

Programación lineal

Estudios de Ingeniería

Juan Gabriel Gomila

Frogames

<https://frogames.es>

1 de julio de 2017

Índice

1 Introducción

2 Programación lineal

- Forma estándar de un PPL
- Soluciones básicas de un PPL

3 El método del símplex

- Un ejemplo para comenzar
- El método del símplex en problemas de minimización
- Observaciones finales

1 Introducción

2 Programación lineal

- Forma estándar de un PPL
- Soluciones básicas de un PPL

3 El método del símplex

- Un ejemplo para comenzar
- El método del símplex en problemas de minimización
- Observaciones finales

Introducción

Se comenzará el tema mostrando diversos ejemplos que se pueden modelizar mediante técnicas de programación lineal.

El objetivo de la programación lineal es optimizar (minimizar o maximizar) una función lineal de n variables sujetas a restricciones de igualdad o desigualdad, también lineales.

Introducción

La programación lineal se aplica en diversos campos, como por ejemplo:

- Logística: problema del transporte.
- Mezclas: problema de la dieta.
- Finanzas.
- Mercadotecnia.
- Asignación de tareas.
- Producción.
- Otras decisiones.

Introducción

Cualquier problema de programación lineal requiere cuatro componentes básicos:

- 1 El conjunto de datos del problema.
- 2 El conjunto de variables que intervienen en el problema, junto con sus dominios de definición.
- 3 El conjunto de restricciones del problema que definen el conjunto de soluciones admisibles.
- 4 La función que se ha de optimizar.

El problema del transporte

El problema del transporte se refiere al proceso de determinar el número de mercancías que se han de llevar desde cada uno de los orígenes a cada uno de los destino posibles.

El objetivo suele ser minimizar el coste del transporte y las restricciones vienen dadas por las capacidades de producción de cada origen y las necesidades de cada destinación.

El problema del transporte



El problema del transporte

Supóngase que un determinado producto se ha de llevar en cantidades u_1, u_2, \dots, u_m desde m puntos de origen y se ha de recibir en n destinos en cantidades v_1, v_2, \dots, v_n .

El problema consiste en determinar las cantidades x_{ij} que se han de llevar desde el origen i al destino j para minimizar el coste del transporte.

Los cuatro elementos principales del problema son:

El problema del transporte

1 Datos:

- m : número de orígenes.
- n : número de destinos.
- u_i : cantidad de producto que se ha de llevar desde el origen i
- v_j : cantidad de producto que se ha de recibir en el destino j
- c_{ij} : coste de llevar una unidad de producto desde i hasta j

El problema del transporte

2 Variables:

- x_{ij} : cantidad de producto que se lleva desde i hasta j , con $x_{ij} \geq 0$ para todo $i = 1, \dots, m$ y para todo $j = 1 \dots, n$ (dominio de definición de las variables)

El problema del transporte

3 Restricciones:

- La cantidad total del producto que surge de i (u_i) ha de coincidir con la suma de las cantidades que surgen de i a cada destino $j = 1, \dots, n$:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = u_i$$

- La cantidad total de producto que recibe j (v_j) ha de coincidir con la suma de cantidades que lleguen a j desde todos los orígenes $i = 1, \dots, m$:

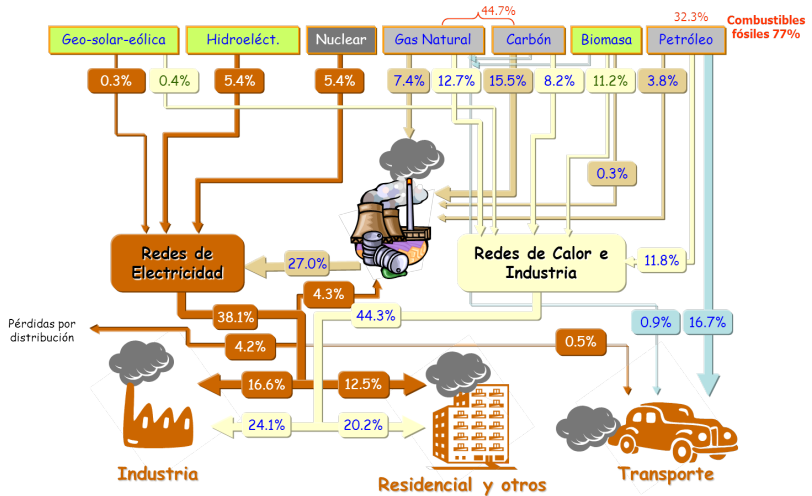
$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = v_j$$

El problema del transporte

4 Objetivo:

En este caso, se va a minimizar el coste del envío.

El problema del transporte



El problema del transporte - Ejemplo

Una compañía de ámbito nacional produce y distribuye una línea de neveras de alta eficiencia energética. La empresa tiene líneas de producción y montaje en dos ciudades, Pamplona y Bilbao, y tres cadenas de distribución localizadas en Madrid, Barcelona y Sevilla. La oficina de Madrid presenta una demanda anual de 10000 neveras, la de Sevilla 8000 y la de Barcelona 15000.

La planta de Bilbao puede producir hasta 20.000 neveras anuales y la de Pamplona 15000.

Los costes de transporte por unidad (en euros) son los siguientes:

Costes de transporte por unidad (en euros)			
Origen/Destino	Madrid	Barcelona	Sevilla
Pamplona	3	1	5
Bilbao	2	2	4

Se plantea un problema de programación lineal que minimiza los costes anuales de la compañía.

Mezclas. El problema de la dieta

El problema de la dieta representa una de las primeras aplicaciones de la programación lineal que se utiliza en hospitales. Se usa para determinar la dieta de los pacientes que satisfaciendo unas especificaciones nutritivas mínimas de la forma más barata posible. Actualmente también se aplica en el sector de la ganadería con la misma idea; encontrar la combinación óptima de alimentos que consiguen una aportación nutritiva mínima suponiendo el menor coste posible. Una aplicación de este problema se muestra en el siguiente ejemplo:

Mezclas. El problema de la dieta - Ejemplo

Un ganadero se quiere asegurar de que sus animales ingieren diariamente al menos 14 unidades de hierro, doce de vitamina A y 18 de vitamina C.

Un kilogramo de harina tiene un coste de dos euros y cuenta con una unidad de hierro, una de vitamina A y tres de vitamina C. Un kilogramo de maíz tiene un coste de dos euros y contiene dos unidades de hierro, una de vitamina A y una de vitamina C.

Determinéense las posibles maneras de alimentar al ganado que satisfagan las necesidades mínimas alimenticias diarias con el mínimo coste posible.

Producción - Ejemplo

Una empresa fabrica cuatro tipos de corbata. Una de seda, otra de poliéster y dos de poliéster y algodón. La tabla siguiente muestra el coste en euros de los materiales y de su disponibilidad:

Costes y disponibilidad de los materiales		
Material	Coste por metro	Metros disponibles/mes
Seda	21	800
Poliéster	6	3000
Algodón	9	1600

Producción - Ejemplos

La tabla siguiente muestra todos los datos relativos a la producción, la demanda mensual y la composición de cada tipo de corbata:

Propiedades				
Tipos	Prendas vendidas	Demanda min/max	Metros necesarios	Composición
Seda	6.70	6000 - 7000	0.125	100 % seda
Poliester	3.55	10000 - 14000	0.08	100 % pol
Pol/Alg	4.31	13000 - 16000	0.10	50 %pol - 50 %coti $\frac{1}{2}$
Pol/Alg	4.81	6000 - 8500	0.1.	30 %pol - 70 %coti $\frac{1}{2}$

Plantéese un problema de programación lineal para determinar el plan de producción que maximiza los beneficios de la empresa.

Planificación de horarios

La planificación de horarios intenta dar respuesta efectiva a las necesidades de personal durante un periodo de tiempo concreto. Sectores típicos donde se hace esta programación lineal para tomar decisiones sobre la planificación de horarios son las entidades bancarias y los grandes almacenes.

Planificación de horarios- Ejemplos

Supóngase que una entidad bancaria necesita diariamente entre 10 y 18 cajeros en función de la hora del día. Las necesidades diarias se especifican en la tabla siguiente:

Disponibilidad	
Franja horaria	Num. Cajeros
9a.m. - 10a.m.	10
10a.m. - 11a.m.	12
11a.m. - 12a.m.	14
12a.m. - 1p.m.	16
1p.m. - 2p.m.	18
2p.m. - 3p.m.	17
3p.m. - 4p.m.	15
4p.m. - 5p.m.	10

Planificación de horarios- Ejemplos

La oficina tiene 12 trabajadores a jornada completa y dispone de personal suficiente para trabajar a media jornada. Un cajero que trabaja a media jornada debe estar operativo 4 horas al día y estar disponible para comenzar a trabajar a cualquier hora entre las nueve de la mañana y la una de la tarde. Los trabajadores a jornada completa deben estar operativos desde las nueve de la mañana hasta las cinco de la tarde y tienen una hora libre para comer (la mitad come de once a doce y la otra mitad lo hace de doce a una). Las normas de la entidad limitan el número de horas realizadas por los trabajadores a tiempo parcial a, como mucho, el 50 % de las horas diarias que se realicen. (Nótese que se realizan 112 horas diarias). Estos trabajadores ganan 16 euros al día y los trabajadores a jornada completa 50 euros al día. Se plantea un problema de programación lineal que establece un horario que minimiza los costes salariales del banco.

Finanzas. Selección de una cartera de valores - Ejemplos

Un banco invierte en crédito al consumo, bonos corporativos, depósitos de oro y préstamos a la construcción. Actualmente dispone de cinco millones de euros para invertir y pretende, por un lado maximizar el interés esperado para los próximos seis meses y por el otro cumplir con la diversificación propugnada por la Junta Directiva según se especifica en la tabla siguiente:

Finanzas		
Tipos de inversión	Interés esperado	Límite de inversión (millones de euros)
Créditos al consumo	7 %	1
Bonos corporativos	11 %	2.5
Depósitos de oro	19 %	1.5
Préstamos constr.	15 %	1.8

Finanzas. Selección de una cartera de valores - Ejemplos

La Directiva también exige que como mínimo un 55 % de los fondos se dediquen a depósitos de oro y préstamos a la construcción, mientras que el porcentaje dedicado a los créditos al consumidor no han de superar el 15 % de los fondos. Se plantea un problema de programación lineal que optimice el objetivo del banco.

Mercadotecnia

La programación lineal se utiliza en el campo de la mercadotecnia y la publicidad como una herramienta que permite determinar cuál es la combinación más efectiva de medios para anunciar los productos de una empresa.

Muchas veces la empresa dispone de un presupuesto fijo para publicidad y el objetivo es distribuir este presupuesto entre diversas opciones (TV, radio, diarios, revistas, Google, Facebook...) de manera que los productos de una empresa tengan la máxima difusión. En otros casos, las restricciones vienen dadas por la disponibilidad de medios y de las políticas publicitarias de la empresa. Se verá una aplicación con el siguiente ejemplo:

Mercadotecnia - Ejemplo

Una cadena nacional de locales de ocio dispone de 8000 euros semanales para publicidad. Este dinero se ha de destinar a publicar anuncios en TV, diarios y dos emisoras de radio.

El objetivo final es conseguir la mayor audiencia posible.

La tabla siguiente recoge toda la información referente a la audiencia esperada por anuncio, el coste (en euros) de cada anuncio y el número máximo de anuncios semanales posibles en cada medio.

Mercadotecnia			
Medio	Audiencia	Coste	Número máximo
TV	5000	800	12
Diario	8500	925	5
Radio 1	2400	290	25
Radio 2	2800	380	20

Mercadotecnia - Ejemplo

La empresa también exige la contratación de un mínimo de 5 anuncios por radio semanales y no se puede destinar a este medio más de 1800 euros por semana. Plantéese un problema de programación lineal que optimice el objetivo de la empresa.

Investigación de mercados

La programación lineal también se aplica al estudio de mercados. Mediante el siguiente ejemplo se puede ver como las estadísticas pueden emplear la programación lineal para el diseño de encuestas.

Investigación de mercados - Ejemplo

Se va a realizar una encuesta para determinar la opinión de los ciudadanos de Baleares sobre la inmigración. La encuesta ha de satisfacer lo siguiente:

- 1 Entrevistar un mínimo de 2300 familias baleares.
- 2 En al menos 1000 familias entrevistadas, la persona de más edad no debe superar los 30 años.
- 3 En al menos 600 familias entrevistadas, la edad de la persona mayor ha de estar comprendida entre los 31 y los 50 años.
- 4 El porcentaje de familias entrevistadas que pertenecen a zonas con alta tasa de inmigración no ha de ser inferior al 15 % del total.

Todas las encuestas se han de hacer personalmente y ha de responder la persona más mayor de cada familia.

Investigación de mercados - Ejemplo

La tabla siguiente indica el coste (en euros) de cada encuesta según la edad del encuestado y si pertenece o no a una zona con tasa elevada de inmigración.

Inmigración			
Zona	<30 años	31-50 años	>50 años
Inmigración baja	6.90	7.25	6.10
Inmigración alta	7.50	6.80	5.50

Plantéese el problema de programación lineal que satisface todas las condiciones de la encuesta y minimice su coste.

1 Introducción

2 Programación lineal

- Forma estándar de un PPL
- Soluciones básicas de un PPL

3 El método del símplex

- Un ejemplo para comenzar
- El método del símplex en problemas de minimización
- Observaciones finales

Programación lineal

Ya se han visto en los ejemplos del apartado anterior que la programación lineal se presenta en muchas aplicaciones en las cuales es necesaria la toma de decisiones.

Programación lineal

Definición

La forma más general de un problema de programación lineal (PPL) consiste en minimizar o maximizar una función:

$$Z = f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

...

Programación lineal

Definición

Bajo las restricciones:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, p-1$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i = p, p+1, \dots, q-1$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = q, q+1, \dots, m$$

Donde p , q y m son números positivos tales que $1 \leq p \leq q \leq m$, normalmente $n \geq m$.

Programación lineal

Solución factible

Un punto $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ que satisface todas las restricciones del PPL, se denomina solución factible. El conjunto de todas las soluciones factibles se denomina región factible o región de factibilidad.

Solución óptima

Un punto factible \bar{x} se denomina solución óptima del PPL de maximización (o minimización) cuando:

$$f(\bar{x}) \geq f(x) \quad (\text{o } f(\bar{x}) \leq f(x))$$

Para cualquier otro punto factible x .

Programación lineal

El objetivo de los problemas de optimización es encontrar un óptimo global. En general solo se encuentran locales (problemas de optimización, estudiados en bachillerato, en los que se calculaba el óptimo local y solo bajo ciertas condiciones los óptimos eran globales).

Los problemas de PL presentan propiedades que hacen posible encontrar el óptimo global.

Propiedades

- 1 Si la región factible está acotada, entonces el problema siempre tiene solución.
- 2 El óptimo de un PPL es siempre un óptimo global.
- 3 Si x e y son soluciones de un PPL, entonces cualquiera que sea la combinación lineal convexa de ellos también es una solución óptima:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y, \quad \lambda \in [0, 1]$$

- 4 La solución óptima alcanza siempre, al menos, un punto extremo de la región factible.

Ejemplos de PL

Se verá a continuación ejemplos de PPL con solución única, solución múltiple, solución no acotada y solución infactible (o lo que es lo mismo, sin solución).

Ejemplos de PL

Ejemplo 1

Maximícese la función $Z = 3x_1 + x_2$ bajo las restricciones:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 3 \\ 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_2 \leq 0 \\ -x_1 - x_2 \leq -1 \\ -x_1 \leq 0 \end{cases}$$

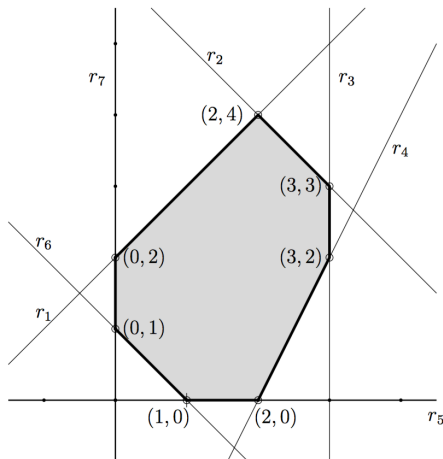
Ejemplos de PL

Represéntese gráficamente la región factible. La región factible será la intersección de todos los semiplanos que determinen cada una de las restricciones. Considérense las rectas:

- $r_1 : -x_1 + x_2 = 2$, que pasa por los puntos $(0, 2)$, $(-2, 0)$.
- $r_2 : x_1 + x_2$, que pasa por los puntos $(0, 6)$, $(6, 0)$.
- $r_3 : x_1 = 3$, que es paralela al eje Y .
- $r_4 : -2x_1 - x_2 = 4$, que pasa por los puntos $(0, -4)$, $(2, 0)$.
- $r_5 : x_2 = 0$, que es paralela al eje X .
- $r_6 : x_1 + x_2 = 1$, que pasa por los puntos $(0, 1)$, $(1, 0)$.
- $r_7 : x_1 = 0$, que es paralela al eje Y

Ejemplos de PL

Si ahora se hacen las interacciones $r_1 \cap r_2$, se obtiene el punto $(2, 4)$, $r_2 \cap r_3$ el punto $(3, 3)$, y $r_3 \cap r_4$ el punto $(3, 2)$.



Ejemplos de PL

R en este caso es un polígono cerrado. Las soluciones siempre se encuentran en los extremos de la región factible, por tanto se evaluará la función objetivo $Z = 3x_1 + x_2$ en los vértices de R :

$$Z(0,1) = 1; \quad Z(0,2) = 2; \quad Z(2,4) = 10; \quad Z(3,3) = 12;$$

$$Z(3,2) = 11; \quad Z(2,0) = 6; \quad Z(1,0) = 3.$$

Por tanto el máximo se alcanza en el punto $(3,3)$ y vale $Z = 12$.

Ejemplos de PL

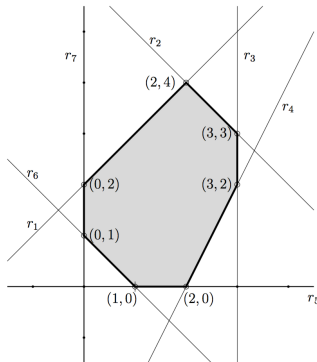
Ejemplo 2

Maximícese la función $Z = x_1 + x_2$ bajo las restricciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 3 \\ 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_2 \leq 0 \\ -x_1 - x_2 \leq -1 \\ -x_1 \leq 0 \end{array} \right.$$

Ejemplos de PL

Obsérvese que el conjunto de restricciones es el mismo que el del ejemplo anterior, por tanto la región factible será la misma.



Ejemplos de PL

El máximo se alcanza en los puntos $(2, 4)$ y $(3, 3)$, entonces todos los puntos del segmento que une estos dos puntos son máximos globales.

Ejemplos de PL

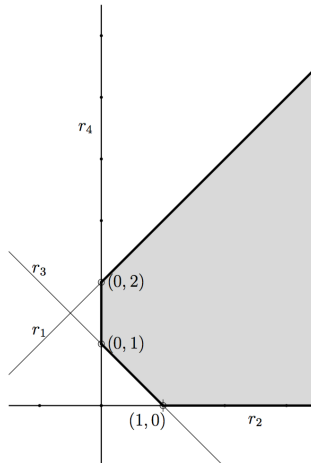
Ejemplo 3

Maximícese la función $Z = 3x_1 + x_2$ bajo las restricciones:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_2 \leq 0 \\ -x_1 - x_2 \leq -1 \\ -x_1 \leq 0 \end{cases}$$

Ejemplos de PL

En este caso se puede observar que la región factible no está acotada en la dirección de crecimiento de la función objetivo.



Ejemplos de PL

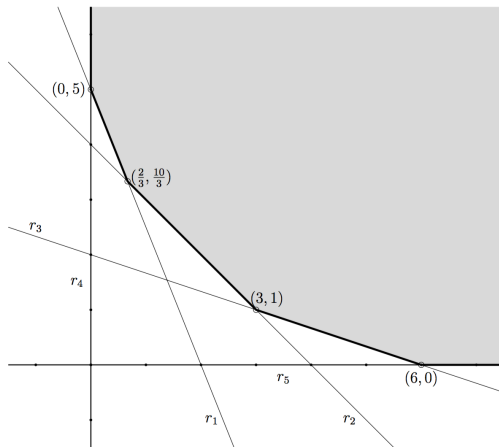
Ejemplo 4

Minimícese la función $Z = 0,6x_1 + x_2$ bajo las restricciones:

$$\begin{cases} 10x_1 + 4x_2 \geq 20 \\ 5x_1 + 5x_2 \geq 20 \\ 2x_1 + 6x_2 \geq 12 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ejemplos de PL

En este caso la región factible no está acotada pero la función alcanza el mínimo en el punto $(3, 1)$ y vale $Z = 2,8$.



Ejemplos de PL

Ejemplo 5

Minimícese la función $Z = 2x_1 - 3x_2$ bajo las restricciones:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 4 \\ 2x_1 - 4x_2 \leq -6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

En este caso, la región factible es $R = \emptyset$; es decir, el problema no tiene solución.

1 Introducción

2 Programación lineal

- Forma estándar de un PPL
- Soluciones básicas de un PPL

3 El método del símplex

- Un ejemplo para comenzar
- El método del símplex en problemas de minimización
- Observaciones finales

EI PPL

Forma estándar

Para describir un PPL, se necesita:

- 1 Un vector $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.
- 2 Un vector $b = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ con $b_i \geq 0$ para todo $i = 1, \dots, m$.
- 3 Una matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Con estos elementos, el problema lineal asociado en forma estándar tiene la forma siguiente:

$$\text{Min(Max)} \ Z = cX$$

Bajo las restricciones $AX = B$, donde:

EI PPL

Forma estándar

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Con $x_j \geq 0$ para todo $j = 1 \cdots , n$ y:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Con $b_i \geq 0$ para todo $i = 1 \cdots , m$. Normalmente $n \geq m$.

EI PPL

Definición

Dícese que un PPL está en forma estándar si:

- 1 Es de minimización o de maximización.
- 2 Solo incluye restricciones de igualdad.
- 3 $b_i \geq 0$ para todo $i = 1, \dots, m$.
- 4 $x_j \geq 0$ para todo $j = 1, \dots, n$.

Transformación de un PPL a forma estándar

Cualquiera que sea el PPL se puede transformar a la forma estándar. Véase como:

Paso 1: transformar las variables en no negativas

Las variables no restringidas en signo se pueden expresar como diferencia de dos variables no negativas. Se define:

$$x_i^+ = \max\{0, x_i\}$$

$$x_i^- = \max\{0, -x_i\}$$

Se satisface que $x_i^+, x_i^- \geq 0$ i $x_i = x_i^+ - x_i^-$.

Transformación de un PPL a forma estándar

Paso 2: transformar las restricciones de desigualdad en igualdades

Las restricciones de desigualdad se pueden transformar en restricciones de igualdad equivalentes introduciendo nuevas variables denominadas variables compensatorias: Si

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$, entonces existe una variable $x_{n+1} \geq 0$ tal que:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$$

Si $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$, entonces existe una variable $x_{n+1} \geq 0$ tal que:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i$$

Transformación de un PPL a forma estándar

Paso 3: maximizar es lo mismo que minimizar

Un problema de maximización $Z_{max} = cX$ es equivalente a minimizar $Z_{min} = -cX$ (y viceversa) si ambos problemas verifican el mismo conjunto de restricciones.

Transformación de un PPL a forma estándar

Paso 4: no negatividad de los términos independientes

Toda restricción con término independiente $b_i < 0$ se puede transformar en otra con término independiente no negativo multiplicando toda la restricción por -1 .

Transformación de un PPL a forma estándar

Ejemplo 1

Encuéntrese $\max Z = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3$ bajo las restricciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \geq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Transformación de un PPL a forma estándar

Para resolverlo se escribirá en forma de máximo. Obsérvese que todas las variables son no negativas. Se tendrán que transformar las restricciones de desigualdad en igualdades, así habrá que añadir variables compensatorias. En forma estándar será:

$$\max Z = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

Bajo las restricciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Transformación de un PPL a forma estándar

Si se quisiese el mismo problema en forma estándar de mínimo, sería:

$$\min Z = -2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

Bajo las restricciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Transformación de un PPL a forma estándar

Ejemplo 2

Encuéntrese $\max Z = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3$ bajo las restricciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Transformación de un PPL a forma estándar

Obsérvese que esta vez la variable x_3 no está restringida en signo. Habrá que escribir $x_3 = x_6 - x_7$ con $x_6 = x_3^+ \geq 0$ y $x_7 = x_3^- \geq 0$. Así el problema en forma estándar será:

$$\max Z = 2x_1 - 3x_2 + 5(x_6 - x_7) + 0x_4 + 0x_5$$

Bajo las restricciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - (x_6 - x_7) - x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

Transformación de un PPL a forma estándar

Ejemplo 3

Encuéntrese $\max Z = 3x_1 - x_3$ bajo las restricciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 \leq 1 \\ x_1 + x_3 \geq -1 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

Transformación de un PPL a forma estándar

Como todas las variables han de ser no negativas habrá que pasar a:

$$x_2 = y_2 - z_2; \quad y_2 = x_2^+, z_2 = x_2^-$$

$$x_3 = y_3 - z_3; \quad y_3 = x_3^+, z_3 = x_3^-$$

Con $y_2, z_2, y_3, z_3 \geq 0$. Nótese que el término independiente de la tercera restricción es negativo, entonces se multiplica por -1 . El problema inicial será:

$$\max Z = \max Z = 3x_1 - y_3 + z_3$$

Bajo las restricciones:

$$\begin{cases} x_1 + y_2 - z_2 + y_3 - z_3 = 1 \\ x_1 - y_2 + z_2 - y_3 + z_3 \leq 1 \\ -x_1 - y_3 + z_3 \leq 1 \\ x_1, y_2, z_2, y_3, z_3 \geq 0 \end{cases}$$

Transformación de un PPL a forma estándar

Ahora solo falta transformar las restricciones de desigualdad en restricciones de igualdad:

$$\begin{cases} x_1 + y_2 - z_2 + y_3 - z_3 = 1 \\ x_1 - y_2 + z_2 - y_3 + z_3 + u_1 = 1 \\ -x_1 - y_3 + z_3 + u_2 = 1 \\ x_1, y_2, z_2, y_3, z_3, u_1, u_2 \geq 0 \end{cases}$$

1 Introducción

2 Programación lineal

- Forma estándar de un PPL
- Soluciones básicas de un PPL

3 El método del símplex

- Un ejemplo para comenzar
- El método del símplex en problemas de minimización
- Observaciones finales

Soluciones básicas de un PPL

Supóngase que un PPL viene dado en forma estándar
 $\min(\max) Z = cX$ bajo las restricciones $AX = B$ donde:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t, \quad x_j \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$B = (b_1, b_2, \dots, b_m)^t, \quad b_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$$

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

Se puede suponer sin pérdida de generalidad que $\text{rang}(A) = m$, ya que $m \leq n$ y que el sistema $AX = B$ tiene solución. En cualquier otro caso, o bien el sistema es equivalente a otro sistema compatible con menos ecuaciones o bien el sistema es incompatible.

Soluciones básicas de un PPL

Sea A la matriz anterior, entonces:

Definición

- Se denomina básica de A a toda matriz de orden m , M_b de rango m extraída de A .
- M_b es básica factible si es básica y satisface $M_b^{-1}B \geq 0$.

Soluciones básicas de un PPL

Definición

Sea X_b el vector de las variables asociadas a las columnas de M_b , estas variables se denominan básicas y las demás variables no básicas. Si se asigna el valor cero a las variables no básicas X_N , el sistema $AX = B$ se puede escribir como:

$$(M_b \mid X_N) \begin{pmatrix} X_b \\ 0 \end{pmatrix} = B$$

Donde $M_b X_b = B$ y, como M_b es invertible, $X_b = M_b^{-1} B$ es la solución básica asociada a M_b . Si además M_b es una matriz básica factible, su solución básica es factible.

Soluciones básicas de un PPL

Ejemplo 1

Encuéntrense las soluciones básicas del sistema.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 12 \end{cases}$$

Ejemplo 1

Las matrices A y B son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.1

Si se considera:

$$M_b = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Las variables son x_1, x_2 y la variable no básica $x_3 = 0$, entonces:

$$X_b = M_b^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Así $(x_1, x_2) = (0, 4)$ es una solución básica factible.

Ejemplo 1.2

Si tomamos como matriz básica:

$$M_b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Las variables son x_1, x_3 y la variable no básica $x_2 = 0$, entonces:

$$X_b = M_b^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}$$

En este caso se obtiene una solución básica no factible ($x_3 < 0$)

Ejemplo 1.3

Si se toma como matriz básica:

$$M_b = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Las variables son x_2, x_3 y la variable no básica $x_1 = 0$, entonces:

$$X_b = M_b^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así $(x_2, x_3) = (4, 0)$ es una solución básica factible.

Ejemplo 1

El número de soluciones básicas factibles de un PPL acotado con un número finito de restricciones es siempre finito y a cada una le corresponde un punto extremo de la región factible.

Soluciones básicas de un PPL

Teorema

Sea:

$$R = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : AX = B, x_j \geq 0 \ j = 1 \dots, n\}$$

Con $A = (a_{ij})_{m \times n}$ y $\text{rang}(A) = m$, entonces $x \in \mathbb{R}^n$ es un punto extremo de R si y solo si A se puede descomponer como $A = (M_b \mid X_N)$ tal que:

$$x = \begin{pmatrix} X_b \\ X_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_b^{-1}B \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donde M_b es una matriz de orden m invertible, extraída de A que satisface $M_b^{-1}B \geq 0$

Soluciones básicas de un PPL

Observación

Recuérdese que si M_b es una matriz de orden m invertible, es equivalente por filas a la matriz identidad I_m o a cualquier otra matriz de orden m , las columnas de la cual son los vectores unitarios:

$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, \dots , $e_m = (0, 0, \dots, 1)$ no necesariamente en este orden:

$$I_m \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \dots$$

Soluciones básicas de un PPL

Teorema. Propiedad fundamental de la programación lineal

Si un PPL tiene una solución óptima, esta es una solución básica factible.

Por tanto, para hallar el óptimo de un PPL se encontrará en el conjunto de soluciones factibles.

1 Introducción

2 Programación lineal

- Forma estándar de un PPL
- Soluciones básicas de un PPL

3 El método del símplex

- Un ejemplo para comenzar
- El método del símplex en problemas de minimización
- Observaciones finales

El método del símplex

Es un procedimiento algebraico (no geométrico) mediante el cual se pasa de una solución básica factible inicial (o cualquier otra) a una solución básica factible adyacente, mejorando, o al menos, no empeorando el valor de la función objetivo.

Existen muchas versiones del método símplex y todas pretenden lo mismo: encontrar la solución óptima de un PPL.

Para encontrar este óptimo se emplean unas tablas. Se parte de una tabla inicial y se van transformando los valores de la tabla hasta llegar a la solución óptima.

En este curso se aplicará el método revisado del símplex que incluye la función objetivo en las tablas. En el método del símplex se toma como matriz básica factible inicial la matriz identidad y cualquier otra matriz básica factible obtenida a partir de la matriz identidad haciendo intercambios de filas.

1 Introducción

2 Programación lineal

- Forma estándar de un PPL
- Soluciones básicas de un PPL

3 El método del símplex

- Un ejemplo para comenzar
- El método del símplex en problemas de minimización
- Observaciones finales

El método del símplex

Ejemplo del símplex

Encuéntrese $\max Z = 40x_1 + 30x_2$ bajo las restricciones:

$$\begin{cases} x_1 & \leq 16 \\ x_2 & \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 & \leq 24 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

El método del símplex

Si se resuelve gráficamente obteniendo la región factible con vértices $(0, 0)$, $(16, 0)$, $(16, 4)$, $(8, 8)$, $(0, 8)$ y se evalúa Z en estos vértices se obtiene que el máximo se alcanza en el punto $(16, 4)$ y vale 760.

El método del símplex

Para aplicar el método del símplex se han de hacer una serie de pasos:

El método del símplex - Paso 1

Se ha de escribir el problema de forma estándar de máximo, que será el mismo que denota el sistema:

$$\begin{array}{rcccccccl}
 Z & -40x_1 & -30x_2 & +0s_1 & +0s_2 & +0s_3 & = & 0 \\
 & x_1 & & +s_1 & & & = & 16 \\
 & & x_2 & & +s_2 & & = & 8 \\
 & x_1 & +2x_2 & & & +s_3 & = & 24
 \end{array}$$

Con $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$.

El método del símplex - Paso 1

Se puede construir la tabla:

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Constantes
fila 1	1	-40	-30	0	0	0	0
fila 2	0	1	0	1	0	0	16
fila 3	0	0	1	0	1	0	8
fila 4	0	1	2	0	0	1	24

La matriz básica factible inicial (matriz identidad) corresponde a las variables básicas, en este caso a las variables compensatorias s_1, s_2, s_3 y las variables no básicas son $x_1 = x_2 = 0$.

El método del símplex - Paso 1

Teniendo en cuenta también la fila 1 de la tabla, se puede expresar el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 8 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Que corresponde a $s_1 = 16$, $s_2 = 8$, $s_3 = 24$ y $Z = 0$ (con $(x_1, x_2) = (0, 0)$). Nótese que el punto $(0, 0)$ es un vértice de la región factible.

El método del símplex - Paso 2

- Se busca la columna que en la fila 1 tiene la entrada negativa con mayor valor absoluto (columna pivote).
- Se dividen las constantes por los valores positivos de la columna pivote y se elige el mínimo, la fila correspondiente a este mínimo será la fila pivote.
- El elemento que esté en la intersección de la fila y la columna pivotes debe corresponderse con la nueva variable básica. Nótese que en nuestro caso la columna pivote es la segunda fila y la fila pivote es la que corresponderá a la nueva al mínimo entre $16/1$ y $24/1$, es decir, la fila 2. Por lo tanto el pivote es 1 y le corresponde la variable x_1 .
- Se transforma la tabla inicial de manera que la columna pivote sea un vector unitario (todos los elementos de la columna han de ser nulos salvo el pivote que debe ser 1).

El método del símplex - Paso 2

Por tanto, si se hace $f_1 + 40f_2$, $f_4 - f_2$ se obtiene la nueva tabla:

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Constantes
fila 1	1	0	-30	40	0	0	640
fila 2	0	1	0	1	0	0	16
fila 3	0	0	1	0	1	0	8
fila 4	0	0	2	-1	0	1	8

El método del símplex - Paso 2

De la tabla se puede extraer el sistema básico:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ x_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 640 \\ 16 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Que corresponde a $x_1 = 16$, $s_2 = 8$, $s_3 = 8$ y $Z = 640$ (con $x_2 = 0$, $s_1 = 0$). Nótese que el punto $(16, 0)$ es otro vértice de la región factible.

El método del símplex - Paso 3

Como en la fila 1 todavía hay un número negativo, la solución se puede mejorar. Iterando el paso 2 anterior:

- La nueva variable básica es x_2 .
- Si se hace el mínimo entre $8/1$ y $8/2$, se obtiene que el pivote está en la fila 4.
- El pivote es 2 y por tanto se dividirá la fila pivote por 2 para obtener el pivote 1.
- Finalmente, se hacen ceros mediante la resta de elementos de la columna pivote.

El método del símplex - Paso 3

Por tanto, si se hace $f_1 + 30f_4$, $f_3 - f_4$ se obtiene la nueva tabla:

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Constantes
fila 1	1	0	0	25	0	15	760
fila 2	0	1	0	1	0	0	16
fila 3	0	0	0	1/2	1	-1/2	4
fila 4	0	0	1	-1/2	0	1/2	4

El método del símplex - Paso 3

De la tabla se puede extraer el sistema básico:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ x_1 \\ s_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 760 \\ 16 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Que se corresponde con $x_1 = 16$, $x_2 = 4$, $s_2 = 4$ y $Z = 760$ (donde $s_1 = 0$, $s_3 = 0$). Nótese que el punto $(16, 4)$ es otro vértice de la región factible.

En la fila 1 ya no quedan números negativos, por tanto la solución no se puede mejorar.

1 Introducción

2 Programación lineal

- Forma estándar de un PPL
- Soluciones básicas de un PPL

3 El método del símplex

- Un ejemplo para comenzar
- El método del símplex en problemas de minimización
- Observaciones finales

El método del símplex en problemas de minimización

En problemas de minimización no se puede aplicar directamente el método que se ha descrito en el apartado anterior. Véase cómo proceder en este caso con el siguiente ejemplo:

El método del símplex en problemas de minimización

Ejemplo 2 del símplex

Encuéntrese $\min Z = x_1 + 4x_2$ bajo las restricciones:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & \geq 8 \\ 3x_1 + 2x_2 & \geq 12 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

El método del símplex en problemas de minimización

Si se escribe en forma estándar de mínimo, queda:

$$\min Z = x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2$$

Bajo las restricciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Con $x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

El método del símplex en problemas de minimización

Se puede observar que de la matriz de coeficientes no se puede extraer la matriz identidad como matriz básica factible inicial. Se podría extraer la matriz:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Que corresponden a las variables básicas s_1, s_2 . La solución $s_1 = -8, s_2 = -12$, que resulta una solución básica no factible. Consecuentemente se ha de buscar una manera de obtener una solución básica factible inicial. Esta se obtiene añadiendo una variable artificial no negativa a cada una de las restricciones. Estas variables artificiales aparecerán en la función objetivo con coeficientes **grandes** respecto a los coeficientes de las variables del problema dado.

El método del símplex en problemas de minimización

Una vez se añaden las variables compensatorias y artificiales al problema de minimización se aplicará el método del símplex aplicando los paso siguientes:

- 1 Se escribe la tabla inicial del símplex.
- 2 Se transforman las columnas de las variables artificiales en vectores unitarios.
- 3 Se busca el pivote: de entre todas las columnas de las variables se elige la columna con la entrada positiva mayor. Para determinar la fila pivote se hace lo mismo que en el caso de la maximización.

El método del símplex en problemas de minimización

Si se considera el problema de minimización del ejemplo anterior, una vez añadidas las variables artificiales se tiene:

$$\begin{array}{rcccccccccl}
 Z & -x_1 & -4x_2 & +0s_1 & +0s_2 & -100v_1 & -100v_2 & = & 0 \\
 & x_1 & +2x_2 & -s_1 & & +v_1 & & = & 8 \\
 & 3x_1 & +2x_2 & & -s_2 & & +v_2 & = & 12
 \end{array}$$

Con $x_1, x_2, s_1, s_2, v_1, v_2 \geq 0$.

El método del símplex en problemas de minimización

Se escribe la tabla inicial del problema:

Z	x_1	x_2	s_1	s_2	v_1	v_2	Constantes
1	-1	-4	0	0	-100	-100	0
0	1	2	-1	0	1	0	8
0	3	2	0	-1	0	1	12

El método del símplex en problemas de minimización

Si se hace $f_1 + 100f_2 + 100f_3$, los vectores columna de las variables artificiales se transforma en unitarios y se obtiene la tabla:

Z	x_1	x_2	s_1	s_2	v_1	v_2	Constantes
1	399	396	-100	-100	0	0	2000
0	1	2	-1	0	1	0	8
0	3	2	0	-1	0	1	12

El método del símplex en problemas de minimización

La columna pivote corresponde a la columna de la variable x_1 y la fila pivote es la tercera. Se dividirá la fila pivote por 3 para tener el pivote igual a 1 y se obtiene

Z	x_1	x_2	s_1	s_2	v_1	v_2	Constantes
1	399	396	-100	-100	0	0	2000
0	1	2	-1	0	1	0	8
0	1	2/3	0	-1/3	0	1/3	4

El método del símplex en problemas de minimización

Si ahora se hace $f_1 - 399f_3$ y $f_2 - f_3$ se transforma la columna pivote en un vector unitario y se obtiene una nueva tabla:

Z	x_1	x_2	s_1	s_2	v_1	v_2	Constantes
1	0	130	-100	33	0	-133	404
0	0	4/3	-1	1/3	1	-1/3	4
0	1	2/3	0	-1/3	0	1/3	4

El método del símplex en problemas de minimización

Así se puede extraer el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ v_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 404 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Que corresponde a la solución

$x_1 = 4, v_1 = 4, s_1 = s_2 = x_2 = v_2 = 0$ y $Z = 404$. Nótese que en la solución aparece la variable artificial $v_1 = 4$, lo cual no interesa. La solución no es óptima, todavía queda en la fila 1 entradas positivas. La entrada positiva más grande corresponde a la variable x_2 , por tanto la columna correspondiente a x_2 es la columna pivote y la fila pivote es la 2, con pivote $4/3$.

El método del símplex en problemas de minimización

Si se divide la fila pivote por $4/3$ se tiene que:

Z	x_1	x_2	s_1	s_2	v_1	v_2	Constantes
1	0	130	-100	33	0	-133	404
0	0	1	-3/4	1/4	3/4	-1/4	3
0	1	2/3	0	-1/3	0	1/3	4

El método del símplex en problemas de minimización

Se hará $f_1 - 130f_2$ y $f_3 - 2/3f_2$, transformando la columna pivote en un vector unitario quedaría esta nueva tabla:

Z	x_1	x_2	s_1	s_2	v_1	v_2	Constantes
1	0	0	-5/2	1/2	-195/2	-201/2	14
0	0	1	-3/4	1/4	3/4	-1/4	3
0	1	0	1/2	-1/2	-1/2	1/2	2

La solución todavía no es óptima. Si se itera el proceso se obtiene que la columna pivote corresponde a la columna de la variable s_2 y la fila 2 es la fila pivote, con pivote 1/4.

Nota: la fila 3 no puede ser pivote, ya que es un nombre negativo, y si dividiésemos por $-1/2$, el valor de b_3 se convertiría en negativo también...

El método del símplex en problemas de minimización

Si se divide la fila pivote por $1/4$, queda:

Z	x_1	x_2	s_1	s_2	v_1	v_2	Constantes
1	0	0	$-5/2$	$1/2$	$-195/2$	$-201/2$	14
0	0	4	-3	1	3	-1	12
0	1	0	$1/2$	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$	2

El método del símplex en problemas de minimización

Si ahora se hace $f_1 - 1/2f_2$ y $f_3 + 1/2f_2$ se transforma la columna pivote en un vector unitario y se obtiene una nueva tabla:

Z	x_1	x_2	s_1	s_2	v_1	v_2	Constantes
1	0	-2	-1	0	-99	-100	8
0	0	4	-3	1	3	-1	12
0	1	2	-1	0	1	0	8

El método del símplex en problemas de minimización

Así es posible extraer el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ s_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Que corresponde a la solución

$x_1 = 8, s_2 = 12, x_2 = s_1 = v_1 = v_2 = 0$ i $Z = 8$. Por tanto, la solución óptima es $(x_1, x_2) = (8, 0)$ y $Z = 8$.

1 Introducción

2 Programación lineal

- Forma estándar de un PPL
- Soluciones básicas de un PPL

3 El método del símplex

- Un ejemplo para comenzar
- El método del símplex en problemas de minimización
- Observaciones finales

Observación 1

Las variables artificiales no son exclusivas de programas de minimización. En algunos programas de maximización también se pueden emplear beneficiosamente. Cuando en el contexto de maximización una de las restricciones es de igualdad no es necesario añadir una variable compensatoria. En este caso hará falta un vector unitario en la tabla del símplex para poder tener la solución básica factible inicial. Se añade a la restricción de igualdad una variable artificial que intervendrá en la función objetivo con coeficiente negativo para asegurar que no forma parte de la solución óptima.

Observación 2

Cuando en la tabla del símplex, dos o más cocientes comparten la característica de ser los menores, dos o más filas serán candidatas a ser la fila pivote. Se ha de adoptar un criterio, arbitrario, para decidir cuál será la fila pivote.

Observación 3

A veces un paso del pivote no provoca una mejora de la solución y serán necesarios diversos pasos de pivote con mejora nula antes de que el proceso iterativo trunque el círculo vicioso.

Observación 4

Se ha dado una introducción al algoritmo símplex. El proceso no es difícil pero en programas lineales de dimensiones considerables la tarea de computar es larga y aburrida.

Afortunadamente hay programas informáticos que desarrollan todo el proceso: SOLVER de Excel, GAMS (General Algebraic Modeling System) y cualquier otro programa de símplex que se pueda encontrar en internet.