Hafta 10:
z-Dönüşümü

Ele Alınacak Ana Konular

- *z*-dönüşümü
- *z*-dönüşümünün yakınsaklık bölgesi
- Ters *z*-dönüşümü
- *z*-dönüşümünün özellikleri
- *z*-dönüşümü kullanarak LTI sistemlerin analizi

z-Dönüşümü

- İmpuls yanıtı $h[n]$ olan bir LTI sistemin, z^n girişine olan yanıtının $y[n] = H(z)z^n$ olduğunu görmüştük. $H(z)$ aşağıdaki gibi hesaplanıyordu:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

- $z = e^{j\omega}$ yani $|z| = 1$ için, yukarıda verilen toplam $h[n]$'nin ayrık-zaman Fourier dönüşümüdür. $|z| = 1$ olmak zorunda olmadığında, toplamaya z-dönüşümü denir.

- z karmaşık bir sayı olmak üzere, bir ayrık-zaman işaret $x[n]$'nin z-dönüşümü

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}}$$

denklemiyle tanımlanır. z-dönüşümünü belirtmek için $Z\{x[n]\}$ kullanacak, işaret ile z-dönüşümü arasındaki ilişkiyi, aşağıdaki şekilde belirteceğiz.

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$$

z-Dönüşümü

- Laplace dönüşümü ile sürekli-zaman Fourier dönüşümü arasında ilişki olduğu gibi, z-dönüşümü ile ayrık-zaman Fourier dönüşümü arasında ilişki vardır.

- z kutupsal koordinatlarda $|z| = re^{j\omega}$ şeklinde yazılabilir. O halde,

$$X(z) = X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(re^{j\omega}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{x[n]r^{-n}\right\}e^{-j\omega n}$$

- Görüldüğü gibi, $X(re^{j\omega})$, $x[n]$ ile r^{-n} dizilerinin çarpımının Fourier dönüşümüne eşittir. Yani,

$$\boxed{X(re^{j\omega}) = \mathrm{F}\{x[n]r^{-n}\}.}$$

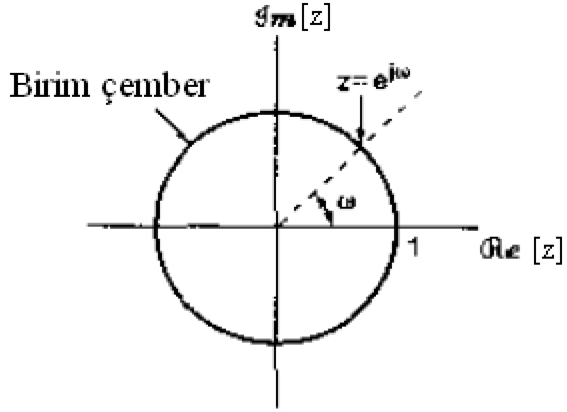
- $|z| = 1$ iken, toplama $x[n]$ işaretinin ayrık-zaman Fourier dönüşümüne eşit olur:

$$\boxed{X(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = F\{x[n]\}}$$

z-Dönüşümü

- Laplace dönüşümü, karmaşık s-düzleminde jω-ekseni üzerinde hesaplandığında sürekli-zaman Fourier dönüşümünü veriyordu.

- z-dönüşümü, karmaşık z-düzleminde birim çember ($|z|=1$) üzerinde hesaplandığında, ayrık-zaman Fourier dönüşümüne eşit olur.



- Bir $x[n]$ işaretinin z-dönüşümünün var olabilmesi için $x[n]r^{-n}$ işaretinin ayrık-zaman Fourier dönüşümü yakınsamalıdır. Verilen bir işaret için, z-dönüşümünün var olduğu r değerleri kümesine YAKINSAKLIK BÖLGESİ (ROC) denir. ROC, birim çemberi içeriyorsa, işaretin Fourier dönüşümü de vardır.

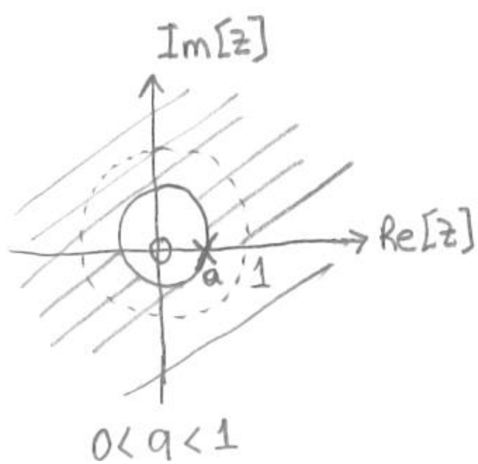
z-Dönüşümü

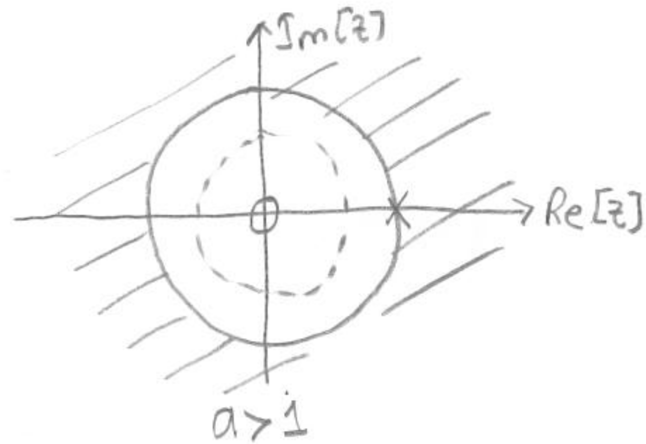
ÖRNEK: $x[n] = a^n u[n]$ işaretinin z-dönüşümünü hesaplayınız, sıfır-kutup diyagramı ve yakınsaklık bölgesini çiziniz.

ÇÖZÜM:
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^n$$

Serinin yakınsaması için $|az^{-1}|<1$ veya eşdeğer olarak $|z|>|a|$ olmalıdır. O halde,

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \qquad \mathrm{ROC}: |z| > |a|$$





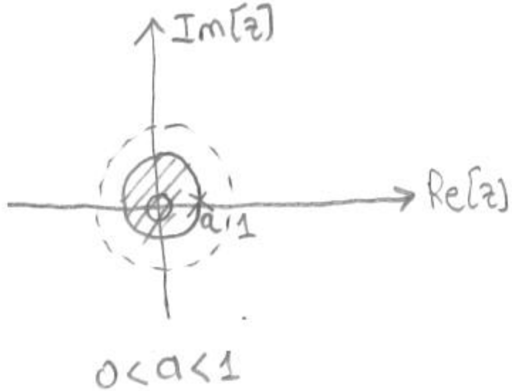
z-Dönüşümü

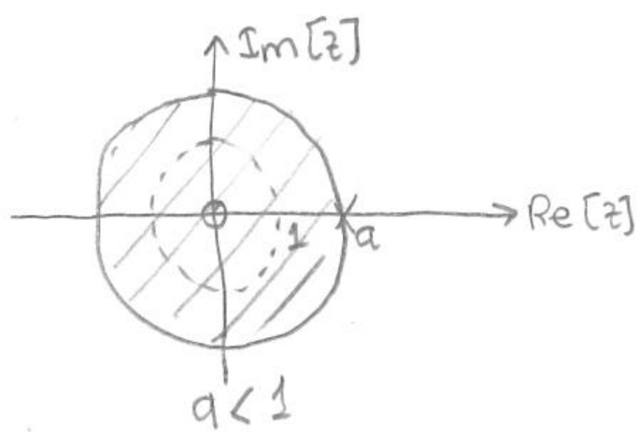
ÖRNEK: $x[n] = -a^n u[-n-1]$ işaretinin z-dönüşümünü hesaplayınız, sıfır-kutup diyagramı ve yakınsaklık bölgesini çiziniz.

ÇÖZÜM:
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(a^{-1} z\right)^n$$

Serinin yakınsaması için $|a^{-1}z|<1$ veya eşdeğer olarak $|z|<|a|$ olmalıdır. O halde,

$$X(z) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(a^{-1} z\right)^n = 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \qquad \text{ROC}: |z| < |a|$$





z-Dönüşümü

ÖRNEK: Aşağıda verilen işaretin z-dönüşümünü hesaplayınız, sıfır-kutup diyagramını ve yakınsaklık bölgesini çiziniz.

$$x[n] = 7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

ÇÖZÜM:
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\} z^{-n} = 7\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n - 6\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n$$

z-dönüşümünün var olabilmesi için iki seri de yakınsamalıdır Yani,

$$\left|\frac{1}{3}z^{-1}\right| < 1 \Rightarrow |z| > 1/3 \text{ ve } \left|\frac{1}{2}z^{-1}\right| < 1 \Rightarrow |z| > 1/2$$

O halde,

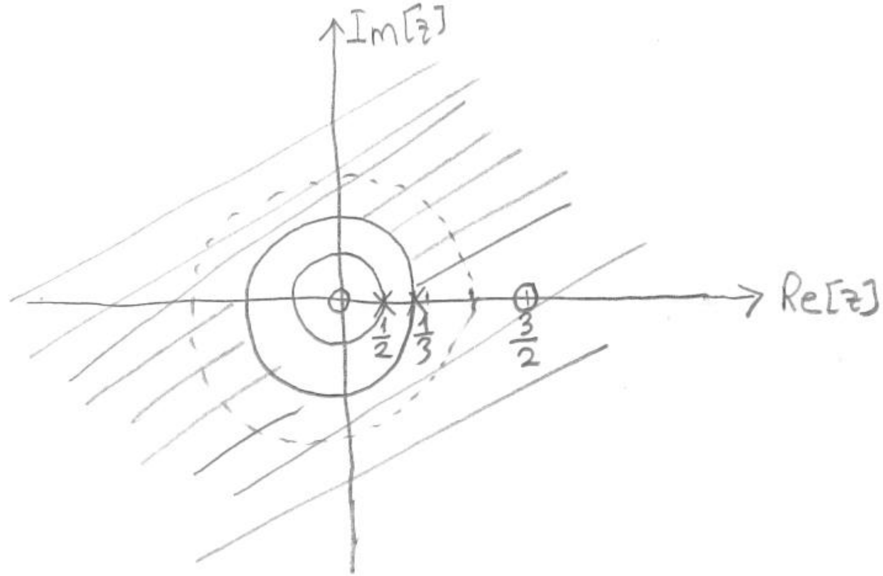
$$X(z) = \frac{7}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1-\frac{3}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \frac{z\left(z-\frac{3}{2}\right)}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}, \quad \text{ROC}: |z| > \frac{1}{2}$$

Aynı sonucu, önceki alıştırmaları kullanarak hesaplama yapmadan da bulabiliriz.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, \qquad \text{ROC}: |z| > \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad \text{ROC}: |z| > \frac{1}{2}$$

$$7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{7}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad \text{ROC}: |z| > \frac{1}{2}$$



z-Dönüşümü

ÖRNEK: Aşağıda verilen işaretin z-dönüşümünü hesaplayınız, sıfır-kutup diyagramını ve yakınsaklık bölgesini çiziniz.

$$x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[n]=\left\{\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{3}e^{j\pi/4}\right)^n-\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}\right)^n\right\}u[n]$$

ÇÖZÜM:

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{3}e^{j\pi/4}\right)^n-\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}\right)^n\right\}z^{-n}=\frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}e^{j\pi/4}z^{-1}\right)^n-\frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1}\right)^n$$

z-dönüşümünün var olabilmesi için iki seri de yakınsamalıdır Yani,

$$\left|\frac{1}{3}e^{j\pi/4}z^{-1}\right|<1\Rightarrow|z|>1/3 \text{ ve } \left|\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1}\right|<1\Rightarrow|z|>1/3$$

O halde,

$$X(z)=\frac{1}{2j}\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{j\pi/4}z^{-1}}-\frac{1}{2j}\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1}}=\frac{\frac{1}{3\sqrt{2}}z}{\left(z-\frac{1}{3}e^{j\pi/4}\right)\left(z-\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}\right)},\quad \text{ROC}:|z|>\frac{1}{3}$$

z-Dönüşümü

ÖRNEK: Aşağıda verilen işaretlerin z-dönüşümünü hesaplayınız, sıfır-kutup diyagramını ve yakınsaklık bölgesini çiziniz.

(i) $x[n]= \delta[n]$, (ii) $x[n]= \delta[n-1]$, (ii) $x[n]= \delta[n+1]$

ÇÖZÜM:

(i) $$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n]z^{-n}=\delta[0]z^{-0}=1, \quad \mathrm{ROC}:\forall z$$

(ii) $$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n-1]z^{-n}=\delta[1-1]z^{-1}=z^{-1}, \quad \mathrm{ROC}:\forall z$$

(iii) $$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n+1]z^{-n}=\delta[-1+1]z^{-(-1)}=z, \quad \mathrm{ROC}:\forall z$$

z-Dönüşümü

ÖRNEK: Aşağıda verilen işaretin z-dönüşümünü hesaplayınız, sıfır-kutup diyagramını ve yakınsaklık bölgesini çiziniz.

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}, \qquad a > 0.$$

ÇÖZÜM: $$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(az^{-1}\right)^n = \frac{1-\left(az^{-1}\right)^n}{1-az^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z-a}, \quad \text{ROC}: \forall z$$

Sıfırlar (pay polinomunun kökleri) $\quad z_k = a_k e^{j(2\pi k/N)}, \quad k = 0,1,\dots, N-1$

Kutuplar (payda polinomunun kökleri): $z = a$, $z=0$ (N-1) katlı

k= 0 için bulunan sıfır ile kutup birbirini götürür. Sonuç olarak,

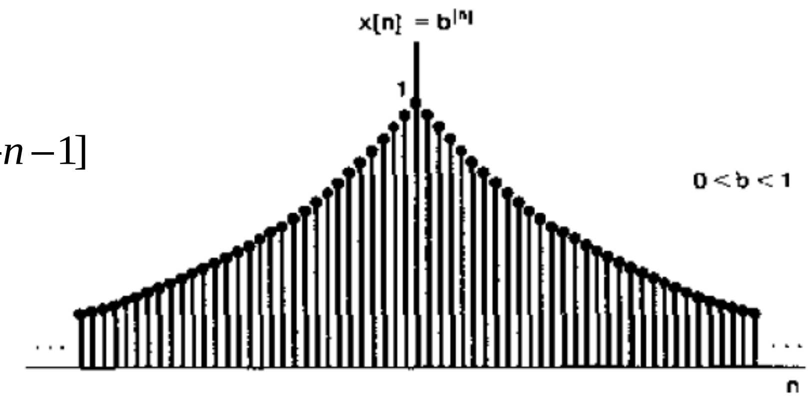
Sıfırlar: $z_k = a_k e^{j(2\pi k/N)}, \quad k = 1,\dots, N-1$ Kutuplar: $z=0$ (N-1) katlı

z-Dönüşümü

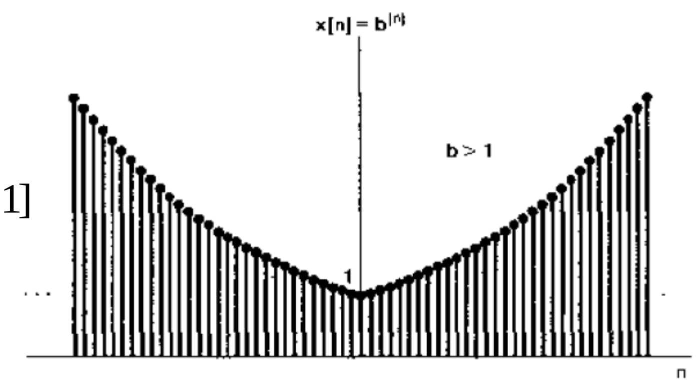
Örnek: $x[n]=b^{|n|},\ \ b>0$ işaretinin z-dönüşümünü hesaplayınız, sıfır-kutup diyagramını ve yakınsaklık bölgesini çiziniz.

Çözüm: İşaret çift taraflı olup $b<1$ ve $b>1$ için şekli aşağıda verilmiştir.

$$x[n]=b^{n}[n]+b^{-n}u[-n-1]$$



$$x[n]=b^{n}[n]+b^{-n}u[-n-1]$$

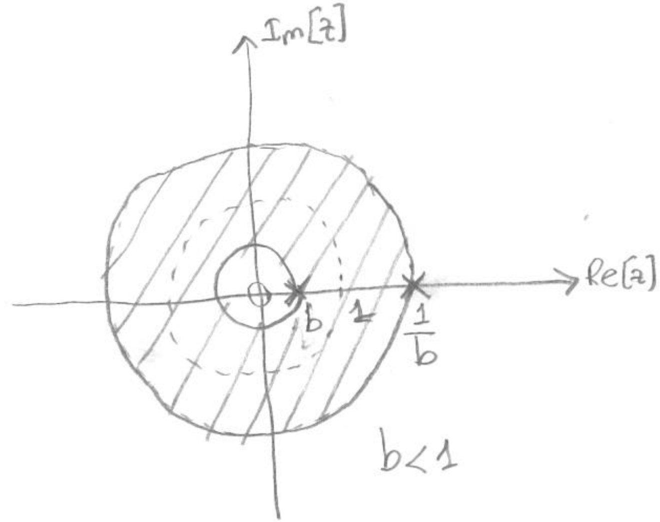


$$b^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-bz^{-1}}, \qquad \text{ROC}: |z| > b$$

$$b^{-n} u[-n-1] \xleftrightarrow{z} \frac{-1}{1-b^{-1}z^{-1}}, \qquad \text{ROC}: |z| < \frac{1}{b}$$

$$x[n] = b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1] \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}} - \frac{1}{1-b^{-1}z^{-1}},$$

$$= \frac{b^2-1}{b} \frac{z}{(z-b)(z-b^{-1})}, \quad \text{ROC}: b < |z| < \frac{1}{b}$$



z-Dönüşümünün Yakınsaklık Bölgesinin Özellikleri

1. Bir ayrık-zaman işaretini z-dönüşümünün ROC'si, z-düzleminde sıfır etrafında bir halkadır.

2. ROC herhangi bir kutup içermez.

3. Ayrık-zaman işaret sonlu süreli ise, z-dönüşümünün ROC'si muhtemelen $z = 0$ ve/veya $z = \infty$ hariç, tüm z-düzlemidir.

4. Ayrık-zaman işaret sağ taraflı ve $|z|=r_0$ halkası z-dönüşümünün ROC'si içinde ise, $|z| > r_0$ eşitsizliğini sağlayan tüm z değerleri de ROC içindedir.

5. Ayrık-zaman işaret sol taraflı ve $|z|=r_0$ halkası z-dönüşümünün ROC'si içinde ise, $0 < |z| < r_0$ eşitsizliğini sağlayan tüm z değerleri de ROC içindedir.

z-Dönüşümünün Yakınsaklık Bölgesinin Özellikleri

6. Ayrık-zaman işaret çift taraflı ve $|z|=r_0$ halkası z-dönüşümünün ROC'si içinde ise, ROC $|z|=r_0$ halkasını içeren bir halkadır.

7. Ayrık-zaman işaretin z-dönüşümü rasyonel ise, ROC kutuplarla sınırlıdır veya sonsuza kadar uzanır.

8. Ayrık-zaman işaretin z-dönüşümü rasyonel ve işaret sağ taraflı ise, ROC en dıştaki kutbun dışındaki bölge, yani en yüsek genlikli kutbun genliğine eşit halkanın dışıdır. İşaret aynı zamanda nedensel ise (sağ taraflı ve $n < 0$ için sıfıra eşitse), $z = \infty$ ROC içindedir.

9. Ayrık-zaman işaretin z-dönüşümü rasyonel ve işaret sol taraflı ise, ROC en içteki kutbun içindeki bölge, yani en küçük genlikli kutbun genliğine eşit halkanın içidir. İşaret aynı zamanda nedensel değilse (sağ taraflı ve $n > 0$ için sıfıra eşitse), $z = 0$ ROC içindedir.

z-Dönüşüm Çiftleri

İşaret	**z-Dönüşümü**	**Yakınsaklık Bölgesi (ROC)**
$\delta[n]$	1	Tüm z değerleri
$u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$-u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
$\delta[n-m]$	z^{-m}	$m > 0$ için 0 veya $m < 0$ için ∞ hariç tüm z değerleri
$\alpha^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
$-\alpha^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$

z-Dönüşüm Çiftleri

İşaret	**z-Dönüşümü**	**Yakınsaklık Bölgesi (ROC)**
$n\alpha^n u[n]$	$\dfrac{\alpha z^{-1}}{\left(1-\alpha z^{-1}\right)^2}$	$\|z\|>\|\alpha\|$
$-n\alpha^n u[-n-1]$	$\dfrac{\alpha z^{-1}}{\left(1-\alpha z^{-1}\right)^2}$	$\|z\|<\|\alpha\|$
$\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{1-\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
$\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
$r^n\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{1-r\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\|>r$
$r^n\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{r\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\|>r$

Ters z-Dönüşümü

- $x[n]$ işaretinin z-dönüşümü $X(z)=X(re^{j\omega})$, $x[n]r^{-n}$ işaretinin ayrık-zaman Fourier dönüşümü ise, $x[n]r^{-n}$ işareti $X(re^{j\omega})$'nın ters Fourier dönüşümüdür. Yani,

$$X(re^{j\omega}) = F\{x[n]r^{-n}\} \Rightarrow x[n]r^{-n} = F^{-1}\{X(re^{j\omega})\} \Rightarrow x[n] = r^n F^{-1}\{X(re^{j\omega})\}$$

$$= r^n \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega})(re^{j\omega})^n d\omega$$

- $z = re^{j\omega}$ değişken dönüşümü yapılırsa, $dz = jre^{j\omega}d\omega = jzd\omega \Rightarrow d\omega = (1/j)z^{-1}dz$

- ω, 2π aralığında değişirken, z r yarıçaplı bir daire üzerinde değerler alır. Dolayısıyla, integral z cinsinden aşağıdaki gibi olur:

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{j2\pi}\oint X(z)z^{n-1}dz}$$ (Ters z-dönüşümü)

- O, merkezi orijin olan, saat yönünün tersi yönde, r yarıçaplı kapalı bir eğriyi ifade etmeketdir. Ters z-dönüşümü, karmaşık düzlemde integral alma yerine basit kesirlere ayırma ve kuvvet serisine açma yöntemleri kullanılarak belirlenir.

Ters z-Dönüşümü

Örnek (basit kesirlere ayırma): Aşağıda verilen z-dönüşümlerinin tersini bulunuz.

(i) $X(z) = \dfrac{3-(5/6)z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}, \quad \text{ROC}: |z| > \dfrac{1}{3}$

(ii) $X(z)$ aynı, ROC: $1/4<|z|<1/3$,

(iii) $X(z)$ aynı, ROC: $|z|<1/4$,

Çözüm:

$$X(z) = \frac{A}{1-(1/4)z^{-1}} + \frac{B}{1-(1/3)z^{-1}} = \frac{1}{1-(1/4)z^{-1}} + \frac{2}{1-(1/3)z^{-1}}$$

(i) bileşenler sağ taraflıdır: $(1/4)^n u[n] + 2(1/3)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \dfrac{1}{1-(1/4)z^{-1}} + \dfrac{2}{1-(1/3)z^{-1}}$

(ii) 1/4 kutbundan gelen bileşen sağ taraflı, 1/3 kutbundan gelen bileşen sol taraflıdır:

$$(1/4)^n u[n] - 2(1/3)^n u[-n-1] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-(1/4)z^{-1}} + \frac{2}{1-(1/3)z^{-1}}$$

(iii) bileşenler sol taraflıdır: $-(1/4)^n u[-n-1] - 2(1/3)^n u[-n-1] \xleftrightarrow{z} \dfrac{1}{1-(1/4)z^{-1}} + \dfrac{2}{1-(1/3)z^{-1}}$

Ters z-Dönüşümü

Örnek (kuvvet serisine açma): Aşağıdaki z-dönüşümünün tersini bulunuz.

$$X(z) = 4z^2 + 2 + 3z^{-1},\ \text{ROC}: 0 < |z| < \infty$$

Çözüm: z-dönüşümünün tanımını hatırlayalım:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Görüldüğü gibi, z-dönüşümünde z'nin kuvvetlerinin yanında gözüken sayılar işaretin değerleridir (z^0 yanındaki sayı $x[0]$, z^{-1} yanındaki sayı $x[1]$, z^{-2} yanındaki sayı $x[2]$, z^1 yanındaki sayı $x[-1]$, z^2 yanındaki sayı $x[-2]$, vb). O halde,

$$x[n] = \begin{cases} 4, & n = -2 \\ 2, & n = 0 \\ 3, & n = 1 \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x[n] = 4\delta[n+2] + 2\delta[n] + 3\delta[n-1]$$

Ters z-Dönüşümü

Örnek (kuvvet serisine açma): Aşağıdaki z-dönüşümünün tersini bulunuz.

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}},\ \mathrm{ROC}:|z|>|a|$$

Çözüm: Önceki örneklerden işaretin sağ taraflı ve $x[n]=a^n u[n]$ olduğunu biliyoruz. Aynı sonucu verilen rasyonel z-dönüşümünü kuvvet serisine açarak da bulabiliriz. Polinom bölme işlemi, z'nin negatif kuvvetleri oluşacak şekilde yapılır:

$$\frac{1}{1-az^{-1}}=1+az^{-1}+a^2z^{-2}+a^3z^{-3}+\ldots$$

O halde, $n < 0$ için $x[n] = 0$, $x[1] = a$, $x[2] = a^2$ veya genel olarak $x[n]=a^n u[n]$.

Not: ROC $|z| < |a|$ olsaydı, işaret sol taraflı olacağından z'nin pozitif kuvvetleri oluşacak şekilde polinom bölme işlemi yapılır:

$$\frac{1}{1-az^{-1}}=-a^{-1}z-a^{-2}z^2-a^{-3}z^3+\ldots$$

Bu durumda, $n\geq 0$ için $x[n]=0$, $x[-1]=-a^{-1}$, $x[2]=-a^{-2}$ veya genel olarak $x[n]=-a^n u[-n-1]$.

Ters z-Dönüşümü

Örnek (kuvvet serisine açma): Aşağıdaki z-dönüşümünün tersini bulunuz.

$$X(z)=\ln(1+az^{-1}),\ \mathrm{ROC}:|z|>|a|$$

Çözüm: ln(1+x) için seri açılımı aşağıda verilmiştir.

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{n}}{n},\quad |x|<1$$

ln(1+x) için seri açılımında x yerine az^{-1} yazılırsa soruda $X(z)$ elde edilir:

$$X(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}a^{n}z^{-n}}{n},\quad |x|<1$$

Açılımda, z'nin kuvvetlerinin yanında gözüken sayılar işaretin değerleri olduğundan

$$x[n]=\begin{cases}(-1)^{n+1}\dfrac{a^{n}}{n}, & n\geq 1\\ 0, & n\leq 0\end{cases}\quad\Rightarrow x[n]=\frac{-(-a)^{n}}{n}u[n-1]$$

z-Dönüşümünün Özellikleri

- Kolaylık olması bakımından, z-dönüşümü ve tersini belirtmek için sırasıyla $Z\{x[n]\}$ ve $Z^{-1}\{X(z)\}$ kısa gösterilimini kullanacağız. Ayrıca, z-dönüşüm çiftini belirtmek için

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(\mathrm{z})$$

  notasyonunu kullanacağız.

- z-dönüşümünün aşağıda verilen özellikleri aracılığıyla, z-dönüşümü bilinen işaretlerden çoğu işaretin z-dönüşümünü elde etmek kolaylaşmaktadır.

- Aşağıda sadece en önemli özelliklerin ispatı verilecektir. Diğer özelliklerin ispatı benzer şekilde yapılabilir.

z-Dönüşümünün Özellikleri

Zamanda öteleme: $x[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z) \Rightarrow x[n-n_0] \overset{Z}{\longleftrightarrow} z^{-n_0} X(z)$

İspat: z-dönüşüm denkleminden

$$Z\{x[n-n_0]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0] z^{-n}$$

n-$n_0 = u$ değişken deönüşümü yapılırsa,

$$Z\{x[n-n_0]\} = \sum_{u=-\infty}^{\infty} x[u] z^{-(u+n_0)} = z^{-n_0} \sum_{u=-\infty}^{\infty} x[u] z^{-u} = z^{-n_0} X(z)$$

$X(z)$'nin ROC'si R olsun. $n_0>0$ ise, z^{-n0} ile çarpımdan dolayı, z = 0'da kutuplar oluşur ve bunlar $X(z)$'nin z = 0'daki sıfırlarını götürebilir. Dolayısıyla, z = 0, $z^{-n0}X(z)$'nin kutbu olabilir. Bu durumda x[n-n_0]'ın ROC'si orijin hariç R'dir.

$n0<0$ ise, z^{-n0} ile çarpımdan dolayı, z = 0'da sıfırlar oluşur ve bunlar $X(z)$'nin z = 0'daki kutuplarını götürebilir. Dolayısıyla, z = 0, $z^{-n0}X(z)$'nin sıfırı olabilir. Bu durumda x[n-n_0]'ın ROC'si sonsuz hariç R'dir.

z-Dönüşümünün Özellikleri

z-uzayında ölçekleme: $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) \Rightarrow z_0{}^n x[n] \xleftrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{z_0}\right)$

İspat: $Z\{z_0^n x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_0^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(\frac{z}{z_0}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{z_0}\right)$

z, $X(z)$'nin yakınsaklık bölgesi içindeyse, $|z_0|z$, $X(z/z_0)$'ın yakınsaklık bölgesi içindedir. O halde, $X(z)$'nin yakınsaklık bölgesi R ise, $X(z/z_0)$'ın yakınsaklık bölgesi $|z_0|R$ olur.

Özel durum: $z_0 = e^{j\omega_0} \Rightarrow e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{Z} X\left(e^{-j\omega_0} z\right)$

Diğer bir deyişle, bir işareti zaman uzayında belirli frekanslı karmaşık üstel bir işaret ile çarpmak, z-dönüşümünün üstel işaretin frekansı kadar dönmesine neden olur. Yani, tüm sıfırlar ve kutuplar üstel işaretin frekansı kadar döner.

z-Dönüşümünün Özellikleri

Konvolüsyon özelliği: $y[n] = x[n] * h[n] \Rightarrow Y(z) = X(z)H(z)$

İspat: Konvolüsyon denkleminden $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$

$$Y(z) = Z\{y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]\right]z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-k]z^{-n}\right]$$

Zamanda öteleme özelliğinden parantez içindeki terim $z^{-k}H(z)$ dir. O halde,

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}H(z) = H(z)\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k} = X(z)H(z)$$

$X(z)$'in ROC'si R_1 ve $H(z)$'in ROC'si R_2 olsun. $Y(z) = X(z)H(z)$ olduğundan, $Y(z)$'in var olabilmesi için $X(z)$ ve $H(z)$ var olmalıdır. Yani, $Y(z)$'in ROC'si $R = R_1 \cap R_2$ olur. Ancak, çarpımda sıfır-kutup götürmesi olursa $Y(z)$'in ROC'si $R_1 \cap R_2$ kesişiminden de büyük olabilir.

z-Dönüşümünün Özellikleri

z-uzayında türev alma: $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) \Rightarrow nx[n] \xleftrightarrow{Z} -z\dfrac{dX(z)}{dz}$

İspat: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \Rightarrow \dfrac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -nx[n]z^{-n-1}$

Eşitliğin her iki tarafı –z ile çarpılırsa

$$-z\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]z^{-n} = Z\{nx[n]\}$$

$X(z)$'in ROC'si R olsun. -z ile çarpma ilave bir kutup getirmeyip, sıfır-kutup götürmesi oluşmaması durumunda z = 0'da bir sıfır oluşturur. Bu nedenle, bir ayrık-zaman işareti zaman-uzayında n ile çarpmak z-dönüşümünün ROC'sini etkilemez. Yani, -z(dX(z)/dz)'in ROC'si de R'dir.

z-Dönüşümünün Özellikleri

Örnek: z-dönüşümü

$$X(z) = \ln(1+az^{-1}),\ |z| > a$$

olan işareti, z-uzayında türev alma özelliğinden yararlanarak hesaplayalım.

Çözüm:

$$nx[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1+az^{-1}}$$

$$a(-a)^{n}u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{a}{1+az^{-1}}$$

$$a(-a)^{n-1}u[n-1] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{az^{-1}}{1+az^{-1}}$$

$$x[n] = \frac{-a(-a)^{n-1}u[n-1]}{n} = \frac{-(-a)^{n}}{n}u[n-1]$$

z-Dönüşümünün Özellikleri

Örnek: z-dönüşümü

$$X(z) = \frac{az^{-1}}{\left(1 - az^{-1}\right)^2}, \quad |z| > |a|$$

olan işareti, z-uzayında türev alma özelliğinden yararlanarak hesaplayalım.

Çözüm:

$$a^n u[n] \stackrel{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$na^n u[n] \stackrel{z}{\longleftrightarrow} -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1 - az^{-1}}\right) = \frac{az^{-1}}{\left(1 - az^{-1}\right)^2}$$

z-Dönüşümünün Özellikleri

Özellik	**İşaret**	**z-dönüşümü**	**ROC**
	$x[n]$ $x_1[n]$ $x_2[n]$	$X(z)$ $X_1(z)$ $X_2(z)$	R R_1 R_2
Doğrusallık	$ax_1[n]+bx_2[n]$	$aX_1(z)+bX_2(z)$	En az $R_1 \cap R_2$
Zamanda öteleme	$x[n-n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	Orijin dahil veya hariç R
z-uzayında ölçekleme	$e^{j\omega_0 n}x[n]$ $z_0^n x[n]$ $a^n x[n]$	$X(e^{-j\omega_0}z)$ $X\left(\dfrac{z}{z_0}\right)$ $X(a^{-1}z)$	R $z_0 R$ $\|a\|R$
Zamanda tersine çevirme	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	$1/R$
Zamanda ölçekleme	$x_{(k)}[n]=\begin{cases} x[r], & n=rk \\ 0, & n\neq rk \end{cases}$	$X(z^k)$	$R^{1/k}$

z-Dönüşümünün Özellikleri

Özellik	**İşaret**	**z-dönüşümü**	**ROC**
Eşlenik alma	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R
Konvolüsyon	$x_1[n]*x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	En az $R_1 \cap R_2$
Fark alma	$x[n]-x[n-1]$	$(1-z^{-1})X(z)$	En az $R \cap (\|z\| > 0)$
Toplama	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{(1-z^{-1})}X(z)$	En az $R \cap (\|z\| > 1)$
z-uzayında türev alma	$nx[n]$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	R

İlk Değer Teoremi

$n < 0$ için $x[n]=0$ ise

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

LTI Sistemlerin z-dönüşümü Kullanılarak İncelenmesi

- $X(z)$, $Y(z)$ ve $H(z)$, bir LTI sistemin sırasıyla girişinin, çıkışının ve impuls yanıtının z-dönüşümleri olmak üzere, konvolüsyon özelliğinden $Y(z) = H(z)\, X(z)$ olduğunu görmüştük. $H(z)$'ye sistemin TRANSFER FONKSİYONU denir.

- Bir LTI sistemin çoğu özelliği, transfer fonksiyonunun kutupları, sıfırları ve yakınsaklık bölgesiyle ilişkilidir.

- Bir sistem nedensel ise $n<0$ için $h[n]=0$ olup impuls yanıtı sağ taraflıdır. O halde, $H(z)$'nin ROC'si z-düzleminde bir çemberin dışından sonsuza doğru uzanmalıdır.

- Ayrıca, $H(z)$ rasyonel ise, sistemin nedensel olabilmesi için $H(z)$'nin ROC'si en dıştaki kutbun dışında ve sonsuzu içeren bir bölge olmalıdır. Yani, $z \rightarrow \infty$ limit durumunda $H(z)$ sonlu olmalıdır. Diğer bir deyişle, $H(z)$'nin pay polinomunun derecesi payda polinomunun derecesinden büyük olmamalıdır.

LTI Sistemlerin *z*-dönüşümü Kullanılarak İncelenmesi

Bir ayrık-zaman LTI sistemin nedensel olabilmesi için gerek ve yeter koşul, transfer fonksiyonunun yakınsaklık bölgesinin karmaşık z-düzleminde bir çemberin dışında ve sonsuzu içeren bir bölge olmasıdır.

Rasyonel transfer fonksiyonlu bir ayrık-zaman LTI sistemin nedensel olabilmesi için gerek ve yeter koşul (a) transfer fonksiyonunun yakınsaklık bölgesi karmaşık z-düzleminde en dıştaki kutbun dışındaki bir bölge olmasıdır ve (b) $H(z)$'nin pay polinomunun derecesinin payda polinomunun derecesinden büyük olmamasıdır.

LTI Sistemlerin *z*-dönüşümü Kullanılarak İncelenmesi

Örnek: Transfer fonksiyonları aşağıda verilen ayrık-zaman LTI sistemlerin nedensel olup olmadıklarını belirleyiniz.

(i) $$H(z)=\frac{z^3-2z^2+z}{z^2+\frac{1}{4}z+\frac{1}{8}}$$

(ii) $$H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{1-2z^{-1}},\quad \mathrm{ROC}:|z|>2$$

Çözüm:

(i) ROC hakkında bilgi sahibi olmamamıza rağmen sistemin nedensel olmadığını söyleyebiliriz çünkü pay polinomunun derecesi payda polinomunun derecesinden büyüktür.

(ii) $$H(z)=\frac{2-\frac{5}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}=\frac{2z^2-\frac{5}{2}z}{z^2-\frac{5}{2}z+1}$$

z=1/2, z=2'de iki kutup vardır. Sistem nedenseldir çünkü ROC en dıştaki kutbun dışına doğrudur ve pay polinomunun derecesi payda polinomununkinden büyük değildir.

LTI Sistemlerin z-dönüşümü Kullanılarak İncelenmesi

- LTI bir ayrık-zaman sistemin kararlı olabilmesi için impuls yanıtı mutlak toplanabilir olmalıdır. Bu durumda, $h[n]$'nin ayrık-zaman Fourier dönüşümü var olup $H(z)$'nin ROC'si karmaşık z-düzleminde birim çemberi içermelidir.

- LTI bir ayrık-zaman sistemin nedensel olduğu biliniyorsa, $H(z)$'nin ROC'si en dıştaki kutbun dışına doğru olmalıdır. ROC'nin aynı zamanda birim çemberi de içermesi için, $H(z)$'nin kutuplarının tümü karmaşık z-düzleminde birim çemberin içinde olmalıdır.

Bir ayrık-zaman LTI sistemin kararlı olabilmesi için gerek ve yeter koşul, $H(z)$'nin ROC'sinin karmaşık z-düzleminde birim çemberi ($|z|=1$) içermesidir.

Rasyonel transfer fonksiyonlu nedensel bir ayrık-zaman LTI sistemin kararlı olabilmesi gerek ve yeter koşul $H(z)$'nin kutuplarının tümünün birim çember içinde (yani tümünün genliğinin birden küçük) olmasıdır.

LTI Sistemlerin *z*-dönüşümü Kullanılarak İncelenmesi

Örnek: Transfer fonksiyonları aşağıda verilen nedensel ayrık-zaman LTI sistemlerin kararlı olup olmadıklarını belirleyiniz.

(i) $H(z) = \dfrac{1}{1 - az^{-1}}$ (ii) $H(z) = \dfrac{1}{1 - 2r\cos(\theta)z^{-1} + r^2 z^{-2}}$

Çözüm:

(i) $H(z)$'nin $z = a$'da bir kutbu vardır. Sistemin kararlı olabilmesi için kutup birim çember içinde olmalıdır. Yani, $|a| < 1$ ise sistem kararlı, aksi halde kararsızdır.

(ii) $H(z)$'nin $z_1 = re^{j\theta}$ ve $z_2 = re^{-j\theta}$' da iki kutbu vardır. $|r| < 1$ ise, kutuplar birim çember içinde, aksi halde dışındadır. O halde, sistemin kararlı olabilmesi için, $r| < 1$ koşulu sağlanmalıdır.

Doğrusal, Sabit Katsayılı Fark Denklemleriyle Tanımlanan LTI Sistemler

- Girişi-çıkış ilişkisi aşağıda verilen ayrık-zaman sistemin transfer fonksiyonunu bulalım

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- Konvolüsyon özelliğinden, $Y(z) = X(z)H(z) \Rightarrow H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$

- Fark denkleminin her iki tarafının z-dönüşümü alınır ve z-dönüşümünün zamanda öteleme özelliği kullanılırsa transfer fonksiyonunu bulunabilir:

$$Z\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k]\right\} = Z\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]\right\} \Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k Z\{y[n-k]\} = \sum_{k=0}^{M} b_k Z\{x[n-k]\}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(Z) \Rightarrow H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

Doğrusal, Sabit Katsayılı Fark Denklemleriyle Tanımlanan LTI Sistemler

ÖRNEK: Giriş-çıkış ilişkisi aşağıda verilen sistemin transfer fonksiyonu ve impuls yanıtını bulunuz.

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]+\frac{1}{3}x[n-1]$$

ÇÖZÜM: $$Y(z)-\frac{1}{2}z^{-1}Y(z)=X(z)+\frac{1}{3}z^{-1}X(z)\Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

H(z)'nın ters *z*-dönüşümü alınırsa impuls yantı elde edilir.

$$h[n]=Z^{-1}\{H(z)\}=Z^{-1}\left\{\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right\}=Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right\}$$

Ters *z*-dönüşümü yakınsaklık bölgesine bağlıdır. İki durum vardır

(i) ROC: |*z*|>1/2, impuls yanıtı sağ taraflı olup $h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]$

(ii) ROC: |*z*|<1/2, impuls yanıtı sol taraflı olup $h[n]=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[-n-1]-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[-n]$