Vetores

Prof. Eanes Torres Pereira

FMCC2

Roteiro

Introdução

- Vetores são representados por *segmentos orientados*.
- Todos os segmentos orientados que têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento são representantes do mesmo vetor.
- O módulo de um vetor representa-se por $|v|$.
- Qualquer ponto do espaço é representante do vetor zero.
- Um vetor é unitário se $|v| = 1$.
- Na Figura 1, $v = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

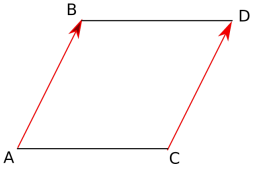


Figura: 1

Introdução

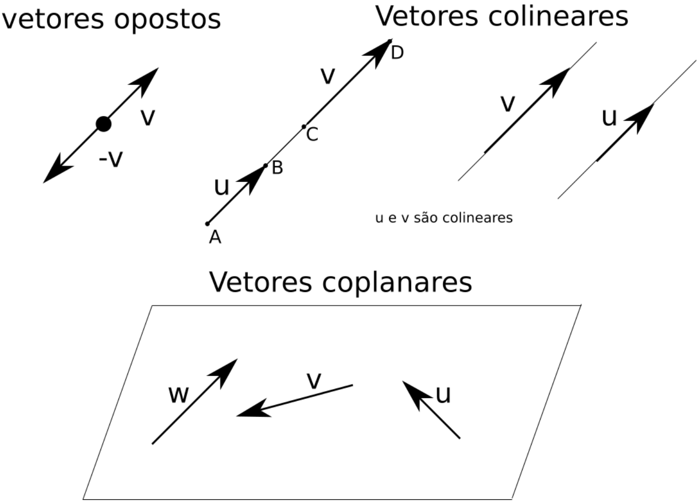


Figura: 2. Vetores opostos, colineares e coplanares

Roteiro

Adição de Vetores

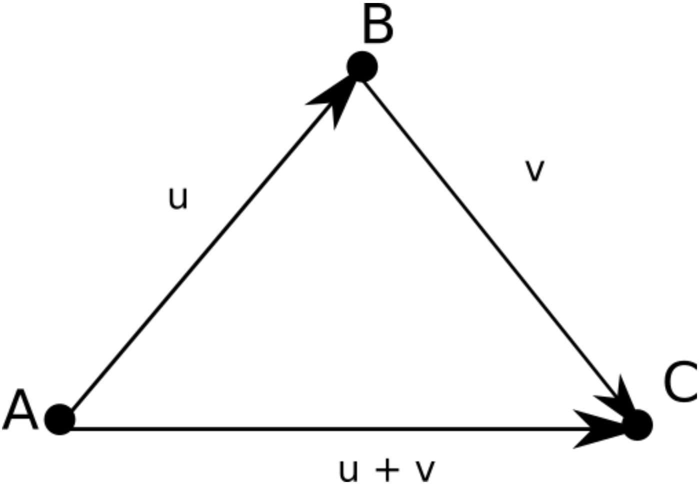


Figura: 3. Soma de vetores.

Propriedades da Adição

1. Associativa: $(u + v) + w = u + (v + w)$.
2. Comutativa: $u + v = v + u$.
3. Existe apenas um vetor nulo 0, tal que para todo vetor v: $v + 0 = 0 + v = v$
4. Qualquer que seja o vetor v, existe apenas um vetor $-v$ tal que: $v + (-v) = -v + v = 0$

Multiplicação de um Número Real por um Vetor

- Dado um vetor $v \neq 0$ e um número real $k \neq 0$, chama-se *produto do número real k pelo vetor v* o vetor $p = kv$, tal que:
  1. Módulo: $|p| = |kv| = |k||v|$;
  2. Direção: a mesma de v;
  3. Sentido: o mesmo de v se $k > 0$ e contrário ao de v se $k < 0$.
- Se u e v são vetores quaisquer e a e b são números reais, valem as propriedades:
  1. $a(bu) = (ab)u$
  2. $(a + b)u = au + bu$
  3. $a(u + v) = au + av$
  4. $1u = u$

Roteiro

Vetores no R^2

- O conjunto $R^2 = R \times R = \{(x, y) | x, y \in R\}$ é interpretado geometricamente como sendo o plano cartesiano xOy.
- O ponto $P(x, y)$ individualiza o vetor $v = \overrightarrow{OP}$ e escreve-se $v = (x, y)$.
- A origem do sistema $O(0, 0)$ representa o vetor nulo.
- O vetor oposto de $v = (x, y)$ é o vetor $-v = (-x, -y)$.

Igualdade e Operações

- Dois vetores $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$ e escreve-se $u = v$.
- **Exemplo 1**. Se o vetor $u = (x + 1, 4)$ é igual ao vetor $v = (5, 2y - 6)$, de acordo com a definição de igualdade de vetores, $x + 1 = 5$ e $2y - 6 = 4$, $x = 4$ e $y = 5$.
- Sejam os vetores $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ e $a \in R$. Define-se:
  1. $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
  2. $au = (ax_1, ay_1)$
- **Exemplo 2**. Se $u = (4, 1)$ e $v = (2, 6)$, então $u + v = (4, 1) + (2, 6) = (4 + 2, 1 + 6) = (6, 7)$ e $2u = 2(4, 1) = (8, 2)$.

Vetor Definido por Dois Pontos

- Um vetor pode ser representado por um segmento orientado que não parte da origem do sistema.

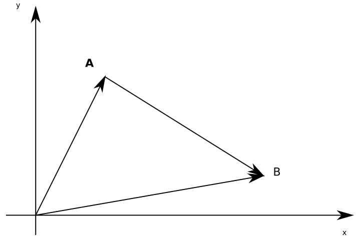


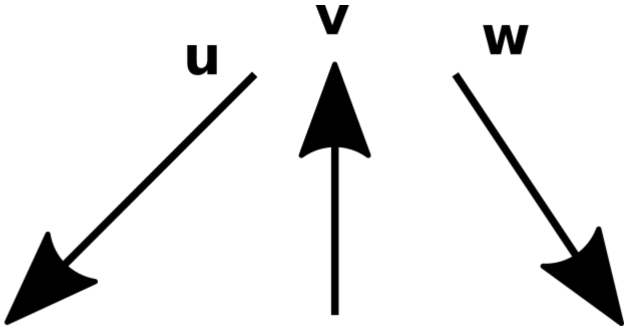
Figura: 3. Vetor definido pelos pontos A e B.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$
$$\overrightarrow{AB} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1)$$
$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

- **Exemplo 3**. Se $A(-1, 3)$ e $B(2, -2)$, o vetor $\overrightarrow{AB}$ é: $\overrightarrow{AB} = (3, -5)$.

Vetor Definido por Dois Pontos

- **Exercício 3**. Copie os vetores na figura e use-os para desenhar os seguintes vetores:
  a) u + v
  b) v + w
  c) u - v
  d) w + v + u



Roteiro

Produto Escalar

- **Definição**. Chama-se *produto escalar* (ou produto interno usual) de dois vetores $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ e se representa por $u \cdot v$ ao número real: $u \cdot v = x_1 x_2 + y_1 y_2$.
- O produto escalar de u e v também é indicado por $< u, v >$ e se lê *u escalar v*.
- **Exemplo 4**. Se $u = (2, 3)$ e $v = (4, -1)$, então $< u, v >= 5$.
- **Definição**. O módulo de um vetor $v = \overrightarrow{AB}$, com extremidades $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, reprsentado por $|v|$, é o número real não-negativo: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
- A partir de cada vetor $v \neq 0$ é possível obter um vetor unitário u fazendo $u = \frac{v}{|v|}$.

Propriedades do Produto Escalar

- Dados os vetores u, v e w quaisquer e $k \in R$:
  1. $u \cdot v \geq 0$ e $u \cdot u = 0$ se, e somente se, $u = 0 = (0, 0)$
  2. $u \cdot v = v \cdot u$
  3. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
  4. $(mu) \cdot v = m(u \cdot v) = u \cdot (mv)$
  5. $u \cdot u = |u|^2$
- Consequências das propriedades:
  1. $|u + v|^2 = (u + v) \cdot (u + v) = u \cdot (u + v) + v \cdot (u + v)$
  2. $|u + v|^2 = u \cdot u + u \cdot v + v \cdot u + v \cdot v$
  3. $|u + v|^2 = |u|^2 + 2u \cdot v + |v|^2$
  4. $|u - v|^2 = |u|^2 - 2u \cdot v + |v|^2$

Operações com Vetores - Exercícios

- **Exercício 4**. Seja $u = (2, 3, -4)$ e $v = (1, -5, 8)$. Calcule:
  1. $u + v$

Operações com Vetores - Exercícios

- **Exercício 4**. Seja $u = (2, 3, -4)$ e $v = (1, -5, 8)$. Calcule:
  1. $u + v$
     Resposta: $u + v = (3, -2, 4)$
  2. $5u$
     Resposta: $5u = (10, 15, -20)$
  3. $-v$
     Resposta: $-v = (-1, 5, -8)$
  4. $2u - 3v$
     Resposta: $2u - 3v = (1, 21, -32)$
  5. $u \cdot v$
     Resposta: $u \cdot v = -45$
  6. $|u|$
     Resposta: $|u| = \sqrt{29}$

Ângulo entre Dois Vetores

- **Definição**. Sejam os vetores $u \neq 0$ e $v \neq 0$. O ângulo θ formado por u e v pode ser calculado por: $cos(\theta) = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$.
- **Exemplo 5**. Se $u = (-2, -2)$ e $v = (0, -2)$, o ângulo θ pode ser calculado da seguinte forma:
  - $cos(\theta) = \frac{u \cdot v}{|u||v|} = \frac{(-2,-2)\cdot(0,-2)}{\sqrt{(-2)^2+(-2)^2} \times \sqrt{0^2+(-2)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
  - $\theta = 45^\circ$

Ângulo entre Dois Vetores

- **Exercício 5**. Determine o ângulo entre os vetores $a = (2, 2, -1)$ e $b = (5, -3, 2)$. **Resp.:** $arccos(\frac{2}{3\sqrt{38}})$
- **Exercício 6**. Determine $a \cdot b$, para $a = (5, 0, -2)$ e $b = (3, -1, 10)$. **Resp.: -5**
- **Exercício 7**. Use os valores para decidir se o triângulo com vértices $P(1, -3, -2)$, $Q(2, 0, -4)$ e $R(6, -2, -5)$ é retângulo. **Resp.: não é retângulo.**

Paralelismo e Ortogonalidade entre Dois Vetores

- **Definição**. Se dois vetores $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ são *paralelos* (ou colineares), existe um número k tal que $u = kv$, ou $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = k$.
- *Exemplo 6*. Os vetores $u = (-2, 3)$ e $v = (-4, 6)$ são paralelos, pois: $\frac{-2}{-4} = \frac{3}{6}$.
- **Definição**. Se dois vetores $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ são ortogonais, o ângulo θ por eles formado é de 90° e, portanto: $u \cdot v = 0$.
- **Exemplo 7**. Os vetores $u = (2, 3)$ e $v = (-3, 2)$ são ortogonais, pois $u \cdot v = 0$.

Paralelismo e Ortogonalidade entre Dois Vetores

- **Exercício 8**. Determine se os vetores dados são ortogonais, paralelos ou nenhum dos dois:
  a) $a = (-5, 3, 7)$, $b = (6, -8, 2)$
  b) $a = (4, 6)$, $b = (-3, 2)$
  c) $u = (-3, 9, 6)$, $v = (4, -12, -8)$

Roteiro

- O conjunto $R^3 = R \times R \times R = \{(x, y, z)|x, y, z \in R\}$ é interpretado geometricamente como sendo o espaço cartesiano tridimensional $Oxyz$.
- A origem do sistema $O(0, 0, 0)$ representa o vetor nulo.
- O vetor oposto de $v = (x, y, z)$ é o vetor $-v = (-x, -y, -z)$.
- As seguintes propriedades são atendidas:
  1. Dois vetores $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$.
  2. Dados os vetores $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ e $a \in R$, define-se:
     - $u + v = (x_1 + x + 2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$
     - $au = (ax_1, ay_1, az_1)$
  3. Se $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ são dois pontos quaisquer no espaço, então $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Continuação das propriedades

4. O produto escalar dos vetores $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ é o número real: $u \cdot v = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$
5. O módulo do vetor $v = (x, y, z)$ é dado por: $|v| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
6. Se u e v são vetores não-nulos e θ é o ângulo formado por eles, então: $cos(\theta) = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$.
7. Para $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$, tem-se:
    1. $u//v$ se, e somente se, $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$;
    2. $u \perp v$ se, e somente se, $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

Exercícios

2. O ângulo entre os vetores $(1, 0, -1, 3)$ e $(1, \sqrt{3}, 3, -3)$ no R^4 é $a\pi$, qual é o valor de a?
   Resposta: $\frac{3}{4}$

Referências

- Álgebra Linear. Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle.