Sequências

Prof. Eanes Torres Pereira

FMCC2

Roteiro

Sequências - Introdução

- Uma sequência é uma estrutura discreta usada para representar listas ordenadas.
- Os termos de uma sequência podem ser especificados fornecendo uma fórmula para cada termo da sequência.
- Outra forma de especificar uma sequência é por meio de uma relação de recorrência.
- É possível também determinar uma fórmula fechada para os termos de uma sequência definida via uma relação de recorrência.

Sequências - Definição

- Uma sequência é uma função de um subconjunto do conjunto dos inteiros para um conjunto S.
- Geralmente, o subconjunto dos inteiros usado é $\{0, 1, 2, 3, ...\}$ ou $\{1, 2, 3, ...\}$
- Usamos a notação a_n para denotar a imagem do inteiro n.
- Chamamos a_n de termo da sequência.

Sequências

- **Exemplo**. Considere a sequência $\{a_n\}$, em que $a_n = \frac{1}{n}$. A lista de termos dessa sequência , começando com a_1, começa com os termos: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$.

Sequências

- **Definição**. Uma progressão geométrica é uma sequência da forma $a, ar, ar^2, \ldots, ar^n, \ldots$
- em que o termo inicial a e a razão são números reais.
- **Exemplo**. As sequências $\{b_n\}$ com $b_n = (-1)^n$, $\{c_n\}$, com $c_n = 2, 5^n$ e $\{d_n\}$ com $d_n = 6.(1/3)^n$ são progressões geométricas com termo inicial e razão iguais a 1 e -1; 2 e 5; e 6 e 1/3, respectivamente, se começarmos com $n = 0$.

Sequências

- **Definição**. Uma progressão aritmética é uma sequência da forma $a, a+d, a+2d, \ldots, a+nd, \ldots$
- em que o termo inicial a e o termo diferença d são números reais.
- Exemplo. A sequência s_n com $s_n = -1 + 4n$ é uma progressão aritmética com termo inicial igual a -1 e razão igual a 4, se começarmos com n=0. A lista de termos $s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots$ começa com: -1, 3, 7, ...

Roteiro

1. Sequências

2. Relações de Recorrência

Relações de Recorrência - Definição

- Uma **relação de recorrência** para a sequência $\{a_n\}$ é uma equação que expressa a_n em função de um ou mais dos termos anteriores da sequência. Uma sequência é chamada uma **solução** da relação de recorrência se seus termos satisfazem a relação de recorrência.
- Dizemos que uma relação de recorrência define recursivamente uma sequência.

Relações de Recorrência

- **Exemplo**. Seja $\{a_n\}$ uma sequência que satisfaz a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para $n = 2, 3, 4, \ldots$ e suponha que $a_1 = 2$. Quais são os valores de a_2, a_3 e a_4?

  Solução. Vemos da relação de recorrência que $a_1 = a_0 + 3 = 2 + 3 = 5$. Segue que $a_2 = 5 + 3 = 8$ e $a_3 = 8 + 3 = 11$.
- Exercício. Seja a_n uma sequência que satisfaz a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ para $n = 2, 3, 4, \ldots$ e suponha que $a_0 = 3$ e $a_1 = 5$. Quais são os valores de a_2 e a_3?

Relações de Recorrência

- **Exemplo**. Resolva a relação de recorrência e a condição inicial do Exemplo anterior.
- **Solução**. Usando **substituição-para-a-frente**:

  $a_2 = 2 + 3$

  $a_3 = (2 + 3) + 3 = 2 + 3.2$

  $a_4 = (2 + 2.3) + 3 = 2 + 3.3$

  podemos concluir que:
- $a_n = 2 + 3(n - 1)$

Relações de Recorrência

- **Solução**. Usando **substituição-para-trás**:

  $a_n = a_{n-1} + 3$

  $= (a_{n-2} + 3) + 3 = a_{n-2} + 3.2$

  $= (a_{n-3} + 3) + 3.2 = a_{n-3} + 3.3$

  podemos concluir que:

  $a_n = 2 + 3(n-1)$
- A cada iteração, obtemos o próximo termo na sequência somando 3 ao termo anterior. Obtemos o n-ésimo termo após n-1 iterações da relação de recorrência. Portanto, somamos $3(n-1)$ ao termo inicial $a_0 = 2$ para obter a_n. Isto nos dá a fórmula fechada $a_n = 2 + 3(n-1)$.

Relações de Recorrência

- **Exercício**. Prove por indução que a fórmula fechada para a relação de recorrência do exemplo anterior é $a_n = 2 + 3(n - 1)$.

Exercícios

Para as sequências abaixo, encontre uma relação de recorrência e uma fórmula fechada para a sequência (com exceção do exerc. 4), prove por indução a fórmula fechada.

1. 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, ...
2. 1, 3, 5, 7, 9, ...
3. 1, -1, 1, -1, 1, ...
4. Como podemos produzir os termos de uma sequência se os primeiros 10 termos são: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5?
5. 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 52, 59, ...
6. 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, ... Essa sequência é chamada de **Sequência de Lucas**.

Respostas

1. relação de recorrência: $a_n = \frac{a_{n-1}}{2}$, $a_1 = 1$; fórmula fechada: $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.
2. relação de recorrência: $a_1 = 1, a_n = a_{n-2} + 2$; fórmula fechada: $a_n = 1 + 2.(n-1)$.
3. relação de recorrência: $a_1 = 1, a_n = a_{n-1}.(-1)$; fórmula fechada: $a_1 = 1, a_n = (-1)^{n+1}$.
4. cada número aparece uma quantidade de vezes correspondente a seu valor.
5. relação de recorrência: $a_1 = 5, a_n = a_{n-1} + 6$; fórmula fechada: $a_n = 5 + 6(n-1)$.
6. $a_1 = 1, a_2 = 3, an = a_{n-1} + a_{n-2}$. A fórmula fechada está fora do escopo desta disciplina[1].

[1] Para uma demonstração ver: `https://proofwiki.org/wiki/Closed_Form_for_Lucas_Numbers`

Exercícios - Definições Recursivas

1. Dê uma definição recursiva para a sequência $\{a_n\}$, n=1, 2, 3, ... se:
    1.1 $a_n = 6n$
    1.2 $a_n = 2n + 1$
    1.3 $a_n = 10^n$
    1.4 $a_n = 5$

Obs.: pode haver mais de uma resposta correta para cada questão.

Respostas - Definições Recursivas

1. Algumas possíveis definições recursivas são:
   1.1 $a_{n+1} = a_n + 6$ para $n \geq 1$ e $a_1 = 6$.
   1.2 $a_{n+1} = a_n + 2$ para $n \geq 1$ e $a_1 = 3$.
   1.3 $a_{n+1} = 10a_n$ para $n \geq 1$ e $a_1 = 10$.
   1.4 $a_{n+1} = a_n$ para $n \geq 1$ e $a_1 = 5$.

Obs.: pode haver mais de uma resposta correta para cada questão.

Referência

Matemática Discreta e suas Aplicações, Kenneth Rosen.