Sujet 1 (4)

1) On a bien $\mathbb{E}(\bar{X}) = \mathbb{E}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda = \lambda$

2) $\mathbb{E}[(\bar{X})^2] = \mathrm{Var}(\bar{X}) + \mathbb{E}^2(\bar{X}) = \dfrac{\mathrm{Var}(X)}{n} + \lambda^2 = \dfrac{\lambda}{n} + \lambda^2$ donc $(\bar{X})^2$ n'est pas un estimateur non biaisé de λ^2.

On a $b_T(\lambda) = \mathbb{E}[(\bar{X})^2] - \lambda^2 = \dfrac{\lambda}{n}$ donc, comme $\lambda \geq 0$, $b_T \geq 0$ pour tout λ.

3) On a $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}[a(\bar{X})^2 + b\bar{X} + c] = a\left(\dfrac{\lambda}{n} + \lambda^2\right) + b\lambda + c = a\lambda^2 + \left(b + \dfrac{a}{n}\right)\lambda + c$

On veut que T soit un estimateur non biaisé de λ^2 donc il faut que l'équation

$$a\lambda^2 + \left(b + \frac{a}{n}\right)\lambda + c = \lambda^2$$

soit vérifiée $\forall\lambda$ ce qui donne $a = 1$, $b = -\dfrac{1}{n}$, $c = 0$. Donc $T = (\bar{X})^2 - \dfrac{\bar{X}}{n}$ est un estimateur sans biais de λ^2.

Sujet 2 (6)

Réponses :

1. La fonction de vraisemblance $\theta \mapsto f(\xi_1, \ldots, \xi_n; \theta)$ est donnée par l'équation suivante

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_n; \theta) = \begin{cases} \dfrac{2^n \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n}{\theta^{2n}} & \text{si} \quad 0 \leq \xi_{(1)} \leq \cdots \leq \xi_{(n)} \leq \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On peut réécrire cette équation de la façon suivante

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_n; \theta) = \begin{cases} \dfrac{2^n \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n}{\theta^{2n}} & \text{si} \quad \theta \geq \xi_{(n)} \text{ et } \xi_{(1)} \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Donc, la fonction $\theta \mapsto f(\xi_1, \ldots, \xi_n; \theta)$ est monotone décroissante dans le domain $D = \{\theta : \theta \geq \xi_{(n)}\}$ et elle est nulle pour les autres valeurs de $\theta > 0$. Elle n'est pas définie pour les valeurs de $\theta \leq 0$.

La méthode du maximum de vraisemblance est basée sur la maximisation de la fonction $\theta \mapsto f(\xi_1, \ldots, \xi_n; \theta)$ (dans son domaine de définition, bien sûr). Donc le maximum de la fonction $\theta \mapsto f(\xi_1, \ldots, \xi_n; \theta)$ est atteint pour la plus petite valeur de θ dans le domaine D :

$$\widehat{\theta}_{\mathrm{MV}} = \xi_{(n)}.$$

2. On calcule la fonction de répartition de l'estimateur MV

$$F_{\xi_{(n)}}(x) = \mathbb{P}\left(\xi_{(n)} \leq x\right) = \mathbb{P}\left(\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \leq x\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\xi_i \leq x\right) = \left[\frac{1}{\theta^2}\int_0^x 2y\,dy\right]^n = \frac{x^{2n}}{\theta^{2n}}.$$

où $0 \leq x \leq \theta$. D'où on obtient la densité

$$f_{\xi_{(n)}}(x) = \frac{dF_{\xi_{(n)}}(x)}{dx} = 2n\frac{x^{2n-1}}{\theta^{2n}}.$$

et, finalement, on a

$$\mathbb{E}(\hat\theta)=\mathbb{E}(\xi_{(n)})=\int_0^\theta 2n\cdot\frac{x^{2n-1}}{\theta^{2n}}\cdot x\,dx=\frac{2n}{\theta^{2n}}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^\theta=\frac{2n}{2n+1}\,\theta.$$

L'estimateur $\hat\theta=\xi_{(n)}$ est biaisé $\mathbb{E}(\hat\theta-\theta)=\frac{2n}{2n+1}\theta-\theta=\frac{2n\theta-(2n+1)\theta}{2n+1}$

$$=-\frac{\theta}{2n+1}$$

L'estimateur $\hat\theta=\xi_{(n)}$ est asymptotiquement sans biais

car
$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\hat\theta-\theta)=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{\theta}{2n+1}\right)=0.$$

3) $\hat\theta=\xi_{(n)}\xrightarrow[\mathbb{P}]{}\theta$?

$$\forall\varepsilon>0:\ \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(|\hat\theta-\theta|>\varepsilon)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left[\theta-\max\{\xi_1,\dots,\xi_n\}>\varepsilon\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left[\max\{\xi_1,\dots,\xi_n\}<\theta-\varepsilon\right]=\lim_{n\to\infty}F_{\xi_{(n)}}(\theta-\varepsilon)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^{2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\varepsilon}{\theta}\right)^{2n}=0,\quad \text{car } \varepsilon>0 \text{ et } \varepsilon<\theta.$$

L'estimateur MV est convergent (en proba)

Sujet 3 (6)

1) Dans notre cas la méthode des moments s'écrit

$$\left.\begin{array}{r} m_1' = \bar{x} \\ \mathbb{E}(X) = \theta \end{array}\right\} \Longrightarrow \hat{\theta}_2 = \bar{X}$$

Et, par ce qui précède, $\hat{\theta}_2$ est un estimateur sans biais de θ.

2) Par définition, l'estimateur de vraisemblance s'écrit

$$L(\theta; x_1, \ldots, x_2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta}}$$

On a alors
$\ln L = -n \ln \theta - \dfrac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta}$ et donc $\dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta} = -\dfrac{n}{\theta} + \dfrac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta^2}$
En cherchant les solutions de $\dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$ on trouve $\hat{\theta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \bar{X}$
D'autre part, comme $X \simeq \mathcal{E}(\frac{1}{\theta})$ on a $\mathbb{E}(X) = \theta$ et $\mathrm{Var}(X) = \theta^2$. Donc
$\mathbb{E}(\hat{\theta}_1) = \mathbb{E}(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta = \theta$ et $\hat{\theta}_1$ est un estimateur sans biais de θ.

Bonus (+3 points) On a, comme les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont *iid*, que

$$\mathrm{Var}(a\bar{X}) = a^2 \,\mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{a^2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) = \frac{a^2 \theta^2}{n}$$

Le biais de $a\bar{X}$ s'écrit $b_{a\bar{X}}(\theta) = \mathbb{E}(a\bar{X}) - \theta = a\theta - \theta = (a-1)\theta$
Et le carré moyen de l'erreur s'écrit alors

$$\mathrm{CM_e}(a\bar{X}) = \frac{a^2}{n}\theta^2 + (a-1)^2\theta^2 = \left(\frac{a^2}{n} + (a-1)^2\right)\theta^2$$

D'où

$$\frac{\partial \,\mathrm{CM_e}(a\bar{X})}{\partial a} = \left(\frac{2a}{n} + 2(a-1)\right)\theta^2$$

En cherchant les solutions de $\dfrac{\partial \,\mathrm{CM_e}(a\bar{X})}{\partial a} = 0$ on trouve $a = \dfrac{n}{n+1}$ donc l'estimateur cherché est $\dfrac{n}{n+1}\bar{X}$.

3) Condition de régularité r1 et r2 = OK.

4) La borne de R.-C.

Inf. de Fisher

$$\mathcal{I}(\theta) = \mathbb{E}_\theta\left[\frac{\partial \log f_\theta(\xi)}{\partial \theta}\right]^2$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\log f_\theta(\xi)\right] = -\frac{1}{\theta} + \frac{\xi}{\theta^2}.$$

$$\mathcal{I}(\theta) = \mathbb{E}_\theta\left[\frac{\xi-\theta}{\theta^2}\right]^2 = \frac{Var(\xi)}{\theta^4} = \frac{\theta^2}{\theta^4} = \frac{1}{\theta^2}$$

$$Var\Bigg[\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i}_{\hat{\theta}_1}\Bigg] = \frac{1}{n^2}\cdot\theta^2\cdot n = \frac{\theta^2}{n}$$

La borne de R.-C.

$$Var(\hat{\theta}) = \mathbb{E}_\theta\left[(\hat{\theta}-\theta)^2\right] \geq \frac{\theta^2}{n} = Var(\hat{\theta}_1) \Rightarrow$$

l'estimateur $\hat{\theta}_1$ est efficace dans la classe K_0 (car $b(\theta)=0$).