UASC/CEEI/UFCG
FMCC2

Lista 2 - Indução e Recursividade[1]

1) Prove que $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2) Prove que $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$.
3) Prove que $1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n+1)^2 = (n+1)(2n+1)(2n+3)/3$
4) Prove que $3 + 3.5 + 3.5^2 + ... + 3.5^n = 3(5^{n+1} - 1)/4$ para n inteiro não-negativo.
5) Determine uma fórmula para a soma dos primeiros n inteiros positivos pares e prove por indução que a fórmula é válida.
6) Determine uma fórmula para a soma a seguir e prove por indução que ela é válida: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n}$.
7) Prove que $1^2 - 2^2 + 3^2 - ... + (-1)^{n-1}n^2 = \frac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2}$.
8) Prove que $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$.
9) Quais valores em reais podemos formar usando apenas notas de 2 e/ou de 5 reais? Prove sua resposta usando indução forte.
10) Mostre, usando indução forte, que se você pode correr 1 km ou 2 km e se você sempre pode correr 2 km a mais uma vez que já correu um número específico de km, então você pode correr qualquer quantidade de km.
11) Seja P(n) a afirmação a afirmação de que um selo postal pode ser formado usando apenas selos de 3 centavos e/ou selos de 5 centavos. Esta questão descreve uma prova por indução forte de que P(n) é verdadeiro para $n \geq 8$.
    a) Mostre que P(8), P(9) e P(10) são verdadeiros, completando o passo base.
    b) Qual é a hipótese indutiva?
    c) O que você precisa provar no passo indutivo?
    d) Complete o passo indutivo para $k \geq 10$.
    e) Explique por que esses passos mostram que essa afirmação é verdadeira sempre que $n \geq 8$.
12) Determine quais valores de selos postais podem ser formados usando apenas selos de 4 centavos e/ou selos de 11 centavos. Prove por indução forte sua resposta.
13) Determine se cada uma das definições propostas é uma definição recursiva válida da função f no conjunto dos inteiros não-negativos para o conjunto dos inteiros. Se f for bem definida determine uma fórmula fechada para f(n) quando n é um inteiro não-negativo e prove que sua fórmula é válida.
    a) f(0) = 0, f(n) = 2*f(n-2), para n >= 1
    b) f(0) = 1, f(n) = f(n-1)-1, para n >= 1

---

[1] Exercícios retirados do livro Matemática Discreta e suas Aplicações de Kenneth Rosen.

c) f(0) = 2, f(1) = 3, f(n) = f(n-1)-1, para n >= 2
d) f(0)=1, f(1)=2, f(n)=2*f(n-2) para n >=2

Algumas Respostas

9) Podemos formar qualquer valor diferente de $1 e de $3. Podemos formar os valores $2 e $4. Podemos formar qualquer valor maior ou igual a $5.

12) podem ser formados os valores: 4, 8, 11, 12, 15, 16, 19, 20, 22, 24, 26, 27, 28, 30 e todos os valores maiores que 30.

13.a) não é válida
13.b) f(n) = 1 -n
13.c) f(n) = 4 -n
13.d) $f(n) = 2^{\perp \frac{n+1}{2} \perp}$, $\perp x \perp$ representa a função piso de x