Cálculo matricial - Ejercicios I

Estudios de Ingeniería

James Bond

Ejercicio 1

Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Realizad las operaciones siguientes:

$$a)A \cdot B, \quad b)B \cdot C, \quad c)B^t, \quad d)B^t \cdot A, \quad e)C^t \cdot B^t$$

Ejercicio 2

Escribid la matrix 3x4 que tiene por entrada (i, j) el elemento

$$a_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{i+j}$$

Ejercicio 3

Escribid la matrix (n+1)x(n+1) que tiene por entrada (i, j) el elemento

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i > j \\ 1 & \text{si} \quad i = j \\ k^{j-i} & \text{si} \quad j > i \end{cases}$$

donde k es un número real cualquiera.

Ejercicio 4

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hallad todas las matrices cuadradas de orden 2 tales que $AX = 0$

Ejercicio 5

Considerad las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Demostrad que $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$, pero en cambio que $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

Ejercicio 6

Hallad matrices A y B tales que cumplan las dos ecuaciones

$$4A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$3A + B = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 0 \\ 2 & 1/2 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ y A la matriz dada por

$$A = \begin{pmatrix} a & a+b & a-c \\ a-b & b & b-c \\ a+b-2 & c-b & c \end{pmatrix}$$

Qué tienen que valer los parámetros para que A sea

1. Triangular superior
2. Triangular inferior
3. Simétrica

Ejercicio 8

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculad el valor de

$$A + A^2 + \cdots + A^n$$

para todo valor $n \geq 1$

Ejercicio 9

Sea A una matriz cuadrada de orden n. B se llama una raíz cuadrada de A si $B^2 = A$.

1. Halla tres raíces cuadradas diferentes de I_2.
2. Demuestra que la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no tiene raíces cuadradas.

Ejercicio 10

Halla todas las matrices reales que conmutan con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 11

Halla las potencias n-ésimas de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 12

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ dos matrices tales que A es simétrica y B es antisimétrica. Demostrad que $AB + BA$ es antisimétrica y que $AB - BA$ es simétrica

Ejercicio 13

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Demostrad que:

1. $A + A^t$ es simétrica
2. $A - A^t$ es antisimétrica
3. A se puede poner siempre como suma de una matriz simétrica y una antisimétrica

Ejercicio 14

Sean A y B matrices cuadradas de orden n de modo que B es simétrica. Demostrad que:

1. AA^t es simétrica
2. ABA^t es simétrica
3. Si A es antisimétrica, entonces A^2 es simétrica.
4. Si $A^2 = 0$ entonces $A(A + I_n)^i = A$ para todo $i = 0, 1, 2, 3, \cdots$

Ejercicio 15

Una matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ se llama estocástica si

- Todos sus coeficientes son no negativos, es decir $a_{ij} \geq 0$ para todos $i, j = 1, 2, \cdots, n$
- La suma de los coeficientes de cada fila vale 1, es decir $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \ \forall \ i = 1, \cdots, n$

y doblemente estocástica si además la suma de los coeficientes de cada columna también vale 1, es decir $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \ \forall \ j = 1, \cdots, n$

1. Da un ejemplo de matriz $A \in M_4(\mathbb{R})$ estocástica
2. Da un ejemplo de matriz $A \in M_4(\mathbb{R})$ doblemente estocástica.
3. Da un ejemplo de matriz estocástica y simétrica.

Ejercicio 16

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A partir de ella definimos la matriz B como

$$B = A - \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 - \frac{1}{4}A^4 + \cdots$$

...

Ejercicio 16 (cont.)

$$\ldots$$

Demostrad que en este sumatorio solamente hay un número finito de términos no nulos y calculad B. Demostrad también que el sumatorio

$$B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \frac{1}{4!}B^4 + \cdots$$

solamente tiene un número finito de términos no nulos, y que su suma vale A.