Exponenciais e Logaritmos

Prof. Eanes Torres Pereira

Fundamentos de Matemática Para Ciência da Computação - I

Roteiro

1. Função Exponencial

2. Logaritmos

3. Função Logarítmica

3. Equações Exponenciais e Logarítmicas

4. Inequações Exponenciais e Logarítmicas

Função Exponencial

- **Definição**. Dado um número real a, tal que $0 < a \neq 1$, chamamos função exponencial de base a a função f de R em R que associa a cada x real o número a^x.

$$f : R \longrightarrow R$$
$$x \longrightarrow a^x$$

- Exemplos de funções exponenciais em R:

a) $f(x) = 2^x$

b) $g(x) = (\frac{1}{2})^x$

Função Exponencial - Propriedades

- Na função exponencial $f(x) = a^x$, temos $x = 0 \longrightarrow f(0) = a^0 = 1$. Isto é, o par $(0, 1)$ pertence a função para todo $a \in R_+^* - \{1\}$.
- A função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente (decrescente) se, e somente se, $a > 1$ $(0 < a < 1)$. Portanto, dados os reais x_1 e x_2, temos:
  1. quando $a > 1$: $x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
  2. quando $0 < a < 1$: $x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$;
- A função exponencial $f(x) = a^x$, com $0 < a \neq 1$, é injetora.

Função Exponencial - Teoremas

1. Sendo $a \in R$, $a > 1$ e $b \in R$, temos: $a^b > 1$ se, e somente se, $b > 0$.
2. Sendo $a \in R$, $a > 1$, $x_1 \in R$ e $x_2 \in R$, temos: $a^{x_1} > a^{x_2}$ se, e somente se, $x_1 > x_2$.
3. Sendo $a \in R$, $0 < a < 1$ e $b \in R$, temos: $a^b > 1$ se, e somente se, $b < 0$.

Função Exponencial - Gráfico

- Com relação ao gráfico cartesiano da função $f(x) = a^x$, podemos dizer:
  1. A curva representativa está toda acima do eixo dos x.
  2. Corta o eixo y no ponto de ordenada 1.
  3. Se a $>$ 1 é o de um função crescente.
  4. Se 0 $<$ a $<$ 1 é o de uma função decrescente.

Função Exponencial - Exercícios

Construir os gráficos cartesianos das funções exponenciais:

1. $y = 3^x$
2. $y = (\frac{1}{3})^x$
3. $y = 4^x$
4. $y = 10^x$
5. $y = 2^x - 3$
6. $y = 3^{\frac{x+1}{2}}$

Equações Exponenciais

- Equações exponenciais são equações com incógnica no expoente.
- Exemplos: $2^x = 64$, $(\sqrt{3})^x = (81)^{1/3}$, $4^x - 2^x = 2$
- Existem dos métodos fundamentais para a resolução das equações exponenciais. Agora, será apresentado o primeiro método.
- **Método da redução a uma base comum**. É aplicado quando ambos os membros da equação, com as transformações convenientes baseadas na proprieades de potências, forem redutíveis a potências de mesma base a $(0 < a \neq 1)$.

Equações Exponenciais - Exercícios

Resolver as seguintes equações exponenciais:

a) $2^x = 64$

b) $8^x = \frac{1}{32}$

c) $(\sqrt{3})^x = (81)^{1/3}$

d) $(2^x)^{x-1} = 4$

e) $3^{2x-1}.9^{3x+4} = 27^{x+1}$

f) $\sqrt{5^{x-2}}.\sqrt[x]{25^{2x-5}} = \sqrt[2x]{5^{3x-2}}$

Respostas: a) $S = \{6\}$ b) $S = \{-5/3\}$ c) $S = \{8/3\}$ d) $S = \{2, -1\}$, e) $S = \{-4/5\}$ f) $S = \{3\}$, -6 não serve pois $x > 0$

Inequações Exponenciais

- Inequações exponenciais são as inequações com incógnita no expoente.
- Exemplos: $2^x > 32$, $(\sqrt{5})^x > \sqrt[3]{25}$, $4^x - 2 > 2^x$.
- **Método da redução a uma base comum**. Este método será aplicado quando ambos os membros da inequação puderem ser representados como potências de mesma base a $(0 < a \neq 1)$.
- Se b e c são números reais, então:
  - para $a > 1$, tem-se $a^b > a^c \iff b > c$
  - para $0 < a < 1$, tem-se $a^b > a^c \iff b < c$.

Inequações Exponenciais - Exercícios

Resolver as seguintes inequações exponenciais:

1. $2^x > 128$
2. $(\frac{3}{5})^x \geq \frac{125}{27}$
3. $(\sqrt[3]{2})^x < \sqrt[4]{8}$
4. $(3^x)^{2x-7} > \frac{1}{27}$
5. $(\frac{1}{2^x})^{3x+1} \cdot 4^{1+2x-x^2} \geq (\frac{1}{8})^{x-1}$
6. $\frac{7^{\frac{x+1}{x-1}}}{7^{\frac{x-1}{x+1}}} < \sqrt{343}$

Inequações Exponenciais - Exercícios

Resolver as seguintes inequações exponenciais:

1. $2^x > 128$
2. $(\frac{3}{5})^x \geq \frac{125}{27}$
3. $(\sqrt[3]{2})^x < \sqrt[4]{8}$
4. $(3^x)^{2x-7} > \frac{1}{27}$
5. $(\frac{1}{2^x})^{3x+1} \cdot 4^{1+2x-x^2} \geq (\frac{1}{8})^{x-1}$
6. $\frac{7^{\frac{x+1}{x-1}}}{7^{\frac{x-1}{x+1}}} < \sqrt{343}$

Respostas: 1. $S = \{x \in R | x > 7\}$ 2. $S = \{x \in R | x \leq -3\}$ 3. $S = \{x \in R | x < \frac{9}{4}\}$ 4. $S = \{x \in R | x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 3\}$ 5. $S = \{x \in R | \frac{1}{5} \leq x \leq 1\}$ 6. $S = \{x \in R | x < -1 \text{ ou } -\frac{1}{3} < x < 1 \text{ ou } x > 3\}$.

Roteiro

Logaritmos

- **Definição**. Sendo a e b números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se *logaritmo de b na base a*, o expoente que se deve dar à base a de modo que a potência obtida seja igual a b.
- Em símbolos: se a, $b \in R$, $0 < a \neq 1$ e $b > 0$, então

$$log_a b = x \iff a^x = b$$

- Em $log_a b = x$, dizemos: a é a base do logaritmo, b é o logaritmando, x é o logaritmo.

Logaritmos - Exemplos

- $log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$
- $log_3(\frac{1}{9}) = -2$, pois $3^{-2} = \frac{1}{9}$
- $log_5 5 = 1$, pois $5^1 = 5$
- $log_7 1 = 0$, pois $7^0 = 1$
- $log_4 8 = \frac{3}{2}$, pois $4^{\frac{4}{3}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$
- $log_{0,2} 25 = -2$, pois $(0,2)^{-2} = (\frac{1}{5})^{-2} = 5^2 = 25$

Antilogaritmo

- Sejam a e b números reais positivos com $a \neq 1$, se o logaritmo de b na base a é x, então b é o **antilogaritmo** de x na base a.
- Em símbolos, se a, $b \in R$, $0 < a \neq 1$ e $b > 0$, então:

$$log_a b = x \iff b = antilog_a x$$

- Exemplos:

a) $antilog_3 2 = 9$, pois $log_3 9 = 2$

b) $antilog_{\frac{1}{2}} 3 = \frac{1}{8}$, pois $log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3$

Exercícios

Calcular pela definição os seguintes logaritmos:

a) $log_2 \frac{1}{8}$

b) $log_8 4$

c) $log_{0,25} 32$

Exercícios

Calcular pela definição os seguintes logaritmos:

a) $log_2 \frac{1}{8}$

b) $log_8 4$

c) $log_{0,25} 32$

Repostas: a) x = -3 b) x =2/3 c) x = -5/2

Consequências da Definição

Decorrem da definição de logaritmos as seguintes propriedades para $0 < a \neq 1$, $b > 0$.

1. O logaritmo da unidade em qualquer base é igual a zero: $log_a 1 = 0$.
2. O logaritmo da base em qualquer base é igual a 1: $log_a a = 1$
3. A potência de base a e expoente $log_a b$ é igual a b: $a^{log_a b} = b$.
4. Dois logaritmos em uma mesma base são iguais se, e somente se, os logaritmandos são iguais: $log_a b = log_a c \iff b = c$.

Exercícios

Calcular o valor de:

a) $8^{log_2 5}$

b) $3^{1+log_3 4}$

Respostas: a) 125 b) 12

Propriedades dos Logaritmos

- Logaritmo do Produto: $log_a(b.c) = log_a b + log_a c$
- Logaritmo do Quociente: $log_a(\frac{b}{c}) = log_a b - log_a c$
- Cologaritmo: $colog_a b = -log_a b$
- Logaritmo da Potência: $log_a b^{\alpha} = \alpha.log_a b$

Exercícios. Desenvolver aplicando as propriedades dos logaritmos (a, b e c são reais positivos):

1. $log_2(\frac{2ab}{c})$
2. $log_3(\frac{a^3\ b^2}{c^4})$
3. $log(\frac{a^3}{b^2\sqrt{2}})$

Propriedades dos Logaritmos

- Logaritmo do Produto: $log_a(b.c) = log_a b + log_a c$
- Logaritmo do Quociente: $log_a(\frac{b}{c}) = log_a b - log_a c$
- Cologaritmo: $colog_a b = -log_a b$
- Logaritmo da Potência: $log_a b^\alpha = \alpha.log_a b$

Exercícios. Desenvolver aplicando as propriedades dos logaritmos (a, b e c são reais positivos):

1. $log_2(\frac{2ab}{c})$
2. $log_3(\frac{a^3\ b^2}{c^4})$
3. $log(\frac{a^3}{b^2\sqrt{2}})$

Respostas:

1. $1 + log_2 a + log_2 b - log_2 c$
2. $3\ log_3 a + 2\ log_3 b - 4\ log_3 c$
3. $3\ log_a - 2\ log\ b - \frac{1}{2} log\ c$

Mudança de Base

$$log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$$

Exemplos:

- $log_3 5$ transformado para a base 2: $log_3 5 = \frac{log_2 5}{log_2 3}$
- $log_2 7$ transformado para a base 10: $log_2 7 = \frac{log_{10} 7}{log_{10} 2}$
- $log_{100} 3$ transformado para a base 10:
  $log_{100} 3 = \frac{log_{10} 3}{log_{10} 100} = \frac{log_{10} 3}{2} = \frac{1}{2}\ log_{10} 3$

Roteiro

Função Logarítmica

Dado um número real a ($0 < a \neq 1$) chamamos função logarítmica de base a a função f de R_+^* em R que associa a cada x o número $log_a x$.

$$f : R_+^* \longrightarrow R$$
$$x \longrightarrow log_a x$$

Exemplos de funções logarítmicas em R_+^*

- $f(x) = log_2 x$
- $g(x) = log_{\frac{1}{2}} x$
- $h(x) = log\ x$
- $p(x) = ln\ x$

Função Logarítmica

Propriedades

- Se $0 < a \neq 1$ então as funções f de R_{+}^{*} em R definida por $f(x) = log_a x$ e g de R em R_{+}^{*} definida por $g(x) = a^x$ são inversas uma da outra.
- A função logarítmica $f(x) = log_a x$ é crescente (decrescente) se, e somente se, $a > 1$ $(0 < a < 1)$.

Observações

- Quando a base é maior que um, a relação de desigualdade existente entre os logaritmos de dois números positivos tem mesmo sentido que a relação entre esses números.

  Exemplos:

a) $4 > 2 \longrightarrow log_2 4 > log_2 2$

b) $0,42 < 6,3 \longrightarrow log_7 0,42 < log_7 6,3$

Função Logarítmica

Observações

- Quando a base é positiva e menor que um, a relação de desigualdade existente entre os logaritmos de dois números positivos é de sentido contrário à que existe entre esses números.

  Exemplos:

a) $8 > 2 \longrightarrow log_{\frac{1}{2}} 8 < log_{\frac{1}{2}} 2$

b) $\sqrt{3} < 7 \longrightarrow log_{0,1} \sqrt{3} > log_{0,1} 7$

- Se a base é maior que um, então os números positivos menores que um têm logaritmos negativos e os números maiores que um têm logaritmos positivos.

  Exemplos:

a) $log_2 0,25 < 0$

b) $log_2 32 > 0$

Função Logarítmica

Observações

- Se a base é positiva e menor que um, então os números positivos menores que um têm logaritmos positivos e os números maiores que um têm logaritmos negativos.

  Exemplos:

a) $log_{0,5}0,25 > 0$

b) $log_{0,5}4 < 0$

Imagem

- Se $0 < a \neq 1$ então a função f de R_+^* em R definida por $f(x) = log_a x$ admite a função inversa g de R em R_+^* definida por $g(x) = a^x$. Logo f é bijetora e, portanto, a imagem de f é: $Im = R$

Função Logarítmica - Gráfico

Com relação ao gráfico cartesiano da função $f(x) = log_a x$ $(0 < a <\neq 1)$, podemos dizer:

- Está todo a direita do eixo y (x > 0);
- Corta o eixo x no ponto de abscissa 1 ($log_a 1 = 0$ para todo $0 < a \neq 1$);
- Se $a > 1$ é de uma função crescente e se $0 < a < 1$ é de uma função decrescente;
- É simétrico em relação a reta $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares) do gráfico da função $g(x) = a^x$.

Função Logarítmica - Exercícios

1. Esboçar o gráfico cartesiano da função $f(x) = log_2 x$ $(x > 0)$. Sugestão: construir a tabela dando valores inicialmente a y e depois calcular x.
2. Esboçar o gráfico cartesiano da função $f(x) = log_{\frac{1}{2}} x$ $(x > 0)$.
3. Determine o domínio da função $f(x) = log_3(x^2 - 4)$. Resposta: $D = \{x \in R | x < -2 \text{ ou } x > 2\}$.
4. Determine o domínio da função $f(x) = log_{x+1}(2x^2 - 5x + 2)$. Resposta: $D = \{x \in R | -1 < x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 2 \text{ e } x \neq 0\}$.

Roteiro

1. Função Exponencial

2. Logaritmos

3. Função Logarítmica

3. Equações Exponenciais e Logarítmicas

4. Inequações Exponenciais e Logarítmicas

Equações Exponenciais e Logarítmicas

- Abordaremos agora as equações exponenciais que não podem ser reduzidas a uma igualdade de potências de mesma base, através de simples aplicação das propriedades das potências.
- A resolução de uma equação deste tipo baseia-se na definição de logaritmo, isto é, se $0 < a \neq 1$ e $b > 0$, tem-se:

$$a^x = b \iff x = log_a b$$

Equações Exponenciais e Logarítmicas - Exercícios

Resolver as equações:

1. $2^x = 3$
2. $5^{2x-3} = 3$
3. $2^{3x-2} = 3^{2x+1}$

Equações Exponenciais e Logarítmicas - Exercícios

Resolver as equações:

1. $2^x = 3$
2. $5^{2x-3} = 3$
3. $2^{3x-2} = 3^{2x+1}$

Respostas:

1. $S = \{log_2 3\}$
2. $S = \{log_{25} 375\}$
3. $S = \{log_{\frac{8}{9}} 12\}$

Equações Logarítmicas

Podemos classificar as equações logarítmicas em três tipos:

Primeiro Tipo: $log_a f(x) = log_a g(x)$

Não nos devemos esquecer das condições de existência do logaritmo, isto é, a base do logaritmo deverá ser positiva e diferente de um e o logaritmando deverá ser positivo. Assim sendo, os valores encontrados na resolução da equação só serão considerados soluções da equação logarítmica proposta se for um valor que *satisfaz as condições de existência do logaritmo*.

Esquematicamente, temos:

Se $0 < a \neq 1$, então $log_a f(x) = log_a g(x) \longrightarrow f(x) = g(x) > 0$

Equações Logarítmicas - Exemplos

1) Resolver a equação $log_2(3x - 5) = log_2 7$

Equações Logarítmicas - Exemplos

1) Resolver a equação $log_2(3x-5) = log_2 7$

Solução. $log_2(3x-5) = log_2 7 \longrightarrow 3x - 5 = 7 > 0$

Resolvendo

$3x - 5 = 7 \longrightarrow x = 4$

x = 4 é solução da equação e não há necessidade de verificarmos pois $7 > 0$ é satisfeita para todo x real.

$S = \{4\}$

Equações Logarítmicas - Exemplos

2) Resolver a equação $log_3(2x-3) = log_3(4x-5)$.

Equações Logarítmicas - Exemplos

2) Resolver a equação $log_3(2x-3) = log_3(4x-5)$.

Solução.

$log_3(2x-3) = log_3(4x-5) \longrightarrow 2x-3 = 4x-5 > 0$

Resolvendo

$2x-3 = 4x-5 \longrightarrow x = 1$

$x = 1$ não é solução da equação proposta pois fazendo $x = 1$ em $4x-5$ encontramos $4 \cdot 1 - 5 = -1 < 0$, logo a equação proposta não tem solução. Chegaríamos a mesma conclusão se ao invés de fazer $x = 1$ em $4x-5$, o fizéssemos em $2x-3$, já que $2x-3 = 4x-5$.

$S = \emptyset$

Equações Logarítmicas - Exemplos

3) Resolver a equação $log_5(x^2 - 3x - 10) = log_5(2 - 2x)$

Equações Logarítmicas - Exemplos

3) Resolver a equação $log_5(x^2 - 3x - 10) = log_5(2 - 2x)$

Solução.

$log_5(x^2 - 3x - 10) = log_5(2 - 2x) \longrightarrow x^2 - 3x - 10 = 2 - 2x > 0$

Resolvendo

$x^2 - 3x - 10 = 2 - 2x \longrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \longrightarrow x = 4$ ou $x = -3$.

$x = 4$ não é solução, pois fazendo $x = 4$ em $2 - 2x$, obtemos $2 - 2 \cdot 4 = -6 < 0$.

$x = -3$ é solução, pois, fazendo $x = -3$ em $2 - 2x$ encontramos $2 - 2 \cdot (-3) = 8 > 0$

$S = \{-3\}$

Equações Logarítmicas

Segundo Tipo: $log_a f(x) = \alpha$

Se $0 < a \neq 1$ e $\alpha \in R$, então $log_a f(x) = \alpha \longrightarrow f(x) = a^{\alpha}$

Exemplos:

1. Resolver a equação $log_2(3x + 1) = 4$

Equações Logarítmicas

Segundo Tipo: $log_a f(x) = \alpha$

Se $0 < a \neq 1$ e $\alpha \in R$, então $log_a f(x) = \alpha \longrightarrow f(x) = a^\alpha$

Exemplos:

1. Resolver a equação $log_2(3x + 1) = 4$
   Solução.
   $log_2(3x + 1) = 4 \longrightarrow 3x + 1 = 2^4 \longrightarrow 3x = 15 \longrightarrow x = 5,$
   $S = \{5\}.$
2. Resolver a equação $log_3(x^2 + 3x - 1) = 2$

Equações Logarítmicas

Segundo Tipo: $log_a f(x) = \alpha$

Se $0 < a \neq 1$ e $\alpha \in R$, então $log_a f(x) = \alpha \longrightarrow f(x) = a^{\alpha}$

Exemplos:

1. Resolver a equação $log_2(3x + 1) = 4$
   Solução.
   $log_2(3x + 1) = 4 \longrightarrow 3x + 1 = 2^4 \longrightarrow 3x = 15 \longrightarrow x = 5$,
   $S = \{5\}$.
2. Resolver a equação $log_3(x^2 + 3x - 1) = 2$
   Solução. $log_3(x^2 + 3x - 1) = 2 \longrightarrow x^2 + 3x - 1 = 3^2 \longrightarrow$
   $x^2 + 3x - 10 = 0 \longrightarrow x = 2$ ou $x = -5$. $S = \{2, -5\}$.
3. Resolver a equação $log_2[1 + log_3(1 - 2x)] = 2$

Equações Logarítmicas

Segundo Tipo: $log_a f(x) = \alpha$

Se $0 < a \neq 1$ e $\alpha \in R$, então $log_a f(x) = \alpha \longrightarrow f(x) = a^\alpha$

Exemplos:

1. Resolver a equação $log_2(3x+1) = 4$
   Solução.
   $log_2(3x+1) = 4 \longrightarrow 3x+1 = 2^4 \longrightarrow 3x = 15 \longrightarrow x = 5,$
   $S = \{5\}.$
2. Resolver a equação $log_3(x^2+3x-1) = 2$
   Solução. $log_3(x^2+3x-1) = 2 \longrightarrow x^2+3x-1 = 3^2 \longrightarrow$
   $x^2+3x-10 = 0 \longrightarrow x = 2$ ou $x = -5$. $S = \{2, -5\}.$
3. Resolver a equação $log_2[1 + log_3(1-2x)] = 2$
   Solução.
   $log_2[1 + log_3(1-2x)] = 2 \longrightarrow 1 + log_3(1-2x) = 2^2 \longrightarrow$
   $log_3(1-2x) = 3 \longrightarrow 1-2x = 3^3 \longrightarrow x = -13, S = \{-13\}.$

Equações Logarítmicas

Terceiro Tipo: Incógnita Auxiliar. São as equações que resolvemos fazendo inicialmente uma mudança de incógnita.

Exemplos:

1. Resolver a equação $log_2^2 x - log_2 x = 2$

Equações Logarítmicas

Terceiro Tipo: Incógnita Auxiliar. São as equações que resolvemos fazendo inicialmente uma mudança de incógnita.

Exemplos:

1. Resolver a equação $log_2^2 x - log_2 x = 2$

   Solução. A equação proposta é equivalente à equação $(log_2 x)^2 - log_2 x - 2 = 0$. Fazendo $log_2 x = y$, temos $y^2 - y - 2 = 0 \longrightarrow y = 2$ ou $y = 1$. Mas $y = log_2 x$, então: $log_2 x = 2 \longrightarrow x = 2^2 = 4$, $log_2 x = -1 \longrightarrow x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.
   $S = \{4, \frac{1}{2}\}$

Equações Logarítmicas - Exercícios

Resolver as equações:

1. $log_4(3x+2) = log_4(2x+5)$
2. $log_5(4x-3) = 1$
3. $log_3(log_2 x) = 1$
4. $log_3[log_2(3x^2-5x+2)] = log_3 2$

Soluções.

1. $S = \{3\}$
2. $S = \{2\}$
3. $S = \{8\}$
4. $S = \{2, -\frac{1}{3}\}$

Roteiro

1. Função Exponencial
2. Logaritmos
3. Função Logarítmica
3. Equações Exponenciais e Logarítmicas
4. Inequações Exponenciais e Logarítmicas

Inequações Exponenciais

- Enfocaremos agora as inequações exponenciais que não podem ser reduzidas a uma desigualdade de potências de mesma base, através de simples aplicações das propriedades de potências.
- A resolução de uma inequação deste tipo baseia-se no crescimento ou decrescimento da função logarítmica, isto é, se $a^x > 0$, $b > 0$ e $0 < c \neq 1$ tem-se:

$$(\mathrm{I}) a^x > b \iff \begin{cases} log_c a^x > log_c b & \text{se } c > 1 \\ log_c a^x < log_c b & \text{se } 0 < c < 1 \end{cases}$$

Inequações Exponenciais

$$(\text{II})\ a^x < b \iff \begin{cases} log_c a^x < log_c b & \text{se } c > 1 \\ log_c a^x > log_c b & \text{se } 0 < c < 1 \end{cases}$$

Inequações Exponenciais - Exercícios

Resolver as inequações:

1. $3^x > 2$
2. $2^{3x-1} \leq \frac{1}{5}$
3. $3^{2x-1} > 2^{3x+1}$

Respostas:

1. $S = \{x \in R | x > log_3 2\}$
2. $S = \{x \in R | x \leq log_8 \frac{2}{5}\}$ ou $S = \{x \in R | x \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot log_2 \frac{1}{5}\}$
3. $S = \{x \in R | x > log_{\frac{9}{8}} 6\}$

Inequações Logarítmicas

- Assim como classificamos as equações logarítmicas em três tipos básicos, vamos também classificar as inequações logarítmicas em três tipos.
- **Tipo 1**. $log_a f(x) > log_a g(x)$

$$\text{Se } a > 1, \text{ então } log_a f(x) > log_a g(x) \iff f(x) > g(x) > 0$$
$$\text{Se } 0 < a < 1, \text{ então } log_a f(x) > log_a g(x) \iff 0 < f(x) < g(x)$$

Inequações Logarítmicas - Exemplos

1. Resolver a inequação $log_2(2x-1) < log_2 6$
2. Resolver a inequação $log_{\frac{1}{3}}(x^2-4x) > log_{\frac{1}{3}}5$
3. Resolver a inequação $log_5(x^2-2x-6) \geq log_5 2$

Respostas

- $S = \{x \in R | \frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}\}$
- $S = \{x \in R | -1 < x < 0 \text{ ou } 4 < x < 5\}$
- $S = \{x \leq -2 \text{ ou } x \geq 4\}$

Inequações Logarítmicas

- **Tipo 2**. $log_a f(x) \lesseqgtr k$.

$$log_a f(x) > k \iff \begin{cases} f(x) > a^k & \text{se } a > 1 \\ 0 < f(x) < a^k & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$log_a f(x) < k \iff \begin{cases} 0 < f(x) < a^k & \text{se } a > 1 \\ f(x) > a^k & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Inequações Logarítmicas - Exemplos

1. Resolver a inequação $log_3(3x + 2) < 2$
2. Resolver a inequação $log_{\frac{1}{2}}(2x^2 - 3x) > -1$
3. Resolver a inequação $log_{\frac{1}{3}}(2x^2 - 7x + 5) \leq -2$

- $S = \{x \in R| - \frac{2}{3} < x < \frac{7}{3}\}$
- $S = \{x \in R| - \frac{1}{2} < x < 0 \text{ ou } \frac{3}{2} < x < 2\}$
- $S = \{x \in R| x \leq -\frac{1}{2} \text{ ou } x \geq 4\}$

Inequações Logarítmicas

- **Tipo 3**. Incógnita auxiliar.
- **Exemplo**. Resolver a inequação $log_3^2 x - 3.log_3 x + 2 > 0$.

Inequações Logarítmicas

- **Tipo 3**. Incógnita auxiliar.
- **Exemplo**. Resolver a inequação $log_3^2 x - 3.log_3 x + 2 > 0$.

  Solução.

  Fazendo $log_3 x = y$, temos:
  $y^2 - 3y + 2 > 0 \longrightarrow y < 1$ ou $y > 2$, mas $y = log_3 x$, então
  $log_3 x < 1 \longrightarrow 0 < x < 3^1$ ou $log_3 x > 2 \longrightarrow x > 3^2 = 9$.

  $S = \{x \in R | 0 < x < 3$ ou $x > 9\}$.

Inequações Logarítmicas - Exercícios

Resolver as inequações:

1. $log_3(5x-2) < log_3 4$
2. $log_{\frac{1}{2}}(3x-1) \geq log_{\frac{1}{2}}(2x+3)$
3. Resolver a inequação $log_2(x-3) + log_2(x-2) \leq 1$

Respostas.

- $S = \{x \in R | \frac{2}{5} < x < \frac{6}{5}\}$
- $S = \{x \in R | \frac{1}{3} < x \leq 4\}$
- $S = \{x \in R | 3 < x \leq 4\}$

Referência

- Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 2, Logaritmos. Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Carlos Murakami. Atual Editora.