

Теория вероятностей

1. У тети Маши — двое детей, один старше другого. Предположим, что вероятности рождения мальчика и девочки равны и не зависят от дня недели, а пол первого и второго ребенка независимы.
 - (a) Известно, что старший ребенок — мальчик. Какова вероятность того, что у тети Маши есть ребенок-девочка?
 - (b) Известно, что хотя бы один ребенок — мальчик. Какова вероятность того, что у тети Маши есть ребенок-девочка?
 - (c) На вопрос: «А правда ли, что у вас есть сын, родившийся в пятницу?» тетя Маша ответила: «Да». Какова вероятность того, что у тети Маши есть ребенок-девочка?
2. Вася решает тест путем проставления каждого ответа наугад. В тесте 5 вопросов. В каждом вопросе 4 варианта ответа. Пусть X - число правильных ответов, Y - число неправильных ответов и $Z = X - Y$.
 - (a) Найдите $\mathbb{P}(X > 3)$
 - (b) Найдите $Var(X)$ и $Cov(X, Y)$
 - (c) Найдите $Corr(X, Z)$
3. Маша подкидывает 300 игральных кубиков. Те, что выпали не на шестёрку, она перекидывает один раз. Обозначим буквой N количество шестёрок на всех кубиках после возможных перекидываний.
 - (a) Найдите $E(N)$, $Var(N)$
 - (b) Какова примерно вероятность того, величина N лежит от 50 до 70?
 - (c) Укажите любой интервал, в который величина N попадает с вероятностью 0.9

Математическая статистика

4. Карл Магнусен сыграл 100 партий в шахматы. Из них он 40 выиграл, 30 проиграл и 30 раз сыграл вничью. Используя метод максимального правдоподобия или критерий Пирсона проверьте гипотезу о том, что все три исхода равновероятны на уровне значимости 5%.
5. Случайные величины X_1, X_2, \dots, X_{100} независимы и имеют пуассоновское распределение с неизвестным параметром λ . Известно, что $\sum X_i = 150$.
 - (a) С помощью метода максимального правдоподобия постройте оценку для λ и 95%-ый доверительный интервал.
 - (b) Предположим, что сумма X_i неизвестна, зато известно, что количество ненулевых X_i равно 20. С помощью метода максимального правдоподобия постройте оценку для λ и 95%-ый доверительный интервал.
 - (c) Являются ли полученные оценки несмещенными?
6. Известно, что X_i независимы и нормальны, $N(\mu; 900)$. Исследователь проверяет гипотезу $H_0: \mu = 10$ против $H_A: \mu = 30$ по выборке из 20 наблюдений. Критерий выглядит следующим образом: если $\bar{X} > c$, то выбрать H_A , иначе выбрать H_0 .
 - (a) Рассчитайте вероятности ошибок первого и второго рода, мощность критерия для $c = 25$.
 - (b) Что произойдет с указанными вероятностями при росте количества наблюдений если известно что $c \in (10; 30)$?
 - (c) Каким должно быть c , чтобы вероятность ошибки второго рода равнялась 0,15?