Análise Combinatória

Prof. Eanes Torres Pereira

FMCC1

Roteiro

Princípio Fundamental da Contagem

- **Lema 1**. Consideremos os conjuntos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Podemos formar $m \cdot n$ pares ordenados (a_i, b_j) em que $a_i \in A$ e $b_j \in B$.
- **Exemplo 1**. Temos três cidades X, Y e Z. Existem quatro rodovias que ligam X com Y e cinco que ligam Y com Z. Partindo de X e passando por Y, de quantas formas podemos chegar até Z?

Princípio Fundamental da Contagem

- **Lema 1**. Consideremos os conjuntos $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Podemos formar $m \cdot n$ pares ordenados (a_i, b_j) em que $a_i \in A$ e $b_j \in B$.
- **Exemplo 1**. Temos três cidades X, Y e Z. Existem quatro rodovias que ligam X com Y e cinco que ligam Y com Z. Partindo de X e passando por Y, de quantas formas podemos chegar até Z?

  Resposta: 20.
- **Lema 2**. O número de pares ordenados (a_i, a_j) tais que $a_i \in A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $a_j \in A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ e $a_i \neq a_j$ (para $i \neq j$) é: $m(m-1)$.
- **Exemplo 2**. Quantos números com dois algarismos distintos podemos formar com os dígitos 1, 2, 3, ..., 8?

Princípio Fundamental da Contagem

- **Lema 1**. Consideremos os conjuntos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Podemos formar $m \cdot n$ pares ordenados (a_i, b_j) em que $a_i \in A$ e $b_j \in B$.
- **Exemplo 1**. Temos três cidades X, Y e Z. Existem quatro rodovias que ligam X com Y e cinco que ligam Y com Z. Partindo de X e passando por Y, de quantas formas podemos chegar até Z?

  Resposta: 20.
- **Lema 2**. O número de pares ordenados (a_i, a_j) tais que $a_i \in A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $a_j \in A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ e $a_i \neq a_j$ (para $i \neq j$) é: $m(m-1)$.
- **Exemplo 2**. Quantos números com dois algarismos distintos podemos formar com os dígitos 1, 2, 3, ..., 8?

  Resposta: $8 \cdot 7 = 56$.

Princípio Fundamental da Contagem

- **Princípio Fundamental da Contagem - Parte A.**
  Consideremos r conjuntos

$$\begin{bmatrix} A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}\} & \#A = n_1 \\ B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{n_2}\} & \#B = n_2 \\ \vdots & \vdots \\ Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_{n_r}\} & \#Z = n_r \end{bmatrix}$$

- então, o número de r-uplas ordenadas (subsequências de r elementos) do tipo $(a_i, b_j, \ldots, z_p)$ em que $a_i \in A$, $b_j \in B$, $\ldots$, $z_p \in Z$ é: $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r$

Princípio Fundamental da Contagem

- **Exemplo 3**. Uma moeda é lançada 3 vezes. Qual o número de sequências possíveis de cara e coroa?

Princípio Fundamental da Contagem

- **Exemplo 3**. Uma moeda é lançada 3 vezes. Qual o número de sequências possíveis de cara e coroa?

  Resposta: 8.

- **Princípio Fundamental da Contagem - Parte B**. Consideremos um conjunto A com $m (m \geq 2)$ elementos. Então, o número de r-uplas ordenadas (sequências com r elementos) formadas com elementos distintos dois a dois de A é: $m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot [m-(r-1)]$, com r fatores.

- **Exemplo 4**. Quatro atletas participam de uma corrida. Quantos resultados existem para os primeiro, segundo e terceiro lugares?

  Resposta: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Princípio Fundamental da Contagem - PFC

- **Exemplo 5**. De quantos modos três pessoas podem ficar em fila indiana?

  Resposta: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

- **Exemplo 6**. Uma pessoa lança uma moeda sucessivamente até que ocorram duas caras consecutivas, ou quatro lançamentos sejam feitos, o que primeiro ocorrer. Quais as sequências de resultados possíveis?

Princípio Fundamental da Contagem - PFC

- **Exemplo 5**. De quantos modos três pessoas podem ficar em fila indiana?

  Resposta: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

- **Exemplo 6**. Uma pessoa lança uma moeda sucessivamente até que ocorram duas caras consecutivas, ou quatro lançamentos sejam feitos, o que primeiro ocorrer. Quais as sequências de resultados possíveis?

  Usando o diagrama de árvore calculamos 12 resultados possíveis: (K,K), (K, C, K, K), (K, C, K, C), (K, C, C, K), (K, C, C, C), (C, K, K), (C, K, C, K), (C, K, C, C), (C, C, K, K), (C, C, K, C), (C, C, C, K), (C, C, C, C).

Exercícios

- **Exercício 1**. Um homem vai a um restaurante disposto a comer um só prato de carne e uma só sobremesa. O cardápio oferece oito pratos distintos de carne e cinco pratos diferentes de sobremesa. De quantas formas pode o homem fazer sua refeição? **Resp.: 40**
- **Exercício 2**. Uma moça possui 5 blusas e 6 saias. De quantas formas ela pode vestir uma blusa e uma saia? **Resp.: 30**
- **Exercício 3**. Numa festa existem 80 homens e 90 mulheres. Quantos casais diferentes podem ser formados? **Resp.: 7200**
- **Exercício 4**. Um edifício tem 8 portas. De quantas formas uma pessoa poderá entrar no edifício e sair por uma porta diferente da que usou para entrar? **Resp.: 56**
- **Exercício 5**. Um homem possui 10 ternos, 12 camisas e 5 pares de sapatos. De quantas formas poderá ele vestir um terno, uma camisa e um par de sapatos? **Resp.: 600**

Roteiro

Arranjos com Repetição

- **Definição**. Seja $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ e indiquemos por $(AR)_{m,r}$ o número de arranjos com repetição de m elementos tomados r a r. Cada arranjo com repetição é uma sequência de r elementos, onde cada elemento pertence a M. Pelo PFC, o número de arranjos $(AR)_{m,r}$ será: $(AR)_{m,r} = m^r$.
- **Exemplo 7**. Uma urna contém uma bola vermelha (V), uma branca (B) e uma azul (A). Uma bola é extraída, observada sua cor e reposta na urna. Em seguida, outra bola é extraída e observada sua cor. Quantas são as possíveis sequências de cores observadas? **Resp.:** $3 \cdot 3 = 9$.

Arranjos

- **Definição**. Seja M um conjunto com m elementos, isto é $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Chamamos de arranjo dos m elementos tomados r a r ($1 \leq r \leq m$) a qualquer $r - upla$ (sequência de r elementos) formada com elementos de M *todos distintos*. Pelo PFC, o número de arranjos será: $A_{m,r} = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot [m-(r-1)]$, com r fatores.
- **Exemplo 8**. De um baralho de 52 cartas, 3 cartas são retiradas sucessivamente e sem reposição. Quantas sequências de cartas são possíveis de se obter? **Resp.:** $A_{52,3} = 132600$.
- A fórmula de arranjos pode ser simplificada usando a notação fatorial, $\forall m \in N^*, \forall r \in N^*$, com $r \leq m$:

$$A_{m,r} = \frac{m!}{(m-r)!}$$

Permutações

- **Definição**. Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Chamamos de permutações dos m elementos a todo arranjo em que $r = m$. O número de permutações dos m elementos de M é dado por:

$$P_m = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

- Usando fatorial, $\forall m \in N^*$: $P_m = m!$

Exercícios

- **Exercício 6**. Usando o diagrama de árvore, obter todos os arranjos dos elementos de $M = \{a, b, c, d\}$ tomados dois a dois.

Exercícios

- **Exercício 6**. Usando o diagrama de árvore, obter todos os arranjos dos elementos de $M = \{a, b, c, d\}$ tomados dois a dois.

  Resposta: (a,b), (a,c), (a, d), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (c, d), (d, a), (d, b), (d, c).
- **Exercício 7**. Em um campeonato de futebol, participam 20 times. Quantos resultados são possíveis para os três primeiros lugares? **Resp.: 6840**.
- **Exercício 8**. Em um torneio do qual participam seis times (mata-mata), quantos jogos são disputados? **Resp.: 30**

Exercícios

- **Exercício 9**. Dispomos de 8 cores e queremos pintar uma bandeira de 5 listras, cada listra com uma cor. De quantas formas isto pode ser feito? **Resp.: 6720**.
- **Exercício 10**. Uma linha ferroviária tem 16 estações. Quantos tipos de bilhetes devem ser impressos, se cada tipo deve assinalar a estação de partida e de chegada respectivamente? **Resp.: 240**
- **Exercício 11**. As 5 finalistas do concurso Miss Universo são: Miss Japão, Miss Brasil, Miss Finlândia, Miss Argentina e Miss Noruega. De quantas formas os juízes poderão escolher o primeiro, o segundo e o terceiro lugares nesse concurso? **Resp.: 60**

Exercícios

- **Exercício 12**. Um cofre possui um disco marcado com os dígitos 0, 1, 2, ..., 9. O segredo do cofre é formado por uma sequência de 3 dígitos distintos. Se uma pessoa tentar abrir o cofre, quantas tentativas deverá fazer (no máximo) para conseguir abrí-lo. Suponha que a pessoa sabe que o segredo é formado por dígitos distintos. **Resp.: 720**
- **Exercício 13**. Existem 10 cadeiras numeradas de 1 a 10. De quantas formas duas pessoas podem sentar-se, devendo haver ao menos uma cadeira entre elas?

Exercícios

- **Exercício 12**. Um cofre possui um disco marcado com os dígitos 0, 1, 2, ..., 9. O segredo do cofre é formado por uma sequência de 3 dígitos distintos. Se uma pessoa tentar abrir o cofre, quantas tentativas deverá fazer (no máximo) para conseguir abrí-lo. Suponha que a pessoa sabe que o segredo é formado por dígitos distintos. **Resp.: 720**
- **Exercício 13**. Existem 10 cadeiras numeradas de 1 a 10. De quantas formas duas pessoas podem sentar-se, devendo haver ao menos uma cadeira entre elas?Sugestão: calcule o total de possibilidades das pessoas sentarem um ao lado da outra**Resp.: 90 - 18 = 72**

Roteiro

Combinações

- Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Chamamos de combinações dos m elementos, tomados r a r, aos subconjuntos de M constituídos de r elementos.
- **Exemplo 8**. Seja $M = \{a, b, c, d\}$. As combinações dos 4 elementos, tomados dois a dois, são os subconjuntos: $\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{a, d\}$. Notemos que $\{a, b\} = \{b, a\}$, pois, conforme definimos, combinação é um conjunto, portanto *não depende da ordem dos elementos*.
- O número de combinações de m elementos tomados r a r pode ser calculado com:

$$C_{m,r} = \binom{m}{r} = \frac{m!}{r!(m-r)!}$$

Combinações

- **Exemplo 9**. Deseja-se formar uma comissão de três membros e dispõe-se de dez funcionários. Quantas comissões podem ser formadas?

  Resposta: $C_{10,3} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = 120$
- **Exercício 14**. Sabendo-se que $\frac{C_{8,p+2}}{C_{8,p+1}} = 2$, determine o valor de p.
- **Exercício 15**. Calcule p, sabendo-se que $A_{m,p} = C_{m,p}, \forall\ m0 \leq p < m$.
- **Exercício 16**. Uma prova consta de 15 questões, das quais o aluno deve resolver 10. De quantas formas ele poderá escolher as 10 questões? **Resp.:** $\binom{15}{10} = 3003$

Combinações

- **Exercício 17**. Em uma reunião social, cada pessoa cumprimentou todas as outras, havendo ao todo 45 apertos de mão. Quantas pessoas havia na reunião? **Resp.: 10**
- **Exercício 18**. Um grupo tem 10 pessoas. Quantas comissões de no mínimo 4 pessoas podem ser formadas, com as disponíveis? **Resp.: 848**
- **Exercício 19**. De quantas formas podemos escolher 4 cartas de um baralho de 52 cartas, sem levar em conta a ordem delas, de modo que em cada escolha haja pelo menos um rei?

Combinações

- **Exercício 17**. Em uma reunião social, cada pessoa cumprimentou todas as outras, havendo ao todo 45 apertos de mão. Quantas pessoas havia na reunião? **Resp.: 10**
- **Exercício 18**. Um grupo tem 10 pessoas. Quantas comissões de no mínimo 4 pessoas podem ser formadas, com as disponíveis? **Resp.: 848**
- **Exercício 19**. De quantas formas podemos escolher 4 cartas de um baralho de 52 cartas, sem levar em conta a ordem delas, de modo que em cada escolha haja pelo menos um rei? **Resp.:** $\binom{52}{4} - \binom{48}{4}$

Combinações

- **Exercício 20**. Um químico possui 10 tipos de substâncias. De quantos modos possíveis poderá associar 6 dessas substâncias se, entre as dez, duas somente não podem ser juntadas por que produzem mistura explosiva? **Resp.: 140**
- **Exercício 21**. De um grupo de 10 pessoas deseja-se formar uma comissão com 5 membros. De quantas formas isto pode ser feito se duas pessoas (A e B) ou fazem parte da comissão ou não? **Resp.: 112**
- **Exercício 22**. Um homem possui 8 pares de meias (todos distintos). De quantas formas ele pode selecionar 2 meias, sem que elas sejam do mesmo par? **Resp.: 112**

Roteiro

Permutações com Elementos Repetidos

- **Definição**. Consideremos n elementos dos quais:
  - n_1 são iguais a a_1
  - n_2 são iguais a a_2
  - $\vdots$
  - n_r são iguais a a_r
- Poderemos calcular o número de permutações nestas condições por meio da fórmula:

$$P_n^{n_1,n_2,n_3,\ldots,n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}$$

Permutações com Elementos Repetidos

- **Exemplo 10**. Quantos anagramas existem da palavra ANALITICA? **Resp.:** $P_9^{3,2} = \frac{9!}{3!2!} = 30240$
- **Exemplo 11**. Existem 6 bandeiras (de mesmo formato), sendo 3 vermelhas e 3 brancas. Dispondo-as ordenadamente num mastro, quantos sinais diferentes podem ser emitidos com elas? **Resp.:** $P_6^{3,3} = \frac{6!}{3!\ 3!} = 20$
- **Exercício 23**. De quantas formas 8 sinais + e 4 sinais - podem ser colocados em uma sequência? **Resp.: 495**
- **Exercício 24**. Quantos números de 6 algarismos podemos formar permutando os algarismos 2, 2, 3, 3, 3, 5? **60**

Roteiro

Binômio de Newton

- **Teorema Binomial**. O desenvolvimento de $(x+a)^n$ para $n \in N$ e $x, a \in R$ é dado por:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \dots$$

$$\dots + \binom{n}{p}x^{n-p}a^p + \dots + \binom{n}{n}a^n$$

Binômio de Newton

- **Exemplo 12**. Desenvolver $(3x^2 + a)^4$

  Resp.: $81x^8 + 108x^6a + 54x^4a^2 + 12x^2a^3 + a^4$
- **Termo Geral**:

$$\binom{n}{p} x^{n-p} a^p$$

- **Exemplo 13**. No desenvolvimento de $(x^2 + 1)^6$ qual o coeficiente de x^8?

  Resp.: 15
- **Exemplo 14**. Qual o termo independente de x no desenvolvimento de $(x - \frac{1}{x})^8$?

  Resp.: 70

Binômio de Newton

- **Exercício 25**. Qual o coeficiente de x^2 no desenvolvimento de $(1-2x)^6$?
  Resp.: 60
- **Exercício 26**. Desenvolvendo $(x+3y)^9$, qual o termo que contém x^4?
  Resp.: $30618x^4y^5$
- **Exercício 27**. No desenvolvimento de $(1-2x^2)^5$ qual o coeficiente de x^8?
  Resp.: 80
- **Exercício 28**. Qual o coeficiente de x^6 no desenvolvimento mde $(x^2+x^{-3})^8$?
  Resp.: 28
- **Exercício 29**. Qual o termo em x^3 no desenvolvimento de $(x-\frac{a^2}{x})^15$?
  Resp.: $5005a^{12}x^3$

Triângulo de Pascal

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

- Propriedades:
  1. Em cada linha, o primeiro elemento vale 1.
  2. Em cada linha, o último elemento vale 1.
  3. A partir da terceira linha, cada elemento (com exceção do primeiro e do último) é a soma dos elementos da linha anterior, imediatamente acima dele (**Relação de Stifel**)
  4. Numa linha, dois coeficientes binomiais equidistantes dos extremos são iguais.

Triângulo de Pascal

- **Exercício 30**. Calcule:
  a) $\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i}$ **Resp.:** 1024
  b) $\sum_{i=1}^{10} \binom{10}{i}$ **Resp.:** 1023
  c) $\sum_{i=2}^{10} \binom{10}{i}$ **Resp.:** 1013
- **Exercício 31**. Calcule m sabendo-se que $\sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} = 1023$
  Resp.: 10
- **Exercício 32**. Calcule $\sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p}$ **Resp.:** $2^n - 1$

Referência

- Fundamentos de Matemática Elementar - vol. 5. Samuel Hazzan.