

Праздник 3 по вероятностям. Брутальная часть :)

Все семь задач решать вовсе не обязательно, выбирайте любые пять! При самостоятельной работе можно всем пользоваться!!!! :)

Задача 1

Случайные величины X_1, \dots, X_n независимо и одинаково распределены с функцией плотности $f(x) = 2ax \exp(-ax^2)$ при $x > 0$.

По 100 наблюдениям известно, что $\sum X_i = 169.55$, $\sum X_i^2 = 351.48$.

1. Оцените параметр a методом максимального правдоподобия.
2. Оцените дисперсию оценки \hat{a}_{MM}
3. Постройте 95%-ый доверительный интервал для a с помощью оценки максимального правдоподобия
4. Оцените параметр a методом моментов
5. Оцените дисперсию оценки \hat{a}_{MM}
6. Постройте 95%-ый доверительный интервал для a с помощью оценки метода моментов

Задача 2

Для того, чтобы люди давали правдивый ответ на деликатный вопрос (скажем, “Берёте ли Вы взятки?”) при опросе используется рандомизация. Вопрос допускает всего два ответа “да” или “нет”. Перед ответом респондент подбрасывает монетку, и только респондент видит результат подбрасывания. Если монетка выпадет “орлом”, то респондент отвечает правду. Если “решкой”, то респондент отвечает наоборот (“да” вместо “нет” и “нет” вместо “да”).

Монетка выпадает орлом с вероятностью 0.4. Из 500 опрошенных 300 ответили “да”.

1. Какова вероятность того, что человек берёт взятки, если он ответил “да” в анкете?
2. Постройте оценку для доли людей берущих взятки
3. Постройте 95%-ый доверительный интервал для доли людей берущих взятки

Задача 3

Винни-Пух хочет измерить высоту Большого дуба, d . Для этого Винни-Пух три раза в случайное время дня измерил длину тени Большого Дуба:

[1] 8.9 13.2 25.2

Предположим, что в дни измерений траектория движения Солнца проходила ровно через зенит :)

1. Найдите функцию плотности длины тени
2. Если возможно, постройте оценку метода моментов
3. Если возможно, постройте оценку метода максимального правдоподобия
4. Где живёт Винни-Пух и в какого числа 2016 года он проводил измерения?

Задача 4

Встроенный в R набор данных `morley` содержит результаты 100 опытов Майкельсона и Морли. В 1887 году они проводили измерения скорости света, чтобы понять, зависит ли она от направления.

1. Постройте 95%-ый доверительный интервал для скорости света
2. Выпишите использованные формулы и алгоритм построения интервала
3. Чётко сформулируйте все гипотезы при которых данный алгоритм даёт корректный результат
4. Накрывает ли построенный доверительный интервал фактическую скорость света?

Полезные команды `morley`, `help("morley")`, `mean`, `sd`, `qnorm`, `pnorm`

Задача 5

Исследователь Вениамин дрожащей от волнения рукой рисует прямоугольники размера $a \times b$. Поскольку Вениамин очень волнуется прямоугольники де-факто выходят со случайными сторонами $a + u_i$ и $b + v_i$. Случайные ошибки u_i и v_i независимы и одинаково распределены $N(0; 1)$.

Вениамин нарисовал 400 прямоугольничков и посчитал очень аккуратно площадь каждого. Оказалась, что средняя площадь равна 1198.3 см^2 , а выборочное стандартное отклонение площади — 52.83 см^2 . Вениамин считает, что зная только площади прямоугольничков невозможно оценить каждую из сторон.

Если возможно, то оцените параметры a и b подходящим методом. Если невозможно, то докажите.

Задача 6

На поле $D4$ шахматной доски стоит конь. Ли Седоль переставляет коня наугад, выбирая каждый возможный ход равновероятно.

Сколько в среднем пройдет ходов прежде чем Ли Седоль снова вернёт коня на $D4$?

Задача 7

В “Киллер” играло n человек. После окончания игры, когда были убиты все, кто может быть убит, встретились два игрока и оказалось, что один убил 5 человек, а другой — 7 человек.

Оцените n подходящим методом