TP Bloque III

Contenidos Conceptuales: Teoría asintótica. Sucesiones de variables aleatorias. Modos de convergencia: casi seguro, en probabilidad, en media cuadrada, en distribución. Ley de los grandes números. Teorema Central del Límite. Aplicaciones.

Ejercicio 1:

Una pequeña tienda vende tres marcas diferentes de yogurt en envases de 8 onzas. De todos los clientes que compran un solo envase, 50% compra el que contiene 160 calorías, 30% compra el de 200 calorías y el otro 20 % compra el de 250 calorías. Denote por X_1 y X_2 el número de calorías de los envases comprados por dos clientes seleccionados independientemente.

a) Determine la distribución muestral de $\overline{X}$, calcule $E(\overline{X})$ y compare con μ.

b) Determine la distribución muestral de la varianza muestral S^2, calcule $E(S^2)$ y compare con σ^2.

Ejercicio 2:

Una compañía mantiene tres oficinas en cierta región, cada una de ellas manejada por dos empleados.
La información concerniente a salarios anuales (miles de dólares) es como sigue:

Oficina	1	1	2	2	3	3
Empleado	1	2	3	4	5	6
Salario	19.7	23.6	20.2	23.6	15.8	19.7

a) Suponga que dos de estos empleados se seleccionan al azar de entre los seis (sin reemplazo). Determine la distribución muestral del salario medio muestral $\overline{X}$.

b) Suponga que una de las tres oficinas se selecciona al azar y denote por X_1 y X_2 los salarios de los dos empleados. Determine la distribución muestral de $\overline{X}$.

c) ¿Cómo se compara $E(\overline{X})$ de las partes a) y b) con el salario medio poblacional μ?

Ejercicio 3:

En cada uno de los ítems que siguen suponga que $\boldsymbol{X_1}, \ldots, \boldsymbol{X_n}$ son variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con la función de probabilidad $p(x)$ o de densidad $f(x)$ descripta en cada caso. En cada ítem se define una variable aleatoria $\boldsymbol{Y_n}$ calculada a partir de las n variables aleatorias $\boldsymbol{X_1}, \ldots, \boldsymbol{X_n}$ y un parámetro θ de la distribución correspondiente.
En cada caso diga si es cierto o falso que $\boldsymbol{Y_n}$ converge en probabilidad a θ cuando n tiende a infinito y justifique su respuesta.
En los enunciados, la función $I_A(x)$ está definida como $I_A(x) = 1$ si $x \in A$, y $I_A(x) = 0$ si $x \notin A$. Se utilizó la siguiente notación: $\overline{X}_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$.

a) $f(x) = \left(\frac{1}{\beta}\right) e^{(-x/\beta)}\ \mathrm{I}_{(0,\infty)}(x)$ $\qquad \theta = \beta \qquad Y_n = \dfrac{1 + \sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{\beta}\right) e^{(-x/\beta)}\ \mathrm{I}_{(0,\infty)}(x)$ $\qquad \theta = \beta^2 \qquad Y_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{\beta}\right) e^{(-x/\beta)}\ \mathrm{I}_{(0,\infty)}(x)$ $\qquad \theta = \beta^{\ 2} \qquad Y_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n-1}$

d) $p(x) = \begin{cases} p & \text{si x} = 1 \\ 1-p & \text{si x} = 0 \end{cases}$ $\qquad \theta = p\ (1-p) \qquad Y_n = \bar{X}\ (1-\bar{X})$

e) $p(x) = \begin{cases} p & \text{si x} = 1 \\ 1-p & \text{si x} = 0 \end{cases}$ $\qquad \theta = p\ (1-p) \qquad Y_n = \dfrac{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ $\qquad \theta = \mu \qquad Y_n = \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - \sqrt{n}}{n}$

g) Si $E(\boldsymbol{X}i) = 4$ y $Var(\boldsymbol{X}i) = \dfrac{i+1}{i}\sigma^2$ con $\sigma > 0$ $\forall i \in \mathbf{N} \Rightarrow \bar{X}_n + e^{5 - 1/n} \xrightarrow[p]{} 4 + e^5$

Ejercicio 4:

a) Sea $\boldsymbol{X}$ una variable aleatoria con distribución desconocida tal que $E(\boldsymbol{X}) = 5$ y $V(\boldsymbol{X}) = 0.1$. Usando la desigualdad de Chebyshev, acote la probabilidad de que $\boldsymbol{X}$ esté entre 4.5 y 5.5.

b) Sea $\boldsymbol{X}_1$,…, $\boldsymbol{X}_{10}$ una muestra aleatoria, es decir, v. a. independientes e idénticamente distribuidas, con $E(\boldsymbol{X}_i) = 5$ y $V(\boldsymbol{X}_i) = 0.1$. Acote la probabilidad de que

$4.5 \le \bar{X} \le 5.5$ siendo $\bar{X}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \big/ n$

c) Si se contase con una muestra aleatoria de tamaño *n*: $\boldsymbol{X}_1$,…, $\boldsymbol{X}_{10}$: ¿qué pasaría con la cota hallada en b) cuando *n* tendiese a infinito?

Ejercicio 5:

Sean $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$, ..., X_{100} los pesos netos de 100 bolsas de fertilizante seleccionadas al azar.

a) Si el peso esperado de cada bolsa es 50 y la varianza es 1, calcule en forma aproximada (usando el Teorema Central del Límite), $P(49.75 \le \bar{X}_{100} \le 20.25)$.

b) Si el peso esperado es 49.8 libras, en lugar de 50 libras, de modo que en promedio las bolsas tienen menos peso, calcule en forma aproximada la probabilidad pedida en a).

Ejercicio 6:
Ejercicio 6

Sea ***X*** una v.a. con distribución *Bi*(100, 0.8).
Usando el Teorema Central del Límite (con corrección por continuidad), calcule en forma aproximada:

a) $P(75 \leq X \leq 85)$

b) $\mathrm{P}(X \geq 80)$

c) $P\left(0.7 \leq \dfrac{X}{100} \leq 0.8\right)$

d) $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 80)$

Ejercicio 7

El tiempo, en minutos, que una persona debe esperar cada día el subte en la estación Catedral durante el horario de oficinas se puede modelar mediante una variable aleatoria **U**(0,10). Hallar, en forma aproximada, la probabilidad de que durante treinta días el tiempo que ha esperado el subte supere los 145 minutos.

Ejercicio 8

Sean $\{X_i\}$ e $\{Y_i\}$ dos sucesiones de variables aleatorias independientes.
Enuncie en cada ítem las propiedades que utiliza para obtener el resultado pedido.

a) Si $\boldsymbol{X_i}$ son variables definidas positivas y $X_n \xrightarrow[d]{} Z$ con Z ~ N(μ; σ²), ¿a qué converge en distribución la sucesión $\ln(X_n)$? ¿Cuáles son los parámetros?

b) Si $X_n \xrightarrow[d]{} Z$ con Z ~ N(μ; σ²),, ¿a qué converge en distribución la sucesión $W_n = \dfrac{X_n - \mu}{\sigma}$? ¿Cuáles son los parámetros?

c) Si $X_n \xrightarrow[d]{} Z$ con Z ~ N(μ; σ²),, ¿a qué converge en distribución la sucesión $R_n = \left(\dfrac{X_n - \mu}{\sigma}\right)^2$? ¿Cuáles son los parámetros?

d) Si $X_n \xrightarrow[d]{} Z$ con Z ~ N(0; 1), e $Y_n \xrightarrow[d]{} 5$, ¿a qué converge en distribución la sucesión $X_n + Y_n$? ¿Cuáles son los parámetros?

e) Si $X_n \xrightarrow[d]{} Z$ con Z ~ N(0; 1) e $Y_n \xrightarrow[d]{} 5$, ¿a qué converge en distribución la sucesión $X_n.Y_n$? ¿Cuáles son los parámetros?

f) Si $X_n \xrightarrow[d]{} Z$ con Z ~ N(0; 1), ¿a qué converge en distribución la sucesión

$S_n = \dfrac{3n-10}{n} X_n + \dfrac{1-7n^2}{n^2}$? ¿Cuáles son los parámetros?