UASC-CEEI-UFCG
Lista 7 - Grupos

1) O Z_3 , conjunto das classes residuais módulo 3, forma um grupo com relação à adição? E com relação à multiplicação?
2) As classes residuais não-zero módulo 4 formam um grupo em relação à multiplicação?
3) Prove: se $a, b, c \in G$, então $a \circ b = a \circ c$ (também, $b \circ a = c \circ a$) implica b = c.
4) Prove: quando $a, b \in G$, cada uma das equações $a \circ x = b$ e $y \circ a = b$ possuem uma solução única.
5) Prove: para qualquer $a \in G, a^m \circ a^n = a^{m+n}$, quando $m, n \in Z$.
6) O mapeamento $x \to x^2$ do grupo aditivo do conjunto dos reais no conjunto dos reais é um homomorfismo? Prove ou refute.
7) Determine as propriedades (comutatividade, associatividade, identidade, inverso, distributividade) das operações $\circ$ e $\Diamond$ definidas em $S = \{a, b, c, d\}$ pelas tabelas seguintes:

Tabela 1

$\circ$	**a**	**b**	**c**	**d**
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Tabela 2

$\Diamond$	**a**	**b**	**c**	**d**
a	d	a	c	d
b	a	c	b	d
c	b	d	a	c
d	c	b	d	a

8) Para as operações $\circ$ e $\Diamond$ definidas em S = {a, b, c, d, e} nas Tabelas 1 e 2, abaixo, assuma a associatividade e investigue as outras propriedades.

Tabela 1							Tabela 2					
◦	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**		◊	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
a	a	d	a	d	e		**a**	a	c	c	a	a
b	d	b	b	d	e		**b**	c	c	c	b	b
c	a	b	c	d	e		**c**	c	c	c	c	c
d	d	d	d	d	e		**d**	a	b	c	d	d
e	e	e	e	e	e		**e**	a	b	c	d	e

9) Para a operação binária ◦ em S = {a, b, c, d, e, f, g, h} definida na Tabela abaixo, assuma a associatividade e investigue as outras propriedades.

◦	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**
a	a	b	c	d	e	f	g	h
b	b	c	d	a	h	g	e	f
c	c	d	a	b	f	e	h	g
d	d	a	b	c	g	h	g	e
e	e	g	f	h	a	c	b	d
f	f	h	e	g	c	a	d	b
g	g	f	h	e	d	b	a	c
h	h	e	g	f	b	d	c	a

10) Expresse cada uma das seguintes permutações em 8 símbolos como um produto de ciclos disjuntos e como um produto de transposições (número mínimo). Observação: as permutações estão escritas em forma de tabelas devido à impossibilidade de escrever os parênteses no Google Docs.

a)

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	1	5	6	7	8

b)

c)

1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	1	2

1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	1	6	8	2	7	5

d) $(2468) \circ (348)$
e) $(15) \circ (2468) \circ (37)(15468)$
f) $(135) \circ (3456) \circ (4678)$

11) Mostre que os ciclos (1357) e (2468) da questão 10.b são comutativos.

12) Quais dos seguintes conjuntos formam um grupo com relação à operação indicada?
   a) $S = \{x \mid x \in Z, x < 0\}$; adição
   b) $S = \{5x \mid x \in Z\}$; adição
   c) $S = \{x \mid x \in Z, x \text{ é } ímpar\}$; multiplicação
   d) $S = \{-2, -1, 1, 2\}$; multiplicação
   e) $S = \{1, -1, i, -1\}$; multiplicação

13) Quais dos seguintes subconjuntos de Z_{13} é um grupo em relação à multiplicação?
   a) {[1], [12]}
   b) {[1], [2], [4], [6], [8], [10], [12]}
   c) {[1], [5], [8], [12]}

14) Considere o sistema de coordenadas retangulares no espaço. Denote por a, b,c respectivamente as rotações no sentido horário através de 180 graus sobre os eixos X, Y e Z e por **u** a sua posição original. Complete a tabela abaixo para mostrar que {**u**, a, b, c} é um grupo. Esse grupo é chamado de grupo de Klein de ordem 4.

$\circ$	**u**	**a**	**b**	**c**
u	u	a	b	c
a	a			
b	b	c		
c	c	b	a	

15) Mostre que o conjunto $\{x \mid x \in Z, 5 \; divide \; x\}$ é um subgrupo do grupo aditivo Z.

Respostas.

6. Não é um homomorfismo
7. Tabela 1: a operação $\circ$ é comutativa e associativa, existe um elemento identidade e elementos inversos. Tabela 2: a operação $\Diamond$ não é comutativa, nem associativa, não tem identidade nem inversos.
10. a) (1234) = (14)(13)(12) c) (13)(246)(58) = (13)(26)(24)(58) d) (368)(24) = (38)(36)(24)
f) (1345678) = (18)(17)(16)(15)(14)(13)
13. A e C