سوال ۴- با فرض مثبت بودن توابع f و g، درستی یا نادرستی عبارت های زیر را بررسی کنید.

گزاره ۱: f(n) = O(f(n)^2)

- گزاره ۱:

$f(n) = O(f(n)^2)$

- می‌دانیم که $f(n) = O(g(n))$ یعنی: $\forall_{n \geq n_0}, \exists_{c>0}: f(n) \leq c \cdot g(n)$

به عبارتی، $f(n)$ به صورت مجانبی از $g(n)$ سریع‌تر رشد نمی‌کند.

- $f(n) = O(f(n)^2) \Rightarrow \forall_{n \geq n_0}, \exists_{c>0}: f(n) \leq c \cdot f(n)^2$

از آنجایی که f تابعی مثبت است، پس می‌توانیم طرفین را تقسیم بر $f(n)$ کنیم

$1 \leq c \cdot f(n)$ → با توجه به این عبارت ساده شده، اگر وقتی $n \to +\infty$ می‌رود، $f(n)$ به 0 میل کند، گزاره داده شده غلط می‌باشد.

(البته اگر علاوه بر مثبت بودن f، در صورت سوال گفته شده بود که f دارای یک کران پایین بزرگتر از 0 است، آنگاه گزاره درست می‌بود)

گزاره ۲: $f(n) + O(f(n)) = \theta(f(n))$

- گزاره 2: $f(n) + O(f(n)) = \theta(f(n))$

- می‌دانیم: $f(n) = \theta(g(n))$ یعنی: $c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n)$; $\forall n \ge n_0, \exists c_1, c_2 > 0$

یعنی $f(n)$ مانند $g(n)$ رشد می‌کند.

- با توجه به تعریف O، می‌توانیم $O(f(n))$ را به صورت $c f(n)$ نشان دهیم.

پس به عبارتی: $f(n) \le f(n) + O(f(n)) \le \underbrace{f(n) + c f(n)}_{(1+c) f(n)}$ (*)

- حال به گزاره داده شده برمی‌گردیم:

$$f(n) + O(f(n)) = \theta(g(n)) \rightarrow c_1 f(n) \le f(n) + O(f(n)) \le c_2 f(n)$$

(**)

- با مقایسه (*) و (**): $c_1 = 1, c_2 = 1+c$ پس عبارت داده شده صحیح است.

- به صورت شهودی نیز می‌توانستیم درستی عبارت داده شده را بررسی کنیم. به عبارتی با اضافه کردن تابعی از $O(f(n))$ به $f(n)$، حاصل تابعی می‌شود که رشدش مانند $f(n)$ است. که این همان معنای $\theta(f(n))$ می‌باشد.

گزاره ۳: $f(n) = O(g(n)) \rightarrow 2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$

- گزاره 3 : $f(n)=O(g(n)) \rightarrow 2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$

- گزاره به زبان ریاضی می‌گوید که:

فرض : $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow \forall_{n\geq n_0}\ \overbrace{0 \leq}^{\text{صورت سوال}} f(n) \leq c\,g(n)$

حکم : $2^{f(n)} = O(2^{g(n)}) \Rightarrow \forall_{n\geq n_0}, \exists_{k>0}\ 2^{f(n)} \leq k \times 2^{g(n)}$

- تلاش برای رسیدن از فرض به حکم:

$\overbrace{f(n)\leq c\,g(n)}^{\text{فرض}} \rightarrow 2^{f(n)} \leq 2^{c\,g(n)} \rightarrow 2^{f(n)} \leq (2^{g(n)})^c$

برای رسیدن به حکم باید $k.2^{g(n)}$ را با $(2^{g(n)})^c$ مقایسه کنیم. که مشخص است $(2^{g(n)})^c$ به صورت نمایی از $k.2^{g(n)}$ رشدش بیشتر است. پس گزاره ناصحیح است.

- اثبات نادرستی با مثال نقض: $f(n)=2n$, $g(n)=n$ ← فرض را برقرار می‌کند ولی حکم

$2^{2n} \leq k.2^n$ برقرار نمی‌باشد.

گزاره ۴: $f(n) = \theta(f(\frac{n}{2}))$

- گزاره ۴ : $f(n) = \theta(f(n/2))$

- برای بررسی این گزاره، باید رفتار و رشد $f(n)$ را با $f(n/2)$ مقایسه کنیم. این رفتار با توجه به نوع تابع $f(n)$ متفاوت است.

- اگر $f(n)$ چندجمله‌ای باشد:

$$f(n) = n^k \Rightarrow f(n/2) = (n/2)^k = \underbrace{\frac{1}{2^k}}\cdot n^k$$

که یعنی $f(n/2)$ یک نسبت ثابت از $f(n)$ است و گزاره $f(n)=\theta(f(\frac{n}{2}))$ صحیح است.

- اگر $f(n)$ نمایی باشد:

$$f(n) = 2^n \Rightarrow f(n/2) = 2^{n/2} = \underbrace{\sqrt{2^n}}$$

که یعنی $f(n/2)$ خیلی کندتر از $f(n)$ رشد می‌کند. ($f(\frac{n}{2}) = o(f(n))$) و گزاره صحیح نمی‌باشد.

- اگر $f(n)$ لگاریتمی باشد:

$$f(n) = \log n \Rightarrow f(n/2) = \log(n/2) = \underbrace{\log(n) - \log 2}$$

$f(n/2)$ خیلی به $f(n)$ نزدیک است، و فقط یک ضریب ثابت از آن فاصله دارد که یعنی عبارت صحیح می‌باشد.