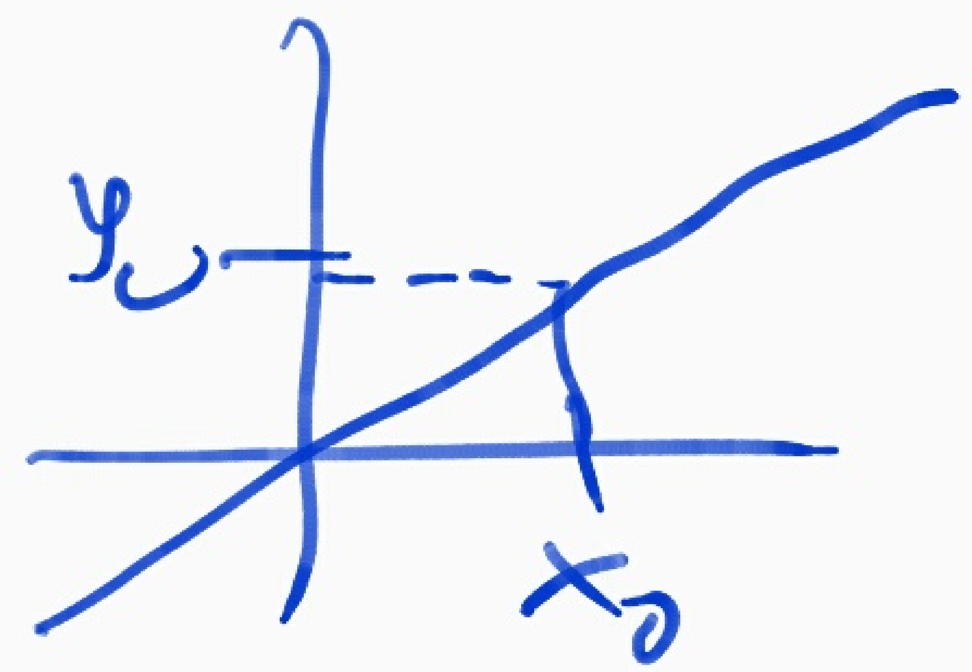
Teorem :

doğru denklemi:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$



ortalama değer teoremi:

$x_i, y_i \in R$

f: türevi alınabilir bir fonk.

$f: R^m \to R$

$\bar{x} = [x_1 \; x_2 \cdots x_m]^T \quad \bar{y} = [y_1 \; y_2 \cdots y_m]^T$

$$f(\bar{x}) - f(\bar{y}) = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1}(x_1 - y_1) + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2}(x_2 - y_2) + \cdots + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n}(x_m - y_m)$$

$$\boxed{f(\bar{x}) - f(\bar{y}) = [\nabla f(\bar{x})]^T_{1 \times m} (\bar{x} - \bar{y})_{m \times 1}}$$

$\rightarrow$ remember $y - y_0 = m(x - x_0)$

Taylor Seri Açılımı:

Bir fonksiyonun belirli bir nokta etrafındaki türevlerinin kullanılmasıyla, fonksiyonun seri açılımı yazılabilir

$f: R \to R$

$x \in R$

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^n(x_0)(x-x_0)^n + \dots$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^n(x_0) \frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

not: $f^n \to f$'nin n. dereceden türevi

örnek: $f(x) = \sin(x)$ $\quad \sin(0) = 0$

$x_0 = 0$

$f'(x) = \sin'(x) = \cos(x)$

$f'(0) = \cos(0) = 1$

$f''(x) = \sin''(x) = -\sin(x)$

$f''(0) = -\sin(0) = 0$

$f(x) = x + \frac{1}{2!} \cdot 0 + \dots$

Örnek: $f(x) = e^{x}$

$x=0$ etrafındaki T.S açılımı

$f'(x) = e^{x} \Rightarrow f'(0) = 1$ $\quad f(0) = e^{0} = 1$

$f''(x) = e^{x} \Rightarrow f''(0) = 1$

$\vdots$

$f^{n}(x) = e^{x} \Rightarrow f^{n}(0) = 1$

$$f(x) = 1 + (x-0)\cdot 1 + \frac{1}{2!}(x-0)^{2}\cdot 1 + \frac{1}{3!}(x-0)^{3}\cdot 1 + \cdots$$
$$+ \frac{1}{n!}(x-0)^{n}\cdot 1$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n} \rightarrow e^{x}$$ 'in T.S açılımı.

Vector Space (Vektör uzayı)

$$\bar{x} \in R^n$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \qquad x_i \in R$$

Tanım: Aşağıda belirtilen toplama $(+)$ ve çarpma $(\cdot)$ işlemlerini sağlayan, elemanları R'den oluşan vektörlerden oluşan S kümesi bir "lineer vektör uzayıdır".

1) i) $\bar{x} \in S$, $\bar{y} \in S \Rightarrow \bar{x}+\bar{y} \in S$

ii) $\bar{x}+\bar{0} = \bar{0}+\bar{x}$

$\bar{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n\times 1} \longrightarrow$ null vector

iii) $\forall \bar{x} \in S$ ve $\bar{y} \in S$ için

$\bar{x}+\bar{y} = \bar{0}$ $\quad \bar{x}$'in ters vektörü bulunabilmeli

iv) $(\bar{x}+\bar{y})+\bar{z} = \bar{x}+(\bar{y}+\bar{z}) \quad \bar{x},\bar{y},\bar{z} \in S$

2) $a, b \in R$

$a\bar{x} \in S$

$a(b\bar{x}) = (ab)\bar{x}$

$(a+b)\bar{x} = a\bar{x}+b\bar{x}$

$a(\bar{x}+\bar{y}) = a\bar{x}+a\bar{y}$

$1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$

$0 \cdot \bar{x} = \bar{0}$

$x \rightarrow$ skalar

$\mathbf{x} \rightarrow$ vektor

$\mathbf{X} \rightarrow$ matris

Örnek: $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in R^4$ olsun.

$$\overline{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \overline{x}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

lineer vektör uzayı mıdır?

1) $\overline{x}_1 + \overline{x}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \in R^4$ ✓

$\overline{x}_1 + \overline{0} = \overline{x}_1$ ✓

$\overline{x}_2 + \overline{0} = \overline{x}_2$ ✓

$$\bar{x}_1 + \bar{y}_1 = \bar{0} \Rightarrow \bar{y}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} \in R^4 \quad \checkmark$$

$$\bar{x}_2 + \bar{y}_2 = \bar{0} \Rightarrow \bar{y}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \in R^4 \quad \checkmark$$

2) $a \in R$, $b \in R$

$a\bar{x}_1 \in R^4$ $\checkmark$

$a(b\bar{x}_1) = ab\bar{x}_1 \in R^4$ $\checkmark$

$(a+b)\bar{x}_1 = a\bar{x}_1 + b\bar{x}_1$ $\checkmark$

$a(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = a\bar{x}_1 + a\bar{x}_2$ $\checkmark$

$\therefore$ (As a result) verilen vektör uzayı lineer vektör uzayıdır.