Contents

Chapter 3

Formes multilineals. Determinants

En aquest tema formalitzarem els coneixements que ja tenim de determinants de matrius. Si consideram el conjunt de les matrius $n \times n$ sobre un cos K, el determinant d'una d'aquestes matrius és un element de K que cumpleix les següents propietats: si multiplicam per $\lambda \in K$ els elements d'una columna, llavors el determinant queda multiplicat per λ; si una columna és suma de dos, el determinant és suma dels determinants calculats amb cada una de les columnes sumands; si dues columnes són iguals, el determinanat és zero.

Abans d'introduir els conceptes principals necessitam formalitzar la noció de permutació que coneixem de manera informal dels temes de combinatòria.

3.1 Permutacions

Trobareu tots els detalls d'aquest tema al llibre "Àlgebra lineal i geometria" de Manuel Castellet i Irene Llerena.

Definició 3.1
Sigui $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un conjunt amb n elements. Una permutació de A és una aplicació bijectiva $\sigma : A \to A$.

Observem que la composició de permutacions és clarament una permutació. A més a més es compleixen les següents propietats:

- Associativa: $\sigma \circ (\rho \circ \tau) = (\sigma \circ \rho) \circ \tau$.
- Element neutre: hi ha una permutació I tal que $\sigma \circ I = I \circ \sigma = \sigma$, per tot σ (l'apliació identitat).
- Element oposat: per cada σ hi ha una permutació σ^{-1} tal que $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = I$.

El conjunt de les permutacions de A el denotarem per S_A. A partir de les tres propietats anteriors tenim el següent resultat de manera immediata.

Proposició 3.1
El conjunt S_A amb l'operació composició és un grup.

A l'operació composició li direm també producte i ens estalviarem el signe $\circ$. Per tant escriurem $\sigma\tau$ per $\sigma \circ \tau$. També per simplificar la notació a partir d'ara considerarem que $A = \{1, \ldots, n\}$ i el conjunt de permutacions del conjunt anterior el denotarem per S_n. Si A és qualsevol altre conjunt de n elements les propietats de S_A són exactament les mateixes que les de S_n.

Per donar una permutació concreta σ haurem de dir quines són les imatges de cada un dels elements $1, 2, \ldots, n$. Una manera fàcil de fer-ho és la següent escriptura

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Tenim el següent resultat.

Proposició 3.2
Si $n \geq 3$, S_n no és commutatiu.

Prova. Per demostrar-ho basta donar-ne un exemple- Considerem la composició de les següents dues permutacions:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 3 & 2 & 1 & 4 & \dots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 3 & 2 & 4 & \dots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 3 & 1 & 2 & 4 & \dots & n \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 3 & 2 & 4 & \dots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 3 & 2 & 1 & 4 & \dots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 3 & 1 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Per $n = 2$ el grup de permutacions només té dos elements $S_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ i és un grup commutatiu. ∎

Un element j es diu fix per una permutació σ si $\sigma(j) = j$. Si j no és fix, podem formar la successió

$$j, \sigma(j), \sigma^2(j), \dots, \sigma^r(j), \dots$$

Com que $\{1, \dots, n\}$ és un conjunt finit en algun moment $\sigma^r(j) = \sigma^h(j)$. A més a més el primer element que es repeteix és el mateix j, per ser σ bijectiva (provau-ho). Per tant, de la successió anterior consideram el subconjunt

$$j, \sigma(j), \dots, \sigma^{r-1}(j)$$

diferents i $\sigma^r(j) = j$. Direm que la permutació σ és un cicle d'ordre r si deixa fixos tots els element que no apareixen en la successió anterior. En aquest cas, canviarem la notació i designarem σ perm

$$\sigma = (j, \sigma(j), \sigma^2(j), \dots, \sigma^{r-1}(j)).$$

Exemple 1: *Al grup S_5 considerem la següent permutació:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (2, 3, 1, 5).$$

En el cas que la permutació σ no sigui un únic cicle, considerem un j_1 no fix per σ i diferent de $j, \sigma(j), \dots, \sigma^{r-1}(j)$. Hi haurà una altra successió

$$j_1, \sigma(j_1), \dots, \sigma^{r_1-1}(j_1)$$

diferents i $\sigma^{r_1}(j_1) = j_1$. És evident que cap element de la successió anterior surt a la successió d'imatges de j. Repetim aquest procés tantes vegades com sigui necessari fins a esgotar tots els elements no fixos per σ. Els elements de cada un d'aquests cicles són diferents dels anteriors. Observem també que aquests cicles commuten entre ells, ja que afecten elements diferents.

Exemples 2

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 7 & 5 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} = (1, 4, 5, 2)(3, 7).$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = (1, 2)(3, 4).$

(3) $I = (1)(2)(3) \cdots (n).$

Dels comentaris i exemples anteriors, se segueix immediatament el següent resultat.

Proposició 3.3
Tota permutació és producte de cicles.

Els cicles d'ordre 2 (és a dir que tenen 2 elements) els anomenarem transposicions.

PROPOSICIÓ 3.4
Tot cicle és un producte de transposicions.

Prova. Així és, ja que

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m) = (a_1, a_2)(a_2, a_3) \cdots (a_{m-1}a_m).$$

■

EXEMPLES 3

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 7 & 5 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} = (1,4,5,2)(3,7) = (1,4)(4,5)(5,2)(3,7).$

(2) $I = (1,2)(2,1)(3,4)(4,3)\cdots(n-1,n)(n,n-1)$ *si* n *és parell o bé* $I = (1,2)(2,1)(3,4)(4,3)\cdots(n-2,n-1)(n-1,n-2)$ *si* n *és senar.*

Observam dels exemples anteriors que tota permutació se pot escriure de moltes maneres com a producte de transposicions. Però aquestes maneres tenen qualque cosa en comú (deixam la demostració per l'assignatura d'àlgebra abstracta I).

PROPOSICIÓ 3.5
Si $\sigma = \tau_p \cdots \tau_1 = \rho_q \cdots \rho_1$ *són dues descomposicions de la permutació* σ *com a producte de transposicions llavors* p *i* q *tenen la mateixa paritat.*

Com a conseqüència del resultat anterior podem dividir les permutacions en dos grups: aquelles que tenen una descomposició en un nombre parell de transposicions (que direm que són permutacions parelles) i aquelles que tenen una descomposició en un nombre senar (que direm que són permutacions senars).

El producte de permutacions parelles o senars segueixen la regla dels signes, és a dir, el producte de dues parelles o de dues senars és parella; i el producte d'una senar per una parella és senar. Aquest fet motiva l'assignació a les permutacions parelles del signe "+" i a les permutacions senars del signe "-".

DEFINICIÓ 3.2
Anomenarem aplicació signe a l'aplicació:

$$\varepsilon : S_n \to \{+1, -1\}$$

tal que $\varepsilon(\sigma) = +1$ *si* σ *és parella i* $\varepsilon(\sigma) = -1$ *si* σ*és senar.*

Es compleix que $\varepsilon(I) = 1$ per qualsevol n i $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$. En particular, si $(a_1, \ldots, a_m)$ és un cicle d'ordre m llavors $\varepsilon(a_1, \ldots, a_m) = (-1)^{m-1}$.

3.2 Formes multilineals. Formes antisimètriques. Determinants

Amb les condicions que demanam al concepte de determinant i que hem descrit a la introducció del tema, només hi ha una alternativa a l'hora de definir el què és el determinant d'una matriu. Dedicarem aquest tema a estudiar aquest concepte i les seves propietats.

A partir d'ara E serà un $K-$e.v. de dimensió $n \geq 1$, amb K un cos de característica diferent de 2 $(1 + 1 \neq 0)$. Definim forma multilineal alternada sobre E.

DEFINICIÓ 3.3
L'aplicació $D : E^n \to K$ *és una forma multilineal alternada si es verifica:*

1) D *és lineal en cada variable (multilineal), és a dir:*

(a) $D(x_1,\ldots,x_i+x_i',\ldots,x_n)=D(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)+D(x_1,\ldots,x_i',\ldots,x_n)$,

(b) $D(x_1,\ldots,ax_i,\ldots,x_n)=aD(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$.

2) $D(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_n)=0$, *sempre que* $x_i=x_j$ *amb* $i\neq j$ *(alternada).*

Proposició 3.6

El conjunt, diguem-li $FMA(E)$*, de les formes multilineals i alternades sobre* E*, té estructura de* $K-$*e.v. si consideram la suma* $D+D'$ *i l'operació externa* aD *definides per:*

$$(D+D')(x_1,\ldots,x_n)=D(x_1,\ldots,x_n)+D'(x_1,\ldots,x_n),$$
$$(aD)(x_1,\ldots,x_n)=aD(x_1,\ldots,x_n).$$

Comentari: Observau que en el cas $n=1$, la definició anterior (la condició 2 no es pot aplicar) no és res més que la definició d'aplicació lineal entre E i K (forma lineal). És $FMA(E)=L(E,K)=E^*$.

Exemple 4: *La forma* $D:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *definida per* $D((a,b),(c,d))=ad-bc$ *és una forma 2-lineal (bilineal) alternada sobre* $\mathbb{R}^2$.

Enunciam en el següent resultat algunes de les propietats de les formes multilineals:

Proposició 3.7

Si $D:E^n\to K$ *és una forma multilineal alternada, es verifiquen les següents propietats:*

1) *a)*$D(x_1,\ldots,0,\ldots,x_n)=0$.

2) $D(x_1,\ldots,x_i,..,x_j,..,x_n)=-D(x_1,\ldots,x_j,..,x_i,..,x_n)$ *amb* $i\neq j$ *(*D *és antisimètrica).*

3) $D(x_1,\ldots,x_i,..,x_n)=0$, *sempre que* x_i *sigui una combinació lineal dels altres vectors.*

4) $D(x_1,\ldots,x_i,..,x_n)=D(x_1,\ldots,x_i+\sum_{j\neq i}a_jx_j,..,x_n)$.

5) *Si* $(x_1,\ldots,x_n)$ *és una llista de vectors linealment dependents, llavors* $D(x_1,\ldots,x_n)=0$.

6) $D(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})=\varepsilon(\sigma)D(x_1,\ldots,x_n)$*, per tota* σ*permutació de* $1,\ldots,n$*. (Recordem que* $\varepsilon(\sigma)$ *indica la signatura de* σ*, és a dir,* $\varepsilon(\sigma)=+1$*, si* σ *és un producte d'un nombre parell de transposicions i* $\varepsilon(\sigma)=-1$ *en cas contrari).*

Prova.

1) $D(x_1,\ldots,0,\ldots,x_n)=D(x_1,\ldots,0x_i,\ldots,x_n)=0D(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)=0$.

2) Se donen les següents igualtats

$$0=D(x_1,\ldots,x_i+x_j,..,x_i+x_j,..,x_n)=D(x_1,\ldots,x_i,..,x_j,..,x_n)+D(x_1,\ldots,x_j,..,x_i,..,x_n)+$$
$$+D(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_i,..,x_n)+D(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_j,\ldots,x_n)=$$
$$=D(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_n)+D(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots,x_n).$$

3) En efecte, sigui $x_i=\sum_{j\neq i}a_jx_j$, llavors

$$D(x_1,\ldots,x_i,..,x_n)=D(x_1,\ldots,\sum_{j\neq i}a_jx_j,..,x_n)=\sum_{j\neq i}D(x_1,\ldots,a_jx_j,..,x_n)=$$
$$=\sum_{j\neq i}a_jD(x_1,\ldots,x_j,..,x_n)=0.$$

4) Això es dedueix en aplicar la linealitat a la variable i-èsima i la propietat 3).

5) Un dels vectors és combinació lineal dels altres, i, per la propietat 3), això implica que el valor de D sobre ells és igual a 0.

6) Ho demostrarem per inducció sobre el nombre de transposicions de la permutació σ. Si σ és una transposició (i,j), llavors $D(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}) = D(x_1,\dots,x_j,..,x_i,\dots,x_n) = -D(x_1,\dots,x_i,..,x_j,.,x_n) = \varepsilon(\sigma)D(x_1,\dots,x_n)$. En general, suposem cert l'enunciat si la permutació és un producte d'un nombre p de transposicions, i vegem que també ho és per $p+1$ transposicions: si $\sigma = \tau_{p+1}\tau_p\dots\tau_2\tau_1 = (\tau_{p+1}\tau_p\dots\tau_2)\tau_1 = \pi\tau_1$, llavors $D(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}) = -D(x_{\pi(1)},\dots,x_{\pi(n)}) = -\varepsilon(\pi)D(x_1,\dots,x_n) = \varepsilon(\sigma)D(x_1,\dots,x_n)$.

■

Comentari: Observau que si $D: E^n \to K$ és antisimètrica, llavors és alternada: sigui $x_i = x_j$ amb $i \neq j, D(x_1,\dots,x_i,..,x_j,..,x_n) = -D(x_1,\dots,x_j,..,x_i,..,x_n)$, d'on $D(x_1,\dots,x_i,..,x_j,..,x_n) = 0$ (en un cos de característica diferent de 2, si $a=-a$, llavors $a=0$).

A continuació introduïm el concepte de determinant d'una llista de vectors, i estudiam les seves propietats.

Definició 3.4
Si $\{e_1,\dots,e_n\}$ és una base ordenada de E, sigui $(x_1,\dots,x_n)\in E^n$ amb $x_p = \sum_{j=1}^n x_{jp}e_j, p=1,\dots,n$. Definim el determinant de $(x_1,\dots,x_n)$ respecte de la base $\{e_1,\dots,e_n\}$ com el següent nombre (i amb la següent notació):

$$\det{}_{\{e_1,\dots,e_n\}}(x_1,\dots,x_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)x_{\sigma(1)1}\cdots x_{\sigma(n)n}.$$

Exemple 5: *Fem un exemple senzill. Considerem a $\mathbb{R}^2$ la base canònica i els vectors $\{(3,4),(2,0)\}$. Com que estam a $\mathbb{R}^2$ consideram el grup de permutacions $S_2 = \{\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\} = \{\sigma_1 = id, \sigma_2 = (12)\}$. Els signes de les dues permutacions anteriors són $\varepsilon(\sigma_1)=1, \varepsilon(\sigma_2)=-1$. Per tant el determinant dels dos vectors inicials serà:*

$$\det{}_E((3,4),(2,0)) = +1(3\cdot 0) - 1(4\cdot 2) = -8.$$

Vegem a continuació una sèries de propietats d'aquest concepte.

Proposició 3.8
1) $\det_{\{e_1,\dots,e_n\}}(x_1,\dots,x_n)$ és una forma multilineal alternada.

2) Qualsevol forma multilineal alternada D és múltiple de la forma $\det_{\{e_1,\dots,e_n\}}$.

3) $\dim FMA(E) = 1$.

Prova.

1) Que $\det_{\{e_1,\dots,e_n\}}$ és multilineal, és fàcil de demostrar. Vegem la part més complicada: $\det_{\{e_1,\dots,e_n\}}$ és alternada. Es tracta de veure que $\det_{\{e_1,\dots,e_n\}}(x_1,\dots,x_i,..,x_j,\dots,x_n) = 0$, sempre que $x_i = x_j$ amb $i<j$. Sigui τ la transposició (i,j). Per cada σ permutació parella ($\varepsilon(\sigma) = +1$) considerem el terme corresponent $(+1)x_{\sigma(1)1}\cdots x_{\sigma(i)i}\cdots x_{\sigma(j)j}\cdots x_{\sigma(n)n}$. Per a la permutació $\sigma\tau$, el terme és $(-1)x_{\sigma(1)1}\cdots x_{\sigma(j)i}\cdots x_{\sigma(i)j}\cdots x_{\sigma(n)n}$, però ja que $x_{ri} = x_{rj}$ per tot $r=1,\dots,n$ la suma d'aquests dos termes és igual a 0. Variant σ dins el conjunt de les permutacions parelles, entre σ i $\sigma\tau$ obtenim totes les permutacions de $\{1,\dots,n\}$ (recordem que hi ha la meitat de parelles i la meitat de senars).

2) Sigui D una forma multilineal alternada qualsevol, llavors

$$D(x_1,\dots,x_n)=D\left(\sum_{j=1}^{n}x_{j1}e_j,\dots,\sum_{j=1}^{n}x_{jn}e_j\right)=\sum_{1\le j_1,\dots,j_n\le n}D(x_{j_1 1}e_{j_1},\dots,x_{j_n n}e_{j_n})=$$
$$=\sum_{1\le j_1,\dots,j_n\le n}x_{j_1 1}\cdots x_{j_n n}D(e_{j_1},\dots,e_{j_n}).$$

A l'expressió $D(e_{j_1},\dots,e_{j_n})$ els subíndexs $j_1,\dots,j_n$ poden prendre valors qualssevol de $\{1,\dots,n\}$, però el sumand s'anul·larà sempre que dos dels subíndexs siguin iguals. Quedaran només els sumands en què $j_1,\dots,j_n$ siguin els mateixos $1,\dots,n$ permutats. Designam per σ la permutació

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&\cdots&n\\ j_1&\cdots&j_n\end{pmatrix}.$$

La cadena de igualtats anteriors continua així:

$$D(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\sigma\in S_n}x_{\sigma(1)1},\dots,x_{\sigma(n)n}D(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(n)})=$$
$$=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)x_{\sigma(1)1},\dots,x_{\sigma(n)n}D(e_1,\dots,e_n)=D(e_1,\dots,e_n)\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)x_{\sigma(1)1},\dots,x_{\sigma(n)n}=$$
$$=D(e_1,\dots,e_n)\det{}_{\{e_1,\dots,e_n\}}(x_1,\dots,x_n).$$

3) Si tenim en compte que $\det{}_{\{e_1,\dots,e_n\}}(e_1,\dots,e_n)=1$, podrem dir, d'acord amb l'apartat 2), que $\det{}_{\{e_1,\dots,e_n\}}$ és una base de $FMA(E)$ i, per tant, que $\dim FMA(E)=1$. Queda demostrat, doncs, també l'apartat 3).

■

Proposició 3.9

Si $\{e_1,\dots,e_n\}$ i $\{v_1,\dots,v_n\}$ són bases de E, llavors es verifica:

$$\det{}_{\{e_1,\dots,e_n\}}(v_1,\dots,v_n)\det{}_{\{v_1,\dots,v_n\}}(e_1,\dots,e_n)=1.$$

Prova. Per demostrar-ho basta substituir a la igualtat

$$D(x_1,\dots,x_n)=D(e_1,\dots,e_n)\det{}_{\{e_1,\dots,e_n\}}(x_1,\dots,x_n),$$

D per $\det{}_{\{v_1,\dots,v_n\}}$ i $(x_1,\dots,x_n)$ per $(v_1,\dots,v_n)$.

En particular resulta que el determinant d'una base qualsevol (respecte d'una base) de E és diferent de 0. ■

Una conseqüència important del resultat anterior és la següent.

Proposició 3.10

$\{x_1,\dots,x_n\}$ és linealment dependent si i només si $\det{}_{\{e_1,\dots,e_n\}}(x_1,\dots,x_n)=0$.

Prova. De fet ja hem vist que si $\{x_1,\dots,x_n\}$ és linealment dependent, el valor de qualsevol D sobre la llista $(x_1,\dots,x_n)$ és igual a 0. Vegem el recíproc, si $\det{}_{\{e_1,\dots,e_n\}}(x_1,\dots,x_n)=0$, llavors $\{x_1,\dots,x_n\}$ ha de ser linealment dependent, perquè si no $\{x_1,\dots,x_n\}$ seria una base i per la proposició anterior hauria de ser $\det{}_{\{e_1,\dots,e_n\}}(x_1,\dots,x_n)\neq 0$. ■

Comentari: En lloc de la notació $\det_{\{e_1,\dots,e_n\}}(x_1,\dots,x_n)$ farem servir molt sovint aquesta més clàssica:

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}.$$

Exercicis 1

(a) Demostrau que

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} = x_{11}x_{22}\cdots x_{nn}$$

sempre que $x_{ij} = 0$ *per tot* $i > j$.

(b) Demostrau que

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} = x_{11}x_{22}\cdots x_{nn}$$

sempre que $x_{ij} = 0$ *per tot* $i \neq j$.

(c) Demostrau que $\det_{\{e_1,\dots,e_n\}}(e_{\pi(1)},\dots,e_{\pi(n)}) = \varepsilon(\pi)$ *on* π *és una permutació de* $\{1,\dots,n\}$.

3.3 Determinant d'una matriu quadrada. Determinant d'un endomorfisme

Sigui $A = (x_{ij})$ una matriu quadrada $n \times n$ sobre K. Definim determinant de A com:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n}.$$

També podem utilitzar la notació $|A|$ per indicar el determinant de A. Observau que no utilitzam cap base per definir aquest concepte, però és clar que si introduïm els vectors de $K^n : x_1 = (x_{11},\dots,x_{n1}),\dots,x_n = (x_{1n},\dots,x_{nn})$, llavors $\det A = \det_{\{e_1,\dots,e_n\}}(x_1,\dots,x_n)$, on $\{e_1,\dots,e_n\}$ és la base canònica de K^n. Això ens fa veure que el caràcter multilineal, l'alternança i les propietats demostrades per a la forma determinant es transmeten a propietats en relació al determinant d'una matriu. Així, per exemple:

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1i}+y_{1i} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2i}+y_{2i} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{ni}+y_{ni} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1i} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2i} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{ni} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & y_{1i} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & y_{2i} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & y_{ni} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}.$$

o també

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & \lambda x_{1i} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & \lambda x_{2i} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & \lambda x_{ni} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1i} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2i} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{ni} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

EXERCICI 2: *Desenvolupau, aplicant les propietats adients, el determinant següent:*

$$\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-x & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-x \end{vmatrix}.$$

Una propietat que no podem derivar d'una propietat ja vista, és la següent:

PROPOSICIÓ 3.11
$\det A = \det A^T$, *és a dir, una matriu i la seva transposada tenen el mateix determinant.*

Prova. Si $A = (x_{ij})$, llavors $\det A^T = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{1\sigma(1)} \cdots x_{n\sigma(n)}$. Per cada σ escriurem el terme corresponent $\varepsilon(\sigma)x_{1\sigma(1)}\cdots x_{n\sigma(n)}$ en la forma $\varepsilon(\sigma)x_{\pi(1)1}\cdots x_{\pi(n)n}$. Però, evidentment, $\pi = \sigma^{-1}$ i, per tant,$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\pi)$. Variant σ dins S_n, $\pi = \sigma^{-1}$ recorr també S_n. Així tenim:

$$\det A^T = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)x_{1\sigma(1)}\cdots x_{n\sigma(n)} = \sum_{\pi\in S_n} \varepsilon(\pi)x_{\pi(1)1}\cdots x_{\pi(n)n} = \det A.$$

■

Podem ara definir el concepte de determinant d'un endomorfisme. Sigui $f : E \to E$ lineal. Consideram l'aplicació $\hat{f} : FMA(E) \to FMA(E)$ definida per $(\hat{f}(D))(x_1, \ldots, x_n) = D(f(x_1), \ldots, f(x_n))$. Podem demostrar el següent resultat.

PROPOSICIÓ 3.12
1) $\hat{f}$ està ben definida, és a dir, $\hat{f}(D)$ és, efectivament, una forma multilineal alternada sobre E.

2) $\hat{f}$ és lineal, és a dir: $\hat{f}(D + D') = \hat{f}(D) + \hat{f}(D')$ i $\hat{f}(aD) = a\hat{f}(D)$.

Prova.

1) Això es dedueix del caràcter lineal de f i multilineal de D. L'alternança de D implica la de $\hat{f}(D)$.

2) Vegem la primera igualtat:

$$(\hat{f}(D + D'))(x_1, \ldots, x_n) = (D + D')(f(x_1), \ldots, f(x_n)) = D(f(x_1), \ldots, f(x_n)) +$$
$$+D'(f(x_1), \ldots, f(x_n)) = (\hat{f}(D))(x_1, \ldots, x_n) + (\hat{f}(D'))(x_1, \ldots, x_n) = (\hat{f}(D) + \hat{f}(D'))(x_1, \ldots, x_n).$$

■

A causa que $\dim FMA(E) = 1$, l'endomorfisme és una homotècia i, per tant, existeix un únic element $\alpha \in K$, tal que $\hat{f}(D) = \alpha D$ per tot $D \in FMA(E)$.

DEFINICIÓ 3.5
El determinant d'un endomorfisme f de E, $\det f$, és l'element de K que verifica: $\hat{f}(D) = (\det f)D$ per tot $D \in FMA(E)$.

Aquesta definició no és gens pràctica a l'hora de calcular el determinant d'un endomorfisme. Vegem tot seguit una fórmula que ens permet relacionar aquest concepte amb el de determinant d'una $n-$pla de vectors respecte d'una base.

PROPOSICIÓ 3.13
Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ és una base de E, llavors $\det f = \det_{\{e_1,\ldots,e_n\}}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.

Prova. Sigui $D = det_{\{e_1,\ldots,e_n\}}$. Aleshores, $\hat{f}(\det_{\{e_1,\ldots,e_n\}}) = (\det f)\det_{\{e_1,\ldots,e_n\}}$. Si ho aplicam a la llista $(e_1, \ldots, e_n)$ s'obté la igualtat esmentada.

És clar que també podem escriure, doncs, $\det f = \det A$, on A és la matriu de f respecte de la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$. ■

A continuació, vegem algunes propietats en relació al concepte de determinant d'un endomorfisme.

PROPOSICIÓ 3.14 (PROPIETATS DEL DETERMINANT D'UN ENDOMORFISME)
1) $\det id = 1$.

2) f és bijectiva si i només si $\det f \neq 0$.

3) $\det(fg) = (\det f)(\det g)$.

4) Si f és bijectiva, llavors $\det f^{-1} = 1/\det(f)$.

Prova.

1) $\det id = \det_{\{e_1,\ldots,e_n\}}(id(e_1),\ldots,id(e_n)) = \det_{\{e_1,\ldots,e_n\}}(e_1,\ldots,e_n) = 1$.

2) Si $\{e_1,\ldots,e_n\}$ és una base de E, llavors f és bijectiva si i només si $\{f(e_1),\ldots,f(e_n)\}$ és una base, i això serà així si i només si $\det_{\{e_1,\ldots,e_n\}}(f(e_1),\ldots,f(e_n)) \neq 0$.

3) Primer vegem que $\widehat{fg} = \hat{g}\hat{f}$. En efecte,

$$\begin{aligned}((\widehat{fg})(D))(x_1,\ldots,x_n) &= D((fg)(x_1),\ldots,(fg)(x_n)) = D(f(g(x_1)),\ldots,f(g(x_n))) = \\ &= (\hat{f}(D))(g(x_1),\ldots,g(x_n)) = [\hat{g}(\hat{f}(D))](x_1,\ldots,x_n) = ((\hat{g}\hat{f})(D))(x_1,\ldots,x_n).\end{aligned}$$

Per tant $\widehat{fg} = \hat{g}\hat{f}$. Ara podem escriure:

$$\widehat{fg}(D) = \det(fg)(D) = (\hat{g}\hat{f})(D) = \hat{g}(\hat{f}(D)) = (\hat{g}(\det f)D) = (\det f)\hat{g}(D) = (\det f)(\det g)D.$$

Per tant, $\det(fg) = (\det f)(\det g)$.

4) Basta aplicar la propietat anterior quan $g = f^{-1}$.

■

Evidentment, totes aquestes propietats de determinants d'un endomorfisme tenen la seva traducció a propietats del determinant d'una matriu a partir de les igualtats: $\det f = \det_{\{e_1,\ldots,e_n\}}(f(e_1),\ldots,f(e_n)) = \det A$.

PROPOSICIÓ 3.15 (PROPIETATS DEL DETERMINANT D'UNA MATRIU)
1) $\det I = 1$.

2) $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

3) A és invertible si i només si $\det A \neq 0$. *En aquest cas* $\det A^{-1} = 1/\det(A)$.

Prova.

1) $\det I = \det id = 1$.

2) $\det(AB) = \det(fg) = (\det f)(\det g) = (\det A)(\det B)$, on f i g són els endomorfismes associats a les matrius A i B (respecte d'una certa base).

3) És clar ja que A és invertible si i només si f (endomorfisme associat) és bijectiu, i això és així si i només si $\det f \neq 0$. Com per altra part $\det A = \det f$, queda demostrada la primera part. Quant a la segona, basta tenir en compte $1 = \det(AA^{-1}) = (\det A)(\det A^{-1})$.

■

EXERCICI 3: *Es considera l'endomorfisme* $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ *definit per* $f(p(x)) = p'(x)$ *(polinomi derivat de* $p(x)$*). Calculau* $\det f$.

EXERCICI 4: *[Determinant de Vandemonde i el problema de la interpolació polinómica]*

a) Demostra la següent igualtat per $n \geq 2$:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(a_j - a_i).$$

b) Donats n *punts* $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ *amb* $a_i \neq a_j$ *per tot* $i \neq j$*, existeix una única funció polinómica* f *de grau menor o igual a* $n-1$ *tal que* $f(a_i) = b_i$ *per tot* $i = 1, \ldots, n$.

3.4 Càlcul de determinants: regla de Laplace. Càlcul del rang d'una matriu

Abans de donar la regla de Laplace per calcular determinants, vegem uns preliminars i notacions que faran la fórmula de càlcul més entenedora.

Sigui $A = (a_{ij})$ una matriu $n \times n$. Si consideram les files $i_1, \ldots, i_h$ i les columnes $j_1, \ldots, j_h$ de A, s'obté una submatriu $h \times h$ de A, que podem representar per A_C^F, on $F = \{i_1, \ldots, i_h\}$ i $C = \{j_1, \ldots, j_h\}$ són els conjunts de files i columnes seleccionades. El determinant d'aquesta matriu es diu menor (d'ordre h) de A i escrivim $\Delta_C^F = \det A_C^F$.

Si suprimim les files $i_1, \ldots, i_h$ i les columnes $j_1, \ldots, j_h$ s'obté una submatriu $(n-h) \times (n-h)$ de A que en direm complementària de l'anterior. Escriurem $A_{C'}^{F'}$ on F', C' indiquen els conjunts complementaris de F i C.

Els determinants Δ_C^F i $\Delta_{C'}^{F'}$ es diuen menors complementaris. Direm que un menor Δ_C^F és de classe parella (senar) si la suma $i_1 + \ldots + i_h + j_1 + \ldots + j_h$ és parella (senar). Indicarem per abreujar aquesta suma per $F + C$.

PROPOSICIÓ 3.16
Dos menors complementaris són de la mateixa classe.

DEFINICIÓ 3.6
L'adjunt d'un menor Δ *és el menor complementari de* Δ *amb signe + o - segons que* Δ *sigui de classe parella o senar. Així l'adjunt de* Δ_C^F *és* $(-1)^{F+C}\Delta_{C'}^{F'}$*, on* $F + C$ *indica la suma* $i_1 + \ldots + i_h + j_1 + \ldots + j_h$.

Un menor d'ordre h *es diu principal si està format per les primeres* h *files i les primeres* h *columnes. Observau que el seu adjunt coincideix amb el menor complementari ja que és de classe parella.*

PROPOSICIÓ 3.17 (REGLA DE LAPLACE)
El determinant d'una matriu és la suma dels productes obtinguts multiplicant tots els menors d'ordre h *que es poden formar amb* h *línies paral·leles fixades (files o columnes) pels seus corresponents adjunts.*

Així, fixades h *files:* $F = \{i_1, \ldots, i_h\}$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_C (-1)^{F+C}\Delta_C^F \Delta_{C'}^{F'}.$$

Si fixam h *columnes:* $C = \{j_1, \ldots, j_h\}$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_F (-1)^{F+C}\Delta_C^F \Delta_{C'}^{F'}.$$

Un cas particular especialment important és quan $F = \{i\}$ o $C = \{j\}$ (fixam una sola columna o una sola fila). En cas de fixar la fila i :

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij},$$

on A_{ij} indica l'adjunt de a_{ij} : $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{j'}^{i'}$ (desenvolupament per la fila i).

En cas de fixar la columna j :

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

(desenvolupament per la columna j).

Exemple 6: *Calculam el determinant de la següent matriu, utilitzant la regla de Laplace:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 7 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ho farem utilitzant les files $F = \{3, 4\}$. Per tant, el càlcul ens queda:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 7 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+3+4} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3+3+4} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+4+3+4} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3+3+4} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4+3+4} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{3+4+3+4} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = (-3)(-1) - 3 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + (-1)(-7) + (-2)(-30) = 86.$$

Exercici 5: *Demostrau que en aplicar la regla de Laplace, es verifica*

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & g \\ 0 & 0 & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f & g \\ h & i \end{vmatrix}.$$

i també

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \\ f & g & 0 & 0 \\ h & i & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f & g \\ h & i \end{vmatrix}.$$

Vegem ara com aplicar tot això al càlcul del rang d'una matriu qualsevol. Comencem però amb uns resultats previs.

Proposició 3.18

Sigui E un $K-$e.v., $\dim E = n$, i siguin $v_1 \ldots, v_h \in E$, $1 \leq h \leq n$. Diguem V a la matriu de coordenades d'aquests vectors respecte d'una base de E (que anomenarem B):

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1h} \\ \vdots & & \\ v_{n1} & \ldots & v_{nh} \end{pmatrix}.$$

Aleshores, $v_1, \ldots, v_h$ són linealment independents si, i només si, existeix dins V un menor d'ordre h diferent de 0.

Prova. Suposem la independència lineal dels vectors. Si $h = n$, els vectors formen una base de E i ja hem vist que en aquest cas $\det V \neq 0$. Suposem doncs $h < n$. Ampliam el sistema $\{v_1, \ldots, v_h\}$ a una base de E que en direm $B' = \{v_1, \ldots, v_h, v_{h+1}, \ldots, v_n\}$. Llavors tenim:

$$0 \neq \det{}_B B' = \begin{vmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1h} & \cdots \\ \vdots & & & \\ v_{n1} & \cdots & v_{nh} & \cdots \end{vmatrix} = \sum_F (-1)^{F+C} \Delta_C^F \Delta_{C'}^{F'},$$

on hem fixat el conjunt C de les $n-h$ darreres columnes. Per tant algun menor d'ordre h de V és no nul: si tots aquests menors fossin 0, com que els $\Delta_{C'}^{F'}$ són menors d'ordre h de V, arribaríem a una contradicció.

Recíprocament, suposem ara que hi ha un menor d'ordre h de la matriu V no nul. Diguem Δ aquest menor. Llavors $v_1, \ldots, v_h$ han de ser linealment independents ja que si un d'ells és combinació lineal dels altres, la relació de dependència serà present en el menor Δ i això implicaria $\Delta = 0$. ■

Exemple 7: *Els vectors de $\mathbb{R}^4 : v_1 = (1,0,1,0), v_2 = (1,1,1,1), v_3 = (0,0,0,1)$ són linealment independents, ja que la matriu de coordenades respecte de la base canònica*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

conté un menor d'ordre 3 diferent de 0 (per exemple el format per les 3 darreres files de la matriu).

Vegem ara un altre resultat important en relació amb l'estudi de la independència lineal de vectors.

Proposició 3.19
En les mateixes condicions que abans, siguin $v_1, ..., v_h \in E$ linealment independents (diguem Δ a un menor d'ordre h no nul), i sigui $u \in E$. Llavors es verifica que u és combinació lineal de $v_1, \ldots, v_h$ si i només si tots els menors d'ordre $h+1$ que s'obtenen ampliant Δ amb la columna del vector u són iguals a 0. Aquests menors direm que són els orlats de Δ mitjançant u.

Prova. Sigui V la matriu de components de $v_1, \ldots, v_h, u$ respecte d'alguna base, i suposem per comoditat que Δ és el menor format per les primeres h files i h columnes (menor principal) de V.

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1h} & u_1 \\ \vdots & & & \\ v_{h1} & \cdots & v_{hh} & u_h \\ \vdots & & & \\ v_{n1} & \cdots & v_{nh} & u_n \end{pmatrix}.$$

Si u és combinació lineal de $v_1, \ldots, v_h$ és clar que tots els orlats són 0 ja que la relació de dependència es fa present a tots aquests menors (i a tots els altres!).

Vegem ara que si tots els orlats són 0 llavors u és combinació lineal de $v_1, \ldots, v_h$. En efecte, basta considerar el desenvolupament dels determinants següents per la darrera fila, amb $i = 1, ..., n$:

$$0 = \begin{vmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1h} & u_1 \\ \vdots & & & \\ v_{h1} & \cdots & v_{hh} & u_h \\ v_{i1} & \cdots & v_{ih} & u_i \end{vmatrix} = \pm v_{i1}\Delta_{i1} \pm \cdots \pm v_{ij}\Delta_{ih} \pm u_i \Delta.$$

De la igualtat anterior podem aïllar u_i (ja que $\Delta \neq 0$) per tot $i = 1, ...n$. Ens queda u en forma de combinació lineal de $v_1, \ldots, v_h$. ■

Observau que aquest teorema permet un estalvi de càlculs considerable a l'hora de provar si $v_1, \ldots, v_h, u$ són linealment independents o no.

Ara podem donar un mètode efectiu pel càlcul del rang d'una matriu. Aquest mètode està basat en el resultat següent que deduïm dels dos resultats demostrats prèviament.

Proposició 3.20
El rang d'una matriu és r si i només si:

- *Existeix un menor d'ordre r no nul, i*
- *Tots els menors orlats d'aquest menor són iguals a 0.*

Exemples 8

(1) La matriu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ *té rang igual a 2. En efecte, el menor* $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ *és diferent de 0, i els dos orlats*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

són iguals a 0.

(2) La matriu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *té rang igual a 3. En efecte, el menor* $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ *és diferent de 0, i els dos orlats*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

3.5 Sistemes d'equacions lineals. Regla de Cramer

L'eina dels determinants ens permet l'estudi i resolució de sistemes d'equacions lineals. Les fórmules de Cramer són punt central en aquesta aplicació dels determinants. Comencem per donar una fórmula explícita pel càlcul de la inversa d'una matriu quadrada invertible. Aquesta fórmula està basada en un resultat clàssic dins aquesta teoria.

Proposició 3.21
Donada una matriu quadrada $A = (a_{ij})$, la suma dels elements d'una línia (fila o columna) multiplicats pels adjunts d'una línia paral·lela és igual a 0.

Prova. Sigui

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

on hem destacat dues columnes: la r i la s. Considerem ara una modifiació de la matriu anterior: reemplaçam la columna s per la columna r :

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Si calculam el determinant de A' desenvolupant per la columna s tendrem

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_{ir} A_{is} = \sum_{i=1}^{n} a_{ir} A'_{is}.$$

El mateix resultat s'obtendria a partir de dues files paral·leles. ■

Vegem ara la fórmula anunciada pel càlcul de la inversa d'una matriu invertible A: primer de tot consideram el que direm matriu adjunta de A, que no és altra cosa que la matriu que té per elements els adjunts dels elements de la matriu A. És a dir:

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Proposició 3.22 (Càlcul de la inversa d'una matriu)
Sigui A una matriu invertible. Es verifica

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\operatorname{adj} A)^T.$$

Prova. Si feim el producte de la transposada de $\operatorname{adj} A$ per la matriu A, i ens queda:

$$(\operatorname{adj} A)^T A == \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A| I.$$

De la igualtat anterior es dedueix la fórmula de l'enunciat. ■

Comentari: Donada una matriu quadrada A, si existeix B tal que $BA = I$, podem dir que A és invertible i $A^{-1} = B$ (sense saber si $AB = I$). En efecte, de $BA = I$, deduïm $|A| \neq 0$, per tant A és invertible. Sigui A^{-1} la inversa de A. De $BA = I$ tenim $BAA^{-1} = A^{-1}$, d'on $B = A^{-1}$.

A continuació veurem finalment d'on surten les fórmules de Cramer. Suposem un sistema d'equacions lineals amb $m = n$ (igual nombre d'equacions que d'incògnites) i tal que $\det A \neq 0$ (A és la matriu del sistema). Aquest tipus de sistemes són els sistemes de Cramer. Pel que ja sabem, un tal sistema és compatible i determinat. Vegem com podem calcular directament la seva única solució.

Proposició 3.23 (Fórmules de Cramer)
La solució d'un sistema de Cramer $AX = B$ ve donada per les fórmules següents:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}, \quad \text{per } i = 1, \ldots, n.$$

Prova. Primer de tot escrivim el sistema en forma matricial $AX = B$. Ja que A és invertible podem fer el següent: $A^{-1}AX = A^{-1}B$ i ens queda

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{|A|} (\operatorname{adj} A)^T B = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & & \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

i d'aquí deduïm el valor de les incògnites:

$$x_i = \frac{1}{|A|} A_{1i} b_1 + \cdots + A_{ni} b_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|},$$

on s'ha substituït la columna $i = 1, \ldots, n$ del determinant de A pels termes independents del sistema. ■

Comentari: Sigui $AX = B$ un sistema compatible $m \times n$ de rang r, i sigui Δ un menor d'ordre r de A no nul. El sistema donat és equivalent a un sistema de Cramer $r \times r$ que es pot resoldre amb les fórmules que acabam de veure.