Espais Vectorials

Grau en Enginyeria Telemàtica

Juan Gabriel Gomila

Grau en Enginyeria Telemàtica

Universitat de les Illes Balears

juangabriel.gomila@uib.es

28 de junio de 2017

Índex

Combinacions lineals

Combinació lineal

Recordem que donats p vectors $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$ i els escalars $\alpha_1, \alpha_1, \cdots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ una combinació lineal dels p vectors és el vector donat per l'expressió de la forma

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \cdots + \alpha_p \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$$

Exercici

Expressau el vector $(2, -4)$ com a combinació lineal dels vectors $(1, 1)$ i $(-2, 0)$.

Sol:$(2, -4) = -4(1, 1) - 3(-2, 0)$.

Combinacions lineals

Exercici

Expressau el vector $(4, -11)$ com a combinació lineal dels vectors $(2, -3)$ i $(4, -6)$.

Sol: no té solució

Exercici

Expressau el vector $(4, -11)$ com a combinació lineal dels vectors $(2, -1)$ i $(1, 4)$.

Sol:$(4, -11) = 3(2, -1) - 2(1, 4)$.

Exercici

Provau que el vector $(1, 0)$ no es pot expressar com a combinació lineal de $(2, -3)$ i $(4, -6)$

Combinacions lineals

Exercici

Expressau el vector $(4, -5, 6)$ com a combinació lineal dels vectors $(2, -3, 5)$ i $(-1, 3, 2)$.

Sol: no té solució

Exercici

Expressau el vector $(4, -5, 7)$ com a combinació lineal dels vectors $(0, -3, 5), (1, 0, -3)$ i $(-1, 3, 4)$.

Sol:$(4, -5, 7) = \frac{31}{9}(0, -3, 5)\frac{52}{9}(1, 0, -3) + \frac{16}{9}(-1, 3, 4)$.

Exercici

Expresar, si es posible, el vector $(0, 0, 0)$ com una combinació lineal de $(-1, 3, 1), (1, 0, -3)$ i $(-1, 3, 4)$, distinta de $(0, 0, 0)$.

Dependència i independència lineal

Dependència lineal

Donats el conjunt de vectors $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$ deim que són linealment dependents si algún d'ells es pot expresar com a combinació lineal de la resta. Són LD si

$$\exists 1 \leq i \leq p \ : \ \sum_{k \neq i} \alpha_k \vec{u}_k = \vec{u}_i$$

Dependència i independència lineal

Exercici

Dir si el conjunt de vectors $(2, -4, 0), (1, 1, 1)$ i $(-1, 2, 0)$ és linealment dependent.

Exercici

Dir si el conjunt de vectors $(-1, 6, 5), (1, 0, -3)$ i $(-1, 3, 4)$ és linealment dependent.

Dependència i independència lineal

Independència lineal (II)

Donats el conjunt de vectors $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$ deim que són linealment dependents si l'equació vectorial

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}$$

té infinites solucions, i per tant els escalars $\alpha_i \in \mathbb{K}$ poden prendre valors no nuls.

Exercici

Dir si el conjunt de vectors $(2,-4,0),(1,1,1)$ i $(-1,2,0)$ és linealment dependent.

Dependència i independència lineal

Independència lineal

Donats el conjunt de vectors $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$ deim que són linealment independents si cap d'ells es pot expresar com a combinació lineal de la resta. Són LI si

$$\nexists 1 \leq i \leq p \ : \ \sum_{k \neq i} \alpha_k \vec{u}_k = \vec{u}_i$$

Exercici

Dir si el conjunt de vectors $(2, -4, 0), (1, 1, 1)$ i $(-1, 2, 1)$ és linealment independent.

Dependència i independència lineal

Dependència lineal (II)

Donats el conjunt de vectors $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$ deim que són linealment independents si l'equació vectorial

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}$$

té com a única solució la solució trivial, és a dir $\alpha_i = 0 \forall 1 \leq i \leq p$.

Exercici

Dir si el conjunt de vectors $(2, -4, 0), (1, 1, 1)$ i $(-1, 2, 1)$ és linealment independent.

Dependència i independència lineal

Exercici

Demostrau que el conjunt $(1,1)$ i $(1,0)$ és LI.

Exercici

Demostrau que el conjunt $(1,1)$ i $(0,1)$ és LI.

Exercici

Demostrau que el conjunt $(1,1),(1,0)$ i $(0,1)$ és LD.

Rang d'un conjunt de vectors

Definició

Donats el conjunt de vectors $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$, deim que tenen rang $r \leq p$ si existeix com a mínim un subconjunt de r vectors linealment independents entre ells i no n'existeix cap de $r+1$ vectors que sigui linealment independent. És a dir, és el màxim nombre de vectors linealment independents que podem extreure del conjunt.

Rang d'un conjunt de vectors

Un mètode per calcular el rang d'un conjunt de vectors és construir una matriu utilitzant els vectors com a columnes (o files) i definir el rang de la matriu com el rang dels seus vectors columna (o fila). Ja vam aprendre al Tema 1 com calcular el rang d'una matriu. Ara ho posarem en pràctica per calcular el rang de vectors.

Definició

El rang d'una matriu A coincideix amb el nombre màxim de vectors fila o columna linealment independents.

Espais Vectorials

Fins ara hem vist exemples dels espais de $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$, pero la gran majoria de definicions que hem presentat les hem donades per un espai $\mathbb{K}^n$ arbitrari. Anem a veure que l'estructura d'aquests espai és una de les més importants en el món de l'Àlgebra: l'espai vectorial.

Espais Vectorials

Definició

Un espai vectorial sobre un cos $\mathbb{K}$ és un conjunt E no buid tancat per les dues operacions següents:

1. Llei de composició interna

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in E$$

2. Llei de composició externa

$$\forall \vec{x} \in E, \alpha \in K \Rightarrow \alpha \vec{x} \in E$$

que compleix les següents condicions:

Espais Vectorials

Definició

La llei de composició interna ha de complir

- Propietat conmutativa: $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}\forall\vec{x},\vec{y}\in E$
- Propietat associativa:

$$\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})=(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}\forall\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in E$$

- Element neutre de la suma: $\exists\vec{0}\in E:\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}\forall\vec{x}\in E$
- Existencia de l'oposat: $\forall\vec{x}\in E\exists-\vec{x}\in E:\vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0}$

Espais Vectorials

Definició

La llei de composició externa ha de complir

- Propietat associativa: $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}\forall\vec{x} \in E, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$
- Element neutre del producte: $\exists 1 \in \mathbb{K} : 1\vec{x} = \vec{x}\forall\vec{x} \in E$
- Propietat distributiva del producte respecte de la suma de vectors:

$$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}\forall\vec{x}, \vec{y} \in E, \alpha \in \mathbb{K}$$

- Propietat distributiva del producte respecte de la suma d'escalars:

$$(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}\forall\vec{x}, \in E, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

Espais Vectorials

Exemples d'Espais Vectorials

- L'espai $\mathbb{R}^n$ format pels vectors d'n components $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$
- El conjunt

$$P_n(\mathbb{K}) = \{a_n x^n + a_{n-1} x_{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 : a_i \in \mathbb{K}\ \forall 0 \leq i \leq n\}.$$

- L'espai $M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ de les matrius 2×2 a coeficients sobre $\mathbb{K}$.
- El conjunt de les funcions continues definides sobre un cos $\mathbb{K}$

Espais Vectorials

No són Espais Vectorials

- El conjunt de matrius 3×2 amb coeficients enters $(M_{3\times 2}(\mathbb{Z}))$
- El conjunt de polinomis de grau exactament igual a 3 a coeficients reals.

Raonau per què?

Sistema generador

Definició

Donats un conjunt de vectors $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n \in E$ direm que formen un sistema generador de l'espai vectorial E si qualsevol vector $\vec{u} \in E$ es pot expressar com a combinació lineal d'ells, és a dir

$$\forall \vec{u} \in E, \ \exists \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n : \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i$$

Sistema generador

Exercici 1

- a Expressau el vector $(-5, 15)$ com a combinació lineal de $(1, -3)$ i $(2, -6)$.
- b Expressau el vector (a, b) com a combinació lineal de $(1, -3)$ i $(2, -6)$.
- c Formen els vectors $(1, -3)$ i $(2, -6)$ un sistema generador de $\mathbb{R}^2$? Per què?

Sistema generador

Exercici 2

a Expressau el vector $(4, -11)$ com a combinació lineal de $(2, -1)$ i $(1, 4)$.

b Expressau el vector (a, b) com a combinació lineal de $(2, -1)$ i $(1, 4)$.

c Formen els vectors $(2, -1)$ i $(1, 4)$ un sistema generador de $\mathbb{R}^2$? Per què?

d Obteniu el vector $(-7, 3)$ com a combinació lineal de $(2, -1)$ i $(1, 4)$.

Sistema generador

Exercici 3

- a Esbrinau si els vectors $(1,1),(-2,3)$ i $(0,-1)$ formen un sistema generador de $\mathbb{R}^2$.
- b Obteniu el vector $(-7,3)$ com a combinació lineal de $(1,1),(-2,3)$ i $(0,-1)$.

Sistema generador

Exercici 4

a. Comprovau si els vectors de l'exercici 2, $(2,-1)$ i $(1,4)$ són LI.
b. Comprovau si els vectors de l'exercici 3, $(1,1),(-2,3)$ i $(0,-1)$ són LI.

Base d'un espai vectorial

Quan tinguem un conjunt de vectors que són sistema generador d'un EV E i siguin a més LI, direm que aquests vectors constitueixen una base de l'espai.

Definició

Direm que un conjunt de vectors $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n \in E$ són una base de E si

- $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n$ és un sistema generador de E.
- $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n$ són linealment independents.

Per exemple, els vectors de l'Exercici 2 són una base de $\mathbb{R}^2$, però en canvi els de l'Exercici 3 no són una base de $\mathbb{R}^2$.

Base d'un espai vectorial

Teorema

Si $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n \in E$ és una base de l'espai vectorial E, aleshores qualsevol vector $\vec{u} \in E$ es pot expressar com a combinació lineal de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n$ de manera única.

$$\forall \vec{u} \in E,\ \exists!\ \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K} : \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i$$

Corolari

Totes les bases d'un mateix espai vectorial tenen el mateix nombre de vectors.

Per exemple, les bases de $\mathbb{K}^2$ tenen 2 elements, les de $\mathbb{K}^3$ en tenen 3,...

Base d'un espai vectorial

Exercici

Determinau si els vectors $(2,-4,0),(1,1,1)$ i (-1,2,0) formen una base de $\mathbb{R}^3$.

Sol: no, ja que són LD.

Exercici

Determinau si els vectors $(2,1,0),(1,-1,1)$ i (0,2,-3) formen una base de $\mathbb{R}^3$.

Sol: si, ja que són 3 vectors LI a $\mathbb{R}^3$.

Base d'un espai vectorial

Un espai vectorial té infinites bases. A cada espai vectorial n'hi ha una que té unes característiques molt especials. L'anomenam la base canònica.

La base canònica

- A $\mathbb{R}^2$, la base canònica és $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ amb
$$\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)$$
- A $\mathbb{R}^3$, la base canònica és $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ amb
$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$$

Notau que els vectors de la base canònica són unitaris i mútuament ortogonals.

Dimensió d'una base

Com que el nombre d'elements d'una base d'un espai vectorial donat E és únic, té sentit definir la dimensió d'E.

Dimensió d'un Espai Vectorial

Donat un espai vectorial E, definim la seva dimensió $dim(E)$ com el nombre de vectors que conformen qualssevol de les seves bases.

Per exemple, $\mathbb{R}^2$ té dimensió 2 ja que les seves bases tenen 2 elements, $\mathbb{R}^3$ té dimensió 3, etc...

Coordenades d'un vector en una base

Coordenades

Donat un espai vectorial E amb una base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}$ i un vector $\vec{u} \in E$, sabem que existeixen uns únics escalars $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ tals que

$$\vec{u} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n$$

Aquests escalars s'anomenen les coordenades del vector $\vec{u}$ en la base B.

$$\vec{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)_B$$

Cada vector té coordenades úniques en cada base de l'espai al qual pertany, pero com que hi ha infinites bases, tindrà infinits conjunts de coordenades associades.

Coordenades d'un vector en una base

Exercici

Donades les dues bases $B_1 = \{(2,4,0),(1,0,1),(-1,2,0)\}$ i $B_2 = \{(2,1,0),(1,-1,1),(0,2,-3)\}$ calculau les coordenades del vector $\vec{u} = (3,-5,1)$ en ambdúes bases.

Sol

$$\vec{u} = \left(\frac{-1}{8}, 1, \frac{-9}{4}\right)_{B_1} = (-2,7,2)_{B_2}$$

Coordenades d'un vector en una base

Si ens donen les coordenades d'un vector sense especificar cap base, se sobre entèn que es tracta de la base canònica. També reben el nom de coordenades cartesianes i són les que en el tema 2 hem definit com les components d'un vector.

Canvi de base

Sabem que tot vector d'un espai vectorial té associat un conjunt d'escalars que depenen de la base i que se denominen coordenades o components del vector en aquesta base. També hem vist que aquestes coordenades són úniques en cada base però distintes quan canviam de base.

Partint d'aquest punt, el problema que ens plantejam és el de calcular les coordenades d'un vector en una certa base $\hat{B}$ tenint com a dada les seves coordenades en una altra base B.

Si una de les dues bases és la canònica ja hem vist que el problema és relativament senzill al darrer exercici de la secció anterior. Si les dues bases són arbitràries, necessitarem conèixer la relació entre ambdúes bases i la resolució serà un poc més elaborada.

Canvi de base

Exercici

Donat el vector $\vec{u}$ de coordenades $(-2, 3, 5)_B$ en la base

$$B = \{(2, 4, 0), (1, 0, 1), (-1, 2, 0)\}$$

calculau les seves coordenades en la base canònica C

Canvi de base

Solució

$$(-2,3,5)_B = -2\cdot(2,4,0)_C + 3\cdot(1,0,1)_C + 5\cdot(-1,2,0)_C$$

$$= (-6,2,3)_C = -6\cdot(1,0,0) + 2\cdot(0,1,0) + 3\cdot(0,0,1)$$

Sol

$$\vec{u} = (-6,2,3)_C$$

on C és la base canònica de l'espai.

Canvi de base

Exercici

Donades les bases $B_u = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ i $B_v = \{\cancel{\vec{u}_v}\, V_1, \cancel{\vec{u}_v}\, V_2, \cancel{\vec{u}_v}\, V_3\}$ d'un espai vectorial de dimensió 3 i sabent que

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \vec{v}_1 & = & 2\vec{u}_1 & - & \vec{u}_2 & + & \vec{u}_3 = (2,-1,1)_{\underline{u}} \\ \vec{v}_2 & = & & - & \vec{u}_2 & + & 2\vec{u}_3 = (0,-1,2)_{\underline{u}} \\ \vec{v}_3 & = & -\vec{u}_1 & + & \vec{u}_2 & - & 3\vec{u}_3 = (-1,1,-3)_{\underline{u}} \end{array} \right.$$

Quines són les coordenades dels vectors $\vec{v}_i$ en a base B_u?
I les de $\vec{u}_i$ en la base B_v? (Pista: emprau Gauss).
Calculau les coordenades del vector $\vec{x}$ en la base B_u sabent que en la base B_v té coordenades $(1, -1, 0)$.

Canvi de base

Solució

Segons la definició, les coordenades de $\vec{v}_i$ en B_u, són els escalars que acompanyen els vectors $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ que genera v_i:

$$\vec{v}_1 = 2\vec{u}_1 + (-1)\vec{u}_2 + 1\vec{u}_3 = (2, -1, 1)_{B_u}$$

$$\vec{v}_2 = 0\vec{u}_1 + (-1)\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3 = (0, -1, 2)_{B_u}$$

$$\vec{v}_3 = (-1)\vec{u}_1 + 1\vec{u}_2 + (-3)\vec{u}_3 = (-1, 1, -3)_{B_u}$$

Canvi de base

Solució

Per calcular les coordenades dels vectors de B_u en la base B_v, hem d'expressar els vectors $\vec{u}_i$ com a CL dels vectors $\vec{v}_i$. Notem que la relació de l'enunciat ens ho dona a l'inreves. Ens caldrà doncs aïllar les $\vec{u}_i$ en termes de les $\vec{v}_i$, cosa que podem fer emprant Gauss amb $\vec{u}_i$ com a incògnites i $\vec{v}_i$ termes independents. La solució un cop operat el sistema és

$$\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right), \vec{u}_2 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right), \vec{u}_3 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Canvi de base

Solució

Sabem que $\vec{x} = (1, -1, 0)_{B_v} = 1\vec{v}_1 + (-1)\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$,

$$\vec{x} = 1(2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3) + (-1)(-\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3) + 0(-\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 3\vec{u}_3)$$

$$= 2\vec{u}_1 - \vec{u}_3 = (2, 0, -1)_{B_u}$$

Canvi de base

Solució

Notem doncs que

$$2\vec{u}_1 - \vec{u}_3 = \vec{v}_1 + (-1)\vec{v}_2$$

Això vol dir que, si coneixem explícitament les coordenades de $\vec{v}_i$ i de $\vec{u}_i$ en la base canònica, i les substituim dins l'expressió anterior, obtindríem una igualtat: les coordenades del vector $\vec{x}$ en la base canònica.

Canvi de base

Exercici

Donades les bases $B_u = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ i $B_v = \{\vec{u}_v, \vec{u}_v, \vec{u}_v\}$ d'un espai vectorial de dimensió 3 i sabent que

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{v}_1 & = & 2\vec{u}_1 & - & \vec{u}_2 & + & \vec{u}_3 \\ \vec{v}_2 & = & & - & \vec{u}_2 & + & 2\vec{u}_3 \\ \vec{v}_3 & = & -\vec{u}_1 & + & \vec{u}_2 & - & 3\vec{u}_3 \end{array}\right.$$

Considereu el vector $\vec{x} = (2, 0, -1)_{B_u}$. Calculau les seves coordenades en la base B_v

Canvi de base

Solució

$$\vec{x} = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 =$$

$$a(2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3) + b(-\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3) + c(-\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 3\vec{u}_3) =$$

$$(2a - c)\vec{u}_1 + (-a - b - c)\vec{u}_2 + (a + 2b - 3c)\vec{u}_3$$

i hauria de ser

$$\vec{x} = 2\vec{u}_1 + 0\vec{u}_2 + (-1)\vec{u}_3$$

Resolent el sistema d'equacions lineals resultant d'igualar ambdues expressions (ja que les coordenades d'un vector en una base són úniques) obtenim

$$\vec{x} = (1, -1, 0)_{B_v} = (2, 0, -1)_{B_u}$$

Canvi de base

En els exercicis anteriors, hem vist que la notació per expressar les coordenades d'un vector es pot fer en forma de matriu fila o columna. Si coneixem les coordenades d'uns vectors en una base, podem emprar les operacions matricials ja conegudes per passar d'una base a una altra sense massa complexitat.

Canvi de base

Tenim els vectors de la base B_v en la base B_u donats per

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \vec{v}_1 & = & 2\vec{u}_1 & - & \vec{u}_2 & + & \vec{u}_3 \\ \vec{v}_2 & = & & - & \vec{u}_2 & + & 2\vec{u}_3 \\ \vec{v}_3 & = & -\vec{u}_1 & + & \vec{u}_2 & - & 3\vec{u}_3 \end{array}\right.$$

Canvi de base

Expressió que en forma matricial pren les formes (eq 1)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vec{u}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix}$$

En la matriu de dalt, les files son les coordenades dels vectors $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ i $\vec{v}_3$ en la base B_u. En la matriu de baix, les columnes son les coordenades dels vectors $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ i $\vec{v}_3$ en la base B_u.

Canvi de base

D'altra banda, podem expressar el vector $\vec{x}$ en ambdues bases de la següent manera:

$$\vec{x} = 1\vec{v}_1 + (-1)\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3 = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_v} = (1, -1, 0) \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = 2\vec{u}_1 + 0\vec{u}_2 + (-1)\vec{u}_3 = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{B_u} = (2, 0, -1) \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vec{u}_3 \end{pmatrix}$$

Canvi de base

Per unicitat com ja sabem, el resultat d'operar en ambdues expressions serien les coordenades del vector en la base canònica, per tant podem igualar les expressions:

$$\vec{x} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_v} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{B_u}$$

o

$$\vec{x} = (2, 0, -1) \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vec{u}_3 \end{pmatrix} = (1, -1, 0) \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{pmatrix}$$

$$2\vec{u}_1 - \vec{u}_3 = 1\vec{v}_1 + (1)\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3 \text{ (eq 2)}$$

Canvi de base

Emprant les relacions establertes a l'equació 1

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix}$$

i substituint-la dins l'equació 2,

$$\vec{x} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_v} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{B_u}$$

obtenim:

Canvi de base

obtenim:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_v} =$$

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{B_u}$$

i comparant ambdos membres, trobam que, per unicitat de coordenades d'un vector en una mateixa base (en aquest cas B_u)

Canvi de base

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{B_u}$$

Canvi de base

En general

Donat un vector $\vec{x}$ de coordenades X_v (vector columna) en la base B_v (vector fila) i coordenades X_u (vector columna) en la base B_u (vector fila) aleshores podem escriure

$$\vec{x} = B_v \cdot X_v = B_u \cdot X_u$$

Si la relació entre bases ve donada per $B_u \cdot P = B_v$ substituirem aquesta relació en l'expressió del vector $\vec{x}$:

$$\vec{x} = (B_u \cdot P) \cdot X_v = B_u \cdot X_u$$

Canvi de base

En general

emprant la propietat associativa

$$\vec{x} = B_u \cdot (P \cdot X_v) = B_u \cdot X_u$$

obtenim que $X_u = P \cdot X_v$

La matriu P s'anomena la matriu de canvi de la base B_v a la base B_u.

Canvi de base

$$B_v \xrightarrow{P} B_u$$

$$\boxed{B_v = B_u \cdot P}$$

$$\vec{x} = B_v \cdot X_v \quad = \quad B_u \cdot X_u$$

$$\vec{x} = \left(\overbrace{B_u \cdot P}^{B_v}\right) \cdot X_v \quad = \quad B_u \cdot X_u \qquad \boxed{X_u = P \cdot X_v}$$

Matriu de canvi de base

Matriu de canvi de base

Donat un espai vectorial de dimensió n i dues bases diferents B_u i B_v. S'anomena matriu de canvi de base de B_v a B_u a la matriu P les columnes de la qual són les coordenades dels elements de la base B_v en la base B_u.

Matriu de canvi de base

Exercici

Donades les bases $B_u = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ i $B_v = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ i el vector $\vec{x}$ de coordenades $(2,1,0)$ en la base B_v, calculau les seves coordenades en la base B_u sabent que

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \vec{v}_1 & = & 2\vec{u}_1 & - & \vec{u}_2 & + & \vec{u}_3 \\ \vec{v}_2 & = & & - & \vec{u}_2 & + & 2\vec{u}_3 \\ \vec{v}_3 & = & -\vec{u}_1 & + & \vec{u}_2 & - & 3\vec{u}_3 \end{array}\right.$$

Matriu de canvi de base

Sol

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

on $B_v = B_u \cdot P$

$$\vec{x} = (4, -3, 4)_{B_u}$$

Matriu de canvi de base

Exercici

Expressau el vector $(-1, 0, 4)$ de la base canònica en la base $B = \{(1, 3, -1), (-1, 1, 0), (0, 2, 0\}$ de $\mathbb{R}^3$ calculant prèviament la matriu de canvi de base necessària.

Pista: P és la matriu que porta de la base canònica a B, la qual té com a columnes els vectors de la base canònica expresants en la base B. Aquest problema és més senzill si cercam la matriu Q que porta de B a la base canònica (les seves columnes són els vectors de B en la base canònica que són ells mateixos) i que resulta ser la inversa de P.

Matriu de canvi de base

Sol

$$P = Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}$$

on $X_B = P \cdot X_e$

$$\vec{x} = \left(-4, -3, \frac{15}{2}\right)_B$$

Subespai Vectorial

Definició

Sigui $F \subseteq E$ un subconjunt no buid de l'espai vectorial E sobre un cos $\mathbb{K}$. Direm que F és un subespai vectorial de E si i només si es verifica:

- La suma de dos elements de F és un altre element de F

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in F \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in F$$

- El producte d'un escalar per un element de F és un altre element de F

$$\forall \vec{x} \in F, \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha \vec{x} \in F$$

Subespai Vectorial

Subespais trivials

Si E és un $\mathbb{K}$-espai vectorial, es verifica sempre que E i $\{0\}$ són subespais vectorials de E. S'anomenen subespais vectorials trivials o impropis.

Corolari

Si S és un subespai vectorial de E, aleshores $\vec{0} \in S$.

Aquest corolari es sol emprar de forma recíproca, ja que si es comprova que per alguna raó $\vec{0} \notin S$, aleshores aquest conjunt no pot ser mai un subespai vectorial.

Subespai Vectorial

Exercici

Comprovau que el següent conjunt és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$$

Nota: comprovau primer si F conté el vector zero i, si és que si, comprovau les dues condicions de la definició de subespai.

Subespai Vectorial

Equacions d'un subespai

Un subespai vectorial F d'un espai vectorial E queda identificat:

- Coneixent una base de F
- Coneixent un sistema generador de F
- A partir de les seves equacions paramètriques
- A partir de les equacions cartesianes o implícites (un sistema homogeni les incògnites del qual són les coordenades del vector genèric).

Subespai Vectorial

Exercici

Identificau el subespai F de l'exercici anterior de totes les formes possibles:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$$

Subespai Vectorial

Obtenir una base d'un subespai vectorial

- Partim de les equacions paramètriques del subespai
- Expressam el vector genèric com a combinació lineal de vectors
  - En primer lloc aconseguim tants sumands com paràmetres tingue el subespai i els separam en vectors diferents
  - Extreim l'escalar de cadascun dels vectors i ho deixam expressat com a combinació lineal.
- Els vectors que apareixen a la combinación lineal són un sistema generador del subespai.
- Extreim del conjunt de vectors, un subconjunt linealment independent amb tants de vectors com indiqui el rang. Ja tenim una base del subespai.

Subespai Vectorial

Exercici

Otenir dimensió, equacions paramètriques i una base del subespai F_1 donat per

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 3z = 0, -x + y - z = 0, x - 2y = 0\}$$

Pista: Començau per fer Gauss al sistema d'equacions lineals.

Exercici

Otenir dimensió, base i equacions implícites del subespai F_2 donat per

$$F_2 = \{(\alpha + \beta, \alpha + \beta, \alpha + \beta + \gamma, 0) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

Pista: Començau per fer Gauss al sistema d'equacions lineals.

Bases ortogonals i ortonormals

Base ortogonal

Donada una base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}$ d'un espai vectorial E, es diu ortogonal si els seus elements són ortogonals dos a dos:

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0 \forall i \neq j$$

Base ortonormal

Donada una base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}$ d'un espai vectorial E, es diu ortonormal si els seus elements són ortogonals dos a dos i a més unitaris:

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0 \ \forall i \neq j$$

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i = 1 \ \forall i$$

Mètode d'ortogonalització de Gram-Schmidt

Aquest mètode ens permet construir una base ortogonal a partir d'una base qualssevol de l'espai vectorial. Farem la construcció primer en el cas d'un espai vectorial de dues dimensions.

Mètode d'ortogonalització de Gram-Schmidt

Cas 2D

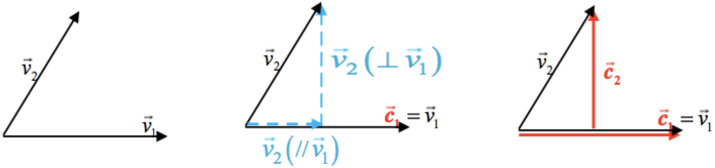
Sigui $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ una base d'un espai vectorial de dues dimensions. A partir dels vectors d'aquesta base en construirem una nova $B = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ que serà ortogonal del mateix espai.

1. Prenim $\vec{w}_1 = \vec{v}_1$ com a primer vector de la nova base.
2. El segon vector serà una combinació lineal $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ per assegurar-nos que la nova base genera el mateix subespai que la primera. Per això, descomponem

$$\vec{v}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 : \ \vec{u}_1 || \vec{v}_1 \quad \vec{u}_2 \perp \vec{v}_1$$

En particular $\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - t\vec{v}_1 = \vec{v}_2 - t\vec{w}_1$ i serà el segón vector de la nostra nova base: $\vec{w}_2$. Només ens cal trobar t.

Mètode d'ortogonalització de Gram-Schmidt



Mètode d'ortogonalització de Gram-Schmidt

Cas 2D

Volem que $\vec{w}_1 \perp \vec{w}_2$. Ho imposarem emprant la condició de que $\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - t\vec{w}_1$ producte escalar amb $\vec{w}_1 = \vec{v}_1$ ha de ser zero:

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = \vec{w}_1 \cdot (\vec{v}_2 - t\vec{w}_1) = \vec{w}_1 \cdot \vec{v}_2 - t\,\vec{w}_1\vec{w}_1 = 0$$

I per tant

$$t = \frac{\vec{w}_1 \cdot \vec{v}_2}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1}$$

$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{w}_1 \cdot \vec{v}_2}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1}\vec{w}_1$$

Aleshores $B_r = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ és una base ortogonal que genera el mateix subespai que $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

Mètode d'ortogonalització de Gram-Schmidt

Cas General

Sigui $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n\}$ una base d'un espai vectorial de n dimensions E. A partir dels vectors d'aquesta base en construirem una nova $B_r = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \cdots, \vec{w}_n\}$ que serà ortogonal del mateix espai.

1. Prenim $\vec{w}_1 = \vec{v}_1$ com a primer vector de la nova base.
2. El segon vector serà una combinació lineal $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ de la forma $\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - t\vec{w}_1$, al qual imposarem la condició que $\vec{w}_1 \perp \vec{w}_2$. Operant obtindrem
$$t = \frac{\vec{w}_1 \cdot \vec{v}_2}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1}$$
$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{w}_1 \cdot \vec{v}_2}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1}\vec{w}_1$$

Mètode d'ortogonalització de Gram-Schmidt

Cas General

Sigui $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n\}$ una base d'un espai vectorial de n dimensions E. A partir dels vectors d'aquesta base en construirem una nova $B_r = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \cdots, \vec{w}_n\}$ que serà ortogonal de E.

3. Per calcular el tercer vector, procedim de la mateixa forma: el tercer vector $\vec{w}_3$ serà una combinació lineal $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ i $\vec{v}_3$ de la forma $\vec{w}_2 = \vec{v}_3 - t_1\vec{w}_1 - t_2\vec{w}_2$, al qual imposarem les condicions $\vec{w}_1 \perp \vec{w}_3$ i $\vec{w}_2 \perp \vec{w}_3$. Operant obtindrem

$$t_1 = \frac{\vec{w}_1 \cdot \vec{v}_3}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1} \quad t_2 = \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{v}_2}{\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2}$$

$$\vec{w}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\vec{w}_1 \cdot \vec{v}_3}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1}\vec{w}_1 - \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{v}_3}{\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2}\vec{w}_2$$

Mètode d'ortogonalització de Gram-Schmidt

Cas General

4 Anàlogament

$$\vec{w}_4 = \vec{v}_4 - \frac{\vec{w}_1 \cdot \vec{v}_4}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1}\vec{w}_1 - \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{v}_4}{\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2}\vec{w}_2 - \frac{\vec{w}_3 \cdot \vec{v}_4}{\vec{w}_3 \cdot \vec{w}_3}\vec{w}_3$$

n I així fins el darrer

$$\vec{w}_n = \vec{v}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\vec{w}_i \cdot \vec{v}_n}{\vec{w}_i \cdot \vec{w}_i}\vec{w}_i$$

n+1 Finalment, si es desitja una base ortonormal, basta dividir cada vector per la seva norma.

Mètode d'ortogonalització de Gram-Schmidt

Exercici

Calculau una base ortogonal del subespai vectorial generat pels vectors

$$\vec{u}_1 = (1,1,0,1), \vec{u}_2 = (0,0,1,1), \vec{u}_3 = (2,0,-1,0)$$

Sol:

$$(1,1,0,1), \underline{(1,1,-3,-2)}, (1,-1,0,0)$$

está hecho $\times \underline{3}$

Vector ortogonal a un subespai

Vector ortogonal a un subespai

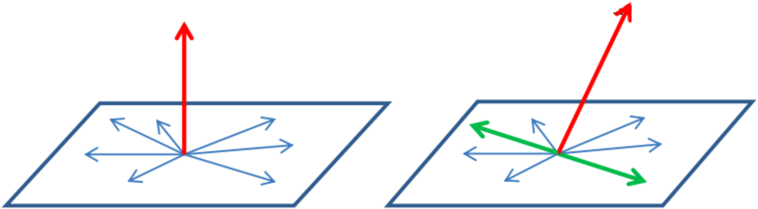
Un vector $\vec{u} \in E$ és ortogonal a un subespai vectorial $S \subseteq E$ si i només si

$$\vec{u} \cdot \vec{x} = 0 \ \forall \ \vec{x} \in S$$

Teorema

Un vector $\vec{u} \in E$ és ortogonal a un subespai vectorial $S \subseteq E$ si i només si és ortogonal a tots els vectors d'una base de S.

Projecció ortogonal d'un vector sobre un subespai



Vector ortogonal a un subespai

Teorema

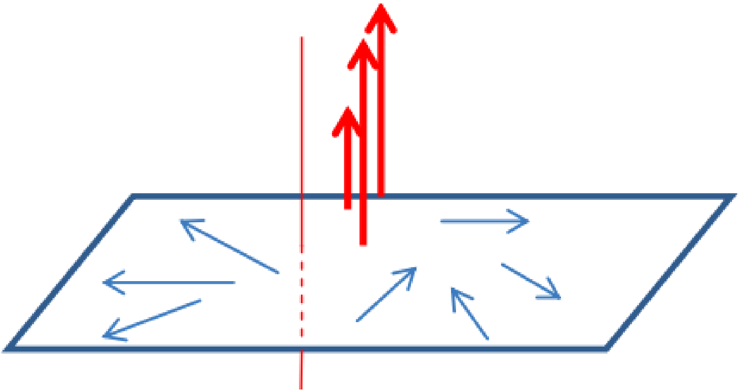
Dos subespais V i W de E són ortogonals si

$$\forall \vec{x} \in V \quad \forall \vec{y} \in W \Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

Teorema

Perque dos subesiapis V i W siguin ortogonals, és suficient que els vectors d'una base de V siguin ortogonals als vectors d'una base de W.

Projecció ortogonal d'un vector sobre un subespai



Projecció ortogonal d'un vector sobre un altre

Projecció ortogonal

Com recordam, el vector projecció ortogonal d'un vector $\vec{u}$ sobre un altre $\vec{v}$, s'expressa com

$$P_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{v}||^2}\vec{v}$$

Projecció ortogonal d'un vector sobre un subespai

Projecció ortogonal d'un vector sobre un subespai

Donat S un subespai vectorial d'un espai vectorial E, tot vector $\vec{u} \in E$ se descomposa de manera única en

$$\vec{u} = \vec{u}_S + \vec{u}_0$$

amb $\vec{u}_S \in S$ i $\vec{u}_0 \in S^\perp$. En particular, el vector $\vec{u}_S \in S$ s'anomena el vector projecció ortogonal de $\vec{u}$ sobre S.

Projecció ortogonal d'un vector sobre un subespai

Projecció ortogonal d'un vector sobre un subespai

Si prenim en S una base ortogonal $\{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \cdots, \vec{s}_r\}$, la projecció de $\vec{u}$ sobre S ve donada per

$$P_{\vec{u}}(\vec{v}) = \vec{u}_S = \sum_{i=1}^{r} \frac{\vec{u} \cdot \vec{s}_i}{||\vec{s}_i||^2} \vec{s}_i$$