

Ф. И. О.

Неравенства Берри–Эссеена: Для любых $n \in \mathbb{N}$ и всех $x \in \mathbb{R}$ имеет место оценка:

$$|F_{S_n^*}(x) - \Phi(x)| \leq 0.48 \cdot \frac{E(|\xi_i - E \xi_i|^3)}{\text{Var}^{3/2}(\xi_i) \cdot \sqrt{n}},$$

где $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, $S_n^* = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}}$, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$

1. Сформулируйте:

- а) Закон больших чисел
- б) Центральную предельную теорему
- в) Неравенства Маркова и Чебышёва

2. Пусть $E(\xi) = 1$, $E(\eta) = 2$, $\text{Var}(\xi) = 1$, $E(\eta^2) = 8$, $E(\xi\eta) = 1$. Найдите

- а) $[8] E(2\xi - \eta + 1)$, $\text{Cov}(\xi, \eta)$, $\text{Corr}(\xi, \eta)$, $\text{Var}(2\xi - \eta + 1)$;
- б) $[8] \text{Cov}(\xi + \eta, \xi + 1)$, $\text{Corr}(\xi + \eta, \xi + 1)$, $\text{Corr}(\xi + \eta - 24, 365 - \xi - \eta)$, $\text{Cov}(2016 \cdot \xi, 2017)$.

3. Совместное распределение доходностей акций двух компаний задано с помощью таблицы:

	$\eta = -1$	$\eta = 1$
$\xi = -1$	0.2	0.2
$\xi = 0$	0.1	0.2
$\xi = 2$	0.2	0.1

- а) [2] Найдите частные распределения случайных величин ξ и η .
- б) [2] Найдите $\text{Cov}(\xi, \eta)$.
- в) [2] Сформулируйте определение независимости дискретных случайных величин.
- г) [2] Являются ли случайные величины ξ и η независимыми?
- д) [2] Найдите условное распределение случайной величины ξ , если $\eta = 1$.
- е) [2] Найдите условное математическое ожидание случайной величины ξ , если $\eta = 1$.
- ж) [2] Найдите математическое ожидание и дисперсию величины $\pi = 0.5\xi + 0.5\eta$.
- з) [2] Рассмотрим портфель, в котором α — доля акций с доходностью ξ и $(1 - \alpha)$ — доля акций с доходностью η . Доходность этого портфеля есть случайная величина

$$\pi(\alpha) = \alpha\xi + (1 - \alpha)\eta.$$

Найдите такую долю $\alpha \in [0; 1]$, при которой доходность портфеля $\pi(\alpha)$ имеет наименьшую дисперсию.

4. Отведав медовухи, Винни-Пух совершает случайное блуждание на плоскости. Он стартует из начала координат и в каждую следующую минуту равновероятно совершает шаг единичной длины налево, направо, вперёд или назад.
- а) Какова вероятность того, что через два часа блужданий Винни-Пух окажется в области $X > 10, Y > 10$?
 - б) Используя неравенство Берри-Эссеена оцените погрешность вычислений предыдущего пункта.
5. Купчиха Сосипатра Титовна очень любит чаёвничать. Её чаепитие продолжается случайное время S , имеющее равномерное распределение от 0 до 3 часов. Встретив Сосипатру Титовну в пассаже на Петровке, её подруга Олимпиада Карповна узнала, сколько длилось вчерашнее чаепитие Сосипатры Титовны. Решив, что такая продолжительность чаепития является максимально возможной, Олимпиада Карповна устраивает чаепитие, продолжающееся случайное время T , имеющее равномерное распределение от 0 до S часов.
- а) Найдите совместную функцию плотности величин S и T
 - б) Найдите вероятность $\mathbb{P}(S > 2T)$
 - в) Найдите ковариацию $\text{Cov}(S, T)$
6. Каждую весну дед Мазай плывая на лодке спасает в среднем 9 зайцев, дисперсия количества спасенных зайцев за одну весну равна 9. Количество спасенных зайцев за разные года — независимые случайные величины. Точный закон распределения числа зайцев неизвестен.
- а) Оцените в каких пределах лежит вероятность того, что за три года дед Мазай спасет от 20 до 34 зайцев.
 - б) Оцените в каких пределах лежит вероятность того, что за одну весну дед Мазай спасет более 11 зайцев.
7. Вася и Петя подбрасывают несимметричную монету. Вероятность выпадения «орла» $p = 0.25$. Если выпадает «орел», Вася отдает Пете 1 рубль, если «решка» – Петя отдает Васе 1 рубль. В начале игры у Васи — три рубля, у Пети — пять рублей. Игра прекращается, как только у одного из игроков заканчиваются деньги.
- а) Определить среднее время продолжительности игры
 - б) Определить вероятность того, что игра закончится победой Васи.