

Parte 1 — A Fundamentação Matemática do CRC

Conceito Básico

O CRC (Cyclic Redundancy Check) trata sequências de bits como polinômios binários para detectar erros de transmissão.

Definições

- **M(x)**: Mensagem de m bits representada como polinômio
- **G(x)**: Polinômio gerador de grau r (r+1 bits)
- **T(x)**: Quadro transmitido (mensagem + CRC)

Processo de Geração do CRC

1. Anexar r bits '0' ao final da mensagem

- Equivale a multiplicar $M(x)$ por 2^r
- Resulta em $M(x) \cdot 2^r$

2. Dividir $M(x) \cdot 2^r$ por $G(x)$

- Divisão binária usando operações XOR
- Sem transporte (divisão polinomial)

3. O resto da divisão é o CRC

- Fórmula: $\text{CRC} = (M(x) \cdot 2^r) \bmod G(x)$

4. Quadro transmitido T(x)

- $T(x) = M(x) \cdot 2^r + \text{CRC}$
- Estrutura: | mensagem | CRC |
- Tamanho: m + r bits

Processo de Verificação do CRC

1. **Receptor divide T(x) por G(x)**
2. **Se resto = 0**: Mensagem íntegra ✓
3. **Se resto ≠ 0**: Erro detectado ✗

Fórmulas Principais

- **Geração:** $CRC = (M(x) \cdot 2^r) \bmod G(x)$
- **Transmissão:** $T(x) = M(x) \cdot 2^r + CRC$
- **Verificação:** $T(x) \bmod G(x) = 0 \rightarrow \text{Íntegra}$

Limitações

- Detecta rajadas de até r bits
- Não é infalível para todos os padrões de erro
- Eficiência depende do polinômio gerador escolhido

Resumo: O CRC usa aritmética polinomial para gerar um código de verificação que permite detectar erros de transmissão através de divisão binária com XOR.

Parte 2 — Implementação Manual do Algoritmo CRC

Abaixo está a implementação da função `calcular_crc_manual` e um teste básico para validação.

```
In [1]: def xor_bits(a, b):
        """
        Realiza a operação de XOR bit a bit entre duas strings binárias de me
        """
        resultado = ""
        for i in range(len(a)):
            if a[i] == b[i]:
                resultado += '0'
            else:
                resultado += '1'
        return resultado

def calcular_crc_manual(dados_bits: str, gerador_bits: str) -> str:
    """
    Calcula o CRC para uma sequência de dados M(x) usando um gerador G(x)

    Args:
        dados_bits: A string binária representando o polinômio da mensagem
        gerador_bits: A string binária representando o polinômio gerador,

    Returns:
        A string binária de r bits representando o CRC.
    """
    # 1. Obtem o grau 'r' do gerador.
    r = len(gerador_bits) - 1

    # 2. Cria M(x) * 2^r, que é a mensagem com 'r' zeros anexados.
    mensagem_aumentada = list(dados_bits + '0' * r)

    # 3. Implementa o loop de divisão.
    for i in range(len(dados_bits)):
        if mensagem_aumentada[i] == '1':
```

```

janela_atual = "".join(mensagem_aumentada[i : i + r + 1])
resultado_xor = xor_bits(janela_atual, gerador_bits)
for j in range(len(resultado_xor)):
    mensagem_aumentada[i + j] = resultado_xor[j]

# 4. 0 resto da divisão são os 'r' bits finais da mensagem processada
resto = "".join(mensagem_aumentada[-r:])
return resto

```

```

In [2]: # Exemplo de uso para validação
dados_teste = "1101011111" # M(x)
gerador_teste = "10011" # G(x)
crc_calculado = calcular_crc_manual(dados_teste, gerador_teste)

print(f"Dados M(x): {dados_teste}")
print(f"Gerador G(x): {gerador_teste}")
print(f"CRC Calculado (manual): {crc_calculado}")

```

```

Dados M(x): 1101011111
Gerador G(x): 10011
CRC Calculado (manual): 0010

```

Parte 3 — Análise Comparativa de Desempenho

Comparando o desempenho da implementação manual com a biblioteca `crc` para diferentes tamanhos de mensagem:

```

In [3]: !pip install crc

```

```

Requirement already satisfied: crc in /Users/ananda/Documents/UFCG/REDES/r
c2025.1/.conda/lib/python3.11/site-packages (7.1.0)

```

```

In [4]: import platform
import time
import tracemalloc
import os
from crc import Calculator, Crc16
import psutil

# Usando um padrão de 16 bits como referência (MODBUS)
calculator_lib = Calculator(Crc16.MODBUS)

# Tamanhos de mensagem para teste (em bytes)
tamanhos_bytes = [1500, 4500, 9000]

resultados = []

print("=== CONFIGURAÇÃO DA MÁQUINA ===")
print(f"Sistema Operacional: {platform.system()}")
print(f"Processador: {platform.processor()}")
print(f"Memória Total: {psutil.virtual_memory().total / (1024 * 1024 * 1024)} GB")
print(f"Versão do Python: {platform.python_version()}\n")

for tamanho in tamanhos_bytes:
    print(f"Analisando para mensagem de {tamanho} bytes...")
    mensagem_bytes = os.urandom(tamanho)
    mensagem_bits = "".join(format(byte, '08b') for byte in mensagem_bytes)

```

```

# Medição da Implementação Manual
tracemalloc.start()
start_time = time.perf_counter()
crc_manual = calcular_crc_manual(mensagem_bits, "11000000000000101")
end_time = time.perf_counter()
mem_atual_manual, mem_pico_manual = tracemalloc.get_traced_memory()
tracemalloc.stop()
tempo_manual = end_time - start_time

# Medição da Biblioteca
tracemalloc.start()
start_time = time.perf_counter()
crc_lib = calculator_lib.checksum(mensagem_bytes)
end_time = time.perf_counter()
mem_atual_lib, mem_pico_lib = tracemalloc.get_traced_memory()
tracemalloc.stop()
tempo_lib = end_time - start_time

resultados.append({
    "tamanho": tamanho,
    "tempo_manual": tempo_manual,
    "mem_pico_manual": mem_pico_manual / 1024,
    "tempo_lib": tempo_lib,
    "mem_pico_lib": mem_pico_lib / 1024
})

print("\n\n--- Resultados Finais ---\n")
for r in resultados:
    print(f"Tamanho: {r['tamanho']} bytes")
    print(f"Manual: tempo = {r['tempo_manual']:.6f}s, pico memória = ")
    print(f"Biblioteca: tempo = {r['tempo_lib']:.6f}s, pico memória = ")

```

=== CONFIGURAÇÃO DA MÁQUINA ===

Sistema Operacional: Darwin

Processador: arm

Memória Total: 8.00 GB

Versão do Python: 3.11.0

Analisando para mensagem de 1500 bytes...

Analisando para mensagem de 4500 bytes...

Analisando para mensagem de 9000 bytes...

--- Resultados Finais ---

Tamanho: 1500 bytes

Manual: tempo = 0.145653s, pico memória = 105.76 KiB

Biblioteca: tempo = 0.040191s, pico memória = 1.47 KiB

Tamanho: 4500 bytes

Manual: tempo = 0.404055s, pico memória = 316.70 KiB

Biblioteca: tempo = 0.119596s, pico memória = 1.24 KiB

Tamanho: 9000 bytes

Manual: tempo = 0.821503s, pico memória = 633.10 KiB

Biblioteca: tempo = 0.247313s, pico memória = 1.24 KiB

In [5]: # Geração dos gráficos
import matplotlib.pyplot as plt

```

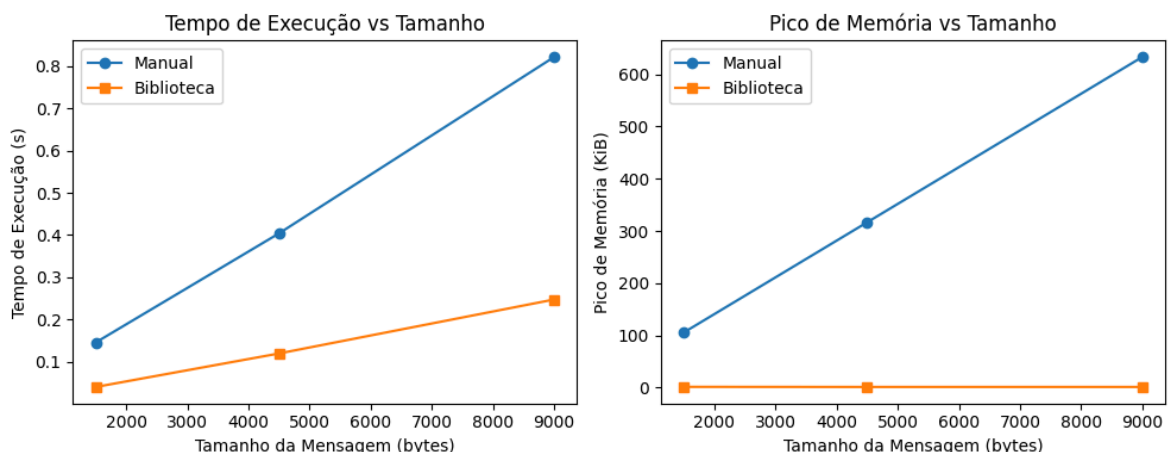
tamanhos = [r["tamanho"] for r in resultados]
tempos_manual = [r["tempo_manual"] for r in resultados]
tempos_lib = [r["tempo_lib"] for r in resultados]
mem_manual = [r["mem_pico_manual"] for r in resultados]
mem_lib = [r["mem_pico_lib"] for r in resultados]

plt.figure(figsize=(10,4))
plt.subplot(1,2,1)
plt.plot(tamanhos, tempos_manual, 'o-', label="Manual")
plt.plot(tamanhos, tempos_lib, 's-', label="Biblioteca")
plt.xlabel("Tamanho da Mensagem (bytes)")
plt.ylabel("Tempo de Execução (s)")
plt.title("Tempo de Execução vs Tamanho")
plt.legend()

plt.subplot(1,2,2)
plt.plot(tamanhos, mem_manual, 'o-', label="Manual")
plt.plot(tamanhos, mem_lib, 's-', label="Biblioteca")
plt.xlabel("Tamanho da Mensagem (bytes)")
plt.ylabel("Pico de Memória (KiB)")
plt.title("Pico de Memória vs Tamanho")
plt.legend()

plt.tight_layout()
plt.savefig("grafico_desempenho_crc.png")
plt.show()

```



Parte 4 — Análise Investigativa da Detecção de Erros

Testando a detecção de erros inserindo rajadas de bits em posições aleatórias e comparando a detecção entre a implementação manual e a biblioteca:

```

In [6]: import random

mensagem_base = "ananda"
mensagem_bits = (
    "01100001" # a
    "01101110" # n
    "01100001" # a
    "01101110" # n
    "01100100" # d

```

```

    "01100001" # a
)
gerador_bits = "11000000000000101" # CRC-16/MODBUS

print("=== CONFIGURAÇÃO INICIAL ===")
print(f"MENSAGEM_BASE: {mensagem_bits}")
print(f"GERADOR: {gerador_bits}")

crc_calculado = calcular_crc_manual(mensagem_bits, gerador_bits)
print(f"CRC calculado: {crc_calculado}")

quadro_transmitido = mensagem_bits + crc_calculado
print(f"QUADRO_TRANSMITIDO: {quadro_transmitido}")

def inserir_erro_rajada(quadro_tx, n_bits):
    """
    Insere erro de rajada de n_bits em posição aleatória.
    Retorna: quadro_corrompido, posição, padrão_erro
    """
    pos = random.randint(0, len(quadro_tx) - n_bits)

    # Cria padrão de erro (todos zeros, exceto a rajada)
    padrao_erro = ['0'] * len(quadro_tx)
    for i in range(n_bits):
        padrao_erro[pos + i] = '1'
    padrao_erro = ''.join(padrao_erro)

    # Aplica XOR entre quadro_transmitido e padrão_erro
    quadro_corrompido = ''.join(
        '1' if quadro_tx[i] != padrao_erro[i] else '0'
        for i in range(len(quadro_tx))
    )

    return quadro_corrompido, pos, padrao_erro

from crc import Calculator, Crc16
def verificar_crc_biblioteca(bits):
    """
    Calcula CRC usando biblioteca com melhor tratamento de erro
    """
    try:
        if len(bits) % 8 != 0:
            bits = bits.zfill(((len(bits) + 7) // 8) * 8)
            as_bytes = int(bits, 2).to_bytes(len(bits) // 8, byteorder='big')
            calculator = Calculator(Crc16.MODBUS)
            return calculator.checksum(as_bytes)
        except Exception as e:
            print(f"Erro na conversão: {e}")
            return -1

print("\n=== EXECUTANDO 10 TESTES ===")
resultados_teste = []

for teste in range(10):
    print(f"\n--- TESTE {teste + 1} ---")

    n_bits = random.randint(1, 8)
    quadro_corrompido, posicao, padrao_erro = inserir_erro_rajada(quadro_

    crc_manual_result = calcular_crc_manual(quadro_corrompido, gerador_bi

```

```

crc_lib_result = verificar_crc_biblioteca(quadro_corrompido)

crc_esperado_zeros = '0' * 16
detectado_manual = crc_manual_result != '0' * 16
detectado_lib = crc_lib_result != 0

resultado = {
    'teste': teste + 1,
    'n_bits': n_bits,
    'posicao': posicao,
    'padrao_erro': padrao_erro,
    'crc_manual': crc_manual_result,
    'crc_lib': crc_lib_result,
    'detectado_manual': detectado_manual,
    'detectado_lib': detectado_lib
}
resultados_teste.append(resultado)

print(f"Rajada de {n_bits} bits na posição {posicao}")
print(f"Padrão de erro: {padrao_erro}")
print(f"CRC Manual: {crc_manual_result} {'✓ DETECTOU' if detectado_ma
print(f"CRC Biblioteca: {crc_lib_result} {'✓ DETECTOU' if detectado_l

print("\n=== RELATÓRIO FINAL ===")
print("Resumo dos 10 testes:")
for r in resultados_teste:
    status_manual = "✓" if r['detectado_manual'] else "x"
    status_lib = "✓" if r['detectado_lib'] else "x"
    print(f"Teste {r['teste']}: {r['n_bits']} bits na pos {r['posicao']}

falhas_manual = sum(1 for r in resultados_teste if not r['detectado_manua
falhas_lib = sum(1 for r in resultados_teste if not r['detectado_lib'])

print(f"\n=== PONTOS CEGOS ENCONTRADOS ===")
print(f"- Implementação Manual: {falhas_manual} falhas")
print(f"- Biblioteca: {falhas_lib} falhas")

if falhas_manual > 0 or falhas_lib > 0:
    print("\nDETALHES DOS PONTOS CEGOS:")
    for r in resultados_teste:
        if not r['detectado_manual'] or not r['detectado_lib']:
            print(f"Teste {r['teste']}: Rajada de {r['n_bits']} bits na p
            if not r['detectado_manual']:
                print(f" → Manual NÃO detectou (CRC: {r['crc_manual']})"
            if not r['detectado_lib']:
                print(f" → Biblioteca NÃO detectou (CRC: {r['crc_lib']})

print(f"\n=== ANÁLISE DE DESEMPENHO ===")
if falhas_manual == 0 and falhas_lib == 0:
    print("- Ambas as implementações detectaram todos os erros testados."
    print("- O CRC-16 mostrou-se eficaz para os padrões de erro testados.
elif falhas_manual > 0 or falhas_lib > 0:
    print("- Foram encontrados pontos cegos no CRC-16.")
    print("- Isso demonstra as limitações teóricas do algoritmo.")

print(f"\n=== LIMITAÇÕES IDENTIFICADAS ===")
if falhas_manual > 0 or falhas_lib > 0:
    print("- O CRC-16 não é infalível para todos os padrões de erro.")
    print("- Rajadas específicas podem passar despercebidas.")
    print("- Para aplicações críticas, CRC-32 seria mais adequado.")

```

```
else:
    print("- Nos testes realizados, o CRC-16 mostrou-se robusto.")
    print("- Isso não garante que seja infalível para todos os cenários.")

print(f"\n=== CONCLUSÕES ===")
print("- A implementação manual serve como uma boa ferramenta educacional")
print("- A biblioteca oferece performance otimizada para uso em produção.")
print("- O CRC-16 é adequado para a maioria das aplicações, mas tem limit")
print("- Para comunicações críticas, algoritmos mais robustos são recomen
```



```
=== CONFIGURAÇÃO INICIAL ===
MENSAGEM_BASE: 011000010110111001100001011011100110010001100001
GERADOR: 110000000000000101
CRC calculado: 1010000110111100
QUADRO_TRANSMITIDO: 011000010110111001100001011011100110010001100001101000
0110111100

=== EXECUTANDO 10 TESTES ===

--- TESTE 1 ---
Rajada de 3 bits na posição 17
Padrão de erro: 0000000000000000011100000000000000000000000000000000
000000
CRC Manual: 1000000001110100 ✓ DETECTOU
CRC Biblioteca: 28372 ✓ DETECTOU

--- TESTE 2 ---
Rajada de 1 bits na posição 19
Padrão de erro: 0000000000000000001000000000000000000000000000000000
000000
CRC Manual: 1000000000010010 ✓ DETECTOU
CRC Biblioteca: 52957 ✓ DETECTOU

--- TESTE 3 ---
Rajada de 1 bits na posição 24
Padrão de erro: 0000000000000000000000001000000000000000000000000000
000000
CRC Manual: 1011110000000011 ✓ DETECTOU
CRC Biblioteca: 32990 ✓ DETECTOU

--- TESTE 4 ---
Rajada de 2 bits na posição 28
Padrão de erro: 000000000000000000000000000000001100000000000000000000000
000000
CRC Manual: 0000001000100000 ✓ DETECTOU
CRC Biblioteca: 24527 ✓ DETECTOU

--- TESTE 5 ---
Rajada de 7 bits na posição 37
Padrão de erro: 0000000000000000000000000000000000000000000011111110000000000000
000000
CRC Manual: 1110000011000011 ✓ DETECTOU
CRC Biblioteca: 6622 ✓ DETECTOU

--- TESTE 6 ---
Rajada de 4 bits na posição 57
Padrão de erro: 000000000000000000000000000000000000000000000000000000001
111000
CRC Manual: 0000000100010000 ✓ DETECTOU
CRC Biblioteca: 31967 ✓ DETECTOU

--- TESTE 7 ---
Rajada de 5 bits na posição 2
Padrão de erro: 00111110000000000000000000000000000000000000000000000000
000000
CRC Manual: 1110000010001110 ✓ DETECTOU
CRC Biblioteca: 50781 ✓ DETECTOU

--- TESTE 8 ---
Rajada de 5 bits na posição 53
```

