Задача 0.1.

Пусть X_i - независимы и имеют функцию плотности $p(t) = e^{a-t}$ при $t > a$, где a - неизвестный параметр. В качестве оценки неизвестного a используется $\hat{a}_n = \min\{X_1, X_2, ..., X_n\}$.

а) Является ли предлагаемая оценка состоятельной?

б) Является ли предлагаемая оценка несмещенной?

Solution:

Заметим, что $\hat{a}_n \geq a$.

$P(|\hat{a}_n - a| > \varepsilon) = P(\hat{a}_n - a > \varepsilon) = P(\hat{a}_n > a + \varepsilon) = P(\min\{X_1, X_2, ..., X_n\} > a + \varepsilon) =$

$= P(X_1 > a + \varepsilon \cap X_2 > a + \varepsilon \cap ...) = P(X_1 > a + \varepsilon) \cdot P(X_2 > a + \varepsilon) \cdot ... = \left(\int_{a+\varepsilon}^{\infty} e^{a-t} dt\right)^n = (e^{-\varepsilon})^n = e^{-n\varepsilon}$

$\lim_{n\to\infty} e^{-n\varepsilon} = 0$

б) нет, не является ни при каких n, хотя смещение с ростом n убывает

Задача 0.2.

Пусть X_i - независимы и распределены равномерно на $[a-1; a]$, где a - неизвестный параметр. В качестве оценки неизвестного a используется $\hat{a}_n = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}$.

а) Является ли предлагаемая оценка состоятельной?

б) Является ли предлагаемая оценка несмещенной?

Solution:

Заметим, что $\hat{a}_n \leq a$.

$P(|\hat{a}_n - a| > \varepsilon) = P(-(\hat{a}_n - a) > \varepsilon) = P(\hat{a}_n < a - \varepsilon) = P(\max\{X_1, X_2, ..., X_n\} < a - \varepsilon) =$

$= P(X_1 < a - \varepsilon \cap X_2 < a - \varepsilon \cap ...) = P(X_1 < a - \varepsilon) \cdot P(X_2 < a - \varepsilon) \cdot ... = (1 - \varepsilon)^n$

$\lim_{n\to\infty} (1 - \varepsilon)^n = 0$

б) нет, не является ни при каких n, хотя смещение с ростом n убывает