

# Matemática discreta

## Estudios de Ingeniería

Juan Gabriel Gomila

Frogames

<https://frogames.es>

1 de julio de 2017

# Índice

## 1 Teoría básica de conjuntos

- El concepto de conjunto
- Operaciones con conjuntos
- Propiedades
- Conjunto finito. Principio de la adición

## 2 Álgebra de Boole

- Definición de álgebra de Boole
- Propiedades en un álgebra de Boole

## 3 Funciones booleanas en el álgebra de Boole binaria

- Funciones booleanas
- La forma canónica
- Obtención de las formas canónicas
- Simplificación de variables booleanas

## 1 Teoría básica de conjuntos

- El concepto de conjunto
- Operaciones con conjuntos
- Propiedades
- Conjunto finito. Principio de la adición

## 2 Álgebra de Boole

- Definición de álgebra de Boole

- Propiedades en un álgebra de Boole

## 3 Funciones booleanas en el álgebra de Boole binaria

- Funciones booleanas
- La forma canónica
- Obtención de las formas canónicas
- Simplificación de variables booleanas

## 1 Teoría básica de conjuntos

### ■ El concepto de conjunto

- Operaciones con conjuntos
- Propiedades
- Conjunto finito. Principio de la adición

## 2 Álgebra de Boole

- Definición de álgebra de Boole

- Propiedades en un álgebra de Boole

## 3 Funciones booleanas en el álgebra de Boole binaria

- Funciones booleanas
- La forma canónica
- Obtención de las formas canónicas
- Simplificación de variables booleanas

# El concepto de conjunto

## Definición

Un conjunto es una colección de objetos. Los objetos que forman parte de un conjunto determinado se denominan elementos del conjunto.

Ejemplos de conjuntos son la colección de todos los estudiantes del grado de telemática, la colección de todos los números enteros pares, etcétera.

# Conjuntos por extensión

Para describir un conjunto con un número finito de elementos se puede hacer por **extensión**; es decir, mediante un listado de sus elementos entre claves como por ejemplo  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

No es importante el orden en que se escriben los elementos. Así  $\{1, 2, 3, 4\}$  y  $\{4, 3, 2, 1\}$  representan el mismo conjunto.

No se ha de tener en cuenta si la lista tiene algún elemento repetido. El conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 2\}$  es el mismo que el anterior.

# Como denotar un conjunto

Se emplearán letras mayúsculas para designar los conjuntos y letras minúsculas para designar sus elementos.

Para indicar que  $x$  es un elemento de  $A$ , se escribirá  $x \in A$  ( $x$  perteneciente a  $A$ ).

Para indicar que  $x$  no es un elemento de  $A$ , se escribirá  $x \notin A$  ( $x$  no pertenece a  $A$ ).

# Conjuntos por compresión

También se pueden describir los conjuntos por **compresión**; es decir, específicamente una propiedad que determina exactamente sus elementos. Se escribirá como:

$$A = \{x \mid p(x)\}$$

Por ejemplo:

$$A = \{x \mid x \text{ es entero positivo menor que } 5\}$$

Representa al conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,



# Un conjunto sin elemento

## El conjunto vacío

El conjunto que no tiene ningún elemento se denota por  $\emptyset$  y se denomina conjunto vacío. Por ejemplo:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -2\} = \emptyset$$

# Igualdad de conjuntos

## Definición

Dos conjuntos  $A$  y  $B$  son iguales cuando tienen exactamente los mismo elementos; es decir, cuando todo elemento de  $A$  es elemento de  $B$  y todo elemento de  $B$  es elemento de  $A$ .

Cuando  $A$  y  $B$  son iguales se denota como  $A = B$ .

# Subconjuntos

## Definición

Dícese que un conjunto  $A$  es un subconjunto de  $B$  si todo elemento de  $A$  es elemento de  $B$  y se escribirá como  $A \subseteq B$ , notación que significa que  $A$  está contenido en  $B$ , o que  $B$  contiene a  $A$ .

# El conjunto universal

## Definición

Siempre que se hable de conjuntos, se supondrá que son subconjuntos de un conjunto universal  $U$  que los contiene a todos.

El conjunto universal contiene todos los conjuntos a los cuales se hace referencia en un ejercicio o resultado.

## Ejemplos de subconjuntos

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ .
- $\mathbb{Z}^+ = \{x \in \mathbb{Z} : x > 0\} \subseteq \mathbb{Z}$
- Si  $A$  es un conjunto cualquiera, entonces  $\emptyset \subseteq A$  y  $A \subseteq A$ .  
Estos dos se denominan subconjuntos triviales de  $A$ .
- Si  $A$  es un conjunto cualquiera y  $B = \{A, \{A\}\}$ , entonces  $A \in B$ ,  $\{A\} \in B$ ,  $\{A\} \subseteq B$  pero en cambio  $A \not\subseteq B$ .

Se puede comprobar fácilmente que  $A = B \iff A \subseteq B$  y  $B \subseteq A$  (Ejercicio).

## 1 Teoría básica de conjuntos

- El concepto de conjunto
- Operaciones con conjuntos
- Propiedades
- Conjunto finito. Principio de la adición

## 2 Álgebra de Boole

- Definición de álgebra de Boole

- Propiedades en un álgebra de Boole

## 3 Funciones booleanas en el álgebra de Boole binaria

- Funciones booleanas
- La forma canónica
- Obtención de las formas canónicas
- Simplificación de variables booleanas

# Operaciones con conjuntos

Se verán algunas operaciones básicas de conjuntos. Las operaciones entre conjuntos y las propiedades que verifican estas operaciones se pueden ilustrar mediante **diagramas de Venn**. Un diagrama de Venn es una representación gráfica de conjuntos en el plano. El conjunto universal  $U$  se representa por el interior de un rectángulo y los otros subconjuntos son representados por círculos en el rectángulo.

# Operaciones con conjuntos

## Unión de conjuntos

Sean  $A$  y  $B$  conjuntos, se define su unión como el conjunto de todos los elementos que pertenecen a  $A$  o a  $B$ .

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Si  $A = \{a, b, c, d\}$  y  $B = \{a, b, g, e, h\}$ , entonces:

$$A \cup B = \{a, b, c, d, g, e, h\}$$



# Operaciones con conjuntos

## Intersección de conjuntos

Sean  $A$  y  $B$  conjuntos, se define su intersección como el conjunto de todos los elementos que pertenecen al mismo tiempo a  $A$  y a  $B$ .

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Si  $A = \{a, b, c, d\}$  y  $B = \{a, b, g, e, h\}$ , entonces:

$$A \cap B = \{a, b\}$$

# Operaciones con conjuntos

La unión y la intersección de conjuntos también se puede definir para tres o más conjuntos de la manera siguiente:

$$A \cup B \cup C = \{x : x \in A \text{ o } x \in B \text{ o } x \in C\}$$

$$A \cap B \cap C = \{x : x \in A \text{ y } x \in B \text{ y } x \in C\}$$

Y por tanto, la unión y la intersección de un número finito de conjuntos se define como:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x : x \in A_i \text{ para algún } i\}$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x : x \in A_i \text{ para todo } i\}$$

# Operaciones con conjuntos

## Conjuntos disjuntos

Dícese que dos conjuntos  $A$  y  $B$  son disjuntos cuando no tienen elementos en común; es decir, cuando:

$$A \cap B = \emptyset$$

# Operaciones con conjuntos

## Diferencia de conjuntos

Sean  $A$  y  $B$  conjuntos, se define la diferencia  $A - B$  como el conjunto de elementos de  $A$  que no pertenecen a  $B$ .

$$A - B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Si  $A = \{a, b, c, d\}$  y  $B = \{a, b, g, e, h\}$ , entonces:

$$A - B = \{c, d\}$$

$$B - A = \{g, e, h\}$$

# Operaciones con conjuntos

## Complementario de un conjunto

Sea  $U$  un conjunto universal que contiene un conjunto  $A$ , entonces el conjunto  $U - A$  se denomina complemento o complementario de  $A$  y se denota como  $A^c$ . Así:

$$A^c = \{x : x \notin A\}$$

Si  $U = \mathbb{Z}$  y  $A = \{x : x \text{ pares}\}$ , entonces:

$$A^c = \{x : x \text{ impares}\}$$

# Operaciones con conjuntos

## Diferencia simétrica

Sean  $A$  y  $B$  conjuntos, se define la diferencia simétrica de  $A$  y  $B$  como el conjunto unión de los elementos de  $A$  que no pertenecen a  $B$  y los elementos de  $B$  que no pertenecen a  $A$ .

$$A \oplus B = \{x : (x \in A \text{ y } x \notin B) \text{ o } (x \in B \text{ y } x \notin A)\}$$

Es fácil notar que:

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

Si  $A = \{a, b, c, d\}$  y  $B = \{a, b, g, e, h\}$ , entonces:

$$A \oplus B = \{c, d, g, e, h\}$$

# Operaciones con conjuntos

## Partes de un conjunto

Sea  $A$  un conjunto. El conjunto de todos los subconjuntos de  $A$  se denomina conjunto de partes de  $A$  (o conjunto potencia de  $A$ ) y se denota como  $\mathcal{P}(A)$ .

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$$

Si  $A = \{a, b, c\}$ , entonces:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

## 1 Teoría básica de conjuntos

- El concepto de conjunto
- Operaciones con conjuntos
- Propiedades
- Conjunto finito. Principio de la adición

## 2 Álgebra de Boole

- Definición de álgebra de Boole

- Propiedades en un álgebra de Boole

## 3 Funciones booleanas en el álgebra de Boole binaria

- Funciones booleanas
- La forma canónica
- Obtención de las formas canónicas
- Simplificación de variables booleanas



# Propiedades

En las diapositivas siguientes se muestran algunas de las propiedades algebraicas que satisfacen las operaciones de conjuntos, donde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  son subconjuntos de un conjunto universal  $U$ .

# Propiedades

## Conmutativas

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

## Asociativas

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

# Propiedades

## Idempotencia

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

## Involutiva

$$(A^c)^c = A$$

# Propiedades

## Distributivas

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

## Leyes de De Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

# Propiedades

## Absorción

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

## Elementos absorbentes

$$A \cup U = U$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

# Propiedades

## Elemento neutro

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap U = A$$

## Complementos

$$A \cup A^c = U$$

$$A \cap A^c = \emptyset$$

$$\emptyset^c = U$$

$$U^c = \emptyset$$

## 1 Teoría básica de conjuntos

- El concepto de conjunto
- Operaciones con conjuntos
- Propiedades
- Conjunto finito. Principio de la adición

## 2 Álgebra de Boole

- Definición de álgebra de Boole

- Propiedades en un álgebra de Boole

## 3 Funciones booleanas en el álgebra de Boole binaria

- Funciones booleanas
- La forma canónica
- Obtención de las formas canónicas
- Simplificación de variables booleanas

# Conjuntos finitos

## Conjunto finito

Un conjunto  $A$  es finito si contiene exactamente  $m$  elementos distintos donde  $m$  es un entero no negativo. Si un conjunto no es finito, es infinito.

Si  $A$  es finito se denota como  $|A|$  o como  $\text{card}(A)$  al número de elementos de  $A$ .

El conjunto  $\emptyset$  es finito y  $|\emptyset| = 0$ . El conjunto de letras del alfabeto castellano es finito, y el conjunto de todos los enteros positivos e impares es infinito.

Si  $A$  es un conjunto con  $|A| = m$ , entonces  $|\mathcal{P}(A)| = 2^m$ .



# Principio de la adición

## Teorema

Si  $A$  y  $B$  son conjuntos finitos, entonces  $A \cup B$  y  $A \cap B$  son finitos y:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

En particular si  $A \cap B = \emptyset$ , entonces  $|A \cup B| = |A| + |B|$ .

## Principio de adición

En el caso de la unión de tres conjuntos, la fórmula que devolverá su cardinal es:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

En el caso de la unión de  $n$  conjuntos, la fórmula que devolverá su cardinal es:

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \dots + (-1)^{(n-1)} \alpha_n$$

Donde cada  $\alpha_i$  es la suma de todos los cardinales de todas las intersecciones de  $i$  conjuntos de los  $n$  conjuntos dados.

## 1 Teoría básica de conjuntos

- El concepto de conjunto
- Operaciones con conjuntos
- Propiedades
- Conjunto finito. Principio de la adición

## 2 Álgebra de Boole

- Definición de álgebra de Boole

## ■ Propiedades en un álgebra de Boole

## 3 Funciones booleanas en el álgebra de Boole binaria

- Funciones booleanas
- La forma canónica
- Obtención de las formas canónicas
- Simplificación de variables booleanas

# Álgebra de Boole

El álgebra de Boole es una estructura matemática que, como tal, aparece en muchas situaciones. En particular, el álgebra de Boole tiene aplicación en la síntesis de redes de conmutación, en el estudio de circuitos digitales y en el análisis y programación mediante ordenador.

## 1 Teoría básica de conjuntos

- El concepto de conjunto
- Operaciones con conjuntos
- Propiedades
- Conjunto finito. Principio de la adición

## 2 Álgebra de Boole

- Definición de álgebra de Boole

- Propiedades en un álgebra de Boole

## 3 Funciones booleanas en el álgebra de Boole binaria

- Funciones booleanas
- La forma canónica
- Obtención de las formas canónicas
- Simplificación de variables booleanas

# Álgebra de Boole

## Definición

Sea  $\mathcal{B} = \langle B, +, *, -, 0, 1 \rangle$  donde:

- $B$  es un conjunto no vacío ( $B \neq \emptyset$ ),
- $0, 1 \in B$  con  $0 \neq 1$
- $+$  y  $*$  son operaciones binarias:

$$\begin{aligned} + : B \times B &\rightarrow B, \\ (a, b) &\mapsto a + b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * : B \times B &\rightarrow B, \\ (a, b) &\mapsto a * b. \end{aligned}$$

- $-$  es una operación unaria:

$$\begin{aligned} - : B &\rightarrow B, \\ a &\mapsto \bar{a}. \end{aligned}$$

# Álgebra de Boole

Dícese que  $\mathcal{B}$  tiene estructura de álgebra de Boole si:

A1

Las operaciones  $+$  y  $*$  son asociativas  $\forall a, b, c \in B$

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

A2

Las operaciones  $+$  y  $*$  son conmutativas  $\forall a, b \in B$

$$a + b = b + a$$

$$a * b = b * a$$

# Álgebra de Boole

**A3**

Cada operación binaria tiene elemento neutro  $\forall a \in B$

$$\exists 0 \in B : a + 0 = 0 + a = a$$

$$\exists 1 \in B : a * 1 = 1 * a = a$$

**A4**

Para cada elemento  $a \in B$  existe un único elemento  $\bar{a} \in B$  denominado complementario de  $a$  tal que

$$a + \bar{a} = 1; \quad a * \bar{a} = 0$$



# Álgebra de Boole

A5

Cada operación binaria es distributiva respecto de la otra

$\forall a, b, c \in B$

$$a * (b + c) = a * b + a * c$$

$$a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$$

Estas cinco parejas de propiedades se conocen como los axiomas del álgebra de Boole. Cualquier otra propiedad de un álgebra de Boole se puede deducir a partir de las anteriores.

# Álgebra de Boole

Las operaciones  $+$ ,  $*$  y  $-$  se denominan suma, producto y complementario respectivamente. En ausencia de paréntesis  $-$  tiene preferencia sobre  $*$  y  $*$  sobre  $+$ . Usualmente se omitirá el símbolo  $*$ , así para escribir  $a * b$  lo haremos como  $ab$ .

El elemento neutro de la suma se denomina elemento *cero* y el elemento neutro del producto se denomina elemento *unidad*.

# Ejemplos de álgebras de Boole

## Ejemplo 1

Considérese un conjunto  $U$  finito y  $U \neq \emptyset$ . El conjunto  $\mathcal{P}(U)$  con las operaciones:

- $\cup$  unión de conjuntos,
- $\cap$  intersección de conjuntos,
- $^c$  complementario de un conjunto

Tiene estructura de álgebra de Boole.

El neutro de la unión es el conjunto vacío  $\emptyset$  y el neutro de la intersección es el conjunto  $U$ .

## Ejemplo de álgebras de Boole

### Ejemplo 2

Sea  $D_{70} = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}$  el conjunto formado por los divisores de 70. Si se define en  $D_{70}$  las siguientes operaciones:

- $a + b = \text{mcm}(a, b),$
- $a * b = \text{mcd}(a, b),$
- $\bar{a} = 70/a$

Entonces  $D_{70}$  tiene estructura de álgebra de Boole con 1 como elemento cero y 70 como elemento unidad.

# Ejemplos de álgebras de Boole

## Ejemplo 3

Sea  $B = \{0, 1\}$  con las operaciones binarias  $+$  y  $*$  definidas por:

$+$	1	0
1	1	1
0	1	0

$*$	1	0
1	1	0
0	0	0

Y la operación unaria  $\bar{\phantom{x}}$  definida por  $\bar{0} = 1$ ,  $\bar{1} = 0$ . Entonces  $\mathcal{B} = \langle 0, 1, +, *, \bar{\phantom{x}} \rangle$  es un álgebra de Boole, denominada **álgebra de Boole binaria**.

# Principio de dualidad

## Principio

En una álgebra de Boole toda propiedad que se pueda deducir de los axiomas o de cualquier otra propiedad derivada de ellos, da otra propiedad que se obtiene intercambiando:

- las operaciones suma y producto,
- los símbolos 0 y 1

La propiedad que se obtiene de esta manera recibe el nombre de **propiedad dual** de la inicial.

# Principio de dualidad

Por ejemplo, la propiedad dual de:

$$(1 + a)(b + 0) = b$$

Es:

$$(0a) + (b1) = b$$

El principio de dualidad es consecuencia de la propia estructura del álgebra de Boole, ya que cada par de propiedades, en su definición, vienen dadas por una propiedad y su dual.

## 1 Teoría básica de conjuntos

- El concepto de conjunto
- Operaciones con conjuntos
- Propiedades
- Conjunto finito. Principio de la adición

## 2 Álgebra de Boole

- Definición de álgebra de Boole

## ■ Propiedades en un álgebra de Boole

## 3 Funciones booleanas en el álgebra de Boole binaria

- Funciones booleanas
- La forma canónica
- Obtención de las formas canónicas
- Simplificación de variables booleanas



# Propiedades

Se puede demostrar matemáticamente que todo álgebra de Boole finito es estructuralmente el mismo que un álgebra de Boole de conjuntos. En este sentido todo álgebra de Boole satisfará las mismas propiedades que un álgebra de Boole de conjuntos. Así, en la tabla siguiente se da la lista de propiedades que comparten un álgebra de Boole finito,  $\mathcal{B}$ , y un álgebra de Boole de conjuntos,  $\mathcal{P}(U)$

# Propiedades

	$\mathcal{B}$	$\mathcal{P}(U)$
Commutatives	$x + y = y + x$ $xy = yx$	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Associatives	$(x + y) + z = x + (y + z)$ $(xy)z = x(yz)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Idempotència	$x + x = x$ $xx = x$	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Involutiva	$\overline{(\overline{x})} = x$	$(A^c)^c = A$
Distributives	$x + (yz) = (x + y)(x + z)$ $x(y + z) = xy + xz$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Lleis de De Morgan	$\overline{(x + y)} = \overline{x} \overline{y}$ $\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
Absorció	$x + xy = x$ $x(x + y) = x$	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
Element absorbent	$x + 1 = 1$ $x0 = 0$	$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$
Element neutre	$x + 0 = x$ $x1 = x$	$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$
Prop. del complement	$x + \overline{x} = 1$ $x\overline{x} = 0$ $\overline{\overline{0}} = 1$ $\overline{\overline{1}} = 0$	$A \cup A^c = U$ $A \cap A^c = \emptyset$ $\emptyset^c = U$ $U^c = \emptyset$

# Propiedades

Se sabe que si un conjunto  $A$  tiene  $n$  elementos, entonces  $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$  y, debido a la relación que hay entre conjuntos y álgebras de Boole, se puede enunciar el siguiente resultado:

## Teorema

Todo álgebra de Boole finito tiene  $2^n$  elementos para algún entero positivo  $n$ .

## 1 Teoría básica de conjuntos

- El concepto de conjunto
- Operaciones con conjuntos
- Propiedades
- Conjunto finito. Principio de la adición

## 2 Álgebra de Boole

- Definición de álgebra de Boole

- Propiedades en un álgebra de Boole

## 3 Funciones booleanas en el álgebra de Boole binaria

- Funciones booleanas
- La forma canónica
- Obtención de las formas canónicas
- Simplificación de variables booleanas

## 1 Teoría básica de conjuntos

- El concepto de conjunto
- Operaciones con conjuntos
- Propiedades
- Conjunto finito. Principio de la adición

## 2 Álgebra de Boole

- Definición de álgebra de Boole

- Propiedades en un álgebra de Boole

## 3 Funciones booleanas en el álgebra de Boole binaria

### ■ Funciones booleanas

- La forma canónica
- Obtención de las formas canónicas
- Simplificación de variables booleanas

# Funciones booleanas

Se considera a partir de ahora el álgebra de Boole binaria donde  $B = \{0, 1\}$  y se denota como  $B^n$  al producto cartesiano de  $B$  con él mismo  $n$  veces.

$$B^n = B \times B \times \cdots \times B = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_i \in \{0, 1\} \forall i = 1, \cdots, n\}$$

Se denominan variaciones con repetición de  $n$  elementos diferentes tomados de  $k$  en  $k$  a las muestras ordenadas de  $k$  elementos, los cuales se pueden repetir, tomados de los  $n$  elementos.

Su número viene dado por  $VR_{n,k} = n^k$ .

# Funciones booleanas

Nótese que si  $B = \{0, 1\}$ , entonces  $|B^n| = 2^n$ , así

$$B^2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

$$B^3 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), \\ (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

# Funciones booleanas

## Definición

Se denomina función booleana definida en  $B$  o función de conmutación lógica a toda aplicación:

$$f : B^n \longrightarrow B$$

Tal que  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se puede expresar a partir de las operaciones definidas en  $B$  realizadas sobre las variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Toda función booleana en  $B = \{0, 1\}$  se puede representar mediante tablas de valores o tablas de verdad. Las  $n$  primeras columnas permiten representar los  $2^n$  elementos de  $B^n$  y la columna final indica el valor que asigna  $f$  a cada  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .



# Funciones booleanas

## Ejemplo

Calcúlense los valores de la función booleana

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + \bar{x}_3$$

Los valores de esta función vienen representados en la tabla siguiente:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$\bar{x}_3$	$x_1x_2 + \bar{x}_3$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

# Número de funciones booleanas en el álgebra de boole binaria

El número de elementos del conjunto  $B^n$  es  $2^n$  y para cada uno de estos elementos una función booleana sobre  $\{0, 1\}$  puede tomar el valor 0 o el valor 1. Entonces:

$$\{f \mid f : B^n \longrightarrow B\} = VR_{2,2^n} = 2^{(2^n)}$$

Así para  $n = 2$ , el número de funciones booleanas será  $2^4 = 16$ ;  
para  $n = 3$ , el número de funciones booleanas será  $2^8 = 256$ ...

# Número de funciones booleanas en el álgebra de Boole binaria

Las 16 funciones booleanas de dos variables son:

$$f_0(x_1, x_2) = 0; \quad f_1(x_1, x_2) = x_1x_2; \quad f_2(x_1, x_2) = x_1\overline{x_2}; \quad f_3(x_1, x_2) = x_1;$$

$$f_4(x_1, x_2) = \overline{x_1}x_2; \quad f_5(x_1, x_2) = x_2; \quad f_6(x_1, x_2) = \overline{x_1}x_2 + x_1\overline{x_2}; \quad f_7(x_1, x_2) = x_1 + x_2;$$

$$f_8(x_1, x_2) = \overline{x_1}\overline{x_2}; \quad f_9(x_1, x_2) = x_1x_2 + \overline{x_1}\overline{x_2}; \quad f_{10}(x_1, x_2) = \overline{x_2}; \quad f_{11}(x_1, x_2) = x_1 + \overline{x_2}$$

$$f_{12}(x_1, x_2) = \overline{x_1}; \quad f_{13}(x_1, x_2) = \overline{x_1} + x_2; \quad f_{14}(x_1, x_2) = \overline{x_1} + \overline{x_2}; \quad f_{15}(x_1, x_2) = 1.$$

## Ejercicio

Escríbanse las tablas de valores de las funciones booleanas de dos variables.

# Funciones booleanas

## Ejercicio

Calcúlense los valores de la función booleana

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + \bar{x}_3$$

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1 x_2$	$\bar{x}_3$	$x_1 x_2 + \bar{x}_3$
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

# Funciones booleanas

## Ejercicio

Solución:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1 x_2$	$\overline{x_3}$	$x_1 x_2 + \overline{x_3}$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

## 1 Teoría básica de conjuntos

- El concepto de conjunto
- Operaciones con conjuntos
- Propiedades
- Conjunto finito. Principio de la adición

## 2 Álgebra de Boole

- Definición de álgebra de Boole

- Propiedades en un álgebra de Boole

## 3 Funciones booleanas en el álgebra de Boole binaria

- Funciones booleanas
- **La forma canónica**
- Obtención de las formas canónicas
- Simplificación de variables booleanas

# Formas canónicas

## Minterm y Maxterm

En  $B^n$ , el producto de  $n$  variables diferentes complementadas o no, recibe el nombre de **minterm**. En  $B^n$ , la suma de  $n$  variables diferentes complementadas o no, recibe el nombre de **maxterm**.

Por ejemplo,  $B^4$ , las expresiones  $x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$ ,  $\bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4$ , son minterms. Por ejemplo, en  $B^3$ , las expresiones  $x_1 + x_2 + \bar{x}_3$ ,  $\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3$ , son maxterms.

# Formas canónicas

## Proposición

Sea  $f : B^n \longrightarrow B$  una función booleana, entonces:

- $f$  se puede expresar como una suma de minterms (suma de productos). Esta expresión se denomina forma canónica disjuntiva de  $f$ .
- $f$  se puede expresar como un producto de maxterms (producto de sumas). Esta expresión se denomina forma canónica conjuntiva de  $f$ .



# Formas canónicas

## Proposición

Sea  $f : B^n \longrightarrow B$  una función booleana, entonces:

- Las formas canónicas de una función booleanas son únicas.
- Dos funciones booleanas son equivalentes (son la misma función) si y solo si tienen las mismas formas canónicas.

## 1 Teoría básica de conjuntos

- El concepto de conjunto
- Operaciones con conjuntos
- Propiedades
- Conjunto finito. Principio de la adición

## 2 Álgebra de Boole

- Definición de álgebra de Boole

- Propiedades en un álgebra de Boole

## 3 Funciones booleanas en el álgebra de Boole binaria

- Funciones booleanas
- La forma canónica
- Obtención de las formas canónicas
- Simplificación de variables booleanas

# Formas canónicas

Las formas canónicas de una función booleana se pueden obtener de dos maneras:

## 1. A partir de una tabla de valores

La **forma canónica disjuntiva** de  $f : B^n \rightarrow B$  se obtiene a partir de cada uno de los valores 1 que toma la función (un producto de todas las variables o sus complementos toman el valor 1 cuando **todos los factores toman el valor 1**).

Así el número de minterms en la forma disjuntiva es igual al número de unos (1) en la tabla de valores de  $f$ .

# Formas canónicas

## 1. A partir de una tabla de valores

La **forma canónica conjuntiva** de  $f : B^n \rightarrow B$  se obtiene a partir de cada uno de los valores 0 que toma la función (una suma de todas las variables o sus complementos toman el valor 0 cuando **todos los factores toman el valor 0**).

Así el número de maxterms en la forma conjuntiva es igual al número de ceros (0) en la tabla de valores de  $f$ .

# Formas canónicas

## Ejercicios

Obténganse las formas canónicas disjuntiva y conjuntiva de la función  $f : B^3 \rightarrow B$  dada por la tabla:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

# Formas canónicas

## Solución

La forma canónica disjuntiva de  $f$  será:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1x_2x_3$$

La forma canónica conjuntiva de  $f$  será:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + \bar{x}_3)(\bar{x}_1 + x_2 + x_3)(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3)$$

# Formas canónicas

## 2. A partir de su expresión en la fórmula

Para obtener la **forma canónica disjuntiva** de  $f : B^n \rightarrow B$  interesa obtener una suma de productos, aunque estos términos no sean minterms.

La propiedad que lo suele permitir es la distributiva del producto respecto de la suma. Una vez obtenida la suma de productos, cada variable  $x_j$  que no figura en un sumando se puede añadir multiplicándola por 1, entonces  $1 = x_j + \bar{x}_j$  y, después se vuelve a aplicar la propiedad distributiva.

# Formas canónicas

## 2. A partir de su expresión en la fórmula

Para obtener la **forma canónica conjuntiva** de  $f : B^n \longrightarrow B$  se va a transformar la expresión inicial en producto de sumas. En este caso juega un papel esencial la propiedad distributiva de la suma respecto del producto.

Una vez se obtenga el producto de sumas, cada variable  $x_j$  que no figura en un factor se puede añadir sumando 0, haciendo  $0 = x_j \bar{x}_j$  y, después se vuelve a aplicar la propiedad distributiva.

En ambos casos, después de multiplicar por 1 o sumar 0 y aplicar las propiedades distributivas correspondientes se han de eliminar los minterms o maxterms repetidos aplicando la propiedad idempotente.



# Formas canónicas

## Ejercicio

Obténganse las formas canónicas disjunta y conjuntiva de la función  $f : B^3 \longrightarrow B$  dada por:

$$f(x, y, z) = \bar{x} + yz$$

## Formas canónicas

### Solución en la forma disjuntiva

$$f(x, y, z) = \bar{x} + yz =$$

Se introducen las variables que falten en cada sumando:

$$\bar{x}(y + \bar{y})(z + \bar{z}) + (x + \bar{x})yz =$$

Se aplica la propiedad distributiva:

$$\bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + xyz + \bar{x}yz$$

Se eliminan minterms repetidos gracias a la idempotencia:

$$\bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + xyz.$$

## Formas canónicas

### Solución en la forma conjuntiva

$$f(x, y, z) = \bar{x} + yz =$$

Se aplica la distributiva de la suma respecto del producto:

$$(\bar{x} + y)(\bar{x} + z) =$$

Se añade a cada factor las variables que falten:

$$(\bar{x} + y + z\bar{z})(\bar{x} + y\bar{y} + z) =$$

Se aplica la conmutativa de la suma según el factor:

$$(\bar{x} + y + z\bar{z})(\bar{x} + z + y\bar{y}) =$$

...

## Formas canónicas

### Solución en la forma conjuntiva

Se aplica la distributiva de la suma respecto del producto:

$$(\bar{x} + y + z)(\bar{x} + y + \bar{z})(\bar{x} + z + y)(\bar{x} + z + \bar{y}) =$$

Se aplica la conmutativa de la suma:

$$(\bar{x} + y + z)(\bar{x} + y + \bar{z})(\bar{x} + y + z)(\bar{x} + \bar{y} + z) =$$

Se eliminan los maxterms repetidos gracias a la idempotencia:

$$(\bar{x} + y + z)(\bar{x} + y + \bar{z})(\bar{x} + \bar{y} + z).$$

Es importante añadir las variables en el orden en que figuren en la función:  $x, y, z$ .

## 1 Teoría básica de conjuntos

- El concepto de conjunto
- Operaciones con conjuntos
- Propiedades
- Conjunto finito. Principio de la adición

## 2 Álgebra de Boole

- Definición de álgebra de Boole

- Propiedades en un álgebra de Boole

## 3 Funciones booleanas en el álgebra de Boole binaria

- Funciones booleanas
- La forma canónica
- Obtención de las formas canónicas
- Simplificación de variables booleanas

# Simplificación de variables booleanas

El objetivo de esta sección es la obtención de expresiones simplificadas de las funciones booleanas, tanto si su expresión inicial es una de las formas canónicas como si no.

Los métodos habituales de simplificación son tres: método algebraico, método gráfico (los mapas de Karnaugh) y el método iterativo (método de Quine-McCluskey).

Nosotros solo utilizaremos el método algebraico y el método gráfico.

# Simplificación de variables booleanas

## Método algebraico

Consiste en la utilización de las propiedades generales válidas en cualquier álgebra de Boole. Las propiedades que facilitan el proceso de simplificación son:

- Complementario:  $x + \bar{x} = 1$ ;  $x\bar{x} = 0$
- Idempotencia:  $x + x = x$ ;  $xx = x$
- Absorción:  $x + xy = x$ ;  $x(x + y) = x$
- Ley de De Morgan:  $\overline{x + y} = \bar{x}\bar{y}$ ;  $\overline{xy} = \bar{x} + \bar{y}$
- Distributivas:  $xy + z = x(y + z)$ ;  $x + yz = (x + y)(x + z)$
- Elemento absorbente:  $1 + x = 1$ ;  $x0 = 0$ .

# Simplificación de variables booleanas

## Método algebraico - Ejemplo

Simplifíquese la función  $f : B^3 \rightarrow B$  definida por:

$$f(x, y, z) = x + \bar{x}y + xy\bar{z} + xz + x\bar{z}$$



# Simplificación de variables booleanas

## Método algebraico - Solución

Se aplica la distributiva:

$$x(1 + y\bar{z}) + \bar{x}y + x(z + \bar{z}) =$$

Se aplican los elementos absorbentes y complementarios.

$$x + \bar{x}y + x =$$

Se aplica la propiedad idempotente.

$$x + \bar{x}y =$$

...

# Simplificación de variables booleanas

## Método algebraico . Solución

Se aplica la distributiva:

$$(x + \bar{x})(x + y) =$$

Se aplica la de complementarios:

$$1(x + y) = x + y$$

# Simplificación de variables booleanas

## Ejercicio

Escríbase la función booleana:

$$F(x, y, z) = (x + y)\bar{z}$$

En forma normal disjuntiva algebraicamente empleando las propiedades del álgebra de Boole, y como suma booleana de minterms.

# Simplificación de variables booleanas

## Con propiedades del álgebra de Boole

$$F(x, y, z) = (x + y)\bar{z}$$

Se aplica la distributiva:

$$= x\bar{z} + y\bar{z}$$

Se aplica la identidad:

$$= x1\bar{z} + 1y\bar{z}$$

Inverso de 1:

$$= x(y + \bar{y})\bar{z} + (x + \bar{x})y\bar{z}$$

# Simplificación de variables booleanas

## Con propiedades del álgebra de Boole

Distributiva:

$$= xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$$

Idempotencia:

$$= xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$$

# Simplificación de variables booleanas

## Con la tabla de minterms

En primer lugar se necesitará la tabla de valores de  $F$  para todos los posibles valores de las variables:

$x$	$y$	$z$	$x + y$	$\bar{z}$	$(x + y)\bar{z}$	minterm
0	0	0	0	1	0	
0	0	1	0	0	0	
0	1	0	1	1	1	$\bar{x}y\bar{z}$
0	1	1	1	0	0	
1	0	0	1	1	1	$x\bar{y}\bar{z}$
1	0	1	1	0	0	
1	1	0	1	1	1	$xy\bar{z}$
1	1	1	1	0	0	

Los minterms corresponden a las 3 filas de la tabla donde la función vale 1, así pasa cuando los tres valores valen literalmente 1, por tanto:

$$F(x, y, z) = \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z}$$

# Simplificación de variables booleanas

## Ejercicio

Un motor  $M$  está controlado por tres interruptores  $x, y, z$  y funciona únicamente cuando dos de los interruptores están en modo *ON*. Se deduce la tabla de valores de la función  $M(x, y, z) : B^3 \longrightarrow B$  y la expresión booleana de  $M$  en forma normal disjuntiva.

# Simplificación de variables booleanas

## Solución

Los tres interruptores son variables booleanas ya que pueden tomar dos valores. Se recuerda que el valor 1 corresponde al interruptor en modo ON y el valor 0 a interruptores en la posición OFF: El motor  $M$  toma el valor 1 (encendido) cuando tiene los otros dos interruptores activados y 0 (apagado) en todos los demás casos.



# Simplificación de variables booleanas

## Solución

La tabla de valores de  $M$  a partir de las condiciones del problema son:

$x$	$y$	$z$	$M$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Y por tanto la expresión booleana  $M(x, y, z)$  estará formada por los minterms que hacen que la función tome el valor 1 (motor encendido):

$$M(x, y, z) = \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z}$$

# Simplificación de variables booleanas

## Ejercicios

Simplificación de funciones:

$$1 \quad f(x, y) = (x + y)(x + \bar{y})(\bar{x} + y)$$

$$2 \quad f(x, y, z, w) = \overline{w + w\bar{x} + yz}$$

$$3 \quad f(x, y, z, w) = xw + x\bar{y} + yz + x\bar{z}$$

# Simplificación de variables booleanas

## Soluciones

1  $f(x, y) = xy$

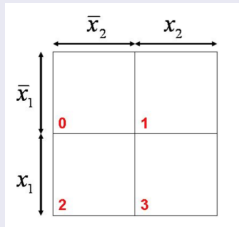
2  $f(x, y, z, w) = \bar{x}(\bar{y} + \bar{z})$

3  $f(x, y, z, w) = x + yz$

# Simplificación de variables booleanas

## Diagramas de Karnaugh

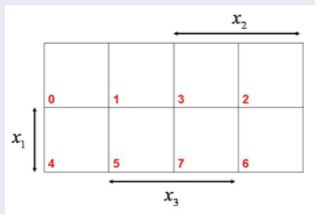
Las funciones booleanas escritas en forma normal disjuntiva se pueden simplificar empleando los diagramas o mapas de Karnaugh. Se trata de un método visual muy útil para realizar simplificaciones. El diagrama de Karnaugh para dos variables  $x_1, x_2$  está formado por  $2^2 = 4$  cuadrados que representan todos los minterms de grado dos posibles:



# Simplificación de variables booleanas

## Diagramas de Karnaugh

El diagrama de Karnaugh para 3 variables de  $2^3 = 8$  cuadrados:

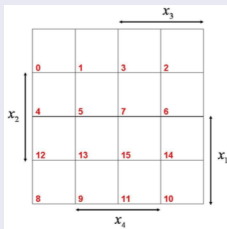


En un diagrama de Karnaugh se dice que dos cuadrados son adyacentes si difieren solo en un literal; es decir, al moverse vertical u horizontalmente solo una variable cambia entre dos cuadrados adyacentes.

# Simplificación de variables booleanas

## Diagramas de Karnaugh

En el caso de 4 variables, hay que fijarse en como los valores superiores (los de la izquierda) son adyacentes a los cuadrados inferiores (de la derecha) ya que solo se diferencian en un literal.



## Simplificación de variables booleanas

Las funciones booleanas se pueden representar mediante diagramas de Karnaugh introduciendo a cada cuadrado el valor de la función.

### Ejercicios

Represéntese la función  $F$  empleando el diagrama de Karnaugh.

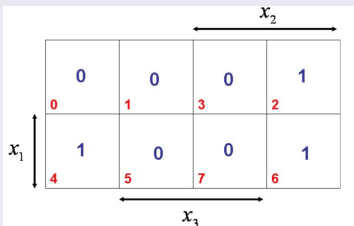
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$F(x_1, x_2, x_3)$	minterm
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	1	$\overline{x_1} x_2 \overline{x_3}$
0	1	1	0	
1	0	0	1	$x_1 \overline{x_2} \overline{x_3}$
1	0	1	0	
1	1	0	1	$x_1 x_2 \overline{x_3}$
1	1	1	0	

## Simplificación de variables booleanas

Las funciones booleanas se pueden representar mediante diagramas de Karnaugh introduciendo a cada cuadrado el valor de la función.

### Solución

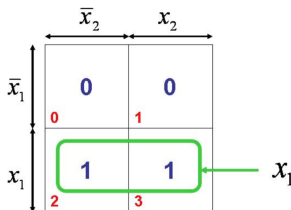
En el diagrama de Karnaugh habrá 3 cuadrados con el valor 1, se corresponderán con los minterms  $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 = m_2$ ,  $x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 = m_4$  y  $x_1 x_2 \bar{x}_3 = m_6$ . La resta de cuadrados tiene el valor 0:





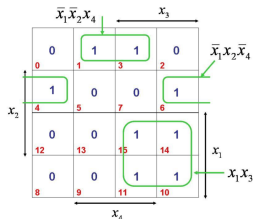
## Simplificación de variables booleanas

Para simplificar expresiones booleanas a partir de mapas de Karnaugh se empleará la siguiente regla: siempre que en un diagrama de Karnaugh dos cuadrados adyacentes tomen el valor 1, los minterms representados por los cuadrados de estos se pueden combinar en un producto que contendrá solo los literales comunes a los dos minterms.



# Simplificación de variables booleanas

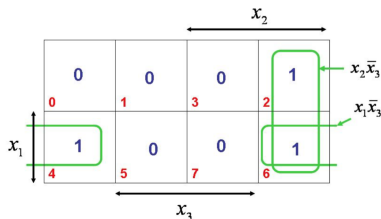
Esta idea se puede generalizar: se pueden combinar los minterms pertenecientes a cuadrados adyacentes de tal forma que el total de cuadrados combinados sea una potencia de 2. Un bloque formado por un cuadrado elimina 0 variables; un bloque formado por dos cuadrados elimina una variable; un bloque formado por 4 cuadrados elimina dos variables...



# Simplificación de variables booleanas

## Ejercicios

Simplifica la función booleana  $F(x_1, x_2, x_3)$  del ejemplo anterior empuendo el diagrama de Karnaugh.



$$F(x_1, x_2, x_3) = x_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_3$$

# Simplificación de variables booleanas

## Ejercicio

Un ascensor dispone de un dispositivo de seguridad: el ascensor funciona cuando esté vacío o con pesos de entre 25 y 300 kilogramos. El ascensor tiene tres sensores: el sensor A sensible a cualquier peso, el sensor B sensible a pesos superiores a 25 kilogramos y el sensor C sensible a pesos por encima de 300 kilogramos. Encuéntrase la función más sencilla que cumple las condiciones expuestas.

# Simplificación de variables booleanas

## Solución

En primer lugar se ha de plantear el problema, identificar variables, la función booleana y determinar sus valores.

Las variables booleanas  $a$ ,  $b$  y  $c$  se corresponden a los tres tipos de sensores y la función booleana  $F$  corresponde al ascensor (se pondrá en marcha si se satisfacen las 3 condiciones de seguridad). Las variables  $a$ ,  $b$  y  $c$  toman el valor 1, si detectan peso según sus límites, y 0 si no detectan peso.

La función  $F(a, b, c)$  valdrá 1 cuando el ascensor se ponga en marcha (se satisfacen las condiciones de seguridad) y 0 cuando no se pone en marcha.

## Simplificación de variables booleanas

- $F(0, 0, 0) = 1$ , ningún sensor detecta peso (el ascensor está vacío), el ascensor se pone en marcha.
- $F(1, 0, 0) = 0$ ,  $A$  detecta peso, pero  $B$  y  $C$  no detectan peso (teniendo un peso de entre 0 y 25 kg en el ascensor); el ascensor no arranca.
- $F(1, 1, 0) = 1$ ,  $A$  y  $B$  detectan peso pero  $C$  no (la carga del ascensor está entre 25 y 300 kg); el ascensor arranca
- $F(1, 1, 1) = 0$ , todos los sensores detectan peso ( la carga del ascensor supera los 300 kg); el ascensor no se pone en marcha.

## Simplificación de variables booleanas

$a$	$b$	$c$	$F(a, b, c)$
0	0	0	1
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	0
1	0	1	
1	1	0	1
1	1	1	0

¿Y para el resto de combinaciones de valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$ ?

## Simplificación de variables booleanas

$F(0, 1, 0)$  corresponde a una situación donde el sensor  $A$  no detecta peso, el sensor  $B$  detecta peso entre 25 y 300 kg y el sensor  $C$  no detecta peso. Esta es una situación imposible. En ciertas ocasiones puede ocurrir que ciertas combinaciones de variables no puedan tomar un valor o que el valor de  $F$  no dependa de los valores de sus variables. Estos casos reciben el nombre de **casos imposibles** o **indiferentes**. En estas condiciones no importa el valor que tome  $F$ , y por defecto se le asignará el valor  $*$ .



# Simplificación de variables booleanas

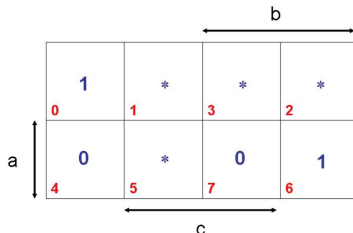
$a$	$b$	$c$	$F(a, b, c)$
0	0	0	1
0	0	1	★
0	1	0	★
0	1	1	★
1	0	0	0
1	0	1	★
1	1	0	1
1	1	1	0

Una expresión booleana para  $F$  es:

$$F(a, b, c) = ab\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$$

# Simplificación de variables booleanas

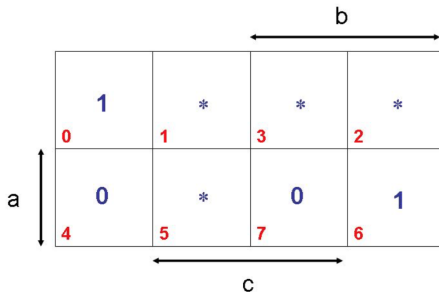
El diagrama de Karnaugh es:



El criterio que se seguirá es asignar aquel valor que permita simplificar la expresión definida por el diagrama de Karnaugh. Se obtienen los bloques de mayor tamaño posible juntando cuadrados que contengan o bien 1 o bien \*. Los cuadrados correspondientes a situaciones imposibles pueden cubrirse con bloques o quedar al descubierto.

# Simplificación de variables booleanas

La simplificación del mapa de Karnaugh es:



$$F(a, b, c) = \bar{a} + b\bar{c}$$

El ascensor se pone en marcha si el sensor  $A$  no detecta peso, o bien si el sensor  $B$  detecta peso y el sensor  $C$  no.