1. Př. 1.6.

Zadání: Spočtěte gradient funkce: $F = \frac{1}{r}$, kde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Řešení: $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{x}{r^3}$, obdobně pro členy $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{y}{r^3}$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}$. Výsledek bude: $\vec{\nabla} \cdot F = -\left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$.

2. Př. 1.8.

Zadání: Ukažte pro různé tři křivky, že křivkový integrál s počátkem křivky $\vec{r} = (0,0,0)$ a koncem křivky $\vec{r} = (1,1,0)$ z vektorového pole $\vec{V} = (x, y, 0)$ nezávisí na integrační křivce. Řešení: Zvolme jednoduše první cestu podél os

$$I = \int_c \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 x \ \mathrm{d}x + \int_0^1 y \ \mathrm{d}y = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

Pro první cestu ani nebylo potřeba používat parametrizaci. Pro druhou cestu zvolíme parametrizaci lineární křivky

$$x = \tau, \quad y = \tau, \quad z = 0 \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial \tau} = 1, \frac{\partial y}{\partial \tau} = 1, \frac{\partial z}{\partial \tau} = 0, \Rightarrow \vec{V} = (\tau, \tau, 0), \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} = (1,1,0)$$

Křivka bude na intervalu $\tau \in (0; 1)$

$$I = \int_c \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_c \vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau}\mathrm{d}\tau = \int_0^1 (\tau + \tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^1 2\tau \mathrm{d}\tau = 1.$$

Třetí křivku zvolíme jako parabolu

$$x = \tau, y = \tau^2, z = 0 \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial \tau} = 1, \frac{\partial y}{\partial \tau} = 2\tau, \frac{\partial z}{\partial \tau} = 0, \Rightarrow \vec{V} = \left(\tau, \tau^2, 0\right), \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} = (1, 2\tau, 0)$$

Křivka bude opět na intervalu $\tau \in (0; 1)$

$$I = \int_c \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_c \vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau}\mathrm{d}\tau = \int_0^1 \left(\tau + 2\tau^3\right) \mathrm{d}\tau = \left[\frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^4}{2}\right]_0^1 = 1.$$

3. Př. 2.1.

Zadání: Uvažujte dva stejné bodové náboje o shodné hmotnosti a shodném náboji. Náboje jsou od sebe vzdáleny r. Jaký musí být poměr mezi nábojem a hmotností, aby se elektrostatická síla vykompenzovala s gravitační? Nepředpokládáme, že by v okolí nábojů byly ještě další zdroje elektrostatického či gravitačního pole.

Řešení: Pro výpočet použijeme velikost vektoru síly v Coulombově zákonu (6) a Newtonově gravitačním zákonu $F_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$, kde $m_1 = m_2 = m$ a $Q_1 = Q_2 = Q$. Uvažujeme-li, že velikosti sil se rovnají, pak lze napsat

$$G\frac{m^2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2} \Rightarrow \frac{Q}{m} = \sqrt{4\pi\varepsilon_0 G}$$

4. Př. 2.5.

Zadání: Vypočtěte vektor elektrické intenzity ve vzdálenosti r od středu homogenně nabité koule. Uvažujte $|\vec{r}| > R$.

Rešení: Tento příklad lze vyřešit prostým dosazením do rovnice (9). Výpočty v obecném případě však budou relativně komplikované. Pro zjednodušení uvažujme, že střed koule leží v počátku souřadnicové soustavy a bod, ve kterém chceme intenzitu studovat, leží na ose z. (V případě, kdy se chceme zabývat jiným bodem než na ose z, celou soustavu můžeme natočit díky kulové symetrii.) Pro každou část koule s nenulovým x a y existuje stejná část koule ležicí v poloze se zápornými hodnotami x a y. Díky tomu jsou složky E_x a E_y pro pozorovatele na ose z nulové (protilehlé příspěvky se díky principu superpozice vyruší). Jedinou nenulovou složkou zůstane E_z. Dosazením obdržíme

$$\vec{r} - \vec{r}' = \left(-x', -y', z - z'\right) \Rightarrow \left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^2 = x'^2 + y'^2 + \left(z - z'\right)^2 = r'^2 - 2zz' + z^2.$$

z-ová složka vektoru elektrické intenzity bude rovna

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{(z - z')\,\mathrm{d}Q}{(r'^2 - 2zz' + z^2)^{3/2}}$$

5. Př. 3.1.

Zadání: Uvažujte čtyři náboje $Q_1 = Q, Q_2 = 2Q, Q_3 = -Q, Q_4 = -2Q$ rozložené na čtverci tak, že v protilehlých rozích leží náboje se stejnou velikostí, ale s opačným znaménkem. Určete potenciál ve středu čtverce. Uvažujte, že potenciál v nekonečnu je roven nule.

Řešení: Uvažujeme-li potenciál v nekonečnu roven nule, pak dle rovnice (13) pro konstantu K platí $K = 0$. Vzdálenost jednotlivých nábojů od centra čtverce lze vypočítat pomocí Pythagorovy věty $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Stejně jako pro náboje a elektrickou intenzitu, lze i pro potenciál využít princip superpozice. Celkový potenciál bude součtem potenciálů od jednotlivých zdrojů $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$, kde

$$\varphi_1 = \frac{Q\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0 a}, \varphi_2 = \frac{2Q\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0 a}, \varphi_3 = \frac{-Q\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0 a}, \varphi_4 = \frac{-2Q\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0 a} \Rightarrow \varphi = 0.$$

6. Př. 3.3.

Zadání: Vypočtěte potenciál v poloze $\vec{r}$ od středu homogenně nabité koule o poloměru R. Uvažujte $|\vec{r}| > R$.

Řešení: Pro jednoduchost si počátek souřadnicové soustavy zvolíme ve středu koule. Stejně jako v případě elektrické intenzity, v blízkosti nabité koule si natočíme souřadnicový systém tak, aby polohový vektor byl ve tvaru $\vec{r} = (0, 0, z)$, to lze provést díky sférické symetrii zadání. Uvažujeme-li objemové rozložení náboje, lze element náboje napsat ve tvaru $\mathrm{d}Q = \varrho\left(\vec{r}'\right)\mathrm{d}V'$. Stejně jako v případě výpočtu elektrické intenzity zavedeme sférické souřadnice u čárkovaných souřadnic $\mathrm{d}V' = r'^2 \sin\left(\theta'\right) \mathrm{d}r'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi'$. Uvažujeme-li homogenně nabitou kouli, je rozložení náboje $\varrho = \varrho_0$ pro $r' < R$ a $\varrho = 0$ pro $r' > R$. Interval integrálu rozdělíme na dvě části, z nichž integrál obsahující interval $r' \in (R; \infty)$ se rovná nule (to plyne z nulovosti hustoty v daném intervalu). Určitý integrál z nuly je opět nula. Potenciál vyjádříme vztahem

$$\begin{aligned}
\varphi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} \frac{\varrho_0 r'^2 \sin\left(\theta'\right) \mathrm{d}r'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi'}{\left(r'^2 - 2zr'\cos\left(\theta'\right) + z^2\right)^{1/2}} + K = \\
&= \frac{2\pi\varrho_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\pi} \int_0^{R} \frac{r'^2 \sin\left(\theta'\right) \mathrm{d}r'\mathrm{d}\theta'}{\left(r'^2 - 2zr'\cos\left(\theta'\right) + z^2\right)^{1/2}} + K = \\
&= \frac{2\pi\varrho_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{R} \frac{r'}{z} \left(r'^2 - 2zr'\cos\left(\theta'\right) + z^2\right)^{1/2} \mathrm{d}r' \Big|_0^{\pi} + K = \\
&= \frac{2\pi\varrho_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{R} \frac{r'}{z} \left[\left(r'^2 + 2zr' + z^2\right)^{1/2} - \left(r'^2 - 2zr' + z^2\right)^{1/2}\right] \mathrm{d}r' + K,
\end{aligned}$$

zde opět uvažujeme $z > R \Rightarrow z - r' > 0 \Rightarrow |r' - z| = z - r'$. Vrátíme-li se zpět k výpočtům, dostaneme:

$$= \frac{2\pi\varrho_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R \frac{r'}{z} \left[r' + z - \left(z - r' \right) \right] \mathrm{d}r' + K =$$
$$= \frac{2\pi\varrho_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R \frac{2r'^2}{z} \, \mathrm{d}r' + K = \frac{2\pi\varrho_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2r'^3}{3z} \bigg|_0^R + K = \frac{2\pi\varrho_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2R^3}{3z} + K = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z} + K,$$

kde jsme použili pro výpočet náboje homogenní koule vztah $Q = \varrho_0 V = \varrho_0 \frac{4}{3}\pi R^3$.

Komentář: Natočíme-li výsledek opět do obecného úhlu θ a ϕ, obdržíme jej ve tvaru $\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}|} + K$, jenž je na studovaném intervalu identický s potenciálem bodového náboje nacházejícím se v počátku souřadnicové soustavy.

7. Příklady k procvičení 3.3.

Uvažujte tlustou sférickou slupku o vnitřním a vnějším poloměru R_1 a R_2. Slupka je homogenně nabitá s hustotou náboje ϱ. Vypočtěte potenciál v libovolném bodě r. Potenciál v nekonečné vzdálenosti od středu slupky uvažujte jako nulový. Nepoužívejte Gaussův zákon.

3.3: $\varphi_{r \le R_1} = \frac{\varrho}{2\varepsilon_0} \left(R_2^2 - R_1^2 \right)$,
$\varphi_{R_1 \le r \le R_2} = \frac{\varrho}{2\varepsilon_0} \left(R_2^2 - \frac{r^2}{3} - \frac{2R_1^3}{3r} \right)$,
$\varphi_{r \ge R_2} = \frac{\varrho}{3\varepsilon_0 r} \left(R_2^3 - R_1^3 \right)$.

8. Př. 3.4.

Zadání: Určete potenciál v blízkosti nabité nekonečně tenké kružnice o poloměru R, jejíž střed leží v počátku souřadnicového systému. Potenciál vyšetřujte na ose z, která je osou symetrie kružnice. Potenciál v nekonečnu uvažujte jako nulový. Délková hustota kružnice je τ_0.

Řešení: Díky symetrii problému zavedeme válcové souřadnice. Kružnice se nachází na souřadnicích $\vec{r}' = (R\cos\phi', R\sin\phi', 0)$. Připomeňme, že pro studovaný bod na ose z platí $\vec{r} = (0, 0, z)$. Pro element náboje platí $\mathrm{d}Q = \tau_0 \, \mathrm{d}l = \tau_0 R \, \mathrm{d}\phi$. Element délky $\mathrm{d}l$ kružnice běží od 0 do obvodu kružnice $2\pi R$. Úhlový element $\mathrm{d}\phi$ běží od 0 do 2π, proto přepočet $\mathrm{d}l = R \, \mathrm{d}\phi$. Konstanta K bude, stejně jako v předešlých případech, nulová. Potenciál spočteme

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\tau_0 R \, \mathrm{d}\phi}{\left(x'^2 + y'^2 + z^2 \right)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\tau_0 R \, \mathrm{d}\phi}{\left(R^2 + z^2 \right)^{1/2}} =$$
$$= \frac{2\pi R \tau_0}{4\pi\varepsilon_0 \left(R^2 + z^2 \right)^{1/2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \left(R^2 + z^2 \right)^{1/2}}.$$

Pro $z >> R$ přejde výraz opět do Coulombovského potenciálu $\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z}$.

9. Př. 4.7.

Zadání: Jaké je napětí mezi dvěma nekonečně dlouhými válcovými plechy o poloměrech R_1 a R_2 ($R_1 < R_2$) a plošných nábojích σ_1 a σ_2 ? Osy válců leží na stejné přímce. Určete kapacitu takto vytvořeného kondenzátoru.

Řešení: Dle Gaussova zákona $E = \frac{Q}{S\varepsilon_0} = \frac{\sigma 2\pi R l}{2\pi r l \varepsilon_0} = \frac{\sigma R}{r\varepsilon_0}$. Napětí indukované válcovitě rozloženým nábojem lze spočítat jako $U = \int_{R_1}^{R_2} E \, \mathrm{d}r$. Informace o náboji na vnějším plechu zjevně není pro zjištění napětí důležitá. Vnější válec uvnitř sebe napětí nezpůsobuje, protože napětí je dáno integrálem z intenzity, která v tomto prostoru závisí na hustotě náboje na vnitřní elektrodě a na jejím poloměru. Napětí vyjde $U = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} \, \mathrm{d}r = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$.

Kapacitu kondenzátoru definujeme jako $C = \frac{Q}{U}$. Tedy $C = \frac{Q\varepsilon_0}{\sigma_1 R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi l \varepsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$.

Komentář: Tento výsledek není potřeba nutně považovat jako nefyzikální z důvodu, že $l \to \infty$, a tedy $C \to \infty$. Pro $l >> \Delta R$ je možné uvažovat s výsledkem $C = \frac{2\pi l \varepsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$ jako velmi dobrou aproximací popisující reálný případ konečně dlouhého válcového kondenzátoru o délce l.

10. Př. 5.2.

Zadání: Vypočtěte kapacitu dvou soustředných kulových slupek. Použijte limitu, kdy vnější kulová slupka je nekonečně velká.

Řešení: Z minulých kapitol víme, že pro potenciál v okolí bodového či sférického náboje (uvažujme-li, že střed koule je v počátku souřadnicové soustavy) platí $\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Rozdíl potenciálů v polohách R_1 a R_2 bude $U = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$. Všimněme si, že vnější slupka nepřispívá do pole mezi slupkami (výraz obsahuje pouze náboj Q_1). Kapacita takového kondenzátoru se rovná

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

V případě poloměru vnější slupky jdoucí do nekonečna $R_2 \to \infty$ se kapacita kulového kondenzátoru (či osamocené koule) spočte $C = 4\pi\varepsilon_0 R_1$.

11. Př. 6.5.

Zadání: Uvažujme, že jsme mezi desky deskového kondenzátoru vložili dielektrikum. Desky kondenzátoru leží ve vzájemné vzdálenosti d a dielektrikum má šířku a, kde $d > a$ (dielektrikum nevyplňuje mezeru mezi deskami úplně). Vyjádřete kapacitu kondenzátoru s dielektrikem C jako funkci kapacity bez dielektrika C_0.

Řešení: Jak jsme si již několikrát uvedli, kapacita deskového kondenzátoru je $C_0 = S\varepsilon_0/d$. Z výše uvedeného plyne, že kapacita kondenzátoru (s dielektrikem) se nezmění, ať umístíme dielektrikum mezi desky kamkoli. Elektrická intenzita v oblasti bez dielektrika bude rovna $E_{\text{bez}} = \sigma/\varepsilon_0$, intenzita v oblasti s dielektrikem bude $E_{\text{diel}} = \sigma/(\varepsilon_0\varepsilon_r)$. Napětí pak bude dráhovým integrálem těchto intenzit. Vzhledem k tomu, že intenzita zůstává na jednotlivých oblastech konstantní, lze napětí zapsat jako

$$U = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(d-a) + \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}a,$$

kde $d - a$ označuje šířku oblasti bez dielektrika a a šířku dielektrika. Kapacitu vypočítáme podle definice (21) jako

$$C = \frac{S\varepsilon_0}{(d-a) + \frac{1}{\varepsilon_r}a} = \frac{C_0 d}{(d-a) + \frac{1}{\varepsilon_r}a}.$$

12. Př. 7.3.

Zadání: Uvažujme krychli, v jejíchž hranách se nachází 12 rezistorů o stejných odporech $R = 1\Omega$ (viz obrázek 40 a)). V každém rohu se nachází uzel. Jednotlivé uzly očíslujeme od 1 do 8. Soustavu napojíme na zdroj emn. v protilehlých rozích (uzly 1 a 8). Vypočtěte odpor celé soustavy.

Řešení: Při bližším pohledu na danou soustavu si všimněme, že (díky rovnosti všech odporů) v uzlech $2, 3, 4$, a pak dále v uzlech $5, 6, 7$ je stejný potenciál. Zapojení tak půjde zakreslit v jiném tvaru (viz obrázek 40 b)), jenž má stejný výsledný odpor, daný vztahem

$$R = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} = \frac{5}{6}R.$$

13. Př. 7.5.

Zadání: Uvažujme Gaussův zákon ve tvaru (10) a Ampérův zákon (později probereme podrobně) ve tvaru

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

kde $\vec{B}$ vyjadřuje vektor magnetické indukce a μ_0 označuje permeabilitu vakua. Odvoď'te z těchto dvou zákonů rovnici kontinuity.

Řešení: Divergencí Ampérova zákona získáme

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Divergenci a parciální derivaci podle času lze zaměnit $\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$. Divergence elektrické intenzity je pak z Gaussova zákona hustota náboje podělená permitivitou vakua. Na levé straně se nachází operátor divergence z rotace. Z předešlého textu víme, že tento člen se rovná nule

$$0 = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \mu_0 \frac{\partial \varrho}{\partial t}$$

Podělením permeability na obou stranách rovnice získáme rovnici kontinuity.

14. Př. 8.1.

Zadání: Uvažujte elektron o náboji $-q$ a hmotnosti m v homogenním magnetickém poli o velikosti $\vec{B} = (0, 0, B_z)$. Elektron se pohybuje rychlostí $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Vypočtěte trajektorii částice. Zjistěte jak se situace změní ve chvíli, kdy se částice pohybuje kolmo vzhledem k magnetickým indukčním čarám.

Řešení: Dle druhého Newtonova zákona a Lorentzovy síly platí

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow m \left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} \right) = -q \left(v_x, v_y, v_z \right) \times (0, 0, B_z) = -qB_z \left(v_y, -v_x, 0 \right)$$

Z této soustavy rovnic lze vyjádřit tři diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -\frac{qB_z}{m} v_y, \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{qB_z}{m} v_x, \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = 0$$

Třetí rovnice má triviální řešení $v_z = \text{konst.}$ Řešení prvních dvou rovnic obdržíme derivací první rovnice a dosazení za $\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$ z druhé

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}t^2} = -\left(\frac{qB_z}{m} \right)^2 v_x \Rightarrow v_x = A \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow v_y = A \sin(\omega t + \varphi)$$

kde $\omega = \frac{qB_z}{m}$ je úhlová rychlost a $A^2 = v_x^2 + v_y^2$ je kvadrát velikosti rychlosti v rovině xy. Z výše uvedeného řešení vyplývá, že tento kvadrát je v čase konstantní a je určen počáteční rychlostí. Úhel φ určují také počáteční podmínky. Částice se bude pohybovat po šroubovici orientovanou ve směru z, podél magnetických indukčních čar.

V případě pohybu kolmém na magnetické indukční čáry vymizí složka rychlosti v_z. Částice se bude pohybovat po kružnici jejíž poloměr vyjádříme jako $r = \frac{v}{\omega} = \frac{mv}{qB}$.

Komentář: Pohyb nabitých částic v magnetickém poli znázorňuje obrázek 46. Částice v prostředí ztrácejí rychlost a poloměr jejich dráhy se zmenšuje, proto nejsou znázorněné křivky kružnice (nebo šroubovice), ale spirály.

15. Př. 8.2.

Zadání: Uvažujte kruhovou proudovou smyčku ve vnějším homogenním magnetickém poli. Necht normála ke smyčce uzavírá s vektory magnetické indukce $\vec{B}$ úhel θ. Jak velký moment síly působí na smyčku?

Řešení: Uvažujme, že kruhová smyčka leží v rovině xy a vektory magnetické indukce v rovině xz a s osou z svírají úhel θ - viz obrázek 47. Polohový vektor smyčky je $\vec{l} = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, 0)$. Element tohoto vektoru se rovná $\mathrm{d}\vec{l} = (-R\sin\varphi, R\cos\varphi, 0)\mathrm{d}\varphi$. Magnetické pole směřuje ve směru $\vec{B} = (-B\sin\theta, 0, B\cos\theta)$, kde B značí velikost vektoru magnetické indukce. Z Lorentzovy síly (47) jasně vyplývá, že na element vodiče působí element síly d $\vec{F} = I\ \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$. Moment sil pak zapíšeme jako $\vec{M} = \int \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{F}$, kde $\vec{r} \equiv \vec{l}$ odpovídá polohovému vektoru kruhu, kde počátek souřadnicové soustavy se nachází na ose rotace. Dosazením do vzorců získáme

$$\vec{M} = I \int \vec{l} \times (\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}) =$$

$$= I \int_0^{2\pi} (R\cos\varphi, R\sin\varphi, 0) \times [(-R\sin\varphi, R\cos\varphi, 0) \times (-B\sin\theta, 0, B\cos\theta)]\mathrm{d}\varphi =$$

$$= IBR^2 \int_0^{2\pi} (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \times (\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta)\mathrm{d}\varphi =$$

$$= IBR^2 \int_0^{2\pi} \left(\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta, -\cos^2\varphi\sin\theta, 0\right) \mathrm{d}\varphi =$$

$$= IBR^2 \sin\theta \int_0^{2\pi} \left(\sin\varphi\cos\varphi, -\cos^2\varphi, 0\right) \mathrm{d}\varphi =$$

$$= -IBR^2 \sin\theta \left(\frac{1}{2}\cos^2\varphi, \frac{1}{2}\left[\varphi + \frac{1}{2}\sin^2(2\varphi)\right], 0\right)_0^{2\pi} =$$

$$= -IBR^2 \sin\theta(0, \pi, 0) = -IB\pi R^2 \sin\theta(0,1,0) = -IBS\sin\theta(0,1,0) = I\vec{S} \times \vec{B}$$

Z výsledku vidíme, že moment síly je úměrný vektorovému součinu plochy kruhové smyčky $\vec{S} = (0, 0, S)$ (orientované pomocí normály) a vektoru magnetické indukce.

Moment síly v našem případě směřuje v směru osy y, která se tak stává osou otáčení smyčky. Moment se snaží smyčku otočit tak, aby rovina smyčky byla kolmá na pole a aby magnetické indukční čáry generované smyčkou a vnějším polem směřovaly stejným směrem.

Komentář: Čtenář může zkontrolovat, že síla působící na kroužek se rovná

$$\vec{F} = -\int_0^{2\pi} I\vec{B} \times \mathrm{d}\vec{l} = IBR \int_0^{2\pi} (\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\cos\theta, -\cos\varphi\sin\theta)\mathrm{d}\varphi = \vec{0}$$

16. Př. 8.4.

Zadání: Mějme dlouhou cívku (solenoid). Určete magnetické pole hluboko uvnitř cívky a na konci cívky, protéká-li cívkou proud I.

Řešení: Řez cívkou vykresluje obrázek 49. Oranžový obdélník představuje myšlenou křivku, podél které zkoumáme magnetické pole. Uvažujeme-li solenoid nekonečně dlouhý, můžeme magnetické pole venku oproti poli uvnitř zanedbat. Uvážíme-li libovolnou uzavřenou křivku ležící mimo solenoid, tak skrze tuto křivku poteče nulový proud (zanedbáme-li proud ve směru solenoidu) a magnetické pole mimo solenoid musí být nulové. Uvnitř je magnetické pole orientováno rovnoběžně s cívkou (viz zakreslený vektor magnetické indukce). Uvážíme-li svislé strany obdélníku, skalární součin těchto úseků s vektory magnetické indukce se rovná nule právě kvůli kolmosti vektorů $\vec{B}$ na tyto úseky. Jediným přispívajícím úsekem zůstane vnitřní horizontální strana o délce a, ta, která je s magnetickým polem rovnoběžná. Pro cívku platí rovnice (52), tedy $\oint \vec{B}\ \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^a B\ \mathrm{d}r = B\int_0^a\ \mathrm{d}r = Ba$. Uzavřenou křivkou však probíhá více než jeden vodič. Celkem v sobě úsek o délce a uzavírá N vodičů. Celkový proud pak odpovídá N násobku proudu protékajícího cívkou. Takže platí

$$B = \frac{\mu_0 I N}{a}.$$

Označíme-li si hustotu závitů $\eta = N/a$, lze magnetické pole uvnitř dlouhé cívky vyjádřit jako

$$B = \mu_0 I \eta$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \left(\frac{Qt\vec{r}}{r^3}\right) = Qt\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = -Qt\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \cdot \frac{1}{r} = 0.$$

Elektrická intenzita se rovná

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \frac{Q}{r} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Qt\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{Q\vec{r}}{r^3} - \frac{Q\vec{r}}{r^3} = 0.$$

Komentář: Z výsledku je patrné, že při jiné kalibraci bychom mohli zvolit potenciál a vektorový potenciál ve tvaru $\varphi = 0$ a $\vec{A} = 0$, a výsledné $\vec{E}$ a $\vec{B}$ by zůstalo nezměněné. Kalibrační funkce f by v tomto případě odpovídala $f = -Qt/r$. Ze stejného důvodu lze potenciál z bodového zdroje zapsat pomocí pouze vektorového potenciálu jako $\vec{A} = -Qt\vec{r}/r^3$.

17. Př. 11.1.

Zadání: Uvažujme obvod. Nejdříve obvod zapojíme tak, aby zdroj emn. nabil kondenzátor o kapacitě C (zapojení 1). Poté se přepínač přepojí tak (zapojení 2), aby v obvodu byl kondenzátor, cívka (o indukčnosti L) a rezistor (o odporu R), takzvaný LRC obvod. Jak se kondenzátor vybíjí, vytváří v obvodu proud. Jaká je časová závislost proudu na čase? Řešení: Kondenzátor v obvodu funguje jako zdroj napětí, označme $U_C = Q/C$ (v čase $t_0 = 0$ je $Q = Q_0$). Naopak rezistor $U_R = -RI$ a cívka $U_L = -L\frac{\partial I}{\partial t}$ způsobují v tomto případě úbytek napětí, proto jsme zvolili znaménko mínus. Projdeme-li celou smyčkou, je součet všech napětí nulový

$$U_C + U_L + U_R = 0 \Rightarrow \frac{Q}{C} - L\frac{\partial I}{\partial t} - RI = 0$$

Na počátku máme kondenzátor nabitý. Proud začne odvádět náboj z kondenzátoru. Čím bude větší proud, tím bude větší i úbytek náboje na kondenzátoru $I = -\frac{\partial Q}{\partial t}$

$$\frac{Q}{C} + L\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + R\frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \Rightarrow Q + LC\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + CR\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$$

Pro nalezení přesného řešení použijeme substituci

$$Q = ye^{ct} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t}e^{ct} + yce^{ct}, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}e^{ct} + 2\frac{\partial y}{\partial t}ce^{ct} + yc^2e^{ct}.$$

S touto substitucí se výše uvedená diferenciální rovnice změní na

$$ye^{ct} + LC\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}e^{ct} + LC2\frac{\partial y}{\partial t}ce^{ct} + LCyc^2e^{ct} + CR\frac{\partial y}{\partial t}e^{ct} + CRyce^{ct} = 0.$$

Každý člen této rovnice podělíme výrazem e^{ct}. Přerovnáním členů obdržíme

$$y\left(1 + CRc + LCc^2\right) + \frac{\partial y}{\partial t}(LC2c + CR) + LC\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

Pokud si zvolíme $c = -R/2L$, obdržíme již známou diferenciální rovnici

$$y\left(1 - \frac{R^2C}{4L}\right) + LC\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

jejíž řešení se rovná

$$y = A\cos(\omega t + \varphi), \quad \omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$$

Z počátečních podmínek zjistíme integrační konstanty A, φ. Na počátku uvažujeme kondenzátor nabitý nábojem Q_0 a proud je nulový $I_0 = 0$. Výsledné řešení zapíšeme ve tvaru

$$Q_0 = A\cos(\varphi), \tan(\varphi) = \frac{c}{\omega} \Rightarrow Q = Q_0 e^{-\frac{Rt}{2L}} \frac{\cos(\omega t + \varphi)}{\cos(\varphi)}, \omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}, \varphi = \arctan\left(-\frac{R}{2L\omega}\right)$$

18. Př. 11.2.

Zadání: Uvažujte cívku tvaru toroidu, jež má průřez] tvaru obdélníku. Vypočtěte vlastní indukčnost cívky.

Řešení: Magnetickou indukci uvnitř cívky určíme dle Ampérova zákona $B2\pi\rho = N\mu_0 I$, kde N značí počet závitů, I je proud protékající cívkou, ρ označuje vzdálenost od osy a B je velikost magnetické indukce. Magnetický tok protékající jedním závitem pak vypočteme $\phi = \int B \, \mathrm{d}S = \int B \, \mathrm{d}\rho \mathrm{d}z$, kde $z \in (0; b)$ a $\rho \in (R; R + a)$. Integrál zjistíme ze vztahu

$$\phi = \int \frac{N\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathrm{d}\rho \mathrm{d}z = \frac{N\mu_0 I}{2\pi} z\Big|_0^b \ln\rho\Big|_R^{R+a} = \frac{N\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right).$$

Podle vztahu pro tok všemi N závity $N\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = L\frac{\partial I}{\partial t}$ lze odvodit

$$L = \frac{N^2\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right).$$

19. Př. 12.1.

Zadání: Najděte komplexní číslo $\tilde{a} = i + \sqrt{3}$ ve tvaru $\tilde{a} = Ae^{i\varphi}$, kde φ a A jsou reálná čísla.

Řešení: Tvar $\tilde{a} = Ae^{i\varphi}$ můžeme přepsat do podoby $\tilde{a} = A(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Víme-li, že platí $\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2 = 1$, pak se velikost komplexního čísla rovná $A = \left(1^2 + \sqrt{3}^2\right)^{1/2} = 2$.

Dále lze zapsat rovnost

$$\tilde{a} = i + \sqrt{3} = 2(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Výsledek vyjádříme ve tvaru $\tilde{a} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Komentář: Polární zápis je vhodný pro násobení komplexních čísel. Uvažujme dvě komplexní čísla $\tilde{a}_1 = A_1 e^{i\varphi_1}$ a $\tilde{a}_2 = A_2 e^{i\varphi_2}$. Jejich násobek je $\tilde{a}_1\tilde{a}_2 = A_1 A_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.

20. Příklady k procvičení 12.5 .

Uvažujte paralelně zapojenou cívku o indukčnosti L a rezistor o odporu R. K této soustavě je v uzavřeném obvodu do série zapojený ampérmetr o zanedbatelném odporu a zdroj střídavého napětí $\mathcal{E}$. Z ampérmetru je zřejmé, že ve chvíli kdy je proud maximální, napětí na zdroji nabývá hodnoty jedné poloviny maximální hodnoty. Určete frekvenci zdroje napětí.

Řešení: $\omega = \frac{R}{\sqrt{3}L}$.