Bilgisayar müh. Matematik Uygulamaları

07/05/20
Salı

Soldan çarptığımda → satırlar
Sağdan " → sütunlar
> yer değiştiriyor.

$$E_{3,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Birim eleman matris}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}}_{B} \qquad A(2,i) = B(3,i)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \end{bmatrix} \qquad A(i,3) = B(i,2)$$

Kare matrisin 2 satırını yer değiştirmek istiyorsam I matris ile çarp.

Bir matrisin sütununu yer değiştirmek istiyorsam

$$I_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2 satır yer değiştirdi.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Sütunlar yer değiştirdi.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

Matris İzi (Trace)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \qquad tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Özellikleri: $A, B \in R^{m \times m}$

1) $AB \neq BA$

2) $(AB)^T = B^T . A^T$

3) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

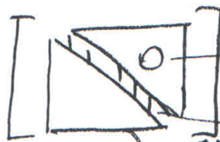
4) $tr(AB) = tr(BA)$ → matris çarpımları eşit değil ama yer değiştirm tr ler birbirine eşittir.

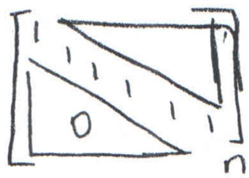
MATRİS AYRIŞTIRMALARI

1) LU ayrıştırması

A matrisi kare matris ise, $A \in R^{n \times n}$

$A = L.U$

L: Lower Triangular (Alt üçgensel matris) → L =  → köşegen üstü değerler 0 ; → köşegenler = herhangi bir değer. $n \times n$

U: Upper Triangular (Üst üçgensel) → U =  $n \times n$

$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in R^n$, $\bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in R^n$ $A\bar{x} = \bar{b}$ (n bilinmeyenli n denklem)

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}\right\} \text{n tane denklem} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Klasik Çözüm:

$\bar{x} = A^{-1} . \bar{b}$

MATLAB: x = inv(A)*b ; (→ invörs)

$A^{-1} \to O(n^3)$

Bunun yerine,

$A = L.U$ (Ayrıştırdığımızı varsayalım).

$L.U.\bar{x} = \bar{b}$

$U.\bar{x} = \bar{y}$

$L.\bar{y} = \bar{b}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

(1. Adım)

$L \cdot \bar{y} = \bar{b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$l_{11} \cdot y_1 = b_1 \Rightarrow y_1 = b_1 / l_{11}$ ✓

$l_{21} \cdot y_1 + \cdot y_2 = b_2 \Rightarrow \cancel{y_2 = \dfrac{b_2 - l_{21}}{l_2}}$

$y_2 = (y_2 - l_{21} y_1)/l_{22}$

$l_{31} \cdot y_1 + l_{32} \cdot y_2 + l_{33} \cdot y_3 = b_3$

$$y_3 = \frac{b_3 - [l_{31} y_1 + l_{32} \cdot y_2]}{l_{33}}$$

$k = 1 \Rightarrow y_1 = b_1 / l_{11}$

$$\underbrace{\left[y_k = \Big(b_k - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki} \cdot y_i\Big) / l_{kk} \qquad k \geq 2 \rightarrow k = 2, \ldots, n \right]}_{}$$

Forward substitution (İleri Yerine Koyma)

Karmaşıklığı (Complexity)

$1 + 2 + 3 + \ldots + n$ Çarpma

$O\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \sim O\left(\frac{n^2}{2}\right)$

(2. Adım)

$U \cdot x = \bar{y}$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

2 çarp

$x_3 = 0 + y_3 / u_{33}$

$x_2 = 0 + (y_2 - u_{23} \cdot x_3) / u_{22}$

2 Toplama

$x_1 = 0 + (y_1 - [u_{12} x_2 + u_{13} x_3]) / u_{33}$

Backword Substitu

"Geri yerine koym

$O\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \sim O\left(\frac{n^2}{2}\right)$

Toplama + Çarpma

step 1 + step 2 karmaşıklık: $O(n^2)$

LU Ayrıştırması

$$A = \begin{bmatrix} \cdots & a_1^T & \cdots \\ — & a_2^T & — \\ & \vdots & \\ — & a_n^T & — \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$A \xrightarrow[\text{Elimination}]{\text{Gauss}} U \xrightarrow[\text{kaydederek}]{\text{Satır işlemlerini}} L$$

Satır İşlemleri:

Satır $(i) \longleftarrow$ satır $(i) - \alpha \cdot$ satır (j)

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 6 & 8 & 1 \\ 4 & -8 & -3 \end{bmatrix}$$

(1. Adım)

Satır(2) ⟵ Satır(2) − 3. Satır(1)

$$\alpha = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 0 & -4 & 16 \\ 4 & -8 & -3 \end{bmatrix}}_{A_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 6 & 8 & 1 \\ 4 & -8 & -3 \end{bmatrix}}_{A}$$

→ hangi elemanı sıfırladık b'yi, onun yerine −3 yazıyoruz.

(Adım 2)

Satır(3) ⟵ Satır(3) − 2. satır(1) $\quad \alpha = \frac{a_{31}}{a_{11}} = 2$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 0 & -4 & 16 \\ 0 & -16 & 7 \end{bmatrix}}_{A_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 0 & -4 & 16 \\ 4 & -8 & -3 \end{bmatrix}}_{A_1}$$

Adım 3 : A_2 matrisinde

Satır(3) ⟵ Satır(3) − α. satır(2)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 0 & -4 & 16 \\ 0 & 0 & -57 \end{bmatrix}}_{A_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 0 & -4 & 16 \\ 0 & -16 & 7 \end{bmatrix} \qquad \alpha = \frac{a_{32}}{a_{22}} = 4$$

$$\boxed{A_3 = U}$$

$U = (E_3 E_2 E_1) A$ → A matrisini soldan ilk E_1 sonra E_2, E_3 ile çarptık U elde ettik.

$$A = (\underbrace{E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1}}_{L \text{ Matrisi}}).U \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 0 & -4 & 16 \\ 0 & 0 & -57 \end{bmatrix}$$

$$L = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1}$$

$$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_1^{-1} . E_2^{-1} . E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$