На бытовом языке центральная предельная теорема формулируется так:

При большом n распределение $\bar{X}_n$ похоже на нормальное.

Возникает естественный вопрос - "А большое n - это сколько?". Кто-то говорит 30, кто-то 60... Пора покончить с этим безобразием!

Ответ даёт теорема Берри-Эссена (Berry-Essen):

Если X_i независимы и одинаково распределены, $Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$, $Z \sim N(0;1)$, то:

$$|\mathbb{P}(Z_n \leqslant t) - \mathbb{P}(Z \leqslant t)| \leqslant c \cdot \frac{\mathbb{E}(|X_i - \mu|^3)}{\sigma^3 \sqrt{n}} \tag{1.1}$$

На момент создания этих заметок (март 2011) про константу c известно , что она лежит где-то в интервале $[0,4097; 0,4784]$.

Сама центральная предельная теорема утверждает только то, что:

$$\mathbb{P}(Z_n \leqslant t) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(Z \leqslant t)$$

Поскольку

$$\begin{aligned}
|\mathbb{P}(Z_n \in [a;b]) - \mathbb{P}(Z \in [a;b])| &= |\mathbb{P}(Z_n \leqslant b) - \mathbb{P}(Z_n \leqslant a) - (\mathbb{P}(Z \leqslant b) - \mathbb{P}(Z \leqslant a))| = \\
&= |\mathbb{P}(Z_n \leqslant b) - \mathbb{P}(Z \leqslant b) + \mathbb{P}(Z \leqslant a) - \mathbb{P}(Z_n \leqslant a)| \leqslant \\
&\leqslant |\mathbb{P}(Z_n \leqslant b) - \mathbb{P}(Z \leqslant b)| + |\mathbb{P}(Z \leqslant a) - \mathbb{P}(Z_n \leqslant a)| \leqslant 2c \cdot \frac{\mathbb{E}(|X_i - \mu|^3)}{\sigma^3 \sqrt{n}}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Для простоты можно завысить c и считать его равным $0,5$. Тогда мы получаем:

$$|\mathbb{P}(Z_n \in [a;b]) - \mathbb{P}(Z \in [a;b])| \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X_i - \mu|^3)}{\sigma^3 \sqrt{n}} \tag{1.3}$$

Давайте применим эту теорему к биномиальному распределению:

X_i	0	1
Prob	$1-p$	p

В этом случае: $\mathbb{E}(X_i) = p$, $\operatorname{Var}(X_i) = p(1-p)$, $\sigma = \sqrt{p(1-p)}$ и $\mathbb{E}(|X_i - p|^3) = p(1-p)(p^2 + (1-p)^2)$:

$$\frac{\mathbb{E}(|X_i - \mu|^3)}{\sigma^3 \sqrt{n}} = \frac{p(1-p)(p^2 + (1-p)^2)}{(p(1-p))^{3/2}\sqrt{n}} = \frac{p^2 + (1-p)^2}{\sqrt{p(1-p)n}} \tag{1.4}$$

Для наглядности несколько цифр[1]:

n	p	Погрешность при оцеке $\mathbb{P}(\bar{X}_n \in [a;b])$
50	0.5	
100	0.5	
500	0.1	
1000	0.1	

Аналогичный вопрос возникает при замене биномиального распределения на распределение Пуассона. В этом случае аналогичная теорема имеет вид:

Если $X \sim Bin(n,p)$ и $Y \sim Poisson(\lambda = np)$, то:

$|\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)| \leqslant$

Кстати говоря, на пуассоновское можно заменять не только биномиальное распределение, но и другие похожие

...

[1] Погрешность посчитана по формуле **??**, т.е. при завышенном c. Фактическая погрешность может быть гораздо меньше.

Доказательства для любопытных...
Упражнения