MATRICES Y SISTEMAS LINEALES

Matrices y Sistemas Lineales

En este tema se repasan conceptos básicos y se profundizan algunos aspectos

- MATRICES
  - se crearon para operar de acuerdo con ciertos criterios numéricos
  - se usan en aplicaciones prácticas y desarrollos teóricos
  - permiten expresar ecuaciones en forma reducida y ayudan a visualizar mejor los problemas.
- SISTEMAS LINEALES
  - gran variedad de aplicaciones en ciencias e ingenieras

Matrices y Sistemas Lineales

Figura : La aplicación práctica de la teoría es importante

Matrices: definiciones básicas

Definición

Una **matriz** A es un conjunto de $m \times n$ números reales ordenados en m filas y n columnas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Se dice que A es una matriz de tamaño $m \times n$ y se escribe $A = [a_{ij}]$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Esto es, a_{ij} representa el número que se encuentra en la fila i y en la columna j. A los elementos a_{ij} se les llama las componentes (entradas) de la matriz A.

Matrices: definiciones básicas

Ejemplo

¿Qué puedes decir de la matriz A?

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sólución: A es una matriz de tamaño 2×3 y $a_{11} = -2$; $a_{12} = 3$; $a_{13} = 5$; $a_{21} = 4$; $a_{22} = -1$; $a_{23} = 1$.

Matrices: definiciones básicas

Observación

- Los paréntesis rectangulares de la notación matricial se pueden reemplazar por paréntesis circulares.
- En el caso particular de una matriz de tamaño 1×1, identificamos la matriz $[a]$ con el número real a.
- El conjunto de todas las matrices de números reales de tamaño $m \times n$ se denota por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.
- En ocasiones las componentes de la matriz pueden ser números complejos, en este caso, el conjunto de todas las matrices de números complejos de tamaño $m \times n$ se denota por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$.

Matrices: definiciones básicas

Definición

Dos matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ **son iguales**, $A = B$, si y sólo si:

- A y B tienen el mismo tamaño y
- $a_{ij} = b_{ij}\ \forall i, j$.

Es decir, las matrices deben tener el mismo tamaño y los elementos situados en la misma posición deben ser iguales.

Matrices: definiciones básicas

Ejemplo

Determinar el valor de a para que las matrices A y B sean iguales.

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & 2a \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Sólución: Ambas matrices tienen el mismo tamaño, serán iguales si y sólo si coinciden componente a componente. Esto sucede siempre que $a = 2$ y $2a = 4$, esto es, para $a = 2$.

Matrices: definiciones básicas

Ejemplo

Determinar el valor de a para que las matrices A y B sean iguales.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 3 & 3a \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Sólución: Para que ambas matrices sean iguales es necesario que $a = 1$ y $3a = 4$. Es imposible que simultáneamente se satisfagan ambas igualdades. Por lo tanto, aunque las matrices tengan el mismo tamaño, $A \neq B$ para cualquier valor de a.

Matrices especiales

- La **matriz fila** es una matriz de orden $1 \times n$.
- La **matriz columna** es una matriz de orden $m \times 1$.
- La **matriz cero** (o matriz nula) tiene todas las componentes nulas, $\mathbb{O}_{m\times n} = [a_{ij}]$ donde $a_{ij} = 0$, $\forall i, j$.
- Las matrices de tamaño $n \times n$ son **matrices cuadradas** de orden n. $\mathcal{M}_n$ es el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n. Si $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n$, los elementos a_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, n$ forman la **diagonal** de la matriz A.
- Una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ es una **matriz diagonal** si todas las componentes fuera de su diagonal son nulas, $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.
- La **matriz identidad** (o matriz unidad) I_n es una matriz cuadrada que tiene unos en la diagonal y ceros en cualquier otra posición.

Matrices especiales

Definición

Una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ de orden n es una matriz **triangular superior** si todas las componentes que están por debajo de la diagonal son nulas. Es decir, $a_{ij} = 0$ para $i > j$. La matriz es **triangular inferior** si las componentes que están por encima de la diagonal son todas iguales a cero. Es decir, $a_{ij} = 0$ para $i < j$.

Definición

Sea $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m \times n}$, se define la **matriz traspuesta** de A como $A^t = [b_{ij}]$, donde $b_{ij} = a_{ji}$ $\forall i, j$. La matriz traspuesta se obtiene intercambiando filas por columnas, manteniendo el orden.

Matrices especiales

Ejemplo

Halla A^t.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Solución: Para encontrar A^t intercambiaremos filas por columnas.

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Operaciones con matrices: suma de matrices

Definición

Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$; se define la **matriz suma** de A con B como $A + B = [c_{ij}]$ donde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall i, j$.

Propiedades. Sean $A, B, C, \mathbb{O} \in \mathcal{M}_{m\times n}$:

- Asociativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- Conmutativa: $A + B = B + A$.
- Elemento neutro: $A + \mathbb{O} = \mathbb{O} + A = A$.
- Existencia de elemento opuesto: $\exists(-A) \in \mathcal{M}_{m\times n} \mid A + (-A) = \mathbb{O}$. De hecho, si $A = [a_{ij}]$, $(-A) = [-a_{ij}]$.

Operaciones con matrices: multiplicación por un escalar

Definición

Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}$; se define la **multiplicación de un escalar con una matriz** como la matriz $\lambda A = [c_{ij}]$ donde $c_{ij} = \lambda a_{ij}$, $\forall i, j$.

Propiedades. Sean $B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$:

- Existencia del escalar 1: $1 \cdot B = B$.
- Distributiva respecto de la suma de escalares: $(\lambda + \beta)B = \lambda B + \beta B$.
- Distributiva respecto de la suma de matrices: $\lambda(B + C) = \lambda B + \lambda C$.
- Asociativa: $(\lambda \cdot \beta)B = \lambda(\beta B)$.

Operaciones con matrices: producto

Definición

Sean $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times p}$; se define la **matriz producto** de A con B como $A \cdot B = [c_{ij}]$ donde $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ para $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, p$, se multiplica la fila i-ésima de A con la columna j-ésima de B. La matriz producto $A \cdot B \in \mathcal{M}_{m\times p}$

Propiedades. Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $B, D \in \mathcal{M}_{n\times p}$, $C \in \mathcal{M}_{p\times q}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

- Asociativa: $A(BC) = (AB)C$.
- NO conmutativa: $AB \neq BA$.
- Distributiva respecto de la suma: $A(B + D) = AB + AD$.
- Asociativa: $\lambda(AB) = (\lambda A)B$.
- Elemento identidad: $AI_n = I_m A = A$.

Ejemplo

Calcula $2D$, $A+B$, $A\cdot D$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$2D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -2 & 4 & 2 \\ 8 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad A+B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad A\cdot D = \begin{bmatrix} -13 & 10 & 5 \\ 2 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Comprueba si son ciertas las siguientes igualdades: $AB = BA$, $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, $A^2 + BA = A(A+B)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$AB \neq BA$$
$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$
$$A^2 + BA \neq A(A+B)$$

Las igualdades anteriores no son ciertas debido a que el producto de matrices no es conmutativo.

Matrices simétricas y antisimétricas

Definición

Una matriz $A = [a_{ij}]$ es **simétrica** si $A = A^t$, es decir si $a_{ij} = a_{ji}\ \forall i, j$.

Definición

Una matriz $A = [a_{ij}]$ es **antisimétrica** si $A = -A^t$, es decir si $a_{ij} = -a_{ji}\ \forall i, j$.

Observación

- Las matrices simétricas y antisimétricas deben ser necesariamente cuadradas.
- La diagonal de una matriz antisimétrica está formada por ceros.

Matrices simétricas y antisimétricas

Ejemplo

Calcula: $A + A^t$, $B - B^t$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$A + A^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B - B^t = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrices simétricas y antisimétricas

Teorema

Si B es una matriz cuadrada cualquiera entonces $S = B + B^t$ es simétrica.

Teorema

Si C es una matriz cuadrada cualquiera entonces $A = C - C^t$ es antisimétrica.

Teorema

Cualquier matriz cuadrada P puede expresarse como la suma de una matriz simétrica S y una antisimétrica A.

$$P = \frac{1}{2}(P + P^t) + \frac{1}{2}(P - P^t) = \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}A$$

Matrices invertibles

Definición

Una matriz cuadrada A de orden n es **invertible** (no singular), si existe una matriz C del mismo tamaño tal que $AC = CA = I_n$.

Teorema

Si $A \in \mathcal{M}_n$ es invertible, y $C, B \in \mathcal{M}_n$ son tales que $AC = CA = I_n$ y $AB = BA = I_n$ entonces $C = B$.

Matriz inversa

Definición

Si $A \in \mathcal{M}_n$ es invertible, a la única matriz $C \in \mathcal{M}_n$ tal que $AC = CA = I_n$ se le llama **matriz inversa** de A y se representa por A^{-1}; es decir, $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

Propiedades. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n$ dos matrices invertibles,

- Si $A, B \in \mathcal{M}_n$ son matrices invertibles, entonces la matriz AB es invertible y además $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Si $A \in \mathcal{M}_n$ es invertible, entonces A^{-1} es también invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$.

Definición

Sea $A \in \mathcal{M}_n$, se dice que A es una **matriz ortogonal** si $AA^t = I_n$; la matriz traspuesta de A es igual a su inversa.

Matrices equivalentes

Definición

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$ con filas F_i, $i = 1, 2, \ldots n$ definimos las siguientes operaciones elementales por filas:

1. Intercambio de filas: $F_i \leftrightarrow F_j$; la fila i se intercambia con la fila j.
2. Multiplicación por un escalar: $F_i \rightarrow \alpha F_i$ $(\alpha \neq 0)$; la fila i se cambia por la misma fila multiplicada por α.
3. Suma de filas: $F_i \rightarrow F_i + \beta F_j$; la fila i se cambia por la suma de la fila i con β veces la fila j.

Matrices equivalentes

Definición

Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times m}$. Decimos que la matriz B es **equivalente por filas** a la matriz A, si B se puede obtener de la matriz A al aplicarle una sucesión finita de operaciones elementales por filas. Si B es equivalente a A escribiremos $B \sim A$.

Definición

Al primer elemento (de izquierda a derecha) distinto de cero de cada fila de una matriz se le llama **pivote**.

Matrices equivalentes

Ejemplo

a) Comprueba si A y B son matrices equivalentes por filas. b) Indica los pivotes de la matriz B.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -7 \end{bmatrix}$$

Solución:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{F_2 \to F_2 - 2F_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -7 \end{bmatrix} = B$$

b) Los pivotes de B son: 1 y -7.

Cálculo de la matriz inversa

Teorema

Sea A una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n$, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $\exists A^{-1}$, *A es invertible.*
2. $A \sim I_n$, *A es equivalente por filas a la matriz identidad.*

Es decir, $\exists A^{-1} \Leftrightarrow A \sim I_n$.

Cálculo de la matriz inversa: Gauss-Jordan

Paso 1: Formar la matriz aumentada $[A|I]$.
Paso 2: "Llevar" a A a la identidad aplicando operaciones elementales por filas a A y a I:

a) De entre todas las filas elegir una que tenga el pivote lo más a la izda y colocarla como F_1.
b) Obtener ceros bajo el pivote.
c) Repetir los pasos a) y b) con la submatriz hasta obtener una matriz triangular superior.
d) Conseguir ceros por encima de la diagonal principal. Aplica el paso b) de abajo hacia arriba.
e) Conviertir en unos todos los pivotes.

Paso 3: Una vez obtenida $[I|B]$, $B = A^{-1}$.
Paso 4: Si A no se puede llevar a I, significa que A no tiene inversa.

Cálculo de la matriz inversa: Gauss-Jordan

Ejemplo

Halla, si existe, la inversa de la matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Solución: Aplicaremos el método Gauss-Jordan explicando los pasos en detalle.

Paso 1: Formamos la matriz aumentada,

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Cálculo de la matriz inversa: Gauss-Jordan

Paso 2 a): Todas las filas tienen el pivote en la primera columna y no es necesario intercambiar filas.
Paso 2 b): Utilizaremos el pivote de la fila 1 para transformar en ceros los elementos que están por debajo de él mediante las operaciones elementales productos por un escalar y suma de filas.

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\substack{F_2 \to F_2 + (-2)F_1 \\ F_3 \to F_3 + (-1)F_1}}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Cálculo de la matriz inversa: Gauss-Jordan

Paso 2 c): Ignoramos la fila 1 y trabajamos con la submatriz formada por las filas 2 y 3. Los pivotes están en la columna 2 y no es necesario intercambiar filas. Utilizamos el pivote de la segunda fila para transformar en ceros los elementos que están debajo de él.

$$[A|I] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{F_3 \to F_3 + 2F_2}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Hemos obtenido una matriz triangular superior.

Cálculo de la matriz inversa: Gauss-Jordan

Paso 2 d): Hay que conseguir ceros por encima de la diagonal empezando de abajo hacia arriba.

$$[A|I] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-1}} & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\substack{F_1 \to F_1 + 3F_3 \\ F_2 \to F_2 + (-3)F_3}}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{F_1 \to F_1 + (-2)F_2}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Hemos obtenido una matriz diagonal.

Cálculo de la matriz inversa: Gauss-Jordan

Paso 2 e): Tal sólo falta transformar todos los elementos de la diagonal en unos.

$$[A|I] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{F_3 \to (-1)F_3}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Paso 3: La matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Cálculo de la matriz inversa: Gauss-Jordan

Ejemplo

Halla, si existe, la inversa de la matriz M.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

Solución: **Paso 1:**

$$[M|I] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{F_2 \to F_2 + (-2)F_1}{F_3 \to F_3 + F_1}}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Cálculo de la matriz inversa: Gauss-Jordan

Paso 2:

$$[M|I] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{F_3 \rightarrow F_3 + (-1) F_2}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Hemos obtenido una fila de ceros, no se puede "llevar" a M a la identidad, esto significa que M no tiene inversa $\nexists M^{-1}$.

Ecuaciones matriciales

Una ecuación matricial es una ecuación donde la incógnita es una matriz. Se resuelven transformando la ecuación inicial en otra equivalente usando propiedades y definiciones. Para despejar la incógnita se hace uso de la matriz inversa.

$$
\begin{aligned}
XP &= Q - R \\
&\qquad \text{post-multiplicamos ambos lados por } P^{-1} \\
XPP^{-1} &= (Q - R)P^{-1} \\
&\qquad \text{definición matriz inversa } AA^{-1} = A^{-1}A = I_n \\
XI_n &= (Q - R)P^{-1} \\
&\qquad \text{propiedad matriz identidad } AI_n = I_nA = A \\
X &= (Q - R)P^{-1}
\end{aligned}
$$

Ecuaciones matriciales

Ejemplo

Resolver la ecuación matricial $P + QX = RS - TX$. ¿Qué condición debe cumplirse para despejar X?

Solución:

$P + QX = RS - TX$

restamos P a ambos lados; sumamos TX a ambos lados

$(P - P) + QX + TX = RS - P + (TX - TX)$

definición matriz opuesta $A + (-A) = \mathbb{O}$

$\mathbb{O} + QX + TX = RS - P + \mathbb{O}$

propiedad matriz cero $A + \mathbb{O} = \mathbb{O} + A = A$

$QX + TX = RS - P$

Ecuaciones matriciales

$$QX + TX = RS - P$$

propiedad distributiva $(A + B)X = AX + BX$

$$(Q + T)X = RS - P$$

pre-multiplicamos ambos lados por $(Q + T)^{-1}$

$$(Q + T)^{-1}(Q + T)X = (Q + T)^{-1}(RS - P)$$

definición matriz inversa $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

$$I_nX = (Q + T)^{-1}(RS - P)$$

propiedad matriz identidad $AI_n = I_nA = A$

$$X = (Q + T)^{-1}(RS - P)$$

Para poder despejar X es necesario que la matriz $(Q + T)$ tenga inversa.

Sistema de ecuaciones lineales

Definición

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas que tiene la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

donde los $a_{ij}, b_i \in,\ i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$ son conocidos es un **sistema de ecuaciones lineales**. Una solución de este sistema es un conjunto de n números reales $\alpha_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ tales que al hacer las sustituciones $x_i = \alpha_i$ en cada una de las m ecuaciones las convierte en identidades.

Sistema de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales se puede escribir en **forma matricial** como $AX = B$, donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

La matriz A es la matriz de coeficientes, la matriz B la de términos independientes y la matriz X la de incógnitas.

Definición

Sea el sistema $AX = B$, se define la **matriz ampliada** del sistema como $[A|B]$.

Sistema de ecuaciones lineales

Observación

- Si $m = n$ el sistema de ecuaciones lineales se puede resolver facilmente:

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}AX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Basta con hallar la matriz inversa, si existe, y multiplicar las matrices.

Sistema de ecuaciones lineales

Definición

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $AX = B$ es:

- **Compatible:** si tiene al menos una solución.
  - Determinado: si la solución es única.
  - Indeterminado: si tiene infinitas soluciones.
- **Incompatible:** si no tiene soluciones.

Definición

Dos sistemas lineales del mismo tamaño son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

Sistema de ecuaciones lineales

Ejemplo

Resuelve el sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solución: Vamos a escribir el SEL de una manera más sencilla. La primera ecuación queda igual y eliminaremos la variable x_1 de la segunda y tercera ecuación. A la segunda ecuación sumaremos la primera multiplicado por (-2); a la tercera ecuación sumaremos la primera multiplicado por (-3).

Sistema de ecuaciones lineales

Obtenemos un SEL equivalente.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_2 - 7x_3 &= -17 \\ 3x_2 - 11x_3 &= -27 \end{aligned}$$

De forma análoga eliminamos la variable x_2 de la tercera ecuación, a la tercera ecuación le sumamos la segunda multiplicada por $(-\frac{3}{2})$.

Sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_2 - 7x_3 &= -17 \\ -\frac{1}{2}x_3 &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Este sistema se puede resolver comodamente: primero obtenemos x_3 de la tercera ecuación; luego sustituimos x_3 en la segunda ecuación y despejamos x_2; finalmente sustituimos x_3 y x_2 en la primera ecuación y obtenemos x_1 (sustitución regresiva).

Sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x_3 &= 3 \\ x_2 &= \frac{-17 + 7 \cdot 3}{2} = 2 \\ x_1 &= 9 - 2 - 2 \cdot 3 = 1 \end{aligned}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right] \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccr|r} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Sistema de ecuaciones lineales

Definición

La matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ está en **forma escalonada** si se cumplen las siguientes condiciones:

- Las filas nulas (si existen) están por debajo de las no nulas.
- La entrada pivote de cada fila está a la derecha de la entrada pivote de la fila anterior.

Sistema de ecuaciones lineales

Ejemplo

Indica si las matrices son escalonadas.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución: La matriz P está en forma escalonada pero Q no, el pivote de la fila 4 no está a la derecha del pivote de la fila 3.

Sistema de ecuaciones lineales

Definición

Un sistema $HX = C$ está escalonado si la matriz ampliada $[H|C]$ es una matriz escalonada. A las variables que correspondan a pivotes se les llama **variables ligadas** y a las restantes **variables libres**.

Método de Gauss

Procedimiento para obtener un sistema equivalente en forma "escalonada" y resolver por sustitución regresiva. Este algoritmo "lleva" una matriz a una forma escalonada equivalente aplicando operaciones elementales por filas.

Paso 1: Entre todas las filas, elegir una de las que tenga la entrada pivote lo más a la izquierda posible y colocarla como primera fila.

Paso 2: : Con el pivote de F_1, transformar en ceros los elementos que están por debajo de él.

Paso 3: Repetir los pasos 1 y 2 con la submatriz formada por todas las filas excluyendo la primera. La nueva matriz que obtengamos tendrá ceros por debajo del pivote de la fila 2.

Paso 4: Continuar el proceso hasta obtener una matriz escalonada.

Método de Gauss

Ejemplo

Halla una matriz escalonada equivalente a la matriz P.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución:

Paso 1: F_2 y F_3 tiene el pivote en la primera columna y F_1 en la segunda. Intercambiamos F_1 y F_3, resulta más fácil trabajar con el valor 1 como pivote.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \overset{F_1 \leftrightarrow F_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & -4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss

Paso 2: Utilizaremos el pivote de F_1 para transformar en ceros los elementos que están por debajo de él.

$$P \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & -4 & -1 & 3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{F_2 \to F_2 + (-3)F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -9 & -8 \\ 0 & -4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Repetimos los pasos anteriores, el pivote de la segunda fila es 1 y obtenemos ceros debejo de él.

$$P \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & -9 & -8 \\ 0 & -4 & -1 & 3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{F_3 \to F_3 + 4F_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -9 & -8 \\ 0 & 0 & -37 & -29 \end{bmatrix}$$

Paso 4: Podemos parar, la matriz es escalonada.

Método de Gauss

Se puede aplicar a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales $AX = B$, escalonando la matriz ampliada y aplicando sustitución regresiva. Si la matriz escalonada tiene variables libres, se despejan las variables ligadas en función de las libres.

Ejemplo

Resolver los siguientes sistemas.

$$\begin{array}{rrrl|rrrrl}
x_1 & +x_2 & & = 3 & x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & = 3 \\
 & x_2 & +x_3 & = 5 & 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & -x_4 & = -1 \\
x_1 & & +x_3 & = 4 & 3x_1 & -5x_2 & +3x_3 & -4x_4 & = 3 \\
5x_1 & -x_2 & +x_3 & = 6 & -x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & = 5
\end{array}$$

Solución: Aplicamos Gauss y hacemos sustitución regresiva a la matriz escalonada equivalente.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right] \underset{\sim}{\substack{F_3 \to F_3 + (-1)F_1 \\ F_4 \to F_4 + (-5)F_1}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 1 & -9 \end{array}\right] \sim$$

$$\underset{\sim}{\substack{F_3 \to F_3 + 1F_2 \\ F_4 \to F_4 + 6F_2}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 21 \end{array}\right] \underset{\sim}{F_4 \to F_4 + (-\tfrac{7}{2})F_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La matriz escalonada tiene 3 variables ligadas x_1, x_2 y x_3 ya que tiene 3 pivotes.

Método de Gauss

Aplicando sustitución regresiva:

$$\begin{aligned} x_3 &= \tfrac{6}{2} = 3 \\ x_2 &= 5 - x_3 = 5 - 3 = 2 \\ x_1 &= 3 - x_2 = 3 - 2 = 1 \end{aligned} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss

$$[A|B] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 3 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{c} F_2 \to F_2 + (-2)F_1 \\ F_3 \to F_3 + (-3)F_1 \\ F_4 \to F_4 + F_1 \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{c} F_3 \to F_3 + (-1)F_2 \\ F_4 \to F_4 + F_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La matriz escalonada tiene 2 pivotes, x_1 y x_2 son variables ligadas; x_3 y x_4 son variables libres.

Método de Gauss

Despejamos las variables ligadas en función de las libres.

$$\begin{aligned} x_4 &= x_4 \\ x_3 &= x_3 \\ x_2 &= -9 + x_4 \\ x_1 &= -14 - x_3 + 3x_4 \end{aligned}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \\ -9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$