Problemas Tema 3: Espacios vectoriales

EP3.1.- Estudiar si los vectores $\vec{u}=(3,0,0)$, $\vec{v}=(1,0,-3)$, $\vec{w}=(0,-2,4)$ son L.D. ó L.I.

a) Encontrar, si es posible, una C.L. de dichos vectores tal que su resultado sea el vector $(-2,4,1)$

¿Es posible obtener cualquier vector (x,y,z) de R^3 como combinación lineal de $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$?

EP3.2.- Dados los vectores $\vec{v}=(1,2,3)$ $\vec{u}=(-2,4,0)$ $\vec{w}=(3,-2,3)$

a) Encontrar números a,b,c tales que $a\cdot\vec{v}+b\cdot\vec{u}+c\cdot\vec{w}=\vec{0}$ ¿Son estos vectores linealmente dependientes?

b) ¿Es $\vec{v}$ combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{w}$?

c) ¿Es $\vec{w}$ combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

d) Expresar el vector (6,0,9) como combinación lineal de los mismos.

EP3.3.- Determínese si los siguientes conjuntos de vectores de R^3 son L.D. ó L.I. y estudiar su rango.

a) $(1,-2,1)$, $(2,1,-1)$, $(7,-4,1)$ **b)** $(1,-3,7)$, $(2,0,-6)$, $(3,-1,-1)$, $(2,4,-5)$

c) $(1,2,-3),(1,-3,2),(2,-1,5)$ **d)** $(2,-3,7),(0,0,0),(3,-1,-4)$ **e)** $(1,1,1),(1,-1,5)$

f) $(1,1,1),(1,2,3),(2,-1,1)$ **g)** $(2,2,-1),(4,2,-2)$ **h)** $(1,0,1,3),(0,0,2,-5),(-1,2,0,7)$

EP3.4.- Demostrar que $\vec{a}=(x,y)$, $\vec{b}=(z,t)\in R^2$ son L.D. si y solo si $x\,t-y\,z=0$

EP3.5.- Hallar "a" para que los vectores $(-2,\ a,\ a)$, $(a,-2,\ a)$, $(a,\ a,-2)$ sean L.D.

EP3.6.- Dado el conjunto de vectores $U=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\vec{u}_4\}$ tal que $\vec{u}_4$ es combinación lineal de $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$, y $\vec{u}_3$ es combinación lineal de $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_4$ entonces podemos afirmar que:

a) Los vectores del subconjunto $\{\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ son L.I.

b) Los vectores de U son L.D. ya que uno de ellos es combinación lineal de los demás.

c) Los vectores del subconjunto $U_1=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ son L.I.

d) Los vectores del subconjunto $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ son L.D.

EP3.7.- Determinar si los vectores $\vec{v}=(1,0,2),\vec{u}=(0,1,-3),\vec{w}=(1,1,0)$, $\vec{z}=(0,0,-1)$ del espacio vectorial R^3 forman un sistema generador de R^3.

EP3.8.- Si $U=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\vec{u}_4,\vec{u}_5\}$ es un conjunto de vectores cuyo rango es 3 comenta la verdad o falsedad de las afirmaciones:

a) Todos los subconjuntos de U con 3 vectores, son conjuntos libres.

b) El vector $\vec{u}_3$ es L.I de los demás.

c) Los vectores del subconjunto $U_1=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ son L.I.

d) Algún subconjunto de U con 3 vectores es libre (sus vectores son L.I.) ya que el rango es el máximo nº de vectores L.I. que hay en el conjunto por lo que basta que haya un solo subconjunto de 3 vectores L.I.

EP3.9.- Estudiar si los siguientes conjuntos de vectores cumplen los dos requisitos necesarios para formar base de R^3:

a) $A=\{(1,1,1),(3,1,-1),(-4,2,8)\}$

b) $B=\{(3,2,1),(2,1,0),(1,0,0)\}$

EP3.10.- Considerar los vectores $(1,2,-1),(2,1,-1)$. Encontrar un vector tal que junto con los dos dados, formen una base de R^3.

EP3.11.- Sea $\vec{u}$ el vector (2,1,3) en base canónica. Calcular $\vec{u}$ en base $B=\{(1,2,0),(1,-1,1),(0,1,1)\}$

EP3.12.- Probar que el conjunto $C=\{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,3)\}$ es una base de R^3. Encontrar, respecto de esta base, las coordenadas del vector (5,1,-3). Encontrar las coordenadas en base canónica del vector cuyas coordenadas en la base C son (3,1,-1).

EP3.13.- Expresar $\vec{v}=(1,-2,5)\in R^3$ como comb. lineal de los vectores $\vec{u}_1=(1,-3,2)$, $\vec{u}_2=(2,-4,-1)$, $\vec{u}_3=(1,-5,7)$. ¿Forman $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ una base de R^3?

EP3.14.- Probar que el conjunto $D=\{(1,0,0,-1),(0,1,-1,0),(0,1,0,-1),(0,1,1,1)\}$ es una base de R^4. Obtener las coordenadas del vector $(-3,2,1,-2)$ en dicha base. Si el vector $\vec{u}$ tiene coordenadas $(3,0,-1,1)$ en base D obtener sus coordenadas en base canónica.

EP3.15.- Sea $B_1=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ una base de un espacio vectorial V. Sabiendo que $\begin{matrix} v_1 = 2u_1 - u_2 \\ v_2 = -u_1 + u_3 \\ v_3 = u_2 \end{matrix}$ obtener las coordenadas de $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ en la base B_1. Demuestra que $B_2=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ también es una base de V. Sean (2,1,3) las coordenadas del vector $\vec{u}$ en base B_1. Calcular sus coordenadas en base $\{v_1,v_2,v_3\}$

EP3.16.- Sea $\{v_1,v_2,v_3\}$ una base de V. Demostrar que si $\vec{u}_1=\vec{v}_1$, $\vec{u}_2=\vec{v}_1+\vec{v}_2$, $\vec{u}_3=\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3$ el conjunto $\{u_1,u_2,u_3\}$ también es base de V.

EP3.17.- a) Si $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ son vectores L.I demostrar que $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ son L.I siendo $\begin{cases} \vec{u}_1 = 2\vec{e}_1+\vec{e}_3 \\ \vec{u}_2 = 3\vec{e}_3 \\ \vec{u}_3 = \vec{e}_2-\vec{e}_3 \end{cases}$

b) Dado un vector $\vec{v}=2\vec{e}_1+\vec{e}_2-3\vec{e}_3$ expresarlo como combinación lineal de $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$.

EP3.18.- Dado la base $\{(1,2,0,0),(-1,0,1,1),(0,0,-2,1),(-1,0,-1,0)\}$ de R^4 y el vector $\vec{u}$ de componentes $(-3,2,1,-2)$ en dicha base, obtener sus componentes en la base formada por los vectores (1,0,0,-1), (0,1,-1,0), (0,1,0,-1) y (0,1,1,1). Hacerlo de dos formas.