# SPEKTRALNI REZOVI U USMJERENIM GRAFOVIMA

## Diplomski rad

Andrej Slapničar

Voditelj rada: prof. dr. sc. Zlatko Drmač

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Zagreb, 2023.

# Sadržaj


1. Uvod

2. Spektralni rezovi u neusmjerenim grafovima
   - Spektralni normalizirani rez biparticije grafa
   - Spektralni normalizirani rez višečlane particije grafa

3. Spektralni rezovi u usmjerenim grafovima
   - Spektralni težinski rez particije usmjerenog grafa

4. Primjeri
   - Sintetički primjeri
   - Segmentacija slike

# Uvod

# Uvod

- klasteriranje je podjela podataka u grupe koje nazivamo klasterima takva da su podaci unutar svakog klastera međusobno slični, a podaci između klastera međusobno različiti
- rez u grafu je mjera koja opisuje koliko je dobar određeni rezultat klasteriranja grafa
- metoda klasteriranja grafa minimizacijom spektralnog reza u grafu

# Spektralni rezovi u težinskim neusmjerenim grafovima

# Outline

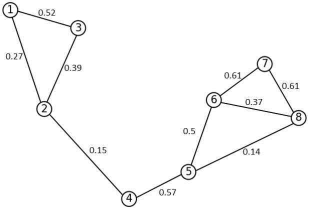

1. Uvod
2. Spektralni rezovi u neusmjerenim grafovima
   - Spektralni normalizirani rez biparticije grafa
   - Spektralni normalizirani rez višečlane particije grafa
3. Spektralni rezovi u usmjerenim grafovima
   - Spektralni težinski rez particije usmjerenog grafa
4. Primjeri
   - Sintetički primjeri
   - Segmentacija slike

# Osnovni pojmovi

## Grafovi

### Definicija

*Težinski usmjereni graf* je uređena trojka $(\mathbb{V}, \mathbb{E}, w\colon \mathbb{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0})$, pri čemu je $\mathbb{V}$ konačan te vrijedi $\mathbb{E} \subseteq \{(u, v) \mid u, v \in \mathbb{V}, u \neq v\}$.
*Težinski neusmjereni graf* je težinski usmjereni graf $(\mathbb{V}, \mathbb{E}, w\colon \mathbb{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0})$ za koji vrijedi $(\forall u, v \in \mathbb{V})\ (u, v) \in \mathbb{E} \implies (v, u) \in \mathbb{E}$ i $w(u, v) = w(v, u)$.




Slika: Primjer neusmjerenog težinskog grafa

# Osnovni pojmovi

Rezovi

## Definicija

Neka je $(\mathbb{V}, \mathbb{E}, w)$ težinski usmjereni graf i neka je $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}\}$ biparticija skupa vrhova $\mathbb{V}$.

*Stupanj povezanosti skupa* $\mathbb{A}$ *sa skupom* $\mathbb{B}$:

$$links(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \sum\nolimits_{a \in \mathbb{A}, b \in \mathbb{B}} w(a, b).$$

*Rez biparticije* $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}\}$:

$$cut(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = links(\mathbb{A}, \mathbb{B}).$$

*Stupanj skupa* $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{V}$:

$$deg(\mathbb{A}) = links(\mathbb{A}, \mathbb{V}) = \sum\nolimits_{a \in \mathbb{A}, v \in \mathbb{V}} w(a, v).$$

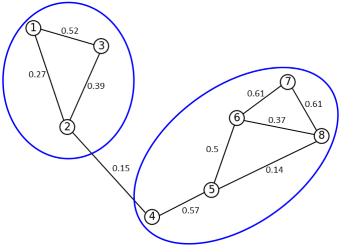
*Normalizirani rez biparticije* $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}\}$:

$$Ncut(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \frac{links(\mathbb{A}, \mathbb{B})}{deg(\mathbb{A})} + \frac{links(\mathbb{B}, \mathbb{A})}{deg(\mathbb{B})}.$$

# Osnovni pojmovi

## Rezovi

Primjer normaliziranog reza biparticije $\{\{1,2,3\},\{4,5,6,7,8\}\}$ prikazanog neusmjerenog grafa.




$$
\begin{aligned}
&Ncut(\{1,2,3\},\{4,5,6,7,8\}) = \\
&\quad = \frac{links(\{1,2,3\},\{4,5,6,7,8\})}{deg(\{1,2,3\})} + \\
&\quad + \frac{links(\{4,5,6,7,8\},\{1,2,3\})}{deg(\{4,5,6,7,8\})} = \\
&\quad = \frac{0.15}{0.52+0.27+0.39+0.15} + \\
&\quad + \frac{0.15}{0.61+0.61+0.37+0.5+0.14+0.57+0.15} = \\
&\quad = \frac{0.15}{1.33} + \frac{0.15}{2.95} \approx 0.164
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
Ncut(\mathbb{A},\mathbb{B}) \to min, \\
\{\mathbb{A},\mathbb{B}\} \text{ je biparticija od } \mathbb{V}.
\end{cases}
$$

# Matrični zapis

## Definicija

Neka je $\mathbb{G} = (\mathbb{V} \ = \ \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, \mathbb{E}, w)$ težinski usmjereni graf i neka je $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}\}$ biparticija skupa vrhova $\mathbb{V}$.
*Matrica susjedstva grafa* $\mathbb{G}$:

$$W \ = \ \left[ w(v_i, v_j) \right]_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} .$$

*Matrica stupnjeva grafa* $\mathbb{G}$:

$$D \ = \ diag(W\mathbf{1}_n) = diag\left( deg(\{v_1\}), deg(\{v_2\}), \ldots, deg(\{v_n\}) \right).$$

*Laplaceova matrica* i *normalizirana Laplaceova matrica* grafa $\mathbb{G}$:

$$L = D - W, \quad L_{norm} \ = \ D^{-\frac{1}{2}} L D^{-\frac{1}{2}}.$$

*Indikatorski vektori biparticije* $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}\}$, $\mathbf{x}_{\mathbb{A}}, \mathbf{x}_{\mathbb{B}} \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{x}_{\mathbb{A}\,i} \ = \ \chi_{\mathbb{A}}(v_i), \quad \mathbf{x}_{\mathbb{B}\,i} \ = \ \chi_{\mathbb{B}}(v_i).$$

# Matrični zapis

- $Ncut(\mathbb{A},\mathbb{B}) = \frac{links(\mathbb{A},\mathbb{B})}{deg(\mathbb{A})} + \frac{links(\mathbb{B},\mathbb{A})}{deg(\mathbb{B})}$
- $deg(\mathbb{A}) = \mathbf{x}_{\mathbb{A}}^T D \mathbf{x}_{\mathbb{A}}$,
  $deg(\mathbb{B}) = \mathbf{x}_{\mathbb{B}}^T D \mathbf{x}_{\mathbb{B}}$
- $links(\mathbb{A},\mathbb{B}) = \mathbf{x}_{\mathbb{A}}^T L \mathbf{x}_{\mathbb{A}}$,
  $links(\mathbb{B},\mathbb{A}) = \mathbf{x}_{\mathbb{B}}^T L \mathbf{x}_{\mathbb{B}}$
- $Ncut(\mathbb{A},\mathbb{B}) = \frac{\mathbf{x}_{\mathbb{A}}^T L \mathbf{x}_{\mathbb{A}}}{\mathbf{x}_{\mathbb{A}}^T D \mathbf{x}_{\mathbb{A}}} + \frac{\mathbf{x}_{\mathbb{B}}^T L \mathbf{x}_{\mathbb{B}}}{\mathbf{x}_{\mathbb{B}}^T D \mathbf{x}_{\mathbb{B}}}$
- $\alpha = \frac{\mathbf{x}_{\mathbb{A}}^T D \mathbf{x}_{\mathbb{A}}}{\mathbf{1}_n^T D \mathbf{1}_n}$
- $\mathbf{y} = \mathbf{x}_{\mathbb{A}} - \alpha \mathbf{1}_n$
- $Ncut(\mathbb{A},\mathbb{B}) = \frac{\mathbf{y}^T L \mathbf{y}}{\mathbf{y}^T D \mathbf{y}}$
- $\mathbf{z} = D^{\frac{1}{2}} \mathbf{y}$
- $Ncut(\mathbb{A},\mathbb{B}) = \frac{\mathbf{z}^T L_{norm} \mathbf{z}}{\mathbf{z}^T \mathbf{z}}$

$$
\begin{aligned}
W &= \left[ w(v_i, v_j) \right] \\
D &= diag(W \mathbf{1}_n) \\
L &= D - W \\
L_{norm} &= D^{-\frac{1}{2}} L D^{-\frac{1}{2}} \\
\mathbf{x}_{\mathbb{A}\, i} &= \chi_{\mathbb{A}}(v_i) \\
\mathbf{x}_{\mathbb{B}\, i} &= \chi_{\mathbb{B}}(v_i)
\end{aligned}
$$

# Matrični zapis

- $$\begin{cases} Ncut(\mathbb{A},\mathbb{B}) \to min, \\ \{\mathbb{A},\mathbb{B}\} \text{ je biparticija od } \mathbb{V}. \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \frac{\mathbf{z}^T L_{norm} \mathbf{z}}{\mathbf{z}^T \mathbf{z}} \to min, \\ D^{-\frac{1}{2}} \mathbf{z} \in \{-\beta, 1-\beta\}^n, \\ \mathbf{z} \neq \mathbf{0}_n, \\ \mathbf{z}^T D^{\frac{1}{2}} \mathbf{1}_n = 0, \\ \mathbf{z}^T \mathbf{z} = \beta(1-\beta) \mathbf{1}_n^T D \mathbf{1}_n. \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \frac{\mathbf{z}^T L_{norm} \mathbf{z}}{\mathbf{z}^T \mathbf{z}} \to min, \\ \mathbf{z} \neq \mathbf{0}_n, \\ \mathbf{z}^T \mathbf{z} = \beta(1-\beta) \mathbf{1}_n^T D \mathbf{1}_n. \end{cases}$$

$$W = \left[ w(v_i, v_j) \right]$$
$$D = diag(W \mathbf{1}_n)$$
$$L = D - W$$
$$L_{norm} = D^{-\frac{1}{2}} L D^{-\frac{1}{2}}$$
$$\mathbf{x}_{\mathbb{A}i} = \chi_{\mathbb{A}}(v_i)$$
$$\mathbf{x}_{\mathbb{B}i} = \chi_{\mathbb{B}}(v_i)$$
$$\alpha = \frac{\mathbf{x}_{\mathbb{A}}^T D \mathbf{x}_{\mathbb{A}}}{\mathbf{1}_n^T D \mathbf{1}_n}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_{\mathbb{A}} - \alpha \mathbf{1}_n$$
$$\mathbf{z} = D^{\frac{1}{2}} \mathbf{y}$$

# Minimizacija Rayleighovog kvocijenta

## Definicija

Neka je vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ pri čemu je $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$ i neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrica.
*Rayleighov kvocijent vektora* $\mathbf{x}$ *za matricu* $A$ :

$$R_A(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^* A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^*\mathbf{x}}.$$

- $Ncut(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \frac{\mathbf{z}^T L_{norm}\mathbf{z}}{\mathbf{z}^T\mathbf{z}} = R_{L_{norm}}(\mathbf{z})$

## Teorem (Rayleigh-Ritz)

*Neka je matrica* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *hermitska sa svojstvenim vrijednostima* $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ *poredanim po veličini koje su redom pridružene svojstvenim vektorima* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$*. Tada vrijedi:*

- $\lambda_1 = \min\limits_{\mathbf{0}_n \neq \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n} R_A(\mathbf{x}) = R_A(\mathbf{u}_1)$,
- $\lambda_i = \min\limits_{\mathbf{0}_n \neq \mathbf{x} \in \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{i-1}\}^\perp} R_A(\mathbf{x}) = R_A(\mathbf{u}_i)$, *gdje je* $i \in \{2, \ldots, n\}$.

# Rješenje relaksiranog problema minimizacije

Neka je $\mathbb{G} = (\mathbb{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, \mathbb{E}, w)$ težinski neusmjereni graf. Neka je $L_{norm} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ normalizirana Laplaceova matrica grafa $\mathbb{G}$ i neka je $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}\}$ biparticija skupa $\mathbb{V}$. Neka su $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ svojstveni vektori matrice $L_{norm}$ redom pridruženi svojstvenim vrijednostima $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$.

## Propozicija

*Vrijedi:*

$$\lambda_2 = \min_{\mathbf{0}_n \neq \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{z}^T D^{\frac{1}{2}} \mathbf{1}_n = 0} R_{L_{norm}}(\mathbf{z}) = R_{L_{norm}}(\mathbf{u}_2).$$

## Lema (o rezu biparticije)

*Vrijedi:*

$$\min Ncut(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \geq \lambda_2,$$

*te se minimum postiže ako i samo ako je vektor $D^{-\frac{1}{2}}\mathbf{u}_2$ po dijelovima konstantan s obzirom na biparticiju $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}\}$.*

# Outline

1 Uvod

2 Spektralni rezovi u neusmjerenim grafovima
- Spektralni normalizirani rez biparticije grafa
- Spektralni normalizirani rez višečlane particije grafa

3 Spektralni rezovi u usmjerenim grafovima
- Spektralni težinski rez particije usmjerenog grafa

4 Primjeri
- Sintetički primjeri
- Segmentacija slike

# Osnovni pojmovi



## Definicija

Neka je $(\mathbb{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, \mathbb{E}, w)$ težinski usmjereni graf i neka je $\mathcal{F}_{\mathbb{V}}^k = \{\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \ldots, \mathbb{V}_k\}$ $k$-člana particija skupa $\mathbb{V}$.

*Normalizirani rez k-člane particije* $\mathcal{F}_{\mathbb{V}}^k$:

$$k\text{-}Ncut(\mathcal{F}_{\mathbb{V}}^k) = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^{k} \frac{links(\mathbb{V}_l, \mathbb{V} \setminus \mathbb{V}_l)}{deg(\mathbb{V}_l)}.$$

*Indikatorska matrica k-člane particije* $\mathcal{F}_{\mathbb{V}}^k$:

$$X \in \{0,1\}^{n \times k}, \quad X(i,j) = \begin{cases} 1, & v_i \in \mathbb{V}_j, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

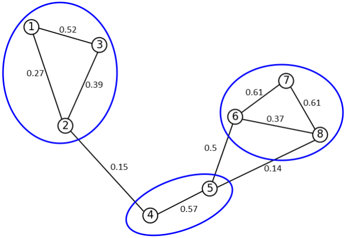
$$links(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \sum_{a \in \mathbb{A}, b \in \mathbb{B}} w(a,b)$$

$$deg(\mathbb{A}) = links(\mathbb{A}, \mathbb{V})$$

# Osnovni pojmovi

## Rezovi

Primjer normaliziranog reza particije $\{\{1,2,3\},\{4,5\},\{6,7,8\}\}$ prikazanog neusmjerenog grafa.




$$
\begin{aligned}
&3\text{-}Ncut(\{\{1,2,3\},\{4,5\},\{6,7,8\}\}) = \\
&= \frac{1}{3}\Big(\frac{links(\{1,2,3\},\{4,5\})}{deg(\{1,2,3\})} + \frac{links(\{1,2,3\},\{6,7,8\})}{deg(\{1,2,3\})} + \\
&+ \frac{links(\{4,5\},\{1,2,3\})}{deg(\{4,5\})} + \frac{links(\{4,5\},\{6,7,8\})}{deg(\{4,5\})} + \\
&+ \frac{links(\{6,7,8\},\{1,2,3\})}{deg(\{6,7,8\})} + \frac{links(\{6,7,8\},\{4,5\})}{deg(\{6,7,8\})}\Big) = \\
&= \frac{1}{3}\Big(\frac{0.15+0}{0.52+0.27+0.39+0.15} + \frac{0.15+(0.5+0.14)}{0.57+0.15+0.5+0.14} + \\
&+ \frac{0+(0.5+0.14)}{0.61+0.61+0.37+0.5+0.14}\Big) = \\
&= \frac{1}{3}\Big(\frac{0.15}{1.33} + \frac{0.79}{1.36} + \frac{0.64}{2.23}\Big) \approx 0.327
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
k\text{-}Ncut(\mathcal{F}_{\mathbb{V}}^{k}) \to min, \\
\mathcal{F}_{\mathbb{V}}^{k} \text{ je } k\text{-člana particija od } \mathbb{V}.
\end{cases}
$$

# Matrični zapis

- $k\text{-}Ncut(\mathcal{F}_{\mathbb{V}}^k) = \frac{1}{k}\sum_{l=1}^k \frac{links(\mathbb{V}_l, \mathbb{V}\backslash\mathbb{V}_l)}{deg(\mathbb{V}_l)}$
- $deg(\mathbb{V}_l) = X_l^T D X_l$
- $links(\mathbb{V}_l, \mathbb{V} \setminus \mathbb{V}_l) = X_l^T L X_l$
- $k\text{-}Ncut(\mathcal{F}_{\mathbb{V}}^k) = \frac{1}{k}\sum_{l=1}^k \frac{X_l^T L X_l}{X_l^T D X_l}$
- $Y = D^{\frac{1}{2}} X$
- $k\text{-}Ncut(\mathcal{F}_{\mathbb{V}}^k) = \frac{1}{k}\sum_{l=1}^k \frac{Y_l^T L_{norm} Y_l}{Y_l^T Y_l}$
- $Z = Y(Y^T Y)^{-\frac{1}{2}}$
- $k\text{-}Ncut(\mathcal{F}_{\mathbb{V}}^k) = \frac{1}{k}\sum_{l=1}^k Z_l^T L_{norm} Z_l$

$$
\begin{aligned}
W &= \left[w(v_i, v_j)\right] \\
D &= diag(W\mathbf{1}_n) \\
L &= D - W \\
L_{norm} &= D^{-\frac{1}{2}} L D^{-\frac{1}{2}} \\
X(i,j) &= \chi_{\mathbb{V}_j}(v_i)
\end{aligned}
$$

# Matrični zapis

- $\begin{cases} k\text{-}Ncut(\mathcal{F}_{\mathbb{V}}^k) \to min, \\ \mathcal{F}_{\mathbb{V}}^k \text{ je } k\text{-člana particija od } \mathbb{V}. \end{cases}$

- $\begin{cases} \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k} Z_l^T L_{norm} Z_l \to min, \\ D^{-\frac{1}{2}} Z \, diag(\beta_1, \ldots, \beta_k) \in \{0,1\}^{n\times k}, \\ Z^T Z = I_k. \end{cases}$

- $\begin{cases} \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k} Z_l^T L_{norm} Z_l \to min, \\ Z \in \mathbb{R}^{n\times k}, \\ Z^T Z = I_k. \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
W &= \left[w(v_i, v_j)\right] \\
D &= diag(W\mathbf{1}_n) \\
L &= D - W \\
L_{norm} &= D^{-\frac{1}{2}} L D^{-\frac{1}{2}} \\
X(i,j) &= \chi_{\mathbb{V}_j}(v_i) \\
Y &= D^{\frac{1}{2}} X \\
Z &= Y(Y^T Y)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

# Minimizacija sume Rayleighovih kvocijenta

- $k\text{-}Ncut(\mathcal{F}_{\mathbb{V}}^k) = \frac{1}{k}\sum_{l=1}^k Z_l^T L_{norm} Z_l$
- $Z^T Z = I_k \implies \forall l \in \{1,\ldots,k\}\ Z_l^T Z_l = 1$
- $R_{L_{norm}}(Z_l) = \frac{Z_l^T L_{norm} Z_l}{Z_l^T Z_l} = Z_l^T L_{norm} Z_l$
- $k\text{-}Ncut(\mathcal{F}_{\mathbb{V}}^k) = \frac{1}{k}\sum_{l=1}^k R_{L_{norm}}(Z_l)$

$R_A(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^* A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^*\mathbf{x}}$

## Korolar (Rayleigh-Ritz)

*Neka je matrica* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *hermitska sa svojstvenim vrijednostima* $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ *poredanim po veličini koje su redom pridružene svojstvenim vektorima* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$. *Neka je* $r \in \{1,\ldots,n\}$ *proizvoljan i neka je* $X = [X_1\ X_2 \cdots\ X_r] \in \mathbb{C}^{n\times r}$. *Tada vrijedi:*

$$\sum_{l=1}^{r} \lambda_l = \min_{X\in\mathbb{C}^{n\times r},\ X^*X=I_r} \sum_{l=1}^{r} R_A(X_l) = \sum_{l=1}^{r} R_A(\mathbf{u}_l).$$

# Rješenje relaksiranog problema minimizacije

Neka je $\mathbb{G} = (\mathbb{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, \mathbb{E}, w)$ težinski neusmjereni graf. Neka je $L_{norm} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ normalizirana Laplaceova matrica grafa $\mathbb{G}$ i neka je $\mathcal{F}_{\mathbb{V}}^k$ $k$-člana particija skupa $\mathbb{V}$. Neka su $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ ortonormirani svojstveni vektori matrice $L_{norm}$ redom pridruženi svojstvenim vrijednostima $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ poredanim po veličini te neka je $U = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2 \cdots \mathbf{u}_k] \in \mathbb{R}^{n\times k}$.

## Propozicija

*Vrijedi:*

$$\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}\lambda_l = \min_{Z\in\mathbb{R}^{n\times k},\ Z^T Z = I_k} \tfrac{1}{k}\sum_{l=1}^{k} R_{L_{norm}}(Z_l) = \tfrac{1}{k}\sum_{l=1}^{k} R_{L_{norm}}(\mathbf{u}_l).$$

## Lema (o rezu višečlane particije)

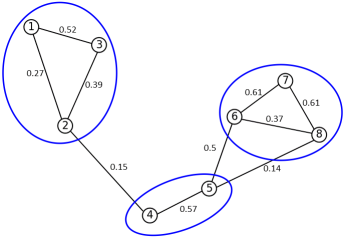
*Vrijedi:*

$$\min k\text{-}Ncut(\mathcal{F}_{\mathbb{V}}^k) = \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}\lambda_l,$$

*te se minimum postiže ako i samo ako matrica $D^{-\frac{1}{2}}U$ ima po dijelovima konstantne stupce s obzirom na particiju $\mathcal{F}_{\mathbb{V}}^k$.*

# Diskretizacija

- klasteriranje redova matrice neprekidnog rješenja $D^{-\frac{1}{2}}U$ kao točaka u $\mathbb{R}^k$




$$D^{-\frac{1}{2}}U = \begin{bmatrix} -0.25 & -0.36 & 0.11 \\ -0.25 & -0.3 & -0.02 \\ -0.25 & -0.36 & 0.1 \\ -0.25 & 0.06 & -0.53 \\ -0.25 & 0.14 & -0.31 \\ -0.25 & 0.2 & 0.09 \\ -0.25 & 0.22 & 0.26 \\ -0.25 & 0.22 & 0.22 \end{bmatrix}$$

# Spektralni rezovi u težinskim usmjerenim grafovima

# Outline

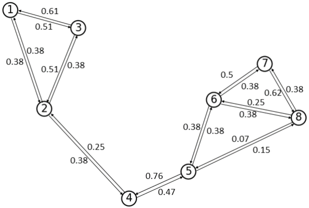

1. Uvod
2. Spektralni rezovi u neusmjerenim grafovima
   - Spektralni normalizirani rez biparticije grafa
   - Spektralni normalizirani rez višečlane particije grafa
3. Spektralni rezovi u usmjerenim grafovima
   - Spektralni težinski rez particije usmjerenog grafa
4. Primjeri
   - Sintetički primjeri
   - Segmentacija slike

# Osnovni pojmovi

## Grafovi

### Definicija

*Težinski usmjereni graf* je uređena trojka $(\mathbb{V}, \mathbb{E}, w \colon \mathbb{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0})$, pri čemu je $\mathbb{V}$ konačan te vrijedi $\mathbb{E} \subseteq \{(u, v) \mid u, v \in \mathbb{V}, u \neq v\}$.




Slika: Primjer usmjerenog težinskog grafa

# Osnovni pojmovi

Rezovi

## Definicija

Neka je $(\mathbb{V}, \mathbb{E}, w)$ težinski usmjereni graf i neka je $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}\}$ biparticija skupa vrhova $\mathbb{V}$, a neka je $\mathcal{F}_{\mathbb{V}}^k$ $k$-člana particija skupa vrhova $\mathbb{V}$..

*Težinski stupanj povezanosti skupa* $\mathbb{A}$ *sa skupom* $\mathbb{B}$:

$$wlinks(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \sum_{a \in \mathbb{A}, b \in \mathbb{B}} rw(a)\, w(a, b),$$

*Volumen skupa* $\mathbb{A}$:

$$vol(\mathbb{A}) = \sum_{a \in \mathbb{A}} vw(a),$$

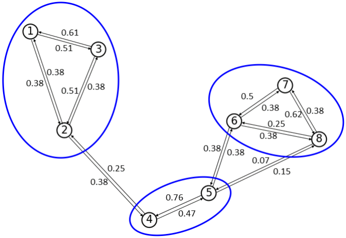
*Težinski rez k-člane particije* $\mathcal{F}_{\mathbb{V}}^k$:

$$k\text{-}Wcut(\mathcal{F}_{\mathbb{V}}^k) = \sum_{l=1}^{k} \sum_{l'=1, l' \neq l}^{k} \frac{wlinks(\mathbb{V}_l, \mathbb{V}_{l'})}{vol(\mathbb{V}_l)}.$$

# Osnovni pojmovi

## Rezovi

Primjer težinskog reza particije $\{\{1,2,3\},\{4,5\},\{6,7,8\}\}$ prikazanog usmjerenog grafa.




$$
\begin{aligned}
&3\text{-}Wcut(\{\{1,2,3\},\{4,5\},\{6,7,8\}\}) = \\
&= \frac{wlinks(\{1,2,3\},\{4,5\})}{vol(\{1,2,3\})} + \frac{wlinks(\{1,2,3\},\{6,7,8\})}{vol(\{1,2,3\})} + \\
&+ \frac{wlinks(\{4,5\},\{1,2,3\})}{vol(\{4,5\})} + \frac{wlinks(\{4,5\},\{6,7,8\})}{vol(\{4,5\})} + \\
&+ \frac{wlinks(\{6,7,8\},\{1,2,3\})}{vol(\{6,7,8\})} + \frac{wlinks(\{6,7,8\},\{4,5\})}{vol(\{6,7,8\})} = \\
&= \frac{0.38+0}{0.38+0.38+0.61+0.51+0.51+0.38+0.38} + \\
&+ \frac{0.25+(0.38+0.15)}{0.47+0.76+0.25+0.38+0.15} + \\
&+ \frac{0+(0.38+0.07)}{0.5+0.38+0.25+0.38+0.38+0.62+0.38+0.07} = \\
&= \frac{0.38}{3.15} + \frac{0.78}{2.01} + \frac{0.45}{2.96} \approx 0.661
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
k\text{-}Wcut(\mathcal{F}_{\mathbb{V}}^{k}) \to min, \\
\mathcal{F}_{\mathbb{V}}^{k} \text{ je } k\text{-člana particija od } \mathbb{V}.
\end{cases}
$$

# Matrični zapis

## Definicija

Neka je $\mathbb{G} = (\mathbb{V} \ = \ \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, \mathbb{E}, w)$ težinski usmjereni graf.
*Matrica retčanih težina grafa* $\mathbb{G}$ :

$$T_r = diag(rw(v_1), rw(v_2), \ldots, rw(v_n)).$$

*Matrica volumnih težina težinskog usmjerenog grafa* $\mathbb{G}$:

$$T_v = diag(vw(v_1), vw(v_2), \ldots, vw(v_n)).$$

# Matrični zapis

- $k\text{-}Wcut(\mathcal{F}_{\mathbb{V}}^k) = \sum_{l=1}^k \sum_{l'=1,l'\neq l}^k \frac{wlinks(\mathbb{V}_l,\mathbb{V}_{l'})}{vol(\mathbb{V}_l)}$
- $vol(\mathbb{V}_l) = X_l^T T_v X_l$
- $\displaystyle\sum_{l'=1,l'\neq l}^{k} wlinks(\mathbb{V}_l,\mathbb{V}_{l'}) = X_l^T(T_r D - T_r W)X_l$
- b.s.o. možemo pretpostaviti $T_r = I_k$
- $k\text{-}Wcut(\mathcal{F}_{\mathbb{V}}^k) = \sum_{l=1}^k \frac{X_l^T L X_l}{X_l^T T_v X_l}$.
- $Z = T_v^{\frac{1}{2}} X (X^T T_v X)^{-\frac{1}{2}}$
- $k\text{-}Wcut(\mathcal{F}_{\mathbb{V}}^k) = \sum_{l=1}^k Z_l^T T_v^{-\frac{1}{2}} L T_v^{-\frac{1}{2}} Z_l$
- $B = T_v^{-\frac{1}{2}} L T_v^{-\frac{1}{2}}$
- $k\text{-}Wcut(\mathcal{F}_{\mathbb{V}}^k) = \sum_{l=1}^k Z_l^T B Z_l$

$$W = \left[w(v_i,v_j)\right]$$
$$D = diag(W\mathbf{1}_n)$$
$$L = D - W$$
$$X(i,j) = \chi_{\mathbb{V}_j}(v_i)$$
$$T_r = diag(rw(v_1),\ldots,rw(v_n))$$
$$T_v = diag(vw(v_1),\ldots,vw(v_n))$$

# Matrični zapis

- $\begin{cases} k\text{-}Wcut(\mathcal{F}_{\mathbb{V}}^k) \to min, \\ \mathcal{F}_{\mathbb{V}}^k \text{ je } k\text{-člana particija od } \mathbb{V}. \end{cases}$

- $\begin{cases} \sum_{l=1}^k Z_l^T B Z_l \to min, \\ T_v^{-\frac{1}{2}} Z \, diag(\beta_1, \ldots, \beta_k) \in \{0,1\}^{n \times k}, \\ Z^T Z = I_k. \end{cases}$

- $\begin{cases} \sum_{l=1}^k Z_l^T B Z_l \to min, \\ Z \in \mathbb{R}^{n \times k}, \\ Z^T Z = I_k. \end{cases}$

$$W = \left[w(v_i, v_j)\right]$$
$$D = diag(W\mathbf{1}_n)$$
$$L = D - W$$
$$X(i,j) = \chi_{\mathbb{V}_j}(v_i)$$
$$T_r = diag(rw(v_1), \ldots, rw(v_n))$$
$$T_v = diag(vw(v_1), \ldots, vw(v_n))$$
$$Z = T_v^{\frac{1}{2}} X (X^T T_v X)^{-\frac{1}{2}}$$
$$B = T_v^{-\frac{1}{2}} L T_v^{-\frac{1}{2}}$$

# Rješenje relaksiranog problema minimizacije

## Definicija

*Hermitski dio kvadratne matrice* $A \in R^{n \times n}$:

$$H(A) = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right).$$

## Propozicija

*Neka je* $Y = [Y_1\ Y_2 \cdots\ Y_k] \in \mathbb{C}^{n \times k}$. *Tada za svaki* $l \in \{1, \ldots, k\}$ *vrijedi:*

$$\mathrm{Re}\left(Y_l^* B Y_l\right) = Y_l^* H(B) Y_l.$$

# Rješenje relaksiranog problema minimizacije

## Lema (o usmjerenom rezu višečlane particije)

*Neka je* $\mathbb{G} = (\mathbb{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, \mathbb{E}, w)$ *težinski neusmjereni graf. Neka je* $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *Laplaceova matrica i neka je* $T_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *matrica volumnih težina grafa* $\mathbb{G}$*. Neka je* $\mathcal{F}_{\mathbb{V}}^k$ *k-člana particija skupa* $\mathbb{V}$*. Neka su* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ *ortonormirani svojstveni vektori matrice* $H(T_v^{-\frac{1}{2}} L T_v^{-\frac{1}{2}})$ *redom pridruženi svojstvenim vrijednostima* $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ *poredanim po veličini te neka je* $U = [\mathbf{u}_1 \, \mathbf{u}_2 \cdots \mathbf{u}_k] \in \mathbb{R}^{n \times k}$*. Tada vrijedi:*

$$k\text{-}Wcut(\mathcal{F}_{\mathbb{V}}^k) = \sum_{l=1}^{k} \lambda_l,$$

*te se minimum postiže ako i samo ako matrica* $T_v^{-\frac{1}{2}} U$ *ima po dijelovima konstantne stupce s obzirom na particiju* $\mathcal{F}_{\mathbb{V}}^k$*.*

# Rješenje relaksiranog problema minimizacije

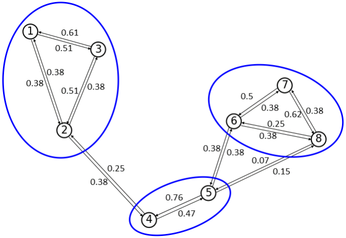
## Dokaz.

Pokažimo da vrijedi $k\text{-}Wcut(\mathcal{F}_{\mathbb{V}}^k) \geq \sum_{l=1}^k \lambda_l$.

$$
\begin{aligned}
k\text{-}Wcut(\mathcal{F}_{\mathbb{V}}^k) &= \min_{T_v^{-\frac{1}{2}} Z \, diag(\beta_1,\ldots,\beta_k) \in \{0,1\}^{n\times k}, Z^* Z = I_k} \sum_{l=1}^k Z_l^T B Z_l \geq \\
&\geq \min_{Z \in \mathbb{R}^{n\times k}, Z^T Z = I_k} \sum_{l=1}^k Z_l^T B Z_l \geq \\
&\geq \min_{Z \in \mathbb{C}^{n\times k}, Z^* Z = I_k} \operatorname{Re}\left(\sum_{l=1}^k Z_l^* B Z_l\right) = \\
&= \min_{Z \in \mathbb{C}^{n\times k}, Z^* Z = I_k} \sum_{l=1}^k \operatorname{Re}\left(Z_l^* B Z_l\right) = \\
&= \min_{Z \in \mathbb{C}^{n\times k}, Z^* Z = I_k} \sum_{l=1}^k Z_l^* H(B) Z_l = \\
&= \min_{Z \in \mathbb{C}^{n\times k}, Z^* Z = I_k} \sum_{l=1}^k R_{H(B)}(Z_l) = \sum_{l=1}^k \lambda_l
\end{aligned}
$$

# Diskretizacija

- klasteriranje redova matrice neprekidnog rješenja $T_v^{-\frac{1}{2}}U$ kao točaka u $\mathbb{R}^k$



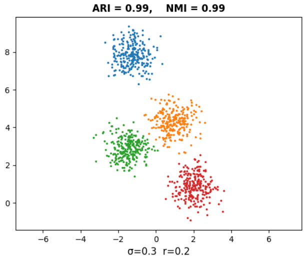

$$T_v^{-\frac{1}{2}}U = \begin{bmatrix} 0.22 & -0.34 & -0.22 \\ 0.23 & -0.28 & -0.02 \\ 0.19 & -0.31 & -0.19 \\ 0.3 & -0.08 & 0.5 \\ 0.24 & 0.06 & 0.31 \\ 0.26 & 0.22 & -0.06 \\ 0.24 & 0.25 & -0.2 \\ 0.32 & 0.31 & -0.23 \end{bmatrix}$$

# Primjeri

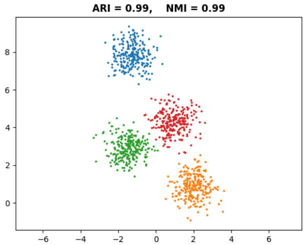
# Outline


1. Uvod
2. Spektralni rezovi u neusmjerenim grafovima
   - Spektralni normalizirani rez biparticije grafa
   - Spektralni normalizirani rez višečlane particije grafa
3. Spektralni rezovi u usmjerenim grafovima
   - Spektralni težinski rez particije usmjerenog grafa
4. Primjeri
   - Sintetički primjeri
   - Segmentacija slike

# Sintetički primjeri



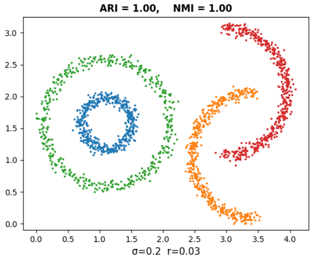

Slika: Spektralno particioniranje neusmjerenog grafa reprezentiranog matricom $W_{sym}$



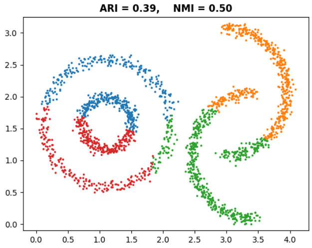

Slika: Particioniranje metodom $k$ - sredina

$$W_{sym} = \left[ \begin{cases} exp\left(-\frac{\left\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right\|^2}{2\sigma^2}\right), & \left\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right\| < r \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \right]_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$$

# Sintetički primjeri



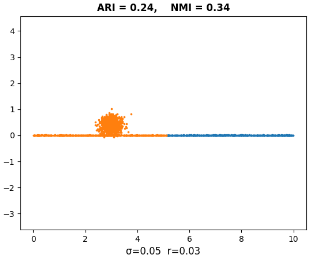

Slika: Spektralno particioniranje neusmjerenog grafa reprezentiranog matricom $W_{sym}$



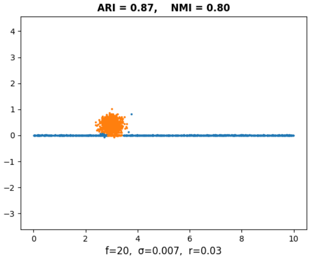

Slika: Particioniranje metodom $k$ - sredina

$$W_{sym} = \left[ \begin{cases} exp\left( -\frac{\left\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right\|^2}{2\sigma^2} \right), & \left\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right\| < r \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \right]_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$$

# Sintetički primjeri




Slika: Spektralno particioniranje neusmjerenog grafa reprezentiranog matricom $W_{sym}$

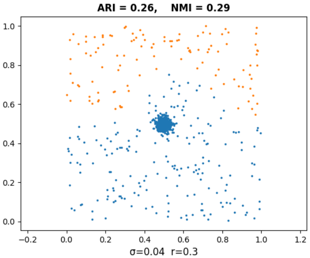



Slika: Spektralno particioniranje usmjerenog grafa reprezentiranog matricom $W_{asym}$

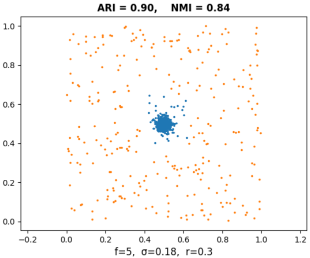
$$W_{sym} = \left[ \begin{cases} exp\left(-\frac{\left\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right\|^2}{2\sigma^2}\right), & \left\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right\| < r \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \right], \qquad W_{asym} = \left[ \begin{cases} exp\left(-\frac{\left\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right\|^2}{2\sigma_j^2}\right), & \left\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right\| < r \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \right],$$

gdje je $\sigma_j = \sigma d_j$, $d_j$ je jednak udaljenosti između $\mathbf{x}_j$ i njegovog $m$-tog najbližeg susjeda, a $m = f\sqrt{n}$

# Sintetički primjeri




Slika: Spektralno particioniranje neusmjerenog grafa reprezentiranog matricom $W_{sym}$




Slika: Spektralno particioniranje usmjerenog grafa reprezentiranog matricom $W_{asym}$

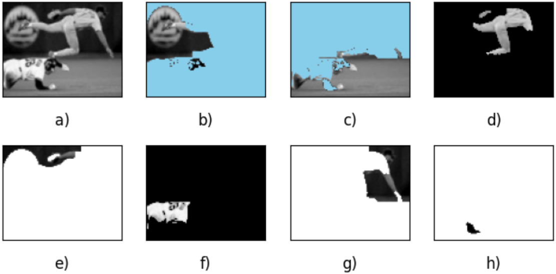
$$W_{sym} = \left[ \begin{cases} exp\left(-\frac{\left\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right\|^2}{2\sigma^2}\right), & \left\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right\| < r \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \right], \qquad W_{asym} = \left[ \begin{cases} exp\left(-\frac{\left\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right\|^2}{2\sigma_j^2}\right), & \left\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right\| < r \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \right],$$

gdje je $\sigma_j = \sigma d_j$, $d_j$ je jednak udaljenosti između $\mathbf{x}_j$ i njegovog $m$-tog najbližeg susjeda, a $m = f\sqrt{n}$

# Outline


1. Uvod
2. Spektralni rezovi u neusmjerenim grafovima
   - Spektralni normalizirani rez biparticije grafa
   - Spektralni normalizirani rez višečlane particije grafa
3. Spektralni rezovi u usmjerenim grafovima
   - Spektralni težinski rez particije usmjerenog grafa
4. Primjeri
   - Sintetički primjeri
   - Segmentacija slike

# Segmentacija slike

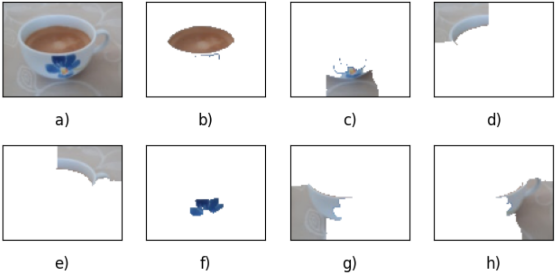


Slika: Segmentacija slike pomoću algoritma spektralnog particioniranja neusmjerenog grafa. Vrijednosti parametara su $\sigma_I = 0.08$, $\sigma_X = 0.03$ i $r = 0.1$.

$$W_{sym} = \left[ exp\left( - \frac{\left\| I(p_i) - I(p_j) \right\|^2}{2\sigma_I^2} \right) \cdot \begin{cases} exp\left( - \frac{\left\| X(p_i) - X(p_j) \right\|^2}{2\sigma_X^2} \right), & \left\| X(p_i) - X(p_j) \right\| < r \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \right]_{i,j \in \{1,\ldots,n\}},$$

gdje je $I(p_i)$ intenzitet (svjetlina) piksela $p_i$, a $X(p_i)$ pozicija piksela $p_i$

# Segmentacija slike



Slika: Segmentacija slike pomoću algoritma spektralnog particioniranja neusmjerenog grafa. Vrijednosti parametara su $\sigma_I = 0.08$, $\sigma_X = 0.03$ i $r = 0.1$

$$W_{sym} = \left[ exp\left( -\frac{\left\| I(p_i) - I(p_j) \right\|^2}{2\sigma_I^2} \right) \cdot \begin{cases} exp\left( -\frac{\left\| X(p_i) - X(p_j) \right\|^2}{2\sigma_X^2} \right), & \left\| X(p_i) - X(p_j) \right\| < r \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \right]_{i,j \in \{1,\dots,n\}},$$

gdje je $I(p_i)$ intenzitet (svjetlina) piksela $p_i$, a $X(p_i)$ pozicija piksela $p_i$