Diagonalización de endomorfismos

Estudios de Ingeniería

Juan Gabriel Gomila

Frogames

https://frogames.es

1 de julio de 2017

Índice

Introducción

Antes de entrar matemáticamente en el tema de la diagonalización de matrices cuadradas, se expondrán algunas de las aplicaciones que tienen las matrices diagonales.
Recuérdese que una matriz diagonal es una matriz cuadrada que tiene ceros en todos los elementos fuera de su diagonal principal.

Introducción

La factoritzación de una matriz dada A en función de otra matriz diagonal D permite resolver problemas de análisis y estudio de los sistemas eléctricos, vibraciones, economía, etcétera, que suelen venir modelizados por ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales.
En esta factorización juegan un papel muy importante unos escalares denominados **valores propios** y unos tipos especiales de vectores denominados **vectores propios**

Introducción

Un tipo de aplicación de la diagonalización de matrices se encuentra en el análisis de la solución de un sistema dinámico a lo largo del tiempo.
Un sistema se caracteriza por el estado de un conjunto de n variables que lo determinan. Este conjunto se puede expresar como un vector de $\mathbb{R}^n$ las componentes del cual expresan los valores de estas variables

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

Si el estado evoluciona a lo largo del tiempo modificando su valor a cada periodo (cada hora, día, mes,...) es muy común que la relación entre los estados del sistema se presenten de forma recursiva:

Introducción

- $X_{p+1} = A \cdot X_p$, donde A es una matriz cuadrada de orden n
- X_p representa el estado del sistema en el periodo p
- X_{p+1} representa el estado del sistema en el periodo siguiente $p+1$

Entonces, basta con conocer el estado en el periodo inicial X_0 (estado inicial del sistema) para poder calcular el estado del sistema en cualquier periodo.

Introducción

En efecto, si se conoce el estado inicial X_0, se puede conocer:

$$X_1 = A \cdot X_0$$

$$X_2 = A \cdot X_1 = A \cdot (A \cdot X_0) = A^2 \cdot X_0$$

$$\cdots$$

$$X_m = A^m \cdot X_0$$

Por tanto, para conocer el estado del sistema en el periodo m es necesario el cálculo de la matriz A^m. Este cálculo, como ya se habrá imaginado, es bastante complicado y es difícil no equivocarse. En cambio se simplifica bastante en el caso de que A sea diagonalizable (como se recordará del Tema 1 de matrices).

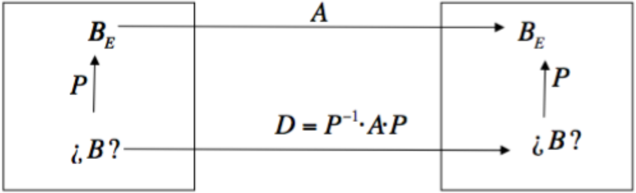
Matrices semejantes

Matrices semejantes

Dos matrices A y A' son **semejantes** si existe una matriz P cuadrada invertible (con $|P| \neq 0$) tal que $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$

Matrices semejantes

Piénsese que todas las matrices semejantes constituyen las diversas representaciones analíticas de un mismo endomorfismo f de un espacio vectorial E de dimensión n en diferentes bases de E.



Matrices semejantes

Así se plantea el problema de buscar la base de E en la cual f se presenta de la forma más sencilla posible. Debido a las características tan buenas que presentan las matrices diagonales, se intenta encontrar una base de E en la cual f esté representada por una matriz diagonal, es decir, dada una matriz A en una base cualquiera, se va a buscar una matriz diagonal semejante a ella. Este proceso recibirá el nombre de **diagonalizar la matriz o el endomorfismo**.

Matrices diagonalizables

Matriz diagonalizable

Una matriz A es diagonalizable si es semejante a una matriz D; es decir, si existe una matriz P regular tal que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.
No siempre es posible. Habrá que estudiar en qué condiciones existe una matriz así y respecto de qué base representará el endomorfismo.

Matrices diagonalizables

La teoría que se verá a continuación está pensada para conseguir llegar a diagonalizar una matriz, pero no se ha de olvidar que esta matriz realmente representa un cierto endomorfismo en una determinada base.

Vectores propios

Vector propio (o autovector)

Dada una matriz cuadrada $A \in M_{n\times n}$ de tamaño n los vectores columnas de la cual pertenecen a un espacio vectorial E de dimensión n, un elemento $\vec{x} \in E$ es un **vector propio** de A si:

1. $\vec{x} \neq \vec{0}$ no es el vector nulo
2. Existe un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que verifica $A \cdot \vec{x} = \lambda\vec{x}$

Geométricamente, un vector propio $\vec{x}$ es aquel que tiene la mismas dirección que el vector $A \cdot \vec{x}$ transformado por la matriz A.

Vectorer propios

Ejercicio 1

Demuéstrese que $\vec{x} = (2, -1)$ es un vector propio de la matriz $B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Resulta que $\vec{x}$ será un vector propio de la matriz si se cumple que $B \cdot \vec{x} = \lambda\vec{x}$ para algún escalar λ.

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Y como el vector $(4, -2)$ resulta ser $2(2, -1)$, se dirá $B \cdot \vec{x} = 2\vec{x}$, entonces $\vec{x}$ es un vector propio de B.

Valores propios

Valor propio (o autovalor)

El escalar λ de la definición anterior se denomina valor propio asociado al vector propio $\vec{x}$. El conjunto de todos los vectores que satisfacen la relación $A \cdot \vec{x} = \lambda\vec{x}$ reciben el nombre de conjunto de vectores propios asociados al valor propio λ.

Cálculo de los valores y de los vectores propios

Se parte de la ecuación matricial anterior:

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}$$

Que también se puede expresar como:

$$A \cdot \vec{x} - \lambda \vec{x} = \vec{0}$$

O bien:

$$(A - \lambda I) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

Esta ecuación representa un sistema **homogéneo** de n ecuaciones y n incógnitas, con matriz de coeficientes $A - \lambda I$

Cálculo de los valores y de los vectores propios

Si este sistema de ecuaciones de Cramer (n ecuaciones, n incógnitas, de rango n con $|A - \lambda I| \neq 0$) es compatible y determinado, su única solución será la solución trivial $\vec{x} = \vec{0}$. Si en cambio el sistema ha de tener soluciones diferentes de la solución trivial, entonces el determinante de $A - \lambda I$ ha de ser cero:

$$|A - \lambda I| = 0$$

Es decir, existirán vectores propios de la matriz, únicamente en el caso en que $|A - \lambda I| = 0$.

Cálculo de los valores y de los vectores propios

Ejercicio 2

¿Tiene vectores propios la matriz A?

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

Cálculo de los valores y de los vectores propios

Se construye la matriz $A - \lambda I$:

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 & 6 \\ 2 & 1-\lambda & 6 \\ 2 & -1 & 8-\lambda \end{pmatrix}$$

Se calculará el determinante:

$$|A - \lambda I| = (9-\lambda)(2-\lambda)^2$$

Por tanto el determinante es nulo para los valores de $\lambda \in \{2, 9\}$. Estos serán los dos valores propios de la matriz.

- Los vectores $\vec{x}$ que verifiquen $(A - 2I) \cdot \vec{x} = \vec{0}$ serán los vectores propios asociados al propio $\lambda_1 = 2$.
- Los vectores $\vec{x}$ que verifiquen $(A - 9I) \cdot \vec{x} = \vec{0}$ serán los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_2 = 9$.

Cálculo de los valores y de los vectores propios

En el ejercicio que se acaba de hacer, se ha visto que el resultado de desarrollar el determinante $|A - \lambda I|$ es un polinomio en la variable λ.

Polinomio característico de la matriz A

El **polinomio característico** de una matriz A es el polinomio de grado n que surge al calcular el determinante $|A - \lambda I|$.

Ecuación característica de una matriz A

La ecuación característica de una matriz A es la que se obtiene al igualar su polinomio característico a cero: $|A - \lambda I| = 0$.
Las n soluciones de esta ecuación son los valores propios de la matriz.

Cálculo de los valores y de los vectores propios

Cuando la ecuación característica es de grado n, tiene exactamente n soluciones, no necesariamente diferentes entre ellas. Por tanto, es conveniente acompañar cada raíz del polinomio del número de veces que esta es repetida.

Multiplicidad algebraica de los valores propios

Dado un valor propio λ_i de una matriz característica $A - \lambda I$, se denomina **multiplicidad algebraica** de λ_i al número de veces que aparece como solución de la ecuación caracterítica.

En el ejercicio anterior, el polinomio característico era $(9-\lambda)(2-\lambda)^2$, por tanto:

- El valor propio $\lambda_1 = 2$ tiene multiplicidad algebraica 2
- El valor propio $\lambda_2 = 9$ tiene multiplicidad algebraica 1

Cálculo de los valores y de los vectores propios

Ejercicio 3

Calcúlense los autovalores de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de los valores y de los vectores propios

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

- El polinomio característico es $\lambda^2(1-\lambda)$.
- La ecuación característica es $\lambda^2(1-\lambda) = 0$.
- Los valores propios son $\lambda_1 = 0$ con multiplicidad algebraica 2, y $\lambda_2 = 1$ con multiplicidad algebraica algebraica 1.

Cálculo de los valores y de los vectores propios

Una vez se han calculado todos los valores propios tocará calcular el conjunto de vectores propios asociados a cada valor propio. Para ello se resolverá para cada valor propio λ_i el sistema homogéneo siguiente:

$$(A - \lambda_i I) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

Cálculo de los valores y de los vectores propios

Ejericio 4

Calcúlense los vectores propios de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -8 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Cálculo de los valores y de los vectores propios

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -8-\lambda & -2 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -7$ con multiplicidad algebraica 1 los tres.

- Los vectores propios $\vec{x}$ asociados al valor propio $\lambda_1 = 0$ son los que cumplen $(A - 0I) \cdot \vec{x} = \vec{0}$.
- Los vectores propios $\vec{x}$ asociados al valor propio $\lambda_2 = 3$ son los que cumplen $(A - 3I) \cdot \vec{x} = \vec{0}$.
- Los vectores propios $\vec{x}$ asociados al valor propio $\lambda_3 = -7$ son los que cumplen $(A + 7I) \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

Cálculo de los valores y de los vectores propios

Para $\lambda_1 = 0$:

$$(A - 0I) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

Tiene por solución la familia de vectores:

$$(-z, -z/2, z)$$

Cálculo de los valores y de los vectores propios

Para $\lambda_2 = 3$:

$$(A - 2I) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

Tiene por solución la familia de vectores:

$$(z, 0, z)$$

Cálculo de los valores y de los vectores propios

Para $\lambda_3 = -7$:

$$(A + 7I) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

Tiene por solución la familia de vectores:

$$(-z, -4z, z)$$

Subespacio propio asociado a un valor propio

Se puede demostrar que:

- Si $\vec{x}, \vec{x}'$ son dos vectores propios cualesquiera de la matriz A asociada al mismo valor propio λ, entonces su suma $\vec{x} + \vec{x}'$ también es un vector propio de A asociado al mismo valor propio λ.
- Si $\vec{x}$ es un vector propio de la matriz A asociada al valor propio λ, también lo es cualquier otro vector de la forma $\mu\vec{x}$ donde μ es un escalar no nulo.

Subespacio propio asociado a un valor propio

Téngase en cuenta el teorema de caracterización del subespacio (la suma de dos vectores del subconjunto pertenece al subconjunto, y el producto de un escalar por un vector del subconjunto es del subconjunto):

Subespacio propio asociado a un valor propio

Los conjuntos de los vectores propios asociados al mismo valor propio λ junto con el vector $\vec{0}$, constituyen un subespacio vectorial de E denominado **subespacio propio asociado al valor propio** λ.

Multiplicidad geométrica de un valor propio

La multiplicidad geométrica de un valor propio λ_i es la dimensión de su subespacio propio asociado.

Subespacio propio asociado a un valor propio

Ejercicio 5

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Encuéntrense los autovalores, y los subespacios propios asociados a cada uno de ellos.

Subespacio propio asociado a un valor propio

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es $|A-\lambda I|=(3-\lambda)^2(6-\lambda)$, que tiene el autovalor $\lambda_1=3$ con multiplicidad algebraica 2 y el autovalor $\lambda_2=6$ con multiplicidad algebraica 1.

Subespacio propio asociado a un valor propio

Los vectores propios $\vec{x}$ asociados al valor propio $\lambda_1 = 3$ son los que cumplen $(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, $(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$ dará la misma ecuación tres veces, un SCI con dos grados de libertad:

$$x + y + z = 0 \Rightarrow x = -y - z$$

Subespacio propio asociado a un valor propio

El subespacio propio asociado a $\lambda_1 = 3$ será:

$$H_1 = \langle(x, y, z)\rangle = \langle(-y - z, y, z)\rangle = \langle(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\rangle$$

Como son dos vectores no proporcionales, son LI y por tanto son una base de H_1, donde $dim\ H_1 = 2$

Subespacio propio asociado a un valor propio

Los vectores propios $\vec{x}$ asociados al valor propio $\lambda_1 = 6$ son los que cumplen $(A - 6I)\vec{x} = \vec{0}$

$$A - 6I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Entonces, $(A - 6I)\vec{x} = \vec{0}$ dará dos ecuaciones diferentes, un SCI con un grado de libertad:

$$x = y = z$$

Subespacio propio asociado a un valor propio

El subespacio propio asociado a $\lambda_2 = 6$ será:

$$H_2 = \langle (x, y, z) \rangle = \langle (x, x, x) \rangle = \langle (1, 1, 1) \rangle$$

Como solo se tiene un vector no nulo, es LI y por tanto es una base de H_2, donde $dim\ H_2 = 1$

Propiedades de los valores y vectores propios

Propiedades

- La suma de los n valores propios de una matriz es igual a su traza.
- Los valores propios de una matriz y de su transpuesta coinciden.
- El product de los n valores propios de una matriz es igual al de su determinante.

Propiedades de los valores y vectores propios

Propiedades

- Dos matrices tienen la misma ecuación característica, y por tanto los mismos valores propios con el mismo grado de multiplicidad.
- Una matriz triangular tiene como valores propios los elementos de la diagonal principal.
- A valores propios diferentes les corresponden vectores propios linealmente independientes.
- Un mismo vector propio no puede estar asociado a dos valores propios diferentes.

Propiedades de los valores y vectores propios

Teorema

La dimensión del subespacio propio H_i asociado al valor propio λ_i es mayor o igual que 1 y menor o igual que el orden multiplicidad (o multiplicidad algebraica), n_i del valor propio.

$$1 \leq dim(H_i) \leq n_i$$

Corolario

Si la multiplicidad algebraica del valor propio es 1 ($n_i = 1$), la dimensión del correspondiente subespacio propio (multiplicidad geométrica) será también 1:

$$1 \leq dim(H_i) \leq n_i = 1 \Rightarrow dim(H_i) = 1$$

Propiedades de los valores y vectores propios

Teorema

Dados $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$, valores propios diferentes de la matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_r$ los vectores propios asociados a ella, entonces $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_r$ son linalmente independentes.

Teorema

Si la matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ formada por vectores de un espacio vectorial E tiene n valores propios, también tendrá n vectores propios que serán linealmente independientes: $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n$. Además, como n vectores LI de un espacio de dimensión finita n son base, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n$ serán una base de E.

Definición

Recuérdese el comentario que se ha hecho sobre que una matriz A es diagonalizable si existe una matriz D diagonal semejante a ella. A y D son semejantes si se peude establecer entre ellas una igualdad $D = Q^{-1} \cdot A \cdot Q$, donde Q es una matriz regular.

Teorema

Una matriz $A \in M_{n \times n}$ es diagonalizable si y solo si tiene n vectores propios linealmente independientes.
Equivalentmente, la condición necesaria y suficiente para que una matriz sea diagonalizable es que exista una base del espacio vectorial formada por los vectores propios de la matriz dada.

Matrices diagonalizables

Corolario

Si la matriz A tiene n valores propios diferentes. Habrá n vectores propios LI, y como consecuencia A será diagonalizable.

Ejercicio 6

Estudiénse los valores propios de la matriz B:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

¿Es B diagonalizable?

Matrices diagonalizables

$$B - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es:

$$-(1+\lambda)(\lambda-3)(\lambda+2)$$

Por tanto los valores propios son $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -2$. Como se está en un espacio vectorial de dimensión 3, si hay 3 valores propios reales y diferentes, la matriz será diagonalizable.

Matrices diagonalizables

Llegados a este punto, se está en condiciones de enunciar el teorema que permite saber que ha de pasar para que una matriz sea diagonalizable:

Teorema

La condición necesaria y suficiente para que una matriz A sea diagonalizable es que para cada valor propio λ_i su orden de multiplicidad n_i coincida con su multiplicidad geométrica $dim(H_i)$:

$$dim(H_i) = n_i \; \forall \; \lambda_i$$

Matrices diagonalizables

De esta manera, si la matriz tiene valores propios diferentes $\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_r$ uniendo las bases de todos los subespacios vectoriales propios $H_1, H_2, \cdots, H_n$ se obtiene una base en E

$$\{B_{H_1} \cup B_{H_2} \cup \cdots \cup B_{H_r}\} = B_E$$

Matrices diagonalizables

En resumen, A es diagonalizable si todos los valores propios pertenecen a los números reales y:

- Todos ellos son diferentes o bien,
- son múltiples y las multiplicidades algebraicas y geométricas son iguales.

Además la matriz D tiene como elementos de la diagonal principal los valores propios de la matriz A y cumplen la igualdad

$$D = (VP)^{-1} \cdot A \cdot (VP)$$

donde la matriz VP es la matriz que tiene por columnas los n vectores propios LI de la matriz A.

Cálculo de la matriz diagonal

Procedimiento para diagonalizar una matriz A

1. Encontrar el polinomio característico
2. Obtener las raíces de la ecuación característica, es decir los valores propios λ_i y sus órdenes de multiplicidad n_i.
3. Resolver para cada λ_i el sistema $(A-\lambda_i I)\vec{x}=\vec{0}$ para encontrar los vectores propios y los subespacios propios.
4. Si $n_i = dim(H_i)\ \forall\lambda_i$, entonces la matriz diagonalizable.
5. La matriz D tiene como elementos de la diagonal principal los valores propios de la matriz A y $D=(VP)^{-1}\cdot A\cdot(VP)$ donde la matriz VP es la matriz que tiene por columnas los n vectores propios LI de la matriz A colocados siguiendo el mismo orden que los valores propios en la matriz D.

Cálculo de la matriz diagonal

Ejercicio 7

Diagonalizar la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de la matriz diagonal

De un ejemplo anterior se sabe que los valores propios son $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -2$ y los subespacios propios:

$$H_1 = \langle(0,1,0)\rangle, H_2 = \langle(2,0,1)\rangle, H_3 = \langle(1,0,-2)\rangle$$

Por tanto:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, VP = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8

Calcúlese $(VP)^{-1}$ y demuéstrese que $D = (VP)^{-1} \cdot A \cdot (VP)$

Cálculo de la matriz diagonal

La solución es:

$$VP^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Y si se hace el producto $(VP)^{-1} \cdot A \cdot (VP)$ se comprueba fácilmente que la solución es D.

Cálculo de la matriz diagonal

Ejercicio 9

Diagonalícese la matriz

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cálculo de la matriz diagonal

El polinomio característico es:

$$(2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+4)$$

Y por tanto los valores popios son $\lambda_1 = -4$ con multiplicidad $n_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ con $n_2 = 2$. Los espacios propios son:

$$H_1 = \langle(1,-1,0)\rangle, H_2 = \langle(1,1,0),(0,0,1)\rangle$$

Por tanto, $dim(H_i) = n_i$ para ambos y:

$$D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, VP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 10

Calcúlese $(VP)^{-1}$ y demuéstrese que $D = (VP)^{-1} \cdot A \cdot (VP)$

Cálculo de la matriz diagonal

La solución es:

$$VP^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Y si se hace el producto $(VP)^{-1} \cdot A \cdot (VP)$ se comprueba fácilmente que la solución es D.

Cálculo de la matriz diagonal

Ejercicio 11

Diagonalícese la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Cálculo de la matriz diagonal

El polinomio característico es:

$$(8-\lambda)(6-\lambda)^2$$

Y por tanto los valores propios son $\lambda_1 = 6$ con multiplicidad $n_1 = 2$ y $\lambda_2 = 8$ con $n_2 = 1$.
Si se calcula, el subespacio propio H_1 viene generado por el vector $(0, -1, 1)$ y por tanto:

$$1 = dim(H_1) < 2 = n_1$$

Por ello, los valores son diferentes y se puede concluir que la matriz A no es diagonalizable.

Diagonalización ortogonal

Las matrices reales simétricas son siempre diagonalizables es decir, tienen una base de vectores propios. Y no solo eso, sino que siempre tienen una base de vectores propios ortonormales (es decir, sus vectores son ortogonales dos a dos y unitarios).

Diagonalización ortogonal

Matriz ortogonal

Una matriz cuadrada Q dícese **ortogonal** si se cumple que su inversa y su transpuesta son iguales:

$$Q^t = Q^{-1}$$

Diagonalización ortogonal

Matriz ortogonalmente diagonalizable

Dícese que una matriz cuadrada A es **ortogonalmente diagonalizable** si existe una base de vectores propios ortonormales. Esto equivale a decir que existe una matriz Q ortogonal tal que

$$Q^t \cdot A \cdot Q$$

es una matriz diagonal formada por los valores propios de A

Diagonalización ortogonal

Teorema

Si A es una matriz cuadrada real simétrica de tamaño n, entonces se verifica:

1. Todos los valores propios de la matriz son reales.
2. Los vectores propios asociados a los valores propios diferentes son ortogonales.
3. Tiene n vectores propios, es decir es diagonalizable.
4. Tiene n vectores propios ortonormales; es decir, es ortogonalmente diagonalizable.

Diagonalización ortogonal

Ejercicio 12

Diagonalícese ortogonalmente la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diagonalización ortogonal

En un ejercicio anterior se ha visto que los valores propios de esta matriz eran $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -2$ y que los subespacios propios vienen generados por:

$$B_{H_1} = \{\vec{u}_1\} = \{(0,1,0)\}$$

$$B_{H_2} = \{\vec{u}_2\} = \{(2,0,1)\}$$

$$B_{H_3} = \{\vec{u}_3\} = \{(1,0,-2)\}$$

Uniendo las tres bases se tiene una base del espacio vectorial total:

$$B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$$

Diagonalización ortogonal

Si se hacen los productos escalares pertinentes resulta que:

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = (0,1,0) \cdot (2,0,1) = 0$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = (0,1,0) \cdot (1,0,-2) = 0$$

$$\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = (2,0,1) \cdot (1,0,-2) = 0$$

B es una base ortogonal. Para que sea ortogonalmente diagonalizable, solo resta comprobar que sean unitarios.

$$||\vec{u}_1|| = 1, ||\vec{u}_2|| = \sqrt{5}, ||\vec{u}_3|| = \sqrt{5}$$

Diagonalización ortogonal

Por tanto, una base ortonormal es:

$$B = \left\{(0,1,0), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)\right\}$$

Y por ello la matriz ortogonal de vectores propios es:

$$(VP)_{ort} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Diagonalización ortogonal

Finalmente, se puede comprobar que $(VP)_{ort}^t \cdot B \cdot (VP)_{ort} = D$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Diagonalización ortogonal

Ejercicio 13

Diagonalizar ortogonalmente la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Diagonalización ortogonal

En un ejercicio anterior se ha visto que los valores propios de esta matriz eran $\lambda_1 = 3$ con multiplicidad algebraica $n_1 = 2$ y $\lambda_2 = 6$ con $n_2 = 1$

$$B_{H_1} = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$$
$$B_{H_2} = \{(1, 1, 1)\}$$

Si se unen las dos bases se tiene una base del espacio vectorial total:

$$B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$$

Diagonalización ortogonal

Si se hacen los productos escalares pertinentes, resulta que:

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = (-1, 1, 0) \cdot (-1, 0, 1) = 1 \neq 0$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = (-1, 1, 0) \cdot (1, 1, 1) = 0$$

$$\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = (-1, 0, 1) \cdot (1, 1, 1) = 0$$

B no es una base ortogonal. Habrá que comenzar por ortogonalizarla con el teorema de Gram-Smith.

Diagonalización ortogonal

$$\vec{c_1} = \vec{u_1} = (-1, 1, 0)$$

$$\vec{c_2} = \vec{u_2} - \frac{\vec{c_1} \cdot \vec{u_2}}{\vec{c_1} \cdot \vec{c_1}} \vec{c_1} =$$

$$= (-1, 0, 1) - \frac{(-1, 1, 0) \cdot (-1, 0, 1)}{(-1, 1, 0) \cdot (-1, 1, 0)} (-1, 1, 0) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

Como $\vec{u_3}$ ya era ortogonal a $\vec{u_1}$ y $\vec{u_2}$, por definición también los es, ya que$\vec{c_1}, \vec{c_2}$:

$$B_{ort} = \left\{(-1, 1, 0), \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, 1\right), (1, 1, 1)\right\}$$

Diagonalización ortogonal

Se halla la norma de cada uno de los vectores y se dividen por este valor para obtener los vectores unitarios.

$$B_{ort-uni} = \left\{ (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right), (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \right\}$$

La matriz ortogonal de vectores propios resulta:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Finalmente, se recuerda que se puede comprobar $(VP)^t_{ort} \cdot A \cdot (VP)_{ort}$ para ver si se ha incurrido en algún error.