

## Fyzikální praktikum 2

### 4. Brownův pohyb

#### Úkoly k měření

- Zaznamenat náhodný pohyb několika částic v kapalině.
- Určit míru shody experimentálně určené časové závislosti středního kvadratického posunu částic s předpovědí na základě Einsteinova zákona.
- Určit velikost částic.

#### Teorie

Jsou-li v kapalině rozptýleny malé částice, pak se tyto částice sráží s okolními molekulami kapaliny. Jsou-li rozměry uvažovaných částic dostatečně malé (řádově stovky nm), nemusí být v každém okamžiku kompenzovány impulzy sil, kterými molekuly kapaliny působí na tyto částice. Vlivem takto nevykompenzovaných impulzů se částice pohybuje, přičemž se v delším časovém intervalu směr pohybu náhodně mění. Tento druh pohybu se nazývá Brownův pohyb. Pohybující se částice předává při pohybu energii okolním molekulám a protože je mnohem větší než molekuly kapaliny, je možné její pohyb v kapalině popsat Stokesovým zákonem. Brownův pohyb byl prvním fyzikálním dějem, v němž se projevila existence molekul a měl tedy velký význam při experimentálním ověření molekulární kinetické teorie hmoty. Neuspořádaný pohyb brownovské částice se řídí Einsteinovým zákonem[1]: sledujeme-li polohy částice v definovaných časových okamžicích, pak střední kvadratické posunutí částice je úměrné zvoleným časovým intervalům. Ukážeme nyní odvození tohoto zákona a experimentální postup při jeho ověření.

V dalším nebudeme přímo pracovat s vektory přemístění částice, ale budeme uvažovat průměty těchto vektorů do libovolného pevného směru. Pohybová rovnice má tvar

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_1 + F_2 \quad (4.1)$$

kde  $m$  je hmotnost částice,  $F_1$  je výsledná (nevykompenzovaná) síla způsobená srážkami s molekulami kapaliny a  $F_2$  je síla způsobená odporem prostředí (okolními molekulami). Pak platí

$$F_2 = -k \frac{dx}{dt}. \quad (4.2)$$

Podle Stokesova zákona [2] je pro kulovou částici

$$k = 6\pi\eta r, \quad (4.3)$$

kde  $\eta$  je dynamická viskozita kapaliny,  $r$  je poloměr částice a  $\frac{dx}{dt}$  je rychlost částice. Pak lze (4.1) psát ve tvaru

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_1 - k \frac{dx}{dt}. \quad (4.4)$$

Vynásobením rovnice (4.4) veličinou  $x$  dostaneme:

$$mx \frac{d^2x}{dt^2} = F_1 x - kx \frac{dx}{dt}. \quad (4.5)$$

Jednoduše lze ukázat, že

$$x \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (x^2) - \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (4.6)$$

$$x \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x^2). \quad (4.7)$$

Pak dosazením (4.6) a (4.7) do vztahu (4.5) dostaneme

$$\frac{m}{2} \frac{d^2}{dt^2} (x^2) - m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = F_1 x - \frac{1}{2} k \frac{d}{dt} (x^2). \quad (4.8)$$

Zajímáme se ovšem pouze o střední hodnoty uvedených veličin, které je možné pozorovat v časovém intervalu  $t$ . Protože je pohyb částice chaotický, pak střední hodnota součinu  $F_1 x = 0$ . Označme dále

$$\frac{d}{dt} (\langle x^2 \rangle) = h \quad (4.9)$$

$$-\frac{kh}{2} = \frac{m}{2} \frac{dh}{dt} - m \left\langle \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right\rangle. \quad (4.10)$$

Druhý člen na pravé straně rovnice (4.10) je dvojnásobek střední hodnoty kinetické energie částice. Aplikujeme-li na pohyb brownovské částice teorii ideálních plynů a zajímáme-li se o složku rychlosti částice pouze ve směru jedné osy (osy  $x$ , jeden ze tří směrů), dostaneme pak

$$\left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{3RT}{2N_A}, \quad m \left\langle \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right\rangle = \frac{RT}{N_A}, \quad (4.11)$$

kde  $N_A$  je Avogadrovo číslo,  $T$  absolutní teplota kapaliny a  $R$  univerzální plynová konstanta. Dosazením (4.11) do vztahu (4.10) dostaneme

$$-\frac{kh}{2} = \frac{m}{2} \frac{dh}{dt} - \frac{RT}{N_A}, \quad (4.12)$$

a tedy

$$\frac{dh}{h - \frac{2RT}{N_A k}} = -\frac{k}{m} dt. \quad (4.13)$$

Integrací této rovnice dostaneme

$$\ln \left( h - \frac{2RT}{N_A k} \right) - \ln C = -\frac{k}{m} t, \quad (4.14)$$

neboli po úpravě

$$h - \frac{2RT}{N_A k} = C e^{-\frac{k}{m} t}, \quad (4.15)$$

kde  $C$  je integrační konstanta. Je-li časový interval  $t$  měření dosti velký, můžeme v poslední rovnici zanedbat člen  $e^{-\frac{k}{m} t} \rightarrow 0$  na pravé straně a dostáváme

$$h = \frac{2RT}{N_A k}. \quad (4.16)$$

Jestliže se vrátíme k původnímu významu parametrů  $h$  a  $k$  dostaneme

$$\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = \frac{2RT}{6\pi\eta r N_A}. \quad (4.17)$$

Rovnici (4.17) integrujeme za předpokladu počátečních podmínek  $x = 0$ ,  $t = 0$  a dostaneme

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2RT}{6\pi\eta r N_A} t, \quad (4.18)$$

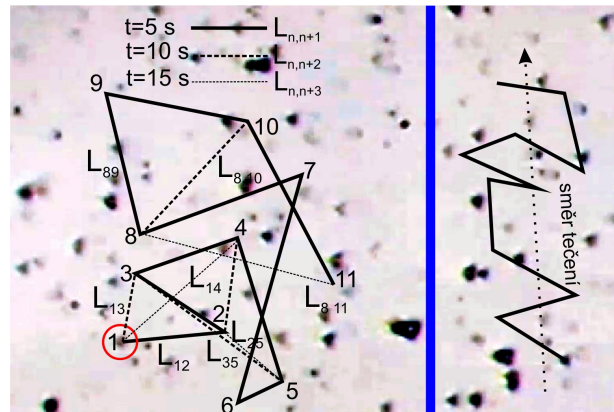
což je Einsteinův výraz pro střední kvadratické posunutí brownovské částice.

## Postup měření

Pozorování popsaného jevu se zpravidla provádí na mikroskopu se značným zvětšením, jehož obraz je možné zobrazit na velkou projekční plochu. Preparát (suspenze částic ve vodě na podložním sklíčku) je umístěn na stolečku mikroskopu a na zobrazovací plochu mikroskopu je umístěna průhledná folie, na níž zaznamenáváme v pravidelných časových intervalech polohy vybrané, stále stejné, částice. Po delší době dostaneme na folii síť vzájemně propojených bodů odpovídajících chaotickému pohybu částice. Pro další zpracování měření je nezbytné znát zvětšení mikroskopu v daném uspořádání. V tomto případě se na stoleček mikroskopu místo preparátu umístí mřížka, přičemž vzdálenosti jednotlivých vrypů jsou předem známy. Čas mezi jednotlivými polohami částice stanovujeme pomocí mechanického nebo elektronického metronomu obvykle po 5 s základního intervalu (12 bpm) (*angl.* beats per minute). Můžeme k tomu využít i například aplikaci v chytrém telefonu.

## Zpracování výsledků měření

Úkolem a smyslem měření je ověření platnosti Einsteinova vztahu (4.18). Je nutné si uvědomit, že vzdálenost mezi dvěma body na záznamové folii mikroskopu je zvětšené zobrazení projekce vektoru přemístění částice (za daný časový interval například 5 s) do roviny, na níž byl mikroskop zaostřen. K ověření vztahu (4.18) je nutno zjistit střední hodnotu čtverců projekcí vektorů přemístění do roviny nebo přímky. Jestliže se během měření neprojevovalo tečení preparátu jedním směrem, jsou vzdálenosti mezi jednotlivými body přímo průměty do roviny. Jestliže jsme naopak pozorovali tečení preparátu, musíme provést promítnutí všech vzdáleností do směru kolmého na směr tečení.



Obrázek 4.1: Příklad záznamu chaotického pohybu brownovské částice na průsvitném papíře přiloženém přes obraz z mikroskopu, v případě bez tečení preparátu (vlevo) a při tečení (vpravo). V záznamu pohybu částice vlevo jsou zaneseny trajektorie částice složené z vektorů posunutí při záznamu po časových intervalech  $t = 5$  s (plná čára), 10 s (přerušovaná čára) a 15 s (tečkovaná čára).

Označme dále vzdálenosti zaznamenaných poloh s pořadovými čísly  $i$  a  $j$  jako  $L_{i,j}$ . Střední kvadratické posunutí po požadovaném časovém intervalu  $t$  získáme vypočtením aritmetického průměru čtverců naměřených vzdáleností  $L_{i,i+\delta}$ . Postup odečítání vzdáleností mezi zaznamenanými polohami částice v obrazu z mikroskopu je ukázán na obr. 4.1 a výpočetní schéma pro stanovení střední hodnoty čtverců vzdáleností je uvedeno v tabulce 4.1.

Potom platí podle tabulky 4.1:

$$\langle L_5^2 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{10} L_{i,i+1}^2}{10}, \quad \langle L_{10}^2 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^9 L_{i,i+2}^2}{9}, \quad \langle L_{15}^2 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^8 L_{i,i+3}^2}{8}. \quad (4.19)$$

Tabulka 4.1: Čtverce vzdáleností pro částici, která byla naměřena v 11 polohách po sobě jdoucích.

po 5 s	po 10 s	po 15 s
$L_{1,2}^2$	$L_{1,3}^2$	$L_{1,4}^2$
$L_{2,3}^2$	$L_{2,4}^2$	$L_{2,5}^2$
$L_{3,4}^2$	$L_{3,5}^2$	$L_{3,6}^2$
$L_{4,5}^2$	$L_{4,6}^2$	$L_{4,7}^2$
$L_{5,6}^2$	$L_{5,7}^2$	$L_{5,8}^2$
$L_{6,7}^2$	$L_{6,8}^2$	$L_{6,9}^2$
$L_{7,8}^2$	$L_{7,9}^2$	$L_{7,10}^2$
$L_{8,9}^2$	$L_{8,10}^2$	$L_{8,11}^2$
$L_{9,10}^2$	$L_{9,11}^2$	
$L_{10,11}^2$		

Je-li Einsteinův zákon pro studovaný chaotický pohyb splněn, musí podle (4.18) pro poměry středních kvadratických posunutí platit:

$$\langle L_5^2 \rangle : \langle L_{10}^2 \rangle : \langle L_{15}^2 \rangle = 1 : 2 : 3. \quad (4.20)$$

Poznámka: Je zřejmé, že pro ověření platnosti vztahu (4.18) je nutné odhadnout chybu středního kvadratického posunutí a také chybu v určení časových intervalů. Dále je nutné si uvědomit, že Einsteinův vztah má charakter statistické zákonitosti a k jeho ověření je třeba provést měření na velkém souboru částic, jinak jsou nejistoty určených poměrů poměrně velké.

Odpovídá-li shoda naměřených středních hodnot kvadrátu posunutí v rámci chyby měření vztahu (4.20), lze rovnici (4.18) dále užít alespoň k odhadu velikosti částice. Ve vztahu (4.18) je  $\langle x^2 \rangle$  střední hodnota kvadrátu projekce vektorů přemístění do určitého směru (v našem případě jsme brali směr osy  $x$ ) a nikoliv do roviny. Jestliže však na záznamové folii měříme přímo vzdálenosti  $L$ , viz obr. 4.1(vlevo), je nutné použít vztah

$$\langle L^2 \rangle = 2\langle x^2 \rangle, \quad (4.21)$$

který plyne ze stejné pravděpodobnosti zastoupení všech směrů v rovině. Jestliže se projevovale tečení suspenze preparátu a byli jsme nuceni provádět před vlastním odečítáním vzdáleností promítání do přímky kolmé na směr tečení, viz obr. 4.1(vpravo), pak použijeme přímo

$$\langle L^2 \rangle = \langle x^2 \rangle. \quad (4.22)$$

Poznámka: Při stanovení velikosti poloměru  $r$  sledované částice ze vztahu (4.18) musíme znát skutečnou hodnotu veličiny  $\langle x^2 \rangle$ , kterou určíme ze záznamové folie pomocí známého zvětšení mikroskopu, stanoveného za pomoci měřítka. Teplotu kapaliny  $T$  ve vztahu (4.18) musíme odhadnout, zpravidla není rovna laboratorní teplotě, protože preparát se obvykle zahřívá vlivem osvětlovacího zdroje.

## Úkoly

1. Zaznamenejte pohyb alespoň pěti částic na průsvitný papír v intervalech po 5 s. Jednotlivé po sobě jdoucí polohy vzájemně spojujte lomenou čarou, podobně jako na obr. 4.1 (vlevo).
2. Na stejný průsvitný papír na obrazovce připojené k mikroskopu zaznamenejte také pomocí mřížky v Bürkerově komůrce rozteč čar o velikosti  $50 \mu\text{m}$ . Z poměru velikosti obrazu a předmětu určete zvětšení mikroskopu.

3. Na průsvitném papíře pak proměřte vzdálenosti jednotlivých poloh a seřaďte do tabulky včetně kvadrátů příslušných vzdáleností, viz tab. 4.1. Zároveň zohledněte případné tečení preparátu.
4. Ověřte platnost vztahu (4.20), včetně nejistot poměrů a určete velikost poloměru částice.

## Literatura k úloze 4

- [1] A. Einstein, *Annalen der Physik* **324**, 371 (1906).
- [2] Z. Horák, *Technická fyzika*, SNTL Praha (1961).