Matemàtica Discreta

Grau en Enginyeria Telemàtica

Juan Gabriel Gomila

Grau en Enginyeria Telemàtica

Universitat de les Illes Balears

juangabriel.gomila@uib.es

19 de enero de 2017

Índex

El concepte de conjunt

Definició

Un conjunt és una col·lecció d'objectes. Els objectes que formen part d'un conjunt determinant s'anomenen elements del conjunt.

Exemples de conjunts són la col·lecció de tots els estudiants del grau de Telemàtica, la col·lecció de tots els nombres enters parells, etc.

Conjunts per extensió

Per descriure un conjunt amb un nombre finit d'elements ho podem fer per **extensió**, és a dir, mitjançant un llistat dels seus elements entre claus com per exemple $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
No és important l'ordre en que s'escriuen els elements. Així $\{1, 2, 3, 4\}$ i $\{4, 3, 2, 1\}$ representen el mateix conjunt.
No s'ha de tenir en compte si a la llista hi ha algún element repetit. El conjunt $\{1, 2, 3, 4, 2\}$ és el mateix que l'anterior.

Com denotar un conjunt

Emprarem lletres majúscules per designar els conjunts i lletres minúscules per designar els seus elements.
Per indicar que x és un element de A, escriurem $x \in A$ (x pertany a A).
Per indicar que x no és un element de A, escriurem $x \notin A$ (x no pertany a A).

Conjunts per compressió

També podem descriure els conjunts per **compressió**, és a dir, especificant una propietat que determini exactament els seus elements. Ho escriurem com

$$A = \{x \mid p(x)\}$$

Per exemple

$$A = \{x \mid x \text{ es enter positiu menor que } 5\}$$

representa el conjunt $A = \{1, 2, 3, 4\}$,

Un conjunt sense elements

El conjunt buid

El conjunt que no té cap element es denota per $\emptyset$ i s'anomena el conjunt buid. Per exemple

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -2\} = \emptyset$$

Igualtat de conjunts

Definició

Dos conjunts A i B són iguals quan tenen exactament els mateixos elements, és a dir, quan tot element de A és element de B i tot element de B és element de A.
Quan A i B són iguals ho denotam per $A = B$.

Subconjunts

Definició

Direm que un conjunt A és un subconjunt de B si tot element de A és element de B i ho escriurem com $A \subseteq B$, notació que significa que A està contingut dins B, o que B conté a A.

El conjunt universal

Definició

Sempre que parlem de conjunts, suposarem que són subconjunts d'un conjunt universal U que els conté a tots.

El conjunt universal conté tots els conjunts als quals es fa referencia en un exercici o resultat.

Exemples de subconjunts

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.
- $\mathbb{Z}^+ = \{x \in \mathbb{Z} : x > 0\} \subseteq \mathbb{Z}$
- Si A és un conjunt qualssevol, aleshores $\emptyset \subseteq A$ i $A \subseteq A$. Aquests dos s'anomenen els subconjunts trivials de A.
- Si A és un conjunt qualsevol i $B = \{A, \{A\}\}$, aleshores $A \in B$, $\{A\} \in B$, $\{A\} \subseteq B$ pero en canvi $A \not\subseteq B$.

Es pot comprovar fàcilment que $A = B \iff A \subseteq B$ i $B \subseteq A$ (Exercici).

Operacions amb conjunts

Veurem algunes operacions bàsiques de conjunts. Les operacions entre conjunts i les propietats que verifiquen aquestes operacions es poden il·lustrar mitjançant **diagrames de Venn**. Un diagrama de Venn és una representació gràfica de conjunts en el pla. El conjunt universal U es representa per l'interior d'un rectangle i els altres subconjunts són representats per cercles inclosos en el rectangle.

Operacions amb conjunts

Unió de conjunts

Siguin A i B conjunts, es defineix la seva unió com el conjunt de tots els elements que pertanyen a A o a B.

$$A \cup B = \{x : x \in \ A \ o \ x \in \ B\}$$

Si $A = \{a, b, c, d\}$ i $B = \{a, b, g, e, h\}$ llavors

$$A \cup B = \{a, b, c, d, g, e, h\}$$

Operacions amb conjunts

Intersecció de conjunts

Siguin A i B conjunts, es defineix la seva intersecció com el conjunt de tots els elements que pertanyen alhora a A i a B.

$$A \cap B = \{x : x \in \ A \ i \ x \in \ B\}$$

Si $A = \{a, b, c, d\}$ i $B = \{a, b, g, e, h\}$ llavors

$$A \cap B = \{a, b\}$$

Operacions amb conjunts

La unió i la intersecció de conjunts també es pot definir per a tres o més conjunts de la manera següent:

$$A \cup B \cup C = \{x : x \in \ A \ o \ x \in \ B \ o \ x \in \ C\}$$

$$A \cap B \cap C = \{x : x \in \ A \ i \ x \in \ B \ i \ x \in \ C\}$$

I per tant, la unió i la intersecció d'un nombre finit de conjunts es defineixen com:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x : x \in \ A_i \ per \ algun \ i\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x : x \in \ A_i \ per \ a \ tot \ i\}$$

Operacions amb conjunts

Conjunts disjunts

Direm que dos conjunts A i B són disjunts quan no tenen elements en comú, és a dir quan

$$A \cap B = \emptyset$$

Operacions amb conjunts

Diferència de conjunts

Siguin A i B conjunts, es defineix la diferència $A - B$ com el conjunt d'elements de A que no pertanyen a B.

$$A - B = \{x : x \in A \ i \ x \notin B\}$$

Si $A = \{a, b, c, d\}$ i $B = \{a, b, g, e, h\}$ llavors

$$A - B = \{c, d\}$$

$$B - A = \{g, e, h\}$$

Operacions amb conjunts

Complementari d'un conjunt

Sigui U un conjunt universal que conté un conjunt A, aleshores el conjunt $U - A$ s'anomena complement o complementari de A i es nota per A^c. Així,

$$A^c = \{x : x \notin A\}$$

Si $U = \mathbb{Z}$ i $A = \{x : x \ parell\}$, aleshores

$$A^c = \{x : x \ senar\}$$

Operacions amb conjunts

Diferència simètrica

Siguin A i B conjunts, es defineix la diferència simètrica de A i B com el conjunt unió dels elements de A que no pertanyen a B i els elements de B que no pertanyen a A.

$$A \oplus B = \{x : (x \in A \ i \ x \notin B) \ o \ (x \in B \ i \ x \notin A)\}$$

Es fàcil veure que

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

Si $A = \{a, b, c, d\}$ i $B = \{a, b, g, e, h\}$ llavors

$$A \oplus B = \{c, d, g, e, h\}$$

Operacions amb conjunts

Parts d'un conjunt

Sigui A un conjunt. El conjunt de tots els subconjunts de A s'anomena conjunt de parts de A (o conjunt potència de A) i es nota per $\mathcal{P}(A)$.

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$$

Si $A = \{a, b, c\}$ aleshores

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Propietats

A les transparències següents es mostren algunes de les propietats algebraiques que satisfan les operacions de conjunt, on A, B, C són subconjunts d'un conjunt universal U.

Propietats

Conmutatives

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Associatives

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Propietats

Idempotència

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

Involutiva

$$(A^c)^c = A$$

Propietats

Distributives

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Lleis de De Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Propietats

Absorció

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

Elements absorbents

$$A \cup U = U$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

Propietats

Element neutre

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap U = A$$

Complements

$$A \cup A^c = U$$

$$A \cap A^c = \emptyset$$

$$\emptyset^c = U$$

$$U^c = \emptyset$$

Conjunts finits

Conjunt finit

Un conjunt A és finit si conté exactament m elements distints on m és un enter no negatiu. Si un conjunt no és finit, és infinit.
Si A és finit, notam per $|A|$ o per $card(A)$ el nombre d'elements de A.

El conjunt $\emptyset$ és finit i $|\emptyset| = 0$. El conjunt de lletres de l'alfabet català és finit, i el conjunt de tots els enters positius i imparells és infinit.
Si A és un conjunt amb $|A| = m$, aleshores $|\mathcal{P}(A)| = 2^m$.

Principi de l'addició

Teorema

Si A i B són conjunts finits, aleshores $A \cup B$ i $A \cap B$ són finits i

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

En particular si $A \cap B = \emptyset$, aleshores $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Principi de l'addicció

En el cas de la unió de tres conjunts, la fórmula que ens dóna el seu cardinal és

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

En el cas de la unió de n conjunts, la fórmula que ens dóna el seu cardinal és

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \cdots + (-1)^(n-1)\alpha_n$$

on cada α_i és la suma de tots els cardinals de totes les interseccións de i conjunts dels n conjunts donats.

Àlgebra de Boole

L'àlgebra de Boole és una estructura matemàtica que, com a tal, apareix en moltes situacions. En particular, l'àlgebra de Boole té aplicació en la síntesi de xarxes de commutació, en l'estudi de circuits digitals i en l'anàlisi i programació mitjançant ordinador.

Àlgebra de Boole

Definició

Sigui $\mathcal{B} =< B, +, *, ^{-}, 0, 1 >$on

- B és un conjunt no buid ($B \neq \emptyset$),
- $0, 1 \in B$ amb $0 \neq 1$
- $+$ i $*$ són operacions binaries:

$$+ : B \times B \to B, \quad (a, b) \mapsto a + b. \qquad\qquad * : B \times B \to B, \quad (a, b) \mapsto a * b.$$

- $^{-}$ és una operació unària

$$^{-} : B \to B, \quad a \mapsto \bar{a}.$$

Àlgebra de Boole

Direm que $\mathcal{B}$ té estructura d'àlgebra de Boole si se satisfan les següents propietats

A1

Les operacions $+$ i $*$ són associatives $\forall\ a, b, c \in B$

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

$$(a*b)*c = a*(b*c)$$

A2

Les operacions $+$ i $*$ són conmutatives $\forall\ a, b \in B$

$$a+b = b+a$$

$$a*b = b*a$$

Àlgebra de Boole

A3

Cada operació binària té element neutre $\forall a \in B$

$$\exists\, 0 \in B: \; a + 0 = 0 + a = a$$

$$\exists\, 1 \in B: \; a * 1 = 1 * a = a$$

A4

Per a cada element $a \in B$ existeix un únic element $\bar{a} \in B$, anomenat complementari de a tal que

$$a + \bar{a} = 1; \quad a * \bar{a} = 0$$

Àlgebra de Boole

A5

Cada operació binària és distributiva respecte de l'altra,
$\forall\ a, b, c \in B$

$$a * (b + c) = a * b + a * c$$

$$a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$$

Aquest cinc parells de propietats es coneixen com els axiomes de l'àlgebra de Boole. Qualsevol altra propietat d'una àlgebra de Boole es pot deduir a partir de les anteriors.

Àlgebra de Boole

Les operacions $+, *$ i $^-$ s'anomenen suma, producte i complementari respectivament. En absència de parèntesi $^-$ té preferència sobre $*$ i $*$ sobre $+$. Usualment ometrem el símbol $*$, així per escriure $a * b$ ho farem com ab.

L'element neutre de la suma s'anomena element *zero* i l'element neutre del producte s'anomena element *unitat*.

Exemples d'àlgebres de Boole

Exemple 1

Considerem un conjunt U finit i $U \neq \emptyset$. El conjunt $\mathcal{P}(U)$ amb les operacions

- $\cup$ unió de conjunts,
- $\cap$ intersecció de conjunts,
- ^{c} complementari d'un conjunt

té estructura d'àlgebra de Boole.
El neutre de la unió és el conjunt buid $\emptyset$ i el neutre de la intersecció és el conjunt U.

Exemples d'àlgebres de Boole

Exemple 2

Sigui $D_{70} = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}$ el conjunt format pels divisors de 70. Si definim en D_{70} les següents operacions:

- $a + b = mcm(a, b)$,
- $a * b = mcd(a, b)$,
- $\bar{a} = 70/a$

aleshores D_{70} té estructura d'àlgebra de Boole amb 1 com element zero i 70 com element unitat.

Exemples d'àlgebres de Boole

Exemple 3

Sigui $B = \{0, 1\}$ amb les operacions binàries $+$ i $*$ definides per

$+$	1	0
1	1	1
0	1	0

$*$	1	0
1	1	0
0	0	0

i l'operació unària $^{-}$ definida per $\bar{0} = 1$, $\bar{1} = 0$. Aleshores $\mathcal{B} =< 0, 1, +, *, ^{-} >$ és una àlgebra de Boole, anomenada **àlgebra de Boole binària**.

Principi de dualitat

Principi

En una àlgebra de Boole tota propietat que pugui deduir-se dels axiomes o de qualsevol altra propietat derivada d'ells, dóna una altra propietat que s'obté intercanviant:

- les operacions suma i producte,
- els símbols 0 i 1

La propietat que s'obté d'aquesta manera rep el nom de **propietat dual** de la inicial

Principi de dualitat

Per exemple, la propietat dual de

$$(1+a)(b+0)=b$$

és

$$(0a)+(b1)=b$$

El principi de dualitat és conseqüència de la pròpia estructura d'àlgebra de Boole, ja que cada parell de propietats en la seva definició ve donat per una propietat i la seva dual.

Propietats

Es pot demostrar matemàticament que tota àlgebra de Boole finita és estructuralment la mateixa que una àlgebra de Boole de conjunts. En aquest sentit tota àlgebra de Boole satisfarà les mateixes propietats que una àlgebra de Boole de conjunts. Així, a la taula següent donam la llista de propietats que comparteixen una àlgebra de Boole finita, $\mathcal{B}$, i una àlgebra de Boole de conjunts, $\mathcal{P}(U)$

Propietats

	$\mathcal{B}$	$\mathcal{P}(U)$
Commutatives	$x+y=y+x$ $xy=yx$	$A\cup B=B\cup A$ $A\cap B=B\cap A$
Associatives	$(x+y)+z=x+(y+z)$ $(xy)z=x(yz)$	$(A\cup B)\cup C=A\cup (B\cup C$ $(A\cap B)\cap C=A\cap (B\cap C)$
Idempotència	$x+x=x$ $xx=x$	$A\cup A=A$ $A\cap A=A$
Involutiva	$\overline{(\overline{x})}=x$	$(A^c)^c=A$
Distributives	$x+(yz)=(x+y)(x+z)$ $x(y+z)=xy+xz$	$A\cup (B\cap C)=(A\cup B)\cap (A\cup C)$ $A\cap (B\cup C)=(A\cap B)\cup (A\cap C)$
Lleis de De Morgan	$\overline{(x+y)}=\overline{x}\,\overline{y}$ $\overline{xy}=\overline{x}+\overline{y}$	$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$ $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$
Absorció	$x+xy=x$ $x(x+y)=x$	$A\cup (A\cap B)=A$ $A\cap (A\cup B)=A$
Element absorbent	$x+1=1$ $x0=0$	$A\cup U=U$ $A\cap\emptyset=\emptyset$
Element neutre	$x+0=x$ $x1=x$	$A\cup\emptyset=A$ $A\cap U=A$
Prop. del complement	$x+\overline{x}=1$ $x\overline{x}=0$ $\overline{0}=1$ $\overline{1}=0$	$A\cup A^c=U$ $A\cap A^c=\emptyset$ $\emptyset^c=U$ $U^c=\emptyset$

Propietats

Sabem que si un conjunt A té n elements, aleshores $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$ i, degut a la relació que hi ha entre conjunts i àlgebres de boole, es pot enuncar el següent resultat.

Teorema

Tota àlgebra de boole finita té 2^n elements per a algún enter positiu n.

Funcions booleanes

Consideram a partir d'ara l'àlgebra de Boole binària on $B = \{0, 1\}$ i notam per B^n el producte cartesià de B per ell mateix n vegades.

$$B^n = B \times B \times \cdots \times B = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : \ x_i \in \{0, 1\} \forall\, i = 1, \cdots, n\}$$

S'anomenen variacions amb repetició de n elements diferents agafats de k en k les mostres ordenades de k elements, els quals es poden repetir, agafats dels n elements.
El seu nombre ve donat per $VR_{n,k} = n^k$.

Funcions booleanes

Notem que si $B = \{0,1\}$, aleshores $|B^n| = 2^n$, així

$$B^2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$

$$B^3 = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),$$
$$(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$$

Funció booleana

Definició

S'anomena funció booleana definida en B o funció de commutació lògica a tota aplicació

$$f : B^n \longrightarrow B$$

tal que $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ pugui expressar-se a partir de les operacions definides en B realitzades sobre les variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

Total funció booleana en $B = \{0, 1\}$ es pot representar mitjançant taules de valors o taules de veritat. Les n primeres columnes permeten representar els 2^n elements de B^n i la columna final indica el valor que assigna f a cada $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Funció booleana

Exemple

Calculem els valors de la funció booleana

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + \bar{x_3}$$

Els valors d'aquesta funció venen representats a la taula següent:

x_1	x_2	x_3	x_1x_2	$\overline{x_3}$	$x_1x_2 + \overline{x_3}$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

Nombre de funcions booleanes en l'algebra de boole binària

El nombre d'elements del conjunt B^n és 2^n i per cada un d'aquests eelements una funció booleana sobre $\{0,1\}$ pot prendre valor 0 o valor 1. Aleshores

$$\{f \mid f : B^n \longrightarrow B\} = VR_{2,2^n} = 2^{(2^n)}$$

Així per $n = 2$, el nombre de funcions booleanes serà $2^4 = 16$; per a $n = 3$, el nombre de funcions booleanes serà $2^8 = 256$...

Nombre de funcions booleanes en l'algebra de boole binària

Les 16 funcions booleanes de dues variables són

$$f_0(x_1,x_2)=0;\quad f_1(x_1,x_2)=x_1x_2;\quad f_2(x_1,x_2)=x_1\overline{x_2};\quad f_3(x_1,x_2)=x_1;$$

$$f_4(x_1,x_2)=\overline{x_1}x_2;\quad f_5(x_1,x_2)=x_2;\quad f_6(x_1,x_2)=\overline{x_1}x_2+x_1\overline{x_2};\quad f_7(x_1,x_2)=x_1+x_2;$$

$$f_8(x_1,x_2)=\overline{x_1}\,\overline{x_2};\quad f_9(x_1,x_2)=x_1x_2+\overline{x_1}\,\overline{x_2};\quad f_{10}(x_1,x_2)=\overline{x_2};\quad f_{11}(x_1,x_2)=x_1+\overline{x_2}$$

$$f_{12}(x_1,x_2)=\overline{x_1};\quad f_{13}(x_1,x_2)=\overline{x_1}+x_2;\quad f_{14}(x_1,x_2)=\overline{x_1}+\overline{x_2};\quad f_{15}(x_1,x_2)=1.$$

Exercici

Escriviu les taules de valors de les funcions booleanes de dues variables.

Funcions booleanes

Exercici

Calcula els valors de la funció booleana $F(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + \bar{x}_3$

x_1	x_2	x_3	x_1x_2	$\overline{x_3}$	$x_1x_2 + \overline{x_3}$
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

Funcions booleanes

Exercici

Solució

x_1	x_2	x_3	x_1x_2	$\overline{x_3}$	$x_1x_2+\overline{x_3}$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

Formes canòniques

Minterm i Maxterm

En B^n, el producte de n variables diferents complementades o no, rep el nom de **minterm**. En B^n, la suma de n variables diferents complementades o no, rep el nom de **maxterm**.

Per exemple, en B^4, les expressions $x_1 x_2 \bar{x_3} \bar{x_4}$, $\bar{x_1} x_2 x_3 \bar{x_4}$, són minterms.
Per exemple, en B^3, les expressions $x_1 + x_2 + \bar{x_3}$, $\bar{x_1} + x_2 + \bar{x_3}$, són maxterms.

Formes canòniques

Proposició

Sigui $f : B^n \longrightarrow B$ una funció booleana, aleshores

- f es pot expressar com a suma de minterms (suma de productes). Aquesta expressió s'anomena forma canònica disjuntiva de f.
- f es pot expressar com a producte de maxterms (producte de sumes). Aquesta expressió s'anomena forma canònica conjuntiva de f.

Formes canòniques

Proposició

Sigui $f : B^n \longrightarrow B$ una funció booleana, aleshores

- Les formes canòniques d'una funció booleana són úniques.
- Dues funcions booleanes són equivalents (són la mateixa funció) si i només si tenen les mateixes formes canòniques.

Formes canòniques

Les formes canòniques d'una funció booleana es poden obtenir de dues maneres:

1. A partir d'una taula de valors

La **forma canònica disjuntiva** de $f : B^n \longrightarrow B$ s'obté a partir de cada un dels valors 1 que pren la funció (un producte de totes les variables o els seus complements pren el valor 1 quan **tots els factors prenen el valor 1**).
Així el nombre de minterms en la forma disjuntiva és igual al nombre d'uns (1) en la taula de valors de f.

Formes canòniques

1. A partir d'una taula de valors

La **forma canònica conjuntiva** de $f: B^n \longrightarrow B$ s'obté a partir de cada un dels valors 0 que pren la funció (una suma de totes les variables o els seus complements pren el valor 0 quan **tots els factors prenen el valor 0**).
Així el nombre de maxterms en la forma conjuntiva és igual al nombre de zeros (0) en la taula de valors de f.

Formes canòniques

Exercici

Obteniu les formes canoniques disjuntiva i conjuntiva de la funció $f : B^3 \longrightarrow B$ donada per la taula

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Formes canòniques

Solució

La forma canònica disjuntiva de f serà

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x_1}\bar{x_2}\bar{x_3} + \bar{x_1}x_2\bar{x_3} + \bar{x_1}x_2x_3 + x_1x_2\bar{x_3} + x_1x_2x_3$$

La forma canònica conjuntiva de f serà

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + \bar{x_3})(\bar{x_1} + x_2 + x_3)(x_1 + \bar{x_2} + x_3)$$

Formes canòniques

2. A partir de la seva expressió en la fórmula

Per obtenir la **forma canònica disjuntiva** de $f : B^n \longrightarrow B$ interessa obtenir una suma de productes, encara que aquests productes no siguin minterms.
La propietat que ho sol permetre és la distributiva del producte respecte de la suma. Una vegada obtinguda la suma de productes, cada variable x_j que no figuri en un sumand es pot afegir multiplicant per 1, fent $1 = x_j + \bar{x}_j$ i, després es torna a aplicar la propietat distributiva.

Formes canòniques

2. A partir de la seva expressió en la fórmula

Per obtenir la **forma canònica conjuntiva** de $f : B^n \longrightarrow B$ es vol transformar l'expressió inicial en producte de sumes. En aquest cas juga un paper essencial la propietat distributiva de la suma respecte del producte.
Una vegada obtingut el producte de sumes, cada variable x_j que no figuri en un factor es pot afegir sumant 0, fent $0 = x_j\bar{x}_j$ i, després es torna a aplicar la propietat distributiva.

En ambdós casos, després de multiplicar per 1 o sumar 0 i aplicar les propietats distributives corresponents s'han d'eliminar els minterms o maxterms repetits aplicant la propietat idempotent.

Formes canòniques

Exercici

Obteniu les formes canoniques disjuntiva i conjuntiva de la funció $f : B^3 \longrightarrow B$ donada per

$$f(x, y, z) = \bar{x} + yz$$

Formes canòniques

Solució a la forma disjuntiva

$$f(x,y,z) = \bar{x} + yz =$$

Introduïm les variables que falten a cada sumand

$$\bar{x}(y+\bar{y})(z+\bar{z}) + (x+\bar{x})yz =$$

Aplicam la distributiva

$$\bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + xyz + \bar{x}yz$$

Eliminam minterms repetits gràcies a la idempotència

$$\bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + xyz.$$

Formes canòniques

Solució a la forma conjuntiva

$$f(x, y, z) = \bar{x} + yz =$$

Aplicam la distribuiva de la suma respecte del producte

$$(\bar{x} + y)(\bar{x} + z) =$$

Afegim a cada factor les variables que falten

$$(\bar{x} + y + z\bar{z})(\bar{x} + y\bar{y} + z) =$$

Aplicam la commutativa de la suma en el segon factor

$$(\bar{x} + y + z\bar{z})(\bar{x} + z + y\bar{y}) =$$

...

Formes canòniques

Solució a la forma conjuntiva

Aplicam la distribuiva de la suma respecte del producte

$$(\bar{x}+y+z)(\bar{x}+y+\bar{z})(\bar{x}+z+y)(\bar{x}+z+\bar{y}) =$$

Aplicam la commutativa de la suma

$$(\bar{x}+y+z)(\bar{x}+y+\bar{z})(\bar{x}+y+z)(\bar{x}+\bar{y}+z) =$$

Eliminam els maxterms repetits gràcies a la idempotència

$$(\bar{x}+y+z)(\bar{x}+y+\bar{z})(\bar{x}+\bar{y}+z).$$

Es important afegir les variables en l'ordre que figuren en la funció: x, y, z.

Simplificació de funcions booleanes

L'objectiu d'aquesta secció és l'obtenció d'expressions simplificades de les funcions booleanes, tant si la seva expressió inicial és una de les formes canoniques o no.
Els mètodes habituals de simplificació són tres: mètode algebraic, metode gràfic (els mapes de Karnaugh) i el mètode iteratiu (mètode de Quine-McCluskey).
Nosaltres només utilitzarem el mètode algebraic i mètode gràfic.

Simplificació de funcions booleanes

Mètode algebraic

Consisteix en la utilització de les propietats generals vàlides en qualsevol àlgebra de Boole. Les propietats que faciliten el procès de simplificació són:

- Complementari: $x + \bar{x} = 1; \quad x\bar{x} = 0$
- Idempotència: $x + x = x; \quad xx = x$
- Absorció: $x + xy = x; \quad x(x + y) = x$
- Llei de De Morgan: $\overline{x + y} = \bar{x}\bar{y}; \quad \overline{xy} = \bar{x} + \bar{y}$
- Distributives: $xy + z = x(y + z); \quad x + yz = (x + y)(x + z)$
- Element absorbent: $1 + x = 1; \quad x0 = 0.$

Simplificació de funcions booleanes

Mètode algebraic - Exemple

Simplificau la funció $f : B^3 \longrightarrow B$ definida per

$$f(x,y,z) = x + \bar{x}y + xy\bar{z} + xz + x\bar{z}$$

Simplificació de funcions booleanes

Mètode algebraic - Solució

Aplicam la distributiva

$$x(1 + y\bar{z}) + \bar{x}y + x(z + \bar{z}) =$$

Aplicam els elements absorbents i complementaris

$$x + \bar{x}y + x =$$

Aplicam la propietat idempotent

$$x + \bar{x}y =$$

...

Simplificació de funcions booleanes

Mètode algebraic - Solució

Aplicam la distributiva

$$(x+\bar{x})(x+y) =$$

Aplicam la de complementaris

$$1(x+y) = x+y$$

Simplificació de funcions booleanes

Exercici

Escriu la funció booleana

$$F(x, y, z) = (x + y)\bar{z}$$

en forma normal disjuntiva algebraicament emprant les propietats de l'àlgebra de Boole, i com a suma booleana de minterms

Simplificació de funcions booleanes

Amb propietats d'àlgebra de Boole

$$F(x,y,z) = (x+y)\bar{z}$$

Aplicam la distributiva

$$= x\bar{z} + y\bar{z}$$

Aplicam la identitat

$$= x1\bar{z} + 1y\bar{z}$$

Invers de 1

$$= x(y+\bar{y})\bar{z} + (x+\bar{x})y\bar{z}$$

Simplificació de funcions booleanes

Amb propietats d'àlgebra de Boole

Distributiva

$$= xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$$

Idempotència

$$= xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$$

Simplificació de funcions booleanes

Amb la taula de minterms

En primer lloc necessitam la taula de valors de F per tots els possibles valors de les variables

x	y	z	$x+y$	$\overline{z}$	$(x+y)\overline{z}$	minterm
0	0	0	0	1	0	
0	0	1	0	0	0	
0	1	0	1	1	1	$\overline{x}\,y\,\overline{z}$
0	1	1	1	0	0	
1	0	0	1	1	1	$x\,\overline{y}\,\overline{z}$
1	0	1	1	0	0	
1	1	0	1	1	1	$x\,y\,\overline{z}$
1	1	1	1	0	0	

Els minterms corresponen a les 3 files de la taula on la funció val 1, això passa quan els tres literals valen 1, per tant

$$F(x,y,z) = \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z}$$

Simplificació de funcions booleanes

Exercici

Un motor M està controlat per tres interruptors x, y, z i funciona únicament quan dos dels interruptors estan en mode ON. Dedueix la taula de valors de la funció $M(x, y, z) : B^3 \longrightarrow B$ i l'expressió booleana de M en forma normal disjuntiva.

Simplificació de funcions booleanes

Solució

Els tres interruptors són variables booleanes ja que poden prendre dos valors. Recordem que el valor 1 correspon a l'interruptor en mode ON i el valor 0 a interruptors en la posició OFF: El motor M pren el valor 1 (encès) quan té dos interruptors engegats i 0 (apagat) en tot altre cas.

Simplificació de funcions booleanes

Solució

La taula de valors de M a partir de les condicions del problema és:

x	y	z	M
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

i per tant l'expressió booleana $M(x, y, z)$ estarà formada pels minterms que facin que la funció prengui el valor 1 (motor encès):

$$M(x, y, z) = \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z}$$

Simplificació de funcions booleanes

Exercicis

Simplificau les funcions:

1. $f(x,y) = (x+y)(x+\bar{y})(\bar{x}+y)$
2. $f(x,y,z,w) = \overline{w + w\bar{x} + yz}$
3. $f(x,y,z,w) = xw + x\bar{y} + yz + x\bar{z}$

Simplificació de funcions booleanes

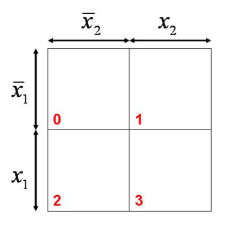
Solucions

1. $f(x,y) = xy$
2. $f(x,y,z,w) = \bar{w}(x+\bar{w})(\bar{y}+\bar{z})$
3. $f(x,y,z,w) = x + yz$

Simplificació de funcions booleanes

Diagrames de Karnaugh

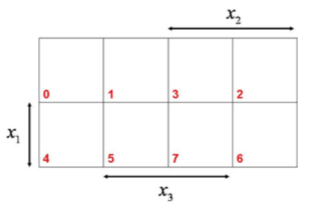
Les funcions booleanes escrites en forma normal disjuntiva es poden simplificar emprant els diagrames o mapes de Karnaugh. Es tracta d'un mètode visual molt útil per realitzar simplificacions. El diagrama de Karnaugh per dues variables x_1, x_2 està format per $2^2 = 4$ quadrats que representen tots els minterms de grau 2 possibles:



Simplificació de funcions booleanes

Diagrames de Karnaugh

El diagrama de Karnaugh per 3 variables consta de $2^3 = 8$ quadrats

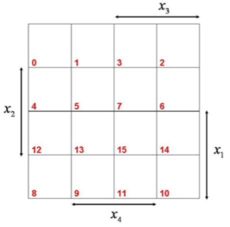


En un diagrama de Karnaugh es diu que dos quadrats són adjacents si difereixen només en un literal; és a dir, en mourer-nos vertical o horitzontalment només una variable canvia entre dos quadrats adjacents.

Simplificació de funcions booleanes

Diagrames de Karnaugh

En el cas de 4 variables, fixem-nos com les voreres superiors (les de l'esquerra) són adjacents als quadrats inferiors (de la dreta) ja que només es diferencien en un literal.



Simplificació de funcions booleanes

Les funcions booleanes es poden representar mitjançant diagrames de Karnaugh introduint a cada quadrat el valor de la funció.

Exercici

Representa la funció F emprant el diagrama de Karnaugh

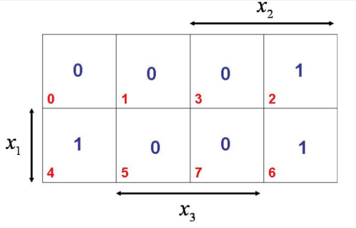
x_1	x_2	x_3	$F(x_1, x_2, x_3)$	minterm
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	1	$\overline{x_1}\, x_2\, \overline{x_3}$
0	1	1	0	
1	0	0	1	$x_1\, \overline{x_2}\, \overline{x_3}$
1	0	1	0	
1	1	0	1	$x_1\, x_2\, \overline{x_3}$
1	1	1	0	

Simplificació de funcions booleanes

Les funcions booleanes es poden representar mitjançant diagrames de Karnaugh introduint a cada quadrat el valor de la funció.

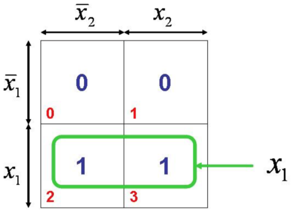
Solució

Al diagrama de Karnaugh hi haurà 3 quadrats amb el valor 1, els corresponent als minterms $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 = m_2$, $x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3) m_4$ i $x_1 x_2 \bar{x}_3 = m6$. La resta de quadrats tenen el valor 0



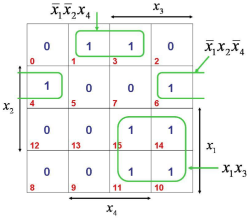
Simplificació de funcions booleanes

Per simplificar expressions booleanes a partir de mapes de Karnaugh empram la següent regla: sempre que en un diagrama de Karnaugh dos quadrats adjacents prenguin el valor 1, els minterms representats pels quadrats d'aquests es poden combinar en un producte que contindrà només els literals comuns als dos minterms.



Simplificació de funcions booleanes

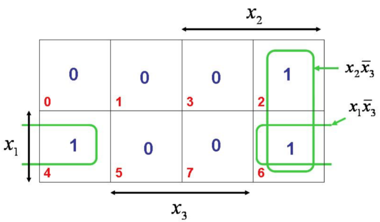
Aquesta idea es pot generalitzar: es poden combinar els minterms pertanyents a quadrats adjacents de tal forma que el total de quadrats combinats sigui una potència de 2. Un bloc format per un quadrat elimina 0 variables; un bloc format per 2 quadrats elimina una variable; un bloc de 4 quadrats elimina dues variables,...



Simplificació de funcions booleanes

Exercici

Simplifica la funció booleana $F(x_1, x_2, x_3)$ de l'exemple anterior emprant el diagrama de Karnaugh



$$F(x_1, x_2, x_3) = x_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_3$$

Simplificació de funcions booleanes

Exercici

Un ascensor disposa d'un dispositiu de seguretat: l'ascensor funciona quan està buid o amb pesos d'entre 25 i 300 kg. L'ascensor té 3 sensors: el sensor A és sensible a qualssevol pes; el sensor B és sensible a pesos majors que 25 kg; i el sensor C és sensible a pesos superiors a 300 kg. Troba la funció booleana més senzilla que compleixi les condicions.

Simplificació de funcions booleanes

Solució

Em primer lloc hem de plantejar el problema, identificar variables, la funció booleana i determinar els seus valors.
Les variables booleanes a, b i c es corresponen als tres tipus de sensors i la funció booleana F correspon a l'ascensor (es posarà en marxa si se satisfan les 3 condicions de seguretat).
Les variables a, b i c prenen el valor 1, si detecten pes segóns els seus límits, i 0 si no detecten pes.
La funció $F(a, b, c)$ valdrà 1 quan l'ascensor es posa en marxa (i.e. se satisfan les condicions de seguretat) i 0 quan no es posi en marxa.

Simplificació de funcions booleanes

- $F(0,0,0)=1$, cap sensor detect pes (l'ascensor està buid), l'ascensor es posa en marxa.
- $F(1,0,0)=0$, A detecta pes, però B i C no detecten pes (tenim dins l'ascensor un pes entre 0 i 25 kg); l'ascensor no arranca.
- $F(1,1,0)=1$, A i B detecten pes però C no (la càrrega de l'ascensor està entre 25 i 300 kg); l'ascensor arranca
- $F(1,1,1)=0$,tots els sensors detecten pes (la càrrega de l'ascensor supera els 300 kg); l'ascensor no es posa en marxa.

Simplificació de funcions booleanes

a	b	c	$F(a,b,c)$
0	0	0	1
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	0
1	0	1	
1	1	0	1
1	1	1	0

I per a la resta de combinacions de valors de a, b i c?

Simplificació de funcions booleanes

$F(0,1,0)$ correspon a una situació on el sensor A no detecta pes, el sensor B detecta pes entre 25 i 300 kg i el sensor C no detecta pes. Això es una situació impossible.
En certes ocasions, pot passar que certes combinacions de les variables no es puguin prendre o bé que el valor de F no depèn de quins siguin els valors de les seves variables. Aquests casos reben el nom de **casos impossible** o **indiferents**. En aquestes condicions no importa el valor que prengui F, i per defecte li assignarem el valor $*$.

Simplificació de funcions booleanes

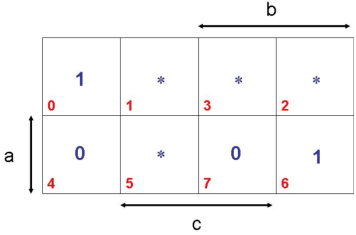
a	b	c	$F(a,b,c)$
0	0	0	1
0	0	1	$\star$
0	1	0	$\star$
0	1	1	$\star$
1	0	0	0
1	0	1	$\star$
1	1	0	1
1	1	1	0

Una expressió booleana per F és

$$F(a,b,c) = ab\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$$

Simplificació de funcions booleanes

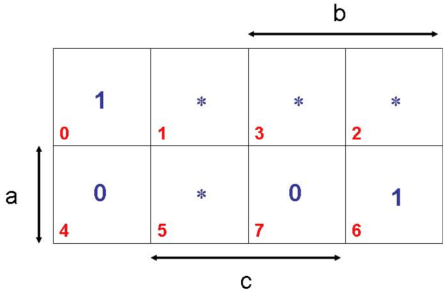
El diagrama de Karnaugh és



El criteri que seguirem és assignar aquell valor que permeti simplificar l'expressió definida pel diagrama de Karnaugh. Volem obtenir els blocs de major tamany possible juntant quadrats que continguin o bé 1 o bé $*$. Els quadrats corresponents a situacions impossibles poden cobrir-se amb blocs o bé qudar al descobert.

Simplificació de funcions booleanes

La simplificació del mapa de Karnaugh és:



$$F(a,b,c) = \bar{a} + b\bar{c}$$

L'ascensor es posa en marxa si, o bé el sensor A no detecta pes, o bé si el sensor B detecta pes i el sensor C no.