

ЭРА I

Инженерное дело

1. **Высокоточная линза для лазера.** Константин трудится над оптикой нового уровня. Исследуя движение мелких частиц в сетке алмаза, он установил, что $X \sim \mathcal{N}(0; 4)$, $Y = X + Z$, где $Z \sim \mathcal{N}(0; 3)$, причем X и Z независимы. Помогите Константину найти $(\mathbb{E} X^4 - \text{Cov}(X^2, Y^2))$. Подсказка: все подряд считать необязательно.
2. **Строительство космопорта.** Правительство Конфедерации объявило тендер на строительство космопорта на планете Мар-Сара. Ожидается, что на нее каждый день будет прилетать в среднем 25 пассажирских шаттлов с планеты Антига Прайм, 42 грузовых корабля с Тарсониса и 3 одиночных звездолета с планеты Виктор V. Компания «Метелица» утверждает, что проектируемый ею космодром способен принять до 80 кораблей в день. Какова вероятность того, что такой космодром не справится с дневной нагрузкой?
3. **Космоветролет™.** Компания Whizzlespark недавно изобрела космоветролет — звездолет с парусом для космического ветра — и уже готовится к выходу на IGO (initial galactic offering). Аналитики предсказывают, что математическое ожидание доходности акции компании составит 4 г.е. с дисперсией 8. Вася хочет вложить некоторую сумму в портфель из акций Whizzlespark и облигаций компании «Метелица» с минимальной дисперсией. Мат. ожидание и дисперсия доходности облигаций «Метелицы» равны 2 и 1 соответственно. Найдите долю акций Whizzlespark в портфеле Васи.
4. **Обман.** Размер выплат по страховке каждому инвестору, прогоревшему на акциях Whizzlespark — случайная величина с математическим ожиданием, равным 1000 ед. и среднеквадратическим отклонением, равным 5000 ед. Выплаты отдельным клиентам независимы. Сколько должно быть наличных денег в банке, чтобы с вероятностью 0,95 денег хватило на обслуживание 100 клиентов?
5. **Мутантоловка.** У инженера Виталия есть близкий друг, который устал воевать с мутантами. Виталий решил изобрести для него в подарок ко дню рождения супер-мутантоловку, которая будет ловить до 10 мутантов в минуту. Пусть X — количество пойманных мутантов, $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ и вероятности заданы функцией: $\mathbb{P}(X = x) = \frac{x}{c}$. Чему равна величина c ?
6. **Генератор гениальных идей.** Гениальные идеи, приходящие на ум исследователю Пете в день, образуют Пуассоновский поток. Известно, что вероятности появления одной и двух гениальных идей связаны соотношением: $3\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2)$. Найдите вероятность того, что за день Петя выдаст аж 4 гениальные идеи.

ЭРА I

Биология

- Менделевское тригибридное скрещивание.** Скрещиваются гетерозиготный по всем трём признакам М (один глаз, фиолетовые волосы, две ноги) и гетерозиготная по всем трём признакам Ж (один глаз, фиолетовые волосы, две ноги). Какова вероятность, что их ребенок окажется с двумя глазами, оранжевыми волосами и тремя ногами?
Гетерозигота здесь — $AaBbCc$.
Hint: при данном скрещивании один ген каждого типа заимствуется у отца, второй — у матери. Рecessивный признак реализуется только при наличии двух рецессивных аллелей, к примеру, aa .
- Случайный котёнок.** Елена В. Прекрасная нашла не менее прекрасного котёнка на планете N и решила, что завтра непременно придумает ему имя, а именно наугад вытянет любое из следующего перечня: *Вейбулл, Пуассон, Сигма, Чебышёв*. Однако с вероятностью $\frac{1}{3}$ завтра будет солнечный шторм, от чего у Елены будет болеть голова, тогда на помощь придет её ассистент, который недолго думая назовет котенка именем из списка так, чтобы первая буква имени совпадала с сегодняшним днем недели. Найдите вероятность того, что котёнка назовут Пуассоном (все дни недели равновероятны).
- Молекулярный анализ.** Исследователь Майкл Браун Младший привез с далекой планеты $2007OR_{10}$ образец атмосферы. Известно, что в контейнере n атомов: $n/2$ белых и столько же чёрных, но неизвестно, как они соединены в молекулы. Какова вероятность вытащить молекулу из $n/2$ атомов, в которой будет одинаковое количество чёрных и белых?
- Как приручить гиппогрифа.** Команда исследователей впервые поймала гиппогрифа и посадила его в вольер класса люкс+. Однако гиппогриф — это очень вольное животное. В первый день заточения он точно будет сопротивляться, во второй — с вероятностью $1/2$, в третий — с $1/4$ и так далее.
С какой вероятностью исследователи не смогут приручить его в течение семи дней?
- Робокот.** Маша и ее 40 робокошек любят смотреть «Угадай мелодию». Маша угадывает мелодию ровно с трёх, четырёх или пяти нот с вероятностями $1/4$, $1/2$ и $1/4$ соответственно. Функция распределения числа нот, необходимых кошке Мусе для отгадывания, такова:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 4, \\ 1/4, & x \in [4; 5), \\ 1/2, & x \in [5; 6), \\ 3/4, & x \in [6; 7), \\ 1, & x \geq 7. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что одновременно Муся отгадает мелодию ровно с пяти нот, а Маша с четырёх и более.

- Лекарство от вредности.** Два друга-биолога договорились встретиться между 10 и 15 часами дня в парке, чтобы обсудить концепцию лекарства от вредности. Пришедший первым ждет 30 минут и уходит, так же поступает другой. Какова вероятность того, что они встретятся, если каждый из друзей может равновероятно прийти в любой момент времени в указанном промежутке?

ЭРА I

Кулинария

- Неслипающиеся макароны.** Вася живет на далекой планете Дубки. Он очень любит есть макароны (с сосисками), но у него не всегда получается сварить макароны так, чтобы они не слиплись. Если у Васи хорошее настроение, то в 9 из 10 случаев макароны не слипаются и Вася вкусно ужинает. Если же Вася встал не с той ноги, то приготовить не слипшиеся макароны он может только в 1 случае из 10. Вероятность проснуться в хорошем настроении равна 0,3, в плохом — 0,7. Найдите вероятность того, что Вася в плохом настроении приготовит не слипшиеся макароны.
- Фиолетовая пряность.** Марсианский пудинг готовится из фиолетовой пряности и шоколада. Петя голоден и впопыхах, не смерив, смешивает остатки фиолетовой пряности из килограммового пакета и шоколада из килограммовой банки. Между тем, если пряности слишком много — хотя бы на 20% больше, чем шоколада, пудинг будет невкусным. Какова вероятность того, что Петин пудинг будет вкусным, если до этого ингредиенты использовались равномерно и отдельно друг от друга?
- Космически вкусные рецепты.** Баба Аня смотрит кулинарное шоу «Космический вкус» с вероятностью $\frac{3}{4}$, баба Таня — с вероятностью $\frac{1}{2}$. Каждая из них всегда сохраняет рецепты блюд, когда смотрит шоу. Баба Галя смотрит программу каждое воскресенье, но записывает рецепты с вероятностью всего лишь $\frac{1}{4}$. Перед Новым годом баба Галя осознаёт, что ей нужны рецепты блюд из всех выпусков этого телешоу. Она может использовать свои записи или, в случае необходимости, попросить рецепты у бабы Ани и бабы Тани. Найдите вероятность того, что у бабы Гали будут все рецепты из всех выпусков шоу. (В году примерно 52 воскресенья.)
- Космокола.** Исследователь Н. очень любит космопепси, но еще больше он любит космоколу. Однако из-за нарушения планетой, на которой живет Н., межгалактического кодекса, поставки космоколы временно прекратились. Н. решил быть предельно настойчивым и отыскать бутылочку своего любимого напитка в даркнете. Однако это и впрямь непросто: вероятность того, что продавец продаст ему космопепси под видом космоколы равна 91% (а вы ведь знаете, что разница есть!). Найдите вероятность того, что Н. в поисках своей мечты придется купить ровно 12 бутылок напитка.
- Вино из одуванчиков.** Дима решил начать производство вина из одуванчиков, для чего ему нужно заказать молекулярный пресс, производство которого ведется только на Марсе. Как ни горестно, но помимо стоимости пресса, 1125 марсианских рублей (м. р.), придется заплатить еще и 175 м. р. за доставку. Дима планирует потратить всю годовую стипендию, которая составляет примерно 16900 российских рублей. Какова вероятность, того что покупка удастся, если курс марсианского рубля к российскому распределен равномерно на интервале $[8; 20]$.
- Урановый торт.** Профессор Глюк отмечает свой 500-й день рождения. Он готовит вкусный (наверное) торт с урановым кремом, но отмеряет все ингредиенты на глаз, поэтому радиус торта R случаен. Функция плотности случайной величины R имеет вид

$$f(r) = \begin{cases} 0, & r < 0 \\ \cos r, & r \in [4\pi; 9\pi/2] \\ 0, & r > \pi/2 \end{cases} .$$

Найдите наиболее вероятный радиус торта.

ЭРА II

Биология

1. **Жизнь на Марсе.** Сумасшедший исследователь Сироб сын Сироба из галактики Колесо телеги думает, что в его галактике есть только три типа обитаемых планет: марсы — A штук, земли — B штук, глизе 667 — C штук. Каждый день Сироб равновероятно совершает вылет ровно на одну из этих планет. Пусть X — количество вылетов на марсы, а Y — количество вылетов на земли за n дней. Найдите $\text{Cov}(X, Y)$.
2. **Душа рыжих.** Пётр где-то услышал, что у людей с рыжим цветом волос нет души, и забеспокоился. К счастью, это не точно: у каждого человека с рыжими волосами душа есть с вероятностью $\frac{1}{3}$. Пётр сам шатен, но все 10 его друзей рыжие — неудивительно, что его волнует этот вопрос. Какова вероятность того, что ровно у половины друзей Петра есть душа?
3. **Сверхчеловеки.** Гроксы — гибриды людей и машин — живут в середине галактики. Равновероятно они могут полететь на планеты, которые находятся на парсек (космическую единицу) вверх, вниз, влево или вправо (по диагонали гроксы не летают). Пусть X и Y — это абсцисса и ордината корабля гроксов после первого манёвра. Найдите $\text{Cov}(X, Y)$.
4. **Неизвестная молекула.** Биолог Карл работает с неизвестной молекулой. Её масса — случайная величина, распределённая равномерно на отрезке $[0; \pi]$ (в а. е. м.). Обозначим X_i массу i -й молекулы, где $i = 1, \dots, 10^{100}$. Определите следующую вероятность: $\mathbb{P}(\min\{X_1, \dots, X_{10^{100}}\} > e)$
5. **Смышленный енот.** Рассеянная лаборантка Маша ухаживает за енотиками и забывает закрывать дверь. Еноты, увидев открытую дверь, придерживаются следующего принципа: выбегать из лаборатории с вероятностью 0,8. Найдите вероятность того, что, вернувшись в кабинет, Маша найдёт хотя бы одного енотика, если до её ухода их было пять.
6. **Титановая рыбка.** Анатолий вместе со своей экспедицией нашел пруд с титановыми рыбками и решил отловить несколько для дальнейшего изучения. Вероятность того, что Анатолий поймает хотя бы одну рыбку, сделав 4 попытки, равна 0,9984. Найдите, с какой вероятностью он поймает её с первого раза (ни одна рыбка не пострадала).

ЭРА II

Инженерное дело

1. **Сингулярность не предел.** Исследователи черных дыр затеяли эксперимент: они создали два одинаковых множества межгалактических кораблей, каждое состоит из n кораблей, и запустили одних к черной дыре в галактике Млечный путь (да-да, в нашей галактике есть черная дыра!), а других к черной дыре в галактике Messier 87. Пусть каждая черная дыра поглощает корабль с вероятностью p . Найдите математическое ожидание общего количества межгалактических кораблей, поглощенных обеими дырами.
2. **Шифр Глюка.** Профессор Глюк решил защитить свой смартфон от взлома, но вскоре забыл код. Всплывающая подсказка говорит, что нужно понять чему равно $\mathbb{P}(A|B) \mathbb{P}(B|C) \mathbb{P}(C)$, если $\mathbb{P}(A|B \cap C) = \mathbb{P}(A|B)$. Помогите Глюку.
3. **Скорость звука.** В этой задаче будем проверять ваше умение сделать что-то быстро и правильно. Сформулируйте, пожалуйста, центральную предельную теорему.
4. **Просто Архип.** На втором курсе учится очень красивый молодой человек по имени Архип. Люди в космос летают, придумывают умные часы, а вот он Архип. А лекция по теории вероятностей безусловно очень полезна, но невероятно сложна, поэтому вместо того чтобы слушать лектора, девушки глазек по сторонам. Количество девушек, которые влюбляются в Архипа за фиксированный промежуток времени времени — случайная величина, имеющая распределение Пуассона. В среднем за пару по теории вероятностей, в Архипа влюбляется 8 девушек. Какова вероятность, что за пару в Архипа влюбятся по крайней мере две девушки?
5. **Потерянная вероятность.** Функция плотности случайной величины имеет следующий вид: $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Найдите $\mathbb{P}(X \in [-1; 1])$.
6. **Штурмовик.** На заводе Империи каждому произведенному штурмовику присваивают восьмизначный номер. Какова вероятность, что случайно выбранный штурмовик будет иметь номер с 8 не повторяющимися цифрами, если все цифры равновероятно и независимо стоят на 8 позициях?

ЭРА II

Кулинария

1. **Плюшки-пампушки.** В кулинарную лавку было доставлено 30 плюшек-пампушек от первого хлебо-булочного комбината и 70 от второго. Однако в процессе перевозки часть плюшек-пампушек пострадала и прибыла в лавку с дефектом. Процент брака среди плюшек из первого комбината равен 4, а из второго — 8. Найдите вероятность, что взятая наугад плюшка-пампушка будет иметь дефект.
2. **Волшебный кексик.** Повар хочет испечь волшебные кексики. Для этого ему нужно определить вид функции плотности времени приготовления одного кексика X . Из следующих соображений помогите ему найти a и $\mathbb{E} X$:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ t - a, & t \in [1; 2), \\ 0, & t \geq 2. \end{cases}$$

3. **Пирожок с изюминкой.** Совместное распределение случайных величин: X — изюминок в пирожке и Y — орехов в нем, задано следующим образом:

	$X = 0$	$X = 5$	$X = 10$
$Y = 5$	0,1	0,1	0,1
$Y = 7$	0,2	0,2	0,3

Определите, сколько изюминок в среднем попадает в пирожок.

4. **Квадратный пудинг.** Афанасий приготовил свой фирменный квадратный пудинг и выложил его на красивую тарелку так, что пудинг образует вписанный в окружность квадрат. Однако в последний момент он решает украсить блюдо клубникой и наудачу кидает ее на тарелку. Какова вероятность того, что ягода приземлится на пудинг?
5. **Робот-печенькораспределитель.** Прогресс не стоит на месте! Чтобы облегчить жизнь кулинарам, был изобретен робот-печенькораспределитель. Сколькими способами может этот робот разложить 20 шоколадных печенек по 5 различным коробкам так, чтобы в каждой коробке оказалось не менее двух печенек?
6. **Сингулярное мясо.** Очень одаренный Петя решил приготовить отбивные и стучит отбойным молотком по огромному куску мяса. От каждого удара Вася — сосед Пети по квартире — проснётся с вероятностью $1/10$. Сколько в среднем нужно ударить Пете, чтобы разбудить Васю?

ЭРА III

Инженерное дело.

1. **Просто минимум.** Пусть ξ — случайная величина. Найдите a , при котором достигается минимум выражения $\mathbb{E}(\xi - a)^2$.
2. **Закапыватель в глаза.** Исследователь Рафаэль придумал чудо-средство — закапыватель в глаза, и перед тем, как объявить миру свое изобретение, он хочет провести следующее испытание: проверить закапыватель на 10 друзьях (20 глаз), где общее количество «попаданий» — случайная величина X . Известно, что при каждом испытании чудо-изобретения капля попадает в глаз с вероятностью 0,9. Но Рафаэля почему-то терзают сомнения о надобности его изобретения, поэтому он подбрасывает кубик и записывает кол-во выпавших очков — случайную величину Y . Если $X + Y$ окажется в интервале от 18,5 до 24,5, он расскажет миру об изобретении. Оцените вероятность того, что мир узнает об открытии Рафаэля.
3. **Лихой пылесос.** Время за которое пылесос поглощает крошку с пола — случайная величина, для которой задана следующая функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} C_1, & x < 0, \\ 0.5x^2 + 0.5x + C_3, & x \in [0; 1], \\ C_2, & x \geq 1. \end{cases}$$

Найдите C_3 .

4. **Ковер-улет.** Петя, Вася и Толя изобрели ковер-улет размером 4×4 метра. Чтобы усмирить свою неудержимую радость, ребята решили покурить кальян прямо на ковре. Случайно упавшие из кальяна угли прожгли ковер в 15 разных местах. Какова вероятность того, что останется целым кусочек ковра размером хотя бы метр на метр?
 5. **Четкая посадка.** При посадке космического корабля существует некоторое отклонение от намеченного места посадки, которое имеет экспоненциальное распределение. Среднее отклонение от намеченного места посадки равно 5 метров. Какова вероятность того, что два космических корабля при посадке отклонятся от намеченного места посадки на 7 метров?
 6. **Скорость света.** В этой задаче будем проверять ваше умение сделать что-то быстро и правильно. Сформулируйте, пожалуйста, закон больших чисел.
-

ЭРА III

Биология

1. **Редкий вид.** Маленький принц ищет редкий вид трав для борьбы с баобабами, путешествуя по другим планетам. Он знает, что с вероятностью $p = 0,01$ на планете есть редкий вид трав. Какова вероятность того, что, посетив 300 планет, Маленький принц обнаружит редкий вид трав на пяти планетах?
2. **Смурфотрекер.** Юные натуралисты доказали существование смурфиков на голубых звездах галактики UDFj-39546284. Теперь исследователям предстоит оценить динамику роста их населения. Помогите им решить следующую задачу: всего живет n смурфиков, они рождаются в определенном месяце независимо друг от друга. Какое среднее количество месяцев, в которые родился хотя бы один смурф?
3. **Инопланетяне.** Время t между высадками инопланетян на Землю имеет экспоненциальное распределение: $t \sim \text{Exp}(\lambda)$. Найдите такие целые λ , при которых $\mathbb{P}(t \leq 3) = 0,9 \cdot \mathbb{P}(t \leq 4)$.
4. **Ядро дроида.** Энакин отправился на поиски Гривуса в систему Ревет. У него нет карты системы, поэтому он может равновероятно попасть на каждую из планет, в том числе на уже посещённую. Всего в системе N планет, K из них обитаемы. Если Энакин попадает на обитаемую планету, то местные с вероятностью $1/5$ подскажут Энакину, где спрятался Гривус. Найдите ожидаемое количество планет, которые Энакин посетит *прежде* чем доберётся до Гривуса.
5. **Генеалогическое древо.** В некотором королевстве нашей галактики у бесконечной династии равновероятно рождаются рыцари и принцессы. Сколько детей в династии должно родиться, чтобы в среднем не более чем в четверти случаев частота рождения принцессы отличалась от $1/2$ на $0,01$ или сильнее?
6. **Молекулы-модницы.** Представим, что у нас есть много-много молекул. Одна из них сломала ноготь, разозлилась и толкнула двух своих соседок, а те, в свою очередь, могут с вероятностью $1/2$ толкнуть еще двух соседок, либо постичь нирвану и никого не толкать. Найдите мат. ожидание числа молекул, которые будут задействованы в перепалке.

ЭРА III

Кулинария

1. **Брутальная прожарка.** Чтобы приготовить говяжий стейк средней прожарки, нужно довести его до температуры 52° , а вот для извлечения мифриловой эссенции (диетической альтернативы поваренной соли) нужно довести мифрил до температуры $1\,000\,000\,000^\circ$! На таких температурах термометры дают огромную погрешность, а именно дисперсия каждого измерения равна $100\,000^\circ$. Оцените по неравенству Чебышёва вероятность того, что при температуре $1\,000\,000\,000^\circ$ среднее по ста ее измерениям будет иметь погрешность выше $100\,000^\circ$.
2. **Горячая печка.** Когда кулинар Вася готовит печенья в печке, некоторые из них подгорают. Вероятность того, что печенье подгорит, равна $0,95$. Какое количество печенек нужно испечь, чтобы доля неподгорелых была заключена в границах от $0,93$ до $0,97$ включительно с вероятностью не менее $0,93$? Оцените по неравенству Чебышева.
3. **Сверхъяркий краситель.** R2-D2 хочет собрать на планете Gourmet-15 пряные цветы, лепестки которых придают необыкновенный цвет и вкус еде, в которую их добавят. R2-D2 знает, что в каждом цветке содержится X мг красителя, причем $X \sim U[4; 16]$. Он хочет собрать один грамм драгоценной приправы. Какова вероятность того, что ему не хватит 180 цветков?
4. **Сахарный удар.** Совместная функция плотности количества корицы и ванильного сахара в новом новогоднем сверхсладком кофе из Старбакса имеет вид

$$f(c,v) = \begin{cases} 2(c^3 + v^3), & c \in [0; 1], v \in [0,1], \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где C и V измеряются в граммах. Найдите вероятность того, что общий вес корицы и ванили в напитке превысит 1 грамм.

5. **Пряная сладость.** Совместная функция плотности количества корицы и ванильного сахара в новом новогоднем сверхсладком кофе из Старбакса имеет вид

$$f(c,v) = \begin{cases} 2(c^3 + v^3), & c \in [0; 1], v \in [0,1], \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где C и V измеряются в граммах. Найдите математическое ожидание количества корицы в напитке.

6. **Цветастые макароны.** Сестры Маргарита и Мари-Элизабет приготовили n штук разноцветных макарон (всего n цветов) и теперь выкладывают их на прилавок случайным образом слева направо. Найдите вероятность того, что синий, желтый и красный будут расположены именно в этом порядке, не обязательно рядом.