1 Estudiau les següents aplicacions i comprovau que són lineals. Calculau-ne el nucli, la imatge i la dimensió:

1.
$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto y.$$

2.
$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x+y.$$

3.
$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x,y,z) \mapsto x+y.$$

4.
$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x,y,z) \mapsto x-y+z.$$

5.
$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) \mapsto (x,y).$$

6.
$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) \mapsto (x+y,z).$$

7.
$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) \mapsto (x-y,y+z).$$

8.
$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) \mapsto (x+y-2z,0).$$

9.
$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) \mapsto (x+y-5,y-z).$$

10.
$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) \mapsto (2x,1).$$

2 Obteniu els subespais vectorials nucli i imatge de les següents aplicacions lineals:

1.
$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto (2x-y,x+y).$$

2.
$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x,y,z) \mapsto (x+2y+z,x+5y,z).$$

3.
$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, \quad (x,y) \mapsto (x,-y,x+3y,x-y).$$

4.
$$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad (x,y,z,t) \mapsto (7x+2y-z+t,y+z,-x).$$

3 Sigui $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida per $f(e_1)=(1,1), f(e_2)=(3,0), f(e_3)=(4,7)$ on $\{e_1,e_2,e_3\}$ és la base canònica de $\mathbb{R}^3$.

1. Calcular $f(1,3,8)$ i $f(x,y,z)$
2. Determinar $Ker(f)$ i $Im(f)$

4 Sigui $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida per $f(x,y,z)=(3x+2y-4z,x-5y+3z)$

1. Calculau la matriu de f respecte de les bases canòniques.
2. Calculau la matriu de f respecte de les bases $B_{\mathbb{R}^3}=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ i $B_{\mathbb{R}^2}=\{(1,1),(0,1)\}$.

5 Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ amb matriu associada respecte de la base canònica A donada per

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinar la matriu C associada a f respecte de la base

$$B' = \{(1,0,-1),(0,1,1),(1,0,1)\}$$

6 Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ definit per $f(e_1) = -e_1, f(e_2) = e_1 + e_2 + e_3, f(e_3) = -e_2 - e_3$ amb $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canònica de $\mathbb{R}^3$

1. Determinau la matriu f respecte de la base canònica anterior.
2. Trobau la dimensió del nucli i la imatge de f
3. Provau que els vectors $u_1 = -e_2, u_2 = e_1 + e_3, u_3 = e_1$ formen una base de $\mathbb{R}^3$ i trobau la matriu de f respecte d'aquesta base.

7 Un endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ està determinat per $f(x,y,z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$ en la base canònica. Se demana:

1. Nucli i imatge de f
2. La matriu de f en aquesta base
3. La matriu de f en la base constituida pels vectors $v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,0,0)$
4. L'expressió de f en la base V.

8 Determinau la matriu del morfisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $f(0,1,1) = (1,2,7,1), f(1,0,3) = (-1,2,3,1), f(2,-1,0) = (2,0,4,0)$. Trobau les bases de $Ker(f)$. Quines són les anti-imatges del vector $(2,4,14,2)$?