Gabarito Da Sexta Lista de Exercícios - Matemática Discreta

1. A operação é comutativa, mas não é associativa.

2.
   a. $x \circ y = 2.x + y$, não é comutativa e nem é associativa.
   b. $x \circ y = x + y$, é comutativa e é associativa.

3.
   a. é um semigrupo, não tem elemento neutro.
   b. não é semigrupo, pois não é associativa.
   c. não é semigrupo, S não é fechada sob a operação $\circ$ (ou seja a operação dentro do conjunto S não retorna um elemento que pertence ao conjunto S).
   d. é um semigrupo, não possui elemento neutro.

4. A operação e fechada sobre $M^0_2(\mathbb{Z})$, pois:

   $$\begin{vmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & w \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & w+z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \in M^0_2(\mathbb{Z}).$$

   a multiplicação de matrizes é associativa.
   tem elemento neutro:

   $$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \in M^0_2(\mathbb{Z}).$$

   é possui inversa:

   o inverso de $\begin{vmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ é $\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \in M^0_2(\mathbb{Z}).$

   assim a operação $\circ$ sobre $M^0_2(\mathbb{Z})$ é um grupo.

5.
   a. $x + (x . y) = x. (x + y)$ (propiedade distributiva e identidade)
   $= x . x + x . y$ (propriedade distributiva)
   $= x . 1 + x . y$ (propriedade de identidade)
   $= x(1+y)$ (propriedade distributiva)
   $= x.1$ (propiedade identidade)
   $= x$
   b. $x + y' = x + (x'.y + x.y)'$
   $= x + (y.(x'+x))'$ (propiedade distributiva)
   $= x + (y.1)'$ (propiedade complementativa)
   $= x + y'$ (propiedade identidade)

6. $x \circ y = x.y' + y.x'$ (definição de $\circ$)
$= y.x' + x.y'$ (propiedade comutativa)
$= y \circ x$ (definição de $\circ$)

7. pelo teorema da unicidade temos que:
Para qualquer x na álgebra booleana, se existir um elemento x, tal que $x+x_1 =1$ e $x.x_1 = 0$, então $x_1 = x'$.

assim, tendo $x = 0$ e $x_1 = 1$ temos:

$0 + 1 = 1$ e $0.1 = 0$, então $1' = 0$.

e tendo $x = 1$ e $x_1 = 0$ temos:

$1 + 0 = 1$ e $1.0 = 0$, então $0' = 1$.