≈ **ER 4.4** Calcular la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

$|A|=(-1)\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-2$ tiene inversa porque su determinante es distinto de 0

$$Adj(A)=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix} \qquad (Adj(A))^t=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1/2 & -1/2\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 1/2 & -1/2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1/2 & -1/2\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 1/2 & -1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

≈≈≈≈≈≈

≈ **ER 4.5** Calcular la inversa de $\begin{pmatrix}1 & -a & 0 & 0\\ 0 & 1 & -a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$|A|=1\cdot 1\cdot 1\cdot 1=1\neq 0$ tiene inversa porque su determinante es distinto de 0 para cualquier valor de a.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & -a & 0\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1 \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & -a & 0\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=0 \qquad A_{13}=0 \qquad A_{14}=0$$

$A_{21}=a \qquad A_{22}=1 \qquad A_{23}=0 \qquad A_{24}=0$

$A_{31}=a^2 \qquad A_{32}=a \qquad A_{33}=1 \qquad A_{34}=0$

$A_{41}=-a^3 \qquad A_{42}=-a^2 \qquad A_{43}=-a \qquad A_{44}=1$

$$Adj(A)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ a & 1 & 0 & 0\\ a^2 & a & 1 & 0\\ -a^3 & -a^2 & -a & 1\end{pmatrix}\longrightarrow (Adj(A))^t=\begin{pmatrix}1 & a & a^2 & -a^3\\ 0 & 1 & a & -a^2\\ 0 & 0 & 1 & -a\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & a & a^2 & -a^3\\ 0 & 1 & a & -a^2\\ 0 & 0 & 1 & -a\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Comprobación: $\begin{pmatrix}1 & a & a^2 & -a^3\\ 0 & 1 & a & -a^2\\ 0 & 0 & 1 & -a\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -a & 0 & 0\\ 0 & 1 & -a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

≈ **ER 4.6** Comprobar que la matriz $A=\begin{pmatrix} a & a^2-2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ tiene inversa para todo $\boldsymbol{a}$ y calcularla.

$|A| = a^2 - a^2 + 2 = 2 \neq 0$ tiene inversa porque su determinante es distinto de 0 para cualquier $\boldsymbol{a}$.

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} a & -1 \\ -(a^2-2) & a \end{pmatrix} \longrightarrow \left(Adj(A)\right)^t = \begin{pmatrix} a & -(a^2-2) \\ -1 & a \end{pmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a & -(a^2-2) \\ -1 & a \end{pmatrix}$$

Comprobación: $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a & -(a^2-2) \\ -1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a^2-2 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

5. CALCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ POR MENORES

D 5.1– MENOR ORDEN K DE UNA MATRIZ CUALQUIERA

Dada una matriz A tamaño mxn llamamos **menor de orden k** al **DETERMINANTE** de una matriz cuadrada de orden k obtenida al eliminar todas las filas menos k filas y todas las columnas menos k columnas.

Por ejemplo en la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -7 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ un **menor de orden 3** se obtendría tachando todas las filas menos 3 y todas las columnas menos 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -7 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Submatriz 3x3 **menor de orden 3**

En esta matriz se pueden formar menores de orden 1, 2, 3, y 4, nunca de mayor orden ya que el tamaño de la misma es 4x5 por lo que no existe ninguna matriz cuadrada de mayor tamaño que 4.

En general en una matriz mxn el orden de cualquier menor siempre será $\leq$ **mínimo entre "m" y "n".**

4.5 TEOREMA

El rango de una matriz es igual al **ORDEN** DEL MENOR NO NULO, DE MAYOR ORDEN de la matriz.

Es decir si dada una matriz, todos los posibles menores de orden 4 son nulos y hay uno de orden 3 no nulo, el rango de la matriz será 3.

En el caso de una matriz cuadrada cabe recordar que:

$|A| \neq 0$ $\Rightarrow$ **vectores columna (y fila) son L.I.** $\Rightarrow$ **rango $A=n$** $\Rightarrow$ **A invertible.**

En una matriz cualquiera un menor de orden k no nulo indicará un rango igual a k o mayor. Por eso hay que averiguar cuáles son los menores no nulos de mayor orden, **ese orden será el rango de la matriz.**

≈ **ER 5.1** Calcular todos los posibles menores de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Menores de orden 1: $|1|=1$ $\quad |2|=2$ $\quad |0|=0$ $\quad |3|=3$ $\quad |-2|=-2$ $\quad |-1|=-1$

Menores de orden 2: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=-8$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-1$ $\quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=-2$

Vemos que los tres menores de orden 2 son distintos de 0.

De orden 3 no hay.

los menores de **mayor orden posible** son los de orden **2**,

hay un menor de orden 2 **no nulo** (hay 3 pero basta que haya uno)

El **orden** del **menor no nulo** de **mayor orden** es **2**. Luego **el rango de A es 2**.

Por tanto podemos decir que rango A=r si existe en A un menor de orden r no nulo y

todos los menores de orden r+1 son nulos.

Ahora bien para calcular el rango no es necesario calcular todos los menores de A.

Veamos un algoritmo que simplifica este cálculo.

2. ALGORITMO PARA ORLAR

Si la matriz es nula el rango es 0.

Veamos el caso en que A no es la matriz nula. Realizaremos el algoritmo sobre un ejemplo concreto.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & 8 \\ 3 & 6 & -5 & -5 & -13 \end{pmatrix}$$

Tamaño 4x5 por lo tanto el rango como máximo valdrá 4.

1) Buscamos un menor de orden 1 no nulo

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & 8 \\ 3 & 6 & -5 & -5 & -13 \end{pmatrix}$$

$M_1=|1|\neq 0$ Como es distinto de 0 el rango será mayor o igual a 1.

2) Formamos menores de orden 2 **orlando** (completando) con las restantes filas y columnas hasta encontrar uno no nulo.

Orlamos M_1 con F2-C2 (equivale a decir que tachamos F3-F4-C3-C4-C5)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & 8 \\ 3 & 6 & -5 & -5 & -13 \end{pmatrix}$$

$M_2^1=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}=0$ ¿ Hay más menores orlados de orden 2 ? **SI**

Orlamos M_1 con F2-C3 (equivale a decir que tachamos F3-F4-C2-C4-C5)

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & \boxed{0} & 4 & -1 \\ \boxed{-2} & -4 & \boxed{0} & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & 8 \\ 3 & 6 & -5 & -5 & -13 \end{pmatrix} \qquad M_2^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

¿ Hay más menores orlados de orden 2 ? **SI**

Orlamos M_1 con F2-C4 (equivale a decir que tachamos F3-F4-C2-C3-C5)

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & \boxed{4} & -1 \\ \boxed{-2} & -4 & 0 & \boxed{4} & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & 8 \\ 3 & 6 & -5 & -5 & -13 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$$

Como hay un menor de orden 2 distinto de 0 el rango será mayor o igual a 2.

Tenemos asegurado el rango 2 pero como hay menores de orden 3 hay posibilidades de que sea 3.

3) Orlamos este menor M_2 de orden 2 no nulo y formamos menores de orden 3 orlando (completando) con las restantes filas y columnas para buscar un menor de orden 3 no nulo.

Orlamos M_2 con F3-C2 (equivale a decir que tachamos F4-C3-C5)

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & \boxed{4} & -1 \\ \boxed{-2} & -4 & 0 & \boxed{4} & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & 8 \\ 3 & 6 & -5 & -5 & -13 \end{pmatrix} \qquad M_3^1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 0$$

¿ Hay más menores orlados de orden 3 ? **SI**

Orlamos M_2 con F3-C3 (equivale a decir que tachamos F4-C2-C5)

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & \boxed{4} & -1 \\ \boxed{-2} & -4 & 0 & \boxed{4} & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & 8 \\ 3 & 6 & -5 & -5 & -13 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -7 \end{vmatrix} = -60 \neq 0 \Rightarrow$$

El rango es igual o mayor que 3.

Tenemos asegurado el rango 3 pero como hay menores de orden 3 hay posibilidades de que sea 3.

4) Orlamos este menor M_3 de orden 3 no nulo y formamos menores de orden 4 orlando (completando) con las restantes filas y columnas para buscar un menor de orden 4 no nulo.

Orlamos M_3 con F4-C2 (equivale a decir que tachamos C5)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & 8 \\ 3 & 6 & -5 & -5 & -13 \end{pmatrix}$$

$$M_4^1=\begin{vmatrix}1&2&0&4\\-2&-4&0&4\\0&0&5&-7\\3&6&-5&-5\end{vmatrix}\underset{F4\to F4+F3}{=}\begin{vmatrix}1&2&0&4\\-2&-4&0&4\\0&0&5&-7\\3&6&0&-12\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}1&2&4\\-2&-4&4\\3&6&-12\end{vmatrix}\underset{\begin{cases}F2\to F2+2F1\\F3\to F3-3F1\end{cases}}{=}5\begin{vmatrix}1&2&4\\0&0&12\\0&0&-24\end{vmatrix}=0$$

¿ Hay más menores orlados de orden 4 ? **SI**

Orlamos M_3 con F4-C5 (equivale a decir que tachamos C2)

$$\begin{pmatrix}\boxed{\mathbf{1}}&2&\mathbf{0}&\mathbf{4}&\mathbf{-1}\\\mathbf{-2}&-4&\mathbf{0}&\mathbf{4}&\mathbf{3}\\\mathbf{0}&0&\mathbf{5}&\mathbf{-7}&\mathbf{8}\\\mathbf{3}&6&\mathbf{-5}&\mathbf{-5}&\mathbf{-13}\end{pmatrix}\qquad M_4=\begin{vmatrix}1&0&4&-1\\-2&0&4&3\\0&5&-7&8\\3&-5&-5&-13\end{vmatrix}=0$$

¿Hay más menores orlados de orden 4 ? **NO.** Ya no quedan más filas o columnas que añadir.

Todos los menores orden 4 obtenidos orlando M_3 son nulos por tanto **el rango es 3**.

Si hubiese habido un menor de orden 4 no nulo el rango hubiese sido 4 ya que no hay menores de orden 5 porque la matriz solo tiene 4 filas.

En general en una matriz cuyo rango máximo es *r*, este proceso continuaría hasta

i) encontrar un menor no nulo de orden p (menor que r) cuyos menores orlados de orden p+1 fuesen todos nulos en cuyo caso diremos que el rango de la matriz es p.

ó

ii) encontrar un menor no nulo de orden *r* en cuyo caso diremos que el rango de la matriz es *r*.

≈ **ER 5.2.-** Calcula el rango de la matriz Q= $\begin{pmatrix}2&-1&0&1&3\\1&0&-1&2&3\\3&-1&-1&3&6\\5&-2&-1&4&9\end{pmatrix}$ por menores y orlando.

Como no es la matriz nula buscamos directamente un menor de orden 2 no nulo:

$$M_2=\begin{vmatrix}2&-1\\1&0\end{vmatrix}\neq 0\quad\Rightarrow\quad R\geq 2\qquad\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{-1}&0&1&3\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&-1&2&3\\3&-1&-1&3&6\\5&-2&-1&4&9\end{pmatrix}$$

Orlamos este menor buscando algún menor de orden 3 no nulo:

Orlamos con **fila 3 columna 3**: $\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{-1}&0&1&3\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&-1&2&3\\3&-1&-1&3&6\\5&-2&-1&4&9\end{pmatrix}$ $\quad M_3^1=\begin{vmatrix}2&-1&\mathbf{0}\\1&0&\mathbf{-1}\\\mathbf{3}&\mathbf{-1}&\mathbf{-1}\end{vmatrix}=0$

¿Hay más menores orlados de orden 3 ? **SI.**

Orlamos con **fila 3 columna 4**: $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & 0 & 1 & 3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ $M_3^2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & \mathbf{1} \\ 1 & 0 & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{vmatrix} = 0$

¿Hay más menores orlados de orden 3 ? **SI.**

Orlamos con **fila 3 columna 5**: $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & 0 & 1 & 3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ $M_3^3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & \mathbf{3} \\ 1 & 0 & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{6} \end{vmatrix} = 0$

¿Hay más menores orlados de orden 3 ? **SI.**

Orlamos con **fila 4 columna 3**: $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & 0 & 1 & 3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ $M_3^4 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & \mathbf{-1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \end{vmatrix} = 0$

¿Hay más menores orlados de orden 3 ? **SI.**

Orlamos con **fila 4 columna 4**: $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & 0 & 1 & 3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ $M_3^5 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & \mathbf{1} \\ 1 & 0 & \mathbf{2} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-2} & \mathbf{4} \end{vmatrix} = 0$

¿Hay más menores orlados de orden 3 ? **SI.**

Orlamos con **fila 4 columna 5**: $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & 0 & 1 & 3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ $M_3^6 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & \mathbf{3} \\ 1 & 0 & \mathbf{3} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-2} & \mathbf{9} \end{vmatrix} = 0$

¿Hay más menores orlados de orden 3 ? NO

Como hay un **menor de orden 2 no nulo** y **todos los orlados de orden 3 son 0**, el **RANGO es 2**

Observar que hay más menores de orden 3 que los que hemos calculado. pero solo es necesario obtener los orlados y la conclusión es válida igualmente.

≈≈≈≈≈≈

≈ **ER 5.3.-** Discutir el rango de la matriz R según valores del parámetro m por menores y orlando.

$$R = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ -1 & 2 & m \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & -2 \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & 8 \end{pmatrix}$$

Tamaño matriz $R: 4\text{x}3 \longrightarrow Rg \le 3$

Buscamos directamente un menor de orden 2 no nulo: $M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \ne 0 \quad \Rightarrow \quad Rg \ge 2$

Orlamos M_2 con **fila 2 columna 3**: $\begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ -1 & 2 & m \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & -2 \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & 8 \end{pmatrix}$

$$M_3^1 = \begin{vmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} & m \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{8} \end{vmatrix} \xrightarrow[F3\to\frac{1}{4}F3]{F1\to F1-2F2} = 4\begin{vmatrix} -1 & 0 & m+4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Por } C2} = 4\begin{vmatrix} -1 & m+4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4(-2-m-4) = 4(-m-6)$$

M_3^1 puede valer: $M_3^1 = 0$, $M_3^1 \neq 0$

1) $M_3^1 \neq 0$ si $m \neq -6$ menor de orden 3 no nulo $\Rightarrow Rg \geq 3$

Como la matriz no puede tener un rango mayor que 3 concluimos que $\boldsymbol{Rg = 3}$

2) $M_3^1 = 0$ si $m = -6$. Sustituyo este valor en la matriz $\begin{pmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & -2 \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & 8 \end{pmatrix}$

Y ahora volviendo al menor de orden no nulo M_2 lo orlamos si es posible con las demás filas y columnas.

Orlamos M_2 con **fila 1 columna 3:** $\begin{pmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & -2 \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & 8 \end{pmatrix}$

$$M_3^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{-6} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{8} \end{vmatrix} \xrightarrow[F3\to\frac{1}{4}F3]{F1\to F1-F2} = 4\begin{vmatrix} -6 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Por } C2} = 4\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Menor de orden 3 no nulo $\Rightarrow Rg \geq 3$

Como la matriz no puede tener un rango mayor que 3 concluimos que $\boldsymbol{Rg = 3}$

Esta matriz tiene rango 3 para todo valor de *m*.

6. APLICACIÓN DE LOS DETERMINANTES A LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

En el Tema 1 ya se hizo una introducción a los sistemas lineales y se estudió el método de eliminación Gaussiana para su resolución. Ahora utilizaremos el concepto de rango y su cálculo mediante determinantes para:

- discutir un sistema, es decir obtener el carácter que tiene sin necesidad de resolverlo y
- resolverlo en los casos de compatibilidad.

Para la discusión de sistemas nos basaremos en el teorema de Rouché-Frobenius.

D6.1 RANGO DEL SISTEMA

Es igual al rango de la matriz A del sistema.

Si le llamamos R_A, siempre se verifica que $R_A \leq \min(ne, ni)$ con ne, nº de ecuaciones y ni, nº de incógnitas.

4.6 TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS

Sea un sistema cuya matriz es A, con rango R_A y cuya matriz ampliada (A/B) tiene rango R_B.

La condición necesaria y suficiente para que el sistema sea compatible es que $R_A = R_B$

Además si coincide con el nº de incógnitas es determinado $R_A = R_B = n$

si es menor que el nº de incógnitas es indeterminado $R_A = R_B < n$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 8 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right)}_{R_A=3,\; R_B=3} \qquad \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 8 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)}_{R_A=2,\; R_B=3} \qquad \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 8 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{R_A=2,\; R_B=2}$$

Compatible determinado — Incompatible — Compatible indeterminado

≈ **ER 6.1:** Discutir el sistema:

$$\begin{cases} 6x - y + 3z = 6 \\ -6x + 8y = -10 \\ 2x - 5y - z = 4 \end{cases} \qquad (A/B) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 6 & -1 \\ -6 & 8 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 6 \\ -10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & -5 \end{matrix} & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} A\ (3x3) \Rightarrow R_A \leq 3 \\ (A/B)\ (3x4) \Rightarrow R_B \leq 3 \\ ni = 3 \end{cases}$$

Estudiamos el rango por menores y orlando: $M_1 = |6| \neq \mathbf{0} \Rightarrow R_A \geq 1$

Orlamos $M_1 \neq \mathbf{0}$ con F2-C2: $M_2 = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} \neq \mathbf{0} \Rightarrow R_A \geq 2$

Orlamos $M_2 \neq \mathbf{0}$ con F3-C3: $M_3 = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -6 & 8 & 0 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$ ¿Podemos orlar $M_2 \neq \mathbf{0}$ de más formas? **NO**

Por lo tanto $\boldsymbol{R_A = 2}$

Pasamos a estudiar el rango de la matriz ampliada teniendo en cuenta que:

a) $R_B = \begin{cases} R_A \ \text{ó} \\ R_A + 1 \end{cases}$ en este caso $R_B = \begin{cases} 2 \ \text{ó} \\ 3 \end{cases}$

debemos partir del menor $M_2 = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} \neq \mathbf{0}$ encontrado en la matriz A y que nos ha determinado

1) que el rango de A es 2 **2)** que el rango de la ampliada como mínimo es 2.

Por tanto: Orlamos M_2 con F3-C4 $\begin{vmatrix} 6 & -1 & 6 \\ -6 & 8 & -10 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{R_B = 3}$

Como $\boldsymbol{R_B \neq R_A}$ sistema incompatible.

≈≈≈≈≈≈≈

≈ **ER 6.2:** Dado el sistema $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$ con $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ y R_B es 2.

a) El sistema es incompatible
b) El sistema puede ser compatible o incompatible dependiendo del rango del sistema
c) El sistema es compatible y determinado
d) El sistema es compatible e indeterminado
Elige razonadamente una respuesta.

Hipótesis — Conclusiones

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ De esta afirmación podemos deducir que $R_A \geq 2$

$R_B = 2 \Rightarrow$ Como $R_A = \begin{cases} R_B \text{ ó} \\ R_B - 1 \end{cases} \Rightarrow R_A = \begin{cases} 2 \text{ ó} \\ 1 \end{cases}$

$\Longrightarrow R_A = 2$

De todo ello concluimos que $R_A = R_B = 2 < n^o\ incog = 3 \Longrightarrow$ **Sistema Comp. Indeterm.**

En el caso de los sistemas homogéneos al aplicar el teorema de R-F vemos que **siempre tienen solución** ya que la matriz ampliada se obtiene añadiendo a la del sistema una columna de ceros y por tanto nunca puede tener mayor rango.

Si el rango es igual al nº de incógnitas tendrá solución única

Si el rango es menor que el nº de incógnitas tendrá infinitas soluciones.

≈ **ER 6.3:** Discutir el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{array}\right\} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} A(3x3) \Rightarrow R_A \leq 3 \\ \text{ni} = 3 \end{cases}$$

Sistema homogéneo por tanto compatible $R_A = R_B$

Escogemos un menor de orden 2 no nulo: $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq \mathbf{0} \Rightarrow R_A \geq 2$

Orlamos $M_2 \neq \mathbf{0}$ con F3-C3: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$ ¿Podemos orlar $M_2 \neq \mathbf{0}$ de más formas en la matriz A? **NO**

Por lo tanto $R_A = 2 < \text{ni} = 3$ S. C. Indeterminado

≈ **ER 6.4:** Discutir el sistema:

$$\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+y+az=1 \\ 2x+y+z=a \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} A(3\times 3) \Rightarrow R_A \le 3 \\ (A/B)(3\times 4) \Rightarrow R_B \le 3 \\ \text{ni}=3 \end{cases}$$

Estudio del rango de A

Por ser cuadrada estudiamos su determinante que es el único menor de orden 3:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \underset{C2 \to C2-C3}{\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 1-a & a \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = (1-a)\begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1-a)\cdot(a-2)$$

Casos:

i) Si $a \neq 1,2 \Rightarrow R_A = 3$ Como $\begin{cases} R_B = 3 \text{ ó } 4 \\ R_B \le 3 \end{cases} \Rightarrow R_B = 3 \begin{cases} \mathbf{ni = 3} \\ \boldsymbol{R_A = 3} \\ \boldsymbol{R_B = 3} \end{cases}$ $\mathbf{ni} = \boldsymbol{R_A} = \boldsymbol{R_B}$ **Comp. Det.**

ii) Si $a=1$ sustituimos $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Estudio del rango de A:

Elegimos un menor de orden 2 no nulo: $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{R_A} \ge \mathbf{2}$

Orlando $M_2 \neq \mathbf{0}$ con F1 C3 obtendríamos el único menor de orden 3 que es $|A|$ que vale 0 $\Rightarrow R_A = 2$

Estudio del rango de B: Sabemos que $R_B = \begin{cases} 2 \text{ ó} \\ 3 \end{cases}$

Debemos partir del menor de orden 2 no nulo ya encontrado en la matriz A: $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq \mathbf{0}$

Orlamos $M_2 \neq \mathbf{0}$ con F1 **C4:** $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$ ¿Podemos orlar $M_2 \neq \mathbf{0}$ de más formas en A/B? **NO**

Por lo tanto $R_B = R_A = 2 < \text{ni} = 3$ S. C. Indeterminado

iii) Si $a=2$ sustituimos $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Estudio del rango de A:

Elegimos un menor de orden 2 no nulo: $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{R_A} \ge \mathbf{2}$

Orlando $M_2 \neq \mathbf{0}$ con F1 C3 obtendríamos el único menor de orden 3 que es $|A|$ que vale 0 $\Rightarrow$ $R_A = 2$

Estudio del rango de B: Sabemos que $R_B = \begin{cases} 2 \text{ ó} \\ 3 \end{cases}$

Debemos partir del menor de orden 2 no nulo ya encontrado en la matriz A: $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq \mathbf{0}$

Orlamos $M_2 \neq \mathbf{0}$ con F1 **C4:** $M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq \mathbf{0} \Rightarrow R_B = 3$

$F1 \to F1 - F2$
$F3 \to F3 - F2$

$R_A = 2 \neq R_B = 3$ S. Incompatible

7. SISTEMAS DE CRAMER

D7.1– SISTEMAS DE CRAMER

Un sistema $AX = B$ se dice regular o de Cramer si $\boldsymbol{R_A} = \boldsymbol{ni} = ne$ siendo

$\boldsymbol{R_A}$: rango del sistema ni: nº de incógnitas, ne: nº de ecuaciones,

Como en los sistemas de Cramer el nº de ecuaciones es igual al nº de incógnitas dichos sistemas tienen matrices cuadradas (ne=ni) y con rango igual a ni.

Ejemplo: Discutir y resolver el sistema $\left.\begin{array}{r} 2x+3y-z=6 \\ x-5y+2z=-4 \\ 3x+2y-3z=-6 \end{array}\right\} \to \begin{cases} ne = ni = 3 \\ A\ (3x3) \quad \Rightarrow \mathrm{R_A} \leq 3 \\ (A/B)\ (3x4) \Rightarrow \mathrm{R_B} \leq 3 \end{cases}$

$|A| \neq \mathbf{0} \Rightarrow R_A = 3$ Como $\mathrm{R_B} \leq 3$ y $R_A = 3 \Rightarrow R_A = R_B = ni$

Es un sistema de Cramer y es compatible y determinado.

Es decir que **cualquier sistema de Cramer es compatible y además también será determinado.**

Lo que le confiere sus características de compatibilidad a un sistema de Cramer es que $\boldsymbol{R_A} = \boldsymbol{R_B} = \boldsymbol{ni}$

En general si tenemos un sistema de Cramer con n ecuaciones, n incógnitas (ne=ni) rango de $A = n$, (al ser la matriz ampliada de tamaño n x(n +1) su rango máximo será n y por ser $\boldsymbol{R_A} = \boldsymbol{n}$ también será su rango mínimo, por tanto $\boldsymbol{R_A} = \boldsymbol{R_B} = \boldsymbol{n}$ y por el teorema de Rouché-Frobenius será un sistema compatible y determinado.

4.7 TEOREMA DE CRAMER

Un sistema regular admite solución única dada por:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad i = 1,2,\dots n \ \ donde\ \Delta = \det(A_1, A_2, \dots A_n) \text{ y } \Delta_i = \det\left(A_1, \dots, \overset{\overset{i}{\downarrow}}{B}, \dots A_n\right)$$

Dado el sistema $\left.\begin{matrix} 2x+3y-z=6 \\ x-5y+2z=-4 \\ 3x+2y-3z=-6 \end{matrix}\right\}$ $\begin{cases} ne=ni=3 \\ A\ (3x3) \\ (A/B)\ (3x4) \end{cases}$ $|A|\neq 0 \Rightarrow ne=ni=R_A=3$

Es un sistema de Cramer.

Observemos que la matriz del sistema es cuadrada con determinante no nulo, por lo tanto es invertible.

Para obtener la solución del sistema podremos despejar el vector X de la ecuación $AX=B$ premultipli–cando ambos miembros de la ecuación por la inversa de A.

$A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}B$ y como ya sabemos que $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}(AdjA)^t$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1=\frac{1}{|A|}\left(A_{11}b_1+A_{21}b_2+A_{31}b_3\right)$$

$$x_2=\frac{1}{|A|}\left(A_{12}b_1+A_{22}b_2+A_{32}b_3\right)$$

$$x_3=\frac{1}{|A|}\left(A_{13}b_1+A_{23}b_2+A_{33}b_3\right)$$

Observemos que si el determinante de la matriz A lo desarrollamos

por la columna 1

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31}$$

por la columna 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = b_1A_{12}+b_2A_{22}+b_3A_{32}$$

por la columna 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = b_1A_{13}+b_2A_{23}+b_3A_{33}$$

Luego $x_1=\dfrac{1}{|A|}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\quad x_2=\dfrac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$ $\quad x_3=\dfrac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$

≈ **ER 7.1:** Discutir y resolver el sistema: $\left.\begin{matrix} 2x+3y-z=6 \\ x-5y+2z=-4 \\ 3x+2y-3z=-6 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} ne=ni=3 \\ A\ (3x3) \quad \Rightarrow \mathrm{R_A}\leq 3 \\ (A/B)\ (3x4) \Rightarrow \mathrm{R_B}\leq 3 \end{cases}$

$|A|\neq \mathbf{0} \ \Rightarrow\ R_A=3$ Como $\mathrm{R_B}\leq 3$ y $R_A=3 \ \Rightarrow\ R_A=R_B=ni$

Es un sistema de Cramer y es compatible y determinado.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} A\ (3x3) \quad \Rightarrow R_A\leq 3 \\ (A/B)\ (3x4) \Rightarrow R_B\leq 3 \\ ni=3 \end{cases} \quad |A|\neq 0 \ \Rightarrow\ R_A=R_B=ni=3$$

Por teorema de Cramer la solución se calcula:

$$x=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}6&3&-1\\-4&-5&2\\-6&2&-3\end{vmatrix}=1 \quad y=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}2&6&-1\\1&-4&2\\3&-6&-3\end{vmatrix}=3 \quad z=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}2&3&6\\1&-5&-4\\3&2&-6\end{vmatrix}=5 \quad \text{siendo} \quad \Delta=\begin{vmatrix}2&3&-1\\1&-5&2\\3&2&-3\end{vmatrix}$$

≈≈≈≈≈≈≈

≈ **ER 7.2:** Resolver el sistema

$$\begin{cases}x+2y-z=10\\2x-4y-2z=5\\x+y+z=6\end{cases} \qquad (A/B)=\begin{pmatrix}1&2&-1&10\\2&-4&-2&5\\1&1&1&6\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}A\ (3x3)\ \Rightarrow R_A\le 3\\(A/B)\ (3x4)\Rightarrow R_B\le 3\\ni=3\end{cases}\rightarrow\ |A|=-16$$

$$\left.\begin{array}{l}|A|\neq 0\ \Rightarrow\ R_A=3\\ \text{Como } R_B\le 3\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ R_B=3$$

Luego $R_A=R_B=ni=3$ Sistema de Cramer $\rightarrow$ Compatible y determinado:

$$x=\frac{1}{-16}\begin{vmatrix}10&2&-1\\5&-4&-2\\6&1&1\end{vmatrix}=\frac{83}{16} \qquad y=\frac{1}{-16}\begin{vmatrix}1&10&-1\\2&5&-2\\1&6&1\end{vmatrix}=\frac{15}{8} \qquad z=\frac{1}{-16}\begin{vmatrix}1&2&10\\2&-4&5\\1&1&6\end{vmatrix}=-\frac{17}{16}$$

≈≈≈≈≈≈≈

≈ **ER 7.3:** Discutir y resolver el sistema:

$$\begin{cases}x+2y+2z=2\\3x-2y-z=5\\2x-5y+3z=-4\\x+4y+6z=0\end{cases} \qquad (A/B)=\begin{pmatrix}1&2&2&2\\3&-2&-1&5\\2&-5&3&-4\\1&4&6&0\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}A\ (4x3)\ \Rightarrow R_A\le 3\ \ (1)\\(A/B)\ (4x4)\Rightarrow R_B\le 4\ \ (2)\\ni=3\end{cases}$$

Estudio del rango de A:

Escogemos un menor de orden 2 no nulo: $M_2=\begin{vmatrix}1&2\\3&-2\end{vmatrix}\neq\mathbf{0}\ \Rightarrow\ R_A\ge 2$

Orlamos $M_2\neq\mathbf{0}$ con F3-C3: $M_3^1=\begin{vmatrix}1&2&2\\3&-2&-1\\2&-5&3\end{vmatrix}\neq 0\ \Rightarrow\ R_A\ge 3$ Por (1) $R_A=3$

Estudio del rango de B: Sabemos que $R_B=\begin{cases}3\ \text{ó}\\4\end{cases}$

Debemos partir del menor $M_3^1\neq 0$ ya encontrado en la matriz A

Por tanto: Orlamos $M_3^1\neq 0$ con F4-C4 $\begin{vmatrix}1&2&2&2\\3&-2&-1&5\\2&-5&3&-4\\1&4&6&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\3&-8&-7&-1\\2&-9&-1&-8\\1&2&4&-2\end{vmatrix}=\mathbf{0}$

$R_B=3\ \Leftarrow$ ¿Podemos orlar $M_3^1\neq 0$ de más formas en A/B? **NO**

$R_A=R_B=ni=3$ S. C. Determinado

Para obtener un sistema equivalente he de elegir ecuaciones e incógnitas tales que **el rango del sistema sea 3**: Elegiré todas aquellas que formaban parte del menor de orden 3 no nulo:

$$M_3^1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$ Sistema equivalente de Cramer: $$\begin{cases} x+2y+2z=2 \\ 3x-2y-z=5 \\ 2x-5y+3z=-4 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \\ -4 & -5 & 3 \end{vmatrix}}{-55} = \mathbf{2} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix}}{-55} = \mathbf{1} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & -5 & -4 \end{vmatrix}}{-55} = \mathbf{-1}$$

≈≈≈≈≈≈≈

≈ **ER 7.4:** Discutir y resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y-z=0 \\ x+2y+z=0 \\ 3x+y-2z=0 \end{array}\right\}$$ S. homogéneo $R_A = R_B \Rightarrow$ compatible $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} A(3x3) \Rightarrow R_A \leq 3 \\ \text{ni} = 3 \end{cases}$

Escogemos un menor de orden 2 no nulo: $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq \mathbf{0} \Rightarrow R_A \geq 2$

Orlamos $M_2 \neq \mathbf{0}$ con F3-C3: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$ ¿Hay más menores......en la matriz A? **NO**

Por lo tanto $R_A = R_B = 2 < ni = 3$ **S. C. Indeterminado**

Sistema equivalente: Para obtenerlo se han de elegir ecuaciones e incógnitas tales que el rango del sistema sea 2, por ejemplo todas aquellas que formaban parte del menor de orden 2 no nulo:

$$\begin{cases} 2x+y=z \\ x+2y=-z \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \Delta = 3 \quad x = \begin{vmatrix} z & 1 \\ -z & 2 \end{vmatrix} \frac{1}{3} = \mathbf{z} \quad y = \begin{vmatrix} 2 & z \\ 1 & -z \end{vmatrix} \frac{1}{3} = \mathbf{-z} \quad \begin{cases} x = \mathbf{z} \\ y = \mathbf{-z} \\ z = \mathbf{z} \end{cases}$$

≈≈≈≈≈≈≈

≈ **ER 7.5:** Discutir y resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-4y+3z-s+2t=0 \\ 3x-6y+5z-2s+4t=0 \\ 5x-10y+7z-3s+t=0 \end{array}\right\}$$ S. homogéneo $R_A = R_B \Rightarrow$ compatible $\text{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 5 & -2 & 4 \\ 5 & -10 & 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Escogemos un menor de orden 2 no nulo: $M_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{vmatrix} \neq \mathbf{0} \Rightarrow R_A \geq 2$

Orlamos $M_2 \neq \mathbf{0}$ con F3-C4: $M_3 = \begin{vmatrix} -4 & 3 & -1 \\ -6 & 5 & -2 \\ -10 & 7 & -3 \end{vmatrix} \neq \mathbf{0} \Rightarrow R_A \geq 3$ Por (1) $R_A = 3$

Como $R_A = 3 < \text{ni} = 5$ **S. C. Indeterminado**

Sistema equivalente:

Para obtener un sistema equivalente he de elegir ecuaciones e incógnitas tales que el rango del sistema sea 3: Elegiré todas aquellas que formaban parte del menor de orden 3 no nulo:

Vemos que dos de las incógnitas pasan al término independiente como parámetro:

$$\left\{\begin{array}{lcl} -4y+3z-s &=& -2x-2t \\ -6y+5z-2s &=& -3x-4t \\ -10y+7z-3s &=& -5x-t \end{array}\right\} \qquad \begin{vmatrix} -4 & 3 & -1 \\ -6 & 5 & -2 \\ -10 & 7 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

$$y=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2(x+t) & 3 & -1 \\ -3x-4t & 5 & -2 \\ -5x-t & 7 & -3 \end{vmatrix} = \frac{x-5t}{2} \qquad z=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & -2(x+t) & -1 \\ -6 & -3x-4t & -2 \\ -10 & -5x-t & -3 \end{vmatrix} = -5t$$

$$s=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & 3 & -2(x+t) \\ -6 & 5 & -3x-4t \\ -10 & 7 & -5x-t \end{vmatrix} = -3t \qquad \left\{\begin{array}{l} x=x \\ y=\dfrac{x-5t}{2} \\ z=-5t \\ t=t \\ s=-3t \end{array}\right.$$

8. CALCULO DEL PRODUCTO VECTORIAL

Habíamos visto en el tema 1 que si $\vec{u},\vec{v}\in R^3$ con componentes $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ su producto vectorial era otro vector que se expresa $\vec{u}\wedge\vec{v}=(u_2v_3-u_3v_2,u_3v_1-u_1v_3,u_1v_2-u_2v_1)$

Recordemos también que habíamos demostrado que el vector $\vec{u}\wedge\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$

Si (O;*i,j,k*) es un sistema de referencia ortonormal, con $\vec{i}=(1,0,0)$ $\vec{j}=(0,1,0)$ $\vec{k}=(0,0,1)$ y expresamos los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ como combinación lineal de $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$:

$$\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)=u_1(1,0,0)+u_2(0,1,0)+u_3(0,0,1) \quad\Rightarrow\quad \vec{u}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$$

Análogamente para $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)=v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k}$ y para

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=(u_2v_3-u_3v_2,u_3v_1-u_1v_3,u_1v_2-u_2v_1)=(u_2v_3-u_3v_2)\vec{i}+(u_3v_1-u_1v_3)\vec{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}$$

$$=\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

Teniendo en cuenta el desarrollo de un determinante esta expresión **se suele escribir de la forma siguiente para recordarla mejor**: $(\vec{u}\wedge\vec{v})=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

9. CALCULO DEL PRODUCTO MIXTO

Recordemos que si $\vec{u},\ \vec{v}, \vec{w} \in R^3$ todos ellos distintos del vector $\vec{0}$ su producto mixto es un **número real** que se expresa $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ y se calcula $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (u_1, u_2, u_3) \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (u_1, u_2, u_3) \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} =$$

$$(u_1, u_2, u_3) \left[\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_3 & v_1 \\ w_3 & w_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right] = u_1 \cdot \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} + u_2 \cdot \begin{vmatrix} v_3 & v_1 \\ w_3 & w_1 \end{vmatrix} + u_3 \cdot \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \quad \textbf{(1)}$$

Observar que si realizamos el determinante $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$ el resultado que obtendremos es **(1)**

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = u_1 \cdot \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} + u_2 \cdot \left(- \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \right) + u_3 \cdot \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$ **desarrollando por Fila 1**

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = u_1 \cdot \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} + u_2 \cdot \begin{vmatrix} v_3 & v_1 \\ w_3 & w_1 \end{vmatrix} + u_3 \cdot \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$

Luego $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$ Si este determinante es 0 quiere decir que los tres vectores son L.D.

Si este determinante es 0 quiere decir el producto mixto es 0 y como este producto (en valor absoluto) representa el volumen del paralelepípedo formado por los vectores, si ese volumen es 0 querrá decir que los 3 vectores son coplanarios (No forman ningún paralelepípedo).

Resultado que coincide con lo que ya sabíamos. Tres vectores coplanarios son L.D. Como máximo podrán tener rango 2.

Este hecho nos recuerda el caso del producto vectorial y el área del paralelogramo que forman los vectores. Si ese área es 0 quiere decir que los vectores que lo forman son paralelos (no hay paralelogramo) la norma del producto vectorial es 0 y por tanto el producto vectorial es el vector nulo. Calcular el producto vectorial de dos vectores es una forma de saber si son paralelos (L.D., rango 1); calcular el producto mixto de 3 vectores es una forma de saber si son coplanarios (L.D., rango 2)