

Sürekli olasılık fonksiyonları

- X değişkeni $(-\infty; +\infty)$ aralığında tanımlanmış bir sürekli rassal değişken olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $f(x)$ olasılık fonksiyonu X sürekli rassal değişkeninin olasılık fonksiyonu olarak tanımlanır.

1) $f(x) \geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

- Sürekli bir rassal değişkenin tanım aralığındaki herhangi bir değeri tam olarak alma olasılığı sıfırdır. Bu durumda

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx \quad \text{şeklinde hesaplanır.}$$

- $f(x)$ fonksiyonu olasılık yoğunluk fonksiyonu (oyf) olarak adlandırılır. $F(x)$ ile gösterilen fonksiyon **dağılım fonksiyonu** (odf) olup olasılık yoğunluk fonksiyonunun **birikimli (kümülatif)** halidir. Buna göre dağılım fonksiyonu (odf) şöyle ifade edilir.

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(s)ds$$

- Dağılım fonksiyonu (odf) bilindiği takdirde yoğunluk fonksiyonu (oyf) şöyle ifade edilir.

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

- Bu durumda X rassal değişkeninin $(a;b)$ aralığında olma olasılığı şöyle yazılabilir.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- **Örnek:** Aşağıda bir yoğunluk fonksiyonu verilmiştir

$$f(x) = \begin{cases} \frac{kx^3}{5} & 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

- a) Yukarıdaki fonksiyonun olasılık fonksiyonu olabilmesi için k ne olmalıdır?
- b) $P(X > 3)$ olasılığını bulunuz.
- c) Olasılık dağılım fonksiyonunu elde ediniz.
- d) $P(2 < X < 4)$ olasılığını hesaplayınız.

- **Çözüm: a)** Fonksiyonun oyf olabilmesi için iki şart gereklidir.
- 1. şart $f(x) \geq 0$ olup $k > 0$ için bu şart sağlanır.
- 2. şart ise fonksiyonun tanım aralığındaki integralinin 1'e eşit olmasıdır. Bunu şöyle yapabiliriz.

$$\int_0^5 \frac{kx^3}{5} dx = 1 \text{ olmalıdır.}$$

$$\frac{kx^4}{20} \Big|_0^5 = 1 \Rightarrow \frac{625k}{20} = 1 \Rightarrow k = \frac{20}{625} = \frac{4}{125}$$

- Şu halde olasılık yoğunluk fonksiyonu şöyle yazılır.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x^3}{625} & 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

- b) $P(X > 3) = \int_3^5 \frac{4x^3}{625} dx = \frac{x^4}{625} \Big|_3^5 = \frac{625 - 81}{625} \Rightarrow \frac{544}{625} = 0,87$

- c) $F(x) = \int_0^x \frac{4s^3}{625} ds = \frac{s^4}{625} \Big|_0^x \Rightarrow \frac{x^4}{625}$

- Olasılık dağılım fonksiyonu (odf)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^4}{625} & 0 \leq x \leq 5 \\ 1 & x > 5 \end{cases}$$

- d) $P(2 < x < 4) = F(4) - F(2)$ olur

$$\frac{4^4 - 2^4}{625} = \frac{256 - 16}{625} \Rightarrow P(2 < x < 4) = \frac{240}{625} = 0,38$$

- Veya

$$P(2 < x < 4) = \int_2^4 \frac{4x^3}{625} dx = \frac{x^4}{625} \Big|_2^4 \Rightarrow \frac{240}{625}$$

Sürekli Olasılık Dağılım (Birikimli-Kümülatif)Fonksiyonu

- **Örnek:** X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu şöyle verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} k(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{diğer haller} \end{cases}$$

- a) Yukarıdaki fonksiyonun olasılık yoğunluk fonksiyonu olabilmesi için k ne olmalıdır?
- b) Olasılık dağılım fonksiyonunu (dağılım fonksiyonu) belirleyiniz.
- c) Olasılık dağılım fonksiyonundan hareketle $P(0.2 < X < 0.6)$ olasılığını bulunuz.

Sürekli Olasılık Dağılım (Birikimli-Kümülatif)Fonksiyonu

- Çözüm:
- a) Yukarıdaki fonksiyonun olasılık yoğunluk fonksiyonu (oyf) olabilmesi için aşağıdaki iki şartın sağlanması gerekir.

$$1) f(x) \geq 0 \qquad 2) \int_0^1 k(1-x)dx = 1$$

- Birinci şart için k katsayısının pozitif olması yeterlidir. Şu halde 2. şartın sağlanması gerekir.

$$2) \int_0^1 k(1-x)dx = 1 \Rightarrow k \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 1 \Rightarrow k \left[1 - \frac{1}{2} \right] = 1 \Rightarrow k \left[\frac{1}{2} \right] = 1 \Rightarrow k = 2 \text{ olur.}$$

Sürekli Olasılık Dağılım (Birikimli-Kümülatif)Fonksiyonu

- Bu durumda oyf şöyle yazılır.

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{diger haller} \end{cases}$$

- b) Olasılık dağılım fonksiyonu (odf)

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(s)ds$$

$$F(x) = \int_0^x 2(1-u)du = 2s - s^2 \Big|_0^x \Rightarrow 2x - x^2$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x - x^2 & x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Sürekli Olasılık Dağılım (Birikimli-Kümülatif)Fonksiyonu

- c)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x - x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

$$P(0.2 < X < 0.6) = F(0.6) - F(0.2) = (2 \cdot 0.6 - 0.6^2) - (2 \cdot 0.2 - 0.2^2)$$

$$P(0.2 < X < 0.6) = 0.84 - 0.36$$

$$P(0.2 < X < 0.6) = 0.48 \text{ olur.}$$

Dağılım fonksiyonunun özellikleri

- Dağılım fonksiyonu aşağıdaki iki önemli özelliğe sahiptir.
- **Teorem 1)**
- a) F olasılık dağılım fonksiyonu azalmayan bir fonksiyondur.
 $x_2 > x_1$ olmak üzere $F(x_2) > F(x_1)$ olur.

- b)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ olur. Yani $F(-\infty) = 0, F(\infty) = 1$ olur.

Dağılım fonksiyonunun özellikleri

- **Teorem 2)**

- **a)** $F(x)$ olasılık dağılım fonksiyonu, $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli bir rassal değişkenin kümülatif fonksiyonu olsun. Bu durumda her x için;

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad \text{ilişkisi vardır.}$$

- **b)** X , $x_1 < x_2 < x_3 \dots$ gibi sıralı $x_1, x_2, x_3 \dots$ değerlerini alabilen kesikli rassal bir değişken olsun.

- $F(x)$, X 'in dağılım fonksiyonu ise bu takdirde;

$f(x_1) = P(X=x_1) = F(x_1)$, $f(x_2) = P(X=x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ ve nihayet

$f(x_i) = P(X=x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$ olur.

Olasılık Dağılım Fonksiyonu

- **Örnek:** Bir akaryakıt istasyonuna günün belli bir zaman diliminde 10 dakikada gelen araç sayılarının olasılık dağılım fonksiyonu aşağıda verilmiştir. Bu verilerden hareketle bu 10 dakikada gelen araç sayılarının olasılık yoğunluk fonksiyonunu belirleyiniz.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0,1 & x = 0 \\ 0,25 & x = 1 \\ 0,45 & x = 2 \\ 0,75 & x = 3 \\ 0,9 & x = 4 \\ 1 & x = 5 \\ 1 & x > 5 \end{cases}$$

Olasılık Dağılım Fonksiyonu

- **Çözüm:** Olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0,1 & x = 0 \\ 0,25 - 0,10 = 0,15 & x = 1 \\ 0,45 - 0,25 = 0,2 & x = 2 \\ 0,75 - 0,45 = 0,3 & x = 3 \\ 0,90 - 0,75 = 0,15 & x = 4 \\ 1,00 - 0,90 = 0,1 & x = 5 \\ 0 & x > 5 \end{cases}$$

Sürekli Olasılık Dağılım (Birikimli-Kümülatif) Fonksiyonu

- **Örnek:** Sürekli bir X rassal değişkeni için yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir. X 'in dağılım fonksiyonunu bulunuz.

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \text{ için} \\ 2 - x & 1 \leq x \leq 2 \text{ için} \\ 0 & \text{başka yerde} \end{cases}$$

Sürekli Olasılık Dağılım (Birikimli-Kümülatif) Fonksiyonu

- Çözüm: $F(x)$ 'in elde edilmesi

$$\int_0^x f(t).dt = \int_0^x t.dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^x = \frac{x^2}{2} \quad 0 < x < 1 \text{ için}$$

$$\int_0^1 x.dx = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

$$\int_1^x (2-t).dt = \left(2t - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_1^x = \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) - \left(2 - \frac{1}{2} \right) = 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} \text{ olduğundan}$$

$$\int_1^x x.dx = \frac{1}{2} \text{ in eklenmesiyle } 1 \leq x < 2 \text{ için}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} + 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} = 2x - \frac{x^2}{2} - 1 \text{ olacaktır.}$$

Sürekli Olasılık Dağılım (Birikimli-Kümülatif) Fonksiyonu

- Dağılım fonksiyonunu aşağıdaki şekilde gösteririz.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \text{ için} \\ \frac{x^2}{2} & 0 < x < 1 \text{ için} \\ 2x - \frac{x^2}{2} - 1 & 1 \leq x < 2 \text{ için} \\ 1 & x \geq 2 \text{ için} \end{cases}$$

Sürekli Olasılık Dağılım (Birikimli-Kümülatif) Fonksiyonu

- **Soru:** Aşağıda $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 < x < 0 \\ 2x-6 & 3 < x < c \\ 0 & \text{diğer haller} \end{cases}$$

- $f(x)$ in olasılık yoğunluk fonksiyonu olabilmesi için c sınır değeri ne olmalıdır?
- $P(X < c/3)$ olasılığını bulunuz.
- $F(x)$ olasılık dağılım fonksiyonunu bulunuz.
- $P(X > 3,5)$ olasılığını bulunuz.

İki veya Daha Çok Boyutlu Rassal Değişkenlerin Dağılımı

- Çoğu zaman belli bir olay üzerinde sadece bir karakteristiğin değil birden çok karakteristiğin aynı anda gözlenmesi ile ilgilenilir. Mesela bir insanın fiziki durumu için sadece uzunluğu değil ağırlığı da birlikte ele alınır.
- Yukarıdaki örneklerde olduğu gibi bir olayı etkileyen iki ya da daha fazla karakteristiğin ortak etkilerini belirleyebilmek için **bileşik olasılık dağılımlarından** yararlanılır.

İki veya Daha Çok Boyutlu Rassal Değişkenlerin Dağılımı

- **Örnek:** Bir para ile yapılan 3 atış deneyinde X : yazı sayısı, Y : ilk iki atıştaki tura gelme sayısı değişkeni olmak üzere X , Y nin bileşik olasılık fonksiyonunu oluşturunuz. Bunun için S örnek uzayı, X ve Y nin karşılık gelen değerleri aşağıda verilmiştir.

S	TTT	TTY	TYT	YTT	TYY	YTY	YYT	YYY
X	0	1	1	1	2	2	2	3
Y	2	2	1	1	1	1	0	0

İki veya Daha Çok Boyutlu Rassal Değişkenlerin Dağılımı

- Yukarıdaki X ve Y kesikli rassal değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu şöyle yazılır.

<div><div><div><div><div></div><div>X</div></div><div>Y</div></div></div><div></div></div>	0	1	2	Satır Toplamı	
0	0	0	1/8	1/8	<div><div><div>X için olasılık fonksiyonu $f_x(x)$</div></div></div>
1	0	2/8	1/8	3/8	
2	1/8	2/8	0	3/8	
3	1/8	0	0	1/8	
Sütun Toplamı	2/8	4/8	2/8	1	
	<div><div><div>Y için olasılık fonksiyonu $f_y(y)$</div></div></div>				

İki veya Daha Çok Boyutlu Rassal Değişkenlerin Dağılımı

- **Tanım: Bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu:** X ve Y sıralı ikilisi bir S örnek uzayında tanımlanan iki boyutlu kesikli rassal değişkenler olsun. X ve Y nin alabileceği değerler (x_i, y_j) $i=1,2,\dots,M$ ve $j=1,2,\dots,N$ olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan

$$f(x_i, y_j) = f_{xy}(x_i, y_j) = P(X=x_i, Y=y_j)$$

fonksiyonuna X, Y rassal değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu adı verilir.

İki veya Daha Çok Boyutlu Rassal Değişkenlerin Dağılımı

- $f(x_i, y_j)$ fonksiyonunun bileşik olasılık fonksiyonu olabilmesi için gerekli şartlar:

1) $f(x_i, y_j) \geq 0$ (tüm (x, y) değerleri için)

2) $\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N f(x_i, y_j) = 1$ olmalıdır.

- X, Y kesikli rassal değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu yukarıdaki tabloda verilmiştir.
- Bu tablodan X ve Y nin olasılık fonksiyonları elde edilebilir.

İki veya Daha Çok Boyutlu Rassal Değişkenlerin Dağılımı

- Yukarıdaki tabloya göre:

$$f(1,2) = P(X=1, Y=2) = 1/8$$

$$f(3,1) = P(X=3, Y=1) = 0$$

$$f(2,0) = P(X=2, Y=0) = 1/8$$

İki veya Daha Çok Boyutlu Rassal Değişkenlerin Dağılımı (Marjinal fonksiyonlar)

- Bir bileşik olasılık fonksiyonundan hareketle diğer değişkenlerin etkilerinden bağımsız olarak tek bir değişkene ait olasılıkları veren fonksiyona **marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu** adı verilir. X kesikli rassal değişkeni için **marjinal olasılık fonksiyonu** şöyle ifade edilir.

$$1) f(x_i) = f_x(x_i) = \sum_{j=1}^N f(x_i, y_j) \quad j = 1, 2, \dots, N$$

$$f(x_i) = f_x(x_i) = P(X = x_i) = P(X = x_i, Y = y_1 \text{ veya } X = x_i, Y = y_2 \text{ veya } \dots)$$

$$2) \sum_{i=1}^M f(x_i) = 1$$

- Benzer şekilde Y için marjinal yoğunluk fonksiyonu

$$1) f(y_j) = f_y(y_j) = \sum_{i=1}^M f(x_i, y_j) \quad i = 1, 2, \dots, M$$

$$f(y_j) = f_y(y_j) = P(Y = y_j) = P(X = x_1, Y = y_j \text{ veya } X = x_2, Y = y_j \text{ veya } \dots)$$

$$2) \sum_{j=1}^N f(y_j) = 1$$

olur.

İki veya Daha Çok Boyutlu Rassal Değişkenlerin Dağılımı (Marjinal fonksiyonlar)

- Kesikli X, Y değişkenleri bileşik olasılık ve marjinal olasılık fonksiyonları

$X \backslash Y$	Y_1	Y_2				Y_N	$Toplam$ $[f_x(x_i)]$	X 'in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu
X_1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_1, y_2)$	$f(x_1, y_N)$	$f_x(x_1)$	
X_2	$f(x_2, y_1)$	$f(x_2, y_2)$	$f(x_2, y_N)$	$f_x(x_2)$	
...	
...	
...	
X_M	$f(x_M, y_1)$	$f(x_M, y_2)$	$f(x_M, y_N)$	$f_x(x_M)$	
$Toplam$ $[f_y(y_i)]$	$f_y(y_1)$	$f_y(y_2)$	$f_y(y_N)$	1	
	Y 'nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu							

İki veya Daha Çok Boyutlu Rassal Değişkenlerin Dağılımı (Marjinal fonksiyonlar)

- **Örnek:** X ve Y takımlarının yaptıkları maçlarda attıkları gol sayılarının bileşik olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir.
- a) X takımının Y ile yaptığı bir maçı kazanma olasılığını bulunuz
- b) Berabere kalma olasılıklarını bulunuz.
- c) Her iki takım için marjinal olasılık fonksiyonunu bulunuz.

İki veya Daha Çok Boyutlu Rassal Değişkenlerin Dağılımı (Marjinal fonksiyonlar)

Y takımının attığı gol sayısı	X takımının attığı gol sayısı					c) $f_y(y_i)$
		0	1	2	3	
	0	0,1	0,15	0,1	0,05	0,4
	1	0,1	0,1	0,05	0,03	0,28
	2	0,05	0,07	0,05	0,04	0,21
	3	0	0,02	0,04	0,05	0,11
c) $f_x(x_i)$		0,25	0,34	0,24	0,17	1

İki veya Daha Çok Boyutlu Rassal Değişkenlerin Dağılımı (Marjinal fonksiyonlar)

- a) X takımının kazanma olasılığı:

$$P(X > Y) = 0,15 + 0,1 + 0,05 + 0,05 + 0,03 + 0,04 \Rightarrow$$

$$P(X > Y) = 0,42$$

- b) X ile Y nin berabere kalma olasılığı:

$$P(X = Y) = 0,1 + 0,1 + 0,05 + 0,05 \Rightarrow P(X = Y) = 0,3$$

İki veya Daha Çok Boyutlu Sürekli Rassal Değişkenlerin Dağılımı

- **Tanım: Sürekli rassal değişken:** (X,Y) bir düzleminin bir R bölgesindeki tüm değerleri alan iki boyutlu sürekli bir rassal değişken olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan bir f fonksiyonuna (X,Y) nin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu adı verilir.

$$1) f(x, y) \geq 0 \quad \text{tüm } x, y \in R$$

$$2) \iint_R f(x, y) dy dx = 1$$

- **2. şart** $Z=f(x,y)$ denklemiyle verilen yüzeyin altındaki hacmin 1'e eşit olduğunu ifade eder. $f(x,y)$ R düzlemindeki bütün x,y değerleri için tanımlı olduğu düşünülürse 2. şart

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx = 1 \quad \text{olur.}$$

İki veya Daha Çok Boyutlu Sürekli Rassal Değişkenlerin Dağılımı (Marjinal fonksiyonlar)

- $f(x,y)$ sürekli bileşik olasılık fonksiyonu verildiğinde X için marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu şöyle yazılır:

$$f_x(x) = \int_y f(x, y) dy$$

- Benzer şekilde Y için marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_y(y) = \int_x f(x, y) dx$$

İki veya Daha Çok Boyutlu Sürekli Rassal Değişkenlerin Dağılımı

- **Örnek:** Aşağıda bir bileşik fonksiyon verilmiştir.

$$f(x, y) = \begin{cases} kx^2 y & 0 \leq x \leq 2; \quad 0 \leq y \leq 3 \\ 0 & \text{diğer haller} \end{cases}$$

- a) Yukarıdaki fonksiyonun olasılık yoğunluk fonksiyonu olabilmesi için k ne olmalıdır?
- b) $P(X < 1; Y > 2)$ olasılığını bulunuz.
- c) $f_x(x)$ marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.
- d) $f_y(y)$ marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

$$f(x, y) = \begin{cases} \cancel{k} x^2 y & 0 \leq x \leq 2 \quad 0 \leq y \leq 3 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

a) $k = ?$ we should have $f(x, y)$ a pdf?

1) $f(x, y) \geq 0$ since $k > 0$ since both are positive.

$$2) \int_0^2 \int_0^3 k x^2 y \, dy \, dx \stackrel{!}{=} \int_0^2 \frac{k x^2 y^2}{2} \Big|_0^3 \, dx = \int_0^2 \frac{k \cdot 9 x^2}{2} \, dx = 1$$

$$\frac{k \cdot 9 x^3}{6} \Big|_0^2 = 1 \Rightarrow \frac{k \cdot 9 \cdot 8}{6} = 1 \quad 72k = 6 \quad k = \frac{6}{72} = \frac{1}{12}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{12} & 0 \leq x < 2 \quad 0 \leq y < 3 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$b) P(X < 1, Y > 2) = \int_0^1 \int_2^3 \frac{x^2 y}{12} \, dy \, dx = \int_0^1 \frac{x^2 y^2}{24} \Big|_2^3 \, dx$$

$$\int_0^1 \frac{9x^2 - 4x^2}{24} \, dx = \int_0^1 \frac{5x^2}{24} \, dx \quad \frac{5x^3}{72} \Big|_0^1 = \frac{5}{72} //$$

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{12}$$

$f_x(x)$: Marginal ~~prob~~ olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_x(x) = \int_0^3 \frac{x^2 y}{12} dy = \frac{x^2 y^2}{24} \Big|_0^3 = \frac{9x^2}{24}$$

$$f_x(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{9x^2}{24} & 0 < x < 3 \\ 0 & x > 3 \end{cases}$$

$f_y(y)$: y'ni marginal olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_y(y) = \int_0^2 \frac{x^2 y}{12} dx = \frac{x^3 y}{36} \Big|_0^2 = \frac{4xy}{36} = \frac{2y}{9}$$

$$f_y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{2y}{9} & 0 < y < 3 \\ 0 & y > 3 \end{cases}$$

c) $P(X < 1) = ?$ $\int_0^1 \frac{9x^2}{24} dx = \frac{9x^3}{72} \Big|_0^1 = \frac{9}{72} //$

$P(X > 1) = \int_1^2 \frac{9x^2}{24} dx = \frac{9x^3}{72} \Big|_1^2 = \frac{9 - 72}{72} = \frac{63}{72} //$

Bileşik Olasılık Dağılım Fonksiyonu

- **Tanım:** (Bileşik Dağılım Fonksiyonu) (X,Y) iki boyutlu (kesikli veya sürekli) bir rassal değişken olsun. (X,Y) 'nin bileşik olasılık dağılım fonksiyonu:

$F(x,y)=P(X \leq x, Y \leq y)$ eşitliği ile tanımlanır.

- Kesikli rassal değişkenler için bileşik dağılım fonksiyonu şöyle yazılır.

$$F(x, y) = P(X \leq x; Y \leq y) = \sum_{x_i=-\infty}^x \sum_{y_j=-\infty}^y f(x_i, y_j)$$

- Benzer şekilde sürekli bir bileşik dağılım fonksiyonu da şöyle yazılır.

$$F(x, y) = P(X \leq x; Y \leq y) = \int_{u=-\infty}^x \int_{v=-\infty}^y f(u, v) dv du$$

Bileşik Olasılık Dağılım Fonksiyonu

- Bileşik olasılık dağılım fonksiyonu için önemli özellikler şöyle yazılabilir.
- 1) X ve Y rassal değişkenlerinin bileşik dağılım fonksiyonu $F(x,y)$ olmak üzere;

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow -\infty}} F(x,y) \rightarrow 0 \quad \text{ve}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} F(x,y) \rightarrow 1 \quad \text{olur.}$$

- 2) X ve Y sürekli rassal değişkenlerin olasılık dağılım fonksiyonu olmak üzere **olasılık yoğunluk fonksiyonu** şöyle yazılır.

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y) \quad \text{olur.}$$

Bileşik Olasılık Dağılım Fonksiyonu

- **Örnek:** X, Y sürekli rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu şöyle verilmiştir.

$$f(x, y) = \begin{cases} k(x^2 - y) & 1 < x < 3 \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

- a) Yukarıdaki bileşik fonksiyonun oyf olabilmesi için k ne olmalıdır?
- b) Olasılık dağılım fonksiyonunu belirleyiniz.

- **Çözüm**

- a) Fonksiyonun oyf olabilmesi için iki şart sağlanmalıdır.
- 1) $f(x, y) \geq 0$ olmalıdır. Bunun için $k > 0$ şartı yeterlidir.

- 2) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx = 1$ şartının sağlanması gerekir.

Bileşik Olasılık Dağılım Fonksiyonu

- $$\int_1^3 \int_0^1 k(x^2 - y) dy dx = 1 \Rightarrow k \int_0^1 (x^2 y - \frac{y^2}{2}) \Big|_0^1 dx = 1 \Rightarrow k \int_1^3 (x^2 - \frac{1}{2}) dx = 1$$

$$k \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x}{2} \right]_1^3 = 1 \Rightarrow k \left[\frac{27}{3} - \frac{3}{2} - \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right] \right] = 1 \Rightarrow k \left[\frac{23}{3} \right] = 1 \Rightarrow k = \frac{3}{23}$$

- Bu durumda olasılık yoğunluk fonksiyonu şöyle olur.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{23}(x^2 - y) & 1 < x < 3 \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

Bileşik Olasılık Dağılım Fonksiyonu

- b) Olasılık dağılım fonksiyonu

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_1^x \int_0^y \frac{3}{23} (u^2 - v) dv du \Rightarrow \frac{3}{23} \int_1^x \left(u^2 v - \frac{v^2}{2} \right) \Big|_0^y du \\ &= \frac{3}{23} \int_1^x \left(u^2 y - \frac{y^2}{2} \right) du \Rightarrow \frac{3}{23} \left[\frac{u^3 y}{3} - \frac{u y^2}{2} \right]_1^x \\ &= \frac{3}{23} \left[\frac{x^3 y}{3} - \frac{x y^2}{2} - \left(\frac{y}{3} - \frac{y^2}{2} \right) \right] \Rightarrow \frac{3}{23} \left[\frac{2x^3 y - 3x y^2 + 3y^2 - 2y}{6} \right] \end{aligned}$$

- Şu halde odf şöyle yazılır.

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & x < 1 \quad y < 0 \\ \frac{1}{46} (2x^3 y - 3x y^2 + 3y^2 - 2y) & x \leq 3 \quad y \leq 1 \\ 1 & \text{diğer} \end{cases}$$

Marjinal Olasılık Fonksiyonları (Marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu)

- **Örnek:** Aşağıdaki bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonundan hareketle marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını belirleyiniz.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{23}(x^2 - y) & 1 < x < 3 \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{diger} \end{cases}$$

$$f_x(x) = \int_0^1 \frac{3}{23}(x^2 - y)dy = \frac{3}{23} \left[x^2 y - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{46}(2x^2 - 1)$$

- $f_x(x)$ marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{3}{46}(2x^2 - 1) & 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{diger} \end{cases}$$

Marjinal Olasılık Fonksiyonları (Marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu)

- $f_y(y)$ marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned} f_y(y) &= \int_1^3 \frac{3}{23} (x^2 - y) dx = \frac{3}{23} \left[\frac{x^3}{3} - xy \right]_1^3 = \frac{3}{23} \left[\frac{27}{3} - 3y - \left(\frac{1}{3} - y \right) \right] \\ &= \frac{3}{23} \left[\frac{27 - 9y - 1 + 3y}{3} \right] = \frac{1}{23} [26 - 6y] \end{aligned}$$

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{23} (26 - 6y) & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

Marjinal Olasılık Fonksiyonları (Marjinal olasılık dağılım fonksiyonu)

- **Marjinal dağılım fonksiyonları** bileşik bir olasılık dağılım fonksiyonundan hareketle bir rassal değişkenin alacağı değerlerin kümülatif olasılıklarını diğer değişkene bağlı olmaksızın veren fonksiyondur. Marjinal dağılım fonksiyonları şöyle tarif edilir.

Kesikli dağılımlarda

$$F_x(x) = \sum_{i=1}^x \sum_{j=1}^N f(u_i, y_j)$$

$$F_y(y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^y f(x_i, v_j)$$

Sürekli dağılımlarda

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x \int_y f(u, y) dy du$$

$$F_y(y) = \int_{-\infty}^y \int_x f(x, v) dx dv$$

Marjinal Olasılık Fonksiyonları (Marjinal olasılık dağılım fonksiyonu)

- **Örnek:** Aşağıdaki bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonundan hareketle marjinal olasılık dağılım fonksiyonlarını belirleyiniz.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{23}(x^2 - y) & 1 < x < 3 \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{diger} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F_x(x) &= \int_1^x \int_0^1 \frac{3}{23}(u^2 - y) dy du = \frac{3}{23} \int_1^x \left[u^2 y - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 du = \frac{3}{23} \int_1^x \left(u^2 - \frac{1}{2} \right) du \\ &= \frac{3}{23} \left[\frac{u^3}{3} - \frac{u}{2} \right]_1^x = \frac{3}{23} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{1}{46} (2x^3 - 3x + 1) \end{aligned}$$

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{46} (2x^3 - 3x + 1) & 1 < x < 3 \\ 1 & \text{diger} \end{cases}$$

Marjinal Olasılık Fonksiyonları (Marjinal olasılık dağılım fonksiyonu)

- $F_y(y)$ marjinal olasılık dağılım fonksiyonu

$$\begin{aligned} F_y(y) &= \int_0^y \int_1^3 \frac{3}{23} (x^2 - v) dx dv = \frac{3}{23} \int_0^y \left[\frac{x^3}{3} - xv \right]_1^3 dv = \frac{3}{23} \int_0^y \left(\frac{26}{3} - 2v \right) dv \\ &= \frac{3}{23} \left[\frac{26v}{3} - v^2 \right]_0^y = \frac{3}{23} \left[\frac{26y}{3} - y^2 \right] = \frac{1}{23} (26y - 3y^2) \end{aligned}$$

$$F_y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{1}{23} (26y - 3y^2) & y < 1 \\ 1 & \text{diger} \end{cases}$$

Marjinal Olasılık Fonksiyonları (Marjinal olasılık dağılım fonksiyonu)

- Marjinal olasılık dağılım fonksiyonları marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarından hareketle de bulunabilir. Bunun için dönüşüm işlemi şöyle yapılır.

$$F_x(x) = \int_1^x f_u(u) du \quad F_y(y) = \int_0^y f_v(v) dv$$

$$F_x(x) = \int_1^x \frac{3}{46} (2u^2 - 1) du = \frac{3}{46} \left[\frac{2u^3}{3} - u \right]_1^x$$

$$F_x(x) = \frac{1}{46} [2x^3 - 3x + 1] \quad \text{olur.}$$

$$F_y(y) = \int_0^y \frac{1}{23} (26 - 6v) dv = \frac{1}{23} [26v - 3v^2]_0^y$$

$$F_y(y) = \frac{1}{23} [26y - 3y^2] \quad \text{olur.}$$

Koşullu Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

- (X, Y) , $f(x, y)$ ortak olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip iki boyutlu sürekli rassal değişken olsun. $f_x(x)$ X 'in, $f_y(y)$ Y 'nin marjinal yoğunluk fonksiyonları olmak üzere
- $Y=y$ verildiğinde X 'in şartlı olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$f(x / y) = \frac{f(x, y)}{f_y(y)} \quad f_y(y) > 0$$

- $X=x$ verildiğinde Y 'nin şartlı olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$f(y / x) = \frac{f(x, y)}{f_x(x)} \quad f_x(x) > 0 \quad \text{olur.}$$

Koşullu Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

- **Örnek:** Aşağıdaki bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonundan hareketle soruları cevaplandırınız.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{23}(x^2 - y) & 1 < x < 3 \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

- a) $P(X < 2, Y < 0.5)$ olasılığını,
- b) $P(X > 2 / Y > 0.5)$ olasılığını,
- c) $P(Y < 0.4 / X > 2)$ olasılığını
- d) $P[(X + Y) < 2]$ olasılığını bulunuz.

Koşullu Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

- a)
$$P(X < 2, Y < 0.5) = \int_1^2 \int_0^{0.5} \frac{3}{23} (x^2 - y) \, dy \, dx = \frac{3}{23} \int_1^2 \left(x^2 y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{0.5} dx$$

$$P(X < 2, Y < 0.5) = \frac{3}{23} \int_1^2 (0.5x^2 - 0.125) \, dx = \frac{3}{23} \left(\frac{0.5x^3}{3} - 0.125x \right) \Big|_1^2$$

$$P(X < 2, Y < 0.5) = 0,1685$$

Koşullu Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

- **b)** $P(X > 2 / Y > 0.5)$

$$P(X > 2 / Y > 0.5) = \frac{P(X > 2, Y > 0.5)}{P(Y > 0.5)} = \frac{\int_2^3 \int_{0.5}^1 \frac{3}{23} (x^2 - y) dy dx}{\int_{0.5}^1 \frac{1}{23} |26 - 6y| dy}$$

$$P(X > 2 / Y > 0.5) = 0.364$$

- **c)** $P(Y < 0.4 / X > 2)$

$$P(Y < 0.4 / X > 2) = \frac{P(X > 2, Y < 0.4)}{P(X > 2)} = \frac{\int_2^3 \int_0^{0.4} \frac{3}{23} (x^2 - y) dy dx}{\int_2^3 \frac{3}{46} (2x^2 - 1) dx}$$

$$P(Y < 0.4 / X > 2) = \frac{\frac{3}{23} \int_2^3 \left(x^2 y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{0.4} dx}{\frac{3}{46} \left| \frac{2x^3}{3} - x \right|_2^3} = \frac{\frac{3}{23} \int_2^3 (0.4x^2 - 0.08) dx}{\frac{35}{46}} = \frac{0.32}{0.76} = 0.42$$

Koşullu Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

- d) $P[(X+Y) < 2]$

$$P[(X+Y) < 2] = \int_1^2 \int_0^{2-x} \frac{3}{23}(x^2 - y) dy dx = \frac{3}{23} \int_1^2 \left[x^2 y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{2-x} dx$$

$$\frac{3}{23} \int_1^2 \left[x^2(2-x) - \frac{(2-x)^2}{2} \right] dx = \frac{3}{23} \int_1^2 \left(2x^2 - x^3 - \left(\frac{4-4x+x^2}{2} \right) \right) dx$$

$$P[(X+Y) < 2] = \frac{3}{23} \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{4x}{2} + x^2 - \frac{x^3}{6} \right]_1^2 \Rightarrow P[(X+Y) < 2] = 0,75$$

Örnek:

- Aşağıda bir bileşik fonksiyon verilmiştir.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{12} & 0 < x < c \quad 0 < y < 2 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

a) Yukarıdaki fonksiyonun bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olabilmesi için c ne olmalıdır? (cevap $c=3$)

b) Bileşik olasılık dağılım fonksiyonunu belirleyiniz.

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & x < 0, \quad y < 0 \\ \frac{x^2 y^3}{72} & x < 3, \quad y < 2 \\ 1 & \text{diğer} \end{cases}$$

Örnek (devam)

- c) Marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını belirleyiniz.

$$f_x(x) = \frac{2x}{9} \quad 0 < x < 3 \qquad f_y(y) = \frac{3y^2}{8} \quad 0 < y < 2$$

- d) Marjinal olasılık dağılım fonksiyonlarını belirleyiniz.

$$F_x(x) = \frac{2x^2}{8} \qquad F_y(y) = \frac{y^3}{8}$$

- e) $P(X > 2, Y < 1)$ olasılığını bulunuz.

$$P(X > 2, Y < 1) = \int_2^3 \int_0^1 \frac{xy^2}{12} dy dx = \frac{5}{72}$$

Örnek (devam)

- f) $P[(X+Y) < 4]$ olasılığını bulunuz.

$$\begin{aligned}
 P[(X+Y) < 4] &= \int_0^2 \int_0^{4-y} \frac{xy^2}{12} dx dy = \int_0^2 \frac{x^2 y^2}{24} \Big|_0^{4-y} dy \\
 &= \int_0^2 \frac{y^2 (4-y)^2}{24} dy = \frac{1}{24} \left[\frac{16y^3}{3} - 2y^4 + \frac{y^5}{5} \right]_0^2 \\
 &= \frac{17.06}{24} = 0.711
 \end{aligned}$$

- g) $P[X > 2/(Y > 1)]$ şartlı olasılığını belirleyiniz.

$$\begin{aligned}
 P[X > 2/(Y > 1)] &= \frac{P(X > 2, Y > 1)}{P(Y > 1)} = \frac{\int_2^3 \int_1^2 \frac{xy^2}{12} dx dy}{\int_1^2 \frac{3y^2}{8} dy} = \frac{\frac{1}{12} \int_2^3 \frac{xy^3}{3} \Big|_1^2 dx}{\frac{y^3}{8} \Big|_1^2} \\
 P[X > 2/(Y > 1)] &= \frac{\frac{1}{12} \int_2^3 \frac{7x}{3} dx}{\frac{7}{8}} = \frac{\frac{1}{12} \left[\frac{7x^2}{6} \right]_2^3}{\frac{7}{8}} = \frac{\frac{35}{72}}{\frac{7}{8}} = \frac{35}{72} \cdot \frac{8}{7} = 0.55 \text{ olur.}
 \end{aligned}$$

İki Rassal Değişkenin Bağımsızlığı

- **Tanım:** (X, Y) , bir S örnek uzayında tanımlanan iki boyutlu **kesikli rassal değişken** olsun. (x_i, y_j) $i=1,2,\dots, M$; $j=1,2,\dots, N$, (X, Y) ' nin mümkün sonuçları ise X ve Y rassal değişkenlerinin bağımsız olmaları için gerek ve yeter koşul tüm (x_i, y_j) çiftleri için

$$f(x_i y_j) = f_x(x_i) \cdot f_y(y_j) \text{ yani}$$

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$$

- Benzer şekilde X, Y **Sürekli rassal değişkenlerinin** bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x,y)$ ve marjinal olasılık fonksiyonları $f_x(x)$ ve $f_y(y)$ iken;

$$f(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$$

oluyorsa istatistik olarak X ve Y değişkenlerine **bağımsız rassal değişkenler** denir. *Bu şart sağlanmıyorsa bu değişkenlere bağımlı rassal değişkenler denir.*

Ödev:

- X, Y rassal değişkenlerinin bileşik olasılık dağılım fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & x < 0, \ y < 0 \\ cx^2 y^3 & x \leq 2, \ y \leq 1 \\ 1 & \text{diğer} \end{cases}$$

- a) Yukarıdaki fonksiyonun olasılık dağılım fonksiyonu olması için c ne olmalıdır?
- b) Olasılık yoğunluk fonksiyonunu yazınız.
- c) Marjinal yoğunluk fonksiyonlarını yazınız.
- d) Marjinal dağılım fonksiyonlarını yazınız.
- e) X ve Y rassal değişkenlerinin bağımsızlığını araştırınız.
- f) $P(X < 1 / Y > 0.5)$ şartlı olasılığını bulunuz.

Cevaplar:

- a) $c=1/4$
- b) Olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{6}{4}xy^2 & 0 < x < 2, \ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{diger} \end{cases}$$

- c) Marjinal yoğunluk fonksiyonları

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{diger} \end{cases}$$

$$f_y(y) = \begin{cases} 3y^2 & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{diger} \end{cases}$$

Cevaplar:

- d) Marjinal dağılım fonksiyonları

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & 0 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

$$f_y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ y^3 & 0 \leq y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$$

- e) X ve Y rassal değişkenleri bağımsızdır.
- f) $P(X < 1 / Y > 0.5) = 0.428$