Algebra Lineal. Primer de Telemàtica. **Primer parcial - 11 de Novembre, 2016**

1 Sigui A la matriu següent

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

on a és un valor real.

1. (0.5p) Enunciau la condició necessària i suficient per tal que una matriu A tingui inversa.
2. (1.0p) Calculau la inversa de A per els valors pels quals sigui possible.
3. (0.5p) Calculau A^2, A^3 i A^4.
4. (1.0p) Donau una fórmula general per a l'expressió de A^n.

2 (1.5 p) Calculau les arrels de l'equació:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+x \end{vmatrix} = 0$$

3 Siguin $\vec{u}$ i $\vec{v}$ dos vectors de mòdul 2 i que formen tots dos un àngle de 60^o.

1. (1.0p) Quin és el mòdul de $\vec{u}+\vec{v}$? I el de $\vec{u}-\vec{v}$
2. (0.5p) Demostrau que $\vec{u}+\vec{v}$ i $\vec{u}-\vec{v}$ són perpendiculars.

4 Siguin $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ i $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ dues bases de l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$ relacionades a travès del sistema

$$\begin{cases} u_1 &= v_1 - 3v_2 + 4v_3 \\ u_2 &= v_2 + v_3 \\ u_3 &= v_1 + v_2 + v_3 \end{cases}$$

1. (0.5p) Trobau les coordenades dels vector de U en la base V. Indicau també la matriu de canvi de base de U a V.
2. (1.0p) Trobau les coordenades dels vector de V en la base U. Indicau també la matriu de canvi de base de V a U.
3. (2.0p) Si $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ és una nova base de $\mathbb{R}^3$ amb coordenades respecte de V donades per $w_1 = (1, -1, 1)_V, w_2 = (-1, 1, 0)_V, w_3 = (0, 1, -1)_V$, trobau la matriu de canvi de base de V a W i de U a W.
4. (0.5p) Si $x = (1, -1, 3, 2)_U$, troba les seves coordenades en la base W.

Temps màxim per fer la prova: 3 hores.