

## Праздник номер один по теории вероятностей. Часть 1

1. Вася купил два арбуза у торговли тети Маши и один арбуз у торговли тети Оли. Арбузы у тети Маши спелые с вероятностью 90% (независимо друг от друга), арбузы у тети Оли спелые с вероятностью 70%.

- (a) Какова вероятность того, что все Васиные арбузы спелые?
- (b) Придя домой Вася выбрал случайным образом один из трех арбузов и разрезал его. Какова вероятность того, что это арбуз от тети Маши, если он оказался спелым?
- (c) Какова вероятность того, что второй и третий съеденные Васей арбузы были от тети Маши, если все три арбуза оказались спелыми?

2. В большой большой стране живет очень большое количество  $n \gg 0$  семей. Количество детей в разных семьях независимы. Количество детей в каждой семье — случайная величина с распределением заданным табличкой:

$X_i$	0	1	2	3
$\mathbb{P}()$	0.1	0.3	0.2	0.4

- (a) Исследователь Афанасий выбирает одну семью из всех семей наугад, пусть  $X$  — число детей в этой семье. Найдите  $\mathbb{E}(X)$  и  $\text{Var}(X)$ .
- (b) Исследователь Бенедикт выбирает одного ребенка из всех детей наугад, пусть  $Y$  — число детей в семье этого ребёнка. Как распределена величина  $Y$ ? Что больше,  $\mathbb{E}(Y)$  или  $\mathbb{E}(X)$ ?

3. Функция плотности случайной величины  $X$  имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & \text{если } x \in [0; 2] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

- (a) Не производя вычислений найдите  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$
- (b) Найдите  $\mathbb{E}(X)$ ,  $\mathbb{E}(X^2)$  и дисперсию  $\text{Var}(X)$
- (c) Найдите  $\mathbb{P}(X > 1.5)$ ,  $\mathbb{P}(X > 1.5 \mid X > 1)$
- (d) При каком  $c$  функция  $g(x) = cx f(x)$  будет функцией плотности некоторой случайной величины?

4. Известно, что  $\mathbb{E}(Z) = -3$ ,  $\mathbb{E}(Z^2) = 15$ ,  $\text{Var}(X + Y) = 20$  и  $\text{Var}(X - Y) = 10$ .

- (a) Найдите  $\text{Var}(Z)$ ,  $\text{Var}(4 - 3Z)$  и  $\mathbb{E}(5 + 3Z - Z^2)$
- (b) Найдите  $\text{Cov}(X, Y)$  и  $\text{Cov}(6 - X, 3Y)$
- (c) Можно ли утверждать, что случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы?

5. Листая сборник задач по теории вероятностей Вася наткнулся на задачу:

Какова вероятность того, что наугад выбранный ответ на этот вопрос окажется верным?

1) 0.25 2) 0.5 3) 0.6 4) 0.25

Чему же равна вероятность выбора верного ответа?

6. Книга в 500 страниц содержит 400 опечаток. Предположим, что каждая из них независимо от остальных опечаток может с одинаковой вероятностью оказаться на любой странице книги.
- (a) Определите вероятность того, что на 13-й странице будет не менее двух опечаток, в явном виде и с помощью приближения Пуассона.
  - (b) Определите наиболее вероятное число, математическое ожидание и дисперсию числа опечаток на 13-ой странице.
  - (c) Является ли 13-ая страница более «несчастливой», чем все остальные (в том смысле, что на 13-ой странице ожидается большее количество опечаток, чем на любой другой)?
7. Вася случайным образом посещает лекции по ОВП (Очень Важному Предмету). С вероятностью 0.9 произвольно выбранная лекция полезна, и с вероятностью 0.7 она интересна. Полезность и интересность — независимые друг от друга и от номера лекции свойства. Всего Вася прослушал 30 лекций.
- (a) Определите математическое ожидание и дисперсию числа полезных лекций, прослушанных Васей
  - (b) Определите математическое ожидание числа одновременно бесполезных и неинтересных лекций, прослушанных Васей, и математическое ожидание числа лекций, обладающих хотя бы одним из свойств (полезность, интересность)
8. Функция распределения случайной величины  $X$  задана следующей формулой:

$$F(x) = \frac{ae^x}{1 + e^x} + b$$

Определите: константы  $a$  и  $b$ , математическое ожидание и третий начальный момент случайной величины  $X$ , медиану и моду распределения.

## Праздник номер один по теории вероятностей. Часть 2

1. Маша подкидывает кубик до тех пор, пока два последних броска в сумме не дадут 10. Обозначим случайные величины:  $N$  — количество бросков, а  $S$  — сумма набранных за всю игру очков.
  - (a) Найдите  $\mathbb{P}(N = 2)$ ,  $\mathbb{P}(N = 3)$
  - (b) Найдите  $\mathbb{E}(N)$ ,  $\mathbb{E}(S)$ ,  $\mathbb{E}(N^2)$
  - (c) Пусть  $X_N$  — результат последнего броска. Как распределена случайная величина  $X_N$ ?
2. В столовую пришли 30 студентов и встали в очередь в случайном порядке. Среди них есть Вовочка и Машенька. Пусть  $V$  — это количество человек в очереди перед Вовочкой, а  $M \geq 0$  — количество человек между Вовочкой и Машенькой.
  - (a) Найдите  $\mathbb{P}(V = 1)$ ,  $\mathbb{P}(M = 1)$ ,  $\mathbb{P}(M = V)$
  - (b) Найдите  $\mathbb{E}(V)$ ,  $\mathbb{E}(M)$ ,  $\text{Var}(M)$
3. Польский математик Стефан Банах имел привычку носить в каждом из двух карманов пальто по коробку спичек. Всякий раз, когда ему хотелось закурить трубку, он выбирал наугад один из коробков и доставал из него спичку. Первоначально в каждом коробке было по  $n$  спичек. Но когда-то наступает момент, когда выбранный наугад коробок оказывается пустым.
  - (a) Какова вероятность того, что в другом коробке в этот момент осталось ровно  $k$  спичек?
  - (b) Каково среднее количество спичек в другом коробке?
4. Производитель чудо-юдо-йогуртов наклеивает на каждую упаковку одну из 50 случайно выбираемых наклеек. Покупатель собравший все наклейки получает приз от производителя. Пусть  $X$  — это количество упаковок йогурта, которое нужно купить, чтобы собрать все наклейки.

Найдите  $\mathbb{P}(X = 50)$ ,  $\mathbb{E}(X)$ ,  $\text{Var}(X)$

Hint:  $\ln(50) \approx 3.91$ , а  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \approx \int_1^n \frac{1}{x} dx$  :)
5. В самолете  $n$  мест и все билеты проданы. Первой в очереди на посадку стоит Сумасшедшая Старушка. Сумасшедшая Старушка несмотря на билет садиться на случайно выбираемое место. Каждый оставшийся пассажир садится на своё место, если оно свободно и на случайное выбираемое место, если его место уже кем-то занято.
  - (a) Какова вероятность того, что все пассажиры сядут на свои места?
  - (b) Какова вероятность того, что последний пассажир сядет на своё место?
  - (c) Чему примерно равно среднее количество пассажиров севших на свои места?