López Pérez Alberto Andrei

Segundo Trabajo Especial

La ecuación de Bernoulli un caso especial de una ecuación diferencial no lineal de primer orden.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \ldots (1) \quad \text{donde } n \in \mathbb{R}$$

La ecuación diferencial (1) se llama ecuación de Bernoulli

(1) Demostrar que a partir del cambio de variable $u = y^{1-n}$; $u = u(x)$ la ecuación diferencial de Bernoulli $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \ldots (1)$

se reduce a la ecuación diferencial lineal de Primer Orden

$$\frac{du}{dx} + (1-n)P(x)u = Q(x)(1-n)$$

Sea $u = y^{1-n}$; $u = u(x)$

$$y = u^{\frac{1}{1-n}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n} u^{\frac{1}{1-n}-1} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n} u^{\frac{n}{1-n}} \left(\frac{du}{dx}\right)$$

Haciendo los cambios en (1)

$$\frac{1}{1-n} u^{\frac{n}{1-n}} \frac{du}{dx} + P(x) u^{\frac{1}{1-n}} = Q(x) u^{\frac{n}{1-n}}$$

Multiplicar por $(1-n)u^{-\frac{n}{1-n}}$

$$\left(\frac{1}{1-n} u^{\frac{n}{1-n}} \frac{du}{dx} + P(x) u^{\frac{1}{1-n}} = Q(x) u^{\frac{n}{1-n}}\right)(1-n) u^{-\frac{n}{1-n}}$$

$$= \frac{1-n}{1-n} u^{\frac{n}{1-n} - \frac{n}{1-n}} \frac{du}{dx} + \left(P(x) u^{\frac{1}{1-n} - \frac{n}{1-n}}\right)(1-n) = \left(Q(x) u^{\frac{n}{1-n} - \frac{n}{1-n}}\right)(1-n)$$

$$\frac{dv}{dx} + \left(P(x)\, v^{\frac{1-n}{1-n}}\right)(1-n) = Q(x)(1-n)$$

$$= \frac{dv}{dx} + P(x)\, v(1-n) = Q(x)(1-n) \therefore \frac{dv}{dx} + (1-n)P(x)v = Q(x)(1-n)$$

Ejercicios.

15.- $x\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{y^2}$

$\to \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{y^{-2}}{x} \ldots (1)$

Sea $V = y^{1-n} = y^{1-(-2)} = y^3$; $V = V(x)$

$y = V^{\frac{1}{1-n}} = V^{\frac{1}{3}} \to y^{-2} = V^{-2/3}$,

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n} V^{\frac{1}{1-n}} \frac{dV}{dx} \to \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} V^{-\frac{2}{3}} \frac{dV}{dx}$

Sustituyendo en (1)

$\frac{1}{3} V^{-2/3} \frac{dV}{dx} + \frac{V^{1/3}}{x} = \frac{V^{-2/3}}{x}$ Multiplicando por $3V^{2/3}$

$\frac{dV}{dx} + \frac{3V}{x} = \frac{3}{x} \ldots (2)$ $P(x) = \frac{3}{x} \to M(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{3}{x}} = e^{3\ln(x)} = x^3$ Multiplicando M(x) en (2)

$x^3\left(\frac{dV}{dx} + \frac{3V}{x} = \frac{3}{x}\right) \to x^3 \frac{dV}{dx} + 3Vx^2 = 3x^2$ Simplificando

$\frac{d}{dx}(V \cdot x^3) = 3x^2$

Integrando

$\int \frac{d}{dx}(V \cdot x^3)dx = \int 3x^2 dx \to Vx^3 = x^3 + C \to V = 1 + x^{-3}C$

Pero $V = y^3$ $\therefore y^3 = 1 + x^{-3}C$

16.- $\frac{dy}{dx} - y = e^{x} y^{2}$ Sea $v = y^{1-n} = y^{-1}$; $v\ v(x)$

$y = v^{\frac{1}{1-n}} = v^{-1} \rightarrow y^{2} = v^{-2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n} v^{\frac{n}{1-n}} \frac{dv}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = -v^{-2} \frac{dv}{dx}$

Haciendo los cambios en (1)

$-v^{-2} \frac{dv}{dx} - v^{-1} = e^{x} v^{-2}$ Multiplicando por $-v^{2}$

$\frac{dv}{dx} + v = -e^{x}$ ...(2) $P(x) = 1$ ∴ $M(x) = e^{\int dx} = e^{x}$ Multiplicando $M(x)$ en (2)

$e^{x}\left(\frac{dv}{dx} + v = -e^{x}\right) \rightarrow e^{x} \frac{dv}{dx} + e^{x} v = -e^{2x}$ Simplificando

$\frac{d}{dx}(v \cdot e^{x}) = -e^{2x} \rightarrow \int \frac{d}{dx}(v \cdot e^{x}) = \int -e^{2x} dx$

$\rightarrow v e^{x} = -\frac{1}{2} e^{2x} + C \rightarrow v = -\frac{1}{2} e^{x} + e^{-x} C$ Pero $v = y^{-1}$

$\therefore y^{-1} = -\frac{1}{2} e^{x} + e^{-x} C$

17.- $\frac{dy}{dx} = y(xy^{3} - 1) \rightarrow \frac{dy}{dx} + y = xy^{4}$ ...(1)

Sea $v = y^{1-n} = y^{-3}$; $v = v(x)$ $y = v^{\frac{1}{1-n}} = v^{-1/3} \rightarrow y^{4} = v^{-4/3}$;

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n} v^{\frac{n}{1-n}} \frac{dv}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3} v^{-4/3} \frac{dv}{dx}$ Sustituyendo en (1)

$-\frac{1}{3} v^{-4/3} \frac{dv}{dx} + v^{-1/3} = x v^{-4/3}$ Multiplicando por $-3v^{4/3}$

$\frac{dv}{dx} - 3v = -3x$ ...(2) $P(x) = -3$ ∴ $M(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int -3dx} = e^{-3x}$ Mult. M_x por (2)

$e^{-3x}\left(\frac{dv}{dx} - 3v = -3x\right) \rightarrow e^{-3x} \frac{dv}{dx} - 3v e^{-3x} = -3x e^{-3x}$ Simplificando

$$\frac{d}{dx}\left(v\cdot e^{-3x}\right) = -3xe^{-3x} \quad \text{Integrando}$$

$$\int \frac{d}{dx}\left(v\cdot e^{-3x}\right) = \int -3xe^{-3x} \rightarrow ve^{-3x} = -3\int xe^{-3x}$$

$$\int xe^{-3x} = -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \int -\frac{1}{3}e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{9}e^{-3x} + C$$

$u = x \quad dv = e^{-3x}$

$du = dx \quad v = -\frac{e^{-3x}}{3}$

$$\therefore \left(ve^{-3x} = xe^{-3x} - \frac{1}{3}e^{-3x} + C\right)e^{3x} \rightarrow v = x - \frac{1}{3} + e^{3x}C$$

Pero $v = y^{-3}$ $\quad \therefore y^{-3} = x - \frac{1}{3} + e^{3x}C$

18- $x\frac{dy}{dx} - (1+x)y = xy^2 \rightarrow \frac{dy}{dx} - \left(\frac{1+x}{x}\right)y = y^2 \ldots (1)$

Sea $v = y^{-1}$; $v = v(x)$ $\quad y = v^{-1} \rightarrow y^2 = v^{-2}$; $\frac{dy}{dx} = -v^{-2}\frac{dv}{dx}$

Haciendo los cambios en (1)

$-v^{-2}\frac{dv}{dx} - \left(\frac{1+x}{x}\right)v^{-1} = v^{-2}$ Multiplicando por $-v^2$

$\frac{dv}{dx} + \left(\frac{1+x}{x}\right)v = -1 \ldots (2)$ $\quad P(x) = \frac{1+x}{x} \therefore M(x) = e^{\int \frac{1+x}{x}dx} = e^{\ln x + x} = xe^{x}$

Multiplicando $M(x)$ en (2)

$xe^{x}\left(\frac{dv}{dx} + \left(\frac{1+x}{x}v\right) = -1\right) \rightarrow xe^{x}\frac{dv}{dx} + (1+x)ve^{x} = -xe^{x}$ simplificando

$\frac{d}{dx}\left(v\cdot xe^{x}\right) = -xe^{x}$ Integrando $\int \frac{d}{dx}\left(v\cdot xe^{x}\right) = \int -xe^{x} \rightarrow vxe^{x} = -\int xe^{x} \ldots (3)$

$\int xe^{x} \rightarrow xe^{x} - \int e^{x}dx = xe^{x} - e^{x} + C$ Sustituyendo en (3)

$u = x \quad v = e^{x}$

$du = dx \quad dv = e^{x}dx$

$vxe^{x} = -xe^{x} + e^{x} + C \rightarrow v = -1 + \frac{1}{x} + \frac{C}{xe^{x}}$

Pero $v = y^{-1}$ $\quad \therefore y^{-1} = -1 + \frac{1}{x} + \frac{C}{xe^{x}}$

19.- $x^2 \frac{dy}{dx} + y^2 = xy \to \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = -\frac{y^2}{x^2}$ ...(1) Sea $v = y^{-1}$; $y = v^{-1}$ $y^2 = v^{-2}$

$\frac{dy}{dx} = -v^{-2}\frac{dv}{dx}$ Haciendo los cambios en (1)

$-v^{-2}\frac{dv}{dx} - \frac{v^{-1}}{x} = -\frac{v^{-2}}{x^2}$ Multiplicando por $-v^2$

$\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = \frac{1}{x^2}$ ...(2) $P(x) = \frac{1}{x} \therefore M(x) = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x$ Mult. M(x) por (2)

$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{1}{x}$ Simplificando $\frac{d}{dx}(v \cdot x) = \frac{1}{x}$ Integrando

$\int \frac{d}{dx}(vx) = \int \frac{dx}{x} \to vx = \ln(x) + c \to vx = \ln(x) + \ln c \to vx = \ln(xc)$

$e^{vx} = xc$ Pero $v = y^{-1}$ $\therefore$ $e^{x/y} = xc$

20.- $3(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 2xy(y^3-1) \to \frac{dy}{dx} = \frac{2xy^4 - 2xy}{3+3x^2} \to \frac{dy}{dx} + \frac{2xy}{3+3x^2} = \frac{2xy^4}{3+3x^2}$ ...(1)

Sea $v = y^{-3}$; $v = v(x)$; $y = v^{-1/3}$; $y^4 = v^{-4/3}$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}v^{-4/3}\frac{dv}{dx}$

Haciendo los cambios en (1)

$-\frac{1}{3}v^{-4/3}\frac{dv}{dx} + \frac{2x}{3+3x^2}v^{-1/3} = \frac{2x}{3+3x^2}v^{-4/3}$ Multiplicando por $-3v^{4/3}$

$\frac{dv}{dx} - \frac{2x}{1+x^2}v = -\frac{2x}{1+x^2}$ ...(2) $P(x) = -\frac{2x}{1+x^2} \therefore M(x) = e^{\int -\frac{2x}{1+x^2}dx} = e^{-\int \frac{du}{u}} = e^{-\ln|u|} = e^{-\ln|1+x^2|}$

$u = 1+x^2$
$du = 2x\,dx$ $= \frac{1}{1+x^2}$

$\frac{1}{1+x^2}\left(\frac{dv}{dx} - \frac{2x}{1+x^2}v = -\frac{2x}{1+x^2}\right)$ Multiplicando M(x) por (2)

$\to \frac{1}{1+x^2}\frac{dv}{dx} - \frac{2xv}{(1+x^2)^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ Simplificando $\frac{d}{dx}\left(v\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ Integrando

$\int \frac{d}{dx}\frac{v}{1+x^2} = \int -\frac{2x}{(1+x^2)^2}dx \to \frac{v}{1+x^2} = -\int \frac{2x}{(1+x^2)^2}dx \to \frac{v}{1+x^2} = -\int \frac{du}{u^2} \to \frac{v}{1+x^2} = -\left(-\frac{1}{u}\right)$

$u = 1+x^2$
$du = 2x\,dx$ $\therefore \frac{v}{1+x^2} = \frac{1}{x^2+1} + c$

$v = 1 + (x^2+1)c$ Pero $v = y^{-3}$ $\therefore$ $y^{-3} = 1 + (x^2+1)c$