Proyecto final: Neumonia (COVID-19)

Patraca Toledo Abishnaed, Torres Avila Alexander, Venegas Ornelas Lizeth Guadalupe
Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica
Tecnológico Nacional de México / Instituto Tecnológico de Tijuana

December 13, 2024

Palabras clave: Función de transferencia; Controlador PID; Neumonia; Sistema de control; Moldelo matemático; Sistema Respiratorio.

Correos: **L21212172@tectijuana.edu.mx,**

L21212848@tectijuana.edu.mx,

L21212671@tectijuana.edu.mx

Carrera: **Ingeniería Biomédica**

Asignatura: **Modelado de Sistemas Fisiológicos**

Profesor: **Dr. Paul Antonio Valle Trujillo** (paul.valle@tectijuana.edu.mx)

1 Función de transferencia

Con base en el análisis de mallas de Kirchoff se describe como el voltaje de entrada se distribuye en la primera malla con la siguiente ecuación:

$$V_e(t) = R_1 I_1(t) + L_1 \frac{dI_1(t)}{dt} + \frac{1}{C_1} \int [I_1(t) - I_2(t)]dt$$

Posteriormente, se realizó un análisis de la segunda malla, obteniendo:

$$\frac{1}{C_1} \int [I_1(t) - I_2(t)]dt = L_2 \frac{dI_2(t)}{dt} + R_2 I_2(t) + \frac{1}{C_2} \int I_2(t)dt + \frac{1}{C_3} \int I_2(t)dt$$

Finalmente, el voltaje de salida se expresa como:

$$V_s(t) = \frac{1}{C_2} \int I_2(t)dt + \frac{1}{C_3} \int I_2(t)dt$$

1.1 Transformada de Laplace

Al aplicar la transformada de Laplace se obtuvieron las ecuaciones en el dominio de s. Para la ecuación del voltaje de entrada se tiene:

$$V_e(s) = R_1 I_1(s) + L_1 s I_1(s) + \frac{[I_1(s) - I_2(s)]}{C_1 s}$$

Por otra parte, la transformada de Laplace para la el análisis en la malla 2 se presenta a continuación:

$$\frac{[I_1(s) - I_2(s)]}{C_1 s} = L_2 s I_2(s) + R_2 I_2(s) + \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)\frac{I_2(s)}{s}$$

Por último, la transformada de Laplace para el voltaje de salida es:

$$V_s(s) = \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)\frac{I_2(s)}{s}$$

1.2 Procedimiento algebraico

Inicialmente se busca despejar $I_1(s)$ de la ecuación del voltaje de entrada:

$$\frac{I_1(s) - I_2(s)}{C_1 s} = L_2 s I_2(s) + R_2 I_2(s) + \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C3}\right)\frac{I_2(s)}{s}$$

obteniendo:

$$I_1(s) = \left(\frac{C_1 C_2 C_3 L_2 s^2 + C_1 C_2 C_3 R_2 s + C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3}{C_2 C_3}\right) I_2(s)$$

Con este resultado, se sustituye $I_1(s)$ en la ecuación de entrada $P(s)$ para expresarla en función de $I_2(s)$

$$P(s) = R_1 I_1(s) + L_1 s I_1(s) + \frac{I_1(s) - I_2(s)}{C_1 s}$$

De esta forma, se sustituyen las expresiones en la función de transferencia:

$$\frac{P_A(s)}{P(s)} = \frac{\left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)\frac{1}{s}}{\left(R_1 + L_1 s + \frac{1}{C_1 s}\right)\left(\frac{C_1 C_2 C_3 L_2 s^2 + C_1 C_2 C_3 R_2 s + C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3}{C_2 C_3}\right) - \frac{1}{C_1 s}}$$

1.3 Resultado

Finalmente, con las ecuaciones para $P_A(s)$ y $P(s)$ en función de $I_2(s)$ se obtuvo la ecuación para la función de transferencia:

$$\frac{P_A(s)}{P(s)} = \frac{C_2 + C_3}{s^4 a_4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Donde los coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3 y a_4 se definen como:

$$\begin{aligned}
a_4 &= C_1C_2C_3L_1L_2 \\
a_3 &= C_1C_2C_3L_1R_2 + C_1C_2C_3L_2R_1 \\
a_2 &= C_1C_2L_1 + C_1C_3L_1 + C_2C_3L_1 + C_2C_3L_2 + C_1C_2C_3R_1R_2 \\
a_1 &= C_1C_2R_1 + C_1C_3R_1 + C_2C_3R_1 + C_2C_3R_2 \\
a_0 &= C_2 + C_3
\end{aligned}$$

2 Estabilidad del sistema en lazo abierto

La estabilidad del sistema en lazo abierto se analiza calculando las raíces del polinomio del denominador, es decir, los polos del sistema. Dado que se trata de un sistema de cuarto orden, tendrá cuatro polos, lo que da lugar a la siguiente ecuación característica:

$$a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0$$

Al evaluar los polos del sistema para los dos casos presentados (paciente sano y paciente con neumonía), se obtiene lo siguiente:

Sistema de control en donde los valores de los componentes:

$$\begin{aligned}
R_1 &= 2 \\
R_2 &= 0.5 \\
L_1 &= 0.001 \\
L2 &= 0.250 \\
C_1 &= 0.005 \\
C_2 &= 0.200 \\
C_3 &= 0.200
\end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación característica se obtiene:

$$5.0 \times 10^{-8}s^4 + 0.00101s^3 + 0.010244s^2 + 0.104s + 0.4 = 0$$

Los polos obtenidos son los siguientes:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -1894.45 \\
\lambda_2 &= -96.66 \\
\lambda_3 &= -5.44 + 3.75i \\
\lambda_4 &= -5.44 - 3.75i
\end{aligned}$$

Dado que los polos tienen valores negativos, el sistema es estable en este caso.

Sistema de control con valores para estabilidad:

$$\begin{aligned} R_1 &= 5 \\ R_2 &= 1 \\ L_1 &= 0.001 \\ L2 &= 0.400 \\ C_1 &= 0.005 \\ C_2 &= 0.350 \\ C3 &= 0.350 \end{aligned}$$

La ecuación característica para este sistema es:

$$2.45 \times 10^{-7} s^4 + 0.00123 s^3 + 0.05219 s^2 + 0.7525 s + 0.7 = 0$$

obteniendo los polos siguientes:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -4959.68 \\ \lambda_2 &= -20.91 + 11.83i \\ \lambda_3 &= -20.91 - 11.83i \\ \lambda_4 &= -0.998 \end{aligned}$$

Dado que todos los polos son negativos, el sistema es estable.

3 Modelo de ecuaciones integro-diferenciales

Para obtener el modelo de ecuaciones integro-diferenciales, se deben despejar los flujos (corrientes o variables dependientes):

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \left[P(t) - L_1 \frac{dI_1(t)}{dt} - \frac{1}{C_1} \int [I_1(t) - I_2(t)] dt \right] \frac{1}{R_1}, \\ I_2(t) &= \left[\frac{1}{C_1} \int [I_1(t) - I_2(t)] dt - L_2 \frac{dI_2(t)}{dt} - \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) \int I_2(t) dt \right] \frac{1}{R_2}, \\ P_A(t) &= \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) \int I_2(t) dt \end{aligned}$$

4 Error en estado estacionario

Para calcular el error en estado estacionario, es necesario calcular el siguiente limite, donde $R(s)$ representa un escalon de entrada

$$
\begin{aligned}
e\left(t\right) &= \lim_{s \to 0} sR\left(s\right)\left[1 - \frac{P_A(S)}{P\left(s\right)}\right] \\
e\left(t\right) &= \lim_{s \to 0} s\frac{1}{s}\left[1 - \frac{C_2 + C_3}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}\right] \\
e\left(t\right) &= \lim_{s \to 0}\left[1 - \frac{C_2 + C_3}{C_2 + C_3}\right] \\
e\left(t\right) &= \lim_{s \to 0}\left[1 - 1\right] \\
e\left(t\right) &= 0
\end{aligned}
$$

5 Cálculo de componentes para el controlador PID

Para el cálculo de los componentes para el controlador PID de un paciente sano se utilizó el programa Simulink raíz de MatLab, haciendo la sintonización correspondiente para tener los valores de las ganancias.

$$
\begin{aligned}
k_I &= \frac{1}{R_e C_r} = 215.144071879233 \\
k_P &= \frac{R_r}{R_e} = 30.7048930701238 \\
k_D &= R_r C_e = 0.336288499629592
\end{aligned}
$$

$$
C_r = 1 \times 10^{-6}
$$

Con base en los valores sintonizados de las ganancias en Simulink, se obtuvieron los valores de k_I, k_P y k_D; se utilizó un valor aleatorio de valor de capacitancia para el capacitor (C_r) para ser sustituido en las furmulas de R_e, R_r y C_e.

Las formulas de son R_e, R_r y C_e:

$$
\begin{aligned}
R_e &= \frac{1}{k_I C_r} \\
R_r &= k_P R_e \\
C_e &= \frac{k_D}{R_r}
\end{aligned}
$$

Sustituyendo los valores de las formulas se obtienen los siguientes valores:

$$
\begin{aligned}
R_e &= \frac{1}{k_I C_r} = \frac{1}{(215.144071879233)(1 \times 10^{-6})} = 4648.0 \\
R_r &= k_P R_e = (30.7048930701238)(4648.0) = 1.427\,2 \times 10^5 \\
C_e &= \frac{k_D}{R_r} = \frac{0.336288499629592}{1.427\,2 \times 10^5} = 2.356\,3 \times 10^{-6}
\end{aligned}
$$