**TP Bloque II**

**Contenidos Teóricos** Distribuciones de probabilidad conjunta: distribuciones marginales y condicionales. Covarianza y Correlación. Distribuciones condicionales. Esperanza y varianza condicional. Propiedades.
Cambio de variables. Momentos de orden superior. Función generadora de momentos. Desigualdades de Markov, Jensen y Tchebichev.

**Ejercicio 1**

Cuando un automóvil es detenido por una patrulla, se revisa el desgaste de cada neumático, y cada faro delantero se verifica para ver si está correctamente alineado. Denotemos por $\boldsymbol{X}$ el número de faros delanteros que necesitan ajuste y por $\boldsymbol{Y}$ el número de neumáticos defectuosos.

a) Si $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ son independientes con $p_X(0) = 0.5$, $p_X(1) = 0.3$ y $p_X(2) = 0.2$ y $p_Y(0) = 0.6$, $p_Y(1) = 0.1$, $p_Y(2) = p_Y(3) = 0.05$ y $P_Y(4) = 0.2$, presente la función de probabilidad conjunta de $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ en una tabla.
b) Calcule $P(\boldsymbol{X} \leq 1, \boldsymbol{Y} \leq 1)$ a partir de la tabla de probabilidad conjunta y verifique que es igual al producto $P(\boldsymbol{X} \leq 1)\, P(\boldsymbol{Y} \leq 1)$.
c) ¿Cuál es $P(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} = 0)$, o sea la probabilidad de no violaciones?
d) Calcule $P(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} \leq 1)$.

**Ejercicio 2**

Denote por $\boldsymbol{X}$ el número de VCR (grabadoras) de marca *A* vendidas durante una semana en particular por cierto comercio. La función de probabilidad puntual de $\boldsymbol{X}$ es:

| $x$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_X(x)$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.25 | 0.15 |

Sesenta por ciento (60%) de los clientes que compran VCR de marca *A* también compran una garantía de cobertura amplia. Denote por $\boldsymbol{Y}$ el número de compradores que compra garantía de cobertura amplia durante esta semana.

a) ¿Cuál es $P(\boldsymbol{X} = 4, \boldsymbol{Y} = 2)$? (*Sugerencia*: Esta probabilidad es igual al producto $P(\boldsymbol{Y} = 2/\boldsymbol{X} = 4).P(\boldsymbol{X} = 4)$. Ahora considere las cuatro compras como cuatro repeticiones de un experimento Binomial, en el cuál éxito es la compra de una garantía de cobertura amplia).
b) Calcule $P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y})$.
c) Determine la función de probabilidad conjunta de $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ y luego la función de probabilidad marginal de $\boldsymbol{Y}$.

**Ejercicio 3**

El gerente de una compañía de seguros afirma que el 45% de las personas a las que envía a uno de sus promotores adquiere una póliza contra terceros para su automóvil, el 15% adquiere una póliza contra todo riesgo, y el resto no compra. Si el promotor visita 5 personas en un día determinado, ¿cuál es la probabilidad de que 2 le compren pólizas contra terceros y 1 una póliza contra todo riesgo?.

**Ejercicio 4**

Dos componentes de una microcomputadora tienen la siguiente función de densidad conjunta para sus tiempos de vida útiles ***X*** e ***Y***:

$$f(x,y)=\begin{cases} x\,e^{-x(1+y)} & \text{si } x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración ***X*** del primer componente sea mayor que 3?

b) ¿Cuáles son las funciones de densidad marginal de ***X*** e ***Y*** ?. ¿Son independientes las dos duraciones?. Explique.

c) ¿Cuál es la probabilidad que la duración de por lo menos un componente sea mayor que 3?

**Ejercicio 5**

Una persona tiene dos bombillas para una lámpara en particular. Sea ***X*** = duración de la primera bombilla e ***Y*** = duración de la segunda (ambas en miles de horas). Suponga que ***X*** e ***Y*** son independientes y que cada una tiene distribución exponencial de parámetro $\lambda$=1.

a) ¿Cuál es la función de densidad conjunta de (***X***, ***Y***)?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que cada bombilla dure a lo sumo 1000 horas ( es decir, **X** ≤1, **Y**≤1)?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración total de las dos bombillas sea a lo sumo de 2000 horas (o sea **X** + **Y** ≤ 2)? (*Sugerencia*: Dibuje la región **A** = {(*x*, *y*) / *x* ≥ 0, *y* ≥ 0, *x* + *y* ≤ 2).

d) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración total de las dos bombillas esté entre 1000 y 2000 horas?

**Ejercicio 6**

Considere un pequeño bote transbordador que tiene capacidad para automóviles y autobuses. La cuota para automóviles es 3$ y la de autobuses es 10$. Denote por ***X*** e ***Y*** el número de automóviles y autobuses, respectivamente, transportados en un solo viaje y suponga que su función de probabilidad conjunta es la siguiente:

| | | y | | |
|---|---|---|---|---|
| | | **0** | **1** | **2** |
| x | **0** | 0.025 | 0.015 | 0.010 |
| | **1** | 0.050 | 0.030 | 0.020 |
| | **2** | 0.125 | 0.075 | 0.050 |
| | **3** | 0.150 | 0.090 | 0.060 |
| | **4** | 0.100 | 0.060 | 0.040 |
| | **5** | 0.050 | 0.030 | 0.020 |

Calcule el ingreso esperado de un solo viaje.

a) Calcule la covarianza entre ***X*** e ***Y*** del ejercicio 8

b) Calcule el coeficiente de correlación entre ***X*** e ***Y***.

**Ejercicio 7**

Sea ***U*** una v.a. con distribución ***U****(0,1).*

a) Hallar la función de distribución y la función de densidad de la v. a. $X = aU + b$, siendo $a > 0$. ¿A qué familia pertenece esta distribución?
b) Hallar la función de distribución y la función de densidad de la v. a.:
c) $X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ siendo $\lambda > 0$. ¿A qué familia pertenece esta distribución?
d) Hallar la función de distribución y la función de densidad de la v. a: Y=U5
e) Hallar la función de distribución y la función de densidad de la v. a : X=ln(U)
f) Hallar la función de distribución y la función de densidad de la v. a : W= U/(U+1)

**Ejercicio 8**

Se tira una moneda equilibrada tres veces y ***X*** = "número de caras que se obtienen en las tiradas".

Si ***X*** = *a*, se extrae sin reposición *a* + 1 bolillas de una urna que contiene 4 bolillas blancas y una bolilla roja. Sea ***Y*** = "número de bolillas rojas extraídas". ¿Cuál es la esperanza de la variable ***Y***?

**Ejercicio 9**:

Sea (***X***, ***Y***) un vector aleatorio bidimensional continuo con función de densidad conjunta:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 6(x-y) & si \quad 0 < y \leq x < 1 \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

**a.-** Hallar $E\left(Y/X\right)$ = ***g***(***X***)

**b.-** Verificar que $E\left(E\left(Y/X\right)\right)$ = $E$(***Y***).

**Ejercicio 10**:

Sea (***X***, ***Y***) un vector aleatorio bidimensional continuo con función de densidad conjunta:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 1/2x^2 & si \quad |x| \leq 1 \ ; 0 < y < x^2 \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

**a.-** Hallar $E\left(X/Y\right)$ = ***g***(***Y***)

**b.-** Verificar que $E\left(E\left(X/Y\right)\right)$ = $E$(***X***).

**Ejercicio 11**

Un resultado que recibe el nombre de Desigualdad de Chebyshev establece que para cualquier distribución de probabilidad de una variable aleatoria ***X*** con $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$ **,** y cualquier número $k \geq 1$,

$$P(\ |X - \mu| \geq k\,\sigma\ ) \leq 1 / k^2.$$

En otras palabras, la probabilidad de que el valor de ***X*** se encuentre alejado por lo menos $k$ desviaciones standard de su media es a lo sumo $1/k^2$.

a) ¿Cuál es el valor de la cota superior para $k$ =2? ¿ $k$ =3? ¿ $k$ =4? ¿ $k$ =5? ¿ $k$ =10?

b) Calcular $\mu$ y $\sigma$ para la siguiente función de probabilidad puntual

| **x** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **p(x)** | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 | 0.20 | 0.06 | 0.04 |

y evaluar $P(\ |X - \mu| \geq k\,\sigma\ )$ para los valores de $k$ dados en la parte a). ¿Qué sugiere ésto acerca de la cota superior en relación con la probabilidad correspondiente?

c) Si ***X*** toma valores –1, 0 y 1 con probabilidades 1/18, 8/9 y 1/18 respectivamente, ¿cuál es $\mathbf{P(|X - \mu| \geq 3\,\sigma)}$, y cómo se compara con la cota correspondiente?

d) Dar una distribución para la cual $\mathbf{P(|X - \mu| \geq 5\,\sigma) = 0.04}$.

**Ejercicio 12**

La desigualdad de Chebyshev, introducida en el ejercicio anterior, es válida para distribuciones continuas y discretas. Ella expresa que para cualquier número $k$ que satisfaga $k \geq 1$, P( $|X - \mu| \geq k\sigma$ ) $\leq$ $1/k^2$ . Obtenga esta probabilidad en el caso de una distribución normal para $k$ = 1, 2 y 3 y compare con la cota superior