

Тренировочный вариант для подготовки к контрольной работе № 3 по ТВ и МС [2016–2017]

Ф. И. О.

Это тренировочный вариант для контрольной номер 3. Вариант контрольной будет отличаться от данного довольно сильно. Там будут другие задачи. Темы — те же.

Задача 1. Для реализации случайной выборки $x = (-2, 1, 0, -1, 2, -2)$ найдите:

- (a) выборочное среднее,
- (b) неисправленную выборочную дисперсию,
- (c) исправленную выборочную дисперсию,
- (d) выборочный второй начальный момент,
- (e) вариационный ряд,
- (f) первый член вариационного ряда,
- (g) последний член вариационного ряда,
- (h) график выборочной функции распределения.

Задача 2. Случайные векторы $X = (X_1, X_2)$, $Y = (Y_1, Y_2)$ и $Z = (Z_1, Z_2)$ имеют следующие таблицы распределения:

	$X_1 = 1$	$X_2 = 2$
$X_1 = 1$	0.3	0.2
$X_1 = 2$	0.2	0.3

	$Y_1 = 3$	$Y_2 = 4$
$Y_1 = 1$	0.25	0.25
$Y_1 = 2$	0.25	0.25

	$Z_1 = 1$	$Z_2 = 2$
$Z_1 = 1$	0.25	0.25
$Z_1 = 2$	0.25	0.25

- (a) Является ли вектор $X = (X_1, X_2)$ случайной выборкой? Обоснуйте ответ!
- (b) Является ли вектор $Y = (Y_1, Y_2)$ случайной выборкой? Обоснуйте ответ!
- (c) Является ли вектор $Z = (Z_1, Z_2)$ случайной выборкой? Обоснуйте ответ!

Задача 3. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ — случайная выборка из дискретного распределения с таблицей распределения

X_i	-4	0	3
\mathbb{P}_{X_i}	$3/4 - \theta$	$1/4$	θ

- (a) При помощи метода моментов, используя второй начальный момент, найдите оценку $\hat{\theta}$ неизвестного параметра θ .
- (b) Для реализации случайной выборки $x = (0, 0, -4, 3, 0)$ найдите числовое значение $\hat{\theta}$.

Задача 4. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ — случайная выборка из распределения с плотностью распределения

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x e^{-\frac{x}{\sqrt{\theta}}} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0, \end{cases}$$

где $\theta > 0$ — неизвестный параметр распределения.

- (a) При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценку $\hat{\theta}$ неизвестного параметра θ .
- (b) Для реализации случайной выборки $x = (2, 1, 3, 1)$ найдите числовое значение $\hat{\theta}$.

Задача 5. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ — случайная выборка из распределения с плотностью распределения

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{6x(\theta-x)}{\theta^3} & \text{при } x \in [0; \theta], \\ 0 & \text{при } x \notin [0; \theta], \end{cases}$$

где $\theta > 0$ — неизвестный параметр распределения. Пусть $\hat{\theta} = \bar{X}$.

- (a) Найдите $\mathbb{E}[\hat{\theta}]$.
- (b) Дайте определение несмещенной оценки.
- (c) Является ли оценка $\hat{\theta} = \bar{X}$ — несмещенной оценкой параметра θ ?
- (d) Подберите константу c так, чтобы оценка $\tilde{\theta} = c\hat{\theta}$ была несмещенной оценкой параметра θ .

Задача 6. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ — случайная выборка из распределения с плотностью распределения

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{6x(\theta-x)}{\theta^3} & \text{при } x \in [0; \theta], \\ 0 & \text{при } x \notin [0; \theta], \end{cases}$$

где $\theta > 0$ — неизвестный параметр распределения. Пусть $\hat{\theta}_n = \bar{X}_n$.

- (a) Найдите предел по вероятности $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta}_n$.
- (b) Дайте определение состоятельной оценки.
- (c) Является ли оценка $\hat{\theta}_n$ состоятельной оценкой параметра θ ?

Задача 7. Пусть $X = (X_1, X_2, X_3)$ — случайная выборка из нормального распределения с неизвестным математическим ожиданием μ и известной дисперсией $\sigma^2 = 1$. Пусть $\hat{\mu} = \frac{X_1 + X_3}{2}$.

- (a) Найдите информацию Фишера о параметре μ , заключенную в одном наблюдении случайной выборки.

- (b) Является ли оценка $\hat{\mu}$ несмещенной?
- (c) Сформулируйте неравенство Рао–Крамера.
- (d) Дайте определение эффективной оценки.
- (e) Является ли оценка $\hat{\mu}$ эффективной?

Задача 8. Для некоторой отрасли проведено исследование об оплате труда мужчин и женщин. Их зарплаты (тыс. руб. в месяц) приведены ниже:

мужчины	35	40	45	45	50
женщины	30	30	30	45	60

Предполагая нормальность и независимость выборок для мужчин и женщин, постройте 95%-й доверительный интервал для разности математических ожиданий зарплат мужчин и женщин.

Задача 9. Стоимость выборочного исследования генеральной совокупности, состоящей из трех страт, определяется по формуле $TC = c_1n_1 + c_2n_2 + c_3n_3$, где c_i — цена наблюдения в i -й страте, а n_i — число наблюдений, которые приходятся на i -ю страту. Найдите n_1 , n_2 и n_3 , при которых дисперсия стратифицированного среднего достигает наименьшего значения, если бюджет исследования составляет 8000 и имеется следующая информация:

страта	1	2	3
среднее значение	30	40	50
стандартная ошибка	5	10	20
вес	25%	25%	50%
цена наблюдения	1	5	10