

FYZIKÁLNÍ PRAKTIKUM

Fyzikální praktikum 2

Zpracoval: Teodor Duraković

Naměřeno: 4. listopadu 2024

Obor: F

Skupina: Po 14:00

Testováno:

Úloha č. 5: Magnetické pole

$T = 22.6\text{ }^{\circ}\text{C}$

$p = 1001\text{ hPa}$

$\varphi = 40\text{ }^{\circ}$

1. Zadání

- Změřit horizontální složku intenzity magnetického pole Země Gaussovým magnetometrem.
- Zjistit magnetickou odezvu feromagnetického materiálu.

2. Úvod

2.1. Geomagnetické pole

Znalost průběhu magnetického pole v okolí Země je důležitá pro mnoho oborů, jako je například geografie, geologie a podobně. Vlastnosti magnetického pole Země popisuje intenzita magnetického pole, obvykle značená \mathbf{H} . V každém bodě můžeme vektor intenzity rozdělit na horizontální a vertikální složku, v dalším se soustředíme jen na měření horizontální složky H_z .

Princip metody měření Gaussovým magnetometrem spočívá v porovnání intenzity zemského magnetického pole s intenzitou tyčového permanentního magnetu pomocí magnetické střelky jako detektoru směru lokálního magnetického pole. Z praktických důvodů se v metodě provádí měření výchylky magnetické střelky pro dvě polohy střelky vzhledem k permanentnímu magnetu, pro tzv. první a druhou Gaussovu polohu (viz obr. 1).

Pro výpočet intenzity magnetického pole od tyčového magnetu použijeme vztah pro magnetické pole v okolí magnetického dipólu s dipólovým momentem \mathbf{m}

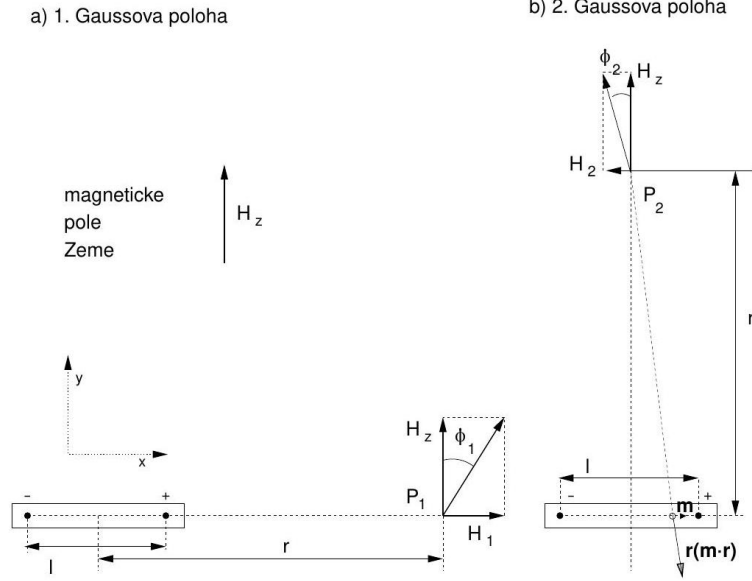
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\mu_0 r^3} \left[\frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})\mathbf{r}}{r^2} - \mathbf{m} \right]$$

kde \mathbf{r} je polohový vektor bodu v němž počítáme magnetické pole vzhledem k poloze magnetického dipólu a μ_0 je permeabilita vakua. V reálném případě se ovšem rozměry permanentního magnetu vzhledem ke vzdálenosti, ve které měříme, nedají zanedbat. Proto je třeba tento vztah integrovat přes celý magnet s danou objemovou hustotou dipólového momentu.

Integrace pro první Gaussovu polohu, tj. případ střelky na ose tyčového magnetu, vede na výsledek

$$H_1(r) = \frac{1}{2\pi\mu_0 r^3} \frac{M}{(1 - \lambda^2)^2} \quad (1)$$

kde $\mu = M/l$ je délková hustota magnetického momentu, $\lambda = l/2r$, r je vzdálenost mezi osou magnetické střelky a středem (těžištěm) tyčového magnetu a l je délka tyčového magnetu s celkovým magnetickým momentem M . Zde jsme aproximovali válcový tyčový magnet nekonečně tenkou tyčí. Konečný průměr magnetu se v praxi projeví tím, že veličina l ve vztahu (1) neodpovídá jeho fyzické, ale tzv. redukované délce.



Obrázek 1: Znázornění 1. a 2. Gaussovy polohy, přičemž

V druhé Gaussově poloze se sice směr pole vyvolaného různými elementy podél délky tyčového magnetu mění, ale vzhledem k symetrii se složka ve směru kolmém na osu magnetu vyruší. Počítat tedy budeme pouze komponentu ve směru osy tyčového magnetu (zde osa x). Integrací pak dospějeme ke vztahu:

$$H_2(r) = -\frac{1}{4\pi\mu_0 r^3} \frac{M}{(1 + \lambda^2)^{3/2}} \quad (2)$$

Známe tedy intenzitu magnetického pole v bodech P_1 a P_2 . Umístíme magnet tak, aby jeho osa směřovala kolmo ke směru magnetického pole Země. Výchylka magnetky v první Gaussově poloze z jejího původního směru k magnetickému pólu Země je φ_1 , přičemž platí

$$\tan \varphi_1 = \frac{H_1}{H_z} = \frac{1}{4\pi\mu_0 H_z} \frac{2M}{r^3 (1 - \lambda^2)^2} \quad (3)$$

Obdobně v místě P_2 se střelka vychýlí o úhel φ_2

$$\tan \varphi_2 = \frac{H_2}{H_z} = \frac{1}{4\pi\mu_0 H_z} \frac{M}{r^3 (1 + \lambda^2)^{3/2}} \quad (4)$$

Úpravou rovnic získáváme vztahy

$$\frac{M}{H_z} = \frac{4\pi\mu_0 r^3}{7} \left(\frac{3 \tan \varphi_1}{2} + 4 \tan \varphi_2 \right) \quad (5)$$

$$MH_z = \frac{\pi^2 J}{\tau^2}, \quad (6)$$

kde J je Moment setrvačnosti magnetu daný vztahem

$$J = \frac{m}{4} \left(R^2 + \frac{l^2}{3} \right), \quad (7)$$

kde m je hmotnost magnetu, R jeho poloměr a l délka. τ je polovina periody kmitů magnetu v tíhovém poli závislá na horizontální složce magnetické intenzity Země, hodnotu periody získáme zavěšením magnetu na vlákno o malém torzním momentu, čímž je torze ovlivněna právě magnetickým polem Země.

$$\tau = \frac{T}{2} \quad (8)$$

Vztahy (5), (6) nám udávají veličiny $A = M/H_z$ a $B = MH_z$. Z těchto veličin určíme velikost horizontální složky intenzity magnetického pole Země jako

$$H_z = \sqrt{\frac{B}{A}} \quad (9)$$

2.2. Magnetická odezva feromagnetického materiálu

Vztah mezi magnetickou intenzitou \mathbf{H} a magnetickou indukcí \mathbf{B} je dán vztahem

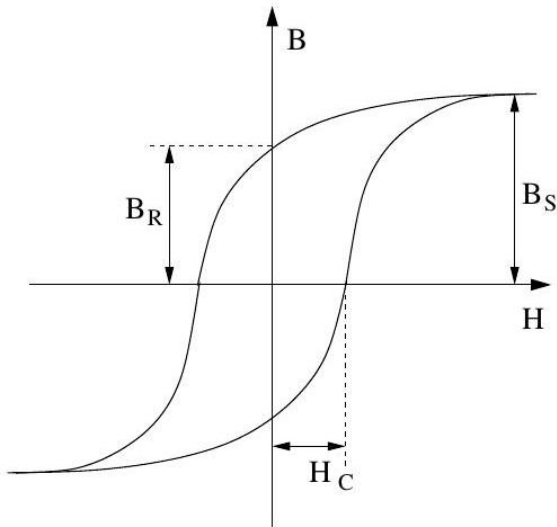
$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad (10)$$

kde \mathbf{M} je vektor magnetizace, který udává objemovou hustotu magnetického momentu. V případě paramagnetických a diamagnetických materiálů ve slabém magnetickém poli můžeme závis-

lost magnetizace na okolním poli předpokládat v lineárním tvaru

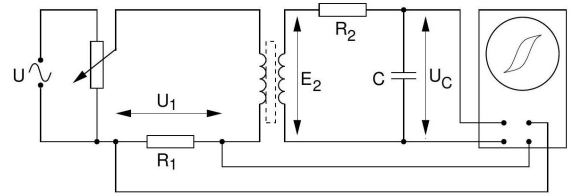
$$\mathbf{M} = \chi\mu_0\mathbf{H} \quad (11)$$

kde χ je magnetická susceptibilita, která je kladná pro paramagnetické a záporná pro diamagnetické materiály. Pro většinu materiálů, s výjimkou přechodových kovů a jejich sloučenin, je susceptibilita velmi malá, okolo 10^{-6} až 10^{-9} . Zřejmě též platí $\mathbf{B} = (1 + \chi)\mu_0\mathbf{H} = \mu_r\mu_0\mathbf{H}$, kde μ_r je relativní permeabilita. V obecném případě je susceptibilita tenzorem a vektory magnetizace a intenzity nemusejí mít stejný směr. Pro feromagnetické materiály však není závislost magnetické indukce na intenzitě pole lineární a vykazuje hysterezní závislost, jejíž typický průběh je znázorněn na obrázku 2.



Obrázek 2: Typický průběh magnetické hysterezní smyčky

Měření budeme provádět na feromagnetickém jádře se dvěma vinutími (transformátoru) buzeném střídavým elektrickým proudem zapojeném podle schématu na obrázku 3. Primární vinutí slouží k buzení magnetického pole a na sekundárním snímáme indukované napětí. Intenzitu



Obrázek 3: Schéma obvodu pro měření magnetického pole ve feromagnetu

Intenzitu magnetického pole můžeme spočítat podle Ampérova zákona

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (12)$$

kde integrace na levé straně probíhá podél uzavřené křivky L , na pravé straně přes plochu S_1 jí ohraničenou a \mathbf{j} je proudová hustota tekoucí plochou (výsledkem integrace pravé strany je zde celkový proud protékající vodiči uvnitř kružnice). V případě toroidu je řešení jednoduché. Integraci provedeme podél kružnice s poloměrem r . Z důvodu symetrie má intenzita H podél kružnice všude stejnou velikost a předchozí rovnice pak přejde do tvaru

$$2\pi r H = N_1 I, \quad H = \frac{N_1 I}{2\pi r}, \quad (13)$$

kde N_1 je počet závitů primárního vinutí a I proud tekoucí každým z nich. Magnetická intenzita je tedy přímo úměrná proudu, který měříme jako napětí U_1 na rezistoru R_1 připojeném do série s proudovou cívkou. Hodnota magnetické intenzity v toroidu je rovna

$$H(t) = \frac{N_1}{2\pi r R_1} U_1(t) \quad (14)$$

Pokud je rozdíl vnitřního a vnějšího poloměru dostatečně malý, můžeme považovat hodnotu magnetické intenzity nezávislou na poloze v toroidu a za poloměr r dosadit jeho průměrnou hodnotu $r = (r_{\min} + r_{\max}) / 2$.

Při buzení střídavým proudem se mění s časem též magnetická indukce. Časová změna magnetické indukce B indukuje v sekundárním vinutí elektromotorické napětí E_2 podle Faradayova zákona

$$E_2(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -N_2 S_2 \frac{dB}{dt} \quad (15)$$

kde Φ je celkový magnetický tok sekundární cívky; vycházíme z toho, že je-li průřez jádra toroidu S_2 a počet závitů sekundárního vinutí N_2 ,

pak magnetický tok je roven $\Phi = N_2 S_2 B$. Indukované napětí je úměrné časové změně magnetické indukce. Abychom mohli měřit přímo napětí úměrné magnetické indukci, je v obvodu zařazen integrační RC člen. Průběh napětí na kondenzátoru o kapacitě C získáme z druhého Kirchhoffova zákona

$$E_2 = RI_2 + U_C, \quad U_C = \frac{Q}{C}, \quad I_2 = \frac{dQ}{dt} \quad (16)$$

kde I_2 je proud tekoucí obvodem a Q je náboj na kondenzátoru. Po úpravě získáme diferenciální rovnici pro náboj Q

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = \frac{1}{R} E_2(t) \quad (17)$$

Tato rovnice má řešení ve tvaru

$$Q(t) = -\frac{1}{R} \int_0^\infty E_2(t - \tau) e^{-\frac{\tau}{RC}} d\tau \quad (18)$$

Průběh napětí na kondenzátoru je potom dán vztahem

$$U_C(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^\infty E_2(t - \tau) e^{-\frac{\tau}{RC}} d\tau \quad (19)$$

Je-li časová konstanta integračního obvodu RC mnohem větší než perioda budícího střídavého proudu, lze exponenciální člen v integrálu položit přibližně roven 1. Potom po dosazení z rovnice (15) do vztahu (19) dostaneme výraz pro napětí U_C

$$U_C(t) \approx \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t N_2 S_2 \frac{dB}{dt} \Big|_\tau d\tau, \quad U_C(t) \approx \frac{N_2 S_2}{RC} B(t) \quad (20)$$

Po převedení dostaneme vztah pro magnetickou indukci

$$B(t) = \frac{RC}{N_2 S_2} U_C(t) \quad (21)$$

V zapojení podle schématu na obrázku 3 nastavíme osciloskop do tzv. X-Y režimu, kdy zobrazujeme vzájemnou závislost napětí na jednotlivých vstupech. Jelikož podle vztahu (14) je napětí na prvním vstupu úměrné intenzitě magnetického pole a napětí na druhém vstupu je podle vztahu (21) úměrné indukci magnetického pole, zobrazujeme přímo hysterezní smyčku, tedy závislost indukce na intenzitě magnetického pole. Napětí naměřená na osciloskopu pak již převedeme na indukci a intenzitu magnetického pole ve zvolených bodech hysterezní smyčky pomocí výše zmíněných vztahů 14 a 16.

Magnetizaci můžeme snadno spočítat z magnetické indukce s použitím vztahu (5.22) jako

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H \quad (22)$$

3. Měření

3.1. Geomagnetické pole

Měřením získáváme rozměry, hmotnost a periodu kmitů magnetu:

$$l = 123.78 \pm 0.19 \text{ mm}$$

$$r = 10.6 \pm 0.3 \text{ mm}$$

$$m = 298.3 \pm 0.3 \text{ g}$$

$$T = 5.12 \pm 0.06 \text{ s}$$

a pro jednotlivé Gaussovy polohy získáváme výchylky

r [cm]	φ [°]	φ' [°]
-40	55	50
-30	75	70
-20	85	85
20	85	85
30	75	75
40	55	55

pro I. Gaussovu polohu a

r [cm]	φ_2 [°]	φ'_2 [°]
-40	37	30
-30	55	47
-20	80	75
20	78	82
30	60	50
40	40	30

pro II. Gaussovu polohu. Pro hodnoty A získáváme

r [cm]	$A \cdot 10^{-7} [\text{Hm}^2]$
-40	6.6 ± 0.6
-30	5.9 ± 0.6
-20	6.4 ± 0.7
20	7.2 ± 0.8
30	6.9 ± 0.6
40	7.1 ± 0.8

$$A = (6.69 \pm 0.3) \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^2 \quad (23)$$

Pro B získáváme

$$B = (1.47 \pm 0.04) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} \quad (24)$$

proto

$$H_z = 14.8 \pm 0.4 \text{ A m}^{-1} = 18600 \pm 500 \text{ nT} \quad (25)$$

Získané hodnoty, přestože řádově korektní, se od udávaných hodnot viditelně liší. Tuto deviaci můžeme vysvětlit zejména nemožností odečítat z kompasu přesnější hodnoty, což bylo limitováno zejména samotnou škálou kompasu.

3.2. Magnetická odezva feromagnetického materiálu

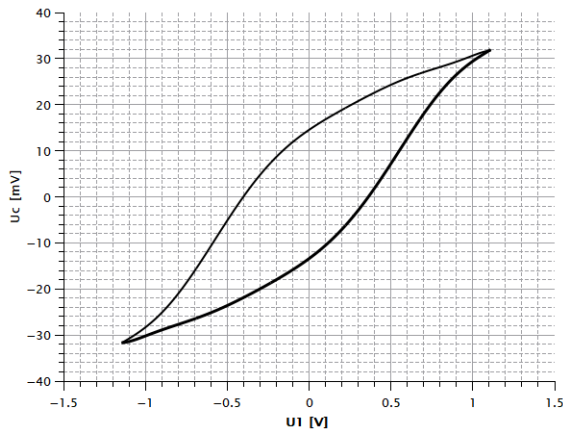
Změřené dimenze toroidu jsou:

$$\begin{aligned} h &= 7 \text{ mm} \\ r_{min} &= 9.9 \text{ mm} \\ r_{max} &= 14.85 \text{ mm} \\ r &= 12.378 \text{ mm} \\ S &= 34.65 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

Parametry komponent obvodu jsou:

$$\begin{aligned} R_1 &= 83 \Omega \\ R_2 &= 120 \text{ k}\Omega \\ N_1 &= 260 \\ N_2 &= 900 \\ C &= 1.0 \mu\text{F} \end{aligned}$$

Po zapojení dle obr. 3 získáváme následující hysterezní křivku a data:



Obrázek 4: Získaná hysterezní smyčka

$$U_{1S} = 1.127 \text{ V}$$

$$U_1 = 0.382 \text{ V}$$

$$U_{CR} = 0.014 \text{ V}$$

$$U_{CS} = 0.032 \text{ V}$$

Prostřednictvím vztahu (14) získáme hodnotu magnetické intenzity:

$$H_s = 45.39 \text{ A.m}^{-1}$$

$$H_c = 15.39 \text{ A.m}^{-1}$$

Vzorcem (21) zjistíme příslušné hodnoty magnetické indukce:

$$B_R = 53.87 \text{ mT}$$

$$B_S = 123.14 \text{ mT}$$

A pomocí vztahu (22) určíme hodnotu magnetizace:

$$M_R = 42.852 \text{ A/m}$$

$$M_S = 97.976 \text{ A/m}$$

4. Závěr

Podařilo se nám splnit veškeré zadané úkoly a získat hodnoty hledaných veličin, přičemž jsme původcem nemalých odchylek v první úloze označili nedostatečně přesnou měřicí aparaturu a v jejím důsledku i naši sníženou přesnost odečítání získaných hodnot.