Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Engenharia Elétrica e Informática
Departamento de Sistemas e Computação
Disciplina: FMCC I

Lista de Exercícios 3

1 - (Média) Prove que as fbfs (fórmulas bem formuladas) a seguir são válidas ou encontre alguma interpretação em que elas são falsas:

a) $(\exists x)[A(x) \wedge B(x)] \rightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$
b) $(\exists x)(\forall y)Q(x,y) \rightarrow (\forall y)(\exists x)Q(x,y)$
c) $[P(x) \rightarrow (\exists y)Q(x,y)] \rightarrow [(\exists y)[P(x) \rightarrow Q(x,y)]$

2 - (Fácil) Que regra de inferência é ilustrada pelo argumento dado?

a) Se Martins é o autor, então o livro é de ficção. Mas o livro não é de ficção. Portanto, Martins não é o autor.
b) Se a firma falir, todos os seus ativos têm que ser confiscados. A firma faliu. Segue que todos os seus bens têm que ser confiscados.
c) O cachorro tem um pelo sedoso e adora latir. Portando, o cachorro adora latir.
d) Se Paulo é um bom nadador, então ele é um bom corredor. Se Paulo é um bom corredor, então ele é um bom ciclista. Portanto, se Paulo é um bom nadador, então ele é um bom ciclista.

3 - (Difícil) Determine se o seguinte argumento, tirado do Kalish e Montague [KaMo64], é válido.

Se o Super-homem fosse capaz e tivesse vontade de combater o mal, ele seria benevolente. Se o Super-homem não fosse capaz de combater o mal, ele seria impotente. Se ele não tivesse vontade de combater o mal, ele seria malevolente. O Super-homem não combate o mal. Se o Super-homem existe, ele não é impotente e nem malevolente. Portanto, o Super-homem não existe.

4 - (Difícil) Em um curso de computação são ofertadas disciplinas de português, inglês, francês e alemão. É sabido que todos os estudantes ou gostam de português ou de inglês. Também é verdade que todos ou não gostam de inglês, ou gostam de alemão. Além disso, todos aqueles que gostam de francês não gostam de alemão. Por fim, pelo menos um aluno não gosta de português. É possível afirmar que existe pelo menos um aluno que não gosta de francês?

5 - (Médio) Para o argumento abaixo, aponte quais regras de inferência foram utilizadas em cada passo.

"Linda, uma estudante desta sala, tem um conversível vermelho. Todo mundo que tem um conversível vermelho tem pelo menos uma multa por excesso de velocidade. Por isso, alguém nessa sala tem uma multa por excesso de velocidade."

6 - (Fácil) Quais regras de inferência são utilizadas no famoso argumento abaixo?

"Todos os homens são mortais. Sócrates é um homem. Por isso, Sócrates é mortal."

7 - (Fácil) Prove que $\neg\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$ é logicamente equivalente a $\exists x(P(x)\wedge\neg Q(x))$.

8 - (Média) Identifique o(s) erro(s) nessa argumentação que afirma que se $\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)$ é verdade, então $\exists x(P(x)\wedge Q(x))$ é verdade também:

1. $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$	Premissa
2. $\exists x P(x)$	Simplificação em 1
3. $P(c)$	Particularização Existencial em 2
4. $\exists x Q(x)$	Simplificação em 1
5. $Q(c)$	Particularização Existencial em 4
6. $P(c)\wedge Q(c)$	Conjunção(3,5)
7. $\exists x(P(x)\wedge Q(x))$	Generalização Existencial

9 - (Fácil) Use a lógica de predicados para provar os seguintes argumentos:

a) $\forall x\, [\, P(x) \wedge Q(x)] \rightarrow \forall x\, (P(x)) \wedge \forall x\, (Q(x))$
b) $\forall x\, [\, P(x) \vee Q(x)] \rightarrow \neg[\exists x\, (P(x))] \rightarrow \forall x\, (Q(x))$
c) $\forall x\, [\, P(x) \wedge Q(x)] \rightarrow \forall x\, [\, Q(x) \wedge P(x)]$

10 - (Médio) Demonstre os seguintes argumentos usando regras de inferências, particularização universal, particularização existencial, generalização universal e generalização existencial:

a) $\forall x\, [\, P(x) \rightarrow R(x)] \wedge \neg R(y) \rightarrow \neg P(y)$
b) $\forall x\, [P(x\,) \rightarrow Q(x)] \wedge \exists y\, (P(y)) \rightarrow Q(a)$
c) $\forall x\, [P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge \forall x\, (P(x)) \rightarrow \forall x\, (Q(x))$

SOLUÇÕES

1.

a) 1. $(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$ hipótese
2. $A(a) \wedge B(a)$ 1, particularização existencial
3. $A(a)$ 2, simplificação
4. $B(a)$ 2, simplificação
5. $(\exists x)A(x)$ 3, generalização existencial
6. $(\exists x)B(x)$ 4, generalização existencial
7. $(\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$ 5,6, conjunção

b) 1. $(\exists x)(\forall y)Q(x,y)$ hipótese
2. $(\forall y)Q(a,y)$ 1, particularização existencial
3. $Q(a,y)$ 2, particularização universal
4. $(\exists x)Q(x,y)$ 3, generalização existencial
5. $(\forall y)(\exists x)Q(x,y)$ 4, generalização universal

C) 1. $P(x) \rightarrow (\exists y)Q(x,y)$ hipótese
2. $P(x)$ hipótese temporária
3. $(\exists y)Q(x,y)$ 1, 2 modus ponens
4. $Q(x,a)$ 3, particularização existencial
5. $P(x) \rightarrow Q(x,a)$ retirada da hipótese temporária
6. $(\exists y)(P(x) \rightarrow Q(x,y)$ 5, generalização existencial

2. Denomine uma letra para cada sentença e as associe até chegar à sentença final. Depois, descreva como a sentença é verdadeira, assim:

a) $(M \rightarrow F) \wedge F' \rightarrow M'$ // obtido por modus tollens
b) $(B \rightarrow A) \wedge B \rightarrow A$ // modus ponens
c) $S \wedge L \rightarrow L$ // simplificação
d) $(S \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow B) \rightarrow (S \rightarrow B)$ // silogismo hipotético

3. Considere X como o domínio Super-homem.

C : "X é capaz de combater o mal."
V : "X tem vontade de combater o mal."
B : "X é benevolente."
M : "X é malevolente."
I : "X é impotente."
E : "X existe."

1. $(C \wedge V) \rightarrow B$ Hipótese
2. $\neg C \rightarrow I$ Hipótese

3. $\neg V \rightarrow M$ Hipótese
4. $\neg B$ Hipótese
5. $E \rightarrow (\neg I \wedge \neg M)$ Hipótese
6. $\neg(C \wedge V)$ Modus tollens em 1,4
7. $\neg C \vee \neg V$ De Morgan em 6
8. $\neg C$ Simplificação em 7
9. $\neg V$ Simplificação em 7
10. I Modus ponens em 2,8
11. M Modus ponens em 3,9
12. $I \vee M$ Adição em 10
13. $\neg(\neg(I \vee M))$ Equivalência por dupla negação
14. $\neg(\neg I \wedge \neg M)$ De Morgan em 13
15. $\neg E$ Modus tollens em 5,14

Portanto, o argumento estabelecido é válido.

4. Consideremos X como o domínio dos alunos de computação.

P(x) : “x gosta de português.”
I(x) : “x gosta de inglês.”
F(x) : “x gosta de francês.”
A(x) : “x gosta de alemão.”

1. (∀x) [P(x) ∨ I(x)] Hipótese
2. (∀x) [~I(x) ∨ A(x)] Hipótese
3. (∀x) [F(x) → ~A(x)] Hipótese
4. (∃x) ~P(x) Hipótese
5. ~P(a) Particularização existencial em 4
6. P(a) ∨ I(a) Particularização universal em 1
7. I(a) Silogismo disjuntivo em 5,6
8. ~I(a) ∨ A(a) Particularização universal em 2
9. A(a) Silogismo disjuntivo em 7,8
10. F(a) → ~A(x) Particularização universal em 3
11. ~F(a) Modus tollens em 9,10
12. (∃x) ~F(x) Generalização existencial em 11

Sim, é possível afirmar.

5. C(x): x tem um conversível vermelho
M(x): x tem multa por excesso de velocidade

S(x): x é desta sala

$[S(L) \wedge C(L)] \wedge \forall x[C(x) \rightarrow M(x)] \rightarrow \exists x[S(x) \wedge M(x)]$

1. $(\forall x)[C(x) \rightarrow M(x)]$	Hipótese
2. $C(L) \rightarrow M(L)$	Particularização Universal em 1
3. $S(L) \wedge C(L)$	Hipótese
4. $C(L)$	Simplificação em 3
5. $S(L)$	Simplificação em 3
6. $M(L)$	Modus Ponens de 4 em 2
7. $S(L) \wedge M(L)$	Adição, 5 e 6
8. $\exists x[S(x) \wedge M(x)]$	Generalização Existencial em 7

6. Instanciação(Particularização) Universal é usada para concluir que "Se Sócrates for um homem, então Sócrates é mortal". Modus Ponens é usado para concluir que Sócrates é mortal.

7. 1. $\neg\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ Hipótese
2. $\exists x(\neg(P(x) \rightarrow Q(x)))$ DeMorgan em 1
3. $\exists x(\neg(\neg P(x) \vee Q(x)))$ Equivalência $A \rightarrow B = \neg A \vee B$
4. $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$ DeMorgan em 3

8. O erro ocorre no passo 5: Não é possível afirmar que o "c" que torna P(x) (passo 3) também torna Q(x) verdadeira (Passo 5).

9.

a) 1. $\forall x [P(x) \wedge Q(x)]$ hip (hipótese)
2. $P(x) \wedge Q(x)$ 1, PU
3. $P(x)$ 2, simp
4. $Q(x)$ 2, simp
5. $\forall x (P(x))$ 3, GU
6. $\forall x (Q(x))$ 4, GU
7. $\forall x (P(x)) \wedge \forall x (Q(x))$ 5,6, conj

b) 1. $\forall x [P(x) \vee Q(x)]$ hip (hipótese)

2. $\neg[\exists x\ (P(x))]$ hip (hipótese)
3. $\forall x\ (\neg P(x))]$ 2, neg
4. $\neg P(x)$ 3, PU
5. $P(x) \vee Q(x)$ 1, PU
6. $Q(x)$ 4, 5, SD
7. $\forall x\ (Q(x))$ 6, GU

c) 1. $\forall x\ [\ P(x) \wedge Q(x)]$ hip (hipótese)
2. $P(x) \wedge Q(x)$ 1, PU
3. $Q(x) \wedge P(x)$ 2, com
4. $\forall x\ [\ Q(x) \wedge P(x)]$ 3, GU

10.

a) 1. $\forall x\ [P(x) \rightarrow R(x)]$ hipótese
2. $\neg R(y)$ hipótese
3. $P(y) \rightarrow R(y)$ 1, PU
4. $\neg P(y)$ 2, 3, Modus Ponens

b) 1. $\forall x\ [P(x\ ) \rightarrow Q(x)]$ hipótese
2. $\exists y\ (P(y))$ hipótese
3. $P(a)$ 2, PE
4. $P(a) \rightarrow Q(a)$ 1, PU
5. $Q(a)$ 3,4 , Modus Ponens

c) 1. $\forall x\ [P(x) \rightarrow Q(x)]$ hipótese
2. $\forall x\ (P(x))$ hipótese
3. $P(x) \rightarrow Q(x)$ 1, PU
4. $P(x)$ 2, PU
5. $Q(x)$ 3,4 , Modus Ponens
6. $\forall x\ (Q(x))$ 5, GU