Lineer olmayan Denklemlerin Sayısal Çözümü

İKİYEBÖLME YÖNTEMİ

İkiye Bölme Yöntemi:

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

denklemini ele alalım. $x \in [a, b]$, eğer

$$f(a).f(b) < 0 \qquad (2)$$

ise $f \in C[a, b]$ olduğundan (1) denkleminin $[a, b]$ aralığında en az bir kökü vardır. (1) denkleminin çözümünün $[a, b]$ aralığında olması için (2) koşulu yeter koşuldur.

$a_0 = a, b_0 = b$ yazalım. $[a_0, b_0]$ aralığının orta noktası $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$ dir. Eğer $f(c_0) = 0$ ise, c_0 noktası (1) denkleminin çözümüdür.

$$x_* = c_0$$

Eğer $f(c_0) \neq 0$ ise, o halde $f(x)$ fonksiyonunun c_0 noktasındaki $f(c_0)$ değerinin işareti $f(a_0)$ ve $f(b_0)$ değerlerinin işaretiyle karşılaştırılır. Eğer $f(a_0)f(c_0) < 0$ ise çözüm $[a_0, c_0]$ aralığında, $f(b_0)f(c_0) < 0$ ise çözüm $[c_0, b_0]$ aralığında oluyor. Denklemin çözümünü içeren yeni aralık $[a_1, b_1]$ olsun.

$x \in [a_1, b_1]$

Burada

$$a_1 = \begin{cases} c_0, & f(a_0)f(c_0) > 0 \\ a_0, & f(a_0)f(c_0) < 0 \end{cases} \qquad (3)$$

$$b_1 = \begin{cases} c_0, & f(b_0)f(c_0) > 0 \\ b_0, & f(b_0)f(c_0) < 0 \end{cases} \qquad (4)$$

$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ olmakla $f(c_1)$ değerinin işareti $f(a_1)$ ve $f(b_1)$ değerlerinin işaretiyle karşılaştırılır. (3) ve (4) ifadelerine göre

$$sign f(a_1) = sign f(a_0)$$

$$sign f(b_1) = sign f(b_0)$$

ikiye bölme işlemini devam ettirerek *k*-ıncı yaklaşımda $x_* \in [a_k, b_k]$ elde ederiz.

$c_k = \frac{a_k+b_k}{2}$ olmakla $f(a_k)f(c_k)$, $f(b_k)f(c_k)$ çarpımlarının işaretine göre $x_* \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$ aralığını belirleyebiliriz. Buradan,

$$a_{k+1} = \begin{cases} c_k, & f(a_k)f(c_k) > 0 \\ a_k, & f(a_k)f(c_k) < 0 \end{cases} \qquad (3')$$

$$b_{k+1} = \begin{cases} c_k, & f(b_k)f(c_k) > 0 \\ b_k, & f(b_k)f(c_k) < 0 \end{cases} \qquad (4')$$

$[a_i, b_i], i = 0,1,2, \ldots$ aralıklarının orta noktası olan c_i'yi (1) denkleminin *i*-inci yaklaşımının değeri olarak alabiliriz. Eğer $\left|x^{(n+1)} - x^{(n)}\right| < \varepsilon$ ise, işlemler durdurulur ve $x_* = x^{(n+1)}$ olarak ele alınır.

İkiye bölme yönteminin hatası $\left|x_s - x^{(n+1)}\right| < \frac{b-a}{2^{n+1}}$ dir. Verilen ε kesinliğiyle çözümün bulunması için gerekli olan yaklaşım sayısını aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz.

$b-a=1$ olsun. O halde ikiye bölme yönteminin hatası $\frac{1}{2^{n+1}}$ olur. Bu durumda $\frac{1}{2^{n+1}} < \varepsilon$ olması koşulunda $2^{n+1} > \frac{1}{\varepsilon}$ yazabiliriz.

$$\log\left(2^{n+1}\right) > \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$(n+1)\log 2 > -\log \varepsilon$$

$$n+1 > -\frac{\log \varepsilon}{\log 2}$$

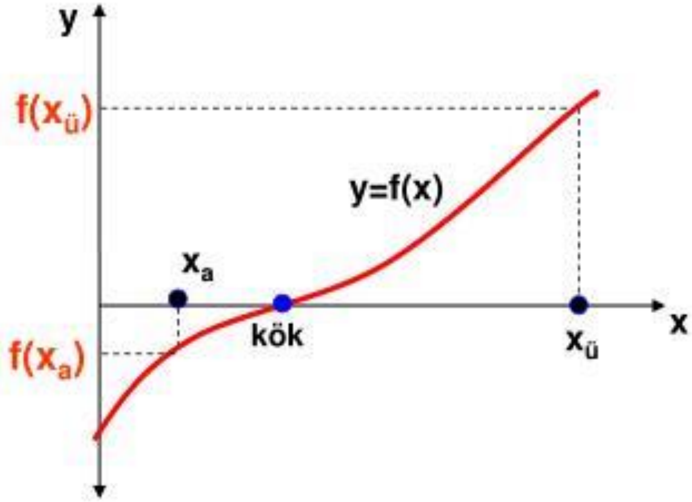
$$n > -\frac{\log \varepsilon}{\log 2} - 1$$

$\varepsilon = 10^{-3}$ olduğu durumda $n > -\frac{\log 10^{-3}}{\log 2} - 1 = \frac{3}{\log 2} - 1$ elde ederiz.

$f(x) = x^2 - 1 - \sin x$ Denkleminin [0 , 5.5] aralığında çözümü İkiyebölme yönteminin yardımı ile $\varepsilon = 10^{-4}$ kesinliği ile kaç yaklaşımda bulunabilir?

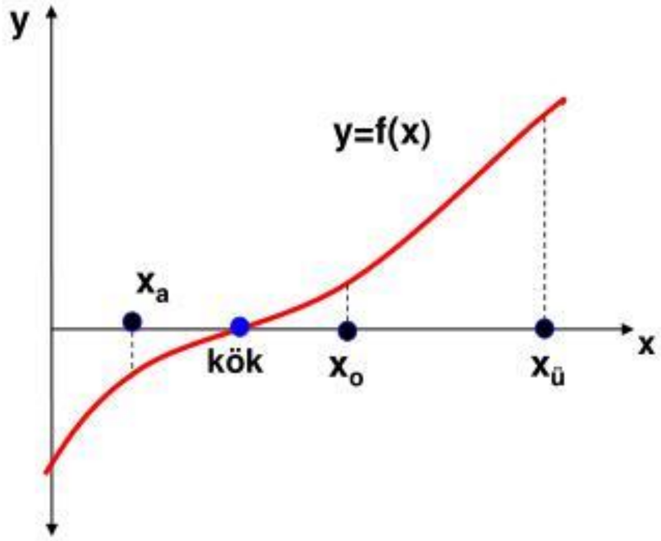
HATIRLAMA : İkiye Bölme Yöntemi

Genel olarak x_a ve $x_ü$ aralığında fks **sürekli** ve $f(x_a)$ ile $f(x_ü)$'nün işaretleri ters ise yani $f(x_a).f(x_ü) < 0$ ise bu aralıkta bir **kök** vardır.



İkiye bölme yönteminde **kökün bulunduğu aralık** adım adım ***daraltılarak*** gerçek köke ulaşılmaya çalışılır.

HATIRLAMA : İkiye Bölme Yöntemi



f(x) = 0 ’ı sağlayan kökün içinde bulunduğu aralığın ***alt*** ve ***üst değeri*** biliniyorsa bu iki değerin **orta noktası** için ***değeri*** bulunabilir.

$$x_o = \frac{x_a + x_{ü}}{2}$$

HATIRLAMA : İkiye Bölme Yöntemi

İşlem adımları

1) Kökün bulunduğu aralık için **x_a** ve **$x_ü$** değerleri tahmin edilir ve **f(xa).f(xü) < 0** şartı aranır.

2) Üst ve alt değerlerle **orta değer** (x_o) hesaplanır.

$$x_o = \frac{x_a + x_{ü}}{2}$$

3) f(x_o) değeri hesaplanır

   Eğer **$f(x_o) = 0$** ise **kök x_o**'dır.

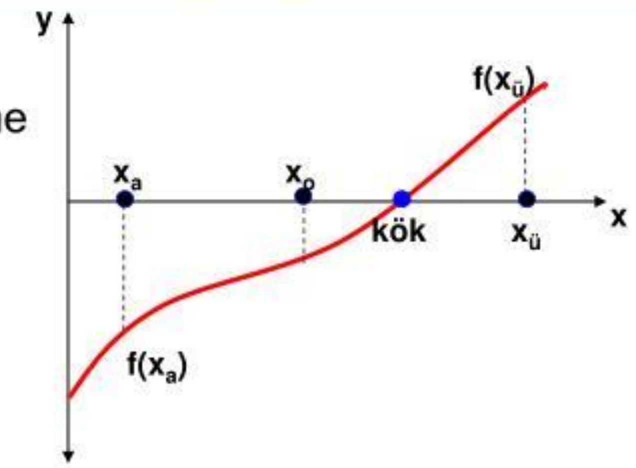
   Eğer **$f(x_o) \neq 0$** ise **işleme devam** edilir

4) f(x_a) hesaplanır

HATIRLAMA : İkiye Bölme Yöntemi

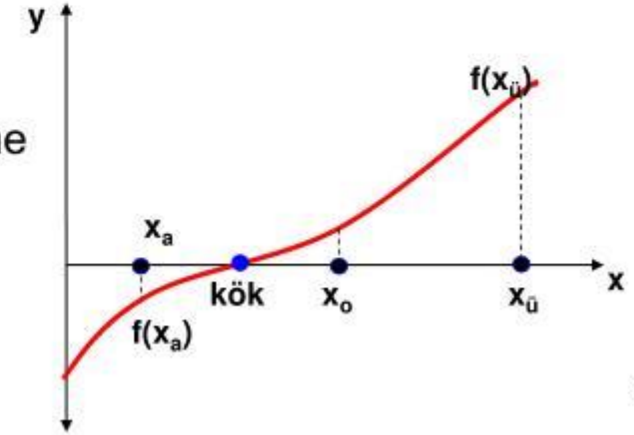
5. a)

$f(x_a).f(x_o) > 0$ ise
x_a yerine x_o yazılarak işleme devam edilir



b)

$f(x_a).f(x_o) < 0$ ise
$x_ü$ yerine x_o yazılarak işleme devam edilir.



HATIRLAMA : İkiye Bölme Yöntemi

İşleme son verme

1) $f(x_o)=0$ olunca işleme son verilir
Kök x_o'dır.

2) $|\varepsilon_t| < \varepsilon_k$ ise işleme son verilir.

$$\varepsilon_t = \frac{\text{son deger - bir önceki deger}}{\text{son deger}} = \frac{x_{o,k+1} - x_{o,k}}{x_{o,k+1}}$$

ÖRNEK $x - cosx = 0$ **denkleminin çözümünü İkiye bölme yöntemi yardımı ile** $\varepsilon = 10^{-2}$ **kesinliği ile bulunuz.**

$$x = cosx$$

denkleminin çözümünün $[0, \pi/2]$ aralığında olduğunu grafik yardımı ile belirleyebiliriz.

Gerçekten $f(x) = x - cosx$ fonksiyonu için

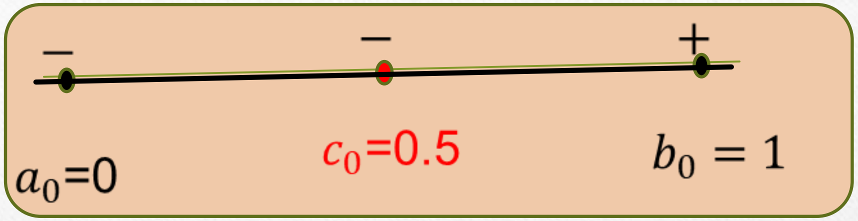
$$f(0) = 0 - cos0 = -1 < 0$$

$$f(1) = 1 - cos1 = 0.4397 > 0$$

$f(0)f(1)<0$ elde edilir.

Yani denkleminin [0,1] aralığında çözümü vardır.

$$[a_0, b_0] = [0,1] \quad \Rightarrow \quad c_0 = \frac{1}{2}(a_0, b_0) \quad \Rightarrow \quad c_0 = \frac{1}{2}(0+1) = 0.5$$

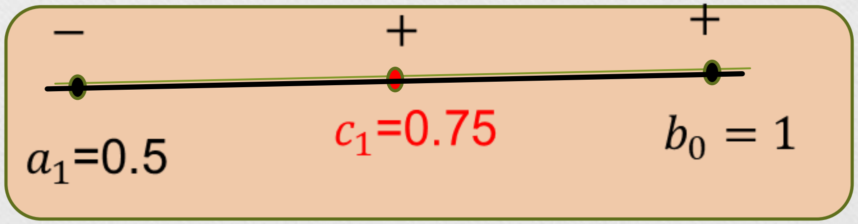


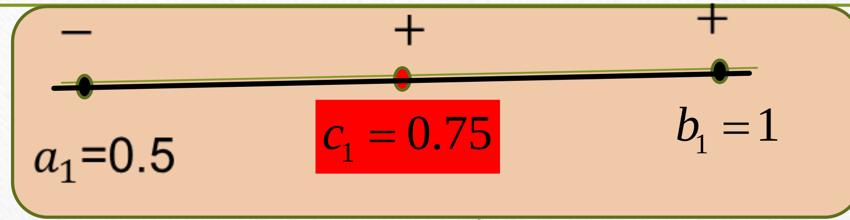
$$f(c_0) = 0.5 - \cos 0.5 = -0.3776 \; < 0$$

$$[a_1, b_1] = [0.5,1] \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1) \quad \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}(0.5+1) = 0.75$$

$$|c_1 - c_0| = 0.25 > \varepsilon$$

$$f(c_1) = 0.75 - \cos 0.75 = 0.0183 > 0$$

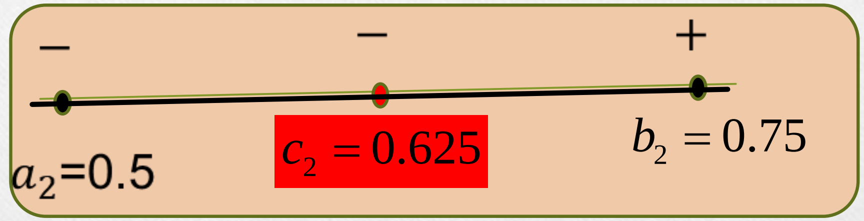




$$[a_2, b_2] = [0.5, 0.75] \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2) \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{1}{2}(0.5 + 0.75) = 0.625$$

$$f(c_2) = 0.625 - \cos 0.625 = -0.1860 \ < 0$$

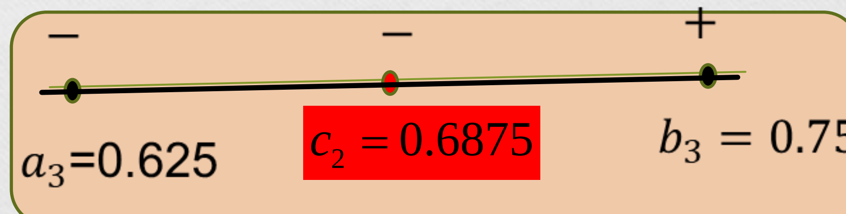
$$|c_2 - c_1| = 0.125 > \varepsilon$$



$$[a_3, b_3] = [0.625, 0.75] \quad \Rightarrow \quad c_3 = \frac{1}{2}(a_3 + b_3) \quad \Rightarrow \quad c_3 = \frac{1}{2}(0.625 + 0.75) = 0.6875$$

$$|c_3 - c_2| = 0.0625 > \varepsilon$$

$$f(c_3) = 0.6875 - \cos 0.6875 = -0.0853 \ < 0$$



$-$ $\qquad$ $-$ $\qquad$ $+$

$a_3=0.625$ $\qquad$ $c_3=0.6875$ $\qquad$ $b_3=0.75$

$$[a_4,b_4]=[0.6875,0.75] \quad \Rightarrow c_4=\frac{1}{2}(a_4+b_4) \Rightarrow c_4=\frac{1}{2}(0.6875+0.75)=0.71875$$

$$f(c_4)=0.71875-\cos 0.71875=-0.03388 < 0$$

$$|c_4-c_3|=0.03125>\varepsilon$$

$-$ $\qquad$ $-$ $\qquad$ $+$

$a_4=0.6875$ $\qquad$ $c_4=0.71875$ $\qquad$ $b_4=0.75$

$$[a_5,b_5]=[0.71875,0.75] \quad \Rightarrow c_5=\frac{1}{2}(a_5+b_5) \Rightarrow c_5=\frac{1}{2}(0.71875+0.75)=0{,}734375$$

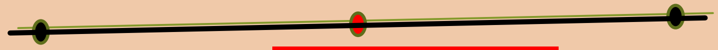
$$|c_5-c_4|=0.015625>\varepsilon$$

$$f(c_5)=0.734375-\cos 0.734375=-0{,}00787 <0$$

$-$ $\qquad$ $-$ $\qquad$ $+$

$a_5=0.71875$ $\qquad$ $c_5=0.734375$ $\qquad$ $b_5=0.75$

$-$ $-$ $+$



$a_5 = 0.71875$ $c_5 = 0.734375$ $b_5 = 0.75$

$$[a_6, b_6] = [0.734375, 0.75] \Rightarrow c_6 = \frac{1}{2}(a_6 + b_6) \Rightarrow c_6 = \frac{1}{2}(0.734375 + 0.75) = 0.7421875$$

$$f(c_6) = 0.7422 - \cos 0.7422 = 0.0052 > 0$$

$$|c_6 - c_5| = 0.00781 < \varepsilon$$

$$\text{Yani} \quad x = 0.7422$$