

Вариант А.

Задача 1 (для первого потока).

Проверка 40 случайно выбранных лекций показала, что студент Халявин присутствовал только на 16 из них.

1. Найдите 95% доверительный интервал для вероятности увидеть Халявина на лекции.
2. На уровне значимости 5% проверьте гипотезу о том, что Халявин посещает в среднем половину лекций.
3. Вычислите минимальный уровень значимости, при котором основная гипотеза отвергается (Р-значение).

Задача 1 (для второго потока).

Вес упаковки с лекарством является нормальной случайной величиной. Взвешивание 20 упаковок показало, что выборочное среднее равно 51 г, а несмещенная оценка дисперсии равна 4.

1. На уровне значимости 10% проверьте гипотезу, что в среднем вес упаковки составляет 55 г.
2. Контрольное взвешивание 30 упаковок такого же лекарства другого производителя показало, что несмещенная оценка дисперсии веса равна 6. На уровне значимости 10% проверьте гипотезу о равенстве дисперсий веса упаковки двух производителей.

Задача 2 (для первого потока).

В ходе анкетирования 15 сотрудников банка «Альфа» ответили на вопрос о том, сколько времени они проводят на работе ежедневно. Среднее выборочное оказалось равно 9.5 часам при выборочном стандартном отклонении 0.5 часа. Аналогичные показатели для 12 сотрудников банка «Бета» составили 9.8 и 0.6 часа соответственно.

Считая распределение времени нормальным, на уровне значимости 5% проверьте гипотезу о том, что сотрудники банка «Альфа» в среднем проводят на работе столько же времени, сколько и сотрудники банка «Бета».

Задача 2 (для второго потока).

Экзамен принимают два преподавателя, случайным образом выбирая студентов. По выборке из 85 и 100 наблюдений, выборочные доли не сдавших экзамен студентов составили соответственно 0.2 и 0.17.

1. Можно ли при уровне значимости в 1% утверждать, что преподаватели предъявляют к студентам одинаковый уровень требований?
2. Вычислите минимальный уровень значимости, при котором основная гипотеза отвергается (Р-значение).

Задача 3 (общая).

Методом максимального правдоподобия найдите оценку параметра θ для выборки X_1, \dots, X_n из распределения с функцией плотности

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^2} x e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Задача 4 (общая).

Пусть X_1, \dots, X_{100} — случайная выборка из нормального распределения с математическим ожиданием μ и дисперсией ν , где μ и ν — неизвестные параметры. По 100 наблюдениям $\sum x_i = 30$, $\sum x_i^2 = 146$, $\sum x_i^3 = 122$.

При помощи теста отношения правдоподобия протестируйте гипотезу $H_0 : \nu = 1$ на уровне значимости 5%.

Вариант В.

Задача 1 (для первого потока).

Проверка 40 случайно выбранных лекций показала, что студент Халявин присутствовал только на 16 из них.

1. Найдите 95% доверительный интервал для вероятности увидеть Халявина на лекции.
2. На уровне значимости 5% проверьте гипотезу о том, что Халявин посещает в среднем половину лекций.
3. Вычислите минимальный уровень значимости, при котором основная гипотеза отвергается (Р-значение).

Задача 1 (для второго потока).

Вес упаковки с лекарством является нормальной случайной величиной. Взвешивание 20 упаковок показало, что выборочное среднее равно 51 г., а несмещенная оценка дисперсии равна 4.

1. На уровне значимости 10% проверьте гипотезу, что в среднем вес упаковки составляет 55 г.
2. Контрольное взвешивание 30 упаковок такого же лекарства другого производителя показало, что несмещенная оценка дисперсии веса равна 6. На уровне значимости 10% проверьте гипотезу о равенстве дисперсий веса упаковки двух производителей.

Задача 2 (для первого потока).

В ходе анкетирования 15 сотрудников банка «Альфа» ответили на вопрос о том, сколько времени они проводят на работе ежедневно. Среднее выборочное оказалось равно 9.5 часам при выборочном стандартном отклонении 0.5 часа. Аналогичные показатели для 12 сотрудников банка «Бета» составили 9.8 и 0.6 часа соответственно.

Считая распределение времени нормальным, на уровне значимости 5% проверьте гипотезу о том, что сотрудники банка «Альфа» в среднем проводят на работе столько же времени, сколько и сотрудники банка «Бета».

Задача 2 (для второго потока).

Экзамен принимают два преподавателя, случайным образом выбирая студентов. По выборке из 85 и 100 наблюдений, выборочные доли не сдавших экзамен студентов составили соответственно 0.2 и 0.17.

1. Можно ли при уровне значимости в 1% утверждать, что преподаватели предъявляют к студентам одинаковый уровень требований?
2. Вычислите минимальный уровень значимости, при котором основная гипотеза отвергается (Р-значение).

Задача 3 (общая).

Методом максимального правдоподобия найдите оценку параметра θ для выборки X_1, \dots, X_n из распределения с функцией плотности

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x e^{-\frac{x}{\sqrt{\theta}}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Задача 4 (общая).

Пусть X_1, \dots, X_{100} — случайная выборка из нормального распределения с математическим ожиданием μ и дисперсией ν , где μ и ν — неизвестные параметры. По 100 наблюдениям $\sum x_i = 30$, $\sum x_i^2 = 146$, $\sum x_i^3 = 122$.

При помощи теста отношения правдоподобия протестируйте гипотезу $H_0 : \mu = 0$ на уровне значимости 5%.

Задача 5 (исследовательская).

Пусть X_1, \dots, X_n — случайная выборка из нормального распределения с математическим ожиданием μ и дисперсией ν , где μ и ν — неизвестные параметры. Рассмотрим три классических теста, отношения правдоподобия, LR , множителей Лагранжа, LM и Вальда, W , для тестирования гипотезы $H_0 : \mu = 0$.

1. Сравните статистики LR , LM и W между собой. Какая — наибольшая, какая — наименьшая?
2. Изменится ли упорядоченность статистик, если проверять гипотезу $H_0 : \mu = \mu_0$?

Подсказка: $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$ при $x > -1$

Задача 6 (исследовательская).

Величины X_1, \dots, X_n независимы и одинаково распределены с функцией плотности

$$f(x) = \begin{cases} a^2 x e^{-ax}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

По выборке из 100 наблюдений оказалось, что $\sum x_i = 300$, $\sum x_i^2 = 1000$, $\sum x_i^3 = 3700$.

1. Найдите оценку неизвестного параметра a методом моментов
2. Используя дельта-метод или иначе оцените дисперсию полученной оценки a
3. Постройте 95%-ый доверительный интервал используя оценку метода моментов