

Tema 1: Lògica i fonamentació

1. Sigui p la proposició “En Joan va caure” i q la proposició “En Joan es va rompre una cama”.

(a) Escriuiu les sentències corresponents a cada una de les següents proposicions:

$$p \wedge q, \quad \neg p \wedge \neg q, \quad \neg(p \wedge q), \quad q \vee \neg p.$$

(b) Quan és que $\neg(p \wedge q)$ és vertadera i $q \vee \neg p$ falsa? I a l'inrevés?

(c) Amb p i q les donades, sota quines condicions és la proposició $p \vee q$ vertadera? I $p \oplus q$?

2. Un dimarts al matí en Pere diu: “Si avui és dimecres, llavors avui és dimarts”. Discutiu el valor de veritat de la proposició de'n Pere. I si la diu un dimecres?

3. Donau les taules de veritat per a cada una de les següents formes proposicionals:

(a) $p \oplus (p \leftrightarrow q)$

(b) $p \rightarrow (p \rightarrow p)$

(c) $(p \oplus q) \rightarrow (p \oplus \neg q)$

(d) $(q \rightarrow \neg p) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

(e) $\neg(\neg p \rightarrow q) \vee \neg(\neg p \rightarrow \neg q)$

(f) $\neg p \wedge (q \rightarrow \neg r)$

(g) $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r)$

4. Emprau les taules de veritat per determinar quines de les següents proposicions són tautologies:

(a) $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$

(b) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee r)$

(c) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

(d) $((p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow r$

5. (a) Donau una forma proposicional lògicament equivalent a $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ en la qual el símbol \rightarrow no hi aparegui.

(b) Donau una forma proposicional lògicament equivalent a $p \vee q$ en la qual els únics connectius lògics siguin \neg i \wedge .

(c) Deduïu que qualsevol connectiu es pot substituir per una forma proposicional equivalent que únicament utilitzi els connectius \wedge i \neg .

6. Escrivim $p \uparrow q$ com una abreviatura de $\neg(p \wedge q)$. Aquest connectiu \uparrow es diu NAND (per NO-AND). Emprau taules de veritat per a verificar les següents equivalències lògiques:

(a) $\neg p \Leftrightarrow p \uparrow p$

(b) $p \vee q \Leftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$

(c) $p \wedge q \Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$

(d) Donau una forma proposicional equivalent per a $p \rightarrow q$ utilitzant el connectiu NAND únicament.

Equivalentment definim $p \downarrow q$ com una abreviatura de $\neg(p \vee q)$. Aquest connectiu \downarrow es diu NOR (per NO-OR). Trobau els equivalents dels quatre connectius bàsics usant únicament el connectiu NOR.

7. A Steve li agradaria determinar qui cobra més d'entre tres dels seus col·legues utilitzant dos fets. Primer, sap que si Fred no és el millor pagat dels tres, llavors ho és Janice. Segon, sap que si Janice no és la pitjor pagada, llavors Maggie és la que més cobra. És possible determinar l'ordre dels salaris de Janice, Maggie i Fred amb només aquestes dades? Si és així, qui és el que cobra més i qui és el que cobra menys?
8. Tradueix aquestes sentències a llenguatge natural, a on $R(x)$ és “ x és un conill” i $H(x)$ és “ x bota” i el domini consisteix en tots els animals.
- $\forall x(R(x) \rightarrow H(x))$
 - $\forall x(H(x) \rightarrow R(x))$
 - $\forall x(R(x) \wedge H(x))$
 - $\exists x(R(x) \rightarrow H(x))$
 - $\exists x(H(x) \rightarrow R(x))$
 - $\exists x(R(x) \wedge H(x))$
9. Etiquetau cada un dels següents enunciats amb *vertader* o *fals*, segons correspongui. Tots aquests enunciats es refereixen a nombres reals.
- $\forall x((x \geq 0) \rightarrow \exists y(y^2 = x))$
 - $\forall x \exists! y(y^3 = x)$
 - $\forall x \exists! y(xy = 0)$
10. Suposau que estau treballant amb nombres reals. Trobau predicats $P(x)$ i $Q(x)$ de manera que les proposicions $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ i $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ tinguin valors de veritat oposats.
11. Expressau els següents enunciats simbòlicament, emprant quantificadors, connectius lògics i símbols matemàtics estàndard de l'àritmètica, però sense emprar paraules:
- Hi ha un enter positiu, el cub del qual, quan se suma a 15, dona 22.
 - Tot enter positiu té la propietat que quan el seu cub se suma a 15, el resultat és 22.
 - No és cert que tot nombre real sigui un quadrat d'un nombre real.
 - Tot nombre real té una única arrel cúbica.
 - Hi ha un nombre real que no és el quadrat d'un nombre real.
12. Signin $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ i $S(x)$ els predicats “ x és un ànec”, “ x és un au del meu corral”, “ x és un jove guapo” i “ x vol ballar un vals”, respectivament a l'univers de totes les persones i els animals. Expressau cada un dels següents enunciats emprant quantificadors, connectius lògics i $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ i $S(x)$.
- Cap ànec vol ballar un vals.
 - Cap jove guapo rebutja ballar un vals.
 - Totes les aus del meu corral són ànecs.
 - Les aus del meu corral no són joves guapos.
 - Hi ha un ànec que és un au del meu corral.
 - Hi ha un jove guapo que no vol ballar un vals.
13. Dins el conjunt de nombres més grans o iguals a zero amb $a = 0$, $b = 1$, $P(w_1, w_2) = “w_1 < w_2”$ i $Q(w_1, w_2) = “w_1 + w_2 > 10”$, valoreu:
- $P(x, y) \rightarrow Q(x, y)$
 - $\exists x(P(a, b) \rightarrow Q(a, x))$

$$(c) \ P(x, x) \wedge Q(x, x)$$

$$(d) \ \forall x \neg (P(a, b) \rightarrow Q(a, x))$$

14. Suposem que tenim la següent afirmació: “Tota persona major de 18 anys beu alcohol”. Suposem que tenim quatre persones diferents, de les quals tenim les següents dades:

- Persona A té 23 anys
- Persona B beu Coca-Cola
- Persona C té 15 anys
- Persona D beu ron amb taronja

A cada una d’aquestes persones lis podem demanar quina beguda beuen o quina edat tenen, segons correspongui. Emprant les eines de la lògica de predicats, averiguau quin és el nombre mínim de questions que s’han de fer per verificar l’afirmació donada. Com ho farieu en lògica de proposicions?

15. Realitzau un raonament vàlid usant les regles d’inferència per mostrar que les hipòtesis “Si no plou o si no hi ha boira, llavors es celebrarà la competició de vaixells i es farà una demostració dels socorristes”, “Si es celebra la competició de vaixells, s’entregarà un trofeu” i “El trofeu no s’ha entregat” impliquen la conclusió “Va ploure”.
16. Per cada un dels següents arguments, digau si són correctes o no. Si l’argument és correcte, quina és la regla d’inferència emprada? Si no ho és, quin error lògic s’ha comés?
- (a) Sigui $S(x, y)$ el predicat “ x és més baix que y ”. Donada la premisa $\exists x S(x, \text{Randy})$, podem deduir que $S(\text{Randy}, \text{Randy})$. Llavors es té que $\exists x S(x, x)$, és a dir, existeix algú que és més baix que ell mateix.
 - (b) A tots els lloros els hi agrada la fruita. Al meu ocell no li agrada la fruita. El meu ocell no és un lloro.
 - (c) Tots els estudiants del Grau de Matemàtiques cursen Matemàtica Discreta. Na Miquela cursa Matemàtica Discreta. Per tant, na Miquela és estudiant d’Enginyeria Informàtica.
 - (d) Na Joana, una estudiant de primer de Matemàtiques, té un descapotable vermell. A tots els que tenen un descapotable vermell els han multat alguna vegada per excés de velocitat. Llavors a alguna estudiant de primer de Matemàtiques l’han multada per excés de velocitat.