Funções do 2º Grau

Prof. Eanes Torres Pereira

Fundamentos de Matemática Para Ciência da Computação - I

Roteiro

1. Funções do 2º Grau

2. Inequações do 2º Grau

Funções do 2º Grau

- Uma aplicação f de R em R recebe o nome de função quadrática ou do segundo grau quando associa a cada $x \in \mathrm{R}$ o elemento $(ax^2 + bx + c) \in \mathrm{R}$, em que a, b, c são números reais dados e $a \neq 0$.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$$

- O gráfico da função quadrática é uma parábola.

Concavidade

- A parábola representativa da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ pode ter concavidade voltada para cima ou voltada para baixo:
  - Se $a > 0$, a concavidade da parábola está voltada para cima.
  - Se $a < 0$, a concavidade da parábola está voltada para baixo.

Zeros ou Raízes

- As soluções da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, são dadas por:
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
Com $\Delta = b^2 - 4ac$
- Quanto ao número de raízes temos três casos a considerar:
    1. $\Delta > 0$, a equação apresentará duas raízes distintas;
    2. $\Delta = 0$, a equação apresentará duas raízes iguais;
    3. $\Delta < 0$, a equação não apresenta raízes reais.

Exercícios

Determine os zeros reais das funções:

1. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Exercícios

Determine os zeros reais das funções:

1. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

   Resposta: $x = 1$ ou $x = 2$

2. $f(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1$

Exercícios

Determine os zeros reais das funções:

1. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

   Resposta: $x = 1$ ou $x = 2$
2. $f(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1$

   Resposta: $x = -\frac{1}{2}$ ou $x = 2$
3. $f(x) = x^2 + (1 - \sqrt{3})x - \sqrt{3}$

Exercícios

Determine os zeros reais das funções:

1. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

   Resposta: $x = 1$ ou $x = 2$
2. $f(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1$

   Resposta: $x = -\frac{1}{2}$ ou $x = 2$
3. $f(x) = x^2 + (1 - \sqrt{3})x - \sqrt{3}$

   Resposta: $x = -1$ ou $x = \sqrt{3}$

Vértice da Parábola

- O ponto $V(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ é chamado de vértice da parábola representativa da função quadrática.
- **Exercício**. Determine os vértices das parábolas:
  1. $y = -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

Vértice da Parábola

- O ponto $V(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ é chamado de vértice da parábola representativa da função quadrática.
- **Exercício**. Determine os vértices das parábolas:
  1. $y = -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
     Resposta: $V(\frac{1}{4}, \frac{25}{16})$
  2. $y = x^2 - \frac{7}{3}x - 2$

Vértice da Parábola

- O ponto $V(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ é chamado de vértice da parábola representativa da função quadrática.
- **Exercício**. Determine os vértices das parábolas:
  1. $y = -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
     Resposta: $V(\frac{1}{4}, \frac{25}{16})$
  2. $y = x^2 - \frac{7}{3}x - 2$
     Resposta: $V(\frac{7}{6}, -\frac{121}{36})$

Esboço do Gráfico da Função Quadrática

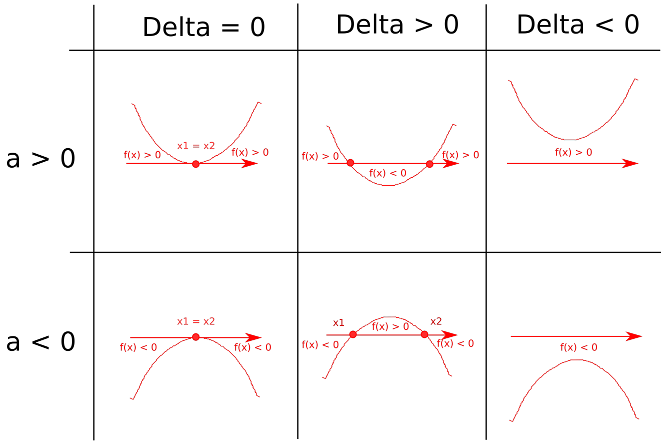
- Para fazermos o esboço do gráfico da função do segundo grau, podemos seguir os seguintes critérios:
  1. Determinar o eixo de simetria, $x = \frac{-b}{2a}$;
  2. Determinar a concavidade: para cima ($a > 0$), ou para baixo ($a < 0$)
  3. Determinar os zeros da função usando a fórmula de Bhaskara.
  4. Determinar o vértice da parábola.

Exercícios

Esboce o gráfico das seguintes funções em $\mathbb{R}$:

1. $y = x^2 - 2x - 3$
2. $y = 4x^2 - 10x + 4$
3. $y = -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Sinal da Função Quadrática



Exercícios

- Estude o sinal das seguintes funções:
  1. $y = x^2 - 2x - 3$
  2. $y = 4x^2 - 10x + 4$
  3. $y = -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Roteiro

1. Funções do 2º Grau

2. Inequações do 2º Grau

Inequações

- Se $a \neq 0$, as inequações $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ e $ax^2 + bx + c \leq 0$ são denominadas inequações do segundo grau.
- Por exemplo, resolver a inequação $ax^2 + bx + c > 0$ é responder à pergunta: "existe x real tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ seja positiva?"

Inequações - Exemplo

- Resolva a inequação $x^2 - 2x + 2 > 0$.

  Solução. Considerando $f(x) = x^2 - 2x + 2$, temos $a = 1 > 0$ e $\Delta = -4 < 0$. Então, $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

  Como a inequação é $f(x) > 0$, obtemos: $S = \mathbb{R}$

Inequações - Exercícios

- Resolva as inequações em $\mathbb{R}$:
  1. $x^2 - 2x + 1 \leq 0$

Inequações - Exercícios

- Resolva as inequações em $\mathbb{R}$:
  1. $x^2 - 2x + 1 \leq 0$
     Resposta: $S = \{1\}$
  2. $-2x^2 + 3x + 2 \geq 0$

Inequações - Exercícios

- Resolva as inequações em $\mathbb{R}$:
  1. $x^2 - 2x + 1 \leq 0$
     Resposta: $S = \{1\}$
  2. $-2x^2 + 3x + 2 \geq 0$
     Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} | -\frac{1}{2} \leq x \leq 2\}$
  3. $(x^2 - x - 2)(-x^2 + 4x - 3) > 0$

Inequações - Exercícios

- Resolva as inequações em $\mathbb{R}$:
  1. $x^2 - 2x + 1 \leq 0$
     Resposta: $S = \{1\}$
  2. $-2x^2 + 3x + 2 \geq 0$
     Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} | -\frac{1}{2} \leq x \leq 2\}$
  3. $(x^2 - x - 2)(-x^2 + 4x - 3) > 0$
     Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 1 \text{ ou } 2 < x < 3\}$
  4. $(1 - 4x^2)(2x^2 + 3x) > 0$

Inequações - Exercícios

- Resolva as inequações em $\mathbb{R}$:
  1. $x^2 - 2x + 1 \leq 0$
     Resposta: $S = \{1\}$
  2. $-2x^2 + 3x + 2 \geq 0$
     Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} | -\frac{1}{2} \leq x \leq 2\}$
  3. $(x^2 - x - 2)(-x^2 + 4x - 3) > 0$
     Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 1 \text{ ou } 2 < x < 3\}$
  4. $(1 - 4x^2)(2x^2 + 3x) > 0$
     Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} | -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2} \text{ ou } 0 < x < \frac{1}{2}\}$
  5. $\frac{2x^2+x-1}{2x-x^2} \leq 0$

Inequações - Exercícios

- Resolva as inequações em $\mathbb{R}$:
  1. $x^2 - 2x + 1 \leq 0$
     Resposta: $S = \{1\}$
  2. $-2x^2 + 3x + 2 \geq 0$
     Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} | -\frac{1}{2} \leq x \leq 2\}$
  3. $(x^2 - x - 2)(-x^2 + 4x - 3) > 0$
     Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 1 \text{ ou } 2 < x < 3\}$
  4. $(1 - 4x^2)(2x^2 + 3x) > 0$
     Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} | -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2} \text{ ou } 0 < x < \frac{1}{2}\}$
  5. $\frac{2x^2+x-1}{2x-x^2} \leq 0$
     Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -1 \text{ ou } 0 < x \leq \frac{1}{2} \text{ ou } x > 2\}$
  6. $\frac{x^2+3x-16}{-x^2+7x-10} \geq 1$

Inequações - Exercícios

- Resolva as inequações em $\mathbb{R}$:
  1. $x^2 - 2x + 1 \leq 0$
     Resposta: $S = \{1\}$
  2. $-2x^2 + 3x + 2 \geq 0$
     Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} | -\frac{1}{2} \leq x \leq 2\}$
  3. $(x^2 - x - 2)(-x^2 + 4x - 3) > 0$
     Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 1 \text{ ou } 2 < x < 3\}$
  4. $(1 - 4x^2)(2x^2 + 3x) > 0$
     Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} | -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2} \text{ ou } 0 < x < \frac{1}{2}\}$
  5. $\frac{2x^2+x-1}{2x-x^2} \leq 0$
     Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -1 \text{ ou } 0 < x \leq \frac{1}{2} \text{ ou } x > 2\}$
  6. $\frac{x^2+3x-16}{-x^2+7x-10} \geq 1$
     Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x < 2 \text{ ou } 3 \leq x < 5\}$

Referências

- Fundamentos de Matemática Elementar. Gelson Iezzi e Carlos Murakami. Volume 1.