Часть 1

Не претендуя на единственность, решения претендуют на правильность!

Задача 1

(a) $P(\cdot) = 0.9^2 \cdot 0.7 = 0.567$

(b) $A = \{$случайно выбранный арбуз — от тети Маши$\}$; $B = \{$случайно выбранный арбуз оказался спелым$\}$. Формула условной вероятности:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{2/3 \cdot 0.9}{2/3 \cdot 0.9 + 1/3 \cdot 0.7} = \frac{18}{25}$$

(c) $A = \{$второй и третий съеденные арбузы — от тети Маши$\}$; $B = \{$все три арбуза — спелые$\}$. Дает ли нам что-то о принадлежности арбузов к тете Маше или тете Оле то, что все арбузы — спелые? События независимы!

$$P(A|B) = P(A) = \frac{1}{3}$$

Задача 2

(a) $\mathbb{E}(X) = \sum P(X_i)X_i = 1.9$

$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.2 + 9 \cdot 0.4 - 1.9^2 = 1.09$

(b) Раз ребенок выбран, значит, в его семье дети есть! Всего детей $n\mathbb{E}(X) = 1.9n$. Семей с одним ребенком — $0.3n$, значит, детей из семей с одним ребенком — $0.3n$. Аналогично, детей из семей с двумя детьми — $0.4n$; детей из семей с тремя детьми — $1.2n$.

Теперь легко построить закон распределения случайной величины Y:

Y	1	2	3
$P(Y)$	3/19	4/19	12/19

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{3}{19} + \frac{8}{19} + \frac{36}{19} = \frac{47}{19} > \mathbb{E}(X)$$

Задача 3

Любителям (или нелюбителям) интегралов:

(a) Да это же интеграл от функции плотности на всей числовой прямой! Ответ: единица!

(b)
$$\mathbb{E}(X) = \int\limits_0^2 xf(x)dx = \int\limits_0^2 \frac{3}{8}x^3dx = \frac{3}{32}x^4|_0^2 = \frac{3}{2}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int\limits_0^2 x^2f(x)dx = \int\limits_0^2 \frac{3}{8}x^4dx = \frac{3}{40}x^5|_0^2 = \frac{12}{5}$$

Формула дисперсии:

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{12}{5} - \frac{9}{4} = \frac{3}{20}$$

(c)
$$P(X > 1.5) = \int\limits_{1.5}^2 f(x)dx = \int\limits_{1.5}^2 \frac{3}{8}x^2dx = \frac{1}{8}x^3|_{1.5}^2 = \frac{37}{64}$$

Вычислим вероятность условия:

$$P(X > 1) = \int\limits_1^2 f(x)dx = \int\limits_1^2 \frac{3}{8}x^2dx = \frac{1}{8}x^3|_1^2 = \frac{7}{8}$$

$$P(X > 1.5|X > 1) = \frac{P(X > 1.5)}{P(X > 1)} = \frac{37/64}{7/8} = \frac{37}{56}$$

(d) Должно выполниться следующее соотношение:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} cxf(x)dx = 1$$

Применительно к нашей задаче:

$$\frac{3c}{8}\int\limits_0^2 x^3dx = \frac{3c}{32}x^4|_0^2 = \frac{3c}{2} = 1 \Rightarrow c = \frac{2}{3}$$

Задача 4

You have to learn the rules of the game. And then you have to play better than anyone else. (А. Эйнштейн)

(a)

$$\mathbb{V}ar(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - (\mathbb{E}(Z))^2 = 15 - 9 = 6$$

$$\mathbb{V}ar(4 - 3Z) = 9\mathbb{V}ar(Z) = 54$$

$$\mathbb{E}(5 + 3Z - Z^2) = 5 + 3 \cdot (-3) - 15 = -19$$

(b)

$$\mathbb{V}ar(X \pm Y) = \mathbb{V}ar(X) + \mathbb{V}ar(Y) \pm 2 \cdot \mathbb{C}ov(X, Y)$$

Отсюда получаем:

$$\mathbb{V}ar(X + Y) - \mathbb{V}ar(X - Y) = 4\mathbb{C}ov(X, Y) \Rightarrow \mathbb{C}ov(X, Y) = 2.5$$

$$\mathbb{C}ov(6 - X, 3Y) = -3 \cdot 2.5 = -7.5$$

(c)

$$\mathbb{C}ov(X, Y) = 2.5 \neq 0$$

Случайные величины действительно независимы.

Задача 5

Предположим, что правильный ответ 0.25. Но это невозможно, потому что вариантов ответа 0.25 — два (1 и 4), значит ответ 0.5 тоже был бы правильный. Предположим, что правильный 0.5. Тогда 0.25 тоже правильный — таких вариантов два из четырех, значит вероятность попасть в 0.25, выбрав ответ наугад, равна 0.5. Ответ 0.6, очевидно, неверен, потому что вероятность попасть в него равна 0.25.

Правильный ответ: 0

Задача 6

Удобно рассуждать следующим образом: предположим, что каждая опечатка наугад (с равными вероятностями и независимо от других опечаток) выбирает, на какую страницу ей попасть[1].

(a) Пусть X - число опечаток на 13 странице.

$$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$

$P(X = 0) = \left(\frac{499}{500}\right)^{400}$ — каждая из 400 опечаток не доложна попасть на 13 страницу. $P(X = 1) = 400 \cdot \frac{1}{500} \cdot \left(\frac{499}{500}\right)^{399}$ — ровно одна опечатка (а есть 400 вариантов) должна попасть на 13 страницу, а остальные — мимо. Соответственно:

$$P(X \geqslant 2) = 1 - \left(\frac{499}{500}\right)^{400} - 400 \cdot \frac{1}{500} \cdot \left(\frac{499}{500}\right)^{399} \approx 0.1911357$$

Это если считать в явном виде. А если пользоваться приближением Пуассона:

$$p(k) = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

неплохо бы вспомнить, что парамер λ это матожидание X, поэтому расчеты здесь пока оставим до лучших времен.

(b) Пусть X - число опечаток на 13 странице. Введем случайную величину

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{если } i\text{-ая опечатка попала на 13 страницу} \\ 0 & \text{если нет} \end{cases}$$

Тогда $X = \sum\limits_{i=1}^{400} X_i$. Рассмотрим отдельно X_i:

X_i	1	0
$P(X_i = \cdot)$	$\frac{1}{500}$	$\frac{499}{500}$

Так как i-ая опечатка наугад выбирает одну страницу из 500 и это должна быть именно 13.

Тогда:

$$\mathbf{E}[X_i] = \frac{1}{500} = \mathbb{E}[X_i^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{Var}(X_i) = \mathbf{E}[X_i^2] - (\mathbf{E}[X_i])^2 = \frac{1}{500} - \left(\frac{1}{500}\right)^2 = \frac{499}{500^2}$$

[1] Ну очень самостоятельные!

Значит

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{400} X_i\right] = \sum_{i=1}^{400} \mathbf{E}[X_i] = \frac{400}{500} = 0.8$$

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbf{Var}\left(\sum_{i=1}^{400} X_i\right) = \sum_{i=1}^{400} \mathbf{Var}(X_i) = 400 \cdot \frac{499}{500^2} = 0.8 \cdot \frac{499}{500}$$

Теперь мы знаем, что $\lambda = \mathbb{E}[X] = 0.8$ поэтому можем вернуться к пункту (a):

$$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \frac{0.8^0}{0!}e^{-0.8} - \frac{0.8^1}{1!}e^{-0.8} = 0.1912079$$

$\boxed{\text{So close!}}$

Осталось найти наиболее вероятное число опечаток на 13 странице:

$$P(X = k) = \frac{0.8^k}{k!}e^{-0.8} \to \max_k$$

Очевидно, что эта функция убывает по k, ведь с ростом k:
$k!$ растет, а 0.8^k убывает. Значит наиболее вероятное число ошибок — $X = 0$

(c) Ох уж эти предрассудки! 13-я страница точно такая же как и все остальные, ведь везде в решении можно просто заменить номер 13 на любой другой и ничего не изменится.

Задача 7

Пусть $A = \{$«Лекция полезна»$\}$, $B = \{$«Лекция интересна»$\}$. Заметим, что лекции вообще независимы друг от друга.

(a) Пусть X_A — число полезных лекций, прослушанных Васей, X_B — число интересных лекций, прослушанных Васей. Введем случайную величину:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{если } i\text{-ая лекция была полезна} \\ 0 & \text{если нет} \end{cases}$$

Тогда $X_A = \sum_{i=1}^{30} X_i$. Рассмотрим отдельно X_i:

X_i	1	0
$P(X_i = \cdot)$	0.9	0.1

Вероятность 0.9 дана. Тогда:

$$\mathbf{E}[X_i] = 0.9 = \mathbb{E}[X_i^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{Var}(X_i) = \mathbf{E}[X_i^2] - (\mathbf{E}[X_i])^2 = 0.9 - 0.9^2 = 0.09$$

Значит

$$\mathbb{E}[X_A] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{30} X_i\right] = \sum_{i=1}^{30} \mathbf{E}[X_i] = 0.9 \cdot 30 = 27$$

$$\mathbf{Var}(X_A) = \mathbf{Var}\left(\sum_{i=1}^{30} X_i\right) = \sum_{i=1}^{30} \mathbf{Var}(X_i) = 0.09 \cdot 30 = 2.7$$

Аналогично для числа интересных лекций можем получить:

$$\mathbb{E}[X_B] = 0.7 \cdot 30 = 21$$

$$\mathbf{Var}(X_B) = 0.21 \cdot 30 = 6.3$$

(b) Так как интересность и полезность — независимые свойства лекций, то: $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0.3 \cdot 0.1 = 0.03$, где $\overline{A}$ значит «не A». В свою очередь: $P(A \cup B) = P(A \cap \overline{B}) + P(B \cap \overline{A}) + P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0.97$, где $(A \cup B)$ значит «A или B». Аналогично, путем введения бинарной случайной величины можем получить:

$$\mathbb{E}[X_{\overline{A} \cap \overline{B}}] = 0.03 \cdot 30 = 0.9$$

$$\mathbb{E}[X_{A \cup B}] = 0.97 \cdot 30 = 29.1$$

Задача 8

Будем пользоваться свойствами функций распределения и плотности. Для начала:

$$\lim_{x\to+\infty} F(X) = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} F(X) = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ae^x}{1+e^x}+b\right) = a+b := 1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{ae^x}{1+e^x}+b\right) = b := 0$$

Откуда сразу получаем

$$a = 1, b = 0 \Rightarrow F(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

Для дальнийших развлечений нам понадобится функция плотности:

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

Заметим, что она симметрична относительно нуля:

$$f(-x) = \frac{\frac{1}{e^x}}{\left(1+\frac{1}{e^x}\right)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = f(x)$$

Из того этого следует, что **математическое ожидание, а так же мода и медиана равны нулю**. Более того, так как функция плотности симметрична относительно **нулевого** матожидания, **центральный и начальный моменты третьего порядка равны между собой и равны нулю.** Можно было выписать интегралы для матожидания и третьего начального момента и сослаться на нечетность функции.

Часть 2

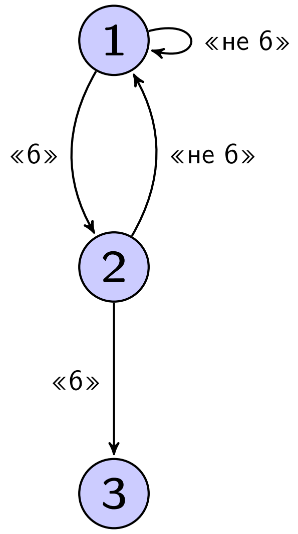
— Это невозможно!

— Нет. Это необходимо.

© Interstellar

Задача 1

Алгоритм решения: рисуешь дерево → PROFIT



Комментарии к построению дерева: состояние 1 — начальное, состояние 3 — конец игры, когда выпало две «шестерки» подряд. Заметим, что выпадение любой «нешестерки» в процессе игры приводит нас к состоянию, эквивалентному начальному.

Вероятность выпадения «шестерки» равна $1/6$, «нешестерки» — $5/6$.

Теперь мы готовы оседлать коня!

(a) $P(N=1)=0$ — невозможно за ход закончить игру.

$P(N=2)=\dfrac{1}{36}$

$P(N=3)=\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{216}$

(b) А теперь будет видна вся сила рисования дерева:

Пусть $\mathbb{E}_1$ — число ходов, за которое мы ожидаем закончить игру, если игра начинается в состоянии 1, $\mathbb{E}_2$ — число ходов, за которое мы ожидаем закончить игру, если игра начинается в состоянии 2.

Получим два уравнения: $\begin{cases}\mathbb{E}_2=\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{5}{6}(\mathbb{E}_1+1)\\ \mathbb{E}_1=\frac{5}{6}(\mathbb{E}_1+1)+\frac{1}{6}(\mathbb{E}_2+1)\end{cases}$

Решив эту систему, получим, что $\mathbb{E}_1 = 42$. А ведь это и есть $\mathbb{E}(N)$.

Аналогична логика для оставшихся мат. ожиданий.

Найдем математическое ожидание суммы набранных очков. Ясно, что если выпадает «не 6», то мы ждем 3 очка. Тогда переопределив $\mathbb{E}_1$ и $\mathbb{E}_2$ следующим образом: пусть $\mathbb{E}_1$ — число набранных очков, которое мы ожидаем получить за игру, если игра начинается в состоянии 1, $\mathbb{E}_2$ — число набранных очков, которое мы ожидаем получить за игру, если игра начинается в состоянии 2.

Новые два уравнения: $\begin{cases} \mathbb{E}_2 = \frac{1}{6} \cdot 6 + \frac{5}{6}(\mathbb{E}_1 + 3) \\ \mathbb{E}_1 = \frac{5}{6}(\mathbb{E}_1 + 3) + \frac{1}{6}(\mathbb{E}_2 + 6) \end{cases}$

Решаем и получаем: $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}_1 = 147$

А можно было сделать еще круче! Выше показано, что $\mathbb{E}(N) = 42$. А сколько мы ждем очков за 1 ход? 3.5! Тогда $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N) \cdot 3.5 = 147$

Применяя схожую логику для $\mathbb{E}(N^2)$:

$$\mathbb{E}(N^2) = \frac{5}{6} \cdot \mathbb{E}\left((N+1)^2\right) + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \mathbb{E}\left((N+2)^2\right) + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot 2^2$$

Учитывая, что $\mathbb{E}(N) = 42$, получим: $\mathbb{E}(N^2) = 3414$.

(c) Veni, vidi, vici

X_n	6
$P(X_n)$	1

Задача 2

(a) $P(V = 1) = 1/30$, т.к. именно этому равна вероятность того, что Вовочка стоит ровно вторым в очереди;

$M = 1$ значит, что между Машенькой и Вовочкой ровно один человек в очереди. Если Вовочка находится от 3 (включительно) до 28 позиции в очереди, то для Машеньки есть две благоприятные позиции для события $M = 1$ (например, если Вовочка стоит на 15 месте, то благоприятные позиции для Машеньки — стоять либо 13-ой, либо 17-ой). Если же Вовочка стоит на других позициях в очереди, то для Машеньки существует ровно одна благоприятная позиция:

$$P(M = 1) = \frac{26}{30} \cdot \frac{2}{29} + \frac{4}{30} \cdot \frac{1}{29} = \frac{56}{30 \cdot 29} = \frac{28}{435}$$

$M = V$ произойдет только, если Машенька стоит за Вовочкой. При этом для Машеньки существует только одна благоприятная позиция и только в том случае, что Вовочка стоит до 15 позиции (включительно):

$$P(M = V) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{29} = \frac{1}{58}$$

(b)

$$\mathbb{E}(V) = \frac{0 + 1 + ... + 29}{30} = \frac{30 \cdot 14 + 15}{30} = 14.5$$

Для $\mathbb{E}(M)$ можно решить в лоб, и получится красивая сумма, а можно вот так:

Сначала случайно кинем Вовочку и Машеньку на две из 30 позиций в очереди. Образуется три отрезка: точки между Вовочкой и Машенькой и два крайних отрезка (может быть, отрезок из 0 точек). Затем будем закидывать в очередь на оставшиеся позиции случайно 28 оставшихся людей (назовем их «пропавшими»). Т.к. все броски были случайны (или из соображений симметрии, как хотите), вероятность попасть в отрезок между Машенькой и Вовочкой для «пропавшего» равна 1/3, вне отрезка — соответственно 2/3, и независима от остальных бросков (!).

Введем случайную величину X_i для i-го «пропавшего», которая равна 1, если он попал в отрезок между Машенькой и Вовочкой, 0, если не попал:

X_i	1	0
$P(X_i)$	1/3	2/3

Легко считается: $\mathbb{E}(X_i) = 1/3$, $\mathbb{E}(X_i^2) = 1/3$, $\mathbb{V}ar(X_i) = 1/3 - 1/9 = 2/9$. Ясно, что $M = \sum_1^{28} X_i$. Тогда учитывая независимость X_i:

$$\mathbb{E}(M) = \frac{28}{3}$$

$$\mathbb{V}ar(M) = \frac{56}{9}$$

Задача 3

Биномиальное распределение — *À l'abordage!*.

Задача интерпретируется так: последний ход — это когда мы обратились к коробку, в котором нет спичек (т.е. к одному коробку нужно обратиться $n + 1$ раз).

(a) Если $0 < k \leqslant n$, будем считать успехом — попадание в коробок, к которому мы на последнем ходу игры (пустому коробку) обратились. До этого момента из негомбыло вытащено n спичек, а из другого $2n-k$ спичек, т.е. всего в игре было $2n-k+1$ шагов. Успехов — $n+1$ (вытащено n спичек, и на последнем ходу мы к нему обратились). По формуле Бернулли получаем следующее (X — случайная величина, показывающая сколько спичек осталось в коробке, к которому мы не обратились на последнем ходу игры):

$$P(X=k) = C_{2n-k+1}^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k+1}$$

Если $k=0$, то мы вытащили все спички из обоих коробков к последнему ходу, и нам без разницы к какому коробку мы обратимся на последнем шагу, т.е.:

$$P(X=0) = 2C_{2n+1}^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$$

(b) Среднее спичек в другом коробке:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot C_{2n-k+1}^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k+1}$$

Задача 4

Для того чтобы количество упаковок, которые необходимо купить, равнялось 50, нужно чтобы ни одну из наклеек Покупатель не встретил дважды, поэтому:

$$P(X=50) = 1 \cdot \frac{49}{50} \cdot \frac{48}{50} \cdot \dots \cdot \frac{1}{50} = \frac{49!}{50^{49}} \approx 3.4 \cdot 10^{-21}$$

Dum spiro, spero! [2]

Теперь введем понятие «шаг». Переход на новый шаг происходит в тот момент, когда покупатель получил наклейку, которой у него раньше не было. Начинаем с шага 0, когда нет ни одной наклейки, и шагать будем до 49, потому что в момент перехода на шаг 50 Покупатель получит последнюю необходимую наклейку и «прогулка» закончится. Введем случайную величину X_q равную количеству покупок в течение шага номер q. Тогда $X = \sum\limits_{q=0}^{49} X_q$. Найдем математическое ожидание X_q:

$$\mathbb{E}[X_q] = \frac{n-q}{n} \cdot 1 + \frac{q}{n} \cdot \frac{n-q}{n} \cdot 2 + \left(\frac{q}{n}\right)^2 \cdot \frac{n-q}{n} \cdot 3 + \dots$$

[2] Надежда умирает последней!

здесь $\dfrac{n-q}{n}$ — это вероятность найти наклейку, которой еще нет, а $\dfrac{q}{n}$, соответственно — вероятность повториться. Вопрос теперь в том, как посчитать сумму:

$$\mathbb{E}[X_q] = \frac{n-q}{n}\left(1 + \frac{q}{n}\cdot 2 + \left(\frac{q}{n}\right)^2 \cdot 3 + ...\right) = \frac{n-q}{n}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{q}{n}\right)^k (k+1)$$

Можем выписать в столбик несколько первых членов вышестоящей суммы:

$$\begin{array}{l}
1 \\
\left(\frac{q}{n}\right)^1 + \left(\frac{q}{n}\right)^1 \\
\left(\frac{q}{n}\right)^2 + \left(\frac{q}{n}\right)^2 + \left(\frac{q}{n}\right)^2 \\
\left(\frac{q}{n}\right)^3 + \left(\frac{q}{n}\right)^3 + \left(\frac{q}{n}\right)^3 + \left(\frac{q}{n}\right)^3 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

Достаточно! Можем скомпоновать всю сумму другим способом, а именно — по столбцам. Заметим, что сумма элементов в каждом столбце это сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с одним и тем же знаменателем $\dfrac{q}{n}$ и различными первыми членами. Соответственно:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{q}{n}\right)^k (k+1) = \frac{1}{1-\frac{q}{n}} + \frac{\frac{q}{n}}{1-\frac{q}{n}} + \frac{\left(\frac{q}{n}\right)^2}{1-\frac{q}{n}} + \frac{\left(\frac{q}{n}\right)^3}{1-\frac{q}{n}} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{q}{n}}\left(1 + \frac{q}{n} + \left(\frac{q}{n}\right)^2 + \left(\frac{q}{n}\right)^3 + \ldots\right) = \frac{n}{n-q}\cdot\frac{n}{n-q} = \left(\frac{n}{n-q}\right)^2$$

Таким образом, получаем, что:

$$\mathbb{E}[X_q] = \frac{n-q}{n}\cdot\left(\frac{n}{n-q}\right)^2 = \frac{n}{n-q}$$

и это верно для любого q!

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{q=0}^{49} X_q\right] = \sum_{q=0}^{49}\mathbb{E}[X_q] = \frac{50}{50-0} + \frac{50}{50-1} + \cdots + \frac{50}{50-49} = 50\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{49} + \cdots + 1\right) \approx$$

$$\approx 50\int_1^{50}\frac{1}{x}\mathbf{d}x = 50\ln(50) \approx 195.5$$

А теперь **простое решение от Бориса Борисовича:** Величины X_q независимы (но по разному распределены). Если долго пришлось ждать i-го шага, это ничего не говорит о j-ом шаге. Величины X_q имеют известный закон распределения — это число опытов до первого успеха при заданной вероятности успеха. Это геометрическое распределение, математическое ожидание которого равно $\dfrac{1}{p}$, а дисперсия: $\dfrac{1-p}{p^2}$, где p — вероятность успеха.

А те, кто забыл, могут **проще решить** методом первого шага: Если X — число опытов до успеха при вероятности успеха p, то

$$\mathbb{E}[X] = p \cdot 1 + (1-p) \cdot \mathbb{E}[X+1]$$

Откуда $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$ и дело в шляпе :) Аналогично:

$$\mathbb{E}[X^2] = p \cdot 1^2 + (1-p) \cdot \mathbb{E}[(X+1)^2]$$

и решая, находим $\mathbb{E}[X^2]$.

Задача 5

(a) Необходимое и достаточное условие — старушка не должна занять чужое место. С вероятностью $\frac{1}{n}$ она угадает свое место, значит, для каждого входящего его место будет свободно и он туда сядет.
Ответ: $\dfrac{1}{n}$

(b) Будем искать вероятность того, что последний человек не сядет на свое место.

Пусть $A_i = \{$Старушка села на место i-го$\}$, $B_{(i,j)} = \{i$-ый пассажир сел на место j-ого$\}$

$$P[n\text{-ый не сядет на свое место}] = P(A_n) + P[A_{n-1}]P[B_{(n-1,n)}] +$$
$$+ P[A_{n-2}](P[B_{(n-2,n)}] + P[B_{(n-2,n-1)}]P[B_{(n-1,n)}]) + \dots$$

Можем заметить, что:

- ✓ $P[A_i] = P[A_j] = \dfrac{1}{n}\ \forall\, i, j$
- ✓ $P[B_{(n-1,n)}] = \dfrac{1}{2}$, потому что $n-1$-ый выбирает из двух оставшихся мест
- ✓ $P[B_{(n-2,n)}] + P[B_{(n-2,n-1)}]P[B_{(n-1,n)}] = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$
- ✓ $P[B_{(n-3,n)}] + P[B_{(n-3,n-2)}](P[B_{(n-2,n)}] + P[B_{(n-2,n-1)}]P[B_{(n-1,n)}]) +$
$$+ P[B_{(n-3,n-1)}]P[B_{(n-1,n)}] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

✓ И так далее до того момента, пока старушка не сядет на место первого человека, который заходит после нее, — всего $n-2$ вариантов.

Таким образом мы получаем сумму:

$$P[n\text{-ый не сядет на свое место}] = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2} + \dots = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n}(n-2) = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{Значит вероятность } P[n\text{-ый сядет на свое место}] = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}}$$

А вот красивое более **простое решение от Бориса Борисовича:**
Метод математической индукции: допустим что это утверждение доказано для одного, двух и так далее до k человек. Рассмотрим $k+1$ человека. Когда последний сядет на своё место? Если старушка сядет на своё место, а вероятность этого равна $\dfrac{1}{k+1}$ или, с вероятностью $\dfrac{1}{2}$ (по индукции), если старшука сядет на любое место кроме своего и последнего, то есть $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{k-1}{k+1}$. В этом случае тот пассажир, чье место она заняла, становится старушкой, и мы получаем задачу при меньшем k. Складывая эти две дроби, получаем $\dfrac{1}{2}$.

Чтобы найти среднее число пассажиров, разобъем эту величину в сумму индикаторов: Y_1 — сел ли первый на место, …, Y_n — сел ли n-ый на место (индикатор равен единице, если сел).

Стало быть $E(Y) = E(Y_1) + E(Y_2) + ... + E(Y_n)$. $E(Y_n) = \frac{1}{2}$.

Почти аналогично можем рассуждать для предпоследнего:
База индукции: если пассажиров трое ($n = 3$ включая старушку), то для предпоследнего вероятность сесть на своё место равна $\frac{2}{3}$.
Шаг индукции: допустим что для $3, 4, ...n$ пассажиров эта вероятность равна $\frac{2}{3}$. Рассмотрим случай $(n+1)$-го пассажира. Предпоследний сядет на своё место, если:

- старушка сядет на своё место или на место последнего $\frac{2}{n+1}$
- в $\frac{2}{3}$ тех случаев, когда старушка сядет на место $2, 3, ..., (n-1)$, т.е. $\frac{2}{3}\cdot\frac{n-2}{n+1}$ складываем, получаем $\frac{2}{3}$. То есть по индукции вероятность того, что предпоследний сядет на своё место равна $\frac{2}{3}$

И по аналогии можно увидеть, что вероятность того, что k-ый с конца пассажир сядет на своё место равна $k/(k+1)$

Если у нас n пассажиров включая СС, то среднее количество севших на свои места (раскладывая с конца) равно

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n}$$

Разбалловка

Часть 1

Задание 1

- 2 балла
- 4 балла
- 4 балла

Задание 2

- мат. ожидание —- 3 балла, дисперсия —- 3 балла
- распределение —- 3 балла, знак неравенства —- 1 балл

Задание 3

- 2 балла
- все по 1 баллу
- каждая вероятность —- 1.5 балла
- 2 балла **Задание 4**
  - все по 1 баллу
  - первая ковариация —- 3 балла, вторая —- 2 балла
  - 2 балла

Задание 5

- 10 или 0

Задание 6

(a) явный вид 2, приближение Пуассона 2

(b) наиболее вероятное число 2, математическое ожидание 1, дисперсия 1

(c) 2

Задание 7

(a) математические ожидание 2.5, дисперсии 2.5

(b) для бесполезных и неинтересных 2.5, с хотя бы одним из свойств 2.5

Задание 8

- константы a и b 5
- математическое ожидание 2
- третий начальный момент, медиана и мода —- по 1

Часть 2

Задание 1

- каждая вероятность —- 1 балл
- каждое мат. ожидание —- 2 балла
- 1 балл

Задание 2

- каждая вероятность —- 1.5 балла
- первое мат. ожидание —- 1.5 балла, последние два мат. ожидания —- по 2 балла

Задание 3

- 6 баллов
- 4 балла

Задание 4

- $\mathbb{P}(X = 50)$ —- 2
- $\mathbb{E}[X]$ —- 4
- $\mathbf{Var}(X)$ —- 4

Задание 5

(a) 2

(b) 4

(c) 4