APUNTS DE L'ASSIGNATURA: MATEMÀTIQUES I. ÀLGEBRA LINEAL

Margalida Mas i Joan Torrens

Capítol 2

Determinants i sistemes

2.1 Determinant d'una matriu quadrada

Definició 1. *Donada una matriu quadrada* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $a_{ij} \in \mathbb{K}$, *anomenarem* determinant *de la matriu* A *i ho denotarem per* $|A|$ *o* $det(A)$ *a un element del cos* $\mathbb{K}$ *que es defineix per inducció de la forma següent:*

- *Si* $n = 1$, $A = (a_{11})$ *i aleshores* $|A| = a_{11}$.
- *Si* $n > 1$, $|A| = a_{11}\alpha_{11} - a_{12}\alpha_{12} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{1n}\alpha_{1n}$.

on α_{1i} *és el determinant de la matriu d'ordre* $n-1$ *que s'obté en suprimir la primera fila i la columna i-èsima de la matriu* A.

Així, per a una matriu quadrada d'ordre 2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, tenim $\alpha_{11} = |a_{22}| = a_{22}$ i $\alpha_{12} = |a_{21}| = a_{21}$, i el determinant és:

$$|A| = a_{11}\alpha_{11} - a_{12}\alpha_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Si $A = (a_{ij})$ és una matriu quadrada 3×3, el determinant de A és

$$|A| = a_{11}\alpha_{11} - a_{12}\alpha_{12} + a_{13}\alpha_{13}$$

on

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \alpha_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad \alpha_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Així,

$$det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

que és el mateix resultat que s'obté aplicant la *regla de Sarrus*.

Notem que si $n = 2$, i calculam el determinant de la matriu transposada, es té $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$; $\alpha_{11} = |a_{22}|$ i $\alpha_{12} = |a_{12}| = a_{12}$, i $|A^t| = a_{11}\alpha_{11} - a_{21}\alpha_{12} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. Per tant $|A^t| = |A|$.

Aquest resultat se satisfà $\forall n \geq 1$: si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $|A^t| = |A|$. Degut a això, les propietats següents són certes tant per a files com per a columnes.

Propietats

Denotam per $\det(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n)$ el determinant de la matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ que té com a files (o columnes) les matrius fila (o columna) u_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

P1) $det(u_1, \ldots, \lambda u_i, \ldots, u_n) = \lambda\ det(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n)$.

En particular, si $\lambda = 0$, $\det(u_1, \ldots, 0, \ldots, u_n) = 0$.

Exemple 2.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 10 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 10 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

P2) $det(u_1, \ldots, u_i + u_i', \ldots, u_n) = det(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n) + det(u_1, \ldots, u_i', \ldots, u_n)$.

Exemple 3.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1+2 & 1 \\ 3 & 3+2 & 1 \\ 1 & 1+2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

P3) $det(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_n) = -det(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_n)$. És a dir, si s'intercanvien dues files o columnes el determinant canvia de signe.

Exemple 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

P4) $det(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_i, \ldots, u_n) = 0$: si una matriu té dues files o columnes iguals el seu determinant és nul.

P5) $det(u_1, \ldots, u_i, \ldots, \lambda u_i, \ldots, u_n) = 0$: si una matriu té dues files o columnes proporcionals el determinant és nul.

P6) Si $u_i = \sum_{k \neq i} a_k u_k$, llavors $det(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n) = 0$: si una fila o columna és combinació lineal de les altres, el determinant és nul.

Exemple 5.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

perquè la tercera columna és la suma de la primera i la segona.

P7) $det(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n) = det(u_1, \ldots, u_i + \sum_{k \neq i} a_k u_k, \ldots, u_n)$. El determinant no canvia si a una fila o columna se li suma una combinació lineal de les altres.

Exemple 6.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 9 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

perquè el segon l'hem obtingut del primer sumant a la tercera fila la suma de la primera i la segona.

Definició 7. *Sigui $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $n \geq 2$. Sigui a_{ij} l'element que ocupa la fila i i la columna j de la matriu A. Si suprimim la fila i i la columna j de A obtenim una matriu quadrada d'ordre $n-1$.*

- *El determinant d'aquesta matriu, que designarem per α_{ij}, s'anomena* menor complementari *de a_{ij}.*
- *L'element $A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$ s'anomena l'*adjunt *de a_{ij}.*
- *La* matriu adjunta *de $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $n \geq 2$, és la matriu que té com a coeficients o entrades els adjunts A_{ij} dels elements a_{ij} de la matriu A. Es denota per $adj(A)$.*

Exemple 8. *La matriu adjunta de* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *és*

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 \\ -3 & -7 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Càlcul d'un determinant

El determinant d'una matriu quadrada $A = (a_{ij})$ de tipus $n \times n$ amb $n \geq 2$ es pot calcular desenvolupant pels adjunts dels elements d'una qualsevol de les seves files o columnes.

Proposició 9. *Sigui $A = (a_{ij})$ una matriu quadrada d'ordre $n \times n$. Aleshores es verifica:*

$$detA = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

(desenvolupament d'un determinant pels adjunts dels elements d'una fila), i també

$$detA = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

(desenvolupament d'un determinant pels adjunts dels elements d'una columna).

Exemple 10. *El determinant* $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, *desenvolupat pels elements de la primera fila, és*

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 0 - 15 = -12$$

i per la segona columna,

$$|A| = 0\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 7 - 5 = -12$$

Si aplicam aquests desenvolupaments a les matrius triangulars tenim que el determinant d'una d'aquestes matrius és igual al producte dels elements de la diagonal principal.

Exemple 11.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3(-4) = 12$$

A cada passa hem fet un desenvolupament pels adjunts de la darrera fila.

El desenvolupament d'un determinant pels adjunts dels elements d'una fila o d'una columna, juntament amb les propietats enunciades abans, ens simplificarà de forma considerable el càlcul d'un determinant.

Vegem–ne alguns exemples.

Exemple 12.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 8$$

Primer hem sumat la primera fila a la tercera i després hem desenvolupat pels adjunts dels elements de la segona columna.

Exemple 13.

$$\begin{vmatrix} a+b+c & b+c+a & c+b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Hem tret factor comú $a+b+c$ i el determinant resultant és nul perquè tè dues files iguals.

Exemple 14.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

Hem fet desenvolupaments per la sisena fila, per la cinquena columna, per la tercera fila i per la primera fila.

Exemple 15. *Determinant de Vandermonde d'ordre 4 (e la primera passa a cada fila li restam l'anterior multiplicada per a):*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-ba & c^2-ca & d^2-da \\ 0 & b^3-b^2a & c^3-c^2a & d^3-d^2a \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-ba & c^2-ca & d^2-da \\ b^3-b^2a & c^3-c^2a & d^3-d^2a \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c^2-cb & d^2-db \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} (c-b) & (d-b) \\ c(c-b) & d(d-b) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

Aplicacions en el càlcul de matrius i sistemes

Els determinants serveixen per facilitar el càlcul amb matrius i en la resolució de sistemes. Comencem per unes quantes propietats.

Teorema 16. *Siguin A i B matrius quadrades d'ordre n, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Aleshores:*

- *A és invertible si i només si $|A| \neq 0$.*
- *$|AB| = |A| \cdot |B|$.*
- *Si $|A| \neq 0$, aleshores $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.*
- *Si $|A| \neq 0$, aleshores $A^{-1} = (\mathrm{adj}A)^t/|A|$.*

Notem que la darrera propietat ens dóna una nova manera de calcular la matriu inversa d'una matriu donada A. Per tal de calcular la matriu inversa el que s'ha de fer és calcular la matriu adjunta, transposar-la, i dividir-la pel determinant de la matriu donada.

Exemple 17. *Calculam la matriu inversa de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Aquesta matriu és invertible ja que $|A| = 7 \neq 0$. La matriu adjunta, transposada, és

$$(adjA)^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 8 & -2 & -9 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i per tant, la matriu inversa és

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 8 & -2 & -9 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{8}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-9}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Notem que a més a més podem afirmar que igualment $det(A^{-1}) = 1/7$.

Una altra aplicació dels determinants es troba en el càlcul del rang d'una matriu. Vegem-ho.

Definició 18. *Sigui A una matriu d'ordre $m \times n$, $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ i sigui $k < m, n$*

- *S'anomena* menor d'ordre *k de la matriu A al determinant de qualsevol matriu quadrada d'ordre k obtinguda al suprimir $m-k$ files i $n-k$ columnes de A.*

- *Donat un menor d'ordre k de la matriu A,* orlar *aquest menor consisteix en completar-lo fins a un menor d'ordre $k+1$ de A amb una altra fila i una altra columna de la matriu donada A.*

Es poden utilitzar aquests menors per calcular el rang d'una matriu A qualsevol.

Teorema 19. *Sigui $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ i sigui $k < m, n$. Aleshores, si es pot trobar un menor d'ordre k no nul i tots els d'ordre $k+1$ són 0, llavors $rang(A) = k$. És a dir, el rang de la matriu A coincideix amb l'ordre del major menor no nul obtingut de A.*

El teorema anterior es pot millorar amb el següent.

Teorema 20. *Sigui $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ i sigui $k < m, n$. Aleshores, si es pot trobar un menor d'ordre k no nul i totes les maneres possibles d'orlar aquest menor donen menors nuls, llavors $rang(A) = k$.*

Exemple 21. *Calculem el rang de la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

El primer menor d'ordre 2 és no nul: $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2+8 = 6 \neq 0$. *Segons el primer teorema hauriem de comprovar tots els menors d'ordre 3, si tots són 0 el rang seria 2 i sinó 3 (és el màxim ja que només hi ha 3 columnes). Però, gràcies al segon teorema bastarà comprovar els menors d'ordre 3 que s'obtenen orlant el menor no nul trobat. Així, només hem de provar els menors:*

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =_{f_1+2f_3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

i

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =_{c_2+c_3} \begin{vmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 4 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 0.$$

D'aquesta manera podem afirmar que $rang(A) = 2$.

Una altra aplicació molt útil es troba en la solució de sistemes d'equacions lineals. Sigui $AX = B$ l'expresió matricial d'un sistema de n equacions lineals i n incògnites $x_1, ..., x_n$. Sabem que si $|A| \neq 0$ aquest sistema té solució única donada per $X = A^{-1}B$. Ara bé en aquests casos un altra manera de trobar aquesta solució única és a través de la Regla de Cramer.

Teorema 22. *Sigui $AX = B$ l'expresió matricial d'un sistema de n equacions lineals i n incògnites $x_1, ..., x_n$ amb $det(A) \neq 0$. Sigui A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, la matriu que resulta de substituir la columna i de la matriu A pel terme independent B. Aleshores la solució del sistema ve donada per $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$ $\forall i = 1, 2, \ldots, n$.*

Exemple 23. *Considerem el sistema $AX = B$ on*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad i \quad B = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Podem comprovar fàcilment que

$$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

per tant tenim un sistema de Cramer amb solució única donada per:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 18 & 4 & 6 \\ 24 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{6} = \frac{24}{6} = 4, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 18 & 6 \\ 4 & 24 & 6 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-12}{6} = -2$$

i

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 18 \\ 4 & 5 & 24 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

La regla de Cramer també serveix en el cas de sistemes compatibles indeterminats. El que s'ha de fer és trobar un menor no nul que ens doni el rang del sistema i la submatriu del sistema corresponent a aquest menor és una matriu quadrada invertible a la que es pot aplicar Cramer. Llavors, les equacions no corresponents a aquest menor són supèrflues i les podem eliminar. Les incògnites involucrades en la submatriu s'anomenen *incògnites principals* i les altres, *incògnites secundàries.* D'aquesta manera el sistema amb les incògnites principals i només les equacions corresponents al menor no nul, té solució única donada per Cramer en funció de les incògnites secundàries.

Exemple 24. *Considerem el sistema $AX = B$ on*

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 8 \\ 4 & 2 & 4 \\ -8 & -4 & -4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad i \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Podem comprovar fàcilment que $det(A) = 0$ i que el menor d'ordre dos format per les dues primeres files i les columnes 2 i 3 és no nul:

$$\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0.$$

Si orlam aquest menor amb la columna dels termes independents obtenim

$$\begin{vmatrix} 6 & 8 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -4 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

i per tant el rang de l'ampliada també és 2. El sistema és aleshores compatible indeterminat. Així, les incògnites principals seràn y, z, la tercera equació no és necessària i el nostre sistema el podem re-escriure com

$$\begin{cases} 12x + 6y + 8z = 1 \\ 4x + 2y + 4z = 2 \end{cases} \qquad \textit{o, equivalentment} \qquad \begin{cases} 6y + 8z = 1 - 12x \\ 2y + 4z = 2 - 4x \end{cases}$$

que és un sistema de Cramer de la forma $A'X' = B'$ on

$$A' = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \quad i \quad B' = \begin{pmatrix} 1 - 12x \\ 2 - 4x \end{pmatrix}.$$

Aquest té solució única en funció de x donada per:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 - 12x & 8 \\ 2 - 4x & 4 \end{vmatrix}}{8} = \frac{-16x - 12}{8} = -2x - \frac{3}{2}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 - 12x \\ 2 & 2 - 4x \end{vmatrix}}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}.$$

D'aquesta manera les solucions del nostre sistema les podem donar totes en funció de x com

$$\textit{Solucions} = \{(x, -2x - 3/2, 5/4) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

A l'hora de calcular el rang d'una matriu, calcular la inversa d'una matriu regular o de resoldre un sistema d'equacions lineals podem fer-ho de dues maneres, a través de transformacions lineals o utilitzant determinants. La primera té l'avantatge de la implementació en ordinadors (requereix menys operacions), en canvi els determinants permeten més flexibilitat en les operacions. Aquesta flexibilitat pot resultar molt útil quan l'estudi a fer depèn d'un o més paràmetres. Vegem-ne uns exemples.

Exemple 25. *Estudiau el següent sistema segons els valors del paràmetre α*

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ x + y + \alpha z = 1 \end{cases}$$

En aquest cas podem calcular el determinant del sistema

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha + 2 & \alpha + 2 & \alpha + 2 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha + 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} =$$

$$(\alpha+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \alpha-1 & 0\\ 0 & 0 & \alpha-1\end{vmatrix} = (\alpha+2)\cdot 1\cdot(\alpha-1)^2$$

on, en la primera part, hem sumat a la primera fila les altres dues, hem tret $(\alpha+2)$ *fora del determinat i després hem restat la primera fila a la segona i a la tercera.*

D'aquesta manera el determinant és distint de 0, i per tant la matriu del sistema té rang 3, si i només si $\alpha \neq 1, -2$. *Això fa que per a tots els valors de a diferents de 1 i -2, el sistema és compatible determinat amb solució única donada per Cramer:*

$$x = \frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \alpha & 1\\ 1 & 1 & \alpha\end{vmatrix}}{(\alpha+2)(\alpha-1)^2} = \frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \alpha-1 & 0\\ 0 & 0 & \alpha-1\end{vmatrix}}{(\alpha+2)(\alpha-1)^2} = \frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha+2)(\alpha-1)^2} = \frac{1}{\alpha+2}$$

i anàlogament

$$y = z = \frac{1}{\alpha+2}.$$

Ara els casos $\alpha = 1, -2$ *els podem discutir apart.*

Quan $\alpha = 1$ *el sistema es redueix a una única equació donada per*

$$x+y+z = 1 \qquad \text{o equivalentement} \qquad x = 1-y-z$$

i així el sistema és compatible indeterminat amb solucions

$$\{(1-y-z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}.$$

En el cas $\alpha = -2$ *el sistema queda de la forma*

$$\begin{cases} -2x+y+z = 1\\ x-2y+z = 1\\ x+y-2z = 1\end{cases}$$

i sabem que la matriu del sistema no té rang 3 (el determinant és 0). En canvi el menor d'ordre dos format per les dues primeres files i les dues primeres columnes és distint de 0 i per tant $rang(A) = 2$:

$$\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Vegem el rang de la matriu ampliada. Completant el menor no nul amb la columna de termes independents tenim:

$$\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = 9 \neq 0.$$

El rang de l'ampliada és $rang(A \mid B) = 3 \neq 2 = rang(A)$ *i el sistema és incompatible.*

Exemple 26. *Determinau per a quins valors del paràmetre α és invertible la següent matriu i en els casos en que ho sigui trobau la seva inversa.*

$$\begin{pmatrix} \alpha & 4 & 5 \\ -\alpha & 1 & 2 \\ -\alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Per a ser invertible el determinant ha de ser distint de 0:

$$\begin{vmatrix} \alpha & 4 & 5 \\ -\alpha & 1 & 2 \\ -\alpha & -\alpha & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 4-\alpha & 5 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4-\alpha & 5 \end{vmatrix} = \alpha(7\alpha - 3).$$

Així la matriu és inertible si i només si $\alpha \neq 0, 3/7$ i en aquests casos la seva inversa és:

$$A^t = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & -\alpha \\ 4 & 1 & -\alpha \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \textit{adjunta} \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2\alpha & -5\alpha & 3 \\ -2\alpha & 5\alpha & -7\alpha \\ \alpha^2+\alpha & \alpha^2-4\alpha & 5\alpha \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha(7\alpha-3)} \begin{pmatrix} 2\alpha & -5\alpha & 3 \\ -2\alpha & 5\alpha & -7\alpha \\ \alpha^2+\alpha & \alpha^2-4\alpha & 5\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{7\alpha-3} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3/\alpha \\ -2 & 5 & -7 \\ \alpha+1 & \alpha-4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exemple 27. *Determinau el rang de la següent matriu segons els valors del paràmetre α:*

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & \alpha+1 & 1 \\ 0 & 2\alpha & \alpha-1 & 0 \\ 1 & 0 & 2\alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Veim de manera immediata que el menor d'ordre 2 format per les dues primeres columnes i les files primera i tercera és no nul, qualsevol que sigui el valor de α:

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Completant-lo amb la quarta columna (la més senzilla per no tenir cap paràmetre) obtenim:

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 2\alpha & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\alpha \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\alpha(\alpha-1).$$

D'aquesta manera el rang de la matriu serà 3 (no pot ser superior perquè la matriu només té 3 files) sempre que α sigui distint de 0,1.

En el cas en que $\alpha = 0$ la matriu queda

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{amb menor no nul} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

per tant, en aquest cas, el rang de A també és 3.

Quan $\alpha = 1$ *la matriu que tenim és*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

i en aquest cas els dos menors d'ordre 3 que completen el nostre menor d'ordre 2 no nul són 0. Amb la quarta columna ja ho sabem i amb la tercera tenim

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Per tant, per a $\alpha = 1$ *el rang de la nostra matriu és 2.*