Programación Lineal

Programación lineal

- La programación lineal es una técnica matemática reciente (siglo XX)
- Consiste en una serie de métodos y procedimientos que permiten resolver problemas de optimización
- Minimizar o maximizar una función lineal, cuyas variables están sujetas a una serie de restricciones que expresamos mediante un sistema de inecuaciones lineales

- El objetivo fundamental es entender la naturaleza del problema y el perfil computacional a que dan lugar estos métodos
- Desde un punto de vista práctico los procedimientos manuales de resolución no tienen mucho interés porque hoy día existen abundantes herramientas informáticas
- Comenzaremos introduciendo el método de resolución gráfico, que resulta muy intuitivo

Ejemplo 1

- Marta es una estudiante universitaria que acaba de comprarse un ordenador nuevo. Necesita 240 euros mensuales para pagar el préstamo. Tiene dos trabajos, la primera como camarera en un pub donde gana 10,00 euros la hora y la segunda en el aula de informática donde gana 7,50 euros la hora. Teniendo en cuenta el número de asignaturas de las que está matriculada, Marta puede trabajar un máximo de 30 horas cada mes.
- ¿Cuál es la máxima cantidad de dinero que puede ganar Marta?

- Para resolver el problema, debemos construir un modelo de programación lineal
- Hay que traducir el enunciado del problema a una descripción matemática equivalente
- Para ello hay que tener claro cuáles son las variables, cuáles son las restricciones y cuál es el objetivo

- Variables: las incógnitas, las decisiones que hay que tomar

  X = número de horas trabajadas en el pub

  Y = número de horas trabajadas en el aula de informática

  Es importante notar que $X \geq 0$; $Y \geq 0$
- Restricciones dadas por el enunciado (o las reglas del juego), el número total de horas trabajadas

  $$X + Y \leq 30$$

  Deben utilizarse inecuaciones
- Objetivo: función lineal a optimizar, queremos que la cantidad que Marta gana sea máxima.

  $$\text{maximizar } G(X, Y) = 10{,}00\, X + 7{,}50\, Y$$

  $X = 30$

  $Y = 0$

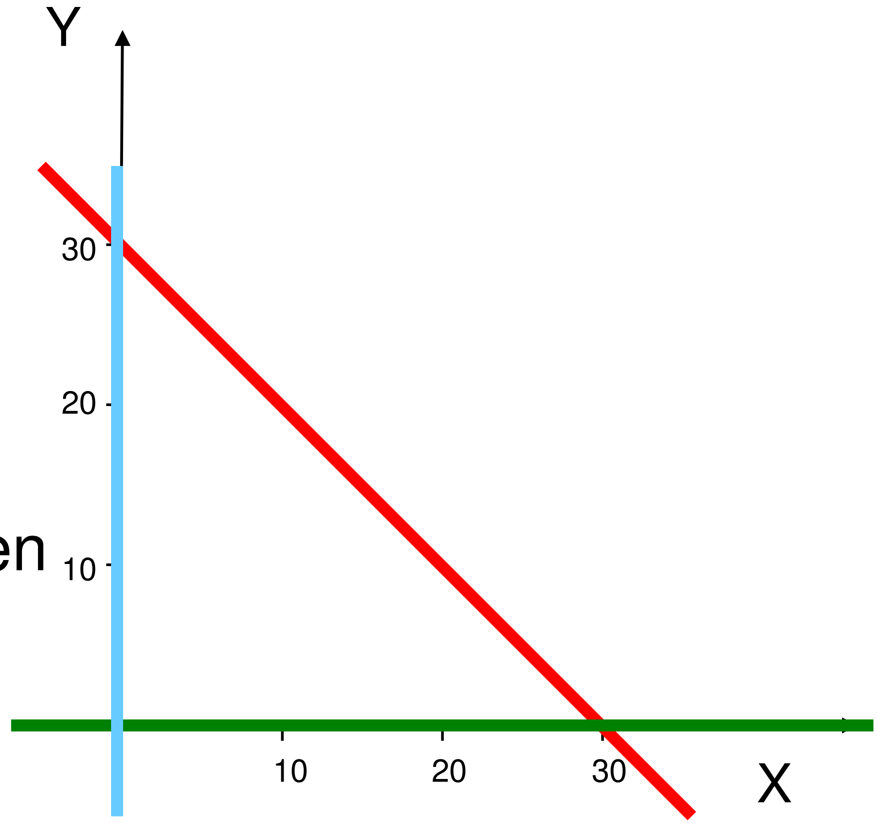
Los valores que toman las variables están ligadas a las restricciones del problema

$X + Y \leq 30$

$X \geq 0$

$Y \geq 0$

De todas las X, Y que satisfacen las restricciones, buscamos la que maximiza $G = 10X + 7{,}5Y$



Suposiciones

- No hay interacciones entre las variables
- La función objetivo es lineal (parámetros conocidos)
- Las restricciones son lineales (parámetros conocidos)
- Las variables son continuas (en caso contrario hablamos de programación lineal entera)

Ejemplo 2

- Marta es una estudiante universitaria que acaba de comprarse un ordenador nuevo. Necesita 240 euros mensuales para pagar el préstamo. Tiene dos trabajos, la primera como camarera en un pub donde gana 10,00 euros la hora y la segunda en el aula de informática donde gana 7,50 euros la hora. Teniendo en cuenta el número de asignaturas de las que está matriculada, Marta puede trabajar un máximo de 30 horas cada mes.
- ¿Cuál es el número mínimo de horas que tiene que trabajar Marta para poder pagar el préstamo?

- Variables: las incógnitas, las decisiones que hay que tomar

  X = número de horas trabajadas en el pub

  Y = número de horas trabajadas en el aula de informática

  Es importante notar que $X \geq 0$; $Y \geq 0$
- Restricciones dadas por el enunciado (o las reglas del juego), el número total de horas trabajadas y ganar para pagar el préstamo

  $$X + Y \leq 30$$

  $$10{,}00\,X + 7{,}5\,Y \geq 240$$

  Deben utilizarse inecuaciones
- Objetivo: función lineal a optimizar, queremos que las horas trabajadas sea mínima

  minimizar $H(X, Y) = X + Y$

  $X = 24$

  $Y = 0$

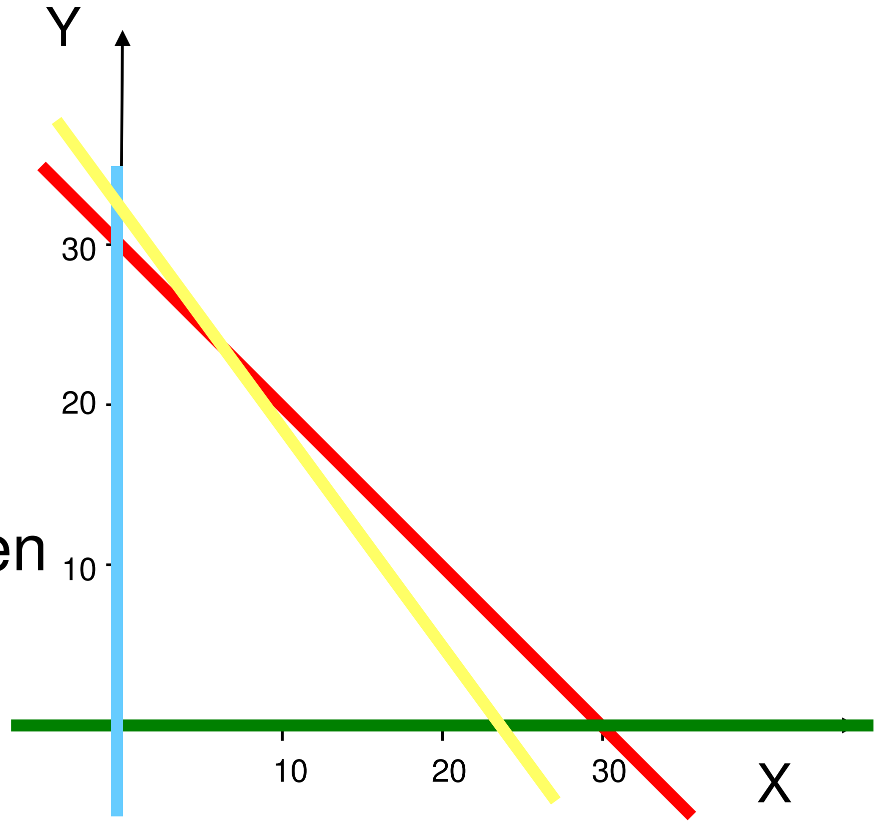
Los valores que toman las variables están ligadas a las restricciones del problema

$X + Y \leq 30$

$10{,}00\ X + 7{,}5\ Y \geq 240$

$X \geq 0$

$Y \geq 0$



De todas las X, Y que satisfacen las restricciones, buscamos la que minimiza $H = X + Y$

EJEMPLO

Gepetto S.L., manufactura muñecos y trenes de madera

Cada tren:

- Produce un beneficio neto de 2 €
- Requiere 1 hora de trabajo de acabado
- Requiere 1 hora trabajo de carpintería

Cada muñeco:

- Produce un beneficio neto de 3 €
- Requiere 2 horas de trabajo de acabado
- Requiere 1 hora de trabajo de carpintería

Cada semana Gepetto puede disponer de:

- Todo el material que necesite
- Solamente 100 horas de acabado
- Solamente 80 horas de carpintería

También:

- La demanda de trenes puede ser cualquiera (sin límite)
- La demanda de muñecos es como mucho 40

Gepetto quiere maximizar sus beneficios. ¿Cuántos muñecos y cuántos trenes debe fabricar?

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

VARIABLES DE DECISIÓN

x = nº de muñecos producidos a la semana
y = nº de trenes producidos a la semana

RESTRICCIONES

Son desigualdades que limitan los posibles valores de las variables de decisión
Vienen dadas por la disponibilidad de horas de acabado y carpintería y por la demanda de muñecos. También hay restricciones de signo

Restricción 1
no más de 100 horas de tiempo de acabado pueden ser usadas
$$2x + y \leq 100$$
Restricción 2
no más de 80 horas de tiempo de carpintería pueden ser usadas
$$x + y \leq 80$$
Restricción 3
limitación de demanda, no deben fabricarse más de 40 muñecos
$$x \leq 40$$

Restricciones de signo
$x \geq 0; \quad y \geq 0$

FUNCIÓN OBJETIVO

El objetivo de Gepetto es elegir valores de x e y para maximizar el beneficio

maximizar $Z = 3x + 2y$

Cuando *x* e *y* crecen, la función objetivo también crece. No puede crecer indefinidamente porque los valores de x e y están limitados por las restricciones

Formulación matemática del PPL

MODELO DE OPTIMIZACIÓN

maximizar:	$Z = 3x + 2y$	(función objetivo)
sujeto a:	$2x + y \leq 100$	(restricción de acabado)
	$x + y \leq 80$	(restricción de carpintería)
	$x \leq 40$	(restricción de demanda de muñecos)
	$x \geq 0$	(restricción de signo)
	$y \geq 0$	(restricción de signo)

Resolución gráfica de PPL

- No es muy práctica, sólo se puede aplicar con 2 o 3 variables
- Es bastante útil para interpretar visualmente los conceptos y procedimientos utilizados
- Para resolver gráficamente un PPL seguimos los siguientes pasos:
  - Dibujamos la región factible utilizando las ecuaciones de las rectas que resultan de convertir las restricciones en igualdades.
  - Evaluamos la función objetivo en la región factible y determinamos el de valor óptimo

Región factible de un PPL

- La **región factible** es el conjunto de todos los puntos que satisfacen todas las restricciones
- Para dos variables, es la región del plano delimitada por el sistema de desigualdades que forman las restricciones

Restricciones de Gepetto

$2x + y \leq 100$	**(restricción acabado)**
$x + y \leq 80$	**(restricción carpintería)**
$x \leq 40$	**(restricción demanda)**
$x \geq 0$	**(restricción signo)**
$y \geq 0$	**(restricción signo)**

$x = 40, y = 20 \in$ RF

satisface todas las restricciones

$x = 15, y = 70 \notin$ RF

no satisface la restricción de carpintería

$15 + 70 > 80$

Solución óptima de PPL

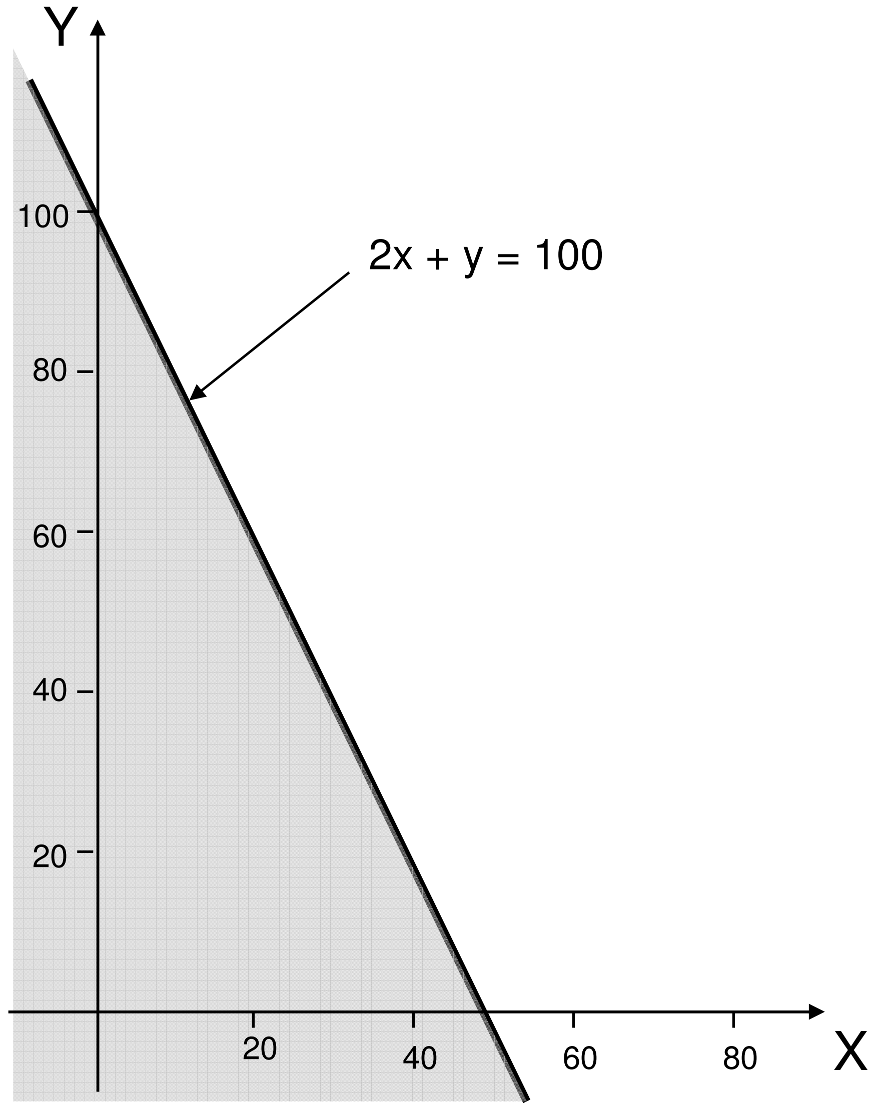
- Para un problema de maximización (minimización), una **solución óptima** es un punto en la región factible en el cual la función objetivo tiene un valor máximo (mínimo)
- PPL puede tener
  - una solución óptima
  - un número infinito de soluciones óptimas
  - no tiene solución óptima
- Se puede demostrar que, de existir, la solución óptima de un PPL está siempre en la frontera de la región factible, en un vértice (si la solución es única) o en un segmento entre dos vértices contiguos (si hay infinitas soluciones)

Región factible

Representación gráfica de la restricción, **$2x + y \leq 100$**

1.- Dibujamos la recta $2x + y = 100$

2.- Elegimos el semiplano que cumple la desigualdad (el semiplano que contiene un punto que satisface la desigualdad)

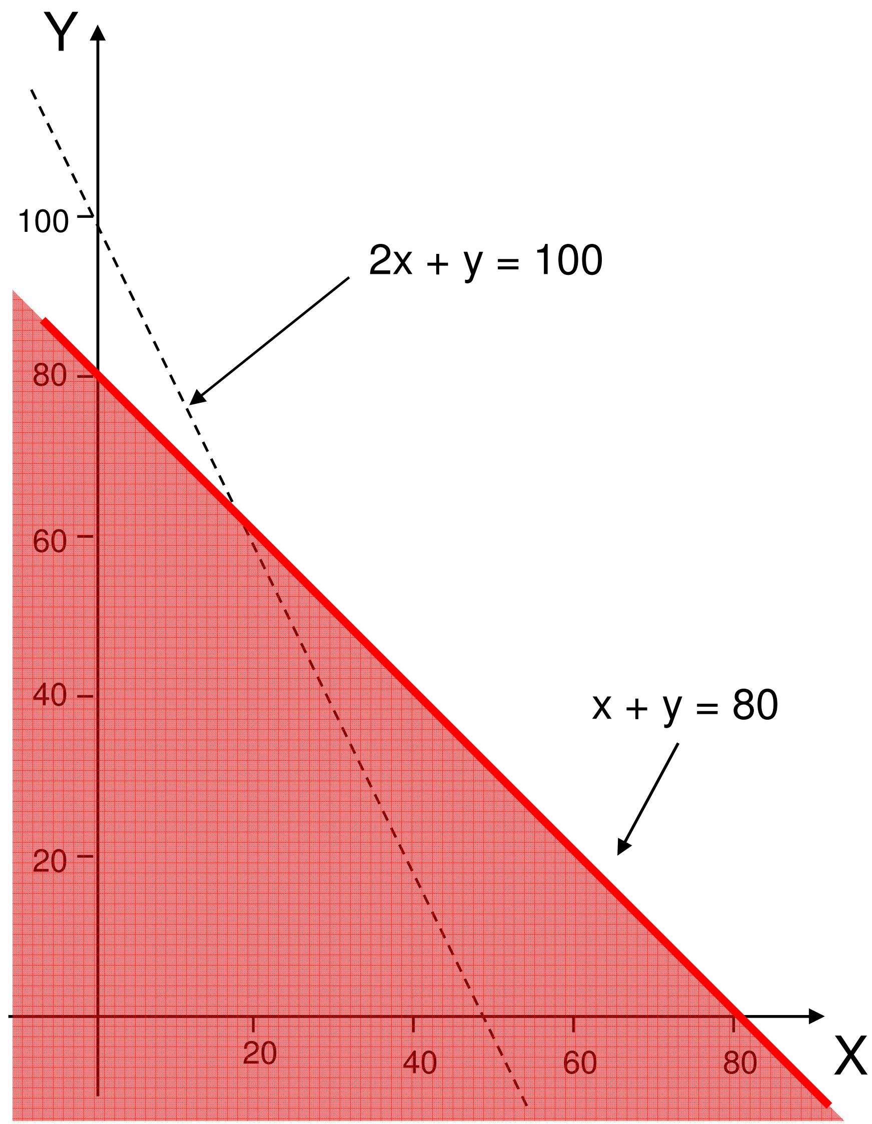


Región factible

Representación gráfica de la restricción, **x + y ≤ 80**

1.- Dibujamos la recta x + y = 80

2.- Elegimos el semiplano que cumple la desigualdad

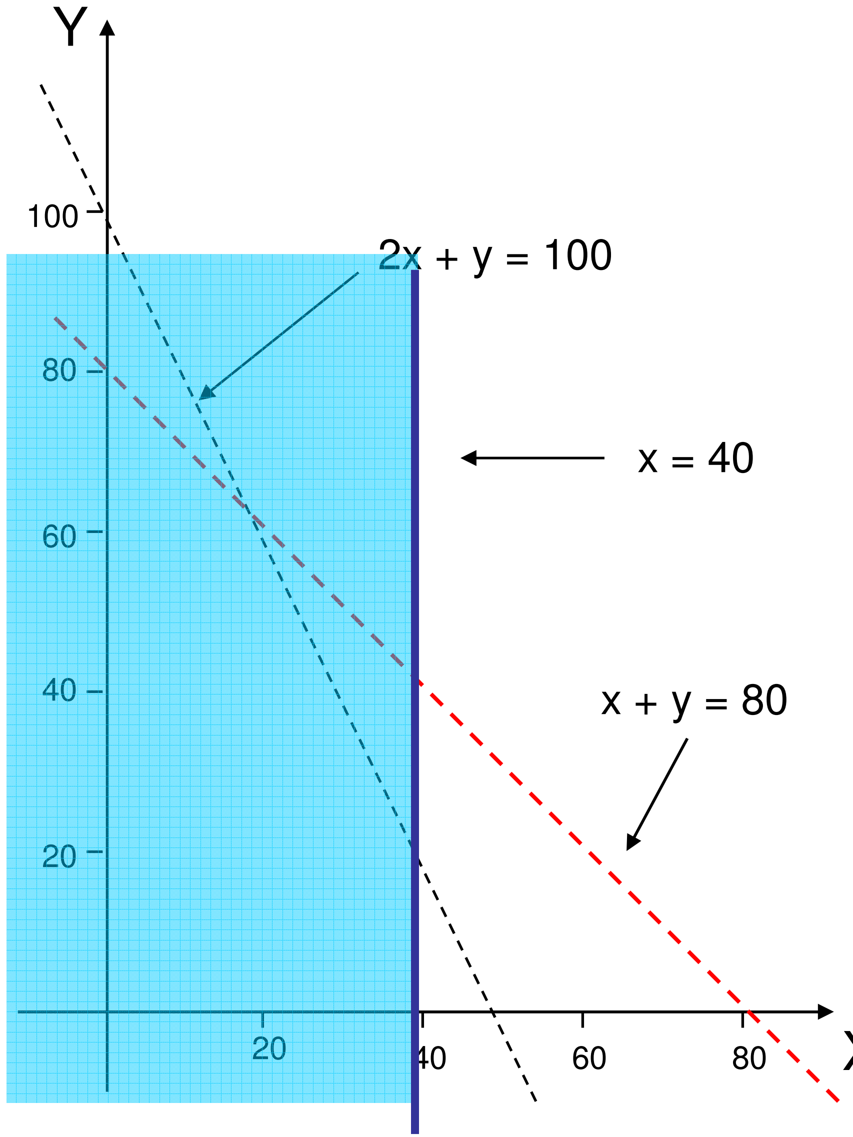


Región factible

Representación gráfica de la restricción, **x ≤ 40**

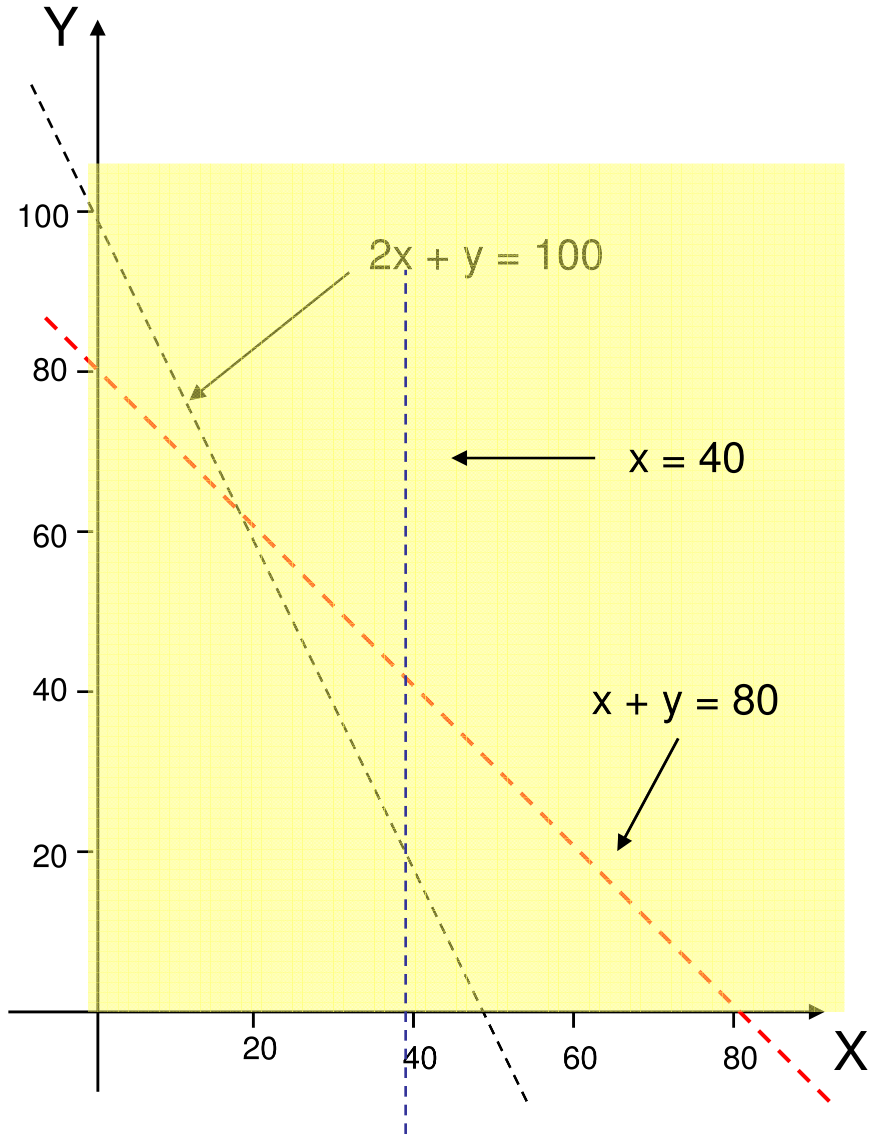
1.- Dibujamos la recta x = 40

2.- Elegimos el semiplano que cumple la desigualdad



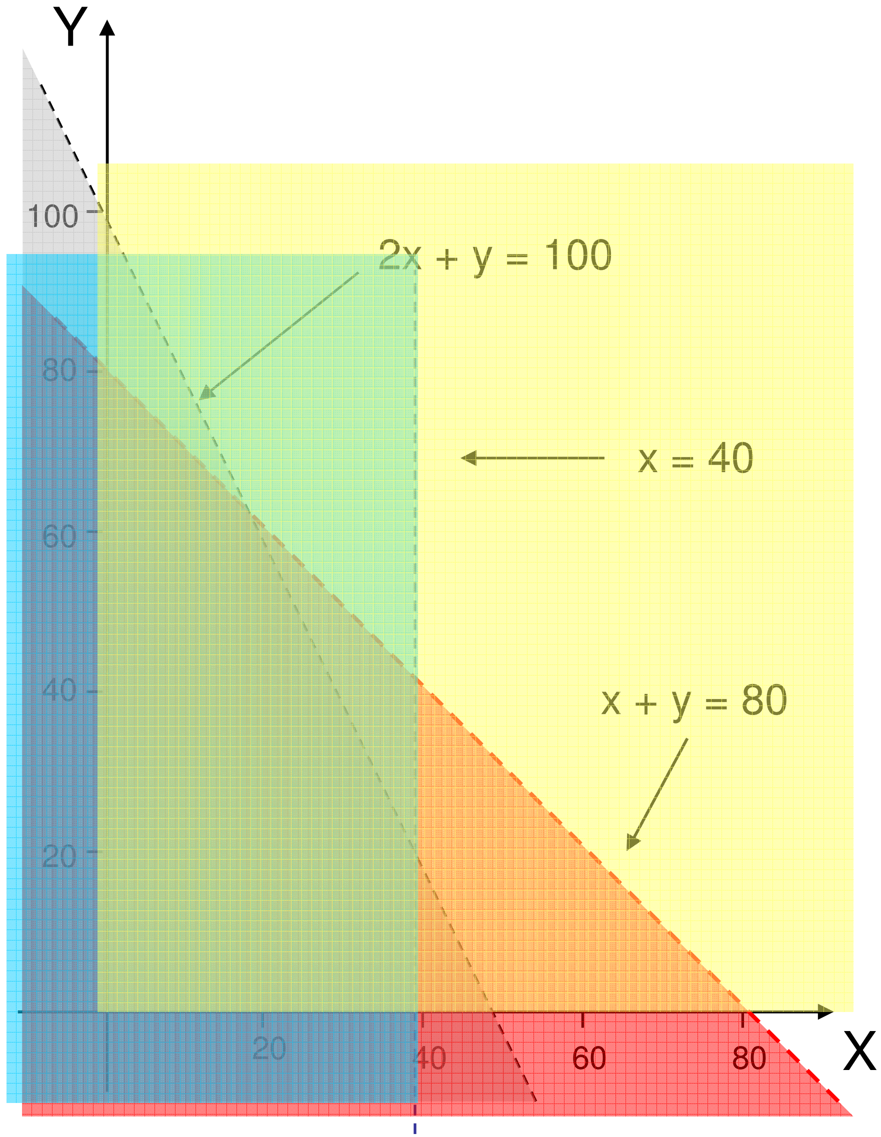
Región factible

Representación gráfica de las restricciones, **$x \geq 0$ y ≥ 0**



Región factible

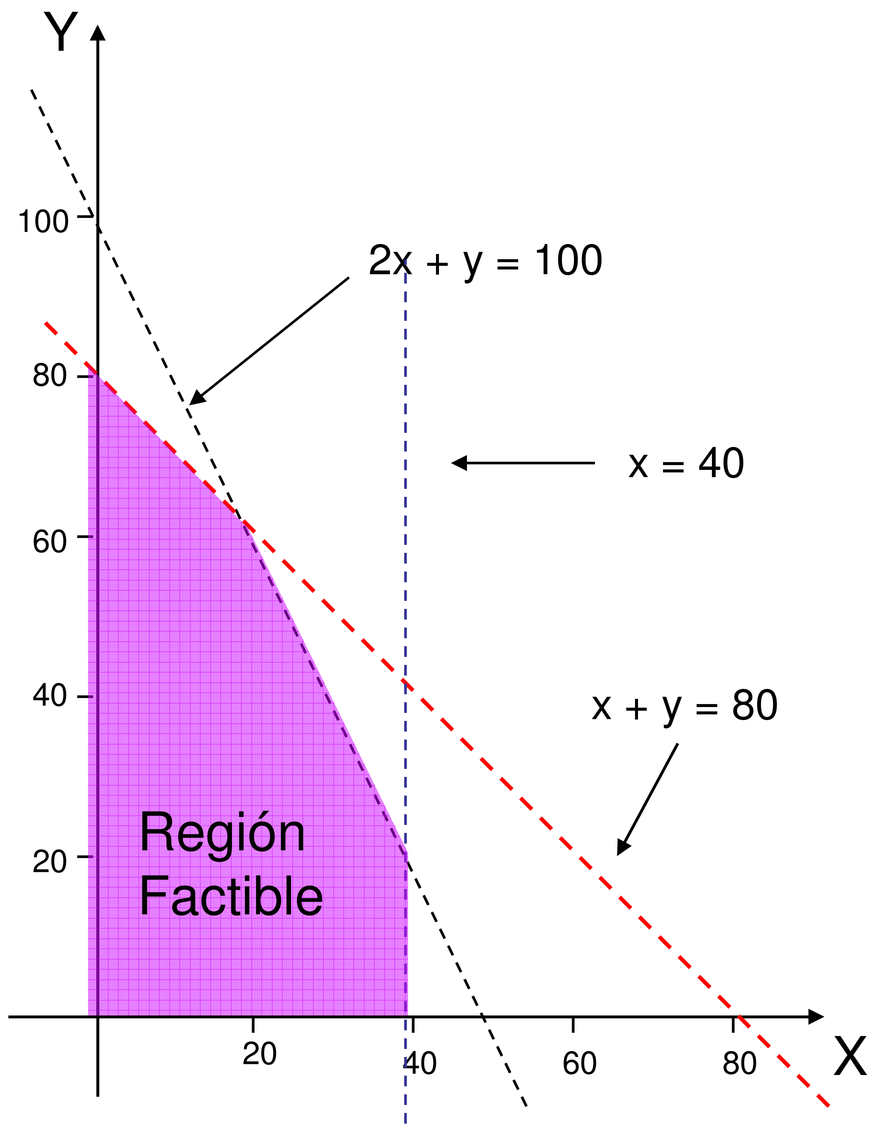
La región factible es la intersección de todos estos semiplanos (restricciones)



Región factible

La región factible es la intersección de todos estos semiplanos (restricciones)

Una solución óptima es un punto en la región factible en el cual la función objetivo ($Z = 3x + 2y$) tiene un valor máximo



La solución óptima está siempre en la frontera de la región factible, en un vértice (si la solución es única) o en un segmento entre dos vértices contiguos (si hay infinitas soluciones)

La región factible es la intersección de todos estos semiplanos (restricciones)

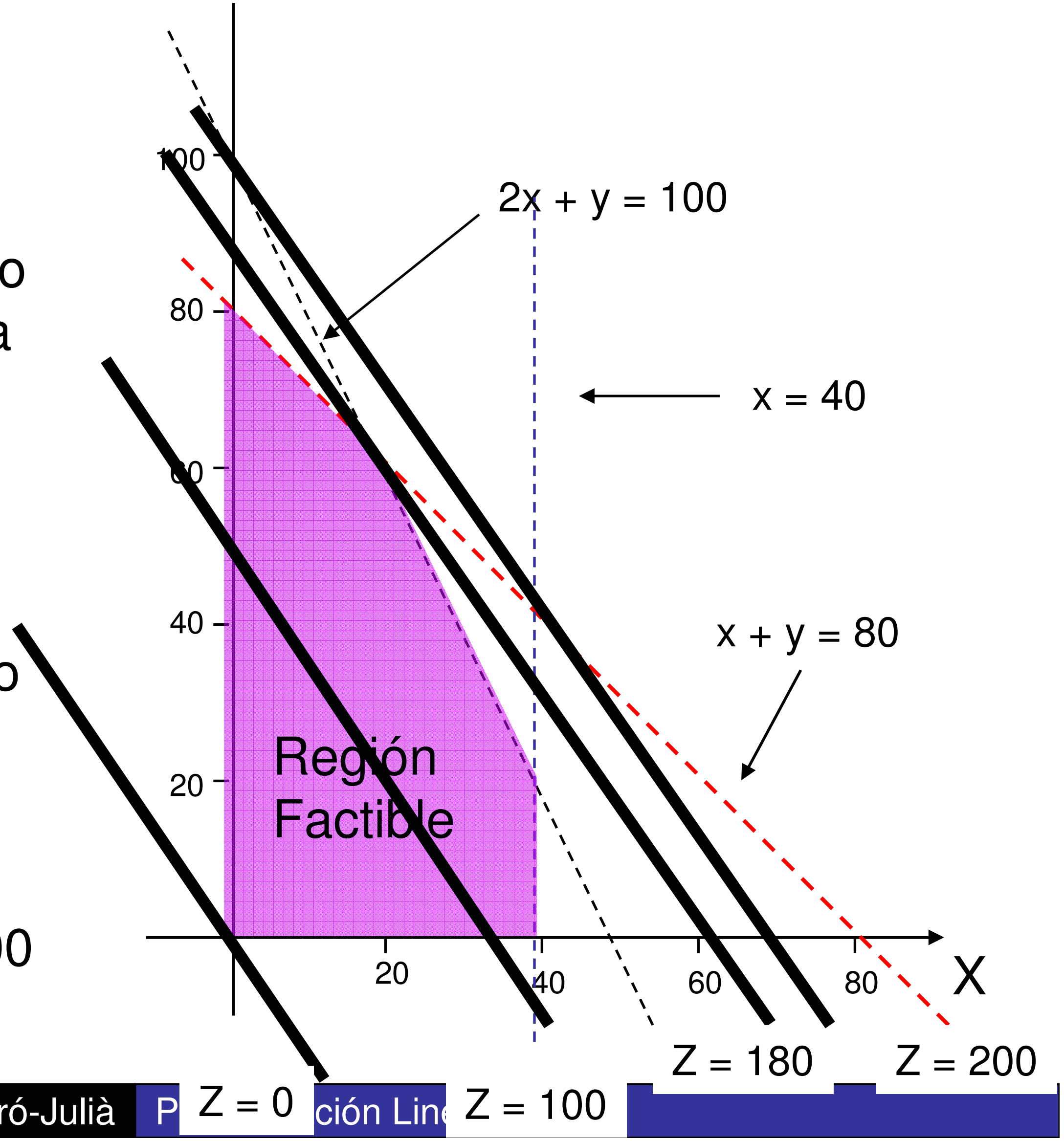
Una solución óptima es un punto en la región factible en el cual la función objetivo ($Z = 3x + 2y$) tiene un valor máximo

IDEA INTUITIVA

Para hallar la solución óptima, dibujamos rectas para un mismo valor de Z

La figura muestra estas rectas para

$Z = 0$, $Z = 100$, $Z = 180$ y $Z = 200$

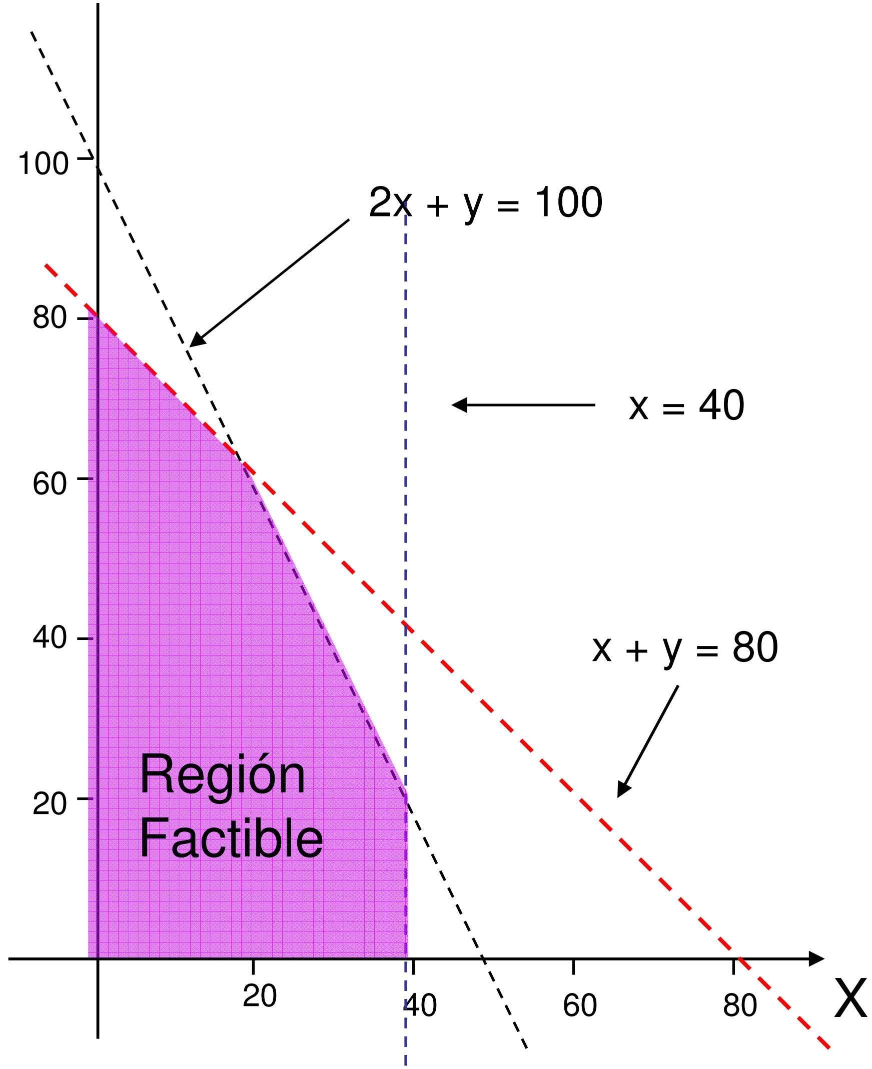


La solución óptima está siempre en la frontera de la región factible, en un vértice (si la solución es única) o en un segmento entre dos vértices contiguos (si hay infinitas soluciones)

La región factible es la intersección de todos estos semiplanos (restricciones)

Una solución óptima es un punto en la región factible en el cual la función objetivo ($Z = 3x + 2y$) tiene un valor máximo

FORMALMENTE
La solución óptima está en la frontera de la región factible (vértices o arista)



Vértices de la región factible

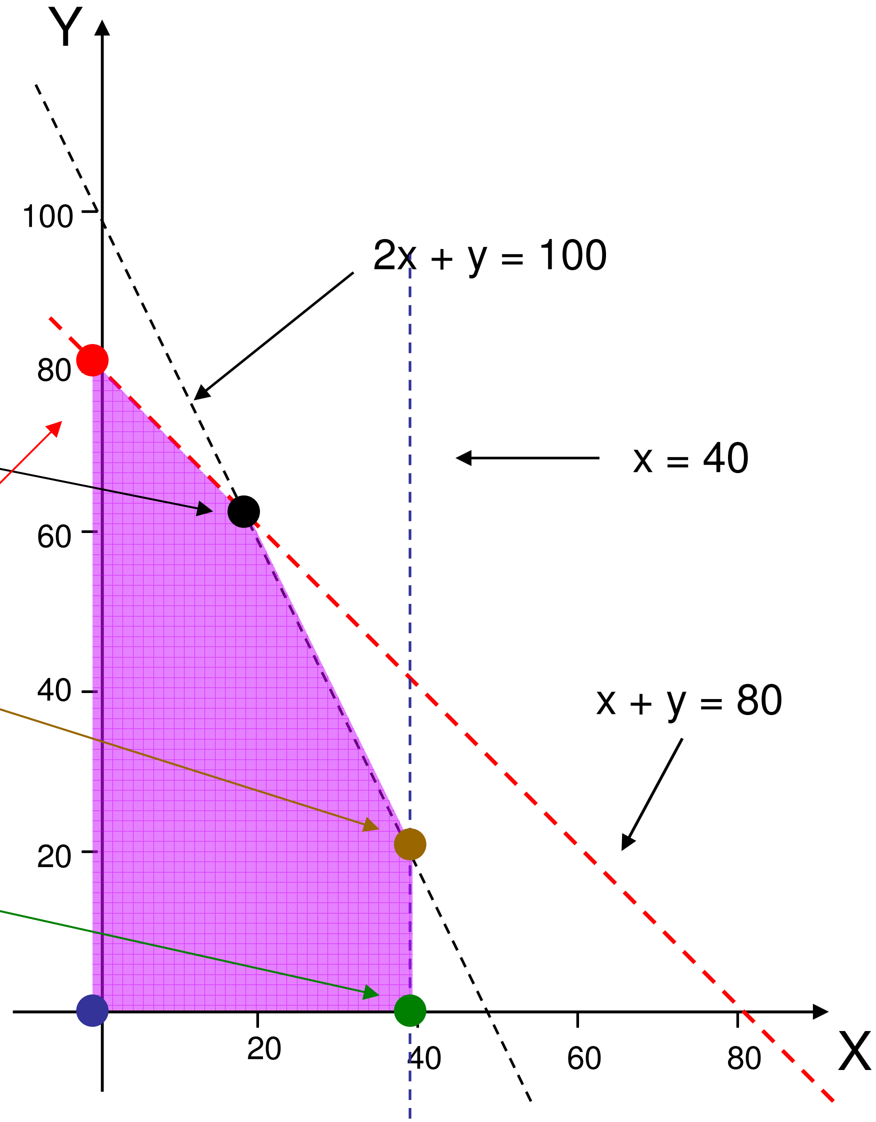
Los vértices de la región factible son intersecciones de dos rectas

$$\begin{cases} 2x + y = 100 \\ x + y = 80 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 40 \\ 2x + y = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 40 \\ y = 0 \end{cases}$$

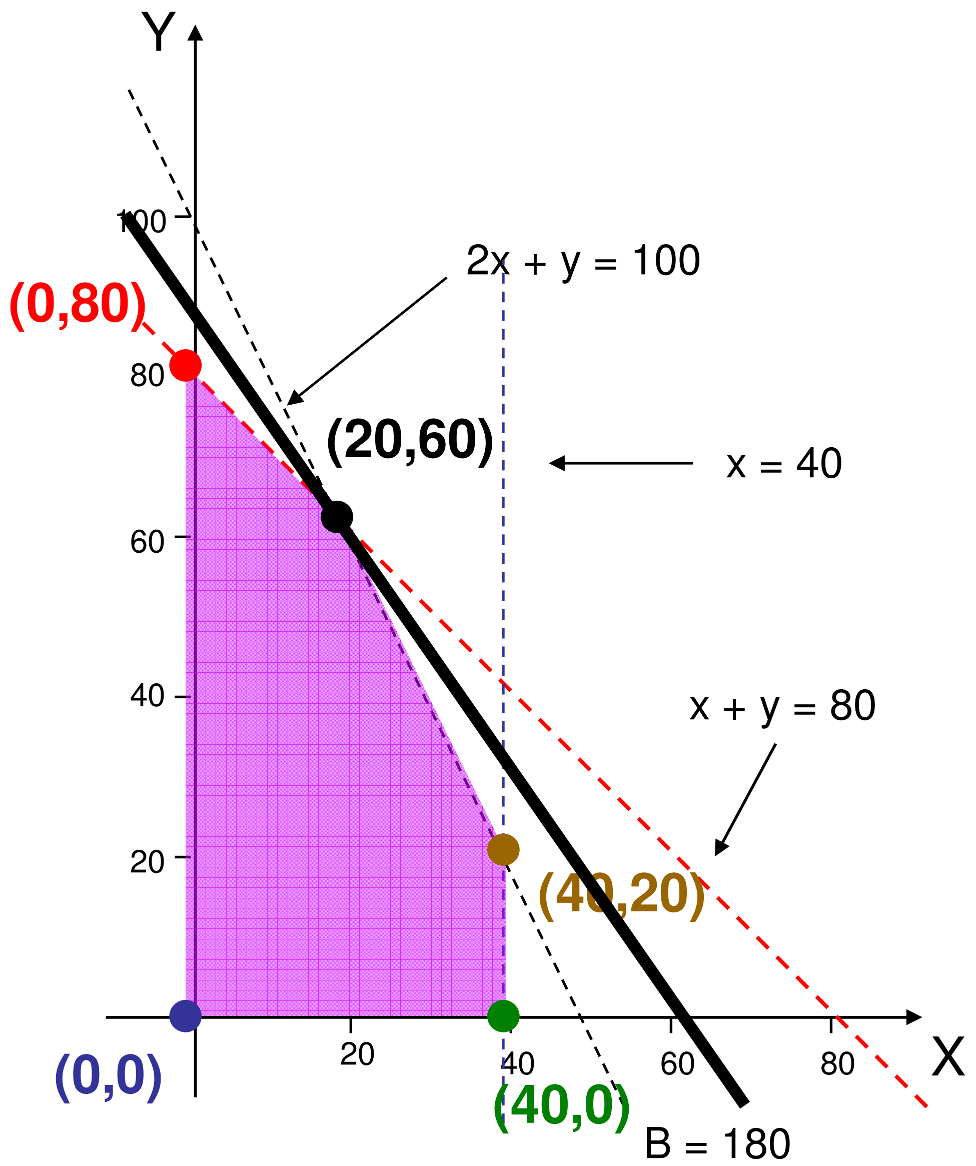
$$\begin{cases} x + y = 80 \\ x = 0 \end{cases}$$



Vértices de la región factible

Los vértices de la región factible son intersecciones de dos rectas

El máximo valor de Z que toca la región factible indica la solución óptima, esto ocurre en el punto (x = 20, y = 60) para Z = 180

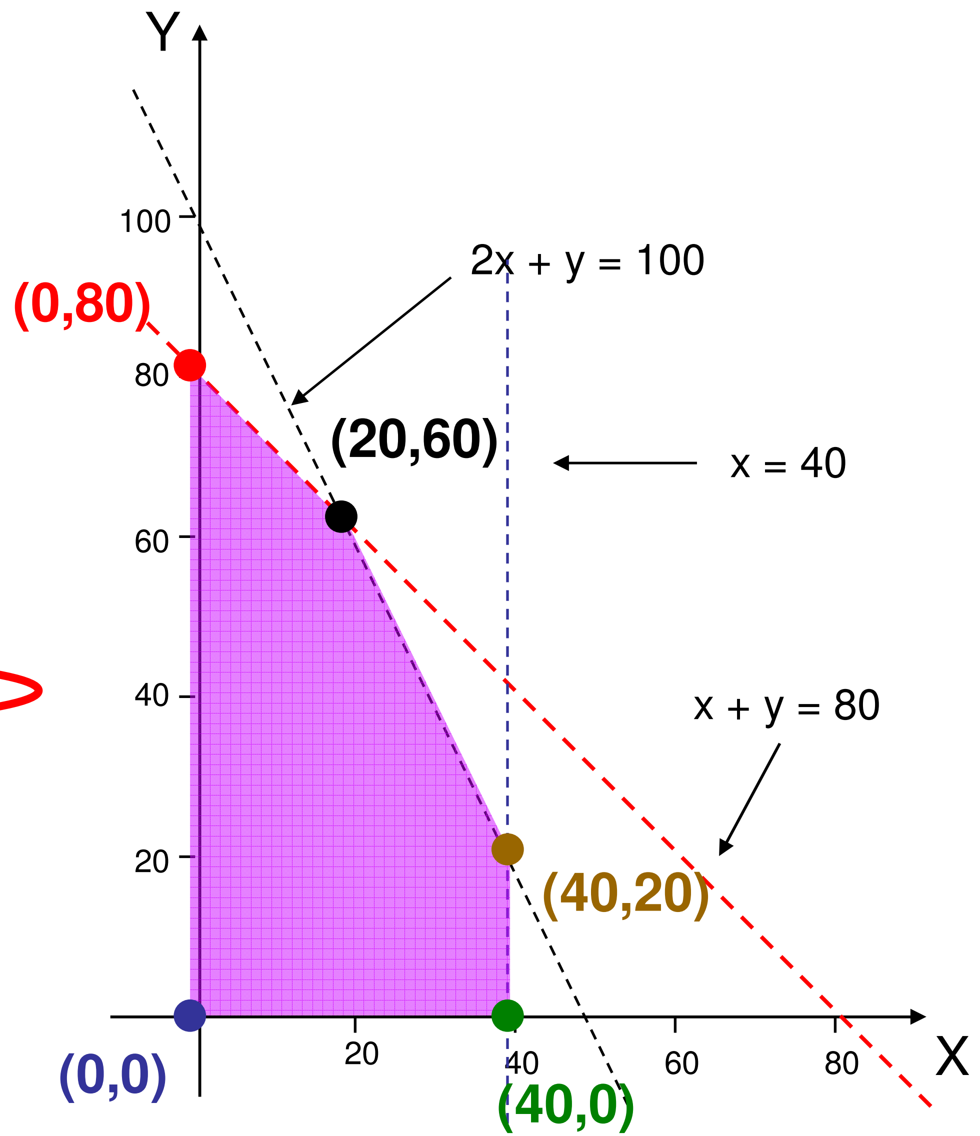


Resolución analítica

También podemos encontrar la solución óptima calculando el valor de Z en los vértices de la región factible

Vértice	Beneficio
(0, 0)	Z = 3·0+2·0 = 0
(40, 0)	Z = 3·40+2·0 = 120
(40, 20)	Z = 3·40+2·20 = 160
(20, 60)	Z = 3·20+2·60 = 180
(0, 80)	Z = 3·0+2·80 = 160

La solución óptima es:
x = 20 muñecos
y = 60 trenes
Z = 180 € de beneficio



EJEMPLO

IBAuto que fabrica y vende coches y furgonetas, quiere emprender una campaña publicitaria en TV durante reality shows y partidos de fútbol.

Sabemos que

- Cada anuncio del reality show es visto por 6 millones de mujeres y 2 millones de hombres.
- Cada anuncio del partido de fútbol es visto por 3 millones de mujeres y 8 millones de hombres.
- Un anuncio en el reality show cuesta 50.000 €
- Un anuncio en el partido de fútbol cuesta 100.000 €.
- IBAuto quiere que los anuncios sean vistos por lo menos por 30 millones de mujeres y 24 millones de hombres.

IBAuto quiere saber cuántos anuncios debe contratar en cada tipo de programa para que el coste de la campaña publicitaria sea mínimo.

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

VARIABLES DE DECISIÓN

x = nº de anuncios durante reality shows

y = nº de anuncios durante partidos de fútbol

RESTRICCIONES

Son desigualdades que limitan los posibles valores de las variables de decisión vienen dadas por las condiciones de la campaña. También hay restricciones de signo

Restricción 1

nº de mujeres que ven los anuncios

$$6x + 3y \geq 30$$

Restricción 2

nº de hombres que ven los anuncios

$$2x + 8y \geq 24$$

Restricciones de signo

$x \geq 0; \quad y \geq 0$

FUNCIÓN OBJETIVO

El objetivo de IBAuto es elegir valores de x e y para minimizar el coste de la campaña publicitaria (en miles de €)

minimizar $Z = 50x + 100y$

Cuando *x* e *y* decrecen, la función objetivo también decrece. No puede decrecer indefinidamente porque los valores de x e y están limitados por las restricciones

Formulación matemática del PPL

MODELO DE OPTIMIZACIÓN

minimizar:	$Z = 50x + 100y$	función objetivo (en miles de €)
sujeto a:	$6x + 3y \geq 30$	restricción de mujeres (millones)
	$2x + 8y \geq 24$	restricción de hombres (millones)
	$x \geq 0$	restricción de signo
	$y \geq 0$	restricción de signo

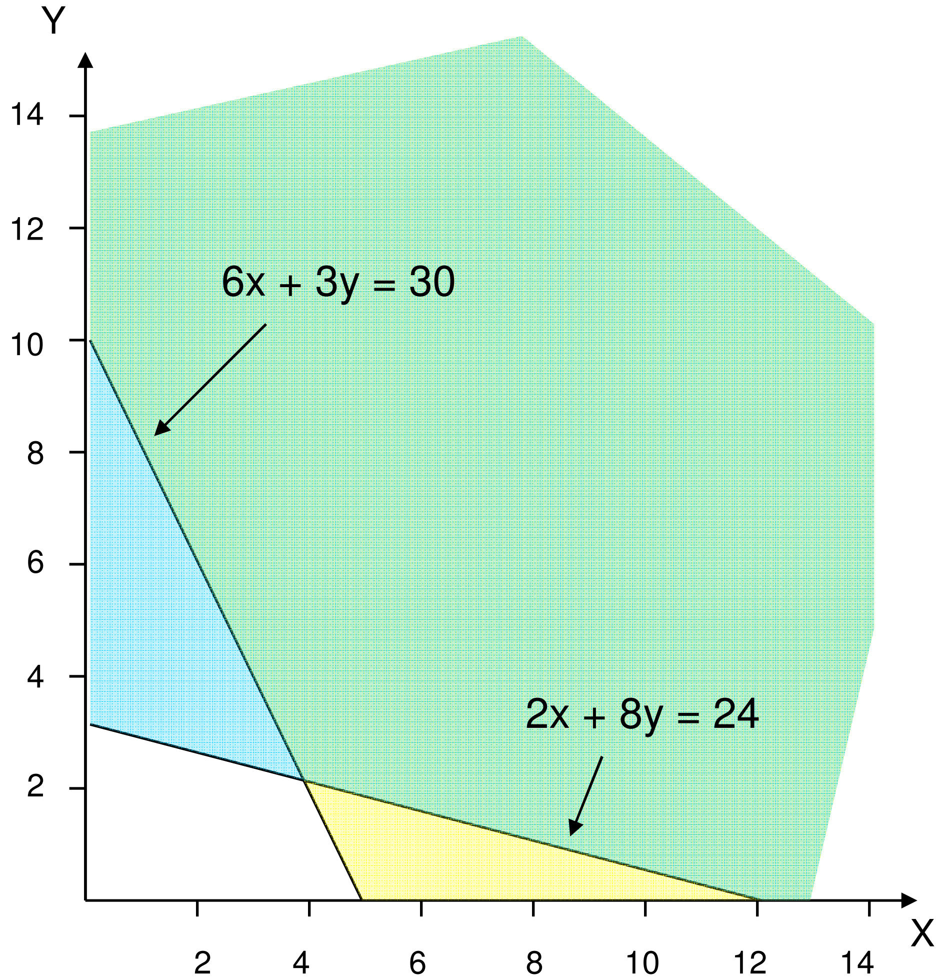
Región factible

Restricciones

$6x + 3y \geq 30$

$2x + 8y \geq 24$

$x, y \geq 0$



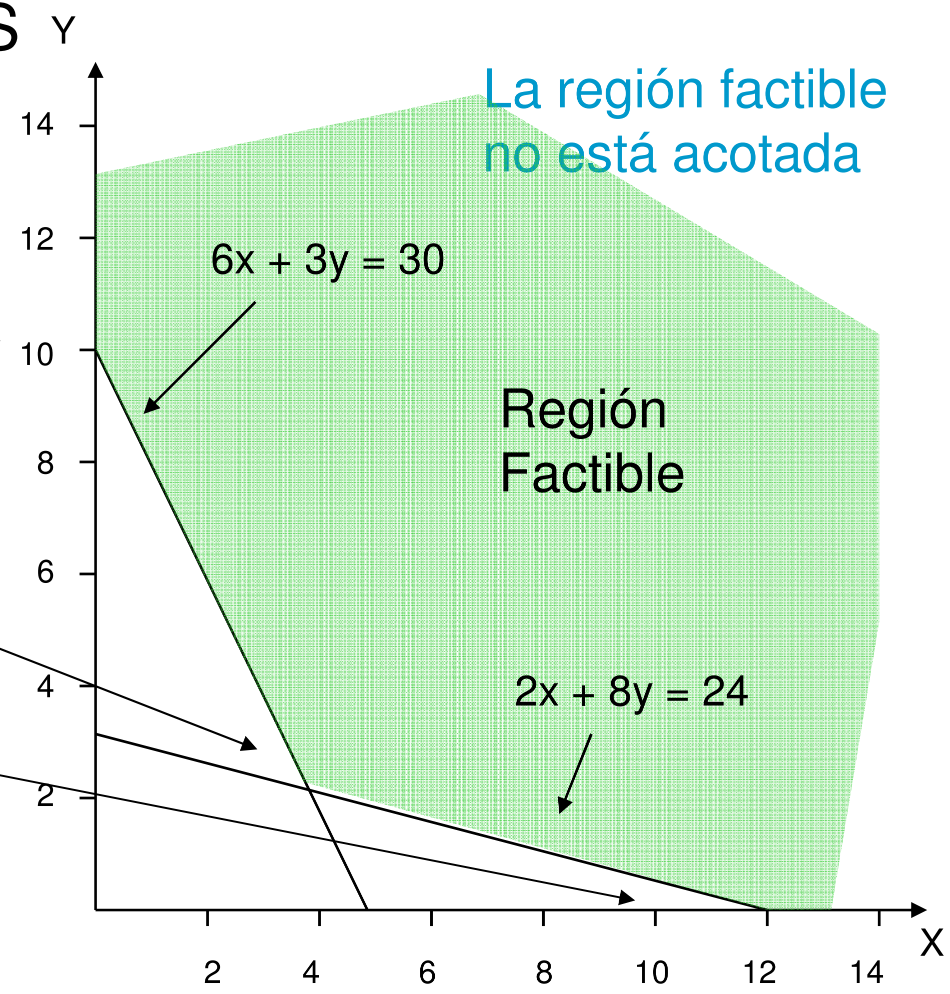
Región factible

CÁLCULO DE LOS VÉRTICES

$6x + 3y = 30$
$x = 0$

$6x + 3y = 30$
$2x + 8y = 24$

$2x + 8y = 24$
$y = 0$



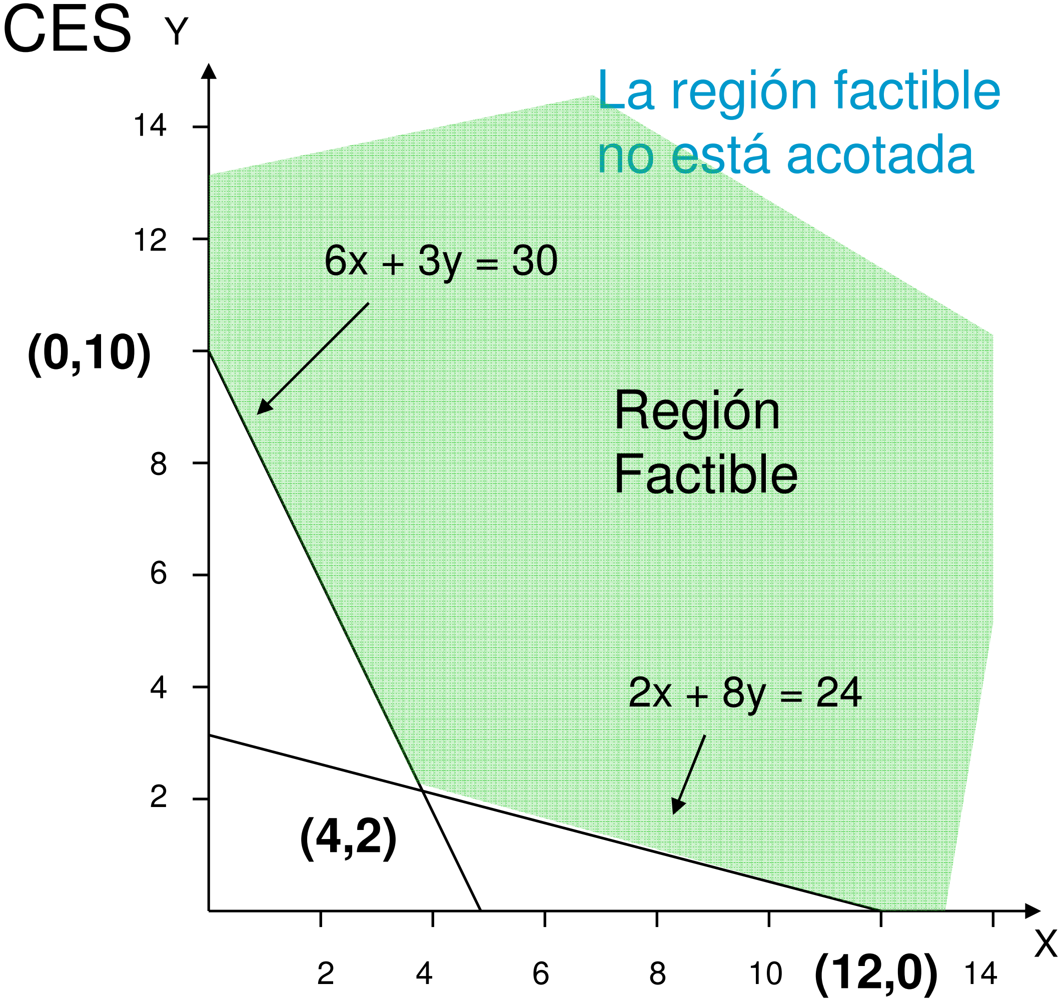
Región factible

CÁLCULO DE LOS VÉRTICES

$6x + 3y = 30$
$x = 0$

$6x + 3y = 30$
$2x + 8y = 24$

$2x + 8y = 24$
$y = 0$

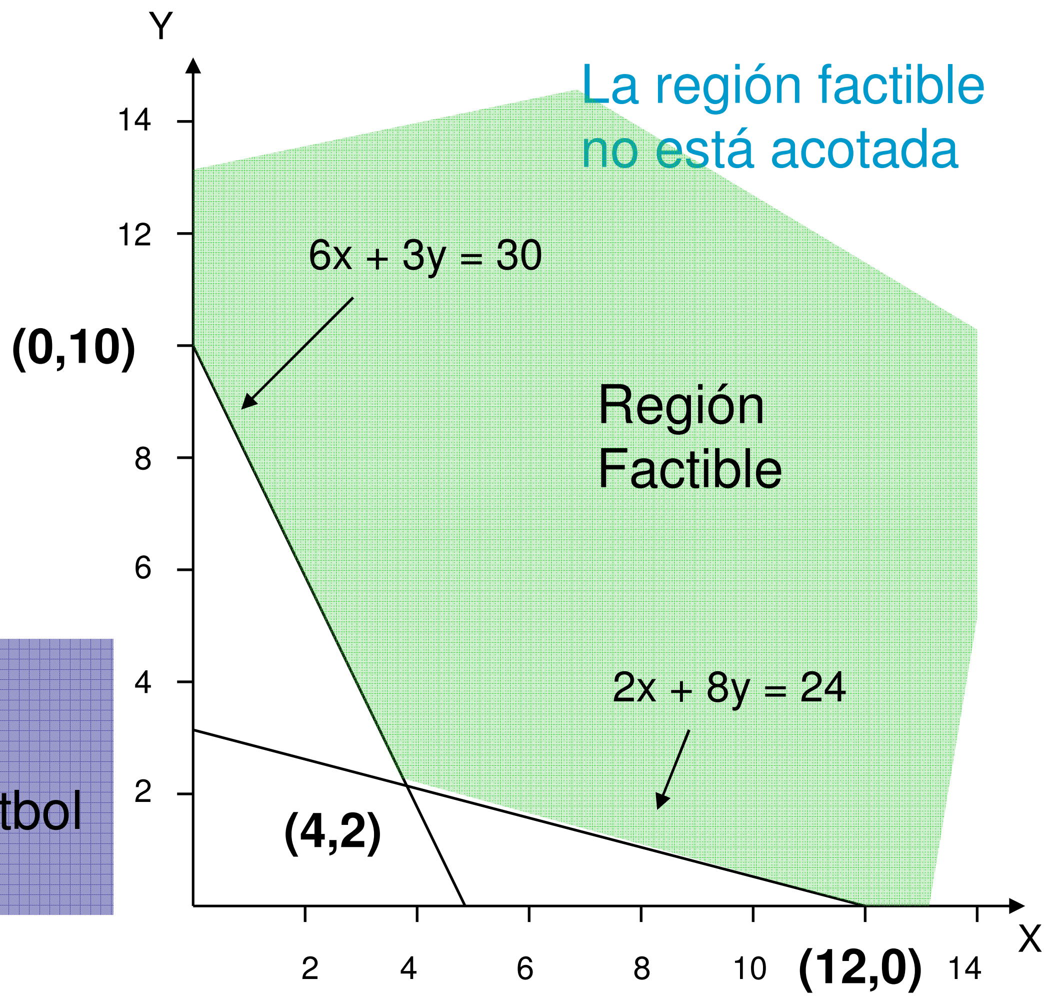


Resolución analítica

Evaluamos Z en los vértices

Vértice	$Z = 50x + 100y$
(0, 10)	$Z = 50 \cdot 0 + 100 \cdot 10 =$ $= 0+10000 = 10\ 000$
(4, 2)	$Z = 50 \cdot 4 + 100 \cdot 2 =$ $= 200+200 = 400$
(12, 0)	$Z = 50 \cdot 12 + 100 \cdot 0 =$ $= 6000+0 = 6\ 000$

La solución óptima es:
x = 4 anuncios en reality shows
y = 2 anuncios en partidos de fútbol
Coste Z = 400 (mil €)



Resolución gráfica

minimizar: $Z = 50x + 100y$

sujeto a: $6x + 3y \geq 30$

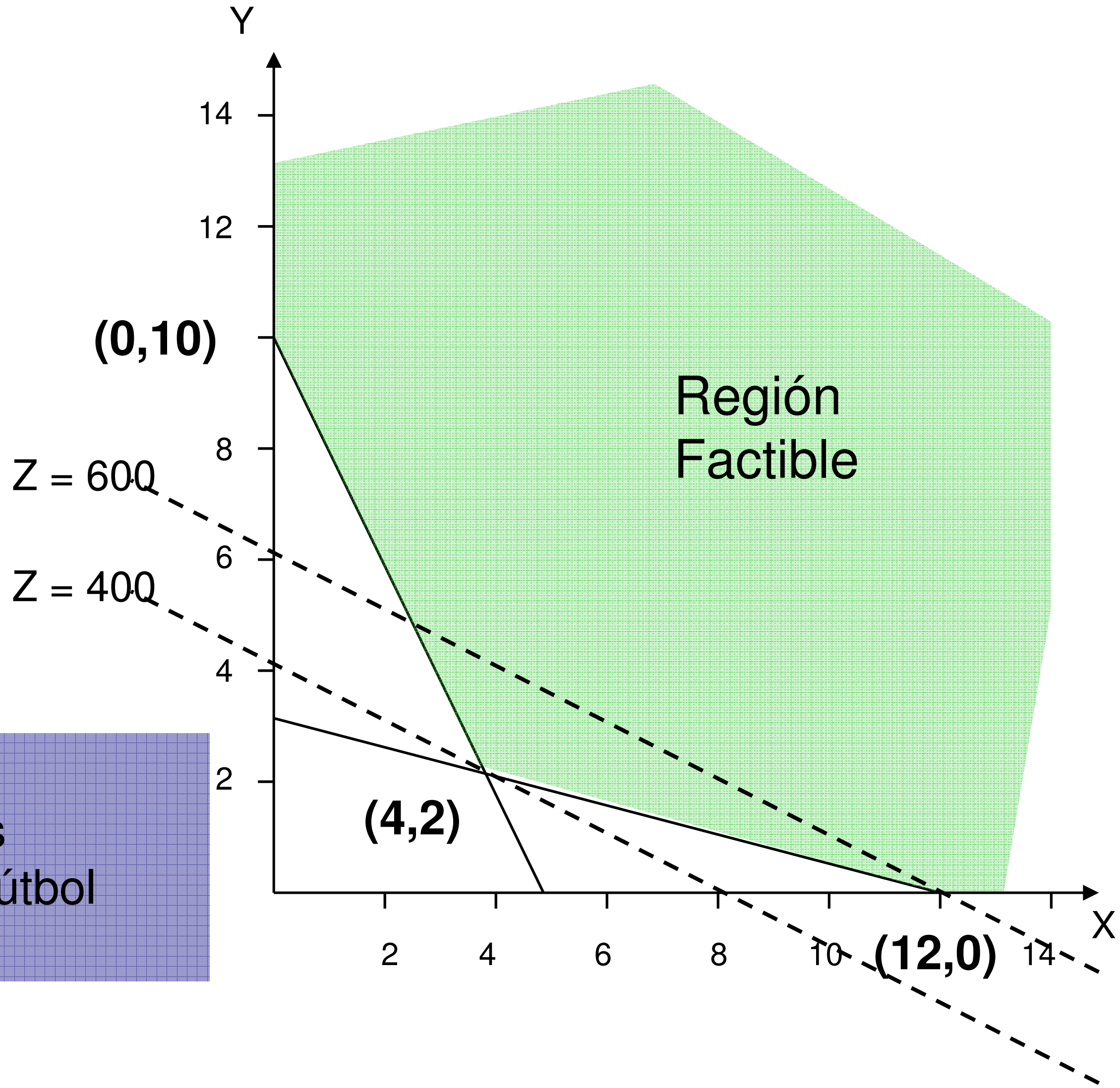
$2x + 8y \geq 24$

$x, y \geq 0$

Para hallar la solución óptima, dibujamos rectas para distintos valores de Z
Z = 400, Z = 600

El coste mínimo se obtiene en el punto (4,2)

La solución óptima es:
x = 4 anuncios en reality shows
y = 2 anuncios en partidos de fútbol
Coste Z = 400 (mil €)



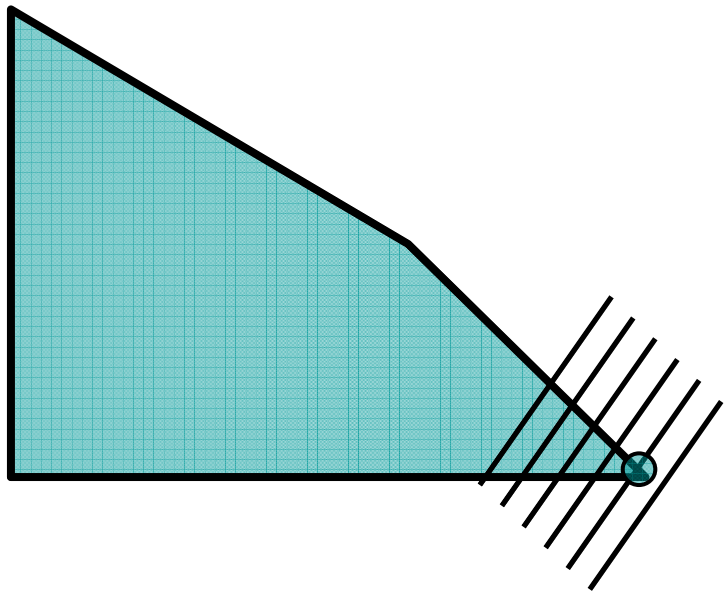
PPL con 3 variables

Para 3 variables

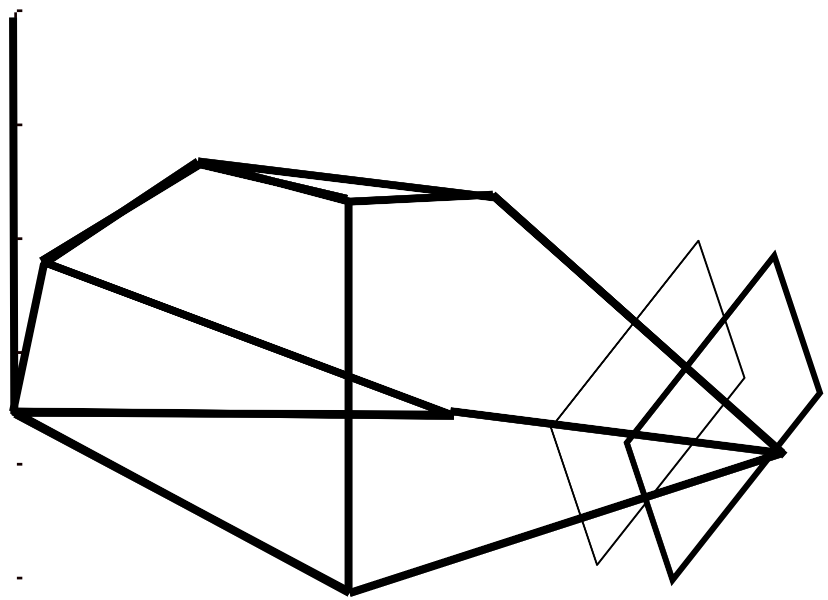
- Dibujamos en el espacio
- Las restricciones son planos
- La región factible volumen limitado por planos
- Vértices se obtienen de un sistema lineal de 3 ecuaciones

PPL con 3 variables

- Región factible = Politopos



Solución gráfica



Solución gráfica

Programación lineal

- Teorema básico: Si existe una solución óptima del PPL, está en la frontera de la región factible
  - Gráficamente: Basta con buscar soluciones en vértices o en aristas que unen los vértices
  - Método Símplex: Comienza en un vértice inicial, como puede ser el origen (0,0) y prueba vértices eficientemente hasta encontrar la solución

Probar vértices eficientemente

- ¿Qué vértices? Los contiguos
- ¿Cómo sabemos si son mejores?

  Prueba de optimalidad: Si un vértice (posible solución) no tiene vértices adyacentes que sean mejores (según el valor de Z), entonces esa debe ser una *solución óptima*

EJEMPLO

Gepetto S.L., manufactura muñecos y trenes de madera

Cada tren:

- Produce un beneficio neto de 2 €
- Requiere 1 hora de trabajo de acabado
- Requiere 1 hora trabajo de carpintería

Cada muñeco:

- Produce un beneficio neto de 3 €
- Requiere 2 horas de trabajo de acabado
- Requiere 1 hora de trabajo de carpintería

Cada semana Gepetto puede disponer de:

- Todo el material que necesite
- Solamente 100 horas de acabado
- Solamente 80 horas de carpintería

También:

- La demanda de trenes puede ser cualquiera (sin límite)
- La demanda de muñecos es como mucho 40

Gepetto quiere maximizar sus beneficios. ¿Cuántos muñecos y cuántos trenes debe fabricar?

$Z = 3x + 2y$
$2x + 1y \leq 100$
$1x + 1y \leq 80$
$x \leq 40$
$x, y \geq 0$

SOLUCIÓN INICIAL
$x = 0,\ y = 0,\ Z = 0$

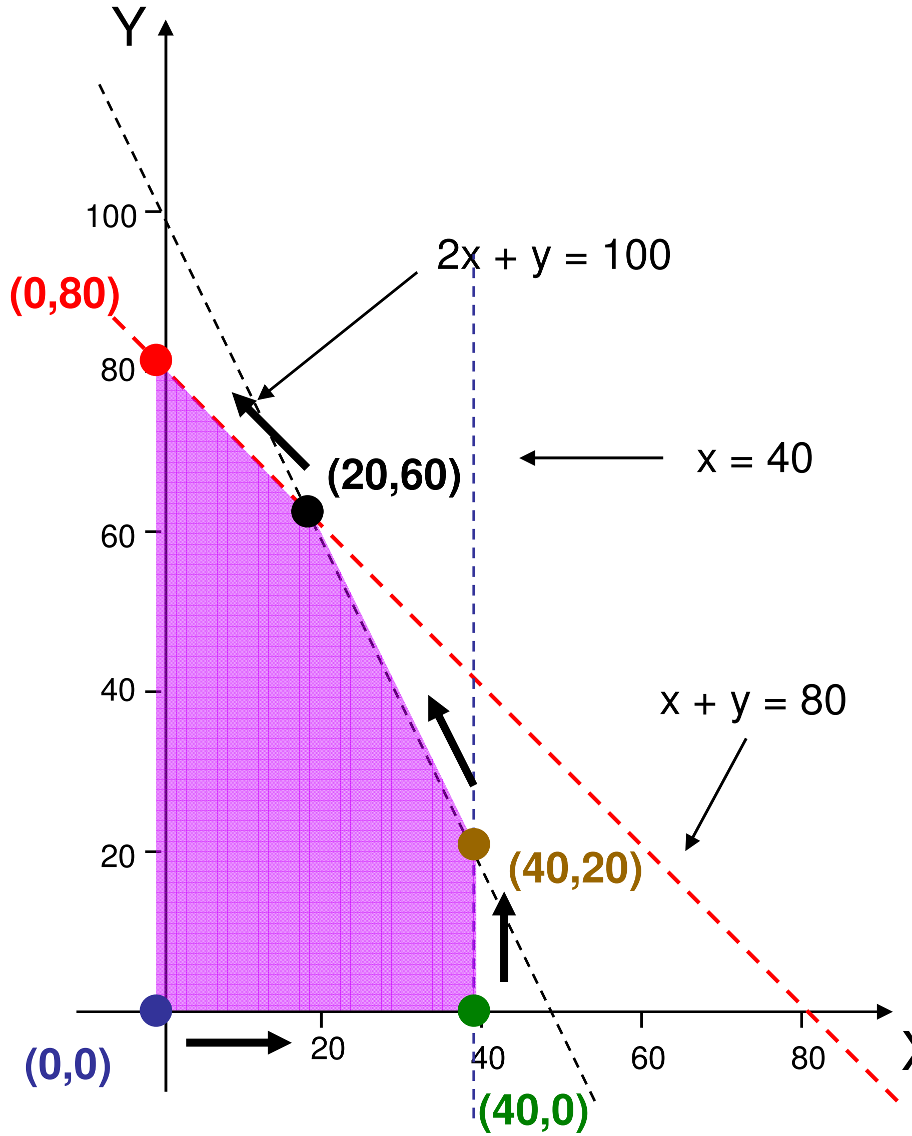
Vértices contiguos: el valor de Z crece más rápidamente si aumentamos x
$x = 40,\ y = 0,\ Z = 120$

$x = 40,\ y = 20,\ Z = 160$

$x = 20,\ y = 60,\ Z = 180$

$x = 0,\ y = 80,\ Z = 160$

SOLUCIÓN ÓPTIMA
$x = 20,\ y = 60,\ Z = 180$



Modelo general de PL

MODELO DE OPTIMIZACIÓN: n variables y m restricciones

maximizar: $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

sujeto a:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m$$

$$x_i \ge 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

EN FORMA MATRICIAL

maximizar: $Z = C \cdot X$

sujeto a: $A \cdot X \leq B$

$X \geq \mathbf{0}$

donde:

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

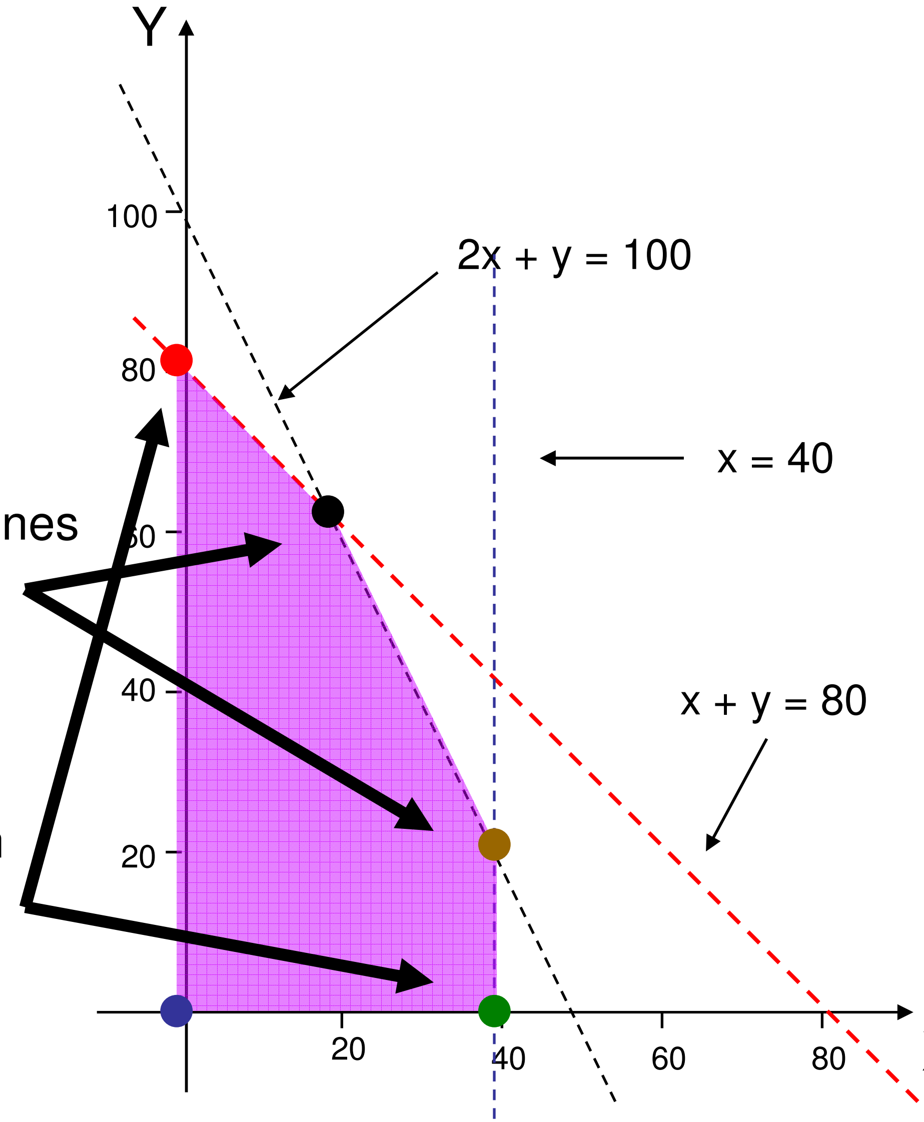
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Método Símplex

- Usa álgebra de matrices, todas las relaciones matemáticas serán a base de **ecuaciones** lineales que deben contener **todas** las variables
- Requiere la conversión de las restricciones de desigualdad a igualdades estrictas y la inclusión de todas las variables

Se satisfacen exactamente dos restricciones
Inexactamente una restricción

Se satisface exactamente una restricción
Inexactamente dos restricciones



Transformaciones al modelo

- Una desigualdad "≤" puede transformarse en una ecuación si se suma al lado izdo una nueva variable, no-negativa

$$9X_1 + 7X_2 - 3X_3 \leq 5$$

puede reemplazarse por

$$9X_1 + 7X_2 - 3X_3 + s = 5\ ,\ s \geq 0$$

s es variable de holgura

$Z = 3x_1 + 2x_2$
$2x_1 + 1x_2 \leq 100$
$1x_1 + 1x_2 \leq 80$
$x_1 \leq 40$
$x_1, x_2 \geq 0$

nsformaciones al modelo

- Restricción 1: se

  s_1 son las horas de acabado no usadas

  variable de holgura positiva s_1

$$2x_1 + x_2 + s_1 = 100$$

- Restricción 2: se

  s_2 son las horas de carpintería no usadas

  variable de holgura positiva s_2

$$x_1 + x_2 + s_2 = 80$$

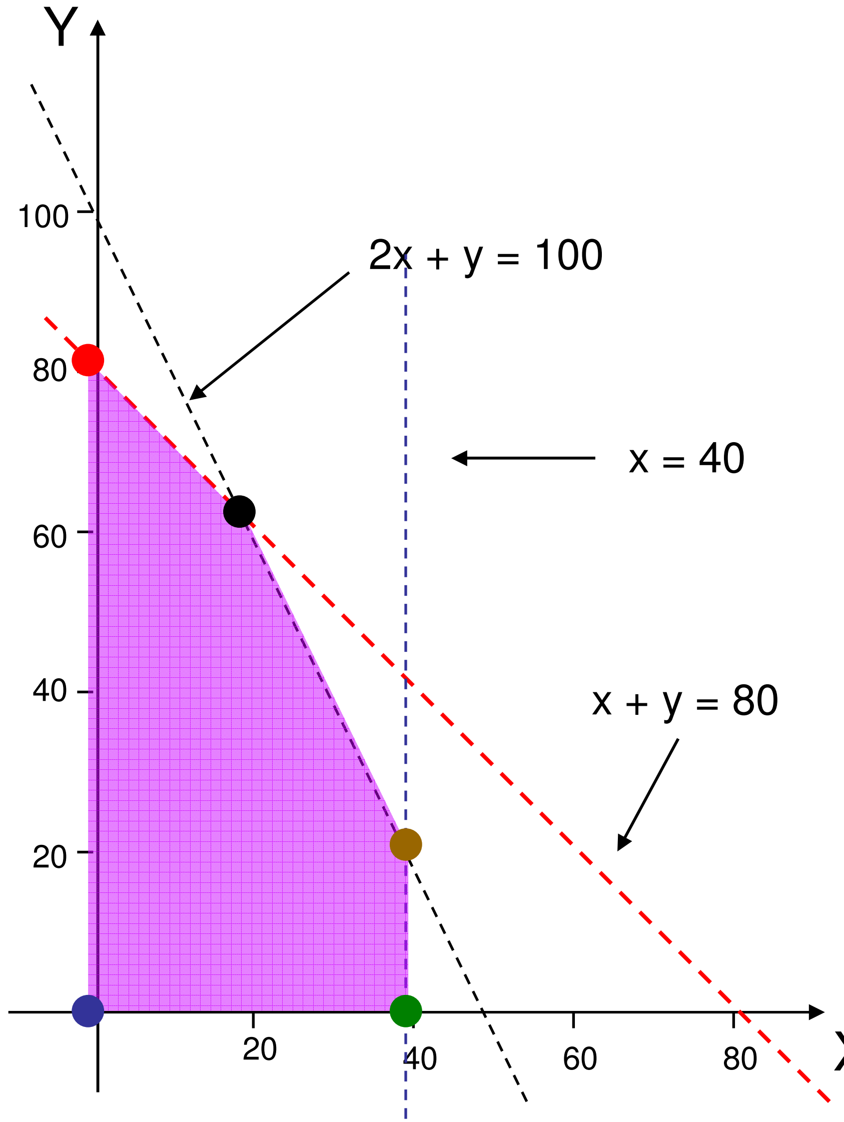
- Restricción 3: se

  s_3 es la demanda de muñecas no usada

  variable de holgura positiva s_3

$$x_2 + s_3 = 40$$

$$Z = 3x_1 + 2x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$
$$2x_1 + 1x_2 + 1s_1 + 0s_2 + 0s_3 = 100$$
$$1x_1 + 1x_2 + 0s_1 + 1s_2 + 0s_3 = 80$$
$$0x_1 + 1x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 1s_3 = 40$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$



Problema de PL

FORMULACIÓN SÍMPLEX:
- introducción de variables de holgura,
- igualar Z a 0

maximizar: $Z - c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n = 0$

sujeto a:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + 1s_1 + 0s_2 + \ldots + 0s_m = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + 0s_1 + 1s_2 + \ldots + 0s_m = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + 0s_1 + 0s_2 + \ldots + 1s_m = b_m$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n;\ s_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, m$$

EN FORMA MATRICIAL

maximizar: Z = C · X

sujeto a: A · X + I · S = B

X ≥ **0**; S ≥ **0**;

donde:

$$C=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}; \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad S=\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad 0=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -C & 0 \\ 0 & A & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z \\ X \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO

“Hora Exacta” produce y vende 2 tipos de relojes

Reloj de hombre:

- Produce un beneficio neto de 4 €
- Requiere 2 horas producción
- Requiere 2 horas inspección y empaquetado

Reloj de mujer:

- Produce un beneficio neto de 6 €
- Requiere 4 horas de producción
- Requiere 3 horas de inspección y empaquetado

Cada semana “Hora Exacta” puede disponer de:

- Todo el material que necesite
- Solamente 120 horas producción
- Solamente 100 horas inspección y empaquetado

“Hora Exacta” quiere maximizar sus ganancias. ¿Cuántos relojes de hombre y de mujer debe fabricar semanalmente?

PASO 1: FORMULACIÓN INICIAL

x_1 = nº de relojes de hombre producidos a la semana
x_2 = nº de relojes de mujer producidos a la semana

maximizar:	$Z = 4x_1 + 6x_2$	(función objetivo)
sujeto a:	$2x_1 + 4x_2 \leq 120$	(producción)
	$2x_1 + 3x_2 \leq 100$	(inspección y empaquetado)
	$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$	(restricción de signo)

PASO 2: FOF

- introducción

- igualar Z a 0

IMPORTANTE

El número de variables de holgura es igual al número de restricciones del problema, **NO** al número de variables de decisión

x_1 = nº de relojes de hombre producidos a la semana

x_2 = nº de relojes de mujer producidos a la semana

maximizar: $Z - 4x_1 - 6x_2 + 0s_1 + 0s_2 = 0$

sujeto a: $2x_1 + 4x_2 + 1s_1 + 0s_2 = 120$

$2x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 1s_2 = 100$

$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

UNA POSIBLE SOLUCIÓN: $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $Z = 0$; $s_1 = 120$; $s_2 = 100$

PASO 3: Construcción de la tabla inicial SIMPLEX:

- En las columnas aparecerán todas las variables del problema (de decisión y de holgura)
- En las filas, los coeficientes de las igualdades obtenidas,
  - La primera fila para la función objetivo
  - Una fila para cada restricción

$$\begin{pmatrix} 1 & -C & 0 \\ 0 & A & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z \\ X \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}$$

TABLA INICIAL							
		Variable de decisión		Variable de holgura		Solución	
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2		
Z	1	-4	-6	0	0	0	
s_1	0	2	4	1	0	120	
s_2	0	2	3	0	1	100	

BASE

PASO 4: Encontrar la variable de decisión que entra en la base y la variable de holgura que sale de la base

- Para escoger la variable de decisión que entra en la base, nos fijamos en Z y escogemos la variable con el coeficiente más negativo (en valor absoluto)
  - Si hay dos o más coeficientes iguales que cumplan la condición anterior, entonces se elige cualquiera de ellos
  - Si Z no tiene ningún coeficiente negativo, se ha alcanzado la solución óptima. El proceso SIMPLEX acaba cuando Z no tiene coeficientes negativos
- La columna de la variable que entra en la base se llama *columna pivote*

x_2 entra en la base

ITERACIÓN 1								
		Variable de decisión		Variable de holgura		Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2		
Z	1	-4	-6	0	0	0	
s_1	0	2	4	1	0	120	
s_2	0	2	3	0	1	100	

COLUMNA PIVOTE

- Para encontrar la variable de holgura que sale de la base, se divide cada término de la última columna (solución) por el término correspondiente de la columna pivote (siempre que sean mayores que cero)
  - Si hay algún elemento menor o igual que cero no se efectúa el cociente
  - Si todos los elementos son menores o iguales a cero, hay una solución no acotada y no se puede seguir
  - Si al calcular los cocientes, dos o más son iguales, cualquiera de las variables correspondientes pueden salir de la base
- El término que dé lugar al menor cociente positivo, indica la fila de la variable de holgura que sale de la base.
- Esta fila se llama *fila pivote*

x_2 entra en la base

ITERACIÓN 1								
		Variable de decisión		Variable de holgura		Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2		
Z	1	-4	-6	0	0	0	
s_1	0	2	4	1	0	120	
s_2	0	2	3	0	1	100	

COLUMNA PIVOTE

x_2 entra en la base

ITERACIÓN 1							
		Variable de decisión		Variable de holgura		Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2		
Z	1	-4	-6	0	0	0	
s_1	0	2	4	1	0	120	30
s_2	0	2	3	0	1	100	100/3

FILA PIVOTE

COLUMNA PIVOTE

s_1 sale de la base

x_2 entra en la base

ITERACIÓN 1							
		Variable de decisión		Variable de holgura		Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2		
			-6	0	0	0	
s_1	0	2	4	1	0	120	30
s_2	0	2	3	0	1	100	100/3

ELEMENTO PIVOTE

FILA PIVOTE

COLUMNA PIVOTE

s_1 sale de la base

PASO 5. Encontrar los coeficientes para la nueva tabla de SIMPLEX

- Utilizando el elemento pivote, mediante la reducción gaussiana, hacemos ceros los restantes términos de la columna pivote, incluyendo la función objetivo Z

TABLA INICIAL							
		Variable de decisión		Variable de holgura		Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2		
Z	1	-4	-6	0	0	0	
s_1	0	2	4	1	0	120	30
s_2	0	2	3	0	1	100	100/3

x_2 entra en la base y s_1 sale

ITERACIÓN 1							
		Variable de decisión		Variable de holgura		Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2		
Z							
$s_1 \leftarrow x_2$							
s_2							

TABLA INICIAL							
		Variable de decisión		Variable de holgura		Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2		
Z	1	-4	-6	0	0	0	
s_1	0	2	4	1	0	120	30
s_2	0	2	3	0	1	100	100/3

ITERACIÓN 1							
		Variable de decisión		Variable de holgura		Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2		
Z							
$s_1 \leftarrow x_2$	0	1/2	1	1/4	0	30	
s_2							

TABLA INICIAL							
		Variable de decisión		Variable de holgura		Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2		
Z	1	-4	-6	0	0	0	
s_1	0	2	4	1	0	120	30
s_2	0	2	3	0	1	100	100/3

ITERACIÓN 1							
		Variable de decisión		Variable de holgura		Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2		
Z	1	-1	0	6/4	0	180	
$s_1 \leftarrow x_2$	0	1/2	1	1/4	0	30	
s_2							

TABLA INICIAL							
		Variable de decisión		Variable de holgura		Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2		
Z	1	-4	-6	0	0	0	
s_1	0	2	4	1	0	120	30
s_2	0	2	3	0	1	100	100/3

ITERACIÓN 1							
		Variable de decisión		Variable de holgura		Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2		
Z	1	-1	0	6/4	0	180	
$s_1 \leftarrow x_2$	0	1/2	1	1/4	0	30	
s_2	0	1/2	0	-3/4	1	10	

Como Z tiene valores negativos hay que iterar de nuevo

x_1 entra en la base

ITERACIÓN 1								
		Variable de decisión		Variable de holgura		Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2		
Z	1	-1	0	6/4	0	180	
$s_1 \leftarrow x_2$	0	1/2	1	1/4	0	30	
s_2	0	1/2	0	-3/4	1	10	

COLUMNA PIVOTE

x_1 entra en la base

ITERACIÓN 1								
		Variable de decisión		Variable de holgura		Solución	ratio	
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2			
Z	1	-1	0	6/4	0	180		
$s_1 \leftarrow x_2$	0	1/2	1	1/4	0	30		FILA PIVOTE
s_2	0	1/2	0	-3/4	1	10	20	

COLUMNA PIVOTE

s_2 sale de la base

ITERACIÓN 1							
		Variable de decisión		Variable de holgura		Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2		
Z	1	-1	0	6/4	0	180	
$s_1 \leftarrow x_2$	0	1/2	1	1/4	0	30	
s_2	0	1/2	0	-3/4	1	10	20

x_1 entra y s_2 sale de la base

ITERACIÓN 2							
		Variable de decisión		Variable de holgura		Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2		
Z							
$s_1 \leftarrow x_2$							
$s_2 \leftarrow x_1$							

ITERACIÓN 1							
		Variable de decisión		Variable de holgura		Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2		
Z	1	-1	0	6/4	0	180	
$s_1 \leftarrow x_2$	0	1/2	1	1/4	0	30	
s_2	0	1/2	0	-3/4	2	40	20

ITERACIÓN 2							
		Variable de decisión		Variable de holgura		Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2		
Z							
$s_1 \leftarrow x_2$							
$s_2 \leftarrow x_1$	0	1	0	-3/2	1	20	

s_2 sale de la base

ITERACIÓN 1							
		Variable de decisión		Variable de holgura		Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2		
Z	1	-1	0	6/4	0	180	
$s_1 \leftarrow x_2$	0	1/2	1	1/4	0	30	
s_2	0	1/2	0	-3/4	1	10	20

ITERACIÓN 2							
		Variable de decisión		Variable de holgura		Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2		
Z	1	0	0	0	1	200	
$s_1 \leftarrow x_2$							
$s_2 \leftarrow x_1$	0	1	0	-3/2	1	20	

ITERACIÓN 1							
		Variable de decisión		Variable de holgura		Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2		
Z	1	-1	0	6/4	0	180	
$s_1 \leftarrow x_2$	0	1/2	1	1/4	0	30	
s_2	0	1/2	0	-3/4	1	10	20

ITERACIÓN 2							
		Variable de decisión		Variable de holgura		Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2		
Z	1	0	0	0	1	200	
$s_1 \leftarrow x_2$	0	0	2	2	-2	40	
$s_2 \leftarrow x_1$	0	1	0	-3/2	1	20	

Z no tiene ningún coeficiente negativo, se ha alcanzado la solución óptima

TABLA FINAL							
		Variable de decisión		Variable de holgura		Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2		
Z	1	0	0	0	1	200	
x_2	0	0	1	1	-1	20	
x_1	0	1	0	-3/2	1	20	

SOLUCIÓN ÓPTIMA

$x_1 = 20$; $x_2 = 20$; $Z = 200$

PASO 1: FORMULACIÓN INICIAL

Maximizar	$z = 6x_1 + 4x_2$
Sujeto a:	$x_1 + x_2 \leq 12$
	$x_1 - 2x_2 \leq 6$
	$x_2 \leq 8$
	$x_i \geq 0$

PASO 2: FORMULACIÓN SÍMPLEX

Maximizar	$z - 6x_1 - 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 = 0$
Sujeto a:	$x_1 + x_2 + s_1 = 12$
	$x_1 - 2x_2 + s_2 = 6$
	$x_2 + s_3 = 8$
	$x_i \geq 0; s_j \geq 0$

TABLA INICIAL								
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	-6	-4	0	0	0	0	
s_1	0	1	1	1	0	0	12	
s_2	0	1	-2	0	1	0	6	
s_3	0	0	1	0	0	1	8	

Selecciona la variable que entra la base

TABLA INICIAL								
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	-6	-4	0	0	0	0	
s_1	0	1	1	1	0	0	12	
s_2	0	1	-2	0	1	0	6	
s_3	0	0	1	0	0	1	8	

Selecciona la variable de holgura que sale de la base

Selecciona la variable que entra la base

x_1 entra a la base y s_2 sale de la base

TABLA INICIAL								
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	-6	-4	0	0	0	0	
s_1	0	1	1	1	0	0	12	12
s_2	0	1	-2	0	1	0	6	6
s_3	0	0	1	0	0	1	8	

Selecciona la variable de holgura que sale de la base

TABLA INICIAL								
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	-6	-4	0	0	0	0	
s_1	0	1	1	1	0	0	12	12
s_2	0	1	-2	0	1	0	6	6
s_3	0	0	1	0	0	1	8	

ITERACIÓN 1								
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z								
s_1								
$s_2 \leftarrow x_1$								
s_3								

TABLA INICIAL								
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	-6	-4	0	0	0	0	
s_1	0	1	1	1	0	0	12	12
s_2	0	1	-2	0	1	0	6	6
s_3	0	0	1	0	0	1	8	

ITERACIÓN 1								
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z								
s_1								
$s_2 \leftarrow x_1$	0	1	-2	0	1	0	6	
s_3								

TABLA INICIAL								
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	-6	-4	0	0	0	0	
s_1	0	1	1	1	0	0	12	12
s_2	0	1	-2	0	1	0	6	6
s_3	0	0	1	0	0	1	8	

ITERACIÓN 1								
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z								
s_1								
$s_2 \leftarrow x_1$	0	1	-2	0	1	0	6	
s_3	0	0	1	0	0	1	8	

TABLA INICIAL								
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	-6	-4	0	0	0	0	
s_1	0	1	1	1	0	0	12	12
s_2	0	1	-2	0	1	0	6	6
s_3	0	0	1	0	0	1	8	

ITERACIÓN 1								
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	0	-16	0	6	0	36	
s_1								
$s_2 \leftarrow x_1$	0	1	-2	0	1	0	6	
s_3	0	0	1	0	0	1	8	

TABLA INICIAL

		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	-6	-4	0	0	0	0	
s_1	0	1	1	1	0	0	12	12
s_2	0	1	-2	0	1	0	6	6
s_3	0	0	1	0	0	1	8	

ITERACIÓN 1

		Variable de decisión					Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	0	-16	0	6	0	36	
s_1	0	0	3	1	-1	0	6	
$s_2 \leftarrow x_1$	0	1	-2	0	1	0	6	
s_3	0	0	1	0	0	1	8	

Como Z tiene valores negativos hay que iterar de nuevo

ITERACIÓN 1									
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	0	-16	0	6	0	36	
s_1	0	0	3	1	-1	0	6	
$s_2 \leftarrow x_1$	0	1	-2	0	1	0	6	
s_3	0	0	1	0	0	1	8	

ITERACIÓN 2									
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z								
s_1								
$s_2 \leftarrow x_1$								
s_3								

x_2 entra a la base y s_1 sale de la base

ITERACIÓN 1								
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	0	-16	0	6	0	36	
s_1	0	0	3	1	-1	0	6	2
$s_2 \leftarrow x_1$	0	1	-2	0	1	0	6	
s_3	0	0	1	0	0	1	8	8

ITERACIÓN 2								
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z								
s_1								
$s_2 \leftarrow x_1$								
s_3								

ITERACIÓN 1								
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	0	-16	0	6	0	36	
s_1	0	0	3	1	-1	0	6	2
$s_2 \leftarrow x_1$	0	1	-2	0	1	0	6	
s_3	0	0	1	0	0	1	8	8

ITERACIÓN 2								
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z								
$s_1 \leftarrow x_2$	0	0	1	1/3	-1/3	0	2	
$s_2 \leftarrow x_1$								
s_3								

ITERACIÓN 1

		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	0	-16	0	6	0	36	
s_1	0	0	3	1	-1	0	6	2
$s_2 \leftarrow x_1$	0	1	-2	0	1	0	6	
s_3	0	0	1	0	0	1	8	8

ITERACIÓN 2

		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	0	0	16/3	2/3	0	68	
$s_1 \leftarrow x_2$	0	0	1	1/3	-1/3	0	2	
$s_2 \leftarrow x_1$								
s_3								

ITERACIÓN 1

		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	0	-16	0	6	0	36	
s_1	0	0	3	1	-1	0	6	2
$s_2 \leftarrow x_1$	0	1	-2	0	1	0	6	
s_3	0	0	1	0	0	1	8	8

ITERACIÓN 2

		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	0	0	16/3	2/3	0	68	
$s_1 \leftarrow x_2$	0	0	1	1/3	-1/3	0	2	
$s_2 \leftarrow x_1$	0	1	0	2/3	1/3	0	10	
s_3								

ITERACIÓN 1									
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	0	-16	0	6	0	36	
s_1	0	0	3	1	-1	0	6	2
$s_2 \leftarrow x_1$	0	1	-2	0	1	0	6	
s_3	0	0	1	0	0	1	8	8

Z no tiene ningún coeficiente negativo, se ha alcanzado la solución óptima

ITERACIÓN 2									
		Variable de decisión						ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	0	0	16/3	2/3	0	68	
$s_1 \leftarrow x_2$	0	0	1	1/3	-1/3	0	2	
$s_2 \leftarrow x_1$	0	1	0	2/3	1/3	0	10	
s_3	0	0	0	-1/3	1/3	1	6	

TABLA FINAL								
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	0	0	16/3	2/3	0	68	
x_2	0	0	1	1/3	-1/3	0	2	
x_1	0	1	0	2/3	1/3	0	10	
s_3	0	0	0	-1/3	1/3	1	6	

La solución óptima es
$x_1 = 10$; $x_2 = 2$; $Z = 68$

Método SIMPLEX: condiciones

- Maximizar Z
- c_i valores reales
- Restricciones $\leq$
- $b_i \geq 0$

Método SIMPLEX: resumen

- Formulación inicial del problema
- Formulación SIMPLEX
- Tabla inicial
- Iteraciones
  - Columna pivote (vble que entra en la base), coeficientes de Z más negativo
  - Fila pivote (vble que sale), menor valor de la ratio (solución/columna pivote)
  - Poner ceros en la columna pivote usando elemento pivote (eliminación gaussiana)
  - Acaba cuando todos los coeficientes de Z son no negativos

EJEMPLO

Una empresa elabora dos productos A y B en una planta que consta de 3 departamentos: cortado, montaje y embalaje.

Cada departamento trabaja un máximo de 8 horas diarias

El proceso de producción del producto A es: primero es cortado y luego embalado. Cada tonelada de este producto emplea media hora de cortado y un tercio de hora de embalaje

El proceso de producción del producto B es: primero se monta y luego se embala. Cada tonelada de este producto emplea una hora de montado y dos tercios de hora de embalaje.

Los productos A y B son vendidos con un beneficio de 40 y 30 euros por tonelada respectivamente. ¿Qué combinación de productos maximizará el beneficio total?

Maximizar Z
c_i valores reales
Restricciones $\leq$
$b_i \geq 0$

PASO 1: FORMULACIÓN INICIAL

x_1 = toneladas elaboradas del producto A
x_2 = toneladas elaboradas del producto B

maximizar:	$Z = 40x_1 + 30x_2$	(función objetivo)
sujeto a:	$1/2x_1 \leq 8$	(departamento cortado)
	$x_2 \leq 8$	(departamento montaje)
	$1/3x_1 + 2/3x_2 \leq 8$	(departamento embalaje)
	$x_1, x_2 \geq 0$	

PASO 1: FORMULACIÓN INICIAL

x_1 = toneladas elaboradas del producto A
x_2 = toneladas elaboradas del producto B

maximizar:	$Z = 40x_1 + 30x_2$	(función objetivo)
sujeto a:	$x_1 \leq 16$	(departamento cortado)
	$x_2 \leq 8$	(departamento montaje)
	$x_1 + 2x_2 \leq 24$	(departamento embalaje)
	$x_1, x_2 \geq 0$	

PASO 2: FORMULACIÓN SIMPLEX

x_1 = toneladas elaboradas del producto A
x_2 = toneladas elaboradas del producto B

maximizar: $Z - 40x_1 - 30x_2 + 0s1 + 0s2 + 0s3 = 0$

sujeto a: $x_1 + 0x_2 + 1s_1 + 0s_2 + 0s_3 = 16$

$0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0s_1 + 1s_2 + 0s_3 = 8$

$x_1 + 2x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 1s_3 = 24$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

TABLA INICIAL									
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	-40	-30	0	0	0	0	
s_1	0	1	0	1	0	0	16	
s_2	0	0	1	0	1	0	8	
s_3	0	1	2	0	0	1	24	

TABLA INICIAL									
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	-40	-30	0	0	0	0	
s_1	0	1	0	1	0	0	16	16
s_2	0	0	1	0	1	0	8	
s_3	0	1	2	0	0	1	24	24

x_1 entra en la base y s_1 sale

TABLA INICIAL								
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	-40	-30	0	0	0	0	
s_1	0	1	0	1	0	0	16	16
s_2	0	0	1	0	1	0	8	
s_3	0	1	2	0	0	1	24	24

x_1 entra en la base y s_1 sale

ITERACIÓN 1								
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z								
$s_1 \leftarrow x_1$	0	1	0	1	0	0	16	
s_2								
s_3								

TABLA INICIAL								
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	-40	-30	0	0	0	0	
s_1	0	1	0	1	0	0	16	16
s_2	0	0	1	0	1	0	8	
s_3	0	1	2	0	0	1	24	24

x_1 entra en la base y s_1 sale

ITERACIÓN 1								
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z								
$s_1 \leftarrow x_1$	0	1	0	1	0	0	16	
s_2	0	0	1	0	1	0	8	
s_3								

TABLA INICIAL								
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	-40	-30	0	0	0	0	
s_1	0	1	0	1	0	0	16	16
s_2	0	0	1	0	1	0	8	
s_3	0	1	2	0	0	1	24	24

x_1 entra en la base y s_1 sale

ITERACIÓN 1								
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	0	-30	40	0	0	640	
$s_1 \leftarrow x_1$	0	1	0	1	0	0	16	
s_2	0	0	1	0	1	0	8	
s_3								

TABLA INICIAL

		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	-40	-30	0	0	0	0	
s_1	0	1	0	1	0	0	16	16
s_2	0	0	1	0	1	0	8	
s_3	0	1	2	0	0	1	24	24

x_1 entra en la base y s_1 sale

ITERACIÓN 1

Como Z tiene valores negativos hay que iterar de nuevo

		decisión					ción	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	0	-30	40	0	0	640	
$s_1 \leftarrow x_1$	0	1	0	1	0	0	16	
s_2	0	0	1	0	1	0	8	
s_3	0	0	2	-1	0	1	8	

ITERACIÓN 1								
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	0	-30	40	0	0	640	
$s_1 \leftarrow x_1$	0	1	0	1	0	0	16	
s_2	0	0	1	0	1	0	8	
s_3	0	0	2	-1	0	1	8	

ITERACIÓN 1								
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	0	-30	40	0	0	640	
$s_1 \leftarrow x_1$	0	1	0	1	0	0	16	
s_2	0	0	1	0	1	0	8	8
s_3	0	0	2	-1	0	1	8	4

x_2 entra en la base y s_3 sale

ITERACIÓN 1									
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	0	-30	40	0	0	640	
$s_1 \leftarrow x_1$	0	1	0	1	0	0	16	
s_2	0	0	1	0	1	0	8	8
s_3	0	0	2	-1	0	1	8	4

x_2 entra en la base y s_3 sale

ITERACIÓN 2									
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z								
$s_1 \leftarrow x_1$								
s_2								
$s_3 \leftarrow x_3$	0	0	1	-1/2	0	1/2	4	

ITERACIÓN 1

		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	0	-30	40	0	0	640	
$s_1 \leftarrow x_1$	0	1	0	1	0	0	16	
s_2	0	0	1	0	1	0	8	8
s_3	0	0	2	-1	0	1	8	4

x_2 entra en la base y s_3 sale

ITERACIÓN 2

		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z								
$s_1 \leftarrow x_1$	0	1	0	1	0	0	16	
s_2								
$s_3 \leftarrow x_3$	0	0	1	-1/2	0	1/2	4	

ITERACIÓN 1								
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	0	-30	40	0	0	640	
$s_1 \leftarrow x_1$	0	1	0	1	0	0	16	
s_2	0	0	1	0	1	0	8	8
s_3	0	0	2	-1	0	1	8	4

x_2 entra en la base y s_3 sale

ITERACIÓN 2								
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	0	0	25	0	15	760	
$s_1 \leftarrow x_1$	0	1	0	1	0	0	16	
s_2								
$s_3 \leftarrow x_3$	0	0	1	-1/2	0	1/2	4	

ITERACIÓN 1								
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	0	-30	40	0	0	640	
$s_1 \leftarrow x_1$	0	1	0	1	0	0	16	
s_2	0	0	1	0	1	0	8	8
s_3	0	0	2	-1	0	1	8	4

x_2 entra en la base y s_3 sale

ITERACIÓN 2								
		Variable de decisión						ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	0	0	25	0	15	760	
$s_1 \leftarrow x_1$	0	1	0	1	0	0	16	
s_2	0	0	0	1/2	1	-1/2	4	
$s_3 \leftarrow x_3$	0	0	1	-1/2	0	1/2	4	

Z no tiene ningún coeficiente negativo, se ha alcanzado la solución óptima

TABLA FINAL								
		Variable de decisión		Variable de holgura			Solución	ratio
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	1	0	0	25	0	15	760	
x_1	0	1	0	1	0	0	16	
s_2	0	0	0	1/2	1	-1/2	4	
x_3	0	0	1	-1/2	0	1/2	4	

La solución óptima es:

$x_1 = 16$; $x_2 = 4$; $Z = 760$

Modelo general de PL

MODELO DE OPTIMIZACIÓN

minimizar: $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

sujeto a: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m$

$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$

EN FORMA MATRICIAL

minimizar: Z = C · X

sujeto a: A · X ≥ B

X ≥ **0**

donde:

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Método SIMPLEX Dual

- Comienza con una solución inicial, que satisface la optimalidad pero que no pertenece a la región factible, y realiza operaciones hasta encontrar un punto óptimo que pertenezca a la región factible

Método SIMPLEX Dual: condiciones

SIMPLEX DUAL

- Minimizar Z
- $c_i \geq 0$
- Restricciones $\geq$
- b_i valores reales

SIMPLEX

- Maximizar Z
- c_i valores reales
- Restricciones $\leq$
- $b_i \geq 0$

Método SIMPLEX Dual: resumen

- Formulación inicial del problema
- Formulación SIMPLEX
- Tabla inicial
- Iteraciones
  - Fila pivote (vble que sale), solución más negativa
  - Columna pivote (vble que entra), menor valor de la ratio (Z/fila pivote)
  - Poner ceros en la columna pivote usando elemento pivote (eliminación gaussiana)
  - Acaba cuando todos los valores de la solución son no negativos

PASO 1: FORMULACIÓN INICIAL

Minimizar Z
$c_i \geq 0$
Restricciones $\geq$
b_i valores reales

minimizar: $Z = 2x_1 + 3x_2$

sujeto a: $2x_1 + 2x_2 \geq 30$

$x_1 + 2x_2 \geq 10$

$x_1, x_2 \geq 0$

Transformaciones al modelo

- Cuando una desigualdad se multiplica por (-1), su sentido se invierte

$$\mathbf{2X_1 + 9X_2 - 4X_3 \geq 9}$$

es matemáticamente equivalente a

$$\mathbf{-2X_1 - 9X_2 + 4X_3 \leq -9}$$

PASO 1: FORMULACIÓN INICIAL

minimizar: $Z = 2x_1 + 3x_2$

sujeto a: $2x_1 + 2x_2 \geq 30$

$x_1 + 2x_2 \geq 10$

$x_1, x_2 \geq 0$

minimizar: $Z = 2x_1 + 3x_2$

sujeto a: $-2x_1 - 2x_2 \leq -30$

$-x_1 - 2x_2 \leq -10$

$x_1, x_2 \geq 0$

PASO 2: FORMULACIÓN SIMPLEX

minimizar:	$Z - 2x_1 - 3x_2 + 0s_1 + 0s_2 = 0$
sujeto a:	$-2x_1 - 2x_3 + s_1 + 0s_2 = -30$
	$-x_1 - 2x_2 + 0s_1 + s_2 = -5$
	$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

TABLA INICIAL						
		Variable de decisión		Variable de holgura		Solución
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	
Z	1	-2	-3	0	0	0
s_1	0	-2	-2	1	0	-30
s_2	0	-1	-2	0	1	-10
ratio						

TABLA INICIAL						
		Variable de decisión		Variable de holgura		Solución
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	
Z	1	-2	-3	0	0	0
s_1	0	-2	-2	1	0	-30
s_2	0	-1	-2	0	1	-10
ratio		1	3/2			

s_1 sale de la base y x_1 entra

TABLA INICIAL						
		Variable de decisión		Variable de holgura		Solución
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	
Z	1	-2	-3	0	0	0
s_1	0	-2	-2	1	0	-30
s_2	0	-1	-2	0	1	-10
ratio		1	3/2			

s_1 sale de la base y x_1 entra

ITERACIÓN 1						
		Variable de decisión		Variable de holgura		Solución
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	
Z						
$s_1 \leftarrow x_1$	0	1	1	-1/2	0	15
s_2						
ratio						

TABLA INICIAL						
		Variable de decisión		Variable de holgura		Solución
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	
Z	1	-2	-3	0	0	0
s_1	0	-2	-2	1	0	-30
s_2	0	-1	-2	0	1	-10
ratio		1	3/2			

s_1 sale de la base y x_1 entra

ITERACIÓN 1						
		Variable de decisión		Variable de holgura		Solución
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	
Z						
$s_1 \leftarrow x_1$	0	1	1	-1/2	0	15
s_2	0	0	-1	-1/2	1	5
ratio						

TABLA INICIAL						
		Variable de decisión		Variable de holgura		Solución
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	
Z	1	-2	-3	0	0	0
s_1	0	-2	-2	1	0	-30
s_2	0	-1	-2	0	1	-10
ratio		1	3/2			

s_1 sale de la base y x_1 entra

ITERACIÓN 1						
		Variable de decisión		Variable de holgura		Solución
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	
Z	1	0	-1	-1	0	30
$s_1 \leftarrow x_1$	0	1	1	-1/2	0	15
s_2	0	0	-1	-1/2	1	5
ratio						

Todos los valores de la solución son no negativos

TABLA FINAL						
		Variable de decisión		Variable de holgura		Solución
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	
Z	1	0	-1	-1	0	30
x_1	0	1	1	-1/2	0	15
s_2	0	0	-1	-1/2	1	5
ratio						

SOLUCIÓN ÓPTIMA

$x_1 = 15; x_2 = 0; Z = 30$