

1. Matrius

1.1. Definicions Generals

Què és una matriu?

Definició de Matriu

Siguin $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cos commutatiu i $m, n \geq 1$ enters. Una matriu $m \times n$ sobre \mathbb{K} (o d'ordre $m \times n$ sobre \mathbb{K}) és una taula formada per elements de \mathbb{K} disposats en m files i n columnes de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ amb } a_{ij} \in \mathbb{K}; i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

Coefficients de la matriu

Cada a_{ij} s'anomena terme, coeficient o entrada de la matriu A . El primer subíndex, i , indica el número de la fila i el segon, j , el de la columna que ocupa el terme dins la matriu.

On viuen les matrius?

Conjunt de Matrius

Denotarem per $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ el conjunt de totes les matrius d'ordre $m \times n$ sobre \mathbb{K} . Una matriu qualsevol de $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ la denotarem indistintament per A , per $(a_{ij})_{m \times n}$ o simplement per (a_{ij}) .

Matrius quadrades

Quan $m = n$, el conjunt de totes les matrius d'ordre $M_{n \times n}$ es denota simplement per $M_n(\mathbb{K})$ (aquestes matrius s'anomenen matrius quadrades com veurem tot seguit i sovint es diu que són d'ordre n en comptes de $n \times n$).

Quan dues matrius són iguals?

Igualtat de matrius

Dues matrius del mateix ordre $m \times n$, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ i $B = (b_{ij})_{m \times n}$ són iguals si

$$a_{ij} = b_{ij} \forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n.$$

1.2. Tipus de Matrius

Tipus de matrius

Matriu fila

Es denomina matriu fila a tota matriu que consta d'una única fila:

$$A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \in M_{1 \times n}(\mathbb{K})$$

Tipus de matrius

Matriu columna

Es denomina matriu columna a tota matriu que consta d'una única columna:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in M_{m \times 1}(\mathbb{K})$$

Tipus de matrius

Matriu quadrada

Es denomina matriu quadrada d'ordre n a tota matriu que consta de n files i n columnes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

Dins l'àmbit de les matrius quadrades podem donar les següents definicions i tipus particulars de matrius.

Matrius quadrades

Diagonal principal

Es denomina diagonal (principal) d'una matriu quadrada A als elements a_{ii} per a $i = 1, \dots, n$.

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \mathbf{a_{nn}} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

Matrius quadrades

Matriu diagonal

Una matriu diagonal és aquella en la qual $a_{ij} = 0$ sempre que $i \neq j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

Matrius quadrades

Matriu escalar

Una matriu escalar és una matriu diagonal en la qual $a_{ii} = \lambda, \forall i = 1, \dots, n$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

Matrius quadrades

Matriu identitat

S'anomena matriu unitat o matriu identitat d'ordre n , i es denota per I_n a la matriu escalar en la qual tots els elements de la diagonal són uns.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

Matrius quadrades

Matriu triangular superior

S'anomena matriu triangular superior a tota matriu en la qual $a_{ij} = 0, \forall i > j$. Es a dir, tots els elements situats per davall de la diagonal principal són nuls.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

Matrius quadrades

Matriu triangular inferior

S'anomena matriu triangular inferior a tota matriu en la qual $a_{ij} = 0, \forall i < j$. Es a dir, tots els elements situats per damunt de la diagonal principal són nuls.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

Cas general

Per a matrius en general (no necessàriament quadrades) mantendrem la notació de matriu triangular superior com aquella en la qual $a_{ij} = 0 \forall i > j$. Més endavant estudiarem amb detall un tipus especial d'aquestes matrius (les matrius escalonades) que tendran un paper primordial en el nostre estudi.

Cas general

Les matrius triangulars superiors, en el cas de matrius no quadrades,

corresponen als següents casos depenent de si $m < n$ o $n < m$ respectivament:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2m} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Matrius quadrades

Matriu nul·la

Notarem per O la matriu nul·la, matriu amb tots els coeficients nuls.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

1.3. Operacions amb matrius

Operacions amb matrius

Suma de matrius

La suma de dues matrius A i B només és possible si ambdues són del mateix ordre $m \times n$ i aleshores se sumen terme a terme. És a dir, donades $A = (a_{ij})_{m \times n}$ i $B = (b_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, es defineix la suma de A i B com la matriu

$$C = (c_{ij})_{m \times n} \text{ on } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \\ \forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n$$

Operacions amb matrius

Producte per un escalar

Siguin $a \in \mathbb{K}$ i $A = (a_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, es defineix el producte aA com una nova matriu d'ordre $m \times n$ donada per

$$aA = (a \cdot a_{ij})_{m \times n}$$

Operacions amb matrius

Producte de matrius

Per poder realitzar el producte d'una matriu A per una matriu B , el nombre de columnes de A ha de coincidir amb el nombre de files de B i aleshores cada entrada ij de la matriu producte s'obté multiplicant la fila i de A per la columna j de B .

Operacions amb matrius

Concretament, si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ i $B \in M_{n \times p}(\mathbb{K})$, el producte AB és una matriu $C \in M_{m \times p}(\mathbb{K})$ definida com:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3j} & \cdots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = (c_{ij})$$

on $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$.

Notem que $A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$.

1.4. Propietats

Propietats característiques

Sempre que tinguin sentit les operacions indicades (és a dir, les matrius siguin dels ordres adequats per poder realitzar-les) se satisfan les següents propietats:

Propietat conmutativa

$$A + B = B + A$$

Propietat associativa de la suma

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Propietats característiques

Element neutre de la suma o element nul

$$A + O = O + A = A$$

Matriu oposada

$\forall A = (a_{ij})_{m \times n}$ existeix $-A = (-a_{ij})_{m \times n}$ tal que

$$A + (-A) = (-A) + A = O$$

Propietats característiques

Propietat associativa del producte

$$(AB)C = A(BC)$$

Propietat distributiva del producte respecte de la suma

$$A(B + C) = AB + AC$$

Propietats característiques

Element neutre del producte o element unitat

$$AI_n = A$$

$$I_n B = B$$

Propietat distributiva del producte per escalars respecte de la suma

$$a(B + C) = aB + aC, \quad a \in \mathbb{K}$$

Propietats característiques

Element neutre del producte per escalar

$$1A = A$$

Propietat distributiva del producte per matrius respecte de la suma d'escalars

$$(a + b)C = aC + bC, \quad a, b \in \mathbb{K}$$

Propietats característiques

Associativa del producte d'escalars per una matriu

$$(ab)C = a(bC), \quad a, b \in \mathbb{K}$$

Associativa del producte d'un escalar per dues matrius

$$a(BC) = (aB)C, \quad a \in \mathbb{K}$$

Exemples

Exemple

$$(AB)C = A(BC)$$

- Siguin $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n \times p}(\mathbb{K})$ i $C \in M_{p \times q}(\mathbb{K})$.
- Es pot realitzar el producte AB i el resultat serà una matriu $m \times p$ que es podrà multiplicar per C i el producte $(AB)C$ serà una matriu $m \times q$.
- Anàlogament, es pot realitzar el producte BC que donarà una matriu $n \times q$, i es pot realitzar també el producte $A(BC)$ que donarà una matriu $m \times q$.
- Aleshores la propietat diu que

$$(AB)C = A(BC)$$

Exemples

Exercici

Si consideram les matrius amb coeficients en \mathbb{R} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Provau que:

$$(AB)C = A(BC)$$

Exemples

Solució

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemples

Exemple

$$AI_n = A$$

$$I_n B = B$$

- Siguin $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ i $B \in M_{n \times p}(\mathbb{K})$.
- Es pot realitzar el producte AI_n i el resultat serà una matriu $m \times n$.
- Anàlogament, es pot realitzar el producte $I_n B$ i el resultat serà una matriu $n \times p$.
- A més, es pot comprovar que es verifica que

$$AI_n = A \text{ i } I_n B = B$$

Exemples

Exercici

Si consideram les matrius amb coeficients en \mathbb{R} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Provau que:

$$AI_3 = A$$

$$I_3 B = B$$

Exemples

Solució

$$AI_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$
$$I_3B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Exemples

Nota important

Notau que, en particular, per a matrius quadrades $A \in M_n(\mathbb{K})$, I_n és un element neutre del producte, és a dir

$$AI_n = I_nA = A$$

per a tota matriu quadrada A d'ordre n .

Excepcions

En general, *no es compleixen* les següents propietats

Commutativa

La multiplicació de matrius no és commutativa.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = BA$$

Excepcions

En general, *no es compleixen* les següents propietats

Llei de simplificació

No és vàlida la llei de simplificació en un producte

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

satisfan que

$$AB = AC$$

pero en canvi $B \neq C$.

Excepcions

En general, *no es compleixen* les següents propietats

Divisors de zero

Existeixen divisors de zero, és a dir

$$AB = 0 \not\Rightarrow A = 0 \text{ o } B = 0.$$

Per exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A, B \in M_2(\mathbb{R})$$

pero en canvi

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrius diagonals

Proposició

Siguin A, B dues matrius quadrades d'ordre n .

- Si A i B són matrius diagonals amb diagonals $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ i $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{nn}$ respectivament, aleshores A i B commuten i la matriu producte $AB = BA$ també es diagonal amb diagonal $a_{11}b_{11}, a_{22}b_{22}, \dots, a_{nn}b_{nn}$.
- Si A i B són matrius triangulars superiors (inferiors) llavors el producte AB és també una matriu triangular superior (inferior).

Matrius transposades

Transposada d'una matriu

Sigui $A = (a_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. S'anomena transposada de la matriu A i es denota per A^t , la matriu $A^t = (a_{ji})_{n \times m} \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$.

És a dir, la matriu obtinguda a partir de A intercanviant files per columnes.

Per exemple, la transposada de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ és $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Matrius transposades

Entre les propietats de les matrius transposades podem destacar les següents

Idempotència

Per a tota matriu A :

$$(A^t)^t = A$$

Matrius transposades

Entre les propietats de les matrius transposades podem destacar les següents

Transposada d'una suma

Si A i B són matrius del mateix ordre $m \times n$, llavors $(A + B)^t = A^t + B^t$. És a dir, la transposada d'una suma de matrius és la matriu obtinguda per la suma de les respectives transposades. A més, el resultat es pot generalitzar a r sumands i tenim que si A_i són totes del mateix ordre, llavors

$$\left(\sum_{i=1}^r A_i\right)^t = \sum_{i=1}^r A_i^t$$

Matrius transposades

Entre les propietats de les matrius transposades podem destacar les següents

Transposada d'una suma

Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ i $B \in M_{n \times p}(\mathbb{K})$ llavors la transposada del producte de A per B és el producte de transposades però amb ordre canviat. És a dir:

$$(AB)^t = B^t A^t \in M_{p \times m}(\mathbb{K})$$

Matrius quadrades

Per acabar aquesta secció, tornem a les matrius quadrades amb unes quantes definicions més. Primer notem que la transposició, en el cas de matrius quadrades és una operació interna, és a dir,

Transposició com a operació interna

La transposada d'una matriu quadrada $A \in M_n(\mathbb{K})$ és una altra matriu quadrada $A^t \in M(\mathbb{K})$.

Aleshores tenen sentit les següents definicions.

Matrius quadrades

Sigui $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ una matriu quadrada. Direm que

Matriu simètrica

A és simètrica si coincideix amb la seva transposada, la qual cosa fa que la matriu sigui simètrica respecte de la seva diagonal.

$$A \text{ simetrica} \iff A = A^t \iff a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$$

Matrius quadrades

Sigui $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ una matriu quadrada. Direm que

Matriu antisimètrica

A és antisimètrica si la seva transposada coincideix amb la seva oposada, la qual cosa fa que la diagonal de A sigui tota de zeros i els elements simètrics respecte de la diagonal siguin oposats un de l'altre.

$$A \text{ antisimetrica} \iff A^t = -A \iff a_{ij} = -a_{ji} \forall i, j$$

Matrius quadrades

Sigui $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ una matriu quadrada. Direm que

Matriu regular

A és invertible o regular si existeix una altra matriu quadrada $A^{-1} \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Quan existeix aquesta matriu A^{-1} és sempre única amb la propietat esmentada i s'anomena la matriu inversa de A .

Notem que no basta dir només $AA^{-1} = I_n$ (o només $A^{-1}A = I_n$ ja que el producte no és en general commutatiu. Per tant, la matriu inversa ha de verificar que els dos productes donin la matriu identitat.

Matrius quadrades

Sigui $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ una matriu quadrada. Direm que

Matriu singular

A és singular si no té inversa, és a dir, quan no és regular

Matriu ortogonal

A és ortogonal si és regular i a més a més, la seva inversa coincideix amb la seva transposada. Dit d'altra manera:

$$A \text{ ortogonal} \iff AA^t = A^tA = I_n$$

Matrius quadrades

Es verifica el següent resultat respecte de les matrius inverses

Proposició

Siguin $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Llavors si A i B són invertibles, també ho és el seu producte i

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

En resum

Amb les operacions anteriors tenim el que s'anomena àlgebra de matrius perquè amb elles es pot realitzar l'habitual manipulació algebraica d'equacions amb matrius igual que amb nombres reals tenint cura amb les propietats que no es verifiquen com les que hem anat veient.

Per exemple, en una equació amb matrius tot el que està sumant passa restant i vice-versa.

Així podem resoldre equacions del tipus trobar una matriu X tal que $A + 2X = 3B$ on A i B siguin matrius conegudes. La solució serà $X = 1/2(3B - A)$.

En resum

Notau en canvi que les equacions de la forma $AX = B$ no es poden manipular de la forma habitual a no ser que la matriu A sigui quadrada i invertible. Llavors sí que tendrem $X = A^{-1}B$. Notau que hem multiplicat a l'esquerra per A^{-1} , però no valdria fer-ho a la dreta. Si l'equació que tenim es de la forma $XA = B$ llavors, si A és invertible, serà $X = BA^{-1}$, multiplicant a la dreta per A^{-1} .

Podem també calcular potències n -èssimes de matrius quadrades de la forma habitual $A^n = A \cdot A \cdot \dots \cdot A$ (n vegades). Notau que el binomi de Newton per calcular $(A + B)^n$ només es verifica en els casos en que A i B commuten. per exemple,

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

si A i B commuten, llavors $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Passa exactament el mateix amb les altres potències successives.

2. Operacions elementals

2.1. Matrius escalonades

Matrius escalonades

Anem a introduir ara un tipus especial de matrius triangulars superiors (inferiors), les anomenades matrius escalonades per files (per columnes)

Matriu escalonada

Una matriu $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ és escalonada per files si:

- el primer element no nul de cada fila, anomenat pivot, està a la dreta del pivot de la fila superior i,
- les files nul·les estan en la part inferior de la matriu

Matrius escalonades

Exemple

Aquestes matrius són escalonades per files

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Matrius escalonades

Matriu escalonada reduïda

Una matriu $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ és escalonada reduïda per files si és escalonada i:

- els pivots són tots 1 i,
- tots els elements que estan en la mateixa columna del pivot són nuls.

Matrius escalonades

Exemple

Aquestes matrius són escalonades reduïdes per files:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrius escalonades

Exercici

Donau definicions equivalents de matriu escalonada per columnes i matriu escalonada reduïda per columnes.

Poseu dos exemples de cada tipus de matriu.

Operacions elementals d'una matriu

Operacions elementals per files

Sigui $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Les següents operacions s'anomenen operacions elementals per files de la matriu A :

- Multiplicar una fila per un $a \in \mathbb{K}, a \neq 0$.
- Intercanviar dues files.
- Sumar un múltiple d'una fila a una altra.

De manera anàloga podem definir les operacions elementals per columnes.

Matrius equivalents

Matrius equivalents per files

Dues matrius $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ són equivalents per files (per columnes) si una d'elles es pot obtenir a partir de l'altra mitjançant un nombre finit d'operacions elementals per files (columnes).

Teorema

- Tota matriu és equivalent per files (columnes) a una matriu escalonada per files (columnes).
- Tota matriu és equivalent per files (columnes) a una única matriu escalonada reduïda per files (columnes).

Matrius equivalents

Ho demostrarem de manera constructiva. És a dir, donarem un algoritme (mètode de Gauss) per trobar la matriu escalonada en cada cas.

Demostració

Sigui $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, llavors procedirem de la següent manera:

- 1 Si $a_{11} \neq 0$, dividim la primera fila per a_{11} i aconseguim una matriu equivalent en la qual $a_{11} = 1$. Llavors aquest nou $a_{11} = 1$ serà el primer pivot. Ara, restant a cada fila i la primera multiplicada per a_{i1} , la resta d'elements de la primera columna seran 0 i passam al punt 4.

Matrius equivalents

Demostració

- 2 Si $a_{11} = 0$, cercam el primer i tal que $a_{i1} \neq 0$. Llavors si intercanviam les files 1 i i obtenim una matriu equivalent amb el nou $a_{11} \neq 0$ i passam al punt 1.
- 3 Si $a_{i1} = 0$, per a tot $i = 1, \dots, m$, llavors deixam aquesta primera columna de zeros i aplicam l'algoritme del pas 1 a la matriu resultant d'eliminar de la nostra aquesta primera columna.
- 4 Repetim el procés a la matriu que s'obté de la nostra matriu eliminant la primera fila i la primera columna.

Matrius equivalents

Notem que amb aquest mètode obtenim l'única matriu escalonada equivalent per files, els pivots de la qual són tots uns. Per obtenir la matriu escalonada reduïda, aplicam primer l'algoritme anterior fins a obtenir una matriu escalonada equivalent per files a la matriu donada. Llavors, si per sobre d'algun pivot en la seva columna hi ha algun element a_{ij} distint de 0, restam a la fila d'aquest element (la fila i), la fila del pivot multiplicada per a_{ij} i amb aquest mètode anam fent zero tots els elements situats per damunt dels pivots.

Exercicis

Exercici 1

Considerem la matriu $A \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$ donada per

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 8 \\ 4 & -2 & -6 & 19 \\ 3 & -6 & -17 & 41 \end{pmatrix}$$

Calcula una matriu escalonada i l'escalonada reduïda per files.

Exercicis

En aquest cas, $a_{11} = 1 \neq 0$ i per tant podem posar zeros en la resta de la primera columna

$$A \sim f_2 = f_2 - 4f_1$$

$$A \sim f_3 = f_3 - 3f_1$$

Exercicis

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & -2 & 6 & -13 \\ 0 & -3 & -8 & 17 \end{pmatrix}$$

Passam ara al punt 4 de l'algoritme, és a dir, aplicam el mateix raonament a la matriu 2×3 obtinguda eliminant la primera fila i la primera columna

Exercicis

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -13 \\ -3 & -8 & 17 \end{pmatrix}$$

En aquest cas, $a_{11} = 2$ i començam dividint la primera fila per 2, i fent zeros en la resta de la primera columna.

$$A \sim f_1 = f_1/2$$

$$A \sim f_2 = f_2 + 3f_1$$

Exercicis

D'aquesta manera, una matriu escalonada per files equivalent a A seria:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & -13/2 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \end{pmatrix}$$

Exercicis

Per calcular l'única matriu escalonada reduïda equivalent a A només ens cal posar zeros per damunt de cada pivot

$$A \sim f_2 = f_2 - 3f_3$$

$$A \sim f_1 = f_1 + 3f_3$$

$$A \sim f_1 = f_1 + f_2$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \end{pmatrix}$$

Exercicis

Exercici 2

Considerem la matriu $A \in M_{3 \times 5}(\mathbb{R})$ donada per

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -3 & 8 \\ 1 & 0 & -2 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & -6 & -15 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula una matriu escalonada i l'escalonada reduïda per files.

Exercicis

En aquest cas $a_{11} = 0$ però en canvi $a_{21} \neq 0$, per tant comencem per canviar les files 1 i 2, i després fer zeros per davall del primer pivot.

$$A \sim f_2 \rightarrow f_1$$

$$A \sim f_3 = f_3 - 3f_1$$

Exercicis

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Arribam al punt 4 de l'algoritme i hem de començar amb la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

en la qual la primera columna està formada tota per zeros.

Exercicis

Segons l'algoritme, el que hem de fer és continuar amb la matriu

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 8 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

en la qual començam dividint per -1 la primera fila

$$A \sim f_1/(-1)$$

$$A \sim f_2/3$$

Exercicis

Per tant una matriu escalonada per files equivalent a A seria:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Exercicis

Finalment, per trobar la matriu escalonada reduïda per files equivalent a A farem

$$A \sim f_2 = f_2 - 3f_3$$

$$A \sim f_1 = f_1 + 6f_3$$

$$A \sim f_1 = f_1 + 2f_2$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}$$

2.2. Rang d'una matriu

Rang d'una matriu

Donada aquesta unicitat de la matriu escalonada reduïda, podem definir conceptes sobre una matriu A mitjançant la seva única matriu escalonada reduïda per files (per columnes) equivalent.

Rang

Sigui $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Anomenarem rang de A i ho denotarem per $rg(A)$, al nombre de files no nul·les que té la seva única matriu escalonada reduïda per files equivalent.

Rang d'una matriu

Teorema

Sigui $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Aleshores el rang de A coincideix amb el nombre de columnes no nul·les de la seva única matriu escalonada reduïda per columnes equivalent.

En realitat, el nombre de files no nul·les és sempre el mateix en qualsevol matriu escalonada equivalent per files (per columnes) a la donada. Per tant, per calcular el rang d'una matriu A bastarà trobar una matriu B escalonada per files (columnes) equivalent a A i comptar el nombre de files (columnes) no nul·les de B .

Exercicis

Exercici 3

Calculem el rang de la matriu A de l'exercici 1 anterior

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 8 \\ 4 & -2 & -6 & 19 \\ 3 & -6 & -17 & 41 \end{pmatrix}$$

Exercicis

Hem vist en l'exercici 1 que

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \end{pmatrix}$$

i per tant, $rg(A)$ és simplement el nombre de files no nul·les, $rg(A) = 3$

Exercicis

Exercici 4

Calculem el rang de la matriu B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercicis

Si feim les operacions

$$B \sim f_3 = f_3 - f_1$$

$$B \sim f_2 = f_2/2$$

$$B \sim f_3 = f_3 - 2f_2$$

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per tant la matriu escalonada obtinguda té dues files no nul·les i el seu $rg(B) = 2$.

2.3. Càlcul de la matriu inversa

Caracterització de les matrius invertibles

Amb les matrius escalonades i les operacions elementals no només es pot calcular el rang d'una matriu, sinó que també resulten útils en el càlcul de matrius inverses com veurem tot seguit. El primer que podem donar és una caracterització de les matrius invertibles a través del seu rang i de la seva matriu escalonada reduïda.

Teorema de caracterització

Teorema

Sigui A una matriu quadrada $A \in M_n(\mathbb{K})$. Aleshores són equivalents:

- A és invertible
- $rg(A) = n$
- La matriu escalonada reduïda per files (per columnes) equivalent a A és la matriu identitat I_n

Teorema de caracterització

A més a més, la tercera equivalència ens aporta un mètode per calcular la matriu inversa d'una matriu invertible $A \in M_n(\mathbb{K})$. Aquest consisteix en escriure la matriu identitat I_n a la dreta de la matriu A (ho escriurem en forma abreujada $(A|I_n)$) i, a través de transformacions elementals per files (o per columnes), calcular la matriu escalonada reduïda que serà de la forma $(I_n|B)$. La matriu B resultant és precisament la matriu inversa de A , és a dir $A^{-1} = B$.

Càlcul de la matriu inversa

Exercici 5

Sigui A la matriu quadrada $A \in M_n(\mathbb{K})$ donada per:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Volem saber si A és invertible i, si ho és, calcular la seva inversa.

Càlcul de la matriu inversa

Començarem per calcular el seu rang fent les operacions elementals següents:

$$A \sim f_3 = f_3 - f_1$$

$$A \sim f_2 = f_2/2$$

$$A \sim f_3 = f_3 + 3f_2$$

$$A \sim f_3 = 2f_3/11$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenim una matriu escalonada amb tres files no nul·les. Per tant $rg(A) = 3$ i la matriu A és invertible.

Càlcul de la matriu inversa

Anem a calcular ara la seva inversa:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$A \sim f_3 = f_3 - f_1$$

$$A \sim f_2 = f_2/2$$

$$A \sim f_3 = f_3 + 3f_2$$

$$A \sim f_3 = 2f_3/11$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/11 & 3/11 & 2/11 \end{array} \right)$$

Càlcul de la matriu inversa

$$A \sim f_2 = f_2 - 3f_3/2$$

$$A \sim f_1 = f_1 - f_3$$

$$A \sim f_1 = f_1 - 2f_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7/11 & -5/11 & 4/11 \\ 0 & 1 & 0 & 3/11 & 1/11 & -3/11 \\ 0 & 0 & 1 & -2/11 & 3/11 & 2/11 \end{array} \right)$$

Càlcul de la matriu inversa

Per tant

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 7/11 & -5/11 & 4/11 \\ 3/11 & 1/11 & -3/11 \\ -2/11 & 3/11 & 2/11 \end{array} \right) = \frac{1}{11} \left(\begin{array}{ccc} 7 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

3. Equacions i sistemes lineals

3.1. Equacions matricials

Que és una equació matricial?

Una equació matricial és una equació on la incògnita és una matriu. Se resolen transformant l'equació inicial en una altra equivalent utilitzant propietats i definicions. Per aïllar l'incògnita es fa ús de la matriu inversa.

Que és una equació matricial?

Mètode de resolució

$$XP = Q - R$$

- Multiplicam per la dreta a ambdós costats per P^{-1}

$$XPP^{-1} = (Q - R)P^{-1}$$

- Per definició de matriu inversa $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

$$XI_n = (Q - R)P^{-1}$$

- Per propietat de la matriu identitat $AI_n = I_nA = A$

$$X = (Q - R)P^{-1}$$

Que és una equació matricial?

Exercici

Resol l'equació matricial $P + QX = RS - TX$. Quina condició ha de complir-se per poder aïllar X ?

Que és una equació matricial?

$$P + QX = RS - TX$$

$$(P - P) + QX + TX = RS - P + (-TX + TX)$$

$$QX + TX = RS - P$$

$$(Q + T)X = RS - P$$

$$(Q + T)^{-1}(Q + T)X = (Q + T)^{-1}(RS - P)$$

$$I_nX = (Q + T)^{-1}(RS - P)$$

$$X = (Q + T)^{-1}(RS - P)$$

Per poder aïllar X és necessari que la matriu $(Q + T)$ tingui inversa.

3.2. Sistema d'equacions lineals

Sistema d'equacions lineals

Definició

Un sistema d' m equacions lineals amb n incògnites de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

amb $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$ per $i = 1, 2, \dots, m$ i $j = 1, 2, \dots, n$ es coneix amb el nom de **sistema d'equacions lineals**. Una solució d'aquest sistema és un conjunt de n valors $\alpha_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \dots, n$ tals que en fer les substitucions $x_i = \alpha_i$ en cadascuna de les m equacions les converteix en identitats.

Sistema d'equacions lineals

Forma matricial

Un sistema d'equacions es pot escriure en forma matricial com $AX = B$ on

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

La matriu A s'anomena **matriu de coeficients**, la matriu B **de termes independents** i la matriu X **d'incògnites**.

Sistema d'equacions lineals

Matriu ampliada

Donat el sistema matricial $AX = B$, es defineix la **matriu ampliada** del sistema com

$$(A|B)$$

com ja hem vist a la secció anterior.

Sistema d'equacions lineals

Nota

Si resulta que $m = n$, aleshores el sistema d'equacions lineals es pot resoldre fàcilment:

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}AX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Basta trobar la matriu inversa, si existeix, i multiplicar les dues matrius A^{-1} i B .

Sistema d'equacions lineals

Sistemes compatibles i incompatibles

Un sistema de m equacions lineals i n incògnites $AX = B$ és

- **Compatible:** si té almenys una solució.
 - **Determinat:** si la solució és única.
 - **Indeterminat:** si té infinites solucions.
- **Incompatible:** si no té cap solució.

Dos sistemes lineals del mateix tamany (és a dir, els dos tenen el mateix nombre d'equacions i el mateix nombre d'incògnites) són **equivalents** si tenen les mateixes solucions.

Sistemes d'equacions lineals

Exercici

Resol el sistema lineal

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Sistemes d'equacions lineals

Obtindrem una sèrie de sistemes d'equacions lineals equivalents més senzills:

- La primera equació queda igual i eliminarem x_1 de la segona i tercera equació.
- A la segona equació, li sumam la primera multiplicada per -2 .
- A la tercera equació, li sumam la primera multiplicada per -3 .

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_2 - 7x_3 = -17 \\ 3x_2 - 11x_3 = -27 \end{cases}$$

Sistemes d'equacions lineals

De forma anàloga eliminam la variable x_2 de la tercera equació, sumant-li la segona multiplicada per $-3/2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_2 - 7x_3 = -17 \\ -\frac{1}{2}x_3 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Sistemes d'equacions lineals

El sistema es pot resoldre còmodament per substitució regresiva

- Obtenim x_3 de forma directa de la tercera equació

$$x_3 = 3$$

- Substituïm x_3 en la segona equació i aïllem x_2 .

$$x_2 = \frac{-17 + 7 \cdot 3}{2} = 2$$

- Substituïm x_3 i x_2 en la primera equació i trobam x_1 .

$$x_1 = 9 - 2 - 2 \cdot 3 = 1$$

3.3. El mètode de Gauss

El mètode de Gauss

Ja hem vist les matrius escalonades en una secció anterior.

Definició

Un sistema $HX = C$ està escalonat si la matriu ampliada $(H|C)$ és una matriu escalonada

A les variables que els hi corresponen als pivots sels anomena **variables lligades** i a la resta **variables lliures**.

Ja vam veure el mètode de Gauss per obtenir matrius escalonades i per calcular el rang d'una matriu A . Ara l'aplicarem per trobar les solucions dels sistemes d'equacions lineals.

El mètode de Gauss

Mètode de Gauss

1. Entre totes les files, en triam una que tingui l'entrada pivot el més a l'esquerra possible i la col·loquem a la primera fila.
2. Amb el pivot de la fila 1, feim zeros tots els elements que es trobin per davall d'ell.
3. Repetim les passes 1 i 2 amb la submatriu formada per totes les files excloent la primera. La nova matriu que obtinguem tindrà zeros per davall del pivot de la fila 2.
4. Continuem el procés fins a obtenir una matriu escalonada.

El mètode de Gauss

Exercici

Resol el següent sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

El mètode de Gauss

Feim

$$f_3 \sim f_3 - f_1; f_4 \sim f_4 - 5f_1$$

$$f_3 \sim f_3 + f_2; f_4 \sim f_4 + 6f_1$$

$$f_4 \sim f_4 - \frac{7}{2}f_3$$

i obtenim una matriu escalonada amb tres variables lligades x_1, x_2 i x_3 ja que te tres pivots

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

El mètode de Gauss

Aplicant substitució regressiva, obtenim

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$$

El mètode de Gauss

Exercici

Resol el següent sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

El mètode de Gauss

Feim

$$f_2 \sim f_2 - 2f_1; f_3 \sim f_3 - 3f_1; f_4 \sim f_4 + f_1$$

$$f_3 \sim f_3 - f_2; f_4 \sim f_4 + f_2$$

i obtenim una matriu escalonada amb dues variables lligades x_1 i x_2 i dues variables lliures x_3 i x_4 .

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

El mètode de Gauss

Aplicant substitució regressiva, obtenim les variables lligades en funció de les lliures

$$x_1 = -14 - x_3 + 3x_4$$

$$x_2 = -9 + x_4$$

$$x_3 = x_3$$

$$x_4 = x_4$$

4. Determinants

4.1. El concepte de determinant

Concepte de Determinant

Definició

Donada una matriu quadrada $A \in M_n(\mathbb{K})$ amb $a_{ij} \in \mathbb{K}$ anomenarem determinant de la matriu A i ho denotarem per $|A|$ o per $\det(A)$ a un element del cos \mathbb{K} que es defineix per inducció de la forma següent:

- Si $n = 1$, $A = (a_{11})$ i aleshores $|A| = a_{11}$.
- Si $n > 1$, $|A| = a_{11}\alpha_{11} - a_{12}\alpha_{12} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}\alpha_{1n}$

on α_{1i} és el determinant de la matriu d'ordre $n-1$ que s'obté en suprimir la primera fila i la columna i -èssima de la matriu A .

Concepte de Determinant

Exercici 1

Calculeu el determinant de la matriu quadrada d'ordre 2 genèrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Tenim que

$$\alpha_{11} = |a_{22}| = a_{22}$$

$$\alpha_{12} = |a_{21}| = a_{21}$$

i per tant el determinant és

$$|A| = a_{11}\alpha_{11} - a_{12}\alpha_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Concepte de Determinant

Exercici 2

Calculeu el determinant de la matriu quadrada d'ordre 3 genèrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Tenim que

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \alpha_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \alpha_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

i per tant el determinant és

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

que és el mateix resultat que s'obté aplicant la regla de Sarrus.

Concepte de Determinant

Exercici 3

Calculeu el determinant de la trasposada de la matriu quadrada d'ordre 2 genèrica

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Tenim que

$$\alpha_{11} = |a_{22}|, \alpha_{12} = |a_{12}|$$

i per tant el determinant és

$$|A^t| = a_{11}\alpha_{11} - a_{21}\alpha_{12} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Per tant, concloem que $|A^t| = |A|$.

Aquest resultat és cert $\forall n \geq 1$: si $A \in M_n(\mathbb{K})$, $|A^t| = |A|$

4.2. Propietats

Propietats dels Determinants

Degut a que si $A \in M_n(\mathbb{K})$, $|A^t| = |A|$, podem deduir tota una sèrie de propietats tant per a files com per a columnes.

Denotam per $\det(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)$ el determinant de la matriu $A \in M_n(\mathbb{K})$ que té com a files (o columnes) les matrius fila (o columna) u_i , $i = 1, \dots, n$.

Propietats dels Determinants

Propietat 1

$$\det(u_1, \dots, \lambda u_i, \dots, u_n) = \lambda \det(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)$$

En particular si $\lambda = 0$, aleshores $\det(u_1, \dots, 0, \dots, u_n) = 0$.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 10 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 10 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Propietats dels Determinants

Propietat 2

$$\begin{aligned} \det(u_1, \dots, u_i + u'_i, \dots, u_n) = \\ \det(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) + \det(u_1, \dots, u'_i, \dots, u_n) \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1+2 & 1 \\ 3 & 3+2 & 1 \\ 1 & 1+2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Propietats dels Determinants

Propietat 3

Si s'intercanvien dues files o columnes d'un determinant, el determinant canvia de signe.

$$\det(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n) = -\det(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_n)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Propietats dels Determinants

Propietat 4

Si una matriu té dues files o columnes iguals, el seu determinant és nul.

$$\det(u_1, \dots, u_i, \dots, u_i, \dots, u_n) = 0$$

Propietat 5

Si una matriu té dues files o columnes proporcionals, el seu determinant és nul.

$$\det(u_1, \dots, u_i, \dots, \lambda u_i, \dots, u_n) = 0$$

Propietats dels Determinants

Propietat 6

Si una fila o columna és combinació lineal de les altres, el determinant és nul. Es a dir, si $u_i = \sum_{k \neq i} a_k u_k$ llavors

$$\det(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

perque la tercera columna és la suma de la primera i la segona.

Propietats dels Determinants

Propietat 7

El determinant no canvia si a una fila o columna se li suma una combinació lineal de les altres

$$\det(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) = \det(u_1, \dots, u_i + \sum_{k \neq i} a_k u_k, \dots, u_n)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 9 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

perque el segon determinant l'hem obtingut a partir del primer sumant a la tercera fila la suma de la primera i la segona.

4.3. Matriu adjunta

Adjunts d'una matriu

Definició

Sigui $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $n \geq 2$. Sigui a_{ii} l'element que ocupa la fila i i la columna j de la matriu A . Si suprimim la fila i i la columna j de A obtenim una matriu quadrada d'ordre $n - 1$.

- El determinant d'aquesta matriu, que designarem per α_{ij} s'anomena menor complementari de a_{ij} .
- L'element $A_{ij} = (-1)^{i+j} \alpha_{ij}$ s'anomena l'adjunt de a_{ij} .
- La matriu adjunta de $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $n \geq 2$, és la matriu que té com a coeficients o entrades els adjunts A_{ij} dels elements a_{ij} de la matriu A . Es denota per $\text{adj}(A)$.

Adjunts d'una matriu

Exercici 4

Calcula la matriu adjunta de A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Adjunts d'una matriu

Solució

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 \\ -3 & -7 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

4.4. Càlcul d'un determinant

Càlcul d'un determinant

El determinant d'una matriu quadrada $A = (a_{ij})$ de tipus $n \times n$ amb $n \geq 2$ es pot calcular desenvolupant pels adjunts dels elements d'una qualsevol de les seves files o columnes.

Càlcul d'un determinant

Desenvolupar un determinant per adjunts

Sigui $A = (a_{ij})$ una matriu quadrada d'ordre $n \times n$. Aleshores es verifica:

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

(desenvolupament d'un determinant pels adjunts dels elements d'una fila) i també

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

(desenvolupament d'un determinant pels adjunts dels elements d'una columna).

Càlcul d'un determinant

Exercici 4

Calculau el determinant

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

desenvolupant pels elements de la primera fila.

Càlcul d'un determinant

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 0 - 15 = -12$$

Càlcul d'un determinant

Exercici 5

Calculau el determinant

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

desenvolupant pels elements de la segona columna.

Càlcul d'un determinant

$$|A| = -0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 7 - 5 = -12$$

Càlcul d'un determinant

Exemple

Si aplicam aquests desenvolupaments a les matrius triangulars tenim que el determinant d'una matriu triangular és igual al producte dels elements de la diagonal principal.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \\ &= -3 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3(-4) = 12 \end{aligned}$$

A cada passa hem fet el desenvolupament del determinant pels adjunts de la darrera fila.

Càlcul d'un determinant

El desenvolupament d'un determinant pels adjunts dels elements d'una fila o d'una columna, juntament amb les propietats enunciades abans, ens simplificarà de forma considerable el càlcul d'un determinant

Càlcul d'un determinant

Exercici 6

Calculau el determinant

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

fent ús de les propietats dels determinants

Càlcul d'un determinant

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 8$$

Primer hem sumat la primera fila a la tercera i després hem desenvolupat pels adjunts dels elements de la segona columna.

Càlcul d'un determinant

Exercici 7

Calculau el determinant

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b+c & b+c+a & c+b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

fent ús de les propietats dels determinants

Càlcul d'un determinant

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b+c & b+c+a & c+b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Hem tret factor comú $a+b+c$ i el determinant resultant és nul perquè té dues files iguals,

Càlcul d'un determinant

Exercici 8

Calculau el determinant

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

fent ús de les propietats dels determinants

Càlcul d'un determinant

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \end{aligned}$$

Hem fet desenvolupaments per la sisena fila, per la cinquena columna, per la tercera fila i per la primera fila.

Càlcul d'un determinant

Exercici 9

Calculau el determinant de Vandermonde d'ordre 4. En el primer pas a cada fila li restam l'anterior multiplicada per a .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

Càlcul d'un determinant

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-ba & c^2-ca & d^2-da \\ 0 & b^3-b^2a & c^3-c^2a & d^3-d^2a \end{vmatrix} = \\
 &= 1 \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-ba & c^2-ca & d^2-da \\ b^3-b^2a & c^3-c^2a & d^3-d^2a \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a) \end{vmatrix} =
 \end{aligned}$$

Càlcul d'un determinant

$$\begin{aligned}
 &(b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} = \\
 &(b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c^2-cb & d^2-db \end{vmatrix} = \\
 &(b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} (c-b) & (d-b) \\ c(c-b) & d(d-b) \end{vmatrix} = \\
 &(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{vmatrix} = \\
 &(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)
 \end{aligned}$$

4.5. Aplicacions dels determinants

Aplicacions en el càlcul de matrius

Els determinants ens seran útils per trobar la inversa d'una matriu, el rang d'una matriu i, com veurem més endavant, per a la resolució de sistemes lineals.

Aplicacions en el càlcul de matrius

Teorema

Siguin A i B matrius quadrades d'ordre n , $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Aleshores:

- A és invertible si i només si $|A| \neq 0$
- $|AB| = |A| \cdot |B|$
- Si $|A| \neq 0$, aleshores $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
- Si $|A| \neq 0$, aleshores $|A^{-1}| = \frac{(\text{adj}A)^t}{|A|}$

Notem que la darrera propietat ens dona una nova manera de calcular la matriu inversa d'una matriu donada A . Per tal de calcular la matriu inversa el que s'ha de fer és calcular la matriu adjunta, transposar-la, i dividir-la pel determinant de la matriu donada.

Aplicacions en el càlcul de matrius

Exercici 10

Calculem la inversa de la matriu A amb aquesta nova tècnica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aplicacions en el càlcul de matrius

La matriu és invertible ja que $|A| = 7 \neq 0$.

$$(\text{adj}A)^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 8 & -2 & -9 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 8 & -2 & -9 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A més podem afirmar que $\det(A^{-1}) = 7$.

Aplicacions en el càlcul de matrius

Una altra aplicació dels determinants es troba en el càlcul del rang d'una matriu.

Menors d'ordre k

Sigui A una matriu d'ordre $m \times n$, $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ i sigui $k < n$

- S'anomena menor d'ordre k de la matriu A al determinant de qualsevol matriu quadrada d'ordre k obtinguda en suprimir $m - k$ files i $n - k$ columnes de A .
- Donat un menor d'ordre k de la matriu A , orlar aquest menor consisteix en completar-lo fins a un menor d'ordre $k + 1$ de A amb una altra fila i una altra columna de la matriu donada A .

Aplicacions en el càlcul de matrius

Es poden utilitzar aquests menors per calcular el rang d'una matriu A qualsevol.

Teorema

Sigui A una matriu d'ordre $m \times n$, $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ i sigui $k < n$. Aleshores, si es pot trobar un menor d'ordre k no nul i tots els de ordre $k + 1$ són nuls, llavors el $\text{rang}(A) = k$. És a dir, el rang de la matriu A coincideix amb l'ordre del major menor no nul obtingut de A .

Aplicacions en el càlcul de matrius

El teorema anterior es pot millorar amb el següent.

Teorema

Sigui A una matriu d'ordre $m \times n$, $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ i sigui $k < n$. Aleshores, si es pot trobar un menor d'ordre k no nul i totes les maneres possibles d'orlar aquest menor donen menors nuls, llavors el $\text{rang}(A) = k$.

Aplicacions en el càlcul de matrius

Exercici 11

Calculem el rang de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aplicacions en el càlcul de matrius

El primer menor d'ordre 2 és no nul

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 8 = 6 \neq 0$$

Segons el primer teorema, hauriem de comprovar tots els menors d'ordre 3, si tots són 0 el rang seria 2, i sinó seria 3 (és el màxim ja que només hi ha 3 columnes).

Però gràcies al segon teorema bastarà comprovar els menors d'ordre 3 que s'obtenen orlant el menor no nul trobat.

Aplicacions en el càlcul de matrius

Així, només hem de provar els menors

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \dots = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \dots = 0$$

D'aquesta manera podem afirmar que $\text{rang}(A) = 2$.

Aplicacions en el càlcul de matrius

Exercici 12

Determinau per a quins valors del paràmetre α la següent matriu és invertible i, en els casos en que ho sigui, trobau la inversa

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 4 & 5 \\ -\alpha & 1 & 2 \\ -\alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicacions en el càlcul de matrius

Per a ser invertible, el determinant ha de ser distint de zero:

$$\det(A) = \alpha(7\alpha - 3)$$

Així la matriu és invertible si i només si $\alpha \neq 0, 3/7$, i en aquests casos la inversa és

$$A^{-1} = \frac{1}{7\alpha + 3} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3/\alpha \\ -2 & 5 & -7 \\ \alpha + 1 & \alpha - 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Aplicacions en el càlcul de matrius

Exercici 13

Determinau el rang de la següent matriu segons els valors del paràmetre α

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \alpha + 1 & 1 \\ 0 & 2\alpha & \alpha - 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicacions en el càlcul de matrius

Veim de manera immediata que el menor d'ordre 2 format per les dues primeres columnes i les files primera i tercera és no nul, qualsevol que sigui el valor de α

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Aplicacions en el càlcul de matrius

Completant-lo amb la quarta columna, que és la més senzilla per no tenir cap paràmetre, obtenim

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 2\alpha & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\alpha(\alpha - 1)$$

D'aquesta manera el rang de la matriu serà 3 (no pot ser superior perquè la matriu només té 3 files) sempre α sigui distint de 0, 1.

Aplicacions en el càlcul de matrius

En el cas en que $\alpha = 0$, la matriu queda

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

amb menor no nul

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

per tant, en aquest cas, el rang de A també és 3.

Aplicacions en el càlcul de matrius

En el cas en que $\alpha = 1$, la matriu queda

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

i en aquest cas, els dos menors d'ordre 3 que completen el nostre menor d'ordre 2 no nul són 0. Amb la quarta columna ja ho sabem i amb la tercera tenim

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

per tant, en aquest cas, el rang de A és 2.

Aplicacions a la resolució de sistemes d'equacions lineals

Ja hem vist com resoldre sistemes d'equacions lineals amb el mètode de Gauss. En aquesta secció veurem com emprar els coneixements que tenim sobre determinants per fer la tasca d'una altra manera. En particular ens seran molt útils per:

- Discutir un sistema, és a dir, obtenir decidir si un sistema és no compatible en funció dels valors que prengui un paràmetre donat.
- Resoldre el sistema en els casos de compatibilitat

Per això, introduïrem el Teorema de Rouché-Frobenius.

Aplicacions a la resolució de sistemes d'equacions lineals

Rang d'un sistema d'equacions lineal

Sigui $AX = B$ un sistema d'equacions lineals. Denotarem per $\text{rang}(A)$ el rang del sistema i per $\text{rang}(A^*)$ el rang de la matriu ampliada $(A|B)$

Es satisfà que

$$\text{rang}(A) \leq \min(n, m)$$

on n és el nombre d'equacions i m el nombre d'incògnites.

Aplicacions a la resolució de sistemes d'equacions lineals

Sigui $AX = B$ un sistema d'equacions lineals amb m equacions i n incògnites.

Teorema de Rouché-Frobenius

La condició necessària i suficient perquè el sistema sigui compatible és que $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*)$.

A més, si coincideix que $\text{rang}(A) = n$, el sistema és compatible determinat. En cas contrari, si $\text{rang}(A) < n$, el sistema és compatible indeterminat.

- $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*)$: Sistema compatible
 - $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = n$: Sistema compatible determinat
 - $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) < n$: Sistema compatible indeterminat
- $\text{rang}(A) < \text{rang}(A^*)$: Sistema incompatible

Aplicacions a la resolució de sistemes d'equacions lineals

Exercici

Discutiu el rang del sistema

$$\begin{cases} 6x & - & y & + & 3z & = & 6 \\ -6x & + & 8y & & & = & -10 \\ 2x & - & 5y & - & z & = & 4 \end{cases}$$

Sol: $\text{rang}(A) = 2 < 3 = \text{rang}(A^*)$: sistema incompatible.

Aplicacions a la resolució de sistemes d'equacions lineals

Exercici

Donat el sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

amb

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

i $\text{rang}(A^*) = 2$, què podem dir del sistema?

Sol: Sistema compatible indeterminat.

Aplicacions a la resolució de sistemes d'equacions lineals

Un sistema homogeni és aquell on $B = 0$. En aplicar el teorema de Rouché-Frobenius veim que sempre tenen solució, ja que en observar la matriu ampliada, no afegim informació adicional a la matriu de coeficients.

Exercici

Discutiu el rang del sistema

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Sol: $\text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(A^*) < n = 3$: sistema compatible indeterminat.

Aplicacions a la resolució de sistemes d'equacions lineals

Exercici

Discutiu el rang del sistema en funció del paràmetre a .

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + 2y + az = 1 \\ 2x + y + z = a \end{cases}$$

Sol: $a \neq 1, 2$: sistema compatible determinat. $a = 1$: sistema compatible indeterminat. $a = 2$: sistema incompatible.

Regla de Cramer

Sistemes de Cramer

Un sistema $AX = B$ amb m equacions i n incògnites s'anomena regular o de Cramer si $\text{rang}(A) = n = m$.

Com que en els sistemes de Cramer, el nombre d'equacions i d'incògnites coincideix, es tracta de matrius quadrades tamany igual al rang de la matriu.

De forma trivial, qualsevol sistema de Cramer és compatible i determinat. En aquest cas la regla de Cramer ens permet calcular la solució del sistema de forma bastant senzilla.

Regla de Cramer

Regla de Cramer

Un sistema regular $AX = B$ on A_i denota la columna i -èsima de la matriu A , admet una solució única donada per:

$$x_i = \frac{D_i}{D}, i = 1, 2, \dots, n$$

on

$$D = \det(A_1, A_2, \dots, A_n)$$
$$D_i = \det(A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_n)$$

Regla de Cramer

Exercici

Discussiu i resoleu el sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 6 \\ x - 5y + 2z = -4 \\ 3x + 2y - 3z = -6 \end{cases}$$

Sol: SCD amb

$$x = 1, y = 3, z = 5$$

Regla de Cramer

Exercici

Discutiu i resoleu el sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 10 \\ 2x - 4y - 2z = 5 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

Sol: SCD amb

$$x = \frac{83}{16}, y = \frac{15}{8}, z = \frac{-17}{16}$$

Regla de Cramer

Exercici

Discutiu i resoleu el sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 3x - 2y - z = 5 \\ 2x - 5y + 3z = -4 \\ x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$$

Sol: SCD amb

$$x = 2, y = 1, z = 1$$

Regla de Cramer

Exercici

Discutiu i resoleu el sistema

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Sol: SCI amb

$$x = z, y = -z, z = z$$

Regla de Cramer

Exercici

Discussiu i resoleu el sistema

$$\begin{cases} 3x - 4y + 3z - s + 2t = 0 \\ 3x - 6y + 5z - 2s + 4t = 0 \\ 5x - 10y + 7z - 3s + t = 0 \end{cases}$$

Sol: SCI amb

$$x = x, y = \frac{x - 5t}{2}, z = -5t, t = t, s = -3t$$