Contents

1 Dualitat i Ortogonalitat d'espais vectorials **2**
1.1 Definicions i propietats 2
1.2 Aplicacions lineals i dualitat 6

Chapter 1

Dualitat i Ortogonalitat d'espais vectorials

1.1 Definicions i propietats

Per començar aquest tema recordarem el concepte d'espai vectorial.

Definició 1.1
Un espai vectorial sobre un cos K és un conjunt no buit E sobre el què están definides dues operacions:

(a) una llei interna, que anomenarem **suma***:*

$$\begin{array}{rrcl} + : & E \times E & \longrightarrow & E \\ & (u, v) & \longrightarrow & u + v \end{array}$$

que verifica les següents propietats:

- *Commutativa: $u + v = v + u$, per tots $u, v \in E$;*
- *Associativa: $(u + v) + w = u + (v + w)$, per tots $u, v, w \in E$;*
- *Element neutre: existeix $0 \in E$ tal que $u + 0 = 0 + u = u$, per tot $u \in E$;*
- *Element oposat: per tot $u \in V$ existeix $-u \in E$ tal que $u + (-u) = (-u) + u = 0$.*

(b) una llei externa, que anomenarem **producte per un escalar***:*

$$\begin{array}{rrcl} \cdot : & K \times E & \longrightarrow & E \\ & (\lambda, u) & \longrightarrow & \lambda \cdot u \end{array}$$

que verifica les següents propietats:

- *$1 \cdot u = u$, per tot $u \in E$;*
- *associativitat mixta: $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$, per tots $\alpha, \beta \in K$, i per tot $u \in E$;*
- *distributiva de l'operació externa respecte de la suma de K : $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$, per tots $\alpha, \beta \in K$ i per tot $u \in E$;*
- *distributiva de l'operació externa respecte de la suma de E : $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$, per tot $\alpha \in K$ i per tots $u, v \in E$.*

També direm que E és un $K-$espai vectorial, i de forma abreujada E és un $K-$e.v.

Als elements de l'espai vectorial E se'ls denomina vectors i els denotarem per lletres llatines $(x, y, u, v, \ldots)$, mentre que als elements de K se'ls denomina escalars i els denotarem per lletres gregues $(\lambda, \alpha, \beta, \ldots)$. Observau que amb aquesta notació utilitzada pels elements d'E i pels elements de K, no es fa necessari emprar símbols distints per a les dues addicions (d'E i de K), ni tampoc per a les multiplicacions (interna de K i externa sobre E). Així, per exemple, a la condició de la distributivitat respecte de la suma de K, el primer membre $(\alpha+\beta)u$, és el producte extern de l'escalar $\alpha+\beta$ i del vector u, mentre que el segon membre, $\alpha u+\beta u$, és la suma de dos vectors: αu i βu, i cadascun d'ells és a la vegada el producte extern dels escalars α i β pel vector u. Tampoc farem diferència entre els neutres: a l'expressió $0+u=u$, és clar que parlam del vector 0, en canvi en aquesta: $0+\alpha=\alpha$ ens referim a l'escalar 0, etc.

Sigui E un $K-$e.v. Definim formalment a continuació l'espai (sobre K) de les aplicacions lineals entre E i K (K com a $K-$e.v.).

Definició 1.2

Sigue E un $K-$e.v. Anomenam espai dual de E, que denotam per E^*, al $K-$e.v

$$E^*=\{f:E\to K|\ f \text{ és una aplicació lineal}\}.$$

Per tant, els elements de E^* són les formes lineals sobre E, és a dir $E^*=L(E,K)$.

Exemple 1: *Si consideram $E=\mathbb{R}^3$ llavors $E^*=\{f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}|f$ és lineal$\}$. És a dir, els elements de E^* són les formes lineals de $\mathbb{R}^3$, que recordam són de la forma $f(x,y,z)=ax+by+cz$, amb $a,b,c\in\mathbb{R}$.*

Proposició 1.1

Si $\{e_1,\dots,e_n\}$ és una base de E, podem construir a partir d'ella una base de E^*, que anomenarem base dual de $\{e_1,\dots,e_n\}$ i representarem per $\{e_1^*,\dots,e_n^*\}$, de la següent manera:

$$e_i^*(e_j)=\begin{cases}1 & \text{si } i=j,\\ 0 & \text{si } i\neq j.\end{cases} \quad ,i=1,\dots,n.$$

Prova. És fàcil veure que efectivament es tracta d'una base de E^*. Vegem que són formes lineals LI: $a_1e_1^*+\cdots+a_ne_n^*=0$ vol dir $(a_1e_1^*+\cdots+a_ne_n^*)(x)=0$ per tot $x\in E$. Si feim $x=e_i, i=1,\dots,n$ tenim $(a_1e_1^*+\cdots+a_ne_n^*)(e_i)=0$, per tot $i=1,\dots,n$ per tant $a_1e_1^*(e_i)+\cdots+a_ne_n^*(e_i)=0$, per tot $i=1,\dots,n$ o sigui $a_i=0$ per tot $i=1,\dots,n$.

Per demostrar que el conjunt $\{e_1^*,\dots,e_n^*\}$ genera E^*, sigui $\omega\in E^*$ una forma lineal sobre E qualsevol i vegem que existeixen escalars $a_1,\dots,a_n$ tals que $\omega=a_1e_1^*+\cdots+a_ne_n^*$. En efecte, basta considerar $a_i=\omega(e_i), i=1,\dots,n$, ja que en aquest cas, $\omega(e_j)=(a_1e_1^*+\cdots+a_ne_n^*)(e_j)$ per tot $j=1,\dots,n$, i per tant $\omega=a_1e_1^*+\cdots+a_ne_n^*$. ■

De la proposició anterior se dedueix trivialment el següent resultat

Corol·lari 1.1

Si E és un e.v. de dimensió finita llavors $\dim E^*=\dim E$.

Exemples 2

(1) *Si consideram l'e.v. $\mathbb{R}^3$ amb la base canònica llavors la seva base dual és el conjunt $\{e_1^*,e_2^*,e_3^*\}$ tals que $e_i^*(x_1,x_2,x_3)=x_i$, per $i=1,2,3$.*

Efectivament, perquè sigui la base dual ha de verificar la condició de la proposició anterior:

$$\begin{aligned}
e_1^*(e_1)=e_1^*(1,0,0)=1, e_1^*(e_2)=e_1^*(0,1,0)=0, e_1^*(e_3)=e_1^*(0,0,1)=0,\\
e_2^*(e_1)=e_2^*(1,0,0)=0, e_2^*(e_2)=e_2^*(0,1,0)=1, e_2^*(e_3)=e_2^*(0,0,1)=0,\\
e_3^*(e_1)=e_3^*(1,0,0)=0, e_3^*(e_2)=e_3^*(0,1,0)=0, e_3^*(e_3)=e_3^*(0,0,1)=1.
\end{aligned}$$

(2) *Considerem a $\mathbb{R}^2$ las base $B=\{(1,-2),(3,4)\}$. Trobam la seva base dual $B^*=\{\varphi_1,\varphi_2\}$ a l'e.v. $(\mathbb{R}^2)^*$.*

Com que f_1,f_2 són aplicacions lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ llavors les seves expressions han de ser $f_1(x,y)=a_1x+b_1y, f_2(x,y)=a_2x+b_2y$. Usant que ha de ser la base dual de B tenim les següents equacions que han de verificar les dues aplicaciones lineals:

$$\begin{cases}\varphi_1(1,-2)=1,\\ \varphi_1(3,4)=0\end{cases} \qquad \begin{cases}\varphi_2(1,-2)=0,\\ \varphi_2(3,4)=1\end{cases}$$

Usant les expressions proposades per f_1, f_2 obtenim les equacions:

$$\begin{cases} a_1 - 2b_1 = 1, \\ 3a_1 + 4b_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2 - 2b_2 = 0, \\ 3a_2 + 4b_2 = 1 \end{cases}$$

Resolent els dos sistemes obtenim: $\varphi_1(x, y) = \frac{1}{10}(4x - 3y),\ \varphi_2(x, y) = \frac{1}{10}(2x + y)$.

Comentari: Sigui $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de l'e.v. de dimensió finita E i sigui $B^* = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ la seva base dual.

- Donat $v \in E$, aquest vector el podem escriure com $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$, amb $a_i \in K$. Llavors, per a cada $j \in \{1, \dots, n\}$ se té

  $$\varphi_j(v) = \varphi_j(\sum_{i=1}^n a_i v_i) = \sum_{i=1}^n \varphi_j(v_i) = a_j.$$

  Aleshores, les coordenades del vector v en base B són les seves imatges per la base dual, és a dir: $(v)_B = (\varphi_1(v), \dots, \varphi_n(v))$.

- Recíprocament, donat $\varphi \in E^*$, existeixen $b_i \in K$ tals que $\varphi = \sum_{i=1}^n b_i \varphi_i$. Llavors, per a cada $j \in \{1, \dots, n\}$ se té

  $$\varphi(v_j) = (\sum_{i=1}^n b_i \varphi_i)(v_j) = \sum_{i=1}^n b_i \varphi_i(v_j) = b_j.$$

  Aleshores, les coordenades de φ en base B^* són les imatges de la base B per φ, és a dir: $(\varphi)_{B^*} = (\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n))$.

EXEMPLE 3: *Sigui $B = \{(1, -2), (3, 4)\} \subset \mathbb{R}^2$ la base de l'exemple anterior i $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ la seva base dual. Si volem trobar les coordenades, per exemple, del vector $v = (1, 1)$ a la base B, tenint en compte el comentari anterior, resulta*

$$(1, 2)_B = (\varphi_1(1, 2), \varphi_2(1, 2)) = (-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}).$$

Per altra part, si consideram la forma lineal $\varphi \in (\mathbb{R}^2)^*$ donada per $\varphi(x, y) = 5x - 3y$ i volem trobar les seves coordenades en la base B^*, seguint el comentari anterior es té

$$(\varphi)_{B^*} = (\varphi(1, -2), \varphi(3, 4)) = (11, 3).$$

A continuació, donat un sub-e.v. X d'un e.v. E considerarem el conjut de totes les equacions lineals que s'anul·len sobre els elements de X. Veurem, a més a més, que aquest conjunt té una estructura de sub-e.v.

DEFINICIÓ 1.3
Sigui E un $K-$e.v. i E^* el seu dual. Si $X \subset E, X \neq \emptyset$, definim l'ortogonal de X de la manera següent: $X^\perp = \{w \in E^* | w(x) = 0$ per tot $x \in X\}$.

Comentari: A l'espai ortogonal de X se l'anomena també espai anul·lador de X.

De la pròpia definició es pot demostrar fàcilment el següent resultat.

PROPOSICIÓ 1.2
$X^\perp$ és un sub-e.v. de E^*.

Comentari: Casos particulars extrems són: $\{0\}^\perp = E^*$ i $E^\perp = \{0\}$. Observau que si $X \subset Y$ llavors $Y^\perp \subset X^\perp$.

Proposició 1.3
Si E és de dimensió finita n i si X és un sub-e.v. de E, llavors $\dim X^\perp = n - \dim X$.

Prova. Sigui $\{e_1, \ldots, e_r\}$ una base de X i sigui $B = \{e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n\}$ una ampliació a una base de E. Sigui $B^* = \{e_1^*, \ldots, e_r^*, e_{r+1}^*, \ldots, e_n^*\}$ la base dual de la base B i vegem que $\{e_{r+1}^*, \ldots, e_n^*\}$ és una base de $X^\perp$.

La independència lineal és clara ja que són vectors d'una base, per tant, es tracta de veure ara que aquestes formes generen $X^\perp$. Per veure-ho, sigui $\omega \in X^\perp$. Com que B^* és una base de $X^\perp$, existeixen $a_1, \ldots, a_n$ tals que $\omega = a_1 e_1^* + \ldots + a_r e_r^* + a_{r+1} e_{r+1}^* + \cdots + a_n e_n^*$. Però com que $\omega \in X^\perp$ i $e_i \in X$ per $i = 1, \ldots, r$ resulta que $\omega(e_i) = a_i = 0$ per tot $i = 1, \ldots, r$. Per tant $a_1 = \cdots = a_r = 0$ i d'aquí s'obté $\omega = a_{r+1} e_{r+1}^* + \cdots + a_n e_n^*$.

Així $\{e_{r+1}^*, \ldots, e_n^*\}$ és una base de $X^\perp$ i $\dim X^\perp = n - \dim X$. ∎

Exemple 4: *Sigui $X = \langle (1,1,1), (1,2,1) \rangle \subset \mathbb{R}^3$. Per trobar una base de $X^\perp$ procedim com a la demostració del resultat anterior. Ampliam la base de X a una base de $\mathbb{R}^3$, per exemple*

$$B = \{(1,1,1), (1,2,1), (1,0,0)\}.$$

Si $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ és la base dual de B, podem deduir que $\{\varphi_3\}$ és una base de $X^\perp$. A partir de les condicions $\varphi_3(1,1,1) = 0, \varphi_3(1,2,1) = 0, \varphi_3(1,0,0) = 1$ obtenim que $\varphi_3(x,y,z) = x - z$.

També podem definir l'ortogonal d'una part no buida, diguem-li W, de E^*.

Definició 1.4
$W^\perp = \{x \in E | \omega(x) = 0$ *per tot* $\omega \in W\}$.

Igual que abans podem veure que $W^\perp$ és un sub-e.v. de E. Tenim també $\{0\}^\perp = E$ i $(E^*)^\perp = \{0\}$. Per altra part, tenim una fórmula anàloga per calcular la dimensió de $W^\perp$ (si W és un sub-e.v. de E^* i E és de dimensió finita n): $\dim W^\perp = n - \dim W$.

Proposició 1.4
Si $X \subset E$, llavors $X \subset (X^\perp)^\perp$. En cas de dimensió finita i X un sub-e.v. de E, es verifica $X = (X^\perp)^\perp$.

Prova. La primera inclusió es demostra fàcilment.

Per demostrar la segona part, com que $X \subset (X^\perp)^\perp$ i $\dim (X^\perp)^\perp = n - \dim X^\perp = n - (\dim E - \dim X) = \dim X$ llavors, $(X^\perp)^\perp = X$. ∎

Exemple 5: *A $\mathbb{R}^3$, l'ortogonal de $X = \langle (1,1,1) \rangle$ és $X^\perp = \{\omega \in (\mathbb{R}^3)^* | \omega(u) = 0$ per tot $u \in X\} = \{\omega \in (\mathbb{R}^3)^* | \omega(1,1,1) = 0\}$. Si $\omega(x,y,z) = ax + by + cz$, ha de ser $\omega(1,1,1) = a + b + c = 0$. Per tant, les formes lineals de $X^\perp$ tenen l'expressió $\omega(x,y,z) = ax + by - (a+b)z$ on $a, b \in \mathbb{R}$. És clar que $\dim X^\perp = 2$.*

Notau que si $X = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$, llavors $X^\perp = \{\omega \in E^* | \omega(u) = 0$ per tot $u \in X\} = \{\omega \in E^* | \omega(u_i) = 0$ per tot $i = 1, \ldots, r\}$. Això ho hem aplicat a l'exemple anterior.

Vegem a continuació com es comporta l'ortogonal amb la suma i la intersecció de subespais.

Proposició 1.5
Sigui E un e.v. i S, T subespais de E. Llavors:

1. $(S + T)^\perp = S^\perp \cap T^\perp$.
2. $(S \cap T)^\perp = S^\perp + T^\perp$.

Prova.

1. Sigui $\varphi \in E^*$. Es té:

$$\begin{aligned} \varphi \in (S+T)^\perp &\iff \varphi(s+t) = 0 \text{ per tot } s \in S, t \in T \\ &\iff \varphi(s) = 0 \text{ per tot } s \in S \text{ i } \varphi(t) = 0 \text{ per tot } t \in T \\ &\iff \varphi \in S^\perp \cap T^\perp. \end{aligned}$$

2. Sigui $\varphi \in S^\perp + T^\perp$. Llavors $\varphi = \varphi_S + \varphi_T$, amb $\varphi_S \in S^\perp, \varphi_T \in T^\perp$. Per a cada $x \in S \cap T$ es té que $\varphi(x) = \varphi_S(x) + \varphi_T(x) = 0 + 0 = 0$. Llavors $\varphi \in (S \cap T)^\perp$ amb el que ja tenim una inclusió.

   Observem que

$$\begin{aligned} \dim(S^\perp + T^\perp) &= \dim S^\perp + \dim T^\perp - \dim(S^\perp \cap T^\perp) = \dim S^\perp + \dim T^\perp - \dim(S+T)^\perp \\ &= (n - \dim S) + (n - \dim T) - (n - \dim(S+T)) = n - (\dim S + \dim T - \dim(S+T)) \\ &= n - \dim(S \cap T) = \dim(S \cap T)^\perp. \end{aligned}$$

   Per tant, $(S \cap T)^\perp = S^\perp + T^\perp$.

$\blacksquare$

Acabam la secció relacionant la suma directa amb l'ortogonalitat.

Proposició 1.6
Si $E = F \oplus G$ llavors $E^* = F^\perp \oplus G^\perp$.

Prova. Si $E = F \oplus G$ llavors $E = F + G$ i, a més a més, $F \cap G = \{0\}$.

Com que $\{0\} = E^\perp = (F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ i per altra banda $E^* = \{0\}^\perp = (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ llavors hem provat que $E^* = F^\perp \oplus G^\perp$. $\blacksquare$

1.2 Aplicacions lineals i dualitat

Per acabar aquest capítol de continuació del curs anterior, estudiarem la transposició de matrius i veurem què té a veure amb la dual d'una aplicació lineal.

Observem que, fixada una aplicació lineal $f : E \to F$, cada element $\omega \in F^*$ ens dóna un element $\omega \circ f \in E^*$, seguint el següent diagrama:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ & \searrow & \downarrow \omega \\ & \omega \circ f & K. \end{array}$$

El definim formalment.

Definició 1.5
Si $f : E \to F$ és lineal, llavors podem definir una aplicació $f^* : F^* \to E^*$ de la forma següent: $f^*(\omega) = \omega \circ f$, per tot $\omega \in F^*$. L'anomenam aplicació dual de f.

Evidentment, quan no sigui estrictament necessari, obviarem el símbol de composició i escriurem $f^*(\omega) = \omega f$ per tot $\omega \in F^*$.

Provam a continuació que f^* està ben definida, ja que ωf és lineal.

Proposició 1.7
L'aplicació f^* és lineal.

Prova. Vegem, per exemple, que f^* satisfà la condició $f^*(\omega+\omega') = f^*(\omega)+f^*(\omega')$. Es tracta de provar que per tot $x \in E : [f^*(\omega+\omega')](x) = [f^*(\omega)+f^*(\omega')](x)$. En efecte,

$$\begin{aligned}&[f^*(\omega+\omega')](x) = [(\omega+\omega')\circ f](x) = (\omega+\omega')(f(x)) = \omega(f(x))+\omega'(f(x)) = \\ &= (\omega\circ f)(x)+(\omega'\circ f)(x) = (f^*(\omega))(x)+(f^*(\omega')(x) = [f^*(\omega)+f^*(\omega')](x).\end{aligned}$$

■

EXEMPLE 6: *Donada $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida per $f(x,y,z) = (y+z, x+z)$. La dual de f serà $f^* : (\mathbb{R}^2)^* \to (\mathbb{R}^3)^*$ és $f^*(\omega) = \omega\circ f$, és a dir, si $\omega(x,y) = ax+by$, llavors*

$$[f^*(\omega)](x,y,z) = (\omega f)(x,y,z) = \omega[f(x,y,z)] = \omega(y+z,x+z) = a(y+z)+b(x+z) = bx+ay+(a+b)z.$$

Abreujant, podríem dir que f^* transforma la forma lineal (a,b) en la forma lineal $(b,a,a+b)$.

PROPOSICIÓ 1.8
La dual d'una aplicació lineal verifica les següents propietats:

1) $(id_E)^* = id_{E^*}$.

2) $(gf)^* = f^*g^*$.

3) *Suposem E i F de dimensions finites. Sigui $f : E \to F$ lineal i $f^* : F^* \to E^*$ la dual de f. Es verifiquen les igualtats següents:*

   a) $(\operatorname{Im} f)^\perp = \operatorname{Nuc} f^*$.

   b) $(\operatorname{Nuc} f)^\perp = \operatorname{Im} f^*$.

Prova.

1) En efecte: $(id_E)^*(\omega) = \omega\circ id_E = \omega$ per tot $\omega \in E^*$.

2) En efecte: $(g\circ f)^*(\omega) = \omega\circ(g\circ f) = (\omega\circ g)\circ f = f^*(\omega\circ g) = f^*(g^*(\omega)) = (f^*\circ g^*)(\omega)$.

3) Per demostrar l'apartat a), sigui $\omega \in (\operatorname{Im} f)^\perp$, llavors $\omega(y) = 0$ per tot $y \in \operatorname{Im} f$. Per tant $\omega(f(x)) = 0$ per tot $x \in E$, o sigui $(\omega\circ f)(x) = 0$ per tot $x \in E$ i d'aquí $[f^*(\omega)](x) = 0$ per tot $x \in E$ d'on $f^*(\omega) = 0$, és a dir, $\omega \in Nucf^*$. Hem demostrat fins ara que: $(\operatorname{Im} f)^\perp \subset \operatorname{Nuc} f^*$. Per veure l'altra inclusió basta invertir el raonament anterior.

   Demostrarem l'apartat b). Si $\omega \in Imf^*$ és $\omega = f^*(\omega')$ per alguna $\omega' \in F^*$. Per tant $\omega = \omega'\circ f$ d'on $\omega(x) = (\omega' f)(x) = \omega'(f(x)) = \omega'(0) = 0$ per tot $x \in \operatorname{Nuc} f$, així que $\operatorname{Im} f^* \subset (\operatorname{Nuc} f)^\perp$. Falta per acabar veure que $(\operatorname{Nuc} f)^\perp \subset \operatorname{Im} f^*$. Es tracta de demostrar que si $\omega \in (\operatorname{Nuc} f)^\perp$ llavors existeix $\omega' \in F^*$ tal que $f^*(\omega') = \omega$, és a dir, tal que $\omega' f = \omega$. Per construir ω', facem $F = \operatorname{Im} f \oplus H$ i definim $\omega'(z) = \omega(x)$ on $z = y+t$ amb $y \in \operatorname{Im} f, t \in H$ i $f(x) = y$.

■

Recordem que si $f : E \to F$ és lineal, amb E i F de dimensions finites, el rang de f és la dimensió de $\operatorname{Im} f$. Podem ara establir una relació important entre els rangs d'una aplicació lineal i la seva dual.

PROPOSICIÓ 1.9
$\operatorname{rang} f = \operatorname{rang} f^*$.

Prova. En efecte, $\operatorname{rang} f^* = \dim(\operatorname{Im} f^*) = \dim(\operatorname{Nuc} f)^\perp = \dim E - \dim \operatorname{Nuc} f = \dim(\operatorname{Im} f) = \operatorname{rang} f$. Observau que hem utilitzat la igualtat b), però també podem fer-ho a partir de la igualtat a): $\operatorname{rang} f = \dim(\operatorname{Im} f) = \dim F - \dim(\operatorname{Im} f)^\perp = \dim F - \dim(\operatorname{Nuc} f^*) = \dim F^* - \dim(\operatorname{Nuc} f^*) = \operatorname{rang} f^*$. ■

Més endavant veurem una altra manera més fàcil de demostrar que rang f = rang f^*.

Recordam a continuació, com ja hem fet en el tema de Preliminars, el concepte i les propietats més bàsiques de la transposada d'una matriu.

DEFINICIÓ 1.6

Si $A \in M_{m\times n}(K)$, anomenam transposada de A, A^T, a la matriu que té per files les columnes de A : $A^T = (b_{ij})$ on $b_{ij} = a_{ji}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$.

Així aquesta operació (unària) ens defineix una aplicació $M_{m\times n}(K) \to M_{n\times m}(K)$ amb les propietats següents.

PROPOSICIÓ 1.10

1) L'aplicació trasposada és bijectiva.

2) És involutiva: $(A^T)^T = A$.

3) $(A + B)^T = A^T + B^T$; $(aA)^T = aA^T$.

DEFINICIÓ 1.7

Una matriu $A \in M_{n\times n}(K)$ deim que és ortogonal si es verifica $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$. És a dir, si és invertible i la seva inversa coincideix amb la transposada: $A^{-1} = A^T$.

PROPOSICIÓ 1.11

El conjunt de les matrius ortogonals, $MO_{n\times n}(K)$, amb l'operació de multiplicació és un grup, que anomenam grup ortogonal.

Sigui $f : E \to F$ una aplicació lineal i A la seva matriu $m \times n$ sobre K respecte d'unes bases $\{e_1, \ldots, e_n\}$ i $\{v_1, \ldots, v_m\}$ de E i F respectivament. Per altra part, sigui $f^* : F^* \to E^*$ la dual de f. Podem demostrar el resultat següent

PROPOSICIÓ 1.12

La matriu de f^* respecte de les bases duals de les bases $\{v_1, \ldots, v_m\}$ i $\{e_1, \ldots, e_n\}$ és A^T, és a dir, la transposada de la matriu de f respecte de les bases $\{e_1, \ldots, e_n\}$ i $\{v_1, \ldots, v_m\}$.

Prova. Sigui $A = (a_{ij})$ la matriu de f respecte de $\{e_1, \ldots, e_n\}$ i $\{v_1, \ldots, v_m\}$ i sigui $B = (b_{ij})$ la matriu de f^* respecte de $\{v_1^*, \ldots, v_m^*\}$ i $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$. És $f^*(v_k^*) = \sum b_{rk}e_r^*$ i si aplicam a e_j tenim

$$[f^*(v_k^*)]\,(e_j) = \left(\sum b_{rk}e_r^*\right)(e_j) = b_{jk}.$$

Però per altra part,

$$[f^*(v_k^*)]\,(e_j) = (v_k^* \circ f)(e_j) = v_k^*(f(e_j)) = v_k^*\left(\sum a_{ij}v_i\right) = \sum a_{ij}v_k^*(v_i) = a_{kj}.$$

Per tant $B = A^T$. ∎

Com a conseqüència del resultat anterior podem establir la següent proposició.

PROPOSICIÓ 1.13

1) Una aplicació lineal : $E \to F$ i la seva dual $f^* : F^* \to E^*$ tenen el mateix rang.

2) Si $A \in M_{m\times n}(K)$ i $B \in M_{n\times r}(K)$, llavors $(AB)^T = B^T A^T$.

Prova.

1) Sabem que, si A és la matriu de l'apliació lineal f llavors rang f = rang A. Per altra part, sabem que rang A = rang A^T, per tant, rang f = rang A = rang A^T = rang f^*.

2) Per demostrar l'apartat b, basta utilitzar la proposició 1.12 i la propietat $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ ja demostrada al tema anterior.

∎