Algebra Lineal. Primer de Telemàtica. **Primer parcial - 26 de Gener, 2016**

1 Donats els vectors $\vec{u} = (2, 0, 0), \vec{v} = (0, 1, -3)$ i $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, quina condició han de complir els escalars a i b per tal de que:

1. $\vec{w}$ sigui ortogonal al vector $(1, 1, 1)$.
2. $\vec{w}$ sigui unitari.
3. $\vec{w}$ sigui paral·lel al vector $(1, 2, -6)$.
4. Per $a = 1, b = -1$, calculau el vector de longitud 3 en sentit oposat a $\vec{w}$.

2 Considerau els vectors del conjunt $C = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 3)\}$.

1. Demostrau que formen una base de $\mathbb{R}^3$.
2. Trobau respecte d'aquesta base les coordenades del vector $(5, 1, -3)$.
3. Trobau respecte de la base canònica les coordenades del vector que té per coordenades $(3, 1, -1)$ en la base C.

Algebra Lineal. Primer de Telemàtica. **Segon parcial - 26 de Gener, 2016**

3 Un endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ està determinat per $f(x, y, z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$ en la base canònica. Es demana

1. Trobar el nucli i la imatge de f.
2. Trobar la matriu de f en aquesta base
3. Trobar la matriu de f en la base V constituida pels vectors $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 0, 0)$
4. L'expressió analítica de f en aquesta base V

4 Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & a-1 & a \\ a-1 & a+1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Trobau els valors propis de la matriu A en funció del paràmetre a.
2. En funció dels valors propis trobats, estudiau si A és o no és diagonalitzable segons els valors del paràmetre a (no cal trobar explícitament els vectors propis).
3. Per $a = 0$, calculau els vectors propis de A. Digau en aquest cas qui és D i VP.

5 Donada la funció booleana $f(x, y, z) = \overline{(\bar{x}y)}(\bar{x} + xy\bar{z})$

1. Donau la forma canònica disjuntiva
2. Donau la taula de veritat de la funció
3. Dibuixau el seu mapa de Carnaugh i emprau-lo per donar-ne una simplificació.

6 Considerem el joc del N-dòmino generalitzat. En aquest joc es tenen fitxes, cadascuna de les quals està etiquetada amb dos nombres, $a, b \in \{0, ..., N\}$, i que indicarem per $[a \cdot b]$; les fitxes es poden girar; es a dir, la fitxa $[a \cdot b]$ i la fitxa $[b \cdot a]$ són indistingibles.

1. Suposant que no hi ha fitxes repetides, amb quantes fitxes juguem al 3-dòmino? I al 4-dòmino? I al 5-dòmino?
2. Suposant que no hi ha fitxes repetides, amb quantes fitxes juguem al N-dòmino?
3. Una partida de dòmino és una seqüència de fitxes, $[a_1 \cdot b_1][a_2 \cdot b_2] \cdots [a_k \cdot b_k]$, de manera que els nombres adjacents de fitxes diferents coincideixen, és a dir, amb $b_i = a_{i+1}$ per a tot $i = 1, \cdots, k-1$. És possible fer una partida on s'emprin totes les fitxes del joc? Justifica la teva resposta emprant la terminología vista a classe.