Funções Trigonométricas

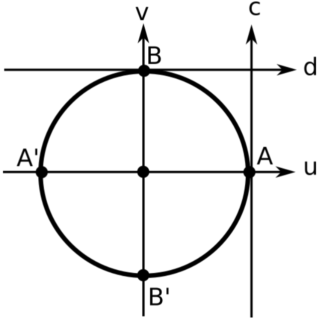
Prof. Eanes Torres Pereira

Funções Trigonométricas

Roteiro

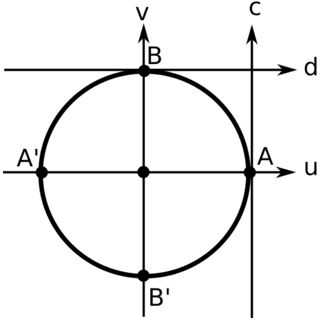
Razões Trigonométricas na Circunferência

- Consideremos um ciclo trigonométrico de origem A e de raio $\overline{OA}$, em que $OA = 1$.
- Para o estudo das razões trigonométricas na circunferência, vamos associar ao ciclo quatro eixos:
  1. eixo dos cossenos (u)
  2. eixo dos senos (v)
  3. eixo das tangentes (c)
  4. eixo das cotangentes (d)



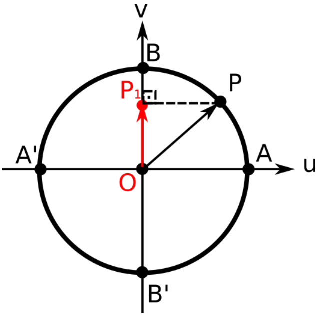
Razões Trigonométricas na Circunferência

- Os eixos u e v dividem a circunferência em quatro arcos: $\widehat{AB}$, $\widehat{BA'}$, $\widehat{A'B'}$ e $\widehat{B'A}$. Dado um número real x, usamos a seguinte linguagem para efeito de localizar a imagem P de x no ciclo:
  1. x está no quadrante 1 $\iff P \in \widehat{AB}$
  2. x está no quadrante 2 $\iff P \in \widehat{BA'}$
  3. x está no quadrante 3 $\iff P \in \widehat{A'B'}$
  4. x está no quadrante 4 $\iff P \in \widehat{B'A}$



Seno

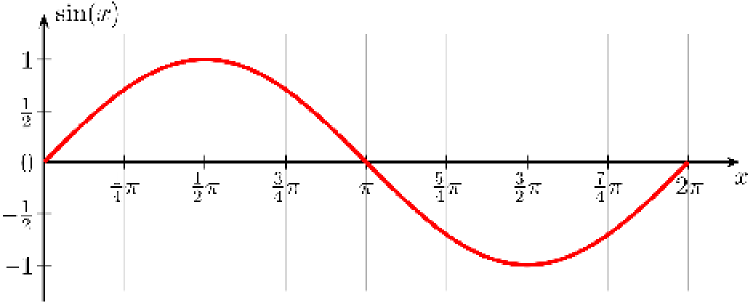
- Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$ e seja P sua imagem no ciclo. Denominamos *seno de x* (e indicamos *sen x*) a ordenada OP_1 do ponto P em relação ao sistema uOv.



Seno - Propriedades

- Se x é do primeiro ou do segundo quadrante, então $sen\ x$ é positivo.
- Se x é do terceiro ou quarto quadrante, então $sen\ x$ é negativo.
- Se x percorre o primeiro ou o quarto quadrante, então $sen\ x$ é crescente.
- Se x percorre o segundo ou o terceiro quadrante, então $sen\ x$ é decrescente.
- A função seno é periódica e seu período é 2π. Para todo x real: $sen\ x = sen(x + k \cdot 2\pi)$

Função Seno - Gráfico



Fonte: By Geek3 - Own work, CC BY 3.0, `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=9531683`

Seno - Exercícios

Calcule as expressões:

1. $sen\ \frac{\pi}{3} + sen\ \frac{\pi}{4} - sen\ 2\pi$
2. $2.sen\ \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}.sen\ \frac{7\pi}{4}$
3. $3.sen\ \frac{\pi}{2} - 2.sen\ \frac{5\pi}{4} + \frac{1}{2}.sen\ \pi$
4. $-\frac{2}{3}.sen\ \frac{3\pi}{2} + \frac{3}{5}.sen\ \frac{5\pi}{3} - \frac{6}{7}.sen\ \frac{7\pi}{6}$

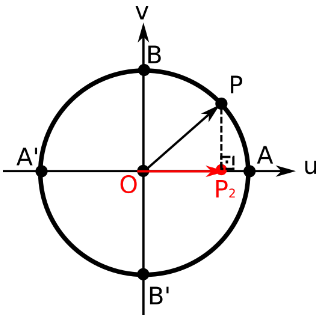
- 1: $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$; 2: $\frac{4-\sqrt{2}}{4}$; 3: $3+\sqrt{2}$; 4: $\frac{230-63\sqrt{3}}{210}$

Esboce o gráfico das funções:

1. $f : R \longrightarrow R$ dada por $f(x) = -sen(x)$
2. $f : R \longrightarrow R$ dada por $f(x) = 2.sen(x)$
3. $f : R \longrightarrow R$ dada por $f(x) = sen(\frac{x}{2})$

Cosseno

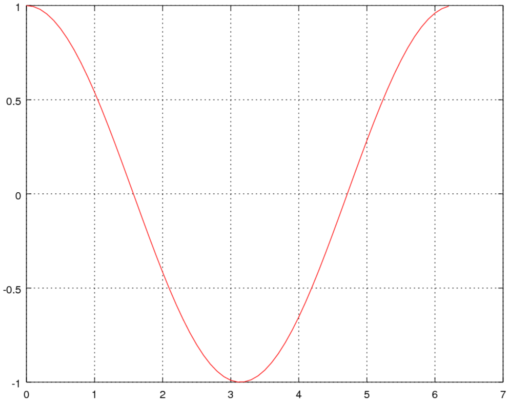
- Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, seja P sua imagem no ciclo. Denominamos *cosseno de x* (indicamos *cos x*) a abscissa OP_2 do ponto P em relação ao sistema uOv.



Cosseno - Propriedades

- Se x é do primeiro ou do quarto quadrante, então $cos\ x$ é positivo.
- Se x é do segundo ou do terceiro quadrante, então $cos\ x$ é negativo.
- Se x percorre o primeiro ou o segundo quadrante, então $cos\ x$ é decrescente.
- Se x percorre o terceiro ou o quarto quadrante, então $cos\ x$ é crescente.

Função Cosseno - Gráfico



Cosseno - Exercícios

Calcule as expressões:

1. $cos\ \frac{\pi}{3} + cos\ \frac{\pi}{4} - cos\ 2\pi$
2. $2\ cos\ \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}.cos\ \frac{7\pi}{4}$
3. $3.cos\ \frac{\pi}{2} - 2.cos\frac{5\pi}{4} + \frac{1}{2}.cos\ \pi$
4. $-\frac{2}{3}\ cos\frac{3\pi}{2} + \frac{3}{5}\ cos\ \frac{5\pi}{3} - \frac{6}{7}.cos\frac{7\pi}{6}$

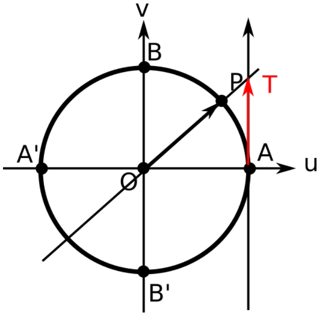
- Respostas: 1: $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$; 2: $\frac{4\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$; 3: $\frac{2\sqrt{2}-1}{2}$; 4: $\frac{21+30\sqrt{3}}{70}$

Determine o período e a imagem e esboce o gráfico das funções:

1. $f : R \longrightarrow R$ dada por $f(x) = -cos(x)$
2. $f : R \longrightarrow R$ dada por $f(x) = 2.cos(x)$
3. $f : R \longrightarrow R$ dada por $f(x) = cos(2x)$

Tangente

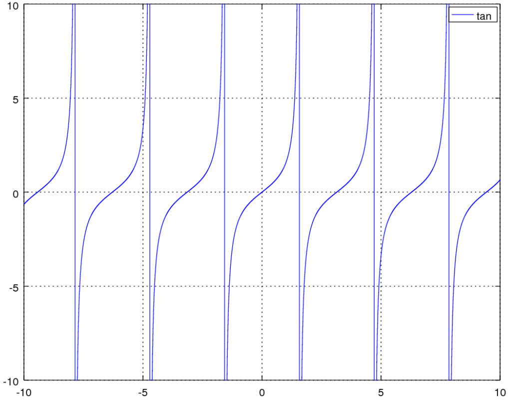
- Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, $x \neq \frac{\pi}{2}$ e $x \neq \frac{3\pi}{2}$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja T sua interseção com o eixo das tangentes. Denominamos *tangente de x* (e indicamos *tg x*) a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$



Tangente - Propriedades

1. Se x é do primeiro ou do terceiro quadrante, então $tg\ x$ é positiva.
2. Se x é do segundo ou do quarto quadrante, então $tg\ x$ é negativa.
3. Se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então $tg\ x$ é crescente.

Função Tangente - Gráfico



Tangente - Exemplo

- Qual é o domínio da função real f tal que $f(x) = tg(2x)$?

  Solução. Façamos $2x = t$. Sabemos que existe $tg(t)$ se, e somente se, $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in Z)$, então:

  $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \longrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \ (k \in Z)$ e

  $D(f) = \{x \in R | x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in Z\}$

Tangente - Exercícios

Calcule as expressões:

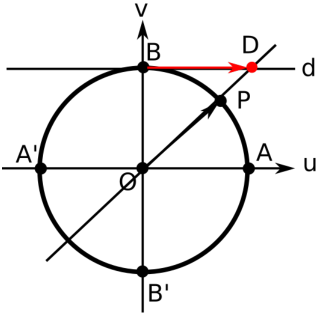
1. $tg\ \frac{\pi}{3} + tg\ \frac{\pi}{4} - tg\ 2\pi$
2. $2.tg\ \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}.tg\ \frac{7\pi}{4}$
3. $-2.tg\ \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}tg\ \pi - \frac{1}{3}.tg\ \frac{5\pi}{6}$
4. $\frac{3}{5}.tg\ \frac{5\pi}{3} - \frac{6}{7}.tg\ \frac{7\pi}{6} - \frac{2}{3}.cos\ \frac{3\pi}{2}$

- Respostas: 1:$\sqrt{3}+1$; 2: $\frac{4\sqrt{3}-3}{6}$;3: $\frac{-5\sqrt{3}}{9}$; 4: $\frac{-31\sqrt{3}}{35}$

Esboçar o gráfico, dar o domínio e o período da função real $f(x) = tg(x - \frac{\pi}{4})$. **Resp.:** Domínio: $D(f) = \{x \in R | x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in Z\}$. Período: π

Cotangente

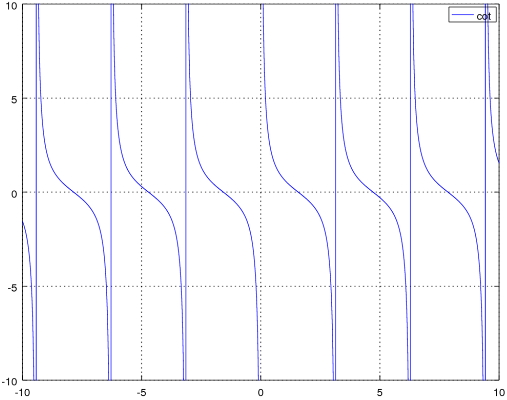
- Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, $x \neq \{0, \pi, 2\pi\}$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja D sua interseção com o eixo das cotangentes. Denominamos *cotangente de* x (e indicamos *cotg* x) a medida algébrica do segmento $\overline{BD}$.



Cotangente - Propriedades

1. Se x é do primeiro ou do terceiro quadrante, então $cotg\ x$ é positiva.
2. Se x é do segundo ou do quarto quadrante, então $cotg\ x$ é negativa.
3. Se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então $cotg\ x$ é decrescente.

Função Cotangente - Gráfico



Cotangente - Exercícios

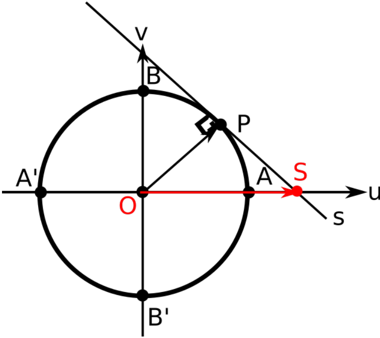
Calcule as expressões:

1. $cotg\ \frac{\pi}{3} + cotg\ \frac{\pi}{4} + cotg\ \frac{\pi}{6}$
2. $2.cotg\ \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}.cotg\ \frac{5\pi}{6}$
3. $sen\ \frac{\pi}{3} + cos\ \frac{\pi}{4} - tg\ \frac{2\pi}{3} + cotg\ \frac{7\pi}{6}$
4. $\frac{3}{5}.cotg\ \frac{5\pi}{3} - \frac{6}{7}.cotg\ \frac{7\pi}{6} - \frac{2}{3}.sen\ \frac{3\pi}{2} + \frac{4}{5}.cos\ \frac{5\pi}{4}$

- Respostas: 1) $\frac{4\sqrt{3}+3}{3}$; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$; 3) $\frac{\sqrt{2}+5\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{70-42\sqrt{2}-111\sqrt{3}}{105}$

Secante

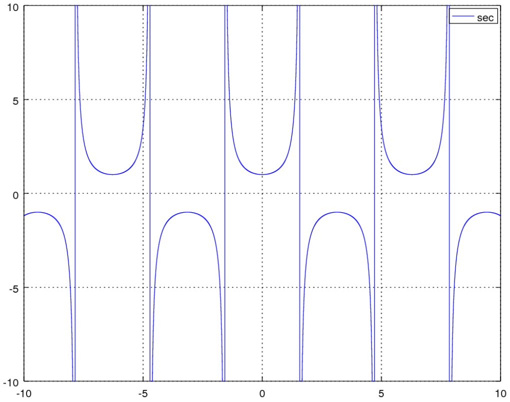
- Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, $x \neq \{\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}\}$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta s tangente ao ciclo em P e seja S sua interseção com o eixo dos cossenos. Denominamos *secante de* x (e indicamos *sec* x) a abscissa OS do ponto S.



Secante - Propriedades

1. Se x é do quadrante 1 ou do quadrante 4, então $sec\ x$ é positiva.
2. Se x é do quadrante 2 ou do quadrante 3, então $sec\ x$ é negativa.
3. Se x percorre o quadrante 1 ou o quadrante 2, então $sec\ x$ é crescente.
4. Se x percorre o quadrante 3 ou o quadrante 4, então $sec\ x$ é decrescente.

Função Secante - Gráfico

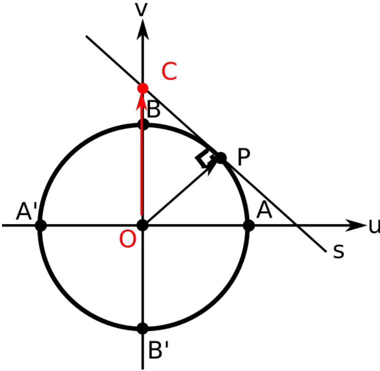


Secante - Exercícios

- Quais são os valores da secante de $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$, sabendo que $sec\ \frac{\pi}{3} = 2$?
- Respostas: 2, -2, 2.

Cossecante

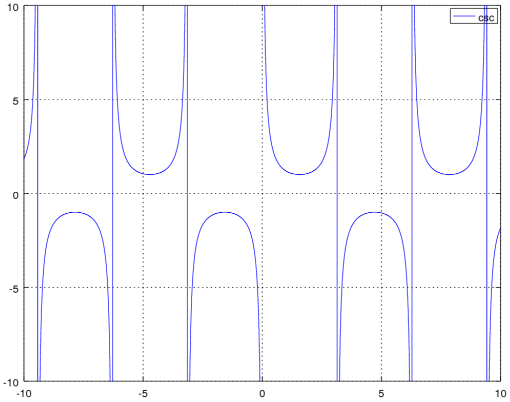
- Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, $x \neq 0, \pi, 2\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta s tangente ao ciclo em P e seja C sua interseção com o eixo dos senos. Denominamos *cossecante de* x (e indicamos *cossec* x) a ordenada OC do ponto C.



Cossecante - Propriedades

1. Se x é do quadrante 1 ou do quadrante 2, então cossec x é positiva.
2. Se x é do quadrante 3 ou do quadrante 4, então cossec x é negativa.
3. Se x percorre o quadratne 2 ou o quadrante 3, então cossec x é crescente.
4. Se x percorre o quadrante 1 ou o quadrante 4, então cossec x é decrescente.

Função Cossecante - Gráfico



Cossecante - Exercícios

1. Qual é o valor de $(cossec\ \frac{\pi}{6} + sen\ \frac{\pi}{6})(sen\ \frac{\pi}{4} - sec\ \frac{\pi}{3})$?

Determinar o domínio e o período das funções reais:

1. $f(x) = cotg(x - \frac{\pi}{3})$
2. $g(x) = sec(2x)$
3. $h(x) = cossec(x + \frac{\pi}{4})$

Roteiro

Relações Fundamentais

1. $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$
2. $cotg(x) = \frac{1}{tg(x)}$
3. $tg^2(x) + 1 = sec^2(x)$
4. $1 + cotg^2(x) = cossec^2(x)$
5. $cos^2(x) = \frac{1}{1+tg^2(x)}$
6. $sen^2(x) = \frac{tg^2(x)}{1+tg^2(x)}$

Relações Fundamentais - Exercícios

1. Sabendo que $sec(x) = 3$, calcular o valor da expressão $y = sen^2(x) + 2.tg^2(x)$
2. Sabendo que $cotg(x) = \frac{24}{7}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcular o valor da expressão: $y = \frac{tg(x).cos(x)}{(1+cos(x))(1-cos(x))}$
3. Calcular $sen(x)$ e $cos(x)$ sabendo que $3.cos(x) + sen(x) = -1$

Respostas

1. $\frac{152}{9}$
2. $-\frac{25}{7}$
3. Duas soluções: $cos(x) = 0$ e $sen(x) = -1$ ou $cos(x) = -\frac{3}{5}$ e $sen(x) = \frac{4}{5}$

Relações Fundamentais - Exercícios

Demonstrar as seguintes identidades:

1. $cos^4(x) + sen^4(x) + 2.(sen(x).cos(x))^2 = 1$
2. $\frac{sen(x)}{cossec(x)} + \frac{cos(x)}{sec(x)} = 1$
3. $tg(x) + cotg(x) = sec(x).cossec(x)$
4. $(tg(x) + cotg(x))(sec(x) - cos(x))(cossec(x) - sen(x)) = 1$
5. $(sec^2(x) + cossec^2(x)) = sec^2(x).cossec^2(x)$

Roteiro

Fórmulas de Adição

- $cos(a+b) = cos(a).cos(b) - sen(a).sen(b)$
- $cos(a-b) = cos(a).cos(b) + sen(a).sen(b)$
- $sen(a+b) = sen(a).cos(b) + sen(b).cos(a)$
- $sen(a-b) = sen(a).cos(b) - sen(b).cos(a)$
- $tg(a+b) = \frac{tg(a)+tg(b)}{1-tg(a).tg(b)}$
- $tg(a-b) = \frac{tg(a)-tg(b)}{1+tg(a).tg(b)}$
- $cotg(a+b) = \frac{cotg(a).cotg(b)-1}{cotg(a)+cotg(b)}$
- $cotg(a-b) = \frac{cotg(a).cotg(b)-1}{cotg(b)-cotg(a)}$

Fórmulas de Adição - Exemplos

Calcular os valores de:

1. $cos(15^\circ)$
2. $sen(105^\circ)$
3. $tg(75^\circ)$
4. $sec(285^\circ)$

Soluções:

1. $cos(15^\circ) = cos(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
2. $sen(105^\circ) = sen(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
3. $tg(75^\circ) = tg(45^\circ + 30^\circ) = 2 + \sqrt{3}$
4. $sec(285^\circ) = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

Fórmulas de Adição - Exercícios

1. Dados $sen(x) = \frac{3}{5}$ e $cos(y) = \frac{5}{13}$, calcular o $cos(x + y)$, sabendo que $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2} < y < 2\pi$.
2. Sabendo que $tg(a) = \frac{2}{3}$ e $sen(b) = \frac{4}{5}$ com $\frac{\pi}{2} < b < \pi$, calcular $tg(a + b)$.
3. Demonstrar a identidade:
   $sen(a + b).sen(a - b) = cos^2 b - cos^2 a$
4. Demonstrar a identidade:
   $cos^2(a + b) = cos^2(b) - 2.cos(a + b).cos(a).cos(b) = sen^2(a)$

Respostas:

1. $cos(x + y) = \frac{56}{65}$
2. $-\frac{6}{17}$

Fórmulas de Multiplicação

- $cos(2a) = cos^2(a) - sen^2(a)$
- $cos(2a) = 2.cos^2(a) - 1$
- $cos(2a) = 1 - 2.sen^2(a)$
- $sen(2a) = 2.sen(a).cos(a)$
- $tg(2a) = \frac{2.tg(a)}{1-tg^2(a)}$
- $cos(3a) = 4.cos^3(a) - 3.cos(a)$
- $sen(3a) = 3.sen(a) - 4.sen^3(a)$
- $tg(3a) = \frac{3.tg(a)-tg^3(a)}{1-3.tg^2(a)}$

Fórmulas de Multiplicação - Exemplos

1. Sendo $tg(x) = \frac{3}{4}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcular $sen(2x)$.
2. Sendo $cotg(x) = \frac{12}{5}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcular $cos(2x)$.
3. Sendo $sec(x) = \frac{25}{24}$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, calcular $tg(2x)$

Soluções:

1. $sen(x) = -\sqrt{\frac{tg^2(x)}{1+tg^2(x)}} = -\frac{3}{5}$, $cos(x) = -\sqrt{\frac{1}{1+tg^2(x)}} = -\frac{4}{5}$, $sen(2x) = \frac{24}{25}$
2. $cossec(x) = \sqrt{1 + cotg^2(x)} = \frac{13}{5} \longrightarrow sen(x) = \frac{5}{13}$
3. $tg(x) = -\sqrt{sec^2(x) - 1} = -\frac{7}{24}$, $tg(2x) = \frac{2.tg(x)}{1-tg^2(x)} = -\frac{336}{527}$

Fórmulas de Multiplicação - Exercícios

Provar que:

1. $sen(4a) = 4.sen(a).cos^3(a) - 4.sen^3(a).cos(a)$
2. $cos(4a) = 8.cos^4(a) - 8.cos^2(a) + 1$
3. $tg(4a) = \frac{4.tg(a) - 4.tg^3(a)}{tg^4(a) - 6.tg^2(a) + 1}$

Fórmulas de Divisão

- $cos(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+cos(x)}{2}}$
- $sen(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-cos(x)}{2}}$
- $tg(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-cos(x)}{1+cos(x)}}$

Fórmulas de Divisão - Exemplos

- Calcular as funções circulares de $\frac{\pi}{8}$.

Solução.

- $sen(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{\frac{1-cos(\frac{\pi}{4})}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
- $cos(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{\frac{1+cos(\frac{\pi}{4})}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
- $tg(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{\frac{1-cos(\frac{\pi}{4})}{1+cos(\frac{\pi}{4})}} = \sqrt{2} - 1$

Fórmulas de Divisão - Exemplos

1. Se $sen(x) = \frac{24}{25}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcular as funções circulares de $\frac{x}{2}$ (sen, cos, tg).

2. Se $tg(x) = \frac{5}{12}$, calcular $sen(\frac{x}{2})$.

Respostas:

1. $cos(x) = -\frac{7}{25}$, $sen(\frac{x}{2}) = \frac{4}{5}$, $cos(\frac{x}{2}) = \frac{3}{5}$, $tg(\frac{x}{2}) = \frac{4}{3}$, observemos que $\frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$
2. $cos(x) = \pm\frac{12}{13}$, $sen(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{13\pm 12}{26}}$. Há quatro possibilidades para $sen(\frac{x}{2})$: $\frac{1}{\sqrt{26}}$, $-\frac{1}{\sqrt{26}}$, $\frac{5}{\sqrt{26}}$ ou $-\frac{5}{\sqrt{26}}$.

Roteiro

Função Arco-Seno

$$y = arcsen(x) \iff sen(y) = x \text{ e } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

Exemplo. Determinar α tal que $\alpha = arcsen(\frac{1}{2})$
Solução. $\alpha = arcsen(\frac{1}{2}) \iff sen(\alpha) = \frac{1}{2}$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ isto é, $arcsen(\frac{1}{2})$ não é qualquer α tal que $sen(\alpha) = \frac{1}{2}$ mas aquele α (único) que está no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, isto é, $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Função Arco-Seno - Exercícios

1. Calcular $cos(arcsen(\frac{1}{3}))$.

2. Calcular $cos(arcsen(\frac{3}{5}) + arcsen(\frac{5}{13}))$

3. Determine α tal que $\alpha = arcsen(1/2)$.

Respostas:

1. $cos(\alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

2. $cos(\alpha + \beta) = \frac{33}{65}$

3. $\alpha = \frac{\pi}{6}$

Função Arco-Cosseno

$$y = arccos(x) \iff cos(y) = x \text{ e } 0 \leq y \leq \pi$$

Exemplo. Determinar α tal que $\alpha = arccos(\sqrt{\frac{3}{2}})$.

Solução. Temos: $\alpha = arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}) \longrightarrow cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $0 \leq \alpha \leq \pi$.
então $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Função Arco-Cosseno - Exercícios

1. Calcular $tg(arccos(\frac{2}{5}))$.

2. Calcular $sen(arccos(\frac{5}{13}) + arcsen(\frac{7}{25}))$.

3. Determine α tal que $\alpha = arccos(\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Respostas:

1. $tg(\alpha) = \frac{\sqrt{21}}{2}$

2. $sen(\alpha + \beta) = \frac{323}{325}$

3. $\alpha = \frac{\pi}{6}$

Função Arco-Tangente

$$y = arctg(x) \iff tg(y) = x \text{ e } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

Exemplo. Determinar α tal que $\alpha = arctg(1)$.
Solução. Temos: $\alpha = arctg(1) \iff tg(\alpha) = 1$ e $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$,
isto é, $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Função Arco-Tangente - Exercícios

1. Calcular $sen(arctg(\sqrt{2}))$.
   2
2. Calcular $tg(arcsen(\frac{3}{5}) - arctg(\frac{5}{12}))$.
3. Provar que $2.arctg(\frac{1}{3}) + arctg(\frac{1}{7}) = \frac{\pi}{4}$.
4. Determine α tal que $\alpha = arctg(1)$.

Respostas.

1. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.
2. $\frac{16}{63}$
3. $\alpha = \frac{\pi}{4}$

Referência

Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 3, Trigonometria.
Gelson Iezzi. Atual Editora.