Problemes Diagonalització de matrius. Treball autònom.

1) Estudiau la diagonalització de les matrius

$$1)\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad 2)\begin{pmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad 3)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad 5)\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & -2 \\ -5 & 0 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad 6)\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

2) Justificau que les següents matrius són invertibles i, en cada cas, aplicau el Teorema de Cayley-Hamilton per calcular la seva inversa.

$$1)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad 2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad 3)\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & a & d \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \neq 0.$$

3) Estudiau la diagonalització de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2a-b & 0 & 2a-2b \\ 1 & a & 2 \\ -a+b & 0 & -a+2b \end{pmatrix}$$

segons els valors de $a, b \in \mathbb{R}$. En el cas $a = 1$ i $b = 2$, calculau una matriu P de vectors propis i la matriu diagonal.

4) Considerau la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Trobau els valors propis de A.

b) Trobau una matriu P invertible tal que $P^{-1}AP$ sigui una matriu diagonal.

c) Utilitzau l'apartat anterior per trobar A^{-1}.

d) Calculau A^8.

5) Considerau la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Trobau els valors propis de A.

b) Trobau una matriu P invertible tal que $P^{-1}AP$ sigui una matriu diagonal.

c) Utilitzau l'apartat anterior per trobar A^{-1}.

d) Calculau A^{12}.

6) Utilitzau la diagonalització de matrius per calcular en cada cas les potències indicades de A.

1) A^5 si $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

2) A^{49} si $A = \begin{pmatrix} 11 & -6 & -12 \\ 13 & -6 & -16 \\ 5 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

3.) A^{10} si $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & -12 \\ 10 & 16 & -22 \\ 8 & 12 & -16 \end{pmatrix}$

7) Estudiau la diagonalització de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & -1 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

segons els valors dels paràmetres a i b reals.

8) Estudiau la diagonalització de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} a+3 & a & 0 & 0 \\ -a & -a+3 & 0 & 0 \\ a & a-1 & a+1 & a-1 \\ -a & 1-a & 1-a & 3-a \end{pmatrix}.$$

segons els valors del paràmetre real a.

9) Estudiau la diagonalització de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} a+2 & 2a+4 & 0 & 2a \\ 0 & -1 & 0 & -a-1 \\ -2 & -a-3 & a & -a+1 \\ 0 & a+1 & 0 & 2a+1 \end{pmatrix}$$

segons els valors del paràmetre real a.

10) Resoleu el sistema

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 6y_n \\ y_{n+1} = 6x_n - 3y_n \end{cases}$$

sabent que $x_1 = 0$ i $y_1 = -1$.

11) Considerau la successió $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$, on $a_{n+1} = a_n + 2b_n$ i $b_{n+1} = a_n + b_n$.

1) Trobau una matriu A tal que $\binom{a_{n+1}}{b_{n+1}} = A \binom{a_n}{b_n}$.

2) Donau l'expressió de a_n i b_n i provau que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2}$.

12) Siguin $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ successions de nombres reals definides recursivament per:

$$\begin{cases} x_{n+1} = & 3x_n - z_n \\ y_{n+1} = & 8x_n - 2y_n - 4z_n \\ z_{n+1} = & 2x_n \end{cases}$$

per a tot $n \geq 0$. Calculau els seus termes generals en funció de x_0, y_0 i z_0.

13) Trobau un polinomi que s'anul.li per a la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -a & -1 & -2 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estudiau la diagonalització de la matriu anterior segons els valors del paràmetre real a.

14) Estudiau la diagonalització de les matrius de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix}$$

segons els valors de $a, b, c, d \in I\!R$. Donau una matriu P de vectors propis i la matriu diagonal quan $a = 1, b = d = 2$ i $c = 0$.

15) Demostrau que la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

és diagonalitzable en el cas que $ac > 0$ i $b = \sqrt{ac}$.

16) Estudiau la diagonalització de les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

segons els valors de $a, b, c \in I\!R$.

17) Estudiau la diagonalització de les matrius de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 2 & a' & b' \\ 0 & 0 & 2 & c' \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

segons els valors de $a, b, c, a', b', c' \in I\!R$.

18) Estudiau la diagonalització de les matrius de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & a' & b' \\ 0 & 0 & 1 & c' \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

segons els valors de $a, b, c, a', b', c' \in I\!R$.

19) Sigui $m \neq 0$ i

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ \frac{1}{m} & 0 & m \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & 0 \end{pmatrix}.$$

Provau que existeixen $a, b \in I\!R$ tals que $(A - aI_3)(A - bI_3) = 0$. Què es dedueix de a i b respecte de la matriu A?

20) Sigui $A \in M_n(I\!R)$ amb $A \neq 0, I_n$ una matriu tal que $A^2 = A$. Calculau els seus valors propis.

Trobau una matriu d'ordre 2 que satisfaci les condicions anteriors. Provau que la matriu A trobada anteriorment és diagonalitzable i calculau A^{20}.

21) Estudiau la diagonalització de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donau, si és possible, una matriu P de valors propis i la matriu diagonal. Justificau que A és invertible i donau l'expressió de A^{-1}.