Çözümlü

MATEMATİK ANALİZ

Problemleri

Cilt – 2

Prof.Dr. Mustafa BALCI

Doç. Dr. Ali ARAL

2. Basım

Baskı : Ertem Basım Ltd.Şti.

Kızılırmak Cad. No. 10 Ankara

(0.312) 418 07 11 Ankara

İSTEME ADRESİ :

BALCI YAYINLARI

Mithatpaşa Cad. No. 43/8 Kızılay/Ankara

Tel : (0.312) 431 46 52

Faks : (0.312) 432 40 36

e-mail : balciyayinlari @ g mail.com.

ÖNSÖZ

Bu kitap, **MATEMATİK ANALİZ – 2** adlı kitabımın problemlerinin çözümlerini kapsamakla birlikte, seriler, düzgün yakınsaklık, kuvvet serileri, Taylor serileri, genelleştirilmiş integraller, vektör değerli fonksiyonlar, çok değişkenli fonksiyonlar, iki ve üç katlı integraller, eğrisel integraller ve yüzey integralleri konularını kapsayan tüm matematik dersleri için faydalı olacaktır.

Her bölümün başında ve ihtiyaç duyulan yerlerde o bölümde ele alınan problemlerin çözümünde gerekli olan tanım ve teoremlerin ifadesi verilmiştir. Böylece çözümlerin daha kolay anlaşılması sağlanmıştır.

Öğreten ve öğrenenlere yararlı olması dileğiyle

Prof.Dr. Mustafa BALCI

EKİM, 2008

www.ieeeturkiye.wordpress.com adına yüklenmiş olup toplumları geliştiren bilginin herhangi bir şekilde ulaşılaşılamaz olmasını kabullenemeyen kişi veya kişiler tarafından upload edilmiştir.saygılarımzla..

İÇİNDEKİLER

Bölüm 1 SERİLER

SERİLER

TANIM:

(a_n) dizisi verilmiş olsun. Genel terimi

$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$

şeklinde tanımlanan (s_n) dizisini gözönüne alalım. $\big((a_n), (s_n)\big)$ ikilisine seri adı verilir. a_n terimine, serinin **genel terimi**, (s_n) dizisine de serinin **kısmi toplamlar dizisi** denir. Eğer (s_n) kısmi toplamlar dizisi bir s sayısına yakınsak, yani $\lim s_n = s$ ise $\big((a_n, s_n)\big)$ serisi **yakınsak** ve serinin toplamı s dir denir. Yakınsak olmayan seriye **ıraksak seri** adı verilir. Genel terimi a_n olan seri $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ biçiminde gösterilir.

TANIM:

$\sum_{n=1}^{\infty} c\,a^{n-1}$ biçimindeki serilere **Geometrik Seri** adı verilir.

TEOREM 1.1:

$|a| < 1$ için $\sum_{n=1}^{\infty} c\,a^{n-1} = \dfrac{c}{1-a}$ dır

TEOREM 1.2:

Eğer bir seri yakınsak ise genel terimi sıfıra gider.

SONUÇ:

Genel terimi sıfıra gitmeyen seriler ıraksaktır.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. (a_k) dizisi yakınsak olduğunda $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k+1})$ serisi de yakınsak ve toplamının $a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n$ olacağını gösteriniz. (Teleskopik seri)

Çözüm:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots\ldots + (a_{n-1} - a_n) + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

(a_n) dizisi yakınsak ise (a_{n+1}) dizisi de yakınsak ve limiti (a_n) dizisinin limiti ile aynıdır. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_{n+1} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a_1 - \lim a_n$$

olur.

2. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)} = \frac{3}{4}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(4k-3)(4k+1)} = 1$ ç) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!} = 1$ e) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^k - 3^k}{12^k} = \frac{1}{6}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+p)(n+p+1)} = \frac{1}{1+p}$ $(p > 0)$ g) $\sum_{k=1}^{\infty}\ln\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2} = \ln\frac{2}{3}$

h) $\sum_{k=1}^{\infty}\sin^{2k}\theta = \tan^2\theta, \left(\theta \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ ı) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = +\infty$

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right) = 1 - \sqrt{2}$ k) $\sum_{k=2}^{\infty}\ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = -\ln 2$

l) $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2} = \frac{\pi}{4}$ m) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)} = \frac{1}{p\,p!}$

Çözümler:

a) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)} = \frac{3}{4}$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$$

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+2} \Rightarrow \frac{1}{k(k+2)} = \frac{k(A+B)+2A}{k(k+2)}$$

$$\Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}\ ,\quad B = -\frac{1}{2}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+4} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{4} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)} = \frac{3}{4}$$

b) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k(k+1)} + \frac{B}{(k+1)(k+2)} \Rightarrow 1 = A(k+2) + Bk$$

$$\Rightarrow A + B = 0 \text{ ve } 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}\ ,\ B = -\frac{1}{2}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] \text{ bulunur}$$

$\lim S_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ olacağından $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}$ bulunur.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(4k-3)(4k+1)}=1$

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{(4k-3)(4k+1)},$$

$$\frac{4}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{A}{(4k-3)}+\frac{B}{(4k+1)} \Rightarrow$$

$$\frac{4}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{4k(A+B)+A-3B}{(4k-3)(4k+1)} \Rightarrow$$

$$A+B=0,\quad A-3B=4 \quad\Rightarrow\quad A=1,\quad B=-1$$

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k+1}\right)=\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)+\ldots\ldots+\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{4n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}1-\frac{1}{4n+1}=1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(4k-3)(4k+1)}=1$$

ç) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=1$

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{n^2}\right)+\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$=1-\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}1-\frac{1}{(n+1)^2}=1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=1$$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)!}=1$

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$$

$$=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}1-\frac{1}{(n+1)!}=1 \quad\Rightarrow\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)!}=1$$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^k-3^k}{12^k}=\frac{1}{6}$

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{4^k-3^k}{12^k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4^k}{12^k}-\frac{3^k}{12^k}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^k-\left(\frac{1}{4}\right)^k\right]=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

$$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}\right]-\frac{1}{4}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}}\right]-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}}\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^k-3^k}{12^k}=\frac{1}{6}$$

f) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+p)(n+p+1)}=\frac{1}{1+p} \qquad (p>0)$$

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+p)(k+p+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+p}-\frac{1}{k+p+1}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+2}\right)+\left(\frac{1}{p+2}-\frac{1}{p+3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n+p}-\frac{1}{n+p+1}\right)$$

$$=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{n+p+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{p+1}-\frac{1}{n+p+1}=\frac{1}{p+1}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+p)(n+p+1)}=\frac{1}{1+p}$$

g) $$\sum_{k=1}^{\infty}\ln\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}=\ln\frac{2}{3}$$

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}=\sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)+\ln(k+3)-2\ln(k+2)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}[\ln(k+1)-\ln(k+2)]+\sum_{k=1}^{n}[\ln(k+3)-\ln(k+2)]$$

$$=\ln 2-\ln(n+2)-\ln 3+\ln(n+3)=\ln\frac{2}{3}+\ln\frac{n+3}{n+2}$$

$$\lim s_n=\ln\frac{2}{3}+\lim\ln\frac{n+3}{n+2}=\ln\frac{2}{3}+\ln 1=\ln\frac{2}{3}$$ olur.

h) $$\sum_{k=1}^{\infty}\sin^{2k}\theta=\tan^2\theta \qquad \left(\theta\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}(\sin^2\theta)^k=\sin^2\theta+(\sin^2\theta)^2+(\sin^2\theta)^3+\ldots+(\sin\theta)^2$$

$$=\sin^2\theta\left[1+\sin^2\theta+(\sin^2\theta)^2+\ldots+(\sin^2\theta)^{n-1}\right]=\sin^2\theta\,\frac{1-(\sin^2\theta)^n}{1-\sin^2\theta}$$

$0\le\sin^2\theta<1$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\tan^2\theta\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\sin^{2k}\theta=\tan^2\theta$$

olur.

ı) $$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)=+\infty$$

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k+1}-\sqrt{k}=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

$$=\sqrt{n+1}-1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-1=+\infty$$

olur.

Kısmi toplamlar dizisi ıraksak olduğundan seri ıraksaktır:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)=+\infty.$$

i) $$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=1-\sqrt{2}$$

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k+1}\right)$$

$$=\left[\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{5}-\sqrt{4}\right)+\ldots+\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)\right]$$

$$+\left[\left(1-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\ldots+\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)\right]$$

$$=\left[-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}\right]+\left[1-\sqrt{n+1}\right]$$

$$=1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$$

bulunur.

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left[1-\sqrt{2}+\frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=1-\sqrt{2}\right)$$

olur. Seri yakınsak ve toplamı $1-\sqrt{2}$ 'dir.

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+2)}=\frac{1}{4}$

$$s_n=\sum_{n-1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k(k+2)}=\frac{1}{1.3}-\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}-\frac{1}{4.6}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+2)}$$

$$s_{2n-1}=\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)-\left(\frac{1}{2.4}+\frac{1}{4.6}+\ldots+\frac{1}{(2n)(2n-2)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{(2n+1)(2n)}\to\frac{1}{4}$$

bulunur. n nin çift olması halinde benzer ispat yapılır.

O halde $\lim s_n=\frac{1}{4}$, dolayısıyla $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+2)}=\frac{1}{4}$ olur.

k) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=-\ln 2$

$$s_n=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\sum_{k=2}^{n}\ln\frac{k^2-1}{k^2}=\sum_{k=2}^{n}\ln\frac{(k+1)(k-1)}{k^2}$$

$$=\sum_{k=2}^{n}[\ln(k+1)+\ln(k-1)-2\ln k]$$

$$=\sum_{k=2}^{n}[\ln(k+1)-\ln k]+\sum_{k=2}^{n}[\ln(k-1)-\ln k]$$

$$=-\ln 2+\ln(n+1)+(\ln 1-\ln n)=-\ln 2+\ln\frac{n+1}{n}$$

bulunur. $\lim S_n=-\ln 2+\ln 1=-\ln 2$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=-\ln 2$$

olur.

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}=\frac{\pi}{4}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2k^2}$$

$$\arctan(a)+\arctan(b)=\arctan\frac{a+b}{1-a.b}$$

$$S_1=a_1=\arctan\frac{1}{2}$$

$$S_2=a_1+a_2=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{8}=\arctan\frac{2}{3}$$

$$S_3=S_2+a_3=\arctan\frac{2}{3}+\arctan\frac{1}{18}=\arctan\frac{3}{4}$$

$$\vdots$$

$$S_n=S_{n-1}+a_n=\arctan\frac{n-1}{n}+\arctan\frac{1}{2n^2}=\arctan\frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\arctan\frac{n}{n+1}=\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$$

$\Rightarrow$ seri yakınsak ve toplamı $\frac{\pi}{4}$ dür.

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}=\frac{1}{p.p!}$

$$\frac{p}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}=\frac{(p+n)-n}{n(n+1)\ldots(n+p)}$$

$$=\frac{1}{n(n+1)-(n+p-1)}-\frac{1}{(n+1)\ldots(n+p)}$$

$$pS_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{p}{k(k+1)\ldots(k+p)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\ldots(k+p-1)}-\frac{1}{(k+1)\ldots(k+p)}$$

$$=\frac{1}{\underbrace{1.2\ldots p}_{p!}}-\frac{1}{2.3\ldots(p+1)}+\frac{1}{2.3\ldots(p+1)}-\frac{1}{3.4\ldots(p+1)}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+p+1)}-\frac{1}{(n+1)\ldots(n+p)}$$

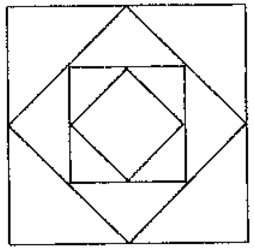
$$=\frac{1}{p!}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}$$

$$\Rightarrow pS_n=\frac{1}{p!}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}$$

$$\lim_{n\to\infty}pS_n=\frac{1}{p!}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{p.p!}$$

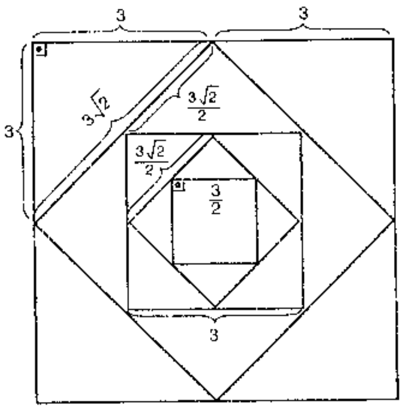
$\Rightarrow$ Seri yakınsak ve toplamı $\frac{1}{p.p!}$ dir.

3. Şekildeki dörtgenler birer kare olup herbiri bir öncekinin kenarlarının orta noktaları birleştirilerek oluşturulmuştur. En dıştaki karenin bir kenarının uzunluğu 6 cm ise sonsuz çokluktaki bu karelerin çevrelerinin uzunlukları toplamı kaç cm dir?



Çözüm:

Birinci karenin bir kenarının uzunluğu 6, ikinci karenin bir kenarının uzunluğu $\frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$, üçüncü karenin bir kenarının uzunluğu $\frac{6}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$, ... n inci karenin bir kenarının uzunluğu $\frac{6}{\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}}$ birim olur.

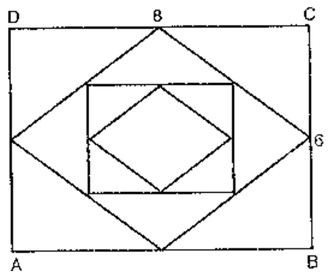


Buna göre tüm karelerin çevreleri toplamı

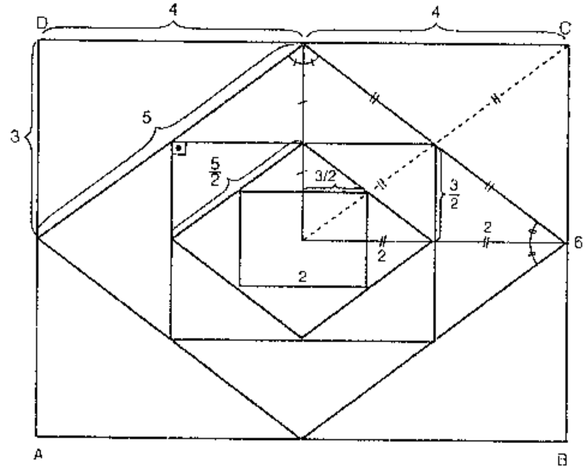
$$Ç = 4\left(6 + \frac{6}{\sqrt{2}} + \frac{6}{\left(\sqrt{2}\right)^2} + \dots\right)$$

$$= 24\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-1} = 24.\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = 24\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 24\left(2+\sqrt{2}\right)\text{cm olur.}$$

4. ABCD eni 6 cm, boyu 8 cm olan bir dikdörtgendir. Diğer sonsuz çokluktaki dörtgenlerden herbirinin köşeleri, bir öncekinin kenarlarının orta noktalarıdır. Tüm dörtgenlerin çevreleri toplamı kaç cm dir?



Çözüm:



Birinci, üçüncü, beşinci, ... dörtgenler dikdörtgen, diğerleri paralelkenardır.

Dikdörtgenlerin çevreleri toplamı

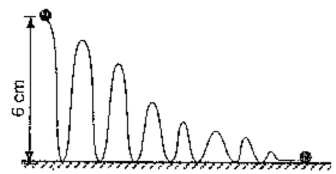
$$28 + \frac{28}{2} + \frac{28}{4} + \dots = 28\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 28\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 56\,\text{cm},$$

paralelkenarların çevreleri toplamı

$$20 + \frac{20}{2} + \frac{20}{4} + \dots = 20\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 20\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 40\,\text{cm}$$

olur. Tüm dörtgenlerin çevreleri toplamı 56 + 40 = 96 cm bulunur.

5. 6m yüksekten bırakılan bir top yere çarpınca düştüğü yüksekliğin $\frac{2}{3}$ si kadar yükseliyor. Top durduğunda kaç *m* yol almış olur?



Çözüm:

1. yükseklik: 6 m, 2. yükseklik: $\frac{2}{3}.6=4$

3. yükseklik: $\frac{2}{3}.4=\frac{8}{3}$, 4. yükseklik: $\frac{2}{3}.\frac{8}{3}=\frac{16}{9}$

5. yükseklik: $\frac{8}{3}.\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{32}{27}$, n. yükseklik: $\frac{8}{3}.\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}$

$$S_n = 6+2\left[4+\frac{8}{3}+\frac{16}{9}+\ldots+\frac{8}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}\right]$$

$$=6+8+2\left[\frac{8}{3}\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\ldots\left(\frac{2}{3}\right)^{n-4}\right)\right]=14+2\left[\frac{8}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}}{1-\frac{2}{3}}\right)\right]$$

Toplam yol $=\lim S_n=14+2\left[\frac{8}{3}.3\right]=14+16=30$ m.

6. $|r|<1$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} kr^{k-1}=\frac{1}{(1-r)^2}$$

olduğunu gösteriniz. Bundan yararlanarak

a) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}$ b) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k.\frac{k}{3^k}$ c) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{5^k}$

serilerinin toplamını bulunuz.

Çözüm:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k.r^{k-1}=1+2r+3r^2+\ldots+nr^{n-1}$$

$$r.S_n=r+2r^2+3r^3+\ldots+nr^n \Rightarrow S_n-rS_n=1+r+r^2+\ldots+r^{n-1}+nr^n$$

$$S_n(1-r)=1+r+r^2+\ldots+r^{n-1}+n.r^n \Rightarrow S_n(1-r)=\frac{1-r^n}{1-r}+n.r^n$$

$$(1-r)\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1-r}+\overbrace{\lim_{n\to\infty}nr^n}^{0} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{(1-r)^2}\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}kr^{k-1}=\frac{1}{(1-r)^2}$$

a) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ olur.

$\sum_{k=1}^{\infty}kr^{k-1}=\frac{r}{(1-r)^2}$ eşitliğinde $r=\frac{1}{2}$ yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^{k-1}}=\frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=2$$

bulunur. Dolayısıyla $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}=1$ olur.

b) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{3^k}$

$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{3^k}=-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}k\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ olur.

$\sum_{k=1}^{\infty}kr^{k-1}=\frac{1}{(1-r)^2}$ eşitliğinden

$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{3^k}=-\frac{1}{3}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{1}{3}.\frac{9}{16}=-\frac{3}{16}$ bulunur.

c) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{5^k}$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{5^k}=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{5^k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{5^k}=2.\frac{\frac{1}{5}}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^2}+\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}$$

$$=2.\frac{1}{5}.\frac{25}{16}+\frac{1}{5}.\frac{5}{4}=\frac{5}{8}+\frac{1}{4}=\frac{7}{8}$$

POZİTİF TERİMLİ SERİLER VE BU SERİLER İÇİN YAKINSAKLIK TESTLERİ

TANIM:

Her k doğal sayısı için $a_k > 0$ ise $\sum a_k$ serisine bir **pozitif terimli seri** denir.

TEOREM 1.3: (Karşılaştırma testi)

Her $k \in \mathbb{N}$ için $a_k \leq c.b_k$ olacak şekilde bir c sabiti var olsun.

1) $\sum b_k$ yakınsak ise $\sum a_k$ yakınsaktır.

2) $\sum a_k$ ıraksak ise $\sum b_k$ ıraksaktır.

TEOREM 1.4: (Limit Testi)

$\sum a_k$ pozitif terimli bir seri ve

$$\lim_{k\to\infty} k^{\alpha} a_k = \gamma$$

olsun.

1) $0 \leq \gamma < +\infty$ ve $\alpha > 1$ ise $\sum a_k$ yakınsaktır.

2) $\gamma > 0$ ve $\alpha \leq 1$ ise $\sum a_k$ ıraksaktır.

TEOREM 1.5: (D' Alembert Oran Testi)

Pozitif terimli $\sum a_k$ serisi için

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = r$$

olsun. Eğer

1) $r < 1$ ise $\sum a_k$ yakınsak,

2) $r > 1$ ise $\sum a_k$ ıraksaktır.

3) $r = 1$ ise şüpheli durum vardır.

TEOREM 1.6: (Cauchy kök testi)

Pozitif terimli $\sum a_k$ serisi için

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = r$$

olsun. Eğer

1) $r < 1$ ise $\sum a_k$ yakınsak,

2) $r > 1$ ise $\sum a_k$ ıraksak,

3) $r = 1$ ise şüpheli durum vardır.

TEOREM 1.7: (Kummer testi)

$\sum a_k$ bir pozitif terimli seri ve (P_k) da $\lim\left(P_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - P_{k+1}\right) = L$

limiti var olacak şekilde bir pozitif dizi olsun.

1) $L>0$ ise $\sum a_k$ yakınsaktır.

2) $L<0$ ve $\sum \frac{1}{P_k}$ ıraksak ise $\sum a_k$ ıraksaktır.

TEOREM 1.8: (Raabe testi)

$\sum a_k$ pozitif terimli bir seri ve $\lim\limits_{k\to\infty} k\left(\dfrac{a_{k+1}}{a_k}-1\right)=s$ olsun.

1) $s<-1$ ise $\sum a_k$ yakınsaktır.

2) $s>-1$ ise $\sum a_k$ ıraksaktır.

TEOREM 1.9: (Bertrand testi)

(a_n) pozitif terimli bir dizi ve

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_k}}{\ln k}=\ell$$

olsun.

1) $\ell<1$ ise $\sum a_k$ ıraksak,

2) $\ell>1$ ise $\sum a_k$ yakınsaktır.

TEOREM 1.10: (Benzerlik testi)

(a_k) pozitif ve monoton azalan bir dizi olsun.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ yakınsaktır $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{p=0}^{\infty} 2^p a_{2^p}$ yakınsaktır.

TEOREM 1.11: (İntegral testi)

(a_k) pozitif ve monoton azalan bir dizi, f de $[1,+\infty)$ aralığında monoton azalan bir fonksiyon olsun.

Her $k\in\mathbb{N}$ için $f(k)=a_k$ ise $\sum a_k$ serisinin yakınsak olması gerek ve yeter şart $\left(\int_1^n f(x)\,dx\right)$ dizisinin sınırlı olmasıdır.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. Aşağıdaki serilerin karakterini inceleyiniz.

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{3k+1}{2k+3}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{\frac{1}{n^2}}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3n)!}{(n!)^2}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^3}{(3n)!}$

f) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\ln k}{2^k}$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{5n}}{(2n)!\,n^{3n}}$

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

ı) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n-2}{n}\right)^{n^2}$

i) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{3^k(k!)}{k^k}$

j) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k}{e^k}$

k) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2+k+1}$

l) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\ln k}{k}$

m) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\ln k}{k^3}$

n) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k+1}{k.2^k}$

o) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\ln k}{k\sqrt{k}}$

ö) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{2^{100}}$

p) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\left(\dfrac{3}{4}\right)^k$

r) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{10^n}{n!}$

s) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{1.3.5\ldots(2n-1)}$

ş) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{(3n)!}$

t) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}e^{-k^2}$

u) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[\dfrac{1.4.7\ldots(3k-2)}{3.6.9\ldots(3k)}\right]^2$

ü) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}(1-\alpha)\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)\ldots\left(1-\dfrac{\alpha}{k}\right)$

v) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{k^k}$

y) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+k)}$

z) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots(2k)}\cdot\dfrac{1}{2k+1}$

Çözüm:

a) $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{3k+1}{2k+3} = \dfrac{3}{2} \neq 0$ olduğundan verilen seri ıraksaktır.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{n^2}} = 3^0 = 1 \neq 0$ olduğundan verilen seri ıraksaktır.

c) D'Alembert oran testinden,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!}{\left[(n+1)!\right]^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4 > 1$$

olduğundan, verilen seri ıraksaktır.

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3n)!}{(n!)^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+3)!}{(n+1)!^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(3n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2} = \infty$$

olduğundan seri ıraksaktır.

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^3}{(3n)!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{[(n+1)!]^3 (3n)!}{(3n+3)!(n!)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = \frac{1}{27} < 1$$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^3}{(3n)!}$ serisi D' alembert oran testi gereğince yakınsaktır.

f) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\ln k}{2^k}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\ln(n+1)2^n}{2^{n+1}.\ln n} = \frac{\ln(n+1)}{2\ln n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow$ verilen seri D' alembert testi gereğince yakınsaktır.

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{5n}}{(2n)!n^{3n}}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{2n+2}(2n)!}{(2n+2)!n^{2n}} = \frac{(n+1)}{2(2n+1)} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4}.e^2 = \frac{e^2}{4} > 1$$

D'alembert testine göre $\sum\limits_{n=1} \dfrac{n^{5n}}{(2n)!n^{3n}}$ serisi ıraksaktır.

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

Cauchy kök testini uygularsak

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n = \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{-2k} = e^{-2} < 1$$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n-2}{n}\right)^{n^2}$ serisi yakınsaktır.

j) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k}{e^k}$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)e^k}{e^{k+1}k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{e} \cdot \frac{k+1}{k} = \frac{1}{e} < 1$$

$\Rightarrow$ D'alembert oran testi gereğince $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k}{e^k}$ yakınsaktır.

k) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2+k+1}$

$k^2 < k^2 + k + 1 \Rightarrow \dfrac{1}{k^2+k+1} < \dfrac{1}{k^2}$.

$\sum \dfrac{1}{k^2}$ harmonik serisi yakınsak olduğundan karşılaştırma testi gereğince

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2+k+1}$ serisi yakınsaktır.

l) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k}$

$a_k=\frac{\ln k}{k}, \qquad f(t)=\frac{\ln t}{t} \Rightarrow f'(t)=\frac{\frac{1}{t}.t-\ln t}{t^2}=\frac{1-\ln t}{t^2}<0$

f fonksiyonu ve dolayısıyla (a_k) dizisi monoton azalandır.

$\sum 2^p a_{2^p}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{2^p.\ln 2^p}{2^p}=\ln 2\sum_{p=0}^{\infty}p$ serisi ıraksak olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k}$ ıraksaktır.

m) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k^3}$

$a_k=\frac{\ln k}{k^3}$ pozitif terimlidir.

$t>1$ için $f(t)=\frac{\ln t}{t^3}$ denirse

$$f'(t)=\frac{\frac{1}{t}.t^3-3t^2\ln t}{t^6}=\frac{t^2-3t^2\ln t}{t^6}=\frac{1-3\ln t}{t^4}<0$$

olacağından f azalandır. Benzerlik testinden

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k^3}$ serisi yerine $\sum_{p=0}^{\infty}\frac{2^p\ln 2^p}{2^{3p}}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\ln 2.p}{4^p}=\ln 2\sum_{p=0}^{\infty}\frac{p}{4^p}$

serisi incelenebilir. Bu seri D'alembert oran testinden yakınsaktır.

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k^3}$ yakınsaktır.

n) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k2^k}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\,\frac{n2^n}{2^{n+1}n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{2n^2+4n+2}=\frac{1}{2}<1.$$

D' alembert oran testi gereğince $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k2^k}$ serisi yakınsaktır.

o) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k\sqrt{k}}$

$$f(x)=\frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{x}.x^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\ln x}{x^3}=\frac{x^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{3}{2}\ln x\right)}{x^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{\left(1-\frac{3}{2}\ln x\right)}{x}<0\ (x>3)$$

$\Rightarrow (a_n)$ monoton azalandır.

$\sum a_n$ yakınsak $\Leftrightarrow \sum_p 2^p a_{2^p}$ yakınsak

$$\Leftrightarrow \sum_p\frac{2^p.p.\ln 2}{2^p2^{\frac{p}{2}}}=\ln 2\sum_p\frac{p}{\left(\sqrt{2}\right)^p}<\infty$$

ö) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{100}}$

$a_n=\frac{(2n)!}{2^{100}}$ serinin genel terimidir.

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{2^{100}}=\infty.$

Serisinin genel terimi sıfıra gitmediğinden seri ıraksaktır.

p) $\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{3}{4}\right)^k$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}}{k\left(\frac{3}{4}\right)^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k}.\frac{3}{4}=\frac{3}{4}<1$$

D'alembert oran testi gereğince seri yakınsaktır.

r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10^{n+1} n!}{(n+1)!10^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n+1} = 0 < 1$$

D'alembert oran testi gereğince seri yakınsaktır.

s) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1.3.5\ldots(2n-1)}$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)!\,1.3.\ldots(2k-1)}{1.3\ldots(2n-1)(2k+1)\,(k)!} = \frac{k+1}{2k+1}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{2} < 1$$

olduğundan D'alembert oran testi gereğince seri yakınsaktır.

ş) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(3n)!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!(3n)!}{(3n+3)!(2n)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+6n+2}{27n^3+\ldots} = 0 < 1$$

D'alembert bölüm testi gereğince seri yakınsaktır.

t) $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2}$

Limit testini uygulayalım.

$$\lim_{k\to\infty} k^2.\frac{1}{e^{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k}{e^{k^2}.2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{e^{k^2}} = 0.$$

$\gamma = 0$, $\alpha = 2 > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2}$ serisi yakınsaktır.

u) $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1.4.7.\ldots(3k-2)}{3.6.9.\ldots(3k)}\right]^2$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left[\frac{1.4.7.\ldots(3n-2)(3n+1)}{3.6.9.\ldots(3n)(3n+3)}.\frac{3.6.9\ldots3n}{1.4.7\ldots3n-2}\right]^2$$

$$= \left[\frac{3n+1}{3n+3}\right]^2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Raabe testini uygulayalım;

$$\lim_{k\to\infty} k\left[\frac{a_{k+1}}{a_k} - 1\right] = \lim_{k\to\infty} k\left[\frac{9k^2+6k+1}{9k^2+18k+9} - 1\right]$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k(-12k-8)}{9k^2+18k+9} = -\frac{12}{9} < -1$$

olduğundan verilen seri yakınsaktır.

ü) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(1-\alpha)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\ldots\left[1-\frac{\alpha}{k}\right]$

$$a_k = \frac{1}{k}\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots.(k-\alpha)}{k!}$$

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots.(k-\alpha)(k+1)(k+1)!}{kk!(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots.(k-\alpha)(k+1-\alpha)}$$

$$= \frac{k+1}{k}.\frac{k+1}{(k+1-\alpha)} = \frac{k^2+2k+1}{k^2+(1-\alpha)k}$$

$P_k = k$ seçelim ve kummer testini uygulayalım.

$$\lim_{k\to\infty}\left(p_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - p_{k+1}\right) = \lim_{k\to\infty}\left[k.\frac{k^2+2k+1}{k^2+(1-\alpha)k} - (k+1)\right]$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k^3+2k^2+k-k^3+(\alpha-1)k^2-k^2+(\alpha-1)k}{k^2+(1-\alpha)k}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha k^2+\alpha k}{k^2+(1-\alpha)k} = \alpha$$

$\alpha > 0$ ise seri yakınsaktır.

$\alpha \le 0$ ve $\sum \frac{1}{P_k} = \sum \frac{1}{k}$ ıraksak olduğundan seri ıraksaktır.

v) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{k^k}$

$$a_k = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{k^k}$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)(a+k)k^k}{(k+1)^{k+1}\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \frac{\alpha+k}{k+1}$$

$\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$ D'alembert oran testi gereğince seri yakınsaktır.

y) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+k)}$ $(\alpha \notin R^-)$

Oran testini uygulayalım.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+k)(\alpha+k+1)} \cdot \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+k)}{k!}$$

$$= \frac{k+1}{\alpha+k+1}$$

$\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$ şüpheli hal. Raabe testini uygulayalım.

$$\lim_{k\to\infty} k\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}-1\right) = \lim_{k\to\infty} k\left(\frac{k+1}{\alpha+k+1}-1\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{k(k+1-\alpha-k-1)}{\alpha+k}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{(-\alpha)k}{\alpha+k} = -\alpha$$

$\Rightarrow -\alpha < -1 \Rightarrow \alpha > 1$ için yakınsak, $0 < \alpha < 1$ için ıraksaktır.

$\alpha = 0$ için $\sum 1$ ıraksak serisi elde edilir.

z) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots(2k)} \cdot \frac{1}{2k+1}$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+1)}{(2k+2)} \frac{2k+3}{2k+1} = 1 \text{ şüpheli hal}$$

$$\lim_{k\to\infty} k\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}-1\right) = \lim_{k\to\infty} k\left(\frac{(2k+1)(2k+3)}{(2k+2)(2k+1)}-1\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} k\left(\frac{4k^2+8k+3-(4k^2+6k+2)}{4k^2+6k+2}\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{2k^2+k}{4k^2+6k+2} = \frac{1}{2} > -1$$

olduğundan verilen seri ıraksaktır.

2. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^{\ln k}}$, $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{[\ln(\ln k)]^{\ln k}}$ **serilerinin yakınsak,**

$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^{\ln(\ln k)}}$ **serisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.**

Çözüm:

Bertrand testini uygulayalım. $a_k = \frac{1}{(\ln k)^{\ln k}}$ için

$$\lim \frac{\ln\left(\frac{1}{a_k}\right)}{\ln k} = \lim \frac{\ln(\ln k)^{\ln k}}{\ln k} = \lim \frac{\ln k(\ln(\ln k))}{\ln k} = \lim \ln(\ln k) = \infty > 1$$

olduğundan seri yakınsaktır.

$a_k = \frac{1}{[\ln(\ln k)]^{\ln k}}$ için

$$\lim \frac{\ln\left(\frac{1}{a_k}\right)}{\ln k} = \lim \frac{\ln[\ln(\ln k)]^{\ln k}}{\ln k} = \lim \ln[\ln(\ln k)] = \infty > 1$$

olacağından seri yakınsaktır.

$a_k = \frac{1}{(\ln k)^{\ln(\ln k)}}$ için

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{a_k}\right)}{\ln k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln\left[(\ln k)^{\ln(\ln k)}\right]}{\ln k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln(\ln k).\ln(\ln k)}{\ln k}$$

$$= \lim_{p\to\infty} \frac{(\ln p)^2}{p} = \lim_{p\to\infty} \frac{2\ln p.\frac{1}{p}}{1} = \lim_{p\to\infty} \frac{2\ln p}{p}$$

$$= \lim_{p\to\infty} \frac{\frac{2}{p}}{1} = \lim \frac{2}{p} = 0 < 1$$

olduğundan verilen seri ıraksaktır.

3. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^p}$ **serisi hangi p ler için yakınsaktır.**

Çözüm:

$$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln k)^p} \cong \sum_{r=0}^{\infty}2^r\frac{1}{(\ln 2^r)^p} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{2^r}{r^p(\ln 2)^p} = \frac{1}{(\ln 2)^p}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{2^r}{r^p}$$

Oran testine göre

$$\frac{a_{r+1}}{a_r} = \frac{2^{r+1}}{(r+1)^p}\cdot\frac{r^p}{2^r} = 2\left(\frac{r}{r+1}\right)^p \Rightarrow \lim\frac{a_{r+1}}{a_r} = 2 > 1$$

olduğundan ıraksaktır. Şu halde her p için $\sum\frac{1}{(\ln k)^p}$ ıraksaktır.

4. $\frac{9}{8} < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} < \frac{5}{4}$ **eşitsizliğinin doğruluğunu gösteriniz.**

Çözüm:

$a_v < \int_{v-1}^{v} f(x)dx < a_{v-1}$ eşitsizliğinde v yerine 3 ten n ye kadar değerler verilirse

$$a_3 + a_4 + \ldots + a_n < \int_2^n f(x)dx < a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k^3} < \int_2^n\frac{1}{x^3}dx < \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k^3}$$

yazılabilir. İntegral hesaplanırsa

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k^3} < \frac{1}{8} - \frac{1}{2n^2} < \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k^3}$$

bulunur. $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k^3} \le \frac{1}{8} \le \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^3} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} - 1 - \frac{1}{8} \le \frac{1}{8} \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} - 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} \le \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + 1 \quad \text{ve} \quad \frac{1}{8} + 1 \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} \Rightarrow \frac{5}{8} < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} < \frac{5}{4}$$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{2.4.6.\ldots.(2n)}\right]^p\frac{1}{n}$ **serisinin $p \in N^+$ için yakınsak olacağını gösteriniz.**

Çözüm:

Köşeli parantez içerisindeki ifade 1 den küçük olduğundan

$$\left[\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots.(2n)}\right]^p\frac{1}{n} \le \frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots.(2n)}\frac{1}{n} \quad \text{ve} \quad \sum\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots.(2n)}\frac{1}{n}$$ serisi yakınsaktır.

Bak. Problem 1(z)

6. **Pozitif terimli ve yakınsak $\sum a_n$ serisi veriliyor. $p > \frac{1}{2}$ için $\sum\sqrt{a_n}\,n^{-p}$ serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.**

Çözüm:

$$\left(\sqrt{a_n} - \frac{1}{n^p}\right)^2 > 0 \quad \Rightarrow a_n - 2\sqrt{a_n}\cdot\frac{1}{n^p} + \frac{1}{n^{2p}} > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{a_n}\cdot\frac{1}{n_p} < \left(a_n + \frac{1}{n^{2p}}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$\sum\frac{1}{n^{2p}}$ serisi $p > \frac{1}{2}$ için yakınsak ve $\sum a_n$'de yakınsak olduğundan $\sum\sqrt{a_n}\frac{1}{n^p}$ serisi karşılaştırma kriteri gereğince yakınsaktır.

7. **$a_n > 0$ ve $\sum a_n < \infty$ olduğunda $\sum\sqrt{a_n . a_{n+1}} < \infty$ olacağını gösteriniz.**

Çözüm:

$$(a_n + a_{n+1})^2 = a_{n^2} + 2a_na_{n+1} + a_{n^2+1} \Rightarrow (a_n + a_{n+1})^2 \ge 2a_na_{n+1} \Rightarrow \sqrt{a_na_{n+1}} \le \frac{1}{\sqrt{2}}a_n + \frac{1}{\sqrt{2}}a_{n+1}$$

bulunur.

$\sum a_n$ ve $\sum a_{n+1}$ yakınsak olduğundan $\sum(a_n + a_{n+1})$ yakınsaktır.

Karşılaştırma kriteri gereğince $\sum\sqrt{a_na_{n+1}}$ serisi de yakınsaktır.

8. **$\sum a_n$ pozitif terimli serisi yakınsak olsun. Aşağıdaki serilerin yakınsak olacağını gösteriniz.**

a) $\sum a_n^2$ b) $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ c) $\sum \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$

Çözüm:

a) $\sum a_n$ yakınsak ise $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ dır. Dolayısıyla

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in N$ öyleki $\forall n > n_0$ için $|a_n| < \varepsilon$ olur.

$\varepsilon = 1$ seçersek $|a_n| < 1$ elde ederiz. $\Rightarrow a_n < 1 \Rightarrow a_n^2 < a_n$ olur.

Karşılaştırma testi gereğince $\sum a_n^2$ yakınsaktır.

b) $\frac{a_n}{1+a_n} < \frac{a_n}{1} = a_n$ ve $\sum a_n$ yakınsak olduğundan

Karşılaştırma kriteri gereğince $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ yakınsaktır.

c) $\sum a_n$ yakınsak $\Rightarrow \sum \frac{a_n}{1+a_n}$ yakınsak olduğundan

$\sum a_n^2$ yakınsak $\Rightarrow \sum \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$ yakınsak olur.

9. **(a_n) artmayan bir dizi olsun. $\sum a_n$ yakınsak ise $(n.a_n)$ sıfır dizisidir. İspatlayınız. Bunun karşıtı doğru mudur. (a_n) pozitif terimli monoton azalan bir dizi ve $(n.a_n)$ sıfır dizisi değilse $\sum a_n$ serisinin karakteri için ne söylenebilir?**

Çözüm:

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ olsun. (S_n) yakınsak olduğundan

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists m \in N$ öyleki $\exists \forall v > m$ ve $\forall k \geq 1$ için $|S_{v+k} - S_v| < \frac{\varepsilon}{2}$ (Cacuhy şartı)

olur. $v = m + 1$ alırsak

$|S_{m+k+1} - S_{m+1}| < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. $\Rightarrow a_{m+2} + a_{m+3} + \ldots + a_{n+k+1} < \frac{\varepsilon}{2}$

bulunur.

$n > 2m + 2$ alınırsa

$a_{m+2} + a_{m+3} + \ldots + a_n < \frac{\varepsilon}{2}$

olur. Sol tarafta $n - m - 1$ terim bulunduğundan ve (a_n) artmayan olduğundan

$(n - m - 1)a_n < \frac{\varepsilon}{2}$

kalır. $\frac{n}{2} < n - m - 1$ olacağından $\frac{n}{2} a_n < (n - m - 1)a_n < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow n a_n < \varepsilon$ bulunur ki bu da $\lim(n a_n) = 0$ olduğunu gösterir.

$a_k = \frac{1}{k \ln k}$ dizisi için $\lim k a_k = \lim \frac{1}{\ln k} = 0$ dır.

$\sum \frac{1}{k \ln k} \cong \sum \frac{2^p}{2^p \ln 2^p} = \frac{1}{\ln 2} \sum \frac{1}{p}$ ve $\sum \frac{1}{p}$ ıraksak olduğundan $\sum \frac{1}{k \ln k}$ ıraksaktır.

O halde $\lim n a_n = 0$ olması $\sum a_n$ serisinin yakınsak olmasını gerektirmez.

Yukarıdaki özelliğe göre, (a_n) azalan ve $\lim n a_n \neq 0$ olduğunda $\sum a_n$ ıraksak olur.

10. **(9). sorudan yararlanarak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ serisinin karakterini inceleyiniz.**

Çözüm:

$a_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \Rightarrow n.a_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1 \neq 0$

olduğundan $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ serisi ıraksaktır.

11. **Öyle bir sınırsız (a_n) dizisi bulunuz ki $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ serisi yakınsak olsun.**

ÇÖZÜM:

$p \in N_0$ için

$$a_n = \begin{cases} p, & n = 2^p \text{ ise} \\ 0, & n \neq 2^p \text{ ise} \end{cases}$$

dizisini gözönüne alalım. Bu dizinin 2^p ninci terimi p, diğer terimleri sıfırdır. Dolayısıyla (a_n) bir sınırsız dizidir.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = \sum\limits_{p=1}^{\infty} \frac{p}{2^p}$ olur. $\lim \frac{a_{p+1}}{a_p} = \lim\left(\frac{p+1}{2^{p+1}} \cdot \frac{2^p}{p}\right) = \frac{1}{2} < 1$ olduğundan $\sum \frac{a_n}{n}$ yakınsaktır.

ALTERNE SERİLER

TANIM:

Terimlerinin işareti ardışık olarak değişen serilere **Alterne Seriler** denir.

TEOREM 1.12: (Leibnitz testi)

Eğer

1) Her $n \geq 1$ için $0 < a_{n+1} \leq a_n$

ve

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

ise bu takdirde $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ serisi yakınsaktır.

TEOREM 1.13: (Seriler için genel yakinsaklik prensibi)

$\sum a_k$ yakınsaktır $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in N$ öylesi $\forall n \geq n_0$ ve $\forall p > 0$ için

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$$

TANIM:

Terimleri $\sum a_k$ serisinin terimlerinin mutlak değerinden oluşan $\sum |a_k|$ serisi yakınsak ise $\sum a_k$ serisi **mutlak yakınsaktır** denir. $\sum a_k$ yakınsak fakat $\sum |a_k|$ ıraksak ise bu takdirde $\sum a_k$ serisi **şartlı yakınsaktır** denir.

TEOREM 1.14:

Mutlak yakınsak her seri yakınsaktır.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. Aşağıdaki serilerin yakınsaklık durumlarını inceleyiniz.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{n}{n+1}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n\pi}{n!}$

d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!-1}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-n)^5 \dfrac{5}{4^n}$

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n\frac{\pi}{2}}{2^n}$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\sin n + \cos 3n}{n^2+n}$

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{\left(\frac{4}{3}\right)^n}{n^2}$

ı) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-5)^{n-1}}{n.n!}$

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-2)^{n-1} \dfrac{n+1}{(2n!)}$

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{(n!)^2 . 2^n}{(2n)!}$

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{2.4.6\ldots(2n)}{1.4.7\ldots(3n-2)}$

l) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} e^{\frac{k}{k+1}}$

m) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \ln\dfrac{k}{k+1}$

n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^n}$

o) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{\ln k}$

ö) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}$

p) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$

r) $\sum (-1)^{n+1} \dfrac{n+3}{n+5}$

Çözüm:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$

$a_n = \frac{1}{n^2+1} > \frac{1}{(n+1)^2+1} = a_{n+1}$ olduğundan (a_n) azalandır.

Ayrıca $\lim a_n = \lim \frac{1}{n^2+1} = 0$ olduğundan Leibnitz testi gereğince $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$

serisi yakınsaktır.

b) $\sum (-1)^n \frac{n}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$ mevcut olmadığından (çift terimli terimler +1, tek terimli terimler −1 sayısına yaklaştığından) verilen seri ıraksaktır. Zira genel terim sıfıra gitmemektedir.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n!}$

$\cos n\pi = (-1)^n$ olacağından verilen serinin genel terimi

$u_n = \frac{(-1)^n}{n!}$ dir. $a_n = \frac{1}{n!}$ dizisi için $0 < \frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{n!}$ ve $\lim \frac{1}{n!} = 0$ olacağından Leibnitz testi gereğince seri yakınsaktır.

d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!-1}$

$a_n = \frac{1}{n!-1}$ dizisi azalan ve $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!-1} = 0$ olduğundan verilen seri yakınsak

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{4^n}$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\quad a_n = \frac{5}{4^n}, \text{ ve } (a_n) \text{ azalan} \\ 2)\quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{4^n} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum (-1)^n \frac{5}{4^n} \text{ yakınsaktır.}$$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{2^n}$

$n = 2k$ için $\sin n\frac{\pi}{2} = \sin k\pi = 0$ olur.

$n = 2k-1$ için $\sin n\frac{\pi}{2} = \sin(2k-1)\frac{\pi}{2} = (-1)^{k+1}$ olacağından

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{2^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k-1}}$ olur.

1) $(a_k) = \left(\frac{1}{2^{2k-1}}\right)$ azalandır.

2) $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^{2k-1}} = 0.$

Leibniz testi gereğince seri yakınsaktır.

g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n + \cos 3n}{n^2+n}$

mutlak yakınsaklığını araştıralım.

$$|a_n| = \left|\frac{\sin n + \cos 3n}{n^2+n}\right| \le \frac{|\sin n|}{n^2+n} + \frac{|\cos 3n|}{n^2+n}$$
$$\le \frac{1}{n^2+n} + \frac{1}{n^2+n} = \frac{2}{n(n+1)} \text{ olur.}$$

$\sum \frac{2}{n(n+1)}$ yakınsak olduğundan verilen seri mutlak yakınsak, dolayısıyla yakınsaktır.

h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n}{n^2}$, $a_n = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n \ln\frac{4}{3}}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n \left(\ln\frac{4}{3}\right)^2}{2} = \infty$$

O halde seri ıraksaktır.

ı) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^{n-1}}{n.n!}$ serisinin mutlak yakınsak olduğunu gösterelim.

$\left|\frac{(-5)^{n-1}}{n.n!}\right| = \frac{5^{n-1}}{n.n!} = a_n$ olsun.

$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{5n}{(n+1)(n+2)} = 0 < 1$

olduğundan seri yakınsaktır. Dolayısıyla verilen seri mutlak yakınsaktır.

i) $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^{n-1}\frac{n+1}{(2n)!}=\sum(-1)^n 2^{n-1}\frac{n+1}{(2n)!}$

1) $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^n(n+2)(2n)!}{(2n+2)!\,2^{n-1}(n+1)}=\frac{(n+2)}{(2n+1)(n+1)}$

$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}<1 \Rightarrow (a_n)$ azalan

2) $\lim_{n\to\infty} 2^{n-1}\frac{n+1}{(2n)!}\le \lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)}{(2n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+2)\ldots(2n)}=0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} 2^{n-1}\frac{(n+1)}{(2n)!}=0$

olduğundan verilen seri yakınsaktır.

NOT: Verilen serinin mutlak yakınsak olduğu da gösterilebilir.

j) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}$.

$|u_n|=\frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}$

$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{[(n+1)!]^2 2^{n+1}(2n)!}{(2n+2)![n!]^2 2^n}=\frac{(n+1)^2 2}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{n+1}{2n+2}\to\frac{1}{2}<1$

olacağından verilen seri mutlak yakınsak, dolayısıyla yakınsaktır.

k) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2.4.6\ldots(2n)}{1.4.7\ldots(3n-2)}$ serisinin mutlak yakınsak olduğunu gösterelim.

$a_n=|u_n|=\frac{2.4.6\ldots(2n)}{1.4.7\ldots(3n-2)}$

$\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\frac{2n+2}{3n+1}=\frac{2}{3}<1$

olduğundan verilen seri mutlak yakınsak ve dolayısıyla yakınsaktır.

l) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}e^{\frac{k}{k+1}}$

Genel terim sıfıra gitmediğinden verilen seri ıraksaktır.

m) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\ln\frac{k}{k+1}$

$(-1)^{k-1}\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)=(-1)^k\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$

$a_k=\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$ dersek

a) $k<k+1\Rightarrow\frac{1}{k+1}<\frac{1}{k}\Rightarrow 1+\frac{1}{k+1}<1+\frac{1}{k} \Rightarrow \frac{k+2}{k+1}<\frac{k+1}{k}$

$\Rightarrow a_{k+1}=\ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right)<\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)=a_k\Rightarrow a_k$ azalır

b) $\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln(1)=0$

olacağından Leibnitz testinden yakınsaktır.

n) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$

1) $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^{n+1}}<\frac{1}{n^n}=a_n$

olacağından (a_n) monoton azalan ve pozitif terimli bir dizidir.

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^n}=0$.

Verilen seri Leibnitz testinden yakınsaktır.

o) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\ln k}$

1) $a_{n+1}=\frac{1}{\ln(k+1)}<\frac{1}{\ln k}=a_k$ bir dizidir.

2) Pozitif terimli ve monoton azalan olacağından (a_n)

$\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\ln k}=0$

Verilen seri Leibniz testinden dolayı yakınsaktır.

ö) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}$

$$a_n=(-1)^{n-1},$$

$$a_{2n}=(-1,-1,-1\ldots)\to -1$$

$$a_{2n+1}=(1,1,\ldots)\to 1$$

Genel terim sıfıra yakınsak olmadığından seri ıraksaktır.

p) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$, $\quad a_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

1) $f(t)=\frac{t+1}{t}$ $\qquad f'(t)=\frac{t-t-1}{t^2}=-\frac{1}{t^2}<0$

$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)$ azalan $\Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ de azalandır.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(1)=0.$

Verilen seri Leibniz testinden yakınsaktır.

2. (a_n) monoton azalan bir sıfır dizisi olsun.

$\left|\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k\right|\le a_{n+1}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

(a_n) azalan bir sıfır dizisi olduğundan her $n\in\mathbb{N}$ için $a_n\ge 0$ dır.

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k a_k\right|=\left|(-1)^{n+1}a_{n+1}+(-1)^{n+2}a_{n+2}+\ldots\right|$$

$$=\left|(-1)^{n+1}\right|\left|a_{n+1}-(a_{n+2}-a_{n+3})-(a_{n+4}-a_{n+5})\ldots\right|$$

$$\le |a_{n+1}|=a_{n+1}$$

bulunur.

3. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2k+1}{k(k+1)}=1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$S_k=\sum_{n=1}^{k}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{k}=(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots+(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=1+(-1)^{k-1}\frac{1}{k+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}S_k=1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2k+1}{k(k+1)}=1$$

4. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n(n+1)}$ serisi veriliyor. **Bu serinin toplamı, ilk beş teriminin toplamı ile yaklaşık olarak ifade edildiğinde yapılan hata en fazla ne olur?**

Çözüm:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n(n+1)}-\sum_{n=0}^{4}\frac{(-1)^n}{2^n(n+1)}\right|\le a_5=\frac{1}{2^5(5+1)}=\frac{1}{32.6}=\frac{1}{192}$$

Yapılan hata en fazla $\frac{1}{192}$ olur.

HERHANGİ TERİMLİ SERİLER

TEOREM 1.15: (Abel Kısmi Toplam Formülü)

(a_k) ve (b_k) herhangi iki dizi ve

$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $\quad \Delta b_k = b_k - b_{k+1}$

olsun.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = s_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \Delta b_k$$

dir.

TEOREM 1.16:

(a_k) ve (b_k) dizileri için

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad \Delta b_k = b_k - b_{k+1}$$

olsun.

1) $(s_n b_n)$ dizisi yakınsak

2) $\sum s_k \Delta b_k$ serisi yakınsak

ise $\sum a_k b_k$ serisi yakınsaktır.

TEOREM 1.17: (Abel Testi)

1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yakınsak,

2) (b_k) monoton ve sınırlı

ise $\sum^{\infty} a_k b_k$ yakınsaktır.

TEOREM 1.18: (Dedekind Testi)

(a_k) ve (b_k) herhangi iki dizi ve

$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $\quad \Delta b_k = b_k - b_{k+1}$

olsun.

1) (s_n) sınırlı

2) $\sum |\Delta b_k| < \infty$

3) $\lim b_n = 0$

ise $\sum a_k b_k$ yakınsak ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \Delta b_k$$

dir.

TEOREM 1.19: (Dirichlet Testi)

(a_k) ve (b_k) dizileri için $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\quad \Delta b_k = b_k - b_{k+1}$ olsun.

1) (s_n) sınırlı,

2) (b_n) azalarak sıfıra yakınsayan bir dizi

ise $\sum a_k b_k$ yakınsaktır ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \Delta b_k$$

dır.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n^2}$ **serileri veriliyor. Birinci serinin $\varphi \neq 2m\pi$ $(m\in Z)$, ikinci serinin her φ için yakınsak olduğunu gösteriniz.**

Çözüm:

$\varphi = 2k\pi$ için birinci serinin ıraksak olacağı açıktır. Zira $\cos 2k\pi = 1$ olup

$\sum\frac{\cos n\varphi}{n} = \sum\frac{1}{n}$ ıraksak serisi elde edilir.

$\varphi \neq 2k\pi$ için

$$\cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi = \frac{\sin n\frac{\varphi}{2}\cos(n+1)\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

olacağından

$$|\cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi| \le \frac{1}{\sin\left|\frac{\varphi}{2}\right|}$$

bulunur. Şu halde $\sum_{n=0}^{\infty}\cos n\varphi$ serisinin kısmi toplamlar dizisi sınırlıdır.

$(b_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ azalarak sıfıra yakınsayan bir dizi olduğundan Dirichlet testi gereğince $\sum\frac{\cos n\varphi}{n}$ serisi yakınsaktır.

$\left|\frac{\cos n\varphi}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ ve $\sum\frac{1}{n^2}$ yakınsak olduğundan $\sum\frac{\cos n\varphi}{n^2}$ mutlak yakınsak ve dolayısıyla yakınsaktır.

2. Abel testinden yararlanarak $\sum\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = s_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \Delta b_k \quad \text{Abel formülünden}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{v=1}^{k}\log\left(1+\frac{1}{v}\right)\right)\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) + \sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\log(k+1)\frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

yazılabilir. $n\to\infty$ için limit alınırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log(k+1)}{k(k+1)} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(n+1) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log(k+1)}{k(k+1)}$$

bulunur. $\lim k^{\frac{3}{2}}\frac{\log(k+1)}{k(k+1)} = 0$ olduğu kolayca gösterilebilir. Limit testinden $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log(k+1)}{k(k+1)}$ serisi ve dolayısıyla $\sum\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ serisi yakınsaktır.

3. $\sum a_k$ **yakınsak ve** $\sum|\Delta b_k| < \infty$ **olsun. (b_n) dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.** $\sum_k a_k b_k$ **yakınsak mıdır?**

Çözüm:

$$\sum_k|\Delta b_k| = \sum_{k=1}^{\infty}|b_k - b_{k+1}| < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k - b_{k+1} \text{ mutlak yakınsak} \Rightarrow \sum b_k - b_{k+1} \text{ yakınsaktır.}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k - b_{k+1} = b_1 - \lim_{k\to\infty} b_{k+1} \text{ olduğundan} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} b_{k+1} \text{ mevcuttur.} \Rightarrow (b_k) \text{ yakınsaktır.}$$

(b_k) yakınsak ve dolayısıyla sınırlı olacağından $|a_k b_k| < c a_k$ olacak şekilde bir c pozitif sayısı vardır.

$\sum a_k$ yakınsak olduğundan $\sum|a_k b_k|$ yakınsaktır.

$\Rightarrow \sum a_k b_k$ mutlak yakınsak $\Rightarrow \sum a_k b_k$ yakınsaktır.

4. $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ ve $|x| < 1$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k$$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Abel kısmi toplam formülünden

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x^k = S_n x^n + \sum_{k=1}^{n-1} S_k \Delta x^k = S_n x^n + \sum_{k=1}^{n-1} S_k\left(x^k - x^{k+1}\right) = S_n x^n + (1-x)\sum_{k=1}^{n-1} S_k x^k$$

bulunur. $n \to \infty$ için limit alınırsa, $S_n x^n \to 0$ olacağından $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k$ bulunur.

5. $BV = \left\{(a_k): \sum |\Delta a_k| < \infty\right\}$ kümesine sınırlı salınımlı diziler kümesi denir.

$\ell_1 \subset BV \subset c$ olduğunu gösteriniz.

γ ile BV nin birbirlerini kısmen örttüğünü fakat birinin diğerini kapsamadığını gösteriniz.

Çözüm:

$\ell_1 = \left\{(a_k): \sum |a_k| < \infty\right\}$

$BV = \left\{(a_k): \sum |a_k - a_{k-1}| < \infty\right\}$

$c = \left\{(a_k): \lim a_n \text{ mevcut}\right\}$

$(a_k) \in \ell_1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ dolayısı ile

$\sum |a_k - a_{k+1}| \le \sum |a_k| + \sum |a_{k+1}| < \infty$ bulunur ki bu $\ell_1 \subset BV$ olduğunu gösterir.

$(a_n) \in BV$ olsun $\Rightarrow \sum |a_k - a_{k+1}| < \infty \Rightarrow \sum (a_k - a_{k+1})$ yakınsaktır.

$\Rightarrow (a_1 - a_{n+1})$ yakınsaktır $\Rightarrow (a_n)$ yakınsaktır $\Rightarrow (a_n) \in c$

bulunur ki bu da $BV \subset c$ olduğunu gösterir.

6. **Dirichlet testinden yararlanarak Leibnitz testini ispatlayınız.**

Çözüm:

Dirichlet testi

a) $\sum a_k$, kısmi toplamlar dizisi sınırlı bir seri

b) (b_n) azalarak sıfıra yakınsayan bir dizi ise $\sum a_k b_k$ yakınsak.

a ve b şartları gerçeklensin.

$\sum (-1)^{n-1} c_n$ serisini gözönüne alalım.

$a_n = (-1)^{n-1}$ $\quad b_n = a_n$ alalım.

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} = +1 - 1 + 1 \ldots + (-1)^{n-1} = \begin{cases} 0 & n \text{ çift} \\ +1 & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

$\Rightarrow |s_n| \le 1$ olup (s_n) sınırlıdır.

$b_{n+1} < b_n$ ve $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$ olduğundan $\sum (-1)^{n-1} c_n$ yakınsaktır.

BÖLÜM PROBLEMLERİ VE ÇÖZÜMLERİ

1. Aşağıdaki serilerin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n n!}{(2n)!}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{(n!)^2}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{100^n}$

d) $\sum\frac{1}{n^{\ln 3}}$ e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{3^n(n!)^2}$ f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{5^n}$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{2n}}$ h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n^2}$ ı) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{(2n)^n}$ j) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1!+2!+\ldots+(n-2)!}{n!}$ k) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$

l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$

Çözüm:

a) $a_n=\frac{5^n n!}{(2n)!}\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{5^{n+1}(n+1)!(2n)!}{(2n+2)!5^n n!}=\frac{5(n+1)}{(2n+1)(2n+2)}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0<1$

olduğundan D'alembert testi gereğince verilen seri yakınsaktır.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{(n!)^2}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{10^{n+1}(n!)^2}{[(n+1)!]^2 10^n}=\frac{10}{(n+1)^2}\quad\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0<1$

D'alembert testi gereğince verilen seri yakınsaktır.

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{100^n}$

Çözüm:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{100^{n+1}}\frac{100^n}{n!}=\lim\frac{n+1}{100}=\infty>1$

olduğundan verilen seri ıraksaktır.

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln 3}}$

$e<3$ olduğundan $\ln 3>1$ dir. Dolayısıyla $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln 3}}$ harmonik serisi yakınsaktır.

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{3^n(n!)^2}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n+2)!}{3^{n+1}[(n+1)!]^2}=\frac{3^n(n!)^2}{(2n)!}=\frac{(2n+2)(2n+1)}{3(n+1)^2}=\frac{2}{3}\frac{2n+1}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{4}{3}>1$ olduğundan verilen seri ıraksaktır.

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{5^n}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^5 5^n}{5^{n+1}n^5}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^5\cdot\frac{1}{5}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{5}<1$

O halde verilen seri yakınsaktır.

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{2n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{(n+1)^{2n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)^2}=0<1\Rightarrow\sum a_n$ yakınsaktır.

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n^2}$

$\lim n^2a_n=\lim\limits_{n\to\infty}n^2e^{-n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{e^{n^2}.2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{e^{n^2}}=0$

$\alpha=2>1$ ve $\gamma=0$ olduğundan, limit testi gereğince verilen seri yakınsaktır.

ı) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}<1$

Şu halde seri yakınsaktır.

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)^n}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{2n}}{(2n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n} = \infty \Rightarrow$ seri ıraksaktır.

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1!+2!+\ldots+(n-2)!}{n!}$, $1!+2!+\ldots+(n-3)!+(n-2)! < (n-3)\,(n-3)!+(n-2)!$

$a_n < \frac{(n-3)!(n-3)+(n-2)!}{n!} = \frac{(n-3)![(n-3)+(n-2)]}{n!}$

$= \frac{2n-5}{(n-2)(n-1)n} < \frac{2n}{(n-2)(n-1)n} = \frac{2}{(n-2)(n-1)} = b_n$

$\sum b_n$ yakınsak olduğundan karşılaştırma testinden $\sum a_n$ yakınsaktır.

k) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$

$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \ln\left(\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^n\right) = \ln e^2 = 2$

$\alpha = \frac{3}{2}$, $\gamma = 2$ olduğundan limit testi gereğince yakınsaktır.

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$

$a_n = e^{\frac{1}{n}} - 1$ dir. $b_n = \frac{1}{n}$ seçelim. $\sum b_n$ ıraksaktır.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n^2} e^{\frac{1}{n}}}{-\frac{1}{n^2}} = 1$

olduğundan $\sum a_n$ ile $\sum b_n$ aynı karakterdedir. $\sum b_n$ ıraksak olduğundan $\sum a_n$ de ıraksaktır.

2. **Aşağıdaki serilerin toplamını bulunuz.**

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{(n+1)!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}$

Çözüm:

a) $\frac{n^2+n-1}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^2-(n+2)}{(n+1)!} = \frac{n+1}{n!} - \frac{n+2}{(n+1)!}$

$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1}{n!} - \frac{n+2}{(n+1)!}$

$= \frac{2}{1!} - \frac{3}{2!} + \frac{3!}{2!} - \frac{4}{3!} + \ldots + \frac{n}{(n-1)!} - \frac{n+1}{n!} + \frac{n+1}{n!} - \frac{n+2}{(n+1)!}$

$= 2 - \frac{n+2}{(n+1)!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 2 - \frac{n+2}{(n+1)!} = 2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{(n+1)!} = 2$

b) $s_n = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^{k-1}} = 2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{3^n}\right) = 2\frac{\left(1-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

$\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{A}{(n+1)(n+2)} + \frac{B}{(n+2)(n+3)} \Rightarrow n = (A+B)n + 3A + B$

$\Rightarrow A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{3}{2}$ bulunur. Buna göre

$\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] + \frac{3}{2}\left[\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right]$

$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right] + \frac{3}{2}\left[\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right]$ yazılabilir.

$$s_n = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)+\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2(n+2)}-\frac{3}{2(n+3)}$$

olur.

$\lim s_n = \frac{1}{4}$ olacağından $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{4}$ bulunur.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}$

$$\frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}=\frac{2^n}{2^{n+1}n.(n+1)}+\frac{n(n+1)}{2^{n+1}n(n+1)}=\frac{1}{2n(n+1)}+\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2k(k+1)}+\frac{1}{2^{k+1}}\right]=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+2}+\frac{1}{2^{k+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+-\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2^2}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}\cdots\frac{1}{2^{n-1}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{4}\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}.2=1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}=1$$

3. $0<p<1$ için $\sum p^n\sqrt[n]{n}$ serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$\sum a_n$ ve $\sum b_n$ serileri verilsin.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=c\neq 0$ ise $\sum a_n$ ile $\sum b_n$ serilerinin karakterleri aynıdır.

$$\left.\begin{array}{l}a_n=p^n\sqrt[n]{n}\\ b_n=p^n\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{p^n\sqrt[n]{n}}{p^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1\neq 0$$

$\sum b_n=\sum p^n$ serisi $0<p<1$ için yakınsak olduğundan $\sum a_n=\sum p^n\sqrt[n]{n}$ serisi de yakınsaktır.

4. $0<q<p<1$ için $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p-n^q}$ ve $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p^n-q^n}$ serilerinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm:

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=c\neq 0$ ise $\sum a_n$ ile $\sum b_n$ serilerinin yakınsaklık durumları aynıdır.

$b_n=\frac{1}{n^p-n^q}$ $\quad a_n=\frac{1}{n^p}$ diyelim.

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{n^p-n^q}{n^p}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{n^p-n^q}{n^p}=1\neq 0$$

$\sum_n a_n=\sum_n\frac{1}{n^p}$ $\;0<p<1$ için ıraksak olduğundan $\sum b_n=\sum\frac{1}{n^p-n^q}$ serisi de ıraksaktır.

Şimdi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p^n-q^n}$ serisini göz önüne alalım. $a_n=\frac{1}{p^n-q^n}$ $\quad b_n=\frac{1}{a^n}$ diyelim.

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{p^n}{p^n-q^n}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{p^n}{p^n-q^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\left(\frac{a}{p}\right)^n}=1\neq 0$$

$\sum b_n=\sum\frac{1}{p^n}=\sum\left(\frac{1}{p}\right)^n$ serisi $p<1$, dolayısıyla $\frac{1}{p}>1$ olduğundan ıraksaktır.

$\Rightarrow\sum\frac{1}{p^n-q^n}$ serisi de ıraksaktır.

5. Pozitif a ve b sayıları için $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a^n+b^n}$ serisini karakterini inceleyiniz.

Çözüm:

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a}\frac{\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}=\begin{cases}\frac{1}{a}, & b\le a \text{ ise}\\ \frac{1}{b}, & b>a \text{ ise}\end{cases}$$

olur.

1) $a = 1$ ve $b = 1$ ise $\sum \frac{1}{2}$ serisi bulunur. Bu serinin genel terimi sıfıra gitmediğinden ıraksaktır.

2) $a < 1$ ve $b > 1$ ise $r = \frac{1}{b} < 1$ olur. Seri yakınsaktır.

3) $a > 1$ ve $b > 1$ ise $r = \frac{1}{a} < 1$ ve $r = \frac{1}{b} < 1$ bulunur. Seri yakınsaktır.

4) $a < 1$ veya $b < 1$ ise $r = \frac{1}{a} > 1$ ve $r = \frac{1}{b} > 1$ olacağından seri ıraksaktır.

5) $a = 1$ ve $b < 1$ veya $a < 1$ ve $b = 1$ ise seri ıraksaktır.

6. Hangi α sayıları için aşağıdaki seriler yakınsak olur.

a) $\sum n^{\alpha}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ b) $\sum n^{\alpha}\alpha^{n}$ c) $\sum \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$

Çözüm:

a) $\sum n^{\alpha}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$\sum n^{\alpha}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum \frac{n^{\alpha}}{n(n+1)}$ serisinin karakteriyle $\sum \frac{n^{\alpha}}{n^2} = \sum \frac{1}{n^{2-\alpha}}$

serisinin karakteri aynıdır.

$\sum \frac{1}{n^{2-\alpha}}$ serisi $\alpha < 1$ için yakınsak, $\alpha \geq 1$ için ıraksak olduğundan verilen seri $\alpha < 1$ için yakınsak, $\alpha \geq 1$ için ıraksaktır.

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha^{n+1}(n+1)^{\alpha}}{\alpha^n n^{\alpha}} = \alpha\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha},$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha} = \alpha \Rightarrow \begin{cases} \alpha < 1 \text{ için} & \text{yakınsak} \\ \alpha > 1 \text{ için} & \text{ıraksak} \end{cases}$$

$\alpha = 1$ ise $\sum 1^n n^1 = \sum n$ olup bu seri ıraksaktır.

c) $$\sum \frac{2^p}{2^p(p\log 2)^{\alpha}} = \frac{1}{(\log 2)^{\alpha}} \sum \frac{1}{p^{\alpha}} \Rightarrow \begin{cases} a < 1 \text{ için} & \text{yakınsak} \\ a \geq 1 \text{ için} & \text{ıraksak} \end{cases}$$

7. Aşağıdaki serilerin karekterini inceleyiniz.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

c) $\sum (-1)^n \frac{n!}{10^n}$ d) $\sum (-1)^{n-1} \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(n!)}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3.6\ldots(3n)}{2^n.2.5\ldots(3n-1)}$ h) $\sum (-1)^k 2^{\frac{1}{k}}$

i) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$ j) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k\left(2^{\frac{1}{k}} - 2^{\frac{1}{k+1}}\right)$

Çözüm:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ seri alterne seridir.

a) $(a_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ monoton azalan

b) $\lim_{n\to 0} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

olduğundan Leibnitz testi gereğince verilen seri yakınsaktır.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{2n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ serisi yakınsak olduğundan verilen seri mutlak yakınsak, dolayısıyla yakınsaktır.

c) $n \geq 10$ için $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}} = \frac{10^n}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{n!} = \frac{n+1}{10} > 1$ olduğundan

$(a_n) = \left(\frac{n!}{10^n}\right)$ dizisi 10. terimden sonra artan bir dizi olur.

Dolayısıyla sıfıra gitmez. Genel terim sıfıra gitmediğinden seri ıraksaktır.

d) $\sum_n (-1)^n \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$ serisi mutlak yakınsak, dolayısı ile yakınsaktır. Zira

$$\lim \frac{2^{3(n+1)}}{3^{2(n+1)}}\cdot\frac{3^{2n}}{2^{3n}} = \lim\frac{2^3}{3^2}=\frac{8}{9}<1 \text{ dir.}$$

e) $\sum\left|\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}\right| = \sum\frac{1}{2^n}$ yakınsak olduğundan verilen seri mutlak yakınsak

ve dolayısıyla yakınsaktır.

f) $(a_n)=\left(\frac{1}{n(n!)}\right)$ dizisi azalan ve pozitif terimlidir.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ olduğundan Leibnitz testi gereğince yakınsaktır.

g) $\left|\frac{(-1)^n 3.6.\ldots.3^n}{2^n.2.5.(3n-1)}\right| = \frac{3.6\ldots3n}{2^n 2.5.\ldots.(3n-1)}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3.6\ldots3n.3n+3.2^n.2.5\ldots(3n-1)}{2^{n+1}.2.5\ldots(3n-1)(3n+2).3.6\ldots.3n} = \frac{3n+3}{2.(3n+2)}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac12 <1$ olduğundan yakınsaktır.

O halde verilen seri mutlak yakınsak, dolayısıyla yakınsaktır.

h) $a_k = (-1)^k.2^{\frac1k}$ denirse

$$(a_{2n}) = \left(2^{\frac{1}{2n}}\right) \to 1,\quad (a_{2n-1}) = \left(-2^{\frac{1}{2n-1}}\right) \to -1$$

olur. Genel terim sıfıra gitmediğinden verilen seri ıraksaktır.

i) $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\frac12\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt x}\right)<0$ olacağından

$(a_n)=\left(\sqrt{n+1}-\sqrt n\right)$ dizisi azalandır.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt n\right)\left(\sqrt{n+1}-\sqrt n\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt n} = 0$$

Leibnitz testi gereğince seri yakınsaktır.

j) $(a_k)=\left(2^{\frac1k}-2^{\frac{1}{k+1}}\right)$ dizisi azalandır. Çünkü $f(t)=2^{\frac1t}-2^{\frac{1}{t+1}}$

denirse her $t>0$ için

$$f'(t)=\left(-\frac{1}{t^2}\right)(\ln 2)2^{\frac1t}+\frac{1}{(1+t)^2}\ln 2\, 2^{\frac{1}{1+t}}=(\ln 2)\left[\frac{2^{\frac{1}{1+t}}}{(1+t)^2}-\frac{2^{\frac1t}}{(t^2)}\right]<0 \text{ olur.}$$

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} 2^{\frac1k}-2^{\frac{1}{k+1}} = 1-1=0$$

olduğundan Leipnitz testi gereğince verilen seri yakınsaktır.

8. $a>e$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a^{1/n}+a^{-1/n}-2\right)$ serisinin yakınsak durumunu inceleyiniz.

Çözüm:

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(a^{1/n}+a^{-1/n}-2\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(a^{1/n}+a^{-1/n}-2\right)}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(a^{1/2n}-a^{-1/2n}\right)^2}{\left(\frac1n\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{a^{x/2}-a^{-x/2}}{x}\right)^2=\lim_{x\to0}\left(\frac{\frac12 a^{x/2}.\ln a+\frac12 a^{-x/2}\ln a}{1}\right)=\ln^2 a$$

olduğundan verilen seri yakınsaktır.

9. $0<r<1$ için $\sum_{k=1}^{\infty} r^{k+\sqrt{k}}$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm:

$0<r<1$ için $0<r^{\sqrt{k}}<1$ olacağından $r^{k+\sqrt{k}}=r^k.r^{\sqrt{k}}<r^k$ ve $\sum r^k<\infty$ olduğundan verilen seri yakınsaktır.

10. **$\sum a_n$ pozitif terimli yakınsak seri ve K_n de bu serinin kalan terimi olsun.**

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n K_n$ serisinin yakınsak olacağını gösteriniz.

Çözüm:

Yakınsak bir seride kalan terimin limiti 0'dır. Yani $\lim_{n\to\infty} K_n=0$ olur.

Seri pozitif terimli ve $K_n=\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ olduğundan (K_n) azalan bir dizidir. Leibnitz testinden $\sum(-1)^n K_n$ yakınsaktır.

11. **$\sum a_n$ pozitif terimli ıraksak bir seri ve (s_n) de bu serinin kısmi toplamlar dizisi olsun.**

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{s_n}$ serisinin yakınsak olacağını gösteriniz.

Çözüm:

$b_n=\frac{1}{s_n}$ diyelim $\sum a_n$ serisi ıraksak ise bu serinin kısmi toplamlar dizisi olan (s_n) ıraksaktır. Yani $\lim_{n\to\infty} s_n=\infty$

Bu durumda $\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n}=0$ olur.

$\sum a_n$ pozitif terimli bir seri olduğundan (s_n) artan dolayısı ile $\left(\frac{1}{s_n}\right)$ pozitif terimli ve azalan bir dizi olur.

$\Rightarrow \sum_n(-1)^n b_n=\sum_n(-1)^n\frac{1}{s_n}$ serisi Leibnitz testine göre yakınsaktır.

12. **$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli yakınsak bir seri olsun. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=+\infty$ olacağını gösteriniz. Bu problemin karşıtının doğru olmadığına dair bir örnek veriniz.**

Çözüm:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ise genel terimin limiti 0'dır. Yani $\lim_{n\to\infty} a_n=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=+\infty$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ serisinin genel teriminin limiti 0'dan farklı olduğundan seri ıraksaktır. Yani $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=+\infty$ dır. $\sum\frac{1}{n}=+\infty$ olduğu halde $\sum n$ serisi yakınsak değildir. Dolayısıyla problemin karşıtı doğru değildir.

13. **Öyle $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ serileri bulunuz ki, $\sum a_n$ yakınsak $b_n\le a_n$ ve $\sum b_n$ ıraksak olsun.**

Çözüm:

$a_n=-\frac{1}{n!}$, $b_n=-\frac{1}{n}$ denirse $b_n\le a_n$ olur.

$\sum a_n=\sum-\frac{1}{n!}=-\sum\frac{1}{n!}$ yakınsak

$\sum b_n=\sum-\frac{1}{n}=-\sum\frac{1}{n}$ ıraksaktır.

14. **$|a_n|>0$ olsun**

(1) $\overline{\lim}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$ **ise** $\sum a_n$ **mutlak yakınsaktır .**

(2) $\underline{\lim}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$ **ise** $\sum a_n$ **ıraksaktır .**

testini ispat ediniz.

Çözüm:

(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$ olsun. $\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists\, p \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall\, n \geq p$ için

$\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \ell + \varepsilon$ olur. $\ell < 1$ olsun. ε sayısını $r = \ell + \varepsilon < 1$ olacak şekilde seçelim.

Bu durumda $\forall\, n \geq n_p$ için $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r \;\Rightarrow\; |a_{n+1}| < r|a_n|$ olur.

$|a_{p+1}| < r|a_p|$

$|a_{p+2}| < r|a_p|$

....

$|a_{p+n}| < r|a_{p+n-1}|$

eşitsizlikleri taraf tarafa çarpılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$|a_{p+n}| < r^n |a_p|$ bulunur. $|r| < 1$ için $\sum |a_p| r^n$ yakınsak olduğundan $\sum |a_{p+n}|$ yakınsak, dolayısıyla $\sum a_n$ yakınsaktır.

$\underline{\lim}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = s > 1$ ise $\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir $q \in \mathbb{N}$ vardır ki $\forall n \geq q$ için $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| > s - \varepsilon$ olur.

$s > 1$ olduğundan ε sayısı öyle seçilebilir ki $s - \varepsilon = u$ sayısı da 1 den büyük kalır.

Bu durumda $\forall n \geq q$ için $|a_{n+q}| > u.a_n$ olduğu düşünülerek, (a) daki yolla

$\sum a_n$ serisinin ıraksaklığı elde edilir.

15. $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = r$ **olsun.**

1) $r < 1$ **ise** $\sum a_n$ **mutlak yakınsak**

2) $r \geq 1$ **ise** $\sum a_n$ **ıraksaktır**

testini ispatlayınız.

Çözüm:

1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = \ell$ ve $\ell < 1$ olsun

$r = \dfrac{\ell + 1}{2}$ olarak yani r'yi ℓ ile 1'in orta noktası olarak seçelim. $\ell < r < 1$ olur.

Üst limit özelliğinden

$n > N$ olduğunda $|a_n|^{\frac{1}{n}} < r < 1$ olacak şekilde bir N doğal sayısı vardır. Buradan $\forall n > N$ için $|a_n| < r^n$ olur.

$|r| < 1$ için $\sum r^n$ yakınsak olduğundan karşılaştırma kriteri gereğince $\sum |a_n|$ yakınsak yani $\sum a_n$ mutlak yakınsaktır.

2) Benzer düşünceyle yapılır.

16. (a_n) **genel terimi,** $r < 1$ **için**

$$a_k = \begin{cases} r^{k+\sqrt{k}} & \textbf{k tek ise} \\ r^{k-\sqrt{k}} & \textbf{k çift ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanıyor. $\sum a_n$ **serisinin karakterini inceleyiniz.**

Çözüm:

$$\sqrt[k]{a_k} = \begin{cases} r^{\frac{k+\sqrt{k}}{k}} & \text{, k tek ise} \\ r^{\frac{k-\sqrt{k}}{k}} & \text{, k çift ise} \end{cases} = \begin{cases} r^{1+\frac{1}{\sqrt{k}}} & \text{, k tek ise} \\ r^{1-\frac{1}{\sqrt{k}}} & \text{, k çift ise} \end{cases}$$

$\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k} = r < 1 \Rightarrow \sum a_k$ yakınsak

17. $a_1 = 1$ **ve** $n \geq 1$ **için** $a_{n+1} = \dfrac{n}{2n+1} a_n$ **olsun**

$\sum a_n$ **serisinin karekterini inceleyiniz.**

Çözüm:

n yerine 1 den n − 1'e kadar değerler verilirse

$a_1 = 1$

$a_2 = \frac{1}{3} a_1$

$a_3 = \frac{2}{5} a_2$

$a_n = \frac{n-1}{2n-1} a_{n-1}$

bulunur. Bu eşitlikler taraf tarafa çarpılırsa

$$a_n = \frac{1.2.3 \ldots n-1}{3.5.7 \ldots 2n-1} = \frac{(n-1)!}{3.5.7 \ldots 2n-1}$$

elde edilir.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{3.5.7 \ldots (2n-1)(2n+1)} \frac{3.5.7 \ldots 2n-1}{(n-1)!} = \frac{n}{2n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} < 1$$

olduğundan $\sum a_n$ serisi yakınsaktır.

18. **$\sum a_n$ yakınsak ve (b_n) bir sıfır dizisi ise $\sum a_k b_k$ yakınsak mıdır?**

Çözüm:

$\sum \frac{(-1)^n}{n^{1/3}}$ yakınsak, $(b_n) = \left(\frac{(-1)^n}{n^{2/3}} \right)$ bir sıfır dizisidir.

$\sum a_n b_n = \sum \left[\frac{(-1)^n}{n^{1/3}} \cdot \frac{(-1)^n}{n^{2/3}} \right] = \sum \frac{1}{n}$ serisi ıraksaktır.

19. **(a_n) pozitif terimli azalan bir dizi olsun. $\sum a_n$ yakınsak ise sadece $a_n \to 0$ değil, aynı zamanda $na_n \to 0$ dır.**

Çözüm:

(s_n) kısmi toplamlar dizisi yakınsak olduğundan, $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde öyle bir m sayısı bulunabilir ki, $\forall v > m$ ve her $k \geq 1$ için

$$|s_{v+k} - s_v| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. $v = m + 1$ alınırsa yukardaki ifade

$$a_{m+2} + a_{m+3} + \cdots + a_{m+k+1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. $n > 2m + 2$ seçilirse

$$a_{m+2} + a_{m+3} + \cdots + a_n < \frac{\varepsilon}{2}$$

yazılabilir. Sol tarafta $n - m - 1$ terim vardır. (a_n) azalan olduğundan

$$(n - m - 1)a_n < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. $\frac{n}{2} < n - m - 1$ olduğundan

$$\frac{n}{2} a_n < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow na_n < \varepsilon$$

bulunur ki bu da $na_n \to 0$ olacağını gösterir.

Not: Tıpkı yakınsak serinin genel teriminin sıfıra gitmesinde olduğu gibi, $na_n \to 0$ olması da monoton azalan pozitif terimli serilerde yakınsaklık için gerek bir şarttır. Yani bu özelikten şu şekilde yararlanılabilir:

Eğer monoton azalan pozitif terimli bir seride (na_n) bir sıfır dizisi değilse bu seri ıraksaktır.

Bölüm 2 | **DÜZGÜN YAKINSAKLIK**

DÜZGÜN YAKINSAK DİZİLER

TANIM :

$A \subset R$ ve $\mathcal{F}(A)$ da A üzerine tanımlı, reel değerli fonksiyonların kümesi olsun.

$s: N \to \mathcal{F}(A)$ şeklinde tanımlanan s fonksiyonuna bir **fonksiyon dizisi** veya **değişken terimli dizi** adı verilir.

TANIM :

(f_n) dizisi A üzerinde f fonksiyonuna **noktasal yakınsaktır.** $\Leftrightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0$ ve her bir $x \in A$ için $\exists n_0$ öyleki $\forall n > n_0$ için $|\, f_n(x) - f(x) \,| < \varepsilon$.

TANIM :

(f_n) dizisi f fonksiyonuna A üzerinde **düzgün yakınsaktır.** $\Leftrightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0$ için

$\exists n_0$ öyleki $\forall n \geq n_0$ ve $\forall x \in A$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

TEOREM 2.1:

f_n ve f fonksiyonları $I = [a, b]$ aralığı üzerinde sürekli olsunlar.

(f_n) dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$c_n = \underset{a \le x \le b}{\text{maks}} |\, f_n(x) - f(x) \,|$$

eşitliğiyle tanımlanan (c_n) dizisinin bir sıfır dizisi olmasıdır.

SONUÇ:

(f_k) dizisi A üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsak değildir. $\Leftrightarrow$ en az bir $\varepsilon > 0$ için (f_k) nın bir $\left(f_{n_k}\right)$ alt dizisi ile, terimleri A kümesinden alınan bir (x_k) dizisi vardır ki,

$$\left|\, f_{n_k}(x_k) - f(x_k) \,\right| \geq \varepsilon$$

olur.

TEOREM 2.2:

f_n fonksiyonları A kümesi üzerinde sürekli fonksiyonlar olsunlar. (f_n) dizisi A üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsak ise f fonksiyonu A üzerinde süreklidir.

SONUÇ:

Terimleri sürekli fonksiyonlar olan (f_n) dizisi f fonksiyonuna noktasal yakınsak olduğunda f limit fonksiyonu sürekli değilse (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsak değildir.

TEOREM 2.3:

(f_n) dizisi I aralığı üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsak ve herbir f_n, I üzerinde sürekli olsun. Bu takdirde

$$F_n(x) = \int_c^x f_n(t)\,dt$$

eşitliği ile tanımlanan (F_n) dizisi

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$$

şeklinde tanımlanan F fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. Aşağıda genel terimleri verilen (f_n) dizilerinin yanlarında fazılı f fonksiyonlarına verilen aralıklar üzerinde noktasal yakınsak olduklarını gösteriniz. Bu yakınsaklığın düzgün olup olmadığını araştırınız.

a) $f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}$ $\quad f(x)=0$ $\quad I=[0,1]$

b) $f_n(x)=\dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$ $\quad f(x)=0$ $\quad I=[0,1]$

c) $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ $\quad f(x)=0$ $\quad I=[0,1]$

ç) $f_n(x)=\dfrac{1}{n}\sin(nx+n)$ $\quad f(x)=0$ $\quad I=(-\infty,+\infty)$

d) $f_n(x)=\dfrac{nx^2}{1+nx}$ $\quad f(x)=x$ $\quad I=[0,1]$

e) $f_n(x)=\dfrac{n^2x}{1+n^3x^2}$ $\quad f(x)=0$ $\quad I=[a,+\infty),\ (a>0)$

f) $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{nx}$ $\quad f(x)=0$ $\quad I=(0,+\infty)$

g) $f_n(x)=xe^{-nx}$ $\quad f(x)=0$ $\quad I=[0,+\infty)$

h) $f_n(x)=nxe^{-nx^2}$ $\quad f(x)=0$ $\quad I=[0,1]$

ı) $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$ $\quad f(x)=0$ $\quad I=[0,1]$

j) $f_n(x)=\sqrt{n}\left(x^n-x^{n+1}\right)$ $\quad f(x)=0$ $\quad I=[0,1]$

k) $f_n(x)=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ $\quad I=\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$

l) $f_n(x)=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ $\quad I=(-1,1)$

m) $f_n=n^2x^n(1-x)$ $\quad f(x)=0$ $\quad I=[0,1]$

n) $f_n(x)=n^3x(1-x)^n$ $\quad f(x)=0$ $\quad I=[0,1]$

o) $f_n(x)=\dfrac{e^{\frac{-x^2}{n}}}{n}$ $\quad f(x)=0$ $\quad I=(-\infty,+\infty)$

Çözümler:

a) $f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}$ $\quad f(x)=0 \quad I=[0,1]$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+nx}=0=f(x)\Rightarrow(f_n)$ dizisi f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır.

$$c_n=\max_{x\in[0,1]}\{|f_n(x)-f(x)|\}=\max_{x\in[0,1]}\left\{\frac{|x|}{|1+nx|}\right\}=\max_{x\in[0,1]}\left\{\frac{x}{1+nx}\right\}$$

$f_n'(x)=\dfrac{1+nx-nx}{(1+nx)^2}=\dfrac{1}{(1+nx)^2}>0$ olduğundan

$f_n(x)$ artan olup maksimum değerini aralığın sağ uç noktası olan 1 de alır.

$c_n=f_n(1)=\dfrac{1}{1+n}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0 \quad\Rightarrow (f_n),\ f$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

b) $f_n(x)=\dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$ $\quad f(x)=0$ $\quad I=[0,1]$

$$c_n=\max_{x\in I}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\max_{x\in I}\frac{2nx}{1+n^2x^2}$$

$$f_n'(x)=\frac{2n-2n^3x^2}{\left(1+n^2x^2\right)^2}$$

$f_n'(x)=0\Rightarrow 2n=2n^3x^2\Rightarrow 1=n^2x^2$

$\Rightarrow x=\mp\dfrac{1}{n},\qquad x=-\dfrac{1}{n}\notin I$

$c_n=f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)=1$ olduğundan düzgün yakınsak değildir.

c) $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ $\quad f(x)=0$ $\quad I=[0,1]$

$$c_n=\max_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\max_{x\in[0,1]}\left|\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}\right|\le\max_{x\in[0,1]}\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$c_n\le\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$ ve (c_n) pozitif terimli olduğundan $\lim c_n=0$ olur.

O halde (f_n), f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

d) $f_n(x)=\dfrac{nx^2}{1+nx}$ $\qquad f(x)=x \qquad I=[0,1]$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=x=f(x) \Rightarrow (f_n)$ dizisi f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır .

$c_n=\max\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\max\limits_{x\in[0,1]}\left|\dfrac{nx^2}{1+nx}-x\right|=\max\limits_{x\in[0,1]}\left|\dfrac{-x}{1+nx}\right|=\max\limits_{x\in[0,1]}\dfrac{x}{1+nx}$ olur.

$g_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}$ denirse $\max\limits_{0\le x\le 1} g_n(x)=g_n(1)=\dfrac{1}{1+n}$ olacağından $c_n=\dfrac{1}{1+n}$

ve $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=0$ dır. Dolayısıyla (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

e) $f_n(x)=\dfrac{n^2x}{1+n^3x^2}$ $\qquad f(x)=0 \qquad I=[a,+\infty)\ (a>0)$

$c_n=\sup\limits_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=\sup\limits_{x\in I}\dfrac{n^2x}{1+n^3x^2}$

$f_n'(x)=\dfrac{n^2(1+n^3x^2)-2n^3x.n^2x}{(1+n^3x^2)^2}=\dfrac{n^2-n^5x^2}{(1+n^3x^2)^2}$

$f_n'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

1. $x\in I$ yani $x=\dfrac{1}{n^{3/2}}\ge a$ ise

$c_n=f_n\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)=\dfrac{\sqrt{n}}{2}\nrightarrow 0$

olacağından (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsak değildir.

2. $x\notin I$ yani $x=\dfrac{1}{n^{3/2}}<a$ ise $f_n'(x)<0$

$\Rightarrow c_n=f_n(a)=\dfrac{n^2a}{1+n^3a^2}\to 0 \Rightarrow (f_n)$ düzgün yakınsaktır.

f) $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{nx}$ $\qquad f(x)=0\ I=(0,+\infty)$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin nx}{nx}=0=f(x)\Rightarrow (f_n)$, f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır.

$n_k=k,\ x_k=\dfrac{1}{k}$ ve $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$ seçersek

$\left|f_{n_k}(x_k-f(x_k))\right|=\left|\dfrac{\sin 1}{1}\right|>\dfrac{1}{2} \Rightarrow (f_n)$ düzgün yakınsak değildir.

g) $f_n(x)=xe^{-nx}$ $\quad f(x)=0 \quad I=[0,+\infty)$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{e^{nx}}=0=f(x) \Rightarrow (f_n)$, f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır.

$c_n=\sup\limits_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=\sup\limits_{x\in I}\dfrac{x}{e^{nx}}$

$f_n'(x)=\dfrac{e^{nx}-nxe^{nx}}{e^{2nx}}=\dfrac{1-nx}{e^{nx}}=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{n}$ kritik nokta

	0		1/n	
$f_n'(x)$		+	0	−
$f_n(x)$		↗		↘

$c_n=f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{\frac{1}{n}}{e^{n\cdot\frac{1}{n}}}=\dfrac{1}{ne}\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n=0$

olacağından (f_n), f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

h) $f_n(x)=nxe^{-nx^2}$ $\qquad f(x)=0 \qquad I=[0,1]$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nx}{e^{nx^2}}=0\Rightarrow (f_n)$, fonksiyonuna noktasal yakınsaktır.

$c_n=\max\limits_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=\max\limits_{x\in I}\dfrac{nx}{e^{nx^2}}$

$f_n'(x)=\dfrac{n.e^{nx^2}-2n^2x^2e^{nx^2}}{e^{2nx^2}}=\dfrac{n-2n^2x^2}{e^{nx^2}}=0 \Rightarrow x^2=\dfrac{1}{2n}\Rightarrow x=\mp\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$

$-\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\notin I$ olduğundan

$c_n=f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right)=\dfrac{n}{\sqrt{\dfrac{n}{2e}}}=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2e}}\nrightarrow 0$

olacağından (f_n) düzgün yakınsak değildir.

i) $f_n(x) = x^n - x^{n+1} \qquad f(x) = 0 \qquad I = [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n - x^{n+1} = 0 = f(x)$$

$\Rightarrow (f_n)$ dizisi f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır.

$$c_n = \max_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in[0,1]} x^n - x^{n+1}$$

$$f_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = 0 \Rightarrow x^{n-1}(n - nx - x) = 0 \Rightarrow n = nx + x$$

$$\Rightarrow x = \frac{n}{n+1} \text{ ve } x = 0 \quad \text{kritik noktalar.}$$

$(f_n(x))$ dizisi maksimum değeri ya uc noktalarda ya da kritik noktada alır.

$$f_n(0) = 0, \quad f_n(1) = 0, \quad f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = c_n$$

$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{e} - \frac{1}{e} = 0$ olduğundan (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

j) $f_n(x) = \sqrt{n}(x^n - x^{n+1}) \qquad f(x) = 0 \qquad I = [0,1]$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$ olduğundan (f_n), f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır.

$$c_n = \max_{x\in[0,1]} \left|\sqrt{n}(x^n - x^{n+1})\right|$$

$$f_n'(x) = \sqrt{n}(nx^{n-1} - (n+1)x^n) = \sqrt{n}x^{n-1}(n - (n+1)x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{n}{n+1} \text{ veya } x = 0$$

$$c_n = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sqrt{n}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\right] \to 0$$

$\Rightarrow (f_n)$, f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

k) $f_n(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1-x} \qquad f(x) = \dfrac{1}{1-x} \qquad I = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \dfrac{1}{1-x} = f(x) \Rightarrow (f_n)$ noktasal yakınsaktır.

$$c_n = \max_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in I}\left|\frac{1 - x^{n+1} - 1}{1-x}\right| = \max_{x\in I} \frac{|x|^{n+1}}{|1-x|}$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$$

olduğundan $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ dır. Bu da (f_n) dizisinin f ye düzgün yakınsak olduğunu gösterir.

l) $f_n(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1-x} \qquad f(x) = \dfrac{1}{1-x} \qquad I = (-1,1)$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \dfrac{1}{1-x} \Rightarrow (f_n)$, f ye noktasal yakınsaktır.

$$C_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in I}\left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right| = \infty$$

(c_n) sıfır dizisi olmadığı için (f_n) düzgün yakınsak değildir.

m) $f_n(x) = n^2x^n(1-x) \qquad f(x) = 0 \qquad I = [0,1]$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$ olduğundan (f_n), f ye noktasal yakınsaktır.

$$c_n = \max_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in[0,1]} |n^2x^n(1-x)|$$

$$f_n'(x) = n^3x^{n-1}(1-x) - n^2x^n = n^2x^{n-1}(n(1-x) - x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ veya } x = \frac{n}{n+1}$$

$$f_n(0) = 0, \quad f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = n^2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = n^2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$c_n = \frac{n^2}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = \infty$$

$\Rightarrow (f_n)$ dizisi f ye düzgün yakınsak değildir.

n) $f_n(x) = n^3x(1-x)^n \qquad f(x) = 0 \qquad I = [0,1]$

$$c_n = \max_{x\in[0,1]} \left|n^3x(1-x)^n\right|$$

$$f_n'(x) = n^3(1-x)^n - n(1-x)^{n-1}n^3x = 0 \Rightarrow n^3(1-x)^n = n^4x(1-x)^{n-1}$$

$$n^3(1-x) = n^4x \Rightarrow (1-x) = nx \Rightarrow x = \frac{1}{n+1} \quad \text{kritik nokta}$$

$$f_n(0) = 0, \qquad f_n(1) = 0, \qquad f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n^3}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$c_n = \dfrac{n^3}{n+1}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = \infty \Rightarrow (f_n)$ dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsak değildir.

o) $f_n(x) = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{n}$ $\qquad f(x)=0 \qquad I=(-\infty, +\infty)$

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2}{n} \geq 0 \Rightarrow e^{\frac{x^2}{n}} \geq 1 \Rightarrow e^{-\frac{x^2}{n}} \leq 1$$

$$c_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in I} \left| \frac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ ve}$$

(c_n) pozitif terimli olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ dır. $\Rightarrow$ (f_n), f ye düzgün yakınsaktır.

2. Aşağıda genel terimleri tanımlanan (f_n) dizilerinin karşılarında yazılı aralıklar üzerinde düzgün yaknsak olup olmadığını araştırınız.

a) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$, $\qquad I = \mathbb{R}$

b) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n+x^n}$, $\qquad I = [0, +\infty)$

c) $f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \geq \frac{1}{n} \text{ ise} \\ -nx, & 0 \leq x < \frac{1}{n} \text{ ise} \end{cases}$ $\qquad I = [0, 1]$

d) $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n-|x|}{n^2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \text{ ise} \\ 0, & x > \frac{1}{n} \text{ ise} \end{cases}$ $\qquad I = (-\infty, +\infty)$

Çözümler:

a) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$, $\quad I = \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+nx} = \begin{cases} 0, & x=0 \text{ ise} \\ 1, & x \neq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olur. (f_n) ler sürekli ve f sürekli olmadığından (f_n) dizisi f ye düzgün yakınsak değildir.

b) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n+x^n}$ $\qquad I = [0, +\infty)$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n+x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{n}{x^n}} = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1 \text{ ise} \\ 1, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

f fonksiyonu sürekli değil $\Rightarrow$ (f_n), f ye düzgün yakınsak değildir.

c) $f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \geq \frac{1}{n} \\ -nx, & 0 \leq x < \frac{1}{n} \end{cases}$ $\qquad I = [0,1]$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x) \Rightarrow (f_n)$, f ye noktasal yakınsak.

$$c_n = \max_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in\left[0,\frac{1}{n}\right]} |-nx| = \max_{x\in\left[0,\frac{1}{n}\right]} \{nx\} = n\cdot\frac{1}{n} = 1$$

(c_n) sıfır dizisi olmadığından (f_n), f ye düzgün yakınsak değildir.

d) $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n-|x|}{n^2}, & |x| \leq \frac{1}{n} \text{ ise} \\ 0, & |x| > \frac{1}{n} \text{ ise} \end{cases}$ $\qquad I = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$ olduğundan (f_n) dizisi f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır.

$$c_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in I} \left|\frac{n-|x|}{n^2}\right| = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0$$

olduğundan (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

3. $f_n(x) = n^2x^2(1-x^2)^n$ ile verilen (f_n) dizisi $[0, 1]$ aralığı üzerinde $f = 0$ fonksiyonuna noktasal yakınsaktır. f fonksiyonu sürekli olduğuna göre (f_n) dizisi f ye düzgün yakınsak mıdır?

Çözüm:

$$c_n = \max_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in[0,1]} \left|n^2x^2(1-x^2)^n\right| = \max_{x\in[0,1]} n^2x^2(1-x^2)^n$$

$$f_n'(x) = 2n^2x(1-x^2)^n - 2nx.n^2x^2(1-x^2)^{n-1}$$

$$f_n'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2n^2x(1-x^2) = 2n^3x^3 \qquad \Rightarrow (1-x^2) = nx^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{n+1} \qquad \Rightarrow x = \mp\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(x = \frac{-1}{\sqrt{n+1}} \notin I\right)$$

f_n maksimum değeri ya aralığın uç noktalarında ya da kritik noktada alır.

$$f_n(0) = 0; \qquad f_n(1) = 0, \qquad f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \frac{n^2}{1+n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{n^2}{1+n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \Rightarrow \lim c_n = \infty$$

$\Rightarrow (f_n)$ dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsak değildir.

4. Aşağıda genel terimleri verilen dizilerin I aralığı üzerinde düzgün yakınsak fakat J üzerinde düzgün yakınsak olmadığını gösteriniz.

a) $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$, $\quad I = [0,1]$, $\quad J = [0,\infty)$

b) $f_n(x) = \sin^n x$, $\quad I = \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $\quad J = \left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

c) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$, $\quad I = \left[0,\frac{1}{2}\right]$, $\quad J = [0, 1)$

d) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $\quad I = [1,\infty)$, $\quad J = (0,\infty)$

e) $f_n(x) = n^2x^2e^{-nx}$, $\quad I = [1,+\infty)$ $\quad J = (0,\infty)$

Çözümler

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{x+n} = 0$ olduğundan (f_n) dizisi $f(x) = 0$ fonksiyonuna noktasal yakınsaktır.

$$c_n = \max_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in I} \frac{x}{x+n}, \qquad I = [0,\ 1]$$

$$f_n'(x) = \frac{x+n-x}{(x+n)^2} = \frac{n}{(x+n)^2} > 0$$

olduğundan $f_n(x)$ maximum değerini sağ uç noktada alır.

$$\Rightarrow c_n = f_n(1) = \frac{1}{n+1} \text{ ve } \lim_{n\to\infty} c_n = 0 \Rightarrow (f_n)\ f \text{ ye düzgün yakınsaktır.}$$

$J = (0,\infty)$ için $\varepsilon = \dfrac{1}{3}$, $n_k = k$, $x_k = k$ alınırsa

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| = \left|\frac{k}{k+k} - 0\right| = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = \varepsilon$$

$\Rightarrow (f_k)$, $J = (0,\infty)$ aralığında düzgün yakınsak değildir.

b) $f_n(x) = \sin^n x \quad I = \left[0,\frac{\pi}{4}\right] \qquad J = \left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin^n x = 0 = f(x) \Rightarrow (f_n)$, f ye noktasal yakınsaktır.

$$c_n = \max_{x\in I} |\sin^n(x) - 0| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$$

$\Rightarrow (f_n)$ dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

$J = \left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ için $\quad c_n = \sup\limits_{x\in J} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in J} \sin^n(x) = 1.$

(c_n) sıfır dizisi olmadığından (f_n) dizisi $J = \left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ aralığında düzgün yakınsak değildir.

c) $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$ $\quad I=\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ $\quad J=[0,1)$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}=0=f(x)\Rightarrow (f_n)$ dizisi f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır.

$$c_n=\max_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=\max_{x\in I}\frac{x^n}{1+x^n}$$

$$f_n'(x)=\frac{nx^{n-1}(1+x^n)-nx^{n-1}x^n}{(1+x^n)^2}=\frac{nx^{n-1}[1+x^n-x^n]}{(1+x^n)^2}=\frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}>0$$

olduğundan (f_n) maksimum değeri $x=\dfrac{1}{2}$ noktasında alır.

$$c_n=f_n\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{1}{1+2^n}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}c_n=0 \text{ olduğundan}$$

(f_n) dizisi I üzerinde f ye düzgün yakınsaktır.

$J=[0,1)$ için

$$c_n=\sup_{x\in[0,1)}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in[0,1)}\frac{x^n}{1+x^n}=f_n(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

(c_n) sıfır dizisi olmadığından (f_n) dizisi J üzerinde düzgün yakınsak değildir.

d) $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ $\quad I=[1,\infty)$ $\quad J=(0,\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2}=0=f(x)$$

$$c_n=\sup_{x\geq 1}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\geq 1}\left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right|=\sup_{x\geq 1}\frac{nx}{1+n^2x^2}$$

$$f_n'(x)=\frac{n(1+n^2x^2)-2n^2x.nx}{(1+n^2x^2)^2}=\frac{n+n^3x^2-2n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2}=\frac{n-n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2}$$

$$f'_n(x)=0 \Rightarrow x^2=\frac{1}{n^2} \Rightarrow x\mp\frac{1}{n} \Rightarrow f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{1+1}=2$$

I aralığında $f_n'(x)<0$ olduğundan maximum değerini 1 noktasında alır ayrıca $x=\dfrac{1}{n}$ noktaları $n>1$ için I aralığına ait değildir.

$$c_n=f_n(1)=\frac{n}{1+n^2}\to 0 \Rightarrow \text{ dizi } I=[1,\infty) \text{ aralığında düzgün yakınsaktır.}$$

$J=(0,\infty)$ aralığında ise $x=\dfrac{1}{n}$ kritik noktası J'ye aittir ve $f_n(x)$ maximum değerini $x=\dfrac{1}{n}$ noktasında alır.

$$c_n=f_n\left(\frac{1}{n}\right)=2\Rightarrow f_n \text{ dizisi } J \text{ üzerinde } f \text{ ye düzgün yakınsak değildir.}$$

e) $f_n(x)=n^2x^2e^{-nx}$ $\quad I=[1,+\infty)$ $\quad J=(0,\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2x^2}{e^{nx}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2nx^2}{xe^{nx}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{xe^{nx}}=0=f(x)$$

$$c_n=\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=\max_{x\in I}\frac{n^2x^2}{e^{nx}}$$

$$f_n'(x)=\frac{2n^2xe^{nx}-e^{nx}.n.n^2x^2}{e^{2nx}}=\frac{n^2xe^{nx}(2-nx)}{e^{2nx}}$$

$$f_n'(x)=0\Rightarrow 2=nx\Rightarrow x=\frac{2}{n}$$

$I=[1,+\infty)$ aralığında $f_n'(x)<0$ olduğundan bu aralık üzerinde (f_n) azalan olup supremum değerini x=1 noktasında alır.

$$c_n=f_n(1)=\frac{n^2}{e^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{e^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{e^n}=0$$

olacağından (f_n) dizisi I aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır.

$J=[0,\infty)$ aralığı üzerinde (f_n) supremum değerini $x=\dfrac{2}{n}$ kritik noktasında alır.

$$c_n=f_n\left(\frac{2}{n}\right)=\frac{4}{e^2}\neq 0\Rightarrow f_n,\ J=(0,\infty) \text{ aralığı üzerinde düzgün yakınsak değildir.}$$

5. Problem 4 de verilen dizilerin, sırası ile,

a) $\delta > 0$ için $I = [0, \delta]$, b) $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ için $I = \left[0, \frac{\pi}{2} - \delta\right]$

c) $0 < \delta < 1$ için $I = [0, 1 - \delta]$ d) $\delta > 0$ için $I = [\delta, \infty)$

e) $\delta > 0$ için $I = [\delta, \infty)$

aralıkları üzerinde düzgün yakınsak olacağını gösteriniz.

a) $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$ $\sigma > 0$ için $I = [0, \sigma]$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{x+n} = 0 = f(x) \Rightarrow c_n = \max_{x\in I} \left|\frac{x}{n+x}\right|$$

$$f_n'(x) = \frac{n+x-x}{(n+x)^2} = \frac{n}{(n+x)^2} > 0 \Rightarrow f_n(x) \text{ artandır.}$$

Fonksiyon maximum değerini sağ uç noktada alır.

$$\Rightarrow c_n = \max_{x\in I} \left|\frac{x}{x+n}\right| = \frac{\sigma}{\sigma+n}$$

$\lim_{n\to\infty} c_n = 0 \Rightarrow (f_n)$ dizisi $f = 0$'a düzgün yakınsaktır.

b) $f_n(x) = \sin^n x$ $0 < \sigma < \frac{\pi}{2}$ $I = \left[0, \frac{\pi}{2} - \sigma\right]$

$\forall x \in I$ için

$\sin^n x < 1$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \sin^n x = 0 = f(x)$ dır.

$$c_n = \max_{x\in I} \left|\sin^n x\right| = \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \sigma\right) = \cos^n \sigma \text{ ve } \lim_{n\to\infty} c_n = 0 \Rightarrow$$

(f_n) dizisi $f = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

c) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$ $0 < \sigma < 1$ için $I = [0, 1-\sigma]$

$f_n(x)$ monoton artan olduğundan

$$c_n = \max_{x\in I} \left|\frac{x^n}{1+x^n}\right| = \frac{(1-\sigma)^n}{1+(1-\sigma)^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(1-\sigma)^n}{1+(1-\sigma)^n} = 0$$

$\Rightarrow (f_n)$ dizisi $f = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

d) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ $\sigma > 1$ için $I = [\sigma, +\infty)$

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{nx}{1+n^2x^2} = 0 = f(x)$ ve f_n, I da azalan olduğundan

$$\Rightarrow c_n = \sup_{x\in I} \left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right| = \frac{n\sigma}{1+n^2\sigma^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sigma}{1+n^2\sigma^2} = 0$$

$\Rightarrow f_n$ dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

e) $f_n(x) = n^2x^2e^{-nx}$ $\sigma > 1$ için $I = [\sigma, +\infty)$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n^2x^2e^{-nx} = 0 = f(x)$ ve f_n, I üzerinde azalan olduğundan,

$$c_n = \sup_{x\in I} \left|n^2x^2e^{-nx}\right| = n^2\sigma^2e^{-n\sigma} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} n^2\sigma^2e^{-n\sigma} = 0$$

$\Rightarrow (f_n)$ dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

DÜZGÜN YAKINSAKLIK VE İNTEGRAL

TEOREM

(f_n), $[a, b]$ aralığı üzerinde reel değerli ve sınırlı fonksiyonların bir dizisi olsun. f_n fonksiyonları $[a, b]$ üzerinde integrallenebilen fonksiyonlar ve (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsak ise f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde integrallenebilirdir ve

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

dir.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. $f_n(x) = nx\left(1-x^2\right)^n$ **eşitliği ile verilen (f_n) dizisinin $I = [0,\ 1]$ aralığı üzerinde $f = 0$ fonksiyonuna noktasal yakınsak olduğunu gösteriniz.**

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

eşitliği sağlanır mı? (f_n) dizisi f ye düzgün yakınsak mıdır?

Çözüm:

$$\lim_{n\to\infty} nx\left(1-x^2\right)^n = \lim_{t\to\infty} tx\left(1-x^2\right)^t = \lim_{t\to\infty}\frac{tx}{\left(1-x^2\right)^{-t}}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{x}{-\left(1-x^2\right)^{-t}\ln\left(1-x^2\right)} = -x\lim_{t\to\infty}\frac{\left(1-x^2\right)^t}{\ln\left(1-x^2\right)} = 0$$

olduğundan (f_n) dizisi $f = 0$ fonksiyonuna noktasal yakınsaktır.

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 nx\left(1-x^2\right)^n dx = -\frac{n}{2}\frac{1}{n+1}\left(1-x^2\right)^{n+1}\Big|_0^1 = \frac{n}{2(n+1)}$$

olacağından $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$ dır. Diğer taraftan

$$\int_0^1 \lim f_n(x)dx = \int_0^1 0\,dx = 0$$

olacağından

$$\lim\int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim f_n(x)dx$$

dır. O halde (f_n), $f = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsak değildir. Çünkü düzgün yakınsak olsaydı eşitlik sağlanırdı.

2. **f_n dizisi $f_n(x) = (n+1)(n+2)(1-x)x^n$ biçiminde tanımlanıyor. (f_n) dizisinin $[0,\ 1]$ üzerinde $f = 0$ fonksiyonuna noktasal yakınsadığını gösteriniz.**

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

eşitliği sağlanır mı? (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsak mıdır?

Çözüm:

$0 \le x \le 1$ için $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)(n+2)(1-x)x^n = 0$ olacağından (f_n) dizisi $f = 0$ fonksiyonuna noktasal yakınsaktır.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 (n+1)(n+2)(1-x)x^n dx$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[(n+1)(n+2)\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2}\right)\Big|_0^1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}(n+1)(n+2)\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 0\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

olduğundan (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsak değildir.

3. **Teorem 2.4 den yararlanarak, aşağıda genel terimleri verilen dizilerin karşılarında yazılı aralıklar üzerinde düzgün yakınsak olmadığını gösteriniz. ((f_n) fonksiyonlarının grafiklerinden yararlanılabilir.)**

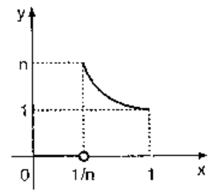
a) $f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < \frac{1}{n} \text{ ise} \\ \frac{1}{x}, & \frac{1}{n} \le x \le 1 \text{ ise} \end{cases}$ $\qquad I = [0, 1]$

b) $f_n(x)=\begin{cases} n \;, & 0 \le x < \frac{1}{n} \quad \text{ise} \\ 0 \;, & x=0 \text{ veya } \frac{1}{n} \le x \le 1 \quad \text{ise} \end{cases}$ $\quad I=[0,1]$

c) $f_n(x)=\begin{cases} n(1-nx), & 0 < x < \frac{1}{n} \quad \text{ise} \\ 0, & x=0 \text{ veya } \frac{1}{n} \le x \le 1 \quad \text{ise} \end{cases}$ $\quad I=[0,1]$

Çözüm:

a) $f_n(x)=\begin{cases} 0, & 0 \le x < \frac{1}{n} \quad \text{ise} \\ \frac{1}{x}, & \frac{1}{n} \le x \le 1 \quad \text{ise} \end{cases}$ $\quad I=[0,1]$



$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^{1/n} 0\,dx + \int_{1/n}^1 \frac{1}{x}dx = \ln x \Big|_{\frac{1}{n}}^{1} = \ln(n)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}[\ln(n)] = \infty$$

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{x}dx = \infty$$

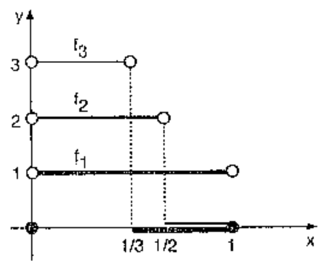
$\Rightarrow (f_n)$ dizisi f ye düzgün yakınsak değildir.

b) $f_n(x)=\begin{cases} n \;, & 0 < x < \frac{1}{n} \quad \text{ise} \\ 0 \;, & x=0 \text{ veya } \frac{1}{n} \le x \le 1 \quad \text{ise} \end{cases}$ $\quad I=[0,1]$

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 0\,dx = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^{1/n} n\,dx + \int_{1/n}^1 0\,dx\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[nx \Big|_0^{\frac{1}{n}}\right] = 1$$



$\Rightarrow (f_n)$ düzgün yakınsak değildir.

c) $f_n(x)=\begin{cases} n(1-nx) \;, & 0 < x \le \frac{1}{n} \\ 0 \;, & x=0 \text{ veya } \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$ $\quad I=[0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^{1/n} n(1-nx)dx + \int_{1/n}^1 0\,dx\right]$$

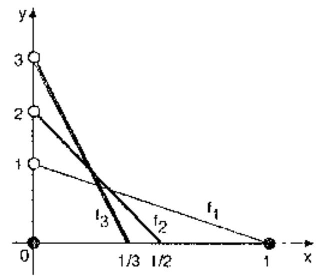
$$= \lim_{n\to\infty}\left(nx - \frac{n^2}{2}x^2\right)\Big|_0^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 0\,dx = 0 \Rightarrow (f_n)$ dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsak değildir.

$n=1 \Rightarrow f_1(x)=\begin{cases} 1-x \;, & 0 < x \le 1 \\ 0 \;, & x=0 \end{cases}$

$n=2 \Rightarrow f_2(x)=\begin{cases} 2-4x \;, & 0 < x \le \frac{1}{2} \\ 0 \;, & x=0 \text{ veya } \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$

$n=3 \Rightarrow f_3(x)=\begin{cases} 3-9x \;, & 0 < x \le \frac{1}{3} \\ 0 \;, & x=0 \text{ veya } \frac{1}{3} < x \le 1 \end{cases}$



DÜZGÜN YAKINSAKLIK VE TÜREV

TEOREM 2.5:

Bir sınırlı I aralığı üzerinde tanımlı f_n fonksiyonları bu aralık üzerinde sürekli türeve sahip olsun. (f_n) dizisi f fonksiyonuna noktasal yakınsak ve (f'_n) türev dizisi bir g fonksiyonuna düzgün yakınsak ise I üzerinde $g = f'$ dür, yani,

$$\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' \qquad (2.4)$$

dır.

TANIM

(f_n) bir A kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun.

(f_n) bir **Düzgün Cauchy dizisidir.** $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in N$ öyleki $\forall$ m, $n > n_0$ ve $\forall x \in A$ için $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

TANIM 2.5:

(f_n) A üzerinde **düzgün sınırlıdır.** $\Leftrightarrow$ Her $n \in N$ ve $\forall x \in A$ için, $|f_n(x)| \le M$ olacak şekilde bir M sayısı vardır.

TEOREM 2.6:

(f_n) bir A kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun.

(f_n), A üzerinde düzgün Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow$ (f_n), A üzerinde düzgün yakınsaktır.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. Genel terimleri aşağıda tanımlanan (f_n) dizilerinin (f'_n) türev dizileri [0, 1] üzerinde düzgün yakınsak mıdır? $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$ şeklinde tanımlanan (F_n) dizisi [0, 1] üzerinde düzgün yakınsak mıdır?

a) $f_n = \dfrac{x}{1+n^2x}$ b) $f_n(x) = \dfrac{n^2x}{1+n^3x^2}$

c) $f_n(x) = \dfrac{2+nx^2}{2+nx}$ d) $f_n(x) = e^{-nx^2}$

Çözümler:

a) $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x}$ $\quad f = 0$ dır.

$$f'_n(x) = \frac{1+n^2x-n^2x}{(1+n^2x)^2} = \frac{1}{(1+n^2x)^2} \Rightarrow f''_n(x) = -2(1+n^2x)^{-3}.n^2 < 0$$

$\Rightarrow (f'_n)$ azalandır. maximum değerini $x = 0$ noktasında alır.

$$\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+n^2x)^2} = f'(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow (f'_n)$ türev dizisi $f' = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsak değildir.

$$b_n = \max_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in[0,1]} \frac{x}{1+n^2x} = f_n(1) = \frac{1}{1+n^2}$$

$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ olduğundan (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Teorem 2.3 gereğince $(F_n(x)) = \left(\int_0^x \dfrac{x}{1+n^2x}dx\right)$ dizisi $F_n(x) = \int_0^x 0dx = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

b) $f_n(x)=\dfrac{n^2x}{1+n^3x^2}\Rightarrow f_n'(x)=\dfrac{n^2(1+n^3x^2)-2n^3x.n^2x}{(1+n^3x^2)^2}=\dfrac{n^2-n^5x^2}{(1+n^3x^2)^2}$ dizisinin düzgün yakınsaklığını araştıralım.

$$f_n''(x)=\frac{-2n^5x(1+n^3x^2)^2-2(1+n^3x^2)(2n^3x)(n^2-n^5x^2)}{(1+n^3x^2)^4}$$

$$=\frac{(1+n^3x^2)[-2n^5x-2n^8x^3-4n^5x+4n^8x^3]}{(1+n^3x^2)^4}=\frac{(-6n^5x+2n^8x^3)}{(1+n^3x^2)}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{3}{n^3}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{n^{3/2}}$$

$$c_n=\max_{x\in[0,1]}\left|f_n'(x)-f'(x)\right|=\max_{x\in[0,1]}\left|\frac{n^2-n^5x^2}{(1+n^3x^2)^2}\right|=f_n'\left(\frac{\sqrt{3}}{n^{3/2}}\right)$$

$$=\left|\frac{n^2-3n^2}{4}\right|=\frac{n^2}{2}\to\infty$$

(c_n) dizisi sıfır dizisi olmadığından (f_n') dizisi $f'(x)=0$ fonksiyonuna düzgün yakınsak değildir.

$$F_n(x)=\int_0^x f_n(x)dx=\int_0^x\frac{n^2x}{1+n^3x^2}dx=\frac{\ln(1+n^3x^2)}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=0=F(x)$$

$$b_n=\max_{x\in[0,1]}\left|F_n(x)-F(x)\right|=\max_{x\in[0,1]}\frac{\ln(1+n^3x^2)}{2n}=\frac{\ln(1+n^3)}{2n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+n^3)}{2n}=0\Rightarrow(F_n)$, $F(x)=0$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

c) $f_n(x)=\dfrac{2+nx^2}{2+nx}$,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2+nx^2}{2+nx}=\begin{cases}1, & x=0\\ x, & 0<x\le 1\end{cases}$$

$f(x)$ fonksiyonu sürekli olmadığından (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsak olamaz. Teorem 2.3'ten (f_n') düzgün yakınsak değildir.

$F_n(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{2+nx^2}{2+nx}dx$ fonksiyon dizisinin düzgün yakınsaklığını araştıralım.

$$F_n(x)=\int_0^x\frac{2}{nx+2}+x-\frac{2}{n}+\frac{\frac{4}{n}}{nx+2}dx$$

$$=\frac{2}{n}\ln(nx+2)+\frac{x^2}{2}-\frac{2}{n}x+\frac{4}{n^2}\ln(nx+2)$$

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=0=F(x)$$

$$c_n=\max_{x\in[0,1]}\left|F_n(x)-F(x)\right|=\max_{x\in[0,1]}F_n(x)$$

$$=\frac{2\ln(n+2)}{n}+\frac{1}{2}+\frac{\ln(n+2)}{n^2}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0\Rightarrow(F_n)$ F ye düzgün yakınsaktır.

d) $f_n(x)=e^{-nx^2}$

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}e^{-nx^2}=0$$

$$c_n=\max_{x\in[0,1]}\left|e^{-nx^2}-0\right|=f_n(0)=e^0=1\neq 0$$

$\Rightarrow(f_n)$ dizisi $f(x)=0$ fonksiyonuna düzgün yakınsak değildir.

Teorem 2.3 gereğince (f_n') dizisi f' fonksiyonuna düzgün yakınsak değildir.

2. **$f_n(x)=(\sin x)^{1/n}$ eşitliği ile verilen (F_n) dizisinin $[0,\pi]$ üzerinde noktasal yakınsak olduğunu fakat düzgün yakınsak olmadığını gösteriniz.**

Çözüm:

$$F(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}(\sin x)^{1/n}=\begin{cases}1, & 0<x<\pi \quad \text{ise}\\ 0, & x=0 \text{ veya } x=\pi \quad \text{ise}\end{cases}$$

(f_n) dizisi f fonksiyonuna noktasal yakınsak fakat $f(x)$ sürekli olmadığından düzgün yakınsak değildir.

3. $f_n(x) = x - \dfrac{x^n}{n}$ eşitliği ile verilen (F_n) dizisinin $[0, 1]$ düzgün yakınsak fakat bunun türev dizisi olan ve

$$F_n'(x) = 1 - x^{n-1}$$

ile tanımlanan $\left(F_n'\right)$ dizisinin $[0, 1]$ üzerinde düzgün yakınsak olmadığını gösteriniz.

Çözüm:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} x - \frac{x^n}{n} = x = f(x)$$

$$c_n = \max_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in[0,1]} \left| x - \frac{x^n}{n} - x \right| = \max_{x\in[0,1]} \frac{|x|^n}{n} = \frac{1}{n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ olacağından (F_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

$$f_n'(x) = 1 - x^{n-1}$$

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \begin{cases} 0 \ , & x = 1 \quad \text{ise} \\ 1 \ , & 0 \le x < 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

f'_n fonksiyonları sürekli fakat $f'(x)$ sürekli olmadığından $\left(f_n'\right)$dizisi $f'(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsak değildir.

4. $[0, \infty)$ üzerinde $f_n(x) = x / \left(1 + nx^2\right)$ biçiminde tanımlanan (f_n) dizisinin $f = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'$$

eşitliği gerçeklenir mi?

Çözüm:

$f_n'(x) = \dfrac{1 - nx^2}{\left(1 + nx^2\right)^2}$ olduğundan $f_n(x)$, $x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ noktasında bir maksimuma sahiptir.

$$c_n = \sup_{x\ge 0} | f_n(x) - 0 | = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0$$

olacağından (f_n) dizisi $f = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

Böylece

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \text{ ise} \\ 1, & x = 0 \text{ ise} \end{cases} \neq (\lim f_n(x))' = (0)' = 0$$

5. $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + nx^2}$ eşitliği ile verilen (f_n) dizisinin $f = 0$ fonksiyonuna R üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

$$\lim f_n'(0) = (\lim f_n)'(0)$$

eşitliği gerçeklenir mi. Bu sonuç teorem 2.5 ile çelişir mi? Neden?

Çözüm:

$\lim f_n(x) = f(x) = 0$ dır.

$$f_n'(x) = \frac{1 + nx^2 - 2nx^2}{\left(1 + nx^2\right)^2} = \frac{1 - nx^2}{\left(1 + nx^2\right)^2}$$

$$f_n'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{n} \Rightarrow x = \mp\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$c_n = \sup_{x\in R} | f_n(x) - f(x) | = \sup_{x\in R} \frac{|x|}{1 + nx^2} = f_n\left(\mp\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + 1} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0$$

$\Rightarrow (f_n)$ dizisi $f(x) = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

$$f_n'(0) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n'(0) = 1 \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)'(0) = 0$$

olacağından eşitlik gerçeklenmiyor. Bu sonuç Teorem 2.5 ile çelişmez. Çünkü eşitlik $\left(f_n'\right)$ dizisi düzgün yakınsak ise gerçeklenir.

FONKSİYON SERİLERİNİN DÜZGÜN YAKINSAKLIĞI

TANIM

(f_n) bir A cümlesi üzerinde tanımlı, reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun.

$$s_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$$

biçiminde tanımlanan (s_n) dizisine $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ serisinin **kısmi toplamlar dizisi** denir.

$\sum f_n$ serisi A üzerinde **düzgün yakınsaktır** $\Leftrightarrow$ (s_n) dizisi A üzerinde **düzgün yakınsaktır.**

TEOREM

$\sum f_n$, bir A kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir serisi olsun.

$\sum f_n$ serisi A üzerinde düzgün yakınsaktır $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists\, n_0 \in N$ öyleki $\forall x \in A$ ve her $n > m \geq n_0$ için

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| < \varepsilon$$

dır.

SONUÇ 2.1:

$\sum f_n$, A üzerinde tanımlı fonksiyonların bir serisi olsun.

$\sum f_n$ serisi A üzerinde düzgün yakınsaktır $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists\; n_0 \in N$ öyleki $\forall x \in A$ ve $\forall n > n_0$ için

$$|K_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Başka bir deyişle, (K_n) kalan terim dizisi düzgün sıfır dizisidir.

TEOREM 2.8:

$\sum f_k$, bir A kümesi üzerinde sürekli fonksiyonların bir serisi olsun. Bu seri A üzerinde bir f fonksiyonuna düzgün yakınsak ise f fonksiyonu A üzerinde süreklidir.

TEOREM 2.9:

$\sum f_k$, [a, b] üzerinde sınırlı, reel değerli ve integrallenebilir fonksiyonların bir serisi olsun. $\sum f_n$ serisi düzgün yakınsak ise

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)$$

dır.

TEOREM 2.10:

$\sum f_n$, (a, b) üzerinde türevlenebilen fonksiyonların bir serisi olsun. $\sum f_n$ serisi bir f fonksiyonuna noktasal yakınsak ve $\sum f_n'$ serisi bir g fonksiyonuna düzgün yakınsak ise $\sum f_n$ serisi düzgün yakınsaktır ve

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_n'(x)$$

dır.

TEOREM 2.11:

$\sum f_k$ serisi [a, b] üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsak ve $c \in [a, b]$ olmak üzere $\lim_{x\to c} f_n(x) = c_n$ mevcut olsun. Bu durumda

$$\lim_{x\to c} \sum_{k=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to c} f_n(x)\right)$$

dır.

TEOREM 2.12: (Weierstrass testi)

$\sum f_n$, A üzerinde tanımlı fonksiyonların bir serisi olsun.

Her $x \in A$ için $|f_n(x)| \le a_n$ ve $\sum a_n < \infty$ ise

$\sum f_n(x)$ serisi A üzerinde düzgün yakınsaktır.

LEMMA 2.1: (a_n) negatif olmayan reel sayıların azalan bir dizisi (b_n) de herhangi bir reel terimli dizi olsun. m ve n, $n > m$ şartını sağlayan doğal sayılar ise

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right| \le a_m \cdot \underset{m \le p \le n}{\text{maks}} \left|\sum_{k=m}^{p} b_k\right|$$

dır.

TEOREM 2.13: (Abel testi)

$\sum f_n$, A kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların herhangi bir serisi ve (g_n) de negatif olmayan fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer

1) $\sum f_n$ serisi A üzerinde düzgün yakınsak,

2) (g_n) azalan ve A üzerinde düzgün sınırlı,

ise $\sum f_n g_n$ serisi A üzerinde düzgün yakınsaktır.

TEOREM 2.14: (Dirichlet testi)

(g_n) negatif olmayan fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer A üzerinde

1) $\sum f_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi düzgün sınırlı

2) (g_n) azalan ve $g = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsak

ise $\sum f_n g_n$ serisi A üzerinde düzgün yakınsaktır.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. Aşağıda genel terimleri verilen serilerin karşılarında yazılı aralıklar üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

a) $f_n(x) = (n+1)x^n$ $\quad I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ $\qquad$ b) $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n(4+nx^2)}$ $\quad I = [-c, c]\ c > 0$

c) $f_n(x) = n^2x^n$ $\quad I = [-c, c], (c < 1)$ $\qquad$ ç) $f_n(x) = \dfrac{(1-x^{2n})^{1/2}}{3^n}$ $\quad I = [-1, 1]$

d) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}e^{-nx}$ $\quad I = [0,1]$ $\qquad$ e) $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$ $\quad I = [-1,1]$

f) $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{(n+x)}$ $\quad I = [-1,1]$

Çözümler:

a) $f_n(x) = (n+1)x^n$ $\qquad I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$\forall x \in I$ için

$|f_n(x)| = |(n+1)x^n| \le \dfrac{n+1}{2^n}$ ve $\sum \dfrac{n+1}{2^n} < \infty$ olduğundan Weierstrass testinden $\sum f_n$ serisi $I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

b) $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n(4+nx^2)}$, $\quad I = [-c, c]$, $\quad c > 0$

$$|f_n(x)| = \left|\frac{x^2}{n(4+nx^2)}\right| = \frac{x^2}{n(4+nx^2)}$$

Bu fonksiyonun maximumunu bulalım.

$$f_n'(x) = \frac{2nx(4+nx^2) - nx^2 \cdot 2nx}{n^2(4+nx)^2} = \frac{8x}{n(4+nx)^2} = 0 \iff x = 0$$

f_n fonksiyonları çift fonksiyon olduklarından $[0, c]$ aralığında incelememiz yeterlidir. Bu aralıkta $f_n'(x) \ge 0$ olacağından $f_n(x)$ artan olup maximum değerini c noktasında alır.

$|f_n(x)| \le M_n$ dersek $M_n = f_n(c) = \dfrac{c^2}{n(4+nc^2)} \le \dfrac{1}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ serisi yakınsak olduğundan $\sum M_n$ yakınsak ve dolayısıyla $\sum f_n(x)$ düzgün yakınsaktır.

c) $f_n(x) = n^2x^n \qquad I = [-c,c] \qquad (c<1)$

$|f_n(x)| = |x^n n^2| = n^2|x|^n \le n^2c^n = M_n$

$\sum n^2c^n$ serisi yakınsaktır. Çünkü;

$$\lim \frac{M_{n+1}}{M_n} = \lim \frac{(n+1)^2c^{n+1}}{n^2.c^n} = \lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 c = c < 1 \text{ dır.}$$

Weierstrass testinden $\sum f_n$ serisi düzgün yakınsaktır.

ç) $f_n(x) = \dfrac{(1-x^{2n})^{1/2}}{3^n} \qquad I = [-1,1]$

$\forall x \in [-1,1]$ için $\quad 0 \le x^{2n} \le 1 \Rightarrow 0 \le 1 - x^{2n} \le 1 \Rightarrow \sqrt{1-x^{2n}} < 1$

$$\Rightarrow f_n(x) = \frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{3^n} < \frac{1}{3^n} = M_n$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n}$ serisi yakınsak olduğundan $\sum f_n$ düzgün yakınsaktır.

d) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}e^{-nx} \qquad I = [0,1]$

$\forall x \in [0,1]$ için $e^{xn} \ge 1 \Rightarrow e^{-xn} \le 1 \Rightarrow |f_n(x)| = \dfrac{|x|^n}{n!}e^{-nx} \le \dfrac{|x|^n}{n!} < \dfrac{1}{n!}$

$\sum \dfrac{1}{n!}$ serisi yakınsak olduğundan $\sum f_n$ serisi düzgün yakınsaktır.

e) $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n} \qquad I = [-1,1]$

Abel Testini uygulayalım:

$f_n = \dfrac{(-1)^n}{n}, \quad g_n(x) = x^n$ olsun

1) $\sum f_n = \sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ yakınsak (x'e bağlı olmadığından düzgün yakınsak)

2) $g_n(x) = x^n$ azalan ve I üzerinde düzgün sınırlı yani $\forall x \in I$ ve $\forall n \in N$ için $|g_n(x)| \le 1$ dır. O halde verilen seri düzgün yakınsaktır.

f) $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{(n+x)} \qquad I = [0, +\infty)$

Dirichlet testini kullanalım.

$f_n = (-1)^n \qquad g_n(x) = \dfrac{1}{n+x}$ alalım.

1) $\sum f_n = \sum (-1)^n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi sınırlı mı?

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = -1+1-1+1\ldots(-1)^n = \begin{cases} 0 & n \text{ çift ise} \\ -1 & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

$|S_n(x)| \le 1 \Rightarrow (S_n(x))$ sınırlı

2) (g_n) dizisi $g = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsak mı?

$$c_n = \max_{x\in I}\left|\frac{1}{n+x} - 0\right| = \max_{x\in I} \frac{1}{n+x} = g_n(0) = \frac{1}{n} \to 0$$

Diriclet testinden dolayı seri düzgün yakınsaktır.

2. $\alpha > \dfrac{1}{2}$ için $\sum \dfrac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$ **serisinin R üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.**

Çözüm

$f_n(x) = \dfrac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$ fonksiyonunun supremum değerini bulalım.

$$f_n'(x) = \frac{n^\alpha(1+nx^2) - 2n^{\alpha+1}x^2}{n^{2\alpha}(1+nx^2)^2} = \frac{n^\alpha + n^{\alpha+1}x^2 - 2n^{\alpha+1}}{n^{2\alpha}(1+nx^2)^2} = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{n} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$M_n = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{n^\alpha(1+1)} = \frac{1}{2n^{\alpha+\frac{1}{2}}} \text{ ve}$$

		$-\frac{1}{\sqrt{n}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{n}}$	
$f_n'(x)$	−	0		+		0	−
$f_n(x)$	↘			↗			↘

$\alpha + \dfrac{1}{2} > 1$ olduğundan $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ serisi yakınsaktır. Weirestrass testi gereğince verilen seri düzgün yakınsaktır.

3. $\sum \frac{x^n(1-x)}{\log(n+1)}$ **serisinin [0, 1] üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.**

Çözüm:

Dirichlet testini uygulayalım.

$f_n(x)=x^n(1-x)$ ve $g_n(x)=\frac{1}{\log(n+1)}$ alalım.

1) $\sum f_n(x)$ serisinin kısmi toplamlar dizisi düzgün sınırı

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} x^k(1-x)=(1-x)\left(x+x^2+....+x^2\right)=x(1-x)\frac{1-x^n}{1-x}=x\left(1-x^n\right)\le 1$$

$$\Rightarrow |S_n(x)|\le 1$$

2) $g_n(x)=\frac{1}{\log(n+1)}$ negatif olmayan azalan bir dizi ve

$$\lim_{n\to\infty} g_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log(n+1)}=0$$

(x'e bağlı olmadığından düzgün yakınsaktır.)

$$\Rightarrow \sum f_n g_n=\sum\frac{x^n(1-x)}{\log(n+1)}$$ serisi düzgün yakınsaktır.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$ **serisinin [0, 1] aralığında terim terim türevi alınabilir mi? Nedenini açıklayınız.**

Çözüm:

$$S_n(x)=\left(x-\frac{x^2}{2}\right)+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)+....+\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x-\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n(x)=x\Rightarrow\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{n-1}-x^n\right)$ serisinin kısmi toplamlar dizisi için

$$S_n'(x)=(1-x)+\left(x-x^2\right)+\left(x^2-x^3\right)+....+\left(x^{n-1}-x^n\right)=1-x^n$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n'(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1-x^n\right)=\begin{cases}0, & x=1 \text{ ise}\\ 1, & 0\le x<1 \text{ ise}\end{cases}$$ olacağından

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{n-1}-x^n\right)=\begin{cases}0, & x=1 \text{ ise}\\ 1, & 0\le x<1 \text{ ise}\end{cases}$$

olur. O halde terim terim türev alınamaz.

5. $\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n$ **serisinin I = [0, 1] aralığındaki her bir x için yakınsak fakat bu aralık üzerinde düzgün yakınsak olmadığını gösteriniz.**

Çözüm:

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} x(1-x)^k=x(1-x)+....+x(1-x)^n=x(1-x)\left[1+(1-x)+...+(1-x)^{n-1}\right]$$

$$=x(1-x)\left[\frac{1-(1-x)^n}{1-(1-x)}\right]=(1-x)\left(1-(1-x)^n\right)$$

$$\Rightarrow S(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x)=\begin{cases}0, & x=0 \text{ ise}\\ 1-x, & 0<x\le 1 \text{ ise}\end{cases}\Rightarrow\sum x(1-x)^n \text{ yakınsaktır.}$$

$f_n(x)=x(1-x)^k$ fonksiyonlarının her biri sürekli fakat S(x) sürekli olmadığından yakınsama düzgün değildir.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+n^4x^2}$ **serisinin R üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.**

$f(x)=\sum\frac{1}{n^3+n^4x^2}$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonunun her yerde türevlenebilir olduğunu ve bu türevin yukardaki serinin terim terim türevinin alınması ile elde edileceğini gösteriniz.

Çözüm:

$$f_n(x)=\frac{1}{n^3+n^4x^2}<\frac{1}{n^3}\Rightarrow \forall x\in R \text{ için } |f_n(x)|<\frac{1}{n^3}=M_n$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n=\sum\frac{1}{n^3}$ serisi yakınsak olduğundan $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+n^4x^2}$ serisi düzgün yakınsaktır.

Şimdi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ serisinin düzgün yakınsaklığını inceleyelim.

$$f_n'(x)=\frac{-2xn^4}{\left(n^3+n^4x^2\right)^2}=\frac{-2x}{n^2\left(1+nx^2\right)^2}$$

$$f_n''(x)=\frac{-2n^2\left(1+nx^2\right)^2-2n^2\left(1+nx^2\right)2nx(-2x)}{n^4\left(1+nx^2\right)^4}=\frac{-2n^2\left(1+nx^2-4nx^2\right)}{n^4\left(1+nx^2\right)^3}$$

$$=\frac{\left(1-3nx^2\right)}{n^2\left(1+nx^2\right)}=0\Leftrightarrow x=\mp\frac{1}{\sqrt{3n}}$$

$$|f_n'(x)|\le\left|f_n'\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right)\right|=\frac{2\frac{1}{\sqrt{3n}}}{n^2\left(1+\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{9}{8\sqrt{3}n^{\frac{3}{2}}}=U_n$$

$\sum U_n=\frac{9}{8\sqrt{3}}\sum\frac{1}{n^{3/2}}$ yakınsak $\Rightarrow \sum f_n'$ serisi düzgün yakınsaktır.

f fonksiyonu her yerde türevlenebilir ve bu türev, serinin terim terim türevinin alması ile elde edilebilir.

BÖLÜM PROBLEMLERİ VE ÇÖZÜMLERİ

1. Sonlu elemanlı bir A cümlesi üzerinde düzgün yakınsaklığın noktasal yakınsaklığa denk olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Düzgün yakınsaklık varsa her zaman noktasal yakınsaklık da vardır. Şimdi sonlu A cümlesi üzerinde noktasal yakınsaklığın düzgün yakınsaklığı gerektirdiğini gösterelim.

(f_n) dizisi A üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsak ise ε ve x'e bağlı bir $n_0(\varepsilon, x)$ bulabiliriz ki $\forall x\in A$ ve $\forall_n>n_0$ için $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ olur.

Eğer n_0'ı sadece ε'a bağlı yapabilirsek düzgün yakınsaktır diyebiliriz.

A sonlu olduğundan $n_0(\varepsilon, x)$'lerin x'e göre maximumu her zaman bulunabilir. $\underset{x\in A}{\text{maks}}(n_0(\varepsilon,x))=m_0(\varepsilon)$ diyelim. Bu durumda sonlu cümleler üzerinde noktasal yakınsaklığın düzgün yakınsaklığa denk olduğu görülür.

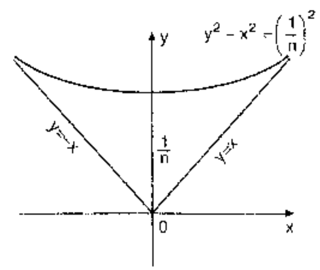
2. $f_n(x)=\sqrt{x^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2}$ biçiminde tanımlanan (f_n) dizisinin R üzerinde $f(x)=|x|$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığını gösteriniz.

Çözüm:

$$c_n=\sup_{x\in R}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in R}\left|\sqrt{x^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2}-|x|\right|$$

$$=\sup_{x\in R}\left|\sqrt{x^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2}-\sqrt{x^2}\right|$$

$$=\sup_{x\in R}\left|\frac{x^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{x^2}}\right|\le\frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{n}\to 0$$



olduğundan $c_n\to 0$ dır, Dolayısıyla (f_n), f fonksiyonuna R üzerinde düzgün yakınsaktır.

f_n fonksiyonlarının grafikleri $y^2-x^2=\left(\frac{1}{n}\right)^2$ hiperbolünün üst parçasıdır.

3. (f_n) **dizisi kapalı ve sınırlı [a, b] aralığı üzerinde sürekli ve reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun.** (f_n) **sürekli bir** f **fonksiyonuna noktasal yakınsak ve herbir** $x \in [a, b]$ **için** $(f_n(x))$ **reel terimli dizisi azalan ise** (f_n) **dizisi [a, b] aralığı üzerinde** f **fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Gösteriniz. [Dini Teoremi]**

Çözüm:

Göstermemiz gereken

$\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir $N(\varepsilon)$ bulunacaktır ki $\forall x \in A$ ve $\forall n > N$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olsun.

(f_n) dizi bir f fonksiyonuna noktasal yakınsak olduğundan $\forall x \in A$ için bir $N(x)$ bulabiliriz ki $\forall n > N(x)$ için $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ olur.

f_n sürekli olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyle ki $|x - y| < \delta$ bağıntısını sağlayan her y için $|f_n(y) - f_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ olur. O halde herbir $x_1, \ldots, x_p$ için bir $N(x_k)$ vardır ki

$$n > N(x_k) \quad \text{için} \quad |f_n(x_k) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (k = 1, \ldots, p)$$

olur. $N = \max\{N(x_1), \ldots, N(x_p)\}$ denirse $\forall n > N$ için

$$|f_n(x) - f_n(x_k)| < \varepsilon \Rightarrow 0 \le |f_n(x) - f(x)| \le |f_{N+1}(x) - f(x)|$$
$$\le |f_{N(x_k)+1}(x) - f(x)| = |f_{N(x_k)+1}(x) - f(x)|$$
$$= |f_{N(x_k)+1}(x) - f_{N(x_k)+1}(x_k) + f_{N(x_k)+1}(x_k) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

4. $\beta > \alpha \ge 0$ **olmak üzere**

$f_n(x) = \dfrac{2n^\alpha x}{(1 + n^\beta x^2)}$ **eşitliği ile tanımlanan** (f_n) **dizisinin [0, 1] aralığı üzerinde düzgün yakınsak olması için** α **ile** β **arasında hangi bağıntı olmalıdır?**

Çözüm:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{2n^\alpha x}{(1 + n^\beta x^2)} = 0 \Rightarrow c_n = \max_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{2n^\alpha x}{1 + n^\beta x^2} \right|$$

$$f_n'(x) = \frac{2n^\alpha (1 + n^\beta x^2) - 2xn^\beta . 2n^\alpha x}{(1 + n^\beta x^2)^2} = \frac{2n^\alpha + 2n^{\beta+\alpha} x^2 - 4x^2 n^{\beta+\alpha}}{(1 + n^\beta x^2)^2}$$

$$= \frac{2n^\alpha - 2x^2 n^{\beta+\alpha}}{(1 + n^\beta x^2)^2}$$

$$f_n'(x) = 0 \Rightarrow 2n^\alpha = 2x^2 n^{\beta+\alpha} \Rightarrow 1 = x^2 n^\beta \Rightarrow x^2 = \frac{1}{n^\beta} \Rightarrow x = \frac{1}{n^{\frac{\beta}{2}}}$$

$$c_n = f_n\left(\frac{1}{n^{\frac{\beta}{2}}}\right) = \frac{2n^\alpha \dfrac{1}{n^{\frac{\beta}{2}}}}{1 + n^\beta \dfrac{1}{n^\beta}} = n^{\alpha - \frac{\beta}{2}}$$

Eğer $\alpha - \dfrac{\beta}{2} < 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} c_n = 0$ olur. $\alpha < \dfrac{\beta}{2} \Rightarrow \beta > 2\alpha$ ise seri düzgün yakınsak olur.

5. $\sum f_n$ **ve** $\sum g_n$ **bir A cümlesi üzerinde düzgün yakınsak olduğunda** $\sum f_n + g_n$ **serisininde A üzerinde düzgün yakınsak olacağını gösteriniz.** λ **bir reel sayı olduğunda** $\sum \lambda f_n$ **serisininde A üzerinde düzgün yakınsak olacağını ispatlayınız.**

Çözüm:

$\sum f_n$ serisi A üzerinde düzgün yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in N$ öyleki $\forall x \in A$ ve $\forall n > n_0$ için

$$|K_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$\sum g_n$ A üzerinde düzgün yakınsak $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists m_0 \in N$ öyleki $\forall x \in A$ ve $\forall n > m_0$ için

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur.

$k_0 = \max(n_0, m_0)$ denirse $\forall x \in A$ ve $\forall n > k_0$ için

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) + g_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(x) \right| \le \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(x) \right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Rightarrow \sum (f_n + g_n)$ serisinin kalan terimi düzgün sıfır dizisidir. Yani $\sum (f_n + g_n)$ düzgün yakınsaktır.

Şimdi $\sum \lambda f_n$ serisinin de düzgün yakınsak olduğunu gösterelim. $\lambda = 0$ ise ispat olacaktır.

$\lambda \neq 0$ olsun.

$\sum f_n$ serisi A üzerinde düzgün yakınsak olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $n_0 \in N$ vardır, öyleki

$\forall x \in A$ ve $\forall n > m_0$ için

$$|K_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \text{ dır.}$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda f_k(x)\right| = \left|\lambda \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| = |\lambda| \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \leq |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} < \varepsilon$$

$\Rightarrow \sum \lambda f_n$ serisinin kalan terimi düzgün sıfır dizisi olduğundan $\sum \lambda f_n$ serisi düzgün yakınsaktır.

6. $f_n: [1, 2] \to R$ fonksiyonları $f_n(x) = \dfrac{x}{(1+x)^2}$ şeklinde tanımlanmış olsun.

a) Her $x \in [1, 2]$ için $\sum f_n(x)$ serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

b) Bu seri düzgün yakınsak mı dır?

c) $$\int_1^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_1^2 f_n(x) dx\right)$$

eşitliği sağlanır mı?

Çözüm:

a) $$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{(1+x)^2} = \frac{x}{1+x} + \frac{x}{(1+x)^2} + \ldots + \frac{x}{(1+x)^n}$$

$$= \frac{x}{1+x}\left(\frac{1 - \frac{1}{(1+x)^n}}{1 - \frac{1}{1+x}}\right) = 1 - \frac{1}{(1+x)^n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 - \dfrac{1}{(1+x)^n} = 1 \Rightarrow$ yakınsak ve toplamı 1 dir.

b) Serinin düzgün yakınsaklığı kısmi toplamlar dizisinin düzgün yakınsaklığına denktir.

$S_n(x) = 1 - \dfrac{1}{(1+x)^n} \to S = 1$ olduğundan

$$c_n = \max_{x\in[1,2]} |S_n(x) - S(x)| = \max_{x\in[1,2]} \left|-\frac{1}{(1+x)^n}\right| = \frac{1}{2^n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ olduğundan seri düzgün yakınsaktır.

c) $\displaystyle\int_1^2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_1^2 f_n(x) dx\right]$ eşitliği teorem 2.9 gereğince sağlanır.

7. Öyle h sayıları bulunuz ki, (0, h] aralığında $\sum (\ln x)^n$ serisi düzgün yakınsak olsun.

Çözüm:

$0 < r < 1$ olsun

$|\ln x| < r \Rightarrow -r < \ln x < r \Rightarrow \dfrac{1}{e^r} < x < e^r$ için $(\ln x)^n < \dfrac{1}{(e^r)^n}$ olur. Sağdaki ifade yakınsak bir serinin genel terimi olduğundan $\sum (\ln x)^n$ serisi $[e^{-r}, e^r]$ aralığında düzgün yakınsaktır. $x < e^{-1}$ için seri ıraksak olacağından (0, h] biçimindeki hiçbir aralıkta seri düzgün yakınsak olamaz.

8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+1)} = 1$ **olduğunu gösteriniz .**

Çözüm:

$x \geq 0$ için $f_n(x) = \dfrac{1}{(n+x)(n+1)} \leq \dfrac{1}{n(n+1)}$ ve $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ serisi yakınsak olduğundan

$\sum \dfrac{1}{(n+x)(n+1)}$ serisi düzgün yakınsaktır. Dolayısı ile toplam ile limit yer değiştirebilir.

$$\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to 0} \frac{1}{(n+x)(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+1)} = 1 .$$

9. $c \in (0,1)$ olsun. $\sum \frac{x^n(1-x^n)}{n}$ serisinin $[0, c]$ aralığında düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz. Bu seri $[0, 1]$ de düzgün yakınsak mıdır?

İSPAT:

İlk olarak Abel testini kullanalım.

$f_n = \frac{x^n}{n}$, $g_n = 1 - x^n$ diyelim.

a) $\sum \frac{x^n}{n}$ düzgün yakınsaktır. Çünkü $\frac{x^n}{n} \le \frac{c^n}{n}$ olup

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\frac{c^n}{n}} = \lim \frac{c}{\sqrt[n]{n}} = c < 1 \text{ dir.}$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [0, c]$ için $\left|1 - x^n\right| \le 1$ olacağından (g_n) dizisi $[0, c]$ üzerinde düzgün sınırlıdır. Şu halde $\sum \frac{x^n(1-x^n)}{n}$, $[0,c]$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{e^{-nx^2}}{n^2} dx = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^2} = 0$ olduğundan $\left(\frac{e^{-nx^2}}{n^2}\right)$ dizisi $[0, 1]$ üzerinde $f(x) = 0$ fonksiyonuna noktasal yakınsaktır.

$$c_n = \underset{0\le x\le 1}{\text{maks}} \left| \frac{e^{-nx^2}}{n^2} - 0 \right| = \frac{1}{n^2} \to 0$$

olacağından $\left(\frac{e^{-nx^2}}{n^2}\right)$ dizisi $f(x) = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Dizi düzgün yakınsak olduğunda limit alma ile integral alma işlemlerinin sırası değiştirilebileceğinden

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{e^{-nx^2}}{n^2} dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^2} dx = \int_0^1 0.dx = 0$$

olur. Çünkü

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-tx^2}}{t^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{-x^2 e^{-tx^2}}{2t}$$

$$= -x^2 \lim_{t\to\infty} \frac{-x^2 e^{-tx^2}}{2} = \frac{x^4}{2} \lim_{t\to\infty} e^{-tx^2} = 0$$

dır.

Bölüm 3 KUVVET SERİLERİ

KUVVET SERİLERİ

TANIM

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots$$

şeklindeki bir seriye **kuvvet serisi** denir. Buradaki c_k sayılarına serinin katsayıları adı verilir.

LEMMA 3.1:

$\sum c_k (x-a)^k$ serisi x_1 de yakınsak ve x_2 de, $|x_2 - a| < |x_1 - a|$ bağıntısını sağlayan bir sayı ise $\sum c_k (x-a)^k$ serisi x_2 de yakınsaktır.

Eğer $|x_2 - a| < |x_1 - a|$ ve $\sum c_k (x-a)^k$ serisi x_2 de ıraksak ise x_1 noktasında da ıraksaktır.

TANIM

$\sum c_k (x-a)^k$ kuvvet serisinin $|x - a| < R$ için yakınsak olduğu en büyük pozitif R sayısına, bu kuvvet serisinin **yakınsaklık yarıçapı**, seriyi yakınsak yapan x noktalarının oluşturduğu aralığa da **yakınsaklık aralığı** denir.

TEOREM 3.1 (Cauchy–Hadamard Teoremi)

$\sum c_k(x-a)^k$ kuvvet serisi için $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\left(\sqrt[k]{|c_k|}\right)=L$ olsun.

(1) $|x-a|.L<1$ için seri yakınsaktır.

$L\neq 0$ ise $R=\dfrac{1}{L}$, $L=0$ ise $R=+\infty$ dur.

(2) $|x-a|.L>1$ ise seri ıraksaktır.

TEOREM 3.2:

$I=\left\{x\in R:\ \sum c_k(x-a)^k \text{ yakınsaktır}\right\}$ kümesi ya reel sayılar kümesi ya da

$[a-R,\ a+R]$, $[a-R,\ a+R)$, $(a-R,\ a+R]$, $(a-R,\ a+R)$ aralıklarından biridir.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. **Aşağıdaki serilerin yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.**

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{3^n.n}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$

ç) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{5^n(n+1)^2}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!x^n$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{(2n)!}x^n$

f) $\sum\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\dfrac{2n+1}{n}x^n$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{\alpha}.x^n}{n!}$

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{\sqrt{n!}}$

ı) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{\left(\sqrt{n}\right)^n}$

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(100x)^n}{1.3.5\ldots(2n-1)}$

k) $\sum\dfrac{2n\sqrt{n}}{n^2+n}(x+2)^n$

l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}x^n$

m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(2-\frac{2}{3}\right)\ldots\left(n-\frac{2}{3}\right)}$

n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(2+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(n+\frac{1}{2}\right)}$

o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$

ö) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+2+\ldots+2^n\right)x^n$

p) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1.4.7\ldots(3n+1)}{1.5.9\ldots(4n+1)}x^n$

r) $\sum\dfrac{(n!)^2 3^n}{(2n)!}x^n$

Çözüm:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n n}$, $\quad c_n=\frac{1}{3^n n}$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{\dfrac{1}{3^{k+1}(k+1)}}{\dfrac{1}{3^k k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{3^k k}{3^{k+1}k+1} = \frac{1}{3} = L$$

olur. O halde $R=\frac{1}{L}=3$ tür. Buna göre, $|x|<3$ ise seri yakınsak, $|x|>3$ ise seri ıraksaktır. $x=3$ olsun.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n.n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$ serisi ıraksaktır.

$x=-3$ olsun.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$ serisi Leibniz kriteri gereğince yakınsaktır.

Buna göre, yakınsaklık yarıçap $R=3$, yakınsaklık aralığı $[-3, 3]$ olur.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$, $\quad c_k=\frac{10^k}{\sqrt{k}}$

$$\overline{\lim}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{10^{k+1}}{\sqrt{k+1}}\cdot\frac{\sqrt{k}}{10^k} = \lim_{k\to\infty} 10\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} = 10 = L$$

bulunur. $R=\frac{1}{L}=\frac{1}{10}$ olur. Verilen seri $\left(-\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right)$ aralığında yakınsaktır.

Şimdi uc noktaları inceleyelim.

$$x=\frac{1}{10} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{\sqrt{n}.10^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$ serisi ıraksaktır.

$$x=-\frac{1}{10} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n(-1)^n}{\sqrt{n}10^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$ Leibniz testi gereğince yakınsaktır.

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$

$a_n=x^n$ denirse

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|x|=|x|$$ bulunur. Buna göre,

$\Rightarrow |x|<1 \Rightarrow$ seri yakınsak, $|x|>1 \Rightarrow$ seri ıraksak, $|x|=1 \Rightarrow$ şüpheli hal vardır.

$x=1$ olsun $\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(1)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}1$ serisi ıraksaktır.

$x=-1$ olsun $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ serisi ıraksaktır. (genel terimin limiti 0 değil)

O halde yakınsaklık yarıçapı $R=1$, yakınsaklık aralığı $(-1, 1)$ aralığıdır.

ç) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n(n+1)^2}$ $\qquad c_k=\frac{1}{5^k(k+1)^2}$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^2 5^k}{5^{k+1}(k+2)^2} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{5}\frac{(k+1)^2}{(k+2)^2} = \frac{1}{5} = L$$

$R=\frac{1}{L}=\frac{1}{\frac{1}{5}}=5$ yakınsaklık yarıçapıdır.

$|x|<5 \Rightarrow$ seri yakınsak, $|x|>5 \Rightarrow$ seri ıraksaktır.

$|x|=5 \Rightarrow$ şüpheli hal vardır.

$$x=5 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{5^n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$$ serisi yakınsaktır.

$$x=-5 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{5^n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$$ serisi bulunur.

Bu seri Leipniz testinden yakınsaktır. O halde yakınsaklık aralığı $[-5, 5]$ dir.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n \qquad c_k = k!$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)!}{k!} = \lim_{k\to\infty}(k+1) = \infty$$

$x = 0$ dışında, tüm x ler için seri ıraksaktır.

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}x^n, \qquad c_n = \frac{n!}{(2n)!}$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{(k+1)!}{(2k+2)!}}{\frac{k!}{(2k)!}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{(2k+2)(2k+1)} = 0 = L$$

Verilen seri tüm x ler için yakınsaktır.

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)x^n, \qquad c_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}\ln\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\ln\left(2+\frac{1}{n+1}\right)}{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)} = 1$$

$\Rightarrow$ $|x| < 1$ ise seri yakınsak, $|x| > 1$ ise seri ıraksaktır. $x = 1$ için

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi elde edilir .

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) = \ln 2$$

olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ile $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ serilerinin karakterleri aynıdır. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ ıraksak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ıraksaktır. $x = -1$ ise

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$ serisi elde edilir. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$ denirse

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}\ln\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$$

ve $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ olduğundan Leibnitz Testine göre seri yakınsaktır. Buna göre, verilen serinin yakınsak aralığı $[-1, 1)$ aralığıdır.

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^\alpha x^n}{n!} \qquad c_k = \frac{k^\alpha}{k!}$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^\alpha k!}{(k+1)!\,k^\alpha}\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^\alpha\frac{1}{k+1} = 0$$

$\Rightarrow R = \infty$ olur. Seri tüm x'ler için yakınsaktır.

h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n!}} \qquad c_k = \frac{1}{\sqrt{k!}}$

$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{c_k+1}{c_k}\right| = \lim\sqrt{\frac{k!}{(k+1)!}} = \lim\frac{1}{\sqrt{k+1}} = 0 = L \Rightarrow R = \infty$ olup seri tüm x ler için yakınsaktır. Yakınsak aralığı $(-\infty, \infty)$ dur.

i) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!}x^k, \qquad c_k = \frac{(k!)^2}{(2k)!}$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{[(k+1)!]^2}{(2k+2)!}\cdot\frac{(2k)!}{(k!)^2}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^2}{2(k+1)(2k+1)} = \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{4k+2} = \frac{1}{4} = L$$

$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$ olur.

$|x| < 4 \Rightarrow$ seri yakınsak, $|x| > 4 \Rightarrow$ seri ıraksaktır.

$$x = 4 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4k+4}{4k+2} = 1$$

Raabe testi uygulanırsa,

$$\lim_{k\to\infty} k\left(\frac{a_{k+1}}{a_k} - 1\right) = \lim_{k\to\infty} k\left(\frac{4k+4}{4k+2} - 1\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{2k}{4k+2} = \frac{1}{2} > -1$$

bulunur. O halde seri ıraksaktır.

$x = -4$ ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2 4^n}{(2n)!}, \quad a_n = \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!} \quad \text{için}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4n+4}{4n+2} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n \geq 2$$

olduğundan genel terim sıfıra gitmez. Yakınsaklık aralığı $(-4, 4)$ aralığıdır.

i) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(\sqrt{n})^n} \qquad c_k = \frac{1}{(\sqrt{k})^k}$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k^{\frac{k}{2}}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} = 0$$

Seri tüm x ler için yakınsaktır.

j) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(100x)^n}{1.3.5\ldots(2n-1)} \qquad c_k = \frac{100^k}{1.3.5\ldots(2k-1)}$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{100^{k+1} 1.3.5\ldots(2k-1)}{1.3.5\ldots(2k+1)100^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{100}{2k+1} = 0$$

Seri tüm x ler için yakınsaktır.

k) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\sqrt{n}}{n^2+n}(x+2)^n, \quad c_k = \frac{2k\sqrt{k}}{n^2+n} = \frac{2\sqrt{k}}{k+1}$$

$$L = \overline{\lim} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \overline{\lim} \frac{2\sqrt{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{2\sqrt{n}} = 1$$

olur.

$|x+2| < 1$ ise seri yakınsak, $|x+2| > 1$ ise seri ıraksaktır.

$|x+2| = 1$ ise $\sum \frac{2\sqrt{n}}{n+1}$ serisi elde edilir. Bu ıraksak bir seridir.

$x + 2 = -1$ $(x = -3)$ ise $\sum (-1)^n \frac{2\sqrt{n}}{n+1}$ alterne serisi bulunur. Leibnit testinden yakınsaktır. Yakınsak aralığı $[-3, -1)$ aralığıdır.

l) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!} x^n, \qquad c_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2(n+1)} = 1 \Rightarrow |x| < 1 \text{ ise seri yakınsak, } |x| > 1 \text{ ise seri ıraksaktır.}$$

$x=1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}$ serisi elde edilir. $a_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{1.3.5\ldots(2n-1)(2n+1)}{2^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{2^n n!}{1.3.5\ldots(2n-1)} = \lim \frac{2n+1}{2n+2} = 1$$

bulunur. Raabe testi uygulanırsa

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+1}{2(n+1)} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{2n+2} = -\frac{1}{2} > -1$$

olduğundan seri ıraksaktır.

$x = -1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ serisi elde edilir.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2(n+1)} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n \text{ olur} \Rightarrow (a_n) \text{ azalandır.}$$

$$a_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}$$

$$a_n^2 = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} \cdots \frac{(2n-1)^2}{4n^2}$$

ayrıca $\frac{(2k-1)^2}{4k^2} < \frac{(2k-1)^2}{4k^2-1} = \frac{2k-1}{2k+1}$ eşitsizliği göz önüne alınırsa

$$a_n^2 = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdots \frac{(2n-1)^2}{4n^2} < \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdots \frac{2n-1}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

$$\Rightarrow 0 < a_n^2 < \frac{1}{(2n+1)} \Rightarrow 0 < a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

bulunur. Leibnitz testinden seri yakınsaktır. Yakınsaklık aralığı $[-1, 1)$ aralığıdır.

m) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(2-\frac{2}{3}\right)\dots\left(n-\frac{2}{3}\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\left(\frac{3-2}{3}\right)\left(\frac{6-2}{3}\right)\dots\left(\frac{3n-2}{3}\right)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{1.4.7\dots(3n-2)}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}x^{n+1}1.4.7\dots 3n-2}{1.4.7\dots(3n+1)3^n x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3|x|}{3n+1}=0.$$

Seri tüm x ler için yakınsaktır.

n) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(2+\frac{1}{2}\right)\dots\left(n+\frac{1}{2}\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\dots\frac{2n+1}{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{1.3.5\dots 2n+1}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}x^{n+1}\,1.3.5\dots 2n+1}{1.3.5\dots(2n+3)x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2|x|}{2n+3}=0=L\Rightarrow R=\infty.$$

Seri tüm x ler için yakınsaktır.

o) $$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1}x^n,\quad c_n=\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1}$$

$$\lim\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1}}=\lim\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{4}$$

olduğundan $R=4$ dür.

$x=4$ için $\sum\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1}4^n=\sum b_n$ serisi elde edilir .

$$b_n=\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1}\cdot 2^{2n}=\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n}\cdot 2^{2n}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{-1}=\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n}\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

olacağından $\lim b_n=e^{-1}2=\frac{2}{e}\neq 0$ olur. Genel terim sıfıra gitmediğinden seri ıraksaktır.

$x=-4$ için $\sum(-1)^n\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1}4^n$ serisi elde edilir ki bu serinin de genel terimi sıfıra gitmez. Buna göre, verilen serinin yakınsaklık aralığı $(-4,\ 4)$ açık aralığıdır.

ö) $$\sum_{n=0}^{\infty}(1+2+\dots+2^n)x^n\qquad c_n=1+2+\dots+2^n$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{1+2+\dots+2^{k+1}}{1+2+\dots+2^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1-2^{k+2}}{1-2}}{\frac{1-2^{k+1}}{1-2}}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1-2^{k+2}}{1-2^{k+1}}=\lim_{k\to\infty}\frac{2^{k+2}\left(1-\frac{1}{2^{k+2}}\right)}{2^{k+1}\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)}=2=L$$

$\Rightarrow$ yakınsaklık yarıçapı $R=\frac{1}{2}$ dir.

$|x|<\frac{1}{2}$ için seri yakınsak, $|x|>\frac{1}{2}$ için seri ıraksaktır. $x=\frac{1}{2}$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1+2+\dots+2^n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(1+2+\dots+2^n)\frac{1}{2^n}=\sum\frac{2^{n+1}-1}{2^n}\ \text{olur.}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}2-\frac{1}{2^n}=2\neq 0$$

olduğundan, yani serinin genel teriminin limiti 0 olmadığından seri yakınsak değildir.

$$x=-\frac{1}{2}\ \text{için}\ \sum_{n=0}^{\infty}(1+2+\dots+2^n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(1+2+\dots+2^n)\frac{(-1)^n}{2^n}$$

serisi elde edilir. Bu serinin de genel terimi sıfıra gitmediğinden ıraksaktır.

Şu halde verilen serinin yakınsaklık aralığı $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ aralığıdır.

p) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1.4.7.\dots.(3n+1)}{1.5.9.\dots.(4n+1)}x^n\qquad c_k=\frac{1.4.7.\dots.(3n+1)}{1.5.9.\dots.(4n+1)}$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{1.4.7.\dots.(3k+1)(3k+4)\,1.5.9.\dots.(4k+1)}{1.5.9.\dots.(4k+1)(4k+5)\,1.4.7.\dots.(3k+1)}=\lim_{k\to\infty}\frac{3k+4}{4k+5}=\frac{3}{4}=L$$

$\Rightarrow$ yakınsaklık yarıçapı $R=\frac{1}{L}=\frac{4}{3}$ olur.

O halde $|x|<\frac{4}{3}$ ise seri yakınsak , $|x|>\frac{4}{3}$ ise seri ıraksaktır .

$x=\frac{4}{3}$ için $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1.4.7\dots(3n+1)}{1.5.9\dots(4n+1)}\left(\frac{4}{3}\right)^n$ serisi elde edilir.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1.4.7\ldots(3n+1)(3n+4)\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}1.5\ldots.(4n+1)}{1.5.9\ldots(4n+1)(4n+5)\left(\frac{4}{3}\right)^{n}1.4.7\ldots.(3n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}\frac{3n+4}{4n+5}=1$$

Raabe testi uygulanırsa

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{12n+16}{12n+15}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(12n+16-12n-15)}{12n+15}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{12n+15}=\frac{1}{12}>-1\Rightarrow \text{ Seri ıraksaktır.}$$

$x=-\frac{4}{3}$ için $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1.4.7\ldots(3n+1)}{1.5.9\ldots(4n+1)}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1.4.7\ldots(3n+1)}{1.5.9\ldots(4n+1)}\left(\frac{4}{3}\right)^n$

serisi elde edilir. $a_n=\dfrac{1.4.7\ldots.(3n+1)}{1.5.9\ldots.(4n+1)}\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$ denirse

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{12n+16}{12n+15}>1\Rightarrow \lim a_n\neq 0\Rightarrow$ seri ıraksaktır.

$\Rightarrow$ Yakınsaklık aralığı $\left(-\frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right)$ aralığıdır.

r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2 3^n}{(2n)!}x^n,\quad c_n=\frac{(n!)^2.3^n}{(2n)!}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!]^2.3^{n+1}}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2 3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 3}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{3}{4}=L\Rightarrow R=\frac{1}{L}=\frac{4}{3}$$

O halde $|x|<\frac{4}{3}$ ise seri yakınsak, $|x|>\frac{4}{3}$ ise seri ıraksaktır.

$x=\frac{4}{3}$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2 3^n}{(2n!)}\left(\frac{4}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}\quad \text{serisi bulunur.}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 4}{(2n+1)(2n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{2n+1}=1$$

Raabe testi uygulanırsa

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{2n+2}{2n+1}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}>-1$$

Bulunur. Seri ıraksaktır.

$x=-\frac{4}{3}$ için $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$ serisi bulunur.

$b_n=\dfrac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$ için $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{2n+2}{2n+1}>1$ olduğundan (b_n) artandır.

$2=b_1<b_2<\ldots<b_n<\ldots$ olacağından

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}\neq 0$ dır. O halde $\displaystyle\sum(-1)^n\frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$ ıraksaktır.

Yakınsaklık aralığı $\left(-\frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right)$ aralığıdır.

2. Aşağıdaki serilerin yakınsaklık yarıçaplarını ve yakınsaklık aralıklarını bulunuz.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n.5^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(2n-1)2n}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^{2n}.(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x-1)^n}{2^n}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)(x+1)^n}{2^{n-1}n^n}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}(x-1)^n$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$

ı) $\displaystyle\sum\frac{n!(x-1)^n}{4^n 1.3.5\ldots(2n-1)}$ i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+1)^n}{n^n 3^{n-1}}(x-1)^n$

j) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n\ln n}(3x+1)^n$

Çözümler

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n.5^n}$, $c_k = \frac{1}{k.5^k}$ olduğundan

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{k\,5^k}{(k+1)5^{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1}\frac{1}{5} = \frac{1}{5} = L$$

$\Rightarrow$ yakınsaklık yarıçapı $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$ olur.

$\Rightarrow$ $|x-3| < 5 \Rightarrow$ seri yakınsak, $|x-3| > 5 \Rightarrow$ seri ıraksaktır.

$x-3=5 \Rightarrow x=8$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksak serisi

$x-3=-5 \Rightarrow x=-2$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{n5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

yakınsak serisi elde edildiğinden yakınsaklık aralığı; $-5 \le x-3 < 5 \Rightarrow -2 \le x < 8$ dir.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$, $c_k = \frac{1}{k^2}$

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{k^2}{(k+1)^2}\right| = 1 = L \Rightarrow R = \frac{1}{L} = 1 \text{ yakınsaklık yarıçapıdır.}$$

$|x+3| < 1$ için yakınsak, $|x+3| > 1$ için ıraksaktır. $x+3=1 \Rightarrow x=-2$ için

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ yakınsak serisi, $(x+3)=-1 \Rightarrow x=-4$ için de

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ yakınsak serisi elde edilir.

Yakınsaklık aralığı $|x+3| \le 1 \Rightarrow -1 \le x+3 \le 1 \Rightarrow -4 \le x \le -2$ aralığıdır.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)(2n)}$, $c_k = \frac{1}{(2k-1)(2k)}$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{c_{k+1}}{c_k} = \overline{\lim_{k\to\infty}} = \frac{(2k-1)(2k)}{(2k+1)(2k+2)} = 1 = L \Rightarrow R = 1 \text{ dir.}$$

$|x-2| < 1$ ise seri yakınsak, $|x-2| > 1$ ise ıraksaktır. $x-2=1 \Rightarrow x=3$ için

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)(2n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n)}$ serisi elde edilir.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(2n-1)(2n)}{(2n+1)(2n+2)} = 1$ olur. Raabe testi uygulanırsa

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{4n^2-2n}{4n^2+6n+2} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{4n^2-2n-4n^2-6n-2}{4n^2+6n+2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-8n^2-2n}{4n^2+6n+2} = -2 < -1$$

olduğundan seri yakınsaktır.

$x-2=-1$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n)}$ serisi elde edilir. $(a_n) = \left(\frac{1}{(2n-1)2n}\right)$ pozitif terimli ve azalandır. Ayrıca

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ olduğundan Leibnitz testi gereğince yakınsaktır.

Yakınsaklık aralığı $|x-2| \le 1 \Rightarrow 1 \le x \le 3$ aralığıdır.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^{2n}(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$, $c_k = \frac{(2k-1)^{2k}}{(3k-2)^{2k}}$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+1)^{2k+2}(3k-2)^{2k}}{(3k+1)^{2k+2}(2k-1)^{2k}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{2k+1}{3k+1}\right)^{2k+2} \left(\frac{3k-2}{2k-1}\right)^{2k}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k+2} \left(1+\frac{1}{6k+2}\right)^{2k+2} \left(\frac{3}{2}\right)^{2k} \left(1-\frac{1}{6k-3}\right)^{2k}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{3}-\frac{4}{3}} \left(1-\frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{3}+1} = \frac{4}{9}.e^{\frac{1}{3}}.e^{-\frac{1}{3}} = \frac{4}{9} = L$$

$\Rightarrow$ Yakınsaklık yarıçapı $R = \frac{1}{L} = \frac{9}{4}$ olur.

$\Rightarrow |x-1| < \frac{9}{4}$ ise seri yakınsak, $|x-1| > \frac{9}{4}$ ise seri ıraksaktır.

$x-1 = \frac{9}{4}$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^{2n}}{(3n-2)^{2n}} \left(\frac{9}{4}\right)^n$ serisi elde edilir.

$$a_n = \frac{(2n-1)^{2n}}{(3n-2)^{2n}} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^n > \frac{(2n-2)^{2n}}{(3n)^{2n}} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^n = \frac{(n-1)^{2n}}{n^{2n}}$$

$\lim\limits_{n \to \infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n} = e^{-2} \neq 0$ olduğundan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^{2n}}{n^{2n}}$ serisi ıraksaktır. Karşılaştırma testinden verilen seri ıraksaktır.

$x-1 = -\frac{9}{4}$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^{2n}}{(3n-2)^{2n}}(-1)^n\left(\frac{9}{4}\right)^n$ serisi bulunur. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(2n-1)^{2n}}{(3n-2)^{2n}} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^n \neq 0$

olacağından bu seri de ıraksaktır. Yakınsaklık aralığı $\left(-\frac{9}{4}, \frac{9}{4}\right)$ aralığıdır.

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-1)^n}{2^n}$ $\quad c_k = \frac{k!}{2^k}$

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \lim_{k \to \infty} \frac{(k+1)!}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k!} = \lim_{k \to \infty} \frac{k+1}{2} = \infty$$

$\Rightarrow x = 1$ dışında hiçbir reel sayı için yakınsak değildir.

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(x+1)^n}{2^{n-1}n^n}$ $\quad c_k = \frac{2k-1}{2^{k-1}k^k}$

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \lim_{k \to \infty} \frac{(2k+1)2^{k-1}k^k}{2^k(k+1)^{k+1}2k-1} = \frac{1}{2} \lim_{k \to \infty} \frac{2k+1}{2k-1}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k \frac{1}{k+1} = 0$$

olduğundan tüm x ler için seri yakınsaktır. Yakınsaklık aralığı $(-\infty, +\infty)$ dur.

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}(x-1)^n$, $\quad c_k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \sqrt[k]{c_k} = \lim_{k \to \infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e = L \Rightarrow R = \frac{1}{L} = \frac{1}{e}.$$

$\Rightarrow |x-1| < \frac{1}{e} \Rightarrow$ seri yakınsak, $|x-1| > \frac{1}{e} \Rightarrow$ seri ıraksaktır.

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$, $\quad c_n = \frac{3n-2}{(n+1)^2 2^{n+1}}$

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{(3k+1)(k+1)^2 2^{k+1}}{(k+2)^2 2^{k+2}(3k-2)} = \lim_{k \to \infty} \frac{(3k+1)}{(3k-2)} \frac{(k+1)^2}{(k+2)^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = L \Rightarrow R = 2$$

$|x-3| < 2 \Rightarrow$ seri yakınsak, $|x-3| > 2 \Rightarrow$ seri ıraksaktır. $x-3 = 2 \Rightarrow x = 5$ için

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)}{(n+1)^2} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)}{(n+1)^2 \cdot 2}$ serisi elde edilir.

$$\lim_{n \to \infty} n^{\alpha} a_n = \lim_{n \to \infty} n \cdot \frac{3n-2}{(n+1)^2 \cdot 2} = \frac{3}{2} = \gamma$$

ve $\alpha = 1$ olduğundan limit testinden seri ıraksaktır. $x-3 = -2 \Rightarrow x = -5$ için

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(-1)^n 2^n}{(n+1)^2 2^{n+1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3n-2)}{(n+1)^2 \cdot 2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ serisi bulunur.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3n+2)(n+1)^2}{(3n-1)^2(n+2)^2} < \frac{(3n+3)(n+1)^2}{(3n-3)^2(n+2)^2} < \frac{(n+1)^3}{(n-1)^2(n+2)^2} < 1$$

$\Rightarrow a_{n+1} < a_n$ olup azalandır.

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{3n-2}{(n+1)^2 \cdot 2^{n+1}} = 0$ olduğundan seri Leibnitz testi gereğince yakınsaktır.

$-2 \leq x-3 < 2 \Rightarrow 1 \leq x < 5 \Rightarrow$ akınsaklık aralığı $[1, 5)$ aralığıdır.

ı) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-1)^n}{4^n 1.3.5\ldots(2n-1)}$, $\quad c_n = \frac{n!}{4^n.1.3.5\ldots(2n-1)}$

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)}{4(2n+1)} = \frac{1}{8} \Rightarrow R = 8 \text{ olur.}$$

$|x-1| < 8$ ise yakınsak, $|x-1| > 8$ ise ıraksaktır.

$x-1 = 8$ ise $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,2^n}{1.3.5\ldots(2n-1)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi bulunur.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(n+1)}{2n+1} > 1 \quad a_{n+1} > a_n \Rightarrow \lim a_n \neq 0$ olduğundan seri ıraksaktır.

$x-1=-8$ ise $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n!2^n}{1.3.5\ldots 2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ serisi elde edilir.

$\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ olduğundan seri ıraksaktır.

$-8 < x-1 < 8 \Rightarrow -7 < x < 9 \Rightarrow$ yakınsaklık aralığı $(-7, 9)$ aralığıdır.

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+1)^n}{n^n 3^{n-1}}(x-1)^n, \qquad c_n = \frac{(3n+1)^n}{n^n 3^{n-1}}$

$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n3^{1-\frac{1}{n}}} = 1 \Rightarrow R = 1$ dir.

$|x-1| < 1$ ise seri yakınsak, $|x-1| > 1$ ise seri ıraksaktır.

$x-1=1 \Rightarrow x=2$ ise $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+1)^n}{n^n 3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi elde edilir.

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 3\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n = 3e^{\frac{1}{3}} \neq 0$ seri ıraksaktır.

$x-1=-1 \Rightarrow x=0$ ise $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(3n+1)^n}{n^n 3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ serisi elde edilir.

$\lim_{n\to\infty} b_n = 3e^{\frac{1}{3}} \neq 0$ olduğundan seri ıraksaktır. Yakınsaklık aralığı $0 < x < 2$ aralığıdır.

j) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n\ln n}(3x+1)^n,$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n+1}}{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{\ln n}}|3x+1| = |3x+1|$

$|3x+1| < 1$ ise seri yakınsak, $|3x+1| > 1$ ise seri ıraksaktır.

$3x+1=1 \Rightarrow x=0$ ise $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n\ln n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi bulunur.

$b_n = \frac{n+1}{n\ln n} > \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ıraksak olduğundan seri karşılaştırma testi gereğince ıraksaktır.

$3x+1=-1 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$ için $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n\ln(n)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n c_n$ serisi elde edilir.

$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n^2+2n)\ln(n)}{(n+1)^2\ln(n+1)} < 1 \Rightarrow c_{n+1} < c_n \Rightarrow (c_n)$ azalandır.

$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n\ln(n)} = 0$ olduğundan seri Leibnitz testinden yakınsaktır.

Yakınsaklık aralığı $\left[-\frac{3}{2}, 0\right)$ olur.

3. $n!\,e^n \geq n^n e$ olduğundan yararlanarak $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

Çözüm:

$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{(k+1)!k^k}{(k+1)^{k+1}k!} = \overline{\lim_{k\to\infty}}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \frac{1}{\lim\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} = \frac{1}{e} \Rightarrow R = e$

$|x| < e \Rightarrow$ seri yakınsak, $|x| > e \Rightarrow$ seri ıraksaktır.

$x = e$ için $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}e^n$ serisi elde edilir.

$a_n = \frac{n!}{n^n}e^n > \frac{n^n e}{n^n} = e$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} e$ serisi ıraksak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}e^n$ serisi de karşılaştırma testi gereğince ıraksaktır.

$x=-e$ için $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!e^n}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ serisi bulunur.

$b_n = \frac{n!e^n}{n^n} > e \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n \geq e$ olup $\lim b_n \neq 0$'dır. O halde seri ıraksaktır.

Yakınsaklık aralığı $(-e, e)$ aralığıdır.

4. **Aşağıdaki serilerin yakınsaklık yarıçaplarını ve yakınsaklık aralıklarını bulunuz.**

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k+1}(x+2)^{k-1}$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^{k-1}}{k+1}(x-1)^{k}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^{k}$ ç) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{x^{k}}{k\sqrt{k}}$

Çözüm:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k+1}(x+2)^{k-1}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n(x+2)^n\,n+1}{n+2\,(-1)^{n-1}(x+2)^{n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}|x+2|=|x+2|$$

$|x+2|<1 \Rightarrow$ seri yakınsak, $|x+2|>1 \Rightarrow$ seri ıraksaktır.

$x+2=1$ için $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k+1}(x+2)^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k+1}$ serisi elde edilir. $a_k=\dfrac{1}{k+1}$ pozitif terimli ve azalandır. Ayrıca $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k+1}=0$ olduğundan seri yakınsaktır.

$x+2=-1$ için $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k+1}(-1)^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}$ ıraksak serisi elde edilir.

$-1<x+2\le 1 \Rightarrow -3<x\le -1 \Rightarrow$ yakınsaklık aralığı $(-3,-1]$ aralığıdır.

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^{k+1}}{k+1}(x-1)^{k}$, $\qquad c_k=\dfrac{(-2)^{k+1}}{k+1}=(-1)^{k+1}\cdot\dfrac{2^{k+1}}{k+1}$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right|=\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{(-2)^{k+2}\,k+1}{k+2\,(-2)^{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{2k+2}{k+2}=2=L\Rightarrow R=\frac{1}{2}\ \text{dir.}$$

Seri $|x-1|<\frac{1}{2}$ için yakınsak, $|x-1|>\frac{1}{2}$ için ıraksaktır. $x-1=\frac{1}{2}$ için

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^{k+1}}{k+1}(x-1)^{k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^{k+1}}{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}2}{k+1}$ alterne serisi elde edilir.

Leibnitz testinden bu seri yakınsaktır.

$x-1=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{1}{2}$ için $\displaystyle\sum\frac{(-2)^{k+1}}{k+1}\frac{(-1)^k}{2^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-2}{k+1}$ ıraksak serisi elde edilir.

Yakınsaklık aralığı $-\frac{1}{2}<x-1\le\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}<x\le\frac{3}{2}$ aralığıdır.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n}$, $\qquad c_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{n}{(-1)^{n-1}}\right|=1=L\ \Rightarrow\ R=1$$

$|x|<1 \Rightarrow$ seri yakınsak, $|x|>1 \Rightarrow$ seri ıraksaktır.

$x=1$ için $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ yakınsak alterne serisi,

$x=-1$ için $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}$ ıraksak serisi elde edilir. Şu halde

yakınsaklık aralığı $(-1,\,1]$ aralığıdır.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^n}{n\sqrt{n}}$, $\qquad c_n=\dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)^{\frac{3}{2}}}\frac{k^{\frac{3}{2}}}{(-1)^k}\right|=1=L\ \Rightarrow\ R=1$$

Yakınsaklık yarıçapı $R=\dfrac{1}{L}=1$ dir.

Seri $|x|<1$ için yakınsak, $|x|>1$ için ıraksaktır.

$x=1$ için $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ alterne serisi elde edilir. Bu seri yakınsaktır.

$x=-1$ için $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^2}{n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ yakınsak serisi elde edilir.

O halde yakınsaklık aralığı $[-1,\,1]$ kapalı aralığıdır.

5. **Aşağıdaki serilerin yakınsaklık yarıçaplarını ve yakınsaklık aralıklarını bulunuz.**

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n.9^n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n!}}{n}$

ç) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n^3}}{(n+1)\ln(n+1)}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^n}}{n^n}$ e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^n$

Çözüm:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{2n+1}\frac{2n-1}{(-1)^n x^{2n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}|x^2|=|x|^2$

$x^2<1\Rightarrow |x|<1$ için seri yakınsak, $|x|>1$ için seri ıraksaktır.

$x=-1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^{2n-1}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n-1}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

serisi elde edilir. Bu seri yakınsaktır.

$x=1$ için

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(+1)^{2n-1}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$ yakınsak serisi elde edilir. Yakınsaklık aralığı $[-1,1]$ aralığıdır.

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{2n+2}}{n+1}\frac{n9^n}{9^{n+1}(x-1)^{2n}}\right|=\lim_{n\to\infty}(x-1)^2\frac{n}{n+1}.\frac{1}{9}=\frac{(x-1)^2}{9}$

$\displaystyle\frac{(x-1)^2}{9}<1\Rightarrow(x-1)^2<9\Rightarrow|x-1|<3$ için seri yakınsak,

$|x-1|>3$ için ıraksaktır. $x=4$ için $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}}{n9^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ıraksak serisi, $x=-2$ için

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{9^n}{n9^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ yakınsak alterne serisi elde edildiğinden, yakınsaklık aralığı $[-2,4)$ aralığıdır.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n!}}{n}$ $\qquad a_n=\dfrac{x^{n!}}{n}$

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{(n+1)!}}{n+1}\frac{n}{x^{n!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|x^{n!.n}\frac{n}{n+1}\right|=\begin{cases}0, & |x|<1\\ 1, & |x|=1\\ \infty, & |x|>1\end{cases}$$

$x=1$ için $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n!}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ıraksak serisi

$x=-1$ için $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n!}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n!}}{n}=-1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ ıraksak serisi elde edilir.

Yakınsaklık Aralığı $(-1,1)$ aralığıdır.

ç) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n^3}}{(n+1)\ln(n+1)}$, $\qquad a_n=\dfrac{(x+2)^{n^3}}{(n+1)\ln(n+1)}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+1)}{(n+2)\ln(n+2)}|x+2|^{(n+1)^3-n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+1)}{(n+2)\ln(n+2)}|x+2|^{3n^2+3n+1}=\begin{cases}0, & |x+2|<1\\ 1, & |x+2|=1\\ \infty, & |x+2|>1\end{cases}$$

$\Rightarrow$ Yakınsaklık yarıçapı $R=\dfrac{1}{L}=1$ olur. O halde

$|x+2|<1\Rightarrow$ seri yakınsak, $|x+2|>1\Rightarrow$ seri ıraksaktır.

$x+2=1\Rightarrow x=-1$ için

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n^3}}{(n+1)\ln(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1\ln(n+1)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ serisi bulunur.

Bu seri yerine $\displaystyle\sum_{p=0}2^p a_{2^p}$ serisinin karekterini inceleyelim.

$\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}\frac{2^p}{2^p\ln 2^p}=\sum_{p=1}\frac{1}{p\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}$ ıraksaktır.

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ serisi ıraksaktır.

$x + 2 = -1 \Rightarrow x = -3$ ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n^3}}{(n+1)\ln(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^3}}{(n+1)\ln(n+1)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln n}$$

alterne serisi elde edilir. $a_n = \frac{1}{n \ln n}$ azalan ve pozitif terimlidir. Ayrıca

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = 0$ olduğundan seri yakınsaktır.

$-1 \le x + 2 < 1 \Rightarrow -3 \le x < -1 \Rightarrow$ Yakınsaklık aralığı $[-3, -1)$ dir.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^n}}{n^n} = \sum_{k=1}^{n} c_k x^k, \quad c_k = \begin{cases} \frac{1}{n^n}, & k = n^n \text{ ise} \\ 0, & k \neq n^n \text{ ise} \end{cases}$

Oran testi uygulanırsa

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{(n+1)^{n+1}}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{x^{n^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{(n+1)^{n+1} - n^n}}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ \infty, & |x| > 1 \end{cases}$$

$x = 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{n^n}$ serisi kök testinden yakınsaktır.

$x = -1 \Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n^n}$ alterne serisi yakınsaktır.

$\Rightarrow$ Yakınsaklık aralığı $[-1, 1]$ aralığıdır.

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^n, \quad a_n = \left(\frac{x}{1+x}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n+1}}{\left(\frac{x}{1+x}\right)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x}{1+x}\right| = \left|\frac{x}{x+1}\right|$$

$\Rightarrow \left|\frac{x}{x+1}\right| < 1$ için seri yakınsak $\left|\frac{x}{x+1}\right| > 1$ için ıraksaktır.

$\left|\frac{x}{x+1}\right| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{x}{x+1} < 1 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$

$x = -\frac{1}{2}$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^n = \sum (-1)^n$ olur. Bu bir ıraksak seridir.

Yakınsaklık aralığı $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ dur.

6. $\sum \frac{1}{(2n+1)} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$ **serisinin yakınsaklık aralığının $(0, +\infty)$ olduğunu gösteriniz.**

Çözüm:

$$a_n = \frac{1}{(2n+1)} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+3} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$$

O halde $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 < 1 \Rightarrow \left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{x-1}{x+1} < 1$ için yakınsaktır.

$\frac{x-1}{x+1} > -1 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{2x}{x+1} > 0 \Rightarrow x < -1$ veya $x > 0$

$\frac{x-1}{x+1} < 1 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} - 1 < 0 \Rightarrow -\frac{2}{x+1} < 0 \Rightarrow x > -1$

$\Rightarrow \left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 1$ eşitsizliği $x > 0$ için gerçeklenir.

$x = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ ıraksak serisi elde edilir. O halde verilen kuvvet serisi $(0, \infty)$ aralığında yakınsaktır.

KUVVET SERİLERİNİN TÜREV VE İNTEGRALİ

TEOREM 3.3:

Yakınsaklık yarıçapı R olan $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ serisi, $(a-R,\ a+R)$ tarafından kapsanan herbir kapalı aralık üzerinde düzgün yakınsaktır.

TEOREM 3.4:

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ serisinin yakınsaklık yarıçapı R ve $x \in (a-R,\ a+R)$ için

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$$

olsun. f fonksiyonu integrallenebilirdir ve $[c, d] \subset (a-R,\ a+R)$ için

$$\int_c^d \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k\right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\int_c^d (x-a)^k\, dx\right)$$

olur.

TEOREM 3.5:

Herhangi bir (c_k) dizisi ve a sayısı için $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ serisi ve terimleri bu serinin terimlerinin türevlerinden oluşan $\sum_{k=0}^{\infty} kc_k(x-a)^{k-1}$ serisinin yakınsaklık yarıçapları aynıdır.

TEOREM 3.6:

$\sum c_k(x-a)^k$ serisinin yakınsaklık yarıçapı R ve $\forall x \in (a-R,\ a+R)$ için

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$$

olsun. f fonksiyonu $(a-R,\ a+R)$ aralığında türevlenebilirdir ve

$$f'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left[c_k(x-a)^k\right]' = \sum_{k=0}^{\infty} kc_k(x-a)^{k-1}$$

dır.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. $|x-a| < R$ için $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ ise $\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{R}{b}$ için

$f(bx) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(bx-a)^k$ olacağını gösteriniz.

Çözüm:

$$f(bx) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(bx-a)^k, \quad \overline{\lim_{k\to\infty}} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = L, \quad R = \frac{1}{L}$$

$$|bx-a| < R \Rightarrow |b|\left|x - \frac{a}{b}\right| < R \Rightarrow \left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{R}{|b|}$$

$\Rightarrow$ seri yakınsak ve toplamı f(bx) dir.

2. $f(x) = \sum_k c_k x^k$, $|x| < R$ ise

$|x| < R^{\frac{1}{p}}$ için $f(x^p) = \sum c_k x^{pk}$ olacağını gösteriniz.

Çözüm:

$$f(x^p) = \sum_k c_k (x^p)^k, \quad R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right|}, \quad |x^p| < R \Rightarrow |x^p| < R \Rightarrow |x| < R^{\frac{1}{p}}$$

3. $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ $(|x| < 1)$ eşitliğinden yararlanarak aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{8n} = \frac{1}{1-x^8}$, $\quad |x| < 1$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$, $\quad |x| < 1$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$, $\quad |x| < 1$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x$, $\quad |x| < 1$

Çözüm:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} x = \frac{1}{1-x}$ eşitliğinde x yerine x^8 yazılırsa $|x^8| < 1$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x^8)^k = \frac{1}{1-x^8} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x^{8k} = \frac{1}{1-x^8}$$

bulunur. $|x^8| = 1 \Leftrightarrow |x| = 1$ olduğundan yukarıdaki eşitlik $|x| < 1$ için doğrudur.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ eşitliğinde x yerine $-x$ alınırsa $|-x| < 1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

bulunur. $|-x| = |x|$ olduğundan yukarıdaki eşitlik $|x| < 1$ için doğrudur.

c) b) şıkkında x yerine x^2 alınırsa $|x^2| < 1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^2)^n = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$$

bulunur. $|x^2| = |x|^2 = 1$ olduğundan yukarıdaki eşitlik $|x| < 1$ için doğrudur.

d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x$

Kuvvet serisi yakınsaklık aralığında terim terime integrallenebileceğinden

c) şıkkından

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right) dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int x^{2n} dx = \arctan x$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x$$

4. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ b) $\frac{\pi}{4} = \sum \frac{(-1)^k}{2k+1}$

Çözüm:

a) $|x| < 1$ için $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ olduğu bilinmektedir.

Her iki tarafın integrali alınırsa $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x)$ bulunur.

k yerine k − 1 yazılırsa $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$ bulunur.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ serisi x = −1 için de yakınsak olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \ln 2 \Rightarrow (-1)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = -\ln 2$$ bulunur.

b) $\frac{\pi}{4} = \sum \frac{(-1)^k}{2k+1}$

3. sorunun d şıkkından

$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \arctan x$ olduğunu biliyoruz.

x = 1 için $\arctan 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ bulunur.

BÖLÜM PROBLEMLERİ VE ÇÖZÜMLERİ

1. Aşağıdaki serilerin yakınsaklık yarıçaplarını ve yakınsaklık aralıklarını bulunuz?

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!x^n}{2^n}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{3n}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2.n!}{(2n)!}x^n$

ç) $\sum \left(\frac{3^n}{n}+\frac{2^n}{n^2}\right)x^n$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)}x^{2n+1}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{2n+1}}{n}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}$

ğ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.4\ldots(2n)}{1.3\ldots(2n-1)}x^{4n}$

h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!x^n}{(n+1)^n}$

ı) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5x^{2n}}{(9n+1)}$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1}$

l) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{n^2}x^{n^2}$

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^n$

n) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n.3^n.\ln n}$

o) $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^{n!}$

ö) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{(x-2)^{2n}}{2^n}$

p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-2)^n}{n^n}$

r) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n+3}(x+5)^n$

s) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n(x-\pi)^n$

ş) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(4x)^n}{\ln n}$

t) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}x^{3n}$

u) $\sum_{n=0}^{\infty} 10^n\left(\frac{x-1}{5}\right)^n$

ü) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-4)^{n^2}}{n!}$

v) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n\frac{\ln n}{n}x^n$

y) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$

z) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{n^2}(x+e)^n$

Çözümler:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!x^n}{2^n}, \quad c_n = \frac{n!}{2^n}$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!2^n}{2^{n+1}\,n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} = \infty$$

$\Rightarrow$ seri x = 0 hariç, tüm x ler için ıraksaktır.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{3n}, \quad c_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{(2n+2)!(-1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = 0$$

$\Rightarrow$ Verilen seri tüm x ler için yakınsaktır.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2.n!}{(2n)!}x^n, \quad c_n = \frac{2.n!}{(2n)!}$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)!(2n)!}{(2n+2)!2.n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2(2n+1)} = 0$$

$\Rightarrow$ Verilen seri tüm x ler için yakınsaktır.

ç) $\sum\left(\frac{3^n}{n}+\frac{2^n}{n^2}\right)x^n \qquad c_k=\frac{k3^n+2^n}{n^2}$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[(n+1)3^{n+1}+2^{n+1}\right]n^2}{(n+1)^2\left[n3^n+2^n\right]}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2 3^{n+1}\left[n+1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]}{(n+1)^2 3^n\left[n+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}=3$$

$R=\frac{1}{3}$ olur. $|x|<\frac{1}{3}$ için yakınsak, $|x|>\frac{1}{3}$ için ıraksaktır.

$x=\frac{1}{3}$ ise

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^n}{n}+\frac{2^n}{n^2}\right)\frac{1}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{3}\right)^n\frac{1}{n^2}\right)}_{a_n}$$ serisi elde edilir.

$a_n=\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{3}\right)^n\frac{1}{n^2}>\frac{1}{n}\Rightarrow \quad \sum a_n$ ıraksaktır.

$x=-\frac{1}{3}$ ise a_n yukarıdaki ifade olmak üzere

$\sum(-1)^n a_n$ serisi elde edilir.

$\lim a_n=0$ ve a_n azalan olduğundan bulunan seri yakınsaktır.

Yakınsaklık aralığı $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ olur.

d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}, \qquad c_k=\frac{1}{n!}$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right|=\lim\frac{1}{n+1}=0$$

Seri tüm x ler için yakınsaktır.

e) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad c_n=\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}x^{2n+3}(2n+1)}{(2n+3)x^{2n+1}(-1)^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}|x|^2=x^2$$

$\Rightarrow x^2<1$ yani $|x|<1\Rightarrow$ seri yakınsak, $|x|>1\Rightarrow$ seri ıraksaktır.

$x=1$ için elde edilen

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$$ alterne serisi yakınsaktır.

$x=-1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-1)^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Alterne serisi elde edilir. Bu seri de yakınsaktır.

O halde yakınsaklık yarıçapı 1, yakınsaklık aralığı $[-1,1]$ dir.

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2n+1}}{n},$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x+2)^{2n+3}n}{n+1(x+2)^{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}(x+2)^2=(x+2)^2$$

$\Rightarrow (x+2)^2<1$ yani $|x+2|<1\Rightarrow$ seri yakınsak, $|x+2|>1\Rightarrow$ ıraksaktır.

$x+2=1$ için $\sum\frac{1}{k}$,

$x+2=-1$ için $\sum\frac{-1}{k}$ ıraksak serileri elde edilir.

$-1<x+2<1\Rightarrow -3<x<-1\Rightarrow$ Yakınsaklık aralığı $(-3,-1)$ aralığıdır.

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}, \qquad c_n=\sqrt{\frac{3^{2n}}{(3n-2)2^n}}$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{2n+2}.(3n-2)2^n}{(3n+1)2^{n+1}3^{2n}}\right)^{\frac{1}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{2}.\frac{(3n-2)}{(3n+1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2}}=L\Rightarrow R=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$|x|<\frac{\sqrt{2}}{3}$ ise yakınsak, $|x|>\frac{\sqrt{2}}{3}$ ise ıraksaktır.

$x=\frac{\sqrt{2}}{3}$ ise

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n 2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{(3n-2)}\,2^{\frac{n}{2}}.3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n-2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{3n-2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\neq 0 \Rightarrow \alpha=\frac{1}{2}<1$$ olduğundan seri ıraksaktır.

$x=-\frac{\sqrt{2}}{3}$ için elde edilen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{3n-2}}$$ alterne serisi yakınsaktır.

$\Rightarrow$ Verilen seri $-\frac{\sqrt{2}}{3}\le x<\frac{\sqrt{2}}{3}$ aralığında yakınsaktır.

ğ) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2.4....(2n)}{1.3....(2n-1)}x^{4n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2.4...(2n+2)}{1.3...(2n+1)}\cdot\frac{1.3....(2n-1)}{2.4....(2n)}\left|\frac{x^{4n+4}}{x^{4n}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{2n+1}x^4=x^4$$

$x^4<1\Rightarrow |x|<1 \Rightarrow$ seri yakınsak, $|x|>1 \Rightarrow$ seri ıraksaktır.

$x=\mp 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2.4...(2n)}{1.3...(2n-1)}x^{4n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2.4...(2n)}{1.3...(2n-1)}$$ seri elde edilir.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{2n+1}=1$$ olur.

Raabe testi gereğince

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+2}{2n+1}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n+2-2n-1)}{2n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}>-1$$

$\Rightarrow \sum\frac{2.4...(2n)}{1.3...(2n-1)}$ serisi ıraksaktır. $\Rightarrow$ Yakınsaklık aralığı $(-1,\ 1)$ aralığıdır.

h) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!x^n}{(n+1)^n},\quad c_n=\frac{n!}{(n+1)^n}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!(n+1)^n}{(n+2)^{n+1}n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)^{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}=\frac{1}{e}$$

$\Rightarrow$ Yakınsaklık yarıçapı $R=\frac{1}{L}=\frac{1}{\frac{1}{e}}=e$ dir.

$|x|<e \Rightarrow$ seri yakınsak, $|x|>e \Rightarrow$ seri ıraksaktır.

$x=e$ ise

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)^n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)^n}e^n>\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n e}{(n+1)^n}=e\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

ve $\lim_{n\to\infty} e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}\cdot e=1\neq 0$ olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty}e\frac{n^n}{(n+1)^n}$ ıraksaktır.

Karşılaştırma testinden $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)^n}\cdot e^n$ serisi de ıraksaktır.

$x=-e$ ise $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n!e^n}{(n+1)^n}$ serisi elde edilir. $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n!e^n}{(n+1)^n}\neq 0$ olduğundan bu seri de ıraksaktır. Yakınsaklık aralığı $(-e,\ e)$ açık aralığıdır.

ı) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}(2n-1)}{(2n+1)x^{2n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}x^2\frac{2n-1}{2n+1}=x^2$$

$x^2<1\Rightarrow |x|<1\Rightarrow$ seri yakınsak, $|x|>1\Rightarrow$ seri ıraksaktır. $\Rightarrow R=1$ dir.

$x=1$ için bulunan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ serisi ıraksaktır.

$x=-1$ için $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2n-1}$ ıraksak serisi elde edilir.

O halde serinin yakınsaklık aralığı $(-1,\ 1)$ dir.

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n x^{2n+1}(4n-3)^2}{(4n+1)^2 2^{n-1}x^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(4n-3)^2 2^1 x^2}{(4n+1)^2} = 2x^2$$

$\Rightarrow 2x^2 < 1 \Rightarrow x^2 < \frac{1}{2} \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ise seri yakınsak, $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ ise ıraksaktır.

$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(4n-3)^2 2^{n-\frac{1}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)^2\sqrt{2}}$ serisi yakınsaktır.

$x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}(-1)^{2n-1}}{(4n-3)^2 2^{n-\frac{1}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{(4n-3)^2\sqrt{2}}$ serisi de yakınsaktır.

Yakınsaklık aralığı $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ aralığıdır.

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{(9n+1)}$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^5 x^{2n+2}(9n+1)}{(9n+10)(n+1)^5 x^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^5 \cdot \frac{9n+1}{9n+10} x^2 = x^2$$

$x^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow$ seri yakınsak, $|x| > 1 \Rightarrow$ seri ıraksaktır.

$x = 1$ için ve $x = -1$ için seriler aynı olup

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{9n+1}$ serisi elde edilir.

$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^5}{9n+1} = \infty \neq 0$ olduğundan seri ıraksaktır. Yakınsaklık aralığı $(-1, 1)$ aralığıdır.

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} x^n$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^{2n+1} \cdot \left(\frac{2n+1}{n}\right)^{2n-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^2 \cdot \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{2n+3}\right)^{2n-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^2 \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n-1} \cdot \left(1-\frac{2}{2n+3}\right)^{2n-1} = \frac{1}{4} \cdot e^2 \cdot e^{-2} = \frac{1}{4}$$

Yakınsaklık yarıçapı olur. $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$

$x = 4$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} 4^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n-1}$ serisi elde edilir.

$\lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n-1} = \frac{2}{e} \neq 0$ olduğundan seri ıraksaktır.

$x = -4$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} (-1)^n 4^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n-1}$ olur.

$\lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n-1} = \frac{2}{e} \neq 0$ olduğundan seri ıraksaktır.

Yakınsaklık aralığı $(-4, 4)$ aralığıdır.

l) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \left|\frac{3^{(n+1)^2} x^{(n+1)^2}}{3^{n^2} x^{n^2}}\right| = \lim |3x|^{2n+1} = \begin{cases} 0 & , \ |3x| < 1 \ \text{ise} \\ 1 & , \ |3x| = 1 \ \text{ise} \\ +\infty & , \ |3x| > 1 \ \text{ise} \end{cases}$$

olduğundan $|x| < \frac{1}{3}$ için seri yakınsak, $|x| > \frac{1}{3}$ için ıraksaktır. $R = \frac{1}{3}$ tür.

$x = \frac{1}{3}$ ise $\sum 1$, $x = -\frac{1}{3}$ için $\sum (-1)^{n^2}$ ıraksak serileri elde edilir.

Yakınsaklık Aralığı $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ aralığıdır.

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^n$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{n+1}{n+2}\right) \frac{2^n}{2^{n+1}} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}$$

Yakınsaklık yarıçapı $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ olur.

$|x|<2$ ise seri yakınsak, $|x|>2$ ise seri ıraksaktır.

x = 2 için $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$,

x = −2 için $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$

ıraksak serileri elde edilir. Yakınsaklık aralığı (−2, 2) aralığıdır.

n) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n3^n\ln n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n n3^n\ln n}{(n+1)3^{n+1}\ln(n+1)x^{n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}|x|\frac{n}{n+1}\frac{1}{3}\frac{\ln n}{\ln(n+1)} = \frac{|x|}{3}$$

$|x|<3 \Rightarrow$ seri yakınsak, $|x|>3 \Rightarrow$ seri ıraksaktır.

x = 3 için $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n3^n\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{n3^n\ln n} = \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ serisi bulunur.

$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ serisinin yakınsaklık durumu ile $\displaystyle\sum_p 2^p a_{2^p}$ nin yakınsaklık durumları aynıdır.

$\Rightarrow \displaystyle\sum_p 2^p\frac{1}{2^p p\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}\sum\frac{1}{p}$ serisi ıraksaktır.

x = −3 için $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n3^n\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}}{n3^n\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n3^n\ln n}$

alterne serisi elde edilir. Azalan terimli ve limiti 0 olduğundan yakınsaktır.

⇒ yakınsaklık aralığı $-3\le x<3$ dür. Yakınsaklık yarıçapı R = 3'dür.

o) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n!x^{n!}$, $a_n = n!x^{n!}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{(n+1)!}}{n!x^{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)|x|^{n.n!} = \begin{cases}\infty, & |x|\ge 1 \text{ ise}\\ 0, & |x|<1 \text{ ise}\end{cases}$$

Yakınsaklık aralığı (−1, 1) dir.

ö) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}.(x-2)^n}{2^n}$, $c_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n}$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n 2^n}{2^{n+1}(-1)^{n-1}}\right| = \frac{1}{2} = L \Rightarrow R = \frac{1}{L} = 2$$

$|(x-2)^2| = |x-2|^2 < 2 \Leftrightarrow |x-2| < \sqrt{2}$

$|x-2|<\sqrt{2}$ ise yakınsak, $|x-2|>\sqrt{2}$ ise ıraksaktır.

$x-2=\sqrt{2}$ için bulunan

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-2)^{2n}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ serisi de,

$x-2=-\sqrt{2}$ için bulunan

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-2)^{2n}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ serisi de ıraksaktır.

Yakınsaklık aralığı $\left(2-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}\right)$ dir.

p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x-2)^n}{n^n}$, $c_n = \dfrac{n!}{n^n}$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$$

Yakınsaklık yarıçapı $R = \dfrac{1}{L} = \dfrac{1}{\frac{1}{e}} = e$

$|x-2|<e$ ise seri yakınsak, $|x-2|>e$ ise ıraksaktır.

$|x-2| = e$ için $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x-2)^n}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^n}$ serisi elde edilir.

$n^n e < n!e^n$ eşitsizliğinden $\dfrac{n!e^n}{n^n} > \dfrac{n^n e}{n^n} = e$

bulunur. $\sum e$ serisi ıraksak olduğundan bulunan seri ıraksaktır.

$x-2=-e$ için elde edilen

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x-2)^n}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n(-1)^n}{n^n}$ serisi de ıraksaktır.

Yakınsaklık aralığı (−e, e) aralığıdır.

r) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n+3}(x+5)^n$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+3)(n+3)}{(n+4)(n+1)(n+2)} = 1 \Rightarrow R = 1$$

$|x+5| < 1 \Rightarrow$ yakınsak, $|x+5| > 1 \Rightarrow$ ıraksaktır.

$x+5=1 \Rightarrow x=-4$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)}(x+5)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n+3}$$

serisi elde edilir. Genel terimin limiti sıfır olmadığından ıraksaktır.

$x+5=-1 \Rightarrow x=-6$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n+3}(x+5)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{n+3}$$

alterne serisi elde edilir. Genel terimi sıfıra gitmediğinden ıraksaktır.

Yakınsaklık aralığı $(-6, -4)$ aralığıdır.

s) $\displaystyle\sum n^n (x-\pi)^n$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n+1) = e.\infty = \infty$$

olduğundan seri $x=\pi$ hariç diğer tüm x ler için ıraksaktır.

ş) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(4x)^n}{\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n x^n}{\ln n}$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}\ln n}{\ln(n+1)\, 4^n} = 4\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = 4\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 4 = L.$$

Yakınsaklık yarıçapı $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{4}$ tür.

Seri $|x| < \frac{1}{4}$ için yakınsak, $|x| > \frac{1}{4}$ için ıraksaktır.

$x = \frac{1}{4}$ için $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4^k x^k}{\ln k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4^k}{\ln k\, 4^k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$ ıraksak serisi

$x = -\frac{1}{4}$ için $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n x^n}{\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n(-1)^n}{\ln n 4^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ yakınsak alterne serisi bulunur.

Yakınsaklık aralığı $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ aralığıdır.

t) $\displaystyle\sum \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^{3n} = \sum \frac{(n!)^3}{(3n)!}(x^3)^n$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{[(n+1)!]^3 (3n)!}{(3n+3)!\,(n!)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \frac{1}{27}$$

$\Rightarrow |x^3| < 27 \Rightarrow |x| < 3$ ise seri yakınsak, $|x| > 3$ ise ıraksaktır.

O halde serinin yakınsaklık yarıçapı $R=3$ tür. $x=3$ için

$\displaystyle\sum_n \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^{3n} = \sum_n \frac{(n!)^3}{(3n)!}(27)^n$ serisi bulunur.

$\displaystyle\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{9(n+1)^2}{(3n+1)(3n+2)} = 1$ olur. Raabe testi uygulanırsa

$$\lim n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) = \lim n\left(\frac{9n^2+18n+9}{9n^2+9n+2} - 1\right) = \lim \frac{9n^2+7n}{9n^2+9n+2} = 1 > -1$$

olduğundan seri ıraksaktır.

$x=-3$ için $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n (n!)^3}{(3n)!}(27)^n$ alterne serisi elde edilir.

$a_n = \dfrac{(n!)^3 (27)^3}{(3n)!}$ denirse $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{9n^2+18n+9}{9n^2+9n+2} > 1$ olduğundan (a_n) artandır.

$\lim(-1)^n a_n \neq 0$ olur. $\sum(-1)^n a_n$ ıraksaktır. Yakınsaklık aralığı $(-3, 3)$ açık aralığıdır.

u) $\sum_{n=0}^{\infty} 10^n \left(\frac{x-1}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x-1)^n, \qquad c_k = 2^k$

$\overline{\lim_{k\to\infty}} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{k+1}}{2^k} = 2 \Rightarrow R = \frac{1}{2}$ dir.

$|x-1| < \frac{1}{2}$ için seri yakınsak, $|x-1| > \frac{1}{2}$ için seri ıraksaktır.

$x-1 = \frac{1}{2}$ için $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1$ serisi ıraksak,

$x-1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ için $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{(-1)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ serisi ıraksak olacağından yakınsaklık aralığı $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ aralığıdır.

ü) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^{n^2}}{n!}$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(x-4)^{(n+1)^2} n!}{(n+1)!(x-4)^{n^2}} = \lim \frac{(x-4)^{2n+1}}{n+1} = \begin{cases} 0 , & |x-4| \le 1 \text{ ise} \\ +\infty , & x-4 > 1 \text{ ise} \\ -\infty , & x-4 < -1 \text{ ise} \end{cases}$$

olur. O halde $|x-4| \le 1 \Rightarrow 3 \le x \le 5$ için seri yakınsaktır.

Yakınsaklık yarıçapı $R = 1$ dir.

v) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} x^n$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1} n \ln(n+1)}{(-1)^n (n+1) \ln n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1$$

Yakınsaklık yarıçapı $R = 1$'dir.

Seri $|x| < 1$ için yakınsak, $|x| > 1$ için ıraksaktır. $x = 1$ için

$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} x^n = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ serisi elde edilir.

$f(x) = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \Rightarrow x > e$ için $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ azalandır. Ayrıca

$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ olduğundan $\sum (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ alterne serisi yakınsaktır.

$x = -1$ için

$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} (-1)^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \Rightarrow \sum_{p} \frac{2^p p \ln 2}{2^p} = \ln 2 \sum_{p} p$ ıraksaktır.

Serinin yakınsaklık aralığı $(-1, 1]$ aralığıdır.

y) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \left|\frac{x^{(n+1)^2}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{x^{n^2}}\right| = \lim \frac{|x|^{2n+1}}{2} = \begin{cases} 0 , & |x| < 1 \text{ ise} \\ \frac{1}{2} , & |x| = 1 \text{ ise} \\ +\infty , & |x| > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olacağından seri $|x| \le 1$ için yakınsak, $|x| > 1$ için ıraksaktır.

Yakınsaklık yarıçapı $R = 1$, yakınsaklık aralığı $[-1, 1]$ dir.

z) $\sum (-1)^n e^{n^2} (x+e)^n$

$\overline{\lim_{k\to\infty}} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{e^{(k+1)^2}}{e^{k^2}} = \lim_{k\to\infty} e^{2k+1} = \infty$

$x = -e$ dışında hiçbir x için yakınsak değildir.

2. **a ve b pozitif reel sayılar olduğuna göre $\sum \frac{x^n}{a^n + b^n}$ serisinin yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.**

Çözüm:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{a^k+b^k}{a^{k+1}+b^{k+1}} = \begin{cases}\frac{1}{a}, & a \geq b \quad \text{ise} \\ \frac{1}{b}, & b > a \quad \text{ise}\end{cases} = \frac{1}{\max(a,b)}$$

$\Rightarrow$ yakınsaklık yarıçapı $R = \max(a, b)$

Seri $|x| < \max(a,b)$ ise yakınsak, $|x| > \max(a,b)$ ise ıraksaktır.

$x = \max(a, b) = a$ olsun $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{a^n+b^n}$ olur.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{a^n+b^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{seri ıraksak}$$

$x = -a$ ise $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a^n}{a^n+b^n}$ olur.

Genel terimin limiti 0'a gitmez ıraksaktır.

Yakınsaklık aralığı $(-\max(a,b), \max(a,b))$ aralığıdır.

3. $\displaystyle\sum\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^n$ **serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.**

Çözüm:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}} = 1+\frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}} \to 1 \Rightarrow R = 1$$

Seri $|x| < 1$ için yakınsaktır.

$x = 1$ için $\displaystyle\sum\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$ ıraksak serisi elde edilir. Çünkü

$\lim\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) = +\infty$ dur. $x = -1$ için de $\displaystyle\sum(-1)^n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$ serisi elde edilir. Bu seri de, genel terimi sıfıra gitmediğinden ıraksaktır.

4. $r \geq 0$ **için** $\displaystyle\sum\left(n+r^n\right)x^n$ **serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.**

Çözüm:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{k+1+r^{k+1}}{k+r^k} = \lim_{k\to\infty}\frac{r^{k+1}\left(1+\frac{k+1}{r^{k+1}}\right)}{r^k\left(1+\frac{k}{r^k}\right)} = \begin{cases} r, & r \geq 1 \\ 1, & r < 1\end{cases}$$

$r \geq 1$ ise yakınsaklık yarıçapı $\frac{1}{r}$ dir.

$|x| < \frac{1}{r}$ için yakınsak, $|x| > \frac{1}{r}$ için ıraksaktır. $x = \frac{1}{r}$ ise

$\displaystyle\sum\left(n+r^n\right)x^n = \sum\frac{n+r^n}{r^n}$ serisi elde edilir. Genel teriminin limiti 1 olduğundan ıraksaktır.

$x = -\frac{1}{r}$ ise

$\displaystyle\sum\left(n+r^n\right)x^n = \sum\frac{n+r^n}{r^n}(-1)^n$ ıraksak serisi elde edilir. Yakınsaklık aralığı $\left(-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right)$ aralığıdır.

$r < 1$ ise $R = 1$ olur. Bu takdirde $|x| < 1$ için seri yakınsak, $|x| > 1$ için ıraksaktır.

$x = 1$ ve $x = -1$ için $\sum\left(n+r^n\right)$ ve $\sum(-1)^n\left(n+r^n\right)$ serileri elde edilir. Bu seriler de ıraksaktır.

5. $p \in \mathbb{N}$ **dir.** $\displaystyle\sum\frac{x^{n^2}}{n!(n+p)!}$ **serisinin yakınsaklık yarıçapı ve yakınsaklık aralığını bulunuz.**

Çözüm:

$$a_n = \frac{x^{n^2}}{n!(n+p)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{(n+1)^2}n!(n+p)!}{x^{n^2}(n+1)!(n+p+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}|x|^{2n+1}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n+p} = \begin{cases}0 & |x| \leq 1 \\ \infty & |x| > 1\end{cases}$$

$\Rightarrow$ Seri $|x| \leq 1$ için yakınsak $|x| > 1$ için ıraksaktır.

Yakınsaklık aralığı $[-1, 1]$ kapalı aralığıdır.

6. $\sum\left[3+(-1)^n\right]^n x^n$ **serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.**

Çözüm:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}3+(-1)^n=\begin{cases}4 & n \text{ çift}\\ 2 & n \text{ tek}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=4=L \Rightarrow R=\frac{1}{4} \text{ olur.}$$

$|x|<\frac{1}{4}\Rightarrow$ seri yakınsak, $|x|>\frac{1}{4}\Rightarrow$ seri ıraksaktır.

$$x=\frac{1}{4}\Rightarrow\sum\underbrace{\left(\frac{3+(-1)^n}{4}\right)^n}_{a_n} \qquad a_n=\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2^3},1,\frac{1}{2^4},\ldots\right)$$

$\lim a_n\neq 0 \Rightarrow$ seri ıraksaktır.

$$x=-\frac{1}{4}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\underbrace{\left(\frac{3+(-1)^n}{4}\right)^n}_{a_n} \qquad \lim_{n\to\infty}a_n\neq 0\Rightarrow \text{seri ıraksaktır.}$$

Yakınsaklık aralığı $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$

7. $p\in N$ **için** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(pn)!}$ **serisinin yakınsakık yarıçapı ve yakınsaklık aralığını bulunuz.**

Çözüm:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right|=\lim\frac{(pk)!}{(pk+p)!}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{(pk+1)(pk+2)\ldots(pk+p)}=0$$

Seri tüm x'ler için yakınsaktır.

8. $0<r<1$ **için** $\sum_{n=0}^{\infty}r^n x^{n^2}$ **serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz.**

Çözüm:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{c_k}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{r^n}=\lim_{n\to\infty}r^{\frac{1}{n}}=1=L \Rightarrow R=1$$

$|x|<1\Rightarrow$ seri yakınsak, $|x|>1\Rightarrow$ seri ıraksaktır. $x=1$ ise

$\sum_{n=0}^{\infty}r^n x^{n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}r^n$ geometrik serisi elde edilir. $0<r<1$ olduğundan seri yakınsaktır.

$x=-1$ ise

$\sum_{n=0}^{\infty}r^n x^{n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}r^n(-1)^{n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}r^n(-1)^n=\sum(-r)^n$ bu seri de yakınsaktır.

Yakınsaklık aralığı $[-1, 1]$ dir.

9. $0<r<1$ **ve** $a,b,c\in N$ **için** $\sum_{n=0}^{\infty}r^n x^{an^2+bn+c}$ **serisinin yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.**

Çözüm:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{c_k}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[an^2+bn+c]{r^n}=\lim_{n\to\infty}r^{\frac{n}{an^2+bn+c}}=1$$

$|x|<1\Rightarrow$ seri yakınsak, $|x|>1\Rightarrow$ seri ıraksaktır.

$x=1$ için $\sum_{n=0}^{\infty}r^n$ serisi, $x=-1$ için $\sum_{n=1}^{\infty}r^n(-1)^{an^2+b^n+c}$ serisi elde edilir. Her iki seri de yakınsaktır. Yakınsak aralığı $[-1, 1]$ dir.

10. $\sum c_n x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı R olduğuna göre aşağıdaki serilerin yakınsaklık yarıçaplarını bulunuz.

a) $\sum \frac{c_n}{n!}x^n$ b) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}c_n x^n$ c) $\sum n^n c_n x^n$

d) $\sum c_n^p x^n$ e) $\sum c_n x^{pn}$ $(p \in N)$

Çözüm:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!}x^n$

$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}$ olduğunu biliyoruz.

$C_k = \frac{c_k}{k!}$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{C_{k+1}}{C_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{c_{k+1}k!}{c_k(k+1)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{c_{k+1}}{c_k}\cdot\frac{1}{k+1} = \frac{1}{R}\cdot 0 = 0$$

Seri tüm x'ler için yakınsaktır. Yakınsak yarıçapı $+\infty$ dur.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}c_n x^n$, $C_k = \frac{(k!)^2}{(2k)!}c_k$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{C_{k+1}}{C_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{((k+1)!)^2 c_{k+1}(2k!)^2}{(2k+2)!(k!)^2 c_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{c_{k+1}}{c_k}\cdot\frac{(k+1)^2}{2(k+1)(2k+1)}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{c_{k+1}}{c_k}\cdot\frac{k+1}{4k+2} = \frac{1}{4R}$$

$\Rightarrow$ Yakınsaklık yarıçapı $4R$ dir.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n c_n x^n$, $C_k = k^k c_k$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{C_{k+1}}{C_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}\cdot\frac{c_{k+1}}{c_k} = \infty$$

$\Rightarrow$ hiçbir x için yakınsak değildir. Yakınsaklık yarıçapı sıfırdır.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^p x^n$, $C_k = c_k^p$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{C_{k+1}}{C_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{c_{k+1}^p}{c_k^p} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{c_{k+1}}{c_k}\right)^p = \frac{1}{R^p}$$

$\Rightarrow$ yakınsaklık yarıçapı R^p dir.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{pn}$ $(p \in N)$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{C_{k+1}}{C_k}\right| = \frac{1}{R} \Rightarrow |x^p| = |x|^p < R \Rightarrow |x| < R^{\frac{1}{p}}$$

$\Rightarrow$ Yakınsaklık yarıçapı $R^{\frac{1}{p}}$ dir.

11. $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k$ serisinin yakınsaklık yarıçapı 2 olduğuna göre aşağıdaki serilerin yakınsaklık yarıçaplarını bulunuz.

a) $\sum c_k^p x^k$ b) $\sum c_k x^{pk}$ c) $\sum c_k x^{k^2}$

Çözüm:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^p x^k$, $C_k = c_k^p$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{c_{k+1}^p}{c_k^p} = \left(\frac{c_{k+1}}{c_k}\right)^p = \frac{1}{2^p} \Rightarrow R = 2^p$$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^{pk}$, $C_k = c_k$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{C_{k+1}}{C_k}\right| = \frac{1}{2} \Rightarrow |x^n| = |x|^p < 2 \Rightarrow |x| < 2^{\frac{1}{p}} \text{ için yakınsak}$$

$\Rightarrow$ yakınsaklık yarıçapı $R = 2^{\frac{1}{p}}$ dir.

c) $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^{k^2}$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k^2]{c_k} = \lim_{k\to\infty}\left(\sqrt[k]{c_k}\right)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{R}\right)^{1/k} = 1$$

$\Rightarrow$ yakınsaklık yarıçapı R = 1'dir.

12. $\sum c_k x^k$ **ve** $\sum c_k k x^k$ **serilerini aynı yakınsaklık yarıçapına sahip olduklarını gösteriniz. Bu serilerin yakınsaklık aralıkları aynı mıdır.**

Çözüm:

$\sum c_k x^k$ serisinin yakınsaklık yarıçapı R_1 olsun. $R_1 = \dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[k]{|c_k|}}$ dır. İkinci serinin yakınsaklık yarıçapı R_2 olsun.

$$R_2 = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[k]{|kc_k|}} = \frac{1}{\overline{\lim}\left(\sqrt[k]{|c_k|}.\sqrt[k]{k}\right)} = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[k]{|c_k|}}\cdot\frac{1}{1} = R_1$$

olur. Şu halde $R_1 = R_2$ dir.

$\sum \dfrac{x^k}{k}$ ve $\sum x^k$ serilerinin yakınsaklık yarıçapları 1 dir. Fakat yakınsaklık aralıkları, sırasıyla $[-1, 1)$ ve $(-1, 1)$ aralıklarıdır.

13. $S_n = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$ **ve her** $n \in \mathbb{N}$ **için** $S_n \neq 0$ **olsun.**

Eğer $\lim \dfrac{C_n}{S_n} = 0$ **ise** $\sum S_n x^n$ **serisinin yakınsaklık yarıçapının 1 olduğunu gösteriniz. Ayrıca** $|x| < 1$ **için** $\sum_{k=1}^{\infty} C_k x^k = (1-x)\sum_{k=1}^{\infty} S_k x^k$ **olacağını gösteriniz.**

Çözüm:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}\left|\frac{S_{n+1}}{S_n}\right|} = \frac{1}{\overline{\lim}\left|\dfrac{1}{\frac{S_n}{S_{n+1}}}\right|} = \frac{1}{\overline{\lim}\left|\dfrac{1}{\frac{S_{n+1}-C_{n+1}}{S_{n+1}}}\right|}$$

$$= \frac{1}{\overline{\lim}\left|\dfrac{1}{1-\frac{C_{n+1}}{S_{n+1}}}\right|} = \frac{1}{\frac{1}{1-0}} = 1$$

$$(1-x)\sum_{k=1}^{\infty} S_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} S_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} S_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} S_k x^k - \sum_{k=2}^{\infty} S_{k-1} x^k = S_1 x + \sum_{k=2}^{\infty}(S_k - S_{k-1})x^k$$

$$= C_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} C_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} C_k x^k$$

15. $\sum_{k=1}^{\infty} (\ln k)^k x^k$ **ve** $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\ln k} x^k$ **serilerinin yakınsaklık aralıklarını bulunuz.**

Çözüm:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty}\left(|\ln k|^k\right)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \ln k = \infty \quad \Rightarrow \quad R = 0$$

$\Rightarrow$ x = 0 dışında hiçbir x için yakınsak değildir.

$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\ln k} x^k$ serisini göz önüne alalım. $c_k = k^{\ln k}$ olduğundan

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{c_k} = \lim_{k\to\infty} k^{\frac{\ln k}{k}} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{\ln x}{x}}$$

yazılabilir. Son limit ∞^0 belirsizliğine sahiptir. Bu limit hesaplandığında 1 bulunur. O halde yakınsaklık yarıçapı R = 1 dir. $|x| < 1$ için seri yakınsak, $|x| > 1$ için ıraksaktır.

$x = 1$ ve $x = -1$ için seriler ıraksaktır.

Yakınsaklık aralığı $(-1, 1)$ açık aralığıdır.

Bölüm 4 | **TAYLOR SERİLERİ**

TEOREM:

f, $x = 0$ noktasında n–ninci mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun.

$$p(0) = f(0),\ p'(0) = f'(0),\ \dots,\ p^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$$

şartını gerçekleyen ve derecesi n den büyük olmayan birtek p polinomu vardır ve bu polinom

$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ formülü ile verilebilir. Bu polinoma f fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki **Taylor Polinomu** adı verilir.

TANIM:

f fonksiyonu a noktasını ihtiva eden bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir olsun.

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ serisine a noktasında f fonksiyonu tarafından üretilen **Taylor Serisi** adı verilir.

TEOREM 4.1:

$n \geq 1$ olmak üzere p_n, n– ninci dereceden bir polinom ve f ile g de $x = 0$ noktasında n–ninci mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar olsun.

$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ olmak üzere $f(x) = p_n(x) + x^n g(x)$

yazılabiliyorsa p_n, f fonksiyonu tarafından $x = 0$ noktasında üretilen **Taylor polinomudur.**

TEOREM 4.2:

f fonksiyonu $I = (a - r,\ a + r)$ aralığında her mertebeden türevlenebilir olsun. Eğer her $x \in I$ ve her bir $n \in N$ için

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq A^n$$

olacak şekilde bir pozitif A sabiti varsa, a noktasında f tarafından üretilen Taylor serisi herbir $x \in I$ için $f(x)$ değerine yakınsaktır.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1) $\forall x \in$ **R için**

$$\cos ax = 1 - \frac{(ax)^2}{2!} + \frac{(ax)^4}{4!} - + \dots \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n}}{(2n)!} x^{2n}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$f'(x) = -\sin ax = a\cos\left(ax + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = -a^2 \cos ax = a^2 \cos\left(ax + \frac{2\pi}{2}\right)$$

$$f'''(x) = a^3 \sin ax = a^3 \cos\left(ax + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = a^k \cos\left(ax + k\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(k)}(0) = \begin{cases} a^{2n}(-1)^n & k = 2n \\ 0 & k = 2n+1 \end{cases}$$

$$\cos(ax) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overbrace{f^{(2n+1)}(0)}^{0}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n}}{(2n)!} x^{2n}$$

olur. Biliyoruzki; $\forall x \in I$ ve her $n \in N$ için $\left|f^{(n)}(x)\right| < A^n$ olacak şekilde pozitif A sabiti varsa f tarafından üretilen taylor serisi her bir $x \in I$ için $f(x)$ değerine yakınsaktır.

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|a^n \cos\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right)\right| \leq |a|^n \leq A^n \qquad (|a| < A \text{ için})$$

olduğundan bulunan seri her x için $f(x) = \cos ax$ değerine yakınsar.

2) $\forall x \in R$ için

$$e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} x^n$$

olduğunu gösteriniz. Bundan faydalanarak sinhx ve coshx fonksiyonlarını seriye açınız. Ayrıca $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$f(x) = e^{ax}$, $f'(x) = ae^{ax}$, $f''(x) = a^2 e^{ax}$ ..... $f^{(n)}(x) = a^n e^{ax} \Rightarrow f^{(n)}(0) = a^n$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} x^n$ yazabilmemiz için $K_n(x) \to 0$ olmalıdır.

$$K_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = \frac{a^{n+1} e^{ac}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad c \in (0, x) \quad (e^{ac} \text{ sabit})$$

$\sum \frac{a^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!}$ serisi her x için yakınsak olduğundan ve yakınsak her serinin genel terimi sıfıra gittiğinden $\lim_{n \to \infty} K_n(x) = 0$'dır.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}\right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n) x^n}{n!}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 2 . \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+(-1)^n) x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ olur.}$$

$e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} x^n$ serisinde $x = 1$, $a = 1$ yazılırsa $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ bulunur.

3) $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ ifadesini $(x-2)$'nin kuvvetlerine göre yazınız.

Çözüm:

$f'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$, $f''(x) = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}}$, ..., $f^{(n)}(x) = \frac{1}{2^n} e^{\frac{x}{2}} \Rightarrow f^{(n)}(2) = \frac{e}{2^n}$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{2^n n!}(x-2)^n$ yazabilmemiz için $K_n(x) \to 0$ olmalıdır.

$$K_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-2)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{e^{\frac{c}{2}}}{2^{n+1}(n+1)!}(x-2)^{n+1} \qquad c \in (2, x)$$

$\sum \frac{(x-2)^n}{2^n n!}$ serisi her x için yakınsak ve yakınsak her serinin genel teriminin limiti 0 olduğundan $\lim_{n \to \infty} K_n(x) = 0$ olur.

4. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$, $\quad (|x| < 1)$

b) $\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $\quad (|x| < 1)$

c) $\frac{1}{2-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}$ $\quad (|x| \le 2)$

d) $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$ $\quad (\forall x \in R)$

e) $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^{2n} - 1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ $\quad (\forall x \in R)$

f) $a^x = \sum_{n=0}^{\infty} (\ln a)^n \frac{x^n}{n!}$ $\quad (\forall x \in R)$

g) $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ $\quad (-1 \le x < 1)$

Çözüm:

a) $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n \qquad (|x|<1)$

$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$

$f'(x)=(1-x)^{-2}$

$f''(x)=2(1-x)^{-3}$

$f'''(x)=2.3(1-x)^{-4}$

$\vdots$

$f^{(n)}(x)=n!(1-x)^{-(n+1)}$

$f^{(n)}(0)=n!$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

olur. Bu seri $|x|<1$ için yakınsaktır.

$K_n(x)=(1-c)^{n+1}x^{n+1}, \quad |x|<1, \quad 0<c<x$

Kalan terimin sıfıra gittiği açıktır.

b) $\arctan x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$

$\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ eşitliğinde x yerine $-x$ yazılırsa $|-x|=|x|<1$ için

$\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ yazılabilir. x yerine x^2 yazılırsa, $|x|<1$ için $|x^2|<1$ olacağından

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \qquad |x^2|<|x|<1$$

yazılabilir. Terim terim integral alınırsa

$$\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}dx \Rightarrow \arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

bulunur.

c) $\dfrac{1}{2-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{2^{n+1}}$

$|x|<2$ için $\left|\dfrac{x}{2}\right|<1$ olacağından

$$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}} \text{ olur.}$$

d) $\cos^2 x=\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} \qquad \forall x\in R$

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n=\frac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$$

bulunur.

e) $\sin^3 x=\dfrac{3}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{3^{2n}-1}{(2n+1)!}x^{2n+1} \qquad \forall x\in R$

$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$ olduğundan

$$\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$$

$$=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$=\frac{1}{4}\sum\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\left[3-3^{2n+1}\right]=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

f) $a^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\ln a)^n\dfrac{x^n}{n!}$

$f(x)=a^x$

$f'(x)=a^x\ln a$

$f''(x)=a^x(\ln a)^2$

$\vdots \qquad \vdots$

$f^{(n)}(x)=a^x(\ln a)^n$

$f^{(n)}(0)=(\ln a)^n$

$$a^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+K_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(\ln a)^k}{k!}x^k+K_n(x)$$

$$K_n(x)=\frac{f^{(n+1)}c}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{a^c(\ln a)^{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad c\in(0,x)$$

$\sum \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n$ serisi her yerde yakınsak ve yakınsak bir serinin genel teriminin limiti 0 olduğundan $\lim K_n(x) = 0$ dır. O halde

$$a^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^k}{k!} x^k$$

olur.

g) $|t| < 1$ için

$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$ olduğunu biliyoruz.

$x < 1$ olmak üzere, $[0, x]$ aralığında sağdaki seri düzgün yakınsaktır.

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t} = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k \right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^x t^k dt \right) \Rightarrow -\ln(1-x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} \Rightarrow$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

bulunur.

5. α **herhangi bir reel sayı olmak üzere, bazı x ler için**

$$(x+a)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n a^{\alpha-n}$$

olduğunu gösteriniz. Bundan yararlanarak

a) $\frac{1}{1-x}$ b) $\frac{1}{(1+x)^2}$ c) $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

d) $(2+x)^{\frac{3}{2}}$ e) $\frac{1}{(2+x)^2}$

ifadelerini Maclaurin serisine açınız.

Çözüm:

$f(x) = (x+a)^\alpha$

$f'(x) = \alpha(x+a)^{\alpha-1}$

$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(x+a)^{\alpha-2}$

$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(x+a)^{\alpha-3}$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots\alpha-(n-1)(x+a)^{\alpha-n}$

$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)a^{\alpha-n}$

$$f(x) = (x+a)^\alpha = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + K_n(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(k-1))a^{\alpha-n}}{k!} x^n + K_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{\alpha}{k} a^{\alpha-n} x^n + K_n(x)$$

$c \in (a, x)$ olmak üzere

$$K_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}(a+c)^\alpha \left(\frac{x-a}{a+c} \right)^{n+1}$$

yazılabilir. $\left| \frac{x-a}{a+c} \right| < 1$ için $\lim K_n(x) = 0$ olacağından bazı x ler için

$$(x+a)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} a^{\alpha-n} x^n$$

olur.

a) $a = 1$ ve $\alpha = -1$ alınırsa $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} x^n 1^{\alpha-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

b) $a = 1$, $\alpha = -2$ alınırsa $\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n x^n$

c) $a = 1$, $\alpha = -\frac{1}{2}$ için $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n = \sum (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)x^n}{2^n}$

d) $a = 2$, $\alpha = \frac{3}{2}$ için $(2+x)^{\frac{3}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{3}{2}}{n} x^n 2^{\frac{3}{2}-n}$

e) $a = 2$, $\alpha = -2$ için $\frac{1}{(2+x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} x^n 2^{-1-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^{n+1}}$

6. $\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x|<1$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$(a+t)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} t^n a^{\alpha-n}$ eşitliğinde $a=1$, $t=-x^2$, $\alpha=-\frac{1}{2}$ alınırsa, $|x|<1$ için

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n} x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n} x^{2n}$$

bulunur. $[0, x]$ aralığında integral alınırsa

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \int_0^x x^{2n}dx = x + \sum (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

bulunur.

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{1.2.3.\ldots.n} = (-1)^n \cdot \frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{2.4.6.\ldots.(2n)}$$

olacağından

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

bulunur.

7. $|x|<1$ için

$$\frac{x}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x|<1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}, \quad |x^2|<|x|<1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{x}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}, \quad |x|<1$$

8. $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ ifadesini Maclaurin serisine açınız.

Çözüm:

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x)$$

$$f(x) = \ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+x}dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad -1<x\le 1$$

$$g(x) = \ln(1-x) = -\int_0^x \frac{dx}{1-x} = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad -1\le x<1$$

$$\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^{n-1}+1\right]\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} 2\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \qquad (-1<x<1)$$

9. Fonksiyonların seri açılımından faydalanarak

a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = 2$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{e - e^{\cos x}}{x^2} = \frac{e}{2}$ c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3} = \frac{1}{3}$

olduğunu gösteriniz.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = 2$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots\right)-\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-+\ldots\right)}{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-+\ldots} = \frac{2x+2\frac{x^3}{3!}+\ldots}{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-+\ldots}$$

$$= \frac{2x\left(1+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\ldots\right)}{x\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-+\ldots\right)} = \frac{2\left(1+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\ldots\right)}{\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\ldots\right)}$$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{2.1}{1} = 2$ bulunur.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{x^2}=\dfrac{e}{2}$ olduğunu gösteriniz.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e-e^{\cos x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e-e^{\cos x}}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-+\ldots\right)}{x^2}\cdot e\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{\cos x-1}}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4!}+-\ldots\right)\cdot e\lim_{x\to 0}\frac{1-\left[1+\frac{(\cos x-1)}{2!}+\frac{1}{3!}(\cos x-1)^2+\ldots\right]}{1-\cos x}$$

$$=\frac{e}{2}\lim_{x\to 0}\left[1-\frac{1}{2!}(\cos x-1)+\frac{1}{3!}(\cos x-1)^2+\ldots\right]=\frac{e}{2}.1=\frac{e}{2}$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x^3}=\dfrac{1}{6}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}\cdot\frac{x-\sin x}{x^3}$$

yazılabilir.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-+\ldots\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{6}-\frac{x^2}{5!}+-\ldots\right)=\frac{1}{6}$$

olduğundan

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x^3}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}e^{\sin x}\frac{e^{x-\sin x}-1}{x-\sin x}$$

$$=\frac{1}{6}1.\lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+u+\frac{u^2}{2!}+\ldots\right)-1}{u}\qquad (u=x-\sin x)$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{u\to 0}\left(1+\frac{u}{2!}+\frac{u^2}{3!}+\ldots\right)=\frac{1}{6}.1=\frac{1}{6}.$$

BÖLÜM PROBLEMLERİ VE ÇÖZÜMLERİ

1. Aşağıdaki fonksiyonları Maclaurin serisine açınız. Elde edilen serilerin toplamı hangi x değerleri için $f(x)$'e eşit olur?

a) $f(x)=\dfrac{3}{(1-x)(1+2x)}$ b) $f(x)=\dfrac{3-x}{x^2-4x+3}$

c) $f(x)=xe^{-2x}$ d) $f(x)=e^{x^2}$

e) $f(x)=\sinh x$ f) $f(x)=\sin 3x+x\cos 3x$

h) $f(x)=\dfrac{x}{9+x^2}$ ı) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

i) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{2-x}$ j) $f(x)=\ln(1+x-2x^2)$

Çözüm:

a) $$\frac{3}{(1-x)(1+2x)}=\frac{1}{1-x}+\frac{2}{1+2x}$$

olduğundan, $|2x|<1$ için

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}[1+(-1)^n2^{n+1}]x^n$$

bulunur. O halde $|x|<\dfrac{1}{2}$ için $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[1+(-1)^n2^{n+1}\right]x^n$ olur.

b) $$f(x)=\frac{3-x}{x^2-4x+3}=-\frac{x-3}{(x-3)(x-1)}=\frac{1}{1-x}$$

olacağından $|x|<1$ için $f(x)=\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$

olur.

c) $f(x)=x\,.\,e^{-2x}$, $\forall x\in R$ için

$e^{ax}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a^n}{n!}x^n$ olduğunu biliyoruz. $a=-2$ için

$$e^{-2x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^nx^n}{n!}$$

bulunur. $\forall x\in R$ için $xe^{-2x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n2^nx^{n+1}}{n!}$ yazılabilir.

d) $f(x) = e^{x^2}$

$\forall x \in R$ için $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ olduğu bilinmektedir. x yerine x^2 alınırsa,

$\forall x \in R$ için $e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$ olur.

e) $f(x) = \sinh x$

$f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ olduğundan $\forall x \in R$ için

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ve $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$ olduğundan

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(1-(-1)^n\right)}{n!} x^n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

bulunur.

f) $f(x) = \sin 3x + x\cos 3x$, $\forall x \in R$ için

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \Rightarrow \sin 3x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow \cos 3x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$$

$$f(x) = \sin 3x + x\cos 3x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n} x^{2n+1}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 3^{2n}\left[\frac{3}{(2n+1)!} + \frac{1}{(2n)!}\right] x^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 3^{2n} \frac{(2n+4)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

olur.

h) $f(x) = \frac{x}{9+x^2}$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad |x|<1 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad |x|<1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\frac{x^2}{9}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n}} x^{2n} \quad |x|<3 \quad \left(x \text{ yerine } \frac{x}{3} \text{ alarak}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{9}{9+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{3^{2n}}, \quad |x|<3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9+x^2} = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{3^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{3^{2n+2}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{9+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{3^{2n+2}} \quad |x|<3$$

i) $f(x) = \ln\frac{1+x}{2-x} = \ln(1+x) - \ln(2-x)$

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x|<1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\frac{t}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^n} \quad |t|<2 \quad \left(t \text{ yerine } \frac{t}{2} \text{ alarak}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^{n+1}} \Rightarrow \int_0^x \frac{dt}{2-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{t^n}{2^{n+1}} dt \Rightarrow -\ln(2-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)}$$

$|t|<1$ için doğru olan $\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$ eşitliğinde her iki tarafın integrali alınırsa

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt \Rightarrow \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ bulunur.}$$

$$f(x) = \ln(1+x) - \ln(2-x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad |x|<1$$

j) $f(x)=\ln(1+x-2x^2)=\ln[(1-x)(1+2x)]=\ln(1-x)+\ln(1+2x)$

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n \quad , \quad |t|<1$$

Eşitliğinde her iki tarafın integrali alınırsa

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}dt=\int_0^x\sum_0^{\infty}t^n dt \Rightarrow -\ln(1-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{bulunur.}$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \text{ eşitliğinde x yerine } 2x \text{ alınırsa } |x|<\frac{1}{2} \text{ için}$$

$$\frac{1}{1+2x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n \text{ bulunur. Her iki tarafın integrali alınırsa}$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+2x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n x^{n+1}}{n+1} \qquad |x|<\frac{1}{2}$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$f(x)=\ln(1-x)+\ln(1+2x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{n+1}}{n+1}x^{n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n.2^{n+1}-1\right]\frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad |x|<\frac{1}{2}$$

bulunur.

2. Aşağıdaki serilerin türevlerinin Maclaurin serisine açılımından yararlanarak, kendilerini Maclaurin serisine açınız.

a) $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$ b) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

Çözüm:

a) $|x|<1$ için

$$f'(x)=\ln(1+x)+1=1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

olur. Bu eşitliğin her iki yanının integrali alınırsa

$$f(x)=\int_0^x\left(1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)dx=x+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

bulunur.

b) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^n \quad , \quad |x|<1$$

olduğu bilinmektedir. x yerine x^2 yazılırsa

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{2n} \qquad |x|<1$$

eşitliği elde edilir. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\left[\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{2n}\right]dx=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6...2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

bulunur. O halde $|x|<1$ için

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6....(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

olur.

3. Aşağıdaki fonksiyonları x in kuvvetlerine göre seriye açınız.

a) $f(x)=\sin^2 x.\cos^2 x$ b) $f(x)=(1+x)e^{-x}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{1-x^4}$ ç) $f(x)=\left(1+e^x\right)^3$

d) $f(x)=\sqrt{8+x}$ e) $f(x)=\cosh^3 x$

Çözüm:

a) $f(x)=\sin^2 x.\cos^2 x=\frac{1}{4}(2\sin x.\cos x)^2=\frac{1}{4}(\sin 2x)^2$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos 4x$$

olur. $\forall x\in R$ için

$\cos ax = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n}}{n!} x^{2n}$ olduğunu biliyoruz. $a = 4$ için

$$\cos 4x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n}}{n!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{4n}}{n!} x^{2n}$$

yazılabilir. Buradan

$$f(x) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{4n}}{n!} x^{2n} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{4n}}{n!} x^{2n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{4n-3}}{n!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{4n+1}}{(n+1)!} x^{2n+2}$$

bulunur.

b) $f(x) = (1+x)e^{-x} = e^{-x} + xe^{-x}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n!}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{(n-1)!}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!} x^n \left(\frac{1}{n} - 1\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n-1}{n!} x^n$$

olur.

c) $f(x) = \frac{1}{1-x^4}$, $|x| < 1$ için

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ olduğu bilinmektedir. x yerine x^4 yazılırsa, $|x| < 1$ için

$\frac{1}{1-x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n}$ eşitliği elde edilir.

ç) $f(x) = (1+e^x)^3 = 1 + 3e^x + 3e^{2x} + e^{3x}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} x^n$ olduğunu biliyoruz.

$a = 1 \Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

$a = 2 \Rightarrow e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

$a = 3 \Rightarrow e^{3x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = 1 + 3e^x + 3e^{2x} + e^{3x}$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3.2^n x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3 + 3.2^n + 3^n)x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

elde edilir.

d) $f(x) = \sqrt[3]{8+x}$, $(a+\alpha)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} a^{\alpha-n} x^n$ açılımında

$\alpha = \frac{1}{3}$, $a = 8$ alınırsa

$$(8+x)^{\frac{1}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{3}}{n} 8^{\frac{1}{3}-n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{3}}{n} 2^{1-3n} x^n$$

elde edilir.

4. Aşağıdaki ifadeleri x in kuvvetleri cinsinden yazınız.

a) $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ $\qquad$ b) $\int_0^x e^{-t^2} dt$

c) $\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ $\qquad$ d) $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$

Çözüm:

a) $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt\right)=\frac{\sin x}{x}$$

$$\forall x\in R \text{ için } \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\Rightarrow\frac{\sin x}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$\Rightarrow\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$$

b) $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt\Rightarrow\frac{d}{dx}\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)=e^{-x^2}$

$$e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\Rightarrow\int_0^x e^{-x^2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} \text{ bulunur.}$$

c) $\displaystyle\int_0^x\frac{\ln(1+t)}{t}dt$

$$\ln(1+t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{n+1}}{n+1}\Rightarrow\frac{\ln(1+t)}{t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}t^n \qquad -1<t\le 1$$

$$\Rightarrow\int_0^x\frac{\ln(1+t)}{t}dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{n+1}\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)^2} \qquad -1<x\le 1$$

d) $\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^4}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n t^{4n}\Rightarrow$$

$$\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n x^{4n+1}}{4n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n.(4n+1)}x^{4n+1}$$

5. Aşağıdaki ifadelerin Maclaurin serisindeki, sıfırdan farklı ilk üç terimini bulunuz.

a) $\tan x$ b) $\tanh x$ c) $e^{\cos x}$ d) $\sec x$ e) $e^x \sin x$

Çözüm:

a) $\tan x$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{6}x^3+\ldots$$

$f(x)=\tan x$

$f(0)=0,$

$f'(x)=(1+\tan^2 x)\Rightarrow f'(0)=1$

$f''(x)=2\tan x(1+\tan^2 x)\Rightarrow f''(0)=0$

$f'''(x)=2(1+\tan^2 x)^2+4\tan^3 x(1+\tan^2 x)\Rightarrow f'''(0)=2$

$f^{(4)}(x)=4(1+\tan^2 x).2\tan x(1+\tan^2 x)+12\tan^2 x(1+\tan^2 x)^2+8\tan^4 x(1+\tan x)^2\Rightarrow$

$f^{(4)}(0)=0$

$f^{(5)}(x)=8(1+\tan^2 x)^3+16(1+\tan^2 x)^2 2\tan^2 x+24\tan x(1+\tan x)^3+48\tan^3 x(1+\tan x)^2$

$\qquad +32\tan^3 x(1+\tan x)^3+16(1+\tan^2 x)^2\tan^5 x$

$f^{(5)}(0)=8$

$$f(x)=\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{15}+\ldots..$$

b) $f(x)=\tanh x\Rightarrow f(0)=0$

$f'(x)=1-\tanh^2 x\Rightarrow f'(0)=1$

$f''(x)=-2\tanh x\,(1-\tanh^2 x)=-2\tanh x+2\tanh^3 x\Rightarrow f''(0)=0$

$f'''(x)=-2(1-\tanh^2 x)+6\tanh^2 x\,(1-\tanh^2 x)\Rightarrow f'''(0)=-2$

$f^{(4)}(x)=16\tanh x\,(1-\tanh^2 x)-36\tanh^5 x\,(1-\tanh^2 x)$

$f^{(4)}(x)=16\tanh x-16\tanh^3 x-36\tanh^5 x+36\tanh^7 x\Rightarrow f^{(4)}(0)=0$

$f^{(5)}(x)=(1-\tanh^2 x)\,(16-48\tan^2 x-18\tan^4 x+252\tan^6 x)\Rightarrow f^{(5)}(0)=16$

$$\tanh x=x-\frac{2}{3!}x^3+\frac{16}{5!}x^5+\ldots=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\ldots$$

c) $f(x)=e^{\cos x} \Rightarrow f(0)=e$

$f'(x)=-\sin x e^{\cos x} \Rightarrow f'(0)=0$

$f''(x)=-\cos x e^{\cos x}+\sin^2 x e^{\cos x} \Rightarrow f''(0)=-e$

$f'''(x)=-\sin x e^{\cos x}+\sin x\cos x e^{\cos x}+2\sin x\cos x e^{\cos x}-\sin^3 x e^{\cos x} \Rightarrow f'''(0)=0$

$f^{(4)}(x)=-\cos x e^{\cos x}+\sin^2 x e^{\cos x}+\cos^2 x e^{\cos x}-\sin^2 x e^{\cos x}-\sin^2 x\cos x e^{\cos x}$

$+2\cos^2 x e^{\cos x}-2\sin^2 x e^{\cos x}-2\sin^2 x e^{\cos x}-3\sin^2 x e^{\cos x}+\sin^4 x e^{\cos x}$

$f^{(4)}(0)=-e+e+2e=2e$

$$e^{\cos x}=e-\frac{e}{2}x^2+\frac{2e}{4!}x^4+\ldots=e\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{2}{4!}x^4+\ldots\right)$$

d) $f(x)=\sec x \Rightarrow f(0)=1$

$f'(x)=\sec x\tan x \Rightarrow f'(0)=0$

$f''(x)=\sec^2 x\tan^2 x+\sec x\left(1+\tan^2 x\right) \Rightarrow f''(0)=1$

$f'''(x)=2\sec^2 x\tan^3 x+\sec^2 x\left(1+\tan^2 x\right)2\tan x+\sec x\tan x\left(1+\tan^2 x\right)+2\tan x\left(1+\tan^2 x\right)\sec x$

$f'''(0)=1$

$\sec x=1+\frac{1}{2}x^2+\ldots$

e) $f(x)=e^x\sin x \Rightarrow f(0)=0$

$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x) \Rightarrow f'(0)=+1$

$f''(x)=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x\cos x \Rightarrow f''(0)=2$

$f'''(x)=2e^x\sin x+2e^x\cos x=2e^x(\sin x+\cos x) \Rightarrow f'''(0)=2$

$$e^x\sin x=x+\frac{2}{2!}x^2+\frac{2}{3!}x^3+\ldots=x+x^2+\frac{x^3}{3}+\ldots$$

6. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ **ifadesini** $x=-1$ **noktasında taylor serisine açınız.**

Çözüm:

$f(x)=\frac{1}{x^2} \Rightarrow f(-1)=1$

$f'(x)=-2x^{-3} \qquad f'(-1)=2$

$f''(x)=2.3x^{-4} \Rightarrow f''(-1)=1.2.3$

$\vdots$

$f^{(n)}(x)=(-1)^n\,1.2.\ldots.(n+1)x^{-(n+2)} \Rightarrow f^{(n)}(-1)=(n+1)!$

$$\frac{1}{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n!}(x+1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x+1)^n$$

7. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ **ifadesini** $x+4$ **ün kuvvetlerine göre seriye açınız.**

Çözüm:

$$f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$$

$$=\frac{1}{-3+(x+4)}-\frac{1}{-2+(x+4)}$$

$$=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\left(\frac{x+4}{3}\right)}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(\frac{x+4}{2}\right)}$$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{2}\right)^n$$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^n}+\frac{1}{2}\sum\frac{(x+4)^n}{2^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n$$

olur. Bu eşitlik $\left|\frac{x+4}{2}\right|<1 \Rightarrow -6<x<-2$ için doğrudur.

Bölüm 5

GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLER

TANIM:

a bir reel sayı ve f fonksiyonu her bir $t \geq a$ için $[a, t]$ aralığında integrallenebilir olsun.

$$\lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)dx \qquad (5.1)$$

ifadesine f nin $[a, +\infty)$ üzerindeki **birinci çeşit genelleştirilmiş integrali** denir.

$$\int_a^\infty f(x)dx \qquad (5.2)$$

ile gösterilir. Eğer (5.1) deki limit varsa (5.2) integrali **yakınsak**, limit yoksa integral **ıraksaktır** denir.

f fonksiyonunun $(-\infty, b]$ ve $(-\infty, +\infty)$ aralıkları üzerindeki birinci çeşit genelleştirilmiş integralleri de, benzer şekilde,

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)dx \qquad (5.3)$$

ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx \qquad (5.4)$$

biçiminde tanımlanır. Son ifadedeki c sayısı herhangi bir sabit sayıdır. (5.4)ün sağındaki her iki integralin yakınsak olması durumunda $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ integrali yakınsaktır.

Buna göre,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^c f(x)dx + \lim_{s \to \infty} \int_c^s f(x)dx \qquad (5.5)$$

olacaktır.

TANIM:

f fonksiyonu $[a, b)$ aralığının herbir kapalı alt aralığı üzerinde integrallenebilir ve $x = b$ noktasında sınırsız olsun.

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \qquad (5.7)$$

ifadesine f nin $[a, b]$ üzerindeki **ikinci çeşit genelleştirilmiş integrali** denir. f fonksiyonu $(a, b]$ aralığının kapalı her bir alt aralığında integrallenebilir ve $x = a$ noktasında sınırsız olsun. f nin $[a, b]$ üzerindeki ikinci çeşit genelleştirilmiş integrali

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \qquad (5.8)$$

ifadesidir. Bu limit var olduğunda integral yakınsak, bu limit mevcut olmadığında integral ıraksaktır. İntegrant $[a, b]$ aralığının bir c iç noktasında sınırsız ise integral

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

biçiminde iki ikinci çeşit genelleştirilmiş integralin toplamı olarak yazılabilir. Sağdaki iki integral de yakınsak ise $\int_a^b f(x)dx$ integrali yakınsaktır.

TANIM :

Bir integral, hem birinci çeşit genelleştirilmiş integralin hem de ikinci çeşit genelleştirilmiş integralin özelliklerine sahipse, yani fonksiyon hem sınırsız bir aralık üzerinde tanımlı hem de bu aralığın en az bir noktası komşuluğunda sınırsız ise bu intgerale **üçüncü çeşit genelleştirilmiş integral** denir.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. Aşağıdaki integrallerin çeşidini söyleyiniz.

a) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ b) $\int_0^\infty e^{2x}\,dx$ c) $\int_0^1 \frac{dx}{x+x^2}$

d) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^3}0$ e) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$ f) $\int_0^5 \frac{\sin x}{x}\,dx$

g) $\int_0^\infty \frac{\tan 2x}{x}\,dx$ h) $\int_0^\infty \cos x\,dx$ ı) $\int_1^3 \frac{dx}{x^3-27}$

i) $\int_0^\infty e^{-3x}x^2\,dx$ j) $\int_0^\infty \frac{dx}{x-1}$ k) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2-3x+2}$

Çözüm:

a) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

b) $\int_0^\infty e^{-2x}\,dx$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

c) $\int_0^1 \frac{dx}{x+x^2}$ İkinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

d) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^3}$ Üçüncü çeşit genelleştirilmiş integraldir.

e) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$ Üçüncü çeşit genelleştirilmiş integraldir.

f) $\int_0^5 \frac{\sin x}{x}\,dx$ Genelleştirilmiş integral değildir.

g) $\int_0^\infty \frac{\tan 2x}{x}\,dx$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

h) $\int_0^\infty \cos x\,dx$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

ı) $\int_1^3 \frac{dx}{x^3-27}$ İkinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

i) $\int_0^\infty e^{-3x}x^2\,dx$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

j) $\int_0^\infty \frac{dx}{x-1}$ Üçüncü çeşit genelleştirilmiş integraldir.

k) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2-3x+2}$ İkinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

2. Aşağıdaki integrallerden yakınsak olanların değerini bulunuz.

a) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$ b) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ c) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+1}$

ç) $\int_{-\infty}^0 \cos x\,dx$ d) $\int_0^\infty e^{-3x}$ e) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$

f) $\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ g) $\int_0^\infty e^{-3x}\cos x\,dx$ h) $\int_1^\infty e^{\sqrt{x}}\,dx$

ı) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}$ i) $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}$ j) $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$

k) $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ l) $\int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$ m) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x}$

n) $\int_1^\infty \frac{x}{x^4+1}\,dx$ o) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$ ö) $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

p) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-x}$ r) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ s) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}$

ş) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$ t) $\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$ u) $\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+1}$

Çözüm:

a) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$ Birinci çeşit integraldir.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^3} = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{dx}{x^3} = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}-\frac{1}{2t^2} = \frac{1}{2}$$

b) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} + \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{s\to-\infty}\int_s^0 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\arctan t - \arctan 0 + \lim_{s\to-\infty}\arctan 0 - \arctan s$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

c) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+1}$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+1} = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{dx}{(x+1)^2} = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{x+1}\Big|_0^t = \lim_{t\to\infty} 1-\frac{1}{t+1} = 1$$

ç) $$\int_{-\infty}^0 \cos x dx = \lim_{s\to-\infty}\int_s^0 \cos x dx = \lim_{s\to-\infty}\sin x\Big|_s^0 = \lim_{s\to-\infty}\sin 0 - \sin s$$

limiti mevcut olmadığından integral ıraksaktır.

d) $\int_0^\infty e^{-3x}dx$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\int_0^\infty e^{-3x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-3x}dx = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{3}e^{-3x}\Big|_0^t = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3t} = \frac{1}{3}$$

e) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}dx$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

e) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}dx$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{\ln x}{x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^{\ln t} u\,du = \lim_{t\to\infty}\frac{u^2}{2}\Big|_0^{\ln t}$$

$= \lim_{t\to\infty}\frac{(\ln t)^2}{2} = \infty$ olduğundan integral yakınsak değildir.

f) $$\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{t\to\infty}\int_2^t \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{t\to\infty}\int_{\sqrt{3}}^{t^2-1}\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\cdot\frac{1}{u}\cdot\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}du$$

$$= \lim_{t\to\infty}\int_{\sqrt{3}}^{t^2-1}\frac{1}{u^2+1}du = \lim_{t\to\infty}\arctan(t^2-1) - \arctan\sqrt{3}$$

$$= \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

g) $\int_0^\infty e^{-3x}\cos x dx$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\int_0^\infty e^{-3x}\cos x dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-3x}\cos x dx = \lim_{t\to\infty}\left(e^{-3x}\sin x\Big|_0^t - \int_0^t -3\sin x e^{-3x}dx\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\sin t}{e^{3t}} + 3\int_0^t e^{-3x}\sin x dx\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty} 3\left(-e^{-3x}\cos x\Big|_0^t - \int_0^t (-\cos x)(-3e^{-3x})dx\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(3 + 9\int_0^t e^{-3x}\cos x dx\right) \Rightarrow 10\int_0^\infty e^{-3x}\cos x dx = 3$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-3x}\cos x dx = \frac{3}{10}$$

h) $\int_1^\infty e^{\sqrt{x}}\,dx$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$x = t^2$ denirse $dx = 2t\,dt$ olur. Dolayısıyla

$$\int_1^\infty e^{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{s\to\infty}\int_1^s e^t 2t\,dt = \lim_{s\to\infty} 2(te^t\Big|_1^s - \int_1^s e^t dt = \lim_{s\to\infty} e^s - e = \infty$$

olur. İntegral yakınsak değildir.

ı) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$u = \ln x \quad du = \frac{1}{x}dx$

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{\ln x}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^{\ln t} ue^{-u}du$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(-ue^{-u}\Big|_0^{\ln t} - \int_1^t -e^{-u}du\right) = \lim_{t\to\infty} -\frac{\ln t}{t} - e^{-t} + e = e$$

İntegral yakınsaktır.

j) $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{t\to\infty}\int_2^t \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{t\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln t}\frac{du}{u} = \lim_{t\to\infty}\ln(u)\Big|_{\ln 2}^{\ln t}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\ln(\ln t) - \ln(\ln 2) = \infty \Rightarrow$$ integral ıraksaktır.

k) $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{t\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln t}\frac{du}{u^2} = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{u}\Big|_{\ln 2}^{\ln t}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln t} = \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow$$ integral yakınsaktır.

l) $\int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\frac{(\arctan x)^2}{2}\Big|_0^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{(\arctan t)^2}{2} - \frac{(\arctan(0))^2}{2} = \frac{\pi^2}{8}$$

n) $\int_1^\infty \frac{x}{x^4+1}dx$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\int_1^\infty \frac{x}{x^4+1}dx = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\int_1^t \frac{2x}{(x^2)^2+1}dx = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\arctan x^2\Big|_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\arctan t^2 - \frac{1}{2}\arctan t = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8}$$

o) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \lim_{t\to 0}\int_0^t \frac{dx}{x^4+2x^2+1-2x^2} = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{dx}{(x^2+1)^2-2x^2}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{dx}{(x^2+\sqrt{2}+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\arctan\sqrt{2}(x+1) + \arctan\sqrt{2}(x-1)\Big|_0^t\right]$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

ö) $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ İkinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \lim_{\varepsilon\to 0} -2x^{-\frac{1}{2}}\Big|_\varepsilon^2 = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + 2 = \infty \Rightarrow$$ integral yakınsak değildir.

r) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x^3\sqrt{\ln x}}$ İkinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\int_1^e \frac{dx}{x^3\sqrt{\ln x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1+\varepsilon}^{e}\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\ln(1+\varepsilon)}^{1}\frac{du}{u^{1/3}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{3}{2}u^{2/3}\Big|_{\ln(1+\varepsilon)}^{1}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} -\frac{3}{2}\ln(1+\varepsilon)^{2/3} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \quad \text{integral yakınsaktır.}$$

s) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}$ İkinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\tan x + \frac{1}{\cos x} = t$$

$$\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\tan x}{\sin x}\right)dx = dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\frac{\frac{\tan x}{\cos x}+\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan x + \frac{1}{\cos x}}\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\ln\left|\tan x + \frac{1}{\cos x}\right| = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\ln\left|\frac{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}\right| = \infty \quad \Rightarrow \quad \text{integral ıraksaktır.}$$

ş) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$ İkinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\frac{1}{1-x^3} = \frac{A}{1-x} + \frac{Bx+C}{1+x+x^2} \Rightarrow (A+C)+(A+B-C)x+(A-B)x^2 = 1$$

$$\Rightarrow A+C=1, \qquad A+B-C=0, \qquad A-B=0 \quad \Rightarrow \quad A=B=\frac{1}{3}, \qquad C=\frac{2}{3}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3} = \frac{1}{3}\left[\int_0^1 \frac{1}{1-x}dx + \int_0^1 \frac{x+2}{x^2+x+1}dx\right]$$

olur. Sağdaki ikinci integral bir genelleştirilmiş integral değildir.

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{1-x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} -\ln|1-x|\,\Big|_0^{1-\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\ln\varepsilon = +\infty$$

olduğundan verilen integral ıraksaktır.

t) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t xe^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left(-xe^{-x}\Big|_0^t - \int_0^t (-e)^{-x}dx\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty} -\frac{t}{e^t} - \frac{1}{e^t} + 1 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \text{integral yakınsaktır.}$$

u) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+1} = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{dx}{e^x+1}$

$$= \lim_{t\to\infty}\int_2^{e^t+1}\frac{1}{u(u-1)}du = \lim_{t\to\infty}\int_2^{e^t+1}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u}\right)du$$

$$= \lim_{t\to\infty}\ln(u-1)-\ln u\,\Big|_2^{e^t+1}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\ln\left(\frac{e^t}{e^t+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2$$

olduğundan integral yakınsaktır.

BİRİNCİ ÇEŞİT GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLER İÇİN YAKINSAKLIK TESTLERİ

TEOREM 5.1: (Dizi Testi)

$\int_a^{\infty} f(x)dx$ integralinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\forall n \in N \text{ için} \qquad t_n \geq a \qquad \text{ve} \qquad \lim_{n \to \infty} t_n = +\infty \qquad (5.10)$$

özelliğini sağlayan herbir (t_n) dizisi için

$\left(\int_a^{t_n} f(x)dx \right)$ dizisinin yakınsak olmasıdır. Bu dizinin limiti verilen integralin değeridir.

TEOREM 5.2: (Seri Testi)

$\int_a^{\infty} f(x)dx$ integralinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\forall n \in N \text{ için} \qquad t_n \geq a \qquad \text{ve} \qquad \lim_{n \to \infty} t_n = +\infty$$

özelliğine sahip herbir (t_n) dizisi için $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(x)dx \right)$ serisinin yakınsak olmasıdır.

TANIM

$\int_a^{\infty} |f(x)|\, dx$ yakınsak ise $\int_a^{\infty} f(x)dx$ integrali **mutlak yakınsaktır.** $\int_a^{\infty} f(x)dx$ yakınsak fakat $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ ıraksak ise $\int_a^{\infty} f(x)dx$ integrali **şartlı yakınsaktır** denir.

TEOREM 5.3:

Mutlak yakınsak her integral yakınsaktır.

TEOREM 5.4: (Karşılaştırma Testi)

Pozitif tanımlı f ve g fonksiyonları yeter derece büyük x değerleri için $f(x) \leq g(x)$ eşitsizliğini sağlasın.

a) $\int_a^{\infty} g(x)dx$ yakınsak ise $\int_a^{\infty} f(x)dx$ yakınsaktır.

b) $\int_a^{\infty} f(x)dx$ ıraksak ise $\int_a^{\infty} g(x)dx$ integrali de ıraksaktır.

TEOREM 5.5: (Özel Karşılaştırma Testi)

$x \geq a$ için f pozitif tanımlı bir fonksiyon olsun.

1) Yeter derecede büyük x değerleri için

$$f(x) \leq \frac{c}{x^p} \qquad \text{ve} \qquad p > 1$$

ise $\int_a^{\infty} f(x)dx$ integrali yakınsaktır.

2) Yeter derece büyük x değerleri için

$$f(x) \geq \frac{c}{x^p} \text{ ve } p \leq 1$$

ise $\int_a^{\infty} f(x)dx$ ıraksaktır.

TEOREM 5.6: (Karşılaştırma Testinin Limit Formu)

Pozitif tanımlı bir f fonksiyonu için

$$\lim_{x\to\infty} x^p . f(x) = c$$

olsun.

1) $0 \le c < +\infty$ ve $p > 1$ ise $\int_a^\infty f(x)dx$ yakınsaktır.

2) $0 < c \le +\infty$ ve $p \le 1$ ise $\int_a^\infty f(x)dx$ ıraksaktır.

TEOREM 5.7: (Abel Testi)

φ, $[a, +\infty)$ aralığında sürekli ve aynı aralık üzerinde sürekli türeve sahip bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\varnothing(x) = \int_a^x \varphi(t)dt$$

fonksiyonu $[a, +\infty)$ aralığında sınırlı ve g de $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ şartını sağlayan monoton azalan bir fonksiyon ise

$$\int_a^\infty \varphi(x)g(x)dx$$

integrali yakınsaktır.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. Aşağıdaki integrallerin yakınsaklık durumlarını inceleyiniz.

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$ b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$ c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+\sin^2 x}$

d) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{\ln x}$ e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x+\cos x}$ f) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{1+2x^3+3x^4}$

g) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x+x^3}$ h) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(4x^2+1)^2}}$ ı) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x\,dx}{x^2(x+1)}$

i) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\,dx}{x^2-6x+10}$ j) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x}dx$ k) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\tan\frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}}dx$

l) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1+\cos x}{\sqrt{x}}dx$ m) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{3+\arcsin\frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}}$ n) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x+\sqrt{x}+1}{x^2+2\sqrt[5]{x^4}+1}$

o) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\sqrt[7]{3+2x^2}}{\sqrt[6]{x^3-1}}$ ö) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$ p) $\displaystyle\int_1^\infty \left(1-\cos\frac{2}{x}\right)dx$

r) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}}$ s) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{e^x+5}$ ş) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{dx}{e^{2x}-10e^x}$

t) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ u) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{1+2x^2+x^4}$ v) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x}dx$

Çözümler:

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$x \geq 1$ için $x+x^3 > x^3 \Rightarrow \sqrt{x+x^3} > \sqrt{x^3} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x+x^3}} < \dfrac{1}{x^{3/2}}$

$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ integrali yakınsak olduğundan karşılaştırma testi gereğince $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$

integrali yakınsaktır.

b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$x \geq 1$ için $x+x^2 < x^2+x^2 = 2x^2 \Rightarrow \sqrt{x+x^2} < \sqrt{2}\,x \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}\,x} < \dfrac{1}{\sqrt{x+x^2}}$

$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}x}dx$ integrali ıraksak olduğundan karşılaştırma testi gereğince

$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$ integrali ıraksaktır.

c) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+\sin^2 x}$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$x \geq 1$ için $0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq x^2+\sin^2 x \leq x^2+1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x^2+\sin^2 x} \leq \dfrac{1}{x^2}$

$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$ integrali yakınsak olduğundan karşılaştırma testi gereğince

$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+\sin^2 x}$ integrali yakınsaktır.

d) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{\ln x}$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$x \geq 2$ için $\ln x < x \Rightarrow \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{\ln x}$

$\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x}dx$ integrali ıraksak olduğundan karşılaştırma testi gereğince

$\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{\ln x}dx$ integrali ıraksaktır.

e) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{1+2x^3+x^4}$ integrali birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$x \geq 2$ için $1+2x^3+x^4 > x^4 \Rightarrow \dfrac{1}{1+2x^3+x^4} < \dfrac{1}{x^4}$

$\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^4}$ integrali yakınsak olduğundan karşılaştırma testi gereğince

$\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{1+2x^3+x^4}$ integrali yakınsaktır.

g) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x+x^3}$ birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$x \geq 1$ için $x^3 < x^3+x \Rightarrow \dfrac{1}{x^3+x} < \dfrac{1}{x^3}$

$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}dx$ integrali yakınsak olduğundan karşılaştırma testi gereğince verilen

integral yakınsaktır.

h) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt[3]{(4x^2+1)^2}}dx$ birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{x}{\sqrt[3]{(4x^2+1)^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{(4x^2+1)^2}} = \frac{1}{4^{\frac{2}{3}}}$$

$c=\dfrac{1}{4^{\frac{2}{3}}}$, $p=\dfrac{1}{3}<1$ olduğundan $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt[3]{(4x^2+1)^2}}$ integrali

karşılaştırma testinin limit formu gereğince ıraksaktır.

ı) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x\,dx}{x^2(x+1)}$ birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\lim_{x\to\infty} x^2\cdot\frac{x}{x^2(x+1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3+x^2}=1$$

$c=1$, $p=2$ olduğundan $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x\,dx}{x^2(x+1)}$ integrali karşılaştırma testinin

limit formu gereğince yakınsaktır.

i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2-6x+10}$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2-6x+10} = \int_0^{\infty}\frac{x}{x^2-6x+10}dx + \int_{-\infty}^{0}\frac{x}{x^2-6x+10}dx$$

$$= \int_0^{\infty}\frac{x}{x^2-6x+10} - \int_0^{\infty}\frac{x}{x^2+6x+10}$$

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{x}{x^2-6x+10} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-6x+10}=1$$

$c=1$ ve $p=1$ olduğundan $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x}{x^2-6x+10}dx$ integrali

karşılaştırma testinin limit formu gereğince ıraksaktır. Dolayısı ile

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2-6x+10}dx$ integrali de ıraksaktır.

j) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x}dx$

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{\ln(x^2+1)}{x} = \lim_{x\to\infty}\ln(x^2+1)=\infty$$

$c=\infty$ ve $p=1$ olduğundan $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x}dx$ integrali

karşılaştırma testinin limit formu gereğince ıraksaktır.

k) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{1+x\sqrt{x}}dx$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}\frac{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{1+x\sqrt{x}}=0$$

$c=0$ ve $p=\dfrac{3}{2}$ olduğundan $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{1+x\sqrt{x}}dx$ integrali

karşılaştırma testinin limit formu gereğince yakınsaktır.

l) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2+\cos x}{\sqrt{x}}dx$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$x\geq 1$ için $-1\leq \cos x\leq 1 \Rightarrow 1\leq 2+\cos x\leq 3$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}\leq\frac{2+\cos x}{x}<\frac{3}{\sqrt{x}}$$

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ ıraksak olduğundan karşılaştırma testinden

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{2+\cos x}{\sqrt{x}}dx$ integrali ıraksaktır.

m) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{3+\arcsin\frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}}dx$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{3+\arcsin\frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}}\right)=3,\quad c=3,\quad p=\frac{3}{2}>1$$

olduğundan $\displaystyle\int_2^\infty \frac{3+\arcsin\frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}}dx$ integrali yakınsaktır.

n) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x+\sqrt{x+1}}{x^2+2\sqrt[5]{x^4}+1}dx$

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{x+\sqrt{x+1}}{x^2+2\sqrt[5]{x^4}+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x\sqrt{x+1}}{x^2+2\sqrt[5]{x^4}+1}=1 \quad c=1,\quad p=1$$

olduğundan $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x+\sqrt{x+1}}{x^2+2\sqrt[5]{x^4}+1}dx$ integrali karşılaştırma testinin limit formu gereğince ıraksaktır.

o) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\sqrt[7]{3+2x^3}}{\sqrt[6]{x^3-1}}dx$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$x\geq 2$ için

$$\frac{\sqrt[7]{3+2x^3}}{\sqrt[6]{x^3-1}}=\frac{x^{\frac{3}{7}}\sqrt[7]{\frac{3}{x^3}+2}}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt[6]{1-\frac{1}{x^3}}}=x^{-\frac{1}{14}}\frac{\sqrt[7]{\frac{3}{x^3}+2}}{\sqrt[6]{1-\frac{1}{x^3}}}$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{14}}\left(x^{-\frac{1}{14}}\frac{\sqrt[7]{\frac{3}{x^3}+2}}{\sqrt[6]{1-\frac{1}{x^3}}}\right)=2^{\frac{1}{7}}$$

$c=2^{\frac{1}{7}}$ ve $p=\frac{1}{14}$ olduğundan $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\sqrt[7]{3+2x^3}}{\sqrt[6]{x^3-1}}dx$ integrali ıraksaktır.

ö) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\frac{1}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)}}$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)}}=1$$

$c=1,\ p=\frac{3}{2}$ olduğundan $\displaystyle\int_3^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$ integrali karşılaştırma testinin limit formu gereğince yakınsaktır.

p) $\displaystyle\int_1^\infty \left(1-\cos\frac{2}{x}\right)dx$

$$\lim_{x\to\infty} x^2\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{-\frac{2}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}\cdot 2=2$$

$c=2,\ p=2$ olduğundan $\displaystyle\int_1^\infty \left(1-\cos\frac{2}{x}\right)dx$ integrali karşılaştırma testinin limit formu gereğince yakınsaktır.

r) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}}dx$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$x\geq 1$ olduğunda

$$\left|\frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}}\right|\leq\frac{1+4|\sin 2x|}{x^3+\sqrt[3]{x}}\leq\frac{5}{x^3+\sqrt[3]{x}}<\frac{5}{x^3}\ \text{ olur.}$$

$\int_1^\infty \frac{5}{x^3}dx$ integrali yakınsak olduğundan,

karşılaştırma testi gereğince $\int_1^\infty \left|\frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}}\right|dx$ yakınsaktır.

Dolayısı ile $\int_1^\infty \frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}}dx$ integrali mutlak yakınsaktır.

Mutlak yakınsak her integral yakınsak olduğundan verilen integral yakınsaktır.

s) $\int_1^\infty \frac{3}{e^x+5}dx$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$\frac{3}{e^x+5} < \frac{3}{e^x}$ ve $\int_1^\infty \frac{3}{e^x}dx = 3\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{e^x}dx = 3\lim_{t\to\infty} -e^{-t}+e = 3e$

olduğundan $\int_1^\infty \frac{3}{e^x}dx$ integrali yakınsaktır.

Karşılaştırma testinden $\int_1^\infty \frac{3}{e^x+5}dx$ integrali de yakınsaktır.

ş) $\int_3^\infty \frac{dx}{e^{2x}-10e^x}$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$\lim_{x\to\infty} x^2 \frac{1}{e^{2x}-10e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2e^{2x}-10e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{4e^{2x}-10e^x} = 0$

$c=0$ ve $p=2$ olduğundan $\int_3^\infty \frac{dx}{e^{2x}-10e^x}$ integrali karşılaştırma testinin limit

form gereğince yakınsaktır.

t) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$\varphi(x) = \sin x,\qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ seçilirse

$|\varnothing(x)| = \left|\int_0^x \sin t dt\right| = |\cos 0 - \cos x| \le 2 \Rightarrow \varnothing$ sınırlı

$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ monoton azalan $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ olduğundan

Abel testi gereğince verilen integral yakınsaktır.

u) $\int_1^\infty \frac{dx}{1+2x^2+x^4}$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$x^4 < 1+2x^2+x^4$ ve $\Rightarrow \frac{1}{1+2x^2+x^4} < \frac{1}{x^4}$

$\int_1^\infty \frac{1}{x^4}dx$ integrali yakınsak olduğundan karşılaştırma testi gereğince verilen integral

yakınsaktır.

v) $\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x}dx$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$\lim_{x\to\infty} x\frac{\arctan x}{x} = \lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

$c = \frac{\pi}{2}$ ve $p=1$ olduğundan $\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x}dx$ integrali karşılaştırma testinin

limit formu gereğince ıraksaktır.

2. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx = 2$

b) $\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx = 0$

Çözüm:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} e^{x}dx + \lim_{s\to\infty}\int_{0}^{s} e^{-x}dx$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left(1-e^{t}\right) + \lim_{s\to\infty}\left(1-e^{-s}\right) = 1+1 = 2$$

b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx = \int_{0}^{1} \frac{\ln x}{1+x^2}dx + \int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{\ln x}{1+x^2}dx + \int_{0}^{1} \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{1+t^2}dt \qquad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{t} \\ dx = -\dfrac{1}{t^2}dt \end{array}\right]$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{\ln x}{1+x^2} - \int_{0}^{1} \frac{\ln t}{1+t^2}dt = 0$$

3. **f fonksiyonu her $t \geq a$ için $[a, t]$ aralığında integrallenebilir, $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ yakınsak ve $b > a$ olsun. $\int_{b}^{+\infty} f(x)dx$ integralininde yakınsak olduğunu gösteriniz.**

Çözüm:

f fonksiyonu $[b, t]$ aralığında integrallenebilirdir. Dolayısıyla $\int_{b}^{\infty} f(x)dx$ integrali birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{\infty} f(x)dx$ yazılabilir. $\int_{a}^{b} f(x)dx$ bir Riemann integrali olup değeri bir reel sayıdır. Dolayısıyla $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ ile $\int_{b}^{\infty} f(x)dx$ integralleri aynı karakterdedir. $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ yakınsak olduğundan $\int_{b}^{\infty} f(x)dx$ de yakınsaktır.

İKİNCİ ÇEŞİT GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLER İÇİN YAKINSAKLIK TESTLERİ

TEOREM 5.8: (Karşılaştırma Testi)

Pozitif f fonksiyonunun yegane singüler noktası b ve her $x \in [a, b)$ için $f(x) \leq g(x)$ olsun.

1) $\int_{a}^{b} g(x)dx$ yakınsak ise $\int_{a}^{b} f(x)dx$ de yakınsaktır.

2) $\int_{a}^{b} f(x)dx$ ıraksak ise $\int_{a}^{b} g(x)dx$ de ıraksaktır.

TEOREM 5.9: (Karşılaştırma Testinin Limit Formu)

$(a, b]$ üzerinde tanımlı, negatif olmayan, integrallenebilen f ve g fonksiyonları için a yegane singüler nokta ve

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma$$

olsun.

1) $0 < \gamma < +\infty$ ise $\int_{a}^{b} f(x)dx$ ile $\int_{a}^{b} g(x)dx$ aynı karakterdedir.

2) $\gamma = 0$ ve $\int_{a}^{b} g(x)dx$ yakınsak ise $\int_{a}^{b} f(x)dx$ yakınsaktır.

3) $\gamma = +\infty$ ve $\int_{a}^{b} g(x)dx$ ıraksak ise $\int_{a}^{b} g(x)dx$ ıraksaktır.

TEOREM 5.10: (Limit Testi)

f, $(a, b]$ aralığında pozitif tanımlı, integrallenebilen bir fonksiyon ve

$$\lim_{x\to a^+} (x-a)^p f(x) = \gamma$$

olsun.

1) $0 \leq \gamma < +\infty$ ve $p < 1$ ise $\int_{a}^{b} f(x)dx$ yakınsak

2) $\gamma \neq 0$ ve $p \geq 1$ ise $\int_{a}^{b} g(x)dx$ ıraksaktır.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. **Aşağıdaki integralleri hesaplayıp, yakınsaklık durumlarını inceleyiniz.**

a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ b) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ c) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

d) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2-1}$ e) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$ f) $\int_{-1}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

g) $\int_1^e \frac{dx}{x\ln x}$ h) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ i) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

j) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln x\, dx$ k) $\int_0^1 \ln x\, dx$ l) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

m) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ n) $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)(x-b)}$ o) $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

Çözümler:

a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to\infty}\left(2-2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2$ olduğundan

integral yakınsaktır.

b) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = 2\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^2}$ olduğundan

integral ıraksaktır.

c) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to\infty} \arcsin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}$

olduğundan integral yakınsaktır.

d) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2} \int_{-1+\varepsilon}^0 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2}\left(\ln|x-1| - \ln|x+1|\right)\Big|_{-1+\varepsilon}^0$

$= \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{2}\left(\ln|-2+\varepsilon| - \ln(\varepsilon)\right) = -\infty$

olduğundan integral ıraksaktır.

e) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3} = \int_0^2 \frac{dx}{(x-3)(x-1)} = \int_0^2 \frac{2}{x-3} dx - 2\int_0^2 \frac{1}{x-1} dx$

$= 2\ln|x-3|\Big|_0^2 - 2\left(\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{x-1} dx + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{1}{x-1} dx\right)$

$= -2\ln 3 - 2\left(\lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln|x-1|\Big|_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln|x-1|\Big|_{1+\varepsilon}^2\right)$

$= -2\ln 3 - 2\left(\lim_{\varepsilon\to 0} \ln\varepsilon + \lim_{\varepsilon\to 0} \ln\varepsilon\right) = \infty$

olduğundan integral ıraksaktır.

f) $\int_{-1}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int_0^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^-} \int_{-1}^{\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}}\Big|_{-1}^{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}}\Big|_\varepsilon^{27}$

$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{3}{2}\varepsilon^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} + \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{27}{2} - \frac{2}{3}\varepsilon^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} + \frac{27}{2} = \frac{24}{2} = 12$

bulunur. İntegral yakınsaktır.

g) $\int_1^e \frac{dx}{x\ln x} = \int_0^1 \frac{du}{u} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{du}{u} = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln 1 - \ln\varepsilon = \infty$ olduğundan integral ıraksaktır.

h) $$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{x-1}\,\Big|_{1+\varepsilon}^{2} = \lim_{\varepsilon\to 0} 2-2\sqrt{\varepsilon} = 2$$

bulunur. İntegral yakınsaktır.

i) $$x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin x \;\Rightarrow\; dx=\frac{\cos x}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_{\varepsilon_1}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon_2} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_{\varepsilon_1}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{\frac{1}{2}}^{\varepsilon_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_{\arcsin(2\varepsilon_1-1)}^{0} \frac{\frac{\cos x}{2}dx}{\frac{1}{2}\cos x} + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{0}^{\arcsin(2\varepsilon_2-1)} \frac{\frac{\cos x}{2}}{\frac{\cos x}{2}}dx$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+} -\arcsin(2\varepsilon_1-1) + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\arcsin(2\varepsilon_2-1) = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$$

j) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(x\ln x - x)\Big|_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}-\varepsilon\ln\varepsilon+\varepsilon\right] = \frac{\pi}{2}\left(\ln\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$$

k) $$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{1} \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(x\ln x - x)\Big|_{\varepsilon}^{1} = -\lim_{\varepsilon\to 0^+}(\varepsilon\ln\varepsilon-\varepsilon) = 0$$

l) $$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\sqrt{1-x^2}\,\Big|_0^{1-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2}+1=1$$ bulunur. İntegral yakınsaktır.

m) $$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t} = -\ln\left|\cot t+\operatorname{cosec} t\right|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \qquad \begin{pmatrix} x=\sin t \\ dx=\cos t\,dt\end{pmatrix}$$

$$= -\ln\left|\cot\frac{\pi}{2}+\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2}\right| + \ln\left|\cot\frac{\pi}{6}+\operatorname{cosec}\frac{\pi}{6}\right|$$

$$= -\ln|0+1|+\ln\left|\sqrt{3}+2\right| = \ln\left(2+\sqrt{3}\right)$$

n) $$u=\frac{x-a}{b-a} \qquad du=\frac{dx}{b-a} \qquad x=b\Rightarrow u=1 \qquad x=a\Rightarrow a=0$$

$$\lim_{x\to a^+}(x-a)^{1/2}f(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}} \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to b^-}(b-x)^{1/2}f(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}$$

olduğundan integral yakınsaktır. İntegralin değeri

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int_0^1 [(b-a)u.(b-a)(1-u)]^{-\frac{1}{2}}.(b-a)du$$

$$= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u-u^2}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(u-\frac{1}{2}\right)^2}} = \arcsin(2u-1)\Big|_0^1$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$

olur.

o) $x=\frac{1}{t}$ denirse $dx=-\frac{1}{t^2}dt$ olur. Buna göre

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \lim_{a\to\infty}\int_0^a \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \lim_{a\to\infty}\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\Big|_0^a$$

$$= \lim_{a\to\infty}\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)=\infty$$ olur. İntegral ıraksaktır.

2. Aşağıdaki integrallerin yakınsaklık durumlarını inceleyiniz.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x\cos x}dx$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$ e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,dx$ f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(x+1)}}$

g) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1-\cos x}{x^2}dx$ h) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x^2(x^3-8)^{\frac{2}{3}}}$ ı) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt[5]{\cos x}}$

Çözümler:

a) $$\lim_{x\to 1^-}(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^3}} = \lim_{x\to 1^-}\sqrt{1-x}\,\frac{1}{\sqrt{1-x}\,\sqrt{1+x+x^2}}$$
$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

olur. $p = \frac{1}{2} < 1$ olduğundan verilen integral yakınsaktır.

b) $$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{2}}\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{ve} \quad p = \frac{1}{2} < 1$$

olduğundan integral yakınsaktır.

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1.1 = 1$$

olduğundan integral genelleştirilmiş integral değildir.

d) $$\lim_{x\to 1^-}(1-x)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^4}} = \lim_{x\to 1^-}(1-x)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)(1+x^2)}}$$
$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)(1+x^2)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

$p = \frac{1}{3} < 1$ olduğundan integral yakınsaktır.

e) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\frac{\sin x}{\cos x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} -\ln\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) = +\infty$$

O halde integral ıraksaktır.

f) $$\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x(x+1)}} = \int_{-1}^0\frac{dx}{\sqrt[3]{x}(x+1)} + \int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}(x+1)}$$

$\displaystyle\lim_{x\to -1^+}(x+1)\frac{1}{\sqrt[3]{x}(x+1)} = \lim_{x\to -1^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -1$ ve $p = 1$ olduğundan

birinci integral ıraksaktır. Dolayısıyla verilen integral ıraksaktır.

g) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$$

olduğundan verilen integral genelleştirilmiş integral değildir.

h) $$\lim_{x\to 2^-}(2-x)^{\frac{2}{3}}\frac{1}{x^2(x^3-8)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{x\to 2^-}(2-x)^{\frac{2}{3}}\frac{1}{x^2(x-2)^{\frac{2}{3}}(x^2+2x+4)^{\frac{2}{3}}}$$
$$= \frac{1}{4.(12)^{\frac{2}{3}}}$$

$p = \frac{2}{3} < 1$ olduğundan verilen integral yakınsaktır.

ı) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{\frac{1}{5}}\frac{1}{\sqrt[5]{\cos x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}\right)^{\frac{1}{5}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{-1}{-\sin x}\right)^{\frac{1}{5}} = 1$$

ve $p = \frac{1}{5} < 1$ olduğundan verilen integral yakınsaktır.

3. Aşağıdaki integrallerin yakınsak olduğunu gösteriniz.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln x}{(1+x)^2}$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^p-1}{\ln x}dx$ $(p>-1)$

c) $\displaystyle\int_0^1 \ln x.\ln(1+x)dx$ d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{1-x}}dx$

Çözüm:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln x}{(1+x)^2}dx$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln x}{(1+x)^2}=\lim_{x\to 0}x\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(-x)=0$$

olduğundan integral genelleştirilmiş integral değildir. Dolayısıyla yakınsaktır.

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^p-1}{\ln x}dx$

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^p-1}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{px^{p-1}}{\frac{1}{x}}=p$ olduğundan integral genelleştirilmiş integral değildir.

Belirli integral olup yakınsaktır.

c) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\ \ln(1+x)dx$

$f(x)=\ln x\ln(1+x)$ ve $g(x)=\ln x$ olsun.

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}\ln(1+x)=0$ olduğundan

$\displaystyle\Rightarrow \int_0^1 g(x)dx$ yakınsak ise $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ integrali de yakınsaktır.

$$\int_0^1 \ln x dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \ln x\, dx=\lim_{\varepsilon\to 0}(x\ln x-x)\Big|_\varepsilon^1=\lim_{\varepsilon\to 0}(-1-\varepsilon\ln\varepsilon+\varepsilon)=-1$$

olduğundan $\displaystyle\int_0^1 \ln x dx$ yakınsaktır. Dolayısıyla verilen integral yakınsaktır.

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{1-x}}dx$

$\sqrt{1-x}=u$ denirse $\displaystyle\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}dx=du \Rightarrow dx=-2u\,du$ olur.

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{1-x}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\ln(1-x)}{\sqrt{1-x}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\sqrt{\varepsilon}}^1 2\ln u.2du=\lim_{\varepsilon\to 0^+}4\int_{\sqrt{\varepsilon}}^1 \ln u\,du$$

$$=4\lim_{\varepsilon\to 0^+}(u\ln u-u)\Big|_{\sqrt{\varepsilon}}^1=4\lim_{\varepsilon\to 0^+}(-1-\varepsilon\ln\varepsilon+\varepsilon)=-4$$

olduğundan integral yakınsaktır.

4. Aşağıdaki integralleri yakınsak yapan p ve q sayılarını bulunuz.

a) $\displaystyle\int_0^1 x^p(1-x^2)^q dx$ b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^q(\ln x)^p}$

Çözüm:

a) $\displaystyle\int_0^1 x^p(1-x^2)^q dx$

$x^2=u \Rightarrow x=\sqrt{u}$, $\displaystyle dx=\frac{1}{2\sqrt{u}}du$, $x=1\Rightarrow u=1$, $x=0\to u=0$

$$\int_0^1 x^p(1-x^2)^q dx=\int_0^1 u^{\frac{p}{2}}(1-u)^q\frac{1}{2\sqrt{u}}du$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{p}{2}-\frac{1}{2}}(1-u)^q du$$

$\dfrac{p}{2}-\dfrac{1}{2}>-1$ ve $q>-1$ olmalı (Beta fonksiyonundan)

$\Rightarrow p>-1$ ve $q>-1$ olmalı

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^q(\ln x)^p}$

$p>0$ ise $x=1$ singüler noktadır.

$f(x)=\dfrac{1}{x^q(\ln x)^p}$ ve $g(x)=\dfrac{1}{(\ln x)^p}$ denirse

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x^q}=1$ olur. O halde

$\displaystyle\int_1^2 f(x)dx$ ile $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(\ln x)^p}dx$. İntegralleri aynı karakterdedir.

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1).g(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{(\ln x)^p}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{p(\ln x)^{p-1}}=\begin{cases}\infty, & p>1 \text{ ise}\\ 0, & 0<p<1 \text{ ise}\\ 1, & p=1 \text{ ise}\end{cases}$$

$\Rightarrow p\ge 1$ için $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(\ln x)^p}dx$ ıraksaktır. O halde verilen integral $p\ge 1$ için ıraksaktır.

$0<p<1$ olsun.

$$\ln x=u\Rightarrow\int_1^2\frac{dx}{(\ln x)^p}=\int_0^{\ln 2}u^{-p}e^u\,du$$

$\lim\limits_{u\to 0}u^p\left(u^{-p}e^u\right)=\lim\limits_{u\to 0}e^u=1$ olduğundan integral yakınsaktır.

q'nun durumu integralin karekterini etkilemez. Eğer $p<0$ ise integral genelleştirilmiş integral değildir.

5. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\Gamma(1)=1$

b) $\forall n\in R^+$ için $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$

c) $\forall n\in N$ için $\Gamma(n+1)=n!$

Çözüm:

a) $\displaystyle\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-x}dx=\lim_{t\to\infty}-e^{-x}\Big|_0^t=\lim_{t\to\infty}1-e^{-t}=1$$

b) $\displaystyle\Gamma(n+1)=\int_0^\infty e^{-x}x^n dx=\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-x}x^n dx$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(-x^ne^{-x}\Big|_0^t-\int_0^t\left(-e^{-x}\right)nx^{n-1}dx\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}-\frac{t^n}{e^t}+n\int_0^t e^{-x}x^{n-1}dx=n\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx=n\Gamma(n)$$

c) $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=n(n-1)(n-2)\ldots2.2\Gamma(1)=n!$

6. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ **eşitliğinden yararlanarak** $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$, $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$ **ifadelerini hesaplayınız.**

Çözüm:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}-1}e^{-x}dx=\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx=\int_0^\infty u^{-1}e^{-u^2}2udu$$

$$=2\int_0^\infty e^{-u^2}du=2.\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}\qquad\left[x=u^2\Rightarrow dx=2udu\right]$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\sqrt{\pi}=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

7. **Aşağıdaki integralleri Γ fonksiyonundan yararlanarak hesaplayınız.**

a) $\int_0^\infty x^2 e^{-x^3}dx$ b) $\int_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-x^3}dx$

c) $\int_0^\infty 5^{-2x^2}dx$ d) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$

Çözüm:

a) $x^3=u \Rightarrow x=u^{\frac13} \Rightarrow dx=\frac13 u^{-\frac23}du$

$$\int_0^\infty x^2e^{-x^3}dx=\int_0^\infty u^{\frac23}\frac13 e^{u}u^{-\frac23}du=\frac13\int_0^\infty e^{u}du=\frac13\Gamma(1)=\frac13$$

b) $x^3=u \Rightarrow x=u^{\frac13} \Rightarrow dx=\frac13u^{-\frac23}du$

$$\int_0^\infty\sqrt{x}e^{-x^3}dx=\int_0^\infty u^{\frac16}e^{u}\frac13u^{-\frac23}du=\int_0^\infty u^{-\frac12}e^{u}du=\Gamma\left(\frac12\right)=\sqrt\pi$$

c) $5^{-2x^2}=e^{-u} \Rightarrow 2x^2\ln5=u \Rightarrow x=\left(\frac{u}{2\ln5}\right)^{\frac12}\Rightarrow dx=\frac12\frac{u^{-\frac12}}{(2\ln5)^{\frac12}}du$

$$\int_0^\infty 5^{-2x^2}dx=\int_0^\infty e^{-u}\frac12\frac{u^{-\frac12}}{(2\ln5)^{\frac12}}du=\frac{1}{2\sqrt{2\ln5}}\int_0^\infty e^{-u}u^{-\frac12}du$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\ln5}}\Gamma\left(\frac12\right)=\frac{\sqrt\pi}{2\sqrt{2\ln5}}$$

8. $\lim\limits_{x\to0^+}\Gamma(x)=+\infty$ **olduğunu gösteriniz.**

Çözüm:

x > 0 ise

$$\Gamma(x)>\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt\ge\int_{0^+}^1 e^{-1}t^{x-1}dt=e^{-1}\lim_{a\to0^+}\int_a^1t^{x-1}dt$$

$$=e^{-1}\lim_{a\to0^+}\frac1x\left(1-a^x\right)=\frac{1}{e.x}\Rightarrow\lim_{x\to0^+}\Gamma(x)\ge\lim_{x\to0^+}\frac{1}{ex}=\infty$$

9. **a > 0 ve n > 0 için**

$$\int_0^\infty e^{-ax}x^{n-1}dx=a^{-n}\Gamma(n)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

ax = u diyelim ⇒ adx = du olur.

$$\int_0^\infty e^{-ax}x^{n-1}dx=\int_0^\infty e^{-u}\left(\frac ua\right)^{n-1}\frac{du}{a}=\frac1{a^n}\int_0^\infty e^{-u}u^{n-1}du=a^{-n}\Gamma(n)$$

10. **r > 0 için**

$$\int_0^\infty e^{-x^r}dx=\frac1r\Gamma\left(\frac1r\right)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$x^r=u$ diyelim. $\Rightarrow x=u^{\frac1r} \Rightarrow dx=\frac1r u^{\frac1r-1}du$ olur.

$$\int_0^\infty e^{-x^r}dx=\int_0^\infty e^{-u}\frac1r u^{\frac1r-1}du=\frac1r\int_0^\infty e^{-u}u^{\frac1r-1}du=\frac1r\Gamma\left(\frac1r\right)$$

11. **Tümevarım yöntemiyle n = 0, 1, 2... için**

$$\Gamma\left(n+\frac12\right)=\frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt\pi$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

n = 0 için $\Gamma\left(\frac12\right)=\sqrt\pi$ olur. Önerme n = 0 için doğrudur.

n = k için doğru olsun. O halde

$$\Gamma\left(k+\frac12\right)=\frac{(2k)!}{4^kk!}\sqrt\pi$$

eşitliği doğrudur. n = k + 1 için, doğru olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)=\frac{(2k+2)!}{4^{k+1}(k+1)!}\sqrt{\pi}$$

olacağını göstermeliyiz.

$$\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(k+\frac{1}{2}+1\right)=\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{(2k+1)}{2}$$

$$=\frac{(2k+1)}{2}\cdot\frac{(2k)!\sqrt{\pi}}{4^k.k!}=\frac{(2k+2)(2k+1)(2k)!}{2(k+1).2.4^k k!}\sqrt{\pi}=\frac{(2k+2)!}{4^{k+1}(k+1)!}\sqrt{\pi}$$

12. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}\ln 2$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\ln\sin x\,dx=\frac{\pi^2}{2}\ln 2$ c) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx=\frac{a}{a^2+b^2}$

Çözüm:

a) $\displaystyle I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2$

$x=2t$ diyelim. $dx=2dt$ olur.

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin 2t)dt=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2\sin t\cos t)dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2dt+2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t)dt+2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t)dt.$$

Üçüncü integralde $t=\frac{\pi}{2}-y$ dönüşümü yapılırsa

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t)+2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin y)dy=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)dt \Rightarrow$$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2$ bulunur.

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\ln(\sin x)dx=-\frac{\pi^2}{2}\ln 2$

$$\int_0^{\pi} x\ln(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln(\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\ln(\sin x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln(\sin x)dx+\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin y)dy-\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\ln(\sin y)du$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin y)dy=\pi\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)=-\frac{\pi^2}{2}\ln 2$$

c) $\displaystyle\int e^{-ax}\cos bx dx=\frac{1}{b}e^{-ax}\sin bx+\frac{a}{b}\int e^{-ax}\sin bx$

$$=\frac{1}{b}e^{-ax}\sin bx+\frac{a}{b}\left[-\frac{1}{b}e^{-ax}\cos bx-\frac{a}{b}\int e^{-ax}\cos bx\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{b}e^{-ax}\sin bx-\frac{a}{b^2}e^{-ax}\cos bx-\frac{a^2}{b^2}\int e^{-ax}\cos bx\,dx$$

son integral hesabı istenen integral olduğundan

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{-ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{-ax}}{b^2}(b\sin bx-a\cos bx)$$

olur. Buradan

$$\frac{a^2+b^2}{b^2}\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx=\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-ax}}{b^2}(b\sin bx-a\cos bx)\Big|_0^t=\frac{a}{b^2}$$

bulunur. Her iki taraf $\frac{a^2+b^2}{b^2}$ ile bölünürse

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx=\frac{a}{a^2+b^2}$$

eşitliği elde edilir.

LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ

TANIM

f, tanım kümesi [0, +∞) aralığını kapsayan bir fonksiyon olsun.

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-xu} f(u)du$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{L}\{f\}$ fonksiyonuna f nin **Laplace Dönüşümü** denir. $\mathcal{L}\{f\}$ fonksiyonunun tanım kümesi yukarıdaki integrali yakınsak yapan tüm x noktalarının kümesidir.

TEOREM 5.11:

Her a ve b reel sayıları için $\mathcal{L}\{a f(x) + b g(x)\} = a\,\mathcal{L}\{f(x)\} + b\,\mathcal{L}\{g(x)\}$

dir.

TEOREM 5.12:

a bir reel sayı ve $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(x) \Rightarrow \mathcal{L}\{e^{ax} f(x)\} = F(x-a)$ dir.

TEOREM 5.13:

f fonksiyonu [0, +∞] üzerinde sürekli türeve sahip olsun. Eğer $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-xt} f(t) = 0$ ve $\mathcal{L}\{f(x)\}$ mevcut ise

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = x\,\mathcal{L}\{f(x)\} - f(0)$$

dır.

TEOREM 5.14:

f fonksiyonu [0, +∞) aralığında sürekli olsun.

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t)dt\right\} = \frac{1}{x}\mathcal{L}\{f(x)\}$$

dır.

TEOREM 5.6:

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(x)$$

ise f fonksiyonuna F fonksiyonunun **Ters Laplace Dönüşümü** denir.

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(x)\}$$

ile gösterilir.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. Aşağıdaki fonksiyonların Laplace dönüşümlerini hesaplayınız.

a) x^2 b) e^{2x} c) $\cos x$ d) $\sin x$

Çözümler:

a) $$\mathcal{L}\{x^2\} = \int_0^\infty e^{-xu}u^2du = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-xu}u^2du = \lim_{a\to\infty}\left[-\frac{1}{x}e^{-xu}u^2\Big|_0^t + \frac{2}{x}\int_0^a e^{-xu}udu\right]$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left[-\frac{1}{x}e^{-xa}a^2 + \frac{2}{x}\int_0^a e^{-xu}udu\right] = \lim_{a\to\infty}\frac{2}{x}\left[-\frac{1}{x}ue^{-xu}\Big|_0^a + \frac{1}{x}\int_0^a e^{-xu}du\right]$$

$$= \lim_{a\to\infty}\frac{2}{x^3}ae^{-xa} + \frac{2}{x^2}\lim_{a\to\infty}-\frac{1}{x}\left(e^{-xa}-1\right) = 0 + \frac{2}{x^3} = \frac{2}{x^3}$$

b) $$\mathcal{L}(e^{2x}) = \int_0^\infty e^{-xu}e^{2u}du = \int_0^\infty e^{(2-x)u}du = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e(2-x)udu = \lim_{t\to\infty}\frac{e^{(2-x)u}}{2-x}\Big|_0^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{e^{(2-x)t}-1}{2-x} = \begin{cases}\dfrac{1}{x-2} & x>2\\ \infty & x<2\end{cases}$$

$x=2$ için $\int_0^\infty e^{-2u}e^{2u}du = \int_0^\infty du = \infty$ olur. $x>2$ için

$\mathcal{L}\{e^{2x}\} = \dfrac{1}{x-2}$, bulunur.

c) $$\mathcal{L}\{\cos x\} = \int_0^\infty e^{-xu}\cos u\,du = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-xu}\cos u\,du$$

$$= \lim_{t\to\infty}e^{-xu}\sin u\Big|_0^t - \int_0^t(-xe^{-xu})\sin u\,du = \lim_{t\to\infty}e^{-tx}\sin t + x\int_0^t e^{-xu}\sin u\,du$$

$$= x\lim_{t\to\infty}-e^{-xu}\cos u\Big|_0^t - \int_0^t(-xe^{-xu})(-\cos u)du$$

$$= x\lim_{t\to\infty}\left(1-e^{xt}\cos u - x\int_0^t e^{-xt}\cos u\,du\right) = x - x^2\int_0^\infty e^{-xu}\cos u\,du \quad (x>0)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-xu}\cos u\,du = \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow \mathcal{L}\{\cos x\} = \frac{x}{1+x^2} \qquad (x>0)$$

d) $$\mathcal{L}\{\sin x\} = \int_0^\infty e^{-xu}\sin u\,du = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-xu}\sin u\,du$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(e^{-xu}(-\cos u)\Big|_0^t - \int_0^t(-xe^{-xu})(-\cos u)du\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(1-e^{-xt}\cos t - x\int_0^t e^{-xu}\cos u\,du\right)$$

$$= 1 - x\lim_{t\to\infty}\left(e^{-xu}\sin u\Big|_0^t - \int_0^t(-xe^{-xu}\sin u\,du)\right)$$

$$= 1 - x^2\int_0^\infty e^{-xu}\sin u\,du \Rightarrow \int_0^\infty e^{-xu}\sin u\,du = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\mathcal{L}\{\sin x\} = \frac{1}{1+x^2} \qquad (x>0)$$

2. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\mathcal{L}\{a\} = \dfrac{a}{x}$, $\quad x>0$

b) $\mathcal{L}\{x^n\} = \dfrac{n!}{x^{n+1}}$, $\quad x>0$

c) $\mathcal{L}\{\sin ax\} = \dfrac{a}{x^2+a^2}$, $x > 0$

d) $\mathcal{L}\{\cos ax\} = \dfrac{x}{x^2+a^2}$, $x > 0$

e) $\mathcal{L}\{e^{ax}\} = \dfrac{1}{x-a}$, $x > 0$

f) $\mathcal{L}\{x^n e^{ax}\} = \dfrac{n!}{(x-a)^{n+1}}$, $x > 0$

g) $\mathcal{L}\{e^{ax}\sin bx\} = \dfrac{b}{(x-a)^2+b^2}$, $x > a$

h) $\mathcal{L}\{e^{ax}\cos bx\} = \dfrac{x-a}{(x-a)^2+b^2}$, $x > 0$

ı) $\mathcal{L}\{\sinh ax\} = \dfrac{a}{x^2-a^2}$, $x > a$

j) $\mathcal{L}\{\cosh ax\} = \dfrac{x}{x^2-a^2}$, $x > a$

Çözüm:

a) $x > 0$ için

$$\mathcal{L}\{a\} = \int_0^\infty e^{-xu} a\,du = a \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-xu}\,du = -\frac{a}{x}\lim_{t\to\infty}\left(e^{-xt}-1\right) = \frac{a}{x} \quad \text{olur.}$$

b) $\mathcal{L}\{x^n\} = \int_0^\infty e^{-xu}u^n du$ integralinde $xu = y$ değişken değiştirmesi yapılırsa, $x > 0$ için

$$\mathcal{L}\{x^n\} = \int_0^\infty e^{-y}\left(\frac{y}{x}\right)^n \frac{du}{x} = \frac{1}{x^{n+1}}\int_0^\infty e^{-y}y^n dy = \frac{1}{x^{n+1}}\Gamma(n+1) = \frac{n!}{x^{n+1}}$$

bulunur.

c) $\mathcal{L}\{\sin ax\} = \dfrac{a}{x^2+a^2}$

$$\mathcal{L}\{\sin ax\} = \int_0^\infty e^{-xu}\sin(au)du = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-xu}\sin(au)du$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(e^{-xu}\left(-\frac{\cos au}{a}\right)\Big|_0^t - \int_0^t\left(-xe^{-xu}\right)\left(-\frac{\cos au}{a}\right)du\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{a} - \frac{e^{-xt}\cos at}{a} - \frac{x}{a}\int_0^t e^{xt}\cos au\,du\right) \quad (x > 0)$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{a} - \frac{x}{a}\left[e^{-xu}\frac{\sin au}{a}\Big|_0^t - \int_0^t\left(-xe^{-xu}\right)\left(\frac{\sin au}{a}\right)du\right]\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{a} - \frac{x\sin at}{a^2}e^{-xu} - \frac{x^2}{a^2}\int_0^t e^{-xu}\sin au\,du\right)$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{x^2}{a^2}\int_0^\infty e^{-xu}\sin au\,du = \frac{1}{a} - \frac{x^2}{a^2}\mathcal{L}\{\sin ax\}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)\mathcal{L}\{\sin ax\} = \frac{1}{a} \Rightarrow \mathcal{L}\{\sin ax\} = \frac{a}{a^2+x^2}$$

d) $$\mathcal{L}\{\cos ax\} = \int_0^\infty e^{-ux}\cos au\,du = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-ux}\cos au\,du$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{a}e^{-xt}\sin at + \frac{x}{a}\int_0^t e^{-ux}\sin au\,du\right]$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{x}{a}\left[-\frac{1}{a}e^{-xt}\cos at + \frac{1}{a} - \frac{x}{a}\int_0^t e^{-xu}\cos au\,du\right] \quad x > 0$$

$$= \frac{x}{a^2} - \frac{x^2}{a^2}\mathcal{L}\{\cos x\} \Rightarrow$$

$\mathcal{L}\{\cos ax\} = \dfrac{x}{x^2+a^2}$, $x > 0$

e) $\mathcal{L}\{e^{ax}\} = \int_0^\infty e^{-xu}e^{au}\,du = \int_0^\infty e^{(a-x)u}du = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{(a-x)u}du$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{a-x}e^{(a-x)u}\Big|_0^t = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{a-x}\left(e^{(a-x)t}-1\right) = \frac{1}{x-a} \qquad (x>a)$$

f) $\mathcal{L}\{x^n e^{ax}\} = \int_0^\infty e^{-xu}u^n e^{au}du = \int_0^\infty e^{(a-x)u}u^n du$

$$= \int_0^\infty e^{-v}\left(\frac{v}{x-a}\right)^n \frac{dv}{(x-a)} = \frac{1}{(x-a)^{n+1}}\int_0^\infty e^{-v}v^n dv \qquad \begin{bmatrix}(x-a)u = v\\(x-a)du = dv\end{bmatrix}$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{n!}{(x-a)^{n+1}}$$

g) $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(x) \Rightarrow \mathcal{L}\{e^{ax}f(x)\} = F(x-a)$

$\mathcal{L}\{\sin b(x)\} = \dfrac{b}{x^2+b^2}$ olduğunu biliyoruz.

$\Rightarrow \mathcal{L}\{e^{ax}\sin bx\} = \dfrac{b}{(x-a)^2+b^2} \qquad (x>a)$

olur.

ı) $\sinh ax = \dfrac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}$ olduğundan

$$\mathcal{L}\{\sinh ax\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{ax}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-ax}\}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{x-a} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+a} = \frac{1}{2}\left(\frac{x+a-x+a}{x^2-a^2}\right) = \frac{a}{x^2-a^2}$$

3. Türevlerin Laplace dönüşümünden yararlanarak aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\mathcal{L}\{\sin^2 ax\} = \dfrac{2a^2}{x(x^2+4a^2)}, \qquad x>0$

b) $\mathcal{L}\{\cos^2 ax\} = \dfrac{x^2+2a^2}{x(x^2+4a^2)}, \qquad x>0$

Çözüm:

a) $f(x) = \sin^2 ax \quad\Rightarrow\quad f'(x) = 2a\sin ax\cos ax = a\sin 2ax$ dir.

$\mathcal{L}\{f'(x)\} = x\,\mathcal{L}\{f(x)\} - f(0)$ eşitliğinden

$\Rightarrow \mathcal{L}\{a\sin 2ax\} = x\mathcal{L}\{\sin^2 ax\} - \sin^2 0 \Rightarrow a\cdot\dfrac{2a}{x^2+4a^2} = x\mathcal{L}\{\sin^2 ax\} \Rightarrow$

$\mathcal{L}\{\sin^2 ax\} = \dfrac{2a^2}{x(x^2+4a^2)} \quad (x>0)$

4. $\dfrac{d}{dx}\mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\{-xf(x)\}$ **olduğunu gösteriniz. Bundan faydalanarak** $\dfrac{d}{dx}\mathcal{L}\left\{\dfrac{\sin x}{x}\right\}$ **ifadesini hesaplayınız.**

Çözüm:

$$\frac{d}{dx}\mathcal{L}\{f(x)\} = \frac{d}{dx}\int_0^\infty e^{-xu}f(u)du = \int_0^\infty \frac{d}{dx}e^{-xu}f(u)du$$

$$= \int_0^\infty -ue^{-xu}f(u)du = \mathcal{L}\{-xf(x)\}$$

$$\frac{d}{dx}\mathcal{L}\left\{\frac{\sin x}{x}\right\} = \mathcal{L}\left\{-x\frac{\sin x}{x}\right\} = -\mathcal{L}\{\sin x\} = -\frac{1}{x^2+1}$$

5. $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(x) \Rightarrow \mathcal{L}\{f(ax)\} = \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{x}{a}\right)$ **olacağını gösteriniz.**

Çözüm:

$$F(ax) = \mathcal{L}\{f(ax)\} = \int_0^\infty e^{-xu}f(au)du = \int_0^\infty e^{-\frac{xt}{a}}f(t)\frac{dt}{a} \qquad [au=t]$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{a}t}f(t)dt = \frac{1}{a}\mathcal{L}\left\{f\left(\frac{x}{a}\right)\right\}$$

6. Aşağıdaki integrallerin Laplace dönüşümlerini hesaplayınız.

a) $\int\limits_0^x (t+1)^2 dt$ b) $\int\limits_0^x \sin 2t\,dt$ c) $\int\limits_0^x \sinh x\,dt$

Çözüm:

a) $$\mathcal{L}\left\{\int\limits_0^x f(t)dt\right\} = \frac{1}{x}\mathcal{L}\{f(x)\} \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\int\limits_0^x (t+1)^2 dt\right\} = \frac{1}{x}\mathcal{L}\left\{(x+1)^2\right\} = \frac{1}{x}\cdot\frac{2!}{(x+1)^3}$$

b) $$\mathcal{L}\left\{\int\limits_0^x \sin 2t\,dt\right\} = \frac{1}{x}\mathcal{L}\{\sin 2x\} = \frac{1}{x}\cdot\frac{2}{(x^2+4)} = \frac{2}{x^3+4x}$$

c) $$\mathcal{L}\left\{\int\limits_0^x \sinh t\,dt\right\} = \frac{1}{x}\mathcal{L}\{\sinh x\} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{(x^2-1)} = \frac{1}{x^3-x}$$

7. f, $[0,+\infty)$ üzerinde ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip bir fonksiyon,

$$\lim_{t\to\infty} e^{-xt} f(t) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} e^{-xt} f'(t) = 0$$

ve $x > 0$ için $\mathcal{L}\{f(x)\}$, $\mathcal{L}\{f'(x)\}$ dönüşümleri mevcut olsun. Bu takdirde

$$\mathcal{L}\{f''(x)\} = x^2\mathcal{L}\{f(x)\} - x^2\mathcal{L}f(0) - f'(0)$$

eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\int\limits_0^t e^{-xu} f''(u)du = e^{-xu} f'(u)\Big|_0^t + \int\limits_0^1 xe^{-xu} f'(u)du$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{f''(x)\} = \lim_{t\to\infty}\int\limits_0^t e^{-xu} f''(u)du = \lim_{t\to\infty}\left\{e^{-xt}f'(t) - f'(0) + \int\limits_0^1 xe^{-xu} f'(u)du\right\}$$

$$= -f'(0) + x\,\mathcal{L}\{f'(x)\} = -f'(0) + x^2\,\mathcal{L}\{f'(x)\} - xf(0)$$

BÖLÜM PROBLEMLERİ VE ÇÖZÜMLERİ

1. Aşağıdaki integrallerin yakınsaklık durumlarını inceleyiniz.

a) $\int\limits_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ b) $\int\limits_0^\infty e^{-(x^2+x^{-2})}dx$ c) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$

ç) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{0,99}}$ d) $\int\limits_0^\infty x^2e^{-x}dx$ e) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^6+1}}$

f) $\int\limits_1^\infty \frac{\sqrt{x+1}}{x^2}dx$ g) $\int\limits_\pi^\infty \frac{2+\cos x}{x}dx$ h) $\int\limits_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x}dx$

ı) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})}$ i) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{1-x^2}$ j) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{e^{\ln x}}$

k) $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{\ln x}$ l) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{e^x-x}}$ m) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{e^x+2^x}$

n) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}}dx$ o) $\int\limits_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx$ ö) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}dx$

p) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\ln x}$ r) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ s) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2+x^4}$

ş) $\int\limits_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2}dx$ t) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$ u) $\int\limits_0^\infty x^2e^{-\frac{x}{2}}dx$

v) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x^2}dx$ y) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$

Çözümler:

a) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$ (I. çeşit genelleştirilmiş integral)

$\varphi(x)=\cos x$, $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ seçerek Abel testini uygulayalım.

$\varnothing(t)=\int_0^t \cos x dx=\sin x\Big|_0^t=\sin t \Rightarrow |\varnothing(t)|=|\sin t|\le 1$ olur ve $\varnothing(t)$ sınırlıdır.

$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0 \Rightarrow$ Abel testinden $\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$ yakınsaktır.

b) $\int_0^\infty e^{-(x^2+x^{-2})}dx$ I. çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\int_0^\infty e^{-(x^2+x^{-2})}dx=\int_0^1 e^{-(x^2+x^{-2})}dx+\int_1^\infty e^{-(x^2+x^{-2})}dx$$

yazılırsa eşitliğin sağındaki ilk integral belirli integraldir. $x\ge 1$ için

$$x<x^2<x^2+\frac{1}{x^2}=x^2+x^{-2}\Rightarrow e^x<e^{x^2+x^{-2}}\Rightarrow e^{-(x^2+x^{-2})}<e^{-x}$$

$$\int_1^\infty e^{-x}dx=\lim_{t\to\infty}-e^{-x}\Big|_0^t=\lim_{t\to\infty}1-e^{-t}=1\Rightarrow\int_1^\infty e^{-x}dx \text{ yakınsaktır.}$$

$\Rightarrow$ karşılaştırma testi gereğince verilen integral yakınsaktır.

c) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$, $\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2/3}}=\infty \Rightarrow 2.\right.$ çeşit genelleştirilmiş integral)

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{2/3}}=\int_{-1}^0 \frac{1}{x^{2/3}}dx+\int_0^1\frac{1}{x^{2/3}}dx$$

$p=\frac{2}{3}<1$ olduğundan her iki integral de yakınsaktır.

ç) $\int_0^1 \frac{dx}{x^{0,09}}$ $p=0,09<1$ olduğundan integral yakınsaktır.

d) $\int_0^\infty x^2e^{-x}dx$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\lim_{x\to\infty} x^2(x^2e^{-x})=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{e^x}=0,\qquad c=0,\ p=2>1$$

olduğundan karşılaştırma testinin limit formuna göre integral yakınsaktır.

e) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^6+1}}$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\lim_{x\to\infty} x^3\left(\frac{1}{\sqrt{x^6+1}}\right)=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^6}{x^6+1}}=1$$

$c=1$, $p=3>1$ olduğundan karşılaştırma testinin limit formuna göre integral yakınsaktır.

f) $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x+1}}{x^2}dx$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x^2}\right)=1,\quad c=1,\ p=\frac{3}{2}>1$$

olduğundan karşılaştırma testinin limit formuna göre integral yakınsaktır.

g) $\int_\pi^\infty \frac{2+\cos x}{x}dx$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$-1\le\cos x\le 1\Rightarrow 1\le 2+\cos x\le 3\Rightarrow\frac{1}{x}\le\frac{2+\cos x}{x}\le\frac{3}{x}$$

$\int_\pi^\infty \frac{1}{x}dx$ integrali ıraksak olduğundan karşılaştırma testi gereğince verilen integral ıraksaktır.

h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}dx$ integralinde $\frac{1}{x} = u$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$dx = -\frac{1}{u^2}du$ olacağından $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}dx = \int_1^{\infty}\frac{\sin u}{u}du$ olur.

$\varphi(x) = \sin u$, $g(u) = \frac{1}{u}$ denirse $|\varnothing(x)| = \left|\displaystyle\int_1^x \sin u du\right| = |-\cos x + \cos 1| \le 2$

ve $\displaystyle\lim_{u\to\infty} \frac{1}{u} = 0$ olduğundan, Abel testi gereğince yakınsaktır.

ı) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})}$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\frac{1}{(e^x+1)(1+e^{-x})} = \frac{1}{e^x+1}\cdot\frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} < \frac{e^x}{(e^x)^2} = e^{-x}$$

$\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty} -e^{-x}\Big|_0^t = \lim_{t\to\infty}(1-e^{-t}) = 1$ olduğundan $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x}dx$ yakınsaktır.

$\Rightarrow$ verilen integral karşılaştırma testinden yakınsaktır.

i) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{1-x^2}$ $\left(\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x^2} = \infty,\right.$ II. çeşit genelleştirilmiş integraldir.$\left.\right)$

$$\int_0^2 \frac{dx}{1-x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1-x^2} + \int_1^2 \frac{dx}{1-x^2}$$

yazılabilir. Eşitliğin sağındaki birinci integral için

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\cdot\frac{1}{1-x^2} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$$

$\gamma = \frac{1}{2}$, $p = 1$ olduğundan limit testi gereğince $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$ integrali ıraksak,

dolayısı ile verilen integral de ıraksaktır.

j) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{e^{\ln x}}$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{e^{\ln x}}dx = \int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx$ ıraksaktır. $(p = 1)$

k) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{\ln x}$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$\ln x < x \Rightarrow \frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x}$ ve $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{1}{x}$ ıraksak olduğundan karşılaştırma testi gereğince verilen integral ıraksaktır.

l) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x - x}}$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x - x}}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x}}$ seçelim.

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{e^x}{e^x - x}} = 1$ olduğundan $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ ile $\displaystyle\int_1^{\infty} g(x)dx$ integrallerinin karekterleri aynıdır.

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{e^x}} = \lim_{t\to\infty}\int_1^t e^{-x/2} = \lim_{t\to\infty} -2e^{-\frac{x}{2}}\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty}\frac{2}{e^{\frac{t}{2}}} - \frac{2}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{e^{\frac{1}{2}}}$$

$\displaystyle\int_1^{\infty} g(x)dx$ integrali yakınsaktır. Bu durumda $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ integrali de yakınsaktır.

m) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{e^x + 2^x}$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir. $x \ge 1$ için

$$2^x \le e^x \quad\Rightarrow\quad 2^x + 2^x \le e^x + 2^x \;\Rightarrow\; 2^{x+1} \le e^x + 2^x \;\Rightarrow\; \frac{1}{e^x + 2^x} \le \frac{1}{2^{x+1}}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{2^{x+1}}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t 2^{-(x+1)}dx = \lim_{t\to\infty} -\frac{2^{-(x+1)}}{\ln 2}\Bigg|_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2^2\ln 2} - \frac{1}{2^{t+1}\ln 2} = \frac{1}{4\ln 2}$$

olduğundan karşılaştırma testi gereğince verilen integral yakınsaktır.

n) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+x^4}}$ $\qquad \displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x+x^4}} = \infty$ Üçüncü çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+x^4}} = \int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{x+x^4}} + \int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+x^4}}$$

$0<x\le 1$ için $\displaystyle x\le x+x^4 \Rightarrow \sqrt{x}\le\sqrt{x+x^4} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+x^4}}\le\frac{1}{\sqrt{x}}$

$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ $\left(p=\frac{1}{2}<1\right.$ olduğundan$\left.\right)$ yakınsaktır.

Karşılaştırma testinden $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x+x^4}}$ yakınsaktır.

$1\le x\le\infty$ için $\displaystyle x^4\le x^4+x \Rightarrow x^2\le\sqrt{x^4+x} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^4+x}}\le\frac{1}{x^2}$

$\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$ integrali yakınsak olduğundan

$\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x+x^4}}dx$ integrali karşılaştırma testinden yakınsaktır.

o) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$x\ge 1$ için $\displaystyle\frac{1}{x}\le 1 \Rightarrow \frac{e^{-x}}{x}\le e^{-x}$

$$\int_1^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{t\to 0}\int_1^t e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty} -e^{-x}\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty} e^{-1}-e^{-t} = \frac{1}{e} \quad (\text{yakınsak})$$

Karşılaştırma Testinden verilen integral yakınsaktır.

ö) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}$ İkinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ için $\ln(\sin x)<0$ dır.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\operatorname{cosec} x)}{\sqrt{x}}dx$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{4}}\frac{\ln(\operatorname{cosec} x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{4}}\ln(\operatorname{cosec} x) = \lim_{x\to 0^+} 4\frac{x^{\frac{5}{4}}}{\sin x}\cos x = 0$$

$c=0,\ p=\dfrac{3}{4}<1$ olduğundan karşılaştırma testinin limit formu gereğince

verilen integral yakınsaktır.

p) $\displaystyle\int_1^{e}\frac{dx}{x\ln x}$ İkinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$\displaystyle f(x)=\frac{1}{x\ln x},\quad g(x)=\frac{1}{\ln x} \Rightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x} = 1$

$\displaystyle\Rightarrow \int_1^{e} f(x)dx$ ile $\displaystyle\int_1^{e} g(x)dx$ integrallerinin karekterleri aynıdır. $1<x<e$ için

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{\ln x} = 1 \Rightarrow \int_1^{e} g(x)dx$ ıraksaktır. $\Rightarrow$ verilen integral ıraksaktır.

r) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$x\ge 1$ için $\displaystyle x^2<1+x^2 \Rightarrow x<\sqrt{1+x^2} \Rightarrow x^2<x\sqrt{1+x^2} \Rightarrow \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}<\frac{1}{x^2}$

$\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$ integrali yakınsak olduğundan karşılaştırma testi gereğince verilen

integral yakınsaktır.

s) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+x^4}$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integral.

$x \geq 1$ için $x^2 < x^2+x^4 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2+x^4} < \dfrac{1}{x^2}$

$\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ integrali yakınsak olduğundan karşılaştırma testi gereğince

verilen integral yakınsaktır.

ş) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx$ Birinci genelleştirilmiş integral.

$\left|\dfrac{\arctan x}{x^2}\right| \leq \dfrac{\pi}{2}.\dfrac{1}{x^2}$ ve $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$ yakınsak olduğundan verilen integral mutlak

yakınsak, dolayısıyla yakınsaktır.

t) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$ Üçüncü çeşit genelleştirilmiş integraldir. $\left(\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\infty\right)$

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int_1^{2}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} + \int_2^{\infty}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

Eşitliğin sağındaki ilk integral için

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}},\left(\gamma=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad p=\frac{1}{2}<1\right)$$

olduğundan limit testi gereğince integral yakınsaktır.

Eşitliğin sağındaki ikinci integral için

$\lim\limits_{x\to\infty} x^3.\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}} = 1,\ c=1,$ $p = 3 > 1$ olduğundan karşılaştırma testinin

limit formu gereğince integral yakınsaktır.

Eşitliğin sağındaki her iki integral de yakınsak olduğundan verilen integral yakınsaktır.

u) $\displaystyle\int_0^{\infty}x^2e^{-\frac{x}{2}}dx$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\lim_{x\to\infty}x^2\left(x^2e^{-\frac{x}{2}}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{e^{\frac{x}{2}}} = 0,\quad (c=0,\ p=2>1)$$

olduğundan karşılaştırma testinin limit formu gereğince integral yakınsaktır.

v) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx,$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\,\dfrac{1}{x}=\infty$

Üçüncü çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx = \int_0^{1}\frac{\sin x}{x^2}dx + \int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$$

Eşitliğin sağındaki ilk integral için

$$\lim_{x\to 0^+} x\frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

$\gamma = 1,\ p = 1$ olduğundan integral limit testi gereğince ıraksak dolayısı ile verilen

integral ıraksaktır.

y) $\displaystyle\int_0^{2}\frac{dx}{(x-1)^2}$ İkinci çeşit genelleştirilmiş integraldir. $\left(\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=\infty\right)$

$$\int_0^{1}\frac{1}{(x-1)^2}dx = \int_0^{1}\frac{dx}{(x-1)^2} + \int_1^{2}\frac{dx}{(x-1)^2}$$

Eşitliğin sağındaki ilk integral II. çeşit bir integral olup $p = 2$ olduğundan ıraksaktır. Dolayısı ile verilen integralde ıraksaktır.

2. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\displaystyle\int_0^{\infty}x^ne^{-x}dx = n!,$ $(\forall n \in N)$

b) $$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n} = \begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & n=1\\[2mm] \dfrac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\,\dfrac{\pi}{2}, & n=2,3,4,\ldots\end{cases}$$

c) $\int_0^1 x^m(\ln x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$, $m \geq 0,\ n \in N$

d) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^{n+1}} dx = n^{-2}$, $n \in N$

e) $\int_0^\infty x^n(1+x)^{-n-m-1} dx = \frac{n!(m-1)!}{(m+n)!}$, $m, n \in N$

f) $\int_0^\infty e^{-ax}\sin x\, dx = \frac{1}{1+a^2}$

g) $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx = \frac{\pi}{2}+1$

Çözümler:

a) $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t x^n e^{-x} dx = \lim_{t\to\infty}\left(-x^n e^{-x}\Big|_0^t - \int_0^t (-e^{-x})nx^{n-1}dx\right)$

$$= \lim_{t\to\infty} -\frac{t^n}{e^t} + n\int_0^t x^{n-1}e^{-x}dx = n\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx = n(n-1)\int_0^\infty x^{n-2}e^{-x}dx$$

$$= n(n-1).....3.2\int_0^\infty e^{-x}\,dx = n(n-1)....3.2\left(\lim_{t\to\infty} -e^{-x}\Big|_0^t\right)$$

$$= n(n-1).....3.2\left(\lim_{t\to\infty} 1-e^{-t}\right) = n(n-1).....3.2.1 = n!$$

b) $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & n=1 \\ \frac{1.3...(2n-3)}{2.4...(2n-2)}\frac{\pi}{2} & n=2,3,4... \end{cases}$

$n = 2, 3, ...$ için

$\frac{1}{x^2+1} = u$ diyelim $\quad x = \sqrt{\frac{1}{u}-1} \Rightarrow dx = -\frac{1}{2}\frac{(1-u)^{-\frac{1}{2}}}{u^{\frac{3}{2}}}du$ olur.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)} = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{n-\frac{3}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}B\left(n-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n)}$$

$$\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(n-\frac{3}{2}-1\right) = \left(n-\frac{3}{2}\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)\right) = \left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{5}{2}\right)$$

$$= \left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right).....\frac{5}{2}\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-3)(2n-5)....5.3.\sqrt{\pi}}{2^{n-2}}$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{(2n-3)(2n-5)....5.3\sqrt{\pi}}{2^{n-2}(n-1)!}.\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{(2n-3)(2n-5)....5.3.}{(2n-2)(2n-4)....4.2.}\frac{\pi}{2}$$

olur. $n = 1$ için

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} \arctan x\Big|_0^t = \lim_{t\to\infty} \arctan t - \arctan 0 = \frac{\pi}{2}$$

bulunur.

c) $\int_0^1 x^m(\ln x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$ $\quad (m \geq 0,\ n > 0)$

$-\ln x = u$ diyelim $\quad x = e^{-u} \Rightarrow dx = -e^{-u}du \quad x = 0 \Rightarrow u = \infty \quad x = 1 \Rightarrow u = 0$

olacağından

$$I = \int_0^1 x^m(\ln x)^n dx = \int_0^\infty e^{-mu}(-u)^n e^{-u}du = (-1)^n\int_0^\infty u^n e^{-(m+1)u}du$$

bulunur. $(m+1)u = t$ denirse $(m+1)du = dt$ olacağından

$$I = (-1)^n\int_0^\infty\left(\frac{t}{m+1}\right)^n e^{-t}\frac{dt}{(m+1)} = \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}}\int_0^\infty t^n e^{-t}dt$$

$$= \frac{(-1)^n\Gamma(n+1)}{(m+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$$

olur.

d) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^{n+1}} dx = n^{-2}$

$\ln x = y \Rightarrow x = e^y \Rightarrow dx = e^y\,dy$ olur. $x = 1 \Rightarrow y = 0$ ve $x = \infty \Rightarrow y = \infty$.

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^{n+1}}dx = \int_0^\infty ye^{-y(n+1)}e^{u}dy = \int_0^\infty ye^{-yn}\,dy = \int_0^\infty \frac{u}{n}\,e^{-u}\,\frac{du}{n} = \frac{1}{n^2}\int_0^\infty e^{-u}u\,du = \frac{\Gamma(1)}{n^2} = \frac{1}{n^2}$$

e) $\int_0^\infty x^n(1+x)^{-n-m-1}dx=\frac{n!(m-1)!}{(m+n)!}$

$\frac{x}{1+x}=u \Rightarrow x=\frac{u}{1-u} \quad x=0\Rightarrow u=0,\ x=\infty\Rightarrow u=1$

$$\int_0^\infty x^n(1+x)^{-n-m-1}dx=\int_0^1 u^n\frac{1}{(1-u)^{-m-1}}\frac{1}{(1-u)^2}du=\int_0^1 u^n(1-u)^{m-1}du=B(n+1,m)$$

$$=\frac{\Gamma(n+1).\Gamma(m)}{\Gamma(n+m+1)}=\frac{n!(m-1)!}{(n+m)!}$$

f) $\int_0^\infty e^{-ax}\sin x dx=\frac{1}{1+a^2}$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin x\,dx=\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-ax}\sin x dx$$

$$=\lim_{t\to\infty}(e^{-ax}(\cos x)\Big|_0^t-\int_0^t(-\cos x)(-ae^{-ax})dx$$

$$=\lim_{t\to\infty}(1-\frac{\cos t}{e^{at}}-a\int_0^t e-ax\cos x\,dx)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1-a\left[e^{-ax}\sin x\Big|_0^t-\int_0^t\sin x(-ae^{-ax})dx\right]\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{a.\sin t}{e^{at}}-a^2\int_0^t\sin xe^{-ax}dx\right)=1-a^2\int_0^\infty e^{-ax}\sin xdx$$

$$\Rightarrow(1+a^2)\int_0^\infty e^{-ax}\sin xdx=1\Rightarrow\int_0^\infty e^{-ax}\sin xdx=\frac{1}{1+a^2}$$

h) $I=\int_0^1\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$ integralinde $\frac{1+x}{1-x}=t$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$I=2\int_1^\infty\frac{\sqrt{t}}{(t+1)^2}dt$ binom integrali elde edilir. $t=u^2$ dönüşümü yapılırsa

$$I=4\int_1^\infty\frac{u^2du}{(1+u^2)^2}=4\int_1^\infty\frac{1}{1+u^2}du-4\int_1^\infty\frac{du}{(1+u^2)^2}$$

$$=4\left[\arctan u\Big|_1^\infty-\left(\frac{u}{2(1+u^2)}+\frac{1}{2}\arctan u\right)\Big|_1^\infty\right]=4\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=4\left(\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}\right)=1+\frac{\pi}{2}$$

3. Aşağıdaki integralleri yakınsak yapan p değerlerini bulunuz.

a) $\int_1^2\frac{dx}{x^p\ln x}$ b) $\int_2^\infty\frac{dx}{x(\ln x)^p}$

Çözüm:

a) $\int_1^2\frac{dx}{x^p\ln x}$ İkinci çeşit genelleştirilmiş integraldir. $\left(\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x^p\ln x}=\infty\right)$

$f(x)=\frac{1}{x^p\ln x},\quad g(x)=\frac{1}{\ln x}$ denirse $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x^p}=1$

olacağından $\int_1^2 f(x)dx$ ile $\int_1^2 g(x)dx$ integrallerinin karekteri aynıdır.

$$\lim_{x\to1}(x-1)\frac{1}{\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to1}x=1$$

$\Rightarrow\int_1^2\frac{1}{\ln x}dx$ ıraksaktır. $\Rightarrow$ verilen integral ıraksaktır.

b) $\int_2^\infty\frac{dx}{x(\ln x)^p}$ integralinde $\ln x=u$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$\int_2^\infty\frac{dx}{x(\ln x)^p}=\int_{\ln 2}^\infty\frac{du}{u^p}$ birinci çeşit genelleştirilmiş integrali bulunur.

Bu integral $p>1$ için yakınsak; $p\le1$ için ıraksaktır.

4. Aşağıdaki integralleri yakınsak yapan p ve q değerlerini bulunuz.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^p+x^q}$ b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(x^p)}{x^q}dx$ c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x^q}dx$

Çözüm:

a) $$\int_0^\infty \frac{dx}{x^p+x^q}=\int_0^1 \frac{dx}{x^p+x^q}+\int_1^\infty \frac{dx}{x^p+x^q}=I_1+I_2$$

$p\geq q$ olsun. $f(x)=\dfrac{1}{x^p+x^q}$, $g(x)=\dfrac{1}{x^p}$ denirse

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{x^p}{x^p+x^q}=1$ olacağından I_2 integralin karakteri $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$

integralinin karakteri ile aynıdır. Bu integral $p>1$ için yakınsak $p\leq 1$ için ıraksaktır.

$p>1$ olması durumunda $I_1=\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^p+x^q}$ integrali ıraksak olacağından verilen integral

ıraksaktır.

$q>p$ için benzer durum vardır. O halde her p, q için integral ıraksaktır.

b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(x^p)}{x^q}dx=\int_1^\infty \frac{\sin u}{u^{\frac{p+q-1}{p}}}du$ integrali için

$\varnothing(x)=\displaystyle\int_1^x \sin u\,du=-\cos u\Big|_1^x=1-\cos x$ olduğundan $|\varnothing(x)|\leq 2$ dir.

$\dfrac{p+q-1}{p}>0$ ise $\displaystyle\lim_{u\to\infty}\frac{1}{u^{\frac{p+q-1}{p}}}=0$ dır.

Abel testine göre integral yakınsaktır. Şu halde $\dfrac{p+q-1}{p}>0$ ise verilen integral

yakınsaktır.

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x^q}dx$ Birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$I=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}dx+\int_1^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x^q}dx$ denirse, birinci integral bir belirli integraldir.

İkinci integral yakınsak ise verilen integral yakınsaktır.

$f(x)=\dfrac{x^{p-1}}{1+x^q}$, $g(x)=\dfrac{1}{x^{q-p+1}}$ denirse $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ olur.

Dolayısıyla verilen integralin karakteri ile $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^{q-p+1}}$ integralinin karakteri aynıdır.

$q-p+1>1 \Rightarrow q>p$ için yakınsak, $q\leq p$ için ıraksaktır.

6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2}dx$ **integralinin yakınsak olduğunu gösterip değerini bulunuz.**

Çözüm:

İkinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\lim_{x\to0^+} x^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{(1+x)^2}=\left(\lim_{x\to0^+}\frac{1}{(1+x)^2}\right)\left(\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}}\right)=\lim_{x\to0}\left(-2x^{\frac{1}{2}}\right)=0$$

olur. O halde integral yakınsaktır.

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2}dx \qquad \begin{bmatrix} u=\ln x & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=\dfrac{dx}{(1+x)^2} & v=-\dfrac{1}{1+x}\end{bmatrix}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\left[-\frac{\ln x}{(1+x)}\Big|_\varepsilon^1+\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x(1+x)}\right]=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\frac{\ln\varepsilon}{(1+\varepsilon)}+\ln(1+\varepsilon)-\ln 2\right]=-\ln 2$$

7. Aşağıdaki integrallerin yakınsak olduğunu gösteriniz.

a) $\displaystyle\int_0^\infty x^p e^{-x^q}dx$ $(p>0,\ q>0)$ b) $\displaystyle\int_1^\infty \sin^2\frac{1}{x}dx$ c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$

Çözüm:

a) $\displaystyle\int_0^\infty x^p e^{-x^q}dx$ integralinde $x^q=u$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\frac{1}{q}\int u^{\frac{p+q-1}{q}}e^{-u}du=\frac{1}{q}\Gamma\left(\frac{p-1}{q}+2\right)$$

integrali elde edilir. Bilindiği gibi Γ fonksiyonu $\dfrac{p-1}{q}+2>0$ için yakınsaktır.

b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \sin^2 \frac{1}{x}\,dx$ birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$x \geq 1$ için $\left|\sin \frac{1}{x}\right| < \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \sin^2 \frac{1}{x} < \frac{1}{x^2}$

$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ yakınsak olduğundan verilen integral karşılaştırma testi gereğince yakınsaktır.

c) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$

$x \geq 1 \quad$ için $\quad \sin^2 x < 1 \Rightarrow \dfrac{\sin^2 x}{x^2} < \dfrac{1}{x^2}$

$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ integrali yakınsak olduğundan verilen integral yakınsaktır.

8. Aşağıdaki eğriler arasında kalan bölgelerin alanlarını bulunuz.

a) $y = x^{-\frac{1}{2}}$, $\quad y = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{3}}$, $\quad x = 0, \quad x = 1$

b) $y = e^{-x}$, $\quad y = \dfrac{1}{x^2+1}$, $\quad$ (I. bölgede)

c) $y = \cosh x$, $\quad y = \sinh x$ $\quad$ (I. bölgede)

d) $y = \dfrac{1}{\cos x}$, $\quad y = \tan x$, $\quad x = 0, \quad x = \dfrac{\pi}{2}$

Çözüm:

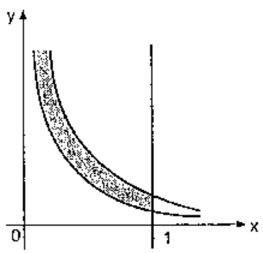
a) $y = x^{-\frac{1}{2}}, \quad y = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{3}}, \quad x = 0 \quad x = 1$

$$A = \int_0^1 \left| x^{-1/2} - \frac{1}{2}x^{-1/3} \right| dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \left| x^{-1/2} - \frac{1}{2}x^{-1/3} \right| dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} 2x^{1/2} - \frac{3}{4}x^{2/3} \Big|_{\varepsilon}^1$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} 2 - \frac{3}{4} - 2\varepsilon^{1/2} + \frac{3}{4}\varepsilon^{2/3} = \frac{5}{4}\text{br}^2$$

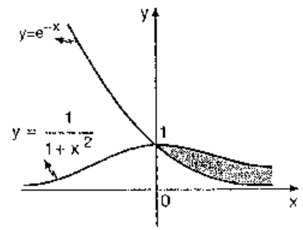


b) $y = e^{-x}, \quad y = \dfrac{1}{x^2+1}, \quad x = 0 \quad$ (1. bölge)

$$A = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} - e^{-x} \right) dx$$

$$= \lim_{t \to \infty} \arctan x + e^{-x} \Big]_0^t = \lim_{t \to \infty} \arctan t + e^{-t} - 1$$

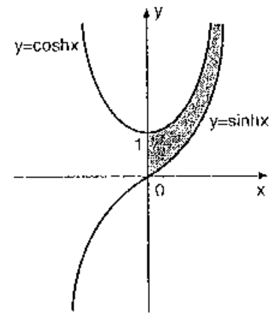
$$= \frac{\pi}{2} - 1 \text{ br}^2$$



c) $y = \cosh x, \quad y = \sinh x, \quad x = 0 \quad$ (1. bölge)

$$A = \int_0^{\infty} |\cosh x - \sinh x|\,dx = \sinh x - \cosh x \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Big|_0^{\infty} = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 1$$



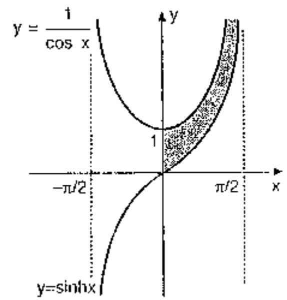
d) $y = \dfrac{1}{\cos x}, \quad y = \tan x, \quad x = 0, \quad x = \dfrac{\pi}{2}$

$\tan \dfrac{x}{2} = t$ denirse $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$ ve

$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ olur.

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{1}{\cos x} - \tan x \right| dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \left(\frac{1}{\cos x} - \tan x \right) dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + \ln|\cos x| \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \ln(1+\sin x) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \ln(1+\cos\varepsilon) = \ln 2$$



9. Birinci bölgede $y = e^{-x}$ eğrisiyle x – ekseni arasında kalan bölgenin

a) alanını

b) x– ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmini

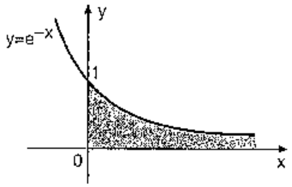
c) y– ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözümler:

a) $A=\int_0^\infty e^{-x}dx=\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-x}dx$

$=\lim_{t\to\infty}-e^{-x}\Big|_0^t$

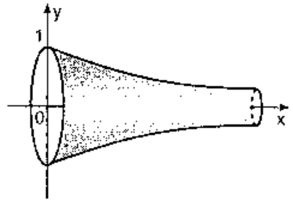
$=\lim_{t\to\infty}1-e^{-t}=1$ br^2



b) $V=\pi\int_0^\infty\left(e^{-x}\right)^2dx=\pi\int_0^\infty e^{-2x}dx=\pi\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-2x}dx$

$=\pi\lim_{t\to\infty}-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^t$

$=\pi\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)=\frac{\pi}{2}$



c) $y=e^{-x}\Rightarrow e^x=\frac{1}{y}\Rightarrow x=\ln\left(\frac{1}{y}\right)=-\ln y$ olacağından

$V=\pi\int_0^1(-\ln y)^2dy=\pi\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^1(\ln y)^2dy=\pi\lim_{\varepsilon\to0}\left((\ln y)^2y\Big|_\varepsilon^1-\int_\varepsilon^1 2y\ln y\frac{1}{y}dy\right)$

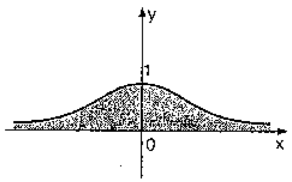
$=\pi\lim_{\varepsilon\to0}\left(-\varepsilon(\ln\varepsilon)^2-2\left[\ln y.y\Big|_\varepsilon^1-\int_\varepsilon^1 dy\right]\right)=\pi\lim_{\varepsilon\to0}2\varepsilon\ln\varepsilon+2(1-\varepsilon)=2\pi$ br^3

10. $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ **eğrisiyle x– ekseni arasında kalan bölgenin alanının, yarıçapı 1 birim olan dairenin alanına eşit olduğunu gösteriniz.**

Çözüm:

$A=2\int_0^\infty\frac{1}{x^2+1}dx=2\lim_{t\to\infty}\arctan x\Big|_1^t$

$=2\lim_{t\to\infty}\arctan t-\arctan 1=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$br^2



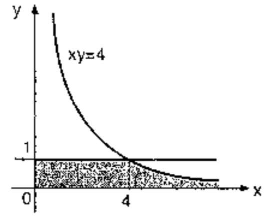
11. Birinci bölgede, x.y = 4 eğrisi, y = 1 ve x = 0 doğruları arasında kalan bölgenin x–ekseni etrafında dönmesi ile maydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:

$V=\pi\int_0^4dx+\pi\int_4^\infty\frac{16}{x^2}dx$

$=4\pi+\pi\lim_{t\to\infty}\int_4^t\frac{16}{x^2}dx$

$=4\pi+16\pi\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{t}\right)=4\pi+4\pi=8\pi$ br^3

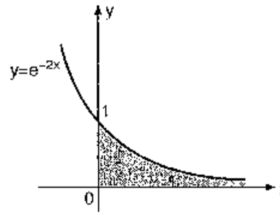


12. Koordinat eksenleri ile $y=e^{-2x}$ eğrisi arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

Çözüm:

$A=\int_0^\infty e^{-2x}dx=\lim_{t\to\infty}-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^t$

$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)=\frac{1}{2}$ br^2



13. Birinci bölgede, $y=xe^{-\frac{x}{2}}$ eğrisiyle asimtotu arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

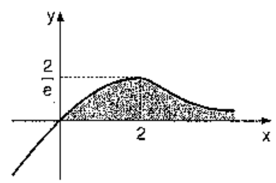
Çözüm:

$\lim_{x\to\infty}xe^{-\frac{x}{2}}=0$ olduğundan asimtotun denklemi y = 0 dır.

$A=\int_0^\infty xe^{-\frac{x}{2}}dx=\lim_{t\to\infty}\int_0^t xe^{-\frac{x}{2}}dx$

$=\lim_{t\to\infty}\left(x\left(-2e^{-\frac{x}{2}}\right)\Big|_0^t-\int_0^t\left(-2e^{-\frac{x}{2}}\right)dx\right)$

$=\lim_{t\to\infty}-2te^{-\frac{t}{2}}+2.\left(-2e^{-\frac{x}{2}}\Big|_0^t\right)=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{2t}{e^{\frac{t}{2}}}-4.e^{-\frac{t}{2}}+4\right)=4$



14. Birinci bölgede $y = xe^{-\frac{x}{2}}$ eğrisinin asimtotu etrafında dönmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:

$$V = \int_0^{\infty} y^2 dx = \pi \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = \pi \Gamma(3) = 2\pi \ \text{br}^3$$

15. Aşağıdaki bağıntıları sağlayan x sayılarını bulunuz.

Çözüm:

a) $$\int_0^x e^{-t}dt = \int_x^{\infty} e^{-t}dt$$

$$\Rightarrow -e^{-x} + 1 = \lim_{s\to\infty} \int_x^s e^{-t}dt \Rightarrow 1 - e^{-x} = \lim_{s\to\infty} -e^{-t}\Big|_x^s$$

$$\Rightarrow 1 - e^{-x} = \lim_{s\to\infty} e^{-x} - e^{-s} \Rightarrow 1 - e^{-x} = e^{-x}$$

$$\Rightarrow 2e^{-x} = 1 \quad \Rightarrow \quad e^{-x} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -x = \ln\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \ln 2$$

b) $$\int_0^x \frac{dt}{t^2+1} = \int_x^{\infty} \frac{dt}{t^2+1}$$

$$\arctan x - \arctan 0 = \lim_{s\to\infty} \arctan s - \arctan x$$

$$2\arctan x = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \arctan x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

16. Öyle bir f fonksiyonu bulunuz ki

$\lim\limits_{k\to\infty} \int_{-k}^{k} f(x)dx = 0$ olduğu halde $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ ıraksak olsun.

Çözüm:

$f(x) = x$ fonksiyonu için

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-k}^{k} xdx = \lim_{k\to\infty} \frac{x^2}{2}\Big|_{-k}^{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{2} - \frac{k^2}{2} = 0 \ \text{ olduğu halde}$$

$\int_{-\infty}^{\infty} xdx$ integrali ıraksaktır.

17. f, R üzerinde sürekli ve $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ yakınsak olsun.

f çift ise $\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\int_0^{\infty} f(x)dx$

f tek ise $\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0$

önermelerinin doğruluğu gösteriniz.

Çözüm:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^{\infty} f(x)dx = I_1 + I_2 \ \text{ olsun.}$$

f çift ise $f(x) = f(-x)$ olur. I_1 integralinde $x = -t$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$I_1 = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx = \int_0^{\infty} f(-t)dt = \int_0^{\infty} f(t)dt = I_2 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\int_0^{\infty} f(x)dx$$

f tek fonksiyon ise $f(x) = -f(-x)$ olur. I_1 integralinde $x = -t$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$I_1 = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx = \int_0^{\infty} f(-t)dt = -\int_0^{\infty} f(t)dt = -I_2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = -I_2 + I_2 = 0$$

18. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\mathcal{L}\left\{x^{-\frac{1}{2}}\right\}=\sqrt{\frac{\pi}{2^x}}$ b) $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin x}{x}\right\}=\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

Çözüm:

a) $\mathcal{L}\left\{x^{-\frac{1}{2}}\right\}=\int_0^\infty e^{-xu}u^{-\frac{1}{2}}du=\int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{t}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{dt}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt$ $\quad\begin{bmatrix} xu=t \\ xdu=dt\end{bmatrix}$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

b) $\frac{d}{dx}\mathcal{L}\{f(x)\}=\mathcal{L}\{-xf(x)\}$ olduğundan

$$\Rightarrow\frac{d}{dx}\mathcal{L}\left\{\frac{\sin x}{x}\right\}=\mathcal{L}\left\{-x\frac{\sin x}{x}\right\}=\mathcal{L}\{-\sin x\}=-\frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow\mathcal{L}\left\{\frac{\sin x}{x}\right\}=\int-\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

19. F, her mertebeden sürekli türevlere sahip bir fonksiyon olsun.

$\mathcal{L}\{f(x)\}=F(x)\Rightarrow\mathcal{L}\{x^n f(x)\}=(-1)^n F^{(n)}(n)$

önermesinin doğruluğunu gösteriniz. Bundan yararlanarak

$\mathcal{L}\{x\cos x\}=\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$ olacağını gösteriniz.

Çözüm:

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^\infty e^{-xu}f(u)du=\int_0^\infty -ue^{-xu}f(u)du=-\mathcal{L}\{xf(x)\}$$

$$F''(x)=\frac{d}{dx}\int_0^\infty ue^{-xu}f(u)du=\int_0^\infty u^2e^{-xu}f(u)du=-\mathcal{L}\{x^2f(x)\}$$

$$F'''(x)=\frac{d}{dx}\int_0^\infty u^2e^{-xu}f(u)du=\int_0^\infty -u^3e^{-xu}f(u)du=-\mathcal{L}\{x^3f(x)\}$$

$$F^{(n)}(x)=(-1)^n\int_0^\infty u^ne^{-xu}f(u)du=(-1)^n\mathcal{L}\{x^nf(x)\}$$

olur.

$$\mathcal{L}\{x\cos x\}=-\frac{d}{dx}\mathcal{L}\{\cos x\}=-\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)=-\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$$

Bölüm 6 VEKTÖR DEĞERLİ FONKSİYONLAR

TANIM:

$A\subset R$ ve V de bir vektör uzayı olsun. A nın herbir elemanına V nin bir ve yalnız bir elemanını karşılık getiren fonksiyona bir **vektör değerli fonksiyon** adı verilir.

TANIM:

F ile G vektör değerli, h ile u da reel değerli fonksiyonlar olsun.

F + G, F − G, h F, F · G, F x G ve Fou fonksiyonları

a) $(F+G)(t)=F(t)+G(t)$

b) $(F-G)t=F(t)-G(t)$

c) $(h\,F)\,(t)=h(t)\,F(t)$

d) $(F\cdot G)\,(t)=F(t)\cdot G(t)$

e) $(F\times G)\,(t)=F(t)\times G(t)$

f) $(F\circ u)\,(t)=F(u(t))$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyonların tanım kümeleri sağdaki ifadeleri tanımlı yapan t parametrelerinin kümesidir. Burada F · G skalar değerli, diğerleri vektör değerli birer fonksiyondur.

TANIM:

$F(t)=f_1(t)i+f_2(t)\,j+f_3(t)\,k$ fonksiyonu verildiğinde

$$\|F(t)\|=\sqrt{(f_1(t))^2+(f_2(t))^2+(f_3(t))^2}$$

biçiminde tanımlanan $\|F(t)\|$ fonksiyonu bir reel değerli fonksiyondur.

Bu fonksiyona F nin **normu** veya **büyüklüğü** denir.

TANIM:

F ve **G** vektör değerli fonksiyonlar olsun.

F ile **G**, A üzerinde **ortogonaldir** (diktir). $\Leftrightarrow \forall t \in A$ için $F(t) \cdot G(t) = 0$

TANIM:

t_0, **F** fonksiyonunun tanım kümesinin bir yığılma noktası olsun.

F fonksiyonunun t_0 noktasındaki limiti **L** vektörüdür $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için

$\exists \delta > 0$ öyleki $0 < |t - t_0| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan herbir t için

$\|F(t) - L\| < \varepsilon$ dur.

Limitin var olması halinde bu limit $\lim\limits_{t \to t_0} F(t) = L$ şeklinde gösterilir.

TEOREM 6.1:

$F(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$ olsun. **F** fonksiyonunun t_0 da bir limite sahip olması için gerek ve yeter şart f_1, f_2, f_3 fonksiyonlarının t_0 da birer limite sahip olmasıdır. Limitin varolması durumunda

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = \left[\lim_{t \to 0} f_1(t)\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t \to t_0} f_2(t)\right]\mathbf{j} + \left[\lim_{t \to t_0} f_3(t)\right]\mathbf{k}$$

olur.

TEOREM 6.2:

F ve **G** vektör değerli, h da skalar değerli fonksiyonlar olup her üçü de t_0 ın bir komşuluğunda tanımlı olsun.

$\lim\limits_{t \to t_0} F(t) = A$, $\quad \lim\limits_{t \to t_0} = G(t) = B \quad$ ve $\quad \lim\limits_{t \to t_0} h(t) = m$ ise

a) $\lim\limits_{t \to t_0} [F(t) + G(t)] = A + B$

b) $\lim\limits_{t \to t_0} [F(t).G(t)] = A \cdot B$

c) $\lim\limits_{t \to t_0} [F(t) \times G(t)] = A \times B$

d) $\lim\limits_{t \to t_0} [h(t) \cdot F(t)] = m A$ dır.

TEOREM 6.3:

F, $A \subset R$ üzerinde tanımlı bir vektör değerli fonksiyon ve t_0, A nın bir yığılma noktası olsun.

F fonksiyonu t_0 da süreklidir $\Leftrightarrow \lim\limits_{t \to t_0} F(t) = F(t_0)$ dır.

F, A üzerinde süreklidir $\Leftrightarrow$ **F**, A nın her noktasında süreklidir.

TEOREM 6.4:

Vektör değerli bir **F** fonksiyonunun t_0 noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart onun bileşen fonksiyonlarının t_0 da sürekli olmasıdır.

TEOREM 6.5:

Eğer **F**, **G** ve h fonksiyonları t_0 da sürekli ise $F + G$, $F \cdot G$, $F \times G$ ve

hF fonksiyonları da t_0 da süreklidir.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.

a) $F(t) = (\ln t)i + \sqrt{1-t}\, j + t^4 k$ b) $F(t) = ti + t^2 j + t^3 k$

c) $F(t) = \sqrt{t+1}\, i + \sqrt{t-1}\, j + t\, k$ d) $F(t) = \tanh t\, i + \frac{1}{t^2-4} k$

e) $F(t) = (\ln t)i - 4e^{2t} j + \sqrt{1-t^2}\, k$ f) $F(t) = \sqrt{1-t^2}\, i + \sqrt{t^2+1}\, j$

Çözümler:

a) $F(t) = (\ln t)i + \sqrt{1-t}\, j + t^4 k$

$f_1(t) = \ln t$ fonksiyonunun tanım kümesi $A_1 = (0, \infty)$,

$f_2(t) = \sqrt{1-t}$ nin tanım kümesi $A_2 = (-\infty, 1]$

$f_3(t) = t^4$ nin tanım kümesi $A_3 = R$ olduğundan

F nin tanım kümesi $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = (0,\infty) \cap (-\infty, 1] \cap R = (0,1]$ olur.

b) $f_1(t) = t$, $f_2(t) = t^2$, $f_3(t) = t^3$ fonksiyonları her yerde tanımlı olduğundan F her yerde tanımlıdır. Tanım kümesi $(-\infty, +\infty)$ aralığıdır.

c) $F(t) = \sqrt{t+1}\, i + \sqrt{t-1}\, j + t k$

$f_1(t) = \sqrt{t+1}$ $A_1 = [-1, \infty)$

$f_2(t) = \sqrt{t-1}$ $A_2 = [1, \infty)$

$f_3(t) = t$ $A_3 = R$

F nin tanım kümesi $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = [-1,\infty) \cap [1,\infty) \cap R = [1, \infty)$

d) $f_1(t) = \tanh t = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$ fonksiyonunun tanım kümesi R,

$f_2(t) = \frac{1}{t^2-4}$ fonksiyonunn tanım kümesi $R \setminus \{-2, 2\}$ olduğundan F fonksiyonunun tanım kümesi $R \setminus \{-2, 2\}$ kümesidir.

e) $F(t) = \ln t\, i - 4e^{2t} j + \sqrt{1-t^2}\, k$

$f_1(t) = \ln t$ $A_1 = (0, \infty)$

$f_2(t) = -4e^{2t}$ $A_2 = R$

$f_3(t) = \sqrt{1-t^2}$ $A_3 = [-1, 1]$

F nin tanım kümesi $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = (0,\infty) \cap R \cap [-1,1] = (0,1]$

f) $f_1(t) = \sqrt{1-t^2}$ fonksiyonunun tanım kümesi $A = [-1, 1]$, $f_2(t) = \sqrt{t^2+1}$ fonksiyonunun tanım kümesi R olduğundan verilen fonksiyonun tanım kümesi $A \cap R = [-1, 1]$ aralığıdır.

2. $F(t) = \ln t\, i - 4e^{2t} j + \frac{\sqrt{t-1}}{t} k$ **ve** $h(t) = \sqrt{t}$ **olduğuna göre hF fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.**

Çözüm:

$h(t)\, F(t) = \sqrt{t} \ln t\ i - 4\sqrt{t} e^{2t}\, j + \sqrt{\frac{t-1}{t}}\, k$

$f_1(t) = \sqrt{t} \ln t$ nin tanım kümesi $A_1 = (0, \infty)$

$f_2(t) = 4\sqrt{t}\, e^{2t}$ nin tanım kümesi $A_2 = [0, \infty)$

$f_3(t) = \sqrt{\frac{t-1}{t}}$ nin tanım kümesi $A_3 = (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$

olduğundan h F nin tanım kümesi

$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = (0,\infty) \cap [0,\infty) \cap [(-\infty, 0) \cup [1,\infty)] = [1, \infty)$ olur.

3. $F(t) = e^{-2t} i + e^{t^2} j + t^3 k$ **ve** $u(t) = \ln t$ **olduğuna göre F o u bileşke fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.**

Çözüm:

$(F \circ u)(t) = F(u(t)) = e^{-2\ln t}\,i + e^{(\ln t)^2}\,j + (\ln t)^3\,k = \frac{1}{t^2}\,i + e^{(\ln t)^2}\,j + (\ln t)^3\,k$

$f_1(t) = \frac{1}{t^2}$ nin tanım kümesi $A_1 = R \setminus \{0\}$

$f_2(t) = e^{(\ln t)^2}$ nin tanım kümesi $A_2 = (0, \infty)$

$f_3(t) = (\ln t)^3$ nin tanım kümesi $A_3 = (0, \infty)$

olduğundan f o u fonksiyonunun tanım kümesi

$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = R \setminus \{0\} \cap (0,\infty) \cap (0,\infty) = (0,\infty)$ olur.

4. $F(t) = \sqrt{t-1}\,i + \sqrt{1-t^2}\,j + tk,\quad G(t) = \ln t\,i + tj + k$

olduğuna göre F.G ve F x G fonksiyonlarının tanım kümelerini bulunuz.

Çözüm:

$(F \cdot G)(t) = \ln t\sqrt{t-1} + t\sqrt{1-t^2} + t$

iç çarpım fonksiyonunun tanımlı olması için bu fonksiyonu oluşturan toplam fonksiyonlarının herbiri tanımlı olmalıdır.

$u_1(t) = \ln t\sqrt{t-1}$ fonksiyonunun tanım kümesi $A_1 = [1, \infty)$,

$v_2(t) = t\sqrt{1-t^2}$ fonksiyonunun tanım kümesi $A_2 = [-1, 1]$ ve

$w_3(t) = t$ fonksiyonunun tanım kümesi $A_3 = R$ olduğundan toplam

fonksiyonunun tanım kümesi $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = [1,\infty) \cap [-1,1] \cap R = \{1\}$

olur.

5. **Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.**

a) $\lim\limits_{t \to 0}\left(2\cos t\,i + \frac{\sin t}{t}\,j + t^2 k\right)$

b) $\lim\limits_{t \to -1}\left(3i + tj + t^3 k\right)$

c) $\lim\limits_{t \to \pi}\left(\tan t\,i + 3tj - 4k\right)$

d) $\lim\limits_{t \to 3}\left(\frac{\sin t}{t}\,i + e^t j + (t+1)k\right)$

e) $\lim\limits_{t \to 3}\left(\frac{t^2 - 5t + 6}{t-3}\,i + \frac{t^2 - 2t - 3}{t-3}\,j + \frac{t^2 + 4t - 2}{t-3}\,k\right)$

f) $\lim\limits_{t \to 0^+}\left(ti + 2\sqrt{t}\,j - \frac{1}{t}\ln t\,k\right)$

g) $\lim\limits_{t \to 1^+}\left(e^{\frac{1}{1-t}}\,i + \sqrt{t-1}\,j + \ln t\,k\right)$

h) $\lim\limits_{t \to -1}\left(\sqrt{t+1}\,i - (1-t)\ln(1-t)\,j\right)$

i) $\lim\limits_{t \to \infty}\left(\frac{1}{t}\,i + \frac{t-1}{t+1}\,j + \frac{\sin t^3}{t^2}\,k\right)$

Çözümler:

a) $\lim\limits_{t \to 0}\left(2\cos t\,i + \frac{\sin t}{t}\,j + t^2 k\right)$

$\lim\limits_{t \to 0} 2\cos t = 2,\quad \lim\limits_{t \to 0}\frac{\sin t}{t} = 1,\quad \lim\limits_{t \to 0} t^2 = 0$ olduğundan

$\lim\limits_{t \to 0}\left(2\cos t\,i + \frac{\sin t}{t}\,j + t^2 k\right) = 2i + j$

b) $\lim\limits_{t \to -1}\left(3i + tj + t^3 k\right)$

$\lim\limits_{t \to -1} 3 = 3\quad \lim\limits_{t \to -1} t = -1\quad \lim\limits_{t \to -1} t^3 = -1$ olduğundan

$\lim\limits_{t \to -1}\left(3i + tj + t^3 t\right) = 3i - j - k$

c) $\lim\limits_{t \to \pi}\left(\tan t\,i + 3tj - 4k\right)$

$\lim\limits_{t \to \pi}\tan t = 0\quad \lim\limits_{t \to \pi} 3t = 3\pi\quad \lim\limits_{t \to \pi}(-4) = -4$ olduğundan

$\lim\limits_{t \to \pi}\left(\tan t\,i + 3tj - 4k\right) = 3\pi j - 4k$

d) $\lim\limits_{t \to 3}\left(\frac{\sin t}{t}\,i + e^t j + (t+1)k\right)$

$\lim\limits_{t \to 3}\frac{\sin t}{t} = \frac{\sin 3}{3},\quad \lim\limits_{t \to 3} e^t = e^3,\quad \lim\limits_{t \to 3}(t+1) = 4$ olduğundan

$\lim\limits_{t \to 3}\left[\frac{\sin t}{t}\,i + e^t j + (t+1)k\right] = \frac{\sin 3}{3}\,i + e^3 j + 4k$ olur.

e) $\lim\limits_{t\to 3}\left(\dfrac{t^2-5t+6}{t-3}\,i+\dfrac{t^2-2t-3}{t-3}\,j+\dfrac{t^2+4t-21}{t-3}\,k\right)$

$\lim\limits_{t\to 3}\dfrac{t^2-5t+6}{t-3}=\lim\limits_{t\to 3}\dfrac{(t-2)(t-3)}{t-3}=\lim\limits_{t\to 3}(t-2)=1$

$\lim\limits_{t\to 3}\dfrac{t^2-2t-3}{t-3}=\lim\limits_{t\to 3}\dfrac{(t-3)(t+1)}{t-3}=\lim\limits_{t\to 3}(t+1)=4$

$\lim\limits_{t\to 3}\dfrac{t^2+4t-21}{t-3}=\lim\limits_{t\to 3}\dfrac{(t-3)(t+7)}{t-3}=\lim\limits_{t\to 3}(t+7)=10$

$\lim\limits_{t\to 3}\left(\dfrac{t^2-5t+6}{t-3}\,i+\dfrac{t^2-2t-3}{t-3}\,j+\dfrac{t^2+4t-21}{t-3}\,k\right)=i+4j+10k$

f) $\lim\limits_{t\to 0^+}\left(ti+2\sqrt{t}\,j-\dfrac{1}{t}\ln t\,k\right)$

$\lim\limits_{t\to 0^+} t=0$, $\lim\limits_{t\to 0^+} 2\sqrt{t}=0$, $\lim\limits_{t\to 0^+} -\dfrac{\ln t}{t}=\infty \Rightarrow$ limit yok

g) $\lim\limits_{t\to 1^+}\left(e^{\frac{1}{1-t}}\,i+\sqrt{t-1}\,j+\ln t\,k\right)=0$ dır, zira

$\lim\limits_{t\to 1^+} e^{\frac{1}{1-t}}=0$, $\lim\limits_{t\to 1^+}\sqrt{t-1}=0$, $\lim\limits_{t\to 1^+}\ln t=0$ dır.

h) $\lim\limits_{t\to -1}\sqrt{t+1}\,i-(1-t)\ln(1-t)\,j=2\ln 2\,j$ dir, çünkü

$\lim\limits_{t\to -1}\sqrt{t+1}=0$, $\lim\limits_{t\to -1}(1-t)\ln(1-t)=2\ln 2$ olur.

ı) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{1}{t}\,i+\dfrac{t-1}{t+1}\,j+\dfrac{\sin(t^3)}{t^2}\,k\right)$

$\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{t}=0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t-1}{t+1}=1$, $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\sin(t^3)}{t^2}=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{1}{t}\,i+\dfrac{t-1}{t+1}\,j+\dfrac{\sin t^3}{t^2}\,k\right)=j$

6. $F(t)=ti+t^2j+t^3k$ ve $G(t)=2ti-j+3t^3k$ **olduğuna göre aşağıdaki limitleri hesaplayınız.**

a) $\lim\limits_{t\to 1}\|F(t)+G(t)\|$ b) $\lim\limits_{t\to 1}F(t)\cdot G(t)$

c) $\lim\limits_{t\to 1}F(t)\mathrm{x}G(t)$ d) $\lim\limits_{t\to 1}\|F(t)\mathrm{x}G(t)\|$

Çözüm:

a) $\lim\limits_{t\to 1}\|F(t)+G(t)\|$

$F(t)+G(t)=(t+2t)i+(t^2-1)j+(t^3+3t^3)k=3ti+(t^2-1)j+4t^3k$

$\|F(t)+G(t)\|=\left(9t^2+t^4-2t^2+1+16t^6\right)^{1/2}=\left(16t^6+t^4+7t^2+1\right)^{1/2}$

$\lim\limits_{t\to 1}\|F(t)+G(t)\|=\lim\limits_{t\to 1}\left(16t^6+t^4+7t^2+1\right)^{1/2}=(16+1+7+1)^{1/2}=5$

b) $\lim\limits_{t\to 1}F(t)\cdot G(t)$

$F(t)\cdot G(t)=2t^2-t^2+3t^6=3t^6+t^2$

$\lim\limits_{t\to 1}F(t)\cdot G(t)=\lim\limits_{t\to 1}(3t^6+t^2)=4$

c) $\lim\limits_{t\to 1}F(t)\times G(t)$

$$F(t)\times G(t)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ t & t^2 & t^3\\ 2t & -1 & 3t^3\end{vmatrix}=(3t^5+t^3)i-(3t^4-2t^4)j+(-t-2t^3)k$$

$=(3t^5+t^3)j-t^4j-(t+2t^3)k$

$\lim\limits_{t\to 1}F(t)\times G(t)=\lim\limits_{t\to 1}(3t^5+t^3)i-t^4j-(t+2t^3)k$
$=4i-j-3k$

7. $A=i-j$ ve $B=i+j$ **olmak üzere** $0\le t\le\pi$ **için** $F(t)=A\sin t+B\cos t$ **dir.**

Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{3}}F(t)$ b) $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{3}}\|F(t)\|$

c) $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{6}}(i+j+k)\cdot F(t)$ d) $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{3}}(\tan t)F(t)$

Çözüm:

a) $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{3}} F(t)$

$F(t) = A\sin t + B\cos t$

$= \sin t\, i - \sin t\, j + \cos t\, i + \cos t\, j$

$= (\sin t + \cos t)i + (\cos t - \sin t)j$

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{3}} (\sin t + \cos t)i + (\cos t - \sin t)j = \left(\lim_{t\to\frac{\pi}{3}} (\sin t + \cos t)\right)i + \left(\lim_{t\to\frac{\pi}{3}} \cos t - \sin t\right)j$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)i + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)j$$

b) $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{3}} \|F(t)\|$

$$\|F(t)\| = \left(\sin^2 t + 2\cos t\sin t + \cos^2 t + \cos^2 t - 2\sin t\cos t + \sin^2 t\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{3}} \|F(t)\| = \sqrt{2}$$

c) $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{6}} (i + j + k) \bullet F(t)$

$(i + j + k) \bullet F(t) = \sin t + \cos t + \cos t - \sin t = 2\cos t$

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{6}} (i + j + k) \bullet F(t) = \lim_{t\to\frac{\pi}{6}} 2.\cos t = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

d) $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{3}} (\tan t)F(t)$

$$\tan t F(t) = \tan t(\sin t + \cos t)i + \tan t(\sin t - \cos t)j = \left(\frac{\sin^2 t}{\cos t} + \sin t\right)i + \left(\frac{\sin^2 t}{\cos t} - \sin t\right)j$$

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{3}} \tan t F(t) = \left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i + \left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)j = \left(\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i + \left(\frac{3}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)j$$

8. Aşağıdaki fonksiyonların sürekli olduğu aralıkları bulunuz.

a) $F(t) = ti + t^2 j + t^3 k$

b) $F(t) = e^t j + e^{-t} j + \cos t k$

c) $F(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} i + tj + k & , \quad t < 0 \quad \text{ise} \\ (t+1)i + e^t j + k & , \quad t \geq 0 \quad \text{ise} \end{cases}$

d) $F(t) = \begin{cases} (2t+1)i + (2t-1)j + 4tk & , \quad t < -3 \quad \text{ise} \\ (t-2)i - (t+10)j + (2t-9)k & , \quad t \leq -3 \quad \text{ise} \end{cases}$

Çözüm:

a) Fonksiyonun bileşenleri her yerde sürekli olduğundan kendisi de her yerde süreklidir.

b) $F(t) = e^t i + e^{-t} j + \cos t k$

Fonksiyonun bileşenleri her yerde sürekli olduğundan kendisi de her yerde süreklidir.

c) $F(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} i + tj + k & , \quad t < 0 \quad \text{ise} \\ (t+1)i + e^t j + k & , \quad t \geq 0 \quad \text{ise} \end{cases}$

$$\lim_{t\to 0^-} F(t) = \lim_{t\to 0^-} \left(\frac{\sin t}{t} i + tj + k\right)$$

$$= \left(\lim_{t\to 0^-} \frac{\sin t}{t}\right)i + \left(\lim_{t\to 0^-} t\right)j + \left(\lim_{t\to 0^-} 1\right)k = i + k$$

$$\lim_{t\to 0^+} F(t) = \lim_{t\to 0^+} \left((t+1)i + e^t j + k\right)$$

$$= \left(\lim_{t\to 0^+} t+1\right)i + \left(\lim_{t\to 0^+} e^t\right)j + \left(\lim_{t\to 0^+} 1\right)k = i + j + k.$$

Sağ ve sol limitler farklı olduğundan $t = 0$ noktasında limit yoktur. Dolayısı ile fonksiyon $t = 0$ noktasında sürekli değildir.

d) $$F(t)=\begin{cases}(2t+1)\mathbf{i}+(2t-1)\mathbf{j}+4t\mathbf{k} & , \quad t<-3 \quad \text{ise}\\ (t-2)\mathbf{i}-(t+10)\mathbf{j}+(2t-9)\mathbf{k} & , \quad t\geq 3 \quad \text{ise}\end{cases}$$

$$\lim_{t\to -3^-}F(t)=\lim_{t\to -3^-}\left((2t+1)\mathbf{i}+(2t-1)\mathbf{j}+4t\mathbf{k}\right)$$

$$=\left(\lim_{t\to -3^-}2t+1\right)\mathbf{i}+\left(\lim_{t\to -3^-}2t-1\right)\mathbf{j}+\left(\lim_{t\to -3}4t\right)\mathbf{k}=-5\mathbf{i}-7\mathbf{j}-12\mathbf{k}$$

$$\lim_{t\to -3^+}F(t)=\lim_{t\to -3^+}\left((t-2)\mathbf{i}-(t+10)\mathbf{j}+(2t-9)\mathbf{k}\right)=-5\mathbf{i}-7\mathbf{j}-15\mathbf{k}$$

-3 de limit yok. Dolayısı ile fonksiyon -3 noktasında sürekli değildir.

Fonksiyon diğer noktalarda süreklidir.

9. **F, G ve h fonksiyonları t_0 noktasında sürekli olduğunda F + G, F.G, F x G ve h.F fonksiyonlarının da t_0 noktasında sürekli olacağını gösteriniz.**

Çözüm:

$$\lim_{t\to t_0}(F+G)(t)=\lim_{t\to t_0}F(t)+\lim_{t\to t_0}G(t)=F(t_0)+G(t_0)\Rightarrow F+G \quad \text{fonksiyonu süreklidir.}$$

$$\lim_{t\to t_0}(F\bullet G)(t)=\left(\lim_{t\to t_0}F(t)\right)\left(\lim_{t\to t_0}G(t)\right)=F(t_0)\bullet G(t_0)\Rightarrow F\bullet G \quad \text{fonksiyonu sürekli.}$$

$$\lim_{t\to t_0}(F\bullet G)(t)=\left(\lim_{t\to t_0}F(t)\bullet\lim_{t\to t_0}G(t)\right)=F(t_0)\bullet G(t_0)\Rightarrow F\bullet G \quad \text{fonksiyonu süreklidir.}$$

$$\lim_{t\to t_0}h(t)F(t)=\left(\lim_{t\to t_0}h(t)\right)\left(\lim_{t\to t_0}F(t)\right)=h(t_0)\bullet F(t_0)\Rightarrow h.F \quad \text{fonksiyonu süreklidir.}$$

EĞRİLER

TANIM:

Bir eğri kendi kendisini kestiğinde, arakesit noktalarına eğrinin **katlı noktaları** denir. Kendini kesmeyen eğrilere **basit eğriler** adı verilir.

TANIM:

C eğrisi **kapalıdır** $\Leftrightarrow$ C nin, tanım kümesi [a, b] olan ve r(a) = r(b) eşitliğini sağlayan bir r(t) parametrik gösterimi vardır.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. **Aşağıda denklemleri verilen eğrilerin grafiklerini çiziniz.**

a) $r(t)=t\,\mathbf{i}$, $-1\leq t\leq 1$

b) $r(t)=\cos\pi t\,\mathbf{k}$, $-1\leq t\leq \frac{1}{3}$

c) $r(t)=t\,\mathbf{i}+t\,\mathbf{j}+t\mathbf{k}$, $-\infty<t<+\infty$

d) $r(t)=t\,\mathbf{i}+t^2\,\mathbf{k}$, $-\infty<t<+\infty$

e) $r(t)=t\,\mathbf{i}+t^2\,\mathbf{k}$, $-\infty<t<+\infty$

f) $r(t)=2t\,\mathbf{i}-3t\mathbf{j}$, $-\infty<t<+\infty$

g) $r(t)=(2t-1)\mathbf{i}-3t\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $-\infty<t<+\infty$

h) $r(t)=-16\,t^2\,\mathbf{k}$, $0\leq t<+\infty$

ı) $r(t)=\cos 3t\,\mathbf{i}+\sin 3t\,\mathbf{j}$, $0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$

i) $r(t)=\cos 3t\,\mathbf{i}+\sin 3t\,\mathbf{j}$, $-\pi\leq t\leq\frac{\pi}{2}$

j) $r(t)=2\cos t\,\mathbf{i}-\sin t\,\mathbf{j}-3\mathbf{k}$, $-\pi\leq t\leq 0$

k) $r(t)=3\cos t\,\mathbf{i}+3\sin t\,\mathbf{j}-3\mathbf{k}$, $0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$

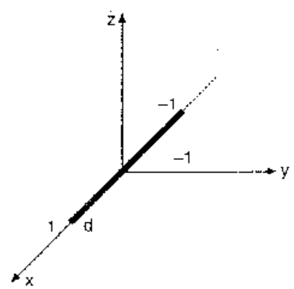
l) $r(t)=\sqrt{2}\cos t\,\mathbf{i}-2\sin t\,\mathbf{j}+\sqrt{2}\cos t\,\mathbf{k}$, $0\leq t\leq 2\pi$

Çözüm:

a) $r(t)=t\mathbf{i}$ $\quad -1\leq t\leq 1$

$x(t)=t \quad y(t)=0 \quad z(t)=0$

$x=t \quad \Rightarrow \quad -1\leq x\leq 1$

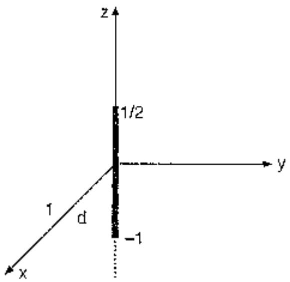


b) $r(t) = \cos \pi t k \qquad -1 \le t \le \frac{\pi}{3}$

$x(t) = 0 \quad y(t) = 0 \quad z(t) = \cos \pi t$

$z = \cos \pi t \quad \Rightarrow \quad -\pi \le \pi t \le \frac{\pi}{3}$

$-1 \le \cos \pi t \le \frac{1}{2} \Rightarrow -1 \le z \le \frac{1}{2}$

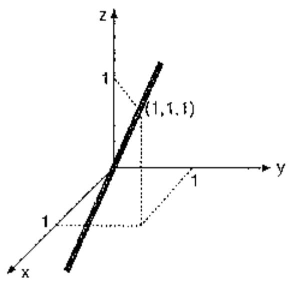


c) $r(t) = ti + tj + tk, \quad -\infty \le t \le \infty$

$x = t, \quad y = t, \quad z = t$

$x = y = z$ doğrusu.

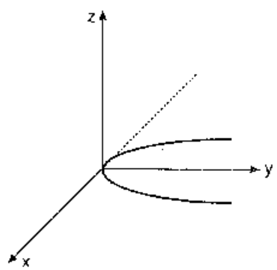
(0, 0, 0) ve (1, 1, 1) noktalarından geçen doğru



d) $r(t) = t\,i + t^2\,j \qquad -\infty \le t \le \infty$

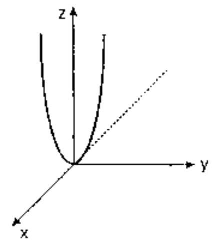
$x = t\,, \quad y = t^2 \quad , \quad z = 0$

$\Rightarrow y = x^2$



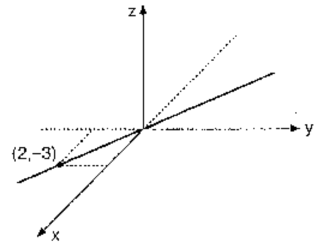
e) $x = t, \quad y = 0, \quad z = t^2$

$z = x^2$ parabolü



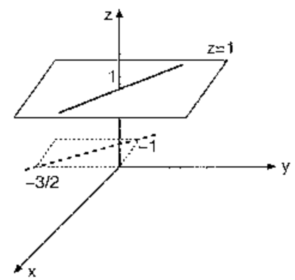
f) $x = 2t, \quad y = 3t$

$\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} \Rightarrow 2y = -3x$ doğrusu



g) $\left.\begin{array}{l} x = 2t - 1 \\ y = -3t \\ z = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-3} \\ 2y = -3x - 3 \\ 3x + 2y + 3 = 0 \end{array}$

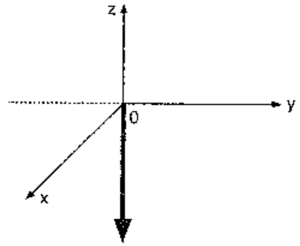
$3x + 2y + 3 = 0$ doğrusunun $z = 1$ düzlemine ötelenmişi.



h) $r(t) = -16t^2k$

$x = 0,\ y = 0,\ z = -16\,t^2$

$0 \le t < \infty \Rightarrow -\infty < z \le 0$

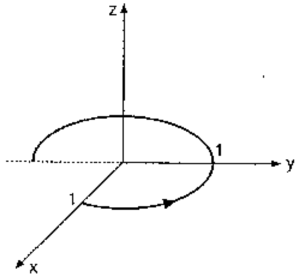


ı) $r(t) = \cos 3t\,i + \sin 3t\,j,\quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

$x = \cos 3t\ ,\qquad y = \sin 3t\ ,\qquad z = 0$

$0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

$x^2 + y^2 = 1$

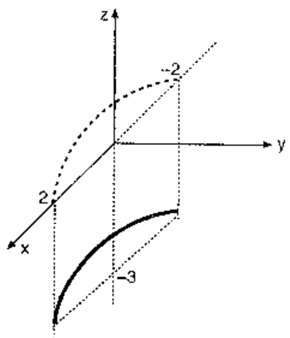


j) $x = 2\cos t$

$y = \sin t \qquad -\pi \le t \le 0$

$z = -3$

$\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1$ elips parçasının $z = -3$ düzlemine ötelenmişi



2. **$x^2 + y^2 = 4$ silindiri ile $r(t) = t\cos \pi t\,i + t\sin \pi t\,j + tk$ eğrisinin kesim noktalarını bulunuz.**

Çözüm:

$x = x(t) = t\cos \pi t$

$y = y(t) = t\sin \pi t$

$z = z(t) = t$

$x^2 + y^2 = t^2\cos^2 \pi t + t^2 \sin^2 \pi t = t^2 = z^2$

$x^2 + y^2 = z^2 = 4 \Rightarrow z = \mp 2$

$z = 2 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow x = 2\cos 2\pi = 2 \Rightarrow y = 2\sin 2\pi = 0 \Rightarrow (2,0,2)$

$z = -2 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow x = -2\cos(-2\pi) = -2 \Rightarrow y = -2\sin(-2\pi) = 0 \Rightarrow (-2,0,2)$

Eğri, silindiri $(-2,\ 0,\ -2)$ ve $(2,\ 0\ 2)$ noktalarında keser.

3. **$x^2 + y^2 + z^2 = 10$ küresi ile $r(t) = \cos\pi t\,i + \sin\pi t\,j + tk$ helisinin kesim noktalarını bulunuz.**

Çözüm:

$x = x(t) = \cos \pi t$

$y = y(t) = \sin \pi t$

$z = z(t) = t$

$x^2 + y^2 = \cos^2 \pi t + \sin^2 \pi t = 1 \Rightarrow 1 + z^2 = 10\ ,\quad z^2 = 9 \Rightarrow z = \mp 3 \Rightarrow t = \mp 3$

$z = 3 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow x = \cos 3\pi = -1 \Rightarrow y = \sin 3\pi = 0 \Rightarrow (-1,\ 0,\ 3)$

$z = -3 \Rightarrow t = -3 \Rightarrow x = \cos(-3\pi) = -1,\quad y = \sin 3\pi = 0 \Rightarrow (-1,\ 0,\ -3)$

Helis küreyi $(-1,\ 0,\ 3)$ ve $(-1,\ 0,\ -3)$ noktalarında keser.

4. **$r(t) = 2(t^2 - t)i + (t^3 - t^2)j + t^3(t-1)k$ eğrisinin bir kapalı eğri olduğunu gösterip varsa katlı noktalarını bulunuz.**

Çözüm:

C eğrisi kapalı $\Leftrightarrow$ C nin, tanım kümesi $[a,\ b]$ olan ve $r(a) = r(b)$ eşitliğini sağlayan $r(t)$ parametrik gösterimi vardır.

$r(0) = r(1) = 0 \Rightarrow$ C eğrisi kapalıdır. $r(0) = (0,0,0)$, $r(1) = (0,0,0)$ olduğundan $(0,\ 0,\ 0)$ noktası katlı noktadır.

VEKTÖR DEĞERLİ FONKSİYONLARIN TÜREV VE İNTEGRALİ

TANIM

F vektör değerli bir fonksiyon ve t_0 da F nin tanım kümesinin bir yığılma noktası olsun. Eğer

$$\lim_{t \to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}$$

limiti varsa bu limite F fonksiyonunun t_0 noktasındaki türevi denir, $F'(t_0)$ veya $\frac{dF}{dt}(t_0)$ sembollerinden biri ile gösterilir.

TEOREM 6.5:

$F(t) = f_1(t)\, i + f_2(t)\, j + f_3(t)\, k$ fonksiyonunun t_0 da türevli olması için gerek ve yeter şart, f_1, f_2 ve f_3 fonksiyonlarının t_0 da türevli olmasıdır. F türevli olduğunda

$$F'(t_0) = f_1'(t_0)i + f_2'(t_0)j + f_3'(t_0)k$$

olur.

TEOREM 6.6:

F, G ve h fonksiyonları t noktasında, u da u(s) = t eşitliğini sağlayan s noktasında türevli ise,

$$[F(t)+G(t)]' = F'(t)+G'(t)$$

$$[h(t)F(t)]' = h'(t)F(t)+h(t)F'(t)$$

$$[F(t)\cdot G(t)]' = F'(t)\cdot G(t)+F(t)\cdot G'(t)$$

$$[F(t)xG(t)]' = F'(t)xG(t)+F(t)xG'(t)$$

$$[(Fou)(s)]' = F'(u(s))u'(s)$$

TEOREM 6.7:

F fonsiyonu (a, b) aralığının her noktasında türevli olsun. $\|F(t)\|$ sabit ise F ile F′ ortogonaldir.

TANIM:

r, I aralığı üzerinde tanımlı vektör değerli bir fonksiyon olsun.

Eğer r, I üzerinde sürekli türevlere sahip ve I nın herbir t iç noktasında $r'(t) \neq 0$ ise r fonksiyonu **düzgündür** denir.

Eğer bir C eğrisinin düzgün bir r(t) parametrik gösterimi varsa C eğrisine **düzgün eğri** veya **pürüzsüz eğri** adı verilir.

Eğer I aralığı, r nin düzgün olduğu sonlu sayıda alt aralığa bölünebiliyorsa r fonksiyonu **parçalı düzgündür** denir, onun temsil ettiği eğriye de **parçalı düzgün eğri** adı verilir.

TEOREM 6.8:

C eğrisi, parametrik gösterimi,

$$r(t) = x(t)\, i + y(t)\, j + z(t)\, k, \quad a \le t \le b$$

olan bir parçalı düzgün eğri ise bu eğrinin uzunluğu

$$\ell = \int_a^b \| r'(t) \| dt$$

birimdir.

TANIM:

f_1, f_2, f_3, [a, b] üzerinde integrallenebilen fonksiyonlar olmak üzere,

$$F(t) = f_1(t)\, i + f_2(t)\, j + f_3(t)\, k$$

fonksiyonunun [a, b] aralığındaki belirli integrali

$$\int_a^b F(t)dt = \left(\int_a^b f_1(t)dt\right)i + \left(\int_a^b f_2(t)dt\right)j + \left(\int_a^b f_3(t)dt\right)k,$$

vektörü, belirsiz integrali

$$\int F(t)dt = \left(\int f_1(t)dt\right)i + \left(\int f_2(t)dt\right)j + \left(\int f_3(t)dt\right)k$$

vektör değerli fonksiyonudur.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı noktalardaki türevlerini bulunuz?

a) $F(t) = t\cos t\,i + t\sin t\,j + tk, \qquad t = \pi$

b) $F(t) = t^{3/2}i + (1-t)^{3/2}j + \frac{3t}{2}k, \qquad t = 0$

c) $F(t) = e^t \sin t\,i + e^t \cos t\,j + e^t k, \qquad t = 0$

Çözüm:

a) $F(t) = t\cos t\,i + t\sin t\,j + tk, \quad t = \pi$

$F'(t) = (\cos t - t\sin t)i + (\sin t + t\cos t)j + k \Rightarrow F'(\pi) = -i - \pi j + k$

b) $F(t) = t^{5/2}i + (1-t)^{5/2}j + \frac{3t}{2}k, \qquad t = 0$

$F'(t) = \frac{5}{2}t^{1/2}i - \frac{5}{2}(1-t)^{1/2}j + \frac{3}{2}k \Rightarrow F'(0) = -\frac{5}{2}j + \frac{3}{2}k$

c) $F(t) = e^t \sin t\,i + e^t \cos t\,j + e^t k, \quad t = 0$

$F'(t) = (e^t \sin t + \cos t e^t)i + (e^t \cos t - e^t \sin t)j \Rightarrow F'(0) = i + j + k$

2. Aşağıdaki fonksiyonların türevini bulunuz.

a) $F(t) = i + j + t^3 k$

b) $F(t) = t^2 \cos t\,i + t^3 \sin t\,j + t^4 k$

c) $F(t) = t^{3/2}i - (1-t)^{3/2}j + \frac{3}{2}tk$

d) $F(t) = \arcsin 4t\,i - 3\arctan(2t-1)j + 7\ln 3t^2 k$

Çözüm:

a) $F(t) = i + j + t^3 k \Rightarrow F'(t) = 3t^2 k$

b) $F(t) = t^2 \cos t\,i + t^3 \sin t\,j + t^4 k$

$F'(t) = (2t\cos t - t^2 \sin t)i + (3t^2 \sin t + t^3 \cos t)j + 4t^3 k$

c) $F(t) = t^{3/2}i - (1-t)^{3/2}j + \frac{3}{2}tk$

$F'(t) = \frac{3}{2}t^{1/2}i + \frac{3}{2}(1-t)^{1/2}j + \frac{3}{2}k$

d) $F(t) = \arcsin 4t\,i - 3\arctan(2t-1)j + 7\ln 3t^2 k$

$F'(t) = \frac{4}{\sqrt{1-16t^2}}i - \frac{6}{1+(2t-1)^2}j + \frac{42t}{3t^2}k$

3. $F(t) = \frac{2}{\cos t}i - 3j + \frac{1}{\sin t}k \quad G(t) = 3t\,i - t^2 j - \frac{4}{\sin t}k$ olduğuna göre aşağıdaki fonksiyonların türevini bulunuz.

a) $4F - 2G$ b) $F \cdot G$ c) $F \times G$

Çözüm:

a) $4F - 2G = \left(\frac{8}{\cos t} - 6t\right)i + \left(-12 + 2t^2\right)j + \frac{12}{\sin t}k$

$(4F - 2G)' = \left(\frac{8\sin t}{\cos t} - 6\right)i + 4tj - \frac{12\cos t}{\sin^2 t}k$

b) $(F \cdot G)(t) = F(t) \cdot G(t) = \frac{6t}{\cos t} + 3t^2 - \frac{4}{\sin^2 t}$

$(F \cdot G)'(t) = \frac{6\cos t + 6t\sin t}{\cos^2 t} + 6t + 8\frac{\cos t}{\sin^3 t} = \frac{6}{\cos t} + \frac{6t\sin t}{\cos^2 t} + 6t - \frac{8\cos t}{\sin^3 t}$

c) $(F \times G)(t) = F(t) \times G(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{2}{\cos t} & -3 & \frac{1}{\sin t} \\ 3t & -t^2 & -\frac{4}{\sin t} \end{vmatrix}$

$= \left(\frac{12}{\sin t} + \frac{t^2}{\sin t}\right)i - \left(-\frac{8}{\cos t \sin t} - \frac{3t}{\sin t}\right)j + \left(\frac{-2t^2}{\cos t} + 9t\right)k$

$(F \times G)'(t) = \left(\frac{2t\sin t - \cos t(12 + t^2)}{\sin^2 t}\right)i + \left(\frac{8(\sin^2 t - \cos^2 t)}{\cos^2 t . \sin^2 t}\right) \cdot \left(\frac{3\sin t - 3t\cos t}{\sin^2 t}\right)j$

$+ \left(\frac{-4t\cos t + \sin t . 2t^2}{\cos^2 t} + 9\right)k$

4. $F(t)=\frac{3}{t}i-j$ ve $G(t)=ti-e^{-t}j$ için $(F.G)'(t)$ ve $(FxG)'(t)$ türevlerini hesaplayınız.

Çözüm:

$$(F\cdot G)(t)=F(x)\cdot G(t)=3+e^{-t} \Rightarrow (F\cdot G)'(t)=-e^{-t}$$

$$(FxG)(t)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{3}{t} & -1 & 0 \\ t & -e^{-t} & 0 \end{vmatrix}=\left(-\frac{3}{t}e^{-t}+t\right)k$$

$$(FxG)'(t)=\left(\frac{3}{t^2}e^{-t}+\frac{3}{t}e^{-t}+1\right)k$$

5. $r(t)=a(t-\sin t)i+a(1-\cos t)j$ için $r'(t)=0$ eşitliğini sağlayan t değerlerini bulunuz. Bu eğri R üzerinde parçalı düzgün müdür?

Çözüm:

$$r'(t)=a(1-\cos t)i+a\sin tj$$

$$r'(t)=0 \Leftrightarrow \cos t=1 \text{ ve } \sin t=0 \Leftrightarrow t=0,\ \mp 2p,\ \pm 4\pi, \cdots$$

Eğri parçalı düzgün değildir. Çünkü $r'(t)=0$ denkleminin sonsuz çoklukta kökü vardır.

6. $F(t)=a\sin 2t\, i+a(1+\cos 2t)j+2a\sin t\, k$ $\quad 0\le t\le 2\pi$ fonksiyonu için $F(t)\cdot F'(t)$ ifadesini hesaplayınız.

Çözüm:

$$F'(t)=2a\cos 2ti-2a\sin 2tj+2a\cos tk$$

$$F(t)\cdot F'(t)=2a^2\cos 2t\sin 2t-2a^2\sin 2t-2a^2\sin 2t\cos 2t+4a^2\cos t\sin t$$

$$=-2a^2\sin 2t+4a^2\cos t\sin t=-4a^2\sin t\cos t+4a^2\cos t\sin t=0$$

7. F, ikinci mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun.

$$[F(t)xF'(t)]'=F(t)xF''(t)$$

olacağını gösteriniz.

Çözüm:

$$[F(t)xF'(t)]'=F'(t)xF'(t)+F(t)x[F'(t)]'=F'(t)xF'(t)+F(t)xF''(t)$$

olur. Bir determinantın iki satırı aynı ise determinantın değeri sıfırdır. Buna göre $F'(t)xF'(t)=0$ olacaktır. Bu durumda $[F(t)xF'(t)]'=F(t)xF''(t)$ olur.

8. Aşağıda denklemleri verilen eğri parçalarının uzunluklarını hesaplayınız.

a) $r(t)=\sin t\, i+tj+(1-\cos t)k,$ $\quad 0\le t\le 2\pi$

b) $r(t)=e^t i+2\sqrt{2}e^{t/2}j+k,$ $\quad 0\le t\le 1$

c) $r(t)=\sin t\, i+\cos t\, j+\frac{2}{3}t^{3/2}k,$ $\quad 0\le t\le 8$

d) $r(t)=ti+\frac{\sqrt{6}}{2}t^2j+t^3k,$ $\quad -1\le t\le 2\pi$

e) $r(t)=\cos^3 ti+\sin^3 tj,$ $\quad 0\le t\le 2\pi$

f) $r(t)=\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}i+\frac{1}{2}(1-t)^{3/2}j+\frac{1}{2}tk,$ $\quad -1\le t\le 1$

g) $r(t)=ti+t^2j+\frac{2}{3}t^3k,$ $\quad 0\le t\le 3$

Çözüm:

a) $r(t)=\sin ti+tj+(1-\cos t)k$ $\quad 0\le t\le 2\pi$

$r'(t)=\cos ti+j-\sin tk$ $\quad 0\le t\le 2\pi$

$$\|r'(t)\|=\left(\cos^2 t+1+\sin^2 t\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

$$L=\int_0^{2\pi}\|r'(t)\|dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\,dt=2\sqrt{2}\pi$$

b) $r(t)=e^t i+2\sqrt{2}e^{\frac{t}{2}}j+tk$ $\quad 0\le t\le 1$

$$r'(t)=e^t i+\sqrt{2}e^{\frac{t}{2}}j+k$$

$$\|r'(t)\|=\left(e^{2t}+2e^t+1\right)^{\frac{1}{2}}=e^t+1$$

$$L=\int_0^1\|r'(t)\|dt=\int_0^1 e^t+1dt=e^t+t\Big|_0^1=e$$

c) $r(t)=\sin t\,i+\cos t\,j+\frac{2}{3}t^{3/2}k \quad 0\le t\le 8$

$r'(t)=\cos t\,i-\sin t\,j+t^{1/2}k$

$\|r'(t)\|=\left(\cos^2 t+\sin^2 t+t\right)^{1/2}=(1+t)^{1/2}$

$$L=\int_0^8\|r'(t)\|dt=\int_0^8(1+t)^{1/2}dt=\frac{2}{3}(1+t)^{3/2}\Big|_0^8=\frac{52}{3}$$

d) $r(t)=t\,i+\frac{\sqrt{6}}{2}t^2 j+t^3 k \qquad -1\le t\le 2\pi$

$r'(t)=i+\sqrt{6}t\,j+3t^2 k$

$\|r'(t)\|=\left(1+6t^2+9t^4\right)^{1/2}=\left(1+3t^2\right)$

$$L=\int_{-1}^{2\pi}\left(1+3t^2\right)dt=t+t^3\Big|_{-1}^{2\pi}=2\pi+8\pi^3+2$$

e) $r(t)=\cos^3 t\,i+\sin^3 t\,j \qquad 0\le t\le 2\pi$

$r'(t)=-3\cos^2 t\sin t\,i+3\sin^2 t\cos t\,j$

$\|r'(t)\|=\left(9\cos^4 t\sin^2 t+9\sin^4 t\cos^2 t\right)^{1/2}=3|\cos t\sin t|$

$$L=\int_0^{2\pi}3|\cos t\sin t|dt=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin t\,dt-3\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos t\sin t\,dt+3\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\cos t\sin t\,dt-3\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos t\sin t\,dt$$

$$=3.\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-3\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\frac{3\sin^2 t}{2}\Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}-\frac{3\sin^2 t}{2}\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=6$$

f) $r(t)=\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}i+\frac{1}{2}(1-t)^{3/2}j+\frac{1}{2}+k, \qquad -1\le t\le 1$

$r'(t)=\frac{1}{2}(1+t)^{1/2}i-\frac{3}{4}(1-t)^{1/2}j+\frac{1}{2}k$

$\|r'(t)\|=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}t+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}t+\frac{1}{4}\right)^{1/2}=\left(\frac{17}{16}-\frac{5t}{16}\right)^{1/2}=\frac{1}{4}(17-5t)^{1/2}$

$$L=\int_{-1}^{1}\|r'(t)\|dt=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}(17-5t)^{1/2}dt=-\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{2}{3}(17-5t)^{3/2}\Big|_{-1}^{1}$$

$$=-\frac{1}{30}12^{3/2}+\frac{22^{3/2}}{30}=\frac{22^{3/2}}{30}-\frac{12^{3/2}}{30}=\frac{1}{30}\left(22\sqrt{22}-12\sqrt{12}\right)$$

g) $r(t)=t\,i+t^2 j+\frac{2}{3}t^3 k, \qquad 0\le t\le 2$

$r'(t)=i+2t\,j+2t^2 k$

$\|r'(t)\|=\left(1+4t^2+4t^4\right)^{1/2}=1+2t^2$

$$L=\int_0^2\left(1+2t^2\right)dt=t+\frac{2}{3}t^3\Big|_0^2=\frac{19}{3}$$

9. Aşağıda parametrik gösterimleri verilen eğrilerin karşılarında yazılı noktalar arasında kalan parçasının uzunluğunu bulunuz.

a) $r(t)=t\,i+\frac{1}{3}t^2 j+\frac{2}{27}t^3 k,$ $(0,0,0)$ ve $(3,3,2)$

b) $r(t)=t\,i+2\arcsin\frac{t}{2}j+\frac{1}{2}\ln\frac{2+t}{2-t}k$ $(0,0,0)$ ve (a,b,c)

Çözüm:

a) $r(t)=t\,i+\frac{1}{3}t^2 j+\frac{2}{27}t^3 k$ $(0,0,0)$ ve $(3,3,2)$

$0\le x\le 3\Rightarrow 0\le t\le 3$

$r'(t)=1\,i+\frac{2}{3}t\,j+\frac{2}{9}t^2 k$

$\|r'(t)\|=\left(1+\frac{4}{9}t^2+\frac{4}{81}t^4\right)^{1/2}=1+\frac{2}{9}t^2$

$$L=\int_0^3\left(1+\frac{2}{9}t^2\right)dt=t+\frac{2}{27}t^3\Big|_0^3=3+2=5$$

b) $r(t)=ti+2\arcsin\frac{t}{2}j+\frac{1}{2}\ln\frac{2+t}{2-t}k$ (0,0,0) ve (a,b,c)

$$r'(t)=i+\frac{2}{\sqrt{4-t^2}}j+\frac{2}{4-t^2}k$$

$$\|r'(t)\|=\left(1+\frac{4}{4-t^2}+\frac{4}{\left(4-t^2\right)^2}\right)^{1/2}=1+\frac{2}{4-t^2}$$

$$L=\int_0^a\left(1+\frac{2}{4-t^2}\right)dt=t+\frac{1}{2}\ln\frac{2+t}{2-t}\Big|_0^a=a+\frac{1}{2}\ln\frac{2+a}{2-a}$$

10. **Aşağıda parametrik gösterimleri verilen eğrilerin, karşılarında parametleri verilen noktalardaki birim teğet vektörlerini bulunuz.**

a) $r(t)=e^t i+e^{-t}j+\left(1+t^2\right)k,$ $t=0$

b) $r(t)=2(t-\sin t)i+2(1-\cos t)j,$ $t=\frac{\pi}{2}$

c) $r(t)=a\cos t i+b\sin t j,$ $t=\frac{\pi}{4}$

d) $r(t)=\sqrt{2}ti+\frac{1}{2}t^2j+\frac{1}{2}t^2k,$ $t=1$

e) $r(t)=t\cos t i+t\sin t j+tk,$ $t=\frac{\pi}{2}$

Çözüm:

a) $r(t)=e^t i+e^{-t}j+\left(1+t^2\right)k$ $t=0$

$$r'(t)=e^t i-e^{-t}j+2tk$$

$$\|r'(t)\|=\left(e^{2t}+e^{-2t}+4t^2\right)^{1/2}=\frac{\left(e^{4t}+4t^2e^{2t}+1\right)^{1/2}}{e^t}$$

$$T(t)=\frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}=\frac{e^t}{\left(e^{4t}+4t^2+e^{2t}+1\right)^{1/2}}\left(e^t i-e^{-t}j+2tk\right)$$

$$T(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}(i-j)$$

b) $r(t)=2(t-\sin t)i+2(1-\cos t)j$

$$t=\frac{\pi}{2}\Rightarrow r'(t)=2(1-\cos t)i+2\sin tj$$

$$\|r'(t)\|=\left(4-8\cos t+4\cos^2t+4\sin^2t\right)^{1/2}=(8-8\cos t)^{1/2}$$

$$=2\sqrt{2}(1-\cos t)^{1/2}=4\sin\frac{t}{2}$$

$$T(t)=\frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}=\frac{1}{2}\frac{(1-\cos t)}{\sin\frac{t}{2}}i+\frac{1}{2}\frac{\sin t}{\sin\frac{t}{2}}j=\sin\frac{t}{2}i+\frac{1}{2}\frac{\sin t}{\sin\frac{t}{2}}j$$

$$T\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}i+\frac{2}{\sqrt{2}}j$$

c) $r(t)=a\cos ti+b\sin tj$ $t=\frac{\pi}{4}$

$$r'(t)=-a\sin ti+b\cos tj\Rightarrow\|r'(t)\|=\left(a^2\sin^2t+b^2\cos^2t\right)^{1/2}$$

$$T(t)=\frac{1}{\left(a^2\sin^2t+b^2\cos^2t\right)^{\frac{1}{2}}}(-a\sin ti+b\cos tj)$$

$$T\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\left(a^2\frac{1}{2}+b^2\frac{1}{2}\right)^{1/2}}\left(-a\frac{\sqrt{2}}{2}i+b\frac{\sqrt{2}}{2}j\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)}}\frac{\sqrt{2}}{2}(-ai+bj)=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-ai+bj)$$

d) $r(t)=\sqrt{2}ti+\frac{1}{2}t^2j+\frac{1}{2}t^2k$ $t=1$

$$r'(t)=\sqrt{2}i+tj+tk\Rightarrow\|r'(t)\|=\left(2+t^2+t^2\right)^{1/2}=\sqrt{2}\left(1+t^2\right)^{1/2}$$

$$T(t)=\frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}i+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}j+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}k$$

$$T(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k$$

e) $r(t) = t\cos t\,i + \sin t\,j + t\,k, \qquad t = \frac{\pi}{2}$

$$r'(t) = (\cos t - t\sin t)i + (\sin t + t\cos t)j + k$$

$$\|r'(t)\| = \left(\cos^2 t - 2t\sin t\cos t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2\sin t\cos t + t^2\cos^2 t + 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(2 + t^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2+t^2}}\left((\cos t - t\sin t)i + (\sin t + t\cos t)j + k\right)$$

$$T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\left(2 + \frac{\pi^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}\left(-\frac{\pi}{2}i + j + k\right)$$

11. Aşağıda parametrik gösterimleri verilen eğrilerin birim teğet vektörlerini bulunuz.

a) $r(t) = \left(t^2 + 4\right)i + 2t\,j$

b) $r(t) = \cos t\,i + \sin t\,j + \sqrt{3}t\,k$

c) $r(t) = 2t\,i + t^2 j + \frac{1}{3}t^3 k$

Çözüm:

a) $r(t) = \left(t^2+4\right)i + 2t\,j \Rightarrow r'(t) = 2t\,i + 2j \Rightarrow \|r'(t)\| = \left(4t^2+4\right)^{\frac{1}{2}} = 2\left(t^2+1\right)^{\frac{1}{2}}$

$$T(t) = \frac{r'(t)}{\|r(t)\|} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}i + \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}j$$

b) $r(t) = \cos t\,i + \sin t\,j + \sqrt{3}t\,k \Rightarrow r'(t) = -\sin t\,i + \cos t\,j + \sqrt{3}\,k$

$$\|r'(t)\| = \left(\sin^2 t + \cos^2 t + 3\right)^{\frac{1}{2}} = 2$$

$$T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = \left(-\frac{\sin t}{2}i + \frac{\cos t}{2}j + \frac{\sqrt{3}}{2}k\right)$$

12. T ve N, C eğrisinin birim teğet ve normal vektörleri olduğunda

$B = T \times N$

vektörüne C eğrisinin binormali denir. Parametrik gösterimi

$r(t) = e^t i + e^{-t} j + \sqrt{2}\,t\,k$

olan eğrinin, t = 0 parametresine karşılık gelen T, N, B vektörlerini bulunuz.

Çözüm:

$$r'(t) = e^t i - e^{-t} j + \sqrt{2}\,k \Rightarrow \|r'(t)\| = \left(e^{2t} + e^{-2t} + 2\right)^{1/2} = \left[\left(e^t + e^{-t}\right)^2\right]^{1/2} = e^t + e^{-t}$$

$$T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = \frac{1}{e^t + e^{-t}}\left(e^t i - e^{-t} j + \sqrt{2}\,k\right) \Rightarrow T(0) = \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j + \frac{1}{\sqrt{2}}k$$

$$T'(t) = \left(\frac{e^t}{e^t + e^{-t}}\right)' i - \left(\frac{e^{-t}}{e^t + e^{-t}}\right)' j + \left(\frac{\sqrt{2}}{e^t + e^{-t}}\right)' k$$

$$= \frac{2}{e^{2t} + e^{-2t} + 2}i - \frac{2}{e^{2t} + e^{-2t} + 2}j + \frac{e^{-t} - e^t}{e^{3t} + e^{-3t} + 2}k$$

$$T'(0) = \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j, \quad \|T'(0)\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$N(0) = \frac{T'(0)}{\|T'(0)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}i - \frac{1}{\sqrt{2}}j$$

$$B(0) = T(0) \times N(0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j - \frac{1}{\sqrt{2}}k$$

olur.

13. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int \left[t^2 i - (3t-1)j - \frac{1}{t^3}k\right]dt$

b) $\int \left(t\cos t\,i + t\sin t\,j + 5t^4 k\right)dt$

c) $\int_0^1 \left[(1+t)^{3/2} i + (1-t)^{3/2} j\right]dt$

Çözüm:

a) $\int\left(t^2 i-(3t-1)j-\frac{1}{t^3}k\right)dt=\left(\int t^2 dt\right)i-\left(\int (3t-1)dt\right)j-\left(\int \frac{1}{t^3}dt\right)$

$$=\frac{t^3}{3}i-\left(\frac{3}{2}t^2-t\right)j+\frac{1}{2t^2}k$$

b) $\int\left(t\cos t\, i+t\sin t\, j+5t^4 k\right)dt=\left(\int t\cos t\,dt\right)i+\left(\int t\sin t\,dt\right)j+\left(\int 5t^4 dt\right)k$

$$=(t\sin t+\cos t)i+(-t\cos t+\sin t)j+t^5 k$$

c) $\int_0^1\left[(1+t)^{3/2}i+(1-t)^{3/2}j\right]dt=\int_0^1(1+t)^{3/2}dt\,i+\int_0^1(1-t)^{3/2}dt\,j$

$$=\frac{2}{5}(1+t)^{5/2}\Big|_0^1 i-\frac{2}{5}(1-t)^{5/2}\Big|_0^1 j$$

$$=\left(\frac{2}{5}2^{5/2}-\frac{2}{5}\right)i+\frac{2}{5}j$$

BÖLÜM PROBLEMLERİ VE ÇÖZÜMLERİ

1. Aşağıda parametrik gösterimleri verilen fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.

a) $F(t)=\ln(4-t^2)i+\sqrt{t-1}\,j+e^t k$

b) $F(t)=\ln(|t|-3)i+\sqrt{4-t}\,j+k$

c) $F(t)=ti+\sqrt{2-|t|}\,j+[\![t]\!]k$

Çözüm:

a) $F(t)=\ln(4-t^2)i+\sqrt{t-1}\,j+e^t k$

$f_1(t)=\ln(4-t^2)$, $\quad 4-t^2>0 \Rightarrow t^2<4 \Rightarrow |t|<2 \Rightarrow A_1=(-2,2)$

$f_2(t)=\sqrt{t-1} \quad t-1\geq 0 \Rightarrow t\geq 1 \quad A_2=[1,\infty)$

$f_3(t)=e^t \quad A_3=R$

F nin tanım kümesi $A=A_1\cap A_2\cap A_3=(-2,2)\cap[1,\infty]\cap R=[1,2)$ olur.

b) $F(t)=\ln(|t|-3)i+\sqrt{4-t}\,j+k$

$f_1(t)=\ln(|t|-3) \Rightarrow |t|-3>0\Rightarrow |t|>3 \Rightarrow A_1=(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$

$f_2(t)=\sqrt{4-t} \Rightarrow 4-t\geq 0\Rightarrow t\leq 4 \Rightarrow A_2=(-\infty,4]$

$f_3(t)=1 \quad A_3=R$

F nin tanım kümesi

$A=A_1\cap A_2\cap A_3=[(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)]\cap(-\infty,4)\cap R=(-\infty,-3)\cup(3,4]$

c) $2-|t|\geq 0\Rightarrow |t|\leq 2\Rightarrow -2\leq t\leq 2.$

$[\![t]\!]$ her yerde tanımlıdır. Çözüm kümesi $A=[-2,2]$

2. $F(t)=t|t|\,i+[\![t^2-4]\!]\,j+\sin t\,k$ **fonksiyonunun süreksiz olduğu noktalar var mıdır? Varsa bulunuz?**

Çözüm:

$f_1(t)=t|t|$, $\quad f_2(t)=[\![t^2-4]\!]=[\![t^2]\!]-4$, $\quad f_3(t)=\sin t$

$f_1(t)=t|t|$ fonksiyonu her yerde sürekli, $f_2(t)=[\![t^2]\!]-4$, $t=0$ hariç tüm tamsayılarda süreksizdir. Süreksizlik noktalarının kümesi $S=\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ dır.

3. $F(t)=\dfrac{-2t}{1+t^2}\,i+\dfrac{1+2t^2}{1+t^2}\,j, \quad G(t)=\dfrac{-2-4t^2}{(1+t^2)^2}\,i-\dfrac{4t}{(1+t^2)^2}\,j$

fonksiyonları için (F.G)'(t) türevini hesaplayınız.

Çözüm:

$$F(t)\cdot G(t)=\frac{4t+8t^3}{(1+t^2)^3}+\frac{-4t-8t^3}{(1+t^2)^3}=0 \Rightarrow (F\cdot G)'(t)=0$$

4. **Aşağıda verilen F ve g fonksiyonları için (Fog)'(t) türevlerini hesaplayınız.**

a) $F(t)=\ln t\, i-3e^{2t}\,j+\dfrac{t-1}{t}\,k, \qquad g(t)=\sqrt{t}$

b) $F(t)=t^3-i-\sqrt{3}\,t\,j+\dfrac{1}{t^2}\,k, \qquad g(t)=\cos t$

Çözüm:

a) $F(t)=\ln t\, i-4e^2\,j+\dfrac{t-1}{t}\,k \qquad g(t)=\sqrt{t}$

$$(Fog)(t)=F(g(t))=\frac{1}{2}\ln t\, i-4e^{2\sqrt{t}}\,j+\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}}\,k$$

$$(Fog)'(t)=\frac{1}{2t}\,i-\frac{4}{\sqrt{t}}e^{2\sqrt{t}}\,j+\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}}\,k$$

b) $F(t)=t^3 i-\sqrt{3}t j+\dfrac{1}{t^2}k, \qquad g(t)=\cos t$

$$(Fog)(t)=F(g(t))=\cos^3 t\, i-\sqrt{3}\cos t\, j+\frac{1}{\cos^2 t}\,k$$

$$(Fog)'(t)=\left(3\cos^2 t\sin t\right)i+\sqrt{3}\sin t\, j+\left(2\cos^{-3} t\sin t\right)k$$

5. **Teorem 6. 7 den yararlanarak**

$F(t)=\dfrac{4t}{1+4t^2}\,i+\dfrac{1-4t^2}{1+4t^2}\,j$ **için $F(t).F'(t)=0$ olacağını gösteriniz.**

Çözüm:

$$\|F(t)\|=\left(\frac{16t^2}{(1+4t^2)^2}+\frac{1-8t^2+16t^4}{(1+4t^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{16t^4+8t^2+1}{(1+4t^2)^{1/2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{(4t^2+1)^2}{(4t^2+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}=1$$

$\Rightarrow F(t)\cdot F'(t)=0$ dır.

6. **$F(t)=\cos t\, i+\sin t\, j$ olsun. $(0,\pi)$ aralığında öyle bir t_0 bulunuz ki**

$\dfrac{1}{\pi-0}\left(F(\pi)-F(0)\right)$ vektörü $F'(t_0)$ vektörüne paralel olsun.

$F'(t)=\dfrac{F(\pi)-F(0)}{\pi-0}$ olacak şekilde bir $t\in(0,\pi)$ var mıdır?

Çözüm:

$F(\pi)=-i, \qquad F(0)=i, \qquad F'(t_0)=-\sin(t_0)i+\cos(t_0)j$

$\dfrac{1}{\pi-0}(F(\pi)-F(0))=-\dfrac{2}{\pi}i$

olur.

$F'(t)=\dfrac{F(\pi)-F(0)}{\pi-0}$ olması için $-\sin(t_0)=-\dfrac{2}{\pi}$ ve $\cos t_0=0$ olmalıdır.

Böyle bir t_0 yoktur.

7. **$F(t)=\sin t\, i-\cos t\, j$ olsun. $\forall\, t\in R$ için $F(t)$ ve $F''(t)$ vektörlerinin paralel olduğunu gösteriniz.**

Bu iki vektörün yönlerini de aynı yapan bir t değeri var mı dır? Varsa bulunuz.

Çözüm:

$F'(t)=\cos t\, i+\sin t\, j \Rightarrow F''(t)=-\sin t\, i+\cos t\, j$

$F''(t)=-(\sin t\, i-\cos t\, j)=-1F(t) \Rightarrow$ F ile F'' vektörleri paraleldir. **F ile F''** her t için zıt yönlüdür.

8. Problem 7 deki soruları $F(t) = e^{-2t}i + e^{2t}j$ fonksiyonu için cevaplayınız.

Çözüm:

$F'(t) = -2e^{-2t}i + 2e^{2t}j \Rightarrow F''(t) = 4e^{-2t}i + 4e^{2t}j$

$F''(t) = 4F(t) \Rightarrow F''$ ile F vektörleri paraleldir.

9. Tanım kümesindeki her t için $F(t)$ ile $F''(t)$ paralel olsun.

$F \times F''$ fonksiyonunun sabit olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$F(t)$ ile $F''(t)$ paralel ise

$F(t) = a\,F''(t)$ olacak şekilde bir a sabiti vardır.

$\Rightarrow F(t) \times F''(t) = a\,F''(t) \times F''(t) = 0$

10. F, G, H türevlenebilen fonksiyonlar olsun.

$[F\cdot(G \times H)]' = F'\cdot(G \times H) + F\cdot(G' \times H) + F\cdot(G \times H')$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$[F\cdot(G \times H)]' = F'\cdot(G \times H) + F\cdot(G \times H)'$

$= F'\cdot(G \times H) + F\cdot(G' \times H + G \times H') = F'\cdot(G \times H) + F\cdot(G' \times H) + F\cdot(G \times H')$ olur.

11. $r(t) = \cos t\, i + \sin t\, j + t k, \quad 0 \le t \le 2\pi$ dairesel helis parçasının uzunluğunu bulunuz.

Çözüm:

$$r'(t) = -\sin t\, i + \cos t\, j + k \Rightarrow \|r'(t)\| = \left(\sin^2 t + \cos^2 t + 1\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$L = \int_0^{2\pi} \|r'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\sqrt{2}\pi$$

12. Parametrik gösterimleri

$r_1(t) = t i + 2t j + t^2 k$ ve $r_2(t) = t^2 i + (t+1) j + \left(2 - t^2\right) k$ olan iki eğrinin A(1, 1) noktasında kesiştiklerini gösteriniz. Bu iki eğriye A noktasında çizilen teğet vektörlerinin dik olduklarını gösteriniz.

Çözüm:

$$\left.\begin{array}{l} t = t^2 \\ 2t = t+1 \\ t^2 = 2 - t^2 \end{array}\right\} \Rightarrow t = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} r_1'(t) = i + 2j + 2t k, \\ \|r_1'(t)\| = \sqrt{1 + 4 + 4t^2} = \sqrt{5 + 4t^2} \end{array}\right\} \Rightarrow T_1(1) = \frac{i + 2j + 2k}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} r_2'(t) = 2t i + j - 2t k, \\ \|r_2'(t)\| = \sqrt{4t^2 + 1 + 4t^2} = \sqrt{1 + 8t^2} \end{array}\right\} \Rightarrow T_2(1) = \frac{2i + j - 2k}{3}$$

$$T_1(1)\cdot T_2(1) = \frac{1}{9}(1.2 + 2.1 + 2(-2)) = 0 \Rightarrow T_1(0) \perp T_2(0)$$

13. Parametrik gösterimleri $r_1(t) = t i + 2t j + t^2 k$ ve $r_2(t) = t^2 i + (t+1) j + \left(2 - t^2\right) k$ olan iki eğrinin A(1, 2, 1) noktasında kesiştiklerini gösteriniz.

Bu iki eğriye A noktasında çizilen teğet vektörlerin dik olduklarını gösteriniz.

Çözüm:

$$\left.\begin{array}{l} r_1(1) = i + 2j + k \\ r_2(1) = i + 2j + 2k \end{array}\right\} \Rightarrow r_1(1) = r_2(1) \Rightarrow (1, 2, 1) \text{ noktasında kesişirler.}$$

$$r_1'(t) = i + 2t j \; 2t k \Rightarrow \|r_1'(t)\| = \left(1 + 4 + 4t^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(4t^2 + 5\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$T_1(t) = \frac{1}{\sqrt{4t^2 + 5}} i + \frac{2}{\sqrt{4t^2 + 5}} j + \frac{2t}{\sqrt{4t^2 + 5}} k \Rightarrow T_1(1) = \frac{1}{3} i + \frac{2}{3} j + \frac{2}{3} k$$

$r_2'(t) = 2ti + j - 2tk \Rightarrow \|r_2'(t)\| = (4t^2+1+4t^2)^{\frac{1}{2}} = (8t^2+1)^{\frac{1}{2}}$

$$T_2(t) = \frac{2t}{(8t^2+1)^{\frac{1}{2}}}i + \frac{1}{(8t^2+1)^{\frac{1}{2}}}i - \frac{2t}{(8t^2+1)^{\frac{1}{2}}}k \Rightarrow T_2(1) = \frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j - \frac{2}{3}k$$

$T_1 \cdot T_2 = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} - \frac{4}{9} = 0 \Rightarrow T_1$ ve T_2 diktir.

14. Bir golf topunun konum vektörü

$r(t) = 90\sqrt{2}t\, i + 90\sqrt{2}\,t^2\, j + (64t - 16t^2)\, k, \quad t \geq 0$ olduğuna göre

a) Başlangıç anındaki konum ve hız vektörlerini bulunuz.

b) t = 4 anında topun yere çarpacağını gösteriniz. Bu anda top başlangıç noktasından ne kadar uzaklaşmış olur.

Çözüm:

a) $t = 0$ için $\quad r(0) = 0$

$V(t) = r'(t) = 90\sqrt{2}\, i + 180\sqrt{2}t\, j + (64 - 32t)k \Rightarrow V(0) = 90\sqrt{2}\, i + 64k$

b) $f_3(t) = (64t - 16t^2)$ olduğundan $t = 4$ için $f_3(4) = (64.4 - 16.16) = 0$ olur.

$$L = \left[\left(90\sqrt{2}.4\right)^2 + \left(90\sqrt{2}.16\right)^2\right]^{1/2} = \left(90^2.2^5 + 90^2 2^{10}\right)^{1/2} = 2880$$

15. $t \geq 0$ için $F(t) = t\cos 2t\, i + t\sin 2t\, j + e^t k$ olsun. Her $t \geq 0$ için $\|h(t)F(t)\| = 1$ olacak şekilde bir reel değerli h fonksiyonu bulunuz.

Çözüm:

$h(t) \cdot F(t) = h(t)t\cos 2t\, i + h(t)t\sin 2t\, j + h(t)e^t k$

$$\|h(t) \cdot F(t)\| = \left(h^2(t)t^2\cos^2 2t + h^2(t)t^2\sin^2 2t + h^2(t)e^{2t}\right)^{1/2} = |h(t)|\left(t^2 + e^{2t}\right)^{1/2}$$

$\|h(t).F(t)\| = 1$ olması için $|h(t)|\left(t^2 + e^{2t}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow |h(t)| = \dfrac{1}{\left(t^2 + e^{2t}\right)^{\frac{1}{2}}}$ olmalıdır.

16. 15. soruyu $F(t) = e^{-t}\cos t\, i + e^{-t}\sin t\, j + e^t k$ $\quad (t \geq 0)$ fonksiyonu için tekrarlayınız.

Çözüm:

$h(t)F(t) = h(t)e^{-t}\cos t\, i + h(t)e^{-t}\sin t\, j + h(t)e^t k$

$$\|h(t)F(t)\| = \left(h^2(t)e^{-2t}\cos^2 t + h^2(t)e^{-2t}\sin^2 t + h^2(t)e^{2t}\right)^{\frac{1}{2}} = |h(t)|\left(e^{-2t} + e^{2t}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$\|h(t)F(t)\| = 1$ olması için $|h(t)|\left(e^{-2t} + e^{2t}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow |h(t)| = \dfrac{1}{\left(e^{-2t} + e^{2t}\right)^{\frac{1}{2}}}$ olmalıdır.

17. $[0, 2\pi)$ aralığında tanımlanan $F(t) = a(\cos t\, i + \sin t\, j) + b\, t\, k$ ve

$G(t) = -\sin t\, i + \cos t\, j$ fonksiyonlarının ortagonal olduklarını gösteriniz.

F x G fonksiyonuna paralel olan bir birim vektör fonksiyonu (normu 1 olan vektör değerli fonksiyon) bulunuz.

Çözüm:

$F(t) \cdot G(t) = -a\cos t\sin t + a\cos t\sin t = 0 \Rightarrow$ F ile G fonksiyonları ortagonaldir.

$$(F \times G)(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a\cos t & a\sin t & bt \\ -\sin t & \cos t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-bt\cos t)\mathbf{i} - (bt\sin t)\mathbf{j} + \left(a\cos^2 t + a\sin^2 t\right)\mathbf{k} = -bt\cos t\, i - bt\sin t\, j + a\, k$$

$$\|F \times G\| = \sqrt{b^2t^2\cos^2 t + b^2t^2\sin^2 t + a^2} = \sqrt{b^2t^2 + a^2}$$

olduğundan aranan birim vektör

$$\mathbf{e} = \left(\frac{-bt\cos t}{\sqrt{b^2t^2 + a^2}}\right)i - \left(\frac{bt\sin t}{\sqrt{b^2t^2 + a^2}}\right)j + \frac{a}{\sqrt{b^2t^2 + a^2}}k$$

vektörüdür.

18. a, b ve c sabit sayılar olmak üzere

$F(t) = a(\cos ct\, i + \sin ct\, j) + bk, \quad 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{c}$ fonksiyonunun Teorem 6.7 nin hipotezlerini gerçeklendiğini gösteriniz. F(t) . F'(t) çarpımını hesaplayınız.

Çözüm:

Teorem 6.7ye göre F fonksiyonu (a, b) aralığının her noktasında türevlenebilir ve $\|F\|$ sabit ise F ile F′ ortaganaldir.

$$\|F\| = \left(a^2\cos^2 ct + a^2\sin^2 ct + b^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \text{(sabit)}$$

olduğundan $F(t)\cdot F'(t) = 0$ dır.

19. $F(t) = a\sin 2t\, i + a(1+\cos 2t)\, j + 2a\sin t\, k, \quad 0 \le t < \pi$ **fonksiyonu için** $[F(t).F'(t)]'$ **türevini hesaplayınız.**

Çözüm:

$F'(t) = 2a\cos 2t\, i - 2a\sin 2t\, j + 2a\cos t\, k$ olduğundan

$$F(t)\cdot F'(t) = 2a^2\sin 2t\cos 2t - 2a^2\sin 2t(1+\cos 2t) + 4a^2\sin t\cos t$$

$$= a^2\sin 4t - 2a^2\sin 2t - a^2\sin 4t + 2a^2\sin 2t = 0$$

olduğundan $[F(t)\cdot F'(t)]' = 0$ dır.

20. $F(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}i + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}j + k, \quad t \ge 0$ **olsun. F(t) ile F′(t) arasındaki açının t den bağımsız olduğunu gösteriniz.**

Çözüm:

$$F'(t) = \frac{2t+2t^2-4t^2}{\left(1+t^2\right)^2}i + \frac{\left(-2t-2t^3-2t+2t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2}j = \frac{2-2t^2}{\left(1+t^2\right)^2}i - \frac{4t}{\left(1+t^2\right)^2}j$$

$$F(t)\cdot F'(t) = \frac{4t-4t^3-4t+4t^3}{\left(1+t^2\right)^3} = 0 \;\Rightarrow\; \text{F ile F}' \text{ birbirine ortaganaldir.}$$

21. $F(t) = \cos(at)i + \sin(at)j$ **olsun. F(t) fonksiyonunun** $F''(t) + a^2F(t) = 0$ **denklemini sağladığını gösteriniz.**

Çözüm:

$$F'(t) = -a\sin(at)i + a\cos(at)j \;\Rightarrow\; F''(t) = -a^2\cos(at)i - a^2\sin(at)j$$

$$F''(t) + a^2F(t) = -a^2\cos(at)i - a^2\sin(at)j + a^2\cos(at)i + a^2\sin(at)j = 0$$

22. A ve B sabit vektörler ve f de ikinci mertebeden türevlenebilen bir reel değerli fonksiyon olsun.

$F(t) = A + Bf(t)$ **fonksiyonu için** $F'(t) \times F''(t) = 0$ **olduğunu gösteriniz.**

Çözüm:

$F'(t) = Bf'(t), \quad F''(t) = Bf''(t)$ olur.

$F'(t)\times f''(t) = Bf'(t)\times Bf''(t) = F'(t)f''(t)(B\times B) = 0$ bulunur.

23. $r(t) = e^t(\cos t\, i + \sin t\, j + k) \quad t \in [0,s]$ **eğri parçasının uzunluğunu s parametresine bağlı olarak hesaplayınız.**

Çözüm:

$$r'(t) = \left(e^t\cos t - e^t\sin t\right)i + \left(e^t\sin t + e^t\cos t\right)j + e^t k$$

$$\|r'(t)\| = \left(e^{2t}\left(\cos^2 t - 2\cos t\sin t + \sin^2 t\right) + e^{2t}\left(\sin^2 t + 2\sin t\cos t + \cos^2 t\right) + e^{2t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(2e^{2t}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}e^t$$

$$L = \int_0^s \|r'(t)\|dt = \int_0^s \sqrt{2}e^t dt = \sqrt{2}\left(e^s - 1\right)$$

24. Reel değerli fonksiyonların sağ ve sol taraflı limit tanımından yararlanarak vektör değerli fonksiyonların sağ ve sol taraflı limitlerini tanımlayınız. Bundan yararlanarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\left(t\,i + 2t^{\frac{1}{4}}j - \frac{\ln t}{t}k\right)$ b) $\displaystyle\lim_{t\to 1^-}\left[\sqrt{1-t}\,i - (1-t)\ln(1-t)\right]j$

c) $\displaystyle\lim_{t\to 1^+}\left[e^{\frac{1}{(1-t)}}i + \sqrt{t+1}\,j + \ln(2+t)k\right]$

Çözüm:

a) $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\left(t\,i + 2t^{\frac{1}{4}}j - \frac{\ln t}{t}k\right)$

$\displaystyle\lim_{t\to 0^+} t = 0, \quad \lim_{t\to 0^+} 2t^{\frac{1}{4}} = 0, \quad \lim_{t\to 0^+} -\frac{\ln t}{t} = \infty \Rightarrow$ limit yok

b) $\lim\limits_{t\to -1} \sqrt{1-t}\,i-(1-t)\ln(1-t)\,j$

$\lim\limits_{t\to -1^-} \sqrt{1-t}=\sqrt{2}$ ve $\lim\limits_{t\to -1^-} -(1-t)\ln(1-t)=-2\ln 2$ olduğundan

$\lim\limits_{t\to -1} \sqrt{1-t}\,i-(1-t)\ln(1-t)\,j=\sqrt{2}\,i-2\ln 2\,j$ bulunur

c) $\lim\limits_{t\to -1^+} e^{\frac{1}{1-t}}\,i+\sqrt{t-1}\,j+\ln t\,k$

$\lim\limits_{t\to -1^+} e^{\frac{1}{1-t}}=e^{\frac{1}{2}}$, $\lim\limits_{t\to -1^+} \sqrt{t+1}=0$ ve $\lim\limits_{t\to -1^+} \ln(2+t)=0 \Rightarrow$

$\lim\limits_{t\to -1^+} e^{\frac{1}{1-t}}\,i+\sqrt{t+1}\,j+\ln(2+t)\,k=\sqrt{e}\,i$

25. **$\lim\limits_{t\to\infty} F(t)$ limitini tanımlayıp bileşen fonksiyonlarının limiti cinsinden ifade ediniz.**

Bundan yararlanarak $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}i+\frac{t-1}{t+1}j+\frac{\sin t^3}{t^2}k\right)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm:

$F(t)=f_1(t)i+f_2(t)j+f_3(t)\,\mathbf{k}$ fonksiyonu için

$$\lim_{t\to\infty} F(t)=\left(\lim_{t\to\infty} f_1(t)\right)i+\left(\lim_{t\to\infty} f_2(t)\right)j+\left(\lim_{t\to\infty} f_3(t)\right)k$$

olur.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}=0,\quad \lim_{t\to\infty}\frac{t-1}{t+1}=1,\quad \lim_{t\to\infty}\frac{\sin t^3}{t^2}=0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}i+\frac{t-1}{t+1}j+\frac{\sin t^3}{t^2}\mathbf{k}\right)=j$$

Bölüm 7 — ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

TANIM

Tanım kümesi R^n kümesinin bir alt kümesi olan fonksiyonlara bir **n– değişkenli fonksiyon** adı verilir. Eğer değer kümesi R ise fonksiyona **n– değişkenli reel değerli fonksiyon** denir.

TANIM

$z=f(x,y)$ fonksiyonu verildiğinde xOy düzleminde, fonksiyonun sabit değerler aldığı noktaların oluşturduğu eğrilere f nin **seviye eğrileri** denir.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. **Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların tanım kümelerini bulup kartezyen düzleminde gösteriniz.**

a) $f(x,y)=\sqrt{x-y}$

b) $g(x,y)=\frac{y}{x^2}$

c) $h(x,y)=1+x^2+y^2$

d) $k(x,y)=\ln(x^2+y^2-4)$

e) $\ell(x,y)=\ln x+\ln y$

f) $m(x,y)=\sqrt{xy}+\ln(x^2+y^2-1)$

g) $n(x,y)=\frac{x}{y}-\frac{y}{x}$

h) $u(x,y)=\ln(y-x^2)$

ı) $v(x,y)=\sqrt{x^2-y}+\ln(y-1)$

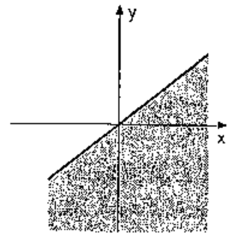
i) $w(x,y)=\sqrt{xy-x^4}$

Çözüm:

a) $f(x,y)=\sqrt{x-y}$

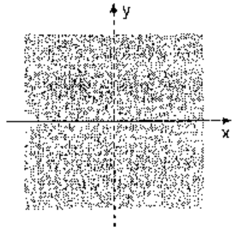
$x-y\ge 0 \Rightarrow x\ge y$

Tanım kümesi $A=\{(x,y): y\le x\}$



b) $g(x,y)=\dfrac{y}{x^2}$

$A=\{(x,y):\ x\neq 0\}$



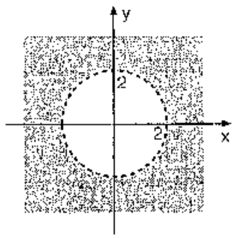
c) $h(x,y)=1+x^2+y^2$

$A=R^2$

d) $k(x,y)=\ln\left(x^2+y^2-4\right)$

$x^2+y^2-4>0\rightarrow x^2+y^2>4$

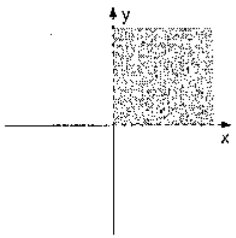
$A=\{(x,y):\ x^2+y^2>4\}$



e) $\ell(x,y)=\ln x+\ln y$

$x>0$ ve $y>0$ olmalı

$A=\{(x,y):x>0 \text{ ve } y>0\}$

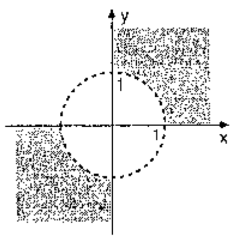


f) $m(x,y)=\sqrt{xy}+\ln\left(x^2+y^2-1\right)$

$xy\geq 0$ ve $x^2+y^2-1>0$

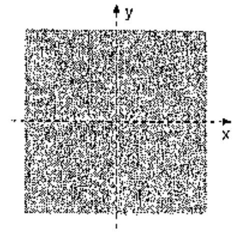
$xy\geq 0$ ve $x^2+y^2>1$

$A=\{(x,y):\ xy\geq 0 \text{ ve } x^2+y^2>1\}$



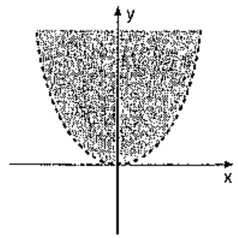
g) $n(x,y)=\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}$

$y\neq 0$ ve $x\neq 0$ $\quad A=\{(x,y):\ x\neq 0,\ y\neq 0\}$



h) $u(x,y)=\ln\left(y-x^2\right)$

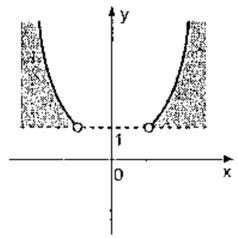
$y-x^2>0\Rightarrow y>x^2$ $\quad A=\{x,y:\ y>x^2\}$



ı) $v(x,y)=\sqrt{x^2-y}+\ln(y-1)$

$x^2-y\geq 0$ ve $y-1>0$

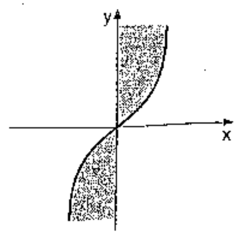
$A=\{(x,y):\ x^2\geq y \text{ ve } y>1\}$



i) $w(x,y)=\sqrt{xy-x^4}$

$xy-x^4\geq 0\Rightarrow x\left(y-x^3\right)\geq 0\Leftrightarrow\left(x\geq 0 \text{ ve } y-x^3\geq 0\right)$ veya $\left(x\leq 0 \text{ ve } y-x^3\leq 0\right)$

$A=\{(x,y):\ x\geq 0 \text{ ve } y\geq x^3\}\cup\{(x,y):\ x\leq 0 \text{ ve } y\leq x^3\}$



2. Aşağıdaki bağıntılarla tanımlanan fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

a) $f(x,y)=\sqrt{y-x}$ b) $g(x,y)=e^{\cos(xy)}$ c) $h(x,y)=\ln x+\ln y$

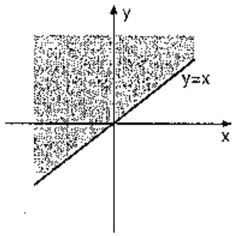
d) $u(x,y)=4x^2+9y^2$ e) $v(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ f) $w(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$

Çözüm:

a) $f(x,y)=\sqrt{y-x}$

Tanım kümesi $A=\{(x,y):\quad y\geq x\}$

Görüntü kümesi $R=(-\infty,\ +\infty)$



b) $g(x,y)=e^{\cos xy}$

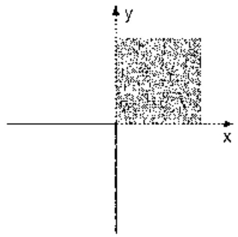
Tanım kümesi: $A=R^2$

Görüntü kümesi: $-1\leq\cos xy\leq+1\Rightarrow e^{-1}\leq e^{\cos xy}\leq e\ \Rightarrow\ G=\left[e^{-1},e\right]$

c) $h(x,y)=\ln x+\ln y$

Tanım kümesi $A=\{(x,y): x>0 \text{ ve } y>0\}$

$G=(-\infty,+\infty)$

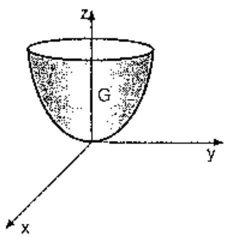


d) $u(x,y)=4x^2+9y^2$

Tanım kümesi $A=R^2$

Görüntü kümesi

$G=\left\{z:\ z=4x^2+9y^2 \text{ ve } (x,y)\in A\right\}=[0,\ \infty)$



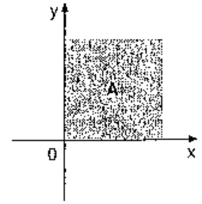
e) $v(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

Tanım kümesi

$A=\{(x,y): x\geq 0 \text{ ve } y\geq 0\}$

Görüntü kümesi

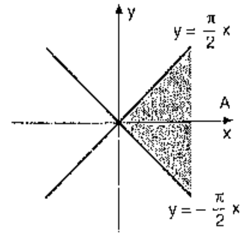
$G=\left\{z:\ z=\sqrt{x}+\sqrt{y},\ (x,y)\in A\right\}=[0,+\infty)$



f) $w(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$

Tanım kümesi $A=\left\{(x,y):\ -\dfrac{\pi}{2}\leq\dfrac{y}{x}\leq\dfrac{\pi}{2}\right\}$

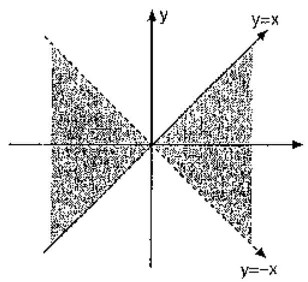
Görüntü kümesi $G=(-\infty,\ +\infty)=R$



3. $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}$ **fonksiyonunun tanım kümesini bulup kartezyen düzlemde gösteriniz.**

Çözüm:

$\dfrac{x-y}{x+y}\geq 0\ \Leftrightarrow (x-y\geq 0 \text{ ve } x+y>0)$ veya $(x-y\leq 0 \text{ ve } x+y<0)$



4. Seviye eğrilerinden yararlanarak aşağıdaki yüzeyleri çiziniz.

a) $z = x^2 + y^2$ b) $z = 4 - x^2 - y^2$

c) $z = 4x^2 + 9y^2$ d) $z = \mp\sqrt{x^2 + y^2}$

e) $z = x^2 - y^2$ f) $z = e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

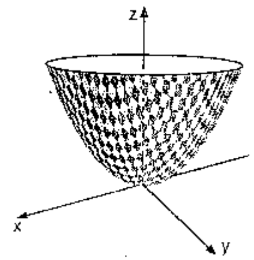
g) $z = 1 - |y|$ h) $z = y^2$

ı) $z = 1 - |x| - |y|$ j) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

Çözüm:

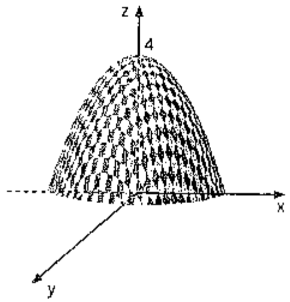
a) $z = x^2 + y^2$

Seviye eğrileri $x^2 + y^2 = c^2$ çemberleridir.

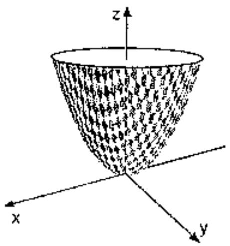


b) $z = 4 - x^2 - y^2$

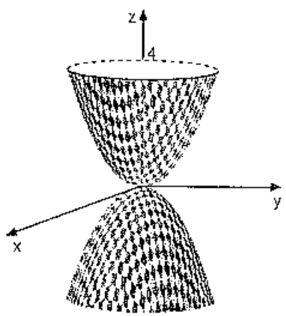
Seviye eğrileri $x^2 + y^2 = c^2$ çemberleridir.



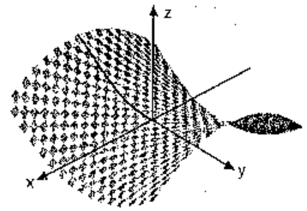
c) $z = 4x^2 + 9y^2$



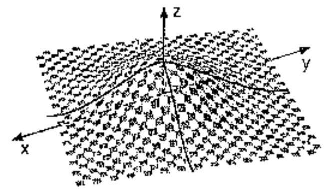
d) $z = \mp\sqrt{x^2 + y^2}$



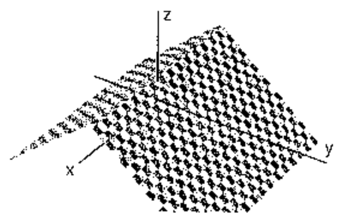
e) $z = x^2 - y^2$



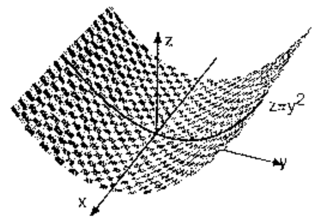
f) $z = e^{-\left(x^2+y^2\right)}$



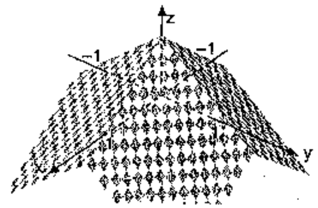
g) $z = 1 - |y|$



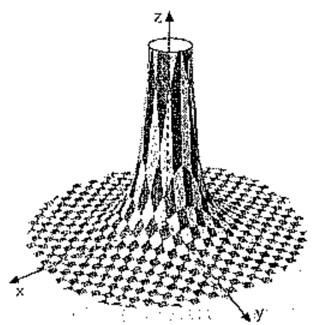
h) $z = y^2$



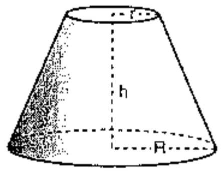
ı) $z = 1 - |x| - |y|$



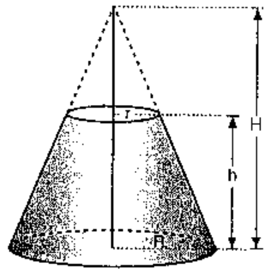
j) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$



5. **Yandaki kesik dairesel konin hacmini R, r ve h cinsinden ifade ediniz.**



Çözüm:



$$\frac{r}{R}=\frac{H-h}{H}$$

$$Hr=RH-hR$$

$$H(r-R)=-hR$$

$$H=\frac{hR}{R-r}$$

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2H-\frac{1}{3}\pi r^2(H-h)$$

$$=\frac{1}{3}\pi\left(R^2-r^2\right)H+\frac{1}{3}\pi r^2h$$

$$=\frac{1}{3}\pi\left(R^2-r^2\right)\left(\frac{h.R}{R-r}\right)+\frac{1}{3}\pi r^2.h$$

$$=\frac{1}{3}\pi h\left(R^2+rR+r^2\right)$$

6. **Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı olan noktalardan geçen seviye eğrilerini çiziniz.**

a) $f(x,y)=4-x^2-y^2,\qquad A\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$

b) $f(x,y)=\sqrt{x^2-1},\qquad A(1,0)$

c) $f(x,y)=\int_x^y\frac{dt}{1+t^2},\qquad A\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

d) $f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^n,\qquad A(1,2)$

Çözüm:

a) $f(x,y)=4-x^2-y^2$ fonksiyonunun seviye eğrileri $x^2+y^2=a^2$ çemberleridir. Bu çemberlerden $A\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ noktasından geçenini bulalım.

$x^2+y^2=a^2\Rightarrow\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2=a^2\Rightarrow 4=a^2$ olacağından istenen seviye eğrisi $x^2+y^2=4$ çemberidir.

b) $c^2\geq 1$ olmak üzere $x=c$ doğruları birer seviye eğrisidir. İstenen seviye eğrisi $x=1$ doğrusudur.

c) $f(x,y)=\int_x^y\frac{dt}{1+t^2}=\arctan y-\arctan x$ fonksiyonunun seviye eğrileri

$\arctan y-\arctan x=c$ biçimindedir. Bunun $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ noktasından geçmesi için

$c=\arctan\left(\sqrt{2}\right)-\arctan\left(-\sqrt{2}\right)=2\arctan\sqrt{2}$ olmalıdır.

O halde istenen seviye eğrisi $\arctan y-\arctan x=2\arctan\sqrt{2}$ denklemli eğridir.

d) $\left|\frac{x}{y}\right|<1$ için $f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{y}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{x}{y}}=\frac{y}{y-x}$ olduğundan

seviye eğrisi $\frac{y}{y-x}=c$ biçimindedir. Bu eğri (1, 2) noktasından geçtiğinden

$2=c$ olmalıdır. İstenen eğri $\frac{y}{y-x}=2\Rightarrow y=2x$ denklemli doğrudur.

LİMİT VE SÜREKLİLİK

TANIM:

$A \subset R^2$, (a,b), A kümesinin bir yığılma noktası ve f de A üzerinde tanımlı, reel değerli bir fonksiyon olsun.

f fonksiyonunun (a, b) noktasındaki limiti ℓ dir $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyleki A kümesinin (a, b) noktasının δ– komşuluğunda bulunan tüm (x, y) noktaları için $f(x, y)$ değerleri ℓ nin ε– komşuluğunda bulunur.

f fonksiyonunun (a, b) noktasındaki limiti ℓ ise bu $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \ell$ biçiminde gösterilir.

SONUÇ 7.1

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \ell \Leftrightarrow \forall\varepsilon$ için $\exists\delta > 0$ öyleki $|x-a| < \delta$ ve $|y-b| < \delta$ bağıntısını sağlayan, tanım kümesindeki tüm (x, y) noktları için $|f(x,y) - \ell| < \varepsilon$ dur.

TEOREM 7.4:

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \ell_1$ ve $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = \ell_2$ limitleri mevcut olsun.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y) + g(x,y)] = \ell_1 + \ell_2$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)g(x,y) = \ell_1 . \ell_2$

c) her $c \in R$ için $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} c.f(x,y) = c\,\ell_1$

d) $g(x,y) \neq 0$ ve $\ell_2 \neq 0$ ise $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$

TANIM

$A \subset R^2$ ve (a, b), A kümesinin bir yığılma noktası olsun. f, (a, b) de tanımlı ve $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ ise f fonksiyonu **(a, b) de süreklidir** denir. Eğer f fonksiyonu A tanım kümesinin her noktasında sürekli ise **A da süreklidir** denir.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2 - y^2 + 5}{x^2 + y^2 + 2} = \dfrac{5}{2}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{\sin xy}{y} = 0$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2 - \sqrt{xy+4}}{xy} = -\dfrac{1}{4}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{xy} = 1$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x} = 0$

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\ln 2)} e^{x-y} = \dfrac{1}{2}$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\dfrac{x^2+y^2}{x+y+1}\right) = 1$

h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\sin y}{x^2+1} = 0$

ı) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{\pi}{2}$

i) $\lim\limits_{(x,y)\to\left(0,\frac{\pi}{4}\right)} \sec x \tan y = 1$

j) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \cos\sqrt[3]{|xy|-1} = 1$

k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^y \sin x}{x} = 1$

Çözüm:

a) $x = r\sin\varphi$, $y = r\sin\varphi$ konulursa

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2 - y^2 + 5}{x^2 + y^2 + 2} = \lim_{r\to 0} \frac{3r^2\cos\theta - r^2\sin^2\theta + 5}{r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 2} = \frac{5}{2}$$

b) $\varepsilon > 0$ ve $\delta = \varepsilon$ olsun.

$|x| < \delta$ ve $|y-1| < \delta$ için

$\left|\dfrac{\sin xy}{y} - 0\right| = \dfrac{|\sin xy|}{|y|} \leq \dfrac{|xy|}{|y|} = |x| < \delta = \varepsilon$ kalır ki bu,

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{\sin xy}{y} = 0$ olduğunu gösterir.

c) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(2-\sqrt{xy+4}\right)\left(2+\sqrt{xy+4}\right)}{xy\left(2+\sqrt{xy+4}\right)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-xy}{xy\left(2+\sqrt{xy+4}\right)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}}$$

$$= \frac{-1}{2+2} = -\frac{1}{4}$$

d) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1$$

$xy = u$ yazıp $u \to 0$ için limit alınırsa 1 bulunur.

e) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy}.x = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy}.\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 1.0 = 0$$

f) $$\lim_{(x,y)\to(0,\ln 2)} e^{x-y} = \lim_{(x,y)\to(0,\ln 2)} \left(e^x e^{-y}\right) = \lim_{x\to 0} e^x \lim_{y\to \ln 2} e^{-y} = 1.e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$$

g) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\frac{x^2+y^2}{x+y+1}\right) = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y+1} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2}{r\cos\theta + r\sin\theta + 1} = 0 \text{ olduğundan}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\frac{x^2+y^2}{x+y+1}\right) = 1 \text{ dir.}$$

h) $$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x\sin y}{x^2+1} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x^2+1}.\lim_{y\to 0} \sin y = \frac{1}{2}.0 = 0$$

ı) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \arctan\frac{1}{r} = \frac{\pi}{2}$$

i) $$\lim_{(x,y)\to\left(0,\frac{\pi}{4}\right)} \sec x \tan y = \lim_{x\to 0} \sec x.\lim_{y\to\frac{\pi}{4}} \tan y = 1.1 = 1$$

j) Kosinüs fonksiyonu sürekli olduğundan

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \cos\sqrt[3]{|xy|-1} = \cos\left(\lim_{(x,y)\to(1,1)} \sqrt[3]{|xy|-1}\right) = \cos 0 = 1$$

k) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^y \sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{y\to 0} e^y = 1.1 = 1$$

2. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz. (Önce kesirleri sade hale getiriniz.)

a) $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y} = 0$$

b) $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-y-2x+2}{x-1} = -1$$

c) $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y^2}{x-y} = 2$$

d) $$\lim_{(x,y)\to(2,-4)} \frac{y+4}{x^2y-xy+4x^2-4x}$$

Çözüm:

a) $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)^2}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} (x-y) = 1-1 = 0$$

b) $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-y-2x+2}{x-1} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y(x-1)-2(x-1)}{x-1} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} (y-2) = -1$$

c) $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y^2}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} x+y = 1+1 = 2$$

d) $$\lim_{(x,y)\to(2,-4)} \frac{y+4}{x^2(y+4)-x(y+4)} = \lim_{(x,y)\to(2,-4)} \frac{1}{x^2-x} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{2}$$

3. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{x^3+2x^2y-xy-2y^2}{x+2y}$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y}{x}$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

Çözüm:

a) $$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^3+2x^2y-xy-2y^2}{x+2y} = \lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^2(x+2y)-y(x+2y)}{x+2y}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(2,1)} x^2-y = 4-1=3$$

b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{r\to0} \frac{\sin r^2}{r^2} = 1$$

c) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to0} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}} = \lim_{r\to0} r\cos\theta\sin\theta = 0$$

d) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x} = \lim_{r\to0} \frac{r\cos\theta}{r\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$ limit yok. θ değiştikçe limit değişir.

e) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to0} \frac{r^3(\cos^3\theta+\sin^3\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} = \lim_{r\to0} r(\cos^3\theta+\sin^3\theta) = 0$$

4. Aşağıdaki fonksiyonların (0, 0) noktasındaki limitlerinin varolmadığını gösteriniz. (Farklı eğriler üzerinden yaklaşıldığında limitlerin değiştiğini gösteriniz.)

a) $f(x,y)=\dfrac{x^4-y^2}{x^4+y^2}$ b) $f(x,y)=\dfrac{xy}{|xy|}$ c) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$

d) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{y}$ e) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ f) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2-y}$

g) $f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ h) $f(x,y)=\dfrac{x^4}{x^4+y^2}$

Çözüm:

a) $f(x,y)=\dfrac{x^4-y^2}{x^4+y^2}$

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0} \frac{x^4+y^2}{x^4+y^2}\right) = \lim_{x\to0} \frac{x^4}{x^4} = \lim_{x\to0} 1 = 1$$

$$\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0} \frac{x^4-y^2}{x^4+y^2}\right) = \lim_{y\to0} \frac{-y^2}{y^2} = \lim_{y\to0}(-1) = -1$$ olacağından limit yoktur.

b) $f(x,y)=\dfrac{xy}{|xy|}$

$y = mx$ doğruları boyunca yaklaşalım.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|} = \lim_{x\to0} \frac{x\,mx}{|x\,mx|} = \frac{m}{|m|}$$

olacağından m nin pozitif ve negatif oluşuna göre sonuç değişir.

Örneğin önce $y = 2x$ sonra $y = -2x$ doğruları ile yaklaşırsa

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|} = \lim_{x\to0} \frac{x.2x}{|x.2x|} = \lim_{x\to0} \frac{2x^2}{2x^2} = \lim_{x\to0} 1 = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|} = \lim_{x\to0} \frac{x(-2x)}{|x(-2x)|} = \lim_{x\to0} \frac{-2x^2}{2x^2} = \lim(-1) = -1$$

bulunur.

c) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{r\to0} \frac{r\cos\theta-r\sin\theta}{r\cos\theta+r\sin\theta} = \frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$$ olacağından limit yoktur.

Zira farklı θ lar için farklı limitler bulunur.

d) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{y}$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2+y^2}{y}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{y^2}{y}\right) = \lim_{y\to 0}(y) = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0^+}\frac{x^2+y^2}{y}\right) = \lim_{x\to 0}\infty = \infty$$

olduğundan (0, 0) da limit yoktur.

e) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$

y = mx doğruları boyunca yaklaşalım.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+mx}{x-mx} = \lim_{x\to 0}\frac{1+m}{1-m} = \frac{1+m}{1-m}$$

Herbir m için limit farklı olacağından limit yoktur.

f) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2-y}$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2}{x^2-y}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0}1 = 1 \\ &\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2-y}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{0}{-y} = 0 \end{aligned}\right\}\ \text{o halde limit yoktur.}$$

g) $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0}\frac{r\cos\theta}{\left(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{r\to 0}\frac{r\cos\theta}{r} = \cos\theta$$

Herbir θ için farklı değerler elde edileceğinden limit yoktur.

h) $f(x,y) = \dfrac{x^4}{x^4+y^2}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^4}{x^4+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4} = \lim_{x\to 0}1 = 1.$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0}0 = 0.$$

O halde limit yoktur.

5. (a, b) merkezli bir açık yuvarda bulunan ve (a, b)'den farklı tüm (x,y) noktalarında $g(x,y) \le f(x,y) \le h(x,y)$ olsun.

g ve h fonksiyonlarının (a, b) noktasındaki limitleri var ve aynı ℓ sayısı ise $f$nin de (a,b) de limiti vardır ve bu limit ℓ sayısıdır. SANDİVİÇ ÖZELLİĞİ denilen bu özelliği ispatlayınız. Bundan yararlanarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\arctan(xy)}{xy}$ $\quad\left(1-\dfrac{x^2y^2}{3} < \dfrac{\arctan(xy)}{xy} < 1\right)$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4-4\cos\sqrt{|xy|}}{|x.y|}$ $\quad\left(2|xy| - \dfrac{x^2y^2}{6} < 4-4\cos\sqrt{|xy|} < 2|xy|\right)$

Çözüm:

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = L$ olsun. Buna göre $\forall\varepsilon>0$ için $\exists\delta$ öyleki

$|x-a|<\delta$ ve $|y-b|<\delta$ için $|g(x,y)-L|<\varepsilon$ ve $|h(x,y)-L|<\varepsilon$ kalır. Bu durumda

aynı x ve y ler için $|f(x,y)-L|<\varepsilon$ kalır ki bu $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ olduğunu gösterir.

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} 1-\frac{x^2y^2}{3} = 1$ ve $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 = 1$

olduğundan $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\arctan(x,y)}{xy} = 1$ olur.

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2|xy| = \lim_{x\to 0}2|x|.\lim_{y\to 0}|y| = 0.0 = 0$ ve

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2|xy| - \frac{x^2y^2}{6} = \lim_{r\to 0} 2r^2|\sin\theta\cos\theta| - \frac{r^4\sin^2\theta\cos^2\theta}{6} = 0$$

olduğundan

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4-\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|} = 0$$

bulunur.

6. Aşağıdaki fonksiyonların limitini kutupsal koordinatlara geçerek hesaplayınız.

a) $f(x,y)=\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}$ b) $f(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$

c) $f(x,y)=\cos\left(\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right)$ d) $f(x,y)=\dfrac{2x}{x^2+x+y^2}$

e) $f(x,y)=\arctan\dfrac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$ f) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Çözüm:

a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}=\lim_{r\to0}\frac{r^3\cos^3\theta-r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}$$

$$=\lim_{r\to0}r\left(\cos^3\theta-\cos\theta\sin^2\theta\right)=0$$

b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^2}{x^2+y^2}=\lim_{r\to0}\frac{r^2\sin^2\theta}{r^2\left(\cos^2\theta\sin^2\theta\right)}=\lim_{r\to0}\sin^2\theta=\sin^2\theta$$

limit yok.

c) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\cos\left[\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right]=\lim_{r\to0}\cos\left[\frac{r^3\cos^3\theta-r^3\sin^3\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}\right]$$

$$=\lim_{r\to0}\cos\left(r\left(\cos^3\theta-\sin^3\theta\right)\right)=\cos(0)=1$$

d) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x}{x^2+x+y^2}=\lim_{r\to0}\frac{2r\cos\theta}{r^2\cos^2\theta+r\cos\theta+r^2\sin^2\theta}$$

$$=\lim_{r\to0}\frac{2\cos\theta}{r+\cos\theta}$$

mevcut değil. $\left(\theta=\dfrac{\pi}{2}\right.$ olması durumunu düşününüz.$\left.\right)$

e) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\arctan\left(\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\right)=\lim_{r\to0}\arctan\left(\frac{r|\cos\theta|+r|\sin\theta|}{r^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}\right)$$

$$=\lim_{r\to0}\arctan\left(\frac{|\cos\theta|+|\sin\theta|}{r}\right)=\frac{\pi}{2}$$

f) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{r\to0}\frac{r^2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)}{r^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}$$

$$=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\cos2\theta$$

Limit mevcut değil.

7. $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \text{ ise}\\ 0, & (x,y)=(0,0) \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonunun her yerde sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$\sin(xy^2)$ ve x^2+y^2 fonksiyonları her yerde $\dfrac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2}$ fonksiyonu (0, 0) dışında her yerde süreklidir. Şimdi (0, 0) noktasındaki sürekliliğine bakalım.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy^2)}{xy^2}\cdot\frac{xy^2}{x^2+y^2}=1.\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^2}=0$$

$f(0,0)=0$ olduğundan fonksiyon (0, 0) noktasında da süreklidir.

8. $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0) \text{ ise}\\ 0, & (x,y)=(0,0) \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonu (0, 0) noktasında sürekli midir?

Çözüm:

Kutupsal koordinatlara geçilirse

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta r^2\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^4\sin^4\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta}$$

bulunur. Eğer θ sabit tutulur ve $r \to 0$ yapılırsa limit sıfır olur. Fakat θ sabit değilse, örneğin $x = y^2$ eğrisi üzerindeki (r, θ) noktaları için $\cos^2\theta = r^2\sin^4\theta$ olacağından, yukarıdaki limit

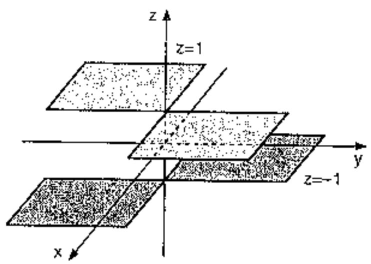
$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta\sin^2\theta}{\left(r^2\sin^4\theta\right) + r^2\sin^4\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta}{2r^2\sin^2\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta}{2r\left(r\sin^2\theta\right)}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta}{2r\cos\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

olur. Şu halde fonksiyonun (0, 0) noktasında limiti yoktur. Dolayısıyla fonksiyon (0, 0) noktasında sürekli değildir.

9. $f(x,y) = \begin{cases} 1 \ , & xy > 0 \\ 0 \ , & xy = 0 \\ -1 \ , & xy < 0 \end{cases}$

fonksiyonunun süreksizlik noktalarının kümesini bulunuz.



Çözüm:

Fonksiyon x=0 ve y=0 doğruları (Ox ve Oy ekseni) üzerinde süreksizdir.

KISMİ TÜREVLER

TANIM

$A \subset R^2$, $f: A \to R$, $z = f(x,y)$ bir fonksiyon ve $(a, b) \in A$ olsun. Eğer

$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$ limiti varsa bu limite f nin **x değişkenine göre (a, b) noktasındaki kısmi türevi** denir,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)}, \quad f_x(a,b)$$

sembollerinden biri ile gösterilir. Benzer şekilde

$\lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}$ limiti varsa bu limite f nin **y değişkenine göre (a,b) noktasındaki kısmi türevi** denir.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b), \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)}, \quad f_y(a,b)$$

sembollerinden biri ile gösterilir.

TEOREM 7.5:

Eğer f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} türevleri (a, b) noktasını ihtiva eden bir açık bölgede tanımlı ve (a, b) noktasında sürekli iseler

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

dir.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. Aşağıda verilen fonksiyonların karşılarında yazılı kısmi türevleri hesaplayınız.

a) $f(x,y)=\dfrac{2y}{y+\cos x}$, $\quad f_x(0,0)$ ve $f_y(0,0)$

b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^3}{x^2+4y^3}, & (x,y)\neq(0,0) \text{ ise}\\ 0, & (x,y)=(0,0) \text{ ise}\end{cases}$ $\quad f_x(0,0)$ ve $f_y(0,0)$

c) $f(x,y)=x^3-2xy^2+4x^2-y^3$, $\quad f_x(1,2)$ ve $f_y(0,1)$

d) $f(x,y)=\sqrt{4x^2+y^2}$, $\quad f_x(0,1)$ ve $f_y(1,0)$

Çözüm:

a) $f(x,y)=\dfrac{2y}{y+\cos x}$, $\quad f_x(0,0)$ ve $f_y(0,0)$

$$f_x(x,y)=\frac{2y\sin x}{(y+\cos x)^2} \Rightarrow f_x(0,0)=0$$

$$f_y(x,y)=\frac{2(y+\cos x)-2y}{(y+\cos x)^2} \Rightarrow f_y(0,0)=2$$

b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^3}{x^2+4y^3}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^2.0}{h^2+0}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{0.k^3}{0+4k^3}-0}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0}{k}=0$$

c) $f(x,y)=x^3-2xy^2+4x^2-y^3$, $f_x(1,2)$ ve $f_y(0,1)$

$$f_x(x,y)=3x^2-2y^2+8x \Rightarrow f_x(1,2)=3$$

$$f_y(x,y)=-4xy-3y^2 \Rightarrow f_y(1,2)=-20$$

d) $f(x,y)=\sqrt{4x^2+y^2}$, $\quad f_x(0,1)$ ve $f_y(1,0)$

$$f_x(x,y)=\frac{4x}{\sqrt{4x^2+y^2}} \Rightarrow f_x(0,1)=0$$

$$f_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{4x^2+y^2}} \Rightarrow f_y(1,0)=0$$

2. Aşağıdaki fonksiyonların birinci mertebeden kısmi türevlerini hesaplayınız.

a) $f(x,y)=2x^2-3y-3y+4$

b) $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$

c) $f(x,y)=\operatorname{arccot}\dfrac{x}{y}$

d) $f(x,y)=\ln\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)$

e) $f(x,y)=x\arctan\dfrac{y}{x}$

f) $f(x,y)=(x^2-1)(y+2)$

g) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

h) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{xy-1}$

ı) $f(x,y)=e^{xy}\ln y$

j) $f(x,y)=\arcsin\left(\sqrt{xy}\right)$

k) $f(x,y)=\ln_x y$

Çözüm:

a) $f(x,y)=2x^2-3x-3y+4 \Rightarrow f_x(x,y)=4x-3 \Rightarrow f_y(x,y)=-3$

b) $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right) \Rightarrow f_x(x,y)=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$, $\qquad f_y(x,y)=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$

c) $f(x,y)=\operatorname{arccot}\dfrac{x}{y}$

$$f_x(x,y)=-\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(\frac{1}{y}\right)=-\frac{y}{y^2+x^2}$$

$$f_y(x,y)=-\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(\frac{-x}{y^2}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

d) $f(x,y)=\ln\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)$

$$f_x(x,y)=\frac{\dfrac{y(x^2+y^2)-2x.xy}{(x^2+y^2)^2}}{\dfrac{xy}{x^2+y^2}}=\frac{y^2-x^2}{x(x^2+y^2)}$$

$$f_y(x,y)=\frac{\dfrac{x(x^2+y^2)-2y.xy}{(x^2+y^2)^2}}{\dfrac{xy}{x^2+y^2}}=\frac{x^2-y^2}{y(x^2+y^2)}$$

e) $f(x,y)=x\arctan\dfrac{y}{x}$

$$f_x(x,y)=\arctan\frac{y}{x}+\frac{x}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\arctan\frac{y}{x}-\frac{xy}{x^2+y^2}$$

f) $f(x,y)=(x^2-1)(y+2) \Rightarrow f_x=2x(y+2)\,,\quad f_y=x^2-1$

g) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow f_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\quad f_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

h) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{xy-1}$

$$f_x(x,y)=\frac{xy-1-y(x+y)}{(xy-1)^2}=-\frac{1+y^2}{(xy-1)^2}$$

$$f_y(x,y)=\frac{xy-1-x(x+y)}{(xy-1)^2}=-\frac{1+x^2}{(xy-1)^2}$$

ı) $f(x,y)=e^{xy}\ln y$

$$f_x(x,y)=ye^{xy}\ln y,\qquad f_y(x,y)=xe^{xy}\ln y+\frac{1}{y}e^{xy}$$

j) $f(x,y)=\arcsin\left(\sqrt{xy}\right)$

$$f_x(x,y)=\frac{1}{\sqrt{1-xy}}\cdot\frac{y}{2\sqrt{xy}}=\frac{y}{2\sqrt{xy-(xy)^2}}$$

$$f_y(x,y)=\frac{1}{\sqrt{1-xy}}\cdot\frac{x}{2\sqrt{xy}}=\frac{x}{2\sqrt{xy-(xy)^2}}$$

k) $f(x,y)=\ln x^y$

$$f_x(x,y)=\frac{yx^{y-1}}{x^y}=\frac{y}{x},\quad f_y(x,y)=\frac{x^y.\ln x}{x^y}=\ln x$$

3. ***g***, **her t noktasında sürekli bir fonksiyon olduğuna göre**

$$f(x,y)=\int_x^y g(t)\,dt$$

fonksiyonunun $f_x(x,y)$ ve $f_y(x,y)$ türevlerini hesaplayınız.

Çözüm:

$f_x(x,y)=-g(x)$ ve $f_y(x,y)=g(y)$ olur.

4. $|xy|<1$ **için**

$f(x,y)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n$ **fonksiyonunun birinci mertebeden kısmi türevlerini hesaplayınız.**

Çözüm:

$|xy|<1$ için $f(x,y)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n=\frac{1}{1-xy}$ olacağından

$f_x(x,y)=\dfrac{y}{(1-xy)^2},\quad f_y(x,y)=\dfrac{x}{(1-xy)^2}$ bulunur.

5. Aşağıdaki fonksiyonların birinci mertebeden kısmi türevlerini hesaplayınız.

a) $f(x,y,z)=1+xy^2-2z^2$ b) $f(x,y,z)=\dfrac{x+y+z}{xy+yz+zx}$

c) $f(x,y,z)=z-\sqrt{x^2+y^2}$ d) $f(x,y,z)=yz.\ln(xy)$

Çözüm:

a) $f(x,y,z)=1+xy^2-2z^2$

$f_x(x,y,z)=y^2,\quad f_y(x,y,z)=2xy,\quad f_z(x,y,z)=-4z$

b) $f(x,y,z)=\dfrac{x+y+z}{xy+yz+zx}$

$$f_x(x,y,z)=\frac{xy+yz+zx-(y+z)(x+y+z)}{(xy+yz+zx)^2}=-\frac{y^2+yz+z^2}{(xy+yz+2x)^2}$$

$$f_y(x,y,z)=\frac{xy+yz+zx-(x+z)(x+y+z)}{(xy+yz+zx)^2}=-\frac{x^2+xz+z^2}{(xy+yz+2x)^2}$$

$$f_z(x,y,z)=\frac{xy+yz+zx-(y+x)(x+y+z)}{(xy+yz+zx)^2}=-\frac{x^2+xy+y^2}{(xy+yz+zx)^2}$$

c) $f(x,y,z)=z-\sqrt{x^2+y^2}$

$f_x(x,y,z)=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad f_y(x,y,z)=-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad f_z(x,y,z)=1$

d) $f(x,y,z)=yz\ln(xy)$

$f_x(x,y,z)=\dfrac{yz.y}{xy}=\dfrac{zy}{x}$

$f_y(x,y,z)=z\ln(xy)+\dfrac{1}{y}.zy=z\ln(xy)+z$

$f_z(x,y,z)=y\ln(xy)$

6. Aşağıdaki fonksiyonların ikinci mertebeden kısmi türevlerini hesaplayınız.

a) $f(x,y)=x+y+xy$ b) $f(x,y)=x^2y+\cos y+y\sin x$

c) $f(x,y)=\ln(x+y)$ d) $f(x,y)=xy^2+x^2y^3+x^3y^4$

e) $f(x,y)=x\sin y+y\sin x+xy$ f) $f(x,y)=e^x+x\ln y+y\ln x$

Çözüm:

a) $f(x,y)=x+y+xy$

$f_x(x,y)=1+y\quad f_{xx}(x,y)=0\quad f_{xy}(x,y)=1$

$f_y(x,y)=1+x\quad f_{yx}(x,y)=1\quad f_{yy}(x,y)=0$

b) $f(x,y)=x^2y+\cos y+y\sin x$

$f_x(x,y)=2xy+y\cos x\quad f_{xx}(x,y)=2y-y\sin x$

$f_{xy}(x,y)=2x+\cos x\quad f_y(x,y)=x^2-\sin y+\sin x$

$f_{yy}(x,y)=-\cos y\quad f_{yx}(x,y)=2x+\cos x$

c) $f(x,y)=\ln(x+y)$

$f_x(x,y)=\dfrac{1}{x+y}\quad f_{xx}(x,y)=-\dfrac{1}{(x+y)^2}\quad f_{xy}(x,y)=-\dfrac{1}{(x+y)^2}$

$f_y(x,y)=\dfrac{1}{x+y}\quad f_{yx}(x,y)=-\dfrac{1}{(x+y)^2}\quad f_{yx}(x,y)=-\dfrac{1}{(x+y)^2}$

d) $f(x,y)=xy^2+x^2y^3+x^3y^4$

$f_x(x,y)=y^2+2xy^3+3x^2y^4\quad f_y(x,y)=2xy+3x^2y^2+4x^3y^3$

$f_{xx}(x,y)=2y^3+6xy^4\quad f_{yy}(x,y)=2x+6x^2y+12x^3y^2$

$f_{xy}(x,y)=2y+6xy^2+12x^2y^3\quad f_{yx}(x,y)=2y+6xy^2+12x^2y^3$

e) $f(x,y)=x\sin y+y\sin x+xy$

$f_x(x,y)=\sin y+y\cos x+y\quad f_{xx}(x,y)=-y\sin x,$

$f_y(x,y)=x\cos y+\sin x+x\quad f_{xy}(x,y)=\cos y+\cos x+1$

$f_{yy}(x,y)=-x\sin y\quad f_{yx}(x,y)=\cos y+\cos x+1$

f) $f(x,y)=e^x+x\ln y+y\ln x$

$f_x(x,y)=e^x+\ln y+\dfrac{y}{x}$

$f_{xx}(x,y)=e^x-\dfrac{y}{x^2},\quad f_{xy}(x,y)=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}$

$f_y(x,y)=\dfrac{x}{y}+\ln x$

$f_{yy}(x,y)=-\dfrac{x}{y^2},\quad f_{yx}(x,y)=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}$

7. **Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların karşılarında yazılı denklemleri sağladığını gösteriniz.**

a) $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $xz_x+yz_y=z$

b) $z=\arcsin\frac{y}{x}+\arcsin\frac{x}{y}$, $xz_x+yz_y=0$

c) $z=\arcsin\frac{x-y}{x+y}$, $xz_x+yz_y=0$

d) $z=xe^{y/x}$, $xz_x+yz_y=z$

e) $z=\sqrt{x}.\sin\frac{y}{x}$, $xz_x+yz_y=\frac{z^2}{z}$

f) $z=e^{x/y}\sin\frac{x}{y}+e^{y/x}\cos\frac{y}{x}$, $xz_x+yz_y=0$

Çözüm:

a) $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $xz_x+yz_y=z$

$$z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$xz_x+yz_y=x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}=z$$

b) $z=\arcsin\frac{y}{x}+\arcsin\frac{x}{y}$ $\qquad xz_x+yz_y=0$

$$z_x=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right)+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\cdot\frac{1}{y}$$

$$z_y=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

$$xz_x+yz_y=-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}-\frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}=0$$

c) $z=\arcsin\frac{x-y}{x+y}$ $\qquad xz_x+yz_y=0$

$$z_x=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2}}\left(\frac{x+y-x+y}{(x+y)^2}\right)=\frac{2y}{(x+y)\sqrt{(x+y)^2-(x-y)^2}}$$

$$z_y=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2}}\left(\frac{-x-y-x+y}{(x+y)^2}\right)=\frac{-2x}{(x+y)\sqrt{(x+y)^2(x-y)^2}}$$

$$xz_x+yz_y=\frac{2xy}{(x+y)\sqrt{(x+y)^2-(x-y)^2}}-\frac{2xy}{(x+y)\sqrt{(x+y)^2-(x-y)^2}}=0$$

d) $z=xe^{\frac{y}{x}}$, $\qquad xz_x+yz_y=z$

$$z_x=e^{\frac{y}{x}}-\frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}},\quad z_y=e^{\frac{y}{x}}$$

$$xz_x+yz_y=xe^{\frac{y}{x}}-ye^{\frac{y}{x}}+ye^{\frac{y}{x}}=xe^{\frac{y}{x}}=z$$

e) $z=\sqrt{x}\sin\left(\frac{y}{x}\right)$ $\qquad xz_x+yz_y=\frac{z}{2}$

$$z_x=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^{\frac{3}{2}}}\cos\left(\frac{y}{x}\right),\quad z_y=\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$xz_x+yz_y=\frac{\sqrt{x}}{2}\sin\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{\sqrt{x}}\cos\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{\sqrt{x}}\cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{2}\sin\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{z}{2}$$

f) $z=e^{\frac{x}{y}}\sin\left(\frac{x}{y}\right)+e^{\frac{y}{x}}\cos\left(\frac{y}{x}\right)$, $\qquad xz_x+yz_y=0$

$$z_x=\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\sin\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\cos\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}\cos\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}\sin\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z_y=-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\sin\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\cos\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}\cos\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}\sin\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$xz_x + yz_y = \frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}\sin\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}\cos\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}\cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$+\frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}\sin\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x}{y}\sin\left(\frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{4}} - \frac{x}{y}e^{\frac{x}{4}}\cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$+\frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}\cos\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}\sin\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

8. Aşağıdaki fonksiyonların Laplace Denklemi denilen

$$z_{xx} + z_{yy} = 0$$

denklemini sağladığını gösteriniz.

a) $z = x^2 - y^2$ b) $z = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ c) $z = 2x - 3y + 1$

d) $z = e^x \cos y$ e) $z = \arctan\frac{y}{x}$ f) $z = \ln(x^2 + y^2)$

Çözüm:

a) $z = x^2 - y^2$

$z_x = 2x,\quad z_{xx} = 2,\quad z_y = -2y,\quad z_{yy} = -2$

$z_{xx} + z_{yy} = 2 - 2 = 0$

b) $z = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

$z_x = 4x^3 - 12xy^2 + 4y^3,\quad z_{xx} = 12x^2 - 12y^2$

$z_y = -12x^2y + 4y^3,\quad z_{yy} = -12x^2 + 12y^2$

$z_{xx} + z_{yy} = 12x^2 - 12y^2 - 12x^2 + 12y^2 = 0$

c) $z = 2x - 3y + 1$

$$\left.\begin{array}{ll} z_x = 2 & z_{xx} = 0 \\ z_y = -3 & z_{yy} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow z_{xx} + z_{yy} = 0$$

d) $z = e^x \cos y$

$z_x = e^x \cos y,\quad z_{xx} = e^x \cos y$

$z_y = -e^x \sin y,\quad z_{yy} = -e^x \cos y$

$z_{xx} + z_{yy} = e^x \cos y - e^x \cos y = 0$

e) $z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$$z_x = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{y}{x^2+y^2},\qquad z_{xx} = \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$z_y = \frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2+y^2},\qquad z_{yy} = \frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$z_{xx} + z_{yy} = \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} - \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} = 0$$

f) $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$

$$z_x = \frac{2x}{x^2+y^2},\qquad z_{xx} = \frac{2x^2+2y^2-4x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{2y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$z_y = \frac{2y}{x^2+y^2},\qquad z_{yy} = \frac{2x^2+2y^2-4y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{2x^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$z_{xx} + z_{yy} = \frac{2y^2-2x^2+2x^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = 0$$

9. Aşağıdaki fonksiyonların üç boyutlu Laplace denklemi denilen

$$\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{d^2f}{dy^2}+\frac{d^2f}{dz^2}=0$$

denklemini sağladığını gösteriniz.

a) $f(x,y,z)=x^2+y^2-2z^2$ b) $f(x,y,z)=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

c) $f(x,y,z)=\cos 3x\cos 4y\sinh 5z$

Çözüm:

a) $f(x,y,z)=x^2+y^2-2z^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\ ,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=2+2-4=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2y\ ,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=-4z\ ,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=-4$$

b) $f(x,y,z)=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}+3x^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}+3y^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=-z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}+3z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=-3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}+3\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}$$

$$=-3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}+3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}=0$$

c) $f(x,y,z)=\cos 3x.\cos 4y.\sinh 5z$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-3\sin 3x\ \cos 4y\ \sinh 5z,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-9\cos 3x\ \cos 4y\sinh 5z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-4\cos 3x\ \sin 4y\ \sinh 5z,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-16\cos 3x\ \cos 4y\ \sinh 5z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=5\cos 3x\ \cos 4y\ \cosh 5z,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=25\cos 3x\ \cos 4y\ \sinh 5z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=-9\cos 3x\cos 4y\sinh 5z$$

$$=-16\cos 3x\cos 4y\sinh 5z+25\cos 3x\cos 4y\sinh 5z=0$$

10. α nın hangi değerleri için

$f(x,y,z)=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\alpha}$ fonksiyonu üç boyutlu Laplace denklemini sağlar?

Çözüm:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\alpha\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\alpha-1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\alpha\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\alpha-1}+4x^2\alpha(\alpha-1)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\alpha-2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2y\alpha\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\alpha-1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\alpha\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\alpha-1}+4y^2\alpha(\alpha-1)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\alpha-2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=2z\alpha\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\alpha-1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=2\alpha\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\alpha-1}+4z^2\alpha(\alpha-1)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\alpha-2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=6\alpha\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\alpha-1}+4\alpha(\alpha-1)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\alpha-2}\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$$=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\alpha-1}\left(6\alpha+4\alpha(\alpha-1)\right)=0$$

$\Rightarrow 6\alpha+4\alpha(\alpha-1)=0 \Rightarrow 4\alpha^2+2\alpha=0 \Rightarrow 2\alpha(2\alpha+1)=0 \Rightarrow \alpha=0$ veya $\alpha=-\frac{1}{2}$ olmalı.

11. c bir sabit olmak üzere

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

tipindeki denkleme dalga denklemi denir. $u(x,t)=\sin ax \sin bt$ fonksiyonunun

$c=\frac{a}{b}$ olmak üzere dalga denklemini sağladığını gösteriniz.

Çözüm:

$\frac{\partial u}{\partial x}=a\cos(ax)\sin bt,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-a^2\sin(ax)\sin(bt)$

$\frac{\partial u}{\partial t}=b\sin(ax)\cos bt,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-b^2\sin(ax)\sin(bt)$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Rightarrow -a^2\sin(ax)\sin(bt)=-b^2c^2\sin(ax)\sin(bt)$$

$$\Rightarrow a^2=b^2c^2\Rightarrow a^2=b^2.\frac{a^2}{b^2}\Rightarrow a^2=a^2$$

olur.

12. c bir sabit olmak üzere

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

tipindeki denkleme yayılma (diffizyon) denklemi adı verilir. Aşağıdaki fonksiyonların bir yayılma denklemini sağladığı gösteriniz. c sabitini bulunuz.

Çözüm:

a) $u(x,t)=e^{ax+bt}$

$\frac{\partial u}{\partial t}=be^{ax+bt},\quad \frac{\partial u}{\partial x}=ae^{ax+bt},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a^2e^{ax+bt}$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Rightarrow be^{ax+bt}=c.a^2e^{ax+bt}\Rightarrow c=\frac{b}{a^2}$$

b) $u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{at}}$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{2}\frac{1}{t^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{at}}+\frac{x^2}{at^{5/2}}e^{-\frac{x^2}{at}},\quad \frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2x}{at^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{at}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2}{at^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{at}}+\frac{4x^2}{a^2t^{5/2}}e^{-\frac{x^2}{at}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{4}{a}\left(-\frac{1}{2t^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{at}}+\frac{x^2}{at^{5/2}}e^{-\frac{x^2}{at}}\right)=\frac{4}{a}\frac{\partial u}{\partial t}\Rightarrow\quad c=\frac{4}{a}$$

13. $z=x^ce^{-y/x}$ fonksiyonunun $y\,z_{yy}=z_x-z_y$ denklemini sağlaması için c ne olmalıdır?

Çözüm:

$z_x=cx^{c-1}e^{-\frac{y}{x}}+x^{c-2}ye^{-\frac{y}{x}},\quad z_y=-x^{c-1}e^{-\frac{y}{x}},\quad z_{yy}=x^{c-2}e^{-y/x}$

$yz_{yy}=z_x-z_y\Rightarrow x^{c-2}e^{-y/x}(cx+y+x)=yx^{c-2}e^{y/x}$

$\Rightarrow x(c+1)=0\Rightarrow c=-1$ olmalıdır.

14. $f(x,y)=x\cos y,\quad g(x,y)=x\sin y$ fonksiyonları için

$$\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}$$

determinantını hesaplayınız.

Çözüm:

$f_x=\cos y,\quad f_y=-x\sin y,\quad g_x=\sin y,\quad g_y=x\cos y$

$$\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \end{vmatrix}=x\cos^2 y+x\sin^2 y=x$$

15. $z = ax^2 + 2bxy + cy^2$ fonksiyonu için

$$\begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix}$$

determinantını hesaplayınız.

Çözüm:

$z_x = 2ax + 2by, \quad z_{xx} = 2a, \quad z_{xy} = 2b, \quad z_y = 2bx + 2c, \quad z_{yy} = 2c, \quad z_{yx} = 2b$

$$\begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2c \end{vmatrix} = 4ac - 4b^2 = 4\left(ac - b^2\right)$$

16. $u = \ln\left(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz\right)$ fonksiyonunun

$$u_x + u_y + u_z = \frac{3}{x+y+z}$$

denklemini sağladığını gösteriniz.

Çözüm:

$$u_x = \frac{3x^2 - 3y^2}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}, \quad u_y = \frac{3y^2 - 3x}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}, \quad u_z = \frac{3z^2 - 3xy}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}$$

$$u_x + u_y + u_z = \frac{3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 3yz - 3xz - 3xy}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}$$

$$= \frac{3\left(x^2 + y^2 + z^2 - yz - xz - xy\right)}{(x + y + z)\left(x^2 + y^2 + z^2 - yz - xz - xy\right)} = \frac{3}{x+y+z}$$

17. $u = \ln\left(\tan x + \tan y + \tan z\right)$ fonksiyonunun

$$\sin(2x)\frac{\partial u}{\partial x} + \sin 2y\frac{\partial u}{\partial y} + \sin 2z\frac{\partial u}{\partial z} = 2$$

denklemini sağladığını gösteriniz.

Çözüm:

$$\frac{\partial u}{dx} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan x + \tan y + \tan z} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\frac{1}{\cos^2 y}}{\tan x + \tan y + \tan z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\frac{1}{\cos^2 z}}{\tan x + \tan y + \tan z}$$

$$\sin 2x\frac{\partial u}{\partial x} + \sin 2y\frac{\partial u}{\partial y} + \sin 2z\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$= \frac{2\sin x\cos x\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan x + \tan y + \tan z} + \frac{2\sin y\cos y\frac{1}{\cos^2 y}}{\tan x + \tan y + \tan z} + \frac{2\sin z\cos z\frac{1}{\cos^2 z}}{\tan x + \tan y + \tan z}$$

$$= 2\frac{\tan x}{\tan x + \tan y + \tan c} + 2\frac{\tan y}{\tan x + \tan y + \tan z} + 2\frac{\tan z}{\tan x + \tan y + \tan z}$$

$$= 2\frac{\tan x + \tan y + \tan z}{\tan x + \tan y + \tan z} = 2$$

18. $$f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\left[\dfrac{x+y}{x-y}\right]\right), & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

fonksiyonu için $f_{xy}(0,0) = -1$, $f_{yx}(0,0) = 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$f_x(0,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h.y\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{h+y}{h-y}\right) - 0}{h}$$

$$= y\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -y$$

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{k\to 0}\frac{-k-0}{k} = 1$$

$$f_y(x,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(x,k) - f(x,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{x.k\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{x+k}{x-k}\right) - 0}{k}$$

$$= x.\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = x$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h} = 1$$

ZİNCİR KURALI

TANIM

f fonksiyonu (a, b) noktasında sürekli kısmi türevlere sahip ve

$$f(a+h,\, b+k) = f(a,b) + f_x(a,b)h + f_y(a,b)k + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k$$

olacak şekilde h, $k \to 0$ için ε_1, $\varepsilon_2 \to 0$ olan ε_1 ve ε_2 varsa f fonksiyonu (a, b) noktasında **türevlenebilirdir** denir. Eğer f fonksiyonu açık bir B bölgesinin her noktasında türevli ise B üzerinde **türevlidir** denir.

SONUÇ

Eğer f_x ve f_y kısmi türevleri açık bir B bölgesinde sürekli iseler f fonksiyonu B üzerinde türevlenebilirdir.

TEOREM 7.7:

f fonksiyonu (a, b) noktasında türevli ise (a, b) de süreklidir.

TEOREM 7.8: (Zincir Kuralı)

$z = f(x, y)$ şeklinde tanımlanan f: B → R fonksiyonu verilmiş olsun. f, f_x, f_y fonksiyonları B üzerinde sürekli ve $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$ fonksiyonlarının u ve v değişkenlerine göre kısmi türevleri varsa $z = f(g(u, v), h(u, v))$ fonksiyonunun da u ve v değişkenlerine göre kısmi türevleri vardır ve

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

dir.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. Aşağıdaki eşitliklerde tanımlanan fonksiyonlar için $\frac{\partial z}{\partial t}$ türevlerini hesaplayınız.

a) $z = \frac{y}{x}$, $\quad x = e^t$, $\quad y = \ln t$

b) $z = \ln\sin\frac{x}{\sqrt{y}}$, $\quad x = 3t^2$, $\quad y = \sqrt{t^2+1}$

c) $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $\quad x = e^{2t}$, $\quad y = e^{-2t}$

d) $z = 2x^2 - 3y^2$, $\quad x = \sqrt{t}$, $\quad y = e^{2t}$

Çözüm:

a) $z = \frac{y}{x}$, $\quad x = e^t$, $\quad y = \ln t$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = -\frac{y}{x^2}e^t + \frac{1}{x}\frac{1}{t} = -\frac{\ln t}{e^t} + \frac{1}{e^t.t}$$

b) $z = \ln\sin\frac{x}{\sqrt{y}}$ $\quad x = 3t^2$ $\quad y = \sqrt{t^2+1}$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{y}}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)}{\sin\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)}.6t + \frac{-\frac{x}{2y^{\frac{3}{2}}}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)}{\sin\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$= \frac{6t}{\sqrt{y}}\tan\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) + \frac{\left(-\frac{x}{2y^{\frac{3}{2}}}\right)}{\sqrt{t^2+1}}\tan\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right).t$$

$$= \frac{6t}{\left(t^2+1\right)^{\frac{1}{4}}}\tan\left(\frac{3t^2}{\left(t^2+1\right)^{\frac{1}{4}}}\right) - \frac{3t^3}{2\left(t^2+1\right)^{\frac{5}{4}}}.\tan\left(\frac{3t^2}{\left(t^2+1\right)^{\frac{1}{4}}}\right)$$

$$= \tan\left(\frac{3t^2}{\left(t^2+1\right)^{\frac{1}{4}}}\right)\frac{1}{\left(t^2+1\right)^{\frac{3}{4}}}\left(6t\left(t^2+1\right) - \frac{3}{2}t^3\right)$$

c) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad x=e^{2t}$ $\quad y=e^{-2t}$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.2e^{2t}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.\left(-2e^{-2t}\right)$$

$$=2\frac{e^{4t}}{\left(e^{4t}+e^{-4t}\right)^{\frac{1}{2}}}-2\frac{e^{-4t}}{\left(e^{4t}+e^{-4t}\right)^{\frac{1}{2}}}=2\frac{e^{4t}-e^{-4t}}{\left(e^{4t}+e^{-4t}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

d) $z=3x^2-3y^2$ $\quad x=\sqrt{t}$ $\quad y=e^{2t}$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt}=6x.\frac{1}{2\sqrt{t}}+(-6y).2e^{2t}=3-12e^{4t}$$

2. **Aşağıdaki eşitliklerde verilen fonksiyonlar için $\frac{du}{dt}$ türevlerini hesaplayınız.**

a) $u=x^2+y^2+z^2$, $\quad x=e^{2t}\cos 2t$, $\quad y=e^{2t}2t$, $\quad z=e^{4t}$

b) $u=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ $\quad x=\cos t$, $\quad y=\sin t$, $\quad z=t$

c) $u=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad x=a\cos t$, $\quad y=a\sin t$, $\quad z=b$

d) $u=\sin\left(xy^2z^3\right)$, $\quad x=3t$, $\quad y=\sqrt{t}$, $\quad z=\sqrt[3]{t}$

Çözüm:

a) $u=x^2+y^2+z^2$ $\quad x=e^{2t}\cos 2t$ $\quad y=e^{2t}2t$ $\quad z=e^{t}$

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}.\frac{dz}{dt}$$

$$=2x\left(2e^{2t}\cos 2t-2\sin 2te^{2t}\right)+2y\left(2e^{2t}+4te^{2t}\right)+2ze^{t}$$

$$=4e^{4t}\cos^2 2t-4\cos 2t\sin 2te^{4t}+8te^{4t}+16t^2e^{4t}+2e^{2t}$$

b) $u=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}$ $\quad x=\cos t$ $\quad y=\sin t$ $\quad z=t$

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

$$=-x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}(-\sin t)-y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\cos t-z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}.$$

$$=\left(1+t^2\right)^{-3/2}(\cos t\sin t-\cos t\sin t-t)=-t\left(1+t^2\right)^{-3/2}$$

c) $u=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad x=a\cos t$ $\quad y=a\sin t$ $\quad z=b$

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

$$=-\frac{zx}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot(-a\sin t)-\frac{zy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot a\cos t+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 0$$

$$=+\frac{a^2b\cos t.\sin t}{a^3}-\frac{ba^2\cos t\sin t}{a^3}+0=0$$

d) $u=\sin\left(xy^2z^3\right)$, $\quad x=3t$, $\quad y=\sqrt{t}$, $\quad z=\sqrt[3]{t}$

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}.\frac{dz}{dt}$$

$$=y^2z^3\cos\left(xy^2z^3\right).3+\frac{1}{2\sqrt{t}}2yxz^3\cos\left(xy^2z^3\right)+3z^2xy^2\cos\left(xy^2z^3\right)\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}$$

$$=3t^2\cos\left(3t^3\right)+3t^2\cos\left(3t^3\right)+3t^2\cos\left(3t^3\right)=9t^2\cos\left(3t^3\right)$$

3. **Aşağıdaki eşitlikleri verilen fonksiyonlar için $\frac{\partial z}{\partial u}$ ve $\frac{\partial z}{\partial v}$ türevlerini hesaplayınız.**

a) $z=\ln(x^2+y^2)$, $\quad x=e^u\cos v$, $\quad y=e^u\sin v$

b) $z=x^2-y^2$, $\quad x=u^2-v^2$, $\quad y=2uv$

c) $z=xy$, $\quad x=e^u\cos v$, $\quad y=e^u\sin v$

d) $z=\arctan\frac{x}{y}$, $\quad x=u\cos v$, $\quad y=u\sin v$

e) $z=x^2+y^2$, $\quad x=u+v$, $\quad y=u-v$

Çözüm:

a) $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$ $\quad x=e^u\cos v$ $\quad y=e^u\sin v$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{2x}{x^2+y^2}.e^u\cos v+\frac{2y}{x^2+y^2}e^u\sin v$$

$$=2\cos^2 v+2\sin^2 v=2$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial v}=-e^u\sin v.\frac{2x}{x^2+y^2}+\frac{2y}{x^2+y^2}.e^u\cos v$$

$$=-2\sin v\cos v+2\cos v\sin v=0$$

b) $z = x^2 - y^2 \qquad x = u^2 - v^2 \qquad y = 2u.v$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = 2x.2u + (-2y).2v = 4u^3 - 4uv^2 - 8v^2u$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} = -2y.2u + 2x(-2v) = -12u^2v + 4v^3$$

c) $z = xy \quad x = e^u \cos v \quad y = e^u \sin v$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = y.e^u \cos v + xe^u \sin v$$

$$= e^{2u}\sin v\cos v + e^{2u}\sin v\cos v = 2e^u \sin v\cos v = e^u \sin 2v$$

d) $z = \arctan\dfrac{x}{y} \qquad x = u\cos v \qquad y = u\sin v$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}.\cos v + \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\sin v$$

$$= \frac{y}{y^2+x^2}\cos v - \frac{x}{y^2+x^2}\sin v = \frac{u\sin v\cos v}{u^2} - \frac{u\cos v\sin v}{u^2} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} - u\sin v + \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{4}\right)^2}u\cos v$$

$$= \frac{-u^2\sin^2 v}{u^2} - \frac{u^2\cos^2 v}{u^2} = -1$$

e) $z = x^2 + y^2, \qquad x = u + v, \qquad y = u - v$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = 2x + 2y = 2.2u = 4u$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = 2x - 2y = 2.2v = 4v$$

4. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonlar için u_r, u_θ, u_φ türevlerini hesaplayınız.

a) $u = xy + yz + xz, \qquad x = e^{r\theta}\cos\varphi, \qquad y = e^{r\theta}\cos\varphi, \qquad z = e^{r\theta}$

b) $u = x^2 + y^2 + z^2, \qquad x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad z = r\cos\theta$

c) $u = xy + yz + xz, \qquad x = r + \theta, \qquad y = \theta - \varphi, \qquad z = \theta + \varphi$

d) $u = \dfrac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right), \qquad x = re^\theta \sin\varphi, \qquad y = re^\theta\cos\varphi \qquad z = re^\theta$

Çözüm:

a) $u = xy + yz + xz, \quad x = e^{r\theta}\cos u, \quad y = e^{r\theta}\sin u, \quad z = e^{r\theta}$

$$u_r = u_x.x_r + u_y.y_r + u_z.z_r = (y+z)\theta e^{r\theta}\cos\varphi + (x+z)\theta e^{r\theta}\sin\varphi + (y+x)\theta e^{r\theta}$$

$$= \theta e^{2r\theta}\sin\varphi\cos\varphi + \theta e^{2r\theta}\cos\varphi + \theta e^{2r\theta}\sin\varphi\cos\varphi + \theta e^{2r\theta}\sin\varphi + \theta e^{2r\theta}\sin\varphi + e^{2r}\cos\varphi$$

$$= 2\theta e^{2r\theta}\sin\varphi\cos\varphi + 2\theta e^{2r\theta}\sin\varphi + 2\theta e^{2r\theta}\cos\varphi$$

$$= 2\theta e^{2r\theta}(\sin u + \cos u + \sin u\cos u)$$

$$u_\theta = u_x.x_\theta + u_y.y_\theta + u_z.z_\theta$$

$$= (y+z)re^{r\theta}\cos u + (x+z)re^{r\theta}\sin u + (y+x)re^{r\theta}$$

$$= 2re^{2r\theta}\sin u\cos u + 2re^{2r\theta}\sin u + 2re^{2r\theta}\cos u = 2re^{2r\theta}(\sin u\cos u + \sin u\cos u)$$

$$u_\theta = u_x x_\theta + u_y y_\theta + u_z z_\theta = (y+z)e^{r\theta}(-\sin\varphi) + (x+z)e^{r\theta}\cos\varphi + (x+y)0$$

$$= -e^{2r\theta}\sin^2\varphi - e^{2r\theta}\sin\varphi + e^{2r\theta}\cos^2\varphi + e^{2r\theta}\cos\varphi$$

$$= e^{2r\theta}\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + e^{2r\theta}\cos u - \sin\varphi\right)$$

b) $u = x^2 + y^2 + z^2 \qquad x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad z = r\cos\theta$

$$u_r = u_x.x_r + u_y.y_r + u_z.Z_r = 2x\sin\theta\cos\varphi + 2y\sin\theta\sin\varphi + 2z\cos\theta$$

$$= 2r\sin^2\theta\cos^2\varphi + 2r\sin^2\theta\sin^2\varphi + 2r\cos^2\theta = 2r\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) = 2r$$

$$u_\theta = u_x.x_\theta + u_y y_\theta + u_z z_\theta$$

$$= 2xr\cos\theta\cos\varphi + 2yr\cos\theta\sin\varphi - 2zr\sin\theta$$

$$= 2r^2\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi + 2r^2\sin\theta\sin\theta\sin^2\varphi - 2r^2\cos\theta\sin\theta$$

$$= 2r^2(\cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta) = 0$$

$$u_\varphi = u_x x_\varphi + u_y y_\varphi + u_z z_\varphi = -2xr\sin\theta\sin\varphi + 2yr\sin\theta\cos\varphi + 2z.0$$

$$= -2r^2\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi + 2r^2\sin^2\varphi\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

c) $u = xy + yz + xz, \quad x = r + \theta, \quad y = \theta - \varphi, \quad z = \theta + \varphi$

$$u_r = u_x.x_r + u_y y_r + u_z z_r = (y+z) + 0 + 0 = 2\theta$$

$$u_\theta = u_x.x_\theta + u_y.y_\theta + u_z z_\theta = (y+z) + (x+z) + (y+x) = 2(x+y+z) = 2(r+2\theta)$$

$$u_\varphi = u_x.x_\varphi + u_y.y_\varphi + u_z.z_\varphi = (y+z)0 + (x+z)(-1) + (x+y).1 = y - z = -2\varphi$$

d) $u = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right), \quad x = re^\theta \sin\varphi, \quad y = re^\theta \cos\varphi, \quad z = re^\theta$

$$u_r = u_x.x_r + u_y.y_r + u_z.z_r = x.e^\theta \sin\varphi + y.e^\theta \cos\varphi + ze^\theta$$

$$= re^{2\varphi}\sin^2\varphi + re^{2\theta}\cos^2\varphi + re^{2\varphi} = 2re^{2\theta}$$

$$u_\theta = u_x.x_\theta + u_y.y_\theta + u_z z_\varphi = x.re^\theta \sin\varphi + yre^\theta \cos\varphi + zre^\theta$$

$$= r^2e^{2\theta}\sin^2\varphi + r^2e^{2\theta}\cos^2\varphi + r^2e^{2\theta} = 2r^2e^{2\theta}$$

$$u_\varphi = u_x.x_\varphi + u_y.y_\varphi + u_z.z_\varphi = x.re^\theta \cos\varphi - yre^\varphi \sin\varphi + z.0$$

$$= r^2e^{2\theta}\cos\varphi \sin\varphi - r^2e^{2\theta}\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

5. Aşağıdaki bağıntılarla tanımlanan fonksiyonların karşılarında yazılı türevlerini bulunuz.

a) $u = x^2 + y^2, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad \frac{du}{dt}(1)$

b) $u = x^2 + y^2, \quad x = \cos t + \sin t, \quad y = \cos t - \sin t, \quad \frac{du}{dt}(0)$

c) $u = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right), \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t, \quad \frac{du}{dt}(0)$

d) $u = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right), \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = r, \quad \frac{\partial u}{\partial r}(1,0)$

Çözüm:

a) $u = x^2 + y^2, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad \frac{du}{dt}(1)$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2x(-\sin t) + 2y\cos t$$

$$= 2\cos t\sin t + 2\sin t\cos t = 0 \Rightarrow \frac{du}{dt}(1) = 0$$

b) $u = x^2 + y^2, \quad x = \cos t + \sin t, \quad y = \cos t - \sin t; \quad \frac{du}{dt}(0)$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2x(\cos t - \sin t) + 2y(-\sin t - \cos t)$$

$$= 2\left(\cos^2 t - \sin^2 t\right) - 2\left(\cos^2 t - \sin^2 t\right) = 0 \Rightarrow \frac{du}{dt}(0) = 0$$

c) $u = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right), \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t \quad \frac{du}{dt}(0)$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$= \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}(-\sin t) + \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}(\cos t) + \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$= \frac{2}{1+t^2}(-\cos t\sin t + \sin t\cos t + t) = \frac{2t}{1+t^2} \Rightarrow \frac{du}{dt}(0) = 0$$

d) $u = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right), \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = r, \quad \frac{du}{dr}(1,0)$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$= \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}\cos\theta + \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}\sin\theta + \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}\cdot 1$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(r\cos^2\theta + r\sin^2\theta + r\right) = \frac{2}{r} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r}(1,0) = 2$$

6. $x^2y'' + xy' + y = 0$ **denklemini** $x = e^t$ **eşitliği ile verilen yeni t değişkenine göre yazınız.**

Çözüm:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = \left(-e^{-t}\frac{dy}{dt} + e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2}\right)e^{-t}$$

$$= -e^{-2t}\frac{dy}{dt} + e^{-2t}\frac{d^2y}{dt^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

olur. Türevlerin bu değerleri verilen denklemde yerine yazılırsa,

$$x^2y'' + xy' + y = e^{2t}.e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + e^{+t}e^{-t}\frac{dy}{dt} + y = 0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$$

bulunur.

7. $\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ denklemini $u = x,\ v = x^2 + y^2$ eşitlikleri ile verilen yeni u,v değişkenlerine göre yazınız.

Çözüm:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + 2x\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial u} + 2u\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 2y\frac{\partial z}{\partial v} = 2\sqrt{v - u^2}\,\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} + 2u\frac{\partial z}{\partial v} - 2u\sqrt{v - u^2}\,\frac{\partial z}{\partial v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial u} + 2u\left(1 - \sqrt{v - u^2}\right)\frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

denklemi elde edilir.

8. İkinci mertebeden kısmi türevlere sahip $w = f(x, y)$ fonksiyonu veriliyor.

$$x = u + cv \qquad y = u - cv$$

için

$$c^2 w_{uu} - w_{vv} = 4c^2 w_{xy}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$w_u = w_x x_u + w_y y_u = w_x + w_y$$

$$w_{uu} = (w_u)_u = (w_x + w_y)_x x_u + (w_x + w_y)_y y_u$$

$$= w_{xx} + w_{yx} + w_{xy} + w_{yy} = w_{xx} + 2w_{xy} + w_{yy}$$

$$w_v = w_x w_v + w_y y_T = cw_x - cw_y$$

$$w_{vv} = (w_v)_v = (cw_x - cw_y)_v = (cw_x - cw_y)_x x_v + (cw_x - cw_y)_y y_v$$

$$= (cw_{xx} - cw_{yx})c + (cw_{xy} - cw_{yy})(-c) = c^2w_{xx} - c^2w_{yx} - c^2w_{xy} + c^2w_{yy}$$

$$= c^2w_{xx} - 2c^2w_{xy} + c^2w_{yy}$$

$$c^2w_{uu} - w_{vv} = c^2w_{xx} + 2c^2w_{xy} + c^2w_{yy} - c^2w_{xx} + 2c^2w_{xy} - c^2w_{yy} = 4c^2w_{xy}$$

9. $t = f(u, v, w)$ türevlenebilir bir fonksiyon ve $u = x - y$, $v = y - z$, $w = z - x$ olsun.

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial w}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{dz} = -\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

10. f ve g, ikinci mertebeden türevlere sahip herhangi iki fonksiyonu göstermek üzere

$$z = xf\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonun

$$x^2z_{xx} + 2xyz_{xy} + y^2z_{yy} = 0$$

denklemini sağladığını gösteriniz.

Çözüm:

$$z_x = f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z_{xx} = -\frac{y}{x^2}f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x^2}f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^3}f''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{2y}{x^3}f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^4}f''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z_{xy} = \frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= -\frac{y}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z_y = f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z_{yy} = \frac{1}{x}f''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x^2z_{xx} + 2xyz_{xy} + y^2z_{yy} = -yf'\left(\frac{y}{x}\right) + yf'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x}f''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$+\frac{2y}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{2y^2}{x}f''\left(\frac{y}{x}\right) - 2\frac{y}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$-\frac{2y^2}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x}f''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

11. f herhangi bir türevlenebilen fonksiyon olmak üzere

$$z = x f\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonun

$$x z_x + y z_y = z - x^2 - y^2$$

denklemini sağladığını gösteriniz.

Çözüm:

$$z_x = f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) - 2x, \quad z_y = f'\left(\frac{y}{x}\right) - 2y$$

$$x z_x + y z_y = x f\left(\frac{y}{x}\right) - y f'\left(\frac{y}{x}\right) - 2x^2 + y f'\left(\frac{y}{x}\right) - 2y^2$$

$$= x f\left(\frac{y}{x^2}\right) - x^2 - y^2 - x^2 - y^2 = z - x^2 - y^2$$

12. $z = f(\cos(x-y))$ **fonksiyonu için** $z_{xx} + 2z_{xy} + z_{yy} = 0$ **olduğunu gösteriniz. Burada** f, **değişkenlerine göre, ikinci mertebeden türeve sahip bir fonksiyondur.**

Çözüm:

$$z_x = f'(\cos(x-y)).(-\sin(x-y))$$

$$z_{xx} = f''(\cos(x-y))\sin^2(x-y) - \cos(x-y) f'(\cos(x-y))$$

$$z_{xy} = -f''(\cos(x-y))\sin^2(x-y) + \cos(x-y) f'(\cos(x-y))$$

$$z_y = f'(\cos(x-y))\sin(x-y)$$

$$z_{yy} = f''(\cos(x-y))\sin^2(x-y) - \cos(x-y) f'(\cos(x-y))$$

$$z_{xx} + 2z_{xy} + z_{yy} = f''(\cos(x-y))\sin^2(x-y) - \cos(x-y) f'(\cos(x-u))$$

$$+ 2\cos(x-y) f'(\cos(x-y)) - 2f''(\cos(x-y))\sin^2(x-y)$$

$$+ f''(\cos(x-y))\sin^2(x-y) - \cos(x-y) f'(\cos(x-y)) = 0$$

13. $u = f(x,y)$, $x = e^s\cos t$, $y = e^s\sin t$ **olduğuna göre**

$$u_{xx} + u_{yy} = e^{-2s}(u_{ss} + u_{tt})$$

eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Burada f **ikinci mertedeben kısmi türevlere sahip herhangi bir fonksiyondur.**

Çözüm:

$$u_s = u_x x_s + u_y y_s = e^s\cos t\, u_x + e^s\sin t\, u_y$$

$$u_{ss} = \frac{\partial}{\partial s}(u_s) = \frac{\partial}{\partial x}(u_s)\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y}(u_s)\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= \left(e^s\cos t\, u_{xx} + e^s\sin t\, u_{yx}\right)\left(e^s\cos t\right) + \left(e^s\cos t\, u_{xy} + e^s\sin t\, u_{yy}\right)\left(e^s\sin t\right)$$

$$= e^{2s}\cos^2 t\, u_{xx} + 2e^{2s}\sin t\cos t\, u_{xy} + e^{2s}\sin^2 t\, u_{yy}$$

$$u_t = u_x x_t + u_y y_t$$

$$= -u_x e^s \sin t + u_y e^s \cos t$$

$$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}(u_t) = \frac{\partial}{\partial x}(u_t)\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(u_t)\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= \left(-u_{xx}e^s\sin t + u_{yx}e^s\cos t\right)\left(-e^s\sin t\right) + \left(u_{yy}e^s\cos t - u_{xy}e^s\sin t\right)e^s\cos t$$

$$= u_{xx}e^{2s}\sin^2 t - 2u_{xy}e^{2s}\sin t\cos t + u_{yy}e^{2s}\cos^2 t$$

$$u_{ss} + u_{tt} = e^{2s}\left(u_{xx}\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) + u_{yy}\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)\right) = e^{2s}\left(u_{xx} + u_{yy}\right)$$

$$\Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = e^{-2s}(u_{ss} + u_{tt})$$

bulunur.

14. Zincir kuralından yararlanarak, aşağıdaki fonksiyonların karşısında yazılı denklemi sağladığını gösteriniz. Burada f **ve** g **türevlenebilen herhangi iki fonksiyondur.**

a) $z = f(x + g(y))$, $z_x z_{xy} = z_y z_{xx}$

b) $z = xf(x+y) + yg(x+y)$, $z_{xx} - 2z_{xy} + z_{yy} = 0$

c) $z = f(x+at) + g(x-at)$, $z_{tt} = a^2 z_{xx}$

d) $z = f(xy) + \sqrt{xy} + g\left(\frac{y}{x}\right)$, $x^2 z_{xx} = y^2 z_{yy}$

Çözüm:

a) $z = f(x+g(u)), \quad z_x z_{xy} = z_y z_{xx}$

$$z_x = f'(x+g(u)),\ z_{xy} = f''(x+g(u))g'(u)$$

$$z_{xx} = f''(x+g(u)),\ z_y = f'(x+g(u)).g'(u)$$

$$z_x z_{xy} = f'(x+g(u)).f''(x+g(u)).g'(u) = z_y z_{xx}$$

b) $z = xf(x+y) + yg(x+y), \quad z_{xx} - 2z_{xy} + z_{yy} = 0$

$$z_x = f(x+y) + xf'(x+y) + yg'(x+y)$$

$$z_{xx} = 2f'(x+y) + xf''(x+y) + yg''(x+y)$$

$$z_y = xf'(x+y) + g(x+y) + yg'(x+y)$$

$$z_{yy} = xf''(x+y) + 2g'(x+y) + yg''(x+y)$$

$$z_{xy} = f'(x+y) + xf''(x+y) + g'(x+y) + yg''(x+y)$$

$$\begin{aligned} z_{xx} - 2z_{xy} + z_{yy} &= 2f'(x+y) + xf''(x+y) + yg''(x+y) \\ &\quad - 2f'(x+y) - 2xf''(x+y) - 2g'(x+y) - 2yg''(x+y) \\ &\quad + xf''(x+y) + 2g'(x+y) + yg''(x+y) = 0 \end{aligned}$$

c) $z = f(x+at) + g(x-at), \quad z_{tt} = a^2 z_{xx}$

$$z_x = f'(x+at) + g'(x-at),\ z_{xx} = f''(x+at) + g''(x-at)$$

$$z_t = af'(x+at) - ag'(x-at),\ z_{tt} = a^2 f''(x+at) + a^2 g''(x-at)$$

$$z_{tt} = a^2(f''(x+at) + g''(x-at)) = a^2 z_{xx}$$

d) $z = f(x,y) + \sqrt{xy}\, g\left(\frac{y}{x}\right), \quad x^2 z_{xx} = y^2 z_{yy}$

$$z_x = yf'(xy) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\, g\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y^{3/2}}{x^{3/2}}\, g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z_{xx} = y^2 f''(xy) - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{y}}{x^{3/2}}\, g\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y^{3/2}}{2x^{5/2}}\, g'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{3}{2}\frac{y^{3/2}}{x^{5/2}} g'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^{5/2}}{x^{7/2}} g''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z_y = xf'(xy) + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} g\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z_{yy} = x^2 f''(x,y) - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{x}}{y^{3/2}} g\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2\sqrt{xy}} g'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{y}} g'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{\sqrt{y}}{x^{3/2}} g''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x^2 z_{xx} = y^2\left(x^2 f''(xy) - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{x}}{y^{3/2}} g\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}} g'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{\sqrt{y}}{x^{3/2}} g''\left(\frac{y}{x}\right)\right) = y^2 z_{yy}$$

TAM DİFERENSİYEL

$z = f(x, y)$ biçiminde verilen fonksiyonun tam diferensiyeli

$$\boxed{dz = z_x dx + z_y dy}$$

olur. İkiden fazla değişkenli fonksiyonların tam diferensiyeli de benzer şekilde tanımlanır. Örneğin n değişkenli türevlenebilen bir $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fonksiyonunun tam diferensiyeli

$$\boxed{du = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n}$$

dir.

KAPALI FONKSİYONLARIN TÜREVİ

$F(x, y, z) = 0$ denklemi ile verilmiş olan $z = f(x, y)$ fonksiyonunu gözönüne alalım.

F_x ve F_y türevleri sürekli ve $F_z(a, b) \neq 0$ ise

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}} \qquad \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}}$$

olur.

HERHANGİ BİR YÖNDE TÜREV ALMAK

TANIM

$f(x, y, z)$ fonksiyonunun $P(a, b, c)$ noktasındaki kısmi türevleri var olsun.

u bir birim vektör olmak üzere

$$(D_u f)_P = (\nabla f)_P \bullet u$$

sayısına f nin u yönündeki türevinin P noktasındaki değeri denir.

$$\boxed{D_i f = f_x, \qquad D_j f = f_y, \qquad D_k f = f_z}$$

İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN TAYLOR AÇILIMI

TANIM

$z = f(x, y)$ fonksiyonunun (a, b) noktasında her mertebeden kısmi türevleri mevcut olsun.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)\right]^{(k)}$$

$$= f(a,b) + \frac{1}{1!}\left[f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)\right]$$

$$+\frac{1}{2!}\left[f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a,b)(y-b)^2\right] + \ldots$$

serisine f fonksiyonunun (a, b) noktasındaki **Taylor serisi** denir.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. **Aşağıdaki eşitliklerle kapalı olarak tanımlanan $z = z(x, y)$ fonksiyonlarının kısmi türevlerini hesaplayınız. Bu türevlerin karşılarında yazılı noktalardaki değerini bulunuz.**

a) $x^2z^2 - 2xyz + z^3y^2 = 1$, $(0, 1, 1)$

b) $x - yz + \cos(xyz) = 2$, $(0, -1, 1)$

c) $x^3 - xy + yz + y^3 - 2 = 0$, $(1, 1, 1)$

d) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, $(2, 3, 6)$

e) $\sin(x+y) + \sin(y+z) + \sin(x+z) = 0$, (π, π, π)

f) $xe^y + ye^z + 2\ln x - 2 - \ln 8 = 0$, $(1, \ln 2, \ln 3)$

Çözüm:

a) $x^2z^2 - 2xyz + z^3y^2 = 1$ $\quad (0,1,1)$

$F(x,y,z) = x^2z^2 - 2xyz + z^3y^2 - 1$

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2xz^2 - 2yz}{2x^2z - 2xy + 3z^2y^2} \Rightarrow z_x(0,1,1) = \frac{2}{3}$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-2xz + 2z^3y}{2x^2z - 2xy + 3z^2y^2} \Rightarrow z_y(0,1,1) = -\frac{2}{3}$$

b) $x - yz + \cos(xyz) = 2$ $\quad (0,-1,1)$

$F(x,y,z) = x - yz + \cos(xyz) - 2$

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{1 - yz\sin(xyz)}{-y - xy\sin(xyz)} \Rightarrow z_x(0,-1,1) = -1$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-z - xz\sin(xyz)}{-y - xy\sin(xyz)} \Rightarrow z_y(0,-1,1) = 1$$

c) $x^3 - xy + yz + y^3 - 2 = 0$, $(1,1,1)$

$F(x,y,z) = x^3 - xy + yz + y^3 - 2$

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 - y}{y} \Rightarrow z_x(1,1,1) = -2$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-x + z + 3u^2}{y} \Rightarrow z_y(1,1,1) = -3$$

d) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ $(2,3,6)$

$F(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1$

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{z^2}} = -\frac{z^2}{x^2} \Rightarrow z_x(2,3,6) = -9$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-\frac{1}{y^2}}{-\frac{1}{z^2}} = -\frac{z^2}{y^2} \Rightarrow z_y(2,3,6) = -4$$

e) $\sin(x+y) + \sin(y+z) + \sin(x+z) = 0$ (π,π,π)

$F(x,y,z) = \sin(x+y) + \sin(y+z) + \sin(x+z)$

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{\cos(x+y) + \cos(x+z)}{\cos(y+z) + \cos(x+z)} \Rightarrow z_x(\pi,\pi,\pi) = -1$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{\cos(x+y) + \cos(y+z)}{\cos(y+z) + \cos(x+z)} \Rightarrow z_y(\pi,\pi,\pi) = -1$$

f) $xe^y + ye^z + 2\ln x - 2 - \ln 8 = 0$ $(1, \ln 2, \ln 3)$

$F(x,y,z) = xe^y + ye^z + 2\ln x - 2 - \ln 8$

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{e^y + \frac{2}{x}}{ye^z} \Rightarrow z_x(1, \ln 2, \ln 3) = -\frac{4}{3\ln 2}$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{xe^4 + e^z}{ye^z} \Rightarrow z_y(1, \ln 2, \ln 3) = -\frac{5}{3\ln 2}$$

2. **$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ eşitliği ile verilen $z = z(x, y)$ fonksiyonu için z_x, z_y, z_{xy}, z_{xx}, z_{yy} türevlerini bulunuz.**

Çözüm:

$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}, \quad z_{xx} = -\frac{z - z_x \cdot x}{z^2} = \frac{xz_x - z}{z^2} = \frac{-x^2 - z^2}{z^3}$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}, \quad z_{yy} = -\frac{z - z_y \cdot y}{z^2} = \frac{-y^2 - z^2}{z^3}, \quad z_{xy} = \frac{xz_y}{z^2} = -\frac{xy}{z^3}$$

3. **$f(x, y, z) = 0$ fonksiyonu için $\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -1$ bağıntısının sağlandığını gösteriniz.**

Çözüm:

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}\right)\left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial y}}\right)\left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\right) = -1 \text{ bulunur.}$$

4. **g türevlenebilen herhangi bir fonksiyonu göstermek üzere**

$$x - az = g(y - bz)$$

denklemi ile verilen $z = z(x, y)$ fonksiyonu için

$$a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} = 1$$

denkleminin sağlandığını gösteriniz.

Çözüm:

$F(x,y,z) = g(y - bz) + az - x = 0$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{Fx}{Fz} = -\frac{-1}{g'(y - bz)(-b) + a} = \frac{1}{a - bg'(y - bz)}$$

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{Fy}{Fz} = -\frac{g'(y - bz)}{g'(y - bz)(-b) + a} = \frac{-g'(y - bz)}{a - bg'(y - bz)}$$

$$a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} = \frac{a - bg'(y - bz)}{a - bg'(y - bz)} = 1$$

5. f ve g ikinci mertebeden türevlenebilen herhangi iki fonksiyon olmak üzere $z = z(x,y)$ fonksiyonu

$$y = x\, f(z) + g(z)$$

eşitliği yardımı ile kapalı olarak veriliyor. Bu fonksiyonun

$$z_{xx}(z_y)^2 - 2z_x z_y z_{xy} + z_{yy}(z_x)^2 = 0$$

denklemini sağladığını gösteriniz.

Çözüm:

$$F(x,y,z) = xf(z) + g(z) - y = 0$$

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{f(z)}{xf'(z) + g'(z)}$$

$$z_{xx} = -\frac{f'(z)z_x[g'(z) + xf'(z)] - [g''(z)z_x + f'(z) + xf''(z)z_x]f(z)}{[g'(z) + xf'(z)]^2}$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{1}{g'(z) + xf'(z)}$$

$$z_{yy} = -\frac{g''(z)z_y + xf''(z)z_y}{[g'(z) + xf'(z)]^2}$$

$$z_{xy} = \frac{f(z)[g''(z)z_y + xf''(z)z_y] - f'(z)z_y[g'(z) + xf'(z)]}{[g'(z) + xf'(z)]^2}$$

olur.

$z_{xx}(z_y)^2 - 2z_x z_y z_{xy} + z_{yy}(z_x)^2$ ifadesinde türevlerin değerleri yerlerine yazılırsa sonucun sıfır olduğu görülür.

6. $z = x^2 y^3$ yüzeyinin A(1, 1) noktasındaki gradiyent vektörünü bulunuz.

Çözüm:

$$\nabla f = \frac{df}{dx}i + \frac{df}{dy}j + \frac{df}{dz}k$$

$$f(x,y,z) = x^2y^2 - z \Rightarrow \frac{df}{dx} = 2xy^2, \quad \frac{df}{dy} = 3y^2x^2, \quad \frac{df}{dz} = -1$$

$$\nabla f = 2xy^2 i + 3y^2x^2 j - k \Rightarrow \nabla f|_A = 2i + 3j - k$$

olur.

7. M(2, 1, 3) ve N(5, 5, 15) noktaları veriliyor.

$f(x, y, z) = xy + yz + zx$ fonksiyonunun MN yönündeki türevini bulunuz.

Bu türevin M noktasındaki değerini hesaplayınız.

Çözüm:

$$MN = (5-2, 5-1, 15-3) = (3, 4, 12) \Rightarrow \|MN\| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = 13$$

$$u = \frac{MN}{\|MN\|} = \left(\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}\right)$$

$$f_x = y + z, \qquad f_y = x + z, \qquad f_z = y + x$$

$$(D_u f) = f_x u_1 + f_y u_2 + f_z u_3 = \frac{3}{13}(y+z) + \frac{4}{13}(x+z) + \frac{12}{13}(y+x)$$

$$= \frac{16x + 15y + 7z}{13} \Rightarrow (D_u f)|_M = \frac{16.2 + 15.1 + 7.3}{13} = \frac{68}{13}$$

8. $f(x, y, z) = \ln(e^x + e^y + e^z)$ fonksiyonunun eksenlerle α, β, γ açılarını yapan vektör yönündeki değerini hesaplayınız. Bu türevin orjindeki değerini bulunuz.

Çözüm:

$$D_u f = f_x \cos\alpha + f_y \cos\beta + f_z \cos\gamma$$

$$= \frac{e^x}{e^x + e^y + e^z}\cos\alpha + \frac{e^y}{e^x + e^y + e^z}\cos\beta + \frac{e^z}{e^x + e^u + e^z}\cos\gamma$$

$$(D_u f)|_{(0,0,0)} = \frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3}$$

9. $f(x, y, z) = x^2 - 3yz + 5$ fonksiyonunun koordinat eksenleri ile eşit açılar yapan vektör yönündeki türevini bulunuz.

Çözüm:

Koordinat eksenleri ile eşit açı yapan vektörü bulalım:

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma \text{ ve } \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 3\cos^2\alpha = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ veya } u_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$f_x = 2x \qquad f_y = -3z \qquad f_z = -3y$$

$$D_{u_1} f = \frac{2x}{\sqrt{3}} - \frac{3z}{\sqrt{3}} - \frac{3y}{\sqrt{3}} \quad \text{veya} \quad D_{u_2} f = -\frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{3z}{\sqrt{3}} + \frac{3y}{\sqrt{3}}$$

10. $z = x^2 - xy - 2y^2$ **fonksiyonunun Ox ekseni ile 60 derecelik açı yapan vektör yönündeki türevini bulunuz. Bu türevin P(1, 2) noktasındaki değerini hesaplayınız.**

Çözüm:

$D_u f = f_x \cos\theta + f_y \sin\theta$

$f(x,y) = x^2 - xy - 2y^2 \qquad f_x = 2x - y \qquad f_y = -x - 4y$

$$D_u f = (2x - y)\cos 60° + (-x - 4y)\sin 60 = (2x - y)\frac{1}{2} - (x + 4y)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$(D_u f)|_{(1,2)} = -\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

11. $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ **fonksiyonunun birinci açıortay doğrultusundaki türevini hesaplayınız. Türevin P(1, 1) noktasındaki değerini bulunuz.**

Çözüm:

Birinci açıortay yönündeki birim vektör $u = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ olduğundan istenen türev

$$D_u f = \frac{x}{x^2 + y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{y}{x^2 + y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

olur. Bunun (1, 1) noktasındaki değeri

$$(D_u f)|_{(1,1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

12. Bir $f(x, y, z)$ **fonksiyonunun u birim vektörü yönündeki türevinin**

$$D_u f = \|\nabla f\|\cos\theta$$

olacağını gösteriniz. Burada θ, ∇f **ile u vektörünün oluşturduğu açının ölçüsüdür. Bundan yararlanarak bir noktadaki yönlü türevlerin en büyüğünün** ∇f **yönündeki, en küçük türevin de** $-\nabla f$ **yönündeki türev olacağını ispatlayınız.**

Çözüm:

$D_u f = (\nabla f)\bullet u = \|\nabla f\|\|u\|\cos\theta = \|\nabla f\|\cos\theta \qquad (\|u\| = 1)$

Bu türevin en büyük olması için $\cos\theta$ nın en büyük, yani 1 olması dolayısı ile $\theta = 0$ olması gerekir. Bu durumda en büyük türev

$$D_u f = \|\nabla f\|$$

olur. Aynı şekilde yönlü türevin en küçük olması için $\cos\theta = -1$ yani $\theta = \pi$ olmalıdır. Bu durumda en küçük türev

$$D_u f = -\|\nabla f\|$$

olacaktır.

13. Aşağıdaki fonksiyonların verilen noktalardaki yönlü türevlerinin en büyüğünü ve en küçüğünü bulunuz.

a) $f(x,y) = x^2 y + e^{xy}\sin y, \qquad P(1,0)$

b) $f(x,y,z) = \ln(xy) + \ln(yz) + \ln(xz), \qquad P(1,1,1)$

c) $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 - 1) + \sinh(xyz), \qquad P(1,1,0)$

Çözüm:

a) $f(x,y) = x^2 y + e^{xy}\sin y \qquad P(1,0)$

$f_x = 2xy + ye^{xy}\sin y, \qquad f_y = x^2 + xe^{xy}\sin y + e^{xy}\cos y$

$$\|\nabla f\| = \left((f_x)^2 + (f_y)^2\right)^{\frac{1}{2}} = (4x^2y^2 + 4xy^2e^{xy}\sin y + y^2e^{2xy}\sin^2 y + x^4 + 2x^3e^{xy}\sin y$$

$$+ x^2e^{2xy}\sin^2 y + 2x^2e^{xy}\cos y + 2xe^{2xy}\sin y\cos y + e^{2xy}\cos^2 y)^{\frac{1}{2}}$$

$\|\nabla f\|_{(1,0)} = 2$ (En büyük yönlü türev), $-\|\nabla f\|_{(1,0)} = -2$ (En küçük yönlü türev)

b) $f(x,y,z) = \ln(xy) + \ln(yz) + \ln(xz) \qquad P(1,1,1)$

$f_x = \dfrac{2}{x} \qquad f_y = \dfrac{2}{y} \qquad f_z = \dfrac{2}{z}$

$$\|\nabla f\| = \left(\frac{4}{x^2} + \frac{4}{y^2} + \frac{4}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\|\nabla f\|_{(1,1,1)} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ (En büyük yönlü türev)

$-\|\nabla f\|_{(1,1,1)} = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$ (En küçük yönlü türev)

c) $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 - 1) + \sinh(xyz) \qquad P(1,1,0)$

$f_x = \dfrac{2x}{x^2 + y^2 - 1} + yz\cosh(xyz), \quad f_y = \dfrac{2y}{x^2 + y^2 - 1} + xz\cosh(xyz)$

$f_z = xy\cosh(xyz)$

$$\|\nabla f\| = [\frac{4x^2}{(x^2 + y^2 - 1)^2} + \frac{4xyz\cosh(xyz)}{(x^2 + y^2 - 1)} + y^2z^2\cos^2 h(xyz) + \frac{4y^2}{(x^2 + y^2 - 1)^2}$$

$$+ \frac{4xyz\cosh xyz}{(x^2 + y^2 - 1)} + x^2z^2\cos^2 h(xyz))]^{\frac{1}{2}}$$

$\|\nabla f\|_{(1,1,0)} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ olduğundan en büyük $2\sqrt{2}$, en küçük türev $-2\sqrt{2}$ dir.

14. Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun P(1, 2) noktasındaki $a = i + j$ yönündeki türevi $2\sqrt{2}$, $b = -2j$ yönündeki türevi -3 dür. Bu fonksiyonun $c = -i - 2j$ yönündeki türevini bulunuz.

Çözüm:

$a = i + j$ yönündeki birim vektör, $\|a\| = \sqrt{2}$ olduğundan,

$$u = \frac{a}{\|a\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} i + \frac{1}{\sqrt{2}} j\right) \text{ vektörüdür.}$$

$$(D_u f)|_{(1,2)} = f_x u_1 + f_y u_2 = \frac{f_x}{\sqrt{2}} + \frac{f_y}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow f_x + f_y = 4$$

$b = -2j$ yönündeki birim vektör, $\|b\| = 2$ olduğundan, $v = \frac{b}{\|b\|} = -j$ vektörüdür.

$$(D_u f)|_{(1,2)} = f_x v_1 + f_y v_2 = f_x 0 - f_y = -f_y = -3 \Rightarrow f_y = 3 \Rightarrow f_x = 1$$

$\|c\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ olduğundan, $c = -i - 2j$ yönündeki birim vektör $w = -\frac{1}{\sqrt{5}} i - \frac{2}{\sqrt{5}} j$ olur.

$$(D_w f)|_{(1,2)} = f_x w_1 + f_y w_2 = 1\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 3\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{7}{\sqrt{5}}$$

olur.

15. $f(x, y, z)$ fonksiyonunun bir P noktasındaki en büyük türevi $a = i + j - k$ yönündeki türevi olup bu türevin değeri $2\sqrt{3}$ dür.

a) ∇f nin P noktasındaki değerini bulunuz.

b) f fonksiyonunun $b = i + j$ yönündeki türevinin P noktasındaki değerini bulunuz.

Çözüm:

En büyük türev gradiyent yönündeki türev olduğundan, gradiyent $\nabla f = (k, k, -k)$ biçimindedir.

$$\nabla f \cdot \frac{a}{\|a\|} = 2\sqrt{3} \Rightarrow (k, k, -k)\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1) = 2\sqrt{3} \Rightarrow 3k = 6 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow \nabla f|_p = (2, 2, -2) \text{ dir.}$$

$$u = \frac{b}{\|b\|} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \text{ yönündeki türev}$$

$$\nabla f|_p \cdot u = (2, 2, -2)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

olur.

16. Aşağıda fonksiyonların tam diferensiyelini bulunuz.

a) $f(x, y) = xe^{xy}$

b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

c) $f(x, y, z) = \ln(xy) + \ln(yz) + \ln(xz)$

d) $f(x, y) = \arctan\frac{x}{y}$

Çözüm:

a) $f(x, y) = xe^{xy} \Rightarrow df = f_x\,dx + f_y dy = \left(e^{xy} + xye^{xy}\right)dx + x^2e^{xy}dy$

b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow df = f_x dx + f_y dy + f_z dz = 2xdx + 2ydy + 2zdz$

c) $f(x, y, z) = \ln(xy) + \ln(yz) + \ln(xz)$

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz = \frac{2}{x}dx + \frac{2}{y}dy + \frac{2}{z}dz$$

d) $f(x, y) = \arctan\frac{x}{y} \Rightarrow df = f_x dx + f_y dy$

$$= \frac{\frac{1}{y}}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}dx + \frac{-\frac{x}{y^2}}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}dy = \frac{y}{y^2 + x^2}dx - \frac{x}{y^2 + x^2}dy$$

17. Bir koninin yüksekliği h = 30 cm, taban yarıçapı r = 10 cm dir. h nın 3 mm artması, r nin 1 mm azalması durumunda hacimde meydana gelebilecek değişimi yaklaşık olarak hesaplayınız.

Çözüm:

$h = 30$ cm , $dh = 0{,}3$ cm,

$r = 10$ cm , $dr = -0{,}1$ cm,

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \Rightarrow dV = \frac{2\pi r h}{3}dr + \frac{\pi r^2}{3}dh \Rightarrow dV = \frac{2\pi.10.30.(-0{,}1) + \pi 100.0{,}3}{3} = -10\pi$$

olacağından, hacimde yaklaşık olarak 10π cm^3 lük bir azalma olur.

18. Aşağıdaki sayıların yaklaşık değerini hesaplayınız.

a) $(1{,}02)^{3{,}01}$

b) $\sqrt{(5{,}98)^2 + (8{,}01)^2}$

Çözüm:

a) $f(x,y) = x^y$, $x = 1$, $dx = 0{,}02$, $y = 3$, $dy = 0{,}01$

$$df = f_x dx + f_y dy = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy = 3.1(0{,}02) + 1.\ln(1).(0{,}01) = 0{,}06$$

$$f(1{,}02;3{,}01) \cong f(1,3) + df = 1 + 0{,}06 = 1{,}06$$

b) $\sqrt{(5{,}98)^2 + (8{,}01)^2}$

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $x = 6$, $dx = -0{,}02$; $y = 8$, $dy = 0{,}01$

$$df = f_x dx + f_y dy = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$$

$$= \frac{6}{10}(-0{,}02) + \frac{8}{10}(0{,}01) = -0{,}012 + 0{,}008 = -0{,}004$$

$$f(5{,}98;8{,}01) = f(6,8) + df = 10 - 0{,}004 = 9{,}996$$

19. Kapalı dikdörtgenler prizması biçimindeki kutunun dış boyutları 10 cm, 8 cm, 6 cm dir. Bu kutu 2 mm kalınlığındaki kartondan yapıldığına göre kutu yapımında kullanılan kartonun hacmini bulunuz.

Çözüm:

$x = 10\,cm$, $dx = 0{,}4\,cm$, $y = 8\,cm$, $dy = 0{,}4\,cm$, $z = 6\,cm$, $dz = 0{,}4\,cm$

$V = x.y.z$ olduğundan

$$dV = yzdx + xzdy + xydz = 48(0{,}4) + 60(0{,}4) + 80(0{,}4) = 19{,}2 + 24 + 32 = 75{,}2$$

20. $f(x,y) = x^3 + xy^2$ ifadesini $(x-2)$ ve $(y-1)$ in kuvvetleri cinsinden yazınız.

Çözüm:

$f(2,1) = 10$

$f_x = 3x^2 + y^2 \Rightarrow f_x(2,1) = 13$, $f_y = 2xy \Rightarrow f_y(2,1) = 4$

$f_{xx} = 6x \Rightarrow f_{xx}(2,1) = 12$, $f_{xy} = 2y \Rightarrow f_{xy}(2,1) = 2$

$f_{xxx} = 6 \Rightarrow f_{xxx} = (2,1) = 6$

$f_{xyx} = 0$, $f_{xyy} = 2$

$f_{xxx} = 2x \Rightarrow f_{yy}(2,1) = 4$

$f_{yyx} = 0 \Rightarrow f_{yyy} = 0$

$$f(x,y) = 10 + 13(x-2) + 4(y-1) + \frac{1}{2}\left[12(x-2)^2 + 2.2(x-2)(y-1) + 4(y-1)^2\right]$$
$$+ \frac{1}{6}\left[6(x-2)^3 + 3.2(x-2)(y-1)^2\right]$$
$$= 10 + 13(x-2) + 4(y-1) + 6(x-2)^2 + 2(x-1)(y-1) + 2(y-1)^2$$
$$+ (x-2)^3 + (x-2)(y-1)^2$$

21. $f(x,y) = e^x \arctan y$ ifadesini ikinci dereceden terimlere kadar $(x-1)$ ve $(y-1)$ in kuvvetleri cinsinden yazınız.

Çözüm:

$f_x = e^x \arctan y \Rightarrow f_x(1,1) = \frac{\pi}{4}e$

$f_y = e^x \frac{1}{1+y^2} \Rightarrow f_y(1,1) = \frac{e}{2}$

$f_{xx} = e^x \arctan y \Rightarrow f_{xx}(1,1) = \frac{\pi}{4}e$

$f_{yx} = e^x \frac{1}{1+y^2} \Rightarrow f_{yx}(1,1) = \frac{e}{2}$

$f_{yy} = -e^x \frac{2y}{\left(1+y^2\right)^2} \Rightarrow f_{yy}(1,1) = -\frac{e}{2}$

$$f(x,y) = \frac{e}{4}\pi + \frac{\pi}{4}e(x-1) + \frac{e}{2}(y-1) + \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}e(x-1)^2 + 2\frac{e}{2}(x-1)(y-1) - \frac{e}{2}(y-1)^2\right] + \ldots\ldots$$
$$= \frac{e}{4}\left[1 + \pi(x-1) + 2(y-1) + \frac{\pi}{2}(x-1)^2 + 4(x-1)(y-1) - 2(y-1)^2 + \ldots\ldots\right]$$

22. $f(x,y) = e^x \cos y$ fonksiyonunu üçüncü mertebeden terimlere kadar (0, 0) noktasında taylor serisine açınız.

Çözüm:

$f(0,0) = 1$

$f_x = e^x \cos y \Rightarrow f_x(0,0) = 1$, $\quad f_{xyy} = -e^x \cos y \Rightarrow f_{xyy}(0,0) = -1$

$f_y = -e^x \sin y \Rightarrow f_y(0,0) = 0$, $\quad f_{yyy} = e^x \sin y \Rightarrow f_{yyy}(0,0) = 0$

$f_{xy} = -e^x \sin y \Rightarrow f_{xy}(0,0) = 0$, $\quad f_{xx} = e^x \cos y \Rightarrow f_{xx}(0,0) = 1$

$f_{yy} = -e^x \cos y \Rightarrow f_{yy}(0,0) = -1$, $\quad f_{xxx} = e^x \cos y \Rightarrow f_{xxx}(0,0) = 1$

$$f(x,y) = 1 + (1.x + 0y) + \frac{1}{2}\left[1.x^2 + 2.0xy + (-1)y^2\right] + \frac{1}{6}\left[1.x^3 + 3.0x^2y + 3(-1)xy^2 + 0y^3\right]$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{x^3}{6} - 3xy^2 + \ldots\ldots$$

MAKSİMUM VE MİNİMUMLAR

TANIM

$A \subset R^2$ bir açık küme, $f: A \to R$ bir fonksiyon, $(a, b) \in A$ ve $(c, d) \in A$ olsun.

Eğer her $(x, y) \in K_1$ için

$$f(x,y) \le f(a,b)$$

olacak şekilde (a, b) noktasının bir K_1 komşuluğu varsa f fonksiyonu (a, b) noktasına bir **yerel** (lokal) **maksimuma** sahiptir denir.

Eğer her $(x, y) \in K_2$ için

$$f(x,y) \ge f(c,d)$$

olacak şekilde (c, d) noktasının bir K_2 komşuluğu varsa f fonksiyonu (c, d) noktasında bir **yerel** (lokal) **minimuma** sahiptir denir. Yerel maksimum ve yerel minimum noktalarına fonksiyonun **yerel ekstremum noktaları** adı verilir.

Eğer bir (p, q) noktasının her komşuluğunda $f(x_1, y_1) < f(p, q)$ olacak şekilde bir (x_1, y_1) noktası ve $f(x_2, y_2) > f(p, q)$ olacak şekilde bir (x_2, y_2) noktası varsa (p, q) noktasına fonksiyonun bir **eyer noktası** denir.

TEOREM 7.9:

$z = f(x, y)$ fonksiyonu (a, b) noktasında ikinci mertebden sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon ve $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ olsun.

1) $f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b) < 0$ ise (a,b) eyer noktasıdır.

2) $f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b) > 0$ ve $f_{xx}(a,b) > 0$ ise (a,b) noktası yerel minimum noktasıdır.

3) $f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b) > 0$ ve $f_{xx}(a,b) < 0$ ise (a, b) noktası bir yerel maksimum noktasıdır.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların yerel ekstremum noktalarını bulup cinsini inceleyiniz. Fonksiyonun bu noktalardaki değerlerini hesaplayınız.

a) $z = 4xy - x^4 - y^4$

b) $z = x^3 + 6x^2 + 3y^2 - 12xy + 9x$

c) $z = (x-1)^2 + 2y^2$

ç) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$

d) $z = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$

e) $z = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$

f) $z = x^3 - y^3 - 2xy + 6$

g) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

ğ) $z = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$

h) $z = x^3 + 3xy + y^3$

ı) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1}$

i) $z = \dfrac{-4}{1 + x^2 + y^2}$

j) $z = xy(1 - x^2 - y^2)$

k) $z = x\sqrt{y} - x^2 + 9x - y$

l) $z = (2x - x^2)(2y - y^2)$

m) $z = (x + 2 + 2x + y)e^y$

n) $z = \sin x + \sin y$

o) $z = (x-1)\ln(xy)$

ö) $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$

p) $z = xy(6 - x - y)$

r) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

s) $2x^2 + 3y^2 + z^2 - 12xy + 4xz = 35$

ş) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$

t) $x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0$

Çözüm

a) $z = 4xy - x^4 - y^4$

$$\begin{cases} z_x = 4y - 4x^3 \\ z_y = 4x - 4y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x = y^3 \end{cases} \Rightarrow y = (y^3)^3 \Rightarrow y = y^9 \Rightarrow y(1 - y^8) = 0$$

$\Rightarrow y_1 = 0,\ y_2 = -1,\ y_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1$

Kritik noktalar $A(0, 0)$, $B(-1, -1)$, $C(1, 1)$ noktalarıdır.

$$\left.\begin{aligned} z_{xx} &= -12x^2 \\ z_{yy} &= -12y^2 \\ z_{xy} &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta(x,y) = z_{xx}.z_{yy} - z_{xy}^2 = 12x^2.12y^2 - 16 = 144x^2y^2 - 16$$

$\Delta(A) = \Delta(0,0) = -16$ olduğundan $A(0,0)$ bir eyer noktasıdır. $z(0,0) = 0$ dır.

$\Delta(B) = \Delta(-1, -1) = 144 - 16 = 128$ ve $z_{xx}(B) = -12 < 0$ olduğundan $B(-1, -1)$ noktası bir yerel maksimum noktasıdır. $z_{maks} = z(-1,-1) = -2$ dır.

$\Delta(C) = 144 - 16 = 128 > 0$ ve $z_{xx}(C) = -12 < 0$ olduğundan $C(1,1)$ noktası da yerel maksimum noktasıdır. $z_{maks} = z(1,1) = 2$ dir.

b) $z = x^3 + 6x^2 + 3y^2 - 12xy + 9x$

$z_x = 3x^2 + 12x - 12y + 9 = 0$

$z_y = 6y - 12x = 0 \Rightarrow y = 2x$

$y = 2x \Rightarrow 3x^2 + 12x - 12(2x) + 9 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow 3(x-1)(x-3) = 0$

$\Rightarrow x = 3$ veya $x = 1 \Rightarrow y = 6$ veya $y = 2$ bulunur. $A(3, 6)$, $B(1, 2)$ noktaları kritik noktalardır.

$$\left.\begin{aligned} z_{xx} &= 6x + 12 \\ z_{yy} &= 6 \\ z_{xy} &= -12 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta(x,y) = z_{xx}.z_{yy} - z_{xy}^2 = (6x+12)6 - 144 = 36x - 72$$

$\Delta(A) = 36.3 - 72 = 36 > 0$ ve $z_{xx}(A) = 30 > 0 \Rightarrow A(3, 6)$ noktası bir yerel minimum noktasıdır.

$z_{min} = 3^3 + 6.3^2 + 3.6^2 - 2.3.6 + 9.3 = 180$ olur.

$\Delta(B) = 36.1 - 12 = 24 > 0$ ve $z_{xx}(B) = 6 + 12 = 18 > 0$

$\Rightarrow B(1, 2)$ noktasıda bir yerel minimum noktasıdır.

$z_{min} = 1 + 6.1 + 3.2 - 12.1.2 + 9.1 = -3$

c) $z = (x-1)^2 + 2y^2$

$$\left.\begin{aligned} z_x &= 2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1 \\ z_y &= 4y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A(1,0) \text{ noktası kritik nokta}$$

$$\left.\begin{aligned} z_{xx} &= 2 \\ z_{yy} &= 4 \\ z_{xy} &= 0 \end{aligned}\right\} \Delta(x,y) = z_{xx}.z_{yy} - z_{xy}^2 = 2.4 = 8 > 0 \text{ ve } z_{xx} > 0$$

olduğundan $A(1,0)$ noktası bir yerel minimum noktadır.

$z_{min} = 0$ dır.

d) $z = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$

$$\left.\begin{aligned} z_x &= 2x + y + 3 = 0 \\ z_y &= x + 2y - 3 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = -3,\ y = 3 \Rightarrow (-3,3) \text{ kritik noktadır.}$$

$$\left.\begin{aligned} z_{xx} &= 2 \\ z_{yy} &= 2 \\ z_{xy} &= 1 \end{aligned}\right\} \Delta(x,y) = z_{xx}.z_{yy} = z_{xy}^2 = 4 - 1 = 3 > 0 \text{ ve } z_{xx} > 0 \text{ olduğundan}$$

A noktası yerel minimum noktasıdır. $Z_{min} = -5$

f) $z = x^3 - y^3 - 2xy + 6$

$$\left.\begin{aligned} z_x &= 3x^2 - 2y = 0 \\ z_y &= -3y^2 - 2x = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x^2 \Rightarrow y = \frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2}y^2\right)^2 = \frac{27}{8}y^4$$

$$\Rightarrow y - \frac{27}{8}y^4 = 0 \Rightarrow y\left(1 - \left(\frac{3}{2}y\right)^3\right) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ veya } \left(\frac{3}{2}y\right)^3 = 1 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$$

$y = 0 \Rightarrow x = 0$ ve $y = \frac{2}{3} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}.\frac{4}{9} = -\frac{2}{3} \Rightarrow A(0,0)$ ve $B\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ kritik noktalardır.

$$\left.\begin{aligned} z_{xx} &= 6x \\ z_{yy} &= -6y \\ z_{xy} &= -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta(x,y) = z_{xx}.z_{yy}.z_{xy}^2 = -36xy - 4$$

$\Delta(A) = -4 < 0 \Rightarrow$ A noktası bir eyer noktasıdır.

$\Delta(B) = -36\left(-\dfrac{4}{9}\right) - 4 = 60 > 0$ ve $z_{xx}(B) = 6.\left(\dfrac{-2}{3}\right) = -4 < 0$ olduğundan

B yerel maximum noktasıdır.

$$z_{max} = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + 6 = \frac{170}{27}.$$

g) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

$$\left.\begin{array}{l} z_x = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ z_y = 6xy - 12 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 5$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} = 5 \Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0$$

$\Rightarrow x_1 = 2,\quad x_2 = -2,\quad x_3 = 1,\quad x_4 = -1 \Rightarrow y_1 = 1,\quad y_2 = -1,\quad y_3 = 2,\quad y_4 = -2$

A(2, 1), B(−2, −1), C(1, 2), D(−1, −2) kritik noktalardır.

$$\left.\begin{array}{l} z_{xx} = 6x \\ z_{yy} = 6x \\ z_{xy} = 6y \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta(x,y) = z_{xx}.z_{yy}.z_{xy}^2 = 36x^2 - 36y^2 = 36(x^2 - y^2)$$

$\Delta(A) = 36\,(4-1) = 108 > 0$ ve $z_{xx}(A) = 12 > 0 \Rightarrow$ A yerel minimum noktasıdır.

$z_{min} = -28$ yerel minimum değeridir.

$\Delta(B) = 36\,(4-1) = 108$ ve $z_{xx}(B) = -12 < 0 \Rightarrow$ B yerel maksimum noktasıdır.

$z_{max} = 28$ yerel maksimum değeridir.

$\Delta(C) = 36(1-4) = -108 < 0 \Rightarrow$ C noktası eyer noktasıdır.

$\Delta(D) = 36(1-4) = -108 < 0 \Rightarrow$ D noktası da eyer noktasıdır.

ğ) $z = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$

$$\left.\begin{array}{l} z_x = 12x - 6x^2 + 6y = 0 \\ z_y = 6y + 6x = 0 \Rightarrow y = -x \end{array}\right\} \Rightarrow 12x - 6x^2 + 6(-x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 6x = 0$$

$\Rightarrow 6x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0$ veya $x = 1$ olur.

$x = 0 \Rightarrow y = 0$ ve $x = 1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow$ A(0, 0) ve B(1, −1) kritik noktalardır.

$$\left.\begin{array}{l} z_{xx} = 12 - 12x \\ z_{yy} = 6 \\ z_{xy} = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta(x,y) = z_{xx}.z_{yy} - z_{xy}^2 = (12 - 12x).6 - 36$$

$\Delta(A) = 36 > 0$ ve $z_{xx}(A) = 12 > 0$ olduğundan A noktası yerel minumum noktadır.

Yerel minimum değer $z_{min} = 0$

$\Delta(B) = (12 - 12).6 - 36 = -36 < 0 \Rightarrow$ B noktası bir eyer noktasıdır.

h) $z = x^3 + 3xy + y^3$

$$\left.\begin{array}{l} z_x = 3x^2 + 3y = 0 \Rightarrow y = -x^2 \\ Z_y = 3x + 3y^2 = 0 \Rightarrow x = -y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow y = -(-y^2)^2 \Rightarrow y + y^4 = 0 \Rightarrow y(1 + y^3) = 0$$

$\Rightarrow y = 0$ veya $y = -1 \Rightarrow x = 0$ veya $x = -1$

A(0, 0) ve B(−1, −1) kritik noktalarıdır.

$$\left.\begin{array}{l} z_{xx} = 6x \\ z_{yy} = 6y \\ z_{xy} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta(x,y) = z_{xx}.z_{yy} - z_{xy}^2 = 36xy - 9$$

$\Delta(A) = -9 < 0 \Rightarrow$ A noktası eyer noktasıdır.

$\Delta(B) = 36 - 9 = 25 > 0 \Rightarrow z_{xx}(B) = -6 < 0$

$\Rightarrow$ B yerel maksimum noktasıdır. $z_{maks} = z(-1,-1) = 1$ dir.

ı) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1}$

$$\left.\begin{array}{l} z_x = \dfrac{-2x}{(x^2 + y^2 - 1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \\[2ex] z_y = \dfrac{-2y}{(x^2 + y^2 - 1)^2} = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{A(0, 0) noktası kritik noktadır.}$$

$$z_{xx} = \frac{-2(x^2+y^2-1)^2 + 2x.2.2x(x^2+y^2-1)}{(x^2+y^2-1)^4}$$

$$z_{yy} = \frac{-2(x^2+y^2-1)^2 + 2y.2.2y(x^2+y^2-1)}{(x^2+y^2-1)^4}$$

$$z_{xy} = \frac{8yx}{(x^2+y^2-1)^3}$$

$z_{xx}.z_{yy} - z_{xy}^2\big|_{(0,0)} = -2.(-2) = 4 > 0$ ve $z_{xx}(0,0) = -2 < 0$

$\Rightarrow$ A(0, 0) noktası bir yerel maksimum noktasıdır. $z_{maks} = z(0,0) = -1$

j) $z = xy(1-x^2-y^2)$

$$\begin{cases} z_x = y(1-x^2-y^2) - 2x^2y = y(1-3x^2-y^2) = 0 \\ z_y = x(1-x^2-y^2) - 2y^2x = x(1-x^2-3y^2) = 0 \end{cases}$$

1. $x = 0,\ y = 0$
2. $y = 0,\ 1-x^2-3y^2 = 0 \Rightarrow y = 0,\ x = 1,\ x = -1$
3. $x = 0,\ 1-3x^2-y^2 = 0 \Rightarrow x = 0,\ y = 1,\ y = -1$
4. $\left.\begin{array}{l} 1-3x^2-y^2=0 \\ 1-x^2-3y^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{2},\ x = -\frac{1}{2} \\ y^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{2},\ y = -\frac{1}{2} \end{array}$

Kritik noktalar:

A(0, 0), B(1, 0), C(−1, 0), D(0, 1), E(0, −1)

$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\ G\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\ H\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\ I\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} z_{xx} = -6xy \\ z_{yy} = -6xy \\ z_{xy}^2 = 1-3x^2-3y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta(x,y) = z_{xx}.z_{yy} - z_{xy}^2 = 36x^2y^2 - (1-3x^2-3y^2)^2$$

$\Delta(A) = -1 < 0 \Rightarrow$ A noktası bir eyer noktasıdır.

$\Delta(B) = \Delta(C) = \Delta(D) = \Delta(E) = -4 < 0$ olduğundan B, C, D, E noktaları eyer noktalarıdır.

$\Delta(F) = \Delta(G) = \Delta(H) = \Delta(I) = 2 > 0$, ve $z_{xx}(F) = z_{xx}(G) = -\frac{3}{2} < 0$ ve

$z_{xx}(H) = z_{xx}(I) = \frac{3}{2} > 0$

$\Rightarrow$ F ve G yerel maksimum, H ve I yerel minumum noktalarıdır.

$z_{max} = \frac{1}{8}$, $z_{min} = -\frac{1}{8}$ dir.

l) $z = (2x-x^2)(2y-y^2)$

$z_x = (2-2x)(2y-y^2) = 0$

$z_y = (2x-x^2)(2-2y) = 0$

1. $2-2x = 0$ ve $2-2y = 0 \Rightarrow x = 1$ ve $y = 1$
2. $2y-y^2 = 0$ ve $2x-x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ ve $x = 2 \Rightarrow y = 0$ ve $y = 2$

Kritik noktalar

A(1, 1) , B(0, 0) , C(0, 2) , D(2, 0) , E(2, 2) noktalarıdır.

$$\left.\begin{array}{l} z_{xx} = -2(2y-y^2) \\ z_{yy} = -2(2x-x^2) \\ z_{xy} = (2-2x)(2-2y) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta(x,y) = 4(2y-y^2)(2x-x^2) - (2-2x)^2(2-2y)^2$$

$\Delta(A) = 4 > 0$ $z_{xx}(A) = -2 < 0$ $\Rightarrow$ A yerel maksimum noktasıdır.

$z_{maks} = 1.1 = 1$ dir.

$\Delta(B) = -16 < 0 \Rightarrow$ B eyer noktasıdır.

$\Delta(C) = -16 < 0 \Rightarrow$ C eyer noktasıdır.

$\Delta(D) = -16 < 0 \Rightarrow$ D eyer noktasıdır.

$\Delta(E) = -16 < 0 \Rightarrow$ E eyer noktasıdır.

n) $z = \sin x + \sin y$

$$z_x = \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k = 0, \mp 1, \mp 2 \ldots\ldots)$$

$$z_y = \cos y = 0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k = 0, \mp 1, \mp 2 \ldots\ldots)$$

$$\left.\begin{aligned} z_{xx} &= -\sin x \\ z_{yy} &= -\sin y \\ z_{xy} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta(x,y) = z_{xx}.z_{yy} - z_{xy}^2 = \sin x.\sin y$$

$$\Delta\left(\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k.(-1)^k = 1 > 0$$

$$z_{xx}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right) = -(-1)^k = (-1)^{k+1} = \begin{cases} -1 & , \ k \text{ çift ise} \\ 1 & , \ k \text{ tek ise} \end{cases}$$

$k = 2n$ yani k çift ise $z_{xx} > 0$ dır. Bu durumda $\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$ noktaları yerel maximum noktaları olur. $z_{max} = 2$ dir.

$k = 2n+1$ için yani $\frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi$ noktaları yerel minumum noktalarıdır . $z_{min} = -2$ dir.

o) $z = (x-1)\ln(xy)$

$$\left.\begin{aligned} z_x &= \ln(xy) + \frac{x-1}{x} = 0 \\ z_y &= \frac{x-1}{y} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 1, \quad y = 1 \Rightarrow (1,1) \text{ kritik nokta.}$$

$$z_{xx} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow z_{xx}(1,1) = 2$$

$$z_{yy} = -\frac{x-1}{y^2} \Rightarrow z_{yy}(1,1) = 0$$

$$z_{xy} = \frac{1}{y} \Rightarrow z_{xy}(1,1) = 1$$

$z_{xx}\,z_{yy} - z_{xy}^2 = 2.0 - 1 = -1 < 0$ olduğundan $(1,1)$ noktası bir eyer noktasıdır.

ö) $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

$u = x^2 + y^2$ denirse $z = u\,e^{-u}$ olur.

$$\frac{dz}{du} = e^{-u} - ue^{-u} = e^{-u}(1-u) = 0 \Rightarrow u = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \text{ bulunur}$$

Şu halde $x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerindeki tüm noktalar birer kiritik noktadır.

$\frac{d^2z}{du^2} = -e^{-u}(1-u) - 1.e^{-u} = e^{-u}(-1+u-1) = e^{-u}(u-2)$ türevi $u = 1$ için negatif olacağından $u = 1$ için yerel maksimum vardır. O halde $x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerindeki tüm noktalar birer yerel maksimum noktadır. Bu noktalarda fonksiyonun aldığı değer

$$z_{max} = 1.e^{-1} = \frac{1}{e} \text{ olur.}$$

p) $\left.\begin{aligned} z_x &= y(6-2x-y) = 0 \\ z_y &= x(6-x-2y) = 0 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin kökleri,

1) $\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$ 2) $\begin{cases} x = 0 \\ 6 - 2x - y = 0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = 0 \\ 6 - x - 2y = 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 6 - 2x - y = 0 \\ 6 - x - 2y = 0 \end{cases}$

denklem sistemlerinin kökleridir. o halde kritik noktalar A(0,0), B(0,6), C(6,0), D(2,2) noktalarıdır.

$z_{xx} = -2y$, $z_{yy} = -2x$, $z_{xy} = 6 - 2x - 2y$ olduğundan

$\Delta = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 4xy\ \ (6-2x-2y)^2$ ifadesi, yukarıdaki tüm noktalar için negatif olacağından tüm noktalar birer eyer noktasıdır.

r) $z = x^4 + y^4 + 2x^2 - 4xy + 2y^2$

$$\left.\begin{aligned} z_x &= 4x^3 + 4x - 4y = 0 \\ z_y &= 4y^3 - 4x + 4y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 4(x^3 + y^3) = 0 \Rightarrow x = -y$$

$4x^3 + 4x + 4x = 0 \Rightarrow 4x^3 + 8x = 0 \Rightarrow 4x\,(x^2 + 2) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ ve $y = 0 \Rightarrow A(0,0)$ kritik noktadır.

$z_{xx} = 12x^2 + 4$, $z_{yy} = 12y^2 + 4$ ve $z_{xy} = -4$ olacağından

$\Delta = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = \left(12x^2+4\right)\left(12y^2+4\right) - 16 = 144x^2y^2 + 48x^2 + 48y^2$ olur.

$\Delta(0,0) = 0$ dır. Bu durumda özel bir inceleme yapmak gerekir.

$z = x^4 + y^4 + 2x^2 - 4xy + 2y^2 = x^4 + y^4 + 2(x-y)^2$ olacağından

$z(0,0) = 0$ ve $(x,y) \neq (0,0)$ için $z(x,y) > 0$ olacağından $(0,0)$ noktası bir yerel minimum noktasıdır. $z_{min} = 0$ dır.

s) $2x^2 + 3y^2 + z^2 - 12xy + 4xz = 35$

$$\left.\begin{aligned} z_x &= -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{4x-12y+4z}{2z+4x} = 0 \\ z_y &= -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{6y-12x}{2z+4x} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = 2x, \quad z = 5x$$

bulunur. Bu değerler verilen denklemde yerine yazılırsa

$2x^2 + 3y^2 + z^2 - 12xy + 4xz = 35 \Rightarrow 2x^2 + 12x^2 + 25x^2 - 24x^2 + 20x^2 = 35$

$\Rightarrow 35x^2 = 35 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1 \Rightarrow y = \pm 2$ ve $z = \pm 5$

Kritik noktalar $A(1,2)$, $B(-1,-2)$ dir.

$$z_{xx} = (z_x)_x = \left(-\frac{4x-12y+4z}{2z+4x}\right)_x = -\frac{(4+4z_x)(2z+4x)-(2z_x+4)(4x-12y+4x)}{(2z+4x)^2}$$

olur. $A(1,2)$ de $z=5$, $z_x = 0$ olacağından

$$z_{xx}(1,2) = -\frac{4(2.5+4)}{(14)^2} = -\frac{4}{14} = -\frac{2}{7}, \quad z_{xx}(-1,-2) = \frac{2}{7} \text{ bulunur.}$$

Benzer şekilde hesap yapılarak

$$z_{yy}(1,2) = -\frac{3}{7}, \; z_{yy}(-1,-2) = \frac{3}{7}, \; z_{xy}(1,2) = \frac{6}{7}, \; z_{xy}(-1,-2) = -\frac{6}{7}$$

bulunur.

$$z_{xx}(1,2).z_{yy}(1,2) - z_{xy}^2(1,2) = \left(-\frac{2}{7}\right)\left(-\frac{3}{7}\right) - \frac{36}{49} = -\frac{30}{49} < 0$$

olduğundan $A(1,2)$ noktası bir eyer noktasıdır.

$$z_{xx}(-1,-2).z_{yy}(-1,-2) - z_{xy}^2(-1,-2)^2 = \frac{2}{7}.\frac{3}{7} - \frac{36}{49} = -\frac{30}{49} < 0$$

olduğundan $B(-1,-2)$ de bir eyer noktasıdır.

ş) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$

Çözüm:

Çözüm bir önceki soruya benzer olarak yapılabilir.

Fakat burada daha basit bir çözüm veriyoruz. Verilen denklem

$(x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + (z-3)^2 - 9 - 11 = 0 \Rightarrow$

$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$

biçiminde yazılabilir. Bu, merkezi $M(1,-2,3)$ olan ve $r=5$ yarıçaplı kürenin denklemidir.

Bu fonksiyon en büyük ve en küçük değerini $(1,-2)$ de alır.

Kürenin en üst noktası $A(1,-2,3+5) = A(1,-2,8)$ noktası, en alt noktası $B(1,-2,3-5) = B(1,-2,-2)$ noktasıdır. Buna göre $z_{max} = 8$, $z_{min} = -2$ dir.

v) $x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0$

$$\left(3x^2-3\right) + (2z+1)z_x = 0 \Rightarrow z_x = \frac{3\left(1-x^2\right)}{(2z+1)}$$

$$(-2y+4) + (2z+1)z_y = 0 \Rightarrow z_y = 2(y-2)$$

$$\begin{array}{ll|llll} z_x = 0, & z_y = 0 & x=1,\ y=2 & \Rightarrow & z^2+z-6=0 & \Rightarrow z=-3 \text{ ve } z=2 \\ x_1 = 1, & x_2 = -1 & x=-1,\ y=2 & \Rightarrow & z^2+z-2=0 & \Rightarrow z=-2,\ z=1 \\ y=2 & y=2 & & & & \end{array}$$

kritik noktalar $A(1,2,-3)$, $B(1,2,2)$, $C(-1,2,-2)$, $D(-1,2,1)$ olur.

$$6x + 2z_x^2 + (2z+1)z_{xx} = 0 \Rightarrow z_{xx} = -\frac{6x+z_x^2}{2z+1}$$

$$(2z+1)z_{xy} + 2z_xz_y = 0 \Rightarrow z_{xy} = -\frac{2z_xz_y}{2z+1}$$

$$-2 + 2z_y^2 + (2z+1)z_{yy} = 0 \Rightarrow z_{yy} = \frac{2\left(1-z_y^2\right)}{2z+1} \text{ bulunur.}$$

$$z_{xx}(A) = \frac{6}{5}, \; z_{yy}(A) = -\frac{2}{5}, \; z_{xy}(A) = 0$$

$$\Delta(A) = z_{xx}(A).z_{yy}(A) - z_{xy}^2(A) = \left(\frac{6}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{12}{25} < 0$$

$\Rightarrow$ A noktası bir eyer noktasıdır.

$\Delta(B) = z_{xx}(B).z_{yy}(B) - z_{xy}^2(B) = \left(-\frac{6}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{12}{25} < 0$

$\Rightarrow$ B noktası eyer noktasıdır.

$\Delta(C) = z_{xx}(C).z_{yy}(C) - z_{xy}^2(C) = -2\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} > 0$ ve $z_{xx}(C) < 0$

$\Rightarrow$ C noktası yerel maksimum noktadır. $z_{maks} = -2$ dir.

$\Delta(D) = z_{xx}(D).z_{yy}(D) - z_{xy}^2(D) = 2.\frac{2}{3} = \frac{4}{3} > 0$ ve $z_{xx}(D) = 2 > 0$

$\Rightarrow$ D noktası yerel minumum noktadır. $z_{min} = 1$ dir.

2. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı bölgeler üzerindeki mutlak ekstremumlarını (en büyük ve en küçük değerlerini) bulunuz.

a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 1$, $B = \{(x,y):\ x \ge 0,\ y \le 4,\ y \le x\}$

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $B = \{(x,y):\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ y \le 2 - 2x\}$

c) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $B = \{(x,y):\ x^2 + y^2 \le 1\}$

d) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$, $B = \{(x,y):\ 0 \le x \le 5,\ -3 \le y \le 0\}$

e) $f(x,y) = 48xy - 32x^3 - 24y^2$, $B = \{(x,y):\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$

f) $f(x,y) = (4x - x^2)\cos y$, $B = \left\{(x,y):\ 1 \le x \le 3,\ -\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{4}\right\}$

g) $f(x,y) = 4x - 8xy + 2y + 1$, $B = \{(x,y):\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ y \le 1 - x\}$

h) $f(x,y) = xy$, $B = \{(x,y):\ x^2 + y^2 \le 2\}$

ı) $f(x,y) = 2xy + y^2 + 8x - 4y$, $B = \{(x,y):\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\}$

i) $f(x,y) = (3x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$, $B = \{(x,y):\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$

k) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^3 - 4x$, $B = \{(x,y):\ 0 \le x \le 6,\ -3 \le y \le 3\}$

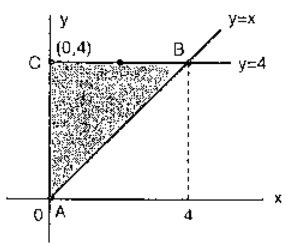
Çözüm:

a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 1$

$B = \{(x,y):\ x \ge 0,\ y \le 4,\ y \le x\}$

$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x - y = 0 \\ f_y(x,y) &= -x + 2y = 0 \end{aligned}\right\}\ x = 0\ ,\ y = 0$

A(0,0) kritik noktadır.



[AB] üzerinde $y = x$

$0 \le y \le 4$, $f(x,x) = x^2 - x^2 + x^2 + 1 = x^2 + 1$

$f'(x,x) = 2x = 0 \Rightarrow (0,0)$ kritik noktadır.

[AC] üzerinde:

$x = 0$, $0 \le y \le 4$, $f(0,y) = y^2 + 1$

$f'(0,y) = 2y = 0 \Rightarrow (0,0)$ kritik noktadır.

[BC] üzerinde:

$y = 4$, $0 \le x \le 4$, $f(x,4) = x^2 - 4x + 17$

$f'(x,4) = 2x - 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2,4)$ kritik nokta

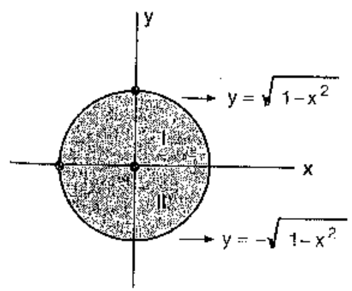
Bir fonksiyon bir bölge üzerinde mutlak extramumlarını ya bölgenin sınırı üzerinde ya da o bölgedeki kritik noktalarda alır.

	kritik nokta	kritik nokta	sınır noktası	sınır noktası
x	0	2	4	0
y	0	4	4	4
f (x,y)	1	13	17	17

Mutlak minimum nokta (0, 0), mutlak minimum değer 1 dir.

Mutlak maksimum noktalar (4, 4) ve (0, 4), mutlak maksimum değer 17 dir.

c) $f(x,y) = x^2 - y^2$ $B = \{(x,y):\ x^2 + y^2 \le 1\}$



$\left.\begin{aligned} z_x &= 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ z_y &= -2y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{aligned}\right\}$ (0,0) ekstramum nokta

Üst yarı dairede:

$y = \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \le x \le 1$ ve $f\left(x, \sqrt{1-x^2}\right) = 2x^2 - 1$

$f'\left(x, \sqrt{1-x^2}\right) = 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0,1)$ kritik nokta

Alt yarı dairede:

$y = -\sqrt{1-x^2}$, $-1 \le x \le 1$, $f\left(x, -\sqrt{1-x^2}\right) = 2x^2 - 1$

$f'\left(x, -\sqrt{1-x^2}\right) = 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y = -1$ $(0,-1)$ kritik nokta

x	0	0	0	1	−1
y	0	1	−1	0	0
f (x,y)	0	−1	−1	1	1

Fonksiyonun mutlak maksimum noktaları (1, 0) ve (−1, 0) noktaları olup

mutlak maksimum değeri 1 dir.

Fonksiyonun mutlak minumum noktaları (0, 1) (0, −1) noktaları olup

mutlak minumum değeri −1 dir.

f) $f(x,y) = \left(4x - x^2\right)\cos y$ $\quad B = \left\{(x,y),\ 1 \le x \le 3,\ -\frac{\pi}{4} \le 4 \le \frac{\pi}{4}\right\}$

$f_x = (4-2x)\cos y = 0$

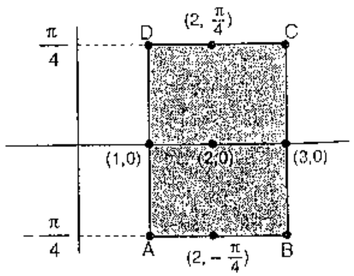
$f_y = -\left(4x - x^2\right)\sin y = 0$

1) $4 - 2x = 0$ veya $\sin y = 0$

$\Rightarrow x = 2$ veya $y = k\pi$ $(k = 0,\ \mp 1,\ \mp 2)$

2) $\cos y = 0$ veya $\left(4x - x^2\right) = 0$

B bölgesinde çözüm yoktur.



[AB] üzerinde:

$y = -\frac{\pi}{4}$, $\quad 1 \le x \le 3$ ve $f\left(x, -\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(4x - x^2\right)$

$f'\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(4 - 2x) \Rightarrow x = 2$ ve $y = -\frac{\pi}{4}$

[BC] üzerinde:

$x = 3$, $\quad -\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{4}$ $\quad f(3, y) = 3\cos y$

$f'(3,y) = -3\sin y = 0 \Rightarrow y = 0$ olur.

[CD] üzerinde:

$y = \frac{\pi}{4}$, $1 \le x \le 3$, $f\left(x, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(4x - x^2\right)$

$f'\left(x, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(4 - 2x) = 0 \Rightarrow x = 2$

[DA] üzerinde:

$x = 1$, $\quad -\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{4}$, $f(1,y) = 3\cos y$

$f'(1,y) = -3\sin y = 0 \Rightarrow y = 0$

Fonksiyonun B bölgesinin köşelerinde aldığı değerler de göz önüne alınırsa aşağıdaki tablo elde edilir.

x	2	2	3	2	1	1	1	3	3
y	0	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
f(x,y)	4	$2\sqrt{2}$	3	$2\sqrt{2}$	3	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Fonksiyonun mutlak maksimum noktası (2, 0), mutlak minumum noktaları $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(1, -\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(3, -\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$ noktalarıdır.

Mutlak maksimum değer 4; Mutlak minumum değer $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ dir.

3. Toplamları 60 olan üç pozitif sayının çarpımı en fazla kaç olur?

Çözüm:

$x + y + z = 60$, $\quad f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$

$g(x,y) = xy(60 - x - y)$

$g_x = y(60 - x - y) - xy = 0 \Rightarrow y(60 - 2x - y) = 0$

$g_y = x(60 - x - y) - xy = 0 \Rightarrow x(60 - x - 2y) = 0$

1) $y = 0$ ve $x = 0$ (olamaz)

2) $y = 0$ ise $60 - x - 2y = 0 \Rightarrow x = 60$ (olamaz)

3) $x = 0$ ise $60 - 2x - y = 0 \Rightarrow y = 60$ (olamaz)

4) $60 - 2x - y = 0$ ve $60 - 2y - x = 0 \Rightarrow x = 20$ ve $y = 20$

$z = 60 - x - y = 60 - 20 - 20 = 20$ olur. Bunların çarpımı

$x \,.\, y \,.\, z = 20.\,20.\,20 = 8000$ olur.

4. Çarpımları 343 olan üç sayının toplamı en az kaçtır?

Çözüm:

$x \,.\, y \,.\, z = 343$ için $f(x, y, z) = x + y + z$ fonksiyonunun minimumu bulunacaktır.

$g(x,y) = f\left(x, y, \frac{343}{xy}\right) = x + y + \frac{343}{xy}$ diyelim

$g_x = 1 - \frac{343}{x^2y} = 0 \Rightarrow x^2y = 343$

$g_y = 1 - \frac{343}{xy^2} = 0 \Rightarrow xy^2 = 343 \Rightarrow \frac{xy^2}{yx^2} = \frac{343}{343} \Rightarrow x = y$

$\Rightarrow x^3 = 343 \Rightarrow x = 7$ ve $y = 7 \Rightarrow z = 7$ olur.

Fonksiyon en küçük değerini (7, 7, 7) noktasında alır. $x + y + z$ en az 21 olur.

5. Yüzey alanları aynı olan dikdörtgenler prizması içinde hacmi en fazla olan küp olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$V = xyz$ fonksiyonunun $2(xy + xz + yz) = A$(sabit) şartı altında mutlak maksimumu bulunacaktır.

$c = \frac{A}{2}$ diyelim. $xy + z(x+y) = c$ olacağından

$V = xy\left(\frac{c - xy}{x+y}\right) = \frac{cxy - x^2y^2}{x+y}$ olur.

$V_x = \frac{y^2\left(c - 2xy - y^2\right)}{(x+y)^2}$, $V_y = \frac{x^2\left(c - 2xy - y^2\right)}{(x+y)^2}$

$\left.\begin{array}{l} V_x = 0 \\ V_y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c - 2xy - y^2 = 0 \\ c - 2xy - x^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = y \Rightarrow c - 2x^2 - x^2 = 0$

$\Rightarrow c = 3x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{c}{3}} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{c}{3}}$

$c = xy + xz + yz \Rightarrow c = \frac{c}{3} + \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{3}}z \Rightarrow 2\frac{c}{3} = 2\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{3}}z$

$z = \sqrt{\frac{c}{3}}$ bulunur.

$x = y = z$ olduğundan prizma bir küptür.

6. $z^2 = xy - 3x + 9$ yüzeyi üzerinde orijine en yakın olan noktayı bulunuz.

Çözüm:

$f(x,y) = \ell^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + xy - 3x + 9$

$\left.\begin{array}{l} f_x = 2x + y - 3 = 0 \\ f_y = 2y + x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 2$ ve $y = -1$

bulunur. Bu durumda

$z^2 = xy - 3x + 9 = 2(-1) - 3.2 + 9 = 1 \Rightarrow z = \pm 1$ olur.

(2, −1, 1) ve (2, −1, −1) noktalarını inceleyelim. Bu iki nokta için

$\left.\begin{array}{l} f_{xx} = 2 \\ f_{yy} = 2 \\ f_{xy} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta(x,y) = 2.2 - 1^2 = 3 > 0$ ve $f_{xx} > 0$ olduğundan, bunlar orijine en yakın noktalardır.

Bu noktaların orijine olan uzaklıkları $\ell = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$ birimdir.

7. $z = 6y - 2x - x^2 - y^2$ denklemi ile verilen yüzeyin en yüksek noktasını bulunuz.

Çözüm:

$z_x = -2 - 2x = 0 \Rightarrow x = -1$

$z_y = 6 - 2y \Rightarrow y = 3$

$\Rightarrow z = 6.3 - 2(-1) - (-1)^2 - (3)^2 = 10$

$\left.\begin{array}{l} z_{xx} = -2 \\ z_{yy} = -2 \\ z_{xy} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta(x,y) = 4 > 0$ ve $z_{xx} < 0$

$\Rightarrow (-1, 3, 10)$ noktası yüzeyin en yüksek noktasıdır.

8. Hacmi V olan dikdörtgenler prizması şeklindeki kapalı bir kutunun yüzey alanı en az ne olabilir.

Çözüm:

$V = xyz$

$$A = 2xy + 2xz + 2yz = 2xy + 2(x+y)\frac{V}{xy} = 2\left(xy + \frac{V}{y} + \frac{V}{x}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} A_x &= 2\left(y - \frac{V}{x^2}\right) = 0 \\ A_y &= 2\left(x - \frac{V}{y^2}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = y = \sqrt[3]{V}$$

bulunur. Bunlar A yı minimum yapan değerlerdir. Bu değerler için

$A = 2\sqrt[3]{V^2} + 2\sqrt[3]{V^2} + 2\sqrt[3]{V^2} = 6\sqrt[3]{V^2}$ olur.

9. 288 m^3 hacminde dikdörtgenler prizması biçiminde depo yaptırılacaktır. Tavan ve tabanın bir metrekaresinin mal oluş fiyatı 40 milyon, yan duvarların bir metrekaresinin mal oluş fiyatı 30 milyondur. Bu deponun mümkün olduğu kadar ucuza yaptırılabilmesi için boyutları ne olmalıdır. Bu depo en az kaç milyona mal olur?

Çözüm:

M= Maliyet olsun.

$xyz = 288 \Rightarrow z = \dfrac{288}{xy}$ olur.

$$M = 2xy.40 + (2yz + 2xz).30 = 80xy + 60\frac{288}{xy}(y+x) = 80xy + 17280\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} M_x &= 80y - \frac{17280}{x^2} = 0 \\ M_y &= 80x - \frac{17280}{y^2} = 0 \end{aligned}\right\} y = x \Rightarrow 80x - \frac{17280}{x^2} = 0 \Rightarrow x^3 = 216 \Rightarrow x = 6 \text{ ve } y = 6$$

$x.y.z = 288 \Rightarrow 6.6.z = 288 \Rightarrow z = 8$

$$\left.\begin{aligned} M_{xx} &= \frac{34560}{x^3} \\ M_{yy} &= \frac{34560}{y^3} \\ M_{xy} &= 80 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta(6,6) = \frac{34560}{6^3}.\frac{34560}{6^3} - 80^2 = 19200 > 0$$

ve $M_{xx}(6,6) = 160 > 0 \Rightarrow (6,6,8)$ noktasında maliyet en az olur ve bu maliyet

$M(6, 6, 8) = 8.\ 640.000.000$ olur.

10. Parametrik denklemleri

$$d_1 \ldots\ldots \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t+1 \end{cases} \qquad d_2 \ldots\ldots \begin{cases} x = s \\ y = s+3 \\ z = s \end{cases}$$

olan doğruların arasındaki uzaklığı hesaplayınız.

Çözüm:

d_1 üzerindeki A(t, 2t, t + 1) ile d_2 üzerindeki B(s, s + 3, s) noktaları arasındaki uzaklık

$$\ell = \left[(t-s)^2 + (2t-s-3)^2 + (t+1-s)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

birimdir. Bu ifadeyi minimum yapan t ve s değerleri

$f(t,s) = (t-s)^2 + (2t-s-3)^2 + (t+1-s)^2$

ifadesini minimum yapan değerlerdir.

$$\left.\begin{aligned} f_t &= 6t - 4s - 6 = 0 \\ f_s &= 3s - 4t + 2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow t = 5, \quad s = 6 \text{ bulunur.}$$

O halde istenen noktalar A(5, 10, 6) ve B(6, 9, 6) noktalarıdır. Bu noktalar arasındaki uzaklık

$\ell = \sqrt{(5-6)^2 + (10-9)^2 + (6-6)^2} = \sqrt{2}$ birim olur.

11. Üst tarafı açık olan dikdörtgen prizması şeklinde 4m^3 hacminde bir çöp bidonu yapmak için en az kaç m^2 saca ihtiyaç vardır?

Çözüm:

$x.y.z = 4 \Rightarrow z = \dfrac{4}{xy}$

$$f(x,y,z) = xy + 2(xz + yz) \Rightarrow g(x,y) = f\left(x, y, \frac{4}{xy}\right) = xy + 8\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} g_x &= y - \frac{8}{x^2} = 0 \\ g_y &= x - \frac{8}{y^2} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = y \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2, \ y = 2$$

$x.y.z = 4 \Rightarrow z = 1$

$g_{xx} = \dfrac{16}{x^3} \qquad g_{yy} = \dfrac{16}{y^3} \qquad g_{xy} = 1$

$$\Delta(x,y) = \frac{256}{x^3y^3} - 1 \Rightarrow \Delta(2,2) = \frac{256}{64} - 1 = 3 > 0 \text{ ve } g_{xx}(2,2) = \frac{16}{8} > 0$$

$\Rightarrow$ (2, 2, 1) boyutlu bir prizma için en az sac kullanılır ve bu sac

$f(2, 2, 1) = 4 + 2.2 = 12\ m^2$ dir.

12. Çevresinin uzunluğu 2p olan bir üçgenin alanı en fazla ne olabilir?

Çözüm:

Üçgenin S alanı , $2p = x + y + z$ olmak üzere $S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$

$$f(x,y) = S^2 = p(p-x)(p-y)(p-z)$$

$$= p(p-x)(p-y)(x+y-p)$$

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= -p(p-y)(x+y-p) + p(p-x)(p-y) = 0 \\ f_y(x,y) &= -p(p-x)(x+y-p) + p(p-x)(p-y) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} (p-y)2p-2x-y &= 0 \\ (p-x)(2p-2y-x) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$x = p$ ve $y = p$ olamayacağından

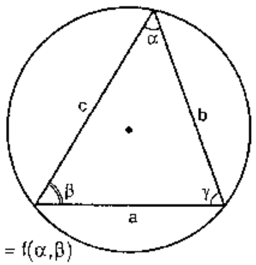
$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 2p \\ 2y + x &= 2p \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = y = \frac{2}{3}p \text{ olmalıdır. Bu durumda } z = \frac{2}{3}p \text{ olur.}$$

$$S^2 = p\left(p - \frac{2}{3}p\right)\left(p - \frac{2}{3}p\right)\left(p - \frac{2}{3}p\right) = \frac{1}{27}p^4 \Rightarrow S = \frac{1}{\sqrt{27}}p^2$$

bulunur.

13. R yarıçaplı bir çemberin iç bölgesine çizilebilecek bir üçgenin çevresi en fazla kaç birim olur?

Çözüm:



Üçgenin kenar uzunlukları a, b, c ve bu kenarlara karşılık gelen açılarının ölçüleri α, β, γ olsun.

Bu takdirde $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ dir.

Sinüs teoremine göre

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R \Rightarrow \frac{a+b+c}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} = 2R$$

olur.

$$a + b + c = 2R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = 2\pi[\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)] = f(\alpha,\beta)$$

ifadesinin maksimumu bulunacaktır.

$$\left.\begin{aligned} f_\alpha &= \cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) = 0 \\ f_\beta &= \cos\beta + \cos(\alpha+\beta) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha = \beta \text{ olmalı}$$

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\pi}{3} \text{ ve } \gamma = \frac{\pi}{3} \text{ bulunur.}$$

$$a + b + c = 2R\left(\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}R \text{ olur.}$$

14. Düzlemde $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ noktalarına yerleştirilmiş m_1, m_2, m_3 kütleleri veriliyor. Öyle bir P(x, y) noktaları bulunuz ki bu sistemin P noktasına göre eylemsizlik momenti, yani

$$m_1|AP|^2 + m_2|BP|^2 + m_3|CP|^2$$

ifadesi minumum olsun.

Çözüm:

$$|AP|^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2,\quad |BP|^2 = (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2,\quad |CP|^2 = (x-x_3)^2 + (y-y_3)^2$$

$$f(x,y) = m_1\left[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2\right] + m_2\left[(x-x_2)^2 + (y-y^2)^2\right] + m_3\left[(x-x_3)^2 + (y-y^3)^2\right]$$

$$f_x = 2m_1(x-x_1) + 2m_2(x-x_2) + 2m_3(x-x_3) = 0$$

$$f_y = 2m_1(y-y_1) + 2m_2(y-y_2) + 2m_3(y-y_3) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \qquad y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

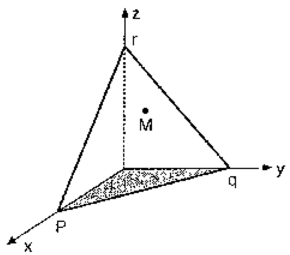
$$f_{xx} = 2m_1 + 2m_2 + 2m_3,\quad f_{yy} = 2m_1 + 2m_2 + 2m_3,\quad f_{xy} = 0$$

$\Delta(x,y) = (2m_1 + 2m_2 + 2m_3)^2 > 0$ ve $f_{xx} = 2m_1 + 2m_2 + 2m_3 > 0$ olduğundan

f fonksiyonu $\left(\dfrac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \dfrac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}\right)$ noktasında minumum olur.

15. M(a, b, c) noktasından geçen öyle bir düzlem bulunuz ki bu düzlemle koordinat düzlemlerinin oluşturduğu dörtyüzlünün hacmi minimum olsun.

Çözüm:



Düzlem eksenleri p, q, r noktalarında kessin. Düzlemin denklemi $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$

biçiminde olur. Düzlem (a, b, c) noktasından geçtiğinden $\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} = 1$ dir.

Dörtyüzlünün hacmi $V = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}pqr$ olacağından

$V = \frac{1}{6}pqr$ fonksiyonunun

$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} = 1$ şartı altındaki minimum değeri bulunacaktır.

$f(p,q,r,\lambda)=\frac{1}{6}pqr+\lambda\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}-1\right)$ fonksiyonu için

$$f_p=\frac{1}{6}qr-\frac{\lambda a}{p^2}=0 \Rightarrow qr=\frac{6\lambda a}{p^2}$$

$$f_q=\frac{1}{6}pr-\frac{\lambda b}{q^2}=0 \Rightarrow pr=\frac{6\lambda b}{q^2}$$

$$f_r=\frac{1}{6}pq-\frac{\lambda b}{r^2}=0 \Rightarrow pq=\frac{6\lambda b}{r^2}$$

olur. Sağdaki ifadeler oranlanarak $\frac{a}{p}=\frac{1}{3}$, $\frac{b}{q}=\frac{1}{3}$, $\frac{c}{r}=\frac{1}{3}$

bulunur. Düzlem denkleminde $p=3a$, $q=3b$, $r=3c$ yazılırsa

$\frac{x}{3a}+\frac{y}{3b}+\frac{z}{3c}=1 \Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3$ denklemi elde edilir.

16. İki nehirden birinin yatağı $y=x^2$ parabolü, ikincisininki $x-y-2=0$ doğrusu üzerindedir. Bu iki nehir arasında açılacak doğrusal bir kanalın uzunluğu en az kaç birim olur?

Çözüm:

Parabole ait nokta (s,t), doğruya ait nokta (x,y) olsun.

$t=s^2$ ve $y=x-2$ olacağından

$$f(s,x)=(s-x)^2+(t-y)^2=(s-x)^2+\left(s^2+2-x\right)^2$$

ifadesini minimum yapan s ve x değerlerini bulmak gerekir.

$$f_s(s,x)=2(s-x)+2\left(s^2+2-x\right)(2s)=0 \Rightarrow s-x=-2s\left(s^2+2-x\right)$$

$$f_x(s,t)=-2(s-x)-2\left(s^2+2-x\right)=0 \Rightarrow s-x=-\left(s^2+2-x\right)$$

bulunur. Bunlar taraf tarafa oranlanırsa $-2s=-1 \Rightarrow s=\frac{1}{2}$ bulunur. Denklemlerinden birinde $s=\frac{1}{2}$ yazılırsa $x=\frac{11}{8}$ bulunur.

$f(s,x)=f\left(\frac{1}{2},\frac{11}{8}\right)=\frac{7^2.2}{8^2}$ olacağından, istenen uzaklık $\ell=\frac{7\sqrt{2}}{8}$ birimdir.

17. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı yan şartlar altında ekstremumlarını bulunuz.

a) $f(x,y)=x^2-y^2$, $xy=1$

b) $f(x,y)=x^2+8y^2$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$

c) $f(x,y,z)=x-2y+2z$, $x^2+y^2+z^2=9$

d) $f(x,y,z)=2x^2+y^2-z^2$, $2x^2+y^2-z^2=2$

e) $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$, $x+3y-2z=4$

Çözüm:

a) $f(x,y)=x^2-y^2,\ xy=1$

$$h(x,y;\lambda)=x^2-y^2+\lambda(xy-1)$$

$$\left.\begin{aligned} h_x&=2x+\lambda y=0\\ h_y&=-2y+\lambda x=0\\ h_\lambda&=xy-1=0\end{aligned}\right\}$$

denklem sisteminin bir çözümü olmadığından ekstremum yoktur.

b) $f(x,y)=x^2+8y^2 \qquad \sqrt{x}+\sqrt{y}=1$

$$h(x,y,\lambda)=x^2+8y^2+\lambda\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-1\right)$$

$$\left.\begin{aligned} h_x&=2x+\frac{\lambda}{2\sqrt{x}}=0\\ h_y&=16y+\frac{\lambda}{2\sqrt{y}}=0\\ h_\lambda&=\sqrt{x}+\sqrt{y}-1=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}\lambda&=-4x^{\frac{3}{2}}\\ \lambda&=-32y^{\frac{3}{2}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow x=4y$$

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}-1=0 \Rightarrow \sqrt{4y}+\sqrt{y}=1 \Rightarrow \sqrt{y}=\frac{1}{3} \Rightarrow y=\frac{1}{9} \Rightarrow x=\frac{4}{9}$$

$f\left(\frac{4}{9},\frac{1}{9}\right)=\left(\frac{4}{9}\right)^2+8\left(\frac{1}{9}\right)^2=\frac{16+8}{9^2}=\frac{24}{81}=\frac{8}{27}$ olur.

c) $f(x,y,z) = x-2y+2z \quad , \quad x^2+y^2+z^2=9$

$$h(x,y,z,\lambda) = x-2y+2z+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-9\right)$$

$$h_x = 1+2\lambda x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2\lambda}$$

$$h_y = -2+2\lambda y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{\lambda}$$

$$h_z = 2+2\lambda z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{1}{\lambda}$$

$$h_\lambda = x^2+y^2+z^2-9 = 0$$

$$x^2+y^2+z^2 = 9 \Rightarrow \frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2} = 9$$

$$\frac{9}{4\lambda^2} = 9 \Rightarrow 4\lambda^2 = 1 \quad \Rightarrow \lambda = \mp\frac{1}{2}$$

$\lambda = \frac{1}{2}$ ise $\quad x=-1, \quad y=2, \quad z=-2$

$\lambda = -\frac{1}{2}$ ise $\quad x=1, \quad y=-2, \quad z=2$

$f(-1,2,-2) = -9 \quad \Rightarrow \quad (-1, 2, -2)$ yerel minumum nokta

$f(1,-2,2) = 9 \quad \Rightarrow \quad (1, -2, 2)$ yerel maximum nokta

d) $f(x,y,z) = 2x^2+y^2-z^2 \quad , \quad 2x+y-z=2$

$$h(x,y,z;\lambda) = 2x^2+y^2-z^2+\lambda(2x+y-z-2) = 0$$

$$h_x = 4x+2\lambda = 0 \quad \Rightarrow x = -\frac{\lambda}{2}$$

$$h_y = 2y+\lambda = 0 \quad \Rightarrow y = -\frac{\lambda}{2}$$

$$h_z = -2z-2\lambda = 0 \quad \Rightarrow z = -\lambda$$

$h_\lambda = 2x+y-z = 2 \quad \Rightarrow -\lambda-\frac{\lambda}{2}+\lambda = 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -4 \quad \Rightarrow \quad x=2,\ y=2,\ z=4$ olur.

$(2, 2, 4)$ yerel minimum noktasıdır. $z_{min} = -4$

e) $f(x, y, z) = x^2+y^2-z^2, \quad x+3y-2z=4$

$f(x, y, z) = x^2+y^2-z^2$ ifadesinde z yerine $\frac{1}{2}(x+3y-4)$ yazılırsa

$$g(x,y) = f\left(x,\ y,\ \frac{1}{2}(x+3y-4)\right) = x^2+y^2-\frac{1}{4}(x+3y-4)^2$$

bulunur.

$$\left.\begin{aligned} g_x &= 2x-\frac{1}{2}\cdot(x+3y-4) = 0 \\ g_y &= 2y-\frac{1}{2}\cdot 3(x+3y-4) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 3x-3y &= -4 \\ 3x+5y &= 12 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \frac{2}{3},\ \ y=2$$

bulunur. Kritik nokta $\left(\frac{2}{3},\ 2\right)$ dir.

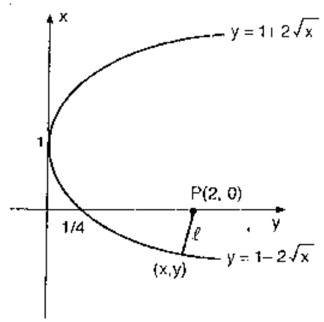
$$g_{xx} = 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad g_{yy} = 2-\frac{9}{2} = -\frac{5}{2}, \quad g_{xy} = -\frac{3}{2}$$

olduğundan

$\Delta = g_{xx}\,g_{yy}-g_{xy} = \frac{3}{2}\left(-\frac{5}{2}\right)-\frac{9}{4} = -\frac{24}{4} = -6 < 0$ dır. Bu da $\left(\frac{2}{3},\ 2\right)$ noktasının bir eyer noktası olduğunu gösterir.

18. $(y-1)^2 = 4x$ parabolünün P(2, 0) noktasına en yakın noktasının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm:



$f(x,y) = (x-2)^2+y^2, \quad g(x,y) = (y-1)^2-4x = 0$

$$h(x,y;\lambda) = (x-2)^2+y^2+\lambda\left((y-1)^2-4x\right)$$

$$\left.\begin{aligned} h_x &= 2(x-2)-4\lambda = 0 \\ h_y &= 2y+2\lambda(y-1) = 0 \\ h_\lambda &= (y-1)^2-4x = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Rightarrow x = 2\lambda+2 \\ &\Rightarrow y = \frac{\lambda}{\lambda+1} \\ &\Rightarrow \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}-1\right)^2 = 4(2\lambda+2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(\lambda+1)^2} = 8(\lambda+1) \Rightarrow (\lambda+1)^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow \lambda+1 = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$ olur. Bu durumda

$$x = 2\lambda+2 = -1+2 = 1, \quad y = \frac{\lambda}{\lambda+1} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}+1} = -1$$

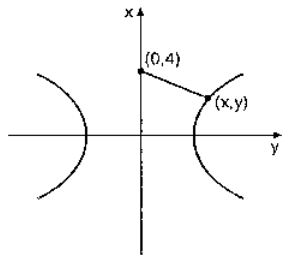
olur. P(2, 0) noktasına en yakın nokta A(1, −1) noktasıdır.

19. $x^2 - y^2 = 1$ **hiperbolünün (0, 4) noktasına en yakın noktasını bulunuz.**

Çözüm:

$f(x,y) = x^2 + (y-4)^2, \quad g(x,y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$

$h(x,y,\lambda) = x^2 + (y-4)^2 + \lambda\left(x^2 - y^2 - 1\right)$



$$\left.\begin{aligned} h_x &= 2x + 2x\lambda = 0 \\ h_y &= 2(y-4) - 2y\lambda = 0 \\ h_\lambda &= x^2 - y^2 - 1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &x(1+\lambda) = 0 \\ &x = 0 \quad \text{veya} \quad \lambda = -1 \text{ olmalıdır.} \end{aligned}$$

$x = 0$ olamayacağından $\lambda = -1$ dir. İkinci denklemde

$\lambda = -1$ yazılırsa $y = 2$ bulunur.

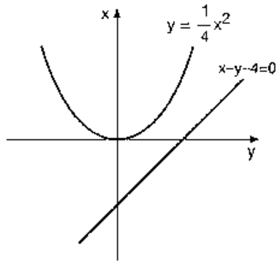
$x^2 - y^2 - 1 = 0$ denkleminde $y = 2$ yazılırsa $x^2 - 4 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$ olur.

$\left(\sqrt{5}, 2\right)\ \left(-\sqrt{5}, 2\right)$ noktaları (0, 4) noktasına en yakın noktalardır.

20. $y = \dfrac{1}{4}x^2$ **parabolünün** $x - y - 4 = 0$ **doğrusuna en yakın noktasını bulunuz?**

Çözüm:

Parabole ait nokta (s,t), doğruya ait nokta (x,y) olsun.



$$f(x,s) = (s-x)^2 + (t-y)^2 = (s-x)^2 + \left(\frac{1}{4}s^2 + 4 - x\right)^2$$

$$f_s = 2(s-x) + s\left(\frac{1}{4}x^2 + 4 - x\right) = 0 \Rightarrow$$

$$2(s-x) = -s\left(\frac{1}{4}s^2 + 4 - x\right)$$

$$f_s = -2(s-x) - \left(\frac{1}{4}s^2 + 4 - x\right) = 0 \Rightarrow$$

$$2(s-x) = -\left(\frac{1}{4}s^2 + 4 - x\right)$$

olur. Taraf tarafa oranlanırsa $s = 1$ bulunur.

Bu değer yukarıdaki denklemlerden birinde yerine yazılırsa $x = \dfrac{25}{12}$ bulunur. İstenen uzaklık;

$$\sqrt{f\left(1, \frac{25}{12}\right)} = \sqrt{\left(1 - \frac{25}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} + 4 - \frac{25}{12}\right)^2} = \frac{13\sqrt{5}}{12} \text{ birim olur.}$$

21. **(0, 0, 0) noktasının** $(x-y)^2 - z^2 = 1$ **yüzeyine olan uzaklığını bulunuz?**

Çözüm:

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad g(x,y,z) = (x-y)^2 - z^2 - 1 = 0$

$h(x,y,z;\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\left((x-y)^2 - z^2 - 1\right)$

$$\left.\begin{aligned} h_x &= 2x + 2\lambda(x-y) = 0 \\ h_y &= 2y - 2\lambda(x-y) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = -y$$

$h_z = 2z - 2z\lambda = 0 \Rightarrow z(1-\lambda) = 0 \Rightarrow z = 0$ veya $\lambda = 1$

$h_\lambda = (x-y)^2 - z^2 - 1 = 0$

$z = 0$ olsun

$(x+x)^2 - 1 = 0 \Rightarrow 2x = \mp 1 \Rightarrow x = \mp\dfrac{1}{2} \Rightarrow y = \pm\dfrac{1}{2}$ bulunur.

$\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 0\right)$ ve $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 0\right)$ noktaları için uzaklık

$\Rightarrow f\left(\pm\dfrac{1}{2}, \mp\dfrac{1}{2}, 0\right) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$ birim olur.

$x = 1$, $y = -1$ için $(x-y)^2 - z^2 - 1 = 0$ denkleminden $z = \pm\sqrt{3}$ bulunur. Buna karşılık gelen $\left(1, -1, \pm\sqrt{3}\right)$ noktaları için $f(x, y, z) = 5$ bulunur. O halde, (0, 0, 0) noktasının yüzeye olan uzaklığı $\dfrac{1}{2}$ birimdir.

22. $f(x, y) = x^2 + y^2$ **fonksiyonunun** $3x^2 + 4xy + 6y^2 = 140$ **yan şartı altında en büyük değerinin 70, en küçük değerinin 20 olduğunu gösteriniz.**

Çözüm:

$h(x,y;\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda\left(3x^2 + 4xy + 6y^2 - 140\right)$

$h_x = 2x + \lambda(6x + 4y) = 0$

$h_y = 2y + \lambda(4x + 12y) = 0$

$h_\lambda = 3x^2 + 4xy + 16y^2 - 140 = 0$

$$\left.\begin{aligned} &x(1+3\lambda) + 2y\lambda = 0 \\ &x(2\lambda) + y(1+6\lambda) = 0 \end{aligned}\right\}$$

denklem sisteminin aşikar olmayan çözümlerinin olması için katsayılar determinantı 0 olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} 1+3\lambda & 2\lambda \\ 2\lambda & 1+6\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1+6\lambda+3\lambda+18\lambda^2-4\lambda^2 = 0 \Rightarrow 14\lambda^2+9\lambda+1=0$$

$$\Rightarrow (7\lambda+1)(2\lambda+1)=0 \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{7}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

1. $\lambda = -\frac{1}{2}$ olsun.

$-\frac{1}{2}x - y = 0 \Rightarrow x+2y=0 \Rightarrow x=-2y$ bulunur. Bu değer yan şart bağıntısında yerine yazılırsa;

$$3(-2y)^2 + 4(-2y).y + 6y^2 = 140 \Rightarrow 10y^2 = 140$$

$$\Rightarrow y^2 = 14 \Rightarrow y = \mp\sqrt{14} \text{ ve } x = \pm 2\sqrt{14}$$

2. $\lambda = -\frac{1}{7}$

$\frac{4}{7}x - \frac{2}{7}y = 0 \Rightarrow 2x = y$ bulunur. Bu değer yan şart bağıntısında yerine yazılırsa,

$$3x^2 + 4x.2x + 6(2x^2)^2 = 140 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \mp 2 \text{ ve } y = \mp 4$$

$\Rightarrow$ kritik noktalar $(\mp\sqrt{14},\ \pm 2\sqrt{14})$ ve $(\mp 2,\ \mp 4)$ noktalarıdır.

$$f(\mp\sqrt{14},\ \pm 2\sqrt{14}) = (\mp\sqrt{14})^2 + (\pm 2\sqrt{14})^2 = 70$$

$f(\mp 2,\ \mp 4) = (\mp 2)^2 + (\mp 4)^2 = 20$ bulunur.

23. Başlangıç noktasının $5x^2+6xy+5y^2-8=0$ eğrisine olan uzaklığının 1 birim olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$f(x,y) = x^2+y^2$ fonksiyonunun $g(x,y) = 5x^2+6xy+5y^2-8=0$ yan şartı altındaki minimum değeri bulunacaktır.

$$h(x,y;\lambda) = x^2+y^2+\lambda(5x^2+6xy+5y^2-8)$$

$$h_x = 2x + \lambda(10x+6y) = 0$$

$$h_y = 2y + \lambda(6x+10y) = 0$$

$$h_\lambda = 5x^2+6xy+5y^2-8=0$$

$$\left.\begin{aligned} x(1+5\lambda)+3y\lambda &= 0 \\ 3x\lambda + y(1+5\lambda) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

sisteminin aşikar olmayan çözümlerinin var olması için katsayılar determinantı 0 olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} 1+5\lambda & 3\lambda \\ 3\lambda & 1+5\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1+10\lambda+25\lambda^2-9\lambda^2 = 0 \Rightarrow (8\lambda+1)(2\lambda+1)=0$$

$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{8}$ veya $\lambda = -\frac{1}{2}$ bulunur.

$\lambda = -\frac{1}{8}$ olsun. Bu değer $x(1+5\lambda)+3y\lambda=0$ denkleminde yerine yazılırsa $x=y$ bulunur.

Yan şart bağıntısında $x=y$ yazılırsa;

$$5x^2+6x^2+5x^2-8=0 \Rightarrow 16x^2=8 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$$

bulunur.

$x = -\frac{1}{2}$ olsun. Yukarıdaki yol izlenerek $x = \pm 2$, $y = \pm 2$ bulunur.

Başlangıç noktasının $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ noktasına olan uzaklığı $\ell = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$ birim, $(\pm 2,\ \pm 2)$ noktasına olan uzaklığı $\ell = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ birimdir. O halde, orijinin eğriye olan uzaklığı 1 birimdir.

24. $x^2+y^2+z^2=1$ küresi üzerinde bulunan (x, y, z) noktaları için $x+z$ en fazla ne olabilir?

Çözüm:

$$h(x,y,z;\lambda) = x+z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

$$h_x = 1+2x\lambda = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2\lambda}$$

$$h_y = 2y\lambda = 0 \Leftrightarrow y=0 \text{ veya } \lambda=0 \quad (\lambda=0 \text{ olamaz})$$

$$h_z = 1+2z\lambda = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2\lambda}$$

$$h_\lambda = x^2+y^2+z^2-1=0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + 0 + \left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 1 \Rightarrow 2\frac{1}{4\lambda^2} = 1 \Rightarrow \lambda = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y=0$, $z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ bulunur. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ve $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

noktaları için $x+z$ en fazla $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ olur.

25. **P, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ elipsoidi üzerinde alınan herhangi bir nokta olduğuna göre, P nin orjine olan uzaklığı**

a) en az kaç birim olur.

b) en fazla kaç birim olur. ($a<b<c$ dir.)

Çözüm:

$P(x,y,z)$ olsun. P nin orjine uzaklığının karesi

$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ dir.

$F(x,y)=x^2+y^2+c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$ fonksiyonunun minimumu bulunacaktır.

$$F_x=2x-2\frac{c^2}{a^2}x=0 \Rightarrow 2x\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)=0$$

$$F_y=2y-2\frac{c^2}{b^2}y=0 \Rightarrow 2y\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)=0$$

olur. $x=y=0$ için $z=c$ bulunur.

$$F_{xx}=2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right) \qquad \frac{c}{b}>1 \qquad \frac{c}{a}>1$$

$$F_{yy}=2\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)$$

$$F_{xy}=0$$

$\Rightarrow \Delta=F_{xx}.F_{yy}-F_{xy}^2>0$ ve $F_{xx}<0 \Rightarrow (0,0,c)$ en uzak noktadır. Bu noktanın orijine olan uzaklığı c dir.

26. Toplamları 9 olan üç reel sayının kareleri toplamı en az kaç olur?

Çözüm:

$x+y+z=9, \qquad f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

$g(x,y)=f(x,y,9-x-y)=x^2+y^2+(9-x-y)^2$

$$\left.\begin{aligned} g_x&=2x-2(9-x-y)=0\\ g_y&=2y-2(9-x-y)=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow x=y$$

$\Rightarrow x=9-2x \Rightarrow 3x=9 \Rightarrow x=3 \Rightarrow y=3 \Rightarrow z=3$

$$\left.\begin{aligned} g_{xx}&=2+2=4\\ g_{yy}&=2+2=4\\ g_{xy}&=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow \Delta(x,y)=4.4-2^2=12>0 \text{ ve } g_{xx}=4>0$$

$\Rightarrow$ (3, 3, 3) noktası f yi minumum yapan değerdir ve bu değer 27 dir.

27. $x+y+z^2=16$ bağıntısını sağlayan pozitif x, y, z sayılarının çarpımı en az kaç olur?

Çözüm:

$f(x,y,z)=x.y.z, \qquad g(x,y,z)=x+y+z^2-16=0$

$h(x,y,z;\lambda)=xyz+\lambda(x+y+z^2-16)$

$$\left.\begin{aligned} h_x&=yz+\lambda=0\\ h_y&=xz+\lambda=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow y=x$$

$h_z=xy+2z\lambda=0$

$h_z=x+y+z^2-16=0$

Üçüncü denklemde $\lambda=-yz$ yazılırsa $x=2z^2$ bulunur. Bu değerler yan şart bağıntısında yerine konursa

$$2z^2+2z^2+z^2=16 \Rightarrow 5z^2=16 \Rightarrow z=\frac{4}{\sqrt5}, \quad y=\frac{32}{5}, \quad x=\frac{32}{5}$$

bulunur. $x.y.z=\frac{4096}{25\sqrt5}$ olur.

28. Orjinin $3x+2y+z=14$ düzlemine olan uzaklığını hesaplayınız.

Çözüm:

$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

$f(x,y,(14-3x-2y))=x^2+y^2+(14-3x-2y)^2$

$$\left.\begin{aligned} f_x&=2x-6(14-3x-2y)=0\\ f_y&=2y-4(14-3x-2y)=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow 3y=2x$$

$$\Rightarrow 2x-6\left(14-3x-\frac{4}{3}x\right)=0 \Rightarrow 2x-84+18x+8x=0 \Rightarrow x=3$$

bulunur. $x=3$ için $y=2$, $z=1$ olur.

$$\left.\begin{aligned} f_{xx}&=2+18=20\\ f_{yy}&=2+12=16\\ f_{xy}&=12\end{aligned}\right\}\Rightarrow \Delta(x,y)=20.16-144>0 \text{ ve } f_{xx}=20>0\Rightarrow$$

f fonksiyonu en küçük değerini (3, 2, 1) noktasında alır ve bu değer

$f(3,2,1)=9+4+1=14$ tür.

29. 300 cm^2 lik bir kartondan üstü açık dikdörtgenler prizması şeklinde bir kutu yapılacaktır. Kutunun hacminin en büyük olması durumunda boyutları ne olur.

Çözüm:

$300 = xy + 2xz + 2yz, \quad V = x.y.z$

$$V = xy\left(\frac{300 - xy}{2x + 2y}\right) = \frac{300xy - x^2y^2}{2x + 2y}$$

$$V_x = \frac{(300y - 2xy^2)(2x + 2y) - 2(300.xy - x^2y^2)}{(2x + 2y)^2} = \frac{y^2(300 - x^2 - 2xy)}{2(x + y)^2}$$

$$V_y = \frac{x^2(300 - y^2 - 2yx)}{2(x + y)^2}$$

$$\left.\begin{matrix} V_x = 0 \\ V_y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = y \Rightarrow 300 - x^2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow y = 10$$

$$300 = 10.10 + 2z(10 + 10) \Rightarrow \frac{200}{40} = z \Rightarrow z = 5 \Rightarrow \text{boyutlar } (10,10,5) \text{ olmalıdır.}$$

30. Orijinin $x^2 - z^2 = 1$ hiperbolik silindirine olan uzaklığını hesaplayınız.

Çözüm:

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$f\left(\mp\sqrt{1+z^2}, y, z\right) = y^2 + 2z^2 + 1$$

$$\left.\begin{matrix} f_y = 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \\ f_z = 4z = 0 \Rightarrow z = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2 = z^2 + 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$$

$\Rightarrow (1, 0, 0)$ ve $(-1, 0, 0)$ kritik noktalar

$$\left.\begin{matrix} f_{yy} = 2 \\ f_{zz} = 4 \\ f_{yz} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta(x,y) = 2.4 - 0 = 8 > 0 \quad \text{ve} \quad f_{yy} = 2 > 0$$

Bu noktalar yerel minimum noktalardır. Orijinin silindire olan uzaklığı

$f(1,0,0) = f(-1,0,0) = 1$ birimdir.

VEKTÖR ALANLARI

TANIM:

f kısmi türevlere sahip bir fonksiyon olmak üzere,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k$$

vektörüne f fonksiyonunun gradiyeti denir, grad f ile gösterilir.

TANIM

$\mathbf{F} = Pi + Qi + Rk$ vektör alanı için $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ türevleri mevcut olsun.

$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ ifadesine **F** vektör alanının **divergensi** denir, div **F** ile gösterilir. Buna göre

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

olacaktır.

TANIM

$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ vektör alanının P, Q, R bileşen fonksiyonları birinci mertebeden kısmi türevlere sahip olsun.

$$\nabla \times \mathbf{F} = (R_y - Q_z)\mathbf{i} + (P_z - R_x)\mathbf{j} + (Q_x - P_y)\mathbf{k}$$

vektör alanına **F nin rotasyonu veya curl'u denir, rot F veya curl F** ile gösterilir.

KISMİ TÜREVLERİN GEOMETRİK ANLAMI

TANIM

f, diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve A(a, b, c), $f(x, y, z) = k$ seviye yüzeyinin bir noktası olsun. Normali grad $f(a, b, c)$ olan düzleme $f(x, y, z) = k$ yüzeyinin A(a, b, c) noktasındaki **teğet düzlemi** denir.

$f(x, y, z) = k$ seviye yüzeyinin (a, b, c) noktasındaki teğet düzleminin denklemi

$$f_x(a,b,c)(x - a) + f_y(a,b,c)(y - b) + f_z(a,b,c)(z - c) = 0$$

olur.

İNTEGRAL İŞARETİ ALTINDA TÜREV ALMAK

TEOREM 7.10 (Leibniz Formülü)):

Sürekli $f(x, t)$ fonksiyonu $\{(x, t): a \le x \le b,\ c \le t \le d\}$ dikdörtgenini kapsayan bir bölgede sürekli $\frac{\partial f}{\partial t}$ kısmi türevine sahip olsun. Bu takdirde $c \le t \le d$ için

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)dx$$

dır.

SONUÇ

f fonksiyonu Teorem 7.10 un şartlarını sağlayan bir fonksiyon, a(t) ve b(t) de (c, d) aralığında sürekli türevlere sahip fonksiyonlar ise

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx + f(b(t),t)\,b'(t) - f(a(t),t)\,a'(t)$$

dır.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. Aşağıda denklemleri verilen yüzeylerin karşılarında yazılı noktalardaki teğet düzleminin denklemini yazınız.

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $(1,1,1)$

b) $xyz = 1$, $(1,1,1)$

c) $z = 3x^2 + 4y$, $(-2,1,16)$

d) $z = 1 - x^2$, $(0,2,1)$

e) $z = xy - x + y + 5$, $(0,2,7)$

f) $z = \sin x + e^{xy} + y$, $(0,2,3)$

Çözüm:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ $(1,1,1)$

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$

$f_x(x,yz) = 2x \Rightarrow f_x(1,1,1) = 2,\quad f_y(x,yz) = 2y \Rightarrow f_y(1,1,1) = 2,$

$f_z(x,yz) = 2z \Rightarrow f_z(1,1,1) = 2$

olduğundan istenen düzlem denklemi

$f_x(1,1,1)(x-1) + f_y(1,1,1)(y-1) + f_z(1,1,1)(z-1) = 0$

$2(x-1) + 2(y-1) + 2(z-1) = 0 \Rightarrow x + y + z = 3$

olur.

b) $f(x,y,z) = xyz - 1$ $(1,1,1)$

$f_x(x,y,z) = yz \Rightarrow f_x(1,1,1) = 1,\quad f_y(x,y,z) = xz \Rightarrow f_y(1,1,1) = 1,$

$f_z(x,y,z) = xy \Rightarrow f_z(1,1,1) = 1$

$f_x(1,1,1)(x-1) + f_y(1,1,1)(y-1) + f_z(1,1,1)(z-1) = 0$

$x - 1 + y - 1 + z - 1 = 0 \Rightarrow x + y + z = 3$

c) $z = 3x^2 + 4y$ $\quad (-2,1,16)$

$f(x,y,z) = 3x^2 + 4y - z$

$f_x(x,y,z) = 6x \Rightarrow f_x(-2,1,16) = -12$

$f_y(x,y,z) = 4 \Rightarrow f_y(-2,1,16) = 4$

$f_z(x,y,z) = -1 \Rightarrow f_z(-2,1,16) = -1$

$-12(x+2) + 4(y-1) - (z-16) = 0 \Rightarrow -12x + 4y - z = 12$

d) $z = 1 - x^2$ $\quad (0,2,1)$

$f(x,y,z) = 1 - x^2 - z$

$f_x(x,y,z) = -2x \Rightarrow f_x(0,2,1) = 0$

$f_y(x,y,z) = 0 \Rightarrow f_y(0,2,1) = 0$

$f_z(x,y,z) = -1 \Rightarrow f_z(0,2,1) = -1$

$f_x(0,2,1)(x-0) + f_y(0,2,1)(y-2) + f_z(0,2,1)(z-1) = 0$

$\Rightarrow z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1$

e) $z = xy - x + y + 5$ $\quad (0,2,7)$

$f(x,y,z) = xy - x + y + 5 - z$

$f_x(x,y,z) = y - 1 \Rightarrow f_x(0,2,7) = 1$

$f_y(x,y,z) = x + 1 \Rightarrow f_y(0,2,7) = 1$

$f_z(x,y,z) = -1 \Rightarrow f_z(0,2,7) = -1$

İstenen düzlem denklemi;

$f_x(0,2,7)(x-0) + f_y(0,2,7)(y-2) + f_z(0,2,7)(z-7) = 0 \Rightarrow x + y - z = -5$

olur.

f) $z = \sin x + e^{xy} + y$ $\quad (0,2,3)$

$f(x,y,z) = \sin x + e^{xy} + y - z$

$f_x(x,y,z) = \cos x + ye^{xy} \Rightarrow f_x(0,2,3) = 3$

$f_y(x,y,z) = xe^{xy} + 1 \Rightarrow f_y(0,2,3) = 1$

$f_z(x,y,z) = -1 \Rightarrow f_z(0,2,3) = -1$

$f_x(0,2,3)(x-0) + f_y(0,2,3)(y-2) + f_z(0,2,3)(z-3) = 0$

$3x + y - 2 - z + 3 = 0 \Rightarrow 3x + y - z = -1$

2. **$z = 9 - 4x^2 - y^2$ paraboloidinin hangi noktasındaki teğet düzlemi $z = 4y$ düzlemine paralel olur.**

Çözüm:

$f(x,y,z) = 9 - 4x^2 - y^2 - z$ $\quad (x_0, y_0, z_0)$ noktasındaki teğet düzlemin denklemi

$f_x(x,y,z) = -8x \Rightarrow f_x(x_0,y_0,z_0) = -8x_0$

$f_y(x,y,z) = -2y \Rightarrow f_y(x_0,y_0,z_0) = -2y_0$

$f_z(x,y,z) = -1 \Rightarrow f_z(x_0,y_0,z_0) = -1$

$f_x(x_0,y_0,z_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)(y - y_0) + f_z(x_0,y_0,z_0)(z - z_0) = 0 \Rightarrow$

$-8x_0(x - x_0) - 2y_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0 \Rightarrow -8x_0x + 8x_0^2 - 2y_0y + 2y_0^2 - z + z_0 = 0$

$-8x_0x - 2y_0y + 2(9 - z_0) - z + z_0 = 0 \Rightarrow 8x_0x + 2y_0y + z = z_0 - 18$

olur. Bu teğet düzlemin $z = 4y$ düzlemine paralel olması için

$x_0 = 0, \quad \dfrac{2y_0}{4} = \dfrac{+1}{-1} \Rightarrow y_0 = -2, \quad z_0 = 9 - 4.0 - (-2)^2 \Rightarrow z_0 = 9 - 4 = 5$

olmalıdır. Aranan nokta (0, −2, 5) noktasıdır.

3. **$x^2 + 4y^2 + 16z^2 - 2xy = 12$ yüzeyinin hangi noktasındaki teğet düzlemi x 0 z düzlemine paralel olur.**

Çözüm:

$f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 16z^2 - 2xy - 12$ $\quad (x_0, y_0, z_0)$ noktasındaki teğet düzlemin denklemini bulalım:

$f_x(x,y,z) = 2x - 2y \Rightarrow f_x(x_0,y_0,z_0) = 2x_0 - 2y_0$

$f_y(x,y,z) = 8y - 2x \Rightarrow f_y(x_0,y_0,z_0) = 8y_0 - 2x_0$

$f_z(x,y,z) = 32z \Rightarrow f_z(x_0,y_0,z_0) = 32z_0$

Düzlem denklemi

$$(2x_0 - 2y_0)(x - x_0) + (8y_0 - 2x_0)(y - y_0) + 32z_0(z - z_0) = 0$$

olur. Bunun x 0 z düzlemine paralel olması için x ve z nin katsayıları sıfır olmalıdır. (x 0 z düzlemine paralel olan düzlem denklemlerinin $y = k$ biçiminde olduğunu hatırlayınız). Buna göre

$2x_0 - 2y_0 = 0 \Rightarrow x_0 = y_0$ ve $32z_0 = 0 \Rightarrow z_0 = 0$

olmalıdır. (x_0, y_0, z_0) yüzeyin bir noktası olduğundan

$x_0^2 + 4y_0^2 + 16z_0^2 - 2x_0y_0 = 12 \Rightarrow 5x_0^2 - 2x_0^2 = 12 \Rightarrow x_0^2 = 4 \Rightarrow x_0 = \pm 2 \Rightarrow y_0 = \pm 2$

bulunur. İstenen noktalar A(2, 2, 0) ve B(−2, −2, 0) dır.

4. $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ **yüzeyine herhangi bir noktasından çizilen teğet düzlemin koordinat eksenlerinden ayırdığı doğru parçalarının uzunlukları toplamının sabit olduğunu gösteriniz.**

Çözüm:

(p, q, r) noktasından çizilen teğetin denklemini bulalım.

$f_x(x,y,z)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f_y(x,y,z)=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$, $f_z(x,y,z)=\dfrac{1}{2\sqrt{z}}$ olduğundan, düzlemin denklemi

$$\frac{1}{2\sqrt{p}}(x-p)+\frac{1}{2\sqrt{q}}(y-q)+\frac{1}{2\sqrt{r}}(z-r)=0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}}(x-p)+\frac{1}{\sqrt{q}}(y-q)+\frac{1}{\sqrt{r}}(z-r)=0 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}+\frac{z}{\sqrt{r}}=\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}\right) \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}+\frac{z}{\sqrt{r}}=\sqrt{a}$$

olur. Bu düzlem Ox –eksenini $x=\sqrt{a}\,\sqrt{p}$, Oy eksenini $y=\sqrt{a}\,\sqrt{q}$, Oz eksenini $z=\sqrt{a}\,\sqrt{r}$ noktasında keser. Doğru parçalarının uzunlukları toplamı

$$\ell=\sqrt{a}\,\sqrt{p}+\sqrt{a}\,\sqrt{q}+\sqrt{a}\,\sqrt{r}=\sqrt{a}\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}\right)=\sqrt{a}\,.\sqrt{a}=a$$

olur.

5. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ **elipsoidine üzerindeki** $P(x_0, y_0, z_0)$ **noktasından çizilen teğet düzlemin denkleminin** $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}+\dfrac{zz_0}{c^2}=1$ **olacağını gösteriniz.**

Çözüm:

$f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1$ olduğundan

$$f_x(x_0,y_0,z_0)=\frac{2x_0}{a^2},\quad f_y(x_0,y_0,z_0)=\frac{2y_0}{b^2},\quad f_z(x_0,y_0,z_0)=\frac{2z_0}{c^2}$$

dır. Teğet düzlemin deklemi

$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0 \Rightarrow$$

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}-\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)=0 \Rightarrow$$

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}-1=0 \Rightarrow \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1$$

6. $cz=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ **paraboloidine üzerindeki bir** $P(x_0, y_0, z_0)$ **noktasından çizilen teğet düzlemin denkleminin** $c(z+z_0)=\dfrac{2xx_0}{a^2}+\dfrac{2yy_0}{b^2}$ **olacağını gösteriniz.**

Çözüm:

$$z=\frac{1}{c}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$$

$z_x=\dfrac{2x}{ca^2}$, $z_y=\dfrac{2y}{cb^2}$ olacağından, düzlemin denklemi

$$z_x(x_0,y_0)(x-x_0)+z_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0 \Rightarrow$$

$$\frac{2x_0}{ca^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{cb^2}(y-y_0)=z-z_0 \Rightarrow$$

$$\frac{2xx_0}{ca^2}+\frac{2yy_0}{cb^2}=z-z_0+\frac{2x_0^2}{ca^2}+\frac{2y_0^2}{cb^2} \Rightarrow$$

$$\frac{2xx_0}{a^2}+\frac{2yy_0}{b^2}=c(z-z_0)+2cz_0 \Rightarrow$$

$$\frac{2xx_0}{a^2}+\frac{2yy_0}{b^2}=c(z+z_0)$$

olur.

7. $x^2+2y^2+3z^2=21$ **yüzeyinin** $x+4y+6z=0$ **düzlemine paralel olan teğet düzleminin denklemini yazınız.**

Çözüm:

$f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$ olsun. Yüzeyin (x_0,y_0,z_0) noktasındaki teğet düzleminin denklemi

$$f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow 2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+6z_0(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow xx_0+2yy_0+3zz_0=x_0^2+2y_0^2+3z_0^2$$

$$\Rightarrow xx_0+2yy_0+3zz_0=21$$

olur. Bu düzlemin $x+4y+6z=0$ düzlemine paralel olması için

$$\frac{x_0}{1}=\frac{2y_0}{4}=\frac{3z_0}{6}$$

$x_0 = \frac{y_0}{2} = \frac{z_0}{2} \Rightarrow y_0 = 2x_0,\ z_0 = 2x_0$ olur. Bu değerler yüzey denkleminde yerine yazılırsa

$x_0^2 + 8x_0^2 + 12x_0^2 = 21 \Rightarrow x_0^2 = 1 \Rightarrow x_0 = \pm 1 \Rightarrow y_0 = \pm 2$ ve $z_0 = \pm 2$ bulunur.

(1, 2, 2) noktasındaki teğetin denklemi $x + 4y + 6z = 21$, (−1, −2, −2) noktasındaki teğet düzlemin denklemi $-x - 4y - 6z = 21 \Rightarrow x + 4y + 6z = -21$ olur.

8. $x^2 + y^2 - z^2 - 2z = 0$ yüzeyi üzerinde öyle bir nokta bulunuz ki bu noktadaki teğet düzlem y 0 z düzlemine paralel olsun.

Çözüm:

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 2z$ olmak üzere teğet düzlemin denklemi

$$f_x(x_0,y_0,z_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)(y - y_0) + f_z(x_0,y_0,z_0)(z - z_0) = 0 \Rightarrow$$

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - (2z_0 + 2)(z - z_0) = 0 \Rightarrow$$

$$xx_0 + yy_0 - zz_0 - z = x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 - z_0 = 0 \Rightarrow$$

$$x_0 x + y_0 y - (z_0 + 1)z = 0$$

olur.

Bu teğet düzlemin y 0 z düzlemine paralel olması için y ve z nin katsayıları sıfır olmalıdır.

O halde $y_0 = 0$ ve $z_0 = -1$ olmalıdır. Bu değerler yüzey denkleminde yerine yazılırsa

$x_0^2 - 1 + 2 = 0 \Rightarrow x_0 = \mp 1$ bulunur. İstenen noktalar (1, 0, −1) ve (−1, 0, −1) noktalarıdır.

9. Aşağıdaki türevleri hesaplayınız.

a) $\frac{d}{dt}\int_0^1 \frac{\sin xt}{1+x}dx$ b) $\frac{d}{dt}\int_0^2 \frac{e^{-xt}}{1+x^2}dx$ c) $\frac{d}{dt}\int_1^2 \frac{e^{-t}}{1+xt}dx$

ç) $\frac{d}{dt}\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{(1+xt)^2}$ d) $\frac{d}{dt}\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos xt}{x}dx$ e) $\frac{d}{du}\int_1^2 \ln(xu)dx$

f) $\frac{d}{dx}\int_0^1 \frac{e^{xt}-1}{t}dt$ g) $\frac{d}{dx}\int_{1/2}^1 \frac{\ln(xt)}{t}dt$

Çözüm:

a) $$\frac{d}{dt}\int_0^1 \frac{\sin xt}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sin xt}{1+x}\right)dx = \int_0^1 \frac{x\cos xt}{1+x}dx$$

b) $$\frac{d}{dt}\int_0^2 \frac{e^{-xt}}{1+x^2}dx = \int_0^2 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{-t}}{1+x^2}\right)dx = \int_0^2 -\frac{x}{1+x^2}e^{-xt}dx$$

c) $$\frac{d}{dt}\int_1^2 \frac{e^{-xt}}{1+xt}dx = \int_1^2 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{-xt}}{1+xt}\right)dx = \int_1^2 \frac{-xe^{-xt}(1+xt) - xe^{-xt}}{(1+xt)^2} = \int_1^2 \frac{-x(2+xt)e^{-xt}}{(1+xt)^2}dx$$

ç) $$\frac{d}{dt}\int_0^1 \frac{x^2}{(1+xt)^2}dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x^2}{(1+xt)^2}\right)dx = \int_0^1 -2\frac{x^3}{(1+xt)^3}dx = -2\int_0^1\left(\frac{x}{1+xt}\right)^3 dx$$

d) $$\frac{d}{dt}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos xt}{x}dt = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{d}{dt}\left(\frac{\cos xt}{x}\right)dx = \int_{\pi/2}^{\pi}(-\sin xt)dx = \left.\frac{\cos xt}{t}\right|_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{\cos \pi t}{t} - \frac{\cos \frac{\pi}{2}t}{t}$$

e) $$\frac{d}{du}\int_1^2 \ln(xu)dx = \int_1^2 \frac{\partial}{\partial u}\ln(xu)dx = \int_1^2 \frac{x}{xu}dx = \frac{1}{u}\int_1^2 dx = \frac{1}{u}$$

f) $$\frac{d}{dx}\int_0^1 \frac{e^{xt}-1}{t}dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{xt}-1}{t}\right)dt = \int_0^1 \frac{te^{xt}}{t}dt = \left.\frac{e^{xt}}{x}\right|_0^1 = \frac{e^x - 1}{x}$$

g) $$\frac{d}{dx}\int_{1/2}^1 \frac{\ln(xt)}{t}dt = \int_{1/2}^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\ln(xt)}{t}\right)dt = \int_{1/2}^1 \frac{t}{xt.t}dt = \frac{1}{x}\int_{1/2}^1 \frac{1}{t}dt = \ln 2$$

olur.

Son integral bir ikinci çeşit genelleştirilmiş integral olup ıraksaktır. O halde bu türev yoktur.

10. Aşağıdaki türevleri hesaplayınız.

a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x t^3\,dt$ b) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{x^2}\cos(t^2)dt$ c) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^1 e^{t^2}dt$

ç) $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{t^3}^2 \ln(1+x^2)dx$ d) $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_1^2 \sin a^2\,dx$ e) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{\tan x} e^{-t^2}dt$

Çözüm:

a) $$\frac{d}{dx}\int_1^x t^3\,dt = x^3.1 = x^3$$

b) $$\frac{d}{dx}\int_1^{x^2}\cos(t^2)dt = \cos(x^4)2x = 2x\cos(x^4)$$

c) $$\frac{d}{dx}\int_x^1 e^{t^2}dt = \frac{d}{dx}\left(-\int_1^x e^{t^2}dt\right) = -e^{x^2}$$

ç) $$\frac{d}{dt}\int_{t^3}^2 \ln(1+x^2)dx = \int_{t^3}^2 \frac{d}{dt}(\ln(1+x^2))dx - \ln(1+t^6)3t^2 = -3t^2\ln(1+t^6)$$

d) $$\frac{d}{dt}\int_1^{t^2}\sin(x^2)dx = \int_1^{t^2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{si}(x^2))dx + 2t\sin(t^2) = 2t\sin(t^2)$$

f) $$\frac{d}{dx}\int_x^{\tan x} e^{-t^2}dt = e^{-\tan^2 x}(1+\tan^2 x) - e^{-x^2}1$$

11. Aşağıdaki türevleri hesaplayınız.

a) $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^{t^2}\arctan\frac{x}{t}dx$ b) $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{\sqrt{t}}^{1/t}\cos(tx^2)dx$ c) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x^2}^{x}\sin(xt)dt$

ç) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{\tan x}\frac{dt}{1+xt}$ d) $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{t^2}^{e^{t}}\tan(xt)dx$ e) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{\sin x}^{x}\ln(1+xt)dt,\ 0\le x\le\pi$

Çözüm:

a) $$\frac{d}{dt}\int_0^{t^2}\arctan\frac{x}{t}dx = \int_0^{t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\arctan\frac{x}{t}\right)dx = \ldots\ldots\ldots\ldots + \arctan\left(\frac{t^2}{t}\right).2t - \arctan 0$$

$$= \int_0^{t^2}\frac{-x}{x^2+t^2}dx + 2t\arctan t = -\frac{1}{2}\ln(x^2+t^2)\Big|_0^{t^2} + 2t\arctan t$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(t^4+t^2) + \ln t + 2t\arctan t = -\frac{1}{2}\ln t^2 - \frac{1}{2}(1+t^2) + \ln t + 2t\arctan t$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(1+t^2) + 2t\arctan t$$

b) $$\int_{\sqrt{t}}^{1/t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\cos(tx^2)\right)dx + \cos\left(\frac{1}{t}\right).\left(-\frac{1}{t^2}\right) + \cos(t^2).\frac{1}{2\sqrt{t}} = -\int_{\sqrt{t}}^{1/t}\sin(x^2t)x^2dx$$

$$-\frac{\cos(t^2)}{2\sqrt{t}} - \frac{\cos(t^{-1})}{t^2}$$

c) $$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x}\sin xt\,dt = \int_{x^2}^{x} t\cos xt\,dt + \sin(x^2).1 - \sin(x^3).2x$$

$$= \sin(x^2) - x\sin(x^3) + \frac{1}{x^2}\sin(x^2) - \frac{1}{x^2}\sin(x^3)$$

ç) $$\frac{d}{dx}\int_x^{\tan x}\frac{dt}{1+xt} = \int_x^{\tan x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{1+xt}\right)dt + \frac{(1+\tan^2 x)}{1+x\tan x} - \frac{1}{1+x^2} = \int_x^{\tan x} -\frac{t}{(1+xt)^2}dt$$

$$+\frac{(1+\tan^2 x)}{1+x\tan x} - \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{\ln(1+x\tan x)}{2x} + \frac{1}{x(1+x\tan x)} - \frac{\ln(1+x^2)^2}{2x} + \frac{1}{x(1+x^2)} + \frac{(1+\tan^2 x)}{1+x\tan x} - \frac{1}{1+x^2}$$

d) $$\frac{d}{dt}\int_{t^2}^{e^t}\tan(xt)\,dx = \int_{t^2}^{e^t}\frac{\partial}{\partial t}(\tan(xt))dx + \tan(te^t).e^t - 2t\tan(t^3)$$

$$= \int_{t^2}^{e^t}\frac{x}{\cos^2 xt}dx + \tan(te^t)e^t - 2t\tan t^3$$

$$= \frac{x}{t}\tan(xt)\Big|_{t^2}^{et} - \frac{1}{t}\int_{t^2}^{e^t}\tan xt\,dx + \tan(te^t)e^t - 2t\tan t^3$$

$$= \left(1+\frac{1}{t}\right)e^t.\tan(te^t) - 3t\tan(t^3) + \ln(te^t) - \ln t^3$$

e) $$\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{x}\ln(1+xt)dt = \int_{\sin x}^{x}\frac{t}{1+xt}dt + \ln(1+x^2) - \cos x\ln(1+x\sin x)$$

$$= \frac{1+x^2}{x} - \frac{\ln(1+x^2)}{x} - \frac{1+x\sin x}{x} + \frac{\ln(1+x\sin x)}{x} + \ln(1+x^2) - \cos x\ln(1+x\sin x)$$

f) $$\frac{d}{dx}\int_{\cos x}^{1+x^2}e^{xt}dt = \int_{\cos x}^{1+x^2}te^{xt}dt + e^{x(1+x^2)}.2x + \sin x e^{x\cos x}$$

$$= e^{x(1+x^2)}\frac{(1+x^2)}{x} - e^{x\cos x}\frac{\cos x}{x} - \frac{1}{x^2}e^{x(1+x^2)} + \frac{e^{x\cos x}}{x^2}$$

$$+ 2xe^{x(1+x^2)} + \sin x e^{x\cos x}$$

$$= e^{x(1+x^2)}\left(\frac{1}{x}+3x\right) + e^{x\cos x}\left(\sin x - \frac{\cos x}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

g) $$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{\sin x}e^{xt}dt = \int_{x^2}^{\sin x}\frac{\partial}{\partial x}(e^{xt})dt + e^{x\sin x}\cos x - 2xe^{x^3}$$

$$= \int_{x^2}^{\sin x}te^{xt}dt + e^{x\sin x}\cos x - 2xe^{x^3}$$

$$= e^{x\sin x}\frac{\sin x}{x} - e^{x^3}x - \frac{e^{x\sin x}}{x^2} + \frac{e^{x^3}}{x^2} + \cos x e^{x\sin x} - 2xe^{x^3}$$

$$= e^{x\sin x}\left(\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{x^2} + \cos x\right) + e^{x^3}\left(\frac{1}{x^2} - 3x\right)$$

h) $$\frac{d}{dx}\int_{1}^{x^2}\frac{e^{xt}}{t}dt = \int_{1}^{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{xt}}{t}\right)dt + \frac{e^{x^3}}{x^2}.2x$$

$$= \int_{1}^{x^2}e^{xt}dt + \frac{2}{x}e^{x^3} = \frac{e^{x^3}}{x} - \frac{e^x}{x} + \frac{2}{x}e^{x^3}$$

$$= \frac{3}{x}e^{x^3} - \frac{e^x}{x}$$

ı) $$\frac{d}{dx}\int_{x}^{x^2}\frac{\ln xt}{x}dt = \int_{x}^{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\ln xt}{x}\right)dt + 2x\frac{\ln x^3}{x} + \frac{\ln x^2}{x}$$

$$= \int_{x}^{x^2}\frac{1-\ln xt}{x^2}dt + 2\ln x^3 + \frac{\ln x^2}{x}$$

$$= \frac{(x^2-x)}{x^2} - \ln x^3 + \frac{1}{x}\ln x^2 + 1 - \frac{1}{x} + 2\ln x^3 + \frac{\ln x^2}{x}$$

$$= 2 - \frac{2}{x} + \ln x^3 + \frac{2}{x}\ln x^2$$

12. **Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini hesaplayınız. Bulduğunuz integralleri de hesaplayarak türevi elemanter fonksiyonlar cinsinden yazınız.**

a) $F(x) = \displaystyle\int_{x}^{x^2}\frac{e^{-xt}}{t}dt$

b) $F(x) = \displaystyle\int_{t}^{t^2}\frac{\sin(xt)}{x}dx$

c) $F(t) = \displaystyle\int_{1}^{2}\frac{x^2}{(1-tx)^2}dx$

ç) $F(x) = \displaystyle\int_{x}^{x^2}\frac{dt}{\ln(x+1)}$

d) $F(x) = \displaystyle\int_{x^m}^{x^n}\frac{dt}{x+t}$ $\quad x>0$

e) $F(x) = \displaystyle\int_{0}^{\pi}\ln(1+x\cos t)dt,$ $\quad |x|<1$

f) $F(x) = \displaystyle\int_{0}^{1}\frac{x\,dt}{\sqrt{1-x^2t^2}},$ $\quad |x|<1$

Çözüm:

a) $$F(x)=\int_x^{x^2}\frac{e^{-xt}}{t}dt$$

$$F'(x)=\int_x^{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-xt}}{t}\right)dt+\frac{2e^{-x^3}}{x^2}-\frac{e^{-x^2}}{x}$$

$$=\frac{e^{-x^3}}{x}-\frac{e^{x^2}}{x}+\frac{2}{x^2}e^{-x^3}-\frac{e^{x^2}}{x}=e^{-x^3}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)-\frac{2}{x}e^{x^2}$$

b) $$F(t)=\int_t^{t^2}\frac{\sin(xt)}{x}dx$$

$$F'(t)=\int_t^{t^2}\cos xt\,dx+2\sin t^3-\frac{\sin t^2}{t}=\frac{\sin t^3}{t}-\frac{2\sin t^2}{t}$$

c) $$F(t)=\int_1^2\frac{x^2}{(1-tx)^2}dx \qquad 1-xt=u\Rightarrow dx=-\frac{du}{t}$$

$$F'(t)=\int_1^2\frac{2x^3}{(1-xt)^3}dx=-\int_{1-t}^{1-2t}\frac{2\left(\frac{1-u}{t}\right)^3}{u}\frac{du}{t}=-\frac{2}{t^4}\int_{1-t}^{1-2t}\frac{1}{u}-3u+3-u^2\,du$$

$$=-\frac{2}{t^4}\left(\ln u-\frac{3}{2}u^2+3u-\frac{u^3}{3}\Big|_{1-t}^{1-2t}\right)$$

$$=-\frac{2}{t^4}(\ln(1-2t)-\frac{3}{2}(1-2t)^2+3(1-2t)-\frac{(1-2t)^3}{3}-\ln(1-t)+\frac{3}{2}(1-t)^2$$

$$-3(1-t)+\frac{(1-t)^3}{3})$$

ç) $$F(x)=\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln(x+1)}=\frac{t}{\ln(1+x)}\Big|_x^{x^2}=\frac{x^2-x}{\ln(x+1)}$$ olacağından

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-x}{\ln(x+1)}\right)=\frac{(2x-1)\ln(x+1)-\left(\frac{x^2-x}{x+1}\right)}{(\ln x+1)^2}$$ bulunur.

d) $$F(x)=\int_{x^m}^{x^n}\frac{dt}{x+t} \qquad x>0$$

$$F'(x)=\int_{x^m}^{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x+t}\right)dt+\frac{nx^{n-1}}{x+x^n}-\frac{mx^{m-1}}{x+x^m}$$

$$=\int_{x^m}^{x^n}-\frac{1}{(x+t)^2}dt+\frac{nx^{n-1}}{x+x^n}-\frac{mx^{m-1}}{x+x^m}$$

$$=\frac{1}{x+x^n}-\frac{1}{x+x^m}+\frac{nx^{n-1}}{x+x^n}-\frac{mx^{m-1}}{x+x^m}$$

$$=\frac{1}{x+x^n}(1+nx^{n-1})-\frac{1}{x+x^m}(1+mx^{m-1})$$

e) $$F(x)=\int_0^{\pi}\ln(1+x\cos t)dt \qquad |t|<1$$

$$F'(x)=\int_0^{\pi}\frac{\cos t}{1+x\cos t}dt=\frac{1}{x}\int_0^{\pi}1-\frac{1}{1+x\cos t}dt=\frac{\pi}{x}-\int_0^{\pi}\frac{dt}{1+x\cos t}$$

$$=\frac{\pi}{x}-2\int_0^{\infty}\frac{du}{1+x+u^2(1-x)}=\frac{\pi}{x}-\frac{2}{1+x}\int_0^{\infty}\frac{du}{1+u^2\frac{(1-x)}{(1+x)}} \qquad \left[\tan\frac{t}{2}=u\right]$$

$$=\frac{\pi}{x}-\frac{2}{\sqrt{(1+x)(1-x)}}\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,u$$

$$=\frac{\pi}{x}-\frac{2}{\sqrt{(1+x)(1-x)}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{x}-\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}$$

f) $F(x)=\int_0^1 \frac{x\,dt}{\sqrt{1-x^2t^2}}$ $\qquad |x|<1$

$$F'(x)=\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2t^2}}\right)dt=\int_0^1 \frac{\left(1-2x^2t^2\right)}{\left(1-x^2t^2\right)^{3/2}}dt \qquad \left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{x}\sin u \\ dt=\frac{1}{x}\cos u\,du \end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^{\arcsin x}\frac{\left(1-2\sin^2 u\right)(\cos u)}{\cos^3 u}du=\frac{1}{x}\int_0^{\arcsin x}\frac{1}{\cos^2 u}du-\frac{2}{x}\int_0^{\arcsin x}\tan^2 u\,du$$

$$=\frac{1}{x}\tan u\Big|_0^{\arcsin x}-\frac{2}{x}\int_0^{\arcsin x}\left(1+\tan^2 u\right)du+\frac{2}{x}\int_0^{\arcsin x}du$$

$$=\frac{1}{x}\tan(\arcsin x)-\frac{2}{x}\tan u\Big|_0^{\arcsin x}+\frac{2}{x}\arcsin x$$

$$=\frac{2}{x}\arcsin x-\frac{1}{x}\tan(\arcsin x)$$

13. Pozitif, m ve n tamsayıları için

$$\int_0^1 x^n(\ln x)^m dx=(-1)^m\frac{m!}{(n+1)^{m+1}}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$\ln x=u\Rightarrow x=e^u\Rightarrow dx=e^u\,du$

$$\int_{-\infty}^0 e^{nu}u^m e^u du=(-1)^m\int_0^\infty e^{-u(n+1)}u^m du=\frac{(-1)^m}{(n+1)^{m+1}}\int_0^\infty e^{-u}u^m du$$

$$=(-1)^m\frac{\Gamma(m+1)}{(n+1)^{m+1}}=(-)^m\frac{m!}{(n+1)^{m+1}}$$

BÖLÜM PROBLEMLERİ VE ÇÖZÜMLERİ

1. $z=\sqrt{y}+f\left(\sqrt{x}-1\right)$ **fonksiyonu veriliyor. y = 1 için z = x olduğuna göre f fonksiyonunu bulunuz.**

Çözüm:

$y=1 \qquad \Rightarrow \quad x=1+f\left(\sqrt{x}-1\right)\Rightarrow f\left(\sqrt{x}-1\right)=x-1$ olur.

x yerine $(1+t)^2$ yazılırsa $f(t)=(1+t)^2-1=t^2+2t$ olur.

2. Aşağıdaki fonksiyonların tanım bölgelerini bulup grafiğini çiziniz.

a) $f(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$

b) $f(x,y,z)=\arcsin x+\arcsin y+\arcsin z$

c) $f(x,y,z)=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$

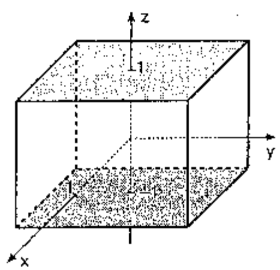
d) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2-z^2}$

Çözüm:

a) $f(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$

Tanım kümesi $\{(x,y,z):\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$ olup bu uzayın sekizde birlik parçasıdır.

b) $f(x,y,z)=\arcsin x+\arcsin y+\arcsin z$



Tanım kümesi

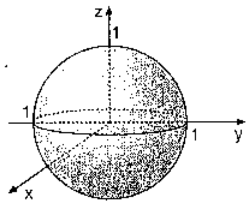
$\{(x,y,z):\ -1\le x\le 1,\ \ -1\le y<1,\ \ -1\le z\le 1\}$

olup bir küptür.

c) $f(x,y,z)=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$

Tanım kümesi $\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\le 1\}$

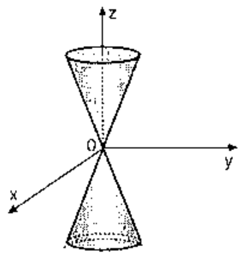
birim küresidir.



d) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2-z^2}$

Tanım kümesi: $\{(x,y,z):\ z^2\le x^2+y^2\}$

konisinin iç bölgesidir.



3. $u=(x-y)(y-z)(z-x)$ için $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=(y-z)(z-x)-(x-y)(y-z)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-(y-z)(z-x)+(x-y)(z-x)$$
$$+\quad\frac{\partial u}{\partial z}=-(x-y)(z-x)+(x-y)(y-z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

4. $z=e^y f\left(y e^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$ fonksiyonunun

$$\left(x^2-y^2\right)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xyz$$

denklemini sağladığını gösteriniz.

Çözüm:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^y f'\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right).ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\left(\frac{x}{y^2}\right)=e^y\frac{x}{y}e^{\frac{x^2}{2y^2}}f'\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^y f\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)+e^y f'\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)\left(e^{\frac{x^2}{2y^2}}-\frac{x^2}{y^2}e^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$$

$$\left(x^2-y^2\right)e^y\frac{x}{y}e^{\frac{x^2}{2y^2}}f'\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)+xye^y f\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)+xye^y e^{\frac{x^2}{2y^2}}f'\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)-\frac{x^3}{y}e^y f'\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)e^{\frac{x^2}{2y^2}}$$

$$=xy\underbrace{e^y f\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)}_{z}=xyz$$

5. **$u=\ln(e^x+e^y+e^z)$ fonksiyonunun orijinde ve eksenlerle α, β, γ ölçülü açılar yapan bir doğrultudaki türevini bulunuz.**

Çözüm:

$$u_x=\frac{e^x}{e^x+e^y+e^z},\qquad u_y=\frac{e^y}{e^x+e^y+e^z},\qquad u_z=\frac{e^z}{e^x+e^y+e^z}$$

$$D(f)=\frac{1}{e^x+e^y+e^z}\left(e^x\cos\alpha+e^y\cos\beta+e^z\cos\gamma\right)$$

$$D_{f|(0,0,0)}=\frac{1}{3}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)$$

6. **Herhangi bir doğrultudaki türevi sıfır olan noktalara istikrarlı nokta denir. Aşağıdaki fonksiyonların istikrarlı noktalarını bulunuz.**

a) $z=x^2+xy+y^2-4x-2y$

b) $z=x^3+y^3-3xy$

Çözüm:

a) $z=x^2+xy+y^2-4x-2y$

$D_u f=f_x u_1+f_y u_2$

Herhangi bir yöndeki türevin sıfır olması için $z_x=0$ ve $z_y=0$ olmalıdır.

$$\left.\begin{aligned}2x+y&=4\\x+2y&=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow x=2,\ y=0\quad\Rightarrow\quad \text{istikrarlı nokta } (2,\,0) \text{ dır.}$$

b) $z = x^3 + y^3 - 3xy$

$$\left.\begin{aligned} z_x &= 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y &= 3y^2 - 3x = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ veya } x = 1 \text{ olur.}$$

$x = 0$ için $y = 0$ ve $x = 1$ için $y = 1$ olur. (0, 0) ve (1, 1) noktaları istikrarlı noktalardır.

7. $u = \dfrac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}}$ fonksiyonunun

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

denklemini sağladığını gösteriniz.

Çözüm:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^3} e^{\frac{-x^2+y^2+z^2}{4t}}\left(-\frac{x}{2t}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{2t\left(2\sqrt{\pi t}\right)^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}} + \frac{x^2}{4t^2}\frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^3} e^{\frac{-x^2+y^2+z^2}{4t}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{2t\left(2\sqrt{\pi t}\right)^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}} + \frac{y^2}{4t^2}\frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{1}{2t\left(2\sqrt{\pi t}\right)^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}} + \frac{z^2}{4t^2}\frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^3} e^{\frac{-x^2+y^2+z^2}{4t}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{4t^2} - \frac{3}{2t}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{3}{2\left(2\sqrt{\pi}\right)^3} t^{-\frac{5}{2}} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}} + e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{4t^2}\right)\frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^3}$$

$$= \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{4t^2} - \frac{3}{2t}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

8. **$x\cos y + y\cos z + z\cos x = 1$ eşitliği ile tanımlanan $z = z(x, y)$ fonksiyonu için $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ve $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ türevlerini hesaplayınız.**

Çözüm

$f(x,y,z) = x\cos y + y\cos z + z\cos x - 1$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{\cos y - z\sin x}{\cos x - y\sin z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{\cos z - x\sin y}{\cos x - y\sin z}$$

9. **$x^2 + y^2 + z^2 = f(ax + by + cz)$ eşitliği ile tanımlanan $z = z(x, y)$ fonksiyonunun $(cy - bz)\dfrac{dz}{dx} + (az - cx)\dfrac{dz}{dy} = bx - ay$ denklemini sağladığını gösteriniz. Burada a, b, c birer sabit ve f türevlenebilen herhangi bir fonksiyondur.**

Çözüm:

$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - f(ax + by + cz)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x}}{\dfrac{\partial g}{\partial z}} = -\frac{2x - f'(ax + by + cz).a}{2z - f'(ax + by + cz).c}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial g}{\partial y}}{\dfrac{\partial g}{\partial z}} = -\frac{2y - f'(ax + by + vz).b}{2z - f'(ax + by + cz).c}$$

$$(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cz)\frac{\partial z}{\partial y} = (cy - bz)\left(\frac{af'(ax + by + cz) - 2x}{2z - cf'(ax + by + cz)}\right)$$

$$+(az - cx)\left(\frac{bf'(ax + by + cz) - 2y}{2z - cf'(ax + by + cz)}\right)$$

$$= \frac{cyaf'(ax+by+cx) - 2xcy - abzf'(ax+by+cz) + 2xbz + azbf'(ax+by+cz) - 2yaz - cxbf' + cx2y}{2z - cf'(ax+by+cz)}$$

$$= \frac{cf'(ax + by + cz)(ay - bx) - 2z(ay - bx)}{2z - cf'(ax + by + cz)} = (bx - ay)\left(\frac{2z - cf'(ax + by + cz)}{2z - cf'(ax + by + cz)}\right)$$

$= bx - ay$

10. F, iki değişkenli bir fonksiyon olmak üzere

$F(x-az,\quad y-bz)=0$ bağıntısıyla tanımlanan $z=z(x,y)$ fonksiyonunun

$a\dfrac{dz}{dx}+b\dfrac{dz}{dy}=1$ denklemini sağladığını gösteriniz.

Çözüm:

$u=x-az \qquad v=y-bz$ olsun.

$$F(u,v)=0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(1-a.z_x)+\frac{\partial F}{\partial v}(-bz_x)=0 \quad\Rightarrow z_x=\frac{F_u}{aF_u+bF_v}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(-az_y)+\frac{\partial F}{\partial v}.(1-bz_y)=0 \quad\Rightarrow\quad z_y=\frac{F_v}{aF_u+bF_v}$$ olur. Bu durumda

$$az_x+bz_y=\frac{aF_u+bF_v}{aF_u+bF_v}=1$$ bulunur.

11. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ denklemini

$u=x-ay$

$v=x+ay$

biçiminde verilen yeni u ve v değişkenlerine göre yazınız.

Çözüm:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}(-a)+\frac{\partial z}{\partial v}(a)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{dx}$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial v}\left(a\left[\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}\right]\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial v}\left(a\left[\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\right]\right)\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=\left(a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-a\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)(-a)+\left(a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-a\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\right)(a)$$

$$=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Rightarrow a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\right)$$

$$=a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}=0\quad\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$$

12. $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2$ denklemini

$u=x, \qquad v=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}$

ile verilen yeni u, v değişkenlerine göre yazınız.

Çözüm:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$x^2\frac{\partial^2}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2\Rightarrow x^2\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial v}\right)+y^2\left(-\frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v}\right)=z^2$$

$$u^2\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}=z^2\ \Rightarrow\ u^2\frac{\partial z}{\partial v}=z^2$$

13. $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ denklemini

$$\left.\begin{array}{l} u=x \\ v=x^2+y^2 \end{array}\right\}$$

ile verilen yeni u, v değişkenlerine göre yazınız.

Çözüm:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+2x\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=2y\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=y\frac{\partial z}{\partial u}+2xy\frac{\partial z}{\partial v}-2xy\frac{\partial z}{\partial v}=0 \Rightarrow$$

$$y\frac{\partial z}{\partial u}=0 \Rightarrow \sqrt{v-u^2}\,\frac{\partial z}{\partial u}=0$$

14. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ **Laplace denklemini**

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

kutupsal koordinatlarına göre yazınız.

Çözüm:

Yukarıdaki denklemlerin x ve y ye göre türevleri alınırsa

$1 = r_x\cos\theta - r\sin\theta\,\theta_x$

$0 = r_x\sin\theta + r\cos\theta\,\theta_x$

$0 = \cos\theta\, r_y - r\sin\theta\,\theta_y$

$1 = \sin\theta\, r_y + r\cos\theta\,\theta_y$

$$r_x=\frac{\begin{vmatrix}1 & -r\sin\theta\\ 0 & r\cos\theta\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}}=\frac{r\cos\theta}{r}=\cos\theta,\quad \theta_x=\frac{\begin{vmatrix}\cos\theta & 1\\ \sin\theta & 0\end{vmatrix}}{r}=-\frac{\sin\theta}{r}$$

$$r_y=\frac{\begin{vmatrix}0 & -r\sin\theta\\ 1 & r\cos\theta\end{vmatrix}}{r}=\frac{r\sin\theta}{r}=\sin\theta,\quad \theta_y=\frac{\begin{vmatrix}\cos\theta & 0\\ \sin\theta & 1\end{vmatrix}}{r}=\frac{\cos\theta}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$=\left(\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta}\right)\cos\theta+$$

$$\left(-\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial \theta\partial r}-\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)\left(-\frac{1}{r}\sin\theta\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{1}{r}\sin^2\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{2}{r}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta}$$

$$+\frac{1}{r^2}\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$=\left(\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta}\right)\sin\theta+\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial \theta\partial r}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)\left(\frac{1}{r}\cos\theta\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{1}{r}\cos^2\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2}{r}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta}+\frac{1}{r^2}\cos^2\theta\frac{d^2 u}{d\theta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

15. $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z$ **denklemini**

$u = x^2+y^2$

$v=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$

ile verilen yeni u ve v değişkenlerine ve

w = lnz − (x + y) ile verilen yeni w fonksiyonuna göre yazınız.

Çözüm:

$$w_x = w_u.u_x + w_v.v_x = 2xw_u - \frac{1}{x^2}w_v \qquad (1)$$

$$w = \ln z(x+y) \Rightarrow w_x = \frac{1}{z}z_x - 1 \qquad (2)$$

(1) ve (2) den

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = z\left(1+2xw_u - \frac{1}{x^2}w_u\right) \qquad (3)$$

Aynı şekilde

$$w_y = w_u u_y + w_v v_y = 2yw_u - \frac{1}{y^2}w_v$$

$$w_y = \frac{1}{z}z_y - 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z\left(1+2yw_u - \frac{1}{y^2}w_v\right) \qquad (4)$$

(3) ve (4) den

$$yz\left(1+2xW_u - \frac{1}{x^2}w_v\right) - xz\left(1+2yw_u - \frac{1}{y^2}w_v\right) = (y-x)z = yz - xz$$

$$J = \begin{vmatrix} u_x & u_u \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ -\frac{1}{x^2} & -\frac{1}{y^2} \end{vmatrix} = -\frac{2x}{y^2} + \frac{2y}{x^2} \neq 0$$

$$\left(\frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}\right)w_v = 0$$

$\Rightarrow w_v = 0$ denklemine dönüşür.

16. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ denklemini

$u = x + y$

$v = x - y$

ile verilen u, v değişkenlerine ve $w = xy - z$ ile verilen w fonksiyonuna göre yazınız.

Çözüm:

$$w_x = w_u.u_x + w_v.v_x = w_u + w_v \qquad (1)$$

$$w = xy - z \Rightarrow w_x = y - z_x \qquad (2)$$

(1) ve (2) den

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = -w_u - w_v + y = \frac{u-v}{2} - w_u - w_v$$

bulunur. Aynı şekilde

$$w_y = w_u.u_y + w_v v_y = w_u - w_y$$

$$w = xy - z \Rightarrow w_y = x - z_y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_y = x - w_u + w_v = \frac{u+v}{2} - w_u + w_v$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u-v}{2} - w_u - w_v\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u-v}{2} - w_u - w_v\right)\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{2} - w_{uu} - w_{vu} - w_{uv} - w_{vv} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u+v}{2} - w_u + w_v\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u+v}{2} - w_u + w_v\right)\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= \frac{1}{2} - w_{uu} + w_{vu} - \frac{1}{2} + w_{uv} - w_{vv}$$

$$= -w_{uu} + 2w_{uv} - w_{vv}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u+v}{2} - w_u + w_v\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u+v}{2} - w_u + w_v\right)\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{2} - w_{uu} + w_{vu} + \frac{1}{2} - w_{uv} + w_{vv}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} =$$

$$= \frac{1}{2} - w_{uu} - 2w_{uv} - w_{vv} + \frac{1}{2} - w_{uu} + 2w_{uv} - w_{vv} + 1 - 2w_{uu} + 2w_{vu} + 1 - 2w_{uv} + 2w_{vv}$$

$$= 2 - 4w_{uu} = 0$$

$$\Rightarrow w_{uu} = \frac{1}{2}$$

17. Diferensiyellenebilir f, g: $D \subset R^3 \to R$ fonksiyonları için aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$ b) $\nabla(cf) = c\nabla f$ (c herhangi bir sabit)

c) $\nabla(f.g) = f\nabla f + g\nabla r$ d) $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$ ($g \neq 0$ için)

e) $\mathrm{rot}(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \mathrm{rot}\,\mathbf{F} + \mathrm{rot}\,\mathbf{G}$ f) $\mathrm{rot}(f\mathbf{F}) = f\,\mathrm{rot}\,\mathbf{F} + \mathrm{grad}\,f \times \mathbf{F}$

g) $\nabla \times (\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \nabla\times\mathbf{F} + \nabla\times\mathbf{G}$ h) $\nabla\times(f\mathbf{F}) = f\,\nabla\times\mathbf{F} + \nabla f\times\mathbf{F}$

Çözüm:

a) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$

$$\nabla(f+g)(x,y,z) = \frac{\partial(f+g)}{\partial x}(x,y,z)\mathbf{i} + \frac{\partial(f+g)}{\partial y}(x,y,z)\mathbf{j} + \frac{\partial(f+g)}{\partial z}(x,y,z)\mathbf{k}$$

$$= \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} + \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial z}\right)\mathbf{k}$$

$$= \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\mathbf{k} + \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$= \nabla f(x,y,z) + \nabla g(x,y,z)$$

c) $\nabla(f.g) = f\nabla g + g\nabla f$

$$\nabla(f.g)(x,y,z) = \frac{\partial(f.g)(x,y,z)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial(f.g)}{\partial y}(x,y,z)\mathbf{j} + \frac{\partial(f.g)}{\partial z}(x,y,z)\mathbf{k}$$

$$= \left(g(x,y,z)\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} + f(x,y,z)\frac{\partial g(x,y,z)}{\partial x}\right)\mathbf{i}$$

$$+\left(g(x,y,z)\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} + f(x,y,z)\frac{\partial g(x,y,z)}{\partial y}\right)\mathbf{j}$$

$$+\left(g(x,y,z)\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} + f(x,y,z)\frac{\partial g(x,y,z)}{\partial z}\right)\mathbf{k}$$

$$= f(x,y,z)\left(\frac{\partial g(x,y,z)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial z}\mathbf{k}\right) +$$

$$g(x,y,z)\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

$$= f(x,y,z)\nabla g(x,y,z) + g(x,y,z)\nabla f(x,y,z)$$

f) $\mathrm{rot}(f\mathbf{F}) = f\,\mathrm{rot}\mathbf{F} + \mathrm{grad}\,f \times \mathbf{F}$

$$\mathrm{rot}(f\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ fP & fQ & fR \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial(fR)}{\partial y} - \frac{\partial(fQ)}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial(fP)}{\partial z} - \frac{\partial(fR)}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial(fQ)}{\partial x} - \frac{\partial(fP)}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$= \left(R\frac{\partial f}{\partial y} + f\frac{\partial R}{\partial y} - Q\frac{\partial f}{\partial z} - f\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)\mathbf{i} +$$

$$\left(P\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial P}{\partial z} - R.\frac{\partial F}{\partial x} - f\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} +$$

$$\left(Q\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial \theta}{\partial x} - P\frac{\partial f}{\partial y} - f\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$= f\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}\right]$$

$$+\frac{\partial f}{\partial z}.(P-Q) + \frac{\partial f}{\partial y}(R-P) + \frac{\partial f}{\partial x}(Q-R)$$

$$= f.\mathrm{rot}\,\mathbf{F} + \mathrm{grad}\,f \times \mathbf{F}$$

18. $u = xe^x\cos y$ fonksiyonunun

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 dy^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$$ **denklemini sağladığını gösteriniz.**

Çözüm:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y + xe^x\cos y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2e^x\cos y + xe^x\cos y$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 3e^x\cos y + xe^x\cos y, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2} = 4e^x\cos y + xe^x\cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -xe^x\sin y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -xe^x\cos y, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = xe^x\sin y, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = xe^x\cos y$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x dy^2} = -e^x\cos y - xe^x\cos y, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2} = -2e^x\cos y - xe^x\cos y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^2} = 4e^x\cos y + xe^x\cos y + xe^x\cos y - 4e^x\cos y - 2xe^x\cos y = 0$$

19. $u = F(x, y)$, $x = e^s \cos t$, $y = e^s \sin t$ için

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = e^{2s}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = e^s \cos t\frac{\partial u}{\partial x} + e^s \sin t\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = e^s \cos t\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}e^{2s}\cos^2 t + e^s \sin t\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}e^{2s}\sin^2 t$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = -e^s \sin t\frac{\partial u}{\partial x} + e^s \cos t\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -e^s \cos t\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}e^{2s}\sin^2 t - e^s \sin t\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}e^{2s}\cos^2 t$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = e^s \cos t\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}e^{2s}\cos^2 t + e^s \sin t\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}e^{2s}\sin^2 t$$

$$-e^s \cos t\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}e^{2s}\sin^2 t - e^s \sin t\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}e^{2s}\cos^2 t$$

$$= e^{2s}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) + e^{2s}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)$$

$$= e^{2s}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

20. **$ax^2 + by^2 + cz^2 = k$ denklemi ile verilen bir ikinci dereceden yüzeyin (kuaratik yüzeyin) üzerindeki bir $P(x_0, y_0, z_0)$ noktasından çizilen teğet düzlemin denkleminin $ax_0x + by_0y + cz_0z = k$ şeklinde olacağını gösteriniz.**

Çözüm:

$f(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 - k$

$f_x = 2ax \Rightarrow f_x(x_0,y_0,z_0) = 2ax_0$

$f_y = 2by \Rightarrow f_y(x_0,y_0,z_0) = 2by_0$

$f_z = 2cz \Rightarrow f_z(x_0,y_0,z_0) = 2cz_0$

$f_x(x_0,y_0,z_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)(y - y_0) + f_z(x_0,y_0,z_0)(z - z_0) = 0$

$2ax_0(x - x_0) + 2ay_0(y - y_0) + 2cz_0(z - z_0) = 0$

$ax_0x - ax_0^2 + by_0y - by_0^2 + cz_0z - cz_0^2 = 0$

$ax_0x + by_0y + cz_0z = ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 \Rightarrow ax_0x + by_0y + cz_0z = k$

21. **$\dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2}$ konisi ile $x^2 + y^2 + \left(z - \dfrac{b^2 + c^2}{c}\right)^2 = \dfrac{b^4}{c^2}$ küresinin birbirine**

A(0, b, c) ve B(0, −b, c) noktalarında teğet olduklarını gösteriniz.

[YG: Her iki yüzeyin verilen noktadaki teğet düzlemlerinin aynı olacağını, dolayısı ile o noktadaki gradiyent vektörlerinin paralel olacağını görünüz]

Çözüm:

$$f(x,y,z) = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0$$

$$\nabla f = \left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}\right) = \left(-\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{-2z}{c^2}\right) \Rightarrow \nabla f(a, b, c) = (0, \frac{2}{b}, -\frac{2}{c})$$

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + \left(z - \frac{b^2 + c^2}{c}\right)^2 - \frac{b^4}{c^2} = 0$$

$$\nabla g = \left(\frac{dg}{dx}, \frac{dg}{dy}, \frac{dg}{dz}\right) = \left(2x, 2y, 2\left(z - \frac{b^2 + c^2}{c}\right)\right) \Rightarrow \nabla g(0, b, c) = (0, 2b, \frac{-2b^2}{c})$$

olacağından

$\nabla g(A) = b^2 \nabla f(A)$ dır.

O halde her iki yüzeyin A noktasındaki gradiyent vektörleri paraleldir. Aynı şeyler B noktası için de geçerlidir.

22. **İki yüzeyin bir ortak noktasındaki teğet düzlemler arasındaki açıya o iki yüzeyin arasındaki açı denir. $(x - a)^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresi ile $x^2 + y^2 = a^2$ silindiri $M(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0)$ noktasında hangi açı altında kesişir.**

Çözüm:

İki yüzeyin gradiyent vektörleri arasındaki açıya bakalım.

$f(x,y,z) = (x - a)^2 + y^2 + z^2 - a^2$

$\nabla f = (2(x - a), 2y, 2z) \Rightarrow \nabla f|_M = \left(a, a\sqrt{3}, 0\right)$

$g(x,y,z) = x^2 + y^2 - a^2 \Rightarrow \nabla g = (2x, 2y, 0) \Rightarrow \nabla g|_M = \left(a, a\sqrt{3}, 0\right)$

Gradiyent vektörleri birbirlerine paralel ve aynı yönlü olduğundan aradaki açının ölçüsü sıfırdır.

23. f türevlenebilen bir fonksiyon olsun. $z = x f\left(\frac{y}{x}\right)$ yüzeyinin, $x_0 \neq 0$ olmak üzere her $P(x_0, y_0, z_0)$ noktasındaki teğetinin orjinden geçtiğini gösteriniz.

Çözüm:

$$g(x,y,z) = x f\left(\frac{y}{x}\right) - z$$

$$g_x = f\left(\frac{y}{x}\right) - f'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x}, \qquad g_y = f'\left(\frac{y}{x}\right), \qquad g_z = -1$$

$$\left(f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\frac{y_0}{x_0}\right)(x - x_0) + f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)(y - y_0) - (z - z_0) = 0 \quad \text{(Teğet düzlemi denklemi)}$$

$$\left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\frac{y_0}{x_0}\right]x + f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)y - z = x_0 f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - y_0 f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) + y_0 f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - z_0$$

$z_0 = x_0 f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$ olduğundan

$$\left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\frac{y_0}{x_0}\right]x + f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)y - z = 0 \quad \text{olur.}$$

(0, 0, 0) noktası bu denklemi sağlar.

24. $z^2 = x^2 + y^2$ konisinin her noktasındaki teğet düzleminin orjinden geçtiğini gösteriniz.

Çözüm:

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ denirse $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ dır.

$f_x = 2x,\quad f_y = 2y,\quad f_z = -2z$ olduğundan herhangi bir (x_0, y_0, z_0) noktasındaki teğet düzlemin denklemi;

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - 2z_0(z - z_0) = 0 \Rightarrow$$

$$2x_0x + 2y_0y + 2z_0z = 2x_0^2 + 2y_0^2 - 2z_0^2 \quad \Rightarrow \quad x_0x + y_0y - z_0z = 0$$

olur ki düzlem O (0,0,0) noktasından geçer.

25. $f(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 xt}{t}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$ fonksiyonu için $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^2} f(x,t)dt$ türevini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} f(x,t)dt = f(x,x^2)2x + \int_0^{x^2}\frac{\partial}{\partial x}(f(x,t))dt = \frac{\sin^2 x^3}{x^2}.2x + \int_0^{x^2} 2\sin(xt)\cos(xt)dt$$

$$= \frac{2\sin^2 x^3}{x} - \frac{\cos(2xt)}{2x}\Bigg|_0^{x^2} = 2\frac{\sin^2 x^3}{x} - \frac{\cos 2x^3}{2x} + \frac{1}{2x}$$

26. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^2} \arctan\left(\frac{t}{x^2}\right)dt = x\left(\frac{\pi}{2} - \ln 2\right)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\arctan\frac{t}{x^2}dt = \int_0^{x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{t}{x^2}\right)^2}\left(-\frac{2t}{x^3}\right)dt + \arctan\frac{x^2}{x^2}\cdot(2x)$$

$$= -x\int_0^{x^2}\frac{2t}{x^4+t^2}dt + 2x\frac{\pi}{4} = -x\ln(x^4+t^2)\Big|_0^{x^2} + x\frac{\pi}{2}$$

$$= 4x\ln x - x\ln(x^2+x^4) + x\frac{\pi}{2}$$

olur.

27. $t > 1$ için $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dx}{t-\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{t^2-1}}$ olduğu biliniyor.

Bundan yararlanarak $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dx}{(2-\cos x)^2}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\frac{d}{dt}\int_0^{\pi}\frac{dx}{t-\cos x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi}{\sqrt{t^2-1}}\right) \Rightarrow \int_0^{\pi}\frac{dx}{(t-\cos x)^2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{t^2-1}.2t \Rightarrow \int_0^{\pi}\frac{dx}{(t-\cos x)^2} = \pi t\sqrt{t^2-1}$$

olur. $t = 2$ için $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dx}{(2-\cos x)^2} = 2\pi\sqrt{3}$ bulunur.

28. $0<\alpha$ 1 için $\tan\dfrac{x}{2}=t$ değişken değiştirmesi yaparak

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos x}{1-\alpha\cos x}dx=2\pi\frac{1-\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}$$

olduğunu gösteriniz. Bundan faydalanarak

$$\int_0^{2\pi}\ln(1-\alpha\cos x)dx=2\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos x}{1-\alpha\cos x}dx=\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{1-\alpha\cos x}dx+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\cos x}{1-\alpha\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{1-\alpha\cos x}dx+\int_0^{\pi}\frac{-\cos x}{1+\alpha\cos x}dx$$

$$=-\frac{1}{\alpha}\int_0^{\pi}1-\frac{1}{1-\alpha\cos x}dx-\frac{1}{\alpha}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{1}{1+\alpha\cos x}\right)dx \qquad \left[\tan\frac{x}{2}=t\right]$$

$$=-\frac{\pi}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\left[\frac{2}{1+\alpha}\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\right]-\frac{\pi}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\left[\frac{2}{1-\alpha}\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2+\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}\right]$$

$$=-\frac{2\pi}{\alpha}+\frac{2}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}\left[\arctan\left(\sqrt{\frac{1+\alpha}{1+\alpha}}t\right)\Big|_0^{\infty}\right]$$

$$=-\frac{2\pi}{\alpha}+\frac{2\pi}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}=2\pi\frac{1-\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}$$

bulunur. Her iki tarafın $[0,\alpha]$ aralığında integrali alınırsa

$$\int_0^{\alpha}\left(\int_0^{2\pi}\frac{\cos x}{1-\alpha\cos x}dx\right)d\alpha=\int_0^{\alpha}\left(2\pi\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{\alpha\sqrt{1-a^2}}\right)$$

$$\Rightarrow\int_0^{2\pi}\ln(1-\alpha\cos x)dx=2\pi\ln|\alpha|+2\pi\ln|\sec u+\tan u|=2\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$$

29. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $$\int_0^{\pi}\ln(1+\alpha\cos x)dx=\pi\ln\left[\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}\right] \qquad |\alpha|<1$$

b) $$\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx=\begin{cases}\pi\ln\alpha^2, & |\alpha|<1\\ 0, & |\alpha|>1\end{cases}$$

Her iki integralin $|\alpha|=1$ için durumunu inceleyiniz.

Çözüm:

$$u(\alpha)=\int_0^{\pi}\ln(1+\alpha\cos x)dx$$

$$u'(\alpha)=\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{1+\alpha\cos x}dx=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\pi}\left[1-\frac{1}{1+\alpha\cos x}\right]dx=\frac{\pi}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\alpha\cos x}$$

$$=\frac{\pi}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\left[\frac{2}{1-\alpha}\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2+\frac{1+\alpha}{1+\alpha}}\right] \qquad \left[\begin{array}{l}\tan\frac{x}{2}=t\\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{array}\right]$$

$$=\frac{\pi}{\alpha}-\frac{2}{\alpha}\sqrt{1-\alpha^2}\left[\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}t\right)\Big|_0^{\alpha}\right]$$

$$=\frac{\pi}{\alpha}-\frac{\pi}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}$$

$$\int u'(\alpha)d\alpha=\int\left(\frac{\pi}{\alpha}-\frac{\pi}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}\right)d\alpha\Rightarrow u(\alpha)=\pi\ln\left(1+\sqrt{1-\alpha^2}\right)+C$$

bulunur. $u(0)=\int_0^{\pi}\ln 1.dx=0$ olacağından $C=-\pi\ln 2$ olur.

Buradan; $u(\alpha)=\pi\ln\left(1+\sqrt{1-\alpha^2}\right)-\pi\ln 2=\pi\ln\left[\dfrac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}\right]$

bulunur.

30. $\varnothing(x,y,z)=\int_a^b f(z+x\cos t+y\sin t)dt$ **fonksiyonunun** $\varnothing_{zz}=\varnothing_{xx}+\varnothing_{yy}$ **denklemini sağladığını gösteriniz. Burada f, ikinci mertebeden türevlenebilen bir fonksiyondur.**

Çözüm:

$$\varnothing_x = \int_a^b f'(z + x\cos t + y\sin t)\cos t\,dt,\quad \varnothing_{xx} = \int_a^b f''(z + x\cos t + y\sin t)\cos^2 t\,dt$$

$$\varnothing_y = \int_a^b f'(z + x\cos t + y\sin t)\sin t\,dt,\quad \varnothing_{yy} = \int_a^b f''(z + x\cos t + y\sin t)\sin^2 t\,dt$$

$$\varnothing_z = \int_a^b f'(z + x\cos t + y\sin t)dt,\quad \varnothing_{zz} = \int_a^b f''(z + x\cos x + y\sin t)dt$$

$$\varnothing_{xx} + \varnothing_{yy} = \int_a^b f''(z + x\cos t + y\sin t)\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)dt$$

$$= \int_a^b f''(z + x\cos t + y\sin t)dt = \varnothing_{zz}$$

31. **$t \geq 0$ için F fonksiyonu**

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-x^2-\frac{t^2}{x^2}}dx$$ **şeklinde tanımlanıyor.**

a) F(0) ifadesini hesaplayınız **b) $F'(t) = -2F(t)$ olduğunu gösteriniz.**

c) F(t) fonksiyonunu bulunuz. **d) $\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{1}{x^2}}dx$ integralini hesaplayınız.**

Çözüm:

a) $F(0) = \int_0^\infty e^{-x^2}dx$

$$F^2(0) = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}dx\,dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^\infty e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta = -\frac{1}{2}\int_{r=0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}\Big|_0^\infty d\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

b) $F(t) = \int_0^\infty e^{-x^2-\frac{t^2}{x^2}}dx \Rightarrow F'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{t^2}{x^2}}dx$

$$= \int_0^\infty e^{-x^2-\frac{t^2}{x^2}}\left(-\frac{2t}{x^2}\right)dx = -2\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{u^2}-u^2}du = -2F(t)$$ $\left[\frac{t}{x} = u \Rightarrow -\frac{t}{x^2}dx = du\right]$

c) $F'(t) = -2F(t) \Rightarrow \frac{F'(t)}{F(t)} = -2 \Rightarrow \int\frac{F'(t)}{F(t)} = -2t \Rightarrow \ln(F(t)) = -2t + C \Rightarrow F(t) = e^{-2t+C_1}$

$F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ olduğundan $e^C = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow C = \ln\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ dır.

Buna göre, $F(t) = e^{-2t+\ln\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2t}$ olur.

d) $$\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{t}{x^2}}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2t}$$

olduğundan, $t = 1$ alınarak,

$$\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{t}{x^2}}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2e^2}$$ bulunur.

Bölüm 8 İKİ KATLI İNTEGRALLER

TANIM

x O y düzleminde verilen bir B bölgesini $B_1, B_2, \ldots, B_n$ gibi alt bölgelere ayıralım. $P = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ kümesine B bölgesinin bir **parçalanması** denir.

$$\|P\| = \text{maks}\left\{d(B_1), d(B_2), \ldots, d(B_n)\right\}$$

sayısına P parçalanmasının **normu** veya **maksimal çapı** adı verilir. Burada $d(B_k)$, B_k bölgesinin çapını göstermektedir.

TANIM

f fonksiyonu B bölgesinde tanımlı ve sınırlı olsun. B bölgesinin bir $P = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ parçalanması verildiğinde, ΔA_k, B_k bögesinin alanını ve (x_k, y_k) da B_k bölgesinin herhangi bir noktasını göstermek üzere

$R(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$ ifadesine f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen **Riemann toplamı** veya **İntegral toplamı** adı verilir.

TANIM

Eğer $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$ limiti mevcutsa, bu limite f fonksiyonunun B üzerindeki **iki katlı integrali** denir.

$\iint_B f(x,y)dA$ ile gösterilir. $f(x, y)$ ifadesine **integrant**, B bölgesine de **integrasyon bölgesi** denir.

TEOREM 8.1: (Birinci Fubini Teoremi)

$B = \{(x,y):\ a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ ve $f: B \to R$ fonksiyonu sürekli olsun.

Bu takdirde

$$\iint_B f(x,y)dxdy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

dır.

TEOREM 8.2: (İkinci Fubini Teoremi)

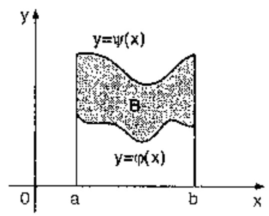
$\varphi, \psi: [a,b] \to R$ fonksiyonları sürekli, $\forall x \in [a,b]$ için $\varphi(x) \le \psi_{(x)}$ ve

$B = \{(x,y):\ a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ olsun.

$f: B \to R$ fonksiyonu sürekli veya parçalı sürekli ise

$$\iint_B f(x,y)dx\,dy = \int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

dır.



PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. **Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.**

a) $\int_0^3\int_0^2 (4-y^2)dydx = 16$

b) $\int_0^2\int_0^1 (x^2+2y)dydx = \frac{14}{3}$

c) $\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}dydx = \frac{\pi}{12}$

d) $\int_0^\pi\int_0^x x\sin y\,dy\,dx = \frac{\pi^2}{2}+2$

e) $\int_1^{\ln 8}\int_0^{\ln y} e^{x+y}dxdy = 8\ln 8 - 16 + e$

f) $\int_1^2\int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2}dydx = \frac{9}{4}$

g) $\int_{-3}^3\int_{y^2-4}^5 (x+2y)dxdy = \frac{552}{5}$

h) $\int_0^\pi\int_0^{\sin x} ydydx = \frac{\pi}{4}$

ı) $\int^2\int_y^{y^2} dxdy = \frac{5}{6}$

i) $\int_0^1\int_2^{4-2x} dydx = 1$

j) $\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 dxdy = \frac{1}{3}$

k) $\int_0^{3/2}\int_0^{9-4x^2} 16x\,dydx = 81$

Çözüm:

a) $\int_0^3\int_0^2 (4-y^2)dydx = \int_0^3 \left.4y-\frac{y^3}{3}\right|_0^2 dx = \int_0^3\left(8-\frac{8}{3}\right)dx = \frac{16}{3}.3 = 16$

b) $\int_0^2\int_0^1 (x^2+2y)dydx = \int_0^2 \left.x^2y+y^2\right|_0^1 dx = \int_0^2 (x^2+1)dx = \left.\frac{x^3}{3}+x\right|_0^2 = \frac{8}{3}+2 = \frac{14}{3}$

c) $\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}dydx = \int_0^1 x^2\arctan y\Big|_0^1 dx = \frac{\pi}{4}\int_0^1 x^2dx = \frac{\pi}{4}\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{12}$

d) $\int_0^\pi\int_0^x x\sin y dydx = \int_0^\pi x(\cos y)\Big|_0^x dx = \int_0^\pi (x-x\cos x)dx = \frac{\pi^2}{2}-(x\sin x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi(\sin x dx)$

$=\frac{\pi^2}{2}(-\cos x)\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}+2$

e) $\int_1^{\ln 8}\int_0^{\ln y} e^{x+y}dxdy = \int_1^{\ln 8} e^y e^x\Big|_0^{\ln y} dy = \int_1^{\ln 8}\left(e^y y - e^y\right)dy = ye^y\Big|_1^{\ln 8} - \int_1^{\ln 8} e^y dy - e^y\Big|_1^{\ln 8}$

$= 8\ln 8 - e - 8 + e - 8 + e = 8\ln 8 - 16 + e$

f) $\int_1^2\int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2}dydx = \int_1^2 -\frac{x^2}{4}\Big|_{\frac{1}{x}}^x dx = \int_1^2\left(-x+x^3\right)dx = -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = -2+\frac{16}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$

$= \frac{-8+16+2-1}{4} = \frac{9}{4}$

g) $\int_{-3}^3\int_{y^2-4}^5 (x+2y)dxdy = \int_{-3}^3 \frac{x^2}{2}+2xy\Big|_{y^2-4}^5 dy$

$= \int_{-3}^3\left[\frac{25}{2}+10y-\frac{\left(y^2-4\right)^2}{2}-2y\left(y^2-4\right)\right]dy = \int_{-3}^3 \frac{41}{2}+18y-\frac{y^4}{2}+4y^2-2y^3$

$= \frac{41}{2}y+9y^2-\frac{y^5}{10}+\frac{4}{3}y^3-\frac{y^4}{4}\Big|_{-3}^3 = 123-\frac{24^3}{5}+72 = \frac{552}{5}$

h) $\int_0^\pi\int_0^{\sin x} y\,dydx = \int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{2}dx = \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{4}dx = \frac{x}{4}-\frac{\sin 2x}{8}\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{4}$

ı) $\int_1^2\int_y^{y^2} dxdy = \int_1^2 y^2-y\,dy = \frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{8}{4}-2-\frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}-\frac{7}{3} = \frac{5}{6}$

i) $\int_0^1\int_2^{4-2x} dy\,dx = \int_0^1\int_2^{4-2x} dydx = \int_0^1 (2-2x)dx = 2x-x^2\Big|_0^1 = 1$

j) $\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 dx\,dy = \int_0^1\left(1-\sqrt{y}\right)dy = y-\frac{2}{3}y^{3/2}\Big|_0^1 = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

k) $\int_0^{3/2}\int_0^{9-4x^2} 16x\,dydx = \int_0^{3/2} 16x\left(9-4x^2\right)dx = 16\left(\frac{9}{2}x^2-x^4\Big|_0^{3/2}\right) = 81$

2. Aşağıdaki integrallerin

a) İntegrasyon bölgesini çiziniz.

b) İntegrasyon sırasını değiştiriniz.

c) İntegrali hesaplayınız.

a) $\int_0^2 \int_1^{e^x} dydx$ b) $\int_0^1 \int_x^{2x} dydx$ c) $\int_{-2}^1 \int_{x^2+4x}^{3x+2} dydx$

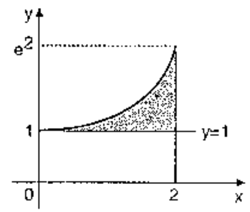
ç) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 dxdy$ d) $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} y\ dx\ dy$ e) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x\ dx\ dy$

Çözüm:

a) $I = \int_0^2 \int_1^{e^x} dy\,dx$

a. $y = e^x \quad x = 0$

$y = 1 \quad x = 2$

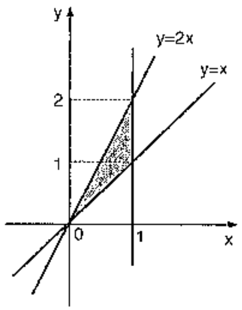


b. $I = \int_1^{e^2} \int_{\ln y}^{2} dx\,dy$

c. $I = \int_0^2 (e^x - 1)dx = e^x - x\Big|_0^2 = e^2 - 2 - 1 = e^2 - 3$

b) $I = \int_0^1 \int_x^{2x} dydx$

a.

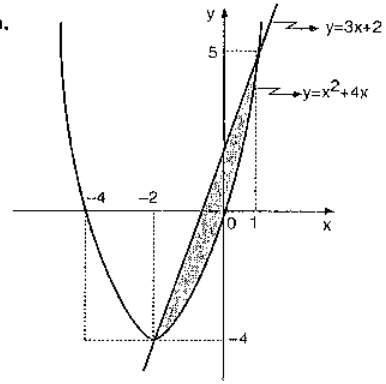


b. $I = \int_0^1 \int_{y/2}^{y} dx\,dy + \int_1^2 \int_{y/2}^{1} dxdy$

c. $I = \int_0^1 \int_x^{2x} dydx = \int_0^1 y\Big|_x^{2x} = \int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

c) $I = \int_{-2}^{1} \int_{x^2+4x}^{3x+2} dy\,dx$

a.



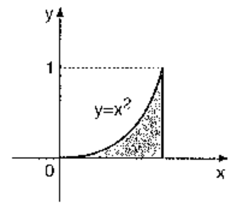
b. $\int_{-4}^{5} \int_{\frac{y-2}{3}}^{-2+\sqrt{y+4}} dx\,dy$

c. $I = \int_{-2}^{1} \left(-x^2 - x + 2\right)dx$

$= -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\Big|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}$

ç) $I = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{1} dx\,dy$

a.

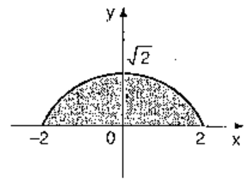


b. $\int_0^1 \int_{y=0}^{x^2} dy\,dx$

c. $\int_0^1 \int_0^{x^2} dy\,dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

d) $I = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} y\,dx\,dy$

a.



$x = \sqrt{4 - 2y^2} \Rightarrow x^2 + 2y^2 = 4$ elips

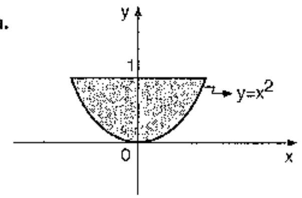
b. $I = \int_{-2}^{2} \int_0^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} y\ dy\,dx$

c. $I = \int_{-2}^{2} \int_0^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} y\ dy\ dx$

$= \int_{-2}^{2} \frac{4 - x^2}{4} dx = x - \frac{x^3}{12}\Big|_{-2}^{2} = \frac{8}{3}$

e) $I=\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x \, dx \, dy$

a.



b. $\int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} x \, dy \, dx$

c. $I=\int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} x \, dy \, dx = \int_{-1}^{1} (x-x^3) \, dx$

$$= \frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1}=0$$

3. Aşağıdaki integrallerin

1) İntegrasyon bölgesini çiziniz.

2) İntegrasyon sırasını değiştiriniz.

a) $\int_0^1 \int_y^{2y} f(x,y)\,dx\,dy$

b) $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy\,dx$

c) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx\,dy$

d) $\int_0^2 \int_0^{x^3} f(x,y)\,dy\,dx$

e) $\int_0^2 \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{2} f(x,y)\,dy\,dx$

f) $\int_0^1 \int_{\frac{1-x^2}{2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$

g) $\int_1^2 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$

h) $\int_0^1 \int_{y^2/2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$

ı) $\int_{-10}^{0} \int_{1}^{1+\sqrt{100-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$

i) $\int_0^{\frac{a\sqrt{2}}{2}} \int_0^{x} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{\frac{a\sqrt{2}}{2}}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$

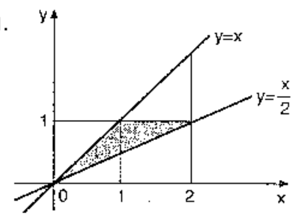
j) $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2y}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_4^8 \int_{y/2}^{\sqrt{2y}} f(x,y)\,dx\,dy$

k) $\int_0^2 \int_x^{2x} f(x,y)\,dy\,dx + \int_2^3 \int_x^{6-x} f(x,y)\,dx\,dy$

l) $\int_0^1 \int_y^{1} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{-1}^{0} \int_{-y}^{1} f(x,y)\,dx\,dy$

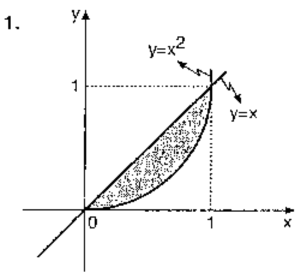
Çözüm:

a) 1.



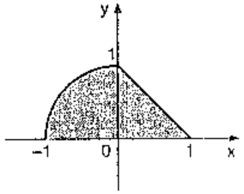
2. $\int_0^1 \int_{x/2}^{x} f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^2 \int_{x/2}^{1} f(x,y)\,dy\,dx$

b) 1.



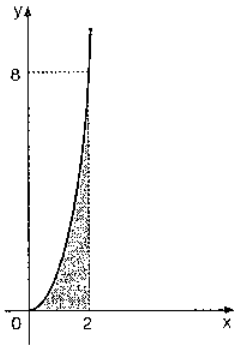
2. $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy$

c) 1.



2. $I = \int_{-1}^{0} \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-x} f(x,y)\,dy\,dx$

d) 1.

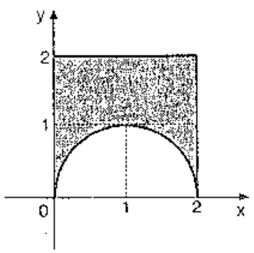


$y = 0, \quad y = x^3$

$x = 0, \quad x = 2$

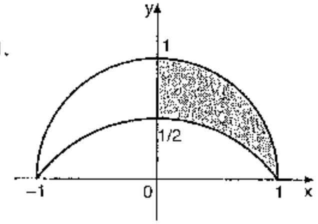
2. $\int_{0}^{8} \int_{\sqrt[3]{y}}^{2} f(x,y)\,dx\,dy$

e) 1.



2. $I = \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{1}^{2} \int_{0}^{2} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{0}^{1} \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x,y)\,dx\,dy$

f) 1.

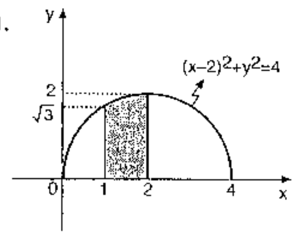


$y = \dfrac{1-x^2}{2}$

$y = \sqrt{1-x^2}$

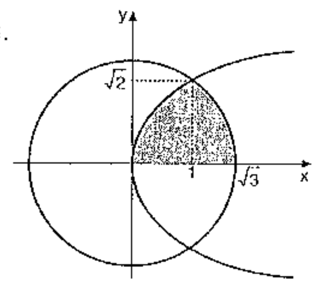
2. $\int_{0}^{1/2} \int_{\sqrt{1-2y}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{1/2}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$

g) 1.



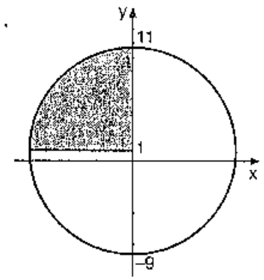
2. $I = \int_{0}^{\sqrt{3}} \int_{1}^{2} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2} f(x,y)\,dx\,dy$

h) 1.



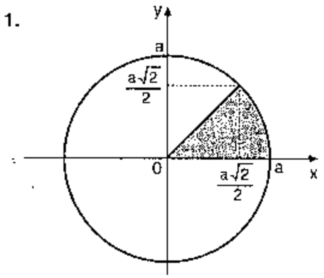
2. $\int_{0}^{1} \int_{0}^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{1}^{\sqrt{3}} \int_{0}^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$

h) 1.



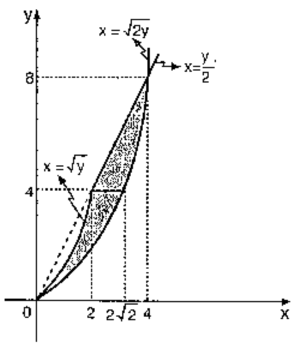
2. $I=\int_{1}^{11}\int_{-\sqrt{99-2y-y^2}}^{0} f(x,y)\,dx\,dy$

i) 1.



2. $I=\int_{0}^{\frac{a\sqrt{2}}{2}}\int_{y}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dx\,dy$

j) 1.



$x=\sqrt{y}$

$x=\sqrt{2y}$

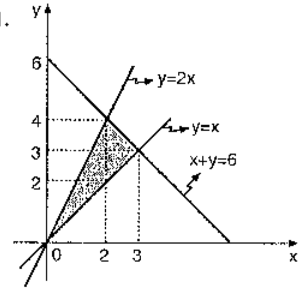
$y=0,\ \ y=4$

$x=\frac{y}{2}$

$x=\sqrt{2y}$

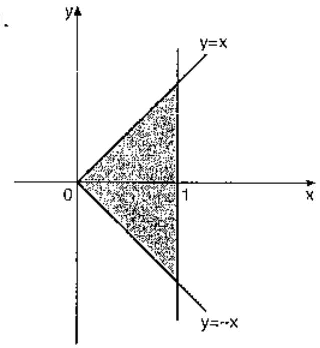
2. $\int_{0}^{2}\int_{x^2/2}^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx+\int_{2}^{4}\int_{x^2/2}^{2x} f(x,y)\,dy\,dx$

k) 1.



2. $I=\int_{0}^{3}\int_{x=y/2}^{y} f(x,y)\,dx\,dy+\int_{3}^{4}\int_{y/2}^{6-y} f(x,y)\,dx\,dy$

l) 1.



2. $\int_{0}^{1}\int_{-x}^{x} f(x,y)\,dy\,dx$

4. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int_{0}^{\pi}\int_{x}^{\pi}\frac{\sin y}{y}\,dy\,dx$

b) $\int_{0}^{1}\int_{2y}^{2}\cos(x^2)\,dx\,dy$

c) $\int_{0}^{1}\int_{y}^{1}x^2e^{xy}\,dx\,dy$

d) $\int_{0}^{2}\int_{y/2}^{1}e^{x^2}\,dx\,dy$

e) $\int_{0}^{2}\int_{x}^{2}2y^2\sin(xy)\,dy\,dx$

f) $\int_{0}^{8}\int_{\sqrt[3]{x}}^{2}\frac{dy\,dx}{y^4+1}$

g) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\,dy\,dx$

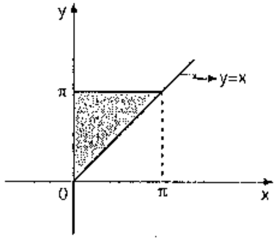
h) $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{\ln 3}} \int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2}\,dx\,dy$

ı) $\displaystyle\int_0^3 \int_{\sqrt{\frac{x}{3}}}^1 e^{y^3}\,dy\,dx$

i) $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_{-y}^1 e^{x^2}\,dx\,dy + \int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy$

Çözüm:

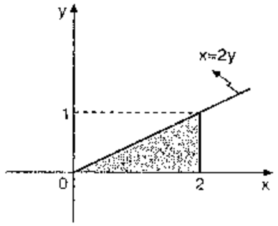
a) $$I = \int_0^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y}\,dy\,dx$$



$$I = \int_0^{\pi} \int_0^{y} \frac{\sin y}{y}\,dx\,dy = \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y}\,y\,dy$$

$$= \int_0^{\pi} \sin y\,dy = -\cos y\Big|_0^{\pi} = 2$$

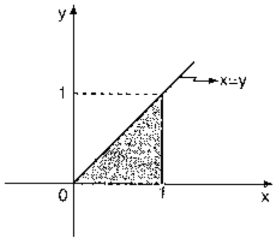
b) $$I = \int_0^1 \int_{2y}^2 \cos(x^2)\,dx\,dy$$



$$I = \int_0^2 \int_0^{x/2} \cos(x^2)\,dy\,dx = \int_0^2 \frac{x}{2}\cos(x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\sin(x^2)\Big|_0^2 = \frac{\sin 4}{4}$$

c) $$I = \int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy}\,dx\,dy$$

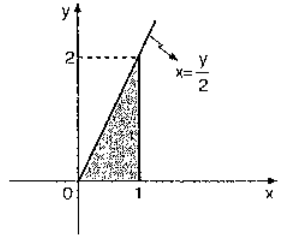


$$I = \int_0^1 \int_0^x x^2 e^{xy}\,dy\,dx = \int_0^1 xe^{xy}\Big|_0^x\,dx$$

$$= \int_0^1 xe^{x^2} - x\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1$$

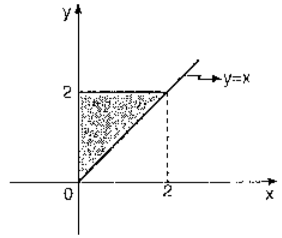
$$= \frac{1}{2}(e-1) - \frac{1}{2} = \frac{e}{2} - 1$$

d) $$I = \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2}\,dx\,dy$$



$$I = \int_0^1 \int_0^{2x} e^{x^2}\,dy\,dx = \int_0^1 2xe^{x^2}\,dx = e^{x^2}\Big|_0^1 = e-1$$

e) $$I = \int_0^2 \int_x^2 2y^2 \sin(xy)\,dy\,dx$$

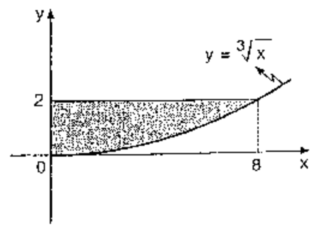


$$I = \int_0^2 \int_0^y 2y^2 \sin(xy)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 2y\left(-\cos(xy)\Big|_0^y dy\right) = \int_0^2 -2y\cos(y^2) + 2y\,dy$$

$$= -\sin(y^2) + y^2\Big|_0^2 = 4 - \sin 4$$

f) $$I = \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\,dx}{y^4+1}$$



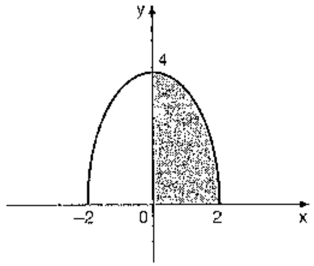
$$I = \int_0^2 \int_0^{y^3} \frac{dx\,dy}{y^4+1} = \int_0^2 \frac{y^3}{1+y^4}\,dy$$

$$= \frac{1}{4}\ln(1+y^4)\Big|_0^2 = \frac{\ln 17}{4}$$

g) $I=\int\limits_0^2\int\limits_0^{4-x^2}\frac{xe^{2y}}{4-y}dy\,dx$

$$I=\int\limits_0^4\int\limits_0^{\sqrt{4-y}}\frac{xe^{2y}}{4-y}dx\,dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^4\frac{e^{2y}}{4-y}(4-y)dy$$

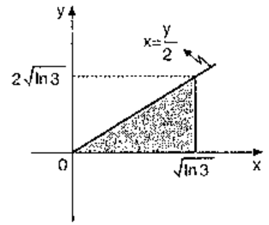
$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 e^{2y}dy=\frac{1}{4}e^{2y}\Big|_0^4=\frac{e^8-1}{4}$$



h) $I=\int\limits_0^{2\sqrt{\ln 3}}\int\limits_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}}e^{x^2}dx\,dy$

$$I=\int\limits_0^{\sqrt{\ln 3}}\int\limits_0^{2x}e^{x^2}dy\,dx=\int\limits_0^{\sqrt{\ln 3}}2x\,e^{x^2}dx=e^{x^2}\Big|_0^{\sqrt{\ln 3}}$$

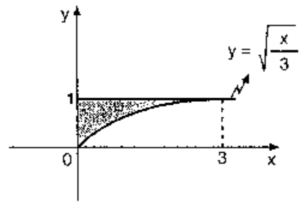
$$=3-1=2$$



ı) $I=\int\limits_0^3\int\limits_{\sqrt{\frac{x}{3}}}^1 e^{y^3}dy\,dx$

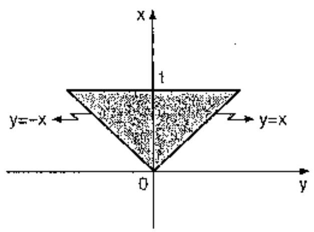
$$I=\int\limits_0^1\int\limits_0^{3y^2}e^{y^3}dx\,dy=\int\limits_0^1 3y^2e^{y^3}dy=e^{y^3}\Big|_0^1$$

$$=e-1$$



i) $\int\limits_{-1}^0\int\limits_{-y}^1 e^{x^2}dxdy+\int\limits_0^1\int\limits_y^1 e^{x^2}dx\,dy$

$$I=\int\limits_0^1\int\limits_{-x}^x e^{x^2}dy\,dx=\int\limits_0^1 2xe^{x^2}dx=e^{x^2}\Big|_0^1=e-1$$



İKİ KATLI İNTEGRALDE BÖLGE DÖNÜŞÜMLERİ

$x=g(u,v)$

$y=h(u,v)$

dönüşümü yapıldığında

$$\iint\limits_B f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_D f(g(u,v),\ h(u,v))\,|J|\,du\,dv$$

olur. Eğer özel olarak

$$\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}$$

dönüşümü yardımıyla kutupsal koordinatlara geçilirse

$$\iint\limits_B f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

olur. Çünkü bu dönüşüm için

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}=\begin{vmatrix}x_r & x_\varphi\\ y_r & y_\varphi\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r$$

dır.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. B integrsyon bölgesi birinci bölgede $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 9$ $xy = 2$, $xy = 4$ hiperbolleri tarafından sınırlandırılan bölge olduğuna göre

$$\iint_B \left(x^2 + y^2\right) dxdy$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$u = xy$

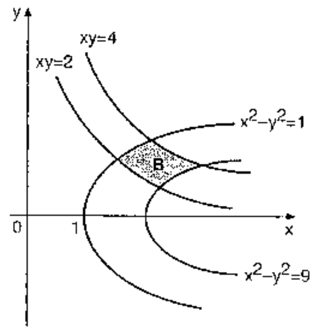
$v = x^2 - y^2$

dönüşümünü yapalım.

$xy = 2$ ve $xy = 4$ hiperbolleri $u = 2$ ve $u = 4$ doğrularına, $x^2 - y^2 = 1$ ve $x^2 - y^2 = 9$ hiperbolleri de $v = 1$ ve $v = 9$ doğrularına dönüşür.

Bu durumda B bölgesi de

$D = \{(u, v): 2 \le u \le 4,\ 1 \le v \le 9\}$ bölgesine dönüşür.



$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{vmatrix}} = \frac{-1}{2\left(x^2 + y^2\right)}$$

olduğundan

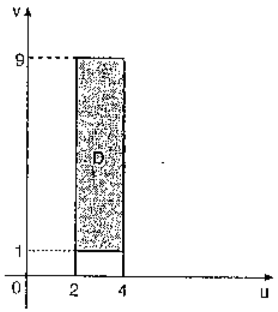
$$\iint_B \left(x^2 + y^2\right) dx\,dy = \iint_D x^2 + y^2 \,|J|\, du\,dv$$

$$= \int_{v=1}^{9} \int_{u=2}^{4} \left(x^2 + y^2\right) \frac{1}{2\left(x^2 + y^2\right)} du\,dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^9 \int_2^4 du\,dv = \frac{1}{2}(4 - 2)(9 - 1)$$

$$= 8$$

olur.



2. B integrasyon bölgesi $x^2 + y^2 \le 1$ dairesi olduğuna göre

$\iint_B \left(1 - x^2 - y^2\right) dx\,dy$ integralini kutupsal koordinatlara geçerek hesaplayınız.

Çözüm:

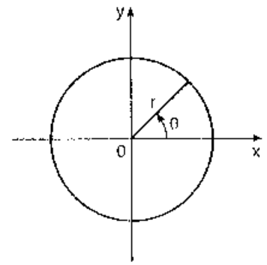
Kutupsal koordinatlara geçilerek

$$\iint_B \left(1 - x^2 - y^2\right) dx\,dy = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \left(1 - r^2\right) r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left.\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right|_0^1 d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

bulunur.



3. $B = \{(x, y): 1 \le x \le 2$ ve $0 \le y \le x\}$ olduğuna göre

$$\iint_B \frac{y\sqrt{x^2 + y^2}}{x} dx\,dy$$

integralini kutupsal koordinatlar yardımı ile hesaplayınız.

Çözüm:

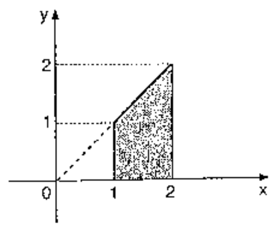
$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$x = 2 \Rightarrow 2 = r\cos\theta \Rightarrow r = \dfrac{2}{\cos\theta}$

$x = 1 \Rightarrow 1 = r\cos\theta \Rightarrow r = \dfrac{1}{\cos\theta}$

$y = x \Rightarrow r\cos\theta = r\sin\theta \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$



$$\iint\limits_B \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{x}\,dx\,dy = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{r=\frac{1}{\cos\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta}} \frac{r\sin\theta\sqrt{r^2}}{r\cos\theta}\,r\,dr\,d\theta = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{r=\frac{1}{\cos\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta}} r^2\tan\theta\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{8\sin\theta}{\cos^4\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos^4\theta}\right)d\theta = \frac{1}{3}\left(\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{\cos^3\theta}-\frac{1}{3\cos^3\theta}\right)\Bigg|_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{14\sqrt{2}}{9}$$

4. **B bölgesi köşeleri $(\pi,0)$, $(2\pi,\pi)$, $(\pi,2\pi)$, $(0,\pi)$ olan paralelkenar olduğuna göre**

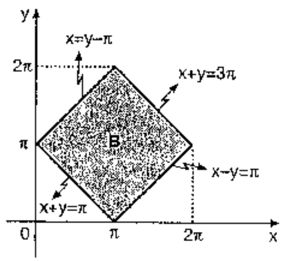
$$\iint\limits_B (x-y)^2\sin^2(x+y)\,dx\,dy$$

integralini

$$\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases}$$

dönüşümü yardımı ile hesaplayınız.

Çözüm:



$(0,\ \pi)$ ve $(\pi,\ 2\pi)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi $x-y=-\pi$,

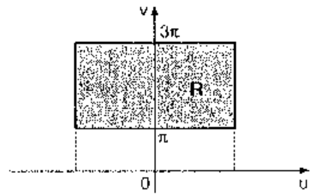
$(\pi,\ 2\pi)$ ve $(2\pi,\ \pi)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi $x+y=3\pi$,

$(2\pi,\ \pi)$ ve $(\pi,\ 0)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi $x-y=\pi$,

$(\pi,\ 0)$ ile $(0,\ \pi)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi $x+y=\pi$ dir.

Bu doğrular, verilen bölge dönüşümü yardımıyla

$u=-\pi$, $u=\pi$, $v=3\pi$ ve $v=\pi$ doğrularına dönüşür.



$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}} = \frac{1}{2}$$

$$\iint\limits_B (x-y)^2\sin^2(x+y)\,dx\,dy = \iint\limits_D u^2\sin^2 v\,u|J|\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_{\pi}^{3\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u^2\sin^2 v\,du\,dv$$

$$= \frac{\pi^3}{3}\int_{\pi}^{3\pi}\sin^2 v\,dv = \frac{\pi^3}{3}\int_{\pi}^{3\pi}\frac{1-\cos 2v}{2}\,dv = \frac{\pi^3}{6}\left(v-\frac{\sin 2v}{2}\right)\Bigg|_{\pi}^{3\pi} = \frac{\pi^4}{3}$$

5. **R bölgesi birinci bölgede $x+y=1$, $x+y=2$ doğrularıyla koordinat eksenleri arasında kalan yamuk olduğuna göre**

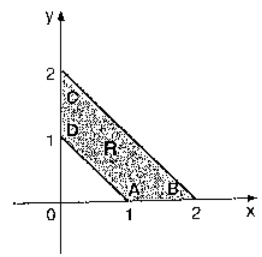
$$I = \iint\limits_B \frac{(x-y)^2}{1+x+y}\,dx\,dy$$

integralini

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$$

dönüşümleri yardımı ile hesaplayınız.

Çözüm:



AB için $y=0$ $\quad 1\le x\le 2$

$$\left.\begin{aligned} u=x+y &\Rightarrow u=x\\ v=x-y &\Rightarrow v=x\end{aligned}\right\} \Rightarrow u=v \quad 1\le u\le 2$$

BC için: $x+y=2$ $\quad 0\le x\le 2$ $\quad 0\le y\le 2$

$u=x+y \Rightarrow u=2$

$v=x-y \Rightarrow -2\le x-y\le 2 \Rightarrow -2\le v\le 2$

CD için $x = 0 \qquad 1 \le y \le 2$

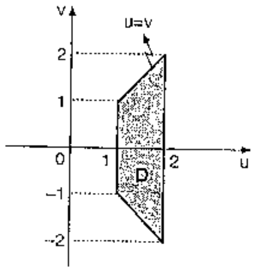
$$\left.\begin{aligned} u = x + y &\Rightarrow u = y \\ v = x - y &\Rightarrow v = -y \end{aligned}\right\} v = -u \qquad 1 \le u \le 2$$

DA için: $y + x = 1 \quad 0 \le x \le 1 \quad 0 \le y \le 1$

$u = x + y \quad \Rightarrow \qquad u = 1$

$v = x - y \quad \Rightarrow \qquad -1 \le x - y \le 1$

$-1 \le v \le 1$



$$J = \frac{1}{\dfrac{d(u,v)}{d(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow |j| = \frac{1}{2}$$

$$I = \int_1^2 \int_{-u}^{u} \frac{v^2}{1+u}\frac{1}{2}dv\,du = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{1+u}\frac{v^3}{3}\Bigg|_{-u}^{u} du = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{u^3}{1+u}du$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + u - \ln(1+u)\Big|_1^2\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{11}{6} - \ln\frac{3}{2}\right)$$

İKİ KATLI İNTEGRALLERİN UYGULAMALARI

A) ALAN HESABI

$$\boxed{\text{Alan}(B) = \iint_B dx\,dy}$$

Kutupsal koordinatlara geçildiğinde, Jakobiyen r olacağından

$$\boxed{\text{Alan}(B) = \iint_B r\,dr\,d\varphi}$$

olur.

B) HACİM HESABI

$$\boxed{V = \iint_B f(x,y)\,dx\,dy}$$

C) KÜTLE HESABI

$$\boxed{M = \iint_B \sigma(x,y)\,dx\,dy}$$

D) AĞIRLIK MERKEZİNİN BULUNMASI

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint_B x\,\sigma(x,y)\,dA \qquad \bar{y} = \frac{1}{M}\iint_B y\,\sigma(x,y)\,dA$$

Eğer levha homojen ise

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\iint_B x\,dx\,dy, \qquad \bar{y} = \frac{1}{A}\iint_B y\,dx\,dy$$

olur.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. $y = 2 - x^2$ parabolü ile $y = -x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

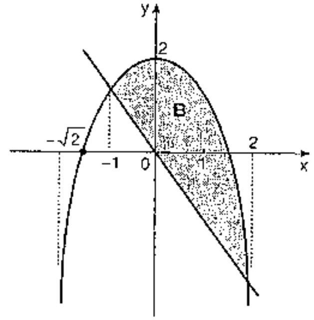
Çözüm:

$2 - x^2 = -x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad x = -1$

$$A = \iint\limits_B dy\,dx = \int_{-1}^{2}\int_{-x}^{2-x^2} dy\,dx = \int_{-1}^{2}\left(2 - x^2 + x\right)dx$$

$$= 2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\Big|_{1}^{2}$$

$$= 4 - \frac{8}{3} + 2 - \left(-2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}\ \text{br}^2$$



2. $y = \sqrt{x}$ eğrisi, $y = x - 2$ doğrusu ve x ekseni arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

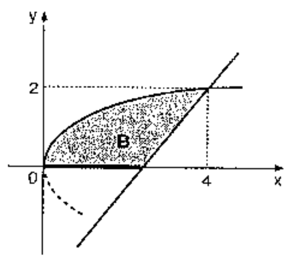
Çözüm:

$\sqrt{x} = x - 2 \Rightarrow x = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow$

$x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4, \quad x = 1$

$$A = \iint\limits_B dx\,dy = \int_{0}^{2}\int_{y^2}^{y+2} dx\,dy = \int_{0}^{2}\left(y + 2 - y^2\right)dy$$

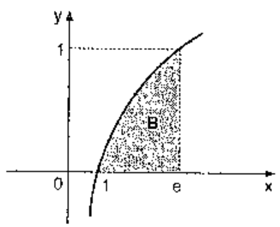
$$= \frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\Big|_{0}^{2} = \frac{10}{3}\ \text{br}^2$$



3. x– ekseni, $y = \ln x$ eğrisi ve $x = e$ doğusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

$$A = \iint\limits_B dx\,dy = \int_{0}^{1}\int_{e^y}^{e} dx\,dy = \int_{0}^{1}\left(e - e^y\right)dy$$

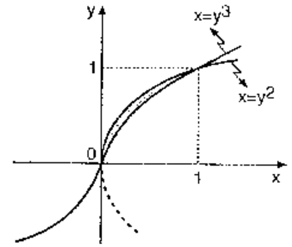
$$= ey - e^y\Big|_0^1 = 1\ \text{br}^2$$



4. $x = y^3$, $x = y^2$ eğrileri arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

$$A = \iint\limits_B dx\,dy = \int_{0}^{1}\int_{y^3}^{y^2} dx\,dy = \int_{0}^{1}\left(y^3 - y^2\right)dy$$

$$= \frac{-y^4}{4} + \frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}$$

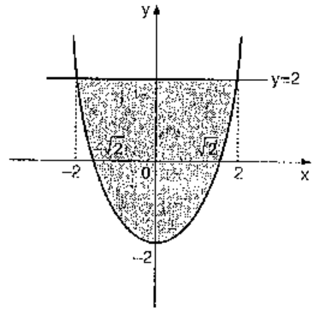


5. $y = x^2 - 2$ parabolü ile $y = 2$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

$$A = \iint\limits_B dy\,dx = \int_{-2}^{2}\int_{x^2-2}^{2} dy\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\left(4 - x^2\right)dx = 4x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2}$$

$$= \frac{32}{3}\ \text{br}^2$$

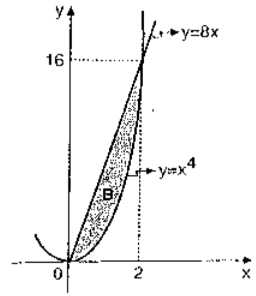


6. $y = x^4$ eğrisi ile $y = 8x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

$$A = \iint\limits_B dy\,dx = \int_{0}^{2}\int_{x^4}^{8x} dy\,dx$$

$$= \int_{0}^{2}\left(8x - x^4\right)dx = 4x^2 - \frac{x^5}{5}\Big|_0^2$$

$$= 16 - \frac{32}{5} = \frac{48}{5}\ \text{br}^2$$



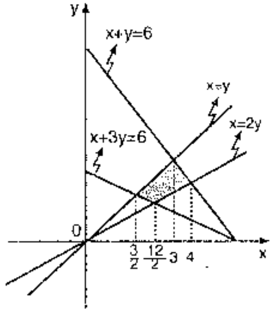
7. $y = x$, $x = 2y$, $x + y = 6$, $x + 2y = 6$ denklemli doğrular tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

$y = x$ ve $x + 3y = 6 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{3}{2}$

$x = 2y$ ve $x + 3y = 6 \Rightarrow x = \frac{12}{5}$, $y = \frac{6}{5}$

$y = x$ ve $x + y = 6 \Rightarrow x = 3$, $y = 3$

$x = 2y$ ve $x + 3y = 6 \Rightarrow x = 4$, $y = 2$



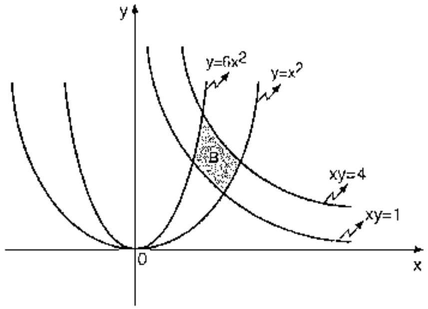
$$A = \iint\limits_{B} dy\,dx$$

$$= \int_{3/2}^{\frac{12}{5}} \int_{\frac{6-x}{5}}^{x} dy\,dx + \int_{12/5}^{3} \int_{x/2}^{x} dy\,dx + \int_{3}^{4} \int_{x/2}^{6-x} dy\,dx$$

$$= \frac{21}{10}\ \text{br}^2$$

8. $y = x^2$, $y = 6x^2$ parabolleri ile $xy = 1$, $xy = 4$ hiperbolleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

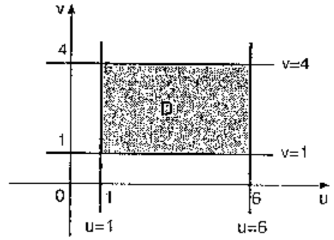
Çözüm:



$$\begin{cases} \dfrac{y}{x^2} = u \\ xy = v \end{cases}$$ Bölge dönüşümü yapılırsa

$$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} -\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \\ y & x \end{vmatrix}} = \frac{1}{\frac{-3y}{x^2}} = -\frac{1}{3u}$$ olur.

$y = x^2$ ve $y = 6x^2$ parabolleri, sırasıyla, $u = 1$ ve $u = 6$ doğrularına, $xy = 1$ ve $xy = 4$ hiperbolleri de $v = 1$ ve $v = 4$ doğrularına dönüşür.



$$A = \iint\limits_{B} dx\,dy = \iint\limits_{D} \frac{1}{3u}\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^4 \int_1^6 \frac{1}{u}\,du\,dv = \frac{1}{3}\int_1^4 \ln u \Big|_1^6 dv$$

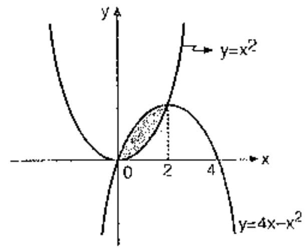
$$= \frac{4-1}{3}\ln 6 = \ln 6\ \text{br}^2$$

9. $y = x^2$ ve $y = 4x - x^2$ parabolleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:

$x^2 = 4x - x^2 \Rightarrow x^2 - 2x = 0$

$\Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = 2$

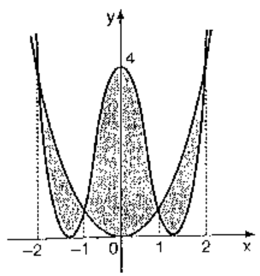


$$A = \int_0^2 \int_{x^2}^{4x-x^2} dy\,dx = \int_0^2 \left(4x - 2x^2\right)dx$$

$$= 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^2 = \frac{8}{3}\ \text{br}^2$$

10. $y = x^4 - 4x^2 + 4$ ve $y = x^2$ eğrileri arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



$$A = 2\int_0^1 \int_{x^2}^{x^4-4x^2+4} dy\,dx + 2\int_1^2 \int_{x^4-4x^2+4}^{x^2} dy\,dx$$

$$A = 2\left[\int_0^1 \left(x^4 - 4x^2 + 4 - x^2\right)dx + \int_1^2 \left(x^2 - x^4 + 4x^2 - 4\right)dx\right]$$

$$= 2\left[\left(\frac{x^5}{5} - \frac{5}{3}x^3 + 4x\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{5}{3}x^3 - \frac{x^5}{5} - 4x\right)\Big|_1^2\right]$$

$$= 2\left[\frac{38}{15} + \frac{22}{15}\right] = 8\ \text{br}^2$$

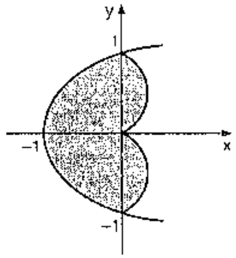
11. $x=y^2-1$ ve $x=|y|\sqrt{1-y^2}$ eğrileri arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:

$$A=2\int_0^1\left[y\sqrt{1-y^2}-(y^2-1)\right]dy$$

$$=2\left[-\frac{1}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{y^3}{3}+y\right]\Bigg|_0^1$$

$$=2.1=2\ \text{br}^2$$

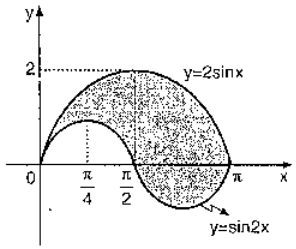


12. $y=2\sin x$ $y=\sin 2x$ eğrileri ile $x=0$ ve $x=\pi$ doğruları arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:

$$A=\int_0^{\pi}\int_{\sin 2x}^{2\sin x}dy\,dx=\int_0^{\pi}(2\sin x-\sin 2x)\,dx$$

$$=-2\cos x+\frac{\cos 2x}{2}\Bigg|_0^{\pi}=4\ \text{br}^2$$



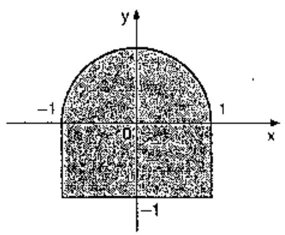
13. $y=2\sqrt{1-x^2}$ yarım elipsi ve $x=-1$, $x=1$, $y=-1$ doğruları arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:

$$A=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{2\sqrt{1-x^2}}dy\,dx=\int_{-1}^{1}\left(2\sqrt{1-x^2}+1\right)dx$$

$$=2+2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\cos\theta\,d\theta=2+2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$=2+2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2+\pi\ \ \text{br}^2$$



14. $r=a(1+\cos\theta)$ kardiyoidi tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

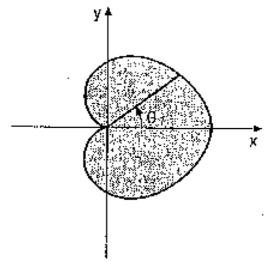
Çözüm:

$$A=\iint_B r\,dr\,d\theta=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a(1+\cos\theta)}r\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[a^2+2a^2\cos\theta+a^2\frac{(1+\cos 2\theta)}{2}\right]d\theta$$

$$=\frac{3}{2}\pi a^2\ \ \text{br}^2$$



15. $r=2(1+\cos\theta)$ kardiyoidi ile $r=2\cos\theta$ çemberi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:

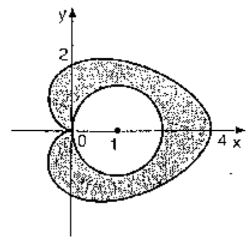
$$A=2\int_0^{\pi/2}\int_{r=2\cos\theta}^{2(1+\cos\theta)}r\,dr\,d\theta+2\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{2(1+\cos\varphi)}r\,dr\,d\varphi$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left[4(1+\cos\varphi)^2-4\cos^2\varphi\right]d\varphi+\int_{\pi/2}^{\pi}4(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi$$

$$=4\int_0^{\pi/2}(1+2\cos\varphi)\,d\varphi+4\int_{\pi/2}^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi$$

$$=4(\varphi+2\sin\varphi)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+4\left(\frac{3}{2}\varphi+2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=4\left(\frac{\pi}{2}+2\right)+4\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{3}{4}\pi-2\right)=5\pi$$



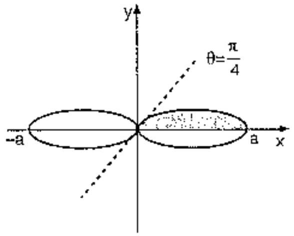
16. $r^2 = a^2\cos 2\theta$ leminskatı tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:

$$A = 4\iint_B r\,dr\,d\theta = 4\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{r=0}^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r\,dr\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\theta\,d\theta$$

$$=2.a^2\,\frac{\sin 2\theta}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2\,br^2$$

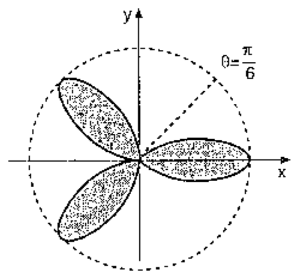


17. $r = 12\cos 3\theta$ gülünün bir yaprağının alanını bulunuz.

Çözüm:

$$A = 2\int_{\theta=0}^{\pi/6}\int_{r=0}^{12\cos3\theta} r\,dr\,d\theta = a\int_0^{\pi/6} r^2\Bigg|_0^{12\cos 3\theta} d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/6} 12^2\left(\frac{\cos 6\theta+1}{2}\right)d\theta = 72\left(\frac{\sin 6\theta}{6}+\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = 12\pi$$



18. $r = 1 + \cos 3\theta$ kardiodinin içinde $r = 1$ çemberinin dışında bulunan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:

$$A = 3.2\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{6}}\int_{r=1}^{1+\cos3\theta} r\,dr\,d\theta = 3\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos 3\theta+\cos^2 3\theta\,d\theta$$

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos 3\theta+\frac{\cos 6\theta+1}{2}\,d\theta = 3\left(\frac{2\sin3\theta}{3}+\frac{\sin 6\theta}{12}+\frac{\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = 2+\frac{\pi}{4}\,br^2$$

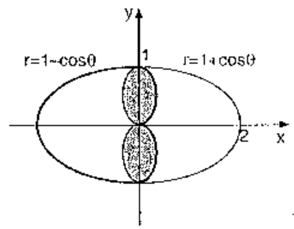
19. $r = 1+\cos\theta$ ve $r = 1-\cos\theta$ kardiyoidlerinin her ikisininde içinde kalan ortak bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:

$$A = 4\int_0^{\pi/2}\int_{r=0}^{1-\cos\theta} r\,dr\,d\theta = 2\int_0^{\pi/2}\left(1-2\cos\theta+\cos^2\theta\right)d\theta$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\left(1-2\cos\theta+\frac{\cos 2\theta+1}{2}\right)d\theta$$

$$=2\left(\theta-2\sin\theta+\frac{\sin 2\theta}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2}-4\,br^2$$



20. $y^2 = 10x + 25$ ve $y^2 = -6x + 9$ parabolleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{y^2-25}{10}=\frac{9-y^2}{6}$$

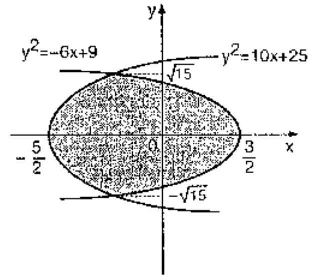
$$16y^2 = 240$$

$$y^2 = 15$$

$$y = \mp\sqrt{15}$$

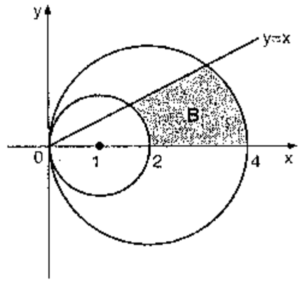
$$A = \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}}\int_{\frac{y^2-25}{10}}^{\frac{9-y^2}{6}} dx\,dy = \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}}\left(\frac{9-y^2}{6}-\frac{y^2-25}{10}\right)dy$$

$$=\int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}}\left(4-\frac{4y^2}{15}\right)dy = \left(4y-\frac{4y^3}{45}\right)\Bigg|_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} = \frac{16}{3}\sqrt{15}$$



21. $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$ çemberleri ile $y = 0$, $y = x$ doğruları arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



$x^2+y^2=2x \Rightarrow r=2\cos\theta$

$x^2+y^2=4x \Rightarrow r=4\cos\theta$

$y=x \;\Rightarrow\; \theta=\frac{\pi}{4}$

$$A=\iint_B r\,dr\,d\theta=\int_{\theta=0}^{\pi/4}\int_{r=2\cos\theta}^{4\cos\theta} r\,dr\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}12\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=3.\frac{\sin 2\theta}{2}+\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{3\pi}{4}+\frac{3}{2}\quad br^2$$

22. $(x-2y+3)^2+(3x+4y-1)^2=100$ **elipsi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.**

Çözüm:

$u=x-2y+3 \qquad v=3x+4y-1$ denirse $u^2+v^2=10^2$

olur. Dönüşüm sonucunda elips çembere dönüşür.

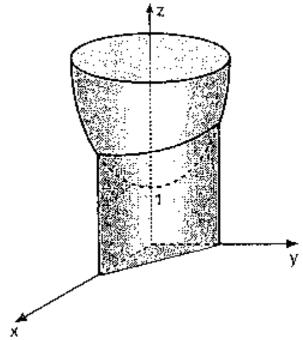
$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{vmatrix}}=\frac{1}{10}$$

$$A=\iint_{u^2+v^2=10}|J|\,du\,dv=\iint_{u^2+v^2=10^2}\frac{1}{10}\,du\,dv=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{10}\frac{r}{10}\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{10}{2}.2\pi=10\pi$$

23. $Z=2x^2+y^2+1$ **paraboloidi,** $x+y=1$ **düzlemi ve koordinat düzlemleri tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.**

Çözüm:



$$V=\int_0^1\int_0^{1-x}\left(2x^2+y^2+1\right)dy\,dx$$

$$=\int_0^1 2x^2y+\frac{y^3}{3}+y\Big|_0^{1-x}dx$$

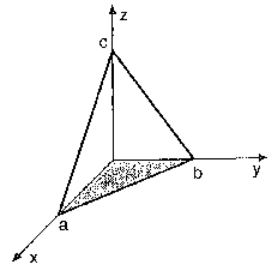
$$=\int_0^1\left[2x^2-2x^3+\frac{(1-x)^3}{3}+1-x\right]dx$$

$$=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^4-\frac{(1-x)^4}{12}+x-\frac{x^2}{2}\Big|_0^1$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$$

24. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ **düzlemi ile koordinat düzlemleri tarafından sınırlanan dört yüzlünün hacmini bulunuz.**

Çözüm:



$$V=\int_0^a\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}c\left(1-\frac{1}{a}x-\frac{1}{b}y\right)dy\,dx$$

$$=\int_0^a cy-\frac{c}{a}xy-\frac{c}{b}\frac{y^2}{2}\Big|_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}$$

$$=\int_0^a bc-\frac{bc}{a}x-\frac{bc}{a}x+\frac{cb}{a^2}x^2-\frac{cb}{2}\left(1-\frac{x}{a}\right)^2dx$$

$$=bcx-\frac{bc}{a}x^2+\frac{cb}{3a^2}x^3+\frac{abc}{2.3}\left(1-\frac{x}{a}\right)^2\Big|_0^a$$

$$=abc-abc+\frac{abc}{3}-\frac{abc}{6}=\frac{abc}{6}$$

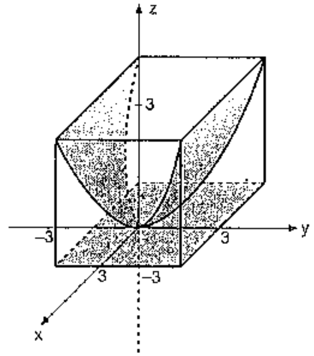
25. $z = x^2 + y^2$ paraboloidi ile $z = 0$, $x = -3$, $x = 3$, $y = -3$, $y = 3$ düzlemleri tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.

Çözüm:

$$V = \int_{-3}^{3}\int_{-3}^{3}\left(x^2+y^2\right)dy\,dx = \int_{-3}^{3} x^2y + \frac{y^3}{3}\Bigg|_{-3}^{3} dx$$

$$= \int_{-3}^{3}\left(3x^2+9+3x^2+9\right)dx = 2x^3+18x\Bigg|_{-3}^{3}$$

$$= 2(54+54) = 216\ \text{br}^3$$



26. x O y düzlemi, $4z = x^2 + y^2$ paraboloidi ve $x^2 + y^2 = 4x$ silindiri tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.

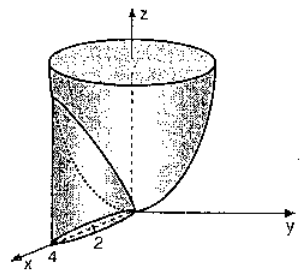
Çözüm:

$$V = \iint_{x^2+y^2=4x} \frac{x^2+y^2}{4}dy\,dx = 2\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{4\cos\theta} \frac{r^2}{4} r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{4\cos\theta} \frac{r^3}{4}dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 32(\cos\theta)^4 d\theta$$

$$= 32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\theta - \cos^2\theta.\sin^2\theta\right)d\theta$$

$$= 32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1+\cos 2\theta}{2} - \frac{(1-\cos 4\theta)}{8}\right]d\theta = 6\pi$$



27. $x + y + z = 3$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ yüzeyleri tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.

Çözüm:

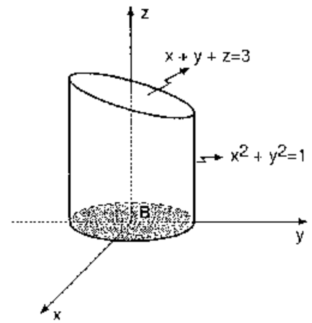
$$V = \iint_B (3-x-y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\left(3r - r^2\cos\theta - r^2\sin\theta\right)dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{3}{2}r^2 - \frac{r^3}{3}\cos\theta - \frac{r^3}{3}\sin\theta\Bigg|_0^1 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2} - \frac{\cos\theta}{3} - \frac{\sin\theta}{3}\right)d\theta = \frac{3}{2}\theta - \frac{\sin\theta}{3} + \frac{\cos\theta}{3}\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= 3\pi + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 3\pi$$



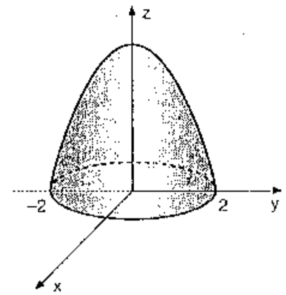
28. $2z = 4 - x^2 - y^2$ paraboloidi ile $z = 0$ düzlemi tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.

Çözüm:

$$V = \iint_{x^2+y^2=4} \frac{4-x^2-y^2}{2}dz\,dy\,dx = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\frac{4-r^2}{2}r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2\left(2r - \frac{r^3}{2}\right)dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} r^2 - \frac{r^4}{8}\Bigg|_0^2 d\theta = 2\pi(2) = 4\pi$$

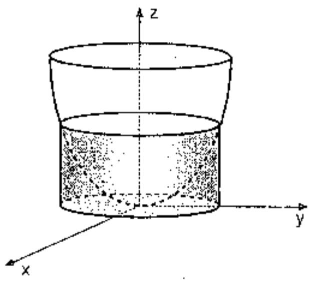


29. Üstten $z = x^2 + y^2$ paraboloidi, alttan x O y düzlemi, yandan $x^2 + y^2 = 4$ silindiri tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.

Çözüm:

$$V=\iint_{x^2+y^2\le 4} x^2+y^2\,dy\,dx$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2} r^3 dr\,d\theta = 2\pi.4 = 8\pi$$



30. x o y düzlemi $z=e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ yüzeyi ve $x^2+y^2=1$ silindiri tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.

Çözüm:

$$V=\iint_B e^{-\left(x^2+y^2\right)}dy\,dx=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} e^{-r^2}r\,dr\,d\theta=-\frac{1}{2}\cdot 2\pi.e^{-r^2}\Big|_0^1$$

$$=-\pi\left(e^{-1}-1\right)=\pi\left(1-e^{-1}\right)br^3$$

31. a, b > 0 dır. xOy düzlemi, $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ paraboloidi ve $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2x}{a}$ silindiri arasında kalan bölgenin hacmini bulunuz.

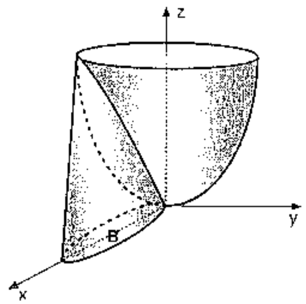
Çözüm

$$V=\iint_B\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dydx \text{ olur.}$$

$x=ar\cos\varphi,\ y=br\sin\varphi$ dönüşümü yapılırsa,

$$V=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{2\cos\varphi} r^2.abrdrd\varphi=\frac{ab}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2\cos\varphi)^4 d\varphi$$

$$=8ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi=8ab\cdot\frac{3\pi}{16}=\frac{3}{2}\pi ab \text{ olur.}$$

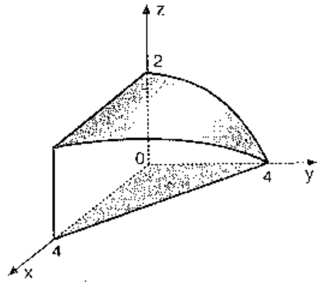


32. Birinci bölgede $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y=4$ düzlemleriyle $y^2+4z^2=16$ silindiri tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.

Çözüm

$$V=\int_0^4\int_0^{4-y}\frac{1}{2}\sqrt{16-y^2}\,dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^4(4-y)\sqrt{16-y^2}\,dy=\frac{24\pi-32}{3}$$



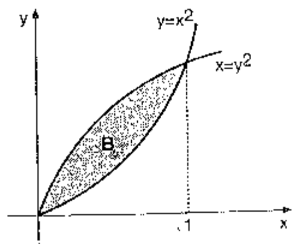
33. $y=x^2$ ve $x=y^2$ parabolleri tarafından sınırlanan bölgeye yerleştirilen bir levhanın yoğunluğu her noktada o noktanın Ox– eksenine olan uzaklığın karesi ile orantılı olarak değişmektedir. Bu levhanın kütlesini bulunuz.

Çözüm:

$$\sigma(x,y)=ky^2$$

$$M=\iint_B\sigma(x,y)dydx=\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}}ky^2\,dy\,dx$$

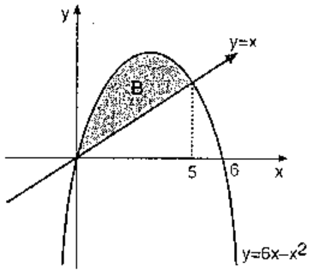
$$=\int_0^1\frac{k}{3}\left(x^{3/2}-x^6\right)dx=\frac{3}{35}k$$



34. $y=6x-x^2$ parabolü ile $y=x$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgeye yerleştirilen homojen levhanın ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm:

$\sigma(x,y)=k, \qquad \bar{x}=\dfrac{M_x}{M}, \qquad \bar{y}=\dfrac{M_y}{M}$



$$M_x=\iint_B x\sigma(x,y)dydx=\int_0^5\int_x^{6x-x^2} xkdydx$$

$$=k\int_0^5\left(5x^2-x^3\right)dx=\frac{625k}{12}$$

$$M=\iint_B \sigma(x,y)dydx=\int_0^5\int_x^{6x-x^2} k\,dy\,dx=\frac{125k}{6}\Rightarrow$$

$$\bar{x}=\frac{M_x}{M}=\frac{\frac{625}{12}}{\frac{125}{6}}=\frac{5}{2}.$$

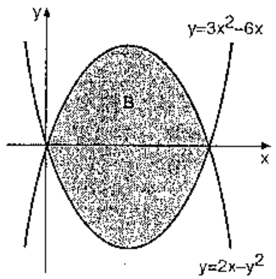
Benzer şekilde $\bar{y}=5$ bulunur. Ağırlık merkezi $\left(\frac{5}{2},\,5\right)$ noktasıdır.

35. $y=2x-x^2$ ve $y=3x^2-6x$ parabolleri tarafından sınırlanan homogen levhanın ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm:

$G(\bar{x},\bar{y}), \qquad \sigma(x,y)=k$

$\bar{x}=\dfrac{M_x}{M} \qquad \bar{y}=\dfrac{M_y}{M}$



$$M_x=\iint_B x\sigma(x,y)\,dy\,dx=\int_0^2\int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} k\,x\,dy\,dx$$

$$=k\int_0^2\left(2x^2-x^3-3x^3+6x^2\right)dx=k\int_0^2\left(8x^2-4x^3\right)dx$$

$$=k\left(\frac{8}{3}x^3-x^4\right)\Big|_0^2=k\left(\frac{64}{3}-\frac{48}{3}\right)=\frac{16}{3}k$$

$$M=\iint_B \sigma(x,y)dy\,dx=k\int_0^2\int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} dy\,dx=k\int_0^2\left(8x-4x^2\right)dx$$

$$=k\left(4x^2-\frac{4}{3}x^3\right)\Big|_0^2=k\left(\frac{48}{3}-\frac{32}{3}\right)=\frac{16}{3}k$$

$$\bar{x}=\frac{M_x}{M}=\frac{\frac{16}{3}k}{\frac{16}{3}k}=1$$

$$M_y=\int_0^2\int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} ky\,dy\,dx=k\int_0^2\left[\frac{\left(2x-x^2\right)^2}{2}-\frac{\left(3x^2-6x\right)^2}{2}\right]dx$$

$$=\frac{k}{2}\int_0^2\left(4x^2-4x^3+x^4-9x^4+36x^3-36x^2\right)dx$$

$$=k\int_0^2\left(-16x^2+16x^3-4x^4\right)dx$$

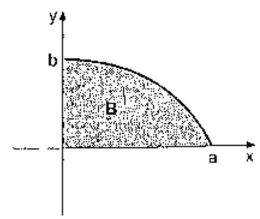
$$=k\left(-\frac{16}{3}x^3+4x^4-\frac{4}{5}x^5\Big|_0^2\right)=-\frac{64}{15}k$$

$$\bar{y}=\frac{M_y}{M}=-\frac{\frac{64}{15}}{\frac{16}{3}}=-\frac{4}{5}$$

36. Birinci bölgede $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ elipsi ile koordinat eksenleri arasında kalan bölgeye yerleştirilen homojen levhanın ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm:

$G(\bar{x},\bar{y}) \qquad \sigma(x,y)=k$ olsun.



$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}&=r\cos\theta\\ \frac{y}{b}&=r\sin\theta\end{aligned}\right\}\ \text{dönüşümü için}$$

$J=a.b.r$ olur.

$$M_x=\iint_B x\sigma(x,y)\,dy\,dx=\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{1} a.r\cos\theta.k.a.br\,dr\,d\theta=k\frac{a^2b}{3}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta=k\frac{a^2b}{3}$$

$$M=\iint_B \sigma(x,y)\,dy\,dx=\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{1} k.a.br\,dr\,d\theta=k\frac{a.b}{2}\frac{\pi}{2}=k\frac{ab\pi}{4}$$

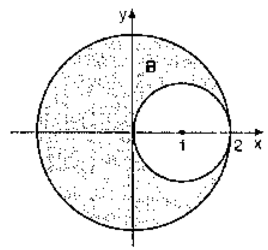
$$\bar{x}=\frac{M_x}{M}=\frac{4a}{3\pi}$$

$$M_y=\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{1} br\sin\theta.k.a.b.r\,dr\,d\theta=k\frac{ab^2}{3}$$

$$\bar{y}=\frac{M_y}{M}=\frac{4b}{3\pi}$$

37. $x^2+y^2=4$ ve $(x-1)^2+y^2=1$ **çemberleri tarafından sınırlanan bölgeye yerleştirilen homojen levhanın ağırlık merkezini bulunuz.**

Çözüm:



Bölge x eksenine göre simetrik ve cisim homogen olduğundan $\bar{y}=0$ dır.

$$(x-1)^2+y^2=1\Rightarrow r=2\cos\theta$$

$$x^2+y^2=4\Rightarrow r=2$$

$$M_x=\iint_B x\,\sigma(x,y)\,dy\,dx$$

$$=2\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=2\cos\theta}^{2} r\cos\theta\,k\,r\,dr\,d\theta+2\int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{r=0}^{2} r\cos\theta k.r\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{2}{3}k\int_0^{\pi/2}\cos\theta\left(8-8\cos^3\theta\right)d\theta+\frac{2}{3}k\int_{\pi/2}^{\pi}8\cos\theta\,d\theta$$

$$=\frac{16}{3}k\left(\int_0^{\pi/2}\left(\cos\theta-\cos^2\theta+\cos^2\theta\sin^2\theta\right)d\theta+\int_{\pi/2}^{\pi}\cos\theta\,d\theta\right)$$

$$=\frac{16}{3}k\left(\sin\theta-\left(\frac{\sin2\theta}{4}+\frac{\theta}{2}\right)+\left(\frac{\theta}{8}-\frac{\sin4\theta}{32}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\sin\theta\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)$$

$$=\frac{16}{3}k\left(1-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{16}-1\right)=\frac{16}{3}k\left(-\frac{3}{16}\pi\right)=-k\pi$$

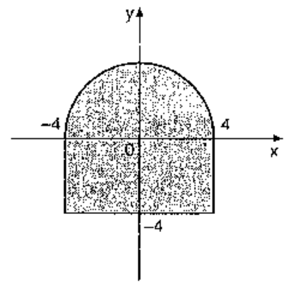
$$M=\iint_B \sigma(x,y)\,dy\,dx=2\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=2\cos\theta}^{2} k\,r\,dr\,d\theta+2\int_{\pi/2}^{\pi}\int_{r=0}^{2} kr\,dr\,d\theta$$

$$=k\int_0^{\pi/2}\left(4-4\cos^2\theta\right)d\theta+\int_{\pi/2}^{\pi}k4\,d\theta=4k\left(\theta-\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\sin2\theta}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\pi k\right)=4k\left(\frac{3\pi}{4}\right)=3\pi k$$

$$\bar{x}=\frac{M_x}{M}=-\frac{k\pi}{3\pi k}=-\frac{1}{3}$$

38. $y=\sqrt{16-x^2}$ **yarı çemberi ile** $x=-4$, $x=4$, $y=-4$ **doğruları tarafından sınırlanan bölgeye yerleştirilen ve (x, y) noktasındaki yoğunluğu** $\sigma(x,y)=4+y$ **olan bir levhanın ağırlık merkezini bulunuz.**

Çözüm:



$$M_x=\iint_B x.\sigma(x,y)\,dy\,dx=\int_{-4}^{4}\int_{-4}^{\sqrt{16-x^2}} x.(4+y)\,dy\,dx$$

$$=\int_{-4}^{4}4xy+\frac{xy^2}{2}\Bigg|_{-4}^{\sqrt{16-x^2}}dx$$

$$=\int_{-4}^{4}\left[4x\sqrt{16-x^2}+\frac{x}{2}\left(16-x^2\right)+16x-8x\right]dx$$

$$=-2\frac{2}{3}\left(16-x^2\right)^{3/2}-\frac{x^4}{8}+8x^2\Bigg|_{-4}^{4}$$

$$=-\frac{4^4}{8}+32+\frac{4^4}{8}-32=0\Rightarrow\bar{x}=0\text{ olur.}$$

$$M=\int_{-4}^{4}\int_{-4}^{\sqrt{16-x^2}}(4+y)\,dy\,dx=\int_{-4}^{4}4y+\frac{y^2}{2}\Bigg|_{-4}^{\sqrt{16-x^2}}dx=\int_{-4}^{4}\left(4\sqrt{16-x^2}+\frac{16-x^2}{2}+16-8\right)dx$$

$$=\frac{32}{3}(10+3\pi)$$

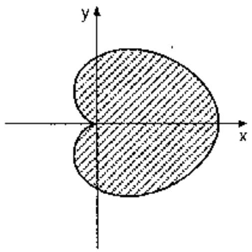
$$M_y = \int_{-4}^{4}\int_{-4}^{\sqrt{16-x^2}} 4y + y^2\,dy\,dx = \int_{-4}^{4} 2y^2+\frac{y^3}{3}\Bigg|_{-4}^{\sqrt{16-x^2}} dx$$

$$= \int_{-4}^{4}\left[2(16-x^2)+\frac{1}{3}(16-x^2)^{\frac{3}{2}} - 32 + \frac{64}{3}\right]dx = \frac{32}{3}(8+3\pi) \Rightarrow$$

$$\bar{y} = \frac{M_y}{M} = \frac{8+3\pi}{10+3\pi}$$

39. **$r = a(1 + \cos\theta)$ kardiyoidi tarafından sınırlanan bölge yerleştirilen homojen levhanın ağırlık merkezini bulunuz.**

Çözüm:



$$M_x = \int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{a(1+\cos\theta)} r\cos\theta\, kr\,dr\,d\theta = \frac{k}{3}\int_0^{2\pi} a^3(1+\cos\theta)^3.\cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{ka^3}{3}\int_0^{2\pi}\left(\cos\theta + 3\cos^2\theta + 3\cos^3\theta + \cos^4\theta\right)d\theta = \frac{29}{24}k\pi a^3$$

$$M = \int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{a(1+\cos\theta)} k\,r\,dr\,d\theta = k\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left[1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right]d\theta$$

$$= k\frac{a^2}{2}\left(\frac{3\theta}{2}+2\sin\theta+\frac{\sin 2\theta}{4}\Bigg|_0^{2\pi}\right) = \frac{3}{2}k\pi a^2$$

$\bar{x} = \dfrac{M_x}{M} = \dfrac{29}{36}a$ olur. Simetriden

$\bar{y} = 0$

olur. Ağırlık merkezi $\left(\dfrac{5a}{6}, 0\right)$ dır.

BÖLÜM PROBLEMLERİ VE ÇÖZÜMLERİ

1. **Hangi B bölgesi üzerinde $\iint_B (4-x^2-2y^2)\,dx\,dy$ integrali maximum değeri alır.**

Bu değeri bulunuz.

Çözüm:

İntegralin maksimum değer alması için $4-x^2-2y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+2y^2 \leq 4$ olmalıdır.

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{2} &= r\cos\theta\\ \frac{y}{\sqrt{2}} &= r\sin\theta\end{aligned}\right\} \Rightarrow J = 2\sqrt{2}r \text{ olur.}$$

$$\iint_{x^2+2y^2\leq 4}(4-x^2-2y^2)\,dy\,dx = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}(4-4r^2)2\sqrt{2}r\,dr\,d\theta$$

$$= 8\sqrt{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 d\theta = 8\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)2\pi = 4\sqrt{2}\pi$$

2. **$\int_0^2(\arctan\pi x - \arctan x)\,dx$ integralini hesaplayınız.**

(Önce integrantı bir integral formunda yazınız.)

Çözüm:

$$I = \int_0^2(\arctan\pi x - \arctan x)\,dx = \int_0^2\int_1^\pi \frac{x}{1+(xt)^2}\,dt\,dx = \int_1^\pi \frac{1}{2t^2}\int_0^2 \frac{2t^2x}{1+x^2t^2}\,dx\,dt$$

$$= \int_1^\pi \frac{1}{2t^2}\ln(1+x^2t^2)\Bigg|_0^2 dt = \int_1^\pi \frac{\ln(1+4t^2)}{2t^2}\,dt = -\frac{1}{2t}\ln(1+4t^2)\Bigg|_1^\pi - \int_1^\pi\left(\frac{-1}{2t}\right)\frac{8t}{1+4t^2}\,dt$$

$$= \frac{\ln 5}{2} - \frac{\ln(1+4\pi^2)}{2\pi} + 4\int_1^\pi \frac{dt}{1+4t^2} = \frac{\ln 5}{2} - \frac{\ln(1+4\pi^2)}{2\pi} + 2\arctan t\Big|_1^\pi$$

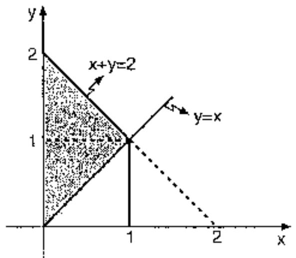
$$= \frac{\ln 5}{2} - \frac{\ln(1+4\pi^2)}{2\pi} - \frac{\pi}{2}$$

3. Tabanı xy düzleminde B olan bir dik silindir (dairesel olmayan) üsten $z = x^2 + y^2$ paraboloidi ile kapatılıyor. Bu silindirin hacmi

$$V = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2)dx\,dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2)dx\,dy$$

olduğuna göre B bölgesini xy düzleminde gösteriniz. İntegrasyon sırasını değiştirerek yazınız. Hacmini hesaplayınız.

Çözüm:



$$V = \int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 + y^2)dy\,dx = \int_0^1 x^2 y + \frac{y^3}{3}\Bigg|_x^{2-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left[x^2(2-x) + \frac{(2-x)^3}{3} - x^3 - \frac{x^3}{3}\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[2x^2 - \frac{7x^3}{3} + \frac{(2-x)^3}{3}\right]dx$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{12}x^4 - \frac{(2-x)^4}{12}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}$$

4. Aşağıdaki genelleştirilmiş integralleri hesaplayınız.

a) $I = \int_1^\infty \int_{e^{-x}}^1 \frac{1}{x^3 y}dy\,dx$

b) $\int_{-1}^1 \int_{-1/\sqrt{1-x^2}}^{1/\sqrt{1-x^2}} (2y+1)dydx$

c) $\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{dxdy}{(x^2+1)(y^2+1)}$

d) $\int_0^\infty \int_0^\infty xe^{-(x+2y)}dydx$

Çözüm:

a) $$I = \int_1^\infty \frac{\ln y}{x^3}\Bigg|_{e^{-x}}^1 dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-2}dx = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{x}\Bigg|_1^t = \lim_{t\to\infty} 1 - \frac{1}{t} = 1$$

b) $$I = \int_{-1}^1 \int_{-1/\sqrt{1-x^2}}^{1/\sqrt{1-x^2}} (2y+1)dy\,dx = \int_{-1}^1 y^2 + y\Bigg|_{-1/\sqrt{1-x^2}}^{1/\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^0 \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_{-1+\varepsilon_1}^0 \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_0^{1-\varepsilon_2} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_{-1+\varepsilon_1}^0 \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_0^{1-\varepsilon_2} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} 2\arcsin 0 - 2\arcsin(-1+\varepsilon_1) + \lim_{\varepsilon\to 0} 2\arcsin(1-\varepsilon_2) - 2\arcsin 0$$

$$= -2\frac{3\pi}{2} + 2\frac{\pi}{2} = -2\pi$$

c) $$I = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{dx\,dy}{(x^2+1)(y^2+1)}$$

$$I = \lim_{t\to-\infty}\int_{-\infty}^\infty \int_t^0 \frac{dx\,dy}{(x^2+1)(y^2+1)} + \lim_{s\to\infty}\int_{-\infty}^\infty \int_0^s \frac{dx\,dy}{(x^2+1)(y^2+1)}$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \left(\lim_{t\to\infty} \arctan 0 - \arctan t\right)\frac{1}{y^2+1}dy + \int_{-\infty}^\infty \lim_{s\to\infty}(\arctan s - \arctan 0)\frac{1}{y^2+1}dy$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{y^2+1}dy + \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{y^2+1}dy$$

$$= \pi\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{y^2+1}dy = \pi\left(\lim_{m\to-\infty}\int_m^0 \frac{1}{y^2+1}dy + \lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{1}{y^2+1}du\right) = \pi.\pi = \pi^2$$

d) $\int_0^\infty \int_0^\infty xe^{-(x+2y)}\,dx\,dy$

$$I=\int_0^\infty \lim_{t\to\infty}\int_0^t xe^{-(x+2y)}\,dy\,dx=\int_0^\infty \lim_{t\to\infty}-\frac{x}{2}e^{-(x+2y)}\Big|_t^0\,dx$$

$$=\int_0^\infty \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{x}{2}e^{-x}-\frac{x}{2}e^{-(x+2t)}\right]dx=\int_0^\infty \frac{x}{2}e^{-x}dx$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2}\left\{-xe^{-x}\Big|_0^m-\int_0^m e^{-x}\,dx\right\}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2}\left\{-\frac{t}{e^m}-\frac{1}{e^m}+1\right\}=\frac{1}{2}$$

5. *f*, B üzerinde integrallenebilir olsun.

$\dfrac{1}{\text{AlanB}}\iint_B f(x,y)\,dx\,dy$ ifadesine f fonksiyonunun B üzerindeki avarajı (ortalama değeri) denir. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı bölgeler üzerinde ortalama değerini bulunuz.

a) $f(x,y)=\sin(x+y)$, $\quad B=\{(x,y):\ 0\le x\le\pi,\ 0\le y\le\pi\}$

b) $f(x,y)=x^2+y^2$, $\quad B=\{(x,y):\ x^2+y^2\le 1\}$

c) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^3y}$, $\quad B=\{(x,y):\ e^{-2x}\le y\le e^{-x},\ x\ge 1\}$

Çözüm:

a) $f(x,y)=\sin(x+y)$, $\quad B=\{(x,y):\ 0\le x\le\pi,\ 0\le y\le\pi\}$

$$\text{AlanB}=\int_0^\pi\int_0^\pi dy\,dx=\pi^2$$

$$\iint_B f(x,y)dxdy=\int_0^\pi\int_0^\pi \sin(x+y)dy\,dx=\int_0^\pi -\cos(x+y)\Big|_0^\pi dx$$

$$=\int_0^\pi[-\cos(x+\pi)+\cos x]dx=-\sin(x+\pi)+\sin x\Big|_0^\pi=0$$

$\Rightarrow$ avaraj $=0$

b) $f(x,y)=x^2+y^2\quad B=\{(x,y):\ x^2+y^2\le 1\}$

$$\text{AlanB}=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} r\,dr\,d\theta=\pi,$$

$$\iint_B (x^2+y^2)dxdy\int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{1} r^2.r\,dr\,d\theta=\frac{\pi}{2}\ \text{ olduğundan Avaraj}=\frac{\frac{\pi}{2}}{\pi}=\frac{1}{2}\ \text{ olur.}$$

c) $$\int_1^\infty\int_{e^{-2x}}^{e^{-x}} x^{-3}y\,dy\,dx=\frac{1}{2}\int_1^\infty\left(e^{-2x}-e^{-4x}\right)dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{1}{4}e^{-4x}\right)\Big|_1^\infty$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-2}}{2}-\frac{1}{4}e^{-4}\right),$$

$$\text{AlanB}=\int_1^\infty\int_{e^{-2x}}^{e^{-x}} dy\,dx=\int_1^\infty\left(e^{-x}-e^{-2x}\right)dx=e^{-1}-\frac{1}{2}e^{-2}$$

olduğundan $\ \text{avaraj}=\dfrac{\frac{1}{4}e^{-2}\left(1-\frac{1}{2}e^{-2}\right)}{e^{-1}\left(1-\frac{1}{2}e^{-1}\right)}=\dfrac{1}{4e}\cdot\dfrac{1-\frac{1}{2}e^{-2}}{1-\frac{1}{2}e^{-1}}$ dır.

6. $I=\int_a^b f(x)\,dx$ integrali için

$$I^2=\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b f(y)dy\right)=\int_a^b\int_a^b f(x)f(y)\,dx\,dy$$

eşitliğinden yararlanarak $I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)\int_0^\infty e^{-y^2}dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2+y^2}dx\,dy = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-r^2}\Big|_0^\infty dr$$

$$= -\frac{1}{2}(-1)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

7. $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ **integralini hesaplayınız.**

Çözüm:

$x = u^2 \Rightarrow dx = 2u\,du$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx = \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{u}.2udu = 2\int_0^\infty e^{-u^2}du = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

bulunur.

Bölüm 9 ÜÇ KATLI İNTEGRALLER

ÜÇ KATLI İNTEGRALLER

TANIM :

G, xyz koordinat sisteminde bir bölge ve f de bu bölge üzerinde sınırlı bir fonksiyon olsun. $P = \{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$, G bölgesinin bir parçalanması; (x_k, y_k, z_k), G_k nın herhangi bir noktası ΔV_k da G_k bölgesinin hacmi olsun. Eğer

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$$

limiti varsa bu limite, f nin G üzerindeki **üç katlı integrali** denir ve

$$\iiint_G f(x,y,z)dv$$

ile gösterilir. Bu durumda f **integrallenebilirdir** denir.

Eğer G bölgesinin parçalanması koordinat düzlemlerine paralel düzlemlerle yapılırsa, $\Delta V_k = \Delta x_k . \Delta y_k . \Delta z_k$ olacağından, yukarıdaki integral

$$\iiint_G f(x,y,z)dx\,dy\,dz$$

biçiminde de yazılabilir.

TEOREM:

f ve g verilen bölgeler üzerinde integrallenebilen fonksiyonlar ve k bir sabit ise aşağıdaki önermeler doğrudur:

1) $\displaystyle\iiint_G k\, f(x,y,z)dv = k\iiint_G f(x,y,z)dv$

2) $\displaystyle\iiint_G [f(x,y,z)+g(x,y,z)]dv = \iiint_G f(x,y,z)dv + \iiint_G g(x,y,z)dv$ dir.

3) G üzerinde $f(x, y, z) \geq 0$ ise $\displaystyle\iiint_G f(x,y,z)dv \geq 0$ dır.

4) G üzerinde $f(x, y, z) \geq g(x, y, z)$ ise

$$\iiint_G f(x,y,z)dv \geq \iiint_G g(x,y,z)dv \quad \text{dir.}$$

5) $G = G_1 \cup G_2$ ve $\overset{o}{G}_1 \cap \overset{o}{G}_2 = \varnothing$ ise

$$\iiint_{G_1 \cup G_2} f(x,y,z)dv = \iiint_{G_1} f(x,y,z)dv + \iiint_{G_2} f(x,y,z)dv \quad \text{dir.}$$

TEOREM:

G bölgesi alttan $z = g(x, y)$, üstten $z = h(x, y)$ yüzeyi ve yandan da bir dik silindirle sınırlandırılmış olsun. G bölgesinin x0y düzlemindeki dik izdüşümü B ise

$$\iiint_G f(x,y,z)dx\,dy\,dy = \iint_B \left[\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)dz\right]dx\,dy$$

olur.

ÜÇ KATLI İNTEGRALLERDE BÖLGE DÖNÜŞÜMLERİ

xyz koordinat sistemindeki bir G bölgesi,

$$\begin{cases} x = g(u,v,w) \\ y = h(u,v,w) \\ z = k(u,v,w) \end{cases}$$

bölge dönüşümü ile D bölgesine dönüştürüldüğünde

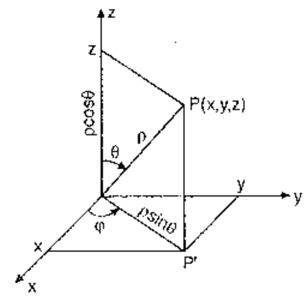
$$\iiint_G f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \iiint_D f(g(u,v,w),h(u,v,w),k(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|du\,dv\,dw$$

olacaktır.

A) KÜRESEL KOORDİNATLAR

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \rho^2\sin\theta$$



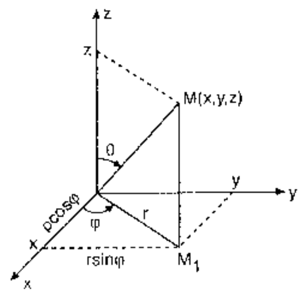
$$\iiint_G f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \iiint f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\theta)\rho^2|\sin\theta|d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

B) SİLİNDİRİK KOORDİNATLAR

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} = r$$

$$\iiint_G f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \iiint_D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi,z)r\,dr\,d\varphi\,dz$$



PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. Aşağıdaki eşitlikleri doğruluğunu gösteriniz.

a) $\displaystyle\int_1^e\int_1^e\int_1^e \frac{dx\,dy\,dz}{xyz} = 1$

b) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{2-x}\int_0^{2-x-y} dz\,dy\,dx = \frac{7}{6}$

c) $\displaystyle\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{dz\,dy\,dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}} = \frac{\pi a^2}{8}$

ç) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{2\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{\frac{4x-y^2}{2}}} x\,dz\,dy\,dx = \frac{4\pi\sqrt{2}}{3}$

d) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{2\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{\frac{4x-y^2}{2}}} x\,dz\,dy\,dx = \frac{4\pi\sqrt{2}}{3}$

e) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{6-2z}\int_0^{4-\frac{2y}{3}-\frac{4z}{3}} yz\,dx\,dy\,dz = \frac{54}{5}$

f) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{x}\int_0^{x-y} x\,dz\,dy\,dx = \frac{1}{8}$

g) $\displaystyle\int_0^1\int_{y^2}^{\sqrt{y}}\int_0^{y+z} xy\,dx\,dz\,dy = \frac{109}{1008}$

h) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-z^2}}\int_0^{2-z} z\,dx\,dy\,dz = \frac{16}{3}-\pi$

ı) $\displaystyle\int_1^e\int_1^e\int_1^e \ln x\ln y\ln z\,dx\,dy\,dz = 1$

Çözüm:

a) $\displaystyle I = \int_1^e\int_1^e\int_1^e \frac{dx\,dy\,dz}{xyz} = \int_1^e\int_1^e \ln x\Big|_1^e \frac{dy\,dz}{yz} = \int_1^e\int_1^e \frac{dy\,dz}{yz} = \int_1^e \ln y\Big|_1^e \frac{dz}{z} = \int_1^e \frac{dz}{z} = \ln z\Big|_1^e = 1$

b) $\displaystyle I = \int_0^1\int_0^{2-x}\int_0^{2-x-y} dz\,dy\,dx$

$$I = \int_0^1\int_0^{2-x} z\Big|_0^{2-x-y} dy\,dx = \int_0^1\int_0^{2-x}(2-x-y)\,dy\,dx = \int_0^1\left(2y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{2-x} dx$$

$$= \int_0^1\left[2(2-x)-x(2-x)-\frac{(2-x)^2}{2}\right]dx = \left(4x-x^2-x^2+\frac{x^3}{3}+\frac{(2-x)^3}{6}\right)\Big|_0^1$$

$$= 4-1-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{8}{6}=\frac{7}{6}$$

c) $\displaystyle I = \int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{dz\,dy\,dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}} = \frac{\pi^2a^2}{8}$

İntegrasyon bölgesi, kürenin birinci bölgede bulunan şekizde birlik parçasıdır. Küresel koordinatlara geçirilir ve sonra $\rho = a\sin u$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$I = \int_{\varphi=0}^{\pi/2}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{a} \frac{\rho^2\sin\theta}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \frac{a\sin^2 u}{\cos u}\,a\cos u\sin\theta\,du\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} a^2\left(\frac{u}{2}-\frac{\sin 2u}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,d\theta\,d\varphi = \frac{a^2\pi}{4}-\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{a^2\pi^2}{8}$$

bulunur.

ç) $\displaystyle I = \int_0^2\int_0^{2\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{\frac{4x-y^2}{2}}} x\,dz\,dy\,dx = \frac{4\pi\sqrt{2}}{3}$

$y = 2\sqrt{x}\sin\theta$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$y = 0 \Rightarrow \theta = 0$ ve $y = 2\sqrt{x} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ olacağından

$$I = \int_0^2\int_0^{2\sqrt{x}} x\sqrt{\frac{4x-y^2}{2}}\,dy\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^2\int_0^{\pi/2} 2x\sqrt{x}\cos\theta\, 2\sqrt{x}\cos\theta\,d\theta\,dx$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^2 x^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\frac{8}{3} = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}$$

d) $$I=\int_0^1\int_0^1\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} xyz\,dz\,dy\,dx=\frac{3}{8}$$

$$I=\int_0^1\int_0^1 \frac{xy}{2}z^2\Big|_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} dy\,dx=\int_0^1\int_0^1\left\{2xy-\frac{xy\left(x^2+y^2\right)}{2}\right\}dy\,dx$$

$$=\int_0^1 xy^2-\frac{x^3y^2}{4}-\frac{xy^4}{8}\Big|_0^1 dx=\int_0^1\left\{x-\frac{x^3}{4}-\frac{x}{8}\right\}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{16}-\frac{x^2}{16}\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}=\frac{3}{8}$$

e) $$I=\int_0^1\int_0^{6-2z}\int_0^{4-\frac{2y}{3}-\frac{4z}{3}} yz\,dx\,dy\,dz=\frac{54}{5}$$

$$I=\int_0^1\int_0^{6-2z} yz\left(4-\frac{2y}{3}-\frac{4z}{3}\right)dy\,dz=\int_0^1 2y^2z-\frac{2y^3z}{9}-\frac{2y^2z^2}{3}\Big|_0^{6-2z}dz$$

$$=\int_0^1 2(6-2z)^2z-\frac{2(6-2z)^3z}{9}-\frac{2(6-2z)^2z^2}{3}dz$$

$$=\int_0^1\left(72z-24z^2+8z^3-\frac{412}{9}z+\frac{144}{9}z^2-\frac{48z^3}{9}-\frac{72z^2}{3}+\frac{24z^3}{3}+\frac{8z^4}{3}\right)dz$$

$$=\frac{54}{5}$$

f) $$I=\int_0^1\int_0^x\int_0^{x-y} x\,dz\,dy\,dx=\frac{1}{8}$$

$$I=\int_0^1\int_0^x (x-y)x\,dy\,dx=\int_0^1 x^2y-\frac{xy^2}{2}\Big|_0^x dx$$

$$=\int_0^1\left(x^3-\frac{x^3}{2}\right)dx=\int_0^1\frac{x^3}{2}dx=\frac{x^4}{8}\Big|_0^1=\frac{1}{8}$$

g) $$I=\int_0^1\int_{y^2}^{\sqrt{y}}\int_0^{y+z} xy\,dx\,dz\,dy=\frac{109}{1008}$$

$$I=\int_0^1\int_{y^2}^{\sqrt{y}}\frac{x^2y}{2}\Big|_0^{y+z}dz\,dy=\int_0^1\int_{y^2}^{\sqrt{y}}\frac{(y+z)^2y}{2}dz\,dy$$

$$=\int_0^1\frac{(y+z)^3}{6}y\Big|_{y^2}^{\sqrt{y}}dy=\int_0^1\frac{\left(y+\sqrt{y}\right)^3}{6}y-\frac{\left(y+y^2\right)^3y}{6}dy$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1 4^4+3y^{7/2}+3y^3+4^{5/2}-4^4-3y^5-3y^6-y^7\,dy$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}y^{9/2}+\frac{3}{4}y^4+\frac{2}{7}y^{7/2}-\frac{1}{2}y^6-\frac{3}{7}y^7-\frac{y^8}{8}\Big|_0^1\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{2}{7}-\frac{1}{2}-\frac{3}{7}-\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{7}+\frac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{19}{24}-\frac{1}{7}\right)=\frac{109}{1008}$$

h) $$I=\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-z^2}}\int_0^{2-z} z\,dx\,dy\,dz=\frac{16}{3}-\pi$$

$$I=\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-z^2}}\left(2z-z^2\right)dy\,dz=\int_0^2 2z\sqrt{4-z^2}-z^2\sqrt{4-z^2}\,dz$$

$$=-\frac{2}{3}\left(4-z^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2-\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin^2\theta.2\cos\theta.2\cos\theta\,d\theta \qquad [z=2\sin\theta]$$

$$=\frac{16}{3}-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin\theta\cos\theta)^2d\theta=\frac{16}{3}-4\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta=\frac{16}{3}-4\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\cos 4\theta}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{16}{3}-4\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{16}{3}-\pi$$

1) $$I=\int_1^e\int_1^e\int_1^e \ln x\ln y\ln z\,dx\,dy\,dz = 1$$

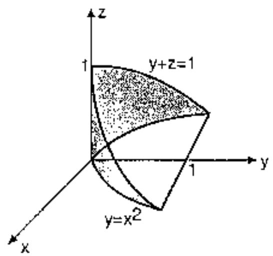
$$I=\int_1^e\int_1^e \ln y\ln z\left(x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}dx\right)dy\,dz$$

$$=\int_1^e\int_1^e (e-e+1)\ln y\ln z\,dy\,dz = \int_1^e\left\{y\ln y\Big|_1^e-\int_1^e y\frac{1}{y}dy\right\}dt$$

$$=\int_1^e \ln z\,dz = z\ln z\Big|_1^e - \int_1^e z\frac{1}{z}dz = e-e+1=1$$

2. Yandaki şekilde

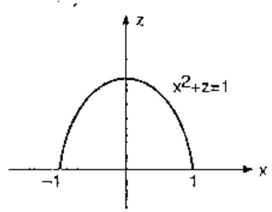
$$I=\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_0^{1-y} dz\,dy\,dx$$ integralinin integrasyon bölgesi çizilmiştir. İntegrallerin sıralarını aşağıda verilen difirensiyeller sırasına göre yazınız.



a) dy dz dx b) dy dx dz c) dz dx dy d) dx dz dy

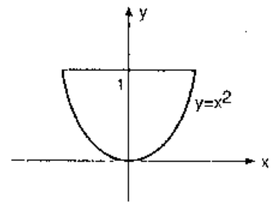
Çözüm:

a) $$I=\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2}\int_{x^2}^{1-z} dy\,dz\,dx$$

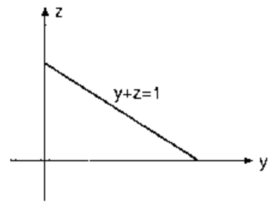


b) $$I=\int_0^1\int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}}\int_{x^2}^{1-z} dy\,dx\,dz$$

c) $$I=\int_0^1\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\int_0^{1-y} dz\,dx\,dy$$

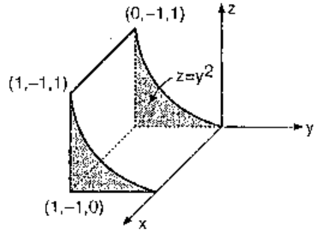


d) $$I=\int_0^1\int_0^{1-y}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\,dz\,dy$$



3. Yandaki şekilde

$$I=\int_0^1\int_{-1}^{0}\int_0^{y^2} dz\,dy\,dx$$ integralinin integrasyon bölgesi verilmiştir.



a) $\iiint dz\,dx\,dy$

b) $\iiint dy\,dz\,dx$

integrallerinin sınırlarını, diferensiyellerinin sırasını göz önüne alarak yazınız.

Çözüm:

a) $$I=\int_{-1}^{0}\int_0^1\int_0^{y^2} dz\,dx\,dy$$ b) $$I=\int_0^1\int_0^1\int_{-1}^{-\sqrt{z}} dy\,dz\,dx$$

4. Aşağıdaki integralleri, integrasyon sırasını değiştirerek hesaplayınız.

a) $$\int_0^4\int_0^1\int_{2y}^{2} \frac{4\cos(x^2)}{2\sqrt{z}}\,dx\,dy\,dz$$ b) $$\int_0^1\int_0^1\int_{x^2}^{1} 12xze^{zy^2}\,dy\,dx\,dz$$

c) $$\int_0^1\int_{\sqrt[3]{z}}^{1}\int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x}\sin \pi y^2}{y^2}\,dx\,dy\,dz$$ d) $$\int_0^2\int_0^{4-x^2}\int_0^{x} \frac{\sin 2z}{4-z}\,dydzdx$$

Çözüm:

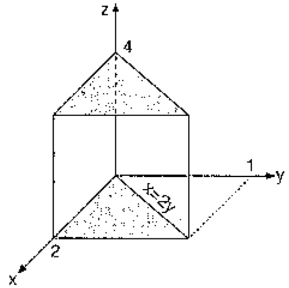
a) $$\int_0^4\int_0^1\int_{2y}^2 \frac{4\cos(x^2)}{2\sqrt{z}}\,dx\,dy\,dz$$

$$I=\int_0^2\int_0^4\int_0^{x/2} \frac{4\cos(x^2)}{2\sqrt{z}}\,dy\,dz\,dx$$

$$=\int_0^2\int_0^4 \frac{x\cos(x^2)}{\sqrt{z}}\,dz\,dx$$

$$=\int_0^2 2z^{1/2}x\cos(x^2)\Big|_0^4\,dx$$

$$=2\left(\sin(x^2)\Big|_0^2\right)=2\sin 4$$



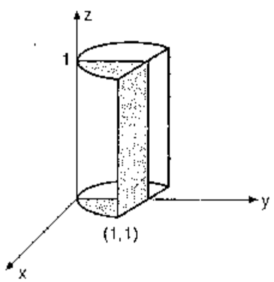
b) $$I=\int_0^1\int_0^1\int_{x^2}^1 12xze^{zy^2}\,dy\,dx\,dz$$

$$I=\int_0^1\int_0^1\int_0^{\sqrt{y}} 12xze^{zy^2}\,dx\,dy\,dz$$

$$=\int_0^1\int_0^1 6yze^{zy^2}\,dy\,dz$$

$$=3\int_0^1 e^{zy^2}\Big|_0^1 dz=3\int_0^1 e^z-1\,dz$$

$$=3(e^z-z)\Big|_0^1=3(e-1-1)=3(e-2)$$

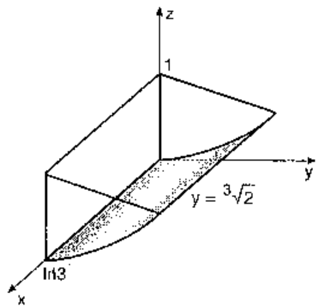


c) $$\int_0^1\int_{\sqrt[3]{z}}^1\int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x}\sin\pi y^2}{y^2}\,dx\,dy\,dz$$

$$=\int_0^1\int_0^{y^3}\int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x}\sin\pi y^2}{y^2}\,dx\,dz\,dy$$

$$=8\pi\int_0^1\int_0^{y^3} \frac{\sin\pi y^2}{y^2}\,dz\,dy=8\pi\int_0^1 y\sin\pi y^2 dy$$

$$=8\pi\frac{1}{2\pi}\left(\cos(\pi y^2)\right)\Big|_0^1=4(-\cos\pi+\cos 0)=8$$

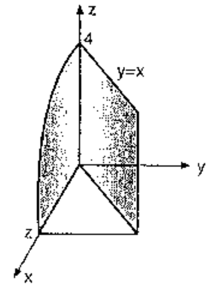


d) $$\int_0^2\int_0^{4-x^2}\int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z}\,dy\,dz\,dx$$

$$=\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-z}}\int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z}\,dy\,dz\,dx=\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-z}} x\frac{\sin 2z}{4-z}\,dx\,dz$$

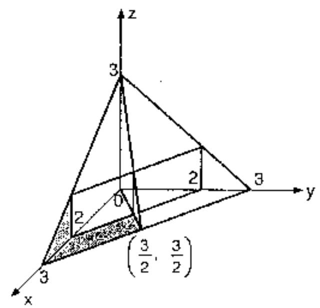
$$=\int_0^2 \frac{\sin 2z}{4-z}x^2\Big|_0^{\sqrt{4-z}} dz=\int_0^2 \sin 2z\,dz=-\frac{\cos z}{2}\Big|_0^2$$

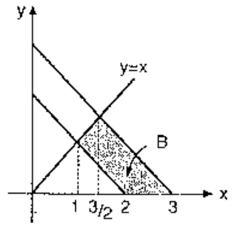
$$=\frac{1}{2}(1-\cos 4)$$



5. **G bölgesi $z=0$, $y=0$, $y=x$, $x+y=2$, $x+y+z=3$ düzlemleri tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre $f(x, y, z)=x$ eşitliği ile verilen f fonksiyonunun G üzerindeki üç katlı integralini hesaplayınız.**

Çözüm:



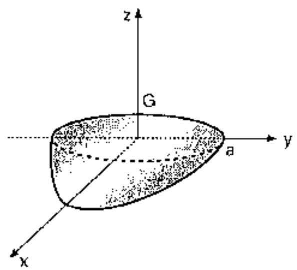


$$I=\iint_B\int_{z=0}^{3-x-y} x\,dz\,dydx\quad\int_{z=0}^{3-x-y} x\,dz\,dy\,dx$$

$$=\int_1^{3/2}\int_{2-x}^{x}\int_{z=0}^{3-x-y} x\,dz\,dydx+\int_{3/2}^{2}\int_{2-x}^{3-x}\int_{z=0}^{3-x-y} x\,dz\,dy\,dx+\int_2^3\int_0^{3-x}\int_0^{3-x-y} x\,dz\,dy\,dx=\frac{1}{3}.$$

6. Problem 5 de verilen fonksiyonun $x = 0$ ve $x = \sqrt{a^2 - y^2 - z^2}$ yüzeyleri tarafından sınırlanan bölge üzerindeki integralini hesaplayınız.

Çözüm:



$x = \rho \sin\theta \cos\varphi$

$y = \rho \sin\theta c \sin\varphi$

$z = \rho\cos\theta$

$J = \rho^2 \sin\theta$

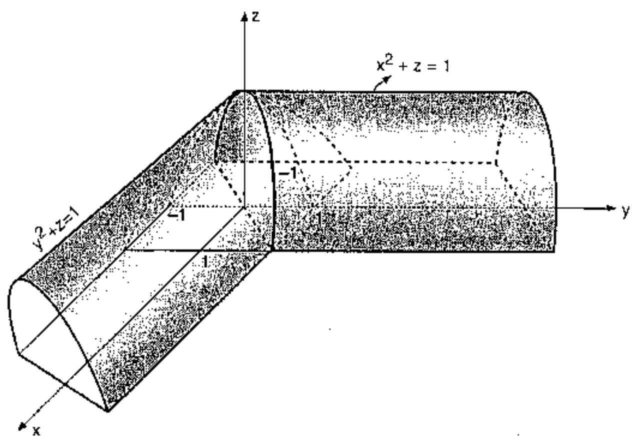
$$I = \iiint_G x\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\rho=0}^{a} \rho\sin\theta\cos\varphi.\rho^2 \sin\theta d\rho d\theta d\varphi$$

$$= \frac{a^4}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi} \sin^2\theta\cos\varphi d\theta d\varphi = \frac{a^4}{4}.2\left(\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{a^4\pi}{4}$$

7. $f(x, y, z) = z^2$ biçiminde tanımlanan fonksiyonun, $z = 0$, $x^2 + z = 1$, $y^2 + z = 1$ yüzeyleri tarafından sınırlanan bölge üzerindeki integralini hesaplayınız.

Çözüm:



$$I = 8\int_0^1 \int_{-1}^{1} \int_0^{1-y^2} z^2 dz\,dy\,dx$$

$$= 8\int_0^1 \int_0^x \frac{\left(1-y^2\right)^3}{3} dydx$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^1 \left(x - x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{x^7}{7}\right)dx$$

$$= \frac{279}{1240}$$

8. G integrasyon bölgesi $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ koordinat düzlemleri ile $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ düzlemi tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre $f(x, y, z) = z$ fonksiyonunun G üzerindeki integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$I = \int_0^a \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} \int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} z\,dz\,dy\,dx = \int_0^a \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} \frac{c^2}{2}\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2 dy\,dx$$

$$= \frac{bc^2}{2}\int_0^a -\frac{1}{3}\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^3 \Bigg|_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} dx$$

$$= \frac{abc^2}{6}\int_0^a -\frac{1}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)^3 dx = -\frac{abc^2}{6.4}\left(1-\frac{x}{a}\right)^4 \Bigg|_0^a = \frac{abc^2}{24}$$

9. G integrasyon bölgesi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^3} = 1$ elipsoidinin iç bölgesi olduğuna göre $I = \iiint_G x^2 dx\,dydz$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\frac{x}{a}=\rho\sin\theta\cos\varphi,\quad \frac{y}{b}=\rho\sin\theta\sin\varphi,\quad \frac{z}{c}=\rho\cos\theta \;\Rightarrow\; J=a.b.c\,\rho^2\sin\theta$$

$$I=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{1} a^2\rho^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi.a.b.c\,\rho^2\,|\sin\theta|\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

$$=\frac{a^3bc}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\cos^2\varphi\,d\theta\,d\varphi=\frac{a^3bc}{5}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta$$

$$=\frac{a^3bc}{5}\left(\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos2\varphi}{2}d\varphi\right)\left(\int_0^{\pi}\left(\sin\varphi-\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta\right)\right)$$

$$=\frac{a^3bc}{5}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\sin2\varphi}{4}\Big|_0^{2\pi}\right)\left(-\cos\theta+\frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{a^3bc}{5}(\pi)(2)=2\pi\frac{a^3bc}{5}$$

10. G bölgesi, $z^2=\frac{h^2}{r^2}(x^2+y^2)$ konisinin üst yarısı ile $z=h$ düzlemi arasındaki bölge olduğuna göre

$I=\iiint_G z\,dx\,dy\,dz=\frac{\pi h^2r^2}{4}$ eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz. $(h>0)$

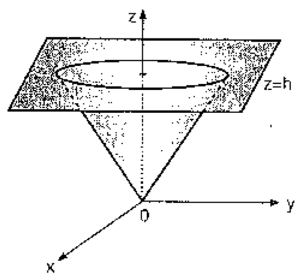
Çözüm:

$$I=\iint\int_{z=\frac{h}{r}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} z\,dz\,dy\,dx=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{R=0}^{r}\int_{z=\frac{h}{r}R}^{h} z.R.\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{r}\left(h^2-\frac{h^2}{r^2}R^2\right)R\,dR\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{h^2R^2}{2}-\frac{h^2}{r^2}\frac{R^4}{4}\Big|_0^{r}d\theta=\frac{1}{2}2\pi\left(\frac{h^2r^2}{2}-\frac{h^2r^2}{4}\right)$$

$$=\pi\frac{h^2r^2}{4}$$



11. G integrasyon bölgesi $x^2+y^2+z^2=a^2$ ve $x^2+y^2+z^2=b^2$ küreleri arasında kalan bölge olduğuna göre

$$I=\iiint_G\frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=4\pi\ln\frac{a}{b}$$

eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm:

$x=\rho\sin\theta\cos\varphi$

$y=\rho\sin\theta\sin\varphi$

$z=\rho\cos\theta$

$J=\rho^2\sin\theta$

$$I=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\rho=b}^{a}\frac{\rho^2\sin\theta}{\rho^3}d\rho\,d\theta\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\ln\rho\Big|_b^a\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$=\ln\frac{a}{b}2\pi(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}=4\pi\ln\frac{a}{b}$$

12. G integrasyon bölgesi $x^2+y^2+z^2=z$ küresinin iç bölgesi olduğuna göre

$$I=\iiint_G\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz=\frac{\pi}{10}$$

eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm:

$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\rho\cos\theta$

$$I=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{\cos\theta}\rho.\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\sin\theta\,d\theta\,d\theta$$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{\cos^5\theta}{5}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{1}{4}.2\pi.\frac{1}{5}=\frac{\pi}{10}$$

13. G bölgesi üstten $x^2+y^2+z^2=2az$ küresi alttan $z=\sqrt{x^2+y^2}$ konisi tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre $\iiint_G dx\,dy\,dz=\pi a^3$ eşitliğini doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm:

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ konisinin küresel koordinatlardaki denklemi

$\rho\cos\theta=\sqrt{\rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\theta\sin^2\theta}\ \rho\cos\theta=\rho\sin\theta\Rightarrow\tan\theta=1\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$

$x^2+y^2+z^2-2az=0\Rightarrow x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$ küresinin küresel koordinatlardaki denklemi

$\rho^2=2a\rho\cos\theta\Rightarrow\rho=2a\cos\theta$

olur. Buna göre,

$$I=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/4}\int_{\rho=0}^{2a\cos\theta}\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}8a^3\cos^3\theta\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$=-\frac{8a^3}{3}\cdot2\pi\left(\frac{\cos^4\theta}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)=-\frac{8a^3}{3}2\pi\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{4}\right)=\pi a^3$$

14. G bölgesi $x^2+y^2+z^2=a^2$ küresinin iç bölesi olduğuna göre

$I=\iiint\limits_G\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz=\pi a^4$ eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$I=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{a}\rho\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi=\frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi}\cos\theta\Big|_0^{\pi}d\varphi=\frac{a^4}{4}.2.2\pi=\pi a^4$$

ÜÇ KATLI İNTEGRALİN UYGULAMALARI

A) HACİM HESABI

Kartezyen koordinatlarda $V=\iiint\limits_G dx\,dy\,dz$

Küresel koordinatlarda $V=\iiint\limits_G \rho^2|\sin\theta|\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$

Silindirik koordinatlarda $V=\iiint\limits_G r\,dz\,dr\,d\varphi$

B) AĞIRLIK MERKEZİNİN BULUNMASI

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iiint\limits_G x\,\sigma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

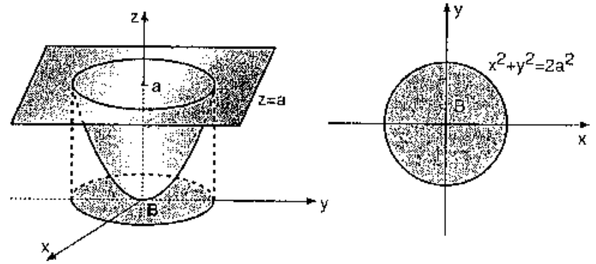
$$\bar{y}=\frac{1}{M}\iiint\limits_G y\sigma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint\limits_G z\,\sigma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. $x^2+y^2=2az$ paraboloidi ile $z=a$ düzlemi arasında kalan bölgenin hacmini bulunuz.

Çözüm:



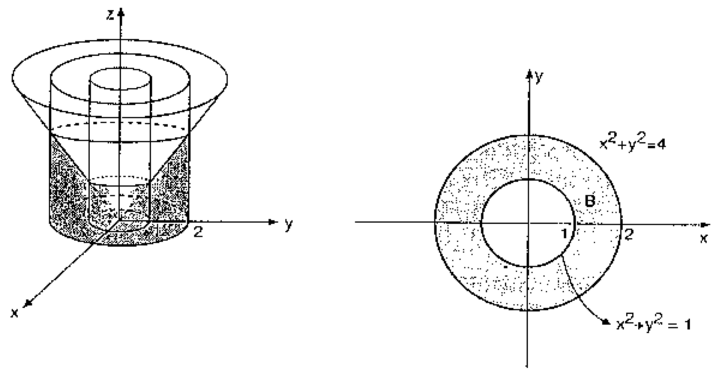
$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=z,\quad J=r$

$$V=\iint\limits_B\int\limits_{z=\frac{x^2+y^2}{2a}}^{a}dz\,dy\,dx=\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{\sqrt{2}a}\int\limits_{z=\frac{r^2}{2a}}^{a}r\,dz\,dr\,d\varphi=\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{\sqrt{2}a}\left(ar-\frac{r^3}{2a}\right)dr\,d\varphi$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left.\frac{ar^2}{2}-\frac{r^4}{8a}\right|_0^{\sqrt{2}a}d\varphi=2\pi\left(a^3-\frac{a^3}{2}\right)=\pi a^3$$

2. $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=1$ silindirleri ile $z^2=x^2+y^2$ konisi arasında kalan bölgenin hacmini bulunuz.

Çözüm:



Şekilde gösterilen bölgenin hacmi, sözkonusu bölgenin hacminin yarısıdır. Buna göre;

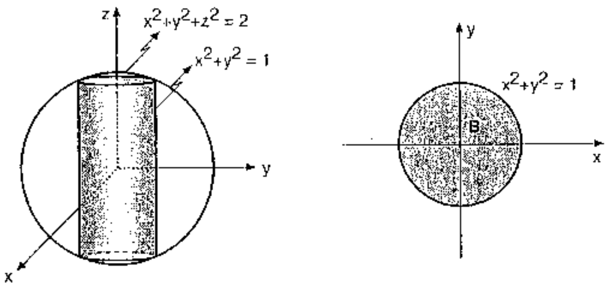
$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=z$ silindirik koordinatları kullanılarak

$$V=2.\iint\limits_B\int\limits_{z=0}^{\sqrt{x^2+y^2}}dz\,dy\,dx=2.\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=1}^{2}\int\limits_{0}^{r}r\,dz\,dr\,d\theta=2.\int\limits_0^{2\pi}\left.\frac{r^3}{3}\right|_1^2d\theta=4\pi\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{28\pi}{3}$$

bulunur.

3. $x^2+y^2+z^2=2$ küresi ve $x^2+y^2=1$ silindirinin içinde kalan bölgenin hacmini bulunuz.

Çözüm:



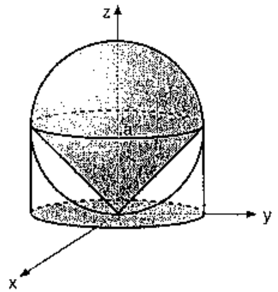
$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=z,\quad J=r$

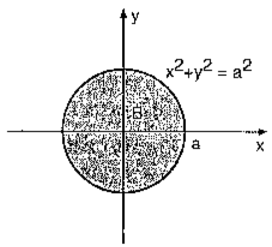
$$V=2\iint\limits_B\int\limits_{z=0}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}dz\,dy\,dx=2\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{1}\int\limits_{z=0}^{\sqrt{2-r^2}}r\,dz\,dr\,d\theta=2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1}r\sqrt{2-r^2}\,dr\,d\varphi$$

$$=2\int\limits_0^{2\pi}\left.-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right|_0^1d\theta=-\frac{2}{3}2\pi\left(1-2^{3/2}\right)=\frac{4\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

4. Alttan $x^2+y^2=z^2$ konisi, üstten $x^2+y^2+z^2=2az$ küresi tarafından sınırlanan bölgenin hacmini hesaplayınız.

Çözüm:





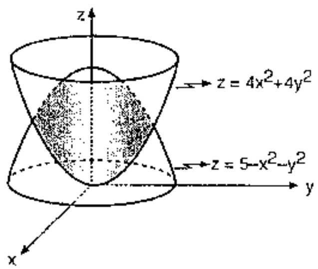
$$x^2+y^2+z^2=2az \Rightarrow 2z^2=2az \Rightarrow z=a, \quad z=0$$

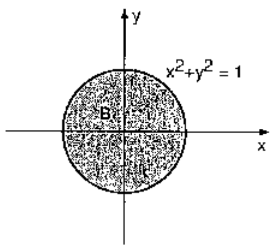
$$V=\iint_B \int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{a+\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/4}\int_{\rho=0}^{2a\cos\theta}\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\frac{8}{3}a^3\cos^3\theta\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=-\frac{8a^3}{3}\frac{\cos^4\theta}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}2\pi=\pi a^3$$

5. **$z=5-x^2-y^2$ ve $z=4x^2+4y^2$ paraboloidleri tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.**

Çözüm:





$$5-x^2-y^2=4x^2+4y^2 \Rightarrow x^2+y^2=1$$

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi, \quad z=z \quad \Rightarrow J=r$$

$$V=\iint_B\int_{Z=4x^2+4y^2}^{5-x^2-y^2}dz\,dy\,dx=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=4r^2}^{5-r^2}r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(5r-5r^3\right)dr\,d\theta$$

$$=5.2\pi\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^1\right)=5\pi$$

6. **$z^2=x^2+y^2$ konisinin $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$ küresi hacimleri oranı $\frac{1}{3}$ olan iki bölgeye ayırdığını gösteriniz.**

Çözüm:

Problem 4'de koninin üst tarafında kalan bölgenin hacminin πa^3 olduğu gösterilmişti. Buna göre, Koninin alt tarafında kalan küre parçasının hacmi

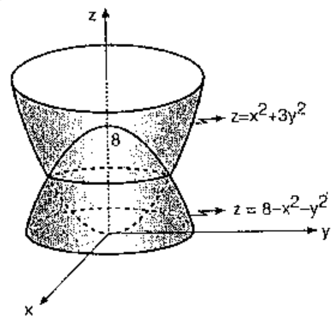
$$\frac{4}{3}\pi a^3-\pi a^3=\frac{1}{3}\pi a^3$$

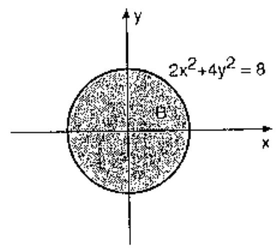
olur. O halde koninin küreden ayırdığı bölgenin hacimleri oranı $\dfrac{\frac{1}{3}\pi a^3}{\pi a^3}=\dfrac{1}{3}$

olur.

7. **$z=8-x^2-y^2$ ve $z=x^2+3y^2$ paraboloidleri arasında kalan bölgenin hacmini bulunuz.**

Çözüm:





$$8-x^2-y^2=x^2+3y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2+2y^2=4 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1$$

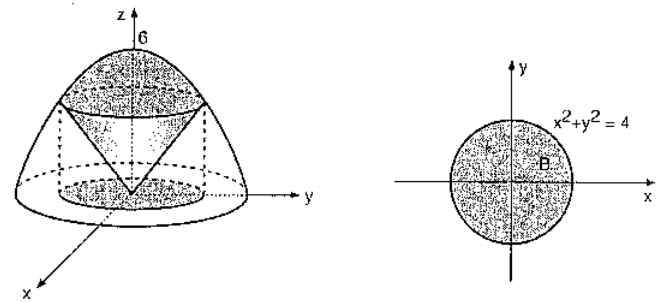
$$\frac{x}{2}=r\cos\varphi, \quad \frac{y}{\sqrt{2}}=r\sin\theta \Rightarrow J=2\sqrt{2}\,r$$

$$V=\iint_B\int_{z=x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2}dz\,dy\,dx=\iint_B 8-2x^2-4y^2\,dy\,dx=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(8-8r^2\right)r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{8r^2}{2}-\frac{8r^4}{4}\Bigg|_0^1 d\theta=2\pi.2=4\pi$$

8. $z=\sqrt{x^2+y^2}$ konisi ile $z=6-x^2-y^2$ paraboloidi tarafından sınırlanan cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:

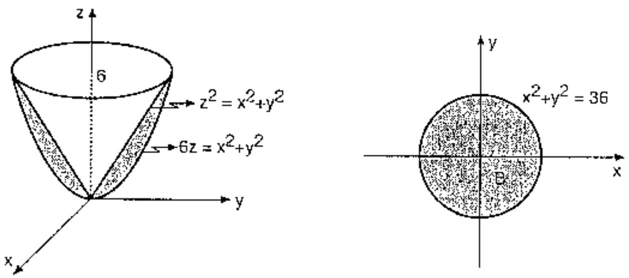


$z=\sqrt{6-z} \Rightarrow z^2+z-6=0 \Rightarrow z=-3$ veya $z=2 \Rightarrow z=2$ olabilir.

$$V=\iint\limits_B \int\limits_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{6-x^2-y^2} dz\,dy\,dx=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2}\left(6-r^2-r\right)r\,dr\,d\varphi=2\pi\left(3r^2-\frac{r^4}{4}-\frac{r^3}{3}\Big|_0^2\right)=\frac{32\pi}{3}$$

9. $z^2=x^2+y^2$ konisi ile $6z=x^2+y^2$ paraboloidi arasında kalan bölgenin hacmini bulunuz.

Çözüm:

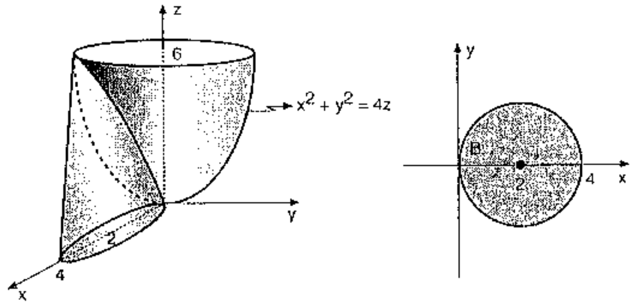


$$V=\iint\limits_B \int\limits_{z=\frac{x^2+y^2}{6}}^{\sqrt{x^2+y^2}} dz\,dy\,dx=\iint\limits_B\left(\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2+y^2}{6}\right)dy\,dx=\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{6}\left(r-\frac{r^2}{6}\right)r\,dr\,d\varphi$$

$$=2\pi\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{24}\Big|_0^6\right)=2\pi(72-54)=36\pi$$

10. $x^2+y^2=4x$ silindiri, $x^2+y^2=4z$ paraboloidi ve x o y düzlemi arasında kalan bölgenin hacmini bulunuz.

Çözüm



$$V=\iint\limits_B \int\limits_{z=0}^{\frac{x^2+y^2}{4}} dz\,dy\,dx=2\int\limits_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{r=0}^{4\cos\theta}\int\limits_{z=0}^{\frac{r^2}{4}} r\,dz\,dr\,d\theta=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{4\cos\theta}\frac{r^3}{2}\,dr\,d\theta$$

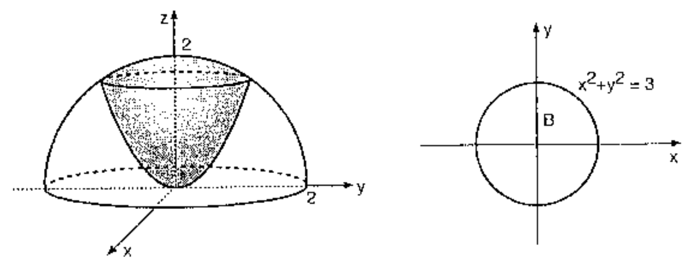
$$=32\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta=32\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta-\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta=32\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}-\frac{\sin^2 2\theta}{4}\,d\theta$$

$$=32\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}-\frac{(1-\cos 4\theta)}{8}=32\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}-\frac{\theta}{8}+\frac{\sin 4\theta}{32}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=32\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=6\pi$$

11. Üstten $x^2+y^2+z^2=4$ küresi, alttan $3z=x^2+y^2$ paraboloidi tarafından sınırlanan bölgenin hacmini hesaplayınız.

Çözüm:



$x^2+y^2+z^2=4 \Rightarrow z^2+3z-4=0 \Rightarrow z=1,\ z=-4 \Rightarrow z=1 \Rightarrow$ İzdüşüm bölgesi

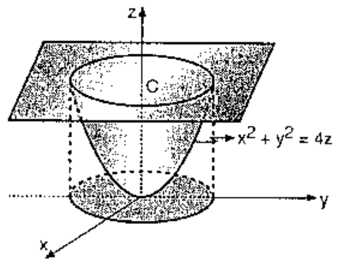
$x^2+y^2 \le 3$ dairesidir.

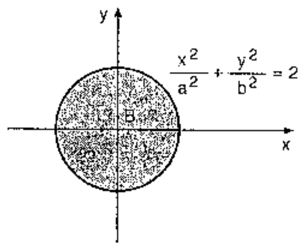
$$V=\iint_B \int_{z=\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{4-r^2}-\frac{r^2}{3}\right) r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(4-r^2\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^4}{12}\Bigg|_0^{\sqrt{3}}\right]d\theta=2\pi\left(-\frac{1}{3}-\frac{9}{12}+\frac{8}{3}\right)=2\pi$$

12. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2\dfrac{z}{c}$ paraboloidi ile $z=c$ düzlemi arasında kalan bölgenin hacmini bulunuz.

Çözüm:





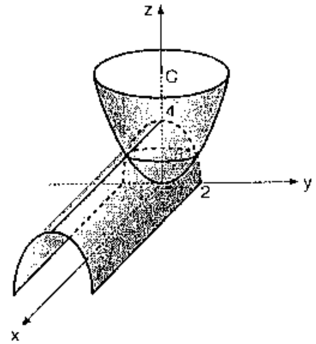
$\dfrac{x}{\sqrt{2}a}=r\cos\theta,\quad \dfrac{y}{\sqrt{2}\,b}=r\sin\theta,\quad z=z \;\Rightarrow\; J=2abr$

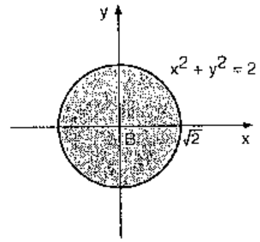
$$V=\iint_B \int_{z=0}^{\frac{c}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)} dz\,dy\,dx=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=0}^{r^2\frac{c}{2}} 2abr\,dz\,dr\,d\theta=\frac{c}{2}\int_0^{2\pi}2ab\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^1 d\theta$$

$$=\frac{c}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 2\pi ab.2=\frac{abc\pi}{2}$$

13. $z=2x^2+y^2$ paraboloidi ile $z=4-y^2$ silindiri tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.

Çözüm:





$z=z \Rightarrow 2x^2+2y^2=4 \Rightarrow x^2+y^2=2$

$x=r\cos\theta$

$y=r\sin\theta$

$z=z$

$J=r$

$$V=\iint_B \int_{z=2x^2+y^2}^{4-y^2} dz\,dy\,dx=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{2}}\left(4-2r^2\right)r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}2r^2-\frac{r^4}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{2}}d\theta=2\pi(4-2)=4\pi$$

14. Yukarıdan $\rho=6\cos\theta$ küresi, alttan $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ konisi tarafından sınırlanan cismin hacmini bulunuz.

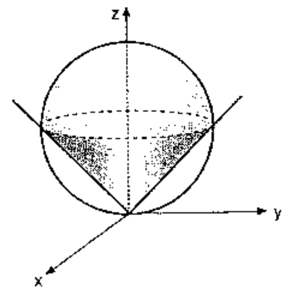
Çözüm:

$$V=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}}\int_{\rho=0}^{6\cos\theta}\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

$$=72\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\cos^3\theta\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$=72\int_0^{2\pi}-\frac{\cos^4\theta}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}d\varphi=-18.2\pi\left(-\frac{1}{16}+1\right)$$

$$=18.2\pi\frac{15}{16}=\frac{135}{4}\pi$$

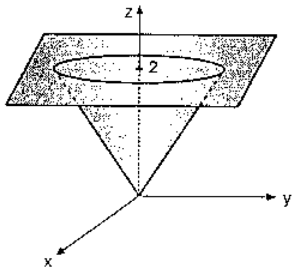


15. $z=\sqrt{x^2+y^2}$ konisi ve $z=2$ tarafından sınırlanan cismin yoğunluğu her noktada o noktanın x0y düzlemine olan uzaklığı kadardır. Bu cismin kütlesini bulunuz.

Çözüm:

$\sigma(x,y,z)=z$

$$M=\iiint \sigma(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$



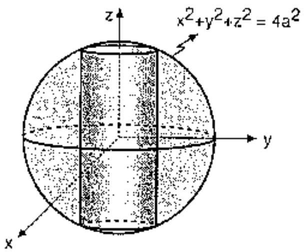
$$=\iint_{x^2+y^2\le 4}\int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{2} z\,dz\,dy\,dx$$

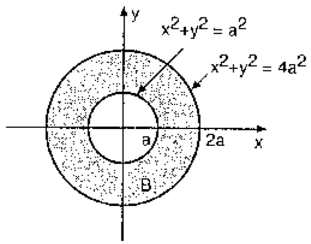
$$=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\int_{z=r}^{2} z.r\,dz\,dr\,d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2} 4r-r^3\,dr\,d\varphi=\frac{1}{2}2\pi\left(2r^2-\frac{r^4}{4}\Big|_0^2\right)=4\pi$$

16. $x^2+y^2=a^2$ silindirinin dışında $x^2+y^2+z^2=4a^2$ küresinin içinde kalan bölge içerisine yerleştirilen cismin her noktadaki yoğunluğu o noktanın kotunun karesi ile orantılıdır. Bu cismin kütlesini bulunuz.

Çözüm:





$\sigma(x,y,z)=kz^2$

$$M=\iiint \sigma(x,y,z)\,dz\,dy\,dx=2\iint_B\int_{z=0}^{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}} kz^2\,dz\,dy\,dx=\frac{2k}{3}\iint_B\left(4a^2-x^2-y^2\right)^{3/2}dx\,dy$$

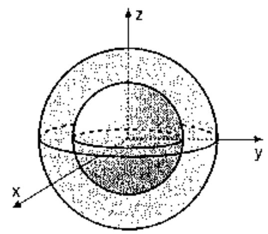
$$=\frac{2k}{3}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=a}^{2a}\left(4a^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}r\,dr\,d\theta=\frac{2k}{3}\int_{0}^{2\pi}\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(4a^2-r^2\right)^{5/2}\Big|_a^{2a}d\varphi$$

$$=-\frac{2k}{15}\left(-\left(3a^2\right)^{\frac{5}{2}}\right).2\pi=\frac{4.9\sqrt{3}}{15}a^5=\frac{12\sqrt{3}}{5}a^5$$

17. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2+z^2=b^2$ küreleri arasına yerleştirilen bir cismin yoğunluğu her noktada o noktanın küre merkezine olan uzaklığı ile doğru orantılıdır. Bu cismin kütlesini bulunuz.

Çözüm:

$\sigma(x,y,z)=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$



$$M=\iiint \sigma(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

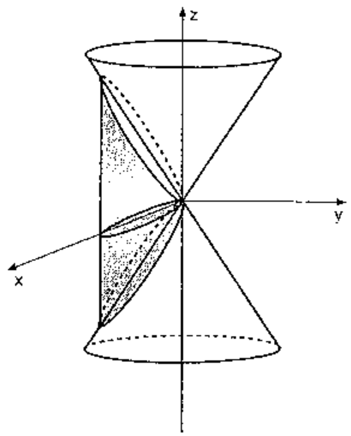
$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\ \ z=\rho\cos\theta$

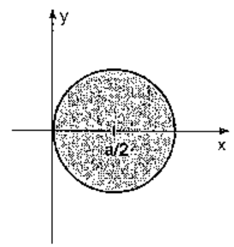
$$M=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\rho=a}^{b}\rho^2\sin\theta\,k\,\rho\,d\rho\,d\theta\,d\varphi=\frac{k}{4}\left(b^4-a^4\right)\int_{\varphi=0}^{2\pi}-\cos\theta\Big|_0^{\pi}d\varphi$$

$$=\frac{k\left(b^4-a^4\right)}{4}(1+1)2\pi=k\pi\left(b^4-a^4\right)$$

18. $x^2+y^2=ax$ silindiri ile $z^2=x^2+y^2$ konisi tarafından sınırlanan bölgenin içerisine yerleştirilen bir cismin yoğunluğu her noktada o noktanın orjine olan uzaklığı ile doğru orantılıdır. Bu cismin kütlesini bulunuz.

Çözüm:





$\sigma(x,y,z)=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$M=\iiint \sigma(x,y,z)\,dz\,dy\,dx = 2\iint\limits_{x^2+y^2\le ax}\int_{z=0}^{\sqrt{x^2+y^2}} k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx$$

olur. Silindirik koordinatlara geçilirse

$$M=2.2\int_{\varphi=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{a\cos\varphi}\int_{z=0}^{r} k(\sqrt{r^2+z^2})\,r\,dz\,dr\,d\varphi = 4k\int_0^{\pi/2}\int_0^{a\cos\theta}\int_0^r \sqrt{r^2+z^2}$$

olur.

$$\int_0^r \sqrt{r^2+z^2}\,dz = \frac{z}{2}\sqrt{r^2+z^2}+\frac{r^2}{2}\ln\left(z+\sqrt{r^2+z^2}\right)\Big|_0^r = \frac{r^2}{2}\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$$

olduğundan,

$$M=2\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)\int_0^{\pi/2}\int_0^{a\cos\varphi} r^3\,dr\,d\varphi = \frac{k}{2}\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]\int_0^{\pi/2} a^4\cos^4\varphi\,d\varphi$$

$$=\frac{k}{2}\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]\frac{3\pi}{16}a^4=\frac{3}{32}\pi a^4\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right] \quad \text{bulunur.}$$

19. a yarıçaplı küre şeklindeki bir cismin her noktadaki yoğunluğu o noktanın küre merkezine olan uzaklığının karesi ile ters orantılıdır. Küre yüzeyi üzerindeki noktalarda yoğunluk, küre yarıçapına eşit olduğuna göre, cismin kütlesini bulunuz.

Çözüm:

$$\sigma(x,y,z)=\frac{k}{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow a=\frac{k}{a^2} \Rightarrow k=a^3 \Rightarrow \sigma(x,y,z)=\frac{a^3}{x^2+y^2+z^2}$$

$$M=\iiint \frac{a^3}{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{a}\frac{a^3}{\rho^2}\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,du$$

$$=a^4.2\pi\left(-\cos\theta\Big|_0^\pi\right)=4a^4\pi$$

20. $x^2+y^2+z^2=a^2$ ve $x^2+y^2+z^2=4a^2$ küreleri tarafından sınırlanan bir cismin yoğunluğu her noktada o noktanın orjine olan uzaklığı ile ters orantılı olarak değişmektedir. Bu cismin kütlesini bulunuz.

Çözüm:

Problem 17'deki şekil gözönüne alınırsa,

$$\sigma(x,y,z)=\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad \text{olacağından,}$$

$$M=\iiint \sigma(x,y,z)\,dz\,dy\,dx=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\rho=a}^{2a}\frac{k}{\rho}\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,du$$

$$=\frac{3a^2}{2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\,du=3\pi a^2.2=6\pi a^2$$

bulunur.

21. $x^2+y^2=2x$ silindiri ile $z^2=x^2+y^2$ konisi tarafından sınırlanan cismin her noktadaki yoğunluğu o noktanın Oz eksenine olan uzaklığı ile orantılıdır. Bu cismin kütlesini bulunuz.

Çözüm:

Problem 18'deki şekil gözönüne alındığında,

$$\sigma(x,y,z)=k\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{olacağından,}$$

$$M=\iint\limits_{x^2+y^2=2x}\int_{z=0}^{\sqrt{x^2+y^2}} k\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx=\iint k\left(x^2+y^2\,dy\,dx\right)$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{r=0}^{2\cos\theta} kr^2\,r\,dr\,d\theta=4k\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta=k\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos2\theta}{2}-\frac{\sin^2 2\theta}{4}\,d\theta\right)$$

$$=k\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos2\theta}{2}-\left(\frac{1-\cos4\theta}{8}\right)d\theta=k\pi\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\sin4\theta}{4}-\frac{\theta}{8}+\frac{\sin4\theta}{32}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

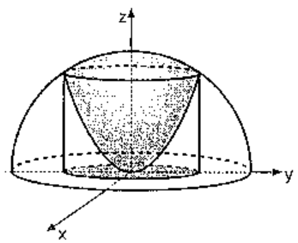
$$=k\pi\left(\frac{3\pi}{16}.2\right)=\frac{3\pi^2k}{8} \quad \text{bulunur.}$$

22. Üsten $x^2+y^2+z^2=a^2$ küresi, alttan $3az=2(x^2+y^2)$ paraboloidi tarafından sınırlanan homogen cismin ($\sigma=c$) kütlesini bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{3az}{2} + z^2 = a^2 \Rightarrow 2z^2 - 3az - 2a^2 = 0$$

$$z = \frac{a}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{3a^2}{4}$$



$$M = \iiint \sigma(x,y,z)\,dz\,dy\,dx = \iint \int_{z=\frac{2}{3a}(x^2+y^2)}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} c\,dz\,dy\,dx$$

$$= \iint\left(\sqrt{a^2-x^2-y^2} - \frac{2}{3a}(x^2+y^2)\,dy\,dx\right)$$

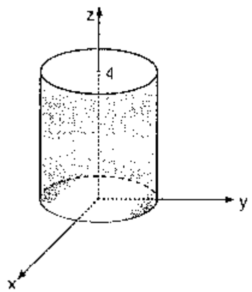
$$= \int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{\frac{a}{2}\sqrt{3}}\left(\sqrt{a^2-r^2} - \frac{2}{3a}r^2\right) r\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6a}r^4\right]_0^{\frac{a}{2}\sqrt{3}} d\varphi = \frac{19}{96}a^3$$

25. $x^2 + y^2 = 4$ silindiri $z = 0$ ve $z = 4$ düzlemleri tarafından sınırlanan cismin yoğunluğu $\sigma(x, y, z) = 20 - z^2$ şeklindedir. Bu cismin ağırlık merkezini bulunuz. Cisim homogen olsaydı ağırlık merkezi hangi noktada olurdu?

Çözüm:

$$M = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{z=0}^{4}(20 - z^2)\,dz\,dy\,dx$$



$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\left(20z - \frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 r\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\frac{186}{3} r\,dr\,d\varphi = \frac{704}{3}$$

$$M_x = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^4 x(20 - z^2)\,dz\,dy\,dx = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} x\left(20z - \frac{1}{3}z^3\right)\Bigg|_0^4 dy\,dx$$

$$= \frac{176}{3}\int_{-2}^{2} 2x\sqrt{4-x^2}\,dx = -\frac{176}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}\Bigg|_{-2}^{2} = 0$$

olduğundan

$\bar{x} = \frac{M_x}{M} = \frac{0}{M} = 0$ dır. Benzer şekilde $\bar{y} = 0$ olduğu gösterilebilir.

$$M_z = \iiint (20z - z^3)\,dz\,dy\,dx = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{4}(20z - z^3)\,r\,dz\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\left(10z^2 - \frac{1}{4}z^4\right)\Bigg|_0^4 r\,dr\,d\varphi = 96\int_0^{2\pi}\int_0^{2} r\,dr\,d\varphi = 192\,2\pi = 384\pi$$

olduğundan

$$\bar{z} = \frac{384\pi}{\frac{704}{3}} = \frac{18\pi}{11}$$

bulunur. Cisim homogen olsaydı, $\sigma(x, y, z) = k$ (sabit) olacağından

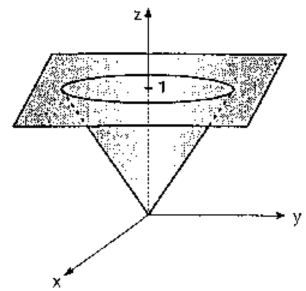
$M = k.V = k\pi.4.4 = 16k\pi$, $M_x = 0$, $M_y = 0$ ve

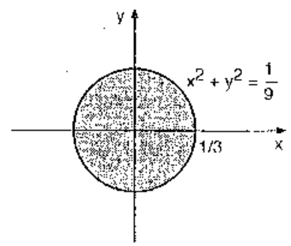
$$M_z = \iiint kz\,dz\,dy\,dx = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{4} kz\,r\,dz\,dr\,d\varphi = 32k\pi$$

olacağından $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = 2$ bulunur.

26. Üsten $z = 1$ düzlemi, alttan $z^2 = 9(x^2 + y^2)$ konisi tarafından sınırlanan homogen cismin ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm:





$\sigma(x, y, z) = k$ olsun.

Cisim homogen ve Ox ve Oy düzlemlerine göre simetrik olduğundan $\bar{x}=0$, $\bar{y}=0$ dır.

$$M=\iint\limits_{B}\int_{z=3\sqrt{x^2+y^2}}^{1}\sigma(x,y,z)\,dz\,dy\,dx=\iint\limits_{B}k\left(1-3\sqrt{x^2+y^2}\right)dy\,dx=k\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1/3}(1-3r)\,r\,dr\,d\theta$$

$$=2k\pi\left(\frac{r^2}{2}-r^3\Big|_0^{\frac{1}{3}}\right)=2k\pi\left(\frac{1}{18}-\frac{1}{27}\right)=2k\pi\frac{9}{18.27}=\frac{\pi}{27}k$$

$$M_z=\iint\limits_{B}\int_{z=3\sqrt{x^2+y^2}}^{1}z.k.dz\,dy\,dx=\frac{k}{2}\iint\limits_{B}\left(1-9\left(x^2+y^2\right)dy\,dx\right)=\frac{k}{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1/3}\left(1-9r^2\right)r.dr\,d\theta$$

$$=\frac{k}{2}.2\pi\left(\frac{r^2}{2}-\frac{9}{4}r^3\Big|_0^{\frac{1}{3}}\right)=k\pi\left(\frac{1}{18}-\frac{1}{12}\right)=k6\pi\frac{1}{18.12}=\frac{k\pi}{36}\quad\text{olacağından}$$

$$\bar{z}=\frac{M_z}{M}=\frac{\frac{c\pi}{36}}{\frac{c\pi}{27}}=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$$

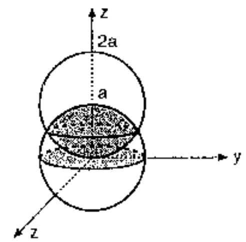
bulunur. O halde cismin ağırlık merkezi $G\left(0,0,\frac{3}{4}\right)$ noktasıdır.

BÖLÜM PROBLEMLERİ VE ÇÖZÜMLERİ

1. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2+z^2=2az$ **küreleri arasında kalan bölge üzerinde** $I=\iiint z^2dx\,dy\,dz$ **integralini hesaplayınız.**

Çözüm:

İki kürenin arakesit eğrisi;



$$\left.\begin{array}{l}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x^2+y^2+z^2=2az\end{array}\right\}\Rightarrow z=\frac{a}{2}\Rightarrow x^2+y^2=\frac{3a^2}{4}$$

çemberidir.

$$I=\iint\limits_{B}\int_{a-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}z^2dz\,dx\,dy=\frac{1}{3}\iint z^3\Big|_{a-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dx\,dy$$

$$=\frac{1}{3}\iint\left[\left(a^2-x^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}-\left(a-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)^3\right]dy$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{3}a}{2}}\left[\left(a^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}-\left(a-\sqrt{a^2-r^2}\right)^3\right]r\,dr\,d\varphi$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{3}a}{2}}\left[r\left(a^2-r^2\right)^{3/2}-a^3r+3a^2r\sqrt{a^2-r^2}-3ar\left(a^2-r^2\right)+r\left(a^2-r^2\right)^{3/2}\right]dr\,d\varphi$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{2}{5}\left(a^2-r^2\right)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{2}a^3r^2-a^2\left(a^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}a^3r^2+\frac{3}{4}ar^4\right]\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}a}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{16}a^5+\frac{3}{8}a^5+\frac{7}{8}a^5-\frac{9}{8}a^5+\frac{27}{64}a^5\right)d\varphi=\frac{13\pi}{96}$$

2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ **elipsoidi tarafından sınırlanan bölge üzerinde**

$$I=\iiint\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dx\,dy\,dz$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$\frac{x}{a}=\rho\sin\theta\cos\varphi,\quad \frac{y}{b}=\rho\sin\theta\sin\varphi,\quad \frac{z}{c}=\rho\cos\theta \quad J=abc\rho^2\sin\theta$

$$I=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{1}\rho^2 a.b.c\rho^2\sin\theta\, d\theta=\frac{abc}{5}2\pi\left(-\cos\theta\,\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{abc}{5}.2\pi(1+1)=\frac{4\pi}{5}a.b.c$$

3. $x^2+y^2+z^2=a^2$ **küresinin hacmini veren üç katlı integrali**

   a) **kartezyen koordinatlarda**

   b) **küresel koordinatlarda**

   c) **silindirik koordinatlarda yazınız.**

Çözüm:

a) $$V=\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{+\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dz\,dy\,dx$$

b) $$V=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{a}\rho^2\sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

c) $$V=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}}r\,dz\,dr\,d\theta$$

4. $I=\int_0^3\int_0^4\int_{y/2}^{\frac{y}{2}+1}\left(\frac{2x-y}{2}+\frac{z}{3}\right)dx\,dy\,dz$ **integralini**

$$\begin{cases} u=\dfrac{2x-y}{2}\\ v=\dfrac{y}{2}\\ w=\dfrac{z}{3}\end{cases}$$

dönüşümü yardımı ile hesaplayınız.

Çözüm:

$\frac{y}{2}\le x\le\frac{y}{2}+1 \Rightarrow 0\le x-\frac{y}{2}\le 1 \Rightarrow 0\le\frac{2x-y}{2}\le 1 \Rightarrow 0\le u\le 1$

$0\le y\le 4 \Rightarrow 0\le\frac{y}{2}\le 2 \Rightarrow 0\le v\le 2$

$0\le z\le 3 \Rightarrow 0\le\frac{z}{3}\le 1 \Rightarrow 0\le w\le 1$

$$\frac{1}{J}=\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{vmatrix}$$

$$=1\frac{1}{6}-\left(-\frac{1}{2}\right)0+0=\frac{1}{6}\Rightarrow J=6$$

$$I=\int_0^1\int_0^2\int_0^1(u+w)6\,du\,dv\,d\omega=6\int_0^1\left(\frac{u^2}{2}+uw\right)\Bigg|_0^1 dw=6\int_0^1\left(\frac{1}{2}+w\right)dw$$

$$=6\int_0^1\left(\frac{1}{2}+w\right)v\Bigg|_0^2=12\int_0^1\left(\frac{1}{2}+w\right)dw=12\left(\frac{w}{2}+\frac{w^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=12$$

5. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ **elipsoidinin hacmini**

$x=a\rho\sin\theta\cos\varphi$

$y=b\rho\sin\theta\sin\varphi$

$z=c\rho\cos\theta$

dönüşümü ile hesaplayınız.

Çözüm:

$J=a.b.c\rho^2\sin\theta$ olacağından

$$V=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{1}abc\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi=\frac{abc}{3}\int_{\theta=0}^{2\pi}-\cos\theta\Bigg|_0^{\pi}d\theta$$

$$=2.2\pi\frac{a.b.c}{3}=\frac{4}{3}\pi abc$$

6. $G=\{(x,y,z)\ 1\le x\le 2,\ 0\le xy\le 2,\ 0\le z\le 1\}$ **bölgesi üzerinde**

$$I=\iiint_G\left(x^2y+3xyz\right)dx\,dy\,dz$$

integralini

$$\begin{cases}u=x\\ v=xy\\ w=3z\end{cases}$$ **dönüşümü yardımı ile hesaplayınız.**

Çözüm:

$$\frac{1}{J}=\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\begin{vmatrix}u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ y & x & 0\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=3x$$

$$\Rightarrow J=\frac{1}{3x}=\frac{1}{3u}$$

$1\le x\le 2 \;\Rightarrow\; 1\le u\le 2$

$0\le xy\le 2 \;\Rightarrow\; 0\le v\le 2$

$0\le z\le 1 \;\Rightarrow\; 0\le w\le 3$

$$I=\int_0^3\int_0^2\int_1^2 (u.v+v.w)\frac{1}{3u}\,du\,dv\,dw=\frac{1}{3}\int_0^3\int_0^2\int_1^2\left(v+\frac{w.v}{u}\right)du\,dv\,dw$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^3\int_0^2 uv+\ln u\,w\,v\,\Big|_1^2\,dv\,dw=\frac{1}{3}\int_0^3\int_0^2 2v+(\ln 2)uw-v-(\ln 1)vw\,dv\,dw$$

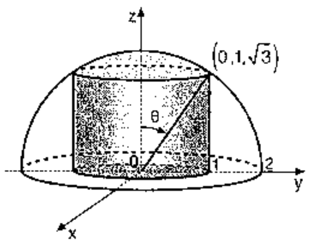
$$=\frac{1}{3}\int_0^3 \frac{v^2}{2}+w\frac{v^2}{2}\ln 2\,\Big|_1^2=\frac{1}{6}\int_0^3(4+w4\ln 2)dw=\frac{1}{6}(12+18\ln 2)=2+3\ln 2$$

7. $I=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{4-r^2}} r^2\,dz\,dr\,d\theta$ **integralini, kartezyen ve küresel koordinatlara göre yazınız.**

Çözüm:

$0\le z\le\sqrt{4-r^2} \;\Rightarrow\; 0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}$

$\left.\begin{array}{l}0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{array}\right\}\Rightarrow x^2+y^2\le 1$



İntegrasyon bölgesi, alttan $z=0$ düzlemi, üstten $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ küresi, yandan da $x^2+y^2=1$ silindiridir. Buna göre, integralin kartezyen koordinatlarının yazılışı

$$I=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{z=0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$$

olacaktır.

$z^2=4-x^2-y^2$ ve $x^2+y^2=1$ olduğundan arakesit eğrisi üzerindeki bir noktada $z^2=3\Rightarrow z=\sqrt{3}$ olur. Arekesit eğrisi üzerindeki bir noktayı orjine birleştiren doğru Oz–ekseniyle $\frac{\pi}{6}$ radyanlık bir açı yapar. $x^2+y^2=1$ silindirin küresel koordinatlardaki denklemi $\rho=\frac{1}{\sin\theta}$ olacağından istenen integral

$$I=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/6}\int_{\rho=0}^{2}\rho\sin\theta\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi+\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=\pi/6}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{1/\sin\theta}\rho\sin\theta\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

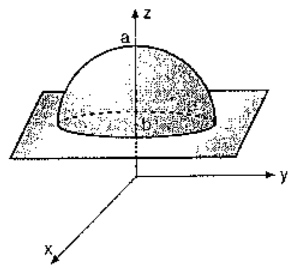
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^{2}\rho^3\sin^2\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi+\int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_0^{1/\sin\theta}\rho^3\sin^2\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

8. Yukarıdan $x^2+y^2+z^2=a^2$ küresi, alttan $z=b$ $(0\le b\le a)$ düzlemi arasında kalan bölgenin hacmini bulunuz.

Çözüm:

Küre ile düzlemin arakesiti

$x^2+y^2=a^2-b^2$ çemberidir.



$$V=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{a^2-b^2}}\int_{z=b}^{\sqrt{a^2-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$$

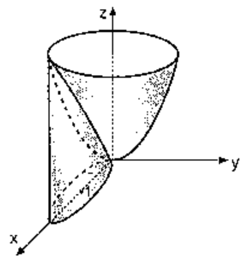
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{a^2-b^2}}\left(r\sqrt{a^2-r^2}-br\right)dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}-\frac{1}{3}\left(a^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{br^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{a^2-b^2}}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{3}\left(a^3-b^3\right)-\frac{1}{2}\left(a^2-b^2\right)b\right]d\theta=\frac{\pi}{3}\left[2\left(a^3-b^3\right)-3b\left(a^2-b^2\right)\right]$$

10. $r=2\cos\theta$ silindiri, $z=r^2$ paraboloidi ve $z=0$ düzlemi arasında kalan bölgenin hacmini bulunuz.

Çözüm:



$$V = 2\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{2\cos\theta}\int_{z=0}^{r^2} r\,dz\,dr\,d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \frac{r^4}{4}\Bigg|_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= 8\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta = \frac{3\pi}{2}\,\text{br}^3$$

11. $B = \{(x,y,z):\ 0 \le x \le a,\ \ 0 \le y \le b,\ \ 0 \le z \le c\}$ **bölgesine yerleştirilen bir cismin yoğunluğu her noktada O noktanın koordinatları toplamı kadardır. Bu cismin kütlesinin** $\frac{a.b.c}{2}(a+b+c)$ **olacağını gösteriniz .**

Çözüm:

$$M = \iiint_B \sigma(x,y,z)\,dz\,dy\,dx = \int_0^c\int_0^b\int_0^a (x+y+z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^c\int_0^b\left(\frac{x^2}{2}+x(y+z)\right)\Bigg|_0^a dy\,dz$$

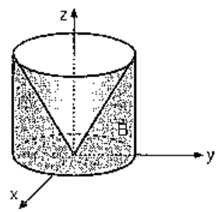
$$= a\int_0^c\int_0^b\left(\frac{a}{2}+y+z\right)dy\,dz = a\int_0^c\left(\frac{ay}{2}+\frac{y^2}{2}+zy\Bigg|_0^b\right)dz = a.b\int_0^c\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+z\right)dz$$

$$= abc\left(\frac{a+b+c}{2}\right)$$

12. **Alttan z = 0 düzlemi, üstten z = r konisi, yandan r = 1 silindiri tarafından sınırlanan bölgeye yerleştirilen homogen bir cismin ağırlık merkezini bulunuz.**

Çözüm:

Simetriden $\bar{x} = \bar{y} = 0$ olacağı açıktır.



$$M = \iiint_B \sigma(x,y,z)\,dz\,dy\,dx = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=0}^{r} k.r\,dz\,dr\,d\theta = k\frac{2\pi}{3}$$

$$M_z = \iiint_B z\sigma(x,y,z)\,dz\,dy\,dx = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=0}^{r} z.k.r\,dz\,dr\,d\theta = k\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \bar{z} = \frac{M_z}{M} = \frac{\frac{k\pi}{4}}{\frac{k2\pi}{3}} = \frac{3}{8}.$$

Ağırlık merkezi $G = \left(0,0,\frac{3}{8}\right)$ noktasıdır.

Bölüm 10 EĞRİSEL İNTEGRALLER

EĞRİSEL İNTEGRALLER

TANIM

C bir düzgün eğri $P = \{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ de C nin bir parçalanması olsun.

(x_k, y_k, z_k), $\overline{A_{k-1}A_k}$ eğri parçası üzerinde alınan herhangi bir nokta ve $\Delta\ell_k$, $\widehat{A_{k-1}A_k}$ eğri parçasının uzunluğu olmak üzere $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum f(x_k,y_k,z_k)\Delta\ell_k$ limiti varsa bu limite fonksiyonun C eğrisi üzerindeki **eğrisel integrali** denir,

$$\int_C f(x,y,z)\,d\ell$$

ile gösterilir. Bu integrale **Birinci Çeşit Eğrisel İntegral** de denir.

C eğrisinin parametrik gösterimi

$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, $\ a \le t \le b$ ise $d\ell = \|\mathbf{r}'(t)\|dt$ olacağından

$$\int_C f(x,y,z)\,dl = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\,\|\mathbf{r}'(t)\|\,dt$$

olur.

VEKTÖR ALANLARININ EĞRİSEL İNTEGRALLERİ

TANIM

C bir düzgün eğri, **F** de bu eğri üzerinde tanımlı bir vektör alanı olsun. **T**, eğrinin (x(t), y(t), z(t)) noktasındaki birim teğet vektör olmak üzere

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,d\ell$$

integraline **F** nin C üzerindeki integrali denir. Bu integrale **ikinci çeşit eğrisel integral** adı verilir.

EĞRİSEL İNTEGRALLERİN TEMEL TEOREMLERİ

TEOREM 10.1

C eğrisinin başlangıç noktası (x_1, y_1, z_1) bitim noktası (x_2, y_2, z_2) olsun. f bu C eğrisini içine alan bölge üzerinde türevlenebilen üç değişkenli bir fonksiyon ve **grad***f*, C eğrisi üzerinde sürekli ise

$$\int_C \mathbf{grad} f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

olur.

TEOREM 10.2:

F, türevlenebilen bir fonksiyonun gradiyeti ise $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ integali yoldan bağımsızdır.

SONUÇ 10.1:

P, Q, R fonksiyonları bir D bölgesinde sürekli olsunlar. Eğer D bölgesinde tanımlı ve

$$d\,f = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

olacak şekilde bir f fonksiyonu varsa, yani $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ ifadesi f fonksiyonunun tam diferensiyeli ise D bölgesinde (x_1, y_1, z_1) ile (x_2, y_2, z_2) noktalarını birleştiren her bir C eğrisi için

$$\int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

dır. Bu durumda integral **yoldan bağımsızdır** denir.

TEOREM 10.3:

C, D bölgesinde bulunan yönlendirilmiş bir kapalı eğri ve **F** de D bölgesinde bir vektör alanı olsun. Eğer $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ yola bağlı değilse

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

olur.

TEOREM 10.4: (Green Teoremi):

B, xOy düzleminde bir basit bölge, C de bu bölgeyi çevreleyen ve saat yönünün ters yönünde yönlendirilmiş bir eğri olsun. P ve Q fonksiyonları B üzerinde sürekli türevlere sahip fonksiyonlar ise

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

dır. Yukarıdaki eşitliğe **Green formülü** adı verilir.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. Aşağıdaki integralleri, karşılarında yazılı eğri parçaları üzerinde hesaplayınız.

a) $\int_C \left(x^2 - y^2\right) d\ell$, C...$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$

b) $\int_C \left(x^2 - y^2\right) d\ell$, C eğrisi, köşeleri $(1,1), (-1,-1), (-1,1), (1,-1)$ olan kare

c) $\int_C (x + y) d\ell$, C...$r(t)t\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1$

d) $\int_C (xy + y + z) d\ell$, C...$\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + (2 - 2t)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$

e) $\int 3z\sqrt{3x^2 + y^2 + z^2}\, d\ell$, C...$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $-1 \le t \le 1$

Çözüm:

a) $\int_C \left(x^2 - y^2\right) d\ell$, C...$r(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$

$$r'(t) = -a\sin t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j} \Rightarrow \| r'(t) \| = \left(a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t\right)^{1/2} = a$$

$$\int_C \left(x^2 - y^2\right) d\ell = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(a^2\cos^2 t - a^2\sin^2 t\right) a\,dt = a^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t\,dt$$

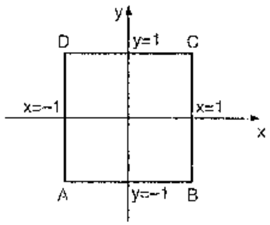
$$= a^3 \frac{\sin 2t}{2} \Big|_0^2 = \frac{a^3}{2}$$

b) $\int_C (x^2-y^2)\,d\ell$, C eğrisi, köşeleri (1,0),(0,1),(−1,0),(0,−1) olan kare

$$\int_C (x^2-y^2)d\ell = \int_{AB}(x^2-y^2)d\ell + \int_{BC}(x^2-y^2)d\ell + \int_{CD}(x^2-y^2)d\ell + \int_{DA}(x^2-y^2)d\ell$$

$$\int_{AB}(x^2-y^2)d\ell = \int_{-1}^{1}(x^2-1)\sqrt{1+0}\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3}-x\Big|_{-1}^{1} = -\frac{4}{3}$$



$$\int_{BC}(x^2-y^2)d\ell = \int_{-1}^{1}(1-y^2)\sqrt{1+0}\,dy = y-\frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$

$$\int_{CD}(x^2-y^2)d\ell = \int_{1}^{-1}(x^2-1)\sqrt{1+0}\,dx = \frac{x^3}{3}-x\Big|_{1}^{-1} = \frac{4}{3}$$

$$\int_{DA}(x^2-y^2)d\ell = \int_{1}^{-1}(1-y^2)\sqrt{1+0}\,dy = y-\frac{y^3}{3}\Big|_{1}^{-1} = -\frac{4}{3}$$

$$\int_C (x^2-y^2)dl = -\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}-\frac{4}{3} = 0$$

c) C ... $r(t) = ti+(1-t)j$, $0 \le t \le 1$

$$r'(t) = i-j \Rightarrow \|r'(t)\| = \sqrt{2} \Rightarrow \int_C (x+y)dl = \int_0^1 (t+(1-t))\sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}$$

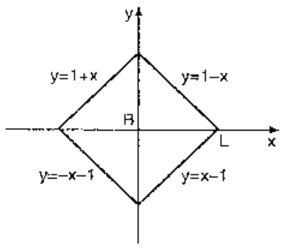
d) $\int_C (xy+y+z)d\ell$, C....$r(t) = 2ti+tj+(2-2t)k$, $0 \le t \le 1$

$$r'(t) = 2i+j-2k \Rightarrow \|r'(t)\| = \sqrt{4+1+4} = 3$$

$$\int_C (xy+y+z)d\ell = \int_0^1 (2t.t+t+2-2t)3\,dt$$

$$= 3\int_0^1 (2t^2-t+2)dt$$

$$= 3\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+2\right) = \frac{13}{2}$$



e) $\int_C 3z\sqrt{3x^2+y^2+z^2}\,d\ell$, C... $r(t) = i+j+tk$, $-1 \le t \le 1$

$r'(t) = k \Rightarrow \|r'(t)\| = 1$

$$\int_C 3z\sqrt{3x^2+y^2+z^2}\,dt = \int_{-1}^{1} 3t\sqrt{3+1+t^2}\,dt$$

$$= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} 2t\sqrt{4+t^2}\,dt$$

$$= \frac{3}{2}\frac{2}{3}(4+t^2)^{3/2}\Big|_{-1}^{1} = 0$$

2. Aşağıdaki integralleri, karşılarında yazılı olan eğri parçaları üzerinde hesaplayınız.

a. $\int_C 2xy\,dx + x^2dy$, C....$y = x^{1/2}$, $0 \le x \le 1$

b. $\int_C ye^{xy}dx + xe^{xy}dy$, C....$y = \sin^3 x$, $0 \le x \le \pi$

c. $\oint_C [\sin(xy)+xy\cos(x,y)]dx + x^2\cos(xy)dy$, C...$x^2+y^2=1$

d. $\oint_C y^3\,dx - x^3\,dy$, C...$|x|+|y|=1$

e. $\oint_C xy^6\,dx + (3x^2y^5+6x)dy$, C....$x^2+4y^2=4$

f. $\oint_C (7x-3y+2)dx + (4y-3x-5)dy$, C...$2x^2+3y^2=1$

g. $\int_C xy\,dx + ydy - yzdz$, C...$r(t) = ti+t^2j+tk$, $0 \le t \le 1$

h. $\int_C z\,dz + x\,dy + y\,dz$, C...r(t) = sin t i + cos t j + t k, $0 \le t \le 2\pi$

ı. $\int_C -4xy\,dx + 8y\,dy + 2dz$, C...r(t) = t i + t^2 j + t k, $0 \le t \le 2$

i. $\int_C xy\,dx + (x+2)dy + z^2 dz$, C...**r**(t) = (t + 1) i + (t − 1) j + t^2 **k**, $-1 \le t \le 2$

j. $\int_C e^{y+2z}(dx + x\,dy + 2x\,dz)$ c...r(+) = tj + t^2j + t^3k $0 \le t \le 1$

Çözüm:

a) $I = \int_C 2xy\,dx + x^2 dy$, C...$y = x^{1/2}$, $0 \le x \le 1$

$x = t \Rightarrow y = t^{1/2} \Rightarrow \mathbf{r}(t) = t\,i + t^{1/2}\,j$

$$I = \int_0^1 \left(2.t.t^{1/2} + t^2 \frac{1}{2} t^{-1/2}\right) dt = \int_0^1 \left(2t^{3/2} + \frac{1}{2} t^{3/2}\right) dt = \frac{4}{5} t^{5/2} + \frac{1}{5} t^{5/2} \Big|_0^1 = 1$$

b) $I = \int_C ye^{xy}\,dx + xe^{xy}\,dy$, C...$y = \sin^3 x$, $0 \le x \le \pi$

x = 0 için y = 0, x = π için y = 0 olur.

$$I = \int_C d(e^{xy}) = e^{xy} \Big|_{(0,0)}^{(\pi,0)} = e^0 - e^0 = 1 - 1 = 0$$

c) $I = \oint_C [\sin(xy) + xy\cos(xy)]dx + x^2 \cos(xy)dy$, C...$x^2 + y^2 = 1$

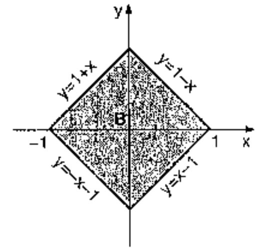
$$\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} = 2x\cos xy - yx^2\sin(xy) - x\cos(xy) - x\cos(xy) + x^2 y\sin(xy) = 0$$

olduğundan, Green formülünden

$$I = \iint_{x^2+y^2\le 1} (Q_x - P_y)\,dy\,dx = \iint_{x^2+y^2\le 1} 0\,dy\,dx = 0$$

bulunur.

d) $I = \oint_C y^3\,dx - x^3 dy$, $C = |x| + |y| = 1$



$Q_x - P_y = -3x^2 - 3y^2 = -3(x^2 + y^2)$

$$I = -4 \int_0^1 \int_0^{1-x} 3(x^2 + y^2)\,dy\,dx$$

$$= -4 \int_0^1 3x^2(1-x) + (1-x)^3\,dx$$

$$= -4 \int_0^1 (6x^2 - 4x^3 - 3x + 1)\,dx$$

$$= -2$$

e) $I = \oint_C xy^6\,dx + (3x^2y^5 + 6x)dy$, C....$x^2 + 4y^2 = 4$

$$I = \iint_B (Q_x - P_y)\,dy\,dx = \iint_B (6xy^5 + 6 - 6xy^5)\,dy\,dx = \iint_B 6\,dy\,dx$$

olur. $\frac{x}{2} = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ dönüşümü yapılırsa, $j = 2r$ olacağından

$$I = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} 6.2\,\mathbf{r}\,d\mathbf{r}\,d\theta = 12.2\pi.\frac{1}{2} = 12\pi$$

bulunur.

g) $I = \int_C xy\,dx + y\,dy - yz\,dz$ C....**r**(t) = t**i** + t^2 **j** + t**k** $0 \le t \le 1$

$$I = \int_0^1 (t.t^2 + t^2.2t - t^2.t)\,dt = \int_0^1 2t^3 dt = \frac{t^4}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

ı) $I = \int_C -4xy\,dx + 8y\,dy + 2dz$, C....**r**(t) = t i + t^2 j + t **k**, $0 \le t \le 2$

$$I = \int_0^2 (-4.t.t^2 + 8t^2.2t + 2)\,dt = \int_0^2 (12t^3 + 2)\,dt = 3t^4 + 2t \Big|_0^2 = 48 + 4 = 52$$

j) $\int_C e^{y+2z}(dx + xdy + 2x\,dz), \quad r(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$

$$= \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} d\left(xe^{y+2z}\right) = xe^{y+2z}\Big|_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} = e^3$$

3. Aşağıdaki integrallerin yoldan bağımsız olduğunu gösterip değerini hesaplayınız.

a) $\displaystyle\int_{(1,-2)}^{(3,4)} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$

b) $\displaystyle\int_{(1,0)}^{(-1,0)} (2xy-1)dx + \left(x^2+6y\right)dy$

c) $\displaystyle\int_{\left(1,0,\frac{\pi}{2}\right)}^{\left(2,\pi,\frac{3\pi}{2}\right)} \cos y \sin z\,dx - x\sin y \sin z\,dy + x\cos y \cos z\,dz$

ç) $\displaystyle\int_{(1,0,1)}^{(2,1,2)} y^2z^3\,dx + 2xyz^3\,dy + 3xy^2z^2\,dz$

d) $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{\left(\pi,\pi,\frac{1}{\pi}\right)} (\cos x + 2yz)dx + (\sin y + 2xz)dy + (z + 2xy)dz$

Çözüm:

a) $$I = \int_{(1,-2)}^{(3,4)} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$$

$$\left.\begin{aligned} P(x,y) &= \frac{y}{x^2} \\ Q(x,y) &= -\frac{x}{x^2} = -\frac{1}{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_y = Q_x = \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \text{İntegral yoldan bağımsızdır.}$$

$$f(x,y) = \int \frac{y}{x^2}dx + u(y) = -\frac{y}{x} + u(y)$$

$$f_y = Q = -\frac{1}{x} + u'(y) = -\frac{1}{x} \Rightarrow u'(y) = 0 \Rightarrow u(y) = c$$

$$f(x,y) = -\frac{y}{x} + c \Rightarrow I = f(3,4) - f(1,-2), -\frac{4}{3} - \frac{2}{1} = -\frac{10}{3}$$

b) $$I = \int_{(1,0)}^{(-1,0)} (2xy-1)dx + \left(x^2+6y\right)dy$$

$$\left.\begin{aligned} P(x,y) &= 2xy - 1 \\ Q(x,y) &= x^2 + 6y \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_y = Q_x = 2x$$

$$f(x,y) = \int (2xy-1)dx + u(y) = x^2y - x + u(y)$$

$$f_y = Q \Rightarrow x^2 + u'(y) = x^2 + 6y \Rightarrow u(y) = 3y^2 + C$$

$$f(x,y) = x^2y - x + 3y^2 + c \Rightarrow I = f(-1,0) - f(1,0) = 1 - (-1) = 2$$

c) $$I = \int_{\left(1,0,\frac{\pi}{2}\right)}^{\left(2,\pi,\frac{3\pi}{2}\right)} \cos y \sin dx - x\sin y \sin z dy + x\cos y \cos z\,dz$$

$$\left.\begin{aligned} P(x,y,z) &= \cos y \sin z \\ Q(x,y,z) &= -x\sin y \sin z \\ R(x,y,z) &= x\cos y\cos z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} P_y &= Q_x = -\sin y \sin z \\ P_z &= R_x = \cos y \cos z \\ R_y &= Q_z = -x\cos y \sin z \end{aligned}$$

$$f(x,y) = \int \cos y \sin z dx + u(y,z) = x\cos y \sin z + u(y,z)$$

$$f_y = Q \Rightarrow -x\sin y \sin z + u_y(y,z) = -x\sin y \sin z$$

$$\Rightarrow u_y(y,z) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(y,z) = h(z)$$

$$f_z = R \Rightarrow x\cos y \cos z + h'(z) = x\cos y\cos z \Rightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow h(z) = c$$

$$f_z(x,y,z) = x\cos y \sin z + c$$

$$I = f\left(2,\pi,\frac{3\pi}{2}\right) - f\left(1,0,\frac{\pi}{2}\right) = 2 - 1 = 1$$

4. $$I = \int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} \left(2xyz^3 + 3\right)dx + \left(mx^2z^3 - 2\right)dy + \left(3x^2yz^2 + 4z\right)dz$$

integralinin yoldan bağımsız olması için m ne olmalıdır. m nin bu değeri için integrali hesaplayınız.

Çözüm:

$$\left.\begin{aligned} P(x,y,z) &= 2xyz^3+3 \\ Q(x,y,z) &= mx^2z^3-2 \\ R(x,y,z) &= 3x^2yz^2+4z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} & P_y = Q_x = 2xz^3 = 2mxz^3 \Rightarrow m=1 \text{ olmalı} \\ & P_z = R_x = 6xyz^2 \\ & Q_z = R_y = 3x^2z^2 \end{aligned}$$

$$f(x,y,z) = \int 2xyz^3+3\,dx + u(y,z) = x^2yz^3+3x+u(y,z)$$

$$f_y = Q \Rightarrow x^2z^3+u_y(y,z) = x^2z^3-2 \Rightarrow u_y(y,z) = -2 \Rightarrow u(y,z) = -2y+h(z)$$

$$f_z = R \Rightarrow 3x^2yz^2+h'(z) = 3x^2yz^2+4z \Rightarrow h'(z) = 4z \Rightarrow h(z) = 2z^2$$

$$f(x,y,z) = x^2yz^3+3x-2y+2z^2$$

$$I = f(1,2,3)-f(0,0,0) = 71$$

5. Aşağıda verilen F alanı ve r eğri için $\int_C F.dr$ integralini hesaplayınız.

a) $F = x^2\,i+yz\,j+y^2\,k,\quad r(t) = 3t\,j+4t\,k,\quad 0 \le t \le 1$

b) $F = z\,i-y\,j+x\,k,\quad r(t) = 5\,i-\sin t\,j-\cos t\,k,\quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

c) $F = y\,i+xy\,j+z\,k,\quad r(t) = (1-t)i+t\,j+\pi t\,k,\quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

d) $F = 5e^{\sin \pi x}\,i-4e^{\cos \pi x}\,j,\quad r(t) = \frac{1}{2}i+2j-\ln(\cosh t)k,\quad 0 \le t \le \frac{\pi}{6}$

Çözüm:

a) $F = x^2\,i+yz\,j+y^2\,k,\quad r(t) = 3t\,j+4t\,k,\quad 0 \le t \le 1$

$F(0,3t,4t) = 12t^2\,j+9t^2\,k$ ve $\frac{dr}{dt} = 3j+4k$

$F\cdot\frac{dr}{dt} = 36t^2+36t^2 = 72t^2$ olduğundan $\int_C F\cdot dr = \int_0^1 72t^2dt = 24t^3\Big|_0^1 = 24$ bulunur.

b) $F\cdot dr = [(-\cos t)i+\sin t\,j+5k][\cos t\,j+\sin t\,k]dt = (\sin t\cos t+5\sin t)dt$ olduğundan

$$\int_C F\cdot dr = \int_0^{\pi/2}(\sin t\cos t+5\sin t)dt = \left(\frac{1}{2}\sin^2 t-5\cos t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{11}{2}$$

c) $F = y\,i+xy\,j+z\,k\quad r(t) = (1-t)i+t\,j+\pi t\,k\quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

$F(1-t,t,\pi t) = t\,i+t(1-t)\,j+\pi t\,k$ ve $\frac{dr}{dt} = -i+j+\pi k$

$F\cdot\frac{dr}{dt} = -t+t(1-t)+\pi^2 t = -t^2+\pi^2 t$

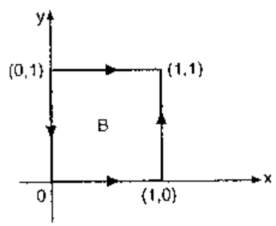
$$\int_C F\cdot dr = \int_0^{\pi/2}(\pi^2 t-t^2)dt = \frac{\pi^2}{2}t^2-\frac{t^3}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^4}{8}-\frac{\pi^3}{24}$$

6. C eğrisi köşeleri (0, 0), (1, 0), (1, 1) ve (0, 1) olan kare olup saat yönünün tersine yönlendirilmiştir.

$\oint_C xy\,dx+(x^{3/2}+y^{3/2})dy$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$P(x,y) = xy,\quad Q(x,y) = x^{3/2}+y^{3/2}$



$$\oint_C xy\,dx+(x^{3/2}+y^{3/2})dy = \iint_B (Q_x-P_y)dy\,dx$$

$$= \int_0^1\int_0^1\left(\frac{3}{2}x^{1/2}-x\right)dy\,dx$$

$$= \int_0^1\left(\frac{3}{2}x^{1/2}-x\right)dx$$

$$= x^{3/2}-\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

7. C eğrisi $x^2+y^2=1$ birim çemberi olup yönü saat yönünün tersidir.

$I = \oint_C (x^2+y^2)^{3/2}dx+(x^2+y^2)^{3/2}dy$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$I = \iint_{x^2+y^2\le 1}(Q_x-P_y)dy\,dx = \iint\left(\frac{3}{2}(x^2+y^2)^{1/2}2x-\frac{3}{2}(x^2+y^2)^{1/2}2y\right)dy\,dx$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}(3r\cos\theta.r-3r\sin\theta.r)r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}(r^3\cos\theta-r^3\sin\theta)\Big|_0^1 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}(\cos\theta-\sin\theta)d\theta = \sin\theta+\cos\theta\Big|_0^{2\pi} = 0$$

8. **Green Teoreminden yararlanarak aşağıdaki integralleri hesaplayınız. Eğrilerin yönü saat yönünün tersidir.**

a) $\oint_C (2x-y)dx + (x+3y)dy$, C eğrisi $x^2 + 4y^2 = 4$ elipsi

b) $\oint_C 4xy^3dx + 6x^2y^2\,dy$, C eğrisi $x^2 + y^2 = 1$ çemberi

c) $\oint_C ydx - xdy$, C eğrisi $r = 1 - \cos\varphi$ kardiyoidi

ç) $\oint_C xydx + \frac{1}{2}(x^2 + xy)dy$, C eğrisi $x^2 + 4y^2 = 1$ elipsinin üst yarısı ile $(-1, 0)$ ve $(1, 0)$ noktalarını birleştiren doğru parasının birleşimidir.

d) $\oint_C (\cos^3 x + e^x)dx + e^y\,dy$, C eğrisi, $x^6 + y^8 = 1$ kapalı eğrisi

e) $\oint_C e^x \sin y\,dx + e^x \cos y\,dy$, C eğrisi, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ eğrisi ile $(0, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$ noktalarını birleştiren kırık çizgi

f) $\oint_C y^2dx + x^2dy$, C eğrisi, $x = 0$, $x + y = 1$, $y = 1$ doğruları arasında kalan üçgensel bölgenin çevre eğrisidir.

g) $\oint_C (6y + x)dx + (2x + y)dy$, C eğrisi $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ çemberi

Çözüm:

a) $I = \oint_C (2x-y)dx + (x+3y)dy$, C eğrisi $x^2 + 4y^2 = 4$

$$I = \iint_{x^2+4y^2\le 4} (Q_x - P_y)dy\,dx = \iint [1-(-1)]dy\,dx$$

$$= 2\iint_B dx\,dy = 2.2\pi = 4\pi$$

c) $I = \oint_C y\,dx - x\,dy$ C eğrisi $r = 1 - \cos\theta$ kardiyoidi

$$I = \iint (Q_x - P_y)dy\,dx = \iint (-1-1)dy\,dx = -2\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1-\cos\theta} r\,dr\,d\theta = -2\int_0^{2\pi}\frac{(1-\cos\theta)^2}{2}d\theta$$

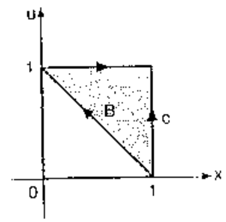
$$= -\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos\theta + \frac{\cos 2\theta + 1}{2}\right)d\theta = -\left(\theta - 2\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = -3\pi$$

d) $I = \oint_C (\cos^3 x + e^x)dx + e^y dy$ C eğrisi $x^6 + y^8 = 1$ kapalı eğrisi

$P(x,y) = \cos^3 x + e^x \Rightarrow P_y = 0$ ve $Q(x,y) = e^y \Rightarrow Q_x = 0$

$$I = \iint_B (Q_x - P_y)dy\,dx = 0$$

f) $I = \oint_C y^2dx + x^2dy$ C eğrisi, $x = 1$, $x + y = 1$, $y = 1$ doğruları arasında kalan üçgensel bölgenin çevre eğrisidir.



$$I = \oint_C y^2dx + x^2dy = \iint_B (2x - 2y)dydx$$

$$= \int_0^1\int_{1-x}^1 2x - 2y\,dy\,dx = \int_0^1 2xy - y^2\Big|_{1-x}^1 dx$$

$$= \int_0^1\left[2x - 1 - 2x(1-x) + (1-x)^2\right]dx$$

$$= \int_0^1\left(2x^2 - 1 + 1 - 2x + x^2\right)dx = \int_0^1\left(3x^2 - 2x\right)dx = x^3 - x^2\Big|_0^1 = 0$$

9. **Herhangi bir kapalı C eğrisi için**

$I = \oint_C 4x^3ydx + x^4dy = 0$ **olduğunu green teoreminden yararlanarak gösteriniz.**

Çözüm:

$Q(x,y) = x^4 \Rightarrow Q_x = 4x^3$, $P(x,y) = 4x^3y \Rightarrow P_y = 4x^3$

$I = \iint_B (Q_x - P_y)dy\,dx = \iint_B 0\,dx = 0$ bulunur.

10. Green teoreminden yararlanarak, herhangi bir kapalı C eğrisi için

$$\oint_C -x^3dx + y^3dy = 0$$ **olduğunu gösteriniz .**

Çözüm:

$P = -x^3,\ Q = y^3,\ Q_x - P_y = 0 - 0 = 0$ olduğundan

$$\int_C -x^3dx + y^3dy = \iint_B 0\,dx\,dy = 0$$

bulunur.

EĞRİSEL İNTEGRALLERİN UYGULAMALARI

A) ALAN HESABI

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx}$$

B) YAY UZUNLUĞU HESABI

$$\boxed{L = \int_C d\ell}$$

C) KÜTLE HESABI

$$\boxed{M = \int_C \sigma(x,y,z)d\ell}$$

D) AĞIRLIK MERKEZİ

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{M}\int_C x\sigma(x,y,z)d\ell,} \quad \boxed{\bar{y} = \frac{1}{M}\int_C y\sigma(x,y,z)d\ell,}$$

$$\boxed{\bar{z} = \frac{1}{M}\int_C z\sigma(x,y,z)d\ell}$$

E) İŞ HESABI

$$\boxed{W = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}}$$

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. Aşağıda çevre eğrileri verilen bölgelerin alanlarını hesaplayınız.

a) $\mathbf{r}(t) = [2\cos t(1-\cos t)+1]\mathbf{i} + [2\sin t(1-\cos t)]\mathbf{j},\ 0 \le t \le 2\pi$ (kardiyoid)

b) $\mathbf{r}(t) = \cos^3 t\,\mathbf{i} + \sin^3 t\,\mathbf{j},\ 0 \le t \le 2\pi$ (astroit)

c) $\mathbf{r}(t) = a(2\cos t - \cos 2t)\,\mathbf{i} + a(2\sin t - \sin 2t),\ 0 \le t \le 2\pi$

ç) $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t)\,\mathbf{i} + (1 - \cos t)\,\mathbf{j}$ sikloidinin bir yayı ile $0x$ – ekseni

d) $x^3 + y^3 - 3axy = 0\ (a > 0)$, (Dekart yaprağı)

(Yol gösterme: $y = tx$ koyarak parametrik olarak yazınız.)

e) $(x + y)^3 = a\,xy$ eğrisi

Çözüm

a) $\mathbf{r}(t) = [2\cos t(1-\cos t)+1]\mathbf{i} + [2\sin t(1-\cos t)]\mathbf{j},\ 0 \le t \le 2\pi$

$x = 2\cos t\,(1 - \cos t) + 1 \Rightarrow dx = (\sin t + 4\cos t.\sin t)dt$

$y = 2\sin t\,(1 - \cos t) \Rightarrow dy = (2\cos t - 2\cos^2 t + 2\sin^2 t)dt$

$$A = \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(-8\cos^3 t + 6\sin^2 t + 4\cos^4 t + 4\cos^2 t\sin^2 t + 2\cos t\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(-8\cos^3 t + 6\sin^2 t + 4\cos^2 t + 2\cos t\right)dt$$

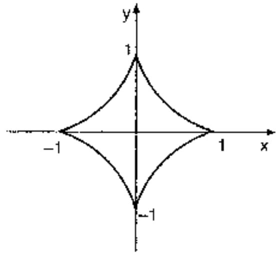
$$= \int_0^{2\pi}\left[-4\cos t + 4\sin^2 t + \sin^2 t + \cos t\right]dt = \int_0^{2\pi}\left[5\cdot\frac{1-\cos 2t}{2} - 3\cos t\,dt\right]$$

$$= \frac{5}{2}\left(0 - \frac{\sin 2t}{2}\right) - 3\sin t\Big|_0^{2\pi} = \frac{5}{2}\cdot 2\pi = 5\pi$$

b) $r(t) = \cos^3 t\, i + \sin^3 t\, j \quad 0 \le t \le 2\pi$

$x = \cos^3 t \Rightarrow dx = -3\cos^2 t.\sin t\, dt$

$y = \sin^3 t \Rightarrow dy = 3\sin^2 t \cos t\, dt$



$$A = \frac{1}{2}\int_c xdy - ydx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(3\sin^2 t\cos^4 t + 3\cos^2 t\sin^4 t\right) dt$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t\, dt = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \frac{(\sin 2t)^2}{4}\, dt$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 4t}{2}\right)dt = \frac{3}{16}\left(t - \frac{\sin 4t}{t}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{8}\pi$$

c) $r(t) = a(2\cos t - \cos 2t)\, i + a(2\sin t - \sin 2t)\, j \quad 0 \le t \le 2\pi$

$x = a(2\cos t - \cos 2t) \Rightarrow dx = (-2a\sin t + 2a\sin 2t)dt$

$y = a(2\sin t - \sin 2t) \Rightarrow dy = (2a\cos t - 2a\cos 2t)dt$

$$A = \frac{1}{2}\int_c xdy - ydx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 4a^2 - \left(4a^2 + 2a^2\right)\cos t\cos 2t + 2a^2 - \left(4a^2 + 2a^2\right)(\sin t\sin 2t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 6a^2 - \left(6a^2\right)[\cos t\cos 2t + \sin t\sin 2t]dt = \frac{1}{2}\cdot 6a^2\int_0^{2\pi} [1 - \cos(2t - t)]dt$$

$$= 2a^2\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)dt = 3a^2(t - \sin t)\Big|_0^{2\pi} = 3a^2(2\pi) = 6\pi a^2$$

ç) $r(t) = (t - \sin t)\, i + (1 - \cos t)\, j$ sikloidinin bir yayı ile Ox − ekseni

$x = t - \sin t \Rightarrow dx = (1 - \cos t)\, dt$

$y = 1 - \cos t \Rightarrow dy = \sin t$

$$A = \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{0} xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{0} \left(t\sin t - \sin^2 - 1 + \cos t - \cos^2 t\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{0} (t\sin t + 2\cos t - 2dt) = \frac{1}{2}\left(\int_{2\pi}^{0} t\sin t\, dt + [2\sin t - 2t]_{2\pi}^{0}\right)$$

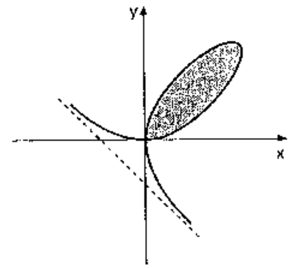
$$= \frac{1}{2}\left(-t.\cos t\Big|_{2\pi}^{0} - \int_{2\pi}^{0} -\cos t\, dt + 4\pi\right) = \frac{1}{2}\left(2\pi + \sin t\Big|_{2\pi}^{0} + 4\pi\right) = 3\pi$$

d) $x^3 + y^3 - 3axy = x \quad (a > 0)$ (Descartes yaprağı)

$y = tx$ yazılırsa $x^3 + t^3x^3 - 3ax^2t = 0 \Rightarrow$

$$x = \frac{3at}{t^3+1} \Rightarrow y = \frac{3at^2}{t^3+1}$$

parametrik gösterimi elde edilir.



$$dx = \frac{3at^3 + 3a - 9at^3}{\left(t^3+1\right)^2}dt = \frac{3a - 6at^3}{\left(t^3+1\right)^2}dt$$

$$dy = \frac{6at^4 + 6at - 9at^4}{\left(t^3+1\right)^2}dt = \frac{6at - 3at^4}{\left(t^3+1\right)^2}dt$$

$$A = \frac{1}{2}\int_c xdy - ydx$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{18a^2t^2 - 9a^2t^5}{\left(t^3+1\right)^3} - \frac{9a^2t^2 - 18a^2t^5}{\left(t^3+1\right)^3}\right)dt$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{9a^2t^2 + 9a^2t^5}{\left(t^3+1\right)^3}dt = 2\cdot\frac{9a^2}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{\left(t^3+1\right)^2}dt$$

$$= 2\cdot\frac{3}{2}a^2\left(-\frac{1}{t^3+1}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}a^2$$

2. Yarıçapı a olan çember, yarıçapı R olan sabit bir çember üzerinde kaymadan yuvarlanmaktadır.

$\frac{R}{a} = m$ (tamsayı) olduğu bilinmektedir. Hareketli çemberin sabit bir noktasının çizdiği eğrinin (episikloid) sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:

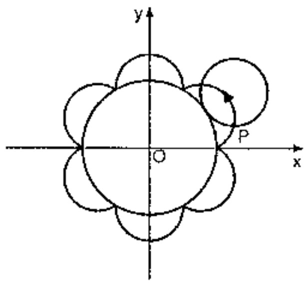
$$r(t)=\left((a+R)\cos t-a\cos\frac{(a+R)}{a}t\right)i+\left((a+R)\sin t-a\sin\frac{(a+R)}{a}t\right)j$$

$$x=(a+R)\cos t-a\cos\frac{a+R}{a}t$$

$$dx=-(a+R)\sin t+a\left(\frac{a+R}{a}\right)\sin\frac{a+R}{a}t$$

$$y=(a+R)\sin t-a\sin\frac{a+R}{a}t$$

$$dy=(a+R)\cos t-a\left(\frac{a+R}{a}\right)\cos\frac{a+R}{a}t$$



$$A=\frac{1}{2}\int_C x\,dy-y\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a+R)^2\cos^2 t-(a+R)^2\cos t\cos\left(\frac{a+R}{a}t\right)$$

$$-a(a+R)\cos t\cos\frac{a+R}{a}t+(a+R)^2\sin^2 t-(a+R)^2\sin t\sin\left(\frac{a+R}{a}t\right)$$

$$-a(a+R)\sin t\sin\left(\frac{a+R}{a}t\right)+a(a+R)\sin^2\left(\frac{a+R}{a}\right)+a(a+R)\cos^2\left(\frac{a+R}{a}t\right)$$

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[(a+R)^2+a(a+R)-R(a+R)\cos t\cos\left(\frac{a+R}{a}t\right)-R(a+R)\sin t\sin\left(\frac{a+R}{a}t\right)\right]dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[(a+R)^2+a(a+R)-R(a+R)\cos\frac{R}{a}t\right]dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[(a+R)^2t+a(a+R)t-R(a+R)\frac{a}{R}\sin\frac{R}{a}t\right]\Big|_0^{2\pi}$$

$$=\frac{1}{2}2\pi\left((a+R)^2+a(a+R)\right)=\pi(a+R)^2+\pi a(a+R)=\pi(a+R)(a+2R)$$

3. Aşağıdaki eğri parçalarının uzunluğunu bulunuz.

a) $r(t)=ti+t^2j+\dfrac{2t^3}{3}k,\qquad 0\le t\le 2$

b) $y=\dfrac{x^2}{2},\qquad z=\dfrac{x^3}{6},\qquad 0\le x\le 6$

c) $x^2=3y,\ \ 2xy=9z$, yüzeylerinin arakesit eğrisinin (0, 0, 0) noktasını (3, 3, 2) noktasına birleştiren parçası

Çözüm:

a) $r(t)=ti+t^2j+\dfrac{2t^3}{3}k\qquad 0\le t\le 2$

$$r'(t)=it+2tj+2t^2k\Rightarrow\|r'(t)\|=\left(1+4t^2+4t^4\right)^{1/2}=\left(1+2t^2\right)$$

$$\ell=\int_0^2\|r'(t)\|dt=\int_0^2\left(1+2t^2\right)dt=\left(t+\frac{2}{3}t^3\right)\Big|_0^2=2+\frac{16}{3}=\frac{22}{3}$$

b) $y=\dfrac{x^2}{2},\quad z=\dfrac{x^3}{6},\quad 0\le x\le 6$

$$x=t\Rightarrow y=\frac{t^2}{2},\qquad z=\frac{t^3}{6},\qquad 0\le t\le 6$$

$$r(t)=ti+\frac{t^2}{2}j+\frac{t^3}{6}k\Rightarrow r'(t)=i+tj+\frac{t^2}{2}k$$

$$\|r'(t)\|=\left(1+t^2+\frac{t^4}{4}\right)^{1/2}=\left(1+\frac{t^2}{2}\right)$$

$$\ell=\int_0^6\left(1+\frac{t^2}{2}\right)dt=t+\frac{t^3}{6}\Big|_0^6=42$$

c) $x^2=3y,\quad 2xy=9z\quad$ yüzeylerinin arakesit eğrisinin (0, 0, 0) noktasını (3, 3, 2) noktasına birleştiren parçası

$x=t$ denirse $y=\dfrac{1}{3}t^2,\ z=\dfrac{2t^3}{27}$ olur. Bu durumda arakesit eğrisinin parametrik gösterimi

$r(t)=ti+\dfrac{1}{3}t^2j+\dfrac{2}{27}t^3k,\quad 0\le t\le 3$ olur.

$r'(t)=i+\dfrac{2}{3}tj+\dfrac{2}{9}t^2k\Rightarrow\|r'\|^2=\left(1+\dfrac{2}{9}t^2\right)^2$ olacağından

$\ell=\displaystyle\int_0^3\|r'(t)\|dt=\int_0^3\left(1+\frac{2}{9}t^2\right)dt=\left(t+\frac{2}{27}t^3\right)\Big|_0^3=5$ birim olur.

4. $F(x,y,z)=\left(x^2-y^2\right)i+2xy\,j$ **kuvvet alanının etkisi ile hareket eden bir parçacığın**

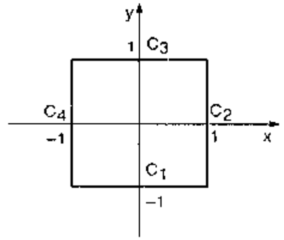
a) $|x|=1,\ |y|=1$ **karesi üzerinde bir devir yaptığında**

b) $x^2+y^2=1$ **çemberi üzerinde bir devir yaptığında**

yapılan işi hesaplayınız. Parçacık her iki eğri üzerinde saat yönünün ters yönünde hareket etmektedir.

Çözüm:

a) $W=\int_C F\cdot dr = \int_C P\,dx + Q\,dy$



$$\int_C F\cdot dr = \int_{C_1} F\cdot dr + \int_{C_2} F\cdot dr + \int_{C_3} F\cdot dr + \int_{C_4} F\cdot dr$$

$C_1 \cdots y=-1 \Rightarrow dy=0 \Rightarrow -1\le x\le 1$

$$\int_{C_1} F\cdot dr = \int_{C_1} P\,dx + Q\,dy = \int_{-1}^{1}(x^2-y^2)dx + 2xy\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1} (x^2-1)dx = \frac{x^3}{3}-x\Big|_{-1}^{1} = \frac13 - 1 + \frac13 - 1 = -\frac43$$

$C_2\cdots y=1 \Rightarrow dy=0 \qquad -1\le x\le 1$

$$\int_{C_2} F\cdot dr = \int_{C_2} P.dx+Q\,dy = \int_{-1}^{1} 2.1.y\,dy = 0,$$

$-C_3 \cdots y=1 \Rightarrow dy=0 \qquad -1\le x\le 1$

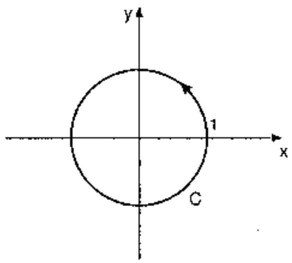
$$\int_{-C_3} F.dr = \int_{-C_3} P\,dx + Q\,dy = \int_{-1}^{1} x^2-1dx = \frac{x^3}{3}-x\Big|_{-1}^{1} = \frac13-1+\frac13-1=-\frac43$$

$-C_4\cdots x=-1 \Rightarrow dx=0 \qquad -1\le y\le 1$

$$\int_{-C_4} F\cdot dr = \int_{-C_4} P\,dx+Q\,dy = \int_{-1}^{1} 2.(-1).y\,dy = -y^2\Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$\int_C = \int_{C_1}+\int_{C_2}-\int_{-C_3}-\int_{-C_4} = -\frac43+0+\frac43-0=0$$

b) $W=\int_C P\,dx+Q\,dy = \int_C (x^2-y^2)dx+2xy\,dy$



$$= \iint_{x^2+y^2\le 1} (Q_y - P_y)\,dy\,dx = \iint_B 4y\,dy\,dx$$

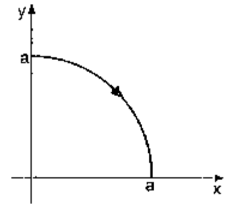
$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} 4r\sin\theta\, r\,dr\,d\theta = \frac43 .-\cos\theta\Big|_0^{2\pi}$$

$$=\frac43(-1+1)=0$$

5. $F=a^n\, i$ kuvvetinin meydana getirdiği alanda bir maddesel nokta $x^2+y^2=a^2$ çemberinin (0, a) noktasından hareketle (a, 0) noktasına geliyor. Yapılan işi hesaplayınız. Burada n ve a birer pozitif reel sayıdır.

Çözüm:

$C\cdots r(t)=a\sin t\, i + a\cos t\, j, \qquad 0\le t\le\frac{\pi}{2}$



$$W=\int_C F\cdot dr = -\int_0^{\pi/2} a^n \cos t\, dt$$

$$= -a^{n+1}\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{1}} = a^{n+1}$$

BÖLÜM PROBLEMLERİ VE ÇÖZÜMLERİ

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int_C \left(1+\frac94 z^{2/3}\right)^{1/4} d\ell, \quad C\ldots r(t)=\cos t\, i+\sin t\, j + t^{3/2}k, \quad 0\le t\le \frac{20}{2}$

b) $\int_C xy\,d\ell, \quad C\ldots r(t)=e^t i + e^{-t} j + \sqrt{2}\,t k, \quad 0\le t\le 1$

Çözüm:

a) $I=\int_C\left(1+\frac94 z^{2/3}\right)^{1/4} d\ell \qquad C\ldots r(t) = \cos t\, i + \sin t\, j + t^{3/2}k \qquad 0\le t\le\frac{20}{3}$

$$d\ell = \|r'(t)\|dt = \left((-\sin t)^2+(\cos t)^2+\frac94 t\right)^{1/2}dt = \left(1+\frac94 t\right)^{1/2}dt$$

$$I=\int_0^{20/3}\left(1+\frac94 t\right)^{\frac14}.\left(1+\frac94 t\right)^{\frac12}dt = \int_0^{20/3}\left(1+\frac94 t\right)^{3/4}dt$$

$$=\frac47\,\frac49\left(1+\frac94 t\right)^{7/4}\Big|_x^{\frac{20}{3}} = \frac{16}{63}\left[(1+15)^{(74)}-1\right] = \frac{16}{63}\left[2^7-1\right] = \frac{2032}{63}$$

b) $I=\int\limits_C xy\,d\ell,\quad C\ldots \mathbf{r}(t)=e^t\mathbf{i}+e^{-t}\mathbf{j}+\sqrt{2}t\mathbf{k},\quad 0\le t\le 1$

$$d\ell=\|\mathbf{r}'(t)\|dt=\left(e^{2t}+e^{-2t}+2\right)^{1/2}dt=\frac{\left(e^{4t}+2e^{2t}+1\right)^{1/2}}{e^t}=\frac{\left(e^{2t}+1\right)}{e^t}$$

$$I=\int_0^1 e^t.e^{-t}\frac{\left(e^{2t}+1\right)}{e^t}dt=e^t-e^{-t}\Big|_0^1=e-e^{-1}$$

2. Aşağıdaki integralleri karşılarında yazılı doğru parçaları üzerinde hesaplayınız.

Çözüm:

a) $I=\int\limits_C \frac{xdy-ydx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}},\quad C\ldots \mathbf{r}(t)=e^t\cos t\,\mathbf{i}+e^t\sin t\,\mathbf{j},\quad 0\le t\le 2\pi$

$x(t)=e^t\cos t\Rightarrow dx=\left(e^t\cos t-e^t\sin t\right)dt$

$y(t)=e^t\sin t\Rightarrow dy=\left(e^t\sin t+e^t\cos t\right)dt$

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\left[e^{2t}\cos t\sin t+e^{2t}\cos^2 t-e^{2t}\cos t\sin t+e^{2t}\sin^2 t\right]dt}{\left[e^{2t}\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)\right]^{3/2}}=\int_0^{2\pi}\frac{e^{2t}}{e^{3t}}dt$$

$$=\int_0^{2\pi}e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_0^{2\pi}=1-e^{-2\pi}$$

b) $\oint\limits_C \frac{y\,dx-(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2},\quad C\ldots x^2+y^2=4$

$$P(x,y)=\frac{y}{(x-1)^2+y^2}\qquad Q(x,y)=\frac{-(x-1)}{(x-1)^2+y^2}$$

$$P_y=\frac{(x-1)^2-y^2}{\left[(x-1)^2+y^2\right]^2}\qquad Q_x=\frac{(x-1)^2-y^2}{\left[(x-1)^2+y^2\right]^2}$$

$Q_x-P_y=0$ olduğundan Green Teoremi gereğince verilen eğrisel integralin değeri sıfırdır.

c) $I=\int\limits_C \frac{ydx-xdy}{\left(x^2+y^2\right)},\quad C\ldots \mathbf{r}(t)=\cos^3 t\,\mathbf{i}+\sin^3 t\,\mathbf{j},\quad 0\le t\le\frac{\pi}{2}$

$x(t)=\cos^3 t\Rightarrow dx=-3\cos^2 t\sin t\,dt$

$y(t)=\sin^3 t\Rightarrow dy=3\sin^2 t\cos t\,dt$

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\left(-3\cos^2 t\,\sin^4 t-3\sin^2 t\cos^4 t\right)dt}{\cos^6 t+\sin^6 t}=\int_0^{\pi/2}\frac{-3\sin^2\cos^2 t}{\cos^6 t+\sin^6 t}dt$$

$$=-3\int_0^{\pi/2}\frac{\tan^2 t}{1+\tan^6 t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt=-3\int_0^{\infty}\frac{u^2}{1+u^6}=-\lim_{a\to\infty}\left(\int_0^a\frac{3u^2}{1+\left(u^3\right)^2}du\right)$$

$$=-\lim_{a\to\infty}\arctan u^3\Big|_0^a=-\lim_{a\to\infty}\arctan a^3=-\frac{\pi}{2}$$

3. $\oint\limits_C\frac{\left(e^x\cos-1\right)dx+e^x\sin y\,dy}{e^{2x}-2e^x\cos y+1}$ **integralini $x^2+y^2=1$ çemberi üzerinde hesaplayınız.**

Çözüm:

$$P(x,y)=\frac{e^x\cos y-1}{e^{2x}-2e^x\cos y+1}\qquad Q(x,y)=\frac{e^x\sin y}{e^{2x}-2e^x\cos y+1}$$

$$P_y=\frac{-e^x\sin y\left(e^{2x}-2e^x\cos y+1\right)-2e^x\sin y\left(e^x\cos y-1\right)}{\left(e^{2x}-2e^x\cos y+1\right)^2}$$

$$=\frac{-e^{3x}\sin y+2e^{2x}\cos y\sin y-e^x\sin y-2e^{2x}\cos y\sin y+2e^x\sin y}{\left(e^{2x}-2e^x\cos y+1\right)^2}$$

$$=\frac{-e^{3x}\sin y+e^x\sin y}{\left(e^{2x}-2e^x\cos y+1\right)^2}$$

$$Q_x=\frac{e^x\sin y\left(e^{2x}-2e^x\cos y+1\right)-e^x\sin y\left(2e^{2x}-2e^x\cos y\right)}{\left(e^{2x}-2e^x\cos y+1\right)^2}$$

$$=\frac{e^{3x}\sin y-2e^{2x}\cos y\sin y+e^x\sin y-2e^{3x}\sin y+2e^{2x}\cos y\sin y}{\left(e^{2x}-2e^x\cos y+1\right)^2}$$

$$=\frac{-e^{3x}\sin y+e^x\sin y}{\left(e^{2x}-2e^x\cos y+1\right)^2}$$

$Q_x-P_y=0$ olduğundan Green Teoremi gereğince integralin değeri sıfırdır.

4. $I = \int_{(1,0)}^{(2,2)} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$ integralini orjinden geçmeyen eğrler üerinde hesaplayınız.

Çözüm:

$$P(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad P_y = Q_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f(x,y) = \int \frac{-y}{x^2+y^2} dx + u(y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + u(y)$$

$$f_y(x,y) = Q(x,y) \Rightarrow \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(\frac{x}{y^2}\right) + u_y = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \Rightarrow$$

$$\frac{x}{y^2+x^2} + u_y = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow u_y = 0 \Rightarrow u(y) = C$$

$$f(x,y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + C$$

$$I = -\arctan\left(\frac{x}{4}\right) + C \Big|_{(1,0)}^{(2,2)} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

5. $I = \int_{(0,0)}^{\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)} \sec^2 x \tan y \, dx + \sec^2 y \tan x \, dy$ integralinin yoldan bağımsız olduğunu gösterip değerini hesaplayınız.

Çözüm:

$P(x,y) = \sec^2 x \tan y$, $Q(x,y) = \sec^2 y \tan x$

$P_y = Q_y = \tan x \tan y$ olacağından integral yoldan bağımsızdır.

$$f(x,y) = \int \sec^2 x \tan y \, dx = \tan x \tan y + u(y)$$

$$f_y = Q \Rightarrow \tan x \sec^2 y + u_y = \tan x \sec^2 y \Rightarrow u_y = 0 \Rightarrow u(y) = c$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \tan x \tan y + C$$

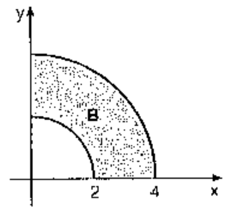
$$I = \tan x \tan y + C \Big|_{(0,0)}^{\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)} = 1$$

6. $B = \{(x,y):\ 4 \le x^2 + y^2 \le 16\ ,\ x \ge 0\ ,\ y \ge 0\}$ bölgesinin sınırı C olsun.

$I = \oint_C \sqrt{4x^2 + y^2}\,(2x\,dx - y\,dy)$ eğrisel integralini

Green Teoreminden yararlanarak hesaplayınız.

Çözüm:



$$P(x,y) = 2x\sqrt{4x^2+y^2}$$

$$Q(x,y) = -y\sqrt{4x^2+y^2}$$

$$P_y = \frac{2xy}{\sqrt{4x^2+y^2}}, \quad Q_x = \frac{-4xy}{\sqrt{4x^2+y^2}}$$

$$Q_x - P_y = \frac{-6xy}{\sqrt{4x^2+y^2}}$$

$$I = \iint_B (Q_x - P_y)\,dy\,dx = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=2}^{4} \frac{-6r^2\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{4r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= -\int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=2}^{4} \frac{r^2.6\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{4\cos^2\theta+\sin^2\theta}}\,dr\,d\theta = \frac{(4^3-2^3)}{3}.2.\left(4\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)^{1/2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{112}{3}(1-4) = -112$$

7. $z = f(x, y)$ fonksiyonu ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip olsun. f laplace denklemini sağlayan bir fonksiyon ise, herbir kapalı C eğrisi için

$$I = \oint_C \frac{df}{dy}dx - \frac{df}{dx}dy = 0$$

olacağını gösteriniz.

Çözüm:

f Laplace denklemini sağlıyorsa $\dfrac{d^2 f}{dx^2}+\dfrac{d^2 f}{dy^2}=0$ dur.

$$P(x,y)=\frac{df}{dy},\quad Q(x,y)=-\frac{df}{dx}\quad\Rightarrow Q_x-P_y=-\frac{d^2 f}{dx^2}+\frac{d^2 f}{dy^2}=0$$

$\Rightarrow$ Green Teoreminden $I=0$ dır.

8. **$F = Pi + Qj + Rk$ ile $r(t) = x(t)\,i + y(t)\,j + z(t)\,k$ vektörleri arasındaki açının ölçüsü θ olsun.**

$$\int_C F\cdot dr=\int_C \sqrt{P^2+Q^2+R^2}\cos\theta\, d\ell$$

olacağını gösteriniz.

Çözüm:

T teğet birim vektör olmak üzere

$$\int_C F\cdot dr=\int_C F\cdot T\; d\ell$$

olduğunu biliyoruz.

$F\cdot T=\|F\|\|T\|\cos\theta=\|F\|\cos\theta=\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\cos\theta$ olacağından

$$\int_C F\cdot dr=\int_C F\cdot T\, d\ell=\int_C \sqrt{P^2+Q^2+R^2}\cos\theta\, d\ell$$

bulunur.

Bölüm 11 YÜZEY İNTEGRALLERİ

BİRİNCİ ÇEŞİT YÜZEY İNTEGRALLERİ

TANIM:

$P_1=\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ S nin bir parçalanması, $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$, sırası ile

$S_1, S_2, \ldots, S_n$ yüzey parçalarının alanlarını göstersin. S üzerine tanımlı bir g fonksiyonu için

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} g(x_k,y_k,z_k)\Delta S_k$$

limiti varsa bu limite g nin D üzerindeki **birinci çeşit yüzey integrali** denir,

$$\iint_S g(x,y,z)ds$$

ile gösterilir. Burada (x_k, y_k, z_k), S_k bölgesinde alınan herhangi bir noktayı göstermektedir.

Yüzey integralleri, integrasyon bölgeleri yüzey parçaları olan integrallerdir. B, x Oy düzleminde sonlu sayıda yatay veya düşey basit bölgelerin birleşimi, f de bu bölge üzerinde tanımlı, sürekli türevlere sahip bir fonksiyon ve S de bu fonksiyonunun grafiği ise

$$\boxed{\iint_S g(x,y,z)ds=\iint_B g(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\,dx\,dy}$$

olur.

Eğer S yüzeyinin denklemi $y = f(x, z)$ ve S nin yOz düzlemi üzerindeki izdüşümü G ise

$$\boxed{\iint_S g(x,y,z)ds=\iint_G g(x,\ f(x,z),z)\sqrt{1+f_x^2(x,z)+f_z^2(x,z)}\,dx\,dz}$$

olur.

Benzer şekilde S yüzeyinin denklemi $x = f(y, z)$ ve S nin xOz düzlemi üzerindeki dik izdüşümü H ise g fonksiyonunun S üzerindeki yüzey integrali

$$\iint_S g(x,y,z)ds = \iint_H g(f(y,z),y,z)\sqrt{1+f_y^2(y,z)+f_z^2(y,z)}\,dy\,dz$$

olur.

TANIM:
$F = P\,i + Q\,j + R\,k$, normali n olan bir yönlü S yüzeyi üzerinde tanımlı bir vektör alanı olsun.

$$\iint_S F\cdot n\,ds$$

integraline F nin S üzerindeki **ikinci çeşit yüzey integrali** veya **akış integrali** denir.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. $x^2+y^2+z^2=a^2$ **küresi üzerinde** $\iint_S (x^2+y^2)ds$ **integralini hesaplayınız.**

Çözüm:

Üst yarı – küre üzerindeki integralini hesaplayalım.

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, \qquad z_x=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \qquad z_y=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$ds=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy=\left(1+\frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}\right)^{1/2}dx\,dy=\frac{a}{(a^2-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}dx\,dy$$

olduğundan, kutupsal koordinatlara geçerek

$$\iint_S (x^2+y^2)ds=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a} r^2\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}r\,dr\,d\theta=\frac{a}{-2}\int_0^{2\pi}\int_0^a r^2(a^2-r^2)^{-1/2}(-2r)dr\,d\varphi$$

$$=-\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\int_{a^2}^{0}(a^2-t)t^{-1/2}dt\,d\varphi=\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{a^2}(a^2t^{-1/2}-t^{1/2})dt$$

$$=a\pi\left(2a^2t^{1/2}-\frac{2}{3}t^{3/2}\right)\Big|_0^{a^2}=\frac{4}{3}\pi a^4$$

bulunur. Alt yarı küre üzerindeki integral de benzer şekilde hesaplanarak $\frac{4}{3}\pi a^4$ bulunur.

Tüm küre üzerindeki integral $I=\frac{8}{3}\pi a^4$ olur.

2. **S yüzeyi** $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ **yarı küresi olduğuna göre**

$\iint_S (1+z)ds$ **integralini hesaplayınız.**

Çözüm:

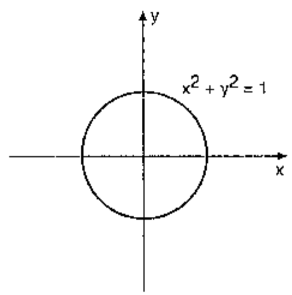
$z_x = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad z_y = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ olacağından

$$I = \iint_S (1+z)\,ds$$

$$= \iint_B \left(1+\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2-x^2}}\right)dx\,dy$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}+1\right) r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[-\left(1-r^2\right)^{1/2}+\frac{r^2}{2}\right]_0^1 d\theta$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{2}+1\right) = 3\pi \text{ olur.}$$



3. Aşağıda verilen g fonksiyonlarının karşılarında yazılı yüzey parçaları üzerindeki integralini hesaplayınız.

a) $g(x,y,z) = x^2$ — S: yüzeyi, $z^2 = x^2 + y^2$ konisinin $z = 1$ v e $z = 2$ düzlemleri arasındaki parçası

b) $g(x, y, z) = xyz$, — S: $x = \pm a$, $y = \pm b$, $z = \pm c$ düzlemleri tarafından sınırlanan prizma

c) $g(x, y, z) = x$, — S: yüzeyi, $x + y + z = 1$ düzleminin birinci bölgedeki parçası

ç) $g(x, y, z) = z(x^2 + y^2)$, — S: yüzeyi, $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ yarı küresi

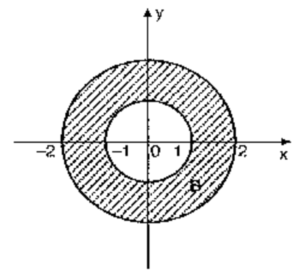
d) $g(x, y, z) = xz$, — S: yüzeyi, $x^2 + y^2 = 1$ silindirinin $z = 0$ ve $z = x + 2$ düzlemleri arasında kalan parçası

e) $g(x,y,z) = \sqrt{1+4x^2+4y^2}$, — S: yüzeyi, $z = x^2 + y^2$ paraboloidinin $z = y$ düzlemi altında kalan parçası

Çözüm:

a) $g(x, y, z) = x^2$

S yüzey: $z^2 = x^2 + y^2$ konisinin $z = 1$ ve $z = 2$ düzlemleri arasındaki parçası



$z = \sqrt{x^2+y^2}$

$z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

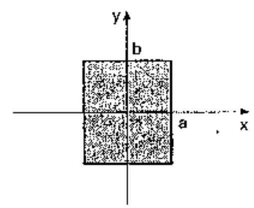
$$ds = \left(1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^{1/2} dx\,dy = \sqrt{2}\,dx\,dy$$

$$\iint_S x^2 ds = \iint_B x^2\sqrt{2}\,dx\,dy = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{2} r^2\cos^2\theta\sqrt{2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}15\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{15\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\Big|_0^{2\pi}\right) = \frac{15\sqrt{2}}{4}\pi$$

b) $g(x, y, z) = xyz$

S: $x = \mp a$, $y = \mp b$, $z = \mp c$ düzlemleri tarafından sınırlanan prizma

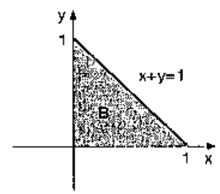


$z = \mp c \Rightarrow z_x = 0, \ z_y = 0 \Rightarrow ds = dx\,dy$

$$\iint_S xyz\,dx\,dy = \int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a} xyc\,dx\,dy = 0$$

c) $g(x, y, z) = x$

S: yüzeyi $x + y + z = 1$ düzleminin birinci bölgedeki parçası



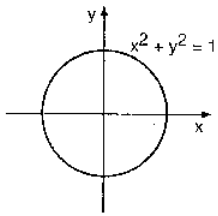
$z = 1-x-y \qquad z_x = -1 \qquad z_y = -1$

$$ds = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy = \sqrt{3}\,dx\,dy$$

$$\iint_S x\,ds = \iint_B x\sqrt{3}\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{1-x} x\sqrt{3}\,dy\,dx = \sqrt{3}\int_0^1 x(1-x)dx = \sqrt{3}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

ç) $g(x, y, z) = z(x^2 + y^2)$

S: $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ yarı küresi



$$z_x = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}},$$

$$z_y = \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

$$ds = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dx\,dy = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{4 - x^2 - y^2}}\,dx\,dy$$

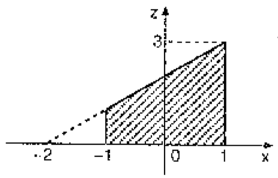
$$= \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\,dx\,dy$$

$$\iint_S z(x^2 + y^2)ds = \iint_B \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,.(x^2 + y^2)\frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\,dx\,dy$$

$$= 2\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2} r^2.r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4}\Bigg|_0^2 d\theta = 4\pi.4 = 16\pi$$

d) $g(x, y, z) = xz$

$y = f(x,z) = \sqrt{1 - x^2}$



$$ds = \sqrt{1 + f_x^2 + f_z^2}\,dz\,dx = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}dx\,dz$$

olacağından

S: $x^2 + y^2 = 1$ silindirinin $y = \sqrt{1 - x^2}$ parçasının $z = 0$ ve $z = x + 2$ düzlemleri arasında kısmi üzerindeki yüzey integrali

$$\iint_{S_1} xz\sqrt{1 + (y_x)^2 + (y_z)^2} = \iint_B xz\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}dz\,dx = \int_{-1}^{1}\int_{z=0}^{x+2} z\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}dz\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{x(x + 2)}{\sqrt{1 - x^2}}dx = \frac{\pi}{2} \qquad (x = \sin t)$$

olur. Benzer şekilde, silindirin $y = -\sqrt{1 - x^2}$ denklemli parçası üzerindeki integrali hesaplandığında

$$\iint_{S_2} xz\sqrt{1 + (y_x)^2 + (y_z)^2}\,dx\,dz = \frac{\pi}{2}$$

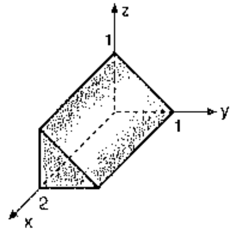
bulunur. Bu durumda $\iint_S xz\,ds = \pi$ olur.

e) $g(x,y,z) = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$, $z_x = 2x$, $z_y = 2y$ dir. B bölgesi

$\Rightarrow y = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ çemberi tarafından sınırlanan dairedir.

$$\iint_S y(x,y,z)ds = \iint_B \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}dx\,dy = \int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{r=0}^{\sin\varphi}(1 + 4r^2)r\,dr\,d\varphi = \frac{11}{6}\pi$$

4. S yüzeyi yanda şekli verilen prizma olduğuna göre $g(x, y, z) = y + z$ fonksiyonunun S üzerindeki integralini hesaplayınız.



Çözüm:

Yüzey beş düzlem parçasından oluşmuştur.

$S_1 : x = 0$, $S_2 : x = 2$, $S_3 : z = 0$, $S_4 : y = 0$, S_5 de birinci bölgede $y + z = 1$ düzleminin $x = 0$ ve $x = 2$ düzlemleri arasında kalan parçasıdır.

$$\iint_S (y + z)ds = \int_0^1\int_0^{1-y}(y + 2)dz\,dy + \int_0^2\int_0^1 y\,dy\,dx + \int_0^2\int_0^1 z\,dz\,dx + \int_0^2\int_0^1 \sqrt{2}\,y\,dy\,dx$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 2\sqrt{2} = \frac{8}{3} + 2\sqrt{2}$$

5. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ küresi, yönü kürenin dışına doğru olan normalle yönlendirilmiştir.

Bu yüzey üzerinde aşağıdaki vektör alanlarının integralini hesaplayınız.

a) $F(x,y,z) = z\,\mathbf{k}$ b) $F(x,y,z) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$

c) $F(x,y,z) = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$ d) $F(x,y,z) = xz\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

e) $F(x,y,z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ f) $F(x,y,z) = \dfrac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

Çözüm:

a) $F(x, y, z) = z\,\mathbf{k}$, $\quad n_1 = \dfrac{-z_x\mathbf{i} - z_y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$, $\quad n_2 = \dfrac{z_x\mathbf{i} + z_y\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$

S yüzeyi $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ denklemli S_1 üst yarı küresi ile $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ denklemli S_2 alt yarı küresinin birleşimidir.

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_1\, ds = \iint_B z\,dx\,dy = \iint_B \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} \sqrt{a-r^2}\, r\,dr\,d\theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$\iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_2\, ds = \iint_B -(-z)\,dx\,dy = \iint_B z\,dx\,dy = \iint_B \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy = \frac{2\pi}{3}$$

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds + \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

olur.

b) $F(x, y, z) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_2\, ds = \iint_B (yz_x - xz_y)\,dx\,dy$$

$$= \iint_B \left(y\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right) - x\left(\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)\right) dx\,dy = 0$$

$$\iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_2\,ds = \iint_B (-yz_x + xz_y)\,dx\,dy = \iint_D 0\,dx\,dy = 0$$

c) $F(x,y,z) = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$

$$\iint_{S_1} (-yz_x + xz_y + 1)\,dx\,dy = \iint_B \left(-y\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right) + x\left(\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right) + 1\right) dx\,dy$$

$$= \iint_B dx\,dy = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} r\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi$$

$$\iint_{S_2} (+yz_x - xz_y - 1)\,dx\,dy = \iint_B \left(y\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right) - x\left(\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right) - 1\right) dx\,dy$$

$$= -\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} r\,dr\,d\theta = -\pi \quad \Rightarrow \quad \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \pi - \pi = 0$$

d) $F(x,y,z) = xz\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_1 ds = \iint_B \left(-xz.z_x - yz.z_y + z^2\right) dx\,dy = \iint_B \left(\frac{x^2z}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \frac{y^2z}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + z^2 \right) dy\,dx$$

$$= \iint_B z\left(\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + z \right) dy\,dx = \iint_B x^2+y^2+\left(1-x^2-y^2\right) dy\,dx$$

$$= \iint_B dy\,dx = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} r\,dr\,d\theta = \pi$$

$$\iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_2\, ds = \iint_B \left(xz.z_x + yz.z_y - z^2\right) dx\,dy = \iint_B -z\left(-x^2-y^2-z^2\right) dx\,dy$$

$$= \iint_B -\left(x^2+y^2-1+x^2+y^2\right) dx\,dy = -\iint_B dy\,dx = -\pi \;\Rightarrow\; \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \pi - \pi = 0$$

olur.

e) $F(x,y,z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_B \left(-xz_x - yz_y + z\right) dy\,dx = \iint_B \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + z\,dy\,dx$$

$$= \iint_B \left(\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \sqrt{1-x^2-y^2} \right) dy\,dx$$

$$= \iint_B \left(\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \sqrt{1-x^2-y^2} \right) dy\,dx = \iint_B \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dy\,dx$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\, r\,dr\,d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 2\left(1-r^2\right)^{1/2}\Big|_0^1 d\theta = 2\pi$$

$$\iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_2 ds = \iint_B \left(xz_x + yz_y - z\right) dy\,dx = \iint_B \left(\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \sqrt{1-x^2-y^2}\right) dy\,dx$$

$$= \iint_B \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dy\,dx = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 2\left(1-r^2\right)^{1/2}\Big|_0^1 d\theta = 2\pi \Rightarrow \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = 2\pi + 2\pi = 4\pi$$

olur.

f) $F(x,y,z)=\dfrac{xi+yj+zk}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=xi+yj+zk$ dır, zira S yüzeyi üzerinde $x^2+y^2+z^2+1$ dir.

$$\iint_{S_1} F\cdot n ds=\iint_{S_1}\left(-xz_x-yz_y+z\right)dS$$

$$=\iint_B \frac{x^2+y^2+1-x^2-y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}rdrd\theta=2\pi$$

$$\iint_{S_2} F\cdot n_2 ds=\iint_{S_2}\left(xz_x+yz_y-z\right)dS$$

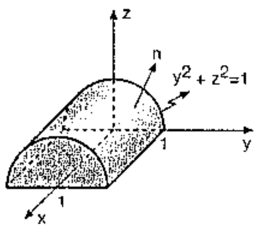
$$=\iint_B\left(\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}-\frac{y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}-1+x^2+y^2\right)dydx$$

$$=\iint_B-\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dydx=-2\pi \quad\Rightarrow\quad \iint_S F\cdot n.ds=2\pi-2\pi=0$$

olur

6. S bölgesi $y^2+z^2=1$ silindirinin $z=0$ düzleminin üst tarafında bulunan ve $x=0$, $x=1$ düzlemleri arasında kalan parçası oldğuna göre $F = xi + yj + zk$ vektör alanı için $\iint_S F.nds$ integralini hesaplayınız. n, silindirin dışına doğru yönlendirilmiştir.

Çözüm:



$$z=\sqrt{1-y^2} \Rightarrow z_x=0,\quad z_y=\frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$n=\frac{-f_x i-f_y j+k}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}=\frac{\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}j+k}{\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}=yj+\sqrt{1-y^2}k$$

$F\cdot n=\left(xi+yj+\sqrt{1-y^2}\,\mathbf{k}\right).\left(yj+\sqrt{1-y^2}\,\mathbf{k}\right)=y^2+\left(1-y^2\right)=1$ olacağından

$$\iint_S F\cdot nds=\iint_B\frac{dxdy}{\sqrt{1-y^2}}=\int_0^1\int_{-1}^{1}\frac{dxdy}{\sqrt{1-y^2}}=\int_{-1}^{1}\arcsin y\Big|_{-1}^{1}dx=\pi$$

bulunur.

YÜZEY İNTEGRALLERİNİN TEMEL TEOREMLERİ

TEOREM 11.1: (Stokes Teoremi)

S, normali **n** olan ve sonlu alana sahip bir yönlendirilmiş yüzey olsun. Bu yüzeyin ∂S sınır eğrisi kapalı, parçalı düzgün bir eğri olup bunun yönü S den indirenen yön olsun. **F** de S üzerinde sürekli bir vektör alanı ve **F** nin bileşen fonksiyonları, S nin sınır noktası olmayan noktalarında sürekli kısmi türevlere sahip olsun. Bu takdirde

$$\int_{\partial S} F\cdot dr=\iint_S \mathrm{rot}F\cdot nds$$

dır.

TEOREM 11.2: (Divergens Teoremi – Gauss Teoremi)

D basit uzay bölgesi, S bu bölgenin sınır yüzeyi ve **n** de bu yüzeyin dışa yöneltilmiş normali lsun. **F**, bileşen fonksiyonları D üzerinde sürekli kısmi türevlere sahip bir vektör alanı ise

$$\iint_S F\cdot nds=\iint_D(\mathrm{div}\,F)dxdydz$$

dır.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. Aşağıdaki F alanları ve S yüzeyleri için Stoks teoreminin gerçeklendiğini gösteriniz.

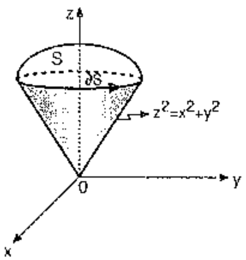
a. $F(x,y,z)=(x^2+z)\mathbf{i}+(y^2+x)\mathbf{j}+(z^2+y)\mathbf{k}$, S yüzeyi, $x^2+y^2+z^2=1$ küresinin $z^2=x^2+y^2$ konisinin üstünde kalan parçası olup **n** yukarı doğru yönlendirilmiştir.

b. $F(x,y,z)=y^2\mathbf{i}+xy\,\mathbf{j}-2xz\,\mathbf{k}$; S yüzeyi $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ yarı küresi, **n** yukarı doğru (kürenin dışına doğru) yönlendirilmiştir.

c. $F(x,y,z)=x^2\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+z^2\tan xy\,\mathbf{k}$; S yüzeyi, $z=2\sqrt{1-x^2-y^2}$ yarı elipsoidi, **n**, normali elipsoidin dışına doğru yönlendirilmiştir.

Çözüm:

∂S, küre ile koninin arakesit eğrisi olduğundan



$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2=z^2 \end{array}\right\} \Rightarrow z^2=\frac{1}{2}$$

olur. Arakesit eğris bir çember olup denklemi $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ dir. Bunun parametrik denklemi

$$\mathbf{r}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\,\mathbf{j}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k},\qquad 0\le t\le 2\pi$$

olur.

$$F(x(t),y(t),z(t))=\left(\frac{1}{2}\cos^2 t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{1}{2}\sin^2 t+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)\mathbf{j}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)\mathbf{k}$$

ve $\mathbf{r}'(t)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\,\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,\mathbf{j}$ olacağından

$$\int_{\partial S}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_0^{2\pi}\left(\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin t\cos^2 t-\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin^2 t\cos t+\frac{1}{2}\cos^2 t\right)dt=\frac{\pi}{2}$$

olur.

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x^2+z & y^2+x & z^2+y\end{vmatrix}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k},$$

$$\mathbf{n}=\frac{-f_x\mathbf{i}-f_y\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathbf{i}+\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}}=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathbf{k}$$

olduğundan $\operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=x+y+\sqrt{1-x^2-y^2}$ olur. Bu durumda

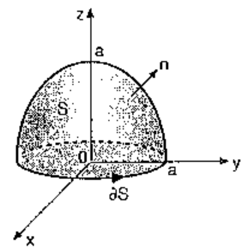
$$\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds=\iint_B\left(x+y+\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

$$=\iint_B\left(\frac{x+y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+1\right)dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{r(\cos\varphi+\sin\varphi)}{\sqrt{1-r^2}}+1\right)dr\,d\varphi$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}\int_0^{2\pi}(\cos\varphi+\sin\varphi)\,d\varphi\,dr+\int_0^{2\pi}\frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

olur.

b) ∂S, $x^2+y^2=a^2$ çemberidir.



Bunun bir parametrik denklemi

$\mathbf{r}(t)=a\cos t\,\mathbf{i}+a\sin t\,\mathbf{j}\qquad 0\le t\le 2\pi$ olur.

$F(x(t),y(t),z(t))=a^2\sin^2 t\,\mathbf{i}+a^2\sin t\cos t\,\mathbf{j}$

$F'(t)=-a\sin t\,\mathbf{i}+a\cos t\,\mathbf{j}$ olacağından

$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\left(\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{F}}{dt}\right)dt=\left(-a^3\sin^3 t+a^3\sin t\cos t\right)dt$ bulunur.

Buna göre

$$\int_{\partial S}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_0^{2\pi}\left(-a^3\sin^3 t+a^3\sin t\cos^2 t\right)dt$$

$$=a^3\left(-\cos t+\frac{1}{3}\cos^3 t\right)\Bigg|_0^{2\pi}-\frac{1}{3}\cos^3 t\Bigg|_0^{2\pi}=0$$

olur.

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & xy & -2xz \end{vmatrix} = 2z\,j - y\,k$$

$$n = \frac{-f_x\,i - f_y\,j + k}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \Longrightarrow (\operatorname{rot}F)\cdot n\,ds = \frac{(-2zf_y - y)}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\,dx\,dy$$

olacağından

$$\iint_S (\operatorname{rot}F)\cdot n\,ds = \iint_B \frac{-2zf_y - y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\,dx\,dy$$

$$= \iint_B \left(-2\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} - y \right) dx\,dy$$

$$= \iint_B -3y\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^a r\sin\varphi\, r\,dr\,d\varphi = -3\int_0^{2\pi} \frac{r^3}{3}\bigg|_0^a \sin\varphi\,d\varphi$$

$$= a^3(-\cos\varphi)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

olur. O halde

$$\int_{\partial S} F\cdot dr = \iint_S (\operatorname{rot}F)\cdot n\,ds = 0 \text{ dır.}$$

c) (a) ve (b) deki yolla yapılır.

2. **Stokes teoreminden yararlanarak aşağıdaki F alanları ve C eğriler için $\int_C F.dr$ integrallerni hesaplayınız. Buradaki C eğrileri saat yönünün ters yönünde yönlendirilmişlerdir.**

a) $F(x, y, z) = (y + z)\,i + (z + x)\,j + (x + y)\,k$; C eğrisi $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresi ile $x + y + z = a$ düzleminin arakesit eğrisi

b) $F(x, y, z) = (y - z)\,i + (z - x)\,j + (x - y)\,k$; C eğrisi $x^2 + y^2 = 1$ silindiri ile $x + z = 1$ düzleminin arakesit eğrisi

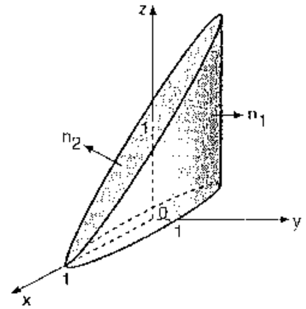
c) $F(x, y, z) = xz\,i + y^2\,j + x^2\,k$; C eğrisi $x + y + z = 5$ düzlemi ile $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ eliptik silindirinin arakesiti

Çözüm:

a) $$\operatorname{rot}F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = (1-1)i + (1-1)j + (1-1)k = 0 \text{ olacağından}$$

$$\int_C F\cdot dr = \iint_S \operatorname{rot}F\cdot n\,ds = \iint_S 0\,ds = 0 \text{ bulunur.}$$

b) $F(x, y, z) = (y - z)\,i + (z - x)\,j + (x - y)\,k$



$\operatorname{rot} F = -2i - 2j - 2k$

$$n_1 = \frac{-y_x\,i + j - y_z\,k}{\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}}$$

$$n_2 = \frac{y_x\,i - j + y_z\,k}{\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}} = -n_1$$

S_1: $y = \sqrt{1-x^2}$, S_2: $y = -\sqrt{1-x^2}$

olduğundan

$$\int_{\partial S} F\cdot dr = \iint_{S_1} \operatorname{rot}F.n_1 dS + \iint_{S_2} \operatorname{rot}F\cdot n_2 dS$$

$$= \iint_B (-2i - 2j - 2k)\left(-\frac{\partial y_1}{\partial x} i + j - \frac{\partial y_1}{\partial z} k \right) dx\,dz$$

$$+ \iint_B (-2i - 2j - 2k)\left(\frac{\partial y_2}{\partial x} i - j - \frac{\partial y_2}{\partial z} k \right) dxdz$$

$$= \iint_B \left(\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} - 2 \right) dx\,dz + \iint_B \left(\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} + 2 \right) dx\,dz$$

$$= -4\iint_B \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,dz = -4\int_0^2 \int_{-1}^{1-z} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,dz$$

$$= 2\int_0^2 \sqrt{1-x^2}\,\bigg|_{-1}^{1-z} dz = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos 2t)\,dt = \pi$$

c) (b) deki yolla hesaplanabilir.

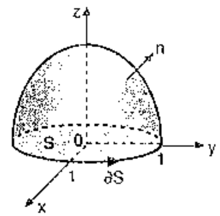
3. **Stokes teoreminden yararlanarak, aşağıda verilen F vektör alanları ile S yüzeyleri için $\iint_S (\mathrm{rot}\,\mathbf{F}).\mathbf{n}\,ds$ integrallerini hesaplayınız.**

a) $\mathbf{F}(x,\ y,\ z) = xz^2\,\mathbf{i} + x^3\,\mathbf{j} + \cos xz\ \mathbf{k}$; S yüzeyi $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$ elipsoidin x Oy düzleminin üstünde kalan parçası olup **n** yukarı doğru yönlendirilmiştir.

b) $\mathbf{F}(x,\ y,\ z) = xz\,\mathbf{i} + (y^2 + 2x)\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$; S, $z = 9 - x^2 - y^2$ paraboloidinin x Oy düzleminin üstünde kalan parası olup **n** yukarı doğru yönlendirilmiştir.

Çözüm:

a) Söz konusu elipsoid parçasının ∂s sınır eğrisi, parametrik denklemi $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$ olan birim çemberdir. Stokes teoreminden



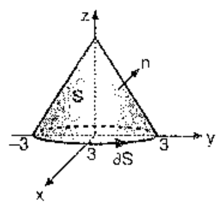
$$\iint_S \mathrm{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \int_{\partial S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (\cos^3 t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}).(-\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j})dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^4 t\,dt = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4} + \cos 2t + \frac{1}{4}\cos^2 2t\right)dt = \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{4} + \cos 2t + \frac{1}{8}(1+\cos 4t)\right]dt = \frac{3\pi}{4}$$

bulunur.

b) Söz konusu yüzey parçasının sınır eğrisi $x^2 + y^2 = 9$ çemberi olup bunun parametrk denklemi $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 3\sin t\,\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$ olur. Stokes teoreminden



$$\iint_S \mathrm{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds = \int_{\partial S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)).\mathbf{r}'(t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[(9\sin^2 t + 6\cos t)\mathbf{j} + 3\cos t\,\mathbf{k}\right]\left[-3\sin t\,\mathbf{i} + 3\cos t\,\mathbf{j}\right]dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(27\sin^2 t\cos t + 18\cos^2 t\right)dt = \int_0^{2\pi}\left(9\sin^3 t + 9t + 9\cos 2t\right)dt$$

$$= 9\left(-\cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi^2$$

4. **Stokes teoreminden yararlanarak, herhangi bir kapalı C eğrisi için**

$\oint_C yz\,dx + xzdy + xy\,dz = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$\mathbf{F}(x,y,z) = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$ için

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = (x-x)\mathbf{i} + (y-y)\mathbf{j} + (z-z)\mathbf{k} = 0$$

olduğundan

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathrm{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds = \iint_S 0\,ds = 0$$

bulunur.

5. **C eğrisi, köşeleri A(a, 0, 0), B(0, a, 0), C(0, 0, a) olan üçgen olduğuna göre**

$$\oint_C (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Söz konusu üçgen, denklemi $x + y + z = a$ olan düzlemin birinci bölgede kalan parçasının çevre eğrisidir. Buna göre

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathrm{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds = \iint_B 2(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}).\left(-z_x\mathbf{i} - z_y\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)dx\,dy$$

$$= \iint_B 2(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})dx\,dy = 6\iint_B dxdy = 6\cdot\frac{a.a}{2} = 3a^2$$

olur.

6. **Aşağıda verilen F alanları ile D bölgeleri için Divergens teoreminin doğruluğunu gösteriniz.**

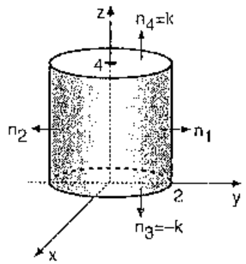
a) $F = x^2 i - y^2 j + z^2 k$; D, $x^2 + y^2 = 4$ silindiri ile $z = 0$, $z = 4$ düzlemleri arasında kalan bölge

b) $F = xy\, i + yz\, j + xz\, k$; D, koordinat düzlemleri ile $x + y + z = 1$ düzlemi arasında kalan bölge

c) $F = x\, i + y\, j + z\, k$; D, $x^2 + y^2 = 1$ silindirinin dışında, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küresinin içinde kalan bölge

Çözüm:

a) $\iint_S F \cdot n\, ds = \iiint_D \operatorname{div} F\, dx\, dy\, dz$ olacağını göstereceğiz.



Yüzey, denklemleri

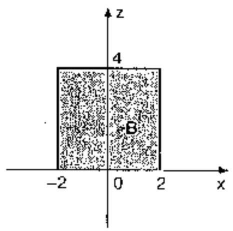
$S_1 \ldots\ y = \sqrt{4 - x^2}$, $S_2 \ldots\ y = -\sqrt{4 - x^2}$ olan silindir parçaları ile denklemleri

$S_3 \ldots\ z = 0$, $S_4 \ldots\ z = 4$ olan düzlemlerin silindir içinde kalan parçalarıdır.

S_1 ve S_2 yüzeylerinin x Oz düzlemindeki izdüşümleri

$B = \{(x,z) : -2 \le x \le 2,\ 0 \le z \le 4\}$ karesidir.

$$\iint_S F \cdot n\, ds = \iint_{S_1} F \cdot n_1 ds + \iint_{S_2} F \cdot n_2 ds + \iint_{S_3} F \cdot n_3 ds + \iint_{S_4} F \cdot n_4 ds$$



olacaktır.

$$n_1 = \frac{-y_x i + j - y_z k}{\sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2}},\quad n_2 = \frac{-y_x i - j + y_z k}{\sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2}},\quad n_3 = -k,\quad n_4 = k$$

olacağından

$$\iint_{S_1} F \cdot n_1 ds = \iint_B \left[x^2 i - (4 - x^2) j + z^2 k\right] \cdot \left[\frac{x\, i}{\sqrt{4 - x^2}} + j\right] dx\, dz$$

$$= \iint_B \left[\frac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}} - (4 - x^2)\right] dx\, dz = \int_{-2}^{2} \int_0^4 \left[\frac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}} - (4 - x^2)\right] dz\, dx$$

$$= 4 \int_{-2}^{2} \frac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}} dx - 4 \int_{-2}^{2} (4 - x^2) dx = 0 - \frac{128}{3} = -\frac{128}{3}$$

$$\iint_{S_2} F \cdot n_2 ds = \iint_B \left[x^2 i - (4 - x^2) j + z^2 k\right] \left[\frac{x\, i}{\sqrt{4 - x^2}} - j\right] dx\, dz$$

$$= \iint_B \left[\frac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}} + (4 - x^2)\right] dx\, dz = \int_{-2}^{2} \int_0^4 \left[\frac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}} + (4 - x^2)\right] dz\, dx$$

$$= 4 \int_{-2}^{2} \frac{x^3\, dx}{\sqrt{4 - x^2}} + 4 \int_{-2}^{2} (4 - x^2) dx = 0 + 8 \int_0^2 (4 - x^2) dx = \frac{128}{3}$$

olur.

S_3 ve S_4 yüzeylerinin izdüşümleri G ... $x^2 + y^2 \le 4$ dairesi olacağından

$$\iint_{S_3} F \cdot n_3 ds = \iint_{S_3} F \cdot (-k) ds = \iint_G -z^2 dx\, dy = \iint_G 0\, dx\, dy = 0,$$

$$\iint_{S_4} F \cdot n_4\, ds = \iint_{S_4} F \cdot k ds = \iint_G z^2 dx dy = 16 \iint_G dx\, dy = 16.4\pi = 64\pi$$

bulunur. Buna göre

$$\iint_S F \cdot n dS = -\frac{128}{3} + \frac{128}{3} + 0 + 64\pi = 64\pi$$

bulunur.

$\operatorname{Div} F = 2x - 2y + 2z$ olacağından

$$\iiint_D \operatorname{div} F dx\, dy\, dz = 2 \iiint_D (x - y + z) dx\, dy\, dz = 2 \iint_G \left(xz - yz + \frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^4 dx\, dy$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{4}{3} r^3 \cos\varphi - \frac{4}{3} r^3 \sin\varphi + 4r^2\right)\Big|_0^2 = 2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{32}{3}(\cos\varphi - \sin\varphi) + 16\right] d\varphi$$

$= 2 \cdot 32\pi = 64\pi$ bulunur. Buna göre

$$\iint_S F \cdot n ds = \iiint_D \operatorname{div} F dx\, dy\, dz \text{ olur.}$$

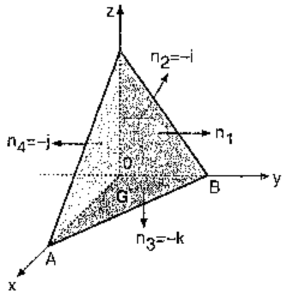
b) S yüzeyi

S_1, ABC üçgensel bölgesi, $\mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$

S_2, OBC üçgensel bölgesi, $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{i}$

S_3, OAB üçgensel bölgesi, $\mathbf{n}_3 = -\mathbf{k}$

S_4, OAC üçgensel bölgesi, $\mathbf{n}_4 = -\mathbf{j}$



$$\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_1 ds = \iint_G (xy+yz+xz)\,dx\,dy$$

$$= \iint_G [xy + y(1-x-y) + x(1-x-y)]dxdy = \iint_G \left(x+y-x^2-y^2-xy\right)dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(xy - x^2 - y^2 - xy\right)dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x}{2}(1-x) - x^2(1-x) - \frac{1}{3}(1-x)^3 - \frac{1}{2}x(1-x)^2\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{5}{6}x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}\right)dx = \frac{1}{8}.$$

S_2 yüzeyinin denklemi $x = 0$ olduğundan

$$\iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_2 ds = \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot(-\mathbf{i})ds = \iint_{S_2}(-xy)ds = \iint_{S_2} 0 ds = 0$$

bulunur. S_3 yüzeyinin denklemi $z = 0$, S_4 yüzeyinin denklemi $y = 0$ olduğundan

$$\iint_{S_3} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} ds = \iint_{S_3} \mathbf{F}\cdot(-\mathbf{k})ds = \iint_{S_3}(-xz)ds = \iint_{S_3} 0.ds = 0,$$

$$\iint_{S_4} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} ds = \iint_{S_4} \mathbf{F}\cdot(-\mathbf{j})ds = \iint_{S_4}(-yz)ds = \iint_{S_4} 0 ds = 0$$

dır. Diğer taraftan

$\operatorname{div}\mathbf{F} = x + y + z$ olacağından

$$\iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\,dx\,dy\,dz = \iiint_D (x+y+z)dx\,dy\,dz = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (x+y+z)dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[x(1-x-y) + y(1-x-y) + \frac{1}{2}(1-x-y)^2\right]dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[x - x^2 - 2xy + y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}(1-x-y)^2\right]dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[xy - x^2y - xy^2 - \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{6}(1-x-y)^3\right]\Bigg|_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{6}(1-x)^3\right]dx = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{8}$$

olur. O halde Divergens teoremi gerçeklenir.

(c) şıkkı (a) ve (b) deki yolla benzer şekilde gösterilebilir.

7. Divergens teoreminden yararlanarak, aşağıda verilen F vektör alanları ile S yüzeyleri için $\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}ds$ integrallerini hesaplayınız.

a) $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S, $x^2 + y^2 = 1$ silindiri ile $z = 0$ ve $z = 1$ düzlemleri arasında kalan bölgenin sınırı.

b) $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S de $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ yarım küresi ile x Oy düzlemindeki $x^2 + y^2 \le 1$ dairesinin birleşimi

c) $\mathbf{F}(x,y,z) = y\left(x^2+y^2\right)^{3/2}\mathbf{i} - x\left(x^2+y^2\right)^{3/2}\mathbf{j} + (z+1)\mathbf{k}$; S üstten $z = 2x$ düzlemi, alttan $z = x^2 + y^2$ paraboloidi tarafından sınırlanan bölge

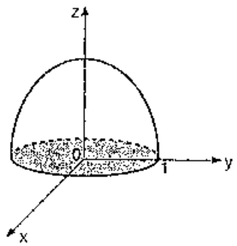
Çözüm:

b) $\operatorname{div} \mathbf{F} = 1 + 1 + 1 = 3$

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}.ds = \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F}.dxdydz = \iiint_D 3dx\,dy\,dz$$

$$= 3.\ (\text{yarı kürenin hacmi}) = 3\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi.1 = 2\pi$$

bulunur.

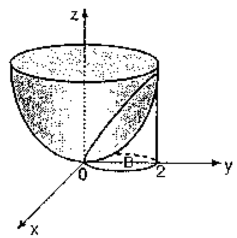


c) $$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{3}{2}y\left(x^2+y^2\right)^{1/2}2x - \frac{3}{2}x\left(x^2+y^2\right)^{1/2}2x + 1 = 1$$

olduğundan

$$x^2+y^2 = 2x \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$$

$$x^2+y^2 = 2x \Rightarrow r = 2\cos\varphi$$



$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds3 = \iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}dxdydz = \iint_B \left(\int_{x^2+y^2}^{2x} dz\right)dxdy$$

$$= \iint_B \left[2x - \left(x^2 - y^2\right)\right]dx\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{r=0}^{2\cos\varphi}\left(2r\cos\varphi - r^2\right)r\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{2}{3}r^3\cos\varphi - \frac{1}{4}r^4\right)\Big|_0^{2\cos\varphi}d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{4}{3}\cos^4\varphi d\varphi = \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^4\varphi d\varphi$$

$$= \frac{8}{3}.\frac{3}{8}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

olur.

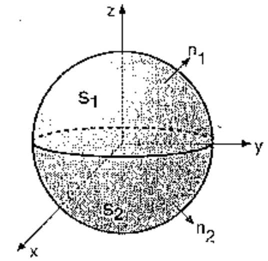
8. **$F(x, y, z) = x^3 y^2 z\,\mathbf{i} - x^4 y z\,\mathbf{j}$ ve $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ olduğuna göre**

$$\iiint_D \operatorname{div}F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

integralini divergens teoreminden yararlanarak hesaplayınız.

Çözüm:

$$\iiint_D \operatorname{div}F(x,y,z)dx\,dy\,dz = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds = \iint_{S_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_1ds + \iint_{S_2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_2ds$$



olur. S_1 yüzeyinin denklemi $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ olacağından bunun dışarı doğru yönlendirilen normali

$$\mathbf{n}_1 = \frac{-z_x\,\mathbf{i} - z_y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

olacağından

$$\iint_{S_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_1ds = \iint_{S_1}\left(x^4y^2z - x^4y^2z\right)ds = \iint_{S_1}0\,ds = 0$$

olur.

S_2 yüzeyinin denklemi $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ olacağından bunun normali

$$\mathbf{n}_2 = \frac{z_x\,\mathbf{i} + z_y\,\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} = -(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}) \text{ olur.}$$

Bu durumda

$$\iint_{S_2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_2ds = \iint_{S_2} -\left(x^4y^2z - x^4y^2z\right)ds = \iint_{S_2}0ds = 0$$

bulunur. Buna göre

$$\iiint_D \operatorname{div}F(x,y,z)dx\,dy\,dz = 0 \text{ olur.}$$

9. **$F(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ ve S de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresi olsun.**

$\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds$ integralini divergens teoreminden yararlanarak hesaplayınız.

Çözüm:

$\operatorname{div}F = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$ olacağından

$$\iint_S F\cdot n\,ds = \iiint_D \operatorname{div}F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_D 3\left(x^2+y^2+z^2\right)dx\,dy\,dz$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \rho^2\,\rho|\sin\theta|\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = \frac{3}{4}a^4\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \frac{3}{4}a^4\int_0^{2\pi}(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}\,d\varphi = \frac{3}{2}a^4\int_0^{2\pi}d\varphi = 3\pi a^4$$

bulunur.

YÜZEY İNTEGRALLERİNİN UYGULAMALARI

A) ALAN HESABI

Bir S yüzeyinin alanı

$$\boxed{A = \iint_S ds}$$

yüzey integraline eşittir.

B) KÜTLE HESABI

Yoğunluğu σ (x, y, z) olan bir levha bir S yüzeyi üzerine yerleştirilmiş olsun.

Bu levhanın kütlesi

$$\boxed{M = \iint_S \sigma(x,y,z)\,ds}$$

olur.

C) AĞIRLIK MERKEZİNİN HESABI

Bir S yüzey parçası üzerine yerleştirilmiş bir levhanın ağırlık merkezinin koordinatları

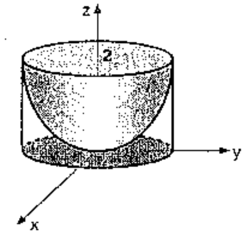
$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{M}\iint_S x\,ds,\quad \bar{y} = \frac{1}{M}\iint_S y\,ds,\quad \bar{z} = \frac{1}{M}\iint_S z\,ds}$$

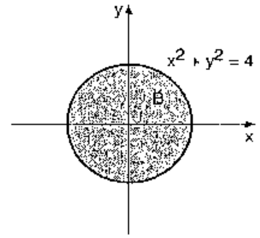
olur.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. $z = 2$ düzleminin $z = x^2 + y^2$ paraboloidinden ayırdığı küçük parçanın alanını bulunuz.

Çözüm:





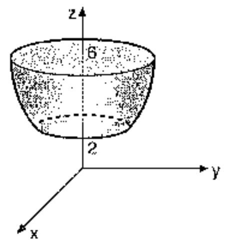
$f(x,y) = x^2 + y^2,\quad f_x = 2x,\quad f_y = 2y$

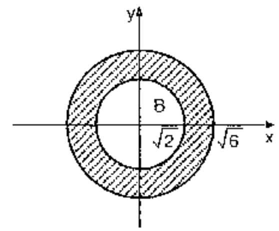
$$A = \iint_B \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy = \iint_B \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\sqrt{1+4r^2}\,r\,dr\,d\theta = \frac{1}{8}2\pi\frac{2}{3}\left(1+4r^2\right)^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{\pi}{6}\left((17)^{3/2}-1\right)$$

2. $z = x^2 + y^2$ paraboloidinin $z = 2$ ve $z = 6$ düzlemleri arasında kalan parçasının alanını bulunuz.

Çözüm:



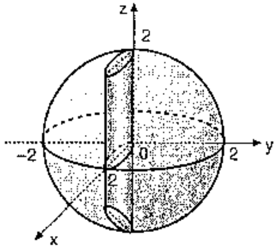


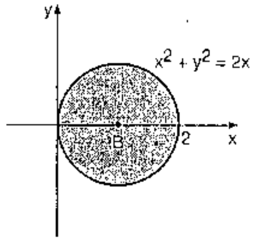
$$A = \iint_B \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy = \iint_B \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_{r=\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}\sqrt{1+4r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\,2\pi\frac{2}{3}\left(1+4r^2\right)^{3/2}\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} = \frac{\pi}{6}\left(5^3-3^3\right) = \frac{97}{6}\pi$$

3. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ **küresinin** $x^2 + y^2 - 2x = 0$ **silindiri içinde kalan parçasının alanını bulunuz.**

Çözüm:





$$f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

$$f_x = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \qquad f_y = \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

$$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow r = 2\cos\theta$$

$$A = \iint_B \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dx\,dy = 2\iint_B \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{4 - x^2 - y^2}}\,dx\,dy$$

$$= 2\iint_B \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\,dxdy = 2.2\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{2\cos\theta} \frac{2}{\sqrt{4 - r^2}}\,r\,dr\,d\theta$$

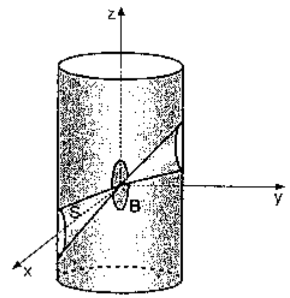
$$= 4.2 - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 2\left(4 - r^2\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg|_0^{2\cos\theta} d\theta = -8\int_0^{\pi/2}\left[\left(4 - 4\cos^2\theta\right)^{1/2} - 2\right]d\theta$$

$$= -16\left(\int_0^{\pi/2}(\sin\theta - 2)\,d\theta\right) = -16(1 - \pi) = 16(\pi - 1)$$

4. $y^2 + z^2 = x^2$ **konisinin** $x^2 + y^2 = a^2$ **silindiri içinde kalan parçasının alanını bulunuz.**

Çözüm:

Koni parçasının yOz düzlemindeki izdüşümü:



$$\left.\begin{array}{l} y^2 + z^2 = x^2 \\ y^2 + z^2 = a^2 - y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y^2 + z^2 = a^2 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{y}{\frac{a}{\sqrt{2}}}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2 = 1$$

elipsidir. S yüzeyinin bir parçasının denklemi

$f(y,z) = \sqrt{y^2 + z^2}$ dir. Bunun için

$$f_y = \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \qquad f_z = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}$$

olacağından

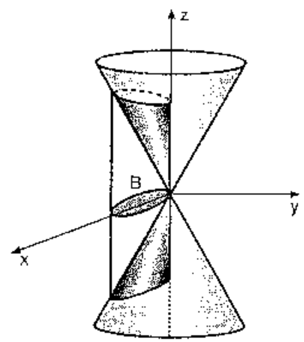
$$A = 2\iint_B \sqrt{1 + \frac{y^2}{y^2 + z^2} + \frac{z^2}{y^2 + z}}\,dx\,dy$$

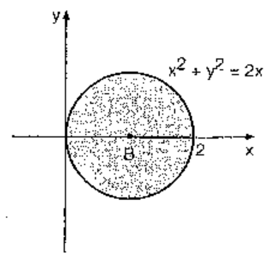
$$= 2\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} \sqrt{2}\,.\frac{a^2}{\sqrt{2}}\,r\,dr\,d\theta = 2a^2 2\pi\frac{1}{2} = 2a^2\pi \text{ olur.}$$

$$\left[\begin{array}{l} y = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos\varphi \\ z = ar\sin\varphi \\ J = \frac{a^2}{\sqrt{2}}r \end{array}\right]$$

5. $z^2 = x^2 + y^2$ **konisinin** $x^2 + y^2 = 2x$ **silindiri içinde kalan parçasının alanını bulunuz.**

Çözüm:



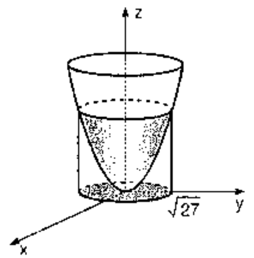


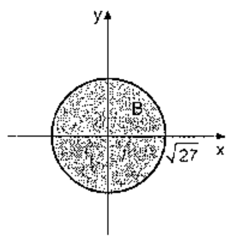
$$A=\iint_B\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy=2\iint_B\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

$$=2\iint_B\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy=2\sqrt{2}.\ \ (\text{B nin alanı})\ =2\sqrt{2}\pi 1^2=2\sqrt{2}\,\pi$$

6. $x^2+y^2=6z$ paraboloidinin $x^2+y^2=27$ silindiri içinde kalan parçasının alanını bulunuz.

Çözüm:





$$f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{6}$$

$$f_x=\frac{x}{3},\quad f_y=\frac{y}{3},\quad \left(\frac{x}{\sqrt{27}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{27}}\right)^2=1$$

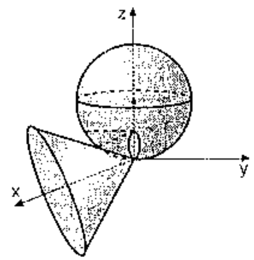
$$A=\iint_B\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy=\iint\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{9}}\,dx\,dy$$

$$\begin{bmatrix}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{bmatrix}$$

$$=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{27}}\sqrt{1+\frac{r^2}{9}}\,r\,dr\,d\theta=\frac{9}{2}2\pi\frac{2}{3}\left(1+\frac{r^2}{9}\right)^{3/2}\Bigg|_0^{\sqrt{27}}=6\pi\left(2^3-1\right)=42\pi$$

7. $x^2=y^2+z^2$ konisinin $x^2+y^2+z^2=2z$ küresi içinde kalan parçasının alanını bulunuz.

Çözüm:



$$y^2+z^2=z\rightarrow y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

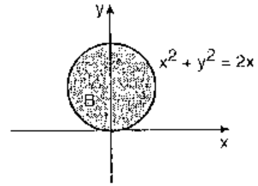
$$y=r\cos\theta$$

$$z-\frac{1}{2}=r\sin\theta$$

$$A=\iint_B\sqrt{\left(1+f_y^2+f_z^2\right)}\,dy\,dz$$

$$=2\iint\sqrt{1+\frac{y^2}{y^2+z^2}+\frac{z^2}{y^2+z^2}}\,dy\,dz$$

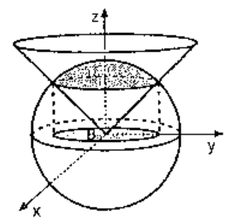
$$=2\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{1/2}\sqrt{2}\,r\,dr\,d\theta=\frac{1}{4}\sqrt{2}\pi=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$



8. S yüzeyi $x^2+y^2+z^2=1$ küresinin $z=\sqrt{x^2+y^2}$ konisi içinde kalan parçası olduğuna göre bu yüzey üzerine yerleştirilen homojen bir levhanın kütlesini ve ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm:

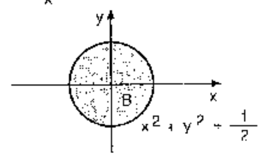
$\sigma(x,y,z)=k$ olsun. Levha homojen ve z – eksenine göre simetrik olduğundan $\bar{x}=\bar{y}=0$ dır.



$$M=\iint_S k\,ds=\iint_B k\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy$$

$$=\iint k\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

$$=\iint_B k\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$



$$=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}k\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\,r\,dr\,d\theta$$

$$=-\int_0^{2\pi}k\left(1-r^2\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}d\theta=2\pi(-k)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)=\sqrt{2}k\pi\left(\sqrt{2}-1\right)=\left(2-\sqrt{2}\right)k\pi$$

$$M_z = \iint_B z.k\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dy\,dx = \iint k\,dy\,dx = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} k\,r\,dr\,d\theta = 2\pi k\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{k\pi}{2} \quad \text{olacağından}$$

$$\bar{z} = \frac{\frac{k\pi}{2}}{\sqrt{2}k\pi\left(\sqrt{2}-1\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)} \quad \text{bulunur. Ağırlık merkezi} \quad G\left(0,\ 0,\ \frac{1}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}\right)$$

noktasıdır.

9. Yarıçapı 2 birim olan yarım küre şeklindeki ince bir levhanın yoğunluğu her (x, y, z) noktasında $\sigma(x,y,z) = z^2$ şeklinde değişiyor. Bu levhanın kütlesini ve ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm:

$$M = \iint_B \sigma(x,y,z)\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy = \iint z^2\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2-y^2}+\frac{y^2}{4-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

$$= \iint_B z^2\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \iint_B 2\sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2} 2\sqrt{4-r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$= -2\pi\frac{2}{3}\left(4-r^2\right)^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{4\pi}{3}.2^3 = \frac{32\pi}{3}$$

$$M_x = \iint_B x\sigma(x,y,z)\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy = \iint_B x^2\sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

$$= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} 2x\sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{-2}^{2} -\frac{2}{3}\left(4-x^2-y^2\right)^{3/2}\Bigg|_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dxy = 0$$

$$M_y = \iint_B y\sigma(x,y,z)\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy = \iint_B 2y\sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy = 0$$

$$M_z = \iint_B \sigma(x,y,z)z\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy = \iint_B \left(4-x^2-y^2\right)dx\,dy$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\left(4-r^2\right)r\,dr\,d\theta = 2\pi\left(2r^2-\frac{r^4}{4}\Big|_0^2\right) = 2\pi(8-4) = 8\pi$$

olacağından, ağırlık merkezinin koordinatları

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = 0, \quad \bar{z} = \frac{8\pi}{\frac{32\pi}{3}} = \frac{3}{4} \quad \text{olur.}$$

www.ieeeturkiye.wordpress.com adına yüklenmiş olup toplumları geliştiren bilginin herhangi bir şekilde ulaşılaşılamaz olmasını kabullenemeyen kişi veya kişiler tarafından upload edilmiştir.saygılarımzla..