İNTEGRASYON

Calculus, diferansiyel ve integral hesap olarak iki temel baslık altında incelenmektedir. Bu kısımda Calculus'un ikinci temel tası olan integral hesap incelenecektir. Diferansiyel hesap icin bir temel yapı tası, bir eğriye teğet olan doğrunun eğimi iken, integral hesap icin bir temel yapı taşı ise, bir eğri altında kalan alandır.

Tanım (Bölüntü):

[a,b] kapalı aralığının a ve b noktalarını içeren sonlu tane alt kümesine, [a,b] aralığının bir bölüntüsü denir.

[a,b] aralığının keyfi bir bölüntüsü,

$$a=x_0<x_1<x_2<---<x_{n-1}<x_n=b$$

olmak üzere

$$P=\{x_0,x_1,---,x_n\}$$ dir.

Tanım (Alt ve Üst Toplamlar) :

f, $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonk. olsun. O halde f, her bir $[x_{k-1}, x_k]$ aralığında bir max M_k değeri ve bir min m_k değeri alır.

$$\mathcal{L}_f(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k \quad , \quad U_f(P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k$$

sayılarına, sırasıyla, f için P_alt ve P_üst toplamlar denir.

Tanım (Belirli İntegral) :

f, $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı bir fonk. olsun. Eğer $[a,b]$ nin bütün P bölüntüleri için

$$\mathcal{L}_f(P) \leq I \leq U_f(P)$$

eşitsizliğini sağlayan bir tek I sayısı varsa, f nin $[a,b]$ de integre edilebilir olduğu söylenir. Bu I sayısına, f nin a dan b ye belirli integrali denir ve

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$ ile gösterilir.

Not: f, bir [a,b] aralığında sürekli ise, bu aralıkta integre edilebilirdir.

Tanım (Belirli İntegralin Tanımı ya da Riemann Toplamları):

Eğer f, [a,b] de integre edilebilir bir fonk. ise, f nin a dan b ye belirli integrali

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left\{ \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{\overset{\text{ya da } k}{k-1}}{n}(b-a)\right)\right\}$$

limiti ile hesaplanır.

Not: Tanımdan da anlaşılacağı üzere, verilen bir fonk.nun belirli integralini, belirli integralin tanımını kullanarak (Riemann toplamlarından yararlanarak) hesaplamak oldukça güçtür. Bu yüzden, bu kısımda oldukça az soru çeşidi ile karşılaşırız. Limitin içindeki toplam, soruları zorlaştıran faktördür.

SORU 1: Riemann toplamlarını (belirli integralin tanımını) kullanarak

$\int_0^1 (x^3+x^2-3x+2)\,dx$ integralini hesaplayınız.

Belirli integralin tanımının

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)$$

şeklinde bir limit hesabı olduğunu biliyoruz.

[f in içinde k ya da k−1 alınabilir]

$$\Rightarrow \int_0^1 (x^3+x^2-3x+2)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(0+\frac{k}{n}(1-0)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k^3}{n^3}+\frac{k^2}{n^2}-3\frac{k}{n}+2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{n^3}\cdot\left(\frac{n.(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6} - \frac{3}{n}\cdot\frac{n.(n+1)}{2} + 2n \right]$$

$$= \frac{13}{12}$$

Not: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n.(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$

ve $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n.(n+1)}{2}\right]^2$ eşitliklerini biliyoruz.

SORU 2: Riemann toplamlarından,

$\int_0^1 e^x \, dx = e-1$ olduğunu gösteriniz.

Riemann toplamının

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k-1}{n}(b-a)\right)$$

şeklinde olduğunu biliyoruz (sol uca göre seçtik).

O halde,

$$\int_0^1 e^x dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(0 + \frac{k-1}{n}(1-0)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[e^0 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \ldots + e^{\frac{n-1}{n}}\right]$$

$\frac{1}{n} = t$ dönüşümü uygularsak;

$$\lim_{t\to 0} t\left[1 + e^t + e^{2t} + \ldots + e^{(n-1)t}\right]$$

olup,

$$\lim_{t\to 0} t\cdot\frac{1-e^{nt}}{1-e^{t}} = (e-1)\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{e^{t}-1} = e-1$$

elde edilir.//

Burada, $nt=1$ ve $\lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t}=1$ olduğu kullanıldı. Ayrıca

$$1+r+r^2+\dots+r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$$

olduğunu biliyoruz.

SORU 3: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{16}}\left[1^{15}+2^{15}+3^{15}+\dots+n^{15}\right]$

limitini belirli integral olarak ifade ediniz.

Bu tip soruları gördüğümüzde aklımıza hemen belirli integralin tanımı (Riemann toplamları) gelmelidir:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{\overset{k-1}{k}}{n}(b-a)\right)$$

olup, soruda $f(x)$ ve sınırların tespitini istiyor.

Öncelikle soruyu düzenlersek ;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{16}} \left[1^{15} + 2^{15} + 3^{15} + \dots + n^{15} \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^{15} + \left(\frac{2}{n}\right)^{15} + \left(\frac{3}{n}\right)^{15} + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^{15} \right]$$

olup , $b-a=1$ den $a=0$ ve $b=1$ seçebiliriz.

$\left(\frac{n}{n}\right)^{15}$ ifadesinden formülün sağ uca göre düzenlendiğini anlıyoruz. O halde,

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(0 + \frac{k}{n}(1-0)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

ile $f(x) = x^{15}$ şeklinde bir fonk. olduğunu anlıyoruz.

$$\Rightarrow \int_0^1 x^{15} dx \quad ''$$

SORU 4: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left(1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\dots+\sqrt{\frac{n}{n+3\cdot(n-1)}}\right)$

limitini belirli integral olarak ifade ediniz.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{\overset{k-1}{k}}{n}(b-a)\right)$$

formülünü göz önüne alırsak;

$b-a=3$ ile en kolay $a=0$ ve $b=3$ seçebiliriz.

Sorudan, verilen ifadenin sol uca göre yazıldığı anlaşılıyor (ilk ve son terminden).

$\Rightarrow$ verilen soruyu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}\cdot 3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}(n-1)}}\right)$$

şeklinde düzenlersek, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ olduğunu anlıyoruz.

$$\Rightarrow \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx$$

SORU 5:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \dots + \sin\left(\frac{n\pi}{n}\right)\right)$$

limitini belirli integral olarak ifade ediniz.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k^{k-1}}{n}(b-a)\right)$$

formülünü göz önüne alırsak,

$b-a=1$ ile $a=0$ ve $b=1$ seçebiliriz.

Soruda verilen ifadenin sağ uca göre yazıldığı anlaşılıyor.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(0 + \frac{k}{n}(1-0)\right)$$

dan, $f(x) = \sin \pi x$ şeklinde olduğu anlaşılıyor.

SORU 6: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{12}{n}+\frac{8}{n^2}k\right)$

limitini belirli integral olarak ifade ediniz.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{\overset{\nearrow k-1}{k}}{n}(b-a)\right)$$

formülünü göz önüne alırsak ve verilen soruyu düzenlersek,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(12+\frac{8}{n}k\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(12+\frac{8}{n}k\right)$$

olup, $b-a=1$ den $a=0$ ve $b=1$ secebiliriz.

$$\overset{\text{Formülden}}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty}\frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(0+\frac{k}{n}\cdot 1\right) \quad \text{(sağ uca göre)}$$

den, $f(x)=12+8x$ şeklinde olduğu anlaşılıyor.

$$\Rightarrow \int_0^1 (12+8x)\,dx \;//$$

Belirli İntegralin Özellikleri

f ve g, [a,b] de integre edilebilir iki fonk. ve α, herhangi bir sabit olsun.

Bu takdirde:

1:) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

2:) $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$

3:) $\displaystyle\int_a^b \alpha . f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$

4:) $\displaystyle\int_a^b \left[f(x) \mp g(x)\right] dx = \int_a^b f(x)dx \mp \int_a^b g(x)dx$

5:) $c \in (a,b)$ olmak üzere

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

6:) $\forall x \in [a,b]$ için $f(x) \geq 0$ ise

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

7·) $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)| \cdot dx$

8·) a) Eğer f, $[-a,a]$ da tek yani

$f(-x) = -f(x)$ ise,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

b) Eğer f, $[-a,a]$ da cift yani

$f(-x) = f(x)$ ise

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

SORU 7: a bir sabit olmak üzere,

$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ olduğunu gösteriniz.

Bu tip sorularda belirli integralin özelliklerini ve değişken değiştirme yöntemini kullanarak sonuca gideriz.

Şimdi, eşitliğin sağındaki belirli integrali göz önüne alalım:

$a-x=t$ dönüşümü ile

$-dx=dt$ ve $x=0$ için $t=a$

$x=a$ için $t=0$

olduğunu görüyoruz. İntegrali tekrar yazarsak;

$$\int_0^a f(a-x)\,dx = \int_a^0 f(t).(-dt)$$

ve belirli integralin 1. özelliğini kullanırsak,

$$\int_0^a f(a-x)\,dx = \int_0^a f(t)\,dt$$

ile sonuda istenileni elde etmiş oluruz.

[Yani eşitliğin sol tarafını elde etmiş oluruz.]

SORU 8: $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx$

olduğunu gösteriniz.

Eşitliğin sol tarafındaki belirli integrali göz önüne alalım.

$$x = \frac{\pi}{2} - t \quad \text{dönüşümü ile}$$

$$dx = -dt \quad \text{ve} \quad \begin{array}{ll} x=0 \text{ için} & t = \pi/2 \\ x = \pi/2 \text{ için} & t = 0 \end{array}$$

elde ederiz. Belirli integralin özelliğinden,

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = \int_{\pi/2}^{0} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right).(-dt)$$

$$= -\int_{\pi/2}^{0} f(\cos t).\,dt = \int_0^{\pi/2} f(\cos t)\,dt$$

eşitliğine ulaşırız ve istenileni elde etmiş oluruz. //

SORU 15 : f bir tek fonksiyon olmak üzere,

$\int_{-a}^{a} f(x).dx = 0$ olduğunu gösteriniz.

f bir tek fonk. ise $f(-x) = -f(x)$ olduğunu biliyoruz. Şimdi, belirli integralin özelliğinden,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \quad *$$

şeklinde yazalım.

$\int_{0}^{a} f(x)dx$ (integralinde değişken dönüşümü yaparsak)

$x = -t$ dönüşümü ile

$dx = -dt$ ve $x = 0$ için $t = 0$
$x = a$ için $t = -a$

olup
$$\int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{-a} \underbrace{f(-t)}_{-f(t)} \cdot (-dt) = \int_{0}^{-a} f(t)dt$$
$$= -\int_{-a}^{0} f(t)dt$$

elde edilir. Şimdi, bu integral * denk. de yerine yazılırsa ;

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx - \int_{-a}^{0} f(t)dt = 0 \text{ bulunur.}$$

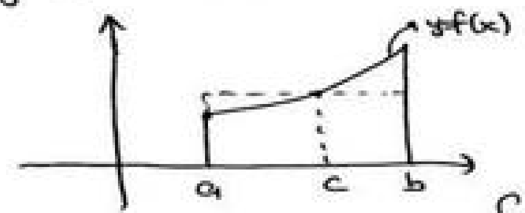
Teorem (Ortalama Değer Teoremi):

Eğer f, $[a,b]$ aralığında tanımlanmış sürekli bir fonk. ise

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = f(c)\cdot(b-a)$$

olacak şekilde $[a,b]$ aralığında en az bir c sayısı vardır.

Not: Ortalama değer teoreminin geometrik yorumu şu şekildedir:



Eğer f fonk nu $[a,b]$ de sürekli ise, eğri altında kalan alan değerine eşit olacak şekilde, $[a,b]$ de öyle bir c noktası var ki $f(c)\cdot(b-a)$ şeklinde bir dikdörtgen vardır.

Dikkat: Türev için ortalama değer teoremini öğrenmiştik. Bu teorem ise, integraller için ortalama değer teoremidir.

Not: $f(c)$ sayısına, fonk nun ortalama değeri denir.

SORU 16: $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$ fonksiyonuna $[-1,1]$ de O.D.T. uygulayınız ve fonk.nun ortalama degerini bulunuz.

İntegraller icin O.D.T. nin tek sartı vardır. Verilen kapalı aralıkta fonk. sürekli olmalıdır. $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$ fonk.nu $[-1,1]$ de sürekli oldugundan, f fonk.na $[-1,1]$ de O.D.T. uygulanabilir. O halde,

$$\int_{-1}^{1} (x + \sqrt{1-x^2}).dx = f_{ort}(c).(1-(-1))$$

olacak sekilde en az bir $c \in [-1,1]$ vardır.

Belirli integralin tanımını kullanarak bu integrali hesaplamak çok zordur. İntegral alma kurallarını da henüz öğrenmedik. Ama biliyoruz ki belirli integral bir alan hesabıydı.

$f(x) = y = x + \sqrt{1-x^2}$ olup, verilen integrali

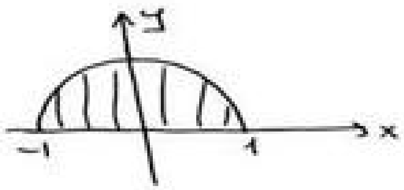
$$\int_{-1}^{1} (x + \sqrt{1-x^2})dx = \int_{-1}^{1} x\, dx + \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

şeklinde yazarsak,

$\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$ olduğunu biliyoruz. [Belirli integralin 8 a özelliği].

ve $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$ için, bu integral

$y=\sqrt{1-x^2}$ olup, $x^2+y^2=1$ çemberinin üst yarısını anlatır.



Bu dairenin alanı $= \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \left(x+\sqrt{1-x^2}\right) dx = \frac{\pi}{2} = f_{ort}(c) \cdot 2$$

olup, $f_{ort}(c) = \frac{\pi}{4}$ bulunur.

$\Downarrow$

fonk.nun ortalama değeri

Teorem (İntegral Hesabın Temel Teoremi):

f, $[a,b]$ de tanımlanmış sürekli bir fonk. olsun. Eğer F, $[a,b]$ aralığında, f nin bir ters türevi ise,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

olur.

Teorem (Diferansiyel Hesabın Temel Teoremi):

f, $[a,b]$ de tanımlanmış sürekli bir fonk ve her $x \in [a,b]$ için

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

olsun. Bu takdirde F, (a,b) de türevlenebilirdir ve her $x(a,b)$ için $F'(x) = f(x)$ olur.

Not: Leibniz notasyonu ile

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$$

Genel anlamda :

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t).dt\right) = f(\psi(x)).\frac{d\psi(x)}{dx} - f(\varphi(x)).\frac{d\varphi(x)}{dx}$$

Not: Bu işleme integral işareti altında türev alma işlemi diyoruz.

SORU 17: $x=0$ olmak üzere,

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_{1}^{x^2} \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1+t^2}} \Rightarrow F'(1) = ?$$

Bu tip sorularda kesinlikle verilen integrali hesaplama yoluna gitmeyiniz. Sorudaki integraller genelde ya çok zor ya da elementer olarak çözülemeyen fonklardan seçilir. Aklımıza hemen integral işareti altında türev alma gelmelidir:

Mesela, bu sorudaki $\int_{1}^{x^2} \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1+t^2}}$ integrali kolay bir integral değildir.

O halde,

$$F'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \int_1^{x^2} \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{1}{x}\left[\frac{d}{dx}\int_1^{x^2} \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1+t^2}}\right]$$

(Çarpımın türevi kuralını uyguluyoruz)

$$\Rightarrow F'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \int_1^{x^2} \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{1}{x}\left(\frac{(x^2)^2}{\sqrt{1+x^4}} \cdot 2x - 0\right)$$

olup,

$$F'(1) = -1 \cdot \int_1^{1} \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1+t^2}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

Not: Bu soruda $F'(1)$ değil de $F'(2)$ sorulsaydı, soru çok da anlamlı olmayacaktı. Çünkü $F'(2)$ değerini bulmak için $\int_1^2 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$ integralini hesaplamak zorunda kalacaktık.

SORU 18 : $t>0$ ve $F(t)=\int_0^{\sqrt{t}} \cos(x^2)\,dx$

olmak üzere , $F'\left(\frac{\pi}{4}\right)=?$

İntegral işareti altında türev alma formülünü uygularsak ;

$$F'(t)=\cos\left(\sqrt{t}\right)^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}-\cos(0^2)\cdot 0$$

olup , $F'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}$ .//

Not: Bu soruda istesek de $\int \cos x^2\,dx$ integralini çözemeyiz. Çünkü elementer olarak çözüme sahip değildir. Bu tip integralleri, serileri kullanarak yaklaşık olarak hesaplayabiliriz.

Elementer olarak çözülemeyen integrallere örnekler :

$\int \cos x^2 dx$; $\int \sin x^2 dx$; $\int e^{x^2} dx$;

$\int e^{-x^2} dx$; $\int \frac{\sin x}{x} dx$; vs.

SORU 19: $F(x) = \frac{1}{x} \cdot \int_1^x \left[2t - F'(t)\right] dt$

olmak üzere $F'(1) = ?$

Bu soru yapısı gereği zor olmadığından iki yoldan kolayca çözülebilir:

1. Yol: İntegral işareti altında türev alma formülünden

$$F'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \int_1^x \left[2t - F'(t)\right] dt + \frac{1}{x}\left[(2x - F'(x)).1 - 0\right]$$

$$\Rightarrow F'(1) = (-1) . \underbrace{\int_1^1 \left[2t - F'(t)\right] dt}_{0} + 1.\left[2 - F'(1)\right]$$

olup, $F'(1) = 1$

elde edilir.

[$F(x) = \frac{1}{x} \cdot \varphi(x)$; $\varphi(x) = \int_1^x \left[2t - F'(t)\right] dt$ şeklinde gibi düşünüp çarpımın türevi kuralını uyguladık.]

2.Yol: $\int_1^x [2t - F'(t)]\,dt$ integrali kolay bir integral olduğundan, bu integrali çözerek de sonuca gidilebilir:

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_1^x [2t - F'(t)]\,dt$$

$$= \frac{1}{x} \left[t^2 - F(t) \right]\Big|_1^x$$

$$= \frac{1}{x} \left[x^2 - F(x) - 1 + F(1) \right] \qquad (F(1) = 0)$$

olup,

$F(x) = x - \frac{F(x)}{x} - \frac{1}{x}$ elde edilir.

Eşitlik düzenlenip, $F(x)$ yalnız bırakılınca;

$F(x) = x - 1$ ve $F'(x) = 1$ bulunur.

$\Rightarrow F'(1) = 1$ elde edilir.//

SORU 20: Eğer sürekli türetilebilen bir F fonksiyonu, $x \geq 1$ olmak üzere

$$F(x) = \frac{1}{x} \cdot \int_1^x \left[e^{1-\sqrt{t}} - F'(2-t)\right] \cdot dt$$

ile tanımlanmışsa, $F'(1) = ?$

İntegral işareti altında türev alma formülü ile,

$$F'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \int_1^x \left[e^{1-\sqrt{t}} - F'(2-t)\right] dt +$$

$$\frac{1}{x}\left[\left(e^{1-\sqrt{x}} - F'(2-x)\right) \cdot 1 - 0\right]$$

olup,

$F'(1) = 1/2$ elde edilir.

$$\left[\frac{d}{dx}\left(\int_1^x \left[e^{1-\sqrt{t}} - F'(2-t)\right] dt \right) = e^{1-\sqrt{x}} - F'(2-x) \right]$$

SORU 21: Sürekli bir f fonk.nun

$$\int_0^x f(t)\,dt = x + \int_x^0 \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt$$

eşitliğini sağladığını kabul ederek, f fonksiyonunu açık olarak ifade ediniz.

integral işareti altında türev alma formülünü kullanıp, eşitliğin her iki yanını x e göre türetirsek;

$$f(x).1 - 0 = 1 + \frac{d}{dx}\left(\int_x^0 \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt\right)$$

ve $\frac{d}{dx}\left(\int_x^0 \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt\right) = -\frac{f(x)}{1+x^2}$ ile

$f(x) = 1 - \frac{f(x)}{1+x^2}$ bulunur.

O halde $f(x) = \frac{1+x^2}{2+x^2}$ elde edilir.

SORU 22: $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ olmak üzere,

$$\int_0^{\sin x} f(t) \cdot dt = \operatorname{arccot} x \quad \text{ise} \quad f(1/2) = ?$$

Genel bir f fonk.nu verilmiş ve bu fonk.nu bulabilmek için Leibniz (integral işareti altında türev alma) formülünü kullanacağız. Eşitliğin her iki yanını x e göre türetirsek;

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^{\sin x} f(t)\, dt\right) = \frac{d}{dx}(\operatorname{arccot} x)$$

$$f(\sin x) \cdot \cos x = -\frac{1}{1+x^2}$$

olup, $f(1/2)$ yi elde edebilmek için $x = \frac{\pi}{6}$ seçersek;

$$f(1/2) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{1+\frac{\pi^2}{36}} \quad \text{ile}$$

$$f(1/2) = -\frac{36}{36+\pi^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$ elde edilir.

SORU 23 : $F(x) = \int_0^x \frac{t-t^2}{1+t^4} \, dt$

fonksiyonunu min. yapan değeri bulunuz.

Bu soru bir ekstremum sorusudur ve bilindiği gibi $F(x)$ fonk.nun 1. türevi incelenmelidir.

Leibniz formülü ile ;

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x \frac{t-t^2}{1+t^4} \, dt \right)$$

$$= \frac{x-x^2}{1+x^4} = \frac{x(1-x)}{1+x^4} = 0$$

ile $c_1 = 0$ ve $c_2 = 1$ noktaları kritik sayılardır.

I. türev testini uygularsak,

x		0		1	
f'	$-$		$+$		$-$
		min		max	

olup, $x=0$ bir bölgesel min. noktadır. min. değer ise $f(0)$dır

$$\Rightarrow F(0) = \int_0^0 \frac{t-t^2}{1+t^4} \, dt = 0 \text{ dır.}$$

SORU 24: $F(x) = \int_0^{x^2} \frac{t^2-4t}{1+t^4}\, dt$

fonksiyonunun max değerini bulunuz.

Leibniz formülü ile

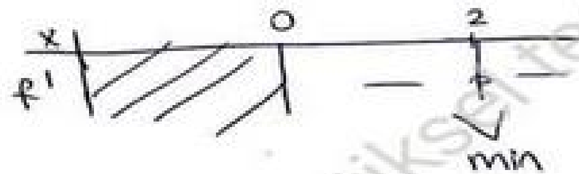
$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^2} \frac{t^2-4t}{1+t^4}\, dt \right)$$

$$= \frac{(x^2)^2 - 4.(x^2)}{1+(x^2)^4} . 2x - 0$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{2x^3(x-2)(x+2)}{1+x^8} = 0$$

ile $c_1 = 0$, $c_2 = 2$, $c_3 = -2$ kritik sayılardır.

$F(x) = \int_0^{x^2} \frac{t^2-4t}{1+t^4} dt$ olup, $[0,\infty)$ da tanımlandığından



ve $\underset{+}{F'(0)} < 0$ olduğundan $x=0$ bir son. nokta max.

$\Rightarrow$ max değer $F(0) = 0$ dır.

SORU 25: $\lim_{x \to 0^+} \left\{ \frac{1}{2x} \int_0^{x^2} \ln\sqrt{t}\, dt \right\} = ?$

$x \to 0^+$ iken $0.\infty$ belirsizliği var. L'hopital kuralını uygulayabilmek için önce limiti düzenleyip $\frac{0}{0}$ belirsizliğine getirelim:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \ln\sqrt{t}\, dt}{2x} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ belirsizliği} \right)$$

$$\overset{L}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x \cdot 2x}{2} = \lim_{x \to 0^+} (x \cdot \ln x)$$

olup, $0.\infty$ belirsizliği oluşur. Tekrar L'hopital kullanabilmek için

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{L}{=}$$

$$\overset{L}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0 \quad \text{elde edilir.}$$

Not: $\ln\sqrt{x^2} = \ln|x| = \ln x$ ($x \in (0, x^2)$ old.)

SORU 26: $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\cdot\int_0^{x^2}\frac{e^t-1}{1-\sqrt{2-e^t}}\,dt\right]=?$

Soruda $0.\infty$ belirsizliği var. L'hopital uygulayabilmek için düzenleyelim:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\frac{e^t-1}{1-\sqrt{2-e^t}}\,dt}{x^2}\qquad\left(\frac{0}{0}\text{ belirsizliği}\right)$$

$$\overset{L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{x^2}-1}{1-\sqrt{2-e^{x^2}}}\cdot\cancel{2x}}{\cancel{2x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\sqrt{2-e^{x^2}}}\qquad\left(\begin{array}{l}\text{Limit alma kuralları}\\ \text{ile devam edersek;}\\ \text{eşlenik alalım}\end{array}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\sqrt{2-e^{x}}}\cdot\frac{1+\sqrt{2-e^{x}}}{1+\sqrt{2-e^{x}}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{e^{x^2}-1}}{\cancel{e^{x^2}-1}}\cdot\left(1+\sqrt{2-e^{x}}\right)=2$$

SORU 27: f, sürekli türevlenebilen bir fonk ve $f(0)=0$ ise,

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{1-\cos x}\cdot\int_0^{\sin x} f(t)\,dt\right]=?$$

Soruda $0.\infty$ belirsizliği olup,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x} f(t)\,dt}{1-\cos x} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ belirsizliği}\right)$$

$$\overset{L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)\cdot\cos x}{\sin x}$$ elde edilir.

$f(0)=0$ ile soruda $\frac{0}{0}$ belirsizliği devam ediyor

$$\Rightarrow \overset{L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot f'(\sin x).\cos x+f(\sin x).(-\sin x)}{\cos x}$$

$$= f'(0).\,_{//}$$

İNTEGRASYON TEKNİKLERİ

İntegral Tablosu

- $\int \alpha \, dx = \alpha x + c$
- $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$
- $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$
- $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c \quad \left(\begin{matrix} a>0 \\ a \neq 1 \end{matrix} \right)$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + c$
- $\int \tan x . dx = -\ln|\cos x| + c$
- $\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + c$
- $\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$
- $\int \operatorname{cosec} x \, dx = \ln|\operatorname{cosec} x - \cot x| + c$
- $\int \sec x . \tan x \, dx = \sec x + c$
- $\int \operatorname{cosec} x . \cot x \, dx = -\operatorname{cosec} x + c$
- $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$
- $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + c$
- $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \dfrac{x}{a} + c \quad (a>0)$
- $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \arctan \dfrac{x}{a} + c \quad (a>0)$

1') Değişken Değiştirme Yöntemi

Değişken değiştirme tekniğine uygun bazı integral formları:

- $\int [f(x)]^n . f'(x)\,dx$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \ln[f(x)]\,dx$
- $\int f'(x) . e^{f(x)} . dx$

şeklindedir. Her bir durumda

$$u = f(x) \quad (\text{ veya } \; u = \ln[f(x)]\,)$$

dönüşümü yapılırsa

$$du = f'(x).dx$$

ile, her bir integral, integral tablosu yardımıyla çözülebilir hale gelecektir. Amacımız da budur.

SORU 1: $\displaystyle\int \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)^{n} \cdot \frac{dx}{x^2} = ?$

Parantezin üzerinde n (kuvvet) ifadesini gördüğümüz anda aklımıza değişken değiştirme tekniği gelmelidir.

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{x}=u \quad \text{ve} \quad +\frac{dx}{x^2}=du$$

olup,
$$\int \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)^{n} \cdot \frac{dx}{x^2} = \int u^{n} du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+c$$
$$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)^{n+1}+c$$

SORU 2: $\displaystyle\int \frac{x^5}{(x^3-1)^2} \cdot dx = ?$

$$\begin{aligned} x^3-1&=u \\ 3x^2dx&=du \end{aligned} \Rightarrow \int \frac{x^5}{(x^3-1)^2}dx = \int \frac{x^3 \cdot x^2\,dx}{(x^3-1)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{u+1}{u^2}du = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{u}+u^{-2}\right)du$$

$$= \frac{1}{3}\left(\ln|u|-\frac{1}{u}\right)+c = \frac{1}{3}\left(\ln|x^3-1|-\frac{1}{x^3-1}\right)+c$$

SORU 3: $\int x^3 \cdot \sqrt{1-x^2}\, dx = ?$

$$1-x^2 = u \qquad \Rightarrow \int x^3 \cdot \sqrt{1-x^2}\, dx = \int x^2 \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot x\, dx$$
$$-2x\, dx = du$$

$$= \int (1-u) \cdot u^{1/2} \cdot \left(-\frac{du}{2}\right) = -\frac{1}{2} \int (1-u) \cdot u^{1/2}\, du$$

$$= -\frac{1}{2} \int \left(u^{1/2} - u^{3/2}\right) du = -\frac{1}{2} \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} - \frac{u^{5/2}}{5/2} \right] + c$$

$$= -\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3} - \frac{(1-x^2)^{5/2}}{5} + c \,\text{”}$$

SORU 4: $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})} = ?$

$$1+\sqrt{x} = u \qquad \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot (1+\sqrt{x})} = \int \frac{2\, du}{u}$$
$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = du$$

$$= 2 \ln|u| + c$$
$$= 2 \ln|1+\sqrt{x}| + c \,\text{”}$$

SORU 5: $\int \frac{x+2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = ?$

$$= \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\Downarrow$ $\quad$ $\Downarrow$

$\to$ $1-x^2 = u$ $\quad$ integral tablosu

$-2x\,dx = du$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{1/2}} + 2\arcsin x + c$$

$$= -\sqrt{1-x^2} + 2\arcsin x + c \,//$$

SORU 6: $\int \frac{(4x+2).\ln(x^2+x)}{x^2+x}\,dx = ?$

$\ln(x^2+x) = u$

$\frac{2x+1}{x^2+x}\,dx = du$

$$\Rightarrow \int \frac{2.(2x+1).\ln(x^2+x)}{x^2+x}\,dx = 2\int u\,du$$

$$= u^2 + c = \ln^2(x^2+x) + c \,//$$

SORU 7: $\int \frac{\ln x}{x(1+\ln^2 x)}\,dx = ?$

$$\ln x = u \qquad \Rightarrow \int \frac{\ln x}{x\cdot(1+\ln^2 x)}\,dx = \int \frac{u\,du}{1+u^2}$$
$$\frac{1}{x}\,dx = du$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2u\,du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\ln(1+u^2)+c$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+\ln^2 x)+c \,//$$

SORU 8: $\int \frac{[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = ?$

$$\ln(x+\sqrt{x^2+1}) = u$$

$$\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}\,dx = du \qquad \text{(düzenlersek)}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = du$$

$$\Rightarrow \int \frac{[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3}+c$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\ln^3(x+\sqrt{x^2+1})+c \,//$$

SORU 9: $\int \frac{\ln(\tan^2 x)}{\sin x . \cos x} dx = ?$

$\ln(\tan^2 x) = u$

$$\frac{2.\tan x . \frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x} dx = du \Rightarrow \frac{2}{\sin x \cos x} dx = du$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int u . du = \frac{1}{2} \frac{u^2}{2} + c$$

$$= \frac{1}{4} \left[\ln(\tan^2 x) \right]^2 + c \,_{//}$$

SORU 10: $I = \int \frac{dx}{x(2 + \ln x^2 + \ln^2 x)} = ?$

$\ln x = u$

$\frac{dx}{x} = du$ ve $\ln x^2 = 2\ln x$

ile,

$$I = \int \frac{du}{2 + 2u + u^2} = \int \frac{du}{(u+1)^2 + 1}$$

$u + 1 = t$
$du = dt$ dönüşümü ile

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctan t + c = \arctan(u+1) + c$$

$$= \arctan(\ln x + 1) + c \,_{//}$$

SORU 11: $I = \int \frac{e^{4x}}{\sqrt{4+e^{2x}}} dx = ?$

$$4+e^{2x} = u$$
$$2 \cdot e^{2x} \cdot dx = du$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{e^{2x} \cdot e^{2x}}{\sqrt{4+e^{2x}}} dx = \int \frac{u-4}{u^{1/2}} \cdot \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \int \left(u^{1/2} - 4u^{-1/2}\right) du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2} - 4\frac{u^{1/2}}{1/2}\right] + c$$

$$= \frac{(4+e^{2x})^{3/2}}{3} - 4 \cdot (4+e^{2x})^{1/2} + c \;\text{"}$$

SORU 12: $I = \int \frac{e^{4x}\, dx}{(1+e^x)^2} = ?$

$$1+e^x = u \qquad \Rightarrow I = \int \frac{e^{3x} \cdot e^x \cdot dx}{(1+e^x)^2}$$
$$e^x\, dx = du$$

$$= \int \frac{(u-1)^3}{u^2} du = \int \frac{u^3 - 3u^2 + 3u - 1}{u^2} du$$

$$= \int \left(u - 3 + 3u^{-1} - u^{-2}\right) du$$

$$= \frac{u^2}{2} - 3u + 3\ln|u| + \frac{1}{u} + c$$

$$= \frac{(1+e^x)^2}{2} - 3 \cdot (1+e^x) + 3\ln|1+e^x| + \frac{1}{1+e^x} + c \;\text{"}$$

SORU 13: $I = \int \frac{dx}{e^x+1} = ?$

$$I = \int \frac{dx}{e^x(1+e^{-x})} = \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\, dx$$

olup, $1+e^{-x} = u$

$-e^{-x}dx = du$

$$\Rightarrow I = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + c$$

$$= -\ln|1+e^{-x}| + c$$

SORU 14: $I = \int \frac{e^x-1}{e^x+1}\, dx = ?$

$$I = \int \frac{e^x+1-2}{e^x+1}\, dx = \int \left(1 - \frac{2}{e^x+1}\right) dx$$

$$= x - 2\int \frac{dx}{e^x+1} = x + 2\ln|1+e^{-x}| + c$$

$\Rightarrow$ üstte çözüldü

SORU 15 : $I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\, dx = ?$

$$I = \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x \, dx}{\sin^4 x} = \int \frac{(1-\sin^2 x) \cdot \cos x \cdot dx}{\sin^4 x}$$

$\sin x = u$
$\cos x \, dx = du$ $\Rightarrow I = \int \frac{(1-u^2)\,du}{u^4}$

$$= \int (u^{-4} - u^{-2})\, du = \frac{u^{-3}}{-3} - \frac{u^{-1}}{-1} + C$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C \,\,//$$

SORU 16 : $I = \int \frac{dx}{\cos^4 x} = ?$

$$I = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \int (1+\tan^2 x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$$

$\tan x = u$
$\frac{1}{\cos^2 x}\, dx = du$ $\Rightarrow \int (1+u^2) \cdot du$

$$= u + \frac{u^3}{3} + C$$

$$= \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C \,\,//$$

SORU 17: $I = \int \frac{dx}{(\tan x + 1) \cdot \sin^2 x} = ?$

$\cot x = u$

$-\frac{dx}{\sin^2 x} = du \Rightarrow I = -\int \frac{du}{\left(\frac{1}{u}+1\right)}$

$= -\int \frac{u}{u+1}\,du = -\int \left(1 - \frac{1}{u+1}\right) du$

$= -u + \ln|u+1| + c$

$= -\cot x + \ln|\cot x + 1| + c$

Soru 18: $I = \int \cos x \cdot \sin(\sin x) \cdot dx = ?$

$\sin x = u$

$\cos x\, dx = du$

$I = \int \sin u \, du = -\cos u + c$

$= -\cos(\sin x) + c$

SORU 19: $I = \int \dfrac{x - \arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx = ?$

$$I = \underbrace{\int \frac{x}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx}_{I_1} - \underbrace{\int \frac{\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx}_{I_2}$$

$I_1 = \int \dfrac{x}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$ icin $\quad 1-9x^2 = t$

$\qquad -18x\,dx = dt$

$$\Rightarrow -\frac{1}{18}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{18}\int t^{-1/2}\,dt = -\frac{1}{18}\,\frac{t^{1/2}}{1/2} + c$$

$$= -\frac{1}{9}\sqrt{1-9x^2} + c$$

$I_2 = \int \dfrac{\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$

$\arccos 3x = u$

$\dfrac{-3}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx = du \quad \Rightarrow I_2 = -\dfrac{1}{3}\int u\,du$

$$= -\frac{1}{3}\,\frac{u^2}{2} + c$$

$$= -\frac{1}{6}(\arccos 3x)^2 + c$$

Sonuc:

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{9}\sqrt{1-9x^2} + \frac{1}{6}\left(\arccos(3x)\right)^2 + C_{11}$$

SORU 20: $I = \int \frac{\sec^2(\arctan x)}{1+x^2}\,dx = ?$

$\arctan x = u$

$\frac{dx}{1+x^2} = du \Rightarrow I = \int \sec^2 u\, du$

$= \tan u + c$

$= \tan(\arctan x) + c$

$= x + c$ //

SORU 21: $I = \int \frac{x \cdot \sqrt{1+\arctan x^2}}{1+x^4}\,dx = ?$

$1+\arctan x^2 = u$

$\frac{2x}{1+x^4}\,dx = du$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du = \frac{1}{2} \frac{u^{3/2}}{3/2} + c$

$= \frac{1}{3}(1+\arctan x^2)^{3/2} + c$ //

2) Kısmi İntegrasyon Tekniği

$u(x)$ ve $v(x)$ türevlenebilir iki fonk. olmak üzere

$$\frac{d}{dx}\left[u(x).v(x)\right] = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$$

$$u(x).v(x) = \int \left[u'(x).v(x) + u(x).v'(x)\right] dx$$

$$v'(x)dx = dv \qquad u'(x)dx = du$$

$$\Rightarrow \quad \int u.dv = u.v - \int v.du$$

ile belirlenen bağıntıya kısmi integrasyon formülü denir.

Kısmi integrasyon formülü uygulanırken, integrandı oluşturan iki çarpandan hangisinin u hangisinin dv olarak seçileceği önemlidir:

Bu konuda, bize soruların çoğunda ışık tutacak sihirli bir kelime var.

L A P T Ü

- L → logaritmik
- A → Arclar
- P → Polinom
- T → Trigonometrik
- Ü → Üstel

Dikkat : " LAPTÜ " kelimesi soruların çoğu için bize ışık tutar. Fakat unutulmamalıdır ki, bazı sorularda sıranın önemi olmadığı gibi, bazı sorularda da (çok nadir karşılaşırsınız) bu sıranın tam tersi ile sonuca gidilir.
Harf sırasında önce gelen fonksiyona u sonraki fonksiyona dv denir.

SORU 22 : $I = \int x . \sin x . dx = ?$

LAP TÜ

x sinx

$x = u \qquad \int \sin x \, dx = \int dv$

$dx = du \qquad -\cos x \, dx = v$

$\int u . dv = u . v - \int v . du$

$\Rightarrow I = -\cos x . x + \int \cos x \, dx$

$I = -x . \cos x + \sin x + c$

Dikkat : Kısmi integrasyon uyguladığımızda elde edilen sağ taraftaki integral bizim için 'anlamlı' olmalıdır. Yani bizi çözüme götürebilmelidir.

SORU23: $I_n = \int x^n . \sin x \, dx = ?$

LAPTÜ
x^n $\sin x$

$x^n = u \qquad \int \sin x \, dx = \int dv$

$n . x^{n-1} . dx = du \qquad -\cos x = v$

$I_n = -x^n . \cos x + n \int x^{n-1} . \cos x \, dx$

olup, $\int x^{n-1} . \cos x \, dx$ integrali için yeniden kısmi integrasyon uygulayalım.

$x^{n-1} = u \qquad \int \cos x \, dx = \int dv$

$(n-1) . x^{n-2} . dx = du \qquad \sin x = v$

$\Rightarrow \quad x^{n-1} . \sin x - (n-1) \int x^{n-2} . \sin x \, dx$

olup, yerine yazarsak ;

$I_n = -x^n . \cos x + n . x^{n-1} . \sin x - n.(n-1) . \int x^{n-2} . \sin x \, dx$

bulunur. Kısmi integrasyonu her uyguladığımızda oluşan yeni integral bizim için anlamlı mı incelemeliyiz. Gerçekten,

$\int x^{n-2} . \sin x \, dx = I_{n-2}$ yazabiliriz.

$\Rightarrow I_n = -x^n . \cos x + n . x^{n-1} \sin x - n.(n-1) . I_{n-2}$

şeklinde indirgeme formülü yazar bırakırız.

SORU 24: $I = \int x \cdot e^x dx = ?$

LAPTÜ

$x \qquad e^x$

$x = u \qquad \int e^x dx = \int dv$

$dx = du \qquad e^x = v$

$I = x \cdot e^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$ //

SORU 25: $I_n = \int x^n \cdot e^x \cdot dx = ?$

$x^n = u \qquad \int e^x dx = \int dv$

$n \cdot x^{n-1} \cdot dx = du \qquad e^x = v$

$I_n = x^n \cdot e^x - n \int x^{n-1} \cdot e^x \cdot dx$

olup,

$I_n = x^n \cdot e^x - n \cdot I_{n-1}$

bulunur. //

SORU 26 : $I = \int \ln x \, dx = ?$

LAPTÜ

$\ln x \qquad 1$

$I = \int 1 . \ln x . dx$

$\ln x = u \qquad \int 1 . dx = \int dv$

$\frac{1}{x} dx = du \qquad x = v$

$\Rightarrow I = x . \ln x - \int 1 . dx = x . \ln x - x + c$ //

SORU 27 : $I = \int \ln^2 x . dx$

$\ln^2 x = u \qquad \int 1 . dx = \int dv$

$2 . \ln x . \frac{1}{x} . dx = du \qquad x = v$

$I = x . \ln^2 x - 2 \int \ln x . dx$

$= x . \ln^2 x - 2 (x \ln x - x) + c$ //

SORU 28 : $I_n = \int \ln^n x \, dx = ?$

$\ln^n x = u \qquad \int 1 . dx = \int dv$

$n . \ln^{n-1} x . \frac{1}{x} . dx = du \qquad x = v$

$\Rightarrow I_n = x \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x \, dx$

$I_n = x . \ln^n x - n . I_{n-1}$ //

SORU 29 : $I = \int x^n . \ln x . dx = ?$

LAPTÜ

$\ln x$ $\quad$ x^n

$\ln x = u$ $\qquad$ $\int x^n dx = \int dv$

$\frac{1}{x} dx = du$ $\qquad$ $\frac{x^{n+1}}{n+1} = v$

$$I = \frac{x^{n+1}}{n+1} . \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n dx$$

$$I = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} + c$$

SORU 30 : $I_n = \int x . \ln^n x . dx = ?$

$\ln^n x = u$ $\qquad$ $\int x dx = \int dv$

$n . \ln^{n-1} x . \frac{1}{x} dx = du$ $\qquad$ $\frac{x^2}{2} = v$

$$I_n = \frac{x^2}{2} . \ln^n x - \frac{n}{2} \int x . \ln^{n-1} x . dx$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{x^2}{2} . \ln^n x - \frac{n}{2} . I_{n-1}$$

SORU 31: $I = \int e^x . \cos x . dx = ?$

$$\text{LAPTÜ} \quad \swarrow \cos x \quad \searrow e^x$$

Bu tip iki fonk.nun çarpımında LAPTÜ de yer alan sıra önemli değildir. Normalde

$u = \cos x$ ve $e^x dx = dv$

alarak çözüme gideriz. Fakat burada,

$$\begin{array}{ll} e^x = u & \int \cos x dx = \int dv \\ e^x dx = du & \sin x = v \end{array}$$

alarak çözüme gidelim.

$$I = e^x . \sin x - \int \sin x . e^x dx$$

olup $\int \sin x . e^x dx$ için tekrar kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{array}{ll} e^x = u & \int \sin x dx = \int dv \\ e^x dx = du & -\cos x = v \end{array}$$

$$-\cos x . e^x + \int \cos x . e^x dx$$

olup, yerine yazarsak;

$$I = e^x . \sin x + \cos x . e^x - \underbrace{\int \cos x . e^x dx}_{I}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left[e^x (\sin x + \cos x) \right] + c$$

SORU 32: $I = \int \arctan x \, dx = ?$

$$\int 1 \cdot \arctan x \, dx$$

LAPTÜ

arctanx   1

$\arctan x = u \qquad \int 1 \cdot dx = \int dv$

$\dfrac{dx}{1+x^2} = du \qquad x = v$

$$\Rightarrow I = x \cdot \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

olup,

$$I = x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \,_{//}$$

SORU 33: $I = \int \arcsin x \cdot dx = ?$

$\arcsin x = u \qquad \int 1 \cdot dx = \int dv$

$\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du \qquad x = v$

$$I = x \cdot \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \Rightarrow$$

$1 - x^2 = u$

$-2x dx = du$

dönüşümü ile

$$I = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \,_{//}$$

SORU 34 : $I=\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx=?$

Önce değişken dönüşümü yapalım:

$\arctan x = t$

$x=\tan t$

$dx=(1+\tan^2 t)\,dt$

$\Rightarrow I=\int \frac{e^t.(1+\tan^2 t)}{(1+\tan^2 t)^{3/2}}\,dt=\int \frac{e^t\,dt}{(1+\tan^2 t)^{1/2}}$

$=\int e^t.\cos t\,dt$ elde edilir ve kısmi

integrasyonla çözülür: [Bkz Soru 31]

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[e^{\arctan x}\left(\cos(\arctan x)+\sin(\arctan x)\right)\right]+c$

SORU 35 : $I=\int e^{\arcsin x}.\,dx=?$

Önce değişken dönüşümü yapalım:

$\arcsin x=t$

$x=\sin t$ ve $dx=\cos t\,dt$

$\Rightarrow I=\int e^t.\cos t.\,dt$ ile kısmi integrasyon uygularsak [Soru 31]

$=\frac{1}{2}\left[e^{\arcsin x}\left(\cos(\arcsin x)+\sin(\arcsin x)\right)\right]+c$

SORU 36: $I = \int \sin(\ln x)\, dx = ?$

LAPTÜ

$\sin(\ln x) = u$ $\qquad \int 1.dx = \int dv$

$\frac{1}{x}\cos(\ln x).dx = du$ $\qquad x = v$

$\Rightarrow I = x.\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx$

olup, $\int \cos(\ln x)\,dx$ için tekrar kısmi

integrasyon uygulayalım:

$\cos(\ln x) = u$ $\qquad \int 1.dx = \int dv$

$-\frac{1}{x}\sin(\ln x).dx = du$ $\qquad x = v$

$\Rightarrow \quad x.\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,dx$

ifadesini yerine yazarsak,

$$I = x.\sin(\ln x) - \Big[x\cos(\ln x) - \underbrace{\int \sin(\ln x)\,dx}_{I}\Big]$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}x\left(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right) + c_{\,\text{//}}$$

SORU 37: $I = \int \sec^3 x \, dx = ?$

$I = \int \sec x \cdot \sec^2 x \, dx$ olup, kısmi integrasyon uygularsak,

$\sec x = u$ $\qquad \int \sec^2 x dx = \int dv$

$\sec x \cdot \tan x \, dx = du$ $\qquad \tan x = v$

$\Rightarrow I = \sec x \cdot \tan x - \int \sec x \cdot \tan^2 x \cdot dx$

bulunur.

$\int \sec x \cdot \tan^2 x dx$ integrali için $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ eşitliğini kullanırsak

$$\int \sec x \cdot (\sec^2 x - 1) dx = \int \sec^3 x dx - \int \sec x dx$$

$$\Rightarrow I = \sec x \cdot \tan x - \underbrace{\int \sec^3 x dx}_{I} + \int \sec x dx$$

$$2I = \sec x \cdot \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + c$$

$$I = \frac{1}{2}\left[\sec x \cdot \tan x + \ln|\sec x + \tan x|\right] + c$$

SORU 38: $I = \int \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = ?$

$I = \int x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$ olup, kısmi integrasyon uygularsak,

$x = u \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int dv$

$dx = du \qquad \tan x = v$

$\Rightarrow I = x \cdot \tan x - \int \tan x \cdot dx$

$= x \cdot \tan x + \ln|\cos x| + c$

3) Trigonometrik Fonksiyonların Kuvvet ve Çarpımları

$\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$ Şeklindeki İntegraller

(m ve n pozitif tamsayılar)

SORU 39: $I = \int \sin^5 x \cdot \cos^3 x \, dx = ?$

Kuvvetlerden herhangi biri tek ise,

$I = \int \sin^5 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x \, dx$ ya da $\int \cos^3 x \cdot \sin^4 x \cdot \sin x \, dx$

şeklinde ayırıp değişken dönüşümü uygularız.

Birinci integralden çözüme devam edersek,

$I = \int \sin^5 x \cdot (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x \, dx$

$\sin x = u$
$\cos x \, dx = du$ $\Rightarrow I = \int u^5 (1 - u^2) \, du$

$= \int (u^5 - u^7) \, du = \dfrac{u^6}{6} - \dfrac{u^8}{8} + c$

$= \dfrac{\sin^6 x}{6} - \dfrac{\sin^8 x}{8} + c$ //

SORU40 : $I=\int \sin^4 x . \cos^4 x \, dx = ?$

Kuvvetlerin her ikisi birden çift ise,

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ ve $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

yarım acı formüllerinden yararlanılır

$$I = \int (\sin x . \cos x)^4 dx = \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^4 dx$$

$$= \frac{1}{16} \int \sin^4 2x \, dx = \frac{1}{16} \int \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{64} \int \left(1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x\right) dx$$

$$= \frac{1}{64} \int \left(1 - 2\cos 4x + \frac{1+\cos 8x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{64} \left[x - \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\sin 8x\right] + c \, //$$

SORU 41: $I_m = \int \sin^m x \, dx = ?$

(indirgeme formülü elde edeceğiz)

$\int \sin^{m-1} x \cdot \sin x \, dx$ (Kısmi integrasyon)

$\sin^{m-1} x = u$ $\int \sin x \, dx = \int dv$

$(m-1) \cdot \sin^{m-2} x \cdot \cos x \, dx = du$ $-\cos x = v$

$I_m = -\cos x \cdot \sin^{m-1} x + (m-1) \int \sin^{m-2} x \cdot \cos^2 x \, dx$

$I_m = -\cos x \cdot \sin^{m-1} x + (m-1) \int \sin^{m-2} x \cdot (1 - \sin^2 x) \, dx$

$I_m = -\cos x \cdot \sin^{m-1} x + (m-1) \int \sin^{m-2} x \, dx + (1-m) \int \sin^m x \, dx$

$I_m = -\cos x \cdot \sin^{m-1} x + (m-1) \cdot I_{m-2} + (1-m) I_m$

$\Rightarrow I_m = \frac{1}{m} \left[-\cos x \sin^{m-1} x + (m-1) I_{m-2} \right]$ //

$$\int \sin px \cdot \cos qx \, dx \, , \quad \int \sin px \cdot \sin qx \, dx \, ,$$

$$\int \cos px \cdot \cos qx \, dx$$ Şeklindeki integ.

$p \neq q$ ise,

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$$

dönüşümleri uygulanarak ilgili integraller çözülür.

$\int \tan^m x\, dx$ ve $\int \cot^m x\, dx$ Şeklindeki integraller

SORU 42: $I = \int \tan^3 x\, dx = ?$

$$\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \tan^2 x\, dx = \int [(1+\tan^2 x) - 1]\, dx = \tan x - x + c$$

olduğunu biliyoruz. Bu soruda ise,

$$I = \int \tan x \cdot \tan^2 x\, dx = \int \tan x\, (\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$= \int \tan x \cdot \sec^2 x\, dx - \int \tan x\, dx$$

olup, birinci integralde

$\tan x = u$
$\sec^2 x\, dx = du$

$$= \int u \cdot du - \int \tan x\, dx$$

$$= \frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\cos x| + c$$

SORU 43: $I = \int \tan^4 x \, dx = ?$

$$I = \int \tan^2 x \cdot \tan^2 x \, dx = \int \tan^2 x \cdot (\sec^2 x - 1) \, dx$$

$$= \int \tan^2 x \cdot \sec^2 x \, dx - \int \tan^2 x \, dx$$

$\Downarrow$

$\tan x = u$

$\sec^2 x \, dx = du$

$$\Rightarrow I = \int u^2 \cdot du - \int (\tan^2 x + 1 - 1) \, dx$$

$$I = \frac{u^3}{3} - \int (\tan^2 x + 1) \, dx + \int 1 \, dx$$

$$I = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C$$

SORU 44: $I_m = \int \tan^m x \, dx = ?$

(indirgeme formülü elde edelim)

$m \geq 2$ ise

$$I_m = \int \tan^{m-2} x \cdot \tan^2 x \cdot dx = \int \tan^{m-2} x \cdot (\sec^2 x - 1) dx$$

$$= \int \tan^{m-2} x \cdot \sec^2 x \, dx - \int \tan^{m-2} x \, dx$$

$\Downarrow$

$\tan x = u$

$\sec^2 x dx = du$

$$I_m = \int u^{m-2} du - \int \tan^{m-2} x \, dx$$

$$I_m = \frac{u^{m-1}}{m-1} - I_{m-2}$$

$$I_m = \frac{\tan^{m-1} x}{m-1} - I_{m-2} \; //$$

$\int \sec^m x\, dx$ ve $\int \operatorname{cosec}^m x\, dx$ Şeklindeki İntegraller

SORU 45 $I = \int \sec^4 x\, dx = ?$

$$\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$$

$$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$$

$\int \sec^3 x\, dx$ integrali soru 37 de çözüldü.

olup,

$$I = \int \sec^2 x . \sec^2 x\, dx = \int (1+\tan^2 x) . \sec^2 x\, dx$$

olup, $\tan x = u$ dönüşümü ile

$$\sec^2 x\, dx = du$$

$$\Rightarrow I = \int (1+u^2)\, du = u + \frac{u^3}{3} + c$$

$$= \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + c$$

SORU 46 : $I_m = \int \sec^m x \, dx = ?$

(indirgeme formülü elde edelim)

$m \geq 2$ için

$I_m = \int \sec^{m-2} x \cdot \sec^2 x \, dx$ (Kısmi integrasyon)

$\sec^{m-2} x = u$ $\qquad \int \sec^2 x \, dx = \int dv$

$(m-2) \cdot \sec^{m-3} x \cdot \sec x \cdot \tan x \, dx = du$ $\qquad \tan x = v$

$\Rightarrow I_m = \tan x \cdot \sec^{m-2} x - (m-2) \cdot \int \sec^{m-2} x \cdot \underbrace{\tan^2 x}_{(\sec^2 x - 1)} \, dx$

$(\tan^2 x = \sec^2 x - 1)$

$I_m = \tan x \cdot \sec^{m-2} x - (m-2) \int \sec^m x \, dx + (m-2) \int \sec^{m-2} x \, dx$

$\Rightarrow I_m = \dfrac{1}{m-1} \tan x \cdot \sec^{m-2} x + \dfrac{m-2}{m-1} I_{m-2}$

$\int \tan^m x \cdot \sec^n x \, dx$ Şeklindeki İntegraller

SORU 47: $I = \int \tan^3 x \cdot \sec^4 x \cdot dx = ?$

$$I = \int \tan^2 x \cdot \sec^3 x \cdot \sec x \cdot \tan x \, dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1) \cdot \sec^3 x \cdot \sec x \cdot \tan x \, dx$$

olup, $\sec x = u$ dönüşümü yapalım.

$\sec x \cdot \tan x \, dx = du$

$$\Rightarrow I = \int (u^2 - 1) \cdot u^3 \cdot du = \int (u^5 - u^3) du$$

$$= \frac{u^6}{6} - \frac{u^4}{4} + c = \frac{\sec^6 x}{6} - \frac{\sec^4 x}{4} + c$$

4) Trigonometrik Değişken Değiştirmeler

$\sqrt{a^2-u^2}$ için dönüşüm yapmak

$a>0$ olmak üzere $\sqrt{a^2-u^2}$ için $u = a\sin\theta$

dönüşümü yaptığımızda $|u| \leq a$ kısıtlaması

ile $\theta = \arcsin\frac{u}{a}$ yazabiliriz. Dolayısıyla

$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ olur.

$\Rightarrow \sqrt{a^2-u^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta} = a\cos\theta$ olur.

SORU 48 $I = \int \sqrt{1-x^2}\, dx = ?$

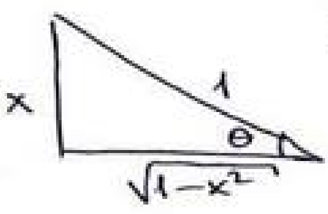
$x = 1.\sin\theta$ dönüşümü yapalım.

$dx = \cos\theta . d\theta$

$$I = \int \sqrt{1-\sin^2\theta}\,.\cos\theta\,.d\theta = \int \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + c$$

olup, dik üçgen yardımıyla



$\sin 2\theta = 2\sin\theta.\cos\theta = 2x\sqrt{1-x^2}$

$\theta = \arcsin x$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) + c$$

SORU 49: $I = \int \sqrt{1-e^{4x}}\, dx = ?$

$e^{2x} = 1.\sin\theta$ dönüşümü yapalım.

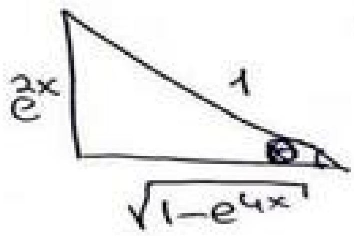
$2.e^{2x}.dx = \cos\theta . d\theta \Rightarrow dx = \dfrac{\cot\theta}{2} d\theta$

$\Rightarrow I = \sqrt{1-\sin^2\theta} . \dfrac{\cot\theta}{2} d\theta$

$= \dfrac{1}{2}\int \dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta} d\theta = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta} d\theta$

$= \dfrac{1}{2}\int (\operatorname{Cosec}\theta - \sin\theta)\, d\theta$

$= \dfrac{1}{2}\left[\ln|\operatorname{Cosec}\theta - \cot\theta| + \cos\theta \right] + c$



$\operatorname{Cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{1}{e^{2x}}$

$\cos\theta = \sqrt{1-e^{4x}}$

$\cot\theta = \dfrac{\sqrt{1-e^{4x}}}{e^{2x}}$

$\Rightarrow I = \dfrac{1}{2}\left[\ln\left| \dfrac{1}{e^{2x}} - \dfrac{\sqrt{1-e^{4x}}}{e^{2x}} \right| + \sqrt{1-e^{4x}} \right] + c$

SORU 50 : $I = \int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^3} dx = ?$

$$I = \int \frac{\sqrt{1-x^4} \cdot x \cdot dx}{x^4} \quad \text{olup,}$$

$x^2 = 1 \cdot \sin\theta$ dönüşümü yapalım.

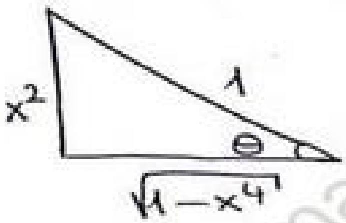
$2x\,dx = \cos\theta \cdot d\theta$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta} \cdot \cos\theta \cdot d\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} d\theta = \frac{1}{2} \int \cot^2\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int (\cot^2\theta + 1 - 1) d\theta = \frac{1}{2} \int (\cot^2\theta + 1) d\theta - \frac{1}{2} \int d\theta$$

$$= -\frac{1}{2} (\operatorname{Cosec}\theta + \theta) + c$$



$\theta = \arcsin x^2$

$\operatorname{Cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{x^2}$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} + \arcsin x^2 \right) + c \quad //$$

$\sqrt{a^2+u^2}$ için dönüşüm yapmak

$a>0$ olmak üzere $\sqrt{a^2+u^2}$ için $u=a.\tan\theta$ dönüşümü yaparsak,

$$\theta = \arctan\frac{u}{a} \quad , -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$$

olmalıdır. Bu durumda,

$$\sqrt{a^2+u^2} = \sqrt{a^2+a^2\tan^2\theta} = a\sec\theta \quad \text{olur.}$$

SORU 51 : $I=\int \frac{dx}{x.(1+x^2)^{3/2}} = ?$

$x=1.\tan\theta$ dönüşümü yapalım

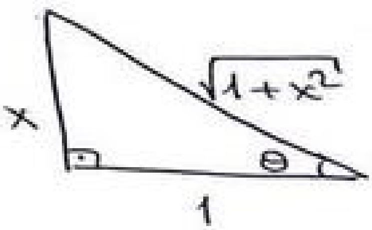
$dx=\sec^2\theta . d\theta$

$$\Rightarrow I=\int \frac{\sec^2\theta \, d\theta}{\tan\theta . \sec^3\theta} = \int \frac{d\theta}{\tan\theta . \sec\theta}$$

$$= \int \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} d\theta = \int \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta} d\theta$$

$$= \int (\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)\, d\theta$$

$$= \ln|\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta| + \cos\theta + c$$



$$\operatorname{Cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$\operatorname{Cot}\theta = \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{Cos}\theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow I = \ln\left| \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \right| + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + c$$

SORU 52: $I = \int e^x \cdot \sqrt{1+e^{2x}} \cdot dx = ?$

$I = \int e^x \cdot \sqrt{1+(e^x)^2} \cdot dx$ olup,

$e^x = u$ dönüşümü yapılırsa,

$e^x dx = du$

$I = \int \sqrt{1+u^2} \cdot du$ elde edilir. Burada,

$u = 1 \tan\theta$ dönüşümü yapalım.

$du = \sec^2\theta . d\theta$

$I = \int \sqrt{1+\tan^2\theta} . \sec^2\theta \, d\theta = \int \sec^3\theta \, d\theta$

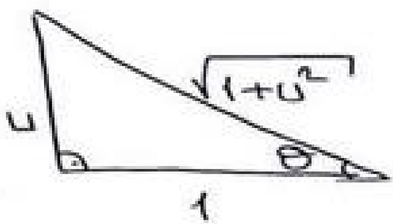
bulunur.

Soru 37 de, kısmi integrasyon yöntemi yardımıyla $\int \sec^3 x \, dx$ integralinin çözümünü yapmıştık. Buradaki sonucu kullanarak

$$I = \frac{1}{2}\left[\sec\theta \cdot \tan\theta + \ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right|\right] + c$$

yazabiliriz.

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \sqrt{1+u^2}$$



$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+u^2} \cdot u + \ln\left|\sqrt{1+u^2} + u\right|\right] + c$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+e^{2x}} \cdot e^x + \ln\left|\sqrt{1+e^{2x}} + e^x\right|\right] + c$$

$\sqrt{u^2-a^2}$ için dönüşüm yapmak

$a>0$ olmak üzere, $\sqrt{u^2-a^2}$ için

$u = a \cdot \sec\theta$ dönüşümü yaparsak,

$|u| \geq a$ olmak üzere

$$\theta = \operatorname{arcsec}\frac{u}{a} \quad , \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

yazarız. Bu durumda,

$$\sqrt{u^2-a^2} = \sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2} = \pm\, a\tan\theta \text{ olur}$$

Eğer $u>a$ ise, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ile $\tan\theta>0$

Eğer $u<-a$ ise, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ ile $\tan\theta<0$

alınmalıdır.

SORU 53 : $x > 2$ için $I = \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^2-4}} = ?$

$x = 2\sec\theta$ dönüşümü yapalım.

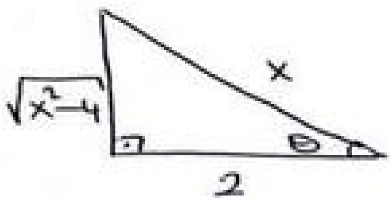
$dx = 2\sec\theta \tan\theta \, d\theta$

$$I = \int \frac{4\sec^2\theta \cdot 2\sec\theta \cdot \tan\theta \cdot d\theta}{2\tan\theta}$$

$= 4\int \sec^3\theta \, d\theta$ olup, bu integralin

çözümü soru 37 de yapıldı. Sonucu kullanırsak

$$= 4 \cdot \frac{1}{2}\left[\sec\theta \cdot \tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|\right] + c$$



$$\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$$

$$\Rightarrow I = 2\left[\frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{x^2-4}}{2} + \ln\left|\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right|\right] + c$$

//

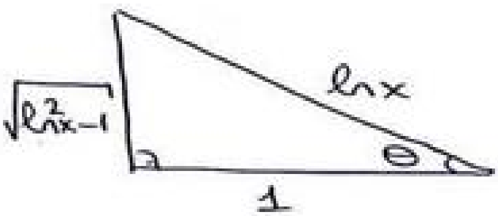
SORU 54: $x>1$ için $I=\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x-1}}=?$

$\ln x=\sec\theta$ dönüşümü yapalım.

$$\frac{1}{x}\,dx=\sec\theta.\tan\theta.d\theta$$

$$I=\int \frac{\sec\theta.\tan\theta.d\theta}{\tan\theta}=\int \sec\theta.d\theta$$

$$=\ln|\sec\theta+\tan\theta|+c$$



$$\tan\theta=\sqrt{\ln^2 x-1}$$

$$\Rightarrow I=\ln\left|\ln x+\sqrt{\ln^2 x-1}\right|+c$$

5) İkinci Derece Polinomları İçeren İntegraller

SORU 55: $I = \int \dfrac{dx}{\sqrt{-15-8x-x^2}} = ?$

$$-15-8x-x^2 = -(x^2+8x+15) = -\left((x+4)^2-1\right)$$

olup, $I = \int \dfrac{dx}{\sqrt{1^2-(x+4)^2}} = \arcsin(x+4) + c$,,

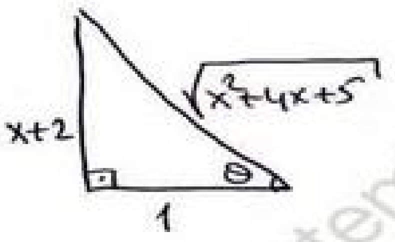
SORU 56: $I = \int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}} = ?$

$I = \int \dfrac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+1^2}} \Rightarrow$ $x+2 = 1.\tan\theta$ dönüşümü ile

$dx = \sec^2\theta . d\theta$

$$I = \int \frac{\sec^2\theta . d\theta}{\sec\theta} = \int \sec\theta . d\theta$$

$$= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + c$$



$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} = \sqrt{x^2+4x+5}$

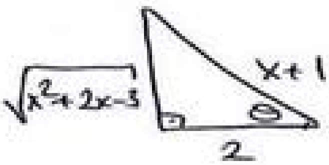
$\Rightarrow I = \ln\left|\sqrt{x^2+4x+5} + x+2\right| + c$,,

SORU 57: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-3}} = ?$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-4}} \Rightarrow$$ $x+1 = 2\sec\theta$ dönüşümü ile $dx = 2\sec\theta . \tan\theta \, d\theta$

$$\Rightarrow I = \int \frac{2\sec\theta . \tan\theta . d\theta}{2 . \tan\theta} = \int \sec\theta \, d\theta$$

$$= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + c$$



$$\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{2}$$

$$\Rightarrow I = \ln\left| \frac{x+1}{2} + \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{2} \right| + c_{//}$$

SORU 58: $I = \int \frac{x\,dx}{x^2+2x+2} = ?$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+2}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx - 2 \int \frac{1 . dx}{x^2+2x+2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx - \int \frac{dx}{(x+1)^2+1}$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+2) - \arctan(x+1) + C_{//}$$

6) Basit Kesirlere Ayırma Tekniği

SORU 59: $I = \int \frac{6x^2-7x-1}{(x-1)(x+1)(x-2)} dx = ?$

Pay ve payda birer polinom olup, payın derecesi paydanın derecesinden küçük olduğundan basit kesirlere ayırma yöntemi uygulanabilir. Paydadaki ifadelerin lineer çarpanlar olduğunu görüyoruz. O halde,

$$\frac{6x^2-7x-1}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

$$\Rightarrow 6x^2-7x-1 = A.(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1).(x+1)$$

olup, $x=1$ için $A=1$

$x=-1$ için $B=2$

$x=2$ için $C=3$ bulunur. (Polinom eşitliği her x değeri için sağlanır. Fakat biz kolaylık olsun diye kökleri alıyoruz.)

$$\Rightarrow I = \int \frac{1}{x-1} dx + 2\int \frac{dx}{x+1} + 3\int \frac{dx}{x-2}$$

$$= \ln|x-1| + 2\ln|x+1| + 3\ln|x-2| + c$$

SORU 60: $I = \int \frac{3x+1}{x^2 \cdot (x^2-4)}\,dx = ?$

Pay ve payda polinom olup, payın derecesi paydanın derecesinden küçük olduğundan basit kesirlere ayırma uygulanabilir. Paydadaki ifadeler lineer çarpan olup, -farklı olarak- x^2 ile tekrarlı lineer çarpan vardır. O halde,

$$\frac{3x+1}{x^2 \cdot (x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}$$

olup, (katsayıları farklı bulalım)

$$3x+1 = 0 \cdot x^3 + 0x^2 + 3x + 1 \equiv (A+C+D)\,x^3 + (B+2C-2D)\,x^2 - 4Ax - 4B$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} A+C+D=0 \\ B+2C-2D=0 \\ -4A=3 \\ -4B=1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A=-3/4 \\ B=-1/4 \\ C=1/2 \\ D=1/4 \end{array}$$ bulunur.

$$\Rightarrow I = -\frac{3}{4}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+2}$$

$$= -\frac{3}{4}\ln|x| + \frac{1}{4}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln|x-2| + \frac{1}{4}\ln|x+2| + c$$

SORU 61 : $I = \int \frac{x}{(x-1)^3} dx = ?$

$$\frac{x}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

$x \equiv A.(x-1)^2 + B(x-1) + C$ olup,

$x=1$ icin $C=1$

$x=0$ icin $B-A=1$ (en kolay degerlerden biri olarak 0 ı sectik)

$x=-1$ icin $B-2A=1$ (" ")

$\Rightarrow$ $A=0$, $B=1$, $C=1$ bulunur.

$$I = \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{dx}{(x-1)^3}$$

$$= -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2} + C_{11}$$

SORU 62: $I = \int \frac{5x^2+3x+4}{(x+1)(x^2+1)} dx = ?$

Pay ve payda polinom olup, payın derecesi paydanın derecesinden küçük olduğundan, basit kesirlere ayırma uygulanabilir. Bu soruda farklı olarak, paydada $x+1$ lineer çarpanına ilave olarak x^2+1 şeklinde ikinci dereceden bir çarpan var.

O halde,

$$\frac{5x^2+3x+4}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$5x^2+3x+4 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1)$$

$x=-1$ için $A=3$

$x=0$ için $C=1$

$x=1$ için $B=2$ bulunur. (0 ve 1 değerlerini keyfi seçtik.)

$$\Rightarrow I = 3\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{2x+1}{x^2+1} dx$$

$$= 3\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= 3 \ln|x+1| + \ln(x^2+1) + \arctan x + C$$

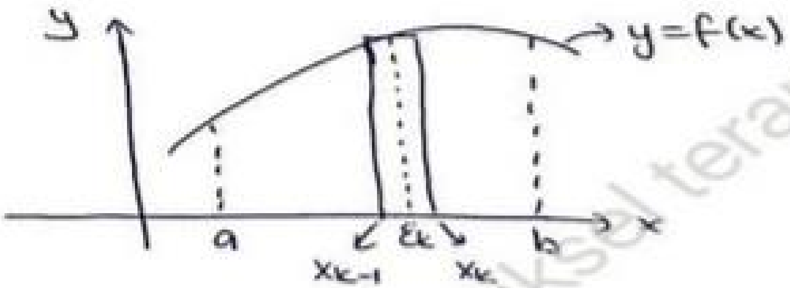
BELİRLİ İNTEGRALİN UYGULAMALARI

Alan Hesabı

Eğer f, bir [a,b] aralığında tanımlanmış negatif olmayan sürekli bir fonksiyon ise, $x=a$, $x=b$ doğruları ve f nin grafiği ile sınırlanmış Ω bölgesinin alanı

$$A(\Omega) = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k).\Delta x_k$$

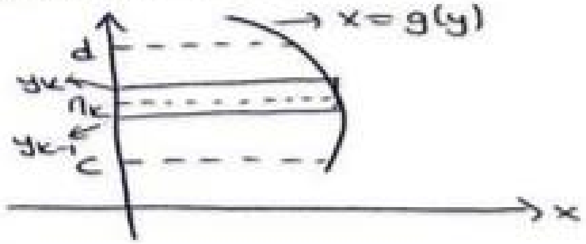
formülü ile bulunur.



Benzer şekilde, eğer g, bir $[c,d]$ aralığında tanımlanmış negatif olmayan sürekli bir fonksiyon ise, $y=c$, $y=d$ doğruları ve g nin grafiği ile sınırlanmış $\mathcal{R}$ bölgesinin alanı

$$A(\mathcal{R}) = \int_c^d g(y)\, dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g(\eta_k)\, \Delta y_k$$

formülü ile bulunur.



İki Eğri Arasındaki Alan

Eğer f ve g, bir $[a,b]$ aralığında tanımlanmış sürekli iki fonk. ve her $x \in [a,b]$ için $g(x) \le f(x)$ ise, $x=a$, $x=b$ doğruları ve f, g fonksiyonlarının grafikleri ile sınırlanmış $\mathcal{R}$ bölgesinin alanı

$$A(\mathcal{R}) = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

Dikkat: Alan hesabı yapılırken aşağıdaki aşamalara dikkat etmeliyiz.

1) Verilen fonksiyonların (eğrilerin) grafiklerini doğru şekilde çizmeliyiz.

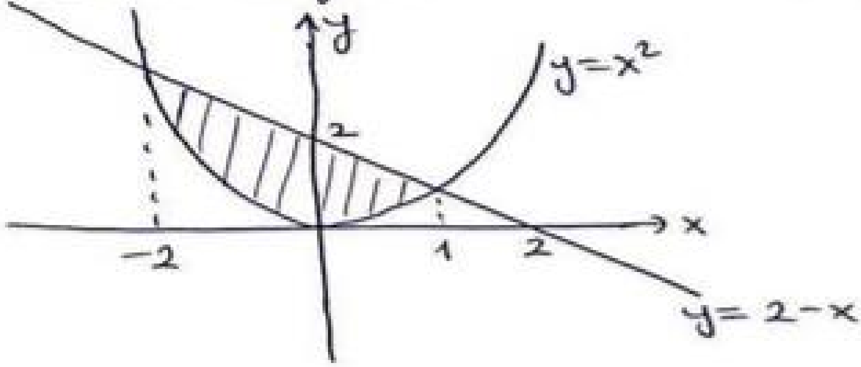
Bu kısımda özellikle doğru, parabol, çember, hiperbol gibi grafiklerde ekşiğimiz bulunmamalıdır. Aynı şekilde, temel düzeyde logaritmik, üstel, trigonometrik fonksiyonların grafiklerini de bilmeliyiz.

2) Bizden istenen eğriler arasında kalan bölgenin tespitini doğru şekilde yapmalıyız.

3) Alanı verecek belirli integrali doğru şekilde yazmalıyız.

4) Belirli integrali doğru şekilde çözmeliyiz.

SORU 1: $y = x^2$ eğrisi ve $y = 2 - x$ doğrusu ile sınırlı bölgenin alanını hesaplayınız.



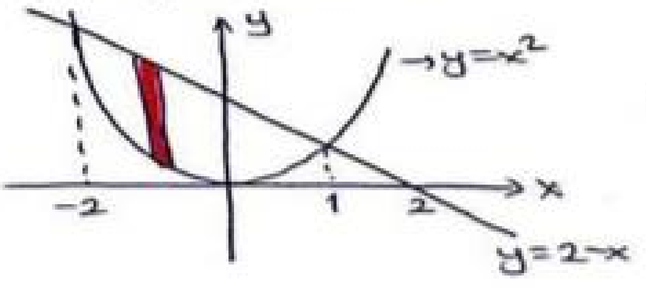
$x^2 = 2 - x$

$x^2 + x - 2 = 0$

$x = 1$

$x = -2$

I. Yol: Bu bölgeyi x–e göre hesaplamak istersek, bölge içinde x–eksenine dik dikdörtgen şeritler alırız. Bölgenin x–e göre düzgün bölge olup olmadığını kontrol ederiz.



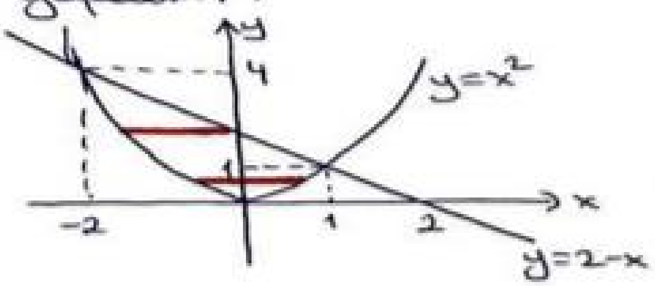
Gerçekten aldığımız dikdörtgen şeridi, x–e göre uç noktalar olan −2 den +1 noktasına kadar gezdirdiğimizde, dikdörtgen şeriden hep $y = 2 - x$ doğrusundan $y = x^2$ parabolüne değdiğini görürüz. O halde,

$$A = \int_{-2}^{1} (2-x-x^2)\,dx$$ formülüne ulaşırız.

Bu formülde, $(2-x)-x^2$ ifadesini dikdörtgenlerin boyu ve dx ifadesini eni olarak düşünebilirsiniz.

$$\Rightarrow A = \int_{-2}^{1} (2-x-x^2)\,dx = 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^{1} = 9/2$$

II. Yol: Benzer şekilde, y'ye göre çözüm yapalım:



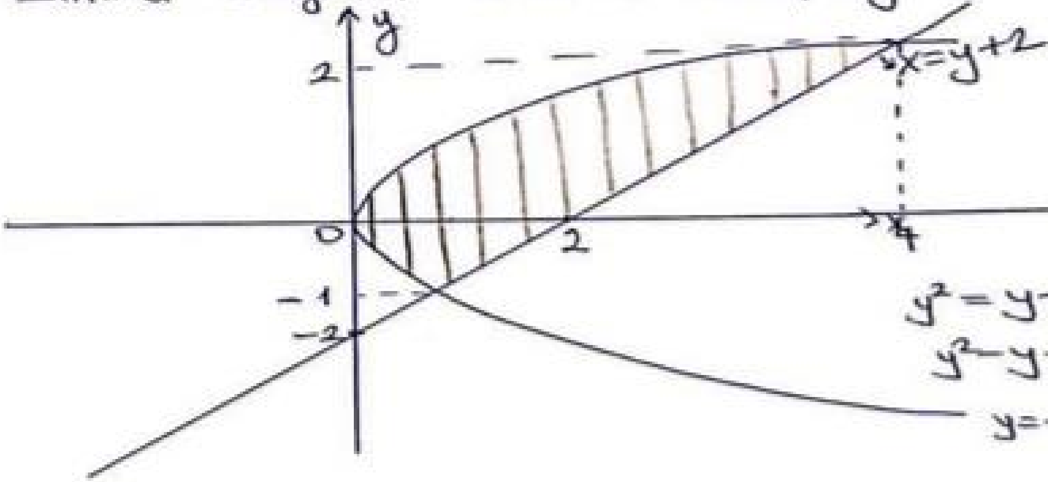
y-eksenine dik şeritler aldığımızda, bölgenin y'ye göre iki parçadan oluştuğunu görüyoruz.

$$A = \int_{0}^{1} \left[\sqrt{y} - (-\sqrt{y})\right] dy + \int_{1}^{4} \left[2-y-(-\sqrt{y})\right] dy$$

$$= \frac{4}{3} y^{3/2} \Big|_{0}^{1} + \left[2y - \frac{y^2}{2} + \frac{2}{3} y^{3/2}\right] \Big|_{1}^{4}$$

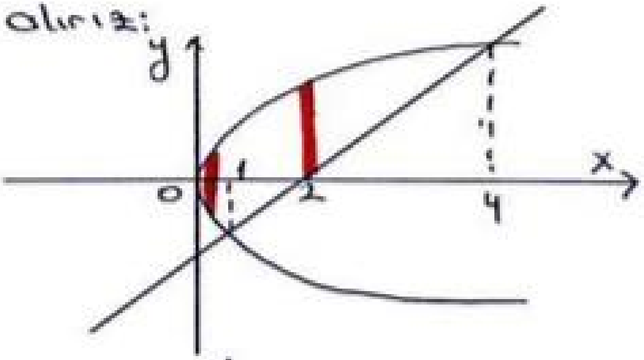
$$= 9/2$$

SORU 2: $x = y^2$ eğrisi ve $x = y+2$ doğrusu ile sınırlı bölgenin alanını hesaplayınız.



$$y^2 = y+2$$
$$y^2 - y - 2 = 0$$
$$y=-1 \ , \ y=2$$

I. Yol: Bölgeyi x-e göre hesaplamak istersek, bölge içinde x-eksenine dik dikdörtgen şeritler alırız:



Anlıyoruz ki bölge, x-e göre iki parçadan oluşuyor.

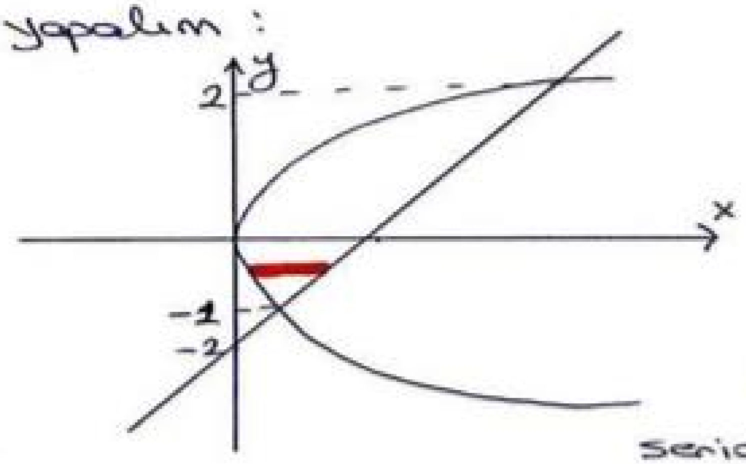
$$A = \int_0^1 \left[\sqrt{x} - (-\sqrt{x})\right] dx + \int_1^4 \left[\sqrt{x} - (x-2)\right] dx$$

$$\Rightarrow A = \int_0^1 2\sqrt{x}\,dx + \int_1^4 (\sqrt{x} - x + 2)\,dx$$

$$= \frac{4}{3} x^{3/2}\Big|_0^1 + \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^4$$

$$= \frac{9}{2}$$

II. Yol: Benzer şekilde y-ye göre çözüm yapalım:



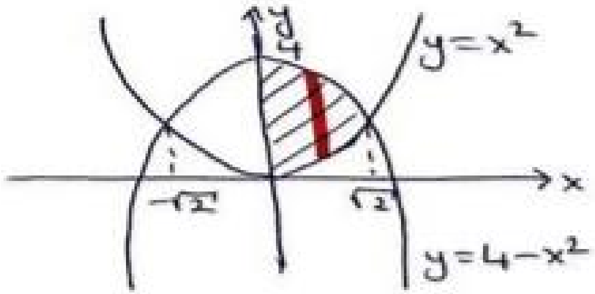
Bölge içinde y-eksenine dik dikdörtgen şeritler alalım. Dikdörtgen şeridi, y-ye göre uç noktalar olan -1 den 2 ye kadar gezdirdiğimizde, şeridin hep $y=x-2$ doğrusundan $x=y^2$ parabolüne değiştiğini görürüz.

O halde,

$$A = \int_{-1}^{2} (y+2-y^2)\,dy = \frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^{2}$$

$$= \frac{9}{2}$$

SORU 3: $y = x^2$, $y = 4 - x^2$ eğrileri ve y-ekseni ile oluşturulan bölgenin birinci bölgede kalan kısmının alanını hesaplayınız.



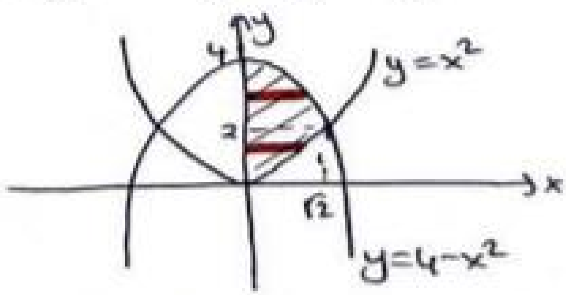
$4 - x^2 = x^2$

ile $x = \mp\sqrt{2}$

I. yol: x'e göre hesap yaparsak (üstteki gibi x-eksenine dik bir şerit alırız)

$$A = \int_0^{\sqrt{2}} (4 - x^2 - x^2)\,dx = 4x - \frac{2x^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

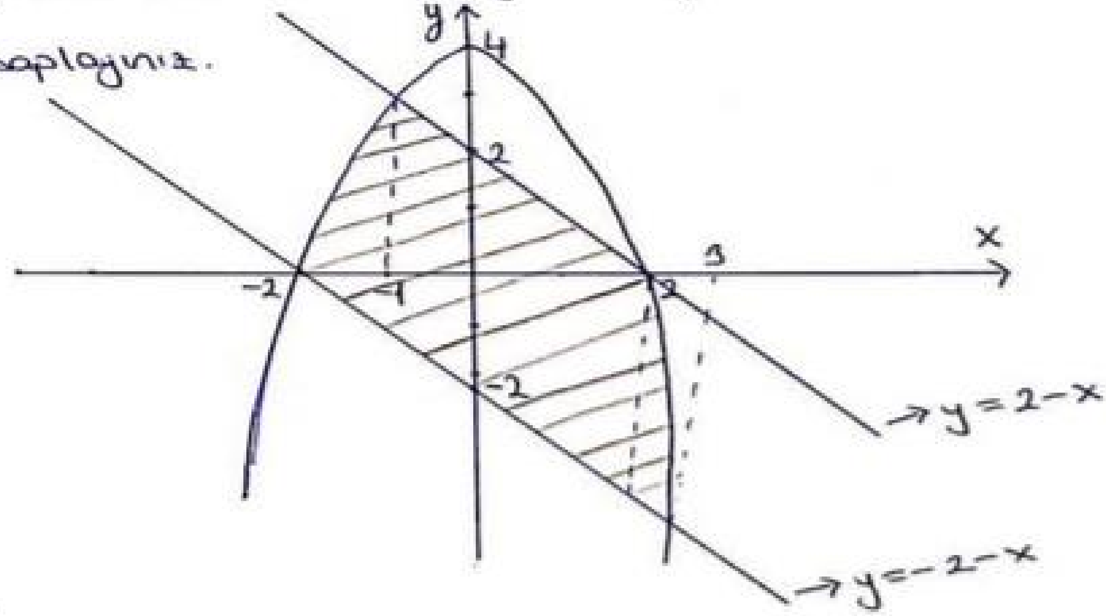
II. yol: y'ye göre hesap yaparsak,



y-eksenine dik şeritle aldığımızda bölgenin iki parçadan oluştuğunu anlıyoruz.

$$A = \int_0^2 (\sqrt{y} - 0)\,dy + \int_2^4 (\sqrt{4-y} - 0)\,dy = \frac{2}{3}y^{3/2}\Big|_0^2 +$$
$$+ (-1)\cdot\frac{2}{3}(4-y)^{3/2}\Big|_2^4 = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

SORU 4: $y=4-x^2$ eğrisinin $y=2-x$, $y=-2-x$ doğruları ile oluşturduğu bölgenin alanını hesaplayınız.



I. Yol:

İstenen bölgenin alanını x-e göre hesaplayalım:

Alan hesabı x-e göre üç bölgeden oluşmaktadır.

$$\Rightarrow A=\int_{-2}^{-1}\left[4-x^2-(-2-x)\right]dx+\int_{-1}^{2}\left[2-x-(-2-x)\right]dx$$

$$+\int_{2}^{3}\left[4-x^2-(-2-x)\right]dx$$

olup, integral hesabına geçersek,

$$A = \left[6x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]\Big|_{-2}^{-1} + 4x\Big|_{-1}^{2} +$$

$$+\left[6x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]\Big|_{2}^{3}$$

$$= \frac{49}{3} \,//$$

II. Yol: Bölgenin alanını y-ye göre hesaplamak istersek:

$$A = \int_{-5}^{0}\left[\sqrt{4-y} - (-2-y)\right] dy + \int_{0}^{3}\left[2-y-(-\sqrt{4-y})\right] dy$$

$$= \int_{-5}^{0}\sqrt{4-y}\, dy + \left[2y + \frac{y^2}{2}\right]_{-5}^{0} + \left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_{0}^{3} +$$

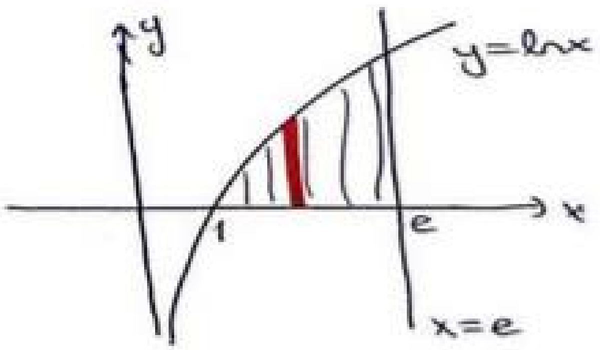
$$+ \int_{0}^{3}\sqrt{4-y}\, dy$$

$$= \frac{49}{3} \,//$$

Not: $\int \sqrt{4-y}\, dy$ integralinin çözümü için $4-y=t$ dönüşümü uygulayabilirsiniz.//

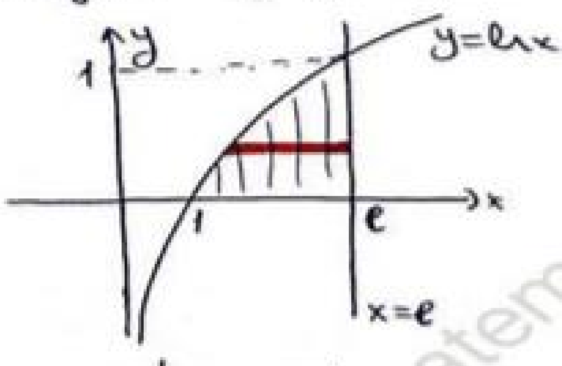
SORU 5: $y = \ln x$, $x = e$, x_ekseni arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

I. yol: x'e göre hesaplarsak:



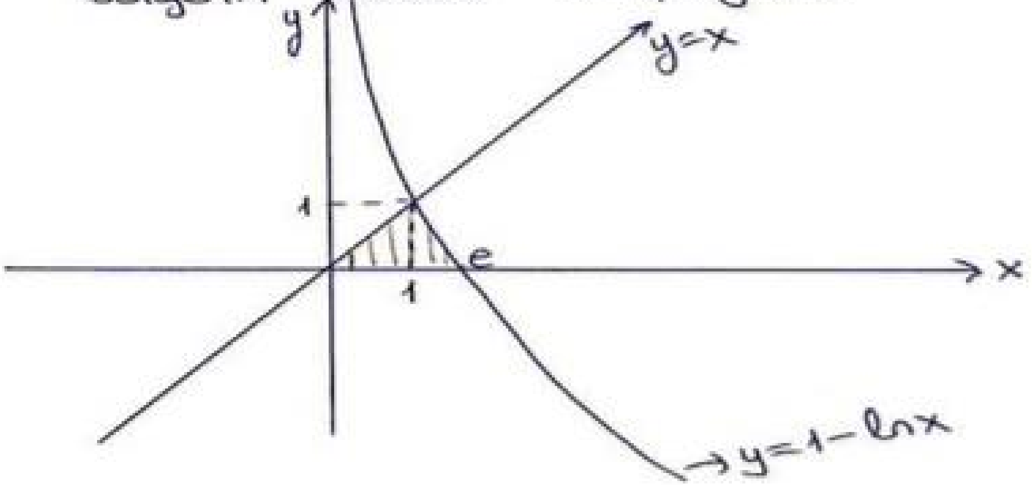
$$A = \int_1^e (\ln x - 0)\,dx = x\ln x - x \Big|_1^e = 1$$

II. yol: y'ye göre hesaplarsak:



$$A = \int_0^1 (e - e^y)\,dy = e \cdot y - e^y \Big|_0^1 = 1$$

SORU6: $y=1-\ln x$ eğrisi ve $y=x$ doğrusunun x_ekseni ile oluşturduğu bölgenin alanını hesaplayınız.



I. Yol:

$$A=\underbrace{\int_0^1 (x-0)\,dx}_{\text{üçgenin alanı}}+\int_1^e (1-\ln x-0)\,dx$$

$$\rightarrow \quad A=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+\left[x-x\ln x+x\right]\Big|_1^e$$

$$=e-\frac{3}{2}$$

Not: $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c$ (Kısmi integrasyon ile görülebilir)

II. Yol:

$$A = \int_0^1 (e^{1-y} - y)\,dy$$

$$= \left[-e^{1-y} - \frac{y^2}{2} \right] \Big|_0^1$$

$$= e - \frac{3}{2}$$

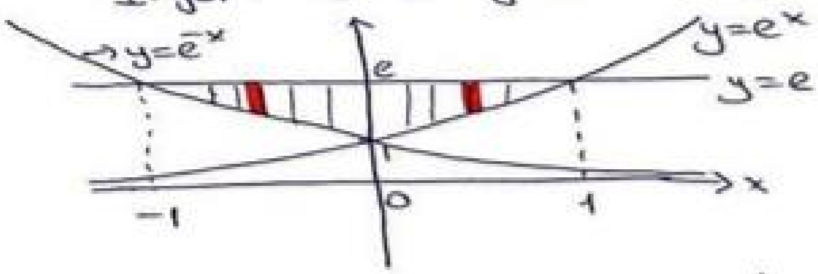
Not: y-ye göre bölge tek parçadan düşmaktadır.

Not: $y = 1 - \ln x \rightarrow \ln x = 1 - y \rightarrow x = e^{1-y}$

Not: $\int e^{1-y}\,dy = -e^{1-y} + c$

SORU 7: $y=e^{x}$ ve $y=e^{-x}$ eğrilerinin $y=e$ doğrusu ile oluşturdukları bölgenin alanını hesaplayınız.

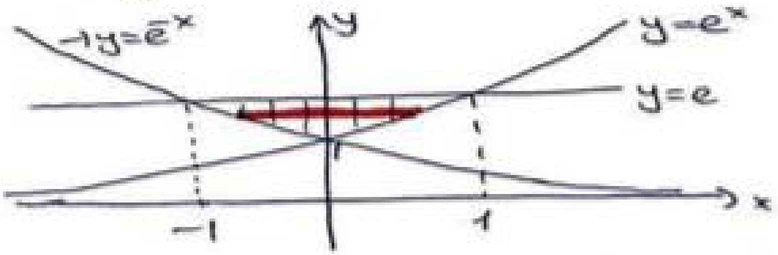
I. yol: x'e göre hesaplarsak:



$$A=\int_{-1}^{0}(e-e^{-x})\,dx+\int_{0}^{1}(e-e^{x})\,dx=$$

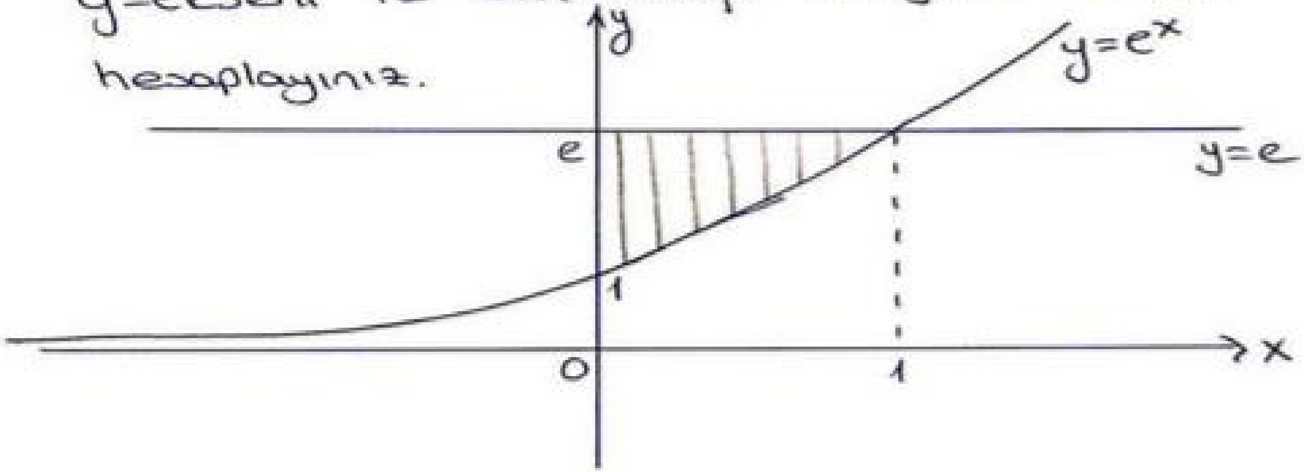
$$=\left[ex+e^{-x}\right]\Big|_{-1}^{0}+\left[ex-e^{x}\right]\Big|_{0}^{1}=2$$

II. yol: y'ye göre hesaplarsak (



$$A=\int_{1}^{e}\left[\ln y-(-\ln y)\right]dy=2\left[y\ln y-y\right]\Big|_{1}^{e}=2$$

SORU 8: $y=e^x$ eğrisi ve $y=e$ doğrusunun y-ekseni ile oluşturduğu bölgenin alanını hesaplayınız.



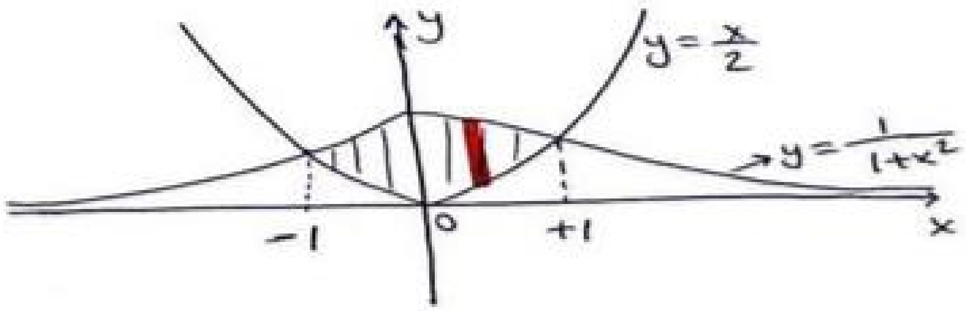
I. Yol: Bölgenin alanını x-e göre hesaplarsak:

$$A=\int_0^1 (e-e^x)\,dx = (ex-e^x)\Big|_0^1 = 1$$

II. Yol: Bölgenin alanını y-ye göre hesaplarsak:

$$A=\int_1^e (\ln y-0)\,dy = (y\ln y - y)\Big|_1^e = 1$$

SORU 9: $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ ve $y = \dfrac{x^2}{2}$ eğrileri tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.



Bölge y'e göre simetrik olduğundan, x'e göre alanı hesaplarken ;

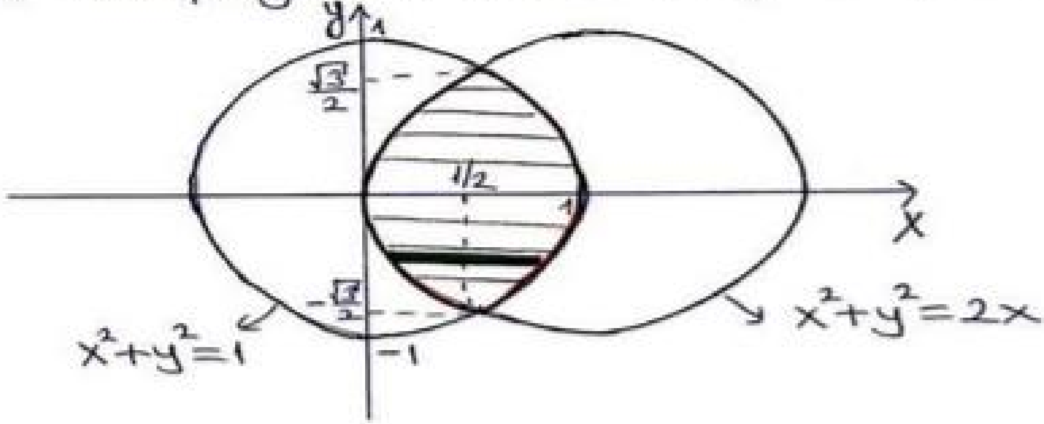
$$\frac{A}{2} = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx$$

şeklinde formülü yazabiliriz.

$$\Rightarrow \frac{A}{2} = \left[\arctan x - \frac{x^3}{6} \right] \Bigg|_0^1$$

$$\frac{A}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} \Rightarrow A = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$$

SORU 10 : $x^2+y^2=1$ ve $x^2+y^2=2x$ çemberleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız. (Sadece integrali yazınız)



Verilen bölgenin alanını veren integrali y-ye göre yazalım.

$$A=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left[\sqrt{1-y^2}-\left(1-\sqrt{1-y^2}\right)\right]dy \;//$$

Not: $x^2+y^2=1 \rightarrow x^2=1-y^2 \rightarrow x=\mp\sqrt{1-y^2}$

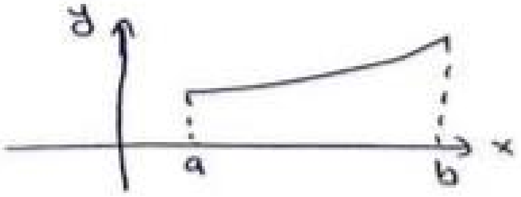
$x^2+y^2=2x \rightarrow (x-1)^2+y^2=1 \rightarrow x=1\mp\sqrt{1-y^2}$

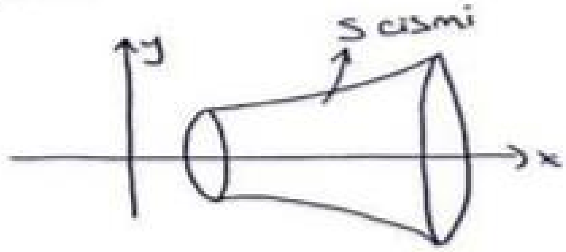
Hacim Hesabı

Disk Yöntemi

Kabul edelim ki f, [a,b] de negatif olmayan sürekli bir fonksiyondur. Eğer f nın grafiği ve x-ekseni ile sınırlanmış bölgeyi x-ekseni etrafında döndürürsek, oluşan dönel cismin hacmi

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 . dx$$





S cismi; S nın x deki her bir dik kesiti, f(x) yarıçaplı bir dairesel disktir.

Benzer şekilde, kabul edelim ki $x = \varphi(y)$, bir [c,d] aralığında negatif olmayan sürekli bir fonksiyondur. Eğer y-ekseni ve $x = \varphi(y)$

fonksiyonunun grafiği ile sınırlanmış bölge, y-ekseni etrafında döndürülürse, meydana gelen dönel cismin hacmi

$$V = \pi \int_c^d [\varphi(y)]^2 \cdot dy$$

Pul Tekniği

Her $x \in [a,b]$ için $0 < f_1(x) \le f_2(x)$ olmak üzere, $y = f_1(x)$ ve $y = f_2(x)$ eğrileri ile sınırlı bölgenin, x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi

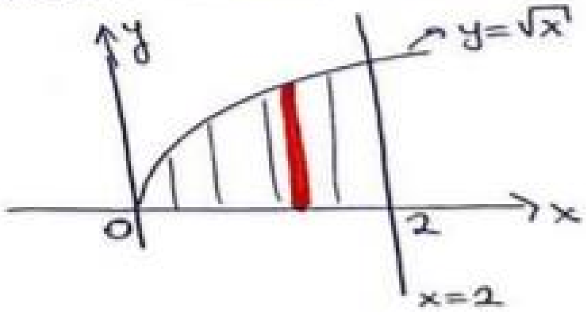
$$V = \pi \int_a^b \left\{ [f_2(x)]^2 - [f_1(x)]^2 \right\} \cdot dx$$

Her $y \in [c,d]$ için $0 < g_1(y) \le g_2(y)$ olmak üzere, $x = g_1(y)$ ve $x = g_2(y)$ eğrileri ile sınırlı bölge, y-ekseni etrafında döndürülürse meydana gelen cismin hacmi

$$V = \pi \int_c^d \left\{ [g_2(y)]^2 - [g_1(y)]^2 \right\} dy$$

SORU 11: $y=\sqrt{x}$ parabolü, x-ekseni ve $x=2$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin

a) x-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmi.



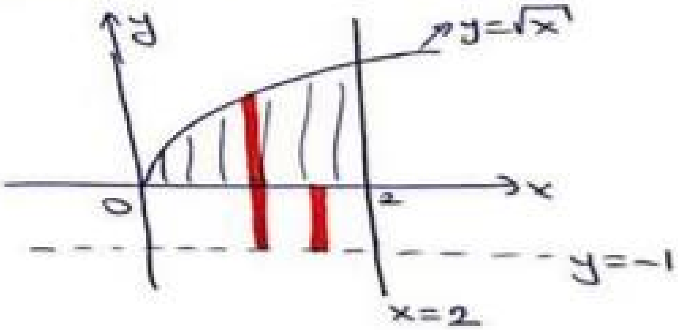
$$V=\pi\int_0^2(\sqrt{x}-0)^2\,dx$$

$$=\pi\int_0^2 x\,dx$$

$$\Rightarrow V=\pi\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=2\pi$$

Dikkat: Disk yönteminin çalışma esası, tespit edilen bölge içinde dönme eksenine dik olan şeritler almaktır. Aynı alan hesabında yaptığımız gibi, önce bölgenin düzgün bölge olup olmadığı kontrol edilir. İlave olarak bu yöntemde bölge ile dönme ekseni arasında boşlukta bir bölge var mı kontrol edilir. Varsa pul tekniği kullanılarak hesap yapılır.

b) $y=-1$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi.



Dönme eksenine dik bir dikdörtgen şerit alındığında 0'dan 2'ye kadar şeridin hep aynı eğrilere değdiğini görüyoruz. Yani bölge düzgündür. Ayrıca $y=-1$ etrafında döndürdüğümüzden, arada bir boşluk bölge kaldığını anlıyoruz. Bu bize pul tekniğini gösteriyor. Pul tekniğini, disk yönteminden ayrı bir teknik olarak algılamamak gerekir. Mantığı şudur: dönme eksenine kadar olan tüm bölgeyi dönme ekseni etrafında döndürüp, sonra boşluktaki bölgeyi döndürüp çıkarıyoruz.

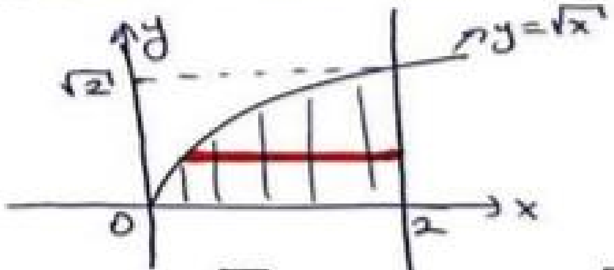
$$\Rightarrow V = \pi\int_0^2 \left[\sqrt{x} - (-1)\right]^2 dx - \pi\int_0^2 (0-(-1))^2 . dx$$

$$= \pi\int_0^2 (x + 2\sqrt{x} + 1)\, dx - \pi\int_0^2 1 . dx$$

$$= \pi\left[\frac{x^2}{2} + 4\sqrt{x} + x\right]\Big|_0^2 - \pi\, x\Big|_0^2 = \frac{12+8\sqrt{2}}{3}\pi_4$$

Not: Boşluktaki bölgeyi döndürdüğümüzde elde edilen cisim bir silindir olacaktır. İstenirse belirli integralle değil de, silindirin hacim hesabıyla da çözüm yapılabilir.

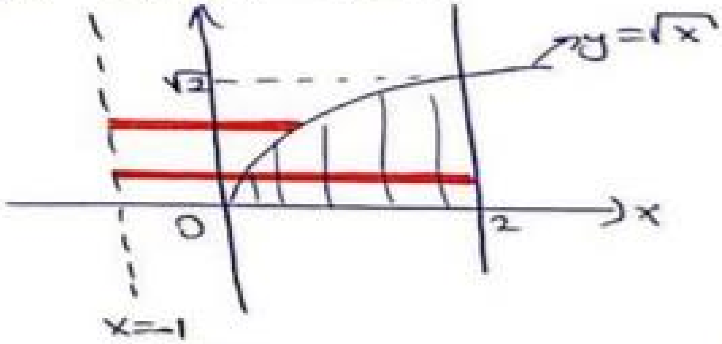
c) $x=2$ doğrusu etrafında döndürüldüğünde oluşan cismin hacmi.



$$V = \pi\int_0^{\sqrt{2}} (2-y^2)^2 dy = \pi\int_0^{\sqrt{2}} (4 - 4y^2 + y^4)\, dy$$

$$= \pi\left[4y - \frac{4}{3}y^3 + \frac{y^5}{5}\right]\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{32\sqrt{2}}{15}\pi\, u$$

d) $x=-1$ doğrusu etrafında döndürüldüğünde oluşan cismin hacmi



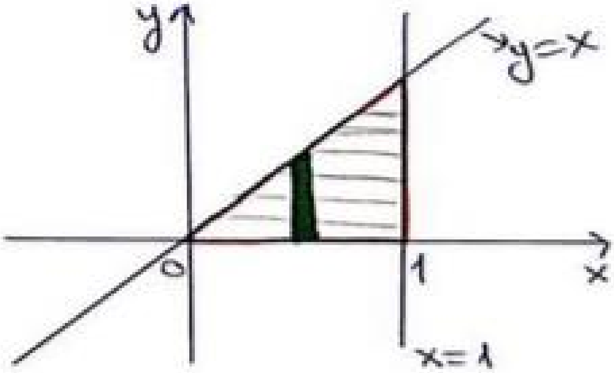
$$V=\pi\int_0^{\sqrt{2}}(2-(-1))^2\,dy-\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left[y^2-(-1)\right]^2dy$$

$$=\pi\cdot 9y\Big|_0^{\sqrt{2}}-\pi\cdot\left[\frac{y^5}{5}+\frac{2}{3}y^3+y\right]\Big|_0^{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow V=\frac{76\sqrt{2}}{15}\pi$$

SORU 12: x_ekseni , $y=x$ ve $x=1$ doğruları ile sınırlı bölgenin

a) x_ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi



$$V=\pi\int_0^1 (x-0)^2\,dx$$

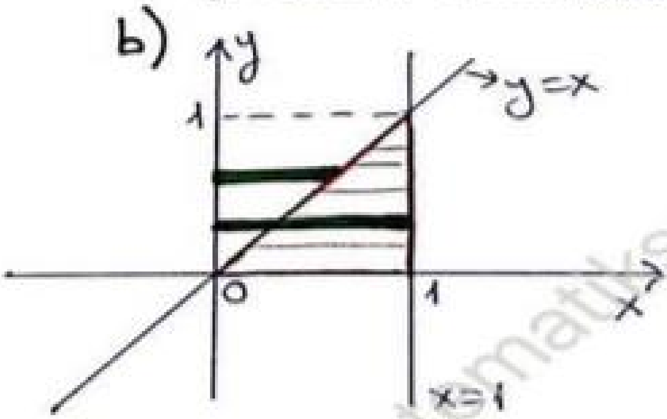
$$=\pi\int_0^1 x^2\,dx$$

$$=\pi\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1$$

$$\rightarrow V=\frac{\pi}{3}$$

y-ekseni etrafında;

b)

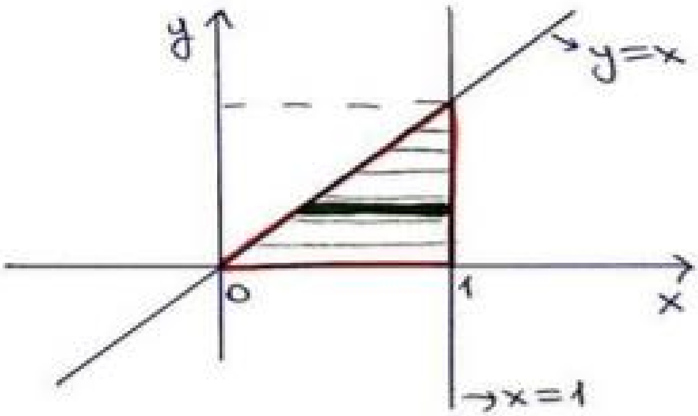


$$V=\pi\int_0^1 (1-0)^2\,dy-\pi\int_0^1 (y-0)^2\,dy$$

$$=\pi\, y\Big|_0^1-\pi\,\frac{y^3}{3}\Big|_0^1$$

$$\rightarrow V=\frac{2\pi}{3}$$

c) $x=1$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi



$$V = \pi \int_0^1 (1-y)^2 \, dy$$

$$= \pi \int_0^1 (1-2y+y^2) \, dy$$

$$= \pi \left[y - y^2 + \frac{y^3}{3} \right] \Big|_0^1$$

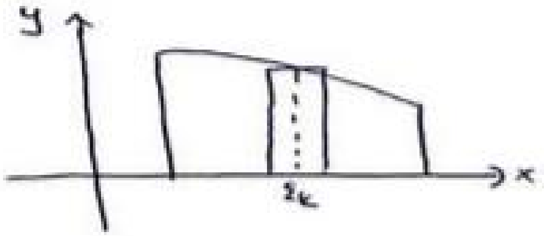
$$\to V = \frac{\pi}{3} \, //$$

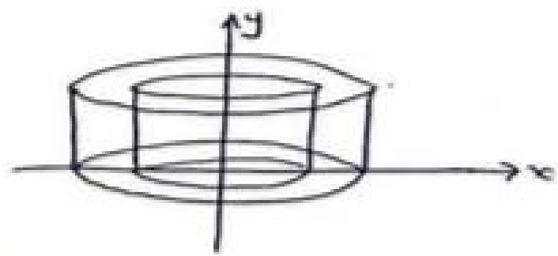
Kabuk Yöntemi

Kabul edelim ki f, [a,b] de tanımlı, negatif olmayan sürekli bir fonk dur. $y=f(x)$ eğrisi, $x=a$ ile $x=b$ doğruları ve x-ekseni ile oluşturulmuş bölgenin, y-ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen dönel cismin hacmi

$$V = 2\pi \int_a^b x.f(x)\,dx$$

ile bulunur.





Silindirik bir tabaka meydana gelir.

Eğer f ve g fonk.ları, bir [a,b] de sürekli ve her $x \in [a,b]$ için $f(x) \geq g(x)$ ise, bu fonk.ların eğrileri ve $x=a$, $x=b$ doğruları ile oluşturulmuş bölge, y-ekseni etrafında döndürüldüğünde, oluşan cismin hacmi

$$V = 2\pi \int_a^b x.[f(x) - g(x)].dx$$

Not: Kabuk yöntemi, benzer şekilde, x-ekseni etrafında döndürülmüş cisimlerin hacimlerini hesaplamada da kullanılır: Eğer φ ve ψ fonksiyonları, bir $[c,d]$ kapalı aralığında sürekli ve her $y \in [c,d]$ için $\varphi(y) \leq \psi(y)$ ise, bu fonksiyonların eğrileri ve $y=c$, $y=d$ doğruları ile oluşturulmuş bölge, x-ekseni etrafında döndürüldüğünde, meydana gelen cismin hacmi

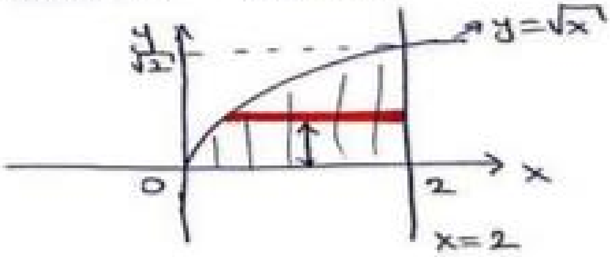
$$V = 2\pi \int_c^d y.\left[\psi(y) - \varphi(y)\right].\, dy$$

Dikkat: Kabuk yönteminin çalışma esası, tespit edilen bölge içersinde dönme eksenine paralel dikdörtgensel şeritler almaktır. Bu yöntemde boşlukta bölge diye bir kavram yoktur.

Not: Kabuk yöntemini daha iyi anlayabilmek için, disk yöntemi ile çözdüğümüz soru 11'i bir de kabuk yöntemi ile çözelim.

SORU 12: $y=\sqrt{x}$ parabolü, x-ekseni ve $x=2$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin

a) x-ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen cismin hacmi



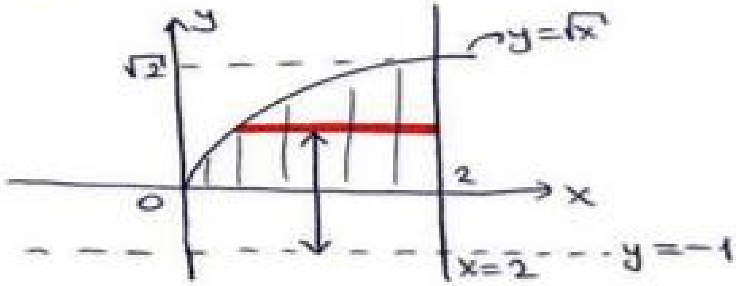
Kabuk yönteminde, bölge içersinde dönme eksenine paralel bir şerit alıyoruz. Bölge içersinde alt sınır 0 dan üst sınır $\sqrt{2}$ ye kadar bu şeridi kaydırdığımızda, bölgenin düzgün bölge olduğunu anlıyoruz. İntegral hesabını ise kabaca;

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (\text{şeritlerin dönme eksenine olan uzaklığı}) \times (\text{şeritlerin uzunluğu}) \times dy$$

$$\Rightarrow V = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} y.(2-y^2).dy = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (2y-y^3)dy$$

$$= 2\pi \left[y^2 - \frac{y^4}{4} \right]\Big|_0^{\sqrt{2}} = 2\pi$$

b) $y=-1$ doğrusu etrafında dönmesiyle elde edilen cismin hacmi

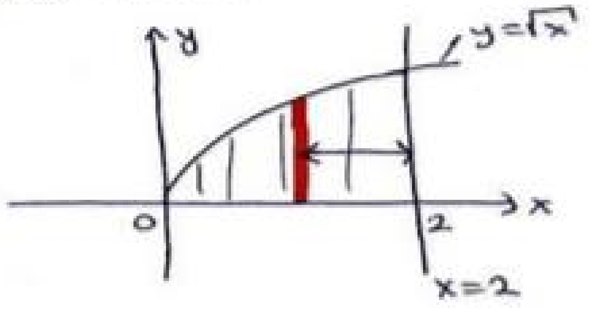


$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} [y-(-1)] \cdot (2-y^2)\, dy$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (2y - y^3 + 2 - y^2)\, dy$$

$$= 2\pi \left[y^2 - \frac{y^4}{4} + 2y - \frac{y^3}{3} \right]\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{6+8\sqrt{2}}{3}$$

c) $x=2$ doğrusu etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmi.

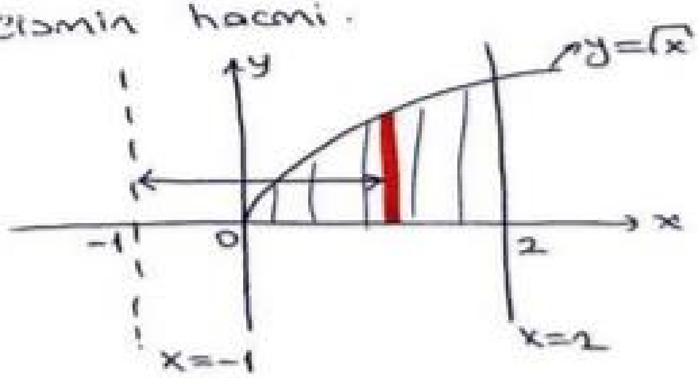


$$V = 2\pi \int_0^2 (2-x).\sqrt{x}.dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 \left(2\sqrt{x} - x^{3/2}\right) dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{4}{3} x^{3/2} - \frac{2}{5} x^{5/2} \right] \Big|_0^2 = \frac{32\sqrt{2}}{15} \pi$$

d) $x=-1$ doğrusu etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmi.



$$V = 2\pi \int_0^2 (x+1).(\sqrt{x}-0) dx$$

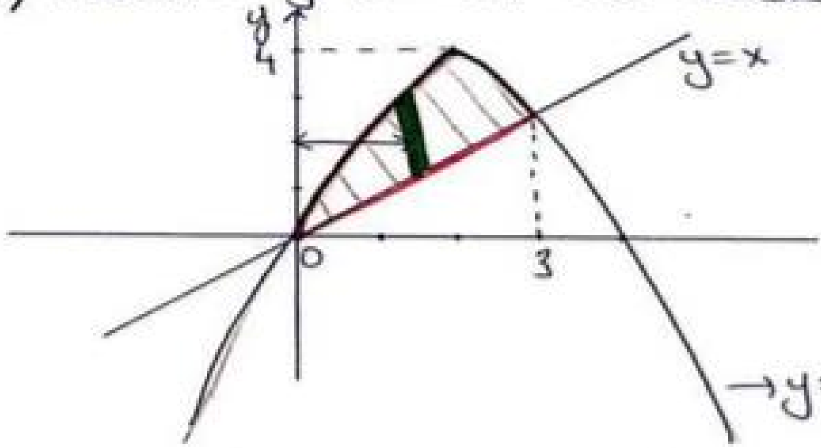
$$= 2\pi \int_0^2 \left(x^{3/2} + \sqrt{x}\right) dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{2}{5} x^{5/2} + \frac{2}{3} x^{3/2} \right] \Big|_0^2$$

$$= \frac{88\sqrt{2}}{15}\pi$$

SORU 13 : $y=4x-x^2$ parabolü ile $y=x$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin, y-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmini

a) Kabuk yöntemini kullanarak hesaplayınız.



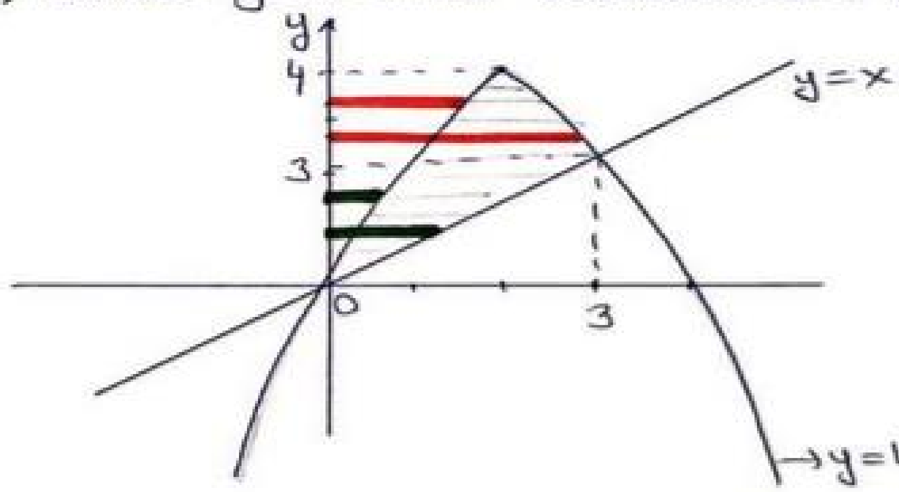
$$4x-x^2=x$$
$$x^2-3x=0$$
$$x=0 \quad x=3$$

$$V=2\pi\int_0^3 (x-0).\left[4x-x^2-x\right]dx$$

$$=2\pi\int_0^3 (3x^2-x^3)\,dx = 2\pi\left[x^3-\frac{x^4}{4}\right]\Bigg|_0^3$$

$$\rightarrow V=\frac{27\pi}{2} \,//$$

b) Disk yöntemini kullanarak hesaplayınız.



$y=4x-x^2$

$x^2-4x+y=0$

$(x-2)^2=4-y$

$x_{1,2}=2\mp\sqrt{4-y}$ (parabolün sağ ve sol kanadı)

$$V=\pi\int_0^3 (y-0)^2\,dy-\pi\int_0^3\left[2-\sqrt{4-y}-0\right]^2 dy$$

$$+\pi\int_3^4\left(2+\sqrt{4-y}-0\right)^2 dy-\pi\int_3^4\left(2-\sqrt{4-y}-0\right)^2 dy$$

$$=\pi\int_0^3 y^2\,dy-\pi\int_0^3\left(4-2\sqrt{4-y}+4-y\right)dy$$

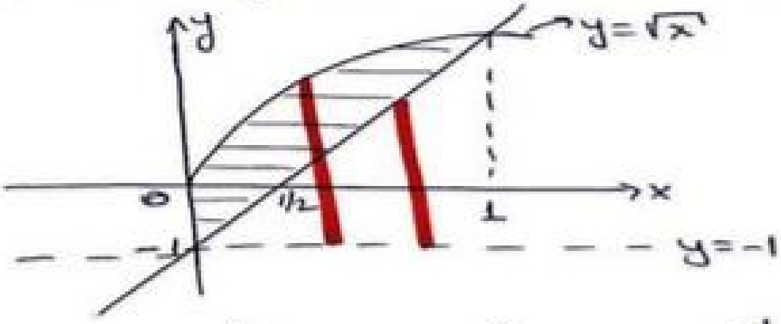
$$+\pi\int_3^4\left(4+2\sqrt{4-y}+4-y\right)dy$$

$$-\pi\int_3^4\left(4-2\sqrt{4-y}+4-y\right)dy$$

$\rightarrow V=\dfrac{27\pi}{2}$ //

SORU 14: $y=\sqrt{x}$ eğrisi , $x=0$ ve $y=2x-1$ doğruları ile sınırlı bölgenin $y=-1$ doğrusu etrafında dönmesiyle elde edilen cismin hacmini

a) Disk yöntemi ile hesaplayınız.



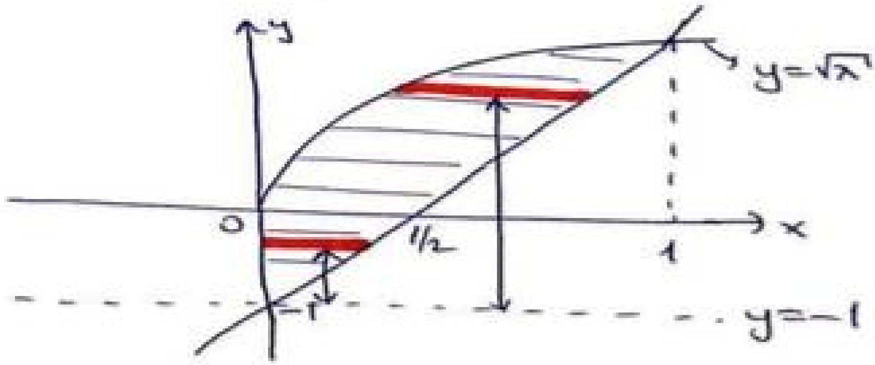
$$V=\pi\int_0^1\left[\sqrt{x}-(-1)\right]^2dx-\pi\int_0^1\left[2x-1-(-1)\right]^2dx$$

$$=\pi\int_0^1\left(x+2\sqrt{x}+1\right)dx-\pi\int_0^1 4x^2dx$$

$$=\pi\left[\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}x^{3/2}+x\right]\Big|_0^1-\pi\left(\frac{4}{3}x^3\right)\Big|_0^1$$

$$=\frac{3}{2}\pi$$

b) Kabuk yöntemi ile hesaplayınız.



Tespit edilen bölge incelendiğinde, kabuk yöntemine göre, bölgenin iki parçadan oluştuğu anlaşılmaktadır. O halde,

$$V = 2\pi \int_{-1}^{0} (y+1)\cdot\left(\frac{y+1}{2}\right)dy \; + $$

$$\int_{0}^{1} (y+1)\cdot\left(\frac{y+1}{2} - y^2\right) dy$$

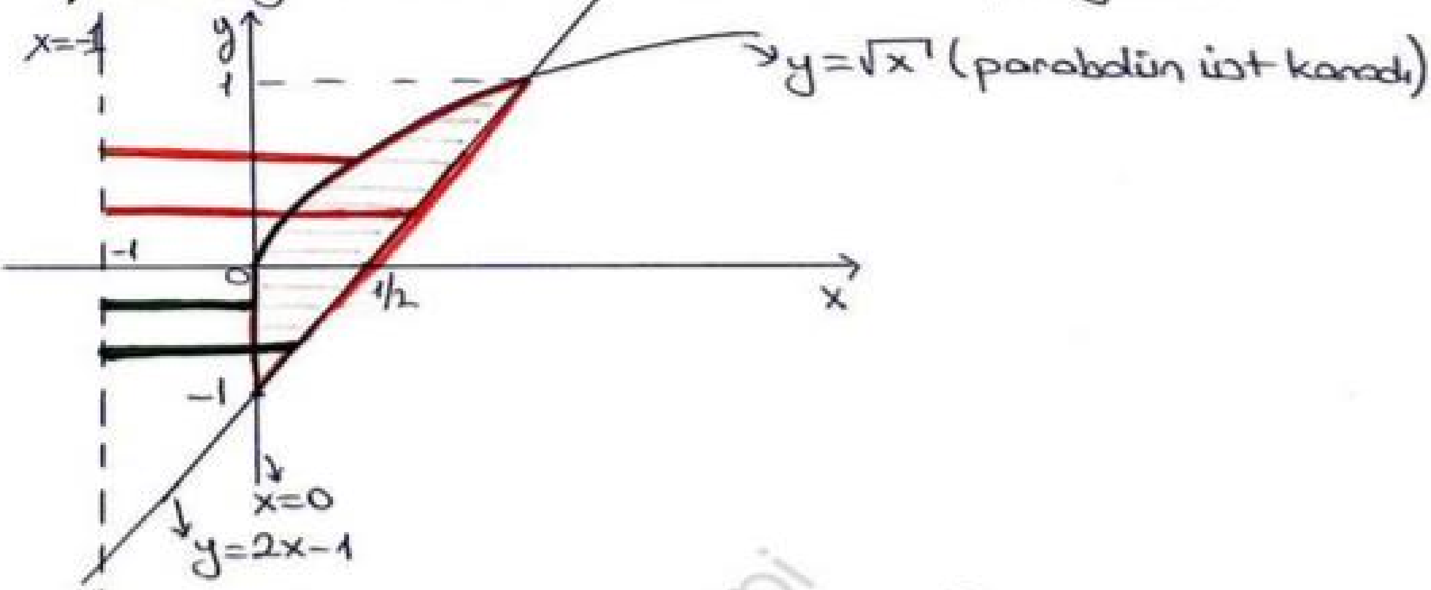
$$V = \pi \int_{-1}^{0} (y^2+2y+1)\,dy + \pi \int_{0}^{1} (1+2y-y^2-2y^3)\,dy$$

$$= \pi\left[\frac{y^3}{3} + y^2 + y\right]\Big|_{-1}^{0} + \pi\left[y + y^2 - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{2}\right]\Big|_{0}^{1}$$

$$= \frac{3}{2}\pi$$

SORU 15 : $y=\sqrt{x}$ eğrisi , $x=0$ ve $y=2x-1$ doğruları ile sınırlı bölgenin, $x=-1$ doğrusu etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmini

a) Disk yöntemini kullanarak hesaplayınız.



$$V=\pi\int_{-1}^{0}\left[\frac{y+1}{2}-(-1)\right]^2dy-\pi\int_{-1}^{0}\left[0-(-1)\right]^2dy$$

$$+\pi\int_{0}^{1}\left[\frac{y+1}{2}-(-1)\right]^2dy-\pi\int_{0}^{1}\left[y^2-(-1)\right]^2dy$$

$$\rightarrow V = \frac{\pi}{4}\int_{-1}^{0}(y^2+6y+9)\,dy - \pi\int_{-1}^{0} 1 . dy$$

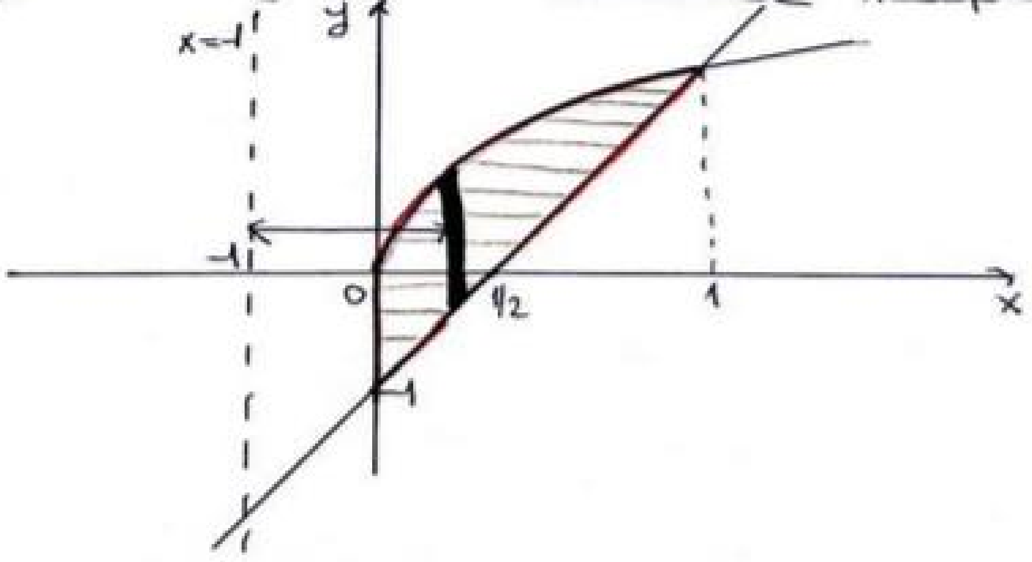
$$+ \frac{\pi}{4}\int_{0}^{1}(y^2+6y+9)\,dy - \pi\int_{0}^{1}(y^4+2y^2+1)\,dy$$

$$\rightarrow V = \frac{\pi}{4}\left[\frac{y^3}{3}+3y^2+9y\right]\Big|_{-1}^{0} - \pi\left[y\right]\Big|_{-1}^{0}$$

$$+ \frac{\pi}{4}\left[\frac{y^3}{3}+3y^2+9y\right]\Big|_{0}^{1} - \pi\left[\frac{y^5}{5}+\frac{2}{3}y^3+y\right]\Big|_{0}^{1}$$

$$\rightarrow V = \frac{9\pi}{5}$$

b) Kabuk yöntemini kullanarak hesaplayınız.



$$V = 2\pi \int_0^1 [x-(-1)] \cdot [\sqrt{x} - (2x-1)]\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(x^{3/2} - 2x^2 - x + \sqrt{x} + 1\right) dx$$

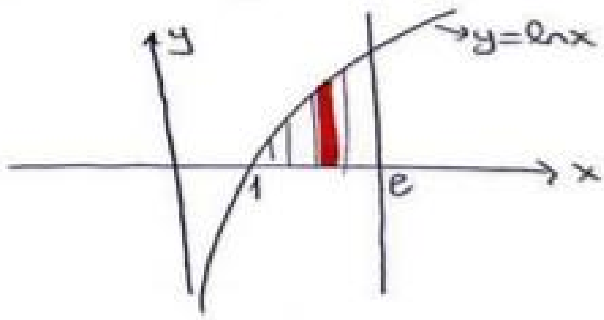
$$= 2\pi \left[\frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{2}{3} x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3} x^{3/2} + x \right] \Bigg|_0^1$$

$$= \frac{9\pi}{5}$$

SORU 16: $y = \ln x$ eğrisi, x-ekseni ve $x = e$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin

a) x-ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen cismin hacmi.

i) Disk yöntemi ile hesaplayalım.



$$V = \pi \int_1^e (\ln x - 0)^2 dx = \pi \int_1^e \ln^2 x \, dx$$

$\ln^2 x = u \qquad dx = dv$

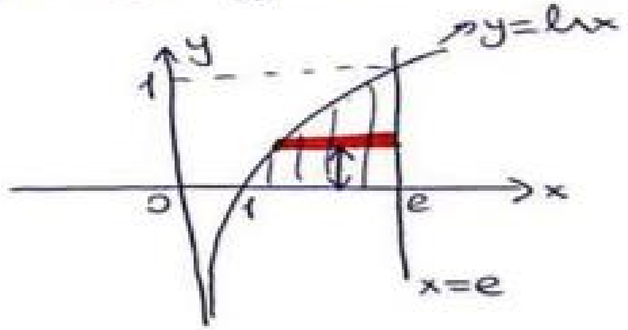
$2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = du \qquad x = v$

$$\Rightarrow V = \pi \left[x \cdot \ln^2 x \Big|_1^e - 2 \int_1^e \ln x \, dx \right]$$

$$= \pi \left[x \cdot \ln^2 x \Big|_1^e - 2 (x \ln x - x) \Big|_1^e \right]$$

$$= (e-2)\pi$$

ii) Kabuk yöntemi ile hesaplayalım.



$$V = 2\pi \int_0^1 (y-0).(e-e^y)\,dy = 2\pi\int_0^1 y.(e-e^y)\,dy$$

$$= 2\pi\int_0^1 e.y\,dy - 2\pi\int_0^1 y.e^y\,dy$$

$\Rightarrow \int_0^1 y.e^y\,dy$ integrali için:

$y=u \quad \int e^y\,dy = \int dv$

$dy=du \quad e^y = v$

$$\Rightarrow \quad y.e^y\Big|_0^1 - \int_0^1 e^y\,dy$$

$$y.e^y\Big|_0^1 - e^y\Big|_0^1 = 1$$

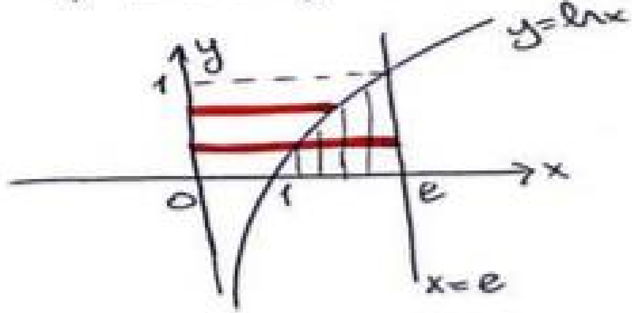
ve $\int_0^1 e.y\,dy = e.\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{e}{2}$

olup,

$$V = 2\pi\left(\frac{e}{2}-1\right) = (e-2)\pi$$

b) y-ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen cismin hacmi.

i) Disk yöntemi ile hesaplayalım



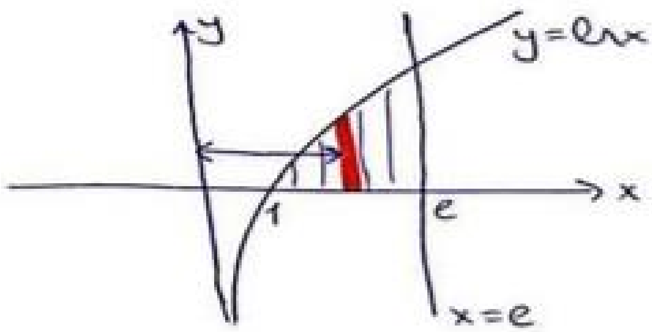
$$V = \pi \int_0^1 (e-0)^2 dy - \pi \int_0^1 (e^y - 0)^2 . dy$$

$$= \pi \int_0^1 e^2 dy - \pi \int_0^1 e^{2y} dy$$

$$= \pi \left[e^2 . y \Big|_0^1 - \frac{e^{2y}}{2} \Big|_0^1 \right]$$

$$= \frac{e^2+1}{2} . \pi$$

ii) Kabuk yöntemi ile çözelim.



$$V = 2\pi \int_1^e (x-0).(\ln x - 0)\,dx$$

$$= 2\pi \int_1^e x.\ln x.\,dx$$

$\ln x = u \qquad \int x\,dx = \int dv$

$\frac{1}{x}\,dx = du \qquad \frac{x^2}{2} = v$

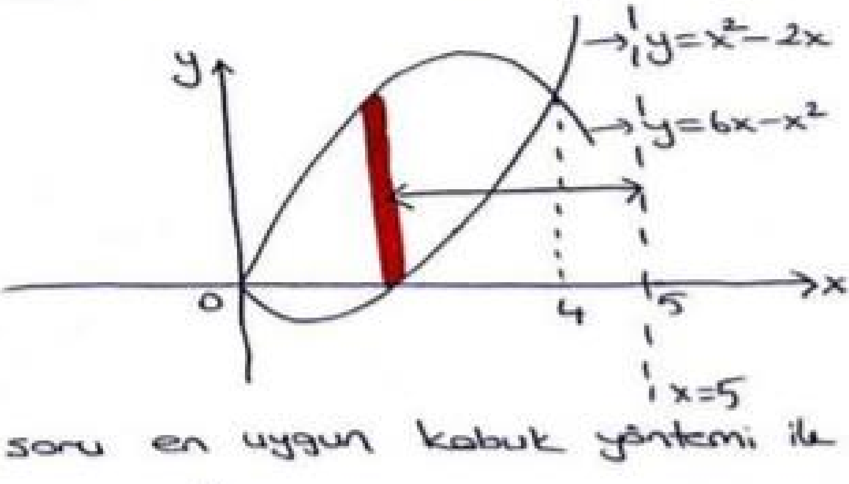
$$\Rightarrow V = 2\pi \left[\frac{x^2}{2}.\ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx \right]$$

$$= 2\pi \left[\frac{x^2}{2}.\ln x \Big|_1^e - \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^e \right]$$

$$= \frac{e^2+1}{2}.\pi$$

Not: Dönel cisimlerin hacimlerini hesaplarken, Disk ve Kabuk yöntemleri ile iki çeşit teknik öğrendik. Sorularda eğer bize kullanacağımız teknik belirtilmiyor ise, hesap kolaylığı açısından uygun bir yöntemle çözüme gideriz.

SORU 17: $y = x^2 - 2x$ ve $y = 6x - x^2$ tarafından sınırlanan bölgenin $x=5$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.



Bu soru en uygun kabuk yöntemi ile hesaplanır.

$$V = 2\pi \int_0^4 (5-x).\left[(6x-x^2)-(x^2-2x)\right].dx$$

$$= 2\pi \int_0^4 (5-x)(8x-2x^2)\,dx = 128\pi$$

Yay Uzunluğu

Kartezyen Formda Eğri Yayının Uzunluğu

Kabul edelim ki C, sürekli türetilebilen bir

$$y=f(x) \quad , \quad a \le x \le b$$

fonksiyonunun grafiğidir. Bu takdirde, C nın s ile gösterilen uzunluğu

$$s=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,.dx$$

ile hesaplanır.

Benzer şekilde, eğer C, sürekli türetilebilen bir

$$x=g(y) \quad , \quad c \le y \le d$$

fonksiyonunun grafiği ise, C nın uzunluğu

$$s=\int_c^d \sqrt{1+[g'(y)]^2}\,.dy$$

ile hesaplanır.

Eğrinin denklemi $y=f(x)$ formunda değil de

$$x=x(t) \quad , \quad y=y(t)$$

parametrik denklemleri ile verilmesi halinde,

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)} \quad \text{ve} \quad a=x(t_0)\ ;\ b=x(t_1)$$

olmak üzere

$$s=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,.dt$$

ile hesaplanır.

SORU 18: $y=x^2$ parabolünün $A(1,1)$, $B(3,9)$ noktaları arasında kalan kısmının uzunluğunu bulunuz.

$y=x^2$ ve $y'=2x$ olmak üzere

$$s=\int_1^3\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_1^3\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

$2x=\tan\theta$ dönüşümü yapılırsa

$$s=\left[\frac{1}{4}x.\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{4}\ln\left(1+\sqrt{1+4x^2}\right)\right]\Big|_1^3=$$

$$=\frac{1}{4}\left(3\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)+\frac{1}{4}\ln\frac{1+\sqrt{37}}{1+\sqrt{5}} \text{ //}$$

SORU 19: $9y^2 = 4\cdot(1+x^2)^3$ eğrisinin $x=0$, $x=3$ doğruları arasında kalan kısmının uzunluğunu bulunuz.

Kapalı türetme yöntemi ile,

$$18y\cdot y' = 12\cdot(1+x^2)^2\cdot 2x$$

$$\Rightarrow y' = \frac{4x\cdot(1+x^2)^2}{3y}$$

$$s = \int_0^3 \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_0^3 \sqrt{1+\left(\frac{4x\cdot(1+x^2)^2}{3y}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_0^3 \sqrt{(2x^2+1)^2}\,dx = \int_0^3 (2x^2+1)\,dx$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^3 + x\right)\Big|_0^3 = 21 \;\; //$$

SORU 20 : $x = e^t . \sin t$, $y = e^t . \cos t$ ile verilen eğrinin $t=0$ ve $t=\pi/2$ noktaları arasında kalan kısmının uzunluğunu bulunuz.

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$

formülü ile ,

$$x'(t) = e^t . \sin t + e^t . \cos t$$

$$y'(t) = e^t . \cos t - e^t . \sin t$$

olup,

$$S = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(e^t . \sin t + e^t . \cos t)^2 + (e^t . \cos t - e^t \sin t)^2}\, . dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{2} . e^t\, dt = \sqrt{2} . (e^{\pi/2} - 1)$$

Dönel Yüzeylerin Alanları

Eğer f , $[a,b]$ aralığında tanımlı negatif olmayan, sürekli türetilebilen bir fonksiyon ise , f nin grafiğinin x_ekseni etrafında dönmesiyle oluşan yüzeyin alanı

$$S_A = \int_a^b 2\pi \cdot f(x) \cdot \sqrt{1+[f'(x)]^2} \cdot dx$$

formülü ile hesaplanır.

Benzer şekilde, eğer $x=g(y)$ eğrisinin $y=c$, $y=d$ doğruları arasında kalan kısmı y_ekseni etrafında döndürülürse meydana gelen dönel yüzeyin alanı

$$S_A = 2\pi \int_c^d g(y) \cdot \sqrt{1+[g'(y)]^2}\, dy$$

formülü ile hesaplanır.

Yüzey alanı hesaplanırken iki ayrı formül su sekilde verilir:

Eğer f, $[a,b]$ de tanımlı negatif olmayan, sürekli türetilebilen bir fonksiyon ise, f nin grafiğinin y-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan yüzeyin alanı

$$S_1 = 2\pi \int_a^b x \cdot \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx$$

ve benzer sekilde,

$x=g(y)$ eğrisinin $y=c$ ve $y=d$ doğruları arasında kalan kısmı x-ekseni etrafında döndürülürse meydana gelen yüzeyin alanı

$$S_1 = 2\pi \int_c^d y \cdot \sqrt{1+[g'(y)]^2}\, dy$$

formülleri ile verilir.

SORU 21: $y = 2\sqrt{x}$ parabolünün $x=0$ ve $x=3$ apsisli noktaları arasında kalan kısmının x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını bulunuz.

Yüzey alanını iki yoldan hesaplamayı biliyoruz:

1. Yol: $$S_A = 2\pi \int_0^3 y \cdot \sqrt{1+(y')^2} \cdot dx$$

$y = 2\sqrt{x}$ ve $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ile

$$S_A = 2\pi \int_0^3 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x}}\, dx$$

$$= 4\pi \int_0^3 \sqrt{x+1}\, dx$$

$$= 4\pi \cdot \frac{2}{3} (x+1)^{3/2} \Big|_0^3 = \frac{56\pi}{3}$$

2. yol :

$$S_A = 2\pi \int_c^d y \cdot \sqrt{1+[g'(y)]^2}\, dy$$

$x = g(y) = \frac{y^2}{4}$ ve $g'(y) = \frac{y}{2}$ ile

$$S_A = 2\pi \int_0^{2\sqrt{3}} y \cdot \sqrt{1+\frac{y^2}{4}}\, dy$$

$$= \pi \int_0^{2\sqrt{3}} y \cdot \sqrt{4+y^2}\, dy$$

olup, $4+y^2 = t$ dönüşümü ile

$2y \cdot dy = dt$

$y=0$ için $t=4$

$y=2\sqrt{3}$ için $t=16$

$$\Rightarrow S_A = \frac{\pi}{2} \int_4^{16} t^{1/2} \cdot dt = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{3}\, t^{3/2} \Big|_4^{16}$$

$$= \frac{\pi}{3}(64-8) = \frac{56\pi}{3} \text{ //}$$

SORU22: $y=x^2$ parabolünün $(0,0)$ ve $(\sqrt{2},2)$ noktaları arasında kalan kısmının y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını bulunuz.

$$S_A = 2\pi \int_0^2 x \cdot \sqrt{1+(x')^2}\, dy$$

$x=\sqrt{y}$ ve $x' = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ ile

$$S_A = 2\pi \int_0^2 \sqrt{y} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{4y}}\, dy$$

$$= \pi \int_0^2 \sqrt{4y+1}\, dy$$

$4y+1 = t$ $\quad y=0 \rightarrow t=1$

$4dy = dt$ $\quad y=2 \rightarrow t=9$

$$\rightarrow S_A = \pi \int_1^9 t^{1/2} \cdot \frac{dt}{4}$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3}\, t^{3/2} \Big|_1^9$$

$$= \frac{13\pi}{3}$$

İMPROPER İNTEGRALLER

İntegral hesabın temel teoremine göre eğer f, bir [a,b] kapalı ve sınırlı aralığında tanımlı ve sürekli bir fonk. ise ve F, f nin bir ters türevi ise, f nin a dan b ye belirli integrali

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

reel sayısı idi. Bununla birlikte, temel teoremin hipotezlerinin sağlanmadığı durumlar da karşımıza çıkabilir. Yani, bir belirli integralde integrasyon aralığı sınırsız veya integrali alınan fonk.nun integrasyon aralığında çok büyümesi veya çok küçülmesi durumları karşımıza çıkabilir. İşte bu yeni durumlarla karşımıza çıkan integrallere improper (genelleştirilmiş) integraller diyoruz.

Birinci Tip İmproper İntegraller

$\int_a^b f(x)\,dx$ integrali icin, integral aralığı üzerinde f(x) fonk.nu sürekli fakat integralin sınırlarından en az biri sonsuz ise bu tip integraller birinci tip imp. integrallerdir:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

esitliği icin, esitliğin sağındaki limitin mevcut olması durumunda (limit degeri sonlu ve tek türlü) sol taraftaki integral bu limit degere esit olacak ve yakınsak olarak adlandırılacaktır. Aksi takdirde ıraksak olduğu söylenecektir. Benzer sekilde,

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_c^b f(x)\,dx$$

SORU 1: $\int_0^\infty e^x dx = ?$

Soruda üst sınırda $+\infty$ sembolünü gördüğümüz anda İmp. integral olduğunu anlıyoruz.

$f(x)=e^x$ ve integral aralığı $[0,\infty)$ olmak üzere, $f(x)$ fonk nu bu aralık üzerinde sürekli olduğundan bu integral 1. tip imp. integraldir.

O halde,

$$\int_0^\infty e^x dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^x dx$$ (Artık belirli int. olup integrali alınabilir)

$$= \lim_{b\to\infty} e^x \Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} (e^b - 1)$$

$$= \infty$$

olup, limit mevcut olmadığından (limit değeri sonlu değil) verilen integral ıraksaktır.

SORU 2: $\int_{-\infty}^{0} e^x \, dx = ?$

Soruda üst sınırda $-\infty$ sembolü ile verilen integral bir imp. integraldir.

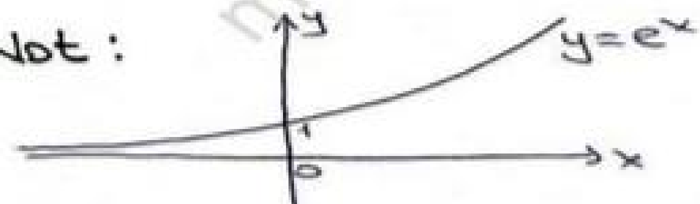
$f(x) = e^x$ ve integral aralığı $(-\infty, 0]$ olmak üzere, $f(x)$ fonk.nu bu aralık üzerinde sürekli olduğundan bu integral 1. tip imp. integraldir. O halde,

$$\int_{-\infty}^{0} e^x \, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} e^x \, dx$$

$$= \lim_{a \to -\infty} e^x \Big|_{a}^{0} = \lim_{a \to -\infty} (1 - e^a) = 1$$

olup, imp. integralin değeri 1 dir ve bu imp. integral yakınsaktır.

Not :



SORU 3: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx = ?$

Verilen integral bir imp. integraldir ve

$f(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ ve int. aralığı $(-\infty,\infty)$

olmak üzere, $f(x)$ fonk.nu bu aralık üzerinde

sürekli olduğundan, bu int. 1. tip imp.

integraldir. O halde,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$\Downarrow$

$x^2+1=u$

$2x\,dx=du$

$x=a$ için $u=a^2+1$

$x=0$ için $u=1$

$\Downarrow$

$x^2+1=u$

$2x\,dx=du$

$x=0$ için $u=1$

$x=b$ için $u=b^2+1$

$$\Rightarrow \lim_{a\to-\infty} \int_{a^2+1}^{1} \frac{du}{u^2} + \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b^2+1} \frac{du}{u^2}$$

$$= -\lim_{a\to-\infty} \frac{1}{u}\Big|_{a^2+1}^{1} - \lim_{b\to\infty} \frac{1}{u}\Big|_{1}^{b^2+1}$$

$$= -\lim_{a\to-\infty}\left[1-\frac{1}{a^2+1}\right] - \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{b^2+1}-1\right] = -1+1=0$$

SORU 4: $\int_0^\infty \cos x \, dx = ?$

Verilen integral bir imp. integraldir ve

$f(x) = \cos x$ ve integral aralığı $[0, \infty)$

olmak üzere, $f(x)$ fonk. nu bu aralık üzerinde

sürekli olduğundan, bu int. 1. tip imp. integraldir.

O halde,

$$\int_0^\infty \cos x \, dx = \lim_{b \to \infty} \int_0^b \cos x \, dx = \lim_{b \to \infty} \sin x \Big|_0^b$$

$$= \lim_{b \to \infty} (\sin b - \sin 0) = \lim_{b \to \infty} \sin b$$

olup, limit mevcut olmadığından (limit değeri tek türlü değil yani $b \to \infty$ iken $\sin b$ fonk.nu -1 ile $+1$ arasındaki tüm reel sayılarda yığılıyor) verilen imp. integral ıraksaktır.//

Not: $\sin x$ ve $\cos x$ fonk.larının değer kümesi $[-1, 1]$ ve tanım kümesi $(-\infty, \infty)$ olup, bu fonk.lar her x değeri için süreklidirler.

6

SORU 5: $\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2} \cdot dx = ?$

$f(x) = x\, e^{-x^2}$ fonk.nu $[0, \infty)$ da sürekli olduğundan

verilen integral 1. tip imp. integraldir. O halde,

$$\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2} \cdot dx = \lim_{b \to \infty} \int_0^{b} x \cdot e^{-x^2} dx \, .$$

Eğer integrali alınacak fonk çok kolay bir fonk değilse, yani integral çok kolay hesaplanmayacaksa, belirli integrali önce belirsiz integral olarak çözüp, yerine yazabiliriz!

$$\int x \cdot e^{-x^2} dx \qquad \begin{aligned} x^2 &= u \\ 2x\,dx &= du \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int e^{-u} \cdot du = -\frac{1}{2} e^{-u} + c = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c$$

$$\Rightarrow \lim_{b \to \infty} \int_0^{b} x\, e^{-x^2} \cdot dx = \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2}\right) \Big|_0^{b}$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{b \to \infty} \left(e^{-b^2} - 1\right) = 1/2$$

ile, verilen imp. integralin değeri $1/2$ olup integral yakınsaktır.//

SORU 6: $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{2dx}{x^2-1} = ?$

$f(x) = \dfrac{2}{x^2-1}$ fonk.nu $[2,\infty)$ da sürekli olduğundan

verilen integral 1. tip imp. integraldir. O halde,

$$\int_2^{\infty} \frac{2dx}{x^2-1} = \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{2dx}{x^2-1}.$$

Basit kesirlere ayırma yöntemini kullanarak:

$\displaystyle\int \frac{2dx}{x^2-1}$ int. için $\dfrac{2}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1}$

$2 = A.(x+1) + B.(x-1)$

$x=1$ için $A=1$

$x=-1$ için $B=-1$

$$\Rightarrow \int \frac{2dx}{x^2-1} = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \ln|x-1| - \ln|x+1| + c = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$$

$$\Rightarrow \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{2dx}{x^2-1} = \lim_{b\to\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\Bigg|_2^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \ln\left(\frac{b-1}{b+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln 3$$

olup, verilen imp. integralin değeri $\ln 3$

8 ve yakınsaktır.

Not: Üstteki sorunun çözüminde aşağıdaki gerçekler kullanılmıştır:

- $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln\left(\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-1}{x+1}\right) = \ln 1 = 0$

- $\ln(1/3) = \ln 3^{-1} = -\ln 3$

- İntegral aralığımız 2 den ∞ a olduğu için $\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$ ifadesinde mutlak değer kullanmaya gerek kalmadı.

SORU 7: $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^4} = ?$

$f(x)=\dfrac{x}{1+x^4}$ fonk.nu $[0,\infty)$ da sürekli olduğundan, verilen integral 1. tip imp. integraldir:

$$\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^4} = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{x\,dx}{1+x^4}.$$

Özel bir değişken değişimiyle belirsiz integral olarak çözersek:

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^4} \qquad \begin{aligned} x^2 &= u \\ 2x\,dx &= du \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x\,dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\arctan u + C$$

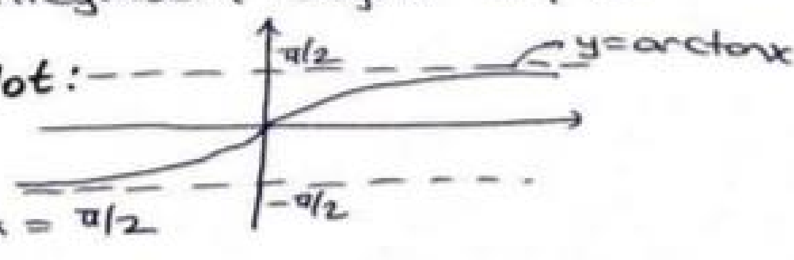
$$= \frac{1}{2}\arctan x^2 + C$$

$$\Rightarrow \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{x\,dx}{1+x^4} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}\arctan x^2 \Big|_0^{b}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\arctan b^2 - \arctan 0\right) = \pi/4$$

ile, verilen imp. integralin değeri $\pi/4$ ve int. yakınsaktır.

Not:



$\lim_{x\to\infty} \arctan x = \pi/2$

SORU 8 : $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx = ?$

$f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$ fonk.nu $[1,\infty)$ da sürekli olduğundan

verilen integral 1. tip imp. integraldir. O halde,

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{\ln x}{x^2}\,dx .$$

Kısmi integrasyon tekniğini kullanarak

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \int x^{-2}.\ln x.\,dx$$

$\ln x = u \qquad x^{-2}dx = dv \qquad \left[\int u.dv = u.v - \int v.du\right]$

$\frac{1}{x}dx = du \qquad -\frac{1}{x} = v$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{1}{x}.\ln x + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}.\ln x - \frac{1}{x} + c$$

$$\Rightarrow \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x}(\ln x + 1)\right]\Big|_1^{b}$$

$$= -\lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{b}.\ln(b+1) - 1\right] = 1$$

ile, verilen imp. integralin değeri 1 olup

int. yakınsaktır.

Not: $\displaystyle\lim_{b\to\infty} \frac{\ln(b+1)}{b} \overset{L}{=} \lim_{b\to\infty} \frac{\frac{1}{b+1}}{1} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{b+1} = 0$

İkinci Tip İmproper İntegraller

$\int_a^b f(x)dx$ integrali için, integralin sınırları sonlu fakat integral aralığı üzerinde en az bir noktada $f(x)$ sonsuz ise ikinci tip imp. integrallerdir:

$\int_a^b f(x)dx$ integralinde $x=a$ noktasında $f(x)$ sonsuz olsun. $\varepsilon>0$ olmak üzere,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

yazarız. Eşitliğin sağ tarafındaki limitin mevcut olması durumunda $\int_a^b f(x)dx$ integraline yakınsak, aksi takdirde ıraksak denir.

Benzer şekilde,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \quad ; \quad x=b \text{ de sonsuz}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx$$

$a<c<b$ ve $x=c$ de sonsuz

Not: Alt sınır için sonsuzluk varsa $a+\varepsilon$, üst sınır için sonsuzluk varsa $b-\varepsilon$ alırız. Çünkü aralığımız $[a,b]$ şeklinde olup, sonsuz yapan noktadan kurtulurken yine aralığın içinde kalırız.

Not: ε_1 ve ε_2 kavramlarını kullanmamız, imp. integralin karekterini belirlerken önemlidir. Düzgün yakınsaklık kavramı ile ilgilidir. Ancak calculus seviyesinde böyle bir ayrıma gitmeyiz. Yakınsak olduğunu bulmamız yeterlidir.

SORU 9: $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = ?$

Soruda sınırlarda $+\infty$ veya $-\infty$ olmadığından (yani sınırlar sonlu olduğundan) verilen integral 1. tip imp. integral değildir. Ancak,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \quad \text{ve integral aralığı } [1,2]$$

ile verilen fonk $x=1$ noktası için sonsuz (süreksiz) olduğundan, ki bunu şöyle anlatırız:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \infty$$ olduğundan verilen integral 2. tip imp. integraldir. O halde, $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{1+\varepsilon}^2 (x-1)^{-1/2}dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} 2.(x-1)^{1/2}\Big|_{1+\varepsilon}^{2} =$$

$$= 2 \lim_{\varepsilon\to 0} \left[1-(1+\varepsilon-1)^{1/2}\right] = 2$$

14 olup, verilen imp. integralin değeri 2 dir.

SORU 10 : $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} = ?$

$\displaystyle\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} = +\infty$ olduğundan ve

integral sınırları sonlu olduğundan, verilen

integral 2. tip imp. integraldir. O halde,

$\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2-\varepsilon} (x-2)^{-2/3} \cdot dx$$

$$= 3 \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} (x-2)^{1/3} \Big|_0^{2-\varepsilon}$$

$$= 3 \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \left[(2-\varepsilon-2)^{1/3} - (-2)^{1/3} \right]$$

$$= 3 \cdot \sqrt[3]{2}$$

olup, verilen imp. integralin değeri

$3 \cdot \sqrt[3]{2}$ ve int. yakınsaktır.

SORU 11 : $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}} = ?$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \quad \left(\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \right)$

olduğundan ve integralin sınırları sonlu olduğundan verilen integral 2. tip imp. integraldir. O halde , $\varepsilon_1 > 0$ ve $\varepsilon_2 > 0$ olmak üzere

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{1/3}}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0} \int_0^{1-\varepsilon_1} \frac{dx}{(x-1)^{1/3}} + \lim_{\varepsilon_2\to 0} \int_{1+\varepsilon_2}^2 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}}$$

$$= \frac{3}{2}\left[\lim_{\varepsilon_1\to 0} (x-1)^{2/3} \Big|_0^{1-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2\to 0} (x-1)^{2/3} \Big|_{1+\varepsilon_2}^2 \right]$$

$$= \frac{3}{2}\left\{ \lim_{\varepsilon_1\to 0} \left[(1-\varepsilon_1-1)^{2/3} - (-1)^{2/3} \right] + \lim_{\varepsilon_2\to 0} \left[1 - (1+\varepsilon_2-1)^{2/3} \right] \right\}$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

olup, verilen imp. integralin değeri 0 ve yakınsaktır.//

SORU 12: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x . dx}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}} = ?$

$f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}$ fonk.nu $[0, \pi/2]$ aralığındaki

$x = \frac{\pi}{2}$ değeri için süreksiz olduğundan, verilen

integral 2. tip imp. integraldir. O halde,

$\varepsilon > 0$ olmak üzere,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x . dx}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\pi/2-\varepsilon} \frac{\cos x \, dx}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}.$$

Değişken değiştirme yöntemi ile,

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1+\sin x)^2}} dx \Rightarrow \begin{array}{l} \sin x = u \\ \cos x dx = du \end{array}$$

$$= \int \frac{du}{(1-u)^{2/3}} = \int (1-u)^{-2/3} . du = -3(1-u)^{1/3} + c$$

$$= -3.(1-\sin x)^{1/3} + c \;//$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{\cos x \, dx}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}} = -3 \lim_{\varepsilon \to 0} (1-\sin x)^{1/3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}$$

$$= -3 . \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\left(1 - \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right)^{1/3} - 1 \right] = 3 \;//$$

SORU 13: $\int_0^1 \ln x\, dx = ?$

$f(x) = \ln x$ fonk.nu $[0,1]$ aralığında $x=0$ da süreksiz olduğundan 2. tip imp. integraldir.

O halde, $\varepsilon > 0$ olmak üzere,

$$\int_0^1 \ln x . dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0+\varepsilon}^1 \ln x dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[x \ln x - x \right] \Big|_{\varepsilon}^{1}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[1 . \ln 1 - 1 - \varepsilon . \ln \varepsilon - \varepsilon \right]$$

olup, $\ln 1 = 0$; $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon = 0$, $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon . \ln \varepsilon$ ($0.\infty$ belirsizliği)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon . \ln \varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln \varepsilon}{1/\varepsilon} \overset{L}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1/\varepsilon}{-1/\varepsilon^2} = 0 .$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\ln 1 - 1 - \varepsilon . \ln \varepsilon - \varepsilon \right] = -1$$

olup, $\int_0^1 \ln x dx = -1.$ //

SORU 14: $\displaystyle\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^2-1}} = ?$

$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ fonk.nu $x=1$ de süreksiz

olduğundan, verilen integral 2 tip imp.

integraldir. O halde, ε_1 ve $\varepsilon_2 > 0$ olmak üzere,

$$\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^2-1}} + \int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_0^{1-\varepsilon_1} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{1+\varepsilon_2}^2 \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,dx$$

$$= \frac{3}{4}\left\{ \lim_{\varepsilon_1 \to 0} (x^2-1)^{2/3}\Big|_0^{1-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} (x^2-1)^{2/3}\Big|_{1+\varepsilon_2}^2 \right\}$$

$$= \frac{3}{4}\left\{ \lim_{\varepsilon_1 \to 0}\left(\left[(1-\varepsilon_1)^2-1\right]^{2/3}-1\right) + \lim_{\varepsilon_2 \to 0}\left(3^{2/3} - \left[(1+\varepsilon_2)^2-1\right]^{2/3}\right)\right\}$$

$$= \frac{3}{4}\left(-1+3^{2/3}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \frac{3.(3^{2/3}-1)}{4}$$

SORU 15: $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = ?$

$f(x)=\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}$ fonksiyonu $x=0$ da süreksiz

olduğundan, verilen integral 2. tip imp. integraldir.

O halde, $\varepsilon>0$ olmak üzere,

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}.$$

Değişken dönüşümü yardımıyla

$$\int \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} \qquad \begin{array}{l} e^{-x}=u \\ -e^{-x}dx=du \end{array} \;;\; e^{x}=\frac{1}{u} \;;\; e^{2x}=\frac{1}{u^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{-\,du}{\sqrt{\frac{1}{u^2}-1}} = -\int \frac{u\,du}{\sqrt{1-u^2}} \quad \text{olup,}$$

$1-u^2=t$ dönüşümü ile

$-2u\,du=dt$

$$=\frac{1}{2}\int t^{-1/2}\,dt = t^{1/2}+c=(1-u^2)^{1/2}+c$$

$$=\sqrt{1-e^{-2x}}+c$$

bulunur.

Dolayısıyla,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0+\varepsilon}^{1} \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \sqrt{1-e^{-2x}}\,\Big|_{\varepsilon}^{1}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\sqrt{1-e^{-2}} - \sqrt{1-e^{-2\varepsilon}}\right)$$

$$= \sqrt{1-e^{-2}}$$ elde edilir.

$$\Rightarrow \int_{0}^{1} \frac{e^{-x}.\,dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \sqrt{1-e^{-2}}.\ //$$

Verilen integralin karekteri sorulsaydı, ilgili limit mevcut olduğundan yakınsaktır diyecektik.

Üçüncü Tip İmproper İntegraller

Bu tip improper integraller, ilk iki tipin birleşiminden ibarettir. Çözümü için, birinci ve ikinci tip improper integrallere ayrılır.

Örnek: $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2-1}$ integralinin karakterini belirleyiniz.

$f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$ ve $[1,\infty)$ için, verilen integral üçüncü tip improper integraldir. O halde,

$$\int_1^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2-1} = \int_1^{2} \frac{2x\,dx}{x^2-1} + \int_2^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2-1}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{2x\,dx}{x^2-1} + \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{2x\,dx}{x^2-1}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \ln|x^2-1| \Big|_{1+\varepsilon}^{2} + \lim_{b\to\infty} \ln|x^2-1| \Big|_{1}^{b}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\ln(3) - \ln\left((1+\varepsilon)^2-1\right)\right] + \lim_{b\to\infty} \left[\ln|b^2-1| - \ln 3\right]$$

$= \infty$ olup, limit mevcut olmadığından, verilen improper integral ıraksaktır.

1. Tip İmproper İntegraller İçin Karşılaştırma Testi :

Kabul edelim ki f ve g, $[a,\infty)$ da tanımlanmış sürekli iki fonksiyon ve her $x \in [a,\infty)$ için $g(x) \le f(x)$ dir. Bu takdirde, eğer $\int_a^\infty f(x)dx$ integrali yakınsak ise $\int_a^\infty g(x)dx$ integrali de yakınsaktır. Eğer, $\int_a^\infty g(x)dx$ integrali ıraksak ise $\int_a^\infty f(x)dx$ integrali de ıraksaktır.

Not 1: $a>0$ olmak üzere, $\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$ int. p-integrali olarak adlandırılır ve $p>1$ için yakınsak, $p\le 1$ için ıraksaktır.

Not 2: t, bir sabit olmak üzere, $\int_a^\infty e^{-tx}.dx$ integrali geometrik integral olarak adlandırılır ve $t>0$ ise yakınsak, $t\le 0$ ise ıraksaktır.

Dikkat: İmproper integraller için temelde 1 tip soru çeşidi vardır. Birincisi imp. integralin değerini bulmak, ikincisi ise karakterini belirlemektir. Değerinin ve karakterinin nasıl bulunduğunu öğrendik. Fakat sadece imp. integralin karakteri soruluyorsa, testler yardımıyla soruları çözmek çok daha elverişlidir. Aşağıda çözeceğimiz soru, bu durumu çok açık şekilde ortaya koymaktadır.

SORU 17: $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^4}$ integralinin karakterini belirleyiniz.

1.Yol: Verilen integral 1. tip imp. integraldir. O halde,

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^4} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{x\,dx}{1+x^4}$$

yazarız.

Degişken değişimi yardımıyla,

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^4} \qquad \begin{aligned} x^2 &= u \\ 2x\,dx &= du \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\arctan u + c$$

$$= \frac{1}{2}\arctan x^2 + c \,.$$

$$\Rightarrow \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{x\,dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \arctan x^2 \Big|_0^b$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} (\arctan b^2 - \arctan 0) = \frac{\pi}{4}$$

ile, limit mevcut olduğundan $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^4}$

imp. integrali yakınsaktır. //

2.Yol: 1. tip imp integraller için tanımladığımız karşılaştırma testini uygulayalım: Bunun için, p-integralinden yararlanacağız. p-integrali

$a > 0$ olmak üzere $\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$ için

$p > 1$ iken yak, $p \le 1$ iken ırak.

idi.

O yüzden önce,

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^4} = \int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^4} + \int_1^\infty \frac{x\,dx}{1+x^4}$$

seklinde imp. integrali iki parcaya ayıralım. Birinci integral belirli integral olup cevabı herhangi bir reel sayıdır. Bizim icin önemli olan ikinci integralin karakteridir. Bu int. icin karsılastırma testini uygularsak,

$$\frac{x}{1+x^4} < \frac{x}{x^4} = \frac{1}{x^3}$$ esitsizliğini yazabiliriz.

$\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$ p-integrali olup, $p=3>1$ ile yakınsaktır.

Karsılastırma testine göre $\int_1^\infty \frac{x\,dx}{1+x^4}$ integrali de yakınsaktır. O halde

$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^4}$ integrali de yakınsaktır. ∥

SORU 18: $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4+x^2+1}$ integralinin

karekterini belirleyiniz.

1. tip imp. integral olup, karşılaştırma testine göre:

$$\frac{x^2}{x^4+x^2+1} < \frac{x^2}{x^4+x^2} = \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(x^2+1)} = \frac{1}{x^2+1} < \frac{1}{x^2}$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ p-integrali olup $p=2>1$ ile yakınsaktır.

O halde, karşılaştırma testine göre,

$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ integrali yakınsak olduğundan

$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4+x^2+1}$ imp. integrali de yakınsaktır.

Not: Bu soruda karekteri diğer yolla – limitin mevcudiyeti ile – bulmak istesek, integralin ne kadar zor hesaplanacağı açıktır.

SORU 19: $\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+1}$ integralinin

karekterini belirleyiniz.

1. tip imp. integral olup, karşılaştırma testini uygulayalım. Önce,

$$\frac{1}{e^x+1} < \frac{1}{e^x}$$ eşitsizliğini yazalım.

$\int_0^\infty e^{-x}dx$ bir geometrik-integral olup, $t=1>0$ ile yakınsaktır.

O halde, $\int_0^\infty e^{-x}dx$ integrali yakınsak olduğundan $\int_0^\infty \frac{1}{e^x+1}dx$ integrali de yakınsaktır.

SORU 20: $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\ln x}$ integralinin

karakterini belirleyiniz.

1. tip imp. integral olup, karşılaştırma

testini uygulayalım. Önce,

her $x > 1$ değeri için $\ln x < x$

gerçeğini kullanarak

$\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x}$ eşitsizliğini yazalım.

$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x}$ bir p-integrali olup, $p=1$ ile ıraksaktır.

O halde, karşılaştırma testine göre,

$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x}$ int. ıraksak olduğundan

$\int_2^{\infty} \frac{dx}{\ln x}$ integrali de ıraksaktır. //

1. Tip İmproper İntegraller için Karşılaştırma Testi Limit Hali

$x \geq a$ için $f(x)$ ve $g(x)$ integre edilebilir fonksiyonlar ve $g(x) > 0$ olsun.

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ olmak üzere,

i) $l \neq 0, \infty$ ise $\int_a^\infty g(x)\,dx$ integrali ile $\int_a^\infty f(x)\,dx$ integralleri aynı karekterdedir.

ii) $l = 0$ ve $\int_a^\infty g(x)\,dx$ integrali yakınsak ise $\int_a^\infty f(x)\,dx$ integrali de yakınsaktır.

iii) $l = \infty$ ve $\int_a^\infty g(x)\,dx$ integrali ıraksak ise $\int_a^\infty f(x)\,dx$ integrali de ıraksaktır.

SORU 21 : $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x.\sqrt{x^2+1}}$ integralinin

karekterini belirleyiniz.

Bu sorunun çözümünü bu kısma kadar öğrendiğimiz üç yolla irdeleyelim: 1. tip imp. integral olup,

I. yol :

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x.\sqrt{x^2+1}} = \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$$

ile $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ integralinin çözümü gerekmektedir.

$x = 1.\tan\theta$ dönüşümü ile bu integral çözülebilir.

II. yol : Karşılaştırma testi :

$$\frac{1}{x.\sqrt{x^2+1}} < \frac{1}{x.\sqrt{x^2}} = \frac{1}{x^2}$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

$\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ $(p=2>1)$ p-integrali olup yakınsaktır.

Karşılaştırma testine göre $\int_2^\infty \frac{dx}{x.\sqrt{x^2+1}}$

integrali de yakınsaktır.

III. yol: Karşılaştırma testi limit hali:

$f(x) = \frac{1}{x.\sqrt{x^2+1}}$ olmak üzere $g(x) = \frac{1}{x^2}$

şeklinde bir fonk. seçelim.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x.\sqrt{x^2+1}} = 1$$

ve $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2}$ $(p=2>1)$ integralinin yakınsak

olduğunu biliyoruz.

Karşılaştırma testinin limit hali (i) der ki;

limit değeri $\neq 0,\infty$ ise seçtiğin integralle

sana sorulan integral aynı karakterdedir.

Dolayısıyla, $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2}$ yak olduğundan

$\int_2^\infty \frac{dx}{x.\sqrt{x^2+1}}$ integrali de yakınsaktır. //

SORU 22: $\int_1^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{x^5+2}}$ integralinin

karekteini belirleyiniz.

Birinci tip improper integraller icin Karsılaştırma Testinin Limit halini kullanalım:

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^5+2}}$ olmak üzere $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$

seklinde bir fonk. secelim

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{x^5+2}}}{\frac{1}{x^{3/2}}} = 1$$

ve $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ $\left(p=\frac{3}{2}>1\right)$ integralinin yak. olduğunu biliyoruz. O halde, karşılaştırma testinin limit hali (i) e göre, her iki integral de aynı karekterdedir. Dolayısıyla,

$\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ yak. olduğundan $\int_1^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{x^5+2}}$ de yaktır.

SORU 23: $\int_1^{\infty} e^{-x^2}.dx$ integralinin karakterini belirleyiniz.

1. tip imp. integral olup, sadece karakterini sorduğu için karşılaştırma testini (limit hali) kullanalım:

$f(x) = e^{-x^2}$ olmak üzere, $g(x) = \frac{1}{x^2}$ fonksiyonunu seçelim.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}\ \text{B.}}{\underset{\text{L}}{=}} \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{2x.e^{x^2}} = 0$$

bulunur. Karşılaştırma testi limit hali (ii) der ki;

limit değeri $= 0$ ve $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ integrali yakınsak olduğundan $\int_1^{\infty} e^{-x^2}.dx$ integrali de yakınsaktır.//

Neden $g(x)=\frac{1}{x^2}$ seklinde bir fonksiyon seciyoruz?

Bir an icin $g(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonunu sectiğimizi düsünelim

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x^2}} \overset{\frac{\infty}{\infty} \, LB}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x.e^{x^2}} = 0$$

bulunur. Karsılastırma testi limit hali (ii) derki; limit degeri $=0$ ise test ancak $\int_1^{\infty} g(x)dx$ integrali yakınsak ise sonuç verir.

$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}$ integrali ($p=1$ ile) ıraksak oldugundan test sonuç vermez.

Sonuç olarak; limiti anlamlı kılacak (yani test sonuç verecek) sekilde $g(x)$ fonk.nun secimi size kalmaktadır. //