Contents

Chapter 3

Estructura dels endomorfismes d'un espai vectorial

Donada una aplicació lineal $F : E \to F$ podem sempre escollir bases de E y F en les quals la matriu de f sigui molt simple. Una forma és la següent: siguin $u_1, \ldots, u_k$ una base de$\operatorname{Nuc} f$ i la completam a una base de $E : \{u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$. Llavors, sabem que $f(u_{k+1}), \ldots, f(u_n)$ són linealment independents a F. Usam aquests vectors per aconseguir una base de $F : \{f(u_{k+1}), \ldots, f(u_n), v_{n-k+1}, \ldots, v_m\}$. La matriu de f en aquesta base serà:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Però en estudiar endomorfismes el que demanarem és que els vectors $u \in E$ i les seves imatges estiguin expressades en la mateixa base. Per aquest motiu no sempre serà possible aconseguir una base de manera que la matriu de l'endomorfisme ens quedi tan senzilla com l'anterior.

Dedicarem aquest tema a estudiar quan és possible triar una base d'un espai vectorial de manera que la matriu d'un endomorfisme donat quedi el més senzilla possible. En un principi, la manera més senzilla possible seria que la seva matriu fos diagonal. Però no sempre serà possible trobar una base en què l'endomorfisme s'escirgui de manera diagonal. En aquests casos haurem de cercar una altra representació senzilla (la forma canònica de Jordan).

Definició 3.1
Sigui $f : E \to E$ un endomorfisme de E. Direm que f és diagonalitzable si existeix una base de E en la qual la seva matriu sigui diagonal.

Recordem que deim que dues matrius A i A' són semblants si existeix una altra matriu P invertible tal que $A' = P^{-1}AP$. Per tant, de manera anàloga a la definició anterior, direm que una matriu és diagonalitzable si existeix una matriu semblant a ella que sigui diagonal.

Exemple 1: *Considerem la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vegem si A és diagonalitzale, és a dir si és possible trobar una matriu semblant a ella que sigui diagonal. Segons la definició anterior, perquè A sigui diagonalitzable, haurà d'existir una matriu invertible $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(ad - bc \neq 0)$ tal que $A' = P^{-1}AP$ sigui diagonal. Feim aquest càlcul:*

$$A' = P^{-1}AP = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad + cd - bc & d^2 \\ -c^2 & ad - bc - cd \end{pmatrix}.$$

Perquè aquesta matriu sigui diagonal $c = d = 0$ però llavors P no serà inverible. Conseqüentment, la matriu A no és diagonalitzable.

En tot aquest capítol E serà un $K-$e.v. de dimensió finita n, amb K un cos de característica diferent de 2 $(1 + 1 \neq 0)$.

3.1 Vectors i valors propis d'un endomorfisme. Polinomi característic

En aquesta secció repasarem els conceptes ja vist a l'assignatura AL I i estudiarem la diagonalització d'endomorfismes de manera formal.

DEFINICIÓ 3.2
Direm que $a \in K$ és un valor propi de f si existeix un vector $v \neq 0$ tal que $f(v) = av$. Direm que v és un vector propi de f associat al valor propi a.

Sigui $a \in K$, considerem el conjunt $E(a) = \{v \in E | f(v) = av\}$. Òbviament $E(a)$ és un sub-e.v. de E, de fet $E(a)$ no és més que $\text{Nuc}\,(f - a \cdot id)$. Si a és vap (valor propi) de f, els vectors diferents de 0 del sub-e.v. $E(a)$ són els veps (vectors propis) de f associats al valor propi a. Sovint deim a $E(a)$ el sub-e.v. propi associat al vap a. D'aquest fet se'n dedueix el següent resultat.

PROPOSICIÓ 3.1
$a \in K$ és un vap de f si i només si $\det\,(f - a \cdot id) = 0$.

Comentari: D'acord amb el teorema del rang (aplicat a l'endomorfisme $f - a \cdot id$), tenim: $\dim E(a) = \dim \text{Nuc}\,(f - a \cdot id) = n - \text{rang}\,(f - a \cdot id)$.

DEFINICIÓ 3.3
Si A és una matriu $n \times n$ sobre K, direm polinomi característic de A, $c_A(x)$, al polinomi definit per $c_A(x) = |A - xI|$.

Comentari: A la definició anterior es considera el determinant d'una matriu amb elements de $K[x]$. Això no és problema, la definició i propietats dels determinants de matrius amb elements en un cos K es poden generalitzar a matrius amb elements a $K[x]$. En particular, es compleix que el determinant d'un producte de matrius és el producte de llurs determinants.

PROPOSICIÓ 3.2
Sigui f un endomorfisme de E, i siguin A i B matrius de f. Aleshores els polinomis característics de A i de B coincideixen.

Prova. Observem que

$$c_B(x) = |B - xI| = |P^{-1}AP - xI| = |P^{-1}(A - xI)P| = |P^{-1}||A - xI||P| = |A - xI| = c_A(x)$$

■

Comentari: Amb el resultat anterior, podem reformular la Proposició 3.1 i definir el polinomi característic d'un endomorfisme f, $c_f(x)$, com el polinomi característic de qualsevol de les seves matrius: $c_f(x) = c_A(x)$, on A és una matriu qualsevol de f.

PROPOSICIÓ 3.3
Els valors propis de f són les arrels (dins K) del polinomi característic de f.

Prova. Aquest resultat es dedueix de la Proposició 3.1 i del comentari anterior. ■

És evident que el nombre de valors propis és, per tant, menor o igual que n, ja que el grau del polinomi característic és n.

EXEMPLES 2

(1) L'endomorfisme de $\mathbb{R}^2$ definit per $f(x,y) = (-y,x)$ no té cap valor propi (real). L'equació característica és $c_f(x) = 0$ és

$$\begin{vmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = 0,$$

és a dir, $x^2 + 1 = 0$, que no té cap solució real.

(2) L'endomorfisme de $\mathbb{R}^2$ definit per $f(x,y) = (y,x)$ té dos valors propis que són 1 i -1. L'equació característica és

$$\begin{vmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = 0,$$

és a dir, $x^2 - 1 = 0$, que té solucions 1 i -1.

(3) Els valors propis de l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ que té matriu respecte de la base canònica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

són 1 i 2.

DEFINICIÓ 3.4 (MULTIPLICITATS D'UN VALOR PROPI)
Si a és un vap de f, la multiplicitat de a com a arrel del polinomi característic és la multiplicitat algebraica de a. La dimensió del subespai vectorial $E(a)$ és la multiplicitat geomètrica de a.

EXEMPLE 3: *Considerem l'exemple anterior, on l'endomorfisme venir donat per la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

El primer té multiplicitat algebraica 2, i l'altre multiplicitat algebraica 1. Quant a la multiplicitat geomètrica, tenim $\dim \mathbb{R}^3(1) = 3 - \operatorname{rang}(A - 1 \cdot I) = 3 - 2 = 1; \dim R^3(2) = 3 - \operatorname{rang}(A - 2 \cdot I) = 3 - 2 = 1$. *Tots dos valors propis tenen multiplicitat geomètrica igual a 1.*

Entre les multiplicitats esmentades hi ha una relació que ve donada per el següent resultat.

PROPOSICIÓ 3.4
La multiplicitat geomètrica (d) és menor o igual que l'algebraica (m): $d \leq m$.

Prova. Siguin m i d les multiplicitats algebraica i geomètrica d'un valor propi a. Tenim per una part $c_f(x) = (x-a)^m q(x)$ amb $q(x) \in K[x], q(a) \neq 0$ i $d = \dim E(a) = \dim \operatorname{Nuc}(f - a \cdot id)$. Sigui $\{e_1, \ldots, e_d\}$

una base de $E(a)$, l'ampliam a una de $E : \{e_1, \ldots, e_d, e_{d+1}, \ldots, e_n\}$ i sigui A la matriu de f respecte d'aquesta base

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & a_{r+1}^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a & a_{r+1}^d & \cdots & a_n^d \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{r+1}^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Aleshores el polinomi característic $c_f(x)$ serà:

$$c_f(x) = |A - xI| = \begin{vmatrix} a-x & 0 & \cdots & 0 & a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ 0 & a-x & \cdots & 0 & a_{r+1}^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a-x & a_{r+1}^d & \cdots & a_n^d \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{r+1}^n & \cdots & a_n^n - x \end{vmatrix} = (a-x)^d s(x),$$

amb $s(x) \in K[x]$, d'on $d \leq m$.

Fixau-vos que hem utilitzat la regla de Laplace desenvolupant el determinant fixades les d primeres columnes. ■

Una propietat important que ara podem demostrar és aquella que diu que vectors propis associats a valors propis diferents, són linealment independents.

Proposició 3.5

Siguin $a_1, \ldots, a_s$ valors propis diferents de f, i siguin $v_1, \ldots, v_s$ vectors propis de f associats respectivament a $a_1, \ldots, a_s$. Llavors $v_1, \ldots, v_s$ són linealment independents.

Prova. Demostrem-ho per inducció sobre s. Si $s = 1$, és obvi. Suposem cert l'enunciat per $s-1$ i vegem que també és cert per s.

De $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s = 0$, aplicant f, tenim $\lambda_1 a_1 v_1 + \cdots + \lambda_s a_s v_s = 0$. Si restam aquesta igualtat de la que resulta de multiplicar la primera per a_s, ens queda:

$$\lambda_1(a_1 - a_s)v_1 + \cdots + \lambda_{s-1}(a_{s-1} - a_s)v_{s-1} = 0,$$

i per la hipòtesi d'inducció $\lambda_1(a_1 - a_s) = \cdots = \lambda_{s-1}(a_{s-1} - a_s) = 0$. D'aquí $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{s-1} = 0$ i substituint a la primera igualtat ens queda $\lambda_s v_s = 0$. Com que $v_s \neq 0$ tenim també $\lambda_s = 0$ i els vectors $v_1, \ldots, v_s$ són linealment independents. ■

Proposició 3.6

Siguin $a_1, \ldots, a_s$ valors propis diferents de f. Aleshores:

1) La suma $E(a_1) + \cdots + E(a_s)$ és directa.

2) Reunint vectors linealment independents de cada subespai $E(a_i), i = 1, \ldots, s$, s'obté una familia de vectors linealment independents.

3) $\dim(E(a_1) \oplus \cdots \oplus E(a_s)) = \sum_{i=1}^s d_s$, on d_k denota la multiplicidad geomètrica del vap a_k.

3.2 Diagonalització d'endomorfismes

Com a conseqüència immediata de la proposició anterior tenim el següent resultat de diagonalitzacío d'endomorfismes.

TEOREMA 3.1
Un endomorfisme és diagonalitzable si i només si existeix una base de vectors propis.

El teorema anterior és un resultat poc pràctic a l'hora de saber si un endomorfisme és diagonalitzable. El resultat següent ens dóna un mètode pràctic per comprovar si un endomorfisme és diagonalitzable o no. Primer, establim una mica de notació: denotam per $a_1, \ldots, a_s$ els valors propis diferents d'un endomorfisme f, i $(m_1, d_1), \ldots, (m_s, d_s)$ les seves respectives multiplicitats,

TEOREMA 3.2 (TEOREMA DE DIAGONALITZACIÓ)
f és diagonalitzable si i només si es verifiquen les dues condicions següents:

1) $m_1 + \cdots + m_s = n$,

2) $m_i = d_i$ *per tot* $i = 1, \ldots, s$.

Prova. Suposem primer que f és diagonalitzable i vegem que es compleixen 1) i 2). Considerem el conjunt $\{e_{11}, \ldots, e_{1m_1}, \ldots, e_{sm_1}, \ldots, e_{sm_s}\}$ i suposem que és una base de vectors propis, on agrupam els vectors associats a un mateix valor propi. Siguin $a_1, \ldots, a_s$ els corresponents valors propis (és a dir e_{ij} és un vep associat al vap a_i). La matriu de f en aquesta base és

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \cdots & a_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_s & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_s \end{pmatrix},$$

on $a_1, \ldots, a_s$ són diferents i a_1 apareix m_1 vegades, …, a_s apareix m_s vegades. El polinomi característic calculat a partir de la matriu D és, per tant:

$$c(x) = |D - xI| = (a_1 - x)^{m_1} \cdots (a_s - x)^{m_s}.$$

Així, els valors propis de f tenen multiplicitats algebraiques $m_1, \ldots, m_s$, que verifiquen òbviament $m_1 + \ldots + m_s = n$. Per altra part, $e_{11}, \ldots, e_{1m_1} \in E(a_1), \ldots, e_{s1}, \ldots, e_{sm_s} \in E(a_s)$ d'on $m_1 \leq d_1, \ldots, m_s \leq d_s$ i consegüentment, $m_1 = d_1, \ldots, m_s = d_s$.

Recíprocament, suposem ara que es compleixen les condicions 1) i 2) i vegem que f és diagonalitzable. En efecte, si considerem una base de cada subespai propi $E(a_1), \ldots, E(a_s)$ i reunim aquestes bases obtindrem una base de E (veure Proposició 3.5) respecte de la qual la matriu de f serà diagonal. ■

Comentaris

I. La condició 2) es pot escriure també així:

$$m_i = \dim \operatorname{Nuc}(f - a_i \cdot id) = n - \operatorname{rang}(f - a_i \cdot id) = n - \operatorname{rang}(A - a_i \cdot I) \text{ per tot } i = 1, \ldots, s,$$

on A és una matriu de f. Per tant, aquesta condició és $\operatorname{rang}(A - a_i \cdot I) = n - m_i$ per tot i$= 1, \ldots, s$.

II. Si un endomorfisme té n valors propis diferents, llavors l'endomorfisme és diagonalitzable. En efecte, la condició 2) del teorema de diagonalització es verifica trivialment: $1 \leq d_i \leq m_i = 1$ per tot $i = 1, \ldots, n$.

El que acabam de demostrar a la proposició anterior es pot presentar en un altre format:

PROPOSICIÓ 3.7
f és diagonalitzable si i només si $E = E(a_1) \oplus \cdots \oplus E(a_s)$.

Prova. Si f és diagonalitzable llavors es compleixen les condicions 1) i 2) anteriors, per tant $d_1+\cdots+d_s = n$ el que implica $\dim(E(a_1) \oplus \cdots \oplus E(a_s)) = n$, i, per tant, $E = E(a_1) \oplus \cdots \oplus E(a_s)$.

Suposem ara que es verifica $E = E(a_1) \oplus \cdots \oplus E(a_s)$, per tant $d_1 + \cdots + d_s = n$. Llavors com que sabem que $d_i \leq m_i$ per tot $i = 1, \ldots, s$ tenim:

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n}(m_i - d_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i - \sum_{i=1}^{s} d_i = \sum_{i=1}^{s} m_i - n.$$

Per tant

$$\sum_{i=1}^{s} m_i \geq n \Rightarrow \sum_{i=1}^{s} m_i = n.$$

Finalment

$$0 \leq \sum_{i=1}^{s}(m_i - d_i) = 0 \Rightarrow m_i = d_i \text{ per tot } i = 1, \ldots, s.$$

■

EXEMPLES 4

(1) L'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ definit mitjançant la matriu respecte de la base canònica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

no és diagonalitzable. Vegem que es compleix la condició 1) del Teorema 3.2, però no la 2). L'equació característica és $-x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$, i els valors propis són $a_1 = 1, (m_1 = 2)$ i $a_2 = 2, (m_2 = 1)$. Així $m_1 + m_2 = 1 + 2 = 3$. Quant a l'altra condició, $\operatorname{rang}(A - 1 \cdot I) = 2 \neq 3 - 2$; *i així doncs no es compleix la segona condició de diagonalització.*

(2) L'endomorfisme, f, de $\mathbb{R}^4$ definit mitjançant la matriu respecte de la base canònica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & -3 \\ 6 & -6 & 3 & -6 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

és diagonalitzable. En efecte, l'equació característica és $x^4 - x^2 = 0$, que té arrels $a_1 = 0, (m_1 = 2), a_2 = 1, (m_2 = 1)$ i $a_3 = -1, (m_3 = 1)$. Les dimensions dels sub-e.v. propis corresponents són: 2, 1 i 1, que coincideixen amb les multiplicitats algebraiques. Per tant, l'endomorfisme és diagonalitzable. Una base de vectors propis s'obté en reunir una base de cada sub-e.v. propi. Aquests subespais són:

$$\mathbb{R}^4(0) = \{(r, s, 2r, 2r - s); r, s \in \mathbb{R}\}. \textit{ Una base és } \{(1, 0, 2, 2), (0, 1, 0, -1)\},$$
$$\mathbb{R}^4(1) = \{(3r, 3r, 3r, r); r \in \mathbb{R}\}. \textit{ Una base és } \{(3, 3, 3, 1)\},$$
$$\mathbb{R}^4(-1) = \{(r, 2r, 3r, r); r \in \mathbb{R}\}. \textit{ Una base és } \{(1, 2, 3, 1)\}.$$

Una base de $\mathbb{R}^4$ formada per vectors propis és per tant: $\{(1,0,2,2),(0,1,0,-1),(3,3,3,1),(1,2,3,1)\}$. *Respecte d'aquesta base la matriu de f és $D = Diag(0,0,1,-1)$. La matriu del canvi de base és*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Evidentment es verifica $P^{-1}AP = D$.

(3) *Es considera la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

El polinomi característic de A és $c(x) = -x^3 + 7x^2 - 17x + 15$, que té les arrels $3, 2, +i, 2-i$. L'endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ que te matriu A en la base canònica no és diagonalitzable. L'endomorfisme f de $\mathbb{C}^3$ que té matriu A en la base canònica és diagonalitzable. Per abreujar deim que la matriu A és diagonalitzable sobre $\mathbb{C}$ però que no ho és sobre $\mathbb{R}$.

3.3 Aplicacions de la diagonalització

3.3.1 Càlcul de la potència r-èsima d'una matriu

Observau que si una matriu A és diagonalitzable, llavors existeix una matriu regular P tal que $P^{-1}AP = D$, on D és una matriu diagonal: $D = Diag(a_1, \ldots, a_n)$. Aquest fet permet de forma fàcil calcular la potència (entera positiva) A^r per tot $r \in \mathbb{N}$. En efecte, es verifica $A = PDP^{-1}$ i $A^r = (PDP^{-1})^r = PD^rP^{-1}$, amb $D^r = Diag(a_1^r, \ldots, a_n^r)$.

EXEMPLE 5: *Calculam A^r, on A és la matriu de $\mathbb{R}^4$ de l'Exemple 4. Com que A diagonalitza, seguint el raonament anterior tenim que*

$$A^r = PD^rP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

3.3.2 Càlcul del terme general d'una successió definida per recurrència lineal

Sigui $x_1, x_2, \ldots$ una successió de nombres complexos tal que $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$ per tot $n \geq 1$, on $a, b \in \mathbb{C}$. Utilitzarem la teoria de diagonalització per trobar una expressió del terme general de la successió. Començam per escriure la fórmula de recurrència de la manera següent:

$$\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \cdots = A^n \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

on

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El polinomi característic de A és $x^2 - ax - b$, i, per tant, A és diagonalitzable si, i només si, $a^2 + 4b \geq 0$. Suposem que aquest és el cas, i siguin a_1 i a_2 els valors propis ($a_1 \neq a_2$). Els corresponents subespais propis són $\langle(a_1, 1)\rangle$ i $\langle(a_2, 1)\rangle$ i, per tant,

$$P = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^n = P \begin{pmatrix} a_1^n & 0 \\ 0 & a_2^n \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{a_1 - a_2} \begin{pmatrix} a_1^{n+1} - a_2^{n+1} & a_1a_2(a_2^n - a_1^n) \\ a_1^n - a_2^n & a_1a_2(a_2^{n-1} - a_1^{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Finalment,

$$x_{n+2} = \frac{1}{a_1 - a_2} \left((a_1^{n+1} - a_2^{n+1})x_2 + a_1a_2(a_2^n - a_1^n)x_1 \right), \text{ per tot } n \geq 1.$$

Exercici 1: *Demostrau que el terme general de la successió de Fibonacci:* $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ *és*

$$x_{n+2} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}}, \text{ per tot } n \geq 1.$$

3.3.3 Resolució d'equacions diferencials

Donada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, resoldre l'equació diferencial

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

vol dir cercar n funcions diferenciables $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$, que satisfan una determinada relació (donada per A) entre elles i les seves derivades.

Si A és diagonalitzable podem resoldre fàcilment l'equació diferencial. En efecte, es pot escriure $A = PDP^{-1}$, on D és una matriu diagonal, i d'aquí tenim (3.1) de la forma $DP^{-1}X = P^{-1}X'$ on

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

Si feim $P^{-1}X = Y$ s'obté $P^{-1}X' = Y'$ i l'equació ens queda ara de la forma $Y' = DY$ que es pot resoldre fàcilment per integració. Una vegada obtingudes $y_1, \dots, y_n$ podem finalment trobar $x_1, \dots, x_n$ a partir de $X = PY$.

3.4 Polinomi mínim

En aquesta secció, a cada endomorfisme li associarem un polinomi. Aquest polinomi, entre d'altres propietats, ens proporcionarà un nou criteri per decidir si l'endomorfisme és diagonalitzable.

Definició 3.5
Direm que el polinomi $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in K[x]$ *és un polinomi anul·lador de l'endomorfisme* f *si* $p(f) = 0$ *on*

$$p(f) = a_0 id + a_1 f + \dots + a_n f^n.$$

Exemples 6

(1) Si $E = \{0\}$ *i* f *és l'únic endomorfisme de* E *llavors qualsevol polinomi de* $K[x]$ *és un polinomi anul·lador de* f.

(2) Si $E \neq \{0\}$ *i* f *és l'endomorfisme nul, llavors un polinomi anul·lador de* f *no pot contenir constants, per exemple, pot ser* $p(x) = x$.

(3) Sigui f *l'endomorfisme de* $\mathbb{R}^2$ *definit per* $f(a, b) = (b, a)$. *El polinomi* $p(x) = x^2 - 1$ *és un polinomi anul·lador de* $f : p(f) = f^2 - id = 0$.

Proposició 3.8
Si f *és un endomorfisme de* E, *existeix un únic polinomi mònic* $m \in K[x]$ *que compleix:*

1) $m(f) = 0$,

2) Si $p \in K[x]$ *és un polinomi anul·lador de* f, *és a dir,* $p(f) = 0$, *aleshores* m *divideix* p.

Prova.

1) Vegem primer la unicitat. Si m i m' compleixen les dues condicions anteriors aleshores m divideix m' i m' divideix m; per tant $m = m'$, ja que ambdós són mònics.

   Provem ara l'existència. Considerem els $n^2 + 1$ endomorfismes $f^0 = id, f, f^2, \ldots, f^{n^2}$. Es tracta d'una família linealment dependent ja que $\dim L(E, E) = n^2$, per tant existeixen escalars $a_0, \ldots, a_{n^2}$ no tots nuls tals que $\sum_{i=0}^{n^2} a_i f^i = 0$. Així, el polinomi $p(x) = \sum_{i=0}^{n^2} a_i x^i$ és no nul i anul·la f. Dels polinomis no nuls que anul·len f escollim un de menor grau i mònic.

2) Sigui ara $p \in K[x]$ tal que $p(f) = 0$. Si feim la divisió entre p i m tenim $p(x) = m(x)q(x) + r(x)$ amb $\operatorname{grau} r < \operatorname{grau} m$, per tant $r(x) = p(x) - m(x)q(x)$ és tal que $r(f) = p(f) - m(f)q(f) = 0 - 0q(f) = 0$ i, tal com hem escollit m ha de ser $r(x) = 0$. Per tant $p(x) = m(x)q(x)$. Queda doncs demostrada l'existència i unicitat d'un polinomi que compleix les condicions de l'enunciat.

■

DEFINICIÓ 3.6
Direm polinomi mínim de f, i el denotarem per m_f, al polinomi mònic $m(x)$ que compleix les dues condicions de la proposició anterior.

PROPOSICIÓ 3.9
Si m_f és el polinomi mínim de l'endomorfisme f, aleshores:

1) $\operatorname{grau} m_f \geq 1$.

2) $\operatorname{grau} m_f = 1$ *si i només si f és una homotècia ($f(u) = \alpha u$).*

3) $m_f(x) = x$ *si i només si* $f = 0$.

4) $m_f(x) = x - 1$ *si i només si* $f = id$.

EXEMPLE 7: *Cercam el polinomi mínim de l'endomorfisme amb matriu en base canònica:*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Com que $\{I, A\}$ son l.i. no pot existir un polinomi de grau 1 que anul·li A. Llavors cercam un de grau 2: $p(x) = x^2 + ax + b$, tal que $p(A) = A^2 + aA + bI = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 - a + b = 0 \\ -2 + a = 0. \end{cases}$$

Llavors, $a = 2, b = 1$ i el polinomi mínim de f és $m_f(x) = x^2 + 2x + 1$.

Evidentment, totes aquestes definicions i propietats que hem vist sobre polinomi mínim d'un endomorfisme, se traslladen immediatament a matrius. Així, donada una matriu $A \in M_{n\times n}(K)$ i un polinomi $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in K[x]$ direm que p és un polinomi anul·lador de A si $p(A) = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_n A^n = 0$. Observau que $p(A) \in M_{n\times n}(K)$. D'igual manera existeix un únic polinomi mònic de grau mínim que anul·la A, que anomenarem polinomi mínim de A i denotarem per m_A.

Com succeeix en el cas del polinomi característic, veurem que dues matrius semblants tenen el mateix polinomi mínim. Per això, analitzarem en primer lloc la relació entre els polinomis que anul·len dues matrius semblants.

Comentari: Si $A, B \in M_{n\times n}(K)$ són matrius semblants, és a dir, existeix $P \in M_{n\times n}(K)$ invertible tal que $A = P^{-1}BP$, llavors $A^k = P^{-1}B^kP$, per tot $k \in \mathbb{N}$.

Lema 3.1
Si $A, B \in M_{n\times n}(K)$ són matrius semblants llavors $p(A)$ és semblant a $p(B)$ per tot $p \in K[x]$. En particular, $p(A) = 0$ si i només si $p(B) = 0$.

Prova. Sigui $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in K[x]$. Si A és semblant a B existeix $Q \in M_{n\times n}(K)$ invertible tal que $A = Q^{-1}BQ$ i llavors

$$p(A) = p(Q^{-1}BQ) = \sum_{i=0}^{n} a_i(Q^{-1}BQ)^i = \sum_{i=0}^{n} a_iQ^{-1}B^iQ = Q^{-1}\left(\sum_{i=0}^{n} a_iB^i\right)Q = Q^{-1}p(B)Q.$$

Llavors, $p(A)$ és semblant a $p(B)$. ■

La següent proposició és immediata a partir de l'anterior i de la Proposició 3.8.

Proposició 3.10
Siguin $A, B \in M_{n\times n}(K)$ dues matrius semblants. Llavors $m_A = m_B$.

En una proposició anterior, vàrem veure que les arrels del polinomi característic d'un endomorfisme són els seus valors propis. El següent resultat demostra el mateix pel polinomi mínim.

Proposició 3.11
Els valors propis de f són les arrels (dins K) del polinomi mínim de f.

Prova. Hem de demostrar que $a \in K$ és vap de f si i només si a és arrel de m_f.

$\Rightarrow$) Sigui $a \in K$ un vap de f. Llavors existeixen $q \in K[x]$ i $r \in K$ tal que $m_f(x) = q(x)(x - a) + r$. Llavors

$$0 = m_f(f) = q(f)(f - a \cdot id) + r \cdot id.$$

Com que a és vap de f, existeix $v \in E$, $v \neq 0$, tal que $f(v) = av$. Llavors es té

$$0 = q(f)(f - a \cdot id)v + rv = q(f)(f(v) - av) + rv = q(f) \cdot 0 + rv = rv.$$

Com que $v \neq 0$ llavors $r = 0$ i a és arrel de m_f.

$\Leftarrow$) Sigui $a \in K$ una arrel de m_f. Llavors $m_f(x) = (x-a)q(x)$ i per tant $0 = m_f(f) = (f - a\cdot id)q(f)$.

Observem que $q(f) \neq 0$ ja que si $q(f) = 0$, q seria un polinomi anul·lador de f de grau menor que el polinomi mínim, el qual no pot ser. Llavors, existeix $w \in E$ tal que $q(f)w \neq 0$. Sigui $v = q(f)w$. Veiem que v és un vep de f de vap a :

$$(f - a \cdot id)v = (f - a \cdot id)q(f)w = m_f(f)w = 0 \Rightarrow f(v) - av = 0,$$

i v és vep de f de vap a. ■

3.4.1 Polinomi mínim d'un vector

De manera semblant a com hem provat la Proposició 3.8 podem provar el següent resultat.

Proposició 3.12
Si f és un endomorfisme de E i $u \in E$, existeix un únic polinomi mònic $m \in K[x]$ que compleix:

1) $m(f)(u) = 0$,

2) Si $p \in K[x]$ és tal que $p(f)(u) = 0$ aleshores m divideix p.

Definició 3.7
Direm polinomi mínim de f a u (o simplement polinomi mínim de u), i el denotarem per m_u, al polinomi mònic que compleix les dues condicions de la proposició anterior.

Comentari: Observem que m_u divideix m_f, ja que $m_f(f)u = 0$.

Exemples 8

(1) Si $v \in E$ és un vector propi de f de valor propi $a \in K$ llavors el polinomi mínim de f a v és $m_u(x) = x - a$.

(2) Sigui f l'endomorfisme amb matriu associada en base canònica $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ i sigui $e_1 = (1,0)$ el primer vector de la base canònica. Volem calcular m_{e_1}.

Començam cercant un polinomi mònic lineal $p(x) = x + b \in \mathbb{R}_1[x]$ tal que $p(f)(e_1) = 0$. Observem que

$$p(f)(e_1) = 0 \iff (f + b \cdot id)e_1 = 0 \iff f(e_1) + be_1 = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

i per tant, no existeix cap polinomi de grau 1 que compleixi la propietat anterior. Aleshores, grau $(m_{e_1}) \geq 2$.

Cercam un polinomi de grau 2: $p(x) = x^2 + ax + b \in \mathbb{R}_2[x]$. En aquest cas

$$\begin{aligned} p(f)(e_1) = 0 \quad &\iff \quad (f^2 + af + b)e_1 = 0 \iff f^2(e_1) + af(e_1) + be_1 = 0 \\ &\iff \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \quad \begin{cases} 1 - a + b = 0, \\ -2 + a = 0 \end{cases} \iff a = 2, b = 1. \end{aligned}$$

Per tant el polinomi mínim de e_1 és $p(x) = x^2 + 2x + 1$.

Hem vist a l'exemple anterior que trobar el polinomi mínim d'un vector pot ser laboriós. Donarem una sèrie de propietats que ens ajudin a trobar-lo.

Proposició 3.13

Sigui $u \neq 0$ i $m_u(x) = a_0 + a_1x + \ldots + x^s$ el polinomi mínim de f a u, $s \geq 1$. Llavors:

1) $u, f(u), \ldots, f^{s-1}(u)$ són linealment independents.

2) $u, f(u), \ldots, f^{s-1}(u), f^t(u)$ amb $t \geq s$ són linealment dependents.

Prova.

1) Si $u, f(u), \ldots, f^{s-1}(u)$ fossin linealment dependents existirien $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}$ no tots nuls tals que $\alpha_0 u + a_1\alpha_1 f(u) + \cdots + \alpha_{s-1}f^{s-1}(u) = 0$. Així el polinomi no nul $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{s-1}x^{s-1}$ seria de grau més petit que s i tal que $p(f)(u) = 0$. Això és contradictori amb que el polinomi mínim és de grau s.

2) Considerem $u, f(u), \ldots, f^{s-1}(u), f^t(u)$ amb $t \geq s$, i facem inducció sobre t per demostrar que són linealment dependents. Per $t = s$ és cert: $0 = m_u(f)(u) = a_0u + a_1 f(u) + \cdots + f^s(u)$ i, per tant, els vectors $u, f(u), \ldots, f^{s-1}(u), f^s(u)$ són linealment dependents.

   Suposem ara que és cert per $t > s$ i vegem-ho per $t+1$. En efecte, observem que per hipòtesi d'inducció $f^t(u) \in \langle u, f(u), \ldots, f^{s-1}(u)\rangle$ i d'aquí $f^{t+1}(u) \in \langle f(u), f^2(u), \ldots, f^s(u)\rangle = \langle u, f(u), \ldots, f^{s-1}(u)\rangle$ i, per tant, $u, f(u), \ldots, f^{s-1}(u), f^{t+1}(u)$ són linealment dependents.

$\blacksquare$

Per tant, una primera passa per trobar el polinomi mínim d'un endomorfisme f a u és trobar el mínim s tal que $\{u, f(u), \dots, f^{s-1}(u), f^s(u)\}$ siguin linealment dependents. Si $f^s(u) = -a_0 u - a_1 f(u) - \cdots - a_{s-1} f^{s-1}(u)$ llavors el polinomi mínim és $m_u(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{s-1} x^{s-1} + x^s$.

El següent resultat ens mostra com calcular el polinomi mínim d'un endomorfisme f a partir dels polinomis mínims dels vectors d'una base de E.

Proposició 3.14
Sigui f un endomorfisme de E i sigui $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de E. Llavors $m_f = mcm\{m_{v_i} : i = 1, \dots, n\}$, on mcm denota el mínim comú múltiple.

Prova. Sigui $p = mcm\{m_{v_i} : i = 1, \dots, n\}$. Per el comentari de desprs de la definició de polinomi mínim, m_{v_i} divideix m_f. Llavors $p|m_f$.

Per un altre costat, com que $m_{v_i}|p$ es té que $p(f)v_i = 0$ per a cada $1 \le i \le n$. Sigui $v \in E$ i siguin $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ tals que $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Llavors

$$p(f)v = p(f)\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i p(f) v_i = 0.$$

Conseqüentment, es té que $p(f)v = 0$ per tot $v \in E$. Per tant, $p(f) = 0$ i $m_f|p$.

Com que tots dos polinomis són mònics, $m_f = p$. ■

Exemple 9: *Calculam el polinomi mínim de l'endomorfisme que té per matriu en base canònica $\{e_1, e_2, e_3\}$*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per la proposició anterior $m_f = m_A = mcm\{m_{e_1}, m_{e_2}, m_{e_3}\}$. Cercam, per tant, els polinomis mínims dels tres vectors de la base canònica.

Per cercar m_{e_1} ens fixam que $\{e_1, f(e_1)\} = \{e_1, e_1 + e_2\}$ és un conjunt linealment independent però $\{e_1, f(e_1), f^2(e_1)\} = \{e_1, e_1 + e_2, e_1 + 2e_2\}$ no ho és. A més a més es té la relació

$$0 = e_1 - 2(e_1 + e_2) + (e_1 + 2e_2) = e_1 - 2f(e_1) + f^2(e_1),$$

d'on tenim que $m_{e_1} = 1 - 2x + x^2 = (x-1)^2$.

Com que $f(e_2) = e_2$ tenim que $m_{e_2} = x - 1$. I com que $f(e_3) = 2e_3$ llavors $m_{e_3} = x - 2$.

Llavors $m_f = mcm\{(x-1)^2, x-1, x-2\} = (x-1)^2(x-2)$.

El següent teorema, a més a més de proporcionar-nos un mètode pràctic per calcular el polinomi mínim d'un endomorfisme (diferent de l'anterior) ens diu que el polinomi característic d'un endomorfisme és també un polinomi anul·lador.

Teorema 3.3 (Teorema de Cayley-Hamilton)
El polinomi característic és múltiple del polinomi mínim.

Prova. Sigui f un endomorfisme de E amb matriu associada en una base A. Sigui $v \in E$ tal que $\{v, f(v), \dots, f^s(v)\}$ és un conjunt linealment independent i tal que $f^{s+1}(v) = -a_0 v - a_1 f(v) - \dots - a_s f^s(v)$. Llavors $m_v(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_s x^{s+1}$.

Extenem aquest conjunt $\{v, f(v), \ldots, f^s(v)\}$ a una base de $E : \{v, f(v), \ldots, f^s(v), w_{s+2}, \ldots, w_n\}$. La matriu de f en aquesta base és

$$M = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & M \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_s & \\ & & & & & \\ & & 0 & & & N \end{array} \right)$$

Sabem que el polinomi característic de f, que denotam per c_f, el podem calcular amb qualsevol matriu associada a f. Per tant,

$$c_f = \left| \begin{array}{ccccc|c} -x & 0 & \cdots & 0 & -a_0 & \\ 1 & -x & \cdots & 0 & -a_1 & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & M \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_s - x & \\ & & & & & \\ & & 0 & & & N - xI_{n-s-1} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccccc} -x & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & -x & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_s - x \end{array} \right| \det(N - xI_{n-s-1}).$$

Se pot demostrar per inducció que el primer determinant és $\pm(x^{s+1} + a_s x^s + \cdots + a_1 x + a_0) = \pm m_v$. Per tant $c_f = \pm m_v \det(N - xI_{n-s-1})$, pel que $m_v | c_f$ per v arbitrari.

Sigui $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una altra base de E. Pel que hem vist anteriorment, $m_{e_i} | c_f$ per $1 \leq i \leq n$. Llavors, $m_f = mcm\{m_{e_1}, \ldots, m_{e_n}\}$ divideix c_f. ■

Comentari: Recordem que havíem vist que el grau del polinomi mínim era menor que n^2. El teorema anterior ens dóna una fita millor: grau $(m_f) \leq n$, ja que el polinomi característic de f té grau n i l'ha de dividir.

Exemple 10: *Usarem el teorema anterior per trobar el polinomi mínim de l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ donat per la matriu en la base canònica*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Com que el polinomi mínim ha de dividir el característic, calculam aquest darrer: $c(x) = \det(A - xI) = x^2(1-x)$. Pel que hem dit, el polinomi mínim ha de ser $x^2(x-1)$ o bé $x(x-1)$. Per acabar de decidir, basta calcular $A(A-I)$. Com que

$$A(A - I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Per tant, $m(x) = x^2(x-1)$. En aquest cas, el polinomi mínim és l'oposat del característic ja que $m(x)$ ha de ser mònic.

El Teorema de Cayley-Hamilton també el podem utilitzar per calcular potències de matrius.

Exemple 11: *Sigui $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Volem calcular A^n, per tot $n \in \mathbb{N}$.*

El polinomi caracterític de la matriu A és $c_A(x) = (x-1)^2$ i sabem que $c_A(A) = A^2 - 2A + I = 0$. Per tant, $A^2 = 2A - I$. La idea per trobar A^n és observar que cada potència de A és una combinació lineal de A i de I. Volem trobar exactament quina és aquesta combinació lineal per a cada $n \in N$.

Per l'algorisme de divisió, existeixen $p \in \mathbb{R}[x], a_n, b_n \in \mathbb{R}$ *tals que* $x^n = (x-1)^2 p(x) + a_n x + b_n$. *Avaluant aquesta igualtat a* $x = 1$ *obtenim*

$$1 = 0p(1) + a_n + b_n \iff a_n + b_n = 1.$$

Si derivam la igualtat prèvia resulta que $nx^{n-1} = 2(x-1)p(x) + (x-1)^2 p'(x) + a_n$, *i tornant a avaluar a* $x = 1$ *tenim* $a_n = n$. *En conseqüència,* $b_n = 1 - a_n$.

Per tant, per a cada $n \in \mathbb{N}, x^n = (x-1)^2 p(x) + nx + 1 - n$, *d'on*

$$A^n = nA + (1-n)I = n \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (1-n) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-n & -n \\ n & n+1 \end{pmatrix}.$$

Aplicant el Teorema de Cayley-Hamilton també podem trobar la inversa de A *com a combinació lineal de* A *i* I. *Basta observar que*

$$A^2 - 2A + I = 0 \iff I = -A^2 + 2A = A(-A + 2I),$$

i per tant, la inversa de A *és* $A^{-1} = 2I - A$.

3.5 Subespais invariants. Primer Teorema de Descomposició.

Donat un endomorfisme $f : E \to E$ una possible manera de estudiar f consisteix en descomposar l'espai E com a suma directa de subespais $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$ i analitzar la restricció de f a cada un d'aquests subespais E_i. Però, per que això sigui possible, és necessari que la restricció de f a cada E_i sigui un endomorfisme de E_i, és a dir, que la imatge per f del subespai estigui inclosa dins el mateix subespai.

Definició 3.8
Sigui f *un endomorfisme de l'e.v.* E. *Un subespai* F *de* E *es diu invariant per* f ($f-$*invariant*) *si* $f(F) \subset F$. *Si* F *és invariant per* f, *denotarem per* $f|_F$ *la restricció de* f *a* F, *és a dir el següent endomorfisme de* F *induit per* f :

$$\begin{aligned} f|_F : \quad F &\to \quad F \\ u &\to \quad f|_F(u) = f(u). \end{aligned}$$

Exemples 12

(1) Sigui f *l'endomorfisme de* $\mathbb{R}^4$ *que en base canònica* $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *té per matriu associada*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Alguns espais $f-$*invariants són* $\langle e_1, e_2 \rangle, \langle e_2 \rangle, \langle e_3 \rangle, \langle e_4 \rangle, \langle e_3, e_4 \rangle, \langle e_1, e_2, e_4 \rangle$.

(2) Volem trobar tots els espais $f-$*invariants essent* f *l'endomorfisme de* $\mathbb{R}^2$ *amb matriu associada en base canònica* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Evidentment, l'espai $\{0\}$ *sempre és un espai* $f-$*invariant per qualsevol* f *i* $\mathbb{R}^2$ *(l'espai total* E*) també ho és. Per tant, només podrem tenir subespais* $f-$*invariants no trivials de dimensió 1. Per trobar-los observam que* $S = \langle v \rangle$ *és invariant per* f *si i només si* $v \neq 0$ *i* $f(v) \in \langle v \rangle$. *Equivalentment, si* $v \neq 0$ *i* $f(v) = av$, *per qualque* $a \in K$. *És a dir,* $S = \langle v \rangle$ *és* $f-$*invariant si i només si* v *és un vector propi de* f.

En el nostre exemple, és fàcil veure que l'únic subespai $f-$*invariant és llavors* $\langle (0, 1) \rangle$.

Donam a continuació certes propietats de subespais invariants.

PROPOSICIÓ 3.15
Si S, T són subespais $f-$invariants de E llavors també ho són $S \cap T$ i $S + T$.

Donat un endomorfisme f de E i un subespai F de E invariant per f, la restricció de f a F, resulta ser un endomorfisme de F en F. En el que segueix analitzarem la relació entre els polinomis mínims i característics de $f|_F$ (la restricció de f a F) i els de f.

Cal observar que si F és $f-$invariant, llavors per quasevol polinomi $p(x)$ es verifica que F és $p(f)-$invariant i $p(f|_F)$ és la restricció de $p(f)$ a F, és a dir $(p(f))|_F = p(f|_F)$.

PROPOSICIÓ 3.16
Sigui F un subespai $f-$invariant, i $m' = m_{f|_F}, c' = c_{f|_F}$ els polinomis mínim i característic de $f|_F$, respectivament. Llavors $m'|m_f$ i $c'|c_f$.

Prova. Sigui $B_F = \{v_1, \ldots, v_s\}$ una base de F i $B = \{v_1, \ldots, v_s, v_{s+1}, \ldots, v_n\}$ una ampliació a una base de E. Com que

$$m_{f|_F} = mcm\{v_1, \ldots, v_s\} \quad i \quad m_f = mcm\{v_1, \ldots, v_s, v_{s+1}, \ldots, v_n\}$$

llavors la primera conseqüència és immediata.

Per a la base B de E considerada al paràgraf anterior, es té que la matriu de f en aquesta base és

$$\begin{pmatrix} A & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

essent A la matriu de $f|_F$ en base B_F. Llavors, si calculam el polinomi característic de f amb aquesta matriu tenim

$$c_f = \begin{vmatrix} A - X \cdot I & -B \\ 0 & C - X \cdot I \end{vmatrix} = |A - X \cdot I| \cdot |C - X \cdot I| = c' \cdot Q,$$

amb el que obtenim la segona propietat sobre els polinomis característics. ■

A partir d'ara, quan diguem polinomi mínim d'un subespai vectorial (invariant per f) F voldrem dir polinomi mínim de la restricció de f a F.

PROPOSICIÓ 3.17
Si dos subespais vectorials F i G són invariants per f i tenen polinomis mínims primers entre ells, llavors $F \cap G = \{0\}$.

Prova. El subespai $F \cap G$ és invariant per f, i segons la proposició anterior el seu polinomi mínim divideix els polinomis mínims de F i G, i per tant ha de ser 1, cosa que és impossible si $F \cap G \neq \{0\}$. ■

Comentari: Si f és un endomorfisme de E, un e.v. de dimensió finita, i aquest e.v. es pot descomposar com a suma directa de sub-e.v. $f-$invariants, $E = F \oplus G$, llavors existeix una base de E en què la matriu de f té forma diagonal per blocs. Efectivament, si $\dim(F) = s > 0, \dim(G) = t > 0$ i B_F, B_G bases respectives de F i G llavors podem construir una base de E com $B = B_F \cup B_G$. En aquesta base, la matriu de f és

$$\begin{pmatrix} A_F & 0 \\ 0 & A_G \end{pmatrix}.$$

A més a més, $A_F \in M_{s \times s}(K)$ és la matriu de $f|_F$ en base B_F i $A_G \in M_{t \times t}(K)$ és la matriu de $f|_G$ en base B_G.

Evidentment, no sempre és possible trobar dos sub-e.v. $f-$ invariants que siguin suplementaris. En el que segueix, donarem condicions per què aquesta condició passi, en termes del polinomi mínim.

PROPOSICIÓ 3.18
Per tot $p(x) \in K[x]$, els subespais $\operatorname{Nuc} p(f)$ i $\operatorname{Im} p(f)$ són invariants per f.

Prova. Sigui $u \in \operatorname{Nuc} p(f)$, llavors $p(f)(f(u)) \overset{*}{=} f(p(f)(u)) = f(0) = 0$. Per tant $f(u) \in \operatorname{Nuc} p(f)$. (Demostrau *)

Sigui ara $v = p(f)(u) \in \operatorname{Im} p(f)$, llavors $f(v) = f(p(f)(u)) = p(f)(f(u))$ d'on $f(v) \in \operatorname{Im} p(f)$. ■

PROPOSICIÓ 3.19
Si el polinomi mínim de f descompon en producte de dos factors mònics primers entre ells: $m(x) = p(x)q(x)$, aleshores:

1) $E = \operatorname{Nuc} p(f) \oplus \operatorname{Nuc} q(f)$,

2) $p(x)$ *i* $q(x)$ *són els polinomis mínims de* $\operatorname{Nuc} p(f)$ *i* $\operatorname{Nuc} q(f)$ *respectivament.*

Prova. Vegem primer de tot que $\operatorname{Nuc} p(f) \cap \operatorname{Nuc} q(f) = \{0\}$. En efecte, es tracta de subespais invariants per f que tenen $p(x)$ i $q(x)$ com a polinomis anul·ladors, i per tant els seus polinomis mínims divideixen $p(x)$ i $q(x)$ respectivament i conseqüentment també són primers entre ells. Llavors segons la Proposició 3.17 ha de ser $\operatorname{Nuc} p(f) \cap \operatorname{Nuc} q(f) = \{0\}$.

Vegem ara $E = \operatorname{Nuc} p(f) + \operatorname{Nuc} q(f)$. Provarem que $\operatorname{Im} q(f) \subset \operatorname{Nuc} p(f)$ (i de manera simil·lar $\operatorname{Im} p(f) \subset \operatorname{Nuc} q(f)$): sigui $u \in Im(q(f))$, per tant, existeix $v \in E$ tal que $u = q(f)v$. Vegem que $u \in \operatorname{Nuc}(p(f))$, és a dir que $p(f)u = 0$.

$$p(f)u = p(f)(q(f)v) = (p(f)q(f))v = m_f(f)(v) = 0.$$

Per tant, podem escriure

$$n = \dim \operatorname{Nuc} p(f) + \dim \operatorname{Im} p(f) \leq \dim \operatorname{Nuc} p(f) + \dim \operatorname{Nuc} q(f) = \dim(\operatorname{Nuc} p(f) \oplus \operatorname{Nuc} q(f)) \leq n.$$

Així $\dim(\operatorname{Nuc} p(f) \oplus \operatorname{Nuc} q(f)) = n$ i finalment $E = \operatorname{Nuc} p(f) \oplus \operatorname{Nuc} q(f)$.

Quant a la segona part, siguin $r(x)$ i $s(x)$ els polinomis mínims de $\operatorname{Nuc} p(f)$ i $\operatorname{Nuc} q(f)$. Ja hem vist que $r(x)$ divideix $p(x)$ i $s(x)$ divideix $q(x)$, vegem ara que $r(x)s(x)$ és un anul·lador de f. En efecte, si $u \in E$ escrivim $u = v + w$, amb $v \in \operatorname{Nuc} p(f)$ i $w \in \operatorname{Nuc} q(f)$, tenim

$$(r(f)s(f))(u) = (s(f))(r(f)(v)) + (r(f))(s(f)(w)) = 0 + 0 = 0.$$

Per tant, per un costat $r(x)s(x)$ és múltiple de $m_f(x)$ i per l'altre divideix $m_f(x) = p(x)q(x)$; ha de ser doncs $r(x)s(x) = m_f(x) = p(x)q(x)$ i finalment $r(x) = p(x)$ i $s(x) = q(x)$. ■

PROPOSICIÓ 3.20
Si el polinomi mínim de f descompon en producte de dos factors mònics primers entre ells: $m_f(x) = p(x)q(x)$, i si l'espai E és suma directa de dos subespais invariants per $f, E = E_1 \oplus E_2$, de tal forma que el polinomi mínim de E_1 és $p(x)$ i el de E_2 és $q(x)$, llavors $E_1 = \operatorname{Nuc} p(f)$ i $E_2 = \operatorname{Nuc} q(f)$.

Prova. $E_1 \subset \operatorname{Nuc} p(f)$ i $E_2 \subset \operatorname{Nuc} q(f)$. Podem escriure $n = \dim E_1 + \dim E_2 \leq \dim \operatorname{Nuc} p(f) + \dim \operatorname{Nuc} q(f) = n$, per tant $E_1 = \operatorname{Nuc} p(f)$ i $E_2 = \operatorname{Nuc} q(f)$. ■

Si ara el polinomi $p(x)$ (o $q(x)$) descompon a sa vegada en factors primers, podem descomposar $\operatorname{Nuc} p(f)$ (o $\operatorname{Nuc} q(f)$) en suma directa de subespais invariants per f i procedir així tantes vegades com sigui necessari. Aconseguim d'aquesta manera el següent resultat.

TEOREMA 3.4 (PRIMER TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓ)
Si el polinomi mínim de f és $m_f(x) = m_1(x)^{n_1} \cdots m_r(x)^{n_r}$ on $m_1(x), \ldots, m_r(x)$ són polinomis irreductibles, llavors l'espai E és suma directa de subespais invariants per $f, E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$ de tal forma que el polinomi mínim de E_i (de la restricció de f a E_i) és $m_i(x)^{n_i}, i = 1, \ldots, r$. Aquesta descomposició és única: $E_i = \operatorname{Nuc}((m_i(f)^{n_i}), i = 1, \ldots, r$.

Prova. Falta només per demostrar la unicitat de la descomposició. Suposem que existeix una descomposició $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$, tal que el polinomi mínim de la restricció de f a E_i és $m_i(x)^{n_i}$, per $i = 1, \ldots, r$. Aquesta darrera condició implica que $E_i \subset \mathrm{Nuc}\,(m_i(f)^{n_i})$, i per tant

$$n = \dim E_1 + \cdots + \dim E_r \leq \dim(\mathrm{Nuc}\,(m_1(f)^{n_1})) + \cdots + \dim(\mathrm{Nuc}\,(m_r(f)^{n_r})) = n,$$

d'on la desigualtat ha de ser una igualtat. Per tant $E_i = \mathrm{Nuc}\,(m_i(f)^{n_i})$ per $i = 1, \ldots, r$. ■

Comentari: Observem que d'aquest resultat es dedueix que sempre existeix un $v_i \in E_i$ tal que el polinomi mínim de v_i és el polinomi mínim de E_i.

Conseqüència immediata és la següent proposició.

Proposició 3.21

Si f és un endomorfisme de E i escollim una base de E formada per bases dels subespais $E_1, \ldots, E_r$ llavors la matriu en aquesta base és de la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & A_r \end{pmatrix},$$

on les matrius $A_1, \ldots, A_r$ tenen la diagonal sobre la de A, i 0 a la resta de llocs.

Com a conseqüència del resultat anterior, l'estudi de la matriu A es redueix al de les matrius A_i, que són precisament les matrius de les restriccions de f a cada un dels subespais en què descompon E.

Exemples 13

(1) *Considerem l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ amb matriu en base canònica*

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}.$$

L'estudi de les combinacions lineals entre les seves potències A^n és molt fàcil ja que $A^2 = I$. Per tant $x^2 - 1$ és un polinomi anul·lador. Ens demanam si és el seu polinomi mínim o existeix un altre de grau menor que també sigui anul·lador. Si és així, aquest altre polinomi ha de dividir $x^2 - 1$. Per tant, només poden ser o bé $x - 1$ o bé $x + 1$. Si $m(x) = x - 1, m(f) = f - I = 0$, d'on $f = I$, cosa que no és veritat. Si $m(x) = x + 1, m(f) = f + I = 0$, d'on $f = -I$. Cap dels dos casos no és el nostre. Per tant

$$m_f(x) = (x-1)(x+1) \text{ i } E = E_1 \oplus E_2,$$

on $E_1 = \mathrm{Nuc}\,(f - I) = \langle(2,1)\rangle, E_2 = \mathrm{Nuc}\,(f + I) = \langle(1,-2)\rangle$. La restricció de f a E_1 és I_{E_1} i la restricció de f a E_2 és $-I_{E_2}$. És a dir, E_1 i E_2 són precisament els subespais dels vectors propis de valors propis 1 i -1. En la base de vectors propis, la matriu resulta ser

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) *Com a generalització de l'exemple anterior, considerem un endomorfisme f tal que $f^2 = I$, és a dir, una involució. El seu polinomi mínim $m_f(x)$ divideix $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ i, passa exactament el mateix que a l'exemple previ. Per tant, $E = E_1 \oplus E_2$, i el polinomi mínim de la restricció de f a E_1 és $x - 1$ i sobre E_1 ha de ser la identitat. Anàlogament, sobre E_2 f ha de ser $-I_{E_2}$. Si $e_1, \ldots, e_r$*

és una base de E_1 i $e_{r+1}, \ldots, e_n$ una base de E_2, llavors la matriu en la base que resulta de la unió d'aquestes dues bases és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

on hi ha r 1 a la diagonal de les r primeres files, i $n-r$ -1 a la diagonal de les $n-r$ darreres files.

(3) Sigui $f : E \to E$ tal que $f^3 = I$. El polinomi $x^3 - 1$ és anul·lador i per tant $m_f(x)|(x^3-1)$. Si E és un $\mathbb{C}-$ e.v. llavors

$$x^3 - 1 = (x-1)\left(x - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Un estudi semblant al de l'exemple anterior ens dóna, per a tots els possibles $m_f(x)$, bases de E en què la matriu de f és diagonal i els valors propis són

$$\left\{1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$$

o un subconjunt d'aquest.

Si E és un $\mathbb{R}-$e.v., llavors $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ i, per tant, $E = E_1 \oplus E_2$. El polinomi mínim de f sobre E_1 és $x-1$ i, per tant, f sobre E_1 és la identitat. El polinomi mínim de f sobre E_2 és x^2+x+1, irreductible. Sigui $e_1, \ldots, e_r$ una base de E_1 i $e_{r+1}, \ldots, e_n$ una base de E_2. La matriu de f en aquesta base és

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Però cap valor propi no permet simplificar A_2.

(4) Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ amb matriu en la base canònica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

És fàcil veure que $m_f(x) = (x-1)^2$. El Primer Teorema de Descomposició no permet descompondre E en suma de subespais invariants, ja que els factors en què descompon m_f no són primers entre ells. Hi ha, però un subespai invariant: el subespai de vectors propis de valor propi 1, $\langle(1,0)\rangle$. Si existeix una base en què f tingués una matriu diagonal, aquesta hauria de ser

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ja que 1 és l'únic vap de f. Però $f \neq id$ i no pot tenir mai la matriu identitat com a matriu associada en cap base.

(5) Sigui f un endomorfisme de E amb matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

en una certa base e_1, e_2, e_3.

En calcular les potències de A *es veu que* $A^3 = A^2$ *i per tant* $x^3 - x^2$ *és un polinomi anul·lador. Així doncs, com que* $m_f(x)|(x^3 - x^2) = x^2(x-1)$ *tenim les següents possiblitats per al polinomi mínim:*

- *Si* $m_f(x) = x - 1$ *llavors* $f = I$, *que és fals.*
- *Si* $m_f(x) = x$, *llavors* $m(f) = f = 0$, *que és fals.*
- *Si* $m_f(x) = x^2$, *llavors* $f^2 = 0$, *que també és fals.*
- *Si* $m_(x) = (x-1)x$, *llavors* $f^2 = f$, *que també és fals.*

Així doncs, $m(x) = x^2(x-1)$ *i* $E = E_1 \oplus E_2$. *Sobre* $E_1 = \mathrm{Nuc}\,(f - I)$ f *és la identitat. Sobre* E_2 f *té polinomi mínim* x^2. *El càlcul de* E_1 *i* E_2 *ens dóna*

$$E_1 = \mathrm{Nuc}\,(f - I) = \langle e_1 \rangle, \quad E_2 = \mathrm{Nuc}\,(f^2) = \langle e_2, e_3 \rangle.$$

Els valors propis de A *són 1 i 0. I els subespais propis respectius són* $\langle e_1 \rangle$ *i* $\langle e_2 + e_3 \rangle$. *Si completam aquests dos vectors fins a una base de* E, $e_1, e_2 + e_3, e_3$ *obtenim que la matriu de* f *en aquesta nova base és*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El següent teorema ens dóna una altra caracterització en termes del polinomi mínim dels endomorfismes diagonalitzables.

Teorema 3.5 (Teorema de diagonalització)
Un endomorfisme f *és diagonalitzable si i només si el seu polinomi mínim* $m(x)$ *descompon en factors lineals no repetits.*

Prova. Suposem primer $m(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_r)$ amb $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$. Pel Primer Teorema de Descomposició, tenim que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$ on $E_i = \mathrm{Nuc}\,(f - a_i \cdot id), i = 1, \ldots, r$ són els subespais propis de valor propi a_i. Existeix una base de E formada per vectors propis i l'endomorfisme és diagonalitzable.

Recíprocament, suposem que f és diagonalitzable i siguin $a_1, \ldots, a_r$ els seus vaps, amb $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$. Sigui $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de veps (que existeix perquè f és diagonalitzable). Si m_v denota el polinomi mínim del vector v per l'endomorfisme f, es té

$$m_f = mcm\{m_{v_1}, \ldots, m_{v_n}\} = mcm\{x - a_1, \ldots, x - a_1, \ldots, x - a_r, \ldots, x - a_r\} = (x - a_1) \cdots (x - a_r).$$

Llavors, m_f té totes les seves arrels dins K i són simples. ■

3.6 Segon Teorema de descomposició. Matriu canònica de Jordan

D'acord amb el Primer Teorema de Descomposició, l'estudi d'un endomorfisme es redueix a l'estudi de les seves restriccions als subespais E_i, que són subespais invariants per f. A continuació, veurem com descompondre cada E_i en suma de subespais invariants sobre els quals f actua de forma clara.

Definició 3.9
Un subespai F *de* E *direm que és* $f-$*cíclic si existeix un vector* $u \in F$ *tal que* $F = \langle u, f(u), f^2(u), \ldots \rangle$.

Proposició 3.22
Si F *és* $f-$*cíclic, llavors*

1) F *és invariant per* f,

2) $\dim F$ *és el grau del polinomi mínim* $m_u(x)$ *de* f *a* u,

3) Si $m_u(x) = a_0 + a_1x + \cdots + x^s$, *llavors* $u, f(u), f^2(u), \ldots, f^{s-1}(u)$ *és una base de* F, *i en aquesta base la matriu de la restricció de* f *és*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{s-1} \end{pmatrix}.$$

Prova. Òbviament F és invariant per f. Per veure 2) basta recordar la Porposició 3.13. Finalment, $f(f^{s-1}(u)) = f^s(u)$ i per altra part, $0 = (m_u(f))(u) = (a_0 \cdot id + a_1 f + \cdots + f^s)(u) = a_0u + a_1f(u) + \cdots + f^s(u)$ d'on s'obté $f^s(u) = -a_0u - a_1f(u) - \cdots - a_{s-1}f^{s-1}(u)$. ∎

Teorema 3.6 (Segon Teorema de Descomposició)
Sigui f *un endomorfisme de* E. *Llavors* E *es suma directa de subespais* $f-$*cíclics.*

Prova. Degut al Primer Teorema de Descomposició, basta considerar el cas en que el polinomi mínim de f és una potència d'un polinomi primer: $m_f(x) = p(x)^s$ amb $p(x)$ primer.

Facem inducció sobre la dimensió n de E. Si $n = 1, E$ ja és $f-$cíclic. Suposem ara que l'enunciat és cert per a espais de dimensió menor o igual que $n-1$.

Sigui E un espai de dimensió n. Segons vàrem veure a un comentari anterior (el de després del Primer Teorema de Descomposició), existeix $u_0 \in E$ tal que el polinomi mínim de f a u_0 és el mateix $m_f(x)$. Sigui

$$F_0 = \langle u_0, f(u_0), f^2(u_0), \ldots \rangle$$

i sigui $\bar{E} = E/F_0$. Vegem que f indueix un endomorfisme $\bar{f}$ sobre $\bar{E}$ definit per

$$\begin{array}{rccc} \bar{f}: & \bar{E} & \longrightarrow & \bar{E} \\ & [v] & \to & [f(v)]. \end{array}$$

Vegem primer que aquest endomorfisme està ben definit: si $[v] = [v']$ llavors $v - v' \in F_0$ i $f(v - v') = f(v) - f(v') \in F_0$ (F_0 és invariant per f), i per tant $[f(v)] = [f(v')]$.

Ara bé, $\dim \bar{E} = \dim E/F_0 < \dim E$ i per la hipòtesi d'inducció $\bar{E} = \bar{F}_1 \oplus \cdots \oplus \bar{F}_r$, amb $\bar{F}_i$ subespai $\bar{f}-$cíclic, $i = 1, \ldots, r$. Sigui $\bar{F}_i = \langle [u_i'], \bar{f}[u_i'], \bar{f}^2[u_i'], \ldots \rangle$.

Podem demostrar (veure el lema següent) que hi ha un representant u_i dins $[u_i']$ tal que, si indicam per F_i el subespai $\langle u_i, f(u_i), f^2(u_i), \ldots \rangle$, l'epimorfisme $\pi_i : F_i \to \bar{F}_i$ definit per $\pi_i(v) = [v]$ és un isomorfisme.

Si suposam demostrat aquest resultat (vegeu Lema 3.2), podem acabar la demostració del teorema comprovant que $E = F_0 \oplus F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$. En efecte, vegem primer que $E = F_0 + F_1 + \cdots + F_r$: si $v \in E$, podem escriure $[v] = [v_1] + \cdots + [v_r]$ amb $[v_i] \in \bar{F}_i$, però el Lema ens permet suposar que $v_i \in F_i$.

Vegem finalment que la suma és directa: suposem que $v \in E$ es pot escriure de dues maneres com a suma de vectors de $F_0, F_1, \ldots, F_r$,

$$v = v_0 + v_1 + \cdots + v_r = w_0 + w_1 + \cdots + w_r,$$

amb $v_i, w_i \in F_i, i = 0, 1, \ldots, r$. Per tant $[v] = [v_1] + \cdots + [v_r] = [w_1] + \cdots + [w_r]$ a $\bar{E} = \bar{F}_1 \oplus \cdots \oplus \bar{F}_r$, que implica $[v_i] = [w_i], i = 1, \ldots, r$. Però pel Lema 3.2 això implica $v_i = w_i, i = 1, \ldots, r$, i finalment també $v_0 = w_0$. ∎

Lema 3.2
Hi ha un representant u_i de $[u_i']$ tal que si denotam per F_i el subespai $\langle u_i, f(u_i), f^2(u_i), \ldots\rangle$, l'epimorfisme $\pi_i : F_i \to \bar{F}_i$ definit per $\pi_i(v) = [v]$ és un isomorfisme.

Prova. Siguin $q(x)^{s'}$ i $q(x)^{\bar{s}}$ els polinomios mínims e f i $\bar{f}$ a u_i' i $[u_i'], \bar{s} \leq s' \leq s$. Llavors

$$q(\bar{f})^{\bar{s}}([u_i']) = [0] \Rightarrow q(f)^{\bar{s}}(u_i') \in F_0 \Rightarrow q(f)^{\bar{s}}(u_i') = a(f)(u_0) \Rightarrow q(f)^{s-\bar{s}}a(f)(u_0) = q(f)^s(u_i') = 0.$$

Llavors $q(x)^s$ divideix $q(x)^{s-\bar{s}}a(x)$ ja que el polinomi mínim de u_0 és $q(x)^s$. Llavors

$$a(x) = q(x)^{\bar{s}}b(x) \Rightarrow q(f)^{\bar{s}}(u_i') = a(f)(u_0) = q(f)^{\bar{s}}b(f)(u_0).$$

El vector $u_i = u_i' - b(f)(u_0) \in u_i' + F_0 = [u_i']$ té un polinomi mínim que divideix $q(x)^{\bar{s}}$ ja que

$$q(f)^{\bar{s}}(u_i' - b(f)(u_0)) = 0.$$

Per altra banda, el polonomi mínim de u_i ha de ser múltiple del de $[u_i] = [u_i']$, que és $q(x)^{\bar{s}}$. Així doncs, el polinomi mínim de u_i és $q(x)^{\bar{s}}$, el mateix que el de $[u_i]$. Els vectors $u_i, f(u_i), \ldots, f^{t-1}(u_i)$ formen una base de F_i, on $t = \bar{s} \cdot \mathrm{grau}(q(x))$. Les classes

$$[u_i], \bar{f}([u_i]), \ldots, \bar{f}^{t-1}([u_i]),$$

formen una base de $\bar{F}_i$ i per tant, la projecció $\pi_i : F_i \to \bar{F}_i$ és un isomorfisme. ■

Suposem ara que el polinomi mínim de f descompon en factor lineals.. Sigui $E = F_0 \oplus \cdots \oplus F_r$ la descomposició donada pel Segon Teorema de Descomposició, en subespais $f-$ cíclics i $(x-a_i)^{s_i}$ el polinomi mínim de la restricció de f a F_i. Triam, per a cada F_i, un vector u_i amb polinomi mínim $(x-a_i)^{s_i}$. Llavors

$$u_i, (f - a_i id)(u_i), \ldots, (f - a_i id)^{s_i - 1}(u_i)$$

són linelament independents. A més a més, com que $\dim F_i = s_i$, resulta que els s_i vectors anteriors formen una base de F_i. La matriu de la restricció de f a F_i en aquesta base és

$$J(a_i, s_i) = \begin{pmatrix} a_i & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & a_i & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & a_i & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_i \end{pmatrix} \in M_{s_i \times s_i}(K).$$

Teorema 3.7 (Matriu canònica de Jordan)
Si el polinomi mínim de $f \in End(E)$ descompon en factors lineals, existeix una base de E en la qual la matriu de f és de la forma

$$J = \begin{pmatrix} J(a_0, s_0) & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & J(a_r, s_r) \end{pmatrix}.$$

Direm que la matriu J és la matriu canònica de Jordan de f.

Prova. Sigui $E = F_0 \oplus F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$ una descomposició de E en subespais $f-$cíclics i sigui $(x-a_i)^{s_i}$ el polinomi mínim de F_i. Sigui $u_i \in F_i, i = 0, 1, \ldots, r$, tal que tengui polinomi mínim $(x-a_i)^{s_i}$. Aleshores, per la Proposició 3.13 els vectors $u_i, (f - a_i \cdot id)(u_i), \ldots, (f - a_i \cdot id)^{s_i-1}(u_i)$ formen una base de F_i. La matriu de la restricció de f a F_i en aquesta base és de la forma $J(a_i, s_i)$. ■

Comentari: Un mateix valor propi pot tenir associats diferents blocs de Jordan de diferents mides. Per tant, la matriu de Jordan global serà

$$J = \begin{pmatrix} J(a_0, s_0^1) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J(a_0, s_0^2) & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & J(a_0, s_0^{k_0}) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & J(a_r, s_r^1) & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & J(a_r, s_r^{k_r}) \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Proposició 3.23
Sigui E l'espai vectorial sobre el cos K de dimensió finita n i $f : E \to E$ un endomorfisme. Suposem que els polinomis característic i mínim de f són respectivament:

$$c_f(x) = (x - a_1)^{m_1}(x - a_2)^{m_2} \cdots (x - a_p)^{m_p},$$
$$m_f(x) = (x - a_1)^{s_1}(x - a_2)^{s_2} \cdots (x - a_p)^{s_p},$$

on a_i són escalars distints dos a dos. Sigui J la matriu de f en forma canònica de Jordan donada per l'expressió (3.2). Per a cada a_i se verifica

i) Existeix qualque $J(a_i, s_i^k)$ de dimensió s_i i la resta de blocs $J(a_i, s_i^j)$ són de dimensió $\leq s_i$.

ii) La suma dels ordres dels $J(a_i, s_i^j)$, $j = 1, \ldots, k_i$, és m_i.

iii) El nombre de blocs de $J(a_i, s_i^j)$ coincideix amb la multiplicitat geomètrica de a_i.

3.6.1 Càlcul de la forma canònica de Jordan

Donat un endomorfisme f, per fer el càlcul pràctic de la seva forma canònica de Jordan tendrem en compte els següents fets:

- Els elements a_i de la diagonal de J són els valors propis de f (possiblement repetits).
- Siguin $c(x) = \pm(x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_r)^{m_r}$ i $m(x) = (x - a_1)^{s_1} \cdots (x - a_r)^{s_r}$ els polinomis característic i mínim de f. Recordem que $m_1 \cdots + m_r = n = \dim E$ i $s_i \leq m_i, i = 1, \ldots, r$. Els enters s_i estan caracteritzats pel fet que

  $$\{0\} \subset \operatorname{Nuc}(f - a_i \cdot id) \subset \operatorname{Nuc}(f - a_i \cdot id)^2 \subset \cdots \subset \operatorname{Nuc}(f - a_i \cdot id)^{s_i - 1} \subset \operatorname{Nuc}(f - a_i \cdot id)^{s_i},$$
  $$\text{i } \operatorname{Nuc}(f - a_i \cdot id)^{s_i - 1} \neq \operatorname{Nuc}(f - a_i \cdot id)^{s_i}.$$

  A més a més, per tot $t \geq s_i$ se verifica que $\operatorname{Nuc}(f - a_i \cdot id)^{s_i} = Nuc(f - a_i \cdot id)^t = E_i$.
- $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$, i per obtenir una base de E en la qual la matriu de f sigui la canònica de Jordan, feim la unió de bases de cada E_i.

Si ens retringim a cada un dels E_i podem suposar que el polonomi característic de f és $(x - \lambda)^n$ i el polinomi mínim $(x - \lambda)^s, s \leq n$. Per simplicitat, designarem l'endomorfisme $(f - \lambda \cdot id)$ per g.

Per trobar una base en què f s'escrigui en forma canònica de Jordan, hem de trobar una base adient de n vectors. Si hi ha n vectors a $\operatorname{Nuc} g$ llavors ja hem acabat y f és diagonalitzable. Si no, hem de cercar els vectors que ens falten a un espai més gros, per exemple a $\operatorname{Nuc} g^2, \operatorname{Nuc} g^3$ i així succesivament. Ens hem d'aturar quan $\operatorname{Nuc} g^r$ tengui dimensió n. L'única precaució que hem de tenir és que a cada passa hem de triar d'una forma adequada els vectors per a que l'expressió matricial resulti del tipus que hem descrit anteriorment. Per això començam amb un element u_1 tal que $u_1 \in \operatorname{Nuc} g^r$ però $u_1 \notin \operatorname{Nuc} g^{r-1}$. Això és, $g^r(u_1) = 0$ y $g^{r-1}(u_1) \neq 0$. Ara, no és difícil veure que se dóna el següent diagrama

$$u_1 \overset{g}{\mapsto} g(u_1) \overset{g}{\mapsto} g^2(u_1) \overset{g}{\mapsto} \cdots \overset{g}{\mapsto} g^{r-1}(u_1) \overset{g}{\mapsto} 0$$

que excepte el zero són vectors no nuls i independents. A més a més $g(u_1) \in \operatorname{Nuc} g^{r-1}$, però $g(u_1) \notin \operatorname{Nuc} g^{r-2}$, $g^2(u_1) \in \operatorname{Nuc} g^{r-2}$, però $g^2(u_1) \notin \operatorname{Nuc} g^{r-3}$, i així successivament fins que $g^{r-1}(u_1) \in \operatorname{Nuc} g$, però $g^{r-1}(u_1) \neq 0$.

Tenint en compte que $g(u_1) = f(u_1) - \lambda u_1$ se té que $f(u_1) = \lambda u_1 + g(u_1)$, i aleshores les seves coordenades en la base $\{u_1, g(u_1), g^2(u_1), \dots g^{r-1}(u_1)\}$ són $(\lambda, 1, 0, \dots, 0)$. De igual forma $g^2(u_1) = g(g(u_1)) = f(g(u_1)) - \lambda g(u_1)$ i aïllant obtenim $f(g(u_1)) = \lambda g(u_1) + g^2(u_1)$ pel que $f(g(u_1))$ té coordenades $(0, \lambda, 1, \dots, 0)$. D'aquesta forma tendrem un bloc de Jordan complet de mida $r \times r$.

Repetim aquest procés sempre que sigui possible. És a dir, cercam ara u_2 independent amb u_1 que estigui a $\operatorname{Nuc} g^r$ però no a $\operatorname{Nuc} g^{r-1}$. Tornam a tenir una successió similar a l'anterior que donarà lloc a un altre bloc de Jordan de mida $r \times r$. Continuam aquest procés fins que sigui possible, és a dir, mentre poguem trobar vectors $u_i \in \operatorname{Nuc} g^r \setminus \operatorname{Nuc} g^{r-1}$. Quan ja no sigui possible, farem un raonament similar a l'anterior però ara a l'espai $\operatorname{Nuc} g^{r-1}$: triarem un vector $v_1 \in \operatorname{Nuc} g^{r-1} \setminus \operatorname{Nuc} g^{r-2}$ i que sigui independent amb $g(u_1), g(u_2), \dots$. En aquest pas obtendrem blocs de Jordan de mida $(r-1) \times (r-1)$.

L'esquema final serà de la forma

$\operatorname{Nuc} g^r = \operatorname{Nuc}(f-\lambda I)^r$	$u_1\ u_2 \dots$				
$\operatorname{Nuc} g^{r-1} = \operatorname{Nuc}(f-\lambda I)^{r-1}$	$g(u_1)\ g(u_2) \dots$	$v_1 \dots$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
$\operatorname{Nuc} g^2 = \operatorname{Nuc}(f-\lambda I)^2$	$g^{r-2}(u_1)\ g^{r-2}(u_2) \dots$	$g^{r-3}(v_1) \dots$	$\dots$	$w_1\ w_2 \dots$	
$\operatorname{Nuc} g = \operatorname{Nuc}(f-\lambda I)$	$g^{r-1}(u_1)\ g^{r-1}(u_2) \dots$	$g^{r-2}(v_1) \dots$	$\dots$	$g(w_1)\ g(w_2)\ \dots$	$z_1 \dots$

Exemple 14: *Calculam la forma canònica de Jordan de l'endomorfisme amb matriu en base canònica*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Primer de tot calculam el seu polinomi característic:

$$c(x) = |A - xI| = (x-2)^4.$$

Per tant, la matriu A té un únic vap ($\lambda = 2$) *amb multiplicitat algebraica* $m = 4$. *Calculam la multiplicitat geomètrica*

$$\dim \mathbb{R}^4(2) = 4 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2,$$

i per tant, l'endomorfisme no és diagonalitzable.

Calculam les dimensions dels espais $\operatorname{Nuc}(A-2I)^k, k \geq 2$, *fins que tenguem el polinomi mínim, és a dir, fins que la dimensió coincideixi amb la multiplicitat algebraica.*

$$\dim \operatorname{Nuc}(A-2I)^2 = 4 - \operatorname{rang}(A-2I)^2 = 4 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3.$$

Finalment $\dim \operatorname{Nuc}(A-2I)^3 = 4 - \operatorname{rang}(A-2I)^3 = 4$, *ja que* $(A-2I)^3 = 0$, *el que ens diu que el polinomi mínim de* f *és* $m(x) = (x-2)^3$.

Per trobar una base en què l'endomorfisme tengui la forma canònica de Jordan hem de triar un vector $u_1 \in \operatorname{Nuc}(A-2I)^3$ *però tal que* $u_1 \notin \operatorname{Nuc}(A-2I)^2$. *Com que* $\operatorname{Nuc}(A-2I) = \{(x_1, x_2, 0, x_4)\}$ *i* $\operatorname{Nuc}(A-2I)^3 = \mathbb{R}^4$ *podem triar* $u_1 = (0,0,1,0)$. *Aleshores, calculam les potències per* $g = f - 2\cdot id$ *d'aquest vector:* $g(0,0,1,0) = (A-2I)(0,0,1,0) = (3,0,0,1), g^2(0,0,1,0) = (0,6,0,0), g^3(0,0,1,0) = 0$. *Observem que amb aquesta successió ja tenim 3 vectors linealment independents. Ens falta triar només un més, que pot ser un vector propi, per exemple* $z = (-3,0,0,1)$. *L'esquema final serà de la forma*

$\operatorname{Nuc} g^3 = \operatorname{Nuc}(f-2I)^3$	$u_1 = (0,0,1,0)$	
$\operatorname{Nuc} g^2 = \operatorname{Nuc}(f-2I)^2$	$g(u_1) = (3,0,0,1)$	
$\operatorname{Nuc} g = \operatorname{Nuc}(f-\lambda I)$	$g^2(u_1) = (0,6,0,0)$	$z = (-3,0,0,1)$

En aquesta base $\{u_1, g(u_1), g^2(u_1), z\}$ *l'endomorfisme* f *s'escriu:*

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

ja que

$$\begin{array}{lll} Au_1 - 2u_1 = g(u_1) & \Rightarrow & f(u_1) = Au_1 = 2u_1 + g(u_1) = (2,1,0,0) \\ Ag(u_1) - 2g(u_1) = g^2(u_1) & \Rightarrow & f(g(u_1)) = Ag(u_1) = 2g(u_1) + g^2(u_1) = (0,2,1,0) \\ Ag^2(u_1) - 2g^2(u_1) = 0 & \Rightarrow & f(g^2(u_1)) = Ag^2(u_1) = 2g^2(u_1) = (0,0,2,0) \\ Az - 2z = 0 & \Rightarrow & f(z) = Az = 2z = (0,0,0,2). \end{array}$$

Observem que aquesta forma canònica de Jordan té dos blocs, tots dos associats al valor propi 2: un de mida 3×3 *i un altre de mida* 1×1. *La forma canònica de Jordan de la matriu inicial és única excepte per la col·locació d'aquests dos blocs.*

EXEMPLE 15: *Determina la forma canònica de Jordan de l'endomorfisme que en base canònica té per matriu*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Evidentment, també volem trobar la base en què l'endomorfisme s'escriu en forma de Jordan.

El polinomi característic de l'endomorfisme és $p(x) = -(x+2)^3$, *pel que la multiplicitat algebraica és* $m = 3$. *Per altra banda, l'espai propi de* $\lambda = -2$ *és* $\operatorname{Nuc}(A+2I) = \langle(1,1,1)\rangle$ *que té dimensió 1. Això implica que* f *no és diagonalitzable. Calculam els nuclis de les potències de* $A + 2I$:

$$\operatorname{Nuc}(A+2I) = \langle(1,1,1)\rangle \subset \operatorname{Nuc}(A+2I)^2 = \langle(1,0,1),(0,1,0)\rangle \subset \operatorname{Nuc}(A+2I)^3 = \mathbb{R}^3.$$

Per tant, cercam una base adequada de $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Nuc}(A+2I)^3$ *tal que la matriu associada a* f *en aquesta base s'escrigui en forma canònica de Jordan. Escollim un vector* $u_1 \in \operatorname{Nuc}(A+2I)^3 \setminus \operatorname{Nuc}(A+2I)^2$, *per exemple* $u_1 = (1,0,0)$. *Calculam les potències d'aquest vector per* $g = f + 2id$:

$$\begin{aligned} g(u_1) &= (A+2I)(u_1) = (0,-1,0), \\ g^2(u_1) &= (A+2I)^2(u_1) = (-1,-1,-1), \\ g^3(u_1) &= (A+2I)^3(u_1) = (0,0,0). \end{aligned}$$

D'aquesta forma ja aconseguim una base de $\mathbb{R}^3, \{u_1, g(u_1), g^2(u_1)\}$, *tal que*

$$\begin{array}{lll} Au_1 + 2u_1 = g(u_1) & \Rightarrow & f(u_1) = Au_1 = -2u_1 + g(u_1) = (-2,1,0) \\ Ag(u_1) + 2g(u_1) = g^2(u_1) & \Rightarrow & f(g(u_1)) = Ag(u_1) = -2g(u_1) + g^2(u_1) = (0,-2,1) \\ Ag^2(u_1) + 2g^2(u_1) = 0 & \Rightarrow & f(g^2(u_1)) = Ag(u_1) = -2g^2(u_1) = (0,0,-2), \end{array}$$

pel que la matriu associada a l'endomorfisme en aquesta base és

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3.6.2 Construcció d'un bloc real de Jordan

En aquesta secció estudiarem com és la forma canònica de Jordan real d'una matriu real en el cas de vaps complexos. Observem que si la matriu és complexa no té perquè tenir una forma canònica de Jordan real. Per això necessitam el següent resultat.

PROPOSICIÓ 3.24

Sigui V un $\mathbb{C}-$e.v. de dimensió n, $f \in End(V), B$ una base de V i A la matriu de f en aquesta base B. Se verifiquen els següents fets:

1) *Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ és un vap de f amb multiplicitat algebraica m, llavors $\bar{\lambda}$ és un vap de f amb la mateixa multiplicitat m.*

2) *Si $E_1(\lambda) = \mathrm{Nuc}\,(A - \lambda I), E_2(\lambda) = \mathrm{Nuc}\,(A - \lambda I)^2, \ldots, E_s(\lambda) = \mathrm{Nuc}\,(A - \lambda I)^s$ és la successió de subespias associats a λ llavors els subespais associats a $\bar{\lambda}$ són $E_j(\bar{\lambda}) = \bar{E}_j, j = 1, \ldots, s$.*

3) *La multiplicitat geomètrica de λ i de $\bar{\lambda}$ són iguals.*

4) *Si $B_\lambda = \{u_1 + iv_1, \ldots, u_m + iv_m\}$ és una base de $E_s(\lambda)$ llavors una base de $E_s(\bar{\lambda})$ és $B_{\bar{\lambda}} = \{u_1 - iv_1, \ldots u_m - iv_m\}$ i, per tant, una base de $E_s(\lambda) \oplus E_s(\bar{\lambda})$ és la unió de les dues bases anteriors.*

5) *Una base real de $E_s(\lambda) \oplus E_s(\bar{\lambda})$ és*

$$B = \{u_1, v_1, \ldots, u_m, v_m\}.$$

6) *Sigui $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$ un bloc de Jordan d'ordre $r \times r$ sobre $\mathbb{C}$ associat als vectors $z, g(z) = (A - \lambda I)(z), \ldots, g^{r-1}(z) = (A - \lambda I)^{r-1}(z)$, (amb $r \leq s$) en la base B_λ. Llavors, el bloc de Jordan associat a la mateixa successió en la base $B_{\bar{\lambda}}$ serà*

$$\bar{J} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \bar{\lambda} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{\lambda} \end{pmatrix}.$$

7) *Agafant la base B com a base de $E_s(\lambda) \oplus E_s(\bar{\lambda})$ el bloc de Jordan sobre $\mathbb{R}$ corresponent als blocs d'ordre r associats als vaps $\lambda = a + bi, \bar{\lambda} = a - bi$ és de la forma*

$$\begin{pmatrix} C & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ I & C & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & I & C \end{pmatrix}$$

on

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad I = I_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que és un bloc de mida $2r \times 2r$.

A la pràctica, si $\lambda = a + bi$ és un vap complex de f de multiplicitat algebraica m, llavors farem el següent procés:

i) Calculam els subespais complexes associats a $\lambda : E_1(\lambda) = \mathrm{Nuc}\,(f - \lambda id), \ldots, E_s(\lambda) = \mathrm{Nuc}\,(f - \lambda id)^s$, i les seves corresponents dimensions $n_1, \ldots, n_s$.

ii) Calculam el bloc complex de Jordan associat a λ. Ara, per obtenir el bloc real associat als vaps $\lambda, \bar{\lambda}$ basta sustituir el vap λ per la caixa C definida a la proposició anterior, i els 1 (si els hi ha) de la subdiagonal per la matriu I.

iii) Calculam a continuació una base complexa de $E_s(\lambda)$, $B_\lambda = \{v_1, \ldots, v_m\}$.

iv) El bloc de base canònica real associat als vaps $\lambda, \bar{\lambda}$ serà de la forma

$$B = \{Re(v_1), Im(v_1), \ldots, Re(v_m), Im(v_m)\}.$$

Exemple 16: *Sigui f un endomorfisme que en base canònica té per matriu*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculam la forma canònica de Jordan, complexa i real, i les bases corresponents.

El polinomi característic de f és $p(x) = (x^2 - 2x + 2)^2 = (x - (1 + i))^2(x - (1 - i))^2$. Per tant tenim dos vaps complexes dobles: $\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$.

Si calculam el subespai propi de λ_1 obtenim que és $\mathbb{C}(\lambda_1) = \mathrm{Nuc}\,(A - \lambda_1 I) = \langle(-2, -1+i, 2, 0), (-2i, -1-i, 0, 2)\rangle$ i per tant la matriu diagonalitza en els complexes. La matriu canònica de Jordan complexa serà

$$J_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

i la base en què l'endomorfisme s'escriu així és la base dels vectors propis, és a dir $B_{\mathbb{C}} = \{(-2, -1 + i, 2, 0), (-2i, -1 - i, 0, 2), (-2, -1 - i, 2, 0), (2i, -1 + i, 0, 2)\}$.

Per obtenir ara la forma real de Jordan hem de canviar la diagonal pels blocs C de la proposició i, com que no hi ha 1 a la subdiagonal no hem de fer res més:

$$J_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La base en aquest cas serà $B_{\mathbb{R}} = \{(-2, -1, 2, 0), (0, 1, 0, 0), (0, -1, 0, 2), (-2, -1, 0, 0)\}$.

Exemple 17: *Fem el mateix que a l'exemple anterior però ara per l'endomorfisme amb matriu*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

El polinomi característic és el mateix que a l'exemple anterior $p(x) = (x^2 - 2x + 2)^2 = (x - (1 + i))^2(x - (1 - i))^2$ i per tant tornam tenim dos vaps complexes dobles: $\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$.

Si ara calculam la dimensió del subespai propi obtenim que $\mathrm{Nuc}\,(A - \lambda_1 I) = \langle(-1 - i, -1, 1, 1)\rangle$ i per tant la matriu no diagonalitza. Continuam amb el procés après a la subsecció anterior i obtenim

$\mathrm{Nuc}\,(A-\lambda_1 I)^2 = \langle(-2,-1+i,2,0),(-2i,-1-i,0,2)\rangle$. *Les matrius en forma canònica complexa i real de Jordan seran*

$$J_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-i \end{pmatrix}, \qquad J_{\mathbb{R}} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Ara hem de trobar les bases en què l'endomorfisme s'escriu de les formes anteriors. Per la base canònica, escollim un vector $u_1 \in \mathrm{Nuc}\,(A-\lambda I)^2 \setminus \mathrm{Nuc}\,(A-\lambda I)$, *per exemple* $u_1 = (-2,-1+i,2,0)$. *Si li aplicam* $g = f - \lambda_1 id$ *al vector anterior obtenim:*

$$g(u_1) = (A-\lambda_1 I)(u_1) = (-2i,-1-i,1-i,-1-i),$$

i per tant la base complexa serà $B_{\mathbb{C}} = \{(-2,-1+i,2,0),(-2i,-1-i,1-i,-1-i),(-2,-1-i,2,0),(2i,-1+i,-1+i,-1+i)\}$.

Per altra part, la base real serà

$$\begin{aligned} B_{\mathbb{R}} &= \{Re(-2,-1+i,2,0), Im(-2,-1+i,2,0), Re(-2i,-1-i,1-i,-1-i), \\ &\quad Im(-2i,-1-i,1-i,-1-i)\} = \\ &= \{(-2,-1,2,0),(0,1,0,0),(0,-1,1,-1),(-2,-1,-1,-1)\}. \end{aligned}$$