

1 Что такое байесовская сеть?

Здесь картинка.

На картинке:

1. Кружочками обозначаются случайные величины.
2. Стрелочками — причинно следственные связи:



Значение величины X становится известно раньше значения Y . Закон распределения величины Y зависит от значения величины X .

Несколько терминов:

1. Вилка (fork)
2. Коллайдер, перевернутая вилка (collider, inverted fork)
3. Путь¹ (trail, path) от A до B — последовательность вершин от вершины A до вершины B , в которой переходы могут делаться и по стрелочкам и против стрелочек
4. Направленный путь от A до B — последовательность вершин от вершины A до вершины B , в которой переходы делаются только по стрелочкам
5. Потомок. Узел Y называется потомком узла X , если существует направленный путь от X до Y .

По байесовской сети легко определить зависимость и условную зависимость величин. Сначала разберемся с зависимостью.

Величины X и Y независимы, если выполнены все три условия

1. Нет направленного пути от X до Y
2. Нет направленного пути от Y до X
3. Не существует такой величины Z , от которой был бы направленный путь и до X и до Y

Упражнение. Найдите все пары независимых величин.

2 Условная независимость

Условная независимость. События A и B называются условно независимыми при условии, что событие C произошло, если $\mathbb{P}(AB | C) = \mathbb{P}(A | C)\mathbb{P}(B | C)$

Примеры.

1. Независимые, но условно зависимые события.
2. Зависимые, но условно независимые события.
3. Независимы при условии C , зависимы при отрицании C

Дискретные случайные величины X и Y условно независимы при условии Z , если для любых x , y и z :

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y | Z = z) = \mathbb{P}(X = x | Z = z) \cdot \mathbb{P}(Y = y | Z = z) \quad (1)$$

Условную независимость величин обозначают $X \perp Y | Z$

Примечание: некоторые авторы пишут $A \perp B | C$ для событий, под этой записью подразумевается на самом деле сразу два условия:

$$A \perp B | C \Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ и } B \text{ независимы при условии } C \\ A \text{ и } B \text{ независимы при условии } C^c \end{cases} \quad (2)$$

Путь между X и Y называют d -разделенным (d-separated, directionally separated) множеством узлов Z если выполнено хотя бы одно из условий

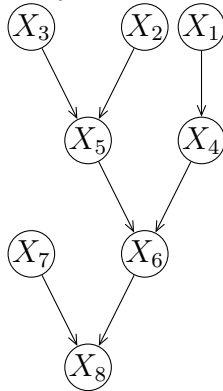
¹В теории графов термином путь называют то, что мы называем направленным путем

1. узел из Z разрывает последовательное соединение на пути
2. узел из Z разрывает «вилку» на пути
3. на пути есть «коллайдер», не являющийся узлом из Z и не содержащий узел из Z в качестве одного из потомков

Можно эквивалентно говорить о том, что между X и Y НЕ является d -разделенным узлом Z , если выполнены оба условия:

1. любой коллайдер на пути либо сам является узлом из множества Z , либо имеет потомка из множества Z
2. никакой другой узел на пути не входит в множество Z

Случайные величины X и Y условно независимы при условии Z , если узлы X и Y являются d -разделенными узлом Z .



Упражнения

Проверьте независимость $X_1 \perp X_2$, $X_1 \perp X_2 \mid X_8$, $X_1 \perp X_2 \mid X_7$, $X_1 \perp X_2 \mid X_6$