Anéis

Prof. Eanes Torres Pereira

Anéis

Roteiro

Anéis - Definição

- **Definição**. Um conjunto não vazio R forma um **anel** com respeito às operações binárias adição $(+)$ e multiplicação $(\cdot)$ se, para valores arbitrários a, b, $c \in \mathrm{R}$, as seguintes propriedades forem atendidas:

  P_1: $(a+b)+c = a+(b+c)$
  P_2: $a+b = b+a$
  P_3: Existe $z \in \mathrm{R}$ tal que $a+z=a$.
  P_4: Para cada $a \in \mathrm{R}$ existe $-a \in \mathrm{R}$ tal que $a+(-a)=z$.
  P_5: $(a \cdot b)\cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
  P_6: $a(b+c) = a\cdot b + a \cdot c$
  P_7: $(b+c)a = ba + c \cdot a$

Anéis

- **Exemplo 1**. O conjunto $S = \{x + y\sqrt[3]{3} + z\sqrt[3]{9} : x,\ y,\ z \in \mathbb{Q}\}$ é um anel em relação à adição e multiplicação em $\mathbb{R}$.
- Para provar isso, primeiro mostramos que S é fechado em relação a essas operações. Temos, para $a + b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{9}$, $d + e\sqrt[3]{3} + f\sqrt[3]{9} \in S$:

$$(a + b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{9}) + (d + e\sqrt[3]{3} + f\sqrt[3]{9}) =$$
$$(a + d) + (b + e)\sqrt[3]{3} + (c + f)\sqrt[3]{9} \in S$$

- e

$$(a + b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{9})(d + e\sqrt[3]{3} + f\sqrt[3]{9}) =$$
$$(ad + 3bf + 3ce) + (ae + bd + 3cf)\sqrt[3]{3} + (af + be + cd)\sqrt[3]{9} \in S$$

Continuação do Exemplo

- Em seguida, notamos que as propriedades P_1, P_2 P_5, P_6 e P_7 são satisfeitas já que S é um subconjunto do anel R.
- $0 = 0 + 0\sqrt[3]{3} + 0\sqrt[3]{9}$ satisfaz P_3.
- Para cada $x + y\sqrt[3]{3} + z\sqrt[3]{9} \in S$ existe $-x - y\sqrt[3]{3} - z\sqrt[3]{9} \in S$, que satisfaz P_4.
- Portanto, S satisfaz todas as propriedades de um anel.

Anéis

- **Exemplo 2**. O conjunto $S = \{a, b\}$ com adição e multiplicação definidas pelas tabelas abaixo é um anel?

+	a	b
a	a	b
b	b	a

·	a	b
a	a	a
b	a	b

Anéis

- **Exemplo 2**. O conjunto $S = \{a, b\}$ com adição e multiplicação definidas pelas tabelas abaixo é um anel?

+	a	b
a	a	b
b	b	a

·	a	b
a	a	a
b	a	b

- Resposta: sim.
- **Exercício 1**. O conjunto $T = \{a, b, c, d\}$ com adição e multiplicação definidas pelas tabelas abaixo é um anel? Prove.

+	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

·	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	a	b
c	a	c	a	c
d	a	d	a	d

Propriedades dos Anéis

1. Todo anel é um *grupo aditivo abeliano*.
2. Existe um único elemento identidade aditivo z (o *zero* do anel).
3. Cada elemento tem um único *inverso* aditivo (o *negativo* daquele elemento).
4. A Lei de Cancelamento funciona para a adição.
5. $-(-a) = a$, $-(a + b) = (-a) + (-b)$, para todo a, b do anel.
6. $a \cdot z = z \cdot a = z$
7. $a(-b) = -(ab) = (-a)b$

Subanéis

- **Definição**. Seja R um anel. Um subconjunto S não-vazio do conjunto R, que é um anel com respeito às operações binárias em R, é chamado de *subanel* de R.
- **Exemplo 3**. No Exemplo 1, S é um subanel de R.
- **Exercício 2**. No Exercício 1, $T_1 = \{a\}$ e $T_2 = \{a, b\}$ são subanéis de T. Por que $T_3 = \{a, b, c\}$ não é um subanel de T?
- **Definição**. Os subanéis $\{z\}$ e R de um anel R são chamados *impróprios*; outros subanéis, se existirem, de R são chamados *próprios*.
- **Teorema 1**. Seja R um anel e S um subconjunto próprio do conjunto R. Então S é um subanel de R se, e somente se:
  (a) S é fechado com respeito às operações do anel.
  (b) para cada $a \in S$, temos $-a \in S$.

Roteiro

Subanéis

- **Definição**. Um anel para o qual a multiplicação é comutativa é chamado de uma *anel comutativo*.
- **Exemplo 4**. O anel do Exemplo 2 é comutativo.
- **Exercício 3**. O anel do Exercício 1 é comutativo? Prove.

Subanéis

- **Definição**. Um anel para o qual a multiplicação é comutativa é chamado de uma *anel comutativo*.
- **Exemplo 4**. O anel do Exemplo 2 é comutativo.
- **Exercício 3**. O anel do Exercício 1 é comutativo? Prove.
  Resposta: não.
- **Definição**. Um anel que possui um elemento identidade multiplicativo (*elemento unidade*) é chamado de *anel com elemento identidade* ou *anel com unidade*.
- **Exemplo 5**. O elemento unidade do anel do Exemplo 1 é 1.
- **Exercício 4** O anel do Exercício 1 tem unidade?

Subanéis

- **Definição**. Um anel para o qual a multiplicação é comutativa é chamado de uma *anel comutativo*.
- **Exemplo 4**. O anel do Exemplo 2 é comutativo.
- **Exercício 3**. O anel do Exercício 1 é comutativo? Prove.
  Resposta: não.
- **Definição**. Um anel que possui um elemento identidade multiplicativo (*elemento unidade*) é chamado de *anel com elemento identidade* ou *anel com unidade*.
- **Exemplo 5**. O elemento unidade do anel do Exemplo 1 é 1.
- **Exercício 4** O anel do Exercício 1 tem unidade?
  Resposta: não.
- Inversos multiplicativos, quando existem, são únicos.
- **Exercício 5**. O anel do Exercício 2 da lista 8 é comutativo? Ele tem unidade?

Subanéis

- **Definição**. Um anel para o qual a multiplicação é comutativa é chamado de uma *anel comutativo*.
- **Exemplo 4**. O anel do Exemplo 2 é comutativo.
- **Exercício 3**. O anel do Exercício 1 é comutativo? Prove.

  Resposta: não.
- **Definição**. Um anel que possui um elemento identidade multiplicativo (*elemento unidade*) é chamado de *anel com elemento identidade* ou *anel com unidade*.
- **Exemplo 5**. O elemento unidade do anel do Exemplo 1 é 1.
- **Exercício 4** O anel do Exercício 1 tem unidade?

  Resposta: não.
- Inversos multiplicativos, quando existem, são únicos.
- **Exercício 5**. O anel do Exercício 2 da lista 8 é comutativo? Ele tem unidade?

  Resposta: não.

Característica

- **Definição**. Seja R um anel com elemento zero z e suponha que existe um inteiro positivo n tal que $na = a + a + a + \ldots + a = z$ para todo $a \in \mathrm{R}$. O menor inteiro positivo n que satisfaz essa equação é chamado de *característica* de R. Se tal inteiro não existe, diz-se que R tem *característica zero*.
- **Exemplo 6**. No anel do Exercício 2 da lista 8 temos que $a + a = b + b = \ldots = h + h = a$. Portanto a é o zero do anel e a característica do anel é 2.
- **Exercício 6**. Qual é o zero e a característica do anel da Questão 3 da lista 8?

Característica

- **Definição**. Seja R um anel com elemento zero z e suponha que existe um inteiro positivo n tal que $na = a + a + a + \ldots + a = z$ para todo $a \in \mathrm{R}$. O menor inteiro positivo n que satisfaz essa equação é chamado de *característica* de R. Se tal inteiro não existe, diz-se que R tem *característica zero*.
- **Exemplo 6**. No anel do Exercício 2 da lista 8 temos que $a + a = b + b = \ldots = h + h = a$. Portanto a é o zero do anel e a característica do anel é 2.
- **Exercício 6**. Qual é o zero e a característica do anel da Questão 3 da lista 8?

  Resposta: zero: a, característica: 4.

Divisores de Zero

- **Definição**. Seja R um anel com elemento zero z. Um elemento $a \neq z$ de R é chamado de *divisor de zero* se existe um elemento $b \neq z$ de R tal que $a \cdot b = z$ ou $b \cdot a = z$.
- **Exercício 7**. Determine todos os divisores de zero do anel da questão 3 da lista 8.

Roteiro

Homomorfismos e Isomorfismos

- Um homomorfismo de um grupo aditivo de um anel R no grupo aditivo de um anel R' que também preserva a segunda operação, multiplicação, é chamado de homomorfismo de R em R'.
- Um homomorfismo bijetivo é um isomorfismo.
- **Exemplo 7**. Considere o anel $\mathrm{R} = \{a, b, c, d\}$ com adição e multiplicação definidas nas tabelas abaixo.

+	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

·	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	d	b
d	a	d	b	c

Exemplo 7 - Continuação

- e os anéis $\mathrm{R}' = \{p, q, r, s\}$ com adição e multiplicação definidas pelas tabelas abaixo.

$+$	p	q	r	s
p	r	s	p	q
q	s	r	q	p
r	p	q	r	s
s	q	p	s	r

$\cdot$	p	q	r	s
p	s	p	r	q
q	p	q	r	s
r	r	r	r	r
s	q	s	r	p

- O mapeamento

$$a \iff r,\ b \iff q,\ c \iff s,\ d \iff p$$

- Leva R em R' e R' em R e ao mesmo tempo preserva todas as operações binárias.
- Portanto, R e R' são anéis isomórficos.

Homomorfismos e Isomorfismos

- **Teorema 2**. Em qualquer isomorfismo de uma anel R em um anel R':
  (a) Se z é o zero de R e z' é o zero de R', temos $z \iff z'$.
  (b) Se $\mathrm{R} \iff \mathrm{R}' : a \iff a$, então $-a \iff -a'$.
  (c) Se u é a unidade de R e u' é a unidade de R', temos $u \iff u'$.
  (d) Se R é um anel comutativo, então R' também é um anel comutativo.

Roteiro

Ideais

- **Definição**. Seja R um anel com elemento zero z. Um subgrupo S de R, tendo a propriedade $r \cdot x \in S$ ($x \cdot r \in S$) para todo $x \in S$ e $r \in R$, é chamado *ideal à esquerda (ou à direita) em* R.
- $\{z\}$ e R são ambos ideais à esquerda e à direita em R; eles são chamados de *ideais impróprios à esquerda (à direita) em* R. Todos os outros ideais em R, se existirem, são chamados de *ideais próprios*.
- **Definição**.Um subgrupo I de R que é tanto um ideal à esquerda quanto um ideal à direita de R, isto é, para todo $x \in \mathrm{I}$ e $r \in \mathrm{R}$ $r \cdot x \in \mathrm{I}$ e $x \cdot r \in \mathrm{I}$, é chamado de *ideal (subanel invariante)* em R.
- **Definição**. Para todo anel R, os ideais $\{z\}$ e R são chamados de *ideais impróprios* em R; quaisquer outros ideais em R são chamados de *ideais próprios*.

Ideais

- Um anel que não possui ideais próprios é chamado de *anel simples*.
- **Exemplo 10**. Para o anel S da questão 2 da lista 8, $\{a, b, c, d\}$ é um ideal próprio à direita em S, mas não é um ideal à esquerda. Os ideais próprios em S são: $\{a, c\}$, $\{a, e\}$, $\{a, g\}$ e $\{a, c, e, g\}$.
- **Teorema 3**. Se p é um elemento arbitrário de um anel comutativo R, então $P = \{p \cdot r : r \in \mathrm{R}\}$ é um ideal em R.
- **Exemplo 11**. No Exemplo 10, cada elemento x do ideal à esquerda $\{a, c, e, g\}$ tem a propriedade de ser um elemento de S para o qual $r \cdot x = a$, o elemento zero de S, para todo $r \in S$.

Ideais

- **Teorema 4**. Seja R um anel com elemento zero z; então: $T = \{x : x \in \mathrm{R}, r \cdot x = z$ (ou $x \cdot r = z$) para todo $r \in \mathrm{R}\}$ é um ideal à esquerda (ou à direita) em R.
- **Teorema 5**. A interseção de qualquer coleção de ideais em um anel é um ideal no anel.
- **Definição**. Seja R um anel e K um ideal à direita em R com a seguinte propriedade:
  $\mathrm{K} = \{a \cdot r : r \in \mathrm{R}, \text{a é algum elemento fixo de K}\}$.
  Chamaremos K de *ideal principal à direita* em R e diremos que ele é gerado pelo elemento a de K. Os ideais principais à esquerda e os ideais principais são definidos de modo análogo.
- **Exemplo 12**. No anel S da questão 2 da lista 8, o subanel $\{a, g\}$ é um ideal principal à direita em S gerado pelo elemento g. Como $r \cdot g = a$ para todo $r \in S$, $\{a, g\}$ não é um ideal principal à esquerda e, portanto, não é um ideal principal de S.

Ideais

- **Exercício 8**. No anel comutativo S da questão 3 da lista 8, o ideal $\{a, b, e, f\}$ em S é um ideal principal. Ele pode ser gerado por quais elementos?

Ideais

- **Exercício 8**. No anel comutativo S da questão 3 da lista 8, o ideal $\{a, b, e, f\}$ em S é um ideal principal. Ele pode ser gerado por quais elementos?

  Resposta: b ou f.

Referências

- Theory and Problems in Abstract Algebra - Frank Ayres e Lloyd R. Jaisingh