Оглавление

```r
require(knitr)
require(ggplot2)
require(Hmisc)
require(lmtest)
require(apsrtable)
require(xtable)
require(MASS)
require(car)
require(texreg)

require(econru)
opts_chunk$set(cache=FALSE,
               dev="png",dpi=300,
               warning=FALSE,
               tidy=FALSE,
               echo=TRUE,
               out.height="7cm",out.width="7cm")
theme_set(theme_bw())
# load('pset_data.Rdata')
```

Предисловие

Книг по теории вероятностей и математической статистике тьма тьмущая. Зачем ещё одна? Во-первых, мы считаем, что современный рассказ про теорию вероятностей и статистику не мыслим без рассказа об открытой статистической среде R. Во-вторых, очень сложно подобрать книгу, которая бы подходила и по охвату тем и сложности материала для курса нашей мечты.

Мы искренне благодарны студентам оказавшим неоценимую помощь при подготовке данного задачника: ...

На веб-страничке http://bdemeshev.github.io/nsem/ можно найти дополнительные материалы, свежую версию задачника и скрипты R.

Язык программирования R, необходимый для решения некоторых задач, можно скачать по адресу http://www.r-project.org/. Для большего удобства мы советуем воспользоваться графической оболочкой R-studio, её можно найти по адресу http://www.rstudio.com/ide/

Удачи в освоении теории вероятностей и математической статистики!!!

Дмитрий Борзых, Борис Демешев

Кафедра математической экономики и эконометрики НИУ ВШЭ. Борзых Д. А.

Листок 1

Общие сведения о дискретных случайных величинах

Задача 1. Пусть $\Omega = \{a, b, c, d\}$, $\mathbb{P}(\{a\}) = \ldots = \mathbb{P}(\{d\}) = 1/4$ и случайная величина $X : \Omega \to \mathbb{R}$ задана при помощи следующей таблицы.

Ω	a	b	c	d
X	-1	0	0	1

1. Найдите $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geqslant 0\}$.

2. Найдите $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geqslant 0\})$.

3. Найдите $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : |X(\omega)| = 1\})$.

4. Постройте графики функций распределения случайных величин X, $X + 1$ и X^2.

5. Найдите $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[X^2]$ и $\mathbb{E}[X^4]$.

6. Найдите $D(X)$, $D(X + 1)$ и $D(X^2)$.

7. Постройте таблицы распределения случайных величин X, $X + 1$ и X^2.

Задача 2. Пусть $\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$, $\mathbb{P}(\{a\}) = \ldots = \mathbb{P}(\{f\}) = 1/6$ и случайная величина $X : \Omega \to \mathbb{R}$ задана при помощи следующей таблицы.

Ω	a	b	c	d	e	f
X	1	2	3	4	5	6

1. Найдите $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geqslant 3\}$.

2. Найдите $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geqslant 3\})$.

3. Найдите $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < 6\})$.

4. Постройте графики функций распределения случайных величин X, $\cos(\pi X/3)$ и $\sin(\pi X/3)$.

5. Найдите $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}\cos(\pi X/3)$ и $\mathbb{E}\sin(\pi X/3)$.

6. Найдите $D(X)$, $D\cos(\pi X/3)$ и $D\sin(\pi X/3)$,

7. Постройте таблицы распределения случайных величин X, $\cos(\pi X/3)$ и $\sin(\pi X/3)$.

Таблица 1: таблица тригонометрических функций

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

Задача 3. Пусть $\Omega = \{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$, $\mathbb{P}(\{\heartsuit\}) = \ldots = \mathbb{P}(\{\clubsuit\}) = 1/4$.

Случайные величины $X : \Omega \to \mathbb{R}$ и $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ заданы при помощи следующей таблицы.

Ω	?	?	?	?
X	-1	1	-1	1
Y	1	-1	1	-1

Найдите

1. Постройте таблицы распределения случайных величин X и Y.

2. Постройте таблицу совместного распределения для X и Y.

3. $\mathbb{E}[X]$ и $\mathbb{E}[Y]$,

4. $\mathbb{E}[XY]$,

5. $cov(X, Y)$,

6. $\mathbb{E}[X^2]$ и $\mathbb{E}[Y^2]$,

7. $D(X)$ и $D(Y)$,

8. $D(XY)$,

9. $corr(X, Y)$.

10. Являются ли случайные величины X и Y некоррелированными?

11. $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) = 1\})$, $\mathbb{P}(\{\omega : Y(\omega) = 1\})$ и $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) = 1\} \bigcap \{\omega : Y(\omega) = 1\})$.

12. Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

13. Постройте графики функций распределения случайных величин X и Y.

14. Найдите $F_{X,Y}(-1, -1)$, $F_{X,Y}(1, -1)$, $F_{X,Y}(-1, 1)$, $F_{X,Y}(1, 1)$.

15. Проверьте равенство $\mathbb{P}(\{X \in (-1; 1]\} \bigcap \{Y \in (-1; 1]\}) = F_{X,Y}(1, 1) - F_{X,Y}(1, -1) - F_{X,Y}(-1, 1) + F_{X,Y}(-1, -1)$.

Задача 4. Пусть $\Omega = \{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$, $\mathbb{P}(\{\heartsuit\}) = \mathbb{P}(\{\diamondsuit\}) = \mathbb{P}(\{\spadesuit\}) = \mathbb{P}(\{\clubsuit\}) = \frac{1}{4}$.

Случайные величины X и Y заданы при помощи следующей таблицы.

Ω	?	?	?	?
X	1	0	1	0
Y	1	1	0	0

Найдите

1. Постройте таблицы распределения случайных величин X и Y.

2. Постройте таблицу совместного распределения для X и Y.

3. $\mathbb{E}[X]$ и $\mathbb{E}[Y]$,

4. $\mathbb{E}[XY]$,

5. $cov(X, Y)$,

6. $\mathbb{E}[X^2]$ и $\mathbb{E}[Y^2]$,

7. $D(X)$ и $D(Y)$,

8. $D(XY)$,

9. $corr(X, Y)$,

10. Являются ли случайные величины X и Y некоррелированными?

11. $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) = 1\})$, $\mathbb{P}(\{\omega : Y(\omega) = 1\})$ и $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) = 1\} \bigcap \{\omega : Y(\omega) = 1\})$.

12. Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

13. Постройте графики функций распределения случайных величин X и Y.

14. Найдите $F_{X,Y}(0, 0)$, $F_{X,Y}(1, 0)$, $F_{X,Y}(0, 1)$, $F_{X,Y}(1, 1)$.

15. Проверьте равенство $\mathbb{P}(\{X \in (0; 1]\} \bigcap \{Y \in (0; 1]\}) = F_{X,Y}(1, 1) - F_{X,Y}(1, 0) - F_{X,Y}(0, 1) + F_{X,Y}(0, 0)$.

Задача 5. Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин X и Y.

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0.2	0.1	0.2
1	0.1	0.3	0.1

Найдите

1. $\mathbb{E}[X]$ и $\mathbb{E}[Y]$,

2. $\mathbb{E}[XY]$,

3. $cov(X, Y)$,

4. $\mathbb{E}[X^2]$ и $\mathbb{E}[Y^2]$,

5. $D(X)$ и $D(Y)$,

6. $corr(X,Y)$.

7. Постройте графики функций распределения случайных величин X и Y.

8. Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

9. Найдите $F_{X,Y}(-1,0)$, $F_{X,Y}(-1,1)$, $F_{X,Y}(0,0)$, $F_{X,Y}(0,1)$.

10. Проверьте равенство $\mathbb{P}(\{X \in (-1;0]\} \bigcap \{Y \in (0;1]\}) = F_{X,Y}(0,1) - F_{X,Y}(0,0) - F_{X,Y}(-1,1) + F_{X,Y}(-1,0)$.

Задача 6. Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин X и Y.

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0.2	0.3	0.1
1	0.1	0.0	0.3

Найдите

1. $\mathbb{E}[X]$ и $\mathbb{E}[Y]$,

2. $\mathbb{E}[XY]$ и $\mathbb{E}[Y/X]$

3. $cov(X,Y)$,

4. $\mathbb{E}[X^2]$ и $\mathbb{E}[Y^2]$,

5. $D(X)$ и $D(Y)$,

6. $corr(X,Y)$.

7. Постройте графики функций распределения случайных величин X и Y.

8. Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

9. Найдите $F_{X,Y}(-1,0)$, $F_{X,Y}(-1,1)$, $F_{X,Y}(0,0)$, $F_{X,Y}(0,1)$.

10. Проверьте равенство $\mathbb{P}(\{X \in (-1;0]\} \bigcap \{Y \in (0;1]\}) = F_{X,Y}(0,1) - F_{X,Y}(0,0) - F_{X,Y}(-1,1) + F_{X,Y}(-1,0)$.

Задача 7. Пусть $\Omega = \{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$, $\mathbb{P}(\{\heartsuit\}) = \ldots = \mathbb{P}(\{\clubsuit\}) = 1/4$.

Случайные величины $X : \Omega \to \mathbb{R}$ и $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ заданы при помощи следующей таблицы.

Ω	?	?	?	?
X	-1	1	-1	1
Y	1	-1	1	-1

Постройте таблицу

1. распределения случайной величины X,

2. распределения случайной величины Y,

3. совместного распределения случайных величин X и Y.

Задача 8. Пусть $\Omega = \{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$, $\mathbb{P}(\{\heartsuit\}) = \ldots = \mathbb{P}(\{\clubsuit\}) = 1/4$.

Случайные величины $X : \Omega \to \mathbb{R}$ и $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ заданы при помощи следующей таблицы.

Ω	?	?	?	?
X	1	0	1	0
Y	1	1	0	0

Постройте таблицу

1. распределения случайной величины X,

2. распределения случайной величины Y,

3. совместного распределения случайных величин X и Y.

Задача 9. Пусть $\mathbb{E}X = 1$, $\mathbb{E}Y = 2$, $\mathrm{D}X = 3$, $\mathrm{D}Y = 4$, $cov(X,Y) = -1$. Найдите

1. $\mathbb{E}(2X - Y)$ и $\mathbb{E}(2X + Y - 4)$,
2. $\mathrm{D}(2X)$ и $\mathrm{D}(3Y + 3)$,
3. $\mathrm{D}(X + Y)$ и $\mathrm{D}(X - Y)$,
4. $\mathrm{D}(2X + 3Y)$ и $\mathrm{D}(2X - 3Y + 1)$,
5. $cov(X + Y, X - Y)$ и $cov(X + 2Y + 1, 3X - Y - 1)$,
6. $corr(X,Y)$ и $corr(X + Y, X - Y)$,
7. Ковариационную матрицу случайного вектора $Z = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}$.

Задача 10. Пусть $\mathbb{E}X = -1$, $\mathbb{E}Y = 2$, $\mathrm{D}X = 1$, $\mathrm{D}Y = 2$, $cov(X,Y) = 1$. Найдите

1. $\mathbb{E}(2X + Y)$ и $\mathbb{E}(2X + Y - 4)$,
2. $\mathrm{D}(2X)$ и $\mathrm{D}(2Y + 1)$,
3. $\mathrm{D}(X + Y)$ и $\mathrm{D}(X - Y)$,
4. $\mathrm{D}(2X + 3Y)$ и $\mathrm{D}(2X - 3Y + 1)$,
5. $cov(X + Y, X - Y)$ и $cov(3X + Y + 1, X - 2Y - 1)$,
6. $corr(X,Y)$ и $corr(X + Y, X - Y)$,
7. Ковариационную матрицу случайного вектора $Z = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}$.

8. **Задача 11.** Пусть X_1, X_2, X_3 — случайные величины такие, что $DX_1 = 4$, $DX_2 = 3$, $DX_3 = 2$, $cov(X_1, X_2) = 1$, $cov(X_1, X_3) = 0$, $cov(X_2, X_3) = -1$. Найдите $D(X_1 + X_2 + X_3)$,
9. $D(X_1 - X_3 - 1)$,
10. $D(X_1 + X_2 - X_3)$,
11. $D(4X_1 + 3X_2 + 2X_3)$,
12. $D(X_1 + 3X_3 - 10)$,
13. $D(X_1 - X_3 - 2X_2)$,
14. $cov(X_1 + X_2, X_2 + X_3)$,
15. $cov(X_1 + X_2, X_2 - X_3)$,
16. $cov(X_1 + X_2, X_2 - X_1)$,
17. $cov(X_1 + X_2, X_2 - X_3 + 1)$.

Ответ:

1. 9,
2. 6,
3. 13,
4. 111,
5. 22,
6. 10,
7. 3,

8. 5,

9. -1,

10. 5.

11. **Задача 12.** Пусть $X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{pmatrix}$ — случайный вектор и $V(X) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ — его ковариационная матрица. Найдите $D(X_1 + X_2 + X_3)$,

12. $D(X_1 - X_3 - 1)$,

13. $D(X_1 + X_2 - X_3)$,

14. $D(4X_1 + 3X_2 + 2X_3)$,

15. $D(X_1 + 3X_3 - 10)$,

16. $D(X_1 - X_3 - 2X_2)$,

17. $cov(X_1 + X_2, X_2 + X_3)$,

18. $cov(X_1 + X_2, X_2 - X_3)$,

19. $cov(X_1 + X_2, X_2 - X_1)$,

20. $cov(X_1 + X_2, X_2 - X_3 + 1)$.**Ответ:** 5,

21. 6,

22. 9,

23. 63,

24. 22,

25. 18,

26. 1,

27. 3,

28. -1,

29. 3.

1. **Задача 13.** Пусть $X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{pmatrix}$ — случайный вектор и $V(X) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ — его ковариационная матрица. Найдите $D(X_1 + X_2 + X_3)$,

2. $D(X_1 - X_3 - 1)$,

3. $D(X_1 + X_2 - X_3)$,

4. $D(4X_1 + 3X_2 + 2X_3)$,

5. $D(X_1 + 3X_3 - 10)$,

6. $D(X_1 - X_3 - 2X_2)$,

7. $cov(X_1 + X_2, X_2 + X_3)$,

8. $cov(X_1 + X_2, X_2 - X_3)$,

9. $cov(X_1 + X_2, X_2 - X_1)$,

$cov(X_1 + X_2, X_2 - X_3 + 1)$.**Ответ:**
6

Кафедра математической экономики и эконометрики НИУ ВШЭ. Борзых Д. А.

1. 5,

2. 3,

3. 1,
4. 42,
5. 11,
6. 19,
7. 2,
8. 0,
9. 0,
10. 0.

Задача 14. Пусть $\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $\mathbb{P}(\{1\}) = \ldots = \mathbb{P}(\{4\}) = 1/4$,
$X(\omega) = \cos(\pi\omega/2)$ и $Y(\omega) = \sin(\pi\omega/2)$. Найдите

1. (a) $\mathbb{P}(\{X > 0\})$, $\mathbb{P}(\{X \geqslant 0\})$, $\mathbb{P}(\{|X| = 1\})$ и $\mathbb{P}(\{X \geqslant Y\})$,
   (b) $\mathbb{E}X$ и $\mathbb{E}Y$,
   (c) $\mathbb{E}[X^2]$ и $\mathbb{E}[Y^2]$,
   (d) DX и DY,
   (e) $F_X(x)$ и $F_Y(x)$.
   (f) Найдите $cov(X,Y)$. Являются ли случайные величины X и Y некоррелированными?
   (g) Найдите $\mathbb{P}(\{X = 1\})$, $\mathbb{P}(\{Y = 1\})$ и $\mathbb{P}(\{X = 1\}\bigcap\{Y = 1\})$. Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

Задача 15. Пусть $\Omega = \{1,\ 2, \ldots,\ 8\}$, $\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = \ldots = \mathbb{P}(\{8\}) = 1/8$,
$X(\omega) = \cos(\pi\omega/4)$ и $Y(\omega) = \sin(\pi\omega/4)$. Найдите

1. $\mathbb{P}(\{X > 0\})$, $\mathbb{P}(\{X \geqslant 0\})$, $\mathbb{P}(\{|X| = 1\})$ и $\mathbb{P}(\{X \geqslant Y\})$,
2. $\mathbb{E}X$ и $\mathbb{E}Y$,
3. $\mathbb{E}[X^2]$ и $\mathbb{E}[Y^2]$,
4. DX и DY,
5. $F_X(x)$ и $F_Y(x)$.
6. Найдите $cov(X, Y)$. Являются ли случайные величины X и Y некоррелированными?
7. Найдите $\mathbb{P}(\{X = 1\})$, $\mathbb{P}(\{Y = 1\})$ и $\mathbb{P}(\{X = 1\} \bigcap \{Y = 1\})$. Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

Задача 16. Пусть $\mathbb{P}(\{Z = 1\}) = \mathbb{P}(\{Z = 2\}) = \ldots = \mathbb{P}(\{Z = 6\}) = 1/6$, $X = \cos(\pi Z/3)$ и $Y = \sin(\pi Z/3)$. Найдите

1. $\mathbb{P}(\{X > 0\})$, $\mathbb{P}(\{X \geqslant 0\})$, $\mathbb{P}(\{|X| = 1\})$ и $\mathbb{P}(\{X \geqslant Y\})$,
2. $\mathbb{E}X$ и $\mathbb{E}Y$,
3. $\mathbb{E}[X^2]$ и $\mathbb{E}[Y^2]$,
4. DX и DY,
5. $F_X(x)$ и $F_Y(x)$.
6. Найдите $cov(X, Y)$. Являются ли случайные величины X и Y некоррелированными?
7. Найдите $\mathbb{P}(\{X = 1\})$, $\mathbb{P}(\{Y = 1\})$ и $\mathbb{P}(\{X = 1\} \bigcap \{Y = 1\})$. Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

Задача 17. Пусть $\mathbb{P}(\{Z = 1\}) = \mathbb{P}(\{Z = 2\}) = \ldots = \mathbb{P}(\{Z = 8\}) = 1/8$, $X = \cos(\pi Z/4)$ и $Y = \sin(\pi Z/4)$. Найдите

1. $\mathbb{P}(\{X > 0\})$, $\mathbb{P}(\{X \geqslant 0\})$, $\mathbb{P}(\{|X| = 1\})$ и $\mathbb{P}(\{X \geqslant Y\})$,
2. $\mathbb{E}X$ и $\mathbb{E}Y$,
3. $\mathbb{E}[X^2]$ и $\mathbb{E}[Y^2]$,
4. DX и DY,
5. $F_X(x)$ и $F_Y(x)$.
6. Найдите $cov(X, Y)$. Являются ли случайные величины X и Y некоррелированными?
7. Найдите $\mathbb{P}(\{X = 1\})$, $\mathbb{P}(\{Y = 1\})$ и $\mathbb{P}(\{X = 1\} \bigcap \{Y = 1\})$. Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

Задача 18. Найдите значение $x \in \mathbb{R}$, при котором функция $Q(x) = \mathbb{E}\left[(X - x)^2\right]$ принимает наименьшее значение. Чему равно значение функции Q в точке минимума?

Задача 19*. Пусть заданы случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ такие, что $\mathbb{E}X_i = \mu$, $DX_i = \sigma^2$, $cov(X_i, X_j) = 0$ при $i \neq j$. Найдите $\mathbb{E}\bar{X}$ и $D\bar{X}$, если $\bar{X} := \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$.

Задача 20*. Пусть заданы числа $a_1, \ldots, a_n$ и σ^2, и случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ таковы, что $\mathbb{E}X_i = 0$, $DX_i = \sigma^2$, $cov(X_i, X_j) = 0$ при $i \neq j$. Пусть $Y_i = a_i + X_i$, $i = 1, \ldots, n$. Найдите $\mathbb{E}Z$ и DZ, если

1. $Z = Y_1$,
2. $Z = \frac{1}{2a_1}Y_1 + \frac{1}{2a_2}Y_2$,
3. $Z = \frac{Y_1 + \ldots + Y_n}{a_1 + \ldots + a_n}$,
4. $Z = \frac{a_1 Y_1 + \ldots + a_n Y_n}{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$,
5. $Z = \frac{\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2}$.

Задача 21. Найдите функцию распределения случайной величины $X : \Omega \to \mathbb{R}$, если её таблица распределения имеет вид

(a)	X	-1	0	1
	$\mathbb{P}_X$	1/4	1/2	1/4

(b)	X	0	1	2
	$\mathbb{P}_X$	1/4	1/2	1/4

Задача 22. Пусть $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathbb{P}(\{1\}) = \ldots = \mathbb{P}(\{6\}) = 1/6$ и случайная величина $X : \Omega \to \mathbb{R}$ задана при помощи таблицы

Ω	1	2	3	4	5	6
X	1	2	3	4	5	6

Найдите $corr(\mathbb{I}_{\{X=1\}}, \mathbb{I}_{\{X=6\}})$.

Листок 2 по ТВ и МС 2013–2014 [08.03.2014]

1

Кафедра математической экономики и эконометрики НИУ ВШЭ. Борзых Д. А.

Листок 2

Распределение Бернулли. Биномиальное распределение

Определение 1. Случайная величина $X : \Omega \to \mathbb{R}$ имеет *распределение Бернулли* с параметром $p \in (0; 1)$, пишут $X \sim Be(p)$, если X принимает значения 0 и 1 с вероятностями $\mathbb{P}(\{X = 0\}) = 1 - p$ и $\mathbb{P}(\{X = 1\}) = p$.

Определение 2. Случайная величина $X : \Omega \to \mathbb{R}$ имеет *биномиальное распределение* с параметрами $n \in \mathbb{N}$ и $p \in (0; 1)$, пишут $X \sim Bi(n, p)$, если X принимает значения $k = 0, 1, \ldots, n$ с вероятностями $\mathbb{P}(\{X = k\}) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$.

Задача 1. Пусть случайная величина X имеет распределение Бернулли с параметром p. Найдите

1. $\mathbb{E}X$,

2. $\mathbb{E}[X^2]$,

3. DX.

4. Постройте таблицу и функцию распределения случайной величины X.

Задача 2. Докажите, что для любых $n \in \mathbb{N}$ и $p \in (0;1)$ имеет место

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = 1.$$

Задача 3. Пусть случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами n и p. Найдите

1. $\mathbb{E}X$,

2. $\mathbb{E}[X \cdot (X-1)]$,

3. $\mathbb{E}[X^2]$,

4. DX,

5. $\mathbb{E}[X \cdot (X-1) \cdot (X-2)]$,

6. $\mathbb{E}[X^3]$,

7. $\mathbb{E}[X \cdot (X-1) \cdot (X-2) \cdot (X-3)]$,

8. $\mathbb{E}[X^4]$.

9. Постройте таблицу распределения случайной величины X.

Решение. (a) $\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \mathbb{P}(\{X = k\}) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \mathbb{P}(\{X = k\}) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k} =$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-}{(k-1)!(}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} = [k-1 = l|_0^{n-1}] = np \sum$$

$$= np \sum_{l=0}^{n-1} C_{n-1}^l p^l (1-p)^{(n-1)-l} = np(p + (1-p))^{n-1} = np.$$

(b) $\mathbb{E}[X \cdot (X-1)] = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \cdot \mathbb{P}(\{X = k\}) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \cdot \mathbb{P}(\{X = k\}) =$

$$= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} p^{k-2} (1-p)^{n-k} = n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k}$$

$$= [k-2 = l|_0^{n-2}] = n(n-1)p^2 \sum_{l=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{l!((n-2)-l)!} p^l (1-p)^{(n-2)-l} = n(n-1)p^2 \sum$$

$$= n(n-1)p^2 (p + (1-p))^{n-2} = n(n-1)p^2 = n^2p^2 - np^2.$$

(c) $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X \cdot (X-1)] + \mathbb{E}X = n^2p^2 - np^2 + np.$

(d) $DX = \mathbb{E}[X^2] - [\mathbb{E}X]^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$.

Задача 4. Случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 5$ и $p = 1/2$. Найдите

1. $\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) > 0\}\right)$,
2. $\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \{1, 2\}\}\right)$;
3. $\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 4\}\right)$.

Задача 5. Укажите, какие из следующих случайных величин имеют распределение Бернулли, а какие — биномиальное распределение. Во всех случаях найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

(a)	k -1 1 $\mathbb{P}_X$ 1/2 1/2		(b)	k 0 1 $\mathbb{P}_X$ 1/2 1/2
(c)	k 0 1 2 $\mathbb{P}_X$ 1/3 1/3 1/3		(d)	k 0 1 2 $\mathbb{P}_X$ 1/4 1/2 1/4
(e)	k 0 1 2 3 $\mathbb{P}_X$ 1/8 3/8 3/8 1/8		(f)	k 0 1 2 3 $\mathbb{P}_X$ 8/27 4/9 2/9 1/27

Задача 6. Найдите наиболее вероятное значение случайной величины X, которая имеет биномиальное распределение, если известно, что $\mathbb{E}X = 1$, а $DX = 3/4$.

Задача 7. Может ли случайная величина X иметь биномиальное распределение, если

1. $\mathbb{E}X = 6$, $DX = 3$;
2. $\mathbb{E}X = 7$, $DX = 4$.

Задача 8. Пусть $\Omega = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, $\mathbb{P}(\{a\}) = \mathbb{P}(\{b\}) = \mathbb{P}(\{c\}) = \mathbb{P}(\{d\}) = 1/4$ и случайные величины X_1, X_2 и Y заданы с помощью таблицы:

Ω	a	b	c	d
X_1	1	1	0	0
X_2	1	0	1	0
Y	2	1	1	0

1. Покажите, что случайные величины X_1 и X_2 независимы и имеют распределение Бернулли.

2. Убедитесь в том, что случайная величина $Y = X_1 + X_2$ имеет биномиальное распределение с некоторыми параметрами n и p. Определите значения этих параметров.

Задача 9. Пусть $\Omega = \{a, b, ..., h\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $\mathbb{P}(\{a\}) = ... = \mathbb{P}(\{h\}) = 1/8$ и случайные величины X_1, X_2, X_3 и Y заданы с помощью таблицы:

Ω	a	b	c	d	e	f	g	h
X_1	1	1	1	1	0	0	0	0
X_2	1	1	0	0	1	1	0	0
X_3	1	0	1	0	1	0	1	0
Y	3	2	2	1	2	1	1	0

1. Покажите, что случайные величины X_1, X_2 и X_3 независимы и имеют распределение Бернулли.

2. Убедитесь в том, что случайная величина $Y = X_1 + X_2 + X_3$ имеет биномиальное распределение с некоторыми параметрами n и p. Определите значения этих параметров.

Задача 10. Какова вероятность того, что при бросании десяти монет выпадет семь орлов и три решки?

Задача 11. Бросают пять игральных костей. Чему равна вероятность того, что из пяти выпавших цифр одна – чётная, а остальные нечётные?

Задача 12. В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Вычислите вероятность того, что на 6-м этаже:

1. не выйдет ни один из них;
2. выйдет один из них;
3. выйдут трое из них.

Задача 13. Что вероятнее: выиграть у равносильного партнёра три партии из четырёх или пять партий из восьми? (Ничьи исключаются.)

Задача 14. Бросают 10 монет. Какое число выпавших орлов более вероятно: 5 или 4?

Задача 15. Бросают 19 монет. Какое число выпавших орлов более вероятно: 10 или 9?

Задача 16. Определите вероятность P_n того, что при n подбрасываниях монеты орлов выпадет больше, чем решек. Приведите числовые значения этой вероятности при $n = 5$ и $n = 6$.

Задача 17. Каждый билет лотереи независимо от остальных выигрывает с вероятностью 0.001. У меня 20 билетов. Чему равна вероятность того, что я выиграю:

1. хотя бы по одному билету;
2. не менее чем по двум билетам?

Задача 18. Пусть $\Omega = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$. Случайные величины X_1, X_2 и Y заданы с помощью таблицы:

Ω	a	b	c	d
$\mathbb{P}$	?	?	?	?
X_1	1	1	0	0
X_2	1	0	1	0
Y	2	1	1	0

1. Подберите вероятности $\mathbb{P}(\{a\}), \mathbb{P}(\{b\}), \mathbb{P}(\{c\})$ и $\mathbb{P}(\{d\})$ так, чтобы случайные величины X_1 и X_2 были независимы и имели распределение Бернулли с параметром $p \in (0;1)$.

2. Убедитесь, что в этом случае случайная величина $Y = X_1 + X_2$ имеет биномиальное распределение с некоторыми параметрами n и p. Определите значения этих параметров.

Задача 19. Пусть $\Omega = \{a, b, ..., h\}$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$. Случайные величины X_1, X_2, X_3 и Y заданы с помощью таблицы:

Ω	a	b	c	d	e	f	g	h
$\mathbb{P}$	?	?	?	?	?	?	?	?
X_1	1	1	1	1	0	0	0	0
X_2	1	1	0	0	1	1	0	0
X_3	1	0	1	0	1	0	1	0
Y	3	2	2	1	2	1	1	0

1. Подберите вероятности $\mathbb{P}(\{a\}),\ldots,\mathbb{P}(\{h\})$ так, чтобы случайные величины X_1, X_2 и X_3 были независимы и имели распределение Бернулли с параметром $p \in (0;1)$.

2. Убедитесь, что в этом случае случайная величина $Y = X_1 + X_2 + X_3$ имеет биномиальное распределение с некоторыми параметрами n и p. Определите значения этих параметров.

Задача 20. Пусть $\Omega = \{\omega = (x_1, x_2) : x_i \in \{0;1\},\ i = 1,2\}$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$,

$$\mathbb{P}(\{(0,0)\}) = q^2, \mathbb{P}(\{(0,1)\}) = \mathbb{P}(\{(1,0)\}) = pq, \mathbb{P}(\{(1,1)\}) = p^2.$$

1. Покажите, что случайные величины $X_1(\omega) = x_1$ и $X_2(\omega) = x_2$ независимы и имеют распределение Бернулли с параметром $p \in (0;1)$.

2. Убедитесь в том, что случайная величина $Y = X_1 + X_2$ имеет биномиальное распределение с некоторыми параметрами n и p. Определите значения этих параметров.

Задача 21. Пусть $\Omega = \{\omega = (x_1, x_2, x_3) : x_i \in \{0;1\},\ i = \overline{1,3}\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$,

$$\mathbb{P}\left(\{(0,0,0)\}\right) = q^3, \mathbb{P}\left(\{(0,0,1)\}\right) = \mathbb{P}\left(\{(0,1,0)\}\right) = \mathbb{P}\left(\{(1,0,0)\}\right) = pq^2,$$

$$\mathbb{P}\left(\{(0,1,1)\}\right) = \mathbb{P}\left(\{(1,0,1)\}\right) = \mathbb{P}\left(\{(1,1,0)\}\right) = p^2q, \mathbb{P}\left(\{(1,1,1)\}\right) = p^3.$$

1. Покажите, что случайные величины $X_1(\omega) = x_1$, $X_2(\omega) = x_2$ и $X_3(\omega) = x_3$ независимы и имеют распределение Бернулли с параметром $p \in (0;1)$.

2. Убедитесь в том, что случайная величина $Y = X_1 + X_2 + X_3$ имеет биномиальное распределение с некоторыми параметрами n и p. Определите значения этих параметров.

Задача 22. Решив задачи 18 – 21, постройте пример вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, на котором заданы независимые случайные величины X_1, X_2, X_3 и X_4, имеющие распределение Бернулли с параметром $p \in (0;1)$. На этом же вероятностном пространстве определите биномиальную случайную величину с параметрами 4 и p.

Задача 23. Найти коэффициент корреляции между числом выпадений единицы и числом выпадений шестёрки при одном подбрасывании игральной кости; при двух подбрасываниях игральной кости.

Задача 24. Пусть случайные величины X_1 и X_2 независимы и имеют распределение Бернулли с параметром $p \in (0;1)$. Докажите, что случайная величина $Y = X_1 + X_2$ имеет биномиальное распределение с параметрами 2 и p.

Задача 25 (разберите решение задачи). Пусть случайные величины $X_1 \sim Bi(2,p)$, $X_2 \sim Bi(3,p)$ независимы. Докажите, что $Y = X_1 + X_2 \sim Bi(5,p)$.

Решение. Докажем сначала вспомогательные формулы:
$C_2^0 C_3^0 = C_5^0$, (1)
$C_2^1 C_3^0 + C_2^0 C_3^1 = C_5^1$, (2)
$C_2^2 C_3^0 + C_2^1 C_3^1 + C_2^0 C_3^2 = C_5^2$, (3)
$C_2^2 C_3^1 + C_2^1 C_3^2 + C_2^0 C_3^3 = C_5^3$, (4)
$C_2^2 C_3^2 + C_2^1 C_3^3 = C_5^4$, (5)
$C_2^2 C_3^3 = C_5^5$. (6)

Для этого воспользуемся формулой бинома Ньютона. Имеем
$(1+x)^2 = C_2^0 + C_2^1 x + C_2^2 x^2$, (7)
$(1+x)^3 = C_3^0 + C_3^1 x + C_3^2 x^2 + C_3^3 x^3$, (8)
$(1+x)^5 = C_5^0 + C_5^1 x + C_5^2 x^2 + C_5^3 x^3 + C_5^4 x^4 + C_5^5 x^5$. (9)

Далее, умножим формулу (7) на формулу (8). Получаем

$$(1+x)^5 = C_2^0 C_3^0 + (C_2^1 C_3^0 + C_2^0 C_3^1)x + (C_2^2 C_3^0 + C_2^1 C_3^1 + C_2^0 C_3^2)x^2 +$$

$$+(C_2^2 C_3^1 + C_2^1 C_3^2 + C_2^0 C_3^3)x^3 + (C_2^2 C_3^2 + C_2^1 C_3^3)x^4 + C_2^2 C_3^3 x^5.$$
(10)

Из (9) и (10) вытекает справедливость вспомогательных формул (1) – (6).

Переходим теперь непосредственно к решению задачи. Требуется доказать, что
$\mathbb{P}(\{Y = k\}) = C_5^k p^k q^{5-k}$ (11)

при $k = 0, 1, ..., 5$. Последовательно для каждого $k = 0, 1, ..., 5$ проверяем истинность формулы (11). Пусть $k = 0$. Имеем

$$\mathbb{P}(\{Y = 0\}) = \mathbb{P}\left(\{X_1 = 0\} \bigcap \{X_2 = 0\}\right) =$$

$$= \mathbb{P}(\{X_1 = 0\}) \cdot \mathbb{P}(\{X_2 = 0\}) = C_2^0 p^0 q^2 \cdot C_3^0 p^0 q^3 = C_5^0 p^0 q^5.$$

Мы воспользовались независимостью случайных величин X_1 и X_2, а также формулой (1). При $k = 0$ формула (11) доказана. Пусть теперь $k = 1$, получаем

$$\mathbb{P}(\{Y = 1\}) = \mathbb{P}\left(\{X_1 = 1\} \bigcap \{X_2 = 0\}\right) + \mathbb{P}\left(\{X_1 = 0\} \bigcap \{X_2 = 1\}\right) =$$

$$= \mathbb{P}(\{X_1 = 1\}) \cdot \mathbb{P}(\{X_2 = 0\}) + \mathbb{P}(\{X_1 = 0\}) \cdot \mathbb{P}(\{X_2 = 1\}) =$$

$$= C_2^1 p^1 q^1 \cdot C_3^0 p^0 q^3 + C_2^0 p^0 q^2 \cdot C_3^1 p^1 q^2 = (C_2^1 C_3^0 + C_2^0 C_3^1) p^1 q^4 = C_5^1 p^1 q^4.$$

Здесь мы снова использовали независимость X_1 и X_2, а также формулу (2). При $k = 1$ формула (11) также доказана. Для остальных $k = 2, ..., 5$ обоснование формулы (11) проводится аналогичным образом (завершите доказательство**!!!**). $\square$

Задача 26. Пусть случайные величины $X_1 \sim Bi(2, p)$, $X_2 \sim Bi(4, p)$ независимы. Докажите, что $Y = X_1 + X_2 \sim Bi(6, p)$.

Задача 27. Вычислите $\mathbb{P}\left(\left\{\omega : |X(\omega) - \mathbb{E}X| < \sqrt{DX}\right\}\right)$, если $X \sim Bi(10, 1/5)$.

Задача 28. Известно, что $X \sim Bi(n,p)$, $n > 2$. Найдите

1. $\mathbb{E} sign X$,
2. $\mathbb{E}\max\{X-1,0\}$,
3. $\mathbb{E}\max\{X-2,0\}$.

Листок 3 по ТВ и МС 2013–2014 [08.03.2014]
1
Кафедра математической экономики и эконометрики НИУ ВШЭ. Борзых Д. А.
Листок 3
Распределение Пуассона. Геометрическое распределение

Определение 1. Случайная величина $X : \Omega \to \mathbb{R}$ имеет *распределение Пуассона* с параметром $\lambda > 0$, пишут $X \sim Pois(\lambda)$, если X принимает значения $k = 0, 1, 2, ...$ с вероятностями $\mathbb{P}(\{X = k\}) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

Определение 2. Случайная величина $X : \Omega \to \mathbb{R}$ имеет *геометрическое распределение* с параметром $p \in (0; 1)$, пишут $X \sim G(p)$, если X принимает значения $k = 1, 2, ...$ с вероятностями $\mathbb{P}(\{X = k\}) = pq^{k-1}$, где $q := 1 - p$.

Задача 1. Докажите, что $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = 1$.

Задача 2*. Пусть $X \sim Pois(\lambda)$. Найдите

1. $\mathbb{E}X$,
2. $\mathbb{E}[X \cdot (X-1)]$,
3. $\mathbb{E}[X^2]$,
4. DX,
5. $\mathbb{E}[X \cdot (X-1) \cdot (X-2)]$,
6. $\mathbb{E}[X^3]$,

7. $\mathbb{E}[X\cdot(X-1)\cdot(X-2)\cdot(X-3)]$,

8. $\mathbb{E}[X^4]$.

Решение. (a) $\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(\{X=k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(\{X=k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda} = [k-1 = l|_0^{\infty}] = \lambda \sum_{l=0}^{\infty} \tfrac{\lambda^l}{l!}e^{-\lambda} = \lambda.$$

(b) $\mathbb{E}[X\cdot(X-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\mathbb{P}(\{X=k\}) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\mathbb{P}(\{X=k\}) =$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\tfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k=2}^{\infty} \tfrac{\lambda^k}{(k-2)!}e^{-\lambda} = \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \tfrac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}e^{-\lambda} = [k-2 = l|_0^{\infty}] = \lambda^2$$

(c) $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X\cdot(X-1)] + \mathbb{E}X = \lambda^2 + \lambda$.

(d) $DX = \mathbb{E}[X^2] - [\mathbb{E}X]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$. $\square$

Задача 3. Вычислите $\mathbb{P}\left(\left\{|X-\mathbb{E}X| < \sqrt{DX}\right\}\right)$, если $X \sim Pois(4)$.

Задача 4. Известно, что $X \sim Pois(\lambda)$ и $\mathbb{P}(\{X=0\}) = 1/2$. Вычислите $\mathbb{P}(\{X=2\})$ и $\mathbb{P}(\{X>0\})$.

Задача 5. Известно, что $X \sim Pois(\lambda)$ и $\mathbb{P}(\{X=3\}) = \mathbb{P}(\{X=4\})$. Найдите $\mathbb{P}(\{X=5\})$.

Задача 6. Известно, что $X \sim Pois(\lambda)$ и $\mathbb{P}(\{X=4\}) = \mathbb{P}(\{X=6\})$. Найдите $\mathbb{P}(\{X=5\})$.

Задача 7.** Пусть A и B — события, состоящие в том, что случайная величина $X \sim Pois(\lambda)$ принимает четное значение и нечетное значение соответственно. Какая из вероятностей $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}(B)$ больше и на сколько?

Решение. Положим $a(\lambda) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2i}}{(2i)!}$ и $b(\lambda) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2i+1}}{(2i+1)!}$. Тогда $\mathbb{P}(A) = a(\lambda)e^{-\lambda}$ и $\mathbb{P}(B) = b(\lambda)e^{-\lambda}$. Заметим, что $b'(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2i}}{(2i)!} = a(\lambda)$. Отсюда и из соотношения $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1$ получаем дифференциальное уравнение $b'(\lambda)e^{-\lambda} + b(\lambda)e^{-\lambda} = 1$, которое можно переписать в виде $b'(\lambda) + b(\lambda) = e^{\lambda}$. Общим решением данного дифференциального уравнения является $b(\lambda) = Ce^{-\lambda} + \frac{1}{2}e^{\lambda}$, $C \in \mathbb{R}$. Из равенств $b(0) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{0^{2i+1}}{(2i+1)!} = 0$ и $b(0) = Ce^{-0} + \frac{1}{2}e^{0}$ находим константу $C = -\frac{1}{2}$. Следовательно, $b(\lambda) = -\frac{1}{2}e^{-\lambda} + \frac{1}{2}e^{\lambda}$, $a(\lambda) = \frac{1}{2}e^{-\lambda} + \frac{1}{2}e^{\lambda}$, $\mathbb{P}(B) = -\frac{1}{2}e^{-2\lambda} + \frac{1}{2}$ и $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}e^{-2\lambda} + \frac{1}{2}$. А значит, $\mathbb{P}(A)$ больше чем $\mathbb{P}(B)$ на $e^{-2\lambda}$. $\square$

Задача 8. Случайные величины X и Y имеют биномиальное и пуассоновское распределение соответственно, причем $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y$. Какая дисперсия больше: DX или DY?

Задача 9. Случайные величины X и Y имеют распределение Пуассона. Найдите $D(3X + 5Y)$, если $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 4$ и $corr(X, Y) = 0.8$.

Задача 10*. Известно, что $X \sim Pois(\lambda)$. Найдите $\mathbb{E}signX$.

Задача 11*. Известно, что $X \sim Pois(\lambda)$. Найдите

1. $\mathbb{E}\max\{X - 1, 0\}$,

2. $\mathbb{E}\max\{X - 2, 0\}$.

Решение. (a) $\mathbb{E}\max\{X - 1, 0\} = \sum_{k=0}^{\infty} \max\{k - 1, 0\}\mathbb{P}(\{X = k\}) =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \max\{k - 1, 0\}\mathbb{P}(\{X = k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} (k - 1)\mathbb{P}(\{X = k\}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(\{X = k\}) - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{X = k\}) = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(\{X = k\}) - 1 + \mathbb{P}(\{X =$$

$$= \mathbb{E}X - 1 + \mathbb{P}(\{X = 0\}) = \lambda - 1 + e^{-\lambda}.$$

(b) $\mathbb{E}\max\{X-2,0\} = \sum_{k=0}^{\infty}\max\{k-2,0\}\mathbb{P}(\{X=k\}) = \sum_{k=2}^{\infty}\max\{k-2,0\}\mathbb{P}(\{X=k\}) =$

$$= \sum_{k=2}^{\infty}(k-2)\mathbb{P}(\{X=k\}) = \sum_{k=2}^{\infty}k\mathbb{P}(\{X=k\}) - 2\sum_{k=2}^{\infty}\mathbb{P}(\{X=k\}) =$$

$$= \mathbb{E}X - 0\mathbb{P}(\{X=0\}) - 1\mathbb{P}(\{X=1\}) - 2(1 - \mathbb{P}(\{X=0\}) - \mathbb{P}(\{X=1\})) =$$

$$= \mathbb{E}X - 2 + 2\mathbb{P}(\{X=0\}) + 1\mathbb{P}(\{X=1\}) = \lambda - 2 + (2+\lambda)e^{-\lambda}.\square$$

Задача 12*. Известно, что $X \sim Pois(\lambda)$. Найдите $\mathbb{E}\left[(1+X)^{-1}\right]$.

Задача 13*. Известно, что $X \sim Pois(\lambda)$. Найдите $\mathbb{E}\left[(2+X)^{-1}\right]$.

Задача 14*. Предприятие покупает годовой страховой полис для того, чтобы застраховать свой доход в случае плохой погоды, которая вынуждает временно прекратить работу. В течение года число случаев ухудшения погоды, приводящих к прекращению работы предприятия, имеет распределение Пуассона со средним 1.5.

В соответствии с условиями договора страховщик не платит ничего в первом случае такого ухудшения погоды, но выплачивает по 10000 долларов за каждое последующее ухудшение погоды. Чему равны ожидаемые выплаты страховщика по такому договору?

Задача 15*. Предприятие покупает годовой страховой полис для того, чтобы застраховать свой доход в случае плохой погоды, которая вынуждает временно прекратить работу. В течение года число случаев ухудшения погоды, приводящих к прекращению работы предприятия, имеет распределение Пуассона со средним 2.

В соответствии с условиями договора страховщик не платит ничего в первом и втором случае такого ухудшения погоды, но выплачивает по 10000 долларов за каждое последующее ухудшение погоды. Чему равны ожидаемые выплаты страховщика по такому договору?

Задача 16*. Пусть случайные величины $X \sim Pois(\lambda)$ и $Y \sim Pois(\mu)$ независимы. Докажите, что случайная величина $Z = X + Y \sim Pois(\lambda + \mu)$.

Решение. Для $k \in \{0, 1, 2, ...\}$ имеем

$$\mathbb{P}(\{Z = k\}) = \mathbb{P}(\{X+Y = k\}) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(\{X = i\} \bigcap \{Y = k-i\}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(\{X = i\}) \cdot \mathbb{P}(\{Y = k-i\}) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\mu} = e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{i=0}^{k} \frac{\quad}{i!}$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} \lambda^i \mu^{k-i} = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} C_k^i \lambda^i \mu^{k-i} = \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!} e^{-(\lambda+\mu)}. \square$$

Задача 17. При работе некоторого устройства время от времени возникают неисправности (сбои). Количество сбоев за сутки имеет распределение Пуассона. Среднее количество сбоев за сутки равно 2. Найти вероятности следующих событий:

1. в течение суток произойдет хотя бы один сбой;

2. за двое суток не произойдет ни одного сбоя.

Задача 18*. Число вызовов на телефонной станции за единицу времени можно рассматривать как случайную величину, имеющую распределение Пуассона с параметром $\lambda = 100$. Каково наиболее вероятное значение этой величины?

Задача 19*. Число вызовов на телефонной станции за единицу времени можно рассматривать как случайную величину, имеющую распределение Пуассона с параметром $\lambda = 99.5$. Каково наиболее вероятное значение этой величины?

Задача 20. Докажите, что $\sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} = 1$, где $q := 1-p$, $p \in (0;1)$.

Задача 21*. Пусть $X \sim G(p)$. Найдите

1. $\mathbb{E}X$,
2. $\mathbb{E}[X \cdot (X-1)]$,
3. $\mathbb{E}[X^2]$,
4. DX,
5. $\mathbb{E}[X \cdot (X-1) \cdot (X-2)]$,
6. $\mathbb{E}[X^3]$,
7. $\mathbb{E}[X \cdot (X-1) \cdot (X-2) \cdot (X-3)]$,
8. $\mathbb{E}[X^4]$.

Решение. (a) $\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(\{X=k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dq}(q^k) =$

$$= p\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{d}{dq}(q^k) = p\tfrac{d}{dq}\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right) = p\tfrac{d}{dq}\left(\tfrac{1}{1-q}\right) = p\tfrac{1}{(1-q)^2} = \tfrac{1}{p}.$$

(b) $\mathbb{E}[X\cdot(X-1)] = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\mathbb{P}(\{X=k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)pq^{k-1} = pq\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} =$

$$= pq\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{d^2}{dq^2}(q^k) = pq\tfrac{d^2}{dq^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right) = pq\tfrac{d^2}{dq^2}\left(\tfrac{1}{1-q}\right) = pq\tfrac{d}{dq}\left(\tfrac{1}{(1-q)^2}\right) = pq$$

(c) $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X\cdot(X-1)] + \mathbb{E}X = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{1+q}{p^2}$.

(d) $DX = \mathbb{E}[X^2] - [\mathbb{E}X]^2 = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$. $\square$

Задача 22. Докажите, что если $X \sim G(p)$, то $\mathbb{P}(\{X=2\}) \leqslant \frac{1}{4}$.

Задача 23. Вычислите $\mathbb{P}(\{X=6\})$, если $X \sim G(p)$ и $\mathbb{P}(\{X=2\}) = \frac{2}{9}$.

Задача 24. Снайпер стреляет по замаскированному противнику до первого попадания. Вероятность попадания при отдельном выстреле $p = 0.5$. Найдите математическое ожидание числа выстрелов и математическое ожидание числа промахов.

Задача 25. Вероятность обнаружения малоразмерного объекта в заданном районе в отдельном полёте равна $1/3$.

1. Сколько в среднем полётов придется совершить, прежде чем объект будет обнаружен?

2. Какова вероятность того, что для обнаружения объекта потребуется совершить не менее трёх вылетов?

Задача 26. Известно, что $X \sim Be(p)$ и $Y \sim Pois(\lambda)$ независимые случайные величины. Пусть $Z = X + Y$. Найдите

1. (a) $\mathbb{E}Z$,

   (b) DZ

   (c) $\mathbb{P}(\{Z = 0\})$

   (d) $\mathbb{P}(\{Z = 1\})$,

   (e) $\mathbb{P}(\{Z = 2\})$.

Задача 27. Известно, что $X \sim Be(p)$ и $Y \sim G(p)$ независимые случайные величины. Пусть $Z = X + Y$. Найдите

1. $\mathbb{E}Z$,

2. DZ

3. $\mathbb{P}(\{Z = 0\})$

4. $\mathbb{P}(\{Z = 1\})$,

5. $\mathbb{P}(\{Z = 2\})$.

Задача 28. Укажите, какие из следующих случайных величин имеют распределение Бернулли, биномиальное распределение, распределение Пуассона, геометрическое распределение. Во всех случаях найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

(a)	k 0 1 $\mathbb{P}_X$ 1/4 3/4		(b)	k −1 1 $\mathbb{P}_X$ 1/2 1/2
(c)	k 0 1 2 $\mathbb{P}_X$ 1/16 6/16 9/16		(d)	k 0 1 2 $\mathbb{P}_X$ 9/16 6/16 1/16
(e)	k 0 1 2 3 $\mathbb{P}_X$ 1/8 3/8 3/8 1/8		(f)	k 0 1 2 3 $\mathbb{P}_X$ 8/27 4/9 2/9 1
(g)	k 0 1 2 ... k ... $\mathbb{P}_X$ $\frac{1}{e\cdot 0!}$ $\frac{1}{e\cdot 1!}$ $\frac{1}{e\cdot 2!}$ $\cdots$ $\frac{1}{e\cdot k!}$ $\cdots$			
(h)	k 1 2 3 ... k ... $\mathbb{P}_X$ $\frac{1}{e\cdot 0!}$ $\frac{1}{e\cdot 1!}$ $\frac{1}{e\cdot 2!}$ $\cdots$ $\frac{1}{e\cdot (k-1)!}$ $\cdots$			
(k)	k 0 1 2 ... $k-1$ ... $\mathbb{P}_X$ 1/4 $3/4^2$ $3^2/4^3$ ... $3^{k-1}/4^k$ ...			

Листок 4 по ТВ и МС 2013–2014 [08.03.2014]

1

Кафедра математической экономики и эконометрики НИУ ВШЭ. Борзых Д. А.

Листок 4

Условная вероятность. Формула умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Определение 1. Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $A, B \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(B) > 0$. *Условной вероятностью события A при условии события B* называется

$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A\bigcap B)}{\mathbb{P}(B)}$. (1)

Задача 1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство, $A, B, C \in \mathcal{F}$. Докажите, что если $\mathbb{P}(A\bigcap B) > 0$, то $\mathbb{P}(A\bigcap B\bigcap C) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B|A)\cdot\mathbb{P}(C|A\bigcap B)$.

Задача 2. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, $n \geqslant 3$. Докажите, что если $\mathbb{P}(A_1 \bigcap \ldots \bigcap A_{n-1}) > 0$, то

$\mathbb{P}(A_1 \bigcap \ldots \bigcap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1 \bigcap \ldots \bigcap A_{n-1})$ (2)

(формула (2) называется *формулой умножения вероятностей*).

Определение 2. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство. Система подмножеств $\mathcal{D} = \{D_1, ..., D_n\}$, $n \geqslant 2$, называется разбиением пространства элементарных событий Ω, если

1. $D_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, \ldots, n$,
2. $\Omega = D_1 \bigcup \ldots \bigcup D_n$,
3. $D_i \bigcap D_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

Задача 3. Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и разбиение $\mathcal{D} = \{D_1, ..., D_n\}$ такое, что $\mathbb{P}(D_i) > 0$, $i = 1, ..., n$, $n \geqslant 2$. Докажите, что для любого $A \in \mathcal{F}$ имеет место формула

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|D_1) \cdot \mathbb{P}(D_1) + \ldots + \mathbb{P}(A|D_n) \cdot \mathbb{P}(D_n)$, (3)

называемая *формулой полной вероятности.*

Задача 4. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство, $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) > 0$ и $\mathcal{D} = \{D_1, ..., D_n\}$ — разбиение такое, что $\mathbb{P}(D_i) > 0$, $i = 1, ..., n$, $n \geqslant 2$. Докажите, что для любого $i = 1, ..., n$ справедлива формула

$\mathbb{P}(D_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|D_i) \cdot \mathbb{P}(D_i)}{\mathbb{P}(A|D_1) \cdot \mathbb{P}(D_1) + ... + \mathbb{P}(A|D_n) \cdot \mathbb{P}(D_n)}$, (4)

которая называется *формулой Байеса.*

Задача 5. Какова вероятность того, что в семье, имеющей двух детей оба ребенка мальчики, в предположении, что

1. старший ребенок мальчик;

2. по крайней мере, один из детей — мальчик?

Ответ: (a) 1/2; (b) 1/3.

Задача 6. Цифры 1, 2, 3, 4, 5 располагаются в ряд в случайном порядке. Какова вероятность, что первой окажется чётная цифра, а последней — нечётная?

Ответ: 3/10.

Задача 7. Двенадцатитомное издание расположено на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что третий том окажется на седьмом месте, а седьмой том на третьем месте?

Ответ: 1/132.

Задача 8. Из букв слова КОМБИНАТОРИКА наудачу выбирают четыре буквы. Найдите вероятность того, что получится слово

1. КИНО;
2. КРОТ;
3. АТОМ.

Ответ: (a) 1/2145; (b) 1/4290; (c) 1/4290.

Задача 9. Студент пришел на экзамен, зная только один билет. Всего 25 билетов, а в группе 20 человек. Как ему следует поступить, чтобы увеличить вероятность вытянуть счастливый билет:

1. идти отвечать первым или вторым?
2. идти отвечать первым или третьим?
3. идти отвечать первым или последним?

Ответ: вероятность вытянуть счастливый билет не зависит от очередности вытягивания билета и равна 1/25.

Задача 10. Студент пришёл на экзамен, зная два билета из 25-ти. Какова вероятность для него достать счастливый билет, если он идет тянуть вторым?

Ответ: 2/25.

Задача 11. В первой урне 7 белых и 3 черных шара, во второй урне 8 белых и 4 черных шара, в третьей урне 2 белых и 13 черных наров. Из этих урн наугад выбирается одна урна. Какова вероятность того, что шар, взятый наугад из выбранной урны, окажется белым?

Ответ: 1/2.

Задача 12. В первой урне 7 белых и 3 черных шара, во второй урне 8 белых и 4 черных шара, в третьей урне 2 белых и 13 черных наров. Из этих урн наугад выбирается одна урна. Какова вероятность того, что была выбрана первая урна, если шар, взятый наугад из выбранной урны, оказался белым?

Ответ: 7/15.

Задача 13. Пусть в урне находится две монеты: симметричная и несимметричная с вероятностью выпадения орла, равной 1/3. Наудачу вынимается и подбрасывается одна из монет. Найдите вероятность выпадения орла.

Ответ: 5/12.

Задача 14. Пусть в урне находится две монеты: симметричная и несимметричная с вероятностью выпадения орла, равной 1/3. Наудачу вынимается и подбрасывается одна из монет. Выпал орёл. Какова вероятность того, что выбранная монета симметрична?

Ответ: 3/5.

Задача 15. Два охотника одновременно и независимо стреляют в кабана. Известно, что первый попадает с вероятностью 0.8, а второй — 0.4. Кабан убит, и в нём обнаружена одна пуля. Найдите вероятность того, что

1. кабана убил первый охотник;

2. кабана убил второй охотник.

Ответ: (a) 6/7; (b) 1/7.

Задача 16. На учениях два самолёта одновременно и независимо атакуют цель. Известно, что первый самолёт поражает цель с вероятностью 0.6, а второй — 0.4. При разборе учений выяснилось, что цель была поражена только одним самолётом. Какова вероятность того, что это был первый самолёт?

Ответ: 9/13.

Задача 17. Пусть события A и B независимы. Покажите, что если $\mathbb{P}(B) > 0$, то $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

Задача 18. Пусть события A и B несовместны, т.е. $A \bigcap B = \emptyset$. Докажите, что если $\mathbb{P}(A \bigcup B) > 0$, то $\mathbb{P}(A|A \bigcup B) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)}$.

Задача 19. Покажите, что если $\mathbb{P}(A|C) > \mathbb{P}(B|C)$ и $\mathbb{P}(A|C^c) > \mathbb{P}(B|C^c)$, то $\mathbb{P}(A) > \mathbb{P}(B)$.

Задача 20. Верны ли равенства

1. $\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(A|B^c) = 1$?

2. $\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(A^c|B^c) = 1$?

Задача 21. Докажите, что если $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^c)$, то события независимы.

Задача 22. Показать, что $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B \bigcap C) \cdot \mathbb{P}(C|B) + \mathbb{P}(A|B \bigcap C^c) \cdot \mathbb{P}(C^c|B)$.

Задача 23. Пусть событие A таково, что оно не зависит от самого себя, т.е. A и A независимы. Показать, что тогда $\mathbb{P}(A)$ равно 0 или 1.

Задача 24. Пусть событие A таково, что $\mathbb{P}(A)$ равно 0 или 1. Показать, что A и любое событие B независимы.

Задача 25. Доказать, что если события A и B независимы, то независимы A и B^c.

Задача 26. Для того чтобы сбить самолет достаточно одного попадания. Было сделано три выстрела с вероятностями попадания 0.1, 0.2 и 0.4 соответственно. Какова вероятность того, что самолет сбит?

Ответ: 0.568.

Задача 27. Для разрушения моста достаточно попадание двух бомб. Независимо сбросили три бомбы с вероятностями попадания 0.1, 0.3 и 0.4. Каков вероятность, что мост будет разрушен?

Ответ: 0.166.

Листок 5 по ТВ и МС 2013–2014 [08.03.2014]

1

Кафедра математической экономики и эконометрики НИУ ВШЭ. Борзых Д. А.

Листок 5

Абсолютно непрерывные случайные величины

Задача 1. Пусть $\Omega = (0; 1)$, $\mathbb{P}$ — длина, $X(\omega) = \omega^2$ и $Y(\omega) = -\ln \omega$ — случайные величины. Найдите

1. $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \leqslant \frac{1}{4}\})$,
2. $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) = \frac{1}{4}\})$
3. $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) > \frac{1}{9}\})$,
4. $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \in [\frac{1}{9}; \frac{1}{4}]\})$,
5. $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \in [0; \frac{1}{100}] \bigcup [\frac{1}{4}; 1]\})$,
6. $\mathbb{P}(\{\omega : Y(\omega) > 0\})$,
7. $\mathbb{P}(\{\omega : Y(\omega) = 1\})$,

8. $\mathbb{P}(\{\omega : Y(\omega) \leqslant 1\})$.

Задача 2. Пусть $\Omega = [0;1]$, $\mathbb{P}$ — длина и $X(\omega) = \omega$ — случайная величина. Найдите

(a) $F_X(x)$,	(b) $f_X(x)$,	(c) $\mathbb{E}X$,	(d) $\mathbb{E}[X^2]$,	(e) DX

Задача 3. Пусть $\Omega = [0;1]$, $\mathbb{P}$ — длина и $X(\omega) = 1 - \omega$ — случайная величина. Найдите

(a) $F_X(x)$,	(b) $f_X(x)$,	(c) $\mathbb{E}X$,	(d) $\mathbb{E}[X^2]$,	(e) DX

Задача 4. Пусть $\Omega = [0;1]$, $\mathbb{P}$ — длина и $X(\omega) = \omega^2$ — случайная величина. Найдите

(a) $F_X(x)$,	(b) $f_X(x)$,	(c) $\mathbb{E}X$,	(d) $\mathbb{E}[X^2]$,	(e) DX

Ответ:

(a) $F_X(x) = \begin{cases} 0 & ?@8\ x \leqslant 0, \\ \sqrt{x} & ?@8\ 0 < x < 1, \\ 1 & ?@8\ x \geqslant 1. \end{cases}$ (b) $f_X(x) = \begin{cases} 0 & ?@8\ x \leqslant 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & ?@8\ 0 < x < 1, \\ 0 & ?@8\ x \geqslant 1. \end{cases}$

(c) $\mathbb{E}X = 1/3$, (d) $\mathbb{E}[X^2] = 1/5$, (e) $DX = 4/45$.

Задача 5. Пусть $\Omega = [0;1]$, $\mathbb{P}$ — длина и $X(\omega) = \sqrt{\omega}$ — случайная величина. Найдите

(a) $F_X(x)$,	(b) $f_X(x)$,	(c) $\mathbb{E}X$,	(d) $\mathbb{E}[X^2]$,	(e) DX

Задача 6. Пусть $\Omega = (0;1)$, $\mathbb{P}$ — длина и $X(\omega) = -\ln\omega$ — случайная величина. Найдите

(a) $F_X(x)$,	(b) $f_X(x)$,	(c) $\mathbb{E}X$,	(d) $\mathbb{E}[X^2]$,	(e) DX

Задача 7. Пусть $\Omega = (0;1)$, $\mathbb{P}$ — длина и $X(\omega) = -\ln(1-\omega)$ — случайная величина. Найдите

(a) $F_X(x)$,	(b) $f_X(x)$,	(c) $\mathbb{E}X$,	(d) $\mathbb{E}[X^2]$,	(e) DX

Задача 8. Пусть $\Omega = (0;1)$, $\mathbb{P}$ — длина и $X(\omega) = 1/\omega$ — случайная величина. Найдите

(a) $F_X(x)$,	(b) $f_X(x)$,	(c) $\mathbb{E}X$,	(d) $\mathbb{E}[X^2]$,	(e) DX

Задача 9. Пусть $\Omega = (0;1)$, $\mathbb{P}$ — длина и $X(\omega) = 1/\sqrt{\omega}$ — случайная величина. Найдите

(a) $F_X(x)$,	(b) $f_X(x)$,	(c) $\mathbb{E}X$,	(d) $\mathbb{E}[X^2]$,	(e) DX

Задача 10. Пусть $\Omega = (0;1)$, $\mathbb{P}$ — длина и $X(\omega) = \ln\omega - \ln(1-\omega)$ — случайная величина. Найдите

(a) $F_X(x)$,	(b) $f_X(x)$,	(c) $\mathbb{E}X$.

Задача 11. Пусть $\Omega = [0;1]$, $\mathbb{P}$ — длина и $X(\omega) = a + (b-a)\cdot\omega$ — случайная величина, где $a < b$. Найдите

(a) $F_X(x)$,	(b) $f_X(x)$,	(c) $\mathbb{E}X$,	(d) $\mathbb{E}[X^2]$,	(e) DX.

Задача 12. Пусть $\Omega = [0;1]$, $\mathbb{P}$ — длина и $X(\omega) = b + (a-b)\cdot\omega$ — случайная величина, где $a < b$. Найдите

(a) $F_X(x)$,	(b) $f_X(x)$,	(c) $\mathbb{E}X$,	(d) $\mathbb{E}[X^2]$,	(e) DX.

Задача 13. Пусть $\Omega = (0;1)$, $\mathbb{P}$ — длина и $X(\omega) = -\frac{1}{\lambda}\ln\omega$ — случайная величина, где $\lambda > 0$. Найдите

(a) $F_X(x)$,	(b) $f_X(x)$,	(c) $\mathbb{E}X$,	(d) $\mathbb{E}[X^2]$,	(e) DX.

Задача 14. Пусть $\Omega = (0;1)$, $\mathbb{P}$ — длина и $X(\omega) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\omega)$ — случайная величина, где $\lambda > 0$. Найдите

(a) $F_X(x)$,	(b) $f_X(x)$,	(c) $\mathbb{E}X$,	(d) $\mathbb{E}[X^2]$,	(e) DX.

Задача 15*. Пусть $\Omega = (0;1)$, $\mathbb{P}$ — длина, $\Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$, и $X(\omega) = \Phi^{-1}(\omega)$ — случайная величина (здесь Φ^{-1} обратная функция к функции Φ). Найдите

(a) $F_X(x)$,	(b) $f_X(x)$,	(c) $\mathbb{E}X$,	(d) $\mathbb{E}[X^2]$,	(e) DX.

Задача 16*. Пусть $\Omega = (0;1)$, $\mathbb{P}$ — длина, $\Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$, и $X(\omega) = \Phi^{-1}(1-\omega)$ — случайная величина (здесь Φ^{-1} обратная функция к функции Φ). Найдите

(a) $F_X(x)$,	(b) $f_X(x)$,	(c) $\mathbb{E}X$,	(d) $\mathbb{E}[X^2]$,	(e) DX.

Задача 17*. Пусть $\Omega = (0;1)$, $\mathbb{P}$ — длина, $\Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $x \in \mathbb{R}$, и $X(\omega) = \Phi^{-1}(\omega)$ — случайная величина (здесь Φ^{-1} обратная функция к функции Φ). Найдите

(a) $F_X(x)$,	(b) $f_X(x)$,	(c) $\mathbb{E}X$,	(d) $\mathbb{E}[X^2]$,	(e) DX.

Задача 18. Функция распределения случайной величины Xимеет вид $F_X(x) = \begin{cases} 0 & ?@8\ x < 1 \\ (x-1)^2 & ?@8\ 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 & ?@8\ x > 2 \end{cases}$. Найдите

(a) $f_X(x)$,	(b) $\mathbb{E}X$,	(c) $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega)$ $(1.5; 2.5)\})$.

Задача 19. Плотность распределения случайной величины Xимеет вид $f_X(x) = \begin{cases} 0 & ?@8\ x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2} + x & ?@8\ 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & ?@8\ x > 1 \end{cases}$. Найдите

(a) $F_X(x)$,	(b) $\mathbb{E}X$,	(c) $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega)$ $[\frac{1}{4}; \frac{3}{4}]\})$.

Задача 20. Случайная величина X имеет плотность распределения $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & ?@8\ x \geqslant 0 \\ 0 & ?@8\ x < 0 \end{cases}$. Найдите

(a) $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \in [0; 1]\})$,	(b) $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) > 1\})$,	(c) $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega)$ $1\})$.

Задача 21. Выразите функцию распределения $F_Y(x)$ случайной величины $Y = 8 - 9X$ через функцию распределения $F_X(x)$ абсолютно непрерывной случайной величины X.

Ответ: $F_Y(x) = 1 - F_X\left(\frac{8-x}{9}\right)$.

Задача 22. Распределение случайной величины X задано плотностью $f_X(x)$. Найдите плотность распределения случайной величины $Y = 2X + 7$.

Ответ: $f_Y(x) = \frac{1}{2} f_X\left(\frac{x-7}{2}\right)$.

Задача 23. Плотность распределения случайной величины X имеет вид $f_X(x) = \frac{a}{1+x^2}$. Найдите параметр a и вероятность попадания случайной величины X в отрезок $[0; 1]$.

Ответ: $a = 1/\pi$, $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \in [0; 1]\}) = 1/4$.

Задача 24. Дана плотность распределения $f_X(x) = \frac{2e^x}{\pi(1+e^{2x})}$. Найдите функцию распределения случайной величины X.

Ответ: $F_X(x) = 2arctg(e^x)/\pi$.

Задача 25. Найдите значения параметров a и b функции распределения $F_X(x) = a \cdot arctg 2x + b$.

Ответ: $a = 1/\pi$, $b = 1/2$.

Задача 26. Плотность распределения $f_X(x)$ случайной величины X равна нулю вне отрезка $[-3;3]$ и $f_X(x) = ax^2 + bx + c$ для $x \in [-3;3]$. Найдите параметры a, b, c и вероятность попадания случайной величины X в отрезок $[0;2]$, если известно, что $f_X(x)$ непрерывна на всей числовой прямой.

Ответ: $a = -1/36, b = 0, c = 1/4, \mathbb{P}\left(\{\omega : X(\omega) \in [0;2]\}\right) \approx 0.426$.

Задача 27. Плотность распределения случайной величины X имеет вид $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Найдите плотность распределения случайной величины $Y = 1/X$.

Ответ: $f_Y(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

Задача 28. Случайная величина X имеет плотность распределения $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{?@8 } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{?@8 } x < 0 \end{cases}$. Найдите функцию распределения и плотность случайной величины $Y = e^{-X}$.

Ответ: $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{?@8 } x \leqslant 0 \\ x & \text{?@8 } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{?@8 } x > 1 \end{cases}$, $f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{?@8 } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{?@8 } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{?@8 } x > 1 \end{cases}$.

Задача 29. Случайная величина X имеет плотность $f_X(x)$. Найдите плотность случайной величины $Y = X^2$.

Ответ: $f_Y(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(f_X(-\sqrt{x}) + f_X(\sqrt{x}))$ при $x > 0$ и $f_Y(x) = 0$ при $x \leqslant 0$.

Задача 30. Случайная величина X имеет плотность распределения $f_X(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

Ответ: $\mathbb{E}X = 0$, $DX = 2$.

Задача 31. Случайная величина X имеет плотность распределения $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ?@8\ x \in [-1; 1] \\ 0 & ?@8\ x \notin [-1; 1] \end{cases}$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $X^{11/3}$.

Ответ: $\mathbb{E}[X^{11/3}] = 0$, $D[X^{11/3}] = 3/25$.

Задача 32. Дана плотность распределения $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ?@8\ x \geqslant 0 \\ 0 & ?@8\ x < 0 \end{cases}$. Найдите $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) > 9\})$, если известно, что $\mathbb{E}X = 10$.

Ответ: $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) > 9\}) = e^{-9/10}$.

Задача 33. Дана плотность распределения $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ?@8\ x \geqslant 0 \\ 0 & ?@8\ x < 0 \end{cases}$. Найдите $\mathbb{P}(\{\omega : 18 < X(\omega) < 36\})$, если известно, что $\mathbb{E}X = 9/\ln 2$.

Ответ: $\mathbb{P}(\{\omega : 18 < X(\omega) < 36\}) = 3/16$.

Задача 34. Докажите, что $\lim\limits_{a\to+\infty} \int_a^{+\infty} \frac{f_X(x)}{x} dx = 0$, где f_X — плотность распределения произвольной случайной величины.

Решение. Пусть $a > 0$. Тогда $0 \leqslant \int_a^{+\infty} \frac{f_X(x)}{x} dx \leqslant \int_a^{+\infty} \frac{f_X(x)}{a} dx = \frac{1-F_X(a)}{a} \to 0$ при $a \to +\infty$. $\square$

Задача 35. Известно, что плотность случайной величины X имеет вид

$$f_X(x) = \begin{cases} c - |x| & ?@8\ x \in [-c; c], \\ 0 & ?@8\ x \notin [-c; c]. \end{cases}$$

Найдите

1. нормирующую константу c,
2. $F_X(x)$,
3. $\mathbb{E}X$,
4. $\mathbb{E}[X^2]$,

5. DX,

6. $\mathbb{E}[X^k]$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Задача 36. Известно, что плотность случайной величины X имеет вид $f_X(x) = ce^{-|x|}$. Найдите

1. нормирующую константу c,

2. $F_X(x)$,

3. $\mathbb{E}X$,

4. $\mathbb{E}[X^2]$,

5. DX,

6. $\mathbb{E}[X^k]$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Листок 6 по ТВ и МС 2013–2014 [08.03.2014]

1

Кафедра математической экономики и эконометрики НИУ ВШЭ. Борзых Д. А.

Листок 6

Нормальное распределение

Определение. Случайная величина $X : \Omega \to \mathbb{R}$ имеет *нормальное распределение с параметрами* $\mu \in \mathbb{R}$ *и* $\sigma^2 > 0$, пишут $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, если плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Определение. Если $X \sim N(0, 1)$, то говорят, что случайная величина X имеет *стандартное нормальное распределение.*

Задача 1. Пусть случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение.

Найдите

1. $\mathbb{P}\left(\{-1 < X < 1\}\right)$;
2. $\mathbb{P}\left(\{0 < X < 1\}\right)$;
3. $\mathbb{P}\left(\{-2 < X < 2\}\right)$;
4. $\mathbb{P}\left(\{-2 < X \leqslant 0\}\right)$;
5. $\mathbb{P}\left(\{-2 < -X + 1 \leqslant 0\}\right)$;
6. $\mathbb{P}\left(\{0 < 1 - X < 1\}\right)$;
7. $\mathbb{P}\left(\left\{0 < 1 - \frac{1}{2}X < 1\right\}\right)$;
8. $\mathbb{P}\left(\left\{0 < 1 - \frac{1}{2}X < \frac{1}{2}\right\}\right)$;
9. $\mathbb{P}\left(\{X \in [0;1] \bigcup [2;3]\}\right)$;
10. $\mathbb{P}\left(\{X \in [-3;-2] \bigcup [2;3]\}\right)$;
11. $\mathbb{P}\left(\{X \in (-3;0) \bigcup (0;-3)\}\right)$;
12. $\mathbb{P}\left(\{X \in [-2;-1] \bigcup [2;3]\}\right)$;
13. $\mathbb{P}\left(\left\{X \in [-3;-2] \bigcup \left[-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right]\right\}\right)$.

Задача 2. Пусть случайная величина $X \sim N(1,4)$.
Найдите

1. $\mathbb{P}\left(\{1 < X < 4\}\right)$;
2. $\mathbb{P}\left(\{2 < X < 4\}\right)$;
3. $\mathbb{P}\left(\{3 < X < 4\}\right)$.

Задача 3. Пусть случайная величина X имеет плотность $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4}}$.
Найдите

1. $\mathbb{P}(\{1 < X < 2\})$;
2. $\mathbb{P}(\{2 < X < 3\})$;
3. $\mathbb{P}(\{-2 < X < 1\})$;
4. $\mathbb{P}(\{-2 < -X < 1\})$.

Ответы:

1. (a) $\mathbb{P}(\{1 < X < 2\}) = 0.1611$;
   (b) $\mathbb{P}(\{2 < X < 3\}) = 0.0617$;
   (c) $\mathbb{P}(\{-2 < X < 1\}) = 0.6816$;
   (d) $\mathbb{P}(\{-2 < -X < 1\}) = 0.6816$.

Задача 4. Пусть случайная величина X имеет плотность $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{4}}$.
Найдите

1. $\mathbb{P}(\{2 < X < 3\})$;
2. $\mathbb{P}(\{3 < X < 4\})$;
3. $\mathbb{P}(\{-1 < X < 2\})$.

Задача 5. Пусть случайная величинаX имеет функцию распределения $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{6}} dt$.
Найдите

1. $\mathbb{P}(\{1 < X < 2\})$;
2. $\mathbb{P}(\{2 < X < 3\})$;
3. $\mathbb{P}(\{-2 < X < 1\})$.

Задача 6. При помощи таблиц стандартного нормального распределения найдите следующие интегралы.

1. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx;$

2. $\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx;$

3. $\int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx;$

4. $\int_{-2}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx;$

5. $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx;$

6. $\int_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx;$

7. $\int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx;$

8. $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx;$

9. $\int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{8}}\,dx;$

10. $\int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{8}}\,dx;$

11. $\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{8}}\,dx;$

12. $\int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt{18\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{18}}\,dx;$

13. $\int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{18\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{18}}\,dx;$

14. $\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{18\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{18}} dx$;

15. $\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$.

Задача 7. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $\mu = 1$, $\sigma = 2$. Найти $\mathbb{P}(\{1.5 < X < 3.0\})$.

Ответ: $\mathbb{P}(\{1.5 < X < 3.0\}) = 0.2426$.

Задача 8. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $\mu = -1$, $\sigma = 5$. Найти

1. $\mathbb{P}(\{-6.0 < X < 6.0\})$;
2. $\mathbb{P}(\{-6.0 < X < -1.0\})$;
3. $\mathbb{P}(\{X > -1.0\})$.

Ответы:

1. $\mathbb{P}(\{-6.0 < X < 6.0\}) = 0.7605$;
2. $\mathbb{P}(\{-6.0 < X < -1.0\}) = 0.3413$;
3. $\mathbb{P}(\{X > -1.0\}) = 0.5000$.

Задача 9. Случайные величины X и Y независимы и имеют нормальное распределение, $\mathbb{E}(X) = 0$, $D(X) = 1$, $\mathbb{E}(Y) = 2$, $D(Y) = 6$.

Найдите

1. $\mathbb{P}(\{-1.5 < X < 0.5\})$;
2. $\mathbb{P}(\{1 < X + 2Y < 7\})$.

Задача 10. Случайные величины X и Y независимы и имеют нормальное распределение, $\mathbb{E}(X) = 0$, $D(X) = 1$, $\mathbb{E}(Y) = 3$, $D(Y) = 7$.

Найдите

1. $\mathbb{P}\left(\{0.6 < X < 1.8\}\right)$;

2. $\mathbb{P}\left(\{1 < 3X + Y < 5\}\right)$.

Задача 11. Вычислить квантили стандартного нормального распределения уровней $\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.05$ и $\alpha = 0.1$.

Решение.

Способ №1 (при помощи программы MS Excel)

$$z_{0.01} = \text{!''}\ (0,01) = -2,32635$$

$$z_{0.05} = \text{!''}\ (0,05) = -1,64485$$

$$z_{0.1} = \text{!''}\ (0,1) = -1,28155$$

Способ №2 (при помощи пакета MATLAB)

$$z_{0.01} = norminv\,(0.01,\ 0,\ 1) = -2.3263$$

$$z_{0.05} = norminv\,(0.05,\ 0,\ 1) = -1.6449$$

$$z_{0.1} = norminv\,(0.1,\ 0,\ 1) = -1.2816$$

Способ №3 (при помощи таблиц для нормального распределения)[1]

$\alpha = 0.01$: ищем в таблице для нормального распределения такую точку x, чтобы функция $S\,(x) = 1 - 2 \cdot \alpha = 1 - 2 \cdot 0.01 = 0.98$, где$S\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$. Такую точку можно найти в строке 2.3 и столбце 3, следовательно, $x = 2.33$. Значит, при помощи таблиц нормального распределения получаем $z_{0.01} = -2.33$.

[1] См. А.С. Шведов “Теория вероятностей и математическая статистика”, 2-е изд., стр. 229-230.

$\alpha = 0.05$: ищем в таблице для нормального распределения такую точку x, чтобы функция $S(x) = 1-2\cdot\alpha = 1-2\cdot 0.05 = 0.90$, где$S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}dy$. Такую точку можно найти в строке 1.6 и столбце 4, следовательно, $x = 1.64$. Значит, при помощи таблиц нормального распределения получаем $z_{0.01} = -1.64$.

$\alpha = 0.1$: ищем в таблице для нормального распределения такую точку x, чтобы функция $S(x) = 1-2\cdot\alpha = 1-2\cdot 0.1 = 0.80$, где$S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}dy$. Такую точку можно найти в строке 1.2 и столбце 8, следовательно, $x = 1.28$. Значит, при помощи таблиц нормального распределения получаем $z_{0.01} = -1.28$.

Задача 12. Вычислить квантили стандартного нормального распределения уровней

1. $\alpha = 0.15$;
2. $\alpha = 0.2$;
3. $\alpha = 0.25$;
4. $\alpha = 0.35$;
5. $\alpha = 0.85$;
6. $\alpha = 0.80$;
7. $\alpha = 0.75$;
8. $\alpha = 0.65$.

Ответ:

1. $z_{0.15} = -1.0364$;
2. $z_{0.2} = -0.8416$;

3. $z_{0.25} = -0.6745$;

4. $z_{0.35} = -0.3853$;

5. $z_{0.85} = 1.0364$;

6. $z_{0.8} = 0.8416$;

7. $z_{0.75} = 0.6745$;

8. $z_{0.35} = 0.3853$.

Задача 13. Найдите такое число $x \in \mathbb{R}$, что

1. (a) $\int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0.01$;

   (b) $\int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0.05$;

   (c) $\int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0.1$;

   (d) $\int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{t^2}{8}} dt = 0.1$;

   (e) $\int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{(t-8)^2}{8}} dt = 0.1$;

   (f) $\int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{50\pi}} e^{-\frac{t^2}{50}} dt = 0.1$;

   (g) $\int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{50\pi}} e^{-\frac{(t-50)^2}{50}} dt = 0.1$.

Ответы:

1. (a)
   i. $x = 2.3263$;
   ii. $x = 1.6449$;
   iii. $x = 1.2816$;
   iv. $x = 2.5631$;
   v. $x = 10.5631$;

vi. $x = 6.4078$;

vii. $x = 56.4078$.

Задача 14. Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием. Найдите значение параметра σ, при котором вероятность попадания случайной величины X в интервал $(5; 10)$ была бы наибольшей.

Ответ: $\sigma = \sqrt{75/\left(2\ln 2\right)}$.

Задача 15. Пусть $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$. Вычислите вероятность попадания случайной величины в интервал $(\mu - \sigma; \mu)$.

Ответ:

Задача 16. Пусть $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$. Вычислите вероятность попадания случайной величины в интервал $(\mu - 2\sigma; \mu)$.

Ответ:

Задача 17. Пусть $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$. Вычислите вероятность попадания случайной величины в интервал $(\mu - 3\sigma; \mu)$.

Ответ:

Задача 18. Пусть случайная величина X имеет плотность вида

1. $f_X\left(x\right) = C \cdot e^{-x^2}$;

2. $f_X\left(x\right) = C \cdot e^{-x^2+1}$;

3. $f_X\left(x\right) = C \cdot e^{-x^2+2x}$;

4. $f_X\left(x\right) = C \cdot e^{-x^2-2x}$;

5. $f_X\left(x\right) = C \cdot e^{-2x^2+4x}$;

6. $f_X\left(x\right) = C \cdot e^{-2x^2+8x}$;

7. $f_X\left(x\right) = C \cdot e^{-8x^2-16x}$.

Найдите константу C, и покажите, что случайная величина X имеет нормальное распределение.

Ответы:

A. $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$	B. $\frac{1}{e\sqrt{\pi}}$,	C. $\frac{1}{e\sqrt{\pi}}$,	D. $\frac{1}{e\sqrt{\pi}}$,	E. $\frac{1}{e^2\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$,	F. $\frac{1}{e^8\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$,

Задача 19. Пусть случайная величина X имеет плотность вида $f_X(x) = C \cdot e^{-ax^2+bx}$, где $a > 0$ и $b \in \mathbb{R}$. Найдите константу C, и покажите, что случайная величина X имеет нормальное распределение.

Ответ: $C = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \cdot e^{-\frac{b^2}{4a}}$.

Задача 20. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами μ и σ^2, где $\mu \in \mathbb{R}$, а $\sigma^2 > 0$. Найдите $\mathbb{P}(\{X \in [\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]\})$.

Задача 21. Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение; a и b - произвольные вещественные числа, причем $a \neq 0$. Докажите, что случайная величина $Y = aX+b$ также имеет нормальное распределение.

Задача 22. Известна плотность случайной величины X: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{(x-8)^2}{8}}$.

Найдите плотность случайной величины $Y = \frac{X-8}{2}$.

Задача 23. Известна плотность случайной величины X: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{18\pi}} e^{-\frac{(x-18)^2}{18}}$.

Найдите плотность случайной величины $Y = \frac{X-18}{3}$.

Задача 24. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $\mu = 1$, $\sigma = 1$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = 2X + 1$.

Ответ: $f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{(x+1)^2}{8}}$.

Задача 25. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $\mu = 1$, $\sigma = 1$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = -2X + 1$.

Задача 26. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $\mu = 1$, $\sigma = 2$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = -2X + 1$.

Задача 27. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $\mu = 0$, $\sigma = 1$. Найти функцию распределения случайной величины $Y = X + |X|$.

Задача 28. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $\mu = 0$, $\sigma = 1$. Найти функцию распределения случайной величины $Y = \frac{X+|X|}{2}$.

Задача 29. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $\mu = 0$, $\sigma = 1$. Найти функцию распределения случайной величины $Y = \frac{X-|X|}{2}$.

Задача 30. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $\mu = 0$, $\sigma = 1$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = |X|$.

Задача 31. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $\mu = 0$, $\sigma = 1$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = X^2$.

Задача 32. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $\mu = 0$, $\sigma = 1$. Найти функцию распределения случайной величины $Y = \exp(X)$.

Задача 33. Пусть случайные величины X и Y независимы. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение, а случайная величина Y имеет распределение Бернулли с параметром p. Найдите плотность случайной величины $Z = X + Y$.

Задача 34. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами μ и σ^2, где $\mu \in \mathbb{R}$, а $\sigma^2 > 0$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = \exp(X)$.

Задача 35. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $\mu = 0$, $\sigma = 1$. Найти $\mathbb{E}(X)$ и $\mathbb{E}(X^2)$.

Ответы: $\mathbb{E}\,(X) = 0$; $\mathbb{E}\,(X^2) = 1$.

Задача 36. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $\mu = 0$, $\sigma = 1$. Найти $\mathbb{E}\,|X|$.

Ответ: $\mathbb{E}\,|X| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Задача 37. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $\mu = 0$, $\sigma = 1$. Найти $\mathbb{E}\,(X^3)$ и $\mathbb{E}\,(X^4)$.

Ответы: $\mathbb{E}\,(X^3) = 0$; $\mathbb{E}\,(X^4) = 3$.

Задача 38. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $\mu = 0$, $\sigma = 1$. Найти $\mathbb{E}\exp(X)$.

Задача 39. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами μ и σ^2, где $\mu \in \mathbb{R}$, а $\sigma^2 > 0$. Найти $\mathbb{E}\exp(X)$ и $D\,(\exp(X))$.

Задача 40. Для каждого натурального числа k вычислите интеграл $I_k = \int_0^{+\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.

Листок 7 по ТВ и МС 2013–2014 [08.03.2014]

1

Кафедра математической экономики и эконометрики НИУ ВШЭ. Борзых Д. А.

Листок 7

Центральная предельная теорема

Центральная предельная теорема (Леви). Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с $0 < DX_i < \infty$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда для любого множества $B \subseteq \mathbb{R}$ имеет место

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \in B\right\}\right) = \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,$$

где $S_n := X_1 + \ldots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Обозначение. Будем использовать следующее обозначение $\Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

Задача 1. В предположении, что размер одного шага пешехода равномерно распределен в интервале от 70 до metricconverterProductID80 ??80 ??80 см и размеры разных шагов независимы, найти вероятность того, что за 10000 шагов он пройдет расстояние не менее metricconverterProductID7.49 ??7.49 ??7.49 км и не более metricconverterProductID7.51 ??7.51 ??7.51 км.

Ответ: 0.9995.

Задача 2. Предположим, что на станцию скорой помощи поступают вызовы, число которых распределено по закону Пуассона с параметром $\lambda = 73$, и в разные сутки их количество не зависит друг от друга. Определить вероятность того, что в течение года (365 дней) общее число вызовов будет в пределах от 26500 до 26800.

Ответ: 0.6422.

Задача 3. Игральная кость подбрасывается 420 раз. Какова вероятность того, что суммарное число очков будет находиться в пределах от 1400 до 1505?

Ответ: 0.8186.

Задача 4. При выстреле по мишени стрелок попадает в десятку с вероятностью 0.5, в девятку – 0.3, в восьмерку – 0.1, в семерку – 0.05, в шестерку – 0.05.

Стрелок сделал 100 выстрелов. Какова вероятность того, что он набрал не менее 900 очков?

Ответ: 0.9115.

Задача 5. Число посетителей магазина (в день) имеет распределение Пуассона с математическим ожиданием 289. При помощи центральной предельной теоремы найти приближенно вероятность того, что за 100 рабочих дней суммарное число посетителей составит от 28550 до 29250 человек. Ответ представьте в виде интеграла от нормальной стандартной плотности. Например, так $\int_{-1.25}^{2.25} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$.

Задача 6*. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ независимы и равномерно распределены на отрезке $[0;1]$. Найти вероятность того, что $\prod_{k=1}^{100} \xi_k \leqslant \frac{10}{2^{100}}$.

Ответ: 0.9995.

Задача 7. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ независимы и равномерно распределены на отрезке $[3;15]$. Найдите предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\xi_1 + ... + \xi_n > 9n + \sqrt{3n}\right\}\right)$.

Ответ: 0.3085.

Задача 8. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ независимы и распределены по закону Пуассона. Найдите предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\{\xi_1 + ... + \xi_n > \sqrt{n} + n\}\right)$, если известно, что $D\xi_1 = 1$.

Ответ: 0.1587.

Задача 9. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ независимы и распределены по закону Пуассона. Найдите предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\{\xi_1 + ... + \xi_n > 2\sqrt{n} + n\}\right)$, если известно, что $\mathbb{E}\xi_1 = 1$.

Ответ: 0.0228.

Задача 10. Для независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ найдите предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{|\xi_1 + ... + \xi_n| > \sqrt{3n}\right\}\right)$, если известна плотность распределения случайной величины ξ_1: $f_{\xi_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} e^{-\frac{x^2}{6}}$.

Ответ: 0.3173.

Задача 11. Для независимых равномерно распределенных на отрезке $[-2, 2]$ случайных величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ найдите предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{|\xi_1 + ... + \xi_n| > \sqrt{3n}\right\}\right)$.

Ответ: 0.1336.

Задача 12*. Случайные величины $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, ..., \xi_n, \eta_n, ...$ независимы и распределены по закону Пуассона. Найдите предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\xi_1 + ... + \xi_n + n > \eta_1 + ... + \eta_n + \sqrt{5n}\right\}\right)$, если известно, что $\mathbb{E}\xi_1 = 2$ и $\mathbb{E}\eta_1 = 3$.

Ответ: 0.1587.

Задача 13. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ независимы и имеют геометрическое распределение[2]. Найдите предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\xi_1 + ... + \xi_n > 3n - \sqrt{6n}\right\}\right)$, если известно, что $\mathbb{E}\xi_1 = 3$.

Ответ: 0.8413.

Задача 14*. Три стрелка поочередно ведут стрельбу по одной и той же мишени. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для каждого стрелка равны 0.4, 0.6 и 0.8. Оцените вероятность того, что число попаданий при 450 выстрелах будет заключаться в пределах от 239 до 390.

Ответ: 0.9992.

Задача 15.** Пусть ξ_n, η_n - независимые пуассоновские случайные величины с параметром n. Найдите предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\xi_n - \eta_n \leqslant \sqrt{2n}x\right\}\right)$.

Ответ: $\Phi(x)$.

Указание: воспользуйтесь тем, что если $\xi_1 \sim Pois\,(\lambda_1)$ и $\xi_2 \sim Pois\,(\lambda_2)$ независимы, то $\xi_1 + \xi_2 \sim Pois\,(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Задача 16. Для независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ найдите предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{|\xi_1 + ... + \xi_n| > \sqrt{2n}\right\}\right)$, если известна плотность распределения случайной величины ξ_1: $f_{\xi_1}(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

Задача 17. Случайные величины $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots$ независимы и имеют равномерное распределение на интервале $(0;1)$. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\{\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot ... \cdot \xi_n < e^{-n}\}\right)$.

Решение. $\mathbb{P}\left(\{\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot ... \cdot \xi_n < e^{-n}\}\right) = \mathbb{P}\left(\{\sum_{i=1}^n \ln \xi_i < -n\}\right)$.

$$\mathbb{E}\ln\xi_1 = \int_0^1 \ln x dx = \ln x \cdot x\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 x d\ln x = -\int_0^1 x\tfrac{1}{x}dx = -1$$

[2] Случайная величина ξ имеет геометрическое распределение, если $\mathbb{P}\left(\{\xi = k\}\right) = p \cdot q^{k-1}$ при $k = 1, 2, 3, ...$

$$\left\{\lim_{x\to+0}\ln x\cdot x=\lim_{x\to+0}\tfrac{\ln x}{x^{-1}}=\left[\tfrac{\infty}{\infty}\right]=-\lim_{x\to+0}\tfrac{x^{-1}}{x^{-2}}=-\lim_{x\to+0}x=0\right\}$$

$$\mathbb{E}\ln^2\xi_1=\int_0^1\ln^2 x dx=\ln^2 x\cdot x\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 xd\ln^2 x=$$

$$\left\{\lim_{x\to+0}\ln^2 x\cdot x=\lim_{x\to+0}\tfrac{\ln^2 x}{x^{-1}}=\left[\tfrac{\infty}{\infty}\right]=-\lim_{x\to+0}\tfrac{2\ln x\cdot x^{-1}}{x^{-2}}=-\lim_{x\to+0}\tfrac{2\ln x}{x^{-1}}=0\right.$$

$$=-\int_0^1 xd\ln^2 x=-\int_0^1 x\cdot 2\ln x\cdot\tfrac{1}{x}dx=-2\int_0^1\ln x dx=2.$$

$$D\left(\xi_1\right)=\mathbb{E}\ln^2\xi_1-\left(\mathbb{E}\ln\xi_1\right)^2=1.$$

Заметим, что случайные величины $\ln\xi_1,\ln\xi_2,\ldots$ независимы и одинаково распределены, $D\left(\ln\xi_i\right)=1<\infty$ при $i=1,2,\ldots$. Следовательно, к последовательности случайных величин $\{\ln\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ применима центральная предельная теорема.

$$\mathbb{P}\left(\left\{\xi_1\cdot\xi_2\cdot\ldots\cdot\xi_n<e^{-n}\right\}\right)=\mathbb{P}\left(\left\{\sum_{i=1}^n\ln\xi_i<-n\right\}\right)=$$

$$=\mathbb{P}\left(\left\{\frac{\sum_{i=1}^n\ln\xi_i-\mathbb{E}\sum_{i=1}^n\ln\xi_i}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^n\ln\xi_i\right)}}<\frac{-n-\mathbb{E}\sum_{i=1}^n\ln\xi_i}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^n\ln\xi_i\right)}}\right\}\right)=$$

$$= \mathbb{P}\left(\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln\xi_i - \mathbb{E}\sum_{i=1}^{n}\ln\xi_i}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^{n}\ln\xi_i\right)}} < \frac{-n-(-n)}{\sqrt{n}}\right\}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln\xi_i - \mathbb{E}\sum_{i=1}^{n}\ln\xi_i}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^{n}\ln\xi_i\right)}} < 0\right\}\right) \to \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Задача 18. Известно, что $\xi_1, \xi_2, \ldots$- независимые одинаково распределенные случайные величины имеют равномерное распределение на интервале $(-c; c)$, $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$.

При каком значении параметра c $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} < 2\right\}\right) = \frac{3}{4}$?

Решение. Известно, что если $\xi \sim U\left((a;b)\right)$, то $\mathbb{E}\xi = \frac{a+b}{2}$ и $D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Следовательно, $\mathbb{E}\xi_1 = 0$ и $D\xi_1 = \frac{c^2}{3}$.

$$\mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} < 2\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\left\{S_n < 2\sqrt{n}\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{D\left(S_n\right)}} < \frac{2\sqrt{n} - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{D\left(S_n\right)}}\right\}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{D\left(S_n\right)}} < \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{c^2 n}{3}}}\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{D\left(S_n\right)}} < \frac{2\sqrt{3}}{c}\right\}\right) \to \int_{-\infty}^{\frac{2\sqrt{3}}{c}} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{c} = 0.6745 \Rightarrow c = 5.1358.$$

Ответ: $c = 5.1358$.

Задача 19. Пусть ξ_1, ξ_2, $\ldots$- независимые одинаково распределенные случайные величины с $\mathbb{E}\xi_1 = 0$, $D\xi_1 = \sigma^2$; $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$.

При каком значении параметра σ $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} > 1\right\}\right) = \frac{1}{3}$?

Ответ: $\sigma \approx 2.32$.

Задача 20*. Пусть ξ_1, ξ_2, $\ldots$- независимые одинаково распределенные случайные величины с $\mathbb{E}\xi_1 = 0$, $D\xi_1 = 1$; $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$.

Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{S_n \leqslant 1\})$.

Решение. $\mathbb{E}S_n = 0$, $DS_n = n$.

$$\mathbb{P}(\{S_n \leqslant 1\}) = \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant \frac{1 - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}}\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant$$

Покажем, что $\mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\right\}\right) \to \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$ при $n \to \infty$.

Поскольку последовательность $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ при $n \to \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N \in \mathbb{N}$, что для всех номеров $n \geqslant N$ выполнено неравенство $\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \varepsilon$.

Значит, для любого $n \geqslant N$ выполнено следующее вложение

$$\left\{\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant 0\right\} \subseteq \left\{\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\right\} \subseteq \left\{\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant \varepsilon\right\}.$$

Следовательно,

$$\mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant 0\right\}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\right\}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}}\right.\right.$$

По центральной предельной теореме $\mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n-\mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}}\leqslant 0\right\}\right)\to \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy$ и $\mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n-\mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}}\leqslant \varepsilon\right\}\right)\to \int_{-\infty}^{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy$ при $n\to\infty$.

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy\leqslant \liminf_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n-\mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}\right)\leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n-\mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}\right)\leqslant \int_{-\infty}^{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy.$$

Поскольку $\varepsilon>0$ - произвольное число, то можно перейти в последнем неравенстве к пределу при $\varepsilon\to+0$.

Следовательно,

$$\liminf_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n-\mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}\right)=\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n-\mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}\right)=\int$$

Значит, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n-\mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}\right)=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy=\frac{1}{2}$.

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\{S_n\leqslant 1\}\right)=\frac{1}{2}$.

Задача 21*. Пусть $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots$- независимые одинаково распределенные случайные величины с $\mathbb{E}\xi_1=0$, $D\xi_1=1$; $S_n=\xi_1+...+\xi_n$.

Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\{S_n\leqslant -1\}\right)$.

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\{S_n\leqslant -1\}\right)=\frac{1}{2}$.

Задача 22*. Пусть $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots$- независимые одинаково распределенные случайные величины с $\mathbb{E}\xi_1=\mu$, $D\xi_1=\sigma^2$;

$S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - сходящаяся числовая последовательность, $a_n \to a \in \mathbb{R}$ при $n \to \infty$.

Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant a_n\right\}\right)$.

Решение. Покажем, что $\mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant a_n\right\}\right) \to \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y\right.$ при $n \to \infty$.

Поскольку последовательность $a_n \to a$ при $n \to \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N \in \mathbb{N}$, что для всех номеров $n \geqslant N$ выполнено неравенство $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$.

Значит, для любого $n \geqslant N$ выполнено следующее вложение

$$\left\{\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant a - \varepsilon\right\} \subseteq \left\{\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant a_n\right\} \subseteq \left\{\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant a + \varepsilon\right\}.$$

Следовательно,

$$\mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant a - \varepsilon\right\}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant a_n\right\}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n - \mathbb{E}}{\sqrt{DS}}\right.\right.$$

По центральной предельной теореме $\mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant a - \varepsilon\right\}\right) \to \int_{-\infty}^{a-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$ и $\mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant a + \varepsilon\right\}\right) \to \int_{-\infty}^{a+\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$ при $n \to \infty$.

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{a-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant a_n\right\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant a_n\right\}\right) \leqslant \int_{-\infty}^{a+\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ - произвольное число, то можно перейти в последнем неравенстве к пределу при $\varepsilon \to +0$.

Следовательно,

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant a_n\right\}\right) = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant a_n\right\}\right) = \int_{-\infty}^{a}$$

Значит, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n-\mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant a_n\right\}\right) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$.

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n-\mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant a_n\right\}\right) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$.

Задача 23*. Пусть ξ_1, ξ_2, $\ldots$- независимые одинаково распределенные случайные величины с $\mathbb{E}\xi_1 = 0$, $D\xi_1 = 1$; $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$.

Найдите следующие пределы

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n}{n} \leqslant 1\right\}\right)$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n}{n} \leqslant 0\right\}\right)$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n}{n} \leqslant -1\right\}\right)$

Решение.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n}{n} \leqslant 1\right\}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\{S_n \leqslant n\}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n-\mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant \frac{n-\mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}}\right.\right.$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant \frac{n-0}{\sqrt{n}}\right\}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant \sqrt{n}\right\}\right)$$

Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n-\mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant \sqrt{n}\right\}\right) \to \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$ при $n \to \infty$.

Поскольку последовательность $\sqrt{n} \to +\infty$ при $n \to \infty$, то для любого $A > 0$ найдется такой номер $N \in \mathbb{N}$, что для всех номеров $n \geqslant N$ выполнено неравенство $\sqrt{n} \geqslant A$.

Значит, для любого $n \geqslant N$ выполнено следующее вложение

$$\left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant A \right\} \subseteq \left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant \sqrt{n} \right\}.$$

Следовательно,

$$\mathbb{P}\left(\left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant A \right\}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant \sqrt{n} \right\}\right).$$

По центральной предельной теореме $\mathbb{P}\left(\left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant A \right\}\right) \to \int_{-\infty}^{A} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$ при $n \to \infty$.

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{A} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant \sqrt{n} \right\}\right).$$

Поскольку $A > 0$ - произвольное число, то можно перейти в последнем неравенстве к пределу при $A \to +\infty$.

Следовательно,

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant \sqrt{n} \right\}\right) = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant \sqrt{n} \right\}\right) =$$

Значит, существует предел $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{ \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant \sqrt{n} \right\}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = 1$.

Ответы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n}{n} \leqslant 1\right\}\right) = 1.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n}{n} \leqslant 0\right\}\right) = \frac{1}{2}.$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n}{n} \leqslant -1\right\}\right) = 0.$

Задача 24*. Пусть $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечной положительной дисперсией. Какие значения могут принимать пределы $(x,\ a,\ b \in \mathbb{R})$:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\{\xi_1 + ... + \xi_n \leqslant x\}\right);$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\{a \leqslant \xi_1 + ... + \xi_n \leqslant b\}\right)?$

1. *Ответ:* $0,\ \frac{1}{2},\ 1.$

2. *Ответ:* $0.$

Задача 25.** Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и принимают с равными вероятностями значения 1, 2 и 4. Пусть $\eta_n = \sqrt[n]{\xi_1 \cdot ... \cdot \xi_n}$ - среднее геометрическое первых n случайных величин $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots$ Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\eta_n \leqslant 2 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right\}\right)$.

Решение.

$$\mathbb{P}\left(\left\{\eta_n \leqslant 2 + \tfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\left\{\log_2 \eta_n \leqslant \log_2\left(2 + \tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log_2 \xi\right.\right.$$

$$= \mathbb{P}\left(\left\{\sum_{i=1}^{n} \log_2 \xi_i \leqslant n\log_2\left(2 + \tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} \log_2 \xi_i - \mathbb{E}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{lo}}{\sqrt{D\sum_{i=1}^{n} \log_2 \xi_i}}\right.\right.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\log_2\left(2+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-n}{\sqrt{\frac{2}{3}n}}=\sqrt{\tfrac{3}{2}}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}\log_2\left(2+\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)-\sqrt{n}\right)=\{\sqrt{}$$

$$=\sqrt{\tfrac{3}{2}}\lim_{x\to+\infty}\left(x\log_2\left(2+\tfrac{1}{x}\right)-x\right)=\sqrt{\tfrac{3}{2}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_2\left(2+\frac{1}{x}\right)-1}{\frac{1}{x}}=\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,{}_{x}$$

$$=\sqrt{\tfrac{3}{2}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{2+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\sqrt{\tfrac{3}{2}}\cdot\tfrac{1}{2\ln 2}.$$

Итак, $\frac{n\log_2\left(2+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-n}{\sqrt{\frac{2}{3}n}}\to\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\ln 2}$ при $n\to\infty$.

Из задачи № 22 следует, что

$\mathbb{P}\left(\left\{\frac{\sum_{i=1}^n\log_2\xi_i-\mathbb{E}\sum_{i=1}^n\log_2\xi_i}{\sqrt{D\sum_{i=1}^n\log_2\xi_i}}\leqslant\frac{n\log_2\left(2+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-n}{\sqrt{\frac{2}{3}n}}\right\}\right)\to\int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\ln 2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e$
при $n\to\infty$.

$$\int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\ln 2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy\approx 0.8115.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\left\{\eta_n\leqslant 2+\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}\right)\approx 0.8115.$

Листок 8 по ТВ и МС 2013–2014 [08.03.2014]

1

Кафедра математической экономики и эконометрики НИУ ВШЭ. Борзых Д. А.

Листок 8

Абсолютно непрерывные случайные векторы

Определение 1. *Функцией распределения случайного вектора* (X,Y) называется такая функция $F_{X,Y}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to[0;1]$, что

$$F_{X,Y}(x,y)=\mathbb{P}(\{X\leqslant x\}\bigcap\{Y\leqslant y\}).$$

Утверждение 1. Пусть $F_{X,Y}$ – функция распределения случайного вектора (X,Y). Тогда $F_X(x)=\lim_{y\to+\infty}F_{X,Y}(x,y)$ и $F_Y(y)=\lim_{x\to+\infty}F_{X,Y}(x,y)$.

Определение 2. Случайный вектор (X,Y) называется *абсолютно непрерывным*, если существует такая неотрицательная интегрируемая функция $f_{X,Y}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, что

$$\mathbb{P}(\{(X,Y)\in B\})=\iint_B f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

для любого множества $B\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, для которого вероятность $\mathbb{P}(\{(X,Y)\in B\})$ определена. При этом функция $f_{X,Y}$ называется *плотностью распределения случайного вектора* (X,Y).

Замечание 1. Если в определении 2 в качестве множества B взять $(-\infty;x]\times(-\infty;y]$, то

$$F_{X,Y}(x,y)=\mathbb{P}(\{X\leqslant x\}\bigcap\{Y\leqslant y\})=\mathbb{P}(\{(X,Y)\in(-\infty;x]\times(-\infty;y]\})$$

$$=\iint_{(-\infty;x]\times(-\infty;y]}f_{X,Y}(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f_{X,Y}(x,y)dxdy.$$

Утверждение 2. Пусть $C\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ — множество, на котором плотность $f_{X,Y}$ непрерывна. Тогда на множестве C имеет место равенство

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_{X,Y}(x,y).$$

Утверждение 3. Пусть случайный вектор (X, Y) является абсолютно непрерывным. Тогда $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)dy$ и $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)dx$.

Утверждение 4. Пусть случайный вектор (X, Y) является абсолютно непрерывным. Тогда если интеграл $\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |h(x, y)| f_{X,Y}(x, y)dxdy$ сходится, то

1. (a) $\mathbb{E}h(X, Y)$ существует,

   (b) $\mathbb{E}h(X, Y) = \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} h(x, y) f_{X,Y}(x, y)dxdy$.

Определение 3. Пусть $f_{X,Y}(x, y)$ — плотность случайного вектора (X, Y) и $f_Y(y)$ — плотность случайной величины Y. Тогда *условной плотностью распределения случайной величины X при условии $\{Y = y\}$* называется

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, & \text{5A; 8 } f_Y(y) \neq 0, \\ 0, & \text{5A; 8 } f_Y(y) = 0. \end{cases}$$

Определение 4. Пусть случайный вектор (X, Y) является абсолютно непрерывным. Тогда *условным математическим ожиданием случайной величины X при условии* $\{Y = y\}$ называется

$$\mathbb{E}[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y)dx.$$

Определение 5. Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если

$$\mathbb{P}(\{X \in B_1\} \bigcap \{Y \in B_2\}) = \mathbb{P}(\{X \in B_1\}) \cdot \mathbb{P}(\{Y \in B_2\})$$

для любых множеств $B_1, B_2 \subseteq \mathbb{R}$, для которых вероятности $\mathbb{P}(\{X \in B_1\})$ и $\mathbb{P}(\{Y \in B_2\})$ определены.

Утверждение 5 (критерий независимости). (i) Случайные величины X и Y независимы тогда и только тогда, когда

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}$.

(ii) Если случайный вектор (X, Y) является абсолютно непрерывным, то случайные величины независимы в том и только в том случае, когда

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}$.

Определение 6. Случайный вектор (X, Y) имеет *равномерное распределение на множестве* $B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, пишут $(X, Y) \sim U(B)$, если

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\mu(B)}, & \text{5A;8 } (x,y) \in B, \\ 0, & \text{5A;8 } (x,y) \notin B. \end{cases}$$

Здесь $\mu(B)$ — площадь множества B.

Определение 7. Случайный вектор (X, Y) имеет *нормальное распределение с параметрами* μ и Σ, пишут $(X, Y) \sim N(\mu, \Sigma)$, если

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho}{\sigma_1\sigma_2}(x-\mu_1)(y-\mu_2) + \right.\right.$$

где $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ — произвольный вектор и $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ — положительно определенная матрица.

Задача 1. Пусть плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид $f_{X,Y}(x,y) = ce^{-4x^2-6xy-9y^2}$. Найдите

1. c,
2. $f_X(x)$, $f_Y(y)$,
3. $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}Y$,
4. $\mathbb{E}[X^2]$, $\mathbb{E}[Y^2]$, $\mathbb{E}[XY]$,
5. $D[X]$, $D[Y]$, $cov(X,Y)$, $corr(X,Y)$,
6. $f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$,
7. $\mathbb{E}[X|Y=y]$, $\mathbb{E}[Y|X=x]$.
8. Являются ли случайные величины X и Y независимыми?
9. Являются ли случайные величины X и Y некоррелированными?

Ответы:

1. $c = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$,
2. $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi/3}} e^{-3x^2}$, т.е. $X \sim N(0, \frac{1}{6})$, и $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi/27}} e^{-27y^2/4}$, т.е. $Y \sim N(0, \frac{2}{27})$,
3. $\mathbb{E}X = 0$, $\mathbb{E}Y = 0$,
4. $\mathbb{E}[X^2] = 1/6$, $\mathbb{E}[Y^2] = 2/27$, $\mathbb{E}[XY] = -1/18$,
5. $D[X] = 1/6$, $D[Y] = 2/27$, $cov(X,Y) = -1/18$, $corr(X,Y) = -\frac{1}{2}$,
6. $f_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot\frac{1}{8}}} e^{-\frac{(x+\frac{3}{4}y)^2}{2\cdot\frac{1}{8}}}$, т.е. $X|\{Y = y\} \sim N(-\frac{3}{4}y, \frac{1}{8})$.

Задача 2. Пусть плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид $f_{X,Y}(x, y) = ce^{-\frac{1}{2}(x^2+2y^2-xy-3x-2y+4)}$. Найдите

1. c,
2. $f_X(x)$, $f_Y(y)$,
3. $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}Y$,
4. $\mathbb{E}[X^2]$, $\mathbb{E}[Y^2]$, $\mathbb{E}[XY]$,
5. $D[X]$, $D[Y]$, $cov(X, Y)$, $corr(X, Y)$,
6. $f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$,
7. $\mathbb{E}[X|Y = y]$, $\mathbb{E}[Y|X = x]$.
8. Являются ли случайные величины X и Y независимыми?
9. Являются ли случайные величины X и Y некоррелированными?

Задача 3. Найдите плотность нормального случайного вектора (X, Y), который имеет

1. $\mathbb{E}X = 0$, $\mathbb{E}Y = 0$, $D[X] = 1$, $D[Y] = 2$, $cov(X, Y) = -1$,
2. $\mathbb{E}X = 1$, $\mathbb{E}Y = -1$, $D[X] = 2$, $D[Y] = 4$, $cov(X, Y) = 1$.

Задача 4. Пусть плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2} & \text{?@8 } (x, y) \in B, \\ 0 & \text{?@8 } (x, y) \notin B, \end{cases}$$

где $B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$, $R > 0$. Найдите

1. $\mathbb{P}(\{(X,Y) \in C\})$, где $C = [0; R/\sqrt{2}] \times [0; R/\sqrt{2}]$,

2. $\mathbb{P}(\{(X,Y) \in C\})$, где $C = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leqslant R^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$,

3. $f_X(x)$, $f_Y(y)$,

4. $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}Y$,

5. $\mathbb{E}[X^2]$, $\mathbb{E}[Y^2]$, $\mathbb{E}[XY]$,

6. $D[X]$, $D[Y]$, $cov(X,Y)$, $corr(X,Y)$,

7. $f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$,

8. $\mathbb{E}[X|Y=y]$, $\mathbb{E}[Y|X=x]$.

9. Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

10. Являются ли случайные величины X и Y некоррелированными?

Решение. (a) $\mathbb{P}(\{(X,Y) \in C\}) = \iint_C f_{X,Y}(x,y)dxdy = \iint_C \frac{1}{\pi R^2}\mathbb{I}_B(x,y)dxdy = \iint_{C\bigcap B} \frac{1}{\pi R^2}dxdy =$

$= \frac{1}{\pi R^2}\mu(C\bigcap B) = \frac{1}{\pi R^2}\mu(C) = \frac{1}{\pi R^2}\frac{R}{\sqrt{2}}\frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\pi}$. Здесь $\mu(C)$ — площадь множества C.

(b) $\mathbb{P}(\{(X,Y) \in C\}) = \iint_C f_{X,Y}(x,y)dxdy = \iint_C \frac{1}{\pi R^2}\mathbb{I}_B(x,y)dxdy =$ $\iint_{C\bigcap B} \frac{1}{\pi R^2}dxdy =$

$$= \iint_C \frac{1}{\pi R^2}dxdy = \int_0^{\pi/2}\int_0^R \frac{1}{\pi R^2}\rho d\varphi d\rho = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^R \rho d\rho\right]d\varphi = \frac{1}{\pi R^2}$$

(c) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi R^2}\mathbb{I}_B(x,y)dy =$

$$= \begin{cases} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{\pi R^2} dy & ?@8\ x \in [-R; R], \\ 0 & ?@8\ x \notin [-R; R], \end{cases} = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2} & ?@8\ x \in [-R; R], \\ 0 & ?@8\ x \notin [-R; R], \end{cases}$$

Аналогично получаем, что

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi R}\sqrt{1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2} & ?@8\ y \in [-R; R], \\ 0 & ?@8\ y \notin [-R; R]. \end{cases}$$

(d) $\mathbb{E}[X] = \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} x f_{X,Y}(x,y)dxdy = \iint_B x\frac{1}{\pi R^2}dxdy = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R\int_0^{2\pi} \rho\cos\varphi \cdot \rho d\rho d\varphi =$

$$= \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R \rho^2 d\rho \cdot \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = 0.$$

Аналогично получаем $\mathbb{E}[Y] = 0$.

(e) $\mathbb{E}[X^2] = \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} x^2 f_{X,Y}(x,y)dxdy = \iint_B x^2\frac{1}{\pi R^2}dxdy = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R\int_0^{2\pi} \rho^2\cos^2\varphi \cdot \rho d\rho d\varphi =$

$$= \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R \rho^3 d\rho \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi R^2}\ \frac{\rho^4}{4}\Big|_{\rho=0}^{\rho=R} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)d\varphi = \frac{1}{\pi R^2}\frac{R^4}{4}\frac{2\pi}{2}$$

Аналогично получаем $\mathbb{E}[Y^2] = \frac{R^2}{4}$. Далее,

$$\mathbb{E}[XY] = \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} xy f_{X,Y}(x,y)dxdy = \iint_B xy\frac{1}{\pi R^2}dxdy = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R\int_0^{2\pi} \rho^2 \cos$$

$$= \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R \rho^3 d\rho \cdot \int_0^{2\pi} \cos\varphi\sin\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi R^2}\ \frac{\rho^4}{4}\Big|_{\rho=0}^{\rho=R} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\sin 2\varphi)d\varphi = \frac{1}{\pi R^2}\frac{R^4}{4}\cdot$$

(f) $D[X]=\mathbb{E}[X^2]-[\mathbb{E}X]^2=\frac{R^2}{4}$, $D[Y]=\mathbb{E}[Y^2]-[\mathbb{E}Y]^2=\frac{R^2}{4}$, $cov(X,Y)=\mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]=0$, $corr(X,Y)=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=0$.

(g) $f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, & 5A;8\ \ f_Y(y)\neq 0,\\ 0, & 5A;8\ \ f_Y(y)=0,\end{cases} = \begin{cases}\frac{\frac{1}{\pi R^2}}{\frac{2}{\pi R}\sqrt{1-\left(\frac{y}{R}\right)^2}}, & \\ 0, & 5A\end{cases}$

$=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{R^2-y^2}}, & 5A;8\ \ (x,y)\in B,\\ 0, & 5A;8\ \ (x,y)\in B.\end{cases}$

Аналогично получаем, что

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}, & 5A;8\ \ f_X(x)\neq 0,\\ 0, & 5A;8\ \ f_X(x)=0,\end{cases} = \begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{R^2-x^2}}, & 5A;8\ \ (x,\\ 0, & 5A;8\ \ (x,\end{cases}$$

Листок 9 по ТВ и МС 2013–2014 [08.03.2014]

1

Кафедра математической экономики и эконометрики НИУ ВШЭ. Борзых Д. А.

Листок 9

Основные способы получения точечных оценок

1. Метод моментов

Задача 1. Пусть $X=(X_1,...,X_n)$ – случайная выборка из равномерного распределения на отрезке $[0;\theta]$, $\theta>0$. При помощи метода моментов найдите оценку для неизвестного параметра θ.

Ответ: $\widehat{\theta}_{MM}=2\overline{X}$.

Задача 2. Пусть $X=(X_1,...,X_n)$ – случайная выборка из равномерного распределения на отрезке $[-\theta;\theta]$, $\theta>0$. При помощи метода моментов найдите оценку для неизвестного параметра θ. Для решения используйте центральный момент 2-го порядка.

Ответ: $\widehat{\theta}_{MM} = \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(X_j - \overline{X}\right)^2}$.

Задача 3. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ – случайная выборка из равномерного распределения на отрезке $[\theta_1, \theta_2]$, где $\theta_1 < \theta_2$. Найдите оценки неизвестных параметров θ_1 и θ_2 по первым двум моментам.

Задача 4. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ – случайная выборка из распределения с функцией распределения $F(x;\theta) = 1 - e^{-\frac{x^2}{\theta}}$, $x \geqslant 0$, $\theta > 0$. При помощи метода моментов найдите оценку неизвестного параметра θ.

Решение. Плотность распределения компонент случайной выборки имеет вид

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta} \cdot e^{-\frac{x^2}{\theta}} & ?@8 \quad x > 0, \\ 0 & ?@8 \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\mu_1 = \mathbb{E}X_j^1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x;\theta)\,dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}}\,dx =$$

$$= -\int_0^{+\infty} x d e^{-\frac{x^2}{\theta}} = -\left[x e^{-\frac{x^2}{\theta}} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\theta}}\,dx \right] = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\theta}}\,dx =$$

Поясним последнее равенство $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\theta}}\,dx = \frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}$. Известно, что для любого $\sigma^2 > 0$ $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{\sqrt{2\pi\sigma^2}}{2}$. Положим $2\sigma^2 = \theta$. Следовательно, $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\theta}}\,dx = \frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}$.

Для нахождения оценки неизвестного параметра θ по методу моментов составляем моментное тождество

$$\mu_1 = \widehat{\mu}_1,$$

из которого получаем уравнение

$$\tfrac{\sqrt{\pi\theta}}{2} = \overline{X}.$$

Таким образом, имеем $\widehat{\theta}_{MM} = \frac{4}{\pi}\left(\overline{X}\right)^2$.

Ответ: $\widehat{\theta}_{MM} = \frac{4}{\pi}\left(\overline{X}\right)^2$.

Задача 5. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ – случайная выборка из распределения с плотностью распределения $f(x;\theta) = \begin{cases} \theta \cdot x^{\theta-1}, & x \in (0;1] \\ 0, & x \notin (0;1] \end{cases}$, $\theta > 0$. Найдите при помощи метода моментов оценку неизвестного параметра θ.

Задача 6. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ – случайная выборка из распределения Рэлея с плотностью распределения $f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{x}{\theta} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\theta}}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, $\theta > 0$.

1. Найдите при помощи метода моментов оценку неизвестного параметра θ по первому начальному моменту.

2. Найдите при помощи метода моментов оценку неизвестного параметра θ по второму начальному моменту.

3. Найдите при помощи метода моментов оценку неизвестного параметра θ по третьему начальному моменту.

Задача 7. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ – случайная выборка из логнормального распределения с плотностью распределения $f(x;a) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}\right\}, & x \geqslant 0 \\ 0, \quad x < 0 \end{cases}$, где $a \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$. Найдите при помощи метода моментов оценки неизвестных параметров a и σ^2.

Задача 8. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ – случайная выборка из распределения с плотностью распределения $f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \cdot x^{\left(-1+\frac{1}{\theta}\right)}, & x \in (0;1) \\ 0, & x \notin (0;1) \end{cases}$, $\theta > 0$. Постройте оценку параметра θ методом моментов.

Ответ: $\widehat{\theta} = \frac{1}{\overline{X}} - 1$.

Задача 9. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ – случайная выборка. Случайные величины $X_1, ..., X_n$ имеют дискретное распределение, которое задано при помощи таблицы

X_i	-3	0	2
$\mathbb{P}_{X_i}$	$2/3 - \theta$	$1/3$	θ

При помощи метода моментов найдите оценку для неизвестного параметра θ.

Задача 10. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ – случайная выборка. Случайные величины $X_1, ..., X_n$ имеют дискретное распределение, которое задано при помощи таблицы

X_i	-4	0	3
$\mathbb{P}_{X_i}$	$3/4 - \theta$	$1/4$	θ

При помощи метода моментов найдите оценку для неизвестного параметра θ.

1. Метод максимального правдоподобия

Задача 11. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ – случайная выборка из равномерного распределения на отрезке $[0;\theta]$, где $\theta > 0$. Найти при помощи метода максимального правдоподобия оценку неизвестного параметра θ.

Ответ: $\widehat{\theta} = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \{X_j\}$.

Задача 12. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ – случайная выборка из показательного распределения с плотностью распределения $f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, где $\theta > 0$. Постройте оценку параметра θ методом максимального правдоподобия.

Ответ: $\widehat{\theta} = \overline{X}$.

Задача 13. Найдите методом максимального правдоподобия по случайной выборке $X = (X_1, ..., X_n)$ точечную оценку геометрического распределения $P(\{X_j = x_j\}) = p \cdot (1-p)^{x_j - 1}$, где x_j - число испытаний до появления "успеха"; p – вероятность появления "успеха" в одном испытании.

Ответ: $\widehat{p} = \frac{1}{\overline{X}}$.

Задача 14. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ – случайная выборка из нормального распределения $N(\theta, 2\theta)$. Постройте оценку параметра θ методом максимального правдоподобия. Проверьте, является ли построенная оценка состоятельной.

Задача 15. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ – случайная выборка из равномерного распределения с плотностью распределения $f(x;\theta) = \begin{cases} 1, & x \in \left[\theta - \frac{1}{2}; \theta + \frac{1}{2}\right] \\ 0, & x \notin \left[\theta - \frac{1}{2}; \theta + \frac{1}{2}\right] \end{cases}$, где $\theta \in \mathbb{R}$. Постройте оценку параметра θ методом максимального правдоподобия.

Задача 16*. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ – случайная выборка из распределения с плотностью распределения $f(x;\theta) = \frac{1}{2} \cdot e^{-|x-\theta|}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Постройте оценку параметра θ методом максимального правдоподобия. Покажите, что эта оценка совпадает с выборочной медианой.

Ответ: если $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, то $\widehat{\theta} \in \left[X_{(k)}; X_{(k+1)}\right]$, если $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, то $\widehat{\theta} = X_{(k+1)}$.

Задача 17. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ – случайная выборка из распределения с плотностью распределения $f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \cdot x^{\left(-1+\frac{1}{\theta}\right)}, & x \in (0;1) \\ 0, & x \notin (0;1) \end{cases}$, $\theta > 0$. Постройте оценку параметра θ методом максимального правдоподобия.

Ответ: $\widehat{\theta} = -\frac{\sum_{j=1}^{n} \ln X_j}{n}$.

Задача 18. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ – случайная выборка из распределения с функцией распределения $F(x;\theta) = 1 -$

$e^{-\frac{x^2}{\theta}}$, $x \geqslant 0$, $\theta > 0$. При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценку неизвестного параметра θ.

Решение. Плотность распределения компонент случайной выборки имеет вид

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta} \cdot e^{-\frac{x^2}{\theta}} & ?@8 \quad x > 0, \\ 0 & ?@8 \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

Следовательно, функция правдоподобия равна

$$L(x_1, ..., x_n; \theta) = \prod_{j=1}^{n} f_{X_j}(x_j; \theta) = \prod_{j=1}^{n} \frac{2x_j}{\theta} \cdot e^{-\frac{x_j^2}{\theta}} = \frac{\prod_{j=1}^{n} 2x_j}{\theta^n} \cdot e^{-\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}{\theta}}.$$

Значит, логарифмическая функция правдоподобия имеет вид

$$l(x_1, ..., x_n; \theta) = \ln \prod_{j=1}^{n} 2x_j - n \ln \theta - \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}{\theta}.$$

Для нахождения оценки неизвестного параметра θ при помощи метода максимального правдоподобия составляем уравнение правдоподобия

$$\frac{dl}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}{\theta^2} = 0,$$

решая которое, получаем

$$\widehat{\theta}_{ML} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j^2.$$

Ответ: $\widehat{\theta} = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j^2}{n}$.

Задача 19. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ – случайная выборка;

$$X_j = \begin{cases} 1, & A\ 25@.\ \theta \\ 2, & A\ 25@.\ 2\theta \\ 3, & A\ 25@.\ (1-3\theta) \end{cases}, \text{ где } j=\overline{1,n};\ 0<\theta<\tfrac{1}{3}.$$

Построить оценку неизвестного параметра θ методом максимального правдоподобия.

Ответ: $\widehat{\theta} = \frac{Y_1+Y_2}{3n}$, где $Y_1 = \sum_{j=1}^{n} 1_{\{X_j=1\}}$ - число "единиц"; $Y_2 = \sum_{j=1}^{n} 1_{\{X_j=2\}}$ - число "двоек" в случайной выборке.

Задача 19. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ – случайная выборка;

$$X_j = \begin{cases} 0, & A\ 25@.\ \theta \\ 1, & A\ 25@.\ \theta \\ 2, & A\ 25@.\ (1-2\theta) \end{cases}, \text{ где } j=\overline{1,n};\ 0<\theta<\tfrac{1}{2}.$$

Построить оценку неизвестного параметра θ методом максимального правдоподобия.

Ответ: $\widehat{\theta} = \frac{1}{2} - \frac{Y_2}{2n}$, где $Y_2 = \sum_{j=1}^{n} 1_{\{X_j=2\}}$ - число "двоек" в случайной выборке.

Задача 20. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ – случайная выборка;

$$X_j = \begin{cases} -1, & A\ 25@.\ \theta \\ 0, & A\ 25@.\ (1-2\theta) \\ 1, & A\ 25@.\ \theta \end{cases}, \text{ где } j=\overline{1,n};\ 0<\theta<\tfrac{1}{2}.$$

Построить оценку неизвестного параметра θ методом максимального правдоподобия.

Ответ: $\widehat{\theta} = \frac{1}{2} - \frac{Y_0}{2n}$, где $Y_0 = \sum_{j=1}^{n} 1_{\{X_j=0\}}$ - число нулей в случайной выборке.

Задача 21. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ – случайная выборка. Случайные величины $X_1, ..., X_n$ имеют дискретное распределение, которое задано при помощи таблицы

X_i	-3	0	2
$\mathbb{P}_{X_i}$	$2/3-\theta$	$1/3$	θ

При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценку для неизвестного параметра θ.

Задача 22. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ – случайная выборка. Случайные величины $X_1, ..., X_n$ имеют дискретное распределение, которое задано при помощи таблицы

X_i	-4	0	3
$\mathbb{P}_{X_i}$	$3/4-\theta$	$1/4$	θ

При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценку для неизвестного параметра θ.

Задача 23. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ – случайная выборка из распределения Вейбулла с плотностью распределения

$$f\left(x;\lambda\right) = \begin{cases} \frac{2x}{\lambda^2}\exp\left(-\frac{x^2}{\lambda^2}\right) & ?@8 \quad x \geqslant 0, \\ 0 & ?@8 \quad x < 0, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$ - неизвестный параметр распределения.

При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценку для неизвестного параметра λ.

Решение.

$$L\left(x_1, ..., x_n; \lambda\right) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}\left(x_i; \lambda\right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{\lambda^2}\exp\left(-\frac{x_i^2}{\lambda^2}\right) = \frac{2\prod_{i=1}^{n} x_i \cdot \lambda^{2n}}{\lambda^{2n}}\mathrm{ex}$$

$$l\left(x_1, ..., x_n; \lambda\right) = \ln L\left(x_1, ..., x_n; \lambda\right) = \ln\left(2\prod_{i=1}^{n} x_i\right) - 2n\ln\lambda - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\lambda^2}.$$

$$\frac{dl\left(x_1, ..., x_n; \lambda\right)}{d\lambda} = -\frac{2n}{\lambda} + 2\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\lambda^3} = 0.$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}.$$

Ответ: $\widehat{\lambda} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}}$.

Пособие по методу моментов и методу максимального правдоподобия [08.03.2014]

1

Кафедра математической экономики и эконометрики НИУ ВШЭ. Борзых Д. А.

1. Метод моментов

Задача 1. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ – случайная выборка из показательного (экспоненциального) распределения с плотностью распределения $f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, где $\lambda > 0$. При помощи метода моментов найдите оценку для неизвестного параметра λ.

Решение. Для нахождения неизвестного параметра λ при помощи метода моментов составим моментное тождество

$$\mu_1 = \widehat{\mu}_1,$$

где $\mu_1 = \mathbb{E}X_j^1$ – теоретический начальный момент 1-го порядка, $\widehat{\mu}_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j^1 = \overline{X}$ – выборочный начальный момент 1-го порядка.

Найдемμ_1.

$$\mu_1 = \mathbb{E}X_j^1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{X_j}(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx =$$

$$= -\int_0^{+\infty} x de^{-\lambda x} = -\left[x e^{-\lambda x}\Big|_{x=0}^{x=+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \right] = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx =$$

В результате мы получаем уравнение

$$\tfrac{1}{\lambda} = \overline{X}.$$

Решая это уравнение, мы приходим к следующей оценке для неизвестного параметра λ.

$$\widehat{\lambda}_{MM} = \frac{1}{\overline{X}}.$$

Ответ: $\widehat{\lambda}_{MM} = \frac{1}{\overline{X}}$.

Задача 2. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ – случайная выборка из нормального распределения с плотностью распределения $f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$, где $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$.

При помощи метода моментов найдите оценки для неизвестных параметров μ и σ^2.

Решение. Для нахождения неизвестных параметров μ и σ^2 методом моментов составим два моментных тождества

$$\mu_1 = \widehat{\mu}_1,$$

$$\mu_2 = \widehat{\mu}_2,$$

где $\mu_1 = \mathbb{E}X_j^1$ и $\mu_2 = \mathbb{E}\left(X_j^2\right)$ – теоретические начальные моменты 1-го и 2-го порядка соответственно, $\widehat{\mu}_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j^1 = \overline{X}$ и $\widehat{\mu}_2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j^2 = \overline{X^2}$ – выборочные начальные моменты 1-го и 2-го порядка соответственно.

Известно, что если случайная величина $X_j \sim N(\mu, \sigma^2)$, то $\mathbb{E}X_j = \mu$ и $DX_j = \sigma^2$. Тогда учитывая, что $\mathbb{E}\left(X_j^2\right) = DX_j + (\mathbb{E}X_j)^2$, получаем, что $\mu_1 = \mu$ и $\mu_2 = \sigma^2 + \mu^2$.

Получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \mu = \overline{X}, \\ \sigma^2 + \mu^2 = \overline{X^2}, \end{cases}$$

из которой следует, что $\widehat{\mu}_{MM} = \overline{X}$ и $\widehat{\sigma}^2_{MM} = \overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2$.

Ответ: $\widehat{\mu}_{MM} = \overline{X}$ и $\widehat{\sigma}^2_{MM} = \overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2$.

Замечание. Непосредственной проверкой можно установить, что $\overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \left(X_j - \overline{X}\right)^2$.

Задача 3. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ – случайная выборка из распределения Бернулли с параметром$p \in (0; 1)$. При помощи метода моментов найдите оценку для неизвестного параметра p.

Решение. Для нахождения неизвестного параметра p при помощи метода моментов составим моментное тождество

$$\mu_1 = \widehat{\mu}_1,$$

где $\mu_1 = \mathbb{E}X_j^1$ – теоретический начальный момент 1-го порядка, $\widehat{\mu}_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j^1 = \overline{X}$ – выборочный начальный момент 1-го порядка.

Известно, что если $X_j \sim Be\,(p)$, то $\mathbb{E}X_j = p$. Следовательно, мы получаем уравнение

$$p = \overline{X}.$$

Значит, $\widehat{p}_{MM} = \overline{X}$.

Ответ: $\widehat{p}_{MM} = \overline{X}$.

Задача 4. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ – случайная выборка из распределения Пуассона с параметром λ. При помощи метода моментов найдите оценку для неизвестного параметра λ.

Решение. Для нахождения неизвестного параметра λ при помощи метода моментов составим моментное тождество

$$\mu_1 = \widehat{\mu}_1,$$

где $\mu_1 = \mathbb{E}X_j^1$ – теоретический начальный момент 1-го порядка, $\widehat{\mu}_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j^1 = \overline{X}$ – выборочный начальный момент 1-го порядка.

Известно, что если $X_j \sim Pois\,(\lambda)$, то $\mathbb{E}X_j = \lambda$. Следовательно, мы получаем уравнение

$$\lambda = \overline{X}.$$

Значит, $\widehat{\lambda}_{MM} = \overline{X}$.

Ответ: $\widehat{\lambda}_{MM} = \overline{X}$.

Задача 5. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ – случайная выборка. Случайные величины $X_1, ..., X_n$ имеют дискретное распределение, которое задано при помощи таблицы

a_k	-2	0	1
$\mathbb{P}\{X_j = a_k\}$	$1/2 - \theta$	$1/2$	θ

При помощи метода моментов найдите оценку для неизвестного параметра θ.

Решение. Для нахождения неизвестного параметра θ при помощи метода моментов составим моментное тождество

$$\mu_1 = \widehat{\mu}_1,$$

где $\mu_1 = \mathbb{E}X_j^1 = -2\cdot\left(\frac{1}{2} - \theta\right) + 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\theta = -1 + 3\theta$ – теоретический начальный момент 1-го порядка, $\widehat{\mu}_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^1 = \overline{X}$ – выборочный начальный момент 1-го порядка.

В результате мы получаем уравнение

$$-1 + 3\theta = \overline{X},$$

решая которое, получаем $\widehat{\theta}_{MM} = \frac{1+\overline{X}}{3}$.

Ответ: $\widehat{\theta}_{MM} = \frac{1+\overline{X}}{3}$.

1. Метод максимального правдоподобия

Задача 6. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ – случайная выборка из показательного (экспоненциального) распределения с плотностью распределения $f(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, где $\lambda > 0$.

При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценку для неизвестного параметра λ.

Решение. Составим функцию правдоподобия.

$$L\left(x_1,...,x_n;\lambda\right)=\prod_{j=1}^{n} f_{X_j}\left(x_j;\lambda\right)=\prod_{j=1}^{n}\lambda e^{-\lambda x_j}=\lambda^n e^{-\lambda\sum_{j=1}^{n}x_j}.$$

Тогда логарифмическая функция правдоподобия имеет вид

$$l\left(x_1,...,x_n;\lambda\right)=\ln L\left(x_1,...,x_n;\lambda\right)=n\ln\lambda-\lambda\sum_{j=1}^{n}x_j.$$

Для нахождения оценки неизвестного параметра λ методом максимально правдоподобия составляем уравнение правдоподобия.

$$\tfrac{dl}{d\lambda}=\tfrac{n}{\lambda}-\sum_{j=1}^{n}x_j=0.$$

Следовательно,

$$\lambda=\tfrac{n}{\sum_{j=1}^{n}x_j}.$$

Значит, $\widehat{\lambda}_{ML}=\frac{1}{\frac{\sum_{j=1}^{n}X_j}{n}}$.

Ответ: $\widehat{\lambda}_{ML}=\frac{1}{\overline{X}}$.

Задача 7. Пусть $X=(X_1,...,X_n)$ – случайная выборка из нормального распределения с плотностью распределения $f\left(x;\mu,\sigma^2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\cdot\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$, где $\mu\in\mathbb{R}$, $\sigma^2>0$. При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценки неизвестных параметров μ и σ^2.

Решение. Составим функцию правдоподобия.

$$L\left(x_1,...,x_n;\mu,\sigma^2\right)=\prod_{j=1}^{n}f_{X_j}\left(x_j;\mu,\sigma^2\right)=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x_j-\mu)^2}{2\sigma^2}}=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right.$$

Тогда логарифмическая функция правдоподобия имеет вид

$$l\left(x_1,...,x_n;\mu,\sigma^2\right)=-\frac{n}{2}\ln 2\pi-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu)^2}{2\sigma^2}.$$

Для нахождения оценок неизвестных параметров μ и σ^2 составим систему уравнений правдоподобия.

$$\begin{cases}\frac{\partial l}{\partial\mu}=0,\\ \frac{\partial l}{\partial\sigma^2}=0.\end{cases}$$

Из первого уравнения системы

$$\frac{\partial l}{\partial\mu}=\frac{\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu)}{\sigma^2}=0$$

находим, что $\mu=\frac{\sum_{j=1}^{n}x_j}{n}=\overline{x}$.

Из второго уравнения системы

$$\frac{\partial l}{\partial\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu)^2}{2\sigma^4}=0$$

получаем, что $\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_j-\mu\right)^2$. Подставляя в последнее выражение $\mu=\frac{\sum_{j=1}^{n}x_j}{n}$, приходим к следующей оценке $\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_j-\overline{x}\right)^2$.

Ответ: $\widehat{\mu}_{ML}=\overline{X}$, $\widehat{\sigma}^2_{ML}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(X_j-\overline{X}\right)^2$.

Задача 8. Пусть $X=(X_1,...,X_n)$ – случайная выборка из распределения Бернулли с параметром $p\in(0;1)$. При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценку неизвестного параметра p.

Решение. Поскольку $X_j \sim Be\,(p)$, то $\mathbb{P}\left(\{X_j = x_j\}\right) = \begin{cases} p & ?@8 \quad x_j = 1, \\ 1-p & ?@8 \quad x_j = 0. \end{cases}$

Заметим, что вероятность $\mathbb{P}\left(\{X_j = x_j\}\right)$ можно записать следующим, более удобным для дальнейших преобразований, способом $\mathbb{P}\left(\{X_j = x_j\}\right) = p^{x_j}\left(1-p\right)^{1-x_j}$.

Тогда функция правдоподобия может быть записана как

$$L\left(x_1, ..., x_n; p\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(\{X_j = x_j\}\right) = \prod_{j=1}^{n} p^{x_j}\left(1-p\right)^{1-x_j} = p^{\sum_{j=1}^{n} x_j}\left(1 -\right.$$

При этом логарифмическая функция правдоподобия имеет вид

$$l\left(x_1, ..., x_n; p\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)\ln p + \left(n - \sum_{j=1}^{n} x_j\right)\ln\left(1-p\right).$$

Составляем уравнение правдоподобия.

$$\tfrac{dl}{dp} = \tfrac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{p} - \tfrac{n-\sum_{j=1}^{n} x_j}{1-p} = 0.$$

Решая уравнение правдоподобия, получаем следующую оценку для неизвестного параметра p

$$p = \tfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = \overline{x}.$$

Ответ: $\widehat{p}_{ML} = \overline{X}$.

Задача 9. Пусть $X = \left(X_1, ..., X_n\right)$ – случайная выборка из распределения Пуассона с параметром λ. При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценку неизвестного параметра λ.

Решение. Поскольку $X_j \sim Pois\,(\lambda)$, то $\mathbb{P}\left(\{X_j = x_j\}\right) = \frac{\lambda^{x_j}}{x_j!}e^{-\lambda}$. Запишем функцию правдоподобия.

$$L\left(x_1, ..., x_n; \lambda\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(\{X_j = x_j\}\right) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\lambda^{x_j}}{x_j!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{\sum_{j=1}^{n} x_j}}{\prod_{j=1}^{n} x_j!}e^{-n\lambda}.$$

Тогда логарифмическая функция правдоподобия имеет вид

$$l\left(x_1, ..., x_n; \lambda\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \ln\lambda - \ln\left(\prod_{j=1}^{n} x_j!\right) - n\lambda.$$

Составляем уравнение правдоподобия

$$\tfrac{dl}{d\lambda} = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{\lambda} - n = 0,$$

из которого получаем, что $\lambda = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = \overline{x}$.

Ответ: $\widehat{\lambda}_{ML} = \overline{X}$.

Задача 10. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ – случайная выборка. Случайные величины $X_1, ..., X_n$ имеют дискретное распределение, которое задано при помощи таблицы

a_k	-2	0	1
$\mathbb{P}\{X_j = a_k\}$	$1/2 - \theta$	$1/2$	θ

При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценку для неизвестного параметра θ.

Решение. Из таблицы выше следует, что

$$\mathbb{P}\left(\{X_j = x_j\}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \theta & \text{?@8} \quad x_j = -2, \\ \frac{1}{2} & \text{?@8} \quad x_j = 0, \\ \theta & \text{?@8} \quad x_j = 1. \end{cases}$$

Заметим, что вероятность $\mathbb{P}\left(\{X_j = x_j\}\right)$ можно переписать следующим образом

$$\mathbb{P}\left(\{X_j = x_j\}\right) = \left(\tfrac{1}{2} - \theta\right)^{\mathbb{I}_{\{-2\}}(x_j)} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\mathbb{I}_{\{0\}}(x_j)} \cdot \theta^{\mathbb{I}_{\{1\}}(x_j)}.$$

Тогда функция правдоподобия может быть записана в виде

$$L\left(x_1, ..., x_n; \theta\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(\{X_j = x_j\}\right) = \prod_{j=1}^{n} \left(\tfrac{1}{2} - \theta\right)^{\mathbb{I}_{\{-2\}}(x_j)} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\mathbb{I}_{\{0\}}(x_j)} \cdot \theta^{\mathbb{I}_{\{1}$$

$$= \left(\tfrac{1}{2} - \theta\right)^{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{I}_{\{-2\}}(x_j)} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{I}_{\{0\}}(x_j)} \cdot \theta^{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{I}_{\{1\}}(x_j)}.$$

Логарифмическая функция правдоподобия равна

$$l\left(x_1, ..., x_n; \theta\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbb{I}_{\{-2\}}\left(x_j\right)\right) \ln\left(\tfrac{1}{2} - \theta\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbb{I}_{\{0\}}\left(x_j\right)\right) \ln\tfrac{1}{2} + \left(\sum_{j=}^{n}\right.$$

Записываем уравнение правдоподобия.

$$\frac{dl}{d\theta} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{I}_{\{-2\}}(x_j)}{\theta - \frac{1}{2}} + \frac{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{I}_{\{1\}}(x_j)}{\theta} = 0.$$

Решая уравнение правдоподобия, получаем следующую оценку

$$\theta = \frac{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{I}_{\{1\}}(x_j)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{I}_{\{-2\}}(x_j) + \sum_{j=1}^{n} \mathbb{I}_{\{1\}}(x_j)}.$$

Ответ: $\widehat{\theta}_{ML} = \frac{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{I}_{\{1\}}(X_j)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{I}_{\{-2\}}(X_j) + \sum_{j=1}^{n} \mathbb{I}_{\{1\}}(X_j)}$.

Замечание. Величина $\sum_{j=1}^{n} \mathbb{I}_{\{1\}}\left(x_j\right)$ означает число элементов реализации случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$, которые равны 1. Величина $\sum_{j=1}^{n} \mathbb{I}_{\{-2\}}\left(x_j\right)$ означает число элементов реализации случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$, которые равны -2.

Листок 10 по ТВ и МС 2013–2014 [08.03.2014]

1

Кафедра математической экономики и эконометрики НИУ ВШЭ. Борзых Д. А.

Листок 10

Несмещенность оценок

Задача 1. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — случайная выборка, $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$. Является ли оценки $\hat{\mu} = \bar{X}$, $\widehat{\mu^2} = \overline{X^2}$ и $\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ несмещенными оценками параметров μ, μ^2 и σ^2 соответственно?

Ответ: да, нет, нет.

Задача 2. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — случайная выборка из равномерного распределения на отрезке $[0; \theta]$, $\theta > 0$. Является ли следующие оценки несмещенными

1. $\hat{\theta} = 2\bar{X}$,
2. $\hat{\theta} = X_{(n)}$?

Ответ: (a) да, (b) нет.

Задача 3. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — случайная выборка из равномерного распределения на отрезке $[\theta; 0]$, $\theta < 0$. Является ли $\hat{\theta} = X_{(1)}$ несмещенной оценкой для неизвестного параметра θ?

Ответ: нет.

Задача 4. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — случайная выборка. Случайные величины $X_1, ..., X_n$ имеют дискретное распределение, которое задано при помощи таблицы

X_i	-2	0	1
$\mathbb{P}_{X_i}$	$1/2 - \theta$	$1/2$	θ

Является ли $\hat{\theta} = (\bar{X} + 1)/3$ несмещенной оценкой неизвестного параметра θ?

Ответ: да.

Задача 5. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — случайная выборка. Случайные величины $X_1, ..., X_n$ имеют дискретное распределение, которое задано при помощи таблицы

X_i	-3	0	2
$\mathbb{P}_{X_i}$	$2/3 - \theta$	$1/3$	θ

Является ли $\hat{\theta} = (\bar{X} + 2)/5$ несмещенной оценкой неизвестного параметра θ?

Ответ: да.

Задача 6. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — случайная выборка. Случайные величины $X_1, ..., X_n$ имеют дискретное распределение, которое задано при помощи таблицы

X_i	-4	0	3
$\mathbb{P}_{X_i}$	$3/4 - \theta$	$1/4$	θ

Является ли $\hat{\theta} = (\bar{X} + 3)/6$ несмещенной оценкой неизвестного параметра θ?

Ответ: да.

Задача 7. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — случайная выборка из распределения с функцией распределения $F(x;\theta) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{\theta}} & \text{?@8 } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{?@8 } x < 0, \end{cases}$

где $\theta > 0$. Является ли $\hat{\theta} = \frac{4}{\pi}(\bar{X})^2$ несмещенной оценкой неизвестного параметра θ?

Ответ: нет.

Задача 8. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — случайная выборка из распределения с плотностью $f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}} & \text{?@8 } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{?@8 } x < 0, \end{cases}$

где $\theta > 0$. Является ли $\hat{\theta} = \bar{X}$ несмещенной оценкой неизвестного параметра θ?

Ответ: да.

Листок 11 по ТВ и МС 2013–2014 [08.03.2014]

1

Кафедра математической экономики и эконометрики НИУ ВШЭ. Борзых Д. А.

Листок 11

Информация Фишера. Неравенство Рао–Крамера. Эффективность оценок

Определение 1. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка и $l(X_1, \ldots, X_n; \theta) := \ln \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; \theta)$ — логарифмическая функция правдоподобия. Тогда величина $I_n(\theta) := \mathbb{E}[(\frac{\partial l}{\partial \theta})^2]$ называется *информацией Фишера* о параметре θ, содержащейся в n наблюдениях случайной выборки X.

Замечание 1. Информация Фишера $I_n(\theta)$ также может быть найдена при помощи формулы: $I_n(\theta) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 l}{\partial \theta^2}\right]$.

Замечание 2. Для нахождения информации Фишера удобно использовать соотношение $I_n(\theta) = n \cdot I_1(\theta)$.

Утверждение 1 (неравенство Рао–Крамера). Пусть $\hat{\theta}$ — несмещенная оценка параметра θ. Тогда имеет место неравенство

$$I_n^{-1}(\theta) \leqslant D[\hat{\theta}].$$

Определение 2. Несмещенная оценка $\hat{\theta}$ называется *эффективной оценкой* для параметра $\theta \in \Theta$, если для неё неравенство Рао–Крамера обращается в равенство, т.е. $I_n^{-1}(\theta) = D[\hat{\theta}]$.

Задача 1. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из распределения Бернулли с параметром $p \in (0; 1)$.

1. Найдите $I_n(p)$.

2. Является ли оценка $\hat{p} = \bar{X}$ несмещённой?

3. Является ли оценка $\hat{p} = \bar{X}$ эффективной?

Задача 2. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из распределения Пуассона с параметром $\lambda > 0$.

1. Найдите $I_n(\lambda)$.
2. Является ли оценка $\hat{\lambda} = \bar{X}$ несмещенной?
3. Является ли оценка $\hat{\lambda} = \bar{X}$ эффективной?

Задача 3. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из нормального распределения с параметрами $\mu \in \mathbb{R}$ и $\sigma^2 > 0$, причем параметр σ^2 известен.

1. Найдите $I_n(\mu)$.
2. Является ли оценка $\hat{\mu} = \bar{X}$ несмещенной?
3. Является ли оценка $\hat{\mu} = \bar{X}$ эффективной?

Задача 4. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из распределения с плотностью

$$f(x;\mu) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} & \text{?@8 } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{?@8 } x < 0, \end{cases}$$

где σ^2 — известный положительный параметр.

1. Найдите $I_n(\mu)$.
2. Является ли оценка $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln X_i$ несмещенной?
3. Является ли оценка $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln X_i$ эффективной?

Задача 5. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из распределения с плотностью

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & \text{?@8} \quad x \geqslant 0, \\ 0 & \text{?@8} \quad x < 0, \end{cases}$$

где $\theta > 0$ — неизвестный параметр.

1. Найдите $I_n(\theta)$.

2. Является ли оценка $\hat{\theta} = \bar{X}$ несмещенной?

3. Является ли оценка $\hat{\theta} = \bar{X}$ эффективной?

Задача 6. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из биномиального распределения $Bi(10, p)$, где $p \in (0; 1)$.

1. Найдите $I_n(p)$.

2. Является ли оценка $\hat{p} = \frac{1}{10}\bar{X}$ несмещенной?

3. Является ли оценка $\hat{p} = \frac{1}{10}\bar{X}$ эффективной?

Листок 12 по ТВ и МС 2013–2014 [08.03.2014]
1
Кафедра математической экономики и эконометрики НИУ ВШЭ. Борзых Д. А.
Листок 12
Сходимость по вероятности. Состоятельность оценок. Неравенство Чебышева

Определение 1. Последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится по вероятности* к случайной величине X, если для любого $\varepsilon > 0$ имеет место

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\{|X_n - X| > \varepsilon\}\right) = 0.$$

Для сходимости по вероятности используют обозначение $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ при $n \to \infty$.

Определение 2. Оценка $\hat{\theta}_n$ называется *состоятельной оценкой* неизвестного параметра $\theta \in \Theta$, если $\hat{\theta}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$ при $n \to \infty$.

Утверждение 1 (неравенство Чебышева). Пусть X — неотрицательная случайная величина. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(\{X \geqslant \varepsilon\}\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}[X]}{\varepsilon}.$$

Следствие 1. Пусть X — произвольная случайная величина. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$

(i) $\mathbb{P}\left(\{X \geqslant \varepsilon\}\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}[X^2]}{\varepsilon^2}$,

(ii) $\mathbb{P}\left(\{|X - \mathbb{E}X| \geqslant \varepsilon\}\right) \leqslant \frac{D[X]}{\varepsilon^2}$.

Утверждение 2. Пусть кусочно-непрерывная функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке (a, b) и $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$, $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} b$ при $n \to \infty$. Тогда $g(X_n, Y_n) \to g(a, b)$ при $n \to \infty$.

Задача 1. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из распределения Бернулли с параметром $p \in (0; 1)$. Является ли оценка $\hat{p}_n = \bar{X}$ состоятельной?

Задача 2. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из распределения Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Является ли оценка $\hat{\lambda}_n = \bar{X}$ состоятельной?

Задача 3. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из нормального распределения с параметрами $\mu \in \mathbb{R}$ и $\sigma^2 > 0$, причем параметр σ^2 известен. Является ли оценка $\hat{\mu}_n = \bar{X}$ состоятельной?

Задача 4. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из распределения с плотностью

$$f(x; \mu) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} & ?@8 \ x \geqslant 0, \\ 0 & ?@8 \ x < 0, \end{cases}$$

где σ^2 — известный положительный параметр. Является ли оценка $\hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln X_i$ состоятельной?

Задача 5. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из распределения с плотностью

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & ?@8 \quad x \geqslant 0, \\ 0 & ?@8 \quad x < 0, \end{cases}$$

где $\theta > 0$ — неизвестный параметр. Является ли оценка $\hat{\theta}_n = \bar{X}$ состоятельной?

Задача 6. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из биномиального распределения $Bi(10, p)$, где $p \in (0; 1)$. Является ли оценка $\hat{p}_n = \frac{1}{10}\bar{X}$ состоятельной?

Задача 7. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ - случайная выборка. Случайные величины $X_1, ..., X_n$ имеют дискретное распределение, которое задано при помощи таблицы

X_i	-3	0	2
$\mathbb{P}_{X_i}$	$2/3 - \theta$	$1/3$	θ

Является ли оценка $\hat{\theta}_n = \frac{1}{5}(\bar{X} + 2)$ состоятельной?

Решение. Заметим, что $\mathbb{E}[\hat{\theta}_n] = \theta$. Следовательно, по неравенству Чебышева

$\mathbb{P}\left(\left\{\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| > \varepsilon\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\left\{\left|\hat{\theta}_n - \mathbb{E}[\hat{\theta}_n]\right| > \varepsilon\right\}\right) \leqslant \frac{D[\hat{\theta}_n]}{\varepsilon^2} = \frac{D[X_1]}{25n} \to 0$ при $n \to \infty$.

Значит, оценка $\hat{\theta}_n$ является состоятельной оценкой для неизвестного параметра θ. $\square$

Задача 8. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка. Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ имеют дискретное распределение, которое задано при помощи таблицы

X_i	-2	0	1
$\mathbb{P}_{X_i}$	$1/2 - \theta$	$1/2$	θ

Является ли следующая оценка состоятельной
$\hat{\theta}_n = \frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{1\}}(X_i)}{n - \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{0\}}(X_i)}$?

Решение. Разделим числитель и знаменатель оценки

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{1\}}(X_i)}{n - \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{0\}}(X_i)}$$

на n, и получим следующее выражение

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{2}\frac{\frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{1\}}(X_i)}{n}}{1 - \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{0\}}(X_i)}{n}}.$$

Докажем, что $\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{\{1\}}(X_i)}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$; $1-\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{\{0\}}(X_i)}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{2}$.

Имеем $\mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{\{1\}}(X_i)}{n}\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{\{1\}}\left(X_i\right)\right) = \frac{1}{n}n\mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{\{1\}}\left(X_1\right)\right) =$ $\mathbb{P}\left(\{X_1 = 1\}\right) = \theta$.

Применим неравенство Чебышева:

$$\mathbb{P}\left(\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{\{1\}}\left(X_i\right)}{n} - \theta\right| > \varepsilon\right\}\right) \leqslant \frac{D\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{\{1\}}(X_i)}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{nD\left(\mathbb{I}_{\{1\}}\left(X_1\right)\right)}{\varepsilon^2 n^2}$$

Следовательно, $\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{\{1\}}(X_i)}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$.

$$\mathbb{E}\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{\{0\}}\left(X_i\right)}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{\{0\}}\left(X_i\right)\right) = 1 - \frac{1}{n}n\mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{\{0\}}\left(X_1\right.\right.$$

Применим снова неравенство Чебышева:

$$\mathbb{P}\left(\left\{\left|1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{\{0\}}\left(X_i\right)}{n} - \frac{1}{2}\right| > \varepsilon\right\}\right) \leqslant \frac{D\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{\{0\}}(X_i)}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{nD\left(\mathbb{I}\right.}{\varepsilon}$$

Следовательно, $1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{\{0\}}(X_i)}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{2}$.

Используя утверждение 2, мы получаем

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{2}\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{\{1\}}(X_i)}{n}}{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{\{0\}}(X_i)}{n}} \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta,$$

что означает состоятельность оценки $\hat{\theta}_n$. $\square$

Задача 9. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — случайная выборка из равномерного распределения на отрезке $[0;\theta]$, $\theta > 0$. Является ли следующие оценки состоятельными

1. $\hat{\theta}_n = 2\bar{X}$,

2. $\hat{\theta}_n = X_{(n)}$?

Ответ: (a) да, (b) да.

Задача 10. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — случайная выборка из равномерного распределения на отрезке $[\theta; 0]$, $\theta < 0$. Является ли $\hat{\theta}_n = X_{(1)}$ состоятельной оценкой для неизвестного параметра θ?

Ответ: да.

Листок 13 по ТВ и МС 2013–2014 [08.03.2014]

1

Кафедра математической экономики и эконометрики НИУ ВШЭ. Борзых Д. А.

Листок 13

Доверительные интервалы

1. Доверительный интервал для неизвестного параметра μ при известном параметре σ^2

Задача 1. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — случайная выборка из нормального распределения с параметрами μ и σ^2, причем параметр μ неизвестен, а параметр $\sigma^2 = 4$. Используя реализацию случайной выборки, $x_1 = -1.11; \quad x_2 = -6.10; \quad x_3 = 2.42; \quad x_4 = -0.09; \quad x_5 = -0.17$,

постройте 90%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра μ.

Решение. Требуется найти такие две функции от случайной выборки $X = (X_1, ..., X_n)$

$T_1(X)$ и $T_2(X)$, что $\forall \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{P}(\{T_1(X) \leqslant \mu \leqslant T_2(X)\}) = \gamma$. *Другими словами, нужно найти такой интервал* $[T_1(X); T_2(X)]$, *который с заданным уровнем доверия (надежности) накрывает неизвестный параметр* μ *при любом возможном значении параметра* μ.

Положим $\gamma = 0.9$ и $\alpha = 1 - \gamma = 0.1$.

Известно, что $T = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0; 1)$.

Пусть $z_{\alpha/2}$ и $z_{1-\alpha/2}$ - квантили для нормального стандартного распределения уровней $\alpha/2$ и $1-\alpha/2$ соответственно.[3]

Тогда имеем $\mathbb{P}\left(\left\{z_{\alpha/2} \leqslant T \leqslant z_{1-\alpha/2}\right\}\right) = \gamma$.

$$z_{\alpha/2} \leqslant T \leqslant z_{1-\alpha/2} \Leftrightarrow z_{\alpha/2} \leqslant \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leqslant z_{1-\alpha/2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leqslant \overline{X}-\mu \leqslant z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \Leftrightarrow -\overline{X}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leqslant -\mu \leqslant -\overline{X}+z_{1-}$$

$$\Leftrightarrow \overline{X} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leqslant \mu \leqslant \overline{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}.$$

Таким образом, получили $T_1(X) = \overline{X} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$ и $T_2(X) = \overline{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$.

Рассчитаем теперь границы доверительного интервала $[T_1(X); T_2(X)]$, используя реализацию случайной выборки.

$$\overline{x} = -1.01; z_{\alpha/2} = -1.64; z_{1-\alpha/2} = 1.64;$$

$$T_1(x) = \overline{x} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = -1.01 - 1.64 \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} = -2.48;$$

$$T_2(x) = \overline{x} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = -1.01 + 1.64 \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} = 0.46.$$

Ответ: $[-2.48; 0.46]$.

---

[3] $z_{\alpha/2}$ — такая точка, что $\int_{-\infty}^{z_{\alpha/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) dx = \alpha/2$; $z_{1-\alpha/2}$ — такая точка, что $\int_{-\infty}^{z_{1-\alpha/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) dx = 1-\alpha/2$.

Задача 2. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — случайная выборка из нормального распределения с параметрами μ и σ^2, причем параметр μ неизвестен, а параметр $\sigma^2 = 4$. Используя реализацию случайной выборки, $x_1 = -2.29; \quad x_2 = -2.91; \quad x_3 = 0.93; \quad x_4 = -0.78; \quad x_5 = 2.30,$

постройте 90%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра μ.

1. Доверительный интервал для неизвестного параметра μ при неизвестном параметре σ^2

Задача 3. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — случайная выборка из нормального распределения с параметрами μ и σ^2, причем оба параметра μ и σ^2 неизвестны. Используя реализацию случайной выборки, $x_1 = -1.11; \quad x_2 = -6.10; \quad x_3 = 2.42; \quad x_4 = -0.09; \quad x_5 = -0.17,$

постройте 90%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра μ.

Решение. Требуется найти такие две функции от случайной выборки $X = (X_1, ..., X_n)$

$T_1(X)$ и $T_2(X)$, что $\forall \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\{T_1(X) \leqslant \mu \leqslant T_2(X)\}) = \gamma$. *Другими словами, нужно найти такой интервал* $[T_1(X); T_2(X)]$, *который с заданным уровнем доверия (надежности) накрывает неизвестный параметр μ при любых возможных значениях параметров μ и σ^2.*

Положим $\gamma = 0.9$ и $\alpha = 1 - \gamma = 0.1$.

Известно, что $T = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}}} \sim t(n-1)$, где $\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2$

- исправленная выборочная дисперсия.

Пусть $t_{n-1,\alpha/2}$ и $t_{n-1,1-\alpha/2}$ - квантили уровней $\alpha/2$ и $1 - \alpha/2$ соответственно для $t-$распределения с $n-1$ степенями свободы.[4]

[4] $t_{n-1,\alpha/2}$ — такая точка, что $\int_{-\infty}^{t_{n-1,\alpha/2}} f_{t(n-1)}(x)\,dx = \alpha/2$; $t_{n-1,1-\alpha/2}$ — такая точка, что $\int_{-\infty}^{t_{n-1,1-\alpha/2}} f_{t(n-1)}(x)\,dx = 1 - \alpha/2$.Здесь через

Тогда имеем $\mathbb{P}\left(\left\{t_{n-1,\alpha/2} \leqslant T \leqslant t_{n-1,1-\alpha/2}\right\}\right) = \gamma$.

$$t_{n-1,\alpha/2} \leqslant T \leqslant t_{n-1,1-\alpha/2} \Leftrightarrow t_{n-1,\alpha/2} \leqslant \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}}} \leqslant t_{n-1,1-\alpha/2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{X} - t_{n-1,1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}} \leqslant \mu \leqslant \overline{X} - t_{n-1,\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}}.$$

Таким образом, получили $T_1\left(X\right) = \overline{X} - t_{n-1,1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}}$ и $T_2\left(X\right) = \overline{X} - t_{n-1,\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}}$.

Рассчитаем теперь границы доверительного интервала $\left[T_1\left(X\right); T_2\left(X\right)\right]$, используя реализацию случайной выборки.

$$\overline{x} = -1.01; \widehat{\sigma^2} = 9.81; t_{n-1,\alpha/2} = -2.13; t_{n-1,1-\alpha/2} = 2.13;$$

$$T_1\left(x\right) = \overline{x} - t_{n-1,1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}} = -1.01 - 2.13 \cdot \sqrt{\frac{9.81}{5}} = -3.99;$$

$$T_2\left(x\right) = \overline{x} - t_{n-1,\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}} = -1.01 + 2.13 \cdot \sqrt{\frac{9.81}{5}} = 1.97.$$

Ответ: $[-3.99; 1.97]$.

Задача 4. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — случайная выборка из нормального распределения с параметрами μ и σ^2, причем оба параметра μ и σ^2 неизвестны. Используя реали-

---

$f_{t(n-1)}\left(x\right)$ обозначена плотность $t-$ распределения с $n-1$ степенями свободы.

зацию случайной выборки, $x_1 = -2.29; \quad x_2 = -2.91; \quad x_3 = 0.93; \quad x_4 = -0.78; \quad x_5 = 2.30,$

постройте 90%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра μ.

1. Доверительный интервал для неизвестного параметра σ^2 при известном параметре μ

Задача 5. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — случайная выборка из нормального распределения с параметрами μ и σ^2, причем параметр $\mu = 0$, а параметр σ^2 неизвестен. Используя реализацию случайной выборки,

$$x_1 = 1.07; \quad x_2 = 3.66; \quad x_3 = -4.51; \quad x_4 = 1.72; \quad x_5 = 0.63,$$

постройте 90%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра σ^2.

Решение. Требуется найти такие две функции от случайной выборки $X = (X_1, ..., X_n)$

$T_1(X)$ и $T_2(X)$, что $\forall \sigma^2 > 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\{T_1(X) \leqslant \sigma^2 \leqslant T_2(X)\}) = \gamma$. *Другими словами, нужно найти такой интервал* $[T_1(X); T_2(X)]$, *который с заданным уровнем доверия (надежности) накрывает неизвестный параметр* σ^2 *при любом возможном значении параметра* σ^2.

Положим $\gamma = 0.9$ и $\alpha = 1 - \gamma = 0.1$.

Известно, что $T = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$.

Пусть $\chi^2_{n,\alpha/2}$ и $\chi^2_{n,1-\alpha/2}$- квантили уровней $\alpha/2$ и $1-\alpha/2$ соответственно для χ^2-распределения с n степенями свободы. [5]

[5] $\chi^2_{n,\alpha/2}$ — такая точка, что $\int_{-\infty}^{\chi^2_{n,\alpha/2}} f_{\chi^2(n)}(x)\,dx = \alpha/2$, $\chi^2_{n,1-\alpha/2}$ — такая точка, что $\int_{-\infty}^{\chi^2_{n,1-\alpha/2}} f_{\chi^2(n)}(x)\,dx = 1-\alpha/2$. Здесь через $f_{\chi^2(n)}(x)$ обозначена плотность χ^2- распределения с n степенями свободы.

Тогда имеем $\mathbb{P}\left(\left\{\chi^2_{n,\alpha/2} \leqslant T \leqslant \chi^2_{n,1-\alpha/2}\right\}\right) = \gamma.$

$$\chi^2_{n,\alpha/2} \leqslant T \leqslant \chi^2_{n,1-\alpha/2} \Leftrightarrow \chi^2_{n,\alpha/2} \leqslant \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2 \leqslant \chi^2_{n,1-\alpha/2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2 \geqslant \chi^2_{n,\alpha/2}, \\ \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2 \leqslant \chi^2_{n,1-\alpha/2}. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\chi^2_{n,\alpha/2}}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2 \geqslant \sigma^2, \\ \frac{1}{\chi^2_{n,1-\alpha/2}}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2 \leqslant \sigma^2. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\chi^2_{n,1-\alpha/2}}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2 \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{1}{\chi^2_{n,\alpha/2}}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2.$$

Таким образом, получили $T_1\left(X\right) = \frac{1}{\chi^2_{n,1-\alpha/2}}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2$ и $T_2\left(X\right) = \frac{1}{\chi^2_{n,\alpha/2}}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2$.

Рассчитаем теперь границы доверительного интервала $\left[T_1\left(X\right);T_2\left(X\right)\right]$, используя реализацию случайной выборки.[6]

$$\chi^2_{n,\alpha/2} = 1.15; \chi^2_{n,1-\alpha/2} = 11.07; \sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2 = 38.40;$$

---

[6] Отметим, что в таблице для χ^2- распределения в учебнике А.С. Шведова “Теория вероятностей и математическая статистика” требуемых квантилей нет. Для вычисления можно воспользоваться программой MS Excel. Например, $\chi^2_{5,0.05} = \%2\ (0,95;5) = 1.15$; $\chi^2_{5,0.95} = \%2\ (0,05;5) = 11.07$. В пакете MATLAB используется следующий синтаксис: $\chi^2_{5,0.05} = \mathrm{chi2inv}\left(0.05;5\right) = 1.15$; $\chi^2_{5,0.95} = \mathrm{chi2inv}\left(0.95;5\right) = 11.07$.

$$T_1(x) = \frac{1}{\chi^2_{n,1-\alpha/2}} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = \frac{38.40}{11.07} = 3.47;$$

$$T_2(x) = \frac{1}{\chi^2_{n,\alpha/2}} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = \frac{38.40}{1.15} = 33.39.$$

Ответ: $[3.47; 33.39]$.

Задача 6. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — случайная выборка из нормального распределения с параметрами μ и σ^2, причем параметр $\mu = 0$, а параметр σ^2 неизвестен. Используя реализацию случайной выборки,

$$x_1 = -2.61; \quad x_2 = -0.86; \quad x_3 = 0.68; \quad x_4 = 7.15; \quad x_5 = 5.53,$$

постройте 80%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра σ^2.

1. Доверительный интервал для неизвестного параметра σ^2 при неизвестном параметре μ

Задача 7. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — случайная выборка из нормального распределения с параметрами μ и σ^2, причем оба параметра μ и σ^2 неизвестны. Используя реализацию случайной выборки,

$$x_1 = 1.07; \quad x_2 = 3.66; \quad x_3 = -4.51; \quad x_4 = 1.72; \quad x_5 = 0.63,$$

постройте 90%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра σ^2.

Решение. Требуется найти такие две функции от случайной выборки $X = (X_1, ..., X_n)$

$T_1(X)$ и $T_2(X)$, что $\forall \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\{T_1(X) \leqslant \sigma^2 \leqslant T_2(X)\})$ γ. *Другими словами, нужно найти такой интервал* $[T_1(X); T_2(X)]$, *который с заданным уровнем доверия (надежности) накрывает неизвестный параметр* σ^2 *при любых возможных значениях параметров* μ *и* σ^2.

Положим $\gamma = 0.9$ и $\alpha = 1 - \gamma = 0.1$.

Известно, что $T = \frac{\widehat{\sigma^2}(n-1)}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, где $\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ - исправленная выборочная дисперсия.

Пусть $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$ и $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$- квантили уровней $\alpha/2$ и $1 - \alpha/2$ соответственно для χ^2-распределения с $n-1$ степенями свободы. [7]

Тогда имеем $\mathbb{P}\left(\left\{\chi^2_{n-1,\alpha/2} \leqslant T \leqslant \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\right\}\right) = \gamma$.

$$\chi^2_{n-1,\alpha/2} \leqslant T \leqslant \chi^2_{n-1,1-\alpha/2} \Leftrightarrow \chi^2_{n-1,\alpha/2} \leqslant \frac{\widehat{\sigma^2}(n-1)}{\sigma^2} \leqslant \chi^2_{n-1,1-\alpha/2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\widehat{\sigma^2}(n-1)}{\sigma^2} \geqslant \chi^2_{n-1,\alpha/2}, \\ \frac{\widehat{\sigma^2}(n-1)}{\sigma^2} \leqslant \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\widehat{\sigma^2}(n-1)}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}} \geqslant \sigma^2, \\ \frac{\widehat{\sigma^2}(n-1)}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}} \leqslant \sigma^2. \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\widehat{\sigma^2}(n-1)}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{\widehat{\sigma^2}(n-1)}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}.$$

Таким образом, получили $T_1(X) = \frac{\widehat{\sigma^2}(n-1)}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}$ и $T_2(X) = \frac{\widehat{\sigma^2}(n-1)}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}$.

---

[7] $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$ — такая точка, что $\int_{-\infty}^{\chi^2_{n-1,\alpha/2}} f_{\chi^2(n-1)}(x)\,dx = \alpha/2$, $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$ — такая точка, что $\int_{-\infty}^{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}} f_{\chi^2(n-1)}(x)\,dx = 1-\alpha/2$. Здесь через $f_{\chi^2(n-1)}(x)$ обозначена плотность χ^2- распределения с $n-1$ степенями свободы.

Рассчитаем теперь границы доверительного интервала $[T_1(X);T_2(X)]$, используя реализацию случайной выборки.[8]

$$\overline{x}=0.52;\widehat{\sigma^2}=9.26;\chi^2_{n-1,\alpha/2}=0.71;\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}=9.49;$$

$$T_1(x)=\frac{\widehat{\sigma^2}(n-1)}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}=\frac{9.26\cdot 4}{9.49}=3.90;$$

$$T_2(x)=\frac{\widehat{\sigma^2}(n-1)}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}=\frac{9.26\cdot 4}{0.71}=52.17.$$

Ответ: $[3.90; 52.17]$.

Задача 8. Пусть $X=(X_1,...,X_n)$ — случайная выборка из нормального распределения с параметрами μ и σ^2, причем оба параметра μ и σ^2 неизвестны. Используя реализацию случайной выборки,

$$x_1=-2.61;\quad x_2=-0.86;\quad x_3=0.68;\quad x_4=7.15;\quad x_5=5.53,$$

постройте 90%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра σ^2.

1. Асимптотический доверительный интервал для доли

[8] Отметим, что в таблице для χ^2- распределения в учебнике А.С. Шведова “Теория вероятностей и математическая статистика” требуемых квантилей нет. Для вычисления можно воспользоваться программой MS Excel. Например, $\chi^2_{4,0.05}=\%2\ (0,95;4)=0.71$; $\chi^2_{4,0.95}=\%2\ (0,05;4)=9.49$. В пакете MATLAB используется следующий синтаксис: $\chi^2_{4,0.05}=\mathrm{chi2inv}\,(0.05;4)=0.71$; $\chi^2_{5,0.95}=\mathrm{chi2inv}\,(0.95;4)=9.49$
.

Литература по теме: А.С. Шведов “Теория вероятностей и математическая статистика - metricconverterProductID2”2 стр. 165-168.

Задача 9. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — случайная выборка из распределения Бернулли с параметром p. Используя реализацию случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$, в которой 55 нулей и 45 единиц, постройте 90%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра p.

Решение. Требуется найти такие две функции от случайной выборки $X = (X_1, ..., X_n)$

$T_1(X)$ и $T_2(X)$, что $\forall p \in (0;1) \Rightarrow \mathbb{P}(\{T_1(X) \leqslant p \leqslant T_2(X)\}) = \gamma$. *Другими словами, нужно найти такой интервал $[T_1(X); T_2(X)]$, который с заданным уровнем доверия (надежности) накрывает неизвестный параметр p при любом возможном значении параметра p.*

Положим $\gamma = 0.9$ и $\alpha = 1 - \gamma = 0.1$.

Известно, что $\mathbb{P}\left(\left\{\overline{X} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{X}\left(1-\overline{X}\right)}{n}} \leqslant p \leqslant \overline{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{X}\left(1-\overline{X}\right)}{n}}\right.\right.$ γ *(при большом числе наблюдений).*[9]

Поэтому $T_1(X) = \overline{X} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{X}\left(1-\overline{X}\right)}{n}}$ и $T_2(X) = \overline{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{X}\left(1-\overline{X}\right)}{n}}$.

Рассчитаем теперь границы доверительного интервала $[T_1(X); T_2(X)]$, используя реализацию случайной выборки.

$$\overline{x} = 0.45; z_{\alpha/2} = -1.64; z_{1-\alpha/2} = 1.64;$$

$$T_1(x) = \overline{x} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} = 0.45 - 1.64\sqrt{\frac{0.45(1-0.45)}{100}} = 0.37;$$

[9] Здесь, как и выше, $z_{\alpha/2}$ — такая точка, что $\int_{-\infty}^{z_{\alpha/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) dx = \alpha/2$, $z_{1-\alpha/2}$ — такая точка, что $\int_{-\infty}^{z_{1-\alpha/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) dx = 1 - \alpha/2$.

$$T_2(x) = \overline{x} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} = 0.45 + 1.64\sqrt{\frac{0.45(1-0.45)}{100}} = 0.53.$$

Ответ: $[0.37; 0.53]$.

Задача 10. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — случайная выборка из распределения Бернулли с параметром p. Используя реализацию случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$, в которой 60 нулей и 40 единиц, постройте 90%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра p.

Листок 14 по ТВ и МС 2013–2014 [08.03.2014]

1

Кафедра математической экономики и эконометрики НИУ ВШЭ. Борзых Д. А.

Листок 14

Проверка статистических гипотез

1. Тестирование гипотез о параметре μ при известном параметре σ^2

Задача 1. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ - случайная выборка из нормального распределения с параметрами μ и σ^2, причем параметр μ неизвестен, а параметр $\sigma^2 = 4$. Уровень значимости $\alpha = 0.1$. Используя реализацию случайной выборки

$$x_1 = -1.11; \quad x_2 = -6.10; \quad x_3 = 2.42; \quad x_4 = -0.09; \quad x_5 = -0.17;$$

$$x_6 = -2.29; \quad x_7 = -2.91; \quad x_8 = 0.93; \quad x_9 = -0.78; \quad x_{10} = 2.30$$

проверьте следующие статистические гипотезы.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu \neq 0 \end{array} \right. ; \; 2) \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu > 0 \end{array} \right. ; \; 3) \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu < 0 \end{array} \right.$$

Решение.

1)

1. *Тестовая статистика:* $T = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$.

2. *Распределение тестовой статистики:* $T = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0;1)$.

3. *Наблюдаемое значение тестовой статистки:* $T_{=01;} = \frac{\overline{x}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{-0.78-0}{\sqrt{\frac{4}{10}}} = -1.23$.

4. *Область, в которой гипотеза H_0 не отвергается:* $\left[z_{\alpha/2}; z_{1-\alpha/2}\right] = [-1.65; 1.65]$.

5. *Статистический вывод:* поскольку $T_{=01;} = -1.23 \in [-1.65; 1.65]$, то основная гипотеза H_0 не отвергается.

2)

1. *Тестовая статистика:* $T = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$.

2. *Распределение тестовой статистики:* $T = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0;1)$.

3. *Наблюдаемое значение тестовой статистки:* $T_{=01;} = \frac{\overline{x}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{-0.78-0}{\sqrt{\frac{4}{10}}} = -1.23$.

4. *Область, в которой гипотеза H_0 не отвергается:* $(-\infty; z_{1-\alpha}] = (-\infty; 1.28]$.

5. *Статистический вывод:* поскольку $T_{=01;} = -1.23 \in (-\infty; 1.28]$, то основная гипотеза H_0 не отвергается.

3)

1. *Тестовая статистика:* $T = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$.

2. *Распределение тестовой статистики:* $T = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0;1)$.

3. *Наблюдаемое значение тестовой статистки:* $T_{=01;} = \frac{\overline{x}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{-0.78-0}{\sqrt{\frac{4}{10}}} = -1.23$.

4. *Область, в которой гипотеза* H_0 *не отвергается:* $[z_\alpha; +\infty) = [-1.28; +\infty)$.

5. *Статистический вывод:* поскольку $T_{=01;} = -1.23 \in [-1.28; +\infty)$, то основная гипотеза H_0 не отвергается.

Задача 2. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ - случайная выборка из нормального распределения с параметрами μ и σ^2, причем параметр μ неизвестен, а параметр $\sigma^2 = 9$. Уровень значимости $\alpha = 0.1$. Используя реализацию случайной выборки

$$x_1 = -2.88; \quad x_2 = -0.24; \quad x_3 = 1.78; \quad x_4 = -3.13; \quad x_5 = 1.71;$$

$$x_6 = 0.10; \quad x_7 = -4.50; \quad x_8 = 1.88; \quad x_9 = -4.80; \quad x_{10} = 1.11$$

проверьте следующие статистические гипотезы.

1) $\begin{cases} H_0 : \mu = 1 \\ H_1 : \mu \neq 1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} H_0 : \mu = 1 \\ H_1 : \mu > 1 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} H_0 : \mu = 1 \\ H_1 : \mu < 1 \end{cases}$

1. Тестирование гипотез о параметре μ при неизвестном параметре σ^2

Задача 3. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ - случайная выборка из нормального распределения с параметрами μ и σ^2, причем оба параметраμ и σ^2 неизвестны. Уровень значимости $\alpha = 0.1$. Используя реализацию случайной выборки

$$x_1 = -1.11; \quad x_2 = -6.10; \quad x_3 = 2.42; \quad x_4 = -0.09; \quad x_5 = -0.17;$$

$$x_6 = -2.29; \quad x_7 = -2.91; \quad x_8 = 0.93; \quad x_9 = -0.78; \quad x_{10} = 2.30$$

проверьте следующие статистические гипотезы.

1) $\begin{cases} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu \neq 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu > 0 \end{cases}$; 3)$\begin{cases} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu < 0 \end{cases}$

Решение.

1)

1. *Тестовая статистика:* $T = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}}}$, где $\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}\right)^2$

2. *Распределение тестовой статистики:* $T = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}}} \sim t\,(n-1)$.

3. *Наблюдаемое значение тестовой статистки:* $T_{=01;} = \frac{\overline{x}-\mu}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}}} = \frac{-0.78-0}{\sqrt{\frac{6.53}{10}}} = -0.97$.

4. *Область, в которой гипотеза* H_0 *не отвергается:* $\left[t_{n-1,\alpha/2}; t_{n-1,1-\alpha/2}\right] = [-1.83; 1.83]$.

5. *Статистический вывод:* поскольку $T_{=01;} = -0.97 \in [-1.83; 1.83]$, то основная гипотеза H_0 не отвергается.

2)

1. *Тестовая статистика:* $T = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}}}$, где $\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$.
2. *Распределение тестовой статистики:* $T = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}}} \sim t\,(n-1)$.
3. *Наблюдаемое значение тестовой статистки:* $T_{=01;} = \frac{\overline{x}-\mu}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}}} = \frac{-0.78-0}{\sqrt{\frac{6.53}{10}}} = -0.97$.
4. *Область, в которой гипотеза H_0 не отвергается:* $(-\infty; t_{n-1,1-\alpha}] = (-\infty; 1.38]$.
5. *Статистический вывод:* поскольку $T_{=01;} = -0.97 \in (-\infty; 1.38]$, то основная гипотеза H_0 не отвергается.

3)

1. *Тестовая статистика:* $T = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}}}$, где $\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$.
2. *Распределение тестовой статистики:* $T = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}}} \sim t\,(n-1)$.
3. *Наблюдаемое значение тестовой статистки:* $T_{=01;} = \frac{\overline{x}-\mu}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}}} = \frac{-0.78-0}{\sqrt{\frac{6.53}{10}}} = -0.97$.
4. *Область, в которой гипотеза H_0 не отвергается:* $[t_{n-1,\alpha}; +\infty) = [-1.38; +\infty)$.
5. *Статистический вывод:* поскольку $T_{=01;} = -0.97 \in [-1.38; +\infty)$, то основная гипотеза H_0 не отвергается.

Задача 4. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ - случайная выборка из нормального распределения с параметрами μ и σ^2, причем оба параметраμ и σ^2 неизвестны. Уровень значимости $\alpha = 0.1$. Используя реализацию случайной выборки

$$x_1 = -2.88; \quad x_2 = -0.24; \quad x_3 = 1.78; \quad x_4 = -3.13; \quad x_5 = 1.71;$$

$$x_6 = 0.10; \quad x_7 = -4.50; \quad x_8 = 1.88; \quad x_9 = -4.80; \quad x_{10} = 1.11$$

проверьте следующие статистические гипотезы.

1) $\begin{cases} H_0 : \mu = 1 \\ H_1 : \mu \neq 1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} H_0 : \mu = 1 \\ H_1 : \mu > 1 \end{cases}$; 3)$\begin{cases} H_0 : \mu = 1 \\ H_1 : \mu < 1 \end{cases}$

1. Тестирование гипотезы о равенстве математических ожиданий двух независимых случайных выборок при условии, что дисперсии этих выборок известны

Задача 5. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ – независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами (μ_X, σ_X^2) и (μ_Y, σ_Y^2) соответственно, причем $\sigma_X^2 = 2$ и $\sigma_Y^2 = 1$. Уровень значимости $\alpha = 0.05$. Используя реализации случайных выборок

$$x_1 = -1.11; \quad x_2 = -6.10; \quad x_3 = 2.42; \quad x_4 = -0.09; \quad x_5 = -0.17;$$

$$y_1 = -2.29; \quad y_2 = -2.91; \quad y_3 = 0.93; \quad y_4 = -0.78; \quad y_5 = 2.30$$

проверьте следующие статистические гипотезы.

1) $\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X \neq \mu_Y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X > \mu_Y \end{cases}$; 3)$\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X < \mu_Y \end{cases}$

Указание: используйте тестовую статистику

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} \sim N(0,1).$$

Задача 6. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ – независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами (μ_X, σ_X^2) и (μ_Y, σ_Y^2) соответственно, причем $\sigma_X^2 = 4$ и $\sigma_Y^2 = 9$. Уровень значимости $\alpha = 0.05$. Используя реализации случайных выборок

$x_1 = -0.09$; $x_2 = 2.48$; $x_3 = -0.46$ $x_4 = -3.11$; $x_5 = 0.75$;

$y_1 = -2.50$; $y_2 = 8.09$; $y_3 = -0.66$; $y_4 = -2.31$; $y_5 = 2.25$

проверьте следующие статистические гипотезы.

1) $\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X \neq \mu_Y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X > \mu_Y \end{cases}$; 3) $\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X < \mu_Y \end{cases}$

1. Тестирование гипотезы о равенстве математических ожиданий двух независимых случайных выборок при условии, что дисперсии этих выборок неизвестны, но равны между собой

Задача 7. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ – независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами (μ_X, σ_X^2) и (μ_Y, σ_Y^2) соответственно. Известно, что $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$. Уровень значимости $\alpha = 0.05$. Используя реализации случайных выборок

$x_1 = 1.53$; $x_2 = 2.83$; $x_3 = -1.25$; $x_4 = 1.86$; $x_5 = 1.31$;

$$y_1 = -0.80; \quad y_2 = 0.06; \quad y_3 = 0.84; \quad y_4 = 4.07; \quad y_5 = 3.26$$

проверьте следующие статистические гипотезы.

1) $\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X \neq \mu_Y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X > \mu_Y \end{cases}$; 3) $\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X < \mu_Y \end{cases}$

Указание: используйте тестовую статистику

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\left(\frac{n-1}{n+m-2}\hat{\sigma}_X^2 + \frac{m-1}{n+m-2}\hat{\sigma}_Y^2\right)}} \sim t(n+m-2),$$

где $\hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, $\hat{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2$.

Задача 8. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ – независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами (μ_X, σ_X^2) и (μ_Y, σ_Y^2) соответственно. Известно, что $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$. Уровень значимости $\alpha = 0.05$. Используя реализации случайных выборок

$$x_1 = -3.26; \quad x_2 = 1.16; \quad x_3 = 0.90 \quad x_4 = -0.72; \quad x_5 = 3.38;$$

$$y_1 = -2.50; \quad y_2 = 8.09; \quad y_3 = -0.66; \quad y_4 = -2.31; \quad y_5 = 2.25$$

проверьте следующие статистические гипотезы.

1) $\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X \neq \mu_Y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X > \mu_Y \end{cases}$; 3) $\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X < \mu_Y \end{cases}$

1. Тестирование гипотезы о равенстве дисперсий двух независимых случайных выборок при условии, что математические ожидания этих выборок известны

Задача 9. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ – независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами (μ_X, σ_X^2) и (μ_Y, σ_Y^2) соответственно, причем $\mu_X = 0$ и $\mu_Y = 0$. Уровень значимости $\alpha = 0.05$. Используя реализации случайных выборок

$$x_1 = -1.11; \quad x_2 = -6.10; \quad x_3 = 2.42; \quad x_4 = -0.09; \quad x_5 = -0.17;$$

$$y_1 = -2.29; \quad y_2 = -2.91; \quad y_3 = 0.93; \quad y_4 = -0.78; \quad y_5 = 2.30$$

проверьте следующие статистические гипотезы.

1) $\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \\ H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2 \end{array} \right.$; 2) $\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \\ H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2 \end{array} \right.$; 3) $\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \\ H_1 : \sigma_X^2 < \sigma_Y^2 \end{array} \right.$

Указание: используйте тестовую статистику

$$T = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_X)^2}{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mu_Y)^2} \sim F(n, m).$$

1. Тестирование гипотезы о равенстве дисперсий двух независимых случайных выборок при условии, что математические ожидания этих выборок неизвестны

Задача 10. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ – независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами (μ_X, σ_X^2) и (μ_Y, σ_Y^2) соответственно. Уровень значимости $\alpha = 0.05$. Используя реализации случайных выборок

$$x_1 = -1.11; \quad x_2 = -6.10; \quad x_3 = 2.42; \quad x_4 = -0.09; \quad x_5 = -0.17;$$

$$y_1 = -2.29; \quad y_2 = -2.91; \quad y_3 = 0.93; \quad y_4 = -0.78; \quad y_5 = 2.30$$

проверьте следующие статистические гипотезы.

1) $\begin{cases} H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \\ H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \\ H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \\ H_1 : \sigma_X^2 < \sigma_Y^2 \end{cases}$

Указание: используйте тестовую статистику

$$T = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2} \sim F(n-1, m-1).$$

Листок 15 по ТВ и МС 2013–2014 [08.03.2014]

1

Кафедра математической экономики и эконометрики НИУ ВШЭ. Борзых Д. А.

Листок 15

χ^2-критерий Пирсона

Задача 1. Вася решил проверить известное утверждение о том, что бутерброд падает маслом вниз. Для этого он провел серию из 200 испытаний. Ниже приведена таблица с результатами.

Бутерброд с маслом	Маслом вниз	Маслом вверх
Число наблюдений	105	95

Можно ли утверждать, что бутерброд падает маслом вниз также часто, как и маслом вверх? Уровень значимости $\alpha = 0.01$.

Решение. $n = 200$; $r = 2$.

Пусть $X_j = \begin{cases} 1, & c\ 25@.\ p \\ 0, & c\ 25@.\ (1-p) \end{cases}$, $\left(j = \overline{1, n}\right)$. Если $x_j = 1$, то будем считать, что в $j-$м испытании бутерброд упал маслом вниз, если же $x_j = 0$, то будем считать, что в j—м испытании бутерброд упал маслом вверх.

Требуется проверить гипотезу $H_0 : p = 0.5$.

Известно, что $W_n = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} \overset{as}{\sim} \chi^2 (r-1)$. Поэтому считаем, что $W_{200} = \sum_{i=1}^{2} \frac{(\nu_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} \sim \chi^2 (1)$, где $p_1 = P(\{X_j = 1\}) = 0.5$ и $p_2 = P(\{X_j = 0\}) = 0.5$.

$$\nu_1 = 105, \nu_2 = 95.$$

$$W_{200,=01;} = \frac{(105 - 200 \cdot 0.5)^2}{200 \cdot 0.5} + \frac{(95 - 200 \cdot 0.5)^2}{200 \cdot 0.5} = \frac{50}{100} = 0.5.$$

$$\chi^2_{:@} = 6.63.$$

Задача 2. Игральный кубик подбрасывался 1389 раз. В следующей таблице приведено, сколько раз выпала каждая грань.

1	2	3	4	5	6
234	229	240	219	236	231

Проверьте гипотезу о том, что кубик правильный. Уровень значимости $\alpha = 0.05$.

Решение. $X_j(\Omega) = S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$;

$$S_1 = \{1\}; S_2 = \{2\}; S_3 = \{3\}; S_4 = \{4\}; S_5 = \{5\}; S_6 = \{6\}; r = 6.$$

$$n = 1389.$$

Основная гипотеза означает, что

$$p_i = P(\{X_j = i\}) = \frac{1}{6} \left(i = \overline{1,6}\right).$$

Известно, что $W_n = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - n\cdot p_i)^2}{n\cdot p_i} \overset{as}{\sim} \chi^2(r-1)$.

Поэтому считаем, что $W_{1389} = \sum_{i=1}^{6} \frac{(\nu_i - n\cdot p_i)^2}{n\cdot p_i} \sim \chi^2(5)$.

$$\nu_1 = 234; \nu_2 = 229; \nu_3 = 240; \nu_4 = 219; \nu_5 = 236; \nu_6 = 231.$$

$$W_{1389,\,=01;.} = \sum_{i=1}^{6} \frac{(\nu_i - n\cdot p_i)^2}{n\cdot p_i} = 1.12.$$

$$\chi^2_{:@} = 11.07.$$

Поскольку $W_{1389,\,=01;.} = 1.12 \in [0; 11.07]$, то основная гипотеза $H_0 : p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}$ не отвергается.

Задача 3. Вася Сидоров утверждает, что ходит в кино в два раза чаще, чем в спортзал, а в спортзал в два раза чаще, чем в театр. За последние полгода он 10 раз был в театре, 17 раз – в спортзале и 39 раз в кино. Правдоподобно ли Васино утверждение?

Задача 4. Монета подбрасывалась 4040 раз, при этом герб выпал 2048 раз. Согласуются ли эти данные с гипотезой о симметричности монеты на уровне значимости $\alpha = 0.1$?

Задача 5. Монета подбрасывалась 400 раз, при этом герб выпал 209 раз. Согласуются ли эти данные с гипотезой о симметричности монеты на уровне значимости $\alpha = 0.01$?

Задача 6. Пусть задана реализация случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$ из распределения Бернулли с неизвестной вероятностью “успеха” p, т.е. $P(\{X_j = l\}) = p^l \cdot (1-p)^{1-l}$, $(l = 0, 1)$. Известно, что реализация случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$ содержит 192 нуля и 208 единиц. Используя χ^2-критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить гипотезу $H_0 : p = 0.5$ против альтернативной гипотезы $H_1 : p \neq 0.5$.

Задача 7. Пусть задана реализация случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$ из распределения Бернулли с неизвестной вероятностью “успеха” p, т.е. $P(\{X_j = l\}) = p^l \cdot (1-p)^{1-l}$, $(l = 0, 1)$. Известно, что реализация случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$ содержит 251 ноль и 149 единиц. Используя χ^2-критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости $\alpha = 0.01$ проверить гипотезу $H_0 : p = 0.4$ против альтернативной гипотезы $H_1 : p \neq 0.4$.

Задача 8. Пусть задана реализация случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$ из распределения Бернулли с неизвестной вероятностью “успеха” p, т.е. $P(\{X_j = l\}) = p^l \cdot (1-p)^{1-l}$, $(l = 0, 1)$. Известно, что реализация случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$ содержит 359 нулей и 41 единицу. Используя χ^2-критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости $\alpha = 0.01$ проверить гипотезу $H_0 : p = 0.2$ против альтернативной гипотезы $H_1 : p \neq 0.2$.

Задача 9. Пусть задана реализация случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$ из распределения Бернулли с неизвестной вероятностью “успеха” p, т.е. $P(\{X_j = l\}) = p^l \cdot (1-p)^{1-l}$, $(l = 0, 1)$. Известно, что реализация случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$ содержит 359 нулей и 41 единицу. Используя χ^2-критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости $\alpha = 0.01$ проверить гипотезу $H_0 : p = 0.1$ против альтернативной гипотезы $H_1 : p \neq 0.1$.

Задача 10. Пусть задана реализация случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$ из биномиального распределения с неизвестной вероятностью “успеха” p и числом испытаний $k = 3$, т.е. $P(\{X_j = l\}) = C_k^l \cdot p^l \cdot (1-p)^{k-l}$, $\left(l = \overline{0, 3}\right)$. Известно, что реализация случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$ содержит 47 нулей, 163 единицы, 148 двоек и 42 тройки. Используя χ^2-критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить гипотезу $H_0 : p = 0.5$ против альтернативной гипотезы $H_1 : p \neq 0.5$.

Решение. $X_j\left(\Omega\right)=S=\{0;1;2;3\}$;

$$S_1=\{0\}\,;S_2=\{1\}\,;S_3=\{2\}\,;S_4=\{3\}\,;r=4.$$

$$n=400=47+163+148+42.$$

Основная гипотеза означает, что

$$p_1=P\left(\{X_j=0\}\right)=C_3^0\cdot 0.5^0\cdot\left(1-0.5\right)^{3-0}=0.125;$$

$$p_2=P\left(\{X_j=1\}\right)=C_3^1\cdot 0.5^1\cdot\left(1-0.5\right)^{3-1}=0.375;$$

$$p_3=P\left(\{X_j=2\}\right)=C_3^2\cdot 0.5^2\cdot\left(1-0.5\right)^{3-2}=0.375;$$

$$p_4=P\left(\{X_j=3\}\right)=C_3^3\cdot 0.5^3\cdot\left(1-0.5\right)^{3-3}=0.125.$$

Известно, что $W_n=\sum_{i=1}^{r}\frac{(\nu_i-n\cdot p_i)^2}{n\cdot p_i}\overset{as}{\sim}\chi^2\left(r-1\right)$.

Поэтому считаем, что $W_{400}=\sum_{i=1}^{4}\frac{(\nu_i-n\cdot p_i)^2}{n\cdot p_i}\sim\chi^2\left(3\right)$.

$$\nu_1=47;\nu_2=163;\nu_3=148;\nu_4=42.$$

$$W_{400,\,=01;.}=\sum_{i=1}^{4}\frac{\left(\nu_i-n\cdot p_i\right)^2}{n\cdot p_i}=$$

$$= \frac{(47 - 400 \cdot 0.125)^2}{400 \cdot 0.125} + \frac{(163 - 400 \cdot 0.375)^2}{400 \cdot 0.375} + \frac{(148 - 400 \cdot 0.375)^2}{400 \cdot 0.375} + \frac{(42 - 4}{400}$$

$$\chi^2_{:@} = 7.81.$$

Поскольку $W_{400, =01;.} = 2.61 \in [0; 7.81]$, то основная гипотеза $H_0 : p = 0.5$ не отвергается.

Задача 11. Пусть задана реализация случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$ из биномиального распределения с неизвестной вероятностью "успеха" p и числом испытаний $k = 3$, т.е. $P(\{X_j = l\}) = C_k^l \cdot p^l \cdot (1-p)^{k-l}$, $\left(l = \overline{0,3}\right)$. Известно, что реализация случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$ содержит 55 нулей, 139 единиц, 147 двоек и 59 троек. Используя χ^2-критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить гипотезу $H_0 : p = 0.5$ против альтернативной гипотезы $H_1 : p \neq 0.5$.

Задача 12. Пусть задана реализация случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$ из биномиального распределения с неизвестной вероятностью "успеха" p и числом испытаний $k = 3$, т.е. $P(\{X_j = l\}) = C_k^l \cdot p^l \cdot (1-p)^{k-l}$, $\left(l = \overline{0,3}\right)$. Известно, что реализация случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$ содержит 10 нулей, 73 единицы, 174 двойки и 143 тройки. Используя χ^2-критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить гипотезу $H_0 : p = 0.5$ против альтернативной гипотезы $H_1 : p \neq 0.5$.

Решение. $X_j(\Omega) = S = \{0; 1; 2; 3\}$;

$$S_1 = \{0\}; S_2 = \{1\}; S_3 = \{2\}; S_4 = \{3\}; r = 4.$$

$$n = 400 = 10 + 73 + 174 + 143.$$

Основная гипотеза означает, что

$$p_1 = P\left(\{X_j = 0\}\right) = C_3^0 \cdot 0.5^0 \cdot (1 - 0.5)^{3-0} = 0.125;$$

$$p_2 = P\left(\{X_j = 1\}\right) = C_3^1 \cdot 0.5^1 \cdot (1 - 0.5)^{3-1} = 0.375;$$

$$p_3 = P\left(\{X_j = 2\}\right) = C_3^2 \cdot 0.5^2 \cdot (1 - 0.5)^{3-2} = 0.375;$$

$$p_4 = P\left(\{X_j = 3\}\right) = C_3^3 \cdot 0.5^3 \cdot (1 - 0.5)^{3-3} = 0.125.$$

Известно, что $W_n = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} \overset{as}{\sim} \chi^2(r-1)$.
Поэтому считаем, что $W_{400} = \sum_{i=1}^{4} \frac{(\nu_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} \sim \chi^2(3)$.

$$\nu_1 = 10; \nu_2 = 73; \nu_3 = 174; \nu_4 = 143.$$

$$W_{400,\,=01;.} = \sum_{i=1}^{4} \frac{(\nu_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} =$$

$$= \frac{(10 - 400 \cdot 0.125)^2}{400 \cdot 0.125} + \frac{(73 - 400 \cdot 0.375)^2}{400 \cdot 0.375} + \frac{(174 - 400 \cdot 0.375)^2}{400 \cdot 0.375} + \frac{(143}{}$$

$$\chi^2_{:@} = 7.81.$$

Поскольку $W_{400,\,=01;.} = 248 \notin [0; 7.81]$, то основная гипотеза $H_0 : p = 0.5$ отвергается в пользу альтернативной гипотезы $H_1 : p \neq 0.5$.

Задача 13. Пусть задана реализация случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$ из биномиального распределения с неизвестной вероятностью "успеха" p и числом испытаний $k = 3$, т.е. $P(\{X_j = l\}) = C_k^l \cdot p^l \cdot (1-p)^{k-l}$, $\left(l = \overline{0,3}\right)$. Известно, что реализация случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$ содержит 81 ноль, 162 единицы, 132 двойки и 25 троек. Используя χ^2-критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить гипотезу $H_0 : p = 0.5$ против альтернативной гипотезы $H_1 : p \neq 0.5$.

Задача 14. Пусть задана реализация случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$ из биномиального распределения с неизвестной вероятностью "успеха" p и числом испытаний $k = 3$, т.е. $P(\{X_j = l\}) = C_k^l \cdot p^l \cdot (1-p)^{k-l}$, $\left(l = \overline{0,3}\right)$. Известно, что реализация случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$ содержит 81 ноль, 162 единицы, 132 двойки и 25 троек. Используя χ^2-критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить гипотезу $H_0 : p = 0.4$ против альтернативной гипотезы $H_1 : p \neq 0.4$.

Задача 15. [Источник случайных чисел: Шведов А.С., ТВиМС-2, стр. 213] Пусть задана реализация случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$ объема $n = 200$ наблюдений. И пусть заданы множества $S_1 = \left[0; \frac{1}{8}\right]$; $S_i = \left(\frac{i-1}{8}; \frac{i}{8}\right]$, $i = \overline{2,8}$.

В следующей таблице указано число элементов выборки $x = (x_1, ..., x_n)$, попавших в каждое множество S_i, $i = \overline{1,8}$.

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8
29	22	24	22	27	22	26	28

Используя χ^2-критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости $\alpha = 0.01$ проверить гипотезу о том, что элементы случайной выборки имеют равномерное на отрезке $[0; 1]$ распределение.

Задача 16. [Источник случайных чисел: датчик excel] Пусть задана реализация случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$

объема $n = 200$ наблюдений. И пусть заданы множества $S_1 = \left[0; \frac{1}{8}\right]$; $S_i = \left(\frac{i-1}{8}; \frac{i}{8}\right]$, $i = \overline{2,8}$.

В следующей таблице указано число элементов выборки $x = (x_1, ..., x_n)$, попавших в каждое множество S_i, $i = \overline{1,8}$.

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8
30	34	21	20	24	22	21	28

Используя χ^2-критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости $\alpha = 0.01$ проверить гипотезу о том, что элементы случайной выборки имеют равномерное на отрезке $[0;1]$ распределение.

Решение. $r = 8$;$n = 200$.

Основная гипотеза означает, что

$$p_i = P\left(\{X_j \in S_i\}\right) = \tfrac{1}{8}\left(i = \overline{1,8}\right).$$

Известно, что $W_n = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - n\cdot p_i)^2}{n\cdot p_i} \overset{as}{\sim} \chi^2\left(r-1\right)$.

Поэтому считаем, что $W_{200} = \sum_{i=1}^{4} \frac{(\nu_i - n\cdot p_i)^2}{n\cdot p_i} \sim \chi^2\left(7\right)$.

$$\nu_1 = 30; \nu_2 = 34; \nu_3 = 21; \nu_4 = 20; \nu_5 = 24; \nu_6 = 22; \nu_7 = 21; \nu_8 = 28.$$

$$W_{200,\,=01;.} = \sum_{i=1}^{8} \frac{\left(\nu_i - n\cdot p_i\right)^2}{n\cdot p_i} =$$

$$= \tfrac{(30-25)^2}{25} + \tfrac{(34-25)^2}{25} + \tfrac{(21-25)^2}{25} + \tfrac{(20-25)^2}{25} +$$
$$+ \tfrac{(24-25)^2}{25} + \tfrac{(22-25)^2}{25} + \tfrac{(21-25)^2}{25} + \tfrac{(28-25)^2}{25} = 7.28$$

$$\chi^2_{:@} = 18.47.$$

Поскольку $W_{200,\,=01;.} = 7.28 \in [0; 18.47]$, то основная гипотеза о равномерности распределения на отрезке $[0;1]$ не может быть отвергнута.

Задача 17. [Источник случайных чисел: Шведов А.С., ТВиМС-2, стр. 213] Пусть задана реализация случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$ объема $n = 200$ наблюдений. И пусть заданы множества $S_1 = \left[0; \frac{1}{13}\right]$; $S_i = \left(\frac{i-1}{13}; \frac{i}{13}\right]$, $i = \overline{2, 13}$.

В следующей таблице указано число элементов выборки $x = (x_1, ..., x_n)$, попавших в каждое множество S_i, $i = \overline{1, 13}$.

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_1
15	21	12	13	16	13	15	19	10	21	11

Используя χ^2-критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости $\alpha = 0.01$ проверить гипотезу о том, что элементы случайной выборки имеют равномерное на отрезке $[0; 1]$ распределение.

Задача 18. [Источник случайных чисел: датчик excel] Пусть задана реализация случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$ объема $n = 200$ наблюдений. И пусть заданы множества $S_1 = \left[0; \frac{1}{13}\right]$; $S_i = \left(\frac{i-1}{13}; \frac{i}{13}\right]$, $i = \overline{2, 13}$.

В следующей таблице указано число элементов выборки $x = (x_1, ..., x_n)$, попавших в каждое множество S_i, $i = \overline{1, 13}$.

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_1
20	20	16	16	14	10	15	16	15	13	9

Используя χ^2-критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости $\alpha = 0.01$ проверить гипотезу о том, что элементы случайной выборки имеют равномерное на отрезке $[0; 1]$ распределение.

Задача 19. [Источник случайных чисел: Шведов А.С., ТВиМС-2, стр. 213] Пусть задана реализация случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$ объема $n = 200$ наблюдений. И пусть заданы множества $S_1 = \left[0; \frac{1}{10}\right]$; $S_i = \left(\frac{i-1}{10}; \frac{i}{10}\right]$, $i = \overline{2, 10}$.

В следующей таблице указано число элементов выборки $x = (x_1, ..., x_n)$, попавших в каждое множество S_i, $i = \overline{1, 10}$.

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
21	22	14	22	18	25	15	22	21	20

Используя χ^2-критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости $\alpha = 0.01$ проверить гипотезу о том, что элементы случайной выборки имеют равномерное на отрезке $[0;1]$ распределение.

Задача 20. [Источник случайных чисел: датчик excel] Пусть задана реализация случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$ объема $n = 200$ наблюдений. И пусть заданы множества $S_1 = \left[0; \frac{1}{10}\right]$; $S_i = \left(\frac{i-1}{10}; \frac{i}{10}\right]$, $i = \overline{2, 10}$.

В следующей таблице указано число элементов выборки $x = (x_1, ..., x_n)$, попавших в каждое множество S_i, $i = \overline{1, 10}$.

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
26	26	18	16	19	19	19	14	19	24

Используя χ^2-критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости $\alpha = 0.01$ проверить гипотезу о том, что элементы случайной выборки имеют равномерное на отрезке $[0;1]$ распределение.

Задача 21. [Источник случайных чисел: Шведов А.С., ТВиМС-2, стр. 213] Пусть задана реализация случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$ объема $n = 200$ наблюдений. И пусть заданы множества $S_1 = \left[0; \frac{1}{12}\right]$; $S_i = \left(\frac{i-1}{12}; \frac{i}{12}\right]$, $i = \overline{2, 12}$.

В следующей таблице указано число элементов выборки $x = (x_1, ..., x_n)$, попавших в каждое множество S_i, $i = \overline{1, 12}$.

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
17	22	12	17	14	15	22	13	14	17

Используя χ^2-критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости $\alpha = 0.01$ проверить гипотезу о том, что элементы случайной выборки имеют равномерное на отрезке $[0;1]$ распределение.

Задача 22. [Источник случайных чисел: датчик excel] Пусть задана реализация случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$ объема $n = 200$ наблюдений. И пусть заданы множества $S_1 = \left[0; \frac{1}{12}\right]$; $S_i = \left(\frac{i-1}{12}; \frac{i}{12}\right]$, $i = \overline{2, 12}$.

В следующей таблице указано число элементов выборки $x = (x_1, ..., x_n)$, попавших в каждое множество S_i, $i = \overline{1, 12}$.

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_1
21	21	22	13	10	18	18	15	13	9	21

Используя χ^2-критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости $\alpha = 0.01$ проверить гипотезу о том, что элементы случайной выборки имеют равномерное на отрезке $[0; 1]$ распределение.

Задача 23. [Источник случайных чисел: датчик excel] Пусть задана реализация случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$ объема $n = 500$ наблюдений. И пусть заданы множества $S_1 = (-\infty; -3]$; $S_{10} = (3; +\infty)$;$S_i = \left(-3 + 6 \cdot \frac{i-2}{8}; -3 + 6 \cdot \frac{i-1}{8}\right]$, $i = \overline{2, 9}$.

В следующей таблице указано число элементов выборки $x = (x_1, ..., x_n)$, попавших в каждое множество S_i, $i = \overline{1, 10}$.

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
0	83	145	132	73	24	3	3	0	3

Используя χ^2-критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости $\alpha = 0.01$ проверить гипотезу о том, что элементы случайной выборки имеют нормальное стандартное распределение.

Для удобства расчетов ниже приведена следующая информация.

Пусть $p_i = P(\{X_j \in S_i\})$ $\left(i = \overline{1, 10}\right)$. Значения гипотетических вероятностей p_i $\left(i = \overline{1, 10}\right)$ приведены в следующей таблице.

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9
0.0013	0.0108	0.0545	0.1598	0.2733	0.2733	0.1598	0.0545	0.01

Задача 24. [Источник случайных чисел: датчик excel] Пусть задана реализация случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$ объема $n = 500$ наблюдений. И пусть заданы множества $S_1 = (-\infty; -3]$; $S_8 = (3; +\infty)$;$S_i = \left(-3 + 6 \cdot \frac{i-2}{6}; -3 + 6 \cdot \frac{i-1}{6}\right]$, $i = \overline{2, 7}$.

В следующей таблице указано число элементов выборки $x = (x_1, ..., x_n)$, попавших в каждое множество S_i, $i = \overline{1,8}$.

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8
0	7	82	176	168	57	7	3

Используя χ^2-критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости $\alpha = 0.01$ проверить гипотезу о том, что элементы случайной выборки имеют нормальное стандартное распределение.

Для удобства расчетов ниже приведена следующая информация.

Пусть $p_i = P(\{X_j \in S_i\})$ $\left(i = \overline{1,8}\right)$. Значения гипотетических вероятностей p_i $\left(i = \overline{1,8}\right)$ приведены в следующей таблице.

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8
0.0013	0.0214	0.1359	0.3413	0.3413	0.1359	0.0214	0.0013

Задача 25. [Источник случайных чисел: датчик excel] Пусть задана реализация случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$ объема $n = 500$ наблюдений. И пусть заданы множества $S_1 = (-\infty; -3]$; $S_6 = (3; +\infty)$;$S_i = \left(-3 + 6 \cdot \frac{i-2}{4}; -3 + 6 \cdot \frac{i-1}{4}\right]$, $i = \overline{2,5}$.

В следующей таблице указано число элементов выборки $x = (x_1, ..., x_n)$, попавших в каждое множество S_i, $i = \overline{1,6}$.

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
0	37	228	205	27	3

Используя χ^2-критерий согласия Пирсона, требуется на уровне значимости $\alpha = 0.01$ проверить гипотезу о том, что элементы случайной выборки имеют нормальное стандартное распределение.

Для удобства расчетов ниже приведена следующая информация.

Пусть $p_i = P(\{X_j \in S_i\})$ $\left(i = \overline{1,6}\right)$. Значения гипотетических вероятностей p_i $\left(i = \overline{1,6}\right)$ приведены в следующей таблице.

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
0.0013	0.0654	0.4331	0.4331	0.0654	0.0013

Решение. $r = 6; n = 500$.

Известно, что $W_n = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} \overset{as}{\sim} \chi^2(r-1)$.

Поэтому считаем, что $W_{500} = \sum_{i=1}^{6} \frac{(\nu_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} \sim \chi^2(5)$.

$$\nu_1 = 0; \nu_2 = 37; \nu_3 = 228; \nu_4 = 205; \nu_5 = 27; \nu_6 = 3.$$

$$W_{500,\, =01;.} = \sum_{i=1}^{6} \frac{(\nu_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} = 11.46$$

$$\chi^2_{:@} = 15.08.$$

Поскольку $W_{500,\, =01;.} = 11.46 \in [0; 15.08]$, то основная гипотеза H_0 не может быть отвергнута.