Задачи по элементарной теории вероятностей и матстатистике

Составитель: Борис Демешев, boris.demeshev@gmail.com

6 октября 2012 г.

Содержание

Предисловие

0.1 Обращение к читателю

Задачник находится в стадии разработки. Смелее спрашивайте и высказывайте своё мнение Борису Демешеву, boris.demeshev@gmail.com

Предлагайте свои задачи!

0.2 Цель

Есть много сборников задач. Зачем этот:
— Открытость и доступность. `http://demeshev.wordpress.com/materials/`
— Красивые задачи.
— Задачи под курс НИУ ВШЭ.
Всё то, что можно рассказать без теории меры.

0.3 Об ответах и упрощениях

Большинство ответов имеет совсем простой вид в духе $\frac{a}{a+b}$, и их, очевидно, нельзя упростить. Некоторые ответы простым образом выражаются через биномиальные коэффициенты. Не упрощаются, но встречаются в ответах: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$, $\sum_{i=1}^{n} i^k$. Ответы в виде громоздких сумм биномиальных коэффициентов не используются, если это не оговорено в условии. Используется сумма геометрической прогрессии, разложение в ряд Тейлора для e^x.

1 Простые эксперименты

1.1 Дискретные простые эксперименты

Задача 1.1.

Подбрасываются два кубика. Какова вероятность выпадения хотя бы одной шестёрки? Какова вероятность того, что шестёрка не выпадет ни разу?

Задача 1.2.

$\Omega = \{a, b, c\}$, $\mathbb{P}(\{a, b\}) = 0{,}8$, $\mathbb{P}(\{b, c\}) = 0{,}7$. Найдите $\mathbb{P}(\{a\})$, $\mathbb{P}(\{b\})$, $\mathbb{P}(\{c\})$.

Задача 1.3.

A и B несовместны, $\mathbb{P}(A) = 0{,}3$, $\mathbb{P}(B) = 0{,}4$. Найдите $\mathbb{P}(A^c \cap B^c)$.

Задача 1.4.

$\mathbb{P}(A) = 0{,}3$, $\mathbb{P}(B) = 0{,}8$. В каких пределах может лежать $\mathbb{P}(A \cap B)$?

Задача 1.5.

Кубик подбрасывается два раза. Какова вероятность того, что результат второго броска будет строго больше, чем результат первого? Какова вероятность того, что в сумме будет 6? Что в сумме будет 9? Что максимум равен 5? Что минимум равен 3? Что разница будет равна 1 или 0?

Задача 1.6.

На подносе лежит 20 шоколадных конфет, одинаковых с виду. В четырёх из них есть орех внутри. Маша съела 5 конфет. Какова вероятность того, что в наугад выбранной оставшейся конфете будет орех?

Задача 1.7.

Пусть X принимает два значения, причём $\mathbb{P}(\{X = 1\}) = p$ и $\mathbb{P}(\{X = 0\}) = 1 - p$. Найдите $\mathbb{E}(X)$.

Задача 1.8.

Пусть существует всего два момента времени, $t = 0$ и $t = 1$. Стоимости облигаций и акций в момент времени t обозначим соответственно B_t (bond) и S_t (share). Известно, что $B_0 = 1$, $B_1 = 1{,}1$, $S_0 = 5$,

$$S_1 = \begin{cases} 10, & p_{\text{high}} = 0{,}7; \\ 2, & p_{\text{low}} = 0{,}3. \end{cases}$$

Индивид может покупать акции и облигации по указанным ценам без ограничений. Например, можно купить минус одну акцию: это означает, что в момент времени $t = 0$ индивид получает 5 рублей, а в момент $t = 1$ в зависимости от состояния природы должен заплатить 10 рублей или 2 рубля.

1. Чему равна безрисковая процентная ставка за период?
2. Найдите дисконтированные математические ожидания будущих цен акций и облигаций. Совпадают ли они с ценами нулевого периода?
3. Найдите такие вероятности q_{high} и q_{low}, чтобы дисконтированное математическое ожидание будущих цен совпало с ценами нулевого периода.
4. Индивиду предлагают купить некий актив, который приносит 8 рублей в состоянии мира ω_{high} и 11 рублей в состоянии мира ω_{low}. Посчитайте ожидание стоимости этого актива с помощью вероятностей p и с помощью вероятностей q. Придумайте такую комбинацию акций и облигаций, которая в будущем приносит 8 и 11 рублей соответственно, и найдите её стоимость.

Задача 1.9.

Игральный кубик подбрасывается два раза. Пусть X_1 и X_2 — результаты подбрасывания. Найдите вероятности $\mathbb{P}(\min\{X_1, X_2\} = 4)$ и $\mathbb{P}(\min\{X_1, X_2\} = 2)$.

Задача 1.10.

На десяти карточках написаны числа от 1 до 9. Число 8 фигурирует два раза, остальные числа — по одному разу. Карточки извлекают в случайном порядке. Какова вероятность того, что девятка появится позже обеих восьмёрок?

Задача 1.11.

17 заключённых, 5 камер. Заключённых распределяют по камерам по очереди, равновероятно в каждую. Какова вероятность, что Петя и Вася сидят в одной камере?

Задача 1.12.

Кость подбрасывается два раза. Пусть X и Y — результаты подбрасываний. Найдите $\mathbb{E}(|X - Y|)$.

Задача 1.13.

We throw 3 dices one by one. What is the probability that we obtain 3 points in strictly increasing order?

Задача 1.14.

Из 10 цифр (от 0 до 9) выбираются 3 наугад (возможны повторения). Обозначим числа (в порядке появления): X_1, X_2, X_3. Какова вероятность того, что $X_1 > X_2 > X_3$?

Задача 1.15.

Кубик подбрасывается 3 раза. Какова вероятность того, что сумма первых двух подбрасываний будет больше третьего?

Задача 1.16.

«Масть» при игре в бридж

Часто приходится слышать, что некто при игре в бридж получил на руки 13 пик. Какова вероятность (при условии, что карты хорошо перетасованы) получить 13 карт одной масти?

Замечание. Каждый из четырёх игроков в бридж получает 13 карт из колоды в 52 карты.

Источник: Mosteller.

Задача 1.17.

На карточках написаны числа от 1 до 100. В левую руку Маша берёт одну карточку, в правую — k карточек. Какова вероятность того, что число на карточке в левой руке окажется больше числа на любой карточке из правой руки?

Задача 1.18.

Спящая красавица

Спящая красавица согласилась принять участие в научном эксперименте. В воскресенье её специально уколют веретеном. Как только она заснёт, будет подброшена правильная монетка. Если монетка выпадет орлом, то спящую красавицу разбудят в понедельник и спросят о том, как выпала монетка. Если монетка выпадет решкой, то спящую царевну разбудят в понедельник, спросят о монетке, снова уколют веретеном, разбудят во вторник и снова спросят о монетке. Укол веретена вызывает легкую амнезию, и красавица не сможет определить, просыпается ли она в первый раз или во второй. Красавица только что проснулась.

1. Какова вероятность того, что сегодня понедельник?
2. Как следует отвечать красавице, если за каждый верный ответ ей дарят молодильное яблоко?
3. Как следует отвечать красавице, если за неверный ответ её тут же превращают в тыкву?

Замечание. Осторожно! Некорректные вопросы!

Задача 1.19.

Пусть события A_0, A_1 и A_2 несовместны и вместе покрывают всё Ω. Обозначим $p_0 = \mathbb{P}(A_1 \cup A_2)$, $p_1 = \mathbb{P}(A_0 \cup A_2)$, $p_2 = \mathbb{P}(A_0 \cup A_1)$. Перечислите все условия, которым удовлетворяют p_0, p_1, p_2.

Задача 1.20.

Найдите вероятность того, что произойдёт ровно одно событие из A и B, если $\mathbb{P}(A) = 0{,}3$, $\mathbb{P}(B) = 0{,}2$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0{,}1$.

Задача 1.21.

Вася наугад выбирает два разных натуральных числа от 1 до 4.

1. Какова вероятность того, что будет выбрано число 3?
2. Какова вероятность того, что сумма выбранных чисел будет чётная?
3. Каково математическое ожидание суммы выбранных чисел?

Задача 1.22.

Известно, что когда соревнуются А и Б, то А побеждает с вероятностью x (Б, соотвественно, с вероятностью $(1 - x)$). Когда соревнуются А и В, то А побеждает с вероятностью y (В, соответственно, с вероятностью $(1 - y)$).

1. Придумайте модель, которая бы позволяла узнать вероятность победы Б над В.
2. Покажите, что можно придумать другую модель и получить другую вероятность.

Задача 1.23.

В клубе 25 человек.

1. Сколькими способами можно выбрать комитет из четырёх человек?
2. Сколькими способами можно выбрать руководство, состоящее из директора, зама и кассира?

Задача 1.24.

Сколькими способами можно расставить 5 человек в очередь?

Задача 1.25.

Сколькими способами можно покрасить 12 комнат, если требуется 4 покрасить жёлтым цветом, 5 — голубым и 3 — зелёным?

Задача 1.26.

Шесть студентов (три юноши и три девушки), стоят в очереди за пирожками в случайном порядке. Какова вероятность того, что юноши и девушки чередуются?

Задача 1.27.

Где-то в начале 17 века Галилея попросили объяснить следующее: количество троек натуральных чисел, дающих в сумме 9, такое же, как количество троек, дающих в сумме 10; но при трёхкратном подбрасывании кубика 9 в сумме выпадает реже, чем 10. Дайте корректное объяснение.

Задача 1.28.

В классе 30 человек, и все разного роста. Учитель физкультуры хочет отобрать и поставить в порядке возрастания роста 5 человек. Сколькими способами это можно сделать?

1.2 Непрерывные простые эксперименты

Задача 1.29.

Поезда метро идут регулярно с интервалом 3 минуты. Пассажир приходит на платформу в случайный момент времени. Пусть X — время ожидания поезда в минутах.

Найдите $\mathbb{P}(X < 1)$, $\mathbb{E}(X)$.

Задача 1.30.

Светофор 40 секунд горит зелёным светом, 3 секунды — жёлтым, 30 секунд — красным, затем цикл повторяется. Петя подъезжает к светофору. На жёлтый свет Петя предпочитает остановиться.

1. Какова вероятность, что Петя сможет проехать сразу?
2. Какова средняя задержка Пети на светофоре?
3. Вася, стоящий рядом со светофором, смотрит на него в течение 3 секунд. Какова вероятность того, что он увидит смену цвета?

Задача 1.31.

Случайные величины X, Y, и Z независимы и равномерны на $[0;1]$. Какова вероятность того, что $X+Y>Z$?

Задача 1.32.

At a bus stop you can take bus #1 and bus #2. Bus #1 passes 10 minutes after bus #2 has passed whereas bus #2 passes 20 mins after bus #1 has passed. What is the average waiting time to get on a bus at that bus stop?

Источник: Wilmott forum, `catid=26&threadid=55617`.

Задача 1.33.

На множестве $A := \{x \geqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant e^{-x}\}$ случайно (равномерно) выбирается точка. Пусть X — абсцисса этой точки. Найдите следующие вероятности: $\mathbb{P}(X>1)$, $\mathbb{P}(X \in (1;5))$, $\mathbb{P}(X \in [1;5])$.

1.3 Смешанные простые эксперименты, или содержание эксперимента неясно

Задача 1.34.

Как связаны между собой $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{A\}})$?

Задача 1.35.

Случайная величина X равновероятно принимает одно из пяти значений: 1, 2, 3, 8 и 9.

1. Найдите математическое ожидание и медиану X
2. Найдите значение u при котором функция $f(u) = \mathbb{E}(|X-u|)$ достигает минимума
3. Найдите значение u при котором функция $g(u) = \mathbb{E}((X-u)^2)$ достигает минимума
4. Сделайте выводы

2 Сложные эксперименты

2.1 «Продвинутая» комбинаторика

Задача 2.1.

Jenny and Alex flip n fair coins each.

1. What is the probability that they get the same number of tails?

2. Пусть $a_n = \sqrt{n} \cdot p_n$, где p_n — найденная вероятность. Найдите $\lim a_n$.

Задача 2.2.

2 couples and a single person are to be randomly placed in 5 seats in a row. What is the probability that no person that belongs to one of the couples sits next to his/her pair?

Задача 2.3.

Встретились 6 друзей. Каждый дарит подарок одному из других 5 человек. Какова вероятность того, что найдется хотя бы одна пара человек, которая вручит подарки друг другу?

Задача 2.4.

Хулиган и случайная система

На плоскости нарисовано n прямых. Среди них нет параллельных, и никакие три не пересекаются в одной точке. Хулиган берёт первую прямую. Эта прямая делит плоскость на две полуплоскости. Хулиган случайным образом закрашивает одну из этих двух полуплоскостей. Затем хулиган поступает аналогично с каждой прямой. Какова вероятность того, что на плоскости останется хотя бы один незакрашенный кусочек?

Источник: Алексей Суздальцев.

Задача 2.5.

На столе есть следующие предметы:

- 4 отличающихся друг от друга чашки;
- 4 одинаковых гранёных стакана;
- 10 одинаковых кусков сахара;
- 7 соломинок разных цветов.

Сколькими способами можно разложить:

1. Сахар по чашкам;
2. Сахар по стаканам;
3. Соломинки по чашкам;
4. Соломинки по стаканам?

Как изменятся ответы, если требуется, чтобы пустых ёмкостей не оставалось?

Задача 2.6.

Сколькими способами можно разложить k кусков сахара по n различающимся чашкам?

Подсказка: ответ — всего лишь биномиальный коэффициент.

Задача 2.7.

Генуэзская лотерея (задача Леонарда Эйлера)

Из 90 чисел выбираются 5 наугад. Назовем серией последовательность из нескольких чисел, идущих подряд. Например, если выпали числа 23, 24, 77, 78 и 79 (неважно в каком порядке), то есть две серии (23-24, 77-78-79). Определите вероятность того, что будет ровно k серий.

Замечание. Сама лотерея возникла в 17 веке.

Задача 2.8.

Судьба Дон-Жуана (см. тж. с. 22)

У Васи n знакомых девушек (их всех зовут по-разному). Он пишет им n писем, но по рассеянности раскладывает их в конверты наугад. Случайная величина X обозначает количество девушек, получивших письма, написанные лично для них.

1. Какова вероятность того, что Маша получит письмо, адресованное ей?
2. Какова вероятность того, что Маша и Лена получат письма, адресованные им?
3. Какова вероятность того, что хотя бы одна девушка получит письмо, адресованное именно ей? Каков предел этой вероятности при $n \to +\infty$?
4. Какова вероятность того, что произойдет ровно k совпадений?

Задача 2.9.

Покер

Выбирается 5 карт из колоды (52 карты без джокеров, достоинством от 2 до туза, всего 13 достоинств). Рассчитайте вероятности комбинаций:

1. Pair (пара) — две карты одного достоинства;
2. Two pairs (две пары) — две карты одного достоинства и две другого;
3. Three of Kind (тройка) — три карты одного достоинства (две другие — разного достоинства);

4. Straight (стрит) — пять последовательных карт, не обязательно одной масти;
5. Flush (масть) — все карты одной масти;
6. Full House (фул-хаус) — три карты одного достоинства и две другого;
7. Four of Kind (каре) — четыре карты одного достоинства;
8. Straight Flush (стрит-флэш) — пять последовательных карт одной масти;
9. Royal Flush (роял-флэш) — старшие пять последовательных карт одной масти?

Примечание: более слабая комбинация не содержит в себе более сильной.

Задача 2.10.

«Вилкодыр»

Есть n дырочек, расположенных в линию, на расстоянии в 1 см друг от друга. У каждой вилки два штырька на расстоянии в 1 см.

1. Сколькими способами можно воткнуть k одинаковых вилок?
2. Как изменится ответ, если дырочки расположены по окружности?

Задача 2.11.

В ряду n лампочек. Из них надо зажечь 8, причём так, чтобы было три серии (по 2, 3 и 3 горящих лампочки). Сколькими способами это можно сделать?

Задача 2.12.

Вася играет в преферанс. Он взял прикуп, снёс две карты и выбрал козыря. У Васи на руках четыре козыря. Какова вероятность, что оставшиеся четыре козыря разделились как 4:0, 3:1, 2:2?

Замечание. Для тех, кто не знает, как играть в преферанс: 32 карты, из которых 8 — будущие козыри, раздаются по 10 между 3 игроками, ещё две кладутся в прикуп.

Задача 2.13.

Перетасована колода в 52 карты.

1. Какова вероятность того, что какие-нибудь туз и король будут лежать рядом?
2. Какова вероятность того, что какой-нибудь туз будет лежать за каким-нибудь королем?

Задача 2.14.

Чему равна сумма $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots$?

Её применение к matching problem.

Задача 2.15.

В линию выложено n предметов друг за другом. Сколькими способами можно выбрать k предметов из линии так, чтобы не были выбраны соседние предметы?

Задача 2.16.

Given eight distinguishable rings, let n be the number of possible five-ring arrangements on the four fingers (not the thumb) of one hand. The order of rings on each finger is significant, but it is not required that each finger have a ring. Find the leftmost three nonzero digits of n.

Источник: AIME 2000, 5.

Задача 2.17.

5 numbers are randomly picked from 90. In your bet cards, you get to choose 5 numbers. How many cards have you got to fill in, to guarantee that at least one of them has 4 right numbers?

Источник: Wilmott forum.

Задача 2.18.

В контрольной 20 вопросов. Все ответы разные. Вася успел переписать у друга все верные ответы, но не знает, в каком порядке они идут. Отлично ставят ответившим верно на не менее чем 15 вопросов. Какова вероятность того, что Вася получит отлично?

Задача 2.19.

There are k books of mine among n books. We put them in a shelf randomly. Which is the possibility that there are p books of my who are placed continuously? (At least? Exactly?)

Источник: AoPS, `f=498&t=192257`.

Задача 2.20.

На каждой карточке вы можете отметить любые 5 чисел из 100. Сколько карточек нужно купить, чтобы гарантированно угадать 3 числа из выпадающих в лотереи 7 чисел?

Замечание. Могут быть громоздкие вычисления.

Задача 2.21.

Сколькими способами можно поставить в очередь a мужчин и b женщин так, чтобы нигде двое мужчин не стояли рядом?

Задача 2.22.

Известно, что функция $f(n,k)$ удовлетворяет условиям:

- $f(n,k) = f(n-1,k) + f(n,k-1)$;
- $f(n,0) = f(n,n) = 1$.

Что это за функция такая?

Задача 2.23.

Усталые влюблённые

В вагоне метро на длинную скамейку в n мест садятся случайным образом $k > \frac{n}{2}$ пассажиров. Какова вероятность того, что после этого на скамейку сможет сесть влюблённая пара (влюблённым обязательно надо сидеть рядом)?

Источник: Алексей Суздальцев.

Задача 2.24.

В классе 28 человек, среди них 18 девочек. Класс построили в 4 ряда по 7 человек. Какова вероятность того, что рядом с Вовочкой будет стоять хотя бы одна девочка?

Замечание. Для Вовочки любая девушка — рядом :).

2.2 Геометрическое распределение (и близкие по духу)

Задача 2.25.

Равной силы команды играют до трёх побед. Какова вероятность того, что будет ровно 3 партии? Ровно 4? Ровно 5?

Задача 2.26.

Вася стреляет по мишени бесконечное количество раз. Он попадает по мишени с очень маленькой вероятностью. Какова вероятность того, что до первого попадания по мишени Васе потребуется больше времени, чем в среднем уходит на одно попадание?

Задача 2.27.

Геометрическое распределение Кубик подбрасывают до первого выпадения шестерки. Случайная величина N — число подбрасываний.

- Найдите $\mathbb{P}(N=6)$, $\mathbb{P}(N=k)$, $\mathbb{P}(N>10)$ и $\mathbb{P}(N>30 \mid N>20)$, $\mathbb{E}(N)$.
- Найдите $\mathbb{E}\left(\frac{1}{N}\right)$.

Задача 2.28.

С чего всё начиналось…

Париж, Людовик XIV, 1654 год, высшее общество говорит о рождении новой науки — теории вероятностей. Ах, кавалер де Мере, «fort honnête homme sans être mathématicien»… («благородный человек, хотя и не математик»). Старая задача, неправильные решения которой предлагались тысячелетиями (например, одно из неправильных решений предлагал изобретатель двойной записи, кумир бухгалтеров, Лука Пачоли), наконец решена правильно! Два игрока играют в честную игру до шести побед. Игрок, первым выигравший шесть партий (не обязательно подряд), получает 800 рублей. К текущему моменту первый игрок выиграл 5 партий, а второй — 3 партии. Они вынуждены прервать игру в данной ситуации. Как им поделить приз по справедливости?

Задача 2.29.

Von Neumann. Что делать, если монетка неправильная?

Имеется «несправедливая» монетка, выпадающая гербом с некоторой вероятностью. Под раундом будем подразумевать двукратное подбрасывание монеты. Проводим первый раунд. Если результат раунда — ГР (сначала герб, затем решка), то считаем, что выиграл первый игрок. Если результат раунда — РГ, то считаем, что выиграл второй игрок. Если результат раунда — ГГ или РР, то проводим ещё один раунд. И так далее, пока либо не определится победитель, либо количество раундов не достигнет числа n.

1. Найдите вероятности «ничьей», выигрыша первого игрока, выигрыша второго игрока в зависимости от n. Найдите пределы этих вероятностей при $n \to +\infty$.

2. Как с помощью неправильной монетки сымитировать правильную?

Задача 2.30.

Monty Hell problem (не путать с Monty Hall)

Сказка. Ежедневно Кощей Бессмертный получает пенсию в размере 10 золотых монет. Затрат у Кощея нет никаких. Поэтому с начала пенсионного возраста он аккуратно нумерует каждую полученную монету и кладет её в сундук. Ночью Мышка-норушка крадёт одну золотую монету из сундука.

1. Какова вероятность того, что i-я монета когда-либо исчезнет из Сундука?
2. Какова вероятность того, что хотя бы одна монета пролежит в сундуке бесконечно долго?
3. Дни сокращаются в продолжительности (каждый последующий — в два раза короче, чем предыдущий). Сколько монет будет в сундуке в конце времени?

Подсказка. $(1-x) \leqslant e^{-x}$.

Замечание. А где надсказка?

Задача 2.31.

Случайным образом выбирается натуральное число X. Вероятность выбора числа n такова: $\mathbb{P}(X = n) = 2^{-n}$.

1. Какова вероятность того, что будет выбрано чётное число? Нечётное число? Число, большее пяти? Число от 3 до 11?
2. Пусть независимо друг от друга выбираются c чисел. Пусть K_c — количество невыбранных чисел на отрезке от одного до наибольшего выбранного числа. Найдите $\mathbb{P}(K_c = k)$.

Источник: AMM E3061, T. Ferguson and C. Melolidakis.

Задача 2.32.

Величины X_1, X_2, …независимы и одинаково распределены с некоторой функцией плотности f. Величина X_i — это количество осадков в i-ый год. Пусть Y — номер года, когда впервые будет превышено количество осадков, выпавших в первом году. Найдите закон распределения Y и $\mathbb{E}(Y)$

Задача 2.33.

Преподаватель по теории вероятностей пообещал своим студентам, что включит задачу на геометрическое распределение в экзамен с вероятностью 1/3. Чтобы исполнить своё обещание он подбросил одну монетку два раза и посчитал количество орлов. Оказалось, что орлов было ровно два. На основании этого количества он принял решение. Какое решение он принял и почему? Идея: Николай Арефьев

2.3 Из n предметов выбирается k

Задача 2.34.

Из 50 деталей 4 бракованные. Выбирается наугад 10 деталей на проверку. Какова вероятность не заметить брак?

Задача 2.35.

Есть 4 карты одного достоинства. Наугад выбираются две. Какова вероятность того, что они будут разного цвета?

Задача 2.36.

Какова вероятность полностью угадать комбинацию в лотерее 5 из 36?

Задача 2.37.

В мешке 50 орехов, из них 5 пустые. Вы выбираете наугад 10 орехов. Какова вероятность того, что ровно один из них будет пустой?

Задача 2.38.

Из коробки с 4 синими и 5 зелёными шарами достают 3 шара. Пусть B и G — количество извлечённых синих и зелёных шаров. Найдите $\mathbb{E}(B)$, $\mathbb{E}(G)$, $\mathbb{E}(B \cdot G)$, $\mathbb{E}(B - G)$.

Задача 2.39.

На факультете n студентов. Из них наугад выбирают a человек. Через год b_- студентов покидают факультет, b_+ студентов приходят на факультет. Из них снова наугад выбирают a. Какова вероятность того, что хотя бы одного выберут два раза?

Задача 2.40.

(см. тж. с. 22)

A wooden cube that measures 3 cm along each edge is painted red. The painted cube is then cut into 27 pieces of 1-cm cubes.

1. If I choose one of the small cubes at random and toss it in the air, what is the probability that it will land red-painted side up?
2. If I put all the small cubes in a bag and randomly draw out 3, what is the probability that at least 3 faces on the cubes I choose are painted red?
3. If I put the small cubes in a bag and randomly draw out 3, what is the probability that exactly 3 of the faces are painted red?
4. Invent a new question!

Источник: http://letsplaymath.wordpress.com/2007/07/25/puzzle-random-blocks/

Задача 2.41.

Контрольную пишут 40 человек. Половина пишет первый вариант, половина — второй. Время написания работы каждым студентом — независимые непрерывные случайные величины. Какова вероятность того, что в тот момент, когда будет сдана последняя работа первого варианта, останется ещё 5 человек, пишущих второй вариант?

Задача 2.42.

В бридж играют четыре игрока: Юг, Восток, Север, Запад. Перемешанная колода в 52 карты раздаётся игрокам по очереди по одной карте. Юг и Север получили 11 пик. Какова вероятность того, что две оставшиеся пики оказались у одного игрока? Разделились между остальными игроками? Каковы вероятности различных раскладов пик между остальными игроками, если Юг и Север получили 8 пик?

Задача 2.43.

Корректоры очепяток

Вася замечает очепятку с вероятностью 0,7; Петя независимо от Васи замечает очепятку с вероятностью 0,8. В книге содержится 100 опечаток. Какова вероятность того, что Вася заметит 30 опечаток, Петя — 50, причём 14 опечаток будут замечены обоими корректорами?

2.4 Биномиальное распределение (до дисперсии)

Задача 2.44.

Монетка подбрасывается 5 раз. Какова вероятность того, что будет выпадет ровно один орёл? Ровно два? Ни одного?

Задача 2.45.

Какова вероятность при шести подбрасываниях кубика получить ровно две шестёрки?

Задача 2.46.

Какова вероятность того, что у десяти человек не будет ни одного совпадения дней рождений? Каков минимальный размер компании, чтобы вероятность одинакового дня рождения была больше половины?

Задача 2.47.

Маша подбрасывает монетку три раза, а Саша — два раза. Какова вероятность того, что у Маши герб выпадет больше раз, чем у Саши?

Задача 2.48.

Сколько детей должно быть в семье, чтобы вероятность того, что имеется по крайней мере один ребенок каждого пола, была больше 0,95?

Задача 2.49.

Осторожный фальшивомонетчик

Дворцовый чеканщик кладёт в каждый ящик вместимостью в сто монет одну фальшивую. Король подозревает чеканщика и подвергает проверке монеты, взятые наудачу по одной в каждом из 100 ящиков.

1. Какова вероятность того, что чеканщик не будет разоблачён?
2. Каков ответ в предыдущей задаче, если 100 заменить на n?

Источник: Mosteller.

Задача 2.50.

Стратегия удвоения

В казино имеется рулетка, которая с вероятностью 0,5 выпадает или на чёрное, или на красное. Игрок, поставивший сумму n и угадавший цвет, получает обратно сумму $2n$. Вася решил играть по следующей схеме. Сначала он ставит доллар. Если он выигрывает, то покидает казино, если проигрывает, то удваивает ставку и ставит два доллара. Если выигрывает, то покидает казино, если проигрывает, то снова удваивает ставку и ставит четыре доллара и т. д., пока не выиграет в первый раз или впервые не хватит денег на новую удвоенную ставку. У Васи имеется 1 050 долларов.

1. Какова вероятность того, что Вася покинет казино после выигрыша?
2. Каков ожидаемый выигрыш Васи?

Замечание. В реальности вероятность меньше 0,5, т. к. на рулетке есть 0 и (иногда) 00. Их наличие, естественно, уменьшает и вероятность, и ожидаемый выигрыш.

Задача 2.51.

When the n's dice are thrown at the one time, find the probability such that the sum of the cast is $n+3$?

Задача 2.52.

Пусть X_1, X_2,..., X_n — НОРСВ, такие, что $X_i = \begin{cases} 1, & p; \\ 0, & (1-p). \end{cases}$ Пусть k — такая константа, что $2k \geqslant n$. Найдите вероятность того, что самая длинная серия из единиц имеет длину k. Что делать при $2k < n$?

Задача 2.53.

Suppose you are given a random number generator, which draws samples from an uniform distribution between 0 and 1. The question is: how many samples you have to draw, so that you are 95% sure that at least 1 sample lies between 0.70 and 0.72?

Задача 2.54.

Биномиальное распределение

Кубик подбрасывают 5 раз. Пусть N — количество выпадений шестёрки. Найдите $\mathbb{P}(N=3)$, $\mathbb{P}(N=k)$ и $\mathbb{P}(N>4 \mid N>3)$, $\mathbb{E}(N)$.

Задача 2.55.

Максимальная вероятность для биномиального распределения

Пусть X распределена биномиально. Общее число экспериментов равно n, вероятность успеха в отдельном испытании равна p.

1. Найдите $\frac{\mathbb{P}(X=k)}{\mathbb{P}(X=k-1)}$.
2. При каких k дробь $\frac{\mathbb{P}(X=k)}{\mathbb{P}(X=k-1)}$ будет не меньше 1?
3. Каким должно быть k, чтобы $\mathbb{P}(X=k)$ была максимальной?

Задача 2.56.

Известно, что предварительно зарезервированный билет на автобус дальнего следования выкупается с вероятностью 0,9. В обычном автобусе 18 мест, в микроавтобусе 9 мест. Компания «Микро», перевозящая людей в микроавтобусах, допускает резервирование 10 билетов на один микроавтобус. Компания «Макро», перевозящая людей в обычных автобусах допускает резервирование 20 мест на один автобус. У какой компании больше вероятность оказаться в ситуации нехватки мест?

Задача 2.57.

The psychologist Tversky and his colleagues say that about four out of five people will answer (a) to the following question:

> A certain town is served by two hospitals. In the larger hospital about 45 babies are born each day, and in the smaller hospital 15 babies are born each day. Although the overall proportion of boys is about 50 percent, the actual proportion at either hospital may be more or less than 50 percent on any day. At the end of a year, which hospital will have the greater number of days on which more than 60 percent of the babies born were boys?

(a) the large hospital (b) the small hospital (c) neither (about the same)

Дайте верный ответ и попытайтесь объяснить, почему большинство людей ошибается при ответе на этот вопрос.

Задача 2.58.

В забеге участвуют 12 лошадей. Каждый из 10 зрителей пытается составить свой прогноз для трёх призовых мест. Какова вероятность того, что хотя бы один из них окажется прав?

Задача 2.59.

Есть N монеток. Каждая из них может быть фальшивой с вероятностью p. Известно, сколько весят настоящие. Известно, что фальшивые весят меньше, чем настоящие. Каждая фальшивая может иметь своё отклонение от правильного веса. Задача — определить, является ли фальшивой каждая монета. Предлагается следующий способ:

> Разбить монеты на группы по n монет в каждой группе. Взвесить каждую группу. Если вес группы совпадает с эталонным, то вся группа признается настоящей. Если вес группы меньше эталонного, то каждая монеты из группы взвешивается отдельно.

Предположим, что N делится на n. Пусть X — требуемое число взвешиваний.

1. Найдите $\mathbb{E}(X)$;
2. При каком условии на p и n предложенный способ более эффективен чем взвешивание каждой монеты?
3. Исследуйте поведение функции $\frac{\mathbb{E}(X)}{N}$ от n (есть ли минимум, максимум и т. д.).

Задача 2.60.

Задача Банаха (Banach's matchbox problem)

У Маши есть две коробки, в каждой из которых осталось по n конфет. Когда Маша хочет конфету, она выбирает наугад одну из коробок и берёт конфету оттуда. Рано или поздно Маша впервые откроет пустую коробку. В этот момент другая коробка содержит некоторое количество конфет. Обозначим за u_r вероятность того, что в другой коробке ровно r конфет.

1. Найдите u_r.
2. Найдите вероятности v_r того, что в тот момент, когда из одной коробки возьмут последнюю конфету (она только станет пустой!), в другой будет находится ровно r конфет.
3. Найдите вероятность того, что коробка, которая была опустошена раньше, не будет первой коробкой, открытой пустой.

Задача 2.61.

В уездном городе N два родильных дома, в одном ежедневно рождается 50 человек, в другом — 100 человек. В каком роддоме чаще рождается одинаковое количество мальчиков и девочек?

Задача 2.62.

Let you choose an infinite sequence of integers between 1 and 10, what is the possibility that your sequence doesn't have any "1"?

Задача 2.63.

There are three coins in a box. These coins when flipped, will come up heads with respective probabilities 0.3, 0.5, 0.7. A coin is randomly selected (meaning uniform distribution!) from among these three and then flipped 10 times. Let N be the number of heads obtained on the first ten flips.

1. Найдите $\mathbb{P}(N = 0)$.
2. If you win \$1 each time a head appears and you lose \$1 each time a tail appears, is this a fair game? Explain.

Задача 2.64.

Как почувствовать разницу в 0,01[**?**]? Пусть вероятность того, что Маша находится целый день в хорошем настроении, равна 0,99, а вероятность того, что Саша находится в хорошем настроении, равна 0,999 9. Какова вероятность того, что Маша будет целый год непрерывно в хорошем настроении? Саша?

Задача 2.65.

Петя подбрасывает 10 монеток. Если из этих 10 подбрасываний будет как минимум 8 одинаковых, то мы назовём это чудом. Какова вероятность чуда? Какова вероятность хотя бы одного чуда, если, кроме Пети, ещё 9 человек подбрасывает по 10 монеток?

Задача 2.66.

Вероятность того, что прошлогодний грецкий орех будет червивым, равна 0,25. Сколько минимум нужно взять грецких орехов, чтобы среди них был хотя бы один нормальный с вероятностью 99,9 %?

Задача 2.67.

Биномиальные числа Фибоначчи

Пусть $\{F_k\}$ — последовательность Фибоначчи, а X — число выпавших орлов при n подбрасываниях правильной монетки. Вычислить $\mathbb{E}(F_{1+X})$.

Источник: Алексей Суздальцев.

Задача 2.68.

Семеро друзей выбирают, пойти им в кино на фильм ужасов или на комедию. Каждый из них предпочтёт комедию независимо от других с вероятностью 0,6. Есть два способа голосования, А и Б. Способ А — все голосуют одновременно, выбирается альтернатива, набравшая больше голосов. Способ Б — голосование в два тура. Первый тур: трое самых старших друзей голосуют между собой и большинством решают, за что они втроём будут голосовать единогласно во втором туре: за комедию или за ужасы. Второй тур: голосуют все семеро, но трое старших голосуют так, как согласованно договорились на первом туре. При каком способе голосования выше шансы пойти на комедию?

Задача 2.69.

Маша и Саша учатся в одном классе. Маша и Саша учатся по одним и тем же n учебникам. В один день Маша и Саша независимо друг от друга приносят случайное подмножество своих учебников в школу.

1. Какова вероятность того, что у Маши не будет ни одного учебника, которого бы не было у Саши?
2. Какова вероятность того, что вместе у Саши и Маши будут все n учебников хотя бы в одном экземпляре?

2.5 Деревья и прочее без условных вероятностей

Задача 2.70.

Подбрасывается кубик, а затем монетка подбрасывается столько раз, сколько очков на выпавшей грани. Какова вероятность того, что орёл выпадет ровно 4 раза?

Задача 2.71.

Рыцари-близнецы

Король Артур проводит рыцарский турнир, в котором, так же как и в теннисе, порядок состязания определяется жребием. Среди восьми рыцарей, одинаково искусных в ратном деле, два близнеца.

1. Какова вероятность того, что они встретятся в поединке?
2. Каков ответ в случае 2^n рыцарей?

Источник: Mosteller.

Задача 2.72.

Вася посещает 60 % лекций по теории вероятностей, Петя — 70 %. Они из разных групп и посещают лекции независимо друг от друга. Какова вероятность, что на следующую лекцию придут оба? Хотя бы один из них?

Задача 2.73.

Выйдет ли второй в финал?

В теннисном турнире участвуют 8 игроков. Есть три тура (четвертьфинал — полуфинал — финал). Противники в первом туре определяются случайным образом. Предположим, что лучший игрок всегда побеждает второго по мастерству, а тот, в свою очередь побеждает всех остальных. Проигрывающий в финале занимает второе место. Какова вероятность того, что это место займет второй по мастерству игрок?

Источник: обработка Mosteller.

Задача 2.74.

The Wimbledon Men's Singles Tournament has 128 players. The first round pairings are completely random, subject to the constraint that none of the top 32 players can be paired against each other. Two competitors, Olivier Rochus, and his brother Christophe are competing, and neither are in the elite group of 32 players. What is the probability that these brothers play in the first round (as actually occurred)?

Задача 2.75.

Первый автобус отходит от остановки в 5:00. Далее интервалы между автобусами равновероятно составляют 10 или 15 минут, независимо от прошлых интервалов. Вася приходит на остановку в 5:42.

1. Какова ожидаемая длина интервала, в который он попадает?

2. Какова ожидаемая длина следующего интервала?
3. Пусть $t \to \infty$ (???)

Задача 2.76.

There are two ants on opposite corners of a cube. On each move, they can travel along an edge to an adjacent vertex. What is the probability that they both return to their starting point after 4 moves?

Задача 2.77.

Легкомысленный член жюри

В жюри из трёх человек два члена независимо друг от друга принимают правильное решение с вероятностью p, а третий для вынесения решения бросает монету (окончательное решение выносится большинством голосов). Жюри из одного человека выносит справедливое решение с вероятностью p. Какое из этих жюри выносит справедливое решение с большей вероятностью?

Источник: Mosteller.

Задача 2.78.

Simpson's paradox

Тренер хочет отправить на соревнование самого сильного из своих спортсменов. Самым сильным игроком тренер считает того, у кого больше всех шансов получить первое место, если бы соревнование проводилось среди своих. У тренера два спортсмена: А, постоянно набирающий 3 штрафных очка при выполнении упражнения, и Б, набирающий 1 штрафное очко с вероятностью 0,54 и 5 штрафных очков с вероятностью 0,46.

1. Кого отправит тренер на соревнования?
2. Кого отправит тренер на соревнования, если, помимо А и Б, у него тренируется спортсмен В, набирающий 2 штрафных очка с вероятностью 0,56, 4 штрафных очка с вероятностью 0,22 и 6 штрафных очков с вероятностью 0,22.
3. Мораль?

Задача 2.79.

В турнире участвуют 8 человек, разных по силе. Более сильный побеждает более слабого. Проигравший выбывает, победитель выходит в следующий тур. Какова вероятность того, что i-й по силе игрок дойдет до финала?

Задача 2.80.

A bag contains a total of N balls either blue or red. If 5 balls are chosen from the bag the probability all of them being blue is 0.5. What are the values of N for which this is possible?

Задача 2.81.

Each of two boxes contains both black and white marbles, and the total number of marbles in the two boxes is 25. One marble is taken out of each box randomly. The probability that both marbles are black is $\frac{27}{50}$. What is the probability that both marbles are white?

Задача 2.82.

Маша с подружкой гуляют в поле. Подружка предлагает погадать на суженого. Она зажимает в руке шесть травинок так, чтобы концы травинок торчали сверху и снизу. Маша сначала связывает эти травинки попарно между собой сверху, а затем и снизу (получается три завязывания сверху и три завязывания снизу). Если при этом все шесть травинок окажутся связанными в одно кольцо, то это означает, что Маша в текущем году выйдет замуж. Какие шансы у Маши?

Замечание. Будем считать, что завязывание травинок в «трилистник», «восьмерку» и прочие нетривиальные узлы также означает замужество.

Источник: Баврин, Фрибус, «Старинные задачи».

Задача 2.83.

Две урны содержат одно и то же количество шаров, несколько чёрных и несколько белых каждая. Из них извлекаются n ($n > 3$) шаров с возвращением. Найти число n и содержимое обеих урн, если вероятность того, что все белые шары извлечены из первой урны, равна вероятности того, что из второй извлечены либо все белые, либо все чёрные шары.

Источник: Mosteller.

Задача 2.84.

Кость подбрасывается 3 раза. Размер ставки — 1 рубль. Если шестёрка не выпадает ни разу, то ставка проиграна, если шестёрка выпадает хотя бы один раз, то ставка возвращается, плюс выплачивается выигрыш по 1 рублю за каждую шестёрку. Найдите стоимость этой лотереи.

Задача 2.85.

Parrondo's game

Назовем «рублёвой игрой с вероятностью p» игру, в которой игрок выигрывает 1 рубль с вероятностью p и проигрывает один рубль с вероятностью $(1-p)$. Игра A — это рублёвая игра с вероятностью 0,45. Игра B состоит в следующем: если сумма в твоём кошельке делится на три, то ты играешь в рублёвую игру с вероятностью 0,05; если же сумма в твоем кошельке не делится на три, то ты играешь в рублёвую игру с вероятностью 0,7. Что будет происходить с ожидаемым благосостоянием игрока, если он

1. Будет постоянно играть в игру A?
2. Будет постоянно играть в игру B?
3. Будет постоянно играть A или B с вероятностью по 0,5?
4. Придумайте «лохотрон» для интеллектуалов.

Задача 2.86.

Parrondo's game — альтернатива

A much simpler example is dealing cards from a well-shuffled deck. Suppose I get \$14 if two cards in a row match in rank (two 2's or two Kings for examples), and pay \$1 if they don't. The chance of two cards in a row matching is $\frac{1}{17}$, so I pay \$16 for each \$14 I win.

Now I play the same game, alternating the deal between two decks. Now the chance of two successive cards matching is $\frac{1}{13}$, so I pay \$12 for every \$14 I win.

Each game individually loses money, but alternate them and you win money. Eureka! We're all rich.

Источник: Wilmott forum.

Задача 2.87.

Триэль

Три гусара — A, B и C — стреляются за прекрасную даму. Стреляют они по очереди (A, B, C, A, B, C, ...), каждый стреляет в противника по своему выбору. A попадает с вероятностью 0.1, B — 0.5, C — 0.9. Триэль продолжается до тех пор, пока в живых не останется только один. Предположим, что стрелять в воздух нельзя.

1. Какой должна быть стратегия A?
2. У кого какие шансы на победу?

Задача 2.88.

Триэль-2

Три гусара — A, B и C — стреляются за прекрасную даму. Стреляют они одновременно, каждый стреляет в противника по своему выбору. A попадает с вероятностью 0,1, B — 0,5, C — 0,9. Триэль продолжается до тех пор, пока в живых не останется только один или никого.

1. Какой должна быть стратегия A?
2. У кого какие шансы на прекрасную даму?

Задача 2.89.

У диплоидных организмов наследственные характеристики определяются парой генов. Вспомним знакомые нам с 9-го класса горошины чешского монаха Менделя. Ген, определяющий форму горошины, имеет две аллели: «A» (гладкая) и «a» (морщинистая). «A» доминирует над «a». В популяции бесконечное количество организмов. Родители каждого потомка определяются случайным образом. Одна аллель потомка выбирается наугад из аллелей матери, другая — из аллелей отца. Начальное распределение генотипов имеет вид: «AA» — 30 %, «Aa» — 60 %, «aa» — 10 %.

1. Каким будет распределение генотипов в n-м поколении?
2. Заметив закономерность, сформулируйте и докажите теорему Харди—Вайнберга для произвольного начального распределения генотипов.

Задача 2.90.

У диплоидных организмов наследственные характеристики определяются парой генов. Некий ген, сцепленный с полом, имеет две аллели: «A» и «a», т. е. девочка может иметь один из трёх генотипов («AA», «Aa», «aa»), а мальчик — только два («A» и «a»; хромосома, определяющая мужской пол, короче и не содержит нужного участка). От мамы ребёнок наследует одну из двух аллелей (равновероятно), а от отца либо наследует (тогда получается девочка), либо нет (тогда получается мальчик). «A» доминирует «a». В популяции бесконечное количество организмов. Родители каждого потомка определяются случайным образом.

1. Верно ли, что численность генотипов стабилизируется со временем?
2. Известно, что дальтонизм является признаком, сцепленным с полом. Догадавшись, является ли он рецессивным или доминантным, определите, среди кого (мужчин или женщин) дальтоников больше.

/проверить биологию/

Задача 2.91.

В коробке находится четыре внешне одинаковые лампочки. Две лампочки исправны, две — нет. Лампочки извлекают из коробки по одной до тех пор, пока не будут извлечены обе исправные.

1. Какова вероятность того, что опыт закончится извлечением трёх лампочек?
2. Каково ожидаемое количество извлеченных лампочек?

Задача 2.92.

Спелестолог и батарейки

У спелестолога в каменоломнях сели батарейки в налобном фонаре, и он оказался в абсолютной темноте. В рюкзаке у него 8 батареек: 5 новых и 3 старых. Для работы фонаря требуется две новые батарейки. Спелестолог вытаскивает из рюкзака две батарейки наугад и вставляет их в фонарь. Если фонарь не начинает работать, то спелестолог откладывает эти две батарейки и пробует следующие и т. д.

1. Сколько попыток в среднем потребуется?
2. Какая попытка вероятнее всего будет первой удачной?
3. Творческая часть. Поиграйтесь с задачей. Случайна ли прогрессия в ответе? Сравните с вариантом «6 новых + 4 старых» и т. д.

Задача 2.93.

Два ферзя (чёрный и белый) ставятся наугад на шахматную доску.

1. Какова вероятность того, что они будут «бить» друг друга?
2. К чему стремится эта вероятность для шахматной доски со стороной, стремящейся к бесконечности?

Задача 2.94.

На день рождения к Васе пришли две Маши, два Саши, Петя и Коля. Все вместе с Васей сели за круглый стол. Какова вероятность, что Вася окажется между двумя тёзками?

Задача 2.95.

Равновероятно независимо друг от друга выбираются три числа от 1 до 20. Какова вероятность того, что третье попадет между двух первых?

Задача 2.96.

Five distinct numbers are randomly distributed to players numbered 1 through 5. Whenever two players compare their numbers, the one with the higher one is declared the winner. Initially, players 1 and 2 compare their numbers; the winner then compares with player 3. Let X denote the number of times player 1 is a winner. Find the distribution of X.

Задача 2.97.

Подбрасывается правильный кубик. Узнав результат, игрок выбирает, подкидывать ли кубик второй раз. Игрок получает сумму денег, равную количеству очков при последнем подбрасывании.

1. Каков ожидаемый выигрыш игрока при оптимальной стратегии?
2. Каков ожидаемый выигрыш игрока, если максимальное количество подбрасываний равно трём?

Задача 2.98.

На столе стоят 42 коробки, они занумерованы от 0 до 41. В каждой коробке 41 шар, в коробке с номером i лежат i белых шаров, а остальные чёрные. Мы наугад выбираем коробку, а затем из неё достаём три шара. Какова вероятность того, что они будут одного цвета?

Источник: http://math.stackexchange.com/questions/70760/

3 Условные вероятности и ожидания. Дополнительная информация

3.1 Условная вероятность

Задача 3.1.

A bag contains a counter, known to be either white or black. A white counter is put in, the bag is shaken, and a counter is drawn out, which proves to be white. What is now the chance of drawing a white counter?

Задача 3.2.

You have a hat in which there are three pancakes: one is golden on both sides, one is brown on both sides, and one is golden on one side and brown on the other. You withdraw one pancake, look at one side, and see that it is brown. What is the probability that the other side is brown?

Задача 3.3.

The inhabitants of an island tell truth one third of the time. They lie with the probability of $\frac{2}{3}$. On an occasion, after one of them made a statement, another fellow stepped forward and declared the statement true. What is the probability that it was indeed true?

Задача 3.4.

На кубиках написаны числа от 1 до 100. Кубики свалены в кучу. Вася выбирает наугад из кучи по очереди три кубика.

1. Какова вероятность, что полученные три числа будут идти в возрастающем порядке?
2. Какова вероятность, что полученные три числа будут идти в возрастающем порядке, если известно, что первое меньше последнего?

Задача 3.5.

(дописать)

Наследование группы крови контролируется аутосомным геном. Три его аллеля обозначаются буквами A, B и 0. Аллели A и B доминантны в одинаковой степени, а аллель 0 рецессивен по отношению к ним обоим. Поэтому существует четыре группы крови. Им соответствуют следующие генотипы:

- Первая (I) — 00;
- Вторая (II) — AA, A0;
- Третья (III) — BB, B0;
- Четвёртая (IV) — AB.

Наследование резус-фактора кодируется тремя парами генов и происходит независимо от наследования группы крови. Наиболее значимый ген имеет два аллеля, аллель D доминантный, аллель d рецессивный. Таким образом, получаем следующие генотипы:

- Резус-положительный — DD, Dd;
- Резус-отрицательный — dd.

Если у беременной женщины резус-отрицательная кровь, а у плода резус-положительная, то есть риск возникновения гемолитической болезни (у матери образуются антитела к резус фактору, безвредные для неё, но вызывающие разрушение эритроцитов плода).

Перед нами два семейства: Монтекки и Капулетти.

...

Задача 3.6.

Пусть X_i — НОРСВ, такие, что $\mathbb{P}(X_i = X_j) = 0$. Обозначим за E_k событие, состоящее в том, что X_k оказалась «рекордом», т. е. больше, чем все предыдущие X_i $(i < k)$. Для определённости будем считать, что $E_1 = \Omega$.

1. Найдите $\mathbb{P}(E_k)$.
2. Верно ли, что E_k независимы?
3. Какова вероятность того, что второй рекорд будет зафиксирован в n-й момент времени?
4. Сколько в среднем времени пройдёт до второго рекорда?

Источник: Williams, 4.3.

Задача 3.7.

Известно, что $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A \mid B^c)$. Верно ли, что A и B независимы?

Задача 3.8.

Randomized response technique

В анкету для чиновников включён скользкий вопрос: «Берёте ли Вы взятки?». Чтобы стимулировать чиновников отвечать правдиво, используется следующий прием. Перед ответом на вопрос чиновник втайне от анкетирующего подкидывает специальную монетку, на гранях которой написано «правда», «ложь». Если монетка выпадает «правдой», то предлагается отвечать на вопрос правдиво, если монетка выпадает на «ложь», то предлагается солгать. Таким образом, ответ «да» не обязательно означает, что чиновник берёт взятки.

Допустим, что треть чиновников берёт взятки, а монетка неправильная и выпадает «правдой» с вероятностью 0,2.

1. Какова вероятность того, что чиновник ответит «да»?
2. Какова вероятность того, что чиновник берёт взятки, если он ответил «да»? Если ответил «нет»?

Вставить построение несмещённой оценки?

Задача 3.9.

Пусть события A и B независимы и $\mathbb{P}(B) > 0$. Чему равна $\mathbb{P}(A \mid B)$?

Задача 3.10.

Из колоды в 52 карты извлекается одна карта наугад. Верно ли, что события «извлечён туз» и «извлечена пика» являются независимыми?

Задача 3.11.

Из колоды в 52 карты извлекаются по очереди две карты наугад. Верно ли, что события «первая карта — туз» и «вторая карта — туз» являются независимыми?

Задача 3.12.

Известно, что $\mathbb{P}(A) = 0{,}3$, $\mathbb{P}(B) = 0,4$, $\mathbb{P}(C) = 0{,}5$. События A и B несовместны, события A и C независимы и $\mathbb{P}(B \mid C) = 0{,}1$. Найдите $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$.

Задача 3.13.

Имеется три монетки. Две «правильных» и одна — с орлами по обеим сторонам. Петя выбирает одну монетку наугад и подкидывает её два раза. Оба раза выпадает орёл. Какова вероятность того, что монетка «неправильная»?

Задача 3.14.

Самолёт упал либо в горах, либо на равнине. Вероятность того, что самолёт упал в горах, равна 0,75. Для поиска пропавшего самолёта выделено 10 вертолётов. Каждый вертолёт можно использовать только в одном месте. Как распределить имеющиеся вертолёты, если вероятность обнаружения пропавшего самолёта отдельно взятым вертолётом равна: 0,95? $0,6$ (пасмурно)? 0,1 (туман)?

Источник: Айвазян, экзамен РЭШ.

Задача 3.15.

Предположим, что социологическим опросам доверяют 70 % жителей. Те, кто доверяет опросам, всегда отвечают искренне; те, кто не доверяет, отвечают наугад, равновероятно выбирая «да» или «нет». Социолог Петя в анкету очередного опроса включил вопрос: «Доверяете ли Вы социологическим опросам?»

1. Какова вероятность, что случайно выбранный респондент ответит «Да»?
2. Какова вероятность того, что он действительно доверяет, если известно, что он ответил «Да»?

Задача 3.16.

Два охотника выстрелили в одну утку. Первый попадает с вероятностью 0,4, второй — с вероятностью 0,6. В утку попала ровно одна пуля. Какова вероятность того, что утка была убита первым охотником?

Задача 3.17.

С вероятностью 0,3 Вася оставил конспект в одной из 10 посещённых им сегодня аудиторий. Вася осмотрел 7 из 10 аудиторий и конспекта в них не нашёл.

1. Какова вероятность того, что конспект будет найден в следующей осматриваемой им аудитории?
2. Какова (условная) вероятность того, что конспект оставлен где-то в другом месте?

Задача 3.18.

Вася гоняет на мотоцикле по единичной окружности с центром в начале координат. В случайный момент времени он останавливается. Пусть случайные величины X и Y — это Васины абсцисса и ордината в момент остановки. Найдите $\mathbb{P}\left(X > \frac{1}{2}\right)$, $\mathbb{P}\left(X > \frac{1}{2} \mid Y < \frac{1}{2}\right)$. Являются ли события $A = \left\{X > \frac{1}{2}\right\}$ и $B = \left\{Y < \frac{1}{2}\right\}$ независимыми?

Подсказка. $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, длина окружности $l = 2\pi r$.

Задача 3.19.

Пусть $\mathbb{P}(A) = 1/4$, $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{1}{2}$ и $\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{1}{3}$. Найдите $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(B)$ и $\mathbb{P}(A \cup B)$.

Задача 3.20.

Примерно[1] 4 % коров заражены «коровьим бешенством». Имеется тест, позволяющий с определённой степенью достоверности установить, заражено ли мясо прионом или нет. С вероятностью 0,9 заражённое мясо будет признано заражённым. «Чистое» мясо будет признано заражённым с вероятностью 0,1. Судя по тесту, эта партия мяса заражена. Какова вероятность того, что она действительно заражена?

Задача 3.21.

Роме Протасевичу, искавшему со мной у Мутновского вулкана в тумане серую палатку...

Есть две тёмные комнаты, A и B. В одной из них сидит чёрная кошка. Первоначально предполагается, что вероятность нахождения кошки в комнате A равна α. Вероятность найти чёрную кошку в темной комнате (если она там есть) с одной попытки равна p. Допустим, что вы сделали a неудачных попыток поиска кошки в комнате A и b неудачных попыток в комнате B.

1. Чему равна условная вероятность нахождения кошки в комнате A?
2. При каком условии на $(a - b)$ эта вероятность будет больше 0,5?

Задача 3.22.

Кубик подбрасывается два раза. Найдите вероятность получить сумму, равную 8, если на первом кубике выпало 3.

Задача 3.23.

В коробке 10 пронумерованных монеток, i-я монетка выпадает орлом с вероятностью $\frac{i}{10}$. Из коробки была вытащена одна монетка наугад. Она выпала орлом. Какова вероятность того, что это была пятая монетка?

Задача 3.24.

Вы играете две партии в шахматы против незнакомца. Равновероятно незнакомец может оказаться новичком, любителем или профессионалом. Вероятности вашего выигрыша в отдельной партии, соответственно, будут равны 0,9; 0,5; 0,3.

1. Какова вероятность выиграть первую партию?
2. Какова вероятность выиграть вторую партию, если вы выиграли первую?

Задача 3.25.

В каких из перечисленных случаев вероятность наличия флэша (см. карточные комбинации на стр. 6) больше, чем при полном отсутствии информации:

1. Первая карта из имеющихся — это туз;
2. Первая карта из имеющихся — это туз бубей;
3. На руках имеется хотя бы один туз;
4. На руках имеется туз бубей.

Задача 3.26.

A man has 3 equally favorite seats to fish at. The probability with which the man can succeed at catching at each seat is 0.6, 0.7, 0.8 respectively. It is known that the man dropped the hint at one seat three times and just caught one fish. Find the probability that the fish was caught at the first seat.

3.2 Условное среднее

Задача 3.27.

Две шкатулки

Васе предлагают две шкатулки и обещают, что в одной из них денег в два раз больше, чем в другой. Вася открывает наугад одну из них — в ней a рублей. Вася может взять либо деньги, либо оставшуюся шкатулку.

1. Правильно ли Вася считает, что ожидаемое количество денег в неоткрытой шкатулке равно $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a\right) + \frac{1}{2}(2a) = 1\frac{1}{4}a$ и что поэтому нужно изменить свой выбор?
2. Пусть известно, что в пару шкатулок кладут 3^k и 3^{k+1} рублей с вероятностью $p_k = (\frac{1}{2})^k$. Стоит ли Васе изменить свой выбор после того, как он открыл первую шкатулку? Почему?

[1] Цифры условные. Celui qui ne mange pas de bifsteak au cause de la vache folle — il est fou! Jolivaldt.

Задача 3.28.

В кабинет бюрократа скопилась очередь ещё до его открытия. Пусть время обслуживания страждущих — независимые экспоненциальные случайные величины. Посетитель, пришедший через t минут после открытия, узнал, что первый посетитель уже ушёл, а второй ещё сидит в кабинете. Найдите ожидаемое время обслуживания первого посетителя, $\mathbb{E}(X_1 \mid X_1 \leqslant t < X_1 + X_2)$.

Задача 3.29.

Пете и Васе предложили одну и ту же задачу. Они могут правильно решить её с вероятностями 0,7 и 0,8 соответственно. К задаче предлагается 5 ответов на выбор, поэтому будем считать, что выбор каждого из пяти ответов равновероятен, если задача решена неправильно.

1. Какова вероятность несовпадения ответов Пети и Васи?
2. Какова вероятность того, что Петя ошибся, если ответы совпали?
3. Каково ожидаемое количество правильных решений, если ответы совпали?

Задача 3.30.

Автобусы ходят регулярно с интервалом в 10 минут. Вася приходит на остановку в случайный момент времени и ждёт автобуса не больше a минут. Величина a — константа из интервала $(0; 10)$. Если автобус приходит меньше чем за a минут, то Вася уезжает на нём. Если автобуса нет в течение a минут, то Вася заходит в ближайшую кафешку перекусить и через случайное время возвращается на остановку. На второй раз он ждёт до прихода автобуса.

1. Какое время Вася в среднем проводит в ожидании автобуса?
2. Постройте график получившейся функции от a.

4 Var, σ, conditional Var, conditional σ

4.1 Дискретный случай

Задача 4.1.

Кубик подбрасывают до тех пор, пока накопленная сумма очков на гранях не превысит 2. Пусть X — число подбрасываний кубика. Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(36X-5)$, $\mathbb{E}(36X-17)$.

Задача 4.2.

Из 5-ти деталей 3 бракованных. Сколько потребуется в среднем попыток, прежде чем обнаружится первая дефектная деталь? Какова дисперсия числа попыток?

Задача 4.3.

Бросают два правильных игральных кубика. Пусть X — наименьшая из выпавших граней, а Y — наибольшая.

1. Рассчитайте $\mathbb{P}(X = 3 \cap Y = 5)$;
2. Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathbb{E}(3X - 2Y)$.

Источник: Cut the knot.

Задача 4.4.

Из колоды в 52 карты извлекаются две. Пусть X — количество тузов. Найдите закон распределения X, $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$.

Задача 4.5.

Иська пригласил трёх друзей навестить его. Каждый из них появится независимо от другого с вероятностью 0,9, 0,7 и 0,5 соответственно. Пусть N — количество пришедших гостей.

1. Рассчитайте вероятности $\mathbb{P}(N = 0)$, $\mathbb{P}(N = 1)$, $\mathbb{P}(N = 2)$ и $\mathbb{P}(N = 3)$;
2. Найдите $\mathbb{E}(N)$ и $\mathrm{Var}(N)$.

Задача 4.6.

В коробке лежат три монеты: их достоинство — 1, 5 и 10 копеек соответственно. Они извлекаются в случайном порядке. Пусть X_1, X_2 и X_3 — достоинства монет в порядке их появления из коробки.

1. Верно ли, что X_1 и X_3 одинаково распределены?
2. Верно ли, что X_1 и X_3 независимы?
3. Найдите $\mathbb{E}(X_2)$
4. Найдите дисперсию $\bar{X}_2 = \frac{X_1 + X_2}{2}$.

Задача 4.7.

Easy

Пусть X — сумма очков, выпавших в результате двукратного подбрасывания кубика. Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$.

Задача 4.8.

Охотник, имеющий 4 патрона, стреляет по дичи до первого попадания или до израсходования всех патронов. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,6, а при каждом последующем уменьшается на 0,1. Найдите

1. Закон распределения числа патронов, израсходованных охотником;
2. Математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

4.2 Непрерывный случай

Задача 4.9.

A large quantity of pebbles lies scattered uniformly over a circular field; compare the labour of collecting them on by one

1. At the center O of the field;
2. At a point A on the circumference.

Источник: Grimmett, экзамен 1858 года в St John's College, Кембридж.

4.3 ? Способ расчёта ожидания и дисперсии через условную

Задача 4.10.

Число x выбирается равномерно на отрезке $[0; 1]$. Затем случайно выбираются числа из отрезка $[0; 1]$ до тех пор, пока не появится число больше x.

1. Сколько в среднем потребуется попыток?
2. Сколько в среднем потребуется попыток, если x выбирается равномерно на отрезке $[0; r]$, $r < 1$?
3. Сколько в среднем потребуется попыток, x не выбирается равномерно, а имеет функцию плотности $p(t) = 2(1 - t)$ для $t \in [0; 1]$?

5 Связь между случайными величинами, Cov, Corr

5.1 Дискретный случай

Задача 5.1.

У Васи есть n монеток, каждая из которых выпадает орлом с вероятностью p. В первом раунде Вася подкидывает все монетки, во втором раунде Вася подкидывает только те монетки, которые выпали орлом в первом раунде. Пусть R_i — количество монеток, подкидывавшихся и выпавших орлом во i-м раунде.

1. Каков закон распределения величины R_2?
2. Найдите $\mathrm{Corr}(R_1, R_2)$.
3. Как ведет себя корреляция при $p \to 0$ и $p \to 1$? Почему?

5.2 Непрерывный случай (Cov, Corr)

Задача 5.2.

Пусть X равномерно на $[0; 1]$. Если известно, что $X = x$, то случайная величина Y равномерна на $[x; x + 1]$. Найдите $P(X + Y < 1)$ и $f_{X|Y}(x|y)$. Как распределено $Y - X$?

5.3 Общие свойства Cov и Var

Задача 5.3.

Верно ли, что X и Y независимы, если известно, что

1. Величина X и любая функция $g(Y)$ некоррелированы?
2. Любая функция $f(X)$ и любая функция $g(Y)$ некоррелированы?

5.4 Преобразование случайных величин (преобразования)

Задача 5.4.

На отрезке равномерно и независимо выбираются две точки. Верно ли, что длины получающихся трёх отрезков распределены одинаково?

Задача 5.5.

Птички на проводе-1

На провод, отрезок $[0;1]$, равномерно и независимо друг от друга садятся n птичек. Пусть $Y_1, \ldots,$ Y_{n+1} — расстояния от левого столба до первой птички, от первой птички от второй и т. д.

1. Найдите функцию плотности Y_1;
2. Верно ли, что все Y_i одинаково распределены?
3. Верно ли, что все Y_i независимы?
4. Найдите $\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j)$ (вроде бы ковариации равны?);
5. Как распределена величина $n \cdot Y_1$ при больших n? Почему?

Задача 5.6.

Птички на проводе-2

На провод, отрезок $[0;1]$, равномерно и независимо друг от друга садятся n птичек. Мы берем ведро жёлтой краски и для каждой птички красим участок провода от неё до ближайшей к ней соседки.

Какая часть провода будет окрашена при больших n?

Источник: Marcin Kuczma.

Задача 5.7.

Длительность разговора клиента в минутах X — экспоненциальная случайная величина со средним две минуты. Стоимость разговора, Y, составляет 5 рублей за весь разговор, если разговор короче двух минут, и 2,5 рубля за минуту, если разговор длиннее двух минут. Неполные минуты оплачиваются пропорционально, например, за 3,5 минуты нужно заплатить $2{,}5 \cdot 3{,}5$ рублей. Найдите $\mathbb{E}(Y)$, $\operatorname{Var}(Y)$, постройте функцию распределения Y.

Задача 5.8.

Вася пришёл на остановку. Ему нужен 42-й или 21-й автобус. Время до прихода 42-го равномерно на отрезке $[0;10]$ минут, время до прихода 21-го равномерно на отрезке $[0;20]$ минут. Время прихода 42-го и время прихода 21-го — независимые величины. Обозначим за Y время, которое Вася проведёт в ожидании на остановке. Найдите функцию плотности Y, $\mathbb{E}(Y)$, $\operatorname{Var}(Y)$.

5.5 Прочее про несколько случайных величин

Задача 5.9.

Парадокс голосования

Пусть X, Y, Z — дискретные случайные величины, их значения попарно различны с вероятностью 1. Докажите, что $\min\{\mathbb{P}(X > Y), \mathbb{P}(Y > Z), \mathbb{P}(Z > X)\} \leqslant \frac{2}{3}$. Приведите пример, при котором эта граница точно достигается.

6 Приёмы решения

6.1 Разложение в сумму

Задача 6.1.

Судьба Дон-Жуана-2 (см. тж. с. 6)

У Васи n знакомых девушек (их всех зовут по-разному). Он пишет им n писем, но по рассеянности раскладывает их в конверты наугад. Случайная величина X обозначает количество девушек, получивших письма, написанные лично для них. Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\operatorname{Var}(X)$.

Задача 6.2.

(см. тж. с. 9)

A wooden cube that measures 3 cm along each edge is painted red. The painted cube is then cut into 27 pieces of 1-cm cubes. If I tossed all the small cubes in the air, so that they landed randomly on the table, how many cubes should I expect to land with a painted face up?

Задача 6.3.

Вокруг новогодней ёлки танцуют хороводом 27 детей. Мы считаем, что ребенок высокий, если он выше обоих своих соседей. Сколько высоких детей в среднем танцует вокруг елки? Вероятность совпадания роста будем считать равной нулю.

Задача 6.4.

Маша собирает свою дамскую сумочку. Есть n различных предметов, которые она туда может положить. Каждый предмет она кладёт независимо от других с вероятностью p.

1. Пусть X — количество положенных предметов. Найдите $\mathbb{E}(X)$ и $\mathrm{Var}(X)$.
2. При каком p вероятность положить в сумку любой заданный набор вещей не будет зависеть от конкретного набора?

6.2 Первый шаг

Задача 6.5.

Илье Муромцу предстоит дорога к камню. И от камня начинаются ещё три дороги. Каждая из тех дорог снова оканчивается камнем. И от каждого камня начинаются ещё три дороги. И каждые те три дороги оканчиваются камнем... И так далее до бесконечности. На каждой дороге можно встретить живущего на ней трёхголового Змея Горыныча с вероятностью (хм, вы не поверите!) одна третья. Какова вероятность того, что Илья Муромец пройдет свой бесконечный жизненный путь, так ни разу и не встретив Змея Горыныча?

Задача 6.6.

У Пети — монетка, выпадающая орлом с вероятностью $p \in (0;1)$. У Васи — с вероятностью $q \in (0;1)$. Они одновременно подбрасывают свои монетки до тех пор, пока у них не окажется набранным одинаковое количество орлов. В частности, они останавливаются после первого подбрасывания, если оно дало одинаковые результаты. Сколько в среднем раз им придётся подбросить монетку?

Задача 6.7.

Сколько в среднем нужно взять из колоды в 52 карты, чтобы насобирать подряд 5 карт одной масти? **Подсказка.** Ответ имеет вид произведения дробей очень простого вида.

Задача 6.8.

Вася прыгает на один метр вперёд с вероятностью p и на два метра вперёд с вероятностью $1-p$. Как только он пересечёт дистанцию в 100 метров, он останавливается. Получается, что он может остановиться на отметке либо в 100 метров, либо в 101 метр. Какова вероятность того, что он остановится ровно на отметке в 100 метров?

Задача 6.9.

Испытания по схеме Бернулли проводятся до первого успеха, вероятность успеха в отдельном испытании равна p

а) Чему равно ожидаемое количество испытаний?

б) Чему равно ожидаемое количество неудач?

в) Чему равна дисперсия количества неудач?

Задача 6.10.

Отрицательное биномиальное

Испытания по схеме Бернулли проводятся до r-го успеха, вероятность успеха в отдельном испытании равна p

а) Чему равно ожидаемое количество неудач?

б) Чему равна дисперсия количества неудач?

Задача 6.11.

Саша и Маша по очереди подбрасывают кубик. Посуду будет мыть тот, кто первым выбросит шестерку. Маша бросает первой. Какова вероятность того, что Маша будет мыть посуду?

Задача 6.12.

Саша и Маша решили, что будут рожать нового ребенка, до тех пор, пока в их семье не будут дети обоих полов. Каково ожидаемое количество детей?

Задача 6.13.

Четыре человека играют в игру «белая ворона платит». Они одновременно подкидывают монетки. Если три монетки выпали одной стороной, а одна - по-другому, то «белая ворона» оплачивает всей четверке ужин в ресторане. Если «белая ворона» не определилась, то монетки подбрасывают снова. Сколько в среднем нужно подбрасывания для определения «белой вороны»?

Задача 6.14.

Саша и Маша каждую неделю ходят в кино. Саша доволен фильмом с вероятностью $1/4$, Маша - с вероятностью $1/3$.

a) Сколько недель в среднем пройдет до тех пор, пока кто-то не будет доволен?

b) Какова вероятность того, что первым будет доволен Саша?

c) Сколько недель в среднем пройдет до тех пор, пока каждый не будет доволен хотя бы одним просмотренным фильмом?

Задача 6.15.

По ответу студента на вопрос преподаватель может сделать один из трех выводов: ставить зачет, ставить незачет, задать еще один вопрос. Допустим, что знания студента и характер преподавателя таковы, что при ответе на отдельный вопрос зачет получается с вероятностью $p_1 = 3/8$, незачет - с вероятностью $p_2 = 1/8$. Преподаватель задает вопросы до тех пор, пока не определится оценка.

а) Сколько вопросов в среднем будет задано?

б) Какова вероятность получения зачета?

Задача 6.16.

Вы играете в следующую игру. Кубик подкидывается неограниченное число раз. Если на кубике выпадает 1, 2 или 3, то соответствующее количество монет добавляется на кон. Если выпадает 4 или 5, то игра оканчивается и Вы получаете сумму, лежащую на кону. Если выпадает 6, то игра оканчивается, а Вы не получаете ничего.

а) Чему равен ожидаемый выигрыш в эту игру?

б) Изменим условие: если выпадает 5, то набранная сумма сгорает, а игра начинается заново. Чему будет равен ожидаемый выигрыш?

Задача 6.17.

Вася подкидывает кубик. Если выпадает единица, или Вася говорит «стоп», то игра оканчивается, если нет, то начинается заново. Васин выигрыш - последнее выпавшее число. Как выглядит оптимальная стратегия? Как выглядит оптимальная стратегия, если за каждое подбрасывание Вася платит 35 копеек?[**?**]

Задача 6.18.

Саша и Маша подкидывают монетку бесконечное количество раз. Если сначала появится РОРО, то выигрывает Саша, если сначала появится ОРОО, то - Маша.

а) У кого какие шансы выиграть?

b) Сколько в среднем времени ждать до появления РОРО? До ОРОО? с) Сколько в среднем времени ждать до определения победителя?

Задача 6.19.

Есть три комнаты. В первой из них лежит сыр. Если мышка попадает в первую комнату, то она находит сыр через одну минуту. Если мышка попадает во вторую комнату, то она ищет сыр две минуты и покидает комнату. Если мышка попадает в третью комнату, то она ищет сыр три минуты и покидает комнату. Покинув комнату, мышка выходит в коридор и выбирает новую комнату наугад (т.е. может зайти в одну и ту же). Сейчас мышка в коридоре. Сколько времени ей в среднем потребуется, чтобы найти сыр?

Задача 6.20.

Иська и Еська по очереди подбрасывают два кубика. Иська бросает первым. Иська выигрывает, если при своем броске получит 6 очков в сумме на двух кубиках. Еська выигрывает, если при своем броске получит 7 очков в сумме на двух кубиков. Кубики подбрасываются до тех пор, пока не определится победитель.

а) Верно ли, что события $A = \{$на двух кубиках в сумме выпало больше 5 очков$\}$ и $B = \{$на одном из кубиков выпала 1$\}$ являются независимыми?

б) Какова вероятность того, что Еська выиграет?

Задача 6.21.

Players A and B play a (fair) dice game. «A» deposits one coin and they take turns rolling a single dice, «B» rolling first.

If «B» rolls an even number, he collects a coin from the pot. If he rolls an odd number, he put a coin (coins with same values always). If «A» (plays and) rolls an even number, he collects a coin but if he rolls an odd number, he does NOT add a coin. The game continues until the pot is exhausted.

Question: what is the probability that «A» wins this game (that is, exhaust the pot) ?

t=138358

6.3 o-малое

Задача 6.22.

Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ одинаково распределены с функцией плотности $p(t)$ и независимы. Найдите функцию плотности третьего по величине $X_{(3)}$.

6.4 Вероятностный метод

Задача 6.23.

На потоке 200 студентов. На контрольной было 6 задач. Известно, что каждую задачу решило не менее 120 человек. Всегда ли преподаватель может выбрать двух студентов из потока так, что эти двое могут решить всю контрольную совместными усилиями?

6.5 Склеивание отрезка

Задача 6.24.

Машина может сломаться равновероятно в любой точке на дороге от города А до города Б. Когда машина сломается мы будем толкать ее до ближайшего сервиса. Где должны быть расположены три автосервиса чтобы минимизировать ожидаемую продолжительность толкания? А если автосервисов будет n?

7 Неравенства, связанные с ожиданием

7.1 Чебышёв/Марков/Кантелли/Чернов

Задача 7.1.

У последовательности неотрицательных случайных величин X_1, X_2,... дисперсия постоянна, а математическое ожидание стремится к бесконечности, $\lim \mathbb{E}(X) = +\infty$. Найдите $\lim \mathbb{P}(X_n > a)$.

7.2 Йенсен

7.3 Коши—Шварц

8 Компьютерные (use R or Python!)

8.1 Нахождение сложных сумм/поиск оптимальных стратегий

Задача 8.1.

Перед нами 10 коробок. Изначально в 1-й коробке 1 шар, во 2-й — 2 шара и т. д. Мы равновероятно выбираем одну из коробок, вытаскиваем из неё шар и кладём его равновероятно в одну из девяти оставшихся коробок. Мы повторяем это перекладывание до тех пор, пока одна из коробок не станет пустой. Пусть N — число перекладываний. С помощью компьютера оцените $\mathbb{E}(N)$, $\mathrm{Var}(N)$.

Задача 8.2.

В классе учатся n человек. Нас интересует вероятность того, что хотя бы у двух из них дни рождения будут в соседние дни. (31 декабря и 1 января будем считать соседними). При каком n эта вероятность впервые достигнет 0,5?

Задача 8.3.

В классе 30 человек. Какова вероятность того, что есть три человека, у которых совпадают дни рождения? Найдите ответ с помощью симуляций и с помощью пуассоновского приближения. При каком количестве человек эта вероятность впервые превысит 50 %?

Задача 8.4.

Сколько нужно людей, чтобы вероятность того, что в каждый день года у кого-то день рождения, впервые превысила 50 %?

Задача 8.5.

Сколько в среднем нужно взять из колоды в 52 карты, чтобы насобирать подряд 5 карт одной масти? Не обязательно одной масти?

Задача 8.6.

Маленький мальчик торгует на улице еженедельной газетой. Покупает он ее по 15 рублей, а продает по 30 рублей. Количество потенциальных покупателей — случайная величина с распределением Пуассона и средним значением равным 50. Нераспроданные газеты ничего не стоят. Пусть n — количество газет, максимизирующее ожидаемую прибыль мальчика.

1. Чему примерно должно быть равно значение функции распределения в точке n?
2. С помощью компьютера найдите n и ожидаемую прибыль.

8.2 Проведение симуляций

8.3 Statistics

Задача 8.7.

Петя подбрасывал две монетки неправильные монетки. Результаты подбрасывания:

Число подбрасываний первой. Число подбрасываний второй. Общее число орлов. ... ...

... ...

Оцените с помощью компьютера вероятности выпадения орлом для каждой монетки. Постройте доверительные интервалы. (Красивого решения в явном виде нет).

Можно использовать нормальное приближение

Задача 8.8.

Голосовать можно за трёх кандидатов: А, Б и В. Из 100 опрошенных 20 хотят голосовать за А, 40 — за Б, остальные — за В. В осях p_A, p_B постройте 90-процентную доверительную двумерную область.

9 Пуассоновский поток и экспоненциальное распределение

9.1 Пуассоновский поток

Задача 9.1.

Саша красит стены в своей комнате, а Алёша — в своей. У каждой комнаты четыре стены. Предположим, что время покраски одной стены и для Саши, и для Алёши — экспоненциальная случайная величина с параметром λ. Какова вероятность того, что Саша успеет покрасить 3 стены раньше, чем Алёша — две?

Задача 9.2.

Машины подъезжают к светофору пуассоновским потоком с интенсивностью λ. Для простоты будем считать, что первая машина подъезжает в $t = 0$. Светофор горит зелёным только в целые моменты времени, и этого достаточно чтобы пропустить одну машину, т. е. светофор горит красным при $t \in (0; 1)$, $t \in (1; 2)$, $t \in (2; 3)$ и т. д. Какой будет средняя длина очереди через продолжительное время? Чему будет равна вероятность, что очередь пуста?

Задача 9.3.

В офисе два телефона: зелёный и красный. Входящие звонки на красный — Пуассоновский поток событий с интенсивностью $\lambda_1 = 4$ звонка в час, входящие на зелёный — с интенсивностью $\lambda_2 = 5$ звонков в час. Секретарша Василиса Премудрая одна в офисе. Время разговора — случайная величина, имеющая экспоненциальное распределение со средним временем 5 минут. Если Василиса занята разговором, то на второй телефон она не отвечает. Сколько звонков в час в среднем пропустит Василиса, потому что будет занята разговором по другому телефону? Являются ли пропущенные звонки Пуассоновским потоком?

Задача 9.4.

В офисе два телефона: зелёный и красный. Входящие звонки на красный — Пуассоновский поток событий с интенсивностью $\lambda_1 = 4$ звонка в час, входящие на зелёный — с интенсивностью $\lambda_2 = 5$ звонков в час. Секретарша Василиса Премудрая одна в офисе. Перед началом рабочего дня она подбрасывает монетку и отключает один из телефонов: зелёный — если выпала решка, красный — если выпал орёл. Обозначим за Y время от начала дня до первого звонка. Найдите функцию плотности Y.

Задача 9.5.

Случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром λ. Найдите медиану X.

9.2 Пуассоновское приближение

10 Нормальное распределение и ЦПТ

10.1 Одномерное нормальное распределение

Задача 10.1.

Где находятся точки перегиба функции плотности для нормального распределения?

Задача 10.2.

Пусть $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ и $t > \mu$. В какой точке функция $\mathbb{P}(X \in [t; t + dt])$ убывает быстрее всего?

Задача 10.3.

Имеются две акции с доходностями X и Y на один вложенный рубль. Доходности некоррелированы, $\mathbb{E}(X) = 0{,}09$, $\mathbb{E}(Y) = 0{,}04$, $\sigma_X = 0{,}5$, $\sigma_Y = 0{,}1$. У инвестора есть 1 рубль. Он покупает на $a \in (0; 1)$ рубля первых акций и на $(1 - a)$ вторых акций. Обозначим за $\mu(a)$ и $\sigma(a)$ ожидаемую доходность и стандартное отклонение доходности полученного портфеля.

1. Постройте множество возможных $\mu(a)$ и $\sigma(a)$
2. Найдите наименее рисковый портфель. Чему равна его ожидаемая доходность?

Задача 10.4.

Имеются две акции с доходностями X и Y на один вложенный рубль. Доходности некоррелированы, $\mathbb{E}(X) = 0{,}09$, $\mathbb{E}(Y) = 0{,}04$, $\sigma_X = 0{,}5$, $\sigma_Y = 0{,}1$. У инвестора есть 1 рубль. Инвестор подкидывает неправильную монетку, выпадающую орлом с вероятностью p. Если монетка выпадает орлом, он покупает первые акции, если решкой, то вторые. Обозначим за $\mu(p)$ и $\sigma(p)$ ожидаемую доходность и стандартное отклонение доходности полученной стратегии.

1. Постройте множество возможных $\mu(p)$ и $\sigma(p)$.
2. Найдите функцию плотности доходности полученной стратегии.

10.2 ЦПТ

Задача 10.5.

Вася играет в компьютерную игру — «стрелялку-бродилку». По сюжету ему нужно убить 60 монстров. На один выстрел уходит ровно 1 минута. Вероятность убить монстра с одного выстрела равна 0,25. Количество выстрелов не ограничено.

1. Сколько времени в среднем Вася тратит на одного монстра?
2. Найдите дисперсию этого времени.
3. Какова вероятность того, что Вася закончит игру меньше, чем за 3 часа?

10.3 Многомерное нормальное распределение

Задача 10.6.

Ермолай Лопахин решил приступить к вырубке вишневого сада. Однако выяснилось, что растут в нём не только вишни, но и яблони. Причём, по словам Любови Андреевны Раневской, среднее количество деревьев (а они периодически погибают от холода или жары, либо из семян вырастают новые) в саду распределено в соответствии с нормальным законом (X — число яблонь, Y — число вишен) со следующими параметрами:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 25 \\ 125 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}\right) \tag{1}$$

Найдите вероятность того, что Ермолаю Лопахину придется вырубить более 150 деревьев. Каково ожидаемое число подлежащих вырубке вишен, если известно, что предприимчивый и последовательный Лопахин, не затронув ни одного вишнёвого дерева, начал очистку сада с яблонь и все 35 яблонь уже вырубил?

Автор: Кирилл Фурманов, Ира ...

10.4 Распределения связанные с нормальным

Задача 10.7.

Сравните $\mathbb{E}(F_{k,n})$ и $Var(t_n)$.

11 Случайное блуждание

11.1 Дискретное случайное блуждание

Задача 11.1.

Какова вероятность того, что трёхмерное случайное блуждание бесконечное количество раз пересечёт вертикальную ось?

Задача 11.2.

Пусть X_n — симметричное случайное блуждание. Сколько времени в среднем придётся ждать, пока остаток от деления X_n на 183 окажется равным 39?

11.2 Принцип отражения

Задача 11.3.

Выборы

После выборов, в которых участвуют два кандидата, A и B, за них поступило a и b ($a > b$) бюллетеней соответственно, скажем, 3 и 2. Если подсчёт голосов производится последовательным извлечением бюллетеней из урны, то какова вероятность того, что хотя бы один раз число вынутых бюллетеней, поданных за A и B, было одинаково?

Источник: Mosteller.

Задача 11.4.

Ничьи при бросании монеты

Игроки A и B в орлянку играют n раз. После первого бросания каковы шансы на то, что в течение всей игры их выигрыши не совпадут?

Источник: Mosteller.

11.3 Броуновское движение

Задача 11.5.

Падал первый снег и 30 школьников ловили снежинки. В среднем каждый поймал 3,3 снежинки. Количества снежинок пойманные каждым — независимые Пуассоновские случайные величины с общим параметром λ.

1. Оцените λ используя метод максимального правдоподобия

2. Оцените дисперсию полученной оценки
3. На уровне значимости 5% проверьте гипотезу о том, что $\lambda = 3$ используя тест множителей Лагранжа
4. ... используя тест отношения правдоподобия
5. ... используя тест Вальда
6. Постройте 95% доверительный интервал Вальда для λ

Задача 11.6.

Вовочка тестирует гипотезу H_0 против гипотезы H_a. Предположим, что H_0 на самом деле верна. По своей сути p-value является случайной величиной. Какое распределение оно имеет?

Задача 11.7.

Гражданин Фёдор решает проверить, не жульничает ли напёрсточник Афанасий, для чего предлагает Афанасию сыграть 5 партий в напёрстки. Фёдор решает, что в каждой партии будет выбирать один из трёх напёрстков наугад, не смотря на движения рук ведущего. Основная гипотеза: Афанасий честен, и вероятность правильно угадать напёрсток, под которым спрятан шарик, равна $1/3$. Альтернативная гипотеза: Афанасий каким-то образом жульничает (например, незаметно прячет шарик), так что вероятность угадать нужный напёрсток меньше, чем $1/3$. Статистический критерий: основная гипотеза отвергается, если Фёдор ни разу не угадает, где шарик.

1. Найдите уровень значимости критерия.
2. Найдите мощность критерия в том случае, когда Афанасий жульничает, так что вероятность угадать нужный напёрсток равна $1/5$.

12 Гипотезы о среднем и сравнении среднего при большом n

Задача 12.1.

Предположим, что исходные наблюдения X_i нормальны $N(\mu, \sigma^2)$ и независимы. Константы μ и σ неизвестны. Вовочка строит доверительный интервал для μ по первой половине доступных наблюдений. Петя — по всем наблюдениям. Может ли получится у Вовочки интервал меньшей ширины, чем у Пети?

Задача 12.2.

Вася и Петя выясняют, кто лучше умеет знакомиться с девушками. Вася попытался познакомиться с 100 девушек, из них 54 девушки дали ему номер своего телефона. Петя попытался познакомиться с 900 девушек, из них 495 дали ему номер своего телефона.

Вася и Петя изучили курс матстата и начали спорить. Петя утверждает, что ему в среднем чаще девушки дают свой номер телефона и аргументирует это так: давай проверим гипотезу, что в среднем ровно половина девушек даёт номер своего телефона, против альтернативной гипотезы, что больше половины. По твоим данным эта гипотеза не отвергается, а по моим — отвергается.

Вася утверждает, что он лучше убеждает девушек. Аргументирует это так: давай проверим гипотезу, что в среднем 60% девушек даёт номер своего телефона, против альтернативной гипотезы, что меньше 60 . По твоим данным эта гипотеза отвергается, а по моим — не отвергается.

Кто из них прав? Идея: Кирилл Фурманов

Задача 12.3.

При подбрасывании кубика грани выпали 234, 229, 240, 219, 236 и 231 раз соответственно. Проверьте гипотезу о том, что кубик «правильный».

Задача 12.4.

Проверьте независимость дохода и пола по таблице:

	< 500	$500 - 1000$	> 1000
М	112	266	34
Ж	140	152	11

Задача 12.5.

Вася Сидоров утверждает, что ходит в кино в два раза чаще, чем в спортзал, а в спортзал в два раза чаще, чем в театр. За последние полгода он 10 раз был в театре, 17 раз - в спортзале и 39 раз - в кино. Правдоподобно ли Васино утверждение?

Задача 12.6.

Проверьте независимость пола респондента и предпочитаемого им сока:

	Апельсиновый	Томатный	Вишневый
М	69	40	23
Ж	74	62	34

Задача 12.7.

У 200 человек записали цвет глаз и волос. На уровне значимости 10% проверьте гипотезу о независимости этих признаков.

Цвет глаз/волос	Светлые	Темные	Итого
Зеленые	49	25	74
Другие	30	96	126
Итого	79	121	200

Задача 12.8.

Идея задачи на хи-квадрат.

Если предложить голосовать за 3 альтернативы...

Если предложить голосовать за 4 альтернативы...

Выполняется ли предпосылка независимости от посторонних альтернатив?

Задача 12.9.

Когда Пирсон придумал хи-квадрат тест на независимость признаков (около 1900 г.), он не был уверен в правильном количестве степеней свободы. Он разошелся во мнениях с Фишером. Фишер считал, что для таблицы сопряженности размера два на два хи-квадрат статистика будет иметь три степени свободы, а Пирсон - что одну. Чтобы выяснить истину, Фишер взял большое количество таблиц два на два с заведомо независимыми признаками и посчитал среднее значение хи-квадрат статистики. Чему оно оказалось равно? Почему этот эксперимент помог выяснить истину?

Задача 12.10.

Из 10 опрошенных студентов часть предпочитала готовиться по синему учебнику, а часть - по зеленому. В таблице представлены их итоговые баллы.

Синий	76	45	57	65		
Зеленый	49	59	66	81	38	88

а) С помощью теста Манна-Уитни (Mann-Whitney) проверьте гипотезу о том, что выбор учебника не меняет закона распределения оценки.

Разрешается использование нормальной аппроксимации

б) Возможно ли в этой задаче использовать (Wilcoxon Signed Rank Test)?

Задача 12.11.

Имеются результаты экзамена в двух группах. Группа 1: 45, 67, 87, 71, 34, 12, 54, 57; группа 2: 46, 66, 81, 72, 11, 47, 55, 51, 9, 99. С помощью теста Манна-Уитни на уровне значимости 5% проверьте гипотезу о том, что результаты двух групп не отличаются.

Задача 12.12.

Имеются результаты нескольких студентов до и после апелляции (в скобках указан результат до апелляции): 48(47), 54(52), 67(60), 56(60), 55(58), 55(60), 90(70), 71(81), 72(87), 69(60). Предполагая, что изменение оценки на апелляции симметрично распределено, на уровне значимости 5% проверьте гипотезу о том, что апелляция в среднем не сказывается на результатах.

Задача 12.13.

Имеются наблюдения за говорливостью 30 попугаев (слов/день): 34, 56, 32, 45, 34, 45, 67, 1, 34, 12, 123, ... , 37 (всего 13 наблюдений меньше 40). Проверить гипотезу о том, что медиана равна 40 (слов/день).

Задача 12.14.

Вашему вниманию представлены результаты прыжков в длину Васи Сидорова на двух соревнованиях. На первых среди болельщиц присутствовала Аня Иванова (его первая любовь): 1,83; 1,64; 2,27; 1,78; 1,89; 2,33; 1,61; 2,31. На вторых Аня среди болельщиц не присутствовала: 1,26; 1,41; 2,05; 1,07; 1,59; 1,96; 1,29; 1,52; 1,18; 1,47. С помощью теста (Mann-Whitney) проверьте гипотезу о том, что присутствие Ани Ивановой положительно влияет на результаты Васи Сидорова. Уровень значимости $\alpha = 0.05$.

Задача 12.15.

Некоторые результаты 2-х контрольных по теории вероятностей выглядят следующим образом (указан результат за вторую контрольную и в скобках результат за первую): 43(55), 113(108), 97(53), 68(42), 94(67), 90.5(97), 35(91), 126(127), 102(78), 89(83). Можно ли считать (при $\alpha = 0.05$), что вторую контрольную написали лучше? Предположим, что разница в баллах распределена симметрично.

Задача 12.16.

Садовник осматривал по очереди розовые кусты вдоль ограды. Всего вдоль ограды растет 30 розовых кустов. Из них оказалось 20 здоровых и 10 больных.

Вот заметки садовника: $+++\ominus++\ominus\ominus\ominus++++\ominus\ominus++\ominus+++++\ominus\ominus\ominus++++$

($+$ - здоровый куст, $\ominus$ - больной куст)

а) С помощью теста серий проверьте гипотезу о независимости испытаний

б) Какой естественный смысл имеет эта гипотеза?

Подсказка: можно использовать нормальное распределение

13 Решения

— Профессор, я решал эту задачу 3 часа, а ответ не совпадает. Где я сделал ошибку?

— Предположив, что ответы к задачнику верные.

По мотивам AoPS, `f=265&t=275053`.

1.1. $\mathbb{P}(N \geqslant 1) = 1 - \frac{5}{6}^2$; $\mathbb{P}(N = 0) = \frac{5}{6}^2$.

1.2. $\mathbb{P}(\{b\}) = 0{,}2$, $\mathbb{P}(\{a\}) = 0{,}6$, $\mathbb{P}(\{c\}) = 0{,}5$.

1.3. $\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = 1 - 0{,}3 - 0{,}4$.

1.4. $\mathbb{P}(A \cap B) \in [0{,}1; 0{,}3]$.

1.5. $\mathbb{P}(\{N_2 > N_1\}) = \frac{15}{36}$;
$\mathbb{P}(\{N_1 + N_2 = 6\}) = \frac{5}{36}$;
$\mathbb{P}(\{N_1 + N_2 = 9\}) = \frac{4}{36}$;
$\mathbb{P}(\{\max\{N_1, N_2\} = 5\}) = \frac{9}{36}$;
$\mathbb{P}(\{\min\{N_1, N_2\} = 3\}) = \frac{7}{36}$;
$\mathbb{P}(\{|N_1 - N_2| \leqslant 1\}) = \frac{16}{36}$.

1.6. $\frac{4}{20}$.

1.7. $\mathbb{E}(X) = p$.

1.8.

1.9.

1.10. Устно: $\frac{1}{3}$.

1.11. 0,2.

1.12.

1.13. $\frac{C_6^3}{6^3}$.

1.14. $\frac{C_{10}^3}{10^3}$, т. к. каждый способ выбрать три разных числа соответствует благоприятной комбинации.

1.15.

1.16.

1.17. $\frac{1}{k+1}$, т. к. одна из $k+1$ карточек должна быть наибольшей.

1.18. «Сегодня понедельник» — это **не** событие. Вероятность не определена. Это функция от времени.

Вероятность того, что монетка выпала орлом, равна 0,5. Поэтому ей всё равно, как отвечать, если наказанием является превращение в тыкву, и нужно отвечать: «Решка!» — если наградой является молодильное яблоко. Предполагается, что красавица максимизирует ожидаемое количество молодильных яблок.

1.19.

1.20.

1.21. $\mathbb{P}(\{3\}) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(\{\Sigma \text{ чёт.}\}) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{E}(\Sigma) = 5$.

1.22. Если предположить, что у каждого игрока есть своя сила (константа), а вероятности победить в схватке для двух игроков относятся так же, как их силы, то $x = \frac{a}{a+b}$, $y = \frac{a}{a+c}$. Легко находим, что

$\frac{b}{b+c} = \frac{y-xy}{x+y-2xy}$.

1.23. Комитет можно выбрать C_{25}^4 способами, руководство — $C_{25}^3 3!$.

1.24. 5!.

1.25. $C_{12}^4 C_8^5$.

1.26. $2 \cdot \frac{3!3!}{6!}$.

1.27.

1.28. C_{30}^5. Расположить по росту можно только в одном порядке.

1.29. $\frac{1}{3}$, 1,5.

1.30.

1.31.

1.32. $\frac{25}{3}$.

1.33. $\int_1^\infty e^{-x}\,dx$; $\mathbb{P}(X \in (1;5)) = \mathbb{P}(X \in [1;5]) = \int_1^5 e^{-x}\,dx$.

1.34. Равны.

1.35. $\min f(u) = \operatorname{med}(X)$, $\min g(u) = \mathbb{E}(X)$

2.1. $C_{2n}^n/2^{2n}$. Из $2n$ подбрасываний выберем n. Выбранные в зоне Jenny соответствуют невыбранным в зоне Alex. б) Через формулу Стирлинга: $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

2.2.

2.3.

2.4. $\frac{n^2+n+2}{2^{n+1}}$ В оригинале у Алексея: Пусть A — матрица $n \times 2$, $\vec{x}$ и $\vec{b}$ — векторы подходящих размерностей. Известно, что как в матрице A, так и в расширенной матрице $\begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix}$ все миноры максимального порядка ненулевые. Вася берёт систему $Ax = b$ и в каждой строке независимо от других ставит вместо знака равенства равновероятно знак «больше» или знак «меньше». Какова вероятность того, что полученная система неравенств имеет решение?

Решение: остаться может либо один кусочек, либо ни одного. Всего есть 2^n способов выбирать полуплоскости. Некоторые из этих способов приводят к тому, что закрашена вся плоскость. Кусочков всего $\frac{n^2+n+2}{2}$. Каждый кусочек однозначно определяет способ выбора полуплоскостей.

2.5.

2.6. C_{k+n-1}^{n-1}.

2.7.

2.8. $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots$; $\frac{1}{e}$.

2.9.

2.10. Представим себе мифический объект «вилкодыр». Он может превращаться либо в вилку, либо в дырку. Вилкодыров у нас $n-k$. Из них нужно выбрать k вилок. Ответ: C_{n-k}^k для линейного и $C_{n-k}^k \frac{n}{n-k}$ для кругового расположения дырочек.

2.11. $3 \cdot C_{n+1-d}^k$, где k — число серий, d — суммарная длина серий. Домножение на 3 взялось из трёх вариантов (2-3-3, 3-2-3, 3-3-2). Мифический объект — серия из горящих лампочек плюс негорящая справа.

2.12.

2.13.

2.14.

2.15. C_{n-k+1}^k.

Решение 1. Отдельно рассмотрим два случая: самый правый предмет выбран и самый правый предмет не выбран. В каждом случае склеиваем предмет и примыкающий к нему справа предмет «разделитель».

Решение 2. Удалим $k-1$ предмет из линии. Из оставшихся предметов выберем k. Вернём удалённые как «разделители».

2.16. Всего расположений $\binom{8}{5}\binom{8}{3}5! = 376\,320$, и три левые цифры — это $\boxed{376}$.

2.17. The answer to the original problem (43,948,843 bet cards) was quoted already several times assuming that positioning of right numbers is irrelevant:

- there is eactly one bet card choice with 5 right numbers and
- there are $5 \times (90-5) = 425$ bet card choices with exactly 4 right numbers.

Since the total number of different bet card choices is $\binom{90}{5}$, we have to fill out $\binom{90}{5}-425-1+1=43{,}948{,}843$ bet cards to have at least 4 right numbers with probability 1.

2.18. $p=\frac{1}{20!}\cdot\left(C_{20}^0+C_{20}^1\cdot 0+C_{20}^2+C_{20}^3\cdot 2+C_{20}^4\cdot(C_4^2+3)+C_{20}^5\cdot(2C_5^2+4)\right)$.

2.19. Ugly sum?

2.20.

2.21.

2.22. C_{n+m}^n

2.23. Любую рассадку пассажиров можно представить в виде последовательности из нулей и единиц длины n, в которой единиц ровно k. Всего таких последовательностей C_n^k. Найдем количество последовательностей, *не* удовлетворяющих условию, то есть не содержащих сдвоенных нулей (назовем такие последовательности *плохими*).

Припишем к каждой плохой последовательности фиктивную единицу справа. Тогда в новой последовательности после любого нуля стоит единица, а значит, вся последовательность состоит из паттернов «1» и «01». Паттернов «01» ровно $n-k$, (столько же, сколько и нулей), всего же паттернов столько же, сколько и единиц, то есть $k+1$. Таким образом, мы имеем $k+1$ позиций, из которых надо выбрать $n-k$, куда встанет паттерн «01». Способов сделать это всего C_{k+1}^{n-k}, что и равно числу плохих последовательностей.

Значит, искомая вероятность равна $1-\frac{C_{k+1}^{n-k}}{C_n^k}$.

2.24.

2.25. $\mathbb{P}(N=3)=2\frac{1}{2}^3$; $\mathbb{P}(N=4)=2C_3^1\frac{1}{2}^4$; $\mathbb{P}(N=5)=2C_4^2\frac{1}{2}^5$.

2.26. Путь p — вероятность. Тогда $\mathbb{E}(X)=\frac{1}{p}$. Нас интересует $\mathbb{P}\left(X>\frac{1}{p}\right)=\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\approx\frac{1}{e}$.

2.27.

2.28. $700:100$.

2.29.

2.30. Вероятность, что i-я монета когда-либо исчезнет, равна 1, а того, что пролежит бесконечно долго, — 0.

2.31. $P(K_c=k)=2^{-(k+1)}$ вне зависимости от c. Для начала обнулим значение K_c и возьмём в руку c монеток. Подкинем монетки. Если все выпали орлом, мы прибавляем единичку к K_c. Если все выпали решкой, то мы объявляем значение K_c. Если часть выпала орлом, часть решкой, то выкинем те, что выпали решкой, и снова перейдем к подкидыванию монеток. В результате имее: рост K_c на единицу или глобальная остановка процесса происходит равновероятно. Значит, K_c распределено геометрически.

2.32. Найдем $\mathbb{P}(Y>k)$. Это вероятность того, что в первые k лет не будет достигнут уровень первого года. Значит это вероятность того, что первый год дал наибольшее количество осадков за первые k лет. В силу симметрии $\mathbb{P}(Y>k)=1/k$. Отсюда $\mathbb{P}(Y=k)=\mathbb{P}(Y>k-1)-\mathbb{P}(Y>k)=1/k(k-1)$ и $\mathbb{E}(Y)=+\infty$

2.33. Подбрасывая монетки детерминированное количество раз нельзя получить вероятность $1/3$, значит преподаватель заранее не знал, сколько раз он будет подбрасывать монетку. Простое правило принятия решения может иметь примерно такой вид: если выпало А, то давать задачу, если выпало Б, то не давать задачу, если не выпало ни А, ни Б, то повторить эксперимент. Орлов может быть либо два, либо один, либо 0. На два орла преподаватель повторять эксперимент не стал. Разумно предположить, что он использовал простую стратегию. Значит два орла означают «включать», один орел — «не включать», ноль орлов — подбрасывать монетку еще два раза. Идея: Николай Арефьев

2.34. $\frac{C_{46}^{10}}{C_{50}^{10}}$.

2.35. $\frac{1}{3}$.

2.36. $\frac{1}{C_{36}^5}$.

2.37. $\frac{C_{45}^9C_5^1}{C_{50}^{10}}$.

2.38. $\mathbb{E}(B)=3\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{3}$; $\mathbb{E}(G)=3-\mathbb{E}(B)=\frac{8}{3}$; $\mathbb{E}(B-G)=-\frac{4}{3}$; $\mathbb{E}(B\cdot G)=2\cdot\frac{5}{6}$.

2.39.

2.40. Вероятность выпадения красной стороны сверху равна $\frac{1}{3}$.

2.41. $\frac{C_{20}^1C_{20}^5}{C_{40}^6}\frac{1}{6}$ (вероятность заданной шестёрки финалистов помножить на вероятность выбора одного человека из шести).

2.42.

2.43. $\frac{100!}{14!16!36!34!}0{,}7^{30}0{,}3^{70}0{,}8^{50}0{,}2^{50}$.

2.44. $\mathbb{P}(N=1)=C_5^1(\frac{1}{2})^5$; $\mathbb{P}(N=2)=C_5^2(\frac{1}{2})^5$; $\mathbb{P}(N=0)=C_5^0(\frac{1}{2})^5$.

2.45. $\mathbb{P}(N=2)=C_6^2(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^4$.

2.46. $\frac{365\cdot 364\cdot 363\cdot\ldots\cdot 356}{365^n}$; минимальная компания состоит из 23 человек.

2.47. $\mathbb{P}=\frac{1}{4}(1-\frac{1}{8})+\frac{1}{2}(\frac{1}{8}+3\frac{1}{8})+\frac{1}{4}\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$.

2.48. $(\frac{1}{2})^{(n-1)}\leqslant 0{,}15$.

2.49. $0{,}99^n$.

2.50. $1-\frac{1}{1024}$; 0.

2.51.

2.52.

2.53.

2.54.

2.55.

2.56.

2.57. В маленьком роддоме «мальчиковых» дней больше. В силу закона больших чисел, чем больше число наблюдений, тем сильнее выборочная доля мальчиков должна быть похожа на вероятность рождения мальчика.

2.58. $1-(\frac{1319}{1320})^{10}\approx 0{,}008$.

2.59.

2.60. Пункт 1. Последняя попытка взять конфету — из пустой коробки. Назовём эту коробку A. Из предыдущих $n+(n-r)$ конфет n приходятся на коробку A. Вероятности равны $\frac{1}{2}$. Получаем: $u_r=\frac{C_{2n-r}^n}{2^{n+(n-r)}}$

2.61. В маленьком.

2.62. 0.

2.63.

2.64. 0,025 5 и 0,964 2.

2.65. $\frac{7}{64}$; около $\frac{2}{3}$.

2.66. 5.

2.67. $\frac{F_{2n+1}}{2^n}$. У чисел Фибоначчи есть свойство: $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}=L(1+L)F_n=\ldots=L^k(1+l)^kF_n=$ $=(1+L)^kF_{n-k}$.

2.68.

2.69. Можно считать, что каждый учебник Саша и Маша берут с вероятностью 0,5. Ответ в обоих пунктах: $0{,}75^n$.

2.70. $\mathbb{P}=\frac{1}{6}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^4+C_5^4\left(\frac{1}{2}\right)^5+C_6^4\left(\frac{1}{2}\right)^6\right)$.

2.71. $\mathbb{P}_1=\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}$; $\mathbb{P}_2=\frac{1}{2^n-1}\cdot 2\cdot(1-0{,}5^n)$.

Источник: Mosteller.

2.72. $\mathbb{P}(N=2)=0{,}7\cdot 0{,}6=0{,}42$. $\mathbb{P}(N\geqslant 1)=1-(1-0{,}7)\cdot(1-0{,}6)=0{,}88$.

2.73. $\mathbb{P}=\frac{4}{7}$.

2.74.

2.75. Ожидаемая длина следующего интервала — 12,5 минут.

2.76. $(\frac{7}{27})^2$.

2.77. $p-\frac{p^2}{2}<p$, т. е. жюри из одного человека лучше.

2.78. Спортсмена Б, если нет спортсмена В; спортсмена А, если есть спортсмен В. Мораль — зависимость от третьей альтернативы.

2.79.

2.80.

2.81.

2.82. $\frac{8}{15}$.

2.83.

2.84. $\mathbb{E}(X) = 3 \cdot \frac{1}{6} + 1 + (-2) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$

2.85. При игре только в A — убывать; только в B убывать; в вероятностную комбинацию — возрастать.

2.86.

2.87.

2.88.

2.89.

2.90.

2.91.

2.92.

N	1	2	3	4
$\mathbb{P}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{2}{14}$

Решение для $6 = 4 + 2$: $\mathbb{P}(N = 1) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{6}{15}$; $\mathbb{P}(N = 3) = \frac{4 \cdot 2}{C_6^2} \frac{3 \cdot 1}{C_5^2} = \frac{4}{15}$; $\mathbb{P}(N = 2) = \frac{5}{15}$; $\mathbb{E}(N) = \frac{28}{15}$.

2.93. Вероятность того, что ферзи будут угрожать друг другу, равна $\frac{14}{63} + \frac{1}{64} \frac{1}{63} 4(7 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 3 \cdot 11 + 1 \cdot 13)$. Шахматная доска делится на четыре квадратных зоны с одинаковым числом клеток, покрываемых ферзём. Если длина стороны будет стремиться в бесконечность, то эта вероятность будет стремиться к 0, так как она равна отношению длин нескольких линий ко всей площади.

2.94. Слева должен сесть тот, у кого есть тёзка. $p_1 = \frac{4}{6}$. Справа должен сесть его парный. $p_2 = \frac{1}{5}$, итого $p = p_1 \cdot p_2 = \frac{2}{15}$.

2.95. $\frac{57}{200} = 0{,}285$.

2.96.

2.97. $\frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{1}{2} \frac{7}{2} = 4{,}25$.

2.98. Можно представить себе другое условие: в коробке 42 занумерованных шара, мы выбираем один наугад. Красим шары с меньшим номером в белый, остальные — в чёрный. Затем берём три шара. Это равносильно тому, что мы возьмём 4 шара с номерами 1, 2, 3, 4 и выберем из них разделитель цветов случайно. Значит, вероятность равна $\frac{1}{2}$.

3.1.

3.2.

3.3.

3.4. $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}$.

3.5.

3.6. Какая-то из первых k величин будет наибольшей. В силу i.i.d. получаем, что $\mathbb{P}(E_k) = \frac{1}{k}$. E_k независимы: например, если известно, что 10-е наблюдение было рекордом, это ничего не говорит о рекордах в первых 9-ти наблюдениях. Вероятность второго рекорда в n-й момент равна $\frac{1}{n(n-1)}$, а в среднем времени до второго рекорда пройдёт ∞.

3.7. Да.

3.8.

3.9. $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$.

3.10. Да.

3.11. Нет.

3.12.

3.13.

Источник: Айвазян, экзамен РЭШ.

3.14.
3.15.
3.16. $p = \frac{0{,}4\cdot 0{,}4}{0{,}4\cdot 0{,}4+0{,}6\cdot 0{,}6} = \frac{4}{13}$.
3.17.
3.18.
3.19.
3.20.
3.21.
3.22. $\frac{1}{6}$.
3.23. $\frac{1}{11}$.
3.24. $p_a = \frac{1}{3}(0{,}9+0{,}5+0{,}3) = \frac{17}{30}$, $p_b = \frac{1}{3}(0{,}9^2+0{,}5^2+0{,}3^2)/p_a = \frac{115}{170}$.
3.25. Unverified, but no calculation:

An arbitrary hand can have two aces but a flush hand can't. The average number of aces that appear in flush hands is the same as the average number of aces in arbitrary hands, but the aces are spread out more evenly for the flush hands, so set (3) contains a higher fraction of flushes.

Aces of spades, on the other hand, are spread out the same way over possible hands as they are over flush hands, since there is only one of them in the deck. Whether or not a hand is flush is based solely on a comparison between different cards in the hand, so looking at just one card is necessarily uninformative. So the other sets contain the same fraction of flushes as the set of all possible hands.

3.26. $\approx 0{,}503$.

3.27. Вася считает неправильно: условное распределение суммы можно определить, только зная безусловное.

Концепция условного ожидания неприменима? Вставить это в иллюстрацию условного ожидания? При заданном безусловном распределении Васе следует сменить свой выбор вне зависимости от того, что он увидел в первой шкатулке. Вторая открытая лучше первой открытой. Это возможно из-за того, что безусловная ожидаемая сумма равна бесконечности для обеих шкатулок.

3.28. $\frac{t}{2}$.
3.29.
3.30. $f(a) = 5 + \frac{a(10-a)}{20}$.

4.1.

X	1	2	3
$\mathbb{P}$	$\frac{24}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{36}$

$\mathbb{E}(X) = \frac{49}{36}$, $\mathbb{E}(36X-17) = 32$. $\mathrm{Var}(X) = \frac{371}{1296}$, $\mathrm{Var}(36X-5) = 371$.

4.2.

X	1	2	3
$\mathbb{P}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{2}{20}$

$\mathbb{E}(X) = \frac{3}{2}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{9}{20}$.

4.3.
4.4.
4.5. $\mathbb{P}(N=0) = 0{,}1\cdot 0{,}3\cdot 0{,}5$; $\mathbb{P}(N=3) = 0{,}9\cdot 0{,}7\cdot 0{,}5$; $\mathbb{P}(N=1) = 0{,}9\cdot 0{,}3\cdot 0{,}5+0{,}1\cdot 0{,}7\cdot 0{,}5+0{,}1\cdot 0{,}3\cdot 0{,}5$. $\mathbb{E}(N) = 0{,}9+0{,}7+0{,}5$; $\mathrm{Var}(N) = 0{,}9\cdot 0{,}1+0{,}7\cdot 0{,}3+0{,}5\cdot 0{,}5$.
4.6.
4.7.
4.8.

x_i	1	2	3	4
$p_i = \mathbb{P}(X=x_i)$	0,6	$(1-0{,}6)\cdot 0{,}5 = 0{,}2$	$(1-0{,}6)\cdot(1-0{,}5)\cdot 0{,}4 = 0{,}08$	$1-p_1-p_2-p_3 = 0{,}12$

$\mathbb{E}(X) = 1{,}7$, $\mathrm{Var}(X) \approx 1{,}08$.

4.9.
4.10.

5.1. Закон распределения по сути эксперимента: $\mathrm{Bin}(n;p^2)$; $\mathrm{Corr}(R_1,R_2) = \sqrt{\frac{p}{1+p}}$. При $p\to 0$ корреляция равна 0; при $p\to 1$ составляет 0,5. Почему — чез = чёрт его знает.

5.2. $P(X+Y<1) = 1/4$, $f_{X|Y}(x|y) = 1/f(y)$ при $y\in[x;x+1], x\in[0;1]$. Равномерно.

5.3. В первом случае — нет, например, $X\sim\mathcal{N}(0;1)$ и $Y = X^2$. Во втором — да: возьмём индикаторы и получим стандартное определение независимости

5.4. Да. Возьмём окружность. Наугад отметим три точки. Одну будем трактовать как разрезающую окружность на отрезок. Две других — как разрезающие отрезок на три части.

5.5. Пусть X_i — координата i-ой птички. $\mathbb{P}(Y_1 \leqslant t) = 1 - \mathbb{P}(\min\{X_i\} > t) = 1 - (1-t)^n$. Далее, $\lim \mathbb{P}(nY_1 \leqslant t) = \lim 1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = 1 - e^{-t}$. Распределение экспоненциальное с параметром $\lambda = 1$.

5.6. Пусть n велико, тогда Y_i можно считать независимыми и nY_i — экспоненциально распределёнными. Не красятся только «большие» интервалы, т. е. интервалы, чья длина больше, чем каждого из двух соседних интервалов. «Больших» интервалов примерно треть. Находим $\mathbb{E}(B) = \mathbb{E}(\max\{Y_1, Y_2, Y_3\})$. $\delta = 1 - \mathbb{E}(B)\frac{n}{3} = \frac{7}{18}$.

Источник: Marcin Kuczma.

5.7.

5.8.

5.9.

6.1. $\mathbb{E}(X) = 1$, $\mathrm{Var}(X) = 1$.

6.2. 9.

6.3. Для трёх детей вероятность того, что тот, что посередине — самый высокий, равна $\frac{1}{3}$, значит математическое ожидание равно $\frac{27}{3} = 9$.

6.4. Биномиальное распределение, $\mathbb{E}(X) = np$, $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$. При $p = 0{,}5$ все подмножества будут равновероятны.

6.5. $p = \frac{2}{3}(1 - (1-p)^3)$, нам подходит решение $p = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

6.6.

6.7. Если у нас $m = 13$ достоинств и $n = 4$ масти, то ответ имеет вид: $mn \prod\limits_{i=1} \frac{in}{in+1} \approx 45{,}3$.

6.8. Обозначим за P_n вероятность остановиться ровно на n метрах. Мы ищем P_{100}.

Решение 1. По методу первого шага: $P_n = pP_{n-1} + (1-p)P_{n-2}$.

Решение 2. Попасть ровно в n можно двумя способами: перелетев $n-1$ или попав в $n-1$ и сделав шаг в один метр. Значит $P_n = (1 - P_{n-1}) + pP_{n-1}$.

Решение 3. Обозначим Васину координату в момент времени t как X_t. Можно найти a так, чтобы процесс $Y_t = a^{X_t}$ был мартингалом. Момент остановки $T = \min\{t \min X_t \geqslant n\}$. Мартингал $Y_{t\wedge T}$ ограничен, теорема Дуба применима. $\mathbb{E}(Y_T) = \mathbb{E}(Y_0) = 1$. Получаем уравнение $P_n a^n + (1-P_n)a^{n+1} = 1$.

6.9. $\frac{1}{p}$, $\frac{q}{p}$

в) $E(X^2) = p \cdot 1 + q \cdot E((X+1)^2)$, $Var(X) = \frac{q}{p^2}$

6.10. (устно, при сделанной предыдущей задаче) $\frac{rq}{p}$, $Var(X) = \frac{rq}{p^2}$

6.11.

6.12.

6.13.

6.14.

6.15.

6.16. а) $V(x) = \frac{1}{6}(V(x+1) + V(x+2) + V(x+3) + 2x + 0)$

Ищем линейную $V(x)$, получаем $V(x) = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$

б) $V(x) = \frac{1}{6}(V(x+1) + V(x+2) + V(x+3) + x + V(0) + 0)$

6.17.

6.18.

6.19. $m = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(2+m) + \frac{1}{3}(3+m)$, $m = 6$

6.20.

6.21.

6.22. $\mathbb{P}(X_{(3)} \in [x; x+dx]) = C_n^2 C_{n-2}^1 \big((F(x) + o(x)\big)^{n-3}\big(1 - F(x) + o(x)\big)^2\big((f(x) + o(x)\big)dx$. Значит, искомая функция плотности равна $f_{X_{(3)}}(t) = f(t)F(t)^{n-3}\big(1 - F(t)\big)^2$.

6.23. Выберем двух студентов из потока наугад. Вероятность того, что ни один из них не решил задачу № 1, не превосходит $\left(\frac{80}{200}\right)^2 = 0{,}16$. Вероятность того, что ни один из них не решил задачу № 2, не превосходит 0,16 (по тем же причинам), и это справедливо для каждой из шести задач. Вероятность того, что хотя бы одну задачу они на пару не решили, не превосходит суммы этих вероятностей, т. е.

$0{,}16 \cdot 6 = 0{,}96$. Значит, вероятность выбора пары студентов, которые совместными усилиями могут решить экзамен, не менее 0,04. Значит, хотя бы одна такая пара существует.

6.24. Проверить. Разбиваем отрезок на n частей, ставим автосервис в центр каждой части http://math.stackexchange.com/questions/37254/

7.1. $\mathbb{P}(X_n \leqslant q) = \mathbb{P}(X_n - \mathbb{E}(X_n) \leqslant a - \mathbb{E}(X_n))$. При больших n величина $a - \mathbb{E}(X_n)$ отрицательна, поэтому $\mathbb{P}(X_n - \mathbb{E}(X_n) \leqslant a - \mathbb{E}(X_n)) \leqslant \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geqslant |a - \mathbb{E}(X_n)|) \leqslant c/(a - \mathbb{E}(X_n))^2$.

8.1. $\mathbb{E}(N) \approx 12{,}15$.

8.2. $\mathbb{P}_{16} = 0{,}482\,390\,182$, $\mathbb{P}_{17} = 0{,}525\,836\,596$.

8.3. Симуляции $p = 0{,}028\,5$, Пуассон: $p = 0{,}03$.

8.4. $\mathbb{P}(T \leqslant k) = n^{-k} n! \left\{ \begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right\}$ (число Стирлинга второго рода); 2287.

8.5. Если у нас $m = 13$ достоинств и $n = 4$ масти, то ответ имеет вид: $mn \prod\limits_{i=1} \frac{in}{in+1} \approx 45{,}3$; $\approx 28{,}0$.

8.6. $n = 50$, 665.51

```
# -*- coding: utf-8 -*-
from __future__ import division
from numpy import arange
import scipy.stats as stats

# this function calculates expected numer of sold newspapers
def e_selled_newspapers(n,lam=50):
        x=arange(n)
        probs=stats.poisson.pmf(x,lam)
        e_selled_newspapers=sum(x*probs)+(1-stats.poisson.cdf(n-1,lam))*n
        return e_selled_newspapers

# this function calculates expected profit
def profit(n,lam=50):
        return 30*e_selled_newspapers(n,lam)-15*n

print profit(50)
```

8.7.

8.8.

9.1. Каждая следующая стена равновероятно покрашена Сашей и Алёшей. Значит, нам нужны $\mathbb{P}(SSS) + \mathbb{P}(SSAS) + \mathbb{P}(SASS) + \mathbb{P}(ASSS) = \frac{5}{16}$. По другому: для простоты положим $\lambda = 1$. Пусть T — время, когда Саша закончит 3 стены. Функция плотности гамма-распределения (сумма трёх экспоненциальных) $f(t) = 0{,}5t^2 e^{-t}$. Нам нужна вероятность того, что к тому времени Алёша успеет меньше двух стен: $\int_0^\infty \mathbb{P}(N_t < 2 \mid T = t)\, dt = \ldots = \frac{5}{16}$.

9.2. Производящая функция удовлетворяет соотношению:

$$g(t) = \exp(\lambda(t-1)) \frac{g(t) + tg(0) - g(0)}{t}$$

$$g(t) = g(0) \frac{(t-1)\exp(\lambda(t-1))}{t - \exp(\lambda(t-1))}$$

Из условия $g(1) \to 1$ находим $g(0) = 1 - \lambda$ и, помучившись, $\mathbb{E}(X_\infty) = g'(1) = \frac{\lambda(2-\lambda)}{2\cdot(1-\lambda)}$.

9.3.

9.4.

9.5.

10.1. $\mu \pm \sigma$.

10.2. $\mu + \sigma$.

10.3.

10.4.

10.5.

10.6.

10.7. $\mathbb{E}(F_{k,n}) = Var(t_n)$

11.1. 1. Про вертикальные шаги можно забыть, а вероятность бесконечное количество раз посетить 0 для двумерного случайного блуждания равна 1.

11.2. 39^2.

11.3.

11.4.

11.5. Логарифмическая функция правдоподобия

$$l(\lambda) = -n\lambda + \sum x_i \ln \lambda - \sum \ln(x_i!) \tag{2}$$

Первая производная:

$$l'(\lambda) = -n + \frac{\sum x_i}{\lambda} \tag{3}$$

Оценка метода максимального правдоподобия имеет вид $\hat{\lambda} = \bar{X}_n$ Ожидаемае информация Фишера $I(\lambda) = n/\lambda$, наблюдаемая информация Фишера $I(\hat{\lambda}) = n/\hat{\lambda}$. Тест Вальда $W = (\hat{\lambda} - 3)^2 \cdot I(\hat{\lambda})$
Тест множителей Лагранжа $LM = l'(3) \cdot I^{-1}(3)$
Тест отношения правдоподобия $LR = 2(l(\hat{\lambda}) - l(3))$

11.6. Равномерное на $[0; 1]$

11.7.

12.1. Да. Например, если первая половина наблюдений попала рядом с μ, а вторая — далеко. Ну не повезло Пете.

12.2. Оба они делают одну ошибку: если H_0 не отвергается, это не значит, что она — верна. Корректнее было бы провести тест на сравнение средних. Идея: Кирилл Фурманов

12.3.

12.4.

12.5.

12.6.

12.7.

12.8.

12.9. Среднее значение хи-квадрат случайной величины равно числу степеней свободы. Единице. Historical Note (as told by Chris Olsen): The Chi-square statistic was invented by Karl Pearson about 1900. Pearson knew what the Chi-square distribution looks like, but he was unsure about the degrees of freedom.

About 15 years later, Fisher got involved. He and Pearson were unable to agree on the degrees of freedom for the two-by-two table, and they could not settle the issue mathematically. Pearson believed there was 1 degree of freedom and Fisher 3 degrees of freedom.

They had no nice way to do simulations, which would be the modern approach, so Fisher looked at lots of data in two-by-two tables where the variables were thought to be independent. For each table he calculated the Chi-square statistic. Recall that the expected value for the Chi-square statistic is the degrees of freedom. After collecting many Chi-square values, Fisher averaged all the values and got a result he described as «embarrassingly close to 1»

This confirmed that there is one degree of freedom for a two-by-two table. Some years later this result was proved mathematically.

12.10.
12.11.
12.12.
12.13.
12.14.
12.15.
12.16.