

Это тренировочный вариант для контрольной номер 3. Вариант контрольной будет отличаться от данного довольно сильно. Там будут другие задачи. Темы — те же.

1. Даны значения случайной выборки $X_1 = 5, X_2 = 3, X_3 = 4, X_4 = 4, X_5 = 11$.
 - а) Выпишите вариационный ряд.
 - б) Найдите выборочные моду, медиану, среднее.
 - в) Найдите несмещённую оценку дисперсии X_i .
 - г) Выпишите и нарисуйте выборочную функцию распределения.
2. В обозримой части Вселенной водится всего пять Лиловых кальмароандроидов. Храбрый исследователь глубокого космоса Юрий поймал трёх из них. После поимки Феофан измерил их гипнопотенциал (в рунах): $X_1 = 2.5, X_2 = 9.5, X_3 = 6$.
 - а) Помогите Юрию построить несмещённую оценку для неизвестных науке $\mathbb{E}(X_i)$ и $\text{Var}(X_i)$.
 - б) Как изменились бы ответы на предыдущий вопрос, если бы Феофан после отлова очередного кальмароандроида отпускал бы его обратно на просторы Вселенной?
3. Исследователь Юрий начал собирать данные о довольно распространённых Саблезубых хомозоидах. Их гипнопотенциал имеет нормальное распределение. По выборке из 10 хомозоидов оказалось, что средний выборочный гипнопотенциал равен 5 рун с выборочным стандартным отклонением в 2 руны.
 - а) Постройте 90%-ый доверительный интервал для математического ожидания гипнопотенциала хомозоида.
 - б) Постройте 90%-ый доверительный интервал для дисперсии гипнопотенциала хомозоида.
4. Величины X_1, X_2, \dots независимы и имеют экспоненциальное распределение с параметром λ . По выборке из 100 наблюдений оказалось, что $\sum X_i = 150$ и $\sum X_i^2 = 1500$. Исследователь Афанасий хочет оценить параметр λ .
 - а) Найдите оценку λ методом максимального правдоподобия.
 - б) Оцените теоретическую информацию Фишера I .
 - в) Постройте 95%-ый доверительный интервал для λ с помощью λ_{ML} .
 - г) Также исследователь Афанасий хочет оценить параметр $\theta = \mathbb{P}(X_i > 1)$. Найдите θ_{ML} и построьте 95%-ый доверительный интервал для θ .
5. Согласно опросу ВЦИОМ 2011 года¹ из 1600 опрошенных 32% согласны с утверждением «Солнце вращается вокруг Земли».
 - а) Постройте 90%-ый доверительный интервал для доли россиян, согласных с данным утверждением.
 - б) В 2007 году при том же размере выборке согласных с утверждением о Солнце было 28%. Постройте 95%-ый доверительный интервал для изменения доли согласных с утверждением.

¹более свежий я на скорую руку не нашёл, <https://wciom.ru/index.php?id=236&uid=111345>.

- в) (*) Что подразумевает ВЦИОМ под фразой «Статистическая погрешность не превышает 3,4%»?
6. Величины X_1, X_2, \dots независимы и имеют биномиальное распределение $Bin(n = 20, p)$.
- а) Найдите оценку p методом моментов.
 - б) Найдите дисперсию оценки \hat{p}_{MM} .
 - в) Является ли данная оценка несмещённой? состоятельной?
 - г) Найдите информацию Фишера для отдельного наблюдения $i(p)$.
 - д) Сформулируйте неравенство Рао-Крамера для данного случая.
 - е) Является ли оценка \hat{p}_{MM} эффективной среди несмещённых?
 - ж) Постройте 95%-ый доверительный интервал для p .
7. Величины X_1, X_2, \dots независимы и распределены нормально $\mathcal{N}(0; 4)$.
- а) Как распределены величины $Y = (X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)/4$, $Z = (X_1^2 + X_2^2)/(X_3^2 + X_4^2)$ и $W = X_1/\sqrt{X_2^2 + X_3^2}$?
 - б) Для каждой из величин Y , Z и W найдите с помощью таблиц такое пороговое число a , которое величина превышает с вероятностью 0.5.
8. Ресторанный критик ходит по трём типам ресторанов (дешевых, бюджетных и дорогих) города N для того, чтобы оценить среднюю стоимость бизнес-ланча. В городе 30% дешевых ресторанов, 60% — бюджетных и 10% — дорогих. Стандартное отклонение цены бизнес-ланча составляет 10, 30 и 60 рублей соответственно. В ресторане критик заказывает только кофе. Стоимость кофе в дешевых/бюджетных/дорогих ресторанах составляет 150, 300 и 600 рублей соответственно, а бюджет исследования — 30 000 рублей.
- а) Какое количество ресторанов каждого типа нужно посетить критику, чтобы как можно точнее оценить среднюю стоимость бизнес-ланча при заданном бюджетном ограничении (округлите полученные значения до ближайших целых)?
 - б) Вычислите дисперсию соответствующего стратифицированного среднего.
9. Величины X_i независимы и одинаково распределены. Предлагается три оценки математического ожидания:

$$\hat{\mu}_A = \frac{2X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + \dots + X_n}{n+1}$$

$$\hat{\mu}_B = \frac{2X_1 - X_2 + X_3 + X_4 + \dots + X_n}{n}$$

$$\hat{\mu}_C = \frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 + \dots + X_n}{n(n+1)}$$

- а) Какие оценки являются несмещёнными? состоятельными?
- б) Какая из несмещённых оценок является эффективной?