Indução e Recursividade

Prof. Eanes Torres Pereira

Matemática Discreta

Roteiro

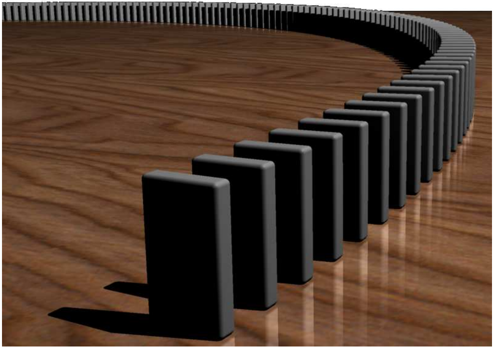
1. Indução Matemática
2. Indução Fraca
3. Indução Forte
4. Recursividade
5. Relações de Recorrência
6. Algoritmos Recursivos

Indução Matemática

- É usada para mostrar que uma dada afirmação é verdadeira para todos os inteiros positivos.
- Por exemplo, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$:
  - $n! \leq n^n$,
  - $n^3 - n$ é divisível por 3,
  - a soma dos primeiros n inteiros positivos é $n(n+1)/2$.

Intuição

Dada uma fileira infinita de dominós, podemos afirmar que todos os dominós irão cair após um dominó arbitrário cair?



Roteiro

1. Indução Matemática
2. Indução Fraca
3. Indução Forte
4. Recursividade
5. Relações de Recorrência
6. Algoritmos Recursivos

Primeiro Princípio de Indução

Primeiro Princípio de Indução

Para provar que $P(n)$ é verdade para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, precisamos provar o seguinte:

1. $P(1)$ (**passo básico ou base da indução**)
2. $(\forall k \in \mathbb{Z}^+)\,(P(k) \to P(k+1))$ (**passo indutivo**)

Demonstração usando o primeiro princípio da indução

Passo 1	Prove a base da indução
Passo 2	Suponha $P(k)$
Passo 3	Prove $P(k+1)$ (passo de indução)

Exemplo 1

Mostre que a equação $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Exemplo 1

Mostre que a equação $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Para $n = 1$, $1 = 1^2$ é verdadeiro.

Exemplo 1

Mostre que a equação $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Para $n = 1$, $1 = 1^2$ é verdadeiro. Agora supomos $P(k)$ verdadeiro

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2 \tag{1}$$

Exemplo 1

Mostre que a equação $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Para $n = 1$, $1 = 1^2$ é verdadeiro. Agora supomos $P(k)$ verdadeiro

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2 \tag{1}$$

Usando a hipótese de indução, queremos mostrar $P(k + 1)$, ou seja

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + [(2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2 \tag{2}$$

Exemplo 1

Mostre que a equação $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Para $n = 1$, $1 = 1^2$ é verdadeiro. Agora supomos $P(k)$ verdadeiro

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2 \tag{1}$$

Usando a hipótese de indução, queremos mostrar $P(k + 1)$, ou seja

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + [(2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2 \tag{2}$$

Mostrando-se a penúltima parcela, procedemos como segue:

$$\begin{aligned}
& 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + [(2(k + 1) - 1] \\
= & k^2 + [2(k + 1) - 1] \\
= & k^2 + 2k + 1 \\
= & (k + 1)^2
\end{aligned}$$

Exemplo 2

Mostre que o número de linhas em uma tabela verdade, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ proposições, é dado por 2^n.

Exemplo 2

Mostre que o número de linhas em uma tabela verdade, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ proposições, é dado por 2^n.

$P(1) = 2^1 = 2$ é verdade, pois uma proposição tem dois valores possíveis.

Agora supomos que $P(k) = 2^k$ e tentamos mostrar que

$$P(k+1) = 2^{k+1}$$

Como $P(k+1) = 2P(k)$, chegamos a

$$P(k+1) = 2(2^k) = 2^{k+1}$$

Exemplo 3

Mostre que para qualquer $n \in \mathbb{Z}^+$, se $1 + x > 0$, então

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Exemplo 3

Mostre que para qualquer $n \in \mathbb{Z}^+$, se $1 + x > 0$, então

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Base: Para $n = 1$ temos $1 + x = 1 + x$.

Hipótese Indutiva: $(1 + x)^k \geq 1 + kx$

Mostrar: $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x$

Exemplo 3

Mostre que para qualquer $n \in \mathbb{Z}^+$, se $1 + x > 0$, então

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Base: Para $n = 1$ temos $1 + x = 1 + x$.

Hipótese Indutiva: $(1+x)^k \geq 1 + kx$

Mostrar: $(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x$

$$\begin{aligned}
&(1+x)^{k+1} \\
=&(1+x)(1+x)^k \\
\geq&(1+x)(1+kx) \text{ (pela hip. indutiva)} \\
=&1 + (k+1)x + kx^2 \\
\geq&1 + (k+1)x \text{ (pois } kx^2 \geq 0)
\end{aligned}$$

Exemplo 4

Mostre por indução matemática que:

$$\sum_{j=0}^{n} aq^j = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n = \frac{aq^{n+1} - a}{q - 1}$$

onde $q \neq 1$ e $n \in \mathbb{N}$.

Base: Para $n = 0$ temos

$$\frac{aq^{0+1} - a}{q - 1} = \frac{aq - a}{q - 1} = \frac{a(q - 1)}{q - 1} = a$$

.

Hipótese Indutiva: $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^k = \dfrac{aq^{k+1} - a}{q - 1}$

Exemplo 4 cont.

Mostrar: $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^k + aq^{k+1} = \dfrac{aq^{k+2} - a}{q - 1}$

Exemplo 4 cont.

Mostrar: $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^k + aq^{k+1} = \dfrac{aq^{k+2} - a}{q - 1}$

$$
\begin{aligned}
& a + aq + aq^2 + \ldots + aq^k + aq^{k+1} \\
=& \frac{aq^{k+1} - a}{q - 1} + aq^{k+1} \text{ (pela hip. indutiva)} \\
=& \frac{aq^{k+1} - a}{q - 1} + \frac{aq^{k+2} - aq^{k+1}}{q - 1} \\
=& \frac{aq^{k+2} - a}{q - 1}
\end{aligned}
$$

Exemplo 5

Mostre que, para qualquer inteiro positivo n, $2^{2n} - 1$ é divisível por 3.

Exemplo 5

Mostre que, para qualquer inteiro positivo n, $2^{2n} - 1$ é divisível por 3.

- **Base:** $P(1)$ é verdade, pois $2^{2(1)} - 1 = 3$ é divisível por 3.
- **Hip. Indutiva:** Assumimos que

$$P(k) = 2^{2k} - 1 = 3m \Rightarrow 2^{2k} = 3m + 1$$

para algum inteiro positivo m.

- **Mostrar:** $2^{2(k+1)} - 1$ é divisível por 3.

$$\begin{aligned} 2^{2(k+1)} - 1 =& 2^{2k+2} - 1 \\ =& 2^2 \cdot 2^{2k} - 1 \\ =& 2^2(3m + 1) - 1 \text{ (pela hipótese de indução)} \\ =& 12m + 3 \\ =& 3(4m + 1) \end{aligned}$$

Exercícios

Exercício 1: Mostre que, para todo inteiro positivo n,

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercício 2: Mostre que, para todo inteiro não negativo n,

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

Exercício 3: Mostre que, para qualquer inteiro positivo n,

$$1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercício 4: Mostre que uma árvore binária completa de k níveis possui $2^k - 1$ vértices.

Roteiro

Segundo Princípio de Indução Matemática

Segundo Princípio de Indução

Para provar que $\forall n\, P(n)$ é verdade, precisamos provar duas sentenças:

1. $P(1)$ (**passo básico ou base da indução**)
2. $(\forall k \in \mathbb{Z}^+)\,(P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(k) \rightarrow P(k+1))$ (**passo indutivo**)

Exemplo 6

Prove que, para todo $n \geq 2$, n é um número primo ou pode ser decomposto em um produto de números primos, sendo essa decomposição única.

Exemplo 6

Prove que, para todo $n \geq 2$, n é um número primo ou pode ser decomposto em um produto de números primos, sendo essa decomposição única.

Base: Como 2 é primo, então o caso base é verificado.

Hipótese Indutiva: Assumimos que

$$P(2) \wedge P(3) \wedge \ldots \wedge P(k)$$

é verdadeiro.

Mostrar: Para provar que $P(k+1)$ temos que considerar dois casos:

1. Se $k+1$ é primo então $P(k+1)$ é verificado e terminamos.
2. Se não, $k+1$ é um composto e então ele tem fatores u, v tal que $2 \leq u$, $v < k+1$ tal que

$$u \cdot v = k + 1$$

Exemplo 6 Cont.

Agora aplicamos o passo indutivo; ambos u e v são menores que $k+1$ e portanto podem ambos ser decompostos em um produto único de primos;

$$u := \prod_i p_i, \quad v := \prod_j p_j$$

Portanto,

$$k+1 := \left(u := \prod_i p_i\right)\left(v := \prod_j p_j\right)$$

e verificamos $P(k+1)$ por indução forte.

Roteiro

Recursividade: Revisão

Uma definição onde um item é definido em termos de si mesmo é chamada de uma **definição recursiva** ou **definição por recorrência**.

Uma definição recursiva tem duas partes:

Recursividade: Revisão

Uma definição onde um item é definido em termos de si mesmo é chamada de uma **definição recursiva** ou **definição por recorrência**.

Uma definição recursiva tem duas partes:

1. Um **caso base**, onde casos mais simples do item sendo definido são especificados.
2. Um **passo recursivo**, onde novos casos são construídos em função de casos anteriores.

Sequências

Sequência

Uma sequência s é uma lista de objetos numerados em determinada ordem. $s(n)$ denota o n-ésimo elemento da sequencia.

Por exemplo a seqência $s(n) = 2n - 1$, onde $n \in \mathbb{N}$, é definida por:

$$
\begin{aligned}
s(1) &= 2(1) - 1 = 1 \\
s(2) &= 2(2) - 1 = 3 \\
s(3) &= 2(3) - 1 = 5 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Sequências Definidas Recursivamente

Considere a sequência s abaixo.

1. $s(1) = 1$ (condição básica)
2. $s(n) = s(n-1) + 2$ para $n \geq 2$ (passo recursivo)

Sequências Definidas Recursivamente

Considere a sequência s abaixo.

1. $s(1) = 1$ (condição básica)
2. $s(n) = s(n-1) + 2$ para $n \geq 2$ (passo recursivo)

O primeiro elemento é $s(1) = 1$ pela condição básica. A partir disso, aplicando o passo recursivo temos:

$$
\begin{aligned}
s(2) &= s(1) + 2 = 1 + 2 = 3 \\
s(3) &= s(2) + 2 = 3 + 2 = 5 \\
s(4) &= s(3) + 2 = 5 + 2 + 7 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Também são chamadas de relações de recorrência.

Sequências Definidas Recursivamente

Sequência de Fibonacci

A sequência de *Fibonacci* f é definida por:

1. $f(0) = 0$ (condição básica)
2. $f(1) = 1$ (condição básica)
3. $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ para $n \geq 2$ (passo recursivo)

Sequências Definidas Recursivamente

Sequência de Fibonacci

A sequência de *Fibonacci* f é definida por:

1. $f(0) = 0$ (condição básica)
2. $f(1) = 1$ (condição básica)
3. $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ para $n \geq 2$ (passo recursivo)

Exemplo 7: A sequência de Fibonacci para $2 \leq n \leq 6$ segue abaixo:

$$
\begin{aligned}
f(2) &= f(1) + f(0) = 1 + 0 = 1\\
f(3) &= f(2) + f(1) = 1 + 1 = 2\\
f(4) &= f(3) + f(2) = 2 + 1 = 3\\
f(5) &= f(4) + f(3) = 3 + 2 = 5\\
f(6) &= f(5) + f(4) = 5 + 3 = 8
\end{aligned}
$$

Conjuntos Definidos por Recorrência

Um conjunto é uma coleção não ordenada de objetos.

Conjuntos Definidos por Recorrência

Um conjunto é uma coleção não ordenada de objetos.

Exemplo 8: O subconjunto S dos inteiros definido por

1. $3 \in S$ (condição básica)
2. Se $x \in S$ e $y \in S$, então $x + y \in S$ (passo recursivo).

Conjuntos Definidos por Recorrência

Um conjunto é uma coleção não ordenada de objetos.

Exemplo 8: O subconjunto S dos inteiros definido por

1. $3 \in S$ (condição básica)
2. Se $x \in S$ e $y \in S$, então $x + y \in S$ (passo recursivo).

Alguns elementos de S são $3 + 3 = 6$, $3 + 6 = 6 + 3 = 9$, $6 + 6 = 12$ e assim por diante. S se trata dos múltiplos positivos de 3 (verifique isso).

Exercício 7

Dê uma definição recursiva para o conjunto de pessoas que são ancestrais de João. A condição básica é dada abaixo:

1. Os pais de João são seus ancestrais (condição básica)
2. Passo recursivo ?

Cadeias Definidas por Recorrência

Cadeia

O conjunto Σ^* de *cadeias* sob o alfabeto Σ pode ser definido por:

1. $\lambda \in \Sigma^*$ (no qual λ é a cadeia vazia) (condição básica)
2. Se $w \in \Sigma^*$ e $x \in \Sigma$, então $wx \in \Sigma^*$ (passo recursivo).

Cadeias Definidas por Recorrência

Cadeia

O conjunto Σ^* de *cadeias* sob o alfabeto Σ pode ser definido por:

1. $\lambda \in \Sigma^*$ (no qual λ é a cadeia vazia) (condição básica)
2. Se $w \in \Sigma^*$ e $x \in \Sigma$, então $wx \in \Sigma^*$ (passo recursivo).

Exemplo 9: Seja $\Sigma = \{0, 1\}$. O conjunto Σ^* de todas as cadeias em Σ pode ser dado usando-se a definição recursiva acima.

Cadeias Definidas por Recorrência

Cadeia

O conjunto Σ^* de *cadeias* sob o alfabeto Σ pode ser definido por:

1. $\lambda \in \Sigma^*$ (no qual λ é a cadeia vazia) (condição básica)
2. Se $w \in \Sigma^*$ e $x \in \Sigma$, então $wx \in \Sigma^*$ (passo recursivo).

Exemplo 9: Seja $\Sigma = \{0, 1\}$. O conjunto Σ^* de todas as cadeias em Σ pode ser dado usando-se a definição recursiva acima.

A condição básica forma a cadeia vazia λ. Na primeira aplicação do passo recursivo, as cadeias 0 e 1 são formadas. Na segunda aplicação do passo recursivo, as cadeias 00, 01, 10 e 11 são formadas e assim por diante.

Operações Definidas por Recorrência

Certas operações em objetos podem ser definidas por recorrência.

Operações Definidas por Recorrência

Certas operações em objetos podem ser definidas por recorrência.

Exemplo 10: Uma definição recursiva para a exponenciação a^n de um número real não nulo a, no qual n é um inteiro positivo é

1. $a^0 = 1$ (condição básica)
2. $a^n = a(a^{n-1})$ para $n \geq 1$ (passo recursivo)

Operações Definidas por Recorrência

Certas operações em objetos podem ser definidas por recorrência.

Exemplo 10: Uma definição recursiva para a exponenciação a^n de um número real não nulo a, no qual n é um inteiro positivo é

1. $a^0 = 1$ (condição básica)
2. $a^n = a(a^{n-1})$ para $n \geq 1$ (passo recursivo)

Exemplo 11: Uma definição recursiva para a multiplicação dos inteiros positivos a e b é

1. $a(1) = a$ (condição básica)
2. $a(b) = a(b-1) + a$ para $b \geq 2$ (passo recursivo)

Roteiro

Relações de Recorrência

As vezes é conveniente expressar uma relação de recorrência como uma **solução fechada**. Por exemplo, expandindo a recorrência

$$
\begin{aligned}
&s(1) = 2 \\
&s(n) = 2S(n-1) \text{ para } n \geq 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s(1) &= 2 = 2^1 \\
s(2) &= 4 = 2^2 \\
s(3) &= 8 = 2^3 \\
s(4) &= 16 = 2^4 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

vemos que $S(n) = 2^n$. Prove!

Expandir, Conjecturar e Verificar

- **Expandir:** usa repetidamente a recorrência para expandir a expressão a partir do n-ésimo termo até o caso base.
- **Conjecturar:** a expansão nos ajuda a conjecturar a solução da recorrência.
- **Verificar:** a conjectura é finalmente verificada por indução.

Exemplo 12

Resolva a seguinte relação de recorrência:

$$S(1) = 2$$
$$S(n) = 2S(n-1) \text{ para } n \geq 2$$

Exemplo 12 cont.

Expandindo aplicando a definição para n, $n-1$, $n-2$, etc.:

$$\begin{aligned} S(n) &= 2S(n-1) \\ &= 2[2S(n-2)] = 2^2S(n-2) \\ &= 2^2[2s(n-3)] = 2^3S(n-3) \\ &= 2^3[2s(n-4)] = 2^4S(n-4) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Analisando o padrão, conjecturamos que, após k expansões, a equação tem a forma

$$s(n) = 2^k s(n-k)$$

Exemplo 12 cont.

A expansão tem que parar quando $n - k = 1$, ou seja, quando $k = n - 1$. Nesse ponto temos:

$$\begin{aligned} S(n) &= 2^{n-1}S[n-(n-1)] \\ &= 2^{n-1}S(1) \\ &= 2^{n-1}(2) \\ &= 2^n \end{aligned}$$

Ainda falta provar que 2^n é a solução da recorrência.

Exemplo 12 cont.

A base da indução é $s(1) = 2^1$ que é verdade pelo caso base da definição recursiva.

Supondo que $s(k) = 2^k$, queremos provar que $s(k+1) = 2^{k+1}$:

$$S(k+1) = 2S(k)$$
$$S(k+1) = 2(2^k)$$
$$S(k+1) = 2^{k+1}$$

E portanto fica provada a relação de recorrência.

Exemplo 13

Resolva a seguinte relação de recorrência:

$$S(1) = 4$$
$$S(n) = 2S(n-1) + 3 \text{ para } n \geq 2$$

Exemplo 13 cont.

Expandindo aplicando a definição para n, $n-1$, $n-2$, etc.:

$$\begin{aligned}
S(n) &= 2S(n-1)+3 \\
&= 2[2S(n-2)+3] = 2^2S(n-2)+2\cdot 3+3 \\
&= 2^2[2S(n-3)+3]+2\cdot 3+3 = 2^3S(n-3)+2^2\cdot 3+2\cdot 3+3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Analisando o padrão, conjecturamos que, após k expansões, a equação tem a forma

$$S(n) = 2^kS(n-k)+2^{k-1}\cdot 3+\ldots+2^2\cdot 3+2\cdot 3+3$$

Exemplo 13 cont.

A expansão tem que parar quando $n - k = 1$, ou seja, quando $k = n - 1$. Nesse ponto temos:

$$\begin{aligned} S(n) &= 2^{n-1}S(1) + 2^{n-2} \cdot 3 + 2^{n-3} \cdot 3 + \ldots + 2^2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \\ &= 2^{n-1}(4) + 3[2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2^2 + 2 + 1] \\ &= 2^{n+1} + 3[2^{n-1} - 1] \end{aligned}$$

Prove por indução que $2^{n+1} + 3[2^{n-1} - 1]$ **é a solução da recorrência.**

Roteiro

Algoritmos Recursivos

Algoritmo Recursivo

Um algoritmo é recursivo quando ele resolve um problema reduzindo-o a instâncias menores do mesmo problema.

Exemplo 14

Algoritmo recursivo para calcular $n!$

$\textsc{Fat}(n)$

if $n == 0$

  return 1

else

  return $\textsc{Fat}(n-1) \cdot n$ para $n > 0$

Exemplo 15

Algoritmo recursivo para calcular a^n

$\textsc{Pot}(a, n)$

if $n == 0$
  return 1
else
  return $a \cdot \textsc{Pot}(a, n-1)$

Corretude de Algoritmos Recursivos

- Indução matemática pode ser usada para provar que algoritmos recursivos estão corretos.

Corretude de Algoritmos Recursivos

- Indução matemática pode ser usada para provar que algoritmos recursivos estão corretos.
- Defina a conjectura a provar.

Corretude de Algoritmos Recursivos

- Indução matemática pode ser usada para provar que algoritmos recursivos estão corretos.
- Defina a conjectura a provar.
- **Caso Base:** condição de parada do algoritmo.

Corretude de Algoritmos Recursivos

- Indução matemática pode ser usada para provar que algoritmos recursivos estão corretos.
- Defina a conjectura a provar.
- **Caso Base:** condição de parada do algoritmo.
- Assuma que as chamadas recursivas anteriores estão corretas (hipótese indutiva).

Corretude de Algoritmos Recursivos

- Indução matemática pode ser usada para provar que algoritmos recursivos estão corretos.
- Defina a conjectura a provar.
- **Caso Base:** condição de parada do algoritmo.
- Assuma que as chamadas recursivas anteriores estão corretas (hipótese indutiva).
- Use a hip. indutiva para provar que a execução atual é correta (passo indutivo).

Exemplo 15

Prove que o algoritmo do fatorial recursivo é correto.

- **Conjectura:** $\textsc{Fat}(n) = n!$, para $n \geq 0$

Exemplo 15

Prove que o algoritmo do fatorial recursivo é correto.

- **Conjectura:** $\textsc{Fat}(n) = n!$, para $n \geq 0$
- **Caso Base:** Se $n = 0$, então $\textsc{Fat}(n) = 1$. Isso é correto já que $0! = 1$.

Exemplo 15

Prove que o algoritmo do fatorial recursivo é correto.

- **Conjectura:** $\textsc{Fat}(n) = n!$, para $n \geq 0$
- **Caso Base:** Se $n = 0$, então $\textsc{Fat}(n) = 1$. Isso é correto já que $0! = 1$.
- **Hip. indutiva:** Agora assumimos que $\textsc{Fat}(k) = k!$

Exemplo 15

Prove que o algoritmo do fatorial recursivo é correto.

- **Conjectura:** $\text{FAT}(n) = n!$, para $n \geq 0$
- **Caso Base:** Se $n = 0$, então $\text{FAT}(n) = 1$. Isso é correto já que $0! = 1$.
- **Hip. indutiva:** Agora assumimos que $\text{FAT}(k) = k!$
- **Mostrar:** $\text{FAT}(k+1) = (k+1)!$

Exemplo 15

Prove que o algoritmo do fatorial recursivo é correto.

- **Conjectura:** $\textsc{Fat}(n) = n!$, para $n \geq 0$
- **Caso Base:** Se $n = 0$, então $\textsc{Fat}(n) = 1$. Isso é correto já que $0! = 1$.
- **Hip. indutiva:** Agora assumimos que $\textsc{Fat}(k) = k!$
- **Mostrar:** $\textsc{Fat}(k+1) = (k+1)!$
- **Passo Indutivo:** Como

$$\textsc{Fat}(k+1) = \textsc{Fat}(k) \cdot (k+1)$$

e pela hipótese indutiva $\textsc{Fat}(k) = k!$, segue que

$$\textsc{Fat}(k+1) = (k+1) \cdot k! = (k+1)!$$

Exercício 8

Mostre que o algoritmo POT é correto.

Referências

- Keneth H. Rosen. Discrete Mathematics and Its Applications. Sexta Edição. McGRAW-HILL International Edition, 2007.
- Judith L. Gersting. Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação. Quinta Edição. LTC, 2004.
- Leandro Balby Marinho. Slides fornecidos de anos anteriores, 2013.