

FYZIKÁLNÍ PRAKTIKUM

Fyzikální praktikum 2

Zpracoval: Teodor Duraković

Naměřeno: 21. října 2024

Obor: F

Skupina: Po 14:00

Testováno:

Úloha č. 4: Brownův pohyb

$$T = 21.9 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$p = 1002 \text{ hPa}$$

$$\varphi = 45 \%$$

1. Zadání

- Zaznamenat náhodný pohyb několika částic v kapalině
- Určit míru shody experimentálně určené časové závislosti středního kvadratického posunu částic s předpovědí na základě Einsteinova zákona
- Určit velikost částic

2. Úvod

Jsou-li v kapalině rozptýleny malé částice, pak se tyto částice srážejí s okolními molekulami kapaliny. Jsou-li rozměry uvažovaných částic dostatečně malé (řádově stovky nm), nemusí být v každém okamžiku kompenzovány impulzy sil, kterými molekuly kapaliny působí na tyto částice. Vlivem takto nevykompenzovaných impulzů se částice pohybuje, přičemž se v delším časovém intervalu směr pohybu náhodně mění. Tento druh pohybu se nazývá Brownův pohyb. Pohybující se částice předává při pohybu energii okolním molekulám a protože je mnohem větší než molekuly kapaliny, je možné její pohyb v kapalině popsat Stokesovým zákonem. Brownův pohyb byl prvním fyzikálním dějem, v němž se projevila existence molekul a měl tedy velký význam při experimentálním ověření molekulární kinetické teorie hmoty. Neuspořádaný pohyb brownovské částice se řídí Einsteinovým zákonem: sledujeme-li polohy částice v definovaných časových okamžicích, pak střední kvadratické posunutí částice je úměrné zvoleným časovým intervalům. Ukážeme nyní odvození tohoto zákona a experimentální postup při jeho ověření.

V dalším nebudeme přímo pracovat s vektory přemístění částice, ale budeme uvažovat průměty těchto vektorů do libovolného pevného směru. Pohybová rovnice má tvar

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_1 + F_2 \quad (1)$$

kde m je hmotnost částice, F_1 je výsledná (nevykompenzovaná) síla způsobená srážkami s molekulami kapaliny a F_2 je síla způsobená odporem prostředí (okolními molekulami). Pak platí

$$F_2 = -k \frac{dx}{dt}. \quad (2)$$

Podle Stokesova zákona [2] je pro kulovou částici

$$k = 6\pi\eta r \quad (3)$$

kde η je dynamická viskozita kapaliny, r je poloměr částice a $\frac{dx}{dt}$ je rychlost částice. Pak lze (4.1) psát ve tvaru

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_1 - k \frac{dx}{dt} \quad (4)$$

Vynásobením rovnice (4.4) veličinou x dostaneme:

$$mx \frac{d^2x}{dt^2} = F_1 x - kx \frac{dx}{dt}. \quad (5)$$

Jednoduše lze ukázat, že

$$x \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (x^2) - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (6)$$

$$x \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x^2) \quad (7)$$

Pak dosazením 4.6) a 4.7 do vztahu 4.5 dostaneme

$$\frac{m}{2} \frac{d^2}{dt^2} (x^2) - m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = F_1 x - \frac{1}{2} k \frac{d}{dt} (x^2)$$

Zajímáme se ovšem pouze o střední hodnoty uvedených veličin, které je možné pozorovat v časovém intervalu t . Protože je pohyb částice chaotický, pak střední hodnota součinu $F_1 x = 0$. Označme dále

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\langle x^2 \rangle) &= h \\ -\frac{kh}{2} &= \frac{m}{2} \frac{dh}{dt} - m \left\langle \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right\rangle \end{aligned}$$

Druhý člen na pravé straně rovnice 4.10 je dvojnásobek střední hodnoty kinetické energie částice. Aplikujeme-li na pohyb brownovské částice teorii ideálních plynů a zajímáme-li se o složku rychlosti částice pouze ve směru jedné osy (osy x , jeden ze tří směrů), dostaneme pak

$$\left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{3RT}{2N_A}, \quad m \left\langle \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right\rangle = \frac{RT}{N_A}$$

kde N_A je Avogadrovo číslo, T absolutní teplota kapaliny a R univerzální plynová konstanta. Dosazením 4.11) do vztahu 4.10 dostaneme

$$-\frac{kh}{2} = \frac{m}{2} \frac{dh}{dt} - \frac{RT}{N_A}$$

a tedy

$$\frac{dh}{h - \frac{2RT}{N_A k}} = -\frac{k}{m} dt$$

Integrací této rovnice dostaneme

$$\ln \left(h - \frac{2RT}{N_A k} \right) - \ln C = -\frac{k}{m} t$$

neboli po úpravě

$$h - \frac{2RT}{N_A k} = C e^{-\frac{k}{m} t}$$

kde C je integrační konstanta. Je-li časový interval t měření dosti velký, můžeme v poslední rovnici zanedbat člen $e^{-\frac{k}{m} t} \rightarrow 0$ na pravé straně a dostáváme

$$h = \frac{2RT}{N_A k}$$

Jestliže se vrátíme k původnímu významu parametrů h a k dostaneme

$$\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = \frac{2RT}{6\pi\eta r N_A}$$

Rovnici 4.17 integrujeme za předpokladu počátečních podmínek $x = 0, t = 0$ a dostaneme

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2RT}{6\pi\eta r N_A} t \quad (8)$$

což je Einsteinův výraz pro střední kvadratické posunutí brownovské částice.

3. Postup měření

Pozorování popsaného jevu se zpravidla provádí na mikroskopu se značným zvětšením, jehož obraz je možné zobrazit na velkou projekční plochu. Jelikož byla kamera na televizi napojena SCART konektorem, signál do počítače přivedeme využitím adaptéru SCART \rightarrow HDMI a následným dovedením zpracováním signálu stříhovou kartou (resp. adaptérem HDMI \rightarrow USB). Po přípravě preparátu zapneme zaznamenání a získáme dostatečné množství dat, následně data zpracujeme stejně, jako bychom měření prováděli ručně,

4. Měření

4.1. Zpracování obrazových dat

Ke zpracování dat využijeme pythonové knihovny *openCV*, jmenovitě její funkci *OpticalFlow*^[1], která umožňuje snímání pohybu vybraných objektů. My tuto funkci aplikujeme právě na pohybující se částice v suspenzi. Algoritmus funkce, vycházející přímo z [2] nalezne rohy pohybujících se objektů a následně se v každém budoucím snímku snaží v okolí tohoto bodu, jehož velikost je v kódu specifikována, naleznout původní roh. Jelikož je tento roh, respektive hrana, specifikován jako místo, kde dochází k velké změně okolních pixelů (kupř. z černé na bílou), v první řadě musíme před zpracováním data upravit tak, aby tento algoritmičtý proces byl co nejpřesnější a pro metodu nelezání hran co nejjednodušší. Proto v sekvenci zvýšíme kontrast, aby rozdíl mezi částicemi a pozadím byl větší. Zároveň v samotném kódu určíme, že hledání nových bodů chceme provádět každých 30 snímků (jelikož nalezení potenciálně vhodných rohů a následný tracking jsou dva separátní procesy). U těchto nových bodů okamžitě vyřazujeme ty, které jsou blízko stávajícím bodům, čímž se snažíme předejít sledování stejné částice vícero body. Zatímco při ručním měření validitu dat kontrolovat není, zde si nemůžeme být jisti stoprocentní přesností dat. Po zpracování celé sekvence kódem ověříme validitu získaných bodů: Filtrujeme získaná data,

aby obsahovala pouze pohybující se body a z data-setu vyloučíme body s příliš krátkou dobou existence. Získaná data kód exportuje v textovém i vizuálním formátu, přičemž ve vizuálním formátu pouze k sekvenci přidá sledované body spolu s jejich ID, abychom následně mohli v případě potřeby vybrat vhodná data vizuální kontrolou.

Ke stanovení měřítka použijeme destičku se zábrusy vzdálenými $50\text{ }\mu\text{m}$ od sebe. Následně změříme vzdálenost těchto linií na získaném obraze, čímž získáme délku, již reprezentuje jeden pixel.

$$\begin{aligned}\Delta r &= 50\text{ }\mu\text{m} \\ \Delta p &= 938 \pm 3\text{ px} \\ 1\text{ px} &= \frac{\Delta r}{\Delta p} = 53.30 \pm 0.17\text{ nm}\end{aligned}$$

Jsou-li předpoklady z úvodu splněny, mělo by platit, že střední kvadratické posuny $\langle r \rangle$ pro různé intervaly jsou ve stejném poměru, jako intervaly samotné: $\langle r_t \rangle : \langle r_{t+n} \rangle = t : t + n$. I tímto způsobem lze ověřit validitu dat, jelikož data značně od teorie se odchylující budou vycházet z chybného zpracování.

4.2. Zpracování dat

První polovina algoritmického zpracování nám dává video a získaná data v tabulkovém formátu. Data je potřeba dále zpracovat, jelikož jsme při snímání pohybu zaznamenávali pouze x/y polohy bodů. Pro každou sérii poloh bodu v konkrétní souřadnici tvoříme sérii rozdílů poloh, tedy dráhy uražené ve smyslu osy x/y mezi dvěma snímky, resp. za 1/30 sekundy. **Zde provádíme další, velmi důležitou filtraci dat**, a vylučujeme veškeré hodnoty, které by částice ve skutečnosti nemohly urazit, jež způsobily nežádoucí vizuální artefakty. Tento krok se při zpracování ukázal jako kritický, jelikož zmíněné obrazové chyby dokázaly body, často pouze na malou chvíli, přesunout až o polovinu obrazovky. Následně sumací těchto drah za jistou dobu, resp. počet snímků, získáme pohyb ve smyslu x/y za 5, 10 a 15 sekund, z čehož pomocí Pythagorovy věty získáme celkový pohyb za

daný časový interval. Druhou mocninu této hodnoty průměrujeme, čímž získáme zmíněné hodnoty $\langle r_5 \rangle, \langle r_{10} \rangle, \langle r_{15} \rangle$. Analýzou poměrů hodnot vybereme ty, u kterých poměry splňují Einsteinův vztah, u nich formulí (1) získáme hodnoty poloměru částic. Získáváme hodnoty:

n	$r[nm]$	ratio 10/5	ratio 15/10
1	858 ± 11	1.85 ± 0.05	3.11 ± 0.09
2	1285 ± 18	2.04 ± 0.07	2.93 ± 0.09
3	1033 ± 17	1.89 ± 0.07	2.91 ± 0.11
4	412 ± 5	2.13 ± 0.06	3.03 ± 0.08
5	380 ± 7	2.14 ± 0.08	2.89 ± 0.14
6	1398 ± 22	2.01 ± 0.07	2.83 ± 0.10
7	661 ± 8	2.07 ± 0.05	3.06 ± 0.08
8	422 ± 10	1.96 ± 0.12	3.21 ± 0.18
9	503 ± 10	1.99 ± 0.10	3.01 ± 0.14
10	790 ± 10	2.11 ± 0.05	2.94 ± 0.08
11	770 ± 11	2.02 ± 0.06	2.92 ± 0.09
12	578 ± 7	1.87 ± 0.05	2.92 ± 0.08
13	927 ± 16	2.01 ± 0.08	2.80 ± 0.11

které jsou velmi blízké předpokládaným hodnotám, které jsme získali manuálním měřením z obrazového materiálu.

5. Závěr

Podařilo se nám splnit veškeré zadané úkoly a získat hodnoty hledaných veličin, které jsou velmi blízké našim předpokladům. Celkově jsme zpracováním dat strávili circa čtyřicet hodin, přičemž jsme vytvořili v rámci celého procesu před 150 GB dat. Analýza šla jistě provést lépe a přesněji, naše metody nám však přinesly poměrně uspokojivé výsledky.

Odkazy

- [1] https://docs.opencv.org/4.x/d4/dee/tutorial_optical_flow.html
- [2] Shi, Jianbo. "Good features to track." 1994 Proceedings of IEEE conference on computer vision and pattern recognition. IEEE, 1994.