

aaa

Серия 10-20-30

В крупном банке 10 независимых клиентских «окошек». В момент открытия в банк вошло 10 человек. Других клиентов банке не было. Предположим, что время обслуживания одного клиента распределено экспоненциально с параметром λ . Оцените параметр λ и оцените дисперсию оценки методом максимального правдоподобия в каждой из ситуаций

а) Менеджер записал время обслуживания первого клиента в каждом окошке. Первое окошко обслужило своего первого клиента за 10 минут, второе (своего первого) - за 20 минут; оставшуюся часть записей менеджер благополучно затерял.

б) Менеджер наблюдал за окошками в течение получаса и записывал время обслуживания первого клиента. Первое окошко обслужило своего первого клиента за 10 минут, второе (своего первого) - за 20 минут; остальные окошки еще обслуживали своих первых клиентов в тот момент, когда менеджер удалился.

в) В момент открытия банка в банк вошло 10 человек. Менеджер наблюдал за окошками в течение получаса. За эти полчаса два окошка успели обслужить своих первых клиентов. Остальные окошки еще обслуживали своих первых клиентов в тот момент, когда менеджер удалился.

г) Менеджер наблюдал за окошками и решил записать время обслуживания первых двух клиентов. Первое окошко обслужило своего первого клиента за 10 минут, другое (своего первого) - за 20 минут. Сразу после того, как был обслужен второй клиент менеджер прекратил наблюдение.

д) Одновременно с открытием банка началась деловая встреча директора банка с инспектором по охране труда. Время проведения таких встреч - случайная величина, имеющая экспоненциальное распределение со средним временем 30 минут. За время проведения встречи было обслужено два клиента.

е) Одновременно с открытием банка началась деловая встреча директора банка с инспектором по охране труда. Время проведения таких встреч - случайная величина, имеющая экспоненциальное распределение со средним временем 30 минут. За время проведения встречи было обслужено два клиента, один за 10 минут, второй - за 20 минут.

ж) Изменим условие: в банке 11 окошек, при открытии банка вошло 11 клиентов. Клиент попавший в 11 окошко смотрел за остальными. Раньше клиента из 11 окошка освободилось двое клиентов: за 10 минут и за 20 минут.

При решении задач могут быть полезны такие свойства экспоненциальных величин:

$$1. P(X < t + x | X > t) = P(X < x)$$

$$2. \text{Если } X_i - \exp(\lambda_i), \text{ то } \min\{X_i\} - \exp(\sum \lambda_i)$$

$$3. P(X_1 = \min\{X_1, \dots, X_n\}) = \frac{\lambda_1}{\sum \lambda_i}$$

а) Функция правдоподобия имеет вид $L = \lambda^2 e^{-\lambda(X_1+X_2)}$.

При максимизации получаем $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$

б) (способ без рассмотрения порядковых статистик)

$$L = p(X_1)p(X_2)P(X_i > 30)^8$$

$$L = \lambda^2 e^{-\lambda(X_1+X_2)} (e^{-\lambda(X_3+\dots+X_{10})})^8$$

При максимизации получаем $\hat{\lambda} =$

$$\text{в) } L = P(X < 30)^2 \cdot P(X > 30)^8$$

$$\text{Получаем } \hat{P} = \frac{2}{10}$$

Отсюда находим $\hat{\lambda} =$

г)

$$\text{д) } L = P(X_i < Y)^2 \cdot P(X_i > Y)^8$$

$$\text{Получаем } \hat{P} = \frac{2}{10}$$

$$\text{Отсюда находим } \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\lambda}+30} = 0.2 \text{ и } \hat{\lambda} = \frac{2}{8} \cdot 30$$

е)

ж)

Столица и страна

Предположим, что доход жителей страны распределен экспоненциально.

Имеется выборка из 1000 наблюдений по жителям столицы. Постройте 90% доверительный интервал для λ . Если...

а) столицу можно считать случайной выборкой из жителей страны

б) в столице селятся только люди с доходом больше 100 тыс. рублей.

в) в столице селятся только люди с доходом больше m тыс. рублей, где m - неизвестная константа.

При этом постройте также и 90% доверительный интервал для m

г) в столице живут 10% самых богатых жителей страны.

д) в столице живут $p\%$ самых богатых жителей страны, где p - неизвестная константа. Постройте также 90% доверительный интервал для p .