Problemes d'Àlgebra Lineal i Matemàtica discreta. Treball autònom.

Tema 1: Matrius i determinants

1) Trobau la forma escalonada reduïda per files i el rang de les següents matrius:

$$1)\begin{pmatrix}1&2&-3&-2\\4&1&1&5\\2&-3&7&9\end{pmatrix}\quad 2)\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\0&1&-1&-1\\1&1&0&2\end{pmatrix}\quad 3)\begin{pmatrix}1&2&5&1\\-1&1&2&0\\1&1&3&1\end{pmatrix}$$

$$4)\begin{pmatrix}1&0&1&2\\-1&1&1&0\\1&-1&0&1\\1&-1&2&3\end{pmatrix}\quad 5)\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\2&1&1&0\\5&2&3&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}\quad 6)\begin{pmatrix}-1&2&4&-4\\-2&4&0&-2\\1&-2&-2&2\\-2&4&-1&-2\end{pmatrix}$$

$$7)\begin{pmatrix}-1&2&11&-6\\0&0&-8&4\\-1&2&-20&6\\0&0&-16&6\end{pmatrix}\quad 8)\begin{pmatrix}1&1&-3&-1\\2&1&-2&1\\1&1&1&3\\1&2&-3&1\end{pmatrix}\quad 9)\begin{pmatrix}-1&3&3&3&4\\4&1&1&1&-3\\1&0&1&3&0\\0&3&4&6&4\end{pmatrix}$$

$$10)\begin{pmatrix}-1&3&3&3&4\\4&1&1&1&-3\\1&2&-1&3&-2\\5&3&0&4&-5\end{pmatrix}\quad 11)\begin{pmatrix}2&-1&1&-1&1\\2&-1&0&-3&2\\3&0&-1&1&-3\\2&2&-2&5&-6\end{pmatrix}$$

$$12)\begin{pmatrix}1&1&0&-3&-1&0\\1&-1&2&-1&0&0\\4&-2&6&3&-4&0\\2&4&-2&4&-7&0\end{pmatrix}\quad 13)\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&7\\3&2&1&1&-3&-2\\0&1&2&2&6&23\\5&4&3&3&-1&12\end{pmatrix}$$

$$14)\begin{pmatrix}1&-2&1&-1&1&0\\2&1&-1&2&-3&0\\3&-2&-1&1&-2&0\\2&-5&1&-2&2&0\end{pmatrix}\quad 15)\begin{pmatrix}1&-2&1&1&-1&0\\2&1&-1&-1&1&0\\1&7&-5&-5&5&0\\3&-1&-2&1&-1&0\end{pmatrix}$$

2) Comprovau si són o no invertibles les següents matrius i, en cas de ser-ho, calculau la corresponent inversa:

$$1)\begin{pmatrix}0&-1&1&-1\\-1&1&-1&-1\\-2&0&-1&-1\\2&1&1&0\end{pmatrix}\quad 2)\begin{pmatrix}0&-1&1&-1\\0&1&0&-1\\-1&-1&1&-1\\0&-1&1&0\end{pmatrix}\quad 3)\begin{pmatrix}0&-1&1&-1\\-1&1&-1&-1\\-4&5&-2&-7\\2&-2&1&3\end{pmatrix}$$

$$4)\begin{pmatrix}0&-1&1&-1\\-1&1&-1&-1\\-2&4&-1&-5\\2&-3&1&4\end{pmatrix}\quad 5)\begin{pmatrix}0&-1&1&-1\\0&1&0&-1\\2&0&1&1\\6&-1&3&4\end{pmatrix}\quad 6)\begin{pmatrix}0&-1&1&-1\\-1&1&-1&-1\\4&-3&2&5\\2&-2&1&3\end{pmatrix}$$

$$7)\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&1\\-3&-2&-1\end{pmatrix}\quad 8)\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-2\\0&1&-1\end{pmatrix}\quad 9)\begin{pmatrix}1&-1&1\\-2&-1&-1\\3&2&1\end{pmatrix}\quad 10)\begin{pmatrix}3&2&0\\0&1&0\\6&6&1\end{pmatrix}$$

$$11)\begin{pmatrix}1&-1&1\\3&1&2\\4&1&3\end{pmatrix}\quad 12)\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&1\\5&2&3\end{pmatrix}\quad 13)\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&3&-2\\0&-1&1\end{pmatrix}\quad 14)\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&2\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

3) Sigui A la matriu

$$A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Demostrau que A és nilpotent d'índex 3 ($A^3=0$) i que I_3+A+A^2 és la inversa de I_3-A.

4) Sigui A la matriu

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&0&0\\2&2&0&0\\2&2&0&0\end{pmatrix}$$

- Calculau A^n per a tot n enter positiu.
- Sigui $B=A+I_4$. Calculau les potències de B en funció de A.
- Demostrau que la inversa de A és A^2-A+I_4.

5) Calculau les potències n-èsimes de les següents matrius:

$$1.)\ A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad 2.)\ B=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

6) Donada la matriu de nombres complexos

$$A=\begin{pmatrix}4&2&2i\\2&1&i\\2i&i&-1\end{pmatrix},$$

demostrau per inducció que $A^n=4^{n-1}A$.

7) Donada la matriu de nombres reals

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix},$$

demostrau per inducció que

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 2^{n-1}-1 & 1 & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

8) Siguin a, b, c nombres reals tals que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ i considerem la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostrau que la matriu $M = A^2 + I_3$ és simètrica i idempotent ($M^2 = M$).

9) Donat α real, trobau la inversa de la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sen(\alpha) & 0 \\ sen(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10) Calculau els següents determinants:

1. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -6 & 7 \end{vmatrix}$
2. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & 8 \end{vmatrix}$
3. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$
4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 40 \\ -3 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$
5. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$
6. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$
7. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{vmatrix}$
8. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$
9. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & 7 & -3 \\ 2 & 7 & -5 & 4 \\ -3 & 2 & -2 & 7 \end{vmatrix}$
10. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$
11. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ -10 & 6 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$
12. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

11) Resoleu la següent equació si el determinant és 9×9:

$$\begin{vmatrix} x^2 & 9 & \dots & 9 \\ 9 & x^2 & \dots & 9 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 9 & 9 & \dots & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

12) Resoleu la següent equació:

$$\begin{vmatrix} x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ 2x-4 & x^2-4 & x^3-8 \\ 3x-9 & x^2-9 & x^3-27 \end{vmatrix} = 0$$

13) Calculau els següents determinants:

$$1.\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \ln 2 & \ln 4 & \ln 8 & \ln 16 \\ \ln 3 & \ln 9 & \ln 27 & \ln 81 \\ \ln 5 & \ln 25 & \ln 125 & \ln 625 \end{vmatrix} \qquad 2.\ \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix}$$

14) Calculau el rang de les següents matrius segons els valors dels paràmetres:

$$1.\ \begin{pmatrix} a & a & b & b \\ b & a & a & b \\ b & b & a & a \\ a & b & b & a \end{pmatrix} \qquad 2.\ \begin{pmatrix} 2 & a & b & a+b \\ a & a & 0 & 0 \\ b & 0 & b & 0 \\ a+b & 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}$$

$$3.\ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix} \qquad 4.\ \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & b & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

15) Calculau per a quins valors de a la matriu

$$A = \begin{pmatrix} -a & a-1 & a+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-a & a+3 & a+7 \end{pmatrix}$$

és invertible i en aquests casos calculau la seva inversa.

16) Resoleu la següent equació on el determinant és $n \times n$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 1+x & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 1+x & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 1+x \end{vmatrix} = 0$$