Matemáticas avanzadas para la ingeniería
Primera lista de ejercicios
Profesor: Ricardo Ceballos Sebastián

Instrucciones: *Resuelva 20 ejercicios. Resuelva los ejercicios a mano, usando bolígrafo y hojas blancas. Incluya el enunciado del problema y a continuación su solución, en caso contrario no se revisarán. Escanee su escrito. Solo debe subir un archivo PDF a la plataforma. Si el archivo no es legible se anulará, sin importar la causa.*

1. En los siguientes ejercicios, desarrolle las operaciones aritméticas y exprese el resultado en la forma $a + bi$.

   a) $(-1 + 3i) + (5 - 7i)$
   b) $(-1 + 3i)(5 - 7i)$
   c) $(3 - 2i)(4 + 3i)(3 + 2i)$

2. En los siguientes ejercicios, desarrolle las operaciones aritméticas y exprese el resultado en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

   a) $Im[(1 + i)^3]$
   b) $[Im(1 + i)]^3$
   c) $(x + iy)(u - iv)(x - iy)(u + iv)$ donde x, y, u y v son números reales.

3. Use el desarrollo binomial de Newton para hallar

   a) $(1 + iy)^n$ donde n es un entero positivo.
   b) Use el resultado anterior para hallar las partes real e imaginaria de $(1 + 2i)^5$.

4. Sean $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ números complejos, demuestre que

   a) $Re(z_1z_2) = Re(z_1)Re(z_2) - Im(z_1)Im(z_2)$.
   b) $Im(z_1z_2) = Re(z_1)Im(z_2) + Im(z_1)Re(z_2)$.

5. Si $n > 0$ es un entero, cuáles son los cuatro posibles valores de i^n. Demuestre que $i^{n+4} = i^n$.

6. Hallar

   a) i^{1023}.
   b) $(1 - i)^{1025}$. Sugerencia: comience por hallar $(1 - i)^2$.

   Si z_1 y z_2 son dos números complejos, demuestre las siguientes propiedades:

7. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$.

8. $Re(z_1z_2) = Re(\overline{z_1}\,\overline{z_2})$.

9. $Im(z_1z_2) = -Im(\overline{z_1}\,\overline{z_2})$.

   Calcule el valor numérico de las siguiente expresiones. Determine la respuesta en la forma $a + ib$, donde a y b son números reales.

10. $\frac{1}{1+2i}$

11. $(i + \frac{1}{1-2i})^2$.

12. $\frac{3-4i}{1+2i}$.

13. $\frac{3-4i}{1+2i} + \frac{3+4i}{1-2i}$.

14. $2i + \frac{3-4i}{1+2i}$.

15. $(\frac{4-4i}{2+2i})^7$.

16. $(\frac{4-4i}{2+2i})^7 + (\frac{4+4i}{2-2i})^7$.

17. Sean z_1, z_2 y z_3 tres números complejos cualesquiera. Determine si las siguientes ecuaciones son de validez general.

    a) $\overline{(\frac{z_1}{z_2 z_3})} = \overline{z_1}(\frac{1}{\overline{z_2}\, z_3})$.
    b) $\overline{z_1 \overline{z_2} z_3} = \overline{z_1} z_2 \overline{z_3}$.
    c) $\overline{i(z_1 + z_2 + z_3)} = i(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3})$.
    d) $Re(z_1 \overline{z_2} z_3) = Re(\overline{z_1} z_2 \overline{z_3})$.

18. Determine el módulo de cada una de las siguientes expresiones

    a) $3 + 4i$.
    b) $\frac{(3+4i)(1+i)}{3-4i}$.
    c) $i + \frac{(3+4i)(1+i)}{3-4i}$
    d) $(\frac{x+iy}{x-iy})^n$, $n \geq 0$.

19. Los siguientes vectores representan números complejos. Exprese estos números en la forma $a + ib$.

    a) El vector que va de $(1, 2)$ a $(-3, 4)$.
    b) El vertor de magnitud 10 que sale de $(1, -2)$ y forma un ángulo de $\pi/6$ radianes con el eje positivo x.
    c) El vector que empieza en $(2, 3)$ y termina en la recta $y = -x$. La recta y el vector forman un ángulo recto.

20. Encuentre el argumento principal de los siguientes números complejos.

    a) $2cis(3.14)$.
    b) $2cis(-2.99\pi)$.
    c) $2cis(2.01\pi x 10^8)$.

21. Determine, en la forma $a + ib$, los números complejos representados por los puntos con las siguientes coordenadas polares.

    a) $r = 2$, $\theta = 3$.
    b) $r = 2$, $\theta = 3\frac{1}{3}\pi$

22. Convierta las siguientes expresiones a la forma $rcis\theta$. Escriba r y exprese todos los valores posibles de θ en radianes.

    a) $\sqrt{3} + i$.
    b) $-\sqrt{3} - i$.
    c) $(3 + 4i)(3 + 4i)(1 + i)$

d) $(\sqrt{3}+i)^4(1-i)^3$.

23. Reduzca las siguientes expresiones a la forma $rcis\theta$. Dé, en radianes, únicamente el valor principal de θ.

    a) $\frac{(1+i)(-1-i\sqrt{3})}{3\angle\frac{\pi}{8}}$.
    b) $(\frac{1+i}{1-i})^3 + 2i$.
    c) $\frac{[cis(\frac{\pi}{6})]^4}{[cis(-\frac{\pi}{6})]^4}$

24. a) Considere los vectores que representan a los números complejos f y g. Muestre que éstos vectores son perpendiculares si y solo si

$$|f-g|^2 = |f|^2 + |g|^2.$$

    b) Demuestre que la ecuación anterior equivale a exigir que $Re(f\overline{g}) = 0$.

25. A partir del producto $(z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2})$, demuestre que

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2Re(z_1\overline{z_2}).$$

26. Sean z y w números complejos tales que $\overline{z}w \neq 1$, pero tales que z o w tienen magnitud 1. Pruebe que

$$\left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right| = 1.$$

27. Pruebe que si z y w son números complejos cualesquiera, entonces

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$