De los problemas 1 al 16 encuentre la magnitud y dirección del vector dado.

1. $\mathbf{v} = (4, 4)$
2. $\mathbf{v} = (-4, 4)$
3. $\mathbf{v} = (\sqrt{3}, -2)$
4. $\mathbf{v} = (4, -4)$
5. $\mathbf{v} = (-4, -4)$
6. $\mathbf{v} = (-\sqrt{3}, -2)$
7. $\mathbf{v} = (\sqrt{3}, 1)$
8. $\mathbf{v} = (1, \sqrt{3})$
9. $\mathbf{v} = (-2, \sqrt{3})$
10. $\mathbf{v} = (-1, \sqrt{3})$
11. $\mathbf{v} = (1, -\sqrt{3})$
12. $\mathbf{v} = (3, 2)$
13. $\mathbf{v} = (-1, -\sqrt{3})$
14. $\mathbf{v} = (1, 2)$
15. $\mathbf{v} = (-5, 8)$
16. $\mathbf{v} = (11, -14)$
17. Sea $\mathbf{u} = (2, 3)$ y $\mathbf{v} = (-5, 4)$. Encuentre *a*) $3\mathbf{u}$; *b*) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$; *c*) $\mathbf{v} - \mathbf{u}$; *d*) $2\mathbf{u} - 7\mathbf{v}$. Bosqueje estos vectores.
18. Sea $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$. Encuentre: *a*) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$; *b*) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$; *c*) $\mathbf{v} - \mathbf{u}$; *d*) $-2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$; *e*) $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$; *f*) $\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$. Bosqueje estos vectores.
19. Sea $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$. Encuentre *a*) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$; *b*) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$; *c*) $3\mathbf{u}$; *d*) $-7\mathbf{v}$; *e*) $8\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$; *f*) $4\mathbf{v} - 6\mathbf{u}$. Bosqueje estos vectores.
20. Demuestre que el vector $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ es un vector unitario.
21. Muestre que los vectores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ son vectores unitarios.
22. Demuestre que el vector $\left(1/\sqrt{2}\right)\mathbf{i} + \left(1/\sqrt{2}\right)\mathbf{j}$ es un vector unitario.
23. Demuestre que si $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} \neq 0$, entonces $\mathbf{u} = \left(a/\sqrt{a^2+b^2}\right)\mathbf{i} + \left(b/\sqrt{a^2+b^2}\right)\mathbf{j}$ es un vector unitario que tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$.

De los problemas 24 al 29 encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector dado.

24. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
25. $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$
26. $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$
27. $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
28. $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$
29. $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + a\mathbf{j}$; $a \neq 0$
30. Si $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ demuestre que $a/\sqrt{a^2+b^2} = \cos\theta$ y $b/\sqrt{a^2+b^2} = \operatorname{sen}\theta$, donde $\theta$ es la dirección de $\mathbf{v}$.
31. Si $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ encuentre sen $\theta$ y cos $\theta$.
32. Si $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$ encuentre sen $\theta$ y cos $\theta$.

Un vector $\mathbf{v}$ tiene dirección opuesta a la del vector $\mathbf{u}$ si dirección de $\mathbf{v}$ = dirección de $\mathbf{u} + \pi$. De los problemas 33 al 38 encuentre un vector unitario $\mathbf{v}$ que tenga dirección opuesta a la dirección del vector dado $\mathbf{u}$.

33. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
34. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
35. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$
36. $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
37. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
38. $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$
39. Sea $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que: *a*) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$; *b*) $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$; *c*) $3\mathbf{u} + 8\mathbf{v}$.
40. Sea $P = (c, d)$ y $Q = (c + a, d + b)$. Muestre que la magnitud de $\overrightarrow{PQ}$ es $\sqrt{a^2+b^2}$.
41. Demuestre que la dirección de $\overrightarrow{PQ}$ en el problema 30 es la misma que la dirección del vector $(a, b)$. [*Sugerencia:* si $R = (a, b)$, demuestre que la recta que pasa por los puntos $P$ y $Q$ es paralela a la recta que pasa por los puntos 0 y $R$.]

**V.** Diga cuál de las siguientes afirmaciones es cierta sobre el sistema.

*a)* $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$ *b)* $\dfrac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$ *c)* $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}\dfrac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$ *d)* $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{u}|}\dfrac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$

De los problemas 1 al 10 calcule el producto escalar de los dos vectores y el coseno del ángulo entre ellos.

1. $\mathbf{u}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=\mathbf{i}-\mathbf{j}$
2. $\mathbf{u}=3\mathbf{i}$; $\mathbf{v}=-7\mathbf{j}$
3. $\mathbf{u}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=-\mathbf{i}+3\mathbf{j}$
4. $\mathbf{u}=-5\mathbf{i}$; $\mathbf{v}=18\mathbf{j}$
5. $\mathbf{u}=\alpha\mathbf{i}$; $\mathbf{v}=\beta\mathbf{j}$; $\alpha, \beta$ reales
6. $\mathbf{u}=-4\mathbf{i}-2\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=5\mathbf{i}+7\mathbf{j}$
7. $\mathbf{u}=2\mathbf{i}+5\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=5\mathbf{i}+2\mathbf{j}$
8. $\mathbf{u}=2\mathbf{i}+5\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=5\mathbf{i}-2\mathbf{j}$
9. $\mathbf{u}=-3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=-2\mathbf{i}-7\mathbf{j}$
10. $\mathbf{u}=4\mathbf{i}+5\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=5\mathbf{i}-4\mathbf{j}$
11. Demuestre que para cualesquiera números reales $\alpha$ y $\beta$, los vectores $\mathbf{u}=\alpha\mathbf{i}+\beta\mathbf{j}$ y $\mathbf{v}=\beta\mathbf{i}-\alpha\mathbf{j}$ son ortogonales.
12. Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ tres vectores arbitrarios. Explique por qué el producto $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ *no está definido.*

De los problemas 13 al 19 determine si los vectores dados son ortogonales, paralelos o ninguno de los dos. Después esboce cada par.

13. $\mathbf{u}=3\mathbf{i}+5\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=-6\mathbf{i}-10\mathbf{j}$
14. $\mathbf{u}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=6\mathbf{i}-4\mathbf{j}$
15. $\mathbf{u}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=-9\mathbf{i}+6\mathbf{j}$
16. $\mathbf{u}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=6\mathbf{i}+4\mathbf{j}$
17. $\mathbf{u}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=-6\mathbf{i}+4\mathbf{j}$
18. $\mathbf{u}=7\mathbf{i}$; $\mathbf{v}=-23\mathbf{j}$
19. $\mathbf{u}=2\mathbf{i}-4\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=-\mathbf{i}+3\mathbf{j}$
20. Sean $\mathbf{u}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$ y $\mathbf{v}=\mathbf{i}+\alpha\mathbf{j}$. Determine $\alpha$ tal que:
    *a)* $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales.
    *b)* $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos.
    *c)* El ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es $\pi/4$.
    *d)* El ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es $\pi/3$.
21. Sean $\mathbf{u}=-2\mathbf{i}+7\mathbf{j}$ y $\mathbf{v}=\alpha\mathbf{i}-2\mathbf{j}$. Determine $\alpha$ tal que:
    *a)* $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales.
    *b)* $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos.
    *c)* El ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es $2\pi/3$.
    *d)* El ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es $\pi/3$.
22. En el problema 20 demuestre que no existe un valor de $\alpha$ para el que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tienen direcciones opuestas.
23. En el problema 21 demuestre que no existe valor de $\alpha$ para el que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tienen la misma dirección.

En los problemas 24 al 37 calcule $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$.

24. $\mathbf{u}=3\mathbf{i}$; $\mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$
25. $\mathbf{u}=-5\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$
26. $\mathbf{u}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=-9\mathbf{i}+6\mathbf{j}$
27. $\mathbf{u}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}$
28. $\mathbf{u}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=4\mathbf{i}+\mathbf{j}$
29. $\mathbf{u}=-\mathbf{i}-2\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=5\mathbf{i}+7\mathbf{j}$
30. $\mathbf{u}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}$
31. $\mathbf{u}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$
32. $\mathbf{u}=4\mathbf{i}-\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=-2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$
33. $\mathbf{u}=\alpha\mathbf{i}+\beta\mathbf{j}$; $\mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$; $\alpha$ y $\beta$ reales positivos

En los problemas 1 al 26 encuentre el producto cruz $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

**1.** $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 3\mathbf{k}$

**2.** $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$

**3.** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -9\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

**4.** $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$; $\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

**5.** $\mathbf{u} = -7\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

**6.** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

**7.** $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 7\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$

**8.** $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$

**9.** $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = c\mathbf{i} + d\mathbf{k}$

**10.** $\mathbf{u} = a\mathbf{j} + b\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = c\mathbf{i} + d\mathbf{k}$

**11.** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

**12.** $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

**13.** $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - \mathbf{k}$

**14.** $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

**15.** $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

**16.** $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

**17.** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$

**18.** $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

**19.** $\mathbf{u} = 10\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

**20.** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

**21.** $\mathbf{u} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$

**22.** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

**23.** $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 8\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

**24.** $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + a\mathbf{j} + a\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = b\mathbf{i} + b\mathbf{j} + b\mathbf{k}$

**25.** $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} - c\mathbf{k}$

**26.** $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

**27.** Encuentre dos vectores unitarios ortogonales tanto a $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ como a $\mathbf{v} = 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

**28.** Encuentre dos vectores unitarios ortogonales tanto a $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ como a $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

**29.** Utilice el producto cruz para encontrar el seno del ángulo $\varphi$ entre los vectores $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

**30.** Utilice el producto escalar para calcular el coseno del ángulo $\varphi$ entre los vectores del problema 29. Después demuestre que para los valores calculados, $\text{sen}^2\,\varphi + \cos^2\varphi = 1$.

En los problemas 31 al 36 encuentre el área del paralelogramo con los vértices adyacentes dados.

**31.** $(1, -2, 3)$; $(2, 0, 1)$; $(0, 4, 0)$

**32.** $(-2, 1, 1)$; $(2, 2, 3)$; $(-1, -2, 4)$

**33.** $(-2, 1, 0)$; $(1, 4, 2)$; $(-3, 1, 5)$

**34.** $(7, -2, -3)$; $(-4, 1, 6)$; $(5, -2, 3)$

**35.** $(a, 0, 0)$; $(0, b, 0)$; $(0, 0, c)$

**36.** $(a, b, 0)$; $(a, 0, b)$; $(0, a, b)$

**37.** Demuestre que $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$. [*Sugerencia:* Escríbalo en términos de componentes.]

**38.** Utilice las propiedades 1, 4, 2 y 3 (en ese orden) en la sección 2.2 para probar las partes *i*), *ii*), *iii*) y *iv*) del teorema 2.

**39.** Pruebe el teorema 2 parte *v*) escribiendo las componentes de cada lado de la igualdad.

**40.** Pruebe el teorema 2 parte *vi*). [*Sugerencia:* Utilice las partes *ii*) y *v*) y el hecho de que el producto escalar es conmutativo para demostrar que $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = -\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.]

**41.** Pruebe el teorema 2 parte *vii*). [*Sugerencia:* Use el teorema 3.3.3, pág. 250, la propiedad 6, pág. 190 y la ecuación (2).]

**42.** Demuestre que si $\mathbf{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\mathbf{v} = (a_2, b_2, c_2)$ y $\mathbf{w} = (a_3, b_3, c_3)$, entonces

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$