ÀLGEBRA LINEAL I MATEMÀTICA DISCRETA

Curs 2014-15

Capítol 1

Matrius i determinants

Treballarem principalment amb matrius de nombres reals o matrius sobre $\mathbb{R}$, però es pot treballar també amb matrius sobre un cos qualsevol, com els nombres complexos $\mathbb{C}$, els racionals $\mathbb{Q}$, els cossos finits $\mathbb{Z}/p$, etc. De fet, donarem les definicions sobre un cos general i particularitzarem a $\mathbb{R}$ quan faci falta.

1.1 Tipus de matrius i propietats bàsiques

Definició 1. *Siguin* $(\mathbb{K}, +, .)$ *un cos commutatiu i* $m, n \geq 1$ *enters. Una* matriu $m \times n$ *sobre* $\mathbb{K}$ *(o d'*ordre $m \times n$ *sobre* $\mathbb{K}$*) és una taula formada per elements de* $\mathbb{K}$ *disposats en* m *files i* n *columnes de la forma*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \textit{amb } a_{ij} \in \mathbb{K};\ i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n$$

Cada a_{ij} *s'anomena* terme, coeficient *o* entrada *de la matriu* A. *El primer subíndex,* i, *indica el número de la fila i el segon,* j, *el de la columna que ocupa el terme dins la matriu.*

Denotarem per $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ el conjunt de totes les matrius d'ordre $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$. Una matriu qualsevol de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ la denotarem indistintament per A, per $(a_{ij})_{m\times n}$ o simplement per (a_{ij}). Quan $m = n$, el conjunt de totes les matrius d'ordre $n \times n$ es denota simplement per $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (aquestes matrius s'anomenen matrius quadrades com veurem tot seguit i sovint es diu que són d'ordre n en comptes de $n \times n$).

Definició 2. *(Igualtat de matrius)*

Dues matrius del mateix ordre $m \times n$, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *i* $B = (b_{ij})_{m\times n}$ *són iguals si* $a_{ij} = b_{ij}$ $\forall i = 1, \ldots, m$, $\forall j = 1, \ldots, n$.

Tipus de Matrius

- Es denomina *matriu fila* a tota matriu que consta d'una única fila.

$$A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{K}).$$

- Es denomina *matriu columna* a tota matriu que consta d'una única columna.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K}).$$

- Es denomina *matriu quadrada* d'ordre n a tota matriu que consta de n files i n columnes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

  Dins l'àmbit de les matrius quadrades podem donar les següents definicions i tipus particulars de matrius.

  - Es denomina *diagonal (principal)* d'una matriu quadrada A als elements a_{ii} per a $i = 1, \dots, n$.

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \mathbf{a_{nn}} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

  - Una *matriu diagonal* és aquella en la qual $a_{ij} = 0$ sempre que $i \neq j$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

  - Una *matriu escalar* és una matriu diagonal en la qual $a_{ii} = \lambda$, $\forall i = 1, \dots, n$.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

– S'anomena *matriu unitat* o *matriu identitat* d'ordre n la matriu escalar en la qual tots els elements de la diagonal són uns. Es denota per I_n.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

– S'anomena matriu *triangular superior* a tota matriu en la qual $a_{ij} = 0$ $\forall i > j$ (tots els elements situats per davall de la diagonal principal són nuls).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

– S'anomena matriu *triangular inferior* a tota matriu en la qual $a_{ij} = 0$ $\forall i < j$ (tots els elements situats per damunt de la diagonal principal són nuls).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Per a matrius en general (no necessàriament quadrades) mantendrem la notació de matriu triangular superior com aquella en la qual $a_{ij} = 0$ $\forall i > j$. Més endavant estudiarem amb detall un tipus especial d'aquestes matrius (les matrius escalonades) que tendran un paper primordial en el nostre estudi. Les matrius triangulars superiors, en el cas de matrius no quadrades, corresponen als següents casos depenent de si $m < n$ o $n < m$ respectivament:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2m} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{mm} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- Notarem per O la matriu nul.la, matriu amb tots els coeficients nuls.

Operacions amb matrius

- **Suma:** La suma de dues matrius A i B només és possible si ambdues són del mateix ordre $m \times n$ i aleshores se sumen terme a terme. És a dir, donades $A = (a_{ij})_{m\times n}$ i $B = (b_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, es defineix la suma de A i B com la matriu $C = (c_{ij})_{m\times n}$, on $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $\forall i = 1, \dots, m$, $\forall j = 1, \dots, n$.

- **Producte per un escalar:** Siguin $a \in \mathbb{K}$ i $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, es defineix el producte aA com una nova matriu d'ordre $m \times n$ donada per $aA = (a \cdot a_{ij})_{m\times n}$.

- **Producte de matrius:** Per poder realitzar el producte d'una matriu A per una matriu B, el nombre de columnes de A ha de coincidir amb el nombre de files de B i aleshores cada entrada " ij " de la matriu producte s'obté multiplicant la fila i de A per la columna j de B. Concretament, si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ i $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, el producte AB és una matriu $C \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ definida com:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3j} & \cdots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = (c_{ij})$$

  on $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

  Notem que $A_{m\times \underline{n}} \cdot B_{\underline{n}\times p} = C_{m\times p}$.

Propietats

Sempre que tenguin sentit les operacions indicades (és a dir, les matrius siguin dels ordres adequats per poder realitzar-les) se satisfan les següents propietats:

1. $A + B = B + A$ (*commutativa*)

2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (*associativa*)

3. $A + O = O + A = A$ (*element neutre de la suma o element nul*)

4. $\forall A = (a_{ij})_{m\times n}$ existeix $-A = (-a_{ij})_{m\times n}$ tal que $A + (-A) = (-A) + A = O$ (*matriu oposada*)

5. $(AB)C = A(BC)$ (*associativa*)

6. $A(B + C) = AB + AC$ (*distributiva* del producte respecte de la suma)

7. $AI_n = A$ i $I_nB = B$ (*element neutre del producte o element unitat*)
8. $a(B + C) = aB + aC$, $a \in \mathbb{K}$ (*distributiva* del producte per escalars respecte de la suma)
9. $1A = A$, $1 \in \mathbb{K}$
10. $(a + b)C = aC + bC$, $a, b \in \mathbb{K}$
11. $(ab)C = a(bC)$, $a, b \in \mathbb{K}$
12. $a(BC) = (aB)C$, $a \in \mathbb{K}$

Detallam el que vol dir que les operacions tenguin sentit en els casos 5 i 7 que són els més complexos.

5. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ i $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$. Llavors es pot realitzar el producte AB i donarà una matriu $m \times p$ que es podrà multiplicar per C i el producte $(AB)C$ serà una mtriu $m \times q$. Anàlogament, es pot realitzar el producte BC que donarà una matriu $n \times q$ i es pot realitzar també el producte $A(BC)$ que donarà una matriu $m \times q$. Aleshores, la propietat diu que
$$A(BC) = (AB)C \in \mathcal{M}_{m\times q}(\mathbb{K}).$$

   Exemple 3. *Si consideram les matrius amb coeficients en* $\mathbb{R}$*:* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *i* $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$*, tenim que:*
$$(AB)C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   i
$$A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ i $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, llavors es poden realitzar els productes AI_n (que serà una matriu $m \times n$) i I_nB (que serà una matriu $n \times p$) i es verifica $AI_n = A$ i $I_nB = B$.

   Exemple 4. *Si consideram les matrius amb coeficients en* $\mathbb{R}$*:* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *i* $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$*, tenim que:*
$$AI_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A \quad i \quad I_3B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Notau que, en particular, per a matrius quadrades $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, I_n és un element neutre pel producte, és a dir, $AI_n = I_nA = A$ per a tota matriu quadrada A d'ordre n.

No es compleixen, en general, les següents propietats:

- Commutativa. La multiplicació no és commutativa:
  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- No és vàlida la llei de simplificació:
  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ satisfan $AB = AC$ i $B \neq C$

- $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ o $B = 0$ (és a dir, hi ha divisors de zero):
  $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$, $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ i $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Proposició 5. *Siguin A, B matrius quadrades d'ordre n.*

- *Si A i B són matrius diagonals amb diagonals $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ i $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{nn}$ respectivament, llavors A i B commuten i la matriu producte $AB = BA$ també és diagonal amb diagonal $a_{11}b_{11}, a_{22}b_{22}, \ldots, a_{nn}b_{nn}$.*

- *Si A i B són matrius triangulars superiors (inferiors) llavors el producte AB és també una matriu triangular superior (inferior).*

Una altra operació important en matrius és la transposició.

Definició 6. *(Transposada d'una matriu) Sigui $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. S'anomena* transposada *de la matriu A, i es denota per A^t, la matriu $A^t = (a_{ji})_{n\times m}$. És a dir, la matriu obtinguda a partir de A intercanviant files per columnes.*

Exemple 7. *La transposada de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ és $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.*

Entre les propietats d'aquesta nova operació podem destacar les següents.

1. $(A^t)^t = A$ per a tota matriu A.

2. Si A i B són matrius del mateix ordre $m \times n$, llavors $(A + B)^t = A^t + B^t$. És a dir, la transposada d'una suma de matrius és la suma de les respectives transposades. El resultat es pot generalitzar a r sumands i tenim que si A_i són totes del mateix ordre llavors

$$(\sum_{i=1}^{r} A_i)^t = \sum_{i=1}^{r} A_i^t$$

3. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ i $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, llavors la transposada del producte de A per B és el producte de transposades però amb ordre canviat. És a dir, $(AB)^t = B^t A^t \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{K})$.

Per acabar aquesta secció, tornem a les matrius quadrades amb unes quantes definicions més. Primer notem que la transposició, en el cas de matrius quadrades és una operació interna, és a dir, la transposada d'una matriu quadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ és una altra matriu quadrada $A^t \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Aleshores tenen sentit les següents definicions.

Definició 8. *Sigui $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriu quadrada. Direm que*

- *A és* simètrica *si coincideix amb la seva transposada, la qual cosa fa que la matriu sigui simètrica respecte de la seva diagonal.*

$$A \text{ és simètrica} \iff A = A^t \iff a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j$$

- *A és* antisimètrica *si la seva oposada i la seva transposada coincideixen, la qual cosa fa que la diagonal de A sigui tota de zeros i els elements simètrics respecte de la diagonal siguin oposats un de l'altre.*

$$A \text{ és antisimètrica} \iff A^t = -A \iff a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i, j$$

- *A és* invertible *o* regular *si existeix una altra matriu quadrada $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.*[1] *Quan existeix aquesta matriu A^{-1} és sempre única amb la propietat esmentada i s'anomena la matriu* inversa *de A.*

- *A és* singular *si no té inversa, és a dir, quan no és regular.*

- *A és* ortogonal *si és regular i a més a més la seva inversa coincideix amb la seva transposada. Dit d'una altra manera,*

$$A \text{ és ortogonal} \iff AA^t = A^t A = I_n.$$

Es verifica el següent resultat respecte de matrius inverses.

Proposició 9. *Siguin $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Llavors si A i B són invertibles també ho és el seu producte i $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Amb les operacions anteriors tenim el que s'anomena àlgebra de matrius perquè amb elles es pot realitzar l'habitual manipulació algebraica d'equacions amb matrius igual que amb nombres reals tenint cura amb les propietats que no es verifiquen (com les esmentades anteriorment). Per exemple, en una equació amb

[1]Notem que no basta dir només $AA^{-1} = I_n$ (o només $A^{-1}A = I_n$) ja que el producte no és en general commutatiu. Per tant, la matriu inversa ha de verificar que els dos productes donin la matriu identitat.

matrius tot el que está sumant passa restant i vice-versa. Així podem resoldre equacions del tipus trobar una matriu X tal que $A + 2X = 3B$ on A i B són matrius conegudes. La solució serà $2X = 3B - A$ i per tant, $X = 1/2(3B - A)$. Notau en canvi que equacions de la forma $AX = B$ no es poden manipular de la forma habitual a no ser que la matriu A sigui quadrada i invertible. Llavors sí que tendrem $X = A^{-1}B$. Notau que hem multiplicat a l'esquerra per A^{-1}, però no valdria fer-ho a la dreta. Si l'equació que tenim és de la forma $XA = B$ llavors, si A és invertible, serà $X = BA^{-1}$, multiplicant a la dreta per A^{-1}. Podem també calcular potències n-èsimes de matrius quadrades de la forma habitual $A^n = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$ (n vegades). Notau que el binomi de Newton per calcular $(A + B)^n$ només es verifica en els casos en que A i B commuten. Per exemple,

$$(A+B)^2 = A^2+AB+BA+B^2 \quad \text{si } A \text{ i } B \text{ commuten, llavors} \quad (A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$$

Passa exactament el mateix amb les altres potències successives.

1.2 Operacions elementals per files i columnes. Matrius escalonades reduïdes

Anem a introduir ara un tipus especial de matrius triangulars superiors (inferiors), les anomenades matrius escalonades per files (per columnes).

Definició 10. *Una matriu $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ direm que és* escalonada per files *si:*

- *el primer element no nul de cada fila, anomenat pivot, està a la dreta del pivot de la fila superior i*
- *les files nul·les estan en la part inferior de la matriu.*

Direm que és escalonada reduïda per files *si és escalonada i:*

- *els pivots són tots 1 i*
- *tots els elements que estan en la mateixa columna del pivot són nuls.*

Exemple 11. *De les següents matrius, les dues primeres són escalonades per files i les altres dues són escalonades reduïdes per files:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercici: Donau definicions equivalents de *matriu escalonada per columnes* i *matriu escalonada reduïda per columnes.*

Definició 12. *Sigui $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Les següents operacions s'anomenen* operacions elementals per files *de la matriu A:*

1. *Multiplicar una fila per un $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$.*
2. *Intercanviar dues files.*
3. *Sumar un múltiple d'una fila a una altra.*

De manera anàloga podem definir les *operacions elementals per columnes.*

Definició 13. *Dues matrius $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ són* equivalents per files *(*per columnes*) si una d'elles es pot obtenir a partir de l'altra mitjançant un nombre finit d'operacions elementals per files (columnes).*

Teorema 14.

- *Tota matriu és equivalent per files (columnes) a una matriu escalonada per files (columnes).*
- *Tota matriu és equivalent per files (columnes) a una* única *matriu escalonada reduïda per files (columnes).*

Demostració: Ho demostrarem de manera constructiva. És a dir, donarem un algoritme (mètode de Gauss) per trobar la matriu escalonada en cada cas. Sigui $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, llavors procedirem de la següent manera:

1. Si $a_{11} \neq 0$, dividim la primera fila per a_{11} i aconseguim una matriu equivalent en la qual $a_{11} = 1$. Llavors aquest nou $a_{11} = 1$ serà el primer pivot. Ara, restant a cada fila i la primera multiplicada per a_{i1}, la resta d'elements de la primera columna seràn 0 i passam al punt 4.
2. Si $a_{11} = 0$ cercam el primer i tal que $a_{i1} \neq 0$. Llavors si intercanviam les files 1 i i obtenim una matriu equivalent amb el nou $a_{11} \neq 0$ i passam al punt 1.
3. Si $a_{i1} = 0$ per a tot $i = 1, \ldots, m$, llavors deixam aquesta primera columna de zeros i aplicam l'algoritme des del pas 1 a la matriu resultant d'eliminar de la nostra aquesta primera columna.
4. Repetim el procés a la matriu que s'obté de la nostra matriu eliminant la primera fila i la primera columna.

Notem que amb aquest mètode obtenim l'única matriu escalonada equivalent per files, els pivots de la qual són tots uns. Per obtenir la matriu escalonada reduïda, aplicam primer l'algoritme anterior fins a obtenir una matriu escalonada equivalent per files a la matriu donada. Llavors, si per sobre d'algun pivot en la seva columna hi ha algun element a_{ij} distint de 0, restam a la fila d'aquest element (la fila i), la fila del pivot multiplicada per a_{ij} i amb aquest mètode anam fent zero tots els elements situats per damunt dels pivots.

Exemple 15. *Considerem la matriu $A \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$, donada per*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 8 \\ 4 & -2 & -6 & 19 \\ 3 & -6 & -17 & 41 \end{pmatrix}.$$

Anem a calcular una matriu escalonada i la escalonada reduïda per files. En aquest cas $a_{11} = 1 \neq 0$ i per tant podem posar zeros en la resta de la primera columna:

$$A \sim_{f_2-4f_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 2 & 6 & -13 \\ 3 & -6 & -17 & 41 \end{pmatrix} \sim_{f_3-3f_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 2 & 6 & -13 \\ 0 & -3 & -8 & 17 \end{pmatrix}.$$

Pasam ara al punt 4 de l'algoritme, és a dir, aplicam el mateix raonament a la matriu 2×3 obtinguda eliminant la primera fila i la primera columna $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -13 \\ -3 & -8 & 17 \end{pmatrix}$. En aquest cas, $a_{11} = 2$ i començam dividint la primera fila per 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -13 \\ -3 & -8 & 17 \end{pmatrix} \sim_{f_1/2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -13/2 \\ -3 & -8 & 17 \end{pmatrix} \sim_{f_2+3f_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -13/2 \\ 0 & 1 & -5/2 \end{pmatrix}.$$

D'aquesta manera una matriu escalonada per files equivalent a A seria:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & -13/2 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \end{pmatrix}.$$

Si ara volem calcular l'única matriu escalonada reduïda equivalent a A només ens cal posar zeros per damunt de cada pivot.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & -13/2 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \end{pmatrix} \sim_{f_2-3f_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim_{f_1+3f_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \end{pmatrix} \sim_{f_1+f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \end{pmatrix}$$

Exemple 16. *Vegem-ne un altre exemple amb la matriu $A \in \mathcal{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$, donada per*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -3 & 8 \\ 1 & 0 & -2 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & -6 & -15 & 4 \end{pmatrix}.$$

En aquest cas $a_{11} = 0$ però $a_{21} \neq 0$. Així començam per intercanviar les files 1 i 2.

$$A \sim_{f_2\to f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 8 \\ 3 & 0 & -6 & -15 & 4 \end{pmatrix} \sim_{f_3-3f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Arribam al punt 4 de l'algoritme i hem de començar amb la matriu $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ *en la qual la primera columna està formada tota per zeros. Segons l'algoritme, el que hem de fer és continuar amb la matriu* $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 8 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, *en la qual començam dividint per* (-1) *la primera fila:*

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 8 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim_{f_1/(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -8 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim_{f_2/3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Per tant, una matriu escalonada per files equivalent a A *seria:*

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Finalment, per trobar la matriu escalonada reduïda per files equivalent a A *farem:*

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix} \sim_{f_2-3f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim_{f_1+6f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix} \sim_{f_1+2f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Donada aquesta unicitat de la matriu escalonada reduïda, podem definir conceptes sobre una matriu A mitjançant la seva única matriu escalonada reduïda per files (per columnes) equivalent.

Definició 17. *Sigui* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Anomenarem* rang *de* A *i ho denotarem per* $rg(A)$, *al nombre de files no nul.les que té la seva única matriu escalonada reduïda per files equivalent.*

Teorema 18. *Sigui* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Aleshores el rang de* A *coincideix amb el nombre de columnes no nul.les de la seva única matriu escalonada reduïda per columnes equivalent.*

En realitat, el nombre de files no nul.les és sempre el mateix en qualsevol matriu escalonada equivalent per files (per columnes) a la donada. Per tant, per calcular el rang d'una matriu A bastarà trobar una matriu B escalonada per files (columnes) equivalent a A i comptar el nombre de files (columnes) no nul·les de B.

Exemple 19. *Calcularem el rang de la matriu* A *de l'exemple* **??**. *Hem vist que per files*

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & -13/2 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \end{pmatrix}$$

i per tant $rg(A)$ és simplement el nombre de files no nul.les, $rg(A) = 3$.

Vegem un altre exemple. Volem calcular el rang de la matriu B:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim_{f_3-f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim_{f_2/2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim_{f3-2f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriu escalonada obtinguda té dues files no nul·les i per tant $rg(B) = 2$.

Amb les matrius escalonades i les operacions elementals no només es pot calcular el rang d'una matriu, sinó que també resulten útils en el càlcul de matrius inverses com veurem tot seguit. El primer que podem donar és una caracterització de les matrius invertibles a través del seu rang i de la seva matriu escalonada reduïda.

Teorema 20. *Sigui A una matriu quadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Aleshores, són equivalents:*

- *A és invertible*
- *$rg(A) = n$*
- *La matriu escalonada reduïda per files (per columnes) equivalent a A és la matriu identitat I_n*

A més a més, la tercera equivalència ens aporta un mètode per calcular la matriu inversa d'una matriu invertible $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Aquest consisteix en escriure la matriu identitat I_n a la dreta de la matriu A (ho escriurem en forma abreujada $(A \mid I_n)$ i, a través de transformacions elementals per files (o per columnes), calcular la matriu escalonada reduïda que serà de la forma $(I_n \mid B)$. La matriu B resultant és precisament la matriu inversa de A, és a dir $A^{-1} = B$.

Exemple 21. *Volem saber si la matriu quadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donada per $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ és invertible i, si ho és, calcular la seva inversa. Començarem per calcular el seu rang.*

$$A \sim_{f_3-f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim_{f_2/2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim_{f_3+3f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 11/2 \end{pmatrix}.$$

Si ara dividim la tercera fila per $11/2$ obtenim una matriu escalonada amb tres files no nul.les. Per tant, $rg(A) = 3$ i la matriu A és invertible. Anem a calcular la seva inversa:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{f_3-f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{f_2/2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim f_3 + 3f_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 11/2 & -1 & 3/2 & 1 \end{array}\right) \sim_{\frac{f_3}{11/2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/11 & 3/11 & 2/11 \end{array}\right) \sim_{f_2-\frac{3}{2}f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/11 & 1/11 & -3/11 \\ 0 & 0 & 1 & -2/11 & 3/11 & 2/11 \end{array}\right)$$

$$\sim_{f_1-f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 13/11 & -3/11 & -2/11 \\ 0 & 1 & 0 & 3/11 & 1/11 & -3/11 \\ 0 & 0 & 1 & -2/11 & 3/11 & 2/11 \end{array}\right)$$

$$\sim_{f_1-2f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7/11 & -5/11 & 4/11 \\ 0 & 1 & 0 & 3/11 & 1/11 & -3/11 \\ 0 & 0 & 1 & -2/11 & 3/11 & 2/11 \end{array}\right).$$

Per tant,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7/11 & -5/11 & 4/11 \\ 3/11 & 1/11 & -3/11 \\ -2/11 & 3/11 & 2/11 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 7 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.3 Determinant d'una matriu quadrada

Definició 22. *Donada una matriu quadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $a_{ij} \in \mathbb{K}$, anomenarem* determinant *de la matriu A i ho denotarem per $|A|$ o $det(A)$ a un element del cos $\mathbb{K}$ que es defineix per inducció de la forma següent:*

- *Si $n = 1$, $A = (a_{11})$ i aleshores $|A| = a_{11}$.*
- *Si $n > 1$, $|A| = a_{11}\alpha_{11} - a_{12}\alpha_{12} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{1n}\alpha_{1n}$.*

on α_{1i} és el determinant de la matriu d'ordre $n-1$ que s'obté en suprimir la primera fila i la columna i-èsima de la matriu A.

Així, per a una matriu quadrada d'ordre 2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, tenim $\alpha_{11} = |a_{22}| = a_{22}$ i $\alpha_{12} = |a_{21}| = a_{21}$, i el determinant és:

$$|A| = a_{11}\alpha_{11} - a_{12}\alpha_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Si $A = (a_{ij})$ és una matriu quadrada 3×3, el determinant de A és

$$|A| = a_{11}\alpha_{11} - a_{12}\alpha_{12} + a_{13}\alpha_{13}$$

on

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \alpha_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad \alpha_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Així,

$$det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

que és el mateix resultat que s'obté aplicant la *regla de Sarrus*.

Notem que si $n = 2$, i calculam el determinant de la matriu transposada, es té $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$; $\alpha_{11} = |a_{22}|$ i $\alpha_{12} = |a_{12}| = a_{12}$, i $|A^t| = a_{11}\alpha_{11} - a_{21}\alpha_{12} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. Per tant $|A^t| = |A|$.

Aquest resultat se satisfà $\forall n \geq 1$: si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $|A^t| = |A|$. Degut a això, les propietats següents són certes tant per a files com per a columnes.

Propietats

Denotam per $\det(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n)$ el determinant de la matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ que té com a files (o columnes) les matrius fila (o columna) u_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

P1) $det(u_1, \ldots, \lambda u_i, \ldots, u_n) = \lambda\ det(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n)$.
En particular, si $\lambda = 0$, $\det(u_1, \ldots, 0, \ldots, u_n) = 0$.

Exemple 23.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 10 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 10 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

P2) $det(u_1, \ldots, u_i + u_i', \ldots, u_n) = det(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n) + det(u_1, \ldots, u_i', \ldots, u_n)$.

Exemple 24.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1+2 & 1 \\ 3 & 3+2 & 1 \\ 1 & 1+2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

P3) $det(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_n) = -det(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_n)$. És a dir, si s'intercanvien dues files o columnes el determinant canvia de signe.

Exemple 25.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

P4) $det(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_i, \ldots, u_n) = 0$. Si una matriu té dues files o columnes iguals el seu determinant és nul.

P5) $det(u_1, \ldots, u_i, \ldots, \lambda u_i, \ldots, u_n) = 0$. Si una matriu té dues files o columnes proporcionals el determinant és nul.

P6) Si $u_i = \sum_{k\neq i} a_k u_k$, llavors $det(u_1,\ldots,u_i,\ldots,u_n) = 0$. Si una fila o columna és combinació lineal de les altres, el determinant és nul.

Exemple 26.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

perquè la tercera columna és la suma de la primera i la segona.

P7) $det(u_1,\ldots,u_i,\ldots,u_n) = det(u_1,\ldots,u_i + \sum_{k\neq i} a_k u_k,\ldots,u_n)$. El determinant no canvia si a una fila o columna se li suma una combinació lineal de les altres.

Exemple 27.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 9 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

perquè el segon l'hem obtingut del primer sumant a la tercera fila la suma de la primera i la segona.

Definició 28. *Sigui $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $n \geq 2$. Sigui a_{ij} l'element que ocupa la fila i i la columna j de la matriu A. Si suprimim la fila i i la columna j de A obtenim una matriu quadrada d'ordre $n-1$.*

- *El determinant d'aquesta matriu, que designarem per α_{ij}, s'anomena* menor complementari *de a_{ij}.*
- *L'element $A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$ s'anomena l'*adjunt *de a_{ij}.*
- *La* matriu adjunta *de $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $n \geq 2$, és la matriu que té com a coeficients o entrades els adjunts A_{ij} dels elements a_{ij} de la matriu A. Es denota per $adj(A)$.*

Exemple 29. *La matriu adjunta de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *és*

$$\mathrm{adj}A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 \\ -3 & -7 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Càlcul d'un determinant

El determinant d'una matriu quadrada $A = (a_{ij})$ de tipus $n \times n$ amb $n \geq 2$ es pot calcular desenvolupant pels adjunts dels elements d'una qualsevol de les seves files o columnes.

Proposició 30. *Sigui $A = (a_{ij})$ una matriu quadrada d'ordre $n \times n$. Aleshores es verifica:*

$$detA = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

(desenvolupament d'un determinant pels adjunts dels elements d'una fila), i també

$$detA = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

(desenvolupament d'un determinant pels adjunts dels elements d'una columna).

Exemple 31. *El determinant* $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$*, desenvolupat pels elements de la primera fila, és*

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 0 - 15 = -12$$

i per la segona columna,

$$|A| = -0\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 7 - 5 = -12$$

Si aplicam aquests desenvolupaments a les matrius triangulars tenim que el determinant d'una matriu triangular és igual al producte dels elements de la diagonal principal.

Exemple 32.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3(-4) = 12$$

A cada passa hem fet el desenvolupament del determinant pels adjunts de la darrera fila.

El desenvolupament d'un determinant pels adjunts dels elements d'una fila o d'una columna, juntament amb les propietats enunciades abans, ens simplificarà de forma considerable el càlcul d'un determinant.

Vegem–ne alguns exemples.

Exemple 33.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 8$$

Primer hem sumat la primera fila a la tercera i després hem desenvolupat pels adjunts dels elements de la segona columna.

Exemple 34.

$$\begin{vmatrix} a+b+c & b+c+a & c+b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Hem tret factor comú $a+b+c$ i el determinant resultant és nul perquè tè dues files iguals.

Exemple 35.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

Hem fet desenvolupaments per la sisena fila, per la cinquena columna, per la tercera fila i per la primera fila.

Exemple 36. *Determinant de Vandermonde d'ordre 4 (en el primer pas a cada fila li restam l'anterior multiplicada per a):*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-ba & c^2-ca & d^2-da \\ 0 & b^3-b^2a & c^3-c^2a & d^3-d^2a \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-ba & c^2-ca & d^2-da \\ b^3-b^2a & c^3-c^2a & d^3-d^2a \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c^2-cb & d^2-db \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} (c-b) & (d-b) \\ c(c-b) & d(d-b) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

Aplicacions en el càlcul de matrius

Els determinants ens seran útils per trobar la inversa d'una matriu, el rang d'una matriu i, com veurem més endavant, per a la resolució de sistemes lineals.

Teorema 37. *Siguin A i B matrius quadrades d'ordre n, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Aleshores:*

- *A és invertible si i només si $|A| \neq 0$.*
- *$|AB| = |A| \cdot |B|$.*
- *Si $|A| \neq 0$, aleshores $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.*
- *Si $|A| \neq 0$, aleshores $A^{-1} = (\mathrm{adj}A)^t/|A|$.*

Notem que la darrera propietat ens dóna una nova manera de calcular la matriu inversa d'una matriu donada A. Per tal de calcular la matriu inversa el que s'ha de fer és calcular la matriu adjunta, transposar-la, i dividir-la pel determinant de la matriu donada.

Exemple 38. *Calculem la matriu inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.*

Aquesta matriu és invertible ja que $|A| = 7 \neq 0$. La matriu adjunta, transposada, és

$$(adjA)^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 8 & -2 & -9 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i per tant, la matriu inversa és

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 8 & -2 & -9 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{8}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-9}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Notem que, a més a més, podem afirmar que igualment $det(A^{-1}) = 7$*.*

Una altra aplicació dels determinants es troba en el càlcul del rang d'una matriu. Vegem-ho.

Definició 39. *Sigui A una matriu d'ordre $m \times n$, $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ i sigui $k < n$*

- *S'anomena* menor d'ordre *k de la matriu A al determinant de qualsevol matriu quadrada d'ordre k obtinguda al suprimir $m-k$ files i $n-k$ columnes de A.*
- *Donat un menor d'ordre k de la matriu A,* orlar *aquest menor consisteix en completar-lo fins a un menor d'ordre $k+1$ de A amb una altra fila i una altra columna de la matriu donada A.*

Es poden utilitzar aquests menors per calcular el rang d'una matriu A qualsevol.

Teorema 40. *Sigui $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ i sigui $k < n$. Aleshores, si es pot trobar un menor d'ordre k no nul i tots els d'ordre $k+1$ són 0, llavors $rang(A) = k$. És a dir, el rang de la matriu A coincideix amb l'ordre del major menor no nul obtingut de A.*

El teorema anterior es pot millorar amb el següent.

Teorema 41. *Sigui $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ i sigui $k < n$. Aleshores, si es pot trobar un menor d'ordre k no nul i totes les maneres possibles d'orlar aquest menor donen menors nuls, llavors $rang(A) = k$.*

Exemple 42. *Calculem el rang de la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

El primer menor d'ordre 2 és no nul: $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2+8 = 6 \neq 0$*. Segons el primer teorema hauriem de comprovar tots els menors d'ordre 3, si tots són 0 el rang seria 2 i sinó 3 (és el màxim ja que només hi ha 3 columnes). Però, gràcies al segon* *teorema bastarà comprovar els menors d'ordre 3 que s'obtenen orlant el menor no nul trobat. Així, només hem de provar els menors:*

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =_{f_1+2f_3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

i

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =_{c_2+c_3} \begin{vmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 4 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 0.$$

D'aquesta manera podem afirmar que rang$(A) = 2$.

Exemple 43. *Determinau per a quins valors del paràmetre α la següent matriu és invertible i, en els casos en que ho sigui, trobau la seva inversa.*

$$\begin{pmatrix} \alpha & 4 & 5 \\ -\alpha & 1 & 2 \\ -\alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Per a ser invertible el determinant ha de ser distint de 0:

$$\begin{vmatrix} \alpha & 4 & 5 \\ -\alpha & 1 & 2 \\ -\alpha & -\alpha & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 4-\alpha & 5 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4-\alpha & 5 \end{vmatrix} = \alpha(7\alpha - 3).$$

Així la matriu és invertible si i només si $\alpha \neq 0, 3/7$ i en aquests casos la seva inversa és:

$$A^t = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & -\alpha \\ 4 & 1 & -\alpha \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \textit{adjunta} \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2\alpha & -5\alpha & 3 \\ -2\alpha & 5\alpha & -7\alpha \\ \alpha^2+\alpha & \alpha^2-4\alpha & 5\alpha \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha(7\alpha-3)} \begin{pmatrix} 2\alpha & -5\alpha & 3 \\ -2\alpha & 5\alpha & -7\alpha \\ \alpha^2+\alpha & \alpha^2-4\alpha & 5\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{7\alpha+3} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3/\alpha \\ -2 & 5 & -7 \\ \alpha+1 & \alpha-4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exemple 44. *Determinau el rang de la següent matriu segons els valors del paràmetre α:*

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & \alpha+1 & 1 \\ 0 & 2\alpha & \alpha-1 & 0 \\ 1 & 0 & 2\alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Veim de manera immediata que el menor d'ordre 2 format per les dues primeres columnes i les files primera i tercera és no nul, qualsevol que sigui el valor de α:

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Completant-lo amb la quarta columna (la més senzilla per no tenir cap paràmetre) obtenim:

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 2\alpha & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\alpha \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\alpha(\alpha - 1).$$

D'aquesta manera el rang de la matriu serà 3 (no pot ser superior perquè la matriu només té 3 files) sempre que α sigui distint de 0,1.

En el cas en que $\alpha = 0$ la matriu queda

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{amb menor no nul} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

per tant, en aquest cas, el rang de A també és 3.

Quan $\alpha = 1$ la matriu que tenim és

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

i en aquest cas els dos menors d'ordre 3 que completen el nostre menor d'ordre 2 no nul són 0. Amb la quarta columna ja ho sabem i amb la tercera tenim

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Per tant, per a $\alpha = 1$ el rang de la nostra matriu és 2.