# OLASILIK VE RASLANTI DEĞİŞKENLERİ

**KESİKLİ RASSAL DEĞİŞKENLERİNİN OLASILIK DAĞILIMLARI**

# KESİKLİ RASSAL DEĞİŞKENLERİNİN BAZI OLASILIK DAĞILIMLARI

- Kesikli Düzgün (Uniform) Dağılımı
- Bernoulli Dağılımı
- Binom Dağılımı
- Geometrik Dağılım
- Poisson Dağılımı

# Kesikli Düzgün (Uniform) Dağılımı

- Kesikli bir rassal değişkeni tanımlı olduğu tüm noktalarda eşit olasılık değerine sahip ise bir başka ifadeyle tanımlı olduğu değerlerin hepsinde olasılık fonksiyonun aldığı değer sabit ise bu kesikli rassal değişkeni düzgün (uniform) dağılımına uygundur.
- Düzgün dağılımı gösteren bir rassal değişkeni $k$ farklı noktada tanımlı ise olasılık dağılımı;

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{k} \qquad x = 1,2,3\ldots,k$$

şeklinde ifade edilir.

# Kesikli Düzgün (Uniform) Dağılımı

- **Örnek :**
  - 1) Bir parayı bir kez atalım. $X$=0 yazı gelmesi sonucunu, $X$=1 tura gelmesi sonucunu göstersin. Burada $X$ kesikli düzgün rassal değişkendir.
  - 2) 52'lik bir desteden bir kart çekelim. Bu durumda $X$ "çekilen herhangi bir kart" kesikli düzgün rassal değişkendir.

- **Örnek:** Bir para bir kez atılıyor.Tura sayısının olasılık dağılımı nedir?
- **Çözüm:** Bir para bir kez atıldığında turaların sayısı $X$ olsun. Bu takdirde, $X$ kesikli düzgün dağılıma sahiptir.

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{2}, \quad x = 0,1$$

# Kesikli Üniform Dağılımının Beklenen Değer ve Varyansı

$$E(X)=\sum_{i=1}^{k}x_i P(x_i)=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}x_i=\frac{1}{k}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k+1}{2}$$

$$Var(X)=E\left(X^2\right)-\left[E\left(X\right)\right]^2$$

$$=$$

$$\sum_{i=1}^{k}x^2\frac{1}{k}-\left[\frac{k+1}{2}\right]^2 \quad =\frac{1}{k}\left[\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\right]-\frac{(k+1)^2}{4}$$

$$Var(X)=\frac{(k+1)(k-1)}{12}$$

**Örnek:** Hilesiz bir zar atıldığında $X$ rassal değişkeni ortaya çıkabilecek farklı durum sayısını ifade ettiğine göre $X$'in olasılık dağılımını oluşturarak beklenen değerini ve varyansını bulunuz.

$S = \{ x / 1,2,3,4,5,6 \}$

Ortaya çıkan olaylar eşit olasılıklı olaylar $X$ rassal değişkeninin dağılımı $k = 6$ olan kesikli düzgün dağılımına uygundur.

$$P(X = x) = \frac{1}{6} \quad x = 1,2,3,4,5,6$$

$$E(X) = \frac{6+1}{2} = 3{,}5 \qquad Var(X) = \frac{(6+1)(6-1)}{12} = \frac{35}{12}$$

# Bernoulli Dağılımı

- Bir rassal değişkeninin Bernoulli dağılımı göstermesi için ilgilenilen süreçte **bernoulli deneyinin varsayımlarının** sağlanması gereklidir.

**Bernoulli Deneyinin Varsayımları:**

- Deneyler aynı koşullarda tekrarlanabilirlik özelliğine sahip olmalıdır.
- Deneylerin yalnız iki mümkün sonucu olması gereklidir.
- Başarı olasılığı $p$, deneyden deneye değişmemektedir.
  (Başarısızlık olasılığı $q = 1-p$ ile gösterilir)
- Denemeler birbirinden bağımsız olmalıdır.

- **Bernoulli deneyinde ortaya çıkan sonuçlardan biri tanesi başarı durumu, diğeri ise başarısızlık olarak ifade edilir.** Bernoulli rassal değişkeninin dağılımı ifade edilirken **deneyin sadece 1 kez tekrarlanması** gereklidir.

# Bernoulli Dağılımı

- **Örnekler:**

- Para atılması
- İçinde $M$ siyah ve $N$ beyaz top bulunan bir kavanozdan bir top çekilmesi
- Kusurlu ve kusursuz parçaların bulunduğu bir kutudan bir parça çekilmesi
- Hilesiz bir zar atıldığında zarın tek veya çift gelmesi,

- Bernoulli dağılımında $X$ rassal değişkeni başarı durumu için 1, başarısızlık durumu için ise 0 değerini alır.

$$P(X=1)=p$$

$$P(X=0)=1-p=q \quad \text{yada}$$

$$f(x)=P(X=x)=p^{x}.(1-p)^{1-x}, \quad x=0,1 \quad \text{dir.}$$

Bu dağılıma Bernoulli dağılımı denir.

- Bernoulli dağılımının ortalaması $\mu$ ve varyansı $\sigma^2$

$$\mu=E(X)=p$$

$$\sigma^{2}=E(X^{2})-[E(X)]^{2}=p.q=p.(1-p)$$

**Örnek:** Bir deste iskambilden çekilen bir kağıdın as olup olmaması ile ilgileniyor. As gelmesi başarı olarak ifade edildiği durum için olasılık fonksiyonunu oluşturunuz.

$X = 0$ (as gelmemesi) $X = 1$ ( as gelmesi)

$S = \{ x \,/\, 0,1 \}$

$P(X = 0) = 48 / 52$

$P(X = 1) = 4 / 52$

$$P(X = x) = \left(\frac{4}{52}\right)^{x} \left(\frac{48}{52}\right)^{1-x} \qquad x = 0,1$$

# Binom Dağılımı
# (İki Terimli Dağılım)

- Birbirinden bağımsız $n$ adet **Bernoulli Deneyinin** bir araya gelmesi sonucunda **Binom deneyi** gerçekleşir.
- Binom deneyinin gerçekleşmesi için Bernoulli deneyinin bütün varsayımlarının sağlanması gereklidir.
- Binom rassal değişkeni $X$, $n$ adet denemedeki başarı sayısını ifade etmektedir.
- $n$ denemede en az 0, en fazla $n$ adet başarı gözlenebileceğinden

$$S = \{ x \,/\, 0,1,2,\ldots\ldots,n \}$$

olur.

# Binom Dağılımı
# (İki Terimli Dağılım)

- **Örnek:** Aşağıdaki deneylerde tanımlanan $X$, binom rassal değişkenidir.
- 1) Bir para 10 kez atılsın. $X$ rassal değişkeni gözlenen turların sayısıdır.
- 2) İçinde 8 siyah ve 4 beyaz top bulunan bir kavanozdan tekrar yerine koyarak 3 top çekilsin. $X$ rassal değişkeni çekilen siyah top sayısıdır.
- 3) İçinde 3 kusurlu ve 7 kusursuz parça bulunan bir kutudan tekrar yerine koyarak 4 parça seçelim. $X$ rassal değişkeni seçilen kusurlu parçaların sayısıdır.
- 4) Hilesiz bir zar 4 kez atıldığında zarın en çok 1 kez çift gelmesi,

# Binom Dağılımı (İki Terimli Dağılım)

- **Teorem:** (Binom Dağılımı) Birbirinden bağımsız *n* Bernoulli denemesi için *X*, her bir denemede başarı olasılığı *p*, başarısızlık olasılığı *q* (1-*p*) olan Binom rassal değişkeni ise, *X*'in olasılık fonksiyonu

$$f(x) = \binom{n}{x} . p^{x} . q^{n-x}, \; x = 0,\ 1, 2, \ldots, n$$

- **Olasılık**

$$\sum_{x=0}^{n} f(x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} . p^{x} . q^{n-x} = (p+q)^{n} = 1$$

# Binom Dağılımı (İki Terimli Dağılım)

- **Örnek:** Bir para 4 kez atılsın.
- a) İki tura
- b) En az bir tura
- c) 1’den fazla tura gelmesi olasılıkları nedir?

# Binom Dağılımı (İki Terimli Dağılım)

- **Çözüm:** 4 atıştaki turaların sayısı $X$ olsun. Böylece $X$ rassal değişkeni için olasılık fonksiyonu

$$f(x) = P(X = x) = \binom{4}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{4-x}$$

- a) İki tura gelme olasılığı

$$f(2) = P(X = 2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{4-2} = 6.\frac{1}{4}.\frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

# Binom Dağılımı (İki Terimli Dağılım)

- b) En az bir tura elde etme olasılığı, bir yada daha çok tura elde etme olasılığına eşittir.

$$P(x \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 1 - P(X=0)$$

$$= 1 - \binom{4}{0} . \left(\frac{1}{2}\right)^{0} . \left(\frac{1}{2}\right)^{4-0} = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

- c) Birden fazla tura elde etmenin olasılığı

$$P(X > 1) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$$

$$= 1 - P(X=0) - P(X=1)$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{4} - 4.\left(\frac{1}{2}\right)^{4} = \frac{11}{16}$$

**Örnek:** Bir işletmede üretilen ürünlerin % 6'sının hatalı olduğu bilinmektedir. Rassal ve iadeli olarak seçilen 5 üründen,

a) 1 tanesinin hatalı olmasının olasılığını,

b) En az 4 tanesinin hatalı olmasının olasılığını hesaplayınız.

$p = 0{,}06 \quad q = 1 - p = 0{,}94 \quad n = 5$

$P(X = 1) = ?$

$P(X \geq 4) = ?$

$$P(X = 1) = \binom{5}{1}.(0{,}06)^1.(0{,}94)^4 \approx 0{,}23$$

$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5)$$

$$= \binom{5}{4}.(0{,}06)^4.(0{,}94)^1 + \binom{5}{5}.(0{,}06)^5.(0{,}94)^0$$

**Örnek:** Metal hilesiz bir para 10 kez fırlatılıyor ($n$=10 $p$=$q$=1/2=0.5)

a) Bir kez yazı gelmesi olasılığı

$$P(X=1)=\binom{10}{1}.(0,5)^1.(0,5)^9=\frac{10!}{1!9!}(0.5)^{10}=\frac{10.9!}{9!}(0.5)^{10}=0,0098$$

b) Hiç yazı gelmemesi olasılığı

$$P(X=0)=\binom{10}{0}.(0,5)^0(0,5)^{10}=\frac{10!}{0!10!}(0.5)^{10}=(0.5)^{10}$$

$$=0,0098$$

c) En az 2 kez yazı gelmesi olasılığı

$$P(X\geq 2)=P(X=2)+\ldots+P(X=10)$$

**Örnek:** Metal hilesiz bir para 10 kez fırlatılıyor ($n$=10  $p$=$q$=1/2=0.5)

c) (devam) En az 2 kez yazı gelmesi olasılığı

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + \ldots + P(X = 10)$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1)$$

$$P(X \geq 2) = 1 - [P(X = 1) + P(X = 0)]$$

$$P(X \geq 2) = 1 - \left[10.(0,5)^{10} + (0,5)^{10}\right] = 1 - 11.(0,5)^{10} \cong 0.989$$

# Binom Dağılımı
# (İki Terimli Dağılım)

- **Binom dağılımın beklenen değeri ve varyansı**

$$\mu = E(X) = np$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = npq$$

**Örnek**: Üç ildeki üç farklı göreve, üç farklı meslekten, üç aday başvuruyor. Her adayın bulunduğu ildeki göreve seçilmesi olasılığı 1/3 olmak üzere en az birinin oturduğu ilde görev alma olasılığı nedir?

**Çözüm:**

Binom deneyi için koşullar:

$p$=1/3 (Adayın oturduğu ilde göreve seçilmesi)

$q$=2/3 (Adayın oturduğu ilde göreve seçilmemesi)

1) $n$=3 (sabit)

2) Her aday ya yaşadığı yere görevli gider, ya da gidemez.(iki sonuç var)

3) $p$=1/3, $q$=2/3 (Her aday için aynıdır)

4) Görevlendirmeler bağımsızdır

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$= 1 - \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{19}{27}$$

# Geometrik Dağılımı

- Bir deneyin bağımsız Bernoulli denemelerinden oluştuğunu kabul edelim. İlk "başarıyı" elde edinceye kadar bağımsız denemeleri yapmaya devam edersek, ilk başarının elde edilmesi için gereken denemelerin sayısı geometrik rassal değişkendir.

- **Tanım:** Bağımsız Bernoulli denemelerinin bir dizisinde her bir deneme için başarı olasılığı $p$ ve ilk başarının elde edilmesi için gerekli denemelerin sayısı $X$ rassal değişkeni olsun. Bu durumda $X$'e geometrik rassal değişken denir.

# Geometrik Dağılımı

- **Örnek:** Aşağıdaki örnekler geometrik rassal değişkenlerle ilgilidir.

- 1) Bir para tura gelinceye kadar atılsın. $X$ ilk turayı bulmak için gereken atışların sayısı olsun. $X$, geometrik rassal değişkendir.

- 2) Bir kutuda 6 kusurlu, 7 kusursuz parça vardır. Parçalar ardışık olarak tekrar yerine konarak çekiliyor. Burada $X$, kusurlu parça elde edilinceye kadar gereken çekilişlerin sayısı $X$ geometrik rassal değişkenidir.

# Geometrik Dağılımı

- **Teorem:** $X$, bir tek denemede başarısızlık olasılığı $q=1-p$ ve başarı olasılığı $p$ olan geometrik rassal değişken ise, $X$'in olasılık fonksiyonu:

$$f(x) = P(X = x) = q^{x-1}.p, \qquad x = 1, 2, \ldots$$

# Geometrik Dağılımı

- **Örnek :** 1 elde edinceye kadar zarı atalım.

- a) Bağımsız atışlar dizisinde, ilk 1'in elde edilmesi için gereken atışların sayısının olasılık fonksiyonu nedir?

- b) 3. atışta 1 bulmanın olasılığı nedir?

# Geometrik Dağılımı

- **Çözüm:**
- a) $X$'in olasılık fonksiyonu:

$$P(X=x)=f(x)=\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}.\left(\frac{1}{6}\right), \qquad x=1,2,\ldots$$

- b) 3. atışta 1 elde etme olasılığı:

$$P(X=3)=f(3)=\left(\frac{5}{6}\right)^{3-1}.\left(\frac{1}{6}\right)=\left(\frac{5}{6}\right)^{2}.\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$=\frac{25}{216}=0{,}116$$

# Geometrik Dağılımı

**Örnek: Bir avcı hedefe isabet sağlayana kadar** ateş etmektedir. Avcının hedefi vurma olasılığı 0,75 olduğuna göre avcının hedefi ilk kez 8 nci kez atış yaptığında isabet ettirmesinin olasılığını hesaplayınız.

$x = 8 \quad P\ (\ X = 8) = ?$

$$P(X = x) = (0{,}75)(1 - 0{,}75)^{x-1} \qquad x = 1{,}2{,}3\ldots$$

$$P(X = 8) = (0{,}75)(1 - 0{,}75)^{8-1} = (0{,}75)(0{,}25)^{7} = 0{,}000046$$

# Geometrik Dağılımı

- Geometrik Dağılımın ortalama ve varyansı

$$E(x) = \frac{1}{p}$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{q}{p^2}$$

# Poisson Dağılımı

- Pek çok deney sürekli bir zaman aralığında, bir alanda ya da hacimde bir olayın sayılması sonucunda 0,1,2,… değerlerinin verilmesiyle oluşur.

- Birim zaman: dakika, saat, gün, hafta
- Birim uzay: uzunluk, alan, hacim olabilir.

- Poisson dağılımı sürekli uzayda kesikli veriler veren deneylere uygulanır.

# Poisson Dağılımı

- **Tanım :** Verilmiş bir zaman aralığında bir alanda yada hacimde başarıların sayısı $X$ rassal değişkeni olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $X$'e Poisson Rassal Değişkeni denir.
- 1) Deney, verilmiş bir birim zaman, alanda ya da hacimde bir olayın (başarının) elde ediliş sayılarının sayılmasıyla oluşur.
- 2) İki ayrık birim zamanda, alanda ya da hacimde elde edilecek başarıların sayıları birbirinden bağımsızdır.
- 3) Bir birim zaman, alan veya hacimdeki başarı olasılığı tüm birimler için aynıdır.
- 4) Çok küçük bir zaman aralığı, alan yada hacimde iki ya da daha çok başarının olması hemen hemen olanaksızdır. Yani bu durumda birden çok başarının olması olasılığı sıfıra yaklaşır.
- 5) Belirlenen periyotta meydana gelen ortalama olay sayısı sabittir.

# Poisson Dağılımı

- **Örnekler:**
- a) Büyük bir şehirde trafiğin yoğun olduğu bir kavşakta aylık otomobil kazalarının sayısı
- b) Bir üretim malındaki kusurların sayısı
- c) Bir telefon santralında her bir dakika için gerçekleşen telefon konuşmalarının sayısı
- d) Yeni bir otomobilde kalite kontrolörleri tarafından saptanan yüzey hatalarının sayısı
- e) Bir hava alanına her saat inen uçakların sayısı
- f) Bir telefon santraline 1 dk. içerisinde gelen telefon çağrılarının sayısı,
- g) Bir kitap içindeki baskı hatalarının sayısı,
- h) İstanbul'da 100 $m^2$'ye düşen kişi sayısı,
- i) Ege Bölgesinde 3 aylık sürede 4,0 şiddetinden büyük olarak gerçekleşen deprem sayısı.

# Poisson Dağılımı

- **Tanım :** $X$; 0,1,2,… değerlerini alabilen bir Poisson rassal değişkeni olsun. $X$'in olasılık fonksiyonu:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!}, \quad x=0,1,2,\ldots \quad \lambda>0$$

$\lambda$ : belirlenen periyotta ortaya çıkan olay sayısı
$x$ : ortaya çıkma olasılığı araştırılan olay sayısı
$e = 2{,}71828$

# Poisson Dağılımı

- **Örnek :** 200 sayfalık bir kitaba 200 yazım hatası rasgele dağıtılıyor. Rasgele seçilen bir sayfada
- a) İki
- b) İkiden az

yazım hatası bulunması olasılığı nedir

# Poisson Dağılımı

**Çözüm:** $X$ rassal değişkeni bir sayfadaki yazım hatalarının sayısı olsun

$$\lambda = \frac{200 \text{ (hata)}}{200 \text{ (sayfa)}} = 1 \quad \text{(hata/sayfa)}$$

$$\text{a) } P(X=2) = f(2) = \frac{e^{-1}.1^{2}}{2!} = \frac{e^{-1}}{2} = 0{,}184$$

$$\text{b) } P(X<2) = \sum_{x=0}^{1} \frac{e^{-1}.1^{x}}{x!} = e^{-1}(1+1/1!) = 0{,}7356$$

**Örnek:** Bir mağazaya Cumartesi günleri 5 dakikada ortalama olarak 4 müşteri gelmektedir. Bir Cumartesi günü bu mağazaya,

a) 5 dakika içinde 1 müşteri gelmesi olasılığını,

b) Yarım saate 2'den fazla müşteri gelmesi olasılığını,

a) $\lambda = 4$ $P(X = 1) = ?$ $$P(X=1) = \frac{e^{-4}4^1}{1!} = 4e^{-4}$$

b) 5 dk'da 4 müşteri gelirse, 30 dk'da 24 müşteri gelir.

$\lambda = 24$ $P(X > 2) = ?$

$P(X > 2) = 1 - [P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)]$

$$1-\left(\frac{e^{-24}24^0}{0!}+\frac{e^{-24}24^1}{1!}+\frac{e^{-24}24^2}{2!}\right)=1-313e^{-24}$$

**ÖDEV:** 1 saatte en çok 1 müşteri gelmesinin olasılığını hesaplayınız.

# Poisson Dağılımı

**Örnek :** Bir telefon santralinde her bir dakikada ortalama 4 telefon bağlandığını kabul edelim.

a) İki dakikalık bir zaman aralığında tam 6 telefon bağlanması olasılığını bulunuz.

b) 3 dakika içinde en az 3 telefon bağlanma olasılığını bulunuz.

**Çözüm:**

a) 2 dakikalık bir zaman aralığında beklenen telefon bağlantılarının sayısı $\lambda$ = 8 (bağ./2 dk.) dır. *X*, verilen aralıkta kabul edilen telefon bağlantılarının sayısı ise;

$$P(X=6)=\frac{e^{-8}8^{6}}{6!}=0,122138$$

# Poisson Dağılımı

## Çözüm:

b) Aralık 3 dk. olduğunda beklenen bağlantı sayısı $\lambda$ = 12 (bağ./3 dk.) dır.

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-12}.12^{x}}{x!} = 0,999478$$

# Poisson Dağılımı

- Poisson Dağılımının Beklenen Değeri ve Varyansı

$$\mu = E(X) = \lambda$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda$$

**Beklenen değeri ve varyansı birbirine eşit olan tek dağılıştır.**

# Sorular

- 1) Acil servise saat 14.00 -15.00 arasında her 15 dakikada ortalama 3 ambulans gelmektedir. Saat 14.00-15.00 arasında herhangi bir 15 dakika içinde acil servise,
- a) Hiç araç gelmemesi
- b) En az 1 araç gelmesi
- c) 4 araç gelmesi
- d) 5 araç gelmesi
- e) En çok 2 araç gelmesi olasılıklarını bulunuz.
- 2) Bir torbada 8 beyaz, 4 siyah top bulunmaktadır. Her defasında yerine konularak bir top çekiliyor.
- a) Beyaz topun ilk defa 5'inci çekilişte çıkma olasılığı nedir?
- b) Rassal değişkeni beyaz bir top çekmek için yapılan deney sayısı ise rassal değişkenin beklenen değer ve varyansı nedir?

# Sorular

- 1) Acil servise saat 14.00 -15.00 arasında her 15 dakikada ortalama 3 ambulans gelmektedir. Saat 14.00-15.00 arasında herhangi bir 15 dakika içinde acil servise,
- a) Hiç araç gelmemesi
- b) En az 1 araç gelmesi
- c) 4 araç gelmesi
- d) 5 araç gelmesi
- e) En çok 2 araç gelmesi olasılıklarını bulunuz.
- 2) Bir torbada 8 beyaz, 4 siyah top bulunmaktadır. Her defasında yerine konularak bir top çekiliyor.
- a) Beyaz topun ilk defa 5'inci çekilişte çıkma olasılığı nedir?
- b) Rassal değişkeni beyaz bir top çekmek için yapılan deney sayısı ise rassal değişkenin beklenen değer ve varyansı nedir?