Шпаргалка по теории вероятностей

Добрый Ээх

17.09.2016

Характеристики случайных величин

Математическое ожидание величины R, $E(R)$

Интуитивно: среднее арифметическое значение величины при многократном повторении случайного эксперимента

Формально:

- для дискретных величин: $E(R) = \sum_r r \cdot P(R = r)$
- для непрерывных величин: $E(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} r \cdot f(r)\ dr$, где $f(r)$ — функция плотности величины R

Свойства:

- $E(R) \in \mathbb{R}$
- $E(aR + b) = aE(R) + b$
- $E(R + S) = E(R) + E(S)$

Иногда обозначается $M(R)$

Дисперсия величины R, $Var(R)$

Интуитивно: мера разброса случайной величины

Формально: $Var(R) = E((R - E(R))^2) = E(R^2) - (E(R))^2$.

Геометрический смысл: квадрат длины случайной величины

Свойства:

- $Var(R) \geq 0$
- $Var(R) = 0$ равносильно тому, что $P(R = const) = 1$
- $Var(aR + b) = a^2 Var(R)$
- $Var(R + S) = Var(R) + Var(S) + 2Cov(R, S)$
- $Var(aR + bS) = a^2 Var(R) + b^2 Var(S) + 2abCov(R, S)$
- $Var(R + S) = Var(R) + Var(S)$ если величины линейно независимы

Иногда обозначается $D(R)$

Стандартное отклонение величины R, σ_R

Интуитивно: мера разброса случайной величины

Формально: $\sigma_R = \sqrt{Var(R)}$.

Геометрический смысл: длина случайной величины

Свойства:

- $\sigma_R \geq 0$
- $\sigma_R = 0$ равносильно тому, что $P(R = const) = 1$
- $\sigma_{aR+b} = |a|\sigma_R$

Ковариация величин R и S, $Cov(R, S)$

Интуитивно: мера линейной связи величин R и S

Формально: $Cov(R, S) = E((R - E(R))(S - E(S))) = E(RS) - E(R)E(S)$.

Геометрический смысл: скалярное произведение случайных величин

Свойства:

- $Cov(R, S) \in \mathbb{R}$
- $Cov(R, S) = 0$ означает отсутствие линейной зависимости между R и S
- $Cov(R, S) = Cov(S, R)$
- $Cov(aR + b, S) = aCov(R, S)$
- $Cov(R_1 + R_2, S) = Cov(R_1, S) + Cov(R_2, S)$
- $Cov(R, S_1 + S_2) = Cov(R, S_1) + Cov(R, S_2)$

Корреляция величин R и S, $Corr(R, S)$

Интуитивно: отнормированная мера линейной связи величин R и S

Формально: $Corr(R, S) = \frac{Cov(R,S)}{\sqrt{Var(R)Var(S)}}$.

Геометрический смысл: косинус угла между случайными величинами

Свойства:

- $Corr(R, S) \in [-1; 1]$
- $Corr(R, S) = 0$ означает отсутствие линейной зависимости между R и S
- $Corr(R, S) = Corr(S, R)$
- $Corr(aR + b, S) = Corr(R, S)$ при $a > 0$

Основные распределения

Равномерное на отрезке $[a; b]$, $R \sim U[a; b]$.

Пример ситуации, где возникает: остаток при округлении чисел

Функция плотности:

$$f(r) = \begin{cases} 1/(b - a), \text{ если } r \in [a; b] \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} \tag{1}$$

Функция плотности в R: dunif(r, min = a, max = b)

Функция распределения:

$$F(r) = \begin{cases} 0, \text{ если } r < a \\ (r-a)/(b-a), \text{ если } r \in [a;b] \\ 1, \text{ если } r > b \end{cases} \quad (2)$$

Функция распределения в R: punif(r, min = a, max = b)

Свойства:

- $E(R) = (a+b)/2$
- $Var(R) = (a-b)^2/12$

Нормальное с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2, $R \sim N(\mu;\sigma^2)$.

Пример ситуации, где возникает: нахождение суммы или среднего большого количества независимых одинаково распределенных величин

Функция плотности:

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(r-\mu)^2\right) \quad (3)$$

Функция плотности в R: dnorm(r, mean = μ, sd = σ)

Функция распределения:

$$F(r) = \int_{-\infty}^{r} f(t)\, dt \quad (4)$$

Функция распределения в R: pnorm(r, mean = μ, sd = σ)

Свойства:

- $E(R) = \mu$
- $Var(R) = \sigma^2$