INTRODUCCIÓ A LA MATEMÀTICA DISCRETA

1 Teoria bàsica de conjunts

Definició 1. *Un conjunt és una col·lecció d'objectes. Els objectes que formen part d'un conjunt determinat s'anomenen elements del conjunt.*

Exemples de conjunts són la col·lecció de tots els estudiants del grau de Telemàtica, la col·lecció de tots els nombres enters parells, etc.

Per descriure un conjunt amb un nombre finit d'elements ho podem fer per *extensió*, això és, mitjançant un llistat dels seus elements posats entre claus, com $\{1, 2, 3, 4\}$.

No és important l'ordre en que s'escriuen els elements. Així $\{1, 2, 3, 4\}$ i $\{4, 3, 2, 1\}$ representen el mateix conjunt.

No s'ha de tenir en compte si a la llista hi ha algún element repetit. El conjunt $\{1, 2, 3, 4, 2\}$ és el mateix que l'anterior.

Utilitzarem lletres majúscules per designar els conjunts i lletres minúscules per designar els seus elements.

Per indicar que x és un element de A, escriurem $x \in A$ (x pertany a A). Per indicar que x no és un element de A, escriurem $x \notin A$ (x no pertany a A).

També es pot descriure un conjunt per *comprensió*, això és, especificant una propietat que determini exactament els seus elements. Ho escriurem com

$$A = \{x \mid p(x)\}.$$

Per exemple,

$$A = \{x | \text{ x és enter positiu menor que 5}\}$$

és el conjunt $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

El conjunt que no té cap element es denota per $\emptyset$ i s'anomena conjunt buit. Per exemple,

$$\{x \in \mathbb{R} | \ x^2 = -2\} = \emptyset.$$

Definició 2. *Igualtat de conjunts.*

Dos conjunts A i B són iguals quan tenen exactament els mateixos elements, és a dir, quan tot element de A és element de B i tot element de B és element de A. Quan A i B són iguals ho notarem per $A = B$.

Definició 3. *Subconjunt.*

Direm que un conjunt A és un subconjunt de B si tot element de A és element de B, i ho escriurem com $A \subseteq B$, notació que significa que A està contingut dins B, o que B conté A.

Quan parlem de conjunts sempre suposarem que són subconjunts d'un conjunt universal U.

Exemple 4. *Exemples de subconjunts d'un conjunt:*

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.
- $\mathbb{Z}^+ = \{enterspositius\} \subseteq \mathbb{Z}$.
- *Si A és un conjunt qualsevol, aleshores $\emptyset \subseteq A$ i $A \subseteq A$.*
- *Si A és un conjunt qualsevol i $B = \{A, \{A\}\}$, aleshores* $A \in B, \quad \{A\} \in B, \quad \{A\} \subseteq B$, *però* $A \nsubseteq B$.

Es pot comprovar fàcilment que $A = B$ si i només si $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$.

1.1 Operacions amb conjunts

Veurem algunes operacions bàsiques de conjunts. Les operacions entre conjunts i les propietas que verifiquen aquestes operacions es poden il·lustrar mitjançant *diagrames de Venn*. Un diagrama de Venn és una representació gràfica de conjunts en el pla. El conjunt universal U es representa per l'interior d'un rectangle i els altres subconjunts són representats per cercles inclosos en el rectangle.

Definició 5. *Unió de conjunts*

Siguin A i B conjunts, es defineix la seva unió com el conjunt de tots els elements que pertanyen a A o a B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \, o \, x \in B\}.$$

Exemple 6. *Si $A = \{a, b, c, d\}$ i $B = \{a, b, g, e, h\}$, aleshores*

$$A \cup B = \{a, b, c, d, g, e, h\}.$$

Definició 7. *Intersecció de conjunts*

Siguin A i B conjunts, es defineix la seva intersecció com el conjunt de tots els elements que pertanyen a A i a B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \, i \, x \in B\}.$$

Exemple 8. *Si $A = \{a, b, c, d\}$ i $B = \{a, b, g, e, h\}$, aleshores*

$$A \cap B = \{a, b\}.$$

La unió i la intersecció de conjunts també es pot definir per a tres o més conjunts de la manera següent:

$$A \cup B \cup C = \{x|\ x \in A \ o \ x \in B \ o \ x \in B\}$$

$$A \cap B \cap C = \{x|\ x \in A \ i \ x \in B \ i \ x \in B\}.$$

I per tant, la unió i la intersecció d'un nombre finit de conjunts es defineixen com:

$$\cup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n = \{x|\ x \in A_i \text{ per a algun } i\}$$

$$\cap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n = \{x|\ x \in A_i \text{ per a tot } i\}.$$

Direm que dos conjunts A i B són *disjunts* quan no tenen elements en comú, és a dir, quan $A \cap B = \emptyset$.

Definició 9. *Diferència de conjunts*

Siguin A i B conjunts, es defineix la diferència $A - B$ com el conjunt d'elements de A que no pertanyen a B.

$$A - B = \{x|\ x \in A \ i \ x \notin B\}.$$

Exemple 10. *Si $A = \{a, b, c\}$ i $B = \{b, c, d, e\}$, aleshores $A - B = \{a\}$ i $B - A = \{d, e\}$.*

Definició 11. *Complementari d'un conjunt*

Sigui U un conjunt universal que conté un conjunt A, aleshores el conjunt $U - A$ s'anomena complement o complementari de A i es nota per A^c. Així,

$$A^c = \{x|\ x \notin A\}.$$

Exemple 12. *Si $U = \mathbb{Z}$ és el conjunt de nombres enters i $A = \{x|\ x \text{ és parell}\}$, aleshores*

$$A^c = \{x|\ x \text{ és imparell}\}.$$

Definició 13. *Diferència simètrica*

Siguin A i B conjunts, es defineix la diferència simètrica de A i B com el conjunt unió dels elements de A que no pertanyen a B i els elements de B que no pertanyen a A.

$$A \oplus B = \{x|\ (x \in A \ i \ x \notin B) \ o \ (x \in B \ i \ x \notin A)\}.$$

És fàcil veure que $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$.

Exemple 14. *Si $A = \{a, b, c, d\}$ i $B = \{a, c, e, f, g\}$, aleshores $A \oplus B = \{b, d, e, f, g\}$.*

Definició 15. *Conjunt potència o conjunt de parts d'un conjunt*

Sigui A un conjunt. El conjunt de tots els subconjunts de A s'anomena conjunt de parts de A (o conjunt potència de A) i es nota per $\mathcal{P}(A)$.

$$\mathcal{P}(A) = \{X | X \subseteq A\}.$$

Exemple 16. *Si $A = \{a, b, c\}$, aleshores*

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

1.2 Propietats

A la taula següent es mostren algunes de les propietats algebraiques que satisfan les operacions de conjunts, sent A, B, C subconjunts d'un conjunt universal U.

Commutatives	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Associatives	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Idempotència	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Involutiva	$(A^c)^c = A$
Distributives	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Lleis de De Morgan	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
Absorció	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
Element absorbent	$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$
Element neutre	$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$
Prop. del complement	$A \cup A^c = U$ $A \cap A^c = \emptyset$ $\emptyset^c = U$ $U^c = \emptyset$

1.3 Conjunt finit. Principi de l'addició

Definició 17. *Un conjunt A és finit si conté exactament m elements distints on m és un enter no negatiu. Si un conjunt no és finit, és infinit.*

Si A és finit, notam per $|A|$ o $card(A)$ el nombre d'elements de A.

Exemple 18. *El conjunt $\emptyset$ és finit i $|\emptyset| = 0$. El conjunt de lletres de l'alfabet català és finit i el conjunt de tots els enters positius i imparells és infinit.*

Si A és un conjunt amb $|A| = m$, aleshores $|\mathcal{P}(A)| = 2^m$.

Teorema 19. Principi de l'addició

Si A i B són conjunts finits, aleshores $A \cup B$ i $A \cap B$ són finits i

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Si $A \cap B = \emptyset$ aleshores $|A \cup B| = |A| + |B|$.

En el cas de la unió de tres conjunts, la fórmula que ens dóna el seu cardinal és:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

. *En el cas de la unió de n conjunts, la fórmula que ens dóna el seu cardinal és:*

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \ldots + (-1)^{(n-1)}\alpha_n,$$

on $\alpha_i, i = 1, \ldots, n$ és la suma de tots els cardinals de totes les interseccions de i conjunts dels n conjunts donats.

2 Nocions sobre Àlgebra de Boole

L'àlgebra de Boole és una estructura matemàtica que, com a tal, apareix en moltes situacions. En particular, l'àlgebra de Boole té aplicació en la síntesi de xarxes de commutació, en l'estudi de circuits digitals i en l'anàlisi i programació mitjançant ordinador.

Definició 20. *Sigui $\mathcal{B} =< B, +, *, ^-, 0, 1 >$ on*

- *B és un conjunt no buit ($B \neq \emptyset$),*
- *$0, 1 \in B$, amb $0 \neq 1$,*
- *$+$ i $*$ són operacions binàries:*

  $$+ : B \times B \longrightarrow B \quad i \quad * : B \times B \longrightarrow B$$

  tals que $\forall (a, b) \in B \times B$ li assignen $(a, b) \mapsto a + b$ i $(a, b) \mapsto a * b$ respectivament,
- *$^-$ és una operació unària $^- : B \longrightarrow B$ tal que $\forall a \in B$ li assigna $\overline{a}$*

Direm que $\mathcal{B}$ té estructura d'àlgebra de Boole si se satisfan les propietats següents:

A1. Les operacions $+$ i $*$ són associatives: $\forall a, b, c \in B$

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

A2. Les operacions $+$ i $*$ són commutatives: $\forall a, b, c \in B$

$$a + b = b + a$$

$$a * b = b * a$$

A3. Cada operació binària té element neutre: $\forall a \in B$

$$\exists 0 \in B \quad \textit{tal que} \quad a + 0 = 0 + a = a$$

$$\exists 1 \in B \quad \textit{tal que} \quad a * 1 = 1 * a = a$$

A4. Per a cada element $a \in B$ *existeix un únic element* $\overline{a} \in B$*, anomenat complementari de* a*, tal que:*

$$a + \overline{a} = 1$$

$$a * \overline{a} = 0$$

A5. Cada operació binària és distributiva respecte de l'altra: $\forall a, b, c \in B$

$$a * (b + c) = a * b + a * c$$

$$a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$$

Aquest cinc parells de propietats es coneixen com els axiomes de l'àlgebra de Boole. Qualsevol altra propietat d'una àlgebra de Boole es pot deduir a partir de les anteriors.

Les operacions $+, *$ i $^-$ s'anomenen suma, producte i complementari respectivament. En absència de parèntesi $^-$ té preferència sobre $*$ i $*$ sobre $+$. Usualment ometrem el símbol $*$, així per escriure $a * b$ ho farem com ab.

L'element neutre de la suma s'anomena element *zero* i l'element neutre del producte s'anomena element *unitat*.

Exemple 21. *Exemples d'àlgebres de Boole*

- *Consideren un conjunt* U *finit i* $U \neq \emptyset$*. El conjunt* $\mathcal{P}(U)$ *amb les operacions* $\cup$ *unió de conjunts,* $\cap$ *intersecció de conjunts i* ^{c} *complementari d'un conjunt, té estructura d'àlgebra de Boole.*

  L'element neutre de la unió és el conjunt $\emptyset$ *i el neutre de la intersecció és el conjunt* U*.*

- *Sigui* $D_{70} = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}$ *el conjunt format pels divisors de* 70*. Si definim en* D_{70} *les operacions:*

  $$a + b = m.c.m.(a, b), \quad a * b = m.c.d.(a, b), \quad \overline{a} = 70/a,$$

  aleshores D_{70} *és una àlgebra de Boole, amb* 1 *com element zero i* 70 *com element unitat.*

- *Sigui* $B = \{0, 1\}$ *amb les operacions binàries* $+$ *i* $*$ *definides per:*

$+$	1	0
1	1	1
0	1	0

$*$	1	0
1	1	0
0	0	0

  i l'operació unària $^-$ *definida per* $\overline{0} = 1$ *i* $\overline{1} = 0$*. Aleshores* $\mathcal{B} =< 0, 1, +, *, ^- >$ *és una àlgebra de Boole, anomenada* ***àlgebra de Boole binària***

Principi de dualitat En una àlgebra de Boole tota propietat que pugui deduir-se dels axiomes o de qualsevol altra propietat derivada d'ells, dóna una altra propietat que s'obté intercanviant:

- les operacions suma i producte,
- els símbols 0 i 1.

La propietat que s'obté d'aquesta manera rep el nom de ***propietat dual*** de la inicial

Exemple 22. *La propietat dual de:*

$$(1+a)(b+0)=b \quad \textit{és} \quad (0a)+(b1)=b.$$

El principi de dualitat és conseqüència de la pròpia estructura d'àlgebra de Boole, ja que cada parell de propietats en la seva definició ve donat per una propietat i la seva dual.

2.1 Propietats en una àlgebra de Boole

Es pot demostrar matemàticament (no és objecte del nostre estudi) que tota àlgebra de Boole finita és estructuralment la mateixa que una àlgebra de Boole de conjunts. En aquest sentit tota àlgebra de Boole satisfarà les mateixes propietats que una àlgebra de Boole de conjunts. Així, a la taula següent donam la llista de propietats que comparteixen una àlgebra de Boole finita, $\mathcal{B}$, i una àlgebra de Boole de conjunts, $\mathcal{P}(U)$:

	$\mathcal{B}$	$\mathcal{P}(U)$
Commutatives	$x+y=y+x$ $xy=yx$	$A\cup B=B\cup A$ $A\cap B=B\cap A$
Associatives	$(x+y)+z=x+(y+z)$ $(xy)z=x(yz)$	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C$ $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
Idempotència	$x+x=x$ $xx=x$	$A\cup A=A$ $A\cap A=A$
Involutiva	$\overline{(\overline{x})}=x$	$(A^c)^c=A$
Distributives	$x+(yz)=(x+y)(x+z)$ $x(y+z)=xy+xz$	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
Lleis de De Morgan	$\overline{(x+y)}=\overline{x}\,\overline{y}$ $\overline{xy}=\overline{x}+\overline{y}$	$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$ $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$
Absorció	$x+xy=x$ $x(x+y)=x$	$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$
Element absorbent	$x+1=1$ $x0=0$	$A\cup U=U$ $A\cap\emptyset=\emptyset$
Element neutre	$x+0=x$ $x1=x$	$A\cup\emptyset=A$ $A\cap U=A$
Prop. del complement	$x+\overline{x}=1$ $x\overline{x}=0$ $\overline{0}=1$ $\overline{1}=0$	$A\cup A^c=U$ $A\cap A^c=\emptyset$ $\emptyset^c=U$ $U^c=\emptyset$

Sabem que si un conjunt A té n elements, aleshores $|\mathcal{P}(A)|=2^n$ i, degut a la relació que hi ha entre conjunts i àlgebres de Boole, es pot enunciar el següent resultat:

Teorema 23. *Tota àlgebra de Boole finita té 2^n elements per a algun enter positiu n.*

3 Funcions booleanes en l'àlgebra de Boole binària

Consideram a partir d'ara l'àlgebra de Boole binària on $B=\{0,1\}$ i notam per B^n el producte cartesià de B per ell mateix n vegades.

$$B^n=B\times B\times\ldots\times B=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)|x_i\in\{0,1\},i=1,\ldots,n\}.$$

Nota: S'anomenen *variacions amb repetició* de n elements diferents agafats de k en k les mostres ordenades de k elements, els quals es poden repetir, agafats dels n elements.

El seu nombre ve donat per $VR_{n,k}=n^k$.

Notem que si $B = \{0,1\}$, aleshores $|B^n| = 2^n$. Així:

$$B^2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$

$$B^3 = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\}.$$

Definició 24. *S'anomena funció booleana definida en B o funció de commutació lògica a tota aplicació*

$$f : B^n \longrightarrow B$$

tal que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pugui expressar-se a partir de les operacions definides en B realitzades sobre les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Tota funció booleana en $B = \{0,1\}$ es pot representar mitjançant taules de valors o taules de veritat. Les n primeres columnes permeten representar els 2^n elements de B^n i la columna final indica el valor que assigna f a cada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Exemple 25. *Calculem els valors de la funció booleana $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + \overline{x_3}$. Els valors d'aquesta funció venen representats a la taula següent:*

x_1	x_2	x_3	x_1x_2	$\overline{x_3}$	$x_1x_2 + \overline{x_3}$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

Nombre de funcions booleanes en l'àlgebra de boole binària

El nombre d'elements del conjunt B^n és 2^n i per a cada un d'aquests elements una funció booleana sobre $\{0,1\}$ pot prendre valor 0 o valor 1. Aleshores

$$|\{f | f : B^n \longrightarrow B\}| = VR_{2,2^n} = 2^{(2^n)}.$$

Així per a $n = 2$ el nombre de funcions booleanes serà $2^4 = 16$; per a $n = 3$, el nombre de funcions booleanes serà $2^8 = 256$, etc.

Les 16 funcions booleanes de dues variables són:

$$f_0(x_1,x_2) = 0; \quad f_1(x_1,x_2) = x_1x_2; \quad f_2(x_1,x_2) = x_1\overline{x_2}; \quad f_3(x_1,x_2) = x_1;$$

$f_4(x_1,x_2) = \overline{x_1}x_2$; $f_5(x_1,x_2) = x_2$; $f_6(x_1,x_2) = \overline{x_1}x_2 + x_1\overline{x_2}$; $f_7(x_1,x_2) = x_1 + x_2$;

$f_8(x_1,x_2) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}$; $f_9(x_1,x_2) = x_1x_2 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}$; $f_{10}(x_1,x_2) = \overline{x_2}$; $f_{11}(x_1,x_2) = x_1 + \overline{x_2}$

$f_{12}(x_1,x_2) = \overline{x_1}$; $f_{13}(x_1,x_2) = \overline{x_1} + x_2$; $f_{14}(x_1,x_2) = \overline{x_1} + \overline{x_2}$; $f_{15}(x_1,x_2) = 1$.

Exercici 26. *Escriviu les taules de valors de les funcions booleanes de dues variables.*

Definició 27. *Minterm. Maxterm*

En B^n el producte de n variables diferents, complementades o no, rep el nom de minterm.

En B^n la suma de n variables diferents, complementades o no, rep el nom de maxterm.

Exemple 28. *En B^4 les expressions $x_1x_2\overline{x_3}\ \overline{x_4}$, $\overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4}$ són minterms.*

En B^3 les expressions $\overline{x_1}+x_2+x_3$, $\overline{x_1}+x_2+\overline{x_3}$ són maxterms.

Proposició 29. *Sigui $f : B^n \to B$ una funció booleana, aleshores:*

- *f es pot expressar com a suma de minterms (suma de productes). Aquesta expressió s'anomena forma canònica disjuntiva de f.*
- *f es pot expressar com a producte de maxterms (producte de sumes). Aquesta expressió s'anomena forma canònica conjuntiva de f.*

Propietat 30. *Sigui $f : B^n \to B$ una funció booleana, aleshores:*

- *Les formes canòniques d'una funció booleana són úniques.*
- *Dues funcions booleanes són equivalents (són la mateixa funció) si i només si tenen les mateixes formes canòniques.*

Obtenció de les formes canòniques

Les formes canòniques d'una funció booleana es poden obtenir de dues maneres.

1. A partir de la taula de valors.

La forma canònica disjuntiva de $f : B^n \to B$ s'obté a partir de cada un dels valors 1 que pren la funció (un producte de totes les variables o els seus complements pren el valor 1 quan tots els factors prenen el valor 1).

Així, el nombre de minterms en la forma disjuntiva és igual al nombre d'uns (1) en la taula de valors de f.

La forma canònica conjuntiva de $f : B^n \to B$ s'obté a partir de cada un dels valors 0 que pren la funció (una suma de totes les variables o els seus complements pren el valor 0 quan tots els termes prenen el valor 0).

Així, el nombre de maxterms en la forma conjuntiva és igual al nombre de zeros (0) en la taula de valors de f.

Exemple 31. *Obteniu les formes canòniques disjuntiva i conjuntiva de la funció $f : B^3 \to B$ donada per la taula*

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

La forma canònica disjuntiva de f serà

$$f(x_,x_2,x_3) = \overline{x_1}\ \overline{x_2}\ \overline{x_3} + \overline{x_1}x_2\overline{x_3} + \overline{x_1}x_2x_3 + x_1x_2\overline{x_3} + x_1x_2x_3$$

i la conjuntiva

$$f(x_,x_2,x_3) = (x_1 + x_2 + \overline{x_3})(\overline{x_1} + x_2 + x_3)(\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3}).$$

2. A partir d'una expressió en la fórmula.

Forma canònica disjuntiva: Interessa obtenir una suma de productes, encara que aquests productes no siguin minterms.

La propietat que ho sol permetre és la distributiva del producte respecte a la suma. Una vegada obtinguda la suma de productes, cada variable x_j que no figuri en un sumand es pot afegir multiplicant per 1, fent $1 = x_j + \overline{x_j}$, i després es torna a aplicar la propietat distributiva.

Forma canònica conjuntiva: Es vol transformar l'expressió inicial en producte de sumes. En aquest cas juga un paper essencial la propietat distributiva de la suma respecte al producte. Una vegada obtingut el producte de sumes, cada variable x_j que no figuri en un factor es pot afegir sumant 0, fent $0 = x_j\overline{x_j}$, i després es torna a aplicar la propietat distributiva.

En tots dos casos, després de multiplicar per 1 o sumar 0 i aplicar les propietats distributives corresponents s'han d'eliminar els minterms o maxterms repetits aplicant la propietat idempotent.

Exemple 32. *Obteniu les formes canòniques disjuntiva i conjuntiva de la funció $f : B^3 \to B$ donada per $f(x,y,z) = \overline{x} + yz$.*

Forma disjuntiva:

$$f(x,y,z) = \overline{x} + yz = \overline{x}(y+\overline{y})(z+\overline{z}) + (x+\overline{x})yz =$$

(hem introduit les variables que faltaven a cada sumand)

$$= (\overline{x}y + \overline{x}\ \overline{y})(z+\overline{z}) + xyz + \overline{x}yx =$$

(hem aplicat la propietat distributiva)

$$= \overline{x}yz + \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}\ \overline{y}z + \overline{x}\ \overline{y}\ \overline{z} + xyz + \overline{x}yz =$$

(hem aplicat la propietat distributiva)

$$= \overline{x}yz + \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}\ \overline{y}z + \overline{x}\ \overline{y}\ \overline{z} + xyz.$$

(hem eliminat els minterms repetits aplicant la propietat d'idempotència)

Forma conjuntiva:

$$f(x, y, z) = \overline{x} + yz = (\overline{x} + y)(\overline{x} + z) =$$

(hem aplicat la propietat distributiva de la suma respecte al producte)

$$= (\overline{x} + y + z\overline{z})(\overline{x} + y\overline{y} + z) =$$

(hem afegit a cada factor les variables que ens faltaven)

$$= (\overline{x} + y + z\overline{z})(\overline{x} + z + y\overline{y}) =$$

(hem aplicat la propietat commutativa de la suma en el segon factor)

$$= (\overline{x} + y + z)(\overline{x} + y + \overline{z})(\overline{x} + z + y)(\overline{x} + z + \overline{y}) =$$

(hem aplicat la distributiva de la suma respecte al producte)

$$= (\overline{x} + y + z)(\overline{x} + y + \overline{z})(\overline{x} + y + z)(\overline{x} + z + \overline{y}) =$$

(hem aplicat la propietat commutativa de la suma)

$$= (\overline{x} + y + z)(\overline{x} + y + \overline{z})(\overline{x} + z + \overline{y})$$

(hem aplicat la propietat d'idempotència).

Observació 33. *És important afegir les variables en l'ordre en què figuren en la funció, x, y, z.*

Simplificació de funcions booleanes

L'objectiu d'aquesta secció és l'obtenció d'expressions simplificades de les funcions booleanes, tant si la seva expressió inicial és una de les formes canoniques o no.

Els mètodes habituals de simplificació són tres: mètode algebraic, metode gràfic (els mapes de Karnaugh) i el mètode iteratiu (mètode de Quine-McCluskey).

Nosaltres només utilitzarem el mètode algebraic, els altres mètodes s'explicaran en altres assignatures.

Mètode algebraic

Consisteix en la utilització de les propietats generals vàlides en qualsevol àlgebra de Boole. Les propietats que faciliten el procés de simplificació són:

i) Complementari: $x + \bar{x} = 1$; $x\bar{x} = 0$.

ii) Idempotència: $x + x = x$; $xx = x$.

iii) Absorció: $x + xy = x$; $x(x + y) = x$.

iv) Lleis de De Morgan: $\overline{x + y} = \bar{x}\bar{y}$; $\overline{xy} = \bar{x} + \bar{y}$.

v) Distributives: $xy + z = x(y + z)$; $x + yz = (x + y)(x + z)$.

vi) Element absorbent $1 + x = 1$; $x0 = 0$.

Exemple 34. *Simplificau la funció* $f : B^3 \to B$ *definida per* $f(x, y, z) = x + \bar{x}y + xy\bar{z} + xz + x\bar{z}$.

$$f(x, y, z) = x + \bar{x}y + xy\bar{z} + xz + x\bar{z} = x(1 + y\bar{z}) + \bar{x}y + x(z + \bar{z}) =$$

hem aplicat la propietat distributiva

$$= x + \bar{x}y + x =$$

hem aplicat les propietats d'element absorbent i del complementari

$$= x + \bar{x}y =$$

hem aplicat la propietat idempotent

$$= (x + \bar{x})(x + y) =$$

hem aplicat la propietat distributiva

$$= 1(x + y) = x + y.$$

Exercici 35. *Simplificau les funcions:*

1. $f(x, y) = (x + y)(x + \bar{y})(\bar{x} + y)$.

2. $f(x, y, z, w) = \overline{w + w\bar{x} + yz}$.

3. $f(x, y, z, w) = xw + x\bar{y} + yz + x\bar{z}$.

Sol: xy; $\bar{x}(\bar{y} + \bar{z})$; $x + yz$.