T.C. ANADOLU ÜNİVERSİTESİ YAYINI NO: 2828
AÇIKÖĞRETİM FAKÜLTESİ YAYINI NO: 1786

MATEMATİK-II

Yazarlar
Prof.Dr. Yalçın KÜÇÜK (Ünite 1)
Doç.Dr. Yılmaz DERELİ (Ünite 2)
Doç.Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU (Ünite 3)
Doç.Dr. Namık Kemal ERDOĞAN (Ünite 4)
Doç.Dr. Emrah AKYAR (Ünite 5)
Yrd.Doç.Dr. Figen TAKIL MUTLU (Ünite 6)
Prof.Dr. Vakıf CAFER (Ünite 7, 8)

Editörler
Prof.Dr. Şahin KOÇAK
Doç.Dr. Namık Kemal ERDOĞAN

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

UZAKTAN ÖĞRETİM TASARIM BİRİMİ

Genel Koordinatör
Doç.Dr. Müjgan Bozkaya

Genel Koordinatör Yardımcısı
Arş.Gör.Dr. İrem Erdem Aydın

Grafik Tasarım Yönetmenleri
Prof. Tevfik Fikret Uçar
Öğr.Gör. Cemalettin Yıldız
Öğr.Gör. Nilgün Salur

Latex Stil Dosyası Hazırlayanlar
Prof.Dr. Emrah Akyar
Doç.Dr. Ali Deniz
Doç.Dr. Serkan Ali Düzce
Yrd.Doç.Dr. Yunus Özdemir

Kitap Koordinasyon Birimi
Uzm. Nermin Özgür

Kapak Düzeni
Prof. Tevfik Fikret Uçar
Öğr.Gör. Cemalettin Yıldız

Dizgi
Açıköğretim Fakültesi Dizgi Ekibi

Matematik-II

ISBN
978-975-06-1493-4

2. Baskı

Bu kitap ANADOLU ÜNİVERSİTESİ Web-Ofset Tesislerinde 60.000 adet basılmıştır.
ESKİŞEHİR, Nisan 2013

İçindekiler

Önsöz

Sevgili Öğrenciler,

Matematik öğrenmeyi keyifli bir serüvene dönüştürmek amacıyla hazırladığımız kitabınızın ikinci bölümünde de aynı anlayışla yeni konuları ele alıyoruz. Pınar ve Mete Hocalarla, meraklı öğrencilerimiz Zeynep, Gökçe, Selçuk ve Engin'den oluşan ekibimiz tatlı-sert tartışmalarla bu konuları her yönüyle irdeleyerek, berraklaştırıp, içselleştirmeye çalışıyorlar. Biz de daha önce olduğu gibi sizlerin de bu tartışmaların hem izleyicisi, hem katılımcısı olmanızı diliyoruz. Aklınıza takılan her noktayı, zihninizde beliren her soruyu lütfen bize iletiniz.

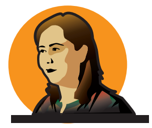
Matematiğin yaşamla bağlarını daha öne çıkarmak için eklediğimiz yeni ünitelerin ilginizi çekeceğini umuyoruz. Şaşırtıcı çeşitlilikte uygulama alanları olan çizge kavramı, matematiğin sadece türev ve integralden ibaret olmadığını göstermesi açısından da bize önemli görünüyor. Bir zamanlar yalnızca matematikçilerin soyut estetik zevklerine hizmet ettiği düşünülen asal sayılar bugün herkes için yaşamsal olan iletişim güvenliğinin en vazgeçilmez araçlarına dönüşmüş durumdalar. Bu nedenle kitabınızda onlara da yer ayırdık ve şifreleme ile ilgili temel bilgilere biraz dokunmak istedik. Oyunlar teorisi de yaşamın içinden kopup gelen yeni ünitelerimizden birisi.

Diyalog formatının kendine has dinamiği nedeniyle, üniteleri okurken en az bir alt-bölümü kendi bütünlüğü içinde okumanız önerimizi yineliyor ve iyi okumalar diliyoruz.

Editörler
Şahin Koçak ve Namık Kemal Erdoğan

Soru, görüş ve önerileriniz için iletişim adresimiz: nkerdoga@anadolu.edu.tr

Gökçe



Zeynep

Selçuk

MATEMATİK II

Engin

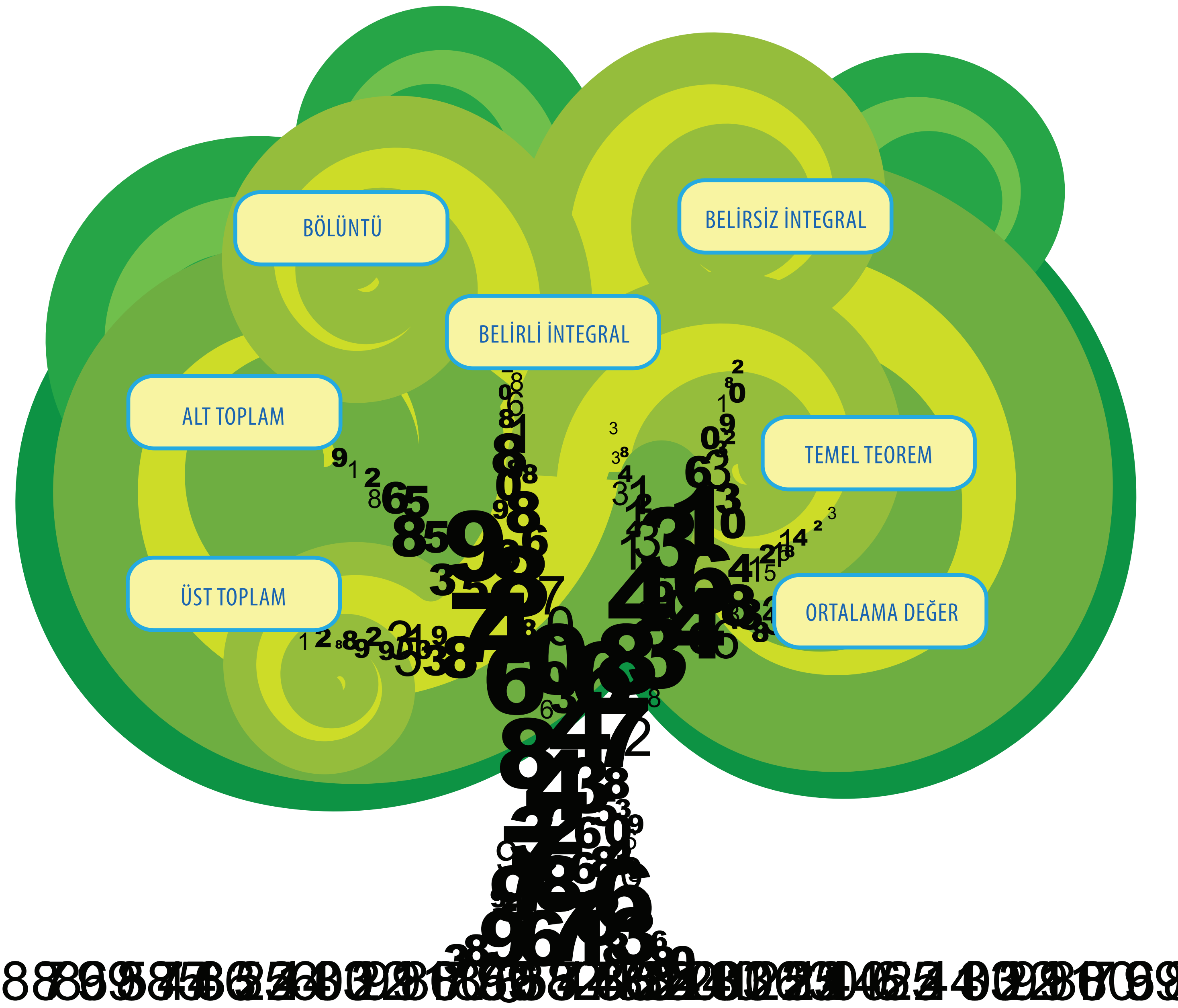
Pınar Hoca

Mete Hoca

Belirli ve Belirsiz İntegral

1. ÜNİTE

MATEMATİK 2



Giriş

Dün televizyonda bir haber izledim, canım sıkıldı.

Neden Gökçe, haber neydi?

Geçen yaz Bodrum'da tatil yaptığımız yöreye çok yakın bir bölgede orman yangını başlamış ve bir saatin sonunda yayılma hızı saatte 20 hektara ulaşmış. Bir saat sonraki haberde, rüzgarın da etkisiyle, yangının yayılma hızının saatte 40 hektara çıktığını duydum.

Ben de çevre illerden yangın söndürme ekiplerinin yola çıktığını duydum ama daha sonra neler olduğunu bilmiyorum.

Evet Selçuk, bir saat sonraki haber bülteninde yangının hızının giderek arttığı ve saatte 100 hektara kadar çıktığı söylendi. Dördüncü haber bülteninde yangının kontrol altına alındığı, söndürme çalışmalarının karadan ve havadan sürdürüldüğü, buna rağmen yayılma hızının ancak saatte 50 hektara düşürülebildiği açıklandı. Son izlediğim haber bülteninde ise yangının yağmurun da etkisiyle söndürüldüğü söylendi. Güzelim ormanlarımız böyle yanıp kül oluyor hocam. Kim bilir ne kadar orman kül oldu!

Gerçekten çok üzücü bir durum Gökçe. Madem merak ediyorsun, ne kadar ormanın yandığı konusunda bir tahminde bulunabiliriz.

Bunu nasıl yapabiliriz hocam?

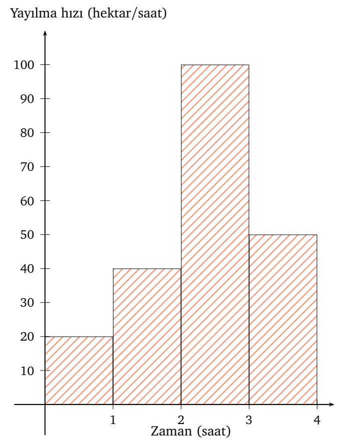
Yangın beş saat sürmüş ve Gökçe ilk dört saatin her biri için yangının yayılma hızını bizlere söyledi. Bunlarla ilgili yandaki tabloyu kurup, sonra da ikilileri zaman-yayılma hızı koordinat sisteminde işaretleyebiliriz.

Zaman (saat)	1	2	3	4
Yayılma hızı (hektar/saat)	20	40	100	50

Tablo 1.1: Yangının saatteki yayılma hızı tablosu.

$$\text{Yangının yayıldığı alan} = \text{Zaman} \times \text{Yayılma hızı}$$

eşitliğini kullanarak da 4 saat içinde yaklaşık olarak 210 hektarlık orman alanının tahrip olduğunu anlayabiliriz. Bu tahminimizi birer saat arayla verilen yayılma hızı bilgilerine göre yaptık. Daha iyi bir tahminde bulunmak için sizce neye ihtiyacımız var?

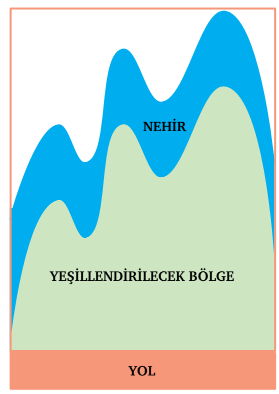


Zaman aralıklarını daha kısa tutmaya ihtiyacımız olabilir mi? Örneğin saatteki değil de her yarım saatteki yayılma hızlarını bilseydik daha iyi bir tahmin yapabilirdik sanırım.

Engin haklı! Biz birer saatlik aralıklarla yangının değişme hızını sabit kabul ediyoruz. Ancak yangının yayılma hızı her an değişiklik gösterebilir. Yani açık olarak belirtemesek de yayılma hızı zamanın sürekli bir fonksiyonudur. Hız ölçümü yapılan zaman aralıklarını ne kadar azaltırsak, zarar için o kadar iyi bir tahminde bulunabiliriz.

Hocam başka hangi durumlar için tahminde bulunabiliriz?

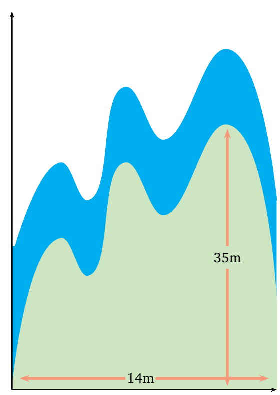
Birçok durum için tahminde bulunabiliriz. İsterseniz başka bir örnek vereyim. Varsayalım ki bir kasabada bir nehirle yol arasında kalan, şekilde görülen bölgeyi yeşil alan haline getirmek istiyorsunuz. Bu projenin maliyeti metrekare başına 25 lira olsun. Bu proje için yaklaşık ne kadar para gerekir?



Bölgenin alanını bulurum ve 25 ile çarparım. Ancak bu bölgenin şekli ne üçgene ne de dörtgene benziyor. Ben bir tahminde bulunamayacağım.

Hocam bu bir mühendislik işi, bizi bununla uğraştırmasanız.

Doğru bir mantık yürütmeyle bunu herkes yapabilir, yeter ki nereden başlayacağınızı bilin. Bu problemi çözebilmeniz için size bir ipucu vereyim: Bölgenin yola en uzak noktasının yola uzaklığı 35 metre ve bölgenin yola cephesi 14 metre olsun. Bölgeyi alttan sınırlayan yolu x-ekseni olarak alıp, bölgeyi bir dikdörtgenle sınırlandıralım. Yani bölgeyi eni 14 metre, boyu 35 metre olan bir dikdörtgen içine alalım.



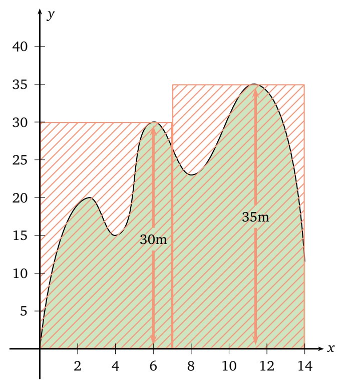
Hocam şaka mı yapıyorsunuz? Bu dikdörtgenin alanı $35 \cdot 14 = 490\ \text{m}^2$ olur. Bu değer istenen alandan oldukça büyüktür, bu gerçeği pek yansıtmaz.

Güzel! Sizce daha iyi bir tahminde bulunmak için neye ihtiyacımız var?

Bölgeyi daha küçük dikdörtgenler içine alarak bu dikdörtgenlerin alanları toplamı ile tahminde bulunsak hocam?

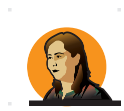
Ne tür dikdörtgenleri öneriyorsun Engin?

Yolun bölgeyi alttan sınırlayan kısmını x-ekseninin bir parçası olarak kabul etmiştik. Şimdi bu parçayı ikiye ayırıp, bunlar üzerinde yola uzaklıkları en büyük olan noktaların uzaklıklarını alırsak, bölgeyi enleri aynı fakat boyları farklı iki dikdörtgenle üstten sınırlandırabiliriz. Bu dikdörtgenlerin alanlarının toplamı bölgenin alanı için daha iyi bir tahmin olur.



Şekil 1.1: Yeşillendirilecek bölgenin yola cephesini ikiye bölerek oluşturulan dikdörtgenlerin alanlarıyla bölgenin alanına üstten yaklaşım.

Güzel bir yaklaşım. Hemen ölçümleri vereyim o zaman: 1. parçada yola en uzak nokta 30 metre, 2. parçada en uzak nokta 35 metre uzaklıkta olsun.



Ben de hesabı yapayım. Dikdörtgenlerin alanları toplamı:

$$30 \cdot 7 + 35 \cdot 7 = (30 + 35) \cdot 7 = 65 \cdot 7 = 455\ \text{m}^2$$

olduğundan bu dikdörtgenlerin oluşturduğu bölgeyi yeşillendirmenin toplam maliyeti: $455 \cdot 25 = 11375$ lira olur.

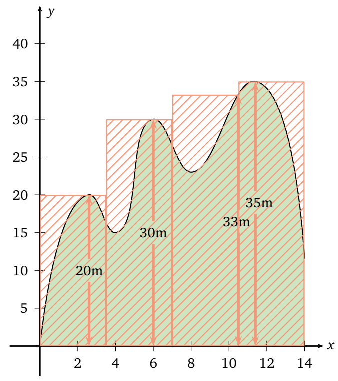
Peki hocam daha fazla dikdörtgen kullansak, örneğin bölgenin yola cephesini dört eşit parçaya bölerek bölgeyi dört dikdörtgen içine alsak sanırım daha iyi bir yaklaşımda bulunmuş oluruz.

Bölgeyi dıştan sınırlayan dikdörtgenlerin alanları toplamıyla bölgenin alanına giderek yaklaşıyorsun Engin, gayet güzel! Bu dört parçadaki yola uzaklığı en büyük olan noktaların uzaklıkları: Birinci parçada 20 metre, ikinci parçada 30 metre, üçüncü parçada 33 metre, dördüncü parçada 35 metre ise sonuç ne olur?

Bu durumda

$$20\cdot\frac{7}{2}+30\cdot\frac{7}{2}+33\cdot\frac{7}{2}+35\cdot\frac{7}{2}=(20+30+33+35)\cdot\frac{7}{2}=118\cdot\frac{7}{2}=413\ \ \mathrm{m}^2$$

olduğundan proje maliyeti $413\cdot 25 = 10325$ lira olur. Hocam, neden yolun bu dört parçası için de yola uzaklıkları en küçük olan noktalarını alarak tahminde bulunmuyoruz?



Şekil 1.2: Yeşillendirilecek bölgenin yola cephesini dörde bölerek oluşturulan dikdörtgenlerin alanlarıyla bölgenin alanına üstten yaklaşım.

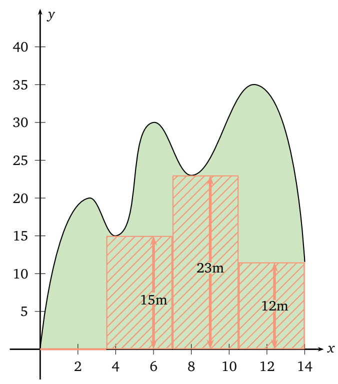
Tabii, öyle de düşünebilirsiniz.

Parçalardaki en kısa uzunluklar; 1. parçada 0 metre, 2. parçada 15 metre, 3. parçada 23 metre ve 4. parçada 12 metredir. Haydi bakalım hesaplayın!

İlk parçada en kısa uzaklık 0 metre olduğundan bir alan oluşmaz. Diğer parçalarda enler eşit ve 3,5 metre olduğundan en kısa uzaklıklarla oluşturulan dikdörtgenlerin alanları toplamı:

$$\frac{7}{2}\cdot(15+23+12)=\frac{7}{2}\cdot 50=175\ \mathrm{m}^2 \text{ olur.}$$

Projenin maliyeti de $175\cdot 25 = 4375$ lira olur.



Şekil 1.3: Yeşillendirilecek bölgenin yola cephesini dörde bölerek oluşturulan dikdörtgenlerin alanlarıyla bölgenin alanına alttan yaklaşım.

Ne güzel, bu tahminle proje oldukça ucuza mal olacak.

Ucuz gibi gözükse de bölgenin büyük bir kısmını ihmal ettik. Hocam, bölgenin yoldaki sınırını 8 parçaya bölerek işlemlerimizi tekrarlasak ne olurdu?

Peki Selçuk, bu parçalardaki en kısa ve en uzun mesafeleri yandaki tabloyla veriyorum.

Yola uzaklık	En kısa	En uzun
1	0	18
2	16	20
3	15	27
4	26	30
5	23	28
6	24	33
7	33	35
8	12	33

Hesaplamaları da ben yapayım. Önce en uzun olanları göz önüne alarak başlayayım:

$$\frac{7}{4}\cdot(18+20+27+30+28+33+35+33)=\frac{7}{4}\cdot 224=392.$$

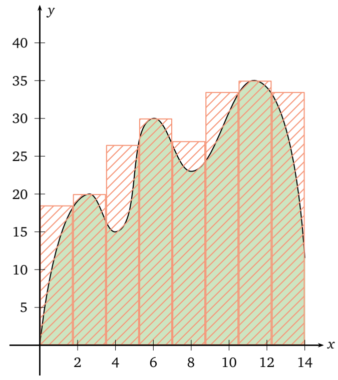
Bu durum için proje maliyeti $392\cdot 25 = 9800$ lira olur. Şimdi de en kısa uzunluklarla hesaplamayı yapayım:

$$\frac{7}{4}\cdot(0+16+15+26+23+24+33+12)=\frac{7}{4}\cdot 149=260,75.$$

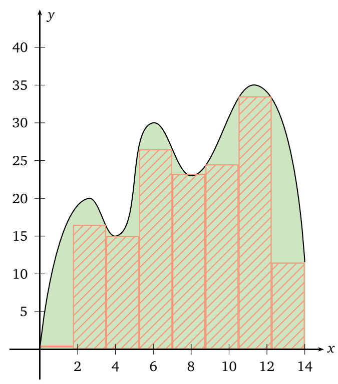
Projenin bu durumda maliyeti de $260,75\cdot 25 = 6518,75$ lira olur.

Hocam, parça sayısını arttırdıkça en kısa ve en uzun uzunluklarla yaptığımız hesaplar sonucunda elde ettiğimiz maliyet değerleri, birbirlerine gitgide yaklaşıyorlar. Bu adımda projenin maliyeti en az $6518,75$ lira en çok 9800 lira olur. Bu iki değerin ortalaması alınırsa yaklaşık olarak 8159 lira olur.

Bravo sizlere, bölgenin alanına alttan ve üstten yaklaşıp, alanı oldukça doğru bir bakış açısıyla hesaplamaya çalıştınız. Yaptığınız hesaplamalarla aynı zamanda herhangi bir eğriyle sınırlı alanların hesabı için ilk adımı da atmış oldunuz.



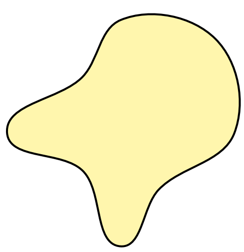
Şekil 1.4: Yeşillendirilecek bölgenin yola cephesini sekize bölerek oluşturulan dikdörtgenlerin alanlarıyla bölgenin alanına üstten yaklaşım.



Şekil 1.5: Yeşillendirilecek bölgenin yola cephesini sekize bölerek oluşturulan dikdörtgenlerin alanlarıyla bölgenin alanına alttan yaklaşım.

Alan Hesaplamaları

Alan hesaplamalarının binlerce yıllık bir tarihçesi vardır. Eski Mısır ve Babil'de nehirler taşar ve yön değiştirirdi. Nehirler yataklarını değiştirdikçe bazı çiftçiler topraklarını kaybederken bazıları yeni topraklar kazanırlardı. Ödenecek vergiler sahip olunan toprakların alanına göre belirlendiği için nehir kıyısındaki düzensiz şekilli arazilerin alanlarını sık sık hesaplamak gerekirdi.

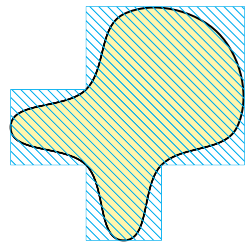


Şekil 1.6: Bu bölgenin alanı nasıl hesaplanabilir?

Peki hocam, o zaman bu alan hesaplamaları nasıl yapılıyordu? Belli bir yöntem var mıydı?

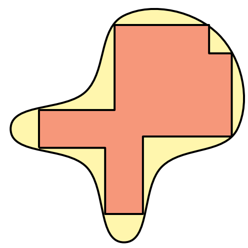
Babilliler ve Mısırlılar, üçgen ve dörtgenin alan hesabını bildiklerinden, alan ölçümlerini üçgenlerin ve dörtgenlerin alanlarına dayandırarak hesaplıyorlardı. Daha sonra Yunan matematikçiler Eudoxus (M.Ö. 408- M.Ö. 355) ve Arşimet (M.Ö. 287- M.Ö. 212) eğrilerle sınırlı düzlemsel alanların belirlenebilmesi için "Tüketme Yöntemi" adı verilen bir yöntem geliştirerek, bugün hala üzerinde çalışılan integral kavramının temellerini atmışlardır.

Hocam, tüketme yönteminden kısaca bahsedebilir misiniz?



Şekil 1.7: Bölgeye dıştan yaklaşım.

Tüketme yönteminde biraz önce bizim yaptıklarımıza benzer bir yol izliyoruz. Öncelikle alanını hesaplayabileceğimiz çokgenler kullanarak bölgeyi dıştan kuşatıyoruz. Daha sonra da bölgenin tamamen içinde kalan, yine alanını hesaplayabileceğimiz çokgenlerle bölgenin sınırına içten yaklaşıyoruz. Böylece bölgeyi dıştan ve içten kuşatıp bu çokgenlerin kenar sayılarını adım adım arttırarak, bölgenin alanını istenilen hassasiyette hesaplayabiliyoruz. Hatta çoğu kez gerçek alan değerine de ulaşabiliyoruz.

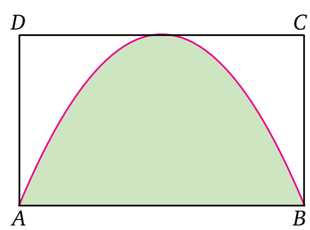


Şekil 1.8: Bölgeye içten yaklaşım.

Buna bir örnek yapsak hocam?

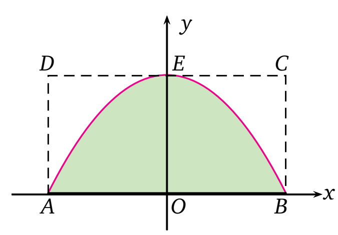
Peki Engin. Dilerseniz Arşimet'in çözdüğü meşhur bir problemi bu yöntemle ele alalım.

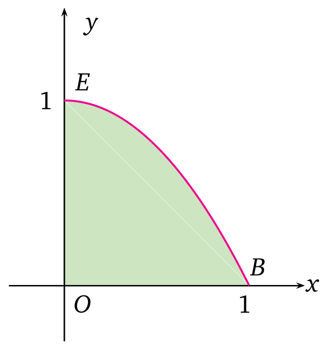
Arşimet bir parabolik yayın altında kalan alanın bu yayı çevreleyen dikdörtgenin alanının üçte ikisi olduğunu ifade etmiştir. Diğer bir deyişle Arşimet, şekildeki taralı alanın $ABCD$ dikdörtgeninin alanının üçte ikisi olduğunu söylemiştir.



Hocam, problemin Arşimetlik oluşu gözümü korkuttu doğrusu.

Daha problemi çözmeye başlamadan gözünüz korkmasın. Hem Arşimet akıllı öğrencileri severdi. Önceki yeşil alan probleminin bir benzerini tartışacağız. Önce parabol yayını çevreleyen dikdörtgeni, tabanının orta noktası dik koordinat sisteminin merkezine gelecek şekilde x-ekseni üzerine yerleştirelim.





Hocam, bu durumda şekil y-eksenine göre simetrik oldu. Bu alan hesaplamalarında kolaylık sağlar mı?

Evet Zeynep. Bu durumda şeklin sağ yarısını göz önüne almak yeterli olacaktır. Kolaylık olsun diye $|OB| = |OE| = 1$ alalım.

Söyleyin bakalım bu parabolün denklemi ne olur?

Tepe noktası y-ekseni üzerinde olan parabolün denklemi $y = ax^2 + c$ biçimindeydi. Parabolün tepe noktası $(0, 1)$ olduğundan bu denklemde x yerine 0, y yerine 1 yazarsak $c = 1$ elde edilir. Parabol x-eksenini $(1, 0)$ noktasında kestiğinden $y = ax^2 + 1$ denkleminde x yerine 1, y yerine 0 yazılırsa $a = -1$ bulunur. Sonuç olarak parabolün denklemi $y = 1 - x^2$ olur hocam.

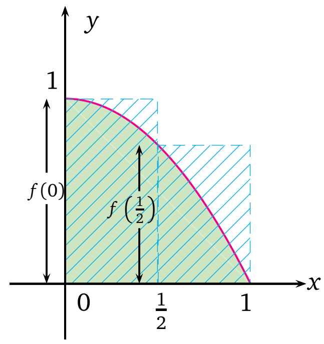
Aferin Engin. Böylece problemimiz $y = 1 - x^2$ eğrisinin $[0, 1]$ aralığı üzerindeki parçasının altındaki alanın $\frac{2}{3}$ br^2 olduğunu göstermeye dönüşür.

İlk olarak $[0, 1]$ aralığını ikiye bölerek işe başlıyorduk. Bunun için 0, $\frac{1}{2}$ ve 1 noktalarını kullanıp $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ve $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ aralıklarını alalım. Bölgeyi dıştan kuşatan ve bölgeye içten yaklaşan uygun dikdörtgenlerin alanlarıyla bölgenin alanına bir yaklaşımda bulunalım.

Bunun için grafiğin $[0, 1]$ aralığı üzerinde azaldığını kullanmak yerinde olur.

Kullanalım hocam, biz 0'dan 1'e doğru hareket ettikçe grafik aşağı doğru iniyor, yani fonksiyonun değerleri azalıyor. Bu durumda fonksiyon en büyük değerini alt aralıkların sol uç noktalarında ve en küçük değerini de sağ uçlarda alır, değil mi?

Evet Zeynep, tam olarak bunu demek istemiştim. Önce fonksiyonun sırasıyla en büyük değerlerini kullanıp bölgeyi dıştan kuşatan ve en küçük değerlerini kullanıp bölgeye içten yaklaşan dikdörtgenlerin alanlarıyla bölgenin alanına yaklaşalım. Bunlara sırasıyla $[0,1]$ aralığının $\left\{0,\ \frac{1}{2},\ 1\right\}$ bölüntüsüne karşı gelen üst toplamı ve alt toplamı denir.

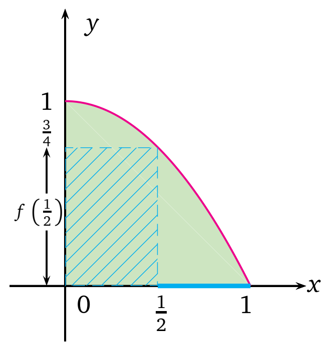


Şekil 1.9: $[0,1]$ aralığının $\left\{0,\ \frac{1}{2},\ 1\right\}$ bölüntüsüne karşılık gelen üst toplam.

Üst toplam (Şekil 1.9)

$$\ddot{\mathrm{U}}_2(f) = f(0)\cdot\frac{1}{2} + f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = 1\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}\ \mathrm{br}^2$$

ve alt toplam (Şekil 1.10)

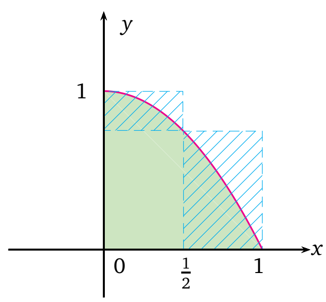


Şekil 1.10: $[0,1]$ aralığının $\left\{0,\ \frac{1}{2},\ 1\right\}$ bölüntüsüne karşılık gelen alt toplam.

$$\mathrm{A}_2(f) = f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} + f(1)\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8}\ \mathrm{br}^2$$

olur.

Aradığımız alana A dersek $\mathrm{A}_2(f) \leq \mathrm{A} \leq \ddot{\mathrm{U}}_2(f)$ eşitsizliği gerçekleşir. Bu durumda üst ve alt toplama giren dikdörtgenlerin farklarından oluşan fark dikdörtgenleri Şekil 1.12'deki sütunu oluştururlar. Bu sütunun alanı $\ddot{\mathrm{U}}_2(f) - \mathrm{A}_2(f) = (f(0) - f(1))\cdot\frac{1}{2}$'dir.

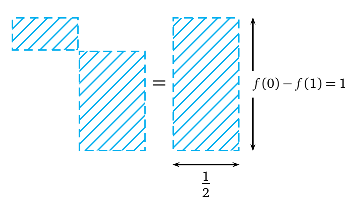


Şekil 1.11: $[0,1]$ aralığının $\left\{0,\ \frac{1}{2},\ 1\right\}$ bölüntüsüne karşılık gelen fark dikdörtgenleri.

Bence ne $\frac{7}{8}$, ne de $\frac{3}{8}$ istediğimiz sonuç olan $\frac{2}{3}$'e pek yakın sayılar değiller. Bunun için $[0,1]$ aralığını, $\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ bölüntüsünü kullanarak

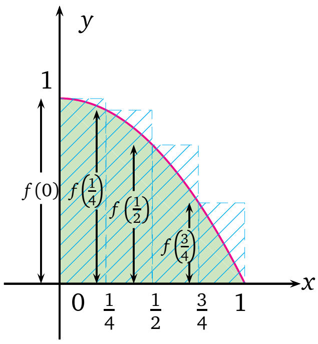
$$\left[0, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \left[\frac{3}{4}, 1\right]$$

gibi dört eşit parçaya ayırsak daha iyi olacak hocam.

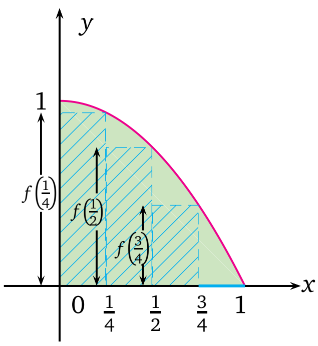


Şekil 1.12: $[0,1]$ aralığının $\left\{0,\ \frac{1}{2},\ 1\right\}$ bölüntüsüne karşılık gelen fark dikdörtgenlerinin oluşturduğu farklar sütunu.

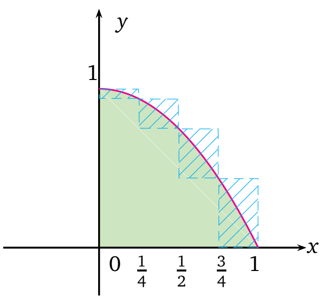
Haklısın Engin. Bu durumda üst toplama giren dikdörtgenler bölgeyi dıştan kuşattıkları için dikdörtgenlerin alanları toplamı bölgenin alanından büyük, fakat bir önceki adımdaki üst toplamdan küçük olacaktır. Alt toplama giren dikdörtgenlerin alanları toplamı ise, bölgenin içinde kalacaklarından, bölgenin alanından küçük, fakat bir önceki adımda elde ettiğimiz alt toplamdan daha büyük olacaktır.



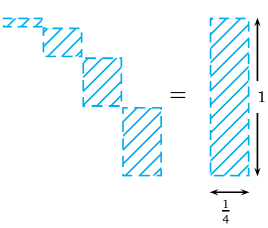
Şekil 1.13: $[0,1]$ aralığının $\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ bölüntüsüne karşılık gelen üst toplam.



Şekil 1.14: $[0,1]$ aralığının $\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ bölüntüsüne karşılık gelen alt toplam.



Şekil 1.15: $[0,1]$ aralığının $\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ bölüntüsüne karşılık gelen fark dikdörtgenleri.



Şekil 1.16: $[0,1]$ aralığının $\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ bölüntüsüne karşılık gelen farklar sütunu.

Bu durumda üst ve alt toplamlar

$$
\begin{aligned}
\ddot{\mathrm{U}}_4(f) &= f(0)\cdot\frac{1}{4}+f\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}+f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{4}+f\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}\\
&= 1\cdot\frac{1}{4}+\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{7}{16}\cdot\frac{1}{4}=\frac{25}{32}\text{ ve}\\
\mathrm{A}_4(f) &= f\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}+f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{4}+f\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}+f(1)\cdot\frac{1}{4}\\
&= \frac{15}{16}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{7}{16}\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{4}=\frac{17}{32}\text{ olur.}
\end{aligned}
$$

Zeynep'in hesaplamalarıyla da gördüğümüz gibi bölgenin alanı olan A sayısı bu iki sayı arasında kalır. Yani $\mathrm{A}_4(f) \leq \mathrm{A} \leq \ddot{\mathrm{U}}_4(f)$ olur. Böylece aradığımız alan değerine üstten ve alttan biraz daha yaklaşmış oluruz. Ayrıca üst ve alt toplamlara giren dikdörtgenlerin farkı ile oluşan fark dikdörtgenleri Şekil 1.16'daki sütunu oluştururlar. Bu sütuna farklar sütunu diyelim. Farklar sütununun alanı ise

$$\ddot{\mathrm{U}}_4(f)-\mathrm{A}_4(f)=(f(0)-f(1))\cdot\frac{1}{4}$$

olur ve bu adımdaki farklar sütununun alanı bir önceki adımdakinin yarısı olur.

Buraya kadar yaptıklarımızı $[0,1]$ aralığının $\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n-1}{n},1\right\}$ bölüntüsünü için tekrarlarsak boyları eşit ve $\frac{1}{n}$ br olan

$$\left[0,\frac{1}{n}\right],\ \left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right],\ \ldots,\ \left[\frac{n-2}{n},\frac{n-1}{n}\right],\ \left[\frac{n-1}{n},1\right]$$

alt aralıklarını elde ederiz. Bu alt aralıkların uzunluğunu Δx ile gösterirsek $\Delta x = \frac{1}{n}$ olur. Böylece üst toplama girecek dikdörtgenlerin taban uzunlukları $\frac{1}{n}$ birim, yükseklikleri ise bu alt aralıkların sol uçlarındaki fonksiyon değerleri kadardır.

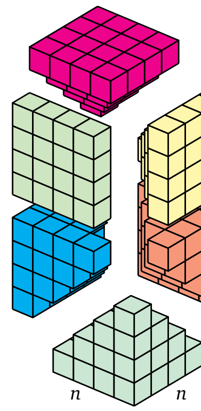
$y=f(x)=1-x^2$ olduğundan bu yükseklikler

$$f(0)=1-0^2=1,\ f\left(\frac{1}{n}\right)=1-\left(\frac{1}{n}\right)^2,\ f\left(\frac{2}{n}\right)=1-\left(\frac{2}{n}\right)^2,\ldots,$$

$f\left(\frac{n-1}{n}\right)=1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$ olur. Üst toplam da

$$
\begin{aligned}
\text{Ü}_n(f) &= f(0)\cdot\Delta x + f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\Delta x + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdot\Delta x \\
&= \left[f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]\cdot\Delta x \\
&= \left[1-0^2+1-\left(\frac{1}{n}\right)^2+1-\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{n} \\
&= \left[n-\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right)\right]\cdot\frac{1}{n} \\
&= 1-\frac{1}{n}\left[\frac{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2}{n^2}\right]
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.



Aferin Zeynep. Alt aralıkların sağ uçları alınıp benzer işlemler yapılırsa

$$\text{A}_n(f) = 1-\frac{1}{n}\left[\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^2}\right]$$

olarak elde edilir. Sonunda n'ye bağlı iki toplam elde ettik. Bu toplamlar içinde geçen n tane ardışık doğal sayının kareleri toplamının

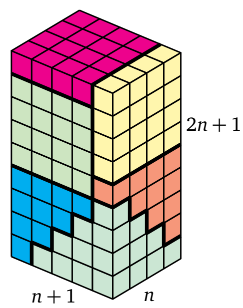
$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

olduğunu veren güzel bir geometrik yaklaşımı yanda görebilirsiniz. Bu toplamlarda n'yi sınırsız bir biçimde arttırarak üst toplamın limitini bulmaya çalışalım. Üst toplamı

$$\text{Ü}_n(f) = 1-\frac{1}{n}\left[\frac{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2}{n^2}\right]$$

olarak hesaplamıştık. Yukarıdaki kareler toplamı formülünde n yerine $n-1$ yazarsak

$$1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2 = \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}$$



$$6(1^2+2^2+\cdots+n^2) = n(n+1)(2n+1)$$

Okay Arık:
http://demonstrations.wolfram.com/AGeometricProofOfTheSquarePyramidalNumberFormula/

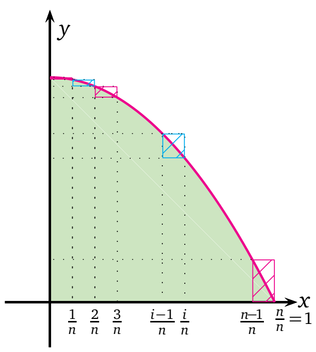
olur. Bunu üst toplam formülünde yerine koyarsak

$$
\begin{aligned}
\ddot{\mathrm{U}}_n(f) &= 1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^2} \\
&= 1 - \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \\
&= \frac{6n^2 - (2n^2 - n - 2n + 1)}{6n^2} \\
&= \frac{4n^2 + 3n - 1}{6n^2}
\end{aligned}
$$

olur. Şimdi $n \to \infty$ için

$$\lim_{n\to\infty} \ddot{\mathrm{U}}_n(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+3n-1}{6n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{6} + \frac{3}{6n} - \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

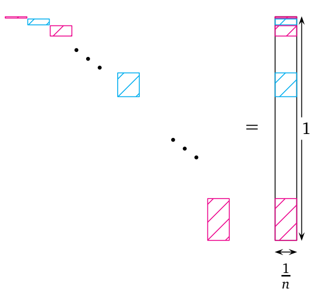
bulunur ve Arşimet'in iddiasının doğruluğu da görülmüş olur.



Şekil 1.17: $[0,1]$ aralığının $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$ bölüntüsüne karşılık gelen fark dikdörtgenleri.

Hocam, üst toplamların limitini buldunuz ve Arşimet'in sonucunun doğru olduğunu söylediniz. Alt toplamın limitinin de buna eşit olması gerekmez miydi?

Haklısın Zeynep. Üst toplamlara giren dikdörtgenlerle alt toplamlara giren dikdörtgenlerin farklarının oluşturduğu fark sütununun tabanı $\frac{1}{n}$, yüksekliği ise $f(0) - f(1)$ birimdir. Buradan, n sonsuza giderken fark sütununun alanı sıfıra gider. Yani $n \to \infty$ iken $\ddot{\mathrm{U}}_n(f) - \mathrm{A}_n(f) = \frac{1}{n}(f(0) - f(1)) \to 0$'dır. Böylece bu örnek için üst ve alt toplamların limitleri eşit olur. Bu da söz konusu alanın anlamlı bir değere sahip olduğunu gösterir. Tabii istersen alt toplamın limitini doğrudan hesaplayıp gene $\frac{2}{3}$ çıktığını görebilirsin.



Şekil 1.18: $[0,1]$ aralığının $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$ bölüntüsüne karşılık gelen farklar sütunu.

Belirli İntegral

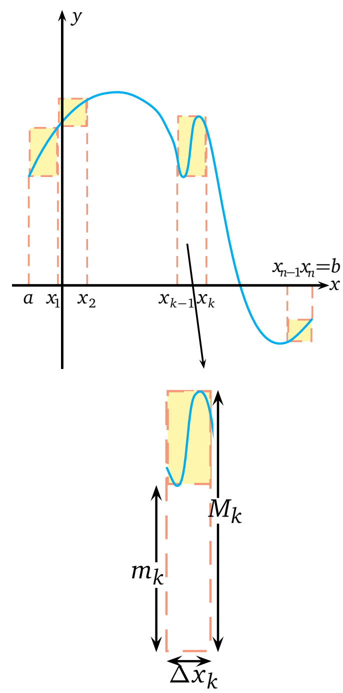
Arşimet'in probleminin çözümünde izlenen yolla, negatif değer almayan bir $y = f(x)$ sürekli fonksiyonunun belli bir $[a,b]$ kapalı aralığı üzerindeki parçasının altında kalan bölgenin alanını benzer işlemleri yaparak elde edebiliriz. Artık $[a,b]$ aralığı üzerinde f'nin Belirli İntegrali diye adlandıracağımız sayıyı tanımlayabiliriz.

Şimdi tanımımızı verelim. f, $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Önce $[a,b]$ aralığının $(n-1)$ tane noktasını

$$a < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < b$$

olacak şekilde seçelim. $a = x_0$ ve $b = x_n$ diyerek $[a,b]$'nin bir $B = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ bölüntüsünü oluşturalım. B bölüntüsü $[a,b]$'yi $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2], \ldots, [x_{n-2},x_{n-1}]$, $[x_{n-1},x_n]$ biçiminde n tane alt aralığa ayırır. Bu alt aralıklardan $k = 1,2,\ldots,n$ olmak üzere bir $[x_{k-1},x_k]$ alt aralığı seçelim. Bu alt aralık üzerinde fonksiyonun en küçük değerine m_k ve en büyük değerine M_k diyelim. Bu durumda $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ dersek, her $x \in [x_{k-1},x_k]$ için $m_k \Delta x_k \leq f(x)\Delta x_k \leq M_k \Delta x_k$ eşitsizliğini yazarız. Şimdi şu iki toplamı oluşturalım:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_n(f) &= m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \cdots + m_n\Delta x_n \\ \mathrm{\ddot{U}}_n(f) &= M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \cdots + M_n\Delta x_n \end{aligned}$$



Hocam, bu toplamlar daha önce oluşturduğumuz alt ve üst toplamlara benzedi.

Benzemek ne kelime Zeynep, bu iki toplam tamamen aynı. Bu toplamlara sırasıyla B bölüntüsüne karşı gelen alt ve üst toplamlar denir.

Önceki örnekte bir bölüntüye karşı gelen alt toplam daima üst toplamdan küçük oluyordu.

Benzer bir eşitsizliği burada da yazabiliriz, yani B bölüntüsü için

$$\mathrm{A}_n(f) \leq \mathrm{\ddot{U}}_n(f)$$

yazılabilir. Fonksiyon sürekli olduğu için bölüntü sayısı sonsuza ve alt aralıkların uzunluğu sıfıra giderken alt ve üst toplamların aynı sayıya yakınsadığı gösterilebilir. Bu sayıya A dersek

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{A}_n(f) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{\ddot{U}}_n(f) = \mathrm{A} \text{ olur.}$$

Bu A sayısına f'nin $[a,b]$ aralığı üzerindeki belirli integrali diyeceğiz ve A sayısını

$$\int_a^b f(x)dx$$

biçiminde göstereceğiz. Belirli integralin tanımı kullanılarak birçok özellik elde edilebilir. Bunlardan bazılarını vitrinde görebilirsiniz.

f, $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $a < c < b$ olmak üzere

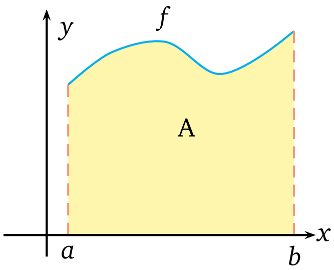
1) $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$

2) $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$

3) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

olur.

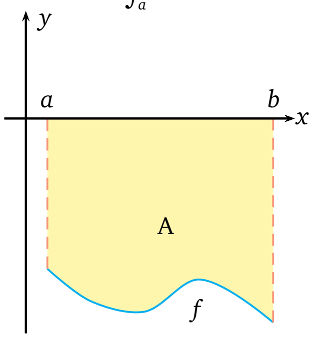
Belirli integralin değeri daima pozitif midir?



Şekil 1.19: $\int_a^b f(x)dx = \mathrm{A}.$

Tabii ki hayır Engin. Eğer her $x \in [a,b]$ için $f(x) \geq 0$ oluyorsa $\int_a^b f(x)dx$ belirli integrali negatif olmayan bir sayıdır. Bu sayı alttan $[a,b]$ aralığı, üstten f fonksiyonunun grafiği ve yanlardan da $x = a$ ve $x = b$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanına eşit olur.

Benzer biçimde eğer her $x \in [a,b]$ için $f(x) \leq 0$ oluyorsa $\int_a^b f(x)dx$ belirli integrali pozitif olmayan bir sayıdır. Bu sayı grafiğin $[a,b]$ aralığı altındaki parçası ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanının eksi işaretlisidir.

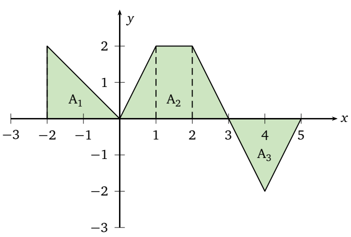


Şekil 1.20: $\int_a^b f(x)dx = -\mathrm{A}.$

Peki, grafiğin bir parçası x-ekseninin üzerinde, bir parçası da x-ekseninin altında ise durum ne olur?

Bu durumda belirli integral x-ekseninin üstünde ve altındaki alanların işaretli toplamına eşittir.

Söyleyin bakalım Şekil 1.21'de verilen grafiğe göre $\int_{-2}^{5} f(x)dx$'in değeri nedir?



Şekil 1.21: $\int_{-2}^{5} f(x)dx = \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 - \mathrm{A}_3.$

A_1 ve A_2 x-ekseni üstünde kalan bölgelerin alanları olduğu için pozitif işaretli, A_3 ise x-ekseninin altındaki grafikle sınırlı bölgenin alanı olduğundan negatif işaretlidir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{5} f(x)dx &= \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 - \mathrm{A}_3 \\ &= \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{(3+1) \cdot 2}{2} - \frac{2 \cdot 2}{2} = 4 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Anlaşıldı ki grafikle sınırlı bölgeler, alanını hesaplayabileceğimiz üçgen, dörtgen vs. gibi geometrik şekillerden oluşuyorsa işler kolay. Ancak değilse en azından bir üst ya da alt toplamı bulup $n \to \infty$ için limitine bakmalıyız. Bunun başka bir yolu yok mu hocam?

Belirsiz İntegral

Var elbette! Bir büyüklük başka bir büyüklüğe göre değişiyorsa hangi hızla değiştiğini bulmanın yöntemlerini, yani bir fonksiyonun türevini bulma yöntemlerini görmüştük. Şimdi bunun tersi olan problemin üzerinde duralım: Bir fonksiyonun türevini biliyorsak kendisini bulabilir miyiz? Örneğin belli bir (a, b) açık aralığı içindeki her x için türevi $F'(x) = 3x^2$ olan $F(x)$ fonksiyonu nedir?

Kolay hocam, $y = F(x) = x^3$ fonksiyonudur.

Ama hocam, bu aralık üzerinde $x^3 + 2$ fonksiyonunun türevi de $3x^2$ olur. Yani $y = x^3 + 2$ fonksiyonu da bunu sağlar.

Her $x \in [a, b]$ için

$$F'(x) = f(x) = G'(x)$$

ise

$$\begin{aligned}&(G(x) - F(x))'\\ &= G'(x) - F'(x)\\ &= f(x) - f(x) = 0\end{aligned}$$

olduğundan

$$G(x) - F(x) = c \text{ (sabit)}$$

ya da $G(x) = F(x) + c$ olur. Böylece, bir aralık üzerinde türevleri eşit olan iki fonksiyonun farkı sabittir.

Zeynep haklı. c bir sabit olmak üzere bu aralık üzerinde $x^3 + c$ fonksiyonunun türevi de $3x^2$'dir. c sabiti değiştikçe sonsuz tane fonksiyon buluruz. O halde (a, b) aralığında türev fonksiyonu verilmişse, fonksiyonun kendisi ve türev fonksiyonu arasında şöyle bir ilişki kurabilirsiniz:

$G(x)$, türevi $3x^2$ olan herhangi bir fonksiyon olsun. x^3 fonksiyonunun türevinin de $3x^2$ olduğunu biliyoruz. O halde c bir sabit olmak üzere

$$G'(x) = 3x^2 \Leftrightarrow G(x) = x^3 + c\text{'dir.}$$

Tanım Belli bir (a, b) aralığındaki tüm x'ler için $F(x)$ fonksiyonunun türevi $f(x)$ fonksiyonuna eşit ise, yani $F'(x) = f(x)$ oluyorsa, $F(x)$ fonksiyonuna $f(x)$'in bir ilkeli denir.

Bu durumda c sabitinin her bir değeri için $x^3 + c$ fonksiyonuna $3x^2$ fonksiyonunun bir ilkeli ve bu ilkellerin oluşturduğu $x^3 + c$ fonksiyonlar ailesine de $3x^2$ fonksiyonunun belirsiz integrali denir. Bu durum

$$\int 3x^2 dx = x^3 + c$$

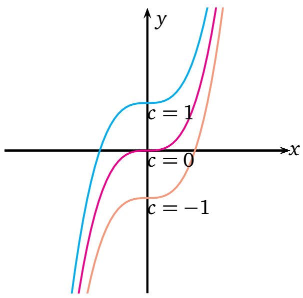
biçiminde gösterilir. Bu gösterimde $\int$ simgesine belirsiz integral işareti ve $3x^2$ fonksiyonuna da integrali alınan (integrant) denir.

Tanım Belli bir (a, b) aralığında $F(x)$ fonksiyonu, $f(x)$ fonksiyonunun bir ilkeli ise, $F(x) + c$ ailesine $f(x)$ fonksiyonunun belirsiz integrali denir ve

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

şeklinde gösterilir.

$x^3 + c$ fonksiyonunun grafiği x^3 fonksiyonunun grafiğinin c kadar kaydırılmışı olduğundan, bu ailenin her bir üyesinin grafiklerini çizsek her biri x^3 fonksiyonunun grafiğinin paralel kaydırılmışı olan sonsuz tane eğri elde ederiz, değil mi hocam?



Şekil 1.22: x^3+1, x^3 ve x^3-1 eğrileri.

Evet Engin, bu örnek için $(a,b) = (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$ aralığı seçilirse bu grafikler tüm düzlemi doldururlar. Düzlemde bir nokta seçildiğinde o noktadan geçen ve bu aileye ait olan bir tek fonksiyon vardır. Örneğin, bu aileye ait olan ve $(1,3)$ noktasından geçen fonksiyonu bulmak için $y = x^3 + c$ eğrisinin denkleminde x yerine 1 ve y yerine 3 yazılırsa $3 = 1^3 + c$ eşitliğinden $c = 2$ olarak bulunur. O halde $(1,3)$'den geçen ilkel fonksiyon $y = x^3 + 2$ olur.

Hocam türev almak için kurallarımız vardı, integral için de benzer kurallar var mıdır? Varsa bunların türev kurallarıyla ilgisi nedir?

Tabii ki var Selçuk. Öncelikle şunu belirteyim ki, bir türev formülünü hemen bir integral formülüne dönüştürebiliriz. Örneğin $(x^4)' = 4x^3$ olduğundan,

$$\int 4x^3 dx = x^4 + c$$

yazabiliriz. Başka örnekler için yandaki vitrine bakabilirsiniz.

(Kuvvet)
$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$$
$(x > 0, r \neq -1$ ve $r \in \mathbb{R})$

(Logaritmik)
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c, \ (x > 0)$$

(Üstel)
$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c \ \ (a \neq 0)$$

Bu durumda türevi kullanarak bütün fonksiyonların belirsiz integralini hemen bulabiliriz. Bu iş bitmiştir diyebilir miyiz hocam?

Maalesef Engin! Türev kuralları sistematik bir şekilde uygulanarak çok karmaşık fonksiyonların türevleri bulunabilir. Ancak bazı basit fonksiyonların bile belirsiz integralini bulmak çok zor, hatta belli bir anlamda imkansız olabilir.

Olası bazı durumlar için birçok integral alma yöntemi geliştirilmiştir. Bu yöntemlere geçmeden birkaç genel kuralı verelim: Herhangi f ve g fonksiyonları ve bir a sayısı için

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

olur.

Birinci eşitlikte sabitle çarpılmış bir foksiyonun belirsiz integralinde sabitin integral dışına çıkabileceğini söylüyoruz. İkinci eşitlikte ise iki fonksiyonun toplamı ya da farkının integralinin, integraller toplamı ya da farkı olarak yazılabileceğini belirtiyoruz.

Bunlara birer örnek verseniz hocam.

Önce basit örneklerden başlayalım. Söyleyin bakalım

$$\int \left(x+\frac{1}{x^3}\right) dx$$

integralini kim çözecek?

İntegrali toplam üzerine dağıtarak başlıyorum hocam.

$$\begin{aligned}\int \left(x+\frac{1}{x^3}\right) dx &= \int x dx + \int \frac{1}{x^3} dx \\ &= \int x dx + \int x^{-3} dx\end{aligned}$$

Sonra da bu integrallere kuvvet formülünü uygularsam

$$\int \left(x+\frac{1}{x^3}\right) dx = \frac{1}{2}x^2 + c_1 - \frac{1}{2}x^{-2} + c_2$$

elde ederim.

Evet Engin, gayet güzel. İntegral sabitlerinin toplamına $c = c_1 + c_2$ dersek

$$\begin{aligned}\int \left(x+\frac{1}{x^3}\right) dx &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^{-2} + c \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2} + c\end{aligned}$$

olur.

Şimdi de $\int 5e^{-2x} dx$ belirsiz integralini bulun bakalım.

Önce çarpım halindeki sabiti integralin dışına alalım.

$$\int 5e^{-2x}dx = 5\int e^{-2x}dx$$

Şimdi de üstel integral formülünü uygularsak

$$\begin{aligned}\int 5e^{-2x}dx &= 5\int e^{-2x}dx \\ &= 5\left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + c_1\right) \\ &= -\frac{5}{2}e^{-2x} + 5c_1\end{aligned}$$

olur. $c = 5c_1$ dersek

$$\int 5e^{-2x}dx = -\frac{5}{2}e^{-2x} + c$$

elde ederiz.

İntegrantı, iki fonksiyonun toplam veya farkı biçiminde, ya da sabitle bir fonksiyonun çarpımı biçiminde olan integrallerin nasıl alındığını gördük hocam. İntegrant iki fonksiyonun çarpımı biçimindeyse, bunların integrali çarpıma giren fonksiyonların integrallerinin çarpımına eşit midir?

Hayır Engin, istersen bunu basit bir örnek üzerinde görelim. İntegrantı $f(x) = x^2 = x \cdot x$ fonksiyonu olan bir integral, $g(x) = x$'in integrali ile $h(x) = x$'in integralinin çarpımına eşit değildir. Yani,

$$\int (x \cdot x)\, dx \neq \left(\int x dx\right)\left(\int x dx\right) \text{ olur.}$$

Bu eşitlik olsaydı, $\int x dx = \frac{x^2}{2} + c_1$ ve $\int x dx = \frac{x^2}{2} + c_2$ olduğundan

$$\int (x \cdot x)\, dx = \left(\frac{x^2}{2} + c_1\right)\left(\frac{x^2}{2} + c_2\right) = \frac{x^4}{4} + c_1\frac{x^2}{2} + c_2\frac{x^2}{2} + c_1c_2$$

elde edilirdi. Ancak c_1 ve c_2 sabitleri ne olursa olsun eşitliğin sağ yanının türevi, integranta, yani x^2 fonksiyonuna eşit olamaz.

Peki iki fonksiyonun çarpımının integralini nasıl bulacağız hocam?

İki fonksiyonun çarpımının türev formülü bize, çarpımların integrallerinin alınması için yararlı bir kural çıkarmamızı sağlar. Türevin çarpım kuralı olan

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

eşitliğinden

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

formülünü elde ederiz. Buna kısmi integrasyon formülü denir.

Bayağı uzun bir formül oldu hocam. Üstelik integralden de kurtulmuş değiliz.

Haklısın Gökçe. Bu formül $H(x) = f(x)g'(x)$ fonksiyonunun integralini $G(x) = f'(x)g(x)$'in integraline indirger. İşin püf noktası $H(x)$ fonksiyonu için $f(x)$ ve $g'(x)$ fonksiyonlarının seçimidir. İyi bir seçim diğer integrali kolayca çözülür hale dönüştürebilir.

Şimdi $\int xe^{2x}dx$ integralini kim çözecek? Yani xe^{2x} fonksiyonunun bir ilkelini kim bulacak?

Ben deneyeyim hocam. Önce integrantı $f(x)g'(x)$ çarpımı biçiminde yazalım. $f(x) = x$ ve $g'(x) = e^{2x}$ dersek

$$f'(x) = 1 \quad \text{olur ve} \quad g(x) = \int g'(x)dx = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} \text{ alabiliriz.}$$

Buradan

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

$$\int xe^{2x}dx = x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} \cdot 1dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}e^{2x} + c$$

olur.

İntegrantı iki fonksiyonun çarpımı biçiminde olan tüm integrallerde bu formülü mü kullanacağız hocam? 

 Tabii ki hayır. İntegrantı iki fonksiyonun çarpımı biçiminde olan integrallerde türevler için bilinen zincir kuralını yararlı bir integral alma yöntemine çevirebilirsiniz. Bunu önce basit bir örnek üzerinde görelim. Sonra yöntemi açıklayalım. Örneğin;

$$\int (x^2+2)^{20} 2x\,dx \quad \text{integrali verilsin.}$$

Bunu kısmi integralle biraz zor çözersiniz. $(x^2+2)^{20}$ ifadesi (x^2+2) 'nin kendisiyle 20 kez çarpımı olduğundan çarpımı yapsanız iş uzar da uzar. Bunun yerine $(x^2+2)^{20}$ ifadesinde x^2+2'yi yeni bir değişken olarak alıp integranttaki diğer çarpımın bunun x'e göre türevi olup olmadığını kontrol ederiz. Yani $u = x^2+2$ deyip $\frac{du}{dx}$'in $2x$'e eşit olup olmadığına bakarız. $u' = \frac{du}{dx} = 2x$ olduğundan aradığımızı bulmuş oluruz. Böylece $du = u'dx = 2x\,dx$ olacağından integral yeni u değişkeni ile $\int u^{20} du$ basit integraline dönüşür. Sonuç olarak integral

$$\int u^{20} du = \frac{u^{21}}{21} + c$$

olur.

u, x^2+2 idi. u yerine tekrar x^2+2 yazılırsa

$$\int (x^2+2)^{20} 2x\,dx = \frac{(x^2+2)^{21}}{21} + c$$

bulunur.

Örnekten anladığım kadarıyla, çarpım halindeki iki fonksiyondan biri diğerinin bir parçasının türevi oluyorsa öncelikle bu yolla çözmeyi denemekte yarar var, değil mi hocam? 

 Fonksiyonun bir parçası ne demek bilmiyorum, ama söylediğin kulağa fena gelmiyor. Genel olarak

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

integralini ele alalım. Dikkat ederseniz integrant $f(g(x))$ bileşke fonksiyonu ile $g(x)$'in türevinin çarpımından oluşuyor. Bu durumda $u = g(x)$

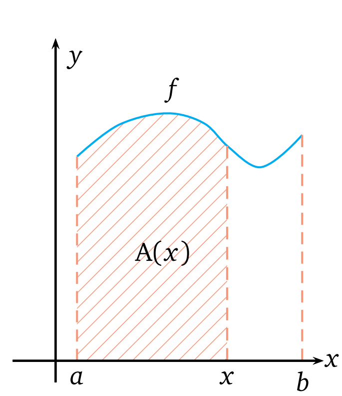
dersek $\frac{du}{dx} = g'(x)$ ya da $du = g'(x)dx$ olur. Böylece integral $\int f(u)du$ biçimine dönüşür. $f(u)$'nun bir $F(u)$ ilkeli varsa

$$\int f(u)du = F(u) + c$$

olur ve bu da

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + c$$

olduğunu verir. Buna integralde değişken değiştirme denir.



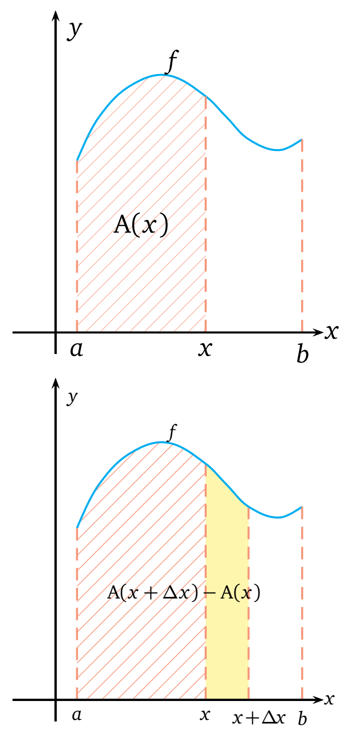
Şekil 1.23: A(x) alan fonksiyonu.

Temel Teoremler

Buraya kadar belirli ve belirsiz integral alma teknikleri hakkında az da olsa bir fikir edindiniz. Şimdi de sürekli bir f fonksiyonu ile bu fonksiyonun grafiğinin sınırladığı alan arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

f sürekli bir fonksiyon ve $[a, b]$ aralığı içindeki her bir x için $f(x)$ pozitif olsun. $[a, b]$ aralığı içindeki bir x için, f'nin grafiği altında ve $[a, x]$ aralığı üzerindeki alanı A(x) ile gösterelim. x değiştikçe A(x), x'in bir fonksiyonu olur. Bu durumda $\mathrm{A}'(x) = f(x)$ olur. Bunun doğruluğunu şöyle sezinlemeniz mümkündür:

Şekildeki taralı alanı A(x) ile göstermiştik. Δx sıfıra çok yakın bir sayı olsun. $[a, b]$ içinde x'i Δx kadar hareket ettirelim. $x + \Delta x$ noktasına gelelim. Bu durumda A(x) alanı çok az bir büyümeyle $\mathrm{A}(x + \Delta x)$ sayısına eşit olacaktır. Bu durumda $\mathrm{A}(x + \Delta x) - \mathrm{A}(x)$ ince şeridin alanı olur. Bu şeridi çok çok küçük tuttuğumuzda alanının, yaklaşık olarak tabanı $[x, x + \Delta x]$ aralığı ve yüksekliği $[x, x + \Delta x]$ aralığı içindeki bir k noktasının $f(k)$ görüntüsü olan dikdörtgenin alanına eşit olduğunu söyleyebiliriz. Bu durumu



Şekil 1.24: $\mathrm{A}(x + \Delta x) - \mathrm{A}(x)$ şeridinin alanı.

$$\mathrm{A}(x + \Delta x) - \mathrm{A}(x) \cong f(k)\Delta x$$

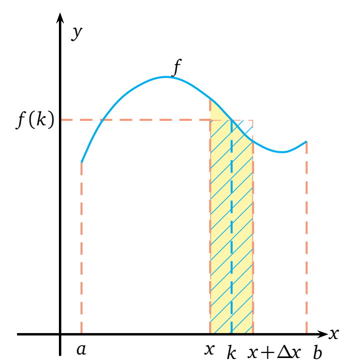
biçiminde yazalım. Ancak $\Delta x \to 0$ olduğunda $f(k)$ değerleri $f(x)$'e yaklaşacaklardır. Bu da tam olarak;

$$\mathrm{A}'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{A}(x + \Delta x) - \mathrm{A}(x)}{\Delta x} = f(x)$$

olması demektir. Böylece a ile b arasındaki her x için

$$\mathrm{A}'(x) = f(x)$$

olur. Sizce bunun bir başka anlamı var mıdır?



Şekil 1.25: $\mathrm{A}(x + \Delta x) - \mathrm{A}(x) \cong f(k)\Delta x$.

$A'(x) = f(x)$ eşitliğini sağlayan $A(x)$ fonksiyonu $f(x)$'in bir ilkeli olur hocam.

Bravo Engin. $f(x)$'in diğer bir ilkeli $F(x)$ olsaydı, $A(x)$ ile $F(x)$ arasında nasıl bir ilişki olacaktı?

$A(x)$'i $F(x)$'e bir sabit sayı ekleyerek elde ediyorduk. Yani

$$A(x) = F(x) + c$$

yazabiliyorduk hocam.

Çok güzel Zeynep. $A(a) = 0$ olduğunu da kullanırsak $A(x) = F(x) + c$ eşitliğindeki c sayısını şöyle hesaplayabiliriz: $0 = A(a) = F(a) + c$ eşitliğinden $c = -F(a)$ olur ve

$$A(x) = F(x) + c = F(x) - F(a)$$

$F(x)\Big|_a^b$ gösterimi $F(b) - F(a)$ sayısını ifade eder.

yazabiliriz. Bu ise bize $f(x)$'in herhangi bir ilkeliyle $A(x)$ alan fonksiyonunun bulunabileceğini gösterir. Böylece f, $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve $F(x)$, $f(x)$'in bir ilkeli yani

$$F'(x) = f(x)$$

olan bir fonksiyon ise

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Teorem (İntegralin Temel Teoremi)
f, $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve F, f fonksiyonunun bir ilkeli ise

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

olur.

olarak hesaplanabilir. Ayrıca bu yazım $f(x)$'in ilkellerinin seçiminden bağımsızdır. Şimdi $\displaystyle\int_0^1 (1 - x^2)dx$ integralini bu yöntemle hesaplayabilirsiniz.

Daha önce bu integrali tüketme metodu ile uzun uzun hesaplamıştık hocam. Anlattıklarınıza göre $f(x) = 1 - x^2$ fonksiyonunun herhangi bir ilkelini kullanarak bunu hesaplayabiliriz. $f(x)$'in belirsiz integrali

$$\int f(x)dx = \int (1 - x^2)dx = x - \frac{x^3}{3} + c$$

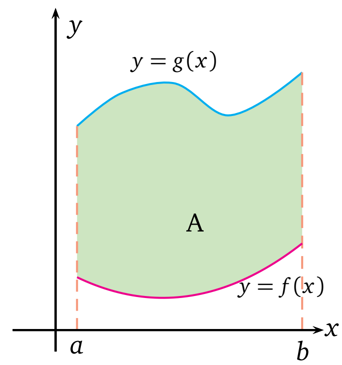
olduğundan, c sayısının herhangi bir seçimi için $f(x)$'in bir ilkelini buluruz. Örneğin $c=0$ alırsak

$$F(x) = x - \frac{x^3}{3}$$

olur. Buradan;

$$\int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = 1 - \frac{1^3}{3} - 0 + \frac{0^3}{3} = \frac{2}{3}$$

bulunur.



Şekil 1.26: $\mathrm{A} = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx.$

İki Eğri ile Sınırlanan Alan

Belirli integrali kullanarak iki eğri ile sınırlanan alanı hesaplayabiliriz. $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli ve bu aralık üzerinde $f(x) \le g(x)$ eşitsizliğini sağlayan f ve g fonksiyonları verilsin. Fonksiyon değerleri arasındaki bu eşitsizlik, f'nin grafiğinin tamamen g'nin grafiğinin altında olduğunu söyler. Bu iki grafik arasındaki alana A dersek A sayısı

$$\mathrm{A} = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$$

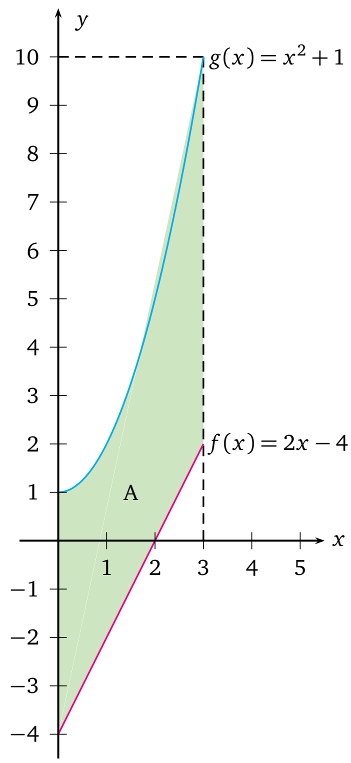
belirli integrali ile belirlenebilir.

$f(x) = 2x-4$ ve $g(x) = x^2+1$ fonksiyonlarının $[0,3]$ aralığı üzerindeki grafik parçalarının arasındaki bölgenin alanını hesaplayabilir misiniz?

Hocam önce grafikleri çizelim ve fonksiyonların durumlarını belirleyelim. $[0,3]$ aralığındaki tüm x'ler için

$$f(x) = 2x - 4 < x^2 + 1 = g(x)$$

olduğunu söyleyebiliriz. Bu eğrilerle sınırlı alan,



Şekil 1.27: $f(x) = 2x - 4$ ve $g(x) = x^2 + 1$ fonksiyonlarının $[0,3]$ aralığı üzerindeki grafik parçalarının arasındaki bölgenin alanı.

$$
\begin{aligned}
A = \int_0^3 (g(x) - f(x))dx &= \int_0^3 (x^2 + 1 - (2x - 4))dx \\
&= \int_0^3 (x^2 - 2x + 5)dx \\
&= \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x \Big|_0^3 \\
&= \frac{3^3}{3} - 3^2 + 5 \cdot 3 - \frac{0^3}{3} + 0^2 - 5 \cdot 0 \\
&= 3^2 - 3^2 + 5 \cdot 3 = 15 \text{ br}^2 \text{ olur.}
\end{aligned}
$$

Sürekli Bir Fonksiyonun Ortalama Değeri

Söyle bakalım Engin, geçen dönem matematik dersinin sınavlarından hangi notları aldın ve bunların aritmetik ortalaması neydi?

77, 80 ve 95 aldım ve bunların aritmetik ortalaması; $\dfrac{77+80+95}{3} = \dfrac{252}{3} = 84$ yapıyor hocam.

Güzel, o halde iki, üç ya da sonlu sayıda büyüklüğün aritmetik ortalamasının ne anlama geldiğini biliyorsunuz. Peki sizce $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli olan bir fonksiyonun ortalaması ne anlama gelir?

Belli noktalardaki değerlerinin toplamının, nokta sayısına bölümü anlaşılır değil mi hocam?

$[a, b]$ aralığı sonsuz elemanlı olduğundan, tam olarak bu değil, ancak önce bu durumu ele almak, genel durum için bir fikir verebilir. $[a, b]$ aralığını,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

noktalarını kullanarak eşit uzunluklu n parçaya bölüp, fonksiyonun $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ değerlerinin aritmetik ortalamasına bakalım. Alt aralıklar eşit uzunluğa sahip olduğundan

$$\Delta x = \Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$$

yazabiliriz. Buradan $\dfrac{1}{n} = \dfrac{\Delta x}{b-a}$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} &= \frac{1}{n}\left[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\right] \\
&= \frac{\Delta x}{b-a}\left[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\right] \\
&= \frac{f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x}{b-a}
\end{aligned}$$

bulunur. Peki n'yi sınırsız büyütsek, yani $n \to \infty$ yapsak, sonuç ne olur?

Sonuçta paydaki ifade f fonksiyonunun a'dan b'ye belirli integrali olur hocam. Bu da f'nin $[a,b]$ aralığı üzerindeki ortalama değerinin

$$\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

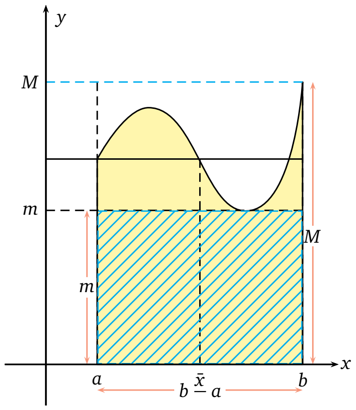
olacağını vermez mi?

Aferin Zeynep, beklediğim cevap tam da buydu. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli olduğundan,

$$f(\bar{x}) = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

eşitliğini sağlayan en az bir $\bar{x}$ noktası vardır. Bunun neden böyle olduğu hakkında bir fikriniz var mı?

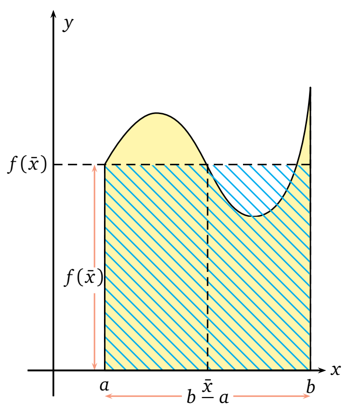
$f(\bar{x})$ ortalama değer olduğundan, fonksiyonun $[a,b]$ aralığı içinde aldığı en küçük değerden büyük; en büyük değerden de küçüktür hocam. Ancak ne olduğunu tam olarak bilemeyeceğim.



$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$$

olur.



Şekil 1.28: $f(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığı üzerindeki $f(\bar{x})$ ortalama değeri.

Sürekli bir fonksiyon, m en küçük ve M en büyük değerleri arasındaki bütün değerleri alacağından $[a,b]$ aralığında $f(\bar{x}) = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ olan $\bar{x}$ noktası vardır ve $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = f(\bar{x})(b-a)$ olur.

Haklısın Engin. f'nin $[a,b]$ aralığındaki ortalama değerini aldığı $\bar{x}$'yi hemen bulamayız. Ancak f'yi $[a,b]$ aralığı üzerinde pozitif kabul edip, yandaki şekil ve açıklama yardımıyla varlığını söyleyebiliriz. Ayrıca $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = f(\bar{x})(b-a)$ eşitliğinden bir geometrik yorumunu da yapabiliriz.

Şekil 1.28'e bakarsanız, f'nin $[a,b]$ aralığı üzerindeki $f(\bar{x})$ ortalama değeri, şekildeki taralı dikdörtgenin yüksekliğidir. Bu dikdörtgenin alanı, fonksiyon grafiği ile x-ekseni arasında kalan alana eşittir.

Sürekli bir fonksiyonun ortalama değerini anladık da hocam bu günlük hayatta nerede karşımıza çıkar?

Hemen bir örnek vereyim Gökçe. Bir şehre su sağlayan bir barajın içindeki su seviyesi sürekli bir değişim gösterir. O halde barajdaki su seviyesi zamanın sürekli bir fonksiyonudur. Su seviyesinin, saatlik, günlük, haftalık, aylık ya da yıllık ortalamalarını bilmek isteyebiliriz. Bunu da su seviyesi fonksiyonunun belirli integralini kullanarak hesaplayabiliriz.

Peki hocam, bir de sürekli bir fonksiyonun ortalama değerinin hesaplanmasına somut bir örnek görsek?

Peki o zaman, $f(x) = (x-2)^2$ fonksiyonunun $[0,2]$ aralığı üzerindeki ortalama değerini bulabilir misin?

Bir deneyeyim hocam. Ortalama değeri

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2-0}\int_0^2 (x-2)^2 dx$$

idi. Şimdi $\displaystyle\int (x-2)^2 dx$ integralini hesaplayayım. $u = x-2$ dersem, $du = dx$ olacağından, integral $\displaystyle\int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + c$ olur. Böylece u yerine $x-2$ yazar ve $c = 0$ alırsam $\displaystyle\int (x-2)^2 dx = \frac{(x-2)^3}{3}$ elde ederim. Buradan da ortalama değer

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{2}\frac{(x-2)^3}{3}\bigg|_0^2 = \frac{1}{2}\frac{(2-2)^3}{3} - \frac{1}{2}\frac{(0-2)^3}{3} = \frac{4}{3} \text{ olur.}$$

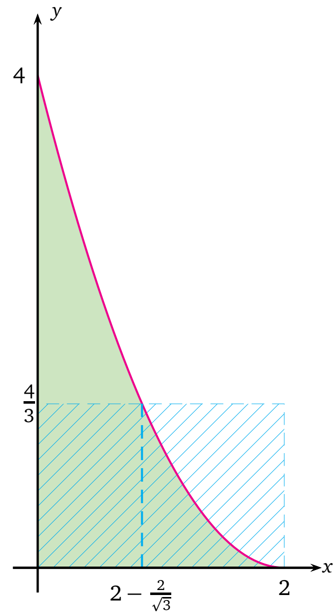
Aferin Gökçe. Şimdi bu ortalamayı veren $\bar{x}$ noktasını bulalım.

$$f(\bar{x}) = (\bar{x}-2)^2 = \frac{4}{3}$$

olduğundan

$$\bar{x} - 2 = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

olur. Yani $\bar{x}_1 = 2 - \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ve $\bar{x}_2 = 2 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ olarak bulunur. $2 + \dfrac{2}{\sqrt{3}} \notin [0,2]$ olduğundan istenen nokta $\bar{x} = 2 - \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ olur.



Şekil 1.29: $f(x) = (x-2)^2$ fonksiyonunun $[0,2]$ aralığı üzerindeki ortalama değeri.

Özet

Bu bölümde matematiğin en temel kavramlarından biri olan integral kavramını ele aldık. Öncelikle kavramın temelini oluşturan fikirleri kullanarak, günlük yaşantımızdaki bazı problemlerin çözümlerinde nasıl bir tahminde bulunabileceğimizi gösterdik. Bu fikirler yardımıyla belirli integrali tanımladık. Belirli integral yardımıyla alan hesaplamalarına bir giriş yaptık. Daha sonra belirsiz integrali tanımladık ve hesaplama yöntemleri üzerinde durduk. Belirli integralin, belirsiz integral kullanılarak kolayca hesaplanmasını sağlayan, integralin temel teoremlerini açıkladık. İki eğri ile sınırlanan bölgelerin alanlarının belirli integral yardımıyla hesaplanması üzerinde durduk. Son olarak da, sürekli bir fonksiyonun ortalama değerinin belirli integral kullanılarak nasıl hesaplanacağını gösterdik.

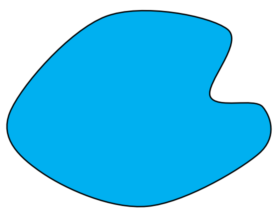
Okuma Parçası

ALAN HESAPLAMAK

Ta ilkokuldan beri öğrendiğimiz için, alan hesaplamak bize pek kolay ve sıradan gelebilir. Oysa hiç de öyle değildir. Örneğin alan ölçmek uzunluk ölçmekten çok daha zordur, ne de olsa uzunluk ölçmek için metre diye gayet basit bir alet var. Alan ölçmek için de bir alet varsa da hiç de basit bir alet değildir. Planimetre adı verilen bu aletlerin fikir babası Johann Martin Hermann'dır. 1814'de bulunan planimetre kavramı 1854'te İsviçreli matematikçi, fizikçi, mühendis ve fabrikatör Jakob Amsler-Laffon tarafından gerçekleştirilmiştir. İşte resimleri:

Planimetrenin üç değişik versiyonu

Sözgelimi bir ipi bir çemberin çevresine dolayarak çemberin uzunluğunu aşağı yukarı ölçebiliriz ama dairenin alanını ölçmek daha zordur. Ya bir daireden çok daha karmaşık olan şöyle bir şeklin alanını nasıl hesaplarsınız?



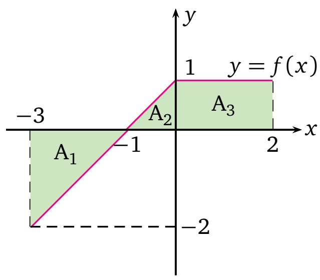
Zaten alan ölçmek o kadar kolay olsaydı, Eski Mısırlılar yamukların alanını doğru hesaplarlardı! Oysa, yamukların alanını gerçeğinden hep daha fazla hesaplamışlardır. Ya daha iyisini bilmediklerinden ya da köylülerden daha çok vergi alabilmek için…

Aslında bir boyut arttırarak düzlemsel bir alan kolaylıkla hesaplanabilir. Tabanı yukarıdaki alan olan yeterince yüksek bir silindir inşa edelim. Sonra 1 m^3 suyu bu tuhaf silindire boca edelim. Suyun çıktığı yükseklik h ise, tabanın alanı $\frac{1}{h}$ olur.

Kaynak: Matematik Dünyası, Sayı: 87, 2011-II.

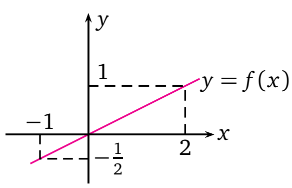
Çıkarın Kağıtları

1. $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir. Buna göre $\int_{-3}^{2} f(x)dx$ integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?



A) $\frac{1}{2}$ **B)** 0 **C)**2 **D)** $\frac{5}{2}$ **E)** $\frac{9}{2}$

2. $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir. Buna göre $\int_{-1}^{2} f(x)dx$ integralinin sonucu nedir?



3. $\int_{2}^{3} (x^2 - 1)dx$ integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A)1 **B)**$\frac{16}{3}$ **C)**8 **D)**$\frac{8}{3}$ **E)**$\frac{1}{3}$

4. $\int_{2}^{3} (4x^3 + 1)dx$ integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A)63 **B)**64 **C)**65 **D)**66 **E)**67

5. $\int \frac{x}{x+1}dx + \int \frac{dx}{x+1} = ?$

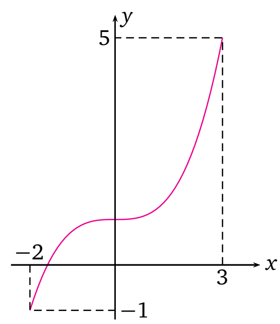
6. $\int \frac{x^2 - 3}{x^2}dx$ integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{x^3}{3} - 3x + c$ **D)** $x - \frac{1}{x} + c$

B) $x^2 - 3 + c$ **E)** $\frac{x^3}{3} + 3x^2 + c$

C) $x + \frac{3}{x} + c$

7. $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir. Grafiğe göre $\int_{-2}^{3} f'(x)dx$ integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?



A) 6 **B)** 5 **C)** 4 **D)** 3 **E)** 1

8. Üstten $y = x^2 + 1$ parabolü alttan x-ekseni ve yanlardan $x = 0$ ve $x = 2$ doğrularıyla sınırlı bölgenin alanı kaç br^2'dir?

A) $\frac{8}{3}$ **B)** $\frac{13}{3}$ **C)** $\frac{14}{3}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** 1

9. $\int_{0}^{1} (x + 1)^3 dx$ integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{13}{4}$ **B)** $\frac{15}{4}$ **C)** $\frac{17}{4}$ **D)** $\frac{19}{4}$ **E)** $\frac{21}{4}$

10. $\int_{0}^{2} x^4 dx = ?$

Çözümler

1.

$$\int_{-3}^{2} f(x)dx = -A_1+A_2+A_3=-\frac{2\cdot 2}{2}+\frac{1\cdot 1}{2}+2\cdot 1$$
$$= -2+\frac{1}{2}+2=\frac{1}{2} \text{ 'dir.}$$

Doğru cevap A seçeneğidir.

2. **I. Yol:**

Köşeleri $(-1,0)$, $(-1,-0,5)$, $(0,0)$ olan üçgenin alanına A_1 ve köşeleri $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$ olan üçgenin alanına A_2 dersek

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = A_2 - A_1 = 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \text{ olur.}$$

II. Yol:

İki noktası bilinen doğru denklemini kullanarak $f(x) = \frac{1}{2}x$ olduğu bulunur. Buradan

$$\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}x dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_{-1}^{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2^2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^2}{2}=\frac{3}{4}$$

olur.

3.

$$\int_{2}^{3}(x^2-1)dx = \left(\frac{x^3}{3}-x\right)\bigg|_{2}^{3}$$
$$= \left(\frac{3^3}{3}-3\right)-\left(\frac{2^3}{3}-2\right)=\frac{16}{3}$$

Doğru cevap B seçeneğidir.

4.

$$\int_{2}^{3}(4x^3+1)dx=(x^4+x)\bigg|_{2}^{3}=(81+3)-(16+2)=66$$

Doğru cevap D seçeneğidir.

5.

$$\int\frac{x}{x+1}dx+\int\frac{dx}{x+1} = \int\frac{x+1}{x+1}dx$$
$$= \int dx = x+c.$$

6.

$$\int\frac{x^2-3}{x^2}dx=\int dx-3\int\frac{dx}{x^2}=x+\frac{3}{x}+c \text{ 'dir.}$$

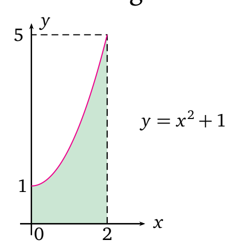
Doğru cevap C seçeneğidir.

7. İntegralin Temel Teoremini kullanarak

$$\int_{-2}^{3} f'(x)dx = f(3)-f(-2)=5-(-1)=6$$

elde edilir. Doğru cevap A seçeneğidir.

8. $y = x^2+1$, x-ekseni, $x = 0$ ve $x = 2$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanı



$$A=\int_{0}^{2}(x^2+1)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\bigg|_{0}^{2}=\frac{8}{3}+2=\frac{14}{3}br^2$$

olur. Doğru cevap C seçeneğidir.

9. $u = x+1$ değişken değiştirmesi yapılırsa $du = dx$ olur. Buradan

$$\int(x+1)^3dx = \int u^3du=\frac{u^4}{4}+c$$

bulunur. Bu integralde $u = x+1$ ve $c = 0$ yazılırsa

$$\int_{0}^{1}(x+1)^3dx = \frac{(x+1)^4}{4}\bigg|_{0}^{1}$$
$$= \frac{(1+1)^4}{4}-\frac{(0+1)^4}{4}$$
$$= \frac{15}{4}$$

elde edilir. Doğru cevap B seçeneğidir.

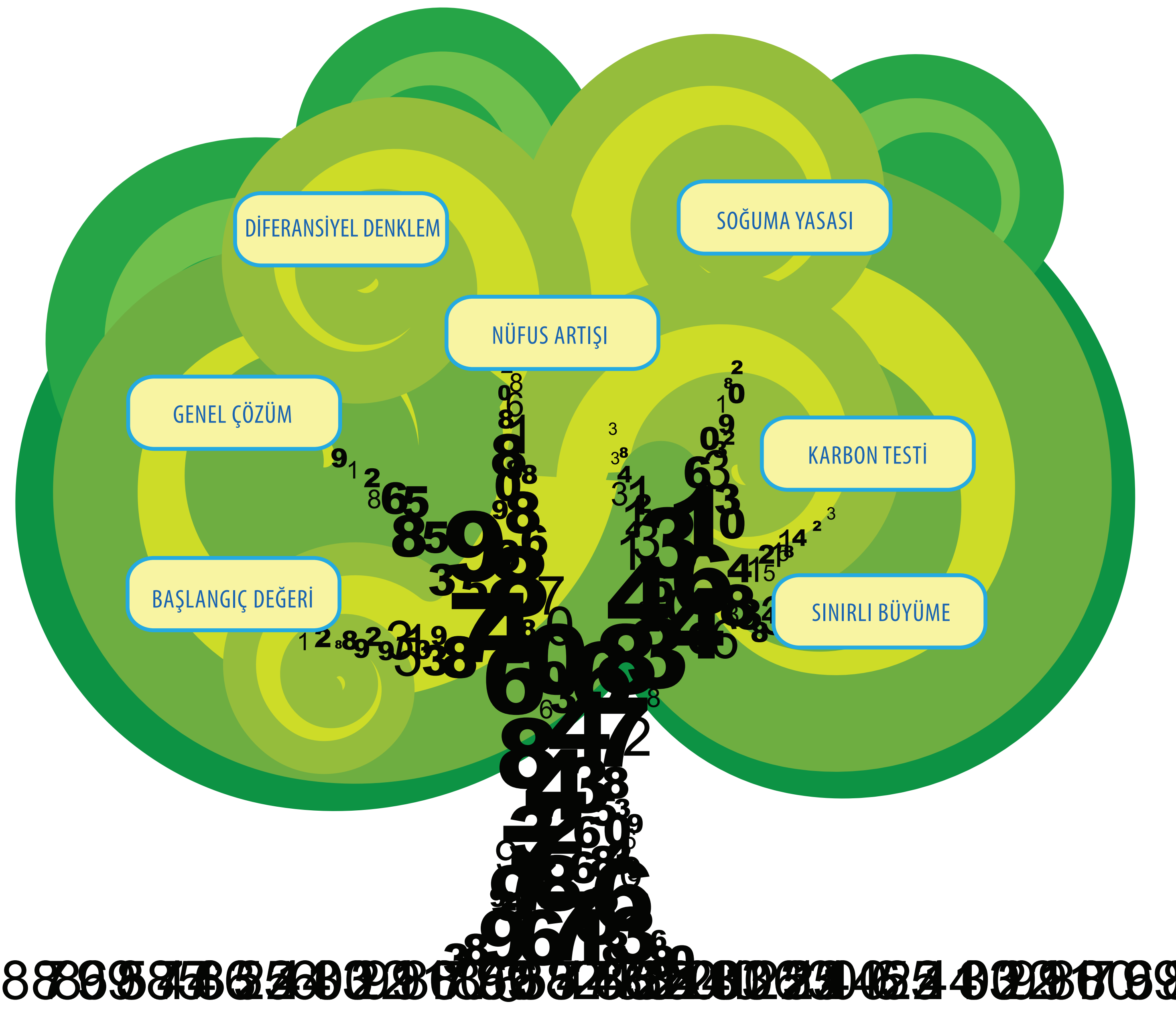
10.

$$\int_{0}^{2}x^4dx=\frac{x^5}{5}\bigg|_{0}^{2}=\frac{2^5}{5}-\frac{0^5}{5}=\frac{32}{5}.$$

Diferansiyel Denklemler

MATEMATİK 2

2. ÜNİTE



Diferansiyel Denklemlere Giriş

Merhaba arkadaşlar, bugün pek çok bilim dalında hatta günlük yaşantımızda dahi uygulamaları olan diferansiyel denklemler konusu ile ilgileneceğiz.

Hocam diferansiyel denklem nedir?

En basit tanımıyla, içinde değişkenlerin türevlerini bulunduran denkleme diferansiyel denklem denir.

Diferansiyel denklemler mühendislik, fizik, kimya, ekonomi, biyoloji gibi birçok bilim dalında karşımıza çıkmakta ve çok çeşitli problemleri türev içeren denklemler yardımıyla modelleyip çözebilmemize imkan sağlamaktadır.

Arkadaşlar, diferansiyel denklemlere türevsel denklemler de denilir. Öncelikle bir diferansiyel denklemde kullanılan bazı terimleri tanımlamakla işe başlayalım. Bir diferansiyel denklemde hangi değişkene göre türev alınıyorsa, bu değişkene bağımsız değişken denir. Türevi alınan değişkene ise bağımlı değişken denir. $\frac{dy}{dx}$ ifadesinde y bağımlı, x bağımsız değişken olarak adlandırılır. Bağımlı değişken ile bağımsız değişkeni göstermek için farklı harfleri de kullanabiliriz. Bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre bir kere türevi alındığı için bu türevli ifade birinci mertebedendir (veya basamaktandır) denir. Diferansiyel denklemlerde $y' = \frac{dy}{dx}$ gösterimi de kullanılır.

Tanım Bağımlı değişkenin, bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bir denkleme diferansiyel denklem denir.

Demek ki birinci mertebeden bir diferansiyel denklem, bağımlı değişken y, bağımsız değişken x ve bağımlı değişkenin türevi $\frac{dy}{dx}$'i içerir. Mesela türevi kendisine eşit olan bir fonksiyonun sağladığı diferansiyel denklemi $\frac{dy}{dx} = y$ şeklinde yazabiliriz. Türevi kendisinin x katına eşit olan fonksiyonun sağladığı diferansiyel denklemi de $y' = xy$ şeklinde yazabiliriz. Şimdi herkes birer tane diferansiyel denklem örneği verebilir mi?

Hocam, herhalde en kolay diferansiyel denklem

$$\frac{dy}{dx} = x$$

olsa gerek.

Olur mu! Türevi c gibi reel bir sabite eşit olan

$$\frac{dy}{dx} = c$$

denklemi daha kolay.

O zaman

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

olsun bari.

Neden olmasın? Sabit bir fonksiyon bu denklemi sağlar.

Ben de bir denklem örneği vereyim. Türevi kendisinin x eksiği olan fonksiyonun sağladığı diferansiyel denklem

$$y' = y - x$$

şeklindedir.

Hocam çözme işini bilemem ama, denklem örneği vermek kolaymış. Örneğin, türevi $\frac{1}{x}$ olan fonksiyonun sağladığı diferansiyel denklem de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

şeklindedir. Ya da, türevi $\frac{1}{y}$ olan fonksiyonun sağladığı diferansiyel denklem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$$

şeklindedir.

Tanım Diferansiyel denklemi özdeş olarak sağlayan fonksiyona diferansiyel denklemin çözümü denir.

Evet arkadaşlar bunların hepsi birer diferansiyel denklem örneğidir. Diferansiyel denklemler konusunda amacımız diferansiyel denklemi oluşturmak, denklemin çözümünü sağlayan fonksiyonu bulmak ve çözümü yorumlamaktır.

Tanım Diferansiyel denklemin keyfi sabitlere bağlı çözümüne diferansiyel denklemin genel çözümü denir.

Diferansiyel denklemlere çözüm bulunması matematikçilerin yüzyıllardır uğraştığı bir konudur. Diferansiyel denklemlerin hepsini birden çözen genel bir metot mevcut olmadığı için çeşitli çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Buradaki amacımız integral alma kurallarını kullanarak bazı diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak olacaktır. Örneğin, Gökçe'nin verdiği

$$\frac{dy}{dx} = x$$

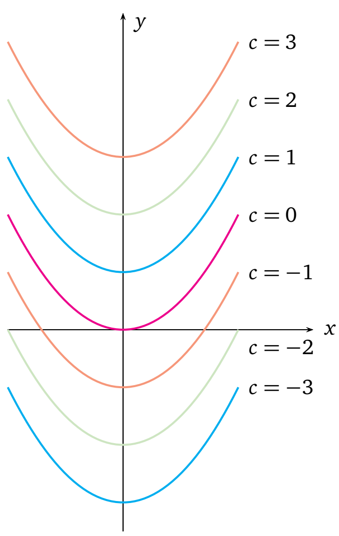
Tanım Diferansiyel denklemin genel çözümündeki keyfi sabitlere değerler verilerek elde edilen çözümlere özel çözümler denilir.

diferansiyel denklemini ele alalım. Bu denklemi $y' = x$ şeklinde de yazabiliriz. Burada fonksiyonun türevi x'e eşit, o halde bu fonksiyon

$$y = \int x dx = \frac{x^2}{2} + c$$

olur. Arkadaşlar, şimdi de bulduğumuz fonksiyonun türevini alarak çözümün sağlamasını yapalım.

Hocam ben zaten sağlamasını yaptım, bulduğumuz fonksiyonun türevi gerçekten de x'e eşit.



Şekil 2.1: $y = \frac{x^2}{2} + c$ fonksiyonlar ailesinin grafiği.

Arkadaşlar, böylelikle çözüm fonksiyonunu $y = \frac{x^2}{2} + c$ şeklinde yazabiliriz. Bu eşitliğe diferansiyel denklemin genel çözümü denir. c keyfi sabitine değerler verilerek bulunan çözümlere de diferansiyel denklemin özel çözümü denilir. Çözüme ait grafiği incelersek c'nin keyfi değerlerine göre çözümün davranışını görebiliriz.

Acaba türevi 1'e eşit olan fonksiyon ne olabilir? Ne dersin Selçuk?

Hocam bu fonksiyonun sağladığı diferansiyel denklem $y' = 1$ şeklinde olup

$$y = \int 1 \cdot dx = \int dx$$

eşitliğinden

$$y = x + c$$

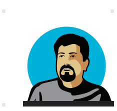
olur.

Aferin Selçuk, türevi 1'e eşit olan fonksiyon $y = x + c$ şeklindedir.

Türevi kendisine eşit olan fonksiyonun sağladığı diferansiyel denklemin $\frac{dy}{dx} = y$ olduğunu söylemiştik. Acaba bu denklemi hangi fonksiyon sağlar?

Hocam bu soru diğerlerinden biraz farklı sanırım, bunu nasıl yapacağız, tek tek fonksiyonları yazıp türevi kendisine eşit mi değil mi diye kontrol mü edeceğiz?

Arkadaşlar elbette çözümü bu şekilde aramayacağız. Diferansiyel denklemin özelliklerini inceleyerek uygun çözüm bulacağız.



Burada şöyle bir hile yapalım.

$$\frac{dy}{dx} = y$$

diferansiyel denklemini

$$\frac{dy}{y} = dx$$

şeklinde yazıp, sonra da iki tarafın integralini alalım. Bu durumda,

$$\int \frac{1}{y} dy = \int dx$$

eşitliğinden

$$\ln|y| = x + c$$

olur.

Hocam niçin mutlak değer kullandık?

Arkadaşlar y negatif değerler de alabileceği için mutlak değer işaretini kullandık. Eğer her zaman için $y > 0$ olduğunu kabul edersek

$$\ln y = x + c$$

olarak yazabiliriz.

Önceki problemde y'nin değerini daha açık bulmuştuk ama burada sonuç öyle çıkmadı.

Haklısın Zeynep. y'yi açık bir şekilde bulamadık, y'nin değerini açık bir şekilde yazmaya çalışalım. Bunun için önce eşitliğin her iki tarafını da e tabanında yeniden yazarsak

$$e^{\ln y} = e^{x+c}$$

yani

$$e^{\ln y} = e^x e^c$$

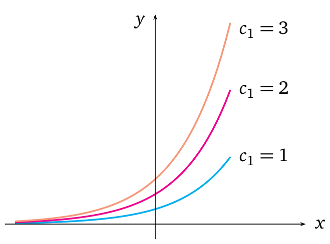
olur. Burada $e^{\ln y} = y$'dir. Böylece çözüm

$$y = e^c e^x$$

şeklinde olur. Ayrıca $c_1 = e^c$ sabitini kullanırsak çözüm

$$y = c_1 e^x$$

şeklinde bulunur. c_1 keyfi pozitif sabitinin değerlerine göre çözümün davranışını yandaki şekilde görebilirsiniz.



Şekil 2.2: $f(x) = c_1 e^x$ fonksiyonlar ailesinin grafiği.

Hocam, burada bulduğumuz $y = c_1 e^x$ fonksiyonu c_1'in her değeri için denklemi sağlar mı?

Zeynep bunun sağlamasını hemen yapabilirsin. Diferansiyel denklemde y ve y' yerine çözüm fonksiyonu ve türevini yazıp sonucun doğru olup olmadığını kontrol edebilirsin.

Tamam hocam, $y = c_1 e^x$ fonksiyonunun x'e göre türevini alırsak $\frac{dy}{dx} = c_1 e^x$ olur. Gerçekten de y fonksiyonunun türevi kendisine eşit oldu.

Bir tane de hem bağımsız hem de bağımlı değişkenin geçtiği bir denklem örneği görelim. Türevi kendisinin x katına eşit olan fonksiyonu bulalım.

Hocam bu denklem $y' = xy$ değil miydi?

Evet Engin. Bu denklemde de bağımlı değişken ile bağımsız değişken içeren terimleri ayırırsak

$$\frac{1}{y}dy = x dx$$

olur.

Şimdi integral alabiliriz değil mi?

Evet, değişkenler ayrıldığı için integral alabiliriz. Arkadaşlar, integrali alınacak ifadede aynı türden değişkenlerin olması gerekmektedir. İşlemleri yaparken buna çok dikkat etmeliyiz.

O halde integral alırsak

$$\int \frac{1}{y}dy = \int x dx \text{ ise } \ln|y| = \frac{x^2}{2} + c$$

olur. Eşitliğin iki tarafını da e tabanında yazarsak

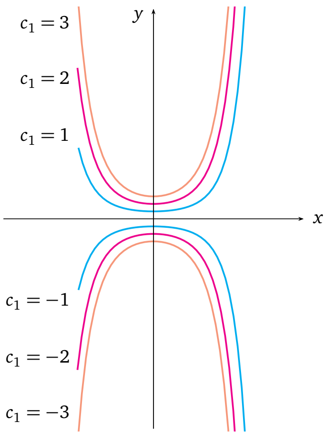
$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{x^2}{2}+c}$$

ve buradan da

$$|y| = e^{\frac{x^2}{2}} e^c$$

yani

$$|y| = e^c e^{\frac{x^2}{2}}$$



Şekil 2.3: $f(x) = c_1 e^{\frac{x^2}{2}}$ fonksiyonlar ailesinin grafiği.

eşitliğini elde ederiz. Bulduğumuz eşitlikte y'yi mutlak değerden kurtarırsak $y = \mp e^c\, e^{\frac{x^2}{2}}$ olup, $c_1 = \mp e^c$ olarak seçersek

$$y = c_1\, e^{\frac{x^2}{2}}$$

şeklinde diferansiyel denklemin genel çözümü bulunur. O halde türevi kendisinin x katı olan fonksiyon $y = c_1\, e^{\frac{x^2}{2}}$ şeklindedir. c_1 sabitinin çeşitli değerlerine göre bu fonksiyonların grafiğini yandaki şekilde görebilirsiniz.

Bazen bir diferansiyel denklemin bir x_0 noktasında belli bir y_0 değerini alan özel bir çözümünü bulmak isteyebiliriz. Buradaki $y_0 = y(x_0)$ koşuluna başlangıç değer koşulu denir. Verilen bir başlangıç değer koşuluna uyan diferansiyel denklemin çözümünün bulunması problemine başlangıç değer problemi denir. Bulunan çözüme de diferansiyel denklemin verilen başlangıç koşuluna uyan özel çözümü denir.

Bu anlattıklarımızı bir örnek üzerinde görelim. $y' = x$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü $y = \frac{x^2}{2} + c$ olarak hesaplamıştık. Şimdi bu diferansiyel denklemin herhangi bir başlangıç değer koşuluna uyan çözümünü bulalım. Örneğin, $y(0) = 3$ başlangıç koşuluna uyan çözümünü araştıralım. Engin bir dene istersen.

Bu durumda genel çözümde x yerine 0 ve y yerine de 3 yazıp keyfi sabitin alacağı değeri bulacağız. Böylece $y(0) = 3$ için $3 = \frac{0^2}{2} + c$ eşitliğinden $c = 3$ olup diferansiyel denklemin verilen başlangıç koşuluna uyan çözümü

$$y = \frac{x^2}{2} + 3$$

olarak bulunur.

Evet arkadaşlar böylelikle verilen başlangıç koşuluna uyan özel çözümü hesaplamış olduk. Burada dikkat etmemiz gereken husus şudur: Genel çözüm keyfi bir sabit içerirken, özel çözüm başlangıç koşullarına uygun olarak bulunan çözümdür.

Başlangıç değer problemlerinin pek çok uygulama alanı mevcuttur. Uygulamalı bilim dallarında karşılaşılan problemler başlangıç değer problemleri ile ifade edilirler. Örneğin, bir bölgedeki canlı nüfusunun artması veya azalması problemi, bir cismin sıcaklığındaki değişim, organik maddenin yaşının belirlenmesi hatta dedikodunun yayılması gibi problemlerde diferansiyel denklemleri kullanarak çözümler bulmaktayız.

Nüfus Problemi

Üstel ve logaritmik fonksiyonlar ünitesinde pozitif bir nicelik zaman içinde mevcut büyüklükle orantılı olarak artıyorsa bunun üstel artış gösterdiğini görmüştük. Şimdi bir bölgedeki canlı nüfusunun zamana göre değişimini veren diferansiyel denklemin oluşturulmasıyla işe başlayalım. Herhangi bir andaki nüfusu $y = y(t)$ ile gösterelim. Başlangıç anında yani $t = 0$ anındaki canlı nüfusu da $y(0) = y_0$ kadar olsun. Canlı nüfusunun mevcut nüfus ile orantılı olarak değiştiğini varsayalım. Bu değişim oranını da K ile ifade edelim. Burada K sabit bir değer olup $K > 0$ iken nüfusun artmakta, $K < 0$ iken nüfusun azalmakta olduğunu ifade eder. Bu durumda herhangi bir anda nüfustaki değişim oranı

$$\frac{dy}{dt} = Ky$$

şeklinde ifade edilebilir.

Hocam, buna benzer bir denklem çözmüştük.

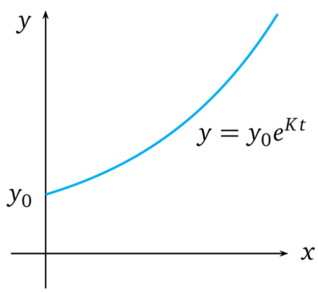
Evet, haklısın Engin. Nüfus değişim problemi de değişkenlerine göre düzenlendikten sonra integral alma yöntemiyle çözülebilir.

Bu diferansiyel denklemin çözülmesiyle herhangi bir andaki canlı nüfusunu bulabiliriz, değil mi hocam?

Evet Gökçe, diferansiyel denklemlerin faydası da bu zaten. Denklemi verilen başlangıç koşuluna uygun olarak çözdüğümüzde, herhangi bir andaki nüfus değerini buluruz. Şimdi elde ettiğimiz bu diferansiyel denklemi beraber çözelim.

Denklemi düzenlersek

$$\frac{1}{y}dy = K dt$$



Şekil 2.4: $K > 0$ için nüfustaki artış.

olur. Şimdi her iki tarafın da integralini alırsak

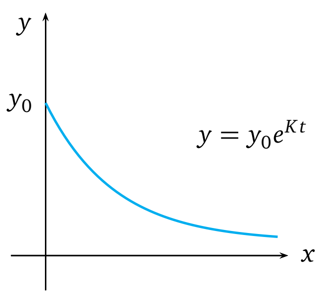
$$\int \frac{1}{y}dy = \int K dt$$

eşitliğinden

$$\ln y = Kt + c$$

olur. Daha önceki örneklerde olduğu gibi eşitliğin her iki tarafını da e tabanında yazıp işlemlere devam edersek

$$e^{\ln y} = e^{Kt+c}$$



Şekil 2.5: $K < 0$ için nüfustaki azalma.

eşitliğinden

$$y = e^{Kt+c} = e^c e^{Kt}$$

olur. Burada $c_1 = e^c$ sabitini alırsak çözümü $y = c_1 e^{Kt}$ olarak buluruz. Şimdi başlangıç değeri olan $y(0) = y_0$ değerini çözüm fonksiyonunda kullanırsak, $t = 0$ için $y_0 = c_1 e^0$ eşitliğinden $c_1 = y_0$ olur. Bu değeri de çözüm fonksiyonunda yerine yazarsak

$$y = y_0 e^{Kt}$$

olarak sonuç bulunur.

Böylece herhangi bir andaki canlı nüfusunu bu üstel fonksiyonu kullanarak bulabiliriz. Kullanmış olduğumuz bu model Malthus modeli olarak da adlandırılmaktadır.

Şimdi bu modeli kullanarak ülkemizin gelecekteki tahmini nüfusunu hesaplamaya çalışalım. Bunun için ülkemizin 2011 yılına ait nüfus verilerini kullanalım. Türkiyenin 2011 yılı adrese dayalı nüfus sayımına göre toplam nüfusu 74 724 269 olarak belirlenmiştir. Yıllık nüfus artış oranı da % 1,35 olduğuna göre 2023 yılında toplam nüfusumuzun ne kadar olacağını beraber hesaplayalım.

Hocam az önce gördüğümüz zamana göre nüfus değişimini veren diferansiyel denklemi kullanırsak

$$\frac{dy}{dt} = Ky$$

olur. Şimdi verilen bilgileri düzenleyelim. 2011 yılı başlangıç olarak alınırsa $t = 0$ anında nüfus $y(0) = 74\,724\,269$, nüfus değişim oranı $K = 0,0135$ olup 2023 yılındaki nüfus yani başlangıçtan 12 yıl sonraki tahmini nüfus

$$\frac{dy}{dt} = Ky, \quad y(0) = 74\,724\,269$$

başlangıç değer probleminin çözülmesiyle bulunur.

Hocam bu diferansiyel denklemin çözümünün

$$y = y_0 e^{Kt}$$

biçiminde bir üstel fonksiyon olduğunu bulmuştuk. Buna göre başlangıç nüfusu ve artış oranının bu üstel fonksiyonda yerlerine yazılmasıyla, 2011 yılından t yıl sonraki ülke nüfusu

$$y(t) = 74\,724\,269\, e^{0,0135t}$$

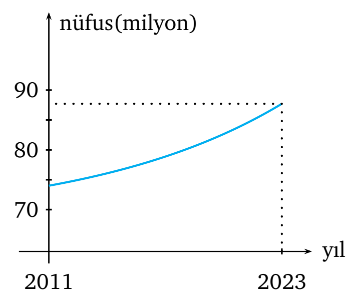
olur.

Şimdi hesap makinesi ile 2023 yılındaki yaklaşık nüfusu hesaplayabiliriz. Engin sonucu hesapla bakalım, yaklaşık nüfus ne çıkıyor?

Buna göre 2023 yılında yaklaşık nüfus, $t = 2023 - 2011 = 12$ olduğundan,

$$y(12) = 74\,724\,269\, e^{0,0135 \cdot 12} = 74\,724\,269 \cdot 1,17586$$

olup yaklaşık olarak $y(12) \approx 87\,865\,279$ olur.



Şekil 2.6: Yaklaşık nüfus.

Böylece verilen başlangıç koşullarına göre 2023 yılında ülkemizin tahmini nüfusunu diferansiyel denklemler yardımıyla hesaplamış olduk. Bu gibi nüfus değişim problemleri için eğer nüfustaki değişimi etkileyen herhangi bir ilave durum yoksa elde ettiğimiz

$$y = y_0 e^{Kt}$$

çözüm fonksiyonunu kullanabilirsiniz.

Radyoaktif Bozunma Hesabı

Üstel ve logaritmik fonksiyonlar ünitesinde Ötzi isimli mumyanın yaşının belirlenmesi için karbon yaşı hesaplama yöntemini kullanmıştık. Bu yöntemde canlı organizmanın hayatı sona erdiğinde vücuttaki C^{14}'ün yani radyokarbonun azalmaya başladığı gerçeğini kullanarak organik maddelerin yaşları tahmin ediliyordu. Radyokarbon testi ile organik maddenin yaşının belirlenmesinde

$$\frac{dy}{dt} = -Ky$$

diferansiyel denkleminden yararlanılır. Burada K kimyasal maddenin çeşidine bağlı olan bir bozunma sabitidir. Şimdi bu diferansiyel denklemi çözelim:

$$\frac{1}{y}dy = -Kdt$$

eşitliğinin her iki tarafının integrali alınırsa

$$\int \frac{1}{y}dy = -\int Kdt$$

olup, buradan da

$$\ln y = -Kt + c$$

buluruz. Eşitliği e tabanında yazarsak

$$e^{\ln y} = e^{-Kt+c}$$

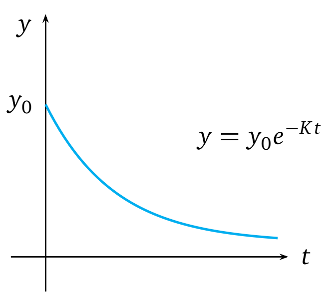
olup, buradan da $y = e^c e^{-Kt}$ elde edilir. e^c sabitini c_1 ile gösterirsek, çözümü

$$y = c_1 e^{-Kt}$$

olarak buluruz.

Hocam burada üstel terimdeki eksinin anlamı nedir?

Buradaki eksi işaret, başlangıç anından itibaren sürekli olarak radyokarbonun azaldığını ifade ediyor. Şimdi denkleme başlangıç koşullarını uygulayalım. Başlangıç anında karbon miktarı y_0 kadarsa, $t = 0$ için $c_1 = y_0$ olup $y = y_0 e^{-Kt}$ olur. Elde ettiğimiz bu çözüm fonksiyonu radyoaktif maddenin büyüklüğünün zamana göre üstel olarak azalmasını gösterir.



Şekil 2.7: Radyoatif madde miktarındaki azalma.

Arkadaşlar size ilginç bir olay anlatayım. 1940'lı yıllarda tesadüfen keşfedilen Fransa'nın Güney Dordogne bölgesinde bulunan Lascaux Mağarası'nda paleolitik çağa ait pek çok duvar resimleri mevcuttur. Mağaradaki resimler yapılırken boya maddesi olarak doğal malzemelerden elde edilmiş karışımların kullanıldığı belirlenmiştir. Araştırmacılar tarafından mağarada bir parça odun kömürü bulunmuş ve siyah rengi vermek için odun kömürünün de kullanıldığı belirlenmiştir. Yapılan ölçümlerle odun kömüründeki C^{14} miktarının başlangıçtaki miktarının %18'i kadar olduğu belirlenmiştir. Bu bilgiler yardımıyla odun kömürünün yaşını belirleyip duvarlardaki resimlerin yaşlarını hesaplayabiliriz.

Şekil 2.8: Lascaux Mağrası'ndan duvar resimleri.

Hocam gerçekten çok ilginç. Mağaradaki duvar resimlerinin yaşının diferansiyel denklemler ile hesaplanabileceğini hiç düşünmemiştim.

Matematik böyle birşey işte! Ne zaman karşımıza çıkacağı belli olmaz. Arkadaşlar, daha önceki üstel fonksiyonlarla ilgili dersimizde C^{14} atomlarının yarısının bozunması için 5715 yıl geçmesi gerektiğini belirtmiştik. Tüm canlılar için C^{14} ile C^{12} oranının sabit olduğunu biliyoruz. Bu oran atmosferdeki C^{14} miktarının C^{12} miktarına oranına eşit olup sabittir. Bir canlı öldüğünde C^{12} miktarı sabit kalırken C^{14} miktarının azalmaya devam ettiği bilgisinden yararlanarak karbon yaşı hesaplanır. Odun kömürünün ana maddesi de ağaç olduğundan C^{14} miktarının C^{12} miktarına oranı başlangıçta atmosferdeki orana eşittir. Bu oran başlangıç anında yani $t = 0$ anında y_0 olsun.

$$\frac{dy}{dt} = -Ky$$

diferansiyel denkleminin çözümünden herhangi bir t anındaki karbon oranını veren fonksiyonu $y(t) = c_1 e^{-Kt}$ olarak buluruz.

Hocam buradaki c_1 ve K'nın değerlerini bulmak için ne yapacağız?

Bunun için başlangıç verilerini kullanacağız. Burada $t = 0$ için $y = y_0$ değerini fonksiyonda yerine yazarsak $y_0 = c_1 e^0$ eşitliğinden $c_1 = y_0$ olur. Böylece

$$y(t) = y_0 e^{-Kt}$$

eşitliği elde edilir.

Karbonun yarılanma yaşı 5715 idi. Şimdi de bu bilgiyi kullanalım.

$t = 5715$ yıl sonra mevcut karbonun yarısı kalacağından

$$y(5715) = \frac{y_0}{2}$$

olur. Bu değeri çözüm fonksiyonunda yazarsak $t = 5715$ için

$$\frac{y_0}{2} = y_0 e^{-5715K}$$

bulunur. Böylece y_0 ile sadeleştirirsek, $\frac{1}{2} = e^{-5715K}$ olur. Eşitliğin iki tarafınında doğal logaritmasını alırsak,

$$\ln\frac{1}{2} = -5715K$$

elde edilir. Buradan da

$$\ln\frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = 0 - \ln 2 = -\ln 2$$

olduğundan $\ln 2 = 5715K$ yazabiliriz. Engin hesap makinesi ile $\ln 2$'nin değerini bulur musun?

Hocam $\ln 2$ yaklaşık olarak $0,693$.

O halde $0,693 = 5715K$ olur, buradan da $K = \frac{0,693}{5715}$ eşitliğini buluruz, yine hesap makinesi yardımıyla $K = 0,000121$ değerini elde ederiz. Böylece herhangi bir andaki karbon oranını veren fonksiyon $y(t) = y_0 e^{-0,000121 \cdot t}$ şeklinde bulunur.

Şimdi artık bulunan odun kömürü parçasının yaşını hesaplayabiliriz.

Haklısın Selçuk, bunu da sen hallet istersen.

Odun kömürü parçası bulunduğunda C^{14} miktarının %18'i kaldığına göre başlangıçtan itibaren geçen zaman şu şekilde bulunabilir:

$$\frac{18}{100}y_0 = y_0 e^{-0{,}000121\cdot t}$$

eşitliğinden

$$\frac{18}{100} = e^{-0{,}000121\cdot t}$$

olur. Eşitliğin iki tarafının da doğal logaritmasını alıp düzenlersek,

$$\ln\frac{18}{100} = -0,000121t$$

olur. Şimdi hesap makinesine bakmam gerekiyor. $\ln\frac{18}{100}$ yaklaşık olarak $-1,7148$. Buradan da t yaklaşık olarak $\frac{1{,}7148}{0{,}000121} \approx 14\,172$ yıl oluyor.

Gerçekten de epey eski resimlermiş doğrusu.

Soğuma Problemi

Diferansiyel denklemleri kullanarak belli bir sıcaklığa sahip bir cismin sıcaklığındaki değişimi hesaplayabiliriz. Bu tür problemler Newton'un soğuma yasası olarak bilinen yöntem yardımıyla önceki örneklerimizde olduğu gibi bir başlangıç değer problemi biçiminde ifade edilir.

Newton'un soğuma yasasına göre soğuyan bir cismin sıcaklığındaki değişim, cismin sıcaklığı ile ortam sıcaklığı arasındaki farkla orantılıdır. Burada ortamın sıcaklığının sabit olduğunu kabul ediyoruz. Buna göre eğer herhangi bir andaki cismin sıcaklığı y, ortamın sabit sıcaklığı s ve orantı sabiti K ise cismin sıcaklığındaki zamana göre değişim oranı

$$\frac{dy}{dt} = K(y - s)$$

diferansiyel denklemiyle ifade edilir. Burada cismin sıcaklığının ortam sıcaklığından daha büyük olduğunu kabul edelim.

Hocam yine bu denklemi de doğrudan integrali alınabilecek biçime çevirmemiz gerekiyor değil mi?


Evet Engin, zaman değişkenine t dersek, denklemi y'li ve t'li terimlere göre düzenlememiz gerekiyor.


Yani $\dfrac{1}{y-s}dy = Kdt$ şeklinde yazacağız, değil mi?


Evet ama işimiz henüz bitmedi. Bu denklemi çözmemiz gerekiyor. Böylelikle cismin herhangi bir andaki sıcaklığını ifade eden $y(t)$ fonksiyonunu bulacağız. Engin problemin buradan sonraki kısmını beraber çözelim.


Tamam hocam. Elde ettiğimiz eşitliğin her iki tarafının integralini alarak çözüme devam edersek

$$\int \frac{1}{y-s}dy = \int Kdt$$

ve buradan da

$$\ln(y-s) = Kt + c$$

olur. Buradan sonra ne yapacağım?


Gene eşitliğin iki tarafını da e tabanında yazarsak $e^{\ln(y-s)} = e^{Kt+c}$, yani $y - s = e^{Kt+c} = e^c e^{Kt}$ olur. $c_1 = e^c$ dersek çözümü

$$y = s + c_1 e^{Kt}$$

olarak buluruz. Şimdi cismin başlangıçtaki sıcaklık değerinin y_0 olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$y_0 = s + c_1 e^0$$

ve buradan da $c_1 = y_0 - s$ olur. Böylece herhangi bir andaki cismin sıcaklığı

$$y = s + (y_0 - s)e^{Kt}$$

denklemiyle ifade edilmiş olur.


Şimdi Newton'un soğuma yasasını bir örnek üzerinde inceleyelim. Bunun için sizlerle küçük bir deney yapacağız arkadaşlar. Bunun için bana kim yardım etmek ister?

Deney mi? Harika, ben yardımcınız olurum hocam.

Tamam Selçuk. Bu deneyde belli bir başlangıç sıcaklığına sahip bir bardak çayın soğumasını gözlemleyerek matematiksel bir model oluşturacağız. Bunun için bir bardak çayın belirli aralıklarla sıcaklığını ölçerek, belli bir zamandaki soğumasını inceleyeceğiz.

Arkadaşlar, şimdi sizlerle beraber okul kantinimize gidip bu deneyi yapalım.

Evet arkadaşlar herkes hazırsa deneyimize başlayalım. Öncelikle bulunduğumuz ortamın sıcaklığını ölçelim.

Hocam ben ölçtüm, burası 30 derece.

Tamam, ortamın sıcaklığını sabit ve 30 derece olarak alalım. Şimdi çaydanlıktan doldurduğumuz sıcak çayın hiç zaman kaybetmeden sıcaklığını ölçelim.

Hocam çay 75 derece.

Tamam Selçuk, biraz bekleyip çayın 5 dakika sonraki sıcaklığını ölçeceğiz.

Tamam, hocam... Çayın 5 dakika sonundaki sıcaklığı 63 derece.

Tamam arkadaşlar, elimizdeki verilerden yararlanarak bir matematiksel model kuracağız ve bu model yardımıyla çayın 10 dakika sonunda kaç derece olacağını hesaplayacağız. Selçuk da bu arada çayın 10 dakika sonraki gerçek sıcaklığını ölçsün.

Hocam Newton'un soğuma yasasındaki denklemi mi kullanacağız?

Evet Zeynep. Elimizdeki verilere göre çayın başlangıç anındaki sıcaklığı $y_0 = 75$ derece ve ortamın sabit sıcaklığı $s = 30$ dereceydi. Bu durumda herhangi bir andaki çayın sıcaklığındaki değişimi veren diferansiyel denklem

$$\frac{dy}{dt} = K(y - 30)$$

olur.

Hocam az önce elde ettiğimiz

$$y = s + (y_0 - s)e^{Kt}$$

çözüm fonksiyonunu bu durumda

$$y = 30 + (75 - 30)e^{Kt} = 30 + 45e^{Kt}$$

şeklinde yazabiliriz değil mi?

Aferin Gökçe, şimdi de K sabitini belirlemeye çalış bakalım.

Bu biraz zor olacak galiba...

Elimizde hala kullanmadığımız bilgi olarak çayın 5 dakika sonraki sıcaklığı var.

Sağol Selçuk, bu işimize yarayacak. 5 dakika sonraki sıcaklık 63 dereceydi. Yani $t = 5$ için $y(5) = 63$ demek olup, buradan

$$63 = 30 + 45e^{5K}$$

olup $33 = 45e^{5K}$ eşitliği elde edilir. Buradan da $\dfrac{33}{45} = e^{5K}$ olur. Eşitliğin her iki tarafının doğal logaritmasını alırsak,

$$\ln\left(\frac{33}{45}\right) = \ln(e^{5K}) = 5K$$

ve buradan da $K = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{33}{45}\right)$ olur. Engin hesap makinesi ile sonuç kaç çıkıyor?

Hesaplıyorum Gökçe, K'nın değeri yaklaşık olarak $-0,062$ oluyor.

Hocam o halde herhangi bir andaki çayın sıcaklığını veren ifade $y = 30 + 45e^{-0,062t}$ olur.

Çok güzel, şimdi artık çayın $t = 10$ anındaki sıcaklığını bulabilirsin.

Hayret, bunu yapabileceğimi hiç zannetmezdim. Ama ne kadar kolaymış! t yerine 10 yazarsak

$$y = 30 + 45e^{-0,062 \cdot 10} = 30 + 45e^{-0,62}$$

olup, böylece 10 dakika sonunda çayın sıcaklığını hesaplamış oluruz. Haydi Engin çabuk ol!

Evet, hesap makinesi yaklaşık olarak $54,2$ değerini veriyor.

Selçuk sıcaklığı ölçtün mü? Kaç derece çıktı?

Evet, 55 derece çıkmıştı.

Eh bu kadar hata kadı kızında da olur.

Evet arkadaşlar, hepinize bravo!

Hocam şimdi canımız bir bardak çay çekti doğrusu.

Sınırlı Büyüme

Arkadaşlar, bir firma yeni bir ürünü piyasaya sürmek istiyor. Bunun için de televizyona reklam vermeyi planlıyor. Reklam yayımlanmaya başladıktan sonra reklamı gören kişi sayısının henüz reklamı görmemiş olan kişi sayısıyla orantılı olarak değiştiği düşünülmektedir. Reklamın ulaşabileceği maksimum kişi sayısı M, reklamı gören kişi sayısı y ve orantı sabiti K olmak üzere değişim oranını veren diferansiyel denklem

$$\frac{dy}{dt} = K(M - y)$$

şeklinde yazılabilir. Reklamı başladığı anda gören hiç kimse olmadığına göre $t = 0$ için $y(0) = 0$'dır. Bu modele sınırlı büyüme modeli denilmektedir.

Hocam bu denklem de önceki denklemler gibi çözülebilir mi?

Şüphesiz Selçuk, bu denklem

$$\frac{dy}{M - y} = K dt$$

şeklinde yazılabilir ve her iki tarafın integralini alırsak

$$\int \frac{dy}{M - y} = \int K dt,$$

$$-\ln(M - y) = Kt + c$$

elde edilir. Bu eşitliği, her iki tarafı -1 ile çarparak

$$\ln(M - y) = -Kt - c$$

şeklinde de yazabiliriz. Buradan da

$$e^{\ln(M-y)} = e^{-Kt-c}$$

yani

$$M - y = e^{-Kt} e^{-c}$$

olur. Eşitliği düzenlersek

$$y = M - e^{-Kt} e^{-c}$$

bulunur. Başlangıç anında $y(0) = 0$ olduğundan

$$0 = M - e^{-c}$$

yani

$$e^{-c} = M$$

olup

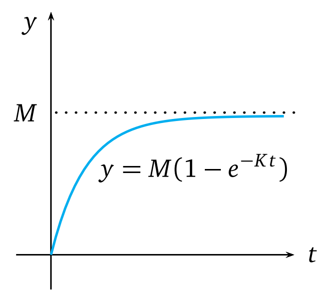
$$y = M - e^{-Kt}M = M(1 - e^{-Kt})$$

elde edilir.

Demek ki arkadaşlar, sınırlı büyüme modeli için kullanılan başlangıç değer probleminin çözümü

$$y(t) = M(1 - e^{-Kt})$$

fonksiyonu ile ifade edilmiş oluyor. Sınırlı büyüme modeli bir şirketin ne kadar büyüyebileceği, öğrenme becerilerinin ne kadar gelişebileceği, araçların yıpranmasının belirlenmesi gibi değişik problemlerde de karşımıza çıkmaktadır.



Şekil 2.9: Sınırlı büyüme.

Hocam, bununla ilgili somut bir örnek çözebilir miyiz?

Elbette, bir elektronik firması nüfusu 100000 olan bir bölgede yayım yapan yerel bir radyoda ertesi gün % 50 indirimli satışlar yapacağını belirten reklamlar yayımlatıyor. Bir saat içinde 7500 kişinin yapılan reklamlardan haberdar olduğunu varsayarsak, 5 saat içinde bu reklamdan kaç kişinin haberdar olacağını bulalım.

Hocam ben bir deneyeyim. Bu problem için reklamın ulaşabileceği maksimum kişi sayısı 100000 olacaktır. Başlangıç anında hiçbir kimsenin bu reklamdan haberi olmadığına göre $y(0) = 0$ olur. Buna göre reklamdan haberdar olan kişi sayısı

$$y(t) = 100000(1 - e^{-Kt})$$

eşitliği ile bulunur. Bir saat sonra 7500 kişi reklamdan haberdar olduğuna göre

$$7500 = 100000(1 - e^{-K})$$

eşitliğinden

$$\frac{7500}{100000} = 1 - e^{-K},$$

ya da $\frac{75}{1000} = 1 - e^{-K}$ olur. Buradan,

$$e^{-K} = 1 - \frac{75}{1000} = \frac{925}{1000}$$

ve nihayet $-K = \ln \frac{925}{1000}$ elde ederiz. Engin'in hesap makinesiyle de,

K yaklaşık olarak $0,07796$ olur.

Demek ki fonksiyonumuzu

$$y(t) = 100000(1 - e^{-0,07796t})$$

şeklinde yazabiliriz. Beş saat sonra $t = 5$ için

$$y(5) = 100000(1 - e^{-0,07796 \cdot 5})$$

olup,... Engin imdat!

$y(5) = 32281$ oluyor. Yani beş saat sonra 32281 kişinin indirimden haberi oluyor.

Evet arkadaşlar böylece matematiksel bir modelleme yardımıyla beş saat içinde kaç kişinin bu indirimden haberdar olacağını bulduk.

Dedikodunun Yayılması

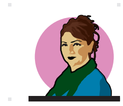
Diferansiyel denklemlerin sosyoloji alanında da ilginç uygulamaları vardır. Mesela bir topluluk içinde dedikodunun yayılması durumu bir diferansiyel denklem ile modellenebilir.

Nasıl yani hocam, dedikoduyla matematiğin ne ilgisi var?

Bakıyorum da konu dedikodu olunca hiç kaçırmıyorsun Gökçe?

Arkadaşlar bir dedikodu ya da söylentinin yayılma hızı, hem dedikoduyu duymuş olan kişi sayısı hem de henüz dedikoduyu duymamış olan kişi sayısıyla doğru orantılıdır.

Hocam bunu bir diferansiyel denklemle nasıl açıklayabiliriz?



Topluluktaki toplam kişi sayısı P ve dedikoduyu duymuş olan kişi sayısı da y olsun. Bu durumda henüz dedikoduyu duymamış kişi sayısı $P - y$ olur. K bir orantı sabiti olmak üzere dedikodu yayılmasını modelleyen diferansiyel denklem

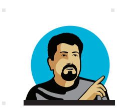
$$\frac{dy}{dt} = Ky(P - y)$$

şeklinde olur. Başlangıçta dedikodu bir kişiden yayılırsa $y(0) = 1$ olur. Buna göre bu başlangıç değer probleminin çözümünün

$$y(t) = \frac{P}{1 + (P-1)e^{-KPt}}$$

şeklinde olduğu gösterilebilir. Çok isterseniz çözümü siz de gösterebilirsiniz aslında.

İsterseniz şimdilik çok istemeyelim hocam.



O zaman bir örnek görelim. Toplam mevcudu 1500 kişi olan bir okulda bir öğrenci Ajda Pekkan'ın okullarını ziyarete geleceği söyletisini yayıyor. İlk 15 dakikada bu söylentiyi duyan öğrenci sayısı 100 olduğuna göre yarım saat içinde bu söylentiyi kaç öğrencinin duyacağını hesaplayalım.

Arkadaşlar toplam öğrenci sayısı $P = 1500$'dür. Söylenti bir öğrenciden yayılmaya başladığı için $y(0) = 1$ olur. Buna göre başlangıç değer problemimiz

$$\frac{dy}{dt} = Ky(1500 - y) \quad \text{ve} \quad y(0) = 1$$

şeklinde olur. Bu denklemin çözüm fonksiyonu

$$y(t) = \frac{1500}{1 + 1499e^{-1500Kt}}$$

olur. Söylenti 15 dakika yani $0,25$ saatte 100 öğrenci tarafından duyulduğu için $y(0,25) = 100$ olur. Buna göre

$$100 = \frac{1500}{1 + 1499e^{-1500 \cdot 0,25K}}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten K orantı sabitinin değerini bulalım. Eşitliğin iki tarafını da 100'e bölüp eşitliği düzenlersek

$$1 = \frac{15}{1 + 1499e^{-1500 \cdot 0,25K}}$$

ya da $1 + 1499e^{-1500 \cdot 0,25 \cdot K} = 15$ olur. Buradan da

$$e^{-375K} = \frac{14}{1499}$$

yazılabilir. Eşitliğin iki tarafının doğal logaritmasını alırsak

$$-375K = \ln \frac{14}{1499}$$

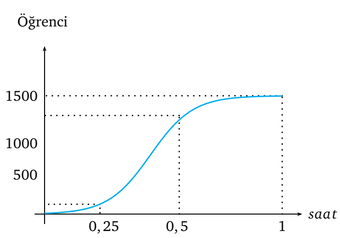
olup, gene hesap makinesiyle, $\ln \frac{14}{1499} \approx -4,6735$ ve buradan da

$$K \approx \frac{4,6735}{375} \approx 0,0125$$

bulunur. O halde

$$y(t) = \frac{1500}{1 + 1499e^{-1500 \cdot 0,0125t}} = \frac{1500}{1 + 1499e^{-18,75t}}$$

elde edilir.



Şekil 2.10: Dedikodunun yayılması

Artık yarım saat sonra söylentiyi kaç kişinin duyacağını hesaplayabiliriz. Bu eşitlikte t yerine $0,5$ koyarsak

$$y(0,5) = \frac{1500}{1 + 1499e^{-18,75 \cdot 0,5}} \approx 1331$$

elde edilir.

Hocam, dedikodu ne kadar hızlı yayılıyormuş böyle!

Özet

Bu ünitede, birinci mertebeden diferansiyel denklemler üzerinde durduk ve kolay çözülebilen bazı diferansiyel denklemleri ayrıntılı olarak inceledik. Ayrıca diferansiyel denklemlerin nüfus hesaplaması, sıcaklık hesabı, organik maddenin yaşının belirlenmesi, sınırlı büyüme problemleri ve dedikodunun yayılması gibi çeşitli uygulamalarını inceledik.

Okuma Parçası

SANAT SAHTEKÂRLIĞI

Sanat eserlerinin sahtesi ile gerçeğinin ayırt edilmesi bilimin uğraştığı önemli problemlerden birisidir. Günümüzde gelişmiş aletler ve test yöntemleriyle bir sanat eserinin orijinalliği net bir şekilde belirlenebilmektedir.

20. yüzyılda sanat ve bilim dünyasının en çok dikkatini çeken sahtecilik olaylarından birisi Hollandalı sıradan bir ressam olan Han van Meegeren'in 17. yüzyıl ressamı olan Jan Vermeer'e ait olan dünyaca meşhur resimlerin sahtelerini yapıp satmasıyla ortaya çıkmıştır. Bu sahtecilik olayı, İkinci Dünya Savaşı'ndan sonra Nazi önderlerinin topladığı ya da yağmaladığı yapıtların sahiplerine geri verilmesi çalışmaları sırasında oluşturulan sanat kurulu tarafından ortaya çıkarılmıştır. Sanat kurulunun el koyduğu bir koleksiyonda Vermeer'e ait olan bir resim bulunmuş ve yapılan araştırmalar sonucunda bu resmin Meegeren tarafından satıldığı belirlenmişti. Böylelikle Meegeren düşmanla işbirliği yapıp milli servet olarak kabul edilen eserleri satmaktan suçlu bulunmuştu. Ancak Meegeren suçlamaları kabul etmeyerek, resmin kendisinin yaptığı bir taklit olduğunu iddia edip, kendisinin Hollanda'yı işgal eden Nazilerle işbirliği yapmak şöyle dursun, onlara sahte eser satarak aldatmayı başardığını, o yüzden bir "kahraman" sayılması gerektiğini söylemişti.

Bu iddiasını ispatlamak için de tutukluyken polislerin önünde yine Vermeer'e ait olan başka bir eserin sahtesini yapıp nasıl iyi bir taklitçi olduğunu gösterdi. Böylelikle düşmanla işbirliği suçlamalarından kurtulmuştu ama bu sefer de sanat sahtekârlığından suçlu bulunup bir yıl hapse mahkûm edilmişti. Ama cezasını çekmeye başlamadan kalp krizinden öldü.

Han van Meegeren'in sahtesini yaptığı çok sayıda eser bulunmaktadır. Böylelikle çizimlerin sahte olup olmadığı ile ilgili sorular, uluslararası bir panelde sanat tarihçileri, fizikçiler, kimyacılar tarafından tartışıldı. Resimlerde kullanılan çeşitli kimyasal madde ve boyaların 17. yüzyılda henüz bulunmaması ve resimlerde eski gibi gösterilmek için çatlaklar yapıldığı belirlenip oybirliğiyle çizimlerin sahte olduğu sonucuna varıldı. Bu kanıta karşılık birçok uzman meşhur resimlerden biri olan "Disciples at Emmaus"un sahte olduğuna inanmadılar ve Rembrandt kurumu tarafından 170000 dolara satın alındı. Bu olayların üzerine, "Disciples at Emmaus"un sahte olduğu 1967 yılında Carnegie Mellon Üniversitesinde bilim adamları tarafından ispatlandı. İspat yöntemi olarak resimde kullanılan boyaların içeriğindeki kimyasal maddelerin Radyum elementlerinden oluştuğu, Radyumun yarılanma yaşının da 1600 yıl olduğu bilgisinden yararlanıldı. Hesaplamalar sonucunda resimde kullanılan boyadaki kimyasal maddelerin bozunma miktarının çok düşük olduğu ve iddia edildiği gibi resimlerin 17. yüzyıla ait olmayıp iyi yapılmış birer sahteleri olduğu ispatlandı.

Kaynaklar:

1. **http: //www.radikal.com.tr/Radikal.aspx?aType=HaberYazdir&ArticleID=889943**
2. **Modelling with Differential Equations, D.N. Burghes, M.S. Borrie, Ellies Horwood Limited, 1981.**

Çıkarın Kağıtları

1. $y' = x+1$ diferansiyel denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = \frac{x^2}{2} - 2x + c$ **B)** $y = \frac{x^2}{2} + c$

C) $y = x^2 + 1 + c$ **D)** $y = x + 1 + c$

E) $y = \frac{x^2}{2} + x + c$

2. $y' = 3x$ diferansiyel denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = \frac{3x^2}{2} + c$ **B)** $y = x^2 + c$

C) $y = 3x + c$ **D)** $y = 3x^2 + x + c$

E) $y = 3x^2 - 3x + c$

3. $y' = 3x$ diferansiyel denkleminin $y(2) = 0$ koşuluna uyan çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = \frac{3x^2}{2} - 6$ **B)** $y = x^2 - 4$

C) $y = 3x - 6$ **D)** $y = 3x^2 + x - 14$

E) $y = 3x^2 - 3x - 6$

4. $\dfrac{dy}{dx} = 2(x-1)$ diferansiyel denkleminin $y(1) = 1$ koşuluna uyan çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = x^{-1}$ **B)** $y = x^2 - 2x + 2$

C) $y = 2(x-1)$ **D)** $y = x^2 + 1$

E) $y = 2x^2 - x - 1$

5. $y' = x^2$ diferansiyel denkleminin $x = 0$ için $y = 0$ başlangıç değerine sahip çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = 2x$ **B)** $y = x^2$ **C)** $y = \frac{x^3}{3}$

D) $y = \frac{x^2}{2}$ **E)** $y = \frac{x}{2}$

6. $x > 0$ olmak üzere, $y' = \frac{1}{x} + x$ diferansiyel denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = \frac{1}{x} + x + c$ **B)** $y = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} + c$

C) $y = \ln(x^2 + x) + c$ **D)** $y = \ln x + \frac{x^2}{2} + c$

E) $y = 2x^2 + x + c$

7. $x > 0$ olmak üzere, $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}$ diferansiyel denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = 2x + c$ **B)** $y = \frac{2}{x} + c$

C) $y = 2x^2 + c$ **D)** $y = 2\ln x + c$

E) $y = \frac{2}{x^2} + c$

8. $y = e^{2x}$ fonksiyonu aşağıdaki diferansiyel denklemlerden hangisini sağlar?

A) $y' = 2$ **B)** $y' = y$ **C)** $y' = 2y$

D) $y' = x$ **E)** $y' = 2x$

9. Bir bakteri kültüründeki bakteri sayısındaki artış hızı mevcut bakteri sayısıyla orantılıdır. Kültürdeki bakteri sayısı 3 saatte 2'ye katlandığına göre ne zaman bakteri sayısı 8'e katlanır?

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

10. Sıcaklığı $100°C$ olan bir metal çubuk soğuması için sıcaklığı sabit olarak $20°C$ olan bir ortama bırakılıyor. Çubuğun sıcaklığı 10 dakikanın sonunda $60°C$'ye düştüğüne göre bu çubuğun soğuma denklemini yazınız.

Çözümler

1. $y' = \frac{dy}{dx} = x + 1$ ise

$$y = \int (x+1)dx$$

eşitliğinden

$$y = \frac{x^2}{2} + x + c$$

elde edilir.
Doğru cevap E şıkkıdır.

2. $y' = 3x$ ise

$$y = \int 3x dx$$

eşitliğinden

$$y = \frac{3x^2}{2} + c$$

olur.
Doğru cevap A şıkkıdır.

3. Diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y = \frac{3x^2}{2} + c$$

olup, $y(2) = 0$ koşulu kullanılarak

$$0 = 3\frac{2^2}{2} + c$$

eşitliği elde edilir. Buradan da $c = -6$ olup, çözüm

$$y = \frac{3x^2}{2} - 6$$

olur.
Doğru cevap A şıkkıdır.

4. $y = \int 2(x-1)dx$ ise

$$y = x^2 - 2x + c$$

olur. $y(1) = 1$ koşulunu uygularsak,

$$1 = 1^2 - 2 \cdot 1 + c$$

eşitliğinden $c = 2$ olup diferansiyel denklemin verilen koşula uygun çözümü

$$y = x^2 - 2x + 2$$

olur.
Doğru cevap B şıkkıdır.

5. $y' = x^2$ ise $y = \int x^2 dx$ olup

$$y = \frac{x^3}{3} + c$$

elde edilir. $x = 0$ için $y = 0$ başlangıç değeri verildiğinden, $0 = 0 + c$ eşitliğinden $c = 0$ olup, diferansiyel denklemin verilen başlangıç değerine sahip çözümü $y = \frac{x^3}{3}$ olur.
Doğru cevap C şıkkıdır.

6. $y = \int (\frac{1}{x} + x)dx$ olup

$$y = \ln x + \frac{x^2}{2} + c$$

elde edilir.
Doğru cevap D şıkkıdır.

7. $y = \int \frac{2}{x} dx$ olup

$$y = 2\ln x + c$$

olur.
Doğru cevap D şıkkıdır.

8. $y = e^{2x}$ eşitliğinin her iki tarafının x değişkenine göre türevi alınırsa

$$y' = 2e^{2x}$$

elde edilir. Eşitlikte $y = e^{2x}$ değerini yerine yazarsak

$$y' = 2y$$

elde edilir. O halde $y = e^{2x}$ fonksiyonu $y' = 2y$ diferansiyel denklemini sağlar.
Doğru cevap C şıkkıdır.

9. Problemi çözmek için nüfus probleminde kullandığımız

$$\frac{dy}{dt} = Ky$$

diferansiyel denklemini kullanacağız. Bu diferansiyel denklemin çözümü

$$y = c_1 e^{Kt}$$

şeklindedir ve herhangi bir andaki nüfusu ifade eder.

Başlangıç anındaki bakteri sayısı $y(0) = y_0$ olsun. $t = 3$ için $y(3) = 2y_0$ olup bakteri sayısının başlangıçtaki sayının 8 katına ne zaman ulaşacağını bulacağız.

$t = 0$ için $c_1 = y_0$ olup $y = y_0 e^{Kt}$ olur.
$t = 3$ için $2y_0 = y_0 e^{3K}$ olup, y_0 çarpanı kısaltıldıktan sonra her iki tarafın logaritması alınarak

$$3K = \ln 2,$$

yani $K = \frac{1}{3}\ln 2$ bulunur. Demek ki herhangi bir andaki bakteri sayısı

$$y = y_0 e^{(\frac{1}{3}\ln 2)t}$$

eşitliği ile verilir. Şimdi bakteri sayısının ne zaman sekiz katına çıkacağını bulalım. O zaman

$$8y_0 = y_0 e^{\frac{t}{3}\ln 2}$$

olup $8 = e^{\frac{t}{3}\ln 2}$ eşitliğinin her iki tarafının doğal logaritması alınırsa,

$$\ln 8 = \frac{t}{3}\ln 2$$

ve burada, $\ln 8 = \ln 2^3 = 3\ln 2$ olduğundan, $t = 9$ bulunur. O halde dokuz saat sonra bakteri sayısı başlangıçtaki sayının sekiz katına ulaşır.

Doğru cevap E şıkkıdır.

Burada sayılar uygun verildiği için bu problemi şüphesiz diferansiyel denklemlere başvurmadan da hemen çözebilirdik: 3 saatte bakteri sayısı ikiye katlandığı için, 6 saatte dörde ve 9 saatte de sekize katlanacaktır. Ancak sayıların uygun verilmediği durumlarda da yukarıda örneklediğimiz yaklaşımla problemi her zaman çözebiliriz. Örneğin bakteri sayısı kaç saatte 10 katına çıkar deseydik, çözümü deneyerek bulamazdık; fakat diferansiyel denklem yardımıyla kolaylıkla bulabilirsiniz.

10. Problemdeki verilenleri yazarsak;
çubuğun başlangıç sıcaklığı $y(0) = 100$, ortam sıcaklığı $s = 20$ ve çubuğun 10 dakika sonraki sıcaklığı $y(10) = 60$'dır. Newton'un soğuma yasasından, soğuyan bir cismin herhangi bir andaki sıcaklık değişimi $y(0) = y_0$ başlangıç sıcaklığı olmak üzere

$$\frac{dy}{dt} = K(y - s)$$

diferansiyel denklemi ile ifade edilir ve denklemin çözülmesiyle de

$$y = s + (y_0 - s)e^{Kt}$$

bulunur. Buradan $s = 20$ ve $t = 0$ için

$$100 = 20 + 80e^{Kt}$$

olur. $t = 10$ için

$$60 = 20 + 80e^{10K}$$

olup, $e^{10K} = \frac{40}{80}$ eşitliğinin her iki tarafının doğal logaritması alınırsa,

$$10K = \ln\frac{40}{80} = \ln\frac{1}{2}$$

ve buradan da

$$K = \frac{1}{10}\ln\frac{1}{2}$$

veya $K = -0,1 \cdot \ln 2$ olarak bulunur. Böylece soğuma denklemi

$$y = 20 + 80e^{(-0,1\cdot\ln 2)\,t}$$

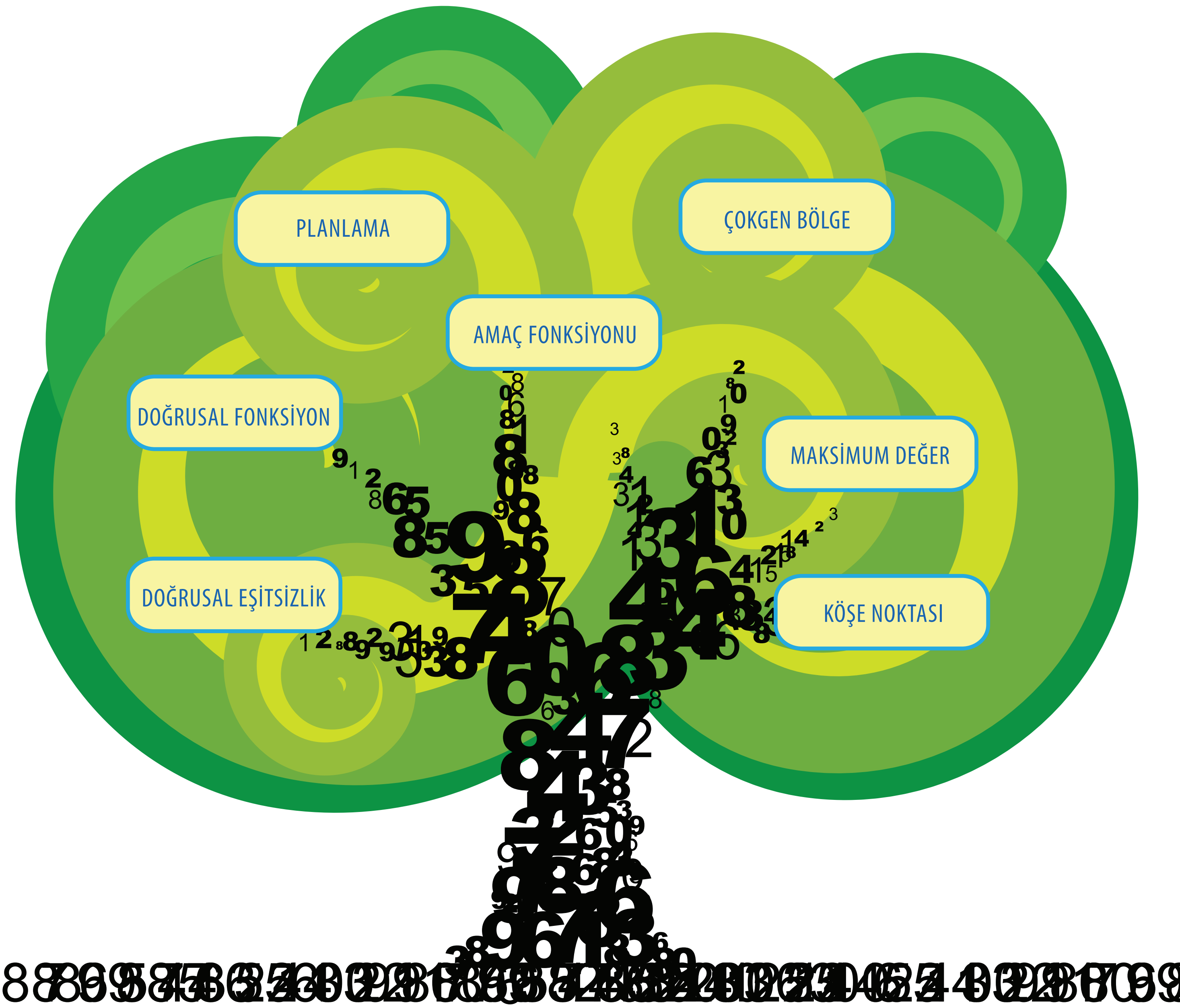
olarak elde edilir.

Doğrusal Programlamaya Giriş

MATEMATİK 2

3. ÜNİTE

Kırk tane sandalye tamam da, yirmi buçuk masa nasıl olacak?



Giriş

Bu dersimizin konusu doğrusal programlama. Burada programlama kelimesini planlama anlamında kullanacağız, bilgisayar programlamadaki anlamıyla değil. Firmalar üretimlerini planlarken, imkanları ölçüsünde en yüksek geliri elde etmek veya masrafları olabildiğince azaltmak için doğrusal programlama yönteminden yararlanırlar. Doğrusal programlamanın temel kavramlarını, üretim planlaması ile ilgili bir örneği ele alarak inceleyeceğiz.

Masa ve sandalye üretilen küçük bir atölyede tahta ve tutkal kullanılarak üretim yapılıyor. Atölyenin deposunda 3000 dm^3 tahta ve 20 kg tutkal mevcuttur.

Bir tane masa üretebilmek için 60 dm^3 tahta ve 0,2 kg tutkal; bir tane sandalye için de 10 dm^3 tahta ve 0,1 kg tutkal gerekiyor.

Masanın tanesini 150 liradan, sandalyenin tanesini de 50 liradan satıyorlar. Üretilen masa ve sandalyelerin tümünün satılacağını kabul edelim.

Problemimiz şu:

Sadece eldeki malzemeleri kullanarak geliri maksimum yapmak için kaç tane masa ve kaç tane sandalye üretilmelidir?

Hocam, problemin ifadesi biraz uzun... Kafam karıştı.

O zaman ilk önce problemimizin matematiksel ifadesini yazmaya çalışalım.

Üretilen masa sayısını x ile sandalye sayısını da y ile gösterelim.

Depodaki malzeme miktarını göz önünde bulundurarak geliri maksimum yapacak şekilde bu x ve y sayılarını belirlemeye çalışacağız.

Şimdi x tane masa ve y tane sandalye üretmek için ne kadar malzeme kullanmak gerekiyor onu belirleyelim.

Bir tane masa üretmek için 60 dm^3 tahta gerekiyorsa x tane masa için $60 \cdot x$ dm^3 tahta ve bir tane sandalye üretmek için 10 dm^3 tahta gerekiyorsa y tane sandalye için de $10 \cdot y$ dm^3 tahta kullanılmalıdır. Buna göre kullanılan toplam tahta miktarı

$$60x + 10y \text{ dm}^3$$

ve toplam tutkal miktarı da

$$0{,}2x + 0{,}1y \text{ kg}$$

olur.

Eldeki malzeme miktarı sınırlı olduğundan üreteceğimiz masa ve sandalye sayılarını öyle seçmeliyiz ki kullanılan toplam tahta miktarı 3000 dm^3'ten fazla olmamalıdır. Benzer şekilde kullanılan toplam tutkal miktarı da 20 kg'ı aşmamalıdır.

a, b, c sabit sayılar olmak üzere

$$ax + by \leq c$$

eşitsizliğine doğrusal eşitsizlik denir.

Üretilecek masa ve sandalye sayıları da negatif olamayacağından $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ olmalıdır. Bu söylediklerimizi

Bu ünite boyunca karşılaşılacak doğrusal eşitsizliklerin katsayılarının pozitif olduğunu kabul edeceğiz.

$$\begin{array}{lrcl} \text{(tahta miktarı)} & 60x + 10y & \leq & 3000 \\ \text{(tutkal miktarı)} & 0{,}2x + 0{,}1y & \leq & 20 \\ & x & \geq & 0 \\ & y & \geq & 0 \end{array} \qquad (3.1)$$

biçiminde doğrusal eşitsizlik sistemi şeklinde ifade edebiliriz.

Üretilecek masa ve sandalye sayılarını planlarken x ve y sayılarının bu eşitsizliklerin tümünü sağlaması gerekir.

Evet arkadaşlar, x tane masa ve y tane sandalyenin satışından elde edilen toplam gelir de

$$150x + 50y$$

lira olacaktır. Şimdi amacımız şu: (3.1)'deki eşitsizlikleri sağlayacak şekilde x ve y değerlerini nasıl belirlemeliyiz ki, toplam gelirimiz olan $150x + 50y$ maksimum olsun.

Bu problem matematiksel olarak

$$\begin{array}{rcl} 60x + 10y & \leq & 3000 \\ 0{,}2x + 0{,}1y & \leq & 20 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}$$

kısıtları altında

$$150x + 50y$$

ifadesinin en büyük değerini veren x ve y sayılarını hesaplamaya dönüşmüş olur. Burada $150x + 50y$ fonksiyonu amaç fonksiyonu, x ve y değişkenleri de karar değişkenleri olarak adlandırılır.

Bu şekilde ifade edilen problemlere doğrusal programlama problemleri denir.

Şimdi biraz deneme yapalım. Depodaki malzemeyle sadece masa üretildiğini varsayarsak, kaç tane masa üretebileceğimizi hesaplayalım.

Sandalye üretilmeyecek ise $y = 0$ olmalıdır, değil mi hocam?

Sandalye olmazsa masada mı oturacağız Zeynep?

Mesela dedik Gökçe! Bakalım ne çıkacak. Böyle bir durumda eşitsizliklerde y yerine sıfır yazmalıyız. Şimdi depodaki malzemelerle kaç tane masa üretebileceğimizi bulmak için

$$\begin{aligned} 60 \cdot x + 10 \cdot 0 &\leq 3000 \\ 0{,}2 \cdot x + 0{,}1 \cdot 0 &\leq 20 \end{aligned}$$

eşitsizliklerinden $60x \leq 3000$ ve $0{,}2x \leq 20$ eşitsizliklerini elde ederiz. x sayısı bu iki eşitsizliği de sağlamalıdır:

$$x \leq \frac{3000}{60} = 50, \qquad x \leq \frac{20}{0{,}2} = 100$$

yani $x \leq 50$ olmalıdır. Bu sonuç gösteriyor ki en fazla 50 tane masa üretebiliriz.

Peki, 50 tane masanın satışından gelirimiz ne olur?

$x = 50$ ve $y = 0$ için satıştan

$$150 \cdot 50 + 50 \cdot 0 = 7500$$

lira gelir elde edilir.

Şimdi de depodaki malzemeyle sadece sandalye üretildiğini varsayalım. Bu durumda en fazla kaç tane sandalye üretilebileceğini ve bunların satışından elde edilecek geliri hesaplayalım.

$x = 0$ alınırsa eşitsizlikler:

$$\begin{array}{rcrcr} 60 \cdot 0 & + & 10 \cdot y & \leq & 3000 \\ 0{,}2 \cdot 0 & + & 0{,}1 \cdot y & \leq & 20 \end{array}$$

olur. Yani $10y \leq 3000$ ve $0{,}1y \leq 20$ eşitsizlikleri elde edilir. Buradan

$$\begin{array}{rcccl} y & \leq & \dfrac{3000}{10} & = & 300, \\ y & \leq & \dfrac{20}{0{,}1} & = & 200 \end{array}$$

olur. y sayısının her iki eşitsizliği de sağlaması gerektiğinden $y \leq 200$ olmalıdır. Buna göre hiç masa üretmeden sadece sandalye üretmek istediğimizde en fazla 200 tane sandalye üretebiliriz.

200 sandalyenin satışından elde edilecek gelir de

$$150 \cdot 0 + 50 \cdot 200 = 10000$$

lira olur.

O zaman sadece sandalye üretelim. Çünkü gelirimiz daha büyük çıktı. Masasız sandalye gene de işe yarar ne de olsa!

Engin acele etme istersen. Şimdi depodaki malzemeleri kullanarak 20 tane masa ile 150 tane sandalye üretebilir miyiz bunu bir inceleyelim.

Hocam bu sayılar da nereden çıktı?

Gökçe, hem masa, hem de sandalye üreteceksek, masa sayısının 50'den az ve sandalye sayısının da 200'den az olması gerekir. Bu koşullara uyacak şekilde öylesine iki sayı söyledim.

Şimdi $x = 20$ ve $y = 150$ için gerekli malzeme miktarını hesaplayalım:

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{tahta miktarı:} & 60 \cdot 20 & + & 10 \cdot 150 & = & 2700\ \text{dm}^3 \\ \text{tutkal miktarı:} & 0{,}2 \cdot 20 & + & 0{,}1 \cdot 150 & = & 19\ \text{kg} \end{array}$$

olur.

Ne dersiniz, malzeme miktarı yeterli mi?

Şüphesiz. Depoda 3000 dm^3 tahta ve 20 kg tutkal olduğu söylenmişti.

Demek ki 20 tane masa ve 150 tane sandalye üretebileceğiz. Bu ürünlerin satışından toplam gelirimiz kaç lira olur, bir bakalım:

$$150 \cdot 20 + 50 \cdot 150 = 10500.$$

Haklıymışsınız hocam, acele etmişim.

Hocam, sayılarınız pek de öylesine söylenmiş gibi görünmüyor!

Kimbilir, belki de farkında olmadan eski tecrübelerimiz yansımıştır Gökçe.

Mete Hoca şimdilik 10500 lira gelire ulaştı, ama verilen eşitsizlikleri sağlayan başka x ve y sayıları için gelir 10500 liradan da fazla olabilir mi onu araştırmalıyız.

Hocam, herhalde bu x ve y sayılarını deneyerek bulmayacağız değil mi?

Tabii ki deneyerek bulmayacağız Gökçe,

$$\begin{array}{rcl} 60x+10y & \leq & 3000 \\ 0{,}2x+0{,}1y & \leq & 20 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array} \tag{3.2}$$

eşitsizliklerini ve $150x+50y$ fonksiyonunu kullanarak bu sayıları belirleyeceğiz.

x ve y sayılarının ikisi birden (3.2)'deki eşitsizlikleri sağlamalıdır. Bu nedenle bu sayıları (x,y) ikilisi olarak ele alacağız. Bu ikililerin kümesine problemimizin tanım kümesi denir. Kolaylık açısından ve bundan sonra vereceğimiz örneklere de uygun olsun diye x ve y sayılarının gerçel sayı olduğunu varsayacağız. Önce problemin tanım kümesinin grafiğini çizeceğiz.

$a_1, b_1, c_1, \ldots, a_k, b_k, c_k$ sayıları pozitif olmak üzere

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1x+b_1y & \leq & c_1 \\ a_2x+b_2y & \leq & c_2 \\ & \vdots & \\ a_kx+b_ky & \leq & c_k \\ x\geq 0, & y\geq 0 & \end{array} \right.$$

doğrusal eşitsizliklerine maksimizasyon probleminin kısıtları denir.

Çokgen Bölge

Problemimizin tanım kümesini belirlemek için önce eşitsizlikleri ayrı ayrı inceleyelim.

Birinci eşitsizlikle işe başlayalım.

$$60x+10y \leq 3000$$

eşitsizliğini sağlayan (x,y) ikililerini düzlemde işaretlediğimizde nasıl bir şekil ortaya çıkar?

Eşitsizlik yerine $60x+10y=3000$ eşitliğini sormuş olsaydınız cevap kolaydı. Bu şekilde verilen denklem bir doğru denklemiydi. (x,y) noktasının bu eşitliği sağlaması demek, (x,y) noktasının bu doğru üzerinde olması demekti. Bir doğrunun grafiğini çizebilmek için, bu doğru üzerinde bulunan iki noktayı belirlememiz yeterlidir.

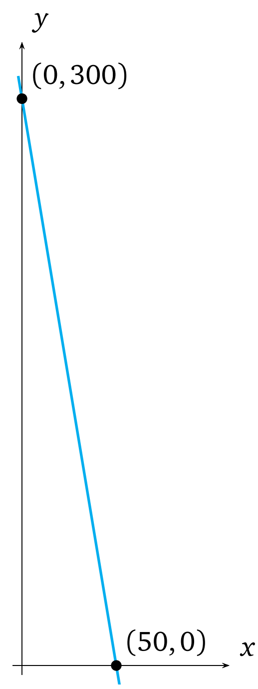
Önce $60x+10y=3000$ denkleminde $x=0$ yazarak

$$0+10y=3000 \;\Rightarrow\; y=300$$

$(0,300)$ noktasını buluruz.

Yine denklemde $y=0$ yazarak

$$60x+0=3000 \;\Rightarrow\; x=\frac{3000}{60}=50$$



Şekil 3.1: $60x+10y=3000$ doğrusunun grafiği.

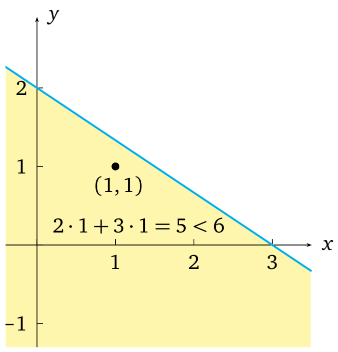
yani $(50,0)$ noktasını belirleriz.

$(0,300)$ ve $(50,0)$ noktalarını birleştiren doğruyu çizerek

$$60x + 10y = 3000$$

eşitliğini sağlayan (x,y) noktalarını düzlemde işaretlemiş oluruz.

Eşitsizliklerdeki x ve y'nin katsayıları ile eşitsizliğin sağında bulunan ve eldeki malzeme miktarlarını gösteren sayıların pozitif olduğuna dikkat ediniz. Şimdi de verilen eşitsizliği sağlayan noktaların kümesini nasıl bulabileceğimizi inceleyelim.



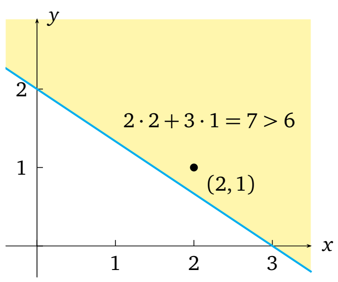
Şekil 3.2: $2x + 3y = 6$ doğrusunun altı.

Herhangi bir $ax + by = c$ doğrusu düzlemi iki parçaya böler. Bu doğrunun bir tarafında $ax + by > c$ eşitsizliğini sağlayan (x,y) noktaları, diğer tarafında da $ax+by < c$ eşitsizliğini sağlayan (x,y) noktaları bulunur.

Herhangi bir (x_0, y_0) noktası için şu üç durum söz konusudur:

$$ax_0 + by_0 < c, \quad ax_0 + by_0 > c, \quad ax_0 + by_0 = c.$$

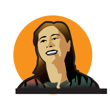
Birinci eşitsizlik sağlanıyorsa (x_0, y_0) noktasının doğrunun altında, ikinci eşitsizlik sağlanıyorsa (x_0, y_0) noktasının doğrunun üstünde, eşitlik durumunda ise (x_0, y_0) noktasının doğrunun üzerinde olduğunu ifade ediyoruz.



Şekil 3.3: $2x + 3y = 6$ doğrusunun üstü.

Doğrunun grafiğini çizdikten sonra eşitsizliği sağlayan noktaları belirlemek için yapılacak en kolay iş $(0,0)$ noktasına bakmaktır. Eğer $(0,0)$ noktası verilen eşitsizliği sağlıyorsa, $(0,0)$ noktasının bulunduğu taraftaki tüm noktalar da bu eşitsizliği sağlar ve aradığımız kümeyi bulmuş oluruz. Eğer $(0,0)$ noktası verilen eşitsizliği sağlamıyorsa, o zaman aradığımız küme doğrunun diğer tarafıdır.

Şimdi problemimize dönersek, $60x + 10y \leq 3000$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulun bakalım.

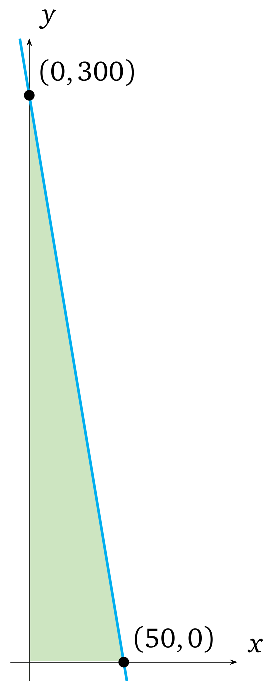


$(0,0)$ noktası

$$60 \cdot 0 + 10 \cdot 0 = 0 < 3000$$

eşitsizliğini sağlıyor, o zaman $(0,0)$ noktasının olduğu taraftaki tüm noktalar da bu eşitsizliği sağlar. Ama tabii bize $60x+10y \leq 3000$ eşitsizliği verildiği için doğru üzerinde bulunan noktaları da kümeye katmamız gerekir.

Aferin Zeynep. Problemimizde x ve y sayıları ürün miktarını belirttiği için negatif olmayan sayılardır. Bu nedenle eşitsizliği sağlayan birinci bölgedeki (x, y) noktalarının kümesi Şekil 3.4'deki üçgen bölge olur.



Şekil 3.4: $60x + 10y \leq 3000$ eşitsizliğini sağlayan birinci bölgedeki noktalar.

Şimdi de $0{,}2x + 0{,}1y \leq 20$ eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesini bulalım.

Bunu da ben bulayım hocam. Önce

$$0{,}2x + 0{,}1y = 20$$

doğrusunu çizelim. x ekseni ve y eksenini kestiği noktaları bulalım:

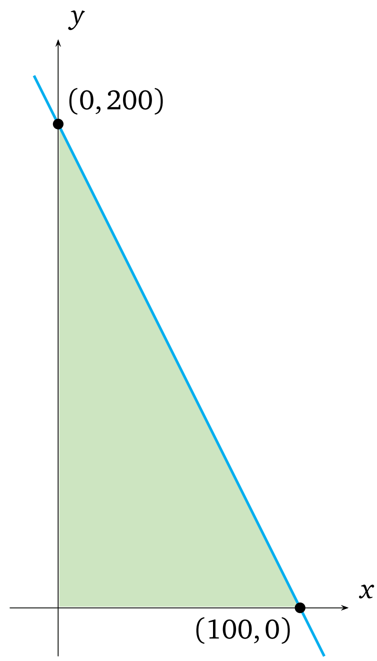
$$\begin{aligned} x = 0 \text{ için} \quad &\Rightarrow \quad 0{,}1y = 20 \quad \Rightarrow \quad y = 200, \\ y = 0 \text{ için} \quad &\Rightarrow \quad 0{,}2x = 20 \quad \Rightarrow \quad x = 100. \end{aligned}$$

Doğru denklemini sağlayan iki nokta $(100, 0)$ ve $(0, 200)$ olur.

$(0, 0)$ noktası için

$$0{,}2x + 0{,}1y = 0{,}2 \cdot 0 + 0{,}1 \cdot 0 = 0 < 20$$

olduğundan $0{,}2x + 0{,}1y \leq 20$ eşitsizliğini sağlayan (x, y) noktalarının kümesi Şekil 3.5'deki gibidir.



Şekil 3.5: $0{,}2x + 0{,}1y \leq 20$ eşitsizliğini sağlayan birinci bölgedeki noktalar.

Artık

$$\begin{aligned} 60x + 10y &\leq 3000 \\ 0{,}2x + 0{,}1y &\leq 20 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

eşitsizliklerini aynı anda sağlayan (x, y) noktalarının kümesini belirlemeliyiz. $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ olduğundan bu küme $xy-$ düzleminde birinci bölgede yer alır.

$60x + 10y \leq 3000$, $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ koşullarını sağlayan noktaların kümesini S_1 ile gösterelim:

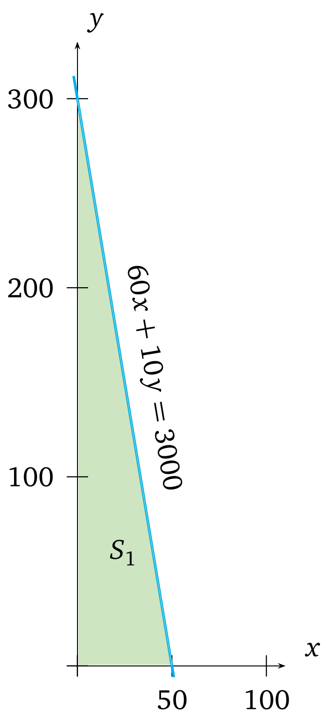
$$S_1 = \{(x, y) \,|\, 60x + 10y \leq 3000,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

$0{,}2x + 0{,}1y \leq 20$, $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ koşullarını sağlayan noktaların kümesini de

$$S_2 = \{(x, y) \,|\, 0{,}2x + 0{,}1y \leq 20,\ x \geq 0,\ y \geq 0\},$$

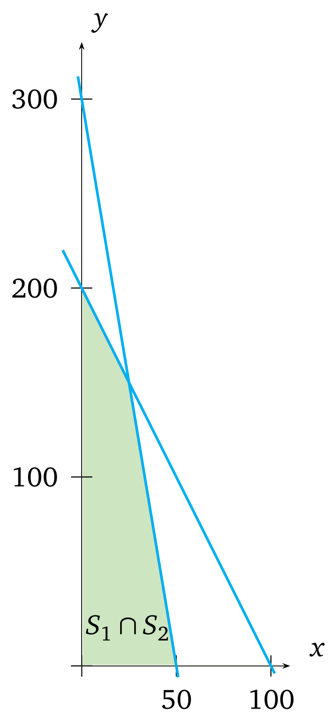
şeklinde ifade edelim.

Biz (3.3) eşitsizliklerinin hepsini birden sağlayan noktaları arıyoruz. Bu noktalar $S_1 \cap S_2$ arakesit kümesini oluşturur.

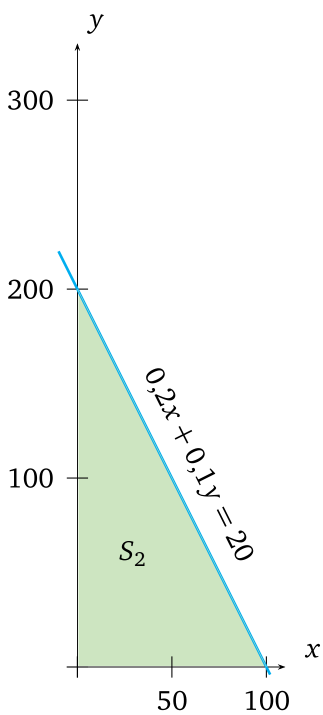


Şekil 3.6: $60x + 10y \leq 3000$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

O zaman bu iki grafiği üst üste çizerek $S_1 \cap S_2$ arakesit kümesini bulabiliriz:



Şekil 3.8: Problemin tanım kümesi.



Şekil 3.7: $0{,}2x + 0{,}1y \leq 20$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Evet Zeynep, aradığımız kümenin resmi işte bu. $S_1 \cap S_2$ kümesi problemin tanım kümesidir ve bu küme bir çokgen bölgedir.

Masa-sandalye yapalım derken nerelere geldik böyle hocam.

Evet Engin, masa-sandalye üretimi probleminin matematiksel modeli bizi buralara getirdi.

Şimdi de elde ettiğimiz çokgen bölgenin köşe noktalarını belirleyelim. Bu bölgenin üç köşesini biliyoruz: $(0,0)$, $(50,0)$ ve $(0,200)$. Dördüncü köşeyi, yani $60x+10y=3000$ ve $0{,}2x+0{,}1y=20$ doğrularının kesiştikleri noktayı bulalım.

Her iki doğru denklemini de sağlayan noktayı bulmak için

$$\begin{aligned} 60x+10y &= 3000 \\ 0{,}2x+0{,}1y &= 20 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sistemini çözmeliyiz.

Bunun için ikinci denklemi 100 ile çarpalım:

$$\begin{aligned} 60x+10y &= 3000 \\ 20x+10y &= 2000 \end{aligned}$$

İkinci denklemi birinci denklemden taraf tarafa çıkartarak

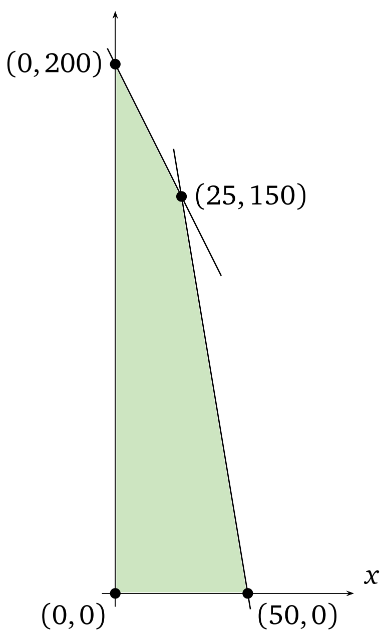
$$40x = 1000 \;\Rightarrow\; x = 25$$

buluruz. $x=25$ değerini $60x+10y=3000$ denkleminde yerine yazdığımızda

$$60\cdot 25+10y=3000 \;\Rightarrow 10y=3000-1500 \;\Rightarrow y=150$$

elde ederiz. Dolayısıyla bu iki doğrunun kesişim noktası $(25,150)$'dir.

Böylece problemin tanım kümesini köşeleriyle birlikte belirlemiş olduk:

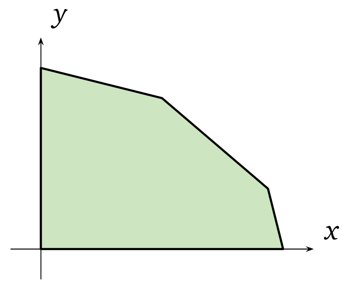


Şekil 3.10: Problemin tanım kümesi.

$a_1, b_1, c_1, \ldots, a_k, b_k, c_k$ pozitif sabit sayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y &\le c_1 \\ a_2x+b_2y &\le c_2 \\ &\vdots \\ a_kx+b_ky &\le c_k \\ x\ge 0,\ y\ge 0 & \end{aligned}$$

eşitsizliklerini sağlayan tüm (x,y) noktalarının kümesine düzlemde bir çokgen veya çokgen bölge denir.



Şekil 3.9: Çokgen bölge.

Grafik Yöntemle Çözüm

$a_1, b_1, c_1, \ldots, a_k, b_k, c_k$ pozitif sabit sayılar olmak üzere

$$\begin{cases} a_1x + b_1y & \leq & c_1 \\ a_2x + b_2y & \leq & c_2 \\ & \vdots & \\ a_kx + b_ky & \leq & c_k \\ x \geq 0, \ y \geq 0 & & \end{cases}$$

kısıtları altında

$$f(x, y) = ax + by$$

doğrusal amaç fonksiyonunun değerini en büyük yapan noktayı belirleme problemine bir doğrusal programlama problemi denir.

Köşe noktalarını neden bulduk? Ne işimize yarayacak?

Bu köşe noktaları problemimizin çözümü için çok önemli. Biraz sonra bu köşe noktalarından çözüme ulaşacağız. Problemimizi bir defa daha tekrarlayalım. Depodaki malzeme miktarı ile ilgili kısıtlar vardı. Amacımız bu kısıtlar altında geliri maksimum yapan masa ve sandalye sayısını belirlemekti. Şekil 3.11'de üretilebilecek masa ve sandalye sayılarının kümesi görülüyor. Şimdi sıra bu kümede geliri maksimum yapan (x, y) ikilisini belirlemeye geldi.

x tane masa ve y tane sandalye ürettiğimizde bunların satışından elde ettiğimiz gelir

$$150x + 50y$$

lira şeklindeydi.

$f(x, y) = ax + by$ doğrusal fonksiyonu çokgen bölge üzerinde en büyük değerini çokgenin bir köşe noktasında alır.

Problemimizin tanım kümesi üzerinde $150x+50y$ amaç fonksiyonunun en büyük değerini araştırıyoruz.

Elde ettiğimiz çokgen bölge üzerinde

$$150x + 50y$$

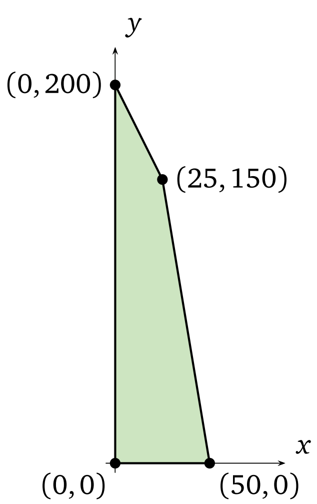
doğrusal amaç fonksiyonu en büyük değerini çokgenin bir köşe noktasında alır.

Şimdi $150x + 50y$ amaç fonksiyonunun tanım kümesinin köşe noktalarındaki değerlerini hesaplayalım:

$(0, 0)$ noktasındaki değer $150 \cdot 0 + 50 \cdot 0 = 0$,
$(50, 0)$ noktasındaki değer $150 \cdot 50 + 50 \cdot 0 = 7500$,
$(25, 150)$ noktasındaki değer $150 \cdot 25 + 50 \cdot 150 = 11250$,
$(0, 200)$ noktasındaki değer $150 \cdot 0 + 50 \cdot 200 = 10000$

olarak elde edilir.

Demek ki $150x + 50y$ amaç fonksiyonu tanım kümesi üzerindeki en büyük değerini $(25, 150)$ noktasında alıyor. Bu sonuca göre depodaki malzemeleri kullanarak en fazla 11250 lira gelir elde edilir. Bunun için 25 tane masa, 150 tane sandalye üretilmelidir.

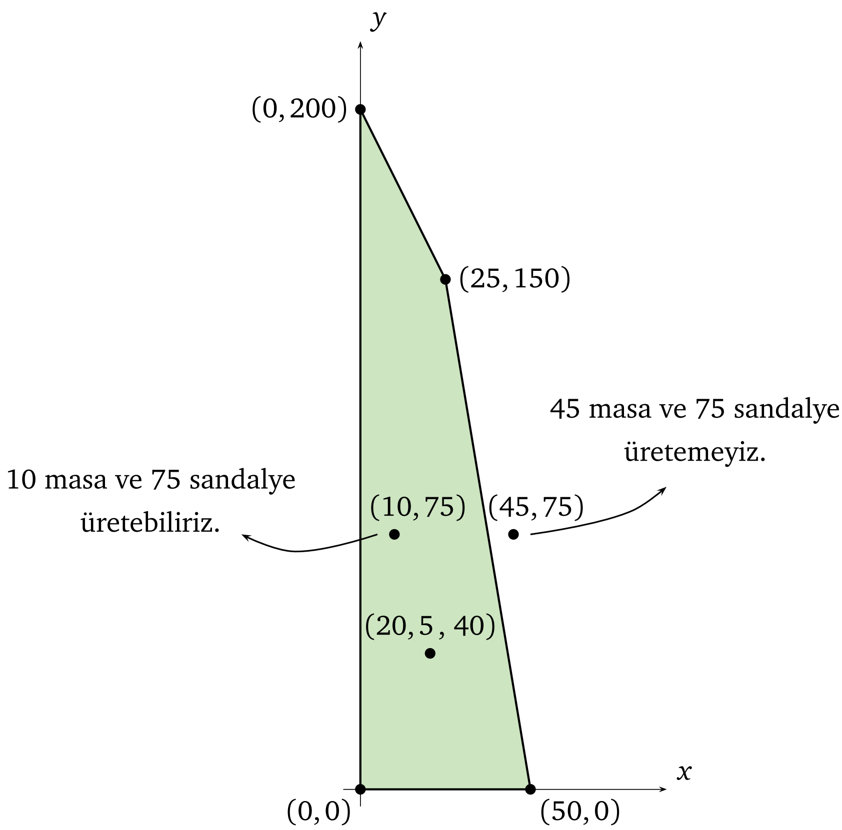


Şekil 3.11: Problemin tanım kümesi.

Atölyedekiler bu işe epey sevinecek.

Evet Engin, haklısın. Şimdi bu çokgen bölgenin problemimizle ilişkisini biraz açıklayalım.

(x, y) ikilisi çokgen bölgede ise, x tane masa ve y tane sandalye yapacak malzememiz var demektir. (x, y) ikilisi çokgen bölgeye ait değilse, demek ki eşitsizliklerimizden en az bir tanesi sağlanmaz. Yani bu noktaya karşılık gelen x tane masa ve y tane sandalye üretemeyiz.



Şekil 3.12: Problemin tanım kümesi.

Örneğin $(10, 75)$ noktası çokgen bölgededir, on tane masa ve yetmiş beş tane sandalye yapacak malzememiz var. Ancak $(45, 75)$ noktası için

$$60x + 10y = 60 \cdot 45 + 10 \cdot 75 = 3450 > 3000$$

olduğundan $60x + 10y \leq 3000$ eşitsizliği sağlanmıyor, yani bu nokta tanım kümesinde değil. Demek ki 45 masa ve 75 sandalye üretemeyiz.

Peki arkadaşlar $(20{,}5\,,\, 40)$ noktasının da kümeye ait olduğunu gösterebilirsiniz değil mi?

Kırk tane sandalye tamam da, yirmi buçuk masa nasıl olacak? 

Kiloyla veya litreyle ilgili bir problem çözüyor olsaydık bu sorun olmayacaktı. Örneğimizde $x = 25$ ve $y = 150$ tam sayı olarak çıktığı için problemimizin cevabı bu sayılardır. Ancak x ve y'den en az bir tanesi tam sayı olarak çıkmasaydı o zaman sıkıntılı bir durum ortaya çıkmış olurdu.

Örneğin, çözümde $x = 25,6$ çıksaydı bu sayıyı 25'e yuvarlayamaz mıyız? Bu çözüm olmaz mı? 

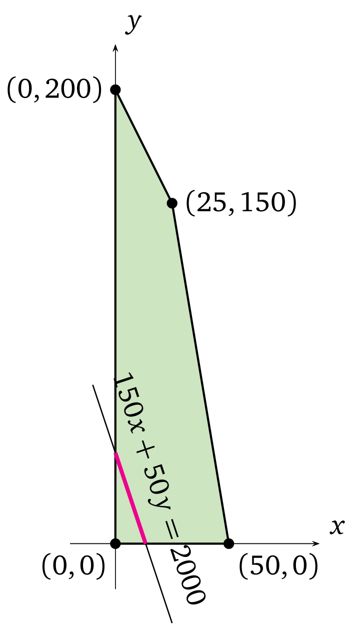
Çözüm olur veya olmaz diyemeyiz. x ve y için verilen eşitsizliklerin yanı sıra tam sayı olma koşulu da verilmiş olsaydı bu tür problemleri tam sayı programlama problemi olarak ele almamız gerekirdi. Bu konuya bu derste girmeyeceğiz.

Dediğim gibi, örneğimizde x ve y tam sayı olarak elde edildiğinden herhangi bir sıkıntı yok.

Şimdi $150x + 50y$ amaç fonksiyonunun maksimum değerini neden $(25, 150)$ noktalasında aldığına bir bakalım.

x ve y verildiğinde $150x + 50y$ değerini hesaplamak kolay. $z = f(x, y) = 150x + 50y$ diyelim ve z'ye değerler vererek x ve y sayılarını tanım kümesi içinde kalacak şekilde nasıl bulacağız, buna değinelim.

Örneğin $z = 2000$ olsun. Bunun için $150x + 50y = 2000$ denkleminin belirlediğimiz çokgen kümede kalan çözümlerini araştıracağız.



Şekil 3.13: Problemin tanım kümesinin $150x + 50y = 2000$ doğrusu ile kestirilmesi.

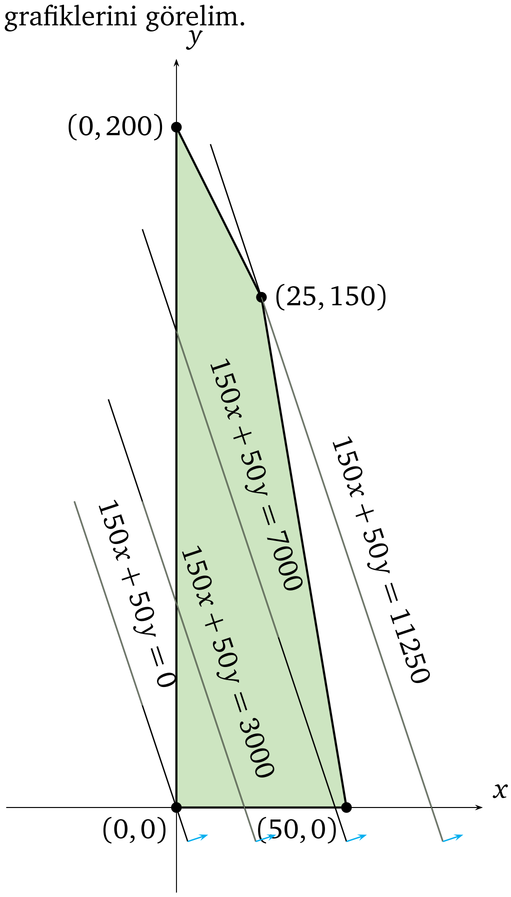
Bu çözüm $150x + 50y = 2000$ doğrusunun grafiği ile problemin tanım kümesinin kesiştiği (x, y) noktalarının kümesidir. Bu noktaların tümünde amaç fonksiyonu 2000 değerini alır.

Tanım bölgesi ile $150x+50y = 2000$ doğrusunun arakesitinde kalan bu noktalara birkaç örnek olarak $(0, 40)$, $(6, 22)$, $\left(\frac{23}{2}, \frac{11}{2}\right)$ ve $\left(\frac{40}{3}, 0\right)$ noktalarını verebiliriz. Bu noktalarda $150x + 50y$ ifadesinin değerinin 2000 olduğunu gösterebilirsiniz. Örneğin, $(6, 22)$ noktası için $150 \cdot 6 + 50 \cdot 22 = 900 + 1100 = 2000$ olur.

z'ye başka değerler vererek $z = 150x + 50y$ doğrusunun grafiğini çizelim ve çokgen bölge ile ilişkisine bakalım. Örneğin,

$$
\begin{array}{ll}
z = 0 \text{ için} & 150x + 50y = 0, \\
z = 3000 \text{ için} & 150x + 50y = 3000, \\
z = 7000 \text{ için} & 150x + 50y = 7000, \\
z = 11250 \text{ için} & 150x + 50y = 11250,
\end{array}
$$

doğrularının grafiklerini görelim.



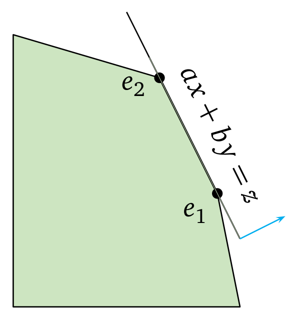
Şekil 3.14: $150x + 50y = z$ doğruları.

z'ye farklı değerler vererek $ax + by = z$ doğrusunun hareketine bakarak

$$f(x,y) = ax + by$$

amaç fonksiyonunun maksimum değerini bulabiliriz. z'ye sıfırdan başlayıp artan değerler verdiğimizde doğrunun çokgen bölgeyle son temas ettiği nokta amaç fonksiyonunun en büyük değerini verir.

z değeri arttırıldıkça, $150x + 50y = z$ doğrusu $150x + 50y = 0$ doğrusuna paralel kalarak hareket ediyor ve çokgen bölgeyi en son $f(x,y) = 150x + 50y$ amaç fonksiyonunun maksimum değerini aldığı $(25,150)$ noktasında kesiyor.



Şekil 3.15: e_1, e_2 köşeleri ile bu köşeleri birleştiren tüm noktalar maksimum değeri veren noktalardır.

Hocam, doğrunun kümeye son teması kümenin bir kenarı boyunca olursa bu durumda hangi noktayı en büyük değeri veren nokta olarak almalıyız?

Doğrunun tanım kümesine son teması kümenin kenarı boyunca oluyorsa, bu kenara ait tüm noktalarda $f(x,y)$ aynı z değerini alır, dolayısıyla bu kenar üzerindeki herhangi bir nokta çözüm olarak alınabilir.

Eşitsizliklerin sayısı üçten fazla olursa yine de grafik yöntemiyle problemi çözebilir miyiz?

Tabii ki. Eşitsizliklerin artması çokgen bölgenin köşe noktalarına ilave yeni köşe noktaları getirebilir. Köşe noktalarını belirleyip, problemi yine çözebilirsiniz.

İki değil de üç veya daha fazla ürün üretiliyor olsaydı bu durumda problemi yine bu şekilde çözebilir miydik?

Şüphesiz. İki değil de üç tane karar değişkeni olsun. Bu durumda problemin tanım kümesi üç boyutlu uzayda bulunur. Problemin çözümünü bulmak için tanım kümesinin köşe noktalarını belirlemek gerekir. Değişken sayısı arttığında bu işlem zorlaşır. Bu nedenle ikiden fazla karar değişkeninin olduğu doğrusal programlama problemlerinde grafik yöntem yerine başka yöntemler kullanılır.

Hocam bir örnek daha görebilir miydik?

Bir imalathanede P_1 ve P_2 gibi iki ürün üretildiğini varsayalım. Bu ürünlerin üretiminde de m_1 ve m_2 gibi iki hammadde kullanılsın.

Bir birim P_1 ve bir birim P_2 üretmek için gerekli hammadde miktarını şu tablo ile verelim:

	P_1 için gereken miktar	P_2 için gereken miktar	Mevcut hammadde miktarı
m_1	8	5	400
m_2	2	5	200

P_1'in 1 birimi 50 liradan, P_2'nin 1 birimi 40 liradan satılsın. Eldeki hammaddeleri kullanarak geliri maksimum yapmak için hangi üründen ne kadar üretilmesi gerektiğini bulalım.

Üretilen P_1 miktarını x ile, P_2 miktarını da y ile gösterelim. P_1'den x birim, P_2'den y birim üretmek için m_1 ve m_2 hammaddelerinden ne kadar kullanılması gerektiğini hesaplayalım.

$$\begin{array}{lcll} m_1 \text{ hammaddesinden} & : & 8x+5y & \text{birim} \\ m_2 \text{ hammaddesinden} & : & 2x+5y & \text{birim} \end{array}$$

kullanmak gerekir.

Tabloda verilen mevcut hammadde miktarlarına göre eşitsizlikleri

$$\begin{aligned} 8x+5y &\leq 400 \\ 2x+5y &\leq 200 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

biçiminde ifade edebiliriz.

Bu doğrusal programlama probleminin amaç fonksiyonu

$$f(x,y) = 50x + 40y$$

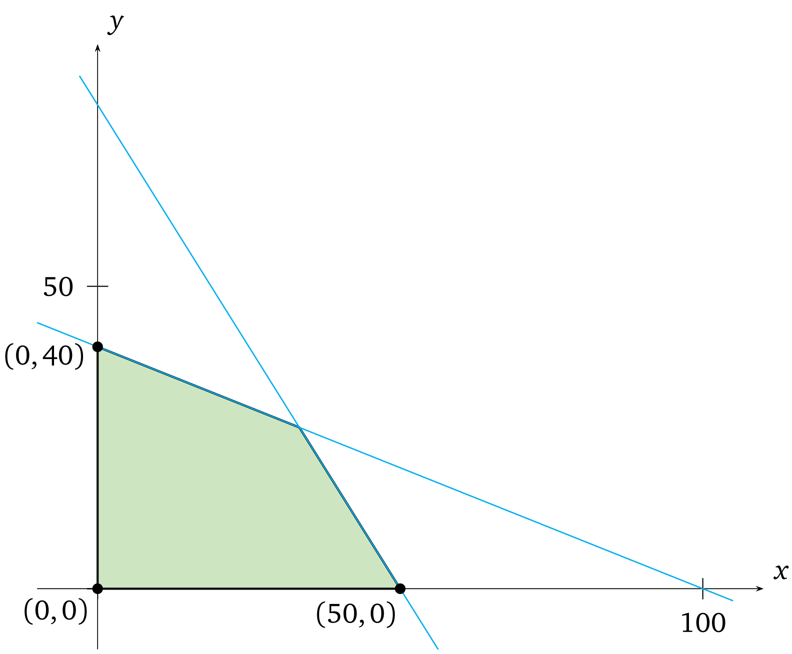
olur.

Tanım kümesini bulup köşe noktalarını belirleyip, amaç fonksiyonunda yerine yazacağız, değil mi hocam?

Evet Engin. Şimdi problemin tanım kümesini bulalım. İlk önce $8x+5y=400$ ve $2x+5y=200$ doğrularının grafiklerini çizeceğiz. Sonra da $8x+5y \leq 400$ ve $2x+5y \leq 200$ eşitsizliklerini sağlayan birinci bölgedeki (x,y) noktalarını belirleyeceğiz.

$8x+5y=400$ denkleminde $x=0$ için $y=80$, $y=0$ için $x=50$ olduğundan $8x+5y=400$ doğrusu x eksenini $(50,0)$ noktasında, y eksenini $(0,80)$ noktasında keser.

Benzer şekilde $2x+5y=200$ doğrusu eksenleri $(100,0)$ ile $(0,40)$ noktalarında keser. Buna göre çözüm kümesinin grafiği Şekil 3.16'daki



Şekil 3.16: Problemin tanım kümesi.

gibi olur.

$8x + 5y = 400$ ile $2x + 5y = 200$ doğrularının kesişim noktasını bulmak için

$$\begin{aligned} 8x + 5y &= 400 \\ 2x + 5y &= 200 \end{aligned}$$

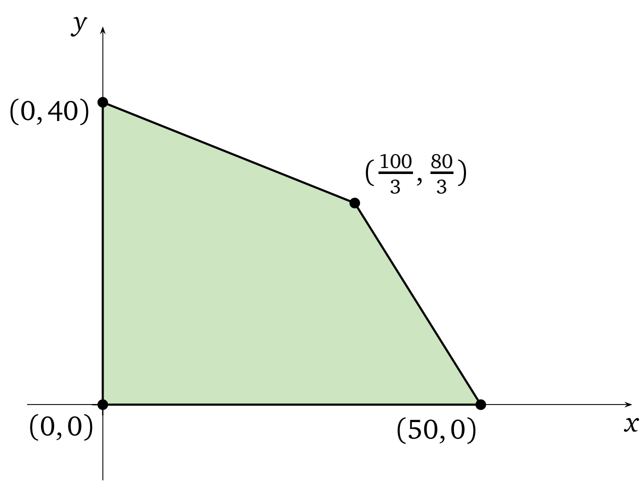
denklem sistemini çözeceğiz. İkinci denklemi birinci denklemden taraf tarafa çıkartarak

$$\begin{array}{rrcl} & 8x + 5y & = & 400 \\ - & 2x + 5y & = & 200 \\ \hline & 6x & = & 200 \end{array}$$

eşitliğinden $x = \dfrac{100}{3}$ buluruz. Bu x değerini denklemde yerine yazdığımızda,

$$8x + 5y = 400 \;\Rightarrow\; 8 \cdot \frac{100}{3} + 5y = 400, \;\Rightarrow\; 5y = 400 - \frac{800}{3} = \frac{400}{3},$$

$y = \dfrac{80}{3}$ olur. Yani kesişim noktası $\left(\dfrac{100}{3}, \dfrac{80}{3}\right)$ olarak bulunur.



Şekil 3.17: Problemin tanım kümesi ve köşe noktaları.

$f(x, y) = 50x + 40y$ amaç fonksiyonunun köşe noktalarındaki değerlerini hesaplayalım:

$(0, 0)$ noktasında $f(0, 0) = 0$,

$(0, 40)$ noktasında $f(0, 40) = 50 \cdot 0 + 40 \cdot 40 = 1600$,

$\left(\frac{100}{3}, \frac{80}{3}\right)$ noktasında $f\left(\frac{100}{3}, \frac{80}{3}\right) = 50 \cdot \frac{100}{3} + 40 \cdot \frac{80}{3} \approx 2733,$

$(50, 0)$ noktasında $f(50, 0) = 50 \cdot 50 + 40 \cdot 0 = 2500$ olur.

Buna göre amaç fonksiyonu maksimum değerini $\left(\frac{100}{3}, \frac{80}{3}\right)$ noktasında alır.

Gelirin maksimum olması için P_1'den $\frac{100}{3}$ birim, P_2'den de $\frac{80}{3}$ birim üretmek gerekir.

Verdiğimiz örneklerde amaç fonksiyonunu maksimize etmeye çalıştık. Bu yöntem amaç fonksiyonunun minimum değerinin araştırıldığı problemlerde de kullanılabilir.

Arkadaşlar, sonuç olarak doğrusal programlama yardımıyla yaptığımız modelleme bize sonsuz seçenekli bir durumda sonlu tane noktanın kontrol edilmesiyle çözüme nasıl ulaştığımızı da göstermiş oldu.

Özet

Bu ünitede iki değişkenli doğrusal programlama problemi ve bu problemin grafik yöntemle çözümü ele alındı. Doğrusal programlama problemlerini tanıtmak ve çözüm yöntemleri ile ilgili bir fikir vermek amacıyla tanım kümesi birinci bölgede bir çokgen bölge olan pozitif katsayılı amaç fonksiyonlarının maksimizasyonu problemleri incelendi. Bir örnek üzerinde problemin matematiksel modellemesi ayrıntılı olarak verildi. Doğrusal programlamanın temel kavram ve sonuçları ifade edildi. Problemin çözümünü bulmak için, çokgen bölgenin köşe noktaları belirlenir ve amaç fonksiyonunun bu noktalardaki değerleri hesaplanır. Elde edilen fonksiyon değerlerlerinin maksimumu, doğrusal amaç fonksiyonunun çokgen bölge üzerindeki en büyük değeridir. Amaç fonksiyonunun çokgen bölge üzerindeki minimizasyonu problemi de benzer şekilde çözülebilir.

Okuma Parçası

Doğrusal Düşünme

Yönetim kararlarının çoğu, sonunda bir şeyi optimal yapmak için kaynakların nasıl ayrılacağı konusundaki kararlara indirgenir. Örneğin paranın, yatırım araçları arasında en büyük getiriyi verecek biçimde paylaşım biçimi ya da televizyon veya otomobil gibi ürünlerin üretim aşamasında işgücü ve hammadde maliyetini minimum (ve bu yolla kârı da maksimum) yapacak şekilde tahsisi. Bu tür problemler çoğu kez doğrusal programlama (DP) denilen bir yöntemle çözülebilecek şekilde formüle edilebilirler. Ancak, bu yöntemi genel çizgileriyle açıklamadan önce bir fikir edinmek için çok basit bir örnek verelim.

Köpek maması üreten Kuçu-Ma firması iki tip mama yapmaktadır: Hav-Hav ve Vuf-Vuf. Her iki marka da kuzu, sığır ve balık kökenli karışımlardan oluşuyor ve aralarındaki oran farklarıyla birbirinden ayrılıyorlar. Tabloda, bir paket Hav-Hav ile bir paket Vuf-Vuf maması için bu karışımlardan ne kadar gerektiğini ve o sırada her birinin firma deposunda var olan miktarlarını gösteriyor.

Şirketin her paket Hav-Hav için 12$, Vuf-Vuf için de 8$ kâr ettiğini varsayalım. Kuçu-Ma firmasının karşı karşıya olduğu problem, toplam kârın maksimum olması için her markadan kaç paket üretileceğine karar vermektir.

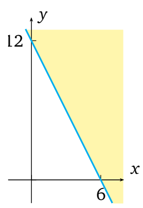
Bileşen	Mevcut Toplam Miktar	Bir Paket Hav-Hav İçindeki Miktarı	Bir Paket Vuf-Vuf İçindeki Miktarı
Kuzu	1400 kg	4 kg	4 kg
Balık	1800 kg	6 kg	3 kg
Sığır	1800 kg	2 kg	6 kg

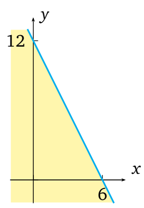
Tablo: Kuçu-Ma köpek mamasının bir paketi için gerekli malzeme.

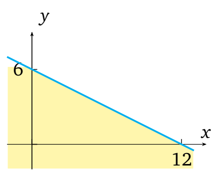
Kaynak: John L. Casti, (Çeviri: Nermin Arık) Beş Altın Kural: 20. Yüzyıl Matematiğinin Önemli Teorileri (s.168-169), Sabancı Üniversitesi, 2000.

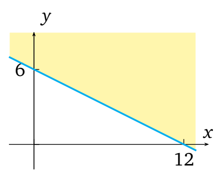
Çıkarın Kağıtları

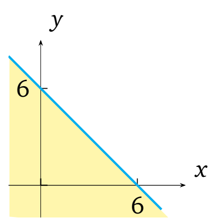
1. $2x + y \leq 12$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

2. Aşağıdaki noktalardan hangisi $3x + 2y \leq 23$ eşitsizliğini sağlar?

A) $(6,3)$ **B)** $(4,6)$ **C)** $(4,5)$

D) $(5,5)$ **E)** $(3,8)$

3. Aşağıdaki noktalardan hangisi

$$\begin{gathered} 2x + 5y \leq 16 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{gathered}$$

eşitsizliklerinin hepsini birden sağlar?

A) $(3,3)$ **B)** $(4,2)$ **C)** $(-2,4)$

D) $(2,3)$ **E)** $(3,2)$

4. $(4,-3)$, $(1,1)$ ve $(3,1)$ noktalarının $3x + 2y \leq 6$ eşitsizliğini sağlayıp sağlamadığını araştırınız.

5. Aşağıdaki noktalardan hangisi

$$\begin{cases} 7x + 3y \geq 28 \\ 2x + 5y \geq 17 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

eşitsizliklerinin hepsini birden sağlar?

A) $(1,5)$ **B)** $(-3,2)$ **C)** $(2,4)$

D) $(4,2)$ **E)** $(5,1)$

6. $4x + 3y \leq 12$ eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesini bulunuz.

7.

$$\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

eşitsizliklerini sağlayan noktaların grafiğini çiziniz.

8.

$$\begin{cases} 3x + y \geq 6 \\ x + y \geq 4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

eşitsizliklerini sağlayan noktaların grafiğini çiziniz.

9. $f(x,y) = 4x + 3y$ amaç fonksiyonunun 7. sorudaki eşitsizliklerle verilen küme üzerindeki maksimum değerini bulunuz.

10. Okuma parçasında verilen doğrusal programlama problemini çözünüz.

Çözümler

1. $2x+y=12$ doğrusunun eksenleri kestiği noktalar:
$x=0$ için $y=12$ yani $(0,12)$ noktası ve
$y=0$ için $x=6$ yani $(6,0)$ noktası.
$(0,0)$ noktası için $2\cdot 0+0=0<12$, yani $2x+y\leq 12$ eşitsizliği sağlanır. $(0,0)$ noktasının bulunduğu taraftaki tüm noktalar $2x+y\leq 12$ eşitsizliğini sağlarlar. (Cevap B)

2. $(4,5)$ noktası için

$$3\cdot 4+2\cdot 5=22<23$$

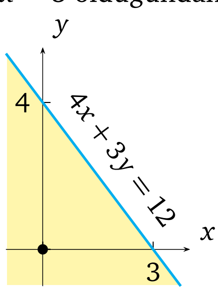
olduğundan eşitsizlik sağlanır.
Diğer noktaların eşitsizliği sağlamadığını kontrol ediniz. (Cevap C)

3. $(3,2)$ noktası tüm eşitsizlikleri sağlar: $2\cdot 3+5\cdot 2=16\leq 16$, $3>0$ ve $2>0$.
(Cevap E)

4. $(4,-3)$ noktası için eşitsizlik sağlanır:
$3x+2y=3\cdot 4+2\cdot(-3)=6\leq 6$.
$(1,1)$ noktası için eşitsizlik sağlanır:
$3x+2y=3\cdot 1+2\cdot 1=5<6$.
$(3,1)$ noktası için eşitsizlik sağlanmaz:
$3x+2y=3\cdot 3+2\cdot 1=11>6$.

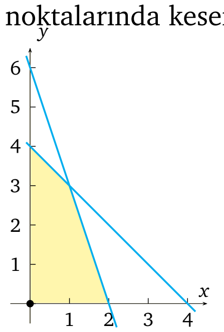
5. $(4,2)$ noktası tüm eşitsizlikleri sağlar: $7\cdot 4+3\cdot 2=34>28$, $2\cdot 4+5\cdot 2=18>17$, $4>0$ ve $2>0$. (Cevap D)

6. $4x+3y=12$ doğrusunun eksenleri kestiği noktalar: $x=0$ için $y=4$, $y=0$ için $x=3$ olduğundan $(0,4)$ ile $(3,0)$ noktalarıdır.



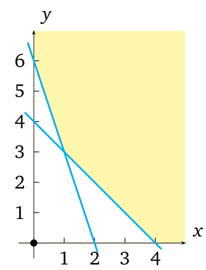
$(0,0)$ noktası için
$4\cdot 0+3\cdot 0=0<12$
olduğundan eşitsizliği sağlayan noktalar taralı bölgededir.

7. $3x+y=6$: eksenleri $(2,0)$, $(0,6)$,
$x+y=4$: eksenleri $(4,0)$, $(0,4)$
noktalarında keserler.



$(0,0)$ noktası için:
$3\cdot 0+0=0<6$ ve
$0+0=0<4$
olduğundan eşitsizlikleri sağlayan noktalar renkli bölgededir.

8.

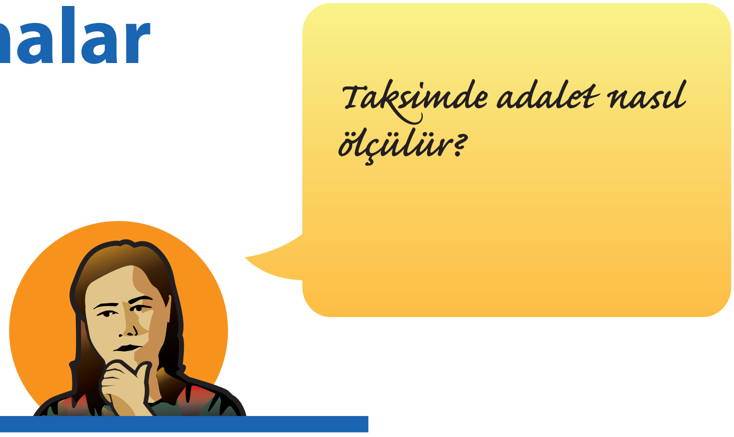


$(0,0)$ noktası verilen ilk iki eşitsizliğin her ikisini de sağlamadığından, aranan bölge şekildeki gibidir.

9. $\begin{aligned} 3x+y &= 6 \\ x+y &= 4 \end{aligned}$ denklem sistemi çözüldüğünde $3x+y=6$ ve $x+y=4$ doğrularının $(1,3)$ noktasında kesiştikleri görülür. Çokgen bölgenin köşe noktaları: $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,3)$ ve $(0,4)$ noktalarıdır. Amaç fonksiyonunun bu noktalardaki değeri; $f(0,0)=0$, $f(2,0)=8$, $f(1,3)=13$ ve $f(0,4)=12$ olur. Bu fonksiyon değerlerinin en büyüğü 13 olduğuna göre amaç fonksiyonunun bu çokgen bölge üzerindeki maksimum değeri 13 dür.

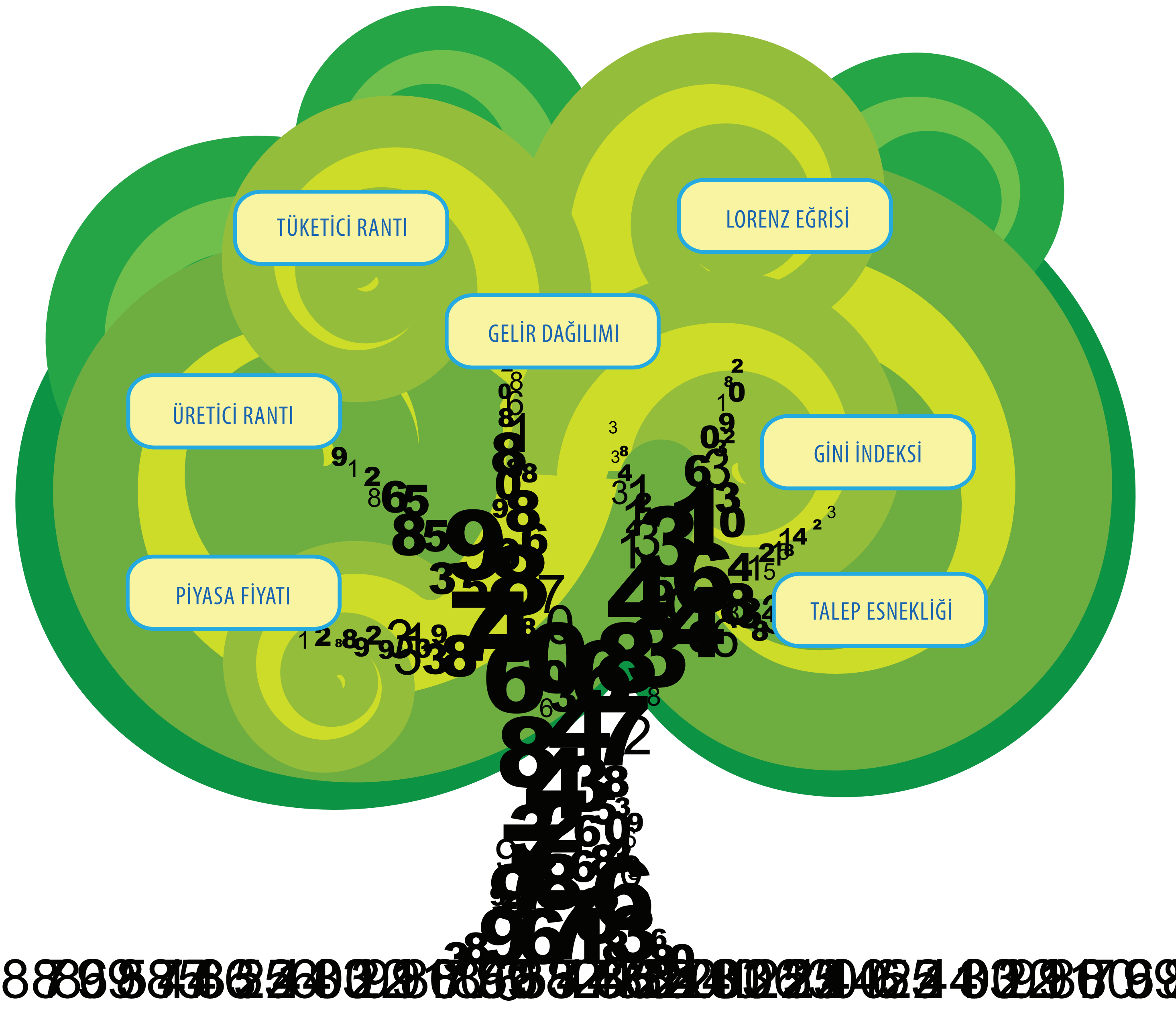
10. Amaç fonksiyonu $f(x,y)=12x+8y$ ve kısıtlar $4x+4y\leq 1400$, $6x+3y\leq 1800$, $2x+6y\leq 1800$, $x\geq 0$, $y\geq 0$ şeklindedir. Tanım kümesinin köşe noktaları: $(0,0)$, $(300,0)$, $(250,100)$, $(75,275)$ ve $(0,300)$ olur. Amaç fonksiyonunun bu köşe noktalarındaki değeri hesaplanırsa en büyük değerini $(250,100)$ noktasında aldığı görülür. Buna göre 250 paket Hav-Hav, 100 paket Vuf-Vuf üretilmelidir.

İktisadi Uygulamalar



MATEMATİK 2

4. ÜNİTE



Tüketici ve Üretici Rantı

Hayrola Engin! Uykusuz görünüyorsun, sabaha kadar ders mi çalıştın yoksa?

Sormayın hocam, elektronik eşyalar satan bir marketin açılışı vardı. Selçuk'la beraber erkenden kalkıp kuyruğa girdik. Kuyruk o kadar uzundu ki kapılar açıldıktan ancak yarım saat sonra içeri girebildik.

Uykusuz kaldığınıza değdi mi bari, Engin?

Tabii ki değdi. 1600 lira vermeye razı olduğum dizüstü bilgisayarı 1200 liraya aldım.

Talep: Belirli bir zaman aralığında piyasada tüketicilerin, satın alma gücüyle desteklenmiş, değişik fiyat düzeyinde satın almaya istekli oldukları mal veya hizmet miktarıdır.

Valla ben güzellik uykumdan feragat edip de gidip beklemezdim açıkçası, sabah gider alırdım.

Herhangi bir mal veya hizmeti belli bir fiyatın üstünde almaya istekli olan tüketiciler eğer o mal veya hizmeti, almaya istekli oldukları fiyatın altında satın alabilirlerse paralarının bir kısmını korumuş olurlar. Korunan para miktarı o tüketiciler için bir ranttır.

Gördüğünüz gibi arkadaşlar, herkesin bir mal veya hizmete verdiği değer farklı olabiliyor. Arkadaşlarınız uykusuz kalmışlar ama 400 lira kazanç elde etmişler. İktisatçılar bu şekilde oluşan kazanca tüketici rantı diyorlar. İktisatçıların ifadesiyle söylemek gerekirse, satın almak istediğimiz bir mal veya hizmeti istekli olduğumuz fiyatın altında alabilirsek bir kazanç sağlamış oluruz. Bu kazanç tüketici rantıdır. Ancak hesaplama yapılırken herhangi bir mal veya hizmet için tek bir tüketicinin rantı yerine, belli bir fiyat düzeyinin üzerinde ödemeye istekli bütün tüketicilerin toplam kazancına karşılık gelen tüketici rantı hesaplanır.

Toplam fayda: Belli bir zaman diliminde, bireyin diğer mal ve hizmetlerden olan tüketimi sabit iken, bir malın çeşitli miktarda tüketilmesi sonucu ulaşılan tatmin düzeyidir.

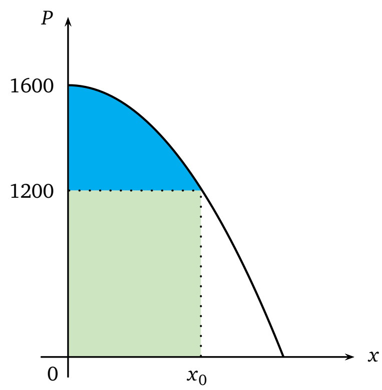
İktisatçılar tüketici rantını şöyle de ifade etmektedirler. Bir mal veya hizmet satın alındığında o malın tüketiminden dolayı bir fayda sağlanır. Eğer bir mal veya hizmet istekli olunan fiyatın altında satın alınmış ise elde edilen toplam faydanın ödeme yapılmayan kısmı tüketici rantıdır.

Rant ekonomisi dedikleri şey bu mu hocam?

Hayır. O başka bir şey. Şimdi isterseniz Engin'in almış olduğu dizüstü bilgisayara 1200 liranın üzerinde ödemeye istekli olup da 1200 liradan satın alan tüketicilerin toplam kazancına karşılık gelen tüketici rantını hesaplamaya çalışalım.

Hocam kimin hangi fiyattan almaya istekli olduğunu bilmiyoruz ki, nasıl hesaplayacağız?

Şimdi, varsayalım ki bu dizüstü bilgisayara ödenmek istenen en yüksek fiyat 1600 lira olsun. p fiyatı, x miktarı göstermek üzere bu dizüstü bilgisayarın talep fonksiyonu da $p = 1600 - x^2$ şeklinde verilsin.



Şekil 4.1: $p = 1600 - x^2$ talep fonksiyonunun grafiği.

Buna göre 1200 liranın üzerinde ödemeye istekli olup da 1200 liradan alan x_0 tüketicinin bu malın tüketiminden elde ettiği toplam fayda söz konusudur. Bu toplam fayda, $[0, x_0]$ aralığında talep eğrisi altında kalan alanın değeri (mavi renk ve yeşil renk ile gösterilen toplam alan) kadardır. Ancak bu toplam faydanın bir kısmına ödeme yapılmış, bir kısmına ise ödeme yapılmamıştır. Ödeme yapılmadan elde edilen fayda tüketici rantıdır, bu rant grafikte mavi renk ile gösterilen alandır. Buna göre tüketici rantı, talep eğrisi altında kalan alandan yeşil renk ile gösterilen dikdörtgenin alanının çıkarılmasıyla bulunur. O halde 1200 fiyatına karşılık gelen talep miktarı x_0 olduğuna göre tüketici rantı

$$\int_0^{x_0} p\,dx - 1200\,x_0$$

formülü yardımıyla hesaplanabilir.

Hocam, isterseniz tüketici rantını hesaplayabilirim. Talep fonksiyonunda p yerine 1200 yazarsam x_0 değeri

$$\begin{aligned} 1200 &= 1600 - x_0^2 \\ x_0^2 &= 400 \\ x_0 &= 20 \end{aligned}$$

olur. Buna göre

$$\begin{aligned} \int_0^{20} (1600 - x^2)dx - 1200 \cdot 20 &= \int_0^{20} (1600 - x^2)dx - 24000 \\ &= \left(1600x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{20} - 24000 \\ &= 32000 - \frac{20^3}{3} - 24000 \\ &= 8000 - \frac{8000}{3} \\ &= 5333,33 \end{aligned}$$

elde edilir.

Bravo Zeynep. Evet arkadaşlar, buradan diyebiliriz ki bu dizüstü bilgisayarı 1200 liradan satın alan yirmi tüketicinin toplam korudukları para miktarı 5333, 33 liradır.

Arz: Belirli bir zaman aralığında piyasada üreticilerin, değişik fiyat düzeyinde satmaya istekli oldukları mal veya hizmet miktarıdır.

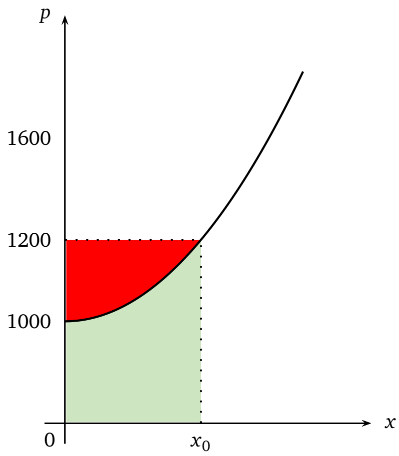
Hocam, tüketiciler herhangi bir alışverişten bu şekilde bir kazanç elde edebiliyorsa doğal olarak satıcıların da bir kazanç elde etmesi gerekmez mi?

Herhangi bir mal veya hizmeti belli bir fiyatın altında satmaya razı olan üreticiler, eğer satmaya razı oldukları fiyatın üstünde o mal veya hizmeti satabilirlerse gelirlerini bir miktar artırmış olurlar. Artırabildikleri para miktarı o üreticiler için bir ranttır.

Çok güzel düşündün Selçuk. Tabii ki üreticilerin bir mal veya hizmeti satmaya istekli oldukları bir minimum fiyat vardır, bu fiyat satıcıların "aşağısı kurtarmaz" dedikleri fiyattır. Eğer üreticiler bir mal veya hizmeti satmaya istekli oldukları fiyatın üzerinde satabilirlerse bir kazanç sağlamış olurlar. Bu kazanca da üretici rantı denir. Diğer bir ifadeyle üretici rantı, üreticinin satmaya hazır olduğu fiyat ile gerçekte sattığı fiyat arasındaki farktır. Burada da tüketici rantında olduğu gibi herhangi bir mal veya hizmet için tek bir üretici rantı hesaplanmaz, bütün üreticilerin toplam kazancına karşılık gelen üretici rantı hesaplanır.

Şimdi bu dizüstü bilgisayarı 1200 liranın altında bir fiyata satmaya istekli olup da 1200 liradan satan üreticilerin toplam kazancına karşılık gelen üretici rantını hesaplamaya çalışalım.

Varsayalım ki bu dizüstü bilgisayarın piyasaya sürülmek istenen en düşük fiyatı 1000 lira olsun. Bu dizüstü bilgisayarın arz fonksiyonu da $p = 0,5x^2 + 1000$ şeklinde verilsin.



Şekil 4.2: $p = 0,5x^2 + 1000$ arz fonksiyonunun grafiği.

Grafiğe bakarsanız fiyat 1000 lira iken piyasaya sürülen mal miktarı sıfırdır. 1200 liranın altında satmaya hazır olup da 1200 liradan satan üreticilerin elde ettiği toplam gelir dikdörtgenin alanı (kırmızı renk ve yeşil renk ile gösterilen toplam alan) kadar olacaktır. Bu toplam gelirde üreticilerin beklediği bir gelir söz konusudur. Üreticilerin beklediği gelir $[0, x_0]$ aralığında arz eğrisi altında kalan alan kadardır. Dolayısıyla toplam gelirden beklenen geliri çıkarırsak üretici rantını buluruz. Buna göre grafikte kırmızı renk ile gösterilen alan üretici rantıdır. O halde 1200 fiyatına karşılık gelen arz miktarı x_0 olduğuna göre üretici rantı da

$$1200\,x_0 - \int_0^{x_0} p\,dx$$

formülü ile hesaplanabilir.

Bunu da ben hesaplayayım hocam. 1200 liradan satılan miktar $x_0 = 20$ olduğunu bildiğimize göre üretici rantı,

$$\begin{aligned} 1200 \cdot 20 - \int_0^{20} (0,5x^2 + 1000)dx &= 24000 - \int_0^{20} (0,5x^2 + 1000)dx \\ &= 24000 - \left(\frac{0,5x^3}{3} + 1000x \right) \Bigg|_0^{20} \end{aligned}$$

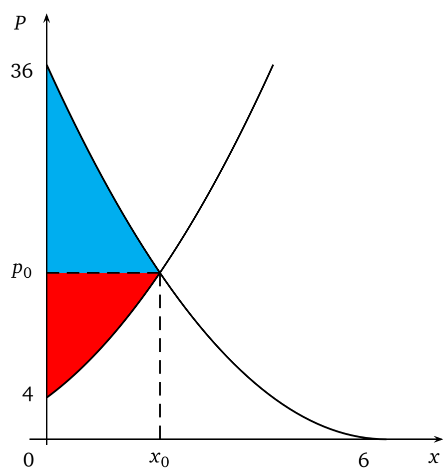
$$
\begin{aligned}
&= 24000 - \left(\frac{0,5 \cdot 20^3}{3} + 20000\right) \\
&= 4000 - \frac{4000}{3} \\
&= 2666,66
\end{aligned}
$$

bulunur.

Çok güzel Zeynep. Buradan diyebiliriz ki 1200 liradan satılan bu yirmi adet dizüstü bilgisayardan üreticilerin artırabildikleri toplam para miktarı $2666,66$ lira olur.

Hocam, bir örnek daha yapabilir miyiz?

Tabii ki. Şimdi farklı bir örnek inceleyelim. x miktarı ve p fiyatı göstermek üzere bir malın talep fonksiyonu $p_1 = (x-6)^2$ ve arz fonksiyonu da $p_2 = (x+2)^2$ şeklinde verilsin. Üretici ve tüketicilerin piyasaya katılım sonucunda oluşan piyasa fiyatı düzeyindeki tüketici ve üretici rantını bulalım.



Şekil 4.3: $p_1 = (x-6)^2$ talep fonksiyonu ve $p_2 = (x+2)^2$ arz fonksiyonunun grafiği.

Piyasa fiyatı: Arz ve talep miktarının eşit olduğu noktadaki fiyattır.

Hocam piyasa fiyatını vermediniz, sanırım önce piyasa fiyatını bulmamız gerekiyor.

Evet Gökçe. O zaman önce piyasa fiyatını bul bakalım.

Arz ve talep fonksiyonunun eşit olduğu noktadaki fiyat, piyasa fiyatı olduğuna göre, $p_1 = p_2$ eşitliğinden

$$\begin{aligned}
(x-6)^2 &= (x+2)^2 \\
x^2 - 12x + 36 &= x^2 + 4x + 4 \\
-12x + 36 &= 4x + 4 \\
32 &= 16x \\
x &= \frac{32}{16} \\
x &= 2
\end{aligned}$$

olarak bulurum. Bulduğum bu x değerini arz veya talep fonksiyonunda yerine yazarsam piyasa fiyatı $p = (2+2)^2 = 4^2 = 16$ olur.

Evet Gökçe. Elde ettiğimiz bu değerleri $x_0 = 2$ ve $p_0 = 16$ şeklinde gösterirsek, buradan tüketici rantı

$$\begin{aligned}
\int_0^2 (x-6)^2\,dx - 2\cdot 16 &= \int_0^2 (x^2 - 12x + 36)\,dx - 32 \\
&= \left(\frac{x^3}{3} - 6x^2 + 36x\right)\Bigg|_0^2 - 32 \\
&= \left(\frac{8}{3} - 24 + 72\right) - 32 \\
&= \frac{8}{3} + 48 - 32 \\
&= \frac{8}{3} + 16 \\
&= \frac{56}{3} \\
&= 18,66
\end{aligned}$$

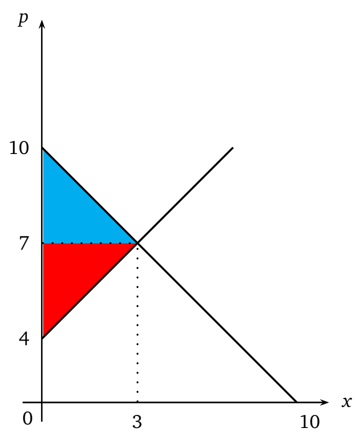
bulunur. Benzer şekilde üretici rantı

$$\begin{aligned}
2\cdot 16 - \int_0^2 (x+2)^2 dx &= 32 - \int_0^2 (x^2 + 4x + 4)\,dx \\
&= 32 - \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x\right)\Bigg|_0^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 32-\left(\frac{8}{3}+8+8\right)\\
&= 32-\frac{8}{3}-16\\
&= 16-\frac{8}{3}\\
&= \frac{40}{3}\\
&= 13,33
\end{aligned}$$

olarak bulunur. O halde $p_0 = 16$ piyasa fiyatından satılan bu maldan elde edilen tüketici rantı $18,66$ lira, üretici rantı ise $13,33$ liradır.

Hocam, arz ve talep eğrisi doğrusal bir fonksiyon olursa üretici ve tüketici rantına karşılık gelen bölgeler üçgen şeklinde olacak galiba!



Şekil 4.4: $p_1 = x+4$ arz doğrusu ile $p_2 = 10-x$ talep doğrusu.

Çok dikkatlisin Selçuk. Arkadaşlar arz ve talep eğrisi doğrusal olursa üretici ve tüketici rantı, oluşan üçgen bölgelerin alanı olacaktır. Şimdi de hepimizi yakından ilgilendiren başka bir iktisadi problemi inceleyeceğiz. Problemimiz şöyledir; belli bir dönem içerisinde bir ülkede oluşan gelirin toplumun çeşitli kesimleri arasındaki dağılımının nasıl olduğunu araştıracağız.

Lorenz Eğrisi ve Gini İndeksi

Bir ülkedeki gelir dağılımı dendiğinde genelde kişi başına düşen gelirden bahsedilir. Kişi başına düşen gelirin yüksek olması veya düşük olması bir ölçüt olarak kullanılabilir. Ancak kişi başına düşen gelir ortalama bir durum belirtir, oluşan gelirin toplumun çeşitli kesimleri arasındaki dağılımı hakkında bir fikir vermez.

Hocam, kişi başına düşen gelir ile gelir dağılımı arasındaki farkı biraz açıklar mısınız?

Bunu bir örnekle açıklayalım. Varsayalım ki bir dönem içerisinde oluşan toplam gelir 4000 lira olsun. Bu gelirin 10 kişi arasında dağılımını içeren iki dağıtım durumunu ele alalım. Birinci durumda, gelirin 3000 lirasını 1 kişi alsın, geriye kalanını da 9 kişi paylaşsın. İkinci durumda ise 3000 lirayı 3 kişi paylaşsın, geriye kalan 1000 lirayı ise 7 kişi paylaşsın. Dikkat ederseniz her iki durumda da 4000 lirayı 10'a bölersek kişi başına düşen gelir 400 lira olur. Ancak bu iki gelir dağılımı birbirinden farklıdır.

Hanehalkı: Ekonomik birim olarak bir çatı altında yaşayan ve ortak mali kararlar alan veya başkasının aldığı kararlara tabi olan bütün kişilerdir.

Hocam, kişi başına düşen geliri hesaplamak kolay. Ama gelir dağılımının nasıl olduğuna karar vermek biraz zor gözüküyor.

Evet Zeynep. Gelir dağılımını ölçmek için farklı yöntemler geliştirilmiştir. En yaygın olarak kullanılan yöntemlerden biri Lorenz eğrisidir. Lorenz eğrisi gelir dağılımının grafiksel olarak gösterimidir. Bu eğri şöyle oluşturulur: Önce toplumdaki kişiler veya hanehalkları en alt gelir grubundan başlanarak en üst gelir grubuna doğru sıralanır. Daha sonra herhangi bir gelir düzeyi ve altında gelir elde edenlerin toplamının toplam gelirden aldığı pay hesaplanır. Her gelir düzeyi için bu işlem yapılırsa eğrinin grafiği oluşturulabilir. Şimdi bu eğriye karşılık gelen $y = L(x)$ Lorenz fonksiyonunu tanımlayalım.

Lorenz eğrisi, Max Otto Lorenz tarafından gelir dağılımını grafiksel olarak göstermek için geliştirilmiştir.

x, 0 ve 1 arasında bir sayı olsun. Buna karşılık gelen $y = L(x)$ değerini şöyle belirliyoruz: Toplumdaki kişileri en alt gelire sahip olandan, en üst gelire sahip olana doğru sıralayalım. Şimdi bu sıralamada baştan başlayarak o kadar kişi seçelim ki, onların sayısının toplam kişi sayısına oranı x olsun. Bu durumda $y = L(x)$ değerini, bu kişilerin gelirlerinin, toplam gelire oranı olarak tanımlıyoruz. Bu oranları ondalık sayı şeklinde ifade edersek, Lorenz fonksiyonunun tanım kümesi $[0, 1]$ kapalı aralığı ve değer kümesi de $[0, 1]$ kapalı aralığı olacaktır.

Hocam, bu fonksiyonun değerlerini bulmak için her bir kişinin ne kadar gelir elde ettiğini bilmemiz gerekiyor sanırım.

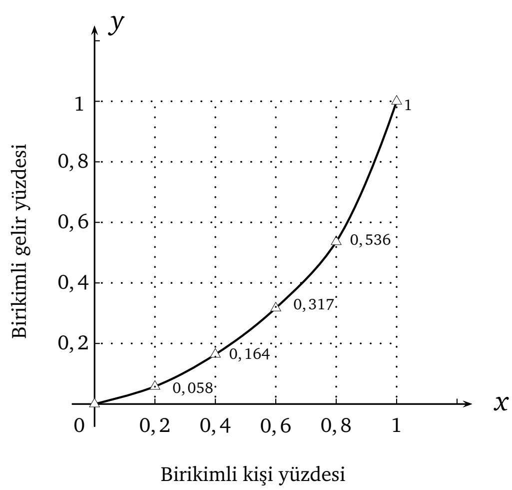
Tek tek herkese ne gelir elde ettiğini mi soracağız? Bu iş bizim boyumuzu aşar hocam.

Korkma Selçuk. Birçok ülkede olduğu gibi ülkemizde de Türkiye İstatistik Kurumu (TÜİK) eşdeğer hanehalkı gelir anketi yaparak bazı verileri topluyor. TÜİK toplumdaki gelir gruplarını en alt gelir grubundan başlayarak yüzde yirmilik dilimlere ayırıp elde ettiği verilerden her bir gelir grubunun toplam gelirden aldığı payı hesaplıyor. Tablo 4.1'de 2010 yılına ait TÜİK tarafından yayımlanan gelir dağılımı gösterilmiştir.

Yüzde 20'lik fert grupları	Toplam gelirden aldığı pay (yüzde)
İlk yüzde 20	$5,8$
İkinci yüzde 20	$10,6$
Üçüncü yüzde 20	$15,3$
Dördüncü yüzde 20	$21,9$
Son yüzde 20	$46,4$

Tablo 4.1: 2010 yılında yüzde yirmilik gruplara göre gelir dağılımı.

Bu tablodaki verilere göre $y = L(x)$ Lorenz fonksiyonunun aldığı bazı değerleri bulalım. $L(0) = 0$'dır. Tabloya bakarsak, ilk yüzde 20'nin toplam gelirden aldığı pay yüzde $5,8$'dir. Buna göre $L(0,2) = 0,058$ olur. Yine tabloya bakarsak, ilk yüzde 40'ının toplam gelirden aldığı pay yüzde $16,4$'tür. Buna göre $L(0,4) = 0,164$ olur. Benzer şekilde devam edilirse $L(0,6) = 0,317,\ L(0,8) = 0,536$ ve $L(1) = 1$ olur. Bu altı noktanın görüntülerini birleştiren bir eğri çizersek kabaca Lorenz eğrisinin grafiğini buluruz. Dikkat ederseniz, hem kişi sayılarını hem de bunların gelirlerini en alt gelirden başlayarak birikimli olarak hesaplıyoruz.



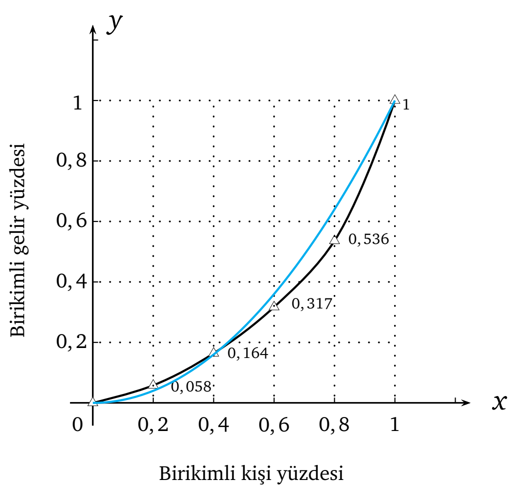
Şekil 4.5: 2010 yılı için Türkiye'nin $L(x)$ Lorenz eğrisinin grafiği.

Hocam grafikte sadece bu altı noktadan geçen eğriyi çizdik. Herhangi bir noktanın görüntüsünü bulmak için fonksiyonun denklemini bilmemiz gerekiyor sanırım!

Evet Selçuk. Çok değişkenli fonksiyonlar konusunda hatırlarsanız en küçük kareler yöntemini kullanarak eldeki verilere uygun düşen doğru denklemini elde etmiştik. Burada da bu verilere uygun düşen bir fonksiyon bulmaya çalışılır. Fonksiyonun aldığı bazı değerlere göre bu eğriye karşılık gelen x^r şeklinde bir fonksiyon araştıracağız. Buna göre

$$(0^r - 0)^2 + [(0,2)^r - 0,058)]^2 + [(0,4)^r - 0,164)]^2$$
$$+[(0,6)^r - 0,317)]^2 + [(0,8)^r - 0,536)]^2 + (1^r - 1)^2$$

ifadesini minimum yapan r değerini araştıracağız. Bu değeri hesaplamak için bilgisayar yardımıyla yapılan hesaplamalar sonucunda r değeri yaklaşık $2,34$ olarak bulunmuştur. O halde bu verilere uyan Lorenz fonksiyonunu $L(x) = x^{2,34}$ şeklinde alabiliriz. Aşağıdaki grafikte bulduğumuz fonksiyonun grafiği ile altı nokta yardımıyla oluşturulan Lorenz eğrisinin grafiğini karşılaştırabilirsiniz.

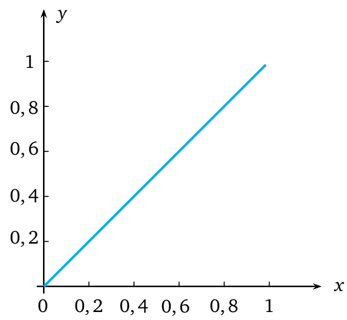


Şekil 4.6: 2010 yılı için Türkiye'nin $L(x)$ Lorenz eğrisinin grafiği.

Hocam, Lorenz eğrisini oluşturdunuz ama bu eğriye göre gelir dağılımı hakkında nasıl karar vereceğiz?

Arkadaşlar gelir dağılımında doğal olarak beklenen durum herkesin eşit pay almasıdır. Bu duruma ne kadar çok yaklaşılırsa gelir dağılımı göreceli olarak iyidir diyebiliriz. Herkesin gelirden eşit pay aldığı durumu düşünürsek oluşan eğri $y = x$ doğrusuna karşılık gelecektir. Bu doğruya mutlak eşitlik doğrusu denir.

O zaman bizim Lorenz eğrimiz mutlak eşitlik doğrusunun altında bir eğri olacak.



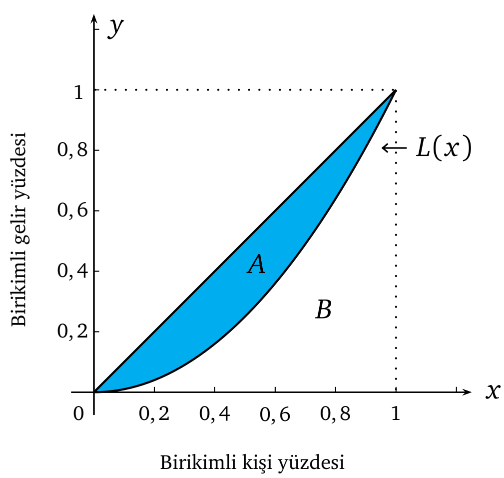
Şekil 4.7: Mutlak eşitlik doğrusu.

Evet Zeynep. Buna göre herhangi bir ülke için oluşturulan Lorenz fonksiyonunun grafiğine karşılık gelen Lorenz eğrisinin mutlak eşitlik doğrusuna yakınlığına göre gelir dağılımının nasıl olduğuna karar vereceğiz.

Lorenz eğrisinin mutlak eşitlik doğrusuna yakınlığını nasıl ölçeceğiz hocam? Cetvel mi kullanacağız?

Gini indeksi, gelir yoğunluğunu ölçmek için İtalyan sosyolog Corrado Gini (1884-1965) tarafından tanımlanmıştır.

Daha güzel bir yöntem kullanacağız. Lorenz eğrisi ile mutlak eşitlik doğrusu arasında kalan alanı hesaplayıp, bu alanın mutlak eşitlik doğrusu altında kalan üçgenin alanınına oranını bulacağız. Alanları şekildeki gibi harflerle gösterirsek hesaplayacağımız oran $\frac{A}{A+B}$ olur. Hesaplanan bu değere Gini indeksi denir. Gini indeksinin aldığı değere göre de gelir dağılımı hakkında karar vereceğiz.

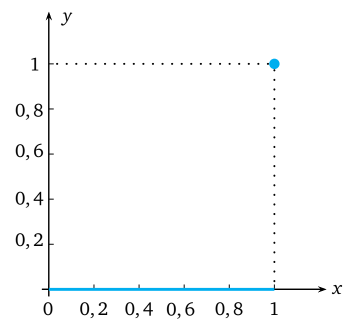


İki eğri arasında kalan integral formülünden mutlak eşitlik doğrusu ile Lorenz eğrisi arasında kalan alanı hesaplarsak şekildeki A bölgesinin alanını buluruz.

Evet Engin. $y = x$ doğrusu ile Lorenz eğrisi arasında kalan alan $\int_0^1 (x - L(x))\,dx$ integrali ile hesaplanabilir. $A + B$ değeri de üçgenin alanı olduğuna göre $A + B = \frac{1}{2}$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} \text{Gini indeksi} &= \frac{\int_0^1 (x - L(x))\,dx}{\frac{1}{2}} \\ &= 2\int_0^1 (x - L(x))\,dx \end{aligned}$$

olur. Eğer Lorenz eğrimiz mutlak eşitlik doğrusuyla çakışırsa A bölgesinin değeri sıfır olacağından Gini indeksi sıfır olur. Eğer B bölgesinin alanı sıfır olursa Lorenz eğrisi Şekil 4.8'de gösterildiği gibi olacaktır. Buna göre $\int_0^1 (x - L(x))\,dx$ integralinin değeri $\frac{1}{2}$ olacağından Gini indeksi 1 olur. Buna göre Gini indeksi 0 ile 1 arasında bir değer alır.



Şekil 4.8: Bir kişinin bütün geliri alması ve başka hiçbir kimsenin gelir elde etmediği durumdaki Lorenz eğrisi.

Gini indeksi 0'a yakınsa gelirin iyi dağıtıldığını 1'e yakınsa kötü dağıtıldığını söyleyebilir miyiz hocam?

Evet Zeynep. Şimdi bulduğumuz $L(x) = x^{2,34}$ Lorenz eğrisi için Gini indeksini hesaplarsak

$$\begin{aligned} 2\int_0^1 (x - x^{2,34})\,dx &= 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^{3,34}}{3,34}\right)\Bigg|_0^1 \\ &= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3,34}\right) \\ &= 2\left(\frac{3,34 - 2}{2 \cdot 3,34}\right) \\ &= \frac{3,34 - 2}{3,34} \\ &= \frac{1,34}{3,34} \\ &= 0,401 \end{aligned}$$

olur.

Gini indeksi sıfıra daha yakın çıktığına göre gelir iyi dağıtılmıştır.

Evet Zeynep. Ancak göreceli olarak iyi dağıtılmıştır demek daha doğru olur. Arkadaşlar Lorenz eğrisi sadece gelir dağılımı ölçmek için değil refah, sermaye vb. iktisadi değerlerin dağılımının nasıl olduğunu belirlemek için de kullanılabilir. Şimdi de size bazı ülkelerin Gini indeksi ve kişi başına düşen gelirlerini gösteren bir tablo vereceğim. Bu tabloya bakarak yorumlama işini de size bırakayım.

Ülke Adı	Kişi Başına Düşen Gelir ($)	Gini İndeksi
Türkiye (2010)	13800	0,402
Rusya (2010)	15900	0,420
Amerika (2007)	46406	0,450
Arjantin (2009)	15000	0,458
Brezilya (2009)	10800	0,539
Azerbeycan (2008)	5575	0,337
İsveç (2005)	41066	0,230
Almanya (2006)	35328	0,270
Japonya (2008)	38212	0,376

Tablo 4.2: Bazı ülkelerin farklı yıllardaki kişi başına düşen geliri ve Gini indeksi.

Diferansiyel Denklemlerin Uygulaması

Bir çikolata fabrikası 5 ile 9 yaş arasındaki gruba hitap edecek çikolatalı bir kek piyasaya sürmüş ve çocuklara yönelik program yapan televizyon kanallarına ürünün reklamını vermiştir. Reklam yayımlanmaya başladıktan sonra bu yeni ürünün reklamını gören çocukların sayısının değişim oranının, ürünün reklamını görmemiş olan çocukların sayısıyla orantılı olduğu düşünülmektedir. Reklam verildikten 5 gün sonra çocukların yüzde 40'ı ürünün reklamını gördüğüne göre çocukların yüzde 90'ının bu ürünün reklamını görmesi için kaç gün reklamın yayımlanması gerekir?

Bu problemi çözmek için önce değişim oranını veren denklemi bulmamız gerekiyor. y reklamı gören çocukların sayısını ve t zamanı göstersin. L, 5−9 yaş grubundaki çocuk sayısı olsun. Bu takdirde reklamı görmemiş olan çocuk sayısı $L-y$ olacaktır. Buna göre değişim oranını gösteren denklemi,

$$\frac{dy}{dt} = k(L-y)$$

şeklinde yazabilirim.

k sayısının orantı katsayısı ve denklemin de bir diferansiyel denklem olduğunu söylemeyi unuttun Engin.

Bu diferansiyel denklemin çözümü için bir de başlangıç koşulu verilmesi gerekir.

Evet arkadaşlar. Reklamlar televizyonda dönmeye başladığında reklamı gören çocuk sayısı sıfır olduğundan $t=0$ için $y=0$ değerini de başlangıç koşulu olarak alabiliriz. Diferansiyel denklemimizi değişkenlerine ayırırsak

$$\frac{dy}{L-y} = k \cdot dt$$

şeklinde yazabiliriz. Eşitliğin her iki tarafının integralini alırsak,

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{L-y} &= \int k\,dt \\ (-1)\ln(L-y)+c_1 &= kt+c_2 \\ (-1)\ln(L-y) &= kt+c_2-c_1 \\ \ln(L-y) &= -kt-c \end{aligned}$$

elde ederiz. c_2-c_1 değeri de bir sabit olduğuna göre c_2-c_1 yerine kısaca c yazdık. Eşitliğin her iki tarafı e tabanında yazılırsa $L-y=e^{-kt-c}$ yani $y=L-e^{-kt}e^{-c}$ bulunur. Şimdi başlangıç koşulunu kullanırsak e^{-c} sabitinin değerini bulabiliriz.

Bunu ben bulabilirim hocam. $t = 0$ için $y = 0$ olduğuna göre bu değerleri denklemde yerine yazarsam $0 = L - e^{-c}$ olur. Buna göre $e^{-c} = L$ bulurum. O halde denklemi

$$y = L - Le^{-kt} = L(1 - e^{-kt})$$

şeklinde yazabilirim.

Orantı katsayısını nasıl hesaplayacağız?

Beş gün sonra reklamı gören çocuk sayısı yüzde 40 olarak verilmiş, bunu kullanabiliriz. Denklemde t yerine 5 ve y yerine $0,4L$ yazarsak orantı katsayısını buluruz. $0,4L = L(1 - e^{-5k})$ yani $0,4 = 1 - e^{-5k}$ denkleminden,

$$\begin{aligned} e^{-5k} &= 1 - 0,4 \\ e^{-5k} &= 0,6 \end{aligned}$$

olur. Eşitliğin her iki tarafının doğal logaritmasını alırsak $\ln e^{-5k} = \ln 0,6$ yani $-5k = -0,51$ elde ederiz. Buradan $k = \frac{-0,51}{-5} \approx 0,102$ bulunur. Buna göre diferansiyel denklemimizin çözümü $y = L(1 - e^{-0,102\,t})$ şeklinde olur.

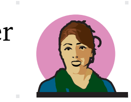
Bravo! Sorumuza dönecek olursak çocukların yüzde 90'ının reklamı görmesi için reklamın kaç gün dönmesi gerektiğini bulun bakalım.

Çocukların yüzde 90'ının görmesi demek $0,9L$ anlamına geldiğine göre bu değeri diferansiyel denklemimizin çözümünde yerine yazıp t değerini bulmamız gerekiyor. Buna göre

$$\begin{aligned} 0,9L &= L(1 - e^{-0,102\,t}) \\ 0,9 &= 1 - e^{-0,102\,t} \\ e^{-0,102\,t} &= 0,1 \end{aligned}$$

olur.

Eşitliğin her iki tarafının doğal logaritması alınırsa $\ln e^{-0,102t} = \ln 0,1$ yani $-0,102t = -2,302$ olur. Buradan da $t = \frac{-2,302}{-0,102} \approx 22,56$ bulunur. O halde 5-9 yaş grubundaki çocukların yüzde 90'ının reklamı görmesi için reklamın 23 gün dönmesi gerekir.



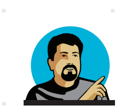
Hocam çocuk sayısını vermediniz. Çocuk sayısı da verilirse her gün kaç çocuğun reklamı gördüğünü bulabilir miyiz?

Bulabiliriz tabii. Türkiye'de 5-9 yaş grubundaki çocuk sayısı yaklaşık altı milyondur. Diferansiyel denklemimizin çözümünde L yerine 6 000 000 yazıp t'ye bazı değerler vererek her gün yaklaşık kaç çocuğun reklamı gördüğünü bulabiliriz.

t (gün)	Reklamı gören çocuk sayısı		
1	$6\,000\,000(1-e^{-0{,}102\cdot 1})$	$\approx$	581 822
2	$6\,000\,000(1-e^{-0{,}102\cdot 2})$	$\approx$	1 107 225
3	$6\,000\,000(1-e^{-0{,}102\cdot 3})$	$\approx$	1 581 680
4	$6\,000\,000(1-e^{-0{,}102\cdot 4})$	$\approx$	2 010 126
5	$6\,000\,000(1-e^{-0{,}102\cdot 5})$	$\approx$	2 397 026
6	$6\,000\,000(1-e^{-0{,}102\cdot 6})$	$\approx$	2 746 408
7	$6\,000\,000(1-e^{-0{,}102\cdot 7})$	$\approx$	3 061 910
8	$6\,000\,000(1-e^{-0{,}102\cdot 8})$	$\approx$	3 346 818
9	$6\,000\,000(1-e^{-0{,}102\cdot 9})$	$\approx$	3 604 098
10	$6\,000\,000(1-e^{-0{,}102\cdot 10})$	$\approx$	3 836 430

Tablo 4.3: İlk 10 gün reklamı gören çocuk sayısı.

Hocam diferansiyel denklemlerin uygulaması ile ilgili bir örnek daha verebilir misiniz?



Tabii ki. Aranızda talebin fiyat esnekliğini hatırlayan var mı?

Ben hatırlıyorum hocam. Bir malın talep fonksiyonu verildiğinde malın fiyatındaki yüzdelik değişime karşılık talep miktarında meydana gelen yüzdelik değişimi ifade ediyordu.

Aferin Engin. x miktarı ve p fiyatı göstermek üzere $p(x)$ talep fonksiyonu verildiğinde talep fiyat esnekliği $\frac{dx}{dp}\cdot\frac{p}{x}$ ifadesinin mutlak değeridir. Şimdi bir esneklik değeri verildiğinde fiyat ve miktar arasındaki ilişkiyi veren talep denkleminin nasıl olabileceğini elde edeceğiz. Buna göre $x > 0$ olmak üzere esneklik değeri 1 ise talep denklemini bulalım.

Hocam anladım sanırım. Önce verilen denklemi 1'e eşitleyip $\left|\frac{dx}{dp} \cdot \frac{p}{x}\right| = 1$ denklemini elde ederim. Ama bu mutlak değerden nasıl kurtulacağım?

Fiyat artarken talep azaldığı için $\frac{dx}{dp}$ türevi negatiftir!

O zaman bu denklemi $-\frac{dx}{dp} \cdot \frac{p}{x} = 1$ veya $\frac{dx}{dp} \cdot \frac{p}{x} = -1$ şeklinde yazabilirim. Bu bir diferansiyel denklemdir.

Ben bu diferansiyel denklemi çözebilirim. Şimdi $\frac{dx}{dp} \cdot \frac{p}{x} = -1$ diferansiyel denklemini değişkenlerine ayırırsak $\frac{dx}{x} = -\frac{p}{p}$ olur. Buradan her iki tarafın integralini alırsak

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x} &= \int -\frac{dp}{p} \\ \ln x &= -\ln p + c \\ \ln x + \ln p &= c \\ \ln(x \cdot p) &= c \end{aligned}$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafı e tabanında yazılırsa denklemin çözümü $x \cdot p = e^c$ şeklinde de ifade edilebilir.

Çok güzel Selçuk. Demek ki böyle bir durumda talebin fiyatla ters orantılı olduğunu da gösterdik.

Özet

Bu bölümde, bazı iktisadi uygulamaları inceledik. Tüketici ve üretici rantının nasıl oluştuğunu inceleyip, tüketici ve üretici rantının nasıl hesaplanacağını gördük. Bir ülkedeki gelir dağılımının nasıl olduğunu belirlemek için Lorenz eğrisini oluşturup Gini indeksini hesapladık. Ayrıca diferansiyel denklemlerin bazı uygulamalarını gördük.

Okuma Parçası

Sizler için bir okuma parçası ararken, Şahin Hoca şöyle bir soru sordu: "Namık Kemal, enflasyon %50 olunca paranın değeri yarıya mı düşüyor?" Ben de, yaygın olarak böyle düşünüldüğünü söyledim. Sonra Şahin Hoca devam etti: "O zaman enflasyon %100 olunca paranın değeri sıfırlanmış mı oluyor?" Soruda bir hile vardı, ama bu gene de tuhaf bir durumdu. Bir büyüklük %100 azalınca sıfırlanır, ama enflasyon ne kadar yüksek olursa olsun, gene de aynı parayla az da olsa bir şey alınabiliyordu. Sorun neredeydi?

İsterseniz gelin birlikte düşünelim: Belli bir malın 1 birim para ile alınan miktarı 1 birim olsun. Eğer yıllık enflasyon oranı r ise, bir yıl sonra bu malın fiyatı $1+r$ olacak. O zaman 1 birim para ile $\frac{1}{1+r}$ birim mal alabileceğiz. Dolayısıyla 1 birim paranın satın alma gücündeki azalma $1-\frac{1}{1+r}=\frac{r}{1+r}$ kadar olacak.

O zaman enflasyon %50 yani $r=0,5$ ise, paranın satın alma gücü $\frac{r}{1+r}=\frac{0,5}{1+0,5}=\frac{0,5}{1,5}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$ kadar azalacak. Yarıya inmeyecek! Eğer enflasyon %100, yani $r=1$ ise, paranın değeri, yani satın alma gücü $\frac{r}{1+r}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ oranında azalacak. Demek ki paranın değeri sıfırlanmayacak, sadece yarıya düşecek!

Enflasyon %20 olsaydı, yani $r=0,2$ ise

$$\frac{r}{1+r}=\frac{0,2}{1+0,2}=\frac{0,2}{1,2}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}=0,166=\%16,6$$

olup, paranın değeri %16,6 kadar azalacak. Sözgelimi 10 lira ile 1 kilogram peynir alabiliyorken, bir yıl sonra peynirin fiyatı 12 liraya çıktığından, $\frac{10}{12}=\frac{5}{6}=0,833$ kg yani 833 gram peynir alabileceğiz. Paranın değeri %16,6 kadar azaldığı için 1 kiloluk peynirin %16,6 kadarlık kısmını artık satın alamayacağız; paramız 833 gram peynir almaya yetecek. En basit matematik bile ne kadar aydınlatıcı olabiliyor değil mi?

Enflasyon %50 olunca, paranın satın alma gücü %33,3 azalıyor; enflasyon %100 olunca, paranın satın alma gücü %50 azalıyor.

Enflasyon oranı %	10	20	40	50	80	100	150	200	300	500
Paranın satın alma gücünde azalma %	9,09	16,6	28,5	33,3	44,4	50	60	66,6	75	83,3

Çıkarın Kağıtları

1. x miktarı ve p fiyatı göstermek üzere bir malın talep fonksiyonu $p = 15 - x^2$ şeklinde verilmiştir. Buna göre $p_0 = 6$ fiyatındaki tüketici rantı kaçtır?

A) 27 **B)** 20 **C)** 18 **D)** 16 **E)** 14

2. x miktarı ve p fiyatı göstermek üzere bir malın arz fonksiyonu $p = x^2 + 4$ şeklinde verilmiştir. Buna göre $p_0 = 8$ fiyatındaki üretici rantı kaçtır?

A) $\frac{16}{3}$ **B)** $\frac{13}{3}$ **C)** $\frac{11}{3}$ **D)** 24 **E)** 18

3. x miktarı ve p fiyatı göstermek üzere bir malın talep fonksiyonu $p_1 = 16 - x^2$ ve arz fonksiyonu $p_2 = x^2 + 8$ şeklinde verilmiştir. Buna göre piyasa fiyatı düzeyindeki tüketici rantını ve üretici rantını bulunuz.

4. x miktarı ve p fiyatı göstermek üzere bir malın arz fonksiyonu $p = x + 4$ şeklinde verilmiştir. Piyasa fiyatı 7 olduğuna göre üretici rantı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{16}{3}$ **B)** $\frac{13}{3}$ **C)** $\frac{11}{3}$ **D)** $\frac{7}{2}$ **E)** $\frac{9}{2}$

5. Bir ülkenin İstatistik kurumunun yayımladığı yüzde 20'lik fert gruplarına göre gelir dağılımı verilerinden elde edilen Lorenz fonksiyonu $L(x) = x^2$ şeklinde belirlenmiştir. Buna göre bu ülkenin Gini indeksi aşağıdakiler hangisidir?

A) $0,25$ **B)** $0,33$ **C)** $0,40$
D) $0,50$ **E)** $0,66$

6. Bir ülkenin İstatistik kurumunun yayımladığı yüzde 20'lik fert gruplarına göre gelir dağılımı verilerinden elde edilen Lorenz fonksiyonu $L(x) = x^3$ şeklinde belirlenmiştir. Buna göre bu ülkenin Gini indeksi aşağıdakiler hangisidir?

A) $0,30$ **B)** $0,35$ **C)** $0,40$
D) $0,50$ **E)** $0,60$

7. Bir ülkenin İstatistik kurumunun yayımladığı yüzde 20'lik fert gruplarına göre gelir dağılımı verilerinden elde edilen Lorenz fonksiyonu $L(x) = x^4$ olarak belirlenmiştir. Buna göre bu ülkenin Gini indeksi aşağıdakiler hangisidir?

A) $0,40$ **B)** $0,45$ **C)** $0,50$
D) $0,60$ **E)** $0,75$

8. Aşağıdaki tabloda bir ülkenin İstatistik kurumunun yayımladığı yüzde 20'lik fert gruplarına göre gelir dağılımı verileri verilmiştir. Bu verilere göre Lorenz eğrisinin geçtiği altı noktayı bulup, eğrinin grafiğini çiziniz.

Yüzde 20'lik fert grupları	Toplam gelirden aldığı pay (yüzde)
İlk yüzde 20	3,8
İkinci yüzde 20	11,2
Üçüncü yüzde 20	16,1
Dördüncü yüzde 20	20,5
Son yüzde 20	48,4

9. Bir malın talep fiyat esnekliği 2 olarak verildiğine göre bu malın miktarı ve fiyatı arasındaki ilişkiyi veren talep denklemini bulunuz.

10. Bir malın talep fiyat esnekliği $\frac{1}{2}$ olarak verildiğine göre bu malın miktarı ve fiyatı arasındaki ilişkiyi veren talep denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x \cdot p = c$ **B)** $x \cdot p^2 = e^c$
C) $2x \cdot p = e^c$ **D)** $x^2 \cdot p = e^c$
E) $x \cdot p^3 = e^c$

Çözümler

1. $p_0 = 6$ değerini talep fonksiyonunda yerine yazarsak $15 - x^2 = 6$ eşitliğinden $9 = x^2$ bulunur. Buradan $x = 3$ veya $x = -3$ elde edilir. Talep miktarı negatif olamayacağına göre $x = 3$ çözüm olur. Bu değeri de $x_0 = 3$ şeklinde gösterirsek buradan tüketici rantı

$$\begin{aligned} \int_0^3 (15 - x^2)dx - 6 \cdot 3 &= \left(15x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 - 18 \\ &= 45 - 9 - 18 \\ &= 18 \end{aligned}$$

bulunur. Doğru cevap C şıkkıdır.

2. $p_0 = 8$ değerini arz fonksiyonunda yerine yazarsak $x^2 + 4 = 8$ eşitliğinden $4 = x^2$ bulunur. Buradan $x = 2$ veya $x = -2$ bulunur. Arz miktarı negatif olamayacağına göre $x = 2$ çözüm olur. Bu değeri de $x_0 = 2$ şeklinde gösterirsek buradan üretici rantı,

$$\begin{aligned} 2 \cdot 8 - \int_0^2 (x^2 + 4)dx &= 16 - \left(\frac{x^3}{3} + 4x\right)\Big|_0^2 \\ &= 16 - \left(\frac{2^3}{3} + 8\right) \\ &= 16 - \frac{32}{3} \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

bulunur. Doğru cevap A şıkkıdır.

3. Arz ve talebin eşit olduğu noktadaki fiyat piyasa fiyatı olduğuna göre

$$\begin{aligned} 16 - x^2 &= x^2 + 8 \\ 2x^2 &= 8 \\ x^2 &= 4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu değeri arz fonksiyonunda yerine yazarsak, $p_2 = 2^2 + 8 = 12$ bulunur. Buna göre $x_0 = 2$ ve $p_0 = 12$ olur. Buradan tüketici rantı

$$\begin{aligned} \int_0^2 (16 - x^2)dx - 12 \cdot 2 &= \left(16x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 - 24 \\ &= 32 - \frac{8}{3} - 24 \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

ve üretici rantı

$$\begin{aligned} 12 \cdot 2 - \int_0^2 (x^2 + 8)dx &= 24 - \left(\frac{x^3}{3} + 8x\right)\Big|_0^2 \\ &= 24 - \left(\frac{8}{3} + 16\right) \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

olur.

4. Arz fonksiyonunda piyasa fiyatı 7 yerine yazılırsa $7 = x + 4$ olup $x = 3$ bulunur. Bu değeri de $x_0 = 3$ şeklinde gösterirsek buradan üretici rantı

$$\begin{aligned} 3 \cdot 7 - \int_0^3 (x + 4)dx &= 21 - \left(\frac{x^2}{2} + 4x\right)\Big|_0^3 \\ &= 21 - \left(\frac{3^2}{2} + 12\right) \\ &= 21 - \frac{9}{2} - 12 \\ &= 9 - \frac{9}{2} \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

bulunur. Doğru cevap E şıkkıdır.

5. Bu ülkenin Gini indeksi

$$\begin{aligned} 2\int_0^1 (x - x^2)\,dx &= 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 \\ &= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3} = 0,33 \end{aligned}$$

olur. Doğru cevap B şıkkıdır.

6. Bu ülkenin Gini indeksi

$$\begin{aligned}2\int_0^1 (x-x^3)\,dx &= 2\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1\\ &= 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\\ &= \frac{1}{2}=0,50\end{aligned}$$

olur. Doğru cevap D şıkkıdır.

7. Bu ülkenin Gini indeksi

$$\begin{aligned}2\int_0^1 (x-x^4)\,dx &= 2\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1\\ &= 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)\\ &= \frac{6}{10}\\ &= \frac{3}{5}=0,60\end{aligned}$$

olur. Doğru cevap D şıkkıdır.

8. Bu verilere göre Lorenz eğrisinin geçtiği altı noktanın görüntüsü

$L(0)=0$

$L(0,20)=0,038$

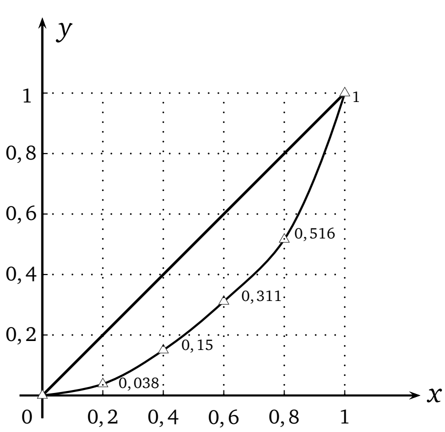
$L(0,4)=0,038+0,112=0,15$

$L(0,6)=0,038+0,112+0,161=0,311$

$L(0,8)=0,038+0,112+0,161+0,205=0,516$

$L(1)=1$

şeklindedir. Bu noktaları bir eğriyle birleştirirsek Lorenz eğrisini buluruz.



9. Talep fonksiyonunun türevi negatif olduğundan $\left|\frac{dx}{dp}\cdot\frac{p}{x}\right|=2$ ifadesini $\frac{dx}{dp}\cdot\frac{p}{x}=-2$ şeklinde yazabiliriz. Bu diferansiyel denklemi değişkenlerine ayırıp çözersek

$$\begin{aligned}\frac{dx}{x} &= -2\frac{dp}{p}\\ \int\frac{dx}{x} &= -2\int\frac{dp}{p}\\ \ln x &= -2\ln p+c=-\ln p^2+c\\ \ln x+\ln p^2 &= c\\ \ln(x\cdot p^2) &= c\end{aligned}$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafı e tabanında yazılırsa $x\cdot p^2=e^c$ şeklinde olur.

10. Talep fonksiyonunun türevi negatif olduğundan $\left|\frac{dx}{dp}\cdot\frac{p}{x}\right|=\frac{1}{2}$ ifadesini $\frac{dx}{dp}\cdot\frac{p}{x}=-\frac{1}{2}$ şeklinde yazabiliriz. Bu diferansiyel denklemi değişkenlerine ayırıp çözersek

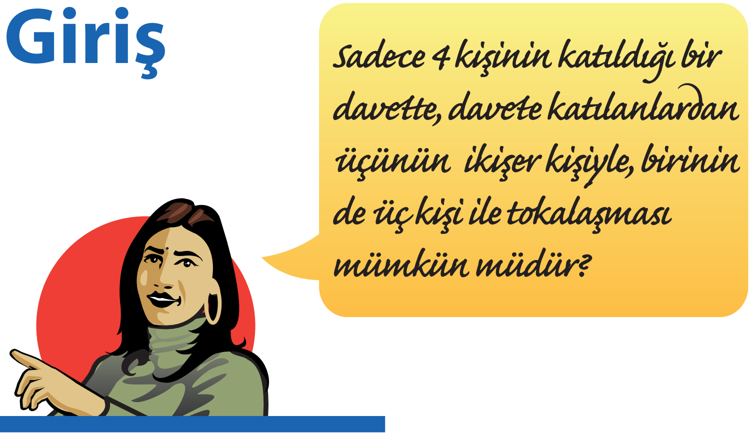
$$\begin{aligned}\frac{dx}{x} &= -\frac{1}{2}\frac{dp}{p}\\ 2\int\frac{dx}{x} &= -\int\frac{dp}{p}\\ 2\ln x &= -\ln p+c\\ \ln x^2+\ln p &= c\\ \ln(x^2\cdot p) &= c\end{aligned}$$

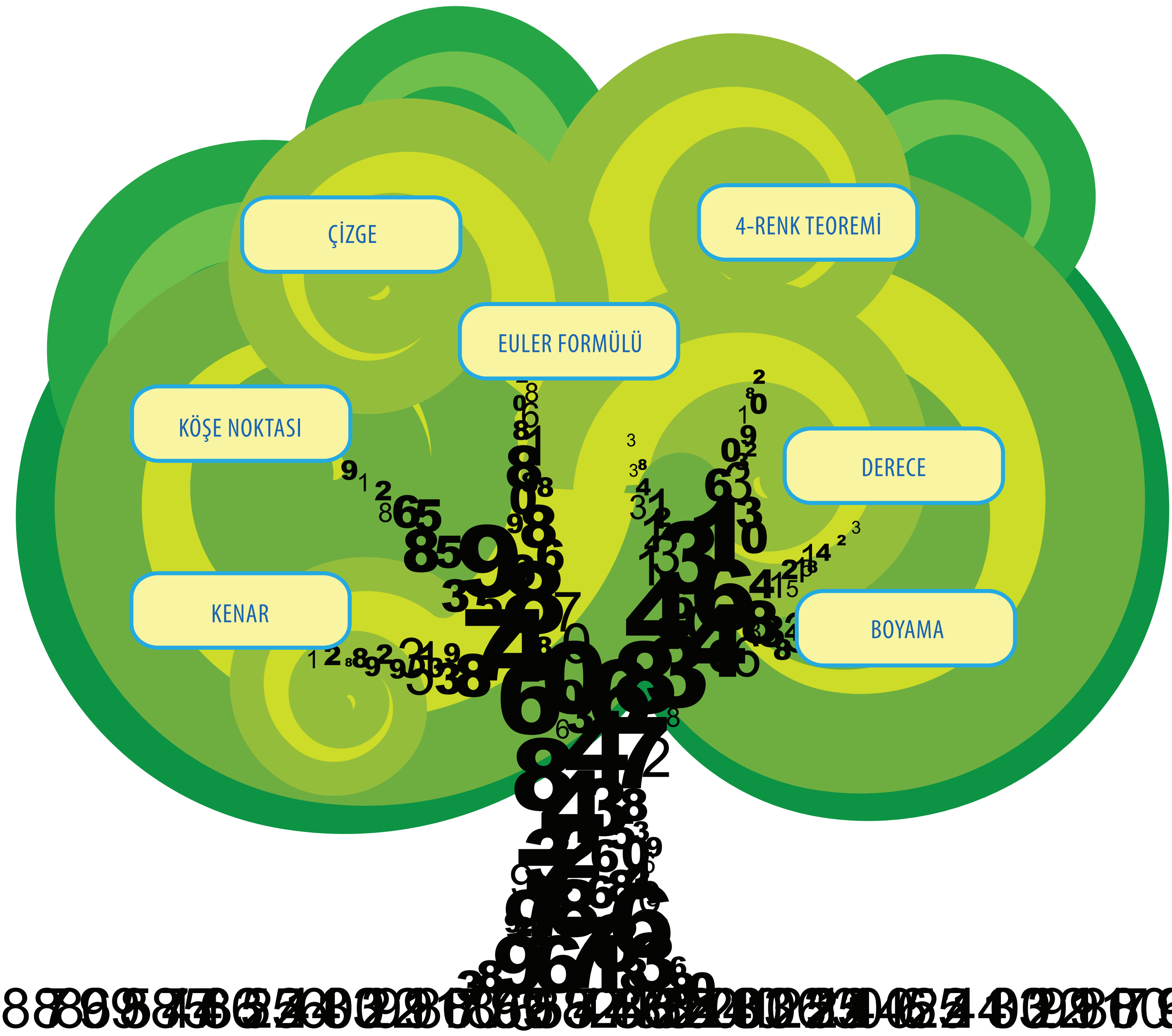
olur. Eşitliğin her iki tarafı e tabanında yazılırsa $x^2\cdot p=e^c$ şeklinde olur. Doğru cevap D şıkkıdır.

Çizge Kuramına Giriş

5. ÜNİTE

MATEMATİK 2





Çizge Nedir?

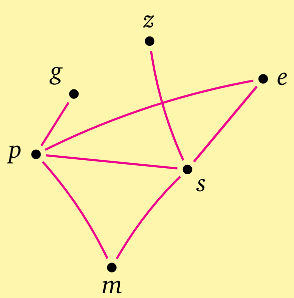
Hayırdır arkadaşlar neyi tartışıyorsunuz?

Hocam hafta sonu kimde toplanıp ders çalışacağız ona karar vermeye çalışıyoruz. Ne yazık ki evlerimiz birbirinden uzakta olduğundan otobüse binmek zorundayız.

Bir tek otobüs olsa yine iyi. Bazen aktarma yapıp iki otobüs kullanmak gerekiyor.

Daha da güzel! Bu probleminizi bugün işleyeceğimiz çizgeler konusu ile ilişkilendirerek derse başlayalım. Ben ve Pınar Hoca da dâhil hepimizin evlerini düzlemde birer nokta ile gösterelim. İsterseniz bu noktaları isimlerimizin baş harfleriyle adlandıralım. Sonra kimlerin evleri arasında bir tek otobüs ile ulaşım imkânı varsa, o kişilerin evlerini temsil eden noktalar arasına bir çizgi çizelim.

Hocam bu çizgiler düz çizgi mi, yoksa düz olmayabilir mi?



Şekil 5.1: Kişilerin evlerini ve bu evler arasında tek otobüs ile ulaşımın mümkün olup olmadığını gösteren diyagram.

Selçuk çizgiler istediğin gibi olabilir. İster düz çiz, ister eğri. Hatta çizgilerin kesişmesinin de bir sakıncası yok (Şekil 5.1).

İşte bu tür diyagramlara çizge denir. Daha kesin bir tanım vermek gerekirse çizge, boş kümeden farklı noktalar kümesiyle bu noktalar arasındaki çizgilerin kümesinden oluşur. Noktalar kümesini V ile gösterirsek, örneğimizde $V = \{e, g, m, p, s, z\}$ olur. Aslında nokta yerine köşe noktası demek daha doğru olacaktır.

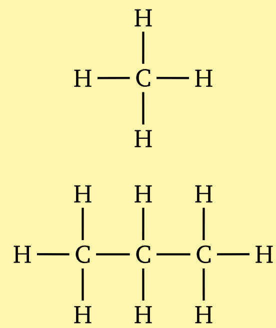
Köşe noktalarının arasındaki çizgilere ise kenar denir. Çizgenin bir kenarından bahsetmek için onun iki uç noktasını söylemek yeterlidir. Örneğin, m ve p köşe noktalarını birleştiren kenarı mp ile gösterebiliriz. Eğer çizgenin tüm kenarlarının kümesini E ile gösterecek olursak, örneğimizde $E = \{ep, gp, mp, ms, ps, se, sz\}$ olur.

Çizgenin köşe noktalarının kümesi V ile kenarlarının kümesi E verildiğinde bir G çizgesi $G = (V, E)$ şeklinde yazılır.

Pınar Hocam m ve p köşe noktalarını birleştiren kenarı neden pm diye isimlendirmediniz de mp dediniz? pm deseydik olmaz mıydı?

Zeynep hiç önemli değil. Aslında çizgenin kenarlarını köşe noktaları kümesinin iki elemanlı alt kümeleri gibi de düşünebiliriz. Örneğin, p ile m noktasını birleştiren kenarı $\{m, p\}$ kümesi gibi düşünebiliriz. Bir kümede elemanların yazım sırası önemli olmadığından aynı kümeyi $\{p, m\}$ şeklinde de yazabiliriz. Fakat gösterimlerde kısalık olsun diye küme parantezi ve virgülü yazmayıp, kısaca pm ya da mp yazacağız.

İyi de hocam bazı yollar tek yön, p köşe noktasından m köşe noktasına otobüs ile gitmek mümkünken, m köşe noktasından p köşe noktasına otobüs ile gitmek mümkün olmayabilir. Hatta otobüsten hiç inmezsek m köşe noktasından tekrar m köşe noktasına da ulaşabiliriz. O zaman da mm kenarı mı yazacağız?



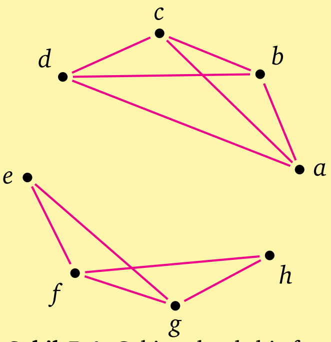
Şekil 5.2: Metan (CH_4) ve Propan (C_3H_8) kimyasal molekülleri karbon (C) ve hidrojen (H) atomları arasındaki bağlarla bir çizge gibi düşünülebilir.

Selçuk aslında haklısın. Yolların tek yön olup olmadığını dikkate alıp, kenarların üzerine birer ok işareti de koyabiliriz. Hatta dediğin gibi bir köşe noktasından kendisine de kenar çizebiliriz. Fakat biz çoğunlukla basit veya yalın çizge adı verilen yani bir köşe noktasından kendisine kenarı olmayan, iki köşe noktası arasında en fazla bir kenarı olan, kenarları yönlendirilmemiş ve sonlu sayıda köşe noktası olan çizgelerle çalışacağız.

Adı basit çizge ama tanımı hiç de basit değilmiş. Hocam bu çizgeler başka nerelerde kullanılır? Benim aklıma nedense hiç örnek gelmiyor.

Şekil 5.3: İstasyonlar ve bu istasyonları birleştiren hatlarla bir metro sistemi de bir çizge oluşturur.

Gökçe, çizgeler biz farkında olmasak da günlük hayatımızın hemen her alanında kullanılır. Daha sonra birçok örnek vereceğiz. Şimdilik birkaç basit örnek verelim.

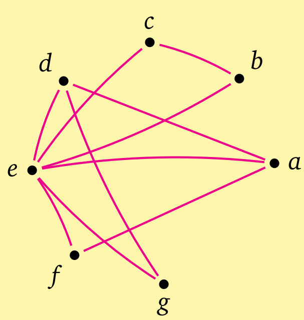


Şekil 5.4: Sekiz takımlı bir futbol liginde birbirleriyle en az bir kez karşılaşan takımları gösteren çizge.

Mesela 8 takımdan oluşan bir futbol ligini düşünelim. Lig başladıktan birkaç hafta sonra, diyelim ki üç hafta sonra, bu takımlardan bazıları birbirleriyle karşılaşacak, bazıları ise daha karşılaşmamış olacaktır. İşte köşe noktaların kümesini futbol takımları, kenarların kümesini de birbirleriyle en az bir kez karşılaşan takımlara karşılık gelen köşe noktaları arasına çizeceğimiz çizgiler olarak alırsak, bir çizge elde ederiz (Şekil 5.4).

Yani, iki futbol takımı birbiriyle en az bir kez karşılaşmışsa, bu iki takımı temsil eden noktalar arasına bir çizgi çiziyoruz.

O zaman çizgeye bakıp hemen birbirleriyle en az bir kez karşılaşan ve henüz karşılaşmamış takımları söyleyebiliriz. Örneğin, a köşe noktası ile gösterilen futbol takımı, b, c ve d ile gösterilen futbol takımlarıyla karşılaşmışken, e, f, g ve h ile gösterilen futbol takımlarıyla daha karşılaşmamış.



Şekil 5.5: Yedi kişinin bulunduğu bir davette birbirleriyle tokalaşan kişileri gösteren çizge.

Bir başka örnek verecek olursak: Yedi kişilik bir davette birbirleriyle tokalaşan kişiler de bir çizgeyle kolayca gösterilebilir. Köşe noktalarının kümesi davete katılanlar, kenarların kümesi de birbirleriyle tokalaşmış iki kişi arasına çizilen çizgiler (Şekil 5.5).

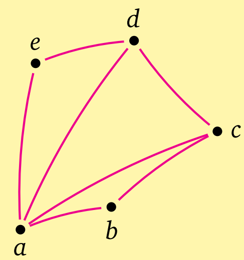
Hocam e ile gösterilen kişi oldukça önemli birisi galiba. Baksanıza herkes onunla tokalaşmış.

Çok güzel Selçuk, çizgeye bakıp birçok yorum yapılabilir. Pınar Hoca'nın tokalaşma ile ilgili örneğini düşünelim. Herkesin kaçar kişi ile tokalaştığını hemen söyleyebiliriz.

Elbette! Her bir köşe noktasından kaç tane kenar çıktığını belirlersek, köşe noktalarına karşılık gelen kişilerin de kaç kişi ile tokalaştığını belirlemiş oluruz.

Çok güzel söyledin Zeynep. Aslında bir köşe noktasından çıkan kenar sayısına o köşe noktasının derecesi denir. Tokalaşma örneğindeki köşe noktalarına bakarsak, a köşe noktasının derecesi 3 iken, e köşe noktasının derecesi 6 olur. Çizgedeki bir u köşe noktasının derecesi $\mathrm{d}(u)$ şeklinde gösterilir. Bu gösterimi kullanırsak yine tokalaşma örneğine göre a köşe noktasının derecesi $\mathrm{d}(a) = 3$ ve e köşe noktasının derecesi de $\mathrm{d}(e) = 6$ olur.

Futbol ile ilgili verilen çizgeye bakarsak da $\mathrm{d}(e) = 2$ ve $\mathrm{d}(f) = 3$ olur.



Şekil 5.6: a köşe noktasından çıkan kenar sayısı 4 olduğundan a köşe noktasının derecesi 4, b ve e köşe noktalarının derecesi 2, c ve d köşe noktalarının derecesi ise 3 olan bir çizge örneği.

Peki arkadaşlar Pınar Hoca'nın tokalaşma örneğine geri dönersek, çizgeye bakıp toplam kaç tokalaşma olmuştur söyleyebilir misiniz?

Çok kolay! Bütün köşe noktalarının derecelerini toplarsak toplam kaç tokalaşma olmuştur buluruz.

$$\mathrm{d}(a)+\mathrm{d}(b)+\mathrm{d}(c)+\mathrm{d}(d)+\mathrm{d}(e)+\mathrm{d}(f)+\mathrm{d}(g)$$
$$=3+2+2+3+6+2+2=20$$

olduğundan 20 tokalaşma olmuştur.

Teorem (**El Sıkışma Teoremi**) Bir çizgedeki tüm köşe noktalarının dereceleri toplamı çizgedeki kenar sayısının iki katına eşittir.

Engin hatalı düşünüyorsun. Tüm köşe noktalarının derecelerini toplamak yerine sadece kenarları saysan sonucu doğru bulurdun. Eğer köşe noktalarının derecelerini toplarsan sanki e kişisi ile f kişisinin tokalaşması ile, f kişisi ile e kişisinin tokalaşması farklıymış gibi iki kere saymış olursun. Halbuki kenarları saysaydın kenarlar kümesi $E = \{ad, ae, af, bc, be, ce, de, dg, ef, eg\}$ olduğundan 10 tokalaşma olduğunu görürdün.

Böylece çizge kuramının önemli sonuçlarından birine ulaşmış olduk. Bir çizgedeki tüm köşe noktalarının derecelerinin toplamı çizgedeki kenar sayısının iki katına eşittir.

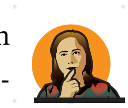
Bir çizgedeki tüm köşe noktalarının derecelerinin toplamı çift sayıdır.

O zaman bir çizgedeki tüm köşe noktalarının derecelerinin toplamı çift sayıdır.

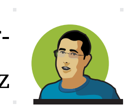
Hatta şunu da söyleyebiliriz. Madem tüm köşe noktaların derecelerinin toplamı çift sayı, herhangi bir çizgede derecesi tek olan köşe noktalarının sayısı da çift olmak zorundadır. Gerçekten de derecesi tek olan noktalardan tek sayıda olsaydı, bunların derecelerinin toplamı tek sayı olurdu. Diğer yandan dereceleri çift olan köşe noktalarının derecelerinin toplamı çift sayıdır. Ancak tek ve çift sayıların toplamı tek edeceğinden, bütün köşe noktalarının derecelerinin toplamı bir tek sayı olurdu. Oysa böyle olmadığını, bu toplam derecenin çift olduğunu biliyoruz.

Bir çizgede derecesi tek olan köşe noktalarının sayısı çifttir.

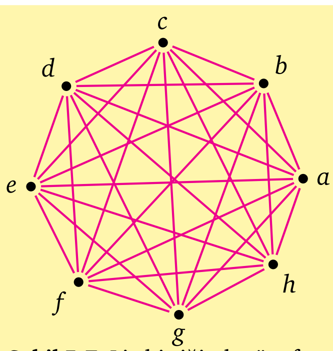
Çok güzel arkadaşlar! Şimdi söyler misiniz, sadece 6 kişinin katıldığı bir davette, davete katılanlardan üçünün ikişer, üçünün de üçer kişi ile tokalaşması mümkün müdür?



Yani, 6 köşe noktası olan bir çizgenin tüm köşe noktalarının dereceleri 2, 2, 2, 3, 3 ve 3 olabilir mi diye soruyorsunuz. Derecesi tek sayı olan üç tane köşe noktası var. Oysa derecesi tek sayı olan çift sayıda köşe noktası olması gerekiyordu. Yani böyle bir durum mümkün olamaz.

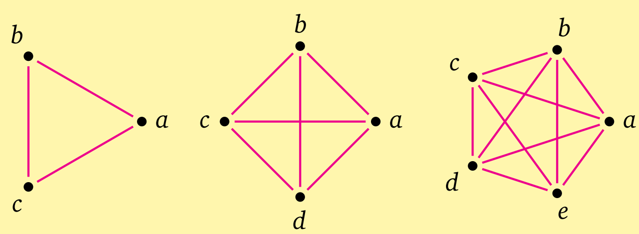


Hocam benim aklım futbol takımları ile ilgili verdiğiniz örnekte kaldı. Lig bittiğinde bütün takımlar birbirleriyle en az bir kez karşılaşmış olacaklar. O zaman bu takımları temsil eden tüm köşe noktaları arasında bir kenar olmayacak mı?



Şekil 5.7: Lig bittiğinde tüm futbol takımları birbirleriyle karşılaşmış olacağından K_8 tam çizgesi elde edilir.

Haklısın Selçuk, tüm köşe noktaları arasında bir kenar olacak. Aslında bir çizgenin herhangi iki köşe noktası arasında bir kenar varsa, bu tür çizgelere tam çizge denir. Köşe noktalarının sayısı n olan bir tam çizge K_n simgesiyle gösterilir.

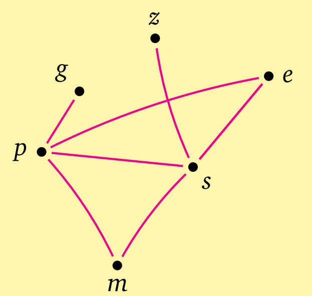


Şekil 5.8: K_3, K_4 ve K_5 tam çizgeleri.

Pınar Hocam konular zorlaşıyor, acaba toplanıp sizde mi çalışsak. Baksanıza, Zeynep hariç herkesin size tek otobüsle gelmesi mümkün.

Neden olmasın Selçuk. Ne de olsa Zeynep hariç hepinizle komşuyuz. Evlerimiz yan yana olmasa da bizim durumu yansıtan çizgeye göre (Şekil 5.9) komşuyuz.

Bir çizgenin u ve v gibi iki köşe noktası arasında bir kenar varsa, bu noktalara komşu noktalar denir. Buna göre Şekil 5.9 ile verilen çizgede p köşe noktasının komşu noktaları e, g, s ve m iken, m köşe noktasının komşu noktaları p ve s olur.

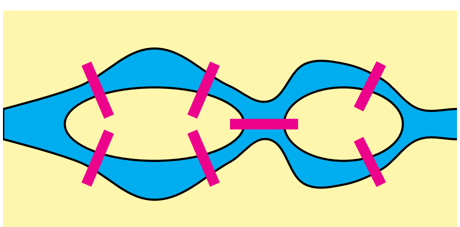


Şekil 5.9: Kişilerin evlerini ve bu evler arasında tek otobüs ile ulaşımın mümkün olup olmadığını gösterir diyagram.

Königsberg Köprüleri

Arkadaşlar, çizge kuramına ait belki de en eski sonuç 18. yüzyılda Leonhard Euler tarafından keşfedilmiştir. Bu sonuç Königsberg (şimdiki adıyla Kaliningrad)'de yaşayan halkın ortaya attığı bir soru üzerine elde edilmiştir.

Königsberg şehri, Pregel nehrinin kolları ile dört farklı bölgeye ayrılmaktaydı ve nehrin üzerinde yer alan yedi köprüyle de bu bölgeler birbirine bağlanmaktaydı (Şekil 5.10).

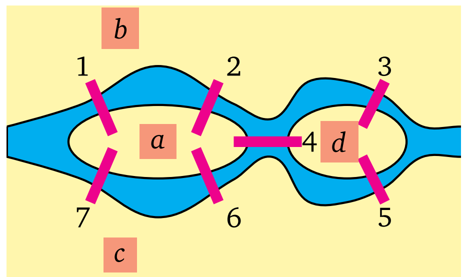


Şekil 5.10: Pregel nehrinin Königsberg'de ayırdığı bölgeleri ve bu bölgeleri birbirine bağlayan köprüleri gösteren kroki.

Gökçe, söyle bakalım. Her köprüden bir kez geçerek bu şehirde bir gezinti yapmak mümkün mü?

Tüm köprülerden geçilecek, ama sadece bir kez... Hocam hemen söyleyemeyeceğim, birkaç deneme yapmam lazım.

Gökçe istersen işleri kolaylaştırmak için bölgeleri a, b, c, d şeklinde, köprüleri de $1, 2, \ldots, 7$ diye adlandıralım (Şekil 5.11).



Şekil 5.11: Pregel nehrinin Königsberg'de ayırdığı bölgelerin ve nehrin üzerindeki köprülerin adlandırılışı.

O zaman a bölgesinden başlıyorum ve 4 numaralı köprüyü kullanarak d bölgesine geçiyorum. Sonra, 5 numaralı köprüden c bölgesine geçiyorum. Şimdi de 6 numaralı köprüyü kullanarak tekrar a bölgesine geliyorum. Şimdi kesinlikle 7 numaralı köprüyü kullanmamalıyım aksi halde c bölgesiyle bağlantılı tüm köprüleri kullandığım için c bölgesinde sıkışır kalırım. Bu yüzden 2 numaralı köprüyle b bölgesine geçiyorum. Şimdi ya 1 ya da 3 numaralı köprüyü kullanmalıyım. Eğer 3 numaralı köprüyü kullanırsam d bölgesiyle bağlantılı tüm köprüler kullanılmış olacağından d bölgesinde sıkışıp kalacağım. O yüzden 1 numaralı köprü ile a bölgesine geçiyorum. a bölgesiyle bağlantılı kullanılmayan tek köprü 7 numaralı köprü olduğu için 7 numaralı köprü ile c bölgesine geçiyorum. Bu durumda c bölgesi ile bağlantılı tüm köprüler kullanıldığından ve her köprü bir kez kullanılacağı için c bölgesinden çıkmak mümkün değil. Ne yazık ki 3 numaralı köprü hiç kullanılmamış oldu.

$$a \xrightarrow{4} d \xrightarrow{5} c \xrightarrow{6} a \xrightarrow{2} b \xrightarrow{1} a \xrightarrow{7} c$$

Yok hocam ben bulamayacağım.

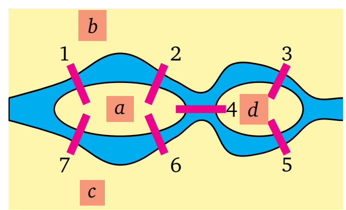
Gökçe yanlış yerden başlarsan tabii bulamazsın. Bak şimdi, ben nasıl bulacağım. Ben c bölgesinden başlıyorum ve 5 numaralı köprüyle d bölgesine geçiyorum. Sonra 4 numaralı köprüyle a bölgesine geliyorum. Daha sonra 2 numaralı köprüyle b bölgesine, buradan 3 numaralı köprüyle de d bölgesine ve... Eyvah! d bölgesinin tüm köprülerini kullanmışım. d bölgesinde hapis kaldım.

$$c \xrightarrow{5} d \xrightarrow{4} a \xrightarrow{2} b \xrightarrow{3} d$$

Hocam ben de bulamadım. En iyisi cevabı siz söyleyin. Hangi yolu takip edeceğiz?

Arkadaşlar aslında böyle bir gezintinin yapılması mümkün değil. Mete Hoca sizi biraz uğraştırdı ama başka türlü de problem bu kadar anlaşılır hale gelmezdi. Şimdi neden böyle bir gezinti yapmanın mümkün olmadığını anlamaya çalışalım. Böyle bir gezinti var olsa ve a bölgesinden başlamasa bu gezinti mutlaka a bölgesine uğrayacak değil mi?

Evet hocam uğramak zorunda. Her köprüden bir kez geçileceğine göre ve a bölgesiyle bağlantılı beş tane de köprü olduğuna göre bu gezinti a bölgesine uğramalı.



Zeynep çok güzel. O zaman a bölgesinden başlamayan ve her köprüden bir kez geçen bu gezinti mutlaka a bölgesine uğrayacak.

Şimdi a bölgesiyle bağlantılı beş köprüden birini a bölgesine gelmek için kullandık. Diğer dört köprünün de kullanılması gerekeceğine göre biriyle a bölgesinden ayrılacağız, kalanlardan biriyle tekrar a bölgesine geleceğiz, tekrar ayrılacağız ve tekrar geldiğimizde a bölgesiyle bağlantılı tüm köprüleri kullanmış olacağız.

O zaman a bölgesinden başlamayan ve her köprüden bir kez geçen bir gezinti varsa bu gezinti a bölgesinde bitmeli.

Ama hocam bir hata olmalı. Sizin mantığınıza göre b bölgesinden başlamayan ve her köprüden bir kez geçen bir gezinti de mutlaka b bölgesine gelmeyecek mi? b bölgesiyle bağlantılı olan üç köprü var. Birisini b bölgesine ulaşmak için kullandık. Diğer ikisiyle de b bölgesinden ayrılıp, tekrar b bölgesine geleceğiz. Başka da köprü olmadığından b bölgesinde durmak zorundayız.

Yani, b bölgesinden başlamayan ve her köprüden bir kez geçen bir gezinti b bölgesinde biter.

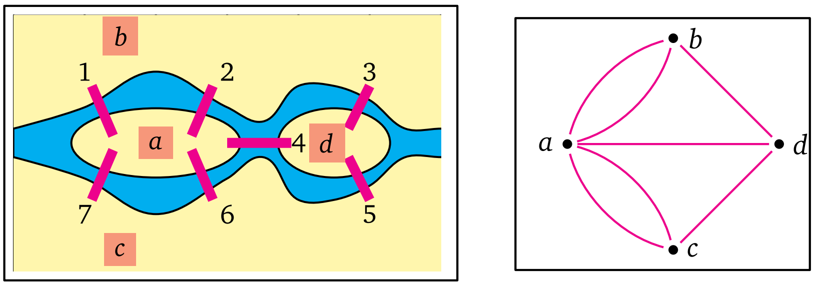
Selçuk aynısı c bölgesi için de oluyor. Yani, c bölgesinde başlamayan ve her köprüden bir kez geçen bir gezinti c bölgesinde bitiyor. Bu sefer Pınar Hoca hatalı galiba.

Arkadaşlar sizi tebrik ediyorum. Çok güzel bir keşif yaptınız, gerçekten de a bölgesinden başlamayan böyle bir gezinti a bölgesinde bitmeli. Aynı zamanda b bölgesinden başlamayan bu şekildeki bir gezinti b bölgesinde de bitmeli. Hatta, c bölgesinden başlamayan bu tür bir gezinti c bölgesinde de bitmeli. Kontrol etmek hiç de zor değil aynı şekilde d bölgesinden başlamayan böyle bir gezinti d bölgesinde de bitmelidir. Bunun sebebi her bölge ile bağlantılı olan köprülerin sayısının tek olmasıdır.

O zaman, örneğin, b bölgesinden başlayan bu tür bir gezinti hem a, hem c hem de d bölgesinde bitmeli. Bu ise olanaksız. Buradan çıkaracağımız sonuç böyle bir gezintinin mümkün olmadığıdır.

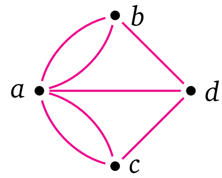
Peki hocam başka bir şehir verilse ve böyle bir gezinti var mıdır diye sorulsa, vardır ya da yoktur demenin daha kolay bir yolu yok mu?

Var tabii Selçuk. Bunun için önce bu konunun çizgelerle olan ilişkisini verelim. Verilen krokideki bölgeleri köşe noktaları, bölgeler arasındaki köprüleri de kenarlar olarak düşünürsek bir çizge elde ederiz (Şekil 5.12).



Şekil 5.12: Pregel nehrinin Königsberg'de ayırdığı bölgeleri gösteren kroki ve bu krokiye karşılık gelen çizge.

Şimdi gezintimizi çizgenin kenarlarını kullanarak bu çizge üzerinde yapabiliriz. Örneğin, a köşe noktasından d köşe noktasına bu iki noktayı birleştiren kenar üzerinden gidip sonra da d köşe noktasından c köşe noktasına bu köşe noktalarını birleştiren kenar üzerinden gidersek, a köşe noktasından c köşe noktasına $a \to d \to c$ şeklinde bir gezinti yapmış oluruz.



O zaman her köprüden bir kez geçen bir gezinti aramak yerine her kenardan bir kez geçen bir gezinti arayacağız.

Güzel! Şimdi çizgede her kenardan bir kez geçen bir gezinti olsa ve bu gezinti nereden başlarsa başlasın bir köşe noktasına gelip, bu köşe noktasından ayrılsa, bu köşe noktasından çıkan kenarlardan ikisini kullanmayacak mı? Hatta bu köşe noktasından çıkan çok sayıda kenar varsa, gezinti bu köşe noktasına çok defa uğrayıp ayrılabilir. O zaman bir köşe noktasına gelip, bu köşe noktasından ayrılmak için her seferinde bu köşe noktasından çıkan iki yeni kenara ihtiyacımız var. Bir köşe noktasından çıkan kenar sayısına bu köşe noktasının derecesi demiştik. O halde gezintide uğrayıp ayrıldığımız tüm köşe noktalarının derecelerinin çift sayı olduğunu söyleyebiliriz.

Peki hocam ya uğrayıp da oradan ayrılmıyorsak? Yani, gezintinin bittiği köşe noktaları ne olacak? Onların da dereceleri tek sayı mı olmalı?

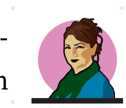
Selçuk eğer gezintinin bittiği köşe noktası gezintinin başladığı köşe noktasından farklıysa, evet, gezintinin bittiği köşe noktasının derecesi tek sayı olmalıdır.

Şöyle düşünelim: Köşe noktasına geldik ve ayrılabileceğimiz bir başka kenar daha olmadığından durduk. Yani köşe noktasından ayrılmadığımız için, köşe noktasının kenarlarından birini kullandık. Bu durumda ister daha önce bu noktaya gelip bu noktadan ayrılmış olalım, ister ilk kez bu noktaya geliyor olalım, bu noktanın derecesi tek sayı olur.

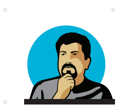
Aynı şey gezintinin başladığı köşe noktası için de geçerlidir. Gezintinin başladığı köşe noktası gezintinin bittiği köşe noktasından farklıysa onun da derecesi tek sayı olmalıdır.

Eğer gezintinin başladığı köşe noktası ile gezintinin bittiği köşe noktası aynı ise, bu köşeden her çıktığımızda tekrar dönmek zorunda olduğumuzdan bu köşenin de derecesi çift sayı olmalıdır. Yani bu durumda çizgenin tüm köşe noktalarının derecesi çift sayı olur.

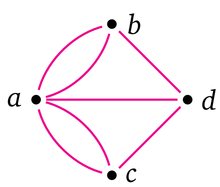
Hocam doğru anladıysam “çizgede her kenardan bir kez geçen bir gezinti varsa ve bu gezintinin başlangıç ve bitiş noktaları farklıysa o zaman başlangıç ve bitiş noktaları hariç tüm noktaların dereceleri çift sayı, sadece başlangıç ve bitiş noktalarının dereceleri tek sayıdır” diyorsunuz.



Selçuk, Mete Hoca sadece bunu söylemiyor, “eğer bu gezintinin başlangıç ve bitiş noktaları aynı ise o zaman çizgenin tüm noktalarının dereceleri de çift sayıdır” diyor.



Evet, demek ki bir çizgede her kenardan bir kez geçen bir gezinti varsa, iki durum söz konusu olabilir: Ya bütün köşe noktalarının derecesi çifttir, ya da sadece iki köşe noktasının derecesi tek olup, diğerlerinin dereceleri çifttir. Bu durumda herhangi bir şehir için her köprüden bir kez geçen bir gezinti var mıdır diye sorulsa önce bu şehrin krokisine karşılık gelen çizgeyi oluşturacağız. Sonra da çizgenin köşe noktalarının derecelerine bakacağız. Eğer dereceleri tek olan köşe noktalarının sayısı ikiden fazlaysa, o zaman böyle bir gezintinin olamayacağını söyleyebiliriz.

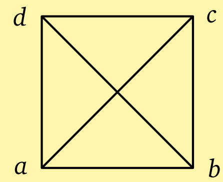


Şimdi Königsberg için oluşturduğumuz çizgeye tekrar bakın ve neden böyle bir gezintinin olmadığını bu anlattıklarımız yardımıyla tekrar ifade edin bakalım.

Hocam Königsberg şehrine karşılık gelen çizgeye göre a köşe noktasının derecesi 5, b köşe noktasının derecesi 3, c köşe noktasının derecesi 3 ve d köşe noktasının da derecesi 3 olur. Derecesi tek sayı olan köşe noktası ya iki tane olmalıydı ya da hiç olmamalıydı. Oysa burada dört köşe noktasının da derecesi tek sayı. O zaman bu çizgede dolayısıyla da bu şehirde istenen şekilde bir gezinti yapılamaz.

Bu argüman çok güzelmiş. Şimdi çocukken kapalı zarfı neden çizemediğimizi de anladım. Peki hocam, bir çizgede bütün köşe noktalarının derecesi çiftse veya sadece iki köşe noktasının derecesi tekse, o zaman her kenardan sadece bir kez geçen bir gezintinin olduğunu söyleyebilir miyiz?

Kapalı Zarf

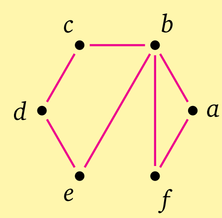


Şekil 5.13: Bu çizgede 4 köşe noktasının da dereceleri 3'tür. Dereceleri tek olan nokta sayısı ikiden fazla olduğuna göre, bu çizge her kenardan bir kez geçerek dolaşılamaz.

Evet Selçuk, bunu her ne kadar kanıtlamadıysak da öyle bir durumda gerçekten de her kenardan bir kez geçen bir gezintinin olduğu gösterilebilir.

Arkadaşlar ufak bir uyarı yapmakta da fayda var sanırım. Elbette bu anlattıklarımız tek parça olan çizgeler için geçerli. Yani, çizgenin keyfi iki köşe noktasını birleştiren bir gezinti mümkünse, bu sonuçlar geçerlidir. Ayrıca, bu problemde incelediğimiz çizgenin, iki köşe noktası arasında birden fazla kenar bulunduğundan, basit bir çizge olmadığına da işaret edeyim.

Peki arkadaşlar Şekil 5.14 ile verilen çizgede her kenardan bir kez geçen bir gezinti mümkün müdür?



Şekil 5.14: Çizgede her kenardan bir kez geçen bir gezinti var mıdır?

Hocam hemen çizgenin köşe noktalarının derecelerine bakalım:

Köşe Noktaları	a	b	c	d	e	f
Dereceleri	2	4	2	2	2	2

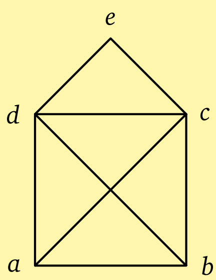
Tüm köşe noktalarının dereceleri çift sayı. O zaman her kenardan bir kez geçen bir gezinti vardır. Hem de başladığı yerde biter.

Çok güzel Engin. Örneğin bir gezintiyi şöyle yapabiliriz:

$$b \to a \to f \to b \to c \to d \to e \to b.$$

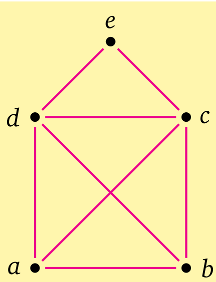
Hocam arkadaşlara bir soru da ben sorabilir miyim? Arkadaşlar açık zarfı kalemi kaldırmadan ve aynı çizginin üzerinden bir daha geçmeden çizebilir misiniz?

Açık Zarf



Şekil 5.15: Bu şekli çizdiğiniz çizginin üzerinden bir kez daha geçmeden ve kalemi kaldırmadan çizebilir misiniz?

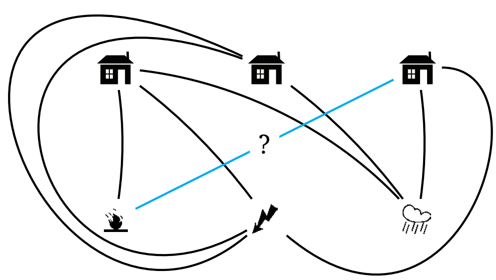
Zeynep ne var ki bunda? Şekli bir çizge gibi düşünsek sadece a ve b köşe noktalarının dereceleri tek sayı, diğerlerinin dereceleri ise çift sayı (Şekil 5.16). O zaman her kenardan bir kez geçerek, yani çizgilerin üzerinden bir kez geçerek şekli çizebiliriz. Hatta şekli çizmek için a veya b noktalarının birinden başlayıp diğerinde bitirmeliyiz.



Şekil 5.16: Sadece a ve b köşe noktalarının dereceleri tek sayı olduğundan Şekil 5.15 ile verilen şekil istendiği gibi çizilebilir.

Düzlemsel Çizgeler

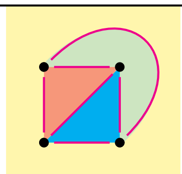
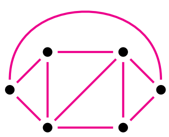
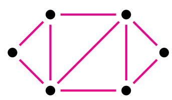
Arkadaşlar şimdi de gelin şu basit problemi inceleyelim: Şekil 5.17 ile verildiği gibi üç ev ve bu evlerin karşısında da doğal gaz, elektrik ve su kaynakları yer alsın. Her bir evi bu üç kaynağa da bağlamak istiyoruz ama tehlike yaratmasın diye bu bağlantıların birbirlerinin altından ya da üstünden geçmesini istemiyoruz. Bu bağlantılar yapılabilir mi?



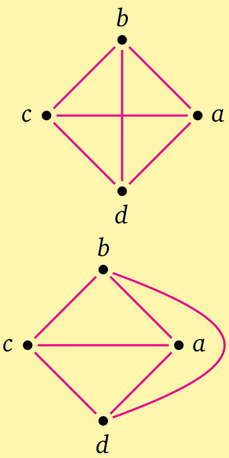
Şekil 5.17: Evler ve karşılarında yer alan doğal gaz, elektrik ve su kaynakları.

Pınar Hoca isterseniz bu sefer arkadaşları boşuna uğraştırmayalım. Arkadaşlar, evlerin bağlantılarının istenen şekilde yapılması mümkün değil. Neden mümkün değil anlatmadan önce birkaç kavramdan söz etmek lazım. Eğer bir çizge düzlemde kenarları birbiriyle kesişmeyecek şekilde çizilebiliyorsa, bu çizgeye düzlemsel çizge denir.

Şimdi bazı düzlemsel çizgeleri ele alalım. Bu çizgeler en dışarıda kalan bölge ile birlikte düzlemi bazı bölgelere ayıracaktır. Gelin bu bölgelerin sayılarına bakalım. Çizgenin belirlediği bu bölgelerin sayısını b ile gösterelim. Ayrıca çizgelerin kenar (ayrıt) sayısını a ve köşe noktalarının sayısını da k ile gösterelim.

		
$b = 4$, $a = 6$, $k = 4$	$b = 6$, $a = 10$, $k = 6$	$b = 5$, $a = 9$, $k = 6$
b: bölge, a: ayrıt (kenar), k: köşe		

Şekil 5.19: Bazı düzlemsel çizgeler ve düzlemde belirlediği bölgeler.



Şekil 5.18: K_4 tam çizgesini kenarları birbiriyle kesişmeyecek şekilde çizebildiğimizden K_4 düzlemsel bir çizgedir.

Bu çizgelerin düzlemde belirlediği bölgelerle, çizgelerin köşe noktalarının ve kenarlarının sayısı arasında bir bağıntı var. Bu bağıntıyı fark edebildiniz mi?

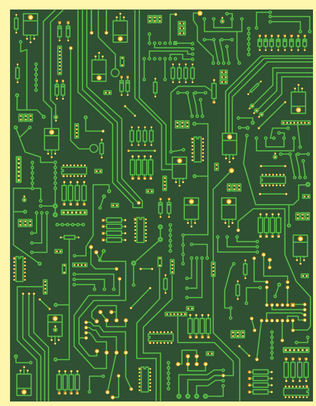
Hepsinde de bölgelerin sayısıyla köşe noktaların sayısını toplayınca kenar sayısından iki fazla çıkıyor.

Evet Selçuk, önceden bilmiyor idiysen, büyük bir gözlem yaptın. Böylece Euler formülü olarak adlandırılan formülü ifade etmiş oldun.

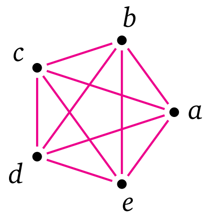
Teorem Düzlemsel tek parça bir çizgede çizgenin düzlemde belirlediği bölgelerin sayısıyla çizgenin köşe noktalarının sayısının toplamı, çizgenin kenar sayısından iki fazla olur. Yani

$$\text{bölge sayısı} + \text{köşe noktalarının sayısı} = \text{kenar sayısı} + 2$$

eşitliği geçerlidir.



Şekil 5.20: Düzlemsel çizgeler elektronik devre tasarımında önemli rol oynar.



Şekil 5.21: K_5 tam çizgesinin 10 kenarı vardır.

Mete Hocam, K_4 tam çizgesinin düzlemsel olduğunu söylediniz. Acaba tam çizgelerin hepsi düzlemsel mi? Mesela K_5 tam çizgesini de kenarları kesişmeyecek şekilde düzlemde çizebilir miyiz?

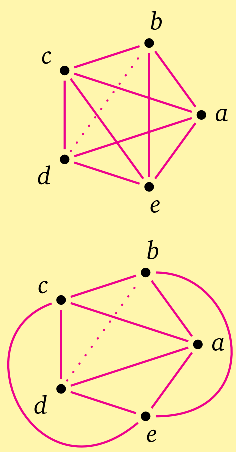
Engin, Euler formülünü kullanarak K_5 tam çizgesinin düzlemsel çizge olmadığını görebiliriz. Önce söyler misiniz K_5 tam çizgesinin kaç kenarı vardır?

Hocam K_5 tam çizgesinin 10 kenarı vardır. Nasıl buldun derseniz tek tek saydım.

Gökçe çok güzel. Ayrıca, K_5 tam çizgesinin 5 noktası olan tek parça bir çizge olduğunu da biliyoruz. Bu çizgenin 10 tane kenarı olduğunu da siz söylediniz. Eğer K_5 tam çizgesi düzlemsel bir çizgeyse Euler formülünü sağlamalı, öyle değil mi? Böylece

$$\text{bölge sayısı} + \text{köşe sayısı} = \text{kenar sayısı} + 2$$

yani $b + 5 = 10 + 2$ eşitliğinden bölge sayısı $b = 7$ olmalıdır.



Şekil 5.22: K_5 tam çizgesi düzlemsel değilken, K_5 tam çizgesinin bir kenarı çıkarılarak elde edilen çizge düzlemseldir.

Son olarak K_5 tam çizgesinin, düzlemsel olması durumunda, düzlemde belirlediği bölgeleri düşünelim. Her bölge için en az 3 kenar lazım. Diğer taraftan her kenar da 2 farklı bölgenin sınırını oluşturuyor. Yani, kenar sayısının iki katı en az bölge sayısının üç katı kadar olmalı. Bunu bir eşitsizlikle yazacak olursak, $2a \geq 3b$ ya da $a \geq \frac{3b}{2}$ elde ederiz.

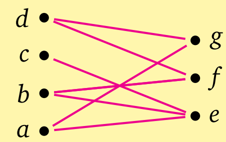
Ama Mete Hocam K_5 tam çizgesi için bulduğumuz sayıları bu eşitsizlikte yerine yazarsak, $10 \geq \frac{3 \cdot 7}{2}$ yani $10 \geq 10,5$ gibi hatalı bir sonuç çıkıyor.

Haklısın Selçuk. Demek ki K_5 tam çizgesinin düzlemsel bir çizge olmadığını buradan hemen söyleyebiliriz.

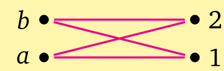
Ama K_5 tam çizgesinin bir kenarını çıkararak elde edilen çizge düzlemseldir (Şekil 5.22).

Hocam başta sorduğunuz problemin çözümünü anlatacaktınız. Neden evleri bağlantılar birbirleriyle kesişmeyecek şekilde bağlayamıyoruz?

Selçuk, evlerle ilgili çizdiğimiz çizge özel bir çizgedir. Bu tür çizgelere iki kümeli çizge denir. Tam bir tanım yapmak gerekirse bir çizgenin köşe noktaları, aynı kümenin herhangi iki köşe noktası arasında kenar olmayacak şekilde A ve B gibi iki kümeye ayrılabiliyorsa, bu tür çizgelere iki kümeli çizge denir (Şekil 5.23).

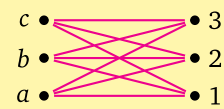


Şekil 5.23: $A = \{a, b, c, d\}$ ve $B = \{e, f, g\}$ olmak üzere iki kümeli bir çizge örneği.



Şekil 5.24: İki kümeli bir tam çizge. Bu çizge $K_{2,2}$ ile gösterilir.

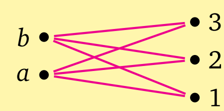
Şimdi K_5 tam çizgesinin düzlemsel olmadığını nasıl gördüysek aynı şekilde evlerle ilgili çizdiğimiz $K_{3,3}$ tam çizgesinin de düzlemsel olmadığını siz kendiniz görebilirsiniz. Bir yol gösterme yapacak olursam, bu durumda bölgeler üç değil en az dört kenar ile sınırlandırılıyor.



Şekil 5.25: İki kümeli bir tam çizge. Bu çizge $K_{3,3}$ ile gösterilir.

Hocam zor soruları da hep ödev olarak veriyorsunuz.

Selçuk madem öyle sana kolay bir soru sorayım. Bir küpün kaç yüzü, kaç ayrıtı ve kaç köşesi vardır?

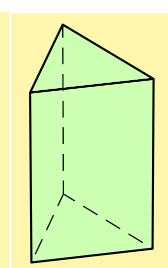


Şekil 5.26: İki kümeli bir tam çizge. Bu çizge $K_{2,3}$ ile gösterilir.

Gerçekten de beklediğimden kolay bir soru oldu. Küpün 6 yüzü, 12 ayrıtı ve 8 köşesi vardır.

Çok güzel. O zaman şimdi de kübün yüz sayısı ile köşe sayısını toplayınca ne çıkıyor?

Hemen toplayayım. $6 + 8 = 14$ oluyor. Yani, ayrıt sayısının iki fazlası çıkıyor. Bu bir kural mı yoksa tesadüf mü?



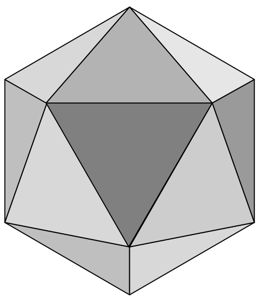
Şekil 5.27: Bir üçgen prizmanın 5 yüzü, 9 ayrıtı ve 6 köşesi vardır.

Bir üçgen prizma alsak, 5 yüzü, 9 ayrıtı ve 6 köşesi var. Yine yüzlerinin sayısı ile köşe sayısını toplayınca ayrıt sayısının iki fazlası çıkıyor.

Şekil 5.28: 1970 yılında Meksika'da oynanan dünya kupasının resmi topu.

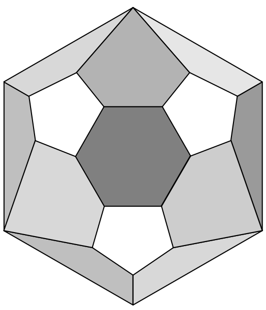
Arkadaşlar, prizma, piramit gibi hangi konveks çokyüzlü cismi alırsanız alın, yüzlerinin sayısı ile köşelerinin sayısının toplamı ayrıtlarının sayısının iki fazlasını verir. Yani Euler'in formülünü "yüzlerin sayısı+köşelerin sayısı = ayrıtların sayısı+2" şeklinde de ifade edebiliriz.

Mete Hocam siz daha iyi bilirsiniz. Şimdi üzerine çeşitli desenler yapsalar da eskiden futbol topları beyaz altıgenler ve siyah beşgenlerden oluşuyordu. Bu topların ayrıt sayılarını da bu formülle bulabilir miyiz?



Şekil 5.29: Düzgün 20 yüzlü.

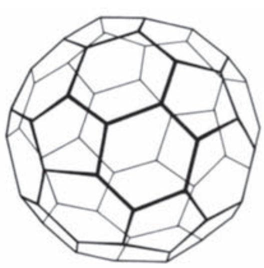
Selçuk aslında futbol topu bir düzgün 20 yüzlünün köşeleri uygun şekilde kesilerek elde edilebilir. Bu durumda senin de dediğin gibi 12 düzgün beşgen ve 20 düzgün altıgen ortaya çıkar. Bu cismin $12+20=32$ yüzü olduğunu biliyoruz. Ayrıca 60 köşesi olduğunu bulmak da çok zor değil. Köşeleri traşlarken 12 köşenin herbiri 5 köşe doğurdu. O zaman Euler formülünden $32+60=a+2$ yazıp, ayrıt sayısının 90 olduğunu bulabiliriz.



Şekil 5.30: 3 Köşesi kesilmiş yirmiyüzlü.

Çizgeleri Boyamak

Selçuk nasıl gidiyor senin akvaristlik?



Şekil 5.31: 12 düzgün beşgen ve 20 düzgün altıgenden oluşan bir futbol topu.

Hayırlı olsun Selçuk. Artistliğe mi başladın? Hiç de haberimiz olmadı.

Gökçe artistlik değil, akvaristlik! Yani akvaryumculuk.

Mete Hocam akvaryumculuk iyi gidiyor. Akvaryumumda Malavi Gölü'ne özgü Sarı Prenses (Labidochromis caerulus) türü balıklar var. Daha fazla çeşit balık yetiştirmek isterdim ama çoğu tür aynı akvaryumda birbirleriyle uyumlu yaşamıyor. Bende de bir akvaryum olduğundan sadece bir çeşit balık yetiştirip balıkları riske atmak istemedim.

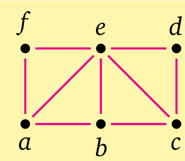
O zaman arkadaşlar gelin Selçuk'a yardım edelim. Diyelim ki 6 çeşit balık yetiştirmek istiyoruz. Bu balık türlerinin birbirleriyle uyumları da Tablo 5.1 ile verilmiş olsun. Söyleyin bakalım: Balıkların birbirleriyle uyum içinde yaşayabilmesi için en az kaç akvaryuma ihtiyacımız var?

	a	b	c	d	e	f
a	✓	×	✓	✓	×	×
b	×	✓	×	✓	×	✓
c	✓	×	✓	×	×	✓
d	✓	✓	×	✓	×	✓
e	×	×	×	×	✓	×
f	×	✓	✓	✓	×	✓

Tablo 5.1: Altı çeşit balık ve bu balıkların birbirleriyle uyumunu gösteren tablo (✓: uyumlu, ×: uyumsuz).

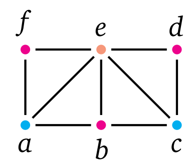
Konumuz çizgeler olduğuna göre soruyu bir şekilde çizgelerle ilişkilendirmemiz lazım. Bence balıklar kesinlikle çizgenin köşe noktaları olacak. Ama kenarlar?

Zeynep, ben yardımcı olayım. Eğer iki balık türü uyumlu değilse, bu balık türlerine karşılık gelen köşe noktaları arasına bir çizgi çizelim. Böylece bir çizge elde etmiş oluruz (Şekil 5.32).



Şekil 5.32: Tablo 5.1 ile verilen durumu temsil eden çizge.

Şimdi balıklarımızı akvaryumlara yerleştirmeye başlayalım. İlk akvaryumumuza mavi akvaryum diyelim ve a köşe noktasıyla gösterdiğimiz balığı bu mavi akvaryuma koyalım.

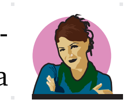


Şekil 5.33: Şekil 5.32 ile verilen çizgenin komşu köşe noktaları farklı renklerde olacak şekilde boyanmış hali.

Bu mavi akvaryuma a köşe noktasının komşularını koyamayız. Çünkü a köşe noktasının komşuları a köşe noktasının temsil ettiği balıkla uyumlu olmayan balıkları gösteriyor.

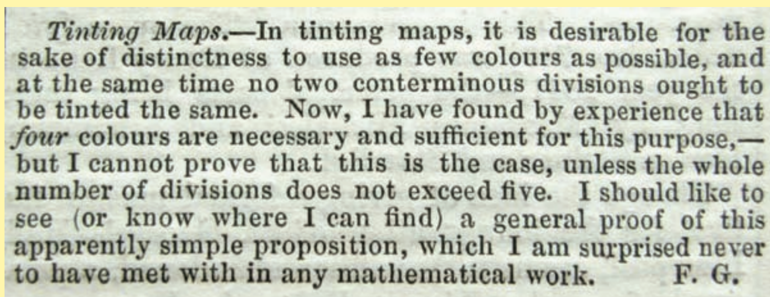
Çok güzel! Böylece çizgenin tüm köşe noktalarını komşu noktalar farklı olacak şekilde boyarsak problemi çözmüş oluruz. Elbette altı farklı renk ile her bir noktayı farklı renge boyamak, yani her bir balık türünü ayrı bir akvaryuma koymak da mümkün. Ama biz akvaryum sayısının en az olduğu çözümü arıyoruz.

Çizgemizin köşe noktalarını komşu noktalar farklı renklerde olacak şekilde üç renk kullanarak boyayabiliriz. Tabii hemen sorabilirsiniz, iki renk kullanarak da boyayamaz mıyız diye. Çizgede üçgenler olduğuna ve komşu köşe noktalar farklı renklerde olacağına göre iki renk yeterli olmaz (Şekil 5.33).



O zaman sadece üç akvaryum yeterli. a ve c balıkları bir akvaryumda, b, d ve f balıkları diğer akvaryumda, e balığı da kendi başına bir başka akvaryumda. . .

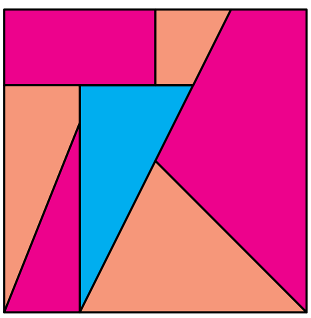
Çizgeleri böyle boyamak kimin aklına geldiyse gerçekten bravo!



Tinting Maps.—In tinting maps, it is desirable for the sake of distinctness to use as few colours as possible, and at the same time no two conterminous divisions ought to be tinted the same. Now, I have found by experience that *four* colours are necessary and sufficient for this purpose,—but I cannot prove that this is the case, unless the whole number of divisions does not exceed five. I should like to see (or know where I can find) a general proof of this apparently simple proposition, which I am surprised never to have met with in any mathematical work. F. G.

Harita Boyama.—Harita boyamada, mümkün olduğunca az renk kullanarak farklılaştırma arzu edilirken aynı zamanda da bitişik olan bölümlerin aynı renkte olması istenmez. Deneyerek bu amaç için gerekli ve yeterli renk sayısının dört olduğunu buldum ancak bunu bölge sayısı beşi geçen durumlar için kanıtlayamıyorum. Bu görünüşte basit ve herhangi bir matematiksel çalışmada karşılaşmadığıma şaşırdığım önermenin genel bir kanıtını görmek (ya da nerede bulabileceğimi bilmek) istiyorum. F.G.

Şekil 5.34: 10 Haziran 1854 tarihli *Athenæum* dergisinde yayımlanan bir mektup.

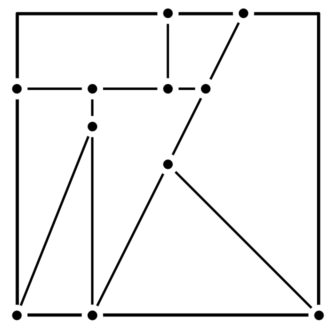


Şekil 5.35: Ortak sınırı olan ülkelerin farklı renklerde olduğu bir harita.

Engin aslında bu boyama meselesi çizgelerden önce haritaları boyamakla başlamış. Bilirsiniz, siyasi haritalarda komşu ülkeler farklı renklerde gösterilir. Francis Guthrie adlı bir matematikçi 1850'li yıllarda haritaların komşu ülkeler farklı renklerde olacak şekilde sadece dört renk kullanılarak boyanabileceği tezini ortaya atmış. Dört Renk Problemi olarak bilinen bu problem uzunca bir süre matematiğin çözülemeyen problemleri arasında kalmış. Ancak 1976 yılında Kenneth Appel ve Wolfgang Haken isimli matematikçiler bilgisayarın da yardımıyla bu iddiayı kanıtladılar.

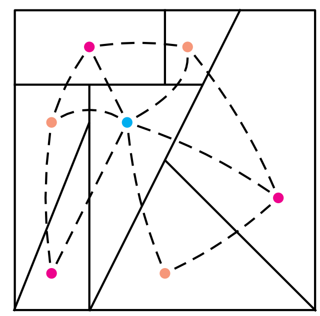
İyi de hocam haritayla çizge arasında ne ilişki var?

Selçuk birincisi, haritayı bir çizge gibi de düşünebiliriz: Sınırların kesişim noktaları çizgenin köşe noktaları, sınır çizgileri de çizgenin kenarları (Şekil 5.35 ve Şekil 5.36). İkinci olarak, siyasi bir ülkeler haritası alalım ve her ülkeden (bölgeden) bir şehir seçelim. Mesela başkentleri seçebiliriz. Sonra, ortak sınırı olan ülkelerin başkentlerini sınırı bir kez kesecek şekilde bir çizgiyle birleştirelim. Bu çizgiyi de başkentler arasındaki bir demiryolu gibi düşünebilirsiniz.



Şekil 5.36: Şekil 5.35 ile verilen haritaya karşılık gelen çizge.

Böylece köşe noktaları ülkelerin başkentleri, kenarları da bu başkentler arasındaki demiryolları olan yeni bir düzlemsel çizge elde ederiz. Bu çizgeye haritayı temsil eden çizgenin eşlek (dual) çizgesi denir (Şekil 5.37).



Şekil 5.37: Şekil 5.36 ile verilen çizgenin eşlek çizgesi.

O zaman eşlek çizgeyi komşu noktalar farklı olacak şekilde boyayabilirsek, haritayı da komşu ülkeler farklı olacak şekilde boyamış oluruz.

Haritayı boyamak zor da çizgeyi boyamak kolay mı? Neden haritayı çizgeye dönüştüreceğiz diye uğraşıyoruz?

Selçuk elimizde çizgeler için çok kullanışlı bazı sonuçlar var. Mesela, bir çizgenin tüm köşe noktalarının derecesi en fazla d ise bu çizgenin köşe noktalarını komşu noktalar farklı renklerde olacak şekilde $d + 1$ renk ile boyayabiliriz.

Teorem (Brook, 1941) Bir çizgenin tüm köşe noktalarının derecesi en fazla d ise bu çizgenin köşe noktaları, komşu noktalar farklı renklerde olacak şekilde $d + 1$ renk ile boyanabilir.

En önemlisi az önce de sözünü ettiğimiz Dört Renk Teoremi: Her düzlemsel çizgenin köşe noktaları komşu noktalar farklı renklerde olacak şekilde dört renkle boyanabilir.

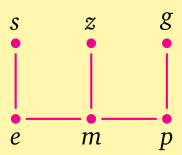
Teorem (4–Renk) Her düzlemsel çizgenin köşe noktaları komşu noktalar farklı renklerde olacak şekilde dört renkle boyanabilir.

Ağaçlar

Hocam elektrik direkleri ve bu elektrik direkleri arasındaki teller de bir çizge oluşturur değil mi?

Elbette Gökçe, direkler çizgenin köşe noktaları, bu direkler arasındaki teller de çizgenin kenarları olarak düşünülebilir.

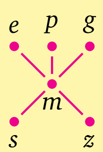
Peki Gökçe diyelim ki bizler evlerimiz arasında özel bir haberleşme ağı kurmak istiyoruz. Bunun için de evlerimiz arasına kablo döşeyeceğiz. Bu durumu yansıtan çizgelerden birkaç tanesini çizebilir misin?



Şekil 5.38: Evler ve evler arasındaki kablo bağlantılarını gösteren bir çizge.

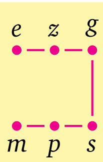
Elbette çizebilirim. Yine hepimizin evini çizgenin köşe noktaları olarak düşünelim. Ayrıca bir evden bir eve kablo döşendiyse bu evleri temsil eden köşe noktaları arasına bir kenar çizelim.

Ama herkes birbiriyle haberleşebilmeli. Yani çizgenin keyfi iki köşe noktasını birleştiren bir gezinti var olmalı. Bir başka ifadeyle çizge tek parça olmalı. Bir de fazladan para harcamamak için bir ev zaten haberleşme ağına bağlandıysa tekrar ikinci bir bağlantıyla ağa bağlanmamalı. O zaman ortaya çıkacak çizge Şekil 5.38 ile verilen gibi olmalıdır.



Şekil 5.39: Evler ve evler arasındaki kablo bağlantılarını gösteren çizge.

Zeynep neden senin çizdiğin gibi olsun ki? Şekil 5.39 ile verilen gibi de olabilir.



Şekil 5.40: Evler ve evler arasındaki kablo bağlantılarını gösteren çizge.

Gökçe, Mete Hoca'yı merkeze yerleştirip fazladan not alacağını sanıyorsan yanılıyorsun. Çizge pekala Şekil 5.40 ile verilen gibi de olabilir.

Bravo arkadaşlar aslında hepiniz doğru cevap verdiniz. İşte bu tür tek parça çizgelere ağaç denir. Ağaçlar özel tipte çizgelerdir. Ağaçlar üzerinde, kenarlar en fazla bir kez kullanarak yapılan gezintilerde başlangıç noktası bitiş noktasıyla aynı olmaz. Yani, gezintiye başladığınız yere geri dönemezsiniz.

İsterseniz, bir çizgede kullandığı kenarı bir daha kullanmayan ve başladığı yere geri dönen gezintilere kısaca döngü diyelim. Bu durumda ağacı döngü bulundurmayan tek parça çizge şeklinde tanımlayabiliriz.

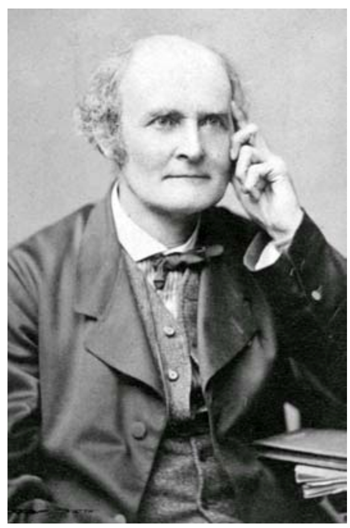
Hocam o zaman çizgenin bir noktasından diğer bir noktasına iki farklı gezinti varsa bu çizgede bir döngü vardır diyebilir miyiz?

Elbette diyebiliriz Zeynep.

Arkadaşlar, bir ağaca, sadece var olan köşeleri kullanarak yeni bir kenar eklerseniz elde edilen çizgede bir döngü oluşur. Bir ağaçtan köşelere dokunmadan bir kenar çıkaracak olursanız da kalan çizge tek parça olmaz.

Hocam herhangi iki ev arasındaki kablo döşeme maliyetini bilsek en ucuz haberleşme ağı kaça mâl olur hesaplayabilir miyiz?

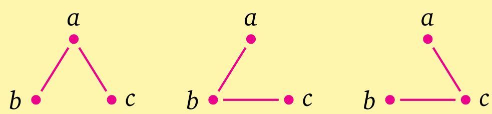
Selçuk ben de onu düşünüyordum. Ama baksana az önce dört farklı ağaç çizdik. Bunlara birkaç tane daha kolayca ekleyebilirim. Tüm mümkün ağaçların maliyetini bulup, sonra en düşüğünü alsak diyeceğim ama kaç farklı ağaç var ki?



Şekil 5.41: İngiliz matematikçi Arthur Cayley (1821 –1895).

Engin ben sana söyleyeyim. Altı tane köşe noktası olan $6^4 = 1296$ farklı ağaç vardır. Aslında İngiliz matematikçi Arthur Cayley n tane köşe noktası olan farklı ağaçların sayısının n^{n-2} olduğunu kanıtlamıştır.

Engin 1296 tane ağacın tek tek maliyetini hesaplayıp, sonra en düşük maliyetlisini bulmak biraz zor olmaz mı?



Şekil 5.42: 3 noktası olan $3^{3-2} = 3$ farklı ağaç vardır.

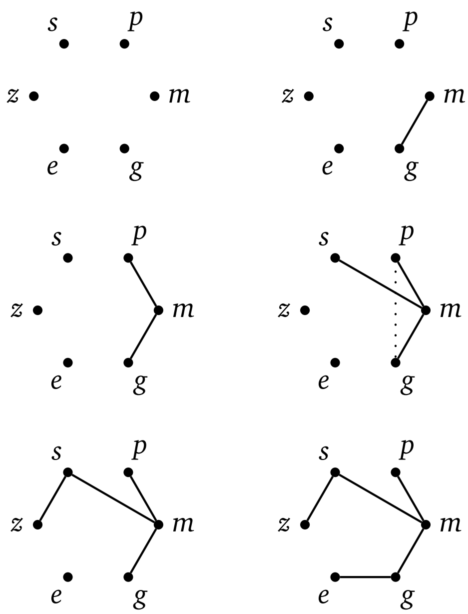
Evet Gökçe, probleme biraz daha sistematik yaklaşmamız gerekiyor. Bu nedenle en düşük maliyetli yani optimal ağacı bulmak için Kruskal Algoritması geliştirilmiştir. Bu algoritmaya göre çizgenin hangi kenarının maliyeti en düşük ise önce o kenar eklenir. Sonra yine en ucuz maliyetli kenar çizgeye eklenir. Sonra diğer kenarların en düşük maliyetli olanına bakılır. Eğer bu kenar çizgeye eklendiğinde döngü oluşturmuyorsa, bu kenar da çizgeye eklenir ve bundan sonraki en düşük maliyetli kenara geçilir. Eğer bu kenar çizgeye eklendiğinde döngü oluşturuyorsa bu kenar değil, bu kenar dışındaki en düşük maliyetli kenar eklenerek devam edilir. Belli bir aşamada en düşük maliyetli birden fazla kenar varsa, hangisini seçeceğimiz sonucu etkilemez.

Bu algoritma size biraz karışık gelmiş olabilir. Hemen bir örnek yapalım. Diyelim ki evlerimiz arasına kablo döşeyerek kendimize bir haberleşme ağı oluşturmak istiyoruz. Elbette evlerimizin birbirine olan mesafesi, evlerimiz arasındaki fiziksel engeller vb. bu işin maliyetini etkileyecektir. Kabul edelim ki tüm maliyetleri biliyoruz ve bu maliyetler Tablo 5.2 ile verilmiş olsun.

	m	p	g	z	s	e
m	0	2	1	18	6	15
p	2	0	4	10	11	12
g	1	4	0	13	14	9
z	18	10	13	0	7	16
s	6	11	14	7	0	19
e	15	12	9	16	19	0

Tablo 5.2: Evler arasına kablo döşemenin maliyetleri.

Algoritmaya göre en düşük maliyetli kenarı seçmemiz lazım. O zaman önce g ve m noktaları arasına maliyeti 1 olan kenarı çiziyoruz. Sonra, maliyeti en düşük kenar 2 birim maliyeti olan m ve p noktaları arasındaki kenar. Bundan sonra dikkatli olmak lazım. Kalanlar içinde maliyeti en düşük olan kenar g ve p noktaları arasındaki kenar. Ancak bu kenarı çizersek bir döngü oluşur. O nedenle bu kenarı çizmeyip, m ve s noktaları arasına maliyeti 6 birim olan kenarı çiziyoruz. Böyle devam edersek optimal ağacı elde ederiz (Şekil 5.43).



Şekil 5.43: Kruskal Algoritması ile optimal ağacın elde edilişi.

Elde ettiğimiz ağacın tüm kenarlarının maliyetlerini toplarsak,

$$1+2+6+7+9=25$$

çıkar. Yani en az 25 birim maliyetle bu haberleşme ağını kurabiliriz.

Arkadaşlar ne yazık ki zamanımız doldu. Bu kısa sürede çizge kuramına ancak bir giriş yapabildik. Umarım bu konu hoşunuza gitmiştir ve konu ile ilgili diğer kaynakları da incelersiniz.

Özet

Bu ünitede, son zamanlarda bilgisayar bilimi ve coğrafyadan, sosyoloji ve mimarlığa, yöneylem araştırması ve kimyadan, genetik ve dil bilimine kadar çok çeşitli alanlarda önemli bir matematiksel araç olarak ortaya çıkan çizgeleri tanımladık. Çizge kavramını tanımlandıktan sonra çizge kuramının temel kavramlarını verdik. Çizge kuramının belki de ilk ve en önemli sonuçlarından biri olan Königsberg'in köprüleri gibi günlük hayatta karşılaşabileceğimiz birçok problemin çizge kuramının kavramları ile nasıl ifade edilip çözülebileceğini gördük. Ayrıca basit bir harita boyama probleminin çizgelerle olan bağlantısını inceledik. Son olarak özel tipte bir çizge olan ağaçlar ve optimal ağacın bulunması probleminden söz ettik.

Okuma Parçası

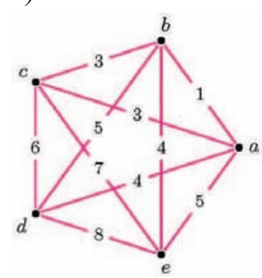
Gezgin Satıcı Problemi

Gezgin satıcı problemi'nde (GSP) amaç, bir satıcının, bulunduğu şehirden başlayıp, her şehre sadece bir kez uğradıktan sonra başladığı şehre geri dönen en kısa turu bulmaktır. Herhangi iki şehir arasında bir yol olduğunu ve o yolun uzunluğunu bildiğimizi varsayıyoruz.

Görüldüğü gibi, GSP, anlaşılması için matematiksel herhangi bir temel gerektirmeyen bir problemdir. Anlaşılması kolaydır ama çözümü zordur!

GSP, çizge kuramı dilinde, şehirlerin noktalarla, şehirlerarası yolların kenarlarla temsil edildiği (yalın) bir çizge üzerinde, en kısa Hamilton turunun bulunmasıdır. Hamilton turu, bir çizge üzerindeki her noktadan sadece bir kez geçen (dolayısıyla aynı yoldan da sadece bir kez geçen) ve başladığı noktada biten, 19. yüzyılda yaşamış matematikçi William Hamilton'un adıyla anılan turdur.

Örneğin n noktadan oluşan bir tam çizge, yani K_n tam çizgesi $(n\text{-}1)!/2$ Hamilton turu içerir.



Soru Yandaki çizgede bütün Hamilton turlarını bulun ve uzunluklarını hesaplayın. Şehirlerarası uzaklıklar kenarların üstünde verilmiştir.

Yanıt Verilen çizgede her nokta çifti arasında bir kenar bulunduğu için, bunun bir tam çizge olduğunu hemen belirtelim. Bir tam çizgede, noktaların herhangi bir sırada dizilişi, bir Hamilton turuna karşılık gelir. Örneğin *a* şehrini başlangıç noktası kabul edersek, aşağıda verilen (5-1)!/2=12 turu buluruz. Burada en kısa tur için 22 birim uzunluğunda dört seçenek vardır. Bu dört turdan herhangi birini, örneğin *abecda* turunu, bu GSP'nin en iyi çözümü olarak kabul edebiliriz.

Tur	*abcdea*	*abceda*	*abdcea*	*abdeca*	*abecda*	*abedca*	*acbdea*	*acbeda*	*acdbea*	*acebda*	*adbcea*	*adcbea*
Uzunluk	23	23	24	24	22	22	24	22	23	23	24	22

Bu örnekteki çözüm yöntemini izleyerek, GSP için üç adımlık bir çözüm yolu geliştirilebilir.

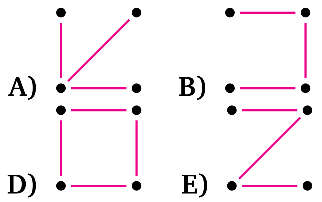
1. Çizgenin tüm Hamilton turlarını bul.
2. Her turun uzunluğunu hesapla
3. Turlar arasından en kısasını seç.

Bu çözüm yöntemiyle, 10 şehir içeren bir GSP için bulunması gereken tur sayısı 9!/2=181440'tır. Şehir sayısı 20'ye çıktığında ise bulunması gereken tur sayısı $19!/2 \approx 6{,}08\times10^{16}$'yı bulur. 25 şehir için GSP problemini bu yolla çözmek isteyen bir satıcının, yaklaşık $3{,}1\times10^{23}$ turu incelemesi gerekir. Eğer satıcı, 25 şehirli bir GSP problemini, her Hamilton turunu 10^{-9} saniyede inceleme kapasitesine sahip bir bilgisayarla çözmeye kalkarsa, ancak 10 milyon yıl sonra en kısa turu bulabilir… Bulunan çözüm olmasına çözüm de, çözüm yolunun uygulanması imkânsız…

Kaynak:
Matematik Dünyası, 2003 Güz Sayısı (Çizgeler Özel Sayısı).

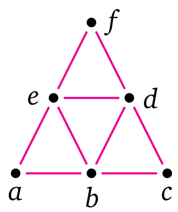
Çıkarın Kağıtları

1. Aşağıdaki çizgelerden hangisi bir ağaç değildir?



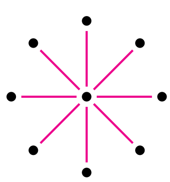
2. $K_{3,3}$ tam çizgesinin düzlemsel olmadığını gösteriniz.

3. Aşağıdakilerden hangisi verilen çizgede b noktasının bir komşusu değildir?



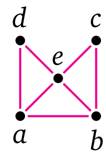
A) a **B)** c **C)** d **D)** e **E)** f

4. Aşağıdaki çizgenin tüm köşe noktaları komşu noktalar farklı renkte olacak şekilde en az kaç renk ile boyanabilir?



A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

5. Aşağıdaki çizgenin hangi köşe noktasının derecesi en büyüktür?

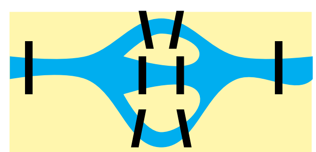


A) a **B)** b **C)** c **D)** d **E)** e

6. Bir düzlemsel çizgede, köşe sayısı 5, kenar sayısı 7 ise, bölge sayısı kaçtır?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

7. Aşağıdaki şekilde bir nehrin ayırdığı kara parçaları ve bu kara parçaları üzerindeki köprüler bulunmaktadır. Buna göre her köprüden bir kez geçen ve başladığı noktaya geri dönen bir gezinti var mıdır?



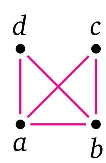
8. Hangisi bir çizgenin tüm köşe noktalarının derecelerinin bir dizisi olamaz?

A) $1,1,2,2,2$ **B)** $2,2,2,2,2$ **C)** $1,1,1,1,4$
D) $4,4,4,4,4$ **E)** $1,1,3,3,3$

9. K_4 tam çizgesinin kaç kenarı vardır?

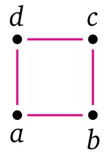
A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

10. Aşağıda verilen çizge düzlemsel midir?



Çözümler

1. D seçeneğindeki çizge bir ağaç değildir. Çizgenin a ve c noktalarını birleştiren $a \to b \to c$ ve $a \to d \to c$ gibi birden fazla gezinti vardır. Yani bu çizge bir döngü içermektedir. Bu nedenle doğru yanıt D seçeneğidir.

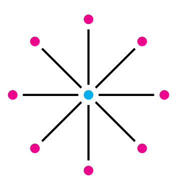


2. İkiden fazla noktası olan düzlemsel iki kümeli bir çizgenin her bölgesi en az dört kenar ile belirlenir. Diğer taraftan $K_{3,3}$ iki kümeli tam çizgesinin 6 köşe noktası ve 9 kenarı vardır. O zaman $K_{3,3}$ tam çizgesi düzlemsel bir çizge ise Euler formülünden $b+6=9+2$ yani bölge sayısı $b=5$ olmalıdır. Her kenarın iki farklı bölgenin sınırı olduğu da düşünülürse, kenar sayısının iki katının en az bölge sayısının dört katı kadar olması gerektiği sonucu ortaya çıkar. Oysa $2 \cdot 9 \geq 4 \cdot 5$ eşitsizliği doğru olmadığından $K_{3,3}$ düzlemsel değildir.

3. Verilen çizgede b köşe noktasıyla f köşe noktasını birleştiren bir kenar olmadığından f köşe noktası b köşe noktasının bir komşusu değildir. O halde cevap E seçeneği olur.

4.

Çizge, yandaki gibi sadece iki renk kullanılarak boyanabilir. Bu nedenle doğru yanıt A seçeneğidir.



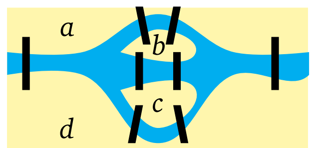
5. Verilen çizgeye göre, $\mathrm{d}(a)=3$, $\mathrm{d}(b)=3$, $\mathrm{d}(c)=2$, $\mathrm{d}(d)=2$ ve $\mathrm{d}(e)=4$ olduğundan derecesi en büyük olan köşe noktası e olur. Doğru yanıt E seçeneğidir.

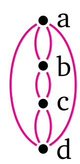
6. Verilenler Euler formülünde yerine yazılırsa,

$$\text{bölge sayısı} + 5 = 7 + 2$$

eşitliğinden bölge sayısı 4 bulunur. Doğru yanıt C seçeneğidir.

7. Kara parçaları noktalar, köprüler ise bu noktaları birleştiren kenarlar gibi düşünülürse karşılık gelen çizge aşağıdaki gibi olur.



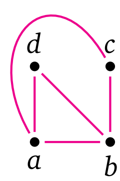


Bu çizgede derecesi tek olan nokta olmadığından istenen gibi bir gezinti vardır.

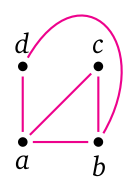
8. Bir çizgenin tüm köşe noktalarının derecelerinin toplamı çift sayıdır. E seçeneğinde verilen dereceler toplamı 11 olduğundan tüm köşe noktalarının dereceleri $1,1,3,3,3$ olan bir çizge olamaz. Doğru yanıt E seçeneğidir.

9. Bir çizgede kenar sayısı tüm köşelerin dereceleri toplamının yarısıdır. K_4 tam çizgesinin her köşesinin derecesi 3 ve 4 tane de köşe noktası olduğundan $\frac{4 \cdot 3}{2}=6$ kenarı olduğu bulunur. Kenar sayısı şekil çizilerek de bulunabilir.

10. Verilen çizge



veya

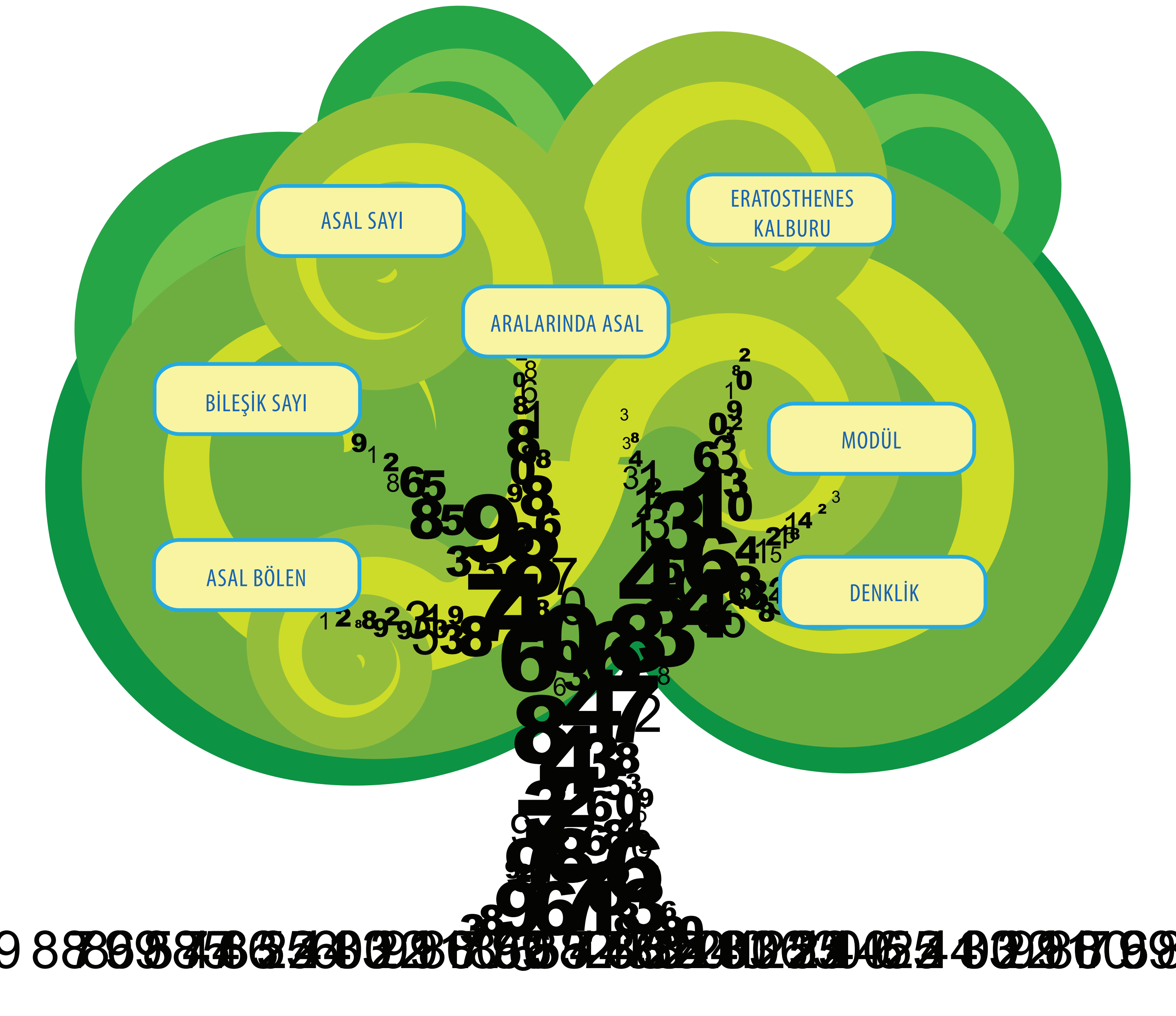


biçiminde çizilebileceğinden, düzlemsel bir çizgedir.

Asal Sayılar ve Modüler Aritmetik

6. ÜNİTE

MATEMATİK 2



Giriş

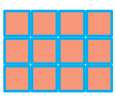
Merhaba arkadaşlar! Bugün nasılsınız?

Merhaba hocam, biz iyiyiz de elinizdeki bu karolar nedir? İnşaat işiniz mi var?

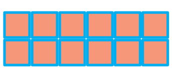
Evet arkadaşlar, evde inşaat var. Ancak bu karoları bugün sizin için getirdim.

Çok merak ettim şimdi. Bu karolarla bugünkü dersimizin ne ilgisi var?

Biraz sabırlı olun bakalım. Elimde, gördüğünüz gibi 12 tane kare şeklinde yer karosu var. Acaba bu karoların tamamını kullanarak yan yana gelecek şekilde dizersek kaç farklı dikdörtgensel alan oluşturabilirsiniz?

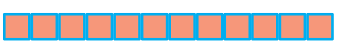


Genişliği 3, uzunluğu 4 karodan oluşan bir dikdörtgen oluşturabiliriz.



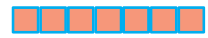
Genişliği 2, uzunluğu ise 6 karodan oluşan başka bir dikdörtgen daha oluşturabiliriz.

Genişliği 1, uzunluğu 12 karodan oluşan bir başka dikdörtgen oluşturabiliriz.



Peki, elimizde 7 tane karo olsaydı, kaç farklı dikdörtgensel alan oluşturabilirdik?

Sadece genişliği 1, boyu ise 7 karodan oluşan dikdörtgen oluşturabilirdik.



Burada gördüğünüz üzere, 12'yi $3 \cdot 4$, $2 \cdot 6$ veya $1 \cdot 12$ şeklinde parçalayarak yazabilmemize rağmen 7'yi sadece $1 \cdot 7$ şeklinde yazabildik. Buradan ilham alarak doğal sayıları, ikiye ayırabiliriz: parçalayabildiklerimiz ve parçalayamadıklarımız. Parçalayamadığımız doğal sayılara asal sayılar, parçalayabildiklerimize de bileşik sayılar diyoruz.

Şimdi anlaşıldı bu karoların burada ne işinin olduğu.

Tanım 1'den büyük olan ve sadece 1'e ve kendisine bölünen doğal sayılara asal sayı denir.

Matematiksel olarak ifade edersek, 1'den büyük olan ve sadece 1'e ve kendisine bölünen doğal sayılara asal sayılar diyoruz. Asal olmayan 1'den büyük tam sayılara da bileşik sayılar diyoruz.

İlk 10 asal sayı;
$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$ ve 29'dur.

Verdiğiniz tanıma göre, asal sayılar 1'den büyük olmalı dediniz. Ancak 1'in 1 ve kendinden başka böleni olmadığına göre 1'i neden asal sayı kabul etmiyoruz?

Yirminci yüzyılın ortalarına kadar bazı matematikçiler 1'i asal kabul ediyorlardı. Ancak 1'i, asal olarak ele aldığımızda bazı teoremlerde değişiklik yapılması gerekir. Örneğin, daha sonra ifade edeceğimiz Aritmetiğin Temel Teoremi, 1'in asal sayı alınması ile geçerliliğini kaybeder. Bundan dolayı 1'i asal olarak kabul etmiyoruz.

Asal sayı tanımını açıklığa kavuşturduğumuza göre, asal sayılara örnekler verin bakalım.

En küçük asal sayı 2 olup daha sonraki asal sayı 3'tür. Çünkü 3, sadece 1'e ve 3'e bölünür.

5 sayısı, sadece 1'e ve 5'e bölündüğünden asaldır.

7 sayısı da sadece 1'e ve kendisine bölündüğü için asaldır.

Bileşik sayılara örnekler verebilir misiniz?

Tanım $1 < a < n$ ve $1 < b < n$ olmak üzere $n = ab$ şeklindeki doğal sayılara bileşik sayı denir.

Bundan kolay ne var ki! Parçalayabildiğimiz doğal sayılara bileşik sayı diyorduk. Mesela, 4, 6, 8 gibi. Çünkü, bu sayıların hepsi, 1 ve kendileri dışında 2 ile de bölünüyor.

9, 10, 12 de bileşik sayılardır. 9 sayısı 3 ile, 10 ve 12 sayıları da örneğin 2 ile bölünüyorlar.

Tanım Verilen bir tam sayıyı bölen asal sayıya asal bölen ya da asal çarpan denir.

Aferin gençler. Şimdi bu bileşik sayıları

$$\begin{aligned} 4 &= 2\cdot 2, & 6 &= 2\cdot 3, & 8 &= 2\cdot 2\cdot 2,\\ 9 &= 3\cdot 3, & 10 &= 2\cdot 5, & 12 &= 2\cdot 2\cdot 3, \end{aligned}$$

olarak yazalım. Burada dikkatinizi çeken birşey var mı?

Bütün bu sayıları, birkaç asal sayının çarpımı şeklinde yazdınız.

Aritmetiğin Temel Teoremi: Her $n > 1$ doğal sayısı asal sayıların çarpımı şeklinde sıra değişikliği hariç tek türlü yazılabilir.

Evet, her bileşik doğal sayıyı asal sayıların çarpımı olarak yazabiliriz. Ayrıca bu yazılış, çarpanların sırasını gözardı edersek, tek türlüdür. Bu özellik, dersin başında da söylediğim gibi, matematikte önemli teoremlerden biri olan Aritmetiğin Temel Teoremi olarak bilinir.

Hocam bu teorem bizim bir işimize yarayacak mı?

Şüphesiz. Bu teorem olmasaydı ATM'lerden para çekemezdiniz.

Hocam, bu da nereden çıktı?

Bu konuyu şifreleme ünitemizde konuşuruz. Şimdi biraz en büyük ortak bölen ve en küçük ortak kat hesabı yapalım.

Hocam bir dakika! Ben, en büyük ortak bölen ve en küçük ortak katın ne demek olduğunu hatırlamıyorum.

Hatırlamaya gerek yok ki Selçuk! Adı üstünde. En büyük ortak bölen; iki sayıyı bölen sayıların en büyüğüdür. En küçük ortak kat ise iki sayının ortak katlarının en küçüğüdür.

Teşekkürler Zeynep. Adı güzel konmuş kavramlar işte böyle kendilerini hatırlatırlar. Şimdi, 8 ile 12'nin en büyük ortak bölenini ve en küçük ortak katını hesaplayalım:

	8 sayısını bölen doğal sayılar	:	1, 2, 4, 8
ve	12 sayısını bölen doğal sayılar	:	1, 2, 3, 4, 6, 12

Tanım a ve b gibi iki doğal sayıdan her ikisini de bölen doğal sayıların en büyük olanına, bu sayıların en büyük ortak böleni denir ve ebob(a,b) şeklinde gösterilir.

dir. Bu iki sayıyı da bölen doğal sayılar ise; 1, 2 ve 4 olup, ortak bölenler içinde en büyük olan 4'tür, yani bu sayıların en büyük ortak böleni 4'tür. Bunu ebob$(8,12)=4$ şeklinde gösteririz.

Şimdi de 8 ile 12'nin en küçük ortak katını bulalım:

8 sayısının pozitif tam katları	:	8, 16, 24, 32, 40, ...
12 sayısının pozitif tam katları	:	12, 24, 36, 48, 60, ...

Tanım a ve b gibi iki doğal sayıdan her ikisine de bölünen doğal sayıların en küçük olanına, bu sayıların en küçük ortak katı denir ve ekok(a,b) şeklinde gösterilir.

dır. Buradan 8 ile 12'nin en küçük ortak katı 24 olup, bunu da ekok$(8,12)=24$ şeklinde gösteririz.

En büyük ortak böleni ve en küçük ortak katı, verilen sayıların asal çarpanlarını kullanarak da hesaplayabiliriz.

Hocam, şimdi hatırladım. 8 ve 12'yi asal çarpanlarına ayırmak için, 8 ve 12'yi en küçük asal sayı olan 2'den başlayarak sırasıyla asal sayılara bölelim:

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

olduğundan bu sayıları sizin de daha önce söylediğiniz gibi, $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ ve $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ olarak yazabiliriz. 8'in bölenleri 1, 2, 2^2 ve 2^3'tür. 12'nin bölenleri ise 1, 2, 2^2, 3, $2 \cdot 3$ ve $2^2 \cdot 3$'tür. Böylece 8 ve 12'nin ortak bölenleri 1, 2 ve 2^2 olur. Buradan 8 ve 12'nin en büyük ortak böleni $2^2 = 4$ bulunur.

Şimdi 8 ve 12'nin en küçük ortak katını hesaplayalım. 8'in bir katı aynı zamanda $2 \cdot 2 \cdot 2$'nin bir katıdır. 12'nin bir katı da aynı zamanda $2 \cdot 2 \cdot 3$'ün bir katıdır. O halde bu çarpımları içeren en küçük sayı, 8 ile 12'nin en küçük ortak katı olacaktır. Böylece en küçük ortak kat,

$$\text{ekok}(8,12) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3 = 24$$

olur.

Daha genel olarak ifade etmek gerekirse, m ve n gibi iki doğal sayının en büyük ortak böleni ve en küçük ortak katı şöyle bulunur:

1) m ve n asal çarpanlarına ayrılır.

2) Ortak olan asal çarpanlardan, üsleri **en küçük** olanlarının çarpımı bu sayıların en büyük ortak bölenidir.
(Ortak asal çarpan yoksa, en büyük ortak bölen 1'dir.)

3) Ortak olan asal çarpanlardan üsleri **en büyük** olanlar ile ortak olmayanların hepsinin çarpımı bu sayıların en küçük ortak katıdır.

Şimdi de 18 ile 30 sayılarının en küçük ortak katını ve en büyük ortak bölenini bulalım. İlk olarak 18'i asal çarpanlarına ayıralım:

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \text{olup} \quad 18 = 2 \cdot 3^2 \quad \text{olur.}$$

Benzer şekilde,

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \text{olup} \quad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \quad \text{olur.}$$

Böylece 18 ve 30 sayılarının en büyük ortak böleni,

$$\text{ebob}(18,30) = 2 \cdot 3 = 6$$

Örnek 36 ile 600 sayıları için, ebob$(36,600)$ ve ekok$(36,600)$ sayılarını bulalım.

1. 36 ve 600 sayılarını asal çarpanlarına ayıralım:

$$\begin{aligned} 36 &= 2^2 \cdot 3^2 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \\ 600 &= 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \end{aligned}$$

2. Ortak olan asal çarpanlar 2 ve 3'tür. Şimdi bunların en küçük üslülerini belirleyelim. 2'nin en küçük üslüsü 2^2 ve 3'ün en küçük üslüsü de 3'tür. Bunları çarparsak,

$$\begin{aligned} \text{ebob}(36,600) &= 2^2 \cdot 3 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \\ &= 12 \end{aligned}$$

bulunur.

3. Ortak olan asal çarpanlardan üsleri en büyük olanlar ile ortak olmayan asal çarpanları belirleyelim. 2'nin en büyük üslüsü 2^3 ve 3'ün en büyük üslüsü de 3^2'dir. Ortak olmayan asal çarpan ise 5'tir. Şimdi 2^3, 3^2 ve ortak olmayanların hepsini çarparsak,

$$\begin{aligned} \text{ekok}(36,600) &= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \\ &= 1800 \end{aligned}$$

bulunur.

dır. Bu sayıların ortak katlarının en küçüğü de

$$\text{ekok}(18,30) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$$

olur.

Peki, buna göre 14 ile 15 sayılarının ebob'unu bulabilirsiniz artık, değil mi?

Evet, bunu ben bulayım: $14 = 2 \cdot 7$ ve $15 = 3 \cdot 5$ yazarız. Ancak bu iki sayının 1'den başka ortak böleni olmadığından $\text{ebob}(14,15) = 1$ olur.

İki doğal sayı aldığınızda 1, her ikisini de böldüğünden bir ortak bölendir. Eğer iki doğal sayının 1'den başka ortak böleni yoksa, bu sayılara aralarında asaldır deriz. Bu örnekte olduğu gibi, 14 ile 15 sayıları aralarında asaldır.

Tanım a ve b doğal sayılar olmak üzere $\text{ebob}(a,b) = 1$ ise a ve b sayılarına aralarında asaldır denir.

6 ile 11 sayılarının da en büyük ortak böleni 1 olduğu için 6 ile 11 de aralarında asaldır.

Asal mı? Değil mi?

Şimdi 100'den küçük olan asal sayıları bulalım. İlk asal sayı olan 2'den başlayarak ikişer ikişer asal sayıları sırayla söyleyin bakalım:

2 ve 3.

5 ve 7.

8, 2 ile bölündüğünden asal değildir. 9 da 3 ile bölündüğünden asal değildir. Sıra 10'da. 10 da 2 ile bölündüğünden asal değildir. O halde 11'e bakalım. 11, ne 2'ye, ne 3'e, ne 4'e, ne 5'e, ne 6'ya, ne 7'ye, ne 8'e , ne 9'a, ne de 10'a bölünür. Ancak 1'e ve kendine bölünür. O halde 11 asaldır. Sıra 12'de. Ancak 12, 2 ile bölündüğünden asal değildir. O halde 13'e bakalım... 13 de kendinden önce gelen hiçbir sayıya bölünmez. O halde 13 asal sayıdır.

2	3	5
7	11	13
17	19	23
29	31	37
41	43	47
53	59	61
67	71	73
79	83	89
97		

Şekil 6.1: 100'e kadar olan asal sayılar.

Sıra 14'te. Ancak 14, 2 ile bölündüğünden asal değildir. 15'e bakalım. 15 de 3 ile bölündüğünden asal değildir. 16'ya bakalım. 16 da 2 ile bölündüğünden asal değildir. Sıra 17'de. 17 de ne 2'ye, ne 3'e, ne 4'e, ne 5'e, ne 6'ya, ne 7'ye, ne 8'e , ne 9'a, ne 10'a, ne 11'e, ne 12'ye, ne 13'e, ne 14'e , ne 15'e, ne de 16'ya bölünür. O halde 17 sadece 1 ve kendine bölünür. Sonuç olarak 17 asaldır. Sırada 18 var. 18, 2'ye bölündüğünden asal değildir. 19'a bakalım. 19, 2'ye bölünmüyor. 3'e de bölünmüyor. İyi de hocam bunun kolay bir yolu yok mu? Sayı büyüdükçe bir sürü bölme işlemi yapıyoruz.

Bunun kolay bir yolu var. Ama fazla büyük olmayan sayılar için tabii. İlk olarak 1'den 100'e kadar olan tüm sayıları bir tablo şeklinde yazalım. Sonra 2'nin katlarını eleyelim. Geriye kalan sayılardan ilki 3 olup, 3'ün katlarını eleyelim. Daha sonra geriye kalan ilk sayı 5 olup, 5'in katlarını eleyelim. Bu şekilde devam edersek, geriye kalan sayıların aradığımız asal sayılar olduğunu görürüz. Bu metoda eski Yunan Matematikçisi Eratosthenes tarafından bulunduğu için, Eratosthenes kalburu denir.

Şekil 6.2: Yunanlı matematikçi, coğrafyacı, astronom ve filozof Eratosthenes (M.Ö. 276 – 194). Matematik ve doğa bilimlerine büyük katkılar sağlamıştır. Yerkürenin çevresini ilk olarak hesaplayan kişidir. Aynı zamanda güneşin dünyadan uzaklığını hesaplamış ve o zaman bilinen dünyanın haritasını çıkarmıştır.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~68~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Şekil 6.3: $n = 100$ için Eratosthenes Kalburu.

Hocam, mesela 61 sayısının asal olup olmadığını nasıl araştıracağız? O zaman da 1'den 61'e kadar yazıp Eratosthenes'in metodunu mu uygulayacağız? Öyleyse işimiz var.

Kalbur bize 61'in asal olduğunu gösterdi zaten. Ancak başka bir yol da var! Diyelim ki bir n sayısı verildiğinde bunun asal olup olmadığını araştırmak istiyoruz. Eğer bu n tam sayısı bir bileşik sayı ise $n = a \cdot b$ formunda yazılabilir. Burada $1 < a \leq b < n$ olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda $a \cdot a \leq a \cdot b = n$ olup, buradan $a \leq \sqrt{n}$ elde ederiz. Bu nedenle n sayısının $\sqrt{n}$'yi geçmeyen bir böleni, hatta bir asal böleni vardır.

Bu nasıl yol? Birşey anlamadım hocam!

Biz 61 sayısının asal olup olmadığını araştıracaktık. Eğer 61 sayısı bir bileşik sayı ise, biraz önce bahsettiğimiz n sayısı yerine 61'i alırsak, $\sqrt{61} < \sqrt{64} = 8$ olduğundan 61'in 8'den küçük bir asal böleni olmalıdır. 8'den küçük olan asal sayılar 2, 3, 5 ve 7 olduğuna göre, bu asallardan biri 61'i bölüyorsa, 61 bir bileşik sayı; bölmüyorsa, 61 bir asal sayıdır. Bölme işlemlerini yaparsanız bu asal sayıların hiçbirinin 61'i bölmediğini görürsünüz. Sonuç olarak, 61 bir asal sayıdır.

Hocam bu yol gayet kullanışlıymış.

Haklısın Selçuk. Şimdi de sen 87 sayısının asal olup olmadığını araştır bakalım.

Tabii hocam hemen! Eğer 87 asal değilse $\sqrt{87}$'den küçük olan bir asal böleni olacaktır. O halde, $\sqrt{87} < \sqrt{100} = 10$ olduğuna göre, 10'dan küçük asallara bakmamız yeterli olacaktır. 87 sayısı 2'ye bölünmez, ama 3'e bölünüyor:

$$87 = 3 \cdot 29$$

Sonuç olarak, 87 bir asal sayı değildir.

Kaç Tane Asal Sayı Vardır?

Sizce kaç tane asal sayı vardır?

2	3	5	7	11
13	17	19	23	29
31	37	41	43	47
53	59	61	67	71
73	79	83	89	97
101	103	107	109	113
127	131	137	139	149
151	157	163	167	173
179	181	191	193	197
199	211	223	227	229
233	239	241	251	257
263	269	271	277	281
283	293	307	311	313
317	331	337	347	349
353	359	367	373	379
383	389	397	401	409
419	421	431	433	439
443	449	457	461	463
467	479	487	491	499
503	509	521	523	541
547	557	563	569	571
577	587	593	599	601
607	613	617	619	631
641	643	647	653	659
661	673	677	683	691
701	709	719	727	733
739	743	751	757	761
769	773	787	797	809
811	821	823	827	829
839	853	857	859	863
877	881	883	887	907
911	919	929	937	941
947	953	967	971	977
983	991	997		

Şekil 6.4: 1000'e kadar olan asal sayılar.

Eğer n bir bileşik sayı ise n'nin $\sqrt{n}$'yi geçmeyen bir asal böleni vardır.

Oldukça fazla olabilir.

Oldukça fazladan kastın nedir?

Örneğin, bir trilyon olabilir.

1 000 000 000 000 sayısı, bir trilyon olarak okunur.

Anlaşılan, Selçuk'un oldukça fazlası bir trilyonmuş. Benim için oldukça fazla, katrilyondur.

1 000 000 000 000 000 sayısı, bir katrilyon olarak okunur.

Benim için de oldukça fazla, dokuz yüz doksan dokuz katrilyondur.

999 000 000 000 000 000 sayısı, dokuz yüz doksan dokuz katrilyon olarak okunur.

Demek ki buradan çıkan sonuç şu oluyor: "oldukça fazla" ifadesi herkese göre değişkenlik gösterir. Neyse, gençler konuyu dağıtmayalım! Soruyu ben cevaplayayım: sonsuz tane asal sayı vardır. M.Ö. 300 civarında, Öklid, asal sayıların sonsuz olduğunu ispatlamıştır.

Şekil 6.5: Yunanlı matematikçi Öklid (M.Ö. 325 – 265). "Geometrinin Babası" olarak anılır. Düzlem geometrisi, aritmetik ve sayılar teorisi, irrasyonel sayılar ve katı cisimler teorisini içeren 13 kitaptan oluşan Elemanlar adlı eseri 20. yüzyılın başlarına kadar matematik (özellikle geometri) öğretiminde kullanılmıştır.

Ama pratikte, büyük basamaklı bir asal sayı bulmak, güçlü bilgisayarların yardımıyla bile oldukça uzun vakit almaktadır. Şu ana kadar bilinen en büyük basamaklı asal sayı, ki basamak sayısı 12978189'dur, Los Angeles California Üniversitesi (UCLA) matematik bölümünden Edson Smith ve ekibi tarafından 2008 yılında bulunmuştur.

Asal Sayılar Nerede Kullanılır?

Hocam, insanların çok fazla vakit harcayarak asal sayı avına çıkmalarının nedeni nedir?

Bunun nedeni, asal sayıların, yaşadığımız teknoloji çağında önemli verilerin şifrelenerek korunması açısından önemli olmasıdır.

Nasıl yani?

Örneğin; bir şirketten, internet aracılığıyla kredi kartını kullanarak bir ürün ya da hizmet satın alacağınızı düşünelim. Ödeme yapmak için şirketin web sitesine kredi kartınızın bilgilerini girmeniz gerekiyor. Sizce bu bilgileri paylaşmak ne kadar güvenli olabilir?

Hocam bir kere benim kredi kartım yok. Ayrıca internet üzerinden alışverişi de Gökçe yapıyor. Ama sorunuza gelince ürünü alacağımız şirket ne kadar güvenilirse bu bilgileri de paylaşmak o kadar güvenilir olur bence.

2005 yılında, Almanya'da bir göz uzmanı olan ve matematikle amatör olarak ilgilenen Dr. Martin Nowak, kişisel bilgisayarında 50 gün çalışarak 7 milyon 816 bin 230 rakamdan oluşan ve $2^{25964951} - 1$ olarak ifade edilen bir asal sayı buldu. Bu sayı, Mersenne asal sayıları olarak bilinen gruba ait 42. sayıdır.

O kadar emin olma. Bir şirketin güvenilir olması, o şirketin web sitesinden güvenilir şekilde alışveriş yapabileceğimiz anlamına gelmez. Bugün bile hala internet üzerinden birçok kredi kartı dolandırıcılığı meydana gelmektedir. Güvenli siteler, müşterilerinin bilgilerinin üçüncü şahısların eline geçmesini engellemek için gittikçe daha gelişmiş şifreleme sistemleri kullanıyorlar. Asal sayılar da burada devreye giriyor.

Asal sayılar, sadece internet güvenliğinde değil, başka birçok alanlarda da önemli verilerin korunmasında kullanılıyor. Burada da, büyük asal sayılar kullanılmaktadır. Hatta, şifreleme tekniklerini güçlendirmek amacıyla asallar hakkında araştırmaları teşvik eden bir vakıf bile var. Bu konunun ayrıntılarını daha sonra işleyeceğimiz Şifreleme Kuramı konusuna bırakalım isterseniz.

Modüler Aritmetik

Arkadaşlar, bugün Çarşamba olduğuna göre 17 gün sonra haftanın hangi gününde olacağımızı söyleyebilir misiniz?

Pt	Sa	Ça	Pe	Cu	Ct	Pz
24	25	26	27	28	29	30
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	1	2	3	4

Hemen takvime bakalım. Hımm, 7 gün sonrası Çarşamba, 14 gün sonrası da Çarşamba olacaktır. Dolayısıyla on beş Perşembe, on altı Cuma ve on yedi Cumartesi. İşte on yedi gün sonra Cumartesi oluyor.

Teşekkürler Selçuk. Senin de söylediğin gibi haftanın günleri 7 günde bir tekrarlandığı için, 7 gün sonra da Çarşamba, 14 gün sonra da Çarşamba olacaktır. O halde 17'yi 7'ye bölersek $17 = 2 \cdot 7 + 3$ olup 17 günde 2 hafta ve 3 gün olduğunu görürüz. Böylece bugünden itibaren 14 gün sonrası da Çarşamba olup, 17 gün sonrası Cumartesi olur. Yani 17 gün sonraki gün, bugünden itibaren 3 gün sonraki gündür.

Peki 40 gün sonra günlerden ne olur?

Aynı mantıkla, 40'ı 7'ye bölüp bakalım. $40 = 5 \cdot 7 + 5$ olduğuna göre, Çarşamba'dan itibaren 5 gün sayacağız. O da, bir Perşembe, iki Cuma, üç Cumartesi, dört Pazar dersek, beş Pazartesi olur. 40 gün sonra günlerden Pazartesi'dir.

Şekil 6.6: Alman matematikçi Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855). Matematikçilerin prensi olarak da bilinen Gauss, sayılar teorisinde çok yararlı bir araç olan modüler aritmetiğin gelişmesine büyük katkılar sağlamıştır. 21 yaşında, sayılar kuramının önemli sonuçlarını derleyip kendi katkılarını da ekleyerek büyük eseri Disquisitiones Arithmeticae'yı yazmıştır.

Ben hala anlamış değilim. Zeynep, neden 40'ı 7'ye böldün?

Bugün Çarşamba olduğuna göre 7 gün sonra da Çarşamba, 14 gün sonra da Çarşamba, 21 gün sonra da Çarşamba olur. Yani 7'nin katlarında hep Çarşamba oluyor. O halde 40'ın içindeki 7'nin katlarını bularak o günlerin de Çarşamba'ya denk geldiğini söyleyebiliriz. Bunun için 40'ı 7'ye bölüyoruz. $40 = 5 \cdot 7 + 5$ olduğundan $5 \cdot 7 = 35$ gün sonra da Çarşamba olacaktır. Bugünden itibaren 40 gün sonrasını bulmak için $5 \cdot 7$'den itibaren 5 gün daha ilerlemeliyiz. Bu da Çarşamba'dan sonra 5 gün ilerlemek demektir. Yani biz, 40'ı 7'ye bölerek bulduğumuz kalan ile işlem yapıyoruz.

Zeynep gayet güzel açıkladı. Burada, bugünden itibaren, 40 gün saymak yerine 5 gün saymanın yeterli olacağını görmüş olduk.

Bir başka örnek de günlük hayatta çok sık kullandığımız saat aritmetiğidir. Örneğin, saat sabah 9 ise, 7 saat sonra saat kaç olur?

Tabii ki öğleden sonra 4 olur.

Doğru. Gökçe, 9 ile 7'yi toplayıp saat 16 demek yerine saat öğleden sonra 4 demeyi tercih etti. Günlük hayatta saati söylerken çoğu kez, günü 12 saatlik iki parçaya ayırarak söylemeyi tercih ederiz. Böylece saat 13 yerine öğleden sonra 1, saat 14 yerine öğleden sonra 2 deriz. Yani saatler de, 12 saatlik bir döngü şeklinde tekrarlanır. Şimdi bunu matematiksel olarak ifade edersek, sabah 9'dan 7 saat sonrası $9 + 7 = 16 = 1 \cdot 12 + 4$ olduğundan, saat öğleden sonra 4'tür deriz.

Sonuç olarak, saat 16 demek ile öğleden sonra 4 demek aynı şeydir.

Tanım Bir m tam sayısını sıfırdan farklı bir n doğal sayısına böldüğümüzde $0 \leq r < n$ olmak üzere

$$m = k \cdot n + r$$

koşulunu sağlayan r tam sayısına kalan denir.

Haftanın günleri ile ilgili örneklerde 7 sayısını seçerek, 17'nin, 7'ye bölündüğünde elde edilen 3 kalanına denk olduğunu; 40'ın da, 7'ye bölündüğünde elde edilen 5 kalanına denk olduğunu gördük. Saat örneğinde de 12 sayısını seçerek, 16'nın, 12'ye bölündüğünde elde edilen 4 kalanına denk olduğunu gördük. Uyguladığımız bu teknikle, çözmeye çalıştığımız problemleri daha da basitleştirdik. İşte, probleme bağlı olarak, adına modül diyeceğimiz özel bir n doğal sayısı seçerek, her tam sayıyı n'ye bölümünden kalan sayı ile yer değiştirdiğimiz bu tekniğe Modüler Aritmetik adı verilir. Şimdi gelin hep birlikte bu tekniği anlamaya çalışalım:

a ve b tam sayıları, sıfırdan farklı pozitif bir n tam sayısı tarafından bölündüğünde aynı kalanı veriyorsa bu sayılara n modülüne göre denktir ya da kısaca mod n'ye göre denktir deriz ve

$$a \equiv b \pmod{n}$$

ile gösteririz.

Verdiğimiz örneklere geri dönecek olursak;

Birinci örnek için	$17 \equiv 3 \pmod{7}$
İkinci örnek için	$40 \equiv 5 \pmod{7}$
Son örnek için	$16 \equiv 4 \pmod{12}$

olarak yazabiliriz. Şimdi siz de örnekler verin bakalım.

4 ve 18 sayıları 7'ye bölündüğünde

$$4 = 0 \cdot 7 + 4 \quad \text{ve} \quad 18 = 2 \cdot 7 + 4$$

olup, kalanları 4 olduğundan $4 \equiv 18 \pmod 7$'dir.

20 ve 4 sayıları 3 ile bölündüğünde

$$20 = 6 \cdot 3 + 2 \quad \text{ve} \quad 4 = 1 \cdot 3 + 1$$

olup kalanları farklı olduğundan 20 ve 4 sayıları 3 modülüne göre denk değildir.

3 ve 23 sayıları 5'e bölündüğünde

$$3 = 0 \cdot 5 + 3 \quad \text{ve} \quad 23 = 4 \cdot 5 + 3$$

olup, kalanları 3 olduğundan $3 \equiv 23 \pmod 5$'tir.

17 ve 15 sayıları 4 ile bölündüğünde

$$17 = 4 \cdot 4 + 1 \quad \text{ve} \quad 15 = 3 \cdot 4 + 3$$

olup kalanları farklı olduğundan bu sayılar 4 modülüne göre denk değildir.

Tanım a, b, n tam sayılar ve $n > 0$ olmak üzere a ve b sayılarının n'ye bölümünden kalanlar aynı ise a ve b sayıları n modülüne göre denktir denir ve $a \equiv b \pmod n$ şeklinde gösterilir. $a \equiv b \pmod n$ olması demek $a - b$ sayısının n sayısı ile bölünmesi demektir.

a ve b sayılarının n modülüne göre denk olması tanımını bir başka şekilde de ifade edebiliriz. a ve b'nin n'ye bölümünden kalanların aynı olması, yani $a \equiv b \pmod n$ olması $a - b$ sayısının n sayısı ile bölünmesi demektir. Böylece, farkları n tarafından bölünen tam sayılar mod n'ye göre denktir diyebiliriz. Örneğin; $18 - 4 = 14$ olup 14 sayısı 7 ile böldüğünden $18 \equiv 4 \pmod 7$'dir.

$3 \equiv 23 \pmod 5$ olduğunu biliyoruz. Pınar Hoca'nın verdiği denklik tanımını kullanırsak, $23 - 3 = 20$ olup 5 sayısı 20 sayısını böldüğünden $3 \equiv 23 \pmod 5$ olduğunu bir kez daha görmüş oluruz.

Sanırım Gökçe sıralamada bir hata yaptı. $3 \equiv 23 \pmod 5$ olduğunu görmek için $23-3$ sayısı yerine $3-23$ sayısının 5'e bölünüp bölünmediğine bakmalıydı.

İyi de, 5 sayısı, $3-23=-20$ sayısını da böldüğünden, senin dediğin gibi yapsaydım da birşey değişmeyecekti.

Gökçe haklı. $a \equiv b \pmod n$ olmasıyla $b \equiv a \pmod n$ olması aynı şeydir. Denkliklerin bu özelliğine simetri özelliği denir. Denkliklerin bunun gibi iki özelliği daha vardır, yansıma ve geçişme özellikleri. n bir doğal sayı, a, b ve c tam sayılar olmak üzere, bunları şöyle ifade edebiliriz:

Yansıma Özelliği: $a \equiv a \pmod n$

Geçişme Özelliği: $a \equiv b \pmod n$ ve $b \equiv c \pmod n$ ise $a \equiv c \pmod n$

Örneğin; $3 \equiv 3 \pmod 4$'tür. Çünkü 4 sayısı $3-3=0$ sayısını böler. $2 \equiv 12 \pmod 5$ ve $12 \equiv 22 \pmod 5$ olup geçişme özelliğine göre $2 \equiv 22 \pmod 5$'tir. Gerçekten, $22-2$ farkı 5 ile bölünür.

Denklik kavramı yardımıyla sayıları sınıflara ayırabiliriz. Örneğin, herhangi iki çift sayının farkı çift olup 2 ile bölünebildiğinden çift sayılar mod 2'ye göre denktir. Benzer şekilde, herhangi iki tek sayının farkı da çift olup 2 ile bölünebildiğinden tek sayılar da mod 2'ye göre denktir. Ama bir çift sayı ile bir tek sayı mod 2'ye göre denk değillerdir. Çünkü, farkları bir tek sayı olup 2 ile bölünmez. Böylece mod 2'ye göre sayılar, tek sayılar ve çift sayılar olmak üzere iki sınıfa ayrılabilir. Bir başka ifadeyle, bu sınıflar, iki ile bölündüğünde 1 ve 0 kalanını veren sayıların oluşturduğu kümelerdir.

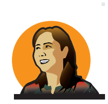
Şimdi de denkliklerin toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri altında korunduğunu gösteren özelliklerini verelim:
$a,\ a',\ b,\ b' \in \mathbb{Z}$ ve n bir doğal sayı olmak üzere,

$i)$ $a \equiv b \pmod n$ ve $a' \equiv b' \pmod n$ ise $a+a' \equiv b+b' \pmod n$'dir.

$ii)$ $a \equiv b \pmod n$ ve $a' \equiv b' \pmod n$ ise $a-a' \equiv b-b' \pmod n$'dir.

$iii)$ $a \equiv b \pmod n$ ve $a' \equiv b' \pmod n$ ise $a \cdot a' \equiv b \cdot b' \pmod n$'dir.

Bu özelliklere göre, bir denkliğin her iki tarafını bir tam sayı ile toplar, çıkarır veya çarparsak denkliğin bozulmayacağını da görürüz.



$a,\ b,\ k$ tam sayılar ve n bir doğal sayı olmak üzere $a \equiv b \pmod{n}$ olsun. Bu durumda

$i)$ $a+k \equiv b+k \pmod{n}$

$ii)$ $a-k \equiv b-k \pmod{n}$

$iii)$ $a \cdot k \equiv b \cdot k \pmod{n}$

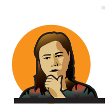
dir.

Aferin Zeynep konuyu iyi kavramışsın. Ancak bölme işlemi için aynı şeyi söyleyemeyiz. Yani, bir denkliğin her iki tarafını bir tam sayıya bölünce denklik değişmez diyemeyiz. Örneğin; $10 \equiv 14 \pmod{4}$'tür. Her iki tarafı 2'ye bölersek

$$\frac{10}{2} \equiv \frac{14}{2} \pmod{4}$$

ifadesi doğru olmaz. Çünkü $\frac{10}{2} = 5$ ve $\frac{14}{2} = 7$ olup $5 \equiv 7 \pmod{4}$ olamaz.

Ama bazen de bölme yapabiliyoruz sanırım. Bir düşüneyim... Örneğin, $42 \equiv 7 \pmod{5}$ denkliğini göz önüne alırsak, bu denkliğin her iki tarafı 7'ye bölünürse $6 \equiv 1 \pmod{5}$ olup denkliğin değişmediğini görürüz.



Haklısın Zeynep. Ancak, bazı durumlarda bölme yapmamıza olanak veren şöyle bir özellik var:

$$a \cdot k \equiv b \cdot k \pmod{n}$$

denkliğini göz önüne aldığımızda, eğer, $\text{ebob}(k,n) = 1$, yani k ile n aralarında asal ise denkliğin her iki tarafını k'ya bölebiliriz. Böylece $a \equiv b \pmod{n}$ elde ederiz. Senin verdiğin örneğe geri dönecek olursak; $42 \equiv 7 \pmod{5}$ denkliğinde, $\text{ebob}(5,7) = 1$ olduğundan dolayı, her iki tarafı 7'ye bölerek

$$6 \equiv 1 \pmod{5}$$

olduğunu elde eder ve denkliğin değişmediğini görmüş oluruz.

$a,\ b,\ k,\ n$ tam sayılar ve $n > 0$ olmak üzere $a \cdot k \equiv b \cdot k \pmod{n}$ olsun. Eğer $\text{ebob}(k,n) = 1$ ise $a \equiv b \pmod{n}$'dir.

Şimdi denkliklerin toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri altında korunması ile ilgili örnekler yapalım. Söyleyin bakalım 23 ve 32 sayılarının 7 ile bölümünden kalanlarının toplamı nedir?

$$23 = 3 \cdot 7 + 2 \quad \text{ve} \quad 32 = 4 \cdot 7 + 4$$

olup kalanlar sırası ile 2 ve 4'tür. Böylece kalanların toplamı $2 + 4 = 6$ bulunur.

Şimdi de 23 ve 32'nin toplamının 7 ile bölümünden kalanı bulun.

$$23 + 32 = 55 = 7 \cdot 7 + 6$$

olup kalan 6 bulunur. Böylece $23 \equiv 2 \pmod 7$ ve $32 \equiv 4 \pmod 7$ iken

$$23 + 32 \equiv 2 + 4 \pmod 7$$

olduğunu görmüş oluruz. Demek ki, 23 ve 32'nin toplamının 7'ye bölümünden kalanı bulmak ile 23 ve 32'nin ayrı ayrı 7'ye bölümlerinden kalanlarının toplamını bulmak aynıdır.

Çok doğru Engin. Aynı örnek için çarpma işlemi ile ilgili özelliğin de sağlandığını görelim. $23 \cdot 32 = 736$ olup 736'yı 7'ye böldüğümüzde kalan 1 olduğundan $736 \equiv 1 \pmod 7$'dir. Diğer taraftan, 23 ve 32 sayılarının 7'ye bölümlerinden kalanlar sırasıyla 2 ve 4 idi. O halde $2 \cdot 4 = 8$ olup $8 \equiv 1 \pmod 7$'dir. Böylece

$$23 \cdot 32 \equiv 2 \cdot 4 \equiv 1 \pmod 7$$

olduğunu görürüz.

Şimdi de $29 \cdot 37 + 79$ sayısının mod 3'e göre hangi sayıya denk olduğunu bulalım:
$29 \equiv 2 \pmod 3$, $37 \equiv 1 \pmod 3$ ve $79 \equiv 1 \pmod 3$'tür. Denkliklerin çarpma işlemi altında korunması özelliğinden

$$29 \cdot 37 \equiv 2 \cdot 1 \equiv 2 \pmod 3$$

dür. Denkliklerin toplama işlemi altında korunması özelliğinden ise

$$29 \cdot 37 + 79 \equiv 2 + 1 \equiv 0 \pmod 3$$

bulunur.

Şimdi 2^4 sayısının 5'e bölümünden kalan sayıyı bulalım.

Ne var ki bunda! $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ olduğundan 16'nın 5'e bölümünden kalan 1'dir.

O halde 2^{45} sayısının 5'e bölümünden kalan sayıyı bulun bakalım.

Hocam, bu kadarına da pes doğrusu!

Gökçe, bu da göründüğü kadar zor değil aslında. Eğer

$$2^{45} = \underbrace{2^4 \cdot 2^4 \cdots 2^4}_{11 \text{ tane}} \cdot 2$$

olarak yazarsak, $2^4 \equiv 16 \equiv 1 \pmod 5$ olduğundan

$$2^{45} \equiv \underbrace{2^4 \cdot 2^4 \cdots 2^4}_{11 \text{ tane}} \cdot 2 \equiv \underbrace{1 \cdot 1 \cdots 1}_{11 \text{ tane}} \cdot 2 \equiv 2 \pmod 5$$

bulunur.

Şimdi de 9^7'nin 11'e bölümünden kalanı bulalım.

$$9^7 = 9^2 \cdot 9^2 \cdot 9^2 \cdot 9 \quad \text{ve} \quad 9^2 = 81 \equiv 4 \pmod{11}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
9^2 \cdot 9^2 \cdot 9^2 \cdot 9 &\equiv \underbrace{4 \cdot 4}\cdot\underbrace{4 \cdot 9} && \pmod{11} \\
&\equiv 16 \cdot 36 && \pmod{11}
\end{aligned}$$

$16 \equiv 5 \pmod{11}$ ve $36 \equiv 3 \pmod{11}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
&\equiv 5 \cdot 3 && \pmod{11} \\
&\equiv 4 && \pmod{11}
\end{aligned}$$

bulunur.

Son olarak da 6^8'in birler basamağındaki sayıyı bulalım.

Bu sefer 6'yı 8 kere kendisiyle çarpmaktan başka çaremiz yok sanırım.

Yanılıyorsun Engin! Bir sayının birler basamağındaki sayı, o sayının 10 ile bölümünden kalan sayıdır. Örneğin, 23 sayısını ele alalım. Eğer, 23'ü 10'a bölersek kalanı 3 buluruz ki, bu 23'ün birler basamağındaki sayıdır. Benzer şekilde 41 sayısını 10'a bölersek 1 kalanını elde ederiz ki bu da 41'in birler basamağındaki sayıdır. Buna göre mod 10'a göre 6^8'in neye eşit olacağını bulalım.

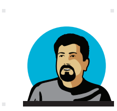
$$6^8 = 6^2 \cdot 6^2 \cdot 6^2 \cdot 6^2$$

olarak yazarsak, $6^2 = 36 \equiv 6 \pmod{10}$ olduğundan

$$\begin{aligned} 6^8 &\equiv \underbrace{6 \cdot 6} \cdot \underbrace{6 \cdot 6} \pmod{10} \\ &\equiv 36 \cdot 36 \pmod{10} \\ &\equiv 6 \cdot 6 \pmod{10} \\ &\equiv 6 \pmod{10} \end{aligned}$$

bulunur.

Bir Bilinmeyenli Doğrusal Denklikler



Daha önce gördüğümüz birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlere benzer olarak, x bilinmeyen, a ve b tam sayılar olmak üzere

$$a \cdot x \equiv b \pmod{n}$$

şeklindeki bir denkliğe bir bilinmeyenli doğrusal denklik denir. Bu denkliği sağlayan x bilinmeyenine de bu doğrusal denkliğin çözümü denir. Eğer $x = x_0$ sayısı, $a \cdot x \equiv b \pmod{n}$ denkliğinin bir çözümü ve $x_1 \equiv x_0 \pmod{n}$ ise $a \cdot x_0 \equiv a \cdot x_1 \equiv b \pmod{n}$ olduğundan x_1 de bu denkliğin bir çözümüdür. Yani, $a \cdot x \equiv b \pmod{n}$ şeklindeki bir denkliğin bir çözümü mevcut ve x_0 olsun. Bu durumda x_0'a mod n'ye göre denk olan her tam sayı da bu denkliğin bir çözümüdür.

Bu kadar teorik bilgiden sonra gençlerin kafası karışmaya başladı galiba. İsterseniz bir örnekle devam edelim: $x+2 \equiv 3 \pmod 4$ denkliğini çözmeye çalışalım. Denkliğin her iki tarafından 2 çıkarıp x'i yalnız bırakırsak,

$$\begin{aligned} x+2-2 &\equiv 3-2 \pmod 4 \\ x &\equiv 1 \pmod 4 \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece bu denkliğin çözüm kümesi, 4'e bölümünden 1 kalanını veren sayıların kümesidir.

Hocam bu denkliği sağlayan sayılardan bir kaç örnek verir misiniz?

Örneğin, 1 sayısı bu denkliği sağlar. Çünkü, 1'in 4'e bölümünden kalan 1'dir. 1'e 4 eklediğimizde elde ettiğimiz 5 de bu denkliği sağlar. Çünkü, $5 = 1 \cdot 4 + 1$ olup, 5'in 4'e bölümünden kalan da 1'dir.

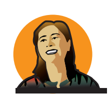
5'e 4 eklediğimizde elde ettiğimiz 9 da bu denkliği sağlar. Çünkü, $9 = 2 \cdot 4 + 1$ olup, 9'un da 4'e bölümünden kalan 1'dir.

Hocam, hep ekledik, çıkarsak da bir çözüm bulur muyuz?

Tabii ki. 1'den 4 çıkarsak, -3 de bir çözümdür. Gerçekten de, denklikte x yerine -3 yazarsak, $-3+2 = -1 \equiv 3 \pmod 4$ olur.

-1 nasıl 3'e denk oluyor?

-1 ile 3'ün farkı -4 olup, 4'e bölündüğü için!



Böylece, 1'den başlayıp, 4 ekleyerek veya 4 çıkararak elde ettiğimiz sayılar, 4'e bölümünden 1 kalanını veren sayıların kümesini, yani

$$\{\ldots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \ldots\}$$

kümesini oluşturur.

Şimdi de $x-6\equiv 5 \pmod 7$ denkliğini çözelim.

Bunu da ben çözeyim. Denkliğin her iki tarafına 6 ekleyerek x'i yalnız bırakırsak,

$$x-6+6\equiv 5+6 \pmod 7$$

yani,

$$x\equiv 11 \pmod 7$$

elde ederiz. $11\equiv 4 \pmod 7$ olduğundan da çözüm

$$x\equiv 4 \pmod 7$$

olarak bulunur. Yani, çözüm kümesi, 7'ye bölündüğünde 4 kalanını veren sayıların kümesi olan

$$\{\ldots,-17,-10,-3,4,11,18,\ldots\}$$

kümesidir.

Tabii her zaman, bir bilinmeyenli doğrusal denkliklerin çözümleri olmayabilir ya da çözümü bulmak bu kadar kolay olmayabilir. Örneğin, $2\cdot x\equiv 3 \pmod 4$ denkliğinin çözümünü bulmaya çalışalım. Herhangi bir x tam sayısı 4'e bölündüğünde ya 0, ya 1, ya 2 ya da 3 kalanını vereceği için ya $x\equiv 0 \pmod 4$, ya $x\equiv 1 \pmod 4$, ya $x\equiv 2 \pmod 4$ ya da $x\equiv 3 \pmod 4$ olabilir.

$$\begin{array}{lccccccc}
\text{Birinci durumda,} & 2x & \equiv & 2\cdot 0 & \equiv & 0 & & \pmod 4, \\
\text{İkinci durumda,} & 2x & \equiv & 2\cdot 1 & \equiv & 2 & & \pmod 4, \\
\text{Üçüncü durumda,} & 2x & \equiv & 2\cdot 2 & = & 4 & \equiv\ 0 & \pmod 4
\end{array}$$

ve nihayet son durumda

$$2x\equiv 2\cdot 3=6\equiv 2 \pmod 4$$

olur. Yani hiçbir zaman $2x\equiv 3 \pmod 4$ olamaz. Demek ki bu denkliğin çözümü yoktur.

Bir başka örnek olarak, $3 \cdot x \equiv 5 \pmod 6$ denkliğini çözmeye çalışalım. Herhangi bir x tam sayısı 6'ya bölündüğünde ya 0, ya 1, ya 2, ya 3, ya 4 ya da 5 kalanını vereceği için ya $x \equiv 0 \pmod 6$, ya $x \equiv 1 \pmod 6$, ya $x \equiv 2 \pmod 6$, ya $x \equiv 3 \pmod 6$, ya $x \equiv 4 \pmod 6$ ya da $x \equiv 5 \pmod 6$ olabilir.

$x \equiv 0 \pmod 6$ durumunda, $3x \equiv 3 \cdot 0 \equiv 0 \pmod 6$,
$x \equiv 1 \pmod 6$ durumunda, $3x \equiv 3 \cdot 1 \equiv 3 \pmod 6$,
$x \equiv 2 \pmod 6$ durumunda, $3x \equiv 3 \cdot 2 = 6 \equiv 0 \pmod 6$,
$x \equiv 3 \pmod 6$ durumunda, $3x \equiv 3 \cdot 3 = 9 \equiv 3 \pmod 6$,
$x \equiv 4 \pmod 6$ durumunda, $3x \equiv 3 \cdot 4 = 12 \equiv 0 \pmod 6$

ve nihayet son durum olan $x \equiv 5 \pmod 6$ durumunda

$$3x \equiv 3 \cdot 5 = 15 \equiv 3 \pmod 6$$

olur. Yani hiçbir zaman $3x \equiv 5 \pmod 6$ olamaz. Sonuç olarak, bu denkliğin de çözümü yoktur.

$a \cdot x \equiv b \pmod n$ şeklindeki bir doğrusal denkliğin çözümünün olması için gerek ve yeter koşul ebob(a, n) sayısının b sayısını bölmesidir.

Bu iki örnekte gördüğünüz gibi, bir bilinmeyenli doğrusal denkliklerin her zaman çözümü yoktur. $a \cdot x \equiv b \pmod n$ şeklindeki bir doğrusal denkliğin çözümünün olması için gerek ve yeter koşul ebob(a, n) sayısının b sayısını bölmesidir. Örneklere geri dönecek olursak, $2 \cdot x \equiv 3 \pmod 4$ denkliğinde, ebob$(2, 4) = 2$ olup, 3 sayısı 2'ye bölünmediğinden bu denkliğin çözümü yoktur. $3 \cdot x \equiv 5 \pmod 6$ denkliğinde de ebob$(3, 6) = 3$ olup, 3 sayısı 5'i bölmez. Dolayısıyla bu denkliğin de çözümü yoktur.

Son olarak, $3 \cdot x \equiv 2 \pmod 4$ denkliğini göz önüne alalım. Bunu çözmek isteyen var mı?

Nihayet dersin sonunu görebildik!

Ben çözmeye çalışayım. x sayısı bu denkliği sağlıyorsa, her iki tarafı 3 ile çarparsak

$$\begin{aligned} 3 \cdot 3 \cdot x &\equiv 3 \cdot 2 \pmod 4 \\ 9 \cdot x &\equiv 6 \pmod 4 \end{aligned}$$

yani, $9 \equiv 1 \pmod 4$ ve $6 \equiv 2 \pmod 4$ olduğundan,

$$x \equiv 2 \pmod 4$$

denkliğini de sağlar. Diğer yandan, $x \equiv 2 \pmod 4$ ise her iki tarafı 3 ile çarparsak,

$$3 \cdot x \equiv 6 \pmod 4$$

yani,

$$3 \cdot x \equiv 2 \pmod 4$$

denkliği de sağlanır. Demek ki $3 \cdot x \equiv 2 \pmod 4$ denkliğini sağlayan sayılarla, $x \equiv 2 \pmod 4$ denkliğini sağlayan sayılar aynı olup $3 \cdot x \equiv 2 \pmod 4$ denkliğinin çözüm kümesi

$$\{\ldots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, \ldots\}$$

kümesidir.

Gerçekten süpersin Zeynep!

Özet

Bu ünitede, ilk bölümde, asal sayılar tanımlanarak, verilen bir sayının asal olup olmadığı incelenmiştir. Verilen bir sayının nasıl asal çarpanlarına ayrılacağı, en büyük ortak bölen ve en küçük ortak katın nasıl bulunacağı tartışılmıştır. Asal sayıların günlük hayattaki önemi vurgulanmıştır. İkinci bölümde ise denklikler ile yapılan aritmetik işlemler demek olan modüler aritmetik konusu üzerinde durulmuştur. Denkliklerin toplama, çıkarma, çarpma ve bölme ile ilgili özellikleri incelenerek, günlük hayatta modüler aritmetik kullanımına ilişkin örnekler verilmiştir. Son olarak da, bir bilinmeyenli doğrusal denklikler ve çözümleri üzerinde durulmuştur.

Okuma Parçası

Yeryüzünde henüz cevabını kimsenin bilmediği sorular var!

Goldbach Kestirimi : 1742'de Goldbach, Euler'e yazdığı bir mektupta "2'den büyük her çift sayı, iki asal sayının toplamı şeklinde ifade edilebilir" önermesinin, ya doğru olduğunu ispatlamasını ya da bunu sağlamayan bir örnek göstererek yanlış olduğunu ispatlamasını istedi. Goldbach kestirimi olarak bilinen bu hipotezle asal sayılar dünyasına yeni bir heyecan geldi. Bu heyecan o gün bugündür tüm matematikseverleri sardı. Yine de henüz bir cevap bulunamadı. Ayrıca, Goldbach asal sayılarla ilgili olarak, 5'den büyük olan her tek sayının üç asal sayının toplamı olduğunu söylemiştir. Bu ifade de zayıf (ya da tek) Goldbach kestirimi olarak bilinir. Henüz bunun da bir yanıtı yok.

Fermat Asalları: 17. yüzyılda amatör matematikçi ünvanı ile bilinen Fermat asal sayılar konusuna oldukça önemli katkılarda bulundu. Bu katkılar arasında doğru olduğunu iddia edip ispatlayamadığı kestirimler de vardı. Örneğin $2^{2^n}+1$ biçimindeki sayıların her n doğal sayısı için bir asal verdiğini iddia etti. Bu biçimdeki sayılara Fermat sayıları, asal olanlara da Fermat asalları denir. Gerçekten de 5'e kadar tüm doğal sayılar için asal değer veren ifadenin yanlış olduğu ancak 100 yıldan fazla zaman sonra anlaşılabildi. $n=5$ için $2^{32}+1=4294967297$ sayısının 641 ile bölündüğünün farkına varansa Euler oldu. Bugün ispatı yapılması beklenen önermelerden bir diğeriyse “Fermat asalları sonlu tanedir” kestirimi. Bu ifadenin en güçlü gerekçesiyse şimdiye kadar sadece beş tane Fermat asalının bulunmasıdır. Bunlar; $3, 5, 17, 257$ ve 65537’dir.

Mersenne Asalları: Fermat'ın sıkça fikir alışverişinde bulunduğu çağdaşı Mersenne 2^n-1 şeklindeki sayılar üzerinde çalışıyordu. Mersenne sayıları (M_n) adı verilen bu sayıların başlangıçta n asal olduğunda asal değer verdiği düşünüldü. Gerçekten de $n=11$'e kadar doğru çalışan fikir 11'de asal olmayan bir değer alınca bu düşüncenin de yanlış olduğu anlaşılabildi ama 2^n-1'in asal olması için n'nin asal olması gerektiği şartı doğrudur. Yine de matematikçiler bu sayıların peşini bırakmadı. Sonsuz tane olup olmadıkları hala merak edilen Mersenne sayılarından Ağustos 2008 itibariyle $47'$ncisi bulundu.

Kaynak: **Ünlü Problemler, http://www.biltek.tubitak.gov.tr/gelisim/matematik/problemler.htm**

Çıkarın Kağıtları

1. Bugün günlerden Salı ise 86 gün sonra günlerden ne olur?

A) Çarşamba
B) Perşembe
C) Cuma
D) Cumartesi
E) Pazar

2. Aşağıdaki sayılardan hangisi asaldır?

A) 26
B) 39
C) 71
D) 77
E) 111

3. $\text{ebob}(60, 90) = ?$

A) 3
B) 6
C) 10
D) 15
E) 30

4. $\text{ekok}(15, 20) = ?$

A) 45
B) 60
C) 75
D) 90
E) 120

5. Aşağıdaki sayı gruplarından hangisi aralarında asaldır?

A) 4, 20
B) 6, 21
C) 18, 27
D) 21, 40
E) 27, 39

6. mod 11'e göre $13 \cdot 8$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

7. $(25)^4$ sayısının 6 ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

8. 3^{64} sayısının birler basamağındaki rakam kaçtır?

A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

9. 4 günde bir nöbet tutan bir hemşire ilk nöbetini Çarşamba günü tuttuğuna göre 17'nci nöbetini hangi gün tutar?

A) Pazartesi
B) Salı
C) Çarşamba
D) Perşembe
E) Cuma

10. $3 \cdot x - 4 \equiv 2 \pmod 5$ denkliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\}$
B) $\{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\}$
C) $\{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\}$
D) $\{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\}$
E) $\{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\}$

Çözümler

1. 86 sayısını 7'ye bölersek

$$86 = 12 \cdot 7 + 2$$

olup, Salı'dan itibaren 2 gün sonrası olan Perşembe günü aradığımız gündür. Cevap B şıkkıdır.

2. 26 sayısı, 2'ye bölündüğünden; 39 ve 111 sayıları 3'e bölündüğünden ve 77 sayısı 7'ye bölündüğünden asal değildirler. 71 sayısı için, $\sqrt{71} < \sqrt{81} = 9$ olup, 71, 9'dan küçük asal sayılara bölünmediğinden asaldır. Cevap C şıkkıdır.

3. 60 ve 90 asal çarpanlarına ayrılırsa

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

olup $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ bulunur.

Böylece $\text{ebob}(60, 90) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ elde edilir. Cevap E şıkkıdır.

4. 15 ve 20 asal çarpanlarına ayrılırsa

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \\ & \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

olup $15 = 3 \cdot 5$, $20 = 2^2 \cdot 5$ bulunur.

Böylece $\text{ekok}(15, 20) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ elde edilir. Cevap B şıkkıdır.

5. $\text{ebob}(4, 20) = \text{ebob}(2^2, 2^2 \cdot 5) = 2^2$,
$\text{ebob}(6, 21) = \text{ebob}(2 \cdot 3, 3 \cdot 7) = 3$,
$\text{ebob}(18, 27) = \text{ebob}(2 \cdot 3^2, 3^3) = 3^2$,
$\text{ebob}(21, 40) = \text{ebob}(3 \cdot 7, 2^3 \cdot 5) = 1$,
$\text{ebob}(27, 39) = \text{ebob}(3^3, 3 \cdot 13) = 3$
olduğundan cevap D şıkkıdır.

6. $13 \equiv 2 \pmod{11}$ olduğundan,
$13 \cdot 8 \equiv 2 \cdot 8 \equiv 16 \equiv 5 \pmod{11}$ bulunur. Cevap E şıkkıdır.

7. $25 \equiv 1 \pmod 6$ olduğuna göre $(25)^4 \equiv 1^4 \equiv 1 \pmod 6$'dır. Cevap A şıkkıdır.

8. Bir sayının 10 ile bölümünden kalan sayı birler basamağındaki sayıdır. O halde mod 10'a göre 3^{64}'ün neye eşit olacağını bulalım.

$$3^4 \equiv 81 \equiv 1 \pmod{10}$$

olduğundan ve denklikler çarpma işlemi altında korunduğundan, 3^4'ü 16 kere yan yana yazıp çarparsak

$$(3^4)^{16} \equiv 3^{64} \equiv 1^{16} \equiv 1 \pmod{10}$$

bulunur. Cevap A şıkkıdır.

9. İlk nöbeti Çarşamba tutuyorsa geriye 16 nöbeti daha kalır. 4 günde bir nöbet tuttuğuna göre, son nöbeti $16 \cdot 4 = 64$ gün sonra tutacaktır. Böylece $64 \equiv 1 \pmod 7$ olup son nöbeti Çarşamba'dan bir gün sonra yani Perşembe günü tutar. Cevap D şıkkıdır.

10. Denkliğin her iki tarafına 4 eklersek $3 \cdot x \equiv 6 \equiv 1 \pmod 5$ bulunur. Şimdi denkliğin her iki tarafını 2 ile çarparsak,

$$2 \cdot 3 \cdot x \equiv x \equiv 2 \cdot 1 \equiv 2 \pmod 5$$

elde edilir. Diğer yandan, $x \equiv 2 \pmod 5$ ise her iki tarafı 3 ile çarparsak $3 \cdot x \equiv 6 \pmod 5$ olup, her iki taraftan 4 çıkarırsak

$$3 \cdot x - 4 \equiv 2 \pmod 5$$

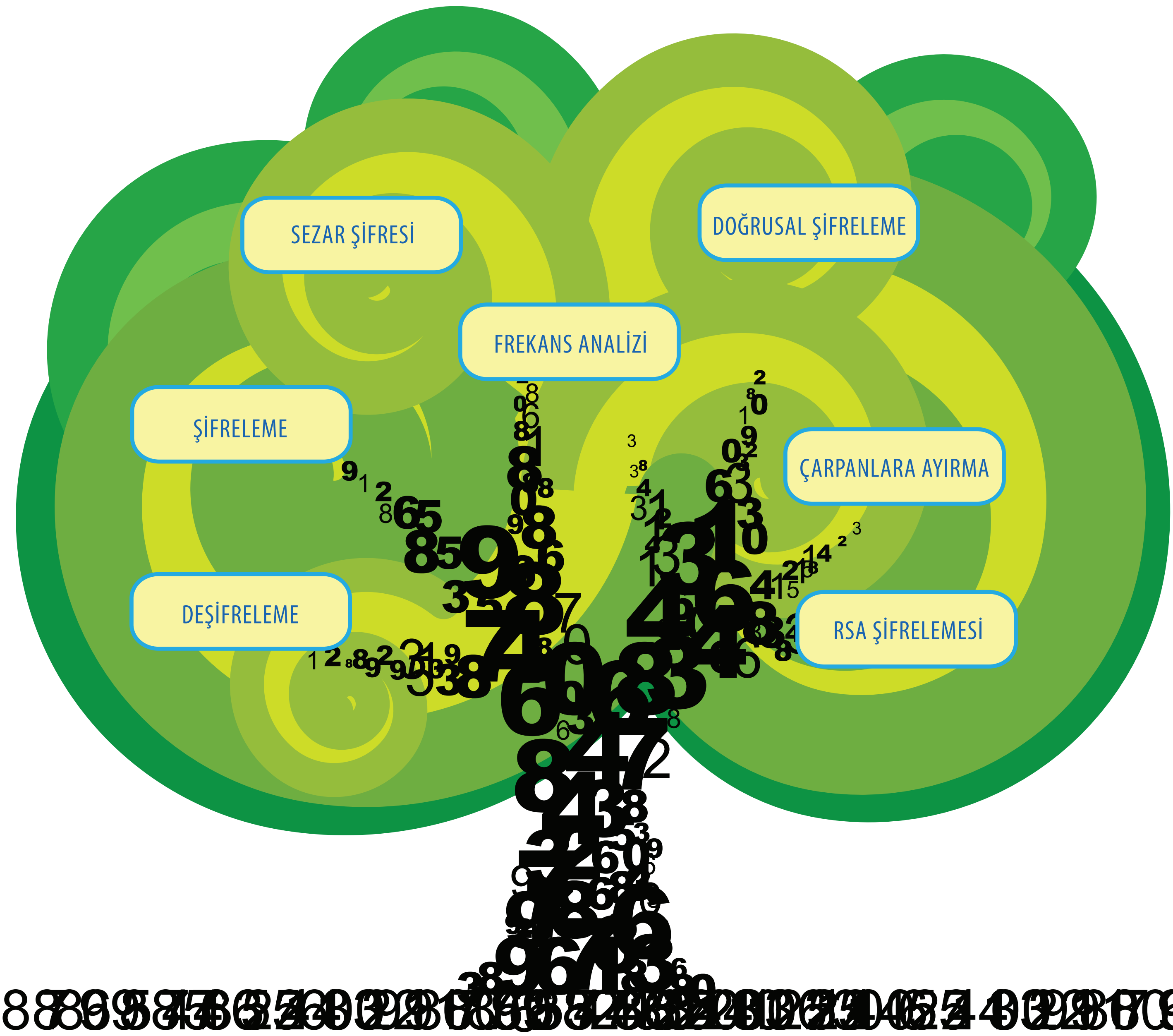
denkliği de sağlanır. Böylece çözüm kümesi, 5'e bölümünden 2 kalanını veren sayıların kümesidir. Cevap C şıkkıdır.

Şifreleme Kuramına Giriş

İnternetten alışveriş yapmanın asal sayılarla ne alakası var?

7. MATEMATİK 2

ÜNİTE



Giriş

Arkadaşlar, bugün önceki derste öğrendiğimiz asal sayılar ve modüler aritmetik konularının iletişim güvenliği ile ilgili uygulamalarından bahsedeceğiz.

Herhalde şifrelemeyi kastediyorsunuz?

Evet. Bugün bu kavramların bir uygulaması olan şifreleme hakkında temel bilgileri öğreneceğiz. "Matematik ne işe yarar?" diye soranlar da matematiğin ne işe yarayabileceğini bir daha görmüş olacaklar.

Umarım bu konu bizi fazla zorlamaz.

Şifreleme problemlerinde kullanılan matematiksel yöntemlerin bütününe kriptografi denir ki "gizli, saklı yazım" anlamına gelir. Kriptanaliz ise şifrelenmiş metinden doğru metni bulma yöntemleridir. Bu iki bilim dalına birlikte kriptoloji denir ve gizli bilim anlamını taşımaktadır. 1970'lere kadar bu bilim gerçekten halktan gizli tutulan, devletin çeşitli birimleri arasında gizli haberleşmeyi sağlayan bir teknikti. Günümüzde teknolojinin günlük yaşantımıza daha fazla girmesiyle güvenlik konuları herkes için çok önem kazanmıştır.

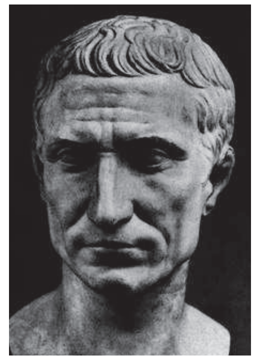
Kullandığımız kredi ve bankomat kartları, cep telefonları, internet vs. ile ilgili bilgilerin çeşitli yollarla ele geçirilebilme ihtimali vardır. Bu nedenle bu bilgilerin şifrelenmesi gerekir, yani gerçek bilgiler yerine bu bilgilerin değiştirilmiş formatını kullanmaya, tutmaya ve göndermeye ihtiyaç vardır. Kısacası, gizli haberleşme, kimlik kanıtlama ve elektronik imza gibi alanlarda şifreleme kullanılmaktadır.

Kriptografinin tarihi ve günümüzdeki kullanım alanlarından dersimizin sonuna doğru bahsedeceğiz.

Şimdi isterseniz basit bir örnekle başlayalım. Diyelim ki "ANADOLU" kelimesini bir yolla şifreleyip göndermek istiyorsunuz. Öneriniz var mı?

Ben bir yerde okumuştum, Jül Sezar komutanlarına göndereceği mesajları şifreleyerek gönderiyormuş. Bunun için alfabedeki harfleri kaydırarak şifreli mesaj oluşturuyormuş.

Sanıyorum, alfabedeki her harfi 3 adım sağa kaydırıyormuş. Şimdi ANADOLU sözcüğünü buna göre şifreleyelim. A yerine Ç, N yerine P, . . . , U yerine Y yazarsak şifreli sözcüğümüz "ÇPÇGROY" olur. Mesajı alan kişi de sözcüğü okumak için alfabedeki harfleri 3 adım sola kaydırarak "ANADOLU" kelimesini elde eder.



Şekil 7.1: Gaius Julius Caesar (M.Ö. 100 - M.Ö. 44)

A	B	C	Ç	D	E	F	⋯	V	Y	Z
Ç	D	E	F	G	Ğ	H	⋯	A	B	C

Tabii, burada mesajı alan kişinin de mesaj şifrelenirken kaç harf atlandığını bilmesi gerekmektedir.

İsterseniz bir de Sezar'ın ünlü sözü "VENI, VIDI, VICI" yi bu yöntemle şifreleyelim.

A	B	C	D	E	F	G	⋯	W	X	Y	Z
D	E	F	G	H	I	J	⋯	Z	A	B	C

$V \to Y$, $E \to H$, $N \to Q$, $I \to L$, $D \to G$, $C \to F$ olarak değiştirirsek "YHQL, YLGL, YLFL" şifreli sözünü elde ederiz.

Kendisi de bir şifre olarak kullanılmış olan

"AYŞE TATİLE ÇIKSIN"

cümlesinin Sezar yöntemine göre şifrelenmişi nedir?

Aşağıdaki şifreli mesajı çözebilir misiniz? (Her gördüğünüz şifreyi Sezar şifresi sanmayın!)

"UB AYUNOK KOÇ NIŞILAÇ."

"ANASTAS MUM SATSANA"

"EY EDİP ADANADA PİDE YE"

Bu şifreleme yöntemini harfler yerine sayılar dilinde de ifade edebiliriz. Bunun için modüler aritmetiği kullanacağız.

Yani 17 denktir 3, 40 denktir 5 gibi ifadeleri mi kullanacağız?

Evet. Ancak yanlarında hangi modüle göre denk olduğunu da belirtmek gerekir. Örneğin,

$$17 \equiv 3 \pmod 7.$$

Bu 17'nin 7'ye bölümünden kalan 3'tür veya $17 - 3$ sayısı 7'ye tam bölünür demektir. Buna göre $40 \equiv 5 \pmod 7$, $50 \equiv 1 \pmod 7$ vs. dir.

Genelde $a \equiv b \pmod{n}$ eşitliği, $a - b$ sayısının n sayısına tam olarak bölünebildiğini ifade eder. Eğer $0 \leq b < n$ ise b sayısı, a'nın n'ye bölümünden kalanı ifade eder.

Şimdi Sezar şifresine dönelim. Türkçe alfabedeki 29 harfin $A = 0$, $B = 1, \ldots, Z = 28$ şeklinde kodlandığını varsayalım. O zaman Sezar şifrelemesinde

$$ş(x) = x + 3 \pmod{29}$$

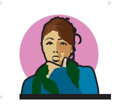
fonksiyonu, deşifre işleminde ise

$$d(y) = y - 3 \pmod{29}$$

fonksiyonu kullanılmaktadır. Çıkan sayıların da $\{0, 1, 2, \ldots, 28\}$ kümesinden olmasına dikkat etmeliyiz.

A	B	C	⋯	V	Y	Z
0	1	2	⋯	26	27	28

Hocam başka bir örnek çözsek.



Diyelim ki "YÜZ" kelimesini şifreleyip göndermek istiyorsunuz. Y= 27, Ü= 25 ve Z= 28 olur.

$$\begin{aligned} 27 + 3 &\equiv 30 \equiv 1 \pmod{29}, \\ 25 + 3 &\equiv 28 \pmod{29}, \\ 28 + 3 &\equiv 31 \equiv 2 \pmod{29} \end{aligned}$$

ve 1=B, 28=Z, 2=C olduğu için şifreli mesaj "BZC" olacaktır.

Bir tane de deşifre örneği çözsek.

Örneğin "BÇOPKC" kelimesini deşifre edelim:

$$\begin{array}{lcccccccl} \text{B=1} & : & 1-3 & \equiv & -2 & \equiv & 27 & \pmod{29} & \text{Y} \\ \text{Ç=3} & : & 3-3 & \equiv & 0 & \equiv & 0 & \pmod{29} & \text{A} \\ \text{O=17} & : & 17-3 & \equiv & 14 & \equiv & 14 & \pmod{29} & \text{L} \\ \text{P=19} & : & 19-3 & \equiv & 16 & \equiv & 16 & \pmod{29} & \text{N} \\ \text{K=13} & : & 13-3 & \equiv & 10 & \equiv & 10 & \pmod{29} & \text{I} \\ \text{C= 2} & : & 2-3 & \equiv & -1 & \equiv & 28 & \pmod{29} & \text{Z} \end{array}$$

böylece "YALNIZ" sözcüğü elde edilir.

Öyle anlaşılıyor ki alfabedeki sırayı ezberlemek gerekecek.

Bu sırayı bildiğinizi sanıyordum, ama bilgisayar çocukları olarak unutmuş olabilirsiniz. Ancak ilerde sayılarla çalışacağımız için unuttuysanız da zararı yok.

Kaydırma şifresinin kırılması kolaydır. Türkçe alfabede 29 harf olduğu için toplam 28 deneme ile harflerin kaç adım kadar kaydırıldığı bulunabilir.

Kaydırma şifrelemesi doğrusal (afin) şifrelemenin özel bir halidir. Şimdi doğrusal şifreleme konusunu ele alalım.

Doğrusal Şifreleme

a ve b tamsayılar, n ise birden büyük bir doğal sayı olsun. Doğrusal şifreleme

$$\text{ş}(x) = ax + b \pmod{n}$$

formülü ile verilir.

a ve b sayıları negatif de olabilir mi? Şifreleme nasıl yapılır?

Evet olabilir. Örneğin,

$$\begin{aligned} \text{ş}_1(x) &= 3x + 5 \pmod{29} \\ \text{ş}_2(x) &= 5x - 4 \pmod{26} \end{aligned}$$

doğrusal şifrelemelerdir. 10 sayısını ş_1 ile şifrelediğinizde

$$\begin{aligned} \text{ş}_1(10) &\equiv 3 \cdot 10 + 5 \\ &\equiv 35 \\ &\equiv 6 \pmod{29}, \end{aligned}$$

ş_2 ile şifrelediğinizde

$$\begin{aligned} \text{ş}_2(10) &\equiv 5 \cdot 10 - 4 \\ &\equiv 46 \\ &\equiv 20 \pmod{26} \end{aligned}$$

çıkar. Artık, 6 sayısı 10'un ş_1 fonksiyonu ile şifrelenmiş hali, 20 sayısı ise 10'un ş_2 fonksiyonu ile şifrelenmiş halidir.

Peki hocam, mod n ifadesinde n herhangi bir doğal sayı olabilir mi?

Doğrusal şifrelemede n sayısı a ile aralarında asal olan herhangi bir doğal sayı olabilir. Çoğu zaman n asal sayı olarak alınır.

Eğer bir metni şifreliyorsanız metnin yazıldığı alfabeye göre (Türkçe, İngilizce vs.) ve metnin bölündüğü bloklara göre n sayısı seçilmektedir. Ancak yine de a sayısı ile aralarında asallık koşulunun sağlanması gerekmektedir.

a ile n'nin aralarında asal olması, yani $\text{ebob}(a,n) = 1$ olması neden önemlidir?

Bu koşul şifrelenmiş sayının deşifre edilmesinde önemlidir, $a \cdot x \equiv 1 \pmod{n}$ denkleminin x çözümünün olması için gereklidir.

Şimdi doğrusal şifrelemeye dönelim:

$$ş(x) = ax + b \pmod{n}.$$

x sayısı uzunluğu n olan bir alfabenin harflerini temsil ettiği için burada $x \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ olmalıdır. a ve b sayılarından yukarıda bahsettik. Şimdi n'ye gelelim. Doğrusal şifrelemeyi kullanıp x sayısının kolayca şifrelenebileceğini gördük. Ancak deşifre işlemi için $\text{ebob}(a,n) = 1$ koşulu gereklidir. Bu da $ax \equiv 1 \pmod{n}$ denklemiyle bağlantılıdır.

$ax \equiv 1 \pmod{n}$ denklemi şifrelemede çok önemlidir. Burada a tamsayı, n doğal sayı, x ise bilinmeyen bir tamsayıdır. a ve n verildiğinde öyle x tamsayısı arıyoruz ki ax sayısını n'ye böldüğümüzde kalan 1 olmalıdır.

Örneğin

$$3x \equiv 1 \pmod{26}$$

denklemini çözelim.

Bu denklemin bir çözümünün $x = 9$ olduğu açıktır. Çünkü $3 \cdot 9 = 27$ ve 27'nin 26'ya bölünmesinden kalan 1'dir.

Evet. Modüler aritmetik ünitesinden hatırlayacağınız gibi, bu tür denkliklerin sonsuz çözümleri olabiliyordu. Örneğin bu denklikte $x = 9$, $x = 35$, $x = 61$, $\dots$ gibi sonsuz tane çözüm vardır. Bu çözümlerin hepsi mod 26'ya göre denktirler. Yani

$$9 \equiv 35 \equiv 61 \equiv \cdots \pmod{26}.$$

Bu sayıların hepsinin 3 katının 26'ya bölümünden kalan 1'dir.

Şimdi hangisini alacağız?

Şifreleme açısından en küçük pozitif olanını alacağız.

Denkleme bakarak çözüm var ya da yok diyebilir miyiz?

Evet diyebiliriz. $ax \equiv 1 \pmod{n}$ denkleminin x çözümü ancak $\text{ebob}(a, n) = 1$ iken vardır, yani a ve n aralarında asal olmalıdır (a ve n'nin 1'den büyük ortak böleni olmaması gerekiyor).

$3x \equiv 1 \pmod{26}$ denkleminde 3 ve 26 aralarında asaldır. $2x \equiv 1 \pmod{26}$ denkleminde 2 ile 26 aralarında asal değil (2 bu sayıların ortak bölenidir), buna göre denklemin çözümü yoktur.

$8x \equiv 1 \pmod{15}$'in çözümü vardır, çünkü $\text{ebob}(8, 15) = 1$'dir (Bu durumda örneğin $x = 2$ bir çözümdür, çünkü $8 \cdot 2 = 16 \equiv 1 \pmod{15}$'tir). Ancak

$$9x \equiv 1 \pmod{30}$$

denkleminin çözümü yoktur, çünkü $\text{ebob}(9, 30) = 3 \neq 1$'dir.

Diyelim ki $\text{ebob}(a, n) = 1$'dir. x çözümlerini nasıl bulacağız?

$ax \equiv 1 \pmod{n}$ denkleminin x çözümünün olması için $\text{ebob}(a, n) = 1$ olmalıdır.

n büyük sayı olduğunda x'in bulunması için genişletilmiş Öklid algoritması denilen bir algoritma vardır. Ancak biz küçük n sayılarıyla ilgileneceğimiz için deneme-yanılmayla x'i kolayca bulabileceğiz.

Bu $ax \equiv 1 \pmod{n}$ denkleminin şifrelemeyle ne alakası var?

$x \to ş(x) \equiv y \pmod{n}$

$$\begin{aligned} d(y) &\equiv c(y-b) \\ &\equiv c(ax+b-b) \\ &\equiv cax \\ &\equiv 1 \cdot x \\ &\equiv x \pmod{n} \end{aligned}$$

$y \to d(y) \equiv x \pmod{n}$

Çok alakası var. $ax \equiv 1 \pmod{n}$ denklemini sağlayan x sayısına a'nın n moduna göre tersi denir. Bu sayıya c diyelim, yani $a \cdot c \equiv 1 \pmod{n}$. Birçok yöntemde deşifre işlemi için bir sayının belli bir mod'a göre tersinin alınması işlemi kullanılmaktadır. Örneğin, yukarıda tanımladığımız

$$ş(x) = ax + b \pmod{n}$$

doğrusal şifreleme için

$$d(y) = c(y-b) \pmod{n}$$

deşifre fonksiyonudur, yani gönderilecek sayı $ş(x)$ fonksiyonu yardımıyla şifrelenip, $d(y)$'nin yardımıyla deşifre edilir.

Hocam, birkaç örnek yapsak. . .

Örneğin, şifreleme fonksiyonu

$$ş(x) = 3x + 10 \pmod{29}$$

olarak verilsin. 25 sayısını şifreleyip göndermek istiyoruz.

$$ş(25) = 3 \cdot 25 + 10 \pmod{29}$$
$$3 \cdot 25 + 10 = 85 \text{ olup } 85 \equiv 27 \pmod{29}$$

olduğundan, demek ki

$$ş(25) = 27 \pmod{29}$$

olur (85'in 29'a bölümünden kalan 27'dir). 27 sayısı 25'in şifrelenmiş halidir ve alıcıya gönderilir. Alıcı 27'yi deşifre etmek için önce

$$3x \equiv 1 \pmod{29}$$

denklemini çözüyor, yani öyle bir x sayısı arıyor ki $3x$'in 29'a bölümünden kalan 1 olsun. Bu denkliği sağlayan en küçük pozitif sayının $x = 10$ olduğunu bulup deşifre için

$$d(y) = 10 \cdot (y - 10) \pmod{29}$$

fonksiyonunu kullanıyor. Böylece

$$d(27) = 10 \cdot (27 - 10) \equiv 170 \equiv 25 \pmod{29}$$

bulunuyor ve bizim gönderdiğimiz sayıyı elde etmiş oluyor.

Ancak gönderici ve alıcının hangi $ş(x)$ fonksiyonunun kullanılacağını önceden kararlaştırmaları gerekiyor.

Evet haklısınız. Başka bir örnek yapalım. Şifreleme fonksiyonu

$$ş(x) = (8x - 5) \pmod{27}$$

olsun. Zeynep, bu kurala göre $x = 11$ sayısını şifreleyebilir misin?

$$\begin{aligned} ş(11) &\equiv 8 \cdot 11 - 5 \\ &\equiv 83 \\ &\equiv 2 \pmod{27} \end{aligned}$$

Demek ki 11 sayısının bu kurala göre şifrelenmişi 2 sayısıdır.

Şimdi de bu 2 sayısını deşifre edelim.

Bari deşifreyi de ben yapayım. Hep Zeynep yapıyor. Önce $8x \equiv 1 \pmod{27}$ denklemini çözmem gerekiyor. $\text{ebob}(8, 27) = 1$ olduğu, yani 8 ile 27 aralarında asal oldukları için, $8x \equiv 1 \pmod{27}$ denkleminin çözümü vardır. Ama bunu bulmak biraz zor olacak. Ben şimdi ne yapayım?

O kadar da zor değil Gökçe. Aradığın sayının 8 katının 1 eksiği 27'nin bir katı olacak. Yani aradığın sayının 8 katı, 27'nin bir katından 1 fazla olacak. Örneğin 28 olabilir, ya da $2 \cdot 27 + 1 = 55$, veya $3 \cdot 27 + 1 = 82$ gibi.

Galiba şimdi anlıyorum. Aradığım sayının 8 katı, 28 veya 55 ya da 82 gibi bir sayı. Ama bunlar 8'e bölünmüyor. Biraz daha ilerleyelim. $4 \cdot 27 + 1 = 109$, ama o da 8'e bölünmüyor. $5 \cdot 27 + 1 = 136$, galiba şimdi oldu. 136 sayısı 8'e bölünüyor.

$$8x = 136 \;\Rightarrow x = 17.$$

O zaman deşifre fonksiyonunun ifadesini hatırlarsak,

$$d(y) = 17(y + 5) \pmod{27}$$

olacaktır.

Bize şifre olarak verilen 2 sayısını deşifre fonksiyonunda yerine yazarsak

$$\begin{aligned} d(2) &\equiv 17\cdot(2+5) \\ &\equiv 17\cdot 7 \\ &\equiv 119 \\ &\equiv 11 \pmod{27} \end{aligned}$$

(119'un 27'ye bölümünden kalan 11 olduğu için) elde edilir. Böylece şifrelenen 11 sayısını geri kazanmış oluruz.

Arkadaşlar, yukarıda öğrendiğimiz şifreleme yöntemlerinde gönderici ve alıcı ya aynı anahtarları kullanmıştı, ya da alıcının anahtarı göndericinin anahtarlarından kolayca elde ediliyordu. Bu çeşit şifreleme yöntemlerine simetrik yöntemler denir. Simetrik şifrelemede bu anahtarlar gizli kalmalıdır ve gönderici ile alıcının gizli anahtar konusunda anlaşmaları gerekir.

Simetrik şifrelemenin bir diğer özelliği ise çok hızlı olmasıdır.

Ancak afin şifreleme gizli anahtarlı şifreleme olsa da kolay kırılabilen bir şifrelemedir. Şimdi gizli anahtarlı ve zor kırılabilen bir şifrelemeyi öğreneceğiz.

Kuvvet Fonksiyonuyla Şifreleme

Daha önce $ş(x) = ax + b \pmod{n}$ şifreleme fonksiyonunundan bahsettik. Şimdi

$$ş(x) = x^e \pmod{p}$$

şifreleme fonksiyonundan bahsedeceğiz. Bu şifreleme yöntemi asal sayılar ve modüler aritmetiğin aşağıdaki teoremine dayalıdır.

Teorem $p > 2$ bir asal sayı, e ise $(p-1)$ ile aralarında asal bir sayı olsun,

$$\text{yani } \operatorname{ebob}(e, p-1) = 1 \text{ koşulu sağlansın.}$$

d sayısı, $e \cdot d \equiv 1 \pmod{p-1}$ koşulunu sağlayan bir sayı ise her M sayısı için

$$M^{ed} \equiv M \pmod{p}$$

denkliği sağlanır.

Buna bir örnek verebilir misiniz hocam?

Uygulamalarda p sayısı çok büyük bir asal sayı alınır. Ancak biz örnek olarak küçük p'lerle yetineceğiz.

$p = 7$ alalım. $p - 1 = 6$ olur. ebob$(e, 6) = 1$ koşuluna uyan bir sayı olarak $e = 5$ seçelim.

$$5 \cdot d \equiv 1 \pmod{6}$$

koşulundan $d = 5$ seçilebilir (25'in 6'ya bölümünden kalan 1 olduğu için).

Örneğin $M = 4$ olsun. $4^{5\cdot 5} \equiv 4^{25} \pmod{7}$'yi hesaplayıp 4'e denk olduğunu görelim. $4^3 = 64 \equiv 1 \pmod{7}$ olduğuna göre

$$\begin{aligned} 4^{25} &\equiv \underbrace{4^3 \cdot 4^3 \cdots 4^3}_{8 \text{ tane}} \cdot 4 \pmod{7} \\ &\equiv 1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot 4 \pmod{7} \\ &\equiv 4 \pmod{7} \end{aligned}$$

olur. Yani teoremimiz $p = 7$, $e = 5$ ve $d = 5$ için sağlanmış olur.

Bu teorem şifrelemede nasıl kullanılır?

Deşifre yöntemi neden çalışıyor:

$$\begin{aligned} d(y) &\equiv y^d \\ &\equiv (x^e)^d \\ &\equiv x^{ed} \\ &\equiv x \pmod{p} \end{aligned}$$

Bu teoreme dayalı şifreleme fonksiyonu

$$ş(x) = x^e \pmod{p},$$

deşifre fonksiyonu ise

$$d(y) = y^d \pmod{p}$$

olur.

Gönderici p'den küçük olan M sayısını $ş(x)$ fonksiyonu ile şifreler, alıcı ise aldığı şifreli sayıyı $d(y)$ ile deşifre edip M'ye ulaşır.

Bu p, e ve d sayıları herhalde gizli tutulmalıdır.

Evet. Onları ancak alıcı ve gönderici biliyor. Şifreleme ve şifreyi okuma işlemini tekrarlayalım:

1) Gönderici ve alıcı $p > 2$ asal sayısını, $p-1$ ile aralarında asal olan e sayısını ve $e \cdot d \equiv 1 \pmod{p-1}$ koşulunu sağlayan d sayısını seçerler.

2) Gönderici M sayısını şifreleyip göndermek için

$$M^e \pmod{p}$$

sayısı olan y'yi hesaplar. y şifreli mesajdır, bunu alıcıya gönderir.

3) Alıcı da $y^d \pmod{p}$'yi hesaplayıp M'ye ulaşır.

Bir örnek yapsak belki anlar mıyız acaba?

Tabii ki Gökçe. Biraz önce $p = 7$, $e = 5$, $d = 5$ ve $M = 4$ almıştık. M'yi şifrelersek

$$\begin{aligned} y &= 4^5 \pmod{7} \\ &\equiv 4^3 \cdot 4^2 \pmod{7} \\ &\equiv 1 \cdot 16 \pmod{7} \\ &\equiv 2 \pmod{7} \end{aligned}$$

elde ederiz. $y = 2$ şifrelenmiş mesajdır.

Alıcı ise

$$\begin{aligned} y^d &\equiv 2^5 \pmod{7} \\ &\equiv 32 \pmod{7} \\ &\equiv 4 \pmod{7} \end{aligned}$$

hesaplayıp $M = 4$'e ulaşmış olur.

Hocam, asal sayı olarak $p = 11$ alırsak ne olur?

$p = 11$ ise $p - 1 = 10$ olur.

$$\text{ebob}(e, 10) = 1$$

koşulunu sağlayan bir sayı olarak $e = 3$ alabiliriz. Çünkü 3 ile 10 aralarında asaldır.

$$3d \equiv 1 \pmod{10}$$

koşulundan $d = 7$ alabiliriz, çünkü $3d = 3 \cdot 7 = 21$'in 10'a bölümünden kalan 1'dir.
$M = 4$'ü şifrelersek

$$\begin{aligned} y &= 4^3 \pmod{11} \\ &\equiv 64 \pmod{11} \\ &\equiv 9 \pmod{11} \text{ olur.} \end{aligned}$$

$y = 9$'u deşifre edersek

$$\begin{aligned} 9^7 &\equiv 9^2 \cdot 9^2 \cdot 9^2 \cdot 9 \pmod{11} \\ &\equiv 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 9 \pmod{11} \\ &\equiv 64 \cdot 9 \pmod{11} \\ &\equiv 9 \cdot 9 \pmod{11} \\ &\equiv 81 \pmod{11} \\ &\equiv 4 \pmod{11} \text{ olduğundan} \end{aligned}$$

yeniden $M = 4$'ü bulmuş oluruz.

$M = 5$'i şifreleyelim.

$$\begin{aligned} y &= 5^3 \pmod{11} \\ &\equiv 125 \pmod{11} \\ &\equiv 4 \pmod{11}. \end{aligned}$$

$y = 4$'ü deşifre edersek

$$\begin{aligned} 4^7 &\equiv 4^3 \cdot 4^3 \cdot 4 \pmod{11} \\ &\equiv 9 \cdot 9 \cdot 4 \pmod{11} \\ &\equiv 81 \cdot 4 \pmod{11} \\ &\equiv 4 \cdot 4 \pmod{11} \\ &\equiv 16 \pmod{11} \\ &\equiv 5 \pmod{11} \end{aligned}$$

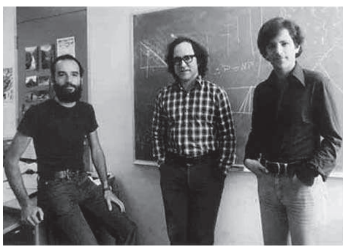
olur. $M = 5$'i yeniden elde ettik.

Doğrusal fonksiyon ve kuvvet fonksiyonu kullanarak yaptığımız şifrelemelerde şifrelenen mesajı alıcının çözebilmesi için göndericinin ve alıcının şifreleme ve deşifre fonksiyonlarını (yani "gizli anahtarı") bilmesi gerekir.

Diyelim ki iki kişi güvenli bir biçimde mesajlaşmak istiyor, ancak bu kişilerin ortak gizli bir anahtar üzerinde anlaşma imkanları yoktur. Bu durumda ne yapabilirler?

Onun da çaresi bulundu. Asal sayılar ve modüler aritmetik kullanılarak yeni bir yöntem, RSA yöntemi keşfedildi. Bu yöntemde alıcı ve gönderici birbirlerini tanımak zorunda değiller. Alıcının bir açık adresi (açık anahtarı) ve bir de gizli anahtarı vardır. Gönderici de göndereceği mesajı bu açık anahtara göre şifreleyip gönderir. Bu şifrelenmiş mesajı ancak alıcı açabilir. Şimdi bu yöntemi ele alacağız.

RSA Yöntemi



Şekil 7.2: Ron Rivest, Adi Shamir, Len Adleman (1977).

İlk açık anahtarlı şifreleme sistemi olan RSA, ismini bu yöntemi 1977 yılında bulan üç kişinin soyadlarının (Rivest-Shamir-Adleman) birinci harflerinden alır. Bu yöntem halen şifreleme alanında kullanılan çok önemli bir yöntemdir.

Bu yöntem de herhalde matematiğe, sayılar teorisine dayalı olmalı.

Bu yöntem, asal sayılar ve modüler aritmetiğin iki önemli teoremine dayalıdır. Yöntemin güvenilirliği yani şifrenin kırılamaması ise iki büyük asal sayının çarpımı olan bir sayıyı asal çarpanlarına ayırmanın çok zor olması olgusuna dayalıdır.

Yüz basamaklı bir asal sayı:

35324619344027701212
72604978198464368671
19740019762502364930
34687761212536794232
00058547956528088349

Matematik bu kadar gelişmiş, bilgisayarlar bu kadar gelişmiş, ancak hala büyük sayıları çarpanlara ayırma problemi çözülmemiş.

Selçuk, bu sayılar on-onbeş basamaklı sayılar değil. Bu sayılar yüzlerce basamaklıdır.

Biz şimdi yüz basamaklı sayılarla mı uğraşacağız?

Hayır. Biz yöntemi düşük basamaklı sayılar üzerinde açıklayacağız.

Bu RSA yönteminin dayandığı teoremler nasıl şeyler hocam?

Birinci teoremi doğrusal şifreleme konusundan biliyorsunuz: Eğer a ve n sayıları aralarında asal yani $\text{ebob}(a,n) = 1$ ise o zaman $ax \equiv 1 \pmod{n}$ denkleminin x çözümü vardır.

İkinci teorem ise şöyledir:

Teorem p ve q sayıları farklı asal sayılar, $e \geq 1$ sayısı ise

$$\text{ebob}(e,(p-1)(q-1)) = 1$$

koşulunu sağlayan bir sayı olsun (yani e ile $(p-1)(q-1)$ sayıları aralarında asal olsunlar). d sayısı

$$e \cdot d \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)} \tag{7.1}$$

koşulunu sağlasın. O zaman her M pozitif tamsayısı için

$$M^{ed} \equiv M \pmod{pq}$$

sağlanır.

(7.1) eşitliğindeki d'nin varlığını nereden biliyoruz?

Doğrusal şifrelemede gördüğümüz teoreme göre $\text{ebob}(a,n) = 1$ ise $ax \equiv 1 \pmod{n}$ denkleminin x çözümü vardır. a sayısını e olarak, n sayısını ise $(p-1)(q-1)$ şeklinde düşünürsek $x = d$ çözümünün varlığı sağlanmış olur.

Hocam bu ikinci teoremi bir örnekte görsek iyi olur.

p ve q farklı asal sayılar, örneğin $p = 3$, $q = 5$ olsun.

$$p \cdot q = 15, \quad (p-1)(q-1) = 2 \cdot 4 = 8 \text{ olur.}$$

e sayısı 8 ile aralarında asal olmalıdır. Örneğin $e = 3$ olsun.

$$3d \equiv 1 \pmod{8}$$

eşitliğini $d = 3$ sağlamaktadır ($3 \cdot 3 = 9$'un 8'e bölümünden kalan 1'dir).

Örneğin, $M = 7$ alalım. $7^{3\cdot 3} \pmod{15}$'i hesaplayalım. Bu hesabı da Zeynep yapsın.

Geçen dersimizde buna benzer sorular çözmüştük.

$$7^9 = 7^8 \cdot 7 = (7^2)^4 \cdot 7,$$
$$7^2 \equiv 4 \pmod{15}$$

(49'un 15'e bölümünden kalan 4 olduğu için),

$$\begin{aligned} (7^2)^4 &\equiv 4^4 \pmod{15} \\ &\equiv 4^2 \cdot 4^2 \pmod{15} \\ &\equiv 1 \cdot 1 \pmod{15} \\ &\equiv 1 \pmod{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7^9 &\equiv 7^8 \cdot 7 \pmod{15} \\ &\equiv 1 \cdot 7 \pmod{15} \\ &\equiv 7 \pmod{15} \end{aligned}$$

yani yeniden $M = 7$ sayısına varmış olduk.

Bu teoremin şifrelemeyle nasıl bir bağlantısı var?

Diyelim ki M sayısını karşı tarafa göndermek istiyorsunuz. O zaman $M^e \pmod{pq}$'yu hesaplıyorsunuz. Yani M^e sayısının pq sayısına bölümünden kalanı buluyorsunuz. Buna y diyelim. Bu y sayısı şifrelenmiş sayıdır. y sayısını alıcıya gönderiyorsunuz. Alıcı da

$$y^d \pmod{pq}$$

ifadesini (yani y'nin d. kuvvetini alıp pq sayısına bölümünden kalanı) hesaplayıp gerçek M sayısına ulaşır. Çünkü teoreme göre

$$y^d \equiv (M^e)^d \equiv M^{ed} \equiv M \pmod{pq}.$$

Özetlersek, RSA yönteminin çalışma prensibi şöyledir:

1) Önce alıcı iki tane farklı p ve q asalları seçiyor ve onların N çarpımını hesaplıyor: $N = p \cdot q$. Sonra $(p-1)(q-1)$ ile aralarında asal olan e sayısını belirliyor. p ve q gizli tutulmasına karşın (N, e) ikilisi alıcının açık adresi olarak ilan edilir.

2) Gönderici göndereceği M sayısını şifrelemek için N ve e sayılarını kullanıyor ve

$$y \equiv M^e \pmod{N}$$

sayısını hesaplıyor. Yani M^e kuvvetinin N'ye bölümünden kalanı hesaplıyor. Artık y şifreli (yanıltıcı) sayı oluyor.

3) Gönderici y'yi açık biçimde kimseden saklamadan herhangi bir yolla alıcıya gönderiyor. Alıcı

$$e \cdot d \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$$

koşulunu sağlayan en küçük pozitif d sayısını hesaplıyor. Alıcı bu d sayısını gizli tutuyor. d'yi hesapladıktan sonra

$$y^d \pmod{N}$$

sayısını hesaplayıp M'ye ulaşıyor, çünkü

$$y^d \pmod{N} \equiv M.$$

Böylece alıcı, kendisine gönderilen M sayısını güvenli biçimde almış oluyor.

Biraz karıştırdık. Hangileri açık, hangileri gizli oldu şimdi?

N ve e sayıları açık, p, q ve d sayıları gizlidir. Bunların hepsini alıcı belirliyor.

İki tane üç basamaklı asal sayının çarpımı olan

633439

sayısını çarpanlarına ayırın!

$N = p \cdot q$ sayısı açık olduğu için deneme-yanılmayla p ve q bulunamaz mı?

p ve q sayıları yüzlerce basamaklı olduğu için bu iş çok zordur.

Hocam bir açık adres belirleyin, biz de size şifreli sayılar gönderelim. Siz bu şifreleri açıp hangi sayıları gönderdiğimizi bulunuz.

Tamam. Benim açık adresim $(15,3)$ olsun. 1 ile 15 arasında bir sayı seçin, onu şifreleyin ve bana şifrelenmiş sayılarınızı gönderin, ben de seçtiğiniz (şifrelenmemiş) sayılarınızı bulayım. Gökçe'den başlayalım.

Benim bir uğurlu sayım var ve verdiğiniz $(15,3)$ açık adresine göre onun şifrelenmişi 7.

Benim sayımın şifrelenmişi 12.

Benimkinin şifrelenmişi 2.

Benimkinin şifrelenmişi de 3.

Ben şimdi biraz gizli hesaplar yaparak sizlerin gerçek sayılarınızı bulacağım.

Gökçe'nin sayısı	$M = 13$,
Selçuk'un sayısı	$M = 3$,
Engin'in sayısı	$M = 8$,
Zeynep'in sayısı	$M = 12$.

Hocam şimdi gizliliği bırakıp bu sayıları beraber bulsak!

Ben $p = 3$, $q = 5$ seçtim. $N = 3 \cdot 5 = 15$. $(p-1)\cdot(q-1) = 2 \cdot 4 = 8$ olduğu için 8 sayısıyla aralarında asal olan $e = 3$'ü seçmiştim. Bundan dolayı $(N,e) = (15,3)$ ikilisi benim açık adresimdi. d sayısı olarak

$$e \cdot d \equiv 1 \pmod{8}$$

yani $3 \cdot d \equiv 1 \pmod{8}$'den $d = 3$ buldum (9'un 8'e bölümünden kalan 1'dir).

Hocam d sayısı e'ye eşit çıktı. Bu bir tesadüf mü?

Evet bir tesadüf. Biz küçük asal sayılarla çalıştığımız için böyle çıktı. Uygulamalarda e küçük sayı (örneğin 3), d ise çok büyük sayı çıkar.

Sonra, $d = 3$ olduğundan sırasıyla bana gönderdiğiniz sayıların üçüncü kuvvetlerinin (mod 15)'ini yani 15'e bölümünden oluşan kalanları buldum:

$$\begin{aligned} y = 7 \text{ için} \quad M &\equiv 7^3 \pmod{15} \equiv 49 \cdot 7 \pmod{15} \\ &\equiv 49 \pmod{15} \cdot 7 \pmod{15} \\ &\equiv 4 \cdot 7 \pmod{15} \equiv 28 \pmod{15} \\ &\equiv 13 \pmod{15}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = 12 \text{ için} \quad M &\equiv 12^3 \pmod{15} \equiv 144 \cdot 12 \pmod{15} \\ &\equiv 144 \pmod{15} \cdot 12 \pmod{15} \\ &\equiv 9 \cdot 12 \pmod{15} \equiv 108 \pmod{15} \\ &\equiv 3 \pmod{15}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = 2 \text{ için} \quad M &\equiv 2^3 \pmod{15} \\ &\equiv 8 \pmod{15}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = 3 \text{ için} \quad M &\equiv 3^3 \pmod{15} \\ &\equiv 27 \pmod{15} \\ &\equiv 12 \pmod{15}. \end{aligned}$$

Günümüzde RSA şifrelemesi için p ve q sayıları kaç basamaklı seçiliyor?

512 bitlik yani 2^{512} sayısına yakın sayılar olarak seçiliyor, bu da yaklaşık olarak 150 basamaklı asal sayı demektir.

Büyük sayıların büyük kuvvetlerinin modlarını hesaplamak gerekiyor. Biraz zor değil mi?

Her bir sayı 2-lik tabanda yazılabilir. Örneğin,

$$\begin{aligned} 45 &= 32 + 8 + 4 + 1 \\ &= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 \\ &\quad + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0, \\ 99 &= 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 \\ &\quad + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 \\ &\quad + 1 \cdot 2^0. \end{aligned}$$

Kuvvetlerin modüllerini hesaplamak için kuvvetteki sayı 2-lik tabanda yazılır, sonra üslü sayı çarpanlara ayrılır. Örneğin, $13^{21} \pmod{11}$ üslü sayısı

$$\begin{aligned} 13^{21} &= 13^{2^4 + 2^2 + 2^0} \\ &= 13^{2^4} \cdot 13^{2^2} \cdot 13^{2^0} \end{aligned}$$

şeklinde yazılır, sonra

$$\left(13^{2^{i-1}}\right)^2 = 13^{2^i}$$

formülünden yararlanılıp modül hesaplanır:

$$\begin{aligned} 13^{2^0} &\equiv 13^1 \equiv 2 \pmod{11} \\ 13^{2^1} &\equiv 2^2 \equiv 4 \pmod{11} \\ 13^{2^2} &\equiv 4^2 \equiv 5 \pmod{11} \\ 13^{2^3} &\equiv 25 \equiv 3 \pmod{11} \\ 13^{2^4} &\equiv 9 \pmod{11} \end{aligned}$$

böylece

$$\begin{aligned} 13^{21} &\equiv 9 \cdot 5 \cdot 2 \\ &\equiv 90 \\ &\equiv 2 \pmod{11} \end{aligned}$$

bulunur.

Bu modülleri hesaplamak için kuvvetlerin kendilerini hesaplamaya gerek yoktur. Zaten hesaplanması da çok zordur. Ancak M^e gibi bir kuvveti hesaplarken e üssü 2-lik tabanda yazılıp bilgisayarın da yardımıyla kuvvetin modülü kolayca hesaplanır.

Sıra	İkilik Taban	ASCII Kod
0	00000000	NUL
1	00000001	SOH
2	00000010	STX
⋮	⋮	⋮
32	00100000	space
33	00100001	!
34	00100010	"
35	00100011	#
36	00100100	$
37	00100101	%
⋮	⋮	⋮
59	00111011	;
60	00111100	<
61	00111101	=
62	00111110	>
63	00111111	?
64	01000000	@
65	01000001	A
66	01000010	B
67	01000011	C
⋮	⋮	⋮
97	01100001	a
98	01100010	b
99	01100011	c
100	01100100	d
⋮	⋮	⋮
122	01111010	z
123	01111011	{
⋮	⋮	⋮
254	11111110	■
255	11111111	

Kelimelerle yazılmış metinler sayılara nasıl dönüştürülür?

Bunun için çeşitli yöntemler vardır. En yaygın olan ASCII denilen sistemdir. Bu sistemde her harfin (hem küçük hem de büyük), her noktalama işaretinin ve her sembolün 0 ve 1'lerden oluşan 8 basamaklı (8 bitlik) bir ifadesi vardır. Şifre metni önce 0 ve 1'lerden oluşan büyük basamaklı bir sayıya dönüştürülür, sonra sayı belli uzunluklu (örneğin 64-lük) bloklara ayrılır ve tekrar her blok 10-luk tabana dönüştürülerek sayılar elde edilir.

Geçmişten Günümüze Kriptoloji: Kısa bir özet

Kriptolojinin ne zaman başladığı belli değil, ancak yazının bulunmasıyla başladığı tahmin edilmektedir. Roma döneminden kalma Jül Sezar şifrelemesine benzer kaydırma şifreleri ve harf sıralarını değiştirme şifrelerine başka kültürlerde de rastlanmaktadır.

9. yüzyılda Arap bilimadamı El-Kindi tarafından harflerin frekans analizinin bulunması mevcut şifreleme yöntemlerini güvensiz hale getirmekteydi ve zorunlu olarak yeni şifreleme yöntemleri arayışına girildi. 16. yüzyıldan başlayarak Vigenere şifresi kullanılmaya başlandı. Bu şifrelemede bir anahtar sözcük seçiliyor ve bunun yardımıyla her harfin şifrelemesi alfabedeki farklı bir kaydırma ile yapılıyordu. Bu sayede frekans analizinin uygulanması zorlaşıyordu.

Böylece frekans analizinin uygulanmasıyla yenilgi yaşayan kriptograflar Vigenere şifresinin bulunmasıyla üstünlük elde ettiler. Ancak 200 yıla yakın güvenle kullanılan bu şifre de 1860 yıllarında kırılmış oldu.

Herhalde kriptograflar yeni yöntemler aramaya başladılar.

19. yüzyılın bitiminde telsiz keşfedildi ve bu keşif, haberleşmede büyük avantajlar sağlasa da yeni sorunları getirmiş oldu. Çünkü telsizin yayınlarını başkaları da yakalayabilirlerdi. Telsizlerin şifrelenmesi için birçok yöntem geliştirildi. I. Dünya Savaşı esnasında kriptanalistler bu şifrelerin kırılması için çok çalıştılar ve başarılı oldular. Savaşın kaderinin değişmesinde önemli bir rol oynadılar.

Örneğin, o dönem Alman Dışişleri Bakanı Zimmerman'ın Meksika hükümetine 16 Ocak 1917'de gönderdiği telgrafın İngilizler tarafından yakalanıp deşifre edilmesi, o zamana kadar tarafsız olan Amerika'nın savaşa girme nedenlerinden biri oldu.

Amerika gibi bir devletin savaşa girmesi de savaşın seyrini değiştirdi tabii.

Evet. Artık kriptograflar kağıt kalemle yapılan şifreleme yöntemleri yerine şifre makinalarının bulunması gerekliliğini anladılar. Almanlar tarafından 1920'li yıllarda kullanılmaya başlanan ENIGMA şifreleme makinası bu tür makinalardandı.

Alman ordusu, yaklaşık 20 yıl boyunca haberleşmeyi bu makinalarla sağladı. Ancak 2. Dünya Savaşı öncesi Polonyalı matematikçiler bu şifrenin kırılabileceğini gösterdiler. 2. Dünya Savaşı sırasında da İngiliz matematikçiler daha da zorlaştırılmış ENIGMA şifrelerini kırabildiler. Hiç şüphesiz bu da savaşın seyrini etkilemişti.

Birçok kişi bu sayede II. Dünya Savaşının 2-3 sene daha kısaldığı görüşünde birleşmektedir.

Sonra da bilgisayar dönemi başladı.

Evet. Bilgisayarın keşfi ve kullanımı şifrelemede bilgisayarların kullanımının yolunu açsa da, yeni güvenlik problemlerini ortaya çıkarmış oldu. DES şifrelemesi, Diffie-Hellman anahtar değişimi algoritması, RSA açık anahtarlı şifreleme sistemi gibi şifreleme yöntemleri bulundu ki bunlardan en önemli ve en çok kullanılanı RSA yöntemidir.

Demek ki biz günümüzün en önemli şifreleme yöntemini öğrenmiş olduk.

Günümüzde kullanılan RSA sistemindeki p ve q sayıları 512 bitlik asal sayılar olarak alınır. Bu da yaklaşık olarak 2^{512} civarında bir sayı demektir. Şimdiki bilgisayarlar ile böyle iki farklı asal sayının çarpımı olan 1024 bitlik bir sayının çarpanlara ayırılması hemen hemen imkansızdır. Ancak geleceğin bilgisayarı denilen kuantum bilgisayarlarının bu problemleri kolayca çözecekleri iddia edilmektedir ve bu gerçekleşirse RSA güvenilirliğini kaybedecektir.

Günlük yaşantımızdan bir örnekle bitirelim. Diyelim ki ATM'ye kartınızı takıyorsunuz. ATM sizden şifre istiyor. Şifrenizin $x = 26470$ olduğunu varsayalım. Ancak bankanın merkez bilgisayarında sizin isminizin karşısında bu sayı değil başka bir y sayısı durur. Bu y sayısı şifreleme kullanılarak 26470 sayısından elde edilmiştir. Gerçek şifreniz olan 26470 sayısını tutmak risklidir, başkasının eline geçebilir.

Kartı takıp şifre girdiğinizde, ATM onu bir y' sayısına çevirir. Bu y' sayısı ve kart üzerindeki kişisel bilgileriniz telefon hatları üzerinden bankanın bilgisayarına ulaşır. y' sayısı orada tutulan y ile çakıştığında işlem yapmaya izin verilir. Yanıt yine telefon hattı üzerinden gelir. Bu gidip-gelen şifre gerçek şifre olmadığından güvenlik de sağlanmış olur.

Bir başkası 26470 yerine örneğin 62470 girse, bunun çevrildiği y' sayısı, bankada tutulan y sayısı ile çakışmayacağından işleme izin verilmez.

Banka benim girdiğim 26470 şifresini bilmiyor mu?

Bilmiyor. Şifrenizi alıp, genel bir kural yardımıyla başka sayıya çevirir. Şifreyi unuttuğumuzda banka size bilgisayardan yeni bir şifre gönderiyor.

Özet

Bu ünitede asal sayılar ve modüler aritmetiğin uygulamaları olarak üç şifreleme yöntemi ele alındı:

Doğrusal şifrelemede $\text{ebob}(a,n) = 1$ olmak üzere, şifreleme fonksiyonu $ş(x) = ax + b \pmod{n}$ şeklinde ve deşifre fonksiyonu ise $d(y) = c(y - b) \pmod{n}$ şeklinde tanımlanır. Burada c sayısı $ac \equiv 1 \pmod{n}$ denkliğini sağlamaktadır.

$p \geq 2$ asal bir sayı, e ise $\text{ebob}(e, p - 1) = 1$ koşulunu sağlayan bir sayı olmak üzere, şifreleme fonksiyonu $x^e \pmod{p}$ ve deşifre fonksiyonu $y^d \pmod{p}$ ile tanımlı şifrelemeye kuvvet fonksiyonu ile verilen şifreleme denir. Burada d sayısı $ed \equiv 1 \pmod{p-1}$ koşulunu sağlamaktadır.

RSA şifrelemesinde alıcı p ve q farklı asal sayılarını,

$$\text{ebob}(e,(p-1)(q-1)) = 1$$

koşulunu sağlayan bir e sayısını ve

$$ed \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$$

koşulundan da d sayısını seçiyor. p, q ve d alıcı için gizli anahtar, (N, e) ikilisi ise açık adres oluyor. Burada $N = pq$ dur. Şifreleme fonksiyonu $x^e \pmod{pq}$, deşifre fonksiyonu ise $y^d \pmod{pq}$'dur.

Okuma Parçası

Al-Kindi'nin Frekans Analizi

"...Anahtara sahip olmadan, şifrelenmiş bir mesajı deşifre etme bilimi olan kriptanaliz, ilkel şifrelerin kırılma çabalarıyla ortaya çıkmıştır. Bu basit şifre sistemlerini olası tüm şifre alfabeleri denemeden daha kolay bir yoldan çözebilmek için matematik, istatistik ve dilbilim alanlarında yeterli bilgiye sahip olmak gerekiyordu. O yıllarda, Abbasi dönemini yaşayan Araplar birçok bilim alanında ileri seviyedeydi. Aynı zamanda kritpanaliz için gerekli olan matematik, istatistik ve dilbilim alanlarında önemli çalışmalar yapılıyordu. Bu bilim dallarının gelişmiş olması kriptanalizin Araplar tarafından bulunmasını sağladı ve bu alanda ilk eserler Araplar tarafından yazıldı. Bunlardan ilki 9. yüzyılda yaşamış ve Arapların Filozofu olarak bilinen Al-Kindi'nin yazdığı 'Kriptografik Mesajların Deşifresi' isimli yazıdır. Bu yazı İstanbul'da, Süleymaniye Osmanlı Arşivi'nde bulunmaktadır ve kriptanaliz üzerine yazılmış ilk makale olup frekans analizi kavramını ortaya atmıştır. Al-Kindi'nin kriptanaliz tekniğini şöyle özetleyebiliriz: Yazıldığı dili bildiğimiz şifreli bir mesajı çözmek için aynı dilde yazılmış yeterince uzun bir metin bulup her bir harfin kullanım sıklığını hesaplamak gereklidir. Metinde en sık kullanılan harf, şifreli mesajdaki en sık kullanılan harfe denk gelmektedir. Aynı işlem, sırasıyla diğer harfler için de yapılır. Bu işlem bittikten sonra mesajdaki harfler ortaya çıkmış olur. Al-Kindi, bu kriptanaliz yöntemine frekans analizi adını vermiştir. Sebebi ise bir dildeki her harfin bir kullanım sıklığı, yani frekansı vardır.

...Dünyada aynı alfabenin kullanıldığı bütün dillerde her harf aynı sıklıkta kullanılmamaktadır. Örneğin, Latin alfabesini kullanan Türkçe ve İngilizceyi düşünürsek, Türkçede en çok kullanılan harf 'A' iken İngilizcede 'E' dir.

...Türkçemiz için oluşturulan harf frekans tablosu 6.421.357 adet harften oluşan metinler üzerinde yapılan hesaplamalar sonucunda aşağıda verilmiştir."

HARF	Binde	HARF	Binde	HARF	Binde
A	121	I	48	R	68
B	25	İ	107	S	28
C	9	J	0,5	Ş	16
Ç	10	K	47	T	31
D	41	L	62	U	29
E	95	M	37	Ü	15
F	5	N	71	V	8
G	13	O	22	Y	31
Ğ	11	Ö	7	Z	14
H	11	P	8		

Harflerin kullanım sıklıkları

Kaynak: Canan Çimen, Sedat Akleylek, Ercan Akyıldız, Şifrelerin matematiği: Kriptografi (s.29-31) , ODTÜ Yayınları, 2011.

Çıkarın Kağıtları

1. Doğrusal şifreleme fonksiyonu

$$ş(x) = 3x + 5 \pmod{7}$$

ile $x = 4$ sayısının şifrelenmişi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 1

2. Doğrusal şifreleme fonksiyonu

$$ş(x) = 2x + 3 \pmod{29}$$

ise 15 sayısının şifrelenmişi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 10 **B)** 8 **C)** 6 **D)** 4 **E)** 2

3. Doğrusal şifreleme fonksiyonu

$$ş(x) = 4x + 3 \pmod{29}$$

ile $x = 20$ sayısının şifrelenmişi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 24 **B)** 25 **C)** 26 **D)** 27 **E)** 28

4. Deşifre fonksiyonu

$$d(y) = 22(y - 3) \pmod{29}$$

ile $y = 25$ sayısının deşifresi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 22 **B)** 21 **C)** 20 **D)** 19 **E)** 18

5. Kuvvet fonksiyonuyla şifrelemede

$$p = 13, \quad e = 5$$

olsun. $M = 6$ sayısının şifrelenmişi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 6 **B)** 5 **C)** 4 **D)** 3 **E)** 2

6. Kuvvet fonksiyonuyla şifrelemede

$$p = 11, \quad e = 3$$

olsun. $M = 5$ sayısının şifrelenmişi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1 **E)** 5

7. Kuvvet fonksiyonuyla şifrelemede $p = 11$, $e = 3$ ise deşifre fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $d(y) = y^3 \pmod{11}$

B) $d(y) = y^7 \pmod{11}$

C) $d(y) = y^5 \pmod{11}$

D) $d(y) = y^{11} \pmod{11}$

E) $d(y) = y^4 \pmod{11}$

8. RSA şifrelemesi kullanan alıcının açık adresi $(33, 3)$ olsun. $M = 5$ sayısının bu açık adrese göre şifrelenmişi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 23 **B)** 24 **C)** 25 **D)** 26 **E)** 27

9. RSA şifrelemesi kullanan alıcı $p = 3$, $q = 7$ ve $e = 5$ sayılarını seçmiştir. Ona gönderilecek şifreli sayıyı okumak için gereken gizli d sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 **B)** 5 **C)** 7 **D)** 9 **E)** 11

10. RSA şifrelemesi kullanan alıcı $p = 3$, $q = 11$ ve $e = 3$ sayılarını seçmiştir. Ona gönderilecek şifreli sayıyı okumak için gereken gizli d sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 **B)** 5 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

Çözümler

1.

$$ş(4) = 3 \cdot 4 + 5 \pmod{7},$$
$$17 \equiv 3 \pmod{7}$$

olduğundan $ş(4) = 3$ olur. Doğru cevap A şıkkıdır.

2.

$$ş(15) = 2 \cdot 15 + 3 \pmod{29},$$
$$33 \equiv 4 \pmod{29}$$

olduğundan $ş(15) = 4$ olur. Doğru cevap D şıkkıdır.

3.

$$ş(20) = (4 \cdot 20 + 3) \pmod{29},$$
$$83 \equiv 25 \pmod{29}$$

olduğundan $ş(20) = 25$'tir. Doğru cevap B şıkkıdır.

4.

$$d(25) = 22 \cdot (25 - 3) \pmod{29},$$
$$22 \cdot 22 \equiv 484 \equiv 20 \pmod{29}.$$

Dolayısıyla $d(25) = 20$'dir. Doğru cevap C şıkkıdır.

5.

$$ş(x) = x^e \pmod{p} = x^5 \pmod{13},$$
$$ş(6) = 6^5 \pmod{13},$$

$6^5 = 6^2 \cdot 6^2 \cdot 6 \equiv 10 \cdot 10 \cdot 6 \equiv 9 \cdot 6 \equiv 2 \pmod{13}$. Dolayısıyla, $ş(6) = 2$'dir. Doğru cevap E şıkkıdır.

6.

$$\begin{aligned} ş(x) &= x^3 \pmod{11}, \\ ş(5) &= 5^3 \pmod{11}, \\ 125 &\equiv 4 \pmod{11} \end{aligned}$$

olduğundan $ş(5) = 4$. Doğru cevap A şıkkıdır.

7.

$$p - 1 = 11 - 1 = 10,$$
$$3 \cdot d \equiv 1 \pmod{10}$$

olduğundan $d = 7$ olarak bulunur ($3 \cdot 7 = 21$'in 10'a bölümünden kalan 1'dir). Deşifre fonksiyonu

$$d(y) = y^7 \pmod{11}$$

olur. Doğru cevap B şıkkıdır.

8.

$$\begin{aligned} ş(5) &= 5^3 \pmod{33}, \\ 5^3 &\equiv 26 \pmod{33} \end{aligned}$$

($5^3 = 125$'in 33'e bölümünden kalan 26'dır). Dolayısıyla $ş(5) = 26$. Doğru cevap D şıkkıdır.

9.

$$\begin{aligned} (p-1) \cdot (q-1) &= 2 \cdot 6 = 12, \\ 5 \cdot d &\equiv 1 \pmod{12} \end{aligned}$$

denkliğinden $d = 5$ bulunur (25'in 12'ye bölümünden kalan 1'dir). Doğru cevap B şıkkıdır.

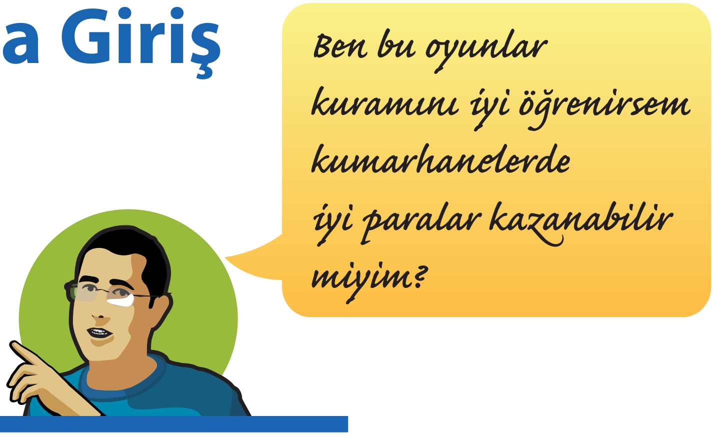
10. $(p-1)(q-1) = 2 \cdot 10 = 20$ ve $e = 3$ olduğundan

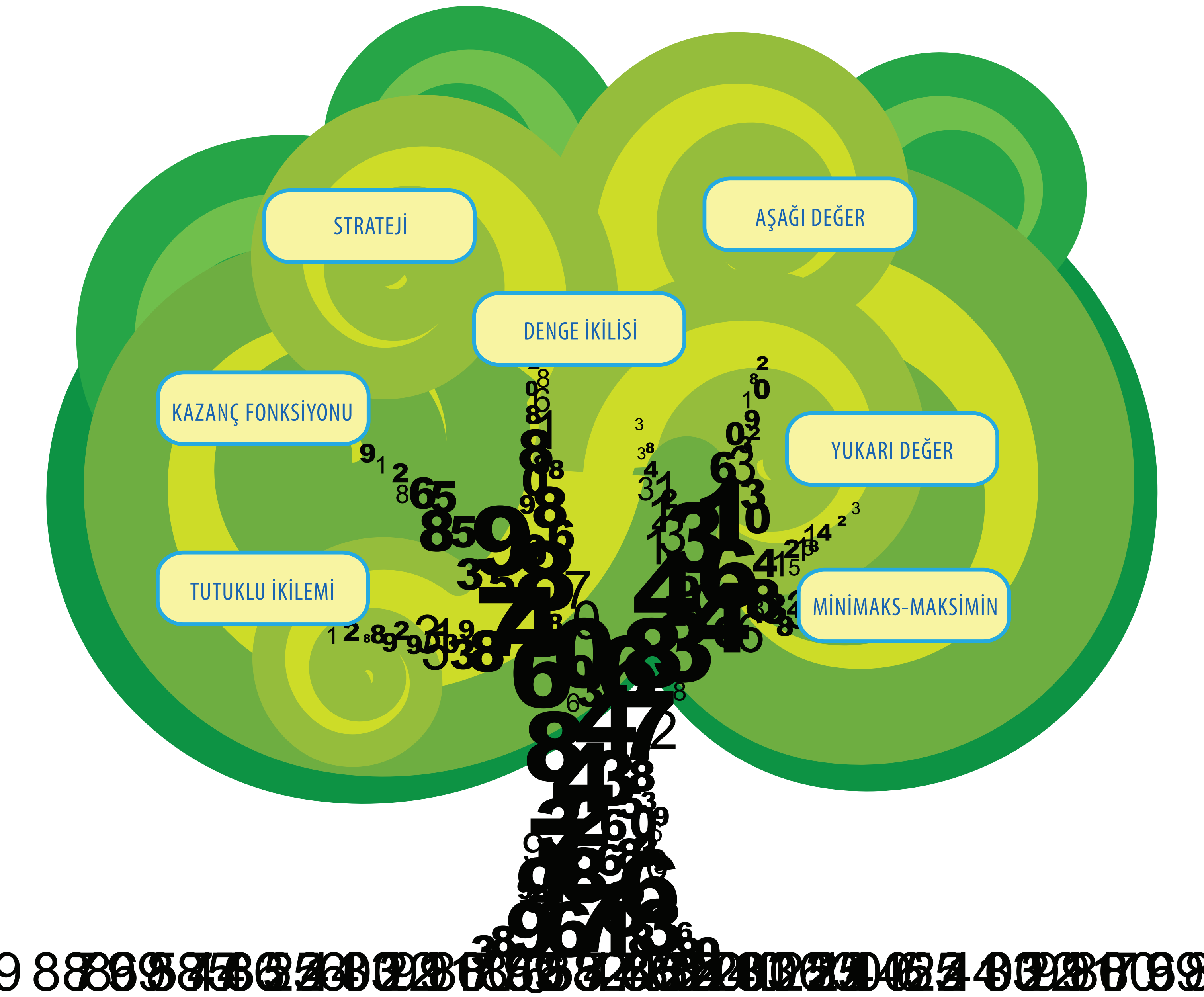
$$3 \cdot d \equiv 1 \pmod{20}$$

alırız. Buradan $d = 7$ bulunur (21'in 20'ye bölümünden kalan 1'dir). Doğru cevap C şıkkıdır.

Oyunlar Kuramına Giriş

8. MATEMATİK 2 ÜNİTE





Giriş

Merhaba değerli arkadaşlar. Bugünkü dersimizin konusu oyunlar kuramıdır. Bu derste biz oyunlar kuramı hakkında en temel bilgileri vermeyi amaçlıyoruz. Oyun dediğimizde ilk akla gelenler tavla, dama, satranç, briç, poker vs. gibi oyunlardır. Ancak oyunlar kuramının üzerinde durduğu problemler daha çok ekonomi, biyoloji, harp gibi alanlardandır. Bu problemlerde farklı amaçları olan taraflar (oyuncular) söz konusu olmaktadır. Oyunlar kuramı rekabet, karşıdurma içeren olayları matematiksel yöntemlerle incelemektedir.

Şekil 8.1: George Bingham- Dama Oyuncuları-1850.

Ben bu oyunlar kuramını iyi öğrenirsem kumarhanelerde iyi paralar kazanabilir miyim?

O tür oyunların fazla matematiği yoktur. Orada matematik sadece oyunlardaki beklentileri, yani çok defa oynadığında kazanıp-kazanmayacağını hesaplamada işe yarayabilir. Bu beklentiler ise genelde negatiftir. Kumarhanelerden kazandığı paralarla kimse zengin olmamıştır ve dolayısıyla eğer oraya gidersen büyük ihtimalle cebindeki paraları da koyup çıkarsın.

Yukarıda söylendiği gibi oyunlar kuramı rekabet, karşıdurma, mücadele içeren olayların matematiksel modellerini ele almaktadır. Oyuncuların (tarafların) ellerindeki bilgiler, oyuncular arasındaki münasebetler, tek veya çok hamle vs. durumlarına göre oyunların çeşitleri vardır. Ancak biz en basit oyun modelini ele alacağız. Bu modelde oyuncular, onların ellerindeki strateji kümeleri ve her bir oyuncunun kazanç fonksiyonu vardır. Bu fonksiyonlar strateji kümeleri üzerinde tanımlıdırlar. Yani her bir oyuncu tek hamle ile aynı anda birer strateji seçtiğinde bu stratejilere bağlı olarak her oyuncunun kazanç fonksiyonu belli bir değer almaktadır. Oyuncu öyle bir strateji seçmelidir ki kazanç fonksiyonu (kazancı) maksimum olsun.

Bu matematiksel probleme neden oyun denir?

Çünkü, oyunlarda olduğu gibi burada da

1) Belli bir kural söz konusudur.
2) Her bir oyuncunun kazancı bir tek kendi seçtiği stratejiye bağlı olmayıp, diğer oyuncuların seçtikleri stratejilere de bağlıdır.
3) Her bir oyuncu strateji seçerken diğer oyuncuların strateji kümelerini, kazanç fonksiyonlarını biliyor ancak hangi stratejiyi seçeceğini bilmemektedir.

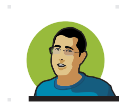
Bu özellikler, her bir taraf için en iyi strateji seçme problemine bu taraflar arasında bir oyun karakteri vermektedir.

Oyuncuların tek hamle yaptıklarını tekrar vurgulayalım. Karma stratejiler kullanılırken oyunların tekrarlanması varsayılmaktadır. O konulara girmeyeceğiz.

Strateji, kazanç fonksiyonu derken kafamız karıştı hocam, bir örnek verseniz.

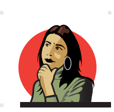
Taş, makas, kâğıt oyununu biliyorsunuzdur herhalde.

Yoksa oyun mu oynayacağız hocam?



Neden olmasın. Ama bu oyun yardımıyla kavramları açıklamaya çalışalım. Şimdi oyunun kurallarını bir hatırlayalım.

Çocukken çok oynamıştık. İki kişi ile oynanan bir oyundu. İki kişi aynı anda taş, makas veya kâğıttan birini seçip söyler. Kuralları ise şöyledir: kâğıt taşı sarar, makas kağıdı keser ve taş da makası kırar.



Bu oyunu Zeynep ile Gökçe'nin oynadığını varsayalım. Buna göre de her birinin seçtiği stratejiye göre elde edecekleri getirileri hesaplamaya çalışalım.

Zeynep'in seçeneklerine bakarsak "taş", "makas" veya "kâğıt" diyebilir. Buna göre Zeynep'in strateji kümesine X dersek,

$$X = \{\text{taş, makas, kâğıt}\}$$

olur. Benzer durumda Gökçe'nin strateji kümesine de Y dersek bu küme de

$$Y = \{\text{taş, makas, kâğıt}\}$$

olacaktır. Şimdi her birinin seçimine göre getirilerini hesaplayalım.

Zeynep'in taş dediğini varsayalım. Bu durumda Gökçe de taş derse her ikisi sıfır puan alsın. Diğer bir ifadeyle getirileri 0 olsun.

Eğer Gökçe makas dediyse taş makası parçalayacağından Zeynep'in getirisi 1, Gökçe'nin getirisi -1 olsun. Eğer Gökçe kağıt derse kâğıt taşı sardığından Zeynep'in getirisi -1, Gökçe'nin getirisi 1 olsun.

Hocam bunu bir tablo şeklinde göstersek daha iyi olmaz mı?

Evet Zeynep. Senin taş demen durumunda, getiri tablosunu

		Gökçe		
		T	M	K
Zeynep	T	$(0,0)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$

şeklinde yazalım. Burada örneğin $(1,-1)$ ikilisi şunu temsil ediyor: Zeynep taş ve Gökçe makas dediğinde, Zeynep'in getirisi 1 ve Gökçe'nin getirisi -1'dir.

Zeynep'in makas dediğini varsayarsak da şöyle gösterebiliriz:

		Gökçe		
		T	M	K
Zeynep	M	$(-1,1)$	$(0,0)$	$(1,-1)$

Ayrı ayrı yazarsak yandık. Bari hepsini bir tabloda gösterelim.

Bravo Selçuk. Zeynep'in kâğıt demesi durumunda üçüncü satırı da yazarak hepsini birleştirirsek,

		Gökçe		
		T	M	K
Zeynep	T	$(0,0)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$
	M	$(-1,1)$	$(0,0)$	$(1,-1)$
	K	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(0,0)$

şeklinde bir tablo elde ederiz. Bu tabloya oyunun matrisi diyeceğiz. Yalnız şuna dikkat edelim ki, bu matrisin elemanları birer sayı değil, birer sayı ikilileri. İkilinin birinci terimi Zeynep'in getirisini, ikinci terimi de Gökçe'nin getirisini gösteriyor. Bütün ikililer için getirilerin toplamı, yani ikilinin birinci ve ikinci terimlerinin toplamı sıfırdır. Bu nedenle bu oyuna sıfır toplamlı bir oyun denir.

Bu oyunu kim kazanır hocam?

Stratejilerin birbirlerine göre bir avantajı olmadığından çok defa oynandığında oyuncular bu stratejileri aşağı yukarı eşit sayıda yani rastgele seçmelidirler. Dolayısıyla çok defa oynanırsa oyun toplamda berabere biter.

Hocam, bu oyunun sıfır toplamlı olduğunu söylediniz. Sıfır toplamlı olmayan oyunlar da var mı?

Oyunlar kuramında sıfır toplamlı olmayan oyunlar önemli yer tutmaktadır. Bu kuramın klasik bir örneği olan "Tutuklu İkilemi" oyununu ele alalım. Polis bir cinayetin iki kişi tarafından birlikte işlendiğinden şüphelenmektedir. Bu şüpheliler ayrı odalarda polis tarafından sorgulanıyor. Her iki tutuklunun iki stratejisi vardır: susmak veya cinayeti birlikte işlediklerini itiraf etmek. Susma stratejisine S, itiraf etme stratejisine $\dot{I}$ dersek her iki tutuklunun stratejiler kümesi $\{S,\dot{I}\}$ olmaktadır.

Yasalar gereği alacakları cezalar şöyledir ve şüpheliler de bu cezaları bilmektedirler:

- Her ikisi de susar ise cinayet kanıtlanmamış olur ve şüpheliler ruhsatsız silah bulundurmaktan birer yıl ceza alır.

- Biri susar diğeri beraber yaptıklarını itiraf ederse susan kişi 10 yıl ceza alır, itiraf eden kişi ise polise yardım ettiği için serbest kalır.

- Her ikisi de itiraf ederse, her biri 6 yıl ceza alır.

Bu oyunun da matrisini yazalım. Her bir oyuncunun iki stratejisi olduğu için bu matris 2×2 boyutlu olacaktır.

Aferin Gökçe. Tutuklular alacakları cezayı azaltmaya çalışacakları ve oyunların genel tanımı gereği oyuncular getirilerini maksimize etmeye çalıştıkları için cezaları negatif sayılar olarak yazalım. Örneğin tutuklular birer yıl ceza alıyorlarsa onların getirilerinin $(-1,-1)$ ikilisiyle verilmesi uygundur.

Hocam, o zaman oyunun matrisini

$$\begin{array}{ccc} & & II.\ \text{Tutuklu} \\ & & \begin{array}{cc} S & \dot{I} \end{array} \\ I.\ \text{Tutuklu} & \begin{array}{c} S \\ \dot{I} \end{array} & \begin{bmatrix} (-1,-1) & (-10,0) \\ (0,-10) & (-6,-6) \end{bmatrix} \end{array}$$

şeklinde yazabilir miyiz?

Evet. Matristeki ikililerde birinci terim I. tutuklunun, ikinci terim ise II. tutuklunun alacağı cezayı ifade ediyor. Bu ikililerde birinci terimle ikinci terimin toplamı sıfır olmadığı için bu bir sıfır toplamlı olmayan oyundur.

Hocam, bir oyunun sıfır toplamlı olması için matristeki tüm ikililerde birinci terimle ikinci terimin toplamı sıfır mı olmalıdır?

Evet, bu özellik tüm ikililer için sağlanmalıdır.

Bu oyunda tutukluların hangi stratejiyi, susmayı mı yoksa itiraf etmeyi mi seçmesi mantıklıdır?

Gökçe istersen bunu Selçuk'a soralım. Selçuk, I. tutuklunun yerinde olsaydın neyi seçerdin?

I. tutuklunun yerinde olmak istemezdim, ancak ben olsaydım susmayı tercih ederdim. Çünkü II. tutuklu da susarsa birer yıl ceza alırız.

II. tutuklunun susacağını nereden biliyorsun? O bağımsız hareket ediyor ve aranızda hiçbir anlaşma ve iletişim yok. Dolayısıyla itirafı da seçebilir. O zaman sen, yani I. tutuklu 10 yıl ceza alırsın. Yani sessiz kalırsan ve o itiraf ederse pişman olursun. Sonradan pişman olmaman için itirafı seçmen daha mantıklıdır.

Aynı mantık II. tutuklu için de geçerlidir.

Görüldüğü gibi her iki tutuklu için itirafı seçmek daha mantıklıdır, çünkü bu bir savunma stratejisidir. Bu sayede 6 yılı göze alıp 10 yıl ceza almaktan kurtulmuş olurlar.

Her ne kadar sessiz kalmak daha iyi görünse de bu yöntem sonradan pişman olmamak için itirafa zorluyor.

Buradaki ikilem, daha az ceza almak varken diğerine güvenemediği ve iletişimleri de olmadığı için tutukluların kötünün iyisi deyip itirafı seçmeye zorlanmasıdır.

Tutukluların en iyi stratejisi (İtiraf, İtiraf) olmalıdır.

İki Kişilik Sonlu Oyun

Böylece birisi iki kişilik sıfır toplamlı, diğeri ise iki kişilik sıfır toplamlı olmayan oyun örnekleri görmüş olduk.

Bu örneklerde:

1) Oyuncuların strateji kümeleri sonlu kümelerdi.
2) Oyunlar matrislerle verilebiliyordu. I. oyuncu matrisin satırını, II. oyuncu ise sütununu seçiyordu. Bu satır-sütunların kesişimindeki ikilide birinci terim I. oyuncunun, ikinci terim ise II. oyuncunun getirisi oluyordu. Her iki oyuncu kendi getirisini maksimize etmeye çalışıyordu.

Bu örneklerden yola çıkıp iki kişilik sonlu oyunun tanımını verebiliriz.

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

kümesi I. oyuncunun,

$$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$$

kümesi ise II. oyuncunun stratejileri kümesi olsun.

Örneklerden de görüldüğü gibi bu kümeler sayı kümeleri olmak zorunda değildirler.

Taş-Makas-Kâğıt oyununda $X = Y =$ {Taş, Makas, Kâğıt} ve $n = m =$ 3'tür. Tutuklu ikilemi oyununda $X = Y =$ {Susma, İtiraf}, $n = m = 2$'dir.

İki kişilik sonlu oyun (8.1) matrisiyle verilir. Oyunla ilgili tüm bilgiler bu matriste toplanmıştır.
I. oyuncuya satır oyuncusu, II. oyuncuya sütun oyuncusu denir. I. oyuncu i. satırı, II. oyuncu j. sütunu seçerse I. oyuncu a_{ij}, II. oyuncu ise b_{ij} kazanır.

I. oyuncu X kümesinden herhangi x_i stratejisini $(i = 1, \dots, n)$, II. oyuncu Y kümesinden herhangi y_j stratejisini $(j = 1, \dots, m)$ seçtiklerinde I. oyuncunun kazancı a_{ij}, II. oyuncunun kazancı b_{ij} olsun.

O zaman sonlu oyun bir tablo ile verilebilir. Bu a_{ij} ve b_{ij} sayılarından (a_{ij}, b_{ij}) ikililerini oluşturup bir tablo yazalım:

$$\begin{bmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) & \cdots & (a_{1m}, b_{1m}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) & \cdots & (a_{2m}, b_{2m}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1}, b_{n1}) & (a_{n2}, b_{n2}) & \cdots & (a_{nm}, b_{nm}) \end{bmatrix}. \tag{8.1}$$

Bu tabloya oyunun matrisi denir.

Artık bu oyunla ilgili ne varsa hepsi bu tabloda toplanmıştır: I. oyuncu bu tabloda bir satır, diyelim ki i. satırı, II. oyuncu aynı anda bu tabloda bir sütun, diyelim ki j. sütunu seçiyor. i. satır ile j. sütunun kesişimindeki (a_{ij}, b_{ij}) sayı ikilisinde a_{ij} sayısı I. oyuncunun, b_{ij} ise II. oyuncunun kazancı olur. Bu sayılar negatif de olabilir. Negatif kazanç aslında kayıptır. Terminoloji açısından ona da kazanç denir.

Hocam, x_1, x_2,..., y_1, y_2,... stratejileri nereye gitti, onlar matriste gözükmüyor.

Matriste gözükmese de a_{ij}, b_{ij} sayılarını onlar belirliyorlar. I. oyuncunun i. satırı seçmesi onun x_i stratejisini seçmesi demektir. II. oyuncunun j. sütunu seçmesi onun y_j stratejisini seçmesi demektir.

Eğer (8.1) matrisinde her (a_{ij}, b_{ij}) ikilisinde $a_{ij} + b_{ij} = 0$ ise bu oyuna sıfır toplamlı oyun denir.

Tanım (8.1) matrisi ile verilmiş olan iki kişilik oyunda her (a_{ij}, b_{ij}) ikilisinde $a_{ij} + b_{ij} = 0$ ise bu oyuna sıfır toplamlı sonlu oyun denir.

Sıfır toplamlı oyunlarda $b_{ij} = -a_{ij}$ olduğu için onların matris gösteriminde b_{ij}'leri yazmayabiliriz.

İki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunlara matris oyunları da denir.

Evet doğrudur. $b_{ij} = -a_{ij}$ olduğu için II. oyuncunun b_{ij}'yi büyütmesi onun a_{ij}'yi küçültmesine dönüşür.

Böylece, iki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyun bir $n \times m$ boyutlu

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \tag{8.2}$$

matrisle verilir. I. oyuncu satır seçerek büyük eleman, II. oyuncu ise sütun seçerek küçük eleman elde etmeye çalışmaktadır.

Örneğin,

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

matrisiyle verilmiş bir oyun iki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyundur. I. oyuncu satır oyuncusudur (satır seçiyor) ve iki stratejisi vardır, II. oyuncu ise sütun oyuncusudur (sütun seçiyor) ve üç stratejisi vardır.

Sıfır Toplamlı Oyunda Denge

Sıfır toplamlı sonlu oyun (8.2) matrisiyle verilsin. Sizce I. oyuncu hangi satırı, II. oyuncu hangi sütunu seçmelidir?

Bu seçim matristeki sayılara bağlı değil mi?

Haklısınız. O zaman bir örnek üzerinde çözüm kavramını yani en iyi strateji kavramını anlamaya çalışalım. Burada çözüm için denge denilen strateji çiftinin olmasının çok önemli olduğunu göreceğiz.

İki kişilik sıfır toplamlı bir oyun

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

matrisiyle verilsin.

I. oyuncu maksimizasyon yapıyor ve satır seçiyor,

II. oyuncu minimizasyon yapıyor ve sütun seçiyor.

I. oyuncu

1. satırı seçtiğinde $\{4, -3, -1, 0\}$ sayılarının en küçüğü olan -3,

2. satırı seçtiğinde $\{5, 4, 2, 3\}$ sayılarının en küçüğü olan 2,

3. satırı seçtiğinde $\{-1, 3, -2, -6\}$ sayılarının en küçüğü olan -6 getirilerini garanti eder. Maksimizasyon yaptığı için I. oyuncu 2. satırı seçmekten yana olacaktır. Bunu seçtiğinde garantilemiş olduğu getiri en büyük olur. Bu getiri 2'dir. Bu stratejiye I. oyuncunun maksimin stratejisi, 2 sayısına ise oyunun aşağı değeri denir.

Herhalde II. oyuncu için de benzer şeyler geçerlidir.

II. oyuncu

1. sütunu seçtiğinde $\{4, 5, -1\}$ sayılarının en büyüğü olan 5,

2. sütunu seçtiğinde $\{-3, 4, 3\}$ sayılarının en büyüğü olan 4,

3. sütunu seçtiğinde $\{-1, 2, -2\}$ sayılarının en büyüğü olan 2,

4. sütunu seçtiğinde $\{0, 3, -6\}$ sayılarının en büyüğü olan 3 kayıplarını garanti eder. Minimizasyon yaptığı için II. oyuncu 3. sütunu seçmekten yana olacaktır. Bunu seçtiğinde garantilemiş olduğu kaybı en

az olur. Bu kayıp 2'dir. Bu stratejiye II. oyuncunun minimaks stratejisi, 2 sayısına ise oyunun yukarı değeri denir.

Hocam bu sayılar, yani aşağı değer ile yukarı değer eşit çıktı.

Evet eşit çıktı, eşit olması dengenin olması demektir.

Yaptığımız işlemleri matris üzerinde gösterelim. Her satırın sağına o satırın en küçüğünü, her sütunun altına o sütunun en büyüğünü yazalım:

Oyuncunun denge stratejisini seçmesindeki mantık "bunu seçeyim, yoksa daha da kötü olabilir" mantığıdır.

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{rrrr} 4 & -3 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & -6 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \to -3 \\ \to 2 \\ \to -6 \end{array} \\ \begin{array}{rrrr} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 4 & 2 & 3 \end{array} & \end{array}$$

$\text{maks}\{-3, 2, -6\} = 2$, $\min\{5, 4, 2, 3\} = 2$. Bu gösterimlerde "min" sembolü "en küçük", "maks" sembolü ise "en büyük" anlamındadır.

Bu 2 sayısı bulunduğu 2. satırda en küçük, bulunduğu 3. sütunda ise en büyüktür.

Evet Selçuk. Bu da zaten dengenin tanımıdır. Eğer matriste öyle bir eleman varsa ki bu eleman bulunduğu satırda en küçük, bulunduğu sütunda ise en büyükse bu elemanın bulunduğu satır-sütun numaralarına denge ikilisi denir. Bu örnekte (2. satır, 3. sütun) denge ikilisidir.

Bunu genel bir tanım olarak verebilir miyiz?

Genel tanımı vermeden önce bu örnek üzerinde dengeyi tartışalım. I. oyuncu, denge stratejisi olan 2. satırı seçmesi durumunda 2 getirisini garantilemişti.

Maksimin stratejisi nedir? Bir matris oyununda, yani iki kişilik sıfır toplamlı sonlu bir oyunda, I. oyuncu her satırın karşısına o satırdaki en küçük sayıyı yazar. Sonra bu sayılar içinde en büyük olanını belirler. Bu sayıya matris oyununun aşağı değeri denir. Oyuncu sonra da bu aşağı değerin bulunduğu satırı seçer. Bu seçime I. oyuncunun maksimin stratejisi denir.

Evet. I. oyuncu 4 kazanayım diye 1. satırı seçerse, II. oyuncunun dengede yani 3. sütunda kalması durumunda I.'nin kazancı -1 olur. Yani azalır.

I. oyuncu 3 kazanayım diye 3. satırı seçerse, II. oyuncunun yine dengede kalması durumunda I.'nin kazancı -2 olur, yine azalır.

Dolayısıyla denge varsa I. oyuncunun denge stratejisi yerine başka bir strateji seçmesi ona fayda getirmez.

Minimaks stratejisi nedir? Bir matris oyununda II. oyuncu her sütunun altına o sütundaki en büyük sayıyı yazar. Sonra bu sayılar içinde en küçük olanını belirler. Bu sayıya matris oyununun yukarı değeri denir. Oyuncu sonra da bu yukarı değerin bulunduğu sütunu seçer. Bu seçime II. oyuncunun minimaks stratejisi denir.

Herhalde aynı şey II. oyuncu için de geçerlidir. II. oyuncu denge stratejisi olan 3. sütunu seçmesi durumunda 2 kaybını garantilemişti. Az kaybedeyim diye denge stratejisi olan 3. sütun yerine:

1. sütunu seçerse I. oyuncu dengede yani 2. satırda kalacağı için II. oyuncu 5 kaybeder.

2. sütunu seçerse 4 kaybeder.

4. sütunu seçerse 3 kaybeder.

Dolayısıyla II. oyuncunun da denge stratejisi yerine başka strateji seçmesi ona fayda getirmez.

Bu örnekten görüldüğü gibi denge ile ilgili iki özellik ortaya çıkmış oldu:

I. oyuncunun maksimin, II. oyuncunun minimaks stratejilerine onların savunma stratejileri denir.

1) Matriste öyle bir eleman vardır ki bu eleman bulunduğu satırda en küçük, bulunduğu sütunda ise en büyüktür. Bu elemanın bulunduğu satır-sütun numaraları denge ikilisi olur.
2) Oyunun aşağı değeri yukarı değerine eşittir. Bu durumda maksimin-minimaks stratejileri denge ikilisi olur.

Matrisler kuramında bu iki özellikten birisi matris oyununda dengenin tanımı olarak alınabilir.

O zaman sıfır toplamlı sonlu oyunlarda bu iki özellik denktir, yani biri diğerinden elde edilebilir demek mi istiyorsunuz?

Evet. Şimdi isterseniz genel tanıma geçelim.

Tanım Bir oyunun matrisi

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

ile verilsin. Eğer bir (i^*, j^*) ikilisi için

$$a_{i^*j} \geq a_{i^*j^*} \geq a_{ij^*} \tag{8.3}$$

eşitsizliği her i ve j için sağlanıyorsa (i^*, j^*) ikilisine oyunun denge ikilisi denir.

Bu tanımın yukarıdaki özelliklerle ne bağlantısı var?

(8.3)'e göre $a_{i^*j^*}$ elemanı i^* satırında bulunmaktadır ve bulunduğu satırda en küçük elemandır ($a_{i^*j} \geq a_{i^*j^*}$ olduğu için); diğer yandan $a_{i^*j^*}$ elemanı j^* sütununda bulunmaktadır ve bulunduğu sütunda en büyük elemandır ($a_{i^*j^*} \geq a_{ij^*}$ olduğu için).

Oyunun matrisinde her satırın sağına o satırın en küçüğünü, her sütunun altına da o sütunun en büyüğünü yazalım. i. satırdaki en küçük elemana a_i, j. sütundaki en büyük elemana da y_j diyelim.

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \to \ a_1 \\ \to \ a_2 \\ \ \vdots \\ \to \ a_n \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{array} & \end{array}$$

O zaman maks$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = a$ sayısına oyunun aşağı değeri, $\min\{y_1, y_2, \ldots, y_m\} = y$ sayısına da oyunun yukarı değeri denir.

a_1, a_2,..., a_n, sayılarının en büyüğünün i^0 indisine I. oyuncunun maksimin stratejisi,

y_1, y_2,..., y_m, sayılarının en küçüğünün j^0 indisine II. oyuncunun minimaks stratejisi denir.

Dengenin olması aşağı değerin yukarı değere eşit olması, yani $a = y$ olması demektir. Bu durumda i^0 indisini i^* ve j^0 indisini j^* ile gösteriyoruz ve maksimin-minimaks stratejileri denge ikilisi oluyor. $a = y = a_{i^*j^*}$ değeri oyunun değeri oluyor. Oyuncular bu kazanç-kayıp değerine razı oluyorlar ve denge stratejilerinden uzaklaşmaları onlara fayda getirmiyor.

Neden böyle oluyor hocam?

Matris oyununda dengenin olması, aşağı değerin yukarı değere eşit olmasıdır.

Oyunun aşağı değeri olan a sayısı bulunduğu satırda en küçük, yukarı değeri olan y sayısı bulunduğu sütunda en büyük ve $a = y$ olduğu için denge koşulu sağlanmış oluyor (bu sayı bulunduğu satırda en küçük, sütunda en büyük oluyor) ve bunları gerçekleştiren satır-sütun numaraları denge ikilisi oluyor. Örneğin

$$\begin{array}{ccc}
\begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \to \\ \to \\ \to \end{array} & \begin{array}{c} -3 \\ -4 \\ -5 \end{array} \\
\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & -3 \end{array} & &
\end{array}$$

$\text{maks}\{-3,-4,-5\} = -3$, $\min\{3,4,-3\} = -3$ olduğu için (1. satır, 3. sütun) denge ikilisidir.

Dengenin Olması Neden Önemlidir?

Arkadaşlar, matris oyununda dengeyi açıkladık. Dengenin olması durumunda oyuncuların dengedeki stratejileri seçmelerinin mantıklı olacağını, dengeden uzaklaşmalarının onlar için faydalı olamayacağını görmüş olduk. Peki denge yoksa oyuncular hangi stratejiyi seçmeliler?

Denge yoksa

I. oyuncu maksimin

II. oyuncu minimaks

gibi savunma stratejilerini seçip oynasınlar.

Bu iş sandığınız kadar açık değil. Örneğin

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

gibi bir matris oyununu ele alalım.

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} & \begin{array}{c} -3 \\ -1 \\ -2 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 4 & 3 \end{array} & & \end{array}$$

$\text{maks}\{-3,-1,-2\} = -1$, $\min\{5,4,3\} = 3$.

I. oyuncunun maksimin stratejisi 2. satır, oyunun aşağı değeri -1

II. oyuncunun minimaks stratejisi 3. sütun, oyunun yukarı değeri 3'tür.

Evet, I. oyuncu 2. satırı, II. oyuncu 3. sütunu seçsinler.

Diyelim ki I. oyuncu 2. satırı seçti ve II. oyuncu da onun bu seçimini tahmin etti. O zaman II. oyuncu minimizasyon yaptığı için 3. sütunu değil, 1. sütunu seçmekten yana olur. Çünkü o durumda kaybı azalıp 3 yerine -1 olur.

I. oyuncu da onun bu düşüncesini tahmin ederse maksimizasyon yaptığı için 2. satır yerine 3. satırı seçip kazancını -1'den 5'e çıkarır ve böyle devam eder. Oyun içinden çıkılmaz hale gelir.

Denge olması durumunda böyle bir durum ortaya çıkmıyor.

Evet çıkmıyor. Oyuncunun dengeden uzaklaşması ona ancak zarar getirebilir.

Sıfır Toplamlı Olmayan Oyunda Denge

$$\begin{bmatrix} (a_{11}, b_{11}) & \cdots & (a_{1m}, b_{1m}) \\ (a_{21}, b_{21}) & \cdots & (a_{2m}, b_{2m}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1}, b_{n1}) & \cdots & (a_{nm}, b_{nm}) \end{bmatrix}$$

Sıfır toplamlı olmayan sonlu oyun (8.1) matrisiyle verilsin (size kolaylık olsun diye bu matrisi yandaki vitrine de koyduk). I. oyuncu satır, II. oyuncu sütun seçiyor.

I. oyuncu i. satırı, II. oyuncu j. sütunu seçtiğinde bu satır-sütunların kesişimindeki (a_{ij}, b_{ij}) ikilisinde birinci terim olan a_{ij} sayısı I. oyuncunun, b_{ij} sayısı ise II. oyuncunun kazancıdır.

Oyuncular kendi kazançlarını maksimize etmeye çalışıyorlar.

İkililerde büyük-küçük kavramı olmadığı için sıfır toplamlılarda geçerli olan satırda en küçük, sütunda en büyük tanımı burada geçersiz olacak herhalde.

Evet, ancak sıfır toplamlı oyun sıfır toplamlı olmayan oyunun özel halidir. Vereceğimiz yeni denge tanımı sıfır toplamlı oyundaki denge tanımının genelleşmesi olacak.

(8.1) matrisi verilsin. Bir (i^*, j^*) ikilisi için

$$\begin{aligned} a_{i^*j^*} &\geq a_{ij^*} \quad \text{her } i \text{ için} \\ b_{i^*j^*} &\geq b_{i^*j} \quad \text{her } j \text{ için} \end{aligned} \tag{8.4}$$

eşitsizlikleri sağlanıyor ise (i^*, j^*) ikilisine (8.1) oyunun (J. Nash anlamında) denge ikilisi denir.

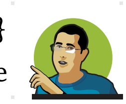
(8.4)'ün yorumu nasıl oluyor?

I. oyuncunun a_{ij}'yi, II. oyuncunun b_{ij}'yi büyütmeye çalıştığını hatırlayalım.

(8.4)'deki $a_{i^*j^*} \geq a_{ij^*}$ eşitsizliği şunu ifade ediyor: Eğer I. oyuncu i^*. satırı değil de bir başka i. satırı seçerse onun kazancı artmaz,

$b_{i^*j^*} \geq b_{i^*j}$ eşitsizliğine göre ise eğer II. oyuncu j^*. sütunu değil, bir başka j. sütunu seçerse onun da kazancı artmaz.

(8.4) eşitsizliklerine göre (i^*. satır, j^*. sütun) çiftinin denge ikilisi olması için bu satır ve sütunun kesişimindeki $(a_{i^*j^*}, b_{i^*j^*})$ ikilisinde $a_{i^*j^*}$ sayısı, o sütunda birinci bileşenlerin içerisinde en büyük, $b_{i^*j^*}$ sayısı da o satırda ikinci bileşenlerin içerisinde en büyük olmalıdır.



Tutuklu ikilemi oyununda (2. satır, 2. sütun) = {İtiraf,İtiraf} stratejileri bu tanıma uymaktadır. Çünkü $(-6,-6)$ ikilisinde birinci bileşen bulunduğu sütundaki birinci bileşenlerin maksimumu, ikinci bileşen de bulunduğu satırdaki ikinci bileşenlerin maksimumudur. Dolayısıyla (İtiraf,İtiraf) denge ikilisidir.

En son olarak sıfır toplamlı olmayan

$$\begin{pmatrix} (3,2) & (4,4) & (4,1) \\ (4,1) & (7,3) & (5,2) \\ (2,0) & (6,2) & (8,1) \end{pmatrix}$$

oyununun denge stratejilerini bulalım. $(7,3)$ ikilisinde 7 sayısı bulunduğu 2. sütundaki birinci bileşenlerin en büyüğüdür (bu bileşenler 4, 7, 6'dır). 3 sayısı da bulunduğu 2. satırdaki ikinci bileşenlerin en büyüğüdür (bu bileşenler 1, 3 ve 2'dir). Bundan dolayı (2. satır, 2. sütun) denge ikilisidir.

Özet

Bu ünitede iki kişilik sonlu oyunların temelleri ele alındı. Denge kavramı, denge çiftlerinin bulunması yöntemi verildi.

Matris oyununda bir eleman bulunduğu sütunda en büyük, satırda ise en küçük eleman ise bu elemanın bulunduğu satır-sütun denge ikilisidir.

Matris oyununda I. oyuncunun bir satırı seçtiğinde garantilenmiş kazancı o satırın en küçük elemanı, II. oyuncunun bir sütunu seçtiğinde garantilenmiş kaybı o sütunun en büyük elemanıdır.

Oyunun aşağı değeri satırların en küçük elemanları içerisinde en büyük sayı, oyunun yukarı değeri ise sütunların en büyük elemanları içerisinde en küçük olan sayıdır. Bunların eşit olması durumunda oyunda denge vardır.

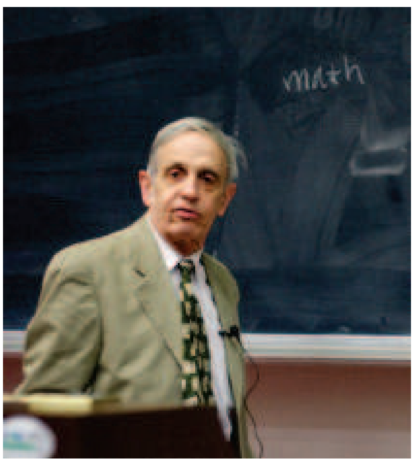
Okuma Parçası

Oyunlar çeşitli biçimde sınıflandırılabilir: Kullanılan stratejilere göre (pür ve karma stratejili oyunlar), Strateji sayılarına göre (sonlu ve sonsuz oyunlar), Kazanç fonksiyonuna göre (sıfır toplamlı ve toplamı sıfır olmayan oyunlar), Oyuncular arasındaki işbirliğine göre (işbirliği yapılmayan ve işbirlikçi oyunlar), Oyuncuların sayısına göre (iki taraflı ve çok taraflı oyunlar), Karşıdurmanın akışına göre (sürekli ve çok adımlı oyunlar, sürekli oyunlara diferansiyel oyunlar da denilir), Oyuncuların sahip oldukları bilgilere göre (açık oyun, açık olmayan oyun) vs.

En klasik ve en iyi geliştirilmiş türden oyunlar sıfır-toplamlı oyunlardır. Bunlar için çözümün ne olduğu konusunda kesin belirli bir kavram bulunmaktadır: Minimaks Teoremi'nde sözü edilen karma stratejiler.

Matematiksel bakış açısından Minimaks Teoremi, sıfır-toplam oyunları için eksiksiz denilebilecek bir teori sağlayarak bu konudaki çalışmalara bir nokta koymuştur.

1994 yılında Nobel ödüllerinin 93 yıllık tarihinde ilk kez, sadece pür matematik konusunda yapılmış bir çalışmaya ödül verildi: Ekonomi Bilimi dalındaki Nobel Memorial Ödülü, oyun teorisindeki öncü çalışmaları nedeniyle, Princeton matematikçisi John Nash ile John Harsanyi ve Reinhard Selten tarafından paylaşıldı. Nash'in yaptığı, temelde, Minimaks Teoremi'ni, *işbirliği yapılmayan oyunlar* denilen, sıfır-toplamlı olmayan, iki ya da daha fazla oyuncunun doğrudan rekabet ettiği oyunlara genelleyen bir teoremi ispatlamaktı.



John F. Nash

Nash Teoremi, işbirliği içermeyen oyunlar içindir. Oyuncular kıyasıya yarışacaklarına, en azından kısmi işbirliğinde anlaşırlarsa kazançlı çıkabilirler de. Bu, bizi *işbirlikli oyunlar* kavramına götürür. Oyuncular bireysel getirilerini arttırmak için farklı koalisyonlara girebilirler ya da öteki oyuncuların hamlelerini etkilemek için yan ödemeler yapabilirler.

İnsan, oyun teorisinin boşta gezen matematikçileri meşgul etmek için icat edilen amaçsız bir entelektüel uğraş olup olmadığını düşünmeden edemiyor. Oyun teorisyenlerinin çoğu, oyun teorisinin bir gerçek dünya problemi için uygulanabilir bir çözüm sağlayabileceğini düşünecek ölçüde ciddiye alınabildiğini duymaktan hem şaşıracak hem de övünç duyacaklardır. Oyunlar teorisine özgü düşünce ve kavramlar gerçek dünya problemlerine çözüm arayış sürecinde önemli ve derin birçok kavrayışa yol açmışlardır.

Yararlanılan kaynak: John L. Casti, (Çeviri: Nermin Arık) Beş Altın Kural: 20. Yüzyıl Matematiğinin Önemli Teorileri, Sabancı Üniversitesi, 2000.

Çıkarın Kağıtları

1. Matrisi

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

olan sıfır toplamlı oyunun, eğer varsa, denge ikilisini bulunuz.

2. Matrisi

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilen oyunda I.oyuncu 2. satırı seçtiğinde garantilenmiş kazancı aşağıdakilerden hangisidir?

A) -2 **B)** 2 **C)** 5 **D)** 1 **E)** 0

3. Bir önceki matris oyununda oyunun aşağı değeri ve yukarı değeri kaçtır?

4.

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -4 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

matris oyununda II. oyuncu 1. sütunu seçtiğinde garantilenmiş kaybı ile 2. sütunu seçtiğinde garantilenmiş kaybının toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 **B)** 1 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 8

5. Matrisi

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

olan sıfır toplamlı oyunun, eğer varsa, denge ikilisini bulunuz.

6. Matrisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

olan oyunun aşağı değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -3 **B)** -2 **C)** -1 **D)** 1 **E)** 0

7. Bir önceki matris oyununda oyunun yukarı değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 5 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 1 **E)** 0

8. Matrisi

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

olan oyunda oyuncuların maksimin-minimaks stratejileri nedir?

9.

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 & -2 \\ 5 & 4 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

matris oyununda oyunun aşağı değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -7 **B)** -6 **C)** -5 **D)** -4 **E)** -3

10. Bir önceki matris oyununda II. oyuncunun minimaks stratejisi nedir?

Çözümler

1. Her satırın karşısına en küçük elemanı, sütunların altına en büyük elemanı yazıp birincilerin maksimumunu, ikincilerin minimumunu bulalım:

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 4 \quad 2 \quad 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \rightarrow \; -3 \\ \rightarrow \; -2 \\ \rightarrow \; 1 \\ \\ \\ \end{array}$$

$\text{maks}\{-3,-2,1\}=1$, $\min\{4,2,1\}=1$. Sayılar eşit $(=1)$ çıktığı için bu 1'in bulunduğu (3.satır, 3. sütun) denge ikilisidir. Şöyle de diyebiliriz: Bu 1 sayısı bulunduğu 3. satırda en küçük, bulunduğu üçüncü sütunda ise en büyüktür.

2. 2. satırdaki $\{-2,2,5,1\}$ sayılarının en küçüğü olan -2'dir. Doğru cevap A şıkkıdır.

3. Her satırın karşısına bu satırın en küçük elemanını, her sütunun altına o sütunun en büyük elemanını yazalım:

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 4 \quad 2 \quad 5 \quad 3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \rightarrow \; -1 \\ \rightarrow \; -2 \\ \rightarrow \; -3 \\ \\ \\ \end{array}$$

sağdaki $\{-1,-2,-3\}$ sayılarının en büyüğü (-1) sayısı oyunun aşağı değeri, alttaki $\{4,2,5,3\}$ sayılarının en küçüğü olan 2 sayısı ise oyunun yukarı değeridir.

4. 1. sütun seçildiğinde garantilenmiş kayıp $\{5,-4,2\}$ sayılarının en büyüğü olan 5'tir. 2. sütun seçildiğinde garantilenmiş kayıp $\{1,-1,-2\}$ sayılarının en büyüğü olan 1'dir. Cevap $5+1=6$'dır. Doğru cevap D şıkkıdır.

5. Her satırın karşısına o satırın en küçük elemanını, her sütunun altına bu sütunun en büyük elemanını yazalım:

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -6 & 1 & 4 \end{bmatrix} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 0 \quad 5 \quad 4 \end{array} \quad \begin{array}{c} \rightarrow \; -2 \\ \rightarrow \; 0 \\ \rightarrow \; -6 \\ \\ \\ \end{array}$$

$\text{maks}\{-2,0,-6\}=0$, $\min\{0,5,4\}=0$ olduğu için denge vardır ve 0'ın bulunduğu (2. satır, 1. sütun) denge ikilisidir.

6. Satırların en küçükleri -3, -1 ve -2'dir. Bu sayıların en büyüğü -1 olduğundan aşağı değer -1'dir. Doğru cevap C şıkkıdır.

7. Sütunların en büyükleri 5, 4, 3 ve 4'tür. Bu sayıların en küçüğü 3 ve buradan da yukarı değer 3'tür. Doğru cevap B şıkkıdır.

8.

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 3 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \rightarrow \; -4 \\ \rightarrow \; -3 \\ \rightarrow \; -4 \\ \\ \\ \end{array}$$

$\text{maks}\{-4,-3,-4\}=-3$, $\min\{3,2,2,1\}=1$. (2. satır, 4. sütun) çifti maksimin-minimaks stratejileri çiftidir.

9. Satırların en küçükleri -3, -4 ve -5'tir. Bu sayıların en büyüğü olan -3 sayısı aşağı değerdir. Doğru cevap E şıkkıdır.

10. Sütunların en büyükleri 5, 4, 4 ve 3'tür. Bu sayıların en küçüğü 3'tür. 3'ün bulunduğu 4. sütun II. oyuncunun minimaks stratejisidir.

Kaynakça

[1] G.C. Berresford, Applied Calculus, Houghton Mifflin Company, 1996.

[2] M.L. Bittinger, D.J. Ellenbogen, Calculus and its Applications, Pearson Addison Wesley, 2008.

[3] C. Çimen, S. Akleylek, E. Akyıldız, Şifrelerin Matematiği: Kriptografi, ODTÜ Yayınları, 2011.

[4] J. Hoffstein, J. Pipher, J.H. Silverman, An Introduction to Mathematical Cryptography, Springer, 2008.

[5] N. Koblitz, A course in number theory and cryptography, Springer-Verlag, 1994.

[6] L. Lovász, J.Pelikán, K. Vesztergombi, Discrete Mathematics, Springer-Verlag, 2003.

[7] A. Nesin, Nash Dengesi, Matematik Dünyası, 2010-III.

[8] M.N. Özer, D. Eser, Diferansiyel Denklemler (Teori ve Uygulamaları) , III.Baskı, Eskişehir, 2002.

[9] K.H. Rosen, Elementary number theory and its applications, 4th ed., Reading, Addison-Wesley Longman, 2000.

[10] A. Sabuncuoğlu (çeviri editörü), Genel Matematik, nobel Akademik Yayıncılık, 2011.

[11] İ. Şıklar(Editör), İktisada Giriş, Açık Öğretim Fakültesi Yayınları, No:785, 2005.

[12] Matematik Dünyası, Çizgeler Özel Sayısı, 2003.

[13] TUİK haber bülteni, Sayı: 262, 2011.

[14] E.S. Ventsel (çeviren H.Yüksel), Oyunlar teorisine giriş, TMD, İstanbul, 1965.

[15] P. William, Prisoner's dilemma: john von neumann, game theory and the puzzle of the bomb, Anchor boks, New York, 1993.

[16] www.dersnotlari.net/kavramlar/lorenz.htm

[17] tr.wikipedia.org/wiki/Antik_Mısır

[18] www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook

[19] data.worldbank.org

Şekil 2.8: en.wikipedia.org/wiki/Lascaux

Şekil 5.3: www.aparisguide.com/maps/metro.htm

Şekil 5.20: www.cgvector.com/vector-electronic-circuit-board-close-up

Şekil 5.28: www.telegraph.co.uk/sport/football/competitions/world-cup-2010/pictures/6670565/Fifa-World-Cup-match-balls-through-time.html?image=13

Şekil 5.34: Brendan D. McKay, A note on the history of the four-colour conjecture, arXiv.org, 2012.

Şekil 5.41: en.wikipedia.org/wiki/Arthur_Cayley

Şekil 6.2: en.wikipedia.org/wiki/Eratosthenes

Şekil 6.5: www.encyclopedia.com/topic/Euclid.aspx

Şekil 6.6: www.encyclopedia.com/topic/Carl_Friedrich_Gauss.aspx

Şekil 7.1: ancienthistory.about.com/od/romeancientrome/ig/Ancient-Rome/Julius-Caesar.-3ye.htm

Şekil 7.2: www.boiledbeans.net/2007/10/08/public-ize-this

Şekil 8.1: hoocher.com/George_Caleb_Bingham/The_Checker_Players_1850.jpg

tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Dosya:Orman.JPG

en.wikipedia.org/wiki/Planimeter

avm.gen.tr/media-market-kayseri-acilis.jpg

bestuff.com/stuff/john-forbes-nash-jr

Dizin