Hafta 3:
Doğrusal ve Zamanla Değişmeyen Sistemler

Ele Alınacak Ana Konular

- Ayrık-zaman işaretlerin impuls dizisi cinsinden ifade edilmesi
- Ayrık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi
- Sürekli-zaman işaretlerin impuls fonksiyonu cinsinden ifade edilmesi
- Sürekli-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon integrali gösterilimi

Ayrık-zaman işaretlerin impuls dizisi cinsinden ifade edilmesi

- Doğrusallık ve zamanla değişmezlik özellikleri iki açıdan çok önemlidir: (i) çoğu fiziksel sistem bu iki özelliğe sahip olup doğrusal ve zamanla değişmeyen (LTI) sistem olarak modellenebilir, (ii) LTI sistemleri incelemek amacıyla geliştirilmiş güçlü matematiksel yöntemler (Laplace ve z-dönüşümleri) mevcuttur.

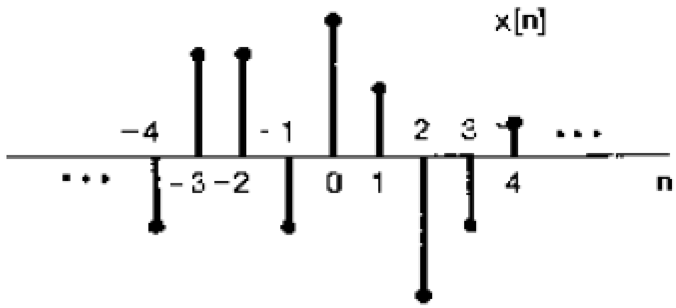
- LTI bir sistemin girişine uygulanan herhangi bir işareti, temel bazı işaretlerin toplamı cinsinden yazabilirsek, sistemin çıkışı temel işaretlere olan yanıtlarının toplamına eşit olacaktır.

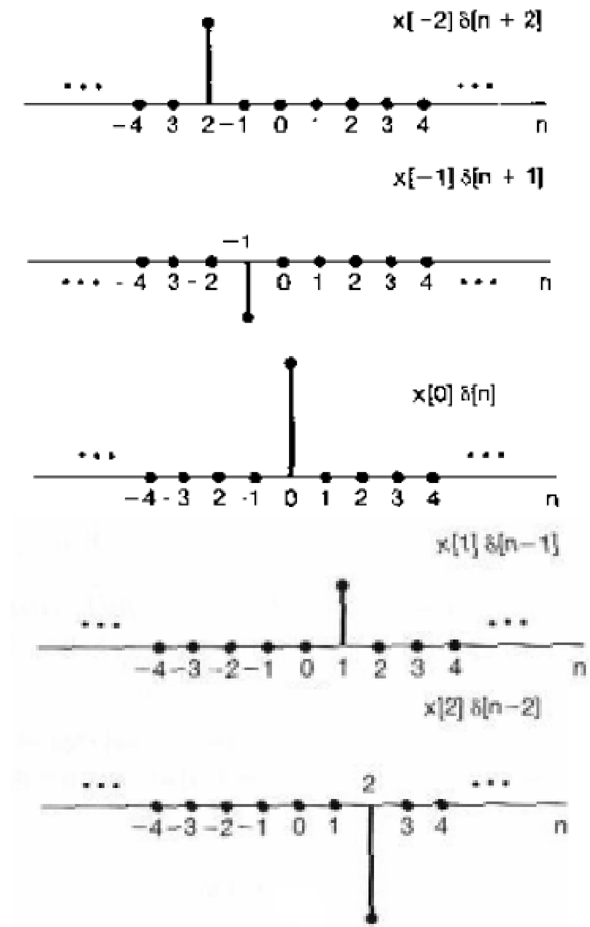
- Aşağıda gösterileceği gibi, sürekli-zaman işaretleri impuls fonksiyonu, ayrık-zaman işaretleri ise impuls dizisi cinsinden ifade edilebilir. O halde, sistemin impulsa olan yanıtı bilindiğinde herhangi bir girişe olan yanıtı hesaplanabilir.

- Sistemin impulsa olan yanıtına İMPULS YANITI denir. Giriş-çıkış ilişkisi ayrık-zaman durumunda KONVOLÜSYON TOPLAMI, sürekli-zaman durumda ise KONVOLÜSYON İNTEGRALİ ile verilir.

Ayrık-zaman işaretlerinin impuls cinsinden ifade edilmesi

- Bir ayrık-zaman işaret impulsların toplamı şeklinde düşünülebilir. Aşağıda bir ayrık-zaman işaretinin [-2, 2] aralığındaki bileşenlerinin impuls dizisi karşılıkları verilmiştir.





Ayrık-zaman işaretlerinin impuls cinsinden ifade edilmesi

- Şekilden, beş bileşenin toplamının -2 $\leq n \leq$ 2 aralığında $x[n]$'ye eşit olduğu görülmektedir. Genelleştirme yaparsak, bir ayrık-zaman işaret $x[n]$ impuls dizisi cinsinden şöyle yazılabilir:

$$\begin{aligned} x[n] &= \ldots + x[-3]\delta[n+3] + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] \\ &\quad + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + x[3]\delta[n-3] + \ldots \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \end{aligned}$$

- Yani, herhangi bir ayrık-zaman işaret ötelenmiş impulsların ağırlıklı toplamı olup ağırlıklar işaretin değerleridir. Örnek olarak, $x[n] = u[n]$ olsun. $k < 0$ için $u[k] = 0$ ve $k \geq 0$ için $u[k]=1$ olduğundan, daha önce tartıştığımız ilişki elde edilir:

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

Ayrık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi

- Bir ayrık-zaman LTI sistemin keyfi bir $x[n]$ girişine olan yanıtını bulmaya çalışalım. Girişi,

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

şeklinde yazabilriz.

- Sistemin $\delta[n\text{-}k]$'ya olan yanıtını $h_k[n]$ ile belirtelim. Sistem doğrusal olduğundan, sistemin $x[n]$'ye yanıtı

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]$$

olacaktır.

- O halde, ayrık-zaman LTI sistemin $-\infty < k < \infty$ için $\delta[n\text{-}k]$'ya olan yanıtları ($h_k[n]$'ler!) biliniyorsa, sistemin herhangi bir girişe olan yanıtı hesaplanabilir.

Ayrık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi

- Sistem zamanla değişmez olduğundan, $h_k[n] = h_0[n\text{-}k]$ ilişkisi geçerli olmalıdır.

- Çünkü, $h_k[n]$ sistemin $\delta[n\text{-}k]$'ya; $h_0[n]$ ise $\delta[n]$'ye olan yanıtıdır. Zamanla değişmeyen bir sistemde giriş hangi miktarda ötelenmişşe çıkışda aynı miktarda ötelenir. Girişler arasında k kadar öteleme olduğuna göre, çıkışlar arasında da k kadar öteleme , yani $h_k[n] = h_0[n\text{-}k]$ olamlıdır.

- Notasyon kolaylığı için $h[n] = h_0[n]$ yazacak ve $h[n]$'ye sistemin İMPULS YANITI (sisteme $\delta[n]$ uygulandığında elde edilen yanıt) diyeceğiz.

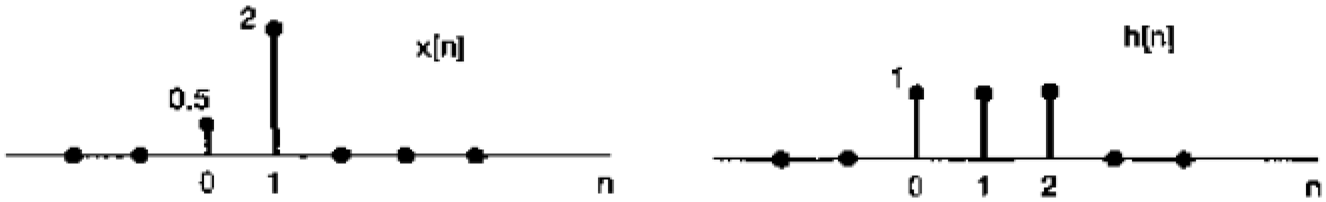
- Sonuç olarak, bir ayrık-zaman LTI sistemin impuls yanıtı $h[n]$ ve sisteme uygulanan giriş $x[n]$ ise, sistemin yanıtı

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k]$$

ilişkisinden hesaplanır. Bu ilişkiye KONVOLÜSYON TOPLAMI denir ve kısaca $y[n] = x[n] * h[n]$ şeklinde gösterilir.

Ayrık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi

ÖRNEK: Bir ayrık-zaman LTI sistemin impuls yanıtı $h[n]$ ve sisteme uygulanan giriş aşağıda verilmiştir. Sistemin çıkışını hesaplayınız.

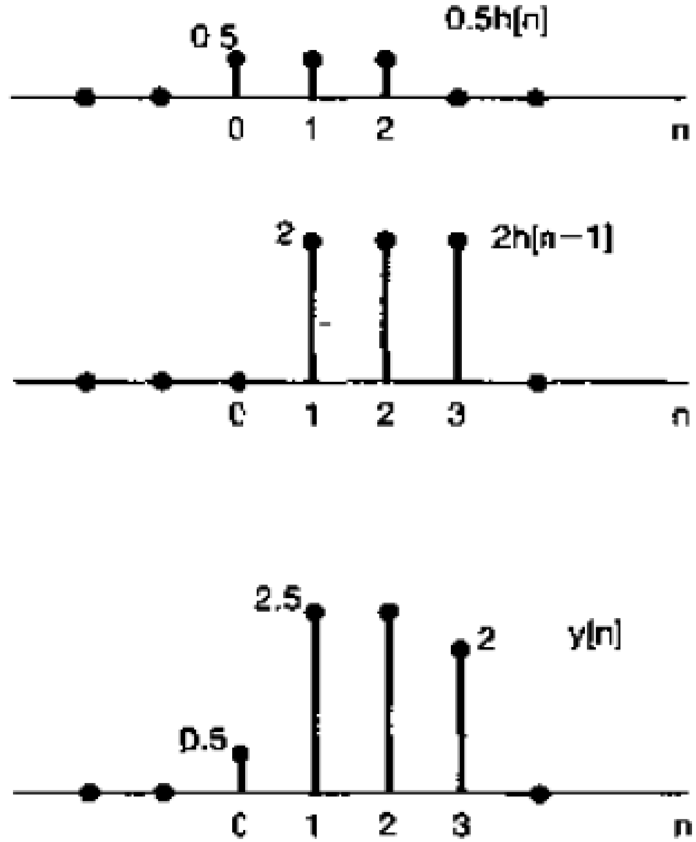


ÇÖZÜM: Giriş işaretinde sadece iki terim sıfır olduğundan konvolüsyon toplamı iki terimin toplamından oluşur:

$$y[n] = x[0]h[n-0] + x[1]h[n-1] = 0.5h[n] + 2h[n-1]$$

Bu örnek için, impuls yanıtı 0.5 ile çarpılır, 1 birim sağa ötelenip 2 ile çarpılır. İki işlemden elde edilen sonuçların toplamı çıkışa eşit olur. İlgili işlemler ve sonuç aşağıda verilmiştir.

Ayrık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi



Ayrık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi

- Giriş ve/veya impuls yanıtı sonsuz değer aldığında konvolüsyon toplamı etkin bir şekilde hesaplanmalıdır. Çıkışın herhangi bir n anındaki değerinin konvolüsyon toplamından hesaplandığını hatırlayınız:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k]$$

- İlk önce, $x[k]$ ve $h[n-k]$ işaretleri k'nın fonksiyonu olarak çizilir. Bu iki fonksiyon çarpılarak $g[k] = x[k]\, h[n-k]$ dizisi elde edilir.

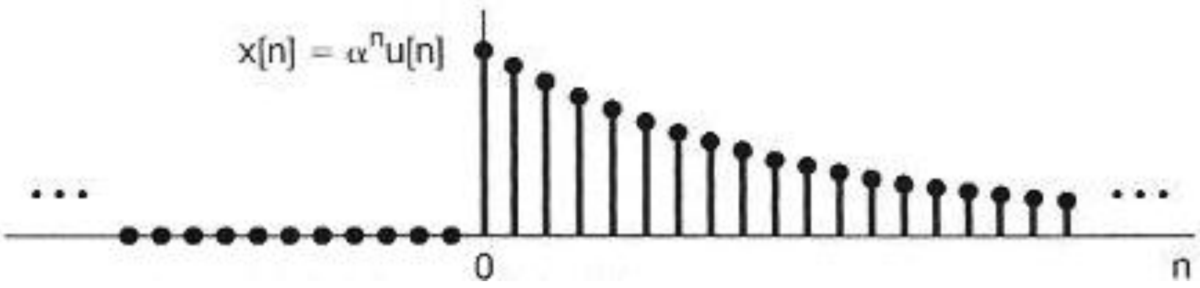
- Daha sonra, $g[k]$ dizisi tüm k değerleri üzerinden toplanarak $y[n]$ bulunur.

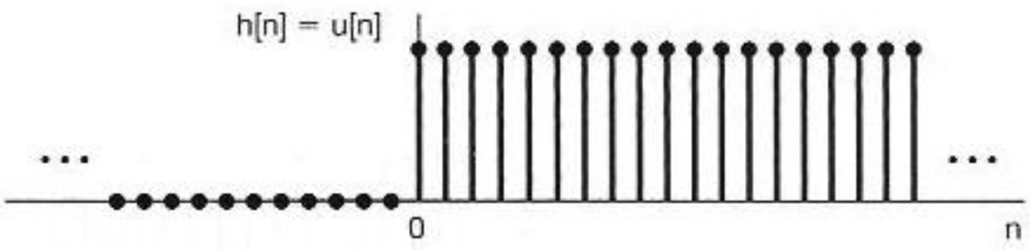
- Çıkışı bulmak için bu işlem tüm n değerleri için tekrarlanır.

- Bu işlem yapılırken $h[n-k]$'nın $h[k]$'nın zaman tersine çevrilmiş ve n kadar ötelenmiş hali olduğu hatırda tutulmalıdır.

Ayrık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi

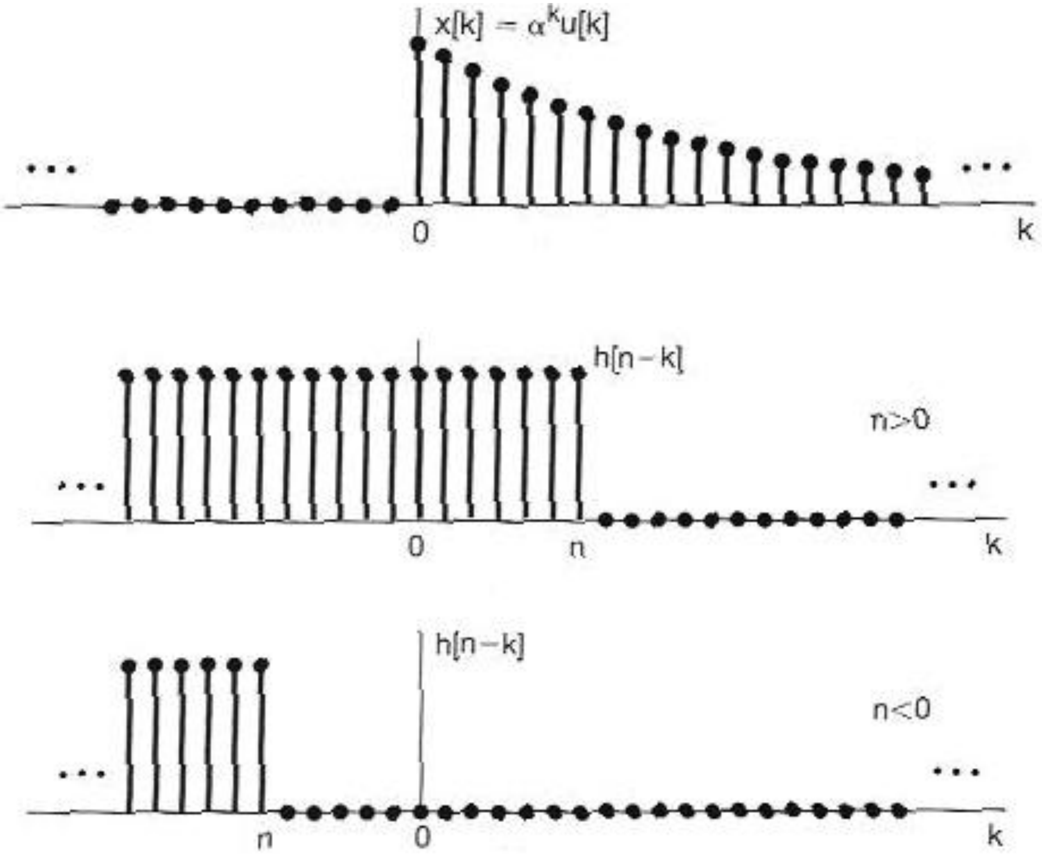
ÖRNEK: Bir ayrık-zaman LTI sistemin impuls yanıtı $h[n] = u[n]$ ve sisteme uygulanan giriş, $0 < \alpha < 1$ olmak üzere $x[n] = \alpha^n u[n]$ olarak verilmiştir. Sistemin çıkışını hesaplayınız.





Ayrık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi

ÇÖZÜM: Aşağıda $x[k]$ ve $h[n\text{-}k]$ $n < 0$ ve $n \geq 0$ için çizilmiştir.



Ayrık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi

- Şekillerden $n < 0$ ise, $x[k]$ ile $h[n\text{-}k]$ dizilerinin kesişmeyip $x[k]\ h[n\text{-}k]$ çarpımının sıfıra eşit olduğu görülmektedir. O halde, $n < 0$ ise $y[n] = 0$.

- $n \geq 0$ ise, diziler $0 \leq k \leq n$ aralığında kesiştiğinden $x[k]\ h[n\text{-}k]$ çarpımı şöyle olur:

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^k, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

- $y[n]$'yi belirlemek için konvolüsyon toplamı hesaplanmalıdır.

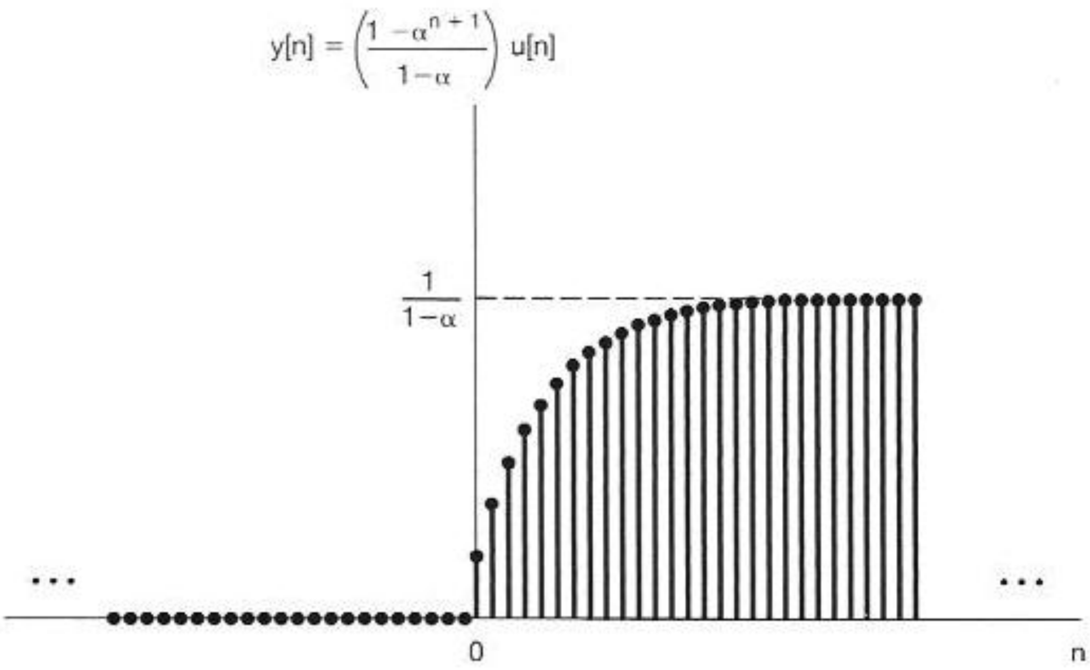
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{n} x[k]h[n-k]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

Ayrık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi

Özetle,

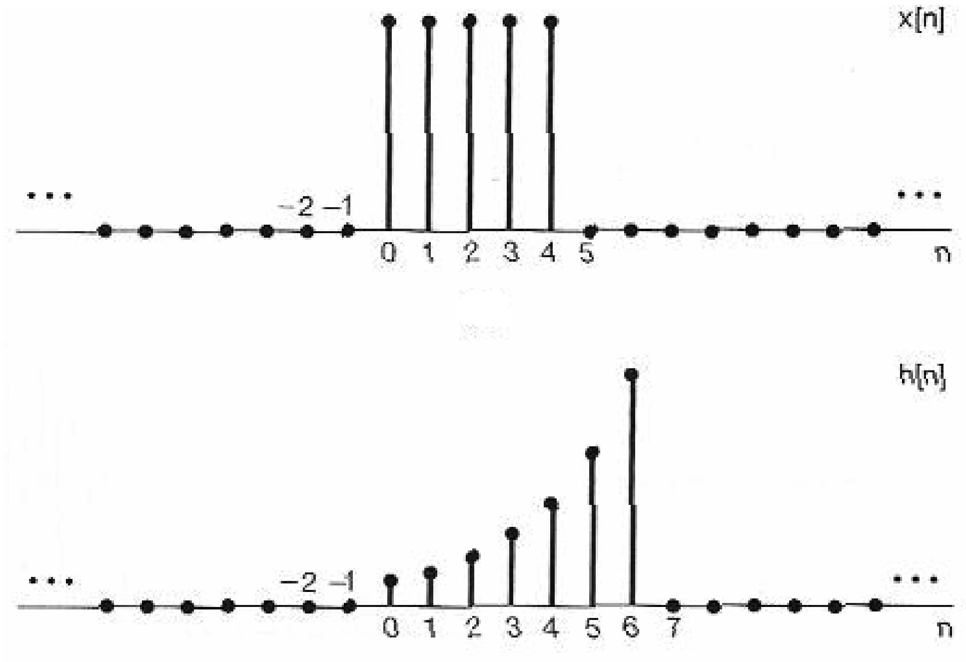
$$y[n] = \begin{cases} \dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

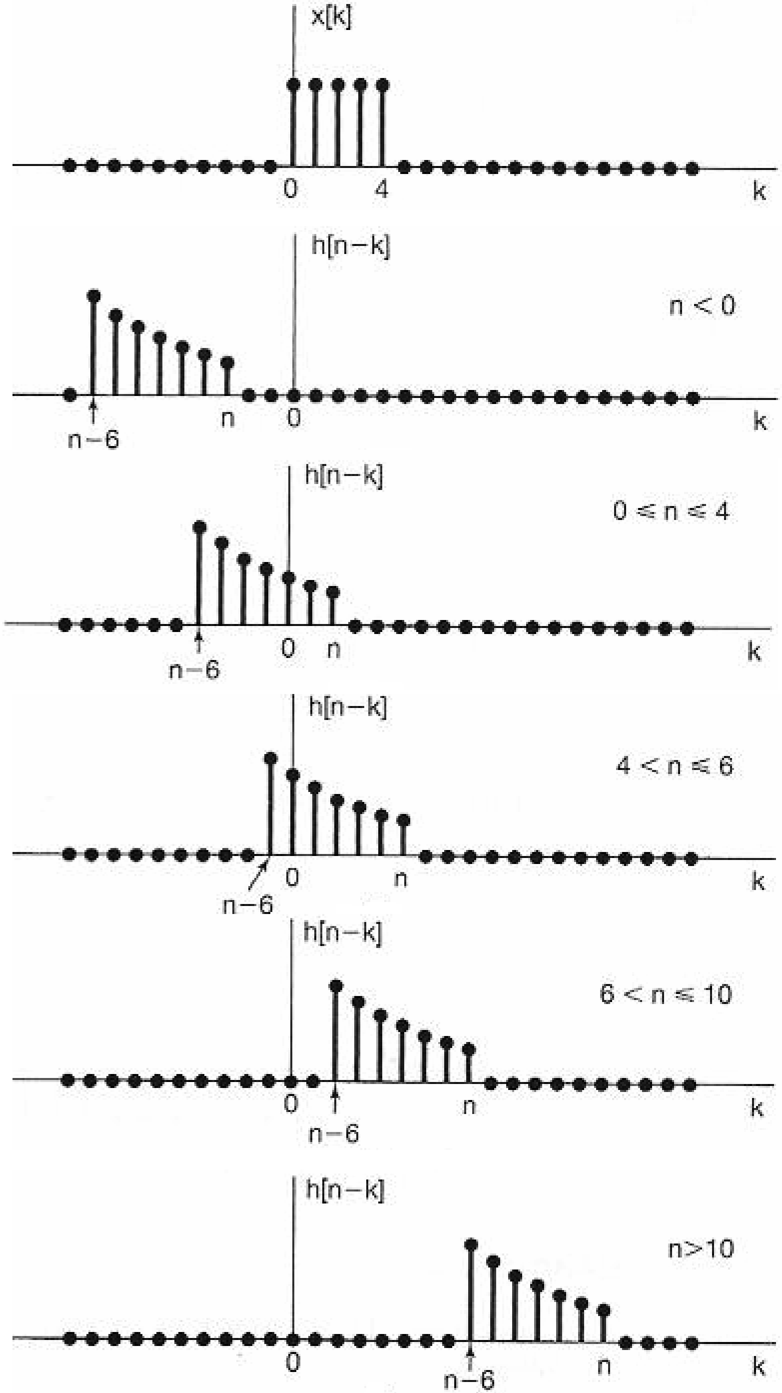


Ayrık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi

ÖRNEK: Bir ayrık-zaman LTI sistemin impuls yanıtı $h[n]$ ve sisteme uygulanan giriş $x[n]$ aşağıda verilmiştir. Sistemin çıkışını hesaplayınız.

$$x[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le 4\\ 0, & \text{aksi halde}\end{cases} \qquad h[n]=\begin{cases}\alpha^n, & 0\le n\le 6\\ 0, & \text{aksi halde}\end{cases}$$





Aralık 1: $n < 0$.
Aralık 2: $0 \leq n < 4$
Aralık 3: $4 < n \leq 6$
Aralık 4: $6 < n \leq 10$
Aralık 5: $n > 10$.

Ayrık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi

- ÇÖZÜM: $x[k]h[n\text{-}k]$ çarpımı 5 aralıkta farklı değerler aldığından, çıkış her aralıkta ayrı ayrı hesaplanmalıdır.
- Aralık 1 ($n < 0$): $x[k]h[n\text{-}k]$ çarpımı sıfır olup $y[n] = 0$.
- Aralık 2 ($0 \leq n < 4$):

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} = \sum_{r=0}^{n} \alpha^{r} = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

Ayrık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi

- Aralık 3 ($4 < n \leq 6$):

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & 0 \leq k \leq 4 \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{4} \alpha^{n-k} = \alpha^n \sum_{k=0}^{4} \left(\alpha^{-1}\right)^k = \alpha^n \frac{1-\left(\alpha^{-1}\right)^5}{1-\alpha^{-1}} = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

- Aralık 4 ($6 < n \leq 10$):

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & n-6 \leq k \leq 4 \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

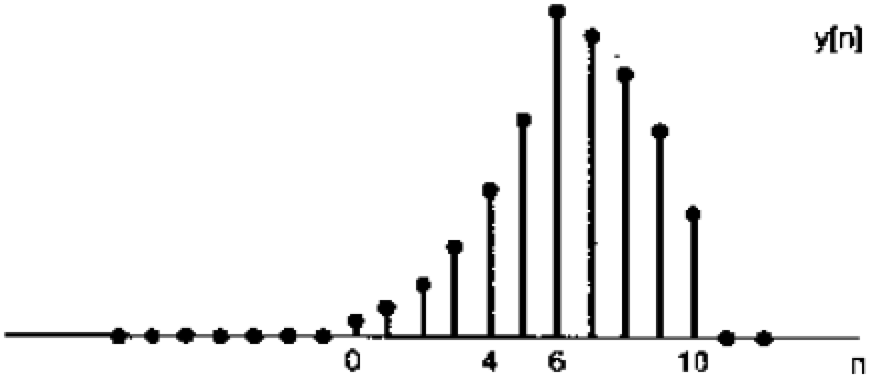
$$y[n] = \sum_{k=n-6}^{4} \alpha^{n-k} = \sum_{r=0}^{10-n} \alpha^{6-r} = \alpha^6 \sum_{r=0}^{10-n} \left(\alpha^{-1}\right)^r = \alpha^6 \left(\frac{1-\alpha^{n-11}}{1-\alpha^{-1}} \right) = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^7}{1-\alpha}$$

- Aralık 5 ($n \geq 10$): $x[k]h[n-k]$ çarpımı sıfır olup $y[n] = 0$.

Ayrık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi

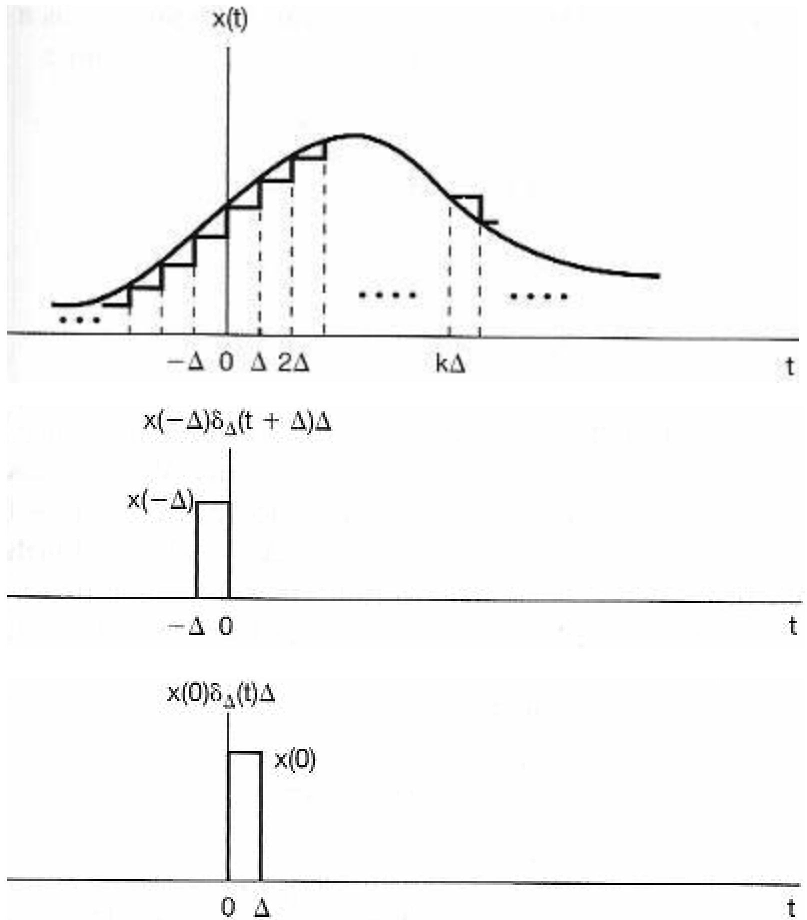
Özetle,

$$y[n]=\begin{cases} 0, & n<0 \\ \dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}, & 0\le n\le 4 \\ \dfrac{\alpha^{n-4}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}, & 4<n\le 6 \\ \dfrac{\alpha^{n-4}-\alpha^{7}}{1-\alpha}, & 6<n\le 10 \\ 0, & n>10 \end{cases}$$



Sürekli-zaman işaretlerin impuls cinsinden ifade edilmesi

Bir sürekli-zaman işareti ötelenmiş darbelerin toplamı biçiminde yaklaşık olarak yazılabilir. Aşağıda bir sürekli-zaman işaretin $-\Delta \leq t \leq \Delta$ aralığındaki darbe yaklaşıklığı çizilmiştir.



Sürekli-zaman işaretlerin impuls cinsinden ifade edilmesi

- $\delta_\Delta(t)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta}, & 0 \le t < \Delta \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

- Sürekli-zaman işaret yaklaşık olarak şöyle yazılabilir:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t - k\Delta)\Delta$$

- Δ küçüldükçe yaklaşıklık iyileşir ve $\Delta \to 0$ limit durumunda $x(t)$ elde edilir. Yani,

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{\Delta \to 0} \hat{x}(\mathrm{t}) \\ &= \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t - k\Delta)\Delta \end{aligned}$$

Sürekli-zaman işaretlerin impuls cinsinden ifade edilmesi

- $\Delta \to 0$ limit durumunda toplama integrale eşit olur (Riemann integral tanımını hatırlayınız!).

- Ayrıca, $\Delta \to 0$ limit durumunda $\delta_\Delta(t)$ fonksiyonu $\delta(t)$'ye eşit olur. O halde,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

- Örnek olarak, x(t) = $u(t)$ olsun. $t < 0$ için $u(t) = 0$ ve $t \geq 0$ için $u(t) = 1$ olduğundan $u(t)$ ile $\delta(t)$ arasında daha önce verdiğimiz aşağıda verilen ilişki elde edilir:

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{0}^{\infty} \delta(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

Sürekli-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon integrali gösterilimi

- Bir sürekli-zaman LTI sistemin keyfi bir $\hat{x}(t)$ girişine olan yanıtını bulmaya çalışalım. Girişi,

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t-k\Delta)\Delta$$

şeklinde yazabiliriz.

- Sistemin $\delta_{\Delta}(t\text{-}k\Delta)$ 'ya olan yanıtını ile $\hat{h}_{k\Delta}(t)$ belirtelim. Sistem doğrusal olduğundan, $\hat{x}(t)$ 'ye yanıtı aşağıdaki eşitlikle verilir.

$$\hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{k\Delta}(t)\Delta$$

- $\Delta \rightarrow 0$ limit durumunda $x(t) = \hat{x}(t)$ ve doayısıyla $y(t) = \hat{y}(t)$ olur. Yani,

$$\begin{aligned} y(t) &= \lim_{\Delta \to 0} \hat{y}(t) \\ &= \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{k\Delta}(t)\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta_{\tau}(t)d\tau \end{aligned}$$

Sürekli-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon integrali gösterilimi

- Sistem zamanla değişmez olduğundan

$$h_\tau(t) = h_0(t-\tau)$$

ilişkisi geçerli olmalıdır.

- Notasyon kolaylığı için $h(t) = h_0(t)$ yazacak ve $h(t)$'ye sistemin İMPULS YANITI (sisteme $\delta(t)$ uygulandığında elde edilen yanıt) diyeceğiz.

- Sonuç olarak, bir sürekli-zaman LTI sistemin impuls yanıtı $h(t)$ ve sisteme uygulanan giriş $x(t)$ ise, sistemin yanıtı

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

ilişkisinden hesaplanır. Bu ilişkiye KONVOLÜSYON INTEGRALİ denir ve kısaca $y(n) = x(t) * h(t)$ şeklinde gösterilir.

Sürekli-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon integrali gösterilimi

- Çıkışın herhangi bir t anındaki değerinin konvolüsyon integralinden hesaplandığını hatırlayınız:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- İlk önce, $x(\tau)$ ve $h(t\text{-}\tau)$ işaretleri τ'nun fonksiyonu olarak çizilir. Bu iki fonksiyon çarpılarak $g(\tau) = x(t)h(t\text{-}\tau)$ işareti elde edilir.

- Daha sonra, $g(\tau)$ işaretinin τ değerleri üzerinden inetgrali alınarak $y(t)$ bulunur.

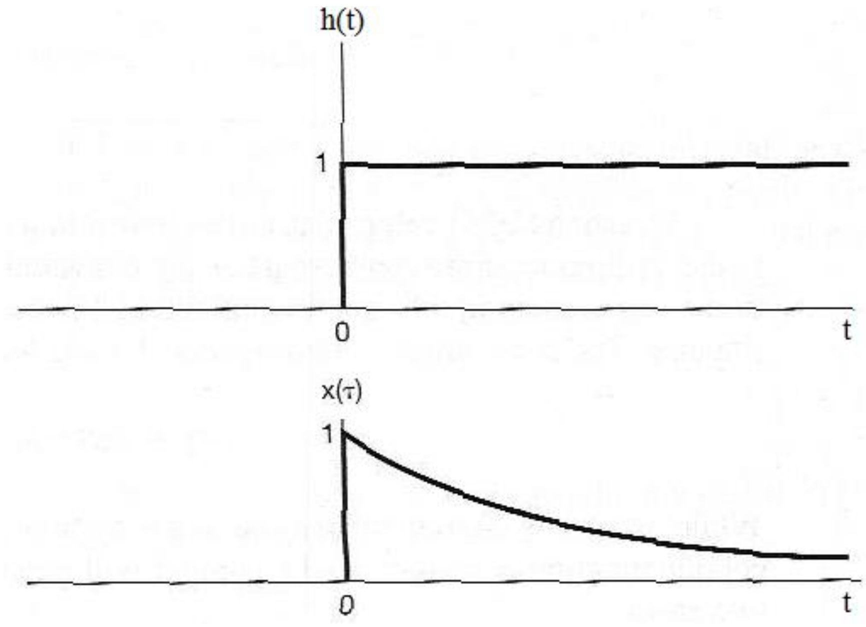
- Çıkışı bulmak için bu işlem tüm t değerleri için tekrarlanır.

- Bu işlem yapılırken $h(t\text{-}\tau)$'nın $h(\tau)$'nun zaman tersine çevrilmiş ve t kadar ötelenmiş hali olduğu hatırda tutulmalıdır.

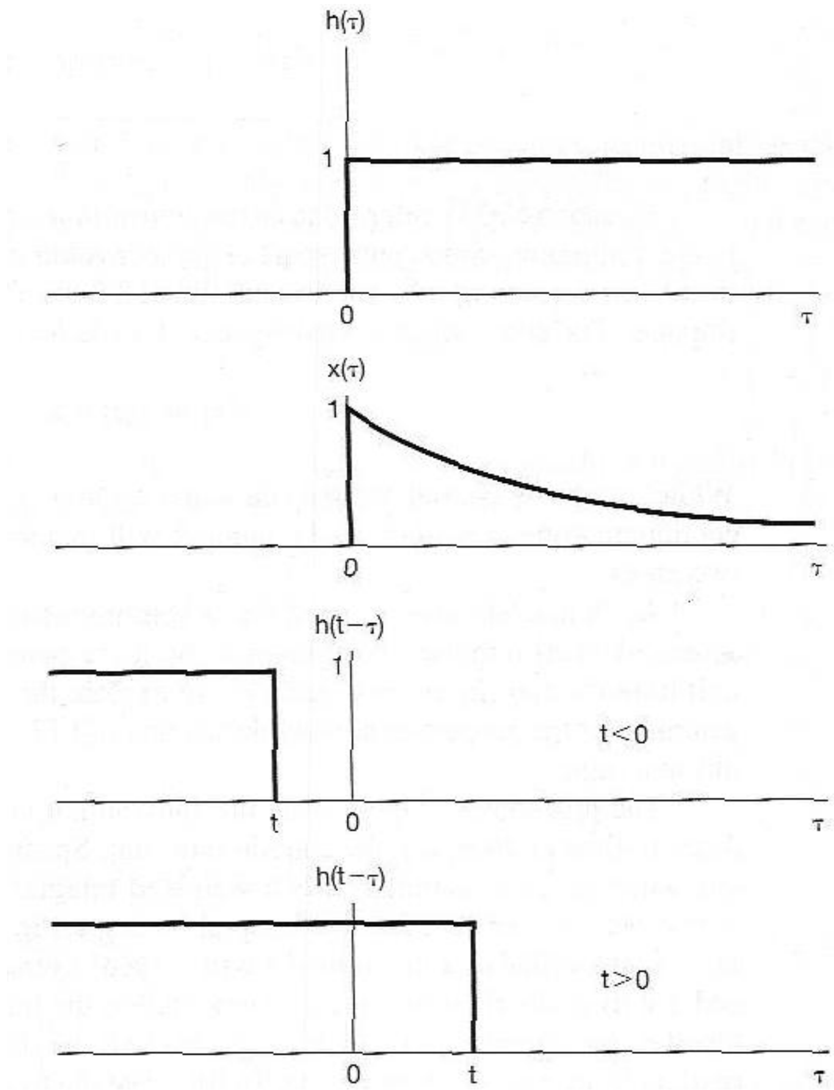
Sürekli-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon integrali gösterilimi

ÖRNEK: Bir sürekli-zaman LTI sistemin impuls yanıtı *h*(t) ve sisteme uygulanan giriş *x*(*t*) aşağıda verilmiştir. Sistemin çıkışını hesaplayınız.

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$$
$$h(t) = u(t)$$



ÇÖZÜM: Aşağıda $x(\tau)$ ve $h(t\text{-}\tau)$ işaretleri $t < 0$ ve $t \geq 0$ için çizilmiştir.



- Şekillerden t < 0 ise, $x(\tau)$ ve $h(t\text{-}\tau)$ işaretlerinin kesişmeyip $x(\tau)h(t\text{-}\tau)$ çarpımının sıfıra eşit olduğu görülmektedir. O halde, t < 0 ise $y(t) = 0$.

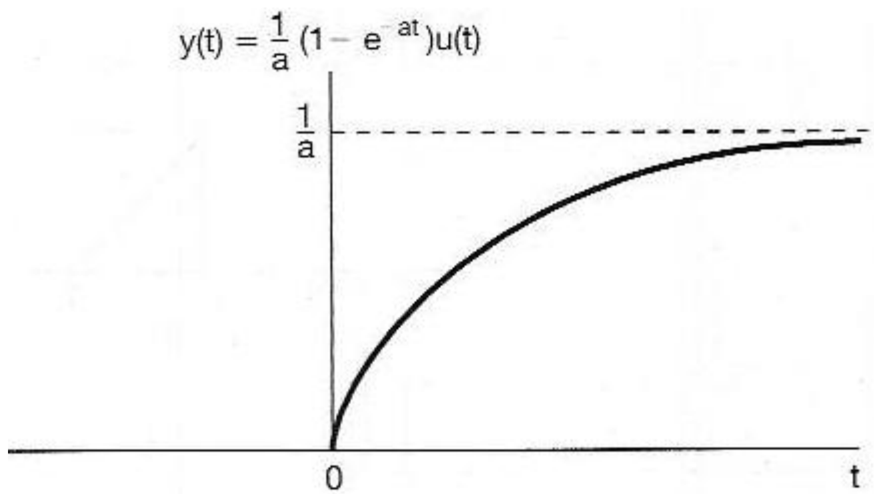
- $t \geq 0$ ise, işaretler $0 \leq \tau \leq t$ aralığında kesiştiğinden $x(\tau)h(t\text{-}\tau)$ çarpımı şöyle olur:

$$x(\tau)h(t-\tau) = e^{-a\tau}$$

- $y(t)$'yi belirlemek için konvolüsyon integrali hesaplanmalıdır.

$$y(t) = \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = -\frac{1}{a} e^{-a\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})$$

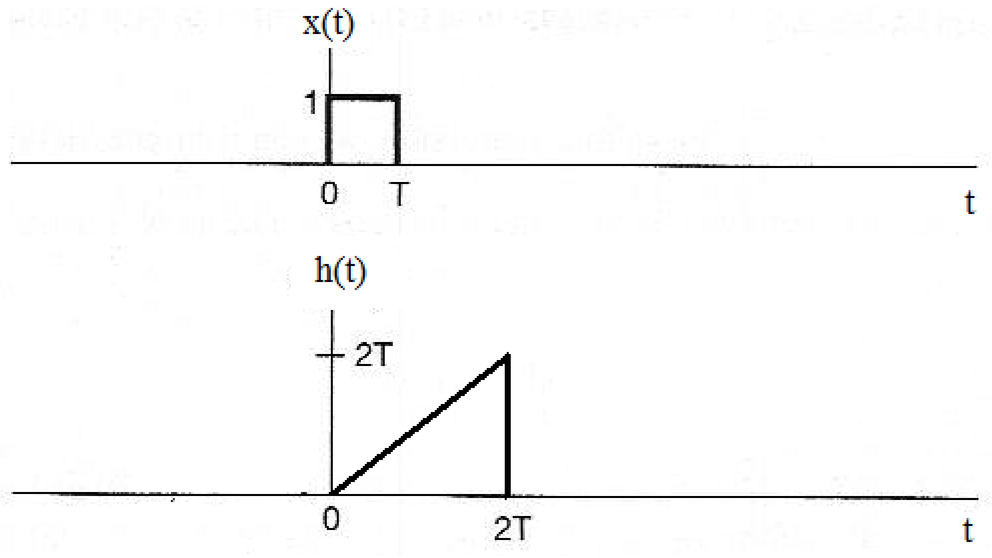
- Özetle, $y(t) = \dfrac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t)$

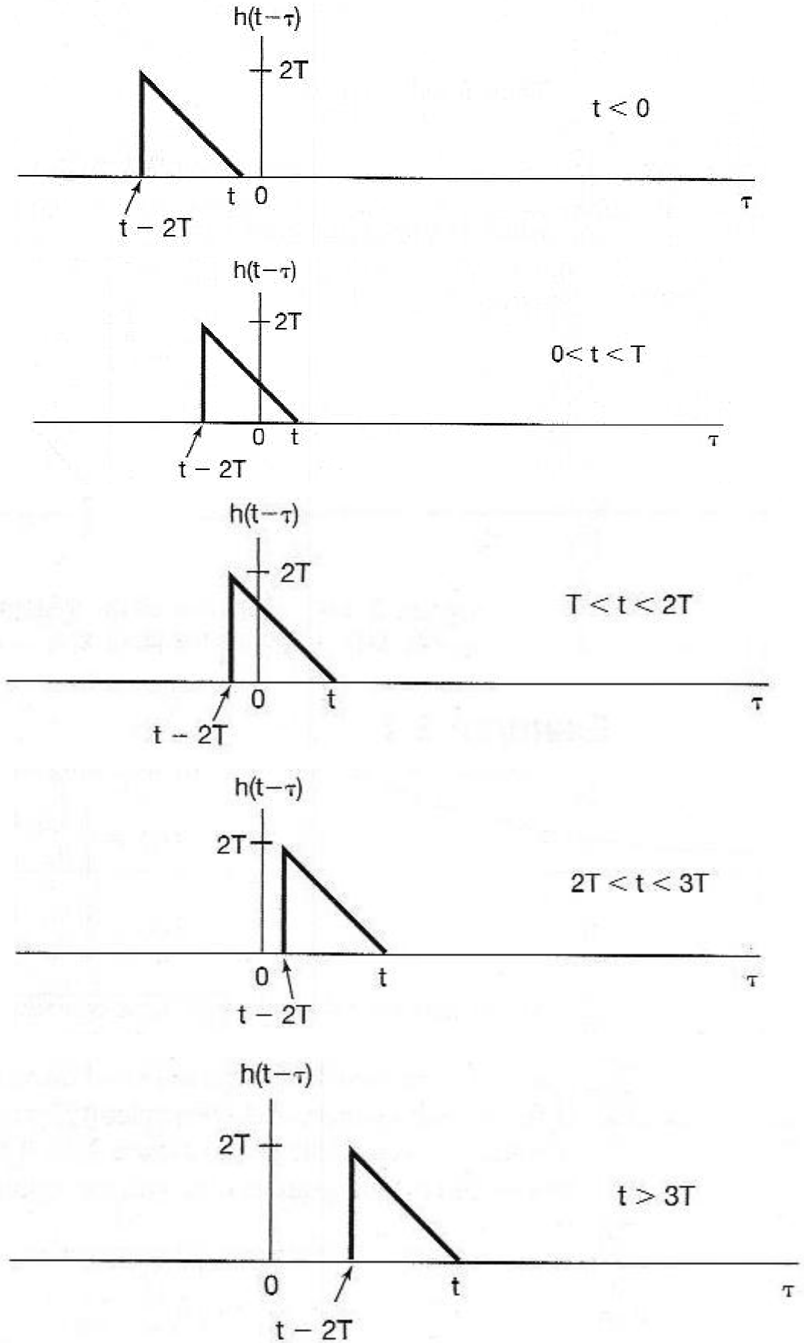


Sürekli-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon integrali gösterilimi

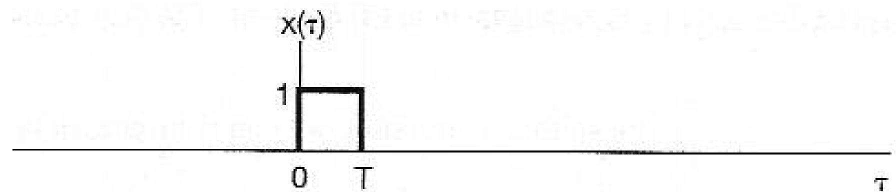
ÖRNEK: Bir sürekli-zaman LTI sistemin impuls yanıtı *h*(t) ve sisteme uygulanan giriş *x*(*t*) aşağıda verilmiştir. Sistemin çıkışını hesaplayınız.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases} \qquad h(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 2T \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$



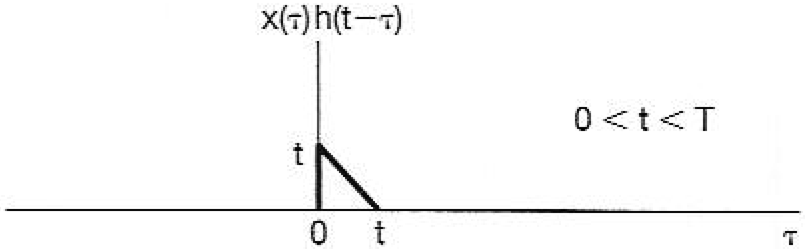


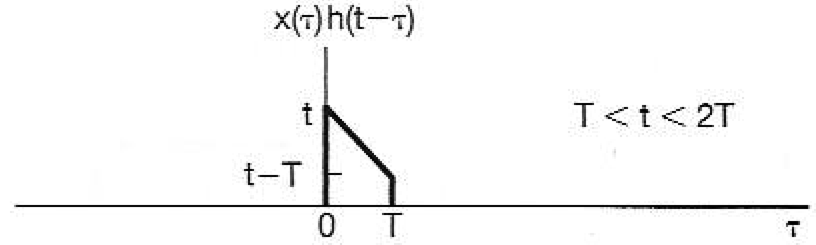
Aralık 1: $t < 0$.
Aralık 2: $0 \leq t < T$
Aralık 3: $T \leq t < 2T$
Aralık 4: $2T < 4 \leq 3T$
Aralık 5: $t > 3T$

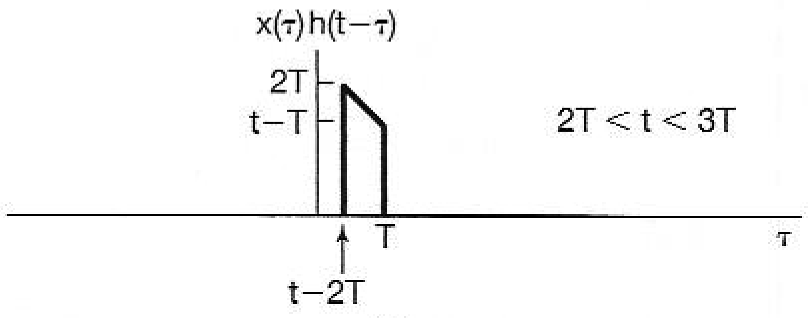


Sürekli-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon integrali gösterilimi

- ÇÖZÜM: $x(\tau)h(t\text{-}\tau)$ çarpımı 5 aralıkta farklı değerler aldığından, çıkış her aralıkta ayrı ayrı hesaplanmalıdır.
- Aralık 1 (t < 0): $x(\tau)h(t\text{-}\tau)$ çarpımı sıfır olup $y(t) = 0$.
- Aralık 5 ($t > 3T$): $x(\tau)h(t\text{-}\tau)$ çarpımı sıfır olup $y(t) = 0$.
- Diğer üç aralıkta $x(\tau)h(t\text{-}\tau)$ çarpımı aşağıda çizilmiştir.







Sürekli-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon integrali gösterilimi

Çıkışı bulmak için $x(\tau)h(t\text{-}\tau)$ çarpımının ilgili aralıklardaki integrali hesaplanır. Sonuç ve çıkış işaretinin grafiği aşağıda verilmiştir.

$$y(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ \frac{1}{2}t^2 & 0\le t<T \\ Tt-\frac{1}{3}t^2, & T\le t<2T \\ -\frac{1}{2}t^2+Tt+\frac{3}{2}T^2, & 2T\le t<3T \\ 0, & t>3T \end{cases}$$