Несколько задач для устного экзамена

1. За неделю Аннушка семь раз пролила масло.
   (a) Какова вероятность того, что она проливала масло каждый день?
   (b) Какова вероятность того, что Аннушка пролила масло в среду, если в четверг Аннушка масла не проливала?

2. Погода завтра может быть ясной с вероятностью 0.3 и пасмурной с вероятностью 0.7. Вне зависимости от того, какая будет погода, Маша даёт верный прогноз с вероятностью 0.8. Вовочка, не разбираясь в погоде, делает свой прогноз по принципу: с вероятностью 0.9 копирует Машин прогноз, и с вероятностью 0.1 меняет его на противоположный.
   (a) Какова вероятность того, что Маша спрогнозирует ясный день?
   (b) Какова вероятность того, что Машин и Вовочкин прогнозы совпадут?
   (c) Какова вероятность того, что день будет ясный, если Маша спрогнозировала ясный?
   (d) Какова вероятность того, что день будет ясный, если Вовочка спрогнозировал ясный?

3. Два охотника выстрелили в одну утку. Первый попадает с вероятностью 0,4, второй — с вероятностью 0,7.
   (a) Какова вероятность того, что оба охотника попали в утку?
   (b) Какова вероятность того, что утка была убита первым охотником, если в утку попал только один из охотников?

4. Функция плотности случайной величины X имеет вид $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{7}x^2, \; x \in [1;2] \\ 0, \; x \notin [1,2] \end{cases}$
   (a) Не производя вычислений найдите $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$
   (b) Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$ и дисперсию $\mathrm{Var}(X)$
   (c) Найдите $\mathbb{P}(X > 1.5)$
   (d) Найдите функцию распределения $F(x)$ и постройте её график

5. Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей

	$X=-2$	$X=0$	$X=2$
$Y=1$	0.2	0.3	0.1
$Y=2$	0.1	0.2	a

   (a) Определите неизвестную вероятность a.
   (b) Найдите вероятности $\mathbb{P}(X > -1)$, $\mathbb{P}(X > Y)$, $\mathbb{P}(Y = 1 | X + 1 > 0)$
   (c) Найдите математические ожидания $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$
   (d) Найдите корреляцию $\mathrm{Corr}(X, Y)$

6. В треугольнике с вершинами $(0,0)$, $(0,1)$ и $(1,0)$ равновероятно выбирается точка. Величины X и Y — абсцисса и ордината этой случайной точки.
   (a) Найдите совместную функцию плотности пары (X, Y)

(b) Найдите $\mathbb{P}(2X > 1)$, $\mathbb{P}(Y > X)$, $\mathbb{P}(Y > X|2X > 1)$

(c) Найдите частную функцию плотности величины X

(d) Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$, $\mathrm{Cov}(X, Y)$

(e) Являются ли величины X и Y одинаково распределенными и независимыми?

7. Совместная функция плотности величин X и Y имеет вид

$$f(x, y) = \begin{cases} 2(x^3 + y^3), \text{ если } x \in [0; 1], y \in [0; 1] \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} \tag{1}$$

(a) Найдите $\mathbb{P}(X + Y > 1)$, $\mathbb{P}(X + Y > 1|X > Y)$

(b) Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$, $\mathrm{Cov}(X, Y)$

(c) Являются ли величины X и Y независимыми?

(d) Являются ли величины X и Y одинаково распределенными?

8. Для случайных величин X и Y заданы следующие значения: $\mathbb{E}(X) = 1$, $\mathbb{E}(Y) = 4$, $\mathbb{E}(XY) = 8$, $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 9$. Для случайных величин $U = X + Y$ и $V = X - Y$ вычислите:

(a) $\mathbb{E}(U)$, $\mathrm{Var}(U)$, $\mathbb{E}(V)$, $\mathrm{Var}(V)$, $\mathrm{Cov}(U, V)$

(b) Можно ли утверждать, что случайные величины U и V независимы?

9. С помощью неравенства Чебышева, укажите границы, в которых находятся величины; рассчитайте также их точное значение

(a) $\mathbb{P}(-2\sigma < X - \mu < 2\sigma)$, $X \sim N(\mu; \sigma^2)$

(b) $\mathbb{P}(8 < X < 12)$, $X \sim U[0; 20]$

(c) $\mathbb{P}(-2 < X - \mathbb{E}(X) < 2)$, X имеет экспоненциальное распределение с $\lambda = 1$

10. Сейчас акция стоит 1000 рублей. Каждый день цена может равновероятно либо возрасти на 3 рубля, либо упасть на 5 рублей.

(a) Чему равно ожидаемое значение цены через 60 дней? Дисперсия?

(b) Какова вероятность того, что через 60 дней цена будет больше 900 рублей?

11. Предположим, что истинная вероятность рождения мальчика равна 0.5. Каким должен быть размер выборки, чтобы с вероятностью 0.95 можно было утверждать, что выборочная доля отличается от истинной вероятности не более, чем на 0.02?

12. Допустим, что срок службы пылесоса имеет экспоненциальное распределение. В среднем один пылесос бесперебойно работает 7 лет. Завод предоставляет гарантию 5 лет на свои изделия. Предположим также, что примерно 80% потребителей аккуратно хранят все бумаги, необходимые, чтобы воспользоваться гарантией.

(a) Какой процент потребителей в среднем обращается за гарантийным ремонтом?

(b) Какова вероятность того, что из 1000 потребителей за гарантийным ремонтом обратится более 35% покупателей?

Подсказка: $\exp(5/7) \approx 2$