Bloque II(segunda semana)

Contenidos Teóricos: Cambio de variables. Momentos de orden superior. Función generadora de momentos. Desigualdades de Markov, Jensen y Tchebichev.

A- Cambio de Variables

En algunas ocasiones interesa calcular la distribución de una variable aleatoria ***Y*** que depende funcionalmente de la distribución de otra variable aleatoria ***X***. Por ejemplo, hemos probado, por ejemplo, que:

$$\text{si } X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1

Sea ***X*** una v. a. con distribución uniforme en el intervalo (0; 1), hallar la distribución de la v. a. X^3.

Sea $Y = X^3$; estudiemos el rango de ***Y***: $0 < X < 1 \Rightarrow 0 < X^3 < 1 \Rightarrow 0 < Y < 1$

Por lo tanto: $R_Y = (0; 1)$.

Además:

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^3 \leq y) = P(X \leq \sqrt[3]{y}) =$ (por se $g(x) = x^3$ una función creciente) $= F_X(\sqrt[3]{y}) \Rightarrow F_Y(y) = F_X(\sqrt[3]{y})$

Derivando ambos miembros de la igualdad respecto de la variable *y* (utilizando la regla) de la cadena resulta: $f_Y(y) = f_X(\sqrt[3]{y}).\frac{d}{dy}(\sqrt[3]{y})$

Utilizando que $f_X(x) = 1$ si $0<x<1$ y $f_X(x) = 0$ en caso contrario resulta que $f_X(\sqrt[3]{y}) = 1$ si $0<y<1$ y $f_X(\sqrt[3]{y}) = 0$ para cualquier otro valor de *y*.

Se obtiene entonces que: $f_Y(y) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$ para todo $0<y<1$

y $f_Y(y) = 0$ en caso contrario.

Ejemplo 2

Sea ***X*** una v. a. con distribución uniforme en el intervalo (0; 1), hallar la distribución de la v. a. ***Y*** = *ln*(***X***).

Sea ***Y*** = *ln*(***X***) ; estudiemos el rango de ***Y***: $0 < X < 1 \Rightarrow -\infty < \ln(X) < 0 \Rightarrow$ $-\infty < Y < 0$. Por lo tanto: R_Y = (-∞; 0).

Además:

$F_Y(y)$ = $P(Y \leq y)$ = $P(\ln(X) \leq y)$ = $P(X \leq e^y)$ = (por se $g(x) = e^x$ una función creciente) = $F_X(e^y) \Rightarrow F_Y(y) = F_X(e^y)$

Derivando ambos miembros de la igualdad respecto de la variable *y* (utilizando la regla) de la cadena resulta: $f_Y(y) = f_X(e^y).\frac{d}{dy}(e^y)$

Utilizando que $f_X(x) = 1$ si $0<x<1$ y $f_X(x) = 0$ en caso contrario resulta que $f_X(e^y) = 1$ si $-\infty<y<0$ y $f_X(e^y) = 0$ para cualquier otro valor de *y*.

Se obtiene entonces que: $f_Y(y) = e^y$ para todo $-\infty<y<0$ y $f_Y(y) = 0$ en caso contrario.

Ejemplo 3:

Sea ***X*** una v. a. con distribución uniforme en el intervalo (0; 1), hallar la distribución de la v. a. ***Y*** $= -\frac{1}{\lambda}.\ln(1-X)$ para $\lambda>0$.

Para estudiar el rango de ***Y***:

Si $0<X<1 \Rightarrow 0<1-X<1 \Rightarrow -\infty<\ln(1-X)<0 \Rightarrow$ (usando que $\lambda>0$ implica $-1/\lambda<0$ y que multiplicar una desigualdad por un número negativo la invierte)

$0 < -\frac{1}{\lambda}.\ln(1-X) < +\infty \Rightarrow R_Y = (0; +\infty)$

Para hallar la función de densidad de ***Y***:

$F_Y(y)$ = $P(Y \leq y)$ = $P\left(\frac{-1}{\lambda}\ln(1-X) \leq y\right)$ = (usando que $-1/\lambda<0$)

$$= P(\ln(1-X) \geq -\lambda\, y) = P(1-X \geq e^{-\lambda.y}) = P(-X \geq e^{-\lambda.y} - 1) =$$

$$= P(X \leq 1-e^{-\lambda.y}) = F_X(1-e^{-\lambda.y})$$

Derivando respecto de *y*, resulta que:

$f_Y(y)$ = $f_X\left(1-e^{-\lambda .y}\right).\dfrac{d}{dy}\left(1-e^{-\lambda .y}\right)$

Si 0<$\boldsymbol{Y}$<+∞ ⇒ 0<$\lambda \boldsymbol{Y}$ < +∞ (por ser λ>0) ⇒ -∞ <-$\lambda \boldsymbol{Y}$ <0 ⇒ 0 < $e^{-\lambda .y}$ <1 ⇒

0 < 1-$e^{-\lambda .y}$ <1 ⇒ $f_X\left(1-e^{-\lambda .y}\right)$ = 1; por lo tanto:

$f_Y(y)$ = $-e^{-\lambda .y}(-\lambda)$ = $\lambda\, e^{-\lambda .y}$ para 0<*y*<+∞ . Es decir, que ***Y*** es una variable con distribución exponencial de parámetro λ.

Ejemplo 4:

Sea ***X*** una v. a. con distribución uniforme en el intervalo (0; 1), hallar la distribución de la v. a. ***Y*** = *3**X***+5.

Rango de ***Y***: si 0<***X***<1 ⇒ 0 <*3**X*** < 3 ⇒ 5 <*3**X***+5< 8 ⇒ R_Y = (5; 8)

Función de densidad de ***Y***:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(3X+5 \le y) = P\left(X \le \frac{y-5}{3}\right) = F_X\left(\frac{y-5}{3}\right)$$

derivando: $f_Y(y)$ = $f_X\left(\dfrac{y-5}{3}\right).\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{y-5}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$ para 5 <*y*< 8

Es decir que ***Y*** tiene una distribución uniforme en el intervalo (5; 8).

Ejemplo 5:

Sea ***X*** una v. a. con distribución uniforme en el intervalo (0; 1), hallar la distribución de la v. a. ***Y*** = -*4**X***+1.

Rango de ***Y***: si 0<***X***<1 ⇒ 0 <*4**X*** < 4 ⇒ -4 <-*4**X***< 0 ⇒ -3<-*4**X**+**1***< 1 ⇒R_Y = (-3; 1)

Función de densidad de ***Y***:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(-4X+1 \le y) = P\left(X \ge \frac{1-y}{4}\right) = 1-F_X\left(\frac{1-y}{4}\right)$$

Derivando respecto de y, se obtiene:

$f_Y(y)$ = $-f_X\left(\dfrac{1-y}{4}\right).\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{1-y}{4}\right) = -1.\left(-\dfrac{1}{4}\right)$ para -3 <*y*< 1

Por lo tanto ***Y*** tiene una distribución uniforme en el intervalo (-3; 1).

B- Momentos de una variable aleatoria

Son valores que resumen características de la variable aleatoria y se definen a partir de la esperanza matemática. Pueden ser de dos tipos:

a) **Momento de orden r respecto del origen**. Se considera la esperanza matemática de la función X^r y se expresa $\alpha_r = E[X^r]$

b) **Momento de orden r centrado o respecto de la media.** Se considera la esperanza matemática de la función $(X-E[X])^r$ y se expresa $\mu_r = E[(X - E[X])^r]$

Así, por ejemplo, los momentos más utilizados son:

Orden (valor de r)	Respecto del origen	Centrado o respecto de la media.
R = 0	$\alpha_0 = E[X^0] = E[1] = 1$	$\mu_0 = E[(X-E[X])^0] = E[1] = 1$
R = 1	$\alpha_1 = E[X^1] = E[X] = \mu$ (media)	$\mu_1 = E[(X-E[X])^1] = E[X] - E[X] = 0$
R = 2	$\alpha_2=E[X^2]$	$\mu_2 = E[(X-E[X])^2] = \sigma^2$ (varianza)

Se puede demostrar que todos los momentos respecto de la media se pueden expresar como momentos respecto del origen (Teorema de Köening)

B.1- FUNCÓN GENERATRIZ DE MOMENTOS

Se llamará función generatriz de momentos (f.g.m.) , a la expresión: *Mx(t) = E(etx),* cuando este valor esperado existe.

En el caso de variables discretas se tiene que: $Mx(t)=E(e^{tx}) = \sum_{i=1}^{n} e^{txi} p(xi)$

X es la variable aleatoria considerada

t es una variable auxiliar

Y para variables continuas, así:

$Mx(t)=E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx$

La importancia de la función generadora de momentos, radica en el hecho de que ella es única y determina completamente la distribución de una variable aleatoria, esto es, si dos variables aleatorias tienen una misma función Generatriz de momentos, deben tener igual distribución.

<u>Ejemplo 6</u>

<u>Función generatriz de momentos de la variable aleatoria binomial:</u>

Calculemos la media y la varianza de la distribución binomial utilizando la función generatriz de momentos. Para ello recordemos que la función generatriz de momentos es la esperanza matemática de la función e^{xt} en donde x es la variable aleatoria que estamos considerando y t es una variable auxiliar.

$$G(t) = E(e^{xt}) = \sum_{x=0}^{n} e^{xt}\binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}\left(e^t p\right)^x q^{n-x} = (e^t p + q)^n$$

Para comprender la transformación anterior recuérdese el desarrollo del binomio de Newton que dice:

$$(p+q)^n = \binom{n}{0}p^0 q^{n-0} + \binom{n}{1}p^1 q^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}p^{n-1}q + \binom{n}{n}p^n q^0 = \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$$

Por lo tanto hemos obtenido la función generadora de momentos, la cual nos permitirá obtener la media y la varianza de la distribución del siguiente modo:

$$G(t) = (e^t p + q)^n$$

$$G^{'}(t) = n\left(e^t p + q\right)^{n-1} \cdot e^t p$$

Particularizando para t igual a 0 obtenemos la media de X, es decir:

$$m_x = G^{'}(0) = n\left(p+q\right)p = np$$

Sabemos que la varianza es el momento de segundo orden con respecto a la media, es decir:

$$v_x = E\left[\left(x - m_x\right)^2\right] = E\left(x^2 - 2xm_x + m_x^2\right) = E\left(x^2\right) - 2m_x E(x) + m_x^2 E\left(1\right) = E\left(x^2\right) - 2m_x m_x + m_x^2$$

Quedando en general que

$$v_x = E(x^2) - m_x^2$$

Como antes hemos calculado la media, solo nos falta obtener el segundo momento con respecto al origen que puede calcularse mediante la función generatriz de momentos.

$$v_x = G''(0) - m_x^2 = np - (np)^2 = np(1-p) = npq$$

Ejemplo 7

Función generatriz de momentos de la variable aleatoria Poisson:

$$G(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{xt} e^{-m} \frac{m^x}{x!} = e^{-m} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(m\, e^t)^x}{x!} = e^{-m}\, e^{me^t}$$

$$\text{Recordemos que}: e^z = 1 + \frac{z^1}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^x}{x!} + \cdots$$

$$G'(t) = m\, e^t\, G(t)$$

$$G''(t) = m\, e^t\, [G(t) + G'(t)]$$

$$G(0) = 1$$

$$G'(0) = m$$

$$G''(0) = m + m^2$$

$$V_x = G''(0) - (M_x)^2 = m$$

C- Desigualdad de Markov:

Sea ***X*** una variable aleatoria no negativa, entonces:

para cualquier $a>0$ ($a \in \mathbb{R}$) se verifica que: $P(\boldsymbol{X} \geq a) \leq E(X)/a$

Demostración:

Para el caso de ***X*** variable continua no negativa ($x \geq 0$):

Demostración

E(X)= $\int_{R_{\geq 0}} xf(x)dx = \int_{x<a} xf(x)dx + \int_{x\geq a} xf(x)dx \geq \int_{x\geq a} xf(x)dx \geq a \int_{x\geq a} f(x)dx$ = aP(X≥a)

Entonces E(X)/a ≥P(X≥a)

Ejemplo 8:

Sea ***X*** una variable definida en el intervalo (0, +∞) con esperanza ½ ; hallar una cota para $P(X \geq 2)$.

Como ***X*** es una variable no negativa, podemos aplicar la desigualdad de Markov con *a* = 2, resultado que: $P(X \geq 2) \leq 0.5/2$ = 0.25.

D- Desigualdad de Jensen

Funciones convexas

Diremos que una función f es convexa si dados x e y reales y $\alpha \in [0; 1]$ se verifica que:

F(αx +(1-α)y) ≤ (αf(x) +(1-α)f(y)

Si f es clase C^2, f es convexa en x=a sii f’’(x) ≥ 0

Si g: R→R es una función convexa, entonces: g(E(X))≤E(g(X))

Demostración:

Hagamos la demostración para el caso que X toma solo un numero finito de valores. Sea p_i = P (X = xi).

Entonces

E(X) = $\sum_{i=1}^{n} x_i pi$

Es decir que la esperanza matemática es una combinación convexa de los valores de la variable; y como X es una función convexa, entonces:

g(E(X)) = g($\sum_{i=1}^{n} x_i pi$) ≤= $\sum_{i=1}^{n} g(x_i) pi$ =E(g(X))

E- Desigualdad de Chebyshev:

Sea ***X*** una variable aleatoria con esperanza y varianza finita.

Cualquiera sea $\varepsilon > 0$, se verifica que:

a.- $\boxed{P(|X-\mu| > \varepsilon) \leq \dfrac{Var(X)}{\varepsilon^2}}$

Demostración:

Sea la variable aleatoria $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{X} - E(\boldsymbol{X}))^2$. Dado que $\boldsymbol{Y}$ es una variable aleatoria no negativa se puede aplicar la desigualdad de Markov tomando como $a = \varepsilon^2 > 0$. Resulta entonces que:

$P(\boldsymbol{Y} \geq \varepsilon^2) \leq E(Y)/\varepsilon^2 \Leftrightarrow P[(\boldsymbol{X} - E(\boldsymbol{X}))^2 \geq \varepsilon^2] \leq E\left[(X-E(X))^2\right]/\varepsilon^2 = Var(X)/\varepsilon^2$

$\Leftrightarrow$ (sacando raíz cuadrada) $P\left(|X-E(X)| > \varepsilon\right) \leq Var(X)/\varepsilon^2$

Con lo cual se concluye la demostración.

Obviamente para calcular la probabilidad de un evento descripto en términos de una variable aleatoria $\boldsymbol{X}$, es necesario conocer la distribución de $\boldsymbol{X}$. Las desigualdades de Chebyschev y de Markov dan una cota que no depende de la distribución de $\boldsymbol{X}$.

Muchas veces, estas cotas están lejos del valor real de la probabilidad deseada.

Ejemplo 9:

Si $X \sim U(1;3)$; hallar, usando Chebyschev, una cota para $P\left(|X-\mu| > \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sigma\right)$

$X \sim U(1;3) \Rightarrow E(\boldsymbol{X}) = 2$; $Var(\boldsymbol{X}) = \dfrac{(b-a)^2}{12} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \varepsilon = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sigma = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 1/2$

Por lo tanto: $P\left(|X-\mu| > \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sigma\right) \leq \dfrac{1/3}{(1/2)^2} = 4/3$

Cota trivial: no da ninguna información, la probabilidad siempre resultará menor que $4/3$ porque siempre es un número menor o igual que 1.

Calculada exactamente:

$$P\left(|X-\mu| > \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\right) = P\left(|X-2| > \frac{1}{2}\right) = 1-P\left(|X-2| \leq \frac{1}{2}\right) = 1-P\left(2-\frac{1}{2} \leq X \leq 2+\frac{1}{2}\right) =$$

$= 1 - F(2.5) + F(1.5) = 1 - 3/4 + 1/4 = 1/2$

F-1 - Otras formas de enunciar la desigualdad de Chebyschev:

b.- $P(|X-\mu|\leq\varepsilon)\geq 1-\dfrac{Var(X)}{\varepsilon^2}$

c.- $P(|X-\mu|>k\sigma)\leq\dfrac{1}{k^2}$ con $\sigma=\sqrt{Var(X)}$

d.- $P(|X-\mu|\leq k\sigma)\geq 1-\dfrac{1}{k^2}$ con $\sigma=\sqrt{Var(X)}$

F.2- Versión Bernoulli de la desigualdad de Chebyschev:

Sea ***E*** un experimento aleatorio y ***A*** un suceso asociado a él.

Consideremos *n* repeticiones del experimento.

Sea n_A la frecuencia absoluta del evento ***A*** y sea $f_A=\dfrac{n_A}{n}$ la frecuencia relativa.

Sea $P(A)=p$ constante a lo largo de las *n* repeticiones; entonces para todo ε >0:

$$P\left(|f_A-p|>\varepsilon\right)\leq\frac{p(1-p)}{n.\varepsilon^2}\ .$$

Demostración:

$n_A \sim Bi(n,p) \Rightarrow E(n_A)=n.p\ ;\ Var(n_A)=n.p.(1-p)\Rightarrow$

$$\Rightarrow E(f_A)=p\ ;\ Var(f_A)=Var\left(\frac{n_A}{n}\right)=\frac{1}{n^2}Var(n_A)=\frac{n.p.(1-p)}{n^2}=\frac{p.(1-p)}{n}$$

Usando Chebyschev: $P\left(|f_A-\mu|>\varepsilon\right)\leq\dfrac{\sigma_{f_A}^2}{\varepsilon^2}\Rightarrow P\left(|f_A-p|>\varepsilon\right)\leq\dfrac{p(1-p)}{n.\varepsilon^2}$

Ejemplo 10

¿Cuántas repeticiones del experimento ***E*** deberían hacerse para que la frecuencia relativa de un suceso ***A*** difiera de su probabilidad *p* en menos de 0.01 con probabilidad mayor o igual que 0.95?

$$P\left(|f_A-p|>\varepsilon\right)\leq\frac{p(1-p)}{n.\varepsilon^2}\Rightarrow P\left(|f_A-p|\leq\varepsilon\right)\geq 1-\frac{p(1-p)}{n.\varepsilon^2}\geq 0.95\Rightarrow$$

$$\frac{p(1-p)}{n.\varepsilon^2}\leq 0.05\Rightarrow\frac{p(1-p)}{n.0.01^2}\leq 0.05\Rightarrow\frac{p(1-p)}{0.05x0.01^2}\leq n$$

Analizando para los distintos valores de p encontramos cotas para *n*:

- Si $p=0.5\Rightarrow n\geq 50000$

- Si $p=0.1\Rightarrow n\geq 18000$

- Si $p = 0.01 \Rightarrow n \geq 1980$