UFCG-CEEI-UASC
FMCC2

Lista 8 - Anéis

1. A estrutura algébrica formada pelo conjunto dos números racionais e pelas operações de adição ($\oplus$) e multiplicação ($\odot$) definidas abaixo é um anel?
   $a \oplus b = a.b$ e $a \odot b = a + b$ para todo $a, b \in Q$
2. O conjunto S = {a, b, c, d, e, f, g, h} com adição e multiplicação definidas pelas tabelas abaixo é um anel? Prove. Qual é o elemento zero? Todos os elementos tem inverso?

+	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**
a	a	b	c	d	e	f	g	h
b	b	a	d	c	f	e	h	g
c	c	d	a	b	g	h	e	f
d	d	c	b	a	h	g	f	e
e	e	f	g	h	a	b	c	d
f	f	e	h	g	b	a	d	c
g	g	h	e	f	c	d	a	b
h	h	g	f	e	d	c	b	a

.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**
a	a	a	a	a	a	a	a	a
b	a	b	a	b	a	b	a	b
c	a	c	a	c	a	c	a	c
d	a	d	a	d	a	d	a	d
e	a	e	a	e	a	e	a	e
f	a	f	a	f	a	f	a	f
g	a	g	a	g	a	g	a	g
h	a	h	a	h	a	h	a	h

3. O anel da questão 2 com adição e multiplicação definidas pelas tabelas abaixo é um anel? Qual é o elemento zero? Determine o inverso aditivo de cada elemento.

+	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**
a	a	b	c	d	e	f	g	h
b	b	a	d	c	f	e	h	g
c	c	d	e	f	g	h	a	b
d	d	c	f	e	h	g	b	a

.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**
a	a	a	a	a	a	a	a	a
b	a	e	f	b	a	e	f	b
c	a	f	d	g	e	b	h	c
d	a	b	g	h	e	f	c	d

e	e	f	g	h	a	b	c	d		**e**	a	a	e	e	a	a	e	e
f	f	e	h	g	b	a	d	c		**f**	a	e	b	f	a	e	b	f
g	g	h	a	b	c	d	e	f		**g**	a	f	h	c	e	b	d	g
h	h	g	b	a	d	c	f	e		**h**	a	b	c	d	e	f	g	h

4. Prove que o conjunto M = {(a, b, c, d): a, b, c, d $\in Q$} com adição e multiplicação definidas por
   (a, b, c, d) + (e, f, g, h) = (a + e, b + f, c + g, d + h)
   (a, b, c, d)(e, f, g, h) = (ae + bg, af + bh, ce + dg, cf +dh)

   Para todos (a, b, c, d), (e, f, g, h) $\in M$ é um anel.

5. Prove que se R é um anel com elemento zero z, então para todo $a \in R,\ a.z = z.a = z$.
6. Mostre que P = {(a, b, -b, a) : a, b $\in Z$} com adição e multiplicação definidas por
   (a, b, -b, a) + (c, d, -d, c) = (a+c, b+d, - b - d, a + c)
   (a,b, -b,a)(c,d, -d,c) = (ac - bd, ad + bc, -ad -bc, ac-bd)

   É um subanel comutativo do anel não-comutativo M da questão 4.
7. Considere o mapeamento $(a,\ b,\ -b,\ a) \to a$ de um anel P da questão 6 no anel Z dos inteiros.Os grupos aditivos P e Z são homomórficos? Por que não são isomórficos?
8. Prove que S = {2x : x $\in Z$} com adição e multiplicação definidas em Z é um anel.
9. Prove que T = {2x + 1 : x $\in Z$} não é um anel.
10. Verifique que S da questão 3 é um anel comutativo com unidade = h.
11. Para $a, b \in Z$ defina $a \oplus b = a + b + 1$ e $a \odot b = a + b + ab$. Mostre que Z é um anel comutativo com respeito a essas duas operações. Qual é o zero do anel? O anel tem elemento unidade?

Respostas

2. É um anel.
7. São homomórficos.