SAYISAL İNTEGRAL (YAMUK YÖNTEMİ)

[a,b] aralığında tanımlı f(x) fonksiyonunu ele alalım.

Bazen f(x) fonksiyonunun $I(f)=\int_a^b f(x)dx$ ***(1)*** *belirli integralinin yaklaşık hesaplanması gerekiyor.[a,b] aralığında*

$$w_h=\{x_i / x_{i+1}=x_i+h,\ x_0=a, x_n=b, h=\frac{b-a}{n},\ i=\overline{0,n-1}\}$$

eşit adımlı kafesini tanımlayalım.

Bellidirki $x_i \in w_h$, $i=\overline{0,n}$ *noktalarında f(x) fonksiyonunun* $f_i=f(x_i)$ *değerleri verildiğinde bu fonksiyona karşılık gelen Lagrange enterpolasyon polinomunu yazabiliriz. O halde enterpolasyon polinomundan yararlanadak bu fonksiyonu*

$$f(x)=L_n(x)+R_n(x) \quad \textbf{(2)}$$

şeklinde yazabiliriz. (2)' nin her iki tarafını [a,b] de integrallersek,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b L_n(x)dx+\int_a^b R_n(x)dx \quad \textbf{(3)}$$

yazarız. $R_n(x)$ *enterpolasyon polinomunun hatası olduğundan integralin değeri yaklaşık olarak*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx \quad \textbf{(4)}$$

Şeklinde hesaplanabilir.

İntegralin toplamsallık özelliğine göre

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \quad \textbf{(5)}$$

Yazabiliriz.

Bu nedenle önce $f(x)$ *fonksiyonunun* $[x_i, x_{i+1}]$ *aralığında integralini hesaplayalım.*

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx=\int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{n,i}(x)dx$$

Burada $L_{n,i}(x)$ *ifadesi* $[x_i, x_{i+1}]$ *aralığında n. Dereceden Lagrange polinomudur.*

$[x_i, x_{i+1}]$ *aralığında Lagrange polinomunu sıfırıncı (n=0) dereceden ele aldığımız zaman dikdörtgenler formülü elde edildiği bir önceki konuda gösterildi..*

Şimdi ise n=1 ele alalım.

$[x_i, x_{i+1}]$ aralığında f(x) fonksiyonunun sadece iki değeri f_i, ve f_{i+1} verildiği için $L_{n,i}(x)$ birinci dereceden Lagrange enterpolasyon polinomunu yazalım.

$$L_{1,i}(x) = \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} f(x_i) + \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} f(x_{i+1}) \qquad \textbf{(12)}$$

w_h kafesi eşit adımlı olduğundan (12) aşağıdaki şekle dönüşecektir.

$$L_1(x) = -\frac{f(x_i)}{h}(x - x_{i+1}) + \frac{f(x_{i+1})}{h}(x - x_i) = \frac{1}{h}[(x - x_i) f(x_{i+1}) - (x - x_{i+1})f(x_i)]$$
(13)

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{1,i}(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h} [(x - x_i) f(x_{i+1}) - (x - x_{i+1})f(x_i)]dx$$

$$= \frac{1}{h} \{f(x_{i+1}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)dx - f(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}}(x - x_{i+1})dx \}$$

$$= \frac{1}{h} \{f(x_{i+1}) \frac{1}{2} (x - x_i)^2 |_{x_i}^{x_{i+1}} - f(x_i) \frac{1}{2} (x - x_{i+1})^2 |_{x_i}^{x_{i+1}} \}$$

$$= \frac{1}{2h} [f(x_{i+1}) (x_{i+1} - x_i)^2 + f(x_i) (x_i - x_{i+1})^2]$$

$$= \frac{1}{2h} [f(x_{i+1}) h^2 + f(x_i)h^2] = \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})] \qquad \textbf{(14)}$$

*(14), $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında yaklaşık integral hesabı için **' YAMUK YÖNTEMİ'** dir.*

(14) ü (5) te yazarsak [a,b] aralığında $f(x)$ fonksiyonunun belirli integralini yaklaşık hesaplamak için genelleşmiş yamuk yöntemini elde ederiz.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})] = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

$$= \frac{h}{2} \{ f(x_0) + 2 f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\}$$

$$= \frac{h}{2} \{f(x_0) + 2 [f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})] + f(x_n)\} \qquad \textbf{(15)}$$