Olasılık ve Raslantı Değişkenleri

Olasılık

Küme Kavramı

- **Küme**, tek bir isim altında toplanabilen ve benzer özellik gösteren birimlerin meydana getirdiği topluluk olarak tanımlanabilir. Küme içinde bulunan birimlere **eleman** adı verilmektedir.
- Kümeler genellikle A, B, C gibi büyük harflerle, elemanlar ise a, b, c gibi küçük harflerle gösterilirler.
- Eğer herhangi bir a elemanı, herhangi bir B kümesine ait ise bu ifade şöyle yazılabilir.

$$\mathbf{a \in B}$$

- Eğer a, B nin elemanı değilse

$$\mathbf{a \notin B}$$

şeklinde yazılır.

Kümelerle İlgili Kavramlar

- Tek bir elemanı olan kümelere **birim küme** adı verilir.

- Eğer A kümesinin her elemanı, B kümesinin de elemanı ise A ya B'nin **alt küme**si denir. Yani $x \in A \rightarrow x \in B$ ise A, B'nin alt kümesidir, ve $A \subset B$ veya $B \supset A$ (A kapsanır B veya B kapsar A) şeklinde gösterilir. Her küme kendisinin bir alt kümesidir. $A \subset A$

- Hiçbir elemanı olmayan kümeye **boş küme** adı verilir ve $\varnothing$ veya $\varnothing = \{\}$ şeklinde gösterilir. Eğer $C = \{x;\ x = 4,\ x \text{ tek sayı}\}$ ise $C = \varnothing$ olur. Boş küme her kümenin bir alt kümesidir. Yani $\varnothing \subset A$ vs.

- İncelemeye konu olan bütün kümelerin oluşturduğu kümeye **evrensel (universal) küme** denir ve büyük harf U ile gösterilir. Mesela nüfus sayımı çalışmalarında evrensel küme, dünyada yaşayan bütün insanların oluşturduğu kümedir.

A= {Türkiye'de yaşayan insanlar}

U= {Dünyada yaşayan insanlar} $A \subset U$

Kümelerle İlgili Kavramlar

- **Eşit küme:** İki küme aynı elemanlara sahip ise birbirlerine eşit olurlar. Bunu şöyle yazabiliriz.

  $$A \subset B \text{ ve } B \subset A \text{ ise } A=B$$

  Örnek: A={a,b} ve B={b,a} ise A=B olur. Bu tanıma göre

  Her küme kendisine eşittir ve bu bütün kümeler için doğrudur. A=A

  A=B ise B=A olur

  A=B ve B=C ise A=C olur
- A, B, C gibi herhangi üç küme için

  $A \subset B$ ve $B \subset C$ ise $A \subset C$ dir.
- Sınırlı sayıda eleman içeren kümelere **sınırlı küme** denir.

  Örnek: A={X:x alfabedeki sesli harfler }
- Bir küme içindeki elemanlar sayılamayacak kadar çok ise böyle kümelere **sınırsız küme** adı verilir.

Kümelerle İlgili Kavramlar

- **Eşlenik Küme:** Elemanları arasında bire bir karşılaşma olan kümelere **eşlenik küme** denir.

  Örnek: A = {1,2,3,} ve B={2,4,6} ise bu kümeler eşleniktir. Çünkü A'daki her sayıya B kümesinde iki katı bir sayı karşılık gelmektedir.

- **Kuvvet Kümesi:** Sınırlı sayıda eleman içeren bir kümenin bütün alt kümelerinin oluşturduğu kümeye **Kuvvet Kümesi** denir. A sınırlı sayıda eleman içeren bir küme ise kuvvet kümesi $\mathbf{P_A}$ şeklinde gösterilir.

  Örnek: A={1,2,3} olsun. Bu kümenin kuvvet kümesi

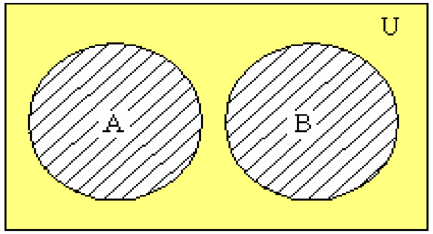
  $$P_A=\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

- **Teorem:** A kümesi n sayıda eleman içeren sınırlı bir küme ise P_A'nın 2^n sayıda elemanı olur, ya da 2^n tane alt kümesi olur.

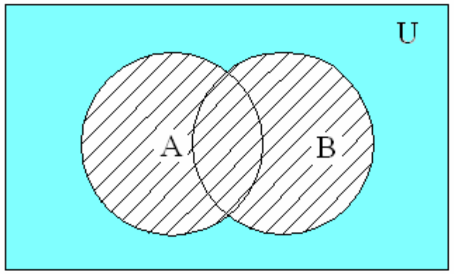
  Yukarıdaki örnekte A'nın 3 elemanı vardı öyleyse A kümesinin $2^3=8$ alt kümesi olur.

Küme İşlemleri

- **Venn Diyagramları:** U evrensel kümesi genellikle bir dikdörtgenle gösterilir. U'nun alt kümeleri dairelerle gösterilir. Kümeler arasındaki bu ilişkiyi geometrik şekillerle gösteren diyagramlara Venn diyagramları adı verilir.

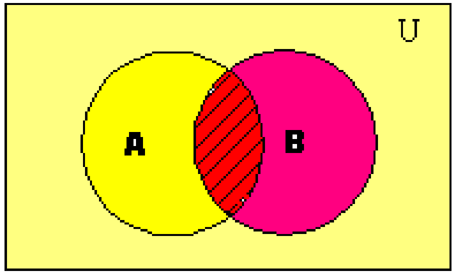


- **Bileşim işlemi:** A ve B iki küme olsun. A ve B'nin bileşimi $A \cup B$ şeklinde gösterilir. Bu küme, A ve B'nin (veya hem A ve hem de B'nin ikisini birden) elemanlarına sahiptir. Yani; $\mathbf{A \cup B=\{X:x \in A \text{ ve/veya } x \in B\}}$. Bu işlem Venn diyagramı ile şöyle gösterilir.

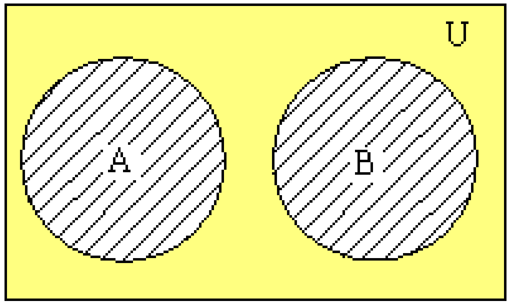


Küme İşlemleri

- **Kesişim:** Ortak elemanların oluşturduğu kümedir. Hem A, hem de B'nin ortak elemanlarının meydana getirdiği küme A ve B kümelerinin kesişimini verir ve $A \cap B$ şeklinde gösterilir. Yani $\mathbf{A \cap B = \{X : x \in A \text{ ve } x \in B\}}$ şekilde taralı alan $A \cap B$'yi göstermektedir.



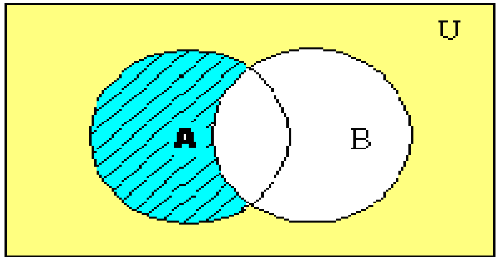
- **Ayrık küme:** $\mathbf{A \cap B = \varnothing}$ ise yani A ve B kümelerinin ortak elemanları yoksa bu tip kümelere **Ayrık Küme** adı verilir. Aşağıdaki şekilde ayrık bir küme görülmektedir.



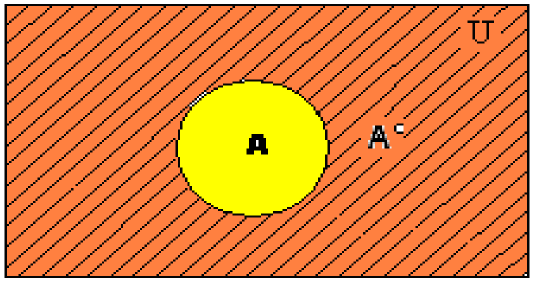
Küme İşlemleri

- **İki Kümenin Farkı:** A'ya ait olup B'ye ait olmayan elemanların oluşturduğu küme A'nın B'den farkı adını alır ve A-B veya A\B şeklinde gösterilir. Şekildeki taralı alan bu farkı göstermektedir.

  $\mathbf{A - B = A \backslash B = \{X: x \in A\ ;\ x \notin B\}}$



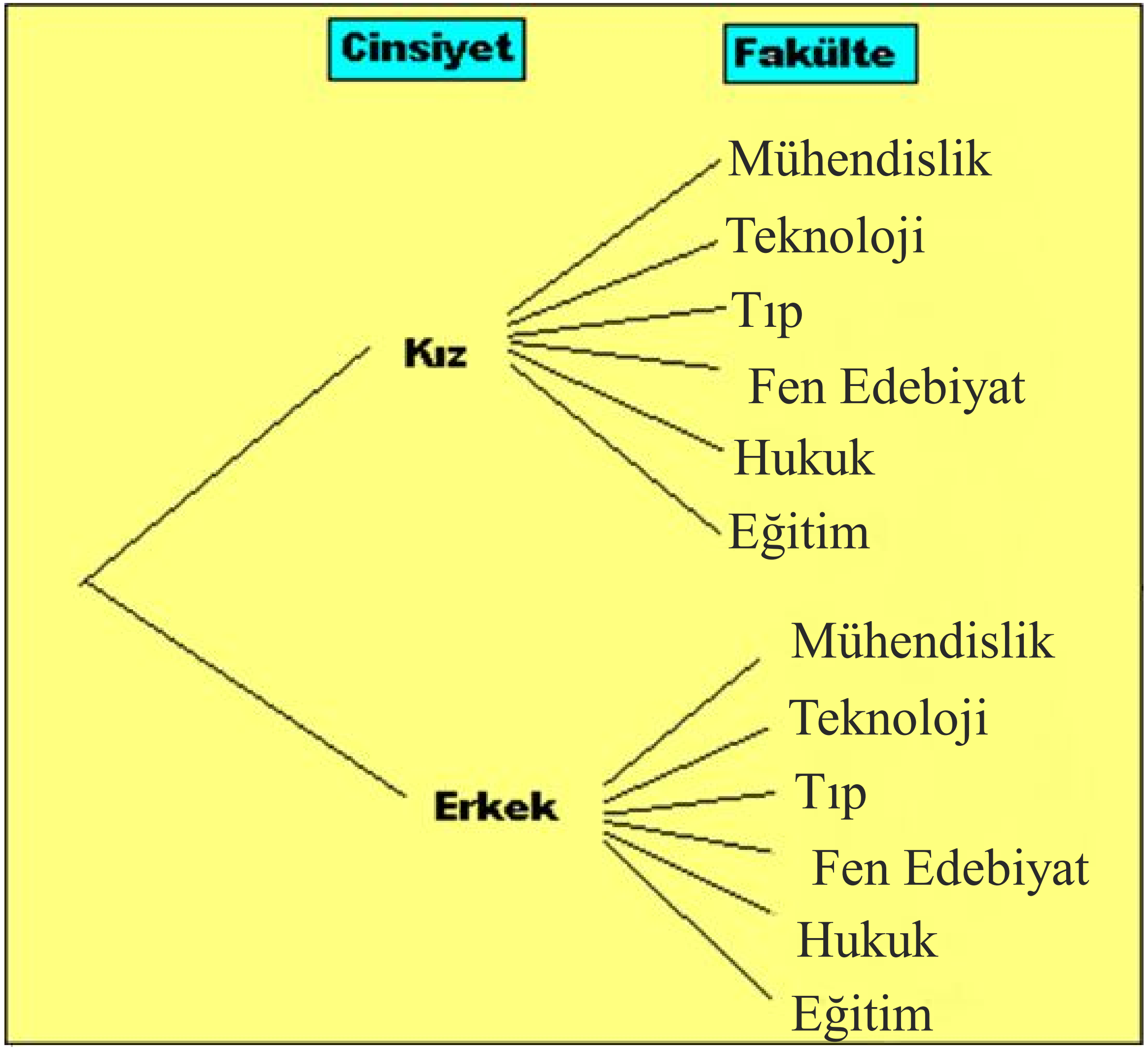
- **Tamamlayan (Tümleyen) Küme:** A da bulunmayan evrensel küme içindeki elemanların kümesidir. A kümesinin tümleyeni $\mathbf{A'}$, $\mathbf{A^c}$ veya $\overline{\mathbf{A}}$ şeklinde yazılır. $\mathbf{A^c = U - A = \{\ X: x \in U \text{ ve } x \notin A\ \}}$ olur.



Sayma Teknikleri

- Olasılık hesapları ve istatistikte birçok problem, verilen küme elemanlarının sayılmasını veya sıralanmasını gerektirir. *Eğer bir olayın olasılığının hesaplanmasında, mümkün haller sayısı çok büyük ise olayın doğrudan sıralanması veya sayılması uzun zaman alır ve bazı hallerde doğrudan saymak mümkün olmaz*. Bu gibi durumlarda saymayı kolaylaştırıcı bazı tekniklere ihtiyaç duyulur. Bu tekniklere sayma teknikleri (combinational analysis) adı verilir.
- KOÜ fakültelerinde eğitim gören öğrencilerin cinsiyet ve öğrenim gördüğü fakülte yönünden sınıflandırılması halinde kaç farklı durumun olacağını belirleyelim.
- Cinsiyet vasfının kız ve erkek olmak üzere iki şıkkı vardır.
- Fakülte vasfının Mühendislik, Teknoloji, Tıp, Fen Edebiyat, Hukuk ve Eğitim olmak üzere 6 şıkkı vardır. Buna göre **ağaç diyagramı** çizildiğinde KOÜ öğrencilerinin bu vasıflara göre kaç farklı durumda olduğu görülebilir.

Ağaç Diyagramı ile Sayma



- Yandaki ağaç diyagramından öğrencilerin cinsiyet ve fakülte vasfının şıklarına göre 12 farklı durumda bulunduğu anlaşılmaktadır.
- 2 cinsiyet, 6 fakülte

  $2 \times 6 = 12$ durum

Çarpım Kuralı

- Yukarıdaki ağaç diyagramından hareketle aşağıdaki sayma kuralına ulaşabiliriz.
- **Çarpım Kuralı:** A_1 ve A_2 kümeleri sırasıyla n_1 ve n_2 eleman içeriyorsa, A_1'in bir elemanı ile A_2'nin bir elemanını seçmenin $n_1 \times n_2$ değişik yolu vardır. Yani iki olay aynı anda $n_1 \times n_2$ değişik şekilde meydana gelir.
- Bir başka örnek İstanbul'dan Ankara'ya 3 yoldan (kara-hava-demiryolu), Ankara'dan Konya'ya 3 yoldan (kara, hava, demiryolu) gidilebiliyorsa İstanbul'dan Konya'ya Ankara bağlantılı olmak üzere $3 \times 3 = 9$ değişik yoldan gidilebilir.
- Küme sayısı ikiden çok olduğu zaman yukarıdaki kural aşağıdaki şekilde genelleştirilebilir.
- **Çarpım Kuralının Genelleştirilmesi:** A_1, A_2,.......,A_k kümeleri sırasıyla n_1, n_2,......., n_k eleman içeriyorsa, önce A_1'in bir, sonra A_2'nin bir, sonra A_3,........, A_k'nin bir elemanını seçmenin $n_1 \times n_2 \times n_3 \times, \ldots\ldots, \times n_k$ değişik yolu vardır. Yani k olay bir arada $n_1 \times n_2 \times \ldots\ldots \times n_k$ farklı şekilde meydana gelir.

Çarpım Kuralı

- **Örnek**: Test şeklinde yapılan bir sınavda 5 soru ve 5 cevap şıkkı varsa bir öğrenci bu 5 soruyu kaç farklı şekilde cevaplandırır.
- $5\times5\times5\times5\times5 = 5^5 = 3125$ değişik şekilde işaretleyebilir.
- Bu işaretleme hallerinden sadece birinde tüm cevaplar doğru olur. $(1\times1\times1\times1\times1=1)$ $4\times4\times4\times4\times4= 4^5 = 1024$ halde ise bütün cevaplar yanlış olur.
- Öğrencinin **4 soruyu doğru** cevaplaması kaç farklı şekilde mümkün olur?

$5\times4=20$ şekilde mümkündür. (1.soru yanlış diğer şıkların doğru olması $4\times1\times1\times1\times1$ olup diğer 5 soru da böyle olur)

3 sorunun doğru cevaplanması $(1\times1\times1\times4\times4) \times 10=160$

2 sorunun doğru cevaplanması $(1\times1\times4\times4\times4) \times 10=640$

1 sorunun doğru cevaplanması $(1\times4\times4\times4\times4) \times 5= 1280$ şekilde mümkündür.

Çarpım Kuralı

- Ardışık aynı şıkkın doğru olduğu bir soru bulunmadığına göre kaç farklı cevap anahtarı oluşturulabilir

İlk şık 5 farklı şekilde işaretlenirken diğer şıklarda işaretlenebilecek şık sayısı 4 e düşer. Bu durumda:

$5 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 5 \times 4^4 = 1280$ cevap anahtarı oluşturulabilir.

Çarpım Kuralı

Örnek: {1,2,3,4,5} kümesindeki rakamlar kullanılarak seçim iadeli olmak üzere 3 haneli;

- Kaç sayı oluşturulabilir?

$5 \times 5 \times 5=125$

-Kaç çift sayı oluşturulabilir?

$5 \times 5 \times 2=50$

-300'den büyük kaç çift sayı oluşturulabilir?

$3 \times 5 \times 2=30$

-Sayılardan kaç tanesi 2 ile başlar 5 ile biter?

$1 \times 5 \times 1=5$

-Seçim iadesiz olmak üzere kaç sayı oluşturulabilir?

$5 \times 4 \times 3=60$

Permütasyon

- Sıraya konulacak n adet nesne olsun ve her biri sadece bir kez kullanılmak üzere kaç farklı sıralama yapılabilir?

n	n-1	n-2	-----------	2	1

n nesnenin mümkün sıralamalarının sayısı:

$n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(2)(1) = n!$ $\qquad {}_{n}P_{n} = n!$

Permütasyon

- Bir tiyatro gişesinde bilet almak isteyen üç kişi kaç farklı şekilde gişe önünde sıraya girebilir?
  - İlk yer 3 farklı şekilde, ikinci yer 2 farklı şekilde, son yer de 1 yolla doldurulur.

$$\boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{1} = 6 = 3!$$

Permütasyon

- n tane nesne arasından seçilmiş x tane nesnenin permütasyon sayısı ${}_nP_x$ olarak ifade edilir.

- Toplam n tane nesne arasından x tane nesne seçilir ve bunlar sıraya konulursa ortaya çıkabilecek sıralamaların sayısıdır ve şu şekilde hesaplanır:

$${}_nP_x = \frac{n!}{(n-x)!}$$

Permütasyon

Örnek: 10 farklı ampul

a)10 farklı yere kaç değişik şekilde takılabilir?

b) 5 farklı yere kaç değişik şekilde takılabilir?

Çözüm:

a) $10! = 3628800$

b) $${}_{10}P_5 = \frac{10!}{(10-5)!} = 30240$$

Permütasyon

- **Örnek:** Bir rafta birbirinden farklı 5 tane Matematik, 2 tane Fizik ve 3 tane Kimya kitabı vardır. Aynı tür kitaplar birbirinden ayrılmamak üzere, kaç değişik şekilde yan yana sıralanabilir?

- **Çözüm:** 5 Matematik kitabını 1 kitap, 2 Fizik kitabını 1 kitap ve 3 Kimya kitabı da 1 kitap olarak düşünülürse, bunlar 3! şeklinde sıralanır. 5 Matematik kitabı kendi arasında 5!, 2 Fizik kitabı kendi arasında 2! ve 3 Kimya kitabı da kendi arasında 3! şeklinde sıralanabilir. Şu halde kitaplar bir rafa;

  $3! \times 5! \times 2! \times 3! = 8640$ farklı şekilde sıralanır.

Permütasyon

- Örnek: 4 farklı istatistik ve 5 farklı matematik kitabı, matematik kitapları birbirinden ayrılmamak üzere bir rafa kaç değişik biçimde dizilebilir?

- Çözüm: Matematik kitapları birbirinden ayrılmayacağı için hepsi bir kitap olarak düşünülebilir.
- Bu durumda 5 kitap 5! şekilde sıralanır. Ayrıca 5 matematik kitabı da kendi arasında 5! şekilde sıralanır. O halde tüm sıralamalar;

$5! \times 5! = 120 \times 120 = 14.400$ olur.

Permütasyon

- **Örnek:** 8 atletin katıldığı 100 metre yarışmasında ilk üç dereceye girenler kaç farklı şekilde belirlenir ?

$$ {}_{8}P_{3} = \frac{8!}{(8-3)!} = 8 \times 7 \times 6 = 336 $$

- **Örnek:** 2,3,5,6,7 ve 9 sayılarını kullanarak 4 basamaklı rakamları birbirinden farklı kaç sayı oluşturulur?

$$ {}_{6}P_{4} = \frac{6!}{(6-4)!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360 $$

6	5	4	3

= 360

Kombinasyon

- Permütasyon sıranın önemli olduğu problemlere uygulanmaktadır. Ancak bazı problemlerde sıranın önemi yoktur. Böyle durumlarda Permütasyon uygulamak doğru olmaz.
- *n* adet nesne arasından seçilen *x* tanesinin kombinasyon sayısı ${}_nC_x$ ile gösterilir. Sıralama önemli olmaksızın tüm durumların sayısı olarak ifade edilir. Bu sayı şu şekilde hesaplanır:

$$ {}_nC_x = \frac{n!}{(n-x)!x!} $$

Kombinasyon

- **Örnek:** Beş kişilik bir topluluktan üç kişilik bir komisyon kaç farklı şekilde seçilir ?

$$_5C_3 = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5\times 4\times 3\times 2}{2\times 3\times 2} = 10$$

- **Örnek:** 10 bay ve 5 bayan arasından 2 bay ve 1 bayan üye içeren bir kurul kaç farklı şekilde oluşturulur?

$$_{10}C_2 = \frac{10!}{(10-2)!2!} = \frac{10\times 9}{2} = 45$$ (10 bay arasından 2 bay)

$$_5C_1 = \frac{5!}{(5-1)!1!} = 5$$ (5 bayan arasından 1 bayan)

Çarpım kuralı uygulanarak 45 $\times$ 5 =225 farklı şekilde oluşturulur.

Kombinasyon

- Kombinasyonu permütasyona bağlı olarak şöyle ifade etmek mümkündür

$$\text{Kombinasyon} = \frac{\text{Toplam permütasyon sayısı}}{\text{Her alt kümenin permütasyon sayısı}}$$

Kombinasyon

- 4 kitap arasından 3'ünün olanaklı seçimlerini düşünelim. 4 kitaptan 3'ü seçildiğinde, kombinasyonların sayısı

$${}_4C_3 = \frac{4!}{(4-3)!3!} = \frac{4\times3\times2\times1}{3\times2\times1} = \frac{24}{6} = 4 \longrightarrow$$ ABC, ABD, ACD, BCD

Kombinasyonlar	Permütasyonlar
ABC	ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA
ABD	ABD, ADB, BAD, BDA, DAB, DBA
ACD	ACD, ADC, CAD, CDA, DAC, DCA
BCD	BCD, BDC, CBD, CDB, DBC, DCB

Sıra önemli olmak şartıyla a,b,c,d harflerinden üçerli gruplar yukarıdaki sonuçlar elde edilir.

Yukarıdaki her satır sadece bir alt kümenin permütasyonlarından ibarettir.

- **Soru1.** 10 üyesi olan bir dernekte 3 kişilik bir komisyon kaç değişik şekilde teşkil edilebilir.
- **Soru2.** A={1,2,3,4,5,6} kümesinin elemanları ile 3 basamaklı sayılar yazılacaktır.

  a) Bu kümedeki rakamlarla üç basamaklı kaç sayı yazılabilir. (Seçim iadeli)

  b) Her rakam bir defa kullanılmak şartıyla (seçim iadesiz) kaç farklı sayı yazılabilir.

  c) b şıkkındaki sayıların kaç tanesinde 4 rakamı bulunur.

  d) Bu sayıların kaç tanesinde 4 ve 5 rakamları bulunur.

  e) Bu sayıların kaç tanesinde 4, 5 ve 6 rakamları vardır.

  f) Bu sayıların kaçı 300'den büyüktür.

  g) Bu sayılardan kaç tanesinin son rakamı 1'dir.

  h) Bu sayılardan kaçı 1 ile başlar 6 ile biter.
- **Soru3.** 4 evli çift arasından 3 kişilik bir kurul kaç yolla seçilir?

  a) Tümü eşit seçilme şansına sahiptir.

  b) Kurulda 2 kadın ve 1 erkek olmak zorundadır.

  c) Eşler aynı kurulda bulunamayacaktır.

Olasılık

- Popülasyon hakkında bilgi sahibi olmak amacı ile alınan örneklerden elde edilen bilgiler bire bir doğru olmayıp hepsi mutlaka bir hata payı taşımaktadır.
- Bu hata payının ortaya çıkmasının sebebi seçilen örneklerin şansa bağlı olarak farklılıklar göstermesi ve bunun sonucunda her deneyde farklı sonuçlarla karşılaşılmasıdır.
- ***Olasılık, herhangi bir deneyin sonucunda gözlenebilecek farklı durumlar ile hangi sıklıkla karşılaşılacağı bir başka ifadeyle ortaya çıkan olayların belirsizliğinin incelenmesi anlamına gelir.***
- Rassal herhangi bir olayın, belli bir anda meydana gelip gelmemesi konusunda daima bir belirsizlik vardır. Bu sebeple olasılık hesaplarının konusunu rassal sonuçlar veren deneyler teşkil eder.

Olasılık

- ***Olasılık bir olayın meydana gelme şansının sayısal ifadesidir.***

- 17 yy.'da şans oyunlarıyla birlikte kullanılmaya başlanan olasılık, uygulamalı matematiğin bir dalı olarak gelişim göstermiş ve istatistiksel yorumlamada önemli uygulama alanı bulmuştur.

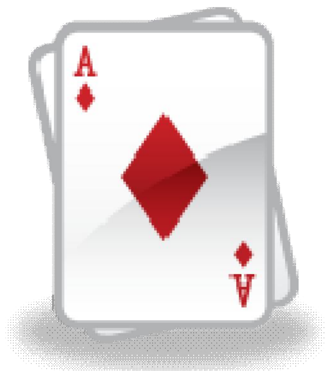
- **Örnekler:**
  - *Madeni paranın atılması sonucu tura gelme olasılığı,*
  - *Bir deste iskambil kağıdından çekilen 2 kağıdın en az birinin papaz olma olasılığı,*
  - *Nişanlı olan bir çiftin evlenme olasılığı.???*

Temel Kavramlar

- **Deney**, sonucu kesin olarak kestirimlenemeyen bir tek çıktı (şans değişkeni) oluşturan bir eylem, gözlem ya da süreçtir.

Madeni para atılması

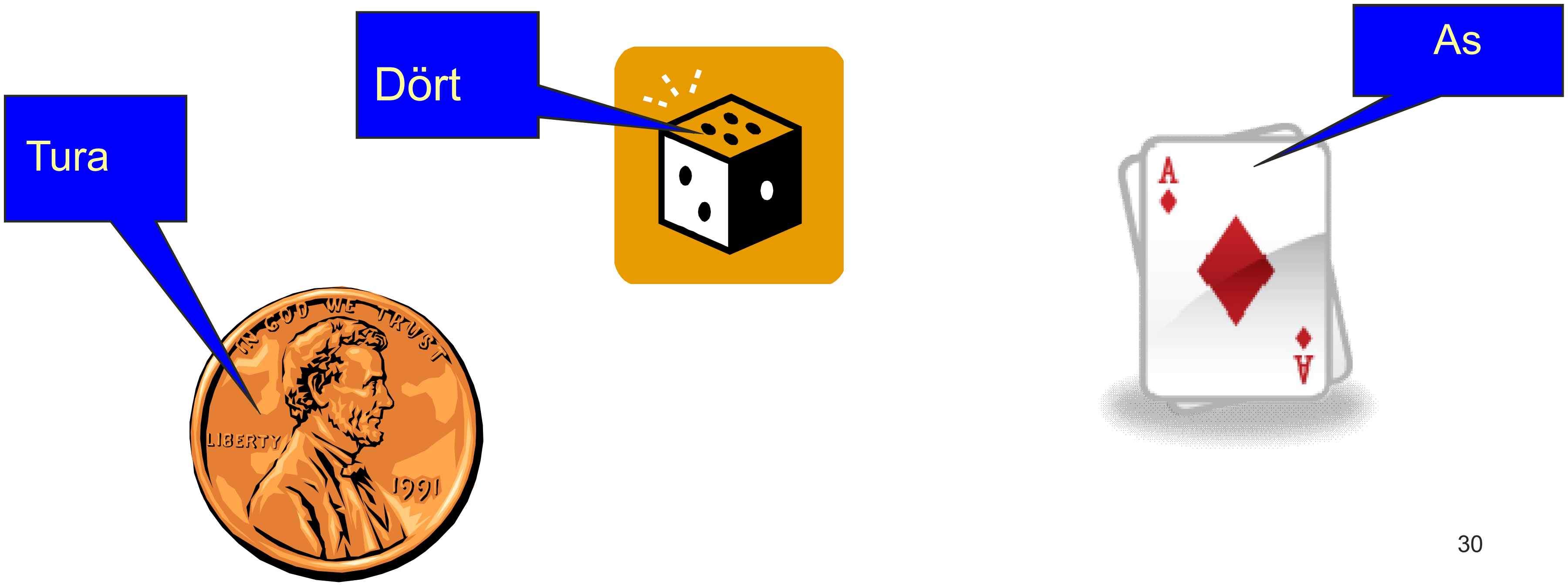
Zarın atılması



Bir deste iskambil kağıdından kart çekilmesi

Temel Kavramlar

- **Örnek nokta**, bir deneyin en temel sonucudur (elemanıdır)



Temel Kavramlar

- **Örnek Uzay**, bir deneyin sonucunda elde edilen tüm mümkün olası sonuçların kümesi.
  - Hilesiz bir zarın atılması sonucu elde edilen örnek uzayı :

S: {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Temel Kavramlar

- Alfabemizden rasgele bir harf seçersek

  S={A, B, C, … ,Z} dir.

- Bir paranın tek atılışı için örnek uzayı ise

  S={Yazı, Tura}

- **Örnek:** Beş, on ve yirmi beş kuruş atılması deneyi için örnek uzay:

  S={TTT, TYT, YTT, TTY, YYT, YTY, TYY, YYY}

Temel Kavramlar

- **Örnek: Kırmızı** ve **siyah** renkli iki zarın atılmasından oluşan bir deneyde kırmızı zar için elde edilen sonuç k, siyah zar için elde edilen sonuç s olsun. Bu durumda S örnek uzayı, her biri 1, 2, 3, 4, 5, 6 değerini alabilen (k,s) çiftlerinin kümesidir.

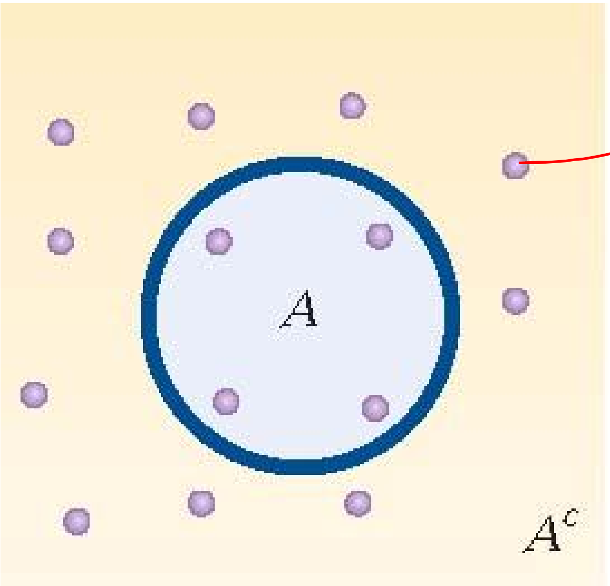
$$S= \{(k,s)\ 1\leq k\leq 6 \text{ ve } 1\leq s\leq 6\}$$

İki zar deneyi için örnek uzay

k\s	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Temel Kavramlar

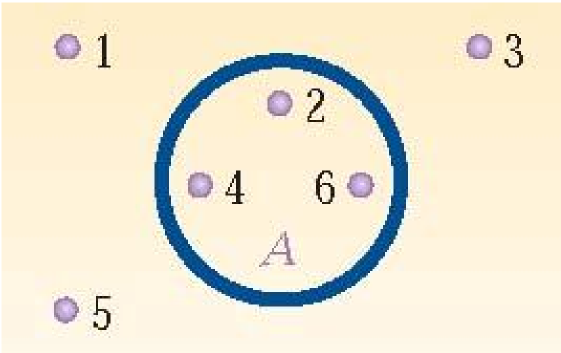
- **Örnek noktalar** ve **örnek uzaylar** genellikle Venn şeması ile gösterilirler.



örnek nokta

Temel Kavramlar

- **Olay**, örnek noktaların belirli bir koleksiyonudur.
    - Olay A: Bir zarın atılması deneyinde “çift sayı gelmesi”



Temel Kavramlar

- **Olay**, her hangi bir deney için S örnek uzayın bir alt kümesidir.
- Bir olay, S örnek uzayın bir alt kümesi olduğundan S’nin kendisi ve ø (boş küme) de birer olaydır
    - S’ye kesin olay,
    - ø ‘ye olanaksız olay denir.

Temel Kavramlar

- Örnek:
- Hilesiz bir zarın atılması sonucu **“asal sayı gelmesi”**

- Bir paranın üç kez atılması deneyinde **“üç tura elde gelmesi”**

Temel Kavramlar

- Olaylar için Olasılıkların Hesaplanması
  - Deneyi tanımlayın.
  - Örnek noktaları listeleyin.
  - Örnek noktalara olasılıkları atayın.
  - İlgili olayda tüm örnek noktaları gruplandırılır
  - Örnek nokta olasılıklarının toplamı olay olasılığını verir.

Olasılık

Tanım: Bir deneyin her biri eşit şansa sahip N tane sonucu olsun. Bu sonuçların M tanesinden herhangi biri gerçekleştiğinde A olayı gerçekleşmiş olsun. A olayının P(A) ile gösterilen gerçekleşme olasılığı

$$P(A) = \frac{\text{Uygun sonuçların sayısı}}{\text{Örnek uzaydaki tüm sonuçların sayısı}} = \frac{M}{N}$$

Olasılık

- Bir çantada 4 beyaz 8 siyah top vardır. Bir siyah top çekilmesi olasılığı nedir?

“Siyah top çekilmesi” olayı B olsun. Topların sayısı 12 olduğuna göre istenen olasılık

$$P(B) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Olasılık Aksiyomları

D bir deney ve S bu deneyin örnek uzayı olsun. O halde S deki bir A olayının P(A) olasılığıyla ilgili aşağıdaki aksiyomlar vardır.

A1. $P(A) \geq 0$

A2. $P(S) = 1$

A3. $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ bir S uzayında sonlu ya da sonsuz sayıda ikişerli ayrık olaylar dizisi olsun. Bu durumda

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots \quad \text{dir.}$$

Olasılık

- **Birinci Aksiyom** herhangi bir olayın olasılığının mutlaka 0 ile 1 arasında (0 ve 1 dahil) bulunacağını ve negatif veya 1'den büyük bir olasılığın olmayacağını ifade etmektir. **İkinci Aksiyom**, örnek uzayının olasılığının veya bu örnek uzayı içinde yer alan bütün olayların toplamının olasılığının 1 olduğunu, yani dolaylı olarak kesinlik halini ifade etmektedir. **Üçüncü Aksiyom** ise, aynı anda meydana gelmesi imkansız olayların toplamının olasılığının bu örnek olayların ayrı ayrı olasılıklarının toplamına eşit olduğu ifade etmektedir.

- **Örnek** Bir kutuda 80'i beyaz 20'si kırmızı 100 top vardır. Beyaz topların 30'u, kırmızı topların ise 5'i kusurludur.

  a) Kutulardan beyaz bir top çekme olasılığı nedir?

$$P(B) = \frac{B}{N} = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$$

  b) Kusurlu bir top çekme olasılığı nedir?

$$P(K) = \frac{30+5}{100} = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$$

Örnek:

- Bir çift zar atılsın. Toplamın 8 gelmesi olasılığı nedir?

Bu deneyin örnek uzayında 36 nokta vardır. Burada 8 gelmesi olayı A olsun. O halde,

$$A = \{(2,6),(3,5),(5,3),(4,4),(6,2)\} \quad \text{uygun sonuçlar kümesi}$$

P(A)=5/36

Örnek:

- **Örnek** Dört para birlikte atılıyor. 2 yazı ve 2 tura gelme olasılığı ne olur?

- **Çözüm:** Mümkün haller sayısı 2^4 =2.2.2.2=16,
  2 yazı, 2 tura gelme halleri YYTT, YTYT, YTTY, TYYT, TYTY, TTYY

$$P(2Y,2T)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}\ \text{olur.}$$

Olasılığın Frekans Tanımı

Tanım: Bir deney n kez yapıldığında bir A olayı f kez gerçekleşirse, f/n oranına A olayının relatif frekansı denir. n artarken f/n relatif frekansının bir limite yaklaştığını kabul edersek, bu limite A nın olasılığı denir.

$$\mathbf{P(A)} = \lim_{n \to \infty} \frac{f}{n}$$

Uygulamada büyük n ler için A nın olasılığı f/n ile hesaplanır.

Olasılığın Frekans Tanımı

- Bir zarın 100 kez atılmasından sonra aşağıdaki sonuçlar bulunmuştur.

Bulunan Sayı	Frekans
1	21
2	18
3	14
4	17
5	10
6	20

Zarın 1 gelmesi olasılığı nedir?

Rassal Olay

- Gerçekleşmesi rastlantıya bağlı olan olaya rasgele ya da rassal olay denir.
  - Bir desteden bir oyun kartı seçildiğinde, maça ikilisinin gelmesi,
  - Bir zar atıldığında 4 gelmesi,
  - Gelecek yıl buğday üretiminin verilmiş iki sınır arasında bulunması

olayları kesin değildir ve rastlantıya bağlıdır.

Rassal Olay

- **Örnek:** Bir paranın iki kez atılması deneyini düşünelim. Bu deneyin örnek uzayı:

S= {TT, TY, YT, YY}

- Olay A: Her atışta aynı yüzün elde edilmesi,

A kümesi S örnek uzayının bir alt kümesidir.

A={YY, TT}

Olayların Birleşimi ve Kesişimi

Bileşik Olaylar

İki veya daha fazla rasgele olaydan oluşur

Birleşim

$A \cup B$

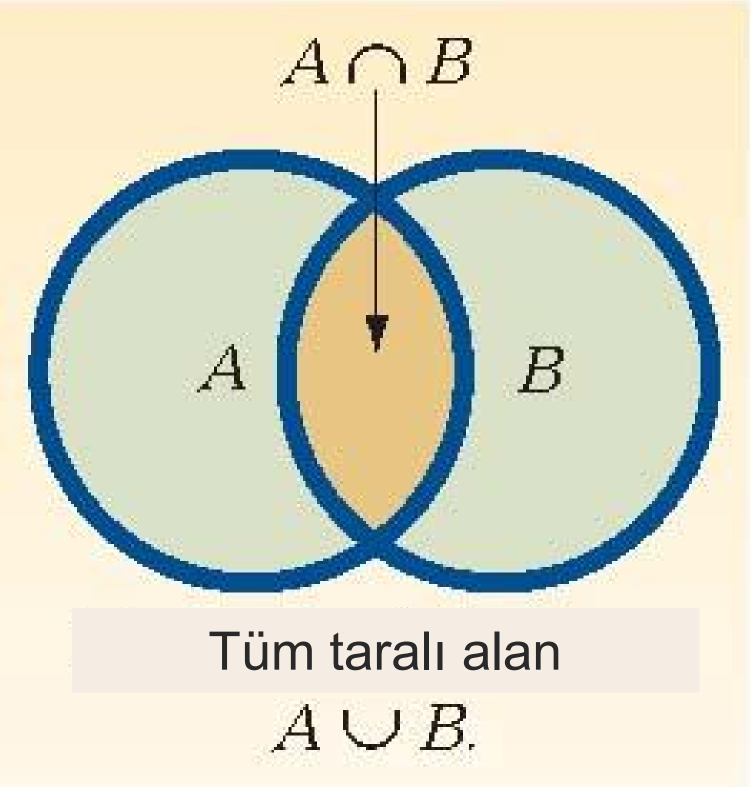
A yada B yada her iki olay birden gerçekleşir.

Kesişim

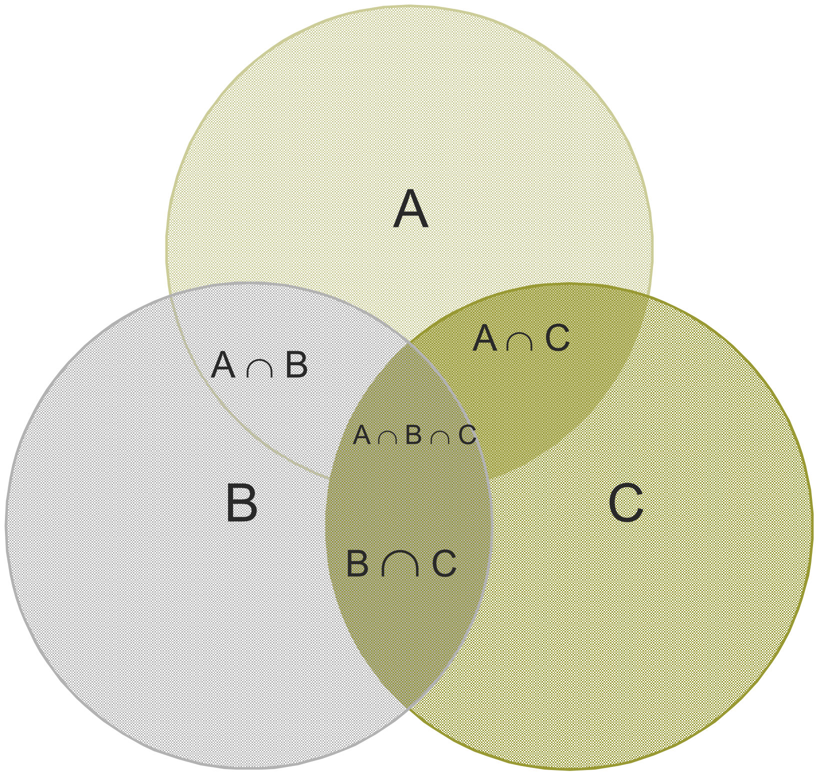
$A \cap B$

Hem A hem de B olayı gerçekleşir.

Olayların Birleşimi ve Kesişimi



Olayların Birleşimi ve Kesişimi



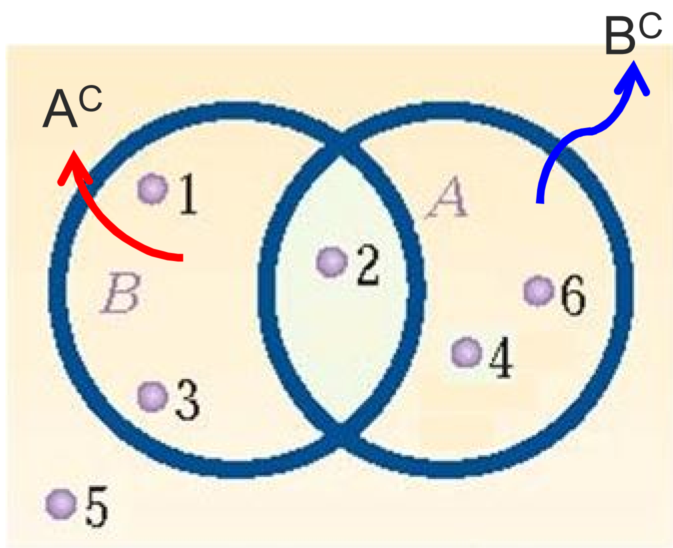
Tamamlayıcı Olaylar

- Zar atma deneyinde:

A: {Çift sayı atmak}
A^C: {Tek sayı atmak}

B: {3 ve 3'ten küçük sayı atmak, $x \leq 3$}
B^C: {4 ve 4'ten büyük sayı atmak, $x \geq 4$}

$A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$
$[A \cup B]^C = \{5\}$
(Ne A ne de B olayının gerçekleşmemesi)



Tamamlayıcı Olaylar

$$P(A) + P(A^C) = 1$$

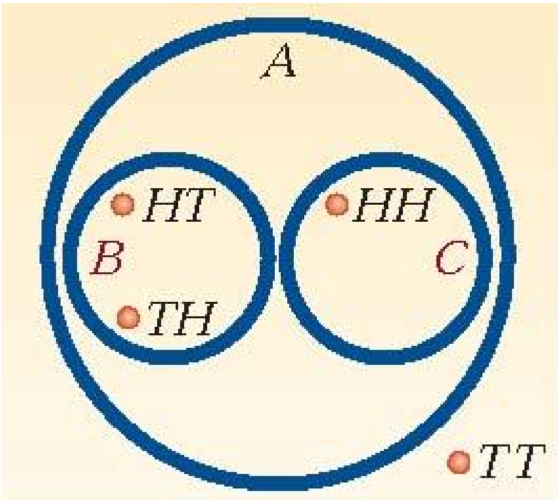
$$P(A) = 1 - P(A^C)$$

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

Tamamlayıcı Olaylar

A: {İki madeni para atıldığında en az birinin tura gelmesi}

A^C: {Hiç tura gelmemesi}



$$A:\{HH, HT, TH\}$$

$$A^C:\{TT\}$$

$$P(A) = 1/4 + 1/4 + 1/4 = 3/4$$

$$P(A^C) = 1/4$$

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - 1/4 = 3/4$$

H → Head / Tura
T → Tail / Yazı

Ayrık Olaylar

- Eğer $(A \cap B) = \varnothing$ ise A ve B olayları **ayrık olay**lardır.