

## 1 Что такое байесовская сеть?

Здесь картинка.

На картинке:

1. Кружочками обозначаются случайные величины.
2. Стрелочками — причинно следственные связи:



Значение величины  $X$  становится известно раньше значения  $Y$ . Закон распределения величины  $Y$  зависит от значения величины  $X$ .

Несколько терминов:

1. Вилка (fork)
2. Коллайдер, перевернутая вилка (collider, inverted fork)
3. Путь<sup>1</sup> (trail, path) от  $A$  до  $B$  — последовательность вершин от вершины  $A$  до вершины  $B$ , в которой переходы могут делаться и по стрелочкам и против стрелочек
4. Направленный путь от  $A$  до  $B$  — последовательность вершин от вершины  $A$  до вершины  $B$ , в которой переходы делаются только по стрелочкам
5. Потомок. Узел  $Y$  называется потомком узла  $X$ , если существует направленный путь от  $X$  до  $Y$ .
6. Предок. Узел  $X$  называют предком узла  $Y$ , если существует направленный путь от  $X$  до  $Y$ .
7. Прямой родитель. Узел  $X$  — прямой родитель узла  $Y$ , если  $X \rightarrow Y$ .

По байесовской сети легко определить зависимость и условную зависимость величин. Сначала разберемся с зависимостью.

Определение. Направленный граф без циклов  $G$  называется байесовской сетью случайных величин  $X_1, \dots, X_n$ , если для любого узла  $X$  выполнено условие:

$$X \perp \text{non descendant}(X) \mid \text{parents}(X) \quad (1)$$

Теорема. Величины  $X$  и  $Y$  независимы, если выполнены все три условия

1. Нет направленного пути от  $X$  до  $Y$
2. Нет направленного пути от  $Y$  до  $X$
3. Не существует такой величины  $Z$ , от которой был бы направленный путь и до  $X$  и до  $Y$

Упражнение. Найдите все пары независимых величин.

Нарисовать какую-нибудь картинку

## 2 Условная независимость

Условная независимость. События  $A$  и  $B$  называются условно независимыми при условии, что событие  $C$  произошло, если  $\mathbb{P}(AB \mid C) = \mathbb{P}(A \mid C)\mathbb{P}(B \mid C)$

Примеры.

1. Независимые, но условно зависимые события.
2. Зависимые, но условно независимые события.
3. Независимы при условии  $C$ , зависимы при отрицании  $C$

<sup>1</sup>В теории графов термином путь называют то, что мы называем направленным путем

Дискретные случайные величины  $X$  и  $Y$  условно независимы при условии  $Z$ , если для любых  $x$ ,  $y$  и  $z$ :

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y \mid Z = z) = \mathbb{P}(X = x \mid Z = z) \cdot \mathbb{P}(Y = y \mid Z = z) \quad (2)$$

Условную независимость величин обозначают  $X \perp Y \mid Z$

Примечание: некоторые авторы пишут  $A \perp B \mid C$  для событий, под этой записью подразумевается на самом деле сразу два условия:

$$A \perp B \mid C \Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ и } B \text{ независимы при условии } C \\ A \text{ и } B \text{ независимы при условии } C^c \end{cases} \quad (3)$$

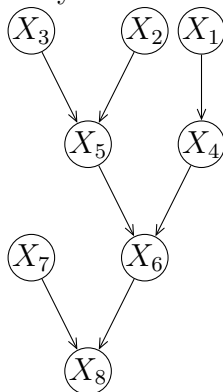
Определение. Путь между  $X$  и  $Y$  называют  $d$ -разделенным (d-separated, directionally separated) множеством узлов  $Z$  если выполнено хотя бы одно из условий

1. узел из  $Z$  разрывает последовательное соединение на пути
2. узел из  $Z$  разрывает «вилку» на пути
3. на пути есть «коллайдер», не являющийся узлом из  $Z$  и не содержащий узел из  $Z$  в качестве одного из потомков

Можно эквивалентно говорить о том, что путь между  $X$  и  $Y$  НЕ является  $d$ -разделенным узлом  $Z$ , если выполнены оба условия:

1. любой коллайдер на пути либо сам является узлом из множества  $Z$ , либо имеет потомка из множества  $Z$
2. никакой другой узел на пути не входит в множество  $Z$

Случайные величины  $X$  и  $Y$  условно независимы при условии  $Z$ , если узлы  $X$  и  $Y$  являются  $d$ -разделенными узлом  $Z$ .



Упражнения

Проверьте независимость  $X_1 \perp X_2$ ,  $X_1 \perp X_2 \mid X_8$ ,  $X_1 \perp X_2 \mid X_7$ ,  $X_1 \perp X_2 \mid X_6$