

1. Функция плотности случайного вектора  $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$  имеет вид

$$f(x, y) = \begin{cases} 0.5x + 1.5y, & \text{если } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдите:

- Математическое ожидание  $\mathbb{E}(\xi_1 \cdot \xi_2)$
  - Условную плотность распределения  $f_{\xi_1|\xi_2}(x|y)$
  - Условное математическое ожидание  $\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2 = y)$
  - Константу  $k$ , такую, что функция  $h(x, y) = x \cdot f(x, y)$  будет являться совместной функцией плотности некоторой пары случайных величин
2. На курсе учится очень много студентов. Вероятность того, что случайно выбранный студент получит «отлично» за контрольную равна 0.2, «хорошо» — 0.3. Вероятности остальных результатов неизвестны. Пусть  $\xi$  и  $\eta$  — число отличников и хорошистов в случайной группе из 10 студентов. Найдите  $\text{Cov}(\xi, \eta)$ ,  $\text{Corr}(\xi, \eta)$ ,  $\text{Cov}(\xi - \eta, \xi)$ . Являются ли случайные величины  $\xi - \eta$  и  $\xi$  независимыми?
3. Доходности акций компаний А и В — случайные величины  $\xi$  и  $\eta$ . Известно, что  $\mathbb{E}(\xi) = 1$ ,  $\mathbb{E}(\eta) = 1$ ,  $\text{Var}(\xi) = 4$ ,  $\text{Var}(\eta) = 9$ ,  $\text{Corr}(\xi, \eta) = -0.5$ . Петя принимает решение потратить свой рубль на акции компании А, Вася — 50 копеек на акции компании А и 50 копеек на акции компании В, а Маша принимает решение вложить свой рубль в портфель  $R = \alpha\xi + (1 - \alpha)\eta$ , ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ), обладающий минимальным риском. Найдите  $\alpha$ , ожидаемые доходности и риски портфелей Пети, Васи и Маши.
4. Будем считать, что рождение мальчика и девочки равновероятны.
- С помощью закона больших чисел определите в каком городе, большом или маленьком, больше случается таких дней, когда рождается более 75% мальчиков.
  - Оцените с помощью неравенства Маркова вероятность того, что среди тысячи новорожденных младенцев мальчиков будет более 75%.
  - Оцените с помощью неравенства Чебышёва вероятность того, что доля мальчиков среди тысячи новорожденных младенцев будет отличаться от 0.5 более, чем на 0.25
  - С помощью теоремы Муавра-Лапласа вычислите вероятность из предыдущего пункта.
5. Сейчас валютный курс племени «Мумба» составляет 100 оболов за один рубль. Процентное изменение курса за один день — случайная величина  $\delta_i$  с законом распределения:

$\delta_i$	-1%	1%
$\mathbb{P}(\cdot)$	0.25	0.75

Найдите вероятность того, что через полгода (171 день) рубль будет стоить более 271 обولا, если ежедневные изменения курса происходят независимо друг от друга.

6. Величины  $X_1, X_2, \dots$  независимы и равновероятно принимают значения  $-1$  и  $3$ .

а) Найдите  $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}$

б) С помощью дельта-метода найдите примерный закон распределения  $\frac{\sum_{i=1}^{100} (X_i - \bar{X})^2}{100}$