



Lineer olmayan Denklemlerin Sayısal
Çözümü

Kirişler
YÖNTEMİnin
Farklı şekli

Kirişler Yönteminin Farklı şekli

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

lineer olmayan denklemini ele alalım. (1) denkleminin $x = \alpha$ çözümü $x = \alpha \in [a, b]$ olsun. Yani,

$$f(a)f(b) < 0 \quad (2)$$

koşulu sağlanır. Bellidir ki (1) denklemini her zaman

$$x = \varphi(x) \quad (3)$$

şeklinde yazabiliriz.

(1) denkleminin her iki tarafını $-\psi(x)$ fonksiyonu ile çarpalım ve elde edilen eşitliğin her iki tarafına x ekliyelim. O halde

$$x = x - \psi(x)f(x) \quad (4)$$

(4) denkleminin çözümü de

$$x = \alpha$$

olacaktır.

Kirişler yönteminin yaklaşımlarının

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} f(x_n) \quad (5)$$

şeklinde olduğu bellidir. Bu durumda x_0 noktası sabit kalmaktadır. Yaklaşım hızını arttırmak için (5) yaklaşımları farklı şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) \quad (6)$$

(6) yaklaşımları aşağıdaki gibi de yazılabilir.

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad (7)$$

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad (7)$$

(7) yaklaşımlarına göre x_{n+1} noktası, geometrik olarak $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği üzerinde ele alınan $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ ve $(x_n, f(x_n))$ noktalarından geçen doğrunun (kirişin) x eksenini ile kesişme noktasıdır.

(7) ifadesi, (1) lineer olmayan denkleminin çözümünün yaklaşık olarak bulunması için *Kirişler Yönteminin farklı şeklidir.*

x_0 noktası (başlangıç yaklaşımı),

$$f(x_0)f''(x_0) > 0$$

koşulunu sağlayan herhangi bir noktadır.

Uygulamalarda eğer

$$f(a) \times f''(a) > 0 \Rightarrow x_0 = a, \quad x_1 = a + \delta$$

$$f(b) \times f''(b) > 0 \Rightarrow x_0 = b, \quad x_1 = b - \delta$$

Olarak ele alınır.

İşlemler

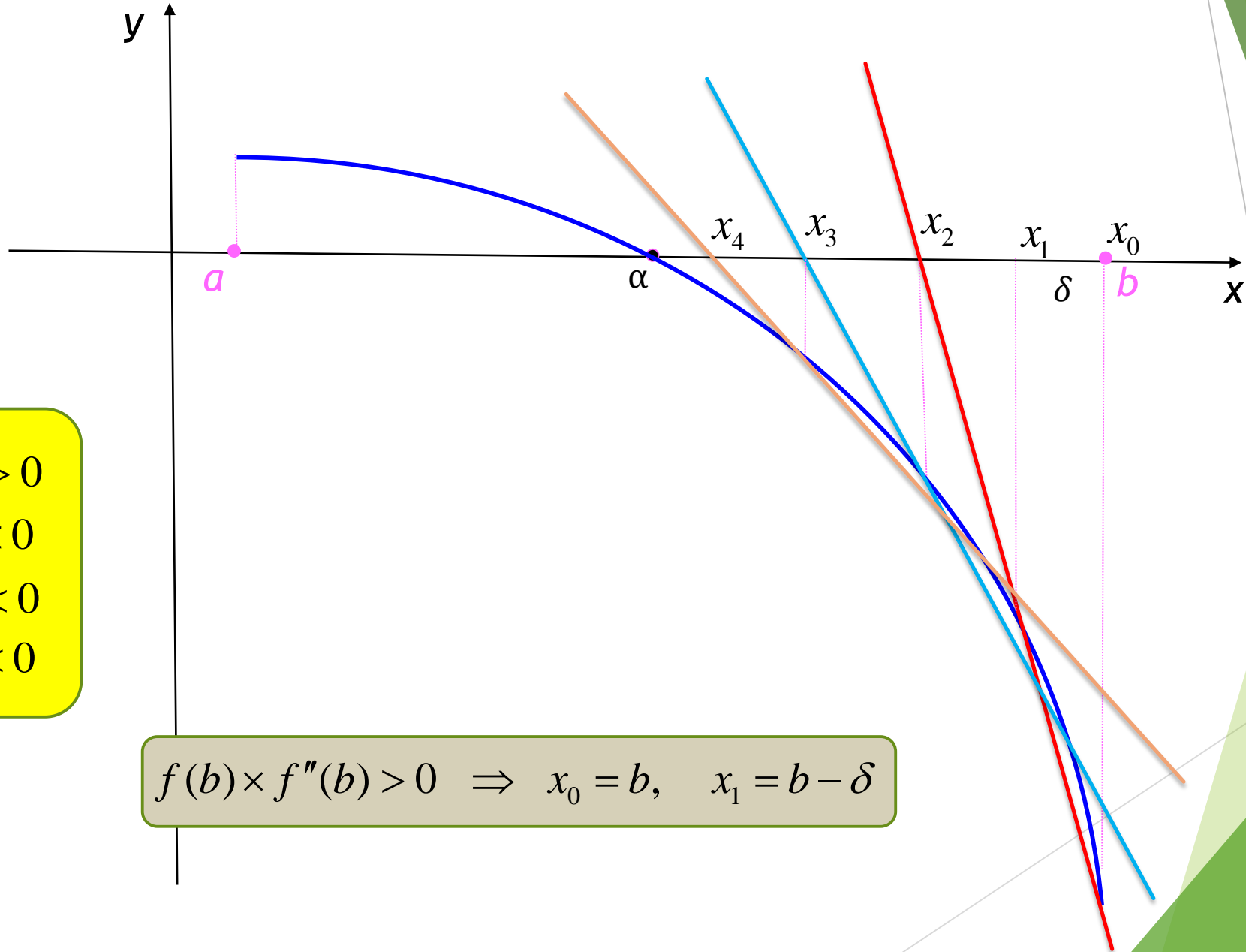
$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

olduğunda durdurulur.

Kirişler yönteminin farklı şeklinin geometrik yorumunu aşağıdaki şekilde verebiliriz:

KİRİŞLER YÖNTEMİNİN FARKLI ŞEKLİ

a)

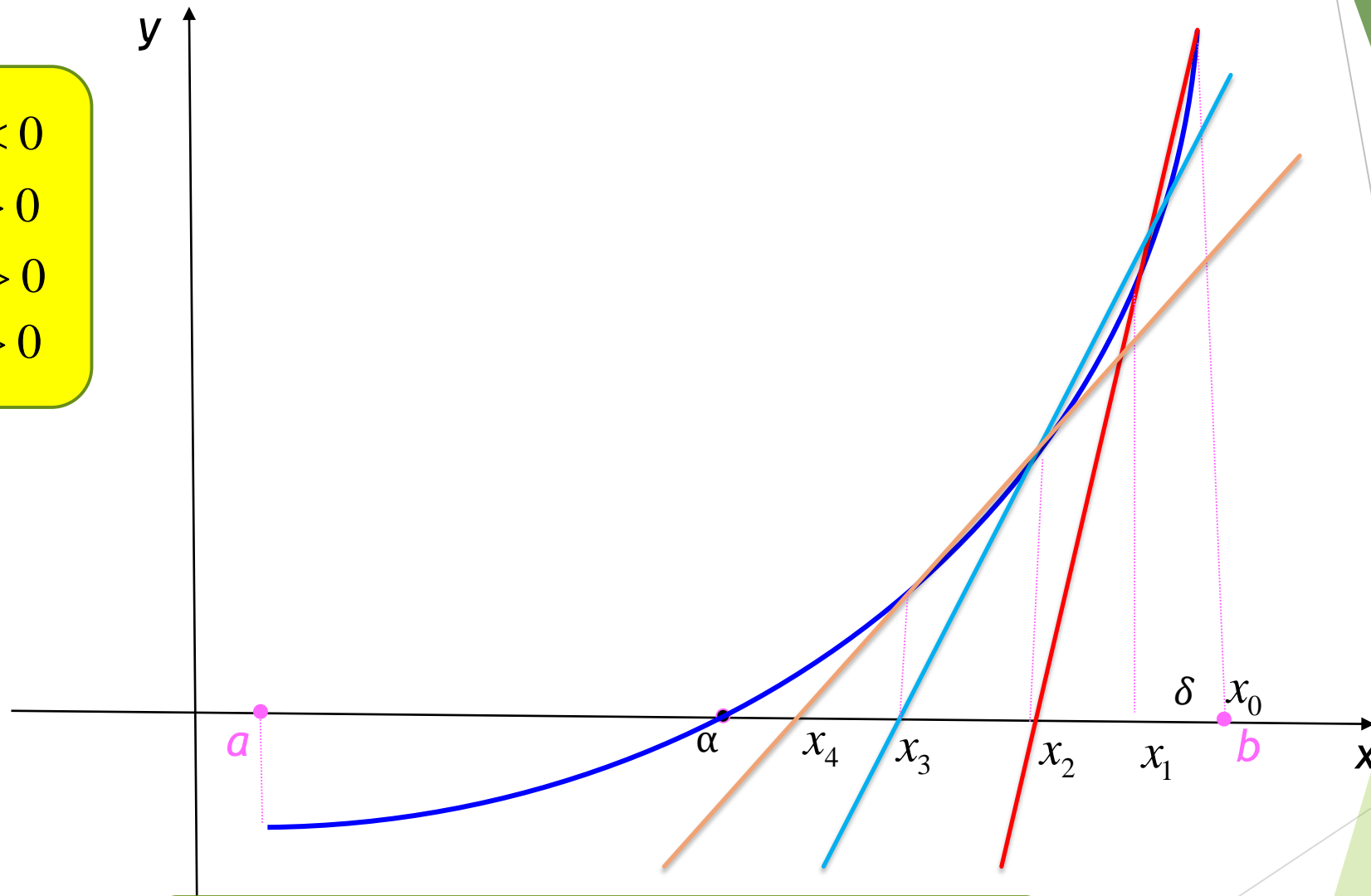


$$\begin{aligned} f(a) &> 0 \\ f(b) &< 0 \\ f'(x) &< 0 \\ f''(x) &< 0 \end{aligned}$$

$$f(b) \times f''(b) > 0 \Rightarrow x_0 = b, \quad x_1 = b - \delta$$

b)

$$f''(x) > 0$$

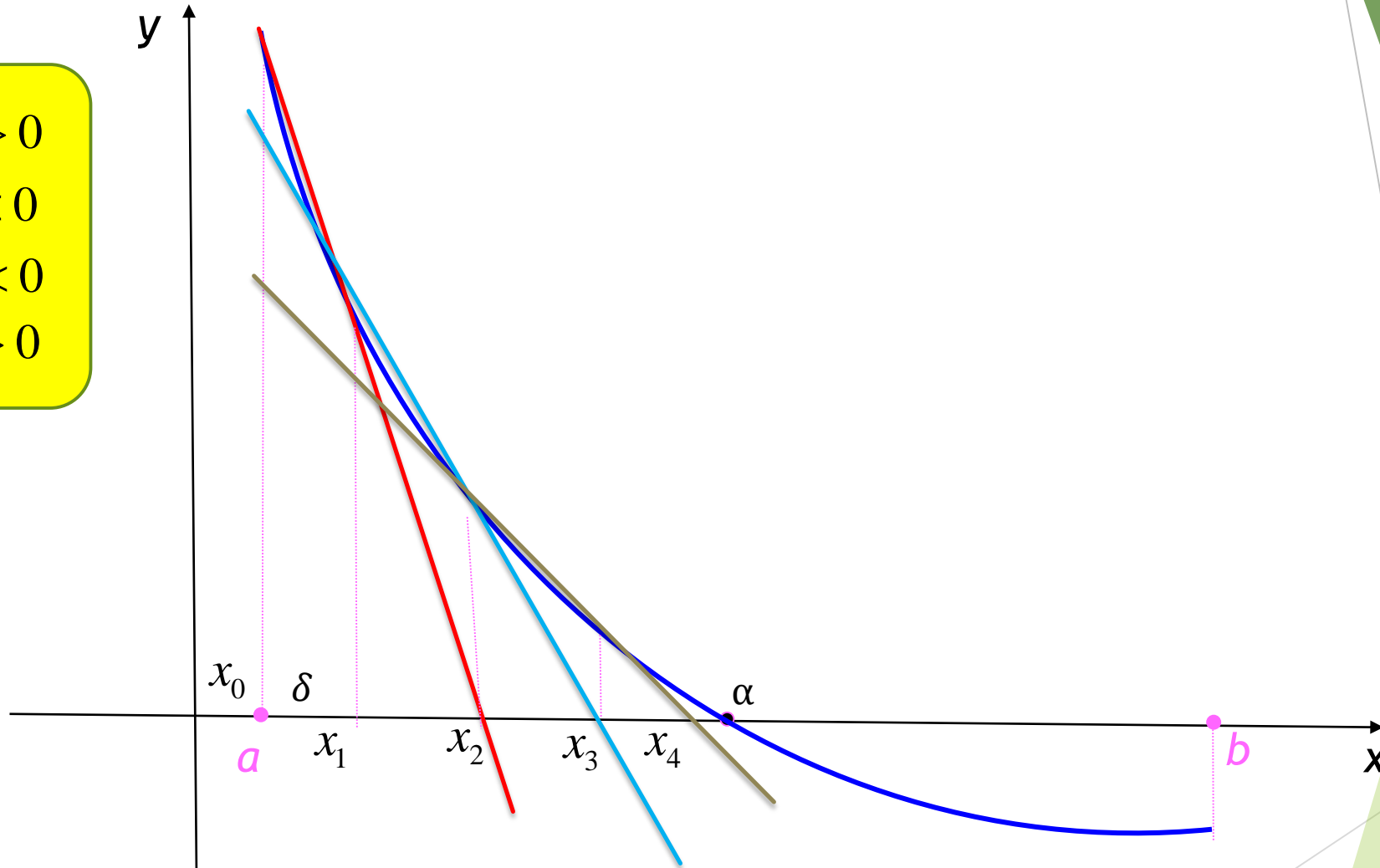


$$f(b) \times f''(b) > 0 \implies x_0 = b, \quad x_1 = b - \delta$$

KİRİŞLER YÖNTEMİNİN FARKLI ŞEKLİ

c)

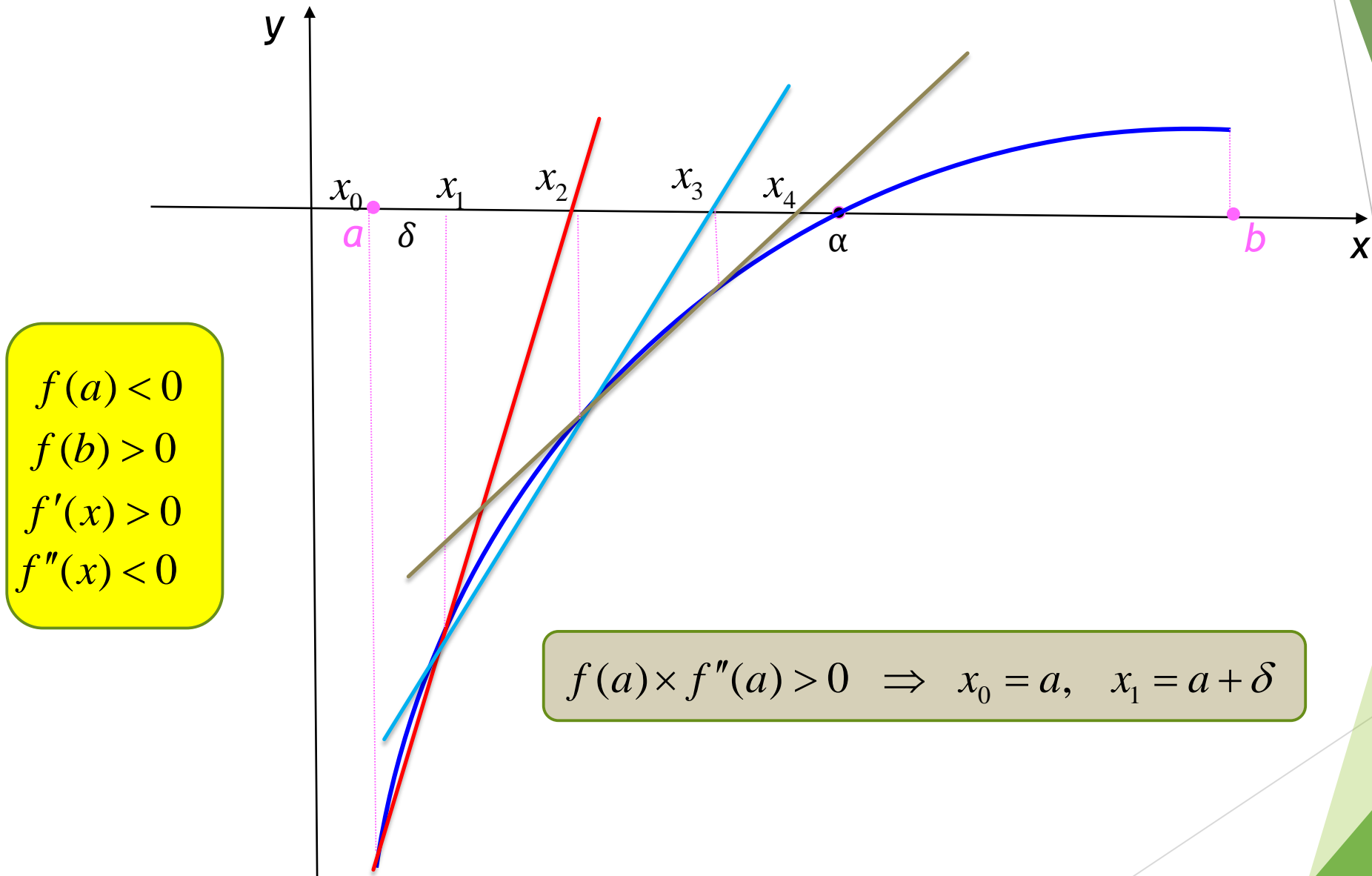
$$\begin{aligned} f(a) &> 0 \\ f(b) &< 0 \\ f'(x) &< 0 \\ f''(x) &> 0 \end{aligned}$$



$$f(a) \times f''(a) > 0 \Rightarrow x_0 = a, \quad x_1 = a + \delta$$

KİRİŞLER YÖNTEMİNİN FARKLI ŞEKLİ

d)



ÖRNEK: $x - \cos x = 0$ denkleminin çözümünü kirişler yönteminin farklı şekli yardımı ile $\varepsilon = 10^{-3}$ kesinliği ile bulunuz.

$$x = \cos x$$

denklemin çözümünün $[0, \pi/2]$ aralığında olduğunu grafik yardımı ile belirleyebiliriz.

Gerçekten $f(x) = x - \cos x$ fonksiyonu için

$$f(0) = 0 - \cos 0 = -1 < 0$$

$$f(1) = 1 - \cos 1 = 0.4397 > 0$$

$$f(0)f(1) < 0 \text{ elde edilir.}$$

Yani denklemin $[0, 1]$ aralığında çözümü vardır.

$$f(x) = x - \cos x$$

$$f'(x) = 1 + \sin x$$

$$f''(x) = \cos x$$

$$f(0) = 0 - \cos 0 = -1$$

$$f''(0) = \cos 0 = 1 > 0$$

$$f(1) = 1 - \cos 1 = 0.4597 > 0$$

$$f''(1) = \cos 1 = 0.5403 > 0$$

$$f''(x) > 0 \quad (\text{iç bükümlü})$$

$\delta = 0.1$ olsun

$$f(1)f''(1) > 0 \quad \text{olduğundan} \quad \Rightarrow \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 1 - \delta = 1 - 0.1 = 0.9$$

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 0.9$$

$$\Rightarrow f(x_0) = f(1) = 1 - \cos 1 = 0.4597$$

$$f(x_1) = f(0.9) = 0.9 - \cos 0.9 = 0.2784$$

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{1 \times 0.2784 - 0.9 \times 0.4597}{0.2784 - 0.4597} = 0.7464$$

$$|x_2 - x_1| > \varepsilon$$

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$x_1 = 0.9, \quad x_2 = 0.7464$$

$$\Rightarrow f(x_1) = f(0.9) = 0.2784$$

$$f(x_2) = f(0.7464) = 0.0.7464 - \cos 0.7464 = 0.0123$$

$$x_3 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{0.9 \times 0.0123 - 0.7464 \times 0.2784}{0.0123 - 0.2784} = 0.7393$$

$$|x_3 - x_2| = 0.0071 > \varepsilon$$

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$x_2 = 0.7464, \quad x_3 = 0.7393$$

$$\Rightarrow f(x_2) = f(0.7464) = 0.0123$$

$$f(x_3) = f(0.7393) = 0.7393 - \cos 0.7393 = 0.00036$$

$$x_4 = \frac{x_2 f(x_3) - x_3 f(x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} = \frac{0.7464 \times 0.00036 - 0.7393 \times 0.0123}{0.00036 - 0.0123} = 0.7391$$

$$|x_4 - x_3| = 0.0002 < \varepsilon$$

$$\alpha \approx x_4 = 0.7391$$