TEMA 2. VECTORES

1. DEFINICIONES

Puntos en $\boldsymbol{R^n}$: Coordenadas
Vectores fijos: Caracterización. Vectores equivalentes
Vectores libres: Caracterización
Relación Punto-Vector

2. OPERACIONES CON VECTORES

Suma y resta de vectores libres
Producto de vector por escalar: Paralelismo o proporcionalidad de vectores
Combinación lineal de vectores.

3. PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON VECTORES

4. LA ESTRUCTURA EUCLIDIANA DE R^n

Producto escalar (o interior): Definición y Propiedades
Norma o longitud. Propiedades
Distancia entre dos puntos
Ángulo entre dos vectores. Perpendicularidad y producto escalar
Desigualdad de Cauchy-Schwarz.

5. PRODUCTO VECTORIAL. PRODUCTO MIXTO

Es obvio que estamos interesados en los vectores ya que desempeñan un papel importante no solo en Matemáticas sino en Física, Ingeniería y otros muchos campos de la Ciencia.

Ya tenemos costumbre de reconocer que los vectores del plano y del espacio tienen doble personalidad: la algebraica y la geométrica.

Comenzaremos hablando de vectores en un contexto geométrico.

1. DEFINICIONES

D 1.1–PUNTO EN LA RECTA REAL R

Una vez escogidos *un origen y una unidad de longitud* cada punto de la recta viene definido por **un** nº real y solo uno y viceversa.

D 1.2– PUNTO EN EL PLANO $R \text{ x } R = R^2$

Una vez escogidos *un origen, dos ejes (rectas) y una unidad de longitud* un punto del plano se define como un par (x, y) donde x e y son números reales.

D 1.3– PUNTO EN EL ESPACIO $R \text{ x } R \text{ x } R = R^3$

Una vez escogidos *un origen, tres ejes (rectas) y una unidad de longitud* un punto del plano se define como una terna (x, y, z) donde x, y, z son números reales.

D 1.4– PUNTO EN EL ESPACIO $R \text{ x} \ldots\ldots \text{x } R = R^n$

Se define un **punto** en el espacio R^n como la n-pla de números: ($x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$) siendo n un natural.

Se denotará con una X mayúscula.

D 1.5– COORDENADAS DEL PUNTO

Los números $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ son las **coordenadas** del punto X.

1.1 VECTORES FIJOS Y VECTORES LIBRES

Las definiciones siguientes se darán desde una perspectiva geométrica de los vectores.

D 1.6– VECTOR FIJO

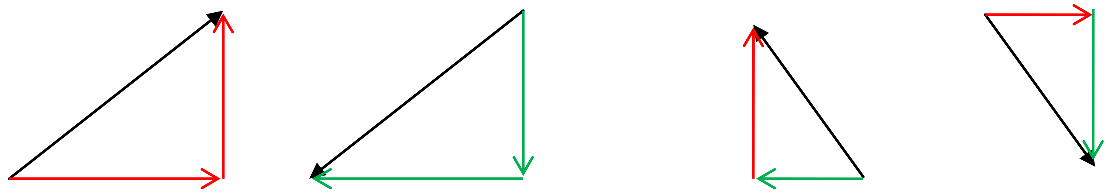
Un vector fijo es una pareja ordenada de puntos A y B que se indica como $\overrightarrow{AB}$:

Al punto A se le llama **origen** y al punto B se le llama **extremo.**

La representación de un vector en el plano o en el espacio de 3 dimensiones se hace mediante **segmentos orientados acabados en una punta de flecha en el punto extremo.**

D 1.7– COMPONENTES DE UN VECTOR FIJO $\overrightarrow{AB}$

Son sus proyecciones (orientadas) sobre los ejes horizontal y vertical.



Criterio de colores: rojo: + VERDE − Las componentes pueden ser positivas o negativas.

1. OBTENCIÓN COMPONENTES DE UN VECTOR FIJO $\overrightarrow{AB}$

En la figura 1 se ve que si los puntos origen y extremo son A(1,2) y B(5,4) las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ se obtienen sin más que restar las coordenadas del punto extremo B menos las del origen A.

(5 –1, 4 –2) = **(4, 2)**

Efectivamente = **4 es la medida de la proyección del vector sobre el eje horizontal y**

2 es la medida de la proyección del vector sobre el eje vertical

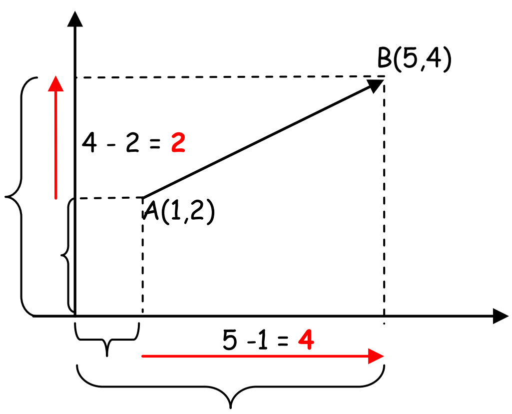


Figura 1

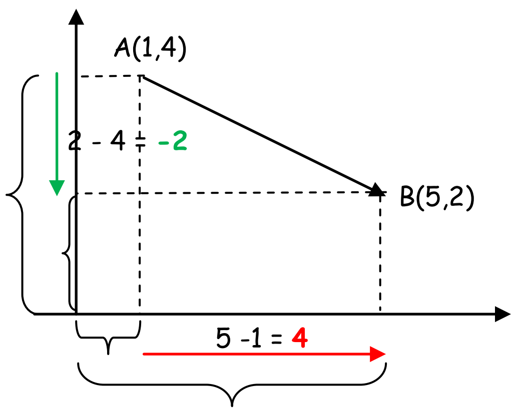


Figura 2

En la figura 2 tenemos un ejemplo en que una de las componentes es negativa:

Origen A(1,4) y extremo B(5,2): (5 –1, 2 - 4) = **(4, -2)**

Efectivamente = **4 es la medida de la proyección del vector sobre el eje horizontal y**

-2 es la medida de la proyección del vector sobre el eje vertical

En general las componentes de un vector $\overrightarrow{AB}$ se calculan restando las coordenadas del punto extremo $B=(b_1,b_2)$ menos las del punto origen $A=(a_1,a_2)$: $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1, b_2-a_2)$

Observación:

El valor absoluto de las componentes coincide con la longitud de los catetos del triángulo rectángulo formado y que tiene al vector como hipotenusa.

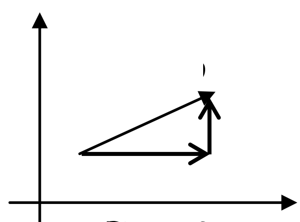


Figura 3

2. CARACTERIZACIÓN DE UN VECTOR FIJO

- En un contexto geométrico las 3 características de un vector fijo son:

- el módulo: es la longitud del segmento

- la dirección: la de la recta a la que pertenece

- el sentido: queda determinado por la punta de la flecha.

También es necesario saber el origen o punto de aplicación.

- Otra forma de caracterizar un vector fijo es mediante:

- sus **componentes**

- el punto origen.

- También queda definido si conocemos las coordenadas del punto origen y del punto extremo.

Al observar la figura 4 vemos que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen las mismas componentes con diferentes puntos origen y extremo.

Estos dos vectores son **equivalentes**.

D 1.8– VECTORES EQUIVALENTES

Dos vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ se dice que son equivalentes si tienen las mismas componentes:

$(b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (d_1 - c_1, d_2 - c_2)$

siendo $A = (a_1, a_2)$ $B = (b_1, b_2)$ $C = (c_1, c_2)$ $D = (d_1, d_2)$

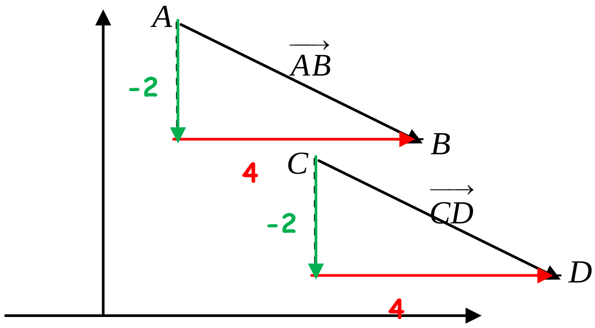


Figura 4

En la figura 4 vemos que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen las mismas componentes con diferentes puntos origen y extremo.

Geométricamente: las longitudes de los segmentos de recta determinados por la pareja de puntos son iguales y los sentidos en que apuntan son los mismos.

♣ **ER 1.1.-** Buscar un vector equivalente a $\overrightarrow{AB}$ siendo $A = (1,2)$ y $B = (5,4)$.

Llamaremos $\overrightarrow{CD}$ al vector buscado. Los puntos $C = (c_1, c_2)$ y $D = (d_1, d_2)$ son las incógnitas del problema.

Componentes de $\overrightarrow{AB}$: Coordenadas del punto B (extremo) – coordenadas del punto A (origen).

$$(5-1, 4-2) = (4,2)$$

Componentes de $\overrightarrow{CD} = (d_1 - c_1, d_2 - c_2)$

Vectores equivalentes $\Rightarrow$ Igualdad de componentes: $(d_1 - c_1, d_2 - c_2) = (4,2)$ **Def. 1.8**

$\left.\begin{array}{l} d_1 - c_1 = 4 \\ d_2 - c_2 = 2 \end{array}\right\}$ Elegiremos las coordenadas de uno de los puntos y calcularemos el otro punto.

$C=(4,-1)$ $\quad \left.\begin{array}{l} d_1={\color{red}4}+c_1 \\ d_2={\color{red}2}+c_2 \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} d_1={\color{red}4}+4 \\ d_2={\color{red}2}-1 \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} d_1=8 \\ d_2=1 \end{array}\right\}$ $\quad D$ es el punto $(8,1)$

Eligiendo otro punto C obtendríamos otro punto D. Hay infinitas soluciones.

♣♣♣♣♣♣

♣ **ER 1.2.-** Buscar un vector equivalente a $\overrightarrow{AB}$ con $A=(3,4)$ y $B=(7,6)$ que tenga su origen en el punto $A'=(-1,0)$.

En este caso ya nos dan el punto origen A' con lo que únicamente nos resta calcular el punto extremo B'.

Componentes de $\overrightarrow{AB}$: $(5-1,4-2)={\color{red}(4,2)}$ **Def. 1.7 y (1)**

Componentes de $\overrightarrow{A'B'}:(b_1'-a_1',b_2'-a_2')=(b_1'-(-1),b_2'-0)=(b_1'+1,b_2'-0)$ **Def. 1.7 y (1)**

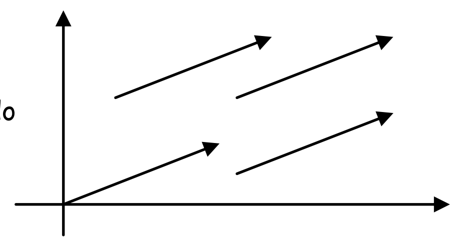
Igual que en el ejercicio anterior impondremos la condición de equivalencia de vectores:

$(b_1'+1,b_2')=(4,2) \longrightarrow \left.\begin{array}{l} 4=b_1'+1 \\ 2=b_2' \end{array}\right\}$ $\quad B'$ es el punto $(3,2)$

Todos los vectores fijos equivalentes entre sí tienen las mismas componentes. Atendiendo a esta igualdad se pueden agrupar los vectores fijos en familias, de manera que todos los vectores fijos de la misma familia tienen las mismas componentes. A cada familia se le llama **vector libre** y queda por tanto definido únicamente por las componentes de todos los vectores fijos a los que representa.

D 1.9– VECTORES LIBRES

Se definen a partir de lo que tienen en común todos los vectores fijos equivalentes y por tanto quedan perfectamente determinados conociendo solo sus componentes sin importar donde esté el origen.



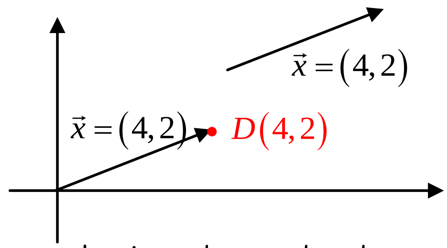
El vector libre (4, 2) es cualquier vector que tenga estas componentes (Fig. 5).

Figura 5

D 1.10– VECTOR FIJO EN EL ORIGEN

Es el que tiene su punto origen en el origen de coordenadas

3. RELACIÓN PUNTO-VECTOR



Sabemos que el vector libre $\vec{x}$ de componentes (4,2) representa lo que tienen en común todos los vectores fijos de componentes (4,2).

Si entre todos ellos elegimos aquel que tiene su punto origen en el origen de coordenadas podremos comprobar que:

las coordenadas de su punto extremo coinciden numéricamente con las componentes del vector.

La razón es que las coordenadas del punto origen son $O(0,0)$.

Por lo tanto, **todo vector libre tiene un representante situado en el origen de coordenadas cuyo punto extremo tiene por coordenadas los mismos valores numéricos que las componentes del vector.**

Tenemos así una **correspondencia uno a uno** entre los vectores libres y los puntos según la cual

$P(a,b) \longleftrightarrow$ vector libre de componentes (a,b) = componentes de $\overrightarrow{OP}=(a,b)$

4. CARACTERIZACIÓN DE UN VECTOR LIBRE

1ª forma: conociendo

- módulo, dirección, sentido

2ª forma: conociendo

- las componentes.

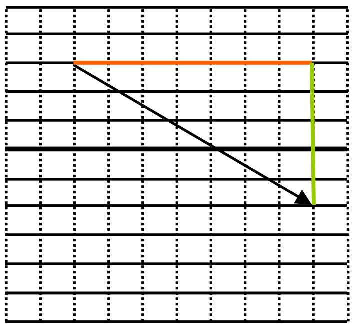
El módulo o longitud, igual que en los vectores fijos, es la longitud del segmento.

Su dirección queda definida por el ángulo que forma con la dirección positiva del eje OX.

Su sentido queda definido igualmente por el ángulo citado.

Conociendo las componentes podemos calcular el módulo, dirección y sentido y viceversa.

♣ **ER 1.3.-** Dado el vector de componentes (7,-5) calcular su módulo, dirección y sentido.



Considerando el triángulo rectángulo formado:

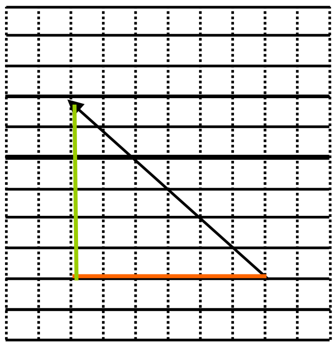
Hipotenusa: longitud vector

Catetos: valor absoluto de las componentes.

Teorema de Pitágoras: $\sqrt{49+25}=\sqrt{74}$ =longitud

El ángulo se calcula mediante su tangente: $\tan\alpha=\dfrac{-5}{7}$

♣ **ER 1.4.-** Dado el vector de módulo 8 y que forma con el eje OX un ángulo $\alpha=135^{\circ}$ calcular sus componentes.



Análogamente al ejercicio anterior razonando en el triángulo rectángulo formado.

1ª componente= $8\cos 135=8\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-4\sqrt{2}$

2ª componente= $8\sin 135=8\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=4\sqrt{2}$

Se trata del vector $\left(-4\sqrt{2},4\sqrt{2}\right)$

2. OPERACIONES CON VECTORES

D 2.1– SUMA DE VECTORES LIBRES

La suma de dos vectores libres es otro vector libre cuyas componentes son la suma de las respectivas componentes.

Geométricamente es el vector formado por la diagonal del paralelogramo que tiene a los dos vectores sumandos como lados y con el mismo origen que ellos. **(Figura 6)**

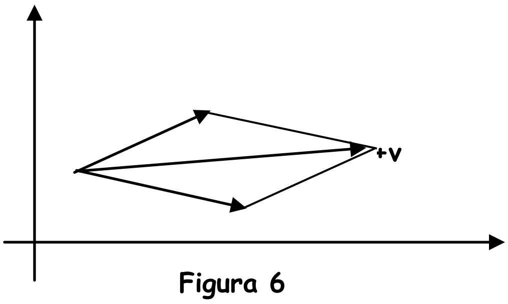


Figura 6

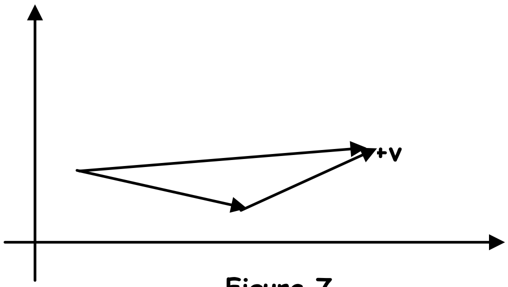
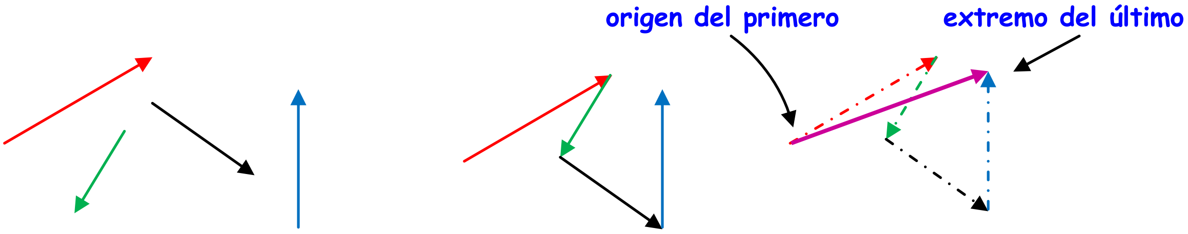


Figura 7

Si hay que sumar más de dos vectores resulta más útil la construcción gráfica de la suma ilustrada en la figura 7.

Se colocan los vectores uno a continuación del otro y la suma se obtiene uniendo **el origen del primero** con el **extremo del último.**

Ejemplo 1: Sumar geométricamente los vectores de la figura: $\vec{r}+\vec{v}+\vec{n}+\vec{a}$



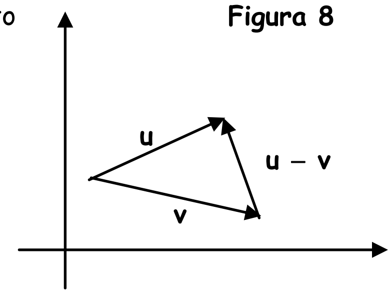
D 2.2– RESTA DE VECTORES LIBRES

Es otro vector libre cuyas componentes son la resta de las respectivas componentes.

Geométricamente, se realiza la suma entre el vector minuendo y el opuesto al vector sustraendo.

El resultado es el mismo que se obtiene, una vez colocados ambos vectores con origen común, al unir los extremos de ambos vectores y tomando como origen el sustraendo y como extremo el minuendo (Fig. 8).

Figura 8



Observación práctica: Al realizar la resta $\vec{u}-\vec{v}$ estamos buscando un vector $\vec{w}$ que verifica la prueba de la resta: si se le suma al sustraendo nos ha de dar el minuendo:

$\vec{u}-\vec{v}=\vec{w}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{v}+\vec{w}=\vec{u}$

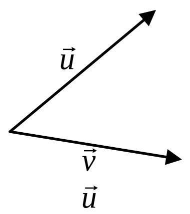


Figura 9a

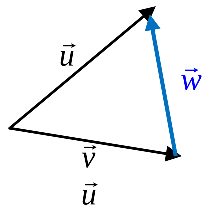
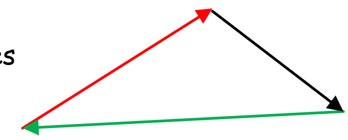


Figura 9b

La única forma de que, geométricamente, se cumpla $\vec{v}+\vec{w}=\vec{u}$ es colocarlo tal como en la figura 9b.

Observación práctica: Si tenemos varios vectores formando un polígono, entre ellos están relacionados por operaciones de sumar y restar.

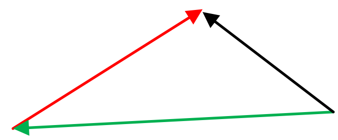
Ejemplo 2: Obtén la relación entre los siguientes vectores.



Solución: Recorro el triángulo a partir del origen de uno de los vectores hasta haber pasado por todos: $\vec{r}+\vec{n}+\vec{v}=\vec{0}$

Como el origen del primer vector (rojo) y el extremo del último (**verde**) coinciden, al unir ambos puntos obtenemos el vector nulo.

Ejemplo 3: Descubre la relación entre los siguientes vectores.



Solución: Recorremos el polígono de los vectores a partir del origen de uno de ellos, el rojo; al encontrarnos con el vector negro vemos que no está colocado en la forma que requiere la suma, entonces simplemente consideramos el vector opuesto $-\vec{n}$ (igual pero con sentido contrario) o lo que es lo mismo en lugar de efectuar un suma realizaremos una resta: $\vec{r}-\vec{n}+\vec{v}=\vec{0}$

5. OBTENCIÓN COMPONENTES DE UN VECTOR $\overrightarrow{AB}$

Si tenemos un vector cualquiera $\overrightarrow{AB}$ construido a partir de los puntos A y B y trazamos los vectores

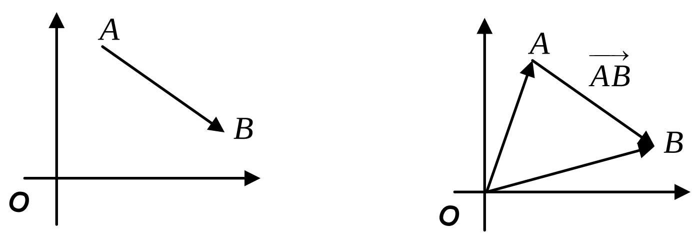


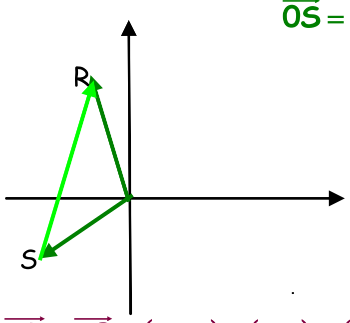
Figura 10

fijos en el origen asociados a dichos puntos, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OA}$, vemos que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OA}$ forman un triángulo vectorial; a partir de él podemos escribir una relación entre los vectores que lo forman:

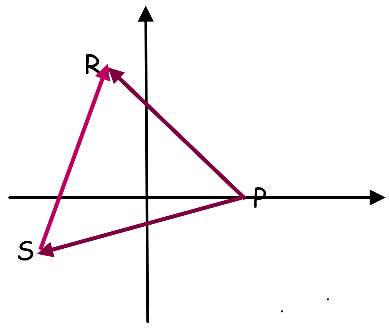
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OB}=\vec{0}$ y despejando $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

Forma de calcular las componentes de un vector $\overrightarrow{AB}$: restando las componentes del vector $\overrightarrow{OB}$ de las del vector $\overrightarrow{OA}$ (resultado que coincide con la resta de las coordenadas del punto extremo B menos las del punto origen A)

♣ **ER 2.1.-** Obtener $\overrightarrow{SR}$ siendo $\begin{array}{l}\overrightarrow{OR}=(-1,4)\\ \overrightarrow{OS}=(-3,-2)\end{array}$. Ídem $\overrightarrow{PR}-\overrightarrow{PS}$ con $\begin{array}{l}\overrightarrow{OR}=(-1,4)\\ \overrightarrow{OS}=(-3,-2)\\ \overrightarrow{OP}=(3,0)\end{array}$



$$\overrightarrow{SR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OS}=(-1,4)-(-3,-2)=(2,6)$$



$$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=(-1,4)-(3,0)=(-4,4)$$
$$\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OP}=(-3,-2)-(3,0)=(-6,-2)$$
$$\overrightarrow{PR}-\overrightarrow{PS}=(-4,4)-(-6,-2)=(2,6)$$

♣ **ER 2.2.-** Obtener analíticamente $\overrightarrow{QP}$ con los vectores $\begin{array}{l}\overrightarrow{OP}=(3,0,0,)\\ \overrightarrow{OQ}=(0,2,0)\end{array}$

$$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=(3,0,0)-(0,2,0)=(3,-2,0)$$

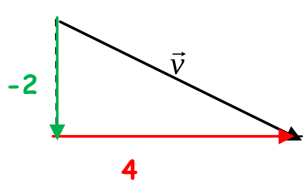
y $\overrightarrow{RS}$ con los vectores $\begin{array}{l}\overrightarrow{RO}=(0,0,4)\\ \overrightarrow{SO}=(-3,2,-4)\end{array}$ $\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OR}=-\overrightarrow{SO}+(0,0,4)=(3,-2,4)+(0,0,4)=(3,-2,8)$

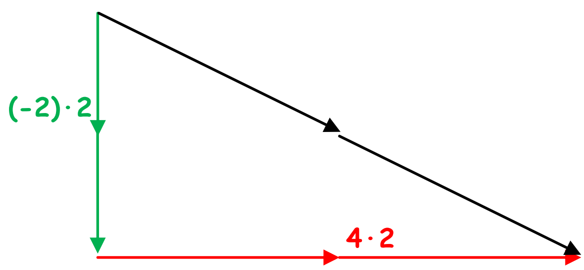
D 2.3–PRODUCTO DE VECTOR POR ESCALAR

Es otro vector cuyas componentes son las del primero multiplicadas por el escalar.

Si al vector libre $\vec{v}=(4,-2)$ le multiplicamos por un escalar no nulo, por ejemplo el 2, obtenemos otro vector: $(4,-2)\xrightarrow{x2}(8,-4)$

Figura 11





A este nuevo vector lo representaremos como $2\vec{v}$.

La longitud de $\vec{v}$ es $\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ u.lineales

La longitud del nuevo vector $2\vec{v}$ de componentes $(8,-4)$ es $\sqrt{8^2+4^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$ u.lineales.

Al duplicar las componentes, la longitud o módulo del vector también es el doble.

La dirección y sentido del vector $2\vec{v}$ siguen siendo los mismos al no variar el ángulo que forma con OX^+ (el cociente entre los catetos del triángulo se mantiene y por tanto la tangente de dicho ángulo).

D 2.3bis–PRODUCTO DE VECTOR POR ESCALAR

El resultado de multiplicar un escalar $\lambda \neq 0$ por un vector $\vec{v}$ es otro vector $\vec{u}$ de la misma dirección que $\vec{v}$, de sentido igual o contrario según que el signo del escalar sea + o − y de módulo igual a λ veces el de $\vec{v}$.

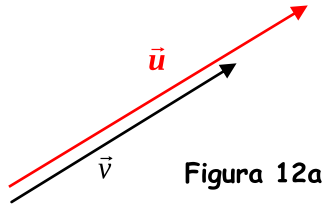
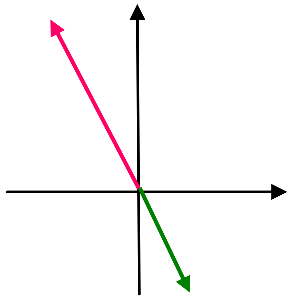


Figura 12a

Figura 12b



En la figura 12b si al vector $\vec{v}=(1,-2)$ le multiplicamos por el escalar -2 obtendremos otro vector $\vec{u}$ paralelo al $\vec{v}$ y de componentes $\vec{u}=(-2,4)$.

Dibujando ambos vectores se puede observar que tienen sentidos contrarios.

D 2.4–VECTORES PARALELOS

Se dice que dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de componentes respectivas (u_1,u_2) y (v_1,v_2), son **paralelos (ó proporcionales)** si existe un nº $\lambda \neq 0$ tal que $\vec{u}=\lambda\cdot\vec{v}$ (es decir que $(u_1,u_2)=\lambda(v_1,v_2)$).

Irán en el mismo sentido si $\lambda>0$ y en sentidos opuestos si $\lambda<0$.

♣ **ER 2.3:** Dados los puntos $A(1,2,3)$, $B(0,-1,2)$, $C(-2,-7,0)$, si D es el punto de coordenadas $(-1,x,0)$ calcula, si es posible, el valor de x para que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ sean paralelos. Razona el procedimiento empleado.

<u>Cálculo componentes vectores:</u>

Teniendo en cuenta que $A(1,2,3)\leftrightarrow\overrightarrow{OA}=(1,2,3)$ y $B(0,-1,2)\leftrightarrow\overrightarrow{OB}=(0,-1,2)$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(0,-1,2)-(1,2,3)=(-1,-3,-1)$ $\qquad \overrightarrow{AB}=(-1,-3,-1)$

Procediendo de forma análoga con C y D:

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=(-1,x,0)-(-2,-7,0)=(1,x+7,0)$ $\qquad \overrightarrow{CD}=(1,x+7,0)$

Para que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ sean paralelos ha de existir algún escalar λ no nulo que multiplicado por $\overrightarrow{AB}$ nos de $\overrightarrow{CD}$, $\lambda\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ o viveversa. **Def. 2.4**

$$\lambda(-1,-3,-1)=(1,x+7,0)\rightarrow\begin{cases}-1\cdot\lambda=1\\-3\cdot\lambda=x+7\\-1\cdot\lambda=0\end{cases}$$

Ya vemos que la tercera ecuación no se cumplirá nunca por tanto el problema no tiene solución.

♣♣♣♣♣

♣ **ER 2.4:** Dados los vectores $\vec{u}=(2,3,0)$ y $\vec{v}=(-3,0,1)$ halla k de modo que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean paralelos siendo $\vec{a}=2\vec{u}-\vec{v}$ y $\vec{b}=-3\vec{u}+k\vec{v}$.

Cálculo vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$:

$\vec{a}=2\vec{u}-\vec{v}=2(2,3,0)-(-3,0,1)=(7,6,-1)$ $\qquad\vec{a}=(7,6,-1)$

$\vec{b}=-3\vec{u}+k\vec{v}=-3(2,3,0)+k(-3,0,1)=(-6-3k,-9,k)$ $\qquad\vec{b}=(-6-3k,-9,k)$

$\vec{a}$ y $\vec{b}$ paralelos $\Rightarrow$ componentes proporcionales

$$\frac{-6-3k}{7}=\frac{-9}{6}=\frac{k}{-1}\Rightarrow\begin{cases}6\cdot(-6-3k)=7\cdot(-9)\rightarrow-36-18k=-63\rightarrow k=\dfrac{63-36}{18}=\dfrac{27}{18}=\dfrac{3}{2}\\[2ex]6\cdot k=(-1)\cdot(-9)\rightarrow k=\dfrac{9}{6}=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

Con el valor de $k=\frac{3}{2}$ se cumplen todas las proporciones.

2ª forma:

$\vec{a}$ y $\vec{b}$ paralelos $\Rightarrow$ existe algún escalar λ no nulo que multiplicado por $\vec{a}$ nos de $\vec{b}$, o viceversa.

$$\lambda\vec{a}=\vec{b}\qquad\begin{pmatrix}-6-3k\\-9\\k\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}7\\6\\-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{cases}-6-3k=7\lambda\\-9=6\lambda\\k=-\lambda\end{cases}\xrightarrow{\text{Ecuación 2}}\lambda=\frac{-3}{2}\xrightarrow{\text{Ecuación 3}}k=-\lambda=\frac{3}{2}$$

¿Se cumplirá entonces la ecuación 1? $\xrightarrow{\text{Ecuación 1}}$ $¿-6-3\left(\frac{3}{2}\right)=7\frac{-3}{2}?$ $\qquad\frac{-12-9}{2}=-\frac{21}{2}$ Se cumple.

Solución: $k=\frac{3}{2}$

D 2.5–COMBINACIÓN LINEAL

Dados los vectores $\vec{u}_1,\vec{u}_2,.....,\vec{u}_p$, llamamos combinación lineal de $\vec{u}_1,\vec{u}_2,.....,\vec{u}_p$ al resultado de efectuar la operación $\alpha_1\vec{u}_1+\alpha_2\vec{u}_2+.....+\alpha_p\vec{u}_p$ donde $\alpha_1,\alpha_2,.....,\alpha_p$ son escalares (reales).

La combinación lineal de vectores no es una operación nueva y diferente de las ya definidas, suma de vectores y producto de escalar por vector. Reúne ambas operaciones de forma que al efectuar una suma de productos de escalares por vectores tendremos lo que llamamos combinación lineal de vectores.

Para poder hacer combinaciones lineales de vectores, éstos tienen que tener el mismo nº de componentes y el resultado siempre será otro vector de las mismas características que aquellos.

♣ **ER 2.5:** **a)** Formar tres combinaciones lineales de los vectores $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$.

a1) $-\vec{u}+\vec{v}+2\vec{w}$ los escalares de esta comb. lineal son -1,1,2.

a2) $2\vec{u}+3\vec{v}-\vec{w}$ los escalares de esta comb. lineal son 2,3.-1.

a3) $-2\vec{u}+\vec{w}$ los escalares de esta comb. lineal son -2,0.1.

El resultado en todos los casos es otro vector que no podemos calcular sin conocer las componentes de los vectores $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$.

b) Formar tres combinaciones lineales del vector $\vec{u}$: b1) $2\vec{u}$ b2) $-\sqrt{3}\vec{u}$ b3) $\frac{1}{3}\vec{u}$

c) Formar tres combinaciones lineales de los vectores $\vec{u}=(2,3),\vec{v}=(0,-1),\vec{w}=(-3,-2)$

c1) $2\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}=2(2,3)-(0,-1)+(-3,-2)$ los escalares de esta comb. lineal son 2,-1,1

El resultado es otro vector que, al conocer las componentes de los vectores $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$, podemos calcular:

$$2(2,3)-(0,-1)+(-3,-2)=(4,6)-(0,-1)+(-3,-2)=(4-0-3,6+1-2)=\mathbf{(1,5)}$$

c2) $\vec{u}+3\vec{v}+0\cdot\vec{w}=\vec{u}+3\vec{v}=(2,3)+3(0,-1)$ los escalares de esta comb. lineal son 1,3,0

El resultado es el vector: $(2,3)+3(0,-1)=(2+0,3-3)=\mathbf{(2,0)}$

c3) $-2\vec{u}+2\vec{v}+5\vec{w}=-2(2,3)+2(0,-1)+5(-3,-2)$ los escalares de esta comb. lineal son -2,2,5

El resultado es el vector: $-2(2,3)+2(0,-1)+5(-3,-2)=(-4-15,-6-2-10)=\mathbf{(-19,-18)}$

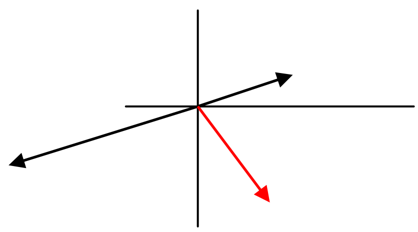
♣♣♣♣♣

ER 2.6: ¿Es $\vec{v}(2,-3)$ combinación lineal de $\vec{a}(3,1)$ $\vec{b}(-6,-2)$? Justifica gráficamente la respuesta.

Si $\vec{v}(2,-3)$ es combinación lineal de $\vec{a}(3,1)$ $\vec{b}(-6,-2)$ existirán α,β que cumplen

$$(2,-3)=\alpha(3,1)+\beta(-6,-2)$$

$$\begin{cases}3\alpha-6\beta=2\\ \alpha-2\beta=-3\end{cases} \quad \underset{E2n\leftarrow 3E2-E1}{\longrightarrow} \quad \begin{cases}3\alpha-6\beta=2\\ 0=-11\end{cases}$$



Sist. Incompatible. No hay solución.

Es lógico ya que los vectores $\vec{a}(3,1)$ y $\vec{b}(-6,-2)$ son paralelos y sus combinaciones lineales darán vectores en su misma dirección . El vector $\vec{v}(2,-3)$ no es paralelo a ellos y por tanto no puede ser generado por ellos.

3. PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON VECTORES

Al definir las operaciones vectoriales de suma y producto de escalar por vector conviene tomar conciencia de las diferencias y similitudes que hay entre ellas.

La suma es una **ley de composición interna**, se opera entre elementos de un conjunto (R^2 , R^3 ,…….) de elementos a los que llamamos vectores y el resultado es otro elemento del mismo conjunto.

El producto de escalar por vector tiene como operandos elementos de conjuntos diferentes, vectores por un lado y escalares por otro, que no pertenecen al mismo conjunto. El resultado queda dentro del conjunto de los vectores. A este tipo de operación se le llama **ley de composición externa.**

6. PROPIEDADES DE LA SUMA DE VECTORES:

Dados $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ vectores pertenecientes al mismo conjunto y α,β escalares (reales) cualesquiera se cumple:

1. $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ **Ley asociativa**
2. $\vec{u}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{u}$ **Ley conmutativa**
3. $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$ **Elemento neutro de la suma**
4. $\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$ **Vector opuesto**

7. PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE VECTOR POR ESCALAR (P.V$\circ$E)

5. $\alpha\circ(\vec{u}+\vec{w})=\alpha\circ\vec{u}+\alpha\circ\vec{w}$ **L. distributiva de (P.V$\circ$E) respecto a la suma de vectores**
6. $(\alpha+\beta)\circ\vec{u}=\alpha\circ\vec{u}+\beta\circ\vec{u}$ **L. distrib. de la (P.V$\circ$E) respecto a la suma de escalares**
7. $(\alpha\cdot\beta)\circ\vec{u}=\alpha\circ(\beta\circ\vec{u})+\beta\circ(\alpha\circ\vec{u})$ **L. asociativa del producto entre escalares y vectores**
8. $1\circ\vec{u}=\vec{u}$ **Elemento unidad**

4. LA ESTRUCTURA EUCLIDIANA DE R^n

El producto escalar es la tercera operación básica con vectores de R^n. De él derivan conceptos métricos como la ortogonalidad, la norma y el ángulo, que abren el camino a múltiples aplicaciones geométricas y físicas del álgebra lineal.

Siempre que, además de las operaciones lineales, se considera el producto escalar, es habitual denominar a R^n el *espacio euclideo de dimensión n*.

D4.1–PRODUCTO ESCALAR (o interior)

Sean $\vec{u}(u_1,u_2,.....,u_n)$ y $\vec{v}(v_1,v_2,.....,v_n)$ dos vectores de R^n. Se define su producto escalar $\vec{u}\bullet\vec{v}$ como $u_1.v_1+u_2v_2+.........+u_nv_n$. **Este producto es un nº real.**

Ejemplo 4: El producto escalar de los vectores (2,3,0) y (–1, –3,1) de R^3 se expresa $(2,3,0)\cdot(-1,-3,1)$ y se calcula haciendo la suma de los productos de las componentes respectivas: 2.(–1) + 3.(–3) + 0.1= –11

7. PROPIEDADES

1.- Conmutativa $\vec{u}\bullet\vec{v}=\vec{v}\bullet\vec{u}$

2.- Distributiva respecto a la suma $\vec{v}\bullet(\vec{u}+\vec{w})=\vec{v}\bullet\vec{u}+\vec{v}\bullet\vec{w}$

3.- Asociativa y conmutativa entre escalares y vectores $\begin{array}{ll}(\lambda\circ\vec{u})\bullet\vec{v}=\lambda\circ(\vec{u}\bullet\vec{v}) & \forall\lambda \text{ escalar,}\\ \vec{u}\bullet(\lambda\circ\vec{v})=\lambda\circ(\vec{u}\bullet\vec{v}) & \forall\vec{u},\vec{v} \quad \text{vectores}\end{array}$

4a.- Si $\vec{u}=\vec{0}\ \Rightarrow\vec{u}\bullet\vec{u}=0$ **4b**.- Si $\vec{u}\neq\vec{0}\Rightarrow\ \vec{u}\bullet\vec{u}>0$

♣ **ER 4.1**: Dados los vectores $\vec{u}=(2,-1,5)$, $\vec{v}=(-3,4,1)$ y $\vec{w}=(-1,0,5)$

a) Comprobar que el producto escalar tiene la propiedad conmutativa.

$$\vec{u}\bullet\vec{v}=(2,-1,5)\bullet(-3,4,1)=2(-3)+(-1)4+5\cdot1=-6-4+5=-5$$
$$\vec{v}\bullet\vec{u}=(-3,4,1)\bullet(2,-1,5)=(-3)2+4(-1)+1\cdot5=-6-4+5=-5$$

Nos da el mismo resultado debido a que **el producto** de **números** tiene la propiedad conmutativa

b) Comprobar que el producto escalar tiene la propiedad distributiva respecto a la suma.

$$\vec{v}\bullet(\vec{u}+\vec{w})=(-3,4,1)\left[(2,-1,5)+(-1,0,5)\right]=(-3,4,1)\bullet(1,-1,10)=-3-4+10=3$$

$$\vec{v}\bullet\vec{u}+\vec{v}\bullet\vec{w}=(-3,4,1)\bullet(2,-1,5)+(-3,4,1)\bullet(-1,0,5)=(-6-4+5)+(3+0+5)=-5+8=3$$

c) Comprobar que el producto escalar tiene la propiedad asociativa entre escalares y vectores

$$(2\vec{u})\bullet\vec{v}==\left[2\cdot(2,-1,5)\right]\cdot(-3,4,1)=(4,-2,10)\cdot(-3,4,1)=-12-8+10=-10$$
$$2(\vec{u}\bullet\vec{v})=2\left[(2,-1,5)\bullet(-3,4,1)\right]=2\left[-6-4+5\right]=-10$$
$$\vec{w}\bullet(3\circ\vec{v})=(-1,0,5)\bullet(3\circ(-3,0,5))=(-1,0,5)\bullet(-9,0,15)=9+75=84$$
$$3(\vec{w}\bullet\vec{v})=3\circ((-1,0,5)\bullet(-3,0,5))=3\circ(3+25)=3\cdot28=84$$

♣♣♣♣♣

♣**ER 4.2**: Demostrar que si $\vec{u}\neq\vec{0}$ entonces $\vec{u}\bullet\vec{u}>0$

Supongamos que el vector $\vec{u}$ tiene por componentes $(u_1,u_2,......,u_n)$ no todas nulas.

El producto escalar del vector por él mismo será: $\vec{u}\bullet\vec{u}=u_1u_1+u_2u_2+......+u_nu_n=u_1^{\ 2}+u_2^{\ 2}+......+u_n^{\ 2}$

Y una suma de cuadrados es positiva ó nula: Es nula si todos los sumandos son nulos

Es positiva en caso contrario.

Como hemos dicho que el vector no es el vector 0 alguna de sus componentes será distinta de 0 y por lo tanto alguno de los sumandos no será 0. Así la suma de los cuadrados de las componentes será positiva.

Comprobémoslo en el caso de los vectores del ejercicio anterior:

$\vec{u}\bullet\vec{u}=(2,-1,5)\bullet(2,-1,5)=4+1+25=30$ $\vec{v}\bullet\vec{v}=9+16+1=26$ $\vec{w}\bullet\vec{w}=1+0+25=26$

Todos los resultados son positivos.

D4.2– NORMA O LONGITUD DE UN VECTOR

Dado $\vec{u}=(u_1,u_2,.....,u_n)$ su norma es la raíz cuadrada del producto escalar del vector por él mismo.

Se expresa: $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}\bullet\vec{u}}$

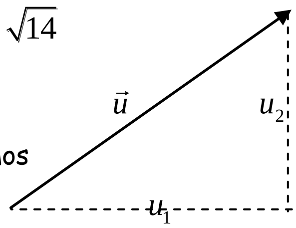
Como $\vec{u}\bullet\vec{u}=(u_1,u_2,.....,u_n)\bullet(u_1,u_2,.....,u_n)=u_1^2+.....+u_n^2 \quad \Rightarrow \quad \|\vec{u}\|=\sqrt{u_1^2+.....+u_n^2}$

la norma se puede calcular haciendo la $\sqrt{}$ de la suma de los cuadrados de las componentes del vector.

En muchas ocasiones emplearemos esta definición elevándola al cuadrado:

$$\boxed{\|\vec{u}\|^2=\left(\sqrt{\vec{u}\bullet\vec{u}}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \|\vec{u}\|^2=\vec{u}\bullet\vec{u}}$$

La norma del vector (2,3, −1) es $\|(2,3,-1)\|=\sqrt{(2,3,-1)\bullet(2,3,-1)}=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}$



Si calculamos el módulo ó longitud del vector de la figura aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo construido dibujando sus componentes obtendremos Su longitud = $\sqrt{u_1^2+u_2^2}$

Aplicando la definición de norma a un vector de dimensión 2 obtenemos $\|\vec{u}\|=\sqrt{u_1^2+u_2^2}$

es decir que la norma es la longitud del vector (o módulo).

8. PROPIEDADES

- La norma de un vector siempre es positiva (excepto la del vector nulo): $\|\vec{u}\|>0 \quad \forall\vec{u}\neq\vec{0}$
- La norma de un escalar por un vector es igual al valor absoluto del escalar por la norma del vector: $\|\lambda\circ\vec{u}\|=|\lambda|\cdot\|\vec{u}\|$
- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$ si y solo si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares (teorema de Pitágoras)
- $|\vec{u}\bullet\vec{v}|\leq\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$ desigualdad de Cauchy-Schwarz
- $\|\vec{u}+\vec{v}\|\leq\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$ desigualdad triangular

♣**ER 4.3**: Dado el vector $\vec{u}=(2,3,-1)$ comprobar que y que $\begin{cases}\|2\circ\vec{u}\|=2\cdot\|\vec{u}\|\\ \|-2\circ\vec{u}\|=|-2|\cdot\|\vec{u}\|=2\cdot\|\vec{u}\|\end{cases}$

$2\circ\vec{u}=2\circ(2,3,-1)=(4,6,-2) \quad \rightarrow \quad \|2\circ\vec{u}\|=\|(4,6,-2)\|=\sqrt{(4,6,-2)\bullet(4,6,-2)}=\sqrt{56}=\sqrt{2^3\cdot 7}=2\sqrt{14}$

$\rightarrow \quad \|\vec{u}\|=\sqrt{(2,3,-1)\bullet(2,3,-1)}=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}$

Efectivamente queda comprobado que $\|2\circ\vec{u}\|=2\cdot\|\vec{u}\|$

En el caso en que el escalar es negativo:

$(-2)\circ\vec{u}=(-2)\circ(2,3,-1)=(-4,-6,2) \quad \rightarrow \quad \|(-4,-6,2)\|=\sqrt{(-4,-6,2)\bullet(-4,-6,2)}=\sqrt{16+36+4}=2\sqrt{14}$

$\|-2\circ\vec{u}\|=2\sqrt{14}$ es decir que $\|-2\circ\vec{u}\|=|-2|\cdot\|\vec{u}\|$

D4.3– VECTOR UNITARIO

Es aquel vector $\vec{e}$ que tiene norma 1: $\|\vec{e}\| = 1$

El vector (1,0,0) tiene norma 1 ya que $\|(1,0,0)\| = \sqrt{(1,0,0)\bullet(1,0,0)} = \sqrt{1} = 1$

Con frecuencia se necesita manejar vectores con dirección y sentido determinados pero de norma unidad. Planteamos, pues, el problema de obtener un vector de la misma dirección y sentido que otro dado y unitario.

♣**ER 4.4**: Dado el vector $(2,3,-1)$ comprobar que si lo dividimos por su norma obtenemos otro vector que es unitario.

$\|(2,3,-1)\| = \sqrt{(2,3,-1)\bullet(2,3,-1)} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$. El vector que nos dan no es unitario.

Lo dividimos por su norma: $\left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}\right)$

Comprobemos que este nuevo vector es unitario:

$$\left\|\left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}\right)\bullet\left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}\right)} = \sqrt{\frac{4}{14}+\frac{9}{14}+\frac{1}{14}} = \sqrt{\frac{14}{14}} = 1$$

♣♣♣♣♣

♣**ER 4.5**: Demostrar que cualquier vector $\vec{u}$ dividido por su norma es unitario.

$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ Calculemos la norma del vector $\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ aplicando la definición:

La raíz cuadrada del producto escalar del vector por él mismo, es decir:

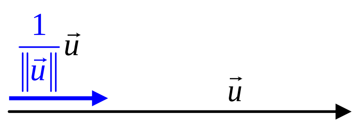
$$\left\|\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}\right)\bullet\left(\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}\right)} \overset{(1)}{=} \sqrt{\left(\frac{1}{\|\vec{u}\|}\frac{1}{\|\vec{u}\|}\right)(\vec{u}\bullet\vec{u})} = \sqrt{\frac{1}{\|\vec{u}\|^2}(\vec{u}\bullet\vec{u})} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\sqrt{(\vec{u}\bullet\vec{u})} \overset{(2)}{=} \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = 1$$

(1) Propiedad asociativa entre escalares y vectores

(2) Definición de norma $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}\bullet\vec{u}$

Otra forma sería aplicando la segunda propiedad de la norma: $\left\|\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}\right\| = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\|\vec{u}\| = 1$

Es decir que si dividimos un vector $\vec{u}$ por su norma obtenemos otro vector, $\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$, en la misma dirección y sentido que $\vec{u}$ pero con norma 1.



♣**ER 4.6:** Dado el vector $\vec{u} = (2,3,-1)$ calcular otro vector de igual dirección, sentido y norma igual 3.

Empezamos obteniendo un vector unitario en la misma dirección y sentido que $\vec{u}$:

Dividimos el vector por su norma: $(2,3,-1) \longrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}\right)$

Ahora solo queda multiplicar este vector por 3: $\left(\frac{6}{\sqrt{14}}, \frac{9}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}\right)$

Veamos que efectivamente su norma vale 3:

$$\left\|\left(\frac{6}{\sqrt{14}},\frac{9}{\sqrt{14}},\frac{-3}{\sqrt{14}}\right)\right\|=\sqrt{\left(\frac{6}{\sqrt{14}},\frac{9}{\sqrt{14}},\frac{-3}{\sqrt{14}}\right)\bullet\left(\frac{6}{\sqrt{14}},\frac{9}{\sqrt{14}},\frac{-3}{\sqrt{14}}\right)}=\sqrt{\frac{36}{14}+\frac{81}{14}+\frac{9}{14}}=\sqrt{\frac{126}{14}}=3$$

♣♣♣♣♣

♣**ER 4.7:** Calcula la norma de los vectores (2,1), (3,1,-1), (-1,2,-2) y escribe vectores unitarios en su misma dirección.

$\|(2,1)\|=\sqrt{(2,1)\bullet(2,1)}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$ vector unitario en su misma dirección y sentido: $\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$\|(3,1,-1)\|=\sqrt{(3,1,-1)\bullet(3,1,-1)}=\sqrt{9+1+1}=\sqrt{11}$

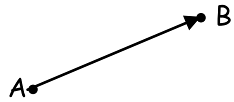
vector unitario en su misma dirección y sentido: $\left(\frac{3}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{-1}{\sqrt{11}}\right)$

$\|(-1,2,-2)\|=\sqrt{(-1,2,-2)\bullet(-1,2,-2)}=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=3$

vector unitario en su misma dirección y sentido: $\left(\frac{-1}{3},\frac{2}{3},\frac{-2}{3}\right)$

D4.4– DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS A y B

Es la norma de cualquiera de los dos vectores formados por ambos puntos



$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AB}}$ ó $\left\|\overrightarrow{BA}\right\|=\sqrt{\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BA}}$

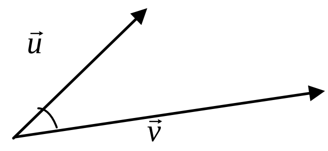
Coincide con la intuición geométrica cuando A y B son puntos en el plano. Es lo mismo que la longitud del vector fijo $\overrightarrow{AB}$ o $\overrightarrow{BA}$.

Ejemplo: La distancia entre A(1, 2) y B(4, 3): $\overrightarrow{AB}=(4-1,3-2)=(3,1) \Rightarrow \left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

Vamos a estudiar un teorema que nos da otra forma de calcular el producto escalar de dos vectores.

TEOREMA 1

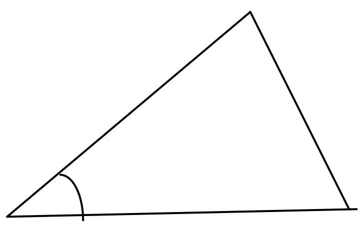
Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores y α el ángulo que forman, entonces su producto escalar es igual al producto de sus normas por el coseno del ángulo que forman: $\vec{u}\bullet\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\alpha$



Para demostrar este teorema utilizaremos la definición de norma y el

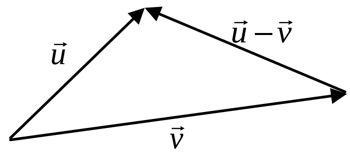
Teorema del coseno

El cuadrado de un lado cualquiera de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de estos últimos por el coseno del ángulo que forman: $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\alpha$



Demostración:

En primer lugar dibujamos el vector resta de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con lo que queda formado un triángulo.



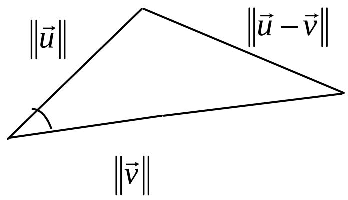
Aplicamos la definición de norma bajo la forma $\|\vec{w}\|^2 = \vec{w}\bullet\vec{w}$ al vector $\vec{u}-\vec{v}$

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}-\vec{v})\bullet(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\bullet\vec{u}-\vec{u}\bullet\vec{v}-\vec{v}\bullet\vec{u}+\vec{v}\bullet\vec{v} = \|\vec{u}\|^2-2\cdot(\vec{u}\bullet\vec{v})+\|\vec{v}\|^2$$

El resultado es $\|u-v\|^2 = \|u\|^2+\|v\|^2-2\cdot(\vec{u}\bullet\vec{v})$

Por otra parte aplicamos el teorema del coseno al triángulo formado por los vectores $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$

En nuestro triángulo las longitudes de sus lados son las normas de cada uno de los vectores.



$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\,\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{u}\|\,\cos\alpha$$

Comparando ambas expresiones:

$$\begin{cases}\|u-v\|^2 = \|u\|^2+\|v\|^2-2\cdot(\vec{u}\bullet\vec{v})\\ \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\cdot\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{u}\|\,\cos\alpha\end{cases} \Rightarrow \quad \vec{u}\bullet\vec{v} = \|\vec{v}\|\cdot\|\vec{u}\|\,\cos\alpha$$

D4.5– PRODUCTO ESCALAR ENTRE DOS VECTORES QUE FORMAN UN ÁNGULO α

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores. y α el ángulo que forman. Se define su producto escalar $\vec{u}\bullet\vec{v}$ como $\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\alpha$.

Cálculo del ángulo que forman dos vectores: se despeja de la fórmula anterior: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$ en la que el producto escalar $\vec{u}\bullet\vec{v}$ lo calcularemos mediante la definición **4.1**.

♣ **ER 4.8:** Dados los vectores $(2,3,-1)$ y $(-2,0,3)$ calcular el ángulo que forman.

En primer lugar calculamos su producto escalar según la definición **4.1**:

$$(2,3,-1)\bullet(-2,0,3) = -4+0-3 = -7$$

Calculamos las normas de cada uno de ellos:

$$\|(2,3,-1)\| = \sqrt{(2,3,-1)\bullet(2,3,-1)} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$$

$$\|(-2,0,3)\| = \sqrt{(-2,0,3)\bullet(-2,0,3)} = \sqrt{4+0+9} = \sqrt{13}$$

Y aplicando la fórmula obtenida $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} = \dfrac{-7}{\sqrt{14}\sqrt{13}} = \dfrac{-7\sqrt{14}\sqrt{13}}{14\cdot13} = \dfrac{-\sqrt{182}}{26}$

La definición **4.1** de producto escalar de dos vectores es la definición habitual pero no la única posible. Podríamos "inventar" otra operación cuyo resultado fuese un escalar y con las propiedades ya mencionadas y la podríamos llamar "producto escalar".

Por ejemplo en R^3: $(a,b,c)\bullet(a',b',c') = aa'+2bb'+3cc'$.

D4.6–VECTORES ORTOGONALES

Dos vectores no nulos cuyo producto escalar es 0.

$$\vec{u}\bullet\vec{v}=0 \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha=\frac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=\frac{0}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=0 \quad\Rightarrow\quad \alpha=\pi/2\,.$$

Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ $\vec{v}\neq\vec{0}$ y $\vec{u}\bullet\vec{v}=0\Rightarrow$ el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $\pi/2$

D4.7–VECTORES ORTONORMALES

Dos vectores no nulos cuyo producto escalar es 0 y su norma vale 1, es decir ortogonales y unitarios..

Por ejemplo (1,0,0) y (0,0,1).

♣**ER 4.9:** ¿Para qué valores de a son ortogonales $(a,0,-1,3)$ y $(1,7,a-1,2a+3)$?

Su producto escalar deberá ser 0:

$$(a,0,-1,3)\bullet(1,7,a-3,2a+3)=a+0+(-1)(a-3)+3(2a+3)=0$$

$$a-a+3+6a+9=0\Rightarrow a=-\frac{12}{6}=-2$$

♣♣♣♣♣

♣**ER 4.10:** ¿Para qué valores de x son ortogonales $(x,-x-8,\ x,\ x)$ y $(x,1,-2,1)$?

Su producto escalar deberá ser 0:

$$(x,-x-8,\ x,\ x)\bullet(x,1,-2,1)=x^2-x-8-2x+x=x^2-2x-8=0 \quad\Rightarrow$$

$$x^2-2x-8=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{2\pm 6}{2}=\begin{cases}4\\-2\end{cases} \qquad x=4 \text{ y } x=-2$$

8. DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ

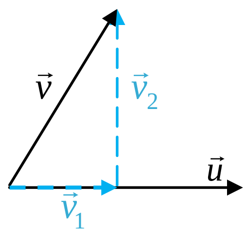
A partir de la expresión $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$ y teniendo en cuenta que el coseno de cualquier ángulo es, en valor absoluto, menor o igual que 1:

$$|\cos\alpha|=\left|\frac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right|=\frac{|\vec{u}\bullet\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\leq 1 \qquad\Rightarrow\quad \boxed{|\vec{u}\bullet\vec{v}|\leq\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$$

Es decir que el producto escalar de dos vectores es menor ó igual que el producto de sus normas.

4.2 PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN VECTOR SOBRE OTRO

D4.8– PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN VECTOR $\vec{v}$ SOBRE OTRO $\vec{u}$



Es un **vector paralelo a** $\vec{u}$ que sumado con otro perpendicular a $\vec{u}$ nos da $\vec{v}$.

En la figura el vector proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ sería $\vec{v}_1$.

9. CÁLCULO DEL VECTOR PROYECCIÓN ORTOGONAL

Se trata de obtener el vector $\vec{v}_1$ conociendo los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

1) Descomponemos el vector $\vec{v}$ en suma del vector buscado $\vec{v}_1$ paralelo a $\vec{u}$ y otro vector $\vec{v}_2$ ortogonal a $\vec{v}$.

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

2) El vector $\vec{v}_1$ es paralelo a $\vec{u}$ por lo que se podrá escribir como $\vec{v}_1 = \lambda \circ \vec{u}$ siendo λ un escalar.

Para obtener $\vec{v}_1$ bastará conocer el valor de λ.

3) Atendiendo a la descomposición vectorial realizada podremos escribir $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \lambda \circ \vec{u} + \vec{v}_2$

4) Despejamos $\vec{v}_2$: $\vec{v}_2 = \vec{v} - \lambda \circ \vec{u}$

5) Como según la descomposición vectorial elegida $\vec{v}_2$ es ortogonal a $\vec{u} \Rightarrow \vec{v}_2 \bullet \vec{u} = 0$

Es decir $(\vec{v} - \lambda \circ \vec{u}) \bullet \vec{u} = 0$

$$\stackrel{(1)}{} \vec{v} \bullet \vec{u} - (\lambda \circ \vec{u}) \bullet \vec{u} = 0 \longrightarrow \stackrel{(2)}{} \vec{v} \bullet \vec{u} - \lambda (\vec{u} \bullet \vec{u}) = 0 \longrightarrow \lambda = \frac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\vec{u} \bullet \vec{u}} \longrightarrow \vec{v}_1 = \lambda \circ \vec{u} = \frac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\vec{u} \bullet \vec{u}} \circ \vec{u}$$

(1) Distributiva de $\bullet$ respecto a +

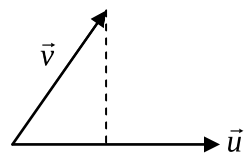
(2) Asociativa productos $\bullet$ y $\circ$

Proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ = **proy** $\vec{v}$ **(** $\vec{u}$ **)** $= \dfrac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\vec{u} \bullet \vec{u}} \circ \vec{u}$

♣**ER 4.10:** Proyectar el vector $\vec{v} = (1,2)$ sobre $\vec{u} = (3,1)$.

2) $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ con $\vec{v}_1 = \lambda \circ \vec{u}$ y $\vec{v}_2$ ortogonal a $\vec{u}$ $\longrightarrow$ $\vec{v}_2 = \vec{v} - \lambda \circ \vec{u} \longrightarrow \vec{v}_2 = (1,2) - \lambda \circ (3,1)$

$$\vec{v}_2 = (1 - 3\lambda, 2 - \lambda)$$



$\vec{v}_2$ ortogonal a $\vec{u}$ $\longrightarrow \vec{v}_2 \bullet \vec{u} = 0 \longrightarrow (1 - 3\lambda, 2 - \lambda) \bullet (3,1) = 0$

$$3 \cdot (1 - 3\lambda) + 1 \cdot (2 - \lambda) = 0 \longrightarrow 3 - 9 \cdot \lambda + 2 - \lambda = 0 \longrightarrow 5 = 10\lambda \longrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

proy $\vec{v}$ **(** $\vec{u}$ **)** $= \vec{v}_1 = \lambda \circ \vec{u}$ **proy** $\vec{v}$ **(** $\vec{u}$ **)** $= \dfrac{1}{2}(3,1)$

Otra forma:

1) Vector unitario en la dirección y sentido de $\vec{u}$: $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}} = \sqrt{(3,1) \bullet (3,1)} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3,1)$$

Norma de $\vec{v}_1$: $\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v}) = \cancel{\|\vec{v}\|}\dfrac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{\cancel{\|\vec{v}\|}\cdot\|\vec{u}\|} = \dfrac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{\|\vec{u}\|} = \dfrac{(1,2)(3,1)}{\sqrt{10}} = \dfrac{3+2}{\sqrt{10}} = \dfrac{5}{\sqrt{10}} = \dfrac{5\sqrt{10}}{10} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

El vector $\vec{v}_1$ será el producto del escalar $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ por el vector unitario en su misma dirección y sentido

proy$\,\vec{u}(\vec{v}) = \dfrac{\sqrt{10}}{2}\circ\dfrac{1}{\sqrt{10}}(3,1) = \dfrac{1}{2}\circ(3,1) = \left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

5. PRODUCTO VECTORIAL . PRODUCTO MIXTO

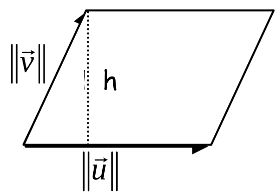
D5.1– PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES DE R^3

Sean $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3) \in R^3$. El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es otro vector que se expresa
$\vec{u}\wedge\vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$

Si multiplicamos escalarmente:

$$\vec{u}\bullet(\vec{u}\wedge\vec{v}) = (u_1,u_2,u_3)\bullet(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) =$$

$$u_1u_2v_3 - u_1u_3v_2 + u_2u_3v_1 - u_2u_1v_3 + u_3u_1v_2 - u_3u_2v_1 = 0$$



De forma análoga se obtiene:

$$\vec{v}\bullet(\vec{u}\wedge\vec{v}) = (v_1,v_2,v_3)\bullet(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) = 0$$

vemos que el vector $\vec{u}\wedge\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

Geométricamente, el producto vectorial de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es otro vector:

cuyo módulo es el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$. $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\cdot h = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot \operatorname{sen}\alpha$

cuya dirección es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$

cuyo sentido es el de avance de un sacacorchos que va del primero al segundo por el camino más corto.

10. PROPIEDADES

1) No tiene la propiedad conmutativa $\quad \vec{u}\wedge\vec{v} = -\vec{v}\wedge\vec{u} \quad \forall \vec{u},\vec{v}\in R^3$

2) Propiedad distributiva por ambos lados: $\begin{cases} \vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{s}) = \vec{u}\wedge\vec{v} + \vec{u}\wedge\vec{s} \\ (\vec{v}+\vec{s})\wedge\vec{u} = \vec{v}\wedge\vec{u} + \vec{s}\wedge\vec{u} \end{cases}$

3) Asociativa de vectores y escalares: $\alpha\circ(\vec{u}\wedge\vec{v}) = (\alpha\circ\vec{u})\wedge\vec{v} = \vec{u}\wedge(\alpha\circ\vec{v}) \quad \alpha\in R$

4) $\vec{u}\wedge\vec{0} = \vec{0}\wedge\vec{u} = \vec{0}$ **5)** $\vec{u}\wedge\vec{u} = \vec{0}$

D5.1– PRODUCTO MIXTO DE TRES VECTORES DE R^3

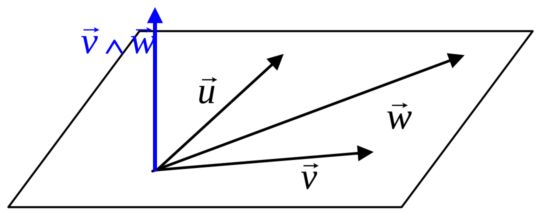
Si $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)\in R^3$ distintos del vector $\vec{0}$ el producto mixto de estos tres vectores es un número real que se expresa $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ y su valor es $\vec{u}\bullet(\vec{v}\wedge\vec{w})$

11. PROPIEDADES

1) $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}= u_1v_2w_3-u_1v_3w_2+u_2v_3w_1-u_2v_1w_3+u_3v_1w_2-u_3v_2w_1$

2) $\forall\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in R^3 \quad \{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}=\{\vec{v},\vec{w},\vec{u}\}=\{\vec{w},\vec{u},\vec{v}\}=-\{\vec{v},\vec{u},\vec{w}\}=-\{\vec{u},\vec{w},\vec{v}\}=-\{\vec{w},\vec{v},\vec{u}\}$

3) Si los vectores son coplanarios $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}=0$ ya que entonces el vector $(\vec{v}\wedge\vec{w})$ es perpendicular a $\vec{v}$ a $\vec{w}$ y al plano que los contiene y por lo tanto perpendicular al vector $\vec{u}$.



Entonces $\vec{u}\perp(\vec{v}\wedge\vec{w}) \quad \Rightarrow \quad \vec{u}\bullet(\vec{v}\wedge\vec{w})=0$

Por otra parte si $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}=0$ o uno de los vectores es $\vec{0}$ o los tres vectores son coplanarios.

4) Geométricamente $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ representa el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores.

Demostración:

Por definición de producto escalar: $\vec{u}\bullet(\vec{v}\wedge\vec{w})=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\wedge\vec{w}\|\cdot\cos\alpha$

$\|\vec{v}\wedge\vec{w}\|$ ya que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ forman la base cuya área es la norma de su producto vectorial.

$\|\vec{u}\|\cdot\cos\alpha$ es la proyección (escalar) del vector $\vec{u}$ sobre la dirección perpendicular a la base, es decir **la altura** del paralelepípedo.