FMCC2
Lista de Exercícios 9
Matrizes, Determinantes e Sistemas de Equações

Eanes T. Pereira

1 de Novembro de 2018

1 Questões

1. Construa as seguintes matrizes:

$$A = (a_{ij})_{3\times 3} \text{ tal que } a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$B = (b_{ij})_{3\times 3} \text{ tal que } b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i + j = 4 \\ 0, & \text{se } i + j \neq 4 \end{cases}$$

2. Calcule a soma $C = (c_{ij})_{3\times 3}$ das matrizes $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ e $B = (b_{ij})_{3\times 3}$ tais que $a_{ij} = i^2 + j^2$ e $b_{ij} = 2ij$.

3. Sejam A, B e C as matrizes definidas abaixo. Determine a matriz X de ordem 2, tal que $\frac{X-A}{2} = \frac{B+X}{3} + C$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Calcule AB, BA, A^2 e B^2, sabendo que:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Sabendo-se que $A = \begin{bmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & y & 5 \\ 2 & 3 & z \end{bmatrix}$, $B = (b_{ij})$ é uma matriz diagonal ($b_{ij} = 0$ se $i \neq j$) e $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 6 & 12 & 25 \\ 4 & 9 & 20 \end{bmatrix}$. Determine os valores de x, y e z.

6. Obtenha todas as matrizes B que comutam com $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

7. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e A^t a matriz transposta de A, determine o valor de $A^t \cdot B$.

8. Determine x, y, z para que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & x & 5 \\ 2 & 7 & -4 \\ y & z & -3 \end{bmatrix}$ seja simétrica.

9. Determine x, y, z de modo que a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ x & 0 & 1-z \\ y & 2z & 0 \end{bmatrix}$ seja antissimétrica.

10. Determine a inversa de cada matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$.

11. Determine x tal que: $det\ A = 11$ e $A = \begin{bmatrix} 2x & x-2 \\ 4x+5 & 3x-1 \end{bmatrix}$.

12. Calcule os determinantes das seguintes matrizes pela regra de Sarrus: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

13. Determine o cofator de 3 na matrix: $M = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 5 & 7 \\ -1 & 7 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -10 \end{bmatrix}$.

14. Determine o valor de x para $det\ A < -32$, $A = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 & x \\ c & 0 & d & x & e \\ f & 0 & x & 0 & 0 \\ g & x & h & i & j \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

15. Calcule $det\ Q$, sabendo que Q é uma matrix 4×4 tal que $det\ Q \neq 0$ e $Q^3 + 2Q^2 = 0$.

16. Calcule o valor de $det\ A + det\ B$, para $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{bmatrix}$,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

17. Mostre que $(a+b+c)$ é fator do determinante da matriz: $A = \begin{bmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{bmatrix}$.

18. Seja u o determinante da matriz A. Determine os valores de x, para os quais $u^2 - 2u + 1 = 0$, com $A = \begin{bmatrix} x & 1 & 2 & 0 \\ 0 & x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$.

19. Seja $A = \begin{bmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{bmatrix}$. Resolva a equação $det\ A = 0$.

20. Resolva a equação $det\ A = 0$, para $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x & -5 \\ 1 & 4 & x^2 & 25 \\ 1 & 8 & x^3 & -125 \end{bmatrix}$.

21. Qual a condição sobre a para que a matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$ seja inversível?

22. Resolva os sistemas pela regra de Cramer:

   a. $\begin{cases} -x - 4y = 0 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ -x + 3y = -3 \end{cases}$

   c. $\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ 2x + 3z = -1 \\ 4x + y - 2z = 7 \end{cases}$

   d. $\begin{cases} -x + y - z = 5 \\ x + 2y + 4z = 4 \\ 3x + y - 2z = -3 \end{cases}$

   e. $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ -x + y - z - t = 0 \\ 2x + 2z + t = -1 \end{cases}$

f. $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ -x+2y+z=2 \\ 2x-y-z-t=-1 \\ x-3y+z+2t=0 \end{cases}$

23. Escalone, classifique e resolva os sistemas:

a. $\begin{cases} x-y-2z=1 \\ -x+y+z=2 \\ x-2y+z=-2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} -x+y-2z=1 \\ 2x-y+3t=2 \\ x-2y+z-2t=0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x+3y+2z=2 \\ 3x+5y+4z=4 \\ 5x+3y+4z=-10 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x+y-z+t=1 \\ 3x-y-2z+t=2 \\ -x-2y+3z+2t=-1 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x-y+z+t=-1 \\ y-z+2t=2 \\ 2x+z-t=-1 \end{cases}$

f. $\begin{cases} x-2y-3z=5 \\ -2x+5y+2z=3 \\ -x+3y-z=2 \end{cases}$

2 Respostas

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. $C = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \\ 16 & 25 & 36 \end{bmatrix}$

3. $X = \begin{bmatrix} 28 & 1 \\ 23 & 3 \end{bmatrix}$

4. $AB = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -4 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B^2 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

5. $x = 1$, $y = z = 4$.

6. $B = \begin{bmatrix} a & b \\ -3b & a+b \end{bmatrix}$ com $a, b \in \mathrm{R}$.

7. $A^t \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

8. $x = 2$, $y = 5$, $z = -4$.

9. $x = 4$, $y = -2$, $z = -1$

10. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, $C^{-1} = \frac{1}{26} \cdot \begin{bmatrix} -4 & -16 & 13 \\ 0 & -26 & 13 \\ 6 & 50 & -26 \end{bmatrix}$

11. $x = -1$ ou $x = \frac{1}{2}$

12. 1, -9, -40

13 -19

14. x $<$ -2

15. 16

16. 8

18. $x = \pm 1$

19. $S = \{-3a, a\}$

20. $S = \{-5, 1, 2\}$

21. $a \neq 1$ e $a \neq -\frac{1}{2}$

22. a. $(2, -\frac{1}{2})$; b. $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$; c. $(1, 1, -1)$; d. (-2, 3, 0); e. $(4, \frac{1}{2}, -\frac{11}{2}, 2)$; f. (0, 0, 2, -1).

23. a) possível determinado, (-11, -6, -3); b) possível indeterminado, $(-12 - 13\alpha, -11 - 11\alpha, \alpha, 5 + 5\alpha)$; c) impossível ; d) possível indeterminado, $(\frac{6-14\alpha}{7}, \frac{2-7\alpha}{7}, \frac{1-14\alpha}{7}, \alpha)$; e) possível determinado $(-\frac{1}{5}, 1, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$; f) impossível.