Команда: ______________________________

ЭРА I

1. Исследуя образцы грунта планеты Броуни, межгалактическая экспедиция обнаружила в нем простейшую, но очень интересную одноклеточную форму жизни. От одной материнской клетки рождаются два потомка, причем сразу после рождения они начинают независимо двигаться вдоль одной и той же прямой и могут без проблем проходить друг через друга. Собрав статистику их передвижений, исследователи поняли, что X_t, положение клетки относительно места рождения в момент ее жизни t, распределено межгалактически нормально: $X_t \sim \mathcal{N}(0; t)$. Как далеко друг от друга в среднем оказываются потомки в момент t?

   Подсказка: *межгалактическое нормальное распределение совпадает с земным и имеет плотность* $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

2. В Солнечной системе есть по крайней мере 5 карликовых планет: Плутон (до 2006 года считавшийся девятой планетой), Макемаке, Хаумеа, Эрида и Церера. Допустим, что Незнайка думает, что расстояние между Макемаке и Эридой равно 1; X — расстояние между Макемаке и Церерой — равномерно распределенная на отрезке от 0 до 2 случайная величина; Y — расстояние между Эридой и Церерой — экспоненциальная случайная величина с параметром $\lambda = 1$. Также Незнайка думает, что X и Y независимы. Найдите в представлении Незнайки вероятность того, что отрезки с длинами X, Y и 1 образуют треугольник.

3. В системе Акаика-02 находится n планет. Всю жизнь Пульпик путешествует с одной планеты на другую. При этом путь его лежит всегда через космическую станцию. Там он равновероятно выбирает новую планету, отправляется на её исследование и возвращается обратно. Пульпик начинает свою одиссею с космической станции. Пусть $A_0^{(n)}$ — это количество посещений космической станции через n шагов, а $A_i^{(n)}$ — количество посещений i-й планеты.

   1. Найдите $\operatorname{plim}_{n\to\infty} \frac{A_0^{(n)}}{n}$
   2. Найдите $\operatorname{plim}_{n\to\infty} \frac{A_i^{(n)}}{n}$

НЕЛЬЗЯ НЕДООЦЕНИВАТЬ СИНИЕ ЗАДАЧИ!

Команда: ____________________

ЭРА II

1. Пусть на Марсе живет n семей, у каждой марсианской семьи есть некоторое количество марсианских детишек. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — количество марсианских детишек в марсианских семьях — независимые одинаково распределенные случайные величины. Пусть $\vartheta_i = \dfrac{\xi_i}{\sum_{j=1}^{n} \xi_j}$ — уровень счастья i-й марсианской семьи. Найдите:
   1. Математическое ожидание счастья i-й семьи.
   2. Найдите $\mathbb{C}\mathrm{orr}(\vartheta_i, \vartheta_j)$

2. Пусть на Марсе по-прежнему живет n семей, у каждой марсианской семьи есть некоторое количество марсианских детишек. Y_i — средний рост ребенка в i-ой марсианской семье – независимые равномерно распределенные на отрезке $[0; 1]$ случайные величины. Марсианские ученые всерьез озаботились проблемой старения роста марсианского населения, но не знали, с чего начать свои исследования, поэтому сперва решили посчитать следующую величину: $\varepsilon_n = \min\{Y_1, \ldots, Y_n\}$.
   1. Найдите $\mathbb{P}(\varepsilon_n \leq x)$
   2. Найдите $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(n\varepsilon_n \leq x)$

3. Астроном смотрит на случайно выбираемую звезду. Её яркость — случайная величина ξ. Число A — некоторая константа, выдуманная учеными для упрощения жизни, а именно для того, чтобы минимизировать выражение $\mathbb{E}(|\xi - A|)$. Найдите, чему равно A.

НЕЛЬЗЯ НЕДООЦЕНИВАТЬ СИНИЕ ЗАДАЧИ!!

Команда: ____________________

ЭРА III

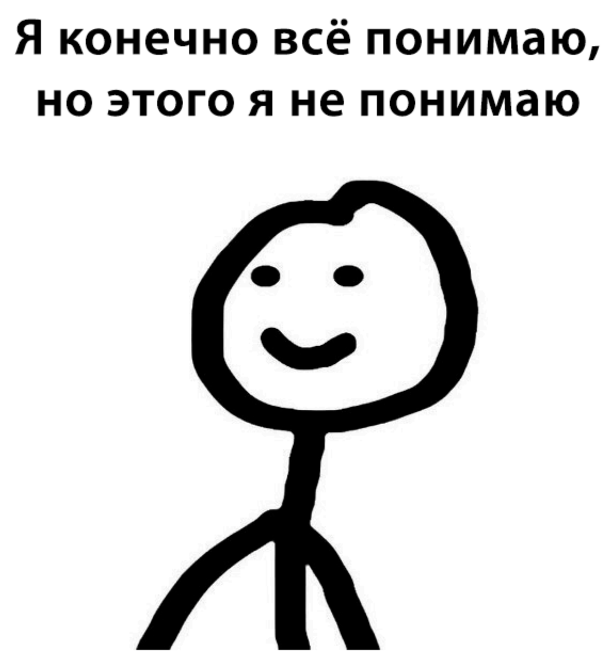
1. Между планетами Кин и Дза существует небольшой торговый путь, по которому регулярно следуют грузовые шаттлы. Производство в секторе небольшое, так что больше одного грузового шаттла на пути не бывает. В неизвестный заранее момент пути торгового корабля в произвольном месте маршрута появляется пиратский звездолёт с излучателем, способным дистанционно и мгновенно похитить груз. Галактическая полиция на планете Кин тут же получает сигнал о присутствии пиратского корабля и может также мгновенно остановить ограбление, но только если расстояние от нее до звездолёта пиратов или шаттла торговцев меньше, чем между шаттлом торговцев и звездолётом пиратов. Что случается чаще — ограбления или спасения кораблей? Покажите формально.

2. Пусть имеется последовательность случайных величин $X_1, \dots, X_n$, где X_i равновероятно принимает значения $1, 2, \dots, 100$. Пусть $A_0 = \varnothing$, тогда с вероятностью $1/3$: $A_n = A_{n-1} \backslash X_n$ и с вероятностью $2/3$: $A_n = A_{n-1} \cup X_n$.

    1. Найдите математическое ожидание мощности множества A_n
    2. Найдите $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|A_n|)$

3. Пульпик после долгих скитаний решил заняться наукой на планете Кондисиус. Однажды во время научных изысканий ему повстречались случайные матричные операторы. Но он никак не может посчитать, чему равно математическое ожидание длины отображенного вектора. ПОМОГИТЕ ПУЛЬПИКУ! Пусть $A_{s\times s}$ это случайная матрица, где каждый элемент имеет нормальное распределение с параметрами 0 и $1/s$. Пусть имеется некоторый вектор $v_{s\times 1}$. Докажите, что $\mathbb{E}(||Av||^2) = ||v||^2$.

Когда увидел задачу про Пульпика:



НЕЛЬЗЯ НЕДООЦЕНИВАТЬ СИНИЕ ЗАДАЧИ!!!