св. — случайная величина (rv. — random variable)
Ω — список всех возможных исходов случайного эксперимента
$\mathbb{P}(A)$ — вероятность события A; $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$; $A^c = \bar{A}$ — отрицание события A
Если A и B несовместны (не могут произойти одновременно), то $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$;
$\mathbb{E}(X)$ — среднее значение случайной величины X, математическое ожидание
1_A, индикатор события A, — случайная величина, которая равна единице, если событие A наступило, и нулю, если событие A не наступило

1. Актёр-дед Мороз зарабатывает 100 тысяч рублей в январе и 10 тысяч рублей в остальные месяцы. Зарплату, приходящуюся на месяц рождения актёра, обозначим X. Найдите $\mathbb{P}(X = 10)$ и $\mathbb{E}(X)$.
2. Завтра реализуется одна из трёх возможностей, $\Omega = \{a, b, c\}$. Случайная величина X — температура $[^oC]$, а Y — влажность [%] завтра .

Ω	a	b	c
X	6	8	10
Y	70	50	80
$\mathbb{P}()$	0.2	0.5	0.3

,
Найдите:
а) $\mathbb{P}(X > 9)$, $\mathbb{P}(X < 10)$, $\mathbb{P}(X > 0)$, $\mathbb{P}(XY > 700)$, $\mathbb{P}(\sqrt{Y} < 8)$
б) $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(X^2)$, $\mathbb{E}(0.1 \cdot Y)$
в) Сравните $\mathbb{E}(X^2)$ и $\mathbb{E}(X)^2$; $\mathbb{E}(Y^2)$ и $\mathbb{E}(Y)^2$;
3. Величина N — количество шестерок выпадающих при двух подбрасываниях кубика. Найдите $\mathbb{P}(N = 0)$, $\mathbb{P}(N = 1)$, $\mathbb{P}(N = 2)$, $\mathbb{P}(N = 3)$, $\mathbb{P}(N \geqslant 1)$, $\mathbb{E}(N)$
4. Две команды равной силы играют до 3-х побед. Ничья невозможна. Св. N – количество сыгранных партий. Составьте табличку возможных значений N с их вероятностями (такая табличка называется законом распределения случайной величины). Найдите $\mathbb{P}(N$ — четное), $\mathbb{E}(N)$
5. Какова вероятность того, что у 10 человек не будет ни одного совпадения дней рождений?
6. Наугад из четырех тузов разных мастей выбираются два. $\mathbb{P}$(они будут разного цвета)?
7. События A и B несовместны, $\mathbb{P}(A) = 0,3$, $\mathbb{P}(B) = 0,4$. Найдите $\mathbb{P}(A^c \cap B^c)$
8. Вероятность $\mathbb{P}(A) = 0,3$, $\mathbb{P}(B) = 0,8$. В каких пределах может лежать $\mathbb{P}(A \cap B)$?
9. Множество исходов $\Omega = \{a, b, c\}$, $\mathbb{P}(\{a, b\}) = 0,8$, $\mathbb{P}(\{b, c\}) = 0,7$. Найдите $\mathbb{P}(\{a\})$, $\mathbb{P}(\{b\})$, $\mathbb{P}(\{c\})$
10. Мама в среднем получает 40 т.р. в месяц, папа - в среднем 50 т.р. Каков средний доход семьи? Как связаны между собой $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ и $\mathbb{E}(X + Y)$?
11. На бумаге проведена прямая. На бумагу бросают спичку. Какова вероятность, что острый угол между прямой и спичкой будет меньше 10 градусов?
12. Вася бегает по кругу длиной 400 метров. В случайный момент времени он останавливается. Какова вероятность того, что он будет ближе, чем в 50 м от точки старта? Дальше, чем в 100 м?
13. Треугольник с вершинами $(0; 0)$, $(2; 0)$ и $(1; 1)$. Внутри него случайным образом выбирается точка, X – абсцисса точки. Найдите $\mathbb{P}(X > 1)$, $\mathbb{P}(X \in [0.5; 1])$, $\mathbb{E}(X)$
14. Треугольник с вершинами $(0; 0)$, $(2; 0)$ и $(2; 1)$. Внутри него случайным образом выбирается точка, X – абсцисса точки. Найдите $\mathbb{P}(X > 1)$, $\mathbb{P}(X \in [0.5; 1])$. Что больше, $\mathbb{E}(X)$ или 1?
15.

X	6	8	10
$\mathbb{P}()$	0.2	0.5	0.3

,
Событие A состоит в том, что $X > 9$, $A = \{X > 9\}$. Найдите $\mathbb{E}(1_A)$, $\mathbb{E}(X \cdot 1_A)$
16. Как связаны $\mathbb{E}(1_B)$ и $\mathbb{P}(B)$ для произвольного события B?
17. Как связаны $\mathbb{P}(Z \leqslant 9)$ и $\mathbb{P}(Z > 9)$ для произвольной случайной величины Z?

1. Лев собрал 100 зверей. Сколькими способами их можно расставить в очередь ко льву?
2. Лев собрал 100 зверей и решил их раскрасить, каждого целиком в один цвет. Лев хочет 20 красных, 30 желтых и 50 зеленых зверей. Сколько существует вариантов раскрасок?
3. В библиотеке Маше выдали 25 книг. Она решила прочесть 4 книги. Сколько вариантов выбора есть у Маши?
4. Из 50 деталей 4 бракованных. Выбирается наугад 10 на проверку. Какова вероятность не заметить брак? Сколько в среднем бракованных деталей попадется?
5. В клубе 25 человек. Сколькими способами можно выбрать:
а) комитет из 4-х человек? б) руководство, состоящее из директора, зама и кассира?
6. Вася играет в преферанс. Он взял прикуп, снес две карты и выбрал козыря. У Васи на руках четыре козыря. Какова вероятность, что оставшиеся четыре козыря разделились 4:0, 3:1, 2:2? Правила: из 32-х карт (нет шестерок) две кладут в прикуп, остальные раздают по 10 трем игрокам.
7. На столе стоят 4 отличающихся друг от друга чашки, 4 одинаковых граненых стакана, 10 одинаковых кусков сахара, 7 соломинок разных цветов. Сколькими способами можно полностью разложить:
а) сахар по чашкам; б) сахар по стаканам; в) соломинки по чашкам; г) соломинки по стаканам;
д) Как изменятся ответы, если требуется, чтобы пустых емкостей не оставалось?

1. Из грота ведут 10 штреков, с длинами 100м, 200м,... 1000м. Самый длинный штрек оканчивается выходом на поверхность. Остальные - тупиком. Вася выбирает штреки наугад (естественно, в тупиковый штрек он два раза не ходит). Какова вероятность того, что Вася посетит самый короткий штрек? Какой в среднем путь он нагуляет прежде чем выберется на поверхность?

2. У Маши 30 разных пар туфель. И она говорит, что мало! Пес Шарик утащил (без разбору на левые и правые) 17 туфель. Какова вероятность того, что у Маши останется 13 полных пар? Сколько полных пар в среднем осталось? Сколько полных пар в среднем досталось Шарику?

3. У меня в кармане 3 рубля мелочью. Среди монет всего одна монета достоинством 50 копеек. Я извлекаю монеты по одной наугад до извлечения 50 копеечной монеты. Какую сумму в среднем я извлеку?

4. «Модница». В шкатулке у Маши 100 пар сережек. Каждый день утром она выбирает одну пару наугад, носит ее, а вечером возвращает в шкатулку. Проходит год.

а) Сколько в среднем пар окажутся ни разу не надетыми?

б) Сколько в среднем пар окажутся одетыми не менее двух раз?

в*) Как изменятся ответы, если каждый день Маша покупает себе новую пару сережек и вечером добавляет ее в шкатулку?

5. Вовочка получает пятерку с вероятностью 0.1, четверку - с вероятностью 0.2, тройку - с вероятностью - 0.3 и двойку с вероятностью 0.4. В этом четверти он писал 20 контрольных. Какова вероятность того, что все оценки у Вовочки одинаковые? Сколько разных оценок он в среднем получит?

6. «Судьба Дон Жуана» У Васи n знакомых девушек (их всех зовут по-разному). Он пишет им n писем, но, по рассеянности, раскладывает их в конверты наугад. С.в. X обозначает количество девушек, получивших письма, написанные лично для них. Найдите $\mathbb{E}(X)$.

7. Над озером взлетело 20 уток. Каждый из 10 охотников стреляет в утку по своему выбору. Каково ожидаемое количество убитых уток, если охотники стреляют без промаха? Как изменится ответ, если вероятность попадания равна 0,7? Каким будет ожидаемое количество охотников, попавших в цель?

1. Неправильную монетку (вероятность «орла» равна p) подбрасывают до первого «орла». Чему равно среднее количество подбрасываний? Орлов? Решек?

2. Саша и Маша по очереди подбрасывают кубик. Посуду будет мыть тот, кто первым выбросит шестерку. Маша бросает первой. Каковы ее шансы отдохнуть за «Cosmo»?

3. Вы играете в следующую игру. Кубик подкидывается неограниченное число раз. Если на кубике выпадает 1, 2 или 3, то соответствующее количество монет добавляется на кон. Если выпадает 4 или 5, то игра оканчивается и Вы получаете сумму, лежащую на кону. Если выпадает 6, то игра оканчивается, а Вы не получаете ничего.

а) Чему равен ожидаемый выигрыш в эту игру?

б) Изменим условие: если выпадает 5, то набранная сумма сгорает, а игра начинается заново. Чему будет равен ожидаемый выигрыш?

4. Саша и Маша подкидывают монетку до тех пор, пока не выпадет последовательность РОО или ООР. Если игра закончится выпадением РОО, то выигрывает Саша, если ООР, то - Маша.

a) У кого какие шансы выиграть?

b) Сколько в среднем времени ждать до появления ООР?

c) Сколько в среднем времени ждать до определения победителя?

5. «Amoeba» A population starts with a single amoeba. For this one and for the generations thereafter, there is a probability of 3/4 that an individual amoeba will split to create two amoebas, and a 1/4 probability that it will die out without producing offspring. What is the probability that the family tree of the original amoeba will go on for ever?

6. Вася подкидывает кубик. Если выпадает единица, или Вася говорит «стоп», то игра оканчивается, если нет, то начинается заново. Васин выигрыш - последнее выпавшее число. Как выглядит оптимальная стратегия? Как выглядит оптимальная стратегия, если за каждое подбрасывание Вася платит 35 копеек?

7. Suppose the probability to get a head when throwing an unfair coin is p, what's the expected number of throwings in order to get two consecutive heads?

Условная вероятность $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$ и условное среднее $\mathbb{E}(X|B) = \mathbb{E}(X \cdot 1_B)/\mathbb{P}(B)$

1. Величина X равномерно распределена на $[0;1]$. Найдите $\mathbb{P}(X > 0.7)$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{P}(X > 0.7 \mid X < 0.9)$, $\mathbb{E}(X \mid X < 0.9)$, $\mathbb{P}(X > 0.7 \mid X > 0.5)$, $\mathbb{E}(X \mid X > 0.5)$

2. Изначально известны следующие вероятности исходов:

X	6	3	-5
$\mathbb{P}()$	1/4	2/4	1/4

а) После проведения эксперимента дополнительно стало известно, что $X > 0$. Рассчитайте новые условные вероятности исходов: $\mathbb{P}(X = 6|X > 0)$, $\mathbb{P}(X = 3|X > 0)$, $\mathbb{P}(X = -5|X > 0)$

б) С помощью новых вероятностей найдите $\mathbb{E}(X|X > 0)$, $\mathbb{P}(X < 5|X > 0)$, $\mathbb{E}(X^2|X > 0)$

3. Эксперимент может окончиться одним из шести исходов:

	$X = -1$	$X = 1$	$X = 2$
$Y = 0$	0.1	0.2	0.3
$Y = 4$	0.2	0.1	0.1

Найдите:

а) $\mathbb{P}(X = 1 \cap Y = 0)$, $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}(Y = 0)$

б) $\mathbb{P}(X = 1|Y > 1)$, $\mathbb{P}(Y = 4|X > 0)$, $\mathbb{P}(Y = 0|X > 0)$

в) $\mathbb{E}(Y|X > 0)$, $\mathbb{E}(X|Y > 1)$, $\mathbb{E}(XY|X > 0)$

4. Имеется три монетки. Две «правильных» и одна - с «орлами» по обеим сторонам. Петя выбирает одну монетку наугад и подкидывает ее два раза. Оба раза выпадает «орел». Какова условная вероятность того, что монетка «неправильная»?

5. Два охотника одновременно выстрелили в одну утку. Первый попадает с вероятностью 0,4, второй - с вероятностью 0,6. В утку попала ровно одна пуля. Какова условная вероятность того, что утка была убита первым охотником?

6. Кубик подбрасывается два раза. Найдите вероятность получить сумму равную 8, если при первом броске выпало 3.

7. Игрок получает 13 карт из колоды в 52 карты. Какова вероятность, что у него как минимум два туза, если известно, что у него есть хотя бы один туз? Какова вероятность того, что у него как минимум два туза, если известно, что у него есть туз пик?

8. В урне 7 красных, 5 желтых и 11 белых шаров. Два шара выбирают наугад. Какова вероятность, что это красный и белый, если известно, что они разного цвета?

9. В урне 5 белых и 11 черных шаров. Два шара извлекаются по очереди. Какова вероятность того, что второй шар будет черным? Какова вероятность того, что первый шар - белый, если известно, что второй шар - черный?

10. Примерно 4% коров заражены «коровьим бешенством». Имеется тест, который дает ошибочный результат с вероятностью 0,1. Судя по тесту, новая партия мяса заражена. Какова вероятность того, что она действительно заражена?

11. В школе три девятых класса, «А», «Б» и «В», одинаковые по численности. В «А» классе 30% обожают учителя географии, в «Б» классе – 40% и в «В» классе – 70%. Девятиклассник Петя обожает учителя географии. Какова вероятность того, что он из «Б» класса?

12. Ген карих глаз доминирует ген синих. Т.е. у носителя пары bb глаза синие, а у носителя пар BB и Bb – карие. У диплоидных организмов (а мы такие :)) одна аллель наследуется от папы, а одна – от мамы. В семье у кареглазых родителей два сына – кареглазый и синеглазый. Кареглазый женился на синеглазой девушке. Какова вероятность рождения у них синеглазого ребенка?

13. Известно, что $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$. Найдите $\mathbb{P}(A|B)$ и $\mathbb{P}(B|A)$.

14. Почему события A и B такие, что $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ называются независимыми?

15. Из колоды в 52 карты извлекается одна карта наугад. Являются ли события «извлечен туз» и «извлечена пика» независимыми?

16. Из колоды в 52 карты извлекаются по очереди две карты наугад. Являются ли события «первая карта - туз» и «вторая карта - туз» независимыми?

17. Известно, что $\mathbb{P}(A) = 0,3$, $\mathbb{P}(B) = 0,4$, $\mathbb{P}(C) = 0,5$. События A и B несовместны, события A и C независимы и $\mathbb{P}(B|C) = 0,1$. Найдите $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$.

18. Чему равно $\mathbb{P}(w|A)$ если $w \notin A$, т.е. исход w и событие A не могут произойти одновременно?

Дисперсия $\mathrm{Var}(X) = E\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$; стандартное отклонение $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$
Ковариация $Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$; корреляция $\mathrm{Corr}(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

1. Эксперимент может окончиться одним из шести исходов:

	$X=-1$	$X=0$	$X=2$
$Y=0$	0.1	0.2	0.3
$Y=4$	0.2	0.1	0.1

Найдите: $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$, $Cov(X,Y)$, $\mathrm{Corr}(X,Y)$, $Cov(X,Y|X \geqslant 0)$

2. Функция плотности случайной величины X имеет вид: $p(t) = \begin{cases} \frac{3}{16}t^2, t \in [-2;2] \\ 0, t \notin [-2;2] \end{cases}$, Найдите:

а) $\mathbb{P}(X>1)$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$, $\mathrm{Var}(X)$, σ_X
б) $\mathbb{E}(X|X>1)$, $\mathbb{E}(X^2|X>1)$, $\mathrm{Var}(X|X>1)$
в) Решите пункты а) и б) для $p(t) = \begin{cases} t/8, t \in [0;4] \\ 0, t \notin [0;4] \end{cases}$

3. Из коробки с 4 синими и 5 зелеными шарами достают 2 шара. Пусть B и G - количество извлеченных синих и зеленых шаров. Найдите $\mathbb{E}(B)$, $\mathbb{E}(G)$, $\mathbb{E}(B \cdot G)$, $\mathbb{E}(B-G)$, $\mathrm{Var}(G)$, $\mathrm{Var}(B)$, $Cov(B,G)$, $\mathrm{Corr}(B,G)$
4. Время T между поездами метро распределено равномерно от 2 до 4 минут. Найдите $\mathbb{E}(T)$, $\mathbb{E}(T^2)$, $\mathrm{Var}(T)$, $\mathbb{P}(T>2.5)$
5. Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathbb{E}(X^n)$ для случайной величины X заданной таблицей

X	0	1
$\mathbb{P}()$	$(1-p)$	p

6. Время работы принтера до первой поломки – случайная величина X [месяцев] с функцией плотности $p(t) = 1/20\exp(-t/20)$ при $t \geqslant 0$. Найдите $\mathbb{E}(X)$ и $\mathrm{Var}(X)$, $\mathbb{P}(X>20)$, $\mathbb{P}(X>12)$
7. Цена акции – случайная величина с функцией плотности $p(x) = \frac{3}{4}\max\{x(2-x), 0\}$.
а) Постройте график функции плотности
б) Рассчитайте средний Васин доход и дисперсию дохода, если:
б1) У Васи есть одна акция; б2) У Васи есть 10 акций
б3) У Васи есть опцион-пут, дающий ему право продать акции по цене 1,2 рубля.
б4) У Васи есть опцион-колл, дающий ему право купить акции по цене 1 рубль.
в) В пунктах б3) и б4) найдите вероятность исполнения опциона
8. Прямой убыток от пожара равномерно распределен на $[0;1]$. Если убыток оказывается больше 0,7, то страховая компания выплачивает компенсацию 0,7. Чему равны средние потери? Дисперсия потерь?
9. Вася решает 10 задач по теории вероятностей. Вероятность решения каждой задачи равна 0.4, величина X – количество решенных задач. Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{P}(X>8)$, $\mathbb{P}(X>8|X>1)$, $\mathbb{E}(X|X>1)$
10. Известно, что $\mathrm{Var}(X)=1$. Найдите $\mathrm{Var}(2X)$, $\mathrm{Var}(X+5)$, $\mathrm{Var}(3X+16)$, $\mathrm{Var}(14-2X)$
11. При каком условии $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY)$? $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2)$?
12. Вася предлагают две игры. В первой монетку подбрасывают один раз и за орла платят Васе 10 рублей. Во второй монетку подбрасывают 10 раз и за каждого орла платят один рубль. Где больше средний выигрыш? Дисперсия выигрыша?
13. Известно, что $\mathbb{E}(X)=5$, $\mathbb{E}(X^2)=28$
а) При каком значении числа t величина $\mathbb{E}((X-t)^2)$ будет наименьшей?
б) Чему равно это минимальное значение?
14. Пусть $\mathbb{E}(X)=m$. Отметим на плоскости точку (m,m). Построим на плоскости случайный квадрат с вершинами (m,m), (m,X), (X,m) и (X,X). Чему равна средняя площадь этого квадрата?
15. Величина X равномерна на $[-2;1]$, а Y – расстояние от числа X до числа (-1). Найдите фукнцию плотности Y, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(Y)$, $\mathbb{P}(Y>0.5)$, $\mathbb{P}(Y>0.5|Y<1)$, $\mathbb{E}(Y|Y<1)$
16. Случайная величина X имеет функцию плотности $p(t)$ и $p(4)=9$. Примерно найдите вероятность $\mathbb{P}(X \in [4;4.003])$.
17. (*) В коробке 4 синих, 5 зеленых и один красный шар. Шары извлекают до появления красного. Найдите $\mathbb{E}(B)$, $\mathbb{E}(G)$, $\mathbb{E}(B \cdot G)$, $\mathbb{E}(B-G)$, $\mathrm{Var}(G)$, $\mathrm{Var}(B)$, $Cov(B,G)$, $\mathrm{Corr}(B,G)$

Пуассоновская случайная величина, $X \sim Pois(\lambda)$, вероятность $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.
Замена $Bin(n, p)$ на $Pois(\lambda = np)$ дает погрешность не более $\min\{p, np^2\}$
Экспоненциальная случайная величина, $Y \sim Exp(\lambda)$, ф. плотности $p(y) = \lambda \exp(-\lambda y)$ при $y \geqslant 0$.
Пуассоновский поток событий:
время между соседними событиями, $Y \sim Exp(\lambda)$; количество событий за время t, $X_t \sim Pois(\lambda t)$.

1. Маша и Саша пошли в лес по грибы. Саша собирает все грибы, а Маша – только подберезовики. Саша в среднем находит один гриб за одну минуту, Маша – один гриб за десять минут. Какова вероятность того, за 8 минут они найдут ровно 13 грибов? Какова вероятность того, что следующий гриб попадется позже, чем через минуту, если Маша только что нашла подберезовик?
2. Пост майора ГИБДД Иванова И.И. в среднем ловит одного нарушителя в час. Какова вероятность того, что два нарушителя появятся с интервалом менее 30 минут? Какова вероятность того, что следующего нарушителя ждать еще более 40 минут, если уже целых три часа никто не превышал скорость?
3. Оля и Юля пишут смс Маше. Оля отправляет Маше в среднем 5 смс в час. Юля отправляет Маше в среднем 2 смс в час. Какова вероятность того, что Маша получит ровно 6 смс за час? Сколько времени в среднем проходит между смс, получаемыми Машей от подруг?
4. Кузнечики на большой поляне распределены по пуассоновскому закону, в среднем 3 кузнечика на квадратный метр. Какой следует взять сторону квадрата, чтобы вероятность найти в нем хотя бы одного кузнечика была равна $0,8$?
5. В магазине две кассирши (ах, да! две хозяйки кассы). Допустим, что время обслуживания клиента распределено экспоненциально. Тетя Зина обслуживает в среднем 5 клиентов в час, а тетя Маша - 7. Два клиента подошли к кассам одновременно.
а) Какова вероятность того, что тетя Зина обслужит клиента быстрее?
б) Как распределено время обслуживания того клиента, который освободится быстрее?
в) Каково условное среднее время обслуживания клиента тетей Зиной, если известно, что она обслужила клиента быстрее тети Маши?
6. Время между приходами студентов в столовую распределено экспоненциально; в среднем за 10 минут приходит 5 студентов. Время обслуживания имеет экспоненциальное распределение; в среднем за 10 минут столовая может обслужить 6 студентов.
а) Как распредено количество студентов в очереди?
б) Какова средняя длина очереди?
Подсказка: если сейчас в очереди n человек, то через малый промежуток времени dt...
7. The arrival of buses at a given bus stop follows Poisson law with rate 2. The arrival of taxis at the same bus stop is also Poisson, with rate 3. What is the probability that next time I'll go to the bus stop I'll see at least two taxis arriving before a bus? Exactly two taxis?
8. Время, которое хорошо обученная свинья тратит на поиск трюфеля – экспоненциальная случайная величина со средним в 10 минут. Какова вероятность того, что свинья за 20 минут не найдет ни одного трюфеля?
9. Пусть X - распределена экспоненциально с параметром λ и $a > 0$.
Как распределена величина $Y = aX$?
10. В гирлянде 25 лампочек. Вероятность брака для отдельной лампочки равна 0,01. Какова вероятность того, что гирлянда полностью исправна? Оцените точность ответа.
11. По некоему предмету незачет получило всего 2% студентов. Какова вероятность того, что в группе из 50 студентов будет ровно 1 человек с незачетом? Оцените точность ответа.
12. Вася испек 40 булочек. В каждую из них он кладет изюминку с $p = 0,02$. Какова вероятность того, что всего окажется 3 булочки с изюмом? Оцените точность ответа.
13. В офисе два телефона – зеленый и красный. Входящие звонки на красный – Пуассоновский поток событий с интенсивностью $\lambda_1 = 4$ звонка в час, входящие на зеленый – с интенсивностью $\lambda_2 = 5$ звонка в час. Секретарша Василиса Премудрая одна в офисе. Перед началом рабочего дня она подбрасывает монетку и отключает один из телефонов, зеленый – если выпала решка, красный – если орел. Обозначим Y время от начала дня до первого звонка. Найдите функцию плотности Y.

1. Докажите следующие свойства (X, Y, Z - с.в., a, b - константы):
a) $\operatorname{Cov}(aX+b,Y) = a\operatorname{Cov}(X,Y)$, в частности $\operatorname{Cov}(X,a)=0$
b) $\operatorname{Cov}(X+Y,Z) = \operatorname{Cov}(X,Z)+\operatorname{Cov}(Y,Z)$, линейность ковариации
c) $\operatorname{Var}(aX+b) = a^2\operatorname{Var}(X)$, дисперсия - это квадрат длины случайной величины
d) $\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}(X)+\operatorname{Var}(Y)+2\operatorname{Cov}(X,Y)$
d2) $\operatorname{Var}(X-Y) = \operatorname{Var}(X)+\operatorname{Var}(Y)-2\operatorname{Cov}(X,Y)$
e) $\operatorname{Corr}(aX,Y) = \operatorname{Corr}(X,Y)$ если $a>0$, косинус угла между векторами не меняется
f) $\sigma_{aX} = |a|\sigma_X$, стандартная ошибка - это длина случайной величины
g) $\sigma_X+\sigma_Y \geqslant \sigma_{X+Y}$, неравенство треугольника
2. Известно, что $Y=2X-3$, а $Z=6-3X$. Найдите $\operatorname{Corr}(X,Y)$, $\operatorname{Corr}(X,Z)$
3. Пусть X и Y независимы.
a) Найдите $\operatorname{Cov}(X,Y)$, $\operatorname{Cov}(X^3,Y^2-5Y)$, $\operatorname{Corr}(X,Y)$
b) Выразите $\operatorname{Var}(X+Y)$ и $\operatorname{Var}(X-Y)$ через $\operatorname{Var}(X)$ и $\operatorname{Var}(Y)$
4. Кубик подбрасывается два раза, X - сумма очков, Y - разность очков, число при первом броске минус число при втором. Найдите $\mathbb{E}(XY)$, $\operatorname{Cov}(X,Y)$, $\operatorname{Corr}(X,Y)$
5. Пусть X равновероятно принимает значения -1, 0, +1, а $Y=X^2$
а) Найдите $\operatorname{Cov}(X,Y)$; б) Верно ли, что X и Y независимы?
6. Пусть X равномерно на $[0;1]$, $Y=X^2$
а) Найдите $\operatorname{Cov}(X,Y)$; б) Верно ли, что X и Y независимы?
7. Паук сидит в начале координат. Равновероятно он может сместиться на единицу вверх, вниз, влево или вправо (по диагонали паук не ползает). Пусть X и Y - это абсцисса и ордината паука после первого шага.
а) Найдите $\operatorname{Cov}(X,Y)$?
б) Верно ли, что X и Y независимы?
8. Кубик подбрасывается n раз. Пусть X_1 - число выпадений 1, а X_6 - число выпадений 6.
Найдите $\operatorname{Corr}(X_1,X_6)$. Подсказка: $\operatorname{Cov}(X_1, X_1+...+X_6) = ...$
9. Вероятность дождя в субботу 0.5, вероятность дождя в воскресенье 0.3. Корреляция между наличием дождя в субботу и наличием дождя в воскресенье равна r.
Какова вероятность того, что в выходные вообще не будет дождя?
10. Пусть $\mathbb{P}(A|B) > \mathbb{P}(A)$. Можно ли определить знак $\operatorname{Cov}(1_A, 1_B)$?
11. Вася наблюдает значение X, но не наблюдает значение Y; при этом он знает, что $\operatorname{Var}(X)=3$, $\operatorname{Var}(Y)=8$, $\operatorname{Cov}(X,Y)=-3$, $\mathbb{E}(Y)=3$, $\mathbb{E}(X)=2$. Задача Васи – спрогнозировать Y с помощью линейной функции от X, т.е. построить $\hat{Y}=aX+b$. Васю штрафуют за неправильный прогноз на сумму $(Y-\hat{Y})^2$. Найдите a и b
12. Случайные величины X и Y зависимы, случайные величины Y и Z зависимы. Верно ли, что случайные величины X и Z зависимы?
13. Пусть $\operatorname{Cov}(X,Y)>0$, $\operatorname{Cov}(Y,Z)>0$. Верно ли, что $\operatorname{Cov}(X,Z)>0$? $\operatorname{Cov}(X,Z)\geqslant 0$?
14. Кольцо задается системой неравенств: $x^2+y^2\geqslant 1$ и $x^2+y^2\leqslant 4$. Случайным образом, равномерно на этом кольце, выбирается точка, X и Y – ее координаты.
Чему равна корреляция X и Y? Зависимы ли X и Y?

Случайные величины X и Y *независимы*, если для любых числовых подмножеств[1] $A\subset\mathbb{R}$ и $B\subset\mathbb{R}$ события $\{X\in A\}$ и $\{Y\in B\}$ независимы, т.е. $\mathbb{P}(X\in A\cap Y\in B) = \mathbb{P}(X\in A)\cdot\mathbb{P}(Y\in B)$
Если X и Y независимы, то любые[2] $f(X)$ и $g(Y)$ независимы.
Если X и Y независимы, то $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

[1] уточнение для посещающих стоханализ: для любых борелевских
[2] любые измеримые, т.е. такие, что $\forall A\in\mathcal{B}$, $f^{-1}(A)\in\mathcal{B}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(x,y)dy = p_X(x)$

$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$

1. Случайные величины X и Y заданы двумерной функцией плотности $p_{X,Y}(t_1,t_2)$. Известно, что $p(4,8)=9$. Примерно найдите вероятность $\mathbb{P}(X \in [4;4.003] \cap Y \in [7.999;8])$.

2. Как из равномерной случайной величины получить экспоненциальную величину со средним значением m?

3. Пусть $g(t)$ - возрастающая функция и $Y=g(X)$. Докажите, что функция плотности случайной величины Y имеет вид: $p_Y(t) = p_X(g^{-1}(t))\frac{dg^{-1}}{dt}$.

4. Пусть X распределена равномерно на $[0;1]$. Найдите плотность распределения случайных величин $Y = \ln\frac{X}{1-X}$, $Z = -\frac{1}{\lambda}\ln X$ и $\lambda > 0$, $W = X^3$, $Q = X - 1/X$. Как изменятся ответы, если X не равномерна, а имеет функцию плотности $p(t)=2t$ на отрезке $[0;1]$?

5. Совместная функция плотности имеет вид:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2-x-y, & \text{если } x\in[0;1], y\in[0;1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдите $\mathbb{P}(Y>2X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(XY)$ $\mathrm{Cov}(X,Y)$, $\mathbb{E}(X|Y>0,5)$, частную (предельную) функцию плотности $p_Y(t)$, условную функцию плотности $p_{X|Y}(x|y)$, $\mathbb{E}(X|Y)$. Верно ли, что величины X и Y являются независимыми?

6. Совместная функция плотности имеет вид

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{если } x\in[0;1], y\in[0;1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдите $\mathbb{P}(Y>X)$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X|Y>X)$, $\mathrm{Cov}(X,Y)$, частную (предельную) функцию плотности $p_Y(t)$, условную функцию плотности $p_{X|Y}(x|y)$, $\mathbb{E}(X|Y)$. Верно ли, что величины X и Y являются независимыми?

7. X и Y независимы и равномерны на отрезке $[0;1]$. Найдите функцию плотности $Z=X+Y$. Как изменится ответ, если X и Y независимы и имеют функцию плотности $p(t)=2t$ на отрезке $[0;1]$?

8. Пусть X_1, X_2 и X_3 - независимы и равномерны на отрезке $[0;1]$. Найдите функцию плотности $Y=\max\{X_1,X_2,X_3\}$, $Z=\min\{X_1,X_2,X_3\}$

9. X выбирается равномерно на отрезке $[0;1]$. Затем Y выбирается равномерно на отрезке $[0;X]$.

a) Найдите условную функцию плотности $p_{Y|X}(y|x)$

b) Найдите $p_{X,Y}(x,y)$ и $p_Y(y)$

c) Найдите $\mathbb{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(Y)$, $\mathbb{P}(X+Y>1)$

10. Пусть X - неотрицательная с.в. с функцией плотности $p(t)$ и $\mathbb{E}(X)<\infty$. При каком c функция $g(t)=c\cdot tp(t)$ также будет функцией плотности?

11. Совместная функция плотности X и Y имеет вид $p(x,y)=cx^2+y^2$ на участке $x\in[0;1]$ и $y\in[0;1]$. Найдите c. Найдите совместную функцию плотности величин W и Z, если а) $W=X+Y$, $Z=X-Y$; б) $W=XY$, $Z=X^2Y$.

12. Петя сообщает Васе значение случайной величины, равномерной на отрезке $[0;4]$. С вероятностью $\frac{1}{4}$ Вася возводит Петино число в квадрат, а с вероятностью $\frac{3}{4}$ прибавляет к Петиному числу 2. Обозначим результат буквой Y. Найдите $\mathbb{P}(Y<4)$ и функцию плотности случайной величины Y.

Вася выбирает свое действие независимо от Петиного числа.

13. Оценка X за экзамен распределена равномерно на отрезке $[0;100]$. Итоговая оценка Y рассчитывается по формуле $Y = \begin{cases} 0, X<30 \\ X, X\in[30;80] \\ 100, X>80 \end{cases}$.

Найдите $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(X\cdot Y)$, $\mathbb{E}(Y^2)$, $\mathbb{E}(Y|Y>0)$.

14. Петя сообщает Васе значение величины $X\sim U[0;1]$. Вася изготавливает неправильную монетку, которая выпадает «орлом» с вероятностью X и подкидывает ее 20 раз.

а) Какова вероятность, что выпадет ровно 5 орлов?

б) Каково среднее количество выпавших орлов? Дисперсия?

1. Пусть $X \sim N(0;1)$. Найдите $\mathbb{P}(X > 0,5)$, $\mathbb{P}(-1 < X < 2)$, $\mathbb{P}(X^2 > 3)$, $\mathbb{P}(X < 0,3)$, $\mathbb{P}(|X| < 0,8)$
2. Пусть $X \sim N(4;9)$, $Y \sim N(-5;16)$, $Z \sim N(20;100)$; X, Y и Z - независимы. Найдите $\mathbb{P}(X > 8)$, $\mathbb{P}(X \in [1;5])$, $\mathbb{P}(Y \in [-10;-3))$, $\mathbb{P}(Z > 100)$, $\mathbb{P}(X + Y > 3)$, $\mathbb{P}(|Z| > 10)$, $\mathbb{P}(4Y + Z > 15)$.
3. Пусть $X \sim N(\mu;\sigma^2)$. Найдите $\mathbb{P}(X - \mu > 2\sigma)$, $\mathbb{P}(|X - \mu| > 2\sigma)$, $\mathbb{P}(|X - \mu| > 3\sigma)$.
4. Монетку подбрасывают 1000 раз, S – общее количество «орлов». Найдите $\mathbb{P}(S \in [490;520])$, $\mathbb{P}(492 < S < 505)$, $\mathbb{P}(S < 400)$. По теореме Берри-Эссена оцените погрешность.
5. Доход от одной акции компании XXX представляет собой случайную величину $X \sim N(50;5^2)$, а доход от одной акции компании YYY – величину $Y \sim N(80;9^2)$, при этом $Cor(X,Y) = -0,4$. Определите вероятность того, что суммарный доход от пакета из восьми акций XXX и двух акций YYY составит не менее 750.
6. Пусть $X \sim N(7;16)$. Найдите $\mathbb{E}(X|X > 11)$, $\mathbb{E}(X|X < 10)$, $\mathbb{E}(X|X \in [0;10])$.
7. В большом-большом городе 80% аудиокиосков торгуют контрафактной продукцией. Какова вероятность того, что в наугад выбранных 90 киосках более 60 будут торговать контрафактной продукцией? менее 50? от 40 до 80? от 70 до 75?
8. Количество опечаток в газете – случайная величина с матожиданием 10 и дисперсией 25. Какова вероятность того, что по 144 газетам среднее количество опечаток превысит 11? будет от 10 до 10,5? Будет больше 9,5? меньше 20?
9. Случайная величина X имеет функцию плотности $p_X(t) = c \cdot \exp(-8t^2 + 5t)$. Найдите $\mathbb{E}(X)$, σ_X, c.
10. Количество смс за сутки, посылаемое каждым из 160 абонентов, имеет пуассоновское распределение со средним значением 5 смс в сутки. Какова вероятность того, что за двое суток абоненты пошлют в сумме более 1700 сообщений?
11. Вероятность выпадения монетки «орлом» равна 0,63.
a) Какова вероятность, что в 100 испытаниях выборочная доля выпадения орлов будет отличаться от истинной менее, чем на 0,07?
b) Каким должно быть минимальное количество испытаний, чтобы вероятность отличия менее чем на 0,02 была больше 0,95?
12. Пусть $X \sim N(0,\sigma^2)$.
а) Найдите функцию плотности $|X|$
б) Найдите $\mathbb{E}(|X|)$ (можно найти не решая а).
13. Известно, что $\ln Y \sim N(\mu;\sigma^2)$. Найдите $\mathbb{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(Y)$.
14. Докажите, что случайная величина с функцией плотности $p(x) = c \cdot \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2)$ действительно имеет матожидание μ и дисперсию σ^2
15. Каждый день цена акции равновероятно поднимается или опускается на один рубль. Сейчас акция стоит 1000 рублей. Найдите вероятность того, что через сто дней акция будет стоить больше 1030 рублей.
16. В самолете пассажирам предлагают на выбор «мясо» или «курицу». В самолете 250 мест. Каждый пассажир с вероятностью 0.6 выбирает курицу, и с вероятностью 0.4 – мясо. Сколько порций курицы и мяса нужно взять, чтобы с вероятностью 99% каждый пассажир получил предпочитаемое блюдо, а стоимость «мяса» и «курицы» для компании одинаковая?
Как изменится ответ, если компания берет на борт одинаковое количество «мяса» и «курицы»?
17. Величины X_i имеют одинаковое среднее μ и одинаковую дисперсию σ^2 и попарно некоррелированны, $\mathrm{Corr}(X_i, X_j) = 0$. Рассмотрим их сумму $S_n = X_1 + ... + X_n$, и их среднее $\bar{X}_n = S_n/n$. Найдите $\mathbb{E}(S_n)$, $\mathbb{E}(\bar{X}_n)$, $\mathrm{Var}(S_n)$, $\mathrm{Var}(\bar{X}_n)$.

Величина X распределена нормально, $X \sim N(\mu;\sigma^2)$, если $p(x) = c \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$, где $c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$

Центрирование: Если $X \sim N$, то $Z = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}} \sim N(0;1)$

Центральная предельная теорема (интуитивно):
Если X_1, ..., X_n независимы, одинаково распределенны, то при больших n их сумма S_n и среднее $\bar{X}_n$ имеют распределение похожее на нормальное.

Теорема Берри-Эссена:
при расчете вероятности $\mathbb{P}(S_n \in [a;b])$ по ЦПТ абсолютная ошибка не превосходит $\frac{\mathbb{E}(|X_i - \mu|^3)}{\sigma^3\sqrt{n}}$

1. Может ли ковариационная матрица иметь вид:
а) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$?
2. Есть три случайных величины. Все попарные корреляции равны ρ. В каких пределах может лежать ρ?
3. Пусть $X \sim N\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 16 \end{pmatrix}\right)$. Найдите $\mathbb{E}(X_1)$, $\mathbb{E}(X_1 + 2X_2)$, $\mathrm{Var}(X_1 - X_2)$, $\mathbb{P}(X_1 > X_2)$, $\mathbb{P}(2X_1 + X_2 < 5)$. Как распределена случайная величина X_1 при условии, что $X_2 = 6$? $X_2 = -3$?
4. В данном регионе кандидата в парламент Обещаева И.И. поддерживает 60% населения. Сколько нужно опросить человек, чтобы с вероятностью 0,99 доля опрошенных избирателей, поддерживающих Обещаева И.И., отличалась от 0,6 (истинной доли) менее, чем на 0,01?
5. Складывают n чисел. Перед сложением каждое число округляют до ближайшего целого. Появляющуюся при этом ошибку можно считать равномерно распределенной на отрезке $[-0.5; 0.5]$. Определите, сколько чисел складывают, если с вероятностью $\frac{1}{2}$ получаемая сумма отличается от настоящей больше чем на 3 (в любую сторону).
6. Рассмотрим антагонистическую игру двух игроков. У каждого игрока две стратегии. Матрица игры определяется случайным образом: каждый из четырех платежей - это независимая случайная величина $X_{ij} \sim N(0; 1)$. Каково ожидаемое количество равновесий по Нэшу в чистых стратегиях в получающейся матрице?
7. Внутри упаковки шоколадки находится наклейка с изображением одного из 30 животных. Предположим, что все наклейки равновероятны. Большой приз получит каждый, кто соберет наклейки всех животных. Какое количество шоколадок в среднем нужно купить, чтобы выиграть приз?
8. С помощью неравенства Чебышева оцените вероятности
a) $\mathbb{P}(-2\sigma < X - \mu < 2\sigma)$, если $\mathbb{E}(X) = \mu$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$
b) $\mathbb{P}(8 < Y < 12)$, если $\mathbb{E}(Y) = 10$, $\mathrm{Var}(Y) = 400/12$
c) $\mathbb{P}(-2 < Z - \mathbb{E}(Z) < 2)$, если $\mathbb{E}(Z) = 1$, $\mathrm{Var}(Z) = 1$
d) Найдите точные значения, если дополнительно известно, что $X \sim N(\mu; \sigma^2)$, $Y \sim U[0; 20]$ и $Z \sim Exp(1)$.
9. Пусть $X \sim N(0; 1)$; Z равновероятно принимает значения 1 и -1; X и Z независимы; $Y = X \cdot Z$.
а) Какое распределение имеет св. Y? б) Чему равна $\mathrm{Cov}(X, Y)$? г) Верно ли, что $X + Y$ нормально?
10. Пусть величины X, Y, Z - имеют совместное нормальное распределение, с математическим ожиданием 0 и некоей ковариационной матрицей B. Как зависит от B вероятность $\mathbb{P}(XYZ > 0)$?
11. Пусть X_1 и X_2 имеют совместное нормальное распределение, причем каждая $X_i \sim N(0; 1)$, а корреляция равна ρ.
а) Выпишите в явном виде (без матриц) совместную функцию плотности
б) Пусть $\rho = 0.5$. Какое условное распределение имеет X_1 при условии, что $X_2 = -1$?
12. Допустим, что в городе N рост матери и рост дочери являются совместно нормально распределенными случайными величинами. Причем и рост матери, и рост дочери распределены $N(165; 5^2)$ с корреляцией 0.7.
a) Among the daughters of above average height, what percent were shorter than their mothers?
b) Amont the daughters of above average height, what percent have an above average mother?
c) Дополнительно известно, что рост дочери равен 167 см. Какова вероятность того, что рост матери выше среднего? Чему равен ожидаемый рост матери?

Минитеория
Неравенство Чебышева $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > a) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}$
Многомерное нормальное. Пусть $\vec{\mu}$ - вектор столбец средних, а H - ковариационная матрица
$\mathbb{P}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \cdot \det(H)}} \exp(-\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{\mu})^t H^{-1}(\vec{x} - \vec{\mu}))$
Для вектора случайных величин $\mathrm{Var}(X)$ означает ковариационную матрицу.

1. $X_i \sim iid$, какая из приведенных оценок для $\mathbb{E}(X_i)$ является несмещенной? наиболее эффективной?
а) $X_1 + 3X_2 - 2X_3$; в) $(X_1 + X_2)/2$; г) $(X_1 + X_2 + X_3)/3$; д) $(X_1 + ... + X_{20})/21$; е) $X_1 - 2X_2$
2. С.в. X равномерна на $[0;a]$. Придумайте $\hat{a} = \alpha + \beta X$ так, чтобы Y была несмещенной оценкой a.
3. Пусть X_i - независимы и одинаково распределены. При каком значении параметра β
а) $2X_1 - 5X_2 + \beta X_3$ будет несмещенной оценкой для $\mathbb{E}(X_i)$?
б) $\beta(X_1 + X_2 - 2X_3)^2$ будет несмещенной оценкой для $\mathrm{Var}(X_i)$?
4. Пусть X_1 и X_2 независимы и равномерны на $[0;a]$. При каком β оценка $Y = \beta \cdot \min\{X_1, X_2\}$ для параметра a будет несмещенной?
5. $X_i \sim iid$, какая из приведенных оценок для $\mathrm{Var}(X_i)$ является несмещенной
а) $X_1^2 - X_1X_2$; б) $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}$; в) $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$; г) $\frac{1}{2}(X_1 - X_2)^2$; д) $X_1 - 2X_2$; е) X_1X_2
6. Пусть X равномерна на $[3a-2; 3a+7]$. При каких α и β оценка $Y = \alpha + \beta X$ неизвестного параметра a будет несмещенной?
7. Закон распределения с.в. X имеет вид

а)

x_i	0	1	a
$P(X = x_i)$	1/4	1/4	2/4

; б)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	1/4	a	$(3/4 - a)$

Постройте несмещенную оценку вида $Y = \alpha + \beta X$ для неизвестного параметра a
8. Время горения лампочки – экспоненциальная с.в. с ожиданием равным θ . Вася включил одновременно 20 лампочек. С.в. X обозначает время самого первого перегорания. Как с помощью X построить несмещенную оценку для θ ?
9. Пусть X_i независимы и одинаково распределены, причем $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$, а $\mathbb{E}(X_i) = \frac{\theta}{\theta+1}$, где $\theta > 0$ - неизвестный параметр. С помощью $\bar{X}$ постройте состоятельную оценку для θ.
10. Пусть $Y_i = \beta X_i + \epsilon_i$, константа β и случайные величины ϵ_i являются ненаблюдаемыми. Известно, что $\mathbb{E}(\epsilon_i) = 0$, $\mathrm{Var}(\epsilon_i) = \sigma^2$, ϵ_i являются независимыми. Константы X_i наблюдаемы, и известно, что $20 < X_i < 100$. У исследователя есть две оценки для β: $\hat{\beta}_1 = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$ и $\hat{\beta}_2 = \frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2}$
а) Проверьте несмещенность, состоятельность.
б) Определите, какая оценка является наиболее эффективной.
11. Есть два золотых слитка, разных по весу. Сначала взвесили первый слиток и получили результат X. Затем взвесили второй слиток и получили результат Y. Затем взвесили оба слитка и получили результат Z. Допустим, что ошибка каждого взвешивания - это случайная величина с нулевым средним и дисперсией σ^2.
а) Придумайте наилучшую оценку веса первого слитка.
б) В каком смысле оценка, полученная в «а» является наилучшей?
12. Измерен рост 100 человек. Средний рост оказался равным 160 см. Медиана оказалась равной 155 см. Машин рост в 163 см был ошибочно внесен как 173 см. Как изменятся медиана и среднее после исправления ошибки?
13. Имеется пять чисел: x, 4, 5, 7, 9. При каком значении x медиана будет равна среднему?
14. Деканат утверждает, что если студента N перевести из группы A в группу B, то средний рейтинг каждой группы возрастет. Возможно ли это?
15. В среднем в каждой группе учится 25 человек. Мы выбираем одного студента с курса наугад. Верно ли что, что ожидаемое количество человек в его группе равно 25?

`Минитеория`

Оценка $\hat{\theta}$ неизвестного параметра θ называется *несмещенной*, если $\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta$.
Последовательность оценок $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, ..., называется *состоятельной*,
если $\lim \mathbb{P}(|\theta - \hat{\theta}_n| > \varepsilon) = 0$ для всех $\forall \varepsilon > 0$.
Среднеквадратичная ошибка, $\mathrm{MSE}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}((\hat{\theta} - \theta)^2)$
Оценка называется *эффективной*, если у нее минимально возможная MSE.

Неравенство Йенсена: Если f — выпуклая вверх (а-ля $y = x^2$) функция, то $\mathbb{E}(f(X)) \geqslant f(\mathbb{E}(X))$

Закон больших чисел без технических деталей: $\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}$ — состоятельная оценка для $\mu = \mathbb{E}(X_i)$

1. Допустим, что X_i - независимы и имеют закон распределения, заданный табличкой:

X	-1	0	2
$\mathbb{P}()$	θ	$2\theta - 0.2$	$1.2 - 3\theta$

Имеется выборка: $X_1 = 0$, $X_2 = 2$.
a) Найдите оценки $\hat{\theta}_{ML}$ и $\hat{\theta}_{MM}$
b) Первоначально ничего о θ не было известно и поэтому предполагалось, что θ распределена равномерно на $[0.1; 0.4]$. Как выглядит условное распределение θ, если известно что $X_1 = 0$, $X_2 = 2$?
c) Постройте ML и MM оценки для произвольной выборки X_1, X_2, ... X_n
2. У Васи есть два одинаковых золотых слитка неизвестной массы m и весы, которые взвешивают с некоторой погрешностью. Сначала Вася положил на весы один слиток и получил результат $Y_1 = m + u_1$, где u_1 — случайная величина, ошибка первого взвешивания. Затем Вася положил на весы сразу оба слитка и получил результат $Y_2 = 2m + u_2$, где u_2 — случайная величина, ошибка второго взвешивания. Оказалось, что $y_1 = 0.9$, а $y_2 = 2.3$.
Используя ML оцените вес слитка m и параметр погрешности весов b, если
a) u_i — независимы и $N(0; b)$ b) u_i — независимы и $U[-b; b]$
3. Пусть Y_1 и Y_2 независимы и распределены по Пуассону. Известно также, что $\mathbb{E}(Y_1) = e^a$ и $\mathbb{E}(Y_2) = e^{a+b}$. Найдите ML оценки для a и b.
4. Пусть X_1, ..., X_n распределены одинаково и независимо. Оцените значение θ с помощью ML (везде) и MM (в «а» и «б»), оцените дисперсию ML оценки, если функция плотности X_i, $p(t)$ имеет вид:
а) $\theta t^{\theta-1}$ при $t \in [0; 1]$; б) $\frac{2t}{\theta^2}$ при $t \in [0; \theta]$
в) $\frac{\theta e^{-\frac{\theta^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t^3}}$ при $t \in [0; +\infty)$; г) $\frac{\theta\left(\ln^{\theta-1} t\right)}{t}$ при $t \in [1; e]$; д) $\frac{e^{-|t|}}{2\left(1-e^{-\theta}\right)}$ при $t \in [-\theta; \theta]$
5. «Про зайцев». В темно-синем лесу, где трепещут осины, живут n зайцев. Мы случайным образом отловили 100 зайцев. Каждому из них на левое ухо мы завязали бант из красной ленточки и потом всех отпустили. Через неделю будет снова отловлено 100 зайцев. Из них Z зайцев окажутся с бантами. С помощью величины Z постройте MM и ML оценку для неизвестного параметра n.
6. Пусть X_1, ..., X_n - независимы и экспоненциальны с параметром λ. Постройте MM и ML оценки параметра λ. Оцените дисперсию ML оценки.
7. Пусть X_1, ..., X_n - независимы и $N(\mu; \sigma^2)$. Значение σ^2 известно. Постройте MM и ML оценки параметра μ.
8. Пусть X_i независимы и одинаково распределены $N(\alpha, 2\alpha)$
По выборке X_1, ..., X_n постройте оценку для α с помощью ML и MM. Оцените дисперсию ML оценки.
9. Пусть $Y_1 \sim N(0; \frac{1}{1-\theta^2})$.
a) Найдите ML оценку для θ. b) Оцените дисперсию ML оценки.
10. Пусть X_1, X_2,..., X_n независимы и их функции плотности имеет вид:
$$f(x) = \begin{cases} (k+1)x^k, & x \in [0; 1]; \\ 0, & x \notin [0; 1]. \end{cases}$$
Найдите оценки параметра k с помощью ML и MM. Оцените дисперсию ML оценки.
11. Пусть X_1, X_2,..., X_n независимы и равномерно распределены на отрезке $[0; \theta]$, $\theta > 1$
а) Постройте MM и ML оценки для неизвестного θ.
б) Как изменятся ответы на «а», если исследователь не знает значений самих X_i, а знает только количество X_i оказавшихся больше единицы?

`Минитеория`
Метод моментов (MM, method of moments): найти θ из уравнения $\bar{X_n} = \mathbb{E}(X_i)$
Метод максимального правдоподобия (ML, maximum likelihood):
найти θ при котором вероятность получить имеющиеся наблюдения будет максимальной
Наблюдаемая информация Фишера: $\hat{I} = -\frac{\partial^2 l}{\partial^2 \theta}(\hat{\theta})$, $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\theta}_{ML}) = \hat{I}^{-1}$.
Байесовский подход (bayesian approach):
1. Сделать изначальное предположение о распределении $\hat{\theta}$
2. Обновлять закон распределения $\hat{\theta}$ по формуле условной вероятности

1. В озере водятся караси, окуни, щуки и налимы. Вероятности их поймать занесены в табличку

Fish	Карась	Окунь	Щука	Налим
$\mathbb{P}()$	0.1	p	p	$0.9-2p$

Рыбак поймал 100 рыб и среди пойманных 100 рыб он посчитал количества карасей, окуней, щук и налимов.
а) Постройте $\hat{p}_{ML}$
в) Найдите ожидаемую и наблюдаемую информацию Фишера
г) Несмещенная оценка $\hat{\theta}$ полученна по 100 наблюдениям: X_1, ..., X_{100}.
В каких пределах может лежать $\mathrm{Var}(\hat{\theta})$?
2. Известно, что X_i - независимы и имеют закон распределения, заданный таблицей:

X_i	0	1
$\mathbb{P}()$	p	$1-p$

а) Постройте $\hat{p}_{ML}$ б) Найдите ожидаемую и наблюдаемую информацию Фишера. Постройте возможные графики $I(p)$. в) Пусть $\hat{\theta}$ - несмещенная оценка, полученная по 100 наблюдениям: X_1, ..., X_{100}.
В каких пределах может лежать $\mathrm{Var}(\hat{\theta})$?
3. Пусть X_i независимы и имеют экспоненциальное распределение с параметром λ, т.е. $p(t)=\lambda e^{-\lambda t}$.
а) Найдите $I(\lambda)$, если наблюдаются X_1, ..., X_n
б) Пусть $\lambda=1/\theta$, т.е. $p(t)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}t}$. Найдите $I(\theta)$, если наблюдается X_1, ..., X_n
4. Пусть X_i - независимы и одинаково распределены. Пусть $I_{X_i}(\theta)$ - информация Фишера о θ, получаемая при наблюдении X_i.
а) Верно ли, что $I_{X_1}(\theta)=I_{X_2}(\theta)$? б) Как найти $I_{X_1,\ldots,X_n}(\theta)$ зная $I_{X_i}(\theta)$?
5. Пусть X - равномерна на участке $[0;2a]$. С какой вероятностью интервал $[0.9X;1.1X]$ накрывает неизвестное a? Постройте 95%-ый доверительный интервал для a вида $[0;kX]$.
6. Пусть X - экспоненциальна с параметром λ и $\mu=\mathbb{E}(X)$. С какой вероятностью интервал $[0.9X;1.1X]$ накрывает μ? Постройте 90%-ый доверительный интервал для μ вида $[0;kX]$.
7. Пусть X_i - независимы и нормальны $N(\mu,1)$. Какова вероятность того, что интервал $[\bar{X}_{10}-1;\bar{X}_{10}+1]$ накроет неизвестное μ? Постройте 90%-ый доверительный интервал для μ вида $[\bar{X}_{10}-k;\bar{X}_{10}+k]$.
8. Величины X_1, ..., X_n - независимы и одинаково распределены с функцией плотности $\frac{\theta\left(\ln^{\theta-1}t\right)}{t}$ при $t\in[1;e]$. По выборке из 100 наблюдений оказалось, что $\sum\ln(\ln(X_i))=-30$
а) Найдите ML оценку параметра θ и ожидаемую и наблюдаемую информацию Фишера
г) Постройте 95% доверительный интервал для θ
9. Величины X_1, ..., X_n - независимы и одинаково распределены с функцией плотности $\frac{\theta e^{-\frac{\theta^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t^3}}$ при $t\in[0;+\infty)$. По выборке из 100 наблюдений оказалось, что $\sum 1/X_i=12$
а) Найдите ML оценку параметра θ и информацию Фишера $I(\theta)$
в) Пользуясь данными по выборке постройте оценку $\hat{I}$ для информации Фишера
г) Постройте 90% доверительный интервал для θ Hint: $\mathbb{E}(1/X_i)=1/\theta^2$ (интеграл берется заменой $x=\theta^2a^{-2}$)
10. Время, которое Вася тратит на задачу — равномерно распределенная случайная величина: на простую - от 1 до 15 минут, на сложную - от 10 до 20 минут. Известно, что на некую задачу Вася потратил 13 минут.

1. С помощью метода максимального правдоподобия определите, простая она или трудная.
2. С помощью байесовского подхода посчитайте вероятности того, что задача была простая, если на экзамене было 7 легких и 3 трудных задачи.

`Минитеория`

Пусть $l(\theta)$ - логарифмическая функция правдоподобия ($l(\theta)=\ln(f(X_1,\ldots,X_n,\theta))$).
Ожидаемая информация Фишера $I(\theta)=\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial l}{\partial\theta}\right)^2\right]=-E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial\theta^2}\right)$
Сколько информации о неизвестном θ содержится в выборке X_1, ..., X_n
Неравенство Крамера-Рао (Cramer-Rao) («слишком хорошей оценки не бывает»):
Если $\hat{\theta}$ - несмещенная оценка и ..., то $\mathrm{Var}(\hat{\theta})\geqslant\frac{1}{I(\theta)}$
Оценки ML - самые лучшие (асимптотически несмещенные и с минимальной дисперсий):
Если X_i - iid, ..., и $n\to\infty$ то $\hat{\theta}_{ML}\sim N(\theta,\frac{1}{I(\theta)})$.

1. Известно, что X_i независимы, $\mathbb{E}(X_i)=5$, $\mathrm{Var}(X_i)=4$. Как примерно распределены следующие величины: a) $\bar{X}_n$, b) $Y_n=(\bar{X}_n+3)/(\bar{X}_n+6)$, c) $Z_n=\bar{X}_n^2$, d) $W_n=1/\bar{X}_n$

2. Известно, что X_i независимы и равномерны на $[0;1]$.

a) Найдите $\mathbb{E}(\ln(X_i))$, $\mathrm{Var}(\ln(X_i))$, $\mathbb{E}(X_i^2)$, $\mathrm{Var}(X_i^2)$

b) Как примерно распределены величины $X_n=\frac{\sum\ln(X_i)}{n}$, $Y_n=(X_1\cdot X_2\cdots X_n)^{1/n}$, $Z_n=\left(\frac{\sum X_i^2}{n}\right)^3$

3. Величины X_i независимы и имеют функцию плотности $f(x)=a\cdot x^{a-1}$ на отрезке $[0;1]$.

a) Постройте оценку $\hat{a}$ методом моментов, укажите ее примерный закон распределения

b) По 100 наблюдениям оказалось, что $\sum X_i=25$. Посчитайте численное значение $\hat{a}$ и оцените дисперсию случайной величины $\hat{a}$.

4. Вася достает из м-энд-эм-сины из большой желтой пачки. Он собрал следующую статистику:

Цвет	Желтый	Зеленый	Красный	Коричневый
Количество	25	19	27	33

1. С помощью ML оцените вероятность вытащить м-энд-эм-сину каждого цвета
2. С помощью теста отношения правдоподобия проверьте гипотезу, что все цвета равновероятны на уровне значимости 5%

5.

6. Пользуясь примером про Васю и эм-энд-эм-сины найдите общую формулу хи-квадрат статистики для проверки гипотезы о том, что настоящие вероятности равны

Категория	1	2	3	...
Вероятность	p_1	p_2	p_3	...

,

если имеются данные о фактических частотах

Категория	1	2	3	...
Количество	X_1	X_2	X_3	...

.

7. Монету подбросили 1000 раз, при этом 519 раз она выпала на орла. Проверьте гипотезу о том, что монета «правильная» на уровне значимости 5%. Постройте 95% доверительный интервал для вероятности выпадения орла, p.

8. Вася отвечает на 100 тестовых вопросов. В каждом вопросе один правильный вариант ответа из пяти возможных. На 5%-ом уровне значимости проверьте гипотезу о том, что Вася ставит ответы наугад, если он ответил правильно на 26 вопросов из теста.

9. Пусть X_1, ..., X_{30} независимы, $N(\mu,\sigma^2)$. Известно, что $\sum(X_i-\bar{X})^2=600$. Проверьте гипотезу о том, что $\sigma^2=15$ против альтернативной $\sigma^2>15$ на 5%-ом уровне значимости.

`Минитеория`

Дельта-метод. Если $\sqrt{n}(\hat{\mu}_n-\mu)\to N(0;\sigma^2)$, то $\sqrt{n}(g(\hat{\mu}_n)-g(\mu))\to N(0;\sigma^2\cdot(g'(\mu))^2)$

Статистика отношения правдоподобия, $LR=-2(\max_{H_0} l(\theta_1,\ldots,\theta_n)-\max l(\theta_1,\ldots,\theta_n))$