Tesis Profesional
Espacios de Hilbert con núcleo reproductivo

Guillermo Garro

Abril 2003

A mi madre,
Victoria

En sincero agradecimiento:

A mi amigo y tutor,
Luis Antonio

A los miembros de mi honorable jurado:
Dr. Luis Antonio Rincón
Dra. María Emilia Caballero
Act. Jaime Vázquez
Act. Gerónimo Uribe
Mat. César Eduardo Sousa,
por sus imprescindibles comentarios,
sugerencias y correcciones,
y su inestimable interés

A todos aquellos que
han hecho posible esta tesis

Contenido

Prefacio

En esta tesis pretendemos revisar de forma general, los aspectos principales referentes a ciertos objetos matemáticos, los cuales extienden la ya de por sí fecunda teoría de los *espacios de Hilbert*. Es entonces comprensible que la estructura de este trabajo presente en primer término, una revisión más o menos profunda de los conceptos fundamentales de los espacios de Hilbert. Con estos antecedentes teóricos, podremos entonces transitar de manera detallada dentro de los siguientes dos capítulos, en la construcción del objeto que nos interesa, considerándolo como un tipo más de *núcleo* (o *kernel*), llamado además *reproductivo*, debido a una propiedad que le caracteriza.

Sin embargo, el tratamiento matemático del primer capítulo no será meramente informativo, sino que encontraremos una aplicación en la teoría de las probabilidades (concretamente, en el concepto de *esperanza condicional*) de los principales resultados teóricos analizados. En cuanto al segundo y tercer capítulos, como hemos dicho, el trato será un tanto exhaustivo, sin llegar a ser completo. En realidad, hemos considerado más provechoso detallar el análisis de los aspectos fundamentales que componen toda la teoría del núcleo reproductivo, que la revisión extensiva, aunque poco profunda, de dicha teoría. No obstante, con esto hemos tratado de abrir una pequeña brecha para posteriores trabajos, donde no sólo se extienda la teoría sino sus posibles aplicaciones.

Aquí, sólo mencionaremos que una de las más ingeniosas y útiles aplicaciones ha surgido precisamente en la teoría de las probabilidades. Los trabajos de Driscoll [1] y Lucić & Beder [2] son solo algunos de los que se desarrollan en este tenor.

Cabe decir también que el primer trabajo de investigación original del núcleo reproductivo en su forma abstracta, *Theory of reproducing kernels* de Aronszjan[3], de donde se basa esta tesis, tuvo sus origenes en ciertos principios

[1]Driscoll, Michael, *Estimation of the mean value function of a Gaussian process*, tesis doctoral, Universidfad de Arizona, 1971; y del mismo autor, *The reproducing kernels Hilbert space structure of the sample paths of a Gaussian process*, Zetschrift für Wahrscheinlinchkeitstheorie und verwandle Gebiete, vol. 26, 1973, páginas 309-316.

[2]Ver [6].

[3]Ver [1]. En general, la teoría del núcleo reproductivo gira en torno a un problema básico que será planteado a partir sel capítulo dos, de la presente tesis

matemáticos referentes a las ecuacaiones diferenciales e integrales [4]; de esta manera, las aplicaciones pueden también extenderse a estos ámbitos.

[4]En los trabajos de Zaremba, Mercer, Moore y algunos otros. Ver las referencias bibliográficas de Aronszjan ([1]).

Capítulo 1

Espacios de Hilbert

En este capítulo abordaremos, de manera esencial, la principal herramienta usada en esta tesis: los espacios de Hilbert. Partiremos del concepto de espacio vectorial, introduciendo después un tipo particular de función llamada norma (sustentado en el concepto fundamental de producto interior). De ahí impondremos condiciones de completez que definen propiamente un espacio de Hilbert. Analizaremos las propiedades algebraicas y geométricas fundamentales, finalizando con una aplicación directa a los espacios de funciones L_p y al concepto de esperanza en cuanto a la teoría de las probabilidades.

1.1 Espacios con producto interior. Espacios de Hilbert

Definición 1.1.1 (Espacio vectorial). *Un* **espacio vectorial o lineal** *sobre el campo* $\mathbb{F}$ *(*$\mathbb{C}$ *o* $\mathbb{R}$*), es una terna* $(\mathbf{X}, +, \cdot)$*, donde* $\mathbf{X}$ *es una colección de objetos, y las operaciones* $+ : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \to \mathbb{F}$ *llamada* suma de vectores *(denotaremos* $x + y$ *en lugar de* $+(x, y)$*),* $y \cdot : \mathbb{F} \times \mathbf{X} \to \mathbb{F}$ *llamada* producto escalar *(aquí usaremos* λx *en lugar de* $\cdot(\lambda, x)$*), satisfacen las propiedades siguientes,*

A1) $x + y = y + x$

A2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

A3) Existe un elemento $0 \in \mathbf{X}$ *tal que* $0 + x = x + 0$ *(neutro aditivo).*

A4) Existe un elemento $-x \in \mathbf{X}$ *tal que* $-x + x = x + (-x) = 0$ *(inverso aditivo).*

M1) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x) = \mu(\lambda x)$.

M2) Existe $1 \in \mathbf{X}$ *tal que* $1x = x$ *(elemento identidad).*

D1) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$.

D2) $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$.

A los elementos de $\mathbf{X}$ *los llamaremos vectores.*

Nosotros usaremos simplemente el término $\mathbf{X}$, a menos que se especifique lo contrario, para referirnos al espacio vectorial $(\mathbf{X}, +, \cdot)$ sobre el campo escalar $\mathbb{F}$.

Definición 1.1.2 (Subespacio vectorial). *Sea* $\mathbf{X}$ *un espacio vectorial. Si* $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}$ *y* $\mathbf{Y}$ *es un espacio vectorial sobre el mismo campo escalar y con las mismas operaciones (de suma y producto por escalares) definidas para* $\mathbf{X}$*, entonces decimos que* $\mathbf{Y}$ *es un* **subespacio vectorial** *de* $\mathbf{X}$.

Definición 1.1.3 (Independencia lineal, base y dimensión). *Sea* $\mathbf{X}$ *un espacio vectorial.*

i) *Decimos que una colección finita de vectores* $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *en* $\mathbf{X}$ *es* **linealmente independiente** *si, teniendo un conjunto* $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ *de escalares en* $\mathbb{F}$*, la relación*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0$$

implica que $\alpha_i = 0$*, para toda* $i \in \{1, 2, ..., n\}$*. Análogamente, la familia de vectores* $\{x_i\}_{i \in I}$*,* I *subconjunto de índices, es linealmente independiente si cualquier subfamilia finita es linealmente independiente.*

ii) *Una familia de vectores linealmente independiente con la propiedad de que cualquier otro vector del espacio* $\mathbf{X}$ *puede expresarse como combinación lineal de sus vectores componentes, es llamada* **base** *del espacio vectorial* $\mathbf{X}$*. Es claro que cualesquiera dos bases tienen la misma cardinalidad.*

iii) *La* **dimensión** *de un espacio vectorial se define como la cardinalidad de una de sus bases.*

Definición 1.1.4 (Producto interior). *Un* **producto interior** *sobre el espacio vectorial* $\mathbf{X}$*, es una función* $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \to \mathbb{F}$*, con las siguientes propiedades.*

i) *Linealidad:* $\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, y \rangle + b\langle x, y \rangle$*, para todo* a*,* $b \in \mathbb{F}$ *y* $x, y, z \in \mathbf{X}$.

ii) *Antisimetría:* $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ *para todo* $x, y \in \mathbf{X}$.

iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ *para todo* $x \in \mathbf{X}$ *y* $\langle x, x \rangle = 0$*, si y sólo si* $x = 0$*. (Por la segunda propiedad,* $\langle x, x \rangle$ *es siempre un número real no negativo).*

A veces un espacio vectorial $\mathbf{X}$ sobre el campo real o complejo con un producto interior definido, es llamado **espacio pre-Hilbert**.

Proposición 1.1.1. *Consideremos un espacio vectorial* $\mathbf{X}$ *con producto interior definido. Entonces,*

1) $\langle x, ay + bz\rangle = \overline{a}\langle x, y\rangle + \overline{b}\langle x, z\rangle$ *para todo par* $a, b \in \mathbb{F}(= \mathbb{C}$ *o* $\mathbb{R})$ *y para todo* $x, y, z \in \mathbf{X}$*.*

2) $\langle x, y\rangle = 0$ *para toda* $x \in \mathbf{X}$*, si y sólo si* $y = 0$*.*

Demostración. 1). De la definición de producto interior,

$$\begin{aligned}\langle x, ay + bz\rangle &= \overline{\langle ay + bz, x\rangle} = \overline{a\langle y, x\rangle + b\langle z, x\rangle} = \overline{a\langle y, x\rangle} + \overline{b\langle z, x\rangle}\\ &= \overline{a}\overline{\langle y, x\rangle} + \overline{b}\overline{\langle z, x\rangle} = \overline{a}\langle x, y\rangle + \overline{b}\langle x, y\rangle.\end{aligned}$$

2). Para toda $x \in \mathbf{X}$ se tiene que $\langle x, y\rangle = 0$, en particular, $\langle y, y\rangle = 0$, entonces $y = 0$. De manera inversa, si $y = 0$ tenemos entonces que

$$\langle x, y\rangle = \langle x, 0\rangle = \langle x, 0 * 0\rangle = 0\langle x, 0\rangle = 0,$$

para todo elemento x de $\mathbf{X}$. □

En algunos casos, según las características de ciertos espacios, no es difícil definir un producto interior, aquí presentamos solo algunos ejemplos.

Ejemplo 1.1.1. Consideremos $\mathbf{X} = \mathbb{C}^n$ (el n-espacio euclidiano complejo) y $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Para un par de vectores $x = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ y $y = (\beta_1, ..., \beta_n)$, definimos el siguiente producto

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i}. \tag{1.1}$$

Sean x, y y z elementos de $\mathbb{C}^n$, y a, b en $\mathbb{C}$. Es claro que $ax + by = (a\alpha_1 + b\beta_1, ..., a\alpha_n + b\beta_n)$, y si $z = (\xi_1, ..., \xi_n)$, entonces,

$$\begin{aligned}\langle ax + by, z\rangle &= \sum_{i=1}^{n} (a\alpha_i + b\beta_i)\overline{\xi_i}\\ &= a\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\overline{\xi_i} + b\sum_{i=1}^{n} \beta_i\overline{\xi_i}\\ &= a\langle x, z\rangle + b\langle y, z\rangle.\end{aligned}$$

Ahora bien, $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\overline{\beta_i} = \overline{\sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i}\beta_i} = \overline{\langle y, x\rangle}$. Por último, $\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\overline{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \geq 0$. De este modo, el producto (1.1) es un producto interior sobre $\mathbf{X} = \mathbb{C}^n$.

Proponemos ahora una generalización de este primer ejemplo.

Ejemplo 1.1.2. Consideremos el espacio

$$\mathbf{X} = \left\{ (a_1, ..., a_n, ...) : a_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N},\ \text{y}\ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Para $x = (\alpha_1, ...),\ y = (\beta_1, ...) \in \mathbf{X}$, definimos el producto

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \overline{\beta_n}.$$

Esta suma converge (según la desigualdad de Hölder, referida en la Proposición 1.2.3, páginas más adelante). Podemos probar que este producto define un producto interior de forma análoga a lo realizado en el ejemplo anterior.

Ejemplo 1.1.3. Sea $\mathbf{X}$=$\mathbf{C}([a, b], \mathbb{C})$ el campo de las funciones complejas continuas sobre el intervalo cerrado $[a, b]$. Definimos la suma puntual de funciones y el producto puntual por escalares como sigue,$(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ y $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$. Entonces el producto

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx,$$

define un producto interior sobre el espacio $\mathbf{X}$. En efecto, la linealidad y la antisimetría se siguen de forma inmediata. Ahora, basta notar que si $\langle f, f \rangle = 0$, entonces $f = 0$, pues f es continua; mientras que el resultado recíproco es inmediato.

Ejemplo 1.1.4. Sean E y F dos intervalos en $\mathbb{R}$. Definimos $L_2(E)$ como el espacio de las funciones complejas definidas en E cuadrado integrables, análogamente consideramos $L_2(F)$ y $L_2(E \times F)$. Sea entonces $\mathbf{X}$ el espacio de las funciones $T : L_2(E) \to L_2(F)$, tal que $u \mapsto Tu$, y para toda $y \in F$,

$$(Tu)y = \int_E t(x, y)u(x)dx,$$

donde $t \in L_2(E \times F)$. La función Tu pertenece a $L_2(F)$. En efecto,

$$|(Tu)y| \leq \int_E |t(x, y)u(x)|dx \leq \left(\int_E |t(x, y)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_E |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

(ver Teorema 1.5.1, páginas más adelante) entonces,

$$\int_F |(Tu)y|^2 dy \leq \left(\int_E \int_F |t(x, y)|^2 dxdy \right) \left(\int_E |u(x)|^2 dx \right) < \infty.$$

Es ahora sencillo probar que el producto

$$\langle S, T \rangle = \int_E \int_F s(x, y)\overline{t(x, y)} dxdy, \quad S, T \in \mathbf{X}$$

es un producto interior para $\mathbf{X}$.

Ahora introduciremos ciertos tipos de funciones reales sobre un espacio con producto interior definido, las cuales pueden tener una interpretación geométrica en ciertos casos. Además estudiaremos algunas propiedades de dichos espacios.

Definición 1.1.5 (Seminorma). *Sea* $\mathbf{X}$ *un espacio vectorial sobre un campo escalar* $\mathbb{F}$. *Una* **seminorma** *sobre* $\mathbf{X}$ *es una función* $\|\cdot\| : \mathbf{X} \to \mathbb{R}^+$ *tal que*

i) $\|ax\| = |a|\|x\| \qquad$ *para toda* $a \in \mathbb{F}$ *y para toda* $x \in \mathbf{V}$.

ii) Propiedad Triangular: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *para todo par* $x,\ y \in \mathbf{V}$.

Podemos restringir el concepto de seminorma a otro concepto menos general, el cual exponemos a continuación.

Definición 1.1.6 (Norma). *Sea* $\mathbf{X}$ *un espacio vectorial sobre un campo escalar* $\mathbb{F}$. *Una* **norma** *sobre* $\mathbf{X}$ *es una función* $\|\cdot\| : \mathbf{X} \to \mathbb{R}^+$ *tal que*

i) $\|\cdot\|$ *es seminorma, y*

ii) $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$.

En tal caso decimos que $\mathbf{X}$ *es un* **espacio vectorial normado**.

Definición 1.1.7. *Decimos que la sucesión* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *de elementos de un espacio vectorial normado* $\mathbf{X}$ *es una* **sucesión de Cauchy**, *si para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $N \geq 1$ *tal que* $\|x_m - x_n\| < \epsilon$, *siempre que* $n, m > N$. *Decimos que la sucesión* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ **converge** *a* x $(x_n \to x)$, *cuando* $\|x_n - x\| \to 0$, *siempre que* $n \to \infty$; *y si además* $x \in \mathbf{X}$, *entonces decimos que* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *es* **convergente en** $\mathbf{X}$.

Es fácil verificar que toda sucesión convergente en $\mathbf{X}$ es una sucesión de Cauchy. Sin embargo el recíproco no es cierto en todos los casos, pero cuando así sucede $\mathbf{X}$ recibe un nombre especial.

Definición 1.1.8. *Decimos que un espacio vectorial normado* $\mathbf{X}$ *es* **completo** *si toda sucesión de Cauchy en* $\mathbf{X}$ *converge en* $\mathbf{X}$.

Supongamos que $\mathbf{X}$ posee un producto interior y consideremos la función $\|x\| = (\langle x, x\rangle)^{1/2}$, $x \in \mathbf{X}$.

Proposición 1.1.2 (Desigualdad de Cauchy-Schwartz). *Sea* $\mathbf{X}$ *un espacio vectorial con producto interior. Entonces,*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Demostración. Para toda $a \in \mathbb{F}$, y para todo par $x, y \in \mathbf{X}$,

$$0 \leq \langle x + ay, x + ay \rangle = \|x\|^2 + \overline{a}\langle x, y \rangle + a\langle y, x \rangle + |a|^2\|y\|^2. \tag{1.2}$$

Supongamos que $\langle y, y \rangle = 0$, entonces, $y = 0$ y $\|y\| = 0$. Además $\langle x, y \rangle = 0$, lo cual implica que $|\langle x, y \rangle| = 0$. De esta manera,

$$0 = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\| = 0$$

Ahora supongamos que $\langle y, y \rangle > 0$. Entonces $\|y\| > 0$ y si en la expresión (1.2) sustituimos $a = -(\langle x, y \rangle / \langle y, y \rangle)$, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \quad \leq \quad & \|x\|^2 - 2\frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} + \frac{\|\langle x, y \rangle\|^2}{\|y\|^2} \\ & = \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2}, \end{aligned}$$

de donde se sigue la desigualdad deseada. □

El resultado anterior es bastante conocido, y de él se derivan otros resultados igualmente conocidos e importantes enunciados a continuación.

Corolario 1.1.1. *Sea* $\mathbf{X}$ *un espacio vectorial con un producto interior. Entonces* $\|x\| = (\langle x, x \rangle)^{1/2}$, *define una norma y* $d(x, y) = \|x - y\|$ *define una métrica sobre* $\mathbf{X}$. *De tal manera que* $\mathbf{X}$ *es un espacio lineal normado.*

La demostración se reduce a algunos cálculos sencillos. Tan sólo mencionaremos que esta norma es conocida como la **norma inducida** por el producto interior.

Definición 1.1.9 (Espacio de Hilbert). *Si un espacio vectorial con producto interior es completo bajo la norma inducida por el producto interior, decimos entonces que es un* **espacio de Hilbert**.

De aquí en adelante, la notación usada para un espacio de Hilbert será la letra $\mathbf{H}$ en mayúscula y en "negritas". No obstante, en algunos casos será más útil usar como notación la dupla $(\mathbf{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Corolario 1.1.2. *El producto interior es conjuntamente continuo sobre el espacio de Hilbert* $\mathbf{H}$. *Esto es, si* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *y* $\{y_n\}_{n\geq 1}$, *son sucesiones en* $\mathbf{H}$, *tal que* $x_n \to x$ *y* $y_n \to y$, *con* x, y *en* $\mathbf{H}$ *(es decir, sucesiones convergentes en* $\mathbf{H}$*), entonces* $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$.

Demostración. Según la desigualdad del triángulo y la desigualdad de Cauchy-Schwartz, tenemos que

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n - x, y \rangle + \langle x_n, y_n - y \rangle| \\ &\leq |\langle x_n - x, y \rangle| + |\langle x_n, y_n - y \rangle| \\ &\leq \|x_n - x\|\|y\| + \|x_n\|\|y_n - y\|, \end{aligned}$$

de donde se sigue en resultado deseado. $\square$

Observamos que el resultado anterior es válido si sólo suponemos que $\mathbf{H}$ es un espacio con producto interior definido, y manteniendo la hipótesis de convergencia en $\mathbf{H}$.

Una propiedad geométrica importante y cuya demostración es sencilla, se enuncia a continuación.

Proposición 1.1.3 (Ley del paralelogramo). *Sea* $\mathbf{H}$ *un espacio de Hilbert. Entonces,*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2),$$

para cualesquiera elementos x, y *de* $\mathbf{H}$.

El teorema siguiente resalta la importancia de la igualdad anterior.

Teorema 1.1.1. *Si* $\mathbf{H}$ *es un espacio vectorial normado, entonces la norma* $\|\cdot\|$ *proviene de un producto interior si y sólo si dicha norma cumple la ley del paralelogramo.*

Una demostración de este hecho puede encontrarse en [5] o en [7].

Finalmente enunciamos la siguiente definición.

Definición 1.1.10 (Subespacio de Hilbert). *Sea* $(\mathbf{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *es espacio de Hilbert. Decimos que* $\mathbf{H}_1$ *es un* **subespacio de Hilbert** *de* $\mathbf{H}$ *si*

i) $\mathbf{H}_1 \subseteq \mathbf{H}$, *y*

ii) $(\mathbf{H}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *es espacio de Hilbert.*

Observamos que el producto interior en ambos espacios es el mismo.

1.2 Ortogonalidad y ortonormalidad

A continuación definimos el concepto de ortogonalidad de vectores y ortogonalidad de subconjuntos de vectores, cuya importancia será advertida páginas más adelante.

Definición 1.2.1 (Ortogonalidad y ortonormalidad). *Sea* $\mathbf{H}$ *un espacio de Hilbert. Si para dos elementos,* x*,* y *de* $\mathbf{H}$ *se tiene que* $\langle x, y\rangle = 0$*, decimos entonces que* x *es* **ortogonal** *a* y*, y usamos* $x \perp y$ *como notación. Ahora, si* $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{H}$ *es tal que* $\langle x, y\rangle = 0$ *(i.e.* $x \perp y$*) para todo* $x, y \in \mathbf{S}$*, decimos entonces que* $\mathbf{S}$ *es un* **subconjunto ortogonal**. *Y en el caso de que* $\|x\| = 1$ *para toda* $x \in \mathbf{S}$*, entonces* $\mathbf{S}$ *se llama* **subconjunto ortonormal**. *Finalmente, si* $\mathbf{S}_1 \subseteq \mathbf{H}$ *y* $\mathbf{S}_2 \subseteq \mathbf{H}$ *son dos subconjuntos tales que* $x \perp y$ *para todo* $x \in \mathbf{S}_1$*, y para todo* $y \in \mathbf{S}_2$*, entonces* $\mathbf{S}_1$ *es* **ortogonal** *a* $\mathbf{S}_2$ *(notación* $\mathbf{S}_1 \perp \mathbf{S}_2$*).*

Un resultado inmediato de esta definición y de la propiedad triangular de la norma $\|\cdot\|$ es el siguiente.

Proposición 1.2.1 (Teorema de Pitágoras). *Si* $\{x_1, ..., x_n\}$ *es un subconjunto ortogonal finito, entonces*

$$\|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

Algunos resultados sobre los espacios normados (y en particular los espacios de Hilbert), requieren la utilización de algunas propiedades referidas únicamente al campo escalar sobre el cual están definidos; y en ocasiones, si se trata de investigar propiedades propias a la norma o a un producto interior determinado, se requiere de ciertos resultados sobre espacios más particulares, como $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. De manera más concreta, enunciamos la siguiente propiedad.

Proposición 1.2.2. *Sean* p *y* q *un par de números reales mayores que* 1 *y tales que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Entonces para todo $a, b \in \mathbb{R}$*,*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

La demostración es sencilla y se omite.

Ahora propondremos la siguiente desigualdad, útil para un teorema que más adelante estudiaremos.

Proposición 1.2.3 (Desigualdad de Hölder). *Sean p y q un par de números reales mayores que 1 y tales que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Entonces, para un par de familias finitas de números complejos $\{x_i\}_{i=1}^n$ y $\{y_i\}_{i=1}^n$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demostración. Para facilitar la escritura definimos

$$\alpha = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{y} \qquad \beta = \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ahora, es claro que si $\alpha = 0$, ó $\beta = 0$ (esto implica que $x_i = 0$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$ ó $y_i = 0$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$, respectivamente) se tendrá que $\sum_{i=1}^n |x_i y_i| = 0$, de donde se sigue la propiedad deseada. Supongamos entonces que $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$ (es decir, existe k y existe j tales que $x_k \neq 0$ y $y_j \neq 0$). Definimos un par de nuevas familias $\{x_i'\}_{i=1}^n$ y $\{y_i'\}_{i=1}^n$, dadas por

$$x_i' = \frac{x_i}{\alpha} \qquad \text{y} \qquad y_i' = \frac{y_i}{\beta},$$

para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Es posible observar que

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i'|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 1 \qquad \text{y} \qquad \left(\sum_{i=1}^n |y_i'|^q\right)^{\frac{1}{q}} = 1,$$

de donde se sigue que

$$\sum_{i=1}^n |x_i'|^p = 1 \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^n |y_i'|^q = 1.$$

Por otra parte, si para cada $j \in \{1, 2, ..., n\}$, en la Proposición 1.2.2 hacemos $a = |x_j'|$ y $b = |y_j'|$, entonces tenemos que

$$|x_j' y_j'| \leq \frac{|x_j'|^p}{p} + \frac{|y_j'|^q}{q},$$

de ahí

$$\sum_{i=1}^n |x_i' y_i'| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Pero
$$\sum_{i=1}^{n} |x_i' y_i'| = \frac{1}{\alpha\beta} \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|,$$
entonces, finalmente,
$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \alpha\beta.$$

$\square$

Teorema 1.2.1 (Desigualdad de Bessel). *Sea* $\mathbf{H}$ *un espacio de Hilbert y* Λ *un subconjunto ortonormal de vectores en* $\mathbf{H}$. *Entonces*

1) Si $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ *es una familia arbitraria de elementos de* Λ, *entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle y, x_i \rangle|^2 \leq \|y\|^2$$

para toda $y \in \mathbf{H}$. *Y si la familia de vectores* $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \Lambda$ *es a lo sumo numerable, entonces*
$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle y, x_i \rangle|^2 \leq \|y\|^2$$
para toda $y \in \mathbf{H}$.

2) Para cada $y \in \mathbf{H}$, *el conjunto* $\Im_y = \{x \in \Lambda \mid \langle y, x \rangle \neq 0\}$, *es a lo sumo numerable.*

3) Para toda $z, y \in \mathbf{H}$,

$$\sum_{x \in \Lambda} |\langle y, x \rangle \overline{\langle z, x \rangle}| \leq \|x\| \|z\|.$$

Demostración. 1). Sea $y \in \mathbf{H}$, y $\{x_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \Lambda$ una familia finita. Escogemos de manera arbitraria n escalares en $\mathbb{F}$ $(= \mathbb{R}$ o $\mathbb{C})$, digamos $a_1, ..., a_n$.

Tenemos que

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \|y-\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\|^2\\
&= \langle y-\sum_{i=1}^{n}a_ix_i, y-\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\rangle\\
&= \|y\|^2-\sum_{j=1}^{n}\overline{a_j}\langle y,x_j\rangle-\sum_{i=1}^{n}a_i\langle x_i,y\rangle+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i\overline{a_j}\langle x_i,x_j\rangle\\
&= \|y\|^2-\sum_{j=1}^{n}\overline{a_j}\langle y,x_j\rangle-\sum_{i=1}^{n}a_i\langle x_i,y\rangle+\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\langle x_i,x_i\rangle+\sum_{j\neq i}a_i\overline{a_j}\langle x_i,x_j\rangle\\
&= \|y\|^2+\sum_{i=1}^{n}(-\overline{a_i}\langle y,x_i\rangle-a_i\langle x_i,y\rangle+|a_i|^2)\ \ (\text{pues } \langle x_i,x_j\rangle=\delta_{ij})\\
&= \|y\|^2+\sum_{i=1}^{n}(-|\langle y,x_i\rangle|^2+|a_j-\langle y,x_i\rangle|^2)\\
&= \|y\|^2-\sum_{i=1}^{n}|\langle y,x_i\rangle|^2+\sum_{i=1}^{n}|a_j-\langle y,x_i\rangle|^2,
\end{aligned}
$$

en particular, si $a_i=\langle y,x_i\rangle$, entonces

$$0\leq \|y\|^2-\sum_{i=1}^{n}|\langle y,x_i\rangle|^2.$$

Ahora supongamos que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Lambda$. Si definimos $t_n=\sum_{k=1}^{n}|\langle y,x_k\rangle|^2$, entonces $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una suscesión real creciente, y por lo anterior se tiene que $t_n\leq\|y\|^2$ para toda $n\in\mathbb{N}$, i.e. la sucesión es creciente y acotada, y por lo tanto $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, y además

$$\lim_{n\to\infty}t_n=\sum_{i=1}^{\infty}|\langle y,x_i\rangle|^2\leq\|y\|^2.$$

2). Sea y un elemento de $\mathbf{H}$. Consideremos la familia de subconjuntos de la forma $\Im_n=\{x\in\Lambda \mid \langle y,x\rangle\geq 1/n\}$, con $n\in\mathbb{N}$. Si existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $\Im_k$ es infinito, entonces existe al menos una familia numerable $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ de elementos en $\Im_k$; de este modo, para la sucesión $t_n=\sum_{j=1}^{n}|\langle y,x_j\rangle|^2$ se tendrá que

$$n\frac{1}{k^2}\leq\sum_{j=1}^{n}|\langle y,x_j\rangle|^2=t_n,$$

pues $\dfrac{1}{k}\leq|\langle y,x_j\rangle|$ para toda $i=1,...,n$. Y entonces $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ es divergente. Lo cual resulta contradictorio con el punto *1)* de esta demostración. Luego, se sigue que $\Im_n$ es finito para toda $n\in\mathbb{N}$.

Ahora, es claro que $\Im_y = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \Im_n$, i.e. $\Im$ es expresable como una unión numerable de subconjuntos de cardinalidad finita, por ello $\Im$ es a lo sumo numerable.

3). Sean y y z un par de elementos cualesquiera en $\mathbf{H}$, consideremos los subconjuntos $\Im_y$ y $\Im_z$. Tomamos x en Λ tal que $\langle y, x\rangle = 0$ y $\langle y, x\rangle = 0$, entonces $|\langle y, x\rangle\overline{\langle z, x\rangle}| = 0$. Se sigue que

$$\overline{\Im} = \{x \in \Lambda : |\langle y, x\rangle\overline{\langle z, x\rangle}| \neq 0\} \subseteq \Im_y \cup \Im_z.$$

Pero, por la parte segunda, $\Im_y \cup \Im_z$ es a lo sumo numerable, por ende $\overline{\Im}$ es a lo sumo numerable. Digamos que $\overline{\Im} = \{x_1, x_2, ...\}$ (obsérvese como esta familia puede ser finita). Entonces,

$$\sum_{x\in\Lambda} |\langle y, x\rangle\overline{\langle z, x\rangle}| = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle y, x_i\rangle\overline{\langle z, x_i\rangle}|.$$

Ahora bien, por la desigualdad de Hölder (Proposición 1.2.3) y por la parte primera de esta demostración,

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle y, x_i\rangle\overline{\langle z, x_i\rangle}| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\langle y, x_i\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\langle z, x_i\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|y\|\|z\|,$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. De esta expresión se deduce la desigualdad deseada. □

Observación 1.2.1. *De la anterior demostración, la desigualdad de Bessel puede también enunciarse de la siguiente manera. Para todo $y \in \mathbf{X}$,*

$$\sum_{x\in\Lambda} |\langle y, x\rangle|^2 \leq \|y\|^2.$$

Una colección de vectores no es necesariamente un subespacio vectorial, pero podemos preguntarnos si es posible encontrar algún subespacio mínimo que contenga dicha colección de vectores como subconjunto. La respuesta es afirmativa.

Proposición 1.2.4. *Sea $\mathbf{U}$ una colección de vectores en el espacio vectorial $\mathbf{H}$. Entonces existe un único subespacio $\mathbf{B}$ tal que*

1) $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{B}$.

2) Si existe **B'** $\subseteq$ **H** *subespacio tal que* **U** $\subseteq$ **B'***, entonces* **B** $\subseteq$ **B'**.

Demostración. Sea $\mathbf{U}$ un subconjunto del espacio vectorial $\mathbf{H}$. Existencia. Sea $\mathcal{D} = \{\mathbf{D} \subseteq \mathbf{H} \mid \mathbf{D}$ es subespacio vectorial y $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{D}\}$. Consideremos el subconjunto $\mathbf{B}{=}\bigcap_{\mathbf{D}\in\mathcal{D}}\mathbf{D}$. Se tiene entonces que $\mathbf{B}$ es un subespacio vectorial y claramente $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{B}$. Luego $\mathbf{B}$ verifica la propiedad 1). Por otro lado, si suponemos que **B'** es un subespacio tal que $\mathbf{U} \subseteq$ **B'**, entonces $\mathbf{U} \subseteq \mathcal{D}$. Por tanto $\bigcap_{\mathbf{D}\in\mathcal{D}} \subseteq$ **B'**, es decir, $\mathbf{B} \subseteq$ **B'**.

Unicidad. Supongamos que existe un subespacio $\mathbf{C}$ tal que verifica las propiedades especificadas en la proposición. Entonces como $\mathbf{B}$ también verifica dichas propiedades, se tiene que $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{B} \subseteq \mathbf{C}$. Con lo cual **B**=**C**. □

Definición 1.2.2 (Espacio generado). *El subespacio encontrado en la proposición anterior se denomina* **espacio generado** *por* $\mathbf{U}$ *y se denota por* $\mathbf{S}[\mathbf{U}]$.

Observación 1.2.2.

$$\mathbf{S}[\mathbf{U}] = \left\{ \sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} \alpha_{\mathbf{i}}\mathbf{u}_{\mathbf{i}} \ : \ \alpha_{\mathbf{i}} \in \mathbb{F},\ \mathbf{u}_{\mathbf{i}} \in \mathbf{U}\ \mathbf{i} \in \mathbf{I},\ \mathbf{I}\ \textit{subconjunto de índices} \right\}.$$

Según la proposición anterior, podemos deducir que para un espacio de Hilbert $\mathbf{H}$ (y en general para cualquier espacio vectorial), con una base $\mathbf{B}$ de vectores se tendrá que $\mathbf{S}[\mathbf{B}]=\mathbf{H}$. Ahora, también es fácil deducir que todo subconjunto ortonormal de vectores diferentes de cero dentro de un espacio de Hilbert, es también un subconjunto linealmente independiente. Podemos entonces exponer un resultado que nos ayudará a encontrar una base ortonormal para los espacios de Hilbert de dimensión finita.

Teorema 1.2.2 (Proceso de Gram-Schmidt). *Sea* $\mathbf{H}$ *un espacio de Hilbert y sea* $\mathbf{Y} = \{y_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ *un subconjunto de vectores linealmente independientes. Consideremos además las subfamilias* $\mathbf{Y}_n = \{y_1, ..., y_n\}$ *con* $n \in \mathbb{N}$*. Entonces, para toda* $n \in \mathbb{N}$ *existe un subconjunto finito ortonormal de vectores* $\mathbf{Z}_n = \{z_1, ..., z_n\}$*, tal que*

$$\mathbf{S}[\mathbf{Y}_n] = \mathbf{S}[\mathbf{Z}_n].$$

Demostración. Inducción sobre n.

I) Sea $n = 1$. Entonces $\mathbf{Y}_1 = \{y_1\}$ y dado que y_1 es distinto de cero, es posible definir el nuevo vector $z_1 = \dfrac{y_1}{\|y_1\|}$, y considerar $\mathbf{Z}_1 = \{z_1\}$ como una familia ortonormal.

Sea $\alpha \in \mathbb{F}$. Tenemos que

$$\alpha y_1 = \alpha\|y_1\|\frac{y_1}{\|y_1\|} = \alpha\|y_1\|z_1 = \beta z_1,$$

con $\beta = \alpha\|y_1\| \in \mathbb{F}$. Por tanto $\mathbf{S}[\mathbf{Y}_1] = \mathbf{S}[\mathbf{Z}_1]$.

II) Sea $1 < n$. Para la subfamilia $\mathbf{Y}_{n-1} = \{y_1, ..., y_{n-1}\}$ supongamos que existe un subconjunto ortonormal de vectores $\mathbf{Z}_{n-1} = \{z_1, ..., z_{n-1}\}$ tal que

$\mathbf{S}[\mathbf{Y}_{n-1}] = \mathbf{S}[\mathbf{Z}_{n-1}]$. Consideremos la subfamilia $\mathbf{Y}_n = \{y_1, ..., y_n\} = \mathbf{Y}_{n-1} \cup \{y_n\}$ y el vector $z'_n = y_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle y_n, z_i \rangle z_i$. Entonces para cada $z_j \in \mathbf{Z}_{n-1}$ tenemos

$$\begin{aligned} \langle z'_n, z_j \rangle &= \langle y_n, z_j \rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \langle y_n, z_i \rangle \langle z_i, z_j, \rangle \\ &= \langle y_n, z_j \rangle - \langle y_n, z_j \rangle \|z_j\|^2 \\ &= \langle y_n, z_j \rangle - \langle y_n, z_j \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

es decir z'_n es ortogonal a la familia $\mathbf{Z}_{n-1}$. Y por otra parte, si $\|z'_n\| = 0$, entonces $y_n = \sum_{i=1}^{n-1} \langle y_n, z_i \rangle z_i$, por tanto $y_n \in \mathbf{S}[\mathbf{Z}_{n-1}]$. Ahora, por hipótesis de inducción, $y_n \in \mathbf{S}[\mathbf{Y}_{n-1}]$, luego y_n puede expresarse como combinación lineal de $y_1, ..., y_n$, lo cual contradice nuestra hipótesis de independencia. Se tiene, de tal suerte, que $\|z'_n\| > 0$. Sea ahora $z_n = \dfrac{z'_n}{\|z'_n\|}$. Entonces $\mathbf{Z}_n = \mathbf{Z}_{n-1} \cup \{z_n\}$ es un subconjunto ortonormal de vectores. Por otra parte, si $\alpha_i \in \mathbb{F}$ para toda $i = 1, ..., n$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i y_i + \alpha_n y_n \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i y_i + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \langle y_n, z_i \rangle z_i + \|z'_n\| z_n \right). \end{aligned}$$

Por hipótesis existe $\{\beta'_i, ..., \beta'_{n-1}\} \subseteq \mathbb{F}$ tal que $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i y_i = \sum_{i=1}^{n-1} \beta'_i z_i$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i &= \sum_{i=1}^{n-1} \beta'_i z_i + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \langle y_n, z_i \rangle z_i + \|z'_n\| z_n \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (\beta'_i + \langle y_n, z_i \rangle) z_i + \|z'_n\| z_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} \beta_i z_i, \end{aligned}$$

donde $\beta_j = \beta'_j + \langle y_n, z_i \rangle$ para toda $j = 1, ..., n-1$ y $\beta_n = \|z_n\|$. De todo lo anterior se sigue que $\mathbf{S}[\mathbf{Y}_n] = \mathbf{S}[\mathbf{Z}_n]$. $\square$

Definición 1.2.3 (Complemento ortogonal). *Sea* $\mathbf{H}$ *un espacio de Hilbert y* $\mathbf{S}$ *una subconjunto de* $\mathbf{H}$. *La colección de vectores*

$$\mathbf{S}^{\perp} = \{y \in \mathbf{H} \mid \; y \perp x \quad \textit{para toda } x \in \mathbf{S}\}$$

es denominada **complemento ortogonal** *del subconjunto* $\mathbf{S}$. *Evidentemente* $\mathbf{S}\perp\mathbf{S}^{\perp}$.

De esta definición es sencillo probar el siguiente enunciado.

Proposición 1.2.5. *Sea* $\mathbf{H}$ *un espacio de Hilbert. Si* $\mathbf{S}\subseteq\mathbf{H}$, *entonces* $\mathbf{S}^{\perp}$ *es un subespacio vectorial cerrado de* $\mathbf{H}$.

Definición 1.2.4 (Descomposición interna). *Sea* $\mathbf{H}$ *un espacio de Hilbert (o un espacio vectorial arbitrario). Entonces*

i) *Una colección finita* $\{\mathbf{M}_i\}_{i=1}^{n}$ *de subespacios vectoriales de* $\mathbf{H}$ *es* **linealmente independiente** *si para todo* $i=1,....n$ *se verifica*

$$\mathbf{M}_i\bigcap(\mathbf{M}_1+\cdots+\mathbf{M}_{i-1}+\mathbf{M}_{i+1}+\cdots+\mathbf{M}_n)=\{0\},$$

donde $\mathbf{M}_1+\cdots+\mathbf{M}_{i-1}+\mathbf{M}_{i+1}+\cdots+\mathbf{M}_n$ *denota el subconjunto cuyos elementos tienen la forma* $x_1+x_2+\cdots+x_{i-1}+x_{i+1}+\cdots+x_n$, *con* $x_j\in\mathbf{M}_j$ *para toda* $j\in\{1,2,...,i-1,i+1,...,n\}$.

ii) *Si* $\{\mathbf{M}_i\}_{i=1}^{n}$ *es una familia de subespacios vectoriales de* $\mathbf{H}$ *linealmente independiente, tal que* $\mathbf{H}=\mathbf{M}_1+\cdots+\mathbf{M}_n$, *entonces decimos que dicha familia forma una* **descomposición interna en suma directa** *para* $\mathbf{H}$. *La notación usada es ahora*

$$\mathbf{H}=\mathbf{M}_1\oplus\cdots\oplus\mathbf{M}_n.$$

Como una aplicación del Proceso de Gram-Schmidt (Teorema 1.2.2) presentamos el siguiente resultado

Teorema 1.2.3. *Sea* $\mathbf{H}$ *un espacio de Hilbert y* $\mathbf{M}$ *un subespacio de* $\mathbf{H}$ *de dimensión finita. Entonces* $\{\mathbf{M},\mathbf{M}^{\perp}\}$ *forma una descomposición interna en suma directa para* $\mathbf{H}$, *esto es,* $\mathbf{H}=\mathbf{M}\oplus\mathbf{M}^{\perp}$.

Demostración. Primeramente, deberemos mostrar que $\mathbf{M}\cap\mathbf{M}^{\perp}=\{0\}$. Sea $x\in\mathbf{M}\cap\mathbf{M}^{\perp}$, entonces $\langle x,x\rangle=0$ y por propiedades de producto interior, $x=0$. Ahora, es claro que si la dimensión de $\mathbf{M}$ es finita, digamos n, podemos construir una base finita $\{x_1,...,x_n\}$ de vectores ortonormales para $\mathbf{M}$, con lo cual

$$w=\sum_{i=1}^{n}\langle z,x_i\rangle x_i\in\mathbf{M},$$

para cualquier vector $z\in\mathbf{H}$. Entonces, si consideremos el vector

$$y=z-w=z-\sum_{i=1}^{n}\langle z,x_i\rangle x_i,$$

tendremos que para cada $x_j \in \{x_1, ..., x_n\}$,

$$\begin{aligned}
\langle y, x_j \rangle &= \langle z, x_j \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle z, x_i \rangle \langle x_i, x_j \rangle \\
&= \langle z, x_j \rangle - \langle z, x_j \rangle \langle x_j, x_j \rangle \\
&= \langle z, x_j \rangle - \langle z, x_j \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Esto significa que y es ortogonal a la base de $\mathbf{M}$, entonces y es ortogonal a $\mathbf{M}$ mismo. De ahí que $y \in \mathbf{M}^{\perp}$. Luego, z tiene la representación $z = w + y$, con $w \in \mathbf{M}$ y $y \in \mathbf{M}^{\perp}$.

Lo anterior prueba que $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{M} \oplus \mathbf{M}^{\perp}$, pero es claro que la contensión contraria es válida. De esta manera $\mathbf{H} = \mathbf{M} \oplus \mathbf{M}^{\perp}$. $\square$

1.3 Proyecciones

Un espacio de Hilbert es un espacio normado completo (bajo la norma inducida por el producto interior), entonces debemos tener en cuenta que aquí se verifican todos los conceptos y propiedades topológicas de los espacios normados; entonces no debe caber duda alguna acerca del sentido que deba dárseles al hacer uso de éstas nociones a lo largo de nuestra exposición.

Teorema 1.3.1 (Proyección). *Sea* $\mathbf{S}$ *un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert* $\mathbf{H}$. *Para cada* $x \in \mathbf{H}$ *existe un único elemento* $y_0 \in \mathbf{S}$ *tal que*

$$\|x - y_0\| = \inf\{\|x - y\| : y \in \mathbf{S}\}.$$

El vector $y_0 \in \mathbf{S}$ *se conoce como la proyección de* x *sobre el subespacio* $\mathbf{S}$.

Demostración. Sea $x \in \mathbf{H}$.

Existencia. Sea $\delta = \inf\{\|x - y\| : y \in \mathbf{S}\}$. Es posible encontrar una sucesión $\{y_n\}_{n \geq 1}$ contenida precisamente en $\mathbf{S}$, tal que $\|x - y_n\| \to \delta$ siempre que $n \to \infty$. Ahora bien, por la ley del paralelogramo (Proposición 1.1.3), para toda $u, v \in \mathbf{H}$,

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\| = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2), \tag{1.3}$$

entonces, si $u = y_n - x$ y $v = y_m - x$, para un par $n \geq 1$ y $m \geq 1$, se tendrá

$$\|y_n + y_m - 2x\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 = 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2,$$

luego,

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\|\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x\|^2.$$

Pero $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in \mathbf{S}$, entonces $\|\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x\|^2 \geq \delta^2$. Por lo tanto

$$0 \leq \|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\delta^2,$$

y si $n, m \to \infty$ entonces $\|y_n - y_m\|^2 \to 0$. Con lo cual $\|y_n - y_m\| \to 0$. De tal manera que la sucesión $\{y_n\}_{n\geq 1}$ es de Cauchy. Entonces, dado que $\mathbf{H}$ es completo, existe un elemento y_0 en $\mathbf{H}$ tal que $y_n \to y_0$ siempre que $n \to \infty$, y dado que $\mathbf{S}$ es cerrado (i.e. todo punto límite de $\mathbf{S}$ está en $\mathbf{S}$ mismo), tenemos que $y_0 \in \mathbf{S}$. Además, claramente $\delta = \|x - y_0\|$.

Unicidad. Sea ahora y_0' en $\mathbf{S}$ tal que $\delta = \|x - y_0'\|$. De nueva cuenta, sustituyendo en (1.3), $u = y_0' - x$ y $v = y_0 - x$, tenemos que

$$0 \leq \|y_0 - y_0'\| = 4\delta^2 - 4\|x - \frac{1}{2}(y_0 + y_0')\|^2 \leq 0,$$

entonces $\|y_0 - y_0'\| = 0$, con lo cual $y_0 = y_0'$. □

Sobre un subespacio $\mathbf{S}$ podemos denotar como $P_{\mathbf{S}}(x)$ la proyección de x sobre $\mathbf{S}$, para cada x en el espacio $\mathbf{H}$. Definiendo entonces el operador proyección $P_{\mathbf{S}} : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{S}$, tal que $x \longmapsto P_{\mathbf{S}}(x)$ para toda $x \in \mathbf{H}$.

Lema 1.3.1. *Sea $\mathbf{S}$ un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $\mathbf{H}$. Sea $y \in \mathbf{S}$ y $x \in \mathbf{H}$, entonces $y = P_{\mathbf{S}}(x)$ si y solo si $(x - y) \perp \mathbf{S}$.*

Demostración. Primero supongamos que $y = P_{\mathbf{S}}(x)$. Entonces $\|x - y\| = \inf\{\|x - z\| : z \in \mathbf{S}\}$. Sea $z \in \mathbf{S}$ y $c \in \mathbb{C}$ entonces $y + cz \in \mathbf{S}$. Ello implica que

$$\|x - y\|^2 \leq \|x - y + cz\|^2.$$

Pero

$$\|x - y + cz\|^2 \leq \|x - y\|^2 + |c|^2\|z\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle x - y, cz\rangle,$$

luego

$$|c|^2\|z\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle x - y, cz\rangle \geq 0.$$

En particular, si $c = b\langle x - y, z\rangle$, con $b \in \mathbb{R}$, entonces $|c|^2 = b^2|\langle x - y, z\rangle|^2$, y además

$$\begin{aligned}
\langle x - y, cz\rangle &= \overline{\langle cz, x - y\rangle} = \overline{c\langle z, x - y\rangle} \\
&= \overline{b\langle x - y, z\rangle\langle z, x - y\rangle} \\
&= b\overline{\langle x - y, z\rangle}\langle x - y, z\rangle \\
&= b|\langle x - y, z\rangle|^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $2\mathrm{Re}\langle x - y, cz\rangle = 2b|\langle x - y, z\rangle|^2$. De tal suerte que

$$|\langle x - y, z\rangle|^2(b^2\|z\|^2 - 2b) \geq 0, \tag{1.4}$$

para toda $b \in \mathbb{R}$.

Tenemos ahora dos casos.

I) Supongamos que $\|z\| > 0$ (es decir $z \neq 0$). Sea entonces $b > 0$ tal que $0 < b\|z\| < 2$, tenemos,

$$\begin{aligned} b^2\|z\|^2 - 2b &< 0 \\ |\langle x-y, z\rangle|^2(b^2\|z\|^2 - 2b) &\leq 0. \end{aligned}$$

Y por (1.4),

$$|\langle x-y, z\rangle|^2(b^2\|z\|^2 - 2b) = 0,$$

luego

$$|\langle x-y, z\rangle| = 0.$$

Entonces $\langle x-y, z\rangle = 0$, es decir $(x-y) \perp z$.

II) Ahora supongamos que $\|z\| = 0$ (es decir $z = 0$). De forma inmediata se tiene que $(x-y) \perp z$.

Por la parte I) y la parte II), $(x-y) \perp z \quad$ para toda $z \in \mathbf{S}$. Entonces $(x-y) \perp \mathbf{S}$.

Inversamente, supongamos que $(x-y) \perp \mathbf{S}$. Sea $z \in \mathbf{S}$. Por hipótesis $\langle x-y, z\rangle = 0$, por lo tanto $\mathrm{Re}\langle x-y, z\rangle = 0$. Luego

$$\begin{aligned} \|x-y\|^2 &\leq \|x-y\|^2 + \|z-y\|^2 \\ &= \|x-y\|^2 + \|z-y\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle x-y, z\rangle \\ &= \|x-y-(z-y)\|^2 \\ &= \|x-z\|^2, \end{aligned}$$

es decir,

$$\|x-y\|^2 \leq \|x-z\|^2,$$

entonces,

$$\|x-y\| \leq \|x-z\|.$$

Ello implica que $\|x-y\| \leq \inf\{\|x-z\| : z \in \mathbf{S}\}$. Pero como $y \in \mathbf{S}$ entonces se tiene en realidad la igualdad deseada. $\square$

De este resultado se desprende de inmediato el siguiente lema.

Lema 1.3.2. *Si* $\mathbf{S}$ *es un subespacio cerrado del espacio de Hilbert* $\mathbf{H}$ *entonces* $(x - P_{\mathbf{S}}(x)) \perp \mathbf{S} \quad$ *para toda* $x \in \mathbf{H}$.

El hecho de que $(x - P_{\mathbf{S}}(x)) \perp \mathbf{S} \quad$ para toda $x \in \mathbf{H}$ es quivalente al hecho de que $(x - P_{\mathbf{S}}(x)) \in \mathbf{S}^{\perp}$ para toda $x \in \mathbf{H}$.

Teorema 1.3.2. *Si* $\mathbf{S}$ *es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert* $\mathbf{H}$, *entonces para toda* $x \in \mathbf{H}$, *existe una única representación* $x = y + z$, *donde* $y \in \mathbf{S}$ *y* $z \in \mathbf{S}^{\perp}$. *Esta representación única está dada por* $y = P_{\mathbf{S}}(x)$ *y* $z = x - y$. *En otras palabras,* $\mathbf{H} = \mathbf{S} \oplus \mathbf{S}^{\perp}$.

La demostración se sigue inmediatamente del propio Teorema 1.2.3 y de los lemas anteriores.

Finalmente, presentamos un resultado que nos será de gran utilidad en la la sección próxima.

Corolario 1.3.1. *Si* $\mathbf{S}$ *es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert* $\mathbf{H}$*, entonces* $(\mathbf{S}^{\perp})^{\perp} = \mathbf{S}^{\perp\perp} = \mathbf{S}$.

Demostración. Es claro que $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{S}^{\perp\perp}$. Ahora, si $x \in \mathbf{S}^{\perp\perp}$, entonces, según el teorema anterior, existe $y \in \mathbf{S}$ ($y = P_{\mathbf{S}}(z)$) y existe $z \in \mathbf{S}^{\perp}$ tal que $z = x - y$. Entonces notamos que $z \in \mathbf{S}^{\perp\perp}$, pues $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{S}^{\perp\perp}$ y $\mathbf{S}^{\perp\perp}$ es un subespacio de $\mathbf{H}$. De modo que $z = 0$ (dado que $z \in \mathbf{S}^{\perp} \cap \mathbf{S}^{\perp\perp} = \{0\}$), por tanto $x = y \in \mathbf{S}$. Luego $\mathbf{S}^{\perp\perp} \subseteq \mathbf{S}^{\perp}$. □

1.4 Teorema de representación de Riesz

Los conceptos de ortogonalidad y ortonormalidad, son fundamentales para introducir algunas propiedades, como el *teorema de representación de Riesz*, el cual es objeto de estudio en esta sección.

Definición 1.4.1. *Si* $\mathbf{H}$ *es un espacio de Hilbert sobre el campo escalar* $\mathbb{F}$ *(el campo real o complejo), entonces el mapeo* $f : \mathbf{H} \to \mathbb{F}$ *lo denominamos* **funcional** *del espacio de Hilbert* $\mathbf{H}$*. Una funcional* f *es* **lineal** *si* $f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$*. Es* **continua en x**$\in$ $\mathbf{H}$ *si para toda* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta_x(\epsilon) > 0$ *tal que si* $\|x - x'\| < \delta_x(\epsilon)$ *entonces* $|f(x) - f(x')| < \epsilon$*; y decimos que* f *es* **continua** *si* f *es continua en cada punto* x *de* $\mathbf{H}$*.*

Teorema 1.4.1 (Teorema de representación de Riesz). *Sea* $\mathbf{H}$ *un espacio de Hilbert y* f *una funcional lineal continua sobre* $\mathbf{H}$*. Entonces existe un único vector* $y \in \mathbf{H}$ *tal que* $f(x) = \langle x, y \rangle$*, para toda* $x \in \mathbf{H}$*.*

Demostración. El subconjunto

$$\mathbf{M} = \{x \in H \mid f(x) = 0\} \subseteq \mathbf{H}$$

es un subespacio cerrado de $\mathbf{H}$. La verificación de este hecho es inmediata de la continuidad de f.

Si $\mathbf{M}$=$\mathbf{H}$, entonces $f = 0$, con lo cual, si denominamos $y = 0$, se tendrá

$$f(x) = \langle x, 0 \rangle = 0,$$

para toda $x \in \mathbf{H}$, y es claro que y es único.

Ahora bien, si $\mathbf{M} \neq \mathbf{H}$, entonces existe $z \in \mathbf{M}^{\perp}$ tal que $z \neq 0$, de lo contrario, es decir, si $\mathbf{M}^{\perp} = \{0\}$, entonces dado que $\mathbf{M}$ es cerrado

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^{\perp\perp} = \{0\}^{\perp} = \mathbf{H},$$

lo cual es imposible.

Definimos el número $\alpha = \dfrac{\overline{f(z)}}{\|f(z)\|^2} \in \mathbb{C}$, y consideramos $y = \alpha z \in \mathbf{M}^{\perp}$. Entonces, para $x \in \mathbf{M}$, tenemos

$$\langle x, y\rangle = \frac{f(z)}{\|f(z)\|^2}\langle x, z\rangle = 0 = f(x).$$

Tomemos ahora $x \in \mathbf{M}^{\perp}$, tenemos que

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(z)}z\right) = f(x) - f(x) = 0,$$

por tanto $x - \dfrac{f(x)}{f(z)}z \in \mathbf{M}$, entonces

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(z)}z\right) = \langle x - \frac{f(x)}{f(z)}z, y\rangle = 0,$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle &= \langle x - \frac{f(x)}{f(z)}z, y\rangle + \langle \frac{f(x)}{f(z)}z, y\rangle \\
&= f\left(x - \frac{f(x)}{f(z)}z\right) + \frac{f(x)}{f(z)} \cdot \frac{f(z)}{\|f(z)\|^2}\langle z, z\rangle \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Ahora, si existe y_1 con la misma propiedad que y, entonces $f(y) = \langle y, y_1\rangle = \langle y, y\rangle$; y por otro lado, $f(y_1) = \langle y_1, y\rangle = \langle y_1, y_1\rangle$. Luego

$$\begin{aligned}
\langle y_1 - y, y_1 - y\rangle &= \langle y_1, y_1\rangle - \langle y_1, y\rangle + \langle y, y_1\rangle - \langle y, y\rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

por tanto $y = y_1$. □

Definición 1.4.2. *Una funcional f sobre* $\mathbf{H}$ *se dice que es* **acotada** *si existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M\|x\|$ para toda $x \in \mathbf{H}$.*

Teorema 1.4.2. *Una funcional lineal f es continua sobre* $\mathbf{H}$*, si y sólo si, es acotada.*

Una prueba a este hecho puede encontrarse en [7].

Teorema 1.4.3. *Sea* $\mathbf{H}$ *un espacio de Hilbert y $f : \mathbf{H} \to \mathbb{F}$ una funcional lineal. Entonces f es continua si y sólo si existe $y \in \mathbf{X}$ único tal que $f(x) = \langle x, y\rangle$, para toda $y \in \mathbf{X}$*

Demostración. La condición necesaria es precisamente el *teorema de representación de Riesz*. Ahora, si para la funcional lineal f se tiene que $f(x) = \langle x, y \rangle$ para alguna $y \in \mathbf{X}$, entonces

$$|f(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

por tanto f es acotada, y con ello continua. $\square$

Finalmente, el concepto de funcional puede llevarse a un concepto más amplio.

Definición 1.4.3 (Operador). *Sean* $\mathbf{H}_1$ *y* $\mathbf{H}_2$ *dos espacios de Hilbert (o simplemente espacios vectoriales) sobre el mismo campo* $\mathbb{F}$. *Una transformación* $T : \mathbf{H}_1 \to \mathbf{H}_2$ *se denomina* **operador** *del espacio* $\mathbf{H}_1$ *a* $\mathbf{H}_2$. *Además,*

i) *Decimos que el operador* T *es* **lineal** *si* $T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y)$.

ii) *El operador* T *es* **acotado** *si existe* $M > 0$ *tal que* $\|T(x)\|_2 \leq M\|x\|_1$, *para toda* $x \in \mathbf{H}_1$, *donde* $\| \cdot \|_i$ *es la norma del espacio* $\mathbf{H}_i$, $i = 1, 2$.

iii) *Si* $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H} = \mathbf{H}_2$ *entonces decimos que* T *es* **positivo** *si* $\langle Tx, x \rangle \geq 0$, *para toda* $x \in \mathbf{H}$.

iv) *Y decimos que es* **simétrico** *si* $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$, *para todo* $x, y \in \mathbf{H}$.

1.5 Los espacios de funciones L_p. El espacio de Hilbert L_2

Con la finalidad de ilustrar la utilidad de los anteriores resultados, en esta sección desarrollaremos de manera muy breve un ejemplo particular de espacio de Hilbert.

Primeramente consideremos un espacio de medida (X, S, μ) y un número $p \geq 1$ (aunque se puede elegir un número mayor que cero, nosotros restringiremos nuestro estudio a la elección de dicho número p). Definimos el espacio $L_p(X, S, \mu)$, a veces simplemente denotado por L_p, como la familia de funciones $f : X \to \mathbb{C}$, S-medibles, tal que $|f|^p$ es μ-integrable. En símbolos,

$$L_p(X, S, \mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{C} \quad : \quad \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}.$$

Es muy fácil verificar que los espacios L_p son espacios lineales bajo las operaciones de suma de vectores y producto escalar habituales. Para ello basta tener presente que para toda $f, g \in L_p$: $\quad |f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p$. Y por otra parte también tenemos que para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ y para toda $f \in L_p$,

$$\int_X |\alpha f|^p d\mu = |\alpha|^p \int_X |f|^p d\mu < \infty,$$

por lo tanto $\alpha f \in L_p$.

Ahora bien, la función $\|\cdot\|_p : L_p \to \mathbb{R}^+$ dada por

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

determina una seminorma para el espacio L_p, siempre que $p \geq 1$. En efecto, es claro que para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ y para toda $f \in L_p$

$$\|\alpha f\|_p = |\alpha|\|f\|_p.$$

Ahora bien, la desigualdad triangular, en este contexto, es conocida como desigualdad de Minkowski, y su prueba requiere de un resultado conocido como desigualdad de Hölder, por identificarse como una generalización del resultado expuesto en la Proposición 1.2.3.

Teorema 1.5.1 (Desigualdad de Hölder). *Sea p y q un par de números pertenecientes al intervalo $(1, \infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f \in L_p$ y $g \in L_q$, entonces,*

i) $fg \in L_1$, *y*

ii) $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Demostración. La desigualdad es inmediata si $\|f\|_p = 0$ o $\|g\|_q = 0$, pues tendríamos entonces que $\int_X |f|^p d\mu = 0$ o $\int_X |g|^q d\mu = 0$, de tal suerte que $f = 0$ casi seguramente con respecto a la medida μ (lo cual se denota c.s. $[\mu]$) esto es, $\mu(\{x \in X \mid f(x) = 0\}) = 1$, o $g = 0$ c.s. $[\mu]$, así entonces $fg = 0$ c.s. $[\mu]$ y $0 = \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q = 0$. Supongamos pues que $\|f\|_p \neq 0$ y $\|g\|_q \neq 0$, para así poder definir un par de números reales, $a = \dfrac{|f|}{\|f\|_p}$ y $b = \dfrac{|g|}{\|g\|_q}$. Entonces, por la Proposición 1.2.2,

$$\frac{|fg|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{|f|^p}{p\|f\|_p} + \frac{|g|^q}{q\|g\|_q}.$$

Integrando ambos lados de la desigualdad anterior

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} = \frac{\int_X |fg| d\mu}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

de donde se sigue

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Lo cual demuestra además que $fg \in L_1$. $\square$

Teorema 1.5.2 (Desigualdad de Minkowski). *Si $f, g \in L_p$ con $p \geq 1$, entonces,*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Demostración. Observamos que si $\|f+g\|_p = 0$ la desigualdad se sigue de forma inmediata. Consideremos entonces el caso en que $\|f+g\|_p > 0$. En primer lugar, para $p \geq 1$, tenemos que

$$|f+g|^p = |f+g|^{p-1}|f+g| \leq |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}. \tag{1.5}$$

Supongamos que $p = 1$, entonces sustituyendo en (1.5) e integrando ambas partes de la desigualdad,

$$\|f+g\|_1 = \int_X |f+g| d\mu \leq \int_X |f| d\mu + \int_X |g| d\mu = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

Ahora sea $p > 1$. Entonces escogemos un número $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, así

$$\int_X (|f+g|^{p-1})^q d\mu = \int_X |f+g|^p d\mu < \infty,$$

por lo tanto $|f+g|^{p-1} \in L_q$. Entonces, según la desigualdad de Hölder, $|f||f+g|^{p-1} \in L_1$, y $|g||f+g|^{p-1} \in L_1$. Además

$$\int_X |f||f+g|^{p-1} d\mu \leq \|f\|_p \left[\int_X (|f+g|^{p-1})^q d\mu \right]^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \|f+g\|_p^{p/q},$$

es decir

$$\int_X |f||f+g|^{p-1} d\mu \leq \|f\|_p \|f+g\|_p^{p/q}.$$

De manera análoga

$$\int_X |g||f+g|^{p-1} d\mu \leq \|g\|_p \|f+g\|_p^{p/q}.$$

En la desigualdad (1.5), integramos ambos lados y utilizando estas dos últimas expresiones, tenemos,

$$\|f+g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f+g\|_p^{p/q}.$$

Ahora bien, $p - 1 = (p/q)$, y como $\|f+g\|_p > 0$, se sigue la desigualdad deseada. □

Es así como $\|\cdot\|_p$ determina una seminorma sobre el espacio L_p. Y la razón por la cual no puede determinar una norma radica en que si para determinada $f \in L_p$ se verifica que $\|f\|_p = 0$, esto no implica necesariamente que $f = 0$ en X. Tan sólo podemos afirmar que $f = 0$ c.s. $[\mu]$. Sin embargo, a partir de este espacio seminormado podemos construir un espacio donde es posible definir un producto interior mediante la utilización de las caracteríticas de $\|\cdot\|_p$, y determinar de esta manera una función norma que resulte completa, teniendo entonces en nuestras manos un nuevo espacio de Hilbert. Consideremos un espacio de medida (X, S, μ), y para algún número $p \geq 1$ consideremos el espacio $L_p(X, S, \mu)$ correspondiente. Para $f, g \in L_p(X, S, \mu)$ definiremos la relación siguiente

$$f \sim g \quad \text{si y sólo si} \quad f = g \quad \text{c.s. } [\mu].$$

Es fácil verificar que "$\sim$" define una relación de equivalencia. Podemos entonces introducir un nuevo subconjunto en el espacio $L_p(X, S, \mu)$ con sólo tomar en cuenta para una función f determinada en $L_p(X, S, \mu)$ su clase de equivalencia

$$\hat{f} = \{g \in L_p \mid g \sim f\}.$$

Entonces definimos un nuevo espacio $\overline{L}_p$ el cual reúne todas las clases de equivalencia, es decir

$$\overline{L}_p = \{\hat{f} \mid f \in L_p\}.$$

Sobre este nuevo espacio, las operaciones de suma de vectores y multiplicación por un escalar pueden ser introducidas mediante las expresiones

$$\hat{f} + \hat{g} = \widehat{f+g} \qquad \text{y} \qquad \alpha\, \hat{f} = \widehat{\alpha f},$$

para $\hat{f}$ y $\hat{g}$ en $\overline{L}_p$, y α en $\mathbb{C}$. Es fácil mostrar que bajo estas relaciones el espacio $\overline{L}_p$ es lineal.

Es posible notar que bajo este nuevo orden de cosas la función $\|\cdot\|_p : \overline{L}_p \to \mathbb{R}^+$ determinada por

$$\|\hat{f}\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.6}$$

constituye una norma sobre el espacio lineal $\overline{L}_p$. En efecto, por una parte notamos que para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ y para toda $\hat{f} \in \overline{L}_p$,

$$\|\alpha \hat{f}\|_p = |\alpha| \|\hat{f}\|_p,$$

mientras que la desigualdad triangular se expresa en el mismo sentido que en el Teorema 1.5.2, esto es

$$\|\hat{f} + \hat{g}\|_p \leq \|\hat{f}\|_p + \|\hat{g}\|_p \quad \text{para toda } \hat{f}, \hat{g} \in \overline{L}_p.$$

Pero además, si $\|\hat{f}\|_p = 0$, entonces $f = 0$ c.s. $[\mu]$, esto implica que $f \in \hat{0}$, y por otra parte $0 \in \hat{f}$. Por ello si $h \in \hat{f}$ se tiene que $h = f = 0$ c.s. $[\mu]$, por tanto $h \in \hat{0}$. Entonces $\hat{f} \subseteq \hat{0}$. Análogamente, $\hat{0} \subseteq \hat{f}$. Así pues $\hat{f} = \hat{0}$. Es de esta forma como $\|\cdot\|_p$ determina una norma sobre el espacio $\overline{L}_p$.

Ahora parece necesario preguntarnos acerca de las propiedades de esta norma. En particular nos interesa saber si el espacio $\overline{L}_p$ es completo bajo ella. La realidad dice que efectivamente el espacio $\overline{L}_p$ es completo.

Teorema 1.5.3. *Sea $\{\hat{f}_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en el espacio $\overline{F}_p$. Entonces existe $\hat{f} \in \overline{F}_p$ tal que $\hat{f}_n \to \hat{f}$ cuando $n \to \infty$.*

Demostración. La demostración se sigue del hecho de que una sucesión $\{\hat{f}_n\}_{n\geq 1}$ de Cauchy en $\overline{L}_p$ define también un sucesión $\{f_n\}_{n\geq 1}$ de Cauchy en L_p, y es posible probar entonces que tal sucesión es convergente en L_p a una función f aunque no única, y por ello $\{\hat{f}_n\}_{n\geq 1}$ converge en $\overline{L}_p$ a $\hat{f}$, única. □

Hagamos más pequeño nuestro ámbito de estudio y consideremos el caso $p = 2$. Ahora bien, a partir de la definición de $\|\cdot\|_p$ en la ecuación (1.6), podemos motivar la posible definición de un producto interior dado por

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \int_X f\overline{g}d\mu \qquad \text{para toda } \hat{f}, \hat{g} \in \overline{L}_2. \tag{1.7}$$

Las dos primeras características de la Definición 1.1.4 de producto interior son fácilmente verificables. Por otra parte, si $\hat{f} = \hat{g}$, tenemos que $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \langle \hat{f}, \hat{f} \rangle = \|\hat{f}\|_2^2$. Entonces la parte tercera de la Definición 1.1.4 es satisfecha. Por último, es también evidente que $\hat{f} = 0$, si y sólo si, $\langle \hat{f}, \hat{f} \rangle = 0$. Así es como (1.7) define un producto interior sobre $\overline{L}_2$. Ahora bien, la relación $\|\cdot\|_2$, dada por

$$\|\hat{f}\|_2 = (\langle \hat{f}, \hat{f} \rangle)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_X |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}},$$

determina una norma completa sobre el espacio $\overline{L}_2$, según el Teorema 1.5.3.

Hemos probado el resultado siguiente.

Corolario 1.5.1. *El espacio $\overline{L}_2$ es un espacio de Hilbert.*

1.6 Esperanza condicional

En la teoría de las probabilidades existe un concepto de vital importancia para el estudio de algunos procesos estocásticos, en particular de los procesos conocidos como martingalas. Nos referimos al concepto de esperanza condicional. Los espacios de Hilbert posibilitan la ubicación teórica de tal concepto, el cual lo expondremos aquí de forma breve y a manera de ejemplo. Primeramente, nuestro espacio de medida será considerado como un espacio de probabilidad, con lo cual se introduce la notación $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. La medida $\mathbf{P}$ es conocida como medida de probabilidad y la única salvedad que distingue a este espacio es que $\mathbf{P}[\Omega] = 1$. En este contexto, las funciones $\mathcal{F}$-medibles se denotan con las letras mayúsculas X, Y, Z, etc, llevando el nombre de variables aleatorias. Cuando una variable aleatoria es integrable, entonces $\mathbf{E}[X] = \int_\Omega X d\mathbf{P}$ es conocida como la esperanza de X.

Algunos problemas típicos referentes a las condiciones de codependencia de ciertos fenómenos aleatorios, así como a las limitaciones producidas por la carencia de información respecto de los mismos, han sugerido la introducción de nuevos conceptos, a partir de la idea de *condicionamiento*. El primero de ellos es conocido como *probabilidad condicional*, el cual dio origen a un concepto todavía más útil y general, conocido como *esperanza condicional*.

Mostraremos tan solo un problema que ilustre la necesidad de tales ideas. Supongamos que podríamos interesarnos por la posibilidad de que en un número n de lanzamientos de una moneda se obtuviera k resultados en "sol". Siendo la posibilidad de obtener "sol" en cada lanzamiento independiente $x \in [0, 1]$, la cual desconocemos. Podemos entonces considerar $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$; donde $\Omega_1 = [0, 1]$ es el espacio del cual puede observarse los posibles valores de x; y $\Omega_2 = \{0, 1, ..., n\}$ es el espacio donde se consideran todas los posibles lanzamientos en "sol" después de los n lanzamientos. Además podemos considerar la σ-álgebra $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$, con $\mathcal{F}_1 = \mathcal{B}_{[0,1]}$ y $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega_2)$.

El problema puede ser modelado definiendo un par de variables aleatorias (funciones $\mathcal{F}$-medibles) sobre Ω, $X : \Omega \to [0, 1]$ y $Y : \Omega \to \{1, ..., n\}$, tales que $X(x, y) = x$ denota la probabilidad de que en un solo lanzamiento se obtenga "sol"; $Y(x, y) = y$ denota el número de "soles" después de los n lanzamientos.

El problema ahora consiste en saber si es posible encontrar un par de medidas de probabilidad, $\mathbf{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$, y $\hat{\mathbf{P}}(x, \ ) : \mathcal{F}_2 \to [0, 1]$ la cual depende de x y que pueda ser interpretada como la probabilidad condicional de Y dado que $X = x$; tales que $\hat{\mathbf{P}}(x, C) = \mathbf{P}[(x, y) \in \Omega \mid y \in C]$, para toda $C \in \mathcal{F}_2$, y $x \in \Omega_1 = [0, 1]$. De ser así se seguiría entonces que

$$\mathbf{P}(Y \in C) = \mathbf{P}(\Omega_1 \times C) = \int_{\Omega_1} \hat{\mathbf{P}}(x, C) dx = \int_0^1 \hat{\mathbf{P}}(x, C) dx.$$

El teorema de Radon-Nikodym muestra que tal medida $\hat{\mathbf{P}}$ existe y además muestra que si $C = \{k\}$, con $k \in \Omega_2$, entonces $\hat{\mathbf{P}}(x, \{k\}) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$. La notación usada es, en este caso $\hat{\mathbf{P}}(x, \{k\}) = \mathbf{P}[Y = k \mid X = x]$. De aquí podemos entonces derivar el concepto de esperanza condicional de la variable Y, dado que la variable $X = x$, la cual denotaremos $\mathbf{E}[Y \mid X = x]$, como sigue,

$$\mathbf{E}[Y \mid X = x] = \sum_{k=0}^{n} k\mathbf{P}[Y = k \mid X = x] = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx.$$

Podemos definir de tal suerte una función $g(x) = \mathbf{E}[Y \mid X = x]$.

La realización de algunos cálculos muestra que $\mathbf{P}(Y = k) = \frac{k}{n+1}$, para toda $k \in \Omega_2$ y entonces $\mathbf{E}[Y] = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n+1} = \frac{n}{2}$. Entonces, $g \circ X = g(X)$, es una nueva variable aleatoria tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g(X) d\mathbf{P} = \int_{\Omega_1} g(x) d\mathbf{P}_X(x) &= \int_{\Omega_1} \mathbf{E}[Y \mid X = x] dx \\ &= \int_0^1 nx \; dx = \frac{n}{2} = \mathbf{E}[Y] = \int_{\Omega} Y d\mathbf{P}, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{P}_X$ es la medida inducida por la variable X, dada por $\mathbf{P}_X[A] = \mathbf{P}[X \in A]$, para toda $A \in \mathcal{F}_1 = \mathcal{B}_{[0,1]}$. Y en general,

$$\int_A g(X) d\mathbf{P} = \int_A Y d\mathbf{P}, \quad \text{para toda} \quad A \in \mathcal{F}_1 = \mathcal{B}_{[0,1]}.$$

Luego podemos enunciar la caracterización de la esperanza condicional de la siguiente manera.

Definición 1.6.1 (Esperanza condicional). *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad. Sea $\mathcal{G}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$. Si X es una función $\mathcal{F}$-medible tal que $\int_{\Omega} |X| d\mathbf{P} < \infty$, entonces la esperanza condicional de X dada $\mathcal{G}$, es una nueva función $\mathcal{G}$-medible denotada como $\mathbf{E}[X \mid \mathcal{G}]$ tal que*

$$\int_A X d\mathbf{P} = \int_A \mathbf{E}[X \mid \mathcal{G}] d\mathbf{P},$$

para toda $A \in \mathcal{G}$.

Tomemos X una función $\mathcal{F}$-medible. Agreguemos la hipótesis de que $\int_{\Omega} |X|^2 d\mathbf{P} < \infty$, (i.e. $X \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$). Y consideremos los espacios de Hilbert $\overline{L}_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ y $\overline{L}_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$. Evidentemente $\overline{L}_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P}) \subseteq \overline{L}_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Entonces, existe $\hat{Y} \in \overline{L}_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$, único tal que

$$\|\hat{X} - \hat{Y}\|_2^2 \leq \|\hat{X} - \hat{Z}\|_2^2,$$

para toda $\hat{Z} \in \overline{L}_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$, según el teorema 1.3.1.

Sea $\epsilon > 0$, y $A \in \mathcal{G}$. Consideremos la función $\mathcal{G}$-medible $\epsilon\chi_A : \Omega \to \{0, \epsilon\}$, tal que $\epsilon\chi_A(\omega) = 0$ si $\omega \notin A$ y $\epsilon\chi_A(\omega) = \epsilon$ si $\omega \in A$. Entonces $\int_\Omega |\epsilon\chi_A|^2 d\mathbf{P} = \epsilon^2\mathbf{P}(A) < \infty$, con lo cual $\epsilon\chi_A \in L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$. Se sigue de ahí que $\widehat{\epsilon\chi_A} \in \overline{L}_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$. Se tendrá entonces que

$$\|\hat{X} - \hat{Y}\|_2^2 \leq \|\hat{X} - (\hat{Y} + \widehat{\epsilon\chi_A})\|_2^2 \quad \text{y} \quad \|\hat{X} - \hat{Y}\|_2^2 \leq \|\hat{X} - (\hat{Y} - \widehat{\epsilon\chi_A})\|_2^2.$$

Es decir

$$\int_\Omega |X - Y|^2 d\mathbf{P} \leq \int_\Omega |X - (Y + \epsilon\chi_A)|^2 d\mathbf{P}$$

y

$$\int_\Omega |X - Y|^2 d\mathbf{P} \leq \int_\Omega |X - (Y - \epsilon\chi_A)|^2 d\mathbf{P}.$$

Por un lado

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |X - Y|^2 d\mathbf{P} &\leq \int_\Omega |X - (Y + \epsilon\chi_A)|^2 d\mathbf{P} \\
&= \int_\Omega |X - Y|^2 d\mathbf{P} - 2\epsilon \int_\Omega (X - Y)\chi_A d\mathbf{P} + \epsilon^2 \int_\Omega \chi_A d\mathbf{P} \\
&= \int_\Omega |X - Y|^2 d\mathbf{P} - 2\epsilon \int_A (X - Y) d\mathbf{P} + \epsilon^2 \mathbf{P}(A),
\end{aligned}$$

de donde

$$\int_A (X - Y) d\mathbf{P} \leq \frac{\epsilon}{2}\mathbf{P}(A).$$

De forma análoga

$$-\frac{\epsilon}{2}\mathbf{P}(A) \leq \int_A (X - Y) d\mathbf{P}.$$

Con lo cual

$$|\int_A X dP - \int_A Y d\mathbf{P}| = |\int_A (X - Y) d\mathbf{P}| \leq \frac{\epsilon}{2}\mathbf{P}(A)$$

Y dado que ϵ es arbitraria, se sigue, finalmente

$$\int_A X dP = \int_A Y d\mathbf{P} \qquad \forall A \in \mathcal{G}.$$

Hemos probado el teorema siguiente.

Teorema 1.6.1. *Si X es una variable aleatoria cuadrado integrable (respecto de $\mathcal{F}$) y $\mathcal{G}$ es una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$, entonces existe la esperanza condicional de X dada $\mathcal{G}$.*

Capítulo 2

Espacios de Hilbert con núcleo reproductivo

El presente capítulo está basado en el artículo homónimo, desarrollado por A. Aronszajn, publicado en *Transactions of the AMS* Vol. 68, 1950. La investigación aquí sintetizada es referida a un tipo especial de núcleo (o *kernel*), usado bajo diferentes nombres y direcciones en las matemáticas. Aquí presentamos un breve resumen del desarrollo histórico de tal concepto. En términos generales, en este capítulo presentamos las proiedades básicas del núcleo reproductivo y algunos de los ejemplos más ilustrativos.

2.1 Introducción

Ejemplos de núcleos del tipo que nos interesa son conocidos desde hace tiempo. En ecuaciones diferenciales e integrales, por ejemplo, encontramos con bastante frecuencia su uso en forma de operadores, en las teorías desarrolladas por Green y Hilbert. Sin embargo, las propiedades características de estos núcleos, como los entendemos en la actualidad, fueron desarrolladas y aplicadas desde principios del siglo XX.

Históricamente, el desarrollo de la teoría del kernel (o núcleo) reproductivo ha estado ligada a las directrices del estudio en ecuaciones diferenciales e integrales. Hacia 1909, se introduce, bajo el título de "núcleos definidos positivos" la función compleja K en dos variables sobre algún subconjunto E, con la propiedad

$$\sum_{i,j=1}^{n} K(y_i, y_j)\bar{\xi}_i \xi_j \geq 0, \tag{2.1}$$

donde y_i está en E, ξ_i es un escalar complejo, $i = 1, ..., n$.

Ya en la mitad del siglo pasado, sin embargo, muchos investigadores, como S. Zaremba y S. Bergman, se interesaban por la utilidad de estos núcleos en otros campos de la matemática. Entre 1943 y 1950, Aronszajn desarrolló una teoría general de los núcleos reproductivos la cual contiene, como caso particular, las núcleo-funciones de Bergman. Aquí trataremos de desarrollar brevente las ideas expuestas por este autor. Esta teoría da las bases generales para el estudio de cada caso particular. El núcleo posee una cierta propiedad que lo caracteriza, y su cumplimiento implica también el cumplimiento de la propiedad (2.1). Por tanto, Aronszajn logró generalizar los conceptos del núcleo reproductivo.

2.2 El núcleo reproductivo

En este capítulo, a menos que se especifique lo contrario, E denota siempre un conjunto y F un espacio de Hilbert sobre el campo $\mathbb{F}$ (complejo o real) de funciones $f : E \to \mathbb{F}$.

Definición 2.2.1 (Núcleo reproductivo). *La función $K : E \times E \to \mathbb{F}$, es llamada* **núcleo reproductivo** *(*n.r.*) de F si satisface las condiciones siguientes.*

i) Para toda $y \in E$, la función $K(\cdot, y) : E \to \mathbb{F}$, pertenece a F.

ii) **Propiedad reproductiva***: Para todo $y \in E$ y toda función $f \in F$,*

$$f(y) = \langle f(\cdot), K(\cdot, y)\rangle.$$

Observación 2.2.1. *Si el núcleo K es real (esto es, si $K(x, y) \in \mathbb{R}$ para todo $x, y \in E$), entonces $K(x, y) = K(y, x)$, luego $K(y, \cdot) \in F$, para todo $x, y \in E$. De tal suerte que la propiedad reproductiva también puede ser enunciada, en estos casos, con la expresión*

$$f(y) = \langle f(\cdot), K(y, \cdot)\rangle, \qquad \textit{para toda } f \in F \textit{ y toda } y \in E.$$

Ejemplo 2.2.1. Sea $I_n = \{1, 2, ..., n\}$. Para un vector $x = (x_1, ..., x_2) \in \mathbb{R}^n$ podemos definir una función (manteniendo la notación) $x : T_n \to \mathbb{R}$ tal que $x(i) = x_i$, para toda $i \in I_n$. Consideremos entonces H_n^2 como el espacio de todas estas funciones (observamos que el rango de toda función en H_n^2 está contenido en $\mathbb{R}^n$). Entonces en H_n^2 introducimos el producto punto habitual en $\mathbb{R}^n$, esto es, si $x(i) = x_i$ y $y(i) = y_i$ para x, y en $\mathbb{R}^n$, entonces,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

El espacio H_n^2 es un espacio de Hilbert. Ahora bien, si $K_n : I_n \times I_n \to \mathbb{R}^n$ tiene la regla $K_n(i, j) = \delta_{ij}$, entonces K_n es el núcleo reproductivo para $\mathbb{R}^n$. La verificación de este hecho es inmediata.

Ahora, si $l_2 = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} | \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$ y H^2 es la clase de funciones $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definidas de manera análoga al párrafo anterior, con producto interior $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, entonces H^2 es un espacio de Hilbert con núcleo reproductivo $K(i,j) = \delta_{i,j}$.

En general, sea H un espacio de Hilbert separable sobre el campo escalar complejo, y $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base normalizada de H, si $x \in H$, entonces existe una única representación $x = \sum_i \alpha_i e_i$. Definimos la función $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ con la regla $x(i) = \alpha_i$. Sea F la clase formada por todas las funciones de la forma anterior. Para x, y en F introducimos el producto interior

$$\langle x, y\rangle_F = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \overline{\beta}_i \langle e_i, e_i\rangle_H = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \overline{\beta}_i.$$

Entonces la función $K : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \{0,1\}$, cuya regla es $K(i,j) = \delta_{i,j}$, es el núcleo reproductivo de F.

Ejemplo 2.2.2. Sea t un número real positivo. Definimos la clase H_t de trayectorias continuas $q : [0,t] \to \mathbb{R}$, tal que $q(t) = 0$ y $q'(s)$ existe casi dondequiera y es cuadrado integrable (en el sentido de Riemann). Entonces la expresión

$$\langle q_1, q_2\rangle = \int_0^t q_1'(s) q_2'(s) ds,$$

para cualesquiera q_1 y q_2 en H_t, define un producto interior. En efecto, para q_1 y q_2 en H_t, la integral $\int_0^t q_1'(s)q_2'(s)ds$ es un número real, las propiedades de linealidad y simetría se siguen inmediatamente de este hecho. Ahora, si $q = 0$ (es claro que $q = 0 \in H_t$), entonces $\langle q, q\rangle = 0$. Por otra parte, si $\langle q, q\rangle = 0$, i.e. $\int_0^t [q'(s)]^2 ds = 0$, se sigue que q' es cero casi dondequiera, luego q es constante en $[0,t]$ (por continuidad), pero $q(t) = 0$, entonces $q(s) = 0$ para todo $s \in [0,t]$.

Tenemos que el espacio H_t posee núcleo reproductivo. En efecto la función $K : [0,t] \times [0,t] \to \mathbb{R}$ dada por $K(s_1, s_2) = t - \max\{s_1, s_2\}$ define el núcleo reproductivo para H_t.

En primer lugar, es claro que $K(\cdot, s_2)$ pertenece a H_t, para cada $s_2 \in [0,1]$. Ahora, sea $s_2 \in [0,t]$, entonces $\frac{d}{ds}K(s, s_2) = 0$ si $s < s_2$ y $\frac{d}{ds}K(s,s_2) = -1$ si $s_2 < s$, de tal forma que, para $q \in H_t$, tenemos,

$$\begin{aligned} \langle q(\cdot), K(\cdot, s_2)\rangle &= \int_0^t q'(s) \frac{d}{ds} K(s, s_2) ds \\ &= -\int_{s_2}^t q'(s) ds \\ &= q(s_2). \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.3. [Itratescu, [5]] Sea F el espacio de todas las funciones continuas complejas sobre $[0,1]$, cuya derivada existe casi dondequiera y tal que *i)* $\int_0^1 |f'(t)|^2 dt < \infty$, para toda $f \in F$.

ii) Existe $k \neq 1$ en $\mathbb{C}$ tal que $f(0) = kf(1)$, para toda $f \in F$.

Bajo la suma y el producto escalar habituales, F es una clase lineal. Mientras que para cualesquiera funciones f y g en F, la expresión

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f'(t)\overline{g'}(t)ds$$

define un producto interior en F. En efecto, es evidente que $\int_0^1 f'(t)\overline{g'}(t)dt$ existe y es un número complejo. Las propiedades de linealidad y antisimetría se siguen de forma inmediata. Es claro además que si $f = 0$ entonces $\langle f, f \rangle = 0$. Y por otra parte, si $\langle f, f \rangle = 0$, i.e. $\int_0^1 |f'(t)|^2 dt = 0$, entonces (por continuidad) $f'(t) = 0$ para todo $t \in [0,1]$, la función f es pues constante, digamos c. Por hipótesis, $c = f(0) = kf(1) = kc$, entonces $c = 0$, pues $k \neq 1$.

Ahora bien para cualquier par s, t en $[0,1]$, la función

$$K(s,t) = \min(s,t) + \frac{s\overline{k}}{1-\overline{k}} + \frac{tk}{1-k} + \left|\frac{k}{1-k}\right|^2$$

es el núcleo reproductivo de la clase F. Efectivamente, si $t \in [0,1]$ tenemos que,

$$K(0,t) = \frac{tk}{1-k} + \left|\frac{k}{1-k}\right|^2,$$

mientras que

$$\begin{aligned} kK(1,t) &= k\left(t + \frac{\overline{k}}{1-\overline{k}} + \frac{tk}{1-k} + \left|\frac{k}{1-k}\right|^2\right) \\ &= kt\left(1 + \frac{k}{1-k}\right) + \frac{|k|^2}{1-\overline{k}}\left(1 + \frac{k}{1-k}\right) \\ &= \frac{tk}{1-k} + \left|\frac{k}{1-k}\right|^2, \end{aligned}$$

por tanto $K(0,t) = kK(1,t)$. Tenemos además que

$$\frac{d}{ds}K(s,t) = \begin{cases} 1 + \frac{\overline{k}}{1+\overline{k}} & 0 \leq s < t, \\ \frac{\overline{k}}{1+\overline{k}} & t < s \leq 1. \end{cases}$$

Luego, para $f \in F$ y $t \in [0,1]$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle f(\cdot), K(\cdot,t)\rangle &= \int_0^1 f'(s)\overline{\frac{d}{ds}K(s,t)}ds \\
&= \left(1+\frac{k}{1-k}\right)\int_0^t f'(s)ds + \frac{k}{1-k}\int_t^1 f'(s)ds \\
&= \frac{1}{1-k}(f(t)-f(0)) + \frac{k}{1-k}(f(1)-f(t)) \\
&= \frac{1}{1-k}(f(t)-kf(1)+kf(1)-kf(t)) \\
&= f(t),
\end{aligned}$$

por tanto K es el núcleo reproductivo de la clase F.

2.3 Propiedades básicas del núcleo reproductivo

Consideremos un espacio de Hilbert F de funciones definidas sobre E, con norma $\|\cdot\|$ y el producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$. En esta sección enunciaremos algunas propiedades básicas de un núcleo reproductivo K definido sobre la clase F.

Proposición 2.3.1 (Unicidad). *Si un n. r. K existe entonces es único.*

Demostración. Sea K el núcleo reproductivo para la clase F. Si otro núcleo K' existe, tenemos que para toda $y \in E$,

$$\begin{aligned}
\|K(\cdot,y)-K'(\cdot,y)\|^2 &= \langle K(\cdot,y)-K'(\cdot,y), K(\cdot,y)-K'(\cdot,y)\rangle \\
&= \langle K(\cdot,y)-K'(\cdot,y), K(\cdot,y)\rangle \\
&\qquad -\langle K(\cdot,y)-K'(\cdot,y), K'(\cdot,y)\rangle \\
&= K(y,y)-K'(y,y)-[K(y,y)-K'(y,y)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

por la propiedad reproductiva de K y K'. Lo cual implica que $K = K'$. □

Para $y \in E$ definimos la funcional $G_y : F \to \mathbb{F}$, con regla $f \mapsto G_y(f) = f(y)$ para toda $f \in F$. Ahora enunciamos una condición necesaria y suficiente para la existencia del núcleo reproductivo.

Teorema 2.3.1 (Existencia). *La clase F posee n. r. K, si y sólo si, para toda $y \in E$, la funcional G_y es continua sobre todo el espacio de Hilbert F.*

Demostración. Supongamos que sobre el espacio de Hilbert F existe un núcleo reproductivo K. Sea $y \in E$ y consideremos la funcional $G_y(f) = f(y)$, se tiene entonces que para toda $f \in F$,

$$\begin{aligned} |G_y(f)| &= |f(y)| \\ &= |\langle f(\cdot), K(\cdot, y)\rangle| \\ &\leq \|f\|\|K(\cdot, y)\|. \end{aligned}$$

Por otro lado, haciendo uso de la propiedad reproductiva,

$$\|K(\cdot, y)\| = \langle K(\cdot, y), K(\cdot, y)\rangle^{\frac{1}{2}} = K(y, y)^{\frac{1}{2}}.$$

De modo que

$$|G_y(f)| \leq K(y, y)^{\frac{1}{2}}\|f\|,$$

lo cual implica, en efecto, que G_y es continua.

Inversamente, sea $y \in E$, y supongamos que G_y es una funcional continua. Entonces por el *teorema de representación de Riesz* existe una única función g_y en F tal que $f(y) = \langle f, g_y\rangle$. Definimos $K(x, y) = g_y(x)$. Este es el núcleo reproductivo buscado. □

Ejemplo 2.3.1. Los espacios $L_2^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$ no tienen núcleo reproductivo. En efecto, si consideramos el intervalo $[0, 1]$ y la medida de *Lebesgue* en este intervalo sobre la σ-álgebra de Borel, y la función $\delta_0(x) = \delta_{0x}$, entonces $\|\delta_0\| = 0$, y además $1 = |\delta_0(0)| \geq 0 = M\|\delta_0\|$, para toda $M > 0$. Sin embargo, si elegimos un intervalo acotado A en $\mathbb{R}$, y el subespacio L_c de todas las fuciones constantes definidas sobre A, entonces L_c tiene como núcleo la función $K(x, y) = 1/d(A)$, donde $d(A)$ es la longitud del intervalo A. Más aún, los ejemplos 2.3.2 y 2.3.3 introducen subespacios de $L_2^{\mathbb{R}^2}$ que tienen núcleo reproductivo.

Proposición 2.3.2. *Sea F un espacio de funciones con producto interior definido. Si F posee núcleo reproductivo entonces cualquier subespacio cerrado F_1 de F también posee núcleo reproductivo. Más aún, si K es el n. r. de F y K_1 es el de F_1, entonces $K_1(\cdot, y) = P_{F_1}(K(\cdot, y))$, para toda $y \in E$.*

Demostración. Sea K el n.r. de F. Consideremos un subespacio cerrado F_1 de F. Si $y \in E$, donde E es el conjunto donde están definidas las funciones de F, entonces la correspondencia lineal $f \mapsto f(y)$ es acotada para toda $f \in F$, en particular para $f \in F_1$. Entonces, según el teorema de existencia, existe K_1 n.r. correspondiente a la clase F_1. □

Ejemplo 2.3.2. Este ejemplo fue presentado en el trabajo de Zaremba. Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Sea H_D^2 la clase de todas las funciones complejas sobre D armónicas y cuadrado integrables (respecto a x e y) sobre $\bar{D}$. El espacio H_D^2, con producto

$$\langle f, g\rangle = \int\int_{\overline{D}} f(z)\overline{g(z)}dxdy, \qquad z = x + iy,$$

con $f, g \in H_D^2$ es un subespacio cerrado de $L_{\overline{D}}^2$.

Sea $z_0 \in D$, probaremos que la funcional $f \mapsto f(z_0)$ es continua. Tomemos pues f en H_D^2. Ahora, como D es abierto, existe $r > 0$ tal que el disco $\overline{D}_{z_0}(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\} \subset D$, y dado que f es una función armónica,

$$f(z_0) = \frac{1}{(\pi r)^2}\int\int_{\overline{D}_{z_0}(r)} f(z)dxdy,$$

de donde,

$$\begin{aligned}
|f(z_0)| &\leq \frac{1}{(\pi r)^2}\int\int_{\overline{D}_{z_0}(r)} |f(z)|dxdy \\
&\leq \frac{1}{(\pi r)^2}\left(\int\int_{\overline{D}_{z_0}(r)} |f(z)|^2dxdy\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\int_{\overline{D}_{z_0}(r)} 1dxdy\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{(\pi r)^2}\|f\|(\pi r^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi^{3/2}r}\|f\|,
\end{aligned}$$

y la constante $1/\pi^{3/2}r$ solo depende de z_0. La funcional $f \mapsto f(z_0)$ es entonces acotada y por ello continua, luego, existe el núcleo K para H_D^2.

Ejemplo 2.3.3. Sea D la bola abirta unitaria sobre $\mathbb{C}$. Consideremos el espacio F de todas las funciones complejas analíticas sobre D y cuadrado integrables. En F el producto interior queda definido con la expresión habitual

$$\langle f, g\rangle = \int\int_D f(z)\overline{g(z)}dxdy, \qquad z = x + iy.$$

Entonces F es un subespacio cerrado de L_D^2. En efecto, sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en F convergente a una función $f \in L_D^2$, y z_0 un elemento en D, entonces existe un número $r > 0$ tal que el disco $\overline{D}_r(z_0) = \{z : |z_0 - z| \leq r\} \subset D$, y por hipótesis toda función en F es también armónica, luego para toda n, m naturales,

$$\begin{aligned}
|f_n(z_0) - f_m(z_0)| &\leq \frac{1}{(\pi r)^2}\int\int_{\overline{D}_r(z_0)} |f_n(z) - f_m(z)|dxdy \\
&\leq \frac{1}{(\pi r)^2}\int\int_D |f_n(z) - f_m(z)|dxdy
\end{aligned}$$

aplicando la desigualdad de Cauchy, tenemos

$$|f_n(z_0) - f_m(z_0)| \leq \frac{1}{r\pi^{3/2}}\|f_n - f_m\|,$$

luego, $\{f_n(z_0)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un número $g(z_0)$. La función g definida en D por $g(z) = \lim f_n(z)$ es analítica (por ser límite de funciones analíticas), entonces $g = f$ casi seguramente, con lo cual F es cerrado.

Bergman fue quien descubrió que esta clase tiene núcleo reproductivo. En efecto, para $z \in \overline{D}$ y $f \in F$ puede probarse de manera análoga al ejemplo anterior que

$$|f(z)| \leq \frac{1}{r\pi^{3/2}}\|f\|,$$

donde r solo depende de z, entonces la funcional $f \mapsto f(z)$ es continua, luego F posee núcleo reproductivo.

Ejemplo 2.3.4. Sea D como en el ejemplo anterior. Definimos ahora la clase F de funciones complejas f sobre D analíticas tales que

$$\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

existe y es finito. Entonces la expresión

$$\langle f, g\rangle = \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it})\overline{g}(re^{it})dt$$

define un producto interior en F.

Sea z en D, si $f \in F$ entonces, por ser analítica, $f(z)$ tiene una representación en serie de potencias de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

y si $|z| \leq r < 1$, entonces

$$|f(z)|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2|z|^{2n} \leq \sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2 r^{2n},$$

pero

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta,$$

por tanto

$$|f(z)| \leq \|f\|.$$

Luego la funcional $f \mapsto f(z)$ es continua para cada $z \in D$, entonces F posee núcleo reproductivo. Este espacio es conocido como el espacio H^2 de Hardy.

Podemos fácilmente deducir ahora algunas otras propiedades básicas del núcleo reproductivo.

Proposición 2.3.3. *Si K es el núcleo reproductivo para la clase F, entonces para todo par x, y en E se tiene*

i) $K(x,x) \geq 0$,

ii) $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$,

iii) $|K(x,y)|^2 \leq K(x,x)K(y,y)$.

Demostración. Para verificar *i*), consideraramos que $K(\cdot,x) \in F$ y

$$0 \leq \|K(\cdot,x)\|^2 = \langle K(\cdot,x), K(\cdot,x)\rangle = K(x,x).$$

Ahora bien,

$$K(x,y) = \langle K(\cdot,y), K(\cdot,x)\rangle = \overline{\langle K(\cdot,x), K(\cdot,y)\rangle} = \overline{K(y,x)},$$

lo cual prueba *ii*). Por último,

$$\begin{array}{rcl} |K(x,y)|^2 & = & |\langle K(\cdot,y), K(\cdot,x)\rangle|^2 \\ & \leq & \|K(\cdot,y)\|^2 \|K(\cdot,x)\|^2 \\ & = & K(x,x)K(y,y). \end{array}$$

□

Proposición 2.3.4. *Si la clase F con n. r. K es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert más grande $\mathcal{F}$, y si $f \in F$ es la proyección del elemento h de $\mathcal{F}$ sobre F, entonces para todo $y \in E$,*

$$f(y) = \langle h(\cdot), K(\cdot,y)\rangle,$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es el producto interior de F.

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un espacio de Hilbert y F un subespacio cerrado con núcleo reproductivo K. Sea h un elemento de $\mathcal{F}$, y consideremos la descomposición $h = f + g$, donde g es ortogonal a la clase F y $f \in F$ es la proyección del elemento h sobre F. Así, para $y \in E$ tomemos la función $K(\cdot,y)$ en F, luego

$$\begin{array}{rcl} \langle h(\cdot), K(\cdot,y)\rangle & = & \langle (f+g)(\cdot), K(\cdot,y)\rangle \\ & = & \langle f(\cdot), K(\cdot,y)\rangle + \langle g(\cdot), K(\cdot,y)\rangle \\ & = & f(y) + 0 \\ & = & f(y) \end{array}$$

por la propiedad reproductiva, y por la ortogonalidad de g con F. □

Proposición 2.3.5. *Si F posee un n. r. K y si $\{g_n\}_{n\geq 1}$ es un sistema ortonormal numerable en F, entonces, para toda sucesión de números $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ tales que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty,$$

tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n||g_n(x)| \leq K(x,x)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Demostración. Mediante una generalización de la desigualdad de Hölder, tenemos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n||g_n(x)| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |g_n(x)|^2 \right)^{1/2}.$$

Y por otra parte, usando la desigualdad de Bessel,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |g_n(x)|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |\langle g_n(\cdot), K(\cdot,x)\rangle|^2 \\ &\leq \|K(\cdot,x)\|^2 \\ &= K(x,x). \end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n||g_n(x)| &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |g_n(x)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq K(x,x)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.3.2. *Sea F un espacio de Hilbert de funciones F con n. r. K, $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy (respecto a la norma $\|\cdot\|$) en F y la función límite f en F de dicha sucesión. Entonces*

i) La sucesión $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge puntualmente a f, es decir, si $y \in E$ entonces $\lim_{n\to\infty} f_n(y) = f(y)$.

ii) Si en algún subconjunto de E_1 de E, la función $x \mapsto K(x,x)$ es uniformemente acotada, entonces esta convergencia es uniforme.

iii) Supongamos que en E es posible definir un topología. Si la transformación $y \mapsto K(\cdot, y)$ de E en F es continua, entonces la convergencia también es uniforme en cualquier subconjunto compacto de E.

Demostración. *i*) Por hipótesis, $\|f_n - f\| \to 0$ si $n \to \infty$. Sea $y \in E$, entonces,

$$\begin{aligned} |f(y) - f_n(y)| &= |\langle f(\cdot) - f_n(\cdot), K(\cdot, y)\rangle|| \\ &\leq \|f - f_n\|\|K(\cdot, y)\| \\ &= \|f - f_n\|(K(y, y))^{1/2}. \end{aligned}$$

De aquí se sigue la primera parte del teorema.

ii) Ahora, si existe $E_1 \subseteq E$ tal que para alguna $M > 0$ se tiene que $K(y, y) < M^2$, para toda $y \in E_1$, entonces

$$\begin{aligned} |f(y) - f_n(y)| &\leq \|f - f_n\|(K(y, y))^{1/2} \\ &\leq \|f - f_n\|M, \end{aligned}$$

para toda $y \in E$. Luego en E_1 la convergencia es uniforme.

iii) Dado el supuesto de convergencia, existe N_0 tal que para toda $n > N_0$ se tiene que $\|f_n - f\| < 1$. Sea entonces R el número

$$0 < R = \max\{\|f_1\|, ..., \|f_{N_0}\|, 1 + \|f\|\}.$$

De modo que cuando $n \leq N_0$, tenemos que $\|f_n\| \leq R$. Y para $n > N_0$,

$$\|f_n\| = \|f_n - f + f\| \leq \|f_n - f\| + \|f\| < 1 + \|f\| \leq R.$$

Luego, si en E existe una topología y bajo el supuesto de que la transformación $y \mapsto K(\cdot, y)$, de E en F es continua, entonces dicha transformación es también uniformemente continua. Sea E_1 un subconjunto compacto de E. Dada $\epsilon > 0$ y $y^* \in E$, existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que para toda $y \in E_1$, con $d(y, y^*) < \delta_\epsilon$, se tiene que

$$\|K(\cdot, y) - K(\cdot, y^*)\| < \frac{\epsilon}{4R}$$

Definimos entonces el subconjunto abierto V_{y^*}, tal que $y \in V_{y^*}$ si y sólo si $d(y, y^*) < \delta_\epsilon$. Así, si consideremos la familia de subconjuntos abiertos $\{V_{y^*}\}_{y^* \in E_1}$, entonces, dado que $y^* \in V_{y^*}$ para todo $y^* \in E_1$, dicha familia es una cubierta abierta para E_1. Por compacidad, existe un conjunto finito $\{y_1, y_2, ..., y_r\}$ en E_1, tal que $\{V_{y_i}\}_{i=1}^r$ es una cubierta finita abierta para E_1. De modo que para todo y en E_1 existe $k \in \{1, ..., r\}$ tal que

$$\|K(\cdot, y) - K(\cdot, y_k)\| < \frac{\epsilon}{4R},$$

debido a que $y \in V_{y_k}$, lo cual significa que $d(y, y_k) < \delta_\epsilon$.

Por otra lado, sabemos que $f_n(y_j) \to f(y_j)$, cuando $n \to \infty$, para cualquiera y_j, $j = 1, ...r$ (ver la primera parte). Esto es, para y_j, $j = 1, ..., r$ dada, existe N_j tal que $|f_n(y_j) - f(y_j)| < \frac{\epsilon}{2}$, cuando $n > N_j$. Luego, si $n > N^*$, $N^* = \max\{N_1, ..., N_r\}$, entonces

$$|f_n(y_k) - f(y_k)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Así, para $n > N^*$, se tiene que

$$\begin{aligned} |f(y) - f_n(y)| &= |(f(y) - f(y_k)) + (f(y_k) - f_n(y_k)) + (f_n(y_k) - f_n(y))| \\ &\leq |f(y_k) - f_n(y_k)| + |\langle f(x) - f_n(x), K(x, y) - K(x, y_k)\rangle| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \|f - f_n\| \|K(\cdot, y) - K(\cdot, y_k)\| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + 2R\frac{\epsilon}{4R} = \epsilon. \end{aligned}$$

Es decir,

$$|f(y) - f_n(y)| < \epsilon,$$

para toda $n > N^*$ y toda $y \in E_1$ (N^* no depende del elemento y). □

2.4 Matrices positivas y núcleos reproductivos

Supongamos que E tiene cardinalidad finita N. Una función $K : E \times E \to \mathbb{F}$, determina una transformación matricial de dimensión menor o igual a N, definida en $\mathbb{F}^N$, en el sentido siguiente. Si y_1, y_2,...,y_N son elementos de E, entonces, es posible introducir una matriz $\mathbf{K} = [K(y_i, y_j)]_{i,j}$. Tomemos un vector $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N) \in \mathbb{F}^N$, si la forma cuadrática

$$\overline{\xi}\mathbf{K}\xi^t = \sum_{i,j=1}^{N} K(y_i, y_j)\overline{\xi}_i\xi_j,$$

es no negativa y es nula sólo si $\xi_j = 0$, para toda $j = 1, 2, ..., N$, entonces decimos que la función K es una **matriz positiva**. De forma más general, para cualquier conjunto E, la función $K : E \times E \to \mathbb{F}$ se denomina **matriz positiva**, si para cualquier número finito de elementos y_1, y_2,...,y_n de E, la forma cuadrática

$$\sum_{i,j=1}^{n} K(y_i, y_j)\overline{\xi}_i\xi_j, \tag{2.2}$$

con $\xi_j \in \mathbb{F}$, $j = 1, 2, ..., n$, es no negativa, y es nula sólo si $\xi_j = 0$, para toda $j = 1, 2, ..., n$.

Proposición 2.4.1. *Un núcleo K definido en la clase F es una matriz positiva.*

Demostración. Sea K el núcleo reproductivo del espacio Hilbert F. Si ξ_1, ξ_2,...,ξ_n, son escalares en $\mathbb{F}$ y y_1, y_2,...,y_n son elementos de F, entonces para la función $x \mapsto \sum_{j=1}^{n} K(x, y_j)\xi_j$ de F se tiene que

$$
\begin{aligned}
0 \leq \| \sum_{j=1}^{n} K(\cdot, y_j)\xi_j \|^2 &= \langle \sum_{j=1}^{n} K(\cdot, y_j)\xi_j, \sum_{i=1}^{n} K(\cdot, y_i)\xi_i \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \overline{\xi}_i \xi_j \langle K(\cdot, y_j), K(\cdot, y_i) \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} K(y_i, y_j)\overline{\xi}_i \xi_j
\end{aligned}
$$

según la propiedad reproductiva. $\square$

Ejemplo 2.4.1. Sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre $\mathbb{R}$ (por ejemplo la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$) y sea μ una medida positiva finita sobre $\mathcal{F}$ (por ejemplo la medida gaussiana $\mu(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$). Sea $k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la función con regla

$$k(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{isr} d\mu(r),$$

para todo número real s. Entonces

i) k es continua y acotada en $\mathbb{R}$,

ii) $k(s) = \overline{k(-s)}$ para toda $s \in \mathbb{R}$.

En efecto, si s es un número real tenemos que

$$|k(s)| \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{ist}| d\mu(t) \leq \mu(\mathbb{R}) < +\infty.$$

Ahora bien, la continuidad se sigue de lo anterior y del teorema de convergencia dominada de Lesbegue. La segunda parte es inmediata.

Por otro lado, definimos la función $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ con la regla

$$K(s, t) = \overline{k(s-t)} = k(t-s),$$

para todo par de números reales s, t. De modo que si $\{s_1, ..., s_N\} \subset \mathbb{R}$ y

$\{\xi_i, ..., \xi_N\} \subset \mathbb{C}$ entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{n,m=1}^{N} K(s_n, s_m)\bar{\xi}_n\xi_m &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{n,m=1}^{N} \bar{\xi}_n\xi_m e^{i(s_m-s_n)r} d\mu(r) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sum_{n,m=1}^{N} \xi_m e^{is_m r} \cdot \bar{\xi}_n e^{-is_n r} d\mu(r) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sum_{n,m=1}^{N} \xi_m e^{is_m r} \cdot \overline{\xi_n e^{is_n r}} d\mu(r) \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\sum_{n=1}^{N} \xi_n e^{is_n r}|^2 d\mu(r) \geq 0,
\end{aligned}$$

luego K es una matriz positiva sobre $\mathbb{R}$.

Introducimos ahora la clase F de funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de la forma

$$f(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{-isr}\phi(r)d\mu(r),$$

para toda $t \in \mathbb{R}$, donde $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es continua, acotada sobre $\mathbb{R}$ y tal que $\int_{\mathbb{R}} |\phi(r)|^2 d\mu(r) < +\infty$. Notamos que las funciones de F son también continuas y acotadas. Si $f(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{-isr}\phi(r)d\mu(r)$ y $g(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{-isr}\psi(r)d\mu(r)$, $s \in \mathbb{R}$, son funciones en F, entonces la expresión

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi(r)\overline{\psi(r)}d\mu(r),$$

define un producto interior en F, y la norma inducida es completa.

Ahora, de la definición de K, tenemos que para cualquier par de números reales s, t,

$$\begin{aligned}
K(s,t) &= k(t-s) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)r} d\mu(r) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-isr}\phi_t(r)d\mu(r),
\end{aligned}$$

donde $\phi_t(r) = e^{itr}$. Esto prueba que $K(\cdot, t)$ es una función en F. Además, de esta expresión para K es inmediata la propiedad reproductiva.

Según lo motiva este último ejemplo, el sentido inverso de la última proposición es también válido.

Teorema 2.4.1. *A toda matriz positiva $K : E \times E \to \mathbb{C}$ corresponde una única clase de funciones con una única norma determinada, formando un espacio de Hilbert y admitiendo a K como su núcleo reproductivo. Esta clase es denotada por $H(K)$, y es llamada el* espacio de Hilbert con n. r. K *generado por la matriz positiva K.*

Demostración. Sea $K : E \times E \to \mathbb{C}$ una matriz positiva, consideremos la clase F_0 de funciones, $f : E \to \mathbb{C}$, definidas por la representación única

$$f(x) = \sum_{j \in \mathcal{I}} \alpha_j K(x, y_j), \quad x \in E, \tag{2.3}$$

con $\mathcal{J}$ subconjunto de índices finito, $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $y_j \in E$, $j \in \mathcal{J}$.

Si $f \in F_0$, sobre esta clase podemos introducir una norma

$$\|f\|_0^2 = \|\sum_{j \in \mathcal{J}} \alpha_j K(\cdot, y_j)\|_0^2 = \sum_{i,j \in \mathcal{J}} K(y_i, y_j)\overline{\alpha_i}\alpha_j.$$

Si $f \in F_0$ y $g \in F_0$, el producto interior tiene la forma

$$\begin{aligned} \langle f, g\rangle_0 &= \langle \sum_{j \in \mathcal{J}} \alpha_j K(\cdot, y_j), \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i^* K(\cdot, y_i^*)\rangle_0 \\ &= \sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{i \in \mathcal{I}} K(y_i^*, y_j)\alpha_j \overline{\alpha_i^*}. \end{aligned}$$

Es muy sencillo verificar que las anteriores expresiones definen, respectivamente, una norma y un producto interior.

Ahora, sea $f \in F_0$, entonces, si $y \in E$, se tiene,

$$\begin{aligned} \langle f(\cdot), K(\cdot, y)\rangle_0 &= \langle \sum_{j \in \mathcal{J}} \alpha_j K(\cdot, y_j), K(\cdot, y)\rangle_0 \\ &= \sum_{j \in \mathcal{J}} \alpha_j \langle K(\cdot, y_j), K(\cdot, y)\rangle_0 \\ &= \sum_{j \in \mathcal{J}} \alpha_j K(y, y_j) \\ &= f(y). \end{aligned}$$

Entonces K es el núcleo reproductivo para la clase F_0. Sin embargo F_0 no es todavía un espacio de Hilbert. Si consideramos una sucesión de Cauchy $\{f_n\}_{n \geq 1}$ en F_0, y un elemento $y \in E$, se tiene,

$$|f_n(y) - f_m(y)| = |\langle f_n(\cdot) - f_m(\cdot), K(\cdot, y)\rangle_0| \leq \|f_n - f_m\|_0 \|K(\cdot, y)\|_0.$$

de donde se sigue que la sucesión de números complejos $\{f_n(y)\}_{n \geq 1}$ es de Cauchy, por ello es convergente. Podemos definir una función $f : E \to \mathbb{C}$ tal que $f_n(y) \to f(y)$, para toda $y \in E$. Consideremos de esta manera la clase $H(K)$ de funciones límite de sucesiones de Cauchy en F_0. Por tanto si $f, g \in F$ entonces existen $\{f_n\}_{n \geq 1}$ y $\{g_n\}_{n \geq 1}$ sucesiones de Cauchy en F_0 convergentes a f y g en su respectivo caso, con lo cual, sobre esta clase F, definimos un producto interno y una norma mediante las expresiones

$$\langle f, g\rangle = \lim_{n \to \infty} \langle f_n, g_n\rangle_0 \qquad \text{y} \qquad \|f\|^2 = \lim_{n \to \infty} \|f_n\|_0^2,$$

respectivamente. En la sección próxima veremos que tales expresiones no dependen de la eleción de la sucesiones de Cauchy, y que la clase F forma en efecto un espacio de Hilbert.

Por lo pronto, observamos que K es el núcleo reproductivo de la clase $H(K)$. Si $f \in H(K)$, y $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en F_0 convergente (puntualmente) a f, entonces,

$$\begin{aligned} f(y) &= \lim_{n\to\infty} f_n(y) \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle f_n(\cdot), K(\cdot, y)\rangle_0 \\ &= \langle f(\cdot), K(\cdot, y)\rangle, \end{aligned}$$

para cada $y \in E$.

Ahora, si F es un espacio de Hilbert de funciones que admite a K como núcleo reproductivo, entonces $F_0 \subset F$, pues los elementos de F_0 son combinaciones lineales de las funciones $K(\cdot, y)$ pertenecientes a F. Ahora, si $\|\cdot\|_1$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ definen la norma y el producto interno en F, y $f \in F_0$ con representación (2.3), entonces

$$\begin{aligned} \|f_0\|_1^2 &= \|\sum_{j\in\mathcal{J}} \alpha_j K(\cdot, y_j)\|_1^2 \\ &= \langle\sum_{j\in\mathcal{J}} \alpha_j K(\cdot, y_j), \sum_{i\in\mathcal{J}} \alpha_i K(\cdot, y_i)\rangle_1 \\ &= \sum_{i,j\in\mathcal{J}} K(y_i, y_j)\alpha_j\overline{\alpha_i} \\ &= \|f_0\|_0^2. \end{aligned}$$

Es decir, la restricción a F_0 de la norma $\|\cdot\|$ de F coincide con la norma $\|\cdot\|_0$ de F_0. Entonces la completación funcional $H(K)$ de F_0 es también un subconjunto de F (pues las sucesiones de Cauchy en F_0 lo son también en F, y F es completo).

Consideremos entonces una función $f \in H(K)$. Por definición existe una sucesión de Cauchy $\{f_n\}_{n\geq 1}$ en F_0 cuyo límite es f. Tenemos,

$$0 \leq |\|f\|_1 - \|f_n\|_0| = |\|f\|_1 - \|f_n\|_1| \leq \|f - f_n\|_1,$$

entonces, $\lim\limits_{n\to\infty} |\|f\|_1 - \|f_n\|_0| = 0$, con lo cual,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_0 = \|f\|_1 = \|f\|.$$

Ello implica que la norma $\|\cdot\|_1$ coincide con la norma $\|\cdot\|$ en $H(K)$; y del mismo modo, puede probarse que $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ coincide con $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en $H(K)$. Entonces $H(K)$ es una subespacio de Hilbert de F.

Por otra parte, si $f \in F$, entonces existe $f^* = P_{H(K)}(f) \in H(K)$ y $f' \perp H(K)$, tal que $f = f^* + f'$. Entonces

$$\begin{aligned} f(y) &= \langle f(\cdot), K(\cdot, y)\rangle_1 \\ &= \langle f^*(\cdot), K(\cdot, y)\rangle_1 + \langle f'(\cdot), K(\cdot, y)\rangle_1 \\ &= \langle f^*(\cdot), K(\cdot, y)\rangle \\ &= f^*(y), \end{aligned}$$

para toda $y \in E$. Por tanto $f \in H(K)$. Luego $H(K)$ y F son el mismo espacio de Hilbert. □

En la demostración anterior es claro que la clase F_0 es un subconjunto denso de $H(K)$ (respecto la norma $\|\cdot\|$). En efecto, $F_0 \subseteq H(K)$ y en F_0 la norma $\|\cdot\|$ coincide con $\|\cdot\|$, entonces toda f en $H(K)$ es un límite (en norma $\|\cdot\|$) de una sucesión de elementos en F_0.

Ejemplo 2.4.2. Un caso particularmente simple es cuando $E = \{1, ..., n\}$, y $K : E \times E \to \mathbb{R}$ es una matriz difinida positiva de dimensión finita n. En este caso es $H(K)$ es sencillamente el espacio euclídeo de dimensión n, y el producto interior puede expresarse de forma simple como el producto

$$\langle x, y\rangle = x^t \, K \, y,$$

para todo $x, y \in H(K)$.

Ejemplo 2.4.3. En referencia el Ejemplo 2.2.1, se tiene que $H(K_n) = H_n^2$, en cuanto al primer caso. Y en el caso genérico $H(K) = H$.

2.5 Completación de espacios con producto interior

En muchas ocasiones encontramos clases de funciones que forman espacios de Hilbert incompletos, esto es, clases lineales, con producto escalar, que satisfacen las propiedades de espacio de Hilbert con la excepción de la completez. Para tales clases se presenta el problema de *completar* la clase de tal manera que la clase de funciones obtenidas forme un espacio de Hilbert. Nosotros entenderemos por *completación funcional* de la una clase de funciones, como la unión de la dicha clase con un conjunto de funciones "ideales" de tal forma que la clase resultante es un espacio de Hilbert.

Teorema 2.5.1. *Sea F una clase de funciones con producto interior definido. Supongamos además las siguientes dos condiciones.*

i) Para todo y en E, la funcional $G_y : F \to \mathbb{F}$ dada por $G_y(f) = f(y)$, para toda f en F, es acotada.

ii) Para toda sucesión de Cauchy $\{f_m\}_{m\geq 1}$, tal que si $f_m(y) \to 0$, para toda y en E, entonces $\|f_m\| \to 0$.

Entonces existe una única completación funcional para F la cual contiene a F como subconjunto denso.

Demostración. Para $y \in E$ definimos la funcional $G_y(f) = f(y)$, para toda $f \in F$. Entonces, por hipótesis, existe $M_y > 0$ tal que

$$|f(y)| = |G_y(f)| \leq M_y \|f\|, \quad \text{para toda } f \in F. \tag{2.4}$$

Luego, para toda sucesión de Cauchy $\{f_n\}_{n\geq 1}$ en F , se tiene,

$$|f_m(y) - f_n(y)| \leq M_y \|f_m - f_n\|.$$

Se sigue que la sucesión de números $\{f_n(y)\}_{n\geq 1}$ es de Cauchy, por tanto existe un número $f(y)$ tal que $f(y) = \lim_{n\to\infty} f_n(y)$, para cada $y \in E$.

Consideremos la clase $\overline{F}$ de funciones f límites puntuales de sucesiones de Cauchy en F. Evidentemente $F \subseteq \overline{F}$, pues la sucesión $f_n = f$, $n \geq 1$, con $f \in F$ es de Cauchy y converge a f. Es inmediato verificar que $\overline{F}$ es un espacio vectorial.

Por otro lado, si $f \in \overline{F}$ y $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es la sucesión de Cauchy que corresponde a f como límite, y dado que

$$|\|f_n\| - \|f_m\|| \leq \|f_n - f_m\|, \qquad \text{para } m, n \geq 1,$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma sobre F, se sigue que $\{\|f_n\|\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy de números reales, por tanto es convergente.

Ahora bien, si $\{g_n\}_{n\geq 1}$ es también una sucesión de Cauchy en F y g es la correspondiente función límite en $\overline{F}$, y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interior en F, entonces es fácil verificar que

$$\mathrm{Re}\langle f_n, g_n \rangle = \frac{\|f_n + g_n\|^2 - \|f_n\|^2 - \|g_n\|^2}{2}$$

y además

$$\mathrm{Im}\langle f_n, g_n \rangle = \frac{\|f_n + ig_n\|^2 - \|f_n\|^2 - \|g_n\|^2}{2},$$

de donde se sigue que $\{\langle f_n, g_n \rangle\}_{n\geq 1}$ es una sucesión compleja convergente.

Así las cosas, sobre $\overline{F}$ definimos la función $\|\cdot\|_1$, tal que para f en $\overline{F}$,

$$\|f\|_1^2 = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|^2. \tag{2.5}$$

Se reduce a cálculos sencillos la prueba de que la expresión anterior define una norma sobre $\overline{F}$. Esta norma no depende de la elección de la susesión de Cauchy $\{f_n\} \subset F$. En efecto, si otra sucesión, $\{f'_n\}_{n\geq 1}$ converge a f para todo punto y, entonces $f_n - f'_n$ define una sucesión de Cauchy convergente a cero, y por la segunda condición de nuestras hipótesis $\|f_n - f'_n\|$ converge a cero. Por ende,

$$|\lim_{n\to\infty}\|f'_n\| - \lim_{n\to\infty}\|f_n\|| = \lim_{n\to\infty}|\|f'_n\| - \|f_n\|| \leq \lim_{n\to\infty}\|f'_n - f_n\| = 0.$$

Luego, si para f y g en $\overline{F}$ definimos $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ por la expresión

$$\langle f, g\rangle_1 = \lim_{n\to\infty}\langle f_n, g_n\rangle,$$

entonces $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ define un producto interior sobre $\overline{F}$.

Resta probar que la clase $\overline{F}$ es completa y que contiene F como un subespacio denso. Sea $f \in \overline{F}$, por definición, existe una sucesión de Cauchy $\{f_n\}_{n\geq 1}$ en F tal que $f_n(y) \to f(y)$, para cada punto $y \in E$. Entonces para cada $n \geq 1$ y todo punto $y \in E$,,

$$f_m(y) - f_n(y) \to f(y) - f_n(y), \quad \text{cuando } m \to \infty,$$

y dado que $\{f_m - f_n\}_{m\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en F, se sigue que $f - f_n \in \overline{F}$. Entonces tenemos,

$$\|f - f_n\|_1 = \lim_{m\to\infty}\|f_m - f_n\|,$$

luego,

$$\lim_{n\to\infty}\|f - f_n\|_1 = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\|f_m - f_n\| = 0,$$

pues $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy.

Se aprecia entonces que f es un punto límite de F, por ende, F es un subconjunto denso de $\overline{F}$.

Para probar la completez de $\overline{F}$, consideremos una sucesión de Cauchy $\{f_n\}_{n\geq 1}$ cualquiera en $\overline{F}$. Por hipótesis, para cada $n \geq 1$ podemos encontrar otra sucesión de Cauchy $\{g_m^{(n)}\}_{m\geq 1}$ en F, tal que $g_m^{(n)}(y) \to f_n(y)$, cuando $m \to \infty$, para todo punto y en E. Como F es denso en $\overline{F}$, es posible definir la sucesión $\{f'_n\}_{n\geq 1}$ con $f'_n = g_{k_n}^n$, donde el número k_n es tal que

$$\|f_n - f'_n\| = \|f_n - g_{k_n}^n\|_1 < \frac{1}{n},$$

para toda $n \geq 1$.

Tenemos entonces que la sucesión $\{f'_n\}_{n\geq 1}$ es de Cauchy sobre F. En efecto, sea $\epsilon > 0$ y consideremos los números $n < m$ tales que $\frac{2}{n} < \frac{\epsilon}{2}$ y $\|f_m - f_n\|_1 < \frac{\epsilon}{2}$, se tiene entonces,

$$\begin{aligned}\|f'_n - f'_m\|_1 - \|f_m - f_n\|_1 &\leq \|f'_n - f'_m + f_m - f_n\|_1\\ &\leq \|f'_n - f_n\|_1 + \|f_m - f'_m\|_1\\ &< \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{2}{n}\\ &< \frac{\epsilon}{2}.\end{aligned}$$

De donde,

$$\|f'_n - f'_m\|_1 < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

para n y m suficientemente grandes.

Luego existe una función f en $\overline{F}$ tal que $f'_n \to f$ puntualmente sobre todo E. Por tanto, dado que

$$|\|f_n\|_1 - \|f\|_1| \leq \|f_n - f\|_1 \leq \|f_n - f'_n\|_1 + \|f'_n - f\|_1,$$

además, de la propia definición de f'_n, $\|f_n - f'_n\|_1 \to 0$, y por convergencia $\|f'_n - f\|_1 \to 0$, entonces

$$\|f_n\|_1 \to \|f\|_1.$$

□

En general, la completación realizada en este sentido no es posible, como lo ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.5.1. Consideremos $\mathcal{Z} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Y sea $S \subset \mathcal{Z}$, $S = \{1 - \frac{1}{2^n} \mid n \geq 0\}$. Ahora, si p es un polinomio en $z \in \mathcal{Z}$ entonces $p(z_n) = 0$ para toda $n \geq k$ para alguna $k \geq 0$, si y sólo si p es idénticamente cero. De esta afirmación se sigue que para dos polinomios p y q, $p(z_n) = q(z_n)$ para toda $n \geq k$, para alguna $k \geq 0$, si y sólo si $p = q$.

Sea pues F la clase de fuciones $f : S \to \mathbb{C}$ tal que existe un único polinomio p en $z \in \mathcal{Z}$ tal que $f(z_n) = p(z_n)$ para toda $z_n \in S$. Bajo las operaciones habituales de suma y producto por escalares F es una clase lineal.

Ahora, para cualquier par f y g en F, definimos el producto

$$\langle f, g\rangle = \int\int_{|z|<1} p(z)q(z)dxdy, \qquad z = x + iy, \tag{2.6}$$

donde p y q son polinomios en $z \in \mathcal{Z}$ cuyas restricciones en S están dadas por las funciones f y g, respectivamente. Tenemos pues que, en primer lugar, $\int\int_{|z|<1} p(z)q(z)dxdy$ es un número complejo, para cualesquiera polinomios p y q sobre el disco complejo $|z| < 1$. Ahora bien, para un par de funciones f y g en F existen dos únicos polinomios p y q sobre $\mathcal{Z}$ cuyas restricciones a S son f y g respectivamente, entonces existe un único número $\langle f, g\rangle$ para cada par f, g en F. Las propiedades de linealidad y simetría se siguen de forma inmediata, además $\langle f, f\rangle \geq 0$ para toda $f \in F$. Si $f = 0$ entonces $\langle f, f\rangle = 0$, por otro lado, si $\langle f, f\rangle = 0$ y p es el polinomio cuya restricción en S es f, entonces $p = 0$ casi dondequiera, pero por continuidad, $p = 0$, esto es $f = 0$. Concluimos que (2.6) define un producto interior. Con lo cual, la expresión

$$\|f\|^2 = \int\int_{|z|<1} |p(z)|^2 dxdy, \qquad z = x + iy,$$

donde p es el polinomio cuya restricción en S está determinada por la función $f \in F$, define una norma sobre F.

Sin embargo, el espacio F no es completo, y no es posible la completación funcional. En efecto, sobre $\mathcal{Z}$ definimos las funciones

$$w_n(z) = \frac{z_n - z}{1 - z_n z}, \qquad \text{con } z_n \in S \ (z_n = 1 - \tfrac{1}{2^n}),$$

consideremos el producto de Blaschke asociado a la sucesión S,

$$p(z) = \prod_{n=0}^{\infty} w_n(z),$$

Observamos que p se anula solo en los números z_n, $n = 0, 1, ...,$ de S. Algebraicamente, si $z = x + iy$ y $|z| < 1$, entonces

$$(1 - z_n z)^2 - (z_n - z)^2 = 1 - z_n^2 - (x^2 + y^2)(1 - z_n^2) \geq 0,$$

por tanto

$$\frac{|z_n - z|}{|1 - z_n z|} \leq 1 \quad \text{para toda } z \in \mathcal{Z} \text{ y para toda } n \geq 0,$$

de donde se sigue que $|p(z)| \leq 1$ para toda $z \in \mathcal{Z}$ ($|z| < 1$).

Ahora bien, la función p es continua, entonces existe una sucesión de polinomios (p_k) tal que $p_k(z) \to p(z)$, si $k \to \infty$, para toda $z \in \mathcal{Z}$. Además, como $|p(z)| \leq 1$ podemos suponer que $|p_k(z)| \leq 1$, para toda z y para toda k, por tanto $|p(z) - p_k(z)|^2 \leq 1$ para toda z y para toda k. Entonces

$$\lim_{k\to\infty} \int\int_{|z|<1} |p(z) - p_k(z)|^2 dxdy = 0,$$

es decir, la sucesión de polinomios (p_k) converge en norma a p, pero p no es un polinomio. F no es completo.

Por otro lado, tenemos una sucesión de funciones (f_k) en F (las restriciones al conjunto S respectivas de los polinomios p_k) tal que $f_k(z_n) \to 0$, si $k \to \infty$, para todo $z_n \in S$, sin embargo, dado que p es una función no negativa que se anula solo en un conjunto no denso numerable entonces

$$\begin{aligned} 0 < \int\int_{|z|<1} |p(z)|^2 dxdy &= \lim_{k\to\infty} \int\int_{|z|<1} |p_k(z)|^2 dxdy \\ &= \lim_{k\to\infty} \|f_k\|^2. \end{aligned}$$

Según el teorema de completación funcional no es posible la completación de este espacio.

Si sucede que para la clase incompleta F es conocido un núcleo $K(x,y)$ tal que para todo y, $K(x,y)$ como función de x pertenece a F (o más generalmente, pertenece a un espacio de Hilbert que contiene a F como subespacio), este núcleo tiene la propiedad reproductiva

$$f(y) = \langle f(x), K(x,y) \rangle,$$

para toda $f \in F$. La primera condición de nuestro teorema es inmediatamente verificable, se sigue de la propiedad reproductiva. Así que es suficiente verificar la segunda condición para aplicarlo.

De esta manera, en caso de que la clase F es generada por la matriz positiva K, para una sucesión $\{f_n\}_{n\geq 1}$, $f_n(\cdot) = \sum_{j\in\mathcal{J}} \alpha_j^n K(\cdot, y_j^n)$, en F se tiene que

$$\|f_n\|^2 = \sum_{i,j\in\mathcal{J}} K(y_i^n, y_j^n)\overline{\alpha_i}^n \alpha_j^n,$$

converge a cero cuando $f_n \to 0$ puntualmente sobre E. Luego, es posible la completación funcional.

2.6 Restricción de un núcleo reproductivo

Si K es el núcleo reproductivo del espacio de Hilbert F, entonces K es una matriz positiva. Es evidente que la restricción de K al producto $E_1 \times E_1$, con $E_1 \subset E$, sigue siendo una matriz positiva. Sabemos entonces que existe una única clase F_1, con una norma $\|\cdot\|_1$ y producto interior $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ adecuados, de funciones definidas sobre E_1 que admite dicha restricción de K como núcleo reproductivo. Es natural pensar que la clase F_1 se compone de todas las restriciones f_1 al subconjunto E_1 de las funciones f en F. Y el verdadero problema es encontrar las expresiones que definen la norma y el producto interno. En esta sección nos daremos a la tarea de buscarlas.

Consideremos pues la clase F_1 de todas las restricciones sobre E_1 de funciones de F. Para comprobar la efectividad de nuestra consideración intuitiva del párrafo anterior, anotamos este primer resultado.

Lema 2.6.1. *Sea f_1 un elemento de la clase F_1, entonces la expresión*

$$\|f_1\|_1 = \min\{\|f\| : f \in F \text{ cuya restricción en } F_1 \text{ es } f_1\}, \tag{2.7}$$

define una norma para la clase F_1.

Demostración. Sea f_1 en F_1. Lo importante es mostrar que el conjunto

$$\mathcal{A} = \{\|f\| : f \in F \text{ cuya restricción en } F_1 \text{ es } f_1\}$$

en efecto posee un elemento mínimo. Considere el subespacio lineal cerrado $F_0 \subset F$ formado por todas las funciones que se anulan en E_1, y su espacio complementario F' ($F' = F_0^{\perp}$). Si dos funciones f y g de F tienen la misma restricción f_1 en E_1, entonces $f - g$ se anula sobre E_1, y con ello también pertenece a F_0. Inversamente, si la diferencia pertenece a F_0, entonces f y g tienen la misma restricción f_1 en E. Así las cosas, si f y g tienen igual restricción f_1 en el subconjunto E_1, entonces la proyeción de $f - g$ sobre F_0 es la función identicamente cero, y como el operador proyección es lineal, f y g tienen también proyección común f_1' sobre F'. Además, la restricción a E_1 de f_1' es precisamente f_1, esto es $f_1' \in \mathcal{A}$. De tal manera que toda función $f \in \mathcal{A}$ posee la descomposición ortogonal $f = f_0 + f_1'$, donde f_0 es alguna función en F_0. Se sigue, según el teorema de Pitágoras, que

$$\|f\| = \|f_0 + f_1'\| = \|f_0\| + \|f_1'\| \geq \|f_1'\|.$$

Por ende la expresión en (2.7) tiene sentido, y de hecho

$$\|f_1\|_1 = \|f_1'\|.$$

Resulta sencillo comprobar ahora que en efecto la expresión anterior cumple las propiedades de norma sobre F_1. $\square$

Lema 2.6.2. *La norma del Lema 2.6.1 proviene de un producto interior. Es decir, $\|\cdot\|_1$ cumple la ley del paralelogramo (Proposición 1.1.3).*

Demostración. Sea f_1 y g_1 funciones en F_1 restricciones de f y g de F, respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned}
\|f_1 + g_1\|_1^2 - \|f_1 - g_1\|_1^2 &= \|(f+g)_1\|_1^2 - \|(f-g)_1\|_1^2 \\
&= \|(f+g)_1'\|^2 - \|(f-g)_1'\|^2 \\
&= \|f_1' + g_1'\|^2 - \|f_1' - g_1'\|^2 \\
&= 2(\|f_1'\|^2 + \|g_1'\|^2) \\
&= 2(\|f_1\|_1^2 + \|g_1\|_1^2),
\end{aligned}$$

luego $\|\cdot\|_1$ proviene de un producto interior $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$. $\square$

Ahora hagamos algunas aclaraciones importantes. Para f_1 en F_1 corresponde la proyección f_1' sobre F' de una función f cuya restricción a E_1 es f_1. Dicha correspondencia entre $f_1 \in F_1$ y $f_1' \in F'$ es isométrica uno-a-uno entre el espacio F_1 el espacio F'. Sucede que si las proyecciones f_1' y g_1' de f y g, respectivamente, son iguales, entonces, en particular, sobre E_1, $f_1' = f_1 = g_1 = g_1'$, donde f_1 y g_1 son las restricciones de f y g respectivamente. Por otra parte, si f_1' pertenece a F', entonces $h = f - f_1' \in F_0$, con $f = f_1'\chi_{E_1}$ (aquí χ_{E_1} es la función característica del subconjunto E_1), se sigue que para la restricción f_1 a E_1 de $f = f_1' + h$ corresponde f_1' en F'.

Finalmente, el siguiente resultado nos da la respuesta final a nuestro problema.

Teorema 2.6.1. *Si K es el núcleo reproductivo de la clase F de funciones definidas en el conjunto E con norma $\|\cdot\|$, entonces K restringido al subconjunto $E_1 \subset E$ (en ambas variables) es el núcleo reproductivo de la clase compuesta de todas las funciones de F restringidas al subconjunto E_1, cuya norma está definida por la expresión (2.7).*

Demostración. De nueva cuenta, consideremos los subespacios cerrados F_0 y F'. Ambos espacios poseen un núcleo reproductivo K_0 y K' respectivamente (puesto que F posee un núcleo reproductivo). Ahora sea $f \in F$, y consideremos su descomposición ortogonal como en la demostración del Lema 2.6.1 $f = f_0 + f_1'$. Tenemos, para $y \in E$,

$$\begin{aligned}
f(y) &= f_0(y) + f_1'(y) \\
&= \langle f_0(\cdot), K_0(\cdot, y)\rangle + \langle f_1'(\cdot), K'(\cdot, y)\rangle \\
&= \langle f_0(\cdot) + f_1'(\cdot), K_0(\cdot, y)\rangle + \langle f_0(\cdot) + f_1'(\cdot), K'(\cdot, y)\rangle \\
&= \langle f_0(\cdot) + f_1'(\cdot), K_0(\cdot, y) + K'(\cdot, y)\rangle \\
&= \langle f(\cdot), K_0(\cdot, y) + K'(\cdot, y)\rangle
\end{aligned}$$

Se sigue que $K = K_0 + K'$.

Ahora, dado que $K_0(\cdot, y)$ pertenece a F_0, para todo número y en E, entonces se anula para todo $x \in E_1$. En consecuencia,

$$K(x, y) = K'(x, y) \tag{2.8}$$

para $x \in E_1$.

Para probar que para la clase F_1 con norma $\|\cdot\|_1$ el núcleo reproductivo está dado por K restringido a E_1 (en ambas variables), tomamos una función $f_1 \in F_1$ y consideremos la correspondiente función $f_1' \in F'$. Entonces, para $y \in E_1$, $f_1(y) = f_1'(y) = \langle f_1'(\cdot), K'(\cdot, y)\rangle$.

Dado que $K'(\cdot, y) \in F'$, puede ahora escribirse $f_1(y) = \langle f_1'(\cdot), K'(\cdot, y)\rangle = \langle f_1(\cdot), K_1(\cdot, y)\rangle_1$, donde K_1 es la restricción de K' al conjunto E_1.

De la expresión (2.8), para $x \in E_1$,

$$K(x,y) = K'(x,y) \quad \text{para toda } y \in E_1.$$

Esto muestra que la restricción $K_1(x,y)$ de $K'(x,y)$ coincide con la restricción de K en el conjunto E_1. $\square$

2.7 Núcleos reproductivos de clases de dimensión finita

Si el espacio con producto interior F de funciones definidas sobre un conjunto E, es de dimensión finita, podemos establecer con toda claridad la forma explícita de su respectivo núcleo reproductivo, suprimiendo los supuestos de completez y cerradura. Además estableceremos unas condiciones suficientes que permiten a una función ser un núcleo reproductivo.

Teorema 2.7.1. *Sea F una clase de funciones de dimensión finita n con producto interior $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Entonces el núcleo reproductivo de F es la función $K : E \times E \to \mathbb{C}$ dada por*

$$K(x,y) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} w_i(x)\overline{w_j(y)}, \tag{2.9}$$

donde w_i, $i = 1,..,n$ son funciones linealmente independientes en F, $B = [\beta_{i,j}]_{ij} = \overline{W^{-1}}$ (puede observarse que para una matriz no singular A, $\overline{A^{-1}} = \overline{A}^{-1}$) y $W = [\langle w_i, w_j\rangle]_{i,j}$ es una matriz definida positiva de dimensión n.

Inversamente, si $B = [\beta_{i,j}]_{ij}$ es una matriz definida positiva de dimensión n, y si la clase F es generada por la colección de funciones linealmente independientes w_i, $i = 1,...,n$, entonces las expresiones

$$\|f\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\zeta_i\overline{\zeta}_j \;\; y \;\; \langle f,g\rangle = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\zeta_i\overline{\eta}_i,$$

donde ζ_k, η_k, $k = 1,...,n$ son constantes complejas, $f = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k w_k$, $g = \sum_{k=1}^{n} \eta_k w_k \in F$, y $\{\alpha_{ij}\}$ es la matriz inversa de $\{\overline{\beta_{ij}}\}$, determinan una norma y un producto escalar sobre F, respectivamente. De esta manera, F es un espacio de Hilbert cuyo núcleo reproductivo K tiene la regla dada por la ecuación (2.9).

Demostración. Sea w_1, w_2,...,w_n, una colección de tamaño n de funciones linealmente independientes y de norma unitaria en F. Entonces, toda función f de F tiene una única representación de la forma

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k w_k(x), \tag{2.10}$$

con ζ_k constantes complejas, para toda $x \in E$.

Sea $\langle w_i, w_j \rangle = \alpha_{ij}$, para $i, j = 1, ..., n$. Entonces en F el producto interior, según sus propias propiedades, tiene en realidad la forma

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i,j} \langle w_i, w_j \rangle \zeta_i \overline{\eta}_i = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \zeta_i \overline{\eta}_i, \tag{2.11}$$

donde $g = \sum \eta_k w_k$. Por ende, la norma al cuadrado tiene la forma

$$\|f\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \langle w_i, w_j \rangle \zeta_i \overline{\zeta}_j = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \zeta_i \overline{\zeta}_j. \tag{2.12}$$

De tal forma, la matriz $W = [\alpha_{ij}]_{i,j}$ de dimensión n es, en primer lugar, una matriz definida positiva. En efecto, para un vector $\mathcal{X} = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ en $\mathbb{C}^n$, la forma cuadrática

$$\overline{\mathcal{X}^t} W \mathcal{X} = \sum_{i,j=1}^{n} \langle w_i, w_j \rangle \gamma_i \overline{\gamma}_j = \|h\|^2,$$

con $h = \sum_{i=1}^{n} w_i \gamma_i \in F$, es no negativa y es nula si y sólo si $h = 0$, pero por independencia de las funciones w_i, $i = 1, ..., n$, tal situación solo sucede si $\gamma_i = 0$, para todo $i = 1, ..., n$.

En segundo lugar, lo anterior también prueba que W es no singular, por tanto para W existe una matriz inversa no negativa y de igual dimensión. Sea $B = \overline{W^{-1}} = [\beta_{ij}]_{i,j}$, tenemos entonces,

$$\sum_i \alpha_{ki} \overline{\beta_{ij}} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k, \\ 1 & \text{si } j = k. \end{cases}$$

Definimos ahora la función $K : E \times E \to \mathbb{C}$, determinada por la regla

$$K(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} w_i(x) \overline{w_j(y)}, \tag{2.13}$$

para todo par x, y en E.

Evidentemente, la transformación $x \mapsto K(x, y)$ pertenece a F, para toda

$y \in E$. Ahora bien, si $f = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k w_k$ entonces

$$
\begin{aligned}
\langle f(\cdot), K(\cdot, y)\rangle &= \langle \sum_{k=1}^{n} \zeta_k w_k(\cdot), \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} w_i(\cdot)\overline{w_j(y)}\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki}\overline{\beta_{ij}}\zeta_k w_j(y) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki}\overline{\beta_{ik}}\zeta_k w_k(y) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \zeta_k w_k(y) \\
&= f(y),
\end{aligned}
$$

para todo $y \in E$. De modo que K es el n.r. para F.

De manera inversa, si tenemos una matriz de dimensión n definida positiva $B = [\beta_{ij}]_{i,j}$, y definimos para la colección de funciones l. i. w_1, w_2,...,w_n, el producto interno

$$\alpha_{ij} = \langle w_i, w_j\rangle, \quad i, j = 1, ..., n,$$

donde α_{ij} pertenece a la matriz inversa W de $\overline{B}$ (i.e. $W = \overline{B}^{-1}$), la cual es también definida positiva. Entonces, para la clase de funciones F de la forma (2.10) generada por las funciones w_i, $i = 1, ..., n$, definimos la norma y un producto interior con las expresiones (2.12) y (2.11) respectivamente.

Es sencillo verificar que la expresión (2.12) determina un norma, basta observar que para una función $f = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k w_k$ en F, la forma cuadrática no negativa

$$\overline{\mathcal{X}^t} W \mathcal{X} = \sum_{i,j=1}^{n} \langle w_i, w_j\rangle \zeta_i \overline{\zeta}_j,$$

con $\mathcal{X} = (\zeta_1, ..., \zeta_n)$, es precisamente $\|f\|^2$. Resulta más sencillo verificar que la expresión (2.11) es efectivamente un producto escalar. Además la función $K : E \times E \to \mathbb{C}$ dada por (2.13) para todo par x, y en E, es el núcleo reproductivo de la clase F. La verificación de este último hecho es análoga a la realizada en la primera parte de esta demostración. □

En general podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 2.7.2. *Si F es un espacio de Hilbert de funciones definidas sobre un conjunto E con núcleo K, y $\{\psi_i\}_{i\in I}$ (I subconjunto de índices) es una base de F, entonces para todo x, y en E*

$$K(x, y) = \sum_{i\in I} \psi_i(x)\overline{\psi}_j(y).$$

La prueba se sigue del Teorema 2.7.1.

Ejemplo 2.7.1. [Lukić y Beder [6]] Este ejemplo introduce una variante del Ejemplo 2.2.1. Sea H_n la clase de funciones $x : \{1, ..., n\} \to \mathbb{R}$, tal que para $x(i) = x_i$, para algún vector $(x_i, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Sobre esta clase,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} j^2 x_j y_j,$$

define un producto interno. Entonces, las funciones $e_i(j) = \frac{1}{i}\delta_{ji}$, $i = 1, ..., n$, son una base para H_n. Luego, el núcleo es

$$K(i, j) = \frac{1}{ij}\delta_{ij}$$

para todo $i, j \in \{1, ..., n\}$.

En general, si $\mathcal{H}$ es el conjunto de sucesiones $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $\sum_i i^2 x_i^2 < \infty$, y H es la correspondiente clase de funciones $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $(x = (x_1, ...) \in \mathcal{H})$ con producto interior

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 x_i y_i,$$

entonces las funciones $e_i(j) = \frac{1}{i}\delta_{ij}$, $i \geq 1$, son una base de H, y el núcleo es

$$K(i, j) = \frac{1}{ij}\delta_{ij},$$

para $i, j \geq 1$.

Ejemplo 2.7.2. [Lehtö,1950] Consideremos una sucesión monótona decreciente de números reales no negativos $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ y $\alpha_n \leq 1/2$ para toda $n \geq 1$. Sea también $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión monótona creciente de números reales no negativos tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 1$ y $\beta_n \geq 1/2$ para toda $n \geq 1$.

Sobre el intervalo $(0, 1)$ definimos la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ con la expresión

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \alpha_{n+1} \\ 2\frac{t-\alpha_{n+1}}{\alpha_n-\alpha_{n+1}}, & \alpha_{n+1} \leq t \leq \frac{\alpha_n+\alpha_{n+1}}{2} \\ -2\frac{t-\alpha_{n+1}}{\alpha_n-\alpha_{n+1}}, & \frac{\alpha_n+\alpha_{n+1}}{2} \leq t \leq \alpha_n \\ 0, & \alpha_n \leq t \leq \beta_n \\ 2k_n(t-b_n), & \beta_n \leq t \leq \frac{\beta_n+\beta_{n+1}}{2} \\ -2\frac{t-\beta_{n+1}}{\beta_{n+1}-\beta_n}, & \frac{\beta_{n+1}+\beta_n}{2} \leq t \leq \beta_{n+1} \\ 0, & \beta_{n+1} \leq t < 1, \end{cases}$$

donde k_n es una constante tal que $\int_0^1 |f_n(t)|^2 dt = 1$, para toda $n \geq 1$.

Las funciones f_n son continuas, además, si $m \neq n$, $f_n \cdot f_m = 0$, entonces $\int_0^1 f_n(t)f_m(t)dt = 0$ (si $m \neq n$).

Sea F el espacio de todas las funciones sobre $(0,1)$ de la forma

$$a(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(t), \qquad \text{para todo } t \in (0,1),$$

donde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números complejos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. Entonces $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base para F.

Para $a(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(t)$ y $b(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n(t)$ en F, la expresión

$$\langle a, b\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{b}_n,$$

define un producto interior en F, y la norma inducida es completa. La función $K : (0,1) \times (0,1) \to \mathbb{C}$,

$$K(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(s)\overline{f}_n(t),$$

es el núcleo reproductivo de la clase F. En primer lugar fijemos un número $t \in (0,1)$, entonces, existe n_0 natural tal que $\alpha_n < t < \beta_n$ para toda $n \geq n_0$, luego, $\overline{f}_n(t) = 0$ para toda $n \geq n_0$. Por tanto $\sum |\overline{f}_n(t)|^2 < \infty$, se sigue que $K(\cdot, t) \in F$.

Ahora, si $a(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(t)$ está en F, entonces,

$$\langle a, K(\cdot, t)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{\overline{f}}_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(t) = a(t),$$

lo cual prueba la propiedad reproductiva de K.

Capítulo 3

Operaciones con núcleos reproductivos

3.1 Suma de núcleos reproductivos

Sea K_1 y K_2 un par de núcleos reproductivos correspondientes a las clases F_1 y F_2, de funciones definidas en el mismo conjunto E, con normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$, respectivamente. La nueva matriz $K = K_1 + K_2$ es claramente una matriz positiva. En este caso, K corresponde como núcleo reproductivo, a una clase de funciones F. En primer término, podemos apoyarnos en la consideración intuitiva de que la clase F se compone de funciones $f = f_1 + f_2$, donde $f_i \in F_i$, $i = 1, 2$. Así entonces, introducimos el espacio $\mathcal{F}$ de todos los pares (f_1, f_2). Con las operaciones de producto escalar y suma de vectores habitualmente considerada para pares ordenados, $\mathcal{F}$ es un espacio lineal. Además la ecuación

$$\|(f_1, f_2)\|_{\mathcal{F}}^2 = \|f_1\|_1^2 + \|f_2\|_2^2.$$

para todo par (f_1, f_2) determina una norma completa sobre $\mathcal{F}$ y un producto interior. De tal manera que $\mathcal{F}$ es un espacio de Hilbert.

Es importante observar la forma explícita del producto interno. Si $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ son los productos internos respectivos de F_1 y F_2, entonces el producto interno en $\mathcal{F}$ tiene la forma

$$\langle(f_1, f_2), (h_1, h_2)\rangle_{\mathcal{F}} = \langle f_1, h_1\rangle_1 + \langle f_2, h_2\rangle_2,$$

para (f_1, f_2) y (h_1, h_2) en $\mathcal{F}$.

Sea F_0 la clase de funciones f pertenecientes tanto a F_1 como a F_2 (F_0 puede contener solo la función nula), y sea $\mathcal{F}_0$ el conjunto de todas los pares $(f, -f)$ para $f \in F$.

Lema 3.1.1. *$\mathcal{F}_0$ es un subespacio lineal cerrado de $\mathcal{F}$.*

Demostración. En efecto, si $(f_n, -f_n) \to (f', f'')$, es decir,

$$\|(f_n - f', -f_n - f'')\|_{\mathcal{F}} \to 0,$$

entonces,

$$\|f_n - f'\|_1 \to 0 \quad \text{y} \quad \| - f_n - f''\|_2 \to 0.$$

Esto es $f_n \to f'$ en F_1 y $-f_n \to f''$ en F_2, lo cual significa que $f'' = -f'$, y f' y f'' pertenecen a F_0.

La linealidad es inmediata y se omite su verificación. □

Para todo par (f_1, f_2) de $\mathcal{F}$, existe una correspondiente función $f = f_1 + f_2$. Esta correspondencia transforma linealmente el espacio $\mathcal{F}$ en una clase de funciones en F. Ahora consideremos el subespacio cerrado complementario $\mathcal{F}_1$ (tal que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1$).

Lema 3.1.2. *La correspondecia $G : \mathcal{F} \to F$ definida por $G(f', f'') = f' + f''$ transforma inyectivamente $\mathcal{F}_1$ en F.*

Demostración. Si el par (f_1, f_2) de $\mathcal{F}$ es tal que $f_1 + f_2 = 0$, entonces $f_2 = -f_1$, con lo cual (f_1, f_2) pertenece a $\mathcal{F}_0$.

Así pues, si para (f_1, f_2) y (g_1, g_2) en $\mathcal{F}_1$ se tiene que $f_1 + f_2 = g_1 + g_2$, entonces $f_2 - g_2 = -(f_1 - g_1)$, con lo cual $(f_1 - g_1, f_2 - g_2)$ pertenece a $\mathcal{F}_0$, pero en realidad $(f_1, f_2) - (g_1, g_2) = (f_1 - g_1, f_2 - g_2)$ es un elemento de $\mathcal{F}_1$ (por cerradura). Por ende $(f_1, f_2) = (g_1, g_2)$.

□

Ahora, según lo anterior, si consideramos la correspondencia inversa, toda función f de F es transformada en un par $(g_1(f), g_2(f))$ de $\mathcal{F}_1$. Podemos introducir una norma $\| \cdot \|$ en F definida por

$$\|f\|^2 = \|(g_1(f), g_2(f))\|^2_{\mathcal{F}} = \|g_1(f)\|^2_1 + \|g_2(f)\|^2_2. \tag{3.1}$$

El producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en F tiene entonces la expresión

$$\langle f, h \rangle = \langle (g_1(f), g_2(f)), (g_1(h), g_2(h)) \rangle_{\mathcal{F}} = \langle g_1(f), g_1(h) \rangle_1 + \langle g_2(f), g_2(h) \rangle_2.$$

Bajo estás condiciones, F es un espacio de Hilbert. La verificación explícita de este hecho no es sustanciosa y se omite.

Ahora bien, es claro que $K(\cdot, y)$, para y cualquiera, pertenece a F y $(K_1(\cdot, y), K_2(\cdot, y)) \in \mathcal{F}$. Para toda $y \in E$ definimos dos nuevas funciones K' y K'' determinadas por

$$K'(\cdot, y) = g_1(K(\cdot, y)) \qquad \text{y} \qquad K''(\cdot, y) = g_2(K(\cdot, y)).$$

En tanto que para una función $f \in F$, definimos $f' = g_1(f)$, $f'' = g_2(f)$. Con lo cual,

$$f = f' + f'' \qquad \text{y} \qquad K'(\cdot, y) + K''(\cdot, y) = K(\cdot, y) = K_1(\cdot, y) + K_2(\cdot, y),$$

de donde,

$$K''(\cdot,y) - K_2(\cdot,y) = -[K'(\cdot,y) - K_1(\cdot,y)],$$

lo cual significa que

$$(K_1(\cdot,y) - K'(\cdot,y), K_2(\cdot,y) - K''(\cdot,y)) \in \mathcal{F}_0.$$

Bajo estas convenciones, enunciamos el siguiente resultado.

Teorema 3.1.1. *Para la clase F con norma definida por la ecuación (3.1), la función $K = K_1 + K_2$ es el núcleo reproductivo.*

Demostración. Sea $f \in F$ y $y \in E$, entonces,

$$\begin{aligned} f(y) &= f'(y) + f''(y) \\ &= \langle f'(\cdot), K_1(\cdot,y)\rangle_1 + \langle f''(\cdot), K_2(\cdot,y)\rangle_2 \\ &= \langle (f', f''), (K_1(\cdot,y), K_2(\cdot,y))\rangle \\ &= \langle (f', f''), (K'(\cdot,y), K''(\cdot,y))\rangle \\ &\quad + \langle (f', f''), (K_1(\cdot,y) - K'(\cdot,y), K_2(\cdot,y) - K''(\cdot,y))\rangle. \end{aligned}$$

El último producto escalar es igual a cero, pues el elemento $(f', f'') \in \mathcal{F}_1$ y el elemento $(K_1(\cdot,y) - K'(\cdot,y), K_2(\cdot,y) - K''(\cdot,y)) \in \mathcal{F}_0$. Mientras que el primer producto escalar es, por definición, igual a $\langle f(\cdot), K(\cdot,y)\rangle$, lo cual prueba la propiedad reproductiva del núcleo K. $\square$

En la caracterización de la clase F, podemos proceder sin introducir el espacio auxiliar $\mathcal{F}$. Consideremos $f \in F$ y todas las posibles descomposiciones $f = f_1 + f_2$. Definimos

$$\|f\|^2 = \min_{\{f_1, f_2 : f = f_1 + f_2\}} [\|f_1\|_1^2 + \|f_2\|_2^2]$$

Esta definición para la norma en F es equivalente a la anterior, pues basta observar que f en F corresponde al elemento $(f_1, f_2) \in \mathcal{F}$ y recíprocamente, f corresponde a $(g_1(f), g_2(f)) \in \mathcal{F}_1$, con lo cual $f = f_1 + f_2 = g_1(f) + g_2(f)$. De ahí que

$$f_2 - g_2(f) = -[f_1 - g_1(f)],$$

entonces $(f_1 - g_1(f), f_2 - g_2(f)) \in \mathcal{F}_0$. Luego, por ortogonalidad,

$$\|f_1\|_1^2 + \|f_2\|_1^2 = \|(f_1, f_2)\|^2 = \|(g_1(f), g_2(f))\|^2 + \|(f_1 - g_1(f), f_2 - g_2(f))\|^2,$$

y esta expresión es mínima si y solo si $f_1 = g_1(f)$, $f_2 = g_2(f)$. De donde

$$\min_{\{f_1, f_2 : f = f_1 + f_2\}} [\|f_1\|_1^2 + \|f_2\|_2^2] = \|(g_1(f), g_2(f))\|^2,$$

y por la definión previa es igual a $\|f\|^2$.

Finalmente el último teorema puede ser también enunciado de la manera siguiente.

Teorema 3.1.2. *Si K_i es el núcleo reproductivo de la clase F_i con norma $\|\cdot\|_i$, $i = 1, 2$, entonces $K = K_1 + K_2$ es el núcleo reproductivo de la clase F de todas las funciones $f = f_1 + f_2$ con $f_i \in F_i$, $i = 1, 2$, y con norma definida por*

$$\|f\|^2 = \min_{\{f_1, f_2 : f = f_1 + f_2\}} \{\|f_1\|_1^2 + \|f_2\|_2^2\}$$

Un caso particularmente simple se presenta cuando las clases F_1 y F_2 no tienen funciones distintas de cero en común. La norma en F está dada simplemente por $\|f\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2$, pues toda función f tendrá representación única.

La enunciación de este último teorema facilita la generalización al caso donde $K = \sum_{t=1}^n K_t$. Aquí, las funciones $f = \sum_{t=1}^n f_t$, con $f_t \in F_t$, $t = 1, ..., n$ forman una clase F cuya norma está definida por

$$\|f\|_2 = \min_{\{f_1, ..., f_n : f = \sum_{i=1}^n f_i\}} \{\sum_{i=1}^n \|f_i\|_i^2\},$$

y donde K corresponde como núcleo reproductivo.

Observación 3.1.1. *Sea F una clase de funciones definidas en un conjunto E con norma $\|\cdot\|$ y producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$, supongamos que F tiene por núcleo reproductivo la matriz K. Si α es una constante real positiva, entonces la matriz positiva $K_1 = \alpha K$ corresponde como núcleo reproductivo a la misma clase F pero con norma y producto interior definidos mediante las expresiones*

$$\|f\|_1^2 = \frac{1}{\alpha}\|f\|^2 \qquad y \qquad \langle f, g \rangle_1 = \frac{1}{\alpha}\langle f, g \rangle$$

para f y g en F. En efecto, para $f \in F$ y $y \in E$, se verifica

$$f(y) = \langle f(\cdot), K(\cdot, y) \rangle = \frac{1}{\alpha}\langle f(\cdot), \alpha K(\cdot, y) \rangle = \langle f(\cdot), K_1(\cdot, y) \rangle_1.$$

Siendo además evidente que $K_1(\cdot, y) = \alpha K(\cdot, y) \in F$.

Observación 3.1.2. *Ahora bien, si denotamos por $\overline{F}$ la clase de todas las funciones conjugadas $\overline{f}$ donde f pertenece a una clase F, entonces en $\overline{F}$ la expresión $\langle \overline{f}, \overline{g} \rangle_1 = \overline{\langle f, g \rangle} = \langle g, f \rangle$ define un producto interno, mientras que la norma $\|\cdot\|$ en F define exactamente una norma en $\overline{F}$.*

Entonces, para $\overline{f} \in \overline{F}$ y $y \in E$,

$$\overline{f(y)} = \overline{\langle f(\cdot), K(\cdot, y) \rangle} = \langle \overline{f(\cdot)}, \overline{K(\cdot, y)} \rangle_1.$$

Se sigue que el núcleo de $\overline{F}$ es $K_1(x, y) = \overline{K(x, y)} = K(y, x)$, para todo par x, y en E.

Según el teorema analizado en esta sección y la primera observación, la matriz $K_\Phi(x, y) = \mathrm{Re} K(x, y) = 2^{-1}[K(x, y) + K(y, x)]$, corresponde como *núcleo reproductivo a la clase* Φ *de funciones* $\phi = f + \overline{g}$, *cuya norma está determinada por la expresión*

$$\|\phi\|_\Phi^2 = 2 \min_{\{f,g: f=f+\overline{g}\}} [\|f\|^2 + \|g\|^2].$$

Si F *es una clase compleja correspondiente al campo real, esto es, si* $F = \overline{F}$ *y* $\|f\| = \|\overline{f}\|$, *es claro que* $F_0 = F$ *y* $\|f\|_0 = \|f\|$. *Por ello el núcleo* $K = \mathrm{Re}K$ *es real, y esta propiedad caracteriza el núcleo correspondiente al campo real.*

3.2 Diferencia de núcleos reproductivos

En la presente sección estableceremos una caracterización del modelo que permite que la diferencia de núcleos reproductivos sea un núcleo reproductivo. Primeramente, para dos matrices positivas, K_1 y K, definimos la relación

$$K_1 \ll K$$

si $K - K_1$ es también una matriz positiva.

Proposición 3.2.1. *La relación* $\ll$ *establece un orden parcial en la clase que reúne todas las matrices positivas.*

Demostración. En efecto, si $K_1 \ll K_2 \ll K_3$ entonces, claramente, $K_1 \ll K_3$. Por otra parte, si $K_1 \ll K_2$ y $K_2 \ll K_1$ entonces $K_1 = K_2$. □

Teorema 3.2.1. *Si* K *y* K_1 *son núcleos reproductivos de las clases* F *y* F_1 *respectivamente, con las normas* $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$, *y si* $K_1 \ll K$, *entonces* $F_1 \subset F$, *y* $\|f_1\|_1 \geq \|f_1\|$ *para toda* $f_1 \in F_1$.

Demostración. Si $K_1 \ll K$ significa que $K_2 = K - K_1$ es una matriz positiva. Sea entonces la clase de funciones F_2, con norma $\|\cdot\|_2$, correspondiente al núcleo K_2. Como $K = K_1 + K_2$ sabemos por el Teorema 3.1.2 que F es la clase de todas las funciones de la forma $f_1 + f_2$ con $f_1 \in F_1$ y $f_2 \in F_2$. En particular, cuando $f_2 = 0$, la clase F contiene todas las funciones $f_1 \in F_1$, y así $F_1 \subset F$. Por otra parte, en F tenemos, por este mismo Teorema,

$$\|f_1\|^2 = \min [\|f_1'\|_1^2 + \|f_2'\|_2^2]$$

para todas las descomposiciones $f_1 = f_1' + f_2'$, con $f_1' \in F_1$ y $f_2' \in F_2$. En particular, de la descomposición $f_1 = f_1 + 0$, obtenemos

$$\|f_1\|^2 \leq \|f_1\|_1^2$$

lo cual completa la prueba. □

Teorema 3.2.2. *Si F y F_1 son dos espacios de Hilbert de funciones tal que $F_1 \subset F$, entonces existe un único operador $L : F \to F_1$ lineal, simétrico y positivo, tal que*

$$\langle f_1, f\rangle = \langle f_1, Lf\rangle_1,$$

para toda función $f_1 \in F_1$ y $f \in F$. Si además $\|f_1\|_1 \geq \|f_1\|$ para $f_1 \in F_1$, entonces el operador L es acotado con una cota no mayor a 1.

Demostración. Para $f \in F$, la transformación G_f sobre F_1 definida por la regla $G_f(f_1) = \langle f_1, f\rangle$, para toda $f_1 \in F_1$, es lineal y continua, entonces, según el *teorema de representación de Riez*, existe una única función en F_1, la cual llamaremos Lf (es decir, depende también de f), tal que

$$G_f(f_1) = \langle f_1, f\rangle = \langle f_1, Lf\rangle_1,$$

para toda $f_1 \in F_1$. De tal forma que el operador $L : F \to F_1$ existe y es único. Además, si f y g pertenecen a F, entonces, para toda f_1 en F_1,

$$\begin{aligned}
\langle f_1, L(f+g)\rangle_1 &= \langle f_1, f+g\rangle \\
&= \langle f_1, f\rangle + \langle f_1, g\rangle \\
&= \langle f_1, Lf\rangle_1 + \langle f_1, Lg\rangle_1 \\
&= \langle f_1, Lf + Lg\rangle_1.
\end{aligned}$$

Se sigue $L(f+g) = Lf + Lg$, luego L es lineal. Por otra parte, para todo par de funciones f, g de F,

$$\langle Lf, g\rangle = \langle Lf, Lg\rangle_1 = \overline{\langle Lg, Lf\rangle_1} = \overline{\langle Lg, f\rangle} = \langle f, Lg\rangle.$$

L es entonces un operador lineal simétrico.

Es también positivo porque $\langle Lf, f\rangle = \langle Lf, Lf\rangle_1 \geq 0$.

Si además $\|f_1\|_1 \geq \|f_1\|$ para $f_1 \in F_1$, L es acotado, con cota no mayor a 1, porque $\langle Lf, f\rangle = \langle Lf, Lf\rangle_1 = \|Lf\|_1^2 \geq \|Lf\|^2$. De ahí, $\|Lf\|^2 \leq \langle Lf, f\rangle \leq \|Lf\| \cdot \|f\|$, y con ello $\|Lf\| \leq \|f\|$. □

El operador L es conocido como el **operador dominante**.

Corolario 3.2.1. *Si F y F_1 son dos espacios de Hilbert de funciones tal que $F_1 \subset F$, y si K y K_1 son sus respectivos núcleos reproductivos, entonces $K_1 \ll K$.*

Demostración. Sea $L : F \to F_1$ el operador dominante. Se tiene entonces que $L'^2 = I - L$, I operador identidad (usamos L'^2 por razones que se verán un poco más adelante), es también un operador lineal positivo y simétrico.

Ahora bien, L transforma $K(\cdot,z)$ en $K_1(\cdot,z)$, para toda $z\in E$. En efecto, dado que $Lf\in F_1$, entonces, para toda $y\in E$,

$$\begin{aligned} Lf(y) &= \langle (Lf)(\cdot), K_1(\cdot,y)\rangle_1 \\ &= \overline{\langle K_1(\cdot,y), (Lf)(\cdot)\rangle_1} \\ &= \overline{\langle K_1(\cdot,y), f(\cdot)\rangle} \\ &= \langle f(\cdot), K_1(\cdot,y)\rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para toda $z\in E$,

$$LK(y,z) = \langle K(\cdot,z), K_1(\cdot,y)\rangle, \tag{3.2}$$

luego, según la propiedad reproductiva,

$$LK(y,z) = \overline{K_1(z,y)} = K_1(y,z).$$

Sea pues $R = K-K_1$. Sea $n\in\mathbb{N}$ y tomemos $\xi_i,...,\xi_n$ números complejos y $y_i,...,y_n$ elementos en E. Según la ecuación (3.2) y la propiedad reproductiva de K tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i\overline{\xi_j}R(y_i,y_j) &= \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i\overline{\xi_j}[K(y_i,y_j)-K_1(y_i,y_j)] \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i\overline{\xi_j}[K(y_i,y_j)-LK(y_i,y_j)] \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i\overline{\xi_j}\langle K(\cdot,y_j)-LK(\cdot,y_j), K(\cdot,y_i)\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i\overline{\xi_j}\langle L'K(\cdot,y_j), K(\cdot,y_i)\rangle \\ &= \langle L'f, f\rangle \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

donde $f(\cdot) = \sum_{i=1}^{n}\xi_i K(\cdot,i)$. Luego, R es una matriz positiva. □

Más aún, tenemos el resultado recíproco al último teorema.

Teorema 3.2.3. *Si K es el núcleo reproductivo de la clase F y $L: F\to F$ es un operador lineal simétrico y positivo, entonces existe una clase F_1 de funciones con núcleo reproductivo tal que $F_1\subset F$.*

Demostración. Definimos $K_1(x,y) = LK(x,y) = \langle LK(\cdot,y), K(\cdot,x)\rangle$, para todo $x,y\in E$. Entonces resulta sencillo probar que K_1 es también una matriz positiva (a partir de que L es un operador positivo), de forma análoga a la demostración del último corolario. Ahora bien, es claro que la clase $F_1 = H(K_1)$ (cuyo núcleo es K_1) es un subconjunto de F, a partir de que $K_1(\cdot, y) = LK(\cdot, y) \in F$, para toda $y \in E$. $\square$

El recíproco del Teorema 3.2.1 también es verdadero. Antes de enunciarlo probaremos otros resultados útiles.

Lema 3.2.1. *Si K es el núcleo reproductivo de la clase F con norma $\|\cdot\|$, y si la clase lineal $F_1 \subset F$ forma un espacio de Hilbert (o tan solo un subespacio lineal cerrado) con norma $\|\cdot\|_1$, tal que $\|f_1\|_1 \geq \|f_1\|$ para $f_1 \in F_1$, entonces existe K_1 n.r. de F_1*

Demostración. La existencia de un núcleo para F implica que para toda $y \in E$ existen constantes positivas M_y tales que $|f(y)| \leq M_y \|f\|$ para toda $f \in F$. En particular, para $f_1 \in F_1 \subset F$, y $y \in E_1$,

$$|f_1(y)| \leq M_y \|f_1\| \leq M_y \|f_1\|_1$$

lo cual implica la existencia de un núcleo K_1 de F_1. $\square$

Consideremos ahora el operador $I - L$, donde I el operador identidad y L el operador dominante. Este operador hereda las propiedades de L. Por tanto existe un operador raíz cuadrada L' para este operador simétrico y acotado tal que

$$L'^2 = I - L$$

Definimos F_2 como la clase de todas las funciones $f_2 = L'f$ para $f \in F$. Denotamos F_0 el subespacio cerrado de F transformado por L' en 0, y por F' el espacio complementario (esto es $F = F' \oplus F_0$). Tenemos que $f \in F_0$, si y solo si $f = Lf$. En efecto, una función $f_0 \in F_0$ si y solo si $L'f = 0$, o también $L'^2 f = 0$, es decir $f - Lf = 0$, lo cual es equivalente a que $Lf = f$. Además, si $L'^2 f = 0$, entonces se sigue que $\langle L'^2 f, f \rangle = \langle L'f, L'f \rangle = \|L'f\|^2 = 0$.

Lema 3.2.2. *El operador L' transforma F' uno-a-uno sobre F_2. Además $F_2 \subset F_1$.*

Demostración. Si f' y g' pertenecen a F' y son tales que $L'f' = L'g'$, entonces $L'(f' - g') = 0$, lo cual significa que $f' - g'$ pertenece a F_0. Pero en realidad $f' - g'$ pertenece a F', y como F' y F_0 son complementarios, $f' - g' = 0$, es decir, $f' = g'$.

Por otro lado, para $f_0 \in F_0$, se verifica

$$\langle f_0, L'f \rangle = \langle L'f_0, f \rangle = \langle 0, f \rangle = 0,$$

entonces $L'f'$ pertenece a F'. Consecuentemente $F_2 \subset F'$. $\square$

Ahora consideremos el operador proyección P' de F sobre F'.

Lema 3.2.3. *Si para f y g en F, se tiene que $L'f = L'g$ entonces $P'f = P'g$.*

Demostración. Si para $f, g \in F$, $L'f = L'g$ entonces $f - Lf = g - Lg$, de donde $f - g = Lf - Lg = L(f - g)$, esto significa que $f - g$ está en F_0 (o de manera equivalente, f y g difieren por una función perteneciente a F_0). Por ello, tienen la misma proyección sobre F'. $\square$

Lema 3.2.4. *La expresión $\|f_2\|_2 = \|P'f_1'\|$ para $f_2 = L'f'$, donde $\|\cdot\|$ es la norma de la clase F, define una norma sobre la clase F_2. Con esta norma F_2 es un espacio de Hilbert.*

Lema 3.2.5. *La matriz $K_2 = K - K_1$ es positiva, pues la clase F_2 admite a K_2 como núcleo reproductivo.*

Demostración. En primer lugar, L transforma $K(\cdot, z)$ en $K_1(\cdot, z)$, para toda $z \in E$. En efecto, dado que $Lf \in F_1$, entonces, para toda $y \in E$,

$$\begin{aligned} Lf(y) &= \langle (Lf)(\cdot), K_1(\cdot, y)\rangle_1 \\ &= \overline{\langle K_1(\cdot, y), (Lf)(\cdot)\rangle_1} \\ &= \overline{\langle K_1(\cdot, y), f(\cdot)\rangle_1} \\ &= \langle f(\cdot), K_1(\cdot, y)\rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para toda $z \in E$,

$$\begin{aligned} LK(y, z) &= \langle K(\cdot, z), K_1(\cdot, y)\rangle \\ &= \overline{K_1(z, y)} \\ &= K_1(y, z). \end{aligned}$$

Se sigue entonces que

$$L'L'K(y, z) = {L'}^2 K(y, z) = K(y, z) - K_1(y, z),$$

por tanto $K_2(\cdot, z) = K(\cdot, z) - K_1(\cdot, z) \in F_2$, para toda $z \in E$.

Ahora bien, sea $f_2 \in F_2$ ($f_2 = L'f$) y $y \in E$, se tiene,

$$\begin{aligned} f_2(y) &= \langle f_2(\cdot), K(\cdot, y)\rangle \\ &= \langle (L'f)(\cdot), K(\cdot, y)\rangle \\ &= \langle f(\cdot), L'K(\cdot, y)\rangle \\ &= \langle P'f(\cdot), P'L'K(\cdot, y)\rangle \\ &= \langle L'f, L'L'K(\cdot, y)\rangle_2 \\ &= \langle f_2(\cdot), K_2(\cdot, y)\rangle_2. \end{aligned}$$

Por tanto K_2 es el núcleo reproductivo de la clase F_2. Se sigue que K_2 es una matriz positiva. $\square$

Finalmente, exponemos el resultado principal.

Teorema 3.2.4. *Si K es el núcleo reproductivo de la clase F con norma $\|\cdot\|$, y si la clase lineal $F_1 \subset F$ es un espacio de Hilbert con norma $\|\cdot\|_1$, tal que $\|f_1\|_1 \geq \|f_1\|$ para $f_1 \in F_1$, entonces la clase F_1 posee un núcleo reproductivo K_1 el cual satisface satisface $K_1 \ll K$.*

Demostración. El Lema 3.2.1 demuestra que F_1 posee el núcleo reproductivo K_1. Sabemos que la matriz $K - K_1$ es positiva (según el Lema 3.2.5), entonces $K_1 \ll K$. □

Si $f_2 = L'f$, $f \in F$, entonces considerando la descomposición ortogonal $f = f' + f_0$, tenemos que $f_2 = L'f = L'f'$, por consiguiente las proyecciones $P'f'$ y $P'f$ sobre F' son iguales, y dado que $f' \in F$, se sigue que $f' = P'f = P'f'$, de ahí que la norma en F_2 puede escribirse también como

$$\|f_2\|_2 = \|P'f\| = \|f'\|,$$

para $f_2 \in F_2$ y $f' \in F'$ tal que $f_2 = L'f'$. El teorema siguiente se sigue del anterior resultado.

Teorema 3.2.5. *Sea K el n.r. de la clase F. A toda descomposición $K = K_1 + K_2$ en dos matrices positivas K_1 y K_2, corresponde una descomposición del operador identidad I en F en dos operadores positivos L_1 y L_2, $I = L_1 + L_2$, dados por*

$$L_1 f(y) = \langle f(\cdot), K_1(\cdot, y)\rangle, \qquad L_2 f(y) = \langle f(\cdot), K_2(\cdot, y)\rangle,$$

tal que si $L_1^{1/2}$ y $L_2^{1/2}$ denota cualquier raíz cuadrada simétrica cuadrada de L_1 y L_2, las clase F_1 y F_2 de todas las transformaciones $L_1^{1/2} f$ y $L_2^{1/2} f$ respectivamente, $f \in F$, corresponde a los núcleos K_1 y K_2. Si F_{i0}, $i = 1, 2$ es la clase de todas las funciones $f \in F$ con $L_i f = 0$, y si $F_i'' = F \ominus F_{i0}$, entonces $L_i^{1/2}$ establece una correspondencia uno-a-uno entre F_i'' y F_i, y la norma $\|\cdot\|_i$ en F_i está dada por $\|L_i^{1/2} f\|_i = \|f\|$ para toda $f \in F_i''$.

Inversamente, a cada descomposición $I = L_1 + L_2$ en dos operadores positivos corresponde la clase F_i con normas $\|\cdot\|_i$ definidas de la manera anterior. La correspondencia de n.r.'s K_i está definida por $K_i(\cdot, y) = L_i K(\cdot, y)$ y satisface la ecuación $K = K_1 + K_2$.

3.3 Producto de núcleos reproductivos

Considere dos espacios de Hilbert de funciones F_1 y F_2, cuyas funciones están definidas sobre un mismo un conjunto E, con núcleos reproductivos K_1 y K_2 respectivamente. Supongamos además que existe un par de sistemas ortonormales $\{g_i^k\}_{k\geq 1}$ completos, y a lo sumo numerables en F_i, $i = 1, 2$. En esta sección probaremos que el producto $K_1 \cdot K_2$ es también una matriz positiva, utilizando lo que hasta ahora sabemos de núcleos reproductivos. En efecto, se trata de encontrar la clase de funciones para la cual este producto corresponde como núcleo reproductivo.

Consideremos la clase F_i y la norma $\|\cdot\|_i$ correspondiente a K_i, $i=1,2$. Ahora, sobre el conjunto $E' = E \times E$ definimos la clase de funciones $f'(\cdot,\cdot)$ de la forma

$$f'(x_1,x_2) = \sum_{k=1}^{n} f_1^{(k)}(x_1) f_2^{(k)}(x_2), \tag{3.3}$$

para todo par $(x,y) \in E'$, con $f_1^{(k)} \in F_1$ y $f_2^{(k)} \in F_2$, $k = 1,2,...,n$. Evidentemente, el espacio F' de todas estas funciones es un espacio lineal.

Lema 3.3.1. *La expresión*

$$\langle f', g' \rangle' = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \langle f_1^{(k)}, g_1^{(l)} \rangle_1 \langle f_2^{(k)}, g_2^{(l)} \rangle_2, \tag{3.4}$$

para $f' = \sum_{k=1}^{n} f_1^{(k)} f_2^{(k)}$ *y* $g' = \sum_{l=1}^{m} g_1^{(l)} g_2^{(l)}$ *en* F' *define un producto interior sobre* F'*.*

Demostración. En primer lugar, notamos que (3.4) no depende de las posibles representaciones para f' y g'. En efecto, vemos inmediatamente de (3.4) que

$$\langle f', g' \rangle' = \sum_{l=1}^{m} \langle \langle f', g_1^{(l)} \rangle_1, g_2^{(l)} \rangle_2,$$

lo cual prueba que $\langle f', g' \rangle'$ es independiente de la representación particular de f'. De forma análoga sucede con la representación particular de g'.

Ahora bien, las propiedades de producto interior son inmediatamente verificables. No obstante, queda probar que $\langle f', f' \rangle' \geq 0$ y que la igualdad se da si y sólo si $f' = 0$. Consideremos una representación para f' dada por (3.3). Por un proceso de Gram-Smichdt, en el subespacio generado por $\{f_1^{(k)}\}_{k=1}^{n}$ de F_1, podemos encontrar una sucesión finita de vectores ortonormales los cuales generan este mismo subespacio; el caso se repite para la sucesión $\{f_2^{(k)}\}_{k=1}^{m}$. Denotemos por $\{f_1^k\}_{k=1}^{n_1}$ y $\{f_2^l\}_{l=1}^{n_2}$ tales sucesiones ortonormalizadas en los espacios F_1 y F_2, respectivamente. Toda función $f_i^{(\cdot)}$ es entonces una combinación lineal de dichas funciones ortonormales. Con lo cual obtenemos la siguiente representación para f'

$$f'(x_1,x_2) = \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{l=1}^{n_2} \alpha_{k,l} f_1^k(x_1) f_2^l(x_2).$$

Por ende, $\langle f', f'\rangle'$ posee la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \langle f', f'\rangle' &= \sum_{k=1}^{n_1}\sum_{l=1}^{n_2}\sum_{k'=1}^{n_1}\sum_{l'=1}^{n_2} \alpha_{kl}\overline{\alpha}_{k'l'}\langle f_1^k, f_1^{k'}\rangle_1 \langle f_2^l, f_2^{l'}\rangle_2 \\ &= \sum_{k=1}^{n_1}\sum_{l=1}^{n_2} |\alpha_{kl}|^2. \end{aligned}$$

De ahí entonces que $\langle f', f'\rangle' \geq 0$, y es igual a cero si y solo si $\alpha_{k,l} = 0$, para toda k y l, es decir, cuando $f' = 0$. □

Finalmente, esta expresión define una norma sobre F', a saber,

$$\|f'\|' = \left(\sum_{k=1}^{n_1}\sum_{l=1}^{n_2} |\alpha_{kl}|^2\right)^{1/2}.$$

Sin embargo, esta nueva clase puede no ser completa, procedemos entonces a encontrar su completación. Formemos funciones definidas en E' de la forma

$$f = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{k,l} g_1^k g_2^l, \tag{3.5}$$

donde α_{kl} son constantes complejas tales que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} |\alpha_{k,l}|^2 < \infty. \tag{3.6}$$

Llamemos F la clase que contiene estas funciones.

Lema 3.3.2. *La clase F está bien definida, es decir, las funciones f del tipo (3.5) son absolutamente convergentes.*

Demostración. En efecto, como la clase F_1 posee el núcleo reproductivo K_1, en vista de (3.6) tenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{k,l}||g_1^{(k)}(x_1)| \leq [K_1(x_1, x_1)]^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{k,l}|^2\right)^{1/2},$$

según lo visto en secciones anteriores.

Entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} |\alpha_{k,l}||g_1^{(k)}(x_1)||g_2^{(l)}(x_2)| &\leq \sum_{l=1}^{\infty} |g_2^{(l)}(x_2)|[K_1(x_1, x_1)]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{k,l}|^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq [K_1(x_1, x_1)]^{\frac{1}{2}} [K_2(x_2, x_2)]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{k,l=1}^{\infty} |\alpha_{k,l}|^2\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{3.7}$$

pues el espacio F_2 posee el núcleo reproductivo K_2. $\square$

De este resultado se desprende que F es una clase lineal. También, se deduce que toda función f tiene representación única.

Lema 3.3.3. *La expresión*

$$\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |\alpha_{k,l}|^2 \right)^{1/2}, \quad para\ f \in F,$$

define una norma sobre F. Con esta norma F es completo.

Demostración. 1. Sea f en F con la expresión dada en (3.5). Defínase las funciones

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \alpha_{k,l} g_1^k g_2^l \in F',$$

para $n \geq 1$. Se tiene entonces

$$f = \lim_{n \to \infty} f_n$$

sobre E', además

$$\|f\| = \lim_{n \to \infty} \|f_n\|'.$$

De aquí se deducen todas las propiedades que definen una norma.

2. Tomemos una sucesión de Cauchy en F, $\{f_m\}_{m \geq 1}$. Sea $\epsilon > 0$. Se tiene entonces que para n, m suficientemente grandes,

$$\|f_m - f_n\| < \epsilon.$$

Con lo cual, desarrollando esta expresión, se deduce que

$$|\alpha_{kl}^m - \alpha_{kl}^n| < \epsilon$$

para toda k y l. Entonces las sucesiones complejas $\{\alpha_{kl}^m\}_{m \geq 1}$ son de Cauchy, para toda k y l. Consideremos entonces los números α_{kl} puntos de convergencia de tales sucesiones. Sea $f \in F$ la función cuya expresión está dada por

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{k,l} g_1^k g_2^l$$

Tenemos entonces

$$\|f_m - f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |\alpha_{kl}^m - \alpha_{kl}|^2 \to 0$$

cuando $m \to \infty$. La sucesión $\{f_m\}_{m\geq 1}$ es entonces convergente en F. $\square$

Así, sobre F definimos el producto interno

$$\langle f, g\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, g_n\rangle' = \sum_{k,l=1}^{\infty} \alpha_{kl}\overline{\beta}_{kl},$$

donde,

$$f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k,l=1}^{n} \alpha_{kl} g_1^l g_2^k \quad \text{y} \quad g = \lim_{n\to\infty} \sum_{k,l=1}^{n} \beta_{kl} g_1^l g_2^k$$

Lema 3.3.4. *La clase F es la completación funcional de la clase F'.*

Demostración. Las sumas finitas del tipo (3.5) son densas en el espacio de todas las funciones del tipo (3.5), entonces es suficiente probar que toda función del tipo (3.3) también es de la forma (3.5). Para ello, probaremos que una función del tipo (3.3) puede aproximarse tanto como se quiera (en relación a la norma $\|\ \|'$) por sumas finitas del tipo (3.5). Sea f' en F' con representación dada por (3.3). Podemos aproximar toda $f_i^{(k)}$ por una combinación lineal finita $h_i^{(k)}$ de funciones $g_i^{(l)}$ tales que $\|h_i^{(k)}\|_i \leq \|f_i^{(k)}\|_i$, $\|f_i^{(k)} - h_i^{(k)}\|_i \leq \epsilon$, con $\epsilon > 0$ arbitrario. Antes, probaremos que para toda función f' y cualquier representación del tipo (3.3) se verifica

$$\|f'\|' \leq \sum_{k=1}^{n} \|f_1^{(k)}\|_1 \cdot \|f_2^{(k)}\|_2.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\|f'\|'^2 = \langle f', f'\rangle' &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \langle f_1^{(k)}, f_1^{(l)}\rangle_1 \langle f_2^{(k)}, f_2^{(l)}\rangle_2 \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} \|f_1^{(k)}\|_1 \|g_1^{(l)}\|_1 \cdot \|f_2^{(k)}\|_2 \|g_2^{(l)}\|_2 \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \|f_1^{(k)}\|_1 \|f_2^{(k)}\|_2\right)^2
\end{aligned}$$

Continuando con la prueba de la aproximación consideremos las funciones

$$\begin{aligned}
h'(x_1, x_2) &= \sum_{k=1}^{n} h_1^{(k)}(x_1) f_2^{(k)}(x_2), \\
g'(x_1, x_2) &= \sum_{k=1}^{n} h_1^{(k)}(x_1) h_2^{(k)}(x_2).
\end{aligned}$$

Es claro que h' es del tipo (3.3) y que g' es al mismo tiempo del tipo (3.3) y (3.5), lo cual puede verse por el desarrollo de las funciones $h_i^{(k)}$ como combinaciones lineales de $g_i^{(t)}$. Sea M el máximo de todos los números $\|f_i^{(k)}\|_i$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\|f'-g'\|' &\leq \|f'-h'\|' + \|h'-g'\|', \\
\|f'-h'\|' &= \sum_{k=1}^{n} \|[f_1^{(k)}(x_1) - h_1^{(k)}(x_1)]f_2^{(k)}(x_2)\|' \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \|f_1^{(k)} - h_1^{(k)}\|_1 \cdot \|f_2^{(k)}\|_2 \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} M\epsilon \\
&= nM\epsilon,
\end{aligned}$$

Finalmente obtenemos

$$\|f'-g'\|' \leq 2nM\epsilon,$$

lo cual prueba nuestra aserción. □

Lema 3.3.5. *La clase F posee núcleo reproductivo.*

La prueba de este lema ya se ha dado en el segundo resultado expuesto en esta sección. En efecto, para $(x_1, x_2) \in E'$, la desigualdad (3.7) tiene la forma

$$|f(x_1, x_2)| \leq [K_1(x_1, x_1)]^{1/2}\|f\|.$$

La funcional $f \mapsto f(x_1, x_2)$ es acotada, y por tanto continua. De donde se desprende la existencia del núcleo reproductivo.

Entonces F' tiene por completación el espacio de Hilbert F con núcleo reproductivo. Finalmente exponemos el siguiente enunciado.

Teorema 3.3.1. *El núcleo reproductivo $K : E' \times E' \to \mathbb{C}$ de F tiene la regla $K(x_1, x_2, y_1, y_2) = K_1(x_1, y_1)K_2(x_2, y_2)$.*

Demostración. Primeramente, si $(y_1, y_2) \in E'$, entonces

$$K_1(\cdot, y_1) \in F_1 \quad \text{y} \quad K_2(\cdot, y_2) \in F_2.$$

siendo además diferentes de cero. Con lo cual

$$K(\cdot, \cdot, y_1, y_2) = K_1(\cdot, y_1)K_2(\cdot, y_2) \in F' \subseteq F.$$

En segundo lugar, para una función $f \in F$, $f = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{k,l} g_1^k g_2^l$, consideremos la sucesión $f_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \alpha_{k,l} g_1^k g_2^l$. Entonces, si $(x_1, x_2) \in$

E',

$$\begin{aligned} f_n(x_1,x_2) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\alpha_{k,l}g_1^k(x_1)g_2^l(x_2) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\langle\alpha_{k,l}g_1^k(\cdot),K_1(\cdot,x_1)\rangle_1\langle g_2^l(\cdot),K_2(\cdot,x_2)\rangle_2 \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\langle\alpha_{k,l}g_1^k(\cdot)g_2^l(\cdot),K_1(\cdot,x_1)K_2(\cdot,x_2)\rangle' \\ &= \langle f_n(\cdot,\cdot),K(\cdot,\cdot,x_1,x_2)\rangle'. \end{aligned}$$

Tomando límite,

$$f(x_1,x_2)=\langle f(\cdot,\cdot),K(\cdot,\cdot,x_1,x_2)\rangle.$$

Esto prueba la propiedad reproductiva de K. □

Cuando consideramos las restrición al conjunto E_0 de E' de los elementos diagonales (x,x), entonces la matriz $K_1(x,y)K_2(x,y)$, para (x,x) y (y,y) en E_0, es el núcleo reproductivo de la clase de funciones en F restringidas a E_1. De ahí que efectivamente el producto $K_1\cdot K_2$ es una matriz positiva.

Teorema 3.3.2. *El núcleo $K(x,y)=K_1(x,y)K_2(x,y)$ es el núcleo reproductivo de la clase F_0 de la restricción de todas las funciones F al conjunto diagonal E_0. Para cualquier restricción f_0, $\|f_0\|_0=\min\{\|g\|: g\in F \ y \ g_{|E_0}=f_0\}$.*

Observación 3.3.1. *Sea $\{g_1^k\}$ un sistema completo ortonormal numerable en F_1. Entonces toda función $f_0\in F_0$ es representable como una serie*

$$f_0(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_2^k(x)g_1^k(x),\quad f_2^k\in F_2,\quad \sum_{k=1}^{\infty}\|f_2^k\|_2^2<\infty.$$

Sobre todas las representaciones de f existe una y solo una representación que minimiza la suma $\sum_{k=1}^{\infty}\|f_2^{(k)}\|_2^2$. Este mínimo es igual a $\|f\|^2$.

Podemos aplicar el último teorema a la clase F y su conjugado $\overline{F}$. El producto de los núcleos correspondientes es $|K(x,y)|^2=K(x,y)K(y,x)$ y la clase correspondiente puede obtenerse de la observación anterior.

3.4 Límites de núcleos reproductivos

Ahora consideremos una sucesión $\{F_n\}_{n\geq 1}$ de espacios de Hilbert de funciones definidas sobre los conjuntos $\{E_n\}_{n\geq 1}$, respectivamente. Sea además $\{K_n\}_{n\geq 1}$ la sucesión de respectivos núcleos reproductivos. Nos interesa saber si tiene sentido hablar del límite de la sucesión de núcleos reproductivos; y si es así, nos preguntamos si tal límite es también n.r., y cobre cuál clase de funciones. Podemos considerar dos casos.

Caso A. Sea $\{E_n\}$ una sucesión creciente de subconjuntos, esto es $E_n \subseteq E_{n+1}$ para toda $n \geq 1$, sea E su unión ($E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$)

Ahora si $f_n \in F_n$, entonces para $m \leq n$ denotemos por f_{nm}, la restricción de f_n al conjunto $E_m \subset E_n$ (i.e. $f_{nm} = f_n|_{E_m}$). Supongamos también que las clases F_n forman una sucesión decreciente en el sentido de que $f_{nm} \in F_m$ para toda función $f_n \in F_n$ y para todo par de números $m \leq n$.

Finalmente supongamos que la sucesión de normas $\{\|\cdot\|_n\}_{n\geq 1}$ definidas en F_n forman una sucesión creciente en el sentido de que

$$\|f_{nm}\|_m \leq \|f_n\|_n \qquad \text{si } m \leq n, \tag{3.8}$$

para toda $f_n \in F_n$.

No excluimos el caso en que todos los conjuntos E_n son iguales, $E_1 = E_2 = \cdots = E$. Claramente, en este caso $f_{nm} = f_n$, $F_n \subset F_m$, y, según el Teorema 3.2.4, basta suponer la existencia de $K_1(x, y)$ para deducir la existencia del resto de los núcleos K_n y obtener la propiedad $K_n \ll K_m$ para $m < n$.

En el caso general introducimos las restricciones K_{nm} de K_n al conjunto E_m ($m \leq n$). Por el Teorema 2.6.1, K_{nm} es el núcleo reproductivo de la clase F_{nm} de todas las restricciones f_{nm} para $f_n \in F_n$. La norma en F_{nm} está dada por

$$\|f_{nm}\|_{nm} = \min \|f'_n\|_n \qquad \text{para toda } f'_n \text{ con } f'_{nm} = f_{nm}$$

De la ecuación (3.8) tenemos

$$\|f_{nm}\|_{nm} \geq \|f_{nm}\|_m$$

y , por el Teorema 3.2.4,

$$K_{nm} \ll K_m, \quad m < n. \tag{3.9}$$

Ahora, sea F_0 la clase de funciones en E tal que si $f_0 \in F_0$ entonces la restricción $f_{0n} = f_0|_{E_n}$ pertenece a F_n, para toda $n \geq 1$, y la sucesión $\{\|f_{0n}\|_n\}_{n\geq 1}$ es acotada. Es fácil verificar que la clase F_0 es una clase lineal. Es claro que la función nula pertenece a F_0, por tanto F_0 es una clase no vacía.

Lema 3.4.1. *Sea $f_0 \in F_0$. La expresión*

$$\|f_0\|_0^2 = \lim_{n\to\infty} \|f_{0n}\|_n^2, \tag{3.10}$$

donde $f_{0n} = f_0|_{E_n}$ para toda $n \geq 1$, define una norma sobre F_0.

Demostración. Sea $f_0 \in F_0$. Primero, para $n \geq m$, se tiene que $f_{0m} = f_{(0n)m}$, es decir, la restricción de f_0 sobre E_m es igual a la restricción de f_{0n} sobre E_m mismo. Entonces

$$\|f_{0m}\|_m \leq \|f_{0n}\|_n.$$

Por ello $\{\|f_{0n}\|_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de números reales creciente y por hipótesis es también acotada, luego existe su límite (real no negativo). En tal caso es posible definir

$$\|f_0\|_0 = \lim_{n\to\infty} \|f_{0n}\|_n.$$

Las propiedades de norma se siguen de forma inmediata. $\square$

Lema 3.4.2. *Sean f_0 y g_0 funciones en F_0. La expresión*

$$\langle f_0, g_0\rangle_0 = \lim_{n\to\infty} \langle f_{0n}, g_{0n}\rangle_n, \tag{3.11}$$

donde $f_{0n} = f_0|_{E_n}$ y $g_{0n} = g_0|_{E_n}$ para toda $n \geq 1$, define un producto interior sobre F_0, cuya norma inducida es (3.10).

Demostración. Sea f_0 y g_0 funciones en F_0. Las propiedades características de producto interior son satisfechas por esa expresión y es inmediato que $\langle f_0, f_0\rangle = \|f_0\|$. Debemos probar que efectivamente existe este límite. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\|f_{0n} + g_{0n}\|_n^2 &= \|f_{0n}\|_n^2 + 2\mathrm{Re}\langle f_{0n}, g_{0n}\rangle_n + \|g_{0n}\|_n^2 \quad y \\
\|f_{0n} + ig_{0n}\|_n^2 &= \|f_{0n}\|_n^2 + 2\mathrm{Im}\langle f_{0n}, g_{0n}\rangle_n + \|g_{0n}\|_n^2,
\end{aligned}$$

para toda $n \geq 1$. Entonces las sucesiones $\{\mathrm{Re}\langle f_{0n}, g_{0n}\rangle_n\}_{n\geq 1}$ y $\{\mathrm{Im}\langle f_{0n}, g_{0n}\rangle_n\}_{n\geq 1}$ son convergentes. Es decir,

$$\langle f_0, g_0\rangle_0 = \lim_{n\to\infty} \langle f_{0n}, g_{0n}\rangle_n,$$

existe. $\square$

Lema 3.4.3. *Con el producto (3.11) y la norma (3.10), el espacio F_0 es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Sea $\{f_0^{(n)}\}_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en F_0. Sea $1 \leq l < k$, entonces, para toda $n, m \geq 1$

$$\|f_{0k}^{(m)} - f_{0k}^{(n)}\|_k \leq \|f_{0l}^{(m)} - f_{0l}^{(n)}\|_l \leq \|f_0^{(m)} - f_0^{(n)}\|_0,$$

de ahí que $\{f_{0k}^{(n)}\}_{n\geq 1}$ es sucesión de Cauchy sobre F_k. Sea $g_{0k} \in F_k$ la función a la cual converge ésta sucesión sobre F_k. Definimos entonces g_0 sobre E como la función tal que $g_0|_{E_k} = g_{0k}$ para toda $k \geq 1$.

Ahora bien, para $k, m \geq 1$,

$$\|g_{0k}\|_k \leq \|f_{0k}^{(m)}\|_k + \|f_{0k}^{(m)} - g_{0k}\|_k,$$

y por otra parte

$$\|f_{0k}^{(m)} - g_{0k}\|_k = \lim_{n\to\infty} \|f_{0k}^{(m)} - f_{0k}^{(n)}\|_k \leq \lim_{n\to\infty} \|f_0^{(m)} - f_0^{(n)}\|_0, \tag{3.12}$$

por tanto

$$\|g_{0k}\|_k \leq \|f_{0k}^{(m)}\|_k + \lim_{n\to\infty} \|f_0^{(m)} - f_0^{(n)}\|_0 \leq \|f_0^{(m)}\|_0 + \lim_{n\to\infty} \|f_0^{(m)} - f_0^{(n)}\|_0.$$

Entonces $\{\|g_{0k}\|_k\}_{k\geq 1}$ es una sucesión de números reales no negativos creciente y acotada. Se sigue que $\lim_{n\to\infty} \|g_{0n}\|_n$ existe.

Por otra parte, sea $m \geq 1$. Es claro que $f_{0(k+1)}|_{E_k}^{(m)} = f_{0k}^{(m)}$ para toda $k \geq 1$. Entonces, dado que $\|f_{0k}^{(m)} - g_{0k}\|_k \to 0$ y $\|f_{0k}^{(m)} - g_{0(k+1)}|_{E_k}\|_k = \|f_{0(k+1)}|_{E_k}^{(m)} - g_{0(k+1)}|_{E_k}\|_k \to 0$ cuando $m \to \infty$, entonces $g_{0k} = g_{0(k+1)}|_{E_k}$ para toda $k \geq 1$.

Todo lo anterior muestra que $g_0 \in F_0$.

De (3.12) también se sigue que

$$\|f_0^{(m)} - g_0\|_0 = \lim_{k\to\infty} \|f_{0k}^{(m)} - g_{0k}\|_k \leq \lim_{n\to\infty} \|f_0^{(m)} - f_0^{(n)}\|_0,$$

de donde

$$\lim_{m\to\infty} \|f_0^{(m)} - g_0\|_0 = 0,$$

por tanto $\{f_0^{(m)}\}_{m\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy convergente en F_0. Se sigue que F_0 es un espacio de Hilbert. □

Lema 3.4.4. *El espacio de Hilbert F_0 posee núcleo reproductivo.*

Demostración. Si $f_0 \in F_0$ y $y \in E$, entonces existe k tal que $y \in E_k$, y en este caso $f_0(y) = f_{0n}(y)$ para toda $n \geq k$. Las clases F_n, $n \geq k$ poseen núcleo reproductivo K_n, entonces

$$|f_0(y)| = |f_{0n}(y)| \leq M_y \|f_{0n}\|_n \qquad \text{para alguna } M_y > 0,$$

por tanto, si $n \to \infty$,

$$|f_0(y)| \leq M_y \|f_0\|_0.$$

Entonces F_0 posee núcleo reproductivo. □

Llamemos K_0 al núcleo de F_0.

Teorema 3.4.1. *Bajo los anteriores supuestos sobre las clases F_n, los núcleos K_n convergen, para toda x, y en E, al núcleo K_0 del espacio de Hilbert F_0.*

Observación 3.4.1. *La convergencia de K_n a K_0 se entiende de la siguiente manera. Todo par de puntos x, y en E pertenece a todo E_n a partir de un E_{n_0}. De ahí que $K_n(x,y)$ está definido para $n > n_0$, luego debemos probar que $\lim_{n\to\infty} K_n(x,y) = K_0(x,y)$.*

Demostración. Para $y \in E_k$ cualquiera y números $k \leq m \leq n$ se tiene

$$\begin{aligned}\|K_{mk}(\cdot,y) - K_{nk}(\cdot,y)\|_k^2 &\leq \|K_m(\cdot,y) - K_{nm}(\cdot,y)\|_m^2 \\ &= K_m(y,y) - \overline{K_{nm}(y,y)} - K_{nm}(y,y) + \|K_{nm}(\cdot,y)\|_m^2 \\ &\leq K_m(y,y) - 2K_n(y,y) + \|K_{nm}(\cdot,y)\|_m^2,\end{aligned}$$

y dado que

$$\|K_{nm}(\cdot,y)\|_m^2 \leq \|K_n(\cdot,y)\|_n^2 = K_n(y,y),$$

entonces

$$\|K_{mk}(\cdot,y) - K_{nk}(\cdot,y)\|_k^2 \leq K_m(y,y) - K_n(y,y). \tag{3.13}$$

De (3.9) se sigue que $K_m - K_{nm}$ es una matriz positiva. Por tanto $K_m(y,y) - K_{nm}(y,y) = K_m(y,y) - K_n(y,y) \geq 0$, y la sucesión $\{K_m(y,y)\}_{m\geq k}$ es una sucesión decreciente de número no negativos. Por ende es una sucesión convergente. Ahora, (3.13) también prueba que las funciones $K_{mk}(\cdot,y) \in F_k$, para cualquier k y siempre que $m \to \infty$, converge fuertemente en F_k a alguna función $\phi_k \in F_k$. Esto es,

$$\lim_{m\to\infty} K_{mk}(x,y) = \lim_{m\to\infty} K_m(x,y) = \phi_k(x),$$

para todo $x \in E_k$.

Dado que para todo par x, y en E podemos escoger una número k tal que x y y pertenezcan a E_k, se sigue que $K_m(x,y)$ converge y que el límite $\phi_0(x,y)$ no depende de la elección de k. El núcleo K_k es la restricción $\phi_{0k}(\cdot,y)$ de ϕ_0 a E_k. Se sigue entonces que $K_{mk}(\cdot,y)$, para cualquier y, converge fuertemente en F_k a $\phi_{0k}(\cdot,y)$ perteneciente a F_k. De (3.13), haciendo $n \to \infty$,

$$\|K_{mk}(\cdot,y) - \phi_{0k}(\cdot,y)\|_k^2 \leq K_m(y,y) - \phi_0(y,y); \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}\|\phi_{0k}(\cdot,y)\|_k &\leq \|\phi_{0k}(\cdot,y) - K_{mk}(\cdot,y)\|_k + \|K_{mk}(\cdot,y)\|_k \\ &\leq [K_m(y,y) - \phi_0(y,y)]^{1/2} + \|K_m(\cdot,y)\|_m \\ &\leq [K_m(y,y) - \phi_0(y,y)]^{1/2} + [K_m(y,y)]^{1/2},\end{aligned}$$

y cuando $m \to \infty$, $\|\phi_{0k}(x,y)\|_k^2 \leq \phi_0(y,y)$.

Se sigue entonces que para cada $y \in E$, $\phi_0(\cdot,y)$, pertenece a la clase F_0 de nuestro teorema.

Ahora probaremos la propiedad reproductiva para ϕ_0. Para tal efecto, tomemos cualquier $f_0 \in F_0$ y $y \in E$. Para un número n suficientemente grande tenemos

$$\begin{aligned} f_0(y) &= f_{0n}(y) \\ &= \langle f_{0n}(\cdot), K_n(\cdot, y)\rangle_n \\ &= \langle f_{0n}(\cdot), K_{0n}(\cdot, y)\rangle_n + \langle f_{0n}(\cdot), K_n(\cdot, y) - K_{0n}(\cdot, y)\rangle_n. \end{aligned}$$

Cuando $n \to \infty$, el primer producto escalar en el último miembro converge, por la fórmula (3.11), a $\langle f_0(\cdot), \phi_0(\cdot, y)\rangle_0$. Mientras que el segundo converge a cero; en efecto, por la fórmula (3.14) (con $k = m = n$), es en valor absoluto más pequeño que

$$\|f_{0n}\|_n \|K_n(\cdot, y) - K_{0n}(\cdot, y)\|_n \leq \|f_0\|_0 [K_n(y, y) - K_0(y, y)]^{1/2}.$$

Entonces $\phi_0 = K_0$. □

Caso B. Ahora suponemos las siguientes hipótesis,

i) $\{E_n\}$ es una sucesión decreciente de conjuntos, esto es

$$E_{n+1} \subseteq E_n, \qquad \text{para toda } n \geq 1.$$

Sea $E = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ no vacío.

ii) Para cada $n \geq 1$, F_n es la clase de funciones tal que

ii.1) Para toda $f_n \in F_n$ se tiene que $f_{nm} \in F_m$, con $m \geq n$ (f_{nm} es la restricción de f_n al subconjunto E_m de E_n).

ii.2) Para toda $f_n \in F_n$,

$$\|f_{nm}\|_m \leq \|f_n\|_n, \qquad \text{si } m \geq n.$$

iii) Si $m \geq n$, entonces

$$K_{nm} \ll K_m.$$

Si $y \in E$ entonces $\{K_n(y, y)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de números positivos. En efecto, si $y \in E$ y $m > n$,

$$K_m(y, y) - k_n(y, y) = k_m(y, y) - K_{nm}(y, y) \geq 0,$$

pues $K_{nm} \ll K_m$. Luego $\lim K_m(y, y)$ existe pero puede ser infinito. Definimos entonces el conjunto

$$E_0 = \{y \in E \mid K_0(y, y) = \lim_{n\to\infty} K_m(y, y) < \infty\}.$$

y supongamos que $E_0 \neq \emptyset$.

Definimos también la clase F_0 que contiene las restricciones f_{n0} al subconjunto E_0 de funciones $f_n \in F_n$, para toda $n \geq 1$. Ahora, si $m \geq k \geq n$, entonces

$$\|f_{nm}\|_m \leq \|f_{nk}\|_k,$$

por tanto $\{\|f_{nk}\|_k\}_{k\geq n}$ es una sucesión no negativa decreciente.

Lema 3.4.5. *La expresión*

$$\|f_{n0}\|_0^2 = \lim_{k\to\infty} \|f_{nk}\|_k^2, \tag{3.15}$$

con $f_{n0} \in F_0$, define una norma sobre F_0.

Demostración. En primer término, este límite existe por las observaciones hechas en el párrafo anterior. Solo probaremos que $f_{n0} = 0$ cuando $\|f_{n0}\|_0 = 0$, el resto de las propiedades se siguen de forma inmediata. En efecto, supongamos que $\|f_{n0}\| = 0$, si $y \in E_0$, entonces

$$|f_{n0}(y)| = |f_{nk}(y)| = |\langle f_{nk}(\cdot), K_k(\cdot, y)\rangle_k| \leq \|f_{nk}\|_k \sqrt{K_k(y,y)},$$

para toda k. Luego, si $k \to \infty$, $\|f_{nk}\|_k \to 0 = \|f_{n0}\|_0$, de donde se sigue que $f_{n0}(y) = 0$. $\square$

Así, de manera similar al primer caso, la expresión

$$\langle f_{n0}, g_{n0}\rangle_0 = \lim_{k\to\infty} \langle f_{nk}, g_{nk}\rangle_k,$$

define un producto interior en F_0. Agreguemos la suposición de que F_0 es completo, aunque en general esto no es verdad.

Lema 3.4.6. *La clase F_0 posee núcleo reproductivo.*

Demostración. Sea $y \in E_0$, hemos probado renglones arriba que

$$|f_{n0}(y)| \leq \|f_{n0}\|_k K(y,y),$$

para toda $f_{0n} \in F_0$, entonces, si $k \to \infty$,

$$|f_{n0}(y)| \leq \|f_{n0}\|_0 M_y,$$

para alguna M_y. Luego $f_{n0} \mapsto f_{n0}(y)$ es una funcional continua. F_0 posee núcleo reproductivo. $\square$

En efecto, ahora probaremos que el núcleo de F_0 es el límite de las restricciones K_{n0}.

Lema 3.4.7. *Para cada $y \in E_0$, $\{K_{n0}(\cdot, y)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy respecto a $\|\cdot\|_0$ sobre F_0.*

Demostración. Sea $y \in E_0$ y n, m un par de naturales. Como en el caso A, es posible mostrar que

$$\|K_{mk}(\cdot, y) - K_{nk}(\cdot, y)\|_k^2 \leq K_m(y, y) - K_n(y, y),$$

por tanto, si $k \to \infty$,

$$\|K_{m0}(\cdot, y) - K_{n0}(\cdot, y)\|_0^2 \leq K_m(y, y) - K_n(y, y),$$

y dado que $\{K_n(y, y)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy de números (por ser convergente), se sigue que $\{K_n(\cdot, y)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\|\cdot\|_0$. $\square$

Entonces, como F_0 es completo, existe una función $K_0(\cdot, y)$ en F_0 límite (en norma) de $\{K_{n0}(\cdot, y)\}_{n=1}^{\infty}$, para toda $y \in E_0$.

Teorema 3.4.2. *El núcleo de la clase F_0 es*

$$K_0(x, y) = \lim_{n\to\infty} K_{n0}(x, y),$$

para todo par x, y en E_0.

Demostración. Sea $y \in E_0$, dado que $K_{n0}(\cdot, y) \to K_0(\cdot, y)$ en norma sobre el espacio F_0 el cual posee núcleo reproductivo, entonces la convergencia también es puntual, esto es, si $x \in E_0$, se tiene

$$K_0(x, y) = \lim_{n\to\infty} K_{n0}(x, y).$$

Ahora bien, tomemos cualquier f_0 en F_0 y una sucesión de Cauchy $\{f_0^{(n)}\}$ en F_0 también, convergente a f_0. Cada $f_0^{(n)}$ es la restricción f_{k_n0} de alguna $f_{k_n} \in F_{k_n}$. Por (3.15) existe una sucesión creciente $m_1 < m_2 < \cdots$ tal que

$$m_n > k_n, \qquad \|f_{k_nm_n}\|_{m_n}^2 - \|f_{k_n0}\|_0^2 \leq \frac{1}{n^2}.$$

Por otra parte, por lo ya visto renglones arriba, se tiene que

$$\langle f_0(\cdot), K_0(\cdot, y)\rangle_0 = \lim_{n\to\infty} \langle f_{k_n0}(\cdot), K_{m_n0}(\cdot, y)\rangle_0. \tag{3.16}$$

Y podemos escribir

$$\langle f_{k_n}(\cdot), K_{m_n0}(\cdot, y)\rangle_0 = \langle f_{k_nm_n}(\cdot), K_{m_n}(\cdot, y)\rangle_{m_n} - \\ [\langle f_{k_nm_n}(\cdot), K_{m_n}(\cdot, y)\rangle_{m_n} - \langle f_{k_n0}(\cdot), K_{m_n0}(\cdot, y)\rangle_0]. \tag{3.17}$$

El término entre corchetes es de la forma $[\langle g, h\rangle_{m_n} - \langle g_0, h_0\rangle_0]$ para $g, h \in F_{m_n}$ (g_0 y h_0 son las restriciones de g y h a E_0). Esta es una forma bilineal en g y h y la correspondiente forma cuadrática $\langle g, g\rangle_{m_n} - \langle g_0, g_0\rangle_0 = \|g\|^2_{m_n} - \|g_0\|^2_0$ es positiva (según las hipótesis y (3.15). Consecuentemente la desigualdad de Cauchy-Schwarz es válida para esta forma y entonces, continuando con la expresión (3.17),

$$\begin{aligned} |[\cdots]| &\leq [\|f_{k_n m_n}\|^2_{m_n} - \|f_{k_n 0}\|^2_0]^{1/2}[\|K_{m_n}(\cdot, y)\|^2_{m_n} - \|K_{m_n 0}(\cdot, y)\|^2_0]^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{n}\|K_{m_n}(\cdot, y)\|_{m_n} = \frac{1}{n}K_{m_n}(y, y)^{1/2}. \end{aligned}$$

Cuando $n \to \infty$ esta última expresión converge a cero, pues $K_{m_n}(y, y) \to K_0(y, y) < \infty$. Por lo tanto, (3.16) y (3.17) se sigue

$$\begin{aligned} \langle f_0(\cdot), K_0(\cdot, y)\rangle_0 &= \lim_{n\to\infty} \langle f_{k_n m_n}(\cdot), K_{m_n}(\cdot, y)\rangle_{m_n} = \lim_{n\to\infty} f_{k_n m_n}(y) \\ &= \lim_{n\to\infty} f_{k_0 n}(y) = \lim_{n\to\infty} f_0^{(n)}(y) = f_0(y), \end{aligned}$$

la cual es la propiedad reproductiva para K_0. $\square$

Epílogo

Finalmente, a manera de epílogo, pretendemos mostrar indicativamente que una de las más ingeniosas direcciones en que los núcleos reproductivos han tenido aplicación, es en la teoría de las probabilidades.

En la última parte del primer capítulo habíamos ya establecido el sentido de la terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, llamado espacio de probabilidad, así como de otros conceptos probabilísticos como el de *esperanza.* Ahora bien, si consideramos las varibales aleatorias (funciones reales $\mathcal{F}$-medibles sobre Ω) X_1,..., X_n, es posible que exista un vector μ de dimensión n cuyas componentes son los números

$$\mu_i = \mathbf{E}[X_i] = \int_\Omega X_i \, d\mathbf{P},$$

con $i = 1, ..., n$, siempre que tales números existan. Dicho vector es conocido como *vector esperanza.*

De igual modo, es posible que exista una matriz cuadrada K de dimensión n cuyo componente genérico es el número

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \mathbf{E}[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)] \\ &= \int_\Omega (X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j) \, d\mathbf{P},\end{aligned}$$

llamado *covarianza de las varibles X_i y X_j*, con $i, j = 1, ..., n$, siempre que tales números existan. Dicha matriz es conocida como *matriz de covarianzas.* Habitualmente, cuando $i = j$ usamos la notación $\sigma_{ij} = \sigma_i^2$ y tal número es conocido simplemente como *varianza de la variable aleatoria X_i.*

Una condición necesaria y suficiente para la existencia del vector μ y la matriz K es que cada X_i, $i = 1, ..., n$, sea cuadrado integrable. Si tal es caso, es fácil observar que K es una matriz simétrica, y si además $\sigma_i^2 > 0$, para toda $i = 1, ..., n$, entonces K también es una matriz definida positiva (en el sentido estudiado en la sección 2.4).

Bajo estas condiciones, si llamamos $T_n = \{1, ..., n\}$, y abusando de la notación, es posible definir la función $K : T_n \times T_n \to \mathbb{R}$ como $K(i, j) = \sigma_{ij}$, $i, j \in T_n$. De modo que, según lo visto en la sección 2.7, $H(K)$ es el espacio vectorial euclídeo de dimensión n con el producto punto $\langle x, y \rangle = x^t \, K^{-1} \, y$. Por lo tanto

$$\mathbf{P}[(X_1, ...X_n) \in H(K)] = 1.$$

Ahora, si consideramos un conjunto de índices T arbitrario, entonces un *proceso estocástico* sobre el espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ es una sucesión $X = \{X_t\}_{t \in T}$ de variables aleatorias definidas sobre dicho espacio. Además, si $\omega \in \Omega$ llamamos *trayectoria* de X en ω a la función $X.(\omega) : T \to \mathbb{R}$.

Y en forma análoga al caso finito, si X_t es cuadrado integrable para toda $t \in T$, entonces decimos que el proceso X es de segundo orden, y la función $K : T \times T \to \mathbb{R}$, dada por $K(s,t) = \sigma_{st}$ es una matriz definida positiva siempre que $\sigma_t^2 > 0$, para toda $t \in T$. Esta función es también conocida como la matriz de covarianzas del proceso X. Del mimo modo, el vector μ cuyos elementos son los números $\mu_t = \mathbf{E}[X_t]$, $t \in T$, es conocido como vector esperanza del proceso X.

La pregunta ahora es si

$$\mathbf{P}[X \in H(K)] = 1,$$

o todavía más, si existe alguna otra matriz positiva $R : T \times T \to \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{P}[X \in H(R)] = 1,$$

y bajo qué condiciones es posible afirmar tales resultados.

Parzen[1] muestra que

$$\mathbf{P}[X \in H(K)] = 1,$$

es falso si no se verifican dos condiciones, a saber, que T es un espacio métrico separable y K es continua sobre $T \times T$.

Kallianpur[2] muestra que si X es un proceso Gaussiano[3], y R es una matriz simétrica continua sobre $T \times T$ entonces

$$\mathbf{P}[X \in H(R)] = 1 \qquad \text{ó} \qquad \mathbf{P}[X \in H(R)] = 0.$$

Finalmente, Driscoll[4] muestra que si X es un proceso Gaussiano cuyas trayectorias son continuas sobre T (donde T es un espacio métrico separable), y si R es una matriz simétrica definida positiva y continua sobre $T \times T$ tal que $\mu \in H(R)$, entonces

$$\mathbf{P}[X \in H(R)] = 1 \qquad \text{ó} \qquad \mathbf{P}[X \in H(R)] = 0,$$

[1] En el trabajo que también menciona Driscoll: Parzen, E. "Probability functionals and reproducing kernels Hilber spaces". En *Time Series Analysis.* pp 155-19, M. Rosenblatt. New York: Wiley 1963.

[2] En otro trabajo igualmente usado por Driscoll: Kallianpur, G. "Zero-one laws for Gaussian prosesses". En *Transactions of the AMS.* Vol 149 (1970), pp 199-211.

[3] Esto es, para cada número finito de vectores $X_{t_1}, ..., X_{t_n}$, $t_i \in T$, $i = 1, ..., n$, el vector $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ tiene distribución normal (o Gaussiana) n-variada

[4] Driscoll, Michael F. "The reproducing kernel Hilbert space structure of the sample paths of a Gaussian process". En *Zeitsschrift fur Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete.* Vol 26, 1973. Págs 309-3016.

según si el número
$$\tau = \sup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{tr}(K_n R_n),$$
es finito o infinito, donde $T_0 = \{t_1, t_1, ...\}$ es un subconjunto denso numerable de T, K_n y R_n son las restriciones de K y R, respectivamente, al subconjunto $\{t_1, ..., t_n\}^2$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Driscoll descubre, de esta forma, condiciones necesarias y suficientes que determinan si $\mathbf{P}[X \in H(R)] = 1$ ó 0. Pero llama la antención que en la prueba de que $\mathbf{P}[X \in H(R)] = 1$ bajo la considerqación de que $\tau < +\infty$, Driscoll no haga uso de la hipótesis de que el proceso X es Gaussiano.

Recientemente, Lukić y Beder (en [6]), observaron este hecho, y han logrado dar una generalización de este resultado para procesos más generales. En su extenso trabajo, las hipótesis de Driscoll son sustituidas solamente por las hipótesis $H(K) \subseteq H(R)$ y $\mu \in H(K)$, no requiriendo suposiciones adicionales para el proceso X, las matrices K y R (excepto que sean definidas positivas, por supuesto) o el conjunto T. En caso particular de que el proceso X es Gaussiano, se tiene, en efecto que si $\mathbf{P}[X \in H(R)] = 1$ entonces $\tau < +\infty$.

En el caso general, estos probabilistas prueban, bajo las suposiciones mencionadas en el párrafo anterior, que existe una versión Y del proceso X (esto es, un proceso estocástico $Y = \{Y_t\}_{t\in T}$ tal que $\mathbf{P}[Y_y = X_t] = 1$, para toda $t \in T$) cuyas trayectorias están contenidas casi seguramente en $H(R)$ (es decir $\mathbf{P}[Y \in H(R)] = 1$) siempre que $\tau < +\infty$. Y que bajo otras restriciones, que no es posible mencionar en esta tesis, se tiene en efecto, que $\mathbf{P}[X \in H(R)] = 1$. La prueba está basada en las ideas que Driscoll había dado ya en el trabajo que ya mencionamos, y el soporte lo aporta un descubrimiento fundamental: Cuando $H(K) \subseteq H(R)$, y $H(R)$ es separable, entonces el operador dominante L del que hablamos en la sección 3.2 tiene la propiedad de que
$$\tau = \operatorname{tr}(L).$$

Lukić y Beder se apoyaron en diversos trabajos previos que ya habían tocado el tema de los procesos estocásticos. De este modo, son vastas las consideraciones que hasta ahora ha tenido el núcleo reproductivo en el desarrollo teórico de los procesos estocásticos. Por lo pronto nosotros concluimos este trabajo, dejando para venideros tiempos la investigación en estos ámbitos.

Bibliografía

[1] Aronszjan N. "Theory of reproducing kernels". En *Transactions of the AMS*, Vol. 68 (1950), pp 337-404.

[2] Ash, Robert B. *Probability and measure theory.* Segunda edición. Harcourt Academic Press, San Diego, 2000.

[3] Billingsley, Patrick. *Probability and measure.* Tercera edición. John Wiley & Sons, Nueva York, 1995.

[4] Heuser, Harro G. [Traducción al inglés: John Horráth]. *Functional analysis.* John Wiley & Sons, Nueva York, 1982.

[5] Itratescu, Vasile Ion. *Inner product structures. Theory and applications.* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987.

[6] Lukić M. N., Beder J. H. "Stochastic processes with sample paths in reproducing kernel Hilbert spaces". En *Transactions of the AMS*, Vol. 353, Number 10 (2001), pp 3945-3969.

[7] Narici, Lawrence; Bachman, George. *Functional analysis.* Academic Press Inc, Nueva York, 1966.