# Capítulo 3

# INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA DISCRETA

## 3.1. Teoría de Conjuntos

En esta asignatura se estudiaran una gran variedad de estructuras discretas, desde combinaciones (colecciones desordenadas de elementos) hasta grafos (conjuntos de vértices y aristas que conectan vértices). También se utilizarán éstas y otras estructuras discretas en el modelado y la resolución de problemas. En particular, se describirán muchos ejemplos del uso de estructuras discretas en almacenamiento, comunicación y manipulación de datos. Empezaremos estudiando la estructura discreta fundamental, sobre la que se construyen todas las demás: el conjunto.

Los conjuntos se utilizan para agrupar objetos. Generalmente, los objetos de un conjuntos tienen propiedades similares. Todas las personas matriculadas en el Grado en Ingeniería Telemática forman un conjunto. Todas las personas matriculadas de una asignatura de Matemática Discreta (independiente de los estudios) forman un conjunto. Además, los alumnos de Matemática Discreta del grado en Ingeniería Telemática forman otro conjunto que puede formarse tomando los elementos comunes de los dos primeros conjuntos. El lenguaje de los conjuntos permite estudiar las colecciones de forma organizada.

Las palabras *conjunto* y *elemento* son los términos indefinidos de la Teoría de Conjuntos.

**Definición 3.1.** *Un **conjunto** es una colección desordenada de objetos.*

**Definición 3.2.** *Los objetos de un conjuntos se llaman **elementos** del conjunto. Se dice que un conjunto contiene a sus elementos.*

El término *objeto* se ha utilizado sin especificar qué es. Las definiciones anteriores están basadas en la noción intuitiva de lo que es un objeto. Los elementos del conjunto pueden ser cualquier cosa: números, palabras, personas, ... .

Los conjuntos se pueden describir de varias formas. El **principio de extensión** afirma que un conjunto queda completamente determinado por sus elementos, el orden en que se escriben es irrelevante y también la duplicidad de elementos. Un conjunto está definido por extensión cuando se enumeran todos sus elementos. La notación utilizada consiste en mostrar los elementos dentro de llaves. Generalmente se utilizan letras mayúsculas para representar a los conjuntos y letras minúsculas para representar a los elementos de los conjuntos. La notación $S = \{a, b, c, d\}$ representa a un conjunto $S$ con cuatro elementos $a$, $b$, $c$ y $d$.

**Ejemplo 3.1.** *Veamos algunos ejemplos de conjuntos definidos por extensión:*
- *El conjunto $V$ de las vocales del alfabeto se puede escribir como $V = \{a, e, i, o, u\}$.*
- *El conjunto $A$ de los números enteros, positivos, múltiplos de 3, menores que 10 se puede expresar como $A = \{3, 6, 9\}$.*
- *El conjunto $M$ de los números enteros, positivos, menores que 50 se puede denotar como $M = \{1, 2, 3, \ldots, 49\}$. Se enumeran algunos de los elementos y usamos los puntos suspensivos para representar a los demás cuando el patrón general es obvio.*

El símbolo $\in$ describe la **pertenencia** a un conjunto. Escribimos $a \in V$ para denotar que $a$ es un elemento del conjunto $S$. Mientras que $p \notin S$ indica que $p$ no pertenece al conjunto $S$.

**Ejemplo 3.2.** *Veamos algunos ejemplos de pertenencia:*
- *Sea el conjunto $V$ de las vocales del alfabeto, $a \in V$ y $q \notin V$.*
- *Sea el conjunto $A$ de los números enteros, positivos, múltiplos de 3, menores que 10, $3 \in A$ y $7 \notin A$.*
- *Sea el conjunto $M$ de los números enteros, positivos, menores que 50, $10 \in M$ y $153 \notin M$.*

**IMPORTANTE:** Debe quedar claro la diferencia entre conjunto y elemento, $\{2\} \neq 2$. $\{2\}$ es un conjunto cuyo único elemento es 2 y 2 (sea lo que sea) no es un conjunto. Lo que si podemos decir es $2 \in \{2\}$.

El **principio de intensión** (o **especificación**) permite determinar el conjunto a partir de una propiedad común que satisfacen todos los elementos del conjunto. Este conjunto se escribe:

$$A = \{x \in S | P(x)\}$$

El conjunto $A$ está formado por todos los elementos $x$ del conjunto $S$ tal que se satisface $P(x)$.

**Ejemplo 3.3.** *Veamos algunos ejemplos de conjuntos definidos por intensión:*
- *El conjunto $V$ de las vocales del alfabeto $L$, se puede escribir como $V = \{x \in L | x \text{ es vocal}\}$.*
- *El conjunto $A$ de los números enteros, positivos, múltiplos de 3, menores que 10 se puede expresar como $A = \{x \in \mathbf{Z}^+ | x \text{ es múltiplo de 3 y menor que 10}\}$.*
- *El conjunto $M$ de los números enteros, positivos, menores que 50 se puede denotar como $M = \{x \in \mathbf{Z}^+ | x < 50\}$.*

**Definición 3.3.** *El **conjunto universal** $U$, es el que contiene a todos los elementos en consideración. El **conjunto vacio** $\emptyset$ es aquel que no contiene ningún elemento, $\emptyset = \{\ \}$.*

Los conjuntos pueden representarse gráficamente mediante diagramas de Venn. En los diagramas de Venn, el conjunto universal $U$ se representa por un rectángulo. Dentro del rectángulo se utilizan círculos u otras figuras para representar conjuntos.

**Definición 3.4.** *Dos conjuntos son **iguales** si, y sólo si, tienen los mismos elementos.*

Los conjuntos $\{1, 2, 3\}$ y $\{3, 1, 2\}$ son iguales ya que tienen los mismos elementos.

**Definición 3.5.** *Dados dos conjuntos $A$ y $B$, se dice que $A$ es subconjunto de $B$ ($A$ está contenido en $B$), si, y sólo si, todo elemento de $A$ es también elemento de $B$. Se representa por $A \subseteq B$.*

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \ (x \in A \to x \in B)$$
$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \text{ IF } x \in A \text{ THEN } x \in B$$

**Teorema 3.1.** *Para cualquier conjunto $S$,*

$$\emptyset \subseteq S$$
$$S \subseteq S$$

Cuando queremos enfatizar que $A$ es un subconjunto de $B$, pero que $A \neq B$, escribimos $A \subset B$ y decimos que $A$ es un **subconjunto propio** de $B$.
**Propiedades de la inclusión:** Sean $A$, $B$ y $C$ dos subconjuntos de $U$,

1. $\emptyset \subseteq A$
2. $A \subseteq A$
3. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ entonces $A = B$
4. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$

**Definición 3.6.** *Sea $S$ un conjunto. Si hay exactamente $n$ elementos distintos en $S$ ($n$ es un número entero no negativo), decimos que $S$ es un **conjunto finito** y $n$ es el **cardinal** de $S$. El cardinal de $S$ se denota por $|S|$. Un conjunto se dice que es **infinito** si no es finito.*

**Ejemplo 3.4.** *Halla el cardinal de los siguientes conjuntos:*
- *Sea el conjunto $L$ de las letras del alfabeto inglés, $|L| = 26$.*
- *Sea el conjunto $A$ de los números enteros, positivos, múltiplos de 3, menores que 10 $|A| = 3$.*
- *Sea el conjunto $\mathbf{Z}^+$ de los números enteros positivos $|Z^+| = \infty$.*
- *Sea el conjunto vacío $\emptyset$, $|\emptyset| = 0$*

**Definición 3.7.** *Dado un conjunto $S$, el conjunto de las partes de $S$ es el conjunto de todos los subconjuntos de $S$. El conjunto de las partes de $S$ se denota por $\mathcal{P}(S)$ y si $|S| = n$ entonces $|\mathcal{P}(S)| = 2^n$.*

### 3.1.1. Operaciones con Conjuntos

**Definición 3.8.** *Sean $A$ y $B$ subconjuntos del conunto universal $U$. La unión de los conjuntos $A$ y $B$, denotada $A \cup B$, es el conjunto de todos los elementos $x$ de $U$ tal que $x$ es de $A$ **o** $x$ es de $B$ (o $x$ es de ambos).*

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \text{ OR } (x \in B)\} = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

**Definición 3.9.** *Sean $A$ y $B$ subconjuntos del conunto universal $U$. La intersección de los conjuntos $A$ y $B$, denotada $A \cap B$, es el conjunto de todos los elementos $x$ de $U$ tal que $x$ es de $A$ **y** $x$ es de $B$ ($x$ es de ambos).*

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \text{ AND } (x \in B)\} = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

**Definición 3.10.** *Dos conjuntos $A$ y $B$ se dice que son disjuntos si, y sólo si no tienen elementos en común.*

$$A \text{ y } B \text{ son disjuntos } \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

**Definición 3.11.** *Sea $A$ un subconjunto del conjunto universal $U$. El complementario del conjunto $A$, denotada $\overline{A}$ ($A^c$), es el conjunto de todos los elementos $x$ de $U$ tal que $x$ no es de $A$.*

$$\overline{A} = \{x \mid (x \notin A)\}$$

**Definición 3.12.** *Sean $A$ y $B$ subconjuntos del conunto universal $U$. La diferencia de los conjuntos $A$ y $B$, denotada $A - B$, es el conjunto de todos los elementos $x$ de $U$ tal que $x$ es de $A$ **y** $x$ no es de $B$.*

$$A - B = \{x \mid (x \in A) \text{ AND } (x \notin B)\} = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

NOTA: El complementario de $A$ es la diferencia de los conjuntos $U$ y $A$: $\overline{A} = U - A$.

**Ejemplo 3.5.** *Dados $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $A = \{a, c, e, g\}$ y $B = \{d, e, f, g\}$ encontrar: $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$ y $B - A$*
- $A \cup B = \{a, c, d, e, f, g\}$
- $A \cap B = \{e, g\}$
- $\overline{A} = \{b, d, f\}$
- $B - A = \{d, f\}$

Sean $A$, $B$ y $C$ subconjuntos del conjunto universal $U$, la Tabla 3.1 contiene las identidades más importantes entre conjuntos.

## 3.2. Técnicas de Recuento. Combinatoria

La acción de contar es una de las primeras actividades Matemáticas. Esta actividad surge de forma natural y al comienzo usamos los dedos para contar. Pero en otras ocasiones la forma de realizar un recuento es menos evidente y se hace necesario establecer procesos matemáticos.

**Definición 3.13.** ***Regla del producto.*** *Sea una tarea que se puede dividir en dos tareas consecutivas. Si hay $m$ maneras de realizar la primera tarea y $n$ formas de hacer la segunda tarea una vez completada la primera, entonces hay $mn$ formas de completar la tarea. (Esta idea se puede generalizar para más de dos tareas.)*

**Ejemplo 3.6.** *Las matriculas de los coches constan de una serie de 3 letras seguida de tres dígitos. ¿Cuántas matrículas diferentes hay? (Suponer que ninguna secuencia está prohibida.)*
- *Hay 26 letras diferentes y 10 dígitos diferentes. Por consiguiente por la regla del producto hay un total de* $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 17{,}576{,}000$ *matrículas.*

**Definición 3.14.** ***Regla de la suma.*** *Si una primera tarea se puede realizar de $m$ maneras y una segunda tarea se puede realizar de $n$ formas, y si las dos tareas son incompatibles (no se pueden realizar a la vez), entonces hay $m + n$ formas de realizar una de las dos tareas.*

**Ejemplo 3.7.** *Un estudiante debe elegir un proyecto de trabajo entre tres profesores. El primer profesor tiene 23 propuestas de trabajo, el segundo profesor 15 propuestas y el tercer profesosr 19. ¿Cuántos posibles proyectos tiene el estudiante para elegir?*
- *El estudiante puede elegir el trabajo de 23 formas diferentes de las propuestas del primer profesor, de 15 formas de las propuestas del segundo profesor, y de 19 formas del tercer profesor. Por tanto, hay* $23 + 15 + 19 = 57$ *proyectos para elegir.*

| IDENTIDAD | NOMBRE |
|---|---|
| $A \cup \emptyset = A$<br>$A \cap U = A$ | Leyes de identidad |
| $A \cup U = U$<br>$A \cap \emptyset = \emptyset$ | Leyes de denominación |
| $A \cup A = A$<br>$A \cap A = A$ | Leyes idempotentes |
| $\overline{(\overline{A})} = A$ | Ley de complementación |
| $A \cup B = B \cup A$<br>$A \cap B = B \cap A$ | Leyes conmutativas |
| $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$<br>$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ | Leyes asociativas |
| $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$<br>$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | Leyes distributivas |
| $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$<br>$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ | Leyes de De Morgan |
| $A \cup (A \cap B) = A$<br>$A \cap (A \cup B) = A$ | Leyes de absorción |
| $A \cup \overline{A} = U$<br>$A \cap \overline{A} = \emptyset$ | Leyes de complemento |

Cuadro 3.1: Identidades entre conjuntos

A veces hay que utilizar la regla del producto y la regla de la suma simultáneamente para resolver los problemas.

**Ejemplo 3.8.** *Cada usuario de un ordenador tiene una contraseña, con una longitud entre seis y ocho caracteres, cada uno de los cuales es bien un dígito o una letra mayúscula. Cada contraseña debe contener al menos un dígito. ¿Cuántas contraseñas diferentes admite el sistema?*
• *Sea $P$ el número total de contraseñas, sean $P_6$, $P_7$ y $P_8$ el número de contraseñas de longitud 6, 7 y 8 respectivamente. Aplicando la regla de la suma $P = P_6 + P_7 + P_8$. Ahora hay que calcular $P_6$, $P_7$ y $P_8$.*
*Determinar $P_6$ directamente no es inmediato, lo calcularemos a partir del número total de secuencias de 6 caracteres (letras y números) al que restaremos aquellas secuencias que no contienen ningún número. Según la regla del producto, el número de secuencias de 6 caracteres es $(26 + 10)^6$ y el número de secuencias de 6 caracteres sin ningún dígito es $26^6$. Por tanto, $P_6 = 36^6 - 26^6 = 2{,}176{,}782{,}336 - 308{,}915{,}776 = 1{,}867{,}866{,}560$*
*De forma similar, $P_7 = 36^7 - 26^7 = 78{,}364{,}164{,}096 - 8{,}031{,}810{,}176 = 70{,}332{,}353{,}920$ y $P_8 = 36^8 - 26^8 = 2{,}821{,}109{,}907{,}456 - 208{,}827{,}064{,}576 = 2{,}612{,}282{,}842{,}880$*
*Por tanto $P = P_6 + P_7 + P_8 = 2{,}684{,}483{,}063{,}360$*

Cuando dos tareas se puede realizar simultáneamente, no se puede utilizar la regla de la suma para contar las maneras en que se puede realizar una de las dos tareas. De usarlo, estamos contando dos veces las tareas que se realizan simultáneamente. Para contar de forma correcta las maneras de realizar una de las dos tareas, se suman las maneras de realizar cada una de ellas y a esta suma se le resta las formas de realizar ambas tareas simultáneamente.
**Principio de inclusión-exclusión:** para encontrar el cardinal de la unión de dos conjuntos finitos $A$ y $B$ hay que percatarse de que $|A| + |B|$ cuenta exactamente una vez cada elemento que está en $A$ pero no en $B$, o que está en $B$ pero no en $A$, y dos veces cada elemento que está en $A$ y en $B$. Por lo tanto

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Para tres conjuntos finitos cualesquiera:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

**Ejemplo 3.9.** *En una encuesta aplicada a 1000 empleados de un centro comercial sobre el tipo de transporte que utilizan para ir de sus casas al trabajo se obtuvo la siguiente información: 431 empleados utilizan metro; 396 empleados utilizan autobús; 101 empleados utilizan metro y trolebús pero no autobús; 176 empleados no utilizan ninguno de los tres medios considerados; 341 utilizan trolebús; 634 utilizan metro o trolebús; 201 utilizan sólo metro. a) ¿Cuántos empleados utilizan metro o trolebús pero no autobús? b) ¿Cuántos empleados utilizan sólo uno de los tres medios de transporte mencionados? c) ¿Cuántos empleados utilizan sólo trolebús? d) ¿Cuántos empleados utilizan metro, trolebús y autobús?*

- *634 - (396 - ((1000-176)-634)) = 634 - (396 - (824 - 634)) = 634 - (396 - 190) = 634- 206 = 428 empleados utilizan metro o trolebús pero no autobús.*
- *201 + (824 - 634) + (428 - 201) = 201 + 190 + 126 = 517 empleados utilizan sólo uno de los tres medios de transporte mencionados.*
- *428 - 201 = 126 empleados utilizan sólo trolebús.*
- *(431 + 341 - 634) - 101 = 138 - 101 = 37 empleados utilizan metro, trolebús y autobús.*

### 3.2.1. Análisis combinatorio

Cuando el número de objetos es reducido resulta fácil contar el número de resultados posibles. Sin embargo, cuando disponemos de un gran número de objetos no suele ser fácil el recuento de esos resultados. Vamos a introducir unas reglas que nos ayuden a contar. Empezaremos introduciendo la notación factorial.

**Definición 3.15.** *Llamaremos $n$ factorial (o factorial de $n$), y lo designamos $n!$, al producto de los $n$ primeros números naturales.*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

**Observación:** Por convenio se toma: $0! = 1$.

**Definición 3.16.** *Dados $n$ elementos, llamamos permutaciones de orden $n$ a todas las agrupaciones distintas que se pueden formar con esos $n$ elementos variando solamente el orden. El número de permutaciones de orden $n$ es igual a:*

$$P_n = n!$$

**Ejemplo 3.10.** *Un equipo de balonmano se ha clasificado para la fase final de un campeonato en la que ocho equipos juegan una liguilla todos contra todos. ¿Cuántas son las posibles clasificaciones posibles?*

*Solución • Cada clasificación final es una lista ordenada de los ocho equipos que participan, es una permutación de ocho elementos. Por tanto, hay $P_8 = 8! = 40{,}320$ posibles clasificaciones finales.*

**Definición 3.17.** *Dados $n$ elementos, llamamos variaciones de orden $r$ (o variaciones de $n$ elementos tomados de $r$ en $r$) a todas las agrupaciones distintas que se pueden formar con $r$ de los $n$ elementos. Dos agrupaciones son distintas si difieren en algún elemento o si teniendo los mismos elementos difieren en el orden de los mismos. El número de variaciones de orden $r$ es igual a:*

$$V_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

**Ejemplo 3.11.** *¿Cuántas formas existen de escoger el primer, segundo y tercer clasificado de un concurso si hay un total de 100 concursantes?*

*solucion • Se tiene en cuenta el orden en que se gana el concurso. El número de formas de escoger los tres ganadores es el número de variaciones de orden 3 de un conjunto de 100 elementos.*

$$V_{100,3} = \frac{100!}{(100-3)!} = 100 \cdot 99 \cdot 98 = 970{,}200$$

**Definición 3.18.** *Dados $n$ elementos, llamamos combinaciones de orden $r$ (o combinaciones de $n$ elementos tomados de $r$ en $r$) a todas las agrupaciones distintas que se pueden formar con $r$ de los $n$ elementos. Dos agrupaciones son distintas si difieren en al menos uno de sus elementos. El número de combinaciones de orden $r$ es igual a:*

$$C_{n,r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} = \binom{n}{r}$$

**Ejemplo 3.12.** *¿De cuántas formas se pueden seleccionar cinco jugadores de entre un grupo de diez para formar un equipo?*
• *El orden en que se eligen los componentes del equipo no influye en el equipo resultante. El número de equipos diferentes que se pueden formar son combinaciones de cinco elementos de un conjunto de diez elementos,*

$$C_{10,5} = \frac{10!}{5! \cdot (10-5)!} = \frac{10!}{5!5!} = 252$$

En ocasiones interesa que se repitan los elementos.

**Definición 3.19.** *Llamamos permutaciones con repetición de $n$ objetos, donde hay $r_1$ objetos indistinguibles de tipo 1, $r_2$ objetos indistinguibles de tipo 2, ..., $r_k$ objetos indistinguibles de tipo $k$ a todas las agrupaciones distintas que se pueden formar con esos $n$ elementos variando solamente el orden. El número de permutaciones con repetición de orden e orden $r_1, r_2, \ldots, r_k$ de $n$ objetos es igual a:*

$$PR_{n,r_1,r_2,\ldots,r_k} = \frac{(r_1 + r_2 + \cdots + r_k)!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}$$

**Ejemplo 3.13.** *¿Cuántas cadenas diferentes se pueden formar reordenando las letras de la palabra PAPAYA?*
*Solución: Algunas letras de la palabra PAPAYA están repetidas, contiene tres veces la letra A, dos veces la letra P y una vez la letra Y. El número de cadenas diferentes serán permutaciones con repetición de 6 elementos (las 6 letras), donde hay 3 letras A indistinguibles, 2 letras P indistinguibles y una letra Y.*

$$PR_{6,3,2,1} = \frac{6!}{3!2!1!} = 60$$

**Definición 3.20.** *Sea un conjunto formado por $n$ elemento distintos, llamamos variaciones con repetición de orden $r$ a todas las agrupaciones distintas que se pueden formar con $r$ elementos, no necesariamente distintos, de los $n$ elementos dados. Dos agrupaciones son distintas si difieren en algún elemento o si teniendo los mismos elementos difieren en el orden de los mismos. Al poder repetir elementos puede ocurrir que $r > n$. El número de variaciones con repetición de orden $r$ de $n$ elementos es igual a:*

$$VR_{n,r} = n^r$$

**Ejemplo 3.14.** *¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con las nueves cifras significativas del sistema decimal?*
*Al tratarse de números el orden importa, además pueden repetirse los dígitos, estamos considerando variaciones con repetición de orden 3 de 9 elementos.*

$$VR_{9,3} = 9^3 = 729$$

**Definición 3.21.** *Llamamos combinación con repetición de orden $r$ de $n$ objetos a todas las agrupaciones distintas que se pueden formar con $r$ elementos no necesariamente distintos de los $n$ elementos sin importar el orden. El número de combinaciones con repetición de $n$ tomados de $r$ en $r$ es igual a:*

$$CR_{n,r} = C(n+r-1, r) = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)! \cdot r!} = \binom{n+r-1}{r}$$

**Ejemplo 3.15.** *En una heladería se sirven helados de 20 sabores diferentes, ¿de cuántas maneras diferentes se pueden comprar 12 helados? Si la mitad son de nata, ¿de cuántas maneras diferentes se pueden comprar los helados?*
*El orden no importa y los sabores pueden repetirse, cada compra es una combinación con repetición*

$$CR_{20,12} = C(20+12-1, 12) = \frac{(31!}{19! \cdot 12!} = \binom{31}{12}$$

*Si hay 6 helados de nata el número de compras para los otros 6 es también una combinación con repetición:*

$$CR_{20,6} = C(20+6-1, 6) = \frac{(25!}{19! \cdot 6!} = \binom{25}{6}$$

## 3.3. Álgebra de Boole

En su libro "Las leyes del pensamiento (1854)´´ George Boole enuncia las reglas que son el fundamento del álgebra de Boole. Una definición abstracta del álgebra de Boole permite que una vez que se demuestre que una estructura concreta es un álgebra de Boole, todos los resultados enunciados para un álgebra de Boole genérica serán válidos en esta estructura particular.

**Definición 3.22** (Definición abstracta de álgebra de Boole.). *Sea* $\mathcal{B} = < B,\ z,\ u,\ \circ,\ \dagger,\ ^- >$ *donde:*

- $B$ *es un conjunto, no vacio;*
- $z, u \in B$ *son elementos especiales;*
- $\circ$ *y* $\dagger$ *son operaciones internas* $f : B^2 \to B$*, tal que,* $\forall a, b \in B$ $a \circ b \in B$ *y* $a \dagger b \in B$*;*
- $^-$ *es yuna aplicación* $f : B \to B$*, tal que,* $\forall a \in B \quad \overline{a} \in B$*.*

$\mathcal{B}$ *es un álgebra de Boole si se satisfacen los siguientes axiomas:*

***A1.*** $\circ$ *y* $\dagger$ *son conmutativos,* $\forall a, b \in B$

*i)* $a \circ b = b \circ a$
*ii)* $a \dagger b = b \dagger a$

***A2.*** $\circ$ *y* $\dagger$ *son distributivos uno respecto del otro,* $\forall a, b, c \in B$

*i)* $a \circ (b \dagger c) = (a \circ b) \dagger (a \circ c)$
*ii)* $a \dagger (b \circ c) = (a \dagger b) \circ (a \dagger c)$

***A3.*** *El conjunto* $B$ *tiene dos elementos identidad, representados por* $z$ *y* $u$*, tal que* $\forall a \in B$

*i)* $\exists z \in B \quad a \dagger z = z \dagger a = a$
*ii)* $\exists u \in B \quad a \circ u = u \circ a = a$

*A* $z$ *se le llama el elemento identidad ( o cero) respecto a la operación* $\dagger$ *y* $u$ *es el elemento identidad (o unidad) respecto a la operación* $\circ$*.*

***A4.*** *Existencia del complemento,* $\forall a \in B \quad \exists \overline{a} \in B$ *tal que*

*i)* $a \dagger \overline{a} = u$
*ii)* $a \circ \overline{a} = z$

Por conveniencia, $\dagger$ and $\circ$ son representados normalmente como "*suma*" y "*producto*", $a \dagger b = a + b$ y $a \circ b = a \cdot b$. En ciertas disciplinas, $\dagger$ y $\circ$ son definidos como "*or*" y "*and*" respectivamente.
Para poder eliminar algunos paréntesis, hay un orden definidos sobre los operadores: $\circ$ tiene precedencia sobre $\dagger$. Por lo tanto, los paréntesis pueden ser eliminados de los productos. Cuando no hay ambigüedad de los símbolos usados el $\circ$ es eliminado. Por ejemplo, $a \dagger (b \circ c)$ se escribe como $a \dagger b\, c$.

Veamos otros teoremas fundamentales del álgebra de Boole.

**Teorema 3.2** (Principio de dualidad). *Toda proposición o identidad algebraica deducible de los axiomas del álgebra de Boole sigue siendo válida si las operaciones $\dagger$ y $\circ$ y los elementos identidad $z$ y $u$ son intercambiados.*

La aplicación de este teorema reduce el número de demostraciones de teoremas ya que cada teorema tienen su dual.

*Demostración.* La demostración se basa en el hecho de que en cada axioma hay dos expresiones, la segunda se obtiene intercambiando las operaciones $\dagger$ y $\circ$, y los elementos especiales $z$ y $u$. □

**Teorema 3.3.** *Todo elemento de $B$ tiene un complemento **único**.*

**Teorema 3.4.** *Para cualquier $a \in B$ se satisface:*

$$(1) \quad a \dagger u = u$$

$$(2) \quad a \circ z = z$$

**Teorema 3.5.** *El complemento de $z$ es $u$ y viceversa, es decir:*

$$(1) \quad \overline{z} = u$$

$$(2) \quad \overline{u} = z$$

**Teorema 3.6** (Idempotencia). *Para todo $a \in B$,*

$$(1) \quad a \dagger a = a$$

$$(2) \quad a \circ a = a$$

**Teorema 3.7** (Involución). *Para todo $a \in B$*

$$\overline{\overline{a}} = a$$

**Teorema 3.8** (Absorción). *Para todo par de elementos $a$ y $b$ de $B$*

$$(1) \quad a \dagger (a \circ b) = a$$

$$(2) \quad a \circ (a \dagger b) = a$$

**Teorema 3.9.** *Para todo par de elementos $a$ y $b$ de $B$*

$$(1) \quad a \dagger (\overline{a} \circ b) = a \dagger b$$

$$(2) \quad a \circ (\overline{a} \dagger b) = a \circ b$$

**Teorema 3.10.** *Las operaciones binarias del álgebra de Boole son asociativas. Es decir, $\forall a, b, c \in B$*

$$(1) \quad a \dagger (b \dagger c) = (a \dagger b) \dagger c$$

$$(2) \quad a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$

**Teorema 3.11** (Leyes de De Morgan). *Para todo par de elementos $a$ y $b$ de $B$*

$$(1) \quad \overline{a \dagger b} = \overline{a} \circ \overline{b}$$

$$(2) \quad \overline{a \circ b} = \overline{a} \dagger \overline{b}$$

Todos estos teoremas se resumen en la siguiente tabla de identidades y propiedades del álgebra de Boole.

| IDENTIDAD | NOMBRE |
|---|---|
| $x+0=x$<br>$x\cdot 1=x$ | elemento neutro |
| $x+1=1$<br>$x\cdot 0=0$ | acotación |
| $x+x=x$<br>$x\cdot x=x$ | idempotencia |
| $\overline{(\overline{x})}=x$ | doble complemento |
| $x+y=y+x$<br>$x\cdot y=y\cdot x$ | conmutativas |
| $x+(y+z)=(x+y)+z$<br>$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ | asociativas |
| $x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$<br>$x+(y\cdot z)=(x+y)\cdot(x+z)$ | distributivas |
| $\overline{x+y}=\overline{x}\cdot\overline{y}$<br>$\overline{x\cdot y}=\overline{x}+\overline{y}$ | De Morgan |
| $x+(x\cdot y)=x$<br>$x\cdot(x+y)=x$ | absorción |
| $x+\overline{x}=1$<br>$x\cdot\overline{x}=0$ | inverso para 1<br>inverso para 0 |

### 3.3.1. Lógica y cálculo proposicional

Las leyes de la lógica dan un significado preciso a los enunciados matemáticos. Estas reglas se usan para distinguir entre argumentos válidos y no válidos.
El concepto sobre el que se construye la lógica son las proposiciones. Una proposición es una oración declarativa que es verdadera o falsa pero no las dos cosas a la vez. Las proposiciones se representan por las letras $p$, $q$, $r$, $s$, .... Si una proposición $p$ es verdadera se dice que toma el valor verdadero y se representa por **V**. Si $p$ no es verdadera tomará el valor falso, indicándose por **F**. El área de la lógica que trata de proposiciones se llama cálculo proposicional. Muchos enunciados matemáticos se construyen combinando una o más proposiciones. Estas nuevas proposiciones se forman a partir de las existentes utilizando operadores (o conectivos) lógicos: negación ($\neg$); conjunción ($\wedge$); disyunción ($\vee$).
Una tabla de verdad muestra las relaciones entre los valores de verdad de proposiciones y son valiosas para determinar los valores de verdad de proposiciones compuestas. La siguiente tabla muetra la tabla de verdad para los tres operadores lógicos.

| $p$ | $\neg p$ |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

| $p$ | $q$ | $p\wedge q$ |
|---|---|---|
| F | F | F |
| F | V | F |
| V | F | F |
| V | V | V |

| $p$ | $q$ | $p\vee q$ |
|---|---|---|
| F | F | F |
| F | V | V |
| V | F | V |
| V | V | V |

### 3.3.2. Álgebra de Boole binaria

Los circuitos de ordenadores y ortos componentes ellectrónicos reciben datos de entrada, cada uno de los cuales es un 0 o un 1, y producen como salida una secuencia de también ceros y/o unos. Los circuitos pueden construirse utilizando cualquier elemento básico que posea dos estados diferentes. En 1938 Claude Shannon demostró como utilizar las reglas de la lógica (enunciadas por Boole) para diseñar circuitos.
El álgebra de Boole proporciona las operaciones y las leyes para trabajar en el conjunto $\mathcal{B}=\{0,1\}$. Las operaciones son el **complemento** de un elemento, denotado por una barra, $^-$; la **suma booleana**, denotada por $+$; y el **producto booleano**, denotada por $\cdot$. Estas operaciones quedan definidas en la siguiente tabla.
Si no hay posible confusión, se omitirá el símbolo $\cdot$ al escribir los productos. A menos que se utilicen paréntesis, las reglas de precedencia son: primero se calculan los complementos, seguidos por los productos booleanos y finalmente las sumas booleanas.

| $x$ | $\overline{x}$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

| $x$ | $y$ | $x \cdot y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

| $x$ | $y$ | $x + y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

### 3.3.3. Álgebra de funciones booleanas

**Definición 3.23.** *Una variable $x$ es una **variable booleana**, si unicamente toma valores del conjunto $\mathcal{B} = \{0, 1\}$, esto es, los únicos valores posible son 0 y 1.*

**Definición 3.24.** *Dado el conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ donde $x_i \in \mathcal{B} = \{0, 1\}$, $1 \leq i \leq n$ la aplicación $F : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ recibe el nombre de **función booleana de grado** $n$. Las $x_i$ son variables booleanas independientes de la función.*

El dominio de la aplicación son todas las posibles secuencias de $n$ elementos binarios, en total $2^n$ secuencias o $n$-tuplas (regla del producto). Por conveniencia se considera que el dominio va de 0 a $2^n - 1$ (código binario). Los valores que toma una función booleana suelen indicarse mediante una tabla de valores. La siguiente tabla muestra dos funciones booleanas para $n = 3$.

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $F_j$ | $F_k$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Es evidente que existen más de dos funciones booleanas de grado 3.

**Ejemplo 3.16.** *¿Cuántas funciones booleanas de grado $n$ hay?*

*Solución:*
Aplicando la regla del producto se obtiene que hay $2^n$ $n$-tuplas diferentes formadas por ceros y unos. Cada función booleana asigna el valor 0 el 1 a cada una de estas $n$-tuplas. Si volvemos a aplicar la regla del producto resulta que hay $N = 2^{2^n}$ funciones booleanas de grado $n$. El número de funciones booleanas crece muy rápidamente. Para $n = 2$, hay $2^{2^2} = 16$ functiones booleanas (ver tabla).

| $x_1$ | $x_2$ | $F_0$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | $F_5$ | $F_6$ | $F_7$ | $F_8$ | $F_9$ | $F_{10}$ | $F_{11}$ | $F_{12}$ | $F_{13}$ | $F_{14}$ | $F_{15}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Podemos definir una nueva estructura, el álgebra de Boole de funciones booleanas, representada por $B_F =< F, \mathbf{0}^F, \mathbf{1}^F, \cdot^F, +^F, {}^{-F} >$ donde:

- $F$ es el conjunto de todas las funciones booleanas;
- $\mathbf{0}^F$ es la función $F_0$ (todas las componentes son ceros), $f_{0i} = 0, \forall i = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$;
- $\mathbf{1}^F$ es la función $F_{N-1}$ (todas las componentes son unos), $f_{N-1i} = 1, \forall i = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$;
- $\cdot^F$ es la operación definida sobre funciones booleanas que consiste en multiplicar (producto booleano) componentes concordantes de las funciones booleanas: $F_j \cdot^F F_k = f_{ji} \cdot f_{ki}, i = 0, 1, \ldots, N - 1$

- $+^F$ es la operación definida sobre funciones booleanas que consiste en sumar (suma booleana) componentes concordantes de las funciones booleanas: $F_j +^F F_k = f_{ji} + f_{ki}, i = 0, 1, \ldots, N-1$
- $^{-F}$ es la operación definida sobre funciones booleanas que consiste en complementar las componentes de las funciones booleanas: $\overline{F_j} = \overline{f_{ji}}, i = 0, 1, \ldots, N-1$

**Definición 3.25.** *Una **expresión booleana** es una expresión formada por funciones booleanas y los operadores booleanos $^{-F}$, $\cdot^F$, $+^F$. Las expresiones booleanas en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se definen recursivamente.*

Cada expresión booleana representa una función booleana. Los valores de esta función se obtienen sustituyendo las variables de la expresión por todas las combinaciones posibles de ceros y unos.

**Ejemplo 3.17.** *Calcula los valores de la función booleana $F(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + \overline{x_3}$.*

*Solución:* La siguiente tabla muestra los valores de la función.

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_1x_2$ | $\overline{x_3}$ | $x_1x_2 + \overline{x_3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

**Definición 3.26.** *Se dice que dos expresiones booleanas $F$ y $G$ son **equivalentes** si representan la misma función, es decir si y sólo si si, y sólo si $F(b_1, b_2, \ldots, b_n) = G(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ $\forall b_1, b_2, \ldots, b_n$. Si dos expresiones booleanas son equivalentes una puede obtenerse a partir de la otra mediante la aplicación de operaciones booleanas.*

Las equivalencias entre expresiones booleanas se pueden comprobar

- comparando columnas a partir de la tabla de valores;
- algebraicamente, partiendo de una de ellas llegar hasta la otra aplicando propiedades del álgebra de Boole.

### 3.3.4. Representación de funciones booleanas

A partir de una función booleana resulta muy sencillo obtener sus valores (ver Ejemplo 3.17. pero, ¿cómo podemos obtener una expresión booleana que represente a dicha función? Es más, de todas las expresiones que representan a la misma función ¿cuál es la más pequeña?

**Definición 3.27.** *Un **literal** es una variable booleana o su complemento.*

**Definición 3.28.** *Un término mínimo o **minterm** en las variables booleanas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es un producto booleano de $n$ literales (uno por variable).*

Un minterm vale 1 para una y sólo una combinación de sus variables. Una función booleana está en forma normal disyuntiva si está escrita como suma booleana de minterms. Toda función booleana se puede escribir en forma normal disyuntiva. Dada una tabla de verdad de una función booleana, se puede construir una suma booleana de minterms que valga 1 cuando la función booleana vale 1 y que valga 0 cuando la función tome el valor 0.

**Ejemplo 3.18.** *Escribe la función booleana $F(x, y, z) = (x + y)\overline{z}$ en forma normal disyuntiva.*

*Solución:* Vamos a calcular la forma normal disyuntiva de dos maneras: a) algebraicamente utilizando las propiedades del álgebra de Boole; y b) como suma booleana de minterms.

a) A cada paso están indicadas las propiedades que se emplean.

$$\begin{array}{rlll} F(x,y,z) = & (x+y)\overline{z} & \\ = & x\overline{z}+y\overline{z} & \text{propiedad distributiva} \\ = & x1\overline{z}+1y\overline{z} & \text{identidad} \\ = & x(y+\overline{y})\overline{z}+(x+\overline{x})y\overline{z} & \text{def unidad} \\ = & xy\overline{z}+x\overline{y}\overline{z}+xy\overline{z}+\overline{x}y\overline{z} & \text{propiedad distributiva} \\ = & xy\overline{z}+x\overline{y}\overline{z}+\overline{x}y\overline{z} & \text{idempotencia} \end{array}$$

b) En primer lugar necesitamos la tabla de los valores de $F$ para todos los posibles valores de las variables.

| $x$ | $y$ | $z$ | $x+y$ | $F=\overline{z}$ | $(x+y)\overline{z}$ | minterm |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | $\overline{x}\,y\,\overline{z}$ |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | $x\,\overline{y}\,\overline{z}$ |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | $x\,y\,\overline{z}$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | |

Los minterms corresponden a las 3 filas de la tabla en las que la función vale 1, esto ocurre cuando los 3 literales valen 1. Por lo tanto, $F(x,y,z)=\overline{x}\,y\,\overline{z}+x\,\overline{y}\,\overline{z}+x\,y\,\overline{z}$.

**Ejemplo 3.19.** *Un motor $M$ está controlado por tres interruptores $x,y,z$ y funciona cuando únicamente dos de los interruptores están cerrados. Deduce la tabla de valores de la función $M(x,y,z):\mathcal{B}^3\to\mathcal{B}$ y la expresión booleana de $M$ en forma normal disyuntiva.*

*Solución:* Los interruptores $x,y,z$ son variables booleanas ya que toman dos valores, de manera que cuando están abiertos toman el valor 0 y cuando están cerrados el valor 1. La tabla de valores de $M$ es:

| $x$ | $y$ | $z$ | $M$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

La expresión booleana de $M(x,y,z)$ estará formada por aquellos minterms que hacen que la función tome el valor 1 (motor encendido).

$$M(x,y,z)=\overline{x}\,y\,z+x\,\overline{y}\,z+x\,y\,\overline{z}$$

### 3.3.5. Principio de dualidad

En el álgebra de Boole, las propiedades y los teoremas aparecen por parejas. Para exlicar la relación que existe entre las dos propiedades de cada pareja utilizamos el concepto de dual. El dual de una expresión booleana se obtienen intercambiándose entre sí la suma y el producto booleanos, así como los ceros y los unos. Una igualdad entre funciones booleanas sigue siendo válida cuando se toman duales a ambos lados de la igualdad. Este resultado se llama **principio de dualidad**, y resulta útil para la obtención de nuevas propiedades.

**Ejemplo 3.20.** *Calcula los duales de las funciones booleanas $F(x,y)=x(y+0)$ y de $G(x,y,z)=\overline{x}\cdot 1+(\overline{y}+z)$.*

*Solución:* El dual de una función booleana $F$ representada por una expresión booleana es la función representada por el dual de dicha expresión.

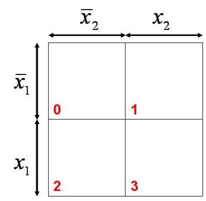
$$F^d = x + (y \cdot 1) = x + y$$
$$G^d = (\overline{x} + 0) \cdot (\overline{y} \cdot z) = \overline{x}\,\overline{y}\,z + 0\,\overline{y}\,z = \overline{x}\,\overline{y}\,z + 0 = \overline{x}\,\overline{y}\,z$$

**Definición 3.29.** *Un término máximo o **maxterm** en las variables booleanas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una suma booleana de $n$ literales (uno por variable).*

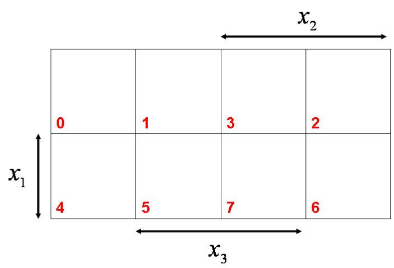
Un maxterm vale 0 para una y sólo una combinación de sus variables. Una función booleana está en forma normal conjuntiva si está escrita como producto booleano de maxterms. Toda función booleana se puede escribir en forma normal conjuntiva. Dada una tabla de verdad de una función booleana, se puede construir un producto booleano de maxterms que valga 0 cuando la función booleana vale 0 y que valga 1 cuando la función tome el valor 1.

### 3.3.6. Simplificación de funciones booleanas

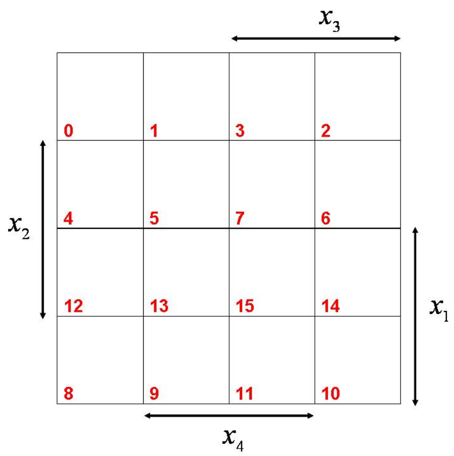
Las funciones booleanas escritas en forma normal disjuntivas pueden simplificarse utilizando las identidades y propiedades del álgebra de Boole. Los **diagramas de Karnaugh** son un método visual muy útil para realizar simplificaciones. El diagrama de Karnaugh para dos variables $x_1$, $x_2$ está formado por $2^2 = 4$ cuadrados que representan todos los minterms de grado 2, ver figura. El cuadrado cuadrado superior de la izquierda representa el minterm $\overline{x_1}\,\overline{x_2} = m_0$; el cuadrado superior de la derecha representa el minterm $\overline{x_1}\,x_2 = m_1$; el cuadrado inferior de la derecha representa el minterm $x_1\,\overline{x_2} = m_2$; el cuadrado inferior de la derecha representa el minterm $x_1\,x_2 = m_3$. Los subíndices que se usan para designar a los minterms es número decimal del correspondiente índice binario.




El diagrama de Karnaugh para 3 variables consta de $2^3 = 8$ cuadrados, ver figura. En un diagrama de Karnaugh se dice que dos cuadrados son adyacentes si difieren únicamente en un literal. Al movernos horizontal o verticalmente sólo una variable cambia entre dos cuadrados adyacentes.




A siguiente figura representa el diagrama de Karnaugh para 4 variables. Fijaros como los cuadrados de los bordes superiores (o de la izquierda) son adyacentes a los cuadrados inferiores (de la derecha) ya que sólo difieren en un literal.

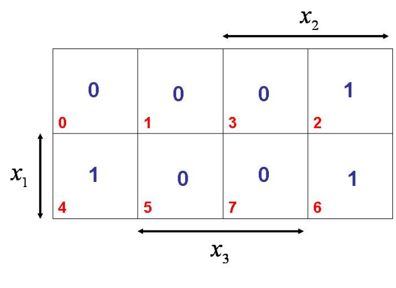



Las funciones booleanas pueden representarse mediante los diagramas de Karnaugh introduciendo en cada cuadrado el valor de la función.

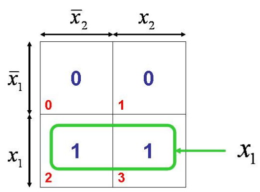
**Ejemplo 3.21.** *Representa usando el diagrama de Karnaugh la función booleana $F(x_1, x_2, x_3)$ que aparece en la siguiente tabla de valores.*

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $F(x_1, x_2, x_3)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

*Solución:* En el diagrama de Karnaugh habrá 3 cuadrados con el valor 1, los correspondientes a los minterms $\overline{x_1}\, x_2\, \overline{x_3} = m_2$, $x_1\, \overline{x_2}\, \overline{x_3} = m_4$ y $x_1\, x_2\, \overline{x_3} = m_6$. Los cuadrados restantes tienen el valor 0.

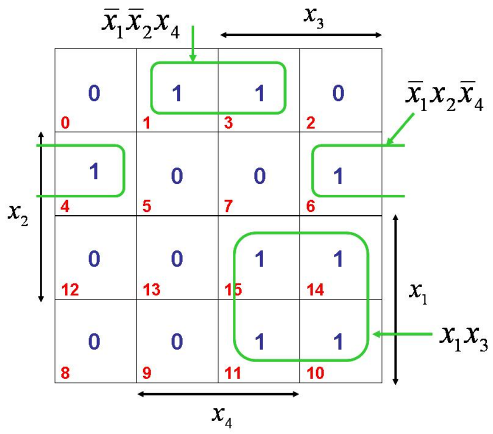



Para simplificar expresiones booleanas a partir de los diagramas de Karnaugh usamos la siguiente regla: siempre que en un diagrama de Karnaugh, dos cuadrados adyacentes contengan el valor 1, los minterms representados por esos cuadrados pueden combinarse en un producto que contendrá sólo los literales comunes a los dos minterms.




Esta idea puede generalizarse, se pueden combinar los minterms pertenecientes a cuadrados adyacentes de tal forma que el total de cuadrados combinados sea una potencia de 2. Pueden hacerse grupos de $2^0 = 1$ cuadrado;

$2^1 = 2$ cuadrados; $2^2 = 4$ cuadrados; .... Como consecuencia, un bloque formado por un cuadrado elimina 0 variables; un bloque de 2 cuadrados elimina 1 variable; un bloque de 4 cuadrados elimina 2 variables; ....

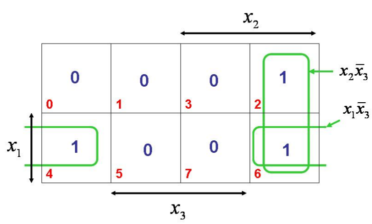


**Ejemplo 3.22** (continuación del Ejemplo 3.21). *Simplifica usando el diagrama de Karnaugh la función booleana $F(x_1, x_2, x_3)$ que aparece en la siguiente tabla de valores.*

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $F(x_1, x_2, x_3)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

*Solución:* A partir del diagrama de Karnaugh vamos agrupando cuadrados adyacentes hasta obtener la expresión más sencilla.

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_2\,\overline{x_3} + x_1\,\overline{x_3}$$



**Ejemplo 3.23.** *Un ascensor dispone de un dispositivo de seguridad: el ascensor funciona cuando está vacio o con pesos entre 25 y 300 kg. El ascensor tiene 3 sensores: A sensible a cualquier peso: B sensible a pesos mayores de 25 kg y C sensible a pesos superiores a 300 kg. Encuentra la función booleana más sencilla que cumpla con las condiciones.*

*Solución:* Primeramente hay que plantear el problema, identificar las variables y la función booleana y determinar sus valores. Las variables booleanas $a$, $b$ y $c$ corresponden a los sensores y la función booleana $F$ corresponde al ascensor (se pondrá en marcha si se satisfacen las condiciones de seguridad).
Las variables $a$, $b$ y $c$ toman el valor 1, si detectan peso (según límites), y 0 si no detectan peso. La función $F(a, b, c)$ valdrá 1 cuando el ascensor se pone en marcha (se satisfacen las condiciones de seguridad) y 0 cuando no se pone en marcha.

- $F(0, 0, 0) = 1$, ningún sensor detecta peso (el ascensor está vacío); el ascensor se pone en marcha.

- $F(1,0,0) = 0$, $A$ detecta peso pero $B$ y $C$ no detectan peso (dentro del ascensor hay un peso entre 0 y 25 kg); el ascensor no arranca.
- $F(1,1,0) = 1$, $A$ y $B$ detectan peso pero $C$ no (la carga del ascensor está entre 25 y 300 kg); el ascensor arranca.
- $F(1,1,1) = 0$, todos los sensores detectan peso (la carga del ascensor es superior a 300 kg); el ascensor no se pone en marcha.

Estas condiciones quedan reflejadas en la siguiente tabla:

| $a$ | $b$ | $c$ | $F(a,b,c)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | |
| 0 | 1 | 0 | |
| 0 | 1 | 1 | |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

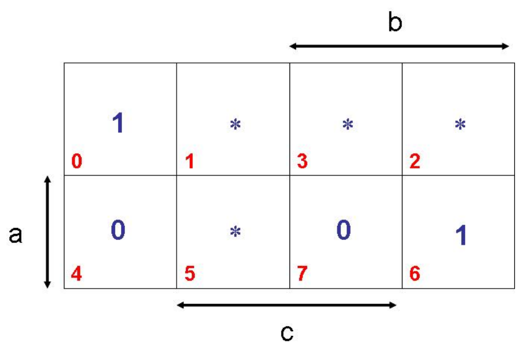
¿Y para el resto de combinaciones de valores de $a$, $b$ o $c$? $F(0,1,0)$ corresponde a la situación donde el sensor $A$ no detecta peso; el sensor $B$ detecta peso entre 25 y 300 kg; en sensor $C$ no detecta peso. Esto corresponde a una situación imposible.
En ocasiones, puede ocurrir que ciertas combinaciones de las variables no se pueden tomar o bien que que el valor de $F$ no depende de cuáles sean los valores de sus variables; tales casos reciben el nombre de **casos imposibles o indiferentes**. En estas condiciones no importa el valor que se le asigne a $F$, por defecto asignaremos $*$. Introduciendo las situaciones imposibles, la tabla queda como sigue.

| $a$ | $b$ | $c$ | $F(a,b,c)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | $*$ |
| 0 | 1 | 0 | $*$ |
| 0 | 1 | 1 | $*$ |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | $*$ |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

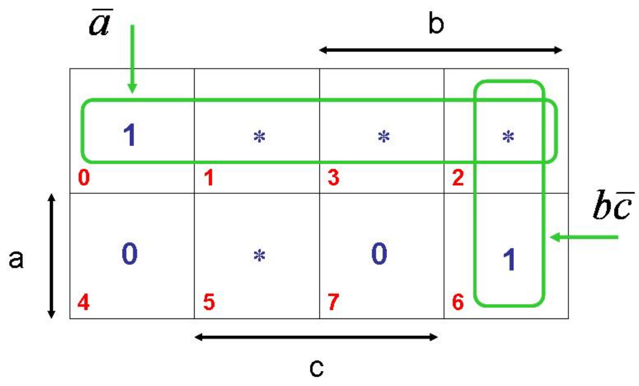
Una expresión booleana para $F$ es:

$$F(a,b,c) = a\,b\,\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$$

El diagrama de Karnaugh es:




El criterio que usaremos es utilizar a los $*$ como comodines y asignarles un 1 si permite simplificar la expresión definida por el correspondiente diagrama de Karnaugh. Queremos obtener los bloques del mayor tamaño posible juntando los cuadrados que contengan 1 y $*$. Los cuadrados correspondientes a situaciones imposibles pueden cubrirse con los bloques o quedar descubiertas.




La simplificación del diagrama de Karnaugh es:
La función booleana más sencilla que satisface las condiciones es:

$$F(a, b, c) = \overline{a} + b\overline{c}$$

"El ascensor se pone en marcha si, o bien el sensor $A$ no detecta peso, o bien el sensor $B$ detecta peso y el sensor $C$ no".