Capítulo 1

MATRICES Y SISTEMAS LINEALES

En este capítulo se repasan conceptos básicos que se requieren para los estudios de grado de Ingeniería Telemática. Las matrices se crearon para operar de acuerdo con ciertos criterios numéricos y aparecen frecuentemente tanto en aplicaciones prácticas como en desarrollos teóricos. Las matrices permiten expresar ecuaciones en forma reducida y también permiten visualizar mejor los problemas. Los sistemas de ecuaciones lineales tienen una gran variedad de aplicaciones en ciencias e ingenierías. Estos conceptos se introducen en la educación secundaria obligatoria y en esta asignatura se profundiza en algunos aspectos de este importante tema.

1.1. Matrices

1.1.1. Definiciones básicas

Intuitivamente, una matriz es un conjunto de números ordenados en filas y columnas.

Definición 1.1. *Una **matriz** A es un conjunto de $m \times n$ números reales ordenados en m filas y n columnas:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Se dice que A es una matriz de tamaño $m \times n$ y se escribe $A = [a_{ij}]$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Esto es, a_{ij} representa el número que se encuentra en la fila i y en la columna j. A los elementos a_{ij} se les llama las componentes (entradas) de la matriz A.

Ejemplo 1.1. *¿Qué puedes decir de la matriz A?*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sólución: A es una matriz de tamaño 2×3 y $a_{11} = -2$; $a_{12} = 3$; $a_{13} = 5$; $a_{21} = 4$; $a_{22} = -1$; $a_{23} = 1$.

OBSERVACIONES:

- Los paréntesis rectangulares de la notación matricial se pueden reemplazar por paréntesis circulares.
- En el caso particular de una matriz de tamaño 1×1, identificamos la matriz $[a]$ con el número real a.
- El conjunto de todas las matrices de números reales de tamaño $m \times n$ se denota por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.
- En ocasiones las componentes de la matriz pueden ser números complejos, en este caso, el conjunto de todas las matrices de números complejos de tamaño $m \times n$ se denota por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$.

Definición 1.2. *Dos matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ **son iguales**, $A = B$, si y sólo si:*

- *A y B tienen el mismo tamaño y*

- $a_{ij} = b_{ij}\ \forall i, j$.

Es decir, las matrices deben tener el mismo tamaño y los elementos situados en la misma posición deben ser iguales.

Ejemplo 1.2. *Determinar el valor de a para que las matrices A y B sean iguales.*

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & 2a \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Sólución: Ambas matrices tienen el mismo tamaño, serán iguales si y sólo si coinciden componente a componente. Esto sucede siempre que $a = 2$ y $2a = 4$, esto es, para $a = 2$.

Ejemplo 1.3. *Determinar el valor de a para que las matrices A y B sean iguales.*

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 3 & 3a \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Sólución: Para que ambas matrices sean iguales es necesario que $a = 1$ y $3a = 4$. Es imposible que simultáneamente se satisfagan ambas igualdades. Por lo tanto, aunque las matrices tengan el mismo tamaño, $A \neq B$ para cualquier valor de a.

1.1.2. Matrices especiales

La **matriz fila** (o vector fila) es una matriz de orden $1 \times n$ (sólo tiene una fila). La **matriz columna** (o vector columna) es una matriz de orden $m \times 1$ (sólo tiene una columna).

OBSERVACIONES:

- Cualquier elemento de $\mathbb{R}^n$ puede representarse por un vector fila o columna.

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3; \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

La **matriz cero** (o matriz nula) de tamaño $m \times n$ es aquella que tiene las $m \times n$ componentes nulas, es decir, $\mathbb{O}_{m\times n} = [a_{ij}]$ donde $a_{ij} = 0, \forall i, j$. La matriz cero de tamaño 2×3 es:

$$\mathbb{O}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las matrices de tamaño $n \times n$ (mismo número de filas y columnas) son **matrices cuadradas** de orden n. El conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n se representa por $\mathcal{M}_n$. Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz cuadrada de orden n, los elementos a_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, n$ forman (o están en) la **diagonal** de la matriz A.

Definición 1.3. *Una matriz cuadrada de orden n $A = [a_{ij}]$ es una **matriz diagonal** si todas las componentes fuera de su diagonal son nulas. Es decir, $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.*

Ejemplo 1.4. *¿Qué puedes decir de la matriz A?*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Sólución: La matriz A tiene el mismo número de filas y de columnas, es una matriz cuadrada de orden 3. Además, todos los elementos fuera de la diagonal son nulos, por consiguiente es una matriz diagonal.

OBSERVACIONES:

- En la matriz diagonal es indiferente el valor de los elementos de la diagonal, pero debe haber al menos un valor no nulo.

La **matriz identidad** (o matriz unidad) es una matriz cuadrada que tiene unos en la diagonal y ceros en cualquier otra posición. La matriz identidad de orden n se designa I_n,

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

En otras palabras, $I_n = [a_{ij}]$, donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Definición 1.4. *Una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ de orden n es una matriz **triangular superior** si todas las componentes que están por debajo de la diagonal son nulas. Es decir, $a_{ij} = 0$ para $i > j$.*
*La matriz es **triangular inferior** si las componentes que están por encima de la diagonal son todas iguales a cero. Es decir, $a_{ij} = 0$ para $i < j$.*

Ejemplo 1.5. *¿Qué puedes decir de las matrices A y B?*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Ambas matrices son cuadradas de orden 4. Además, A es una matriz triangular superior y B una matriz triangular inferior.

Definición 1.5. *Sea $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}$, se define la **matriz traspuesta** de A como $A^t = [b_{ij}]$, donde $b_{ij} = a_{ji}\ \forall i, j$.*

OBSERVACIONES:

- La matriz traspuesta se obtiene intercambiando filas por columnas, manteniendo el orden.
- Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, entonces $A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}$.

Ejemplo 1.6. *Halla A^t.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Solución: Para encontrar A^t intercambiaremos filas por columnas.

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

1.1.3. Operaciones con matrices

Suma de matrices.

Definición 1.6. *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$; se define la **matriz suma** de A con B como $A + B = [c_{ij}]$ donde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall i, j$.*

OBSERVACIONES:

- La suma de dos matrices sólo se puede realizar cuando tienen el mismo tamaño y el resultado también es una matriz $m \times n$.

Propiedades de la suma de matrices. Sean $A, B, C, \mathbb{O} \in \mathcal{M}_{m\times n}$:

- Asociativa: $(A+B)+C = A+(B+C)$.
- Conmutativa: $A+B = B+A$.
- Elemento neutro: $A+\mathbb{O} = \mathbb{O}+A = A$.
- Existencia de elemento opuesto: $\exists(-A) \in \mathcal{M}_{m\times n} \mid A+(-A) = \mathbb{O}$. De hecho, si $A = [a_{ij}]$, $(-A) = [-a_{ij}]$.

Multiplicación por un escalar.

Definición 1.7. *Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}$; se define la* ***multiplicación de un escalar con una matriz*** *como la matriz $\lambda A = [c_{ij}]$ donde $c_{ij} = \lambda a_{ij}$, $\forall i, j$. El resultado de multiplicar una matriz con un escalar es la matriz que tiene como componentes cada una de las entradas de la matriz original multiplicada por dicho escalar.*

Propiedades de la multiplicación por un escalar. Sean $B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$:

- Existencia del escalar 1: $1 \cdot B = B$.
- Distributiva respecto de la suma de escalares: $(\lambda+\beta)B = \lambda B + \beta B$.
- Distributiva respecto de la suma de matrices: $\lambda(B+C) = \lambda B + \lambda C$.
- Asociativa: $(\lambda \cdot \beta)B = \lambda(\beta B)$.

Producto de matrices. Antes de definir el producto de dos matrices veamos el producto de una matriz fila por una matriz columna con el mismo número de componentes. Sean $F_1 = [f_{1j}] \in \mathcal{M}_{1\times n}$ y $C_1 = [c_{i1}] \in \mathcal{M}_{n\times 1}$

$$F_1C_1 = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{bmatrix} = f_{11}c_{11} + f_{12}c_{21} + \cdots f_{1n}c_{n1} = \sum_{k=1}^{n} f_{1k}c_{k1}$$

OBSERVACIONES:

- El producto de una matriz fila por una matriz columna viene a ser el producto escalar de dos vectores. El resultado de la operación es un número real o una matriz de tamaño 1×1.

Definición 1.8. *Sean $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times p}$; se define la* ***matriz producto*** *de A con B como $A \cdot B = [c_{ij}]$ donde $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ para $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, p$. La componente c_{ij} del producto $A \cdot B$ es el resultado de multiplicar la fila i-ésima de A con la columna j-ésima de B. La matriz producto $A \cdot B \in \mathcal{M}_{m\times p}$*

OBSERVACIONES:

- Para poder efectuar el producto de dos matrices, la primera matriz debe tener el mismo número de columnas que de filas la segunda. Si F_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ son las filas de A y C_j, $j = 1, 2, \ldots, p$ son las columnas de B, entonces:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} F_1C_1 & F_1C_2 & \cdots & F_1C_p \\ F_2C_1 & F_2C_2 & \cdots & F_2C_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_mC_1 & F_mC_2 & \cdots & F_mC_p \end{bmatrix}$$

Propiedades del producto de matrices. Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $B, D \in \mathcal{M}_{n\times p}$, $C \in \mathcal{M}_{p\times q}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

- Asociativa: $A(BC) = (AB)C$.
- NO conmutativa: $AB \neq BA$.
- Distributiva respecto de la suma: $A(B + D) = AB + AD$.
- Asociativa: $\lambda(AB) = (\lambda A)B$.
- Elemento identidad: $AI_n = I_m A = A$.

Ejemplo 1.7. *Calcula $2D$, $A + B$, $A \cdot D$.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$2D = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(1) & (2)(0) & (2)(3) \\ (2)(-1) & (2)(2) & (2)(1) \\ (2)(4) & (2)(-2) & (2)(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -2 & 4 & 2 \\ 8 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+(-1) & -3+2 \\ -2+3 & 0+4 & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (1)(1)+(2)(-1)+(-3)(4) & (1)(0)+(2)(2)+(-3)(-2) & (1)(3)+(2)(1)+(-3)(0) \\ (-2)(1)+(0)(-1)+(1)(4) & (-2)(0)+(0)(2)+(1)(-2) & (-2)(3)+(0)(1)+(1)(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 10 & 5 \\ 2 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

A partir de aquí no se realizarán las operaciones con matrices con el detalle empleado en este ejemplo. La notación matricial está diseñada para ejecutar los cálculos mecánica y mentalmente.

Ejemplo 1.8. *Comprueba si son ciertas las siguientes igualdades: $AB = BA$, $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, $A^2 + BA = A(A + B)$.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \qquad AB \neq BA$$

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 12 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 12 & 6 \end{bmatrix} \qquad (A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

$$A^2 + BA = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A(A + B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad A^2 + BA \neq A(A + B)$$

OBSERVACIONES:

- Las igualdades anteriores no son ciertas debido a que el producto de matrices no es conmutativo. Hay que vigilar la resolución de ecuaciones matriciales ya que generalmente no se satisface la propiedad conmutativa del producto.

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$
$$A^2 + AB = A(A+B)$$
$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

1.1.4. Propiedades de las operaciones

A continuación resumimos las principales propiedades de las operaciones con matrices, son fáciles de probar y se deja como ejercicio para el alumno.

1. Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$:
   a) $A + B \in \mathcal{M}_{m\times n}$.
   b) $A + (B + C) = (A + B) + C$.
   c) $A + B = B + A$.
   d) $A + \mathbb{O} = \mathbb{O} + A = A$, donde $\mathbb{O} \in \mathcal{M}_{m\times n}$.
   e) Existe una matriz $(-A) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ tal que $A + (-A) = \mathbb{O}$.
   f) $\lambda A \in \mathcal{M}_{m\times n}$.
   g) $(\lambda\beta)A = \lambda(\beta A)$.
   h) $(\lambda + \beta)A = \lambda A + \beta B$.
   i) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
   j) $1\,A = A$.
2. Sean A, B, C matrices de tamaños tales que los productos estén bien definidos:
   a) $A(BC) = (AB)C$.
   b) $\lambda(AB) = (\lambda A)B$.
   c) Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $AI_n = I_m A = A$.
   d) En general $AB \neq BA$.
   e) $A(B + C) = AB + AC$.
3. Si A y B son matrices del mismo tamaño y el producto AC está bien definido
   a) $(A + B)^t = A^t + B^t$.
   b) $(AB)^t = B^t A^t$.
   c) $(A^t)^t = A$.

En las demostraciones de este tema se identifican las propiedades con la numeración indicada en esta sección.

Ejemplo 1.9. *Calcula: $A + A^t$, $B - B^t$.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$A + A^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B - B^t = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

1.1.5. Matriz simétrica y antisimétrica

Definición 1.9. *Una matriz $A = [a_{ij}]$ es **simétrica** si $A = A^t$, es decir si $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i, j$.*

Definición 1.10. *Una matriz $A = [a_{ij}]$ es **antisimétrica** si $A = -A^t$, es decir si $a_{ij} = -a_{ji}$ $\forall i, j$.*

OBSERVACIONES:

- Las matrices simétricas y antisimétricas deben ser necesariamente cuadradas.
- La diagonal de una matriz antisimétrica está formada por ceros.

Teorema 1.1. *Si B es una matriz cuadrada cualquiera entonces $S = B + B^t$ es simétrica.*

OBSERVACIONES:

- Un teorema es una afirmación que puede ser demostrada como verdadera dentro de un marco lógico. Un teorema posee un número de premisas que son conocidas de antemano, las hipótesis; y una conclusión, la tesis, que es verdadera bajo las condiciones dadas. El teorema establece la relación que existe entre la hipótesis y la tesis.
- El proceso de demostración de un teorema requiere de un marco lógico; este marco consistirá en un conjunto de axiomas (definiciones, propiedades, otros teoremas, ...) y un proceso de inferencia, que permite obtener la tesis a partir de las hipótesis utilizando los axiomas.

Antes de proceder a la demostración del teorema, formulemos con claridad cuales son las hipótesis y la tesis.

Formulación del teorema.

HIPÓTESIS: (H1) $B \in \mathcal{M}_n$ TESIS: $S = B + B^t$ es simétrica $\Leftrightarrow B + B^t = (B + B^t)^t$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
(B + B^t)^t &= && \text{(H1; propiedad 3a)}\\
&= B^t + (B^t)^t = && \text{(H1; propiedad 3c)}\\
&= B^t + B = && \text{(H1; propiedad 1c)}\\
&= B + B^t &&
\end{aligned}
$$

□

Teorema 1.2. *Si C es una matriz cuadrada cualquiera entonces $A = C - C^t$ es antisimétrica.*

Formulación del teorema.

HIPÓTESIS: (H1) $C \in \mathcal{M}_n$ TESIS: $N = C - C^t$ es antisimétrica $\Leftrightarrow C - C^t = -(C - C^t)^t$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
(C - C^t)^t &= && \text{(H1; propiedad 3a)}\\
&= C^t - (C^t)^t && \text{(H1; propiedad 3c)}\\
&= C^t - C = && \text{(H1; propiedad 1c y 1i)}\\
&= -(C - C^t) &&
\end{aligned}
$$

□

Teorema 1.3. *Cualquier matriz cuadrada P puede expresarse como la suma de una matriz simétrica S y una antisimétrica A.*

Formulación del teorema.

$$\text{HIPÓTESIS:} \quad (\text{H1})\ P \in \mathcal{M}_n \qquad \text{TESIS:} \quad P = S + A$$

Demostración.

$$\begin{aligned} 2P &= P + P = \\ &= (P + P^t) + (P - P^t) && (\text{sumamos y restamos } P^t\ ) \\ &= S + A && (\text{H1; teoremas 1.1 y 1.2}) \end{aligned}$$

□

1.1.6. Matrices invertibles y sus inversas

Las operaciones algebraicas con matrices tienen propiedades análogas a las de los números reales, ahora veremos una propiedad que corresponde a la existencia de inversos multiplicativos.

Definición 1.11. *Una matriz cuadrada A de orden n es* ***invertible*** *(no singular), si existe una matriz C del mismo tamaño tal que $AC = CA = I_n$.*

El siguiente teorema garantiza que, de existir, la matriz C de la definición 1.11 es única.

Teorema 1.4. *Si $A \in \mathcal{M}_n$ es invertible, y $C, B \in \mathcal{M}_n$ son tales que $AC = CA = I_n$ y $AB = BA = I_n$ entonces $C = B$.*

Formulación del teorema.

$$\text{HIPÓTESIS} \begin{cases} (\text{H1}) & A, B, C \in \mathcal{M}_n \\ (\text{H2}) & AC = CA = I_n \\ (\text{H3}) & AB = BA = I_n \end{cases} \qquad \text{TESIS: } \{C = B$$

Demostración.

$$\begin{array}{ll} (\text{H2}) & AC = I_n \Rightarrow \\ (\text{H1; multiplicamos por la izda por } B) & B(AC) = BI_n \Rightarrow \\ (\text{H1; propiedades 2a y 2c}) & (BA)C = B \Rightarrow \\ (\text{H3}) & I_nC = B \Rightarrow \\ (\text{H1; propiedad 2c}) & C = B \end{array}$$

□

Definición 1.12. *Si $A \in \mathcal{M}_n$ es invertible, a la única matriz $C \in \mathcal{M}_n$ tal que $AC = CA = I_n$ se le llama* ***matriz inversa*** *de A y se representa por A^{-1}; es decir, $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$*

Teorema 1.5 (Propiedades de la matriz inversa.)**.** *Si $A, B \in \mathcal{M}_n$ son matrices invertibles, entonces*

1. *la matriz AB es invertible y además $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*
2. *A^{-1} es también invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$.*

Formulación del teorema.

$$\text{HIPÓTESIS} \begin{cases} (\text{H1}) & A, B \in \mathcal{M}_n \\ (\text{H2}) & AA^{-1} = A^{-1}A = I_n \\ (\text{H3}) & BB^{-1} = B^{-1}B = I_n \end{cases} \quad \text{TESIS: } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} (\text{T1}) & (B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n \\ (\text{T2}) & (AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n \end{cases}$$

Demostración. Hay que demostrar ((T1) y (T2).

$$\begin{aligned} B^{-1}A^{-1})(AB) &= && (\text{H1; propiedad 2a}) \\ &= B^{-1}(A^{-1}A)B = && (\text{H2}) \\ &= B^{-1}I_nB = && (\text{H1); propiedad 2c}) \\ &= B^{-1}B = && (\text{H3}) \\ &= I_n \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}(AB)(B^{-1}A^{-1}) & = & \text{(H1; propiedad 2a)}\\ & = A(BB^{-1})A^{-1} = & \text{(H3)}\\ & = AI_nA^{-1} = & \text{(H1); propiedad 2c)}\\ & = AA^{-1} = & \text{(H2)}\\ & = I_n \text{ (H2)} & \end{array}$$

□

Definición 1.13. *Sea $A \in \mathcal{M}_n$, se dice que A es una **matriz ortogonal** si $AA^t = I_n$; la matriz traspuesta de A es igual a su inversa.*

Matrices equivalentes

Definición 1.14. *Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$ con filas F_i, $i = 1, 2, \ldots n$ definimos las siguientes operaciones elementales por filas:*

1. *Intercambio de filas: $F_i \leftrightarrow F_j$; la fila i se intercambia con la fila j.*
2. *Multiplicación por un escalar: $F_i \rightarrow \alpha F_i$ $(\alpha \neq 0)$; la fila i se cambia por la misma fila multiplicada por α.*
3. *Suma de filas: $F_i \rightarrow F_i + \beta F_j$; la fila i se cambia por la suma de la fila i con β veces la fila j.*

Definición 1.15. *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times m}$. Decimos que la matriz B es **equivalente por filas** a la matriz A, si B se puede obtener de la matriz A al aplicarle una sucesión finita de operaciones elementales por filas. Si B es equivalente a A escribiremos $B \sim A$.*

Definición 1.16. *Al primer elemento (de izquierda a derecha) distinto de cero de cada fila de una matriz se le llama **pivote**.*

Ejemplo 1.10. *a) Comprueba si A y B son matrices equivalentes por filas. b) Indica los pivotes de la matriz B.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & -3 & -1\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & -7 & -7\end{bmatrix}$$

Solución:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & -3 & -1\end{bmatrix} \overset{F_2\rightarrow F_2-2F_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & -7 & -7\end{bmatrix} = B$$

b)

$$B = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3\\ 0 & \boxed{\text{-7}} & -7\end{bmatrix}$$

Los pivotes son: 1 y -7.

Cálculo de la matriz inversa

Teorema 1.6. *Sea A una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\exists A^{-1}$, A es invertible.*
2. *$A \sim I_n$, A es equivalente por filas a la matriz identidad.*

Es decir, $\exists A^{-1} \Leftrightarrow A \sim I_n$.

Método de Gauss-Jordan. Según el teorema 1.6, es suficiente que la matriz A sea equivalente a la matriz identidad para que sea invertible. El método de Gauss-Jordan proporciona un procedimiento que calcula la matriz inversa a partir de las operaciones elementales que transforman la matriz A en la identidad.

Método de **Gauss-Jordan** para el cálculo de la matriz inversa:
Paso 1: Formamos la matriz aumentada $[A|I]$, colocamos a la derecha de A una matriz identidad del mismo tamaño.
Paso 2: "Llevamos" a A a la identidad, aplicando simultáneamente las mismas operaciones elementales por filas a A y a I. Para ello:

a) De entre todas las filas elegir una de las que tenga la entrada pivote lo más a la izquierda posible y colocarla como primera fila (intercambio de filas).

b) Utilizar elo pivote de F_1 para obtener ceros bajo ella. Para ello emplearemos la multiplicación por un escalar y la suma de filas.

c) Repetir los pasos a) y b) con la submatriz formada por todas las filas excluyendo la primera, hasta obtener una matriz triangular superior.

d) Se aplican las mismas estrategias para conseguir ceros por encima de la diagonal principal. Para ello se aplica el paso b) de abajo hacia arriba.

e) Se convierten en unos todos los pivotes (multiplicación por un escalar).

Paso 3: Una vez obtenida $[I|B]$, por el teorema anterior $B = A^{-1}$.
Paso 4: Si A no se puede llevar a I, significa que A no tiene inversa.

OBSERVACIONES:

- A lo largo del curso haremos uso de la expresión "llevar la matriz A", hay que interpretarlo como obtener una matriz equivalente por filas a A.
- El algoritmo anterior es una guía para obtener la matriz inversa, la matriz inversa (si existe) es única pero existen diferentes caminos que nos llevan a ella.

Ejemplo 1.11. *Halla, si existe, la inversa de la matriz A.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Solución: Aplicaremos el método Gauss-Jordan explicando los pasos en detalle.
Paso 1: Formamos la matriz aumentada,

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Paso 2 a): Todas las filas tienen el pivote en la primera columna y no es necesario intercambiar filas.
Paso 2 b): Utilizaremos el pivote de la fila 1 para transformar en ceros los elementos que están por debajo de él mediante las operaciones elementales productos por un escalar y suma de filas.

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{F_2 \to F_2 + (-2)F_1 \\ F_3 \to F_3 + (-1)F_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Paso 2 c): Ignoramos la fila 1 y trabajamos con la submatriz formada por las filas 2 y 3. Los pivotes están en la columna 2 y no es necesario intercambiar filas. Utilizamos el pivote de la segunda fila para transformar en ceros los elementos que están debajo de él.

$$[A|I] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \boxed{1} & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{F_3 \to F_3 + 2F_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Hemos obtenido una matriz triangular superior.
Paso 2 d): Hay que conseguir ceros por encima de la diagonal empezando de abajo hacia arriba.

$$[A|I] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{F_1 \to F_1+3F_3}{F_2 \to F_2+(-3)F_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{F_1 \to F_1+(-2)F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Hemos obtenido una matriz diagonal.
Paso 2 e): Tal sólo falta transformar todos los elementos de la diagonal en unos.

$$[A|I] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{F_3 \to (-1)F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Paso 3: La matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Nunca está de más comprobar el resultado obtenido:

$$AA_{-1} = A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.12. *Halla, si existe, la inversa de la matriz M.*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

Solución: Procederemos de forma análoga al ejemplo anterior.

$$[M|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{F_2 \to F_2+(-2)F_1}{F_3 \to F_3+F_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\underset{\sim}{F_3 \to F_3+(-1)F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Hemos obtenido una fila de ceros, no se puede "llevar" a M a la identidad, esto significa que M no tiene inversa $\nexists M^{-1}$.

1.1.7. Ecuaciones matriciales

Una ecuación matricial es una ecuación donde la incógnita es una matriz. Para resolver una ecuación matricial se transforma la ecuación inicial en otra equivalente usando diferentes propiedades que satisfacen las operaciones de matrices. Para despejar la incógnita de una ecuación matricial se hace uso de la matriz inversa. Es muy importante recordar que el producto de matrices no es conmutativo, por ello, si se quiere multiplicar una ecuación por determinada matriz hay que hacerlo en ambos términos de la igualdad por el mismo lado.
Sea la ecuación matricial $XP = Q - R$, para despejar la X multiplicamos por la derecha ambos lados de la igualdad por P^{-1}, esta ecuación sólo tendrá solución si la matriz P es invertible. En este caso,

$$\begin{array}{ll} XP = Q - R & \text{post-multiplicamos ambos lados por } P^{-1} \\ XPP^{-1} = (Q-R)P^{-1} & \text{definición matriz inversa } AA^{-1} = A^{-1}A = I_n \\ XI_n = (Q-R)P^{-1} & \text{propiedad matriz identidad } AI_n = I_nA = A \\ X = (Q-R)P^{-1} & \end{array}$$

Ejemplo 1.13. *Resolver la ecuación matricial $P + QX = RS - TX$. ¿Qué condición debe cumplirse para despejar X?*

Solución: La propiedad que utilizamos está indicada en cada paso.

$P + QX = RS - TX$	restamos P a ambos lados; sumamos TX a ambos lados
$(P - P) + QX + TX = RS - P + (TX - TX)$	definición matriz opuesta $A + (-A) = \mathbb{O}$
$\mathbb{O} + QX + TX = RS - P + \mathbb{O}$	propiedad matriz cero $A + \mathbb{O} = \mathbb{O} + A = A$
$QX + TX = RS - P$	propiedad distributiva $(A + B)X = AX + BX$
$(Q + T)X = RS - P$	pre-multiplicamos ambos lados por $(Q + T)^{-1}$
$(Q + T)^{-1}(Q + T)X = (Q + T)^{-1}(RS - P)$	definición matriz inversa $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$
$I_nX = (Q + T)^{-1}(RS - P)$	propiedad matriz identidad $AI_n = I_nA = A$
$X = (Q + T)^{-1}(RS - P)$	

Para poder despejar X es necesario que la matriz $(Q + T)$ tenga inversa.

1.2. Sistemas de Ecuaciones Lineales

Definición 1.17. *Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas que tiene la forma*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

*donde los $a_{ij}, b_i \in$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ son conocidos es un **sistema de ecuaciones lineales** (SEL). Una solución de este sistema es un conjunto de n números reales α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ tales que al hacer las sustituciones $x_i = \alpha_i$ en cada una de las m ecuaciones las convierte en identidades.*

Un sistema de ecuaciones lineales se puede escribir en **forma matricial** como $AX = B$, donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

La matriz A es la matriz de coeficientes, la matriz B la de términos independientes y la matriz X la de incógnitas.

Definición 1.18. *Sea el sistema $AX = B$, se define la **matriz ampliada** del sistema como $[A|B]$:*

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

OBSERVACIONES:

- Si $m = n$ el SEL se puede resolver facilmente:

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}AX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Basta con hallar la matriz inversa, si existe, y multiplicar las matrices.

Definición 1.19. *Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $AX = B$ es:*

- ***Compatible:*** *si tiene al menos una solución.*
  - *Determinado: si la solución es única.*
  - *Indeterminado: si tiene infinitas soluciones.*
- ***Incompatible:*** *si no tiene soluciones.*

Definición 1.20. *Dos sistemas lineales del mismo tamaño son* ***equivalentes*** *si tienen las mismas soluciones.*

Ejemplo 1.14. *Resuelve el sistema lineal*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solución: Vamos a escribir el SEL de una manera más sencilla. La primera ecuación queda igual y eliminaremos la variable x_1 de la segunda y tercera ecuación. A la segunda ecuación sumaremos la primera multiplicado por (-2); a la tercera ecuación sumaremos la primera multiplicado por (-3). Obtenemos un SEL equivalente.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_2 - 7x_3 &= -17 \\ 3x_2 - 11x_3 &= -27 \end{aligned}$$

De forma análoga eliminamos la variable x_2 de la tercera ecuación, a la tercera ecuación le sumamos la segunda multiplicada por $(-\frac{3}{2})$.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_2 - 7x_3 &= -17 \\ -\frac{1}{2}x_3 &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Este sistema se puede resolver comodamente: primero obtenemos x_3 de la tercera ecuación; luego sustituimos x_3 en la segunda ecuación y despejamos x_2; finalmente sustituimos x_3 y x_2 en la primera ecuación y obtenemos x_1.

$$\begin{aligned} x_3 &= 3 \\ x_2 &= \frac{-17 + 7 \cdot 3}{2} = 2 \\ x_1 &= 9 - 2 - 2 \cdot 3 = 1 \end{aligned}$$

Comprobemos que la solución es correcta.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 + 2 + 2 \cdot 3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = 0 \end{aligned}$$

En lugar de resolver el sistema $AX = B$, hemos resuelto el sistema equivalente $HX = C$, donde

$$[A|B] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right] \qquad [H|C] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Definición 1.21. *La matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ está en* ***forma escalonada*** *si se cumplen las siguientes condiciones:*

- *Las filas nulas (si existen) están por debajo de las no nulas.*
- *La entrada pivote de cada fila está a la derecha de la entrada pivote de la fila anterior.*

Ejemplo 1.15. *Indica si las matrices son escalonadas.*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución: La matriz P está en forma escalonada pero Q no, el pivote de la fila 4 no está a la derecha del pivote de la fila 3.

Definición 1.22. *Un sistema $HX = C$ está escalonado si la matriz ampliada $[H|C]$ es una matriz escalonada. A las variables que correspondan a pivotes se les llama **variables ligadas** y a las restantes **variables libres**.*

Ejemplo 1.16. *El sistema escalonado*

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 3 & -2 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

tiene pivotes en las columnas 1, 3, 5 y 6 que corresponden a las variables ligadas x_1, x_3, x_5 y x_6. Las variables x_2 y x_4 son variables libres.

1.2.1. Método de Gauss

El método de Gauss proporciona un procedimiento que convierte un SEL en otro equivalente más sencillo de resolver. Se trata de obtener un sistema equivalente en forma "escalonada" y resolverlo por sustitución regresiva. Ver Ejemplo 1.14.

Método de **Gauss**: Este algoritmo sirve para "llevar" una matriz a una forma escalonada equivalente aplicando operaciones elementales por filas introducidas en la Definición 1.14.
Paso 1: Entre todas las filas, elegir una de las que tenga la entrada pivote lo más a la izquierda posible y colocarla como primera fila (intercambio de filas).
Paso 2: : Con el pivote de la fila 1, transformar en ceros los elementos que están por debajo de él (multiplicación por un escalar y suma de filas).
Paso 3: Repetir los pasos 1 y 2 con la submatriz formada por todas las filas excluyendo la primera. La nueva matriz que obtengamos tendrá ceros por debajo del pivote de la fila 2.
Paso 4: Continuar el proceso hasta obtener una matriz escalonada.

Ejemplo 1.17. *Halla una matriz escalonada equivalente a la matriz P.*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución:
Paso 1: Las filas 2 y 3 tiene el pivote en la primera columna y la fila 1 en la segunda. Intercambiamos las filas 1 y 3. Elijo la fila 3 porque resulta más fácil trabajar con el valor 1 como pivote.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \overset{F_1 \leftrightarrow F_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & -4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Utilizaremos el pivote de la fila 1 para transformar en ceros los elementos que están por debajo de él mediante las operaciones elementales productos por un escalar y suma de filas.

$$P \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & -4 & -1 & 3 \end{bmatrix} \overset{F_2 \to F_2 + (-3)F_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -9 & -8 \\ 0 & -4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Repetimos los pasos anteriores, el pivote de la segunda fila es 1 y obtenemos ceros debejo de él.

$$P \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & -9 & -8 \\ 0 & -4 & -1 & 3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{F_3 \to F_3 + 4F_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -9 & -8 \\ 0 & 0 & -37 & -29 \end{bmatrix}$$

Paso 4: Podemos parar el proceso ya que la matriz es escalonada.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -9 & -8 \\ 0 & 0 & -37 & -29 \end{bmatrix}$$

OBSERVACIONES:

- El algoritmo anterior es una guía para obtener una matriz escalonada equivalente a la dada. Cualquier modificación es válida siempre que se empleen correctamente las operaciones por filas. Existen infinitas matrices escalonadas equivalentes por filas a la matriz dada.

1.2.2. Resolución de sistemas lineales por el método de Gauss

El método de Gauss se puede aplicar a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales $AX = B$, llevando a la matriz ampliada del sistema $[A|B]$ a una forma escalonada y aplicando sustitución regresiva. Al hacer sustitución regresiva a una matriz escalonada que sólo tiene variables ligadas, se despejan las variables de abajo hacia arriba. Si la matriz escalonada tiene variables libres, se despejan las variables ligadas dejándolas en función de las libres, procediendo de abajo hacia arriba.

Ejemplo 1.18. *Resolver los siguientes sistemas.*

$$a) \begin{array}{rrrl} x_1 & +x_2 & & = 3 \\ & x_2 & +x_3 & = 5 \\ x_1 & & +x_3 & = 4 \\ 5x_1 & -x_2 & +x_3 & = 6 \end{array} \qquad b) \begin{array}{rrrrl} x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & = 3 \\ 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & -x_4 & = -1 \\ 3x_1 & -5x_2 & +3x_3 & -4x_4 & = 3 \\ -x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & = 5 \end{array}$$

Solución: Para resolver los sistemas aplicaremos el algoritmo de Gauss y haremos sustitución regresiva a la matriz escalonada equivalente por filas a la matriz ampliada del sistema.
a)

$$[A|B] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right] \underset{\sim}{\substack{F_3 \to F_3 + (-1)F_1 \\ F_4 \to F_4 + (-5)F_1}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 1 & -9 \end{array}\right] \sim$$

$$\underset{\sim}{\substack{F_3 \to F_3 + 1F_2 \\ F_4 \to F_4 + 6F_2}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 21 \end{array}\right] \underset{\sim}{F_4 \to F_4 + (-\frac{7}{2})F_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Hemos obtenido una matriz escalonada con 3 pivotes, es decir 3 variables ligadas x_1, x_2 y x_3. La sustitución regresiva nos permite obtener las soluciones a partir de la matriz escalonada.

$$\begin{array}{ll} x_3 & = \frac{6}{2} = 3 \\ x_2 & = 5 - x_3 = 5 - 3 = 2 \\ x_1 & = 3 - x_2 = 3 - 2 = 1 \end{array} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$[A|B] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 3 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right] \underset{\sim}{\substack{F_2 \to F_2 + (-2)F_1 \\ F_3 \to F_3 + (-3)F_1 \\ F_4 \to F_4 + F_1}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right] \sim$$

$$\underset{\sim}{\substack{F_3 \to F_3 + (-1)F_2 \\ F_4 \to F_4 + F_2}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Hemos obtenido una matriz escalonada con 2 pivotes, hay dos variables ligadas x_1 y x_2; por el contrario x_3 y x_4 son variables libres. La sustitución regresiva nos permite obtener las soluciones en función de las variables libres.

$$\begin{aligned} x_4 &= x_4 \\ x_3 &= x_3 \\ x_2 &= -9 + x_4 \\ x_1 &= -14 - x_3 + 3x_4 \end{aligned} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 - x_3 + 3x_4 \\ -9 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \\ -9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$