

- 1 [2.5p] Donat $\alpha \in \mathbb{R}$, trobau la inversa de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 2 [2.5p] Comprova que l'operació entre els dos vectors de \mathbb{R}^3 definida per

$$(x, y, z) \cdot (a, b, c) = xa + 2yb + 3zc$$

compleix les condicions perquè sigui un producte escalar. Amb aquesta definició, calcula la norma del vector $\vec{u} = (-1, 0, 2)$ i calcula també la seva norma amb el producte escalar habitual.

- 3 [2.5p] Donats els vectors $\vec{u} = (1, 2, 3)$ i $\vec{v} = (-2, 0, 5)$. Construïm el vector $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. Calculau el valor dels paràmetres a i b per tal que \vec{w} sigui ortogonal al vector $(1, 1, 1)$ i el seu mòdul sigui $\sqrt{12}$.

- 4 [2.5p] Expressau el vector $(3, 1, 4)$ en la base d' \mathbb{R}^3 formada pels vectors $(1, -2, -1), (1, -1, 0), (0, 0, 3)$.

- 5 [3p] Una funció f de \mathbb{R}^4 a \mathbb{R}^3 està determinada per $f(x, y, z, t) = (y/2 + z - 2t, x + 2z + 2t, 2t)$ en la base canònica. Es demana:

1. Trobar el nucli f .
2. Trobar la imatge de f .
3. Trobar la matriu de f en aquesta base.

- 6 [3p] Una funció f de \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^2 en la base canònica està determinada per la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriu de f respecte de les dues noves bases

$$B_1 = \{(3, 1, 0), (-1, 1, 1), (0, 2, 3)\} \text{ i } B_2 = \{(1, -1), (-2, 3)\}$$

- 7 [4p] Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Trobau els valors propis de la matriu A .
2. Trobau els subespais propis de la matriu A .
3. En funció dels resultats obtinguts, decideu si la matriu A és o no és diagonalitzable.
4. En base als resultats obtinguts, calculau A^n .

8 [4p] Els orcs de Mordor volen poder pujar còmodament a la torre del senyor obscur en ascensor. L'ascensor només s'hauria de posar en marxa en segons casos:

- No hi ha ningú a l'ascensor, per tant aquest es pot moure lliurement per la torre anant a cercar orquets i orquetes.
- A l'ascensor no hi ha cap bebé orc, així evitam que els orcs més petits es perdin per la torre obscura.
- A l'ascensor hi ha algún orc de Mordor adult.
- A l'ascensor hi ha com a màxim 5 orcs de Mòrdor adults.

Sabem que un orc és petit quan pesa menys de 30 kg, i que el pes aproximat d'un orc adult sol ser de 70 kg. Tenint en compte això, els telemàtics de Grey Enterprises Holdings Inc. (es a dir, vosaltres) heu de:

1. Descriure les variables d'una funció booleana F (les que considereu necessàries) que compleixi totes aquestes condicions.
2. Donar la seva taula de veritats.
3. Donar una expressió booleana de F .
4. Dibuixar el seu mapa de Karnaugh.

9 [2p] Donada la funció booleana $f(x, y, z) = \overline{(xy)}(xy + \overline{xy}\overline{z})$, citant a cada passa que opereu, la propietat de l'àlgebra de Boole que esteu emprant:

1. Donau la forma canònica conjuntiva.
2. Donau la forma canònica disjuntiva.

10 [4p] Els nostros estimats orcs de Mordor es volen modernitzar, i per això volen posar Wifi connectant les ciutats de tota la Terra Mitjana per poder emprar Orcbook, la xarxa social per orcs. Les ciutats estan connectades per carreteres que no es tallen entre elles com segueix:

Hobbiton es troba a 6 milles de Rivendel, a 3 de Bree, a 3 de la Quebrada dels Túmuls i a 9 d'Isengard, Bree es troba a 2 milles de la Quebrada dels Túmuls, 4 de Rivendel, a 2 de les Mines de Mòria, a 9 de les terres de Rohan i a 9 d'Isengard, Rivendel dista 2 milles de Mòria i a 9 de Lòrien, les Mines de Mòria estan a 9 milles de Lòrien i a 8 de Rohan, Rohan està ben lluny de tot, a 8 d'Isengard, a 10 de Mòrdor, a 9 de Mines Tirith i a 10 de Lòrien, Lòrien es troba a 5 milles de Mines Tirith, Mines Tirith està a una milla de Cirith Ungol, i finalment Mòrdor està a 18 milles de Isengard, a 3 de Mines Tirith i a 4 de Cirith Ungol.

1. Dibuixau un graf on es vegi la connexió entre les ciutats de la Terra Mitjana indicant a cada node la ciutat en qüestió i a cada aresta la distància entre elles.
2. Trobau la ciutat de major grau del graf i donau un recorregut simple que vagi de ella a Mordor passant per totes les altres ciutats. Donau també un cicle que passi per totes les ciutats.
3. Donau un arbre recobridor mínim, és a dir, per quines carreteres posarieu la xarxa de Wifi per tal de gastar el mínim de fibra òptica possible (que va un poc cara segons ens diuen els tècnics de Orcafone).
4. És possible fer un recorregut que passi per tots els camins de la Terra Mitjana sense repetir-ne cap? Justificau la resposta amb algún dels resultats que heu vist a classe (no val dir si o no sense més). En cas afirmatiu, marcau-ne un, i en cas negatiu digau perquè és impossible trobar tal camí.

Segurament el curs podria haver estat més complet i amb més contingut, exercicis i demostracions però mai hagues pogut ser més divertit que com ha estat. Molta sort i fins el cuatrimestre que ve!