TEMA 6.DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

1. INTRODUCCIÓN

Antes de entrar matemáticamente en el tema de la diagonalización de matrices cuadradas expondremos alguna de las aplicaciones que tiene la utilización de las matrices diagonales.

Recordemos en primer lugar que una matriz diagonal es aquella matriz cuadrada que tiene ceros en todos sus elementos no diagonales.

La factorización de una matriz dada A en función de otra matriz diagonal D permiten resolver problemas de análisis y estudio de sistemas eléctricos, vibraciones, economía, etc. En dicha factorización juegan un papel importante unos **escalares**, llamados **valores propios** y un tipo de **vectores**, llamados **vectores propios**.

Un tipo de aplicación de la diagonalización de matrices se encuentra en el análisis de la solución de un sistema dinámico a lo largo del tiempo.

Un sistema se caracteriza por el estado de un conjunto de n variables que lo determinan. Este conjunto se puede representar por un vector de R^n cuyas componentes expresan los valores de esas variables.

Si el estado evoluciona a lo largo del tiempo modificando su valor en cada periodo (hora, día, mes,..), es muy común que la relación entre los estados del sistema en dos periodos sucesivos se exprese en la forma:

$X_{p+1} = A \cdot X_p$ donde A es una matriz cuadrada de orden n

X_p representa el estado del sistema en el periodo p

X_{p+1} representa el estado del sistema en el siguiente periodo p+1

Entonces basta conocer el estado del sistema en el periodo inicial X_0 (estado inicial) para poder calcular el estado del sistema en cualquier periodo.

En efecto si X_0 es conocido: $X_1 = A \cdot X_0$;

$$X_2 = A \cdot X_1 = A\left(A \cdot X_0\right) = A^2 X_0$$

……………………………………………………………

y sucesivamente de forma que $X_m = A^m \cdot X_0$

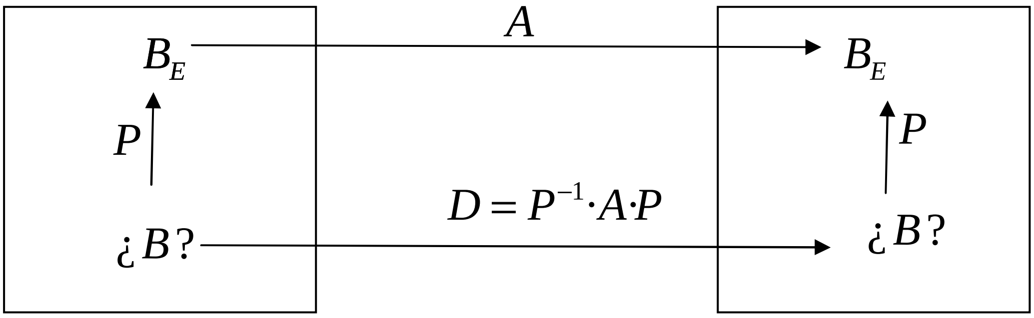
Por lo tanto para conocer el estado del sistema en el periodo m, es necesario el cálculo de A^m. Tal cálculo es, en general, complicado, pero se simplifica mucho si A es diagonalizable, como veremos a continuación.

2. DIAGONALIZACIÓN: DEFINICIONES

Matrices semejantes

Def. 2.1 – Dos matrices A y A' son semejantes siempre que exista una matriz P cuadrada con $|P| \neq 0$ tal que $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$

Pensemos que todas las matrices semejantes constituyen las diversas representaciones analíticas de un mismo endomorfismo f de un espacio vectorial E de dimensión n en diferentes bases de E.



Ello plantea inmediatamente el problema de buscar la base de E en la cual f se presente de la forma más sencilla posible; habida cuenta de la simplicidad de las matrices diagonales, **se intenta encontrar una base de E en la cual f esté representado por una matriz diagonal**, es decir: dada una matriz A en una base cualquiera, ver si existe una matriz diagonal semejante a ella. A este proceso le llamaremos diagonalizar la matriz o el endomorfismo.

Matriz diagonalizable

Def. 2.2 – Una matriz A es diagonalizable si es semejante a una matriz D diagonal, o sea, si existe P regular tal que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$

Ello no siempre es posible; veremos en qué condiciones existirá una tal matriz y respecto a qué base representará al endomorfismo.

3. VECTORES Y VALORES PROPIOS DE UNA MATRIZ

La teoría que se expone a continuación gira en torno a la matriz cuya diagonalización estudiamos y, aunque no se mencione, no hay que olvidar que dicha matriz representa a un cierto endomorfismo en una cierta base.

Vector propio (o autovector)

Def. 3.1 – Dada una matriz cuadrada $A \in M_{nxn}$ (es decir tamaño n) cuyos vectores columna pertenecen a un espacio vectorial E de dimensión n, un elemento $\vec{x}$ de E ($\vec{x} \in E$) es un **vector propio** de A si:

a) $\vec{x} \neq \vec{0}$ no es el vector nulo y **b)** existe un escalar $\lambda \in R$ tal que verifica $A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}$

Geométricamente un vector propio $\vec{x}$ es aquel que tiene la misma dirección que el vector $A\cdot\vec{x}$ transformado por la matriz.

Ejemplo: Demostrar que $\vec{x}=(2,-1)$ es un vector propio de la matriz $B=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 1 & 4\end{pmatrix}$.

$\vec{y}$ será vector propio de la matriz si se cumple $B\cdot\vec{x}=\lambda\vec{x}$

$\begin{pmatrix}4 & 4\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ -2\end{pmatrix}$ y el vector $\begin{pmatrix}4\\ -2\end{pmatrix}$ resulta ser $2\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$ es decir que $B\cdot\vec{x}=\mathbf{2}\vec{x}$

$\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$ es vector propio de $B=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ ya que $B\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\ -2\end{pmatrix}$ resulta ser un múltiplo de $\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$.

Valor propio (o autovalor)

Def. 3.2 – Al escalar λ de la definición anterior se le llama valor propio asociado al vector propio $\vec{x}$.

Al conjunto de todos los vectores que satisfacen la relación $A\cdot\vec{x}=\lambda\vec{x}$ se les llama conjunto de vectores propios o autovectores asociados a λ.

3.1 OBTENCIÓN PRÁCTICA DE VECTORES Y VALORES PROPIOS

Partimos de la ecuación matricial $A\cdot\vec{x}=\lambda\vec{x}$ que también podemos expresar:

$A\cdot\vec{x}-\lambda\vec{x}=\vec{0}$ ó $\boldsymbol{(A-\lambda I)\cdot\vec{x}=\vec{0}}$

Recordar que λ es un escalar y no sería correcto escribir $(A-\lambda)\cdot\vec{x}=\vec{0}$

La ecuación vectorial $\boldsymbol{(A-\lambda I)\cdot\vec{x}=\vec{0}}$ representa un **sistema homogéneo de n ecuaciones y n incógnitas** cuya matriz de coeficientes es $A-\lambda I$.

Si este sistema de ecuaciones es de Cramer (**n** ecuaciones, **n** incógnitas, rango **n**, $|A-\lambda I|\neq 0$) será compatible y determinado y tendrá únicamente la solución trivial.

Por el contrario si el sistema ha de tener soluciones distintas de la trivial el determinante de $A-\lambda I$ deberá ser cero: $\boldsymbol{|A-\lambda I|=0}$

Es decir que existirán vectores propios de la matriz únicamente en el caso en que $\boldsymbol{|A-\lambda I|=0}$

Ejercicio 6.3.1.- ¿Tiene vectores propios la matriz A? $A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 6\\ 2 & 1 & 6\\ 2 & -1 & 8\end{pmatrix}$

Construiremos la matriz $A-\lambda I$: $\begin{pmatrix}4 & -1 & 6\\ 2 & 1 & 6\\ 2 & -1 & 8\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-\lambda & -1 & 6\\ 2 & 1-\lambda & 6\\ 2 & -1 & 8-\lambda\end{pmatrix}$

Y a continuación calcularemos su determinante:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 6 \\ 2 & 1-\lambda & 6 \\ 2 & -1 & 8-\lambda \end{vmatrix} \underset{C1\to C1+C2+C3}{=} \begin{vmatrix} 9-\lambda & -1 & 6 \\ 9-\lambda & 1-\lambda & 6 \\ 9-\lambda & -1 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 1 & 1-\lambda & 6 \\ 1 & -1 & 8-\lambda \end{vmatrix}(9-\lambda) \underset{\substack{F2\to F2-F1 \\ F3\to F3-F1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}(9-\lambda) = \mathbf{(9-\lambda)(2-\lambda)^2}$$

Este determinante sea nulo para $\begin{cases} \lambda_1 = \mathbf{2} \\ \lambda_2 = \mathbf{9} \end{cases}$

Esta matriz tendrá vectores propios para $\lambda_1 = \mathbf{2}$ y $\lambda_2 = \mathbf{9}$.

Estos valores, **2** y **9**, serán **los valores propios** de esta matriz.

Los vectores $\vec{x}$ que cumplan $(A-\mathbf{2}I)\cdot\vec{x} = \vec{0}$ serán los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_1 = \mathbf{2}$

Los vectores $\vec{x}$ que cumplan $(A-\mathbf{9}I)\cdot\vec{x} = \vec{0}$ serán los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_2 = \mathbf{9}$

En el ejercicio **6.3.1** hemos visto que el resultado de desarrollar el determinante $|A-\lambda I|$ es un polinomio.

Polinomio característico de una matriz A

Def. 3.3 – Es el polinomio de grado n obtenido al calcular $|A-\lambda I|$.

Ecuación característica

Def. 3.4 – Es la ecuación obtenida al igualar el polinomio característico a 0, $|A-\lambda I| = 0$,

Las n soluciones de esta ecuación son los valores propios de la matriz.

Resumiendo: **Matriz característica:** $\mathbf{A-\lambda I}$

Polinomio característico: $|\mathbf{A-\lambda I}|$

Ecuación característica: $|\mathbf{A-\lambda I}| = 0$

Como la ecuación característica es de grado n, posee n soluciones, no necesariamente distintas. Por lo tanto es conveniente acompañar cada raíz del número de veces que se repita.

Multiplicidad algebraica (u orden de multiplicidad) de un autovalor

Def. 3.5 – Es el número de veces que aparece un valor propio como solución de la ecuación característica.

En el ejercicio **6.3.1.** con polinomio característico $\mathbf{(9-\lambda)(2-\lambda)^2}$

el valor propio $\lambda_1 = \mathbf{2}$ tiene **multiplicidad algebraica** igual a 2 porque aparece 2 veces y

el valor propio $\lambda_2 = \mathbf{9}$ tiene **multiplicidad algebraica** igual a 1 porque solo aparece 1 vez.

Ejercicio 6.3.2.- Calcular los autovalores de la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&-1\\0&2&1\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&-1\\0&2&1\end{pmatrix}\longrightarrow A-\lambda I=\begin{pmatrix}1-\lambda&1&0\\1&-1-\lambda&-1\\0&2&1-\lambda\end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&0\\1&-1-\lambda&-1\\0&2&1-\lambda\end{vmatrix}=\underset{C1n=C1+C3}{\begin{vmatrix}1-\lambda&1&0\\0&-1-\lambda&-1\\1-\lambda&2&1-\lambda\end{vmatrix}}=\underset{F3n=F3-F1}{\begin{vmatrix}1-\lambda&1&0\\0&-1-\lambda&-1\\0&1&1-\lambda\end{vmatrix}}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-(1+\lambda)&-1\\1&1-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$(1-\lambda)\left[-\left(1-\lambda^2\right)+1\right]=\lambda^2(1-\lambda)$$

Polinomio característico: $\lambda^2(1-\lambda)$

Ecuación característico: $\lambda^2(1-\lambda)=\mathbf{0}$

Autovalores: $\lambda_1=\mathbf{0}$ con **multiplicidad algebraica** 2 $\lambda_2=\mathbf{1}$ con **multiplicidad algebraica** 1

Una vez calculados todos los valores propios habrá que calcular el conjunto de vectores propios asociado a cada uno de ellos. Para ello resolveremos para cada λ_i (valor propio) el siguiente sistema homogéneo:

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda_i I})\cdot\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{0}}$$

Ejercicio 6.3.3.- Calcular los autovectores de la matriz $A=\begin{pmatrix}2&-2&1\\2&-8&-2\\1&2&2\end{pmatrix}$

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}2-\lambda&-2&1\\2&-8-\lambda&-2\\1&2&2-\lambda\end{pmatrix}\qquad |A-\lambda I|=\underset{C1n=C1+C3}{\begin{vmatrix}2-\lambda&-2&1\\2&-8-\lambda&-2\\1&2&2-\lambda\end{vmatrix}}=\underset{F3n=F3-F1}{\begin{vmatrix}3-\lambda&-2&1\\0&-8-\lambda&-2\\3-\lambda&2&2-\lambda\end{vmatrix}}=$$

$$\begin{vmatrix}3-\lambda&-2&1\\0&-8-\lambda&-2\\0&4&1-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)\begin{vmatrix}-8-\lambda&-2\\4&1-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)\left[-8+8\lambda-\lambda+\lambda^2+8\right]=\lambda(3-\lambda)(\lambda+7)$$

Esta matriz tendrá vectores propios para $\lambda_1=\mathbf{0}$, $\lambda_2=\mathbf{3}$, y $\lambda_3=\mathbf{-7}$.

Vectores propios $\vec{x}$ asociados al valor propio $\lambda_1=\mathbf{0}$; serán los que cumplan $(A-\mathbf{0}\cdot I)\cdot\vec{x}=\vec{0}$

Vectores propios $\vec{x}$ asociados al valor propio $\lambda_2=\mathbf{3}$; serán los que cumplan $(A-\mathbf{3}\cdot I)\cdot\vec{x}=\vec{0}$

Vectores propios $\vec{x}$ asociados al valor propio $\lambda_3=\mathbf{-7}$; serán los que cumplan $(A+\mathbf{7}\cdot I)\cdot\vec{x}=\vec{0}$

a) $\lambda_1 = 0$ $\quad (A - 0\cdot I)\cdot\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -8 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow R_A = 2$

Sist. Equivalente: $\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \longrightarrow$ **Sist. de Cramer:** $\begin{cases} 2x - 2y = -z \\ x + 2y = -2z \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -2z \end{pmatrix}$ $\quad x = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -z & -2 \\ -2z & 2 \end{vmatrix} = -z$ $\quad y = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & -z \\ 1 & -2z \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}z$

$\left(-z, -z/2, z\right)$ representa los infinitos vectores propios asociados a $\lambda_1 = 0$

b) $\lambda_2 = 3$ $\quad A - 3\cdot I = \begin{pmatrix} 2-3 & -2 & 1 \\ 2 & -8-3 & -2 \\ 1 & 2 & 2-3 \end{pmatrix}$ $\quad (A - 3\cdot I)\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & -11 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2 & -11 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow R_A = 2$ $\quad$ **Sist. Equivalente:** $\begin{pmatrix} 2 & -11 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ z \end{pmatrix}$ $\quad x = \frac{1}{15}\begin{vmatrix} 2z & -11 \\ z & 2 \end{vmatrix} = z$ $\quad y = \frac{1}{15}\begin{vmatrix} 2 & 2z \\ 1 & z \end{vmatrix} = 0$

$(z, 0, z)$ representa los infinitos vectores propios asociados a $\lambda_2 = 3$

c) $\lambda_3 = -7$ $\quad A + 7\cdot I = \begin{pmatrix} 2+7 & -2 & 1 \\ 2 & -8+7 & -2 \\ 1 & 2 & 2+7 \end{pmatrix}$ $\quad (A + 7\cdot I)\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow R_A = 2$ $\quad$ **Sist. Equivalente:** $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ -9z \end{pmatrix}$ $\quad x = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 2z & -1 \\ -9z & 2 \end{vmatrix} = -z$ $\quad y = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 2 & 2z \\ 1 & -9z \end{vmatrix} = -4z$

$(-z, -4z, z)$ representa los infinitos vectores propios asociados a $\lambda_3 = -7$

Subespacio propio asociado a un valor propio.

Se puede demostrar que:

a) Si $\vec{x}$, $\vec{x}\,'$ son dos vectores propios cualesquiera de la matriz A **asociados al mismo** valor propio λ, la suma $\vec{x} + \vec{x}\,'$ es también un vector propio de A asociado al valor propio λ.

b) Si $\vec{x}$ es un vector propio de la matriz A asociado al valor propio λ, también lo es cualquier vector de la forma $\mu\vec{x}$ donde µ es un escalar no nulo.

Teniendo en cuenta el **teorema de caracterización de subespacios** (suma de dos vectores del subconjunto pertenece al subconjunto y el producto de un escalar por un vector del subconjunto pertenece al subconjunto):

El conjunto de los vectores propios asociados al mismo valor propio λ junto con el vector $\vec{\mathbf{0}}$, constituyen un subespacio vectorial de E llamado **subespacio propio asociado al valor propio λ**.

Multiplicidad geométrica de un autovalor

Def. 3.5 – Es la dimensión del subespacio propio asociado al autovalor.

Ejercicio 6.3.4.- Dada $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ encontrar sus autovalores y los subespacios propios asociados a ellos.

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} \underset{C1n=C1+C2+C3}{=} \begin{vmatrix} 6-\lambda & 1 & 1 \\ 6-\lambda & 4-\lambda & 1 \\ 6-\lambda & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} \underset{\begin{Bmatrix} F2n=F2-F1 \\ F2n=F2-F1 \end{Bmatrix}}{=} \begin{vmatrix} 6-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(3-\lambda)^2$$

Polinomio característico: $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I}| = (3-\lambda)^2(6-\lambda)$

Ecuación característica: $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I}| = (3-\lambda)^2(6-\lambda) = \mathbf{0}$

Autovalores: $\lambda_1 = \mathbf{3}$ con **multiplicidad algebraica** 2 $\lambda_2 = \mathbf{6}$ con **multiplicidad algebraica** 1

Vectores propios $\vec{x}$ asociados al valor propio $\lambda_2 = \mathbf{6}$; serán los que cumplan $(A-\mathbf{6}\cdot I)\cdot\vec{x} = \vec{0}$

a) $\lambda_1 = \mathbf{3}$

Vectores propios $\vec{x}$ asociados al valor propio $\lambda_1 = \mathbf{3}$: los que cumplan $(A-\mathbf{3}\cdot I)\cdot\vec{x} = \vec{0}$

$$A-3I = \begin{pmatrix} 4-3 & 1 & 1 \\ 1 & 4-3 & 1 \\ 1 & 1 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (A-\mathbf{3}\cdot I)\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hay un menor de orden 1 no nulo: $M_1 = |1| \neq 0 \Rightarrow R_A \geq 1$ y

todos los menores de orden 2 orlados son de la forma $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow R_A = 1$

Sistema equivalente: $x+y+z=0 \quad \Rightarrow \quad x=-y-z \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{H_1}$ subespacio propio de los vectores propios asociados a $\lambda_1 = 3$

Vamos a obtener una base de este subespacio al que llamaremos: $\boldsymbol{H_1}$

A partir del vector genérico obtendremos un sistema generador:

$$\begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Sistema generador: } \{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$$

Como los dos vectores no son proporcionales serán L.I y por tanto base de $\boldsymbol{H_1}$. **Dim** $\boldsymbol{H_1} = \mathbf{2}$

a) $\lambda_2 = \mathbf{6}$ $\qquad A - 6I = \begin{pmatrix} 4-6 & 1 & 1 \\ 1 & 4-6 & 1 \\ 1 & 1 & 4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$(A - \mathbf{6}\cdot I)\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hay un menor de orden 2 no nulo: $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq \mathbf{0} \Rightarrow R_A = 2$

Sistema equivalente: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -x \end{pmatrix}$ $\qquad y = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2x & -1 \\ -x & 2 \end{vmatrix} = x \qquad z = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 2x \\ -2 & -x \end{vmatrix} = x \qquad \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{H_2}$ subespacio propio de los vectores propios asociados a $\lambda_2 = \mathbf{6}$

Vamos a obtener una base de este subespacio:

A partir del vector genérico obtendremos un sistema generador: $(x,x,x) = (1,1,1)x$

Sistema generador y también base: $\{(1,1,1)\}$ **Dimensión de** $\boldsymbol{H_2} = \mathbf{1}$

EP6.3.1.- Calcular el polinomio característico y valores propios de la matriz $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Calcular también las multiplicidades algebraicas y geométricas de los mismos.

EP6.3.2.- Calcular los vectores propios de la matriz del ejercicio resuelto 6.3.1 y las multiplicidades algebraicas y geométricas de sus valores propios.

EP6.3.3.- Calcular los vectores propios de las matrices y las multiplicidades algebraicas y geométricas de sus autovalores.

$$P=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & -4 & -4\\ 0 & -2 & 0\\ -4 & 4 & 2\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}-5 & 3 & 3\\ -2 & 4 & 2\\ -7 & 3 & 5\end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -3\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 3 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

3.2 ALGUNAS PROPIEDADES DE VALORES Y VECTORES PROPIOS

1.- La suma de los n valores propios de una matriz es igual a su traza.

2.- Los valores propios de una matriz coinciden con los de su traspuesta.

3.- El producto de los n valores propios de una matriz es igual a su determinante.

4.- Dos matrices semejantes tienen la misma ecuación característica y consecuentemente los mismos valores propios con el mismo grado de multiplicidad.

5.- Una matriz triangular tiene como valores propios los elementos de la diagonal principal.

6.- A valores propios distintos le corresponden vectores propios linealmente independientes.

7.- Un mismo vector propio no puede estar asociado a dos valores propios distintos.

4. TEOREMAS

Teorema 4.1

La dimensión del subespacio propio $\boldsymbol{H}_i$ asociado al valor propio λ_i es mayor o igual que 1 y menor o igual que el orden de multiplicidad (o multiplicidad algebraica), $\boldsymbol{n}_i$, del valor propio.

$$\boldsymbol{1} \le \dim(\boldsymbol{H}_i) \le \boldsymbol{n_i}$$

Corolario 4.1

Si la multiplicidad algebraica de la raíz es 1 ($\boldsymbol{n_i}=1$), la dimensión del correspondiente subespacio propio (multiplicidad geométrica) será 1.

Como $\boldsymbol{1} \le \dim(\boldsymbol{H}_i) \le \boldsymbol{n_i}$ si $\boldsymbol{n_i}=1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{1} \le \dim(\boldsymbol{H}_i) \le \boldsymbol{1} \quad \Rightarrow \quad \dim(\boldsymbol{H}_i)=\boldsymbol{1}$

Teorema 4.2

Dados $\lambda_1, \lambda_2 \ldots\ldots \lambda_r$ valores propios **distintos** de la matriz A(nxn), y $u_1, u_2 \ldots\ldots\ldots u_r$ vectores propios asociados a ellos, entonces $u_1, u_2 \ldots\ldots\ldots u_r$ son L.I.

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 \ldots\ldots\ldots & \lambda_r \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ u_1 & u_2 \ldots\ldots\ldots & u_r \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad u_1, u_2 \ldots\ldots\ldots u_r \text{ son L.I.}$$

Teorema 4.3

Si la matriz A(nxn) (formada por vectores de un e. vectorial E) tiene n valores propios distintos habrá n vectores propios que serán L.I.

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 \ldots\ldots\ldots\ldots & \lambda_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ u_1 & u_2 \ldots\ldots\ldots\ldots & u_n \end{array} \Rightarrow u_1, u_2 \ldots\ldots\ldots\ldots u_n \text{ son L.I.}$$

y como n vectores de un e. vectorial de dimensión n forman una base, $u_1, u_2 \ldots\ldots u_n$ serán una base de E.

5. MATRICES DIAGONALIZABLES

Recordemos que habíamos dicho que una matriz A es diagonalizable si existe una matriz D diagonal semejante a ella. D y A son semejantes si se puede establecer entre ellas la igualdad $D = Q^{-1} \cdot A Q$ siendo Q una matriz regular.

Teorema 5.1

Una matriz $A \in M_{nxn}$ es **diagonalizable** **ssi** **tiene n vectores propios linealmente independientes.**

O lo que es lo mismo: **La condición necesaria y suficiente para que una matriz sea diagonalizable es que existe una base del espacio vectorial formada por vectores propios de la matriz dada.**

Corolario 5.1

Si la matriz A tiene n valores propios distintos, habrá n vectores propios L.I. (**Teorema 4.3**) y como consecuencia A será diagonalizable.

Ejercicio 6.5.1.- Estudiar los valores propios de la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ¿Es diagonalizable?.

$$B - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -(1+\lambda) \end{vmatrix} =$$

$$-(1+\lambda)\left[-(1+\lambda)(2-\lambda)-4\right] = -(1+\lambda)\left[\lambda^2 - \lambda - 6\right] = -(1+\lambda)(\lambda-3)(\lambda+2)$$

Esta matriz tiene los valores propios $\lambda_1 = \mathbf{-1}$, $\lambda_2 = \mathbf{3}$, y $\lambda_3 = \mathbf{-2}$.

Como estamos en un espacio vectorial de dimensión 3 y hay 3 valores propios reales y distintos la matriz es diagonalizable.

A continuación enunciaremos el teorema que nos informa sobre las condiciones generales que se deben cumplir para que una matriz sea diagonalizable:

Teorema 5.2

La condición necesaria y suficiente para que una matriz A sea diagonalizable es que para cada valor propio λ_i su orden de multiplicidad n_i coincida con su multiplicidad geométrica $\dim H_i$.

$$\dim(\boldsymbol{H}_i) = \boldsymbol{n_i} \qquad \forall \boldsymbol{\lambda_i}$$

De esta manera si la matriz tiene **r** valores propios **distintos** $\lambda_1, \lambda_2 \ldots\ldots \lambda_r$ uniendo bases de todos los subespacios propios $H_1, H_2, \ldots\ldots, H_r$, obtendremos una base de E. $\left\{B_{H_1} \cup B_{H_2} \cup \ldots\ldots \cup B_{H_r}\right\} = B_E$

Resumiendo:

- A es **diagonalizable** si

a) todos sus valores propios pertenecen a los reales y

b1) son distintos o bien

b2) son múltiples y las multiplicidades algebraica y geométrica son iguales.

Además la matriz D tiene como elementos de la diagonal principal los valores propios de la matriz A y se cumple la igualdad $D = (VP)^{-1} \cdot A (VP)$ siendo VP la matriz cuyas columnas son los n vectores propios L.I. de la matriz A.

Procedimiento para diagonalizar una matriz A cuadrada, real de orden n

1. Hallar el polinomio característico
2. Obtener las raíces de la ecuación característica, es decir los valores propios λ_i y sus órdenes de multiplicidad .
3. Resolver para cada λ_i el sistema $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I}) \cdot \vec{x} = \vec{0}$ (vectores propios y subespacios propios)
4. Si $\boldsymbol{n}_i = \dim H_i$ para cada valor propio, la matriz es diagonalizable.
5. La matriz D tiene como elementos de la diagonal principal los valores propios de la matriz A y $D = (VP)^{-1} \cdot A (VP)$ siendo VP la matriz cuyas columnas son los n vectores propios L.I. de la matriz A colocados siguiendo el mismo orden que los valores propios en la matriz D.

Ejercicio 6.5.2.- Diagonalizar la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

En el ejercicio **6.5.1** se han calculado los valores propios $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, y $\lambda_3 = -2$.

Al ser distintos todos sus valores propios podemos afirmar que la matriz es diagonalizable.

Calcularemos sus vectores propios.

$\lambda_1 = -1$ $\qquad B+I=\begin{pmatrix}3&0&2\\0&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}$ $\qquad (B+I)\vec{x}=\begin{pmatrix}3&0&2\\0&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Elegimos el menor de orden 2 no nulo: $M_2=\begin{vmatrix}3&2\\2&0\end{vmatrix}=\mathbf{-4\neq 0}\Rightarrow R_A=2$

Sistema equivalente: $\begin{pmatrix}3&2\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $\qquad x=\frac{1}{-4}\begin{vmatrix}0&2\\0&0\end{vmatrix}=0$ $\quad z=\frac{1}{-4}\begin{vmatrix}3&0\\2&0\end{vmatrix}=0$ $\qquad \begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{H_1}$ subespacio propio de los vectores propios asociados a $\lambda_1=\mathbf{-1}$

Base de este subespacio a partir del vector genérico: $(0,y,0)=(0,1,0)\,y$ $\qquad B_{H_1}=\{\vec{u}_1=(0,1,0)\}$

$\lambda_2 = 3$ $\qquad (B-\mathbf{3}\cdot I)=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&-4&0\\2&0&-4\end{pmatrix}$ $\qquad (B-\mathbf{3}\cdot I)\vec{x}=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&-4&0\\2&0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Elegimos el menor de orden 2 no nulo: $M_2=\begin{vmatrix}-1&0\\0&-4\end{vmatrix}=\mathbf{4\neq 0}\Rightarrow R_A=2$

Sistema equivalente: $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2z\\0\end{pmatrix}$ $\qquad x=2z$ $\quad y=0$ $\qquad \begin{pmatrix}2z\\0\\z\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{H_2}$ subespacio propio de los vectores propios asociados a $\lambda_2=\mathbf{3}$

$(2z,0,z)=z(2,0,1)$ $\qquad B_{H_2}=\{\vec{u}_2=(2,0,1)\}$

$\lambda_3 = -2$ $\qquad (B+\mathbf{2}\cdot I)=\begin{pmatrix}4&0&2\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$ $\qquad (B+\mathbf{2}\cdot I)\vec{x}=\begin{pmatrix}4&0&2\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Elegimos el menor de orden 2 no nulo: $M_2=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=\mathbf{1\neq 0}\Rightarrow R_A=2$

Sistema equivalente: $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2x\end{pmatrix}$ $\qquad y=0$ $\quad z=-2x$ $\qquad \begin{pmatrix}x\\0\\-2x\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{H_3}$ subespacio propio de los vectores propios asociados a $\lambda_3=\mathbf{-2}$

Vamos a obtener una base de este subespacio a partir del vector genérico:

$(x,0,-2x)=x(1,0,-2)$ $\qquad B_{H_3}=\{\vec{u}_3=(1,0,-2)\}$

Uniendo las 3 bases tenemos una base del espacio vectorial total. $B=\{\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3\}$

La matriz D tiene como elementos de la diagonal principal los valores propios de la matriz A $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y la matriz VP tiene como columnas los n vectores propios L.I. de la matriz A colocados siguiendo el mismo orden que los valores propios en la matriz D. $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3$

$$D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&3&0\\0&0&-2\end{pmatrix} \qquad VP=\begin{pmatrix}0&2&1\\1&0&0\\0&1&-2\end{pmatrix}$$

Vamos a comprobar que efectivamente $D=(VP)^{-1}\cdot A(VP)$

Calculemos la matriz $(VP)^{-1}$

$$|(VP)|=\begin{vmatrix}0&2&1\\1&0&0\\0&1&-2\end{vmatrix}=1(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&1\\1&-2\end{vmatrix}=5 \qquad (VP)^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0&5&0\\2&0&1\\1&0&-2\end{pmatrix}$$

$$(VP)^{-1}B(VP)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0&5&0\\2&0&1\\1&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&2\\0&-1&0\\2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&1\\1&0&0\\0&1&-2\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0&-5&0\\6&0&3\\-2&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&1\\1&0&0\\0&1&-2\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&3&0\\0&0&-2\end{pmatrix}=D$$

Ejercicio 6.5.3.- Diagonalizar si es posible la matriz $C=\begin{pmatrix}-1&3&0\\3&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

Calcularemos sus valores propios:

$$|C-\lambda I|=\begin{vmatrix}-1-\lambda&3&0\\3&-1-\lambda&0\\0&0&2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}-(1+\lambda)&3\\3&-(1+\lambda)\end{vmatrix}=(2-\lambda)\left((1+\lambda)^2-3^2\right)=$$

Diferencia de cuadrados igual a suma por diferencia:

$$(2-\lambda)(1+\lambda-3)(1+\lambda+3)=(2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+4)$$

Esta matriz tiene los valores propios $\lambda_1=-4$ con $n_1=1$ $\lambda_2=2$ con $n_2=2$

Calcularemos sus vectores propios asociados y las multiplicidades geométricas.

$\lambda_1=-4$ con $n_1=1$

Al tener multiplicidad algebraica $n_1=1$ y como sabemos que $1\le\dim(H_1)\le n_1=1 \Rightarrow$ $\dim(H_1)=1$ y podemos anticipar que ambas multiplicidades serán iguales.

$$C+4I=\begin{pmatrix}3&3&0\\3&3&0\\0&0&6\end{pmatrix} \qquad (C+4I)\vec{x}=\begin{pmatrix}3&3&0\\3&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Elegimos el menor de orden 2 no nulo: $M_2=\begin{vmatrix}3&0\\0&6\end{vmatrix}=\mathbf{18}\neq\mathbf{0}\Rightarrow R_A=2$

Sistema equivalente: $\begin{pmatrix}3&0\\0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3x\\0\end{pmatrix}$

$$y=\frac{1}{18}\begin{vmatrix}-3x&0\\0&6\end{vmatrix}=-x \qquad z=\frac{1}{-4}\begin{vmatrix}3&-3x\\0&0\end{vmatrix}=0 \qquad \begin{pmatrix}x\\-x\\0\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{H}_1$ subespacio propio de los vectores propios asociados a $\lambda_1=-4$

Vamos a obtener una base de este subespacio a partir del vector genérico: $(x,-x,0)=x(1,-1,0)$

$(1,-1,0)$ es un vector propio que constituye una base de $\boldsymbol{H}_1$. $\qquad B_{H_1}=\{\vec{u}_1=(1,-1,0)\}$

$\lambda_2=\mathbf{2}$ con $\boldsymbol{n_2}=2$

$$C-2I=\begin{pmatrix}-3&3&0\\3&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad (C-2I)\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Por Gauss $\begin{pmatrix}-3&3&0\\3&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-3&3&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ **R=1**

Sistema equivalente: $-x+y=0 \qquad \begin{pmatrix}y\\y\\z\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{H}_2$ subespacio propio de los vectores propios asociados a $\lambda_2=\mathbf{2}$

$(y,y,z)=y(1,1,0)+z(0,0,1) \qquad B_{H_2}=\{\vec{u}_2=(1,1,0),\vec{u}_2'=(0,0,1)\} \qquad \dim(\boldsymbol{H}_2)=2$

multiplicidad algebraica $\boldsymbol{n_2}=2$ multiplicidad geométrica $\dim(\boldsymbol{H}_2)=2$ Son iguales

Como las multiplicidades algebraica y geométrica son iguales para ambos valores propios la matriz C es diagonalizable.

Uniendo las 2 bases tenemos una base del espacio vectorial total. $B=\{\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_2'\}$

La matriz D tiene como elementos de la diagonal principal los valores propios de la matriz A

$$\begin{array}{c}\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_2\\ D=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\end{array}$$

y la matriz $(VP)^{-1}$ tiene como columnas los n vectores propios L.I. de la matriz A colocados siguiendo el mismo orden que los valores propios en la matriz D.

$$\begin{array}{c}\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_2'\\ (VP)=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\end{array}$$

Vamos a comprobar que efectivamente $D=(VP)^{-1}\cdot C(VP)$

Calculemos la matriz $(VP)^{-1}$

$$\left|(VP)\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad Adj(VP) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(VP)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(VP)^{-1}\cdot C(VP) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

Ejercicio 6.5.4.- Diagonalizar si es posible la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

Calcularemos sus valores propios $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 6-\lambda & 0 \\ 2 & 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(6-\lambda)^2$

Esta matriz tiene los valores propios $\lambda_1 = \mathbf{6}$ con $\boldsymbol{n_1} = 2$
$\lambda_2 = \mathbf{8}$ con $\boldsymbol{n_2} = 1$

$\lambda_1 = \mathbf{6}$ con $\boldsymbol{n_1} = 2$

$$A - \mathbf{6}I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ **2 filas no nulas en m.e.e.** $\Rightarrow$ $R = \mathbf{2}$

Sistema equivalente: $\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \\ z = z \end{cases} \qquad (0,-z,z)$

$\boldsymbol{H}_1$ subespacio propio de los vectores propios asociados a $\lambda_1 = \mathbf{6}$

Base de este subespacio: $(0,-z,z) = z(0,-1,1)$ $\qquad B_{H_1} = \{\vec{u}_1 = (0,-1,1)\}$

multiplicidad algebraica $\boldsymbol{n_1} = 2$ $\qquad$ multiplicidad geométrica $\dim(\boldsymbol{H}_1) = 1$

Son distintas y por lo tanto la matriz A NO ES DIAGONALIZABLE.

EP6.5.1.- Decidir cuáles de las siguientes matrices son diagonalizables:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 3\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 5\\ 0 & 5 & 1\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

EP6.5.2.- Calcular el polinomio característico y valores propios de la matriz A= $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

EP6.5.3.- Diagonalizar cuando sea posible las matrices de los problemas **EP6.5.1., EP6.5.2.**

EP6.5.4.- Sea la matriz A= $\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$. Encontrar sus valores y vectores propios. Determinar los subespacios propios asociados. Diagonalizar la matriz A si es posible.

EP6.5.5.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}$ encontrar los valores y vectores propios. ¿Es diagonalizable?.

EP6.5.6.- Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$. Encontrar si es posible una base de R^3 formada por vectores propios de A.

EP6.5.7.- Estudiar, según el valor del parámetro a si la matriz $\begin{pmatrix}1 & -4 & 0\\ 0 & 4a & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ es o no diagonalizable

EP6.5.8.- Estudiar, para que valores de a la matriz $B=\begin{pmatrix}a & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ es diagonalizable

EP6.5.9.- Estudiar, para que valores de a y b la matriz $C=\begin{pmatrix}0 & 1 & b\\ a^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ es diagonalizable

EP6.5.10.- Dada la matriz, $A=\begin{pmatrix}a+1 & a-1 & a\\ a-1 & a+1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

a) Estudiar si A es o no diagonalizable según los valores del parámetro *a*.

b) Para *a* = 0, calcular A^n

6. DIAGONALIZACIÓN ORTOGONAL

Las matrices reales simétricas son siempre diagonalizables o sea poseen una base de vectores propios. Y no solo eso, siempre tienen una base de vectores propios ortonormal (sus vectores son ortogonales dos a dos y unitarios).

Def. 6.1. – Se dice que una matriz cuadrada Q es **ortogonal** si se cumple que $Q^t = Q^{-1}$, su inversa y su traspuesta son iguales.

Def. 6.2. – Se dice que una matriz cuadrada A es **ortogonalmente diagonalizable** si existe una base de vectores propios ortonormal y esto ocurre si existe una matriz Q ortogonal tal que $Q^t \cdot A \cdot Q$ es una matriz diagonal formada por los valores propios de A.

$D = Q^t \cdot A \cdot Q$ o lo que es lo mismo $D = Q^{-1} \cdot A \cdot Q$ por ser Q ortogonal

Teorema 6.1

Si A es una matriz cuadrada real simétrica tamaño n, entonces se verifica:

1. Todos los valores propios de la matriz son reales
2. Los vectores propios asociados a valores propios diferentes, son ortogonales
3. Tiene n vectores propios, es decir, es diagonalizable
4. Tiene n vectores propios ortonormales

es decir es ortogonalmente diagonalizable

Ejercicio 6.6.1.- Diagonalizar ortogonalmente la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

En el ejercicio **6.5.1** habíamos obtenido los valores propios de esta matriz $\boldsymbol{\lambda_1 = -1}$, $\boldsymbol{\lambda_2 = 3}$, $\boldsymbol{\lambda_3 = -2}$.

En el ejercicio calculamos las bases de vectores propios para cada sub. propio asociado a los valores propios.

$\boldsymbol{H_1}$ subespacio propio de los vectores propios asociados a $\boldsymbol{\lambda_1 = -1}$ $\quad B_{H_1} = \{\vec{u}_1 = (0,1,0)\}$

$\boldsymbol{H_2}$ subespacio propio de los vectores propios asociados a $\boldsymbol{\lambda_2 = 3}$ $\quad B_{H_2} = \{\vec{u}_2 = (2,0,1)\}$

$\boldsymbol{H_3}$ subespacio propio de los vectores propios asociados a $\boldsymbol{\lambda_3 = -2}$ $\quad B_{H_3} = \{\vec{u}_3 = (1,0,-2)\}$

Uniendo las 3 bases tenemos una base del espacio vectorial total. $B = \{\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3\}$

Si hacemos los productos escalares $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = (0,1,0)\cdot(2,0,1) = 0\cdot 2 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = (0,1,0)\cdot(1,0,-2) = 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot(-2) = 0$$

$$\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = (2,0,1)\cdot(1,0,-2) = 2\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot(-2) = 0$$

$B=\{\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3\}$ es una base ortogonal.

Dividimos cada vector por su norma para obtener vectores unitarios:

$\|\vec{u}_1\|=\sqrt{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}=\sqrt{1}=1$

$\|\vec{u}_2\|=\sqrt{2\cdot 2+1\cdot 1}=\sqrt{5}$

$\|\vec{u}_3\|=\sqrt{1\cdot 1+(-2)(-2)}=\sqrt{5}$

Base ortonormal: $B=\left\{(0,1,0),\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)\right\}$

Matriz ortogonal de vectores propios: $\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}=(VP)_{ort}$

Vamos a realizar el producto $(VP)_{ort}^t\,B(VP)_{ort}$ y comprobaremos que el resultado será la matriz D que tiene como elementos de la diagonal principal los valores propios de la matriz B

$$(VP)_{ort}^t\,B(VP)_{ort}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{6}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}=D$$

Ejercicio 6.6.2.- Diagonalizar ortogonalmente la matriz $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

En el ejercicio **6.3.4.** se obtuvo: **Autovalores:** $\lambda_1=\mathbf{3}$ con **multiplicidad algebraica** 2

$\lambda_2=\mathbf{6}$ con **multiplicidad algebraica** 1

$\boldsymbol{H}_1$ subespacio propio de los vectores propios asociados a $\lambda_1=\mathbf{3}$ $\quad B_{H_1}=\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$

$\boldsymbol{H}_2$ subespacio propio de los vectores propios asociados a $\lambda_2=\mathbf{6}$ $\quad B_{H_2}=\{(1,1,1)\}$

$B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}=\{(-1,1,0),(-1,0,1),(1,1,1)\}=$

Si hacemos los productos escalares $\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2=(-1,1,0)\cdot(-1,0,1)=(-1)\cdot(-1)+1\cdot 0+0\cdot 1=1$

$\vec{u}_1\cdot\vec{u}_3=(-1,1,0)\cdot(1,1,1)=(-1)\cdot 1+1\cdot 1+0\cdot 1=0$

$\vec{u}_2\cdot\vec{u}_3=(-1,0,1)\cdot(1,1,1)=(-1)\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 1=0$

$B=\{\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3\}$ NO es una base ortogonal. Vamos a ortogonalizarla.

$\vec{c}_1=\vec{u}_1=(-1,1,0)$

$$\vec{c}_2=\vec{u}_2-\frac{\vec{c}_1\cdot\vec{u}_2}{\vec{c}_1\cdot\vec{c}_1}\vec{c}_1=(-1,0,1)-\frac{(-1,1,0)\cdot(-1,0,1)}{(-1,1,0)\cdot(-1,1,0)}(-1,1,0)=(-1,0,1)-\frac{1}{2}(-1,1,0)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$$

Como $\vec{u}_3$ ya era ortogonal a $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$: $\vec{c}_1\cdot\vec{u}_3=(-1,1,0)\cdot(1,1,1)=(-1)\cdot1+1\cdot1+0\cdot1=0$

$$\vec{c}_2\cdot\vec{u}_3=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)\cdot(1,1,1)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1=0$$

Base ortogonal: $B_{ort}=\left\{(-1,1,0),\left(\frac{-1}{2},\frac{-1}{2},1\right),(1,1,1)\right\}$

Dividimos cada vector por su norma para obtener vectores unitarios:

$\|(-1,1,0)\|=\sqrt{(-1,1,0)\cdot(-1,1,0)}=\sqrt{2}$ $\qquad \left\|\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)\right\|=\frac{\sqrt{6}}{2}$ $\qquad \|(1,1,1)\|=\sqrt{3}$

Base ortonormal: $B_{ort-uni}=\left\{\left(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0\right),\left(-1/\sqrt{6},-1/\sqrt{6},2/\sqrt{6}\right),\left(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}\right)\right\}$

Matriz ortogonal de vectores propios: $\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}=(VP)_{ort}$

Vamos a realizar el producto $(VP)_{ort}^t\,A(VP)_{ort}$ y comprobaremos que el resultado será la matriz D que tiene como elementos de la diagonal principal los valores propios de la matriz B

$$(VP)_{ort}^t\,A(VP)_{ort}=\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} -3/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} & 0 \\ -3/\sqrt{6} & -3/\sqrt{6} & 6/\sqrt{6} \\ 6/\sqrt{3} & 6/\sqrt{3} & 6/\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}=D$$