Hafta 4:
Doğrusal ve Zamanla Değişmeyen Sistemler

Ele Alınacak Ana Konular

- LTI sistemlerin özellikleri
- Diferansiyel denklemlerle tanımlanmış sürekli-zaman nedensel LTI sistemler
- Fark denklemleriyle tanımlanmış ayrık-zaman nedensel nedensel LTI sistemler
- Tekil fonksiyonlar

LTI Sistemlerin Özellikleri

- Konvolüsyon işlemi, değişme özelliğine sahiptir. Matematiksel olarak,

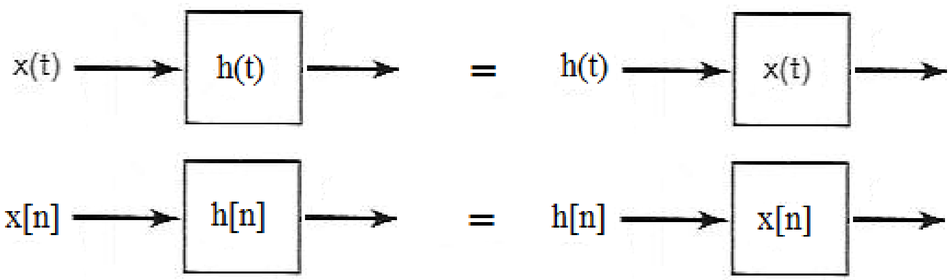
$$x[n]*h[n]=h[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[n-k]$$

$$x(t)*h(t)=h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- Bu ilişkiler, basit değişken dönüşümleriyle ispatlanabilir. Örneğin, ayrık-zaman durumunda $r = n\text{-}k$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x[n-r]h[r]=h[n]*x[n]$$

- Özetle, bir LTI sistemde giriş ve impuls yanıtının rolleri değiştirilirse çıkış aynı kalmaktadır:

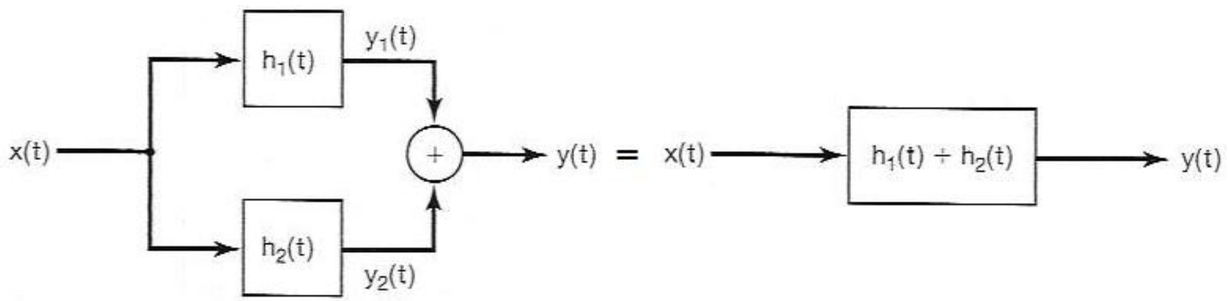


LTI Sistemlerin Özellikleri

- Konvolüsyon işlemi, dağılma özelliğine sahiptir. Matematiksel olarak,

$$x[n]*(h_1[n]+h_2[n]) = x[n]*h_1[n] + x[n]*h_2[n]$$
$$x(t)*[h_1(t)+h_2(t)] = x(t)*h_1(t) + x(t)*h_2(t)$$

- Bu ilişkileri ispatlamak zor değildir. Sürekli-zaman durumu için ilişkilerin blok diyagram yorumu aşağıda verilmiştir:



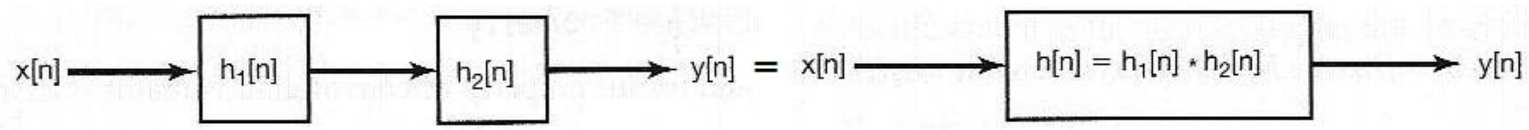
- Özetle, paralel olarak bağlanmış LTI sistemler, impuls yanıtı parelel bağlamadaki LTI sistemlerin impuls yanıtlarının toplamına eşit olan tek bir sisteme eşdeğerdir.

LTI Sistemlerin Özellikleri

- Konvolüsyon işlemi, birleşme özelliğine sahiptir. Matematiksel olarak,

$$x[n]*(h_1[n]*h_2[n])=(x[n]*h_1[n])*h_2[n]$$
$$x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]=[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)$$

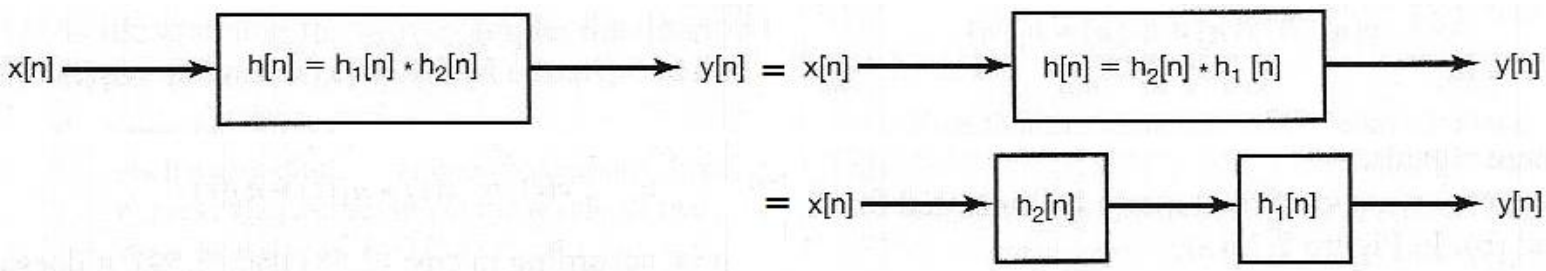
- Ayrık-zaman durumu için ilişkilerin blok diyagram yorumu aşağıda verilmiştir:



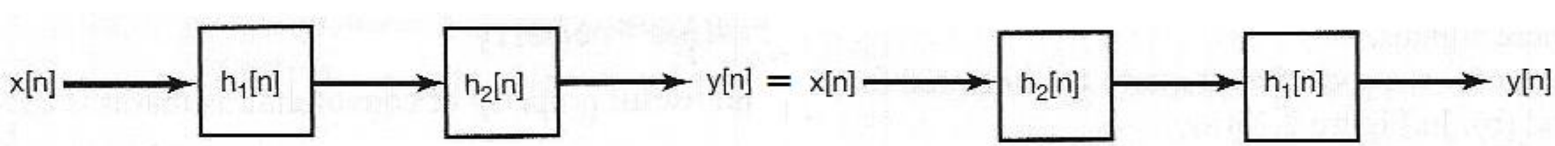
- Özetle, seri olarak bağlanmış iki LTI sistem, impuls yanıtı seri bağlamadaki sistemlerim impuls yanıtlarının konvolüsyonuna eşit olan tek bir sisteme eşdeğerdir.

LTI Sistemlerin Özellikleri

- Konvolüsyon işlemi değişme özelliğine sahip olduğundan iki işaretin konvolüsyonu herhangi bir sırada yapılabilir. O halde, değişme ve birleşme özelliklerinden



- Sonuç olarak, seri olarak bağlanmış LTI sistemlerde sistemlerin sırası değiştirildiğinde toplam yanıtın değişmeyeceği anlaşılmaktadır. Yani,



LTI Sistemlerin Özellikleri

- Hafızasız sistem tanımından, LTI sistemlerin hafızasız olabilmesi için ayrık-zaman durumunda $n \neq 0$ için $h[n] = 0$, sürekli-zaman durumunda ise $t \neq 0$ için $h(t) = 0$ olmalıdır. Yani,

$$h[n] = K\delta[n]$$

$$h(t) = K\delta(t)$$

- K =1 durumunda konvolüsyon toplamı ve konvolüsyon integrali aşağıdaki sonuçları verecektir:

$$x[n]*\delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] = x[n] \Rightarrow x[n]*\delta[n] = x[n]$$

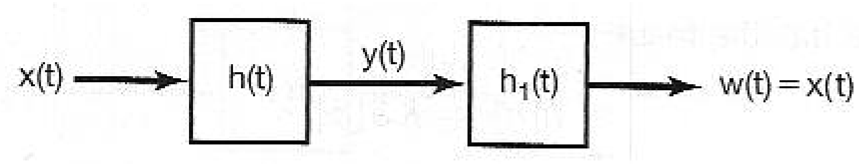
$$x(t)*\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \Rightarrow x(t)*\delta(t) = x(t)$$

- Toplama işleminde, herhangi bir sayının sıfır ile toplamı kendine; çarpma işleminde herhangi bir sayının 1 ile çarpımı kendine eşittir. Konvolüsyon işleminde ise, bir işaretin impuls ile konvolüsyonu kendine eşit olmaktadır. O halde, konvolüsyon işleminin BİRİM OPERATÖRÜ impuls fonksiyonudur.

LTI Sistemlerin Özellikleri

- Herhangi bir LTI sistemin tersinin de LTI olacağı gösterilebilir.

- Bir işaret, sisteme uygulanıp sistemin çıkışı da ters sisteme uygulandığında tekrar işaret geri elde edilir. Bu gözlem, sürekli-durumda aşağıda özetlenmiştir:



- O halde, sistem ve tersinin seri bağlanmasından oluşan toplam sistemin impuls yanıtı impuls fonksiyonuna eşit olmalıdır. Sistemin ve tersinin impuls yanıtları sırasıyla h ve h_1 ile gösterilsin. İmpuls yanıtları arasındaki ilişki

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t)$$
$$h[n] * h_1[n] = \delta[n]$$

eşitlikleriyle verilir.

LTI Sistemlerin Özellikleri

ÖRNEK: Bir sürekli-zaman LTI sistemin girişi ile çıkışı arasındaki ilişki $y(t) = x(t-t_0)$ ile verilmektedir. Ters sistemin impuls yanıtını bulunuz.

ÇÖZÜM: Sistemin impuls yanıtını bulmak için girişine $\delta(t)$ uygulanmalıdır. O halde,

$$h(t) = \delta(t - t_0)$$

Sisteme $x(t)$ uygulandığında çıkış

$$\mathrm{y(t)} = x(t) * h(t) = x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0).$$

olup sistem girişi t_0 kadar ötelemektedir. Çıkış, ters yönde t_0 kadar ötelenirse giriş geri elde edilecektir. Yani, ters sistemin impuls yanıtı $h_1(\mathrm{t}) = \delta(t+t_0)$ olmalıdır. Yanıtımızı kontrol edelim:

$$\begin{aligned} h(t) * h_1(t) &= \delta(t - t_0) * \delta(t + t_0) \\ &= \delta(t + t_0 - t_0) \\ &= \delta(t) \end{aligned}$$

LTI Sistemlerin Özellikleri

- Bir LTI sistemin nedensel olabilmesi (çıkışın girişin gelecekteki değerlerine bağlı olmaması) için impuls yanıtı bağımsız değişkenin negatif değerleri için sıfır olmalıdır. Yani,

$$h[n]=0, \quad n<0$$
$$h(t)=0, \quad t<0.$$

- O halde, nedensel bir LTI sistemde giriş belirli bir ana kadar sıfır ise çıkış da o ana kadar sıfır olacaktır.

- Nedensel LTI sistemler için konvolüsyon denklemleri aşağıdaki gibi olur:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k]=\sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$$
$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

LTI Sistemlerin Özellikleri

- Bir LTI sistemin kararlı olabilmesi için impuls yanıtının sağlaması gereken koşulu ayrık-zamanda çıkaralım. Sürekli-zamanda adımlar benzer olduğundan sadece sonuç verilecektir.

- B bir sabit olmak üzere, impuls yanıtı $h[n]$ olan sistemin girişine tüm n değerleri için $|x[n]| < B$ koşulunu sağlayan bir herhangi bir giriş uygulandığında çıkışın genliği konvolüsyon toplamı kullanılarak bulunabilir:

$$\left|y[n]\right| = \left|\sum_{k=\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]\right|$$

- Sonsuz tane sayının toplamının mutlak değeri, sayıların mutlak değerlerinin toplamından küçük (veya eşit) ve iki sayının çarpımının mutlak değeri sayıların mutlak değerlerinin çarpımına eşit olduğundan

$$\left|y[n]\right| \leq \sum_{k=\infty}^{\infty} |h[k]|\,|x[n-k]|$$

LTI Sistemlerin Özellikleri

- En son toplamada, girişin genliği tüm anlarda B'den küçük olduğundan, girişin genliği yerine B yazılırsa toplamanın değeri daha fazla büyüyeceğinden

$$\left|y[n]\right| \leq B\sum_{k=\infty}^{\infty}\left|h[k]\right|$$

- Son eşitsizlikten, çıkışın sonlu ve dolayısıyla sistemin kararlı olabilmesi için impuls yanıtının mutlak toplanabilir olması gerektiği sonucu çıkmaktadır:

$$\sum_{k=\infty}^{\infty}\left|h[k]\right| < \infty$$

- Benzer şekilde, bir sürekli-zaman LTI sistemin kararlı olabilmesi için impuls yanıtının mutlak integrallenebilir olması gerektiği gösterilebilir:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|h(t)\right|dt < \infty$$

LTI Sistemlerin Özellikleri

ÖRNEK: İmpuls yanıtları aşağıda verilen sistemlerin kararlılığını belirleyiniz.

(a) $h[n] = \delta(n\text{-}n_0)$, (b) $h(t) = \delta(t\text{-}t_0)$, (c) $h[n] = u(n)$, (d) $h(t) = u(t)$.

ÇÖZÜM:

(a) Sistem kararlıdır çünkü $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\delta[n-n_0]| = 1 < \infty$

(b) Sistem kararlıdır çünkü $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\delta(t-t_0)| dt = 1 < \infty$

(c) Sistem kararsızdır çünkü $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u[n]| = \infty$

(d) Sistem kararsızdır çünkü $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt = \infty$

LTI Sistemlerin Özellikleri

- LTI sistemlerin davranışını belirlemek için BİRİM BASAMAK YANITI (sisteme birim basamak uygulandığında elde edilen yanıt) da kullanılabilir. Bu nedenle, impuls yanıtı ile birim basamak yanıtı arasındaki ilişkiyi bulmak faydalı olabilir.

- Ayrık-durumda sistemin birim basamak yanıtını $s[n]$ ile gösterelim. $h[n]$ ile $s[n]$ arasındaki ilişki konvolüsyon toplamı kullanılarak belirlenebilir:

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$

- Yukarıdaki ilişki eşdeğer olarak , $h[n] = s[n] - s[n\text{-}1]$ şeklinde de yazılabilir.

- Sürekli-durumda $h(t)$ ile $s(t)$ arasındaki ilişki konvolüsyon integralinden bulunur:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = s^{'}(t)$$

Diferansiyel Denklemlerle Tanımlanmış Nedensel LTI Sistemler

- $y(t)$ çıkış, $x(t)$ giriş olmak üzere, bir sürekli-zaman sisteminde giriş-çıkış ilişkisi aşağıdaki gibi olsun:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

- Diferansiyel denklem giriş ile çıkış arasında bir kısıt vermektedir, ancak bu kısıt çözüm için yeterli değildir. Çözüm için başlangıç koşulları da belirtilmelidir.

- Bu derste, nedensel sürekli-zaman LTI sistemleri tanımlamada diferansiyel denklemler kullanacağız. Nedensel LTI sistemler için başlangıç koşulları özel bir şekildedir.

- Diferansiyel denklemi, K gerçel bir sayı olmak üzere $x(t) = K\, e^{3t}\, u(t)$ girişi için çözelim. y(t), özel ($y_p(t)$) ve homojen çözümün ($y_h(t)$) toplamına eşittir:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

Diferansiyel Denklemlerle Tanımlanmış Nedensel LTI Sistemler

- Özel çözüm diferansiyel denklemi sağlayan bir çözüm, homojen çözüm ise giriş sıfırken diferansiyel denklemin çözümüdür.

- Özel çözümün girişle aynı forma sahip olduğu ancak parametrelerinin bilinmediği varsayılır. Yani, A bilinmeyen bir sabit olmak üzere $y_p(t) = Ae^{3t}$. Çözüm, diferansiyel denklemde yerine konulursa:

$$3Ae^{3t} + 2Ae^{3t} = Ke^{3t}, \quad t > 0 \Rightarrow A = \frac{K}{5}, \qquad y_p(t) = \frac{K}{5}e^{3t}$$

- Homojen çözümün, B ve s sabitler olmak üzere $y_h(t) = Be^{st}$ şeklinde olduğu varsayılır. $y_h(t)$ diferansiyel denklemde yerine konulursa, aşağıdaki sonuç bulunur:

$$sBe^{st} + 2Be^{st} = e^{st}(s+2) = 0$$

- $s = -2$ olmalıdır ve homojen çözüm herhangi bir B için Be^{-2t}'dir. Sonuç olarak,

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Be^{-2t} + \frac{K}{5}e^{-3t}, \qquad t > 0.$$

Diferansiyel Denklemlerle Tanımlanmış Nedensel LTI Sistemler

- Görüldüğü gibi, soruda verilen bilgiler *B* sabitinin değerini belirlemek için yeterli değildir.

- Sistemin nedensel olduğu varsayılırsa, $t < t_0$ için $x(t) = 0$ ise, $t < t_0$ için $y(t) = 0$ olmalıdır. Örneğimizde $t < 0$ için $x(t) = 0$ olup $t < 0$ için $y(t) = 0$ olacaktır. Çözüm $t = 0$'da hesaplanıp sıfıra eşitlenirse *B* hesaplanabilir:

$$0 = B + \frac{K}{5} \Rightarrow B = -\frac{K}{5}$$

- O halde, çözüm tam olarak aşağıdaki gibi olur.

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \dfrac{K}{5}(e^{3t} - e^{-2t}), & t > 0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = \frac{K}{5}(e^{3t} - e^{-2t})u(t)$$

Diferansiyel Denklemlerle Tanımlanmış Nedensel LTI Sistemler

- Genelleştirme yaparsak, *N*. Dereceden sabit katsayılı diferansiyel denklem aşağıdaki şekilde verilir:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

- Çıkışın en yüksek dereceden türevine diferansiyel denklemin derecesi denir. Çözüm, homojen ve özel çözümlerin toplamına eşittir.

- Diferansiyel denklem tek başına çözüm için yeterli değildir. Başlangıç koşulları da belirtilmelidir. Farklı başlangıç koşulları farklı çözümler verir.

- Ancak, sistem nedensel ise $t < t_0$ için $x(t) = 0$ ise, $t < t_0$ için $y(t) = 0$ olacağından başlangıç koşulları bulunabilir ve $t > t_0$ için $y(t)$ hesaplanabilir. İlgili başlangıç koşulları şöyledir:

$$y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \frac{d^2 y(t_0)}{dt^2} = \ldots = \frac{d^{N-1} y(t_0)}{dt^{N-1}} = 0.$$

Fark Denklemleriyle Tanımlanmış Nedensel LTI Sistemler

- *N*. dereceden sabit katsayılı bir fark denklemi aşağıdaki şekilde verilir:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- Çözüm, homojen ve özel çözümlerin toplamına eşittir.

- Fark denklemi tek başına çözüm için yeterli değildir. Başlangıç koşulları da belirtilmelidir. Fark denklemi şu şekilde de düzenlenebilir:

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right\}$$

- O halde, $y[n]$'nin hesaplanabilmesi için $y[n-1]$, $y[n-2]$, …, $y[n-N]$ başlangıç koşullarının bilinmesine gerek vardır.

- Sürekli durumda olduğu gibi sistemin nedensel olduğu biliniyorsa başlangıç koşulları belirlenebilir ve fark denklemi çözülebilir.

Fark Denklemleriyle Tanımlanmış Nedensel LTI Sistemler

- Fark denkleminin, N'nin sıfırdan farklı olup olmamasına göre iki şekli vardır:

$$y[n]=\frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]-\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right\}, \qquad N \neq 0,$$

$$\mathrm{y}[\mathrm{n}]=\sum_{k=0}^{M}\left(\frac{b_k}{a_0}\right)x[n-k], \qquad N=0.$$

- $N = 0$ durumunda, çıkış sadece girişe bağlı olup çözüm için başlangıç koşulları gerekli değildir. Bu tür denklemlere YİNELEMELİ OLMAYAN denklem denilir.

- Yinelemeli olmayan fark denkleminde $x[n] = \delta[n]$ yapılırsa sistemin impuls yanıtı elde edilir:

$$h[n]=\begin{cases}\dfrac{b_n}{a_0}, & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{aksi halde}\end{cases}$$

- İmpuls yanıtı, sonlu sayıda değer aldığından yinelemeli olmayan fark denklemleriyle tanımlanan LTI sistemlere SONLU İMPULS YANITLI (FIR) sistem denilir.

Fark Denklemleriyle Tanımlanmış Nedensel LTI Sistemler

- .$N \neq 0$ durumunda, çıkış hem giriş hem çıkışa bağlı olup için başlangıç koşullarına gerek vardır. Bu tür fark denklemlerine YİNELEMELİ fark denklemi denilir.

- ÖRNEK: Giriş-çıkış ilişkisi aşağıdaki fark denklemiyle verilen ayrık-zaman nedensel LTI sistemi ele alalım:

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2} y[n-1]$$

- Görüldüğü gibi, çıkışın herhangi bir andaki değerinin hesaplanabilmesi için bir önceki değeri bilinmelidir.

- $x[n] = K\delta[n]$ olsun. $n < 0$ için giriş sıfır olduğundan $n < 0$ için $y[n] = 0$ olmalıdır. Bu nedenle, $n < 0$ için çıkışın hesaplanmasına gerek yoktur.

- $n \geq 0$ için başlangıç koşulu olarak $y[-1] = 0$ seçip hesaplamalara başlayabiliriz.

Fark Denklemleriyle Tanımlanmış Nedensel LTI Sistemler

$$y[0] = x[0] + \frac{1}{2}y[-1] = K$$

$$y[1] = x[1] + \frac{1}{2}y[0] = \frac{1}{2}K$$

$$y[2] = x[2] + \frac{1}{2}y[1] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 K$$

.

.

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = \left(\frac{1}{2}\right)^n K$$

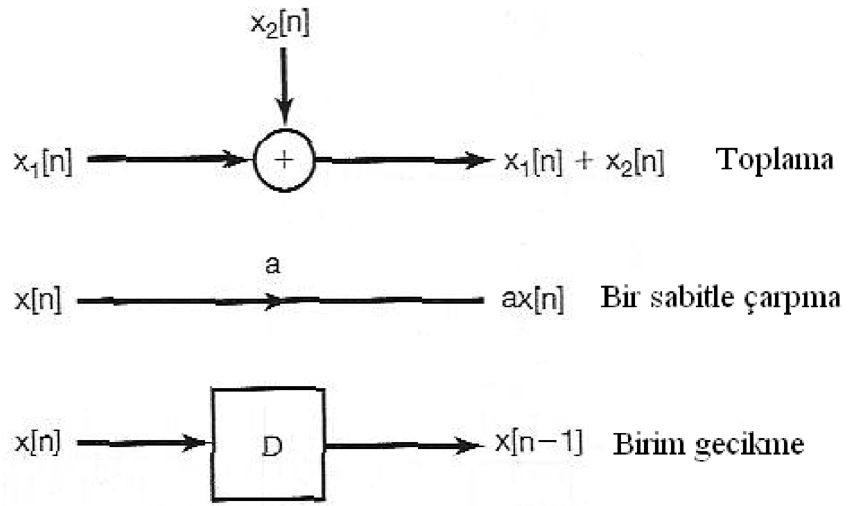
- $K = 1$ için $x[n] = \delta[n]$ olup sistemin impuls yanıtı $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ olur.
- İmpuls yanıtı, sonsuz sayıda değer aldığından yinelemeli fark denklemleriyle tanımlanan LTI sistemlere SONSUZ İMPULS YANITLI (IIR) sistem denilir.

Birinci DerecedenFark Denklemleriyle Tanımlanmış Ayrık-Zaman LTI Sistemlerin Blok Diyagram Gösterilimi

- Aşağıdaki fark denklemiyle tanımlanan basit bir ayrık-zaman nedensel LTI sistemi ele alalım:

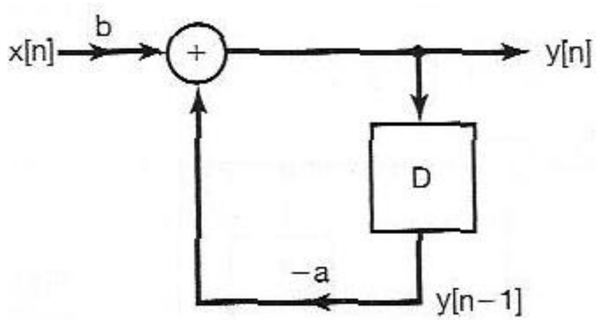
$$y[n] = bx[n] - ay[n-1]$$

- Bu sisteme karşılık gelen blok diyagram gösterilimini elde etmek için toplama, bir sabitle çarpma ve birim gecikme operatörleri aşağıdaki şekilde tanımlansın.



Birinci Dereceden Fark Denklemleriyle Tanımlanmış Ayrık-Zaman LTI Sistemlerin Blok Diyagram Gösterilimi

- O halde, fark denklemi aşağıda verilen blok diyagramla temsil edilebilir.



- Blok diyagram, sistemin gerçekleştirilebilmesi için hafıza elemanına ve başlangıç koşullarının bilinmesine gerek olduğunu göstermektedir.

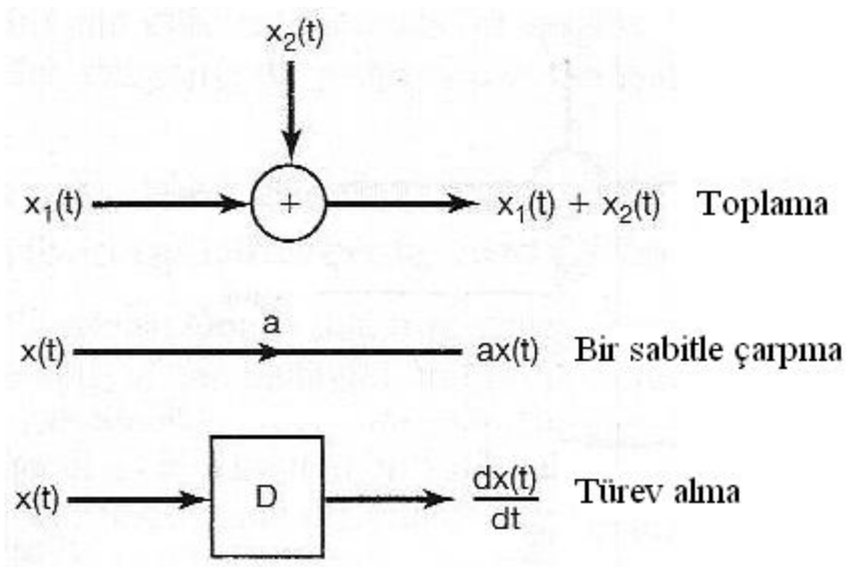
- Birim gecikme elemanı hafıza görevini görüp hesaplamalar için gerekli bir önceki çıkış değerini saklamaktadır. Sistem nedensel ise, giriş uygulanıncaya kadar hafıza elemanında saklanan değer sıfırdır.

Birinci Dereceden Diferansiyel Denklemlerle Tanımlanmış Sürekli-Zaman LTI Sistemlerin Blok Diyagram Gösterilimi

- Aşağıdaki fark denklemiyle tanımlanan basit bir ayrık-zaman nedensel LTI sistemi ele alalım:

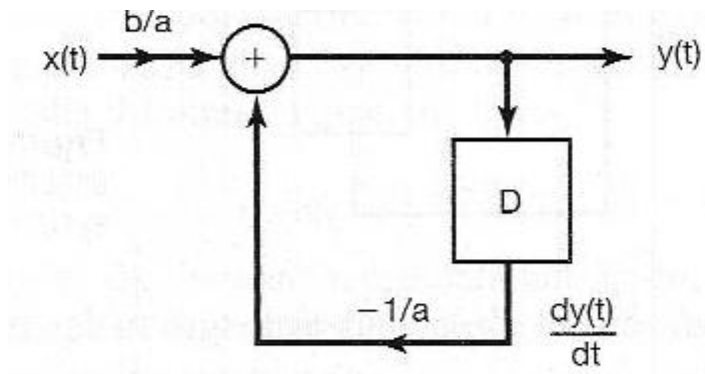
$$\frac{dy(t)}{dt}+ay(t)=bx(t)\Rightarrow y(t)=-\frac{1}{a}\frac{dy(t)}{dt}+bx(t)$$

- Bu sisteme karşılık gelen blok diyagram gösterilimini elde etmek için toplama, bir sabitle çarpma ve türev alma operatörleri aşağıdaki şekilde tanımlansın.



Birinci Dereceden Diferansiyel Denklemlerle Tanımlanmış Sürekli-Zaman LTI Sistemlerin Blok Diyagram Gösterilimi

- O halde, diferansiyel denklem aşağıda verilen blok diyagramla temsil edilebilir.



- Türevin gerçekleştirilmersi zordur ve türev işlemi gürültü ile hatalara karşı oldukça duyarlıdır.

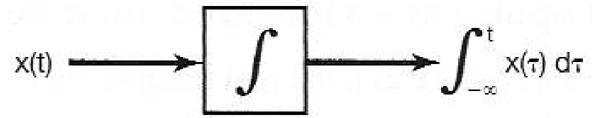
- İntegral işleminin gerçekleştirilmesi ise kolaydır. Bu nedenle blok diyagram gösteriliminde integratör kullanılması tercih edilir.

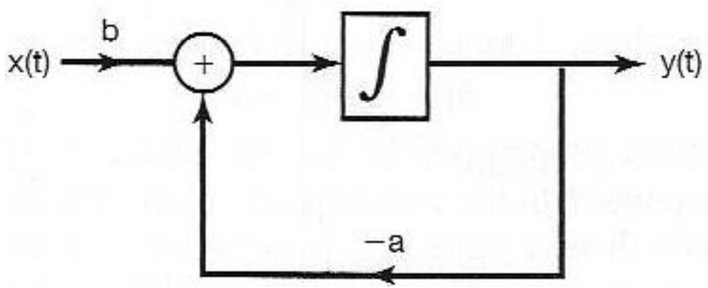
Birinci Dereceden Diferansiyel Denklemlerle Tanımlanmış Sürekli-Zaman LTI Sistemlerin Blok Diyagram Gösterilimi

- Diferansiyel denklemin her iki tarafının integrali alınırsa eşdeğer gösterilim elde edilir:

$$\frac{dy(t)}{dt} = bx(t) - ay(t) \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{t} [bx(\tau) - ay(\tau)] d\tau$$

- Bu sisteme karşılık gelen blok diyagram gösterilimini elde etmek için toplama, bir sabitle çarpma ve integral alma işlemleri gereklidir. İntegratör tanımı ve sistemin blok diyagram gösterilimi aşağıda verilmiştir:





Birinci Dereceden Diferansiyel Denklemlerle Tanımlanmış Sürekli-Zaman LTI Sistemlerin Blok Diyagram Gösterilimi

- İntegratörler, işlemsel kuvvetlendiriciler kullanılarak gerçekleştirilebilir.

- Bu nedenle, sürekli-zaman sistemlere karşılık gelen blok diyagram gösterilimi modern analog hesaplayıcılara temel teşkil etmektedir.

- İntegratör hafıza görevini görüp hesaplamalar için gerekli başlangıç değerini saklamaktadır. Bunu görmek için, integral işleminin aşağıdaki şekilde yeniden düzenlenebileceğine dikkat ediniz:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}\left[bx(\tau)-ay(\tau)\right]d\tau \Rightarrow y(t)=y(t_0)+\int_{t_0}^{t}\left[bx(\tau)-ay(\tau)\right]d\tau$$

- İntegratör $y(t_0)$ başlangıç değerini saklamaktadır.

- Hem ayrık hem de sürekli durumda yüksek dereceden sistemlere karşılık gelen blok diyagramlar benzer şekilde elde edilebilir.