Lineer olmayan Denklemlerin Sayısal Çözümü

Teğetler

YÖNTEMİ

Teğetler Yöntemi

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

lineer olmayan denklemini ele alalım. (1) denkleminin $x = \alpha$ çözümü $x = \alpha \in [a, b]$ olsun. Yani,

$$f(a)f(b) < 0 \qquad (2)$$

koşulu sağlanır. Bellidir ki (1) denklemini her zaman

$$x = \varphi(x) \qquad (3)$$

şeklinde yazabiliriz.

(1) denkleminin her iki tarafını $-\psi(x)$ fonksiyonu ile çarpalım ve elde edilen eşitliğin her iki tarafına x ekliyelim. O halde

$$x = x - \psi(x)f(x) \qquad (4)$$

(4) denkleminin çözümü de

$$x = \alpha$$

olacaktır.

Şimdi ise, $x = x - \psi(x) f(x)$ ifadesinde $\psi(x)$ fonksiyonu yerine

$$\psi(x) = \frac{1}{f'(x)} \qquad (5)$$

yazalım. Bu durumda

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad (6)$$

elde ederiz.

Bellidir ki

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

ifadesinde x yerine α çözümünü yazalım. O halde, α denklemin çözümü olduğundan $f(\alpha) = 0$ olacaktır.

$$\Rightarrow \varphi'(\alpha) = 1 - \frac{[f'(\alpha)]^2 - f(\alpha)f''(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2} = 1 - \frac{[f'(\alpha)]^2}{[f'(\alpha)]^2}$$

$$= 1 - 1 = 0 < 1$$

$$\Rightarrow \varphi'(\alpha) < 1$$

elde edilir. $|\varphi'(x)|$ çözümün civarında 1'den küçük olduğundan

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \qquad (7)$$

yaklaşımları ile belirlenen $\{x_n\}$ dizisi (1) denkleminin α çözümüne yaklaşıyor.

(6), (7) ve (4) ifadelerini göz önüne alırsak, yaklaşımların ifadesini

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (8)$$

şeklinde yazabiliriz. (8) ifadesini aşağıdaki şekilde yazalım:

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Buradan

$$-f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \qquad (9)$$

yazabiliriz.

Bellidir ki, $\left(x_0, f(x_0)\right)$ noktasından geçen ve eğimi $f'(x_0)$ olan doğrunun denklemi

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

şeklindedir.

Benzer şekilde llidir ki, $\left(x_n, f(x_n)\right)$ noktasından geçen ve eğimi $f'(x_n)$ olan doğrunun denklemini

$$f(x) - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

şeklinde yazabiliriz.

$$f(x) - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

ifadesinde $x = x_{n+1}$ yazalım:

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \qquad (10)$$

olacaktır.

$$-f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \qquad (9)$$

ve (10) ifadelerini karşılaştırırsak, $f(x_{n+1}) = 0$ olduğunu görebiliriz. Yani, x_{n+1} noktası, $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin *x*- ekseni ile kesişme noktasıdır.

Yani, x_{n+1} noktasının geometrik olarak **"$f(x)$ fonksiyonunun grafiğine $(x_n, f(x_n))$ noktasında çizilen teğetin x- ekseni ile kesişme noktasıdır "** olduğu söylene bilir.

x_0 noktası (başlangıç yaklaşımı), $f(x_0)f''(x_0) > 0$ koşulunu sağlayn herhangi bir noktadır. İşlemler

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

olduğunda durdurulur.

(8) ifadesine, (1) lineer olmayan denkleminin çözümünün yaklaşık bulunması için ***Teğetler Yöntemi*** denir.

Uygulamalarda eğer

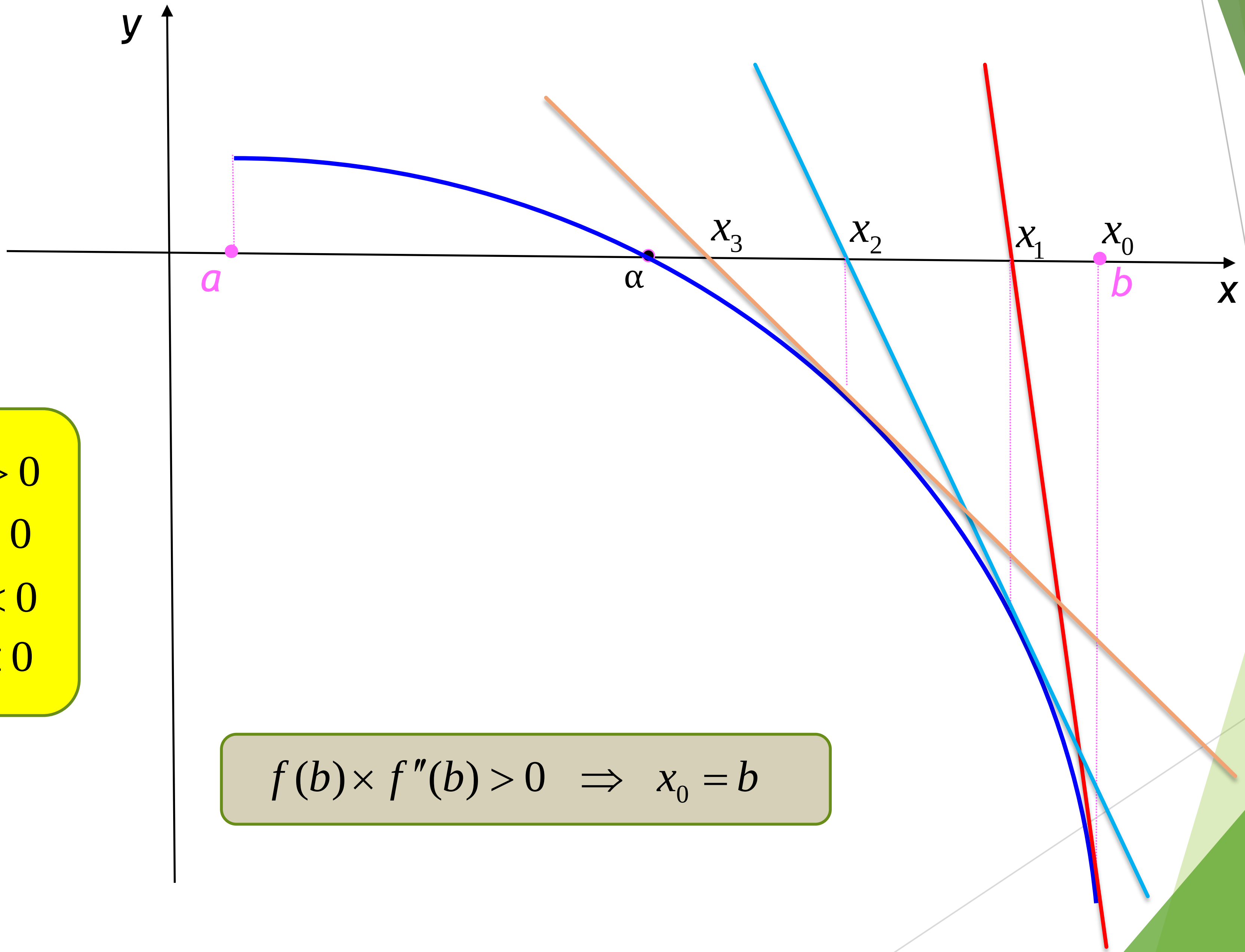
$$f(a) \times f''(a) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = a$$

$$f(b) \times f''(b) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = b$$

Olarak ele alınır.

Teğetler yönteminin geometrik yorumunu aşağıdaki şekilde verebiliriz:

TEĞETLER a)

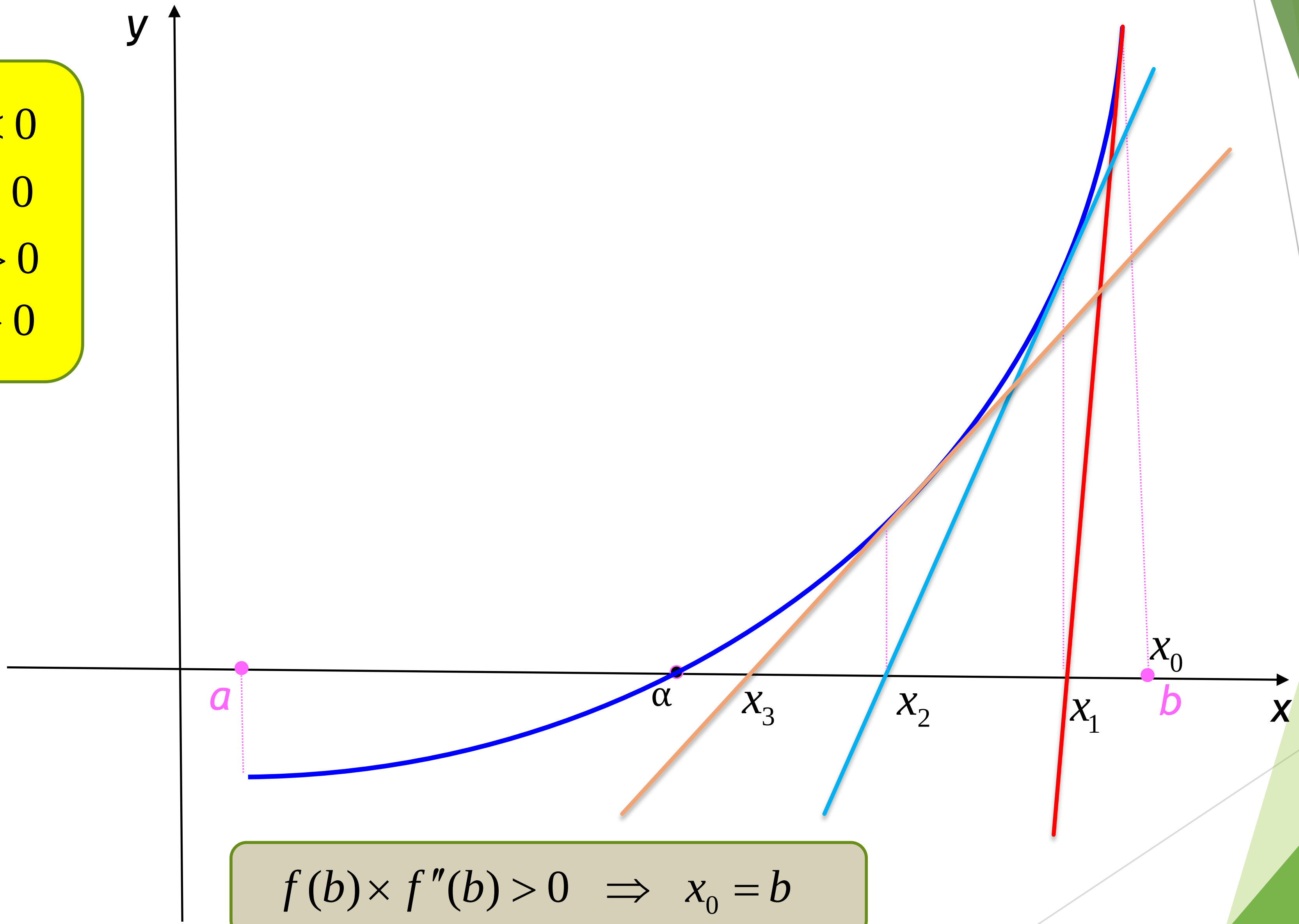


$f(a) > 0$
$f(b) < 0$
$f'(x) < 0$
$f''(x) < 0$

$$f(b) \times f''(b) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = b$$

TEĞETLER b)

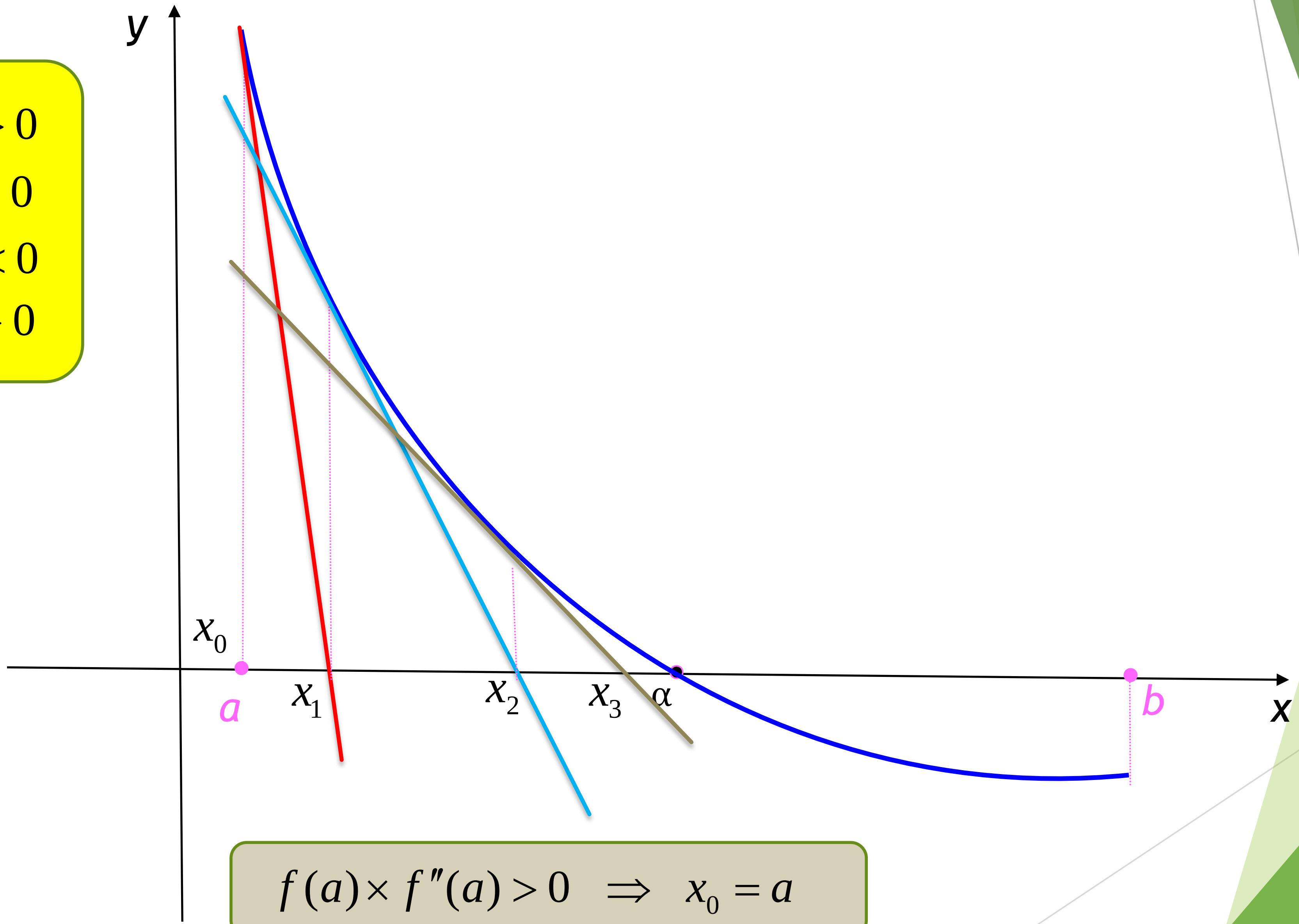
$$f(a) < 0$$
$$f(b) > 0$$
$$f'(x) > 0$$
$$f''(x) > 0$$



$$f(b) \times f''(b) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = b$$

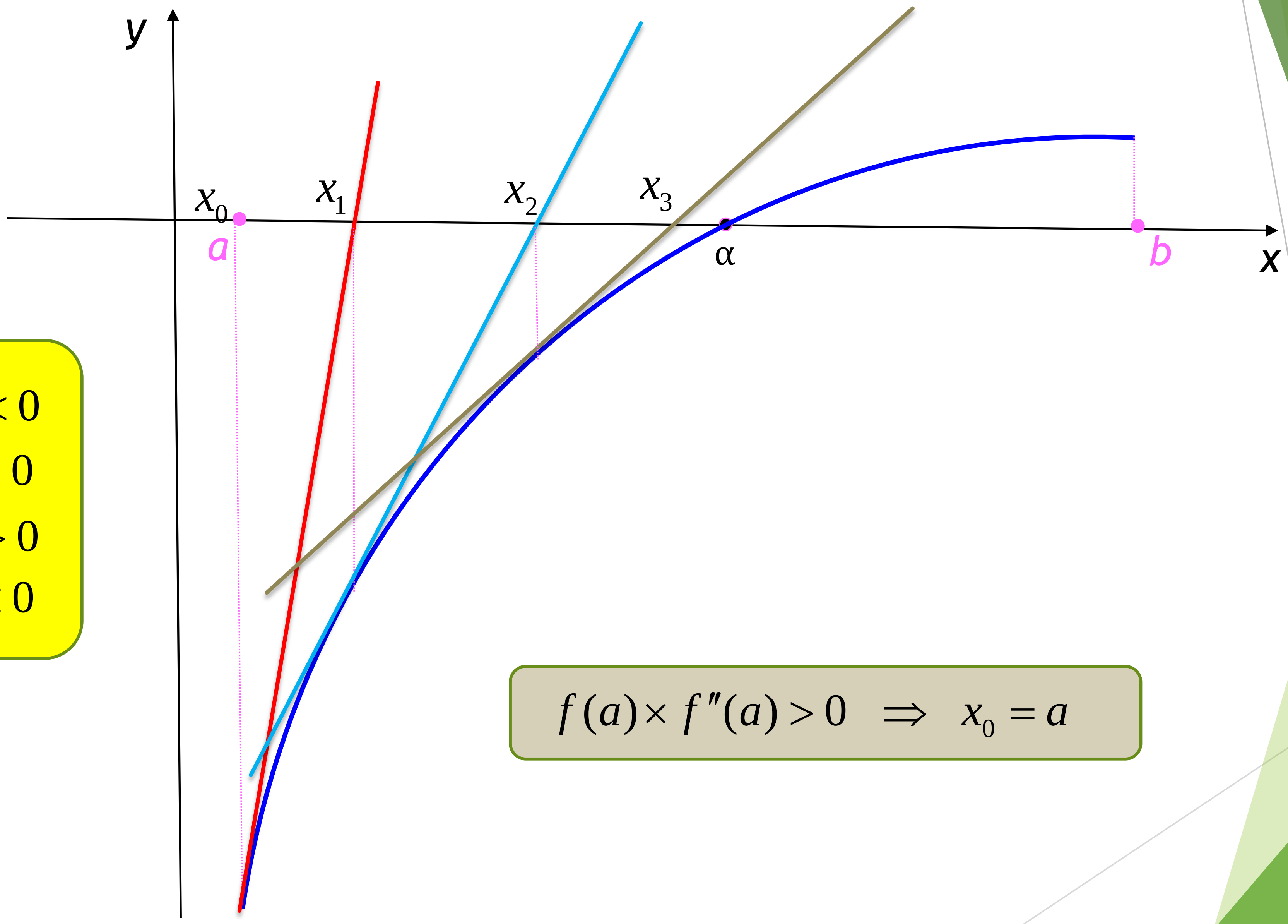
TEĞETLER c)

$$f(a) > 0$$
$$f(b) < 0$$
$$f'(x) < 0$$
$$f''(x) > 0$$



$$f(a) \times f''(a) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = a$$

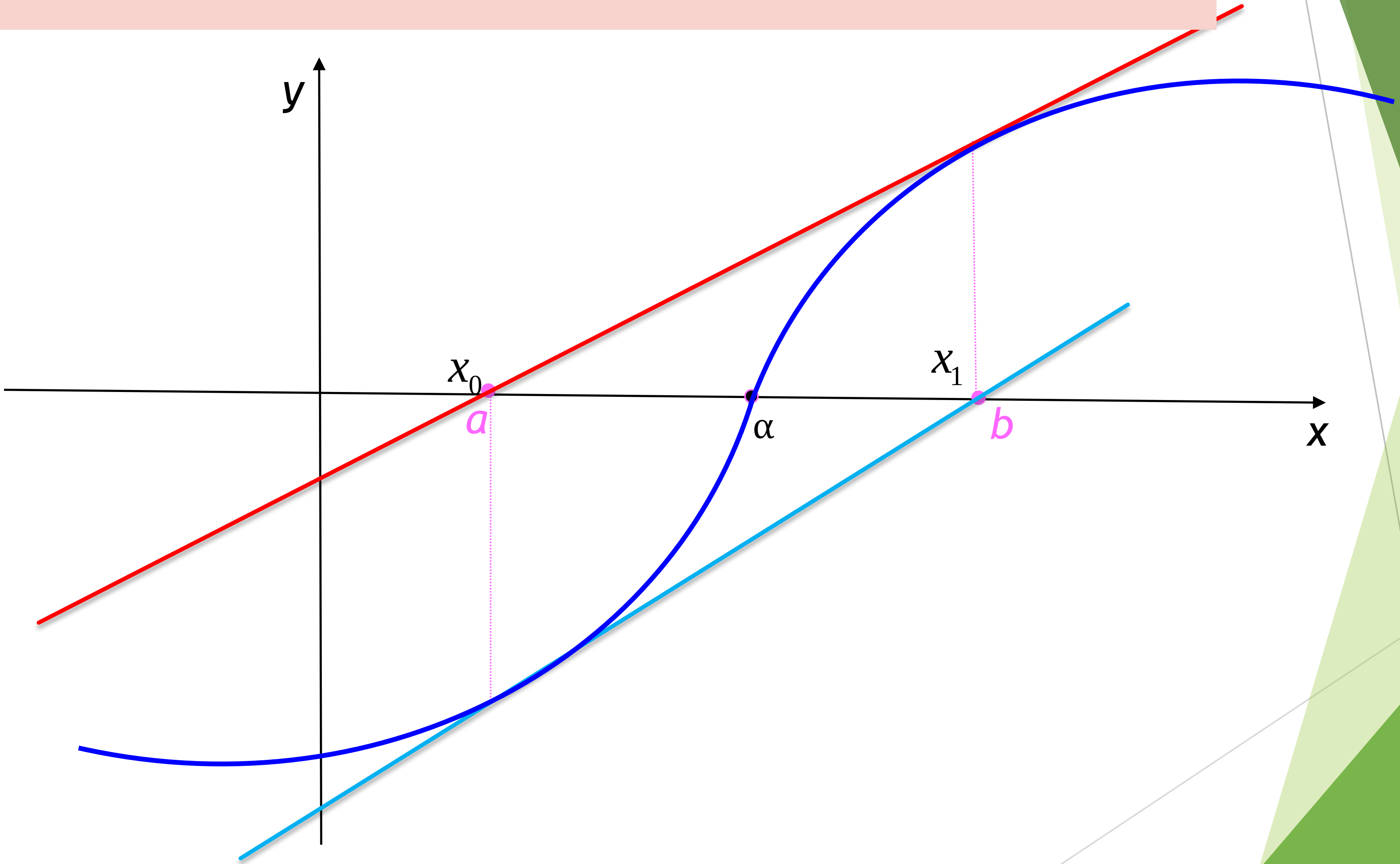
TEĞETLER d)



$$f(a) < 0$$
$$f(b) > 0$$
$$f'(x) > 0$$
$$f''(x) < 0$$

$$f(a) \times f''(a) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = a$$

UYARI: f(x) fonksiyonunun birinci ve ikinci türevlerinin işaret değiştirmediği varsayılmaktadır.



ÖRNEK: **x-cosx=0** **denkleminin çözümünü teğetler yöntemi yardımı ile** $\varepsilon = 10^{-3}$ **kesinliği ile bulunuz.**

$$x = cosx$$

denkleminin çözümünün $[0, \pi/2]$ aralığında olduğunu grafik yardımı ile belirleyebiliriz.

Gerçekten $f(x) = x - cosx$ **fonksiyonu için**

$$f(0) = 0 - cos0 = -1 < 0$$

$$f(1) = 1 - cos1 = 0.4397 > 0$$

$f(0)f(1) < 0$ **elde edilir.**

Yani denkleminin $[0,1]$ aralığında çözümü vardır.

$f(x) = x - cos\ x$

$f'(x) = 1 + \sin\ x$

$f''(x) = \cos\ x$

$f(0) = 0 - cos\ 0 = -1$

$f''(0) = \cos\ 1 = 1 > 0$

$f(1) = 1 - cos\ 1 = 0.4597 > 0$

$f''(1) = \cos\ 1 = 0.5403 > 0$

$f''(x)\ > 0 \qquad (iç\ bükey)$

$f(1)\,f''(1) > 0$ olduğundan $\Rightarrow\ x_0 = 1$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$f(x) = x - \cos x$$

$$f'(x) = 1 + \sin x$$

$$f''(x) = \cos x$$

$x_0 = 1$

$\Rightarrow \quad f(1) = 1 - \cos 1 = 0.4597, \qquad f'(1) = 1 + \sin 1 = 1.8415$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{0.4597}{1.8415} = 0.7504$$

$$|x_1 - x_0| > \varepsilon$$

$x_1 = 0.7504$

$\Rightarrow \quad f(x_1) = f(0.7504) = 0.7504 - \cos 0.7504 = 0.0190, \qquad f'(0.7504) = 1 + \sin 0.7504 = 1.6819$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.7504 - \frac{f(0.7504)}{f'(0.7504)} = 0.7504 - \frac{0.0190}{1.6818} = 0.7391$$

$$|x_2 - x_1| > \varepsilon$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

x_2=0.7391

$$\Rightarrow \quad f(x_2) = f(0.7391) = 0.7391 - cos\ 0.7391 = 0.000025, \qquad f'(x_2) = f'(0.7391) = 1 + \sin\ 0.7391 = 1.6736$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f\prime(x_2)} = 0.7391 - \frac{f(0.7391)}{f\prime(0.7391)} = 0.7391 - \frac{0.000025}{1.6736} = 0.7391$$

$$|x_3 - x_2| < \varepsilon$$

$$\alpha \approx x_3 = 0.7391$$