Contents

Chapter 4

Productes escalars

En aquest tema tractararem la noció de producte escalar, que segurament ja coneixem. Al tema d'espais vectorials hem definit sobre $E \times E$ l'operació suma, i sobre $K \times E$ l'operació producte per un escalar. En aquest tema definirem una nova operació sobre $E \times E$, producte escalar de dos vectors, en què el resultat serà un element del cos K. Com als temes anteriors, formalitzarem aquest concepte i estudiarem les seves propietats.

4.1 Productes escalars sobre espais reals i complexos. Bases ortonormals.

Definició 4.1
Sigui E un $\mathbb{R}-$e.v. Direm que una aplicació $f : E \times E \to \mathbb{R}$ és una forma bilineal si és lineal en cada variable. Direm que és simètrica si es compleix $f(x, y) = f(y, x)$ per tots $x, y \in E$.

Si $\dim E = n \geq 1$ i $\{e_1, \dots, e_n\}$ és una base, podem considerar l'aplicació f que fa correspondre a cada forma bilineal f la matriu real $G = (g_{ij})$ amb $g_{ij} = f(e_i, e_j), i, j = 1, \dots, n$. Es tracta d'un isomorfisme entre l'espai vectorial de les formes bilineals sobre E i l'espai vectorial de les matrius quadrades d'ordre n sobre $\mathbb{R}$. Observem que, si E és un espai vectorial de dimensió finita, llavor l'espai vectorial de les formes bilineals sobre E té dimensió n^2. És clar que en aquesta correspondència, f és simètrica si, i només si, G és simètrica. Direm que G és la matriu de f respecte de la base $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Proposició 4.1
Sigui f una forma bilineal sobre E i $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de E. Si $x, y \in E$ i X, Y són les matrius (columna) de coordenades de x, y en la base donada, llavors es verifica $f(x, y) = X^T GY$, on G és la matriu de f en la base.

Prova. Aplicant les condicions de forma bilineal obtenim

$$f(x,y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f\left(e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} y_j f(e_i, e_j)\right) =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i g_{ij} y_j = X^T GY.$$

■

Exemple 1: *Considerem l'aplicació $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per $f((x, y), (x'y')) = 2xx' + 3xy' +$*

$4yx' - yy'$. *Anem a provar que és una forma bilineal:*

$$\begin{aligned} &f((x,y)+(\bar{x},\bar{y}),(x'y')) = f((x+\bar{x},y+\bar{y}),(x',y')) = 2(x+\bar{x})x' + 3(x+\bar{x})y' + 4(y+\bar{y})x' - (y+\bar{y})y' = \\ &= 2xx' + 2\bar{x}x' + 3xx' + 3\bar{x}y' + 4yx' + 4\bar{y}x' - yy' - \bar{y}y' = \\ &= 2xx' + 3xx' + 4yx' - yy' + 2\bar{x}x' + 3\bar{x}y' + 4\bar{y}x' - \bar{y}y' = f((x,y),(x',y')) + f((\bar{x},\bar{y}),(x',y')). \end{aligned}$$

La resta de condicions de bilineal se proven de manera anàloga.

Observau que podem escriure la forma bilineal com:

$$f((x,y)(x',y')) = (x,y)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Evidentment, quan canviam la base de l'espai, la matriu de la forma bilineal també canvia. Veiem en el següent resultat quina relació hi ha entre dues matrius de la mateixa forma bilineal.

Proposició 4.2

Sigui f una forma bilineal sobre E i $B = \{e_1,\dots,e_n\}, B' = \{e'_1,\dots,e'_n\}$ bases de E. Si G és la matriu de f en la base B i G' la matriu de f en la base B', es verifica $G' = P^T GP$, on P és la matriu del canvi de base (matriu de coordenades de B' en B).

Prova. Si P és la matriu del canvi de base, en coordenades tenim la relació $e_i = \sum_{k=1}^{n} P_{ij} e'_i$, $X = PX'$.

Per tant,

$$f(x,y) = X^T GY = (PX')^T G(PY') = (X')^T P^T GPY' = X'^T G'Y',$$

d'on obtenim la relació que cercàvem. ■

Observem que aquesta relació és diferent que la que apareix en el cas de matrius que representen endomorfismes, ja que allà és la inversa de la matriu P la que apareix en la relació en lloc de la matriu P^T.

En el cas que E sigui un espai vectorial sobre els complexos, la Definició 4.1 es transforma en la següent.

Definició 4.2

Una aplicació $f : E \times E \to \mathbb{C}$ es diu una forma sesquilineal si compleix per tot $x_1, x_2, y_1, y_2 \in E, k \in \mathbb{C}$:

i) $f(x_1+x_2,y_1) = f(x_1,y) + f(x_2,y),\ f(kx_1,y_1) = kf(x_1,y_1)$,

ii) $f(x_1,y_1+y_2) = f(x_1,y_1) + f(x_1,y_2), f(x_1,ky_1) = \bar{k}f(x_1,y_1)$, *on $\bar{k}$ és el conjugat de k.*

Una forma sesquilineal és hermítica si $f(x,y) = \overline{f(y,x)}$ per tots $x,y \in E$.

De forma anàloga al cas real, podem dir que si $\dim E = n \geq 1$ i $\{e_1,\dots,e_n\}$ és una base, podem considerar l'aplicació que fa correspondre a cada forma sesquilineal f la matriu complexa $G = (g_{ij})$ amb $g_{ij} = f(e_i,e_j), i,j = 1,\dots,n$. Es tracta d'un isomorfisme entre l'espai vectorial de les formes sesquilineals sobre E i l'espai vectorial de les matrius quadrades d'ordre n sobre $\mathbb{C}$. És clar que en aquesta correspondència, f és hermítica si, i només si, G és hermítica, és a dir, si $G^T = \overline{G}$. Direm que G és la matriu de f respecte de la base $\{e_1,\dots,e_n\}$.

Proposició 4.3

Sigui f una forma sesquilineal sobre E i $\{e_1,\dots,e_n\}$ una base de E. Si $x,y \in E$ i X,Y són les matrius (columna) de coordenades de x,y en la base donada, llavors es verifica $f(x,y) = X^T G\bar{Y}$, on G és la matriu de f en la base i $\bar{Y}$ és la matriu que té per elements els conjugats de la matriu Y.

Proposició 4.4

Sigui f una forma sesquilineal sobre E i $e = \{e_1,\dots,e_n\}, v = \{v_1,\dots,v_n\}$ bases de E. Si G és la matriu de f en la base e i G' la matriu de f en la base v, es verifica $G' = P^T G\bar{P}$, on P és la matriu del canvi de base (matriu de coordenades de v en e).

Definició 4.3
Un producte escalar sobre E ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ espai vectorial) és una forma bilineal simètrica (forma sesquilineal hermítica) que compleix:

1) $f(x,x) \geq 0$ per tot $x \in E$.

2) $f(x,x) = 0$ implica $x = 0$.

Es diu que un producte escalar és una forma bilineal simètrica (sesquilineal hermítica) definida positiva.

En general utilitzarem la notació $x.y$ o també $\langle x, y\rangle$ en lloc de $f(x,y)$ per indicar el producte escalar de x i y. Un espai vectorial euclidià és un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ amb un producte escalar definit sobre ell. Un espai vectorial unitari és un espai vectorial sobre $\mathbb{C}$ amb un producte escalar definit sobre ell.

Exemples 2

(1) A l'espai $\mathbb{R}^n$ es considera el producte escalar (estàndar) $x.y = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$. $\mathbb{R}^n$ amb aquest producte escalar és l'espai vectorial euclidià $n-$dimensional estàndar.

(2) A l'espai $\mathbb{C}^n$ es considera el producte escalar (estàndar), és a dir $x.y = \sum_{i=1}^n x_i\bar{y}_i$. $\mathbb{C}^n$ amb aquest producte escalar és l'espai vectorial unitari $n-$dimensional estàndar.

(3) Sigui E l'espai de les funcions reals contínues sobre l'interval $[0,1]$. Si definim

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt,$$

resulta que E és un espai vectorial euclidià.

Definició 4.4
Sigui $(E;.)$ un e.v. euclidià o unitari. Direm que $x, y \in E$ són ortogonals si $x.y = 0$.
Un vector $x \in E$ es unitari si $x.x = 1$.

Proposició 4.5
Si $(E;.)$ és un e.v. euclidià o unitari, es verifiquen:

1) $0.x = 0$ per tot $x \in E$.

2) $x.y = 0$ per tot y, implica $x = 0$.

3) Si $x_1, \ldots, x_k$ són no nuls i ortogonals dos a dos, llavors són linealment independents.

Prova.

3) Feim una combinació lineal d'aquests vectors igualada a zero: $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = 0$. Multiplicam escalarment aquesta combinació lineal pel vector x_j :

$$0 = \langle \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i, x_j\rangle = \sum_{i=1}^k \alpha_i \langle x_i, x_j\rangle = \alpha_j\langle x_j, x_j\rangle,$$

i com que $x_j \neq 0$ llavors $\alpha_j = 0$ per tot $j = 1, \ldots, k$.

■

Definició 4.5
Sigui E un espai vectorial sobre $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Direm que una aplicació $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ és una norma si per a tot $x, y \in E$ i tot $\lambda \in K$:

1. $\|x\| \geq 0$,
2. $\|x\| = 0$ *si i només si* $x = 0$,
3. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(desigualtat triangular).*

Un espai vectorial normat és un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ amb una norma definida sobre ell.

Definició 4.6
Si $(E; \|\cdot\|)$ és un e.v. normat, direm que un vector x és unitari si $\|x\| = 1$.

Observem que si $x \neq 0$, podem normalitzar-lo (és a dir, convertir-lo en unitari) fent $\frac{x}{\|x\|}$.

Proposició 4.6
Si $(E; .)$ és un e.v. euclidià o unitari, aleshores l'aplicació definida per $\|x\| = \sqrt{x.x}$ és una norma. A més a més verifica les següents propietats:

1) $|x.y| \leq \|x\|\|y\|$ (desigualtat de Cauchy-Schwarz).

2) $|x.y| = \|x\|\|y\|$ si i només si x, y són linealment dependents.

Prova. De les propietats que ha de verificar per ser-hi una norma demostram la desigualtat triangular:

$$\begin{aligned}&(x + y).(x + y) = x.x + x.y + y.x + y.y = x.x + y.y + (x.y + \overline{x.y}) \leq \\ &\leq x.x + y.y + 2|x.y| \leq x.x + y.y + 2\sqrt{x.x}\sqrt{y.y} = (\sqrt{x.x} + \sqrt{y.y})^2,\end{aligned}$$

d'on $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Demostrem ara la desigualtat de Cauchy-Schwarz. D'aquesta prova s'en dedueix també la prova de la propietat 2).

1) Si $y = 0$ la desigualtat és trivialment certa. Suposem $y \neq 0$ i considerem $k = \frac{x.y}{y.y}$. Llavors

$$\begin{aligned}&0 \leq (x - ky).(x - ky) = x.x + k(y.x) - \bar{k}(x.y) + k\bar{k}(y.y) = \\ &x.x - \frac{(x.y)(y.x)}{y.y} - \frac{\overline{(x.y)}(x.y)}{y.y} + \frac{(x.y)\overline{(x.y)}}{y.y} = x.x - \frac{(x.y)\overline{(x.y)}}{y.y} = x.x - \frac{|x.y|^2}{y.y},\end{aligned}$$

d'on $|x.y|^2 \leq (x.x)(y.y)$.

■

Direm que la norma definida a la proposició anterior, $\|x\| = \sqrt{x.x}$, és la norma associada al producte escalar.

Comentari: Hi ha normes que no deriven de cap producte escalar. Per exemple, a $\mathbb{R}^2 : \|(x_1, x_2)\| = |x_1| + |x_2|$ és una norma que no deriva de cap producte escalar.

Definició 4.7
Sigui $(E; .)$ un e.v. euclidià o unitari . Direm que una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ és ortonormal si els vectors són unitaris i ortogonals dos a dos.

Fixau-vos que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ és una base ortonormal si i només si la matriu del producte escalar en ella és la matriu identitat. En el cas real, la matriu de canvi P d'una base ortonormal a una altra base ortonormal verifica $P^T P = I$ (és a dir, P és una matriu ortogonal). En el cas complex, la matriu P verifica $\bar{P}^T P = I$ (P és una matriu unitària).

EXEMPLES 3

(1) A l'espai vectorial euclidià o unitari estàndar $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$, la base canònica és una base ortonormal.

(2) Si consideram a $\mathbb{R}^2$ el producte escalar habitual, el conjunt $\{(1,-1),(1,1)\}$ es també una base ortogonal, ja que $(1,-1).(1,1) = 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 = 0$.

Però que no és un conjunt ortonormal ja que $\|(1,-1)\| = \sqrt{(1,-1).(1,-1)} = \sqrt{2}$ i $\|(1,1)\| = \sqrt{2}$. A partir de la base anterior podem construir una altra ortonormal fent $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\}$.

PROPOSICIÓ 4.7 (MÈTODE D'ORTONORMALITZACIÓ DE GRAM-SCHMIDT.)
En un e.v. euclidià o unitari de dimensió finita hi ha bases ortonormals .

Prova. Sigui $\{e_1,\dots,en\}$ una base qualsevol. Considerem els subespais vectorials $E_1 = \langle e_1\rangle \subset E_2 = \langle e_1,e_2\rangle \subset \ldots \subset E_n = \langle e_1,\dots,e_n\rangle = E$.

L'espai E_1 té una base ortonormal que és $u_1 = \frac{e_1}{\sqrt{e_1.e_1}}$. Suposem ara que $u_1,\dots,u_r$ és una base ortonormal de E_r, i vegem com podem construir una base ortonormal de $E_{r+1} = \langle e_1,\dots,e_{r+1}\rangle = \langle u_1,\dots,u_r,e_{r+1}\rangle$. Sigui $u'_{r+1} = e_{r+1} - (k_1u_1 + \cdots + k_ru_r)$ i imposem que sigui ortogonal a cada $u_i, i = 1,\dots,r$. Si volem que es compleixi aquesta condició, obtenim que $k_i = e_{r+1}.u_i$. Per altra part, $u_1,\dots,u_r,u'_{r+1}$ són linealment independents i són per tant una base de E_{r+1}. Finalment, normalitzam u'_{r+1} i obtenim u_{r+1}. Així els vectors $u_1,\dots,u_r,u_{r+1}$ forman una base ortonormal de E_{r+1}. Per inducció tenim que $E_n = E$ té una base ortonormal. ∎

está mal EXEMPLE 4: *Considerem el subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$ generat pels vectors $\{e_1 = (1,1,0,1), e_2 = (1,-2,0,0), e_3 = (1,0,-1,2)\}$. Cercam una base d'aquest subespai que sigui ortonormal.*

Primer de tot normalitzam el vector $e_1 : u_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1.x_1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,0,1)$.

Construim ara el segon vector de la base. Per això definim $u'_2 = e_2 - k_1e_1$, amb $k_1 = e_2.u_1 = -1/\sqrt{3}$. Per tant:

$$u'_2 = (1,-2,0,0) + \frac{1}{3}(1,1,0,1) = \frac{1}{3}(4,-5,0,1).$$

Perquè siguin ortonormals falta normalitzar el vector $u'_2 : u_2 = \frac{1}{\sqrt{42}}(4,-5,0,1)$.

Construim el darrer vector de la base: $u'_3 = e_3 - (\bar{k}_1u_1 + \bar{k}_2u_2)$, amb $\bar{k}_i = e_3.u_i$. Per tant

$$u'_3 = (1,0,-1,2) - \left(\frac{3}{\sqrt{3}}(1,1,0,1) + \frac{6}{\sqrt{42}}(4,-5,0,1)\right) = \left(1 - \frac{66}{\sqrt{42}}, \frac{-12}{\sqrt{42}}, -1, 2 - \frac{48}{\sqrt{42}}\right)$$

Falta per últim normalitzar aquest vector. Com que $\|u'_3\| = \sqrt{168 - \frac{228}{\sqrt{42}}} = \alpha \approx 11,525$, llavors $u_3 = \frac{1}{\alpha}u'_3$.

PROPOSICIÓ 4.8
Si una forma bilineal (sesquilineal) sobre un e.v. real (complex) de dimensió finita té matriu identitat en una base, aquesta forma és un producte escalar.

Prova. Sigui f amb matriu I en una base $\{e_1,\dots,e_n\}$ i siguin $x = \sum_{i=1}^n x_ie_i, y = \sum_{i=1}^n y_ie_i$ dos vectors de E. Llavors

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^n x_iy_i \quad \text{en el cas real,}$$

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^n x_i\bar{y}_i \quad \text{en el cas complex.}$$

En qualsevol dels dos casos tenim $f(x,x) \geq 0$ per tot x, i si $f(x,x) = 0$ aleshores ha de ser $x = 0$. ∎

PROPOSICIÓ 4.9
Sigui f una forma bilineal (sesquilienal) amb matriu G en una base $\{e_1,\dots,e_n\}$. Siguin G_r les submatrius de G formades per les primeres r files i les primeres r columnes, $r=1,\dots,n$. Aleshores f és un producte escalar si i només si G és simètrica (hermítica) i $\det G_r>0$ per tot $r=1,\dots,n$.

Prova. Denotam por E_r el subespai $\langle e_1,\dots,e_r\rangle$ i per f_r la restricció de f a $E_r\times E_r$:

$$\begin{array}{rll} f_r: & E_r\times E_r\to & \mathbb{R}\ (\text{o } \mathbb{C}) \\ & (u,x)\to & f(u,x). \end{array}$$

La matriu de f_r en la base $e_1,\dots,e_r$ és precissament G_r. Suposem que f és un producte escalar a E. Llavors f_r és un producte escalar a E_r i pel Teorema d'Ortogonalització de Gram-Schmidt, existeix una base ortonormal de E_r. Si P és la matriu del canvi de la base $\{e_1,\dots,e_n\}$ a la base ortonormal tenim $I=P^TG_r\bar{P}$, d'on $|G_r||P|^2=1$ i així, $\det G_r>0$.

Suposem ara que $|G_r|>0$ per tot r i anem a construir una base $u_1,\dots,u_n$ tal que $f(u_i,u_j)=0$ is $i\neq j, f(u_i,u_i)=1$. Aleshores, la Proposició 4.8 ens assegurarà que és un producte escalar.

Per construir la base ortonormal farem servir el mètode d'ortonormalització de Gram-Schmidt.

- $f(e_1,e_1)=g_{11}=|G_1|>0$. Per tant, existeix $\sqrt{f(e_1,e_1)}$ i podem construir el primer vector de la base

  $$u_1=\frac{e_1}{\sqrt{f(e_1,e_1)}},$$

  que és un vector unitari i és base de $E_1=\langle e_1\rangle=\langle u_1\rangle$.

- Suposem que $u_1,\dots,u_r$ és una base de E_r tal que $f(u_i,u_j)=0$, si $i\neq j, f(u_i,u_i)=1$.

  Construim el vector $u'_{r+1}=e_{r+1}-(k_1u_1+\ldots+k_ru_r)$ amb $k_i=f(e_{r+1},u_r)$. Aquest vector és ortogonal a cada un dels vectors $u_1,\dots,u_r$. Si demostram que $f(u'_{r+1},u'_{r+1})>0$ llavors el vector unitari

  $$u_{r+1}=\frac{u'_{r+1}}{\sqrt{f(u'_{r+1},u'_{r+1})}}$$

  serà tal que $u_1,\dots,u_r,u_{r+1}$ formarà una base ortonormal de E_{r+1}.

  Calculam $f(u'_{r+1},u'_{r+1})$:

  $$f(u'_{r+1},u'_{r+1})=f(e_{r+1},e_{r+1})-f(e_{r+1},\sum_{i=1}^n k_iu_i)-f(\sum_{i=1}^n k_iu_i,e_{r+1})+f(\sum_{i=1}^n k_iu_i,\sum_{i=1}^n k_iu_i)=$$
  $$=f(e_{r+1},e_{r+1})-\sum_{i=1}^n\bar{k}_if(e_{r+1},u_i)-\sum_{i=1}^n k_if(u_i,e_{r+1})+\sum_{i=1}^n k_i\bar{k}_i=$$
  $$f(e_{r+1},e_{r+1})-\sum_{i=1}^n\overline{f(e_{r+1},u_i)}f(e_{r+1},u_i)-\sum_{i=1}^n f(e_{r+1},u_i).f(u_i,e_{r+1})+\sum_{i=1}^n f(e_{r+1},u_i)\overline{f(e_{r+1},u_i)}=$$
  $$=f(e_{r+1},e_{r+1})-\sum_{i=1}^n f(e_{r+1},u_i)f(u_i,e_{r+1})=\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 & f(u_1,e_{r+1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & f(u_r,e_{r+1}) \\ f(e_{r+1},u_1) & \cdots & f(e_{r+1},u_r) & f(e_{r+1},e_{r+1}) \end{vmatrix}$$

  La matriu que apareix aquí és la matriu de f_{r+1} en la base $u_1,\dots,u_r,e_{r+1}$ i s'obté, per tant, de la matriu G_r per un canvi de base. És doncs, de la forma $P^TG_{r+1}\bar{P}$ i el seu determinant és $|G_{r+1}||P|^2>0$, per ser $|G_{r+1}|>0$ per hipòtesi. Això acaba la demostració.

∎

4.2 Producte escalar i espai dual. Subespais ortogonals.

Sigui $(E;.)$ un e.v. euclidià o unitari amb $\dim E = n$. Recordem que l'espai dual de E el definim com $E^* = L(E, \mathbb{R})$ o $E^* = L(E, \mathbb{C})$.

Per a cada $x \in E$ consdirem la forma lineal $w_x : E \to K$ ($K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$) definida com $w_x(y) = y.x$, per tot $y \in E$. Tenim el següent resultat.

PROPOSICIÓ 4.10
L'aplicació $\sigma : E \to E^*$ definida per $\sigma(x) = w_x$ té les següents propietats:

1) Injectiva.

2) Exhaustiva.

3) Conserva la suma: $\sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y)$, per tot $x, y \in E$.

4) $\sigma(ax) = \bar{a}\sigma(x)$, per tot $x \in E, a \in K$.

Prova.

1) Siguin $x, y \in E$ tals que $\sigma(x) = \sigma(y)$. Això vol dir que $w_x(z) = w_y(z) \Rightarrow z.x = z.y$ per tot $z \in E$. És a dir $z.(x - y) = 0$ per tot z, el que significa que $x = y$.

2) Donada $w \in E^*$ considerem una base ortonormal $u_1, \dots, u_n$ de E i el vector

$$u = \overline{w(u_1)}u_1 + \cdots + \overline{w(u_n)}u_n.$$

Aquest vector és una antiimatge de w, ja que $\sigma(u)(u_i) = w_u(u_i) = u_i.u = w(u_i)$, per tot $i = 1, \dots, n$, és a dir $\sigma(u) = w$.

3) $\sigma(x + y)(z) = z.(x + y) = z.x + z.y = \sigma(x)(z) + \sigma(y)(z) = (\sigma(x) + \sigma(y))(z)$.

4) $\sigma(ax)(z) = z.(ax) = \bar{a}z.x = \bar{a}(\sigma(x)(z))$.

■

Comentaris

I. Observem que la propietat 4) de la proposició anterior, en el cas d'un espai vectorial euclidià s'escriu com:

4) $\sigma(ax) = a\sigma(x)$, per tot $x \in E, a \in \mathbb{R}$.

II. L'isomorfisme considerat a la proposició anterior no depen de bases i direm per tant que és un isomorfisme canònic. Per altra part, si $\{e_1, \dots, e_n\}$ és una base ortonormal de E la base imatge $\{\sigma(e_1), \dots, \sigma(e_n)\}$ és la base dual de la base $\{e_1, \dots, e_n\}$.

DEFINICIÓ 4.8
Si S és una part no buida de E, definim el complement ortogonal de S com el conjunt

$$S^\perp = \{x \in E | y.x = 0 \text{ per tot } y \in S\}.$$

PROPOSICIÓ 4.11
Es verifiquen les següents propietats:

1) $S^\perp$ és un subespai vectorial de E.

2) $S \subset T$ implica $T^\perp \subset S^\perp$.

3) $S^\perp = \langle S \rangle^\perp$.

4) $\langle S\rangle \cap S^\perp = \{0\}$.

5) $\langle S\rangle \subset (S^\perp)^\perp$.

Prova.

1) Siguin $x, y \in S^\perp$. Llavors $x + y \in S^\perp$ perquè $z.(x + y) = z.x + z.y = 0$.

2) Sigui $x \in T^\perp$. Llavors $y.x = 0$ per tot $y \in T$; en particular $y.x = 0$ per tot $y \in S \Rightarrow x \in S^\perp$.

3) Com que $S \subset \langle S\rangle$, per l'apartat anterior $\langle S\rangle^\perp \subset S^\perp$. Falta veure que $S^\perp \subset \langle S\rangle^\perp$.
Siguin $x \in S^\perp$, $y \in \langle S\rangle$ i $\{x_1, \ldots, x_n\}$ una base ortogonal de $\langle S\rangle$. Llavors $y = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ per certs $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. Aleshores
$$y.x = (\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n).x = \overline{\alpha_1} x_1.x + \cdots + \overline{\alpha_n} x_n.x = \overline{\alpha_1} 0 + \cdots + \overline{\alpha_n} 0 = 0.$$
Per tant, $x \in \langle S\rangle^\perp$.

4) Sigui $x \in \langle S\rangle \cap S^\perp$ i $\{x_1, \ldots, x_n\}$ una base ortogonal de $\langle S\rangle$. Llavors per una part, $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ i per altra, $y.x = 0$ per tot $y \in S$.
Sigui $y = x_k, k = 1, \ldots, n$. Sabem que $0 = x_k.x = \overline{\alpha_k}$, per tot $k = 1, \ldots n$. Llavors $x = 0$.

5) Sigui $x \in \langle S\rangle$ i per tant $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$, essent $\{x_1, \ldots, x_n\}$ una base ortogonal de $\langle S\rangle$. Hem de veure que $s.x = 0$ per tot $x \in S^\perp$:
$$s.x = s.(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) = \overline{\alpha_1} s.x_1 + \cdots + \overline{\alpha_n} s.x_n = \overline{\alpha_1} 0 + \cdots + \overline{\alpha_n} 0 = 0,$$
ja que, com que $s \in S^\perp$ llavors $x_k.s = s.x_k = 0$ per tot $k = 1, \ldots, n$.

■

Exemple 5: *Amb el producte escalar estàndar de $\mathbb{R}^2$, cercam el complement ortogonal del conjunt* $\{(1, 1)\}$:
$$\{(1, 1)\}^\perp = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x, y).(1, 1) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 0\} = \langle (1, -1)\rangle.$$

Si S és un sub-espai vectorial de E la demostració del següent resultat ens proporciona un mètode per trobar el seu complement ortogonal.

Proposició 4.12
Si F és un sub-e.v. de E, llavors:

1) $\dim F^\perp = n - \dim F$.

2) $E = F \oplus F^\perp$.

3) Si, a més a més E té dimensió finital, llavors $(F^\perp)^\perp = F$.

Prova.

1) Siguin $u_1, \ldots, u_r$ una base ortonormal de F, ampliam aquesta base a una base de E usant el Teorema de Steinitz: $u_1, \ldots, u_r, e_{r+1}, \ldots, e_n$. Ortonormalitzam aquesta base i obtenim una base ortonormal de $E : u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n$. Veim que $u_{r+1}, \ldots, u_n$ és una base (ortonormal) de $F^\perp$. Així $\dim F^\perp = n - \dim F$.

2) De la construcció de la base ortonormal anterior podem deduir que, per tot $x \in E$:
$$x = (x_1 u_1 + \cdots x_r u_r) + (x_{r+1} u_{r+1} + \cdots + x_n u_n) \in F + F^\perp.$$
I com que $F \cap F^\perp = \{0\}$ tenim el resultat.

3) Veiem que $F \subset F^\perp)^\perp$. Sigui $x \in F$. Per a cada $t \in F^\perp$ es té que $\langle (x, t)\rangle = \langle \bar{t}, x\rangle = 0$, d'on deduim que $x \in (F^\perp)^\perp$.
Per un altre costat sabem que $\dim F = \dim (F^\perp)^\perp$ i per tant, es dona la igualtat.

■

DEFINICIÓ 4.9
Si F és un sub-e.v. de E, l'aplicació $p_F : E \to E$ definida per $p_F(x) = x'$ on $x = x' + x''$ és la descomposició de x en suma d'un vector de F i un de $F^{\perp}$, és la projecció ortogonal de E sobre F.

PROPOSICIÓ 4.13
1) *L'aplicació p_F és lineal i verifica que el seu nucli és $F^{\perp}$ i la seva imatge és F. A més a més, l'aplicació p_F és idempotent, $(p_F)^2 = p_F$.*

2) *Si $\{e_1, \dots, e_r\}$ és una base ortonormal de F, llavors per tot $x \in E$ es té $p_F(x) = (x.e_1)e_1 + \dots + (x.e_r)e_r$.*

4.3 Aplicacions adjuntes i autoadjuntes

Siguin E i F e.v. euclidians (unitaris) amb $\dim E = n, \dim F = m, E^* = L(E, \mathbb{R})$ i $F^* = L(F, \mathbb{R})$ els espais duals de E i F respectivament.

D'acord amb la Proposició 4.10, considerem l' aplicació $\sigma : E \to E^*$ definida per $\sigma(x) = w_x$ on $w_x(y) = y.x$, per tot $y \in E$. Anàlogament per F; definim $\tau : F \to F^*$.

DEFINICIÓ 4.10
Si $f : E \to F$ és lineal, direm que $\tilde{f} = \sigma^{-1} f^* \tau$ és l'adjunta de f (recordau que f^* és la dual de f, és a dir $f^*(w) = wf, w \in E^*$).

PROPOSICIÓ 4.14
L'adjunta de f definida anteriorment és una aplicació lineal entre F i E que compleix $x.\tilde{f}(y) = f(x).y$ per tots $x \in E, y \in F$. L'aplicació $\tilde{f}$ és l'única aplicació lineal entre F i E que compleix la igualtat anterior.

Prova. L'aplicació $\tilde{f}$ és lineal degut que ho són f^*, τ i σ. Per altra part,

$$\tilde{f}(y) = \sigma^{-1} f^* \tau(y) = \sigma^{-1} f^*(w_y) = \sigma^{-1}(w_y f) = z,$$

on $\sigma(z)(t) = t.z = w_y f(t) = f(t).y$, per tot $t \in F$. Així, podem escriure $x.\tilde{f}(y) = x.z = f(x).y$.

La unicitat és evident. Suposem dos endomorfismes g i h de E que compleix $x.g(y) = f(x).y = x.h(y)$ per tots $x, y \in E$, així tenim $x.g(y) = x.h(y)$ per tots $x, y \in E$, i per tant $g = h$. ■

Comentaris

I. Si $\tilde{f}$ és l'adjunta de f, llavors f és l'adjunta de $\tilde{f}$.

II. Si f és un endomorfisme de E llavors podem definir l'aplicació adjunta de f com l'única aplicació lineal $f^* : E \to E$ tal que $f(x).y = x.f^*(y)$.

DEFINICIÓ 4.11
Un endomorfisme f de E és autoadjunt si $f = \tilde{f}$. És a dir, si compleix $x.f(y) = f(x).y$ per tots $x, y \in E$.

PROPOSICIÓ 4.15
Si $\tilde{f}$ és l'aplicació adjunta de f, llavors $\operatorname{Nuc} \tilde{f} = (\operatorname{Im} f)^{\perp}$ i $\operatorname{Im} \tilde{f} = (\operatorname{Nuc} f)^{\perp}$.

Prova.

$$\begin{aligned}\operatorname{Nuc} \tilde{f} &= \{x \in E | \tilde{f}(x) = 0\} = \{x \in E | y.\tilde{f}(x) = 0 \text{ per tot } y \in E\} = \\ &= \{x \in E | f(y).x = 0 \text{ per tot } y \in E\} = (\operatorname{Im} f)^{\perp}.\end{aligned}$$

Agafant ortogonals a la igualtat anterior, $\operatorname{Im} f = (\operatorname{Nuc} \tilde{f})^{\perp}$ i com que f és l'adjunta de $\tilde{f}$, llavors $\operatorname{Im} \tilde{f} = (\operatorname{Nuc} f)^{\perp}$. ■

PROPOSICIÓ 4.16
Sigui A la matriu d'una aplicació lineal f de E en F en unes bases ortonormals $\{e_1, \ldots, e_n\}$ i $\{v_1, \ldots, v_m\}$. La matriu de l'adjunta $\tilde{f}$ de f en les bases $\{v_1, \ldots, v_m\}$ i $\{e_1, \ldots, e_n\}$ és A^T en el cas real i $\bar{A}^T$ en el cas complex.

Prova. Siguin $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ les matrius de f i $\tilde{f}$ en les bases ortonormals donades. En el cas complex tenim: $\tilde{f}(e_i) = \sum_{j=1}^n b_{ij} e_j$ d'on $(\tilde{f}(e_i)).e_j = b_{ij}$ per una part, i per l'altra

$$(\tilde{f}(e_i)).e_j = e_i.f(e_j) = e_i.\left(\sum_{k=1}^m a_{jk} e_k\right) = \bar{a}_{ji}.$$

En el cas real només canvia la darrera igualtat. ■

Conseqüència immediata del resultat anterior és la següent proposició.

PROPOSICIÓ 4.17
Si A és la matriu d'un endomorfisme f en una base ortonormal, f és autoadjunta si i només si $A^T = A$ (A és simètrica) en el cas real, o $\bar{A}^T = A$ (A és hermítica) en el cas complex.

4.4 Diagonalització de matrius simètriques i hermítiques

Observem que, pel que acabam de veure, tota matriu simètrica o hermítica és la matriu d'una aplicació autoadjunta en una base ortonormal. Per tant, problema de diagonalitzar una matriu simètrica real o una hermítica complexa equival a trobar una base de vectors propis d'una aplicació lineal autoadjunta.

PROPOSICIÓ 4.18
Sigui E un espai vectorial euclidià o unitari, i sigui $f : E \to E$ lineal i autoadjunta. Si u i v són vectors propis associats a valors propis reals diferents, alershores $u.v = 0$.

Prova. Suposem λ, μ valors propis reals diferents. Siguin u i v vectors propis associats a λ i μ, respectivament, és a dir $f(u) = \lambda u, f(v) = \mu v$. Sabem que $u.f(v) = f(u).v$, és a dir, $u.(\mu v) = (\lambda u).v$, per tant $\mu(u.v) = \lambda(u.v)$ i d'aquí $u.v = 0$. ■

PROPOSICIÓ 4.19
Si E és un espai vectorial unitari i $f : E \to E$ una aplicació lineal i autoadjunta, existeix una base ortonormal de vectors propis.

Prova. Farem la prova per inducció sobre la dimensió n de E. Si $n = 1$, tot vector no nul és propi i no hi ha res a demostrar. Si $\dim E = n$, el polinomi característic de $f, c(x) = \det(f - xI) \in \mathbb{C}[x]$, té sempre una arrel $\gamma \in \mathbb{C}$. Sigui u un vector propi unitari de valor propi $\gamma : f(u) = \gamma u$. Considerem el complement ortogonal F de $\langle u \rangle : F = \langle u \rangle^\perp = \{v \in E; u.v = 0\}$.

F és invariant per f, és a dir, si $v \in F, f(v).u = v.f(u) = v.(\gamma u) = (v.u) = 0$.

Aplicant la hipòtesi d'inducció a la restricció de f a F, podem dir que existeix una base ortonormal de $F, \{u_2, \ldots, u_n\}$, formada per vectors propis de f. Finalment, $\{u, u_2, \ldots, u_n\}$ és una base ortonormal de E formada per vectors propis de f. ■

Vegem ara que tota aplicació autoadjunta té n valors propis reals (contant la multiplicitat).

PROPOSICIÓ 4.20
Sigui E és un espai vectorial unitari. Si $f : E \to E$ és lineal i autoadjunta, aleshores els seus valors propis són reals.

Prova. Sigui γ un valor propi de f, sigui $u \neq 0$ tal que $f(u) = \gamma u$. Podem escriure $u.f(u) = u.(\gamma u) = \bar{\gamma}(u.u)$, però $u.f(u) = f(u).u = (\gamma u).u = \gamma(u.u)$, per tant $\bar{\gamma}(u.u) = \gamma(u.u)$ i d'aquí $\bar{\gamma} = \gamma$ i $\gamma \in \mathbb{R}$. ■

Segons les dues proposicions anteriors podem afirmar el següent resultat.

Proposició 4.21
Sigui E un espai vectorial unitari i sigui $f : E \to E$ lineal i autoadjunta. Aleshores el polinomi característic de f és de la forma $c(x) = \pm(x - \gamma_1) \cdots (x - \gamma_n)$ amb $\gamma_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$.

Proposició 4.22
Sigui E un espai vectorial euclidià i $f : E \to E$ una aplicació lineal i autoadjunta. Aleshores f té n valors propis (contant la multiplicitat).

Prova. Fixem una base ortonormal de l'espai E i sigui A la matriu (simètrica) corresponent a f. Aquesta matriu A també és hermítica ($A^T = A = \bar{A}^T$) i li correspon una aplicació lineal autoadjunta $f' : E' \to E'$ on E' és un cert espai vectorial unitari (de dimensió n). Els polinomis característics de f i f' són iguals (tenen igual matriu), i, per tant, aplicant la proposició anterior, tenim demostrada la proposició. ■

Finalment, arribam al resultat que completa la Proposició 4.18

Proposició 4.23
Si E és un espai vectorial euclidià i $f : E \to E$ és autoadjunta, existeix una base ortonormal de vectors propis.

Prova. La demostració és igual que pel cas complex tenint en compte que el polinomi característic $c(x) = \det(f - xI) \in \mathbb{R}[x]$, té les arrels dins $\mathbb{R}$, segons la proposició anterior. ■