Hafta 7:
Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

Ele Alınacak Ana Konular

- Sürekli-zaman Fourier dönüşümü
- Sürekli-zaman periyodik işaretler için Fourier dönüşümü
- Sürekli-zaman Fourier dönüşümünün özellikleri
- Doğrusal, sabit katsayılı diferansiyel denklemlerle tanımlanan sistemler

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

- Periyodik olmayan (aperiyodik) bir işareti, periyodu sonsuz olan periyodik bir işaret gibi düşünebiliriz.

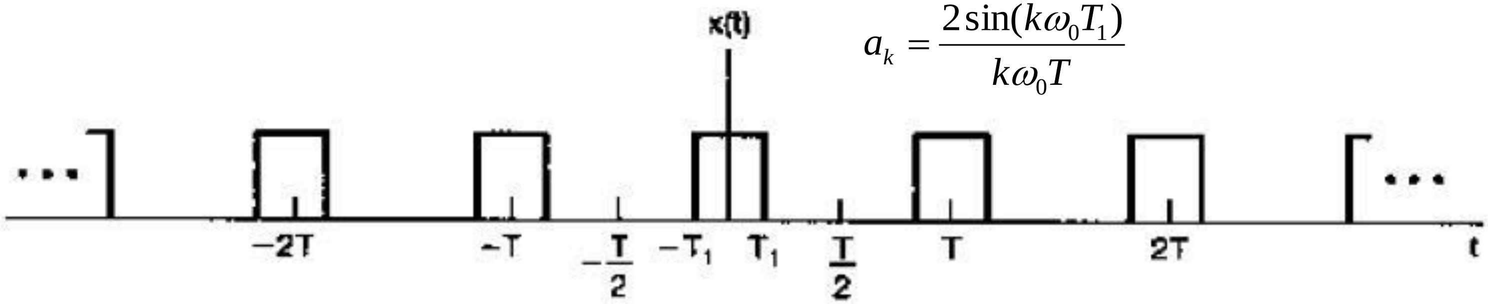
- Periyodik bir işaretin periyodu büyüdükçe, temel frekans küçülür ve dolayısıyla Fourier serisi gösterilimindeki harmonik ilişkili üstel işaretlerin frekansları yakınlaşır.

- Periyodun sonsuz olması limit durumunda frekans bileşenleri sürekli hale gelir ve Fourier serisi toplamı integrale eşit olur.

- Fourier serisinin, periyodun sonsuza gitmesi durumundaki limit haline FOURIER DÖNÜŞÜMÜ denir.

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

- Aşağıda verilen periyodik kare dalganın Fourier serisi katsayılarını hesaplamıştık



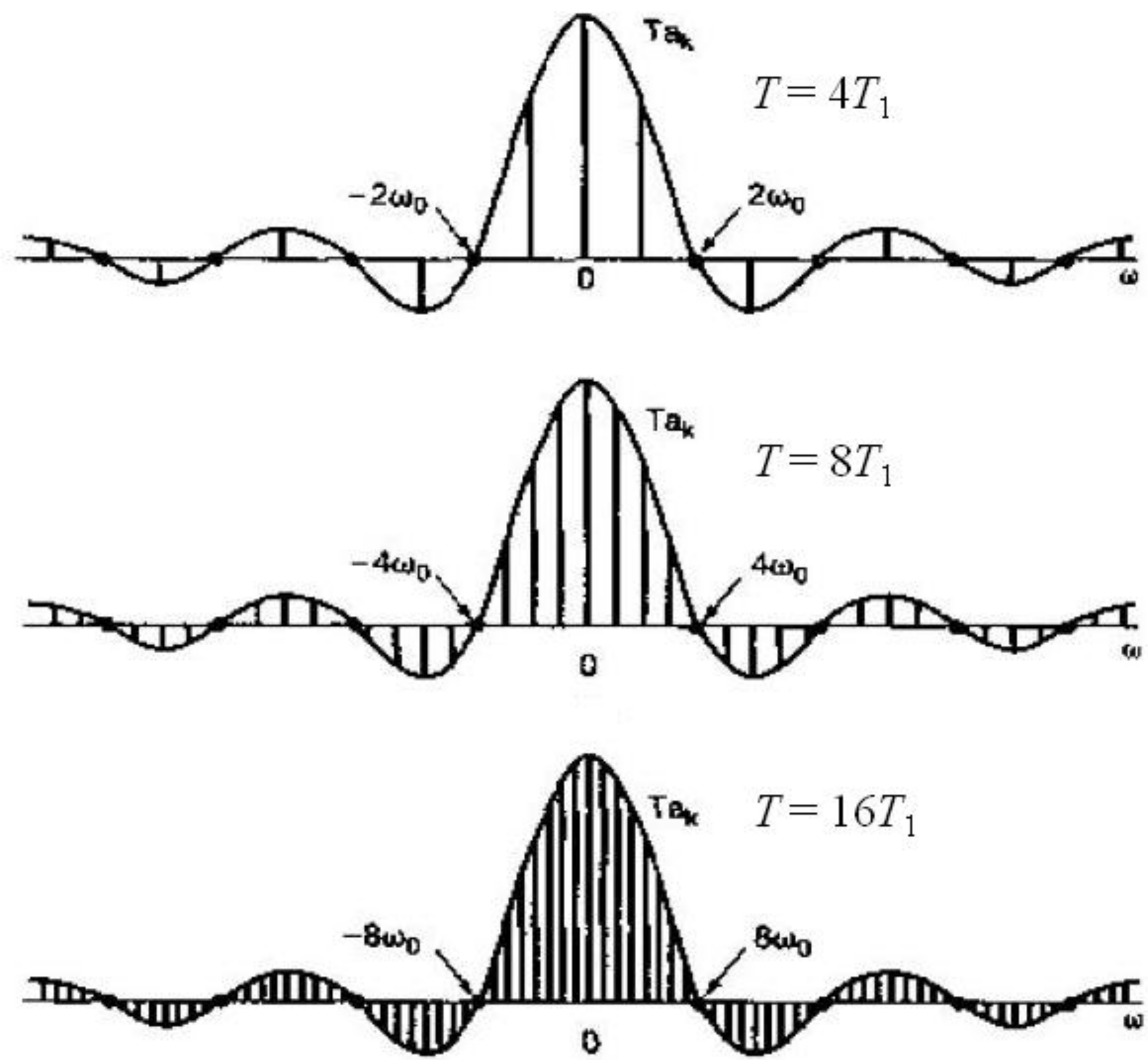
$$a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}$$

- Sabit bir T_1 ve değişik T değerleri için Fourier serisi katsayılarını çizersek, periyodun katsayılar üzerindeki etkisini belirlemiş oluruz.

- Alternatif olarak, $Ta_k = \left.\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}\right|_{\omega = k\omega_0}$ değerlerini çizebiliriz.

- $2\sin(\omega T_1)/\omega$ fonsiyonu, Ta_k'nın zarfını temsil etmektedir ve a_k katsayıları bu zarfın eşit aralıklı örnekleridir.

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

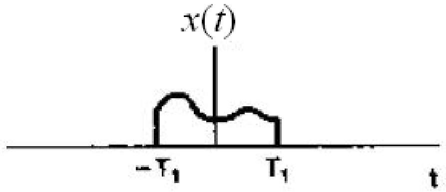


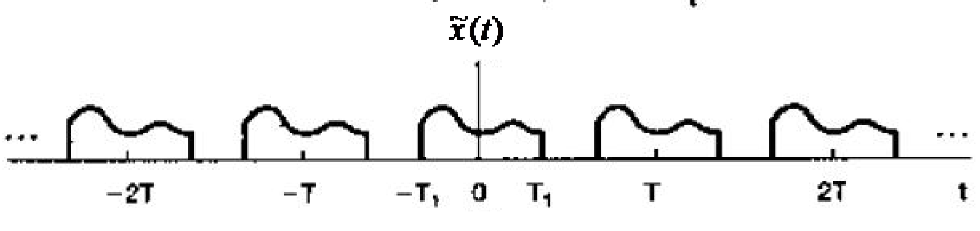
Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

- T arttıkça veya eşdeğer olarak temel frekans $\omega_0 = 2\pi/T$ azaldıkça, zarf daha sık örneklenmektedir. $T \rightarrow \infty$ limit durumunda, orijinal periyodik kare dalga dikdörtgen darbeye ve T ile çarpılmış Fourier serisi katsayıları zarfa eşit olur.

- Bu örneği genelleştirmek mümkündür. Aperiyodik bir işaret, periyodik bir işaretin periyod sonsuza giderken limit hali gibi düşünülebilir. Periyodik işaret Fourier serisine açılır ve periyodun sonsuza gitmesi durumunda serinin davranışı incelenir.

- Aşağıda, periyodik olmayan sonlu süreli bir işaret $x(t)$ ile bu işaretten türetilen ve bir periyodu sonlu süreli işarete eşit olan periyodik bir işaret $\tilde{x}(t)$ verilmiştir.





Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

- $\tilde{x}(t)$ Fourier serisine açılabilir. $|t|<T/2$ için, $x(t) = \tilde{x}(t)$ ve aralığın dışında $x(t) = 0$ olduğundan

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

- Ta_k'nın zarfı $X(j\omega)$, $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ şeklinde tanımlansın.

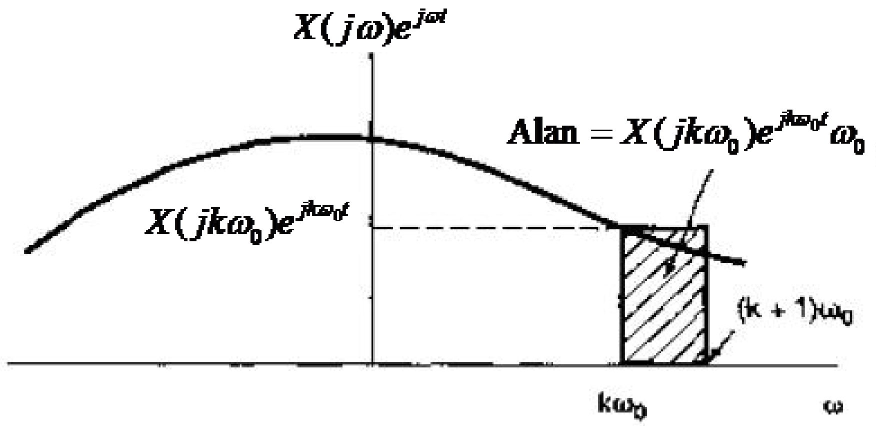
- O halde, $a_k = \frac{1}{T} X(jk\omega_0)$

- Zarf cinsinden bulunan katsayılar, Fourier serisinde yerine konulur ve $2\pi/T=\omega_0$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

- $\omega_0 \rightarrow 0$ iken, aşağıdaki şekilden görüldüğü gibi en son toplama integrale yakınsar.



- Toplamadaki her bir terim, yüksekliği $X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$ ve genişliği ω_0 olan bir dikdörtgenin alanıdır. $\omega_0 \rightarrow 0$ limit durumunda, toplama $X(j\omega)e^{j\omega t}$ fonksiyonunun integraline yakınsar. O halde, $T \rightarrow \infty$ için $x(t) \rightarrow \tilde{x}(t)$ gerçeğini kullanırsak, aşağıda verilen Fourier dönüşüm çiftini elde ederiz.

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \\ X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \end{aligned}}$$

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

- Şimdiye kadar yapılan tartışmadan, periyodik bir işaretin Fourier serisi katsayılarının, işaretin bir periyodunun Fourier dönüşümü cinsinden ifade edilebileceği anlaşılmaktadır.

- $\tilde{x}(t)$, T ile periyodik olsun ve Fourier serisi katsayıları a_k ile gösterilsin. $\tilde{x}(t)$ nin bir periyoduna eşit sonlu süreli bir işaret $x(t)$ ve Fourier dönüşümü $X(j\omega)$ ile belirtilsin. O halde,

$$a_k = \frac{1}{T} X(j\omega)\Big|_{\omega = k\omega_0}$$

- Tartışma, sonlu süreli işaretler için yapılmıştır. İşaret sonlu olmasa bile, analiz denklemindeki integral yakınsayabilir ve bu tür işaretler için Fourier dönüşümü bulunabilir.

- Fourier dönüşümünün yakınsaması için yeterli olan koşullara Dirichlet koşulları denir ve aşağıda listelenmiştir.

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

Sürekli-zaman Fourier dönüşümü için Dirichlet koşulları

Koşul 1: İşaret mutlak integrallenebilir olmalıdır:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

Koşul 2: Herhangi bir sonlu aralıkta, işaretin sonlu sayıda minimum ve maksimumu olmalıdır.

Koşul 3: Herhangi bir sonlu aralıkta, işarette sonlu sayıda süreksizlik olmalı ve ayrıca süreksizlik noktalarında işaretin değeri de sonlu olmalıdır.

Özetle, mutlak integrallenebilir sürekli veya sonlu sayıda süreksizliğe sahip işaretlerin Fourier dönüşümü hesaplanabilir.

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

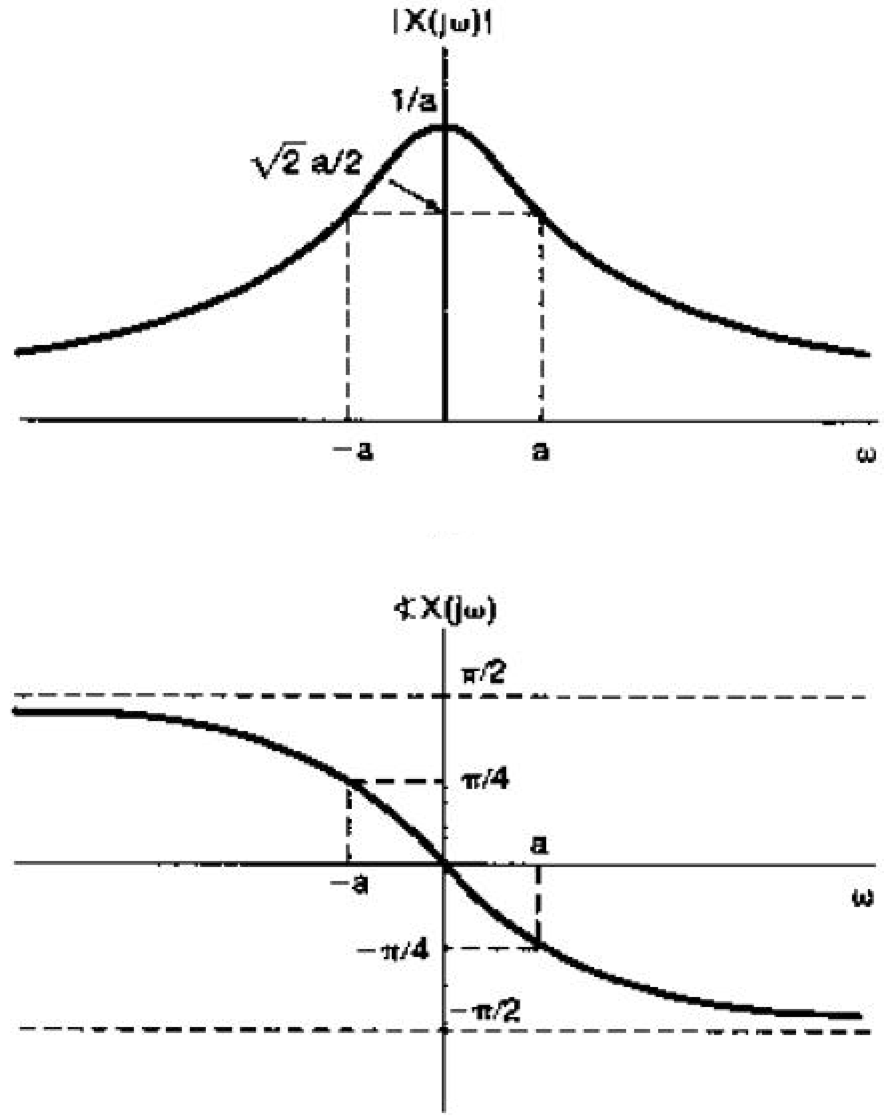
ÖRNEK: $x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$ işaretinin Fouier dönüşümünü hesaplayınız, genlik ve faz spektrumunu çiziniz.

ÇÖZÜM: Fourier dönüşüm denkleminden

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{a + j\omega}, \qquad a > 0$$

Görüldüğü gibi, işaret gerçel olmasına rağmen Fourier dönüşümü karmaşık değerli olabilmektedir. O halde, ω'nın fonksiyonu olarak Fourier dönüşümünün genliğini (genlik spektrumu) ve fazını (faz spektrumunu) belirleyebilir ve çizebiliriz.

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}, \qquad \prec X(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



|X(jω)|
1/a
√2 a/2
−a
a
ω
∢X(jω)
π/2
π/4
a
−a
ω
−π/4
−π/2

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

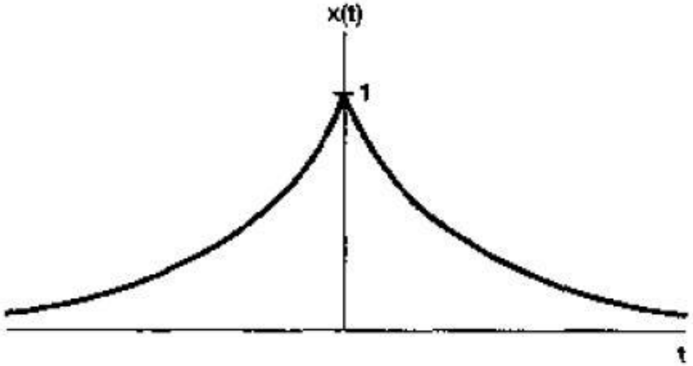
ÖRNEK: $x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$ işaretinin Fouier dönüşümünü hesaplayınız ve frekansın fonksiyonu olarak çiziniz.

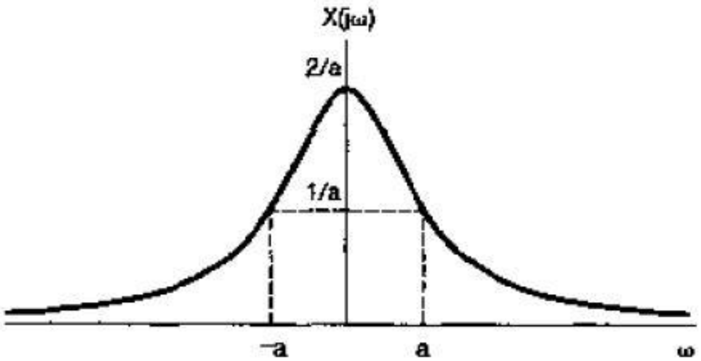
ÇÖZÜM: Fourier dönüşüm denkleminden

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-j\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt$$

$$= \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

Bu durumda Fourier dönüşümü gerçel çıkmıştır. İşaret ve Fourier dönüşümü aşağıda çizilmiştir.





Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

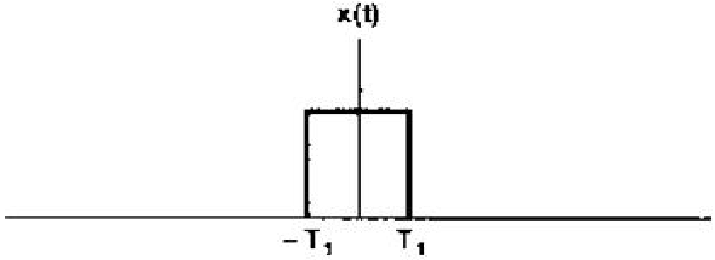
ÖRNEK: Sürekli-zaman impuls işaretinin Fouier dönüşümünü hesaplayınız

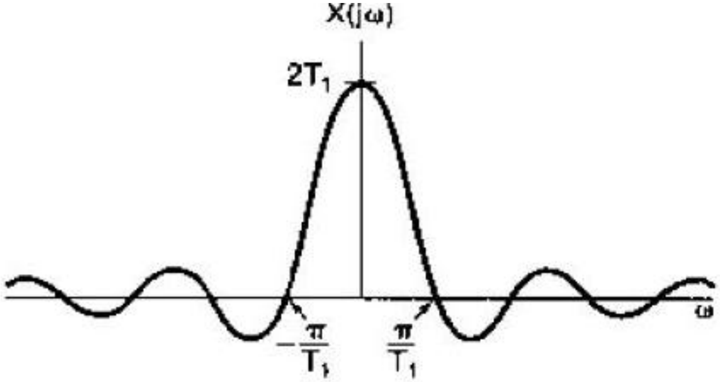
ÇÖZÜM: $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt=1$

İmpuls işaretinin Fourier dönüşümü tüm frekanslarda eşit bileşenlere sahiptir.

ÖRNEK: Dikdörtgen darbenin Fourier dönüşümünü hesaplayınız $x(t)=\begin{cases}1, & |t|<T_1 \\ 0, & |t|>T_1\end{cases}$

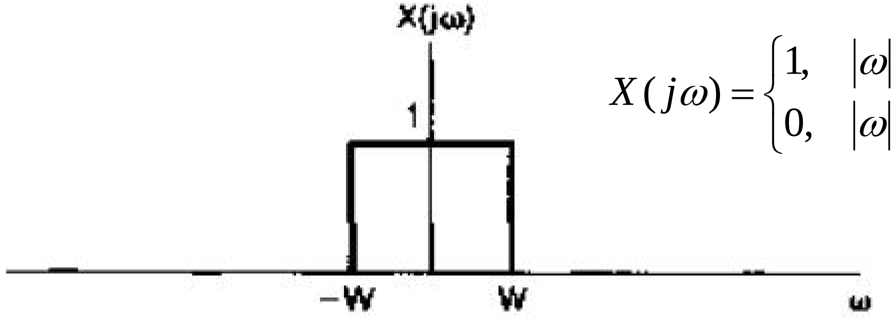
ÇÖZÜM: $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t}dt=2\dfrac{\sin(\omega T_1)}{\omega}$





Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

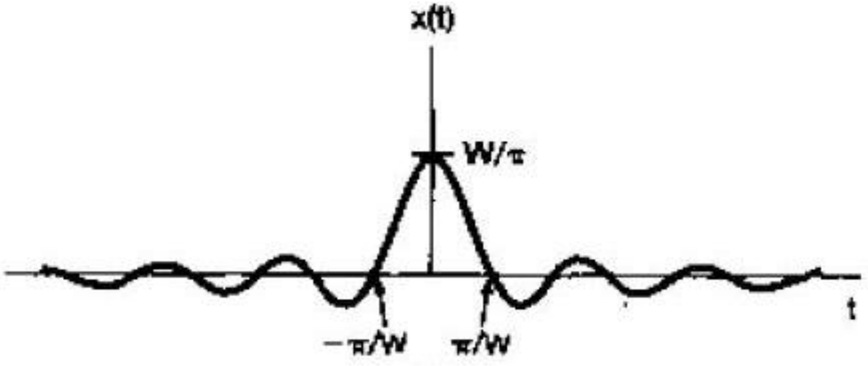
ÖRNEK: Fouier dönüşümü aşağıda verilen sürekli-zaman işaretini bulunuz.



$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

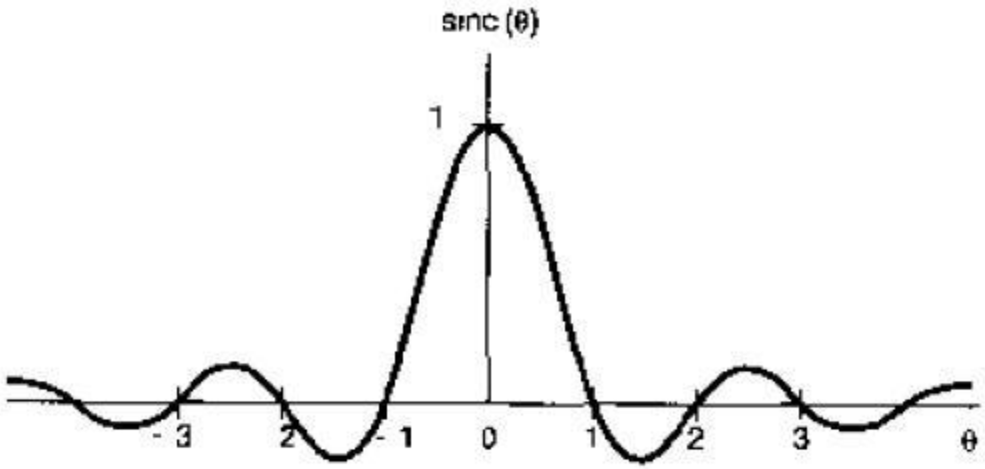
ÇÖZÜM: Ters Fourier dönüşüm denkleminden

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} e^{j\omega t}dw = \frac{\sin(Wt)}{\pi t}$$

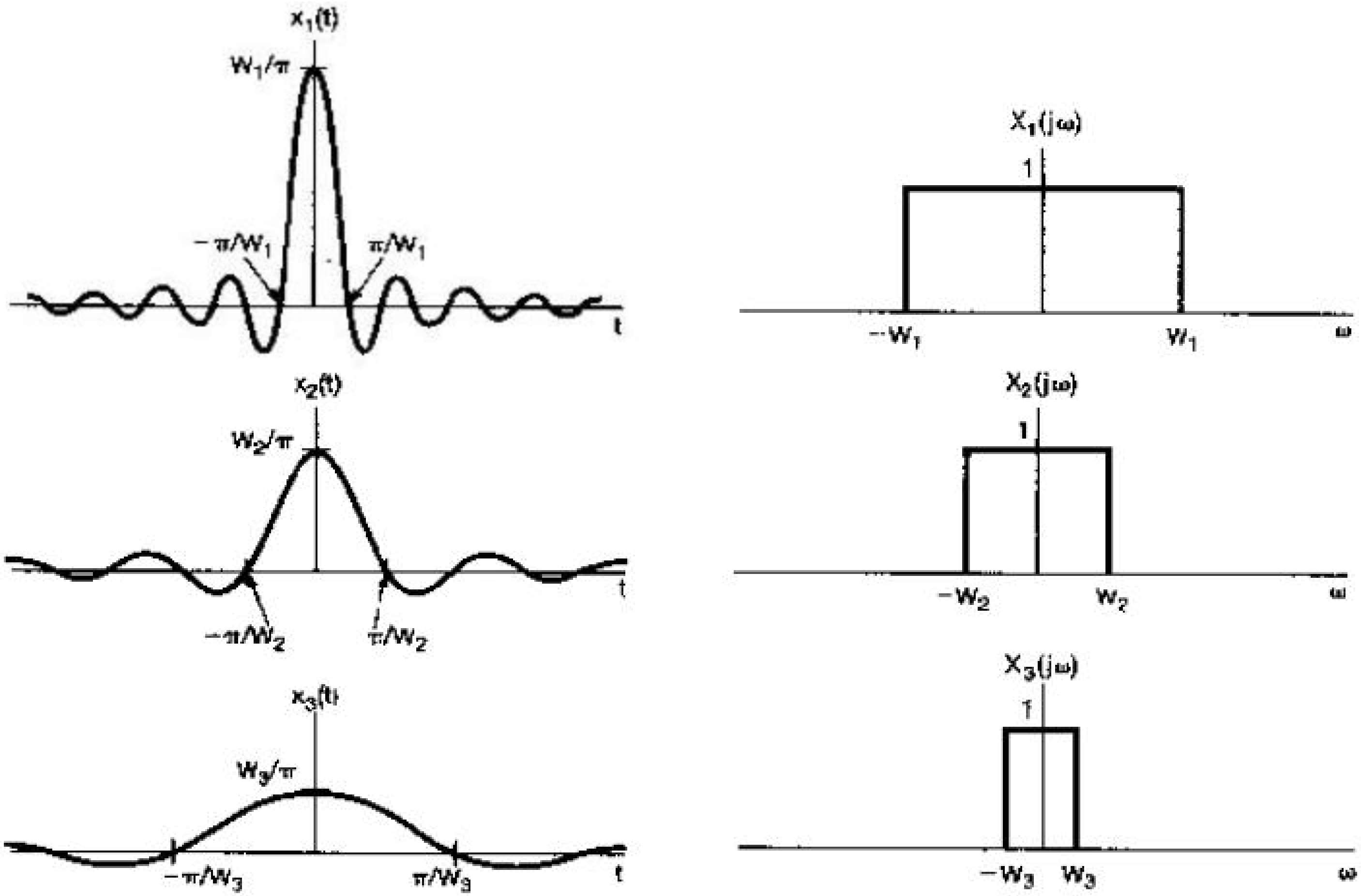


Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

- Sürekli-zaman Fourier dönüşümü ve LTI sistemlerin analizinde $\sin(a\theta)/b\theta$ şeklinde özel bir fonksiyonla sıklıkla karşılaşılır ve böyle fonksiyonlara sinc fonksiyonu denir.
- Sinc fonksiyonu matematiksel olarak şöyle tanımlanır: $\mathrm{sinc}(\theta) = \dfrac{\sin(\pi\theta)}{\pi\theta}$
- Sinc fonksiyonu aşağıda çizilmiştir.



Aşağıda sinc(*W*) fonksiyonu ve Fourier dönüşümü, değişik *W* değerleri için çizilmiştir. *W* arttıkça Fourier dönüşümü genişlerken, sinc fonksiyonunun ana lobunun genişliği darlaşır. Yani, zaman uzayı ile frekans uzayı arasında ters bir ilişki vardır. Zamanda daha yer kaplayan bir işaretin Fourier dönüşümü, daha fazla yer kaplayan bir işaretinkine göre daha geniş bir frekans aralığında frekans bileşenlerine sahipir.



Periyodik İşaretlerin için Fourier Dönüşümü

- Sürekli-zaman periyodik işaretlerin de Fourier dönüşümünü hesaplamak mümkündür. Göreceğimiz gibi, periyodik işaretlerin Fourier dönüşümü impuls fonksiyonu içermek zorundadır.

- Fourier dönüşümü $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ olan işareti, ters Fourier dönüşümü kullanarak rahatlıkla bulabiliriz.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

- Daha genel olarak, sonsuz adet impulsun toplamından oluşan bir Fourier dönüşümünün tersi, sonsuz adet üstel işaretin toplamı olmalıdır:

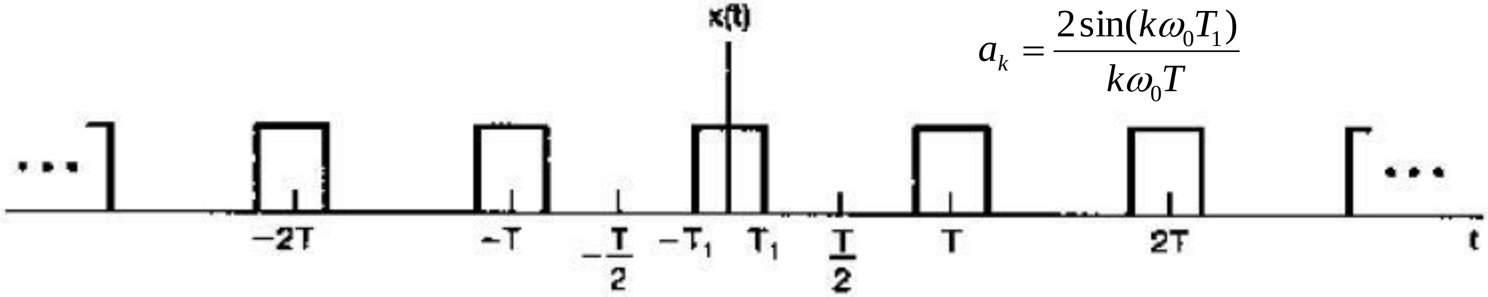
$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

- O halde, periyodik bir işaretin Fourier dönüşümü, şiddetleri işaretin Fourier serisi katsayıları ve konumları temel frekansın katları tarafından belirlenen impulslar içermektedir.

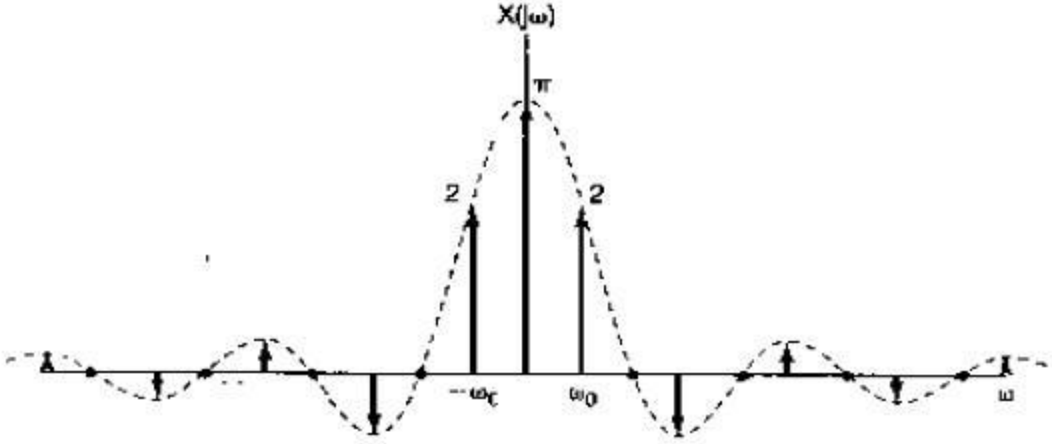
Periyodik İşaretlerin için Fourier Dönüşümü

ÖRNEK: Aşağıda verilen periyodik işaretin Fourier dönüşümünü hesaplayınız.

$$a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}$$

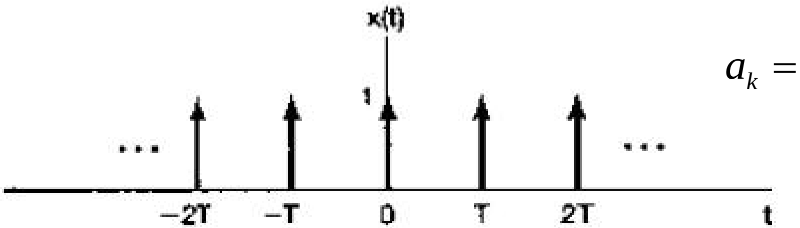


ÇÖZÜM: $$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\, a_k \delta(\omega - k\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k}\delta(\omega - k\omega_0)$$



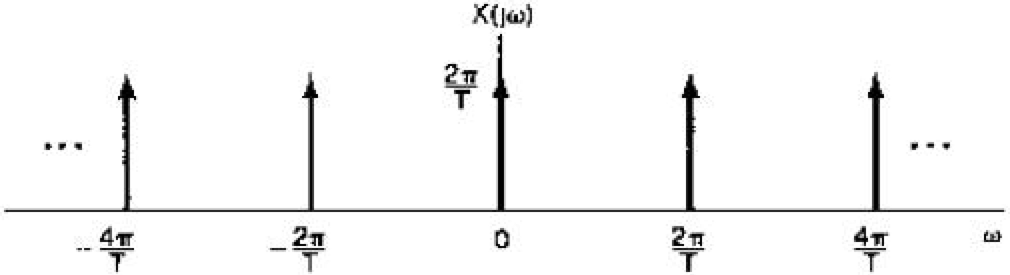
Periyodik İşaretlerin için Fourier Dönüşümü

ÖRNEK: Aşağıda verilen periyodik işaretin Fourier dönüşümünü hesaplayınız.



$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

ÇÖZÜM: $$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\, a_k \delta(\omega - k\omega_0) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{T})$$



Not: Zaman uzayı ile frekans uzayı arasındaki ters ilişkiye dikkat ediniz. İmpulslar zaman uzayında birbirinden uzaklaşırsa frekans uzayında yakınlaşmaktadır.

Periyodik İşaretlerin için Fourier Dönüşümü

ÖRNEK: $x_1(t)=\sin(\omega_0 t)$ ve $x_2(t)=\cos(\omega_0 t)$ periyodik işaretlerinin Fourier dönüşümlerini hesaplayınız.

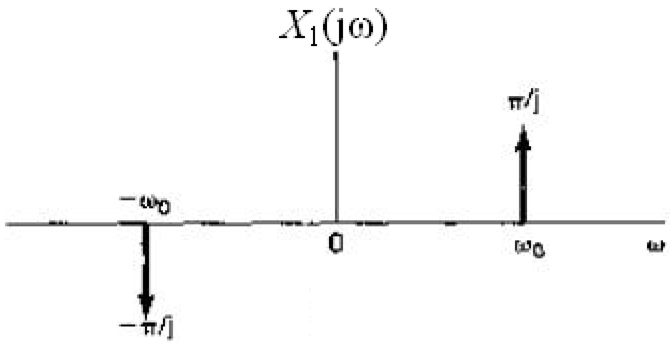
ÇÖZÜM:

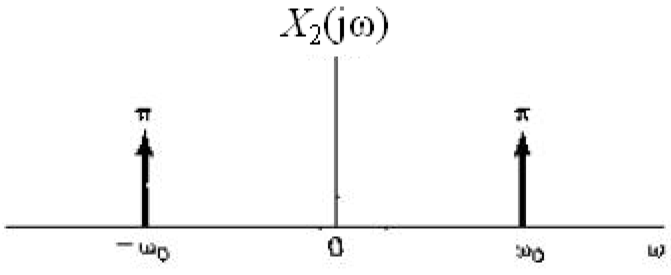
$$x_1(t)=\sin(\omega_0 t) \Rightarrow a_1=\frac{1}{2j},\ a_{-1}=-\frac{1}{2j},\ a_k=0,\ k\neq \pm 1$$

$$X_1(j\omega)=2\pi a_1\delta(\omega-\omega_0)+2\pi a_{-1}\delta(\omega+\omega_0)=\frac{\pi}{j}\delta(\omega-\omega_0)-\frac{\pi}{j}\delta(\omega+\omega_0)$$

$$x_2(t)=\cos(\omega_0 t) \Rightarrow a_1=\frac{1}{2},\ a_{-1}=\frac{1}{2},\ a_k=0,\ k\neq \pm 1$$

$$X_2(j\omega)=2\pi a_1\delta(\omega-\omega_0)+2\pi a_{-1}\delta(\omega+\omega_0)=\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$$





Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

İşaret	**Fourier Dönüşümü**	**Fourier Serisi Katsayıları**
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$	a_k
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	$a_1 = 1, \quad a_k = 0, \quad k \neq 1$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = a_{-1} = 1/2, \quad a_k = 0, \quad k \neq \pm 1$
$\sin(\omega_0 t)$	$(\pi / j)[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = -a_{-1} = 1/2j, \quad a_k = 0, \quad k \neq \pm 1$
$x(t) = 1$	$2\pi\delta(\omega)$	$a_0 = 1, \quad a_k = 0, \quad k \neq 0$
Periyodik kare dalga $x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t \rvert < T_1 \\ 0, & T_1 < \lvert t \rvert < T/2 \end{cases}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$	$\frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} = \frac{\omega_0 T_1}{\pi} \mathrm{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right)$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{T})$	$a_k = \frac{1}{T}, \quad \forall k$

İşaret	Fourier Dönüşümü	Fourier Serisi Katsayıları
$x(t)=\begin{cases}1, & \lvert t\rvert<T_1\\ 0, & \lvert t\rvert>T_1\end{cases}$	$\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$	İşaret periyodik değil
$\frac{\sin(Wt)}{\pi t}$	$X(j\omega)=\begin{cases}1, & \lvert\omega\rvert<W\\ 0, & \lvert\omega\rvert>W\end{cases}$	İşaret periyodik değil
$\delta(t)$	1	İşaret periyodik değil
$u(t)$	$\frac{1}{j\pi}+\pi\delta(\omega)$	İşaret periyodik değil
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	İşaret periyodik değil
$e^{-at}u(t),\ \Re e\{a\}>0$	$\frac{1}{a+j\omega}$	İşaret periyodik değil
$te^{-at}u(t),\ \Re e\{a\}>0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$	İşaret periyodik değil
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t),\ \Re e\{a\}>0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^n}$	İşaret periyodik değil

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

- Kolaylık olması bakımından, sürekli-zaman Fourier dönüşümü ve tersini belirtmek için sırasıyla $F\{x(t)\}$ ve $F^{-1}\{X(j\omega)\}$ kısa gösterilimini kullanacağız. Ayrıca, sürekli-zaman Fourier dönüşüm çiftini belirtmek için

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

notasyonunu kullanacağız.

- Sürekli-zaman Fourier dönüşümünün aşağıda verilen özellikleri aracılığıyla, Fourier dönüşümü bilinen işaretlerden çoğu işaretin Fourier dönüşümünü elde etmek kolaylaşmaktadır.

- Aşağıda sadece en önemli özelliklerin ispatı verilecektir. Diğer özelliklerin ispatı benzer şekilde yapılabilir.

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Zamanda öteleme: $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) \Rightarrow x(t-t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$

İspat: Ters Fourier dönüşüm denkleminden $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$

Eşitliğin her iki tarafında t yerine t-t_0 yazılırsa

$$x(t-t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega(t-t_0)}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(X(j\omega)e^{-j\omega t_0}\right)e^{j\omega t}d\omega$$

Yorum: Bir sürekli-zaman işaret ötelendiğinde, Fourier dönüşümünün genliği değişmez, fazı ise öteleme ile doğru orantılı bir şekilde ötelenir.

$$F\{x(t)\} = X(j\omega) = |X(j\omega)|e^{j\prec X(j\omega)}$$
$$F\{x(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0}X(j\omega) = |X(j\omega)|e^{j[\prec X(j\omega)-\omega t_0]}$$

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Zaman-frekans ölçekleme: $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) \Rightarrow x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$

İspat: Fourier dönüşüm denkleminden

$$F\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt$$

İntegralde, $\tau = at$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$F\{x(at)\} = \begin{cases} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau, & a > 0 \\ -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau, & a < 0 \end{cases}$$

Yorum: Zaman uzayı ile frekans uzayı arasında ters bir ilişki vardır. Zamanda dar (geniş) yer kaplayan işaretlerin Fourier dönüşümü geniş (dar) bir aralıkta frekans bileşenlerine sahiptir. Ayrıca, a = -1 seçilirse, zamanda tersine çevrilmiş işaretin Fourier dönüşümünün de tersine çevrileceği anlaşılmaktadır.

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Zamanda türev alma: $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) \Rightarrow \dfrac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega X(j\omega)$

İspat: Ters Fourier dönüşüm denkleminden $x(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$

Eşitliğin her iki tarafında *t'* ye göre türevi alınırsa

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [j\omega X(j\omega)]e^{j\omega t}d\omega$$

Yorum: Zaman uzayında türev alma, frekans uzayında jω ile çarpmaya karşılık gelmektdir. Bu özellik, sabit katsayılı difrenasiel denklemlerle tanımlanmış LTI sistemlerin analizinde çok önemli rol oynayacaktır. Çözümü zor olan diferansiyel bir denklem, Fourier dönüşümünün bu özelliği sayesinde çözümü çok kolay olan bir cebirsel denklem haline getirilir, denklem istenilen değişken için çözülür ve ters Fourier dönüşümü alınarak çözüm elde edilir.

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Konvolüsyon özelliği: $y(t)=x(t)*h(t)\ \Rightarrow Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)$

İspat: Konvolüsyon denkleminden $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

Eşitliğin her iki tarafının Fourier dönüşümü alınırsa

$$Y(j\omega)=F\{y(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\{\int_{-\infty}^{\infty}\ x(\tau)h(t-\tau)d\tau\}\ e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\{\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)e^{-j\omega t}dt\}d\tau$$

Zamanda öteleme özelliğinden parantez içindeki terim $e^{-j\omega\tau}H(j\omega)$ dir. O halde,

$$Y(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)e^{-j\omega\tau}H(j\omega)d\tau$$

$$=H(j\omega)\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=X(j\omega)H(j\omega)$$

Yorum: İki işaretin konvolüsyonunun Fourier dönüşümü, Fourier dönüşümlerinin çarpımına eşittir. Yani, iki işaretin konvolüsyonunu bulmak için, Fourier dönüşümleri çarpılır ve çarpımın ters Fourier dönüşümü alınır.

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

ÖRNEK: $x(t)=e^{-bt}u(t)$ $b>0$ ve $h(t)=e^{-at}u(t)$ $a>0$ işaretlerinin konvolüsyonunu Fourier dönüşümünden yararlanarak hesaplayınız.

ÇÖZÜM: $$X(j\omega)=\frac{1}{b+j\omega},\ H(j\omega)=\frac{1}{a+j\omega},\ Y(j\omega)=\frac{1}{(a+j\omega)(b+j\omega)}$$

$Y(j\omega)$ basit kesirlere açılırsa $$Y(j\omega)=\frac{A}{a+j\omega}+\frac{B}{b+j\omega}=\frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{a+j\omega}-\frac{1}{b+j\omega}\right]$$

$y(t)$'yi elde etmek için ters Fourier dönüşümü almak yeterlidir.

$$y(t)=F^{-1}\{Y(j\omega)\}=F^{-1}\left\{\frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{a+j\omega}-\frac{1}{b+j\omega}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{b-a}\left[e^{-at}u(t)-e^{-bt}u(t)\right]$$

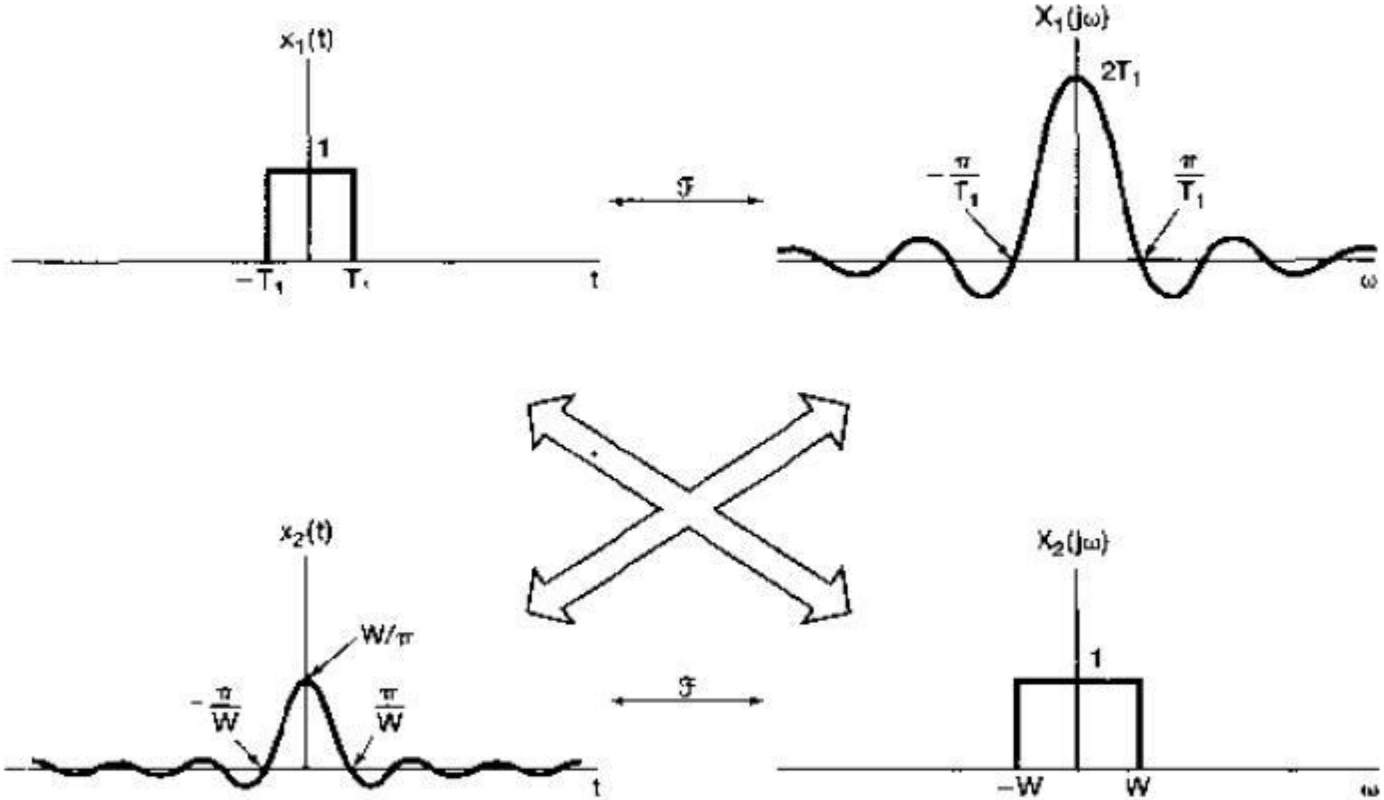
Sürekli-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Çarpma (modülasyon) özelliği: $r(t)=s(t)p(t)\xleftrightarrow{F}R(j\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\left[S(j\omega)*P(j\omega)\right]$

Yorumlar:

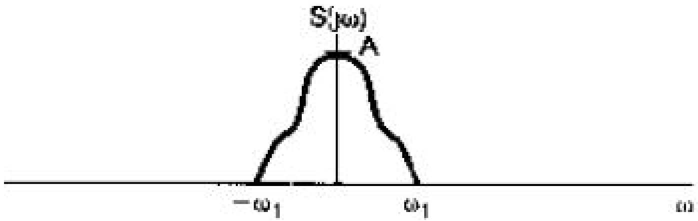
1. Zaman uzayında çarpma, frekans uzayında konvolüsyona karşılık gelmektedir.
2. Zaman uzayında konvolüsyonun frekans uzayında çarpmaya karşılık geldiğini hatırlayınız. Zaman ve frekans uzayları arasındaki bu ilişkiye DÜALLİK denilir. Dualliğin nedeni, Fourier ve ters Fourier dönüşüm denklemlerinin eşit olmamakla birlikte oldukça benzer olmasıdır.
3. Verilen bir Fourier çifti için, zaman ve frekans değişkenlerinin rolleri değiştirilerek DÜAL çift elde edilir.
4. Düallik özelliği kullanılarak, diğer pek çok özellik elde edilebilir. Örneğin, zaman uzayında türev almak $j\omega$ ile çarpmaya karşılk geldiğine göre, zaman uzayında integral alma $j\omega$ ile bölmeye karşılık gelmelidir.
5. Düallik özelliği, darbe ve sinc Fourier dönüşüm çifti için aşağıda verilmiştir ve diğer fonksiyon çiftlerine uygulanabilir.

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri



Sürekli-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

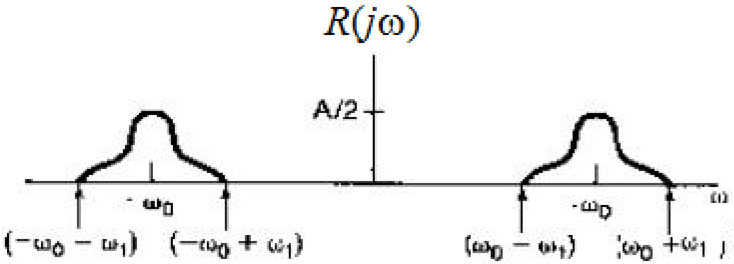
ÖRNEK: Bir $s(t)$ işaretinin spektrumu aşağıda verilmiştir. $p(t) = \cos(\omega_0 t)$ olmak üzere, $r(t) = s(t)p(t)$ işaretinin spektrumunu Fourier dönüşümünün çarpma(modülasyon) özelliğinden yararlanarak bulunuz.



ÇÖZÜM:

$$P(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

$$R(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[S(j\omega) * \{\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)\}\right] = \frac{1}{2}S(j(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}S(j(\omega + \omega_0))$$



Sürekli-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Özellik	**Aperiyodik İşaret**	**Fourier dönüşümü**
	$x(t)$ $y(t)$	$X(j\omega)$ $Y(j\omega)$
Doğrusallık	$ax(t)+by(t)$	$aX(j\omega)+bY(j\omega)$
Zamanda öteleme	$x(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$
Frekansta öteleme	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(j(\omega-\omega_0))$
Eşlenik alma	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
Zamanda tersine çevirme	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
Zaman ve frekans ölçek	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
Konvolüsyon	$x(t)*y(t)$	$X(j\omega)Y(j\omega)$
Zamanda çarpma	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*Y(j\omega)$

Özellik	Periyodik İşaret	Fourier Serisi Katsayıları
Zamanda türev alma	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(j\omega)$
Zamanda integral alma	$\int_{-\infty}^{t} x(t)dt$	$\frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
Frekansta türev alma	$tx(t)$	$j\frac{d}{d\omega} X(j\omega)$
Gerçel işaretler için eşlenik simetriklik	$x(t)$ gerçel	$\begin{cases} X(j\omega) = X^*(-j\omega) \\ \Re e\{X(j\omega)\} = \Re e\{X(-j\omega)\} \\ \Im m\{X(j\omega)\} = -\Im m\{X(-j\omega)\} \\ \lvert X(j\omega)\rvert = \lvert X(-j\omega)\rvert \\ \prec X(j\omega) = -\prec X(-j\omega) \end{cases}$
Gerçel ve çift işaretler Gerçel ve tek işaretler	$x(t)$ gerçel ve çift $x(t)$ gerçel ve tek	$X(j\omega)$ gerçel ve çift $X(j\omega)$ saf karmaşık ve tek
Gerçel işaretlerin çift-tek ayrıştırması	$x_e(t) = \mathrm{Ev}\{x(t)\}$ [$x(t)$ gerçel] $x_o(t) = \mathrm{Od}\{x(t)\}$ [$x(t)$ gerçel]	$\Re e\{X(j\omega)\}$ $j\Im m\{X(j\omega)\}$

Aperiyodik İşaretler için Parseval İlişkisi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(j\omega)\rvert^2 d\omega$$

Doğrusal, Sabit Katsayılı Diferansiyel Denklemlerle Tanımlanan Sistemler

- Girişi-çıkış ilişkisi aşağıda verilen sürekli-zaman sistemin frekans yanıtını bulalım

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

- Konvolüsyon özelliğinden, $Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) \Rightarrow H(j\omega) = \dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$

- Diferansiyel denklemin her iki tarafının Fourier dönüşümü alınır ve Fourier dönüşümünün türev özelliği kullanılırsa frekans yanıtı bulunabilir:

$$F\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = F\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\} \Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k F\left\{\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \sum_{k=0}^{M} b_k F\left\{\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(j\omega) \Rightarrow H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

Doğrusal, Sabit Katsayılı Diferansiyel Denklemlerle Tanımlanan Sistemler

ÖRNEK: Giriş-çıkış ilişkisi aşağıda verilen sistemin frekans yanıtını ve impuls yanıtını bulunuz.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

ÇÖZÜM: Her iki tarafın Fourier dönüşümü alınırsa

$$(j\omega)^2 Y(j\omega) + 4(j\omega)Y(j\omega) + 3Y(j\omega) = (j\omega)X(j\omega) + 2X(j\omega)$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{j\omega + 2}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3}$$

$H(j\omega)$'nın ters Fourier dönüşümü alınırsa impuls yantı elde edilir.

$$h(t) = F^{-1}\{H(j\omega)\} = F^{-1}\left\{\frac{1/2}{j\omega + 1} + \frac{1/2}{j\omega + 3}\right\}$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t)$$