# Lineer olmayan Denklemlerin Sayısal Çözümü

# Kirişler

# YÖNTEMİ

## Kirişler Yöntemi

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

lineer olmayan denklemini ele alalım. (1) denkleminin $x = \alpha$ çözümü $x = \alpha \in [a, b]$ olsun. Yani,

$$f(a)f(b) < 0 \qquad (2)$$

koşulu sağlanır. Bellidir ki (1) denklemini her zaman

$$x = \varphi(x) \qquad (3)$$

şeklinde yazabiliriz.

(1) denkleminin her iki tarafını $-\psi(x)$ fonksiyonu ile çarpalım ve elde edilen eşitliğin her iki tarafına $x$ ekliyelim. O halde

$$x = x - \psi(x)f(x) \qquad (4)$$

(4) denkleminin çözümü de

$$x = \alpha$$

olacaktır.

Şimdi ise, $x = x - \psi(x)f(x)$ ifadesinde $\psi(x)$ fonksiyonu özel şekilde seçelim.

$$f(x_0).f''(x_0) > 0 \qquad (5)$$

koşulunu sağlayan $x_0$ noktasını alalım ve

$$\varphi(x) = x - \psi(x)f(x)$$

İfadesinde

$$\psi(x) = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

yazalım. Bu durumda

$$x = x - \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} f(x) \qquad (6)$$

olacaktır. Yani

$$\varphi(x) = x - \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} f(x) \qquad (7)$$

Şeklindedir.

$$\varphi(x) = x - \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} f(x)$$

Fonksiyonu için

$$\Rightarrow \varphi'(x) < 1$$

Koşulunun sağlandığını hiç kimsenin baskısı altında kalmadan kendi arzu ve isteğiniz ile ispatlamak İstediğiniz gözlerinizden okunur. (*ispatı ödev*).

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} f(x_n) \qquad (8)$$

İfadesini aşağıdaki şekilde yazalım.

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_0} = \frac{-f(x_n)}{f(x_n) - f(x_0)} \qquad (9)$$

Bellidir ki, $(x_0, f(x_0))$ ve $(x_n, f(x_n))$ noktalarından geçen doğrunun denklemi

$$\frac{f(x) - f(x_n)}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{x - x_n}{x_n - x_0}$$

şeklindedir.

$$\frac{f(x)-f(x_n)}{f(x_n)-f(x_0)}=\frac{x-x_n}{x_n-x_0}$$

ifadesinde $x$ yerine $x_{n+1}$ yazalım.

$$\frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{f(x_n)-f(x_0)}=\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_0}$$

Elde edilen son eşitliği

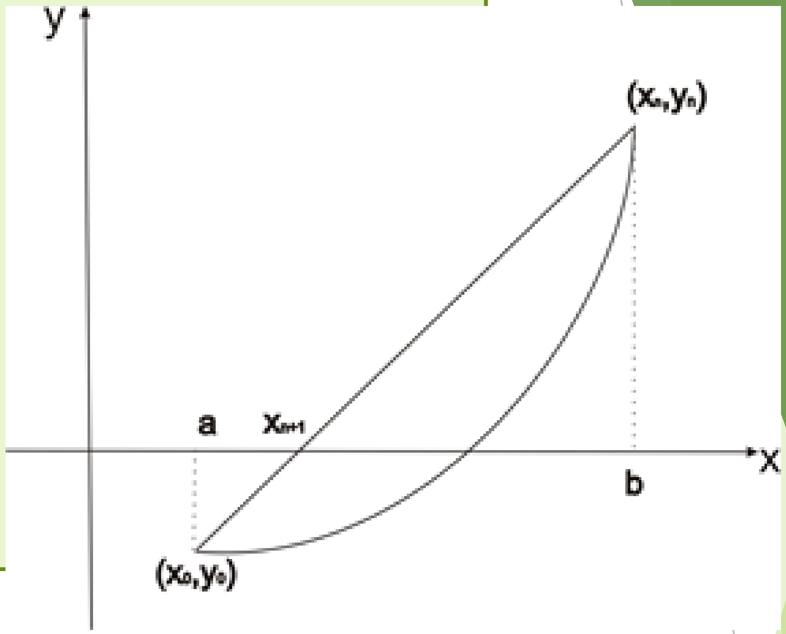
$$\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_0}=\frac{-f(x_n)}{f(x_n)-f(x_0)} \qquad (9)$$

ile karşılaştıralım. $f(x_{n+1})=0$ olduğu görülmektedir.

Bu durumda

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} f(x_n)$$

Yaklaşımları için aşağıdakini söyleyebiliriz:




$x_{n+1}$ noktası geometrik olarak $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği üzerinde ele alınan $(x_0$,f$(x_0))$ ve $(x_n$,f$(x_n))$ noktalarından geçen doğrunun (kirişin) x ekseni ile kesişme noktasıdır.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} f(x_n)$$

(8) ifadesini farklı şekilde aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$x_{n+1} = \frac{(f(x_n) - f(x_0))x_n - (x_n - x_0)f(x_n)}{f(x_n) - f(x_0)}$$

$$\Rightarrow \; x_{n+1} = \frac{x_n f(x_n) - x_n f(x_0) - x_n f(x_n) + x_0 f(x_n)}{f(x_n) - f(x_0)}$$

$$\Rightarrow \; x_{n+1} = \frac{x_0 f(x_n) - x_n f(x_0)}{f(x_n) - f(x_0)} \qquad (10)$$

(8) veya (10) ifadelerine, (1) lineer olmayan denkleminin çözümünün yaklaşık bulunması için ***Kirişler Yöntemi*** denir.

$x_0$ noktası (başlangıç yaklaşımı),

$$f(x_0)f''(x_0) > 0$$

koşulunu sağlayan herhangi bir noktadır.

Uygulamalarda eğer

$$f(a)\times f''(a) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = a, \quad x_1 = b$$

$$f(b)\times f''(b) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = b, \quad x_1 = a$$

Olarak ele alınır.

İşlemler

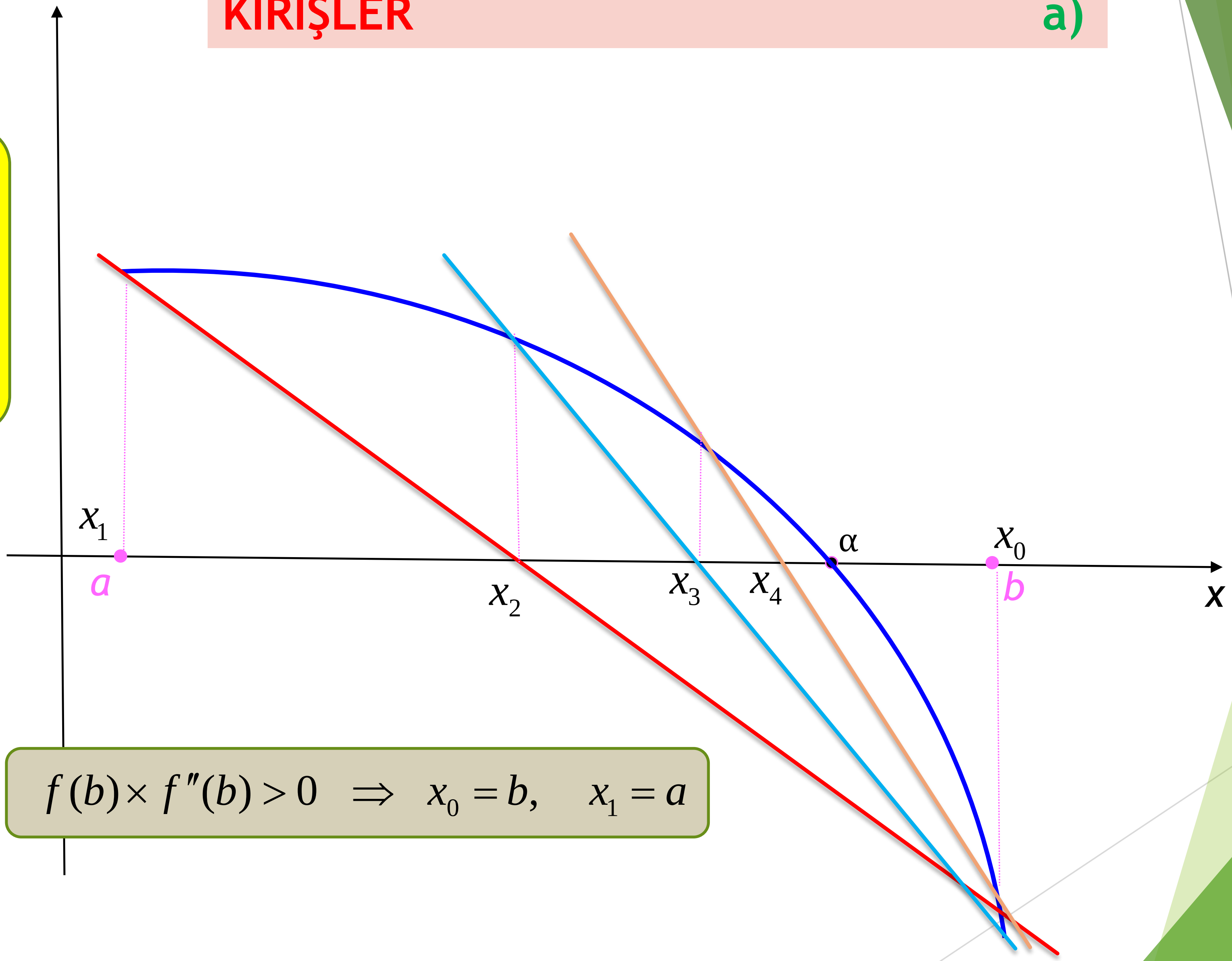
$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

olduğunda durdurulur.

Kirişler yönteminin geometrik yorumunu aşağıdaki şekilde verebiliriz:

# KİRİŞLER a)

$$f(a) > 0$$
$$f(b) < 0$$
$$f'(x) < 0$$
$$f''(x) < 0$$




$$f(b) \times f''(b) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = b, \quad x_1 = a$$

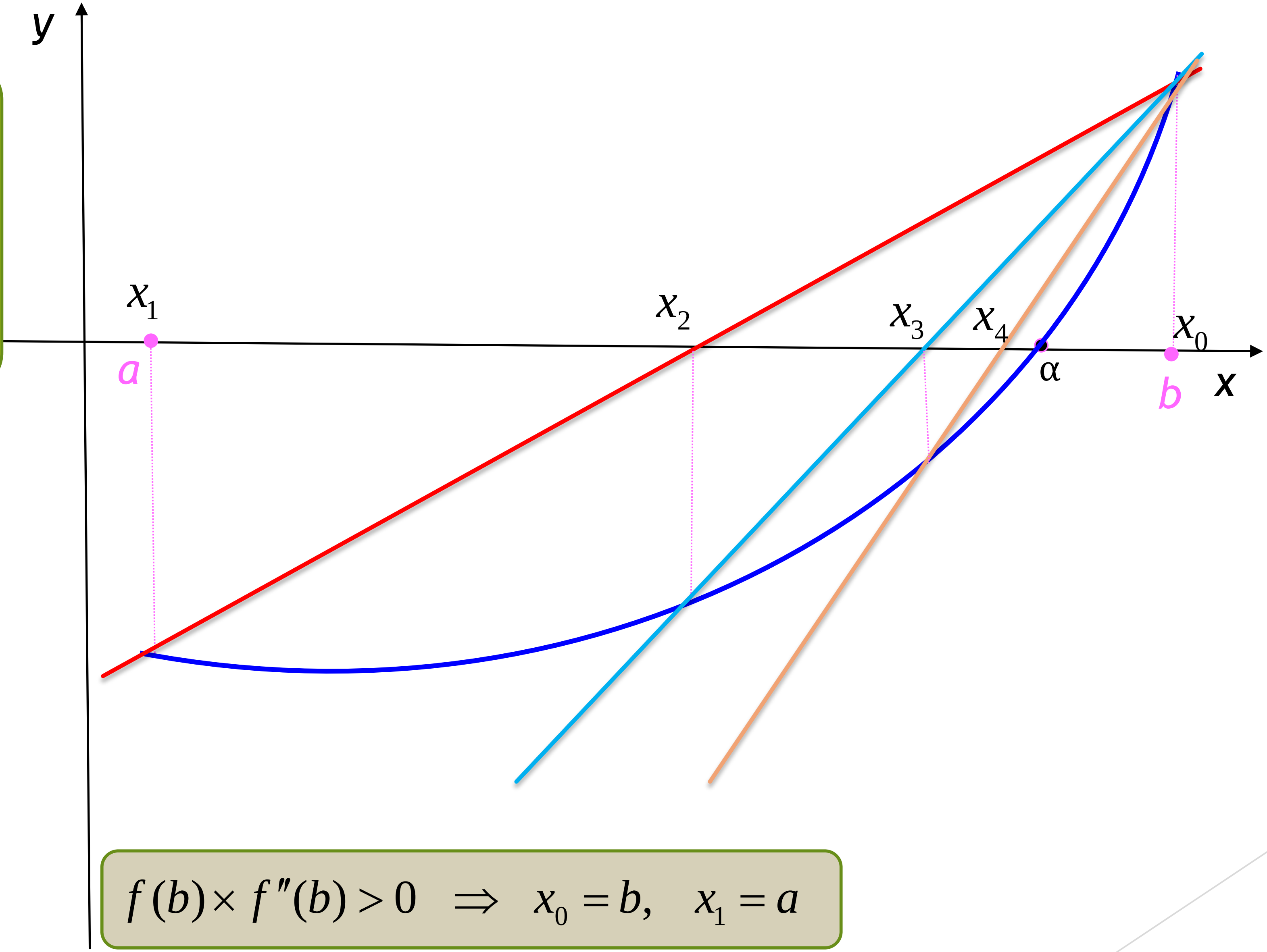
# KİRİŞLER b)

$f(a) < 0$

$f(b) > 0$

$f'(x) > 0$

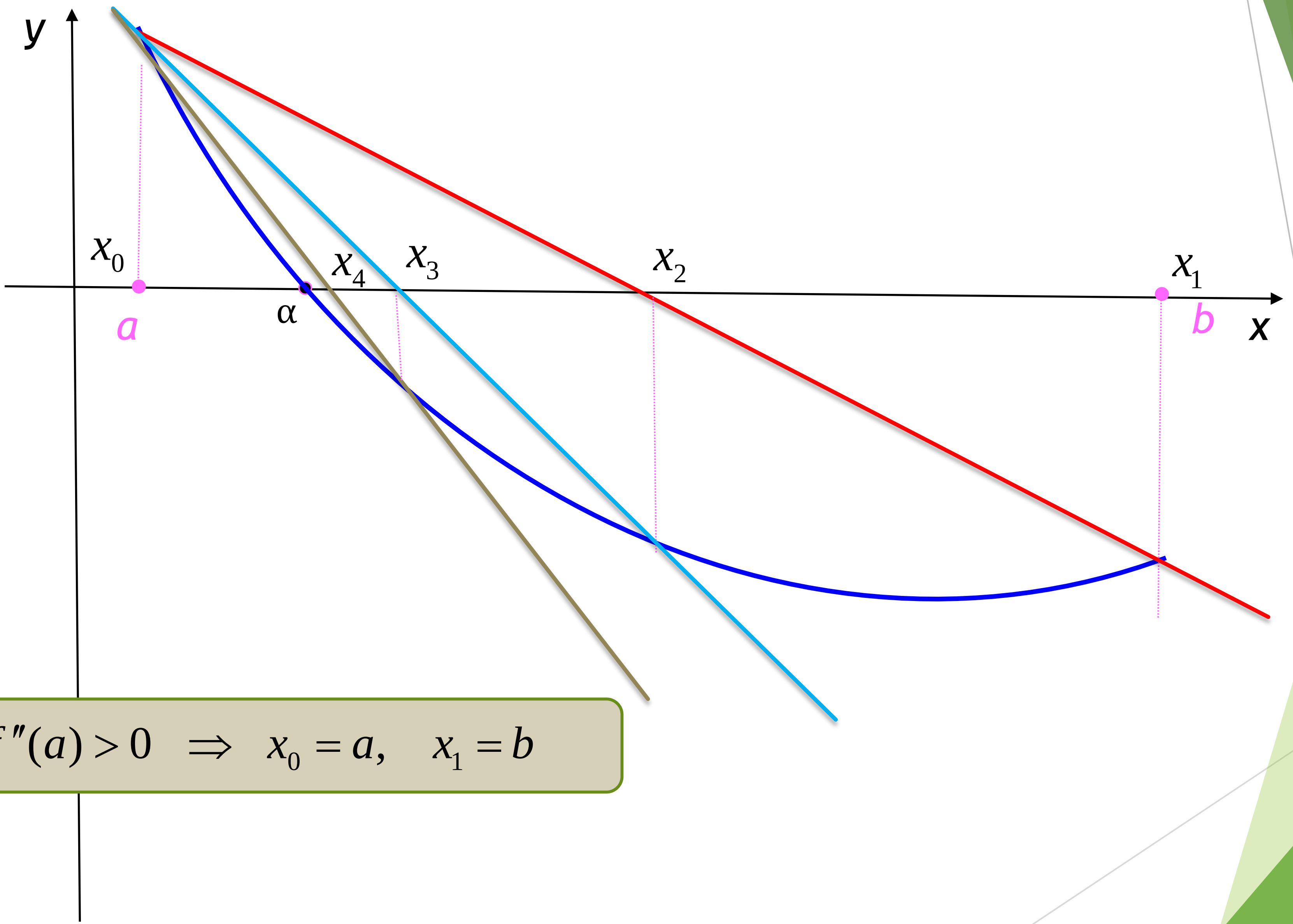
$f''(x) > 0$




$$f(b) \times f''(b) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = b, \quad x_1 = a$$

# KİRİŞLER c)

$f(a) > 0$
$f(b) < 0$
$f'(x) < 0$
$f''(x) > 0$

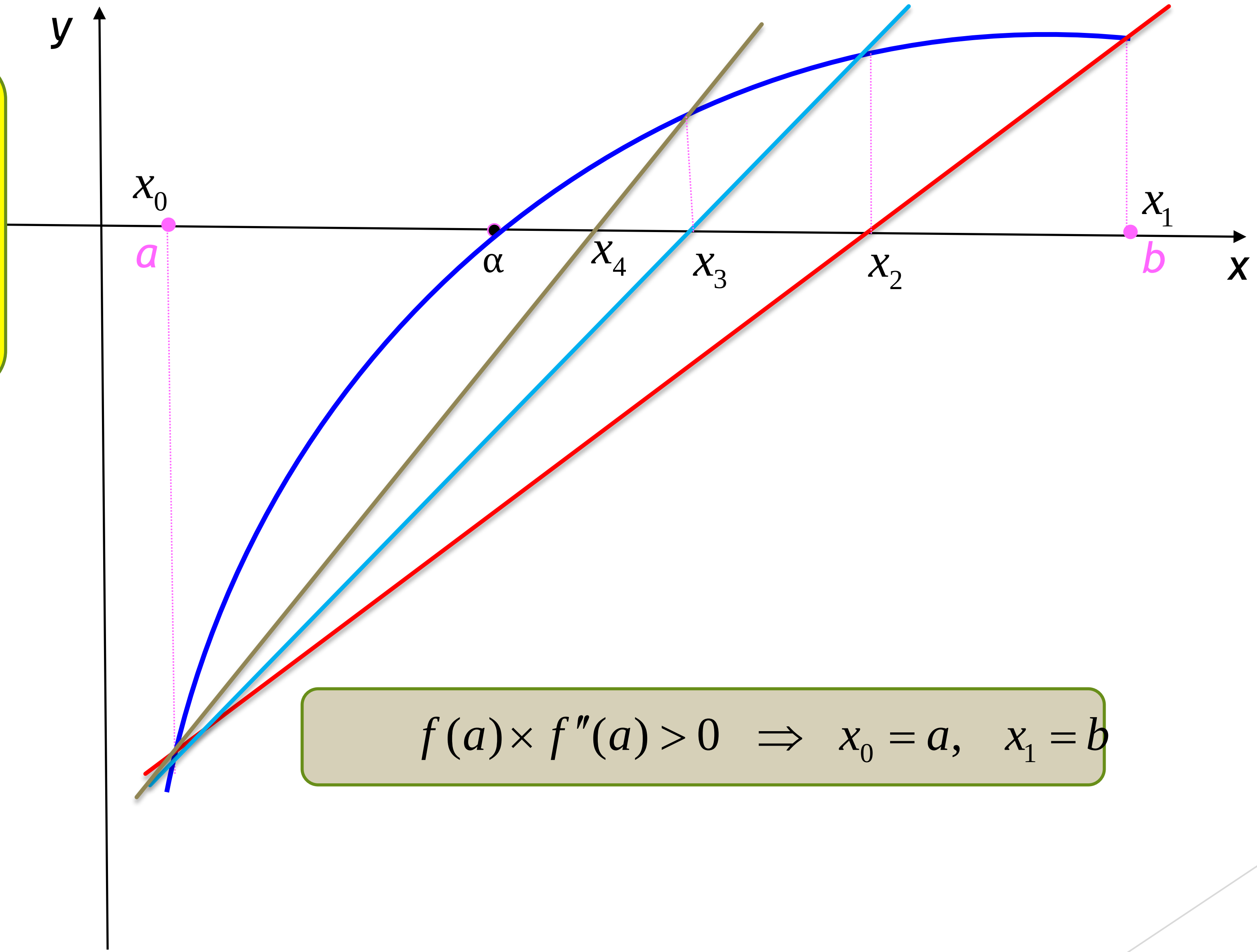



$$f(a) \times f''(a) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = a, \quad x_1 = b$$

## KİRİŞLER

d)

$$f(a) < 0$$
$$f(b) > 0$$
$$f'(x) > 0$$
$$f''(x) < 0$$




$$f(a) \times f''(a) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = a, \quad x_1 = b$$

**ÖRNEK:** x-cosx=0 denkleminin çözümünü kirişler yöntemi yardımı ile $\varepsilon = 10^{-3}$ kesinliği ile bulunuz.

$$x = cosx$$

denkleminin çözümünün $[0, \pi/2]$ aralığında olduğunu grafik yardımı ile belirleyebiliriz.

Gerçekten $f(x) = x - cosx$ fonksiyonu için

$$f(0) = 0 - cos0 = -1 < 0$$

$$f(1) = 1 - cos1 = 0.4397 > 0$$

$f(0)f(1)<0$ elde edilir.

Yani denkleminin $[0,1]$ aralığında çözümü vardır.

$$f(x) = x - cos\ x$$

$$f'(x) = 1 + \sin\ x$$

$$f''(x) = \cos\ x$$

$$f(0) = 0 - cos\ 0 = -1$$

$$f''(0) = \cos\ 1 = 1 > 0$$

$$f(1) = 1 - cos\ 1 = 0.4597 > 0$$

$$f''(1) = \cos\ 1 = 0.5403 > 0$$

$$f''(x)\ > 0 \qquad (iç\ bükey)$$

$$f(1)\,f''(1) > 0 \quad \text{olduğundan} \qquad \Rightarrow \quad x_0 = 1$$

$$x_{n+1} = \frac{x_0\, f(x_n) - x_n f(x_0)}{f(x_n) - f(x_0)}$$

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x_1) = f(0) = 0 - cos\ 0 = -1,$$

$$f(x_0) = f(1) = 1 - cos\ 1 = 0.4597$$

$$x_2 = \frac{x_0\, f(x_1) - x_1\, f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{1\text{x}(-1) - 0\text{x}0.4597}{-1 - 0.4597} = \frac{-1}{-1.4597} = \color{red}{0.6851}$$

$$|x_2 - x_1| > \varepsilon$$

$$x_{n+1} = \frac{x_0\, f(x_n) - x_n f(x_0)}{f(x_n) - f(x_0)}$$

$$x_0 = 1, \quad x_2 = 0.6851$$

$$\Rightarrow \quad f(x_2) = f(0.6851) = 0.6851 - \cos\ 0.6851 = -0.0893$$

$$x_3 = \frac{x_0\, f(x_2) - x_2\, f(x_0)}{f(x_2) - f(x_0)} = \frac{1\mathrm{x}(-0.0893) - 0.6851\mathrm{x}0.4597}{-0.0893 - 0.4597} = 0.7363$$

$$|x_3 - x_2| > \varepsilon$$

$$x_{n+1} = \frac{x_0\, f(x_n) - x_n f(x_0)}{f(x_n) - f(x_0)}$$

$$x_0 = 1, \quad x_3 = 0.7363$$

$$\Rightarrow \quad f(x_3) = f(0.7363) = 0.7363 - \cos\ 0.7363 = -0.0046$$

$$x_4 = \frac{x_0\, f(x_3) - x_3\, f(x_0)}{f(x_3) - f(x_0)} = \frac{1\mathrm{x}(-0.0046) - 0.7363\ \mathrm{x}0.4597}{-0.0046 - 0.4597} = 0.73626$$

$$|x_4 - x_3| < \varepsilon$$

$$\alpha \approx x_3 = 0.73626$$