24 Nisan '19

Temel Matris Kavramları

$\downarrow \bar{a}_3$

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [A]_{ij}$$

$\bar{b}_2$

$$\bar{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}_{m\times 1} \in R^m, \quad j = 1,2,\dots,n$$

$\rightarrow$ j. sütun vektörü

Bu durumda;

$A = [\bar{a}_1 \ \bar{a}_2 \ \bar{a}_3 \cdots \bar{a}_n]_{m\times n}$ şeklinde yazılabilir.

veya;

$\bar{b}_i = [a_{i1} \ a_{i2} \ a_{i3} \ \dots \ a_{in}]_{1\times n} \in R^n \quad i = 1,2,\dots,m$

$$A = \begin{bmatrix} -\bar{b}_1- \\ -\bar{b}_2- \\ \vdots \\ -\bar{b}_m- \end{bmatrix}_{m\times n}$$ olarak yazılabilir.

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad \bar{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ B

$\bar{b}_3 = [7 \ 8 \ 9]$

MATLAB

```
A= [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]
a2= A(:,2)
b3= A(3,:)
B= A(2:3, 2:3)
```

B= A(2:3, 2:3): 2. ve 3. satırı seç; 2. ve 3. sütunu seç

Genel: her bir eleman $a_{ij} \in C$

Birim Matris

$$I_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Birim Vektör

$$\bar{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n\times 1} \qquad \bar{e}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

$\rightarrow$ j. eleman

$$\underbrace{A_{m\times n}}_{\text{kare değil}} \cdot \underbrace{I_{n\times n}}_{\text{kare}} = A_{m\times n}$$

$I_{n\times n} \cdot A_{m\times n} =$ işlemi yapılamaz.

Eğer:

$A_{n\times n} \Rightarrow I.A = A.I = A$

Birim Eleman Matrisi

E matrisi $m\times n$ boyutlu bir matris bu matriste yalnızca tek bir eleman değeri 1, diğer elemanlar 0'dır.

$e_{r,s} = 1 \rightarrow$ r. satır, s. sütun } eleman değeri = 1

s. sütun

r. satır

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \boxed{1} & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$$

örnek

$$E_{3,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times4}$$

$$E_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times4}$$

MATLAB

```
E = zeros (4,4);
E (3,2) = 1 ;
```

Matris Çarpımı

$A_{m\times n} \longrightarrow A \in C^{m\times n}$

$\bar{a}_{n\times1} \longrightarrow \bar{a} \in C^{n\times1}$

$\bar{b}_{1\times m} \longrightarrow \bar{b} \in C^{1\times m}$

$B_{n\times k} \longrightarrow B \in C^{n\times k}$

1) $A \cdot \bar{a} = [\ \ ]_{m\times n} \cdot [\ \ ]_{n\times1} = [\ \ ]_{m\times1} = \bar{x}$

$1\times n$, i

* A'nın i. satırı ile $\bar{a}$ vektörü çarpılır. Çıkan sonuç $\bar{x}$ vektörünün i. elemanıdır.

2) $\bar{b}^T \cdot A = [\ \ ]_{1\times m} [\ \ ]_{m\times n} = [\ \ ]_{1\times n} = \bar{y}_{1\times n}$

$m\times1$

* $\bar{b}^T$ satır vektörü ile A'nın j. sütunu çarpılır. Çıkan sonuç $\bar{y}$ satır vektörünün j. elemanıdır.

3) $\bar{a}_{m\times1}$ sütun vekt. ile $\bar{b}_{1\times n}$ satır vektörünün çarpımı

$$\bar{a}_{m\times1} \cdot \bar{b}^T_{1\times n} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix}_{1\times n}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_mb_1 & a_mb_2 & a_mb_3 & \dots & a_mb_n \end{bmatrix}_{m\times n}$$

örnek

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times1}, \quad \bar{b}^T = \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix}_{1\times2}$$

i) $\bar{a} \cdot \bar{b}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \\ 12 & 15 \end{bmatrix}$

ii) $\bar{a}\bar{b}^T\bar{b} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \\ 12 & 15 \end{bmatrix}_{3\times2} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}_{2\times1}$

$$= \begin{bmatrix} 4\cdot4 + 5\cdot5 \\ 8\cdot4 + 10\cdot5 \\ 12\cdot4 + 15\cdot5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 \\ 82 \\ 123 \end{bmatrix}_{3\times1}$$

iii) $\bar{a}(\bar{b}^T\bar{b}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Big(\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}}_{41} \Big)$

$$= 41 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 \\ 82 \\ 123 \end{bmatrix}_{3\times1}$$

4) $\bar{a}_{m\times 1}$, $\bar{b}^T_{1\times m}$ olsun.

$$\bar{b}^T_{1\times m}\ \bar{a}_{m\times 1} = [\quad]_{1\times m}\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}_{m\times 1} = [\quad]_{1\times 1}$$

↓ Skaler

---

1) $\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}_{m\times n}\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}_{m\times 1}$

2) $[\quad]_{1\times m}\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}_{m\times n} = [\quad]_{1\times n}$

3) $\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}_{m\times 1}[\quad]_{1\times n} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}_{m\times n}$

4) $[\quad]_{1\times m}\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}_{m\times 1} = [\quad]_{1\times 1} \rightarrow$ skaler.

---

* Sağdan çarpımda;

$E_{r,s} \Rightarrow$ $r.$ sutn $\longrightarrow$ $s.$ sütun

* Soldan çarpım;

$E_{r,s} \Rightarrow$ $s.$ satır $\longrightarrow$ $r.$ satır

Birim Eleman Matrisi ile Çarpım ③

$A_{m\times n}$, $E_{r,s} \rightarrow m\times m$ r.satır s.sütun değeri 1

Örnek

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

$$E_{3,2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) E ile sağdan çarpım (sütun yer değiştirme)

$$A\cdot E_{3,2} = B_{4\times 4}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

* B'nin tüm sutunları 0, ancak 2. sutunu A'nın 3. sutunu olarak kopyalanır.

MATLAB $\Rightarrow$ B(:,2) = A(:,3)

$\Rightarrow$ B = zeros(4,4)

b) E ile soldan çarpım; (satır yer değiştirme)

$$E_{3,2}\cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

* B'nin 3. satırı , A'nın 2. satırı

MATLAB $\Rightarrow$ B(3,:) = A(2,:)

Örnek $I_{3\times3} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

yer değiştirme matrisi

$D=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix} \rightarrow$ I'nın 1. satır ile 2. satırı yer değiştirmiş, 1. sütun ile 2. sütun yer değiştirmiş.

$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$

$$\underset{3\times3}{A}\cdot\underset{3\times3}{D} = \begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}2&1&3\\5&4&6\\8&7&9\end{bmatrix}_{3\times3}$$ 1. sütun ile 2. " yer değiştirmiş.

$$D\cdot A = \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}4&5&6\\1&2&3\\7&8&9\end{bmatrix} \Rightarrow$$ A'nın 1. satırı ile 2. satırı yer değiştirdi.

Yer Değiştirme Matrisi ile Çarpım

D_{sr} : $m\times m$ boyutunda birim matrisin s. sütunu ile r. sütununun yer değiştirmiş olan bir matristir.

$$D_{sr}=\begin{array}{c} \qquad\quad s \quad r \qquad \\ \begin{bmatrix}1 & & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \\ \vdots & & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{m\times m}\end{array}$$

a) $A_{m\times m}\cdot D_{sr} = B \Rightarrow B(:,s)=A(:,r)$

$B(:,r)=A(:,s)$

(sütun yer değiştirme)

b) $D_{s,r}\cdot A = B$

$\Rightarrow B(s,:)=A(r,:)$ // satır yer değiştirme

Temel Matris İşlemleri

$A_{m\times n}\in R^{m\times n}$, $B\in R^{m\times n}$, $\alpha\in R$

1) Transpoze

$\underset{n\times m}{C}=A^T\in R^{n\times m}$, $C_{ij}=a_{ji}$, $i=1,\dots,n$, $j=1,2,\dots,m$

2) Toplama

$\underset{m\times n}{C}=A+B \Rightarrow c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $i=1,\dots,m$; $j=1,\dots,n$

3) Skaler-matris çarpımı

$\underset{m\times n}{C}=\alpha\cdot A_{m\times n} \Rightarrow c_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$, $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$

4) matris-matris çarpımı

$A_{m\times p}$, $B_{p\times n}$

$\underset{m\times n}{C}=A\cdot B \Rightarrow c_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}\cdot b_{kj}$

Vektör İşlemleri

$a\in R$, $\bar{x}\in R^n$, $y\in R^n$, $\bar{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$, $\bar{y}=\begin{bmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}$

1) Skalerle çarpım : $\bar{z}=a\cdot\bar{x} \Rightarrow z_i=a\cdot x_i$, $i=1,\dots,n$

2) Toplama : $\bar{z}=\bar{x}+\bar{y} \Rightarrow z_i=x_i+y_i$, $i=1,\dots,n$

3) (iç çarpım) nokta çarpım : $c=\bar{x}^T\cdot\bar{y} \Rightarrow c=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

4) Vektörel çarpım (Hadamard Çarpım)

(eleman-eleman çarpım)

$\bar{z}=\bar{x}.*\bar{y} \Rightarrow z_i=x_i\cdot y_i$

5) "skaler a x plus y" (saxpy) işlemi

$\bar{y}=a\cdot\bar{x}+\bar{y}$ (y vektörü güncelleme işlemi)

Algoritma (iç çarpım Güncellemesi)

$\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$, $c = \bar{x}^T \cdot \bar{y}$

Matlab:

```
c=0;
for (i=1:n)
c = c + x(i)·y(i)
end
```

Karmaşıklık Analizi

n çarpma, n toplama $\Big\}$ $O(n)$ ↓ order

Algoritma (saxpy)

$\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}$

Matlab: $\bar{y} = a\bar{x} + \bar{y}$

```
for (i:n)
y(i) = a·x(i) + y(i)
end
```

Karmaşıklık Analizi

n çarpma, n toplam $\Big\}$ $O(n)$