

Exercicis de Programació lineal.

1. Representau la regió factible que determinen cada un dels següents sistemes d'inequacions lineals:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y \geq 7 \\ 2x - y \leq -1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} y - 3 < 0 \\ 2x + y > 1 \\ x - 2y > -3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 5 \\ x + y \geq 3 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

2. Trobau, en cada cas, els valors màxim i mínim, si en tenen

$$\text{a) } z = x + 3y \text{ sota les restriccions } \begin{cases} y \geq 1 - x \\ y \leq 1 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } z = -x + 2y - 8 \text{ sota les restriccions } \begin{cases} 3x + 2y \geq 6 \\ y \leq 3 \\ 3x - 2y \leq 0 \end{cases}$$

- 3 Donat el programa de programació lineal $Max Z = x_1 + 2x_2$ sota les restriccions:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 &\leq 15 \\ 28x_1 + 8x_2 &\leq 77 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Resoleu-lo gràficament.

4. En un taller fabriquen portes de dos tipus, A i B. En cada porta tipus A hi inverteixen $2m^2$ de xapa i 5 hores de feina, i en cada porta tipus B, $3m^2$ de xapa i 8 hores de feina. El taller disposa com a molt de $570m^2$ de xapa i el seu personal pot arribar a fer 1480 hores de feina. Si el benefici de cada porta tipus A és de 8000 unitats monetàries i el de cada porta tipus B és de 14000 u.m., quantes portes de cada tipus convé fer per obtenir el màxim benefici?
5. Una camioneta reparteix sacs de la mateixa grandària i de dos tipus, A i B. Els de tipus A pesen $30kg$ i els de tipus B, 20. Per cada sac de tipus A cobra

1000 u.m. i per cada sac de tipus B, 700 u.m. Quants sacs de cada mena ha de transportar per maximitzar els guanys si la camioneta no pot carregar més de 480 *kg* i només te cabuda per a 18 sacs?

6. Una granja d'aviram disposa de dos tipus de pinso, P1 i P2. Cada pinso consta d'hidrats de carboni (H), greixos (G) i substàncies minerals (M). La composició en grams per *kg* és

	H	G	M
P1	500	300	200
P2	400	200	400

Els animals necessiten un mínim de 3 *kg* d'hidrats de carboni, 800 *g* de greixos i 700 *g* de substàncies minerals. calculau la quantitat de cada tipus de pinso que cal agafar perquè el cost sigui mínim, sabent que un *kg* de P1 val 700 u.m. i un *kg* de pinso P2, 850 u.m.

7. Una empresa de confecció tèxtil disposa de 160 m^2 de tergal i 240 m^2 de llana per fer vestits i abrics. De mitjana fan servir 1 m^2 de tergal i 3 m^2 de llana per a cada vestit, i 2 m^2 de tergal i 2 m^2 de llana per a cada abric. Calculau quants vestits i abrics s'han de confeccionar per obtenir el màxim benefici possible en cada un dels casos següents:

- Amb la venda de cada vestit obté un benefici de 25000 u.m. i amb la venda de cada abric 35000 u.m.
- Tant amb un vestit com amb un abric obté un benefici de 30000 u.m.
- Amb la venda de cada vestit obté un benefici de 35000 u.m. i amb la venda de cada abric 20000 u.m.

8. Una empresa d'autocars es va comprometre a posar com a mínim 12 autocars a disposició de 400 estudiants per al seu viatge d'estudis. L'empresa només disposa d'autocars de 20 i 40 places i de 22 conductors. Qualsevol conductor pot menar els autocars petits però només 11 tenen llicència per menar els grans. El preu per cada quilòmetre dels autocars petits és de 400 u.m. i el dels grans, 720 u.m. Quants autocars de cada tipus ha de fer servir l'empresa per tal de complir el compromís amb el mínim de despeses possibles?

9. Una empresa té dues fàbriques F1 i F2, en les quals elabora un producte a raó de 12 i 16 unitats diàries, respectivament. El producte ha de ser lliurat posteriorment a tres magatzems M1, M2 i M3, que necessiten 9, 12 i 7 unitats d'aquest producte respectivament. Les despeses (en euros) per lliurar cada unitat de producte des de cada fàbrica a cada magatzem es poden veure a la taula següent:

	M1	M2	M3
F1	5	2	1
F2	3	3	4

Com ha d'organitzar l'empresa el lliurament del producte perquè el cost sigui mínim?

Trobau la solució pel mètode gràfic. (Suggeriment: Expressau quatre de les sis variables del problema en funció de les altres dues)

10. Trobau el màxim de $Z = 6x + 6y + 2z$ sota les restriccions:

$$\begin{cases} 3x + 6y + 2z \leq 1200 \\ 2x + 5y + 6z \leq 4000 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases}$$

Escriviu l'enunciat d'un problema, el plantejament del qual sigui el donat.

11. Una empresa fabrica dos tipus de productes, I i II, en una planta que consta de tres departaments: tall, muntatge i embalatge. Cada departament pot funcionar fins a vuit hores diàries. El procés de producció és el següent:

Cada tona del producte I necessita $1/2$ h de tall i $1/3$ h d'embalatge, i cada tona del producte II necessita 1 h de muntatge i $2/3$ h d'embalatge.

Si el benefici per tona del producte I és de 400 euros i el benefici per tona del producte II és de 300 euros, determinau les quantitats d'aquests productes que maximitzen el benefici de l'empresa

12. Una empresa té en cartera realitzar una sèrie de projectes de dos tipus (A i B). Cada projecte de tipus A necessita 4 programadors, 2 analistes i 4 terminals. El seu cost és de 1000 euros. Cada projecte de tipus B necessita 2 programadors, 6 analistes i 1 terminal. El seu cost és de 1500 euros. Se sap que per al desenvolupament d'aquests projectes són necessaris com a mínim 8 programadors i 5 analistes i només compta amb 6 terminals.

Determinau el nombre de projectes de cada tipus que ha de realitzar l'empresa per tal de minimitzar el seu cost.

13. L'empresa Lúdic S.A. fabrica 6 tipus de joguets $J1$, $J2$, $J3$, $J4$, $J5$ i $J6$ a partir de la combinació de 6 matèries primeres. La composició de cada tipus de jogueta, el benefici que s'obté per la venda de cada una d'elles i la disponibilitat màxima de cada matèria primera vénen donades en la taula següent:

Matèria	J1	J2	J3	J4	J5	J6	Disponibilitat
Acer	1	4	-	4	2	-	800
Fusta	4	5	3	-	1	-	1160
Plàstic	-	3	8	-	1	-	1780
Goma	2	-	1	2	1	5	1050
Cartró	2	4	2	2	2	4	1360
Pintura	1	4	1	4	3	4	1260
Benefici	30 u.m.	45 u.m.	24 u.m.	26 u.m.	24 u.m.	30 u.m.	

Per motius mediambientals l'empresa vol que la quantitat conjunta emprada de plàstic i de pintura no superi el 40% de la quantitat conjunta emprada de fusta i de cartró.

Plantejau un PPL per planificar la producció de la fàbrica que maximitzi el benefici de l'empresa.

14. Un centre de nutrició ha de dissenyar la dieta per a un grup de joves que han d'anar d'acampada. La dieta constarà de sis aliments bàsics A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 i A_6 . Segons l'especialista, la dieta ha de contenir entre 26 i 32 unitats de vitamina A, almenys 25 unitats de vitamina B i 30 unitats de vitamina C, i com a molt 14 unitats de vitamina D.

La taula següent ens dóna el nombre d'unitats de les distintes vitamines per unitat d'aliment consumit i també el cost de cada tipus d'aliment:

Aliment	Vit A	Vit B	Vit C	Vit D	Cost
A_1	1	1	0	1	10
A_2	1	2	1	0	14
A_3	0	1	2	0	12
A_4	3	1	0	1	18
A_5	2	1	2	0	20
A_6	1	0	2	1	16

Plantejau un PPL per determinar la quantitat de cada tipus d'aliment de la dieta que satisfaci els requeriments nutricionals amb un cost mínim.

15. Un transportista s'encarrega del transport de les capses de dues empreses, A i B. Cada capsa de l'empresa A pesa 40 kg i té $200dm^3$ de volum. Cada capsa de l'empresa B pesa 50 kg i té $300dm^3$ de volum. El transportista cobra 1.5 euros per cada capsa de l'empresa A i 1.8 euros per cada capsa de l'empresa B.

Si el camió que utilitza no pot carregar més de 37000 kg amb un volum màxim de $200000dm^3$, calculeu la combinació de capses que fa la càrrega més rendible per al transportista.

16. Tres estudiants d'enginyeria, Joan, Catalina i Maria, s'han donat d'alta com a autònoms durant els mesos d'estiu per tal de guanyar uns doblers que els permetin viure i seguir estudiant l'any vinent. Han fet un estudi de mercat i han decidit que poden oferir dos tipus d'aplicacions informàtiques, *app1* i *app2*, que adaptaran a diversos àmbits.

L'adaptació de cada aplicació necessita tres processos: modelització, programació i edició. En Joan serà l'encarregat de modelitzar, na Catalina de programar i na Maria d'editar. Tant en Joan com na Catalina podran treballar fins a $40h/setmana$ i na Maria només disposarà de $22h/setmana$.

Saben que cada aplicació de tipus *app1* necessita $6h$ de modelització, $8h$ de programació, $3h$ d'edició i donarà un benefici de 300 euros i cada aplicació de tipus *app2* necessita $4h$ de modelització, $4h$ de programació, $3h$ d'edició i donarà un benefici de 200 euros.

- a) Plantejau i resoleu un PPL per determinar quantes aplicacions de cada tipus hauran de realitzar setmanalment per tal de maximitzar els beneficis.
- b) Interpretau la solució obtinguda.

17. Utilitzau el mètode de ramificació i acotació per trobar la solució dels PPE següents:

- a) $MaxZ = 3x_1 + 2x_2$ sota les restriccions:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & \leq & 2 \\ x_2 & \leq & 2 \\ x_1 + x_2 & \leq & \frac{7}{2} \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z} \end{array}$$

- b) $MaxZ = 4x_1 + 6x_2$ sota les restriccions:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & \leq & 6 \\ 7x_1 + 2x_2 & \leq & 12 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z} \end{array}$$