

## Контрольная работа № 4 по ТВ и МС [2016–2017]

Ф. И. О.:

Группа:

### I. Теоретический минимум

В пунктах 2, 4, 5 и 8 предполагается, что  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  — две независимые случайные выборки из нормальных распределений  $N(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  соответственно.

1. Дайте определение функции правдоподобия для случайной выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из распределения с плотностью распределения  $f(x; \theta)$ .
2. Приведите формулы границ доверительного интервала с уровнем доверия  $(1 - \alpha)$ ,  $\alpha \in (0; 1)$ , для  $\sigma_X^2$  при условии, что математическое ожидание  $\mu_X$  неизвестно.
3. Дайте определение ошибки второго рода.
4. Приведите формулы границ доверительного интервала с уровнем доверия  $(1 - \alpha)$ ,  $\alpha \in (0; 1)$ , для разности  $\mu_X - \mu_Y$ , при условии, что дисперсии  $\sigma_X^2$  и  $\sigma_Y^2$  неизвестны, но равны между собой.
5. Приведите формулы границ доверительного интервала с уровнем доверия  $(1 - \alpha)$ ,  $\alpha \in (0; 1)$ , для разности  $\mu_X$ , при условии, что дисперсия  $\sigma_X^2$  неизвестна.
6. Приведите формулу выборочной функции распределения.
7. Дайте определение оценки  $\hat{\theta}$  неизвестного параметра  $\theta \in \Theta$  методом максимального правдоподобия.
8. Приведите формулу статистики, при помощи которой можно протестировать гипотезу  $H_0: \mu_X = \mu_0$ , где  $\mu_0$  — известное число, при условии, что дисперсия  $\sigma_X^2$  известна. Укажите распределение данной статистики.
9. Дайте определение состоятельной оценки  $\hat{\theta}_n$  для неизвестного параметра  $\theta \in \Theta$ .
10. Дайте определение несмещенной оценки  $\hat{\theta}$  для неизвестного параметра  $\theta \in \Theta$ .
11. Дайте определение распределения Фишера. Схематически изобразите график плотности распределения Фишера.
12. Приведите формулу выборочного начального момента порядка  $k$ .

### II. Задачи

**Задача 1.** Вася очень любит играть в преферанс. Предположим, что Васин выигрыш имеет нормальное распределение. За последние пять партий Васин средний выигрыш составил 1560 рублей, а выборочное стандартное отклонение составило 670 рублей.

- (a) На уровне значимости 10 % проверьте гипотезу о том, что математическое ожидание Васиного выигрыша равно 2000 рублей.

- (b) На уровне значимости 5 % проверьте гипотезу о том, что стандартное отклонение Васиного выигрыша равно 600 рублей.

**Задача 2.** При расчете страхового тарифа страховая компания предполагает, что вероятность наступления страхового случая составляет 0.005. По итогам прошедшего года из 10 000 случайно выбранных договоров страховых случаев наблюдалось 67.

- (a) На уровне значимости 5 % проверьте гипотезу о том, что вероятность наступления страхового случая составляет 0.005 против альтернативной гипотезы о том, что вероятность наступления страхового случая превосходит 0.005.
- (b) Найдите точное  $P$ -значение для наблюдаемой статистики из пункта (a).
- (c) Сформулируйте предпосылки, которые были использованы вами для выполнения пункта (a).

**Задача 3.** На курсе два потока. На первом потоку учатся 40 студентов, а на втором — 50 студентов. Средний балл за контрольную работу на первом потоке равен 78 баллам, а выборочное стандартное отклонение составляет 7 баллов. На втором потоке средний балл равен 74 баллам, а выборочное стандартное отклонение составляет 8 баллов.

- (a) На уровне значимости 10 % проверьте гипотезу о равенстве математических ожиданий результативности студентов на первом и втором потоках.
- (b) Сформулируйте предпосылки, которые были использованы вами для выполнения пункта (a).
- (c) На уровне значимости 5 % проверьте гипотезу о равенстве дисперсий результативности студентов на первом и втором потоках.

**Задача 4.** Имеются следующие данные опроса населения:

	Апельсиновый	Томатный	Вишневый
Мужчины	70	40	25
Женщины	75	60	35

На уровне значимости 5 % проверьте гипотезу о независимости пола респондента и вида предпочитаемого им сока.

**Задача 5.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_{100})$  — случайная выборка из нормального распределения с математическим ожиданием  $\mu$  и дисперсией  $\nu$ . Оба параметра  $\mu$  и  $\nu$  неизвестны. Используя следующие данные  $\sum_{i=1}^{100} x_i = 30$ ,  $\sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 146$  и  $\sum_{i=1}^{100} x_i^3 = 122$  с помощью теста отношения правдоподобия проверьте гипотезу  $H_0: \nu = 1$  на уровне значимости 5 %.