Gabarito Da Segunda Lista de Exercícios - Matemática Discreta

1. O retângulo é um contraexemplo para a afirmação, pois é uma figura Geométrica de quatro ângulos retos e nem todo retângulo é um quadrado.
2. A Demostração Direta e da forma p -> q, onde se afirma p e mostra que isso leva a q.

   a) Sejam x e y divisíveis por n, então eles pode ser escritos como múltiplos de n:

   x = n*a e y = n*b, onde a e b são inteiros quaisquer.

   assim:

   x + y = n*a + n*b,

   x + y = n*(a+b), onde a+b é um inteiro qualquer, e assim vemos que x+y é divisível por n, pois pode ser escrito como um múltiplo de n.

   b) seja a divisível por 5, então ele pode ser escrito um múltiplo de 5:

   a = 5*k, onde k é um inteiro qualquer.

   assim:

   $a^2 = (5*k)^2$ -> $a^2 = 25*k^2$ -> $a^2 = 5*(5*k)$, assim a^2 também é divisível por 5, pois pode ser escrito como um múltiplo de 5.

3. Na Demostração por contraposição se prova a contrapositiva da proposição, assim se temos uma proposição da forma p -> q, provamos ¬q -> ¬p para provar a proposição original.

   a) Fazendo a contrapositiva da proposição temos:

   Se x = 2, então $x^2 + 2*x - 3 \neq 0$.

   assim:

   admitindo que x = 2, e substituindo na equação:

   $2^2 + 2*2 - 3 \neq 0$

   $4 + 4 - 3 \neq 0$

   $8 - 3 \neq 0$

   $5 \neq 0$, assim se x = 2 a equação sera diferente de 0.

   b) Fazendo a contrapositiva da proposição temos:

   Se x + 1 < 0, então x também é.

   assim:

   x + 1 < 0

   x < -1, logo x deve ser um número negativo, pois deve ser menor que -1.

4. Um número racional pode ser escrito na forma a/b, onde a e b são dois inteiros quaisquer e $b \neq 0$.

Assim sendo x e y dois números racionais temos:

$x = a/b$ e $y = c/d$, com a, b, c e d inteiros quaisquer e c, $d \neq 0$.

logo:

$x + y = (d*a + b*c)/b*d$, onde $(d*a+b*c)$ e bd são inteiros quaisquer e $bd \neq 0$.
assim x + y, pode ser escrito como um número racional.

5. Na Demonstração por contradição ou absurdo, para provar p, assumimos ¬p e mostramos que isso leva a uma contradição.

Assim admitindo que $\sqrt{5}$ é um número racional, então ele pode ser escrito na forma de a/b, onde a e b são inteiros quaisquer e $b \neq 0$:

$\sqrt{5} = (a/b)$, onde a/b e uma fração irredutível, ou seja não possuem mais fatores em comum além do ± 1.

logo:

$5 = a^2/b^2 \rightarrow 5*b^2 = a^2$, assim a^2 é divisível por 5.

Como a é um número inteiro e 5 é um número primo, isso implica que a também é divisível por 5, pois não existem valores de a^2 que sejam divisíveis por 5, em que o a, sendo um inteiro, não seja divisível por 5 também, devido ao fato de $a^2 = a*a$ e como a^2 pode ser escrito como múltiplo de 5, isso implica que a tem fatores primos que multiplicados por eles mesmos são múltiplos de 5, mas como 5 é um número primo, e a é um inteiro, esse fator também é um múltiplo de 5, assim a também é divisível por 5.

Sendo assim o a pode ser escrito da forma:

$a = 5*k$, onde k é um inteiro qualquer.

logo:

$5*b^2 = (5*k)^2 \rightarrow 5*b^2 = 25*k^2 \rightarrow b^2 = 5*k^2$, assim b^2 também é divisível por 5 e

logo b também é divisível por 5.

Assim chegamos numa contradição pois admitimos que (a/b) era irredutível, mas provamos que a e b tem um fator em comum alem do ± 1 que é o 5.

logo por contradição $\sqrt{5}$, não pode ser um número racional.

6. **a)** Sendo k um inteiro qualquer, temos:

$k + (k+1)+(k+2)$

$k + k + k +3$

$3*k + 3$

$3*(k+1)$, que é um número divisível por 3, pois pode ser escrito com um múltiplo de 3.

b) Sendo a um número par, temos:

$a = 2*k$, onde k é um inteiro qualquer.

logo:

$a^2 = (2*k)^2$

$a^2 = 4*k^2$, onde a^2 e um número divisível por 4, pois pode ser escrito com um múltiplo de 4.

7. **a)**

i) passo base, P(1):

$4*(1) - 2 = 2*(1)^2 \rightarrow 4-2 = 2 \rightarrow 2 = 2$, onde a proposição e verdade para o passo base.

ii) supondo P(k):

$2 + 6 + 10 + \dots +(4*k - 2) = 2*k^2$, hipótese indutiva.

iii) passo indutivo, queremos provar P(k+1):

$\underline{2 + 6 + 10 + \dots + (4*k - 2)} + (4*(k+1)-2) = 2(k+1)^2$, assim usando a hipótese indutiva temos:

$2*K^2 + (4*(k+1)-2) = 2*(k+1)^2$

$2*K^2 + 4*k + 4 - 2 = 2*(k^2 + 2k + 1)$

$2*k^2 + 4*k + 2 = 2*k^2 + 4*k + 2$, onde a proposição e verdadeira para P(k+1).

b)

i) passo base, P(1):

$2*(1) = (1)*(1+1) \rightarrow 2 = 2$, onde a proposição é verdade para o passo base.

ii) supondo P(k):

$2 + 4 + 6 + \dots +2*k= k*(k+1)$, hipótese indutiva.

iii) passo indutivo, queremos provar P(k+1):

$\underline{2 + 4 + 6 + \dots + 2*k} + 2*(k+1)= (k+1)*(k+2)$, assim usando a hipótese indutiva temos:

$k*(k+1) + 2*(k+1) = (k+1)*(k+2)$
$k^2 + k + 2*k + 2 = k^2 + 2*k + k + 2$
$k^2 + 3*k + 2 = k^2 + 3*k + 2$, onde a proposição é verdadeira para $P(k+1)$.

c)

i) passo base, P(1):

$5*(1) = (5*(1)*((1) + 1)/2 \to 5 = (5*2)/2 \to 5 = 5$, onde a proposição é verdade para o passo base.

ii) supondo P(k):

$5 + 10 + 15 + \ldots +5*k = (5*k*(k+1))/2$, hipótese indutiva.

iii) passo indutivo, queremos provar P(k+1):

$\underline{5 + 10 + 15 + \ldots + 5*k} + 5*(k+1)= (5*(k+1)*(k+2))/2$, assim usando a hipótese indutiva temos:

$(5*k*(k+1))/2 + 5*(k+1) = (5*(k+1)*(k+2))/2$
$(5*k^2 + 5*k)/2 + 5*k + 5 = ((5*k + 5) * (k+2))/2$
$(5*k^2 + 5*k + 10*k + 10)/2 = (5*k^2 + 10*k + 5*k + 10)/2$
$(5*k^2 + 15*k +10)/2 = (5*k^2 + 15k + 10)/2$, onde a proposição é verdadeira para P(k+1).

8. **a)**

i) passo base, P(1):

$2^{3(1)} - 1 = 8 -1 = 7$, que é um número divisível por 7.

ii) supondo P(k):

A proposição pode ser escrita como um múltiplo de 7:

$2^{3k} - 1 = 7a$, onde a é um inteiro qualquer.
$2^{3k} = 7a +1$, hipótese indutiva.

iii) passo indutivo, queremos provar P(k+1):

$2^{3(k+1)} - 1 = 2^{3k + 3} - 1 = (2^{3k} * 2^3) - 1$, assim usando a hipótese indutiva temos:

$((7*a + 1) * 8) - 1 = 56*a + 8 - 1$
$\to$ $56*a + 7 = 7*(8*a + 1)$, que é um número divisível por 7, pois pode ser escrito como um múltiplo de 7.

b)

i) passo base, P(1):

$13^{(1)} - 6^{(1)} = 13 - 6 = 7$, que é um número divisível por 7.

ii) supondo P(k):

A proposição pode ser escrita como um múltiplo de 7:

$13^k - 6^k = 7*a$, onde a é um inteiro qualquer.

$13^k = 7*a + 6^k$, hipótese indutiva.

iii) passo indutivo, queremos provar P(k+1):

$13^{(k+1)} - 6^{(k+1)} = (13^k * 13) - (6^k * 6)$, assim usando a hipótese indutiva temos:

$((7*a + 6^k) * 13) - (6^k * 6) = 91*a + (13 * 6^k) - (6 * 6^k)$

$\rightarrow 91*a + 7*6^k = 7*(13*a + 6^k)$, que é um número divisível por 7, pois pode ser escrito como um múltiplo de 7.

9.

i) passo base, P(2):

$2^2 > 2 + 1 \rightarrow 4 > 3$, verdadeiro.

ii) supondo P(k):

$k^2 > k + 1$, hipótese indutiva.

iii) passo indutivo, queremos provar $(k + 1)^2 > k + 2$:

$(k + 1)^2 = k^2 + 2*k + 1$, usando a hipótese indutiva temos:

$k^2 + 2*k + 1 > (k + 1) + 2*k + 1$

$(k + 1) + 2*k + 1 = 3*k + 2$, assim :

$3*k + 2 > k + 2$, e logo:

$k^2 + 2*k + 1 > 3*k + 2 > k + 2$

$\rightarrow (k + 1)^2 > k + 2$.

CAMPINA GRANDE, 17 DE JULHO DE 2016