

Tema 2 - Ejercicio 1

María Santos

Enunciado

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 4x + 2y = 3 \\ x - 2y = 2 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$$

- (a) Comprobad que, efectivamente, se trata de un sistema compatible determinado haciendo uso del Teorema de Rouché-Frobenius
- (b) Calculad su solución

Solución (a)

Pasando el sistema a su forma matricial tenemos:

```
A = rbind(c(4,2),c(1,-2),c(3,4))
b = c(3,2,1)
showEqn(A,b)
```

```
4*x1 + 2*x2 = 3
1*x1 - 2*x2 = 2
3*x1 + 4*x2 = 1
```

En primer lugar, el rango de A es

```
R(A)
```

```
[1] 2
```

por otro lado, el rango de la matriz ampliada $(A|B)$ es

```
AB = cbind(A,b)
R(AB)
```

```
[1] 2
```

Con lo cual,

```
all.equal(R(A),R(AB))
```

```
[1] TRUE
```

Teniendo en cuenta que tenemos 2 incógnitas, por el Teorema de Rouché-Frobenius podemos concluir que, al ser los rangos de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada iguales entre sí e iguales al número de incógnitas, se trata de un sistema compatible determinado.

Solución (b)

```
Solve(A, b, fractions = T)
```

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & -1/2 \\ 0 & = & 0 \end{array}$$

Nuestra solución es $s = (1, -\frac{1}{2})$

Comprobemos que la solución es correcta. Lo haremos de dos formas diferentes:

- Primero sustituimos la solución obtenida en todas las ecuaciones

$$\begin{array}{rclclclcl} 4 \cdot 1 & + & 2 \cdot (-\frac{1}{2}) & = & 4 & - & 1 & = & 3 \\ 1 & - & 2 \cdot (-\frac{1}{2}) & = & 1 & + & 1 & = & 2 \\ 3 \cdot 1 & + & 4 \cdot (-\frac{1}{2}) & = & 3 & - & 2 & = & 1 \end{array}$$

Todas las igualdades son ciertas. Por tanto, la solución es correcta.

- En segundo lugar, comprobamos de forma matricial:

```
s = c(1, -1/2)
A%*%s == b
```

```
      [,1]
[1,] TRUE
[2,] TRUE
[3,] TRUE
```

Lo que acabamos de ver es que multiplicando la matriz de coeficientes por el vector solución hemos obtenido el vector de términos independientes. Es decir, la solución es la correcta.