & -1\\ 4 & 5\end{bmatrix}$

SORU 14

Aşağıda verilen matrislere göre **AB** çarpımını elde ediniz.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 4 & 0 & 2\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & 5\\ -2 & 2\end{bmatrix}$$

A $\begin{bmatrix}3 & 8\\ 8 & -12\end{bmatrix}$ B $\begin{bmatrix}4 & 8\\ 8 & -12\end{bmatrix}$ C $\begin{bmatrix}3 & -8\\ 8 & -12\end{bmatrix}$

SORU 15

Aşağıda verilen matrislere göre **A(BC)** çarpımını elde ediniz.

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

A) $\begin{bmatrix}20 & 24\\ 6 & 4\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}21 & 24\\ 5 & 4\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}21 & 24\\ 6 & 4\end{bmatrix}$

SORU 16

Aşağıda verilen matrisin **transpozesini (A^T)** elde ediniz.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 2 & -1 & 6\\ 7 & 3 & -2\end{bmatrix}$$

A) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 7\\ 4 & -1 & 3\\ 5 & 6 & -2\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 7\\ 4 & -1 & 3\\ 7 & 3 & -2\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 7\\ 4 & -1 & 3\\ 5 & 6 & -2\end{bmatrix}$

SORU 17

Aşağıda verilen matrisin **transpozesinin (A^T)** transpozesini $(A^T)^T$ elde ediniz.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 2 & -1 & 6\\ 7 & 3 & -2\end{bmatrix}$$

A) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 7\\ 4 & -1 & 3\\ 5 & 6 & -2\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 2 & -1 & 6\\ 7 & 3 & -2\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 6\\ 7 & 3 & -2\end{bmatrix}$

SORU 18

Aşağıda verilen matrislerden hangisi simetriktir?

A) $\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ 3 & -4 & 1\\ -1 & 1 & 6\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 3 & -4 & 6\\ 5 & 6 & 0\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}1 & -3 & 5\\ 3 & -4 & 6\\ -5 & 6 & 0\end{bmatrix}$

SORU 19

A 4x3 **B** 3x5 **C** 5x2 boyutlu matrisler ise **AB** çarpımı sonucu oluşan matrisin boyutu ne olur?

Ⓐ 5x3 Ⓑ 4x3 Ⓒ 4x5

SORU 20

A 4x3 **B** 3x5 **C** 5x2 boyutlu matrisler ise **(AB)C** çarpımı sonu oluşan matrisin boyutunu elde ediniz.

Ⓐ 5x5 Ⓑ 4x2 Ⓒ 2x4

2.BOLUM DOGRUSAL CEBIR VE DIFERANSIYEL DENKLEMLER
LİNEER SİSTEMLERİN MATRİS KULLANILARAK ÇÖZÜMÜ

2.1. LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN MATRİS NOTASYONU GÖSTERİMİ

m eşitlik (denklem) ve *n* bilinmeyenden oluşan lineer denklem sisteminin matrisler ile gösterimi aşağıda gösterildiği gibidir. Daha önce de belirtildiği gibi x_1, x_2, ..., x_n bilinmeyenleri, *a*'lar ve *b*'ler ise sabitleri ifade etmektedir.

m eşitlik ve n bilinmeyenden oluşan lineer denklem sistemi

m eşitlik (denklem)

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 \dots + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 \dots + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 \dots + & a_{mn}x_n & = b_m \end{matrix}$$

n bilinmeyen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Katsayılar Matrisi   Bilinmeyenler Sütun Matrisi   Sabitler Sütun Matrisi

2.1.1. Arttırılmış (Augmented) Matris

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} = [A \vdots B]$$

matrisine **arttırılmış matris** denir.

Örnek 1 | **Örnek 2** | **Örnek 3**

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 2x + y + z &= 3 \\ 3x - y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

Lineer denklem sistemi verilmektedir.
Bu denklem sistemine göre;

a)Sisteme ilişkin **katsayılar matrisini** ve arttırılmış matrisi elde ediniz.

b) Sistemi matris notasyonu yardımıyla ifade ediniz.

Çözüm:

a) Katsayılar Matrisi

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Arttırılmış matris

$$[A \vdots B] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & \vdots & 4 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 3 & -1 & 2 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

Çözüm:

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A X = B

2.2. SATIR EŞDEĞER MATRİSLER

Bu kısımda elementer satır işlemleri tanımı ve bir matrisin satır eşdeğer matris şeklinde ifade edilmesi örnekleriyle birlikte incelenecektir.

2.2.1. Elementer Satır İşlemleri Tanımı

Bir *A* matrisindeki elementer satır işlemleri aşağıdaki işlemlerden biri olarak tanımlanmaktadır.

a) **A** matrisinin herhangi bir satırının (örneğin **i**'nci satırı) sıfırdan farklı bir sabit (**k**) ile çarpımı.$\mathbf{R_i}$, **i**'inci satırı belirtiyorsa bu satırın **k** sabiti ile çarpımı sonucu i'inci satır $R_i \rightarrow kR_i$ şeklinde olacaktır.

b) A matrisinin herhangi iki satırının, örneğin; i'inci ve j'inci satırlarının yerlerinin değiştirilmesi. Bu durum $R_i \leftrightarrow R_j$ şeklinde gösterilebilir.

c) **A** matrisinin herhangi bir satırının sıfırdan farklı bir k sabiti ile çarpılıp (örneğin j'inci satırının $\mathbf{R_j}$) i'inci satırına ($\mathbf{R_i}$) eklenmesi. Bu durum
$R_i \leftrightarrow R_i + k\,R_j$
şeklinde gösterilir.
Satır işlemlerine ilişkin bu durumlar takip eden örneklerle açıklığa kavuşturulacaktır.

2.2.1.1. Örnek 4

Örnek 4

$$2x_1 + 3x_2 + 1x_3 = 9$$
$$1x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6$$
$$3x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 8$$

Lineer denklem sistemine ilişkin arttırılmış matris,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -3 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

! Arttırılmış matrisi oluşturmak için denklemdeki rakamları matristeki yerlerine sürükleyiniz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -3 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Lineer denklem sisteminin ikinci satırının ikiyle çarpılmış hali,

$1 * 2 = 2$
$2 * 2 = 4$
$-3 * 2 = -6$
$6 * 2 = 12$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 9 \\ & & & \\ 3 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$1 * 2 =$
$2 * 2 =$
$-3 * 2 =$
$6 * 2 =$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & -6 & 12 \\ 3 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 &= 12 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Burada A matrisinin 2.satırı 2 sabiti ile çarpılmaktadır ($R_2 \rightarrow 2R_2$). Oluşan lineer denklem sistemi ile verilen lineer denklem sisteminin çözüm kümeleri aynıdır.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -3 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Benzer şekilde eğer A matrisinin herhangi iki satırı örneğin 1.satır ile 2.satırı yer değiştirecek olursa **($R_1 \leftrightarrow R_2$)** yeni **arttırılmış matris ve lineer denklem sistemimiz** aşağıdaki gibi olur.

$$A \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{array}{c} 2 \quad 3 \quad 1 \quad 9 \\ \begin{bmatrix} & & & \\ 3 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \\ 1 \quad 2 \quad -3 \quad 6 \end{array}$$

$$A \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 9 \\ 3x + x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

$$A \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Eğer 2.satırı –3 ile çarpar 3.satıra eklersek ($R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2$) bu işlemler sonucu verilen arttırılmış matrisimiz ve lineer denklem sistemi,

$$A \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 11 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ -5x_2 + 11x_3 &= -10 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Matrislere ilişkin elementer satır dönüşümleri (işlemleri) yapıldığında her defasında *A* matrisinin başından başlama zorunluluğu yoktur.

2.2.1.2. Örnek 5

Örnek 5

$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 25$
$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 22$
$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 18$

lineer denklem sisteminin elementer satır dönüşümleri yardımıyla eşdeğer sistemlerini oluşturun.

Çözüm : Verilen sisteme ilişkin arttırılmış matris ve denklem sistemini aşağıda belirtildiği şekilde yazalım.

Arttırılmış Sistem	Lineer Denklem Sistemi
$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 25 \\ 3 & 2 & 3 & 22 \\ 2 & 1 & 4 & 18 \end{bmatrix}$	$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 25$ $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 22$ $2x_1 + x_2 + 4x_3 = 18$
$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 22 \\ 2 & 1 & 4 & 18 \end{bmatrix}$	$x_2 - x_3 = 3$ $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 22$ $2x_1 + x_2 + 4x_3 = 18$

Çözüm :

$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 6 & 10 \end{bmatrix}$	$x_2 - x_3 = 3$ $x_1 + x_2 - x_3 = 4$ $-x_2 + 6x_3 = 10$
$\xrightarrow[R_3 \to -R_3]{R_1 \to R_1 + R_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 13 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -10 \end{bmatrix}$	$5x_3 = 3$ $x_1 + x_2 - x_3 = 4$ $x_2 - 6x_3 = -10$

Yukarıda önce $R_1 \to R_1 + R_3$ daha sonra $R_3 \to -R_3$ elementer satır işlemleri bir önceki matris üzerine gerçekleştirilmiştir.

$\frac{R_2 \leftrightarrow R_1}{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & 5 & 13 \end{bmatrix}$	$x_1 + x_2 - x_3 = 4$ $x_2 - 6x_3 = -10$ $5x_3 = 13$
$\frac{R_1 \to R_1 - R_2}{R_2 \to R_2 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 14 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 13 \end{bmatrix}$	$x_1 + 5x_3 = 14$ $x_2 - x_3 = 3$ $5x_3 = 13$

Çözüm :

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 13 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 1$
$x_2 - x_3 = 3$
$5x_3 = 13$

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 + R_3]{R_3 \to \frac{R_3}{5}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{28}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{5} \end{bmatrix}$$

$x_1 = 1$

$x_2 = \frac{28}{5}$

$x_3 = \frac{13}{5}$

Örnekten de görüldüğü gibi her aşamada elde edilen matrisler (dolayısıyla lineer denklem sistemi) birbirine satır eşdeğer olup sistemin aynı çözüm kümesine sahiptirler.

Örneğin verilen

$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 25$

$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 18$

sisteminin çözüm kümesi ile, son aşamada elde edilen,

$x_1 = 1$

$x_2 = \frac{28}{5}$

$x_3 = \frac{13}{5}$

denklem sisteminin çözüm kümesi aynı olup

$x_1 = 1$, $x_2 = \frac{28}{5}$, $x_3 = \frac{13}{5}$ yani $(1, \frac{28}{5}, \frac{13}{5})$'tir.

2.2.2. Bir Matrisin Satır Eşdeğer Matris Şeklinde İfade Edilmesi

Bir matris eğer aşağıda belirtilen kurallar sağlanırsa **satır eşdeğer matris** (Row echelon form) şeklindedir denir.

a) Sadece sıfırlardan oluşan satırlar mevcutsa, bunlar matrisin en altındadır.

b) Sıfırlardan oluşan satırlardan farklı satırlarda ilk sıfırdan farklı eleman değeri 1'dir.

c) Her bir satırdaki ilk sıfırdan farklı 1 değeri, bir önceki satırdaki sıfırdan farklı ilk 1 elemanının sağında yer alır.

2.2.2.1. Örnek 6, 7, 8, 9, 10 ve 11

Örnek 6 | Örnek 7 | Örnek 8 | Örnek 9 | Örnek 10 | Örnek 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ matrisinin satır eşdeğer matris şeklinde olup olmadığını ifade ediniz.

Çözüm

Görüldüğü gibi 1.sıranın ilk sıfırdan farklı elemanı 1'dir.
İkinci satırın ilk sıfırdan farklı elemanı 1 olup bu birinci satırda yer alan 1 elemanının sağındadır. Üçüncü satırın ilk sıfırdan farklı elemanı 1 olup, bu ikinci sıradaki 1'in sağında yer almaktadır. Bu şartlar verilen matrisin **satır eşdeğer matris** şeklinde olduğunu göstermektedir.

Örnek 6 | Örnek 7 | Örnek 8 | Örnek 9 | Örnek 10 | Örnek 11

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ matrisinin **satır eşdeğer matris** şeklinde olup olmadığını ifade ediniz.

Çözüm

1. Satırdaki ilk sıfırdan farklı eleman 1'dir.
2. Satırdaki ilk sıfırdan farklı eleman 1 olup, bu değer bir önceki satırdaki 1 elemanının sağında yer almaktadır.
3. Satırın tüm elemanları sıfır olup matrisin en alt satırını oluşturmaktadır.
Dolayısıyla verilen matris **satır eşdeğer matris** şeklinde ifade edilmiştir.

Örnek 6 | Örnek 7 | Örnek 8 | Örnek 9 | Örnek 10 | Örnek 11

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ matrisinin **satır eşdeğer matris** şeklinde olup olmadığını ifade ediniz.

Çözüm

Örnekteki matris, 2. satır elemanlarının tümü sıfır olduğundan ve bu satır matrisin son satırı olarak yer almadığından verilen matris satır eşdeğer matris olarak ifade edilmemiştir. Daha önce belirtilen üç kurala ek olarak eğer bir satırdaki ilk sıfırdan farklı eleman 1'in bulunduğu sütundaki diğer elemanlar sıfır ise, verilen matris **satır indirgenmiş eşdeğer matris** (row reduced echelon) şeklindedir denir.

Örnek 6 | Örnek 7 | Örnek 8 | Örnek 9 | Örnek 10 | Örnek 11

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ matrisinin satır indirgenmiş matris şeklinde olup olmadığını kontrol ediniz.

Çözüm

1) Satırdaki ilk sıfırdan farklı eleman 1 ve bu elemanın bulunduğu 1.sütundaki diğer elemanlar sıfırdır.

2) Satırdaki ilk sıfırdan farklı eleman 1 ve bu eleman bir önceki satırdaki 1'in sağında yer almakta ve sütunundaki diğer elemanlar sıfırdır.

3) Satırdaki ilk sıfırdan farklı eleman 1 ve bu 2.satırdaki ilk sıfırdan farklı eleman 1'in sağında yer almakta ve ilgili sütunun diğer elemanları sıfırdır.

Bu durumda verilen matris **satır indirgenmiş matris** şeklindedir denir.

Örnek 6 | Örnek 7 | Örnek 8 | Örnek 9 | Örnek 10 | Örnek 11

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin satır indirgenmiş matris şeklinde olup olmadığını kontrol ediniz.

Çözüm

Matrisde, 2.satırdaki ilk sıfırdan farklı eleman 1 fakat bu elemanın bulunduğu sütundaki diğer elemanlar sıfır olmadığından (burada -2 bulunmaktadır) ilgili matris satır indirgenmiş matris şeklinde değildir denir.

Elementer satır dönüşümleri yardımıyla verilen bir matris satır indirgenmiş matris şekline dönüştürülebilir.

Örnek 6 | Örnek 7 | Örnek 8 | Örnek 9 | Örnek 10 | Örnek 11

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisini elementer satır dönüşümleri yardımıyla satır indirgenmiş matris şekline dönüştürünüz.

Çözüm

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -7 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to -\frac{1}{2} R_3]{R_2 \to \frac{1}{5} R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 + R_3]{R_1 \to R_1 + 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Görüldüğü gibi verilen matris satır indirgenmiş matris şekle dönüştürülmüştür.

2.3. GAUSS ve GAUSS-JORDAN ELİMİNASYON YÖNTEMLERİ

Lineer denklem sistemlerinin çözümünü elde etmede kullanılan birçok yöntem vardır. İzleyen kısımlarda bu yöntemlerden ikisi olan **Gauss** ve **Gauss-Jordan** yöntemleri tanıtılacaktır. Burada $n \times n$ boyutlu lineer denklem sistemleri ele alınacaktır. Daha sonraki bölümlerde $m \times n$ boyutlu lineer denklem sistemlerinin çözümlerinden bahsedilecektir.

2.3.1. Gauss Yöntemi

$$\begin{array}{llll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \dots & + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + & \dots & + a_{nn}x_n & = b_n \end{array}$$

şeklinde verilen bir lineer denklem sisteminin katsayılar matrisi A'nın

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ve arttırılmış matrisin $[A \vdots B]$'nin

$$[A \vdots B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlandığı önceki bölümde ele alınmıştı.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a^{\bullet}_{12} & \cdots & a^{\bullet}_{1n} & b^{\bullet}_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a^{\bullet}_{2n} & b^{\bullet}_2 \\ \vdots & & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b^{\bullet}_n \end{array}\right]$$

Elementer satır dönüşümleri yardımıyla arttırılmış matris $[A\vdots B]$'nin *A* katsayılar kısmı asal köşegen elemanlar 1 olan bir üst üçgen matris haline dönüştürülürse $[A\vdots B]$matrisi yandaki şeklini alır.

Verilen $[A\vdots B]$katsayılar matrisinin elementer satır dönüşümleri yardımıyla yanda belirtilen eşdeğer bir $[A^{\bullet}\vdots B^{\bullet}]$matrisine dönüştürülerek lineer denklem sisteminin çözümünün elde edilmesi işlemi **Gauss Eliminasyon Yöntemi** olarak bilinmektedir.

2.3.1.1. Örnek 12

Örnek 12

Soru : **Gauss Eliminasyon** yöntemini kullanarak aşağıdaki **lineer denklem sisteminin** çözümünü elde ediniz.

$$x_1 - 2x_2 - x_3 = 2$$

$$3x_1 - x_2 + 4x_3 = -1$$

$$-2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3$$

Çözüm Sisteme **ilişkin arttırılmış matrise elementer** satır dönüşümleri uygulanırsa $[A\vdots B]$matrisinin ***A*** katsayılar kısmı,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 2R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 7 & -7 \\ 0 & -7 & 0 & 7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & -7 & 0 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 7R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & \frac{49}{5} & -\frac{14}{5} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \frac{5}{49}R_3} \left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} \end{array}\right]$$

Asal köşegen elemanları 1 olan bir **üst üçgen matris** haline dönüşür. $[A \vdots B]$matrisinin **satır dönüşümleri** ile elde edilen **eşdeğer matrisi** göz önüne alınırsa,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} \end{array}\right]$$

bu matris

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - \quad x_3 &= 2 \\ x_2 + \frac{7}{5}\, x_3 &= -\frac{7}{5} \\ x_3 &= -\frac{2}{7} \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi haline dönüştürülür.

Geri

x_3 değeri, ikinci eşitlikte yerine konursa,

$$x_2 + \frac{7}{5}\left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{7}{5}$$

$x_2 = -1$

elde edilir.

$x_2 = -1$ ve $x_3 = -\frac{2}{7}$ değerleri birinci eşitlikte yerine konursa,

$x_1 - 2(-1) - \left(-\frac{2}{7}\right) = 2$ eşitliğinden, $x_1 = -\frac{2}{7}$

elde edilir. Dolayısıyla verilen **Lineer denklem sisteminin çözüm kümesi:**

$\left(-\frac{2}{7}, -1, -\frac{2}{7}\right)$ olarak bulunur.

2.3.1.2. Örnek 13

Örnek 13

Soru : **Gauss Eliminasyon yöntemi** yardımıyla

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin çözümünü elde ediniz.

Çözüm : Bir önceki örnekte olduğu gibi **arttırılmış matris** yazılır ve **elementer satır dönüşümleri** uygulanırsa

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

$$R_3 \to -\frac{R_3}{4} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$ elde edilir.

Bu matristen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_2 &= -3 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir.

$x_3 = 0$ ve $\mathbf{x_2} = -3$ değerleri elde edildiğinden bu değerler birinci satırda yerine konursa,

$x_1 - 3 + 0 = 3$

eşitliğinden $\mathbf{x_1} = 6$ elde edilir. Dolayısıyla **çözüm kümemiz** (6, -3, 0) şeklinde olur.

2.3.2. Gauss-Jordan Eliminasyon Yöntemi

$$[A \vdots B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

artırılmış matrisinin, elementer satır dönüşümleri yardımıyla, asal köşegen elemanları 1 olan yandaki matrise dönüştürüldüğünü varsayalım.

Verilen $[A \vdots B]$ katsayılar matrisinin elementer satır dönüşümleri yardımıyla yanda verilen eşdeğer bir matrise dönüştürülerek lineer denklem sisteminin çözümünün elde edilmesi işlemi **Gauss-Jordan Eliminasyon Yöntemi** olarak bilinmektedir.

2.3.2.1. Örnek 14

Örnek 14

Soru: **Gauss-Jordan eliminasyon** yöntemi yardımıyla

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin çözümünü elde ediniz.

Verilen sisteme ilişkin **arttırılmış matris**

$$[A \vdots B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

dir. Bu matrise **elementer satır dönüşümleri** uygulanırsa,

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 3R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{2} R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 - R_3]{R_1 \to R_1 - 2R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

elde edilir.

Elde edilen bu **eşdeğer matris** yardımıyla

$1.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 = 2$

$0.x_1 + 1.x_2 + 0.x_3 = 2$

$0.x_1 + 0.x_2 + 1.x_3 = 0$

yazılabilir. Buradan $\mathbf{x_1 = 2}$, $\mathbf{x_2 = 2}$ **ve** $\mathbf{x_3 = 0}$ elde edilir.
Dolayısıyla **çözüm kümemiz** (2, 2, 0)'dır.

2.4. TERS MATRİS

Bu kısımda matrisin tersinin tanımı ve ters matrislerin özellikleri incelenecektir.

- **2.4.1. Matris Tersinin Tanımı**
- **2.4.2. Ters Matrislerin Özellikleri**

2.4.1. Matris Tersinin Tanımı

A ve B $n \times n$ boyutlu matrisler olsun. A ve B matrisleri $AB = BA = I_n$ bağıntısını sağlıyorsa B'ye A'nın tersi denir ve $B=A^{-1}$ ile gösterilir. A da B'nin tersidir ve $A=B^{-1}$ yazılır.

Örnek 15

Soru : $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ matrislerinin birbirinin **tersi** olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}} \underset{B}{\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \qquad \underset{B}{\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}} \underset{A}{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

yani $AB = BA = I_2$ olduğundan

$B=\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$ matrisinin **tersi**dir.

Bu durum $B=A^{-1}$ şeklinde gösterilir.

Benzer şekilde

$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$ matrisi $B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin tersi olup $A=B^{-1}$ şeklinde gösterilir.

Bir **kare matrisin** örneğin ***nxn*** boyutlu ***A*** matrisinin **tersi** A^{-1} matrisini elde etmek için $[A \vdots I]$ matrisi **elementer satır dönüşümleri** yardımıyla matrisi $[I \vdots B]$ haline dönüştürülür.

Burada $B=A^{-1}$'dir.

Her $n \times n$ boyutlu bir kare matrisin tersinin mevcut olması gerekmez.

2.4.1.1. Örnek 16

Örnek 16

Soru : $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin **tersini** $[A \vdots I]$ $[I \vdots A^{-1}]$ yöntemini kullanarak elde ediniz.

Çözüm : $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to -\frac{R_3}{4}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Görüldüğü gibi $[A \vdots I]$ matrisi **elementer satır dönüşümleri** yardımıyla $[I \vdots A^{-1}]$ matrisine dönüştürülmüştür.

İşlemler sonucunda **A** matrisinin **tersi**

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

2.4.1.2. Örnek 17

Örnek 17

Soru : $[A \vdots I]$ ¨ $[I \vdots A^{-1}]$ yöntemini kullanarak

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisinin **tersini** elde ediniz.

Çözüm :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 2R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{R_2}{5}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 7R_2]{R_1 \to R_1 + 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{9}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{49}{5} & -\frac{11}{5} & \frac{7}{5} & 1 \end{array}\right]$$

Çözüm :

$$\xrightarrow{R_3 \to -\frac{5}{49} R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{9}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{49} & \frac{1}{7} & \frac{5}{49} \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 \to R_1 - \frac{9}{5} R_3]{R_2 \to R_2 - \frac{7}{5} R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{10}{49} & \frac{1}{7} & -\frac{9}{49} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{7} & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{49} & \frac{1}{7} & \frac{5}{49} \end{array}\right]$$

İşlemler sonucundan da görüldüğü gibi **elementer satır dönüşümleri** sonucunda ***A*** matrisinin **tersi** $\boldsymbol{A_{-1}}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{10}{49} & \frac{1}{7} & -\frac{9}{49} \\ -\frac{2}{7} & 0 & -\frac{1}{7} \\ -\frac{11}{49} & \frac{1}{7} & \frac{5}{49} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

2.4.2. Ters Matrislerin Özellikleri

Ters Matrislerin Özellikleri kapsamında ters matrislerle ilgili 4 adet özellik üzerinde durulup, her biriyle ilgili örnekler verilecektir.

2.4.2.1. Özellik 1,2 ve 3

Özellik 1

Her ne kadar genelde matris çarpımı komütatif değilse de (yani $AB \neq BA$), eğer $B = A^{-1}$ ise, $AA^{-1} = A^{-1}A$ 'dır.

Özellik 2

Bir matrisin tersi mevcut ise, bu bir tanedir.

Özellik 3

A ve B aynı boyutlu tersi alınabilir matrislerse, (AB)' nin tersi elde edilebilir ve $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ' dir.

2.4.2.1.1. Örnek 18

Örnek 18

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A^{-1}=\begin{bmatrix} 7/4 & 1/4 & -5/4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Yan taraftaki A matrisin tersinin A^{-1} matrisi olduğunu doğrulayınız.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7/4 & 1/4 & -5/4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

1 1 1   7/4 1/4 -5/4 = 1 X 7/4 + 1 X -1 + 1 X 1/4 = 1

-1 0 1 = 1 X 1/4 + 1 X 0 + 1 X -1/4 = 0

1/4 -1/4 1/4 = 1 X -5/4 +1 X 1 + 1 X 1/4 = 0

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7/4 & 1/4 & -5/4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ & & \end{bmatrix}$$

2 3 -2   7/4 1/4 -5/4 = 2 X 7/4 +3 X -1 + -2 X 1/4 = 0

-1 0 1 = 2 X 1/4 +3 X 0 + -2 X -1/4 = 1

1/4 -1/4 1/4 = 2 X -5/4 +3 X 1 + -2 X 1/4 = 0

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7/4 & 1/4 & -5/4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1 2 1   7/4 1/4 -5/4 = 1 X 7/4 +2 X -1 + 1 X 1/4 = 0

-1 0 1 = 1 X 1/4 +2 X 0 + 1 X -1/4 = 0

1/4 -1/4 1/4 = 1 X -5/4 +2 X 1 +1 X 1/4 = 1

Örnek 18

Eğer A^{-1}, A matrisinin tersi ise $AA^{-1} = I$ kuralı gerçekleşmelidir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\left(\frac{7}{4}\right)+1(-1)+1\left(\frac{1}{4}\right), & 1\left(\frac{1}{4}\right)+1(0)+1\left(-\frac{1}{4}\right), & 1\left(-\frac{5}{4}\right)+1(1)+1\left(\frac{1}{4}\right) \\ 2\left(\frac{7}{4}\right)+3(-1)-2\left(\frac{1}{4}\right), & 2\left(\frac{1}{4}\right)+3(0)-2\left(-\frac{1}{4}\right), & 2\left(-\frac{5}{4}\right)+3(1)-2\left(\frac{1}{4}\right) \\ 1\left(\frac{7}{4}\right)+2(-1)+1\left(\frac{1}{4}\right), & 1\left(\frac{1}{4}\right)+2(0)+1\left(-\frac{1}{4}\right), & 1\left(-\frac{5}{4}\right)+2(1)+1\left(\frac{1}{4}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla A^{-1} verilen A matrisinin tersidir.

Tekrar

2.4.2.1.2. Örnek 19

Örnek 19

Soru :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \text{ ise tersinin } B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{10}{49} & \frac{1}{7} & -\frac{9}{49} \\ -\frac{2}{7} & 0 & -\frac{1}{7} \\ -\frac{11}{49} & \frac{1}{7} & \frac{5}{49} \end{bmatrix}$$

olduğunu doğrulayınız.

Çözüm : Bir önceki örnekte olduğu gibi $BB^{1} = I$ olduğunun doğrulanması gerekmektedir.

$$\underset{B}{\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & 2 \end{bmatrix}} \underset{B^{-1}}{\begin{bmatrix} \frac{10}{49} & \frac{1}{7} & -\frac{9}{49} \\ -\frac{2}{7} & 0 & -\frac{1}{7} \\ -\frac{11}{49} & \frac{1}{7} & \frac{5}{49} \end{bmatrix}} = \underset{I}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

olduğundan B^{-1}, B matrisinin *tersidir.*

2.4.2.1.3. Örnek 20

Örnek 20

Soru : İlk iki örnekte verilen ***A, A*⁻¹, *B, B*⁻¹** matrislerini kullanarak

! Bu sorunun çözümlerini seçeneklere tıklayarak görebilirsiniz.

a) ***AB*** çarpımını elde ediniz. **b)** $B^{-1}A^{-1}$ çarpımını elde ediniz. **c)** $[AB]^{-1}$ matrisini elde ediniz.

a) ***AB*** çarpımını elde ediniz. b) $B^{-1}A^{-1}$ çarpımını elde ediniz.

Çözüm :
$$\begin{bmatrix}1&1&1\\2&3&-2\\1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&-1\\3&-1&4\\-2&-3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-6&5\\15&1&6\\5&-6&-5\end{bmatrix}$$

a) ***AB*** çarpımını elde ediniz. **b)** $B^{-1}A^{-1}$ çarpımını elde ediniz. **c)** $[AB]^{-1}$ matri

Çözüm :
$$\begin{array}{ccccc} B^{-1} & & A^{-1} & & B^{-1}A^{-1}\\ \begin{bmatrix}\frac{10}{49}&\frac{1}{7}&-\frac{9}{49}\\-\frac{2}{7}&0&-\frac{1}{7}\\-\frac{11}{49}&\frac{1}{7}&\frac{5}{49}\end{bmatrix} & & \begin{bmatrix}\frac{7}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{5}{4}\\-1&0&1\\\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix}\frac{33}{196}&\frac{19}{196}&\frac{31}{196}\\-\frac{15}{28}&-\frac{1}{28}&\frac{9}{28}\\-\frac{100}{196}&-\frac{16}{196}&\frac{88}{196}\end{bmatrix}\end{array}$$
olarak eldeedilir.

Çözüm :

AB çarpımının sonucu $\begin{bmatrix}2&-6&5\\15&1&6\\5&-6&-5\end{bmatrix}$

olarak elde edilmişti. Bu çarpımın **tersini** elde etmek için $\left[(AB)\vdots I\right]\rightarrow\left[I\vdots(AB)^{-1}\right]$ yöntemi kullanılırsa

$$\begin{array}{c} (AB) \qquad\qquad I\\ \left[\begin{array}{ccc|ccc}2&-6&5&1&0&0\\15&1&6&0&1&0\\5&-6&5&0&0&1\end{array}\right]\end{array}$$

matrisine **elementer dönüşümler** uygulanırsa sonuçta

$$\begin{array}{c} I \qquad\qquad (AB)^{-1}\\ \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{33}{196}&\frac{19}{196}&\frac{31}{196}\\0&1&0&-\frac{105}{196}&-\frac{7}{196}&\frac{63}{196}\\0&0&1&-\frac{100}{196}&-\frac{16}{196}&\frac{88}{196}\end{array}\right]\end{array}$$

elde edilir.

Buradan
$$(AB)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{33}{196}&\frac{19}{196}&\frac{31}{196}\\-\frac{105}{196}&-\frac{7}{196}&\frac{63}{196}\\-\frac{100}{196}&-\frac{16}{196}&\frac{88}{196}\end{bmatrix}$$

olup, dolayısıyla $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ doğrulanır.

2.4.2.2. Özellik 4

Eğer A tersi alınabilir bir matris ise aşağıdaki özellikler geçerlidir:

i. A^{-1} tersi alınabilir bir matristir ve $(A^{-1})^{-1} = A$' dır.

ii. A^T tersi alınabilir bir matristir ve $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ ' dır.

iii. A^k tersi alınabilirdir (k= 1, 2, 3, . . .) ve $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ ' dır.

iv. Sıfırdan farklı bir skala için sA tersi alınabilirdir ve $(sA)^{-1} = \left(\frac{1}{s}\right) A^{-1}$ ' dir.

2.4.2.2.1. Örnek 21

Örnek 21

Soru : $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi verilmektedir.

! Bu sorunun çözümlerini seçeneklere tıklayarak görebilirsiniz.

a) A matrisinin **tersini (A^{-1})** elde ediniz.

b) $(A^{-1})^{-1} = A$ olduğunu gösterelim.

c) $[A^{-1}]^T = [A^T]^{-1}$ olduğunu gösterelim.

d) $[A^2]^{-1} = [A^{-1}]^2$ olduğunu gösterelim.

e) $(sA)^{-1} = \left(\frac{1}{s}\right) A^{-1}$ olduğunu gösterelim.

a) A matrisinin **tersini (A^{-1})** elde ediniz.

Cevap : $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{5} R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 5R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{R_3 \to -\frac{1}{2} R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$

elde edilir.

Buradan

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

olduğu görülür.

2.5. MATRİS TERSİ YÖNTEMİ KULLANARAK LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

n eşitlik ve *n* bilinmeyenden oluşan lineer denklem sisteminin *AX=B* şeklinde gösterildiğini varsayalım.

Eğer A matrisi tersi alınabilir bir matris ise;

$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$
$A^{-1}AX = A^{-1}B$
$IX = A^{-1}B$
$X = A^{-1}B$ dir. Bu bize çözüm kümesini verir. B'nin tüm elemanlarının şimdilik sıfır olmadığı varsayılmaktadır.

2.5.1. Örnek 22 ve Örnek 23

Örnek 22

Soru :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin çözümünü **matris tersi yöntemini** kullanarak elde ediniz.

A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 30 \\ 8 \end{bmatrix}$$

dir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 + 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 + 2R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 22 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 22 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \to \frac{R_3}{22}]{R_2 \to -\frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{22} & \frac{1}{22} & \frac{2}{22} \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 + \frac{5}{2}R_3]{R_1 \to R_1 - 2R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{12}{22} & -\frac{2}{22} & -\frac{4}{22} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{44} & \frac{5}{44} & -\frac{12}{44} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{22} & \frac{1}{22} & \frac{2}{22} \end{bmatrix}$$

Buradan

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{12}{22} & -\frac{2}{22} & -\frac{4}{22}\\ \frac{3}{44} & \frac{5}{44} & -\frac{12}{44}\\ \frac{5}{22} & \frac{1}{22} & \frac{2}{22}\end{bmatrix} \quad \text{veya} \quad \begin{bmatrix}\frac{24}{44} & -\frac{4}{44} & -\frac{8}{44}\\ \frac{3}{44} & \frac{5}{44} & -\frac{12}{44}\\ \frac{10}{44} & \frac{2}{44} & \frac{4}{44}\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

İlgili değerler $\boldsymbol{X=A^{-1}B}$ eşitliğinde yerine konursa

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{24}{44} & -\frac{4}{44} & -\frac{8}{44}\\ \frac{3}{44} & \frac{5}{44} & -\frac{12}{44}\\ \frac{10}{44} & \frac{2}{44} & \frac{4}{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ 30\\ 8\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{10}{11}\\ \frac{18}{11}\\ \frac{38}{11}\end{bmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla $x_1=-\frac{10}{11}$, $x_2=\frac{18}{11}$ ve $x_3=\frac{38}{11}$ dir.

Soru : $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$
$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3$
$x_1 \quad + \quad 8x_3 = 17$

Örnek 23

lineer denklem sisteminin çözümünü $\boldsymbol{X=A^{-1}B}$ eşitliği yardımıyla elde ediniz.

Cevap : Verilen **sistemin çözümüne** ilişkin **matris gösterimi**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \text{ ve } A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edildiğinden $\boldsymbol{X=A^{-1}B}$ eşitliği

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

olup, buradan

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla verilen **denklem sisteminin çözümü**
$x_1 = 1$, $x_2 = -1$ ve $x_3 = 2$'dir.

2.BOLUM DEĞERLENDİRME SORULARI

SORU 1

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$
$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1$
$3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 17$

Lineer denklem sisteminin katsayılar matrisini elde ediniz.

A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

SORU 2

Birinci sorudaki **lineer denklem sistemine** ilişkin **arttırılmış matrisi** yazınız.

A) $\begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -15 & 17 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 6 \end{bmatrix}$

SORU 3

$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}$ **arttırılmış matrisine** ilişkin **lineer denklem sistemini** elde ediniz.

A) $5x_1 - x_2 = 2$
$-3x_1 + 8x_2 = 4$

B) $2x_1 + 5x_2 = -1$
$4x_1 - 3x_2 = 8$

C) $-x_1 + 2x_2 = 5$
$8x_1 + 4x_2 = -3$

SORU 4

Aşağıda verilen matrislerden hangisi **sıra eşdeğer (row echelon) matristir?**

A) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

SORU 5

Aşağıdaki matrislerden hangisi **sıra indirgenmiş eşdeğer (row reduced echelon) matristir?**

A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

SORU 6

Aşağıda verilen **lineer denklem sisteminin çözümünü, Gauss eliminasyon yöntemini** kullanarak elde ediniz.

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$
$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1$
$3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10$

A) $(3, -1, 2)$ B) $(-3, 1, 2)$ C) $(3, 1, 2)$

SORU 7

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$
$-2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1$
$8x_1 - x_2 + 4x_3 = -1$

lineer denklem sisteminin çözümünü, Gauss-Jordan yöntemi ile elde ediniz.

A) $(-\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, 0)$ B) $(-\frac{1}{7}, -\frac{1}{7}, 0)$ C) $(-\frac{1}{7}, 0 - \frac{1}{7})$

SORU 8

$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$
$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 9$

lineer denklem sisteminin çözümünü, Gauss-Jordan yöntemi ile elde ediniz.

A $\left(\frac{42}{11}, \frac{3}{11}, \frac{6}{11}\right)$ B $\left(\frac{3}{11}, \frac{42}{11}, \frac{6}{11}\right)$ C $\left(-\frac{3}{11}, \frac{6}{11}, \frac{42}{11}\right)$

SORU 9

$[A \vdots I] \rightarrow [I \vdots A^{-1}]$ yönetimini kullanarak $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin **tersini** elde ediniz.

A $\begin{bmatrix} \frac{13}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{7}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ B $\begin{bmatrix} -\frac{13}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{7}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ C $\begin{bmatrix} \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

SORU 10

$A = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin **tersini** elde ediniz.

A $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ B $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ C $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

SORU 11

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ matrisleri verilmektedir. $\boldsymbol{A^{-1}}$ matrisini elde ediniz.

A $\begin{bmatrix} \frac{4}{10} & \frac{2}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$ B $\begin{bmatrix} \frac{5}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$ C $\begin{bmatrix} -\frac{4}{10} & -\frac{2}{10} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$

SORU 12

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 5\end{bmatrix}$$

Yukarıda verilen matrisleri kullanarak B^{-1} matrisini elde ediniz.

A) $\begin{bmatrix}-\frac{5}{11} & -\frac{3}{11}\\ \frac{2}{11} & \frac{1}{11}\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}\frac{5}{11} & -\frac{3}{11}\\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11}\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}\frac{5}{11} & -\frac{3}{11}\\ \frac{2}{11} & \frac{1}{11}\end{bmatrix}$

SORU 13

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 5\end{bmatrix}$$

Yukarıda verilen matrisleri kullanarak $(AB)^{-1}$ matrisini elde ediniz.

A) $\begin{bmatrix}\frac{29}{110} & \frac{7}{110}\\ \frac{5}{110} & \frac{5}{110}\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}\frac{29}{110} & -\frac{7}{110}\\ -\frac{5}{110} & \frac{5}{110}\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}\frac{25}{110} & \frac{7}{110}\\ \frac{5}{110} & -\frac{5}{110}\end{bmatrix}$

SORU 14

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 5\end{bmatrix}$$

yukarıda verilen matrisleri kullanarak $\left(\frac{1}{4}B\right)^{-1}$ matrisini elde ediniz.

A) $\begin{bmatrix}\frac{20}{11} & -\frac{12}{11}\\ \frac{8}{11} & \frac{4}{11}\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}\frac{18}{11} & -\frac{12}{11}\\ \frac{8}{11} & \frac{4}{11}\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}\frac{20}{11} & \frac{12}{11}\\ \frac{8}{11} & -\frac{4}{11}\end{bmatrix}$

SORU 15

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 5\end{bmatrix}$$

Yukarıda verilen matrisleri kullanarak $(A^2)^{-1}$ matrisini elde ediniz.

A) $\begin{bmatrix}\frac{1}{10} & -\frac{5}{10}\\ -\frac{1}{20} & -\frac{1}{20}\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}\frac{1}{10} & \frac{1}{10}\\ -\frac{1}{20} & -\frac{1}{20}\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}-\frac{1}{10} & -\frac{1}{10}\\ \frac{1}{20} & \frac{1}{20}\end{bmatrix}$

SORU 16

$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5$
$x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -2$
$3x_1 - x_2 + 3x_3 = 4$

Lineer denklem sisteminin çözümünü ***$X=A^{-1}B$ matris tersi yöntemiyle*** elde ediniz.

(A) $\left(\frac{24}{54}, \frac{48}{54}, \frac{12}{54}\right)$ (B) $\left(\frac{34}{54}, \frac{45}{54}, \frac{12}{54}\right)$ (C) $\left(\frac{24}{54}, -\frac{48}{54}, \frac{12}{54}\right)$

SORU 17

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$
$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$
$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -1$

Lineer denklem sistemine ilişkin ***A* katsayılar matrisini** elde ediniz.

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

SORU 18

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$
$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$
$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -1$

Lineer denklem sistemine ilişkin **B vektörünü** elde ediniz.

(A) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

SORU 19

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$
$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$
$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -1$

Lineer denklem sistemine ilişkin ***A* katsayılar matrisinin tersini** elde ediniz.

(A) $\begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 7 & -6 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{6}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

SORU 20

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$

$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$

$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -1$

Lineer denklem sisteminin çözümünü $\boldsymbol{X=A^{-1}B}$ matris tersi yöntemini kullanarak elde ediniz.

A $\left(-\frac{7}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$ B $\left(-\frac{7}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$ C $\left(-\frac{7}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$

3.BOLUM DOGRUSAL CEBIR VE DIFERANSIYEL DENKLEMLER
DETERMİNANTLAR

3.1. DETERMİNANTIN TANIMI

A = [a_{ij}] şeklindeki bir nxn boyutlu kare matrisin **determinantı** bir sayı olup **det (A)** veya **A** ile gösterilir ve

$$\det(A) = \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$$

olarak ifade edilir.

Toplamdaki işaret j_i'lerin permütasyonu çift (0, 2, 4, ...) ise (+) tek (1, 3, 5,...) ise (-) olarak verilir.

A 1×1 boyutlu bir matris ise, **det (*A*) =** $|a_{11}|$ **=** a_{11}'dir.

3.2. DETERMİNANTLARIN ELDE EDİLMESİ

Bu kısımda bir matrisin determinant değerinin elde edilmesi gösterilecek, ikinci ve üçüncü dereceden determinantların hesaplanması örnekleriyle beraber sunulacaktır.

- **3.2.1. İkinci Dereceden Determinantlar**
- **3.2.2. Üçüncü Dereceden Determinantlar**

3.2.1. İkinci Dereceden Determinantlar

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Determinantın tanımını kullanarak, verilen matrisin determinantı yanda görülen şekilde elde edilir.

3.2.1.1. Örnekler

Örnek 1 Soru : A = [3] matrisinin **determinant değerini** elde ediniz.

Çözüm : Tanımdan det (A) = 3 olarak elde edilir.

Örnek 2 Soru : $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ matrisinin **determinantını** hesaplayınız.

Çözüm : $\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 5(7) - 4(8) = 35 - 32 = 3$

Örnek 3 Soru : $A = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ matrisinin **determinantını** elde ediniz.

Çözüm : $\det(A) = \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 9(6) - 2(-3) = 54 + 6 = 60$

Örnek 4

Soru : $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$ matrisinin **determinant değerini** elde ediniz.

Çözüm : $\det(A) = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -6 & -8 \end{bmatrix} = (-5)(-8) - (-6)(1) = 40 + 6 = 46$

3.2.2 Üçüncü Dereceden Determinantlar

3×3 boyutlu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantı

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

şeklinde yazılır ve SARRUS ya da köşegen açılımı kuralı olarak bilinen bir kuralla elde edilir.

Bu kurala göre determinantı elde etmek için verilen matrisin elemanları

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

şeklinde yazıldıktan sonra bu matrisin ilk iki sütunu bu matrise eklenir ve

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} \end{matrix}$$

ek matrisi elde edilir.

Elde edilen bu matrisin **köşegen elemanları** (aşağıda belirtilen oklarının yönünde) **çarpılıp toplanır.**

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \qquad a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

Bu toplamdan aşağıda belirtilen okların yönündeki **çarpımların toplamı çıkarılır.**

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \qquad -(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

3.2.2.1. Örnekler

Örnek 5 | **Örnek 6**

Soru : $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & 8 & -9 \end{bmatrix}$ matrisinin **determinant değerini** elde ediniz.

Çözüm : $\det(A) = \left| \begin{array}{ccc|cc} 3 & 4 & -6 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & -3 & 4 & 4 \\ 1 & 8 & -9 & 1 & 8 \end{array} \right.$

= [(3)(4)(-9) + (4)(-3)(1) + (-6)(4)(8)] - [(1)(4)(-6) + 8(-3)(3) + (-9)(4)(4)]

= [- 108 - 12 - 192] - [- 24 - 72 - 144]

= (-312) - (240) = -312 + 240 = -72

Örnek 5 | **Örnek 6**

Soru : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin **determinant değerini** elde ediniz.

Çözüm : $\det(A) = \left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right.$

= [(2)(2)(2) + 3(-3)(3) + (1)(1)(1)] - [(3)(2)(1) + (1)(-3)(2) + (2)(1)(3)]

= [8 - 27 + 1] - [6 -6 + 6]

= -18 - 6=-24

3.3. DETERMİNANTLARIN ÖZELLİKLERİ

Determinantlarla ilgili özellikler aşağıda sıralanmıştır :

Özellik 1: Bir determinantta bir satır (ya da sütun) elemanlarının tümü sıfır ise determinant değeri sıfırdır.

Özellik 2: Bir determinantla eğer iki satır (ya da sütun)'ın elemanları aynı değere sahipse determinant değeri sıfırdır.

Özellik 3: Determinantın bir satırının (ya da sütununun) tüm elemanlarının bir k sabiti ile çarpımı sonucu elde edilen determinant değeri, determinant değerinin k sabiti ile çarpımına eşdeğerdir.

Özellik 4: Bir determinantta bir satırın (veya sütunun) bir sabitle çarpılıp diğer bir satıra (veya sütuna) eklenmesi, determinant değerini değiştirmez.

Özellik 5: Bir determinantta iki satır (ya da iki sütun) birbiriyle yer değiştirirse determinantın sadece işareti değişir.

Özellik 6: Bir determinantın tüm satır ve sütunları yer değiştirirse determinantın değeri değişmez. Diğer bir ifadeyle det (A^T) = det (A) 'dır.

3.3.1. Özellik 1

Özellik 1: Bir determinantta bir satır (ya da sütun) elemanlarının tümü sıfır ise determinant değeri sıfırdır.

Örnek 7 | Örnek 8

$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ matrislerinin **determinant değerlerini** elde ediniz.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 3(0) - (0)(-2) = 0$$

Görüldüğü gibi ikinci satır elemanlarının tümü sıfırdır. Dolayısıyla herhangi bir hesaplama yapmadan **determinant değeri** sıfır olarak yazılabilir.

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 5(0) - (-3)(0) = 0$$

Benzer şekilde ikinci sütun elemanlarının tümü sıfır olduğundan herhangi bir hesaplama yapmadan **determinant değeri** sıfır olarak yazılabilir.

3.3.2. Özellik 2

Özellik 2: Bir determinantla eğer iki satır (ya da sütun)'ın elemanları aynı değere sahipse determinant değeri sıfırdır.

Örnek 9 | Örnek 10

Soru : $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ matrisinin **determinant değerini** elde ediniz.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (1)(5) - (1)(5) = 0$$

İlgili determinantın 1. ve 2.satır elemanları aynı değerlere sahip olduğundan determinant değeri sıfırdır.

Örnek 9 | **Örnek 10**

Soru : $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin **determinantını** hesaplayınız.

$$\det(A) = \left| \begin{matrix} 3 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{matrix}$$

$= [(3)(4)(1) + (5)(2)(1) + (3)(2)(-3)] - [(1)(4)(3) + (-3)(2)(3) + (1)(2)(5)]$

$= (4) - (4)$

$= 0$

1. ve 3.sütun değerleri aynı olduğundan determinant değeri sıfırdır.

3.3.3. Özellik 3

Özellik 3: Determinantın bir satırının (ya da sütununun) tüm elemanlarının bir k sabiti ile çarpımı sonucu elde edilen determinant değeri, determinant değerinin k sabiti ile çarpımına eşdeğerdir.

Örnek11

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}$ olarak verilmektedir. det (B)'yi hesaplamadan ilgili özelliği kullanarak elde ediniz.

Çözüm

B matrisinin 1.satırı A matrisinin 1.satırının 2 katıdır. Dolayısıyla

det (B) = k det (A)

Özelliğinden,

$$\det(B) = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = 2\big[(1)(12) - (1)(3)\big] = 18$$

elde edilir.

3.3.4. Özellik 4

Özellik 4. Bir determinantta bir satırın (veya sütunun) bir sabitle çarpılıp diğer bir satıra (veya sütuna) eklenmesi, determinant değerini değiştirmez.

Örnek12

$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}5 & 0 & 9\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ matrislerinin determinant değerlerinin aynı olduğunu gösteriniz.

A matrisinin determinant değeri,

$$\det(A)=\left|\begin{array}{ccc|cc}1 & 2 & 3 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right.$$

$= [(1)(-1)(1) + (2)(3)(1) + (3)(2)(0)]$
$- [(1)(-1)(3) + (0)(3)(1) + (1)(2)(2)]$
$= 4$ ' tür.

A matrisinde $R_1 \to R_1 + 2R_2$ işlemi gerçekleşirse yani ikinci satırın 2 katını 1.satıra eklersek elde edilen B matrisinin determinantının değeri,

$$\det(B)=\left|\begin{array}{ccc|cc}5 & 0 & 9 & 5 & 0\\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right.$$

$= [(5)(-1)(1) + (0)(3)(1) + (9)(2)(0)]$
$- [(1)(-1)(9) + (0)(3)(5) + (1)(2)(0)]$
$= 4$
olarak elde edilir.

3.3.5. Özellik 5

Özellik 5: Bir determinantta iki satır (ya da iki sütun) birbiriyle yer değiştirirse determinantın sadece işareti değişir.

Örnek 13

Soru : $A=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 3 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 5\end{bmatrix}$ matrisilerinin **determinant değerlerini** elde ediniz.

$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 5\\ 3 & 2\end{vmatrix}$

$\det(B)=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 5\end{vmatrix}$

Burada det(B), det(A)'nın satırlarının yer değiştirmesi ile elde edilmiştir.

$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 5\\ 3 & 2\end{vmatrix} = (1)(2) - (3)(5) = -13$

$\det(B)=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 5\end{vmatrix} = (3)(5) - (1)(2) = 13$

Görüldüğü gibi iki satırın yer değiştirmesi determinantın değerini değiştirmemiş, sadece işareti değişmiştir.

3.3.6. Özellik 6

Özellik 6: Bir determinantın tüm satır ve sütunları yer değiştirirse determinantın değeri değişmez. Diğer bir ifadeyle

det(A^T) = det(A) 'dır.

Örnek 14

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{ve} \quad \det(A^T) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

verilmektedir. Bu **determinantların** sonuçlarını bulup karşılaştırınız.

Örnek 14

$$\det(A) = \left|\begin{array}{ccc} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{cc} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-3} \end{array}$$

= [(1)(-1)(2) + (-2)(4)(-2) + (-1)(3)(-3)] - [(-2)(-1)(-1) + (-3)(4)(1) + (2)(3)(-2)]

= (23) - (-26)

= 49

$$\det(A^T) = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{cc} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} \end{array}$$

= [(1)(-1)(2)+(3)(-3)(-1)+(-2)(-2)(4)] - [(-1)(-1)(-2)+(4)(-3)(1)+(2)(-2)(3)] = 49

Dolayısıyla $\det(A^T) = \det(A)$ 'dır.

3.4. ELEMENTER SATIR DÖNÜŞÜMLERİ YARDIMI İLE DETERMİNANT DEĞERİNİN ELDE EDİLMESİ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$n \times n$ boyutlu bir kare matriste a_{11} a_{22}... a_{nn} elemanlarının bulunduğu köşegen **asal köşegen** olarak tanımlanır.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & & a_{33} & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Bu asal köşegenin altındaki tüm elemanların değerleri sıfır ise matrisimiz **üst köşegen matris** (ya da echelon form) veya **üst üçgen matris** olarak tanımlanır.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Asal köşegenin üstündeki tüm elemanların değerleri sıfır ise matrisimiz **alt köşegen matris** veya **alt üçgen matris** olarak tanımlanır.

3.4.1. Örnek 15, 16 ve 17

Örnek 15 | Örnek 16 | Örnek 17

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

matrisi üst üçgen matris midir?

Çözüm : A matrisinde **asal köşegen** altında kalan tüm elemanlar sıfır olduğundan, ***A*** matrisi **üst üçgen** matristir.

Örnek 15 | Örnek 16 | Örnek 17

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 5 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

matrisi **alt üçgen** matris midir?

Çözüm : A matrisinde **asal köşegen** üstünde kalan tüm elemanlar sıfır olduğundan, ***A*** matrisi **alt üçgen** matristir.

Örnek 15 | Örnek 16 | Örnek 17

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi **asal köşegen** matris midir?

Çözüm : **A** matrisi hem **üst üçgen**, hem de **alt üçgen** matristir. Genel tanım **asal köşegen** matristir.

3.4.2. Determinant Değerinin Elde Edilebilmesi İçin Matrisin Üst Üçgen veya Alt Üçgen Hale Dönüştürülmesi

Matrislere ilişkin determinantların değerinin daha kolay elde edilebilmesi için, matrislerin üst üçgen, alt üçgen hale dönüştürülmesi kolaylık sağlamaktadır.

Özellik: Bir üst üçgen matrisin determinantı, asal köşegen elemanların çarpımına eşittir. Dolayısıyla n **x** n boyutlu bir üst üçgen matriste

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}$$

şeklindedir.

3.4.3. Örnek 18, 19 ve 20

Örnek 18 | Örnek 19 | Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinant değerini elde ediniz.

Çözüm :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

det (A) = [(5)(1)(6) + (3)(4)(0) + (2)(0)(0)] -

Çözüm :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

det (A) = [(5)(1)(6) + (3)(4)(0) + (2)(0)(0)] - [(0)(1)(2) + (0)(4)(5) + (6)(0)(3)]

Çözüm :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

det (A) = [(5)(1)(6) + (3)(4)(0) + (2)(0)(0)] - [(0)(1)(2) + (0)(4)(5) + (6)(0)(3)]
= (30) - (0)
= 0

Yukarıdaki özellik kullanılırsa asal köşegen elemanları 5,1, 6 olduğundan

det (A) = (5)(1)(6)

det (A) = 30'dur.

3.5. DETERMİNANTLARIN EŞÇARPAN (KOFAKTÖR) AÇILIMI İLE ELDE EDİLMESİ

Bu kısımda bir matrisin determinant değerinin eşçarpan açılımı ile elde edilmesi gösterilecektir. Bunun için önce minör ve kofaktör tanımı ve kofaktör açılımı gösterilecektir.

- **3.5.1. Minör Tanımı**

3.5.1. Minör Tanımı

$A=[a_{ij}]$, $n\times n$ boyutlu bir kare matris olsun. Eğer i'inci sıra ve j'inci sütun silinecek olunursa geriye kalan $(n\text{-}1)\times(n\text{-}1)$ boyutlu matrisin determinantına a_{ij} elemanının **Minor**'ü denir.

Örnek 21

$$A=\begin{bmatrix}4 & 3 & 2\\ 1 & -5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$$ matrisini göz önüne alarak **minörlerini** bulunuz.

Çözüm : Eğer 2.sıra ve 3.sütun silinecek olunursa

$$A=\begin{bmatrix}4 & 3 & 2\\ 1 & -5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$$

Çözüm : Eğer 2.sıra ve 3.sütun silinecek olunursa

$$M_{23}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 7 & 8\end{bmatrix}$$

$$M_{23}=\begin{vmatrix}4 & 3\\ 7 & 8\end{vmatrix}=32-21=11$$

Eğer 3.satır ve 1.sütun silinecek olunursa

$$A=\begin{bmatrix}4 & 3 & 2\\ 1 & -5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$$

Eğer 3.satır ve 1.sütun silinecek olunursa

$$M_{31}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -5 & 6\end{bmatrix}$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ -5 & 6\end{vmatrix}=18+10=28$$

Minor değerleri elde edilir.

3.5.2. Kofaktör (Cofactor) veya Eşçarpan Tanımı

Eğer M_{ij} bir A kare matrisindeki a_{ij} elemanının minorü ise, a_{ij}'nin kofaktörü

$$C_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

dir. Burada i ilgili elemanın satır numarasını, j de sütun numarasını belirtmektedir.

Örnek 22

$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & -5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ matrisinin C_{23} ve C_{31} **kofaktörlerini** elde ediniz.

Çözüm :

$$C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)^{5}\ (11) = -11$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (-1)^{4}\ (28) = 28$$

olarak elde edilir.

3.5.3. Kofaktör Açılımı

Determinant, herhangi bir satırdaki (ya da sütundaki) elemanların, kendi eşçarpanlarıyla (kofaktörleriyle) çarpımlarının toplamına eşittir. Bu teknik kofaktör açılımı olarak bilinmektedir.

Örnek 23 Örnek 24

Birinci sıra elemanları ve bunlara ilişkin kofaktörleri kullanarak

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ matrisinin **determinant değerini** elde ediniz.

Çözüm : **Kofaktör açılımı** kullanılırsa

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

olarak elde edilir.

Örnek 23 Örnek 24

$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ değerini kofaktör açılımı tekniği ile elde ediniz.

Çözüm : Bir önceki örnekte olduğu gibi eğer **determinant değerini** birinci sıra elemanlarına ilişkin **kofaktörleri** kullanarak elde etmek istiyorsak, ilgili elemanlara ilişkin **kofaktör değerlerinin** elde edilmesi gerekmektedir.

$$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(2) - (-3)(4) = 10$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3 \left[(3)(2) - (-2)(4)\right] = -14$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^4 \left[(3)(-3) - (-2)(-1)\right] = -11$$

Bu kofaktör değerleri

$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$

eşitliğinde yerine konursa

det (A)= 1(10) + (-2) (-14) + (-1)(-11)

= 49

elde edilir.

Kofaktör açılımı tekniğiyle determinant değerinin daha kolay bir şekilde elde edilmesini sağlamak için satır dönüşümleri yardımıyla ilgili determinant fazla sayıda sıfırlar içeren bir şekle dönüştürülür. Böylece çarpımların sonucu sıfır olacağından, sıfır olan elemanlara ilişkin kofaktörlerin elde edilmesine gerek kalmayacak dolayısıyla işlemler kolaylaşacaktır.

Örneğin

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 8 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

determinantını göz önüne alalım.

Eğer 1.sıra elemanlarına ilişkin kofaktörleri kullanarak determinantı hesaplamak istersek,

$\det(A)=5.C_{11}+0.C_{12}+0.C_{13}$

$$\det(A) = 5(-1)^{1+1} M_{11} + 0(-1)^{1+2} M_{12} + 0(-1)^{1+3} M_{13}$$

$$= 5(-1)^2 M_{11}$$

$$= 5\begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 5(-16) = -80$$

Eğer 2. sütun elemanlarının kofaktörlerini kullanarak determinantı hesaplamak istersek,

$\det(A)=0.C_{12}+0.C_{22}+2.C_{32}$

$$\det(A) = 0(-1)^{1+2} M_{12} + 0(-1)^{2+2} M_{22} + 2(-1)^{3+2} M_{32}$$

$$= 2(-1)\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = -2(40) = -80$$

elde edilir.

Her iki durumda da ilgili satır ve sütunlarda fazla sayıda sıfır bulunduğundan işlemlerimiz kolaylaşmıştır.

Elementer satır dönüşümleri yapıldığı gibi elementer sütun dönüşümleri de yapılabilir. Bu şekilde verilen determinantlar determinant özelliklerinin uygulanabileceği determinantlar haline dönüştürülebilir.

2.BOLUM DEĞERLENDİRME SORULARI

SORU 1

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisinin **determinant değerini** elde ediniz.

(A) -29 (B) 29 (C) 27

SORU 2

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

determinant değerini elde ediniz.

(A) 8 (B) 7 (C) 2

SORU 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

determinant değerini elde ediniz.

(A) 3 (B) -3 (C) 0

SORU 4

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

determinant değerini elde ediniz.

(A) 5 (B) 0 (C) 9

SORU 5

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix}$$

determinant değerini elde ediniz.

A 240 B 239 C 241

SORU 6

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisini **elementer satır dönüşümleri** yardımıyla **üst üçgen haline** dönüştürünüz ve **determinant değerini** elde ediniz.

A 135 B 165 C 145

SORU 7

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisini **elementer satır dönüşümleri** yardımıyla **üst** veya a**lt üçgen matris haline** dönüştürerek **determinant değerini** elde ediniz.

A 18 B 15 C 17

SORU 8

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

matrisine ilişkin **M_{32} minörünün değerini** elde ediniz.

A $M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ B $M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ C $M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$

SORU 9

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

matrisine ilişkin **M_{23} minörünün değerini** elde ediniz.

(A) $M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ (B) $M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ (C) $M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

SORU 10

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

matrisine ilişkin **C_{13} kofaktör değerini** elde ediniz.

(A) $C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$ (B) $C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ (C) $C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

SORU 11

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

matrisine ilişkin **C_{21} kofaktör değerini** elde ediniz.

(A) $C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 8 \end{vmatrix}$ (B) $C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$

(C) $C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

SORU 12

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 6 \\ 0 & 9 & 8 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisinin **determinant değerini kofaktör açılımı tekniği** ile elde ediniz.

(A) -24 (B) 14 (C) 24

SORU 13

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

matrisinin **determinant değeri det (A)** = -1 ise, **det (A^T)** değerini elde ediniz.

Ⓐ -3 Ⓑ 4 Ⓒ -1

SORU 14

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$$

eşitliğini sağlayan **x** değerlerini elde ediniz.

Ⓐ (-3, -2) Ⓑ (-3, 2) Ⓒ (3, -2)

SORU 15

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ -2 & x+2 & -1 \\ 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = 0$$

verilmektedir. **Kofaktör açılımı** yardımıyla eşitliği sağlayan **x** değerlerini elde ediniz.

Ⓐ (-1, 1, -2) Ⓑ (-1, 1, 2) Ⓒ (1, -1, -2)

SORU 16

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$ **determinantını elementer satır dönüşümleri** yardımıyla

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 3-x & 9-x^2 \\ 0 & 2-x & 4-x^2 \end{vmatrix} = 0$$ şekline dönüştürünüz ve bu eşitliği sağlayan **x** değerlerini elde ediniz.

Ⓐ (2, -3) Ⓑ (3, 2) Ⓒ (-2, 3)

SORU 17

$$\begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}$$

eşitliğini sağlayan **x** değerlerini elde ediniz.

A) (1, 3) B) (-1, 3) C) $\left(\dfrac{3+\sqrt{33}}{4}, \dfrac{3-\sqrt{33}}{4}\right)$

SORU 18

Aşağıdaki eşitlik için ne söylenebilir?

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

A) Doğru B) Yanlış

SORU 19

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & -6 \\ -1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

determinant değerini Kofaktör açılımı tekniği ile elde ediniz.

A) -61 B) -62 C) -64

SORU 20

$$\begin{vmatrix} x-2 & 3 & -1 \\ 0 & x+2 & 3 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = 0$$

eşitliğini sağlayan **x** değerlerini elde ediniz.

A) (2, -2, 3) B) (2, -2, -3) C) (2, -3, 3)

4.BOLUM DOGRUSAL CEBIR VE DIFERANSIYEL DENKLEMLER
MATRİS VE DETERMİNANTLARA İLİŞKİN DİĞER ÖZELLİKLER

4.1. DETERMİNANT DEĞERİ YARDIMIYLA MATRİS TERSİNİN MEVCUT OLUP OLMAMASININ BELİRLENMESİ

A, n x n boyutlu bir **kare matris** olsun. Eğer **det (A) ≠ 0** şartı gerçekleşirse **A** matrisi ***tersi alınabilir*** (A^{-1} mevcuttur) bir ***matristir*** denir.

4.1.1. Örnek 1

Örnek 1

Soru : $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin **tersinin alınabilir** olup olmadığını belirleyiniz.

Cevap : **A** matrisinin **tersinin** mevcut olup olmadığını belirlemek için **det (A)**'nın elde edilmesi ve **det (A) ≠ 0** şartının sağlanması gerekir.

det (A)'nın elde edilmesi değişik yöntemlerle sağlanabilir. Biz herhangi bir satıra göre Kofaktör açılımı kuralını uygulayacağız.

Örneğin satır ya da sütunlarda **basitleştirme işlemi** yapmadan birinci satıra göre **Kofaktör açılımı** uygularsak,

$$\det(A) = 1 \cdot C_{11} + (-2)C_{12} + 3C_{13}$$

ifadesinden,

$$\det(A) = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \left[(1)(2) - (-1)(1)\right] + 2\left[(2)(2) - (3)(1)\right] + 3\left[(2)(-1) - (3)(1)\right]$$

= (3) + 2(1) + 3(-5)

= 3 + 2 - 15

= -10

elde edilir. Bundan dolayı, **A tersi (A^{-1}) alınabilir** bir matristir.

4.1.2. Örnek 2

Örnek 2

Soru : $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin **tersinin (A^{-1})** mevcut olup olmadığını belirleyiniz.

Cevap : $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_3} \begin{bmatrix} 0 & -13 & -8 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

det(A)'yı daha kolaylıkla elde edebilmek için **A** matrisine **$R_1 \to R_1 - 3R_3$** **elementer satır dönüşümü**nü uygulayalım.

Bu **eşdeğer matrisi**n 1.sütunundaki elemanların çoğu sıfır olduğundan bu sütun elemanları kullanılarak **kofaktör açılımı** uygulanırsa,

$$\det(A) = 0C_{11} + 0C_{21} + 1C_{13}$$

$$= C_{13}$$

$$= \begin{vmatrix} -13 & -8 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-13)(2) - (4)(-8) = 6$$

elde edilir. Dolayısıyla A matrisinin tersi mevcuttur ya da A matrisinin tersi alınabilir denir.

4.1.3. Cramer Kuralının Tanımlanması

n eşitlik ve ***n*** bilinmeyenden oluşan bir ***AX=B*** **lineer denklem sisteminde det (*A*) ≠ 0** şartı sağlanıyorsa sistemin *tek bir çözümü mevcuttur* ve bu çözüm

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \ldots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

dır.

Burada ***A***, **lineer denklem sisteminin *katsayılar matrisini*** belirtmektedir.

B matrisi $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ 'dır.

***A_1* matrisi** 1.sütun elemanlarının eşitliğin sağındaki ***B* matrisi** ile yer değiştirmesi sonucu elde edilen **katsayılar matrisini**,

***A_2* matrisi** 2.sütun elemanlarının, eşitliğin sağındaki ***B* matrisi** ile yer değiştirmesi sonucu elde edilen **katsayılar matrisini**,

A_n ise ***n***'inci sütun elemanlarının eşitliğin sağındaki ***B* matrisi** ile yer değiştirmesi sonucu elde edilen **katsayılar matrisini** belirtmektedir.

Konuya açıklık kazandırmak için ***AX=B* lineer denklem sistemimizi**

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad &\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} A & X & B \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \end{array}$$

şeklinde yazabiliriz.

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}$$ eşitlikleri

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

şeklinde ifade edilmektedir.

Görüldüğü gibi ***x_1*** için ***A* katsayılar matrisinin** 1.sütun elemanları, ***x_2*** için 2.sütun elemanları ***B* matris** elemanları ile yer değiştirmiştir.

4.1.3.1. Örnek 3

Örnek 3

Soru : **−2x1 + 3x2 − x3 = 1**

x1 + 2x2 − x3 = 4

−2x1 − x2 + x3 = −3

lineer denklem sisteminin çözümünü **Cramer Kuralına** göre elde ediniz.

Cevap :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

olduğundan **Cramer kuralı** uygulanabilir.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{\det(A)} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-8}{-2} = 4$$

elde edilir.

4.2. KARE MATRİSİN ADJOINT MATRİSİ

Eğer A, n x n boyutlu bir matris diğer bir ifadeyle,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ise, **A** katsayılar matrisinin $\mathbf{a_{ij}}$ elemanlarına ilişkin Kofaktörler **(C_{ij})** matrisi

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

nin transpozesi **(C^T)** matrisine **A** matrisinin adjoint'i denir ve

$$adj(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir.

4.2.1. Örnek 4

Örnek 4

Soru : $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin **Adjoint matrisi adj (A)**'yı elde ediniz.

Cevap : **adj(A) matrisini** elde edebilmek için **A katsayılar matrisinin elemanlarına ilişkin Kofaktörlerin** elde edilmesi gerekir.

1. satır elemanlarının **Kofaktör** değerleri,

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

2. satır elemanlarının **Kofaktör** değerleri,

$$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

3. satır elemanlarının **Kofaktör** değerleri,

$$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

şeklinde elde edilir. Bu değerleri kullanarak **A** matrisinin elemanlarına ilişkin **Kofaktörler matrisi**,

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 1 & -7 & -5 \\ -5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

ve **Adjoint matrisi, adj (A) = C** ^{T},

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & -7 & 5 \\ -5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

4.2.2. Örnek 5

Örnek 5

Soru : $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi verilmektedir. **Adj (A)**'yı elde ediniz.

Cevap : **A** matrisinin elemanlarına ilişkin **Kofaktörler** sırasıyla,

1. sıra elemanları **kofaktörleri**,

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 10$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -14$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -11$$

2. sıra elemanlarının **Kofaktörleri**,

$$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 7$$

3. sıra elemanlarının **Kofaktörleri**,

$$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -9$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -7$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

olarak bulunur. Bu değerler kullanılarak **Kofaktörler matrisi**,

$$C = \begin{bmatrix} 10 & -14 & -11 \\ 7 & 0 & 7 \\ -9 & -7 & 5 \end{bmatrix}$$

Dolayısıyla,

$$Adj(A) = C^T = \begin{bmatrix} 10 & 7 & -9 \\ -14 & 0 & -7 \\ -11 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

4.2.3. Adj (A) Kullanılarak A^{-1}'in Elde Edilmesi

Eğer **A tersi alınabilir matris** ise yani **det (A) ≠ 0**şartı sağlanıyorsa,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

dır.

4.2.4. Örnek 6

Örnek 6

Soru : **A adj (A)=det (A) I**

olduğunu gösteriniz.

Cevap :

$$A\ adj\ (A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & \boxed{C_{j1}} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & \boxed{C_{j2}} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & \boxed{C_{jn}} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

çarpımında **A** matrisinin **i**'nci sıra elemanları ile **Adj (A)** matrisinin j'inci sütun elemanları çarpımında toplam sonucu oluşan elemanın değeri,

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \ldots + a_{in}C_{jn} = \det(A), \text{ Eğer i = j ise}$$

$$= 0, \text{ Eğer i} \neq \text{j ise}$$

olur. Bunun sonucu olarak,

$$A \cdot adj(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \det(A) & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A) I$$

elde edilir.

A tersi alınabilir (Yani; det (A) ≠ 0) olduğundan,

A.adj (A) = det (A).I

eşitliği

$$\frac{1}{\det(A)} [A\ adj(A)] = I$$ veya

$$A\left[\frac{1}{\det(A)}adj(A)\right]=I$$

şeklinde ifade edilebilir. Eşitliğin her iki yanı A^{-1} ile çarpılırsa,

$$A^{-1}\cdot A\left[\frac{1}{\det(A)}adj(A)\right]=A^{-1}I$$

$$I\left[\frac{1}{\det(A)}adj(A)\right]=A^{-1}I$$

$$\boldsymbol{A^{-1}=\frac{1}{det(A)}adj(A)}$$

elde edilir.

4.2.5. Örnek 7

Örnek 7

Soru : $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$ matrisi verilmektedir.

! Bu sorunun çözümlerini seçeneklere tıklayarak görebilirsiniz.

a) det (A)'yı elde ediniz. **b) A** matrisinin elemanlarına ilişkin **Kofaktörler** matrisini elde ediniz.

c) A . adj(A) çarpımından,

i) **A** matrisinin 1. satır elemanları ile **adj(A)** matrisinin 1. sütun elemanlarının çarpım sonucunu elde ediniz.

ii) A matrisinin 1.satır elemanları ile adj(A) matrisinin 2. sütun elemanlarının çarpım sonucunu elde ediniz.

d) $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}adj(A)$ eşitliğinden, **A** matrisinin tersini elde ediniz.

Cevap : $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}\mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{2} & \mathbf{3}\\ \mathbf{1} & \mathbf{2}\end{matrix}$

yazılırsa,

det (A) = [(1)(3)(1) + (1)(−2)(1) + (1)(2)(2)] − [(1)(3)(1) + (2)(−2)(1) + (1)(2)(1)]

= (5) − (1)

= 4

elde edilir. det (A) = 4 ¹ 0 olduğundan **A** matrisinin **tersi** mevcuttur.

b) A matrisinin elemanlarına ilişkin **Kofaktörler** matrisini elde ediniz.

Cevap : 1. satır elemanlarına ilişkin **kofaktörler**,

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

2. satır elemanlarına ilişkin **kofaktörler**,

$$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

3. satır elemanlarına ilişkin **kofaktörler**,

$$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -5$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

olarak bulunur.

Bu değerler yardımıyla **Kofaktörler matrisi**,

$$C = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$ ve bunun sonucu olarak,

$$adj(A) = C^T = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -5 \\ -4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

c) A . adj(A) çarpımından,

i) **A** matrisinin 1. satır elemanları ile **adj(A)** matrisinin 1. sütun elemanlarının çarpım sonucunu elde ediniz.

Cevap :

$$\begin{array}{cc} A & adj\,(A) \\ \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 1 \quad 1} \\ 2 \quad 3 \quad -2 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 & 1 & -5 \\ -4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

(1)(7) + (1)(−4) + (1)(1) = 7 – 4 + 1 = 4 = **det (A)**

Burada **i = j** olduğundan çarpım sonucu **det (A)** = 4 olarak bulunmuştur.

c) A . adj(A) çarpımından,

ii) A matrisinin 1.satır elemanları ile adj(A) matrisinin 2. sütun elemanlarının çarpım sonucunu elde ediniz.

Cevap :

$$\begin{array}{cc} A & adj\,(A) \\ \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 1 \quad 1} \\ 2 \quad 3 \quad -2 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 & 1 & -5 \\ -4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

(1)(1) + (1)(0) + (1)(−1) = 1 + 0 – 1 = 0

elde edilir. Sonuçtan da görüleceği gibi i ≠ j (1 ≠ 2) olduğundan çarpım sonucu sıfır olarak elde edilmiştir.

d) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}$ **adj(A)** eşitliğinden, **A** matrisinin tersini elde ediniz.

Cevap :

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 7 & 1 & -5 \\ -4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

olup buradan

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

elde edilir.

4.2.6. Örnek 8

Örnek 8

Soru :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$ matrisi verilmektedir.

! Bu sorunun çözümlerini seçeneklere tıklayarak görebilirsiniz.

a) det (A)'yı elde ediniz. **b) A . adj (A)** çarpımını elde ediniz.

c) [det (A)] I_3 ifadesini elde ediniz.

d) $[A \vdots I] \sim \cdots [I \vdots A^{-1}]$ **elementer satır dönüşümleri** yardımıyla **A** $^{-1}$' i elde ediniz.

e) $\dfrac{1}{\det(A)}$ **adj(A)** ' yı elde ediniz.

a) det (A)'yı elde ediniz.

Cevap :

$$\left|\begin{matrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{6} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{matrix}$$

= [(3)(6)(0) + (2)(3)(2) + (-1)(1)(-4)] - [(2)(6)(-1) + (-4)(3)(3) + (0)(1)(2)]

= (16) - (-48)

= 64

b) A . adj (A) çarpımını elde ediniz.

Cevap : **Kofaktörler matrisini** elde etmek için her elemana ilişkin **kofaktörler** elde edilir. Bu değerler,

$C_{11} = 12$, $C_{12} = 6$, $C_{13} = -16$

$C_{21} = 4$, $C_{22} = 2$, $C_{23} = 16$

$C_{31} = 12$, $C_{32} = -10$, $C_{33} = 16$

olarak elde edilir.

Dolayısıyla **Kofaktörler matrisi,**

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

olup buradan

$$adj(A) = C^T = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}} \underset{adj(A)}{\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}} = \underset{det(A)\, I}{\begin{bmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix}}$$

bulunur.

4.BOLUM DEĞERLENDİRME SORULARI

SORU 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

matrisinin **determinant değerini** elde ediniz. Eğer **det (A) ≠ 0** ise **matrisin tersi** mevcuttur.

A) -2 B) 0 C) 2

SORU 2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinant **değerini** elde ediniz. **Matrisin tersi** alınabilir mi?

A) 0 B) 3 C) 165

SORU 3

$4x_1 + 5x_2 = 2$
$11x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$
$x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1$

lineer denklem sistemi verilmektedir. **A katsayılar matrisinin determinant değerini** elde ediniz.

A) 130 B) 131 C) 132

SORU 4

3. sorudaki **determinant değeri** sıfırdan farklı ise **Cramer kuralını** kullanarak x_1, x_2, x_3 değerlerini elde ediniz.

A) $\left(\frac{1}{11}, \frac{2}{11}, \frac{3}{11}\right)$ B) $\left(\frac{3}{11}, \frac{2}{11}, -\frac{1}{11}\right)$ C) $\left(\frac{2}{11}, -\frac{3}{11}, \frac{3}{11}\right)$

SORU 5

$7x_1 - 2x_2 = 3$
$3x_1 + x_2 = 5$

lineer denklem sistemine ilişkin x_1, x_2 değerlerini **Cramer kuralını** kullanarak elde ediniz. Önce **determinant değerinin** sıfırdan farklı olduğunu göstermeniz gerekir.

A (1, 2) B (-1, 2) C (1, -2)

SORU 6

$x_1 + x_2 + x_3 = 3$
$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3$
$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$

lineer denklem sisteminin çözümünü **Cramer kuralını** kullanarak elde ediniz.

A (6, -3, 0) B (5, -3, 0) C (6, 0, -3)

SORU 7

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 8 \\ -3 & 4 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

katsayılar matrisinin adj (A) matrisini elde ediniz.

A $\begin{bmatrix} 12 & -42 & -15 \\ 19 & -2 & -30 \\ -2 & 16 & 15 \end{bmatrix}$ B $\begin{bmatrix} 24 & -42 & -30 \\ 19 & -2 & -30 \\ -4 & 32 & 30 \end{bmatrix}$ C $\begin{bmatrix} 24 & -42 & -30 \\ 19 & -2 & -30 \\ -2 & 16 & 15 \end{bmatrix}$

SORU 8

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

katsayılar matrisinin determinant değerini elde ediniz.

A 15 B 16 C 17

SORU 9

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisine ilişkin **adj (A)**'yı elde ediniz.

A $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 \\ -3 & 2 & 12 \\ 6 & -4 & -7 \end{bmatrix}$ B $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 12 \\ 1 & 5 & -4 \\ 6 & -4 & -7 \end{bmatrix}$ C $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 12 \\ 1 & 5 & -4 \\ 6 & -4 & -7 \end{bmatrix}$

SORU 10

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisine ilişkin **A . adj (A)**'yı elde ediniz.

A $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ B $\begin{bmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{bmatrix}$ C $\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$

SORU 11

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

katsayılar matrisi A'nın **tersini** elde ediniz.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$ eşitliğinden yararlanınız.

A $\begin{bmatrix} \frac{1}{15} & \frac{5}{15} & -\frac{4}{15} \\ -\frac{3}{15} & \frac{2}{15} & \frac{12}{15} \\ \frac{6}{15} & -\frac{4}{15} & -\frac{7}{15} \end{bmatrix}$ B $\begin{bmatrix} \frac{1}{17} & \frac{5}{17} & -\frac{4}{17} \\ -\frac{3}{17} & \frac{2}{17} & \frac{12}{17} \\ \frac{6}{17} & -\frac{4}{17} & -\frac{7}{17} \end{bmatrix}$ C $\begin{bmatrix} -\frac{3}{15} & \frac{2}{15} & \frac{12}{15} \\ \frac{1}{15} & \frac{5}{15} & -\frac{4}{15} \\ \frac{6}{15} & -\frac{4}{15} & -\frac{7}{15} \end{bmatrix}$

SORU 12

$$A = \begin{bmatrix} Cos\theta & Sin\theta & 0 \\ -Sin\theta & Cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinin **tersinin alınabilir olduğunu** gösteriniz (**det (A) ≠ 0** olduğu gösterilmelidir).

A 1 B -1 C 0

SORU 13

$$A = \begin{bmatrix} Cos\theta & Sin\theta & 0 \\ -Sin\theta & Cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisine ilişkin **adj (A)**'yı elde ediniz.

Ⓐ $\begin{bmatrix} Sin\theta & Cos\theta & 0 \\ Cos\theta & -Sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Ⓑ $\begin{bmatrix} Cos\theta & -Sin\theta & 0 \\ Sin\theta & Cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Ⓒ $\begin{bmatrix} Cos\theta & Sin\theta & 0 \\ Sin\theta & -Cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

SORU 14

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin **determinant değerini** elde ediniz.

Ⓐ 18 Ⓑ -20 Ⓒ 20

SORU 15

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

A matrisinin **adj (A)**'sını elde ediniz.

Ⓐ $\begin{bmatrix} -4 & 20 & 8 \\ -1 & 5 & 7 \\ 8 & -20 & -16 \end{bmatrix}$ Ⓑ $\begin{bmatrix} 4 & -20 & 8 \\ 1 & 5 & -7 \\ 8 & -20 & -16 \end{bmatrix}$ Ⓒ $\begin{bmatrix} 4 & -20 & 8 \\ -1 & 5 & 7 \\ -8 & 20 & -16 \end{bmatrix}$

SORU 16

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

A katsayılar matrisinin tersini elde ediniz.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A)$$ eşitliğinden yararlanınız.

Ⓐ $\begin{bmatrix} \frac{4}{20} & -1 & -\frac{8}{20} \\ \frac{1}{20} & -\frac{5}{20} & -\frac{7}{20} \\ -\frac{8}{20} & 1 & \frac{16}{20} \end{bmatrix}$ Ⓑ $\begin{bmatrix} \frac{4}{20} & 1 & -\frac{8}{20} \\ -\frac{1}{20} & -\frac{5}{20} & \frac{7}{20} \\ -\frac{8}{20} & 1 & \frac{16}{20} \end{bmatrix}$ Ⓒ $\begin{bmatrix} -\frac{4}{20} & 1 & -\frac{8}{20} \\ \frac{1}{20} & -\frac{5}{20} & -\frac{7}{20} \\ -\frac{8}{20} & -1 & \frac{16}{20} \end{bmatrix}$

SORU 17

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & -3\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

matrisi verilmektedir. **det (A)** değerini elde ediniz.

A) 15 B) -24 C) -34

SORU 18

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & -3\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

A matrisine ilişkin **Kofaktörler matrisini** elde ediniz.

A) $\begin{bmatrix}7 & -11 & -5\\ -5 & 1 & 7\\ -11 & 7 & 1\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}9 & 11 & 5\\ -5 & 1 & 7\\ -11 & 7 & -1\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}-11 & 7 & 1\\ -5 & 1 & 7\\ 7 & -11 & -5\end{bmatrix}$

SORU 19

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & -3\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

A matrisine ilişkin **adj (A)**'yı elde ediniz.

A) $\begin{bmatrix}9 & -5 & -11\\ 11 & 1 & 7\\ 5 & 7 & -1\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}-11 & -5 & 7\\ 7 & 1 & -11\\ 1 & 7 & -5\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}7 & -5 & -11\\ -11 & 1 & 7\\ -5 & 7 & 1\end{bmatrix}$

SORU 20

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & -3\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

A matrisinin **tersi** A^{-1}'i $A^{-1}=\dfrac{1}{det(A)}adj(A)$ eşitliğini kullanarak elde ediniz.

A) $\begin{bmatrix}-\frac{7}{24} & \frac{5}{24} & \frac{11}{24}\\ \frac{11}{24} & -\frac{1}{24} & -\frac{7}{24}\\ \frac{5}{24} & -\frac{7}{24} & -\frac{1}{24}\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}\frac{11}{24} & \frac{5}{24} & -\frac{7}{24}\\ -\frac{7}{24} & -\frac{1}{24} & \frac{11}{24}\\ -\frac{1}{24} & -\frac{7}{24} & \frac{5}{24}\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}-\frac{11}{24} & \frac{5}{24} & -\frac{7}{24}\\ \frac{7}{24} & \frac{1}{24} & -\frac{11}{24}\\ \frac{1}{24} & \frac{7}{24} & \frac{5}{24}\end{bmatrix}$

5.BOLUM DOGRUSAL CEBIR VE DIFERANSIYEL DENKLEMLER
VEKTÖRLER

5.1. SKALER VE VEKTÖREL BÜYÜKLÜKLER

Kütle, sıcaklık, elektrik yükü, alan, hacim gibi sadece pozitif ve negatif sayılarla ifade edilen büyüklüklere **skaler (scalar) büyüklükler** denir.

Sadece bir gerçel sayı ile ifade edilemeyip, buna ek olarak doğrultu, yön ve hatta konumlarının da bilinmesi şartı ile belirtilebilir büyüklüklere **vektörel büyüklükler** denir (kuvvet, hız, ivme, moment, yer değiştirme,... gibi).

Vektör: Vektörel büyüklükler **vektör** adı verilen yönlü doğru parçaları ile gösterilirler. Vektör, belirli bir uzunluğa, belirli bir doğrultuya ve belirli bir yöne sahip bulunan bir doğru parçasıdır.

Vektörler $\overline{\vec{AB}}$, $\vec{V}$, $\vec{F}$, $\vec{a}$ işaretleri ile veya (***AB, V, F, a***) ile gösterilirler. ***A*** noktası vektörün **başlangıç noktası** ve ***B*** noktası da **uç noktası** adını alır. Örneğin aşağıdaki Şekil 5.1'de $\overline{\vec{AB}}$ (veya ***AB***) vektörü gösterilmektedir.

Şekil-5.1: Bir vektörün gösterimi

Vektörün başlangıç ve uç noktaları arasındaki uzunluğa **vektörün uzunluğu** veya **modülü** denir ve mod $\overline{\vec{AB}}$ **=** $|\overline{\vec{AB}}|$ şeklinde gösterilir.

Başlangıç noktasından uç noktasına giden yön vektörün yönüdür. Bunu belirtmek için ***AB***'nin üzerine ***A***'dan ***B***'ye giden bir ok konur ve $\overline{\vec{AB}}$ şeklinde gösterilir.

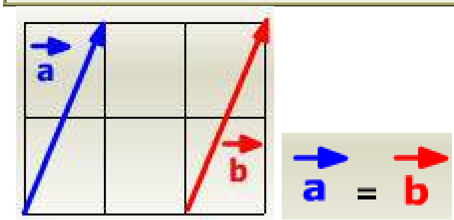
Serbest vektörler doğrultu, yön ve modülünü muhafaza ederek uzayda ötenebilen vektörlerdir. Diğer bir deyişle başlangıç noktası sabit olmayan vektörlerdir.

Bağlı vektörler başlangıç noktası sabit olan (değiştirilemeyen) vektörlerdir.

Aksi belirtilmediği sürece bundan sonra ele alınan vektörler serbest vektörler olacaktır.

5.2. VEKTÖRLERİN EŞİTLİĞİ

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ gibi iki vektörü göz önüne alalım: $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin başlangıç noktaları farklı, fakat doğrultu, yön ve büyüklükleri (modülleri) aynı ise, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörü eşittir denir ve $\vec{a} = \vec{b}$ yazılır. Bu durum Şekil 5.2'de görülmektedir.



Şekil-5.2: Eşit vektörler

5.3. VEKTÖRLERİN TOPLAMI VE FARKI

Bu kısımda vektörlerin toplamı ve çıkarılması incelenecektir.

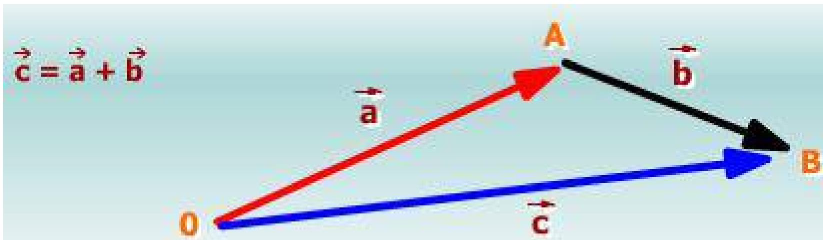
- **5.3.1. İki Vektörün Toplamı**
- **5.3.2. İki Vektör Farkı**

5.3.1. İki Vektörün Toplamı

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ gibi iki vektörümüzün verildiğini varsayalım. İki vektörün toplamı,

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

şeklinde ifade edilir. Bu durum Şekil 5.3'te görülmektedir.



Şekil-5.3: İki vektörün toplamı

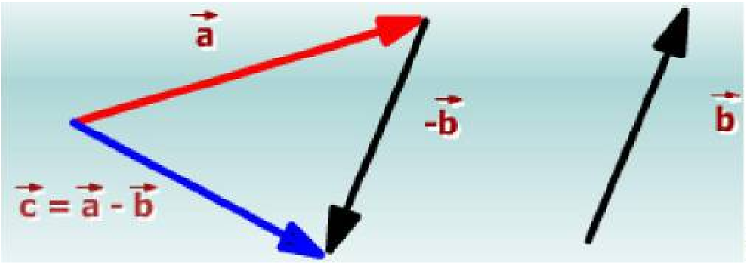
$\vec{b}$ vektörünün başlangıç noktası, $\vec{a}$ vektörünün uç noktasına getirilir. Elde edilen $\vec{c} = \overrightarrow{0B}$ vektörüne $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin toplamı (bileşke) denir.

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ şeklinde de ifade edilebilir.

5.3.2. İki Vektör Farkı

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ gibi iki vektörün verildiğini varsayalım, $\vec{a} - \vec{b}$ farkı $\vec{a}$ ve **(-**$\vec{b}$) vektörlerinin toplamı olup

$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ şeklinde ifade edilir. Bu durum Şekil 5.4'te görülmektedir.



Şekil-5.4: İki vektör farkı

5.4. VEKTÖRLERİN BİR SKALER İLE ÇARPIMI

Bu kısımda aşağıdaki başlıklar üzerinde durulacaktır:

- **5.4.1. Bir Vektörün Bir Skaler ile Çarpımı**
- **5.4.2. Skaler Çarpım Çeşitleri**
- **5.4.3. Vektörlerin 0xyz Eksen Takımı Üzerinde Tanımlanması**
- **5.4.4.** $\vec{i}, \ \vec{j}, \ \vec{k}$ **Birim Vektörleri**
- **5.4.5.** $\overrightarrow{P_1P_2}$ **vektörünün bileşenlerinin elde edilmesi**
- **5.4.6. İki Vektörün Skaler Çarpımı**
- **5.4.7. İki Vektör Arasındaki Açı**
- **5.4.8. Vektörel Çarpım**
- **5.4.9.** $\vec{a}, \ \vec{b}, \ \vec{c}$ **Vektörlerinin Karışık Çarpımı**
- **5.4.10. Lineer Kombinasyon Tanımı**

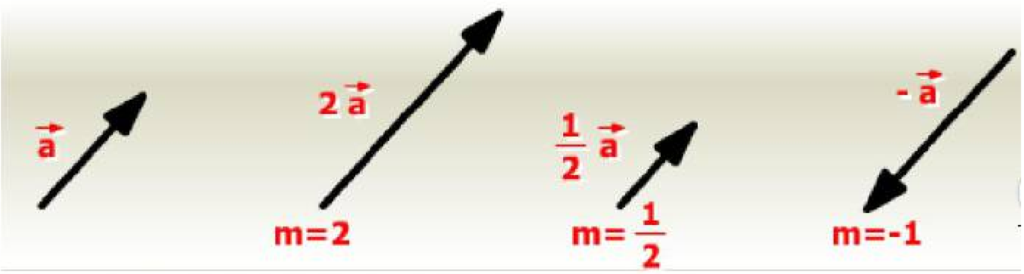
5.4.1. Bir Vektörün Bir Skaler ile Çarpımı

$\vec{a}$ vektörünün m gibi bir pozitif sayı ile çarpımı olan $m\vec{a}$ vektörü $\vec{a}$ vektörü ile aynı doğrultu ve yöne sahip olup sadece modülü $\vec{a}$ vektörünün m katına eşittir. Yani,

$|m\vec{a}| = m|\vec{a}|$'dır.

Eğer $m < 0$ ise yani m sayısı negatif ise $\vec{a}$ ve $m\vec{a}$ vektörlerinin doğrultuları aynı, fakat yönleri birbirinin tamamen tersidir.

m'nin değişik değerleri için bu durumlar Şekil 5.5'te görülmektedir.



Şekil-5.5: $\vec{a}$ vektörünün bir skaler ile çarpımı ($m\vec{a}$)

5.4.2. Skaler Çarpım Çeşitleri

Modülü sıfır olan vektöre **sıfır vektör** adı verilir.

Sıfır vektör

Eğer m = 0 ise,

$(0)\vec{a} = 0$

Bir vektörün tersi

Eğer m = -1 ise, $m\vec{a}$ ifadesinden

$(-1)\vec{a} = -\vec{a}$

elde edilir.

Birim vektör

Eğer $\vec{a}^1 \neq 0$ ve $m = \frac{1}{|\vec{a}|} = \frac{1}{a}$ ise

$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$

birim vektörü elde edilir.

$-\vec{a}$ ile $\vec{a}$ vektörünün doğrultusuna ve modülüne sahip, fakat $\vec{a}$ vektörünün tamamen aksi yönünde olan vektör gösterilir.

$\vec{u}$ **birim vektörü**, $\vec{a}$ vektörü ile aynı doğrultu ve yöne sahip olan ve modülü **1** olan bir vektördür.

5.4.3. Vektörlerin 0xyz Eksen Takımı Üzerinde Tanımlanması

Uzaydaki bir vektör, Oxyz koordinat sisteminin eksenleri üzerindeki izdüşümleri ile tanımlanır. Eksenler üzerindeki izdüşümleri a1, a2, a3 olan bir vektörü

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

şeklinde gösterilir. *$\vec{a}$ vektörünün bileşenleri*

Aynı koordinat sisteminde verilmiş

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve

$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektörlerinin eşit olabilmesi

$a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$ olması ile mümkündür.

Bileşenlerinin hepsi sıfır olan bir vektöre, **sıfır vektör** denir.

$\vec{0} = (0, 0, 0)$

5.4.4. $\vec{i}, \quad \vec{j}, \quad \vec{k}$ Birim Vektörleri

$\vec{i}, \quad \vec{j}, \quad \vec{k}$ vektörleri, ***Ox, Oy, Oz*** eksenleri doğrultusundaki birim vektörlerdir. Buna göre

$\vec{i}$ **= (1, 0, 0)**, $\vec{j}$ **= (0, 1, 0)** ve $\vec{k}$ **= (0, 0, 1)**'dir.

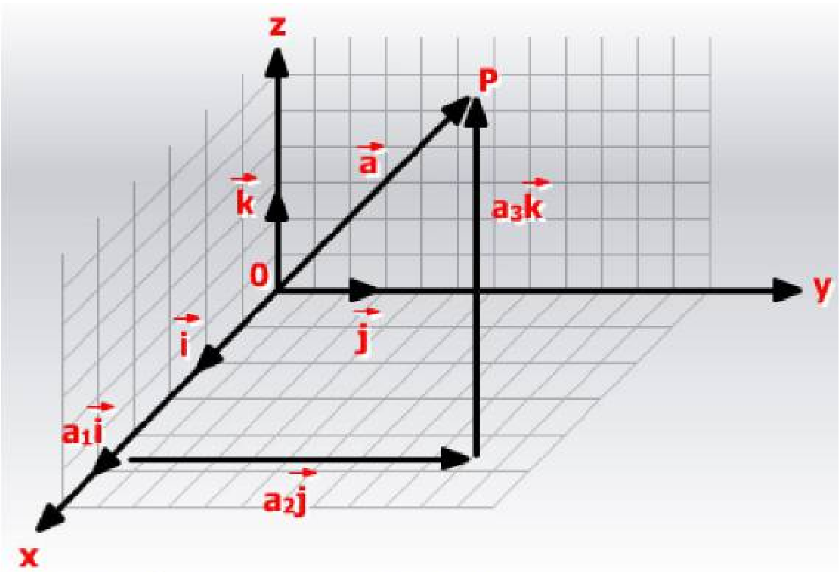
Bir vektörün bir skalerle çarpımı ve vektörlerin toplamı kuralından yararlanarak, bir

$$\overrightarrow{0P} = \vec{a} = (a_1, \quad a_2, \quad a_3)$$

vektörünün analitik ifadesi olarak

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

yazılabilir. Bu durum Şekil 5.6'da görülmektedir.



Şekil-5.6: $\vec{a}$ vektörünün analitik ifadesi

- Bileşenleri ile verilmiş bir $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ vektörünün modülü,

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

şeklindedir.

5.4.4.1. Örnekler

Örnek 1

Soru : $\vec{a}_1 = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

vektörünün **modülünü** elde ediniz.

Çözüm :

$$|\vec{a}_1| = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2 + (1)^2}$$

$$= \sqrt{9+4+1}$$

$$= \sqrt{10}$$

dur.

Örnek 1 **Örnek 2** Örnek

Soru :

$a_1 = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{a}_2 = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}$

$\vec{a}_3 = -i + 2\vec{j} + 2\vec{k}$

vektörleri verilmektedir.

$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$ vektörünün **modülünü** elde ediniz.

Çözüm :

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = (3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) + (2\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}) + (-\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$$

$$= 4\vec{i} - 4\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = 4\vec{i} - 4\vec{j}$$

olarak elde edilir. Buradan

$$|\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3| = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2 + (0)^2}$$

$$= \sqrt{16+16+0}$$

$$= \sqrt{32}$$

bulunur.

Örnek 1 Örnek 2 **Örnek 3**

Soru : $\vec{a}_1 = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$

$\vec{a}_3 = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$

vektörleri verilmektedir. Bu vektörlerin $\vec{R} = \vec{a}_1 + \vec{a}_3$ **bileşke vektörüne** paralel olan **birim vektörü** bulunuz.

Bileşke vektörün modülü

$$|\vec{R}| = |3\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}|$$
$$= \sqrt{(3)^2 + (6)^2 + (-2)^2}$$
$$= \sqrt{9 + 36 + 4}$$
$$= \sqrt{49}$$
$$= 7$$

Çözüm : **Bileşke vektör,**

$$\vec{R} = \vec{a}_1 + \vec{a}_3$$
$$= (2\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}) + (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k})$$
$$= 3\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$$

olarak bulunur.

vektörleri verilmektedir. Bu vektörlerin $\vec{R} = \vec{a}_1 + \vec{a}_3$ **bileşke vektörüne** paralel olan **birim vektörü** bulunuz.

elde edilir. Bu durumda $\vec{R}$ vektörüne paralel birim vektör, $\frac{R}{|\vec{R}|}$ 'dır. Yani

$$\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{3\vec{i} + 6\vec{j} - 2k}{7}$$
$$= \left(\frac{3}{7}\right)\vec{i} + \left(\frac{6}{7}\right)\vec{j} - \left(\frac{2}{7}\right)\vec{k}$$

dır.

Bunun doğruluğunu kontrol etmek için **birim vektörün modülünün** 1 olup olmadığının kontrol edilmesi gerekir.

$$\left|\frac{3}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} - \frac{2}{7}\vec{k}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(-\frac{2}{7}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{9}{49} + \frac{36}{49} + \frac{4}{49}}$$
$$= \sqrt{\frac{49}{49}}$$
$$= 1$$

5.4.5. $\overrightarrow{P_1P_2}$ Vektörünün Bileşenlerinin Elde Edilmesi

Eğer $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektörünün başlangıç noktası P_1 (x_1, y_1, z_1) ve uç noktası P_2 (x_2, y_2, z_2) ise $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektörünün bileşenleri

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

dır. Dolayısıyla $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektörü

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

şeklindedir.

Örnek 4 | Örnek 5

Soru : P_1 (-1, 0, 2) ve P_2 (0, -1, 0) **başlangıç** ve **uç noktaları** verilen $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektörünün **bileşenlerini** elde ediniz.

Çözüm : **P_1** başlangıç ve **P_2** uç noktası olduğundan, **uç noktası koordinatlarından başlangıç noktası koordinatları** çıkarılırsa,

$x_2 - x_1 = 0 - (-1) = 1$

$y_2 - y_1 = -1 - 0 = -1$

$z_2 - z_1 = 0 - 2 = -2$

elde edilir. Dolayısıyla $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektörünün bileşenleri $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, -1, -2)$ bulunur.

Örnek 4 | Örnek 5

Soru : **P_1** (3, –7, 2) ve **P_2** (–2, 5, -4) **başlangıç** ve **uç noktaları** verilen $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektörünün **bileşenlerini** elde ediniz.

Çözüm : $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektörünün başlangıç ve uç noktalarının koordinatları,

$x_2 - x_1 = -2 - (3) = -5$

$y_2 - y_1 = 5 - (-7) = 12$

$z_2 - z_1 = -4 - (2) = -6$

olarak elde edilir. Dolayısıyla,

$\overrightarrow{P_1P_2} = (-5, 12, -6)$

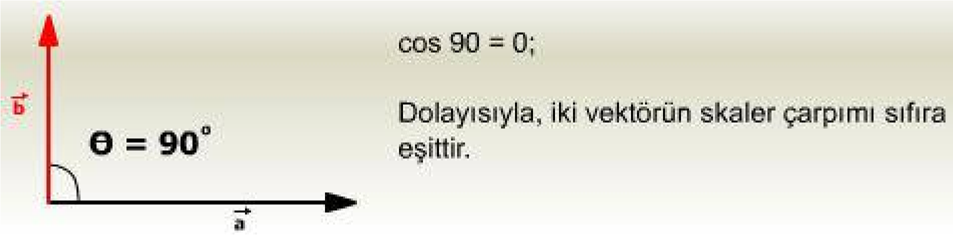
dır.

5.4.6. İki Vektörün Skaler Çarpımı

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ gibi iki vektörün skaler çarpımı, bu vektörlerin a ve b büyüklükleriyle vektörler arasındaki θ açısının kosinüsü çarpımına eşittir:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,Cos\ \theta$$

Bu durum Şekil 5.7'de görülmektedir.



Şekil-5.7: İki vektörün skaler çarpımı

İki vektörün skaler çarpımı bir skaler (sayı)dır.

Skaler çarpımla ilgili olarak aşağıdaki kurallar geçerlidir:

1. $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$

2. $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

3. $m\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \left(m\vec{a}\right) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \left(m\vec{b}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)m$

4. $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$

$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$

5. Eğer $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ **ve**

$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ **ise**

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

$\vec{b} \cdot \vec{b} = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$

6. Eğer $\vec{a} \bullet \vec{b}$ **= 0 ve** $\vec{a}$ **ve** $\vec{b}$ **vektörleri sıfır vektör değilse** $\vec{a}$ **ve** $\vec{b}$ **birbirine dik vektörlerdir.**

5.4.6.1. Örnek 6, 7 ve 8

Örnek 6 Örnek 7 **Örnek 8**

$\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ve $\vec{k} = (0, 0, 1)$ birim vektörleri verilmektedir. Çözümleri inceleyiniz.

Çözüm : **a)** $\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}||\vec{i}| Cos\theta = (1)(1)(1) = 1$

b) $\vec{i} \cdot \vec{k} = |\vec{i}||\vec{k}| Cos 90^0 = (1)(1) 0 = 0$

c) $\vec{k} \cdot \vec{j} = |\vec{k}||\vec{j}| Cos 90^0 = (1)(1) 0 = 0$

d)
$$\begin{aligned} \vec{j} \cdot \left(2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}\right) &= \vec{j} \cdot (2\vec{i}) + \vec{j} \cdot (-3\vec{j}) + \vec{j} \cdot \vec{k} \\ &= 2\vec{j} \cdot \vec{i} - 3\vec{j} \cdot \vec{j} + \vec{j} \cdot \vec{k} \\ &= 0 - 3(1) + 0 \\ &= -3 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} \left(2\vec{i} - \vec{j}\right) \cdot \left(3\vec{i} + \vec{k}\right) &= \left(2\vec{i}\right) \cdot \left(3\vec{i}\right) + \left(2\vec{i}\right)\left(\vec{k}\right) + \left(-\vec{j}\right) \cdot \left(3\vec{i}\right) + \left(-\vec{j}\right)\left(\vec{k}\right) \\ &= 6\vec{i} \cdot \vec{i} + 2\vec{i} \cdot \vec{k} - 3\vec{j} \cdot \vec{i} - \vec{j} \cdot \vec{k} \\ &= 6(1) + 2(0) - 3(0) - 0 \\ &= 6 \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 6 | **Örnek 7** | Örnek 8

$\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ve

$\vec{b} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$

verilmektedir. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki **açıyı** bulunuz.

Çözüm : $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\text{Cos}\,\theta$

olduğundan ilgili değerler bu eşitlikte yerine konursa,

$$|\vec{a}|\,|\vec{b}| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(6)^2 + (-3)^2 + (2)^2}$$

$$= \sqrt{4+4+1} \cdot \sqrt{36+9+4}$$

$$= \sqrt{9} \cdot \sqrt{49}$$

$$= 3 \cdot 7$$

$$= 21$$

$$Cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

$$= \frac{(2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) \cdot (6\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k})}{21}$$

$$= \frac{12\vec{i}\cdot\vec{i} - 6\vec{i}\cdot\vec{j} + 4\vec{i}\cdot\vec{k} + 12\vec{j}\cdot\vec{i} - 6\vec{j}\cdot\vec{j} + 4\vec{j}\cdot\vec{k} - 6\vec{k}\cdot\vec{i} + 3\vec{k}\cdot\vec{j} - 2\vec{k}\cdot\vec{k}}{21}$$

$$= \frac{12(1) - 6(0) + 4(0) + 12(0) - 6(1) + 4(0) - 6(0) + 3(0) - 2(1)}{21} = \frac{4}{21}$$

$$Cos\theta = 0.1905 = Cos(79^0)$$

$$\theta = 79^0$$

bulunur.

Örnek 6 | Örnek 7 | **Örnek 8**

$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ ve
$\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{k}$
vektörlerinin **birbirine dik** olduğunu gösteriniz.

Çözüm : Vektörlerin **birbirine dik** olması için

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$$

şartının sağlanması gerekir.

$$\left(2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}\right)\cdot\left(\vec{i} + 2\vec{k}\right) = 2\vec{i}\cdot\vec{i} + 4\vec{i}\cdot\vec{k} + 3\vec{j}\cdot\vec{i} + 6\vec{j}\cdot\vec{k} - \vec{k}\cdot\vec{i} - 2\vec{k}\cdot\vec{k}$$

$$= 2(1) + 4(0) + 3(0) + 6(0) - 0 - 2(1)$$

$$= 2 - 2$$

$$= 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ **birbirine dik** vektörlerdir.

5.4.7. İki Vektör Arasındaki Açı

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$$

sıfırdan farklı vektörler olsun.

$$\boxed{Cos\,\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right)^{\frac{1}{2}}}}$$

a ve b vektörleri arasındaki açı olarak hesaplanabilir.

5.4.7.1. Örnek 9

Örnek 9

$\vec{a} = (2, 4, 6) = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$

$\vec{b} = (1, -3, 2) = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$

vektörleri arasındaki θ **açısını** hesaplayınız.

Çözüm :

$$Cos\theta = \frac{(2)(1) + (4)(-3) + (6)(2)}{\left[(2)^2 + (4)^2 + (6)^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[(1)^2 + (-3)^2 + (2)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$Cos\theta = \frac{2 - 12 + 12}{\left[4 + 16 + 36\right]^{\frac{1}{2}} \left[1 + 9 + 4\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{56}\,\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{784}} = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}$$

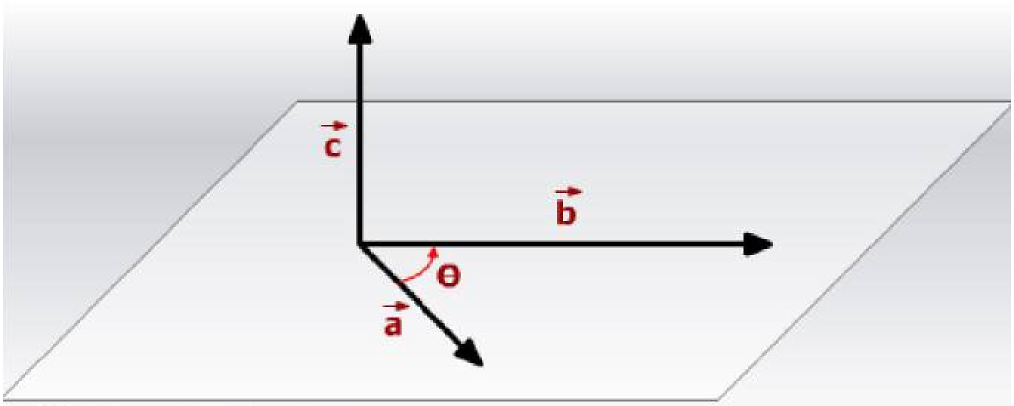
Dolayısıyla,

$$Cos\theta = \frac{1}{14} = 0.0714 = Cos85^0 54'$$

$$\theta = 85^0 54'$$

5.4.8. Vektörel Çarpım

Aralarındaki açı θ olan $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerini göz önüne alalım (Şekil-5.8)



Şekil-5.8: Vektörel çarpım

Bu iki vektörün vektörel çarpımı öyle bir $\vec{c}$ vektörüdür ki bu vektörün büyüklüğü, verilen vektörlerin $|\vec{a}|$ ve $|\vec{b}|$ büyüklükleriyle, bunlar arasındaki açının sinüsü çarpımına eşittir. Bu çarpım,

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,Sin\theta$$

şeklinde gösterilir.

$\vec{c}$ vektörünün doğrultusu, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin oluşturdukları düzleme dik, yönü de sağ el kuralıyla bellidir.

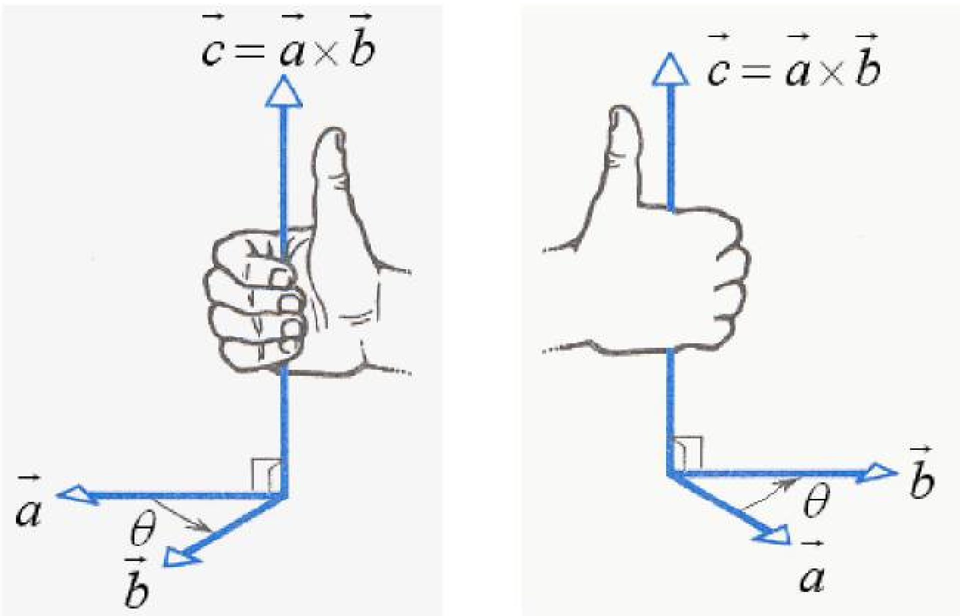
SAĞ EL KURALI:

$\vec{c} = \vec{a} x \vec{b}$ ifadesinde $\vec{c}$ vektörü $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin her ikisine de **diktir.**

Eğer $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri sıfır olmayan vektörler ise, $\vec{c} = \vec{a} x \vec{b}$ nin *yönü* **sağ el kuralı** ile belirlenebilir.

ϑ , $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki **açı** olsun ve $\vec{a}$ vektörünün belirtilen **yönde** $\vec{b}$ vektörü ile çakışıncaya kadar döndürüldüğünü varsayalım.

Eğer sağ elin, şekilde gösterildiği gibi, dört parmağı **dönüş yönünü** gösterecek şekilde tutulursa baş parmak $\vec{a} x \vec{b}$ nin **yönünü** belirtir.



Bu kural **sağ el kuralı** olarak bilinir.

Vektörel çarpım bir sayı değil bir vektördür.

Vektörel çarpımla ilgili olarak aşağıdaki kurallar geçerlidir:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

2. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

3. $m(\vec{a} \times \vec{b}) = (m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b}) = (\vec{a} \times \vec{b})m$ **m bir skaler'dir.**

4. $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$
   $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$
   $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$
   $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

5. **Eğer** $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$
   $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$
   ise

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

6. **Eğer** $\vec{a}$ **ve** $\vec{b}$ **sıfır vektör değilse ve** $\vec{a}$ **x** $\vec{b}$ **= 0 ise,** $\vec{a}$ **ve** $\vec{b}$ **paralel vektörlerdir.**

5.4.8.1. Örnek 10

Örnek 10

$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ ve

$\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{k}$

vektörlerinin **vektörel çarpımını** elde ediniz.

Çözüm :

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\vec{c} = 2\vec{i} - 7\vec{j} - 6\vec{k}$$

bulunur. Burada **determinant yöntemiyle vektörel çarpım** bulunmuştur.

Aynı işlemi şu şekilde de gerçekleştirebiliriz:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}) \times (3\vec{i} + \vec{k})$$

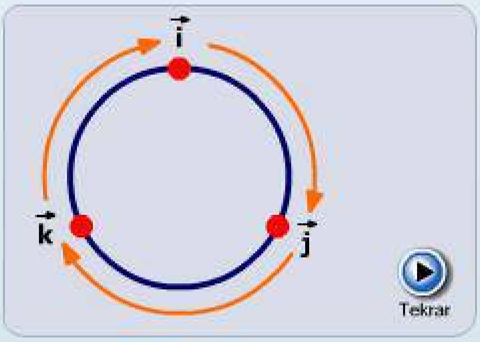
$$= 3\vec{i} \times \vec{i} + \vec{i} \times \vec{k} + 6\vec{j} \times \vec{i} + 2\vec{j} \times \vec{k} - 6\vec{k} \times \vec{i} - 2\vec{k} \times \vec{k}$$

$$= 3(0) + \left(-\vec{j}\right) + 6\left(-\vec{k}\right) + 2\left(\vec{i}\right) - 6\left(\vec{j}\right) - 2(0)$$

$$= -\vec{j} - 6\vec{k} + 2\vec{i} - 6\vec{j}$$

$$= 2\vec{i} - 7\vec{j} - 6\vec{k}$$

Burada $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ **birim vektörlerinin dairesel özelliğinden** yararlanılmıştır. Şöyle ki;



Şekilden de görüldüğü gibi, $\vec{i}$ x $\vec{j}$ çarpımı,

$\vec{i}$ x $\vec{j}$ = $\vec{k}$

fakat $\vec{j}$ x $\vec{i}$ çarpımı ise **yön** değiştirdiğinden

$\vec{j}$ x $\vec{i}$ = - $\vec{k}$

dır. Benzer şekilde,

$\vec{i}$ x $\vec{k}$ = - $\vec{j}$

dır.

5.4.8.2. Örnek 11

Örnek 11

$\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$ ve

$\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$

vektörlerine ilişkin aşağıdaki **vektörel çarpımların** sonucunu elde ediniz.

a) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

Çözüm :

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 10\vec{i} + 3\vec{j} + 11\vec{k}$$

b) $\vec{b}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 4 & -2\\ 2 & -3 & -1\end{vmatrix}$

Çözüm :

$$\vec{b}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 4 & -2\\ 2 & -3 & -1\end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix}4 & -2\\ -3 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & -3\end{vmatrix}$$

$$=-10\vec{i}-3\vec{j}-11\vec{k}$$

görüldüğü gibi, $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ 'dır.

c) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$

Çözüm : $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$

$$\vec{a}+\vec{b}=\left(2\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}\right)+\left(\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}\right)$$

$$=(2+1)\vec{i}+(-3+4)\vec{j}+(-1-2)\vec{k}$$

$$=3\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$$

$$\vec{a}-\vec{b}=\left(2\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}\right)-\left(\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}\right)$$

$$=\left(2\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}\right)+\left(-\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}\right)$$

$$=(2-1)\vec{i}+(-3-4)\vec{j}+(-1+2)\vec{k}$$

$$=\vec{i}-7\vec{j}+\vec{k}$$

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 1 & -3\\ 1 & -7 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix}1 & -3\\ -7 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}3 & -3\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -7\end{vmatrix}$$

$$=-20\vec{i}-6\vec{j}-22\vec{k}$$

5.4.9. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ Vektörlerinin Karışık Çarpımı

$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ çarpımına karışık çarpım denir.

Eğer $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$

$\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$

$\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$ ise karışık çarpım

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

olarak elde edilir.

Örnek 12

$\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{k}$ ve

$\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$

$\vec{c} = 3\vec{j} + 2\vec{k}$

olarak verilmektedir. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ **karışık çarpımını** elde ediniz.

Çözüm :

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-5)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(20) + 2(2) - 5(3)$$

$$= 60 + 4 - 15$$

$$= 49$$

aynı işlem şu şekilde de gerçekleştirilebilir.

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = 20\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (3\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{k}) \cdot (20\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k})$$

skaler çarpımını gerçekleştirelim. Bu çarpım sonucunda,

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 60\vec{i} \cdot \vec{i} - 6\vec{i} \cdot \vec{j} + 9\vec{i} \cdot \vec{k} - 40\vec{j} \cdot \vec{i} + 4\vec{j} \cdot \vec{j} + 6\vec{j} \cdot \vec{k} - 100\vec{k} \cdot \vec{i}$$
$$+ 10\vec{k} \cdot \vec{j} - 15\vec{k} \cdot \vec{k}$$

$$= 60(1) - 6(0) + 9(0) - 40(0) + 4(1) + 6(0) - 100(0) + 10(0) - 15(1)$$

$$= 60 + 4 - 15$$

$$= 49$$ bulunur.

5.4.10. Lineer Kombinasyon Tanımı

n boyutlu uzayda $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ gibi m tane vektör göz önüne alalım.

$k_1, k_2, \ldots, k_m$ gerçel sayılar olmak üzere $\vec{a}$ vektörü

$$\vec{a} = k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \ldots + k_m\vec{a}_m$$

şeklinde ifade edilebiliyorsa, $\vec{a}$ vektörü $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ vektörlerinin lineer kombinasyonudur denir.

Örnek 13 **Örnek 14**

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vektörleri verilmektedir.
$\vec{a}$ vektörünün $\vec{a}_1$ ve $\vec{a}_2$ vektörlerinin **lineer kombinasyonu** olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm : $k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 = \vec{a}$

olacak şekilde **k_1** ve **k_2** değerlerinin elde edilmesi gerekir.

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Bu ifadelerden

$k_1 + 2k_2 = 3$

$-2k_1 + 3k_2 = 1$

$3k_1 + k_2 = 4$

Bu eşitlikler matris şeklinde yazılıp, elde edilen **eklenmiş matris** daha önceki bölümlerde öğrendiğimiz **elementer sıra dönüşümleri** yardımıyla **sıra denk matris** haline dönüştürülerek **k_1** ve **k_2** değişkenlerine ilişkin değerler elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 + 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \to -\frac{1}{5}R_3]{R_2 \to \frac{1}{7}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Buradan **k_1=1** ve **k_2=1** elde edilir. Dolayısıyla $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ vektörü $\vec{a}_1$ ve $\vec{a}_2$

vektörlerinin **bir lineer kombinasyonudur** ve **$k_1=1$, $k_2=1$** olduğundan

$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ şeklinde ifade edilir.

5.5. LİNEER BAĞIMLILIK ve BAĞIMSIZLIK

Bu kısımda lineer bağımlılık ve bağımsızlık kavramları üzerinde durulacaktır.

- **5.5.1. Lineer Bağımlı Vektörler**

5.5.1. Lineer Bağımlı Vektörler

n boyutlu uzayda $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_m$ gibi m tane vektör göz önüne alalım.

$$k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + k_3\vec{a}_3 + \dots + k_m\vec{a}_m = 0$$

bağıntısını sağlayacak şekilde, içlerinden en az bir tanesi sıfırdan farklı olan (yani tümü birden sıfır olmayan) k_1, k_2, ..., k_m sayıları mevcut ise $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ vektörleri **lineer bağımlıdır** denir.

Eğer

$$k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + k_3\vec{a}_3 + \dots + k_m\vec{a}_m = 0$$

eşitliği $k_1 = k_2 = k_3 = \dots = k_m = 0$ için sağlanıyorsa $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_m$ vektörleri **lineer bağımsızdır** denir.

Örnek 15 **Örnek 16** **Örnek 17**

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vektörlerinin **lineer bağımlı** veya **bağımsız** olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm : $k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 = 0$

eşitliğini oluşturalım.

$$k_1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olup, bu eşitlikten

$-k_1 - 2k_2 = 0$

$k_1 + 0k_2 = 0$

$0k_1 + k_2 = 0$

$0k_1 + k_2 = 0$

Homojen lineer denklem sistemi elde edilir. Bu **denklem sisteminin çözümünden** $k_1=k_2=0$ elde edilir.
Dolayısıyla $\vec{a}_1$ ve $\vec{a}_2$ **vektörleri k_1** ve **k_2** değerleri sıfır olduğundan **lineer bağımsız**'dır.

5.BOLUM DEĞERLENDİRME SORULARI

SORU 1

$a_1 = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

vektörünün **modülünü** hesaplayınız.

(A) 14 (B) $\sqrt{14}$ (C) $\sqrt{15}$

SORU 2

$\vec{a}_1 = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}, \quad \vec{a}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$

vektörleri verilmektedir. $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ vektörlerinin **toplamını** elde ediniz.

(A) $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ (B) $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ (C) $\vec{a} = 3\vec{i} + 6\vec{j} + 5\vec{k}$

SORU 3

$\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$

vektörüne paralel **birim vektörü** elde ediniz.

(A) $\vec{u} = \left(\frac{2}{25}\vec{i} + \frac{4}{25}\vec{j} - \frac{5}{25}\vec{k}\right)$ (B) $\vec{u} = \left(\frac{2}{\sqrt{45}}\vec{i} + \frac{4}{\sqrt{45}}\vec{j} - \frac{5}{\sqrt{45}}\vec{k}\right)$

(C) $\vec{u} = \left(\frac{2}{\sqrt{45}}\vec{i} - \frac{4}{\sqrt{45}}\vec{j} + \frac{5}{\sqrt{45}}\vec{k}\right)$

SORU 4

$\vec{a}_1 = 3\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}, \quad \vec{a}_2 = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$ ve $\vec{a}_3 = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

vektörleri verilmektedir. $\vec{r} = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + 3\vec{a}_3$ **bileşke vektörünü** elde ediniz.

(A) $\vec{r} = 11\vec{i} - 8\vec{k}$ (B) $\vec{r} = 9\vec{i} - 8\vec{k}$ (C) $\vec{r} = 11\vec{i} - 8\vec{j} - 8\vec{k}$

SORU 5

$\vec{a}_1 = 3\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{a}_2 = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$ ve $\vec{a}_3 = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

vektörleri verilmektedir. $\vec{r} = 3\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + 4\vec{a}_3$ **bileşke vektörünü** elde ediniz.

A) $\vec{u} = \frac{17}{\sqrt{398}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{398}}\vec{j} - \frac{10}{\sqrt{398}}\vec{k}$ B) $\vec{u} = \frac{15}{\sqrt{250}}\vec{i} - \frac{3}{\sqrt{250}}\vec{j} + \frac{10}{\sqrt{250}}\vec{k}$

C) $\vec{u} = \frac{17}{\sqrt{398}}\vec{i} - \frac{3}{\sqrt{398}}\vec{j} - \frac{10}{\sqrt{398}}\vec{k}$

SORU 6

Başlangıç noktası P1 (2, -1, 4) ve uç noktası P2 (7, 5, -8) olan $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektörünün **bileşenlerini** elde ediniz.

A) (-5, 6, 12) B) (-5, -6, -12) C) (5, 6, -12)

SORU 7

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ **birim vektör** olmak üzere $\vec{k} \cdot (\vec{i} + \vec{j})$ **skaler çarpımının** sonucunu elde ediniz.

A) 1 B) 2 C) 0

SORU 8

$(2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) \cdot (3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})$

skaler çarpım sonucunu elde ediniz.

A) 9 B) 1 C) -9

SORU 9

$\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ vektörleri verilmektedir. $\vec{a} \cdot \vec{b}$ çarpımını elde ediniz.

A) -10 B) 8 C) 12

SORU 10

$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{k}$ vektörleri için ne söylenebilir?

A) Birbirlerine diktir B) Çakışıktır C) Paraleldir

SORU 11

$\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 8\vec{j} - 4\vec{k}$ vektörleri arasındaki θ **açısını** hesaplayınız.

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki θ **açısını** hesaplamak için $Cos\theta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ eşitliğinden yararlanınız.

A) 46 ° 54' B) 136 ° 54' C) 226 ° 54'

SORU 12

$\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ vektörleri verilmektedir. $\vec{a} \times \vec{b}$ **çarpımını** elde ediniz.

A) $3\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}$ B) $4\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}$ C) $-3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$

SORU 13

$\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ vektörleri verilmektedir.
$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin **her ikisine de dik olan birim vektörü** elde ediniz. $\vec{u} = \dfrac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$ eşitliğinden yararlanınız.

A) $\dfrac{3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}}{6}$ B) $\dfrac{3\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}}{6}$ C) $\dfrac{3\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}}{6}$

SORU 14

$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ve $\vec{c} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ vektörleri verilmektedir.

$(\vec{b} \times \vec{c})$ **çarpım** sonucunu elde ediniz.

A) $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ B) $\vec{j} + \vec{k}$ C) $-\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

SORU 15

$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ve $\vec{c} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ vektörleri verilmektedir.

$\vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}})$ **çarpımını** elde ediniz.

A) $\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ B) $3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ C) $5\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

SORU 16

$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ve $\vec{c} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ vektörleri verilmektedir.

$(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}})$ **çarpım** sonucunu elde ediniz.

A) $-\vec{i} - 5\vec{j} - 7\vec{k}$ B) $-\vec{i} - 7\vec{j} - 5\vec{k}$ C) $\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$

SORU 17

$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ve $\vec{c} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ vektörleri verilmektedir.

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ **çarpım** sonucunu elde ediniz.

A) $12\vec{i} + 4\vec{j} - 8\vec{k}$ B) $12\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}$ C) $12\vec{i} - 4\vec{j} - 8\vec{k}$

SORU 18

$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ vektörlerinin **lineer bağımlı** veya **bağımsız** olduğunu belirleyiniz.

$\mathbf{k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + k_3\vec{a}_3 = 0}$

eşitliğinden **k1, k2, k3** değerlerini elde ediniz. $\mathbf{k_1=k_2=k_3=0}$ ise **lineer bağımsız**, $\mathbf{k_1}$, $\mathbf{k_2}$, $\mathbf{k_3}$ değerlerinden en az biri sıfırdan farklı ise **lineer bağımlıdır**. $\mathbf{k_1}$, $\mathbf{k_2}$, $\mathbf{k_3}$ değerleri

A) (0, 0, 0) B) (1, -2, -1) C) (0, 0, 1)

SORU 19

$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektörlerinin **lineer bağımlı** veya **bağımsız** olup olmadığını belirleyiniz.

$\mathbf{k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 = 0}$

eşitliğinden $\mathbf{k_1}$, $\mathbf{k_2}$ değerlerini elde ediniz.

A) (0, 1) B) (1, 0) C) (0, 0)

SORU 20

$\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$

$\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ vektörleri verilmektedir.

$\vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$

$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ **çarpımını** elde ediniz.

A) $2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ B) -20 C) 18

6.BOLUM DOGRUSAL CEBIR VE DIFERANSIYEL DENKLEMLER
LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ ve RANK KAVRAMI
GİRİŞ

Bölüm 2'de m satır ve n sütundan oluşan bir lineer denklem sisteminin matris cinsinden ***AX=B*** şeklinde yazılabileceği ifade edilmişti. Bu ifadede,

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ katsayılar matrisini,

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ bilinmeyenler vektörünü ve $$B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$ eşitliğin sağındaki sabitlere ilişkin vektörü belirtmektedir.

m´n boyutlu **A** katsayılar matrisine ilişkin **m** satır ve **n** sütundan oluşan (**m>n** varsayılmaktadır).

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ matrisi oluşturulursa bu kare matrisin determinantının

$$|B|=\det(B)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ şeklinde ifade edildiğinden daha önce Bölüm 3'de bahsedilmiş idi.

Örneğin,

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ matrisinin determinantı det(B) veya $|B|$

$$|B|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-24$$ tür.

6.1. BİR MATRİSİN RANKI

m satır ve *n* sütundan oluşan A matrisini gözönüne alalım.

Bu matrisin bazı satır ve sütunlarını silmek suretiyle elde edilen *r*×*r* boyutlu kare matrislerden hiç olmazsa birinin determinantı sıfırdan farklı, fakat *r*×*r*'den daha yüksek boyutlu kare matrislerden her birinin determinantı sıfır ise *r* sayısına *A* matrisinin **rankı** denir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

6.1.1. Örnek 1 ve 2

Örnek 1 **Örnek 2**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinin **rankını** belirleyiniz.

Çözüm : **A** matrisi **m**=3 satır ve **n**=3 sütundan oluştuğundan; önce 3´ 3 boyutlu **A** matrisinin **determinantını** belirlemeye çalışalım.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1(3-0) - 1(1-4) + 1(0-6)$$

$$= 3 + 3 - 6$$

$$= 0$$

olduğundan **A** matrisinin **rankı** 3'den küçüktür.

Bu durumda 2x2 boyutlu **kare matrisleri** oluşturup bunların **determinantlarını** elde edebiliriz. Bunlardan herhangi birisinin **determinantı** sıfırdan farklı ise diğer 2x2 boyutlu **kare matrislerin determinantlarını** elde etmemize gerek yoktur.

2x2 **kare matrislerden** örneğin;

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$'in determinantı $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

olduğundan **A** matrisinin **rankı r** = 2'dir.

Görüldüğü gibi bu **determinant** değeri sıfırdan farklı olduğundan diğer 2´ 2 boyutlu **kare matrislerin determinantlarının** hesaplanmasına gerek duyulmamıştır.

Örnek 1 | Örnek 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

matrisinin **rankını** belirleyiniz.

Çözüm : **A** matrisi **m**=3 satır ve **n**=4 sütundan oluştuğundan bir **kare matris** olmayıp dolayısıyla **rankı** 4 olamaz.

Bu durumda 3x3 boyutlu **kare matrislerin determinantlarını** elde etmemiz gerekir.

Bu 3x3 boyutlu matrislere ilişkin **determinantlar**,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$$

= 1(24+6) – 2 (12+3) –1 (-4+4)

= 30-30-0

= 0

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -7 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$$

= 1(-28+10) – 2 (-14+5) –4 (-4+4)

= -18+18-0

= 0

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & -7 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$$

= 1(-21-30) + 1 (-14+5) +4 (12+3)

= -51-9+60

= 0

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \\ -2 & 6 & -7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-21-30) +1 (-28+10) +4 (24+6)$$

$$= -102-18+120$$

$$= 0$$

Görüldüğü gibi 3x3 boyutlu tüm matrislerin **determinantları** sıfır olduğundan **A** matrisinin **rankı** 3 olamaz.

Şimdi 2x2 boyutlu matrislerin **determinantlarını** hesaplayalım. Bu matrislerden, örneğin;

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin **determinantı** $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4\text{-}4 = 0$

veya

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin **determinantı** $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3+2 = 5 \neq 0$

olduğundan **A** matrisinin **rankı r = r(A)** = 2'dir.

Bu örnekten anlaşılacağı gibi matrisin boyutu büyüdükçe; **rankı kare matrislerin determinantlarını** elde ederek belirlemek oldukça zaman alıcı olmaktadır. Bundan dolayıdır ki; işlem zamanını daha aza indirgemenin yollarının aranması gereği ortaya çıkmaktadır.İlerleyen ekranda bu yollar anlatılacaktır.

6.1.2. Denk Matrisler Yöntemi

Daha önceki bölümlerde verilen bir A matrisinin elementer satır/sütun dönüşümleri yardımıyla bir B matrisine dönüştürüldüğü A ve B matrislerine **Denk matrisler** dendiğinden bahsedilmişti.

Elementer satır/sütun dönüşümleri bir matrisin
- boyutunu
- rankını

değiştirmez.

6.1.2.1. Örnek 3

Örnek 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

Yukardaki **A** matrisini **elementer satır dönüşümleri** yardımıyla **satır indirgenmiş** bir **B denk matrisi (Row Reduced Echelon Form)** haline dönüştürerek **rankını** elde edelim.

Çözüm :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 5\\ -1 & -2 & 6 & -7\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3+R_1]{R_2\to R_2-2R_2}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 5 & -3\\ 0 & 0 & 5 & -3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 5 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\to \frac{R_2}{5}}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+R_2}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & \frac{17}{5}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=B$$

A ve **B** matrisleri **denk matrisler** olduklarından **A** matrisinin **rankı B** matrisinin **rankına** eşit olup **r (A) = r (B)**'dir.

B matrisi **m**=3 satır **n**=4 sütundan oluştuğundan 4x4 boyutlu herhangi bir **determinant** elde edilemez dolayısıyla rankı **r**=4 olmaz.

Üçüncü satırın tüm elemanları sıfır olduğundan herhangi bir 3x3 boyutlu determinant değeri, Örneğin;

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0\,,\quad \begin{vmatrix}1 & 0 & \frac{17}{5}\\ 0 & 1 & -\frac{3}{5}\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0\quad \begin{vmatrix}1 & 2 & \frac{17}{5}\\ 0 & 0 & -\frac{3}{5}\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0\,,\quad \begin{vmatrix}2 & 0 & \frac{17}{5}\\ 0 & 1 & -\frac{3}{5}\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

sıfır olduğundan **A** matrisinin **rankı r**=3 olamaz.

Bu durumda 2x2 boyutlu matrislerin **determinantlarını** göz önüne alalım. Bunlardan herhangi biri sıfırdan farklı ise **rank** 2 aksi durumda 1 olacaktır. Örneğin,

$$\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0$$

olduğundan **B** matrisinin dolayısıyla **A** matrisinin **rankı r(A)=r(B)**=2'dir.

6.1.3. Lineer Bağımsızlık ve Rank

Bölüm-4'de $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ 'in **n** boyutlu vektörler ve $k_1, k_2, \ldots k_n$' in sabitler olması durumunda

$$k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \ldots + k_n\vec{a}_n = 0$$

eşitliğini sağlayan en az bir sıfırdan farklı $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sayıları bulunabiliyorsa, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ vektörlerine **lineer bağımlı vektörler** dendiğinden bahsedilmişti. Eğer tüm $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$ için ilgili eşitlik sağlanıyorsa, vektörler lineer bağımsızdır ifadesi kullanılmıştı.

Konuyu hatırlamak için örnekleri inceleyelim.

6.1.3.1. Örnek 4, 5 ve 6

Örnek 4 | **Örnek 5** | **Örnek 6**

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vektörlerinin **lineer bağımsızlığını** belirlemeye çalışalım.

Çözüm : **Lineer bağımlılık** göz önüne alınırsa

$$k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 = 0$$

eşitliğini sağlayacak $k_1 = 0$ **ve** $k_2 = 0$ sayılarının bulunması gerekir. Dolayısıyla,

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

yazılırsa bunun sonucu olarak,

$$k_1 + 2k_2 = 0$$

$$2k_1 = 0$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu eşitliklerin veya **denklem sisteminin çözümü** sonucunda $k_1=0$ ve $k_2=0$ bulunur. k_1 ve k_2 değerleri sıfır olduğundan **vektörleri lineer bağımsızdır** denir.

Örnek 4 | **Örnek 5** | **Örnek 6**

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

vektörlerinin **lineer bağımsız** olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm : **Lineer bağımlılık** için

$$k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + k_3\vec{a}_3 = 0$$

şartının sağlanması ve $\mathbf{k_1}$, $\mathbf{k_2}$, $\mathbf{k_3}$ değerlerinden en az birinin sıfırdan farklı olması gerekmektedir. Bu durumda verilen **vektörler** göz önüne alındığında

$$k_1\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + k_3\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

ve dolayısıyla,

$\mathbf{k_1} + \mathbf{k_3} = 0$

$\mathbf{2k_1} + \mathbf{k_2} = 0$

$\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2} - \mathbf{k_3} = 0$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu **sistemin çözümü** sonucunda (**homojen lineer denklem sistemlerinin** nasıl çözüleceği bu bölümde ele alınacaktır.) $\mathbf{k_1=k_1}$, $\mathbf{k_2=2k_1}$ ve $\mathbf{k_3=-k_1}$ olarak elde edilir. $\mathbf{k_1}=1$ alınırsa,

$\mathbf{k_1}=1$, $\mathbf{k_2}=-2$ ve $\mathbf{k_3}=-1$

olur. $\mathbf{k_1}$, $\mathbf{k_2}$, $\mathbf{k_3}$ değerlerinden en az biri sıfırdan farklı olduğundan $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_3$ **vektörleri lineer bağımlıdır** denir.

Bu açıklamalardan sonra **lineer bağımsızlık kavramı** yardımıyla bir **A** matrisinin **rankına** ilişkin şu tanım yapılabilir:

Bir **A** matrisinin **lineer bağımsız** satır (veya sütun) vektörlerinin maksimum sayısına **A matrisinin rankı** denir ve **r(A)** ile belirtilir.

Örnek 4 | Örnek 5 | Örnek 6

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinin **rankını** belirleyiniz.

Çözüm : Ele alınan matrisin **satır vektörleri**,

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ve } \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dir}$$

Lineer bağımlılık için

$$\boldsymbol{k_1}\vec{a}_1 + \boldsymbol{k_2}\vec{a}_2 = 0$$

şartının sağlanabilmesi ve $\mathbf{k_1}$ veya $\mathbf{k_2}$ değerlerinden en az birinin sıfırdan farklı olması gerekir.

$$\boldsymbol{k_1}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \boldsymbol{k_2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

yazılırsa,

$\mathbf{k_1} = 0$

$2\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2} = 0$

$\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2} = 0$

denklem sistemi elde edilir. Bu **sistemin çözümü** sonucunda $\mathbf{k_1}=\mathbf{k_2}=0$ olarak bulunur. Bu duruma göre $\vec{a}_1$ ve $\vec{a}_2$ **vektörleri**, dolayısıyla **A** matrisinin satırları **lineer bağımsız** olduklarından **A** matrisinin **rankı r(A)**=2'dir.

6.2. LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

m satır ve *n* sütundan oluşan bir lineer denklem sisteminin ***AX=B*** şeklinde ifade edildiğinden daha önce bahsedilmiş idi.

Sistemin çözümüne ilişkin bazı yöntemler örneğin **Gauss, Gauss-Jordan, Matris tersi, Cramer** gibi ele alınmış ve bilinmeyenler vektörü *X*'e ilişkin çözüm değerleri elde edilmiş idi. Bu bölümde **rank** yardımıyla Lineer denklem sistemlerinin çözümü ele alınacak ve örneklerle konuya açıklık kazandırılmaya çalışılacaktır.

Sistemin çözümüne ilişkin katsayılar matrisini

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix},$$

şeklinde ifade edeceğiz.

A matrisi ile arttırılmış (genişletilmiş) katsayılar matrisini ise

$$[AB] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & & . & . \\ . & . & & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

6.3. LİNEER HOMOJEN DENKLEM SİSTEMİ

AX=B lineer denklem sisteminin çözümünün mevcut olması için gerek ve yeter şart ***A*** ve [***AB***] matrislerinin ranklarının aynı olmasıdır.

A ve [AB] matrislerinin ranklarının eşit olması durumunda;

1. **r (A) = r (AB) = n** ise lineer denklem sisteminin tek çözümü vardır.
2. **r(A) = r(AB) iken r(A)<n** ise, lineer denklem sisteminin çok çözümü vardır

6.3.1. Örnek 7, 8, 9, 10, 11 ve 12

Örnek 7	Örnek 8	Örnek 9	Örnek 10	Örnek 11	Ör

$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 25$

$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 22$

$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 18$

lineer denklem sisteminin çözümünü araştırınız, varsa **çözümü** bulunuz.

Çözüm : Verilen **lineer denklem sisteminin katsayılar** ve **arttırılmış (genişletilmiş) katsayılar matrisleri**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad [AB] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 2 & 25 \\ 3 & 2 & 3 & 22 \\ 2 & 1 & 4 & 18 \end{array}\right]$$

olarak belirlenir. **[AB]**'nin **rankını elementer satır işlemleriyle** bulalım.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 2 & 25 \\ 3 & 2 & 3 & 22 \\ 2 & 1 & 4 & 18 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 22 \\ 2 & 1 & 4 & 18 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 18 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 6 & 10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to -R_3]{R_1 \to R_1 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 5 & 13 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -10 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_3]{R_2 \leftrightarrow R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & 5 & 13 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 + R_3]{R_1 \to R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 14 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 13 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 13 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 + R_3]{R_3 \to \frac{R_3}{5}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{28}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{5} \end{array}\right]$$

Görüldüğü gibi **arttırılmış matris [AB]** sıra **indirgenmiş matris (row reduced echolon form)** veya diğer bir ifadeyle **KANONİK** şekile **(canonical form)** dönüştürülmüştür.

A matrisinin **denk matrisi** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

olup **rankı r(A)** = 3'dür.

AB matrisinin **denk matrisi** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{28}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{5} \end{array}\right]$

olup **m**=3 satır **n**=4 sütun olduğundan 4x4 boyutlu **determinant** mevcut değildir. 3x3 boyutlu **determinantlardan** herhangi biri,

Örneğin, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ veya **determinant**

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{28}{5} \\ 0 & 1 & \frac{13}{5} \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 0 & \frac{28}{5} \\ 1 & \frac{13}{5} \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & \frac{28}{5} \\ 0 & \frac{13}{5} \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

= 0 – 0 + 1(1)

= 1

sıfırdan farklı olduğundan **r(AB)**=3'dür. Dolayısıyla **r(A)=r(AB)**=3'dür.
Bilinmeyen sayısı n=3 olduğundan

r(A) = r(AB) = n = 3

şartı sağlanmış olur. Bu durumda **sistemin** tek çözümü vardır.

Son durumdaki **[AB]** matrisinin **denk matrisi**

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & b \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{28}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{5} \end{array}\right]$$

göz önüne alınarak

$$1x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$
$$0x_1 + 1x_2 + 0x_3 = \frac{28}{5}$$
$$0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = \frac{13}{5}$$

eşitlikleri yazılırsa, buradan

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{28}{5}, \quad x_3 = \frac{13}{5}$$

elde edilir.

2. ***r(A) = r(AB) iken r(A)<n*** ise, lineer denklem sisteminin çok çözümü vardır.

k 7 **Örnek 8**

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$

$2x_1 + + 7x_3 = 4$

$3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 3$ **lineer denklem sisteminin çözümünü** araştırınız, varsa **çözümünü** bulunuz.

Elementer satır dönüşümü yardımıyla **arttırılmış katsayılar matrisi [AB]**

$$[AB] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 7 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

satır dönüştürülmüş denk matris (row echelon form) haline dönüştürülür.

A matrisinin **denk matrisi** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ve **rankı** üçüncü satır elemanları sıfır ve $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

olduğundan **r(A)**=2'dir.

Benzer şekilde **arttırılmış matris [AB]**'nin **denk matrisi**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

olup bu matrisin son satır elemanları sıfır olduğundan rankı 3 olamaz. 2x2 boyutlu **determinantlardan** herhangi biri, örneğin;

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7 \neq 0$$

olduğundan **(AB)**'nin rankı **r(AB)**=2'dir.

r(A) = r(AB) = 2

olduğundan **sistemin çözümü** mevcuttur.

r(A) < n

2 < 3

olduğundan **sistemin birden fazla çözümü** vardır. Bu **çözümü** elde etmeye çalışalım.

Çözümü elde etmek için **[AB] arttırılmış katsayılar matrisinin denk matrisini** göz önüne alalım.

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & b \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

r(A)=2 **bilinmeyen sayısı n**=3'den küçük olduğundan, **bilinmeyenlerden** 2 tanesi **esas bilinmeyen** ve **denklemlerden** 2 tanesi de **esas denklemler** olarak seçilir.

Bu seçimlerde dikkat edilmesi gereken nokta şudur:

Esas denklemlerde, esas bilinmeyenlerin katsayılar determinantı sıfırdan farklı olmalıdır.

Örneğin bu sistemde birinci ve ikinci satırlardan oluşan denklemler **esas denklemler** ve

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{1.satır} \\ \text{2.satır} \end{array} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \end{array}$$

x_1, x_2 esas bilinmeyenler olarak alınabilir.

Bu durumda **arttırılmış matrisin denk matrisi** ve yukarıdaki koşullar göz önüne alındığında

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$

$0x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2$

denklemleri elde edilir. Bu **denklemler** düzenlenirse

$x_1 + x_2 = 1 - 2x_3$

$-2x_2 = 2 - 3x_3$

ve dolayısıyla

$$x_1 = 2 - \frac{7}{2}x_3 \qquad x_2 = -1 + \frac{3}{2}x_3$$

elde edilir. $x_3=a$ değerine eşitlenirse $x_1 = 2 - \frac{7}{2}a$, $x_2 = -1 + \frac{3}{2}a$, $x_3=a$

bulunur, a'ya değişik değerler örneğin; a=0 verilirse, $x_1=2$, $x_2=-1$, $x_3=0$ ve a=1

olması durumunda $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3=1$ bulunur.

Bu çözümde **n-r** = 3-2 = 1 tane **keyfi sabit** (burada **a** ile belirtilmiştir) vardır.

Esas değişkeni belirlemenin daha etkin bir yolu elde edilen satır eşdeğer matrisin

kanonik hale dönüştürülmesidir. Örneğin,

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

matrisini kanonik şekle dönüştürelim. Bu durumda,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{R_2}{-2}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & \frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

elde edilir. Görüldüğü gibi 1.satırın sıfırdan farklı ilk elemanı 1 ve bu sütundaki diğer elemanlar sıfırdır. Benzer şekilde 2.satırın sıfırdan farklı ilk elemanı 1 ve bu elemanın bulunduğu sütundaki (2.sütun) diğer elemanlar sıfırdır. 3.satır elemanları sıfır olduğundan bu matris KANONİK şekle dönüşmüştür.

Bu durumda,

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & b \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & \frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

matrisi gözönüne alındığında x_1 ve x_2 değişkenleri esas değişkenler (bağımlı değişken) ve x_3 değişkeni bağımsız değişken olarak alınırlar.

$$x_1 + 0 \cdot x_2 + \frac{7}{2}x_3 = 2 \qquad 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - \frac{3}{2}x_3 = -1$$

eşitliklerinden,

$$x_1 + \frac{7}{2}x_3 = 2, \qquad x_1 = 2 - \frac{7}{2}x_3 \qquad x_2 - \frac{3}{2}x_3 = -1, \qquad x_2 = -1 + \frac{3}{2}x_3$$

elde edilir. $x_3 = a$ denirse,

$$x_1 = 2 - \frac{7}{2}a, \quad x_2 = -1 + \frac{3}{2}a, \quad x_3 = a$$

bulunur.

ek 7 | Örnek 8 | **Örnek 9**

$3x_1 - x_2 + x_3 = 1$

$x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$

$5x_1 + 3x_2 - x_3 = 7$

$7x_2 - 4x_3 = 8$

lineer denklem sisteminin çözümünü araştırınız, varsa **çözümünü** bulunuz.

$$[AB]=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 3\\ 5 & 3 & -1 & 7\\ 0 & 7 & -4 & 8\end{bmatrix}$$

arttırılmış matrisi, elementer satır dönüşümleri yardımıyla

$$\xrightarrow[R_3\to R_3-5R_2]{R_1\to R_1-3R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}0 & -7 & 4 & -8\\ 1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & -7 & 4 & -8\\ 0 & 7 & -4 & 8\end{array}\right]\xrightarrow[R_3\to R_3+R_4]{R_1\to R_1+R_4}\left[\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 7 & -4 & 8\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2\leftrightarrow R_4]{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\mathbf{A} & \mathbf{B}\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 7 & -4 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\end{array}$$

olarak **denk matris** haline dönüştürülür.

Bu matrisin **A** matris kısmı **(A'nın denk matrisi)** göz önüne alınırsa, 3. ve 4. satırların elemanları sıfır olduğundan **A** matrisinin **rankı** 3 olamaz.

2x2 boyutlu **determinantlardan**, örneğin;

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 7\end{vmatrix}=7\neq 0 \quad \text{veya} \quad \begin{vmatrix}2 & -1\\ 7 & -4\end{vmatrix}=-8+7=-1\neq 0$$

olduğundan **r(AB)**=2'dir.

r(A) = **r(AB)** = 2 olduğundan **sistemin çözümü** mevcuttur.

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \mathbf{x_3} & \mathbf{b}\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 7 & -4 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\end{array}$$

(AB) arttırılmış matrisinin **denk matrisi** göz önüne alınır ve **n-r**=3-2=1 olduğu hatırlanırsa,

$x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$ $7x_2 - 4x_3 = 8$ eşitliklerden

$x_1 = 3-2x_2+x_3$ elde edilir. **n-r** = 3-2 = 1 tane **keyfi sabit** olduğundan, x_3=a değeri atanırsa

$$x_2=\frac{4x_3+8}{7} \qquad x_1=\frac{5-a}{7},\ x_2=\frac{4a+8}{7},\ x_3=a$$

bulunur.

Görüldüğü gibi **r(A)**=2 olduğundan 2 **esas denklem** ve 2 **esas bilinmeyen** seçilmiştir. 3. ve 4. satırların elemanlarının tümü sıfır olduğundan 1. ve 2. satırlar **esas denklemler**,

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 7\end{vmatrix}=7\neq 0$$

olduğundan $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ değişkenleri **esas değişkenler** olarak alınmıştır.

a değişkenine değişik değerler vererek **sisteme ilişkin** birden fazla **çözüm** elde edilebilir.

Örnek 8'de olduğu gibi elementer satır dönüşümleri yardımıyla elde edilen,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

matrisini kanonik şekle dönüştürülebilir. Bu durumda,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{R_2}{7}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

elde edilir.

Kanonik şekle dönüştürülen matris gözönüne alındığında x_1 ve x_2 değişkenlerinin esas değişken (bağımlı değişken), x_3 değişkeninin bağımsız olduğu açıkça görülür.

$$1 \cdot x_1 + \quad 0 \cdot x_2 + \quad \frac{1}{7} x_3 \quad = \frac{5}{7}$$

$$0 \cdot x_1 + \quad 1 \cdot x_2 - \quad \frac{4}{7} x_3 \quad = \frac{8}{7}$$

eşitliklerinden,

$$x_1 = \frac{5}{7} - \frac{1}{7} x_3$$

$$x_2 = \frac{8}{7} + \frac{4}{7} x_3$$

elde edilir. $x_3 = a$ konursa,

$$x_1 = \frac{5}{7} - \frac{1}{7} a, \quad x_2 = \frac{8}{7} + \frac{4}{7} a, \quad x_3 = a$$

bulunur.

rnek 7 | Örnek 8 | Örnek 9 | **Örnek 10**

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2$

$3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5$

$2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -4$

$x_1 + 4x_2 + 6x_4 = 0$

lineer denklem sisteminin çözümünü araştırınız ve **elementer satır dönüşümleri** yardımıyla varsa **çözümünü** bulunuz.

Elementer satır dönüşümleri yardımıyla

$$[AB] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \\ 2 & -5 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1}]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -7 & -1 \\ 0 & -9 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right]$$

$$R_2 \to R_2 - R_3 \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 16 & -16 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 9R_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & -55 & 55 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_4 \to R_4 - 2R_2]{R_3 \to \frac{R_3}{-55}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 16 & -16 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 \to \frac{R_4}{16}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_3} \begin{array}{c} \quad\textbf{A} \qquad\quad \textbf{B} \\ \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

denk matrisi elde edilir.

A matrisinin **denk matrisi** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve **r(A)**=3,

[AB] matrisinin **denk matrisi** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve **r(AB)**=3'dür.

r(A)=**r(AB)**=3 olduğundan **sistemin çözümü** mevcuttur.

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \mathbf{x_3} & \mathbf{b} \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

denk matrisi ve n-r = 3-3 = 0 olduğu **(yani; keyfi sabit yok)** göz önüne alınırsa

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2$

$0x_1 + x_2 - 6x_3 = 7$

$0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = -1$

$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$

elde edilir. Buradan,

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2$

$x_2 - 6x_3 = 7$

$x_3 = -1$

ve dolayısıyla,

$x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=-1$

bulunur. **n=r**=3 olduğundan **sistemin** tek bir çözümü vardır.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

matrisini kanonik şekle dönüştürecek olursak,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14 & -12 \\ 0 & 1 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2\to R_2+6R_3]{R_1\to R_1-14R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

elde edilir. Bu matris yardımıyla,

$x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1$

bulunur.

ek 7 | Örnek 8 | Örnek 9 | Örnek 10 | Örnek 11

$x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1$

$2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2$

$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 3$

Elementer satır dönüşümleri yardımıyla **[AB] arttırılmış katsayılar matrisi'**nin **denk matrisi**

$$[AB] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \qquad\qquad\mathbf{A} \qquad\qquad\quad \mathbf{B} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

olarak elde edilir. Görüldüğü gibi **denk matris kanonik şekle** dönüştürülmüştür.

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad\mathbf{A} \qquad\qquad\quad \mathbf{B} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$ **arttırılmış matrisi** göz önüne alındığında

A matrisinin **denk matrisi** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ 3 satır ve 5 sütundan oluştuğundan 3x3 boyutlu determinantlar göz önüne alınmalıdır. Örneğin;

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0\ , \quad \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -2 & 0\\0 & 0 & 1\end{vmatrix}=-2 \text{ gibi.}$$

3x3 boyutlu herhangi bir **determinant** değeri sıfırdan farklı olduğundan **r(A)**=3'dür.

Benzer şekilde **[AB]** matrisinin **denk matrisi**

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

olup rankı **r(AB)**=3'dür.

r (A)=r(AB)= 3 olduğundan **sistemin çözümü** mevcuttur.

n-r=5-3=2 olup 2 tane **keyfi sabit** vardır.

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}\mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \mathbf{x_3} & \mathbf{x_4} & \mathbf{x_5} & \mathbf{b}\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccc:c}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0\end{array}\right]\end{array}$$

matrisinden 3 **esas denklem** ve 3 **esas değişken** seçilir.

$$\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

olduğundan 1., 2. ve 3. satırlar **esas denklemler** ve x_1, x_2, x_4 **esas değişkenler** olarak seçilir.

(Elde edilen dönüştürülmüş matris kanonik halde bulunduğundan, bu değişkenlerin bulunduğu sütunlardaki 1 değeri dışında diğer elemanların değerlerinin 0 (sıfır) olduğunu gözönüne alınız)

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \mathbf{x_4}\end{array}\\ \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0\end{array}$$

olduğundan da x_1, x_2 ve x_4 değişkenleri **esas değişkenler** olarak seçilebilir.

Bu durumda **arttırılmış denk matris**'ten

$x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 1$	$x_1 = 1, \quad x_1 = 1$
$0x_1 + 1x_2 - 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0$	$x_2 - 2x_3 = 0, \quad x_2 = 2x_3$
$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 3x_5 = 0$	$x_4 + 3x_5 = 0, \quad x_4 = -3x_5$
ve dolayısıyla,	elde edilir.

x_1, x_2, x_4 **esas değişkenlerimiz** olduklarından ve **n-r**=5-3=2 **tane keyfi** sabit'imiz bulunduğundan $\mathbf{x_3=a}$, $\mathbf{x_5=b}$ atamaları yapılırsa,

$x_1 \qquad = 1, \qquad x_1 = 1$

$x_2 - 2a \qquad = 0, \qquad x_2 = 2a$

$x_4 + 3b \qquad = 0, \qquad x_4 = -3b$

ve dolayısıyla,

$x_3=1$, $x_2=2a$, $x_3=a$, $x_4=-3b$, $x_5=b$ bulunur. a ve b'ye değişik değerler verildiğinde **sistemin** birden fazla **çözümü** elde edilir.

Örnek 12

$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5$

$2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 2$

$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7$

lineer denklem sisteminin çözümünü araştırınız ve varsa **çözümünü** bulunuz.

$$[AB] = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 7 \end{array}\right]$$

arttırılmış matrisinin **elementer satır dönüşümleri** yardımıyla **dönüştürülmüş denk matrisi**

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad \mathbf{A} \qquad\qquad\quad \mathbf{B} \\ \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 7 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right] \end{array}$$

olup buradan **A** matrisinin **denk matrisi** ve **rankı**,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{r(A)=2}$$

ve **arttırılmış** matris **(AB)'** nin **denk matrisinin rankı**

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \mathbf{x_3} & \mathbf{x_4} & \mathbf{b} \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

olup bu matristen elde edilen 3x3 boyutlu **determinant**,

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 & 13 \\ -5 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = -5(-28+25) = 15 \neq 0$$

olduğundan **r(AB)**=3'dür.

r(A)=2 ve **r(AB)**=3 ve dolayısıyla **r(A) ≠ r(AB)** olduğundan **sistemin çözümü** mevcut değildir.

Örneğin **arttırılmış denk matris**'in son satırını göz önüne aldığımızda

$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -5$ olduğu da açıkça görülmektedir.

6.3.2. Lineer Homojen Denklem Sistemi

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}$$

Lineer denklem sistemine **Lineer-Homojen Denklem Sistemi** denir.

Burada katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ve arttırılmış (genişletilmiş) matris **[*AB*]** ise **[*A*0]** olup

$$[A0] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Bilinmeyenler vektörü *x* ise

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

dir.

A ve **[*A*0]** matrislerinin **rankları** birbirine eşit olduğundan, bu sistemin daima $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ olan bir çözümü vardır. Bu çözüme sıfır çözüm (trivial solution) denir.

$AX=0$

Lineer homojen denklem sisteminin çözümüne ilişkin takip eden sayfalardaki kurallar geçerlidir.

6.3.2.1. Kural 1

1. ***A*** matrisinin rankı, ***r = n*** ise sistemin yalnız sıfır çözümü vardır.

Örnek 13

$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$

$x_1 + 2x_2 = 0$

$x_2 + x_3 = 0$

lineer-homojen denklem sisteminin çözümünü elde ediniz.

Çözüm : **Katsayılar matrisi**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ olup **determinantı**

$$|A| = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 2(2\text{-}0) - 1(1\text{-}0) + 3(1\text{-}0)$
$= 4\text{-}1\text{+}3$
$= 6$

olduğundan **A** katsayılar, dolayısıyla **[A0]** matrislerinin **rankı r(A) = r(A0)** =3 'dür. **Bilinmeyen sayısı n**=3 olup, **r=n**=3 olduğundan verilen **sistemin** sadece **sıfır çözümü** vardır. Yani x_1=0, x_2=0 ve x_3=0 dır.

6.3.2.2. Kural 2

2. *A* matrisinin rankı, ***r<n*** ise sıfır çözümden başka çözümler mevcuttur. Bu durumda ***r*** tane esas bilinmeyen (bağımlı değişken) ve ***r*** tane esas denklem seçilir. Seçilme kuralları Homojen olmayan lineer denklem sistemlerinde belirtildiği gibidir. Bu ***r*** tane esas bilinmeyen geriye kalan ***n-r*** tane bilinmeyen cinsinden ifade edilir. Çözümde ***n-r*** tane **keyfi sabit** vardır.

Örnek 14

$2x_1 + x_2 - x_3 = 0$

$x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$

$4x_1 + 9x_2 - 5x_3 = 0$

$x_1 - 10x_2 + 4x_3 = 0$

lineer-homojen denklem sisteminin çözümünü elde ediniz. Çözüm :

[A0] katsayılar matrisini oluşturup **elementer satır dönüşümleri** yardımıyla onu **kanonik forma dönüştürelim.**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & -5 & 0 \\ 1 & -10 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_2]{R_3 \to R_3 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to \frac{R_1}{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 \to R_1 - \frac{R_2}{2}]{R_2 \to \frac{R_2}{-7}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{A} & & \mathbf{B} & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Görüldüğü gibi 1. satırın ilk sıfırdan farklı elemanı 1 ve 1. sütunun diğer elemanları sıfır, 2. satırın ilk sıfırdan farklı elemanı 1 ve 2. sütunun diğer elemanları sıfır, 3. ve 4. satır elemanlarının tümü sıfır olduğundan **arttırılmış [A0]** matrisi **kanonik şekle** dönüştürülmüştür.

A katsayılar matrisinin denk matrisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve 3. ve 4. satırlar sıfır olduğundan **rankı 3** olamaz 2x2 boyutlu matrislerden herhangi biri örneğin;

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

olduğundan **r(A)**=2 dolayısıyla **r(A0)**=2 'dir. **Bilinmeyen sayısı n**=3 ve **r(A)<n** olduğundan **[A0]** matrisinin **denk matrisi** göz önüne alınırsa;

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \mathbf{x_3} & \mathbf{b} \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

matrisinden $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ ve dolayısıyla $\mathbf{x_1}$**,** $\mathbf{x_2}$ **esas bilinmeyenler** ve bu **determinantı** oluşturan 1. ve 2. satırlar **esas denklemler** olarak seçilir.

Yukarıda verilen matristen,

$$\begin{aligned} x_1 \quad - \frac{2}{7}x_3 &= 0 \\ x_2 - \frac{3}{7}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliklerden $x_1 = \frac{2}{7}x_3$, $x_2 = \frac{3}{7}x_3$, $x_3 = x_3$ bulunur.

n-r=3-2=1 keyfi sabit olduğundan x_3=a değeri atanırsa $x_1 = \frac{2}{7}a$,

$x_2 = \frac{3}{7}a$, x_3=a elde edilir. **a**'nın değişik değerleri için, örneğin **a=1** için

$x_1 = \frac{2}{7}$, $x_2 = \frac{3}{7}$, x_3=1 elde edilir. Dolayısıyla birden fazla **çözüm** bulunur.

6.3.2.3. Kural 3

3. Denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşit ise **(*m*=*n*)**, sıfır çözümden başka bir çözümün mevcut olma şartı katsayılar determinantının sıfır olmasıdır.

Örnek 15

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 7x_2 - 4x_3 - 5x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 11x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 0 \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin çözümünü elde ediniz.

Verilen sistemde **denklem sayısı m, bilinmeyen sayısı n**'ye eşittir **(m=n=4). Katsayılar matrisi A**

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & -4 & -5 \\ 2 & -11 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

olup bunun **determinantının** daha kolaylıkla elde edilmesi istenirse **elementer satır dönüşümleri** uygulanabilir. Bu durumda **A'**nın **denk matrisi**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{14} & \frac{1}{14} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

kanonik şekle dönüşmüş olur. 3. ve 4. satırların tüm elemanları sıfır olduğundan bu matrisin **determinantı** sıfırdır. Dolayısıyla **sistemin sıfır çözümden** başka **çözümleri** de mevcuttur.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

olduğundan **r(A)**=2'dir.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & \frac{5}{14} & \frac{1}{14} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} & -\frac{5}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

matrisi ve **r(A)**=2 göz önüne alındığında **x_1, x_2** bilinmeyenleri esas bilinmeyen ve

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

determinantından dolayı bu **determinantı** oluşturan 1. ve 2. satırlar **esas denklem** olarak alınabilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad & + \frac{5}{14}x_3 + \frac{1}{14}x_4 = 0 \\ + x_2 & - \frac{4}{7}x_3 - \frac{5}{7}x_4 = 0 \end{aligned}$$

denklemleri yazılabilir. **n-r**=4-2=2 olduğundan 2 **keyfi sabit** vardır. **x_3=a, x_4=b** atanırsa

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{5}{14}x_3 - \frac{1}{14}x_4 \\ x_2 &= \frac{4}{7}x_3 + \frac{5}{7}x_4 \end{aligned}$$

ifadelerinden,

$x_1 = -\frac{5}{14}a - \frac{1}{14}b$, $x_2 = \frac{4}{7}a + \frac{5}{7}b$, x_3=a , x_4=b elde edilir. **a** ve **b**'ye verilecek değişik değerlere bağlı olarak birden fazla **çözüm** bulunur.

6.3.2.4. Kural 4

4. Denklem sayısı bilinmeyen sayısından az ise yani ***m<n*** ise ***r<n*** olacağından, sistemin sıfır çözümünden başka çözümü mevcuttur.

Örnek 16

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 \quad\quad + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

lineer homojen denklem sisteminin, varsa **çözümünü** elde ediniz.

Çözüm : Burada **denklem sayısı m**=3 ve **bilinmeyen sayısı n**=4 olup, **m<n** dolayısıyla **r<n**'dir.

[A0] arttırılmış katsayılar matrisine elementer satır dönüşümleri uygulanırsa,

$$[A0]=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

elde edilir. Görüldüğü gibi 3. satır elemanlarının tümü sıfır olduğundan 3x3 boyutlu **determinantların** tümü sıfırdır. Dolayısıyla **rank** 3 olamaz.

2x2 boyutlu **determinantlardan** herhangi biri örneğin;

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ olduğundan **r(A)=r(A0)**=2'dir.

n-r=4-2=2 olduğundan **x_1,x_2 esas bilinmeyen**, 1. ve 2. satırlar **esas denklemler** olarak seçilirse,

$$\begin{aligned} x_1 + \quad + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 &= 0 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 &= 0 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu eşitliklerden,

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 &= -\frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 \end{aligned}$$

elde edilir. **n-r**=4-2=2 olduğundan 2 **keyfi sabit** vardır. **x_3=a, x_4=b** değerleri atanırsa,

$x_1 = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, $x_2 = -\frac{1}{2}a - \frac{3}{2}b$, $x_3=a$, $x_4=b$ bulunur.

6.4. CRAMER KURALI ve MATRİS TERSİ YÖNTEMLERİ ile LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜNÜN EDİLMESİ

Lineer Denklem Sistemlerinin çözümü konusuna açıklık kazandırmak ve konunun bütünlüğünü sağlamak amacıyla daha önceki bölümlerde ele alınan Cramer Kuralı ve Matris Tersi Yöntemleri yardımıyla lineer denklem sistemlerinin çözümüne ilişkin bazı örnekler verilecektir.

- **6.4.1. Cramer Kuralı Yardımı ile Lineer Denklem Sisteminin Çözümü**
- **6.4.2. Matris Tersi Yöntemi ile Lineer Denklem Sisteminin Çözümü**

6.4.1. Cramer Kuralı Yardımı ile Lineer Denklem Sisteminin Çözümü

n satır ve n sütundan (bilinmeyen) oluşan

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

lineer denklem sisteminde A, n x n boyutlu bir kare matris olup

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilmektedir.

Eğer det(A) ≠ 0 ise, Cramer kuralına göre bilinmeyenlerin değeri aşağıda belirtildiği şekilde bulunur.

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \quad , \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} \quad , \quad \dots\dots\dots \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

A_1, A katsayılar matrisinin birinci sütununun

A_2, A katsayılar matrisinin ikinci sütununun

$\vdots \quad \vdots$

A_n, A katsayılar matrisinin n'inci sütununun AX=B eşitliğinin sağındaki $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ sabit katsayılar vektörü ile değiştirilmesi sonucu elde edilen matrislerdir.

A n x n boyutlu bir kare matris ve det(A) ≠ 0 olduğundan r (A)=n'dir.

6.4.1.1. Örnek 17

Örnek 17

$$\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & 4x_2 & - & 6x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 8x_2 & - & 9x_3 & = & -1 \end{array}$$

Lineer denklem sisteminin çözümünü Cramer Kuralı yardımıyla elde ediniz.

Çözüm : **A katsayılar matrisinin determinantı**

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & 8 & -9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -9 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -9 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$$

= 3(-36+24) – 4(-36+3) – 6(32-4)

= 3(-12) – 4 (-33) – 6(28)

= -36 + 132 – 168

= -72

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 2 & 4 & -3 \\ -1 & 8 & -9 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -9 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -9 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}$$

= 1(-36+24) – 4(-18-3) – 6(16+4)

= 1(-12) – 4 (-21) – 6(20)

= -12 + 84 – 120

= -48

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -6 \\ 4 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & -9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -9 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -9 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

= 3(-18-3) – 1(-36+3) – 6(-4-2)

= 3(-21) – 1 (-33) – 6(-6)

= -63 + 33 +36 = 6

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 1 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$$

= 3(-4-16) – 4(-4-2) + 1(32-4)

= 3(-20) – 4 (-6) + 1(28)

= -60 + 24 +28

= -8

Bu **determinant** değerlerini kullanarak,

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-48}{-72} = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{6}{-72} = -\frac{1}{12}$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-8}{-72} = \frac{1}{9}$$

bulunur.

6.4.2. Matris Tersi Yöntemi ile Lineer Denklem Sisteminin Çözümü

AX=B

şeklinde ifade edilen ***n*** denklem ve ***n*** bilinmeyenden oluşan bir lineer denklem sisteminin matris tersi yöntemi ile çözümünde aşağıdaki eşitlik kullanılır.

$$X = A^{-1} B$$

Burada, ***x*** bilinmeyenler vektörünü, ***A*^-1^**, ***A*** katsayılar matrisinin tersini, ***B*** eşitliğin sağ tarafındaki sabit katsayılar vektörünü belirtmektedir.

A katsayılar matrisinin tersinin mevcut olabilmesi için, **det(*A*)≠0** şartının gerçekleşmesi gerekir.

A katsayılar matrisinin tersi A^{-1},

- $\left[A \vdots I\right] \cdots \left[I \vdots A^{-1}\right]$ya da
- $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$

yöntemleri yardımıyla elde edilebilir.

Hem Cramer ve hem de matris tersi yöntemlerinin uygulanabilmesi için lineer denklem sisteminin ***n*** denklem ve ***n*** bilinmeyenden oluşması, yani katsayılar matrisinin kare matris olması ve katsayılar matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması yani matris tersinin mevcut olması gerekir.

6.4.2.1. Örnek 18

Örnek 18

Bir önceki örnekteki **lineer denklem sisteminin çözümünü matris tersi yöntemi** yardımıyla elde edelim.

Çözüm : • **A katsayılar matrisinin determinantı, det(A)**

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & 8 & -9 \end{vmatrix} = -72$$

Dolayısıyla **A** matrisinin **tersi** mevcuttur.

- **A katsayılar matrisinin rankı r(A)**=3'dür.
- **r(A)=n**=3 olduğundan **sistemin** sadece bir **çözümü** mevcuttur.
- **A** matrisinin **tersi**, **A^{-1}, adj(A)** yardımıyla aşağıda belirtildiği şekilde bulunur.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & 8 & -9 \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -9 \end{vmatrix} = -12$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -9 \end{vmatrix} = 33$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 28$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 8 & -9 \end{vmatrix} = -12$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -9 \end{vmatrix} = -21$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -20$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 12$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -15$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -4$$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} -12 & 33 & 28 \\ -12 & -21 & -20 \\ 12 & -15 & -4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -12 & -12 & 12 \\ 33 & -21 & -15 \\ 28 & -20 & -4 \end{bmatrix}$$

Dolayısıyla $\mathbf{X=A^{-1}B}$ eşitliğinden

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

yazılır.

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)}$$ olduğundan,

$$A^{-1} = \frac{1}{-72} \begin{bmatrix} -12 & -12 & 12 \\ 33 & -21 & -15 \\ 28 & -20 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{72} & \frac{12}{72} & -\frac{12}{72} \\ -\frac{33}{72} & \frac{21}{72} & \frac{15}{72} \\ -\frac{28}{72} & \frac{20}{72} & \frac{4}{72} \end{bmatrix}$$

elde edilir. $\mathbf{X=A^{-1}B}$ eşitliğinden,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{72} & \frac{12}{72} & \frac{12}{72} \\ -\frac{33}{72} & \frac{21}{72} & \frac{15}{72} \\ -\frac{28}{72} & \frac{20}{72} & \frac{4}{72} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan, $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{12}$, $x_3 = \frac{1}{9}$ bulunur.

Hem **Cramer** ve hem de **matris tersi** yöntemlerinin uygulanabilmesi için **lineer denklem sisteminin n** denklem ve **n** bilinmeyenden oluşması yani; **katsayılar matrisinin kare matris** olması ve **katsayılar matrisinin determinantının** sıfırdan farklı olması yani; **matris tersinin** mevcut olması gerekir.

6.BOLUM DEĞERLENDİRME SORULARI

SORU 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

matrisinin **rankını** elde ediniz.

A) 4 B) 3 C) 2

SORU 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \end{bmatrix}$$

matrisinin **rankını** elde ediniz.

A) 4 B) 3 C) 2

SORU 3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

matrisinin **rankını** belirleyiniz.

A 1 B 2 C 3

SORU 4

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

matrisini **elementer satır dönüşümleri** yardımıyla **denk matris** haline dönüştürünüz ve **rankını** elde ediniz.

A 2 B 1 C 3

SORU 5

[3 -7] ve [-3 4] vektörlerinin **lineer bağımlı** olup olmadığını belirleyiniz.

A Lineer bağımlı B Lineer bağımsız

SORU 6

[-1 0 2], [2 -1 3], [4 -3 13] vektörlerinin **lineer bağımlı** olup olmadığını belirleyiniz.

A $k_1=k_2=0$ lineer bağımsız B $k_1=2$, $k_2=3$ lineer bağımlı C $k_1=0$, $k_2=3$ lineer bağımlı

SORU 7

[4 1 2], [-4 10 2] vektörlerinin **lineer bağımsız** olup olmadığını belirleyiniz.

A Lineer bağımlı B Lineer bağımsız

SORU 8

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 2 \\ x_1 + 8x_2 - 9x_3 &= -1 \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin çözümünü elde ediniz.

Ⓐ (1, 2, 3) Ⓑ $\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{12},\frac{1}{9}\right)$ Ⓒ $\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{12}\right)$

SORU 9

$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 \quad &= 2 \\ 11x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin çözümünü elde ediniz.

Ⓐ $\left(\frac{3}{11},\frac{2}{11},-\frac{1}{11}\right)$ Ⓑ $\left(-\frac{3}{11},\frac{2}{11},-\frac{1}{11}\right)$ Ⓒ $\left(-\frac{3}{11},-\frac{2}{11},\frac{1}{11}\right)$

SORU 10

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 \quad &= -2 \\ 4x_1 \quad - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin çözümünü elde ediniz.

Ⓐ $\left(\frac{20}{11},\frac{40}{11},\frac{38}{11}\right)$ Ⓑ $\left(-\frac{30}{11},-\frac{38}{11},-\frac{40}{11}\right)$ Ⓒ $\left(\frac{20}{11},-\frac{40}{11},\frac{38}{11}\right)$

SORU 11

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 &= 7 \\ 7x_2 - 4x_3 &= 8 \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin çözümünü elde ediniz.

Ⓐ $\left(x_1 = \frac{5}{7}-\frac{1}{7}x_3,\quad x_2 = \frac{8}{7}+\frac{4}{7}x_3,\quad x_3 = x_3\right)$

Ⓑ $\left(x_1 = -\frac{5}{7}-\frac{1}{7}x_3,\quad x_2 = \frac{8}{7}+\frac{4}{7}x_3,\quad x_3 = x_3\right)$

Ⓒ $\left(x_1 = \frac{2}{7}-\frac{1}{7}x_3,\quad x_2 = -\frac{8}{7}+\frac{4}{7}x_3,\quad x_3 = x_3\right)$

SORU 12

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 &= 7 \end{aligned}$$

Lineer denklem sisteminin katsayılar ve **arttırılmış katsayılar matrisinin ranklarını** elde ediniz. **Sistemin çözümünün** olup olmadığına karar veriniz.

(A) r(A) = 3, r(AB) = 3 sistemin çözümü mevcut

(B) r(A) = 3, r(AB) = 4 sistemin çözümü mevcut değil

(C) r(A) = 2, r(AB) = 3 sistemin çözümü mevcut değil

SORU 13

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin çözümünü elde ediniz.

(A) Sistemin çözümü yoktur

(B) $\left(x_1 = \frac{17}{3} - \frac{7}{3}x_3, \quad x_2 = -\frac{5}{3} + \frac{4}{3}x_3, \quad x_3 = x_3\right)$

(C) $\left(x_1 = -\frac{17}{3} - \frac{7}{3}x_1, \quad x_2 = -\frac{5}{3} - \frac{4}{3}x_3, \quad x_3 = x_3\right)$

SORU 14

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= -5 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Cramer kuralını kullanarak verilen **lineer denklem sisteminin çözümünü** elde ediniz.

(A) Sistemin çözümü mevcut değil (B) (1, 2, -2) (C) (-1, 2, 2)

SORU 15

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Lineer homojen denklem sisteminin çözümünü elde ediniz.

(A) $\left(x_1 = \frac{1}{3}x_3, \quad x_2 = -\frac{5}{3}x_3, \quad x_3 = x_3\right)$

(B) $(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0)$

(C) $\left(x_1 = \frac{1}{3}x_3, \quad x_2 = \frac{5}{3}x_3, \quad x_3 = x_3\right)$

SORU 16

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Lineer homojen denklem sisteminin çözümünü elde ediniz.

A (x_1=0, x_2=0, x_3=2) B (x_1= x_3, x_2= x_3, x_3= x_3) C (x_1= x_3, x_2=0, x_3= x_3)

SORU 17

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Lineer homojen denklem sisteminin çözümünü elde ediniz.

A $\left(x_1 = \frac{13}{2}x_3,\quad x_2 = \frac{20}{3}x_3,\quad x_3 = x_3\right)$

B $\left(x_1 = \frac{21}{2}x_3,\quad x_2 = \frac{13}{2}x_3,\quad x_3 = x_3\right)$

C $\left(x_1 = -\frac{21}{2}x_3,\quad x_2 = \frac{13}{2}x_3,\quad x_3 = x_3\right)$

SORU 18

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Lineer homojen denklem sisteminin çözümünü elde ediniz.

A (x_1=-a, x_2=-a-b, x_3=4a, x_4=b)

B (x_1=a, x_2=-a+b, x_3=4a, x_4=b)

C (x_1=0, x_2=b, x_3=a, x_4=b)

SORU 19

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 \quad\quad - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Lineer homojen denklem sisteminin çözümünü elde ediniz.

A (x_1=3x_3, x_2=5x_3, x_3=x_3) B (x_1=4x_3, x_2=5x_3, x_3=x_3) C (x_1=2x_1, x_2=5x_3, x_3=x_3)

SORU 20

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Lineer homojen denklem sisteminin çözümünü elde ediniz.

A) ($x_1=-3a$, $x_2=-a$, $x_3=a$)

B) ($x_1=-3a$, $x_2=a$, $x_3=a$)

C) ($x_1=-5a$, $x_2=-a$, $x_3=a$)

7.BOLUM DOGRUSAL CEBIR VE DIFERANSIYEL DENKLEMLER
EIGEN DEĞERLERİ VE EIGEN VEKTÖRLERİ

7.1. EIGEN ve EIGEN VEKTÖR KAVRAMI

A, n×n boyutlu bir kare matris ve *X* de *n* bileşenli bir vektör olsun. Bu durumda,

Y = A X

çarpımı *n* boyutlu uzaydan kendi içerisine lineer bir dönüşüm olarak gözönüne alınabilir.

AX = λX

olacak şekilde λ skalerleri ve farklı ***X*** vektörlerini bulma problemi, **eigen-eigen vektör** (özdeğer-özvektör) problemi olarak bilinmektedir. Genel olarak λ değerleri ve ***X*** vektörleri kompleks elemanlı olabilirler. Ancak burada reel sayılar içeren örnekler üzerinde durulacaktır.

Fizik ve mühendislikteki titreşim ve denge problemleri, diferansiyel denklem sistemlerinin çözümlerinde hep eigen-eigen vektör problemleri ile karşılaşılmaktadır.

Eigen değerleri, diğer isimlerle de bilinirler. Örneğin karakteristik kökler (characteristic values, proper values veya latent roots) gibi.

7.1.1. Karakteristik Determinant, Polinom ve Eşitlik

Karakteristik Determinant

Eğer **A, n x n** boyutlu bir matris ise, **det (λI – A)**
A matrisinin **karakteristik determinantı** olarak tanımlanmaktadır.

Karakteristik Polinom

Karakteristik determinantın açılımı λ cinsinden n'inci derece bir polinom olup **karakteristik polinom** olarak bilinir.

Karakteristik Eşitlik

det (λI – A) = 0
Eşitliği A matrisinin **karakteristik eşitliği** olarak bilinir.

Bazı kitaplarda **det (*λI* – *A*)** yerine **det (*A* - *λI*)** ifadesi kullanılmaktadır. Her iki durumda da aynı sonuçlar elde edilmektedir.

$n \times n$ boyutlu bir A matrisinin karakteristik polinomu,
$det\,(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + ... + c_n$
şeklindedir.

7.1.1.1. Örnek 1

Örnek 1

a b c

$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin **Karakteristik determinantını** elde ediniz.

Çözüm : **A** matrisinin **karakteristik determinantı,**

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} \lambda-3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

dır.

Örnek 1

a b c

$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin **Karakteristik polinomunu** elde ediniz.

Çözüm : **A** matrisinin **karakteristik polinomu,**

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda-3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

dır.

Örnek 1

a b c

$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin **Karakteristik eşitliğini** elde ediniz.

Çözüm : **A** matrisinin **karakteristik eşitliği,**

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda-3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

olup bu eşitlikten $\lambda = 1$ ve $\lambda = 2$ elde edilir. Bu değerler, A matrisine ilişkin eigen(özdeğer) değerleridir.

7.1.1.2. Örnek 2

Örnek 2

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 4 & -2\\ -3 & 4 & 0\\ -3 & 1 & 3\end{bmatrix}$$ matrisinin **eigen değerlerini** elde ediniz.

Çözüm : **Eigen değerlerini** elde etmek için,

$$\lambda I - A = \lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 4 & -2\\ -3 & 4 & 0\\ -3 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 4 & -2\\ -3 & 4 & 0\\ -3 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$(\lambda I - A)=\begin{bmatrix}\lambda+1 & -4 & 2\\ 3 & \lambda-4 & 0\\ 3 & -1 & \lambda-3\end{bmatrix}$$

matrisini oluşturalım. Bu matrisi kullanarak,

$$\det(\lambda I - A)=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -4 & 2\\ 3 & \lambda-4 & 0\\ 3 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=0\text{'dan}$$

$$\det(\lambda I - A)=(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-4 & 0\\ -1 & \lambda-3\end{vmatrix}-(-4)\begin{vmatrix}3 & 0\\ 3 & \lambda-3\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}3 & \lambda-4\\ 3 & -1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)[(\lambda-4)(\lambda-3)-0]+4[3(\lambda-3)-0]+2[-3-3(\lambda-4)$$

$$(\lambda-3)\,(\lambda^2-3\lambda+2)=0$$

$$(\lambda-3)\,(\lambda-2)\,(\lambda-1)=0$$

eşitliğinden $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$

bulunur.

7.1.1.3. Örnek 3

Örnek 3

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$$ matrisinin **eigen değerlerini** elde ediniz.

Çözüm :

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)\begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 1)$$

$$= (\lambda - 2)^2 (\lambda - 1)$$

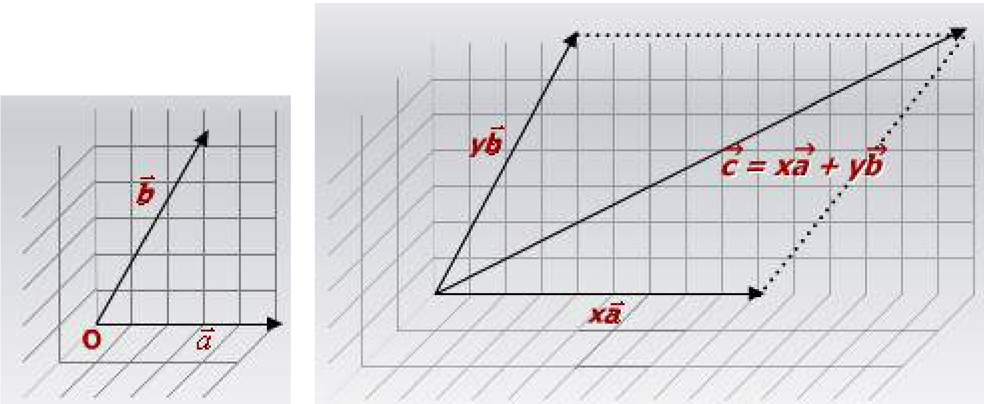
det (I - A) = 0'dan

$(\lambda - 2)^2 (\lambda - 1) = 0$ ve bu eşitlikten

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ ve $\lambda_1 = 1$ elde edilir.

7.1.2. Baz

Düzlemde, doğrultuları farklı olan $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ gibi iki vektörü göz önüne alalım.



Şekil-7.1

Bu düzlemin herhangi bir $\vec{c} \neq 0$ vektörü için $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ eşitliğini sağlayan ve en az biri sıfırdan farklı *x* ve *y* sayıları bulunabilir. Çünkü $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektörleri üzerine köşegeni $\vec{c}$ olan bir paralelkenar kurulabilir.

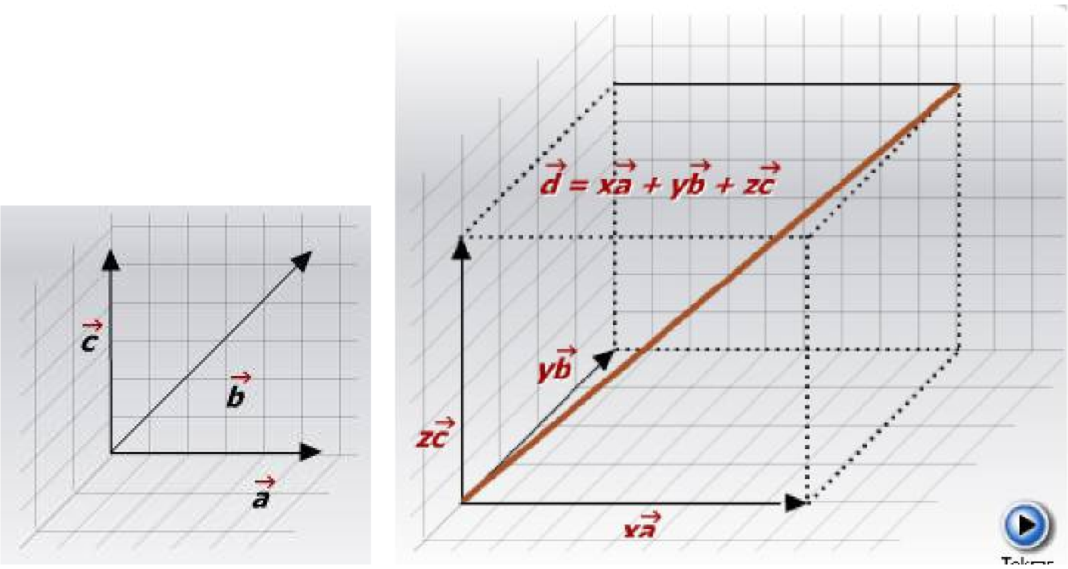
Diğer bir deyişle, düzlemde, paralel olmayan iki vektör bir baz (basis) teşkil eder ve düzlemin bütün vektörleri bu baz vektörlerinin lineer bir kombinezonu olarak ifade edilebilir.

Uzayda aynı bir düzleme paralel olmayan $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektörlerini göz önüne alalım.

Bu üç vektör bir baz (basis) teşkil eder, yani uzayın herhangi bir $\vec{d}$ vektörü $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektörlerinin lineer kombinezonu olarak ifade edilebilir (yani uzayda dört vektör lineer bağımlıdır). Çünkü $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektörleri üzerine, köşegeni $\vec{d}$ olan bir paralelyüzlü kurulabilir ve böylece

$$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

yazılabilir. Bu durum şekil-7.2.'de görülmektedir.



Şekil-7.2

Daha genel bir ifade ile aşağıdaki tanım yapılabilir:

Tanım: Eğer V herhangi bir vektör uzayı ve $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ bu uzaydaki vektörlerin bir kümesi ise, aşağıdaki şartların sağlanması durumunda S, V uzayı için bir bazdır (basis) denir.
a) S lineer bağımsızdır.
b) S, V'yi kapsar (spans)

Teorem: Eğer $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, V vektör uzayı için bir baz ise, V'deki her v vektörü
$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_n v_n$
şeklinde sadece bir şekilde ifade edilebilir.

7.1.2.1. Örnek 4

Örnek 4

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

homojen lineer denklem sisteminin çözümünü elde ediniz ve **çözüm uzayına** ilişkin bir **bazı (basis)** belirleyiniz.

Çözüm : Sisteme ilişkin **arttırılmış (genişletilmiş) matris,**

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

olup, **elementer sıra dönüşümleri** uygulanırsa

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

sıra denk matrisi elde edilir. Bu matris kullanılırsa

1.satırdaki sıfırdan farklı ilk değer 1 olup bu değerin bulunduğu sütundaki (1.sütun) diğer elemanların değeri 0 (sıfır)'dır. Dolayısıyla x1 değişkeni bağımlı değişken olarak alınır.

2.satırdaki sıfırdan farklı ilk değer 1 olup bu değerin bulunduğu sütundaki (3.sütun) diğer elemanların değeri 0 (sıfır)'dır. Dolayısıyla x3 değişkeni bağımlı değişken olarak alınır.

3.satırdaki sıfırdan farklı ilk değer 1 olup bu değerin bulunduğu sütundaki (4.sütun) diğer elemanların değeri 0 (sıfır)'dır. Dolayısıyla, x4 değişkeni bağımlı değişken olarak alınır.

4.satırın tüm elemanları sıfırdır.

Dolayısıyla ilgili matris kanonik şekle dönüştürülmüştür.

Bu matris kullanılırsa,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\quad + x_5 &= 0 \\ x_3 \quad + x_5 &= 0 \\ x_4 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünden

$$\begin{aligned} x_1 &= - x_2 - x_5 \\ x_3 &= - x_5 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Genel çözüm olarak, x_1 , x_3, x_4 bağımlı olduklarından bağımsız değişkenlere x_2= s ve x_5=t ve x_5=t değerleri atanırsa

$x_1 = -s - t,\ x_2 = s,\ x_3 = -t,\ x_4 = 0,\ x_5 = t$

elde edilir. Dolayısıyla çözüm vektörleri,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan,

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

çözüm uzayını kapsar. Buna ek olarak lineer bağımsız olduklarından {v1, v2} bir bazdır ve çözüm uzayı iki boyutludur.

7.1.3. Eigen Değeri ve Eigen Vektörlerinin Elde Edilmesine İlişkin Prosedür

1. **det (λI - A) = 0**

   $$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \ldots + c_{n-1}\lambda + c_n = 0$$

   karakteristik eşitliğinin $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ eigen değerlerini elde ediniz.

2. λ_i eigen değerine karşı gelen **x** eigen vektörünü bulabilmek için,

   ($\lambda_i I$ - A)x = 0

   homojen lineer denklem sisteminin çözümünü elde ediniz.

7.1.3.1. Örnek 5

Örnek 5

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin **eigen değerlerini** ve bu değerlere karşı gelen **eigen vektörlerini** bulunuz.

$$\det(\lambda I - A) = \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 3) + 2 = 0$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

buradan λ_1=2 ve λ_2=1 **eigen değerleri** elde edilir.

λ_2=1 değerine karşı gelen eigen vektörünü elde etmek için

(λI – A) x = 0

ifadesinden yararlanılır.

$$\left(1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\right)x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ dan.

$-2x_1 - x_2 = 0$
$2x_1 + x_2 = 0$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerin çözümünden, $x_2 = -2x_1$ bulunur.

x_1= t olarak ifade edilirse x_2= -2t elde edilir. Dolayısıyla λ=1 eigen değerine karşı gelen eigen vektörü

$$\begin{bmatrix} t \\ -2t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

olup $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ λ=1 eigen değeri ile ilişkili eigen vektörleri için bir baz (basis)'dir.

Aynı sonuç şu şekilde de elde edilir.

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to \frac{R_1}{-2}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

kanonik şekle dönüştürülen matris yardımıyla

$$x_1 + \frac{1}{2} x_2 = 0$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} x_2$$

elde edilir. x_2= t atanırsa ilgili eigen vektörü

$$\begin{bmatrix} x_1 = -\frac{1}{2} t \\ x_2 = t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} t \\ t \end{bmatrix} = -\frac{t}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla λ = 1 eigen değerine karşı gelen eigen vektörü $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ dir.

λ =2 eigen değerine karşı gelen eigen vektörünü elde etmek için,

(λI - A) x = 0

ifadesinden

$$\left(2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ dan

$- x - x = 0$

$2x_1 + 2x_2 = 0$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerin çözümünden $x_2 = -2x_1$ bulunur.

x_1 = t olarak ifade edilirse, x_2= -t elde edilir. Dolayısıyla λ = 2 değerine karşı gelen eigen vektörü

$$\begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olup $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ λ =2 eigen değeri ile ilişkili eigen vektörleri için bir baz (basis)'dir.

Benzer şekilde λ=2 değerine karşı gelen eigen vektörünü elde etmek için

$$(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisini kanonik hale dönüştürelim. Bu durumda,

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to \frac{R_1}{-1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu kanonik duruma dönüştürülen matris yardımıyla

$$\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 + x_2 = 0$ eşitliği bulunur. Bu eşitlikten $x_1 = -x_2$ elde edilir. x_2 = t atanırsa dolayısıyla λ =2 eigen değerine karşı gelen eigen vektörü

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} = -t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan ilgili eigen vektörü $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ olarak ifade edilir.

7.1.3.2. Örnek 6

Örnek 6

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$ matrisinin **eigen değerlerini** ve bu değerlere ilişkin **eigen vektörlerini** bulunuz.

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda + 1 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\begin{vmatrix} \lambda + 1 & 2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & \lambda + 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(\lambda - 1)[(\lambda + 1)\lambda - 4] + 2[0 - 2(\lambda + 1)] = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 - 9) = \lambda(\lambda - 3)(\lambda + 3) = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&-1&-2\\-2&-2&0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

eşitliğinden $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -3$ elde edilir.

Bu değerlere karşı gelen **eigen vektörleri**

$\lambda_1=0$ için **(λ_1I – A)x = 0** ifadesinden

$$\begin{bmatrix}-1&0&2\\0&1&2\\2&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

(λI - A) B artırılmış matrisi

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-1&0&2&0\\0&1&2&0\\2&2&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\to\frac{R_1}{-1}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&0\\0&1&2&0\\2&2&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&0\\0&1&2&0\\0&2&1&0\end{array}\right]\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}x_1&x_2&x_3&b\end{array}\\\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&0\\0&1&2&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\end{array}$$

şeklinde kanonik hale dönüştürülür. Bu artırılmış matristen

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_3 &= 0, & x_1 &= 2x_3\\ x_2 + 2x_3 &= 0, & x_2 &= -2x_3\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. $x_3 = t$ atanırsa,

$x_1 = 2t$, $x_2 = -2t$ ve $x_3 = t$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2t\\-2t\\t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}$$

elde edilir. $\lambda = 0$ değerine karşı gelen eigen vektörü $\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}$ şeklinde ifade edilir.

$\lambda = 3$ değerine karşı gelen eigen vektörü,

$$\left(\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&-1&-2\\-2&-2&0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}2&0&2\\0&4&2\\2&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Benzer şekilde

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2&0&2&0\\0&4&2&0\\2&2&3&0\end{array}\right]$$

artırılmış matrisi

$$\xrightarrow{R_1\to\frac{R_1}{2}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&4&2&0\\2&2&3&0\end{array}\right]\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&4&2&0\\0&2&1&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2\to\frac{R_2}{4}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&\frac{1}{2}&0\\0&2&1&0\end{array}\right]\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}x_1&x_2&x_3&b\end{array}\\\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\end{array}$$

kanonik şekle dönüştürülürse,

$$x_1 + x_3 = 0, \qquad x_1 = -x_3$$

$$x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0, \qquad x_2 = -\frac{1}{2}x_3$$

elde edilir. x_3 = t olarak atanırsa,

$x_1 = -t,\ x_2 = -\frac{1}{2}t,\quad x_3 = t$ ve

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ -\frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} = -\frac{t}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

bulunur. Dolayısıyla λ = 3 eigen değerine karşı gelen eigen vektörü $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ olarak ifade edilir.

λ= -3 değerine karşı gelen eigen vektörü,

$$\left(\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dolayısıyla

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ve buradan

$$\left[\begin{array}{ccc:c} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \to \frac{R_2}{-2}]{R_1 \to \frac{R_1}{-4}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & b \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

kanonik matrisi yardımıyla,

$$x_1 - \frac{1}{2}x_3 = 0, \qquad x_1 = \frac{1}{2}x_3$$

$$x_2 - x_3 = 0, \qquad x_2 = x_3$$

bulunur. x_3 = t atanırsa,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t \\ t \\ t \end{bmatrix} = \frac{t}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

bulunur. Dolayısıyla λ = -3 eigen değerine ilişkin eigen vektörü $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ olarak ifade edilir.

7.2. EIGEN DEĞERLERİNİN ve VEKTÖRLERİNİN ÖZELLİKLERİ

Bu kısımda;

- **7.2.1. Eigen vektörlerinin bağımsızlılığı,**
- **7.2.2. Eigen değerlerinin özellikleri,**
- **7.2.3. Üçgen matrislerin eigen değerleri** üzerinde durulacaktır.

7.2.1. Eigen Vektörlerinin Bağımsızlığı

Eğer λ_1, λ_2,...,λ_n $n\times n$ boyutlu A matrisinin birbirinden farklı eigen değerleri ve B_1, B_2, ..., B_n bu değerlere karşı gelen eigen vektörlerinin bazları (bases) ise, $B_1 U B_2 U \ldots U B_n$ birleşimi lineer bağımsız bir kümedir.

Örnek 7

Eigen Değeri ve Eigen Vektörlerinin Elde Edilmesiyle İlgili Örnekler Örnek-2'de $\lambda_1=0$, $\lambda_2=3$ ve $\lambda_3=-3$ **eigen değerlerine** karşı gelen **bazlar**

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilmiş idi. Bu **baz vektörlerini** sütunlar olarak yazarak elde edilen matrisin **determinantı** alınır ve bu değer sıfırdan farklı çıkarsa **sütun vektörleri lineer bağımsızdır** denir.

Çözüm :

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\,(2+4) - 2\,(-4-2) + 1\,(4-1)$$
$$= 12 + 12 + 3$$
$$= 27 \neq 0$$

7.2.2. Eigen Değerlerinin Özellikleri

Özellik 1 | **Özellik 2** | **Özellik 3** | **Özellik**

Eğer ***A, nxn*** boyutlu bir matris ve λ bu matrisin **eigen değeri** ise,

Özellik 1: $c\lambda$, ***cA*** matrisinin bir **eigen değeridir. c** sıfırdan farklı bir **gerçel** sayıdır.

Örnek:
$$A=\begin{bmatrix}-1 & 4 & -2\\ -3 & 4 & 0\\ -3 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

matrisinin **eigen değerleri**

$$\det(\lambda I - A)=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -4 & 2\\ 3 & \lambda-4 & 0\\ 3 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=0$$

$$(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-1)=0$$

eşitliğinden $\lambda_1= 3$, $\lambda_2= 2$ ve $\lambda_3= 1$'dir.

$$3A=\begin{bmatrix}-3 & 12 & -6\\ -9 & 12 & 0\\ -9 & 3 & 9\end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - 3A)=\begin{vmatrix}\lambda+3 & -12 & 6\\ 9 & \lambda-12 & 0\\ 9 & -3 & \lambda-9\end{vmatrix}=0$$

eşitliğinden

$$(\lambda+3)\begin{vmatrix}\lambda-12 & 0\\ -3 & \lambda-9\end{vmatrix}+12\begin{vmatrix}9 & 0\\ 9 & \lambda-9\end{vmatrix}+6\begin{vmatrix}9 & \lambda-12\\ 9 & -3\end{vmatrix}=0$$

$$(\lambda+3)\,[(\lambda-12)\,(\lambda-9)-0]+12\,[9\,(\lambda-9)-0]+6\,[-27-9\,(\lambda-12)]=0$$

$$\lambda^3-18\lambda^2+99\,\lambda-162=0$$

$$(\lambda-9)\,(\lambda-6)\,(\lambda-3)=0$$

$$\lambda_1=9,\ \lambda_2=6,\ \lambda_3=3$$

bulunur. Dolayısıyla $3A$'nın λ değerleri A matrisinin λ değerlerinin 3 katıdır.

7.2.3.Üçgen Matrislerin Eigen Değerleri

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34}\\ 0 & 0 & 0 & a_{44}\end{bmatrix}\quad veya\quad \begin{bmatrix}a_{11} & 0 & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{bmatrix}$$

üst üçgen veya alt üçgen matrislerinin eigen değerlerinin aşağıda belirtildiği şekilde elde edilmesi işlemlerini kolaylaştıracaktır.

Üst üçgen matrisi ele alacak olursak,

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{vmatrix} (\lambda - a_{11}) & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ 0 & (\lambda - a_{22}) & -a_{23} & -a_{24} \\ 0 & 0 & (\lambda - a_{33}) & -a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda - a_{44}) \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44})$$

olarak bulunur. Dolayısıyla

$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44}) = 0$'dan $\lambda = a_{11}$, $\lambda = a_{22}$, $\lambda = a_{33}$, $\lambda = a_{44}$ elde edilir.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 4 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorem: Eğer *A, n*×*n* boyutlu bir üçgen matris ise (üst üçgen, alt üçgen veya asal köşegen), *A* matrisinin eigen değerleri asal köşegen değerleridir.

Örneğin, yandaki matris bir alt üçgen matris olup, eigen değerleri λ = 3, λ = 7 ve λ = 1'dir.

7.3. MATRİSLERİN DİYAGONAL HALİNE DÖNÜŞTÜRÜLMESİ

Bu kısımda;

- **7.3.1. Diyagonal (Asal köegen) haline dönüştürülebilen matrisler,**
- **7.3.2. Ortonormal Bazlar,**
- **7.3.3. Gram-Schmidt Yöntemi** ele alınarak örnekler incelenecektir.

7.3.1. Diyagonal (Asal Köşegen) Haline Dönüştürülebilen Matrisler

Eğer ***PAP***$^{-1}$ sonucu bir diyagonal matris elde edilecek şekilde tersi alınabilir bir ***P*** matrisi mevcutsa, ***nxn*** boyutlu bir ***A*** kare matrisi ***diyagonal (köşegen)*** haline dönüştürülebilir denir.

nxn boyutlu ***A*** matrisinin ***diyagonal (köşegen)*** matris haline dönüştürülebilmesi için yeterli şart, ***A*** matrisinin ***n*** lineer bağımsız eigen vektörünün olmasıdır.

Farklı eigen değerlerine karşı gelen eigen vektörleri lineer bağımsız olduklarından, ***nxn*** boyutlu bir ***A*** matrisi farklı eigen değerlerine sahipse diyagonal hale dönüştürülebilir.

Bazı durumlarda ***A*** matrisinin ***n***' den daha az sayıda farklı eigen değerleri olmasına karşın ***n*** adet lineer bağımsız eigen vektörü olabilir.

7.3.1.1. Örnek 8

Örnek 8

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisinin **diyagonal** haline dönüştürülüp dönüştürülemiyeceğini belirleyiniz.

Çözüm :

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0$$

eşitliğinden $\lambda\mathbf{1} = 3$ ve $\lambda\mathbf{2} = 2$ elde edilir.

Birbirinden farklı iki λ değeri mevcut olduğundan 2x2 boyutlu $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

matrisi **diyagonal** hale dönüştürülebilir.

7.3.1.2. Örnek 9

Örnek 9

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisinin **diyagonal** hale dönüştürülebilir mi? Belirleyiniz.

Çözüm :

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

eşitliğinden $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ gibi farklı **eigen değerleri** elde edildiğinden 3x3 boyutlu **A** matrisi **diyagonal hale** dönüştürülebilir.

7.3.1.3. Örnek 10

Örnek 10

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ matrisinin diyagonal hale dönüştürülebilir mi? Belirleyiniz.

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -3 \\ 0 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

üst üçgen matris olduğundan eigen değerleri asal köşegen eleman değerleridir.
Yani, (λ -2) (λ -2) (λ -1) = 0'dır. Dolayısıyla eigen değerleri λ = 2 ve λ = 1'dir.
Görüldüğü gibi 3 farklı eigen değeri mevcut değildir.

Gel

3 adet lineer bağımsız eigen vektörü olup olmadığını araştıralım.

(λI - A)x = 0

eşitliğinden λ = 1 olduğundan,
(I - A)x = 0
dolayısıyla,

$$\underset{\lambda I}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} - \underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve buradan

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dolayısıyla

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \to -R_2]{R_1 \to -R_1} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & b \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

kanonik hale dönüştürülen matristen,

$$x_1 + 3x_3 = 0, \quad x_1 = -3x_3$$

$$x_2 + x_3 = 0, \quad x_2 = -x_3$$

elde edilir. x_3 = t değeri atanırsa ,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3t \\ -t \\ t \end{bmatrix} = -t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

bulunur. Dolayısıyla λ = 1 değerine karşı gelen eigen vektörü (baz), $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ olarak ifade edilir.

λ = 2 değerine karşı gelen eigen vektörü

$(\lambda I - A)x = 0$

olarak elde edilir. Dolayısıyla $(\lambda I - A)x = 0$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olup ilgili arttırılmış matris

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to \frac{R_1}{-3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \hline \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

kanonik hale dönüştürülür. 2. ve 3.sıra elemanları sıfır olduğundan ilgili matrisin rankı r=1'dir. Bunun sonucu olarak 1 bağımlı, 2 bağımsız değişken mevcuttur. Bağımlı değişken, 1 değeri $x_3$değişkeninin sütununda bulunduğundan x_3'tür.

Dolayısıyla $x_3 = f(x_1, x_2)$'dir.

İlgili matris gözönüne alınırsa, x_3=0 olarak elde edilir.

x_1 =s ve x_2 = t değerleri atanırsa

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Görüldüğü gibi tekrarlanan kök (2 defa) λ = 2 değerine karşı gelen eigen vektörü sayısı 2 olup, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$'dır.

Görüldüğü gibi, 3x3 boyutlu A matrisinin 2 farklı eigen değeri olmasına karşın 3 lineer bağımsız vektörü bulunmaktadır. Bu vektörler, $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ Dolayısıyla A matrisi diyagonal hale dönüştürülebilir.

7.3.1.4. nxn Boyutlu Diyagonal Hale Dönüştürülebilir bir A Matrisinin Diyagonelleştirilmesine İlişkin Yöntem

1. Adım

A matrisinin $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ***eigen değerlerini*** elde et.

2. Adım

Bu **eigen değerleri** ile ilişkili ***n*** adet ***lineer bağımsız*** $p_1, p_2, \ldots, p_n$ **eigen vektörlerini** bul.

3. Adım

Sütunları $p_1, p_2, \ldots, p_n$ vektörleri olan **P=[** $p_1, p_2, \ldots, p_n$ **]** matrisini oluştur.

4. Adım

P^{-1}'i elde et.

5. Adım

$D = P^{-1}AP$ **diyagonal matrisini** elde et. Bu matrisin **diyagonal elemanları;** $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ **eigen değerleri**'dir.

7.3.1.5. Örnek 11

Örnek 11

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$ matrisinin diyagonal hale dönüştürülebilir mi? Belirleyiniz.

1. Adım: A matrisinin λ değerleri,

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4$$

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

Dolayısıyla $\lambda = 1$ ve $\lambda = 2$ bulunur.

$(\lambda I - A)x = 0$

eşitliğinden

$\lambda_2 = 2$ için

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Buradan,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to \frac{R_1}{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

elde edilir. 1. Satırın sıfırdan farklı ilk değeri 1 ve 1.sütunun diğer elemanları sıfırdır. 2. ve 3.satırlar sıfır olduğundan ilgili matris kanonik olup rankı r=1'dir. n=3 değişken olduğundan n - r = 3 - 1 = 2 tanesi bağımsızdır. Bağımlı değişken x_1'dir. Dolayısıyla kanonik hale dönüştürülen ilgili matristen $x_1 + x_3 = 0$, $x_1 = -x_3$ elde edilir. $x_2 = s$ ve $x_3 = t$ atanırsa bu durum sonucu olarak,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

bulunur.

λ = 2 değerine karşı gelen lineer bağımsız eigen vektörleri (baz vektörler),

$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$'dır.

Benzer şekilde, $\lambda = 1$ değeri için

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Buradan,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 + R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to -R_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & b \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

elde edilir. Elde edilen kanonik şekle dönüştürülen matrisin rankı r=2 olduğundan 2 bağımlı değişken (x_1, x_2) ve n - r = 3 - 2 =1 adet bağımsız değişken (x_3) mevcuttur. İlgili matristen,

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 0, \quad x_1 = -2x_3 \\ x_2 - x_3 &= 0, \quad x_2 = x_3 \end{aligned}$$

bulunur. $x_3 = t$ atanırsa,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

λ = 1 değerine karşı gelen eigen vektörü (baz), $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörüdür.

2. Adım: λ = 2 değerine karşı gelen eigen uzayı için baz oluşturan vektörler

$\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $\boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $\lambda = 1$ değerine karşı gelen eigen uzayı için baz oluşturan vektör $p_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dır.

$$\begin{array}{ccc} p_1 & p_2 & p_3 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ matrisinin determinantı

$$= -1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1(1) - 2(-1) = -1 + 2 = 1$$

olduğundan $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, $\mathbf{p_3}$ vektörleri lineer bağımsızdır. Dolayısıyla

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \lambda=2 & \lambda=2 & \lambda=1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

elde edilir ve A matrisi diyagonal hale dönüştürülür.

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi A matrisi, P matrisi tarafından diyagonal hale dönüştürülmüş olur. P matrisinin 1.sütun ve 2.sütun vektörleri $\lambda=2$ ile ilişkili olduğundan $P^{-1}AP$ matrisinin çarpımı sonucunda elde edilen matrisin diyagonal elemanları sırasıyla $\lambda=2$, 2 ve 1'dir.

Eğer P matrisini oluşturan vektörler şu şekilde sıralanmış olsaydı,

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \lambda=2 & \lambda=1 & \lambda=2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

olacak ve

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

şeklinde oluşacaktı.

7.3.1.6. Örnek 12

Çözüm : **1. Adım:** Örnek 6'dan **A** matrisinin **eigen değeri** $\lambda_1=0$, $\lambda_2=3$ ve $\lambda_3=-3$ olarak elde edilmiş idi.

2. Adım: $\lambda_1=0$ değerine karşı gelen **eigen uzayı** için **baz** oluşturan

vektör $p_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2=3$ değerine karşı gelen **eigen uzayı** için **baz** oluşturan **vektör** $p_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\lambda_3=-3$ değerine karşı gelen **eigen uzayı** için **baz** oluşturan **vektör** $p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

dır.

3. Adım:

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \lambda_1=0 & \lambda_2=3 & \lambda_3=-3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$ matrisinin **determinantı**

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(2+4) - 2(-4-2) + 1(4-1)$$

$$= 12 + 12 + 3$$

$$= 27$$

olduğundan $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$ ve $\mathbf{P_3}$ vektörleri **lineer bağımsızdır**.

4. Adım: $\mathbf{P^{-1}AP}$'yi oluşturalım. Bunun için $\mathbf{P^{-1}}$'in elde edilmesi gerekmektedir.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathbf{P} & \mathbf{I} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - \frac{R_1}{2}]{R_2 \to R_2 + R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to \frac{2}{9} R_3]{R_2 \to \frac{R_2}{3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 - R_3]{R_1 \to R_1 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to \frac{R_1}{2}} \begin{array}{c} \qquad\quad \mathbf{I} \qquad\qquad\qquad \mathbf{P^{-1}} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{array}\right] \end{array}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{array}\right]$$

$D = P^{-1}AP$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{9} & \frac{3}{9} & -\frac{6}{9} \\ -\frac{3}{9} & -\frac{6}{9} & -\frac{6}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{array}{c} \lambda=\mathbf{0} \quad \lambda=\mathbf{3} \quad \lambda=\mathbf{-3} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \end{array}$$

elde edilir.

7.3.1.7. Örnek 13

Örnek 13

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 4 & -2\\ -3 & 4 & 0\\ -3 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

matrisini **diyagonal hale** dönüştüren **P** matrisini elde ediniz.

Çözüm : **1. Adım:** Bölüm 7.1., Örnek 2'de **A** matrisine ilişkin **eigen değerleri** $\lambda_1=3$, $\lambda_2=2$ ve $\lambda_3=1$ olarak bulunmuş idi. Bu değerlere karşı gelen **eigen vektörleri**,

2. Adım: $\lambda_1=3$ için $\mathbf{P_1}=\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}$

$\lambda_2=2$ için $\mathbf{P_2}=\begin{bmatrix}2\\3\\3\end{bmatrix}$

$\lambda_3=1$ için $\mathbf{P_3}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

dir.

3. Adım: Dolayısıyla

$$P=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 3 & 1\\ 4 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

olarak oluşturulur.

4. Adım: $\mathbf{D = P^{-1}AP}$ eşitliğinden

$$=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 3 & -2\\ 3 & -5 & 3\end{bmatrix}}_{\mathbf{P^{-1}}}\underbrace{\begin{bmatrix}-1 & 4 & -2\\ -3 & 4 & 0\\ -3 & 1 & 3\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 3 & 1\\ 4 & 3 & 1\end{bmatrix}}_{\mathbf{P}}$$

$$D=\begin{bmatrix}0 & -3 & 3\\ -2 & 6 & -4\\ 3 & -5 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 3 & 1\\ 4 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} & \lambda=3 & \lambda=2 & \lambda=1\\ = & \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}\end{array}$$

elde edilir.

7.3.2. Ortonormal Bazlar

Vektör uzaylarını ilgilendiren pekçok problemlerde **problem çözücü** vektör uzayı için uygun görünen **baz**ı seçmede serbesttir. İçsel çarpım uzayında bir problemin çözümü genellikle vektörlerin birbirine ortogonal olduğu bir baz seçilerek kolaylaştırılabilir.

Ortogonal ve ortonormal kümeler

Bir **V** içsel uzayındaki iki vektör $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ eğer $< \vec{a}, \vec{b} >=0$ şartı sağlanıyorsa **ortogonal**'dir denir. **V** uzayındaki vektörlerden oluşan bir **S** kümesi, eğer kümedeki vektörler çifti ortogonal ise **ortogonal bir kümedir** denir. Bu şarta ek olarak, **S** kümesindeki herbir vektörün uzunluğu **1** ise, **S ortonormal** kümedir denir.

7.3.2.1. Örnek 14

Örnek 14

$$[1 \quad 0 \quad 0],\ [0 \quad 1 \quad 0],[0 \quad 0 \quad 1]$$

vektörler kümesinin **standart içsel çarpım** yolu ile **ortonormal** olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm :

$$\langle [1 \quad 0 \quad 0],[0 \quad 1 \quad 0] \rangle = 1(0) + 0(1) + 0(0) = 0$$

$$\langle [1 \quad 0 \quad 0],[0 \quad 0 \quad 1] \rangle = 1(0) + 0(0) + 0(1) = 0$$

$$\langle [0 \quad 1 \quad 0],[0 \quad 0 \quad 1] \rangle = 0(0) + 1(0) + 0(1) = 0$$

Dolayısıyla vektörler kümesi **ortogonaldir.**

$$\|[1 \quad 0 \quad 0]\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$$

$$\|[0 \quad 1 \quad 0]\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1$$

$$\|[0 \quad 0 \quad 1]\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

Görüldüğü gibi herbir **vektörün uzunluğu** 1'dir. Dolayısıyla vektörler kümesi **ortonormaldir.**

7.3.2.2. Ortogonal ve Ortonormal Bazlar

Eğer **B** içsel çarpım uzayı **V** için bir **baz** ve **B ortogonal** bir küme ise, **B, V** için bir **ortogonal bazdır** denir. Eğer **B ortonormal** bir küme ise bu durumda **B, V** için **ortonormal bir bazdır.**

7.3.2.3. Örnek 15

Örnek 15

$b_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0\right]$, $b_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0\right]$ ve $b_3 = [0 \quad 0 \quad 1]$'nin

ortonormal bir **baz** oluşturduğunu gösteriniz.

Çözüm : Bu üç vektörün **lineer bağımsız** olduğunun gösterilmesi gerekir.

Bu vektörlerin satırlarını oluşturduğu matrisin **determinantı** sıfırdan farklı ise; vektörler **lineer bağımsızdır** denir.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = -1 \neq 0$$

Dolayısıyla vektörler **lineer bağımsızdır** ve bir **baz** oluştururlar.

Şimdi vektörlerin **ortogonal** olduğunu belirleyelim.

$$\left\langle \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0\right], \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0\right] \right\rangle =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0(0)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 = 0$$

$$\left\langle \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0\right], [0 \quad 0 \quad 1] \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0) + \frac{1}{\sqrt{2}}(0) + 0(1) = 0$$

$$\left\langle \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0\right], [0 \quad 0 \quad 1] \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(0) + 0(1) = 0$$

Dolayısıyla vektörler **ortogonaldir.**

$$\|b_1\| = \left\| \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0\right] \right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0} = 1$$

$$\|b_2\| = \left\| \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0\right] \right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0} = 1$$

$$\|b_3\| = \|[0 \quad 0 \quad 1]\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1} = 1$$

Vektörler **ortogonal** ve **uzunlukları (modülleri)** 1 olduğundan üç vektörden oluşan **vektör kümesi** bir **ortonormal baz** oluşturur.

7.3.3. Gram-Schmidt Yöntemi

Sonlu boyutlu içsel çarpım uzayı V'nin her bir sıfırdan farklı W altuzayının ortogonal ve ortonormal bazları mevcuttur.

Eğer $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, W'nın bir bazı ise, $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ gibi bir ortogonal baz ve $\{c_1, c_2, ..., c_n\}$ gibi bir ortonormal baz bulmak için uygulanan ***Gram-Schmidt Yöntemi*** aşağıda sunulmuştur.

$$b_1 = a_1$$

$$b_2 = a_2 - \frac{\langle a_2, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1$$

$$b_3 = a_3 - \frac{\langle a_3, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 - \frac{\langle a_3, b_2 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle} b_2$$

$$\vdots$$

$$b_n = a_n - \frac{\langle a_n, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 - \frac{\langle a_n, b_2 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle} b_2 \cdots - \frac{\langle a_n, b_{n-1} \rangle}{\langle b_{n-1}, b_{n-1} \rangle} b_{n-1}$$

$$c_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|}, \quad c_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|}, \cdots, c_n = \frac{b_n}{\|b_n\|}$$

7.3.3.1. Örnek 16

Örnek 16

{a₁, a₂}, altuzay W'nun bir **bazı** olsun. Burada **a_1= [1 1 0]** ve **a_2 = [2 -1 3] baz vektörlerini ortogonal baz** haline dönüştürünüz. Daha sonra **ortogonal baz vektörlerini** normalize ederek **ortonormal baz** elde ediniz. Bu işlemleri gerçekleştirmek için **Gram-Schmidt yöntemini** kullanınız.

Çözüm : **1. Adım:** $b_1 = a_1 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}$

2. Adım: $b_2 = a_2 - \dfrac{\langle a_2, b_1\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle} b_1$

$$= \begin{bmatrix}2 & -1 & 3\end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}2 & -1 & 3\end{bmatrix} - \frac{2(1) + (-1)(1) + 3(0)}{1(1) + 1(1) + 0(0)}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}2 & -1 & 3\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}2 & -1 & 3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 3\end{bmatrix}$$

b_2 ya $\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 3\end{bmatrix}$ veya $\frac{3}{2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\end{bmatrix}$ veya $\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\end{bmatrix}$

olarak seçilebilir.

Dolayısıyla $\{b_1, b_2\}$ yani $\{\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & -1 & 2\end{bmatrix}\}$

$= 1(1) + 1(-1) + 0(2) = 0$

olduğundan **W altuzayının** bir **ortogonal bazıdır**.

3. Adım:

$$c_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}}{\|\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}\|} = \frac{\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0}} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix}$$

$$c_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{[1 \quad 1 \quad 0]}{\|[1 \quad 1 \quad 0]\|} = \frac{[1 \quad 1 \quad 0]}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0}} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0\right]$$

$$c_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{[1 \quad -1 \quad 2]}{\|[1 \quad -1 \quad 2]\|} = \frac{[1 \quad -1 \quad 2]}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (2)^2}} = \frac{[1 \quad -1 \quad 2]}{\sqrt{6}} =$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{6}} \quad -\frac{1}{\sqrt{6}} \quad \frac{2}{\sqrt{6}}\right]$$

$$\langle [c_2, c_2] \rangle = \left\langle \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0\right], \left[\frac{1}{\sqrt{6}} \quad -\frac{1}{\sqrt{6}} \quad \frac{2}{\sqrt{6}}\right] \right\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + 0\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$= 0$$

olduğundan **$\{c_1, c_2\}$ W altuzayının ortonormal** bir **bazıdır.**

7.4. SİMETRİK MATRİSLERİN DİYAGONAL HALE DÖNÜŞTÜRÜLMESİ

Daha önce de belirtildiği gibi, $n \times n$ boyutlu bir A matrisi $A = A^T$ koşulu gerçekleşiyorsa simetriktir denir.

Eğer sütunları ortonormal bir küme oluşturuyorsa A matrisi **ortogonal**'dir denir.

Eğer A matrisi tersi alınabilir bir matris ise, A matrisinin **ortogonal** olabilmesi için sadece ve sadece $A^{-1} = A^T$ şartının sağlanması yeterlidir. Benzer şekilde, eğer $A^T \cdot A = I$ şartı sağlanıyorsa A matrisi ortogonaldir denir.

Örnek 17 **Örnek 18**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

matrisi **simetrik** bir **matris** midir?

Çözüm : **A** matrisinin **transpozesi (A^T)**,

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

dir. Dolayısıyla **$A = A^T$** olduğundan **A** matrisi **simetrik** bir matristir.

Örnek 17 | **Örnek 18**

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}}\\ -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}}\end{bmatrix}$$

matrisinin **ortogonal** olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm :

$$\underset{A^T}{\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}}\\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}}\end{bmatrix}}\ \underset{A}{\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}}\\ -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}}\end{bmatrix}}=\underset{I}{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}$$

$A^T \cdot A = I$ olduğundan **A** matrisi **ortogonaldir**. Dolayısıyla $A^{-1} = A^T$'dir.

Eğer bir matris ortogonal ise bunu göstermenin en kısa yolu A^T.A'nın elde edilmesidir. Eğer bu çarpım yani $A^T.A=I$ ise, A matrisi ortogonaldir denir.

7.4.1. Simetrik Matrislerin Özellikleri

A

Karakteristik denklemin *gerçel kökleri* vardır.

B

Farklı **eigen değerlerine** karşı gelen **eigen vektörleri *ortogonaldir.***

C

Her bir **eigen değerinin *eigen uzayının ortogonal bazı*** mevcuttur ve ***eigen uzayının boyutu eigen*** **değerinin tekrarlama sayısı kadardır.**

D

A matrisinin ***n*** **eigen vektöründen** oluşan bir **ortonormal kümesi** mevcut olup bunlar bir **baz** oluşturur.

E

A matrisi **simetrik** bir **matris** ise bir **ortogonal matris *P*** ve **diyagonal matris *D*** mevcut olup $D=P^TAP$ eşitliği gerçekleşir. Bu durumda ***A*, ortogonal** olarak **diyagonal hale** dönüştürülebilir denir ve $P^{-1}=P^T$dır. D matrisinin **köşegen elemanları, *A*** matrisinin **eigen değerleridir.**

7.4.1.1. Örnek 19

Örnek 19

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisini **simetrik matrisin** özelliklerinden yararlanarak çözünüz.

Çözüm : **A simetrik** matrisinin **karakteristik polinomu**

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda + 2 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 4)(\lambda + 1)$$

$(\lambda + 2)(\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$ eşitliğinden

$\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$ ve $\lambda_3 = -1$ elde edilir.

Görüldüğü gibi **karakteristik eşitliğin kökleri gerçerlidir**.

$\lambda_1=-2$ değerine karşı gelen **eigen vektörü** $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_2=4$ değerine karşı gelen **eigen vektörü** $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\lambda_3=-1$ değerine karşı gelen **eigen vektörü** $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

dir. Vektörlerin **içsel çarpımı (inner product)**

$$\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle = 0(-1) + 1(0) + 0(2) = 0$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0(2) + 1(0) + 0(1) = 0$$

$$\left\langle \begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix} \right\rangle = (-1)(2) + 0(0) + 2(1) = 0$$

Dolayısıyla vektörler birbirine **ortogonaldir**, yani **diktir**.

$$\begin{vmatrix}0 & -1 & 2\\1 & 0 & 0\\0 & 2 & 1\end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix}-1 & 2\\2 & 1\end{vmatrix} = -1(-1-4) = 5$$

olduğundan **eigen vektörleri lineer bağımsızdır.**

$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ **birim vektör** olduğundan, sadece $\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$

vektörlerinin **normalize** edilmeleri gerekir.

Herbir **vektörü** uzunluklarına böldüğümüzde,

$\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\\\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$ elde edilir. Üç vektörümüzün herbiri bir **birim vektör** ve

$$\begin{vmatrix}0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\1 & 0 & 0\\0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{vmatrix} = -1\left(-\frac{1}{5}-\frac{4}{5}\right) = 1 \neq 0$$ olduğundan

$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\\\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$ bir **ortonormal baz** oluşturur. $P = \begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\1 & 0 & 0\\0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$ olsun.

$$\begin{array}{ccc} P^T & P & I \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$P^TP = I$ olduğundan **P** matrisi **ortogonaldir**. Bunun sonucu olarak $P^{-1} = P^T$'dır. Dolayısıyla, $D = P^{-1}AP = P^TAP$ olup,

$$\begin{array}{cccc} & P^T & A & P \\ = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -\frac{4}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{8}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi **D**'nin **köşegen elemanları A** matrisinin **eigen değerleridir.**

7.4.1.2. nxn Boyutlu Simetrik A Matrisinin Ortogonal Olarak Diyagonal Hale Dönüştürülmesi Yöntemi

1. Adım

A'nın **eigen değerlerini** elde et.

2. Adım

Herbir **eigen değeri** ile ilişkili **baz eigen vektörlerini** bul.

3. Adım

Eğer bir **eigen uzayına** ilişkin **baz** birden fazla **eigen vektörü** içeriyorsa (aynı **eigen değerine** karşı gelen birden fazla **eigen vektörü** mevcutsa), o **eigen uzayı** için **ortonormal bazı** elde etmede **Gram-Schmidt sürecini** kullan. Eğer **eigen uzayına** ilişkin **baz** sadece bir **eigen vektör** içeriyorsa, onu **birim vektör** durumuna değiştir.

4. Adım

Sütunları 3.basamakta elde edilen $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ vektörleri olan ***P*** matrisini oluşturun.

5. Adım

P^T 'yi elde et ($P^{-1} = P^T$'dir).

6. Adım

$D = P^T A P$'yi elde et.

7.4.1.3. Örnek 20

Örnek 20

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisini **ortogonal** olarak **diyagonal hale** dönüştürünüz.

1. Adım: $\det(\lambda I - A) = \det\begin{vmatrix} \lambda & -2 & -2 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -2 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)^2(\lambda - 4)$ olup,

$(\lambda + 2)^2(\lambda - 4) = 0$ eşitliğinden $\lambda_{1,2} = -2$ ve $\lambda_3 = 4$ elde edilir. $\lambda_1 = -2$ değeri iki kez tekrarlanmaktadır.

2. Adım: $\lambda_{1,2} = -2$ değerine karşı gelen **eigen vektörleri**

$$(\lambda I - A)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & -2 & -2 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -2 & -2 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eşitliğinde $\lambda = -2$ değeri konulduğunda elde edilen

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Geri

ifadenin çözümü sonucunda elde edilir. Bu çözümü elde etmek için,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to \frac{R_1}{-2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

kanonik hale dönüştürülür. 2. ve 3.satırların elemanları sıfır olduğundan ilgili matrisin rankı $r=1$'dir. Dolayısıyla 1 tane bağımsız değişken (x_1 değişkeni) ve $n - r = 3 - 1 = 2$ tane bağımlı değişken (x_2, x_3) mevcuttur.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

eşitliğinden, $x_2 = s$ ve $x_2 = t$ atamaları yapılırsa

$$x_1 = -x_2 - x_3$$

$$x_1 = -s - t$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ elde edilir.

Geri

$$\left\langle \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} \right\rangle = (-1)(-1)+1(0)+0(1)=1\neq 0$$

olduğundan ortogonal değildir.

λ =-2 değeri ile ilişkili eigen uzayı ile ilgili baz iki eigen vektörü içerdiğinden, Gram-Schmidt yöntemi uygulanarak ortonormal bir baz elde edilir.

$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$ ve $\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ olsun. Böylece,

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{\boldsymbol{b}_1}{\|\boldsymbol{b}_1\|} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{b}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_1\rangle}{\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1\rangle}\boldsymbol{a}_1$$

Geri

$$\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

veya $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 'dır. $\mathbf{a}_2$'yi elde etmek için $\mathbf{c}_2$'yi birim vektör haline dönüştürmemiz gerekir.

Dolayısıyla,

$$\mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{c}_2}{\|\mathbf{c}_2\|} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$\lambda = 4$ değerine karşı gelen eigen vektörü,

$(\lambda I - A)x = 0$ eşitliğinden elde edilen

$$\begin{bmatrix} \lambda & -2 & -2 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -2 & -2 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ifadesinde $\lambda = 4$ değeri konulduğunda elde edilen

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

matrisin

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 + \frac{R_1}{2}]{R_2 \to R_2 + \frac{R_1}{2}} \left[\begin{array}{ccc:c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{R_2}{3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to \frac{R_1}{4}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \mathbf{x_3} & \mathbf{b} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

kanonik şekline dönüştürülen matristen elde edilir.

İlgili matrisin 3.satış elemanları sıfır ve $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ olduğundan rankı

r=2'dir. Dolayısıyla bağımlı değişken sayısı 2 (x_1 ve x_2 değişkenleri) ve bağımsız değişken sayısı *n* - *r* = 3 - 2 = 1 (x_3 değişkeni)'dir.

Kanonik şekle dönüştürülen matristen,

$$x_1 - x_3 = 0, \quad x_1 = x_3$$

$$x_2 - x_3 = 0, \quad x_2 = x_3$$

yazılır ve $x_3 = t$ atanırsa,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ve dolayısıyla =4 değerine karşı gelen eigen vektörü, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ elde edilir.

Bu vektörü birim vektör haline dönüştürürsek,

$$\vec{\mathbf{a}}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

elde ederiz.

4.

$$P=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

P matrisinin sütun vektörleri iç çarpımı sıfır olduğundan

$$\left\langle \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \right\rangle = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+0\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{12}}+\frac{1}{\sqrt{12}}+0=0$$

Ge

$$\left\langle \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \right\rangle = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 0\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + 0 = 0$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \right\rangle = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{18}} - \frac{1}{\sqrt{18}} + \frac{2}{\sqrt{18}} = 0$$

ortogonaldirler.

5.

$$P^{-1} = P^{T} == \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

6.

$D = P^{T}AP$ eşitliğinden

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{4}{\sqrt{6}} \\ \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla verilen simetrik matris ortogonal olarak diyagonal hale dönüştürülmüş olur.

6.BOLUM DEĞERLENDİRME SORULARI

SORU 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisinin **karakteristik polinomunu** elde ediniz.

A $\lambda^2 - 5\lambda + 2$ B $\lambda^2 - 3\lambda - 4$ C $\lambda^2 + 3\lambda + -4$

SORU 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisinin **eigen değerlerini** elde ediniz.

A (-1, -4) B (1, -4) C (-1, 4)

SORU 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

matrisinin **eigen değerlerini** elde ediniz.

A (2, 2, 2) B (1, 1, 1) C (1, 2, 1)

SORU 4

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinin **eigen değerlerini** elde ediniz.

A (1, -1, -2) B (-1, 1, 2) C (-1, +1, -2)

SORU 5

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$ matrisinin **eigen değerlerini** elde ediniz.

A $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -1\right)$ B $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$ C $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{2}\right)$

SORU 6

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinin **eigen değerlerini** elde ediniz.

A (0, 1, 1)   B (0, -1, 1)   C (0, 1, 2)

SORU 7

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinin **eigen değerlerinden** biri $\lambda=0$ ise bu değere karşı gelen **eigen vektörünü** elde ediniz.

A $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ B $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ C $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

SORU 8

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin **eigen değerlerini** elde ediniz.

A (-3, 0, 3)   B (-3, 2, 3)   C (3, 0, 4)

SORU 9

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin **eigen değerlerinden** biri λ= -3 ise bu değere karşı gelen **eigen vektörünü** elde ediniz.

A $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ B $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ C $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

SORU 10

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin **eigen değerlerinden** biri λ=0 ise bu değere karşı gelen **eigen vektörünü** elde ediniz.

A $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ B $\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ C $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

SORU 11

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin **eigen değerlerinden** biri λ=3 ise bu değere karşı gelen **eigen vektörünü** elde ediniz.

A $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ B $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ C $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

SORU 12

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinin **eigen değerlerinden** biri 2 kez tekrarlanmış olup λ=1'dir. Bu değere karşı gelen **eigen vektör(ler)ini** elde ediniz.

A $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ B $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ C $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

SORU 13

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisini **diyagonal hale** dönüştürecek bir **P** matrisini elde ediniz.

A $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ B $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ C $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

SORU 14

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisini **diyagonal hale** dönüştürecek **P** matrisini elde ediniz.

A $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ B $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ C $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

SORU 15

14 nolu soruda elde edilen **P** matrisi yardımıyla **$P^{-1}AP$** çarpımını elde ediniz.

A $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ B $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ C $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

SORU 16

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinin **diyagonal hale** dönüştürülüp dönüştürülmediğini belirleyiniz.

A Dönüştürülebilir B Dönüştürülemez C Sadece tek vektör

SORU 17

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisini **diyagonal hale** dönüştürecek **ortogonal P** matrisini elde ediniz.

Ⓐ $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

Ⓑ $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

Ⓒ $P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

SORU 18

17 nolu soruda elde edilen **P** matrisini kullanarak **D=P⁻¹AP** çarpımını elde ediniz.

Ⓐ $D = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Ⓑ $D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Ⓒ $D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

SORU 19

A= $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin **karakteristik eşitliği** $(\lambda-1)^2(\lambda-4)=0$ olup, **eigen değerleri** $\lambda_{1,2}=1$ ve $\lambda_3=4$'tür. $\lambda_{1,2}=1$ değerine karşı gelen **eigen vektörleri**

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$'dir. $\lambda_{1,2}=1$ değerine karşı gelen vektör $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 'dir.

Gram-Schmidt Yöntemini kullanarak **A** matrisini **diyagonal hale** dönüştüren **P** matrisini elde ediniz.

Ⓐ $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

Ⓑ $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

Ⓒ $P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

SORU 20

19 nolu soruda elde edilen **P** değerini kullanarak **D=P⁻¹AP** 'yi elde ediniz.

Ⓐ $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Ⓑ $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Ⓒ $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$