



1. Дед Мазай подбирает зайцев. Предположим, что длина левого уха зайца имеет экспоненциальное распределение с плотностью $f(x) = a \exp(-ax)$ при $x \geq 0$. По 100 зайцам оказалось, что $\sum x_i = 2000$.
 - (a) Найдите оценку \hat{a} методом моментов
 - (b) Оцените стандартную ошибку $se(\hat{a})$
 - (c) Постройте 90%-ый доверительный интервал для неизвестного a
 - (d) На уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверьте гипотезу $H_0: a = 15$ против $a > 15$. Найдите точное Р-значение.
2. По совету Лисы Волк опустил в прорубь хвост и поймал 100 чудо-рыб. Веса рыбин независимы и имеют распределение Вейбулла, $f(x) = 2 \exp(-x^2/a^2) \cdot x/a^2$ при $x \geq 0$. Известно, что $\sum x_i^2 = 120$.
 - (a) Найдите оценку \hat{a} методом максимального правдоподобия
 - (b) Оцените стандартную ошибку $se(\hat{a})$
 - (c) Постройте 90%-ый доверительный интервал для неизвестного a
 - (d) На уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверьте гипотезу $H_0: a = 1$ против $a > 1$. Найдите точное Р-значение.
3. [R] Как известно, Фрекен-Бок пьет коньяк по утрам и иногда видит привидения. За 110 дней имеются следующие статистические данные

Рюмок	1	2	3
Дней с привидениями	10	25	20
Дней без привидений	20	25	10

Вероятность увидеть привидение зависит от того, сколько рюмок коньяка было выпито утром, а именно, $p = \exp(a + bx)/(1 + \exp(a + bx))$, где x — количество рюмок, а a и b — неизвестные параметры.

- (a) Оцените неизвестные параметры с помощью максимального правдоподобия.
 - (b) На уровне значимости $\alpha = 0.05$ помощью теста отношения правдоподобия проверьте гипотезу о том, что одновременно $a = 0$ и $b = 0$. В чем содержательный смысл этой гипотезы? Найдите точное Р-значение.
4. Кот Васька поймал 5 воробьев, взвесил и отпустил. Предположим, что веса воробьев независимы и имеют нормальное распределение $N(\mu, \sigma^2)$. Известно, что $\sum x_i = 10$ и $\sum x_i^2 = 25$.
- (a) Постройте 90% доверительный интервал для σ^2 , симметричный по вероятности
 - (b) [R] Постройте самый короткий 90% доверительный интервал для σ^2
5. Задача о немецких танках. Всего выпущено неизвестное количество n танков. Для упрощения предположим, что на каждом танке написан его порядковый номер¹. В бою было подбиты 4 танка с номерами 2, 5, 7 и 12.
- (a) Найдите оценку общего выпуска танков n с помощью метода максимального правдоподобия
 - (b) Является ли оценка максимального правдоподобия несмещенной?
 - (c) Является ли максимум из номеров подбитых танков достаточной статистикой?
 - (d) Является ли максимум из номеров подбитых танков полной статистикой?
 - (e) Постройте с помощью оценки максимального правдоподобия несмещенную эффективную оценку неизвестного n .
6. Гражданин Фёдор решает проверить, не жульничает ли напёрсточник Афанасий, для чего предлагает Афанасию сыграть 5 партий в напёрстки. Фёдор решает, что в каждой партии будет выбирать один из трёх напёрстков наугад, не смотря на движения рук ведущего. Основная гипотеза: Афанасий честен, и вероятность правильно угадать напёрсток, под которым спрятан шарик, равна $1/3$. Альтернативная гипотеза: Афанасий каким-то образом жульничает (например, незаметно прячет шарик), так что вероятность угадать нужный напёрсток меньше, чем $1/3$. Статистический критерий: основная гипотеза отвергается, если Фёдор ни разу не угадает, где шарик.
- (a) Найдите уровень значимости критерия.
 - (b) Найдите вероятность ошибки второго рода в том случае, когда Афанасий жульничает, так что вероятность угадать нужный напёрсток равна $1/5$.
7. [R] В службе единого окна 5 клиентских окошек. В каждое окошко стоит очередь. Я встал в очередь к окошку номер 5 ровно в 15:00, передо мной 5 человек. Предположим, что время обслуживания каждого клиента — независимые экспоненциальные величины с параметром λ . Первый человек с момента моего прихода был обслужен в окошке 1 в 15:05. Второй человек с момента моего прихода был обслужен в окошке 2 в 15:10.
- (a) Оцените с помощью максимального правдоподобия параметр λ
 - (b) Оцените, сколько мне еще стоять в очереди.

¹В реальности во время Второй мировой войны при оценке количества танков «Пантера» выпущенных в феврале 1944 использовались номера колес. Двух подбитых танков оказалось достаточно, чтобы оценить выпуск в 270 танков. По немецким архивам фактический объем выпуска оказался равен 276 танков.