Команда: ______________________________

Восьминогий Кракен. У Кракена 8 ног-шупалец. Если отрубить одно щупальце, то в замен него с вероятностью $1/4$ вырастает новое; с вероятностью $1/4$ вырастает два новых; с вероятностью $1/2$, слава Океану, не вырастает ничего.

Против Кракена бьётся сам Капитан! Он наносит точные удары и безупречно умело уворачивается от ударов Кракена.

1. Какова вероятность того, что Капитан победит, отрубив ровно 10 щупалец?
2. Какова вероятность того, что бой Кракена и Капитана продлится вечно?
3. Сколько щупалец в среднем отрубит Капитан прежде чем победит?

Если отрублено 10 щупалец, значит либо был один удар породивший два новых щупальца, либо было два удара, породивших по одному новому, а все остальные удары не порождали новых щупалец.

Искомая вероятность равна: $8 \cdot 0.5^9 \cdot 0.25^1 + C_8^2 0.5^8 0.25^2$.

Вероятность вечного боя равна нулю. Достаточно доказать, что с вероятностью один за конечное время побеждается одноногий Кракен. А эта вероятность удовлетворяет уравнению: $p = \frac{1}{4}p + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}1$. Единственный осмысленный корень у этого уравнения — 1.

Замечаем, что на победу над k-шупальцевым Кракеном уходим в k раз больше ударов в среднем чем на победу на 1-щупальцевым. Отсюда:

$$e_1 = 1 + 0.5 \cdot 0 + 0.25 \cdot e_1 + 0.25 \cdot 2e_1$$

Решаем, получаем $e_1 = 4$ и $e_8 = 32$

Команда: ______________________________

Разбавленный ром. Пират Злопамятный Джо очень любит неразбавленный ром. Из-за того, что он много пьёт, у него проблемы с памятью, и он помнит не больше, чем три последних пинты. Хозяин таверны с вероятностью 1/4 разбавляет каждую подаваемую пинту рома. Если по ощущением Джо половина выпитых пинт или больше была разбавлена, то он разносит таверну к чертям собачьим.

1. Какова вероятность того, что хозяин таверны не успеет подать Джо третью пинту рома?
2. Сколько в среднем пинт выпьет Джо, прежде чем разнесёт таверну?

Либо первая пинта разбавлена, либо первая неразбавлена, а вторая разбавлена, то есть

$$0.25 + 0.75 \cdot 0.25 = 0.4375$$

Рисуем граф:
Составляем систему (индекс — количество выпитых неразбавленных пинт):

$$\begin{cases} e_0 = \frac{1}{4} + \frac{3}{16}2 + \frac{9}{16}(2 + e_2) \\ e_2 = 1 + \frac{3}{4}e_2 + \frac{1}{4}e_0 \end{cases}$$

Находим $e_0 = 64/7 \approx 9$

Команда: ______________________________

XY **в степени** Z. Чтобы поступить на службу Её Величества, пиратам предлагается следующая задача. Случайные величины X, Y и Z равномерны на отрезке $[0;1]$ и независимы.

1. Найдите функцию распределения случайной величины $-\ln X$
2. Найдите функцию распределения случайной величины $-(\ln X + \ln Y)$
3. Найдите функцию распределения случайной величины $-Z(\ln X + \ln Y)$
4. Какое распределение имеет случайная величина $(XY)^Z$?

Начало из домашки! Для $t > 0$:

$$\mathbb{P}(-\ln X \leq t) = \mathbb{P}(\ln X > -t) = \mathbb{P}(X > e^{-t}) = 1 - e^{-t}$$

Итого,

$$F_{-\ln X}(t) = \begin{cases} 0,\ t < 0 \\ 1 - e^{-t},\ t \geq 0 \end{cases}$$

Из геометрических соображений легко найти $\mathbb{P}(XY < a)$ для $a \in (0;1)$:

$$\mathbb{P}(XY < a) = a + \int_a^1 \frac{a}{x}\,dx = a - a\ln a$$

Переходим ко второму пункту, для $t > 0$:

$$\mathbb{P}(-(\ln X + \ln Y) < t) = \mathbb{P}(XY > e^{-t}) = 1 - e^{-t} - te^{-t}$$

Итого:

$$F_{-\ln X - \ln Y}(t) = \begin{cases} 0,\ t < 0 \\ 1 - e^{-t} - te^{-t},\ t \geq 0 \end{cases}$$

После дифференциирования получаем функцию плотности для $S = -\ln X - \ln Y$:

$$f_S(s) = \begin{cases} 0,\ s < 0 \\ se^{-s},\ s \geq 0 \end{cases}$$

Приближаемся к финальной вероятности:

$$\mathbb{P}(ZS > t) = \int_t^\infty \int_{t/s}^1 se^{-s}\,dz\,ds = \int_t^\infty (s-t)\cdot e^{-s}\,ds = \ldots = e^{-t}$$

Сравниваем результат с первым пунктом и приходим к выводу, что величина $(XY)^Z$ имеет равномерное распределение на $[0;1]$.

Команда: ______________________________

Тортики. Пираты очень любят тортики и праздновать день рождения! Если хотя бы у одного пирата на корабле день рождения, то все, включая капитана, празднуют и кушают тортики. Корабль в праздничный день дрейфует под действием ветра и не факт, что в нужном направлении.

1. Сколько пиратов нужно нанять капитану, чтобы ожидаемое количество праздничных дней было равно 100?
2. Сколько пиратов нужно нанять капитану, чтобы максимизировать ожидаемое количество рабочих пирато-дней (произведение числа пиратов на число рабочих дней)?

Если нанято n пиратов, то вероятность, того, что в конкретный день все работают равна $(364/365)^n$. Следовательно, ожидаемое количество праздничных дней равно $365(1-(364/365)^n)$.

Решаем уравнение

$$1-(364/365)^n = 100/365$$

Получаем,

$$n = \frac{\ln 265 - \ln 365}{\ln 364 - \ln 365} \approx 117$$

Ожидаемое количество рабочих пирато-дней равно: $365n(364/365)^n$.

Получаем

$$n^* = 1/(\ln 365 - \ln 364) \approx 364$$

Команда: ______________________________

Девятый вал. На побережье пиратского острова одна за одной набегают волны. Высота каждой волны — равномерная на $[0;1]$ случайная величина. Высоты волн независимы. Пираты называют волну «большой», если она больше предыдущей и больше следующей. Пираты называют волну «рекордной», если она больше всех предыдущих волн от начала наблюдения. Обозначим события $B_i = \{i\text{-ая волна была большой}\}$ и $R_i = \{i\text{-ая волна была рекордной}\}$.

1. Найдите $\mathbb{P}(R_{100}), \mathbb{P}(B_{100})$
2. Капитан насчитал 100 волн. Сколько в среднем из них были «рекордными»?
3. Найдите $\mathbb{P}(R_{99}|R_{100}), \mathbb{P}(R_{100}|B_{100})$

1. $\mathbb{P}(R_{100}) = 1/100$ (максимум из 100 величин должен плюхнуться на сотое место), $\mathbb{P}(B_{100}) = 1/3$ (максимум из трёх величин должен плюхнуться на второе место)
2. $\mathbb{E}(X) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{100} \approx \ln 100 \approx 4.6$. Т.к. $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$ и $\mathbb{E}(X_i) = 1/i$.
3. $\mathbb{P}(R_{99}|R_{100}) = 1/99, \mathbb{P}(R_{100}|B_{100}) = 3/101$

   Для проверки: $\mathbb{P}(R_{99} \cap R_{100}) = 98!/100!$ ($100!$ — всего перестановок, $98!$ — первые 98 можно переставлять свободно, а в конце должны идти второй наибольшое и наибольшее). $\mathbb{P}(R_{100} \cap B_{100}) = 1/101$ (максимум из 101 числа плюхнется на 100ое место).

Команда: ______________________________

Три сундука. Три пирата, Генри Рубинов, Френсис Пиастров и Эдвард Золотов играют одной командой в игру. В комнате в ряд, слева направо, стоят в случайном порядке три закрытых внешне неотличимых сундука: с рубинами, пиастрами и золотом. Общаться после начала игры они не могут, но могут заранее договориться о стратегии. Они заходят в комнату по очереди. Каждый из них может открыть два сундука по своему выбору. После каждого пирата комната возвращается уборщицей идеально точно в исходное состояние. Если Рубинов откроет коробку с рубинами, Писатров — с пиастрами, а Золотов — с золотом, то их команда выигрывает. Если хотя бы один из пиратов не найдёт свою цель, то их команда проигрывает.

1. Какова вероятность выигрыша, если все пираты пробуют открыть первый и второй сундуки?
2. Какова оптимальная стратегия?
3. Какова вероятность выигрыша при использовании оптимальной стратегии?

Если все пираты открывают первый и второй сундуки, то вероятность выигрыша равна нулю.

Оптимальная стратегия (одна из). Три пирата заранее договариваются, о названиях сундуков. Они называют эти три сундука (ещё до игры) «рубиновым», «пиастровым» и «золотым». Генри Рубинов должен начать с открытия рубинового сундука, Френсис Пиастров — с пиастрового, Эдвард Золотов — с золотого. Далее каждый пират должен открыть тот сундук, на который указывает предмет, лежащий в первом открытом им сундуке. Например, если Генри Рубинов, открыв сначала рубиновый сундук обнаруживает там пиастры, он должен открывать пиастровый сундук.

Вероятность победы при такой стратегии легко находится перебором 6 возможных вариантов и равна…Та-дам‼! $2/3$.