Bilgisayar Mühendisliğinde Mat. Uygulamaları:

30/04/2019
Salı

$$b_i^T = [\, b_{i1} \;\; b_{i2} \;\; \ldots \;\; b_{in} \,]_{1\times n}$$

$$A = \begin{bmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \\ b_m^T \end{bmatrix}_{m\times n}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ 1 & 1 & & \\ & & & 1 \end{bmatrix}_{m\times n}$$

b → skaler
b → vektör
B → matris

$$a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad B = A(1:2,\ 2:3)$$

Örnek:

$A(:,3)' \,.\, A(:,1)$

$A' \longrightarrow A^H$

$A.' \longrightarrow A^T$

$$[\,3 \;\; 6 \;\; 9\,] \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Bir matrisin birim matris ile çarpımı kendisidir.

Vektörel Çarpım (Hadamard Çarpım)

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \bar{x} .* \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} .* \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 2.5 \\ 3.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 18 \end{bmatrix}$$

↓
hadamard çarpım

Skaler a x plus y (Saxpy)

$$\bar{y} = a\,\bar{x} + \bar{y}$$

iç Çarpım

$$X^T . y \longrightarrow [\, x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_n \,] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \ldots + x_ny_n$$

```
c = 0
for i = 1 : n
[ c = c + x(i) . y(i)
end
```

complexity (karmaşıklık) → kaç tane toplama
kaç tane çarpma var.

Toplama	Çarpma
n	n

$O(n)$
↑
order

$$[\ ]_{n\times n}[\ ]_{n\times n} = [\ ]_{n\times n}$$

1 eleman için n Toplama
n Çarpma

toplam eleman sayısı
$n\times n = n2$ $n^2 \cdot n = n^3$ top
n^3 Çarp.

Karmaşıklık $O(n^3)$

Örnek: $\bar{y} = a\bar{x}+y$ için → for i = 1 : n

y(i) = a x(i) + y(i);

end → bitiş.

Karmaşıklık n toplama, n çarpma } $O(n)$

$O(n^3) \rightarrow O(10^6)$

$O(\log(n)^3) \rightarrow O([\log(100)^3] = O(6)$

En karmaşık → $O(10^6)$

Sade → $O(6)$

SORU: $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\bar{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

$\bar{x} \cdot \bar{y}^T \cdot \bar{x}$

Yöntem 1: $\bar{x}\,\bar{y}^T = [\ ]_{3\times 3}$

$[\ ]_{3\times 3}[\ ]_{3\times 1} = [\ ]_{3\times 1}$

Yöntem 2: $\bar{y}^T \cdot \bar{x} = [\ ]_{1\times 3}[\ ]_{3\times 1} = a_{1\times 1}$

$\bar{x} \cdot a = [\ ]_{3\times 1}$ → Sonuç vektör çıkar.

Matris - Vektör Çarpımı ve Gaxpy

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$

$\bar{y} = A\bar{x} + y$ → Generalized Saxpy Operation (Gaxpy)

matris ile çarpıyoruz.

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

matrisin i. satırı ile

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

i. satır $[\ ]\,[\ ] = [\cdot]$ ← i. eleman

$i = 2$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} x_2 + a_{2n} \cdot x_n + y_2 = y_2$$

Gaxpy Algoritması: (Satır Versiyonu - Row Version)

```
for i = 1 : m
    for j = 1 : n
        y(i) = A(i,j) . x(j) + y(i);
end end
```

burdan elde ediyor.

Karmaşıklık:

toplama	çarpma
m.n	m.n

$\Rightarrow$ karmaşıklığı $\Rightarrow O(m.n)$

Eğer $m=n$ ise $\Rightarrow O(n^2)$ ikisi de Aynı Sonuç

Örnek: $\underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}} \cdot \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}} = \underbrace{\underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} 1.7+2.8 \\ 3.7+4.8 \\ 5.7+6.8 \end{bmatrix}}}_{\text{Row Version}} = \underbrace{7.\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + 8.\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}}_{\text{Column Version (Sütun Versiyonu)}}$

Gaxpy Algoritması (Sütun Versiyonu)

```
for j = 1 : n
    for i = 1 : m
        y(i) = A(i, j) x(j) + y(i)
    end
end
```

$\left\{ \begin{array}{l} A_{m\times n} \\ \bar{x}_{n\times 1} \\ \bar{y}_{m\times 1} \end{array} \right\}$ HATIRLA

$\Rightarrow$ Karmaşıklık $O(mn)$

satır ile sütun'un yerini değiştirdik.

Örnek: $\underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}} \underset{1\times 2}{\begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1.4+1.5 \\ 2.4+2.5 \\ 3.4+3.5 \end{bmatrix}$

Outer product Update
"Dış Çarpım Güncellemesi"

$[\quad]\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} \rightarrow$ iç çarpım güncellemesi

$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}[\quad] \rightarrow$ dış " "

$A \in R^{m\times n}, \ \bar{x} \in R^m, \ \bar{y} \in R^n$

$A = A_{m\times n} + \underbrace{\bar{x}_{m\times 1}\, \bar{y}^T_{1\times n}}_{m\times n}$ $\rightarrow$ outer product update

Algoritma: (Outer product Update)

```
for i = 1 : m
    for j = 1 : n
        A(i, j) = A(i, j) + x(i) . y(j)
    end
end
```

Karmaşıklık : $O(mn)$

Matris - Matris Çarpımı

Örnek:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 + 2.7 & 1.6 + 2.8 \\ 3.5 + 4.7 & 3.6 + 4.8 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Inner Product Update}$$

Outer product Update $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} 1.5 & 1.6 \\ 3.5 & 3.6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.7 & 2.8 \\ 4.7 & 4.8 \end{bmatrix}$

1. sütun 1. satır
2. sütun 2. satır.

$A = A + xy^T \rightarrow$ Outer product Update.

$A_{4\times 3} \cdot B_{3\times 2} = C_{4\times 2}$

k

A'yı sutun al
j'yi sutun al

Örnek:

$C = AB + C$

(ijk Varyatı) $A \in R^{m\times p}$, $B \in R^{p\times n}$, $C \in R^{m\times n}$

$i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, p$

```
for i = 1 : m          Satır
   for j = 1 : n       Sütun
      for k = 1 : p    her döngüde yapılan işlem
         C(i,j) = A(i,k) B(k,j) + C(i,j)
      end
   end
end
```

} Inner Product Update

Karmaşıklık : $O(mnp)$

eğer $m = n = p \Rightarrow O(n^3)$ dür.

Ödev: $C = AB + C$ işlemini "Outer Product Update" olarak yaparsak Algoritmasını yazın.