Sequências

Prof. Eanes Torres Pereira

FMCC1

Roteiro

Introdução

- **Definição 1**. Chama-se *sequência finita* ou n-upla toda aplicação f do conjunto $N_n^* = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ em R.
- **Definição 2**. Chama-se *sequência infinita* toda aplicação f de N^* em R.
- Doravante, indicaremos uma sequência f anotando apenas a imagem de f.
- **Exemplo 1**. A sequência finita $(1, 2, 3, 4, 6, 12)$ é a sequência dos divisores inteiros positivos de 12 dispostos em ordem crescente.
- **Exemplo 2**. $(2, 4, 6, 8, \ldots, 2i, \ldots)$ é sequência infinita dos múltiplos inteiros positivos de 2.

Lei de Formação

- Interessam à Matemática as sequências em que os termos se sucedem obedecendo a certa regra, isto é, aquelas que têm uma lei de formação. Esta pode ser apresentada de três maneiras:
  - **Fórmula de recorrência**. São dadas duas regras: uma para identificar o primeiro termo (a_1) e outra para calcular cada termo (a_n) a partir do antecedente (a_{n-1}).
  - **Expressando cada termo em função de sua posição**. É dada uma fórmula que expressa a_n em função de n.
  - **Por propriedade dos termos**. É dada uma propriedade que os termos da sequência devem apresentar.
- **Exemplo 3**. Escrever a sequência finita f cujos termos obedecem à seguinte fórmula de recorrência: $a_1 = 2$ e $a_n = a_{n-1} + 3, \forall n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Lei de Formação

- Interessam à Matemática as sequências em que os termos se sucedem obedecendo a certa regra, isto é, aquelas que têm uma lei de formação. Esta pode ser apresentada de três maneiras:
  - **Fórmula de recorrência**. São dadas duas regras: uma para identificar o primeiro termo (a_1) e outra para calcular cada termo (a_n) a partir do antecedente (a_{n-1}).
  - **Expressando cada termo em função de sua posição**. É dada uma fórmula que expressa a_n em função de n.
  - **Por propriedade dos termos**. É dada uma propriedade que os termos da sequência devem apresentar.
- **Exemplo 3**. Escrever a sequência finita f cujos termos obedecem à seguinte fórmula de recorrência: $a_1 = 2$ e $a_n = a_{n-1} + 3, \forall n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

  Resposta: $f = (2, 5, 8, 11, 14, 17)$.

Lei de Formação

- **Exercício 1**. Escrever os cinco termos iniciais da sequência infinita g dada pela seguinte fórmula de recorrência: $b_1 = 1$ e $b_n = 3 \cdot b_{n-1}, \forall n \in N \ e \ n \geq 2$.

Lei de Formação

- **Exercício 1**. Escrever os cinco termos iniciais da sequência infinita g dada pela seguinte fórmula de recorrência: $b_1 = 1$ e $b_n = 3 \cdot b_{n-1}, \forall n \in N \text{ } e \text{ } n \geq 2$. **Resp.:** $g = (1, 3, 9, 27, 81, \ldots)$
- **Exemplo 4**. Escrever a sequência finita f cujos termos obedecem à lei $a_n = 2^n$, $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Lei de Formação

- **Exercício 1**. Escrever os cinco termos iniciais da sequência infinita g dada pela seguinte fórmula de recorrência: $b_1 = 1$ e $b_n = 3 \cdot b_{n-1}, \forall n \in N \ e \ n \geq 2$. **Resp.:** $g = (1, 3, 9, 27, 81, \ldots)$
- **Exemplo 4**. Escrever a sequência finita f cujos termos obedecem à lei $a_n = 2^n$, $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

  Resp.: $f = (2, 4, 8, 16)$
- **Exercício 2**. Escrever os cinco termos iniciais da sequência infinita g em que os termos verificam a relação $b_n = 3n + 1, \forall n \in N^*$.

Lei de Formação

- **Exercício 1**. Escrever os cinco termos iniciais da sequência infinita g dada pela seguinte fórmula de recorrência: $b_1 = 1$ e $b_n = 3 \cdot b_{n-1}, \forall n \in N \ e \ n \geq 2$. **Resp.:** $g = (1, 3, 9, 27, 81, \ldots)$
- **Exemplo 4**. Escrever a sequência finita f cujos termos obedecem à lei $a_n = 2^n$, $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

  Resp.: $f = (2, 4, 8, 16)$
- **Exercício 2**. Escrever os cinco termos iniciais da sequência infinita g em que os termos verificam a relação $b_n = 3n + 1, \forall n \in N^*$. **Resp.:** $g = (4, 7, 10, 13, 16, \ldots)$
- **Exemplo 5**. Escrever a sequência finita f de seis termos em que cada termo é igual ao número de divisores inteiros do respectivo índice.

Lei de Formação

- **Exercício 1**. Escrever os cinco termos iniciais da sequência infinita g dada pela seguinte fórmula de recorrência: $b_1 = 1$ e $b_n = 3 \cdot b_{n-1}, \forall n \in N \ e \ n \geq 2$. **Resp.:** $g = (1, 3, 9, 27, 81, \ldots)$
- **Exemplo 4**. Escrever a sequência finita f cujos termos obedecem à lei $a_n = 2^n$, $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

  Resp.: $f = (2, 4, 8, 16)$
- **Exercício 2**. Escrever os cinco termos iniciais da sequência infinita g em que os termos verificam a relação $b_n = 3n + 1, \forall n \in N^*$. **Resp.:** $g = (4, 7, 10, 13, 16, \ldots)$
- **Exemplo 5**. Escrever a sequência finita f de seis termos em que cada termo é igual ao número de divisores inteiros do respectivo índice. **Resp.:** $f = (2, 4, 4, 6, 4, 8)$.

Lei de Formação

- **Exercício 3**. Escrever os cinco termos iniciais da sequência infinita g formada pelos números primos positivos colocados em ordem crescente.

Lei de Formação

- **Exercício 3**. Escrever os cinco termos iniciais da sequência infinita g formada pelos números primos positivos colocados em ordem crescente. **Resp.:** $g = (2, 3, 5, 7, 11, \ldots)$
- **Exercício 4**. Escreva os seis termos iniciais da sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência: $a_1 = 5$ e $a_n = a_{n-1} + 2$, $\forall n \geq 2$.

Lei de Formação

- **Exercício 3**. Escrever os cinco termos iniciais da sequência infinita g formada pelos números primos positivos colocados em ordem crescente. **Resp.:** $g = (2, 3, 5, 7, 11, \ldots)$
- **Exercício 4**. Escreva os seis termos iniciais da sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência: $a_1 = 5$ e $a_n = a_{n-1} + 2$, $\forall n \geq 2$. **Resp.:** $(5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots)$
- **Exercício 5**. Escreva os seis termos iniciais da sequência dada pela seguinte lei: $a_n = 3n - 2, \forall n \geq 1$.

Lei de Formação

- **Exercício 3**. Escrever os cinco termos iniciais da sequência infinita g formada pelos números primos positivos colocados em ordem crescente. **Resp.:** $g = (2, 3, 5, 7, 11, \ldots)$
- **Exercício 4**. Escreva os seis termos iniciais da sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência: $a_1 = 5$ e $a_n = a_{n-1} + 2$, $\forall n \geq 2$. **Resp.:** $(5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots)$
- **Exercício 5**. Escreva os seis termos iniciais da sequência dada pela seguinte lei: $a_n = 3n - 2, \forall n \geq 1$. **Resp.:** $(1, 4, 7, 10, 13, 16, \ldots)$
- **Exercício 6**. Descreva por meio de uma fórmula de recorrência a sequência: $(3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots)$

Lei de Formação

- **Exercício 3**. Escrever os cinco termos iniciais da sequência infinita g formada pelos números primos positivos colocados em ordem crescente. **Resp.:** $g = (2, 3, 5, 7, 11, \ldots)$
- **Exercício 4**. Escreva os seis termos iniciais da sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência: $a_1 = 5$ e $a_n = a_{n-1} + 2$, $\forall n \geq 2$. **Resp.:** $(5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots)$
- **Exercício 5**. Escreva os seis termos iniciais da sequência dada pela seguinte lei: $a_n = 3n - 2, \forall n \geq 1$. **Resp.:** $(1, 4, 7, 10, 13, 16, \ldots)$
- **Exercício 6**. Descreva por meio de uma fórmula de recorrência a sequência: $(3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots)$. **Resp.:** $a_1 = 3$ e $a_n = a_{n-1} + 3, \forall n \geq 2$

Roteiro

Progressão Aritmética

- **Definição 3**. Chama-se *progressão aritmética* (P.A.) uma sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + r, \forall n \in N, n \geq 2 \end{cases}$$

em que a e r são números reais dados.

- Exemplos de progressões aritméticas:

$$f_1 = (1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$$
$$f_2 = (0, -2, -4, -6, -8, \ldots)$$
$$f_3 = (4, 4, 4, 4, \ldots)$$

Classificação

- As progressões aritméticas podem ser classificadas em três categorias:
  1) *crescentes* são as P.A. em que cada termo é maior que o anterior.
  2) *constantes* são as P.A. em que cada termo é igual ao anterior.
  3) *decrescentes* são as P.A. em que cada termo é menor que o anterior.
- **Exercício 7**. Determine x de modo que $(x, 2x + 1, 5x + 7)$ seja uma P.A.

Classificação

- As progressões aritméticas podem ser classificadas em três categorias:
    1) *crescentes* são as P.A. em que cada termo é maior que o anterior.
    2) *constantes* são as P.A. em que cada termo é igual ao anterior.
    3) *decrescentes* são as P.A. em que cada termo é menor que o anterior.
- **Exercício 7**. Determine x de modo que $(x, 2x+1, 5x+7)$ seja uma P.A. **Resp.** $x = -\frac{5}{2}$
- **Exercício 8**. Obtenha uma P.A. de três termos tais que sua soma seja 24 e seu produto seja 440.

Classificação

- As progressões aritméticas podem ser classificadas em três categorias:
  1) *crescentes* são as P.A. em que cada termo é maior que o anterior.
  2) *constantes* são as P.A. em que cada termo é igual ao anterior.
  3) *decrescentes* são as P.A. em que cada termo é menor que o anterior.
- **Exercício 7**. Determine x de modo que $(x, 2x+1, 5x+7)$ seja uma P.A. **Resp.** $x = -\frac{5}{2}$
- **Exercício 8**. Obtenha uma P.A. de três termos tais que sua soma seja 24 e seu produto seja 440. **x = 8 e r =** ± 3**, (5, 8, 11) ou (11, 8, 5)**.
- **Exercício 9**. Obtenha uma P.A. de 4 termos inteiros em que a soma dos termos é 32 e o produto 3465.

Classificação

- As progressões aritméticas podem ser classificadas em três categorias:
  1) *crescentes* são as P.A. em que cada termo é maior que o anterior.
  2) *constantes* são as P.A. em que cada termo é igual ao anterior.
  3) *decrescentes* são as P.A. em que cada termo é menor que o anterior.
- **Exercício 7**. Determine x de modo que $(x, 2x + 1, 5x + 7)$ seja uma P.A. **Resp.** $x = -\frac{5}{2}$
- **Exercício 8**. Obtenha uma P.A. de três termos tais que sua soma seja 24 e seu produto seja 440. **x = 8 e r =** ± 3**, (5, 8, 11) ou (11, 8, 5)**.
- **Exercício 9**. Obtenha uma P.A. de 4 termos inteiros em que a soma dos termos é 32 e o produto 3465. **Resp.:** (5, 7, 9, 11) ou (11, 9, 7, 5).

Termo Geral

- **Exercício 10**. Obtenha uma P.A. de 5 termos, sabendo que sua soma é 25 e a soma de seus cubos é 3025.

Termo Geral

- **Exercício 10**. Obtenha uma P.A. de 5 termos, sabendo que sua soma é 25 e a soma de seus cubos é 3025. **Resp.:** (-3, 1, 5, 9, 13) ou (13, 9, 5, 1, -3).
- **Teorema 1**. Na P.A. em que o primeiro termo é a_1 e a razão é r, o n-ésimo termo é $a_n = a_1 + (n-1)r$.
- **Exercício 11**. O primeiro termo a de uma progressão aritmética de razão 13 satisfaz $0 \leq a \leq 10$. Se um dos termos da progressão é 35, determine o valor de a.

Termo Geral

- **Exercício 10**. Obtenha uma P.A. de 5 termos, sabendo que sua soma é 25 e a soma de seus cubos é 3025. **Resp.:** (-3, 1, 5, 9, 13) ou (13, 9, 5, 1, -3).
- **Teorema 1**. Na P.A. em que o primeiro termo é a_1 e a razão é r, o n-ésimo termo é $a_n = a_1 + (n-1)r$.
- **Exercício 11**. O primeiro termo a de uma progressão aritmética de razão 13 satisfaz $0 \leq a \leq 10$. Se um dos termos da progressão é 35, determine o valor de a. **Resp.:** a = 9
- **Exercício 12**. A sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ é uma progressão aritmética de razão 2 e primeiro termo igual a 1. A função f definida por $f(x) = ax + b$ é tal que $f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots, f(a_n)$ é uma progressão aritmética de razão 6 e primeiro termo igual a 4. Determine o valor de $f(2)$.

Termo Geral

- **Exercício 10**. Obtenha uma P.A. de 5 termos, sabendo que sua soma é 25 e a soma de seus cubos é 3025. **Resp.:** (-3, 1, 5, 9, 13) ou (13, 9, 5, 1, -3).
- **Teorema 1**. Na P.A. em que o primeiro termo é a_1 e a razão é r, o n-ésimo termo é $a_n = a_1 + (n-1)r$.
- **Exercício 11**. O primeiro termo a de uma progressão aritmética de razão 13 satisfaz $0 \leq a \leq 10$. Se um dos termos da progressão é 35, determine o valor de a. **Resp.:** a = 9
- **Exercício 12**. A sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ é uma progressão aritmética de razão 2 e primeiro termo igual a 1. A função f definida por $f(x) = ax + b$ é tal que $f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots, f(a_n)$ é uma progressão aritmética de razão 6 e primeiro termo igual a 4. Determine o valor de $f(2)$. **Resp.:** f(2) = 7

Soma

- **Teorema 2**. A soma dos n primeiros números inteiros positivos é $\frac{n(n+1)}{2}$.
- **Teorema 3**. Em toda P.A. tem-se: $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}r$
- **Teorema 4**. Em toda P.A. tem-se: $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$
- **Exercício 13**. Calcule a soma dos 25 termos iniciais da P.A. $(1, 7, 13, \ldots)$

Soma

- **Teorema 2**. A soma dos n primeiros números inteiros positivos é $\frac{n(n+1)}{2}$.
- **Teorema 3**. Em toda P.A. tem-se: $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}r$
- **Teorema 4**. Em toda P.A. tem-se: $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$
- **Exercício 13**. Calcule a soma dos 25 termos iniciais da P.A. $(1, 7, 13, \ldots)$ **Resp.:** $S_{25} = 1825$
- **Exercício 14**. Obtenha a soma dos 200 primeiros termos da sequência dos números ímpares positivos. Calcule também a soma dos n termos iniciais da mesma sequência.

Soma

- **Teorema 2**. A soma dos n primeiros números inteiros positivos é $\frac{n(n+1)}{2}$.
- **Teorema 3**. Em toda P.A. tem-se: $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}r$
- **Teorema 4**. Em toda P.A. tem-se: $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$
- **Exercício 13**. Calcule a soma dos 25 termos iniciais da P.A. $(1, 7, 13, \ldots)$ **Resp.:** $S_{25} = 1825$
- **Exercício 14**. Obtenha a soma dos 200 primeiros termos da sequência dos números ímpares positivos. Calcule também a soma dos n termos iniciais da mesma sequência. **Resp.:** $S_{200} = 40000$ e $S_n = n^2$

Soma

- **Exercício 15**. Determine a P.A. em que o vigésimo termo é 2 e a soma dos 50 termos iniciais é 650.

Soma

- **Exercício 15**. Determine a P.A. em que o vigésimo termo é 2 e a soma dos 50 termos iniciais é 650. **Resp.:** $(-36, -34, -32, \ldots)$
- **Exercício 16**. Qual é a soma dos múltiplos positivos de 5 formados por 3 algarismos?

Soma

- **Exercício 15**. Determine a P.A. em que o vigésimo termo é 2 e a soma dos 50 termos iniciais é 650. **Resp.:** $(-36, -34, -32, \ldots)$
- **Exercício 16**. Qual é a soma dos múltiplos positivos de 5 formados por 3 algarismos? **Resp.: 98550**.
- **Exercício 17**. Obtenha uma P.A. em que a soma dos n primeiros termos é $n^2 + 2n$ para todo n natural.

Soma

- **Exercício 15**. Determine a P.A. em que o vigésimo termo é 2 e a soma dos 50 termos iniciais é 650. **Resp.:** $(-36, -34, -32, \ldots)$
- **Exercício 16**. Qual é a soma dos múltiplos positivos de 5 formados por 3 algarismos? **Resp.: 98550**.
- **Exercício 17**. Obtenha uma P.A. em que a soma dos n primeiros termos é $n^2 + 2n$ para todo n natural. **Resp.:** $(3, 5, 7, 9, \ldots)$

Roteiro

Progressão Geométrica

- **Definição 4**. Chama-se *progressão geométrica* (P.G.) uma sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} \cdot q, \forall n \in N, n \geq 2 \end{cases}$$

  em que a e q são números reais dados.
- **Exemplos**:
  - $f_1 = (1, 2, 4, 8, 16, \ldots)$
  - $f_2 = (-1, -2, -4, -8, -16, \ldots)$
  - $f_3 = (1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots)$

Progressão Geométrica - Classificação

- As progressões geométricas podem ser classificadas em cinco categorias:
  1) *crescentes* são as P.G. em que cada termo é maior que o anterior.
  2) *constantes* são as P.G. em que cada termo é igual ao anterior.
  3) *decrescentes* são as P.G. em que cada termo é menor que o anterior.
  4) *alternantes* são as P.G. em que cada termo tem sinal contrário ao do termo anterior.
  5) *estacionárias* são as P.G. em que $a_1 \neq 0$ e $a_2 = a_3 = a_4 = \ldots = 0$.

Interpolação Geométrica

- **Exercício 18**. Qual é o número que deve ser somado a 1, 9 e 15 para termos, nessa ordem, três números em P.G.?

Interpolação Geométrica

- **Exercício 18**. Qual é o número que deve ser somado a 1, 9 e 15 para termos, nessa ordem, três números em P.G.? **Resp.: -33**
- Interpolar k meios geométricos entre os números a e b significa obter uma P.G. de extremos $a_1 = a$ e $a_n = b$, com $n = k + 2$ termos. Para determinar os meios dessa P.G. é necessário calcular a razão. Assim, temos:

$$q = \sqrt[k+1]{\frac{b}{a}}$$

- **Exemplo 6**. Interpolar 8 meios geométricos (reais) entre 5 e 2560. Formemos uma P.G. com 10 termos em que $a_1 = 5$ e $a_{10} = 2560$.
  Solução. $a_1 0 = a_1 \cdot q^9$. $q = \sqrt[9]{\frac{a_{10}}{a_1}} = \sqrt[9]{512} = 2$. Então a P.G. é (5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, 2560)

Produto dos n Termos da P.G.

- **Exercício 19**. Qual é o sexto termo de uma progressão geométrica, na qual dois meios geométricos estão inseridos entre 3 e -24, tomados nessa ordem?

Produto dos n Termos da P.G.

- **Exercício 19**. Qual é o sexto termo de uma progressão geométrica, na qual dois meios geométricos estão inseridos entre 3 e -24, tomados nessa ordem? **Resp.:** $a_6 = -96$
- **Teorema 5**. Em toda P.G. tem-se que o produto dos n termos iniciais é dado por: $P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$
- **Exercício 20**. Em cada uma das P.G. abaixo, calcule o produto dos n termos iniciais:
  - a) $(1, 2, 4, 8, \ldots)$ e $n = 10$. **Resp.:** 2^{45}
  - b) $(-2, -6, -18, -54, \ldots)$ e $n = 20$. **Resp.:** $2^{20} \cdot 3^{190}$
  - c) $((-3)^{25}, (-3)^{24}, (-3)^{23}, \ldots)$ e $n = 51$ **Resp.: 1**
- **Exercício 21**. Calcule a soma
  $S = log_2 a + log_2 2a + log_2 4a + \ldots + log_2 2^n a$

  Resposta: $s = log_2[a^{n+1} \cdot 2^{\frac{n(n+1)}{2}}]$

Soma dos n Termos da P.G.

- **Teorema 6**. A soma dos n termos iniciais de uma P.G. é: $S_n = \frac{a_1 q^n - a_1}{q-1}$, com $q \neq 1$.
- **Corolário**. A soma dos n primeiros termos de uma P.G. é: $S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1}$, com $q \neq 1$
- **Exemplo 7**. Calcular a soma dos 10 termos iniciais da P.G. $(1, 3, 9, 27, \ldots)$.

  Solução. $S_{10} = \frac{a_1 q^{10} - a_1}{q-1} = \frac{1 \cdot 3^{10} - 1}{3-1} = \frac{59049-1}{2} = 29524$.
- **Exercício 22**. Calcular a soma das potências de 5 com expoentes inteiros consecutivos, desde 5^2 até 5^{26}.

Soma dos n Termos da P.G.

- **Teorema 6**. A soma dos n termos iniciais de uma P.G. é: $S_n = \frac{a_1 q^n - a_1}{q-1}$, com $q \neq 1$.
- **Corolário**. A soma dos n primeiros termos de uma P.G. é: $S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1}$, com $q \neq 1$
- **Exemplo 7**. Calcular a soma dos 10 termos iniciais da P.G. $(1, 3, 9, 27, \ldots)$.

  Solução. $S_{10} = \frac{a_1 q^{10} - a_1}{q-1} = \frac{1 \cdot 3^{10} - 1}{3-1} = \frac{59049-1}{2} = 29524$.
- **Exercício 22**. Calcular a soma das potências de 5 com expoentes inteiros consecutivos, desde 5^2 até 5^{26}.**Resp.:** $S = \frac{5^{27} - 5^2}{4}$

Soma dos n Termos da P.G.

- **Exercício 23**. Calcule a soma das 10 parcelas iniciais da série $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ **Resp.:** $S_{10} = \frac{1023}{512}$

Soma dos n Termos da P.G.

- **Exercício 23**. Calcule a soma das 10 parcelas iniciais da série $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ **Resp.:** $S_{10} = \frac{1023}{512}$
- **Exercício 24**. Calcule a soma dos 20 termos iniciais da série $1 + 3 + 9 + 27 + \dots$ **Resp.:** $S_{20} = \frac{3^{20}-1}{2}$

Soma dos n Termos da P.G.

- **Exercício 23**. Calcule a soma das 10 parcelas iniciais da série $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ **Resp.:** $S_{10} = \frac{1023}{512}$
- **Exercício 24**. Calcule a soma dos 20 termos iniciais da série $1 + 3 + 9 + 27 + \ldots$ **Resp.:** $S_{20} = \frac{3^{20}-1}{2}$
- **Exercício 25**. Numa progressão geométrica de 4 termos, a soma dos termos de ordem par é 10 e a soma dos termos de ordem ímpar é 5. Determine o quarto termo dessa progressão. **Resp.:** $a_4 = 8$

Soma dos n Termos da P.G.

- **Exercício 23**. Calcule a soma das 10 parcelas iniciais da série $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ **Resp.:** $S_{10} = \frac{1023}{512}$
- **Exercício 24**. Calcule a soma dos 20 termos iniciais da série $1 + 3 + 9 + 27 + \ldots$ **Resp.:** $S_{20} = \frac{3^{20}-1}{2}$
- **Exercício 25**. Numa progressão geométrica de 4 termos, a soma dos termos de ordem par é 10 e a soma dos termos de ordem ímpar é 5. Determine o quarto termo dessa progressão. **Resp.:** $a_4 = 8$
- **Exercício 26**. Em um triângulo, a medida da base, a medida da altura e a medida da área formam, nessa ordem, uma P.G. de razão 8. Calcule a medida da base. **Resp.: base =** 16

Soma dos n Termos da P.G.

- **Exercício 23**. Calcule a soma das 10 parcelas iniciais da série $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ **Resp.:** $S_{10} = \frac{1023}{512}$
- **Exercício 24**. Calcule a soma dos 20 termos iniciais da série $1 + 3 + 9 + 27 + \ldots$ **Resp.:** $S_{20} = \frac{3^{20}-1}{2}$
- **Exercício 25**. Numa progressão geométrica de 4 termos, a soma dos termos de ordem par é 10 e a soma dos termos de ordem ímpar é 5. Determine o quarto termo dessa progressão. **Resp.:** $a_4 = 8$
- **Exercício 26**. Em um triângulo, a medida da base, a medida da altura e a medida da área formam, nessa ordem, uma P.G. de razão 8. Calcule a medida da base. **Resp.: base =** 16

Roteiro

Somatórios

- Dada um coleção de números $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, o símbolo $\sum_{i=1}^{n} a_i$ representa a soma desses números:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

- **Exemplo 8** Calcule: $\sum_{i=1}^{4} i^2(i-3)$. **Resp.: 10**
- Se $a_i = c$ para cada i, então:

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

- **Exemplo 9**. Calcule $\sum_{i=0}^{3} \frac{2^i}{i+1}$; **Resp.:** $\frac{16}{3}$

Somatórios

- **Teorema 7**. Se n é qualquer inteiro positivo e $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ são conjuntos de números, então:
  (i) $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

  (ii) $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c(\sum_{i=1}^{n} a_i)$, para qualquer c

  (iii) $\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$
- **Exercício 27**. Determine as somas: a) $\sum_{i=1}^{5}(3i - 10)$, b) $\sum_{j=1}^{4}(j^2 + 1)$.

Somatórios

- Somatórios importantes:
  - $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
  - $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
  - $\sum_{i=1}^{n} i^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2$
- **Exercício 28**. Calcule os somatórios: a) $\sum_{k=0}^{5} k(k-1)$; b) $\sum_{i=1}^{8} 2^i$; c) $\sum_{i=1}^{50} 10$
- **Exercício 29**. Calcule: $\sum_{k=1}^{n} (2k-3)^2$

Referência

- Fundamentos de Matemática Elementar. Gelson Iezzi e Samuel Hazzan. Vol 5.
- Cálculo com geometria analítica. Swokowski.