# Tema 2: Teoria de conjunts

1. Enumerau els elements dels següents conjunts:
   (a) $\{x \mid x \text{ és un nombre real positiu tal que } x^2 = 1\}$
   (b) $\{x \mid x \text{ és el quadrat d'un enter i } x < 100\}$
   (c) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ és primer i } (x \text{ és parell o } 3 \leq x \leq 10)\}$
   (d) $\{x \in \mathbb{Z} \mid \text{existeix un element } y \in \mathbb{Z}^+ \text{ amb } x^2 + y^2 \leq 25\}$

2. Descriviu cada un dels següents conjunts en el format $\{x \mid P(x)\}$
   (a) $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \ldots\}$
   (b) $B = \{1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, \ldots\}$
   (c) $C = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, \ldots\}$
   (d) $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

3. Etiquetau cada enunciat amb *vertader* o *fals*, segons correspongui:
   (a) $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$
   (b) $\{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3, 3, 2\}$
   (c) $\{5, \emptyset\} = \{5\}$
   (d) $\{5\} \in \{2, 5\}$
   (e) $\emptyset \in \{1, 2\}$
   (f) $\{1, 2\} \in \{3, \{1, 2\}\}$

4. Provau les següents implicacions:
   (a) $A \subset B \Rightarrow B \not\subset A$
   (b) $A \subseteq \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$

5. Provau que si $A \subset B$ i $B \subseteq C$ llavors $A \subset C$.

6. Siguin $A$ i $B$ conjunts. Provau que $A \subseteq B$ si i només si tot subconjunt de $A$ és un subconjunt de $B$.

7. Siguin $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ és parell }\}$. Determinau cada un dels següents conjunts:
   (a) $A \cup B$
   (b) $B \cap A$
   (c) $A \backslash B$
   (d) $B \backslash A$
   (e) $(A \cap B) \cap C$
   (f) $B \cup \emptyset$
   (g) $(A \cap B) \cup C$
   (h) $A \times B$
   (i) $\mathcal{P}(A)$

8. Agafau $\mathbb{Z}$ com el conjunt universal. Emprant els conjunts $A$, $B$ i $C$ definits a l'exercici anterior determinau $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ i $\overline{(A \cap C)}$.

9. És cert que $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \backslash C$? Justificau la resposta.

10. Què pots dir sobre els conjunts $A$ i $B$ si es sap que:

    (a) $A \cup B = A$
    (b) $A \cap B = A$
    (c) $A \backslash B = A$
    (d) $A \backslash B = B \backslash A$?

11. Siguin $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i $B = \{4, 5, 6\}$. Determinau els següents conjunts:

    (a) $\mathcal{P}(A \cap B)$
    (b) $\mathcal{P}(B \backslash A)$
    (c) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

12. Sota quines condicions sobre els conjunts $A$ i $B$ és cert que $\mathcal{P}(A \backslash B) = \mathcal{P}(A)$? Enunciau i provau una condició necessària i suficient.

13. Provau que si $S$ és un conjunt qualsevol, llavors

$$\{1, 2\} \times S = (\{1\} \times S) \cup (\{2\} \times S)$$

14. Provau que $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.

15. Sigui $n$ un enter positiu i suposau un conjunt $A_i$ donat per cada $i \in I = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, tal que $A_i \subseteq A_j$ per a tot $j \geq i$. Provau que

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A_n, \qquad \bigcap_{i \in I} A_i = A_1.$$

16. Siguin $A$ i $B$ els multiconjunts $\{a, a, a, b, b, c\}$ i $\{a, a, b, b, b, d, d, d, d\}$, respectivament. Trobau:

    (a) $A \cup B$
    (b) $A \cap B$
    (c) $A \backslash B$
    (d) $B \backslash A$

17. Trobau el multiconjunt $B$ que compleixi simultàniament les dues condicions següents:

$$B \cup \{2, 2, 3, 4\} = \{2, 2, 3, 3, 4, 4, 5\}$$
$$B \cap \{2, 2, 3, 4, 5\} = \{2, 3, 4, 5\}.$$

18. Enumerau els parells ordenats de la relació $R$ de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ en $B = \{1, 2, 3\}$, a on $(a, b) \in R$ si, i només si:

    (a) $a + b = 4$
    (b) $a > b$
    (c) $\mathrm{mcd(a, b)} = 1$
    (d) $\mathrm{mcm(a, b)} = 2$

19. Considerem el conjunt $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ amb la relació de divisibilitat. Enumerau tots els parells ordenats de la mateixa i indicau quines propietats té i quines no té la relació, justificant la vostra resposta.

20. Determinau si la relació $R$ en el conjunt de tots els nombres reals és reflexiva, irreflexiva, simètrica, asimètrica, antisimètrica i/o transitiva, a on $(x, y) \in R$ si, i només si,

(a) $x \neq y$

(b) $x$ és un múltiple de $y$

(c) $xy \geq 1$

(d) $x$ i $y$ són ambos negatius o ambdós no negatius

21. Pot ser una relació en un conjunt no ser ni reflexiva ni irreflexiva? En cas afirmatiu, donau un exemple.

22. Una relació asimètrica ha de ser a la força antisimètrica? I a l'inrevés? Raonau la vostra resposta.

23. Sigui $R$ la relació en el conjunt dels enters tal que $(a, b) \in R$ si, i només si, $a \neq b$. Quina és la seva clausura reflexiva?

24. Sigui $R$ la relació de divisibilitat en el conjunt dels enters. Quina és la seva clausura simètrica? És un ordre parcial en $\mathbb{Z}^+$?

25. Quins dels següents conjunts són conjunts parcialment ordenats?

    (a) $(\mathbb{Z}, \neq)$

    (b) $(\mathbb{Z}, \geq)$

    (c) $(\mathbb{Z}, \nmid)$

26. Dibuixau el diagrama de Hasse de les següents relacions:

    (a) la relació "major o igual" en el conjunt $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

    (b) la relació d'inclusió en el conjunt $\mathcal{P}(S)$ a on $S = \{a, b, c, d\}$

27. Donat el conjunt parcialment ordenat $\{1, 3, 5, 9, 15, 24, 45\}$ amb la relació de divisibilitat, es demana:

    (a) Trobau els elements maximals i minimals

    (b) Hi ha mínim? I màxim?

28. Donat el conjunt parcialment ordenat $\{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ amb la relació inclusió, es demana:

    (a) Trobau els elements maximals i minimals

    (b) Hi ha mínim? I màxim?

29. Siguin $(S, \leq_1)$ i $(T, \leq_2)$ dos conjunts parcialment ordenats. Demostrau que $(S \times T, \leq)$ és un conjunt parcialment ordenat, essent $(s, t) \leq (u, v)$ si, i només si, $s \leq_1 u$ i $t \leq_2 v$.

30. Sigui $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $A = S \times S$. Es defineix sobre $A$ la relació:

$$(a, b)\ R\ (a', b') \Leftrightarrow ab' = a'b.$$

    Provau que $R$ és una relació d'equivalència i calculau $A/R$.

31. Quines de les següents relacions en el conjunt de totes les funcions de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ són relacions d'equivalència? Donau les classes d'equivalència d'aquelles que siguin relacions d'equivalència.

    (a) $\{(f, g) \mid f(1) = g(1)\}$

    (b) $\{(f, g) \mid f(0) = g(0) \text{ o } f(1) = g(1)\}$

    (c) $\{(f, g) \mid f(x) - g(x) = c \text{ per algun } c \in \mathbb{Z} \text{ i per a tot } x \in \mathbb{Z}\}$

32. Quines d'aquestes col·leccions de subconjunts són particions del conjunt de cadenes de bits de longitud 8?

    (a) El conjunt de cadenes de bits que comencen per 1, el conjunt de cadenes de bits que comencen per 00 i el conjunt de cadenes de bits que comencen per 01.

    (b) El conjunt de cadenes de bits que conté la cadena 00, el conjunt de cadenes de bits que conté la cadena 01, el conjunt de cadenes de bits que conté la cadena 10 i el conjunt de cadenes de bits que conté la cadena 11.

33. Quines d'aquestes col·leccions de subconjunts són una partició del conjunt de nombres reals?

    (a) Els nombres reals negatius, $\{0\}$, els nombres reals positius.

    (b) El conjunt dels nombres irracionals, el conjunt dels nombres racionals.

    (c) El conjunt d'intervals $[k, k+1]$, $k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

    (d) El conjunt d'intervals $(k, k+1)$, $k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

    (e) El conjunt d'intervals $[k, k+1)$, $k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

    (f) Els conjunts $\{x + n | n \in \mathbb{Z}\}$ per a tot $x \in [0, 1)$.

34. Comprovau que la relació definida en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de la forma $(a, b)R(c, d)$ si, i només si, $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ és d'equivalència i representau gràficament el conjunt quocient.

35. Determinau si les següents $f$ són funcions o no, dins el domini i la imatge donats:

    (a) $f(x) = 1/x$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$,

    (b) $f(n) = \pm n$ de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$,

    (c) $f(n) = \sqrt{n^2 + 1}$ de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$.

36. Determinau si les següents funcions són injectives, exhaustives i/o bijectives:

    (a) $f : \{a, b, c, d\} \to \{a, b, c, d\}$, amb $f(a) = d$, $f(b) = b$, $f(c) = c$ i $f(d) = d$,

    (b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, amb $f(n) = n^2 + 1$,

    (c) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, amb $f(m, n) = 2m - n$,

    (d) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, amb $f(m, n) = |n|$,

    (e) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, amb $f(m, n) = m$,

    (f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, amb $f(x) = (x^2 + 1)/(x^2 + 2)$.

37. Suposem que $g$ és una funció de $A$ en $B$ i que $f$ és una funció de $B$ en $C$.

    (a) Demostrau que si tant $f$ com $g$ són funcions injectives, llavors $f \circ g$ també ho és.

    (b) Demostrau que si tant $f$ com $g$ són funcions exhaustives, llavors $f \circ g$ també ho és.

    (c) Demostrau que si tant $f$ com $g$ són funcions bijectives, llavors $f \circ g$ també ho és.

    (d) Si $f$ i $f \circ g$ són injectives, és $g$ injectiva? Justificau la vostra resposta

    (e) Si $f$ i $f \circ g$ són exhaustives, és $g$ exhaustiva? Justificau la vostra resposta

38. Siguin $S$ i $T$ conjunts amb tres elements i dos elements respectivament. En cada cas enunciau la resposta i justificau-la.

    (a) Quantes funcions hi ha de $S$ en $T$?

    (b) Quantes funcions injectives hi ha de $S$ en $T$?

    (c) Quantes funcions exhaustives hi ha de $S$ en $T$?

    (d) Quantes funcions bijectives hi ha de $S$ en $T$?

(e) Conjecturau les respostes a a) i a b) si $S$ té $m$ elements i $T$ té $n$ elements.

39. Siguin $f(x) = ax + b$ i $g(x) = cx + d$. a on $a$, $b$, $c$ i $d$ són constants. Determinau per a quins valors de $a$, $b$, $c$ i $d$ es compleix que $f \circ g = g \circ f$.

40. Sigui $f$ una funció del conjunt $A$ en el conjunt $B$. Siguin $L$ i $M$ subconjunts de $A$, i $S$ i $T$ subconjunts de $B$. Demostrau que:

    (a) $f(L \cup M) = f(L) \cup f(M)$
    (b) $f(L \cap M) \subseteq f(L) \cap f(M)$
    (c) $f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$
    (d) $f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$

41. Sigui $f$ la funció part entera donada per $f(x) = [x]$. Trobau:

    (a) $f^{-1}(\{0\})$
    (b) $f^{-1}(\{-1, 0, 1\})$
    (c) $f^{-1}(\{x \mid 0 < x < 1\})$

42. Siguin $f : A \to B$ i $g : B \to C$ funcions. Si $C_0 \subseteq C$, provau que $(g \circ f)^{-1}(C_0) = f^{-1}(g^{-1}(C_0))$.

43. Sigui $A$ un conjunt i un subconjunt seu $B \subseteq A$. Consideram la funció característica $\chi_B : A \to \{0, 1\}$.

    (a) Donau les fórmules per a les funcions característiques $\chi_\emptyset$ i $\chi_A$.
    (b) Sigui $\overline{B}$ el conjunt complementari de $B$ en $A$. Comparau les fórmules de $\chi_B$ i $\chi_{\overline{B}}$.
    (c) Provau que si $B$ i $C$ són subconjunts de $A$, llavors $B = C \Leftrightarrow \chi_B = \chi_C$.
    (d) Provau que si $B$ i $C$ són subconjunts de $A$, llavors

$$\chi_{B \cap C}(x) = \chi_B(x) \cdot \chi_C(x) \quad \forall x \in A$$
$$\chi_{B \cup C}(x) = \chi_B(x) + \chi_C(x) - \chi_B(x) \cdot \chi_C(x) \quad \forall x \in A$$