Expressões algébricas, Polinômios e Equações Polinomiais

Prof. Eanes Torres Pereira

Fundamentos de Matemática Para Ciência da Computação - I

Roteiro

Definição

- Dada a sequência de números complexos $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ consideramos a função: $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ dada por $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$. A função f é denominada *função polinomial* ou *polinômio* associado à sequência dada.

- Os números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ são denominados coeficientes e as parcelas $a_0, a_1x, a_2x^2, a_3x^3, \ldots, a_nx^n$ são chamados *termos* do polinômio f.
- As seguintes aplicações são polinômios:
  1. $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 - 5x^3$ onde $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ e $a_3 = -5$.
  2. $g(x) = 1 + 7x^4$ onde $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ e $a_4 = 7$

Definição

- Dados o número complexo a e o polinômio $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, chama-se *valor numérico* de f em a a imagem de a pela função f, isto é:
$$f(a) = a_0 + a_1a + a_2a^2 + \ldots + a_na^n$$

- Por exemplo, se $f(x) = 2 + x + x^2 + 3x^3$, temos:
  1. $f(2) = 2 + 2 + 2^2 + 3.2^3 = 32$
  2. $f(-1) = 2 + (-1) + (-1)^2 + 3.(-1)^3 = -1$
- Se a é um número complexo e f é um polinômio tal que $f(a) = 0$, dizemos que a é uma raiz ou um zero de f. Por exemplo, o número -2 é raíz de $f(x) = 2x + 3x^2 + x^3$, pois:
$$f(-2) = 2(-2) + 3(-2)^2 + (-2)^3 = 0$$

Igualdade

- Dois polinômios f e g são iguais se, e somente se, os coeficientes de f e g forem ordenamente iguais:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i, \text{ e}$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots + b_nx^n = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i$$

$$f = g \iff a_i = b_i, \forall i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

Roteiro

Adição

- Dados dois polinômios:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i$$

chama-se soma de f e g o polinômio:

$(f+g)(g) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x^1+(a_2+b_2)x^2+\ldots(a_n+b_n)x^n$

escrevendo como somatório:

$(f+g)(x) = \sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i$

Adição

- Exemplo: somar $f(x) = 4 + 3x + x^2$ e $g(x) = 5 + 3x^2 + x^4$.
- Solução:

  $f(x) = 4 + 3x + x^2 + 0x^3 + 0x^4$

  $g(x) = 5 + 0x + 3x^2 + 0x^3 + x^4$

  $(f+g)(x) = (4+5)+(3+0)x+(1+3)x^2+(0+0)x^3+(0+1)x^4 =$
  $9 + 3x + 4x^2 + x^4$

Subtração

- Dados dois polinômios:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i$$

chama-se subtração de f e g o polinômio:
$(f-g)(g) = (a_0-b_0)+(a_1-b_1)x^1+(a_2-b_2)x^2+\ldots(a_n-b_n)x^n$

Multiplicação

- Dados dois polinômios:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$$

- Chama-se produto de f e g o polinômio: $(fg)(g) = a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x^1+(a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2)x^2+\ldots(a_mb_n)x^{m+n}$
- Note que fg é um polinômio

  $h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_{m+n}x^{m+n}$

  Cujo coeficiente c_k pode ser assim obtido:

$$c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \ldots + a_kb_0 = \sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-1}$$

Multiplicação

- Note que fg pode ser obtido multiplicando-se cada termo $a_i x^i$ de f por cada termo $b_i x^i$ de g, segundo a regra $(a_i x^i).(b_j x^j) = a_j b_j x^{i+j}$ e somando os resultados obtidos.
- **Exemplo**. Multiplicar $f(x) = x + 2x^2 + 3x^3$ por $g(x) = 4 + 5x + 6x^2$.
- **Solução**:

$$(fg)(x) = (x + 2x^2 + 3x^3)(4 + 5x + 6x^2)$$
$$= x(4 + 5x + 6x^2) + 2x^2(4 + 5x + 6x^2) + 3x^3(4 + 5x + 6x^2)$$
$$(4x+5x^2+6x^3)+(8x^2+10x^3+12x^4)+(12x^3+15x^4+18x^5) =$$
$$= 4x + 13x^2 + 28x^3 + 27x^4 + 18x^5$$

Multiplicação

- **Exercício**. Dados os polinômios:
  - $f(x) = 7 - 2x + 4x^2$
  - $g(x) = 5 + x + x^2 + 5x^3$
  - $h(x) = 2 - 3x + x^4$
- Calcular:
  1. $(f + g)(x)$
  2. $(g - h)(x)$
  3. $(gh)(x)$

Grau

- O grau de um polinômio f é o índice do *último* termo não nulo de f. Se o grau de f é p, denotamos como $\delta f = p$
- Se f, g e $f + g$ são polinômios não nulos, então o grau de $f + g$ é menor ou igual ao maior dos números δf e δg.

$$\delta(f + g) < max\{\delta f, \delta g\}$$

- Se f, g e fg são polinômios não nulos, então o grau de fg é igual à soma dos graus δf e δg.

$$\delta(fg) = \delta f + \delta g$$

Grau

- **Exemplos:**
  1. $f(x) = 1 + x + x^2 \longrightarrow \delta f = 2$
  2. $f(x) = 4 + 3x \longrightarrow \delta f = 1$
  3. Se f e g são dois polinômios de grau n, qual é o grau de $f + g$ e de fg?

Divisão

- Dados dois polinômios f (dividendo) e $g \neq 0$ (divisor), dividir f por g é determinar dois outros polinômios q (quociente) e r resto de modo que se verifiquem as duas propriedades seguintes:
  1. $q.g + r = f$
  2. $\delta r < \delta g$ (ou $r = 0$, caso em que a divisão é chamada exata)
- *Exemplo*. Quando dividimos $f = 3x^4 - 2x^3 + 7x + 2$ por $g = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 1$, obtemos $q = x$ e $r = -4x^2 + 8x + 2$ que satisfazem as duas condições:
  1. $qg + r = x(3x^3 - 2x^2 + 4x - 1) + (-4x^2 + 8x + 2) = 3x^4 - 2x^3 + 7x + 2 = f$
  2. $\delta\ r = 2$ e $\delta\ g = 3 \rightarrow \delta\ r < \delta\ g$
- Deste ponto em diante admitiremos sempre $\delta f \geq \delta g$, isto é, excluiremos da teoria os dois casos em que a divisão é trivial ($f = 0$ ou quando $\delta f < \delta g$).

Divisão - Método da Chave

- **Exemplo**. Dividir o polinômio $f = 3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1$ pelo polinômio $g = x^2 - 2x + 3$.

Divisão - Método da Chave

- **Exemplo**. Dividir o polinômio $f = 3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1$ pelo polinômio $g = x^2 - 2x + 3$.

$$
\begin{array}{l r|l l}
f \to & 3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1 & x^2 - 2x + 3 & \leftarrow g \\
\hline
 & -3x^5 + 6x^4 - 9x^3 & 3x^3 + 4x - 1 & \leftarrow q \\
\hline
r1 \to & 4x^3 - 9x^2 + 11x - 1 & & \\
 & -4x^3 + 8x^2 - 12x & & \\
\hline
r2 \to & -x^2 - x - 1 & & \\
 & x^2 - 2x + 3 & & \\
\hline
r \to & -3x + 2 & &
\end{array}
$$

Ou, de modo simplificado:

$$
\begin{array}{rrrrrr|rrrr}
3 & -6 & 13 & -9 & 11 & -1 & 1 & -2 & 3 & \\
\cline{7-10}
-3 & 6 & 9 & & & & 3 & 0 & 4 & -1 \\
\cline{1-6}
 & & 4 & -9 & 11 & -1 & & & & \\
 & & -4 & 8 & -12 & & & & & \\
\cline{1-6}
 & & & -1 & -1 & -1 & & & & \\
 & & & 1 & -2 & 3 & & & & \\
\cline{1-6}
 & & & & -3 & 2 & & & &
\end{array}
$$

Divisão

- **Exemplo**. Dividir $f = 2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 6x + 7$ por $g = x^3 - x^2 + x - 1$
  Resposta: $q = 2x^2 - x + 1$ e $r = 4x^2 - 8x + 8$

- **Exemplo**. Dividir $f = x^4 - 16$ por $g = x + 1$
  Resposta. $q = x^3 - x^2 + x - 1$ e $r = -15$

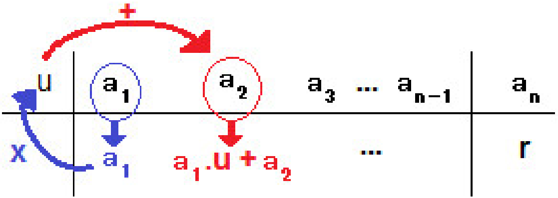
Teorema do Resto

- O resto da divisão de um polinômio f por $x - a$ é igual ao valor numérico de f em a.
- **Exemplos**:
  1. O resto da divisão de $f = 5x^4 + 3x^2 + 11$ por $g = x - 3$ é: $f(3) = 5.3^4 + 3.3^2 + 11 = 405 + 27 + 11 = 443$
  2. O resto da divisão de $f = (x + 3)^7 + (x - 2)^2$ por $g = x + 3$ é: $f(-3) = (-3 + 3)^7 + (-3 - 2)^2 = 0^7 + (-5)^2 = 25$

Teorema de D'Alembert

- Um polinômio f é divisível por $x - a$ se, e somente se, a é raiz de f.
- **Exemplo**. Verificar que $f = x^5 - 4x^4 - 3x^2 + 7x - 1$ é divisível por $g = x - 1$.
- **Solução**.
  $f(1) = 1^5 - 4.1^4 - 3.1^2 + 7.1 - 1 = 1 - 4 - 3 + 7 - 1 = 0$,
  então f é divisível por g.

Dispositivo Prático de Briot-Ruffini



[1]

[1]Fonte da imagem:
http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/dispositivo-pratico-briotruffini.htm

Dispositivo Prático de Briot-Ruffini

- **Exemplo**. Dividir $f = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ por $g = x - 2$.

  Solução. Quando $g = 0$, $x = 2$.

  1. Montando o dispositivo:

2	5	-2	3	-1

[2]

  2. Rescrevendo o primeiro coeficiente de f na linha inferior.

2	5	-2	3	-1
	5			

[2]Fonte da imagem:
http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/dispositivo-pratico-briotruffini.htm

Dispositivo Prático de Briot-Ruffini

3. Multiplicando o 5 por 2 e somando o resultado com o segundo coeficiente de f:

2	5	-2	3	-1
	5	8		

4. Multiplicando 8 por 2 e somando com o terceiro coeficiente de f:

2	5	-2	3	-1
	5	8	19	

5. Multiplicando o 19 por 2 e somando o resultado com – 1:

2	5	-2	3	-1
	5	8	19	37

6. O quociente resultante da divisão de $5x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ por $x - 2$ é $5x^2 + 8x + 19$, e o resto da divisão é $r = 37$.

Dispositivo Prático de Briot-Ruffini

Exercícios Determinar o quociente e o resto da divisão de f por g para:

1. $f = 2x^4 - 7x^2 + 3x - 1$ e $g = x - 3$
   Resposta: $q = 2x^3 + 6x^2 + 11x + 36$ e $r = 107$
2. $f = 625x^4 - 81$ e $g = x - \frac{3}{5}$
   Resposta: $625x^3 + 375x^2 + 225x + 135$ e $r = 0$
3. $f = 9x^3 + 5x^2 + x - 11$ e $g = x + 2$
   Resposta: $q = 9x^2 - 13x + 27$ e $r = -65$

Divisão

- **Teorema**. Se um polinômio é divisível separadamente por $x - a$ e por $x - b$, com $a \neq b$, então f é divisível pelo produto $(x - a)(x - b)$.
- **Exemplo**. Mostrar que $f = 2x^3 + 9x^2 + 7x - 6$ é divisível por $g = x^2 + 5x + 6$.

  Solução. Podemos resolver este problema sem efetuar a divisão, notando que

  $g = (x + 2)(x + 3)$

  se f for divisível por $x + 2$ e $x + 3$, de acordo com o teorema anterior, f será divisível por g.

  Provemos que $f(-2) = 0$ e $f(-3) = 0$:

  $f(-3) = 2(-3)^3 + 9(-3)^2 + 7(-3) - 6 = -54 + 81 - 21 - 6 = 0$

  $f(-2) = 2(-2)^3 + 9(-2)^2 + 7(-2) - 6 = -16 + 36 - 14 - 6 = 0$

Divisão

- **Exercícios**
  1. Determinar a e b em R de modo que o polinômio $f = x^3 + 2x^2 + (2a - b)x + (a + b)$ seja divisível por $g = x^2 - x$.
  2. Mostrar que $f(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$ é divisível por $x - 1$ mas não é divisível por $(x - 2)^2$.

Roteiro

Equações Polinomiais

- Dadas duas funções polinomiais $y = f(x)$ e $y = g(x)$, chama-se equação polinomial ou equação algébrica a sentença $f(x) = g(x)$.
- **Exemplo**. Se $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ e $g(x) = 3x^2 - 3$, a sentença $x^3 + x^2 - x - 1 = 3x^2 - 3$ é uma equação polinomial.
- Dada uma equação polinomial $f(x) = g(x)$, chama-se raiz da equação todo número que, substituído em lugar de x, torna a sentença verdadeira.
- **Exemplo**. Para a equação $x^3 + x^2 - x - 1 = 3x^2 - 3$, o conjunto solução é $S = \{1, 2, -1\}$, mas 3 não é solução, **VERIFIQUE!**.

Equações Polinomiais

- Há duas operações que não alteram o conjunto-solução de uma equação polinomial:
  1. Somar aos dois membros a mesma função polinomial;
     Exemplo. Seja i) $3x^2 - 4x + 11 = 2x^2 + x + 5$, somando-se ii) $h(x) = -2x^2 - x - 5$ aos dois membros da equação, obtemos: $x^2 - 5x + 6 = 0$. Decorre que i) é equivalente a ii) pois: $S_1 = S_2 = \{2, 3\}$.
     Em outras palavras, em toda equação polinomial, transpor um termo de um membro para outro, trocando o sinal de seu coeficiente, não altera o conjunto solução.
  2. Multiplicar os dois membros pelo mesmo número complexo k com $k \neq 0$
- Toda equação polinomial $P(x) = f(x) - g(x) = 0$ é redutível à forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 = 0$$

Número de Raízes

- **Teorema Fundamental da Álgebra - T.F.A.** Todo polinômio de grau $n \geq 1$ admite ao menos uma raiz complexa.
- **Teorema da Decomposição**. Todo polinômio P de grau $n \geq 1$ pode ser decomposto em n fatores do primeiro grau:

$$P = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\dots(x - r_n)$$

  em que $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ são as raízes de P.
- **Exemplo**. Fatorar o polinômio $P = 5x^5 - 5x^4 - 80x + 80$ sabendo que suas raízes são: $\{1, -2, 2, -2i, 2i\}$.

  Resposta:$P = 5(x - 1)(x + 2)(x - 2)(x + 2i)(x - 2i)$

Número de Raízes

- **Exemplo**. Dada a equação polinomial:
  $(x-1)(x^3-4x+a)=(x^2-1)^2$, pede-se:
  1. colocá-la na forma $P(x)=0$
  2. obter a para que 2 seja uma das raízes da equação.
- **Resposta**: $x^3+2x^2-(4+a)x+(a+1)=0$ e $a=9$

Número de Raízes

- **Exercícios**. Resolver as seguintes equações polinomiais:
  1. $(x+1)(x^2-x+1) = (x-1)^3$
     Resposta: $S = \{\frac{3+i\sqrt{15}}{6}, \frac{3-i\sqrt{15}}{6}\}$
  2. $(x+2)(x+3) + (x-2)(1-x) = 4(1+2x)$
     Resposta: $S = \mathbb{C}$

Relações de Girard

- Dada a equação
  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$
  $(a \neq 0)$
  cujas raízes são r_1, r_2, r_3, ..., r_n, temos as seguintes relações entre raízes e coeficientes:
  1. $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$
  2. $r_1 r_2 + r_1 r_3 + \ldots + r_{n-1} r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$
  3. $r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \ldots + r_{n-2} r_{n-1} r_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$

     ...
  4. $r_1 r_2 r_3 \ldots r_n = (-1)^n (\frac{a_0}{a_n})$

Relações de Girard

- **Exemplo**. Resolver a equação $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$, sabendo que a soma de duas raízes é 1.
- **Solução**:
    1. $r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{a_2}{a_3} = 6$
    2. $r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = \frac{a_1}{a_3} = 3$
    3. $r_1 r_2 r_3 = -\frac{a_0}{a_3} = -10$
    4. $r_1 + r_2 = 1$
    5. $r_1 r_2 = -\frac{10}{5} = -2$

       em (1.) $\longrightarrow 1 + r_3 = 6 \longrightarrow r_3 = 5$

       Usando os itens (4.) e (5.), $r_1 = -1$ e $r_2 = 2$, portanto $S = \{-1, 2, 5\}$

Relações de Girard

- **Exercícios**. Calcular a soma e o produto das raízes das seguintes equações:
  1. $x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$
  2. $x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 11x + 1 = 0$
  3. $2x^3 + 4x^2 + 7x + 10i = 0$
- **Respostas.**
  1. Soma = 2, produto = 5
  2. Soma = -7, produto = 1
  3. Soma = -2, produto = -5i

Raízes Complexas

- **Teorema**. Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite a raiz $z = \alpha + \beta i$ ($\beta \neq 0$) com multiplicidade p, então também admite a raiz $\overline{z} = \alpha - \beta i$ com multiplicidade p.
- Observação: este teorema só se aplica a equações polinomiais de coeficientes reais.
- **Exemplo**. Resolver a equação $x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x - 3 = 0$, sabendo que uma das raízes é $i\sqrt{3}$.

  Solução. Temos que $-i\sqrt{3}$ também é raiz, portanto o primeiro membro é divisível por $(x - i\sqrt{3})(x + i\sqrt{3}) = x^2 + 3$. Dividindo a equação, temos:
  $$(x^2 + 3)(x^2 + x - 1) = 0$$
  e obtemos as duas raízes restantes:
  $$x^2 + x - 1 = 0 \longrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Raízes Complexas

- **Exercícios**.
  1. Resolver a equação $x^4 - 4x^2 + 8x + 35 = 0$, sabendo que uma das raízes é $2 + i\sqrt{3}$.
- **Resposta**: $S = \{2 + i\sqrt{3}, 2 - i\sqrt{3}, -2 + i, -2 - i\}$

Raízes Reais

- **Teorema de Bolzano**. Sejam $P(x) = 0$ uma equação polinomial com coeficientes reais e $]a; b[$ um intervalo real aberto.
    1. Se $P(a)$ e $P(b)$ têm mesmo sinal, então existe um número par de raízes reais ou não existem raízes reais da equação em $]a; b[$.
    2. Se $P(a)$ e $P(b)$ têm sinais contrários, então existem um número ímpar de raízes reais da equação em $]a; b[$.

Raízes Reais

- **Exemplo**. Quantas raízes reais a equação $x^3 + 5x^2 - 3x + 4 = 0$ pode apresentar no intervalo $]0; 1[$?

  Solução. Temos $P(x) = x^3 + 5x^2 - 3x + 4$, então

  $P(0) = 0^3 + 5(0)^2 - 3(0) + 4 = 4 > 0$

  $P(1) = 1^3 + 5(1)^2 - 3(1) + 4 = 7 > 0$

  Como $P(0)$ e $P(1)$ são positivos, a equação pode ter duas ou nenhuma raiz real no intervalo dado.

Raízes Reais

- **Exercício**. Quantas são as raízes reais da equação $x^3 - 10x^2 + 5x - 1 = 0$, no intervalo $]0; 3[$?

  Resposta: nenhuma
- **Exercício**. Dada a função polinomial $f(x) = x^3 + 2x$, estabelecer o número de raízes reais da equação $f(x) = 0$.
- **Resposta**: 1 raiz real, 0.

Raízes Racionais

- Se uma equação polinomial de coeficientes inteiros

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$
$$(a_n \neq 0),$$

  admite uma raiz racional $\frac{p}{q}$ (onde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}_+^*$ e p e q são primos entre si), então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

- Isso significa que:
  1. $a_n p^n$ é divisível por q;
  2. a_n é divisível por q;
  3. $a_0 q^n$ é divisível por p;
  4. a_0 é divisível por p.

Raízes Racionais

- **Exemplo**. Quais são as raízes racionais da equação: $2x^6 - 5x^5 + 4x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 30x - 12 = 0$?
- **Solução**. As possíveis raízes racionais dessa equação têm a forma $\frac{p}{q}$ onde p é divisor de -12 e q é divisor positivo de 2, isto é:

  $$p \in \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, -6, 6, -12, 12\} \text{ e } q \in \{1, 2\}$$

  Assim, se a equação tiver raízes racionais, essas raízes estão no conjunto:

  $$\{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, -6, 6, -12, 12, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\}$$

  Esse conjunto foi obtido da tabela seguinte:

Raízes Racionais

q \ p	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-6	6	-12	12
1	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-6	6	-12	12
2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	-2	2	-3	3	-6	6

Fazendo a verificação para os 16 elementos do conjunto, teríamos que as únicas raízes racionais são 2 e $\frac{1}{2}$, pois:

- $P(2) = 2(2)^6 - 5(2)^5 + 4(2)^4 - 5(2)^3 - 10(2)^2 + 30(2) - 12 =$
  $= 128 - 160 + 64 - 40 - 40 + 60 - 12 = 0$
- $P(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2})^6 - 5(\frac{1}{2})^5 + 4(\frac{1}{2})^4 - 5(\frac{1}{2})^3 - 10(\frac{1}{2})^2 + 30(\frac{1}{2}) - 12 =$
  $= \frac{1}{32}$ - $\frac{5}{32} + \frac{1}{4} - \frac{5}{8} - \frac{5}{2} + 15 - 12 = \frac{1-5+8-20-80+96}{32} = 0$

e para os demais elementos $P(x) \neq 0$

Raízes Racionais

- **Exercícios**
  1. Quais são as raízes inteiras da equação $x^3 + 3x^2 - 3x - 9 = 0$?
     Resposta: -3
  2. Resolver a equação: $2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 4x + 3 = 0$
     Resposta: $S = \{3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$

Roteiro

Referências

- Fundamentos de matemática elementar: Complexos, Polinômios, Equações. Gelson Iezzi. 5 edição, 1992. Atual Editora LTDA.