APUNTS DE L'ASSIGNATURA: MATEMÀTIQUES I. ÀLGEBRA LINEAL

Margalida Mas i Joan Torrens

Capítol 3

Espais Vectorials

Són ben coneguts i utilitzats els conjunts de tots els vectors de

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \qquad \text{o} \qquad \mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

amb l'estructura donada per la suma de vectors (corresponent a situar-los un a continuació de l'altre i agafar com a vector suma el que va des de l'origen del primer al final del segon) i el producte d'un vector per un nombre real α (corresponent al vector amb la mateixa direcció i amb longitud o mòdul multiplicat per aquest nombre real). Operacions que analíticament corresponen respectivament a (en el cas de $\mathbb{R}^3$)

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \qquad \text{i}$$

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3).$$

Les propietats d'aquestes operacions de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ són part d'una estructura més general que s'anomena espai vectorial i que estudiarem amb deteniment a continuació.

Definició 1. *Siguin $\mathbb{K}$ un cos commutatiu i E un conjunt no buit. Direm que el conjunt E té estructura d'*espai vectorial *sobre $\mathbb{K}$ (o que és un $\mathbb{K}$-espai vectorial) si satisfà:*

- *Existeix una operació interna $+ : E \times E \to E$ anomenada* suma*, tal que $(E, +)$ és un* grup abelià*, és a dir, l'operació suma és commutativa, associativa, té element neutre (que denotarem sempre per 0) i tot element $x \in E$ té un* oposat *(denotat per $-x$).*[1].

- *Existeix una aplicació $\cdot : K \times E \to E$ anomenada* producte per escalars *que satisfà els axiomes següents, per a tots $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ i per a tots $x, y \in E$:*

[1]Recordem que l'oposat d'un element $x \in E$ és un altre element $-x \in E$ tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$

A1) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$.

A2) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$.

A3) $(\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$.

A4) $1 \cdot x = x$, *on* 1 *és la unitat del cos* $\mathbb{K}$.

Als elements de E se'ls anomena *vectors*, i als de $\mathbb{K}$ *escalars*. Per denotar els vectors utilitzarem habitualment les darreres lletres del abecedari u, v, w, x, y, z, mentre que per denotar els escalars utilitzarem o bé les primeres lletres del abecedari a, b, c... o bé lletres gregues $\alpha, \beta, \lambda, \mu, ...$.

Observació 2. *Notem que a la definició i a les propietats apareixen dues sumes diferents que denotam de la mateixa manera (per* $+$*). La suma d'elements de* E *(és a dir, la suma de vectors) i la suma d'elements de* $\mathbb{K}$ *(és a dir, la suma d'escalars). Així mateix, els elements neutres de ambdues sumes els denotam igual (per* 0*) tot i ser diferents (un és un vector i l'altre és un escalar). El context ens dirà a cada moment a quina suma i a quin element neutre ens estam referint. Per contra, el producte del cos* $\mathbb{K}$ *el denotam sense cap símbol (no escrivim el punt,* $\alpha\beta$*), mentre que el producte d'un escalar per un vector el denotam amb un punt* $\alpha \cdot x$*. Intentarem mantenir aquesta notació, tot i que sovint també aquest punt acaba per desaparèixer i de nou el context ens diu de quin producte es tracta.*

Per una altra part, donats dos vectors x, y*, l'operació de sumar a* x *l'oposat de* y*,* $x + (-y)$*, la denotarem com és habitual amb el signe menys,* $x - y$*.*

Evidentment, el primer exemple que podem donar és el format pels vectors de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ i que dóna nom a l'estructura. Ara bé el podem donar ja més general: $\mathbb{K}^n$. És a dir, per a un $n \geq 2$ qualsevol en comptes de 2 o 3, i per a un cos $\mathbb{K}$ qualsevol en comptes de $\mathbb{R}$. (Deixam com a exercici comprovar que totes les condicions de la definició es verifiquen en tots i cada un dels exemples següents).

Exemple 3. *El conjunt* $\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \ldots, n\}$ *amb les operacions següents:*

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\ \lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) \end{aligned}$$

amb $\lambda \in \mathbb{K}$ *és un espai vectorial sobre* $\mathbb{K}$*. Notau que en aquest cas, per exemple, el vector zero (neutre per la suma de vectors) és el vector* $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ *mentre que l'escalar zero (neutre per la suma d'escalars) és el nombre* 0 *del cos* $\mathbb{K}$*.*

Exemple 4. *Un altre exemple (que podem considerar com un cas particular de l'anterior agafant* $n = 1$*) ve donat pel propi cos* $\mathbb{K}$*. S'agafa com a suma de vectors la suma del cos* $\mathbb{K}$ *(i en aquest cas, sí que coincidirien les dues sumes i, per tant, els dos neutres* 0*) i com a producte per escalars el propi producte del cos. D'aquesta manera, per a qualsevol cos* $\mathbb{K}$*, el propi* $\mathbb{K}$ *és un* $\mathbb{K}$*-espai vectorial.*

Exemple 5. *Aprofitant l'exemple anterior tenim que $\mathbb{R}$ és un $\mathbb{R}$-espai vectorial, però també és un $\mathbb{Q}$-espai vectorial amb el producte habitual, ja que el producte d'un nombre racional (que seria l'escalar) per un nombre real (que seria el vector) és un altre nombre real.*

De la mateixa manera, el cos $\mathbb{C}$ dels nombres complexos és un $\mathbb{C}$-espai vectorial, però també un $\mathbb{R}$-espai vectorial (o un $\mathbb{Q}$-espai vectorial) amb les operacions següents:

$$(a + b \cdot i) + (a' + b' \cdot i) = (a + a') + (b + b') \cdot i$$
$$\lambda \cdot (a + b \cdot i) = \lambda a + \lambda b \cdot i$$

amb $\lambda \in \mathbb{R}$ (o $\lambda \in \mathbb{Q}$). Totes aquestes estructures d'espai vectorial són diferents i per tant és important saber sobre quin cos estam considerant l'espai vectorial.

De fet, aquest és un cas particular d'un exemple molt important d'espai vectorial. Si tenim $\mathbb{K}$ un subcos *de $\mathbb{F}$ o $\mathbb{F}$ una* extensió *de $\mathbb{K}$ (vol dir senzillament que $\mathbb{K}$ és un subconjunt de $\mathbb{F}$ i que ambdós són cossos amb les mateixes operacions i el mateix element unitat 1), llavors $\mathbb{F}$ és un $\mathbb{K}$-espai vectorial. Aquesta estructura d'espai vectorial serà fonamental en l'estudi d'extensions de cossos i Teoria de Galois que veureu en l'assignatura* Àlgebra Abstracta II.

Exemple 6. *El conjunt dels polinomis $\mathbb{R}_n[x]$ de grau menor o igual a n amb coeficients reals*

$$\mathbb{R}_n[x] = \left\{ p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_x + \cdots + a_n x^n, a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \ldots, n \right\}$$

amb les operacions

$$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i$$
$$\lambda \cdot p(x) = \lambda \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} \lambda a_i x^i$$

amb $\lambda \in \mathbb{R}$, és un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Podem fer el mateix sense la restricció del grau i amb qualsevol cos $\mathbb{K}$. Així, el conjunt $\mathbb{K}[x]$ de tots els polinomis (de qualsevol grau) amb coeficients en el cos $\mathbb{K}$ formen un $\mathbb{K}$-espai vectorial amb les operacions esmentades abans.

Exemple 7. *Considerem el conjunt de les matrius $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$[2]. Si $A = (a_{ij})_{m\times n}$ i $B = (b_{ij})_{m\times n}$ són dues matrius, es defineixen les operacions*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$$
$$\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij})_{m\times n}$$

amb $\lambda \in \mathbb{R}$, és un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$.

[2] Ho podem fer també sobre un cos $\mathbb{K}$ qualsevol.

Exemple 8. *Sigui X un conjunt qualsevol no buit i E un $\mathbb{K}$-espai vectorial qualsevol. Aleshores el conjunt de totes les funcions de X en E:*

$$E^X = \{f : X \to E \mid f \text{ és una funció}\}$$

és un $\mathbb{K}$-espai vectorial amb les operacions:

$$\begin{array}{lll} (f+g) : X \to E, & \text{donada per} & (f+g)(x) = f(x) + g(x), \ i \\ (\alpha \cdot f) : X \to E, & \text{donada per} & (\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x) \end{array}$$

per a tot $\alpha \in \mathbb{K}$ i per a tot $x \in X$.

Notem que en particular si consideram el cos $\mathbb{R}$ i, com a espai vectorial E, el propi cos $\mathbb{R}$, obtenim el $\mathbb{R}$-espai vectorial $\mathbb{R}^X$ de totes les funcions de X en $\mathbb{R}$. Podem per exemple agafar com a X el propi $\mathbb{R}$, un interval tancat $[a, b]$ qualsevol, etc. A més a més, en aquest cas, podem parlar de funcions contínues, derivables, etc. Llavors, es veu fàcilment que els conjunts de totes les funcions contínues (derivables) de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ (o de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$) amb les mateixes operacions són també $\mathbb{R}$-espais vectorials que denotarem per:

$$Cont(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \quad Cont([a, b], \mathbb{R}); \quad Der(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \quad Der([a, b], \mathbb{R}).$$

Exemple 9. *Considerem $Succ(\mathbb{K})$ el conjunt de totes les successions d'elements d'un cos $\mathbb{K}$. Aleshores, $Succ(\mathbb{K})$ és un $\mathbb{K}$-espai vectorial amb les operacions:*

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n) \quad i \quad \alpha \cdot (x_n) = (\alpha x_n)$$

per a tot $\alpha \in \mathbb{K}$.

Exemple 10. *Un darrer exemple una mica trivial però important. Si consideram un conjunt unitari E amb un únic element que denotarem per 0, llavors $E = \{0\}$ és un $\mathbb{K}$-espai vectorial per a qualsevol cos $\mathbb{K}$ (amb el producte per escalars donat per $\alpha \cdot 0 = 0$ per a tot $\alpha \in \mathbb{K}$). Aquest espai vectorial s'anomena* espai vectorial trivial.

Anem ara a estudiar les propietats bàsiques dels $\mathbb{K}$-espais vectorials. Començam per una propietat general referent al neutre d'una operació.

Proposició 11. *Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial. Llavors el neutre i l'oposat d'un element qualsevol $x \in E$ són únics.*[3]

Demostració: Suposem 0_1 i 0_2 dos neutres de l'espai vectorial. Aleshores $0_1 + 0_2 = 0_1$ per ser 0_2 un neutre, però també $0_1 + 0_2 = 0_2$ per ser 0_1 neutre. Per tant, $0_1 = 0_2$.

Suposem ara que un element $x \in E$ té dos oposats y, z. Llavors tendriem $y = y + 0 = y + (x + z) = (y + x) + z = 0 + z = z$. $\square$

[3]La mateixa demostració serveix per provar l'unicitat del neutre i de l'element unitat del cos $\mathbb{K}$, així com la unicitat del invers de tot element no nul de $\mathbb{K}$.

De la definició de $\mathbb{K}$-espai vectorial es dedueixen les propietats següents.

Proposició 12. *Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial. Per a tots $x, y \in E$ i per a tots $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ se satisfà:*

1. $0 \cdot x = 0$
2. $\lambda \cdot 0 = 0$
3. *Si* $\lambda \cdot x = 0$ *llavors* $\lambda = 0$ *o* $x = 0$.
4. $(-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (-x)$. *En particular,* $(-1) \cdot x = -x$.
5. $\lambda \cdot (x - y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y$
6. $(\lambda - \mu) \cdot x = \lambda \cdot x - \mu \cdot x$

Demostració: Per demostrar la primera, notem que

$$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$$

i sumant l'oposat de $0 \cdot x$ a cada banda obtenim $0 \cdot x = 0$.

Anàlogament, $\lambda \cdot 0 = \lambda \cdot (0 + 0) = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0$ d'on també $\lambda \cdot 0 = 0$.

Si $\lambda \cdot x = 0$ llavors o bé $\lambda = 0$ o, si $\lambda \neq 0$, existirà λ^{-1} i multiplicant la igualtat per aquest escalar tenim:

$$\lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda^{-1}\lambda) \cdot x = 1 \cdot x = x = 0.$$

Per demostrar 4 el que hem de veure és que l'oposat de $(\lambda \cdot x)$ és $(-\lambda) \cdot x$ i també $\lambda \cdot (-x)$, i l'unicitat de l'oposat ens assegurarà les tres igualtats. Així,

$$(\lambda \cdot x) + (-\lambda) \cdot x = (\lambda + (-\lambda)) \cdot x = 0 \cdot x = 0$$

i anàlogament

$$(\lambda \cdot x) + \lambda \cdot (-x) = \lambda \cdot (x + (-x)) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Demostram per últim el punt 5 i deixam el punt 6 com a exercici ja que es fa igual:

$$\lambda \cdot (x - y) = \lambda \cdot (x + (-y)) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot (-y) = \lambda \cdot x + (-\lambda \cdot y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y.$$

□

La següent definició l'utilitzarem contínuament durant el curs.

Definició 13. *Siguin E un $\mathbb{K}$-espai vectorial i $x_1, x_2, \ldots x_n$ vectors de E. S'anomena* combinació lineal *dels vectors $x_1, x_2, \ldots x_n$ a tot element $x \in E$ de la forma*

$$x = \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot x_i \tag{3.1}$$

amb $\alpha_i \in \mathbb{K}$, per a tots $i = 1, 2, \ldots, n$.

D'aquesta manera per exemple el vector de $\mathbb{R}^2$, $x = (3, 2)$ es pot escriure com a combinació lineal dels vectors $x_1 = (1, 0)$ i $x_2 = (1, 1)$ ja que

$$(3, 2) = 1 \cdot (1, 0) + 2 \cdot (1, 1).$$

3.1 Subespais vectorials

Definició 14. *Siguin E un $\mathbb{K}$-espai vectorial, i $F \subseteq E$, $F \neq \emptyset$. Direm que F és un subespai vectorial de E si satisfà:*

a) Per a tots $x, y \in F$, llavors $x + y \in F$.

b) Per a tots $\lambda \in \mathbb{K}$ i $x \in F$, llavors $\lambda \cdot x \in F$.

De la definició anterior es dedueixen immediatament les següents propietats.

Proposició 15. *Sigui F un subespai vectorial d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E. Es verifica:*

- $0 \in F$
- *Si $x \in F$, llavors $-x \in F$*

Demostració: Com que F és no buit existeix almenys un element $x \in F$ i llavors per la propietat $b)$ tenim $0 \cdot x = 0 \in F$. Anàlogament, si $x \in F$ llavors $(-1) \cdot x = -x \in F$. □

Proposició 16. *Siguin E un $\mathbb{K}$-espai vectorial, i F un subconjunt no buit. Aleshores són equivalents les següents afirmacions:*

i) F és un subespai vectorial.

ii) F és un $\mathbb{K}$-espai vectorial amb les mateixes operacions de E restringides a F.

iii) F verifica $a \cdot x + b \cdot y \in F$ per a tots $a, b \in \mathbb{K}$ i per a tots $x, y \in F$

iv) Qualsevol combinació lineal de vectors de F és un vector de F, és a dir, $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i \in F$ per a tots $a_i \in \mathbb{K}$ i $x_i \in F$.

Demostració: *i)* $\Rightarrow$ *ii)*. Si F és un subespai vectorial, les operacions de E permeten definir les mateixes operacions a F (la suma de vectors de F és de F i el producte d'un escalar per un vector de F és un vector de F) i la proposició anterior assegura que 0 sempre és de F i que l'oposat d'un element de F és de F. Llavors, F amb aquestes operacions és també un espai vectorial sobre $\mathbb{K}$.

ii) $\Rightarrow$ *iii)*. Obvi de la definició de $\mathbb{K}$-espai vectorial.

iii) $\Rightarrow$ *iv)*. Ho podem fer per inducció sobre n el nombre de vectors de la combinació lineal. Per $n = 2$ és cert per hipòtesis. Si ho suposam cert per $n - 1$, tenim que per a tots $x_1, \ldots, x_n \in F$,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot x_i = (\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \cdot x_i) + \alpha_n \cdot x_n \in F$$

simplement aplicant *iii)*, ja que, per hipòtesis d'inducció, el primer sumand també és de F .

iv) $\Rightarrow$ *i)*. Ambdues propietats són evidents. A la primera agafant dos vectors qualssevol $x_1, x_2 \in F$ i $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ i a la segona agafant un únic vector. □

Exemple 17. *Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial qualsevol, llavors E i $\{0\}$ són subespais vectorials de E anomenats* subespai total *i* subespai trivial *respectivament. En conjunt, s'els anomena també* subespais impropis. *Als altres possibles subespais els direm* subespais propis *de E.*

Exemple 18. *El conjunt $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$. En general, el conjunt de solucions d'un sistema de m equacions lineals amb n incògnites homogeni sobre un cos $\mathbb{K}$ és un subespai vectorial de l'espai $\mathbb{K}^n$.*

Així, les rectes que passen per l'origen $(0, 0)$ són subespais propis de $\mathbb{R}^2$ i, tant les rectes com els plans que passen per l'origen són subespais vectorials de $\mathbb{R}^3$. De fet, aquests són tots els subespais propis de $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$.

Exemple 19. *El conjunt $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0, z = 0, t = 1\}$ no és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$, perquè no passa per l'origen, és a dir $0 \notin G$.*

Exemple 20. *Dins el $\mathbb{R}$-espai vectorial $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ de totes les funcions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, el subconjunt format per les funcions contínues, $Cont(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, i el subconjunt de les derivables, $Der(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, en són subespais vectorials*

A partir de subespais vectorials coneguts es poden formar nous subespais com es demostra en la següent proposició.

Proposició 21. *Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial.*

- *Si* $(F_i)_{i\in I}$ *és una família qualsevol de subespais vectorials de* E*, llavors* $\bigcap_{i\in I} F_i$ *és un subespai vectorial de* E *contingut dins tots els* F_i *amb* $i \in I$.

- *Si* $F_1, \dots, F_n$ *són subespais vectorials de* E*, llavors*

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_1 + \ldots + F_n = \{x_1 + \ldots + x_n \mid x_i \in F_i, i = 1, \dots, n\}$$

  és un subespai vectorial de E *anomenat* subespai vectorial suma *que conté tots els* F_i *amb* $i = 1, \dots, n$.

Demostració: Notem primer de tot que $\bigcap_{i\in I} F_i$ és no buit ja que 0 hi pertany. Siguin ara $a, b \in \mathbb{K}$ i $x, y \in \bigcap_{i\in I} F_i$. Llavors $x, y \in F_i$ per a tot $i \in I$ i, com que cada F_i és subespai vectorial tenim que $a \cdot x + b \cdot y \in F_i$ per a tot $i \in I$ i per tant $a \cdot x + b \cdot y \in \bigcap_{i\in I} F_i$.

Pel que fa a la suma, tenim que si $z, z' \in F_1 + \ldots + F_n$ llavors existeixen $x_i, y_i \in F_i$ tals que

$$z = x_1 + \ldots + x_n \qquad \text{i} \qquad z' = y_1 + \ldots + y_n$$

i per tant

$$a\cdot z + b\cdot z' = a\cdot(x_1 + \ldots + x_n) + b\cdot(y_1 + \ldots + y_n) = (a\cdot x_1 + b\cdot y_1) + \ldots + (a\cdot x_n + b\cdot y_n)$$

que torna a ser un element de $F_1 + \ldots + F_n$. A més a més, cada F_i està contingut dins el subespai suma ja que per a tot $x_i \in F_i$ podem escriure

$$x_i = 0 + \ldots + x_i + \ldots + 0 \in F_1 + \ldots + F_i + \ldots + F_n.$$

□

En canvi la unió de subespais vectorials no és, en general, un subespai vectorial.

Exemple 22. *Al* $\mathbb{R}$*-espai vectorial* $\mathbb{R}^2$ *consideram els subespais vectorials* R, G *donats pels eixos de coordenades cartessianes. Això és,* $F = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ *i* $G = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$*. Aleshores, és fàcil veure que* $F \cap G = \{(0, 0)\}$ *i que* $F + G = \mathbb{R}^2$ *que són, efectivament, subespais vectorials (els impropis). En canvi si feim la unió, tenim* $F \cup G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ o } y = 0\}$ *que no és un subespai vectorial de* $\mathbb{R}^2$ *ja que (1,0) i (0,1) són elements de* $F \cup G$ *i en canvi la seva suma dóna* $(1, 1) \notin F \cup G$.

En un subespai vectorial suma $F + G$ l'expressió de cada element com a suma d'un element de F més un element de G no té perquè ser única i, habitualment, no ho és. En aquest sentit tenim la següent definició.

Definició 23. *Siguin* E *un* $\mathbb{K}$*-espai vectorial i* F, G *subespais vectorials de* E*. Llavors, si tot element del subespai vectorial suma* $F + G$ *s'escriu de manera única com suma d'un element de* F *més un element de* G*, es diu que la suma de* F *i* G *és* directa *i s'escriu com* $F \oplus G$*. Si a més a més es verifica que* $E = F \oplus G$*, se diu que* F *i* G *són* complementaris *dins* E.

Proposició 24. *Siguin F i G dos subespais vectorials d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E. Llavors la suma de F i G és directa si i només si $F \cap G = \{0\}$.*

Demostració: Si la suma és directa, considerem un $x \in F \cap G$. Llavors podríem escriure $x = x + 0 = 0 + x$ amb $x, 0 \in F$ i $0, x \in G$ i, com que l'expressió de tot element de $F + G$ és única tenim necessàriament que $x = 0$.

Recíprocament, si $F \cap G = \{0\}$, suposem que un vector $z \in F + G$ es pot escriure de dues maneres com $z = x + y = x' + y'$ amb $x, x' \in F$ i $y, y' \in G$. Llavors tenim que

$$x - x' = y' - y \in F \cap G \quad \Longrightarrow \quad x - x' = y' - y = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = x' \text{ i } y = y'.$$

$\square$

Com a conseqüència immediata tenim el següent corol·lari.

Corol·lari 25. *Siguin E un $\mathbb{K}$-espai vectorial i F, G subespais de E. Els subespais F i G són complementaris si verifiquen:*

i) Per a tot $x \in E$, existeixen $y \in F$ i $z \in G$ tals que $x = y + z$.

ii) $F \cap G = \{0\}$.

Exemple 26. *Notem que els subespais de l'exemple 22 són complementaris ja que haviem vist que $\mathbb{R}^2 = F + G$ i $F \cap G = \{0\}$, és a dir, $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$.*

El concepte de suma directa el podem generalitzar a n sumands de la manera següent.

Definició 27. *Siguin E un $\mathbb{K}$-espai vectorial i $F_1, \ldots, F_n$ subespais vectorials de E. Aleshores direm que la suma $F_1 + \ldots + F_n$ és* directa *i ho escriurem $F_1 \oplus \ldots \oplus F_n$, si tot element de $F_1 + \ldots + F_n$ es pot escriure de manera única com a suma d'elements de $F_1, \ldots, F_n$.*

Es pot demostrar de forma similar al cas $n = 2$ (i ho deixam com a exercici) que la suma $F_1 + \ldots + F_n$ és directa si i només si per a tot $i = 2, \ldots, n$ es té

$$F_i \cap (F_1 + \ldots + F_{i-1}) = \{0\}.$$

En ocasions disposam d'un subconjunt S de E que no és subespai vectorial i estam interessats en el *més petit subespai vectorial* (respecte de la inclusió) que conté aquest subconjunt S. Aquest subespai sempre existeix ja que només hem de considerar la família de tots els subespais vectorials de E que contenen S, llavors sabem que la seva intersecció és un altre subespai vectorial que evidentment conté S i aquest serà el més petit amb aquesta propietat. Anomenarem a aquest subespai *subespai vectorial generat per* S i el denotarem per $\langle S \rangle$. Direm també que S *genera*

$\langle S\rangle$ o que S n'és un *conjunt o sistema de generadors.* Aleshores el que hem vist és que

$$\langle S\rangle = \bigcap_{\substack{S\subseteq F\\ F subespai}} F.$$

La següent proposició ens dóna una manera pràctica de calcular subespais generats.

Proposició 28. *Sigui S un subconjunt qualsevol d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E. Llavors,*

$$\langle S\rangle = \{\alpha_1\cdot x_1 + \ldots + \alpha_n\cdot x_n \mid n\in\mathbb{Z}^+; x_i\in S; \alpha_i\in\mathbb{K}, i=1,\ldots.n\}.$$

És a dir, $\langle S\rangle$ és el subespai format per totes les combinacions lineals possibles d'elements de S.

Demostració: Notem primer que el conjunt de les combinacions lineals d'elements de S és un subespai vectorial que conté S, ja que la suma de combinacions lineals és una combinació lineal i el producte d'un escalar per una combinació lineal és també una combinació lineal d'elements de S. Només ens cal veure per tant que és el més petit que conté S. Per això, sigui F un subespai vectorial qualsevol que contengui S. Per la proposició 16, qualsevol combinació lineal d'elements de $S\subseteq F$ serà de F, és a dir $\langle S\rangle\subseteq F$ i per tant $\langle S\rangle$ és el més petit respecte de la inclusió. □

Observació 29. *A partir d'aquesta caracterització del subespai generat per un subconjunt, resulta clar que si tenim dos subconjunts de E de manera que $S\subseteq S'$ llavors $\langle S\rangle\subseteq\langle S'\rangle$.*

En el cas en que S sigui finit, diguem $S=\{x_1,\ldots,x_n\}$, llavors es pot escriure

$$\langle S\rangle = \langle x_1,\ldots,x_n\rangle = \{\alpha_1\cdot x_1+\ldots+\alpha_n\cdot x_n \mid \alpha_i\in\mathbb{K}, i=1,\ldots.n\}$$

i es diu que $F=\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ és *finitament generat*, perquè està generat per un nombre finit d'elements.

Exemple 30. *És clar que els vectors* $(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)$ *formen un sistema de generadors de $\mathbb{K}^n$ i per tant, $\mathbb{K}^n$ és finitament generat.*

Exemple 31. *Anàlogament els vectors $\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}$ formen un conjunt de generadors del $\mathbb{K}$-espai vectorial $\mathbb{K}_n[x]$, que és per tant finitament generat. En canvi $\mathbb{K}[x]$ és un $\mathbb{K}$-espai vectorial que no és finitament generat (si $p_1(x),\ldots,p_k(x)$ fós un conjunt finit de generadors, considerant $n=\max(grau(p_1),\ldots,grau(p_k))$, tot polinomi de grau superior a n no podria ser combinació lineal dels $p_i(x)$, arribant a contradicció). Notem que $\mathbb{K}[x]$ té un conjunt infinit de generadors (numerable): $\{1,x,\ldots,x^n,\ldots\}$.*

Exemple 32. *Dins* $\mathbb{R}^3$ *consideram el subconjunt* $F = \{(x, y, z) \mid 2x - y + z = 0\}$. *Llavors és clar que* F *és un subespai vectorial i, a més a més, tot element de* F *és de la forma* $(x, 2x + z, z)$ *variant* $x, z \in \mathbb{R}$. *Així, tot element de* $u \in F$ *s'escriu com*

$$u = x \cdot (1, 2, 0) + z \cdot (0, 1, 1)$$

i per tant, els vectors $(1, 2, 0)$ *i* $(0, 1, 1)$ *generen tot* F. *Notau que* F *correspon al pla que passa pels punts* $(0, 0, 0), (1, 2, 0)$ *i* $(0, 1, 1)$.

Exemple 33. *Per a totes aquestes propietats és molt important sempre quin és el cos d'escalars sobre el que consideram l'espai vectorial* E. *Així per exemple,* $\mathbb{R}$ *com a* $\mathbb{R}$*-espai vectorial és finitament generat, de fet està generat per un únic element el nombre real 1,* $\mathbb{R} = \langle 1 \rangle$. *En canvi, si consideram* $\mathbb{R}$ *com a* $\mathbb{Q}$*-espai vectorial, tenim que no és finitament generat. Si existís un nombre finit de generadors* $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$*, llavors tot nombre real s'escriuria com a combinació lineal de* $x_1, \ldots, x_k$*, és a dir, tendríem*

$$\mathbb{R} = \{\alpha_1 \cdot x_1 + \ldots + \alpha_k \cdot x_k \mid \alpha_i \in \mathbb{Q}, i = 1, \ldots, k\}.$$

Però llavors $\mathbb{R}$ *estaria en bijecció amb* $\mathbb{Q}^k$ *que és numerable i* $\mathbb{R}$ *seria numerable. Per tant,* $\mathbb{R}$ *no pot ser finitament generat com a* $\mathbb{Q}$*-espai vectorial.*

Un mateix espai o subespai vectorial pot tenir conjunts de generadors diferents. Per exemple tenim el següent resultat.

Proposició 34. *Sigui* E *un* $\mathbb{K}$*-espai vectorial i* $S \subseteq E$. *Si* $u \in \langle S \rangle$ *llavors es té* $\langle S \cup \{u\} \rangle = \langle S \rangle$.

Demostració: Per la observació 29 tenim que $\langle S \rangle \subseteq \langle S \cup \{u\} \rangle$. Per demostrar l'altra inclusió, sigui $x \in \langle S \cup \{u\} \rangle$ llavors serà

$$x = \alpha \cdot u + \alpha_1 \cdot x_1 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n$$

amb $x_i \in S$ per $i = 1, \ldots, n$. Com que $u \in \langle S \rangle$, existiran $y_1, \ldots, y_k \in S$ de manera que $u = \beta_1 \cdot y_1 + \ldots + \beta_k \cdot y_k$ i llavors

$$x = \alpha \cdot (\beta_1 \cdot y_1 + \ldots + \beta_k \cdot y_k) + \alpha_1 \cdot x_1 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n$$

o equivalentment

$$x = (\alpha\beta_1) \cdot y_1 + \ldots + (\alpha\beta_k) \cdot y_k + \alpha_1 \cdot x_1 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n.$$

És a dir, x és combinació lineal d'elements de S, $x \in \langle S \rangle$. □

3.2 Dependència i independència lineal de vectors

Definició 35. *Donat un* $\mathbb{K}$*-espai vectorial* E*, direm que els vectors* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ *són* linealment independents *(o també que el conjunt* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset E$ *és* linealment independent*) si sempre que* $\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n = 0$ *implica que* $\alpha_i = 0$ *per a tot* $i = 1, 2, \ldots, n$*.*

En cas contrari, direm que són lineament dependents *(o també que el conjunt* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *és* linealment dependent*). És a dir,* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *són linealment dependents si existeixen escalars* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ *no tots nuls tal que*

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n = 0.$$

En el cas d'un conjunt no buit qualsevol de vectors $S \subseteq E$ *(finit o no), direm que* S *és* linealment independent *si qualsevol subconjunt finit de* S *ho és. És a dir, si qualsevol combinació lineal (d'un nombre finit) d'elements de* S *igual a 0, implica que tots els escalars han de ser 0. Anàlogament, direm que* S *és* linealment dependent *si existeixen un nombre finit d'elements de* S *i una combinació lineal seva igual a 0 amb no tots els escalars 0.*

Exemple 36. *Un únic vector* $x \in E$ *és linealment independent si i només si* $x \neq 0$*, o dit d'una altra manera, el vector* $0 \in E$ *és l'únic vector linealment dependent.*

Exemple 37. *És immediat veure que els vectors* $(1, 0)$ *i* $(0, 1)$ *són linealment independents dins* $\mathbb{K}^2$*. En general,* $(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)$ *són linealment independents en* $\mathbb{K}^n$*.*

Exemple 38. *El conjunt* $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (-1, 1, 2)\}$ *és linealment independent a* $\mathbb{R}^3$*. Vegem-ho, si tenim una combinació lineal d'ells igual a 0,*

$$\alpha_1 \cdot (1, 0, 1) + \alpha_2 \cdot (0, 1, 1) + \alpha_3 \cdot (-1, 1, 2) = (0, 0, 0)$$

llavors tendrem

$$(\alpha_1, 0, \alpha_1) + (0, \alpha_2, \alpha_2) + (-\alpha_3, \alpha_3, 2\alpha_3) = (0, 0, 0)$$

d'on s'ha de verificar:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 & = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 & = 0 \end{cases}$$

sistema que és compatible determinat amb solució única $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$*.*

Exemple 39. *El conjunt* $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ *és linealment independent en* $\mathbb{K}[x]$*. Qualsevol combinació lineal d'un nombre finit d'elements de* S *igual a 0, correspon a un polinomi d'un cert grau* m *igual a 0,* $\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot x + \ldots + \alpha_m \cdot x^m = 0$ *i conseqüentment, tots els escalars han de ser 0.*

Exemple 40. *Sigui* $E = \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *el* $\mathbb{K}$*-espai vectorial de les matrius* $(m \times n)$ *sobre* $\mathbb{K}$*. Per a cada* $i \in \{1,\dots,m\}, j \in \{1,\dots,n\}$ *considerem la matriu* $e_{ij} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *que té totes les entrades 0 menys l'entrada* (i,j) *que val 1. Llavors, els* $m \times n$ *elements* $\{e_{ij} \mid i \in \{1,\dots,m\}, j \in \{1,\dots,n\}\}$ *són linealment independents.*

Proposició 41. *Sigui* E *un* $\mathbb{K}$*-espai vectorial. Llavors, els vectors* $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ *són linealment dependents si i només si un d'ells és combinació lineal dels altres.*

Demostració: Si $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ són linealment dependents hi haurà una combinació lineal d'ells igual a 0,

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n = 0$$

amb no tots els escalars iguals a 0. Suposem $\alpha_1 \neq 0$, llavors tendrem

$$\alpha_1 \cdot x_1 = -\alpha_2 \cdot x_2 - \ldots - \alpha_n \cdot x_n$$

i multiplicant per α_1^{-1} (recordem que $\alpha_1 \neq 0$),

$$x_1 = -\alpha_1^{-1}\alpha_2 \cdot x_2 - \ldots - \alpha_1^{-1}\alpha_n \cdot x_n$$

és a dir, x_1 és combinació lineal dels altres. Evidentment, si en comptes de α_1 és qualsevol altre $\alpha_i \neq 0$, llavors podrem escriure x_i de forma anàloga com a combinació lineal dels altres.

Recíprocament, si x_1 és combinació lineal dels altres $x_1 = \alpha_2 \cdot x_2 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n$, llavors clarament $x_1 - \alpha_2 \cdot x_2 - \ldots - \alpha_n \cdot x_n = 0$. Anàlogament si és un x_i qualsevol el que és combinació lineal dels altres. $\square$

Exemple 42. *Els vectors* $(1,1,2), (1,1,0), (0,0,2)$ *són linealment dependents a* $\mathbb{R}^3$ *ja que podem escriure, per exemple*

$$(1,1,2) - (1,1,0) - (0,0,2) = (0,0,0) \quad \textit{o, també} \quad (1,1,2) = (1,1,0) + (0,0,2).$$

Proposició 43. *Sigui* E *un* $\mathbb{K}$*-espai vectorial i* $S \subseteq E$ *un conjunt linealment independent. Si* $u \notin \langle S \rangle$ *llavors* $S \cup \{u\}$ *és linealment independent.*

Demostració: Considerem una combinació lineal d'elements de $S \cup \{u\}$ igual a 0,

$$\alpha \cdot u + \alpha_1 \cdot x_1 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n = 0$$

amb $x_i \in S$ per $i = 1, \dots, n$. Suposem que $\alpha \neq 0$, llavors existeix $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}$ i si multiplicam l'equació per aquest escalar i aïllam u obtenim

$$u = -\alpha^{-1}\alpha_1 \cdot x_1 - \ldots - \alpha^{-1}\alpha_n \cdot x_n.$$

És a dir, $u \in \langle S \rangle$ en contra de la hipòtesi. Per tant ha de ser $\alpha = 0$, però llavors tenim la combinació lineal d'elements de S, $\alpha_1 \cdot x_1 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n = 0$. Com que S és linealment independent, tots els escalars han de ser 0 i, per tant, tenim que $\alpha = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. $\square$

3.2.1 Bases d'un espai vectorial

Definició 44. *Direm que un subconjunt no buit S d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E és una* base *de E si S és un sistema generador de E i és linealment independent.*

Exemple 45. *Els vectors $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ formen una base de $\mathbb{R}^n$. Ja sabem que són linealment independents i clarament generen tot $\mathbb{R}^n$ donat que qualsevol $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ s'escriu com*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot e_i = a_1 \cdot (1, 0, \ldots, 0) + \ldots + a_n \cdot (0, 0, \ldots, 1).$$

Aquesta base és anomenada habitualment base canònica de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 46. *Resulta clar també que el conjunt $\{e_{ij} \mid i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}\}$ és una base que també s'anomena la base canònica de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Anàlogament, tenim que $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ és la base canònica de $\mathbb{K}_n[x]$. Més en general, el conjunt $S = \{1, x, \ldots, x^n, \ldots\}$ és la base canònica de $\mathbb{K}[x]$, en aquest cas una base infinita (amb un nombre infinit d'elements).*

Exemple 47. *Sigui F el subespai de $\mathbb{R}^3$ definit a l'exemple 32, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0\}$. Hem vist en un exemple anterior que els vectors $u_1 = (1, 2, 0)$ i $u_2 = (0, 1, 1)$ generen tot el subespai F. Com que u_1 i u_2 són linealment independents (vegeu-ho com a exercici) són una base de F.*

Exemple 48. *Donat un $\mathbb{K}$-espai vectorial E qualsevol, és evident que si el conjunt $S \subseteq E$ és linealment independent llavors S és una base del subespai vectorial generat per S. És a dir, si S és linealment independent, S és una base de $\langle S \rangle$.*

Teorema 49. *Siguin E un $\mathbb{K}$-espai vectorial i $B \subseteq E$. Aleshores B és una base de E si i només si tot vector de E s'escriu de manera única com a combinació lineal d'elements de B. En aquest cas, per a tot $x \in E$ existeixen uns únics escalars $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ in uns únics vectors $x_1, \ldots, x_n \in B$ tals que*

$$x = \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n.$$

Aquests únics escalars $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ s'anomenen coordenades del vector *x en la base B.*

Demostració: Si B és una base de E llavors tot vector $x \in E$ s'escriu com a combinació lineal d'elements de B per definició de base. El que cal veure doncs és la unicitat. Suposem que un $x \in E$ s'escriu com

$$x = \alpha_1 \cdot x_1 + \ldots + \alpha_k \cdot x_k = \beta_1 \cdot y_1 + \ldots + \beta_m \cdot y_m$$

amb $x_i, y_j \in B$ per a tots $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, m$. Podem suposar que en ambdues expressions hi apareixen exactament els mateixos vectors de B que denotarem per $u_1, \ldots, u_n$ (afegint-los a cada una de les expressions, si cal, amb coeficient 0). Llavors, tenim la igualtat

$$x = \alpha_1 \cdot u_1 + \ldots + \alpha_n \cdot u_n = \beta_1 \cdot u_1 + \ldots + \beta_n \cdot u_n$$

i per tant la combinació lineal d'elements de B igual a 0 donada per

$$(\alpha_1 - \beta_1) \cdot u_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) \cdot u_n = 0.$$

Com que B és linealment independent tenim

$$\alpha_1 - \beta_1 = \ldots = \alpha_n - \beta_n = 0 \quad \text{i} \quad \alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n.$$

Això és, les dues expressions de x coincideixen, és única.

Recíprocamnet, si tot vector de E s'escriu de manera única com a combinació lineal d'elements de B, considerem una d'aquestes igual a 0, $\alpha_1 \cdot x_1 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n = 0$ amb $x_i \in B$ per a tots $i = 1, \ldots, n,$. Llavors tenim les dues expressions del vector 0 com

$$0 = \alpha_1 \cdot x_1 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n = 0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_n$$

d'on per hipòtesi han de ser $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. □

Estudiarem amb deteniment les coordenades d'un vector en una base més endavant. Ara, analitzarem determinades propietats de les bases.

Proposició 50. *Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial finitament generat i sigui $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ un conjunt de generadors. Llavors E té una base finita B de manera que $B \subseteq S$.*

Demostració: Si $u_1, u_2, \ldots, u_n$ són linealment independents llavors ja formen una base de E. Si no són linealment independents, un d'ells (posem u_i) serà combinació lineal dels altres i aleshores per la Proposició 34 tendrem

$$E = \langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle = \langle u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n \rangle.$$

Si aquest nou conjunt de generadors és linealment independent formen base i ja està. Si no anàlogament a abans em podem treure un d'ells i E estarà generat per $(n-2)$ elements de S. Repetint aquest raonament arribarem a una base B de E amb $B \subseteq S$ o a que l'espai $E = \langle u_j \rangle$ per un $u_j \in S$. Llavors v_j ha de ser distint de 0 (si no tendríem $E = \langle 0 \rangle = \{0\}$ i hem suposat que E no era trivial). Així, $v_j \neq 0$ és linealment independent i per tant una base de E. □

El següent teorema és especialment important per les propietats que d'ell s'en deriven i és conegut com a *Teorema de Steinitz*.

Teorema 51. *Siguin E un $\mathbb{K}$-espai vectorial, $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base de E i $v_1, \ldots, v_m$ vectors linealment independents. Aleshores es poden substituir m vectors de la base B pels $v_1, \ldots, v_m$ obtenint una nova base. En particular, necessàriament $m \leq n$.*

Demostració: Veurem que podem anar introduïnt els elements v_j de forma recursiva en substitució d'elements adequats de la base u_i.

- Introducció de v_1. Escrivim v_1 com a combinació lineal de la base donada $v_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot u_i$. Donat que v_1 forma part d'un conjunt de vectors linealment independents, no pot ser nul i per tant existeix almenys un escalar α_i distint de 0. Reordenant la base u_i, si cal, podem suposar que aquest escalar distint de 0 és el primer α_1. Llavors, multiplicant l'expressió anterior per α_1^{-1} queda

$$\alpha_1^{-1} \cdot v_1 = u_1 + (\alpha_1^{-1}\alpha_2) \cdot u_2 + \ldots + (\alpha_1^{-1}\alpha_n) \cdot u_n$$

i podem aïllar u_1:

$$u_1 = \alpha_1^{-1} \cdot v_1 - (\alpha_1^{-1}\alpha_2) \cdot u_2 - \ldots - (\alpha_1^{-1}\alpha_n) \cdot u_n.$$

Aquesta darrera expressió, juntament amb l'expressió de v_1 com a combinació de la base u_i, ens diu que

$$\langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle = \langle v_1, u_2, \ldots, u_n \rangle.$$

Així per veure que $v_1, u_2, \ldots, u_n$ són base només ens cal veure que són linealment independents. En efecte, considerem una combinació lineal $\beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot u_2 + \ldots + \beta_n \cdot u_n = 0$. Llavors tenim que

$$\beta_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot u_i \right) + \beta_2 \cdot u_2 + \ldots + \beta_n \cdot u_n = 0$$

o equivalentment

$$(\beta_1\alpha_1) \cdot u_1 + (\beta_1\alpha_2 + \beta_2) \cdot u_2 + \ldots + (\beta_1\alpha_n + \beta_n) \cdot u_n = 0.$$

Com que u_i és una base tots aquests escalars hauran de ser nuls

$$\beta_1\alpha_1 = \beta_1\alpha_2 + \beta_2 = \ldots = \beta_1\alpha_n + \beta_n = 0.$$

Com que $\alpha_1 \neq 0$ això implica $\beta_1 = 0$ i per tant, $\beta_1 = \ldots = \beta_n = 0$.

- Suposem ara que ja hem introduït k vectors $v_1, \ldots . v_k$ a la base i vegem com introduir el següent v_{k+1}. Com que

$$v_1, \ldots, v_k, u_{k+1}, \ldots, u_n$$

és una base podem escriure v_{k+1} com a combinació lineal de la mateixa:

$$v_{k+1} = \alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_k \cdot v_k + \alpha_{k+1} \cdot u_{k+1} + \ldots + \alpha_n \cdot u_n = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot v_i + \sum_{j=k+1}^n \alpha_j \cdot u_j.$$

Argumentant com en el pas anterior, tenim que podem substituir per v_{k+1} qualsevol vector de la base que, en aquesta combinació lineal, tengui coeficient no nul. Així, per acabar la demostració, l'únic que hem de fer és veure que algun dels α_j per $j = k+1, \ldots, n$ és no nul. Però, si tots aquests fossin 0, tendríem

$$v_{k+1} = \alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_k \cdot = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot v_i.$$

que és una contradicció ja que els vectors v_i són linealment independents. $\square$

La primera conseqüència del Teorema de Steinitz que podem remarcar és el resultat del següent teorema que, entre d'altres coses, ens permetrà donar la definició de dimensió d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial.

Teorema 52. *Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial. Si E té una base finita, diguem $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, llavors totes les bases de E són finites i tenen exactament n elements.*

Demostració: Sigui $S = \{v_j \mid j \in J\}$ una base de E. Llavors qualsevol subconjunt finit de S serà linealment independent i pel Teorema de Steinitz haurà de tenir un nombre d'elements $m \leq n$. Per tant, S ha de ser finit amb un nombre d'elements $m \leq n$, és a dir, $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ amb $m \leq n$. Però un raonament semblant aplicat a B ens demostra que $n \leq m$ i per tant la igualtat. $\square$

Definició 53. *Sigui $E \neq \{0\}$ un $\mathbb{K}$-espai vectorial. Direm que E és de* dimensió finita *si existeix $n \in \mathbb{Z}^+$ i una base de E (i per tant, totes) formada per n vectors. Aquest enter positiu n s'anomena* dimensió *de E (i escriurem habitualment $n = \dim E$). Si $E = \{0\}$, no té base, però direm que és de dimensió finita i $\dim E = 0$.*

Direm que E és de dimensió infinita *si E no té cap base finita, i en aquest cas escriurem $\dim E = +\infty$.*

Exemple 54. *Tenint en compte les bases que ja hem trobat en els diferents casos, podem afirmar que:*

$$\dim \mathbb{K}^n = n; \quad \dim \mathbb{K}_n[x] = n+1; \quad \dim \mathbb{K}[x] = +\infty; \quad i \quad \dim \mathcal{M}_{m\times n} = m \times n.$$

A vegades caldrà escriure la dimensió explicitant el cos sobre el que treballam. Llavors escriurem $\dim_{\mathbb{K}} E$. Així tendrem per exemple que $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = +\infty$ mentre que $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = 1$, o anàlogament $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ mentre que $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ (podeu veure fàcilment que $\{1, i\}$ és una base de $\mathbb{C}$ com a $\mathbb{R}$-espai vectorial).

La següent proposició reuneix tota una sèrie de conseqüències importants del Teorema de Steinitz.

Proposició 55. *Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió finita i sigui $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base de E.*

1. *Si $v_1, \dots, v_n$ són linealment independents, llavors són base de E.*

2. *Si $v_1, \dots, v_n$ generen tot E, llavors són base de E.*

3. *La dimensió de E, n, coincideix amb el màxim nombre de vectors linealment independents i amb el mínim nombre de generadors.*

4. *Tot conjunt de vectors linealment independent de E es pot completar fins a una base de E. És a dir, si $\{y_1, \dots, y_k\} \subset E$ són linealment independents, existeixen $n-k$ vectors $z_1, z_2, \dots, z_{n-k} \in E$ tals que $\{y_1, \dots, y_k, z_1, \dots, z_{n-k}\}$ formen una base de E.*

5. *Si F és un subespai vectorial de E, aleshores F també és de dimensió finita i $\dim F \leq \dim E$. A més a més, $\dim F = \dim E$ si i només si $F = E$.*

Demostració: 1. Aplicant el Teorema de Steinitz podem substituir tots les u_i pels v_i obtenint una nova base. Per tant els v_i formen base.

2. Si $E = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ llavors per la Proposició 50, E tendrà una base continguda dins $v_1, \dots, v_n$. Com que $\dim E = n$ han de ser tots els v_i els que formen base, ja que en cas contrari tendríem una base amb menys de n elements.

3. La primera afirmació és immediata a partir del Teorema de Steinitz i la segona ho és a partir de la Proposició 50.

4. És una altra manera d'escriure l'enunciat del Teorema de Steinitz.

5. Aplicant el punt 3, com que tots els vectors de F també són de E, F no pot tenir més de n vectors linealment independents i, per tant, $dim(F) \leq n$. A més a més, si $dim(F) = n$ llavors F tendrà una base de n elements, $v_1, \dots, v_n$, que també serà base de E. És a dir $E = F = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$. □

Corol·lari 56. *Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial. Llavors E és de dimensió infinita si i només si podem trobar conjunts de vectors linealment independents de cardinal finit tan gran com es vulgui.*

Demostració: Si $dim(E) = +\infty$ és clar que podem trobat conjunts de n vectors linealment independents per a qualsevol $n \in \mathbb{Z}^+$. Recíprocament, suposem que $dim(E)$ és un nombre finit n, llavors no podrem trobar conjunts de $(n+1)$ vectors linealment independents arribant a contradicció. □

Exemple 57. *Considerem el $\mathbb{R}$-espai vectorial $Cont(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de totes les funcions contínues de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Llavors, notem que si definim les funcions $f_n(x) = x^n$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ obtenim que els conjunts $\{f_0, \dots, f_n\}$ són linealment independents per a tot $n \in \mathbb{N}$, la qual cosa demostra que $\dim(Cont(\mathbb{R}, \mathbb{R})) = +\infty$.*

Corol·lari 58. *Si E és un $\mathbb{K}$-espai vectorial i $E = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$, aleshores E és de dimensió finita i $\dim E \leq n$. És a dir, tot $\mathbb{K}$-espai vectorial finitament generat és de dimensió finita menor o igual que el nombre de generadors.*

Demostració: Immediat a partir de la Proposició 50. □

Exemple 59. *Sigui F el subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ donat per*

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y + z = 0\}.$$

Tots els vectors de F es poden escriure $(y + z, y, z)$ variant y, z dins $\mathbb{R}$ i, per tant,

$$(y + z, y, z) = y \cdot (1, 1, 0) + z \cdot (1, 0, 1).$$

És evident doncs que $u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 0, 1)$ generen F. Com que també són linealment independents (vegeu-ho com a exercici) formen una base de F. Vegem ara com completar-le fins a una base de $\mathbb{R}^3$. Seguint el Teorema de Steinitz el que farem serà anar introduïnt successivament u_1 i u_2 dins una base coneguda, per exemple la canònica, e_1, e_2, e_3.

- *Com que $u_1 = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$ podem substituir per exemple e_1 per u_1 obtenint una nova base: u_1, e_2, e_3 i ja hem introduït el primer.*
- *Per introduir u_2, primer l'escrivim com a combinació lineal de la nova base:*

  $$u_2 = (1, 0, 1) = (1, 1, 0) - (0, 1, 0) + (0, 0, 1) = 1 \cdot u_1 + (-1) \cdot e_2 + 1 \cdot e_3$$

  Per tant, podem substituir qualsevol dels restants (tots els escalars són distints de 0). Així, segons el Teorema de Steinitz, u_1, u_2, e_3 és una base de $\mathbb{R}^3$ que evidentment completa la de F.

Acabam aquesta secció amb una fórmula que relaciona, per a espais vectorials de dimensió finita, les dimensions dels subespais suma i intersecció.

Teorema 60 (Fórmula de Grassmann)**.** *Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió finita i siguin F i G subespais vectorials de E, llavors es verifica*

$$\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G.$$

Demostració: Com que E és de dimensió finita, diguem-li n, tots els subespais també ho són, diguem

$$m = dim(F \cap G), \qquad r = dim(F), \qquad s = dim(G)$$

i sigui $u_1, \ldots, u_m$ una base de $F \cap G$. Com a conseqüència del Teorema de Steinitz sabem que podem completar aquesta base fins a una de F, $u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_r$ i fins a una de G, $u_1, \ldots, u_m, v_{m+1}, \ldots, v_s$. D'aquesta manera, com que tot vector $w \in F + G$ és suma d'un vector de F més un de G, w serà combinació lineal de

$$u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_r, v_{m+1}, \ldots, v_s. \tag{3.2}$$

Si veim que tots aquests són linealment independents formaran base de $F + G$ i tendrem $dim(F + G) = r + s - m$ la qual cosa demostra la fórmula de Grassmann. Vegem doncs que els vectors de (3.2) són linealment independents.

Considerem una combinació lineal d'ells igual a 0,

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \cdot u_i + \sum_{j=m+1}^{s} \beta_j \cdot v_j = 0.$$

Aleshores tenim

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \cdot u_i = - \sum_{j=m+1}^{s} \beta_j \cdot v_j \tag{3.3}$$

i aquest vector és a la vegada de F (combinació lineal de la seva base u_i) i de G (combinació lineal de vectors de la seva base, els v_j), és a dir, és de $F \cap G$. Per tant, podem escriure:

$$\sum_{j=m+1}^{s} \beta_j \cdot v_j = \sum_{k=1}^{m} \delta_k \cdot u_k \quad \text{o també} \quad \sum_{k=1}^{m} \delta_k \cdot u_k - \sum_{j=m+1}^{s} \beta_j \cdot v_j = 0.$$

Ara bé, com que $u_1, \ldots, u_m, v_{m+1}, \ldots, v_s$ és una base de G, són linealment independents i per tant tots els escalars anteriors han de ser 0. En particular, $\beta_{m+1} = \ldots = \beta_s = 0$. Això implica, per la igualtat (3.3),

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \cdot u_i = 0$$

i per ser $u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_r$ una base de F, necessàriament tots els escalras són també nuls, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$, com voliem demostrar. □

Notem que si el que tenim és una suma directa, tenim que $F \cap G = \{0\}$ o equivalentment $dim(F \cap G) = 0$ i, per tant,

$$dim(F \oplus G) = dim(F) + dim(G).$$

També tenim els següents resultats de demostració immediata.

Corol·lari 61. *Siguin E un $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió finita, i F i G subespais de E. Aleshores són equivalents:*

- *F i G són complementaris ($E = F \oplus G$)*
- *$F \cap G = \{0\}$ i $\dim E = \dim F + \dim G$.*

Corol·lari 62. *Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió finita, llavors tot subespai vectorial F admet almenys un complementari.*

Demostració: Considerem $dim(E) = n$ i $dim(F) = m$ amb $m \leq n$. Sigui $u_1, \ldots, u_m$ una base de F i completem-la fins a una de E, $u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n$. Llavors és fàcil veure que $G = \langle u_{m+1}, \ldots, u_n \rangle$ és efectivament un complementari de F. □

3.3 Construccions d'espais vectorials

Volem veure en aquesta secció com construir nous espais vectorials a partir d'altres coneguts. Un primer mètode és fent us del producte cartesià.

Definició 63. Suma directa d'espais vectorials. *Siguin E, F dos $\mathbb{K}$-espais vectorials. Definim sobre el conjunt producte cartessià $E \times F$ les següents operacions:*

$$\begin{aligned} (u, v) + (u', v') &= (u + u', v + v') \\ \alpha \cdot (u, v) &= (\alpha \cdot u, \alpha \cdot v) \end{aligned}$$

on $u, u' \in E$, $v, v' \in F$ i $\alpha \in \mathbb{K}$. És immediat veure que amb aquestes operacions el conjunt $(E \times F, +, \cdot)$ és un $\mathbb{K}$-espai vectorial anomenat espai vectorial producte *o també* espai vectorial suma directa *de E i F. El denotarem habitualment per $E \oplus F$.*

Observació 64. *Notem que l'element neutre de $E \oplus F$ serà l'element $(0, 0)$ on el primer 0 és l'element neutre de E i el segon és l'element neutre de F. Igualment l'opost de (u, v) serà $(-u, -v)$.*

Hem parlat abans de suma directa de subespais vectorials i ara de suma directa d'espais vectorials, en ambdós casos denotats pel símbol $\oplus$. Així, donats dos subespais vectorials F i G d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E, tenim que F, G poden ser considerats també com a $\mathbb{K}$-espais vectorials i, per tant, $F \oplus G$ denota a la vegada dos objectes inicialment diferents, la suma directa com a subespais vectorials de E:

$$F \oplus G = \{z \in E \mid z = x + y \quad \text{per un certs} \quad x \in F, y \in G\}$$

i la suma directa com a $\mathbb{K}$-espais vectorials:

$$F \oplus G = \{(x, y) \mid x \in F, y \in G\}.$$

Això no porta a cap confusió perquè, com veurem més envant, els dos conjunts corresponen a $\mathbb{K}$-espais vectorials *isomorfs*, és a dir, *identificables* des del punt de vista de l'estructura d'espai vectorial que manetjam.

És fàcil veure que aquest concepte el poden generalitzar per a n $\mathbb{K}$-espais vectorials.

Definició 65. *Siguin $E_1, \ldots, E_n$ $\mathbb{K}$-espais vectorials qualssevol. Definim el $\mathbb{K}$-espai vectorial producte o suma directa de $E_1, \ldots, E_n$ com*

$$E_1 \oplus \ldots \oplus E_n = \{(u_1, \ldots, u_n) \mid u_i \in E_i, \quad \textit{per a} \quad i = 1, \ldots, n\}$$

amb les operacions suma i producte per escalars definides component a component:

$$\begin{aligned} (u_1, \ldots, u_n) + (v_1, \ldots, v_n) &= (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n) \\ \alpha \cdot (u_1, \ldots, u_n) &= (\alpha \cdot u_1, \ldots, \alpha \cdot u_n) \end{aligned}$$

on $u_1, \ldots, u_n \in E$, $v_1, \ldots, v_n \in F$ i $\alpha \in \mathbb{K}$.

Exemple 66. *Notem que d'aquesta manera el $\mathbb{K}$-espai vectorial $\mathbb{K}^n$ el podem veure com la suma directa*

$$\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}.$$

Proposició 67. *Siguin $E, F, E_1, \ldots E_n$, $\mathbb{K}$-espais vectorials.*

- *Si E i F són de dimensió finita, llavors $E \oplus F$ també ho és i $dim(E \oplus F) = dim(E) + dim(F)$.*
- *Si tots els E_i són de dimensió finita, $dim(E_i) = m_i$ per a tot $i = 1, \ldots, n$, llavors $E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$ també ho és i*

$$dim(E_1 \oplus \ldots \oplus E_n) = dim(E_1) + \ldots + dim(E_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Demostració: Demostrarem només la primera part ja que la segona se segueix fàcilment per inducció.

Diguem $n = dim(E)$, $m = dim(F)$ i siguin $u_1, \ldots, u_n$ i $v_1, \ldots, v_m$ bases de E i F respectivament. Per demostrar que $dim(E \oplus F) = n + m$ bastarà veure que els vectors

$$(u_1, 0), \ldots, (u_n, 0), (0, v_1), \ldots, (0, v_m)$$

formen una base de $E \oplus F$. Efectivament,

- Són linealment indepedents ja que si consideram una combinació lineal d'ells igual a zero

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot (u_i, 0) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \cdot (0, v_j) = (0, 0)$$

  obtenim

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot u_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j \cdot v_j \right) = (0, 0), \quad \text{és a dir,} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot u_i = 0 \ \text{ i } \ \sum_{j=1}^{m} \beta_j \cdot v_j = 0$$

  i, com que els $u_i's$ i els $v_j's$ són linealment independents, ha de ser

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0 \qquad \text{i} \qquad \beta_1 = \ldots = \beta_m = 0.$$

- Generen tot $E \oplus F$, ja que qualsevol element de $E \oplus F$ és de la forma (u, v) amb $u \in E$ i $v \in F$. Així, per ser els $u_i's$ base de E i els $v_j's$ base de F, existiràn escalars $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{K}$ de manera que

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot u_i \qquad \text{i} \qquad \sum_{j=1}^{m} \beta_j \cdot v_j$$

  i per tant tendrem,

$$\begin{aligned} (u, v) &= (u, 0) + (0, v) = (\textstyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot u_i, 0) + \left(0, \sum_{j=1}^{m} \beta_j \cdot v_j\right) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot (u_i, 0) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \cdot (0, v_j). \end{aligned} \qquad \square$$

Una altra construcció que volem veure és la de l'espai vectorial quocient. Per això anem a introduir les anomenades *relacions mòdul un subespai vectorial.*

Definició 68. *Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial y F un subespai vectorial de E qualsevol. Definim sobre E la següent relació anomenada* relació mòdul F*:*

$$x \sim_F y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x - y \in F.$$

Aquesta relació definida sobre E és sempre una relació d'equivalència qualsevol que sigui el subespai vectorial F:

- Reflexiva. Per a tot $x \in E$ tenim $x \sim_F x$ perquè $x - x = 0 \in F$ per ser F subespai.
- Simètrica. Per a tots $x, y \in F$, si $x \sim_F y$ tenim que $x - y \in F$ i per tant el seu opost també, $y - x \in F$, és a dir $y \sim_F x$.
- Transitiva. Si tenim $x, y, z \in E$ tals que $x \sim_F y$ i $y \sim_F z$, llavors $x - y \in F$ i $y - z \in F$. Per tant la seva suma també és de F, és a dir,

$$(x - y) + (y - z) \in F \quad \Longrightarrow \quad x - z \in F \quad \Longrightarrow \quad x \sim_F z.$$

D'aquesta manera podem considerar el conjunt quocient, denotat per E/F format per totes les classes d'equivalència mòdul F. Donat un $x \in F$ la seva classe d'equivalència mòdul F la denotarem per $[x]_F$ i ve donada per:

$$\begin{aligned} [x]_F &= \{y \in E \mid y \sim_F x\} = \{y \in E \mid y - x = z \in F\} \\ &= \{y \in E \mid y = x + z \text{ amb } z \in F\} = \{x + z \mid z \in F\} = x + F. \end{aligned}$$

Notem que, en particular, la classe del 0 coincideix amb el propi subespai F:

$$[0]_F = \{0 + z \mid z \in F\} = F,$$

de fet tenim més en general que

$$[x]_F = [0]_F \quad \Longleftrightarrow \quad x \sim_F 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in F \quad \text{i en aquests casos} \quad [x]_F = F.$$

Aquestes classes d'equivalència $[x]_F = x + F$ s'anomenen també *varietat lineals* (suma d'un vector i un subespai vectorial) i només són subespais vectorials quan $x \in F$ (equivalentment quan la varietat conté el $0 \in E$), coincidint en aquests casos amb el propi subespai F.

Dins aquest conjunt quocient $E/F = \{[x]_F \mid x \in E\}$ podem definir les següents operacions de classes d'equivalència, a través dels seus representants:

$$[u]_F + [v]_F = [u + v]_F \qquad \text{i} \qquad \alpha \cdot [x]_F = [\alpha \cdot x]_F. \tag{3.4}$$

Vegem primer que aquestes operacions estàn ben definides, és a dir, que no depenen del representant elegit.

- Suma. Suposem $[x]_F = [x']_F$ i $[y]_F = [y']_F$, hem de veure que si sumam a traves dels representants x, y o ho feim a través dels representants x', y' el resultat és el mateix. Efectivament,

$$\begin{array}{lllll} [x]_F = [x']_F & \Longrightarrow & x \sim_F x' & \Longrightarrow & x - x' = u \in F \\ [y]_F = [y']_F & \Longrightarrow & y \sim_F y' & \Longrightarrow & y - y' = v \in F \end{array}$$

i conseqüentment, sumant tenim que

$$x+y-(x'+y') = u+v \in F \implies (x+y) \sim_F (x'+y') \implies [x+y]_F = [x'+y']_F.$$

- Producte per escalars. De forma similar, si $\alpha \in \mathbb{K}$ i $[x]_F = [x']_F$, tenim $x - x' \in F$ i llavors

$$\alpha \cdot (x - x') \in F \implies \alpha \cdot x - \alpha \cdot x' \in F \implies [\alpha \cdot x]_F = [\alpha \cdot x']_F.$$

Ara és fàcil veure que el conjunt quocient E/F amb aquestes operacions és un $\mathbb{K}$-espai vectorial amd la qual cosa tenim la següent definció.

Definició 69. Espai vectorial quocient *Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial y F un subespai vectorial de E qualsevol. Definim* espai vectorial quocient *de E per F al $\mathbb{K}$-espai vectorial donat per $(E/F, +, \cdot)$ amb les operacions definides a (3.4)*

Exemple 70. 1. *Considerem el $\mathbb{R}$-espai vectorial $\mathbb{R}^2$, $v \in \mathbb{R}^2$ i F el subespai vectorial generat per v, $F = \langle v \rangle$. Aleshores el $\mathbb{R}$-espai vectorial quocient $\mathbb{R}^2/F$ vendrà donat per tots els vectors de la forma*

$$[(a, b)] = (a, b) + F = \{(a, b) + \alpha \cdot v \mid \alpha \in \mathbb{R}\},$$

és a dir, la clase $[(a, b)]$ és la recta que passa per (a, b) i té la direcció de v. Quan passa per $(0, 0)$ tenim el propi subespai vectorial F que és la recta que passa per l'origen amb direcció v. D'aquesta manera, l'espai vectorial quocient E/F és el conjunt de totes les rectes paral.leles a F (amb direcció v).

2. *Tenim també els casos extrems per un $\mathbb{K}$-espai vectorial E qualsevol.*

   - *Quan $F = \{0\}$, llavors $E/F = E/\{0\} = \{x + \{0\} \mid x \in E\} = \{\{x\} \mid x \in E\}$ que és el propi E (isomorfs).*
   - *Quan $F = E$, llavors $E/E = \{x + E \mid x \in E\} = \{E\}$ que és el $\mathbb{K}$-espai vectorial trivial.*

Proposició 71. *Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió finita, $dim(E) = n$ i sigui F un subespai vetorial. Llavors E/F és també de dimensió finita i*

$$dim(E/F) = dim(E) - dim(F).$$

Demostració: En l'exemple anterior hem vist com els casos trivials $dim(F) = 0, n$ es verifiquen. Suposem doncs $dim(F) = r$ amb $0 < r < n$. Sigui $u_1, \ldots, u_r$ una base de F i completem-la fins a una base de E, diguem, $u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n$. Com que $u_i \in F$ per a tot $i = 1, \ldots, r$, tendrem que

$$[u_i] = [0] \qquad \text{per a tot} \quad i = 1, \ldots, r$$

i en canvi les classes $[u_i]$ amb $i = r+1, \ldots, n$ són no nul.les. Vegem que aquestes últimes formen una base de E/F i haurem acabat ja que llavors la dimensió de E/F serà $n - r = dim(E) - dim(F)$.

- Linealment independents. Considerem una combinació lineal igual a zero,

  $$\sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i \cdot [u_i] = [0] \quad \Longrightarrow \quad \left[\sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i \cdot u_i\right] = [0]$$

  d'on el vector $\sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i \cdot u_i$ ha de ser de F i per tant combinació lineal de la base de F.

  $$\sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i \cdot u_i = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \cdot u_j \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \cdot u_j - \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i \cdot u_i = 0.$$

  Ara bé, com que els $u_1, \ldots, u_n$ formen base de E, són linealment independents i per tant tots els escalars anteriors han de ser zero. En particular, tenim $\alpha_{r+1} = \ldots = \alpha_n = 0$.

- Generen. Sigui $[u] \in E/F$ qualsevol. Llavors $u \in F$ i per tant serà combinació lineal de la base:

  $$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot u_i \quad \Longrightarrow \quad [u] = \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot u_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot [u_i] = \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i \cdot [u_i]$$

  ja que $[u_1] = \ldots = [u_r] = [0]$ per ser els r primers vectors $u_1, \ldots, u_r$ de F. $\square$

Exemple 72. *Sigui F el suebspai vectorial de $\mathbb{R}^3$ generat per $F = \langle (1,0,0), (0,1,1) \rangle$. Segons la proposició anterior, per trobar una base de $\mathbb{R}^3/F$ només hem de completar la base de F fins a una base de $\mathbb{R}^3$. És clar que, per exemple, els vectors*

$$(1,0,0), \ (0,1,1) \ \ i \ \ (0,0,1)$$

formen una base de E que completa la de F. Així doncs, $dim(\mathbb{R}^3/F) = 3 - 2 = 1$ i la classe $[(0,0,1)]$ és una base de $\mathbb{R}^3/F$.

En dimensions infinites la fórmula anterior ja no és vàlida. Un exemple important el podem trobar en el $\mathbb{K}$-espai vectorial dels polinomis, $\mathbb{K}[x]$. Sigui $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ un polinomi no constant qualsevol i considerem el subconjunt dels múltiples de $p(x)$ denotat per

$$F = (p(x)) = \{p(x)q(x) \mid q(x) \in \mathbb{K}[x]\}.$$

És fàcil veure que $F = (p(x))$ és un subespai vectorial de $\mathbb{K}[x]$ (la suma de múltiples de $p(x)$ és múltiple de $p(x)$ i un escalar per un múltiple de $p(x)$ també és múltiple de $p(x)$) i que és de dimensió infinita (es pot veure que no pot tenir un nombre finit de generadors igual que en el cas de $\mathbb{K}[x]$, veure Exemple 31). Estudiem com seria el $\mathbb{K}$-espai vectorial quocient $\mathbb{K}[x]/F$. En aquest cas la relació mòdul F seria

$$a(x) \sim_F b(x) \quad \Longleftrightarrow \quad a(x) - b(x) \in F = (p(x)).$$

Proposició 73. *Sigui $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ un polinomi no constant diguem de $grau(p(x)) = n \geq 1$. Llavors dins cada classe no nul.la $[a(x)]$ hi ha un representant de grau menor que n.*

Demostració: Sigui $[a(x)] \in \mathbb{K}[x]/(p(x))$ una classe qualsevol. Dividint el polinomi $a(x)$ pel polinomi $p(x)$ obtenim

$$a(x) = p(x)k(x) + r(x) \quad \text{amb} \quad r(x) = 0 \ \text{ o } \ grau(r(x)) < grau(p(x)) = n.$$

Aleshores,

$$a(x) - r(x) = p(x)k(x) \in (p(x)) \quad \Longrightarrow \quad a(x) \sim_{(p(x))} r(x)$$

i, per tant, $[a(x)] = [r(x)]$. □

Proposició 74. *Sigui $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ un polinomi no constant diguem de $grau(p(x)) = n \geq 1$. Llavors, les classes $[1], [x], [x^2], \ldots, [x^{n-1}]$ formen una base de $\mathbb{K}[x]/(p(x))$, i per tant, $dim\,(\mathbb{K}[x]/(p(x))) = n = grau(p(x))$.*

Demostració: Són linealment independents ja que si $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \cdot [x^i] = [0]$, llavors tendrem

$$\left[\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \cdot x^i\right] = [0] \quad \Longrightarrow \quad a(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \cdot x^i \in (p(x))$$

però $grau(a(x)) \leq n-1 < n = grau(p(x))$. Això només és possible si $a(x) = 0$, és a dir, si $\alpha_0 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$.

Per una altra part, també generen ja que per a qualsevol $[a(x)] \in \mathbb{K}[x]/(p(x))$, tenim per la proposició anterior que $[a(x)] = [r(x)]$ amb $r(x) = 0$ o $grau(r(x)) < n$. Així, $r(x)$ serà un polinomi de la forma $r(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$ i, per tant,

$$[a(x)] = [r(x)] = a_0 \cdot [1] + a_1 \cdot [x] + \ldots + a_{n-1} \cdot [x^{n-1}].$$

□

Observació 75. *En el cas de que fessim $\mathbb{K}[x]/(p(x))$ amb $p(x)$ un polinomi constant, llavors tendriem que $(p(x)) = \mathbb{K}[x]$ ja que les constants són invertibles i tot polinomi es pot posar com múltiple d'una constant qualsevol (notem que $p(x) = k \cdot (\frac{1}{k} \cdot p(x))$, per a qualsevol $k \in \mathbb{K}$). D'aquesta manera el quocient $\mathbb{K}[x]/(p(x))$ seria el $\mathbb{K}$-espai vectorial trivial.*

3.4 Coordenades en una base. Canvis de base.

Definició 76. *Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial qualsevol. S'anomena* rang *dels vectors $x_1, x_2, \ldots, x_m \in E$ a la dimensió del subespai vectorial que generen.*

$$rang\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \dim\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle,$$

que coincideix amb el nombre màxim de vectors linealment independents que es poden extreure del conjunt $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

El rang de m vectors està relacionat amb el rang d'una matriu com veurem a continuació. Primer recordem que, donat un $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió m i $B = \{e_1, \ldots, e_m\}$ una base qualsevol de E, tot vector $x \in E$ s'escriu de manera única com a combinació lineal de la base B de la forma:

$$x = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot e_i = a_1 \cdot e_1 + \ldots + a_m \cdot e_m$$

i aleshores, els escalars $a_1, \ldots, a_m$ s'anomenen *coordenades* del vector x en la base B.

Proposició 77. *Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió finita m i $e_1, \ldots, e_m$ una base de E. Siguin $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ vectors de E de manera que cada x_j té coordenades en la base B donades per:*

$$x_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot e_i = a_{1j} \cdot e_1 + \ldots + a_{mj} \cdot e_m.$$

Llavors,

i) $x_1, \ldots, x_n$ són linealment independents si i només si $rang(A) = n \leq m$.

ii) $rang\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = rang(A)$.

Demostració: Per demostrar $i)$ notem que les dues afirmacions, tant que $x_1, \ldots, x_n$ siguin linealment independents com que $rang(A)$ sigui igual a n, només poden ser certes en el cas que $n \leq m$. En aquest cas, considerem una combinació lineal

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot x_j = 0. \tag{3.5}$$

Substituint els x_j per les seves expressions tendrem

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot e_i \right) = 0$$

o, equivalentment,

$$\alpha_1 \cdot (a_{11} \cdot e_1 + \ldots + a_{m1} e_m) + \quad \ldots \quad + \alpha_n \cdot (a_{1n} \cdot e_1 + \ldots + a_{mn} e_m) = 0.$$

Multiplicant distributivament i reagrupant,

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{ij} \right) \cdot e_i = 0.$$

Per ser e_i una base de E, són linealment independents i per tant tots els escalars anteriors han de ser 0. És a dir,

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{ij} = 0 \quad \text{per a tot} \quad i = 1, \ldots, m.$$

Si denotam per X la matriu columna formada pels α_j, les equacions anteriors s'ecriuen com un sistema que en forma matricial seria $AX = 0$.

D'aquesta manera, sabem que els $x_1, \ldots, x_n$ són linealment independents si i només si, per a qualsevol combinació lineal de la forma (3.5), tots els escalars són 0. Però això es verifica si i només si el corresponent sistema $AX = 0$ té solució única (la trivial), la qual cosa passa si i només si $rang(A) = n$ el nombre d'incògnites (α_j).

Per acabar, notem que *ii*) és conseqüència immediata de *i*) i de les respectives definicions. □

Exemple 78. *Si u_1, u_2, u_3 són vectors linealment independents d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial, aleshores els vectors $v_1 = u_1 + u_2$, $v_2 = u_2 - u_3$, $v_3 = u_1 + u_2 + u_3$ són també linealment independents. Si consideram $F = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, llavors u_1, u_2, u_3 són una base de F i, tenint en compte l'expressió dels vectors v_1, v_2, v_3 en aquesta base i la proposició anterior, basta veure que la matriu A formada pels v_j en columna:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

té rang 3, la qual cosa és fàcil de comprovar i ho deixam com a exercici.

Així el rang de n vectors es pot calcular a través de les seves coordenades en qualsevol base i el rang no depèn de la base emprada. Ara bé, les coordenades de qualsevol vector en una base B i en una altra base B' sí que són evidentment diferents. Hom es pot demanar com calcular les unes en funció de les altres. Aquest problema conegut com a *canvi de base* el resolem a continuació.

3.4.1 Canvis de base

Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n i siguin $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $B' = \{u_1, \ldots, u_n\}$ dues bases de E. Considerem un vector $x \in E$ i siguin $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ les coordenades del vector x en les bases B i B' respectivament. Llavors,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot e_i \qquad \text{i} \qquad x = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot u_j.$$

Ara bé, els elements de la base B' tenen també unes coordenades en la base inicial B. Diguem

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot e_i, \qquad j = 1, \ldots, n$$

i si substituim els u_j per les seves expressions tenim

$$x = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot u_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot e_i \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (\beta_j a_{ij}) \cdot e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j a_{ij} \right) \cdot e_i$$

Com que les coordenades de x en la base B són úniques, s'ha de verificar:

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j a_{ij} \qquad \text{per a tot} \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.6}$$

Aquesta expressió la podem escriure en forma matricial com $P\overline{X} = X$, on X és la matriu columna formada per les coordenades de x en la base B (les α_j), $\overline{X}$ és la matriu columna de les coordenades de x en la base B' i P és la matriu de les (a_{ij}). Fixem-nos en que cada columna j de P està formada per les coordenades, en la base B, del corresponent vector u_j de la base B'. D'aquesta manera l'equació (3.6) en forma matricial:

$$P\overline{X} = X \quad \text{o, equivelentment} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

ens dona les coordenades de x en la base B (α_j) en funció de les coordenades del propi x en la base B' (β_j).

Definició 79. *La matriu $P = (a_{ij})$ anterior s'anomena* matriu del canvi de base de *la base B a la base B' i s'obté escrivint els vectors de la base B' en columna com a combinació lineal de la base B. A més a més, les coordenades d'un vector x en la base B s'obtenen multiplicant les coordenades de x en la base B' per la matriu P del canvi de base.*

Proposició 80. *Les matrius de canvi de bases són sempre invertibles i, si P és la matriu del canvi de base de B a B', llavors P^{-1} és la matriu del canvi de base de B' a B.*

Demostració: Siguin $P = (a_{ij})$ la matriu del canvi de base de B a B' i $P' = (b_{ij})$ la del canvi de B' a B. Volem veure que P i P' són inverses una de l'altra. Recordem que si $P = (a_{ij})$ llavors

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot e_i = a_{1j} \cdot e_1 + \ldots + a_{nj} \cdot e_n, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Anàlogament, si $P' = (b_{ij})$ llavors

$$e_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \cdot v_i = b_{1j} \cdot v_1 + \ldots + b_{nj} \cdot v_n, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

D'aquesta manera, substituint a la primera equació, els e_j obtenim

$$\begin{aligned} v_j &= a_{1j} \cdot (b_{11} \cdot v_1 + \ldots + b_{n1} \cdot v_n) + \ldots + a_{nj} \cdot (b_{1n} \cdot v_1 + \ldots + b_{nn} \cdot v_n) \\ &= (b_{11}a_{1j} + \ldots + b_{1n}a_{nj}) \cdot v_1 + \ldots + (b_{n1}a_{1j} + \ldots + b_{nn}a_{nj}) \cdot v_n \end{aligned}$$

Degut a la unicitat de les coordenades, això implica que

$$\begin{cases} b_{11}a_{1j} + \ldots + b_{1n}a_{nj} & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ b_{j1}a_{1j} + \ldots + b_{jn}a_{nj} & = 1 \\ \vdots & \vdots \\ b_{n1}a_{1j} + \ldots + b_{nn}a_{nj} & = 0 \end{cases}$$

Aquestes igualtats en forma matricial s'escriuen simplement per $P'P = I_n$.

De manera anàloga es pot veure que $PP' = I_n$. Això demostra que les matrius P i P' són inverses una de l'altra. $\square$

Exemple 81. *Considerem en $\mathbb{R}^3$ la base canònica $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ i la base $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ on*

$$u_1 = (1, 1, 0), \quad u_2 = (1, 0, 1), \quad u_3 = (0, 1, 1).$$

Volem trobar les coordenades del vector $x = (1, 1, 1)$ en la base B'. La matriu del canvi de base de B a B' serà escriure els vectors u_j en columna com a combinació lineal de la base canònica. Així,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les coordenades de x en la base canònica són $(1, 1, 1)$ i si deim $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ les seves coordenades en la base B' tenim que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cercant P^{-1} obtenim

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i, per tant,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

La mateixa demostració de la proposició anterior serveix per a demostrar la següent.

Proposició 82. *Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n i siguin B, B' i B'' bases de E. Si P és la matriu del canvi de B a B' i Q és la matriu del canvi de B' a B'', llavors la matriu del canvi de B a B'' és precisament QP.*