TP Bloque I

Contenidos Conceptuales: Estadística descriptiva: distribuciones de frecuencia. Representaciones Graficas: histogramas, diagramas circulares, diagramas de barras, boxplots. Medidas resumen: tendencia central y dispersión.

Experimentos aleatorios: espacio muestral, eventos. Definición axiomática de probabilidad. Propiedades derivadas. Probabilidad Condicional, regla del producto, independencia. Variables aleatorias discretas y continuas. Funciones de densidad, cuantía y distribución. Esperanza y Varianza. Distribuciones especiales: binomial, geométrica, Poisson, Hipergeométrica, normal, exponencial y uniforme.

Ejercicio 1

La propagación de grietas por fatiga en diversas partes de aeronaves ha sido objeto de profundo estudio en años recientes. Los datos que aparecen a continuación constan de tiempo de propagación (horas de vuelo/10^4) para llegar a un tamaño de grieta dado en agujeros sujetadores que se usan en aeronaves militares. ("Statistical Crack Propagation in Fastener Holes under Spectrum Loading", *J. Aircraft*, 1983, pp 1028 – 1032):

0.736 0.863 0.865 0.913 0.915 0.937 0.983 1.007 1.011 1.064

1.109 1.132 1.140 1.153 1.253 1.394

a.- Calcule los valores de la media y mediana muestrales.

b.- ¿En cuánto tiempo se puede reducir la observación muestral más grande, sin afectar el valor de la mediana?

Ejercicio 2

El artículo "A Thin Film Oxygen Uptake Test for the Evaluation of Automotive Crankcase Lubricants" (*Lubric. Engr*., 1984, pp 75-83) publicó los siguientes datos del tiempo de oxidación-inducción (en minutos) de varios aceites comerciales:

87 103 130 160 180 195 132 145 211 105

145 153 152 138 87 99 93 119 129

a.- Calcule la varianza muestral y el desvío estándar.

b.- Si las observaciones se volvieran a expresar en horas, ¿cuáles serían los valores resultantes de la varianza muestral y desviación estándar muestral? Conteste sin rescribir los datos.

Ejercicio 3

En una muestra de 20 trabajadores de una compañía, se estudió la cantidad de meses a lo largo de un año que cada empleado tuvo que hacer uso del servicio de médico a domicilio ya sea para él o para algún miembro de su familia. Se obtuvieron los siguientes datos:

Cantidad de meses en un año																			
0	1	0	1	2	2	2	1	1	3	3	3	4	4	2	7	9	3	3	9

a) Calcule la media podada al 10%.
b) Clasificar los valores atípicos (en caso de que los haya).
c) Calcule el porcentaje de las observaciones que distan de su mediana en más de 1 vez la distancia entre cuartos.

Ejercicio 4

En una muestra de 10 botellas de vidrio, de cierto tipo, se midió la resistencia de cada una a la presión externa. Se cuenta con la siguiente información parcial de la muestra:
1. las tres observaciones mínimas son: 125.8 – 188.1 – 193.7
2. las tres observaciones mínimas son: 221.3 – 230.5 – 250.2
3. la mediana muestral es: 202.3
4. la moda de la distribución es: 3
5.- la media muestral es: 201.7

a) Complete los valores que faltan en la muestra de forma que se cumplan todas las informaciones parciales recibidas y ubíquelos en la siguiente tabla ordenados de menor a mayor.

b) Calcule la media podada al 20%.
c) ¿Qué porcentaje de los datos de la muestra original supera el valor de la media calculada en b).

Ejercicio 5

La ruta utilizada por cierto automovilista para ir al trabajo tiene dos cruces con semáforo. La probabilidad de que pare en el primer semáforo es de 0.4, la probabilidad análoga para el segundo semáforo es 0.5 y la probabilidad de que se detenga por lo menos en uno de los semáforos es 0.6. ¿Cuál es la probabilidad de que se detenga:

a.- en ambos semáforos?

b.- en el primero, pero no en el segundo?

c.- exactamente en uno de ellos?

Ejercicio 6

Un grupo de consumidores está preocupado por la posibilidad de que sistemáticamente se entregue menos peso en el departamento de carnes de un supermercado de la localidad. Se envía un representante a comprar 5 paquetes de 1 libra de carne molida. Si hay en ese momento 25 de esos paquetes en el mostrador y 8 de ellos tienen peso menor que el real, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos dos de los cinco paquetes comprados pese menos?

Ejercicio 7

Sesenta por ciento de todos los vehículos examinados en cierto centro de verificación de emisiones pasa la prueba. Si se supone que vehículos sucesivos pasan o no pasan independientemente uno del otro, calcule las siguientes probabilidades:

a.- *P*(los siguientes tres vehículos pasan).

b.- *P*(al menos uno de los siguientes tres inspeccionados no pasan).

c.- *P*(exactamente uno de los siguientes tres inspeccionados pasa).

d.- *P*(al lo sumo uno de los siguientes tres inspeccionados pasa).

e.- Dado que al menos uno de los tres vehículos pasa la verificación, ¿cuál es la probabilidad de que los tres pasen? (una probabilidad condicional)

Ejercicio 8

Sea ***X***: número de neumáticos de un automóvil seleccionado al azar que tengan baja la presión.

a) ¿Cuál de las siguientes tres funciones $p(x)$ es una función de probabilidad puntual (o función de probabilidad de masa) legítima para ***X*** y porqué no lo son las otras dos?

x	0	1	2	3	4

$p(x)$	0.3	0.2	0.1	0.05	0.05
$p(x)$	0.4	0.1	0.1	0.1	0.3
$p(x)$	0.4	0.1	0.2	0.1	0.3

b) Para la función de probabilidad puntual legítima de la parte a), calcular:

$P(2 \leq \boldsymbol{X} \leq 4)$ $\quad P(\boldsymbol{X} \leq 2)$ $\quad P(\boldsymbol{X} \neq 0)$

c) Si $p(x) = c.(5 - x)$ para $x = 0,1,2,3,4$, ¿cuál es el valor de c? (Sugerencia: recordar que la suma de las probabilidades debe ser igual a 1)

Ejercicio 9

Una organización de consumidores que evalúa automóviles nuevos reporta regularmente el número de defectos importantes en cada automóvil examinado. Denotemos por ***X*** el número de defectos importantes en un automóvil seleccionado al azar. La función de distribución acumulada de ***X*** es:

d)

e) $F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 0.06 & si\ 0 \leq x < 1 \\ 0.19 & si\ 1 \leq x < 2 \\ 0.39 & si\ 2 \leq x < 3 \\ 0.67 & si\ 3 \leq x < 4 \\ 0.92 & si\ 4 \leq x < 5 \\ 0.97 & si\ 5 \leq x < 6 \\ 1 & si\ x \geq 6 \end{cases}$

Calcular las siguientes probabilidades, directamente a partir de $F(x)$:

a) $p(2) = P(\boldsymbol{X} = 2)$

b) $P(\boldsymbol{X} > 3)$

c) $P(2 \leq \boldsymbol{X} \leq 5)$

d) $P(2 < \boldsymbol{X} < 5)$

Ejercicio 10

La función de probabilidad puntual para la variable aleatoria ***X***: número de defectos importantes en un electrodoméstico seleccionado al azar es

x	0	1	2	3	4

$p(x)$	0.08	0.15	0.45	0.27	0.05

Calcular:

a) $E(\boldsymbol{X})$

b) $V(\boldsymbol{X})$

c) Desviación standard de ***X***

d) $V(\boldsymbol{X})$ usando la fórmula abreviada

Ejercicio 11

Sea ***X*** una variable aleatoria Bernoulli con función de probabilidad puntual

x	0	1
$p(x)$	1-p	p

siendo $0 < p < 1$.

a) Calcular $E(X^2)$
b) Demostrar que $V(X) = p.(1- p)$
c) Calcular $E(X^{79})$.

Ejercicio 12

Suponiendo que $E(\boldsymbol{X}) = 5$ y $E[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}-1)] = 27.5$

a) ¿cuál es $E(\boldsymbol{X}^2)$?
b) ¿cuál es $V(\boldsymbol{X})$?
c) ¿cuál es la relación general entre las cantidades $E(\boldsymbol{X})$, $E[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}-1)]$ y $V(\boldsymbol{X})$?

Ejercicio 13

Cuando se prueban tarjetas de circuito empleadas en la manufactura de reproductores de discos compactos, a la larga el porcentaje de partes defectuosas es 5%. Sea ***X*** = *número de tarjetas defectuosas en una muestra elegida al azar de tamaño n = 25*, entonces $\boldsymbol{X} \sim$ Bi(25, 0.05).

a) Determine P($\boldsymbol{X} \leq 2$).
b) Determine P($\boldsymbol{X} \geq 5$).
c) Determine P($1 \leq \boldsymbol{X} \leq 4$).
d) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las 25 tarjetas esté defectuosa?
e) Calcule el valor esperado y la desviación estándar de ***X***.

Ejercicio 14

Un director técnico de tenis tiene una canasta con 25 pelotas; 15 de éstas son pelotas Penn y las otras 10 son Wilson. Cada uno de 4 jugadores selecciona al azar 3 pelotas para un juego.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 8 de las pelotas seleccionadas sean Penn?
b) ¿Cuál es el valor medio y la desviación estándar del número de pelotas Penn seleccionadas?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que el número de pelotas Penn seleccionadas se encuentre a más de 1 DE (1 desviación estándar) de distancia de su valor medio?
d) ¿Cuál es el valor medio y desviación estándar del número de pelotas Penn que quedan en la canasta?

Ejercicio 15

Sea ***X*** = “el número de automóviles de un año y modelo particular que en algún momento en el futuro sufrirán un falla grave en el mecanismo de dirección, que ocasionará pérdida completa de control a alta velocidad”. Suponga que ***X*** tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 10$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo sumo 10 automóviles sufran dicha falla?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que entre 10 y 15 (inclusive) autos sufran dicha falla?
c) ¿Cuáles son E(***X***) y $\sigma_{\boldsymbol{X}}$?

Ejercicio 16

Denote por ***X*** la cantidad de tiempo durante el cual un libro, disponible durante 2 horas en la biblioteca de una universidad, se lo lleva prestado un estudiante seleccionado al azar y suponga que ***X*** tiene función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 0.5x & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & de\ otro\ \text{mod}o \end{cases}$$

Calcule las siguientes probabilidades:

a.- P($\boldsymbol{X} \leq 1$) **b.-** P($0.5 \leq \boldsymbol{X} \leq 1.5$)

c.- P(1.5 < ***X***)

Ejercicio 17

Suponga que la pdf de ventas semanales de grava ***X*** (en toneladas) es:

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & de\ otro\ \mathrm{mod}\, o \end{cases}$$

a.- Obtenga la cdf de ***X*** y grafíquela.
b.- ¿Cuál es *P*(***X*** ≤ 0.5) (es decir *F*(0.5))?
c.- Mediante el uso de la parte (a), ¿cuál es *P*(0.25 < ***X*** ≤ 0.5)? ¿Cuál es *P*(0.25 ≤ ***X*** ≤ 0.5)?
d.- ¿Cuál es el 75avo percentil de la distribución de ventas?
e.- ¿Cuál es la mediana $\tilde{\mu}$ de la distribución de ventas?
f.- Calcule *E*(***X***) y σ_X .

Ejercicio 18

El dispositivo automático de apertura de un paracaídas militar de carga se ha diseñado para abrir el paracaídas cuando éste se encuentre a 200 m de altura sobre el suelo. Supongamos que la altitud de apertura en realidad tiene una distribución normal con valor medio de 200 m y desviación estándar de 30 m. Habrá daño al equipo si el paracaídas se abre a una altitud de menos de 100 m. ¿Cuál es la probabilidad de que haya daño a la carga en al menos uno de los cinco paracaídas lanzados independientemente?

Ejercicio 19

El tiempo ***X*** (en segundos) que tarda un bibliotecario para localizar una ficha de un archivo de registros sobre libros prestados tiene una distribución exponencial con tiempo esperado de 20 s. Calcule las siguientes probabilidades:

a. P(***X*** ≤ 30) **b.** P(20 ≤ ***X***) **c.** P(20 ≤ ***X*** ≤ 30)
d. ¿Para qué valor de *t* es P(***X*** ≤ *t*) = 0.5 (*t* es el 50avo percentil de la distribución)?

Ejercicio 20

El artículo "The Statistics of Phytotoxic Air Pollutants" (*J*: *Royal Strat. Soc*, 1989, pp. 183-198) sugiere la distribución lognormal como un modelo para la concentración de SO_2 sobre cierto bosque. Suponga que los valores de los parámetros son μ = 1.9 y σ = 0.9.

a.- ¿Cuáles son el valor medio y la desviación estándar de la concentración?

b.- ¿Cuál es la probabilidad de que la concentración sea a lo sumo 10? ¿Entre 5 y 10?