Capítol 4

Programació lineal

4.1 Introducció. Exemples

Començarem el tema mostrant diversos exemples que es poden modelitzar mitjançant tècniques de programació lineal.

L'objectiu de la programació lineal és optimitzar (minimitzar o maximitzar) una funció lineal de n variables subjectes a restriccions d'igualtat o de desigualtat, també lineals.

La programació lineal s'aplica en diversos camps, com per exemple:

- Logística: Problema del transport.
- Mescles: Problema de la dieta.
- Finances.
- Màrqueting.
- Assignació de tasques.
- Producció.
- Altres decisions.

Qualsevol problema de programació lineal requereix identificar quatre components bàsics:

1. El conjunt de dades del problema.
2. El conjunt de variables que intervenen en el problema, juntament amb els seus dominis de definició.
3. El conjunt de restriccions del problema que defineixen el conjunt de solucions admissibles.

4. La funció que s'ha d'optimitzar.

Problema del transport

El problema del transport es refereix al procés de determinar el nombre de mercaderies que s'han de lliurar des de cada un dels orígens fins a cada destinació possible.

L'objectiu sol ser minimitzar el cost de transport, i les restriccions venen donades per les capacitats de producció de cada orígen i les necessitats de cada destinació.

Suposem que un determinat producte s'ha de lliurar en quantitats $u_1, u_2, \ldots, u_m$ des de m punts d'orígen i s'ha de rebre a n destinacions en quantitats $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

El problema consisteix en determinar les quantitats x_{ij} que s'han de lliurar des de l'origen i a la destinació j, per tal d'aconseguir minimitzar el cost del lliurament.

Els quatre elements principals del problema són:

1. Dades: m : nombre d'orígens.

   n : nombre de destinacions.

   u_i : quantitat de producte que s'ha de lliurar des de l'orígen i.

   v_j : quantitat de producte que s'ha de rebre a la destinació j.

   c_{ij} : cost de lliurament d'una unitat de producte des de i fins a j.

2. Variables:

   x_{ij} : quantitat de producte que es lliura des i fins a j, amb $x_{ij} \geq 0, \quad \forall i = 1, \ldots, m, \quad \forall i = 1, \ldots, n$. (domini de definició de les variables)

3. Restriccions:

   La quantitat total del producte que surt de i (u_i), ha de coincidir amb la suma de les quantitats que surten de i fins a totes les destinacions $j = 1, \ldots, n$. Així
   $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = u_i.$$

   La quantitat total del producte que rep j (v_j), correspon a la suma de totes les quantitats que arriben a j des de tots els origens $i = 1, \ldots, m$. Així
   $$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = v_j.$$

4. Objectiu: En aquest cas es vol minimitzar el cost del lliurament.

Exemple 1. *Una companyia d'àmbit nacional produeix i distribueix una línia de neveres d'alta eficiència energètica. L'empresa té línies de producció i muntatge en* *dues ciutats, Pamplona i Bilbao i tres cadenes de distribució localitzades a Madrid, Barcelona i Sevilla.*

L'oficina de Madrid presenta una demanda anual de 10000 neveres, la de Sevilla 8000 i la de Barcelona 15000.

La planta de Bilbao pot produir fins a 20000 neveres anuals i 15000 la planta de Pamplona.

Els costos de transport per unitat (en euros) són els següents:

Origen/Destinació	*Madrid*	*Barcelona*	*Sevilla*
Pamplona	*3*	*1*	*5*
Bilbao	*2*	*2*	*4*

Plantejau un programa de programació lineal que minimtzi els costos anuals de la companyia.

Mescles. El problema de la dieta

El problema de la dieta representa una de les primeres aplicacions de la programació lineal i va començar a utilitzar-se en hospitals per tal de determinar la dieta dels pacients que, satisfent unes especificacions nutritives mínimes, fos la més barata possible.

Actualment també s'aplica en el sector de la ramaderia amb la mateixa idea; trobar la combinació òptima d'aliments que, aconseguint una aportació nutritiva mínima, suposi el menor cost possible. Una aplicació d'aquest problema es mostra al següent exemple.

Exemple 2. *Un ramader es vol assegurar que els seus animals ingereixin, diàriament, almenys* 14 *unitats de Ferro,* 12 *de vitamina A i* 18 *de vitamina C.*

Un quilo de farina té un cost de 2 *euros i conté una unitat de ferro, una de vitamina A i tres de vitamina C. Un quilo de blat de moro té un cost de* 2 *euros i conté dues unitats de ferro, una de vitamina A i una de vitamina C.*

Determinau les possibles maneres d'alimentar el ramat, per tal de satisfer les necessitats alimentàries diàries mínimes amb el cost mínim possible.

Exemple de producció

Exemple 3. *Una empresa fabrica quatre tipus de corbata, una de seda, una altra de poliester i dues de poliester/cotó. La taula següent mostra el cost (en euros) dels materials i la seva disponibilitat:*

Material	*cost per metre*	*metres disponibles/mes*
Seda	*21*	*800*
Poliester	*6*	*3000*
Cotó	*9*	*1600*

La taula següent mostra totes les dades relatives a la producció, la demanda mensual i la composició de cada tipus de corbata:

Tipus	*Preu venda*	*Demanda mín-màx*	*metres necessaris*	*Composició*
Seda	*6.70*	*6000 - 7000*	*0.125*	*100% seda*
Poliester	*3.55*	*10000 - 14000*	*0.08*	*100% poliester*
Pol/Cotó1	*4.31*	*13000 - 16000*	*0.10*	*50% pol-50% cotó*
Pol/Cotó2	*4.81*	*6000 - 8500*	*0.10*	*30% pol-70% cotó*

Plantejau un programa de programació lineal per determinar el pla de producció que maximitzi els beneficis de l'empresa.

Planificació d'horaris

La planificació d'horaris intenta donar resposta efectiva a les necessitats de personal durant un periode de temps concret.

Sectors típics on es fa ús de la programació lineal per prendre decisions sobre planificació d'horaris són les entitats bancàries i els grans magatzems.

Exemple 4. *Suposem que una entitat bancària necessita diàriament entre* 10 *i* 18 *caixers en funció de l'hora del dia. Les necessitats diàries s'especifiquen a la taula següent:*

Franja horària	*Nombre de caixers necessaris*
9 a.m-10 a.m.	*10*
10 a.m-11 a.m.	*12*
11 a.m-12 a.m.	*14*
12 a.m-1 p.m.	*16*
1 p.m-2 p.m.	*18*
2 p.m-3 p.m.	*17*
3 p.m-4 p.m.	*15*
4 p.m-5 p.m.	*10*

L'oficina té 12 *treballadors a jornada completa i disposa de personal suficient per treballar a mitja jornada. Un caixer que treballi a mitja jornada ha d'estar operatiu* 4*h. al dia i estar disponible per començar a treballar a qualsevol hora entre les* 9 *a.m. i la* 1 *p.m. Els treballadors a jornada completa estan operatius des de les* 9 *a.m. fins a les* 5 *p.m. i tenen una hora lliure per dinar (la meitat dina de* 11 *a.m.-*12 *a.m., i l'altra meitat ho fa de* 12 *a.m.-*1 *p.m.).*

Les normes de l'entitat limiten el nombre d'hores realitzades pels treballadors a temps parcial a, com a màxim, el 50% *de les hores diàries que es realitzen. (Notem que es realitzen* 112*h. diàries). Aquests treballadors guanyen* 16 *euros al dia i els treballadors a jornada completa* 50 *euros diaris.*

Plantejau un programa de programació lineal que estableixi un horari que minimitzi els costos salarials al banc.

Finances: Selecció d'una cartera de valors

Exemple 5. *Un banc inverteix en crèdits al consum, bons corporatius, dipòsits d'or i préstecs a la construcció. Actualment disposa de* 5 *milions d'euros per invertir i pretén, per una banda, maximitzar l'interès esperat per als propers* 6 *mesos i, per l'altra, complir amb la diversificació propugnada per la Junta Directiva segons s'especifica en la taula següent:*

Tipus d'inversió	*Interès esperat*	*Límit d'inversió (milions d'euros)*
Crèdits al consum	*7%*	*1*
Bons corporatius	*11%*	*2.5*
Dipòsits d'or	*19%*	*1.5*
Préstecs constr.	*15%*	*1.8*

La Directiva també exigeix que almenys un 55% *dels fons es dediquin a dipòsits d'or i préstecs a la construcció, mentre que el percentatge dedicat als crèdits al consum no ha de superar el* 15% *dels fons.*

Plantejau un programa de programació lineal que optimitzi l'objectiu del banc.

Màrqueting

La programació lineal s'utilitza en el camp del màrqueting i la publicitat com una eina que permet determinar quina és la combinació més efectiva de mitjans per anunciar els productes d'una empresa.

Moltes vegades l'empresa disposa d'un pressupost fixat per a publicitat, i l'objectiu és distribuir aquest pressupost entre diverses opcions (TV, ràdio, diaris, revistes,...) de manera que els productes de l'empresa tenguin la màxima difusió. En altres casos, les restriccions venen donades per la disponibilitat dels mitjans i de les polítiques publicitàries de l'empresa. Veurem una aplicació amb l'exemple següent:

Exemple 6. *Una cadena nacional de locals de lleure disposa de 8000 euros setmanals per a publicitat. Aquests doblers s'han de destinar a publicar anuncis en TV, diaris i dues emissores de ràdio.*

L'objectiu final és aconseguir la major audiència possible.

La taula següent recull tota la informació referent a l'audiència esperada per anunci, el cost (en euros) de cada anunci i el nombre màxim d'anuncis setmanals possibles en cada mitjà.

Mitjà	*Audiència*	*Cost*	*Nombre màxim*
TV	*5000*	*800*	*12*
Diari	*8500*	*925*	*5*
Ràdio 1	*2400*	*290*	*25*
Ràdio 2	*2800*	*380*	*20*

L'empresa també exigeix la contractació d'almenys 5 *anuncis per ràdio setmanals i no pot destinar a aquest mitjà més de 1800 euros per setmana.*

Plantejau un programa de programació lineal que optimitzi l'objectiu de l'empresa.

Investigació de mercats La programació lineal també s'aplica a l'estudi de mercats. Mitjançant el següent exemple es pot veure com els estadístics poden emprar la programació lineal per al disseny d'enquestes.

Exemple 7. *Es vol relitzar una enquesta per determinar l'opinió dels ciutadans de Balears sobre la immigració. L'enquesta ha de satisfer el següent:*

1. *Entrevistar almenys 2300 famílies balears.*
2. *En almenys 1000 famílies entrevistades, la persona de més edat no ha de superar els* 30 *anys.*
3. *En almenys* 600 *de les famílies entrevistades, l'edat de la persona més gran ha d'estar compresa entre* 31 *i* 50 *anys.*
4. *El percentatge de famílies entrevistades que pertànyen a zones amb alta taxa d'immigració no ha de ser inferior a un* 15% *del total.*

Totes les enquestes s'han de fer personalment i l'ha de respondre la persona més gran de cada família.

La taula següent indica el cost (en euros) de cada enquesta segons l'edat de l'enquestat i si pertany, o no, a una zona amb taxa elevada d'immigració.

Zona	*Fins a 30 anys*	*31-50 anys*	*Més de 50 anys*
Immigració baixa	*6.90*	*7.25*	*6.10*
Immigració alta	*7.50*	*6.80*	*5.50*

Plantejau un programa de programació lineal que satisfaci totes les condicions de l'enquesta i minimitzi el seu cost.

4.2 Programació lineal

Ja hem vist amb els exemples de l'apartat anterior que la programació lineal és present en moltes aplicacions en les quals es fa necessària la presa de decisions.

Definició 8. *La forma més general d'un problema de programació lineal (PPL) consisteix en minimitzar o maximitzar una funció*

$$Z = f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

sota les restriccions:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, p-1$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i = p, \ldots, q-1$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = q, \ldots, m$$

on p, q, m són nombres positius tals que $1 \leq p \leq q \leq m$. Normalment $n \geq m$.

Definició 9. *Un punt $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$ que satisfà totes les restriccions del PPL s'anomena solució factible. El conjunt de totes les solucions factibles s'anomena regió factible o regió de factibilitat.*

Definició 10. *Un punt factible $\overline{x}$ s'anomena solució òptima del PPL de maximització (minimització) quan $f(\overline{x}) \geq f(x)$ ($f(\overline{x}) \leq f(x)$) per a qualsevol altre punt factible x.*

L'objectiu dels problemes d'optimització és trobar un òptim global. En general només es troben òptims locals (problemes d'optimització, estudiats a batxillerat, calculaven òptims locals i només baix certes condicions els òptims eren globals).

Els problemes de PL presenten propietats que fan possible trobar l'òptim global.

Propietats

1. Si la regió factible està fitada, aleshores el problema sempre té solució.

2. L'òptim d'un PPL és sempre un òptim global.

3. Si x i y són solucions d'un PPL, aleshores qualsevol combinació lineal convexa d'elles
$$\lambda x + (1-\lambda)y, \quad \lambda \in [0, 1],$$
també és solució òptima.

4. La solució òptima s'assoleix sempre, almenys, en un punt extrem de la regió factible.

Veurem a continuació exemples de PPL amb solució única, solució múltiple, solució no fitada i solució infactible (no té solució).

Exemple 11. *Maximitzau $Z = 3x_1 + x_2$ sota les restriccions:*

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 3 \\ 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_2 \leq 0 \\ -x_1 - x_2 \leq -1 \\ -x_1 \leq 0 \end{cases}$$

Representarem gràficament la regió factible. La regió factible serà la intersecció de tots els semiplans que determinen cada una de les restriccions. Considerem les rectes:

$$r_1 : -x_1 + x_2 = 2 \text{ que passa pels punts } (0,2), (-2,0).$$

$$r_2 : x_1 + x_2 = 6 \text{ que passa pels punts } (0,6), (6,0).$$

$$r_3 : x_1 = 3 \text{ que és paral·la a l'eix } Y.$$

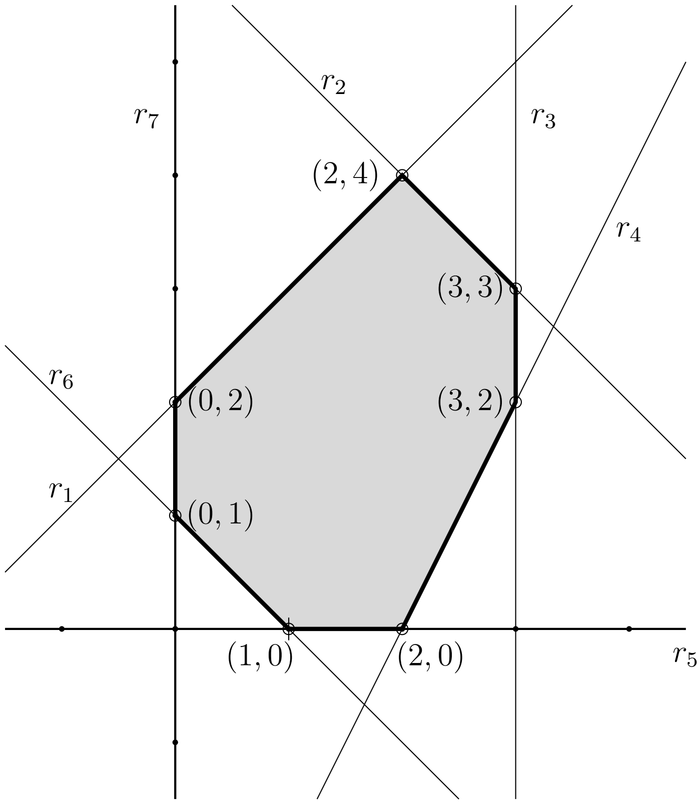
$$r_4 : 2x_1 - x_2 = 4 \text{ que passa pels punts } (0,-4), (2,0).$$

$$r_5 : x_2 = 0 \text{ que és l'eix } X.$$

$$r_6 : x_1 + x_2 = 1 \text{ que passa pels punts } (0,1), (1,0).$$

$$r_7 : x_1 = 0 \text{ que és l'eix } Y.$$

Si ara feim les interseccions $r_1 \bigcap r_2$ obtenim el punt $(2,4)$, $r_2 \bigcap r_3$ el punt $(3,3)$ i $r_3 \bigcap r_4$ el punt $(3,2)$.



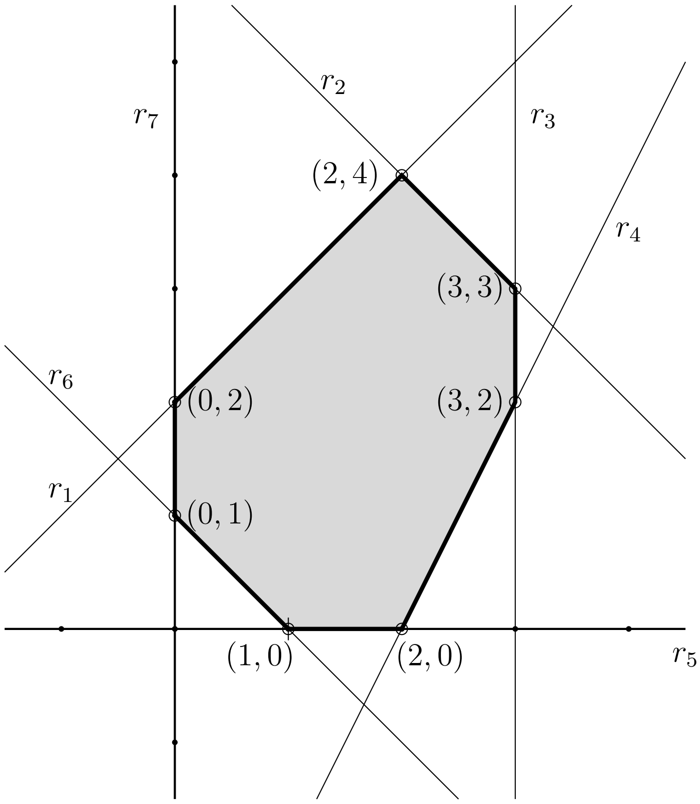
R en aquest cas és un polígon tancat. Les solucions sempre es troben en els extrems de la regió factible, per tant avaluarem la funció objectiu $Z = 3x_1 + x_2$ en els vèrtexos de R.

$$Z(0,1) = 1; \quad Z(0,2) = 2; \quad Z(2,4) = 10; \quad Z(3,3) = 12;$$
$$Z(3,2) = 11; \quad Z(2,0) = 6; \quad Z(1,0) = 3.$$

El màxim s'assoleix en el punt $(3,3)$ i val $Z = 12$.

Exemple 12. *Maximitzau $Z = x_1 + x_2$ sota les restriccions:*

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 3 \\ 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_2 \leq 0 \\ -x_1 - x_2 \leq -1 \\ -x_1 \leq 0 \end{cases}$$

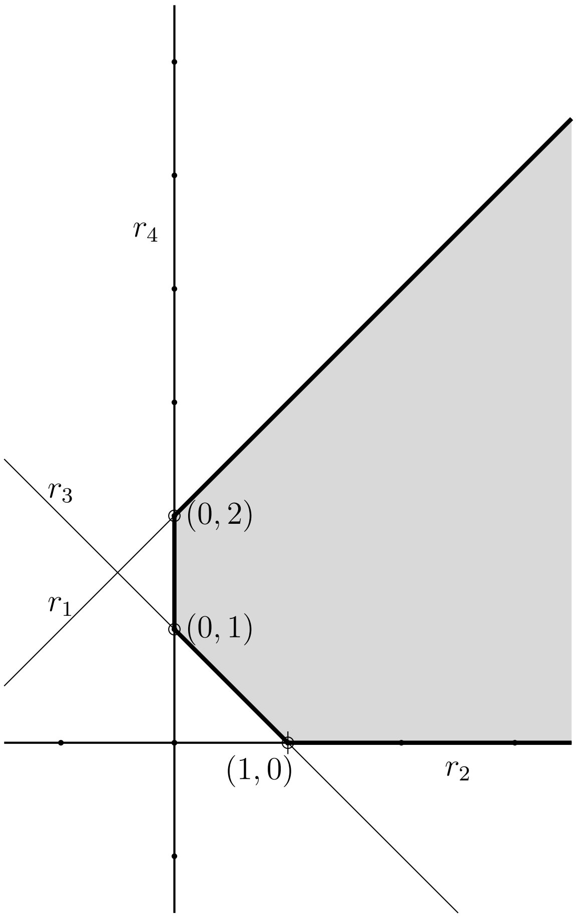


Observam que el conjunt de restriccions és el mateix que el de l'exemple anterior, per tant la regió factible serà la mateixa.

El màxim s'assoleix en els punts $(2,4)$ *i* $(3,3)$*, aleshores tots els punts del segment que uneix aquests dos punts són màxims globals.*

Exemple 13. *Maximitzau* $Z = 3x_1 + x_2$ *sota les restriccions:*

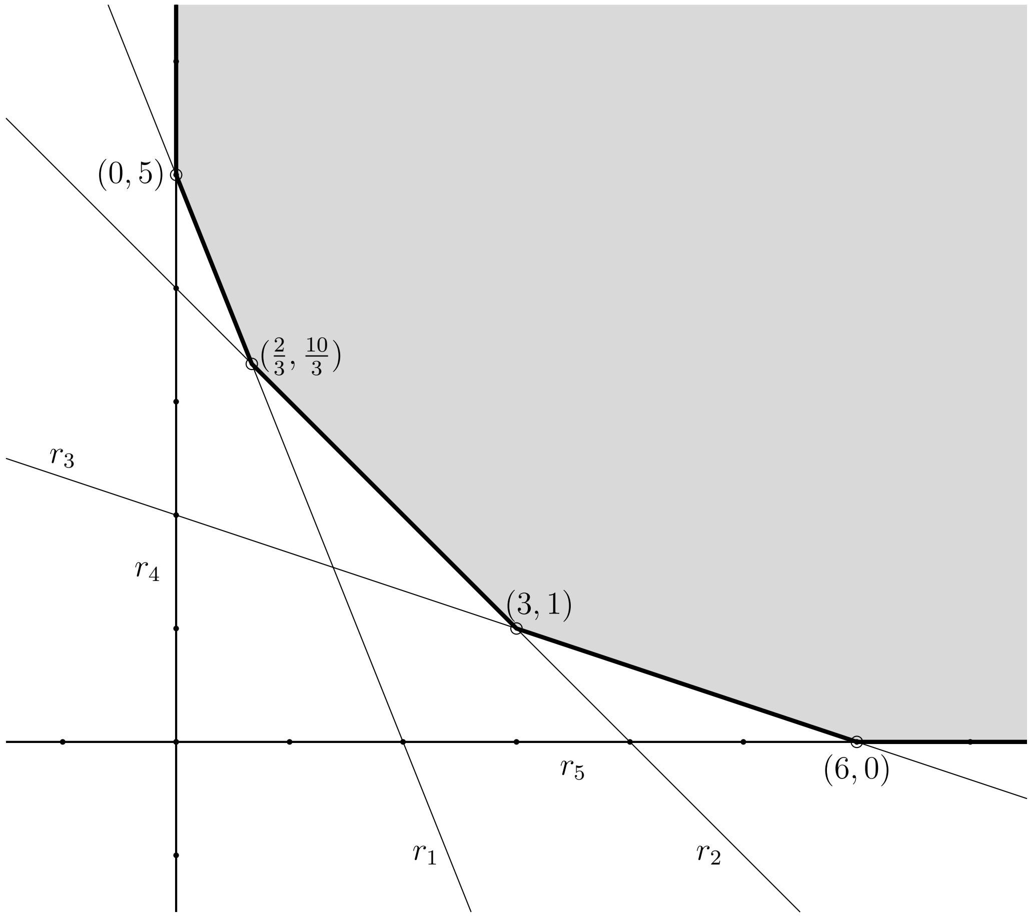
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_2 \leq 0 \\ -x_1 - x_2 \leq -1 \\ -x_1 \leq 0 \end{cases}$$



En aquest cas es pot observar que la regió factible no està fitada en la direcció de creixement de la funció objectiu.

Exemple 14. *Minimitzau* $Z = 0.6x_1 + x_2$ *sota les restriccions:*

$$\begin{cases} 10x_1 + 4x_2 \geq 20 \\ 5x_1 + 5x_2 \geq 20 \\ 2x_1 + 6x_2 \geq 12 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$



En aquest cas la regió factible no està fitada però la funció assoleix el mínim en el punt $(3, 1)$ *i val* $Z = 2.8$

Exemple 15. *Minimitzau* $Z = 2x_1 - 3x_2$ *sota les restriccions:*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 4 \\ 2x_1 - 4x_2 \leq -6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

En aquest cas la regió factible és $R = \emptyset$*, el problema no té solució.*

4.2.1 Forma estàndard d'un PPL

Per descriure un PPL necessitam:

1. Un vector $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.

2. Un vector $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$, amb $b_i \geq 0$ per a tot $i = 1, \ldots, m$.

3. Una matriu $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

Amb aquests elements, el problema lineal associat en forma estàndard té la forma següent:

$$Min(Max)Z = cX$$

sota les restriccions $AX = B$ on $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ amb $x_j \geq 0$ per a tot $j = i, \ldots, n$ i

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ amb $b_i \geq 0$ per a tot $i = 1, \ldots, m$.

Normalment $n \geq m$.

Definició 16. *Direm que un PPL està en forma estàndard si*

1. *És de minimització o de maximització.*
2. *Només inclou restriccions d'igualtat.*
3. $b_i \geq 0$ *per a tot* $i = 1, \ldots, m$.
4. $x_j \geq 0$ *per a tot* $j = i, \ldots, n$.

Transformació d'un PPL a la forma estàndard

Qualsevol PPL es pot transformar a la forma estàndard. Vegem de quina manera:

1. Les variables no restringides en signe poden expressar-se com a diferència de dues variables no negatives.

   Es defineix
   $$x_i^+ = max\{0, x_i\}$$
   $$x_i^- = max\{0, -x_i\}$$
   Se satisfà que $x_i^+, x_i^- \geq 0$ i $x_i = x_i^+ - x_i^-$.

2. Les restriccions de desigualtat es poden transformar en restriccions d'igualtat equivalents introduint noves variables, anomenades variables compensatòries.

   Si $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$, aleshores existeix una variable $x_{n+1} \geq 0$ tal que
   $$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$$

   Si $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$, aleshores existeix una variable $x_{n+1} \geq 0$ tal que
   $$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i$$

3. Un problema de maximització $Z_{max} = cX$ és equivalent a minimitzar $Z_{min} = -cX$ (i recíprocament) si ambdós problemes verifiquen el mateix conjunt de restriccions.

4. Tota restricció amb terme independent $b < 0$ pot transformar-se en una altra amb terme independent no negatiu multiplicant la restricció per -1.

Exemple 17. *$MaxZ = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3$ sota les restriccions:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \geq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Escriurem aquest problema en forma estàndard de màxim. Observam que totes les variables són no negatives. Haurem de transformar les restriccions de desigualtat en igualtats, per a això haurem d'afegir variables compensatòries. Així en forma estàndard ve donat per: $MaxZ = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 0x_4 + 0x_5$ sota les restriccions:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Si volguessim el mateix problema en forma estàndard de mínim seria: $MinZ = -2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 0x_4 + 0x_5$ sota les restriccions:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Exemple 18. *$MaxZ = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3$ sota les restriccions:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Observam que la variable x_3 no està restringida en signe, haurem d'escriure $x_3 = x_6 - x_7$ amb $x_6 = x_3^+ \geq 0, x_7 = x_3^- \geq 0$

Així, el problema donat en forma estàndard de màxim serà

$$MaxZ = 2x_1 - 3x_2 + 5(x_6 - x_7)$$

sota les restriccions:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - (x_6 - x_7) - x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

Exemple 19. *$MaxZ = 3x_1 - x_3$ sota les restriccions:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 \leq 1 \\ x_1 + x_3 \geq -1 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

Com que totes les variables han de ser no negatives posarem:

$$\begin{array}{l} x_2 = y_2 - z_2; \quad y_2 = x_2^+, z_2 = x_2^- \\ x_3 = y_3 - z_3; \quad y_3 = x_3^+, z_3 = x_3^- \end{array}$$

amb $y_2, z_2, y_3, z_3 \geq 0$ Notem que el terme independent de la tercera restricció és negatiu, aleshores la multiplicarem per -1. El problema inicial serà $MaxZ = 3x_1 - y_3 + z_3$ sota les restriccions:

$$\begin{array}{cl} x_1 + y_2 - z_2 + y_3 - z_3 & = 1 \\ x_1 - y_2 + z_2 - y_3 + z_3 & \leq 1 \\ -x_1 - y_3 + z_3 & \leq 1 \\ x_1, y_2, z_2, y_3, z_3 & \geq 0 \end{array}$$

Ara ens queda transformar les restriccions de desigualtat en restriccions d'igualtat:

$$\begin{array}{cl} x_1 + y_2 - z_2 + y_3 - z_3 & = 1 \\ x_1 - y_2 + z_2 - y_3 + z_3 + u_1 & = 1 \\ -x_1 - y_3 + z_3 + u_2 & = 1 \\ x_1, y_2, z_2, y_3, z_3, u_1, u_2 & \geq 0 \end{array}$$

4.2.2 Solucions bàsiques d'un PPL

Suposem un PPL donat en forma estàndard $Min(Max)Z = cX$ sota les restriccions $AX = B$ on $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ amb $x_j \geq 0$ per a tot $j = i, \ldots, n$ $\quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ amb $b_i \geq 0$ per a tot $i = 1, \ldots, m$ i $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Podem suposar sense pèrdua de generalitat que $rang(A) = m$ (recordem que $m \leq n$) i que el sistema $AX = B$ té solució. En qualsevol altre cas, o bé el sistema és equivalent a un altre sistema compatible amb menys equacions, o bé el sistema és incompatible.

Definició 20. *Sigui A la matriu anterior, aleshores*

- *S'anomena matriu bàsica de A tota matriu d'ordre m, M_b, de rang m extreta de A*
- *M_b és bàsica factible si és bàsica i satisfà $M_b^{-1}B \geq 0$.*
- *Sigui X_b el vector de les variables associades a les columnes de M_b, aquestes variables s'anomenen bàsiques i les demés variables no bàsiques. Si s'assigna el valor zero a les variables no bàsiques (X_N), el sistema $AX = B$ es pot escriure com:*

  $$\left(\begin{array}{ccc} M_b & | & X_N \end{array} \right) \begin{pmatrix} X_b \\ 0 \end{pmatrix} = B,$$

  d'on $M_b X_b = B$ i, com que M_b és invertible, $X_b = M_b^{-1}B$ és la solució bàsica associada a M_b.

  Si endemés M_b és una matriu bàsica factible, la seva solució bàsica és factible.

Exemple 21. *Trobau les solucions bàsiques del sistema:* $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 12 \end{cases}$

Les matrius A i B són $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ *i* $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$

1. *Si consideram* $M_b = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, *les variables bàsiques són x_1, x_2 i la variable no bàsica $x_3 = 0$, aleshores*

   $$X_b = M_b^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   Així $(x_1, x_2) = (0, 4)$ és una solució bàsica factible.

2. *Si prenem com a matriu bàsica* $M_b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, *les variables bàsiques són x_1, x_3 i la variable no bàsica $x_2 = 0$, aleshores*

   $$X_b = M_b^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   En aquest cas s'obté una solució bàsica no factible ($x_3 < 0$).

3. *Si prenem com a matriu bàsica* $M_b = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, *les variables bàsiques són x_2, x_3 i la variable no bàsica $x_1 = 0$, aleshores*

   $$X_b = M_b^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   i la solució bàsica és $(x_2, x_3) = (4, 0)$.

El nombre de solucions bàsiques factibles d'un PPL fitat amb un nombre finit de restriccions és sempre finit i cadascuna es correspon amb un punt extrem de la regió factible.

Teorema 22. *Sigui* $R = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : AX = B, x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n\}$ *amb* $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *i* $rang(A) = m$, *aleshores* $x \in \mathbb{R}$ *és un punt extrem de* R *si i només si* A *es pot descompondre com* $A = \left(\begin{array}{c|c} M_b & X_N \end{array} \right)$ *tal que*

$$X = \begin{pmatrix} X_b \\ X_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_b^{-1}B \\ 0 \end{pmatrix}$$

on M_b *és una matriu d'ordre* m, *invertible, extreta de* A *que satisfà* $M_b^{-1}B \geq 0$.

Observació 23. *Recordem que si* M_b *és una matriu d'ordre* m, *invertible, és equivalent per files a la matriu identitat* I_m *o a qualsevol altra matriu d'ordre* m, *les columnes de la qual són els vectors unitaris* $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_m = (0, 0, \ldots, 1)$ *no necessàriament en aquest ordre.*

$$I_m \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \ldots$$

Teorema 24. *(Propietat fonamental de la programació lineal)*

Si un PPL té una solució òptima, aquesta és una solució bàsica factible.

Per tant, per trobar l'òptim d'un PPL el cercarem dins el conjunt de solucions bàsiques factibles.

4.3 Mètode del símplex

És un procediment algebraic (no geomètric) mitjançant el qual es passa d'una solució bàsica factible inicial (o qualsevol altra) a una solució bàsica factible adjacent, millorant o, almenys, no empitjorant el valor de la funció objectiu.

Hi ha moltes versions del mètode del símplex i totes pretenen el mateix: trobar la solució òptima d'un PPL.

Per trobar aquest òptim s'empren unes taules. Es parteix d'una taula inicial i es van tranformant els valors de la taula fins a arribar a la solució òptima.

Nosaltres aplicarem el Mètode revisat del símplex que inclou la funció objectiu en les taules. En el mètode del símplex es pren com a matriu bàsica factible inicial la matriu identitat i qualsevol altra matriu bàsica factible una matriu obtinguda a partir de la matriu identitat fent intercanvis de files.

Il·lustrarem aquest mètode amb el següent exemple.

Exemple 25. *$MaxZ = 40x_1 + 30x_2$ sota les restriccions:*

$$\begin{array}{cl} x_1 & \leq 16 \\ x_2 & \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 & \leq 24 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Si el resolem gràficament obtenim la regió factible amb vèrtexos $(0,0), (16,0), (16,4), (8,8), (0,8)$ i si avaluam Z en aquests vèrtexos obtenim que el màxim s'assoleix en el punt $(16,4)$ i val 760.

Per aplicar el mètode del símplex hem de fer:

- *Pas 1. Hem d'escriure el problema en forma estàndard de màxim, que serà el mateix que escriure el sistema:*

$$\begin{array}{ccccccc} Z & -40x_1 & -30x_2 & +0s_1 & +0s_2 & +0s_3 & =0 \\ & x_1 & & +s_1 & & & =16 \\ & & x_2 & & +s_2 & & =8 \\ & x_1 & +2x_2 & & & +s_3 & =24 \end{array}$$

  amb $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

  Podem construir la taula

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	*constants*
fila 1	*1*	*-40*	*-30*	*0*	*0*	*0*	*0*
fila 2	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*	*16*
fila 3	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*8*
fila 4	*0*	*1*	*2*	*0*	*0*	*1*	*24*

La matriu bàsica factible inicial (matriu identitat) correspon a les variables bàsiques, en aquest cas les variables compensatòries s_1, s_2, s_3 i les variables no bàsiques són $x_1 = x_2 = 0$.

Si tenim en compte també la fila 1 de la taula es pot extreure el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 8 \\ 24 \end{pmatrix}$$

que correspon a $s_1 = 16, s_2 = 8, s_3 = 24$ i $Z = 0$ amb $(x_1, x_2) = (0,0)$. Notem que el punt $(0,0)$ és un vèrtex de la regió factible.

- *Pas 2. Introducció d'una nova variable bàsica:*

  Cercam la columna que en la fila 1 té l'entrada negativa amb major valor absolut (columna pivot).

Dividim les constants pels valors positius de la columna pivot i en triam el mínim; la fila corresponent a aquest mínim serà la fila pivot.

L'element que està en la intersecció de la columna i fila pivots serà el pivot i correspon a la nova variable bàsica.

(En el nostre cas la columna pivot és la segona i la fila pivot es la que correspon al min$(\frac{16}{1}, \frac{24}{1})$*, és a dir la fila 2, per tant el pivot és* 1 *i correspon a la variable* x_1*.)*

Transformam la taula inicial de manera que la columna pivot sigui un vector unitari (tots els elements de la columna han de ser nuls tret del pivot que ha de ser 1*.) Per tant, si feim* $f_1 + 40f_2, f_4 - f_2$ *obtenim una nova taula donada per:*

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	*constants*
fila 1	*1*	*0*	*-30*	*40*	*0*	*0*	*640*
fila 2	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*	*16*
fila 3	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*8*
fila 4	*0*	*0*	*2*	*-1*	*0*	*1*	*8*

De la taula es pot extreure el sistema bàsic:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ x_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 640 \\ 16 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

que correspon a $x_1 = 16, s_2 = 8, s_3 = 24$ *i* $Z = 640$ *amb* $x_2 = 0$ *i* $s_1 = 0$*. Notem que el punt* $(16, 0)$ *és un altre vèrtex de la regió factible.*

- *Com que en la fila 1 segueix havent-hi un nombre negatiu, la solució es pot millorar. Iteram el Pas 2: La nova variable bàsica és* x_2 *i si feim el min*$(\frac{8}{1}, \frac{8}{2})$ *obtenim que el pivot està en la fila 4; el pivot és* 2*, per tant dividim la fila pivot per* 2 *(per tenir el pivot* 1*) i feim zeros la resta d'elements de la columna pivot. Si feim* $f_1 + 30f_4, f_3 - f_4$ *obtenim la nova taula*

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	*constants*
fila 1	*1*	*0*	*0*	*25*	*0*	*15*	*760*
fila 2	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*	*16*
fila 3	*0*	*0*	*0*	$\frac{1}{2}$	*1*	$\frac{-1}{2}$	*4*
fila 4	*0*	*0*	*1*	$\frac{-1}{2}$	*0*	$\frac{1}{2}$	*4*

De la taula es pot extreure el sistema bàsic:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ x_1 \\ x_2 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 760 \\ 16 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

que correspon a $x_1 = 16, s_2 = 4, x_2 = 4$ *i* $Z = 760$ *amb* $s_1 = s_3 = 0$. *Notem que el punt* $(16, 4)$ *és un altre vèrtex de la regió factible.*

A la fila 1 ja no queden nombres negatius, per tant la solució no es pot millorar.

Aplicació del mètode del símplex a problemes de minimització

Per a problemes de minimització no es pot aplicar directament el mètode que hem descrit anteriorment. Vegem-ho amb el següent exemple.

Exemple 26. *Calculau el* $MinZ = x_1 + 4x_2$ *sota les restriccions:*

$$\begin{array}{cl} x_1 + 2x_2 & \geq 8 \\ 3x_1 + 2x_2 & \geq 12 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Si l'escrivim en forma estàndard de mínim ens queda $MinZ = x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2$ sota les restriccions:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

amb $x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$.

Podem observar que de la matriu de coeficients no es pot extreure la matriu identitat com a matriu bàsica factible inicial. Es pot extreure la matriu bàsica $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ que correspon a les variables bàsiques s_1, s_2. La solució és $s_1 = -8, s_2 = -12$, que resulta una solució bàsica no factible. Conseqüentment hem de cercar una manera d'obtenir una solució bàsica factible inicial. Això s'obté afegint una variable artificial no negativa a cada una de les restriccions. Aquestes variables artificials apareixeran en la funció objectiu amb coeficients "grans" respecte als coeficients de les variables del problema donat.

Una vegada afegides les variables compensatòries i artificials al problema de minimització aplicarem el mètode del símplex aplicant les passes següents:

1. Escriure la taula inicial del símplex.
2. Transformar les columnes de les variables artificials en vectors unitaris.
3. Cercar el pivot: De entre les columnes de les variables triar la columna amb l'entrada positiva major. Per determinar la fila pivot es fa el mateix que en el cas de maximització.

Exemple 27. *Consideram el problema de minimització de l'exemple anterior. Afegides les variables artificials ens queda:*

$$\begin{array}{cccccccc} Z & -x_1 & -4x_2 & +0s_1 & +0s_2 & -100v_1 & -100v_2 & = 0 \\ & x_1 & +2x_2 & -s_1 & & +v_1 & & = 8 \\ & 3x_1 & +2x_2 & & -s_2 & & +v_2 & = 12 \end{array}$$

amb $x_1, x_2, s_1, s_2, v_1, v_2 \geq 0$.

Escrivim la taula inicial

Z	x_1	x_2	s_1	s_2	v_1	v_2	*constants*
1	-1	-4	0	0	-100	-100	0
0	1	2	-1	0	1	0	8
0	3	2	0	-1	0	1	12

Si feim $f_1 + 100f_2 + 100f_3$*, els vectors columna de les variables artificials es transformen en unitaris i s'obté la taula*

Z	x_1	x_2	s_1	s_2	v_1	v_2	*constants*
1	399	396	-100	-100	0	0	2000
0	1	2	-1	0	1	0	8
0	3	2	0	-1	0	1	12

La columna pivot correspon a la columna de la variable x_1 *i la fila pivot és la tercera. Dividim la fila pivot per* 3 *per tenir el pivot igual a* 1 *i obtenim*

Z	x_1	x_2	s_1	s_2	v_1	v_2	*constants*
1	399	396	-100	-100	0	0	2000
0	1	2	-1	0	1	0	8
0	1	$2/3$	0	$-1/3$	0	$1/3$	4

Si ara feim $f_1 - 399f_3$ *i* $f_2 - f_1$ *transformam la columna pivot en vector unitari i obtenim la nova taula*

Z	x_1	x_2	s_1	s_2	v_1	v_2	*constants*
1	0	130	-100	33	0	-133	404
0	0	4/3	-1	1/3	1	-1/3	4
0	1	$2/3$	0	$-1/3$	0	$1/3$	4

D'aquesta taula es pot extreure el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ x_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 404 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

que correspon a la solució $x_1 = 4, v_1 = 4, s_1 = s_2 = x_2 = v_2 = 0$*. Notem que a la solució apareix la variable artificial* $v_1 = 4$ *i aquesta solució no interessa. La solució no és òptima, encara queden en la fila 1 entrades positives. L'entrada positiva més gran correspon a la variable* x_2*, per tant la columna corresponent a* x_2 *és la columna pivot i la fila pivot és la fila 2. Si dividim la fila pivot per* $4/3$ *tenim que*

Z	x_1	x_2	s_1	s_2	v_1	v_2	*constants*
1	0	130	-100	33	0	-133	404
0	0	1	-3/4	1/4	3/4	-1/4	3
0	1	$2/3$	0	$-1/3$	0	$1/3$	4

Si ara feim $f_1 - 130f_2$ i $f_3 - 2/3f_2$ trasformam la columna pivot en vector unitari i ens queda la nova taula

Z	x_1	x_2	s_1	s_2	v_1	v_2	*constants*
1	0	0	-5/2	1/2	-195/2	-201/2	14
0	0	1	-3/4	1/4	3/4	-1/4	3
0	1	0	1/2	-1/2	-1/2	1/2	2

La solució encara no és òptima. Si iteram el procés obtenim que la columna pivot correspon a la columna de la variable s_2 i la fila 2 és la fila pivot. Si dividim la fila pivot per $1/4$ ens queda

Z	x_1	x_2	s_1	s_2	v_1	v_2	*constants*
1	0	0	-5/2	1/2	-195/2	-201/2	14
0	0	4	-3	1	3	-1	12
0	1	0	1/2	-1/2	-1/2	1/2	2

Si ara feim $f_1 - 1/2f_2$ i $f_3 + 1/2f_2$ transformam la columna pivot en vector unitari i obtenim una nova taula

Z	x_1	x_2	s_1	s_2	v_1	v_2	*constants*
1	0	-2	-1	0	-99	-100	8
0	0	4	-3	1	3	-1	12
0	1	2	-1	0	1	0	8

D'aquesta taula es pot extreure el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ x_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

que correspon a la solució $x_1 = 8, s_2 = 12, x_2 = s_1 = v_1 = v_2 = 0$. Per tant la solució òptima és $(x_1, x_2) = (8, 0)$ i $Z = 8$.

Observació 28. *Podem fer les següents observacions:*

1. *L'ús de variables artificials no és exclusiu de programes de minimització. En alguns programes de maximització també poden emprar-se profitosament.*

   Quan en el context de maximització una de les restriccions és d'igualtat no serà necessari afegir una variable compensatòria. En aquest cas ens farà falta un vector unitari a la taula del símplex per poder tenir la solució bàsica factible inicial. Afegirem a la restricció d'igualtat una variable artificial que intervendrà en la funció objectiu amb coeficient negatiu per assegurar que no forma part de la solució òptima.

2. *Quan, en la taula del símplex, dos o més quocients comparteixin la característica de ser els menors, dues o més files seran candidates a ser la fila pivot. S'ha d'adoptar un criteri, arbitrari, per decidir quina serà la fila pivot.*

3. *De vegades un pas de pivot pot no donar una millora de la solució i seran necessaris diverses passes de pivot amb millora nul·la abans de que el procés iteratiu trenqui el cercle viciós.*

4. *Hem donat una introducció a l'algoritme símplex. El procés no és difícil, però en programes lineals de dimensions considerables la tasca de computar és gran i avorrida.*

   Afortunadament hi ha programes informàtics que fan tota aquesta feina: SOLVER de Excel, GAMS (General Algebraic Modeling System) i qualsevol altre programa del símplex que pogueu trobar a Internet.