Bloque II(segunda semana)

Contenidos Teóricos Distribuciones de probabilidad conjunta: distribuciones marginales y condicionales. Covarianza y Correlación. Distribuciones condicionales. Esperanza y varianza condicional. Propiedades.

Distribuciones de probabilidad conjunta

A- Caso Discreto

Hay muchas situaciones experimentales en las que el investigador está interesado en más de una variable aleatoria simultaneamente.

Así como en el caso de una sola variable $\boldsymbol{X}$, la función de probabilidad de masa especifica cuál es la probabilidad para cada valor x de $\boldsymbol{X}$, la función de probabilidad puntual conjunta de las variables $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ (ambas discretas) describe cuál es la probabilidad para cada par de valores (x, y).

Si $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ son variables discretas, la **función de probabilidad de masa conjunta** $p_{XY}(x, y)$ está definida por: $p_{XY}(x, y) = P(\boldsymbol{X} = x \ \wedge \boldsymbol{Y} = y)$

Si **A** es cualquier subconjunto de $\mathbf{R}^2$ formado por pares (x, y), entonces la probabilidad conjunta de **A** se nota:

$$P(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})[\mathbf{A}] = \sum_{(x,y)\in A} p_{XY}(x,y)$$

Ejemplo 1:

De una urna que contiene 4 bolitas negras y 6 bolitas blancas se extraen dos bolitas sin reposición. Sea $\boldsymbol{X}$ = "número de bolitas negras" y sea $\boldsymbol{Y}$ = "número de bolitas blancas". Calcular $p_{XY}(x, y)$.

$R_X = \{0, 1, 2\} = R_Y$

$\boldsymbol{Y} \setminus \boldsymbol{X}$	0	1	2
0	0	0	$12/90$
1	0	$48/90$	0
2	$30/90$	0	0

Por lo tanto: $p_{XY}(0,0) = 0$; $p_{XY}(1, 2) = 0$; $p_{XY}(2, 0) = 12/90$

Ejemplo 2:

Se arrojan dos dados. Sean $\boldsymbol{X}$ = "suma de los números" e $\boldsymbol{Y}$ = "número de ases"

R_X = { 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} ; R_Y = { 0, 1, 2}

Y* \ *X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	0	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$
1	0	$2/36$	$2/36$	$2/36$	$2/36$	$2/36$	0	0	0	0	0
2	$1/36$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Propiedades de la función de probabilidad conjunta:

La función $p_{XY}(x, y)$ debe cumplir con las siguientes propiedades:

1.- $p_{XY}(x, y) \geq 0 \quad \forall\ (x, y)$

2.- $\sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} p_{XY}(x, y) = 1$ (decir qué es una suma doble)

Función de probabilidad acumulada conjunta:

La función de probabilidad acumulada en (*x, y*) se define como:

$$F_{XY}(x, y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{XY}(x_i, y_j)$$

<u>Ejemplo 3:</u>

a) Para el ejemplo de la urna, calcular $F_{XY}(1, 2)$

$$F_{XY}(1,2) = \sum_{x_i \leq 1} \sum_{y_j \leq 2} p_{XY}(x_i, y_j) = \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{2} p_{XY}(i, j) =$$

$$= \sum_{i=0}^{1} \left(p_{XY}(i,0) + p_{XY}(i,1) + p_{XY}(i,2) \right) = \left(p_{XY}(0,0) + p_{XY}(0,1) + p_{XY}(0,2) \right) +$$

$$+ \left(p_{XY}(1,0) + p_{XY}(1,1) + p_{XY}(1,2) \right) = 30/90 + 48/90 = 78/90$$

b) Para el ejemplo de los dados, calcular $F_{XY}(4, 1)$

$$F_{XY}(4,1) = \sum_{x_i \leq 4} \sum_{y_j \leq 1} p_{XY}(x_i, y_j) = \sum_{i=2}^{4} \sum_{j=0}^{1} p_{XY}(i, j) =$$

$$= \sum_{j=0}^{1} \left(p_{XY}(2, j) + p_{XY}(3, j) + p_{XY}(4, j) \right) =$$

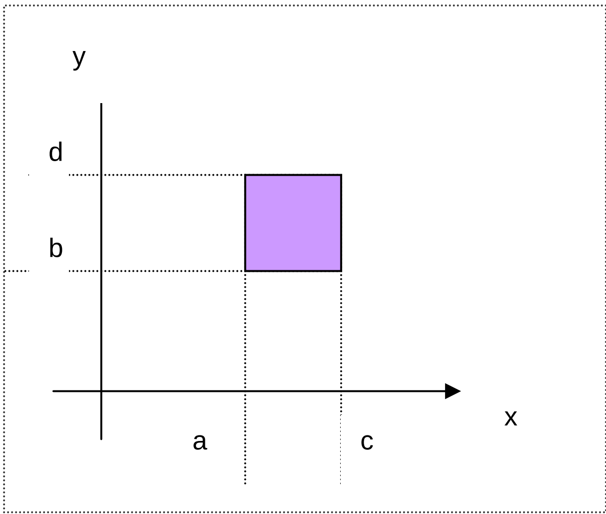
$$= \left(p_{XY}(2,0) + p_{XY}(3,0) + p_{XY}(4,0) \right) + \left(p_{XY}(2,1) + p_{XY}(3,1) + p_{XY}(4,1) \right) =$$

$= \frac{1}{36} + \frac{4}{36} = \frac{5}{36}$

Propiedades de la función de distribución de probabilidades acumuladas:

1-$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} F(x,y)=1$
2-$F(x,y)$ es continua a derecha
3- $\lim_{x\to-\infty} F(x,y)=0$ $\lim_{y\to-\infty} F(x,y)=0$
4- Siendo $a<c$ y $b<d$
$P(a \le X \le c,\ b \le Y \le d)= F_{XY}(c,d)-F_{XY}(a,d)-F_{XY}(c,b)+F_{XY}(a,b)$

Toda función que satisface las condiciones 1 a 4 recientemente mencionadas, es una función de distribución de probabilidades acumuladas para algún vector aleatorio.
Si alguna de estas no se cumpliera no sería una función de distribución de probabilidades acumuladas.



Ejemplo 4:

Sea $F_{XY}(x,y)=\begin{cases} 1 & \text{si } x+y \ge 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Es evidente que esta función satisface las condiciones 1 a 3 por su definición y sin embargo no satisface la cuarta condición…

En efecto:

$P(-1\le X\le 2, -1\le Y\le 2)= F_{XY}(2,2)-F_{XY}(-1,2)-F_{XY}(2,-1)+F_{XY}(-1,-1)$

$P(-1\le X\le 2, -1\le Y\le 2)= 1-1-1+0=-1$

ABSURDO!!!

Luego, no es función de distribución de probabilidades acumuladas.

Definición de función de probabilidad marginal:

Las funciones de probabilidad marginal de ***X*** y de ***Y*** están dadas, respectivamente, por:

$$p_X(x) = \sum_{y \in R_Y} p_{XY}(x,y) \qquad\qquad p_Y(y) = \sum_{x \in R_X} p_{XY}(x,y)$$

Ejemplo 5:

En el ejemplo de los dados, calculemos:

$$p_X(2) = \sum_{y \in R_Y} p_{XY}(2,y) = p_{XY}(2,0) + p_{XY}(2,1) + p_{XY}(2,2) = \frac{1}{36}$$

$$p_X(3) = \sum_{0 \le y \le 2} p_{XY}(3,y) = p_{XY}(3,0) + p_{XY}(3,1) + p_{XY}(3,2) = \frac{2}{36}$$

$$p_Y(0) = \sum_{0 \le x \le 12} p_{XY}(x,0) = p_{XY}(2,0) + p_{XY}(3,0) + \ldots + p_{XY}(12,0) = \frac{25}{36}$$

$$p_Y(1) = \sum_{0 \le x \le 12} p_{XY}(x,1) = p_{XY}(2,1) + p_{XY}(3,1) + \ldots + p_{XY}(12,1) = \frac{10}{36}$$

Observar que las probabilidades marginales se obtienen sumando la fila o columna correspondientes al valor fijo.

Ejemplo 6:

Una gran compañía de seguros tiene clientes que han asegurado sus casas y automóviles. Por cada tipo de póliza debe especificarse una cantidad deducible. Las opciones para la cantidad deducible en la póliza de automóviles son: 100 y 250; mientras que las opciones para las casas son 0, 100 y 200.

Sean ***X*** = "cantidad deducible en la póliza de un auto"

Y = "cantidad deducible en la póliza de una casa"

Sabiendo que la función de probabilidad puntual conjunta es:

X \ Y	0	100	200	
100	0.20	0.10	0.20	0.50
250	0.05	0.15	0.30	0.50
	0.25	0.25	0.5	1

a.- Calcular $P(X = 100 \wedge Y = 100)$

$$P(X = 100 \wedge Y = 100) = p_{XY}(100,100) = 0.10$$

b.- Calcular $P(Y \geq 100)$

$P(Y \geq 100)$ = $P(X = 100 \wedge Y = 100)$ + $P(X = 250 \wedge Y = 100)$ + $P(X = 100 \wedge Y = 200)$ + $P(X = 250 \wedge Y = 200)$ = 0.10 + 0.15 + 0.20 + 0.30 = 0.75

c.- Calcular la función de probabilidad marginal de ***X*** y de ***Y***.

$p_X(100)$ = $P(X = 100 \wedge Y = 0)$ + $P(X = 100 \wedge Y = 100)$ + $P(X = 100 \wedge Y = 200)$ =
= 0.2 + 0.1 + 0.2 = 0.5

$p_X(200)$ = $P(X = 200 \wedge Y = 0)$ + $P(X = 200 \wedge Y = 100)$ + $P(X = 200 \wedge Y = 200)$ =
= 0.05 + 0.15 + 0.3 = 0.5

$p_Y(0)$ = $P(X = 100 \wedge Y = 0)$ + $P(X = 250 \wedge Y = 0)$ = 0.2 + 0.05 = 0.25

$p_Y(100)$= $P(X = 100 \wedge Y = 100)$ + $P(X = 250 \wedge Y = 100)$ =0.1 + 0.15 = 0.25

$p_Y(200)$= $P(X = 100 \wedge Y = 200)$ + $P(X = 250 \wedge Y = 200)$ =0.2 + 0.3 = 0.50

Independencia de variables aleatorias:

Dos variables aleatorias ***X*** e ***Y*** son independientes si para todo par (*x*, *y*) se cumple:

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x).p_Y(y)$$

Si esta condición no se verifica $\forall$ (*x*, *y*) $\Rightarrow$ ***X*** e ***Y*** se dicen dependientes

<u>Ejemplo 7:</u>

1.- En el caso de la urna:

$p_{XY}(0,1)=0$; $p_X(0).p_Y(1) = \frac{30}{90} . \frac{12}{90}$ = 4 $\Rightarrow$ ***X*** e ***Y*** son dependientes

2.- En el ejemplo de los dados:

$p_{XY}(2, 0)= 0$; $p_X(2).p_Y(0)$ = $\frac{1}{36} . \frac{25}{36}$ $\Rightarrow$ ***X*** e ***Y*** son dependientes

B- Caso Continuo

Distribución conjunta de dos variables aleatorias X e Y continuas:

Sean ***X*** e ***Y*** variables aleatorias continuas, $f_{XY}(x, y)$: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ es la función de densidad conjunta de (***X***, ***Y***) si $\forall$ ***A*** $\subset$ $\mathbf{R}^2$: $p_{XY}(\boldsymbol{A}) = p_{XY}((x, y) \in \boldsymbol{A}) = \iint_A f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$

<u>Observación</u>:

Esta definición puede extenderse a cualquier número finito de variables, de la siguiente forma:

Sean X_1 ; X_2 ; ...; X_n variables aleatorias continuas, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es la función de densidad conjunta de ($X_1, X_2, ..., X_n$) si $\forall\, A \subset \mathbf{R}^n$:

$$p((x, y) \in A) = \iint\limits_A .. \int f(x_1, x_2, ..., xn)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

En particular:

Si $A = [a, b]x[c, d] \subset \mathbf{R}^2$ (rectángulo) $\Rightarrow$

$$\iint\limits_A f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f_{XY}(x,y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f_{XY}(x,y)dy \right) dx$$

Estas dos últimas integrales reciben el nombre de integrales iteradas. El teorema de Fubini garantiza que si la función es integrable entonces ambas integrales coinciden.

Propiedades de la función de densidad conjunta:

Para que $f(x, y)$ pueda ser una función de densidad conjunta debe satisfacer las siguientes propiedades:

- $f_{XY}(x, y) \geq 0 \quad \forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dxdy = 1$

<u>*Observación*:</u> $p((x, y) \in \boldsymbol{A})$ es el volumen encerrado por la superficie que define $f_{XY}(x, y)$ sobre la región $\boldsymbol{A}$.

<u>Ejemplo 8:</u>

Hallar la constante k para que la siguiente función sea una función de densidad conjunta de las variables $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$: $f(x,y) = \begin{cases} k(x+y^2) & si \quad 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & en \quad otro \quad caso \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^1 k(x+y^2)\,dx\,dy = k.\int_0^1 \int_0^1 (x+y^2)\,dx\,dy =$$

$$= k.\int_0^1 \left[\int_0^1 (x+y^2)\,dx \right] dy = k.\int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + xy^2 \right]_0^1 dy = k.\int_0^1 \left[\frac{1^2}{2} + y^2 \right] dy = k.\left[\frac{1}{2}y + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 =$$

$$= k\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \Rightarrow k.\frac{5}{6} = 1 \Rightarrow k = \frac{6}{5}$$

Si $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ son variables aleatorias continuas con función de densidad conjunta $f_{XY}(x, y)$ la *función de distribución* del vector aleatorio (X, Y) se define por:

$F_{XY}(x, y) = \iint_R f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$ siendo **R** = [-∞; *x*] x [-∞; *y*]

Ejemplo 9:

Para la función de densidad anterior, calcular: $P\left(X \le \tfrac{1}{4}; \tfrac{1}{2} \le Y \le 1\right)$

$$P\left(X \le \tfrac{1}{4}; \tfrac{1}{2} \le Y \le 1\right) = \int_0^{1/4}\int_{1/2}^{1} \frac{6}{5}(x+y^2)\,dx\,dy = \frac{6}{5}.\int_0^{1/4}\left[\int_{1/2}^{1}(x+y^2)\,dy\right]dx =$$

$$= \frac{6}{5}.\int_0^{1/4}\left[xy+\frac{y^3}{3}\right]_{1/2}^{1} dx = \frac{6}{5}.\int_0^{1/4}\left[x1+\frac{1^3}{3}-\frac{x}{2}-\frac{1}{24}\right]dx = \frac{6}{5}.\int_0^{1/4}\left[\frac{x}{2}+\frac{7}{24}\right]dx =$$

$$= \frac{6}{5}.\left[\frac{x^2}{4}+\frac{7}{24}x\right]_0^{1/4} = \frac{6}{5}.\left[\frac{1}{64}+\frac{7}{96}\right] = \frac{6}{5.32}\left[\frac{1}{2}+\frac{7}{3}\right] = \frac{6}{5.32}\,\frac{17}{6} = \frac{17}{160}$$

Ejemplo 10:

Sea $f_{XY}(x, y) = k(x+2y)I_T(x,y)$ donde $T = \{(x, y): 0 \le x \le 1 ; 0 \le y \le 1 - x\}$.

Hallar:

a) el valor de *k* para que $f_{XY}(x, y)$ sea una función de densidad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^{1-x} k(x+2y)\,dy\,dx = k.\int_0^1\int_0^{1-x}(x+2y)\,dy\,dx = k.\int_0^1\left[xy+y^2\right]_0^{1-x} dx =$$

$$= k.\int_0^1\left[x(1-x)+(1-x)^2\right]dx = k.\int_0^1\left[x-x^2+1-2x+x^2\right]dx = k.\int_0^1[1-x]\,dx =$$

$$= k.\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1 \Rightarrow k.\frac{1}{2} = 1 \Rightarrow k = 2$$

b) $P\left(X \le \tfrac{1}{2}; Y \le \tfrac{1}{2}\right)$

$$P\left(X \le {}^{1}\!/_{2}; Y \le {}^{1}\!/_{2}\right) = \int_0^{1/2}\int_0^{1/2} 2(x+2y)\,dy\,dx = 2.\int_0^{1/2}\int_0^{1/2}(x+2y)\,dy\,dx =$$

$$= 2.\int_0^{1/2}\left[xy+y^2\right]_0^{1/2} dx = 2.\int_0^{1/2}\left[x\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right]dx = \int_0^{1/2}\left[x+\frac{1}{2}\right]dx = \left[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\right]_0^{1/2} = \frac{3}{8}$$

c) $$P(X-Y\le 0) = P(X\le Y)$$

$$P(X\le Y) = \int_0^{1/2}\int_x^{1-x} 2(x+2y)\,dy\,dx = 2.\int_0^{1/2}\left[xy+y^2\right]_x^{1-x} dx =$$

$$= 2.\int_0^{1/2}\left[x(1-x)+(1-x)^2-x^2-x^2\right]dx = 2.\int_0^{1/2}(1-x-2x^2)\,dx =$$

$$= 2\left[x-\frac{x^2}{2}-\frac{2x^2}{3}\right]_0^{1/2} = 2\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right] = \frac{7}{12}$$

Las **funciones de densidad marginales** de las variables ***X*** e ***Y***, las notamos con $f_X(x)$; $f_Y(xy)$ y están definidas por:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy \qquad\qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx$$

<u>Ejemplo 11:</u>

Hallar las distribuciones marginales de ***X*** e ***Y*** si:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}\left(x+y^2\right) & 0\le x\le 1; 0\le y\le 1 \\ 0 & de\ otra\ forma \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{6}{5}\left(x+y^2\right)dy = \frac{6}{5}\left[xy+\frac{y^2}{3}\right]_0^1 = \frac{6}{5}\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{6}{5}\left(x+y^2\right)dx = \frac{6}{5}\left[xy^2+\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{6}{5}\left(y^2+\frac{1}{2}\right)$$

Independencia de variables aleatorias:

Dos variables aleatorias continuas con función de densidad conjunta $f_{XY}(x, y)$ se dicen independientes si para todo (x, y) se verifica: $f_{XY}(x, y) = f_X(x) \,.\, f_Y(y)$

En caso contrario se dicen ***dependientes***.

Ejemplo 12:

Si $f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{6}{5}\left(x+y^2\right) & 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1 \\ 0 & de\ otra\ \ forma \end{cases}$; ¿son variables independientes?

$$f_{XY}(1,1) = \frac{6}{5} \;;\quad f_X(1) = \frac{6}{5}\left(x+\frac{1}{3}\right)_{x=1} = \frac{8}{5} \;;\quad f_Y(1) = \frac{6}{5}\left(y^2+\frac{1}{2}\right)_{y=1} = \frac{9}{5}$$

Son variables dependientes.

Generalización: En general las variables aleatorias $\left(X_1, X_2, \dots, X_n\right)$ son independientes si para todo subconjunto de variables $\left(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}\right)$ se verifica:

$$f\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\right) = \prod_{j=1}^{k} f_{X_j}(x_{i_j})$$

Ejemplo 13:

Si $\boldsymbol{X_i}$ = “tiempo de vida en horas del componente electrónico *i* de un sistema que tiene *n* componentes” es una variable tal que $X_i \sim \varepsilon(\lambda)$ $\forall\ 1 \le i \le n$. Si las *n* componentes funcionan en forma independiente, calcular:

a.- La función de densidad conjunta de las *n* variables aleatorias

$$f\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = \prod_{j=1}^{n} \lambda.e^{-\lambda x_i} I_{[0,+\infty)}(x_i) = \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i} & x_i \ge 0\ \forall i \\ 0 & si\ a\lg un\ x_i < 0 \end{cases}$$

b.- Si el sistema funciona cuando todas las componentes funcionan, calcular la probabilidad de que el sistema funcione por lo menos t_o horas.

$$p\left(X_1 \geq t_o, X_2 \geq t_o, \ldots, X_n \geq t_o\right) = \int_{t_o}^{+\infty} \ldots \int_{t_o}^{+\infty} \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i} dx_1 \ldots dx_n = \prod_{i=1}^{n} \int_{t_o}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x_i} dx_i = \left(e^{-\lambda t_o}\right)^n$$

Observación:

Entonces la variable T que mide la duración del sistema verifica: T ~ ε(nλ)

Esperanza, varianza y correlación:

Proposición:

1.- Sea (***X***, ***Y***) un vector aleatorio continuo con función de densidad conjunta $f_{XY}(x, y)$ y sea h: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por $h(x,y)$ una función cualquiera, entonces:

$$\boxed{E(h(x,y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y).f(x,y)\,dx\,dy}$$

2.- Sean ***X*** e ***Y*** variables discretas con función de probabilidad puntual $p_{XY}(x, y)$ y sea h: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por $h(x,y)$ una función cualquiera, entonces:

$$\boxed{E(h(x,y)) = \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} h(x,y)\, p_{XY}(x,y)}$$

Para variables discretas o continuas, si en particular:

$h(x,y) = x$ entonces: $E(h(x,y)) = E(X)$

$h(x,y) = y$ entonces: $E(h(x,y)) = E(Y)$

<u>*Demostración:*</u>

Caso discreto:

Si $h(x,y) = x$

$$E(h(x,y)) = \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} h(x,y).p(x,y) = \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} x.p(x,y) = \sum_{x \in R_X} x. \sum_{y \in R_Y} p(x,y) =$$

$$= \sum_{x \in R_X} x.p_X(x) = E(X)$$

Caso continuo:

Si $h(x,y) = y$

$$E(h(x,y)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y).f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y.f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y.\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\right]dy =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y.f_Y(y)\,dy = E(Y)$$

<u>Ejemplo 14:</u>

Sea $f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 24xy & (x,y)\in A \\ 0 & (x,y)\notin A \end{cases}$ siendo $A = \{(x, y): x\in[0,1] ; y\in[0,1]; x + y \leq 1\}$.

Sea $h(x, y) = \frac{1}{2}x+y+\frac{1}{2}$. Calcular $E(h(x,y))$.

$$E(h(x,y)) = \int_0^1\int_0^{1-x}\left(\frac{1}{2}x+y+\frac{1}{2}\right)24xy\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{1-x}\left(12x^2y+24xy^2+12xy\right)dx\,dy =$$

$$= \int_0^1\left(6x^2y^2+8xy^3+6xy^2\right)\Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1\left(6x^2(1-x)^2+8x(1-x)^3+6x(1-x)^2\right)dx =$$

$$= \int_0^1\left(14x-30x^2+18x^3-2x^4\right)dx = \left(7x^2-10x^3+\frac{9}{2}x^4-\frac{2}{5}x^5\right)\Big|_0^1 = 1.10$$

Esta definición de esperanza se generaliza para cualquier vector aleatorio de k componentes.

Proposición:

Si ***X*** e ***Y*** son variables aleatorias independientes con función de probabilidad conjunta $p_{XY}(x, y)$ ó $f_{XY}(x,y)$ entonces: $E(X.Y) = E(X).E(Y)$.

<u>Demostración:</u>

Veamos el caso discreto: (el caso continuo es similar)

$$E(X.Y) = \sum_{x\in R_X}\sum_{y\in R_Y} x.y.p(x,y) = \sum_{x\in R_X}\sum_{y\in R_Y} x.y.p_X(x).p_Y(y)$$

(por ser variables independientes).

Así:

$$E(X.Y) = \sum_{x\in R_X} x.p_X(x) . \sum_{y\in R_Y} y.p_Y(y) = E(X).E(Y)$$

La reciproca de esta propiedad no es cierta:

En efecto:

X/Y	1	2	3	
1	1/6	1/6	1/6	½
2	1/4	0	1/4	½
	5/12	**1/6**	**5/12**	**1**

E(X)= 1*5/12+2*1/6+3*5/12=2

E(Y)=1*1/2+2*1/2=3/2

E(X)E(Y)= 2*3/2=3

E(XY)= 1*1/6+2*(1/6+1/4)+3*1/6+6*1/4=3

Sin embargo X e Y no son independientes; … en efecto:

<u>P(X=2,Y=2)≠P(X=2)*P(Y=2)</u>

Proposición:

Si ***X*** e ***Y*** son variables aleatorias independientes con función de probabilidad conjunta $p_{XY}(x, y)$ ó $f_{XY}(x,y)$. Sea $h(x,y) = aX + bY$ con *a* y *b* constantes reales cualesquiera, entonces: $E(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$.

<u>Demostración:</u>

Veamos en este caso el caso continuo, el otro es similar:

Si $h(x,y) = ax+by$

$$E(h(x,y)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y).f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (ax+by).f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (ax.f(x,y)+by.f(x,y))\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} ax.f(x,y)\,dx\,dy \;+\; \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (ax.f(x,y)+by.f(x,y))\,dx\,dy \;=$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} ax.\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy\right]dx \;+\; \int_{-\infty}^{+\infty} by.\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\right]dy \;=$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} ax.f_X(x)dx \;+\; \int_{-\infty}^{+\infty} by.f_Y(y)dy \;=\; a\int_{-\infty}^{+\infty} x.f_X(x)dx \;+\; b\int_{-\infty}^{+\infty} y.f_Y(y)dy \;=$$

$$= \; aE(X) + bE(Y)$$

La **covarianza entre dos variables aleatorias *X* e *Y*** se define como:

$$Cov(X,Y) \;=\; E\big((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\big)$$

Esto equivale a:

Caso discreto: $Cov(X,Y) \;=\; \sum_{x\in R_X}\sum_{y\in R_Y}(x-\mu_X)(y-\mu_Y).p(x,y)$

Caso continuo: $Cov(X,Y) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_X).(y-\mu_Y).f(x,y)\,dx\,dy$

<u>*Idea de la definición*</u>:

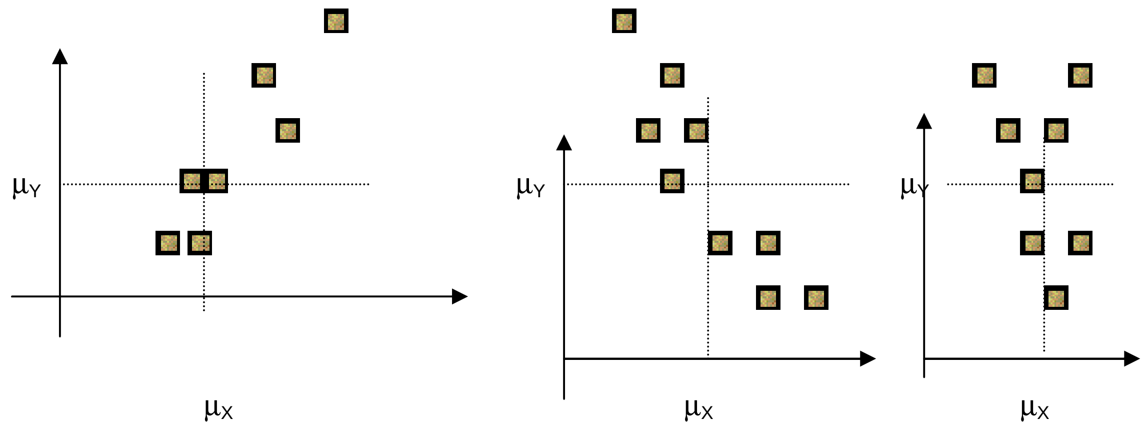
Si ***X*** e ***Y*** tienen fuerte relación positiva, es decir que valores grandes de ***X*** aparecen asociados con grandes valores de ***Y***, y valores pequeños ***X*** con pequeños valores de ***Y***; entonces la mayoría de las probabilidades puntuales estarán asociadas con productos $(x-\mu_X)(y-\mu_Y)$ positivos, dado que los puntos quedaran en su mayoría en el primero y tercer cuadrante determinado por los valores esperados de ambas variables, y en ese caso la covarianza resultará positiva.

Si ***X*** e ***Y*** tienen fuerte relación negativa entonces la mayoría de las probabilidades puntuales estarán asociadas con productos $(x-\mu_X)(y-\mu_Y)$ negativos, ya que los puntos más probables estarán en el segundo y cuarto cuadrante determinados por los valores esperados de ambas variables y entonces, la covarianza resultará negativa.

Si ***X*** e ***Y*** no están relacionados entonces los productos positivos de $(x-\mu_X)(y-\mu_Y)$ tenderán a cancelarse con los productos negativos, es decir que los valores aparecerán con probabilidades similares en los cuatro cuadrantes y por lo tanto, la covarianza será aproximadamente nula.

La covarianza depende de los productos $(x-\mu_X)(y-\mu_Y)$ y de las probabilidades conjuntas.

Consideremos los siguientes gráficos:



Cov(*X*, *Y*) > 0 *Cov*(*X*, *Y*) < 0 *Cov*(*X*, *Y*) ≈ 0

Ejemplo 15:

Sean las variables discretas ***X*** e ***Y*** con la función de probabilidad conjunta dada por la siguiente distribución:

Y

		10	20	30	
X	100	0.10	0.15	0.25	0.5
	200	0.30	0.15	0.05	0.5
		0.40	0.30	0.30	1

Calculemos la covarianza entre ***X*** e ***Y***.

$E(X)$ = 100x 0.5 + 200x 0.5 = 150 $E(Y)$ = 10x 0.4 + 20x 0.3 + 30x 0.3 = 19

$$Cov(X,Y) = \sum_{x\in R_X}\sum_{y\in R_Y}(x-\mu_X)(y-\mu_Y).p(x,y) =$$

= (100- 150).[(10 – 19).0.1+ + (20 – 19).0,15 + (30 – 19).0.25] + (200 – 150).).[(10 – 19).0.3 + (20 – 19).0,15 +

+ (30 – 19).0.05] = -50 [-9. 0,1 + 1. 0.15 + 11. 0.25] + 50 [-9. 0.3 + 1. 0.15 + 11. 0.05]
= 50 [-9. 0.2 - 0. 0.3 - 11. 0.2] = 50 [-1.8 – 2.2] = -200

Ejemplo 16:

Sean las variables discretas ***X*** e ***Y*** con la función de probabilidad conjunta dada por la siguiente distribución:

y

		10	20	30	
x	100	0.20	0.15	0.15	0.5
	200	0.20	0.15	0.15	0.5
		0.40	0.30	0.30	1

Calcular la covarianza entre ***X*** e ***Y***.

$E(X) = 150$ y $E(Y) = 19$ pues las probabilidades marginales no cambiaron

$Cov(X,Y)$ = (100 – 150) [(10 – 19). 0.2 + (20 – 19) 0.15 + (30 – 19). 0.15] +

(200 – 150) [(10 – 19). 0.2 + (20 – 19) 0.15 + (30 – 19). 0.15] = 0

Proposición:

Tanto para variables aleatorias discretas como continuas:

$$Cov(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$$

En particular, vale que: $Cov(X,X) = V(X)$

<u>*Demostración*</u>:

Para variables discretas:

$$Cov(X,Y) = \sum_{x\in R_X}\sum_{y\in R_Y}(x-\mu_X)(y-\mu_Y).p(x,y) =$$

$$= \sum_{x\in R_X}\sum_{y\in R_Y}(xy-\mu_X y-\mu_Y x+\mu_X\mu_Y).p(x,y) = \sum_{x\in R_X}\sum_{y\in R_Y}xy.p(x,y) -$$

$$- \sum_{x\in R_X}\sum_{y\in R_Y}\mu_X y.p(x,y) - \sum_{x\in R_X}\sum_{y\in R_Y}\mu_Y x.p(x,y) + \sum_{x\in R_X}\sum_{y\in R_Y}\mu_X\mu_Y.p(x,y) =$$

$$= E(X.Y) - \mu_X\sum_{y\in R_Y}y.\sum_{x\in R_X}p(x,y) -$$

$$\mu_Y\sum_{x\in R_X}x.\sum_{y\in R_Y}p(x,y) + \mu_X\mu_Y.\sum_{x\in R_X}\sum_{y\in R_Y}p(x,y) =$$

$$= E(X.Y) - \mu_X \sum_{y \in R_Y} y.p_Y(y) - \mu_Y \sum_{x \in R_X} x.p_X(x) + \mu_X \mu_Y .1 =$$

$$= E(X.Y) - \mu_X.\mu_Y - \mu_Y \mu_X + \mu_X \mu_Y = E(X.Y) - E(X).E(Y)$$

En el caso que $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}$ resulta:

$$Cov(X,X) = E(X.X) - E(X).E(X) = E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2 = V(X)$$

Corolario:

Si ***X*** e ***Y*** son variables independientes $\Rightarrow Cov(X,Y) = 0$

Demostración:

Si ***X*** e ***Y*** son variables independientes $\Rightarrow E(X.Y) = E(X).E(Y) \Rightarrow Cov(X,Y) = 0$

Ejemplo 17:

Sean ***X*** e ***Y*** variables aleatorias continuas con función de densidad conjunta:

$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 24xy & (x,y) \in A \\ 0 & (x,y) \notin A \end{cases}$ siendo $\boldsymbol{A} = \{(x, y): x \in [0,1] \,;\, y \in [0,1];\, x + y \leq 1\}$.

Calcular la covarianza entre ***X*** e ***Y***.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^{1-x} 24xy\,dy = 24x.\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{1-x} = 12x\,(1 - x)^2$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^{1-y} 24xy\,dx = 12y\,(1 - y)^2$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f_X(x)\,dx = \int_0^1 12.x^2(1-x)^2\,dx = \int_0^1 (12.x^2 - 24x^3 + 12x^4)\,dx =$$

$$= \left.\left(4x^3 - 6x^4 + \frac{12}{5}x^5\right)\right|_0^1 = 4 - 6 + \frac{12}{5} = \frac{2}{5} = E(\boldsymbol{Y})$$ (por tener las mismas funciones de densidad marginales y el mismo rango)

$$E(X.Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x.y.f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{1-x} x.y.24.x.y\,dx\,dy = 24.\int_0^1 x^2\left[\int_0^{1-x} y^2\,dy\right]dx =$$

$$= 24.\int_0^1 x^2\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} dx = 8.\int_0^1 x^2(1-x)^3\,dx = 8.\int_0^1 x^2\left(1 - 3x + 3x^2 - x^3\right)dx =$$

$$= 8.\int_0^1 \left(x^2 - 3x^3 + 3x^4 - x^5\right)dx = 8\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{4}x^4 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6\right]_0^1 = \frac{2}{15}$$

$$Cov(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y) = \frac{2}{15} - \frac{2}{5}.\frac{2}{5} = \frac{-2}{75}$$

Proposición: ∀ valor real de *a*, *b*, *c*, *d*. vale que $Cov(aX+b, cY+d) = a.c.Cov(X,Y)$

Demostración:

$$Cov(aX+b, cY+d) = E((aX+b).(cY+d)) - E(aX+b).E(cY+d) =$$

$$= E(acXY + bcY + adX + cd)) - (aE(X)+b).(cE(Y)+d) =$$

$$= acE(X.Y) + bcE(Y) + adE(X) + cd - acE(X)E(Y) - adE(X) - bcE(Y) - cd =$$

$$= acE(X.Y) - acE(X)E(Y) = ac\left(E(X.Y) - E(X).E(Y)\right) = a.c.Cov(X,Y)$$

El valor (magnitud) de la covarianza depende las unidades en que se miden las variables. Este es un defecto que puede salvarse realizando una estandarización. De este modo se obtiene una medida de la fuerza de la relación que no depende de las unidades.

Por ejemplo:

Si ***X*** es una variable expresada en metros y ***X´*** está expresada en cm ⇒ ***X´*** = 100.***X***

Si ***Y*** es una variable expresada en kilos e ***Y´*** está expresada en gramos ⇒ ***Y´*** = 100.***Y***

Por lo tanto:

$$Cov(X´,Y´) = Cov(100.X, 1000.Y) = 100.1000.Cov(X,Y) = 10^5.Cov(X,Y)$$

Esto ha motivado la creación de un coeficiente que neutralice el efecto de las unidades en que se han medido las variables, este es el **Coeficiente de correlación**:

El coeficiente de correlación ρ de las variables ***X*** e ***Y*** se define por:

$$\rho = Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X . \sigma_Y}$$

Las siguientes proposiciones muestran que el coeficiente de correlación soluciona el problema de la covarianza que depende de las unidades en las que se expresa la variable.

Propiedades del coeficiente de correlación:

1.- $Corr(aX+b, cY+d) = sg(a.c).Corr(X,Y)$ ∀ valor real de *a*, *b*, *c*, *d*.

2.- $-1 \leq Corr(X,Y) \leq 1$ para cualquier par de variables *X* e *Y*.

Ejemplo 18:

Sea $\boldsymbol{X} = \{0, 1, 2, 3, 4\} = \boldsymbol{Y}$. Sea $\boldsymbol{Y} = -\boldsymbol{X}^2 + 4.\boldsymbol{X}$ y sea $p_{XY}(x, y) = \frac{1}{5}$. Hallar el coeficiente de correlación.

$Y \setminus X$	0	1	2	3	4	
0	$1/5$	0	0	0	$1/5$	$2/5$
3	0	$1/5$	0	$1/5$	0	$2/5$
4	0	0	$1/5$	0	0	$1/5$
	$1/5$	$1/5$	$1/5$	$1/5$	$1/5$	1

$E(X) = \frac{1}{5}(0+1+2+3+4) = 2$ $\qquad$ $E(Y) = \frac{2}{5}0+\frac{2}{5}3+\frac{1}{5}4 = 2$

$E(X.Y) = 0.\frac{1}{5}+0.\frac{1}{5}+3.\frac{1}{5}+9.\frac{1}{5}+8.\frac{1}{5} = 4$

$Cov(X,Y) = E(X.Y)-E(X).E(Y) = 4 - 2.2 = 0 \Rightarrow \rho = 0$

Como se interpreta esto?

Si bien Y está vinculado funcionalmente con X, el coeficiente de correlación dio 0…por qué?. Porque ρ mide el grado de asociación lineal entre X e Y y en este caso no están asociados linealmente.

Proposición:

1.- Si $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ son variables aleatorias independientes entonces $\rho = 0$

2.- $\rho = 1$ ó $\rho = -1$ sí y sólo sí existe constantes a y b tales que $\boldsymbol{Y} = a\boldsymbol{X} + b$

¿Qué sucede con el coeficiente de correlacion cuando *X* e *Y* son independientes?$\Rightarrow$

Si X e Y son independientes, sabemos que: $E(\boldsymbol{X.Y}) = E(\boldsymbol{X}).E(\boldsymbol{Y})$

Por lo tanto: $Cov(X,Y) = E(X.Y)-E(X).E(Y) = 0 \Rightarrow \rho = 0$

¿Qué sucede cuando Y es función lineal de X?

Supongamos $\boldsymbol{Y} = a\boldsymbol{X} + b$; entonces:

$$E(Y) = E(aX+b) = aE(X)+b$$

$$E(X.Y) = E(X.(aX+b)) = E(a.X^2+b.X) = a.E(X^2)+b.E(X)$$

$$Cov(X,Y) = E(X.Y)-E(X).E(Y) = a.E(X^2)+b.E(X) - E(X).(aE(X)+b) =$$

$$= a.E(X^2)+b.E(X) - a(E(X))^2 - b.E(X) = a\left(E(X^2)-(E(X))^2\right) = a.V(X)$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

$$\sigma_Y = \sqrt{V(aX+b)} = \sqrt{a^2V(X)}$$

$$\rho^2 = \frac{(Cov(X,Y))^2}{(\sigma_X)^2.(\sigma_Y)^2} = \frac{a^2(V(X))^2}{V(X).a^2V(X)} = 1 \Rightarrow \rho = 1 \text{ ó } \rho = -1$$

La recíproca también es cierta.

Ejemplo 19: (covarianza positiva)

Se arroja una moneda 3 veces. Sea ***X*** el número de caras en el primer tiro e ***Y*** el número total de caras. Hallar el coeficiente de correlación. ¿Son variables independientes?

X \ Y	0	1	2	3	
0	$1/8$	$2/8$	$1/8$	0	$1/2$
1	0	$1/8$	$2/8$	$1/8$	$1/2$
	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$	1

$$E(X) = 1/2 \qquad E(Y) = 0.\frac{1}{8}+1\frac{3}{8}+2\frac{3}{8}+3\frac{1}{8} = \frac{12}{8} \qquad E(X.Y) = 1\frac{1}{8}+2\frac{2}{8}+3\frac{1}{8} = 1$$

$$\sigma_X = \sqrt{(0-0.5)^2 0.5+(1-0.5)^2 0.5} = \sqrt{0.25} = 0.5$$

$$\sigma_Y = \sqrt{2\left(-\frac{12}{8}\right)^2\frac{1}{8}+2\left(-\frac{4}{8}\right)^2\frac{3}{8}} = \sqrt{3}/2 \qquad Cov(X,Y) = 1 - \frac{1}{2}\frac{12}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X.\sigma_Y} = \frac{1/4}{\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

¿Cómo lo interpretamos?

Que a mayor numero de caras en el primer tiro, se le asocia mayor número total de caras y recíprocamente.

Ejemplo 20: (covarianza negativa)

Se tiene una urna con 4 rojas y 6 blancas se extraen dos bolillas de esta urna sin reposición llamamos:

X: numero de bolillas blancas de la muestra

Y: numero de bolillas rojas de la muestra

$R_X = R_Y = \{0,1,2\}$

El siguiente cuadro exhibe la función de probabilidad conjunta de X e Y:

		Y			
		0	1	2	
X	0	0	0	12/90	12/90
	1	0	48/90	0	48/90
	2	30/90	0	0	30/90
		30/90	48/90	12/90	1

$E(X)= 0*12/90+1*48/90+2*30/90=108/90=\boxed{1.2}$

$E(Y)= 0*30/90+1*48/90+2*12/90= 72/90=\boxed{0.8}$

$V(X)= 0^2*12/90+1^2*48/90+2^2*30/90 -1.2^2=\boxed{0.42}$

$V(Y)= 0^2*30/90+1^2*48/90+2^2*12/90-0.8^2= \boxed{0.42}$

$E(XY)=0*42/90+1*48/90=48/90$

$Cov(X,Y)=48/90-0.8*1.2=-0.42$

$Corr(X;Y)=-0.42/0.42=-1$

Por qué obtuvimos, en este ejemplo un valor extremo?

Porque **X +Y = 2**

Esperanza condicional

Caso discreto:

Sea (***X***, ***Y***) un vector aleatorio bidimensional discreto con función de probabilidad conjunta $p_{XY}(x,y)$ y funciones de probabilidad marginales $p_X(x)$ y $p_Y(y)$.

Para cada $x \in R_X$ tal que $p_X(x) > 0$, se puede definir una nueva variable aleatoria notada Y / X=x cuya función de probabilidad puntual para cada $y \in \mathbf{R}$ está definida por:

$$p_{Y/X=x}(y) = p\left(Y = y / X = x\right) = \frac{p(X = x \wedge Y = y)}{P(X = x)} = \frac{P_{XY}(x, y)}{p_X(x)}$$

De igual forma para todo $y \in R_Y$ tal que $p_Y(y) > 0$, la variable X/ Y= y tiene como función de probabilidad:

$$p_{X/Y=y}(x) = p\left(X = x / Y = y\right) = \frac{p(X = x \wedge Y = y)}{P(X = x)} = \frac{P_{XY}(x, y)}{p_Y(y)}$$

Ejemplo 21:

a- Sean X e Y variables aleatorias discretas con función de probabilidad conjunta dada por la siguiente tabla:

Observemos que R_X={100,200} y R_Y={10,20,30}

X \ Y	10	20	30	$p_X(x)$
100	0.10	0.15	0.25	0.5
200	0.3	0.15	0.05	0.5
$p_Y(y)$	0.4	0.3	0.3	

$$p_{Y/X=100}(10) = \text{P(X=100,Y=10)/P(X=100)} = \frac{p_{XY}(100,10)}{p_X(100)} = 0.1/0.5=0.2$$

$$p_{Y/X=200}(10) = \text{P(X=200,Y=10)/P(X=200)} = \frac{p_{XY}(200,10)}{p_X(200)} = 0.3/0.5=0.6$$

b- La función de probabilidad de las variablesY/X=100.

Así la función de probabilidad puntual de la variable $Y/X = 100$ es:

Y	10	20	30	
$p_{Y/X=100}(y)$	0.2	0.3	0.5	1

De la misma forma obtenemos las funciones de probabilidad de las otras dos variables quienes resultan iguales a:

Y	10	20	30	
$p_{Y/X=200}(y)$	0.3	0.3	0.1	1

Ejemplo 22:

Se arrojan dos dados equilibrados. Sean ***X*** = "suma de los números" e ***Y*** = "número de ases"

a Calcular $p_{X/Y=1}(4)$.

R_X ={2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} ; R_Y = { 0, 1, 2}

Y \ X	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	$p_Y(y)$
0	0	0	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$	$25/36$
1	0	$2/36$	$2/36$	$2/36$	$2/36$	$2/36$	0	0	0	0	0	$10/36$
2	$1/36$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$1/36$

$$p_{X/Y=1}(4) = p\left(X=4/Y=1\right) = \frac{p(4,1)}{p_Y(1)} = \frac{2/36}{10/36} = \frac{1}{5}$$

b. Hallar la función de probabilidad puntual de la variable X/Y=1

X	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**Suma**
$p_{X/Y=1}(x)$	0	$2/10$	$2/10$	$2/10$	$2/10$	$2/10$	0	0	0	0	0	**1**

Queremos hallar la esperanza de cada una de estas variables Y/X=x ó bien X/Y=y.

La **esperanza condicional** de ***Y***, dado ***X*** = *x* se define como:

$$E\left(Y/X=x\right) = \sum_{y\in R_Y} y.p_{Y/X=x}(y)$$

(si la serie es absolutamente convergente)

De igual forma la esperanza condicional de ***X*** dado ***Y*** = *y* se define como:

$$E\left(X/Y=y\right) = \sum_{x\in R_x} x.p_{X/Y=y}(x)$$

(si la serie es absolutamente convergente)

Observaciones:

- E(Y/X=x) es una función de *x*. O sea: E(Y/X=x) = *g*(*x*) con *g*: $R_X \to$ **R**.
- E(X/Y=y) es una función de *y*. O sea: E(X/Y=y) = *h*(*y*) con *h*: $R_Y \to$ **R**.

2.- Por lo tanto $g(\boldsymbol{X})$ como $h(\boldsymbol{Y})$ son nuevas variables aleatorias.

La variable aleatoria ***esperanza de Y condicional a X***, notada $E\left({}^{Y}\!/_{X}\right)$, es la variable $g(\boldsymbol{X})$ O sea: $E\left({}^{Y}\!/_{X}\right) = g(\boldsymbol{X})$.

La variable aleatoria ***esperanza de X condicional a Y***, notada $E\left({}^{X}\!/_{Y}\right)$, es la variable $h(\boldsymbol{Y})$ O sea: $E\left({}^{X}\!/_{Y}\right) = h(\boldsymbol{Y})$.

Ejemplo 23:

Sea $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ un vector aleatorio cuya distribución conjunta es:

Y \ ***X***	-1	0	1	$p_Y(y)$
1	1/5	0	0	1/5
2	1/5	1/5	1/10	1/2
3	1/5	0	1/10	3/10
$P_X(x)$	3/5	1/5	1/5	1

a.- Hallar la distribución de la variable aleatoria $E\left({}^{Y}\!/_{X}\right)$.

Si la distribución conjunta es la dada en la tabla, resulta:

Y	1	2	3	
$p_{Y/X=-1}(y)$	1/3	1/3	1/3	1

Y	1	2	3	
$p_{Y/X=0}(y)$	0	1	0	1

Y	1	2	3	
$p_{Y/X=1}(y)$	0	1/2	1/2	1

Por lo tanto:

$$E\left({}^{Y}\!/_{X=-1}\right) = 1.p_{Y/_{X=-1}}(1)+2.p_{Y/_{X=-1}}(2)+3.p_{Y/_{X=-1}}(3) = 1.\frac{1}{3}+2.\frac{1}{3}+3.\frac{1}{3} = 2$$

De igual forma se obtiene que:

$$E\left({}^{Y}\!/_{X=0}\right) = 1.p_{Y/_{X=0}}(1)+2.p_{Y/_{X=0}}(2)+3.p_{Y/_{X=0}}(3) = 1.0 + 2.1 + 3.\ 0 = 2$$

$$E\left({}^{Y}\!/_{X=1}\right) = 1.0 + 2.\ {}^{1}\!/_{2} + 3.\ {}^{1}\!/_{2} = {}^{5}\!/_{2} = 2.5$$

Si $g(\boldsymbol{X}) = E\left(Y/_X\right)$ resulta que esta variable tiene la misma distribución que $\boldsymbol{X}$ (o sea $P_X(x)$) .

Como $E\left(Y/_{X=x}\right) = 2$ si $x = 0$ ó $x = -1$ $\Rightarrow p_{g(X)}(2) = p_X(-1) + p_X(0) = 4/5$

Como $E\left(Y/_{X=x}\right) = 2.5$ si $x = 1$ $\Rightarrow p_{g(X)}(2.5) = p_X(1) = 1/5$

Así la distribución de la variable $g(\boldsymbol{X}) = E\left(Y/_X\right)$ es:

$E\left(Y/_X\right)$	2	2.5
$p(g(\boldsymbol{X}))$	$4/5$	$1/5$

b.- Hallar la esperanza de la variable $g(\boldsymbol{X}) = E\left(Y/_X\right)$

$E(g(\boldsymbol{X})) = E\left(E\left(Y/_X\right)\right) = 2.\ 4/5 + 2.5\ 1/5 = 2.1 = E(Y)$

Teorema Importante!!!!!:

Si $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ es un vector aleatorio discreto y la variable $\boldsymbol{Y}$ tiene esperanza finita entonces: $E\left(E\left(Y/_X\right)\right) = E(\boldsymbol{Y})$.

<u>*Demostración*</u>:

$$E\left(E\left(Y/_X\right)\right) = E(g(X)) = \sum_{x\in R_X} g(x).p_X(x)$$

Como: $g(x) = E\left(Y/_{X=x}\right) = \sum_{y\in R_Y} y.p_{Y/_{X=x}}(y)$ resulta que:

$$E\left(E\left(Y/_X\right)\right) = \sum_{x\in R_X} g(x).p_X(x) = \sum_{x\in R_X}\left(\sum_{y\in R_Y} y.p_{Y/_{X=x}}(y)\right).p_X(x) =$$

$$= \sum_{x\in R_X}\left(\sum_{y\in R_Y} y.\frac{p_{XY}(x,y)}{p_X(x)}\right).p_X(x) = \sum_{x\in R_X}\left(\sum_{y\in R_Y} y.p_{XY}(x,y)\right)$$

$$= \sum_{y\in R_Y} y.\left(\sum_{x\in R_X} p_{XY}(x,y)\right) = \sum_{y\in R_Y} y.p_Y(y) = E(\boldsymbol{Y})$$

<u>**Ejemplo 24:**</u>

Se tira por primera vez una moneda n veces y se define la variable $\boldsymbol{X}$ = "número de caras registradas en la primer serie de tiradas". En base al resultado de la primera serie de tiradas se inicia una segunda serie de tiradas, arrojando la moneda tantas veces como caras hayan salido en la primera de las series. Se define **Y** ="número de caras registradas en la segunda serie de tiradas".

Calcular $E(\boldsymbol{Y})$.

Observemos que no se puede calcular directamente la esperanza de la variable **Y** pues no tenemos certeza de la cantidad de tiros de la segunda serie de tiradas. Pero si podemos calcular la esperanza de la variable **Y** condicionada a un cierto valor de **X**.

Si $X = x$, la distribución condicional de **Y** dado $\boldsymbol{X} = x$ es binomial $Bi(x, 0.5)$, luego:

$g(x) = E\left(Y/_{X=x}\right) = 0.5\,x$.

Por lo tanto la variable $g(\boldsymbol{X}) = E\left(Y/_{X}\right) = 0.5\,\boldsymbol{X}$ donde

X~Bi(n,0.5).

Así: $E(\boldsymbol{Y}) = E\left(E\left(Y/_{X}\right)\right) = E\left(g(X)\right) = E(0.5\,X) = 0.5\,E(\boldsymbol{X}) = 0.5\ 0.5\,n = 0.25\,n$.

Caso continuo:

Sea $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ un vector aleatorio bidimensional continuo.

:

Sean **X** e **Y** variables aleatorias continuas con función de densidad conjunta $f_{XY}(x, y)$.

La **función de densidad condicional** de **Y** dado $\boldsymbol{X} = x$, se define como:

$$f_{Y/_{X=x}}(y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} \quad \text{si} \quad f_X(x) > 0$$

La *función de densidad condicional* de **X** dado $\boldsymbol{Y} = y$, se define como:

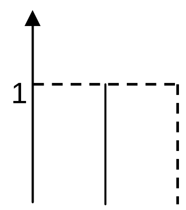
$$f_{X/_{Y=y}}(x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} \quad \text{si} \quad f_Y(y) > 0$$

Ejemplo 25:

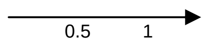
a.- Si $f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{6}{5}\left(x+y^2\right) & 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & de\ otra\ forma \end{cases}$; hallar la *función de densidad condicional* de **Y** dado $\boldsymbol{X} = 0.5$.

Debemos calcular $f_X(0.5)$:

$f_X(x) = \int_0^1 \frac{6}{5}\left(x+y^2\right)dy = \frac{6}{5}\left(xy+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{6}{5}\left(x+\frac{1}{3}\right) \quad \Rightarrow$



$f_X(0.5) = \dfrac{6}{5}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right) = 1 > 0$. Por lo tanto:



$$f_{Y/X=0.5}(y) = \frac{f_{XY}(0.5,y)}{f_X(0.5)} = \frac{\frac{6}{5}\left(0.5+y^2\right)}{\frac{6}{5}\left(0.5+\frac{1}{3}\right)} = \frac{6}{5}\left(0.5+y^2\right)$$

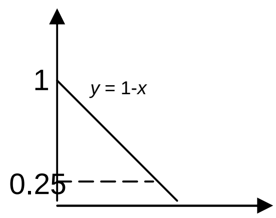
El soporte de esta función de densidad los valores de y correspondientes a $x = 0.5$ resultando: [0; 1].

b.- Si $f_{XY}(x, y) = 2(x+2y).I_T(x,y)$ donde $T = \{(x, y):\ 0 \le x \le 1\ ;\ 0 \le y \le 1- x\}$.
Hallar la *función de densidad condicional* de ***X*** dado ***Y*** = *0.25*.

Debemos calcular $f_Y(0.25)$:

$$f_Y(y) = \int_0^{1-y} 2(x+2y)\,dx = 2\left(\frac{x^2}{2}+2xy\right)\Bigg|_0^{1-y} =$$

$$= \left((1-y)^2 + 4(1-y)y\right) = -3y^2+2y+1 \ \Rightarrow$$



$f_Y(0.25) = \dfrac{21}{16} > 0$, entonces el soporte de la función que deseamos hallar son los valores que puede tomar x cuando $y = 0.25$, o sea: [0; 0.75].

La fórmula que la define es:

$$f_{X/Y=0.25}(x) = \frac{2(x+0.5)}{21/16}.I_{(0;0.75)}(x)$$

c.- Para el ejemplo anterior calcular $f_{X/Y=y}(x)$ para todo valor de y para el cual esté definida.

$f_{X/Y=y}(x)$ está definida para todo valor de y para el cual $f_Y(y) > 0 \Rightarrow$ está definida para $y \in (0; 1)$.

En este caso: $f_{X/Y=y}(x) = \dfrac{2(x+2y)}{(-3y^2+2y+1)}.I_{(0;1-y)}(x)$

Definimos la **esperanza condicional** de ***Y***, dado ***X*** = x como:

$$E\left(Y/X=x\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} y.f_{Y/X=x}(y)\,dy$$

(si la integral converge absolutamente)

Definimos la variable aleatoria ***esperanza de Y condicional a X***, notada $E\left(Y/X\right)$ como: $E\left(Y/X\right)$ = g(***X***).

Observaciones:

1.- $E\left(Y/X=x\right)$ es una función de x. O sea: $E\left(Y/X=x\right)$ = $g(x)$ con g: $R_X \to R$.

2.- Por lo tanto, igual que en el caso discreto, g(***X***) es una variable aleatoria.

De igual forma se define $E\left(X/Y=y\right)$ que resulta ser una función de $h(y)$; h(***Y***) es una variable aleatoria denominada ***esperanza de X condicional a Y***, notada $E\left(X/Y\right)$.

Teorema:

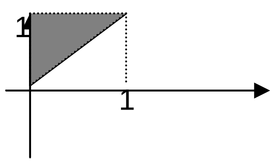
a) Si ***Y*** tiene esperanza finita entonces: $E\left(E\left(Y/X\right)\right)$ = E(***Y***) .

b) Si ***X*** tiene esperanza finita entonces: $E\left(E\left(X/Y\right)\right)$ = E(***X***) .

<u>Ejemplo 26:</u>

Sea (***X***, ***Y***) un vector aleatorio bidimensional continuo con función de densidad conjunta:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 8xy & si\ 0 < x \leq y \leq 1 \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$



a.- Hallar $E\left(X/Y\right)$ = ***g***(***Y***)

Demos hallar $f_{X/Y=y}(x) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$. Para ello necesitamos $f_Y(y)$:

$$f_Y(y) = \int_o^y 8xy\,dx = 8y\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^y = 4\,y^3$$. Entonces:

$$f_{X/_{Y=y}}(y) = \begin{cases} 2x/_{y^2} & si\ 0 < x \le y \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases} \Rightarrow E\left(X/_{Y=y}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f_{X/_{Y=y}}(x)\,dx =$$

$$\int_0^y x\frac{2x}{y^2}\,dx = \frac{2}{3}y$$

O sea:

$$g(\boldsymbol{Y}) = E\left(X/_Y\right) = \begin{cases} \frac{2}{3}y & si\ 0 < y \le 1 \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

Por ejemplo:

$$g(1/_2) = E\left(X/_{Y=1/_2}\right) = \frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

b.- Verificar que $E\left(E\left(X/_Y\right)\right) = E(\boldsymbol{X})$.

$$E(g(\boldsymbol{Y})) = E\left(E\left(X/_Y\right)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y).f_Y(y)\,dy = \int_0^1 \frac{2}{3}y.4y^3\,dy = \frac{8}{3}\frac{y^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{8}{15}$$

Por otro lado:

$$E(\boldsymbol{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f_X(x)\,dx\,.$$

Calculemos $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_x^1 8xy\,dy = 8x\frac{y^2}{2}\Big|_x^1 = 4x(1-x^2)$

Entonces: $E(\boldsymbol{X}) = \int_0^1 x.4x(1-x^2)\,dy = \frac{4x^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{4x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{4}{3}-\frac{4}{5} = \frac{8}{15}$

Por lo tanto: $E(\boldsymbol{X}) = E\left(E\left(X/_Y\right)\right)$

Ejemplo 27:

Sea X una variable aleatoria U(0,1). Si X=x se elige un numero al azar entre 0 y x, es decir Y/X=x ~ U(0,x)

a)Hallar la densidad conjunta del par (X,Y)

$f_{XY}(x,y)= f_{Y/X=x}(y)*f_X(x)=1*I_{[0,1]}(x)*1/x*I_{[0,x]}(y)$

b)Hallar la densidad marginal del Y

$f_Y(y)= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}\ (x,y)dx = \int_y^1 \frac{1}{x}dx = \ln 1 - \ln y = -\ln y I_{[0,1)}(y)$

c)Hallar E(Y)=E(E(Y/X))=E(x/2)=1/4

$$E\left(h(y) \big/ X = x\right) = \sum_{y \in R_Y} h(y)\, p_{Y/X=x}(y) \qquad \textit{caso discreto}$$

Ejemplo 28:

Sea (***X***, ***Y***) un vector aleatorio con distribución uniforme en [1,2] x [1,3] , hallar:

$E\left(X \big/ Y = y\right)$; $E\left(X \big/ Y\right)$ y $E(X)$.

Para ello calculemos: $f_{XY}(x, y) = \int_1^3\int_1^2 k\, dx\, dy = k\, x\big|_1^2\, y\big|_1^3 = k.2 = 1 \Rightarrow k = 1/2 \Rightarrow$

$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2} I_{[0,2]*[0,3]}(x, y)$

$f_X(x) = \int_1^3 \frac{1}{2} dy = 1 \int_0^3 \frac{1}{2} dy = 1 \quad \forall\ 0 \le x \le 2 \quad \Rightarrow \quad f_X(x) = I_{[0,2]}(x)$

$f_Y(y) = \int_1^2 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \quad \forall\ 1 \le y \le 3 \quad \Rightarrow \quad f_Y(y) = \frac{1}{2} I_{[0,3]}(y)$

Por lo tanto: $f_{XY}(x, y) = f_X(x)\,.\, f_Y(y) \Leftrightarrow$ ***X*** e ***Y*** son *independientes*

Entonces: $E\left(X \big/ Y = y\right) = E\left(X \big/ Y\right) = E(X) = \int_1^2 x\,dx = \frac{3}{2}$

Ejemplo 29:

El número de piezas producidas diariamente por una máquina es una variable aleatoria con función de probabilidad puntual:

N	10	11	12	13	14	15
$p_N(n)$	0.05	0.10	0.10	0.20	0.35	0.20

La probabilidad de que una de las piezas sea defectuosa es $p = 0.10$. Sea ***X*** = "el número de piezas producidas diariamente defectuosas". Suponiendo que los defectos se producen en forma independiente, hallar E(***X***).

La independencia de los defectos garantiza que si el número de piezas es n la probabilidad de tener x defectos es $Bi(n, p)$.

Por lo tanto X / N=n ~Bi(n,p) $\Rightarrow E\left(X \big/ N = n\right) = n.\,p \Rightarrow g(N) = N.p \Rightarrow$

$E(\boldsymbol{X}) = E\left(E\left(X \big/ N\right)\right) = E(\, g(N)\,) = E(\,N.p) = p.\, E(N\,) = 0.10\ (10 \times 0.05 + 11 \times 0.10 +$ $12 \times 0.1 + 13 \times 0.2 + 14 \times 0.35 + 15 \times 0.2) = 1.33$

Varianza condicional: Sea (***X***, ***Y***) un vector aleatorio discreto o continuo tal que está definida $p_{X/Y=y}(x)$ ó $f_{X/Y=y}(x)$. Se define la varianza condicional de ***X*** dado ***Y*** = y como:

$$\mathrm{Var}(X / Y=y) = E[(X-E(X/Y=y)^2/Y=y]$$

O sea que: $Var\left(X/Y\right)$ = g(***Y***) es una variable aleatoria.

Se puede verificar que:

$$\text{Var(X / Y=y)} = E\left(X^2/Y=y\right) - \left[E\left(X/Y=y\right)\right]^2$$

Propiedad: Cuando ***X*** e ***Y*** son independientes, $Var\left(X/Y\right) = Var\,(\boldsymbol{X})$

Si ***X*** e ***Y*** son independientes $E\left(X/Y\right) = E(\boldsymbol{X})$ y las variables $(\boldsymbol{X} - E(\boldsymbol{X}))^2$ e ***Y*** también son independientes. Por lo tanto:

$$\text{Var(X / Y=y)} = E\left(\left(X - E\left(X/Y=y\right)\right)^2 / Y=y\right) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2 / Y=y\right) =$$

$$= E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = Var\,(\boldsymbol{X})$$

Propiedad Importante: $\boxed{Var\,(\boldsymbol{X}) = E\left[Var\left(X/Y\right)\right] + Var\left[E\left(X/Y\right)\right]}$

Como $Var\left(X/Y=y\right) = E\left(X^2/Y=y\right) - \left[E\left(X/Y=y\right)\right]^2$ resulta que:

$$E\left[Var\left(X/Y\right)\right] = E\left[E\left(X^2/Y\right) - \left[E\left(X/Y\right)\right]^2\right] = \quad \text{(por linealidad de la esperanza)}$$

$$= E\left[E\left(X^2/Y\right)\right] - E\left(\left[E\left(X/Y\right)\right]^2\right) = E\left[X^2\right] - E\left(\left[E\left(X/Y\right)\right]^2\right)$$

Por otro lado: $Var\left[E\left(X/Y\right)\right] = E\left[\left(E\left(X/Y\right)\right)^2\right] - \left[E\left(E\left(X/Y\right)\right)\right]^2$

Sumando miembro a miembro resulta que:

$$E\left[Var\left(X/Y\right)\right] + Var\left[E\left(X/Y\right)\right] = E\left[X^2\right] - E\left(\left[E\left(X/Y\right)\right]^2\right) +$$

$$+ E\left[\left(E\left(X/Y\right)\right)^2\right] - \left[E\left(E\left(X/Y\right)\right)\right]^2$$

Así: $E\left[Var\left(X/Y\right)\right] + Var\left[E\left(X/Y\right)\right] = E\left[X^2\right] - \left[E\left(E\left(X/Y\right)\right)\right]^2 =$

$$= E\left[X^2\right] - \left[E(X)\right]^2 = Var\,(\boldsymbol{X})$$

Ejemplo 30:

Se tira por primera vez una moneda *n* veces y se define la variable ***X*** = "número de caras registradas en la primer serie de tiradas". En base al resultado de la primera serie de tiradas se inicia una segunda serie arrojando la moneda tantas veces como caras hayan salido en la primera serie. Se define ***Y*** = "número de caras registradas en la segunda serie de tiradas". Calcular *Var*(*Y*).

Si $X = x$ la distribución condicional de Y dado $X = x$ es binomial $Bi(x, 0.5)$, luego:

$g(x) = E\left(Y/_{X=x}\right) = 0.5\,x$.

Por lo tanto la variable $g(\boldsymbol{X}) = E\left(Y/_X\right) = 0.5\,\boldsymbol{X}$ donde X~Bi(n,0.5)

$E(\boldsymbol{Y}) = E\left(E\left(Y/_X\right)\right) = E\left(g(X)\right) = E(0.5\,X) = 0.5\,E(X) = 0.5\;0.5\,n = 0.25\,n$.

$Var(\boldsymbol{Y}) = E\left[Var\left(Y/_X\right)\right] + Var\left[E\left(Y/_X\right)\right]$

$h(x) = Var\left(Y/_{X=x}\right) = 0.5\;0.5\;x \Rightarrow h(\boldsymbol{X}) = Var\left(Y/_X\right) = 0.25\boldsymbol{X} \Rightarrow$

$\Rightarrow E\left[Var\left(Y/_X\right)\right] = E(0.25\boldsymbol{X}) = 0.25\,E(\boldsymbol{X}) = 0.25\;0.5\,n = 0.125\,n$

$E\left(Y/_X\right) = 0.5\boldsymbol{X} \Rightarrow Var\left[E\left(Y/_X\right)\right] = Var(0.5\boldsymbol{X}) = 0.5^2\,Var(\boldsymbol{X}) = 0.25\,n\;0.5\;0.5 =$

$= 0.0625\,n$

Por lo tanto:

$Var(\boldsymbol{Y}) = E\left[Var\left(Y/_X\right)\right] + Var\left[E\left(Y/_X\right)\right] = 0.125\,n + 0.0625\,n = 0.1875\,n$

Ejemplo 31:

Se elige al azar un número en el intervalo (0, 1). Sea ***X*** el número elegido. Si ***X*** = *x* se arroja *n* veces en forma independiente una moneda con probabilidad *x* de obtener una cara. Sea ***Y*** = número de caras obtenidas. Hallar *Var*(***Y***).

$Y/X=x \sim Bi(n,x) \Rightarrow E\left(Y/_{X=x}\right) = nx \Rightarrow E\left(Y/_X\right) = n\boldsymbol{X}$

$X \sim U(0,1) \Rightarrow E(\boldsymbol{X}) = 1/2$

$h(x) = Var\left(Y/_{X=x}\right) = nx(1-x) \Rightarrow h(\boldsymbol{X}) = Var\left(Y/_X\right) = n.\boldsymbol{X}.(1-\boldsymbol{X}) \Rightarrow$

$E\left[Var\left(Y/_X\right)\right] = E(h(\boldsymbol{X})) = E(n.\boldsymbol{X}.(1-\boldsymbol{X})) = \int_0^1 nx(1-x)\frac{1}{2}dx = \int_0^1 \frac{n}{2}x\,dx - \int_0^1 \frac{n}{2}x^2\,dx =$

$$= \frac{n}{2}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 - \frac{n}{2}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{n}{12}$$

$Var\left[E\left(Y/_X\right)\right] = Var(n\boldsymbol{X}) = n^2\,Var(\boldsymbol{X}) = n^2\,\frac{1}{12}$

Por lo tanto: $Var(\boldsymbol{Y}) = E\left[Var\left(Y/X\right)\right] + Var\left[E\left(Y/X\right)\right] = \frac{n}{12} + n^2\frac{1}{12} = \frac{n}{12}(1+n)$

<u>Ejemplo 32:</u>

Sea (***X***, ***Y***) un vector aleatorio con distribución uniforme en [0,2] x [0,3] . Sea la variable $\boldsymbol{Z} = 0.2\,\boldsymbol{X} + 5$, hallar $Var\left(Z/Y\right)$.

Hemos probado que ***X*** e ***Y*** son independientes, por lo tanto:

$Var\left(X/Y\right) = Var(\boldsymbol{X})$ donde X~U(0,2) $\Rightarrow Var\left(X/Y\right) = \frac{2^2-1^2}{12} = \frac{1}{4}$

Por lo tanto:

$$Var\left(Z/Y\right) = Var\left(0.2X+5/Y\right) = 0.2^2\,Var\left(X/Y\right) = 0.04\,Var(\boldsymbol{X}) = 0.04\,\frac{1}{4} = 0.01$$