

1. Вася может получить за экзамен равновероятно либо 8 баллов, либо 7 баллов. Петя может получить за экзамен либо 8 баллов — с вероятностью $1/3$; либо 7 баллов — с вероятностью $2/3$. Известно, что корреляция их результатов равна 0.7.

Какова вероятность того, что Петя и Вася покажут одинаковый результат?

2. В городе Туме проводят демографическое исследование семейных пар. Стандартное отклонение возраста мужа оказалось равным 5 годам, а стандартное отклонение возраста жены — 4 годам. Найдите корреляцию возраста жены и возраста мужа, если стандартное отклонение разности возрастов оказалось равным 2 годам. В каких пределах лежит вероятность того, что возраст случайно выбираемого женатого мужчины отклоняется от своего математического ожидания больше чем на 10 лет?
3. На окружности единичной длины случайным образом равномерно и независимо друг от друга выбирают две дуги: длины 0.3 и длины 0.4.

- (a) Найдите функцию распределения длины пересечения этих отрезков
(b) Найдите среднюю длину пересечения

4. Совместная функция плотности величин X и Y имеет вид

$$f(x, y) = \begin{cases} 2(x^3 + y^3), & \text{если } x \in [0; 1], y \in [0; 1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

- (a) [1] Найдите $\mathbb{P}(X + Y > 1)$
(b) [6] Найдите $\text{Cov}(X, Y)$
(c) [1] Являются ли величины X и Y независимыми?
(d) [1] Являются ли величины X и Y одинаково распределенными?
5. Изначально цена акций компании «Пумперникель» равна $X_0 = 1000$ рублей. Каждый последующий день в течение 100 дней цена равновероятно может вырасти на 2 рубля или упасть на 1 рубль. Обозначим цену акции через n дней как X_n .
- (a) Чему равны математическое ожидание и дисперсия изменения цены за отдельный день?
(b) Найдите $\mathbb{E}(X_n)$, $\text{Var}(X_n)$, $\text{Cov}(X_n, X_k)$
(c) Сформулируйте центральную предельную теорему
(d) Примерно найдите вероятность $\mathbb{P}(X_{100} > 1060)$
(e) Биржевой игрок Вениамин утверждает, что через 100 дней с вероятностью 95% цена акций «Пумперникель» не опустится ниже a . Чему равно a ?
6. Сэр Фрэнсис Гальтон — учёный XIX-XX веков, один из основоположников как генетики, так и статистики — изучал, среди всего прочего, связь между ростом детей и родителей. Он исследовал данные о росте 928 индивидов. Обозначим X_1 — рост случайного человека, а X_2 — среднее арифметическое роста его отца и матери. По результатам исследования Гальтона:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} 68.1 \\ 68.3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 6.3 & 2.1 \\ 2.1 & 3.2 \end{pmatrix} \right]$$

- (a) Обратите внимание на то, что дисперсия роста детей выше дисперсии среднего роста родителей. С чем это может быть связано? Учтите, что рост детей измерялся уже по достижении зрелости, так что разброс не должен быть связан с возрастными различиями.
 - (b) Рассчитайте корреляцию между X_1 и X_2
 - (c) Один дюйм примерно равен 2.54 сантиметра. Пусть X'_1 и X'_2 — это те же X_1 и X_2 , только измеренные в сантиметрах. Найдите вектор математических ожиданий и ковариационную матрицу вектора $X' = (X'_1, X'_2)$.
 - (d) Определите, каков ожидаемый рост и дисперсия роста человека, средний рост родителей которого составляет 72 дюйма?
 - (e) Найдите вероятность того, что рост человека превысит 68 дюймов, если средний рост его родителей равен 72 дюймам. Подсказка: используйте предыдущий пункт и нормальность распределения!
7. Звонки поступают в пожарную часть согласно пуассоновскому потоку в среднем 2 раза в час. Предположим, что после получения звонка пожарная часть занята тушением пожара случайное время равномерно распределённое от получаса до часа. В это время звонки перенаправляются в соседнюю пожарную часть.
- Пожарная часть только-только начала работать и готова принимать звонки.
- (a) Какова вероятность того, что за ближайший час не поступит звонков?
 - (b) Какова вероятность того, что за ближайший час не будет перенаправленных звонков?
 - (c) Найдите закон распределения количества звонков до первого перенаправленного звонка.
8. Судьба Дон-Жуана
- У Дон-Жуана n знакомых девушек, и их всех зовут по-разному. Он пишет им n писем, но по рассеянности раскладывает их в конверты наугад. Случайная величина X обозначает количество девушек, получивших письма, адресованные лично им.
- (a) Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\text{Var}(X)$
 - (b) Какова при большом n вероятность того, что хотя бы одна девушка получит письмо, адресованное ей?
9. Игла Бюффона
- Плоскость разлинована параллельными линиями через каждый сантиметр. Случайным образом на эту плоскость бросается иголка длины $a < 1$.
- (a) Какова вероятность того, что иголка пересечёт какую-нибудь линию?
 - (b) Предложите вероятностный способ оценки числа π