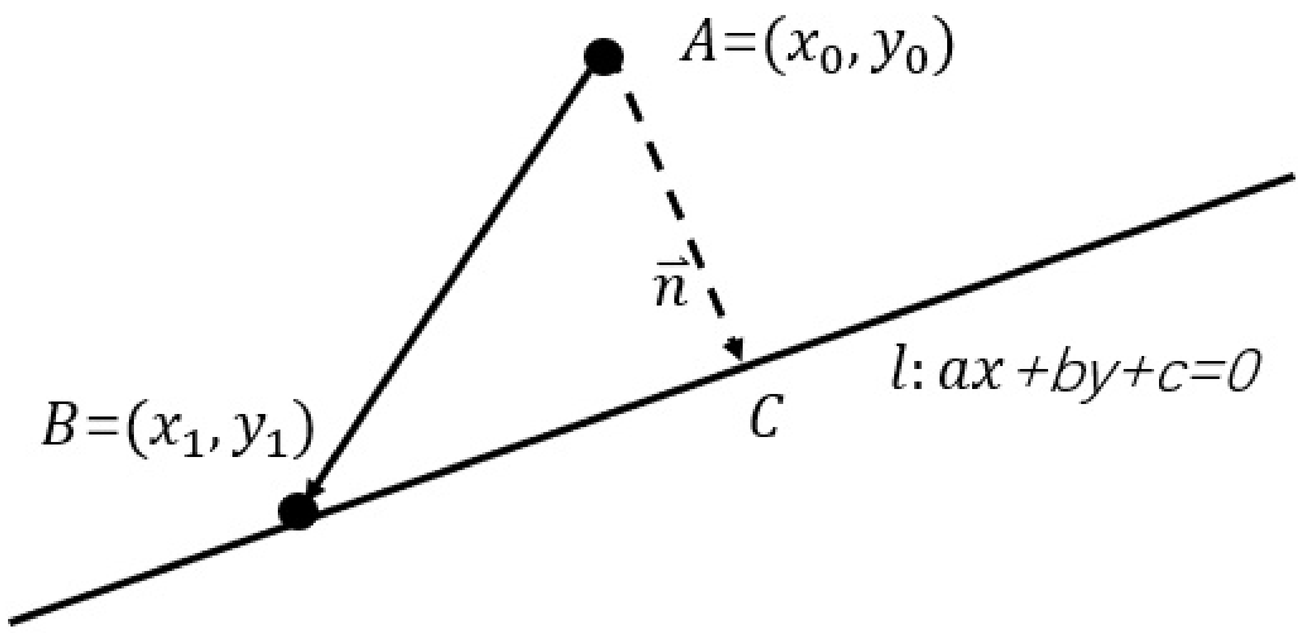


【“数”你好看】点到直线与面的距离公式

双木止月Tong
Stay hungry, Stay foolish.

关注他

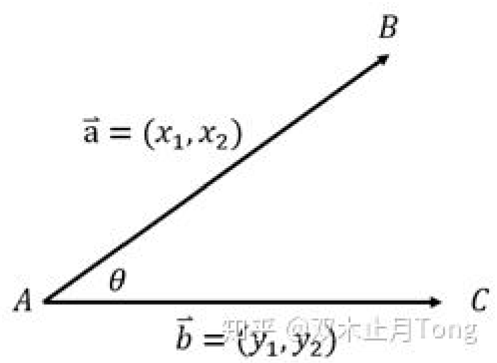
点到直线的距离公式是高中常见的解析几何公式，形式很优美，但很多人不清楚它的由来，本篇主要来推导一下这个公式，并推广到**点到面的距离公式。**

- **基础知识**

向量(vector):方向(direction)+大小(magnitude)

向量点积(dot product)：

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}=(x_1,x_2)$ ， $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}=(y_1,y_2)$.



图：向量AB，AC示意图

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{AC}|\times\cos<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}>=|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{AC}|\times\cos\theta$$

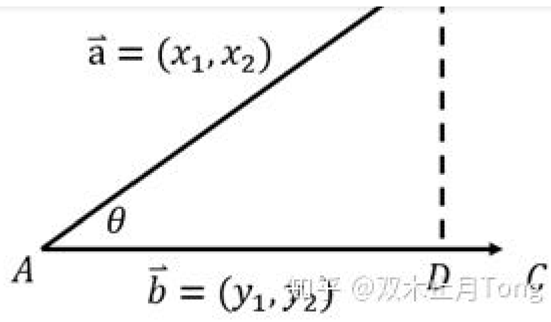
于是

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}$$

另

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{\mathrm{a}}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$ 。

向量 $\overrightarrow{AB}$ 在向量 $\overrightarrow{AC}$ 上的投影AD：



图：投影示意图

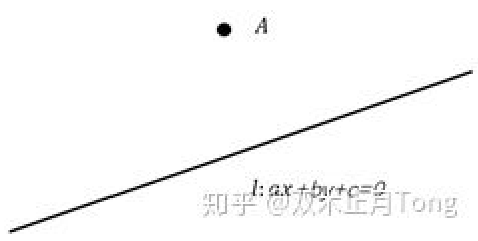
$$|\mathrm{AD}| = |\mathrm{AB}| \cdot \cos\theta = |\mathrm{AB}| \cdot \left| \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| \cdot |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|} \right| = \left| \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|} \right|$$

所以，向量 $\overrightarrow{AB}$ 在向量 $\overrightarrow{AC}$ 的投影长度，等于向量 $\overrightarrow{AB}$ 点乘向量 $\overrightarrow{AC}$ 的单位向量(要加绝对值)。

- **点到直线的距离公式**

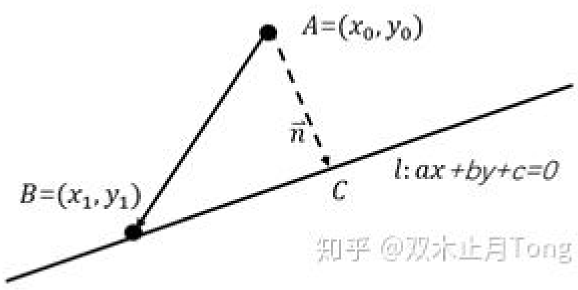
任意一条直线l:ax+by+c=0,点 $A(x_0, y_0)$,求点A到直线l的距离。

（Find the distance between a point A and a line l）



图：直线l与点A示意图

在直线l上任取一点 $B(x_1, y_1)$ ，则 $ax_1 + by_1 + c = 0$ ，如下图所示。



图：点B

点A到直线l的距离，等于AC的长度，也等于向量 $\overrightarrow{AB}$ 在向量 $\overrightarrow{AC}$ 上的投影，也就是在法向量(normal vector) 上的投影。

而直线的方向向量(direction vector)为 $(-b, a)$ ，法向量(normal vector)为 $\vec{n} = (a, b)$ ，则根据基础知识中的介绍，

$$|\mathrm{AC}| = \left| \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \frac{\vec{\mathrm{n}}}{|\vec{\mathrm{n}}|} \right| = \left| (x_1 - x_0, y_1 - y_0) \cdot \frac{(a, b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} |a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)|$$

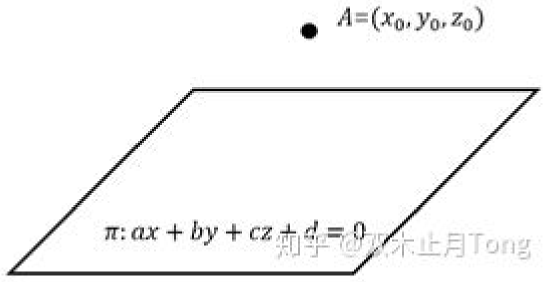
又因为， $ax_1 + \mathrm{b}y_1 = -c$ ，

所以点A到直线l的距离公式为：

$$|AC| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

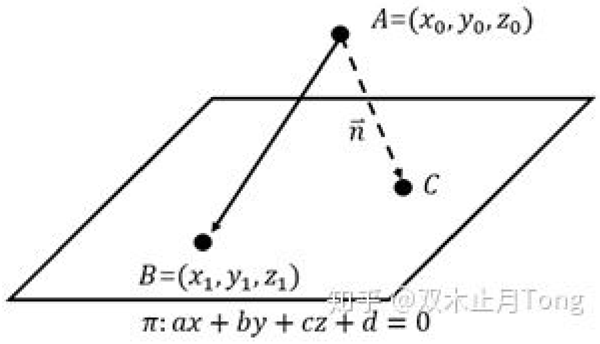
- **点到面的距离公式**

点A到平面 $\pi : ax + by + cz + d = 0$ 的距离。



图：点A与平面

与点到直线的距离做法类似，先在平面 π 上找一点 $B(x_1,y_1,z_1)$ ，$ax_1+by_1+cz_1+d=0$ 以及平面 π 的法向量 $\vec{n}$ 。其中，平面的法向量为 $\vec{n}=(a,b,c)$ 。



图：点B与法向量n

于是点A到平面 π 的距离就是向量 $\overrightarrow{AB}$ 在向量 $\overrightarrow{AC}$ 上的投影，也就是在法向量 (normal vector) 上的投影。

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{AC}| &= \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\vec{\mathrm{n}}}{|\vec{\mathrm{n}}|}\right| = \left|(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)\cdot\frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\left|a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)\right| \\
&= \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}
\end{aligned}
$$

- **推广：n维空间中点A到n维超平面的距离**

点 $\mathrm{A}(x_0,x_1,\cdots,x_n)$ ，超平面 $\pi: a_0y_0+a_1y_1+\cdots a_ny_n+d=0$ ，

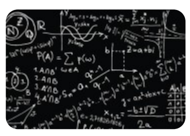
则点A到超平面 π 的距离为：

$$
|\mathrm{AC}| = \frac{|a_0x_0+a_1x_1+\cdots a_nx_n+d|}{\sqrt{a_0^2+a_1^2+\cdots a_n^2}}
$$

欢迎交流指正~~

如果想看更多有趣的数学知识，可参阅

双木止月Tong：国际数学竞赛及课程
zhuanlan.zhihu.com



微信订阅号：数你好看

编辑于 2019-04-23

数学 高中数学 数学科普

文章被以下专栏收录

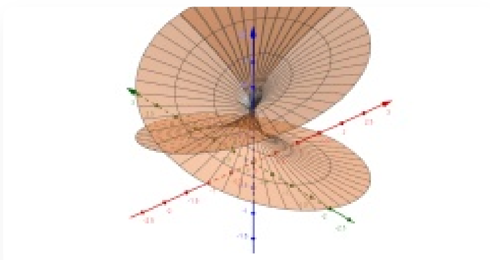
国际理科
传播数学知识，接轨国际教育。

关注专栏

推荐阅读

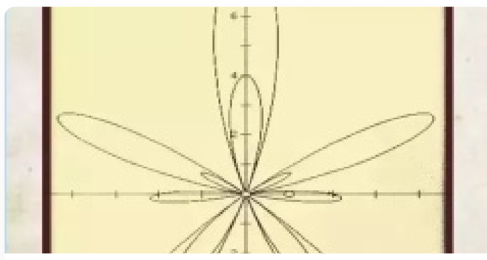
齐次化解决解析几何中斜率相关的问题

梁宇坤



复变随记（四） 黎曼曲面背景

陆艺



数学公式到底有多美？要是当年给我看这些...

遇见高中生 发表于高中那三年

还没有评论

写下你的评论...