DIAGONALIZACIÓN

$$\left(A-\lambda I\right)\cdot\vec{x}=\vec{0}$$

$$\left|A-\lambda I\right|=0$$

compatible indeterminado: infinitas soluciones

$$n_1 \quad \lambda_1 \qquad n_2 \quad \lambda_2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

¿Cuánto valdrá siempre la suma de las m.a.?

$$\left(A-\lambda I\right)\cdot\vec{x}=\vec{0}$$

$$\left|A-\lambda I\right|=0$$

λ_1

n_1

λ_2

n_2

....

$$\left(A-\lambda_1 I\right)\cdot\vec{x}=\vec{0}$$

$$\left(A-\lambda_2 I\right)\cdot\vec{x}=\vec{0}$$

$$(A-\lambda I)\cdot\vec{x}=\vec{0}$$

$$|A-\lambda I|=0$$

n_1 λ_1

n_2 λ_2 ....

$$(A-\lambda_1 I)\cdot\vec{x}=\vec{0}$$

$$\begin{cases}\vec{0} \\ \infty \text{ soluciones: } \to \text{vep}\end{cases}$$

$$(A-\lambda_2 I)\cdot\vec{x}=\vec{0}$$

$$\begin{cases}\vec{0} \\ \infty \text{ soluciones: } \to \text{vep}\end{cases}$$

$$(A-\lambda I)\cdot\vec{x}=\vec{0}$$

$$|A-\lambda I|=0$$

λ_1 n_1

λ_2 n_2

....

$$(A-\lambda_1 I)\cdot\vec{x}=\vec{0} \qquad (A-\lambda_2 I)\cdot\vec{x}=\vec{0}$$

$$\begin{cases}\vec{0}\\ \infty \text{ soluciones}: \to \text{vep}\end{cases} \qquad \begin{cases}\vec{0}\\ \infty \text{ soluciones}: \to \text{vep}\end{cases}$$

H_1 H_2

$$|A-\lambda I| = 0$$

λ_1 n_1

λ_2 n_2 ....

$$(A-\lambda_1 I)\cdot\vec{x} = \vec{0} \qquad (A-\lambda_2 I)\cdot\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} \vec{0} \\ \infty \text{ soluciones: } \to \text{vep} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{0} \\ \infty \text{ soluciones: } \to \text{vep} \end{cases}$$

H_1 H_2

B_{H_1} B_{H_2}

$$\dim \boldsymbol{H}_1 + \dim \boldsymbol{H}_2 = \dim E$$

$$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{H}_1} \cup \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{H}_2} = \boldsymbol{B}(E)$$

$$\left|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I}\right|=\boldsymbol{0}$$

λ_1 $\quad$ λ_2 $\quad$ ....

$\boldsymbol{n}_1$ $\quad$ $\boldsymbol{n}_2$

$$\left(A-\lambda_1 I\right)\cdot\vec{x}=\vec{0} \qquad \left(A-\lambda_2 I\right)\cdot\vec{x}=\vec{0}$$

$$R\left(A-\lambda_1 I\right)$$

¿ ?

$$\dim \boldsymbol{H}_1$$

$$R\left(A-\lambda_2 I\right)$$

¿ ?

$$\dim \boldsymbol{H}_2$$

$$(A-\lambda_1 I)\cdot\vec{x} = \vec{0} \qquad (A-\lambda_2 I)\cdot\vec{x} = \vec{0}$$

$$R(A-\lambda_1 I) \qquad R(A-\lambda_2 I)$$

Nunca máximo

Rango = Nº de incógnitas que quedan

Dim H = Nº de incógnitas que pasan a parámetro
= orden matriz - Rango

$$\dim \boldsymbol{H}_i = \text{orden matriz} - R(A-\lambda_i I)$$

$$\left|A - \lambda I\right| = 0$$

λ_1

$$n_1$$

$$(A - \lambda_1 I)\cdot\vec{x} = \vec{0}$$

$$R(A - \lambda_1 I)$$

¿ ?

$$\dim H_1$$

λ_2

$$n_2$$

$$(A - \lambda_2 I)\cdot\vec{x} = \vec{0}$$

$$R(A - \lambda_2 I)$$

¿ ?

$$\dim H_2$$

λ_1 λ_2

$$n_1 + n_2 + \ldots\ldots\ldots = \text{orden matriz}$$

$$\dim H_1 + \dim H_2 + \ldots\ldots\ldots = \dim E$$

$$\dim H_i = n_i$$

$$\lambda_1$$

$$1 \le \dim \boldsymbol{H}_1 \le \boldsymbol{n}_1$$

$$\lambda_2$$

$$1 \le \dim \boldsymbol{H}_2 \le \boldsymbol{n}_2$$

$$1 \le \dim \boldsymbol{H}_i \le \boldsymbol{n}_i$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 & 6 \\ 2 & 1-\lambda & 6 \\ 2 & -1 & 8-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = (9-\lambda)(2-\lambda)^2$$

$$\left|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I}\right| = (9-\lambda)(2-\lambda)^2$$

$$\left|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I}\right| = \mathbf{0}$$

$$(9-\lambda)(2-\lambda)^2 = \mathbf{0}$$

Los valores, **2** y **9**, serán **los valores propios** de esta matriz.

$$\lambda_1 = 9 \quad n_1 = 1 \quad 1 \le \dim H_1 \le 1$$

$$\dim H_1 = n_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 2 \quad n_2 = 2 \quad 1 \le \dim H_2 \le 2$$

$$\dim H_2 = ?$$

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 & 6 \\ 2 & 1-\lambda & 6 \\ 2 & -1 & 8-\lambda \end{pmatrix}$$

a) $\lambda_1 = \mathbf{9} \qquad n_1 = 1$

$$A-\mathbf{9}\cdot I=\begin{pmatrix} -5 & -1 & 6 \\ 2 & -8 & 6 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$R\left(A-9I\right)=2$$

1 incógnita$\rightarrow$1 parámetro

$$\dim \boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{n}_1 = 1$$

$$(A-9\cdot I)\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}-5 & -1 & 6\\ 2 & -8 & 6\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & -8\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6z\\ z\end{pmatrix}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-6z & -8\\ z & -1\end{vmatrix}}{14}=z \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}2 & -6z\\ 2 & z\end{vmatrix}}{14}=z$$

Los vectores $\vec{x}$ solución del sistema son de la forma:

$$\vec{x}=(z,z,z)$$

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 & 6 \\ 2 & 1-\lambda & 6 \\ 2 & -1 & 8-\lambda \end{pmatrix}$$

b) $\boldsymbol{\lambda}_2=2 \qquad \boldsymbol{n}_2=2$

$$A-\mathbf{2}\cdot I=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$R(A-\mathbf{2}\cdot I)=1$$

2 incógnita→2 parámetros

$$\dim \boldsymbol{H}_2=\mathbf{2}=\boldsymbol{n}_2$$

$$\left(A-\mathbf{2}\cdot I\right)\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 6\\ 2 & -1 & 6\\ 2 & -1 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$2x-y+6z=0\rightarrow\begin{cases}x=\lambda\\ y=2\lambda+6\mu\\ z=\mu\end{cases}$$

Los vectores $\vec{x}$ solución del sistema son de la forma:

$$\vec{x}=\left(\lambda,2\lambda+6\mu,\mu\right)$$

$$\vec{x}=\left(x,2x+6z,z\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -8 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -8-\lambda & -2 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\left|A-\lambda I\right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -8-\lambda & -2 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 1 \\ 0 & -8-\lambda & -2 \\ 3-\lambda & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$C1n = C1 + C3$$

$$\left|A-\lambda\cdot I\right| = \lambda(3-\lambda)(\lambda+7)$$

$$\left|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I}\right|=\lambda(3-\lambda)(\lambda+7)$$

$$\left|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I}\right|=\mathbf{0}$$

$$\lambda(3-\lambda)(\lambda+7)=\mathbf{0}$$

Los valores **0**, **3** y **-7** serán **los valores propios** de esta matriz.

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}) \cdot \vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$$

$$\lambda_1 = \mathbf{0}$$

$$(A - \mathbf{0} \cdot I) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$\lambda_3 = -\mathbf{7}$$

$$(A + \mathbf{7} I) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$\lambda_2 = \mathbf{3}$$

$$(A - \mathbf{3} I) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -8-\lambda & -2 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

a) $\lambda_1 = \mathbf{0}$

$$\left(A-\mathbf{0}\cdot I\right)\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -8 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) $\lambda_1 = \mathbf{0}$

Sist. Equivalente de Cramer:

$$\begin{cases} 2x - 2y = -z \\ x + 2y = -2z \end{cases}$$

$$(A - \mathbf{0} \cdot I) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -8 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ 1 \cdot x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

a) $\lambda_1 = 0$

$$\begin{cases} 2x - 2y = -z \\ x + 2y = -2z \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -z & -2 \\ -2z & 2 \end{vmatrix} = -z$$

$$y = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & -z \\ 1 & -2z \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}z$$

$$\left(-z, -{}^{z}\!/_{2}, z\right)$$

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -8-\lambda & -2 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

b) $\boldsymbol{\lambda_2}=\mathbf{3}$

$$\left(A-\mathbf{3}\cdot I\right)\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & -11 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $\lambda_2 = 3$ **Sist. Equivalente de Cramer:**

$$\begin{pmatrix} 2 & -11 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ z \end{pmatrix}$$

$$\left(A - \mathbf{3} \cdot I\right) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & -11 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - 11y - 2z = 0 \\ 1 \cdot x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

b) $\lambda_2 = \mathbf{3}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -11 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ z \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{1}{15}\begin{vmatrix} 2z & -11 \\ z & 2 \end{vmatrix} = z$$

$$y = \frac{1}{15}\begin{vmatrix} 2 & 2z \\ 1 & z \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(z, 0, z\right)$$

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -8-\lambda & -2 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

c) $\boldsymbol{\lambda_3 = -7}$

$$(A+\mathbf{7}\cdot I)\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) $\lambda_3 = -7$

Sist. Equivalente de Cramer:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ -9z \end{pmatrix}$$

$$\left(A + 7 \cdot I\right) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - 1 \cdot y - 2z = 0 \\ 1 \cdot x + 2y + 9z = 0 \end{cases}$$

c) $\lambda_3 = -7$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ -9z \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 2z & -1 \\ -9z & 2 \end{vmatrix} = -z$$

$$y = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 2 & 2z \\ 1 & -9z \end{vmatrix} = -4z$$

$$\left(-z, -4z, z\right)$$

c) $\lambda_3 = -7$

$$\left(-z, -4z, z\right)$$

$$\begin{cases} 2x - 1 \cdot y - 2z = 0 \\ 1 \cdot x + 2y + 9z = 0 \end{cases}$$

$$\left(1, 4, -1\right)$$

Subespacio propio asociado a un valor propio.

Se puede demostrar que:

a) Si tenemos dos vectores propios cualesquiera **asociados al mismo** valor propio, su suma es también un vector propio asociado al mismo valor propio.

b) Si tenemos un vector propio cualquiera asociado a un valor propio, su producto por un escalar no nulo también es vector propio asociado al mismo valor propio.

Subespacio propio asociado a un valor propio.

El conjunto de los vectores propios asociados al mismo valor propio junto con el vector nulo, constituyen un subespacio vectorial de $\boldsymbol{E}$, llamado **subespacio propio** asociado al valor propio.

$$E$$

$$\overbrace{\lambda_1 \qquad\qquad \lambda_2 \qquad\qquad \lambda_3}^{A}$$

$$\begin{tikzcd} \lambda_1 \arrow[d] & \lambda_2 \arrow[d] & \lambda_3 \arrow[d] \\ \boldsymbol{H}_1 & \boldsymbol{H}_2 & \boldsymbol{H}_3 \end{tikzcd}$$

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = B_E$$