

# Оглавление

```
require(knitr)
require(ggplot2)
require(Hmisc)
require(lmtest)
require(apsrtable)
require(xtable)
require(MASS)
require(car)
require(texreg)

require(econru)
opts_chunk$set(cache=FALSE,
                dev="png",dpi=300,
                warning=FALSE,
                tidy=FALSE,
                echo=TRUE,
                out.height="7cm",out.width="7cm")
theme_set(theme_bw())
# load('pset_data.Rdata')
```

# Предисловие

Книг по теории вероятностей и математической статистике тьма тьмущая. Зачем ещё одна? Во-первых, мы считаем, что современный рассказ про теорию вероятностей и статистику не мыслим без рассказа об открытой статистической среде R. Во-вторых, очень сложно подобрать книгу, которая бы подходила и по охвату тем и сложности материала для курса нашей мечты.

Мы искренне благодарны студентам оказавшим неоценимую помощь при подготовке данного задачника: ...

На веб-страничке <http://bdemeshev.github.io/nsem/> можно найти дополнительные материалы, свежую версию задачника и скрипты R.

Язык программирования R, необходимый для решения некоторых задач, можно скачать по адресу <http://www.r-project.org/>. Для большего удобства мы советуем воспользоваться графической оболочкой R-studio, её можно найти по адресу <http://www.rstudio.com/ide/>

Удачи в освоении теории вероятностей и математической статистики!!!

Дмитрий Борзых, Борис Демешев

Листок 1 по ТВ и МС 2013–2014 [08.03.2014]

1

Кафедра математической экономики и эконометрики  
НИУ ВШЭ. Борзых Д. А.

Листок 1

Общие сведения о дискретных случайных величинах

**Задача 1.** Пусть  $\Omega = \{a, b, c, d\}$ ,  $\mathbb{P}(\{a\}) = \dots = \mathbb{P}(\{d\}) = 1/4$  и случайная величина  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  задана при помощи следующей таблицы.

$\Omega$	$a$	$b$	$c$	$d$
$X$	-1	0	0	1

1. Найдите  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq 0\}$ .
2. Найдите  $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq 0\})$ .
3. Найдите  $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : |X(\omega)| = 1\})$ .
4. Постройте графики функций распределения случайных величин  $X$ ,  $X + 1$  и  $X^2$ .
5. Найдите  $\mathbb{E}[X]$ ,  $\mathbb{E}[X^2]$  и  $\mathbb{E}[X^4]$ .
6. Найдите  $D(X)$ ,  $D(X + 1)$  и  $D(X^2)$ .
7. Постройте таблицы распределения случайных величин  $X$ ,  $X + 1$  и  $X^2$ .

**Задача 2.** Пусть  $\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$ ,  $\mathbb{P}(\{a\}) = \dots = \mathbb{P}(\{f\}) = 1/6$  и случайная величина  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  задана при помощи следующей таблицы.

$\Omega$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$X$	1	2	3	4	5	6

1. Найдите  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq 3\}$ .
2. Найдите  $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq 3\})$ .
3. Найдите  $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < 6\})$ .
4. Постройте графики функций распределения случайных величин  $X$ ,  $\cos(\pi X/3)$  и  $\sin(\pi X/3)$ .

5. Найдите  $\mathbb{E}[X]$ ,  $\mathbb{E} \cos(\pi X/3)$  и  $\mathbb{E} \sin(\pi X/3)$ .
6. Найдите  $D(X)$ ,  $D \cos(\pi X/3)$  и  $D \sin(\pi X/3)$ ,
7. Постройте таблицы распределения случайных величин  $X$ ,  $\cos(\pi X/3)$  и  $\sin(\pi X/3)$ .

**Таблица 1: таблица тригонометрических функций**

$\alpha$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos \alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\sin \alpha$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

**Задача 3.** Пусть  $\Omega = \{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$ ,  $\mathbb{P}(\{\heartsuit\}) = \dots = \mathbb{P}(\{\clubsuit\}) = 1/4$ .

Случайные величины  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  и  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  заданы при помощи следующей таблицы.

$\Omega$	?	?	?	?
$X$	-1	1	-1	1
$Y$	1	-1	1	-1

Найдите

1. Постройте таблицы распределения случайных величин  $X$  и  $Y$ .
2. Постройте таблицу совместного распределения для  $X$  и  $Y$ .
3.  $\mathbb{E}[X]$  и  $\mathbb{E}[Y]$ ,
4.  $\mathbb{E}[XY]$ ,
5.  $cov(X, Y)$ ,
6.  $\mathbb{E}[X^2]$  и  $\mathbb{E}[Y^2]$ ,
7.  $D(X)$  и  $D(Y)$ ,
8.  $D(XY)$ ,

9.  $\text{corr}(X, Y)$ .
10. Являются ли случайные величины  $X$  и  $Y$  некоррелированными?
11.  $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) = 1\})$ ,  $\mathbb{P}(\{\omega : Y(\omega) = 1\})$  и  $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) = 1\} \cap \{\omega : Y(\omega) = 1\})$ .
12. Являются ли случайные величины  $X$  и  $Y$  независимыми?
13. Постройте графики функций распределения случайных величин  $X$  и  $Y$ .
14. Найдите  $F_{X,Y}(-1, -1)$ ,  $F_{X,Y}(1, -1)$ ,  $F_{X,Y}(-1, 1)$ ,  $F_{X,Y}(1, 1)$ .
15. Проверьте равенство  $\mathbb{P}(\{X \in (-1; 1]\} \cap \{Y \in (-1; 1]\}) = F_{X,Y}(1, 1) - F_{X,Y}(1, -1) - F_{X,Y}(-1, 1) + F_{X,Y}(-1, -1)$ .

**Задача 4.** Пусть  $\Omega = \{\heartsuit, \diamond, \spadesuit, \clubsuit\}$ ,  $\mathbb{P}(\{\heartsuit\}) = \mathbb{P}(\{\diamond\}) = \mathbb{P}(\{\spadesuit\}) = \mathbb{P}(\{\clubsuit\}) = \frac{1}{4}$ .

Случайные величины  $X$  и  $Y$  заданы при помощи следующей таблицы.

$\Omega$	?	?	?	?
$X$	1	0	1	0
$Y$	1	1	0	0

Найдите

1. Постройте таблицы распределения случайных величин  $X$  и  $Y$ .
2. Постройте таблицу совместного распределения для  $X$  и  $Y$ .
3.  $\mathbb{E}[X]$  и  $\mathbb{E}[Y]$ ,
4.  $\mathbb{E}[XY]$ ,

5.  $cov(X, Y)$ ,
6.  $\mathbb{E}[X^2]$  и  $\mathbb{E}[Y^2]$ ,
7.  $D(X)$  и  $D(Y)$ ,
8.  $D(XY)$ ,
9.  $corr(X, Y)$ ,
10. Являются ли случайные величины  $X$  и  $Y$  некоррелированными?
11.  $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) = 1\})$ ,  $\mathbb{P}(\{\omega : Y(\omega) = 1\})$  и  $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) = 1\} \cap \{\omega : Y(\omega) = 1\})$ .
12. Являются ли случайные величины  $X$  и  $Y$  независимыми?
13. Постройте графики функций распределения случайных величин  $X$  и  $Y$ .
14. Найдите  $F_{X,Y}(0, 0)$ ,  $F_{X,Y}(1, 0)$ ,  $F_{X,Y}(0, 1)$ ,  $F_{X,Y}(1, 1)$ .
15. Проверьте равенство  $\mathbb{P}(\{X \in (0; 1]\} \cap \{Y \in (0; 1]\}) = F_{X,Y}(1, 1) - F_{X,Y}(1, 0) - F_{X,Y}(0, 1) + F_{X,Y}(0, 0)$ .

**Задача 5.** Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин  $X$  и  $Y$ .

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0.2	0.1	0.2
1	0.1	0.3	0.1

Найдите

1.  $\mathbb{E}[X]$  и  $\mathbb{E}[Y]$ ,
2.  $\mathbb{E}[XY]$ ,
3.  $cov(X, Y)$ ,

4.  $\mathbb{E}[X^2]$  и  $\mathbb{E}[Y^2]$ ,
5.  $D(X)$  и  $D(Y)$ ,
6.  $\text{corr}(X, Y)$ .
7. Постройте графики функций распределения случайных величин  $X$  и  $Y$ .
8. Являются ли случайные величины  $X$  и  $Y$  независимыми?
9. Найдите  $F_{X,Y}(-1, 0)$ ,  $F_{X,Y}(-1, 1)$ ,  $F_{X,Y}(0, 0)$ ,  $F_{X,Y}(0, 1)$ .
10. Проверьте равенство  $\mathbb{P}(\{X \in (-1; 0]\} \cap \{Y \in (0; 1]\}) = F_{X,Y}(0, 1) - F_{X,Y}(0, 0) - F_{X,Y}(-1, 1) + F_{X,Y}(-1, 0)$ .

**Задача 6.** Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин  $X$  и  $Y$ .

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0.2	0.3	0.1
1	0.1	0.0	0.3

Найдите

1.  $\mathbb{E}[X]$  и  $\mathbb{E}[Y]$ ,
2.  $\mathbb{E}[XY]$  и  $\mathbb{E}[Y/X]$
3.  $\text{cov}(X, Y)$ ,
4.  $\mathbb{E}[X^2]$  и  $\mathbb{E}[Y^2]$ ,
5.  $D(X)$  и  $D(Y)$ ,
6.  $\text{corr}(X, Y)$ .
7. Постройте графики функций распределения случайных величин  $X$  и  $Y$ .

8. Являются ли случайные величины  $X$  и  $Y$  независимыми?
9. Найдите  $F_{X,Y}(-1, 0)$ ,  $F_{X,Y}(-1, 1)$ ,  $F_{X,Y}(0, 0)$ ,  $F_{X,Y}(0, 1)$ .
10. Проверьте равенство  $\mathbb{P}(\{X \in (-1; 0]\} \cap \{Y \in (0; 1]\}) = F_{X,Y}(0, 1) - F_{X,Y}(0, 0) - F_{X,Y}(-1, 1) + F_{X,Y}(-1, 0)$ .

**Задача 7.** Пусть  $\Omega = \{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$ ,  $\mathbb{P}(\{\heartsuit\}) = \dots = \mathbb{P}(\{\clubsuit\}) = 1/4$ .

Случайные величины  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  и  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  заданы при помощи следующей таблицы.

$\Omega$	?	?	?	?
$X$	-1	1	-1	1
$Y$	1	-1	1	-1

Постройте таблицу

1. распределения случайной величины  $X$ ,
2. распределения случайной величины  $Y$ ,
3. совместного распределения случайных величин  $X$  и  $Y$ .

**Задача 8.** Пусть  $\Omega = \{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$ ,  $\mathbb{P}(\{\heartsuit\}) = \dots = \mathbb{P}(\{\clubsuit\}) = 1/4$ .

Случайные величины  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  и  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  заданы при помощи следующей таблицы.

$\Omega$	?	?	?	?
$X$	1	0	1	0
$Y$	1	1	0	0

Постройте таблицу

1. распределения случайной величины  $X$ ,
2. распределения случайной величины  $Y$ ,
3. совместного распределения случайных величин  $X$  и  $Y$ .



**Задача 9.** Пусть  $\mathbb{E}X = 1$ ,  $\mathbb{E}Y = 2$ ,  $DX = 3$ ,  $DY = 4$ ,  $\text{cov}(X, Y) = -1$ . Найдите

1.  $\mathbb{E}(2X - Y)$  и  $\mathbb{E}(2X + Y - 4)$ ,
2.  $D(2X)$  и  $D(3Y + 3)$ ,
3.  $D(X + Y)$  и  $D(X - Y)$ ,
4.  $D(2X + 3Y)$  и  $D(2X - 3Y + 1)$ ,
5.  $\text{cov}(X + Y, X - Y)$  и  $\text{cov}(X + 2Y + 1, 3X - Y - 1)$ ,
6.  $\text{corr}(X, Y)$  и  $\text{corr}(X + Y, X - Y)$ ,
7. Ковариационную матрицу случайного вектора  $Z = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}$ .

**Задача 10.** Пусть  $\mathbb{E}X = -1$ ,  $\mathbb{E}Y = 2$ ,  $DX = 1$ ,  $DY = 2$ ,  $\text{cov}(X, Y) = 1$ . Найдите

1.  $\mathbb{E}(2X + Y)$  и  $\mathbb{E}(2X + Y - 4)$ ,
2.  $D(2X)$  и  $D(2Y + 1)$ ,
3.  $D(X + Y)$  и  $D(X - Y)$ ,
4.  $D(2X + 3Y)$  и  $D(2X - 3Y + 1)$ ,
5.  $\text{cov}(X + Y, X - Y)$  и  $\text{cov}(3X + Y + 1, X - 2Y - 1)$ ,
6.  $\text{corr}(X, Y)$  и  $\text{corr}(X + Y, X - Y)$ ,
7. Ковариационную матрицу случайного вектора  $Z = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}$ .

8. **Задача 11.** Пусть  $X_1, X_2, X_3$  — случайные величины такие, что  $DX_1 = 4$ ,  $DX_2 = 3$ ,  $DX_3 = 2$ ,  $cov(X_1, X_2) = 1$ ,  $cov(X_1, X_3) = 0$ ,  $cov(X_2, X_3) = -1$ . Найдите  $D(X_1 + X_2 + X_3)$ ,
9.  $D(X_1 - X_3 - 1)$ ,
10.  $D(X_1 + X_2 - X_3)$ ,
11.  $D(4X_1 + 3X_2 + 2X_3)$ ,
12.  $D(X_1 + 3X_3 - 10)$ ,
13.  $D(X_1 - X_3 - 2X_2)$ ,
14.  $cov(X_1 + X_2, X_2 + X_3)$ ,
15.  $cov(X_1 + X_2, X_2 - X_3)$ ,
16.  $cov(X_1 + X_2, X_2 - X_1)$ ,
17.  $cov(X_1 + X_2, X_2 - X_3 + 1)$ .

**Ответ:**

1. 9,  
2. 6,  
3. 13,  
4. 111,  
5. 22,  
6. 10,  
7. 3,

8. 5,
9.  $-1$ ,
10. 5.
11. **Задача 12.** Пусть  $X = (X_1 \ X_2 \ X_3)$  — случайный вектор и  $V(X) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  — его ковариационная матрица. Найдите  $D(X_1 + X_2 + X_3)$ ,
12.  $D(X_1 - X_3 - 1)$ ,
13.  $D(X_1 + X_2 - X_3)$ ,
14.  $D(4X_1 + 3X_2 + 2X_3)$ ,
15.  $D(X_1 + 3X_3 - 10)$ ,
16.  $D(X_1 - X_3 - 2X_2)$ ,
17.  $cov(X_1 + X_2, X_2 + X_3)$ ,
18.  $cov(X_1 + X_2, X_2 - X_3)$ ,
19.  $cov(X_1 + X_2, X_2 - X_1)$ ,
20.  $cov(X_1 + X_2, X_2 - X_3 + 1)$ . **Ответ:** 5,
21. 6,
22. 9,
23. 63,
24. 22,
25. 18,

26. 1,

27. 3,

28. -1,

29. 3.

1. **Задача 13.** Пусть  $X = (X_1 \ X_2 \ X_3)$  — случайный вектор и  $V(X) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  — его ковариационная матрица. Найдите  $D(X_1 + X_2 + X_3)$ ,

2.  $D(X_1 - X_3 - 1)$ ,3.  $D(X_1 + X_2 - X_3)$ ,4.  $D(4X_1 + 3X_2 + 2X_3)$ ,5.  $D(X_1 + 3X_3 - 10)$ ,6.  $D(X_1 - X_3 - 2X_2)$ ,7.  $cov(X_1 + X_2, X_2 + X_3)$ ,8.  $cov(X_1 + X_2, X_2 - X_3)$ ,9.  $cov(X_1 + X_2, X_2 - X_1)$ , $cov(X_1 + X_2, X_2 - X_3 + 1)$ . **Ответ:**

6

Кафедра математической экономики и эконометрики  
НИУ ВШЭ. Борзых Д. А.

1. 5,

2. 3,

3. 1,
4. 42,
5. 11,
6. 19,
7. 2,
8. 0,
9. 0,
10. 0.

**Задача 14.** Пусть  $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\mathbb{P}(\{1\}) = \dots = \mathbb{P}(\{4\}) = 1/4$ ,

$X(\omega) = \cos(\pi\omega/2)$  и  $Y(\omega) = \sin(\pi\omega/2)$ . Найдите

1. (a)  $\mathbb{P}(\{X > 0\})$ ,  $\mathbb{P}(\{X \geq 0\})$ ,  $\mathbb{P}(\{|X| = 1\})$  и  $\mathbb{P}(\{X \geq Y\})$ ,
- (b)  $\mathbb{E}X$  и  $\mathbb{E}Y$ ,
- (c)  $\mathbb{E}[X^2]$  и  $\mathbb{E}[Y^2]$ ,
- (d)  $DX$  и  $DY$ ,
- (e)  $F_X(x)$  и  $F_Y(x)$ .
- (f) Найдите  $\text{cov}(X, Y)$ . Являются ли случайные величины  $X$  и  $Y$  некоррелированными?
- (g) Найдите  $\mathbb{P}(\{X = 1\})$ ,  $\mathbb{P}(\{Y = 1\})$  и  $\mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\})$ . Являются ли случайные величины  $X$  и  $Y$  независимыми?

**Задача 15.** Пусть  $\Omega = \{1, 2, \dots, 8\}$ ,  $\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = \dots = \mathbb{P}(\{8\}) = 1/8$ ,

$X(\omega) = \cos(\pi\omega/4)$  и  $Y(\omega) = \sin(\pi\omega/4)$ . Найдите

1.  $\mathbb{P}(\{X > 0\})$ ,  $\mathbb{P}(\{X \geq 0\})$ ,  $\mathbb{P}(\{|X| = 1\})$  и  $\mathbb{P}(\{X \geq Y\})$ ,
2.  $\mathbb{E}X$  и  $\mathbb{E}Y$ ,
3.  $\mathbb{E}[X^2]$  и  $\mathbb{E}[Y^2]$ ,
4.  $DX$  и  $DY$ ,
5.  $F_X(x)$  и  $F_Y(x)$ .
6. Найдите  $cov(X, Y)$ . Являются ли случайные величины  $X$  и  $Y$  некоррелированными?
7. Найдите  $\mathbb{P}(\{X = 1\})$ ,  $\mathbb{P}(\{Y = 1\})$  и  $\mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\})$ . Являются ли случайные величины  $X$  и  $Y$  независимыми?

**Задача 16.** Пусть  $\mathbb{P}(\{Z = 1\}) = \mathbb{P}(\{Z = 2\}) = \dots = \mathbb{P}(\{Z = 6\}) = 1/6$ ,  $X = \cos(\pi Z/3)$  и  $Y = \sin(\pi Z/3)$ . Найдите

1.  $\mathbb{P}(\{X > 0\})$ ,  $\mathbb{P}(\{X \geq 0\})$ ,  $\mathbb{P}(\{|X| = 1\})$  и  $\mathbb{P}(\{X \geq Y\})$ ,
2.  $\mathbb{E}X$  и  $\mathbb{E}Y$ ,
3.  $\mathbb{E}[X^2]$  и  $\mathbb{E}[Y^2]$ ,
4.  $DX$  и  $DY$ ,
5.  $F_X(x)$  и  $F_Y(x)$ .
6. Найдите  $cov(X, Y)$ . Являются ли случайные величины  $X$  и  $Y$  некоррелированными?
7. Найдите  $\mathbb{P}(\{X = 1\})$ ,  $\mathbb{P}(\{Y = 1\})$  и  $\mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\})$ . Являются ли случайные величины  $X$  и  $Y$  независимыми?

**Задача 17.** Пусть  $\mathbb{P}(\{Z = 1\}) = \mathbb{P}(\{Z = 2\}) = \dots = \mathbb{P}(\{Z = 8\}) = 1/8$ ,  $X = \cos(\pi Z/4)$  и  $Y = \sin(\pi Z/4)$ . Найдите

1.  $\mathbb{P}(\{X > 0\})$ ,  $\mathbb{P}(\{X \geq 0\})$ ,  $\mathbb{P}(\{|X| = 1\})$  и  $\mathbb{P}(\{X \geq Y\})$ ,
2.  $\mathbb{E}X$  и  $\mathbb{E}Y$ ,
3.  $\mathbb{E}[X^2]$  и  $\mathbb{E}[Y^2]$ ,
4.  $DX$  и  $DY$ ,
5.  $F_X(x)$  и  $F_Y(x)$ .
6. Найдите  $cov(X, Y)$ . Являются ли случайные величины  $X$  и  $Y$  некоррелированными?
7. Найдите  $\mathbb{P}(\{X = 1\})$ ,  $\mathbb{P}(\{Y = 1\})$  и  $\mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\})$ . Являются ли случайные величины  $X$  и  $Y$  независимыми?

**Задача 18.** Найдите значение  $x \in \mathbb{R}$ , при котором функция  $Q(x) = \mathbb{E}[(X - x)^2]$  принимает наименьшее значение. Чему равно значение функции  $Q$  в точке минимума?

**Задача 19\*.** Пусть заданы случайные величины  $X_1, \dots, X_n$  такие, что  $\mathbb{E}X_i = \mu$ ,  $DX_i = \sigma^2$ ,  $cov(X_i, X_j) = 0$  при  $i \neq j$ . Найдите  $\mathbb{E}\bar{X}$  и  $D\bar{X}$ , если  $\bar{X} := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ .

**Задача 20\*.** Пусть заданы числа  $a_1, \dots, a_n$  и  $\sigma^2$ , и случайные величины  $X_1, \dots, X_n$  таковы, что  $\mathbb{E}X_i = 0$ ,  $DX_i = \sigma^2$ ,  $cov(X_i, X_j) = 0$  при  $i \neq j$ . Пусть  $Y_i = a_i + X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Найдите  $\mathbb{E}Z$  и  $DZ$ , если

1.  $Z = Y_1$ ,
2.  $Z = \frac{1}{2a_1}Y_1 + \frac{1}{2a_2}Y_2$ ,
3.  $Z = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{a_1 + \dots + a_n}$ ,
4.  $Z = \frac{a_1Y_1 + \dots + a_nY_n}{a_1^2 + \dots + a_n^2}$ ,
5.  $Z = \frac{\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2}$ .

**Задача 21.** Найдите функцию распределения случайной величины  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , если её таблица распределения имеет вид

(a)	$X$	$-1$	$0$	$1$
	$\mathbb{P}_X$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

  

(b)	$X$	$0$	$1$	$2$
	$\mathbb{P}_X$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

**Задача 22.** Пусть  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $\mathbb{P}(\{1\}) = \dots = \mathbb{P}(\{6\}) = 1/6$  и случайная величина  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  задана при помощи таблицы

$\Omega$	1	2	3	4	5	6
$X$	1	2	3	4	5	6

Найдите  $\text{corr}(\mathbb{I}_{\{X=1\}}, \mathbb{I}_{\{X=6\}})$ .

Листок 2 по ТВ и МС 2013–2014 [08.03.2014]

1

Кафедра математической экономики и эконометрики  
НИУ ВШЭ. Борзых Д. А.

Листок 2

Распределение Бернулли. Биномиальное распределение

**Определение 1.** Случайная величина  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  имеет *распределение Бернулли* с параметром  $p \in (0; 1)$ , пишут  $X \sim \text{Be}(p)$ , если  $X$  принимает значения 0 и 1 с вероятностями  $\mathbb{P}(\{X = 0\}) = 1 - p$  и  $\mathbb{P}(\{X = 1\}) = p$ .

**Определение 2.** Случайная величина  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  имеет *биномиальное распределение* с параметрами  $n \in \mathbb{N}$  и  $p \in (0; 1)$ , пишут  $X \sim \text{Bi}(n, p)$ , если  $X$  принимает значения  $k = 0, 1, \dots, n$  с вероятностями  $\mathbb{P}(\{X = k\}) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$ .

**Задача 1.** Пусть случайная величина  $X$  имеет распределение Бернулли с параметром  $p$ . Найдите

1.  $\mathbb{E}X$ ,

2.  $\mathbb{E}[X^2]$ ,



3.  $DX$ .

4. Постройте таблицу и функцию распределения случайной величины  $X$ .

**Задача 2.** Докажите, что для любых  $n \in \mathbb{N}$  и  $p \in (0; 1)$  имеет место

$$\sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = 1.$$

**Задача 3.** Пусть случайная величина  $X$  имеет биномиальное распределение с параметрами  $n$  и  $p$ . Найдите

1.  $\mathbb{E}X$ ,

2.  $\mathbb{E}[X \cdot (X - 1)]$ ,

3.  $\mathbb{E}[X^2]$ ,

4.  $DX$ ,

5.  $\mathbb{E}[X \cdot (X - 1) \cdot (X - 2)]$ ,

6.  $\mathbb{E}[X^3]$ ,

7.  $\mathbb{E}[X \cdot (X - 1) \cdot (X - 2) \cdot (X - 3)]$ ,

8.  $\mathbb{E}[X^4]$ .

9. Постройте таблицу распределения случайной величины  $X$ .

**Решение.** (а)  $\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^n k \cdot \mathbb{P}(\{X = k\}) = \sum_{k=1}^n k \cdot \mathbb{P}(\{X = k\}) = \sum_{k=1}^n k \cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k} =$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\
&= np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} = [k-1 = l|_0^{n-1}] = np \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{l!(n-1-l)!} p^l (1-p)^{(n-1)-l} \\
&= np \sum_{l=0}^{n-1} C_{n-1}^l p^l (1-p)^{(n-1)-l} = np(p + (1-p))^{n-1} = np.
\end{aligned}$$

$$(b) \mathbb{E}[X \cdot (X-1)] = \sum_{k=0}^n k(k-1) \cdot \mathbb{P}(\{X = k\}) = \sum_{k=2}^n k(k-1) \cdot \mathbb{P}(\{X = k\}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=2}^n k(k-1) \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=2}^n \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^n \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} p^{k-2} (1-p)^{n-k} = n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^n \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-2-(k-2))!} p^{k-2} (1-p)^{(n-2)-(k-2)} \\
&= [k-2 = l|_0^{n-2}] = n(n-1)p^2 \sum_{l=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{l!(n-2-l)!} p^l (1-p)^{(n-2)-l} = n(n-1)p^2 \sum_{l=0}^{n-2} C_{n-2}^l p^l (1-p)^{(n-2)-l} \\
&= n(n-1)p^2(p + (1-p))^{n-2} = n(n-1)p^2 = n^2p^2 - np^2.
\end{aligned}$$

$$(c) \mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X \cdot (X-1)] + \mathbb{E}X = n^2p^2 - np^2 + np.$$

$$(d) DX = \mathbb{E}[X^2] - [\mathbb{E}X]^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p).$$

**Задача 4.** Случайная величина  $X$  имеет биномиальное распределение с параметрами  $n = 5$  и  $p = 1/2$ . Найдите

1.  $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) > 0\})$ ,
2.  $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \{1, 2\}\})$ ;
3.  $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 4\})$ .

**Задача 5.** Укажите, какие из следующих случайных величин имеют распределение Бернулли, а какие — биномиальное распределение. Во всех случаях найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

(a)	$k \quad -1 \quad 1$ $\mathbb{P}_X \quad 1/2 \quad 1/2$		(b)	$k \quad 0 \quad 1$ $\mathbb{P}_X \quad 1/2 \quad 1/2$
(c)	$k \quad 0 \quad 1 \quad 2$ $\mathbb{P}_X \quad 1/3 \quad 1/3 \quad 1/3$		(d)	$k \quad 0 \quad 1 \quad 2$ $\mathbb{P}_X \quad 1/4 \quad 1/2 \quad 1/4$
(e)	$k \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$ $\mathbb{P}_X \quad 1/8 \quad 3/8 \quad 3/8 \quad 1/8$		(f)	$k \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$ $\mathbb{P}_X \quad 8/27 \quad 4/9 \quad 2/9 \quad 1/27$

**Задача 6.** Найдите наиболее вероятное значение случайной величины  $X$ , которая имеет биномиальное распределение, если известно, что  $\mathbb{E}X = 1$ , а  $DX = 3/4$ .

**Задача 7.** Может ли случайная величина  $X$  иметь биномиальное распределение, если

1.  $\mathbb{E}X = 6$ ,  $DX = 3$ ;
2.  $\mathbb{E}X = 7$ ,  $DX = 4$ .

**Задача 8.** Пусть  $\Omega = \{a, b, c, d\}$ ,  $\mathcal{F} = 2^\Omega$ ,  $\mathbb{P}(\{a\}) = \mathbb{P}(\{b\}) = \mathbb{P}(\{c\}) = \mathbb{P}(\{d\}) = 1/4$  и случайные величины  $X_1$ ,  $X_2$  и  $Y$  заданы с помощью таблицы:

$\Omega$	$a$	$b$	$c$	$d$
$X_1$	1	1	0	0
$X_2$	1	0	1	0
$Y$	2	1	1	0

1. Покажите, что случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  независимы и имеют распределение Бернулли.
2. Убедитесь в том, что случайная величина  $Y = X_1 + X_2$  имеет биномиальное распределение с некоторыми параметрами  $n$  и  $p$ . Определите значения этих параметров.

**Задача 9.** Пусть  $\Omega = \{a, b, \dots, h\}$ ,  $\mathcal{F} = 2^\Omega$ ,  $\mathbb{P}(\{a\}) = \dots = \mathbb{P}(\{h\}) = 1/8$  и случайные величины  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  и  $Y$  заданы с помощью таблицы:

$\Omega$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$
$X_1$	1	1	1	1	0	0	0	0
$X_2$	1	1	0	0	1	1	0	0
$X_3$	1	0	1	0	1	0	1	0
$Y$	3	2	2	1	2	1	1	0

1. Покажите, что случайные величины  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$  независимы и имеют распределение Бернулли.
2. Убедитесь в том, что случайная величина  $Y = X_1 + X_2 + X_3$  имеет биномиальное распределение с некоторыми параметрами  $n$  и  $p$ . Определите значения этих параметров.

**Задача 10.** Какова вероятность того, что при бросании десяти монет выпадет семь орлов и три решки?

**Задача 11.** Бросают пять игральных костей. Чему равна вероятность того, что из пяти выпавших цифр одна – чётная, а остальные нечётные?

**Задача 12.** В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Вычислите вероятность того, что на 6-м этаже:

1. не выйдет ни один из них;
2. выйдет один из них;
3. выйдут трое из них.

**Задача 13.** Что вероятнее: выиграть у равносильного партнёра три партии из четырёх или пять партий из восьми? (Ничьи исключаются.)

**Задача 14.** Бросают 10 монет. Какое число выпавших орлов более вероятно: 5 или 4?

**Задача 15.** Бросают 19 монет. Какое число выпавших орлов более вероятно: 10 или 9?

**Задача 16.** Определите вероятность  $P_n$  того, что при  $n$  подбрасываниях монеты орлов выпадет больше, чем решек. Приведите числовые значения этой вероятности при  $n = 5$  и  $n = 6$ .

**Задача 17.** Каждый билет лотереи независимо от остальных выигрывает с вероятностью 0.001. У меня 20 билетов. Чему равна вероятность того, что я выиграю:

1. хотя бы по одному билету;
2. не менее чем по двум билетам?

**Задача 18.** Пусть  $\Omega = \{a, b, c, d\}$ ,  $\mathcal{F} = 2^\Omega$ . Случайные величины  $X_1$ ,  $X_2$  и  $Y$  заданы с помощью таблицы:

$\Omega$	$a$	$b$	$c$	$d$
$\mathbb{P}$	?	?	?	?
$X_1$	1	1	0	0
$X_2$	1	0	1	0
$Y$	2	1	1	0

1. Подберите вероятности  $\mathbb{P}(\{a\})$ ,  $\mathbb{P}(\{b\})$ ,  $\mathbb{P}(\{c\})$  и  $\mathbb{P}(\{d\})$  так, чтобы случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  были независимы и имели распределение Бернулли с параметром  $p \in (0; 1)$ .
2. Убедитесь, что в этом случае случайная величина  $Y = X_1 + X_2$  имеет биномиальное распределение с некоторыми параметрами  $n$  и  $p$ . Определите значения этих параметров.

**Задача 19.** Пусть  $\Omega = \{a, b, \dots, h\}$ ,  $\mathcal{F} = 2^\Omega$ . Случайные величины  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  и  $Y$  заданы с помощью таблицы:

$\Omega$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$
$\mathbb{P}$	?	?	?	?	?	?	?	?
$X_1$	1	1	1	1	0	0	0	0
$X_2$	1	1	0	0	1	1	0	0
$X_3$	1	0	1	0	1	0	1	0
$Y$	3	2	2	1	2	1	1	0

1. Подберите вероятности  $\mathbb{P}(\{a\}), \dots, \mathbb{P}(\{h\})$  так, чтобы случайные величины  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$  были независимы и имели распределение Бернулли с параметром  $p \in (0; 1)$ .
2. Убедитесь, что в этом случае случайная величина  $Y = X_1 + X_2 + X_3$  имеет биномиальное распределение с некоторыми параметрами  $n$  и  $p$ . Определите значения этих параметров.

**Задача 20.** Пусть  $\Omega = \{\omega = (x_1, x_2) : x_i \in \{0; 1\}, i = 1, 2\}$ ,  $\mathcal{F} = 2^\Omega$ ,

$$\mathbb{P}(\{(0, 0)\}) = q^2, \mathbb{P}(\{(0, 1)\}) = \mathbb{P}(\{(1, 0)\}) = pq, \mathbb{P}(\{(1, 1)\}) = p^2.$$

1. Покажите, что случайные величины  $X_1(\omega) = x_1$  и  $X_2(\omega) = x_2$  независимы и имеют распределение Бернулли с параметром  $p \in (0; 1)$ .
2. Убедитесь в том, что случайная величина  $Y = X_1 + X_2$  имеет биномиальное распределение с некоторыми параметрами  $n$  и  $p$ . Определите значения этих параметров.

**Задача 21.** Пусть  $\Omega = \{\omega = (x_1, x_2, x_3) : x_i \in \{0; 1\}, i = 1, 3\}$ ,  $\mathcal{F} = 2^\Omega$ ,

$$\mathbb{P}(\{(0, 0, 0)\}) = q^3, \mathbb{P}(\{(0, 0, 1)\}) = \mathbb{P}(\{(0, 1, 0)\}) = \mathbb{P}(\{(1, 0, 0)\}) = pq^2,$$

$$\mathbb{P}(\{(0, 1, 1)\}) = \mathbb{P}(\{(1, 0, 1)\}) = \mathbb{P}(\{(1, 1, 0)\}) = p^2q, \mathbb{P}(\{(1, 1, 1)\}) = p^3.$$

1. Покажите, что случайные величины  $X_1(\omega) = x_1$ ,  $X_2(\omega) = x_2$  и  $X_3(\omega) = x_3$  независимы и имеют распределение Бернулли с параметром  $p \in (0; 1)$ .
2. Убедитесь в том, что случайная величина  $Y = X_1 + X_2 + X_3$  имеет биномиальное распределение с некоторыми параметрами  $n$  и  $p$ . Определите значения этих параметров.

**Задача 22.** Решив задачи 18 – 21, постройте пример вероятностного пространства  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , на котором заданы независимые случайные величины  $X_1, X_2, X_3$  и  $X_4$ , имеющие распределение Бернулли с параметром  $p \in (0; 1)$ . На этом же вероятностном пространстве определите биномиальную случайную величину с параметрами 4 и  $p$ .

**Задача 23.** Найти коэффициент корреляции между числом выпадений единицы и числом выпадений шестёрки при

одном подбрасывании игральной кости; при двух подбрасываниях игральной кости.

**Задача 24.** Пусть случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  независимы и имеют распределение Бернулли с параметром  $p \in (0; 1)$ . Докажите, что случайная величина  $Y = X_1 + X_2$  имеет биномиальное распределение с параметрами 2 и  $p$ .

**Задача 25 (разберите решение задачи).** Пусть случайные величины  $X_1 \sim Bi(2, p)$ ,  $X_2 \sim Bi(3, p)$  независимы. Докажите, что  $Y = X_1 + X_2 \sim Bi(5, p)$ .

**Решение.** Докажем сначала вспомогательные формулы:

$$C_2^0 C_3^0 = C_5^0, \quad (1)$$

$$C_2^1 C_3^0 + C_2^0 C_3^1 = C_5^1, \quad (2)$$

$$C_2^2 C_3^0 + C_2^1 C_3^1 + C_2^0 C_3^2 = C_5^2, \quad (3)$$

$$C_2^2 C_3^1 + C_2^1 C_3^2 + C_2^0 C_3^3 = C_5^3, \quad (4)$$

$$C_2^2 C_3^2 + C_2^1 C_3^3 = C_5^4, \quad (5)$$

$$C_2^2 C_3^3 = C_5^5. \quad (6)$$

Для этого воспользуемся формулой бинома Ньютона. Имеем

$$(1+x)^2 = C_2^0 + C_2^1 x + C_2^2 x^2, \quad (7)$$

$$(1+x)^3 = C_3^0 + C_3^1 x + C_3^2 x^2 + C_3^3 x^3, \quad (8)$$

$$(1+x)^5 = C_5^0 + C_5^1 x + C_5^2 x^2 + C_5^3 x^3 + C_5^4 x^4 + C_5^5 x^5. \quad (9)$$

Далее, умножим формулу (7) на формулу (8). Получаем

$$\begin{aligned} (1+x)^5 &= C_2^0 C_3^0 + (C_2^1 C_3^0 + C_2^0 C_3^1)x + (C_2^2 C_3^0 + C_2^1 C_3^1 + C_2^0 C_3^2)x^2 + \\ &+ (C_2^2 C_3^1 + C_2^1 C_3^2 + C_2^0 C_3^3)x^3 + (C_2^2 C_3^2 + C_2^1 C_3^3)x^4 + C_2^2 C_3^3 x^5. \end{aligned} \quad (10)$$

Из (9) и (10) вытекает справедливость вспомогательных формул (1) – (6).

Переходим теперь непосредственно к решению задачи. Требуется доказать, что

$$\mathbb{P}(\{Y = k\}) = C_5^k p^k q^{5-k} \quad (11)$$



при  $k = 0, 1, \dots, 5$ . Последовательно для каждого  $k = 0, 1, \dots, 5$  проверяем истинность формулы (11). Пусть  $k = 0$ . Имеем

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{Y = 0\}) &= \mathbb{P}\left(\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 0\}\right) = \\ &= \mathbb{P}(\{X_1 = 0\}) \cdot \mathbb{P}(\{X_2 = 0\}) = C_2^0 p^0 q^2 \cdot C_3^0 p^0 q^3 = C_5^0 p^0 q^5.\end{aligned}$$

Мы воспользовались независимостью случайных величин  $X_1$  и  $X_2$ , а также формулой (1). При  $k = 0$  формула (11) доказана. Пусть теперь  $k = 1$ , получаем

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{Y = 1\}) &= \mathbb{P}\left(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 0\}\right) + \mathbb{P}\left(\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 1\}\right) = \\ &= \mathbb{P}(\{X_1 = 1\}) \cdot \mathbb{P}(\{X_2 = 0\}) + \mathbb{P}(\{X_1 = 0\}) \cdot \mathbb{P}(\{X_2 = 1\}) = \\ &= C_2^1 p^1 q^1 \cdot C_3^0 p^0 q^3 + C_2^0 p^0 q^2 \cdot C_3^1 p^1 q^2 = (C_2^1 C_3^0 + C_2^0 C_3^1) p^1 q^4 = C_5^1 p^1 q^4.\end{aligned}$$

Здесь мы снова использовали независимость  $X_1$  и  $X_2$ , а также формулу (2). При  $k = 1$  формула (11) также доказана. Для остальных  $k = 2, \dots, 5$  обоснование формулы (11) проводится аналогичным образом (завершите доказательство!!!).  $\square$

**Задача 26.** Пусть случайные величины  $X_1 \sim Bi(2, p)$ ,  $X_2 \sim Bi(4, p)$  независимы. Докажите, что  $Y = X_1 + X_2 \sim Bi(6, p)$ .

**Задача 27.** Вычислите  $\mathbb{P}\left(\left\{\omega : |X(\omega) - \mathbb{E}X| < \sqrt{DX}\right\}\right)$ , если  $X \sim Bi(10, 1/5)$ .

**Задача 28.** Известно, что  $X \sim Bi(n, p)$ ,  $n > 2$ . Найдите

1.  $\mathbb{E} \operatorname{sign} X$ ,
2.  $\mathbb{E} \max\{X - 1, 0\}$ ,
3.  $\mathbb{E} \max\{X - 2, 0\}$ .

Листок 3 по ТВ и МС 2013–2014 [08.03.2014]

1

Кафедра математической экономики и эконометрики  
НИУ ВШЭ. Борзых Д. А.

Листок 3

Распределение Пуассона. Геометрическое распределение

**Определение 1.** Случайная величина  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  имеет *распределение Пуассона* с параметром  $\lambda > 0$ , пишут  $X \sim \operatorname{Pois}(\lambda)$ , если  $X$  принимает значения  $k = 0, 1, 2, \dots$  с вероятностями  $\mathbb{P}(\{X = k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ .

**Определение 2.** Случайная величина  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  имеет *геометрическое распределение* с параметром  $p \in (0; 1)$ , пишут  $X \sim G(p)$ , если  $X$  принимает значения  $k = 1, 2, \dots$  с вероятностями  $\mathbb{P}(\{X = k\}) = pq^{k-1}$ , где  $q := 1 - p$ .

**Задача 1.** Докажите, что  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = 1$ .

**Задача 2\*.** Пусть  $X \sim \operatorname{Pois}(\lambda)$ . Найдите

1.  $\mathbb{E} X$ ,
2.  $\mathbb{E}[X \cdot (X - 1)]$ ,
3.  $\mathbb{E}[X^2]$ ,
4.  $DX$ ,
5.  $\mathbb{E}[X \cdot (X - 1) \cdot (X - 2)]$ ,
6.  $\mathbb{E}[X^3]$ ,

$$7. \mathbb{E}[X \cdot (X-1) \cdot (X-2) \cdot (X-3)],$$

$$8. \mathbb{E}[X^4].$$

**Решение.** (a)  $\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(\{X = k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(\{X = k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = [\lambda \cdot 1 = l|_0^{\infty}] = \lambda \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} e^{-\lambda} = \lambda.$$

(b)  $\mathbb{E}[X \cdot (X-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\mathbb{P}(\{X = k\}) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\mathbb{P}(\{X = k\}) =$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} e^{-\lambda} = \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda} = [\lambda^2 \cdot 1 = l|_0^{\infty}] = \lambda^2$$

(c)  $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X \cdot (X-1)] + \mathbb{E}X = \lambda^2 + \lambda.$

(d)  $DX = \mathbb{E}[X^2] - [\mathbb{E}X]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda. \quad \square$

**Задача 3.** Вычислите  $\mathbb{P}\left(\left\{|X - \mathbb{E}X| < \sqrt{DX}\right\}\right)$ , если  $X \sim \text{Pois}(4)$ .

**Задача 4.** Известно, что  $X \sim \text{Pois}(\lambda)$  и  $\mathbb{P}(\{X = 0\}) = 1/2$ . Вычислите  $\mathbb{P}(\{X = 2\})$  и  $\mathbb{P}(\{X > 0\})$ .

**Задача 5.** Известно, что  $X \sim \text{Pois}(\lambda)$  и  $\mathbb{P}(\{X = 3\}) = \mathbb{P}(\{X = 4\})$ . Найдите  $\mathbb{P}(\{X = 5\})$ .

**Задача 6.** Известно, что  $X \sim \text{Pois}(\lambda)$  и  $\mathbb{P}(\{X = 4\}) = \mathbb{P}(\{X = 6\})$ . Найдите  $\mathbb{P}(\{X = 5\})$ .

**Задача 7\*\*.** Пусть  $A$  и  $B$  — события, состоящие в том, что случайная величина  $X \sim \text{Pois}(\lambda)$  принимает четное значение и нечетное значение соответственно. Какая из вероятностей  $\mathbb{P}(A)$  и  $\mathbb{P}(B)$  больше и на сколько?

**Решение.** Положим  $a(\lambda) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2i}}{(2i)!}$  и  $b(\lambda) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2i+1}}{(2i+1)!}$ . Тогда  $\mathbb{P}(A) = a(\lambda)e^{-\lambda}$  и  $\mathbb{P}(B) = b(\lambda)e^{-\lambda}$ . Заме-

тим, что  $b'(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2i}}{(2i)!} = a(\lambda)$ . Отсюда и из соотношения  $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1$  получаем дифференциальное уравнение  $b'(\lambda)e^{-\lambda} + b(\lambda)e^{-\lambda} = 1$ , которое можно переписать в виде  $b'(\lambda) + b(\lambda) = e^{\lambda}$ . Общим решением данного дифференциального уравнения является  $b(\lambda) = Ce^{-\lambda} + \frac{1}{2}e^{\lambda}$ ,  $C \in \mathbb{R}$ . Из равенств  $b(0) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{0^{2i+1}}{(2i+1)!} = 0$  и  $b(0) = Ce^{-0} + \frac{1}{2}e^0$  находим константу  $C = -\frac{1}{2}$ . Следовательно,  $b(\lambda) = -\frac{1}{2}e^{-\lambda} + \frac{1}{2}e^{\lambda}$ ,  $a(\lambda) = \frac{1}{2}e^{-\lambda} + \frac{1}{2}e^{\lambda}$ ,  $\mathbb{P}(B) = -\frac{1}{2}e^{-2\lambda} + \frac{1}{2}$  и  $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}e^{-2\lambda} + \frac{1}{2}$ . А значит,  $\mathbb{P}(A)$  больше чем  $\mathbb{P}(B)$  на  $e^{-2\lambda}$ .  $\square$

**Задача 8.** Случайные величины  $X$  и  $Y$  имеют биномиальное и пуассоновское распределение соответственно, причем  $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y$ . Какая дисперсия больше:  $DX$  или  $DY$ ?

**Задача 9.** Случайные величины  $X$  и  $Y$  имеют распределение Пуассона. Найдите  $D(3X + 5Y)$ , если  $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 4$  и  $\text{corr}(X, Y) = 0.8$ .

**Задача 10\*.** Известно, что  $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ . Найдите  $\mathbb{E} \text{sign} X$ .

**Задача 11\*.** Известно, что  $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ . Найдите

- $\mathbb{E} \max\{X - 1, 0\},$

- $\mathbb{E} \max\{X - 2, 0\}.$

**Решение.** (а)  $\mathbb{E} \max\{X - 1, 0\} = \sum_{k=0}^{\infty} \max\{k - 1, 0\} \mathbb{P}(\{X = k\}) =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \max\{k - 1, 0\} \mathbb{P}(\{X = k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} (k - 1) \mathbb{P}(\{X = k\}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{P}(\{X = k\}) - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{X = k\}) = \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}(\{X = k\}) - 1 + \mathbb{P}(\{X =$$

$$= \mathbb{E}X - 1 + \mathbb{P}(\{X = 0\}) = \lambda - 1 + e^{-\lambda}.$$

$$(b) \mathbb{E} \max\{X - 2, 0\} = \sum_{k=0}^{\infty} \max\{k - 2, 0\} \mathbb{P}(\{X = k\}) = \sum_{k=2}^{\infty} \max\{k - 2, 0\} \mathbb{P}(\{X = k\}) =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} (k-2) \mathbb{P}(\{X = k\}) = \sum_{k=2}^{\infty} k \mathbb{P}(\{X = k\}) - 2 \sum_{k=2}^{\infty} \mathbb{P}(\{X = k\}) =$$

$$= \mathbb{E}X - 0\mathbb{P}(\{X = 0\}) - 1\mathbb{P}(\{X = 1\}) - 2(1 - \mathbb{P}(\{X = 0\}) - \mathbb{P}(\{X = 1\})) =$$

$$= \mathbb{E}X - 2 + 2\mathbb{P}(\{X = 0\}) + 1\mathbb{P}(\{X = 1\}) = \lambda - 2 + (2 + \lambda)e^{-\lambda}. \square$$

**Задача 12\*.** Известно, что  $X \sim Pois(\lambda)$ . Найдите  $\mathbb{E}[(1 + X)^{-1}]$ .

**Задача 13\*.** Известно, что  $X \sim Pois(\lambda)$ . Найдите  $\mathbb{E}[(2 + X)^{-1}]$ .

**Задача 14\*.** Предприятие покупает годовой страховой полис для того, чтобы застраховать свой доход в случае плохой погоды, которая вынуждает временно прекратить работу. В течение года число случаев ухудшения погоды, приводящих к прекращению работы предприятия, имеет распределение Пуассона со средним 1.5.

В соответствии с условиями договора страховщик не платит ничего в первом случае такого ухудшения погоды, но выплачивает по 10000 долларов за каждое последующее ухудшение погоды. Чему равны ожидаемые выплаты страховщика по такому договору?

**Задача 15\*.** Предприятие покупает годовой страховой полис для того, чтобы застраховать свой доход в случае

плохой погоды, которая вынуждает временно прекратить работу. В течение года число случаев ухудшения погоды, приводящих к прекращению работы предприятия, имеет распределение Пуассона со средним 2.

В соответствии с условиями договора страховщик не платит ничего в первом и втором случае такого ухудшения погоды, но выплачивает по 10000 долларов за каждое последующее ухудшение погоды. Чему равны ожидаемые выплаты страховщика по такому договору?

**Задача 16\*.** Пусть случайные величины  $X \sim Pois(\lambda)$  и  $Y \sim Pois(\mu)$  независимы. Докажите, что случайная величина  $Z = X + Y \sim Pois(\lambda + \mu)$ .

**Решение.** Для  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$  имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{Z = k\}) &= \mathbb{P}(\{X+Y = k\}) = \sum_{i=0}^k \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = k-i\}) = \\ &= \sum_{i=0}^k \mathbb{P}(\{X = i\}) \cdot \mathbb{P}(\{Y = k-i\}) = \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\mu} = e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i \mu^{k-i}}{i!(k-i)!} = \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!} \lambda^i \mu^{k-i} = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k C_k^i \lambda^i \mu^{k-i} = \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!} e^{-(\lambda+\mu)}. \end{aligned}$$

**Задача 17.** При работе некоторого устройства время от времени возникают неисправности (сбой). Количество сбоев за сутки имеет распределение Пуассона. Среднее количество сбоев за сутки равно 2. Найти вероятности следующих событий:

1. в течение суток произойдет хотя бы один сбой;

2. за двое суток не произойдет ни одного сбоя.

**Задача 18\*.** Число вызовов на телефонной станции за единицу времени можно рассматривать как случайную величину, имеющую распределение Пуассона с параметром  $\lambda = 100$ . Каково наиболее вероятное значение этой величины?

**Задача 19\*.** Число вызовов на телефонной станции за единицу времени можно рассматривать как случайную величину, имеющую распределение Пуассона с параметром  $\lambda = 99.5$ . Каково наиболее вероятное значение этой величины?

**Задача 20.** Докажите, что  $\sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} = 1$ , где  $q := 1 - p$ ,  $p \in (0; 1)$ .

**Задача 21\*.** Пусть  $X \sim G(p)$ . Найдите

1.  $\mathbb{E}X$ ,
2.  $\mathbb{E}[X \cdot (X - 1)]$ ,
3.  $\mathbb{E}[X^2]$ ,
4.  $DX$ ,
5.  $\mathbb{E}[X \cdot (X - 1) \cdot (X - 2)]$ ,
6.  $\mathbb{E}[X^3]$ ,
7.  $\mathbb{E}[X \cdot (X - 1) \cdot (X - 2) \cdot (X - 3)]$ ,
8.  $\mathbb{E}[X^4]$ .

**Решение.** (а)  $\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(\{X = k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dq}(q^k) =$

$$= p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dq}(q^k) = p \frac{d}{dq} \left( \sum_{k=0}^{\infty} q^k \right) = p \frac{d}{dq} \left( \frac{1}{1-q} \right) = p \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

$$(b) \mathbb{E}[X \cdot (X-1)] = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \mathbb{P}(\{X = k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)pq^{k-1} = pq \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} =$$

$$= pq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^2}{dq^2}(q^k) = pq \frac{d^2}{dq^2} \left( \sum_{k=0}^{\infty} q^k \right) = pq \frac{d^2}{dq^2} \left( \frac{1}{1-q} \right) = pq \frac{d}{dq} \left( \frac{1}{(1-q)^2} \right) = pq$$

$$(c) \mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X \cdot (X-1)] + \mathbb{E}X = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{1+q}{p^2}.$$

$$(d) DX = \mathbb{E}[X^2] - [\mathbb{E}X]^2 = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}. \quad \square$$

**Задача 22.** Докажите, что если  $X \sim G(p)$ , то  $\mathbb{P}(\{X = 2\}) \leq \frac{1}{4}$ .

**Задача 23.** Вычислите  $\mathbb{P}(\{X = 6\})$ , если  $X \sim G(p)$  и  $\mathbb{P}(\{X = 2\}) = \frac{2}{9}$ .

**Задача 24.** Снайпер стреляет по замаскированному противнику до первого попадания. Вероятность попадания при отдельном выстреле  $p = 0.5$ . Найдите математическое ожидание числа выстрелов и математическое ожидание числа промахов.

**Задача 25.** Вероятность обнаружения малоразмерного объекта в заданном районе в отдельном полёте равна  $1/3$ .

1. Сколько в среднем полётов придется совершить, прежде чем объект будет обнаружен?
2. Какова вероятность того, что для обнаружения объекта потребуется совершить не менее трёх вылетов?

**Задача 26.** Известно, что  $X \sim Be(p)$  и  $Y \sim Pois(\lambda)$  независимые случайные величины. Пусть  $Z = X + Y$ . Найдите



1. (a)  $\mathbb{E}Z$ ,
- (b)  $DZ$
- (c)  $\mathbb{P}(\{Z = 0\})$
- (d)  $\mathbb{P}(\{Z = 1\})$ ,
- (e)  $\mathbb{P}(\{Z = 2\})$ .

**Задача 27.** Известно, что  $X \sim Be(p)$  и  $Y \sim G(p)$  независимые случайные величины. Пусть  $Z = X + Y$ . Найдите

1.  $\mathbb{E}Z$ ,
2.  $DZ$
3.  $\mathbb{P}(\{Z = 0\})$
4.  $\mathbb{P}(\{Z = 1\})$ ,
5.  $\mathbb{P}(\{Z = 2\})$ .

**Задача 28.** Укажите, какие из следующих случайных величин имеют распределение Бернулли, биномиальное распределение, распределение Пуассона, геометрическое распределение. Во всех случаях найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

(a)	$k \ 0 \ 1$ $\mathbb{P}_X \ 1/4 \ 3/4$		(b)	$k \ -1 \ 1$ $\mathbb{P}_X \ 1/2 \ 1/2$
(c)	$k \ 0 \ 1 \ 2$ $\mathbb{P}_X \ 1/16 \ 6/16 \ 9/16$		(d)	$k \ 0 \ 1 \ 2$ $\mathbb{P}_X \ 9/16 \ 6/16 \ 1/16$
(e)	$k \ 0 \ 1 \ 2 \ 3$ $\mathbb{P}_X \ 1/8 \ 3/8 \ 3/8 \ 1/8$		(f)	$k \ 0 \ 1 \ 2 \ 3$ $\mathbb{P}_X \ 8/27 \ 4/9 \ 2/9 \ 1$
(g)	$k \ 0 \ 1 \ 2 \ \dots \ k \ \dots$ $\mathbb{P}_X \ \frac{1}{e \cdot 0!} \ \frac{1}{e \cdot 1!} \ \frac{1}{e \cdot 2!} \ \dots \ \frac{1}{e \cdot k!} \ \dots$			
(h)	$k \ 1 \ 2 \ 3 \ \dots \ k \ \dots$ $\mathbb{P}_X \ \frac{1}{e \cdot 0!} \ \frac{1}{e \cdot 1!} \ \frac{1}{e \cdot 2!} \ \dots \ \frac{1}{e \cdot (k-1)!} \ \dots$			
(k)	$k \ 0 \ 1 \ 2 \ \dots \ k-1 \ \dots$ $\mathbb{P}_X \ 1/4 \ 3/4^2 \ 3^2/4^3 \ \dots \ 3^{k-1}/4^k \ \dots$			

Листок 4 по ТВ и МС 2013–2014 [08.03.2014]

1

Кафедра математической экономики и эконометрики  
НИУ ВШЭ. Борзых Д. А.

Листок 4

Условная вероятность. Формула умножения вероятностей.  
Формула полной вероятности. Формула Байеса

**Определение 1.** Пусть задано вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,  $A, B \in \mathcal{F}$ ,  $\mathbb{P}(B) > 0$ . Условной вероятностью события  $A$  при условии события  $B$  называется

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}. \quad (1)$$

**Задача 1.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  — вероятностное пространство,  $A, B, C \in \mathcal{F}$ . Докажите, что если  $\mathbb{P}(A \cap B) > 0$ , то  $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(C|A \cap B)$ .

**Задача 2.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  — вероятностное пространство,  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ ,  $n \geq 3$ . Докажите, что если  $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$ , то

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \quad (2)$$

(формула (2) называется *формулой умножения вероятностей*).

**Определение 2.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  — вероятностное пространство. Система подмножеств  $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_n\}$ ,  $n \geq 2$ , называется разбиением пространства элементарных событий  $\Omega$ , если

1.  $D_i \in \mathcal{F}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,
2.  $\Omega = D_1 \cup \dots \cup D_n$ ,
3.  $D_i \cap D_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ .

**Задача 3.** Пусть задано вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  и разбиение  $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_n\}$  такое, что  $\mathbb{P}(D_i) > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n \geq 2$ . Докажите, что для любого  $A \in \mathcal{F}$  имеет место формула

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|D_1) \cdot \mathbb{P}(D_1) + \dots + \mathbb{P}(A|D_n) \cdot \mathbb{P}(D_n), \quad (3)$$

называемая *формулой полной вероятности*.

**Задача 4.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  — вероятностное пространство,  $A \in \mathcal{F}$ ,  $\mathbb{P}(A) > 0$  и  $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_n\}$  — разбиение такое, что  $\mathbb{P}(D_i) > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n \geq 2$ . Докажите, что для любого  $i = 1, \dots, n$  справедлива формула

$$\mathbb{P}(D_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|D_i) \cdot \mathbb{P}(D_i)}{\mathbb{P}(A|D_1) \cdot \mathbb{P}(D_1) + \dots + \mathbb{P}(A|D_n) \cdot \mathbb{P}(D_n)}, \quad (4)$$

которая называется *формулой Байеса*.

**Задача 5.** Какова вероятность того, что в семье, имеющей двух детей оба ребенка мальчики, в предположении, что

1. старший ребенок мальчик;

2. по крайней мере, один из детей — мальчик?

Ответ: (a)  $1/2$ ; (b)  $1/3$ .

**Задача 6.** Цифры 1, 2, 3, 4, 5 располагаются в ряд в случайном порядке. Какова вероятность, что первой окажется чётная цифра, а последней — нечётная?

Ответ:  $3/10$ .

**Задача 7.** Двенадцатитомное издание расположено на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что третий том окажется на седьмом месте, а седьмой том на третьем месте?

Ответ:  $1/132$ .

**Задача 8.** Из букв слова КОМБИНАТОРИКА наудачу выбирают четыре буквы. Найдите вероятность того, что получится слово

1. КИНО;

2. КРОТ;

3. АТОМ.

Ответ: (a)  $1/2145$ ; (b)  $1/4290$ ; (c)  $1/4290$ .

**Задача 9.** Студент пришел на экзамен, зная только один билет. Всего 25 билетов, а в группе 20 человек. Как ему следует поступить, чтобы увеличить вероятность вытянуть счастливый билет:

1. идти отвечать первым или вторым?

2. идти отвечать первым или третьим?

3. идти отвечать первым или последним?

Ответ: вероятность вытянуть счастливый билет не зависит от очередности вытягивания билета и равна  $1/25$ .

**Задача 10.** Студент пришёл на экзамен, зная два билета из 25-ти. Какова вероятность для него достать счастливый билет, если он идет тянуть вторым?

Ответ:  $2/25$ .

**Задача 11.** В первой урне 7 белых и 3 черных шара, во второй урне 8 белых и 4 черных шара, в третьей урне 2 белых и 13 черных шаров. Из этих урн наугад выбирается одна урна. Какова вероятность того, что шар, взятый наугад из выбранной урны, окажется белым?

Ответ:  $1/2$ .

**Задача 12.** В первой урне 7 белых и 3 черных шара, во второй урне 8 белых и 4 черных шара, в третьей урне 2 белых и 13 черных шаров. Из этих урн наугад выбирается одна урна. Какова вероятность того, что была выбрана первая урна, если шар, взятый наугад из выбранной урны, оказался белым?

Ответ:  $7/15$ .

**Задача 13.** Пусть в урне находится две монеты: симметричная и несимметричная с вероятностью выпадения орла, равной  $1/3$ . Наудачу вынимается и подбрасывается одна из монет. Найдите вероятность выпадения орла.

Ответ:  $5/12$ .

**Задача 14.** Пусть в урне находится две монеты: симметричная и несимметричная с вероятностью выпадения орла, равной  $1/3$ . Наудачу вынимается и подбрасывается одна из монет. Выпал орёл. Какова вероятность того, что выбранная монета симметрична?

Ответ:  $3/5$ .

**Задача 15.** Два охотника одновременно и независимо стреляют в кабана. Известно, что первый попадает с вероят-

ностью 0.8, а второй — 0.4. Кабан убит, и в нём обнаружена одна пуля. Найдите вероятность того, что

1. кабана убил первый охотник;
2. кабана убил второй охотник.

Ответ: (a)  $6/7$ ; (b)  $1/7$ .

**Задача 16.** На учениях два самолёта одновременно и независимо атакуют цель. Известно, что первый самолёт поражает цель с вероятностью 0.6, а второй — 0.4. При разборе учений выяснилось, что цель была поражена только одним самолётом. Какова вероятность того, что это был первый самолёт?

Ответ:  $9/13$ .

**Задача 17.** Пусть события  $A$  и  $B$  независимы. Покажите, что если  $\mathbb{P}(B) > 0$ , то  $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ .

**Задача 18.** Пусть события  $A$  и  $B$  несовместны, т.е.  $A \cap B = \emptyset$ . Докажите, что если  $\mathbb{P}(A \cup B) > 0$ , то  $\mathbb{P}(A|A \cup B) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)}$ .

**Задача 19.** Покажите, что если  $\mathbb{P}(A|C) > \mathbb{P}(B|C)$  и  $\mathbb{P}(A|C^c) > \mathbb{P}(B|C^c)$ , то  $\mathbb{P}(A) > \mathbb{P}(B)$ .

**Задача 20.** Верны ли равенства

1.  $\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(A|B^c) = 1$ ?
2.  $\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(A^c|B^c) = 1$ ?

**Задача 21.** Докажите, что если  $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^c)$ , то события независимы.

**Задача 22.** Показать, что  $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B \cap C) \cdot \mathbb{P}(C|B) + \mathbb{P}(A|B \cap C^c) \cdot \mathbb{P}(C^c|B)$ .

**Задача 23.** Пусть событие  $A$  таково, что оно не зависит от самого себя, т.е.  $A$  и  $A$  независимы. Показать, что тогда  $\mathbb{P}(A)$  равно 0 или 1.

**Задача 24.** Пусть событие  $A$  таково, что  $\mathbb{P}(A)$  равно 0 или 1. Показать, что  $A$  и любое событие  $B$  независимы.

**Задача 25.** Доказать, что если события  $A$  и  $B$  независимы, то независимы  $A$  и  $B^c$ .

**Задача 26.** Для того чтобы сбить самолет достаточно одного попадания. Было сделано три выстрела с вероятностями попадания 0.1, 0.2 и 0.4 соответственно. Какова вероятность того, что самолет сбит?

Ответ: 0.568.

**Задача 27.** Для разрушения моста достаточно попадание двух бомб. Независимо сбросили три бомбы с вероятностями попадания 0.1, 0.3 и 0.4. Какова вероятность, что мост будет разрушен?

Ответ: 0.166.

Листок 5 по ТВ и МС 2013–2014 [08.03.2014]

1

Кафедра математической экономики и эконометрики  
НИУ ВШЭ. Борzych Д. А.

Листок 5

Абсолютно непрерывные случайные величины

**Задача 1.** Пусть  $\Omega = (0; 1)$ ,  $\mathbb{P}$  — длина,  $X(\omega) = \omega^2$  и  $Y(\omega) = -\ln \omega$  — случайные величины. Найдите

1.  $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \leq \frac{1}{4}\})$ ,
2.  $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) = \frac{1}{4}\})$
3.  $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) > \frac{1}{9}\})$ ,
4.  $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \in [\frac{1}{9}; \frac{1}{4}]\})$ ,
5.  $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \in [0; \frac{1}{100}] \cup [\frac{1}{4}; 1]\})$ ,
6.  $\mathbb{P}(\{\omega : Y(\omega) > 0\})$ ,
7.  $\mathbb{P}(\{\omega : Y(\omega) = 1\})$ ,

8.  $\mathbb{P}(\{\omega : Y(\omega) \leq 1\})$ .

**Задача 2.** Пусть  $\Omega = [0; 1]$ ,  $\mathbb{P}$  — длина и  $X(\omega) = \omega$  — случайная величина. Найдите

(a) $F_X(x)$ ,	(b) $f_X(x)$ ,	(c) $\mathbb{E}X$ ,	(d) $\mathbb{E}[X^2]$ ,	(e) $DX$ .
----------------	----------------	---------------------	-------------------------	------------

**Задача 3.** Пусть  $\Omega = [0; 1]$ ,  $\mathbb{P}$  — длина и  $X(\omega) = 1 - \omega$  — случайная величина. Найдите

(a) $F_X(x)$ ,	(b) $f_X(x)$ ,	(c) $\mathbb{E}X$ ,	(d) $\mathbb{E}[X^2]$ ,	(e) $DX$ .
----------------	----------------	---------------------	-------------------------	------------

**Задача 4.** Пусть  $\Omega = [0; 1]$ ,  $\mathbb{P}$  — длина и  $X(\omega) = \omega^2$  — случайная величина. Найдите

(a) $F_X(x)$ ,	(b) $f_X(x)$ ,	(c) $\mathbb{E}X$ ,	(d) $\mathbb{E}[X^2]$ ,	(e) $DX$ .
----------------	----------------	---------------------	-------------------------	------------

Ответ:

$$(a) \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \sqrt{x} & \text{при } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{при } x \geq 1. \end{cases} \quad (b) \quad f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{при } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$$

(c)  $\mathbb{E}X = 1/3$ , (d)  $\mathbb{E}[X^2] = 1/5$ , (e)  $DX = 4/45$ .

**Задача 5.** Пусть  $\Omega = [0; 1]$ ,  $\mathbb{P}$  — длина и  $X(\omega) = \sqrt{\omega}$  — случайная величина. Найдите

(a) $F_X(x)$ ,	(b) $f_X(x)$ ,	(c) $\mathbb{E}X$ ,	(d) $\mathbb{E}[X^2]$ ,	(e) $DX$ .
----------------	----------------	---------------------	-------------------------	------------

**Задача 6.** Пусть  $\Omega = (0; 1)$ ,  $\mathbb{P}$  — длина и  $X(\omega) = -\ln \omega$  — случайная величина. Найдите

(a) $F_X(x)$ ,	(b) $f_X(x)$ ,	(c) $\mathbb{E}X$ ,	(d) $\mathbb{E}[X^2]$ ,	(e) $DX$ .
----------------	----------------	---------------------	-------------------------	------------

**Задача 7.** Пусть  $\Omega = (0; 1)$ ,  $\mathbb{P}$  — длина и  $X(\omega) = -\ln(1 - \omega)$  — случайная величина. Найдите

(a) $F_X(x)$ ,	(b) $f_X(x)$ ,	(c) $\mathbb{E}X$ ,	(d) $\mathbb{E}[X^2]$ ,	(e) $DX$ .
----------------	----------------	---------------------	-------------------------	------------

**Задача 8.** Пусть  $\Omega = (0; 1)$ ,  $\mathbb{P}$  — длина и  $X(\omega) = 1/\omega$  — случайная величина. Найдите

(a) $F_X(x)$ ,	(b) $f_X(x)$ ,	(c) $\mathbb{E}X$ ,	(d) $\mathbb{E}[X^2]$ ,	(e) $DX$ .
----------------	----------------	---------------------	-------------------------	------------

**Задача 9.** Пусть  $\Omega = (0; 1)$ ,  $\mathbb{P}$  — длина и  $X(\omega) = 1/\sqrt{\omega}$  — случайная величина. Найдите

(a) $F_X(x)$ ,	(b) $f_X(x)$ ,	(c) $\mathbb{E}X$ ,	(d) $\mathbb{E}[X^2]$ ,	(e) $DX$ .
----------------	----------------	---------------------	-------------------------	------------



**Задача 10.** Пусть  $\Omega = (0; 1)$ ,  $\mathbb{P}$  — длина и  $X(\omega) = \ln \omega - \ln(1 - \omega)$  — случайная величина. Найдите

(a) $F_X(x)$ ,	(b) $f_X(x)$ ,	(c) $\mathbb{E}X$ .
----------------	----------------	---------------------

**Задача 11.** Пусть  $\Omega = [0; 1]$ ,  $\mathbb{P}$  — длина и  $X(\omega) = a + (b - a) \cdot \omega$  — случайная величина, где  $a < b$ . Найдите

(a) $F_X(x)$ ,	(b) $f_X(x)$ ,	(c) $\mathbb{E}X$ ,	(d) $\mathbb{E}[X^2]$ ,	(e) $DX$ .
----------------	----------------	---------------------	-------------------------	------------

**Задача 12.** Пусть  $\Omega = [0; 1]$ ,  $\mathbb{P}$  — длина и  $X(\omega) = b + (a - b) \cdot \omega$  — случайная величина, где  $a < b$ . Найдите

(a) $F_X(x)$ ,	(b) $f_X(x)$ ,	(c) $\mathbb{E}X$ ,	(d) $\mathbb{E}[X^2]$ ,	(e) $DX$ .
----------------	----------------	---------------------	-------------------------	------------

**Задача 13.** Пусть  $\Omega = (0; 1)$ ,  $\mathbb{P}$  — длина и  $X(\omega) = -\frac{1}{\lambda} \ln \omega$  — случайная величина, где  $\lambda > 0$ . Найдите

(a) $F_X(x)$ ,	(b) $f_X(x)$ ,	(c) $\mathbb{E}X$ ,	(d) $\mathbb{E}[X^2]$ ,	(e) $DX$ .
----------------	----------------	---------------------	-------------------------	------------

**Задача 14.** Пусть  $\Omega = (0; 1)$ ,  $\mathbb{P}$  — длина и  $X(\omega) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \omega)$  — случайная величина, где  $\lambda > 0$ . Найдите

(a) $F_X(x)$ ,	(b) $f_X(x)$ ,	(c) $\mathbb{E}X$ ,	(d) $\mathbb{E}[X^2]$ ,	(e) $DX$ .
----------------	----------------	---------------------	-------------------------	------------

**Задача 15\*.** Пусть  $\Omega = (0; 1)$ ,  $\mathbb{P}$  — длина,  $\Phi(x) := \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , и  $X(\omega) = \Phi^{-1}(\omega)$  — случайная величина (здесь  $\Phi^{-1}$  обратная функция к функции  $\Phi$ ). Найдите

(a) $F_X(x)$ ,	(b) $f_X(x)$ ,	(c) $\mathbb{E}X$ ,	(d) $\mathbb{E}[X^2]$ ,	(e) $DX$ .
----------------	----------------	---------------------	-------------------------	------------

**Задача 16\*.** Пусть  $\Omega = (0; 1)$ ,  $\mathbb{P}$  — длина,  $\Phi(x) := \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , и  $X(\omega) = \Phi^{-1}(1 - \omega)$  — случайная величина (здесь  $\Phi^{-1}$  обратная функция к функции  $\Phi$ ). Найдите

(a) $F_X(x)$ ,	(b) $f_X(x)$ ,	(c) $\mathbb{E}X$ ,	(d) $\mathbb{E}[X^2]$ ,	(e) $DX$ .
----------------	----------------	---------------------	-------------------------	------------

**Задача 17\*.** Пусть  $\Omega = (0; 1)$ ,  $\mathbb{P}$  — длина,  $\Phi(x) := \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , и  $X(\omega) = \Phi^{-1}(\omega)$  — случайная величина (здесь  $\Phi^{-1}$  обратная функция к функции  $\Phi$ ). Найдите

(a) $F_X(x)$ ,	(b) $f_X(x)$ ,	(c) $\mathbb{E}X$ ,	(d) $\mathbb{E}[X^2]$ ,	(e) $DX$ .
----------------	----------------	---------------------	-------------------------	------------

**Задача 18.** Функция распределения случайной величины  $X$  имеет вид  $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1 \\ (x-1)^2 & \text{при } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{при } x > 2 \end{cases}$ . Найдите

(a) $f_X(x)$ ,	(b) $EX$ ,	(c) $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \in (1.5; 2.5)\})$ .
----------------	------------	---

**Задача 19.** Плотность распределения случайной величины  $X$  имеет вид  $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} + x & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{при } x > 1 \end{cases}$ . Найдите

(a) $F_X(x)$ ,	(b) $EX$ ,	(c) $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \in [\frac{1}{4}; \frac{3}{4}]\})$ .
----------------	------------	---

**Задача 20.** Случайная величина  $X$  имеет плотность распределения  $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$ . Найдите

(a) $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \in [0; 1]\})$ ,	(b) $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) > 1\})$ ,	(c) $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) > 1\})$ .
---	--	--

**Задача 21.** Выразите функцию распределения  $F_Y(x)$  случайной величины  $Y = 8 - 9X$  через функцию распределения  $F_X(x)$  абсолютно непрерывной случайной величины  $X$ .

Ответ:  $F_Y(x) = 1 - F_X\left(\frac{8-x}{9}\right)$ .

**Задача 22.** Распределение случайной величины  $X$  задано плотностью  $f_X(x)$ . Найдите плотность распределения случайной величины  $Y = 2X + 7$ .

Ответ:  $f_Y(x) = \frac{1}{2}f_X\left(\frac{x-7}{2}\right)$ .

**Задача 23.** Плотность распределения случайной величины  $X$  имеет вид  $f_X(x) = \frac{a}{1+x^2}$ . Найдите параметр  $a$  и вероятность попадания случайной величины  $X$  в отрезок  $[0; 1]$ .

Ответ:  $a = 1/\pi$ ,  $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \in [0; 1]\}) = 1/4$ .

**Задача 24.** Дана плотность распределения  $f_X(x) = \frac{2e^x}{\pi(1+e^{2x})}$ . Найдите функцию распределения случайной величины  $X$ .

Ответ:  $F_X(x) = 2\arctg(e^x)/\pi$ .

**Задача 25.** Найдите значения параметров  $a$  и  $b$  функции распределения  $F_X(x) = a \cdot \arctg 2x + b$ .

Ответ:  $a = 1/\pi$ ,  $b = 1/2$ .

**Задача 26.** Плотность распределения  $f_X(x)$  случайной величины  $X$  равна нулю вне отрезка  $[-3; 3]$  и  $f_X(x) = ax^2 + bx + c$  для  $x \in [-3; 3]$ . Найдите параметры  $a, b, c$  и вероятность попадания случайной величины  $X$  в отрезок  $[0; 2]$ , если известно, что  $f_X(x)$  непрерывна на всей числовой прямой.

Ответ:  $a = -1/36$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1/4$ ,  $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \in [0; 2]\}) \approx 0.426$ .

**Задача 27.** Плотность распределения случайной величины  $X$  имеет вид  $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ . Найдите плотность распределения случайной величины  $Y = 1/X$ .

Ответ:  $f_Y(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ .

**Задача 28.** Случайная величина  $X$  имеет плотность распределения  $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$ . Найдите функцию распределения и плотность случайной величины  $Y = e^{-X}$ .

Ответ:  $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ x & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{при } x > 1 \end{cases}$ ,  $f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ 1 & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{при } x > 1 \end{cases}$ .

$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ 1 & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{при } x > 1 \end{cases}$ .

**Задача 29.** Случайная величина  $X$  имеет плотность  $f_X(x)$ . Найдите плотность случайной величины  $Y = X^2$ .

Ответ:  $f_Y(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(f_X(-\sqrt{x}) + f_X(\sqrt{x}))$  при  $x > 0$  и  $f_Y(x) = 0$  при  $x \leq 0$ .

**Задача 30.** Случайная величина  $X$  имеет плотность распределения  $f_X(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}$ . Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $X$ .

Ответ:  $\mathbb{E}X = 0$ ,  $DX = 2$ .

**Задача 31.** Случайная величина  $X$  имеет плотность распределения  $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{?@8 } x \in [-1; 1] \\ 0 & \text{?@8 } x \notin [-1; 1] \end{cases}$ . Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $X^{11/3}$ .

*Ответ:*  $\mathbb{E}[X^{11/3}] = 0$ ,  $D[X^{11/3}] = 3/25$ .

**Задача 32.** Дана плотность распределения  $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{?@8 } x \geq 0 \\ 0 & \text{?@8 } x < 0 \end{cases}$ . Найдите  $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) > 9\})$ , если известно, что  $\mathbb{E}X = 10$ .

*Ответ:*  $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) > 9\}) = e^{-9/10}$ .

**Задача 33.** Дана плотность распределения  $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{?@8 } x \geq 0 \\ 0 & \text{?@8 } x < 0 \end{cases}$ . Найдите  $\mathbb{P}(\{\omega : 18 < X(\omega) < 36\})$ , если известно, что  $\mathbb{E}X = 9/\ln 2$ .

*Ответ:*  $\mathbb{P}(\{\omega : 18 < X(\omega) < 36\}) = 3/16$ .

**Задача 34.** Докажите, что  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} \frac{f_X(x)}{x} dx = 0$ , где  $f_X$  — плотность распределения произвольной случайной величины.

**Решение.** Пусть  $a > 0$ . Тогда  $0 \leq \int_a^{+\infty} \frac{f_X(x)}{x} dx \leq \int_a^{+\infty} \frac{f_X(x)}{a} dx = \frac{1 - F_X(a)}{a} \rightarrow 0$  при  $a \rightarrow +\infty$ .  $\square$

**Задача 35.** Известно, что плотность случайной величины  $X$  имеет вид

$$f_X(x) = \begin{cases} c - |x| & \text{?@8 } x \in [-c; c], \\ 0 & \text{?@8 } x \notin [-c; c]. \end{cases}$$

Найдите

1. нормирующую константу  $c$ ,
2.  $F_X(x)$ ,
3.  $\mathbb{E}X$ ,
4.  $\mathbb{E}[X^2]$ ,

5.  $DX$ ,

6.  $\mathbb{E}[X^k]$  для всех  $k \in \mathbb{N}$ .

**Задача 36.** Известно, что плотность случайной величины  $X$  имеет вид  $f_X(x) = ce^{-|x|}$ . Найдите

1. нормирующую константу  $c$ ,

2.  $F_X(x)$ ,

3.  $\mathbb{E}X$ ,

4.  $\mathbb{E}[X^2]$ ,

5.  $DX$ ,

6.  $\mathbb{E}[X^k]$  для всех  $k \in \mathbb{N}$ .

Листок 7 по ТВ и МС 2013–2014 [08.03.2014]

1

Кафедра математической экономики и эконометрики  
НИУ ВШЭ. Борzych Д. А.

Листок 7

Центральная предельная теорема

**Центральная предельная теорема (Леви).** Пусть  $X_1, X_2, \dots$  — последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с  $0 < DX_i < \infty$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Тогда для любого множества  $B \subseteq \mathbb{R}$  имеет место

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \in B \right\} \right) = \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

где  $S_n := X_1 + \dots + X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Обозначение.** Будем использовать следующее обозначение  $\Phi(x) := \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

**Задача 1.** В предположении, что размер одного шага пешехода равномерно распределен в интервале от 70 до 80 см и размеры разных шагов независимы, найти вероятность того, что за 10000 шагов он пройдет расстояние не менее 7.49 км и не более 7.51 км.

*Ответ: 0.9995.*

**Задача 2.** Предположим, что на станцию скорой помощи поступают вызовы, число которых распределено по закону Пуассона с параметром  $\lambda = 73$ , и в разные сутки их количество не зависит друг от друга. Определить вероятность того, что в течение года (365 дней) общее число вызовов будет в пределах от 26500 до 26800.

*Ответ: 0.6422.*

**Задача 3.** Игральная кость подбрасывается 420 раз. Какова вероятность того, что суммарное число очков будет находиться в пределах от 1400 до 1505?

*Ответ: 0.8186.*

**Задача 4.** При выстреле по мишени стрелок попадает в десятку с вероятностью 0.5, в девятку – 0.3, в восьмерку – 0.1, в семерку – 0.05, в шестерку – 0.05.

Стрелок сделал 100 выстрелов. Какова вероятность того, что он набрал не менее 900 очков?

*Ответ: 0.9115.*

**Задача 5.** Число посетителей магазина (в день) имеет распределение Пуассона с математическим ожиданием 289. При помощи центральной предельной теоремы найти приближенно вероятность того, что за 100 рабочих дней суммарное число посетителей составит от 28550 до 29250 человек. Ответ представьте в виде интеграла от нормальной стандартной плотности. Например, так  $\int_{-1.25}^{2.25} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ .

**Задача 6\*.** Случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  независимы и равномерно распределены на отрезке  $[0; 1]$ . Найти вероятность того, что  $\prod_{k=1}^{100} \xi_k \leq \frac{10}{2^{100}}$ .

*Ответ:* 0.9995.

**Задача 7.** Случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  независимы и равномерно распределены на отрезке  $[3; 15]$ . Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\{\xi_1 + \dots + \xi_n > 9n + \sqrt{3n}\})$ .

*Ответ:* 0.3085.

**Задача 8.** Случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  независимы и распределены по закону Пуассона. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\{\xi_1 + \dots + \xi_n > \sqrt{n} + n\})$ , если известно, что  $D\xi_1 = 1$ .

*Ответ:* 0.1587.

**Задача 9.** Случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  независимы и распределены по закону Пуассона. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\{\xi_1 + \dots + \xi_n > 2\sqrt{n} + n\})$ , если известно, что  $\mathbb{E}\xi_1 = 1$ .

*Ответ:* 0.0228.

**Задача 10.** Для независимых одинаково распределенных случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  найдите предел  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\{|\xi_1 + \dots + \xi_n| > \sqrt{3n}\})$ , если известна плотность распределения случайной величины  $\xi_1$ :  $f_{\xi_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} e^{-\frac{x^2}{6}}$ .

*Ответ:* 0.3173.

**Задача 11.** Для независимых равномерно распределенных на отрезке  $[-2, 2]$  случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  найдите предел  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\{|\xi_1 + \dots + \xi_n| > \sqrt{3n}\})$ .

*Ответ:* 0.1336.

**Задача 12\*.** Случайные величины  $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots, \xi_n, \eta_n, \dots$  независимы и распределены по закону Пуассона. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\{\xi_1 + \dots + \xi_n + n > \eta_1 + \dots + \eta_n + \sqrt{5n}\})$ , если известно, что  $\mathbb{E}\xi_1 = 2$  и  $\mathbb{E}\eta_1 = 3$ .

Ответ: 0.1587.

**Задача 13.** Случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  независимы и имеют геометрическое распределение<sup>1</sup>. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\{\xi_1 + \dots + \xi_n > 3n - \sqrt{6n}\})$ , если известно, что  $\mathbb{E}\xi_1 = 3$ .

Ответ: 0.8413.

**Задача 14\*.** Три стрелка поочередно ведут стрельбу по одной и той же мишени. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для каждого стрелка равны 0.4, 0.6 и 0.8. Оцените вероятность того, что число попаданий при 450 выстрелах будет заключаться в пределах от 239 до 390.

Ответ: 0.9992.

**Задача 15\*\*.** Пусть  $\xi_n, \eta_n$  - независимые пуассоновские случайные величины с параметром  $n$ . Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\{\xi_n - \eta_n \leq \sqrt{2nx}\})$ .

Ответ:  $\Phi(x)$ .

*Указание: воспользуйтесь тем, что если  $\xi_1 \sim \text{Pois}(\lambda_1)$  и  $\xi_2 \sim \text{Pois}(\lambda_2)$  независимы, то  $\xi_1 + \xi_2 \sim \text{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2)$ .*

**Задача 16.** Для независимых одинаково распределенных случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  найдите предел  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\{|\xi_1 + \dots + \xi_n| > \sqrt{2n}\})$ , если известна плотность распределения случайной величины  $\xi_1$ :  $f_{\xi_1}(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ .

**Задача 17.** Случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots$  независимы и имеют равномерное распределение на интервале  $(0; 1)$ . Вычислите  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\{\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \dots \cdot \xi_n < e^{-n}\})$ .

**Решение.**  $\mathbb{P}(\{\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \dots \cdot \xi_n < e^{-n}\}) = \mathbb{P}(\{\sum_{i=1}^n \ln \xi_i < -n\})$ .

$$\mathbb{E} \ln \xi_1 = \int_0^1 \ln x dx = \ln x \cdot x \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 x d \ln x = - \int_0^1 x \frac{1}{x} dx = -1$$

---

<sup>1</sup> Случайная величина  $\xi$  имеет геометрическое распределение, если  $\mathbb{P}(\{\xi = k\}) = p \cdot q^{k-1}$  при  $k = 1, 2, 3, \dots$



$$\left\{ \lim_{x \rightarrow +0} \ln x \cdot x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^{-1}}{x^{-2}} = - \lim_{x \rightarrow +0} x = 0 \right\}$$

$$\mathbb{E} \ln^2 \xi_1 = \int_0^1 \ln^2 x dx = \ln^2 x \cdot x \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 x d \ln^2 x =$$

$$\left\{ \lim_{x \rightarrow +0} \ln^2 x \cdot x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln^2 x}{x^{-1}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2 \ln x \cdot x^{-1}}{x^{-2}} = - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2 \ln x}{x^{-1}} = 0 \right\}$$

$$= - \int_0^1 x d \ln^2 x = - \int_0^1 x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = -2 \int_0^1 \ln x dx = 2.$$

$$D(\xi_1) = \mathbb{E} \ln^2 \xi_1 - (\mathbb{E} \ln \xi_1)^2 = 1.$$

Заметим, что случайные величины  $\ln \xi_1, \ln \xi_2, \dots$  независимы и одинаково распределены,  $D(\ln \xi_i) = 1 < \infty$  при  $i = 1, 2, \dots$ . Следовательно, к последовательности случайных величин  $\{\ln \xi_i\}_{i=1}^{\infty}$  применима центральная предельная теорема.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \dots \cdot \xi_n < e^{-n}\}) &= \mathbb{P}\left(\left\{\sum_{i=1}^n \ln \xi_i < -n\right\}\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(\left\{\frac{\sum_{i=1}^n \ln \xi_i - \mathbb{E} \sum_{i=1}^n \ln \xi_i}{\sqrt{D(\sum_{i=1}^n \ln \xi_i)}} < \frac{-n - \mathbb{E} \sum_{i=1}^n \ln \xi_i}{\sqrt{D(\sum_{i=1}^n \ln \xi_i)}}\right\}\right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n \ln \xi_i - \mathbb{E} \sum_{i=1}^n \ln \xi_i}{\sqrt{D(\sum_{i=1}^n \ln \xi_i)}} < \frac{-n - (-n)}{\sqrt{n}} \right\} \right) = \\
&= \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n \ln \xi_i - \mathbb{E} \sum_{i=1}^n \ln \xi_i}{\sqrt{D(\sum_{i=1}^n \ln \xi_i)}} < 0 \right\} \right) \rightarrow \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{t^2}{2} \right) dt = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{1}{2}$ .

**Задача 18.** Известно, что  $\xi_1, \xi_2, \dots$  - независимые одинаково распределенные случайные величины имеют равномерное распределение на интервале  $(-c; c)$ ,  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ .

При каком значении параметра  $c \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n}{\sqrt{n}} < 2 \right\} \right) = \frac{3}{4}$ ?

**Решение.** Известно, что если  $\xi \sim U((a; b))$ , то  $\mathbb{E}\xi = \frac{a+b}{2}$  и  $D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$ .

Следовательно,  $\mathbb{E}\xi_1 = 0$  и  $D\xi_1 = \frac{c^2}{3}$ .

$$\begin{aligned}
\mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n}{\sqrt{n}} < 2 \right\} \right) &= \mathbb{P} (\{S_n < 2\sqrt{n}\}) = \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{D(S_n)}} < \frac{2\sqrt{n} - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{D(S_n)}} \right\} \right) \\
&= \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{D(S_n)}} < \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{c^2 n}{3}}} \right\} \right) = \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{D(S_n)}} < \frac{2\sqrt{3}}{c} \right\} \right) \rightarrow \int_{-\infty}^{\frac{2\sqrt{3}}{c}}
\end{aligned}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{c} = 0.6745 \Rightarrow c = 5.1358.$$

Ответ:  $c = 5.1358$ .

**Задача 19.** Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  - независимые одинаково распределенные случайные величины с  $\mathbb{E}\xi_1 = 0$ ,  $D\xi_1 = \sigma^2$ ;  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ .

При каком значении параметра  $\sigma \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n}{\sqrt{n}} > 1 \right\} \right) = \frac{1}{3}$ ?

Ответ:  $\sigma \approx 2.32$ .

**Задача 20\*.** Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  - независимые одинаково распределенные случайные величины с  $\mathbb{E}\xi_1 = 0$ ,  $D\xi_1 = 1$ ;  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ .

Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\{S_n \leq 1\})$ .

**Решение.**  $\mathbb{E}S_n = 0$ ,  $DS_n = n$ .

$$\mathbb{P}(\{S_n \leq 1\}) = \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq \frac{1 - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \right\} \right) = \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} \right).$$

Покажем, что  $\mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} \right) \rightarrow \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{y^2}{2} \right) dy$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Поскольку последовательность  $\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такой номер  $N \in \mathbb{N}$ , что для всех номеров  $n \geq N$  выполнено неравенство  $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \varepsilon$ .

Значит, для любого  $n \geq N$  выполнено следующее вложение

$$\left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq 0 \right\} \subseteq \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} \subseteq \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq \varepsilon \right\}.$$

Следовательно,

$$\mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq 0 \right\} \right) \leq \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} \right) \leq \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq \varepsilon \right\} \right).$$

По центральной предельной теореме  $\mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq 0 \right\} \right) \rightarrow \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{y^2}{2} \right) dy$  и  $\mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq \varepsilon \right\} \right) \rightarrow \int_{-\infty}^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{y^2}{2} \right) dy$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{y^2}{2} \right) dy &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} \right) \leq \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} \right) \leq \int_{-\infty}^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{y^2}{2} \right) dy. \end{aligned}$$

Поскольку  $\varepsilon > 0$  - произвольное число, то можно перейти в последнем неравенстве к пределу при  $\varepsilon \rightarrow +0$ .

Следовательно,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} \right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} \right) =$$

$$\begin{aligned} \text{Значит, существует предел } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} \right) = \\ \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{y^2}{2} \right) dy = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\{S_n \leq 1\}) = \frac{1}{2}.$$

**Задача 21\*.** Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  - независимые одинаково распределенные случайные величины с  $\mathbb{E}\xi_1 = 0$ ,  $D\xi_1 = 1$ ;  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ .

Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\{S_n \leq -1\})$ .

$$\text{Ответ: } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\{S_n \leq -1\}) = \frac{1}{2}.$$

**Задача 22\*.** Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  - независимые одинаково распределенные случайные величины с  $\mathbb{E}\xi_1 = \mu$ ,  $D\xi_1 = \sigma^2$ ;

$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ . Пусть  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  - сходящаяся числовая последовательность,  $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq a_n \right\} \right)$ .

**Решение.** Покажем, что  $\mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq a_n \right\} \right) \rightarrow \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{y^2}{2} \right) dy$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Поскольку последовательность  $a_n \rightarrow a$  при  $n \rightarrow \infty$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такой номер  $N \in \mathbb{N}$ , что для всех номеров  $n \geq N$  выполнено неравенство  $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ .

Значит, для любого  $n \geq N$  выполнено следующее вложение

$$\left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq a - \varepsilon \right\} \subseteq \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq a_n \right\} \subseteq \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq a + \varepsilon \right\}.$$

Следовательно,

$$\mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq a - \varepsilon \right\} \right) \leq \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq a_n \right\} \right) \leq \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq a + \varepsilon \right\} \right)$$

По центральной предельной теореме  $\mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq a - \varepsilon \right\} \right) \rightarrow \int_{-\infty}^{a-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{y^2}{2} \right) dy$  и  $\mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq a + \varepsilon \right\} \right) \rightarrow \int_{-\infty}^{a+\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{y^2}{2} \right) dy$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{a-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{y^2}{2} \right) dy \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq a_n \right\} \right) \leq$$

$$\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq a_n \right\} \right) \leq \int_{-\infty}^{a+\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{y^2}{2} \right) dy.$$

Поскольку  $\varepsilon > 0$  - произвольное число, то можно перейти в последнем неравенстве к пределу при  $\varepsilon \rightarrow +0$ .

Следовательно,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq a_n \right\} \right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq a_n \right\} \right) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{y^2}{2} \right) dy.$$

Значит, существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq a_n \right\} \right) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{y^2}{2} \right) dy$ .

Ответ:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq a_n \right\} \right) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{y^2}{2} \right) dy$ .

**Задача 23\*.** Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  - независимые одинаково распределенные случайные величины с  $\mathbb{E}\xi_1 = 0$ ,  $D\xi_1 = 1$ ;  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ .

Найдите следующие пределы

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n}{n} \leq 1 \right\} \right);$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n}{n} \leq 0 \right\} \right);$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n}{n} \leq -1 \right\} \right)$

**Решение.**

$$\begin{aligned} 1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n}{n} \leq 1 \right\} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \{S_n \leq n\} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq \frac{n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \right\} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq \frac{n - 0}{\sqrt{n}} \right\} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq \sqrt{n} \right\} \right) \end{aligned}$$

Покажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq \sqrt{n} \right\} \right) \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{y^2}{2} \right) dy$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Поскольку последовательность  $\sqrt{n} \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , то для любого  $A > 0$  найдется такой номер  $N \in \mathbb{N}$ , что для всех номеров  $n \geq N$  выполнено неравенство  $\sqrt{n} \geq A$ .

Значит, для любого  $n \geq N$  выполнено следующее вложение

$$\left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq A \right\} \subseteq \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq \sqrt{n} \right\}.$$

Следовательно,

$$\mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq A \right\} \right) \leq \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq \sqrt{n} \right\} \right).$$

По центральной предельной теореме  $\mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq A \right\} \right) \rightarrow \int_{-\infty}^A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{y^2}{2} \right) dy$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{y^2}{2} \right) dy \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq \sqrt{n} \right\} \right).$$

Поскольку  $A > 0$  - произвольное число, то можно перейти в последнем неравенстве к пределу при  $A \rightarrow +\infty$ .

Следовательно,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq \sqrt{n} \right\} \right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq \sqrt{n} \right\} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{y^2}{2} \right) dy = 1.$$

Значит, существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leq \sqrt{n} \right\} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{y^2}{2} \right) dy = 1$ .

Ответы:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n}{n} \leq 1 \right\} \right) = 1.$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n}{n} \leq 0 \right\} \right) = \frac{1}{2}.$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{S_n}{n} \leq -1 \right\} \right) = 0.$

**Задача 24\*.** Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечной положительной дисперсией. Какие значения могут принимать пределы  $(x, a, b \in \mathbb{R})$ :

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} (\{\xi_1 + \dots + \xi_n \leq x\});$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} (\{a \leq \xi_1 + \dots + \xi_n \leq b\})?$

1. *Ответ:*  $0, \frac{1}{2}, 1.$
2. *Ответ:*  $0.$

**Задача 25\*\*.** Случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots$  независимы и принимают с равными вероятностями значения 1, 2 и 4. Пусть  $\eta_n = \sqrt[n]{\xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_n}$  - среднее геометрическое первых  $n$  случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots$ . Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\{ \eta_n \leq 2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} \right).$

**Решение.**

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \left\{ \eta_n \leq 2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} \right) &= \mathbb{P} \left( \left\{ \log_2 \eta_n \leq \log_2 \left( 2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right\} \right) = \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log_2 \xi_i \leq \log_2 \left( 2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right\} \right) \\ &= \mathbb{P} \left( \left\{ \sum_{i=1}^n \log_2 \xi_i \leq n \log_2 \left( 2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right\} \right) = \mathbb{P} \left( \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n \log_2 \xi_i - \mathbb{E} \sum_{i=1}^n \log_2 \xi_i}{\sqrt{D \sum_{i=1}^n \log_2^2 \xi_i}} \leq \frac{n \log_2 \left( 2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \mathbb{E} \sum_{i=1}^n \log_2 \xi_i}{\sqrt{D \sum_{i=1}^n \log_2^2 \xi_i}} \right\} \right) \end{aligned}$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log_2 \left(2 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - n}{\sqrt{\frac{2}{3}n}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n} \log_2 \left(2 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sqrt{n}\right) = \{\sqrt{n} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \log_2 \left(2 + \frac{1}{x}\right) - x\right) = \sqrt{\frac{3}{2}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 \left(2 + \frac{1}{x}\right) - 1}{\frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \lim_{x \rightarrow +\infty}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{2 + \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2 \ln 2}.$$

Итак,  $\frac{n \log_2 \left(2 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - n}{\sqrt{\frac{2}{3}n}} \rightarrow \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2 \ln 2}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Из задачи № 22 следует, что

$$\mathbb{P} \left( \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n \log_2 \xi_i - \mathbb{E} \sum_{i=1}^n \log_2 \xi_i}{\sqrt{D \sum_{i=1}^n \log_2 \xi_i}} \leq \frac{n \log_2 \left(2 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - n}{\sqrt{\frac{2}{3}n}} \right\} \right) \rightarrow \int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2 \ln 2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

$$\int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2 \ln 2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{y^2}{2} \right) dy \approx 0.8115.$$

Ответ:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\{ \eta_n \leq 2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} \right) \approx 0.8115.$

Листок 8 по ТВ и МС 2013–2014 [08.03.2014]

1

Кафедра математической экономики и эконометрики  
НИУ ВШЭ. Борzych Д. А.

Листок 8

Абсолютно непрерывные случайные векторы

**Определение 1.** *Функцией распределения случайного вектора  $(X, Y)$  называется такая функция  $F_{X,Y} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$ , что*

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}).$$

**Утверждение 1.** Пусть  $F_{X,Y}$  – функция распределения случайного вектора  $(X, Y)$ . Тогда  $F_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F_{X,Y}(x, y)$  и  $F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_{X,Y}(x, y)$ .

**Определение 2.** Случайный вектор  $(X, Y)$  называется *абсолютно непрерывным*, если существует такая неотрицательная интегрируемая функция  $f_{X,Y} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , что

$$\mathbb{P}(\{(X, Y) \in B\}) = \iint_B f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

для любого множества  $B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , для которого вероятность  $\mathbb{P}(\{(X, Y) \in B\})$  определена. При этом функция  $f_{X,Y}$  называется *плотностью распределения случайного вектора  $(X, Y)$* .

**Замечание 1.** Если в определении 2 в качестве множества  $B$  взять  $(-\infty; x] \times (-\infty; y]$ , то

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}) = \mathbb{P}(\{(X, Y) \in (-\infty; x] \times (-\infty; y]\})$$

$$= \iint_{(-\infty; x] \times (-\infty; y]} f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(x, y) dx dy.$$

**Утверждение 2.** Пусть  $C \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  – множество, на котором плотность  $f_{X,Y}$  непрерывна. Тогда на множестве  $C$  имеет место равенство

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y).$$

**Утверждение 3.** Пусть случайный вектор  $(X, Y)$  является абсолютно непрерывным. Тогда  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)dy$  и  $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)dx$ .

**Утверждение 4.** Пусть случайный вектор  $(X, Y)$  является абсолютно непрерывным. Тогда если интеграл  $\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} |h(x, y)| f_{X,Y}(x, y) dx dy$  сходится, то

1. (a)  $\mathbb{E}h(X, Y)$  существует,
- (b)  $\mathbb{E}h(X, Y) = \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} h(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy$ .

**Определение 3.** Пусть  $f_{X,Y}(x, y)$  — плотность случайного вектора  $(X, Y)$  и  $f_Y(y)$  — плотность случайной величины  $Y$ . Тогда *условной плотностью распределения случайной величины  $X$  при условии  $\{Y = y\}$*  называется

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, & 5A; 8 \quad f_Y(y) \neq 0, \\ 0, & 5A; 8 \quad f_Y(y) = 0. \end{cases}$$

**Определение 4.** Пусть случайный вектор  $(X, Y)$  является абсолютно непрерывным. Тогда *условным математическим ожиданием случайной величины  $X$  при условии  $\{Y = y\}$*  называется

$$\mathbb{E}[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx.$$

**Определение 5.** Случайные величины  $X$  и  $Y$  называются *независимыми*, если

$$\mathbb{P}(\{X \in B_1\} \cap \{Y \in B_2\}) = \mathbb{P}(\{X \in B_1\}) \cdot \mathbb{P}(\{Y \in B_2\})$$

для любых множеств  $B_1, B_2 \subseteq \mathbb{R}$ , для которых вероятности  $\mathbb{P}(\{X \in B_1\})$  и  $\mathbb{P}(\{Y \in B_2\})$  определены.

**Утверждение 5 (критерий независимости).** (i) Случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы тогда и только тогда, когда

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

для любых  $x, y \in \mathbb{R}$ .

(ii) Если случайный вектор  $(X, Y)$  является абсолютно непрерывным, то случайные величины независимы в том и только в том случае, когда

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

для любых  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Определение 6.** Случайный вектор  $(X, Y)$  имеет *равномерное распределение на множестве*  $B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , пишут  $(X, Y) \sim U(B)$ , если

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\mu(B)}, & 5A; 8 \ (x, y) \in B, \\ 0, & 5A; 8 \ (x, y) \notin B. \end{cases}$$

Здесь  $\mu(B)$  — площадь множества  $B$ .

**Определение 7.** Случайный вектор  $(X, Y)$  имеет *нормальное распределение с параметрами*  $\mu$  и  $\Sigma$ , пишут  $(X, Y) \sim N(\mu, \Sigma)$ , если

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho}{\sigma_1\sigma_2}(x-\mu_1)(y-\mu_2) + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right)$$

где  $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$  — произвольный вектор и  $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$  — положительно определенная матрица.

**Задача 1.** Пусть плотность распределения случайного вектора  $(X, Y)$  имеет вид  $f_{X,Y}(x, y) = ce^{-4x^2-6xy-9y^2}$ . Найдите

1.  $c$ ,
2.  $f_X(x)$ ,  $f_Y(y)$ ,
3.  $\mathbb{E}X$ ,  $\mathbb{E}Y$ ,
4.  $\mathbb{E}[X^2]$ ,  $\mathbb{E}[Y^2]$ ,  $\mathbb{E}[XY]$ ,
5.  $D[X]$ ,  $D[Y]$ ,  $cov(X, Y)$ ,  $corr(X, Y)$ ,
6.  $f_{X|Y}(x|y)$ ,  $f_{Y|X}(y|x)$ ,
7.  $\mathbb{E}[X|Y = y]$ ,  $\mathbb{E}[Y|X = x]$ .
8. Являются ли случайные величины  $X$  и  $Y$  независимыми?
9. Являются ли случайные величины  $X$  и  $Y$  некоррелированными?

Ответы:

1.  $c = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ ,
2.  $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi/3}}e^{-3x^2}$ , т.е.  $X \sim N(0, \frac{1}{6})$ , и  $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi/27}}e^{-27y^2/4}$ , т.е.  $Y \sim N(0, \frac{2}{27})$ ,
3.  $\mathbb{E}X = 0$ ,  $\mathbb{E}Y = 0$ ,
4.  $\mathbb{E}[X^2] = 1/6$ ,  $\mathbb{E}[Y^2] = 2/27$ ,  $\mathbb{E}[XY] = -1/18$ ,
5.  $D[X] = 1/6$ ,  $D[Y] = 2/27$ ,  $cov(X, Y) = -1/18$ ,  $corr(X, Y) = -\frac{1}{2}$ ,
6.  $f_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \frac{1}{8}}}e^{-\frac{(x + \frac{3}{4}y)^2}{2 \cdot \frac{1}{8}}}$ , т.е.  $X|\{Y = y\} \sim N(-\frac{3}{4}y, \frac{1}{8})$ .

**Задача 2.** Пусть плотность распределения случайного вектора  $(X, Y)$  имеет вид  $f_{X,Y}(x, y) = ce^{-\frac{1}{2}(x^2+2y^2-xy-3x-2y+4)}$ . Найдите

1.  $c$ ,
2.  $f_X(x)$ ,  $f_Y(y)$ ,
3.  $\mathbb{E}X$ ,  $\mathbb{E}Y$ ,
4.  $\mathbb{E}[X^2]$ ,  $\mathbb{E}[Y^2]$ ,  $\mathbb{E}[XY]$ ,
5.  $D[X]$ ,  $D[Y]$ ,  $cov(X, Y)$ ,  $corr(X, Y)$ ,
6.  $f_{X|Y}(x|y)$ ,  $f_{Y|X}(y|x)$ ,
7.  $\mathbb{E}[X|Y = y]$ ,  $\mathbb{E}[Y|X = x]$ .
8. Являются ли случайные величины  $X$  и  $Y$  независимыми?
9. Являются ли случайные величины  $X$  и  $Y$  некоррелированными?

**Задача 3.** Найдите плотность нормального случайного вектора  $(X, Y)$ , который имеет

1.  $\mathbb{E}X = 0$ ,  $\mathbb{E}Y = 0$ ,  $D[X] = 1$ ,  $D[Y] = 2$ ,  $cov(X, Y) = -1$ ,
2.  $\mathbb{E}X = 1$ ,  $\mathbb{E}Y = -1$ ,  $D[X] = 2$ ,  $D[Y] = 4$ ,  $cov(X, Y) = 1$ .

**Задача 4.** Пусть плотность распределения случайного вектора  $(X, Y)$  имеет вид

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2} & \text{если } (x, y) \in B, \\ 0 & \text{если } (x, y) \notin B, \end{cases}$$

где  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ ,  $R > 0$ . Найдите

1.  $\mathbb{P}(\{(X, Y) \in C\})$ , где  $C = [0; R/\sqrt{2}] \times [0; R/\sqrt{2}]$ ,
2.  $\mathbb{P}(\{(X, Y) \in C\})$ , где  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ ,
3.  $f_X(x), f_Y(y)$ ,
4.  $\mathbb{E}X, \mathbb{E}Y$ ,
5.  $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2], \mathbb{E}[XY]$ ,
6.  $D[X], D[Y], cov(X, Y), corr(X, Y)$ ,
7.  $f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x)$ ,
8.  $\mathbb{E}[X|Y = y], \mathbb{E}[Y|X = x]$ .
9. Являются ли случайные величины  $X$  и  $Y$  независимыми?
10. Являются ли случайные величины  $X$  и  $Y$  некоррелированными?

**Решение.** (а)  $\mathbb{P}(\{(X, Y) \in C\}) = \iint_C f_{X,Y}(x, y) dx dy = \iint_C \frac{1}{\pi R^2} \mathbb{I}_B(x, y) dx dy = \iint_{C \cap B} \frac{1}{\pi R^2} dx dy = \frac{1}{\pi R^2} \mu(C \cap B) = \frac{1}{\pi R^2} \mu(C) = \frac{1}{\pi R^2} \frac{R}{\sqrt{2}} \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\pi}$ . Здесь  $\mu(C)$  — площадь множества  $C$ .

(б)  $\mathbb{P}(\{(X, Y) \in C\}) = \iint_C f_{X,Y}(x, y) dx dy = \iint_C \frac{1}{\pi R^2} \mathbb{I}_B(x, y) dx dy = \iint_{C \cap B} \frac{1}{\pi R^2} dx dy =$

$$= \iint_C \frac{1}{\pi R^2} dx dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^R \frac{1}{\pi R^2} \rho d\varphi d\rho = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{\pi/2} \left[ \int_0^R \rho d\rho \right] d\varphi = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{\pi/2} \frac{R^2}{2} d\varphi = \frac{1}{2\pi}$$

$$(c) f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi R^2} \mathbb{I}_B(x, y) dy =$$

$$= \begin{cases} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{\pi R^2} dy & \text{?@8 } x \in [-R; R], \\ 0 & \text{?@8 } x \notin [-R; R], \end{cases} = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2} & \text{?@8 } x \in [-R; R], \\ 0 & \text{?@8 } x \notin [-R; R]. \end{cases}$$

Аналогично получаем, что

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi R} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2} & \text{?@8 } y \in [-R; R], \\ 0 & \text{?@8 } y \notin [-R; R]. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{(d) } \mathbb{E}[X] &= \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} x f_{X,Y}(x, y) dx dy = \iint_B x \frac{1}{\pi R^2} dx dy = \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho \cos \varphi \cdot \rho d\rho d\varphi = \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \rho^2 d\rho \cdot \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0. \end{aligned}$$

Аналогично получаем  $\mathbb{E}[Y] = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{(e) } \mathbb{E}[X^2] &= \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} x^2 f_{X,Y}(x, y) dx dy = \iint_B x^2 \frac{1}{\pi R^2} dx dy = \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho^2 \cos^2 \varphi \cdot \rho d\rho d\varphi = \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \rho^3 d\rho \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{\pi R^2} \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_{\rho=0}^{\rho=R} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{1}{\pi R^2} \cdot \frac{R^4}{4} \cdot \pi = \frac{R^2}{4}. \end{aligned}$$

Аналогично получаем  $\mathbb{E}[Y^2] = \frac{R^2}{4}$ . Далее,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XY] &= \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} xy f_{X,Y}(x, y) dx dy = \iint_B xy \frac{1}{\pi R^2} dx dy = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi d\rho = \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \rho^3 d\rho \cdot \int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{\pi R^2} \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_{\rho=0}^{\rho=R} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\sin 2\varphi) d\varphi = \frac{1}{\pi R^2} \cdot \frac{R^4}{4} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{(f)} \quad D[X] &= \mathbb{E}[X^2] - [\mathbb{E}X]^2 = \frac{R^2}{4}, \quad D[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - [\mathbb{E}Y]^2 = \frac{R^2}{4}, \\ \text{cov}(X, Y) &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0, \quad \text{corr}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(g)} \quad f_{X|Y}(x|y) &= \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, & 5A; 8 \quad f_Y(y) \neq 0, \\ 0, & 5A; 8 \quad f_Y(y) = 0, \end{cases} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{\pi R^2}}{\frac{2}{\pi R} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2}}, & 5A; 8 \\ 0, & 5A; 8 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{R^2 - y^2}}, & 5A; 8 \quad (x, y) \in B, \\ 0, & 5A; 8 \quad (x, y) \in B. \end{cases} \end{aligned}$$

Аналогично получаем, что

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}, & 5A; 8 \quad f_X(x) \neq 0, \\ 0, & 5A; 8 \quad f_X(x) = 0, \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2}}, & 5A; 8 \quad (x, y) \in B, \\ 0, & 5A; 8 \quad (x, y) \in B. \end{cases}$$

Листок 9 по ТВ и МС 2013–2014 [08.03.2014]

1

Кафедра математической экономики и эконометрики  
НИУ ВШЭ. Борзых Д. А.

Листок 9

Основные способы получения точечных оценок

## 1. Метод моментов

**Задача 1.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  – случайная выборка из равномерного распределения на отрезке  $[0; \theta]$ ,  $\theta > 0$ . При помощи метода моментов найдите оценку для неизвестного параметра  $\theta$ .

**Ответ:**  $\hat{\theta}_{MM} = 2\bar{X}$ .

**Задача 2.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  – случайная выборка из равномерного распределения на отрезке  $[-\theta; \theta]$ ,  $\theta > 0$ . При помощи метода моментов найдите оценку для неизвестного параметра  $\theta$ . Для решения используйте центральный момент 2-го порядка.

**Ответ:**  $\hat{\theta}_{MM} = \sqrt{\frac{3}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2}$ .

**Задача 3.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  – случайная выборка из равномерного распределения на отрезке  $[\theta_1, \theta_2]$ , где  $\theta_1 < \theta_2$ . Найдите оценки неизвестных параметров  $\theta_1$  и  $\theta_2$  по первым двум моментам.

**Задача 4.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  – случайная выборка из распределения с функцией распределения  $F(x; \theta) = 1 - e^{-\frac{x^2}{\theta}}$ ,  $x \geq 0$ ,  $\theta > 0$ . При помощи метода моментов найдите оценку неизвестного параметра  $\theta$ .

**Решение.** Плотность распределения компонент случайной выборки имеет вид

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta} \cdot e^{-\frac{x^2}{\theta}} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mu_1 = \mathbb{E}X_j^1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x; \theta) dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx = \\ &= - \int_0^{+\infty} x d e^{-\frac{x^2}{\theta}} = - \left[ x e^{-\frac{x^2}{\theta}} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx \right] = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx \end{aligned}$$

Поясним последнее равенство  $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx = \frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}$ . Известно, что для любого  $\sigma^2 > 0$   $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{\sqrt{2\pi\sigma^2}}{2}$ . Положим  $2\sigma^2 = \theta$ . Следовательно,  $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx = \frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}$ .

Для нахождения оценки неизвестного параметра  $\theta$  по методу моментов составляем моментное тождество

$$\mu_1 = \hat{\mu}_1,$$

из которого получаем уравнение

$$\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2} = \overline{X}.$$

Таким образом, имеем  $\hat{\theta}_{MM} = \frac{4}{\pi} (\overline{X})^2$ .

**Ответ:**  $\hat{\theta}_{MM} = \frac{4}{\pi} (\overline{X})^2$ .

**Задача 5.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  – случайная выборка из распределения с плотностью распределения  $f(x; \theta) = \begin{cases} \theta \cdot x^{\theta-1}, & x \in (0; 1] \\ 0, & x \notin (0; 1] \end{cases}$ ,  $\theta > 0$ . Найдите при помощи метода моментов оценку неизвестного параметра  $\theta$ .

**Задача 6.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  – случайная выборка из распределения Рэлея с плотностью распределения

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{x}{\theta} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\theta}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \theta > 0.$$

1. Найдите при помощи метода моментов оценку неизвестного параметра  $\theta$  по первому начальному моменту.
2. Найдите при помощи метода моментов оценку неизвестного параметра  $\theta$  по второму начальному моменту.
3. Найдите при помощи метода моментов оценку неизвестного параметра  $\theta$  по третьему начальному моменту.

**Задача 7.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  – случайная выборка из логнормального распределения с плотностью распределения  $f(x; a) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}\right\}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ , где  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^2 > 0$ . Найдите при помощи метода моментов оценки неизвестных параметров  $a$  и  $\sigma^2$ .

**Задача 8.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  – случайная выборка из распределения с плотностью распределения  $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \cdot x^{(-1+\frac{1}{\theta})}, & x \in (0; 1) \\ 0, & x \notin (0; 1) \end{cases}$ ,  $\theta > 0$ . Постройте оценку параметра  $\theta$  методом моментов.

**Ответ:**  $\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{X}} - 1$ .

**Задача 9.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  – случайная выборка. Случайные величины  $X_1, \dots, X_n$  имеют дискретное распределение, которое задано при помощи таблицы

$X_i$	-3	0	2
$\mathbb{P}_{X_i}$	$2/3 - \theta$	$1/3$	$\theta$

При помощи метода моментов найдите оценку для неизвестного параметра  $\theta$ .

**Задача 10.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  – случайная выборка. Случайные величины  $X_1, \dots, X_n$  имеют дискретное распределение, которое задано при помощи таблицы

$X_i$	-4	0	3
$\mathbb{P}_{X_i}$	$3/4 - \theta$	$1/4$	$\theta$

При помощи метода моментов найдите оценку для неизвестного параметра  $\theta$ .

## 1. Метод максимального правдоподобия

**Задача 11.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  – случайная выборка из равномерного распределения на отрезке  $[0; \theta]$ , где  $\theta > 0$ . Найти при помощи метода максимального правдоподобия оценку неизвестного параметра  $\theta$ .

**Ответ:**  $\hat{\theta} = \max_{1 \leq j \leq n} \{X_j\}$ .

**Задача 12.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  – случайная выборка из показательного распределения с плотностью распределения  $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ , где  $\theta > 0$ . Постройте оценку параметра  $\theta$  методом максимального правдоподобия.

**Ответ:**  $\hat{\theta} = \bar{X}$ .

**Задача 13.** Найдите методом максимального правдоподобия по случайной выборке  $X = (X_1, \dots, X_n)$  точечную оценку геометрического распределения  $P(\{X_j = x_j\}) = p \cdot (1 - p)^{x_j - 1}$ , где  $x_j$  - число испытаний до появления “успеха”;  $p$  - вероятность появления “успеха” в одном испытании.

**Ответ:**  $\hat{p} = \frac{1}{\bar{X}}$ .

**Задача 14.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  - случайная выборка из нормального распределения  $N(\theta, 2\theta)$ . Постройте оценку параметра  $\theta$  методом максимального правдоподобия. Проверьте, является ли построенная оценка состоятельной.

**Задача 15.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  - случайная выборка из равномерного распределения с плотностью распределения  $f(x; \theta) = \begin{cases} 1, & x \in [\theta - \frac{1}{2}; \theta + \frac{1}{2}] \\ 0, & x \notin [\theta - \frac{1}{2}; \theta + \frac{1}{2}] \end{cases}$ , где  $\theta \in \mathbb{R}$ . Постройте оценку параметра  $\theta$  методом максимального правдоподобия.

**Задача 16\*.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  - случайная выборка из распределения с плотностью распределения  $f(x; \theta) = \frac{1}{2} \cdot e^{-|x - \theta|}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ . Постройте оценку параметра  $\theta$  методом максимального правдоподобия. Покажите, что эта оценка совпадает с выборочной медианой.

**Ответ:** если  $n = 2k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , то  $\hat{\theta} \in [X_{(k)}; X_{(k+1)}]$ , если  $n = 2k + 1$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , то  $\hat{\theta} = X_{(k+1)}$ .

**Задача 17.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  - случайная выборка из распределения с плотностью распределения  $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \cdot x^{(-1 + \frac{1}{\theta})}, & x \in (0; 1) \\ 0, & x \notin (0; 1) \end{cases}$ ,  $\theta > 0$ . Постройте оценку параметра  $\theta$  методом максимального правдоподобия.

**Ответ:**  $\hat{\theta} = -\frac{\sum_{j=1}^n \ln X_j}{n}$ .

**Задача 18.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  - случайная выборка из распределения с функцией распределения  $F(x; \theta) = 1 -$

$e^{-\frac{x^2}{\theta}}$ ,  $x \geq 0$ ,  $\theta > 0$ . При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценку неизвестного параметра  $\theta$ .

**Решение.** Плотность распределения компонент случайной выборки имеет вид

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta} \cdot e^{-\frac{x^2}{\theta}} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Следовательно, функция правдоподобия равна

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{j=1}^n f_{X_j}(x_j; \theta) = \prod_{j=1}^n \frac{2x_j}{\theta} \cdot e^{-\frac{x_j^2}{\theta}} = \frac{\prod_{j=1}^n 2x_j}{\theta^n} \cdot e^{-\frac{\sum_{j=1}^n x_j^2}{\theta}}.$$

Значит, логарифмическая функция правдоподобия имеет вид

$$l(x_1, \dots, x_n; \theta) = \ln \prod_{j=1}^n 2x_j - n \ln \theta - \frac{\sum_{j=1}^n x_j^2}{\theta}.$$

Для нахождения оценки неизвестного параметра  $\theta$  при помощи метода максимального правдоподобия составляем уравнение правдоподобия

$$\frac{dl}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{j=1}^n x_j^2}{\theta^2} = 0,$$

решая которое, получаем

$$\hat{\theta}_{ML} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2.$$

**Ответ:**  $\hat{\theta} = \frac{\sum_{j=1}^n X_j^2}{n}$ .

**Задача 19.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  – случайная выборка;

$$X_j = \begin{cases} 1, & A \ 25@. \ \theta \\ 2, & A \ 25@. \ 2\theta \\ 3, & A \ 25@. \ (1 - 3\theta) \end{cases}, \text{ где } j = \overline{1, n}; \ 0 < \theta < \frac{1}{3}.$$

Построить оценку неизвестного параметра  $\theta$  методом максимального правдоподобия.

**Ответ:**  $\hat{\theta} = \frac{Y_1 + Y_2}{3n}$ , где  $Y_1 = \sum_{j=1}^n 1_{\{X_j=1\}}$  - число “единиц”;  $Y_2 = \sum_{j=1}^n 1_{\{X_j=2\}}$  - число “двоек” в случайной выборке.

**Задача 19.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  - случайная выборка;

$$X_j = \begin{cases} 0, & A \ 25@. \ \theta \\ 1, & A \ 25@. \ \theta \\ 2, & A \ 25@. \ (1 - 2\theta) \end{cases}, \text{ где } j = \overline{1, n}; \ 0 < \theta < \frac{1}{2}.$$

Построить оценку неизвестного параметра  $\theta$  методом максимального правдоподобия.

**Ответ:**  $\hat{\theta} = \frac{1}{2} - \frac{Y_2}{2n}$ , где  $Y_2 = \sum_{j=1}^n 1_{\{X_j=2\}}$  - число “двоек” в случайной выборке.

**Задача 20.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  - случайная выборка;

$$X_j = \begin{cases} -1, & A \ 25@. \ \theta \\ 0, & A \ 25@. \ (1 - 2\theta) \\ 1, & A \ 25@. \ \theta \end{cases}, \text{ где } j = \overline{1, n}; \ 0 < \theta < \frac{1}{2}.$$

Построить оценку неизвестного параметра  $\theta$  методом максимального правдоподобия.

**Ответ:**  $\hat{\theta} = \frac{1}{2} - \frac{Y_0}{2n}$ , где  $Y_0 = \sum_{j=1}^n 1_{\{X_j=0\}}$  - число нулей в случайной выборке.

**Задача 21.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  - случайная выборка. Случайные величины  $X_1, \dots, X_n$  имеют дискретное распределение, которое задано при помощи таблицы

$X_i$	-3	0	2
$\mathbb{P}_{X_i}$	$2/3 - \theta$	$1/3$	$\theta$

При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценку для неизвестного параметра  $\theta$ .

**Задача 22.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  - случайная выборка. Случайные величины  $X_1, \dots, X_n$  имеют дискретное распределение, которое задано при помощи таблицы

$X_i$	-4	0	3
$\mathbb{P}_{X_i}$	$3/4 - \theta$	$1/4$	$\theta$

При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценку для неизвестного параметра  $\theta$ .

**Задача 23.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  – случайная выборка из распределения Вейбулла с плотностью распределения

$$f(x; \lambda) = \begin{cases} \frac{2x}{\lambda^2} \exp\left(-\frac{x^2}{\lambda^2}\right) & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

где  $\lambda > 0$  – неизвестный параметр распределения.

При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценку для неизвестного параметра  $\lambda$ .

**Решение.**

$$L(x_1, \dots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i; \lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{2x_i}{\lambda^2} \exp\left(-\frac{x_i^2}{\lambda^2}\right) = \frac{2 \prod_{i=1}^n x_i \cdot \lambda^{-2n}}{\lambda^{2n}}$$

$$l(x_1, \dots, x_n; \lambda) = \ln L(x_1, \dots, x_n; \lambda) = \ln \left( 2 \prod_{i=1}^n x_i \right) - 2n \ln \lambda - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\lambda^2}.$$

$$\frac{dl(x_1, \dots, x_n; \lambda)}{d\lambda} = -\frac{2n}{\lambda} + 2 \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\lambda^3} = 0.$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}.$$

**Ответ:**  $\hat{\lambda} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}.$

Пособие по методу моментов и методу максимального правдоподобия [08.03.2014]



Кафедра математической экономики и эконометрики  
НИУ ВШЭ. Борзых Д. А.

## 1. Метод моментов

**Задача 1.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  – случайная выборка из показательного (экспоненциального) распределения с плотностью распределения  $f(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ , где  $\lambda > 0$ . При помощи метода моментов найдите оценку для неизвестного параметра  $\lambda$ .

**Решение.** Для нахождения неизвестного параметра  $\lambda$  при помощи метода моментов составим моментное тождество

$$\mu_1 = \hat{\mu}_1,$$

где  $\mu_1 = \mathbb{E}X_j^1$  – теоретический начальный момент 1-го порядка,  $\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^1 = \bar{X}$  – выборочный начальный момент 1-го порядка.

Найдем  $\mu_1$ .

$$\begin{aligned} \mu_1 = \mathbb{E}X_j^1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{X_j}(x) dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \\ &= - \int_0^{+\infty} x de^{-\lambda x} = - \left[ x e^{-\lambda x} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \right] = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = - \end{aligned}$$

В результате мы получаем уравнение

$$\frac{1}{\lambda} = \bar{X}.$$

Решая это уравнение, мы приходим к следующей оценке для неизвестного параметра  $\lambda$ .

$$\hat{\lambda}_{MM} = \frac{1}{\bar{X}}.$$

**Ответ:**  $\hat{\lambda}_{MM} = \frac{1}{\bar{X}}.$

**Задача 2.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  – случайная выборка из нормального распределения с плотностью распределения  $f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ , где  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^2 > 0$ .

При помощи метода моментов найдите оценки для неизвестных параметров  $\mu$  и  $\sigma^2$ .

**Решение.** Для нахождения неизвестных параметров  $\mu$  и  $\sigma^2$  методом моментов составим два моментных тождества

$$\mu_1 = \hat{\mu}_1,$$

$$\mu_2 = \hat{\mu}_2,$$

где  $\mu_1 = \mathbb{E}X_j^1$  и  $\mu_2 = \mathbb{E}(X_j^2)$  – теоретические начальные моменты 1-го и 2-го порядка соответственно,  $\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^1 = \bar{X}$  и  $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2 = \bar{X^2}$  – выборочные начальные моменты 1-го и 2-го порядка соответственно.

Известно, что если случайная величина  $X_j \sim N(\mu, \sigma^2)$ , то  $\mathbb{E}X_j = \mu$  и  $DX_j = \sigma^2$ . Тогда учитывая, что  $\mathbb{E}(X_j^2) = DX_j + (\mathbb{E}X_j)^2$ , получаем, что  $\mu_1 = \mu$  и  $\mu_2 = \sigma^2 + \mu^2$ .

Получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \mu = \bar{X}, \\ \sigma^2 + \mu^2 = \bar{X^2}, \end{cases}$$

из которой следует, что  $\hat{\mu}_{MM} = \bar{X}$  и  $\hat{\sigma}_{MM}^2 = \bar{X^2} - (\bar{X})^2$ .

**Ответ:**  $\hat{\mu}_{MM} = \bar{X}$  и  $\hat{\sigma}_{MM}^2 = \bar{X^2} - (\bar{X})^2$ .

**Замечание.** Непосредственной проверкой можно установить, что  $\bar{X^2} - (\bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2$ .

**Задача 3.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  – случайная выборка из распределения Бернулли с параметром  $p \in (0; 1)$ . При помощи метода моментов найдите оценку для неизвестного параметра  $p$ .

**Решение.** Для нахождения неизвестного параметра  $p$  при помощи метода моментов составим моментное тождество

$$\mu_1 = \hat{\mu}_1,$$

где  $\mu_1 = \mathbb{E}X_j^1$  – теоретический начальный момент 1-го порядка,  $\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^1 = \bar{X}$  – выборочный начальный момент 1-го порядка.

Известно, что если  $X_j \sim Be(p)$ , то  $\mathbb{E}X_j = p$ . Следовательно, мы получаем уравнение

$$p = \bar{X}.$$

Значит,  $\hat{p}_{MM} = \bar{X}$ .

**Ответ:**  $\hat{p}_{MM} = \bar{X}$ .

**Задача 4.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  – случайная выборка из распределения Пуассона с параметром  $\lambda$ . При помощи метода моментов найдите оценку для неизвестного параметра  $\lambda$ .

**Решение.** Для нахождения неизвестного параметра  $\lambda$  при помощи метода моментов составим моментное тождество

$$\mu_1 = \hat{\mu}_1,$$

где  $\mu_1 = \mathbb{E}X_j^1$  – теоретический начальный момент 1-го порядка,  $\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^1 = \bar{X}$  – выборочный начальный момент 1-го порядка.

Известно, что если  $X_j \sim Pois(\lambda)$ , то  $\mathbb{E}X_j = \lambda$ . Следовательно, мы получаем уравнение

$$\lambda = \bar{X}.$$

Значит,  $\hat{\lambda}_{MM} = \bar{X}$ .

**Ответ:**  $\hat{\lambda}_{MM} = \bar{X}$ .

**Задача 5.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  – случайная выборка. Случайные величины  $X_1, \dots, X_n$  имеют дискретное распределение, которое задано при помощи таблицы

$a_k$	-2	0	1
$\mathbb{P}\{X_j = a_k\}$	$1/2 - \theta$	$1/2$	$\theta$

При помощи метода моментов найдите оценку для неизвестного параметра  $\theta$ .

**Решение.** Для нахождения неизвестного параметра  $\theta$  при помощи метода моментов составим моментное тождество

$$\mu_1 = \hat{\mu}_1,$$

где  $\mu_1 = \mathbb{E}X_j^1 = -2 \cdot (\frac{1}{2} - \theta) + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \theta = -1 + 3\theta$  – теоретический начальный момент 1-го порядка,  $\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^1 = \bar{X}$  – выборочный начальный момент 1-го порядка.

В результате мы получаем уравнение

$$-1 + 3\theta = \bar{X},$$

решая которое, получаем  $\hat{\theta}_{MM} = \frac{1+\bar{X}}{3}$ .

**Ответ:**  $\hat{\theta}_{MM} = \frac{1+\bar{X}}{3}$ .

## 1. Метод максимального правдоподобия

**Задача 6.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  – случайная выборка из показательного (экспоненциального) распределения с плотностью распределения  $f(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ , где  $\lambda > 0$ .

При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценку для неизвестного параметра  $\lambda$ .

**Решение.** Составим функцию правдоподобия.

$$L(x_1, \dots, x_n; \lambda) = \prod_{j=1}^n f_{X_j}(x_j; \lambda) = \prod_{j=1}^n \lambda e^{-\lambda x_j} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{j=1}^n x_j}.$$

Тогда логарифмическая функция правдоподобия имеет вид

$$l(x_1, \dots, x_n; \lambda) = \ln L(x_1, \dots, x_n; \lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{j=1}^n x_j.$$

Для нахождения оценки неизвестного параметра  $\lambda$  методом максимального правдоподобия составляем уравнение правдоподобия.

$$\frac{dl}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{j=1}^n x_j = 0.$$

Следовательно,

$$\lambda = \frac{n}{\sum_{j=1}^n x_j}.$$

Значит,  $\hat{\lambda}_{ML} = \frac{1}{\frac{\sum_{j=1}^n X_j}{n}}.$

**Ответ:**  $\hat{\lambda}_{ML} = \frac{1}{\bar{X}}.$

**Задача 7.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  – случайная выборка из нормального распределения с плотностью распределения  $f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ , где  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^2 > 0$ . При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценки неизвестных параметров  $\mu$  и  $\sigma^2$ .

**Решение.** Составим функцию правдоподобия.

$$L(x_1, \dots, x_n; \mu, \sigma^2) = \prod_{j=1}^n f_{X_j}(x_j; \mu, \sigma^2) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_j - \mu)^2}{2\sigma^2}} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$$

Тогда логарифмическая функция правдоподобия имеет вид

$$l(x_1, \dots, x_n; \mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \mu)^2}{2\sigma^2}.$$

Для нахождения оценок неизвестных параметров  $\mu$  и  $\sigma^2$  составим систему уравнений правдоподобия.

$$\begin{cases} \frac{\partial l}{\partial \mu} = 0, \\ \frac{\partial l}{\partial \sigma^2} = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = \frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \mu)}{\sigma^2} = 0$$

находим, что  $\mu = \frac{\sum_{j=1}^n x_j}{n} = \bar{x}$ .

Из второго уравнения системы

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \mu)^2}{2\sigma^4} = 0$$

получаем, что  $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \mu)^2$ . Подставляя в последнее выражение  $\mu = \frac{\sum_{j=1}^n x_j}{n}$ , приходим к следующей оценке  $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2$ .

**Ответ:**  $\hat{\mu}_{ML} = \bar{X}$ ,  $\hat{\sigma}_{ML}^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2$ .

**Задача 8.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  – случайная выборка из распределения Бернулли с параметром  $p \in (0; 1)$ . При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценку неизвестного параметра  $p$ .

**Решение.** Поскольку  $X_j \sim Be(p)$ , то  $\mathbb{P}(\{X_j = x_j\}) =$

$$\begin{cases} p & \text{если } x_j = 1, \\ 1 - p & \text{если } x_j = 0. \end{cases}$$

Заметим, что вероятность  $\mathbb{P}(\{X_j = x_j\})$  можно записать следующим, более удобным для дальнейших преобразований, способом  $\mathbb{P}(\{X_j = x_j\}) = p^{x_j} (1 - p)^{1-x_j}$ .

Тогда функция правдоподобия может быть записана как

$$L(x_1, \dots, x_n; p) = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}(\{X_j = x_j\}) = \prod_{j=1}^n p^{x_j} (1 - p)^{1-x_j} = p^{\sum_{j=1}^n x_j} (1 - p)^{n - \sum_{j=1}^n x_j}$$

При этом логарифмическая функция правдоподобия имеет вид

$$l(x_1, \dots, x_n; p) = \left( \sum_{j=1}^n x_j \right) \ln p + \left( n - \sum_{j=1}^n x_j \right) \ln (1 - p).$$

Составляем уравнение правдоподобия.

$$\frac{dl}{dp} = \frac{\sum_{j=1}^n x_j}{p} - \frac{n - \sum_{j=1}^n x_j}{1-p} = 0.$$

Решая уравнение правдоподобия, получаем следующую оценку для неизвестного параметра  $p$

$$p = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j = \bar{x}.$$

**Ответ:**  $\hat{p}_{ML} = \bar{X}$ .

**Задача 9.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  – случайная выборка из распределения Пуассона с параметром  $\lambda$ . При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценку неизвестного параметра  $\lambda$ .

**Решение.** Поскольку  $X_j \sim Pois(\lambda)$ , то  $\mathbb{P}(\{X_j = x_j\}) = \frac{\lambda^{x_j}}{x_j!} e^{-\lambda}$ . Запишем функцию правдоподобия.

$$L(x_1, \dots, x_n; \lambda) = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}(\{X_j = x_j\}) = \prod_{j=1}^n \frac{\lambda^{x_j}}{x_j!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{\sum_{j=1}^n x_j}}{\prod_{j=1}^n x_j!} e^{-n\lambda}.$$

Тогда логарифмическая функция правдоподобия имеет вид

$$l(x_1, \dots, x_n; \lambda) = \sum_{j=1}^n x_j \ln \lambda - \ln \left( \prod_{j=1}^n x_j! \right) - n\lambda.$$

Составляем уравнение правдоподобия

$$\frac{dl}{d\lambda} = \frac{\sum_{j=1}^n x_j}{\lambda} - n = 0,$$

из которого получаем, что  $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j = \bar{x}$ .

**Ответ:**  $\hat{\lambda}_{ML} = \bar{X}$ .

**Задача 10.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  – случайная выборка. Случайные величины  $X_1, \dots, X_n$  имеют дискретное распределение, которое задано при помощи таблицы

$a_k$	-2	0	1
$\mathbb{P}\{X_j = a_k\}$	$1/2 - \theta$	$1/2$	$\theta$

При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценку для неизвестного параметра  $\theta$ .

**Решение.** Из таблицы выше следует, что

$$\mathbb{P}(\{X_j = x_j\}) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \theta & \text{если } x_j = -2, \\ \frac{1}{2} & \text{если } x_j = 0, \\ \theta & \text{если } x_j = 1. \end{cases}$$

Заметим, что вероятность  $\mathbb{P}(\{X_j = x_j\})$  можно переписать следующим образом



$$\mathbb{P}(\{X_j = x_j\}) = \left(\frac{1}{2} - \theta\right)^{\mathbb{I}_{\{-2\}}(x_j)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathbb{I}_{\{0\}}(x_j)} \cdot \theta^{\mathbb{I}_{\{1\}}(x_j)}.$$

Тогда функция правдоподобия может быть записана в виде

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}(\{X_j = x_j\}) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} - \theta\right)^{\mathbb{I}_{\{-2\}}(x_j)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathbb{I}_{\{0\}}(x_j)} \cdot \theta^{\mathbb{I}_{\{1\}}(x_j)}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \theta\right)^{\sum_{j=1}^n \mathbb{I}_{\{-2\}}(x_j)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_{j=1}^n \mathbb{I}_{\{0\}}(x_j)} \cdot \theta^{\sum_{j=1}^n \mathbb{I}_{\{1\}}(x_j)}.$$

Логарифмическая функция правдоподобия равна

$$l(x_1, \dots, x_n; \theta) = \left(\sum_{j=1}^n \mathbb{I}_{\{-2\}}(x_j)\right) \ln\left(\frac{1}{2} - \theta\right) + \left(\sum_{j=1}^n \mathbb{I}_{\{0\}}(x_j)\right) \ln \frac{1}{2} + \left(\sum_{j=1}^n \mathbb{I}_{\{1\}}(x_j)\right) \ln \theta$$

Записываем уравнение правдоподобия.

$$\frac{dl}{d\theta} = \frac{\sum_{j=1}^n \mathbb{I}_{\{-2\}}(x_j)}{\theta - \frac{1}{2}} + \frac{\sum_{j=1}^n \mathbb{I}_{\{1\}}(x_j)}{\theta} = 0.$$

Решая уравнение правдоподобия, получаем следующую оценку

$$\theta = \frac{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \mathbb{I}_{\{1\}}(x_j)}{\sum_{j=1}^n \mathbb{I}_{\{-2\}}(x_j) + \sum_{j=1}^n \mathbb{I}_{\{1\}}(x_j)}.$$

**Ответ:**  $\hat{\theta}_{ML} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \mathbb{I}_{\{1\}}(X_j)}{\sum_{j=1}^n \mathbb{I}_{\{-2\}}(X_j) + \sum_{j=1}^n \mathbb{I}_{\{1\}}(X_j)}.$

**Замечание.** Величина  $\sum_{j=1}^n \mathbb{I}_{\{1\}}(x_j)$  означает число элементов реализации случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , которые равны 1. Величина  $\sum_{j=1}^n \mathbb{I}_{\{-2\}}(x_j)$  означает число элемен-

тов реализации случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , которые равны  $-2$ .

Листок 10 по ТВ и МС 2013–2014 [08.03.2014]

1

Кафедра математической экономики и эконометрики  
НИУ ВШЭ. Борzych Д. А.

Листок 10

Несмещенность оценок

**Задача 1.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка,  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Является ли оценки  $\hat{\mu} = \bar{X}$ ,  $\hat{\mu}^2 = \overline{X^2}$  и  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  несмещенными оценками параметров  $\mu$ ,  $\mu^2$  и  $\sigma^2$  соответственно?

**Ответ:** да, нет, нет.

**Задача 2.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из равномерного распределения на отрезке  $[0; \theta]$ ,  $\theta > 0$ . Является ли следующие оценки несмещенными

1.  $\hat{\theta} = 2\bar{X}$ ,

2.  $\hat{\theta} = X_{(n)}$ ?

**Ответ:** (а) да, (б) нет.

**Задача 3.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из равномерного распределения на отрезке  $[\theta; 0]$ ,  $\theta < 0$ . Является ли  $\hat{\theta} = X_{(1)}$  несмещенной оценкой для неизвестного параметра  $\theta$ ?

**Ответ:** нет.

**Задача 4.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка. Случайные величины  $X_1, \dots, X_n$  имеют дискретное распределение, которое задано при помощи таблицы

$X_i$	$-2$	$0$	$1$
$\mathbb{P}_{X_i}$	$1/2 - \theta$	$1/2$	$\theta$

Является ли  $\hat{\theta} = (\bar{X} + 1)/3$  несмещенной оценкой неизвестного параметра  $\theta$ ?

**Ответ:** да.

**Задача 5.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка. Случайные величины  $X_1, \dots, X_n$  имеют дискретное распределение, которое задано при помощи таблицы

$X_i$	-3	0	2
$\mathbb{P}_{X_i}$	$2/3 - \theta$	$1/3$	$\theta$

Является ли  $\hat{\theta} = (\bar{X} + 2)/5$  несмещенной оценкой неизвестного параметра  $\theta$ ?

**Ответ:** да.

**Задача 6.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка. Случайные величины  $X_1, \dots, X_n$  имеют дискретное распределение, которое задано при помощи таблицы

$X_i$	-4	0	3
$\mathbb{P}_{X_i}$	$3/4 - \theta$	$1/4$	$\theta$

Является ли  $\hat{\theta} = (\bar{X} + 3)/6$  несмещенной оценкой неизвестного параметра  $\theta$ ?

**Ответ:** да.

**Задача 7.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из распределения с функцией распределения  $F(x; \theta) =$

$$\begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{\theta}} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

где  $\theta > 0$ . Является ли  $\hat{\theta} = \frac{4}{\pi}(\bar{X})^2$  несмещенной оценкой неизвестного параметра  $\theta$ ?

**Ответ:** нет.

**Задача 8.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из распределения с плотностью  $f(x; \theta) =$

$$\begin{cases} \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

где  $\theta > 0$ . Является ли  $\hat{\theta} = \bar{X}$  несмещенной оценкой неизвестного параметра  $\theta$ ?

**Ответ:** да.

Листок 11 по ТВ и МС 2013–2014 [08.03.2014]

1

Кафедра математической экономики и эконометрики  
НИУ ВШЭ. Борzych Д. А.

Листок 11

Информация Фишера. Неравенство Рао–Крамера. Эффективность оценок

**Определение 1.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка и  $l(X_1, \dots, X_n; \theta) := \ln \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; \theta)$  — логарифмическая функция правдоподобия. Тогда величина  $I_n(\theta) := \mathbb{E}[(\frac{\partial l}{\partial \theta})^2]$  называется *информацией Фишера* о параметре  $\theta$ , содержащейся в  $n$  наблюдениях случайной выборки  $X$ .

**Замечание 1.** Информация Фишера  $I_n(\theta)$  также может быть найдена при помощи формулы:  $I_n(\theta) = -\mathbb{E} \left[ \frac{\partial^2 l}{\partial \theta^2} \right]$ .

**Замечание 2.** Для нахождения информации Фишера удобно использовать соотношение  $I_n(\theta) = n \cdot I_1(\theta)$ .

**Утверждение 1 (неравенство Рао–Крамера).** Пусть  $\hat{\theta}$  — несмещенная оценка параметра  $\theta$ . Тогда имеет место неравенство

$$I_n^{-1}(\theta) \leq D[\hat{\theta}].$$

**Определение 2.** Несмещенная оценка  $\hat{\theta}$  называется *эффективной оценкой* для параметра  $\theta \in \Theta$ , если для неё неравенство Рао–Крамера обращается в равенство, т.е.  $I_n^{-1}(\theta) = D[\hat{\theta}]$ .

**Задача 1.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из распределения Бернулли с параметром  $p \in (0; 1)$ .

1. Найдите  $I_n(p)$ .
2. Является ли оценка  $\hat{p} = \bar{X}$  несмещённой?
3. Является ли оценка  $\hat{p} = \bar{X}$  эффективной?

**Задача 2.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из распределения Пуассона с параметром  $\lambda > 0$ .

1. Найдите  $I_n(\lambda)$ .
2. Является ли оценка  $\hat{\lambda} = \bar{X}$  несмещенной?
3. Является ли оценка  $\hat{\lambda} = \bar{X}$  эффективной?

**Задача 3.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из нормального распределения с параметрами  $\mu \in \mathbb{R}$  и  $\sigma^2 > 0$ , причем параметр  $\sigma^2$  известен.

1. Найдите  $I_n(\mu)$ .
2. Является ли оценка  $\hat{\mu} = \bar{X}$  несмещенной?
3. Является ли оценка  $\hat{\mu} = \bar{X}$  эффективной?

**Задача 4.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из распределения с плотностью

$$f(x; \mu) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} & \text{?@8 } x \geq 0, \\ 0 & \text{?@8 } x < 0, \end{cases}$$

где  $\sigma^2$  — известный положительный параметр.

1. Найдите  $I_n(\mu)$ .
2. Является ли оценка  $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i$  несмещенной?
3. Является ли оценка  $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i$  эффективной?

**Задача 5.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из распределения с плотностью

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & \text{?@8 } x \geq 0, \\ 0 & \text{?@8 } x < 0, \end{cases}$$

где  $\theta > 0$  — неизвестный параметр.

1. Найдите  $I_n(\theta)$ .
2. Является ли оценка  $\hat{\theta} = \bar{X}$  несмещенной?
3. Является ли оценка  $\hat{\theta} = \bar{X}$  эффективной?

**Задача 6.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из биномиального распределения  $Bi(10, p)$ , где  $p \in (0; 1)$ .

1. Найдите  $I_n(p)$ .
2. Является ли оценка  $\hat{p} = \frac{1}{10}\bar{X}$  несмещенной?
3. Является ли оценка  $\hat{p} = \frac{1}{10}\bar{X}$  эффективной?

Листок 12 по ТВ и МС 2013–2014 [08.03.2014]

1

Кафедра математической экономики и эконометрики  
НИУ ВШЭ. Борзых Д. А.

Листок 12

Сходимость по вероятности. Состоятельность оценок.  
Неравенство Чебышева

**Определение 1.** Последовательность случайных величин  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  *сходится по вероятности* к случайной величине  $X$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  имеет место

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\{|X_n - X| > \varepsilon\}) = 0.$$

Для сходимости по вероятности используют обозначение  $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Определение 2.** Оценка  $\hat{\theta}_n$  называется *состоятельной оценкой* неизвестного параметра  $\theta \in \Theta$ , если  $\hat{\theta}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Утверждение 1 (неравенство Чебышева).** Пусть  $X$  — неотрицательная случайная величина. Тогда для всякого  $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(\{X \geq \varepsilon\}) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\varepsilon}.$$

**Следствие 1.** Пусть  $X$  — произвольная случайная величина. Тогда для всякого  $\varepsilon > 0$

$$(i) \mathbb{P}(\{X \geq \varepsilon\}) \leq \frac{\mathbb{E}[X^2]}{\varepsilon^2},$$

$$(ii) \mathbb{P}(\{|X - \mathbb{E}X| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{D[X]}{\varepsilon^2}.$$

**Утверждение 2.** Пусть кусочно-непрерывная функция  $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна в точке  $(a, b)$  и  $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$ ,  $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} b$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда  $g(X_n, Y_n) \rightarrow g(a, b)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Задача 1.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из распределения Бернулли с параметром  $p \in (0; 1)$ . Является ли оценка  $\hat{p}_n = \bar{X}$  состоятельной?

**Задача 2.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из распределения Пуассона с параметром  $\lambda > 0$ . Является ли оценка  $\hat{\lambda}_n = \bar{X}$  состоятельной?

**Задача 3.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из нормального распределения с параметрами  $\mu \in \mathbb{R}$  и  $\sigma^2 > 0$ , причем параметр  $\sigma^2$  известен. Является ли оценка  $\hat{\mu}_n = \bar{X}$  состоятельной?

**Задача 4.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из распределения с плотностью

$$f(x; \mu) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} & \text{?@8 } x \geq 0, \\ 0 & \text{?@8 } x < 0, \end{cases}$$

где  $\sigma^2$  — известный положительный параметр. Является ли оценка  $\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i$  состоятельной?

**Задача 5.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из распределения с плотностью

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & \text{?@8 } x \geq 0, \\ 0 & \text{?@8 } x < 0, \end{cases}$$

где  $\theta > 0$  — неизвестный параметр. Является ли оценка  $\hat{\theta}_n = \bar{X}$  состоятельной?

**Задача 6.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из биномиального распределения  $Bi(10, p)$ , где  $p \in (0; 1)$ . Является ли оценка  $\hat{p}_n = \frac{1}{10}\bar{X}$  состоятельной?

**Задача 7.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка. Случайные величины  $X_1, \dots, X_n$  имеют дискретное распределение, которое задано при помощи таблицы

$X_i$	-3	0	2
$\mathbb{P}_{X_i}$	$2/3 - \theta$	$1/3$	$\theta$

Является ли оценка  $\hat{\theta}_n = \frac{1}{5}(\bar{X} + 2)$  состоятельной?

**Решение.** Заметим, что  $\mathbb{E}[\hat{\theta}_n] = \theta$ . Следовательно, по неравенству Чебышева

$$\mathbb{P}\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\hat{\theta}_n - \mathbb{E}[\hat{\theta}_n]\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{D[\hat{\theta}_n]}{\varepsilon^2} = \frac{D[X_1]}{25n} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Значит, оценка  $\hat{\theta}_n$  является состоятельной оценкой для неизвестного параметра  $\theta$ .  $\square$

**Задача 8.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка. Случайные величины  $X_1, \dots, X_n$  имеют дискретное распределение, которое задано при помощи таблицы

$X_i$	-2	0	1
$\mathbb{P}_{X_i}$	$1/2 - \theta$	$1/2$	$\theta$

Является ли следующая оценка состоятельной

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{1\}}(X_i)}{n - \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{0\}}(X_i)}?$$

**Решение.** Разделим числитель и знаменатель оценки

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{1\}}(X_i)}{n - \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{0\}}(X_i)}$$

на  $n$ , и получим следующее выражение

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{2} \frac{\frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{1\}}(X_i)}{n}}{1 - \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{0\}}(X_i)}{n}}.$$



Докажем, что  $\frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{1\}}(X_i)}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$ ;  $1 - \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{0\}}(X_i)}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{2}$ .

Имеем  $\mathbb{E} \left( \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{1\}}(X_i)}{n} \right) = \frac{1}{n} \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{1\}}(X_i) \right) = \frac{1}{n} n \mathbb{E} \left( \mathbb{I}_{\{1\}}(X_1) \right) = \mathbb{P}(\{X_1 = 1\}) = \theta$ .

Применим неравенство Чебышева:

$$\mathbb{P} \left( \left| \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{1\}}(X_i)}{n} - \theta \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{D \left( \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{1\}}(X_i)}{n} \right)}{\varepsilon^2} = \frac{nD \left( \mathbb{I}_{\{1\}}(X_1) \right)}{\varepsilon^2 n^2} =$$

Следовательно,  $\frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{1\}}(X_i)}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$ .

$$\mathbb{E} \left( 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{0\}}(X_i)}{n} \right) = 1 - \frac{1}{n} \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{0\}}(X_i) \right) = 1 - \frac{1}{n} n \mathbb{E} \left( \mathbb{I}_{\{0\}}(X_1) \right) =$$

Применим снова неравенство Чебышева:

$$\mathbb{P} \left( \left| 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{0\}}(X_i)}{n} - \frac{1}{2} \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{D \left( 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{0\}}(X_i)}{n} \right)}{\varepsilon^2} = \frac{nD \left( \mathbb{I}_{\{0\}}(X_1) \right)}{\varepsilon^2 n^2}$$

Следовательно,  $1 - \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{0\}}(X_i)}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{2}$ .

Используя утверждение 2, мы получаем

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{2} \frac{\frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{1\}}(X_i)}{n}}{1 - \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{0\}}(X_i)}{n}} \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta,$$

что означает состоятельность оценки  $\hat{\theta}_n$ .  $\square$

**Задача 9.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из равномерного распределения на отрезке  $[0; \theta]$ ,  $\theta > 0$ . Являются ли следующие оценки состоятельными

$$1. \hat{\theta}_n = 2\bar{X},$$

2.  $\hat{\theta}_n = X_{(n)}$ ?

**Ответ:** (а) да, (б) да.

**Задача 10.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из равномерного распределения на отрезке  $[\theta; 0]$ ,  $\theta < 0$ . Является ли  $\hat{\theta}_n = X_{(1)}$  состоятельной оценкой для неизвестного параметра  $\theta$ ?

**Ответ:** да.

Листок 13 по ТВ и МС 2013–2014 [08.03.2014]

1

Кафедра математической экономики и эконометрики  
НИУ ВШЭ. Борзых Д. А.

Листок 13

Доверительные интервалы

1. Доверительный интервал для неизвестного параметра  $\mu$  при известном параметре  $\sigma^2$

**Задача 1.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из нормального распределения с параметрами  $\mu$  и  $\sigma^2$ , причем параметр  $\mu$  неизвестен, а параметр  $\sigma^2 = 4$ . Используя реализацию случайной выборки,  $x_1 = -1.11$ ;  $x_2 = -6.10$ ;  $x_3 = 2.42$ ;  $x_4 = -0.09$ ;  $x_5 = -0.17$ ,

постройте 90%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра  $\mu$ .

**Решение.** Требуется найти такие две функции от случайной выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$

$T_1(X)$  и  $T_2(X)$ , что  $\forall \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{P}(\{T_1(X) \leq \mu \leq T_2(X)\}) = \gamma$ . Другими словами, нужно найти такой интервал  $[T_1(X); T_2(X)]$ , который с заданным уровнем доверия (надежности) покрывает неизвестный параметр  $\mu$  при любом возможном значении параметра  $\mu$ .

Положим  $\gamma = 0.9$  и  $\alpha = 1 - \gamma = 0.1$ .

Известно, что  $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0; 1)$ .

Пусть  $z_{\alpha/2}$  и  $z_{1-\alpha/2}$  - квантили для нормального стандартного распределения уровней  $\alpha/2$  и  $1 - \alpha/2$  соответственно.<sup>2</sup>

Тогда имеем  $\mathbb{P} \left( \left\{ z_{\alpha/2} \leq T \leq z_{1-\alpha/2} \right\} \right) = \gamma$ .

$$z_{\alpha/2} \leq T \leq z_{1-\alpha/2} \Leftrightarrow z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leq z_{1-\alpha/2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \bar{X} - \mu \leq z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \Leftrightarrow -\bar{X} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq -\mu \leq -\bar{X} + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

$$\Leftrightarrow \bar{X} - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}.$$

Таким образом, получили  $T_1(X) = \bar{X} - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$  и  $T_2(X) = \bar{X} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$ .

Рассчитаем теперь границы доверительного интервала  $[T_1(X); T_2(X)]$ , используя реализацию случайной выборки.

$$\bar{x} = -1.01; z_{\alpha/2} = -1.64; z_{1-\alpha/2} = 1.64;$$

$$T_1(x) = \bar{x} - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = -1.01 - 1.64 \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} = -2.48;$$

$$T_2(x) = \bar{x} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = -1.01 + 1.64 \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} = 0.46.$$

**Ответ:**  $[-2.48; 0.46]$ .

---

<sup>2</sup>  $z_{\alpha/2}$  — такая точка, что  $\int_{-\infty}^{z_{\alpha/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \alpha/2$ ;  $z_{1-\alpha/2}$  — такая точка, что  $\int_{-\infty}^{z_{1-\alpha/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = 1 - \alpha/2$ .

**Задача 2.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из нормального распределения с параметрами  $\mu$  и  $\sigma^2$ , причем параметр  $\mu$  неизвестен, а параметр  $\sigma^2 = 4$ . Используя реализацию случайной выборки,  $x_1 = -2.29$ ;  $x_2 = -2.91$ ;  $x_3 = 0.93$ ;  $x_4 = -0.78$ ;  $x_5 = 2.30$ ,

постройте 90%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра  $\mu$ .

1. Доверительный интервал для неизвестного параметра  $\mu$  при известном параметре  $\sigma^2$

**Задача 3.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из нормального распределения с параметрами  $\mu$  и  $\sigma^2$ , причем оба параметра  $\mu$  и  $\sigma^2$  неизвестны. Используя реализацию случайной выборки,  $x_1 = -1.11$ ;  $x_2 = -6.10$ ;  $x_3 = 2.42$ ;  $x_4 = -0.09$ ;  $x_5 = -0.17$ ,

постройте 90%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра  $\mu$ .

**Решение.** Требуется найти такие две функции от случайной выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$

$T_1(X)$  и  $T_2(X)$ , что  $\forall \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\{T_1(X) \leq \mu \leq T_2(X)\}) = \gamma$ . Другими словами, нужно найти такой интервал  $[T_1(X); T_2(X)]$ , который с заданным уровнем доверия (надежности) накрывает неизвестный параметр  $\mu$  при любых возможных значениях параметров  $\mu$  и  $\sigma^2$ .

Положим  $\gamma = 0.9$  и  $\alpha = 1 - \gamma = 0.1$ .

Известно, что  $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim t(n-1)$ , где  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

- исправленная выборочная дисперсия.

Пусть  $t_{n-1, \alpha/2}$  и  $t_{n-1, 1-\alpha/2}$  - квантили уровней  $\alpha/2$  и  $1 - \alpha/2$  соответственно для  $t$ -распределения с  $n - 1$  степенями свободы.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>  $t_{n-1, \alpha/2}$  — такая точка, что  $\int_{-\infty}^{t_{n-1, \alpha/2}} f_{t(n-1)}(x) dx = \alpha/2$ ;  $t_{n-1, 1-\alpha/2}$  — такая точка, что  $\int_{-\infty}^{t_{n-1, 1-\alpha/2}} f_{t(n-1)}(x) dx = 1 - \alpha/2$ . Здесь через

Тогда имеем  $\mathbb{P} \left( \{t_{n-1,\alpha/2} \leq T \leq t_{n-1,1-\alpha/2}\} \right) = \gamma$ .

$$t_{n-1,\alpha/2} \leq T \leq t_{n-1,1-\alpha/2} \Leftrightarrow t_{n-1,\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}}} \leq t_{n-1,1-\alpha/2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{X} - t_{n-1,1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} - t_{n-1,\alpha/2} \sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}}.$$

Таким образом, получили  $T_1(X) = \bar{X} - t_{n-1,1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}}$  и  $T_2(X) = \bar{X} - t_{n-1,\alpha/2} \sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}}$ .

Рассчитаем теперь границы доверительного интервала  $[T_1(X); T_2(X)]$ , используя реализацию случайной выборки.

$$\bar{x} = -1.01; \widehat{\sigma^2} = 9.81; t_{n-1,\alpha/2} = -2.13; t_{n-1,1-\alpha/2} = 2.13;$$

$$T_1(x) = \bar{x} - t_{n-1,1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}} = -1.01 - 2.13 \cdot \sqrt{\frac{9.81}{5}} = -3.99;$$

$$T_2(x) = \bar{x} - t_{n-1,\alpha/2} \sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}} = -1.01 + 2.13 \cdot \sqrt{\frac{9.81}{5}} = 1.97.$$

**Ответ:**  $[-3.99; 1.97]$ .

**Задача 4.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из нормального распределения с параметрами  $\mu$  и  $\sigma^2$ , причем оба параметра  $\mu$  и  $\sigma^2$  неизвестны. Используя реали-

---

$f_{t(n-1)}(x)$  обозначена плотность  $t$ -распределения с  $n-1$  степенями свободы.

зацию случайной выборки,  $x_1 = -2.29$ ;  $x_2 = -2.91$ ;  $x_3 = 0.93$ ;  $x_4 = -0.78$ ;  $x_5 = 2.30$ ,

постройте 90%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра  $\mu$ .

1. Доверительный интервал для неизвестного параметра  $\sigma^2$  при известном параметре  $\mu$

**Задача 5.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из нормального распределения с параметрами  $\mu$  и  $\sigma^2$ , причем параметр  $\mu = 0$ , а параметр  $\sigma^2$  неизвестен. Используя реализацию случайной выборки,

$x_1 = 1.07$ ;  $x_2 = 3.66$ ;  $x_3 = -4.51$ ;  $x_4 = 1.72$ ;  $x_5 = 0.63$ ,

постройте 90%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра  $\sigma^2$ .

**Решение.** Требуется найти такие две функции от случайной выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$

$T_1(X)$  и  $T_2(X)$ , что  $\forall \sigma^2 > 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\{T_1(X) \leq \sigma^2 \leq T_2(X)\}) = \gamma$ . Другими словами, нужно найти такой интервал  $[T_1(X); T_2(X)]$ , который с заданным уровнем доверия (надежности) накрывает неизвестный параметр  $\sigma^2$  при любом возможном значении параметра  $\sigma^2$ .

Положим  $\gamma = 0.9$  и  $\alpha = 1 - \gamma = 0.1$ .

Известно, что  $T = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$ .

Пусть  $\chi_{n,\alpha/2}^2$  и  $\chi_{n,1-\alpha/2}^2$ - квантили уровней  $\alpha/2$  и  $1 - \alpha/2$  соответственно для  $\chi^2$ -распределения с  $n$  степенями свободы.

4

---

<sup>4</sup>  $\chi_{n,\alpha/2}^2$  — такая точка, что  $\int_{-\infty}^{\chi_{n,\alpha/2}^2} f_{\chi^2(n)}(x) dx = \alpha/2$ ,  $\chi_{n,1-\alpha/2}^2$  — такая точка, что  $\int_{-\infty}^{\chi_{n,1-\alpha/2}^2} f_{\chi^2(n)}(x) dx = 1 - \alpha/2$ . Здесь через  $f_{\chi^2(n)}(x)$  обозначена плотность  $\chi^2$ -распределения с  $n$  степенями свободы.

Тогда имеем  $\mathbb{P} \left( \left\{ \chi_{n,\alpha/2}^2 \leq T \leq \chi_{n,1-\alpha/2}^2 \right\} \right) = \gamma$ .

$$\chi_{n,\alpha/2}^2 \leq T \leq \chi_{n,1-\alpha/2}^2 \Leftrightarrow \chi_{n,\alpha/2}^2 \leq \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \leq \chi_{n,1-\alpha/2}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \geq \chi_{n,\alpha/2}^2, \\ \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \leq \chi_{n,1-\alpha/2}^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\chi_{n,\alpha/2}^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \geq \sigma^2, \\ \frac{1}{\chi_{n,1-\alpha/2}^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \leq \sigma^2. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\chi_{n,1-\alpha/2}^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \leq \sigma^2 \leq \frac{1}{\chi_{n,\alpha/2}^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2.$$

Таким образом, получили  $T_1(X) = \frac{1}{\chi_{n,1-\alpha/2}^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$   
и  $T_2(X) = \frac{1}{\chi_{n,\alpha/2}^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ .

Рассчитаем теперь границы доверительного интервала  $[T_1(X); T_2(X)]$ , используя реализацию случайной выборки.<sup>5</sup>

$$\chi_{n,\alpha/2}^2 = 1.15; \chi_{n,1-\alpha/2}^2 = 11.07; \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 38.40;$$

---

<sup>5</sup> Отметим, что в таблице для  $\chi^2$ -распределения в учебнике А.С. Шведова “Теория вероятностей и математическая статистика” требуемых квантилей нет. Для вычисления можно воспользоваться программой MS Excel. Например,  $\chi_{5,0.05}^2 = \%2(0,95;5) = 1.15$  ;  $\chi_{5,0.95}^2 = \%2(0,05;5) = 11.07$  . В пакете MATLAB используется следующий синтаксис:  $\chi_{5,0.05}^2 = \text{chi2inv}(0.05;5) = 1.15$  ;  $\chi_{5,0.95}^2 = \text{chi2inv}(0.95;5) = 11.07$  .

$$T_1(x) = \frac{1}{\chi_{n,1-\alpha/2}^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \frac{38.40}{11.07} = 3.47;$$

$$T_2(x) = \frac{1}{\chi_{n,\alpha/2}^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \frac{38.40}{1.15} = 33.39.$$

**Ответ:** [3.47; 33.39].

**Задача 6.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из нормального распределения с параметрами  $\mu$  и  $\sigma^2$ , причем параметр  $\mu = 0$ , а параметр  $\sigma^2$  неизвестен. Используя реализацию случайной выборки,

$$x_1 = -2.61; \quad x_2 = -0.86; \quad x_3 = 0.68; \quad x_4 = 7.15; \quad x_5 = 5.53,$$

постройте 80%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра  $\sigma^2$ .

1. Доверительный интервал для неизвестного параметра  $\sigma^2$  при неизвестном параметре  $\mu$

**Задача 7.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из нормального распределения с параметрами  $\mu$  и  $\sigma^2$ , причем оба параметра  $\mu$  и  $\sigma^2$  неизвестны. Используя реализацию случайной выборки,

$$x_1 = 1.07; \quad x_2 = 3.66; \quad x_3 = -4.51; \quad x_4 = 1.72; \quad x_5 = 0.63,$$

постройте 90%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра  $\sigma^2$ .

**Решение.** Требуется найти такие две функции от случайной выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$



$T_1(X)$  и  $T_2(X)$ , что  $\forall \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\{T_1(X) \leq \sigma^2 \leq T_2(X)\}) = \gamma$ . Другими словами, нужно найти такой интервал  $[T_1(X); T_2(X)]$ , который с заданным уровнем доверия (надежности) накрывает неизвестный параметр  $\sigma^2$  при любых возможных значениях параметров  $\mu$  и  $\sigma^2$ .

Положим  $\gamma = 0.9$  и  $\alpha = 1 - \gamma = 0.1$ .

Известно, что  $T = \frac{\widehat{\sigma}^2(n-1)}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ , где  $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  - исправленная выборочная дисперсия.

Пусть  $\chi_{n-1, \alpha/2}^2$  и  $\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2$  - квантили уровней  $\alpha/2$  и  $1 - \alpha/2$  соответственно для  $\chi^2$ -распределения с  $n-1$  степенями свободы.<sup>6</sup>

Тогда имеем  $\mathbb{P}\left(\left\{\chi_{n-1, \alpha/2}^2 \leq T \leq \chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2\right\}\right) = \gamma$ .

$$\chi_{n-1, \alpha/2}^2 \leq T \leq \chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2 \Leftrightarrow \chi_{n-1, \alpha/2}^2 \leq \frac{\widehat{\sigma}^2(n-1)}{\sigma^2} \leq \chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\widehat{\sigma}^2(n-1)}{\sigma^2} \geq \chi_{n-1, \alpha/2}^2, \\ \frac{\widehat{\sigma}^2(n-1)}{\sigma^2} \leq \chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\widehat{\sigma}^2(n-1)}{\chi_{n-1, \alpha/2}^2} \geq \sigma^2, \\ \frac{\widehat{\sigma}^2(n-1)}{\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2} \leq \sigma^2. \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\widehat{\sigma}^2(n-1)}{\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{\widehat{\sigma}^2(n-1)}{\chi_{n-1, \alpha/2}^2}.$$

Таким образом, получили  $T_1(X) = \frac{\widehat{\sigma}^2(n-1)}{\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2}$  и  $T_2(X) = \frac{\widehat{\sigma}^2(n-1)}{\chi_{n-1, \alpha/2}^2}$ .

---

<sup>6</sup>  $\chi_{n-1, \alpha/2}^2$  — такая точка, что  $\int_{-\infty}^{\chi_{n-1, \alpha/2}^2} f_{\chi^2(n-1)}(x) dx = \alpha/2$ ,  
 $\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2$  — такая точка, что  $\int_{-\infty}^{\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2} f_{\chi^2(n-1)}(x) dx = 1 - \alpha/2$ .  
Здесь через  $f_{\chi^2(n-1)}(x)$  обозначена плотность  $\chi^2$ -распределения с  $n-1$  степенями свободы.

Рассчитаем теперь границы доверительного интервала  $[T_1(X); T_2(X)]$ , используя реализацию случайной выборки.<sup>7</sup>

$$\bar{x} = 0.52; \hat{\sigma}^2 = 9.26; \chi_{n-1, \alpha/2}^2 = 0.71; \chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2 = 9.49;$$

$$T_1(x) = \frac{\hat{\sigma}^2(n-1)}{\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2} = \frac{9.26 \cdot 4}{9.49} = 3.90;$$

$$T_2(x) = \frac{\hat{\sigma}^2(n-1)}{\chi_{n-1, \alpha/2}^2} = \frac{9.26 \cdot 4}{0.71} = 52.17.$$

**Ответ:**  $[3.90; 52.17]$ .

**Задача 8.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из нормального распределения с параметрами  $\mu$  и  $\sigma^2$ , причем оба параметра  $\mu$  и  $\sigma^2$  неизвестны. Используя реализацию случайной выборки,

$$x_1 = -2.61; \quad x_2 = -0.86; \quad x_3 = 0.68; \quad x_4 = 7.15; \quad x_5 = 5.53,$$

постройте 90%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра  $\sigma^2$ .

### 1. Асимптотический доверительный интервал для доли

---

<sup>7</sup> Отметим, что в таблице для  $\chi^2$ -распределения в учебнике А.С. Шведова “Теория вероятностей и математическая статистика” требуемых квантилей нет. Для вычисления можно воспользоваться программой MS Excel. Например,  $\chi_{4,0.05}^2 = \%2(0,95;4) = 0.71$ ;  $\chi_{4,0.95}^2 = \%2(0,05;4) = 9.49$ . В пакете MATLAB используется следующий синтаксис:  $\chi_{4,0.05}^2 = \text{chi2inv}(0.05;4) = 0.71$ ;  $\chi_{4,0.95}^2 = \text{chi2inv}(0.95;4) = 9.49$ .

*Литература по теме: А.С. Шведов “Теория вероятностей и математическая статистика - metricconverterProductID2”2”, стр. 165-168.*

**Задача 9.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из распределения Бернулли с параметром  $p$ . Используя реализацию случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , в которой 55 нулей и 45 единиц, постройте 90%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра  $p$ .

**Решение.** Требуется найти такие две функции от случайной выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$

$T_1(X)$  и  $T_2(X)$ , что  $\forall p \in (0; 1) \Rightarrow \mathbb{P}(\{T_1(X) \leq p \leq T_2(X)\}) = \gamma$ . Другими словами, нужно найти такой интервал  $[T_1(X); T_2(X)]$ , который с заданным уровнем доверия (надежности) накрывает неизвестный параметр  $p$  при любом возможном значении параметра  $p$ .

Положим  $\gamma = 0.9$  и  $\alpha = 1 - \gamma = 0.1$ .

Известно, что  $\mathbb{P}\left(\left\{\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} \leq p \leq \bar{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right\}\right) = \gamma$  (при большом числе наблюдений).<sup>8</sup>

Поэтому  $T_1(X) = \bar{X} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}$  и  $T_2(X) = \bar{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}$ .

Рассчитаем теперь границы доверительного интервала  $[T_1(X); T_2(X)]$ , используя реализацию случайной выборки.

$$\bar{x} = 0.45; z_{\alpha/2} = -1.64; z_{1-\alpha/2} = 1.64;$$

$$T_1(x) = \bar{x} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} = 0.45 - 1.64\sqrt{\frac{0.45(1-0.45)}{100}} = 0.37;$$

---

<sup>8</sup> Здесь, как и выше,  $z_{\alpha/2}$  — такая точка, что  $\int_{-\infty}^{z_{\alpha/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \alpha/2$ ,  $z_{1-\alpha/2}$  — такая точка, что  $\int_{-\infty}^{z_{1-\alpha/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = 1 - \alpha/2$ .

$$T_2(x) = \bar{x} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} = 0.45 + 1.64 \sqrt{\frac{0.45(1-0.45)}{100}} = 0.53.$$

**Ответ:** [0.37; 0.53].

**Задача 10.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из распределения Бернулли с параметром  $p$ . Используя реализацию случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , в которой 60 нулей и 40 единиц, постройте 90%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра  $p$ .

Листок 14 по ТВ и МС 2013–2014 [08.03.2014]

1

Кафедра математической экономики и эконометрики  
НИУ ВШЭ. Борzych Д. А.

Листок 14

Проверка статистических гипотез

1. Тестирование гипотез о параметре  $\mu$  при известном параметре  $\sigma^2$

**Задача 1.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из нормального распределения с параметрами  $\mu$  и  $\sigma^2$ , причем параметр  $\mu$  неизвестен, а параметр  $\sigma^2 = 4$ . Уровень значимости  $\alpha = 0.1$ . Используя реализацию случайной выборки

$$x_1 = -1.11; \quad x_2 = -6.10; \quad x_3 = 2.42; \quad x_4 = -0.09; \quad x_5 = -0.17;$$

$$x_6 = -2.29; \quad x_7 = -2.91; \quad x_8 = 0.93; \quad x_9 = -0.78; \quad x_{10} = 2.30$$

проверьте следующие статистические гипотезы.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu \neq 0 \end{array} \right. ; 2) \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu > 0 \end{array} \right. ; 3) \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu < 0 \end{array} \right.$$

**Решение.**

1)

1. Тестовая статистика:  $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}.$

2. Распределение тестовой статистики:  $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0; 1).$

3. Наблюдаемое значение тестовой статистики:  $T_{=01} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{-0.78 - 0}{\sqrt{\frac{4}{10}}} = -1.23.$

4. Область, в которой гипотеза  $H_0$  не отвергается:  $[z_{\alpha/2}; z_{1-\alpha/2}] = [-1.65; 1.65].$

5. Статистический вывод: поскольку  $T_{=01} = -1.23 \in [-1.65; 1.65]$ , то основная гипотеза  $H_0$  не отвергается.

2)

1. Тестовая статистика:  $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}.$

2. Распределение тестовой статистики:  $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0; 1).$

3. Наблюдаемое значение тестовой статистики:  $T_{=01} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{-0.78 - 0}{\sqrt{\frac{4}{10}}} = -1.23.$

4. Область, в которой гипотеза  $H_0$  не отвергается:  $(-\infty; z_{1-\alpha}] = (-\infty; 1.28].$

5. *Статистический вывод*: поскольку  $T_{=01} = -1.23 \in (-\infty; 1.28]$ , то основная гипотеза  $H_0$  не отвергается.

3)

1. *Тестовая статистика*:  $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$ .

2. *Распределение тестовой статистики*:  $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0; 1)$ .

3. *Наблюдаемое значение тестовой статистики*:  $T_{=01} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{-0.78 - 0}{\sqrt{\frac{4}{10}}} = -1.23$ .

4. *Область, в которой гипотеза  $H_0$  не отвергается*:  $[z_\alpha; +\infty) = [-1.28; +\infty)$ .

5. *Статистический вывод*: поскольку  $T_{=01} = -1.23 \in [-1.28; +\infty)$ , то основная гипотеза  $H_0$  не отвергается.

**Задача 2.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  - случайная выборка из нормального распределения с параметрами  $\mu$  и  $\sigma^2$ , причем параметр  $\mu$  неизвестен, а параметр  $\sigma^2 = 9$ . Уровень значимости  $\alpha = 0.1$ . Используя реализацию случайной выборки

$$x_1 = -2.88; \quad x_2 = -0.24; \quad x_3 = 1.78; \quad x_4 = -3.13; \quad x_5 = 1.71;$$

$$x_6 = 0.10; \quad x_7 = -4.50; \quad x_8 = 1.88; \quad x_9 = -4.80; \quad x_{10} = 1.11$$

проверьте следующие статистические гипотезы.

- 1)  $\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = 1 \\ H_1 : \mu \neq 1 \end{array} \right.$  ; 2)  $\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = 1 \\ H_1 : \mu > 1 \end{array} \right.$  ; 3)  $\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = 1 \\ H_1 : \mu < 1 \end{array} \right.$

1. Тестирование гипотез о параметре  $\mu$  при неизвестном параметре  $\sigma^2$

**Задача 3.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  - случайная выборка из нормального распределения с параметрами  $\mu$  и  $\sigma^2$ , причем оба параметра  $\mu$  и  $\sigma^2$  неизвестны. Уровень значимости  $\alpha = 0.1$ . Используя реализацию случайной выборки

$$x_1 = -1.11; \quad x_2 = -6.10; \quad x_3 = 2.42; \quad x_4 = -0.09; \quad x_5 = -0.17;$$

$$x_6 = -2.29; \quad x_7 = -2.91; \quad x_8 = 0.93; \quad x_9 = -0.78; \quad x_{10} = 2.30$$

проверьте следующие статистические гипотезы.

- 1)  $\begin{cases} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu \neq 0 \end{cases}$ ; 2)  $\begin{cases} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu > 0 \end{cases}$ ; 3)  $\begin{cases} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu < 0 \end{cases}$

**Решение.**

1)

$$1. \text{ Тестовая статистика: } T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}}, \text{ где } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

$$2. \text{ Распределение тестовой статистики: } T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}} \sim t(n-1).$$

$$3. \text{ Наблюдаемое значение тестовой статистики: } T_{=01} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}} = \frac{-0.78 - 0}{\sqrt{\frac{6.53}{10}}} = -0.97.$$

$$4. \text{ Область, в которой гипотеза } H_0 \text{ не отвергается: } [t_{n-1, \alpha/2}; t_{n-1, 1-\alpha/2}] = [-1.83; 1.83].$$

$$5. \text{ Статистический вывод: поскольку } T_{=01} = -0.97 \in [-1.83; 1.83], \text{ то основная гипотеза } H_0 \text{ не отвергается.}$$

2)

1. Тестовая статистика:  $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}}$ , где  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

2. Распределение тестовой статистики:  $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}} \sim t(n-1)$ .

3. Наблюдаемое значение тестовой статистики:  $T_{=01} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}} = \frac{-0.78 - 0}{\sqrt{\frac{6.53}{10}}} = -0.97$ .

4. Область, в которой гипотеза  $H_0$  не отвергается:  $(-\infty; t_{n-1, 1-\alpha}] = (-\infty; 1.38]$ .

5. Статистический вывод: поскольку  $T_{=01} = -0.97 \in (-\infty; 1.38]$ , то основная гипотеза  $H_0$  не отвергается.

3)

1. Тестовая статистика:  $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}}$ , где  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

2. Распределение тестовой статистики:  $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}} \sim t(n-1)$ .

3. Наблюдаемое значение тестовой статистики:  $T_{=01} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}} = \frac{-0.78 - 0}{\sqrt{\frac{6.53}{10}}} = -0.97$ .

4. Область, в которой гипотеза  $H_0$  не отвергается:  $[t_{n-1, \alpha}; +\infty) = [-1.38; +\infty)$ .

5. Статистический вывод: поскольку  $T_{=01} = -0.97 \in [-1.38; +\infty)$ , то основная гипотеза  $H_0$  не отвергается.



**Задача 4.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  - случайная выборка из нормального распределения с параметрами  $\mu$  и  $\sigma^2$ , причем оба параметра  $\mu$  и  $\sigma^2$  неизвестны. Уровень значимости  $\alpha = 0.1$ . Используя реализацию случайной выборки

$$x_1 = -2.88; \quad x_2 = -0.24; \quad x_3 = 1.78; \quad x_4 = -3.13; \quad x_5 = 1.71;$$

$$x_6 = 0.10; \quad x_7 = -4.50; \quad x_8 = 1.88; \quad x_9 = -4.80; \quad x_{10} = 1.11$$

проверьте следующие статистические гипотезы.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = 1 \\ H_1 : \mu \neq 1 \end{array} \right. ; 2) \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = 1 \\ H_1 : \mu > 1 \end{array} \right. ; 3) \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = 1 \\ H_1 : \mu < 1 \end{array} \right.$$

1. Тестирование гипотезы о равенстве математических ожиданий двух независимых случайных выборок при условии, что дисперсии этих выборок известны

**Задача 5.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  - независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами  $(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  соответственно, причем  $\sigma_X^2 = 2$  и  $\sigma_Y^2 = 1$ . Уровень значимости  $\alpha = 0.05$ . Используя реализации случайных выборок

$$x_1 = -1.11; \quad x_2 = -6.10; \quad x_3 = 2.42; \quad x_4 = -0.09; \quad x_5 = -0.17;$$

$$y_1 = -2.29; \quad y_2 = -2.91; \quad y_3 = 0.93; \quad y_4 = -0.78; \quad y_5 = 2.30$$

проверьте следующие статистические гипотезы.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X \neq \mu_Y \end{array} \right. ; 2) \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X > \mu_Y \end{array} \right. ; 3) \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X < \mu_Y \end{array} \right.$$

**Указание:** используйте тестовую статистику

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} \sim N(0, 1).$$

**Задача 6.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  – независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами  $(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  соответственно, причем  $\sigma_X^2 = 4$  и  $\sigma_Y^2 = 9$ . Уровень значимости  $\alpha = 0.05$ . Используя реализации случайных выборок

$$x_1 = -0.09; \quad x_2 = 2.48; \quad x_3 = -0.46 \quad x_4 = -3.11; \quad x_5 = 0.75;$$

$$y_1 = -2.50; \quad y_2 = 8.09; \quad y_3 = -0.66; \quad y_4 = -2.31; \quad y_5 = 2.25$$

проверьте следующие статистические гипотезы.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X \neq \mu_Y \end{array} \right. ; 2) \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X > \mu_Y \end{array} \right. ; 3) \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X < \mu_Y \end{array} \right.$$

1. Тестирование гипотезы о равенстве математических ожиданий двух независимых случайных выборок при условии, что дисперсии этих выборок неизвестны, но равны между собой

**Задача 7.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  – независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами  $(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  соответственно. Известно, что  $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ . Уровень значимости  $\alpha = 0.05$ . Используя реализации случайных выборок

$$x_1 = 1.53; \quad x_2 = 2.83; \quad x_3 = -1.25; \quad x_4 = 1.86; \quad x_5 = 1.31;$$

$$y_1 = -0.80; \quad y_2 = 0.06; \quad y_3 = 0.84; \quad y_4 = 4.07; \quad y_5 = 3.26$$

проверьте следующие статистические гипотезы.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X \neq \mu_Y \end{array} ; 2) \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X > \mu_Y \end{array} ; 3) \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X < \mu_Y \end{array} \right. \right.$$

**Указание:** используйте тестовую статистику

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \left(\frac{n-1}{n+m-2} \hat{\sigma}_X^2 + \frac{m-1}{n+m-2} \hat{\sigma}_Y^2\right)}} \sim t(n+m-2),$$

$$\text{где } \hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad \hat{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2.$$

**Задача 8.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  – независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами  $(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  соответственно. Известно, что  $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ . Уровень значимости  $\alpha = 0.05$ . Используя реализации случайных выборок

$$x_1 = -3.26; \quad x_2 = 1.16; \quad x_3 = 0.90 \quad x_4 = -0.72; \quad x_5 = 3.38;$$

$$y_1 = -2.50; \quad y_2 = 8.09; \quad y_3 = -0.66; \quad y_4 = -2.31; \quad y_5 = 2.25$$

проверьте следующие статистические гипотезы.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X \neq \mu_Y \end{array} ; 2) \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X > \mu_Y \end{array} ; 3) \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X < \mu_Y \end{array} \right. \right.$$

1. Тестирование гипотезы о равенстве дисперсий двух независимых случайных выборок при условии, что математические ожидания этих выборок известны

**Задача 9.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  – независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами  $(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  соответственно, причем  $\mu_X = 0$  и  $\mu_Y = 0$ . Уровень значимости  $\alpha = 0.05$ . Используя реализации случайных выборок

$$x_1 = -1.11; \quad x_2 = -6.10; \quad x_3 = 2.42; \quad x_4 = -0.09; \quad x_5 = -0.17;$$

$$y_1 = -2.29; \quad y_2 = -2.91; \quad y_3 = 0.93; \quad y_4 = -0.78; \quad y_5 = 2.30$$

проверьте следующие статистические гипотезы.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \\ H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2 \end{array} \right. ; 2) \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \\ H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2 \end{array} \right. ; 3) \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \\ H_1 : \sigma_X^2 < \sigma_Y^2 \end{array} \right.$$

**Указание:** используйте тестовую статистику

$$T = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X)^2}{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (Y_i - \mu_Y)^2} \sim F(n, m).$$

1. Тестирование гипотезы о равенстве дисперсий двух независимых случайных выборок при условии, что математические ожидания этих выборок неизвестны

**Задача 10.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  – независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами  $(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  соответственно. Уровень значимости  $\alpha = 0.05$ . Используя реализации случайных выборок

$$x_1 = -1.11; \quad x_2 = -6.10; \quad x_3 = 2.42; \quad x_4 = -0.09; \quad x_5 = -0.17;$$

$$y_1 = -2.29; \quad y_2 = -2.91; \quad y_3 = 0.93; \quad y_4 = -0.78; \quad y_5 = 2.30$$

проверьте следующие статистические гипотезы.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \\ H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2 \end{array} \right. ; 2) \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \\ H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2 \end{array} \right. ; 3) \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \\ H_1 : \sigma_X^2 < \sigma_Y^2 \end{array} \right.$$

**Указание:** используйте тестовую статистику

$$T = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} \sim F(n-1, m-1).$$

Листок 15 по ТВ и МС 2013–2014 [08.03.2014]

1

Кафедра математической экономики и эконометрики  
НИУ ВШЭ. Борzych Д. А.

Листок 15

$\chi^2$ –критерий Пирсона

**Задача 1.** Вася решил проверить известное утверждение о том, что бутерброд падает маслом вниз. Для этого он провел серию из 200 испытаний. Ниже приведена таблица с результатами.

Бутерброд с маслом	Маслом вниз	Маслом вверх
Число наблю- дений	105	95

Можно ли утверждать, что бутерброд падает маслом вниз также часто, как и маслом вверх? Уровень значимости  $\alpha = 0.01$ .

**Решение.**  $n = 200$ ;  $r = 2$ .

Пусть  $X_j = \begin{cases} 1, & \text{с 25\% } p \\ 0, & \text{с 25\% } (1-p) \end{cases}$ ,  $(j = \overline{1, n})$ . Если  $x_j = 1$ ,

то будем считать, что в  $j$ -м испытании бутерброд упал

маслом вниз, если же  $x_j = 0$ , то будем считать, что в  $j$ -м испытании бутерброд упал маслом вверх.

Требуется проверить гипотезу  $H_0 : p = 0.5$ .

Известно, что  $W_n = \sum_{i=1}^r \frac{(\nu_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} \overset{as}{\sim} \chi^2(r-1)$ . Поэтому считаем, что  $W_{200} = \sum_{i=1}^2 \frac{(\nu_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} \sim \chi^2(1)$ , где  $p_1 = P(\{X_j = 1\}) = 0.5$  и  $p_2 = P(\{X_j = 0\}) = 0.5$ .

$$\nu_1 = 105, \nu_2 = 95.$$

$$W_{200,=01;} = \frac{(105 - 200 \cdot 0.5)^2}{200 \cdot 0.5} + \frac{(95 - 200 \cdot 0.5)^2}{200 \cdot 0.5} = \frac{50}{100} = 0.5.$$

$$\chi^2_{:\textcircled{a}} = 6.63.$$

**Задача 2.** Игральный кубик подбрасывался 1389 раз. В следующей таблице приведено, сколько раз выпала каждая грань.

1	2	3	4	5	6
234	229	240	219	236	231

Проверьте гипотезу о том, что кубик правильный. Уровень значимости  $\alpha = 0.05$ .

**Решение.**  $X_j(\Omega) = S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\};$

$$S_1 = \{1\}; S_2 = \{2\}; S_3 = \{3\}; S_4 = \{4\}; S_5 = \{5\}; S_6 = \{6\}; r = 6.$$

$$n = 1389.$$

Основная гипотеза означает, что

$$p_i = P(\{X_j = i\}) = \frac{1}{6} \quad (i = \overline{1, 6}).$$

Известно, что  $W_n = \sum_{i=1}^r \frac{(\nu_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} \stackrel{as}{\sim} \chi^2(r-1)$ .

Поэтому считаем, что  $W_{1389} = \sum_{i=1}^6 \frac{(\nu_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} \sim \chi^2(5)$ .

$$\nu_1 = 234; \nu_2 = 229; \nu_3 = 240; \nu_4 = 219; \nu_5 = 236; \nu_6 = 231.$$

$$W_{1389, =01,;} = \sum_{i=1}^6 \frac{(\nu_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} = 1.12.$$

$$\chi^2_{;\textcircled{a}} = 11.07.$$

Поскольку  $W_{1389, =01,;} = 1.12 \in [0; 11.07]$ , то основная гипотеза  $H_0 : p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}$  не отвергается.

**Задача 3.** Вася Сидоров утверждает, что ходит в кино в два раза чаще, чем в спортзал, а в спортзал в два раза чаще, чем в театр. За последние полгода он 10 раз был в театре, 17 раз – в спортзале и 39 раз в кино. Правдоподобно ли Васино утверждение?

**Задача 4.** Монета подбрасывалась 4040 раз, при этом герб выпал 2048 раз. Согласуются ли эти данные с гипотезой о симметричности монеты на уровне значимости  $\alpha = 0.1$ ?

**Задача 5.** Монета подбрасывалась 400 раз, при этом герб выпал 209 раз. Согласуются ли эти данные с гипотезой о симметричности монеты на уровне значимости  $\alpha = 0.01$ ?

**Задача 6.** Пусть задана реализация случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$  из распределения Бернулли с неизвестной вероятностью “успеха”  $p$ , т.е.  $P(\{X_j = l\}) = p^l \cdot (1-p)^{1-l}$ , ( $l = 0, 1$ ). Известно, что реализация случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$  содержит 192 нуля и 208 единиц. Используя  $\chi^2$ -критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости  $\alpha = 0.05$  проверить гипотезу  $H_0 : p = 0.5$  против альтернативной гипотезы  $H_1 : p \neq 0.5$ .

**Задача 7.** Пусть задана реализация случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$  из распределения Бернулли с неизвестной вероятностью “успеха”  $p$ , т.е.  $P(\{X_j = l\}) = p^l \cdot (1 - p)^{1-l}$ ,  $(l = 0, 1)$ . Известно, что реализация случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$  содержит 251 ноль и 149 единиц. Используя  $\chi^2$ -критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости  $\alpha = 0.01$  проверить гипотезу  $H_0 : p = 0.4$  против альтернативной гипотезы  $H_1 : p \neq 0.4$ .

**Задача 8.** Пусть задана реализация случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$  из распределения Бернулли с неизвестной вероятностью “успеха”  $p$ , т.е.  $P(\{X_j = l\}) = p^l \cdot (1 - p)^{1-l}$ ,  $(l = 0, 1)$ . Известно, что реализация случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$  содержит 359 нулей и 41 единицу. Используя  $\chi^2$ -критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости  $\alpha = 0.01$  проверить гипотезу  $H_0 : p = 0.2$  против альтернативной гипотезы  $H_1 : p \neq 0.2$ .

**Задача 9.** Пусть задана реализация случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$  из распределения Бернулли с неизвестной вероятностью “успеха”  $p$ , т.е.  $P(\{X_j = l\}) = p^l \cdot (1 - p)^{1-l}$ ,  $(l = 0, 1)$ . Известно, что реализация случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$  содержит 359 нулей и 41 единицу. Используя  $\chi^2$ -критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости  $\alpha = 0.01$  проверить гипотезу  $H_0 : p = 0.1$  против альтернативной гипотезы  $H_1 : p \neq 0.1$ .

**Задача 10.** Пусть задана реализация случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$  из биномиального распределения с неизвестной вероятностью “успеха”  $p$  и числом испытаний  $k = 3$ , т.е.  $P(\{X_j = l\}) = C_k^l \cdot p^l \cdot (1 - p)^{k-l}$ ,  $(l = \overline{0, 3})$ . Известно, что реализация случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$  содержит 47 нулей, 163 единицы, 148 двоек и 42 тройки. Используя  $\chi^2$ -критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости  $\alpha = 0.05$  проверить гипотезу  $H_0 : p = 0.5$  против альтернативной гипотезы  $H_1 : p \neq 0.5$ .



**Решение.**  $X_j(\Omega) = S = \{0; 1; 2; 3\};$

$$S_1 = \{0\}; S_2 = \{1\}; S_3 = \{2\}; S_4 = \{3\}; r = 4.$$

$$n = 400 = 47 + 163 + 148 + 42.$$

Основная гипотеза означает, что

$$p_1 = P(\{X_j = 0\}) = C_3^0 \cdot 0.5^0 \cdot (1 - 0.5)^{3-0} = 0.125;$$

$$p_2 = P(\{X_j = 1\}) = C_3^1 \cdot 0.5^1 \cdot (1 - 0.5)^{3-1} = 0.375;$$

$$p_3 = P(\{X_j = 2\}) = C_3^2 \cdot 0.5^2 \cdot (1 - 0.5)^{3-2} = 0.375;$$

$$p_4 = P(\{X_j = 3\}) = C_3^3 \cdot 0.5^3 \cdot (1 - 0.5)^{3-3} = 0.125.$$

Известно, что  $W_n = \sum_{i=1}^r \frac{(\nu_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} \overset{as}{\sim} \chi^2(r - 1).$

Поэтому считаем, что  $W_{400} = \sum_{i=1}^4 \frac{(\nu_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} \sim \chi^2(3).$

$$\nu_1 = 47; \nu_2 = 163; \nu_3 = 148; \nu_4 = 42.$$

$$W_{400, =01,} = \sum_{i=1}^4 \frac{(\nu_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} =$$

$$= \frac{(47 - 400 \cdot 0.125)^2}{400 \cdot 0.125} + \frac{(163 - 400 \cdot 0.375)^2}{400 \cdot 0.375} + \frac{(148 - 400 \cdot 0.375)^2}{400 \cdot 0.375} + \frac{(42 - 400 \cdot 0.125)^2}{400 \cdot 0.125}$$

$$\chi^2_{\text{@}} = 7.81.$$

Поскольку  $W_{400, =01,} = 2.61 \in [0; 7.81]$ , то основная гипотеза  $H_0 : p = 0.5$  не отвергается.

**Задача 11.** Пусть задана реализация случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$  из биномиального распределения с неизвестной вероятностью “успеха”  $p$  и числом испытаний  $k = 3$ , т.е.  $P(\{X_j = l\}) = C_k^l \cdot p^l \cdot (1 - p)^{k-l}$ , ( $l = \overline{0, 3}$ ). Известно, что реализация случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$  содержит 55 нулей, 139 единиц, 147 двоек и 59 троек. Используя  $\chi^2$ -критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости  $\alpha = 0.05$  проверить гипотезу  $H_0 : p = 0.5$  против альтернативной гипотезы  $H_1 : p \neq 0.5$ .

**Задача 12.** Пусть задана реализация случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$  из биномиального распределения с неизвестной вероятностью “успеха”  $p$  и числом испытаний  $k = 3$ , т.е.  $P(\{X_j = l\}) = C_k^l \cdot p^l \cdot (1 - p)^{k-l}$ , ( $l = \overline{0, 3}$ ). Известно, что реализация случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$  содержит 10 нулей, 73 единицы, 174 двойки и 143 тройки. Используя  $\chi^2$ -критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости  $\alpha = 0.05$  проверить гипотезу  $H_0 : p = 0.5$  против альтернативной гипотезы  $H_1 : p \neq 0.5$ .

**Решение.**  $X_j(\Omega) = S = \{0; 1; 2; 3\}$ ;

$$S_1 = \{0\}; S_2 = \{1\}; S_3 = \{2\}; S_4 = \{3\}; r = 4.$$

$$n = 400 = 10 + 73 + 174 + 143.$$

Основная гипотеза означает, что

$$p_1 = P(\{X_j = 0\}) = C_3^0 \cdot 0.5^0 \cdot (1 - 0.5)^{3-0} = 0.125;$$

$$p_2 = P(\{X_j = 1\}) = C_3^1 \cdot 0.5^1 \cdot (1 - 0.5)^{3-1} = 0.375;$$

$$p_3 = P(\{X_j = 2\}) = C_3^2 \cdot 0.5^2 \cdot (1 - 0.5)^{3-2} = 0.375;$$

$$p_4 = P(\{X_j = 3\}) = C_3^3 \cdot 0.5^3 \cdot (1 - 0.5)^{3-3} = 0.125.$$

Известно, что  $W_n = \sum_{i=1}^r \frac{(\nu_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} \stackrel{as}{\sim} \chi^2(r - 1)$ .

Поэтому считаем, что  $W_{400} = \sum_{i=1}^4 \frac{(\nu_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} \sim \chi^2(3)$ .

$$\nu_1 = 10; \nu_2 = 73; \nu_3 = 174; \nu_4 = 143.$$

$$W_{400, =01; .} = \sum_{i=1}^4 \frac{(\nu_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} =$$

$$= \frac{(10 - 400 \cdot 0.125)^2}{400 \cdot 0.125} + \frac{(73 - 400 \cdot 0.375)^2}{400 \cdot 0.375} + \frac{(174 - 400 \cdot 0.375)^2}{400 \cdot 0.375} + \frac{(143 - 400 \cdot 0.125)^2}{400 \cdot 0.125}$$

$$\chi_{;\textcircled{a}}^2 = 7.81.$$

Поскольку  $W_{400, =01; .} = 248 \notin [0; 7.81]$ , то основная гипотеза  $H_0 : p = 0.5$  отвергается в пользу альтернативной гипотезы  $H_1 : p \neq 0.5$ .

**Задача 13.** Пусть задана реализация случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$  из биномиального распределения с неизвестной вероятностью “успеха”  $p$  и числом испытаний  $k = 3$ , т.е.  $P(\{X_j = l\}) = C_k^l \cdot p^l \cdot (1-p)^{k-l}$ ,  $(l = \overline{0, 3})$ . Известно, что реализация случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$  содержит 81 ноль, 162 единицы, 132 двойки и 25 троек. Используя  $\chi^2$ -критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости  $\alpha = 0.05$  проверить гипотезу  $H_0 : p = 0.5$  против альтернативной гипотезы  $H_1 : p \neq 0.5$ .

**Задача 14.** Пусть задана реализация случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$  из биномиального распределения с неизвестной вероятностью “успеха”  $p$  и числом испытаний  $k = 3$ , т.е.  $P(\{X_j = l\}) = C_k^l \cdot p^l \cdot (1-p)^{k-l}$ ,  $(l = \overline{0, 3})$ . Известно, что реализация случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$  содержит 81 ноль, 162 единицы, 132 двойки и 25 троек. Используя  $\chi^2$ -критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости  $\alpha = 0.05$  проверить гипотезу  $H_0 : p = 0.4$  против альтернативной гипотезы  $H_1 : p \neq 0.4$ .

**Задача 15.** [Источник случайных чисел: Шведов А.С., ТВиМС-2, стр. 213] Пусть задана реализация случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$  объема  $n = 200$  наблюдений. И пусть заданы множества  $S_1 = [0; \frac{1}{8}]$ ;  $S_i = (\frac{i-1}{8}; \frac{i}{8}]$ ,  $i = \overline{2, 8}$ .

В следующей таблице указано число элементов выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , попавших в каждое множество  $S_i$ ,  $i = \overline{1, 8}$ .

$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$S_8$
29	22	24	22	27	22	26	28

Используя  $\chi^2$ -критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости  $\alpha = 0.01$  проверить гипотезу о том, что элементы случайной выборки имеют равномерное на отрезке  $[0; 1]$  распределение.

**Задача 16.** [Источник случайных чисел: датчик excel] Пусть задана реализация случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$

объема  $n = 200$  наблюдений. И пусть заданы множества  $S_1 = [0; \frac{1}{8}]$ ;  $S_i = (\frac{i-1}{8}; \frac{i}{8}]$ ,  $i = \overline{2, 8}$ .

В следующей таблице указано число элементов выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , попавших в каждое множество  $S_i$ ,  $i = \overline{1, 8}$ .

$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$S_8$
30	34	21	20	24	22	21	28

Используя  $\chi^2$ -критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости  $\alpha = 0.01$  проверить гипотезу о том, что элементы случайной выборки имеют равномерное на отрезке  $[0; 1]$  распределение.

**Решение.**  $r = 8; n = 200$ .

Основная гипотеза означает, что

$$p_i = P(\{X_j \in S_i\}) = \frac{1}{8} \quad (i = \overline{1, 8}).$$

Известно, что  $W_n = \sum_{i=1}^r \frac{(\nu_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} \stackrel{as}{\sim} \chi^2(r-1)$ .

Поэтому считаем, что  $W_{200} = \sum_{i=1}^4 \frac{(\nu_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} \sim \chi^2(7)$ .

$$\nu_1 = 30; \nu_2 = 34; \nu_3 = 21; \nu_4 = 20; \nu_5 = 24; \nu_6 = 22; \nu_7 = 21; \nu_8 = 28.$$

$$W_{200, =01; .} = \sum_{i=1}^8 \frac{(\nu_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} =$$

$$= \frac{(30-25)^2}{25} + \frac{(34-25)^2}{25} + \frac{(21-25)^2}{25} + \frac{(20-25)^2}{25} + \\ + \frac{(24-25)^2}{25} + \frac{(22-25)^2}{25} + \frac{(21-25)^2}{25} + \frac{(28-25)^2}{25} = 7.28$$

$$\chi_{;\oplus}^2 = 18.47.$$

Поскольку  $W_{200, =01; .} = 7.28 \in [0; 18.47]$ , то основная гипотеза о равномерности распределения на отрезке  $[0; 1]$  не может быть отвергнута.

**Задача 17.** [Источник случайных чисел: Шведов А.С., ТВиМС-2, стр. 213] Пусть задана реализация случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$  объема  $n = 200$  наблюдений. И пусть заданы множества  $S_1 = [0; \frac{1}{13}]$ ;  $S_i = (\frac{i-1}{13}; \frac{i}{13}]$ ,  $i = \overline{2, 13}$ .

В следующей таблице указано число элементов выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , попавших в каждое множество  $S_i$ ,  $i = \overline{1, 13}$ .

$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$S_8$	$S_9$	$S_{10}$
15	21	12	13	16	13	15	19	10	21

Используя  $\chi^2$ –критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости  $\alpha = 0.01$  проверить гипотезу о том, что элементы случайной выборки имеют равномерное на отрезке  $[0; 1]$  распределение.

**Задача 18.** [Источник случайных чисел: датчик excel] Пусть задана реализация случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$  объема  $n = 200$  наблюдений. И пусть заданы множества  $S_1 = [0; \frac{1}{13}]$ ;  $S_i = (\frac{i-1}{13}; \frac{i}{13}]$ ,  $i = \overline{2, 13}$ .

В следующей таблице указано число элементов выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , попавших в каждое множество  $S_i$ ,  $i = \overline{1, 13}$ .

$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$S_8$	$S_9$	$S_{10}$
20	20	16	16	14	10	15	16	15	13

Используя  $\chi^2$ –критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости  $\alpha = 0.01$  проверить гипотезу о том, что элементы случайной выборки имеют равномерное на отрезке  $[0; 1]$  распределение.

**Задача 19.** [Источник случайных чисел: Шведов А.С., ТВиМС-2, стр. 213] Пусть задана реализация случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$  объема  $n = 200$  наблюдений. И пусть заданы множества  $S_1 = [0; \frac{1}{10}]$ ;  $S_i = (\frac{i-1}{10}; \frac{i}{10}]$ ,  $i = \overline{2, 10}$ .

В следующей таблице указано число элементов выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , попавших в каждое множество  $S_i$ ,  $i = \overline{1, 10}$ .

$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$S_8$	$S_9$	$S_{10}$
21	22	14	22	18	25	15	22	21	20

Используя  $\chi^2$ -критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости  $\alpha = 0.01$  проверить гипотезу о том, что элементы случайной выборки имеют равномерное на отрезке  $[0; 1]$  распределение.

**Задача 20.** [Источник случайных чисел: датчик excel] Пусть задана реализация случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$  объема  $n = 200$  наблюдений. И пусть заданы множества  $S_1 = [0; \frac{1}{10}]$ ;  $S_i = (\frac{i-1}{10}; \frac{i}{10}]$ ,  $i = \overline{2, 10}$ .

В следующей таблице указано число элементов выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , попавших в каждое множество  $S_i$ ,  $i = \overline{1, 10}$ .

$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$S_8$	$S_9$	$S_{10}$
26	26	18	16	19	19	19	14	19	24

Используя  $\chi^2$ -критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости  $\alpha = 0.01$  проверить гипотезу о том, что элементы случайной выборки имеют равномерное на отрезке  $[0; 1]$  распределение.

**Задача 21.** [Источник случайных чисел: Шведов А.С., ТВиМС-2, стр. 213] Пусть задана реализация случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$  объема  $n = 200$  наблюдений. И пусть заданы множества  $S_1 = [0; \frac{1}{12}]$ ;  $S_i = (\frac{i-1}{12}; \frac{i}{12}]$ ,  $i = \overline{2, 12}$ .

В следующей таблице указано число элементов выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , попавших в каждое множество  $S_i$ ,  $i = \overline{1, 12}$ .

$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$S_8$	$S_9$	$S_{10}$	$S_{11}$	$S_{12}$
17	22	12	17	14	15	22	13	14	17	18	18

Используя  $\chi^2$ -критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости  $\alpha = 0.01$  проверить гипотезу о том, что элементы случайной выборки имеют равномерное на отрезке  $[0; 1]$  распределение.

**Задача 22.** [Источник случайных чисел: датчик excel] Пусть задана реализация случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$  объема  $n = 200$  наблюдений. И пусть заданы множества  $S_1 = [0; \frac{1}{12}]$ ;  $S_i = (\frac{i-1}{12}; \frac{i}{12}]$ ,  $i = \overline{2, 12}$ .

В следующей таблице указано число элементов выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , попавших в каждое множество  $S_i$ ,  $i = \overline{1, 12}$ .

$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$S_8$	$S_9$	$S_{10}$
21	21	22	13	10	18	18	15	13	9

Используя  $\chi^2$ -критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости  $\alpha = 0.01$  проверить гипотезу о том, что элементы случайной выборки имеют равномерное на отрезке  $[0; 1]$  распределение.

**Задача 23.** [Источник случайных чисел: датчик excel] Пусть задана реализация случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$  объема  $n = 500$  наблюдений. И пусть заданы множества  $S_1 = (-\infty; -3]$ ;  $S_{10} = (3; +\infty)$ ;  $S_i = (-3 + 6 \cdot \frac{i-2}{8}; -3 + 6 \cdot \frac{i-1}{8}]$ ,  $i = \overline{2, 9}$ .

В следующей таблице указано число элементов выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , попавших в каждое множество  $S_i$ ,  $i = \overline{1, 10}$ .

$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$S_8$	$S_9$	$S_{10}$
0	83	145	132	73	24	3	3	0	3

Используя  $\chi^2$ -критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости  $\alpha = 0.01$  проверить гипотезу о том, что элементы случайной выборки имеют нормальное стандартное распределение.

Для удобства расчетов ниже приведена следующая информация.

Пусть  $p_i = P(\{X_j \in S_i\})$  ( $i = \overline{1, 10}$ ). Значения гипотетических вероятностей  $p_i$  ( $i = \overline{1, 10}$ ) приведены в следующей таблице.

$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$	$p_7$	$p_8$	$p_9$	$p_{10}$
0.0013	0.0108	0.0545	0.1598	0.2733	0.2733	0.1598	0.0545	0.0108	0.0013

**Задача 24.** [Источник случайных чисел: датчик excel] Пусть задана реализация случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$  объема  $n = 500$  наблюдений. И пусть заданы множества  $S_1 = (-\infty; -3]$ ;  $S_8 = (3; +\infty)$ ;  $S_i = (-3 + 6 \cdot \frac{i-2}{6}; -3 + 6 \cdot \frac{i-1}{6}]$ ,  $i = \overline{2, 7}$ .



В следующей таблице указано число элементов выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , попавших в каждое множество  $S_i$ ,  $i = \overline{1, 8}$ .

$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$S_8$
0	7	82	176	168	57	7	3

Используя  $\chi^2$ -критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости  $\alpha = 0.01$  проверить гипотезу о том, что элементы случайной выборки имеют нормальное стандартное распределение.

Для удобства расчетов ниже приведена следующая информация.

Пусть  $p_i = P(\{X_j \in S_i\})$  ( $i = \overline{1, 8}$ ). Значения гипотетических вероятностей  $p_i$  ( $i = \overline{1, 8}$ ) приведены в следующей таблице.

$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$	$p_7$	$p_8$
0.0013	0.0214	0.1359	0.3413	0.3413	0.1359	0.0214	0.0013

**Задача 25.** [Источник случайных чисел: датчик excel]

Пусть задана реализация случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$  объема  $n = 500$  наблюдений. И пусть заданы множества  $S_1 = (-\infty; -3]$ ;  $S_6 = (3; +\infty)$ ;  $S_i = (-3 + 6 \cdot \frac{i-2}{4}; -3 + 6 \cdot \frac{i-1}{4}]$ ,  $i = \overline{2, 5}$ .

В следующей таблице указано число элементов выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , попавших в каждое множество  $S_i$ ,  $i = \overline{1, 6}$ .

$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$
0	37	228	205	27	3

Используя  $\chi^2$ -критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости  $\alpha = 0.01$  проверить гипотезу о том, что элементы случайной выборки имеют нормальное стандартное распределение.

Для удобства расчетов ниже приведена следующая информация.

Пусть  $p_i = P(\{X_j \in S_i\})$  ( $i = \overline{1, 6}$ ). Значения гипотетических вероятностей  $p_i$  ( $i = \overline{1, 6}$ ) приведены в следующей таблице.

$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$
0.0013	0.0654	0.4331	0.4331	0.0654	0.0013

**Решение.**  $r = 6; n = 500$ .

Известно, что  $W_n = \sum_{i=1}^r \frac{(\nu_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} \overset{as}{\sim} \chi^2(r - 1)$ .

Поэтому считаем, что  $W_{500} = \sum_{i=1}^6 \frac{(\nu_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} \sim \chi^2(5)$ .

$$\nu_1 = 0; \nu_2 = 37; \nu_3 = 228; \nu_4 = 205; \nu_5 = 27; \nu_6 = 3.$$

$$W_{500, =01;.} = \sum_{i=1}^6 \frac{(\nu_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} = 11.46$$

$$\chi^2_{;\textcircled{a}} = 15.08.$$

Поскольку  $W_{500, =01;.} = 11.46 \in [0; 15.08]$ , то основная гипотеза  $H_0$  не может быть отвергнута.