Examen Parcial de Matemàtica Discreta — Novembre 2009

Problemes

1. Considerem l'univers format pels alumnes de l'assignatura "Matemàtica Discreta" i considerem els predicats següents:

   - $A(x)$ indica "x és un noi",
   - $B(x,y)$ indica "x agrada a y",
   - $C(x)$ indica "x és maco/a".

   Usant els predicats donats, els quantificadors i els connectius lògics, expresseu en termes de lògica de primer ordre els enunciats següents:

   (a) Totes les noies són maques

   (b) Hi ha un noi que agrada a totes les noies

   (c) No hi ha cap noia a qui li agradin tots els nois macos.

   Com ho farieu per provar que l'enunciat de l'apartat (b) és fals?

2. Demostreu que per a tot nombre natural $n \geq 2$ es compleix que $\dfrac{2^{2n-1}}{n} < \dbinom{2n}{n}$.

3. Sigui A un conjunt, $(P, \leq)$ un poset i $f : A \to P$ una aplicació. Es defineix en A la relació: $a\ R\ b$ ssi $f(a) \leq f(b)$.

   (a) És sempre R un ordre parcial sobre A? En cas negatiu, doneu una condició necessària i suficient sobre f per a què R sigui un ordre parcial.

   (b) Suposant que (A, R) és un poset, expresseu en termes del poset $(P, \leq)$ i l'aplicació f, les condicions per tal que un element $a \in A$ sigui mínim de (A, R).

4. L'aula 13 de l'Anselm Turmeda té 20 seients, organitzats en 5 fileres de 4 seients cadascuna d'elles. A aquesta aula s'imparteix l'assignatura "Matemàtiques Terrorífiques", que té 9 estudiants matriculats.

   (a) De quantes maneres diferents poden asseure's els estudiants?

   (b) Com que el professor és un maniàtic, un dia arriba a classe i diu que vol que a la primera fila s'hi asseguin exactament 3 estudiants (sense especificar quins 3 estudiants). De quantes maneres poden asseure's els estudiants?

   (c) El dia de l'examen, organitzen tots els 20 seients en una única filera, i el professor demana que entre dos estudiants hi hagi almenys un seient buit; de quantes maneres poden asseure's els estudiants?

   (d) Un cop els estudiants han llegit les preguntes de l'examen, decideixen marxar, deixant a sobre del seient el paper de l'examen en blanc, sense cap marca. Just després arriba el servei de neteja. Quantes disposicions diferents de papers pot trobar-se el servei de neteja?

5. Considereu la classe combinatòria que té per elements $\mathcal{A} = \{\circ, \bullet, \star\}$, amb mides respectives $|\circ| = 1$, $|\bullet| = |\star| = 2$.

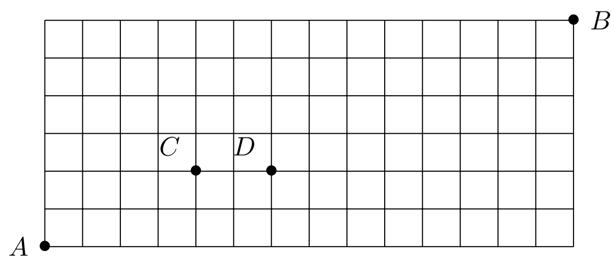
   (a) Trobeu els elements de $\mathrm{Seq}_{\leq 3}(\mathcal{A})$, $\mathrm{MSet}_{\leq 3}(\mathcal{A})$ i $\mathrm{Set}_{\leq 3}(\mathcal{A})$, indicant les mides dels seus elements.

   (b) Trobeu la funció generatriu de $\mathrm{Seq}(\mathcal{A})$ i el seu terme general.

Examen de Matemàtica Discreta — Febrer 2010

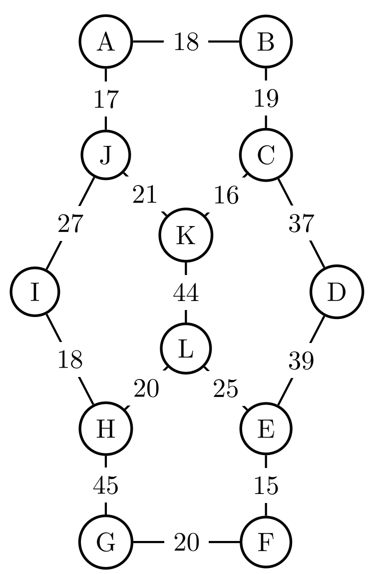
1. Considereu, per a tot enter $n \geq 1$ el conjunt A_n format per les paraules amb els símbols $\{a, b, c\}$ tals que no contenen cap parell de "c"s consecutives. Diguem $a_n = |A_n|$.
   (a) Trobeu a_2 i a_3.
   (b) Proveu que si $n \geq 3$, $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$.
   (c) Proveu que si $n \geq 2$, es té $a_n \geq 2^{n+1}$

2. Es consideren els punts A, B, C, D de la quadrícula 14×6 següent:



   (a) Trobeu el nombre de recorreguts diferents entre A i B de manera que, a cada pas, es pot realitzar un moviment unitari cap a dalt o cap a la dreta.
   (b) Trobeu el nombre de recorreguts com a l'apartat (a) que passen per C.
   (c) Fent servir el principi d'inclusió-exclusió, trobeu el nombre de recorreguts com a l'apartat (a) que no passen ni per C ni per D.

3. En la xarxa telefònica representada a la figura s'han detectat algunes avaries. Responeu les següents preguntes relacionant les vostres respostes amb la teoria de grafs:



   (a) El tècnic decideix revisar tots els trams (arestes) de la xarxa per detectar la possible avaria. Pot fer-ho sense passar dues vegades pel mateix tram?
   (b) Els nombres anotats a cada tram indiquen els respectius costos de reparació. Suposant que tots els trams estan defectuosos, quins són els trams que s'han de renovar per a què tots els vèrtexos quedin connectats per trams renovats i amb un cost mínim?

(c) Es decideix reparar de forma urgent només els trams que permetin les connexions entre els nodes A i F. Quins seran els trams que s'hauran de reparar per a què el cost sigui mínim? Quin serà el cost d'aquesta reparació?

(d) S'ha decidit també renovar tots els nodes de la xarxa, però per problemes de connexions dos nodes directament connectats no poden estar fets del mateix material. Quin es el nombre mínim de materials necessaris per a la fabricació dels nodes?

4. Un *arbre ordenat ternari* és un arbre arrelat on tot node interior (és a dir, que no sigui fulla) té exactament 3 fills, i on aquests fills es consideren ordenats.

   (a) Proveu que tot arbre ordenat ternari amb n vèrtexos i ℓ fulles compleix que $n \equiv 1 \pmod 3$ i $\ell \equiv 1 \pmod 2$.

   (b) Doneu dos arbres ordenats ternaris no isomorfs que siguin isomorfs com a arbres arrelats (no ordenats).

   (c) Considerem com a mida d'un tal arbre el seu nombre de vèrtexos. Proveu que la classe combinatòria $\mathcal{T}_3$ dels arbres ordenats ternaris admet una descripció recursiva:

$$\mathcal{T}_3 = \mathcal{U} \sqcup \mathcal{U} \times \mathrm{Seq}_3(\mathcal{T}_3)$$

5. En una nau espacial de viatge interestel·lar hi viatgen 12 astronautes amb por de marejar-se. Per això s'emporten pastilles contra el mareig; aquestes pastilles es venen en capses de 50 pastilles cadascuna, i se n'emporten 5 capses senceres, més una sisena que està a mitges. Veuen que si es reparteixen les pastilles entre tots en sobren 7. Quan passen per una estació espacial baixen 4 astronautes que no s'emporten cap pastilla. Els que continuen el viatge veuen que si ara repartissin les pastilles també en tornarien a sobrar 7. Quan s'acosten a Saturn, tres d'ells es maregen, es prenen cadascun una pastilla i moren. Si els que queden es repartissin les pastilles en sobrarien 3. Més tard descobreixen que la mort va ser deguda a un producte al qual eren al·lèrgics els astronautes difunts. Hi ha un altre astronauta que també n'és al·lèrgic. Si els no al·lèrgics es reparteixen les pastilles no en sobra cap. Quin es el nombre de pastilles que portaven a l'inici del viatge?

Examen de Matemàtica Discreta — Setembre 2010

1. Diguem $f(n,k)$ el nombre de subconjunts de cardinal k del conjunt $\{1,\ldots,n\}$ que no contenen cap parell de nombres consecutius.

   (a) Trobeu una recurrència per a $f(n,k)$ en termes de $f(n-1,k)$ i $f(n-2,k-1)$.
   Indicació: Compteu per separat els subconjunts que contenen l'enter n i els que no el contenen.

   (b) Feu servir l'apartat anterior per demostrar que

   $$f(n,k) = \binom{n-k+1}{k}.$$

2. Al nebot de l'amo de Son Espases li han regalat pel seu aniversari un joc de construcció de trens. El joc en qüestió està format per peces de longituds 1, 2 i 5 que es poden anar enganxant una darrera l'altra. Com es podia esperar de tal família, el nen té molts mòduls repetits; tants que el nen, avorrit com està sense amics amb qui jugar, es dedica a construir tots els trens possibles de longitud fixada.

   (a) Dissenyeu una classe combinatòria que permeti comptar el nombre de trens diferents de longitud fixada n que es poden fer amb els mòduls donats.

   (b) Sabent que es poden fer 128 trens diferents de longitud 10, digueu (aproximadament) quants se'n poden fer de longitud 20.
   Indicació: Les arrels del polinomi x^5+x^2+x-1 són $0.6228\pm1.0322i$, $-0.9161\pm0.5778i$, 0.5865.

3. En una xarxa de 10 ordinadors, cada ordinador està connectat amb almenys altres 6 ordinadors i, si dos ordinadors estan connectats, hi estan per una única connexió. El nombre de connexions és múltiple de 13.

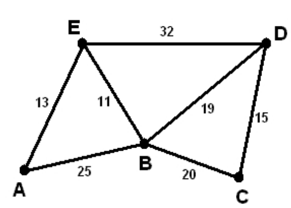
   (a) Demostreu que la xarxa és connexa.

   (b) Demostreu que el nombre de connexions és 39.

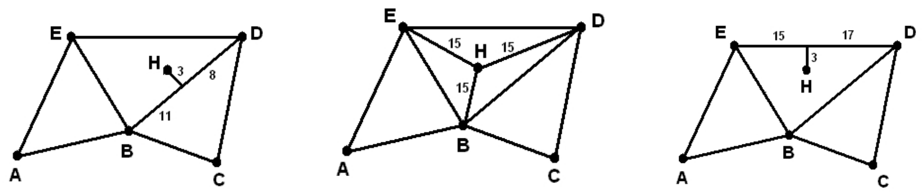
   (c) És la xarxa hamiltoniana?

   (d) Suposant que la xarxa és euleriana, quants de nodes de grau 6 té?

4. El següent graf representa el mapa de carreteres que uneix cinc localitats diferents. Cada aresta es troba etiquetada amb el temps, en minuts, que es tarda en anar de la localitat represenda per un dels seus extrems a la localitat representada per l'altre.



Es pretén construir un hospital que doni servei a les cinc localitats diferents. Els que realitzen els estudis orogràfics han presentat tres possibles propostes que es mostren als grafs següents (on el nou vèrtex representaria la localització de l'hospital i les noves arestes estan etiquetades com en el graf original):



Quina seria la millor proposta de les tres, tenint en compte que es desitja que el temps màxim des de l'hospital a qualsevol de les localitats sigui el mínim possible? Justifica la teva resposta utilitzant un dels algoritmes vists a teoria de grafs i explicant els càlculs realitzats.

5. Un magatzem de productes informàtics guarda una partida de CDs i DVDs. Els discs venen empaquetats en caixes, totes del mateix tamany, però els DVDs venen en bobines de 10 unitats, mentre que els CDs venen en bobines de 11 unitats. Al seu torn, les bobines es guarden en caixes on hi caben 64 bobines, de manera que al magatzem hi ha diferents caixes plenes de bobines, i una caixa que en conté només 32. Sabent que el nombre total de discs (entre CDs i DVDs) és de 6500, quants CDs i quants DVDs hi ha?

Examen Parcial de Matemàtica Discreta — Novembre 2010

Problemes

1. Considerem el següent argument: "Tots els lleons són criatures ferotges i viuen a la selva. Alguns lleons no mengen herba. Per tant, algunes criatures ferotges no mengen herba". Expresseu l'argument utilitzant la lògica de predicats i els quantificadors (donant els predicats i l'univers utilitzat) i demostreu la veracitat de l'argument mitjançant les regles d'inferència. **2 pt**

2. Sigui $(S, \leq)$ un poset, i $\sim$ una relació d'equivalència sobre S. Es diu que la relació $\sim$ és *compatible* amb l'ordre $\leq$ si per a tots $a, a', b, b' \in S$ tals que $a \sim a'$ i $b \sim b'$ es té **3 pt**

$$a \leq b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a' \leq b'.$$

Proveu que la relació sobre $S/\sim$ donada per

$$[a]R[b] \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \leq b$$

està ben definida (és a dir, és independent dels representants escollits per a les classes) i és un ordre parcial.

3. Els professors de l'assignatura hem demanat a un oracle el resultat del partit Barça–Madrid de dilluns vinent. **5 pt**

   (a) Sabent que el partit acabarà 7 a 5 (amb victòria del Barça), de quantes maneres diferents es pot arribar al resultat final?

   (b) Sabent, a més, que els dos darrers gols els marcarà Messi per al Barça. De quantes maneres diferents es pot arribar al resultat final?

   (c) Sabent, a més, que el Barça mai ha anat perdent durant tot el partit, de quantes maneres diferents es pot arribar al resultat final?

   (d) Quan hem insistit sobre la seguretat en les respostes, la vident ens ha assegurat el resultat final, que el Barça mai aniria perdent, i que Messi marcaria 2 gols consecutius, que els parcials anteriors i posteriors a aquests 2 gols serien d'empat i que el Barça mai aniria perdent en aquests parcials. Amb aquestes noves condicions, de quantes maneres diferents es pot arribar al resultat final?

   (e) Si, amb les condicions de l'apartat anterior, sabem que en un determinat moment el resultat parcial ha estat d'empat a 3 gols, de quantes maneres diferents es pot arribar al resultat final?

Examen Parcial de Matemàtica Discreta — Novembre 2010

Problemes

1. Considerem el següent argument: "Hi ha algun esportista que no berena el dematí gran quantitat de menjar. Tots els tenistes mengen pasta. Tots els esportites berenen molt el matí o no mengen pasta. Per tant, hi ha algun esportista que no és tenista". Expresseu l'argument utilitzant la lògica de predicats i els quantificadors (donant els predicats i l'univers utilitzat) i demostreu la veracitat de l'argument mitjançant les regles d'inferència. **2 pt**

2. Siguin $(S, \leq_1)$ i $(T, \leq_2)$ dos conjunts parcialment ordenats. **3 pt**

   (a) Demostrau que $(S \times T, \leq)$ és un conjunt parcialment ordenat, essent $(s,t) \leq (u,v)$ si, i només si, $s \leq_1 u$ i $t \leq_2 v$.

   (b) Suposeu que $S = T = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ amb $\leq_1$ l'ordre de divisibilitat i $\leq_2$ l'ordre habitual. Trobeu els minimals i mínims del poset $S \times T$ amb l'ordre definit a l'apartat anterior.

3. En Joan és un nin molt entremaliat i la seva mare, cansada de que no li fes cas, l'ha castigat assegut i sense moure's d'un graó de l'escala de casa seva mentre ella acaba el sopar. En Joan però, que no sap estar aturat, s'entreten pujant i baixant graons de l'escala de manera que sempre que la seva mare mira el troba assegut al graó on l'havia castigat. Considerant que les úniques passes possibles que pot fer en Joan són pujar un graó i baixar un graó, direm un moviment de'n Joan al conjunt de pases que pot fer de manera que sempre arribi al graó d'on ha partit. **5 pt**

   (a) Suposant que l'escala té infinits graons per damunt i per davall del graó on es troba en Joan, trobeu de quantes maneres en Joan pot fer 8 passes i tornar al mateix graó on estava castigat. Generalitzeu-ho a què en Joan pot fer $2n$ passes i tornar al mateix graó on estava castigat.

   (b) Suposant ara que l'escala no és infinita i que en Joan està castigat a baix de tot de l'escala, trobeu de quantes maneres en Joan pot fer 8 passes i tornar al mateix graó on estava castigat.

   (c) Anomenem "moviment arriscat" a les passes que fa en Joan per tal de sortir i arribar sempre al mateix graó, però només tornant al graó de sortida un cop. Proveu que la classe combinatòria dels moviments que fa en Joan (arribar sempre al mateix graó de sortida) es pot descriure per la classe de seqüències de moviments arriscats.

   (d) Proveu que la classe de moviments arriscats es pot descomposar com pujar un graó, seguit d'un moviment de'n Joan (arriscat o no), i finalment baixar un graó.

   (e) Descriviu una formulació recursiva de la classe de moviments de'n Joan i trobau la seva funció generatriu.

Cognoms i nom: ______________________________

DNI: ______________________ **Aula:** ____ **Fila:** ____ **Columna:** ____

Examen de Matemàtica Discreta — Febrer 2011

Instruccions

- Resoleu problemes diferents en fulls diferents (això no implica que no pogueu emprar més d'un full per a cada problema). Pensau que al final haureu d'entregar-los per separat, i tot problema que no estigui al munt corresponent no serà corregit.
- Poseu nom i cognoms a tots els fulls que feu servir. Qualsevol full escrit però sense identificació podrà ser retirat durant l'examen.
- Qualsevol sospita de còpia durant l'examen o la seva correcció suposarà un zero a l'avaluació.
- Aquest full amb els enunciats ha de ser entregat al final de l'examen amb la informació que es requereix a l'encapçalament degudament emplenada.

Problemes

1. (a) Demostreu per contrarecíproc la proposició següent: si $A \subseteq B$, aleshores $A \cap C \subseteq B \cap C$ per a tot conjunt C. **2 pt**

   (b) Doneu un contraexemple de la proposició (falsa) següent: Si R és una relació simètrica i transitiva, aleshores és reflexiva.

   (c) Proveu per reducció a l'absurd la proposició següent: Si un poset té mínim, aleshores aquest és únic.

2. Quan érem adolescents i anàvem tots els cosins (m nois i n noies) al cinema, la nostra àvia ens deia que havíem d'asseure'ns tots junts a una mateixa fila, que als extrems s'havia d'asseure un noi (per evitar que intentessin lligar amb les cosines) i que entre dos nois hi havia d'haver, com a mínim, una noia (per evitar que els nois es barellessin). **3 pt**

   (a) Doneu una condició necessària i suficient, en termes de m i n, per tal de poder-nos asseure com volia l'àvia.

   (b) Com que l'àvia no se'n fiava de nosaltres, venia ella al cinema i deixava a les cadires que havíem d'ocupar un paper blau (indicant que s'hi havia d'asseure un noi) o rosa (indicant que s'hi havia d'asseure una noia). Suposant que es compleix la condició de l'apartat anterior, de quantes maneres diferents podia disposar els papers la nostra àvia?

   (c) Digueu de quantes maneres diferens ens podiem asseure.

   (d) Diguem $\mathcal{U}_b$ i $\mathcal{U}_r$ les classes combinatòries unitàries que representen, respectivament, un paper blau i un paper rosa. Doneu una classe combinatòria que representi les disposicions de papers que ens podiem trobar.

      Observació: El pes dels elements ha de ser el nombre total de papers, sense distingir el color.

   (e) Diguem B_m i K_n, respectivament, el graf buit amb m vèrtexs i el graf complet amb n vèrtexs. Traduïu el problema d'asseure'ns segons el criteri de l'àvia a un problema de camins sobre el graf suma $B_m + K_n$.

3. En una xarxa social (tipus facebook) hi ha un conjunt de 12 usuaris tal que cada usuari té relació d'amistat (s'entén que en aquesta xarxa totes les relacions d'amistat són mútues) amb almenys altres 7 usuaris del conjunt (i sense cap amistat fora del conjunt). Se sap també que el nombre de relacions d'amistat és múltiple de 17. La interfície de la xarxa fa que en el perfil de cada usuari apareguin enllaços als perfils dels seus amics, i que qualsevol usuari pot escriure al mur de qualsevol usuari (siguin amics o no) **3 pt**

   (a) Un dels usuaris vol organitzar una festa per conèixer-se en persona. Proveu que, partint del seu perfil, pot anar visitant tots els perfils de tots els 12 usuaris per deixar-los un missatge al mur.

   (b) Digueu quin és el nombre exacte de relacions d'amistat.

   (c) Un dels usuaris del sistema ha creat una aplicació malèvola que: (1) partint del perfil d'un usuari x, escull y un dels amics de x, trenca el lligam d'amistat entre x i y i es mou al perfil de y; (2) repeteix iterativament el procés. Suposant que l'aplicació acaba rompent tots els lligams d'amistat i el darrer perfil visitat coincideix amb l'inicial, digueu quants usuaris tenien, a l'inici del procés, exactament 8 amics.

   (d) Quan els tècnics han eliminat l'aplicació malèvola i restaurat la xarxa d'amistats originals, decideixen introduir una aplicació amigable que: (1) partint d'un perfil qualsevol, escriu al mur de l'usuari un "`I ♡ SAGE`" i es mou al perfil d'un dels seus amics; (2) repeteix iterativament el procés. Digueu si és possible que tots els usuaris acabin amb un (i només un) missatge "`I ♡ SAGE`" al seu mur.

4. Dissabte passat vaig anar a comprar rosers per plantar al jardí. Els que vaig comprar valien 1 euro cadascun, i vaig pagar amb un bitllet de 100 euros i un bitllet de 50 euros (i em van tornar canvi). Com que tantes plantes no ens cabien vaig pensar de repartir-les entre els 6 companys que dinem plegats cada dia, però vaig veure que així en sobrarien 4. Per tal de fer el repartiment més just, vaig regalar 4 dels rosers a la meva sogra, però quan vaig tornar a fer el repartiment, va resultar que 2 dels companys havien marxat de congrés, i si feia el repartiment entre els que quedàvem en sobraven 2. Així doncs, vaig decidir esperar a que tornessin els companys que estaven fora per repartir els rosers, però a un d'ells el van confondre amb un terrorista a l'aeroport i no el van deixar tornar. Per fer-li més agradable l'estada a la presó, li vaig enviar 3 dels rosers, i la resta dels rosers la vaig repartir a parts iguals entre els 5 que quedàvem. Quants rosers vaig comprar? **2 pt**

Examen de Matemàtica Discreta — Setembre 2011

1. (a) Formalitzau les frases següents en lògica de predicats, usant l'univers de les persones i únicament els predicats següents: $S(x, y) =$ "x somriu a y", $M(x, y) =$ "x mira a y", $A(x) =$ "x és amigable".
      i. Algú somriu a tots els qui el miren.
      ii. Les persones amigables somriuen a tothom.
      iii. Hi ha persones amigables i persones que somriuen a tothom.
      iv. No existeix ningú que sigui amigable i no somrigui a tothom.

   (b) Sobre el conjunt $\mathbb{Z} - \{0\}$ definim la relació
   $$a\,R\,b \quad \leftrightarrow \quad \frac{a}{b} = 2^k \text{ per a algun } k \in \mathbb{Z}$$
      i. Demostrau que R és una relació d'equivalència.
      ii. Demostrau que $(\mathbb{Z} - \{0\})/R$ conté infinits elements.
      iii. Trobau les classes de A/R quan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

2. En les oposicions a professor de secundària el temari està format per 40 temes. En una de les proves, s'escullen a l'atzar 5 temes, dels quals cada opositor n'ha de triar un per desenvolupar.

   (a) Quants sortejos diferents es poden donar?

   (b) Un opositor s'ha preparat 15 temes. Dels sortejos anteriors, quants n'hi ha que contenen almenys un dels temes que s'ha preparat l'opositor? La probabilitat d'èxit de l'opositor és el quocient entre el nombre d'opcions que li són favorables i el nombre total d'opcions. Quina és la probabilitat d'èxit del canditat?

   (c) Respecte de l'any anterior, els temes s'han reordenat de manera que si un tema ocupava la posició i, ara pot ocupar la posició $i - 1$, i o $i + 1$ (evidentment, el que ocupava la primera posició només pot ocupar ara la posició 1 o 2, i el que ocupava la posició 40 ara només pot ocupar la 39 o la 40). De quantes maneres diferents es poden haver reordenat els temes?

3. En una determinada xarxa social, i fixant-nos en les relacions entre un grup X de 27 persones, ens trobem amb la situació següent: Hi ha un conjunt $A \subset X$ de persones que són tots amics entre ells; els restants membres $X - A$ són també tots amics entre ells; hi ha una única relació d'amistat mútua entre un element de A i un element del seu complementari.

   (a) Si suposem que analitzem aquesta xarxa sense conèixer les persones involucrades, digueu quantes situacions diferents ens podem trobar (més tècnicament, considereu els grafs que representen la xarxa i compteu les classes d'isomorfisme).

   (b) Digueu quins dels grafs que modelen la situació anterior admeten un recorregut eulerià.

   (c) Suposant que som un membre de A (i, per tant, coneixem els seus membres) però no coneixem els altres membres, digueu quantes situacions diferents ens podem trobar (més tècnicament, considereu els grafs que representen la xarxa amb els vèrtexos de A distingits i compteu les classes d'isomorfisme que deixen fixos els elements de A).

4. Donat un graf connex G, direm que una aresta seva $e = uv$ és una *aresta frontera* si el graf resultant d'eliminar els extrems de l'aresta té dos components connexos. Per exemple, al graf de la figura (a), l'aresta e és una aresta frontera.

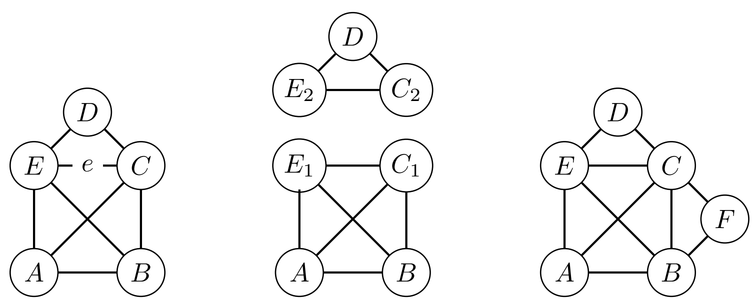
   Donat un graf G i una aresta frontera $e = uv$ es defineix el *graf escindit per* e com el graf resultant de fer les operacions següents:

   - Eliminar els vèrtexos u i v. Diguem V_1 i V_2 els vèrtexos dels components connexos en que queda dividit el graf.
   - Afegir 4 vèrtexos u_1, v_1, u_2, v_2 i arestes $e_1 = u_1v_1$ i $e_2 = u_2v_2$.
   - Per a cada vèrtex x de V_i $(i = 1, 2)$ adjacent (a G) amb u, afegir l'aresta xu_i.
   - Per a cada vèrtex x de V_i $(i = 1, 2)$ adjacent (a G) amb v, afegir l'aresta xv_i.

   Per exemple, el graf escindit corresponent a l'exemple anterior és el de la figura (b).

   (a) Sigui G un graf amb una aresta frontera i sigui G' el graf escindit corresponent. Proveu que
   $$P_G(k) = \frac{P_{G'}(k)}{k(k-1)}.$$

   (b) Apliqueu el resultat anterior al càlcul del polinomi cromàtic del graf de la figura (c).



(a) (b) (c)

5. Després de fer la declaració del IRPF, l'Agència Tributària ens avisa que han detectat un error i que devem certa quantitat de diners a l'Estat. Per tal de satisfer el deute, ens donen 3 opcions diferents:

   - Pagar 15 euros a l'instant i la diferència pagar-la en 39 mensualitats, totes elles del mateix import.
   - Pagar 33 euros a l'instant i la diferència pagar-la en un determinat nombre de mensualitats de 51 euros cadascuna.
   - Pagar 9 euros a l'instant i la diferència pagar-la en 18 mensualitats, totes elles del mateix import.

   Sabent que el nostre deute es troba entre 15.000 i 20.000 euros, digueu quants diners devem a Hisenda.

   Important: Qualsevol resultat (final o parcial) obtingut "a ull" serà considerat incorrecte. S'han de fer servir els algoritmes corresponents.

Examen Parcial de Matemàtica Discreta — Novembre 2011

Problemes

1. Les proposicions següents tenen per univers de referència els nombres enters. Traduïu-les al llenguatge corrent i digueu si són certes o falses. **2 pt**

   (a) $\forall x \exists y((x > 0) \to ((x \geq y^2) \wedge (x < (y+1)^2)))$

   (b) $\exists! x \forall y((x < 0) \wedge ((xy)^2 = y^2))$

2. L'amo del "Combinafour" que, com veureu, és molt aficionat a les matemàtiques ha definit una relació R entre el conjunt dels seus treballadors, de manera que donats dos treballadors x i y, es té que xRy si, i només si: **3 pt**

   - o bé x té un sou més alt que y,
   - o bé x i y tenen el mateix sou, però x porta més temps a l'empresa que y,
   - o bé x i y tenen el mateix sou i van entrar el mateix dia a l'empresa.

   (a) Proveu que la relació R és reflexiva i transitiva, però no necessàriament antisimètrica.

   (b) Els treballadors estan agrupats en seccions, de manera que en cada secció hi ha els treballadors que cobren el mateix i que van entrar el mateix dia a treballar. Diguem $s(x)$ la secció on treballa l'empleat x. Sobre les seccions es defineix la relació S per mitjà de

   $$s(x) S s(y) \iff xRy.$$

   Proveu que la relació S és una relació d'ordre parcial sobre el conjunt de les seccions.

3. Fa 3 setmanes va ser la festivitat de Halloween, i com que la meva parella i jo sabíem que els nens del barri vendrien a buscar caramels, en vam anar a comprar al supermercat del "Combinafour". **3 pt**

   (a) En el primer grup de nens que van venir, n'hi havia 5 que anaven disfressats de bruixa i 4 que anaven disfressats de vampir. Vam obrir una bossa que tenia 50 caramels de gust de maduixa; jo en vaig agafar 25 per repartir entre les bruixes i la meva parella va agafar els altres 25 per repartir entre els vampirs. De quantes maneres diferents vam poder repartir els caramels si cap nen disfressat de vampir se'n va anar sense?

   (b) En el segon grup, els nens anaven sense disfressar; de fet, eren els meus 4 nebots. Vam agafar una bossa que tenia 40 caramels, repartits en 20 caramels de maduixa, 15 caramels de menta i 5 caramels de llimona. De quantes maneres vam poder repartir els caramels si cada nen havia de rebre, com a mínim, un caramel de cada gust?

   (c) Quan els nens van marxar, ens va sobrar una bossa on hi havia caramels de 5 gustos diferents i de cada gust n'hi havia 6. Ens vam repartir els 30 caramels entre la meva parella i jo de manera que cadascun de nosaltres tingués el mateix nombre total de caramels i, com a mínim, 2 caramels de cada gust. De quantes maneres ens els vam poder repartir?

   Observació: Podeu fer servir els números de Stirling de segona classe i els nombres de particions sense haver de calcular-los explícitament.

4. Fa un mes, l'amo del "Combinafour" em va trucar per comentar-me un problema que li havia sorgit. Tenia en stock una gran quantitat de caramels de maduixa, de menta i de llimona. Els caramels de maduixa els venia a 1 cèntim cadascun, els de menta a 2 cèntims i els de llimona a 3 cèntims. L'amo del "Combinafour" volia fer bosses de caramels en previsió de la demanda que hi hauria per Halloween, de manera que cada bossa valgués 1 euro. El problema que tenia era que no sabia quantes bosses diferents de caramels podria fer. La solució que li vaig donar feia servir classes combinatòries i un manipulador algebraic per obtenir coeficients de series formals. Com li vaig resoldre el problema? **2 pt**

Examen de Matemàtica Discreta — Febrer 2012

Problemes

1. Considerau la successió $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 1$ on $a_1 = a_2 = 1$. Demostrau que **1 pt**

$$a_n = 2^{n-1} - \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

per a tot $n \geq 1$.

2. Un departament de la universitat ha de repartir la seva docència entre els professors de que disposa. Els professors del departament estan dividits en 3 grups, cadascun d'ells amb 7 professors. **2.5 pt**

   (a) Per fer la repartició es crea una comissió de 3 membres, formada per un professor de cadascun dels grups. De quantes maneres diferents es pot escollir la comissió?

   (b) Els membres de la comissió han d'assignar cadascuna de les 15 assignatures que ha d'impartir el departament a un dels 3 grups de professors, de manera que cada grup imparteixi 5 assignatures. De quantes maneres es poden assignar les assignatures?

   (c) Un cop assignades les assignatures als grups, els membres de cadascun dels grups s'han de repartir entre ells les assignatures. Un dels grups compta amb 2 catedràtics, 4 titulars i 1 ajudant. Se sap que cada professor ha d'impartir una (i només una) assignatura, totes les assignatures han de tenir almenys un professor assignat, els catedràtics no comparteixen les assignatures amb cap altre professor, i els ajudants no poden fer una assignatura sols. De quantes maneres pot repartir aquest grup la seva docència?

   Observació: Podeu fer servir els números de Stirling de segona classe, els nombres de particions i els nombres combinatoris sense haver de calcular-los explícitament.

3. El cometa *Kalley* es pot veure des de l'observatori de Costitx cada 12 anys. El cometa *Harrington* cada 8 anys, però les dades del cometa *Batters* s'han perdut i només sabem que es va veure l'any 1999 i que es veurà l'any 2021, i que els tres cometes es van poder veure en un mateix any. Si el cometa Kalley es va veure l'any 2004 i el Harrington es va veure l'any 2000 **2.5 pt**

   (a) Plantejau un sistema d'equacions en congruències i trobau cada quants d'anys es pot veure el cometa Batters des de l'observatori de Costitx.

   (b) Trobau el primer any en que coincidiran tots tres cometes.

4. El nou govern ha decidit renovar una xarxa de carreteres entre 8 ciutats diferents, anomenades A, B, C, D, E, F, G i H. La xarxa de carreteres existents ve representada a la taula següent, on els nombres indiquen l'existència de carretera i el cost de renovació de la mateixa. **3 pt**

	B	C	D	E	F	H
A	6	6	10	13		5
B		7				6
D	8	8		5	12	
F				11		9
G		6		5	10	10
H		12	8			

Nota: Totes les carreteres són bidireccionals, tot i que a la taula només s'indica un dels sentits per a cada carretera

Es demana:

(a) El director general corresponent ha de recòrrer tots els trams de carretera per comprovar l'estat de les mateixes. Ho podria fer sense passar dues vegades per la mateixa carretera?

(b) Una vegada que el director general ha visitat tots els trams de carretera, decideix fer una visita de cortesia a tots els batles de les diferents ciutats per saber el seu parer i, per tant, ha d'anar a cada ciutat. Pot fer la visita a tots els batles sense tenir que passar dues vegades per la mateixa ciutat?

(c) El primer plantejament que es fan és eliminar els passos a nivell i els ponts, ja que són perillosos. Es podria fer l'actual xarxa de carreteres sense que es creuin en cap lloc les mateixes, més que a les ciutats que uneixen?

(d) Finalment, veuen que tenen doblers assignats al pressupost per renovar alguns trams de carreteres peró no tots. Quins trams de carretera haurien de renovar de forma que el pressupost invertit fos el mínim possible i de forma que totes les ciutats quedassin connectades per trams renovats?

Observació: El problema s'ha de plantejar a partir de la teoria de grafs donada, justificant les respostes a partir dels algorismes i els teoremes vists.

5. Donat un arbre binari arrelat T amb arrel r, es defineix l'*altura* d'un node qualsevol u, i s'indica per $h(u)$, com el màxim de les longituds dels camins que van del node en qüestió a les fulles, i es defineix la seva *profunditat*, i s'indica per $d(u)$, com la longitud de l'únic camí que va de l'arrel al node en qüestió. Demostreu que si T té n fulles, aleshores $h(u)+d(u) \leq n-1$ per a tot node u de T. **1 pt**

Examen de Matemàtica Discreta — Setembre 2012

1. Donat el conjunt de proposicions lògiques **2 pt**

$$A = \{p \wedge (q \vee r), p, q \wedge \neg q, p \rightarrow q, p \leftrightarrow r\},$$

   es defineix en A la següent relació: xRy si, i només si, x implica lògicament y.

   Determineu si la relació R és reflexiva, simètrica i transitiva.

2. Aquest estiu es celebren a Londres els Jocs Combinatòrics. **3 pt**

   (a) El comité organitzador ha de repartir, entre els 8 equips participants, 16 acreditacions per participar en la cerimònia inaugural, de manera que cada equip rebi almenys una acreditació. Suposant que els equips són distingibles i cadascun d'ells compta amb almenys 9 membres, de quantes maneres pot el comité organitzador repartir les acreditacions entre els equips?

   (b) Un dels equips que participen reb 5 acreditacions per als 10 atletes que el formen. A més, entre els 5 escollits per participar, han de dessignar un d'ells per portar la bandera. De quantes maneres es poden repartir les acreditacions i el lloc d'abanderat?

   (c) L'equip "Erdös" té 12 membres, i l'equip "Polya" en té 10. En una de les proves en què s'han d'enfrontar, cadascun dels equips s'ha de dividir en 5 sub-equips, no necessàriament amb el mateix nombre de membres. Una vegada s'ha fet això, cada sub-equip d'un d'ells ha de jugar un partit contra cadascun dels sub-equips de l'altre. De quantes maneres poden formar-se els sub-equips? Una vegada formats els sub-equips, quants partits s'hauran de jugar?

   Observació: Podeu deixar indicades les solucions fent servir nombres combinatoris, nombres de Stirling i nombres de particions.

3. La matriu següent representa la matriu d'adjacència del graf que relaciona set jugadors diferents d'un joc en xarxa. **3 pt**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Els vèrtexs del graf representen els diferents jugadors, i dos vèrtexs són adjacents si, i només si, els jugadors corresponents s'han seleccionat com a contrincants. Sense representar el graf, i a partir de la informació de la matriu d'adjacéncia, responeu les següents preguntes de manera justificada i relacionant-les amb la teoria de grafs:

(a) Si cada jugador juga una partida amb cadascun dels seus contrincants, quantes partides es duran a terme?

(b) És el graf un arbre?

(c) Si un jugador guanya a un altre, aquest pot triar, com a següent oponent seu, un dels contricants del jugador a qui ha guanyat. Si el jugador va guanyant totes les partides que juga i no repeteix cap contrincant contra el que ja ha jugat, podria d'aquesta forma jugar contra tots els altres jugadors?

(d) És el graf un graf bipartit?

4. Una badia té tres fars que s'encenen intermitentment cada 12, 18 i 15 segons respectivament. El primer far sabem que s'ha encès a les 10:00:02 hores, el segon far sabem que s'ha encès a les 10:00:08 hores, però el tercer no sabem exactament quan s'ha encès després de les 10 hores i, per tant, direm que s'ha encès c segons després de les 10:00:00 hores. **2 pt**

(a) Plantegeu un sistema d'equacions en congruències i digueu per a quins valors de c els tres fars coincidiran encesos alhora.

(b) Digueu quina és la freqüència en què coincideixen els tres fars encesos.

(c) Resoleu el sistema d'equacions en congruències que heu plantejat i digueu quan coincideixen per primer cop després de les 10 hores si suposem que $c = 5$.

Examen Parcial de Matemàtica Discreta — Novembre 2012

Problemes

1. **2.5 pt**
   - Quatre amics tenen accés a una sala de xat. Sabem que: si en Joan xateja aleshores en Pere també xateja. O bé en Joan o bé en Marc estan xatejant. En Pere no està xatejant. Si en Joan no xateja llavors ho fa n'Andreu. Emprant les regles d'inferència, explica raonadament quins dels amics estan xatejant i quins no.
   - Siguin $P(x), Q(x), R(x)$ les proposicions lògiques «x és una explicació clara», «x és satisfactòria» i «x és una excusa», respectivament. Suposant que l'univers on estem treballant és el format per tots els texts en llengua catalana, expressa les dues sentencies següents emprant les proposicions anteriors, els quantificadors i conectius lògics necessaris:
     (a) Totes les explicacions clares són satisfactories.
     (b) Algunes excuses no són explicacions clares.

2. Sigui $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Definim les tres relacions següents: **5 pt**
   - sobre A definim R_1 com: $aR_1b \Leftrightarrow a + b$ és un múltiple de 2.
   - sobre A definim R_2 com: $aR_2b \Leftrightarrow a + b \in A$.
   - sobre $\mathcal{P}(A)$ definim R_3 com: $AR_3B \Leftrightarrow A \subseteq B$.

   (a) Estudiau quines d'aquestes relacions són un ordre parcial i quines una relació d'equivalència.
   (b) Quan la relació sigui un ordre parcial, trobau, si existeixen, els elements minimals, maximals, mínim i màxim del poset corresponent.
   (c) Quan la relació sigui d'equivalència trobau el conjunt quocient corresponent.

3. La secretària d'una empresa de construcció ha perdut una factura del plan renove de maquinària de carreteres. Cada màquina nova val 35207 euros i per cada màquina que retornen els hi paguen 20.383 euros. Si la secretària sap que la liquidació final és de 1853 euros, vol averiguar quantes màquines s'han comprat i quantes màquines s'han tornat. Amb l'objectiu de resoldre el problema, la secretària planteja l'equació següent: **2.5 pt**

$$1853 = 35207x + 20383y$$

   on $x, y \in \mathcal{Z}$.

   - Explica detalladament perquè aquesta eqüació permetrà a la secretària a resoldre el problema i quin paper representen les variables x i y en aquesta.
   - Emprau l'algoritme d'Euclides per a trobar quins x, y s'atisfan l'equació i responeu a la pregunta que volia averiguar la secretària.

Examen Parcial de Matemàtica Discreta — Novembre 2012

Problemes

1. (a) L'administrador d'un servidor linux ha d'esbrinar quins editors són els que estan consumint els recursos de memòria de la màquina. Per la seva experiència, sap que: Si `emacs` està corrent, aleshores `eclipse` no està executant-se; O bé `emacs` o bé `vi` estan executant-se (però mai alhora); Si `emacs` no està executant-se, aleshores ho fa `gedit`. A més, veu que el procés `eclipse` s'està executant. **3 pt**

   Feu servir les regles d'inferència per tal d'esbrinar quins dels editors esmentats s'estan fent servir i quins no.

   (b) En un llenguatge de programació tenim definides tres funcions que implementen formes proposicionals:

   - `Maco`(n): Retorna `V` si el nombre $n \in \mathbb{Z}$ és maco, i `F` si no ho és.
   - `Culte`(n): Retorna `V` si el nombre $n \in \mathbb{Z}$ és culte, i `F` si no ho és.
   - `MesRapidQue`(m, n): Retorna `V` si $m \in \mathbb{Z}$ és més ràpid que $n \in \mathbb{Z}$, i `F` altrament.

   i. Fent servir les formes proposicionals esmentades, connectius lògics i quantificadors, formalitzeu la proposició: "Un nombre és culte si, i només si, existeix un nombre no maco que és més ràpid que el donat"

   ii. Considereu els següents blocs de pseudocodi:

```
Per a n=1,...,10 {
    si ~Maco(n)
        retorna F
}
retorna V
```

```
Per a n=1,...,10 {
    si Maco(n)
        retorna V
}
retorna F
```

   Digueu justificadament quins dels blocs implementen cadascuna de les proposicions "Hi ha un nombre maco" i "Tots els nombres són macos", referides sempre a l'univers dels nombres entre 1 i 10.

2. Sigui A el conjunt de les paraules binàries de longitud $1 \leq \ell \leq 8$. Sobre aquest conjunt es defineixen les relacions: **4 pt**

   - $w_1 \; R \; w_2$ si la paraula w_2 comença per la paraula w_1. (per exemple, `01` R `01100` però `10` $\not R$ `1101`).
   - $w_1 \; S \; w_2$ si la paraula w_1 té la mateixa longitud que la paraula w_2 (per exemple, `01110` S `10100` però `10` $\not S$ `1101`).
   - $w_1 \; T \; w_2$ si la concatenació de w_1 i w_2 és una paraula de A (per exemple, `01` T `1010` però `100101` $\not T$ `11001`).

   (a) Digueu quines de les relacions R, S, T són relacions d'equivalència i quines són relacions d'ordre parcial.

   (b) Per aquelles relacions que siguin d'ordre parcial, trobeu els mínims, màxims, minimals i maximals del poset corresponent.

3. El Servei de Relacions Internacionals reb 1770 euros per cada estudiant estranger que ve d'Erasmus a la UIB, i ha de pagar 1275 euros per cada estudiant de la UIB que marxa d'Erasmus a una altra universitat. Durant el curs passat, el balanç net d'aquestes partides va ser que es van cobrar 60 euros més que els que es van pagar. Amb aquestes dades es desitja saber quants estudiats van venir a la UIB i quants estudiants de la UIB van marxar. **3 pt**

   (a) Raoneu que el problema es pot reduir a trobar enters x, y tals que $60 = 1770x + 1275y$

   (b) Trobeu quants estudiants van venir a la UIB i quants van marxar.

Examen de Matemàtica Discreta — Febrer 2013

1. Sigui $A = \{0, 1, 2, \ldots, 7, 8\}$. Sigui $f : A \to A$ la funció definida per $f(x) = 3x + 4 \bmod 9$. Digueu si les següents sentències són vertaderes o falses i expliqueu detalladament les vostres respostes: **2.5 pt**

   (a) f és injectiva i/o exhaustiva.

   (b) $\exists x, y \in A : (x \cdot y = 6) \wedge (f(x) \cdot f(y) \neq 4)$

   (c) $\exists U \in \mathcal{P}(A) : (f(U) = \{1, 4, 7\}) \wedge (\forall y \in U : y \geq 5)$

   (d) $\forall x \in A : (f(x) = 1) \to \big(((2x \bmod 7) \leq 4) \vee (x = 4)\big)$

2. Al meu nebot li van regalar per reis un joc de construcció. Aquest joc conté 4 peces de color blau, 5 de color vermell i 6 de color groc, totes elles iguals de tamany i que es poden apilar una sobre l'altre per construir torres que facin servir totes les peces. **2.5 pt**

   (a) Quantes torres diferents pot fer?

   (b) Quantes torres pot fer de manera que no hi hagi dues peces vermelles consecutives?

   (c) Al meu nebot les construccions que li agraden més són les simètriques, aquelles que la seqüència de blocs és la mateixa si gira de dalt a baix la torre. Quantes en pot fer que siguin simètriques?

   (d) Suposant que les torres són reversibles (es poden girar de dalt a baix), quantes torres essencialment diferents pot fer?

   Indicació: Per fixar idees, les torres

   BBBBVVVVVGGGGGG i GGGGGGVVVVVBBBB

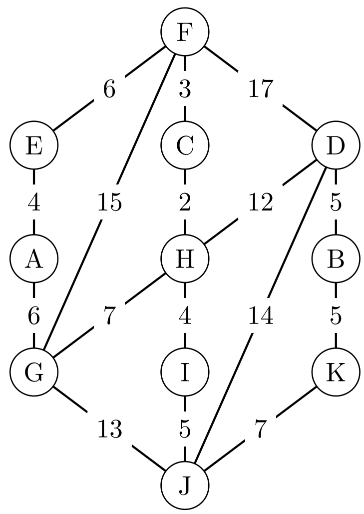
   es consideren iguals (on B, V i G indiquen respectivament peces de color blau, vermell i groc).

3. Sigui T un arbre arrelat, i diguem r la seva arrel. Per a cada node u de T, indiquem per $p(u)$ la seva profunditat, és a dir, la longitud de l'únic camí que porta de r a u. **2 pt**

   (a) Proveu que si dos nodes u i v són adjacents, aleshores $p(u)$ i $p(v)$ difereixen en una unitat, és a dir, $p(u) - p(v) = \pm 1$.

   (b) Demostreu que si definim $V_0 = \{u \mid p(u) \text{ és parell}\}$ i $V_1 = \{u \mid p(u) \text{ és senar}\}$, totes les arestes de T uneixen un vèrtex de V_0 amb un vèrtex de V_1. Concloeu que tot arbre és un graf bipartit.

4. En una determinada comarca hi ha un un seguit de pobles, que anomenarem A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, connectats per carreteres de doble sentit. La xarxa de carreteres ve representada en el graf següent, on els nombres sobre les arestes indiquen la longitud de les carreteres. Resoleu els apartats següents relacionant les preguntes amb la teoria de grafs vista durant el curs. **3 pt**



(a) L'encarregat del manteniment de carreteres té el seu cotxe de treball al poble D i recorre cada dia totes les carreteres de la comarca. Pot fer-ho sense haver de passar dos cops per la mateixa carretera si ha de deixar el cotxe al lloc d'on parteix? En cas afirmatiu, indiqueu una possible manera de fer-ho.

(b) Un viatger està planejant anar a visitar la comarca i estudia si podria realitzar una ruta que li permetés visitar tots els pobles una sola vegada. Pot fer-ho? En cas afirmatiu, indiqueu una manera de fer-ho.

(c) En la taula d'abaix hi ha representades un seguit de distancies entre pobles. Feu servir un dels algoritmes vists a classe per trobar els valors que han d'aparèixer a les entrades marcades amb $*$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
A		30	13	25	4	10	*	13	17	19	26
B			19	5	28	22	*	17	17	12	5
C				14	9	3	*	2	6	11	18
D					23	17	*	12	16	14	10
E						6	*	11	15	20	27
F							*	5	9	14	21
G							*	*	*	*	*
H									4	9	16
I										5	12
J											7

(d) Es vol construir una nova carretera que comuniqui els pobles C i D directament de manera que redueixi, al màxim, la distancia entre ambdós pobles però no la distància que hi ha entre A i B. Quina longitud hauria de tenir aquesta nova carretera?

Examen de Matemàtica Discreta — Setembre 2013

1. Resoleu els apartats següents: **2.5 pt**

   (a) Demostreu que tot nombre enter n satisfà que és congruent amb la suma de les seves xifres decimals mòdul 9. És a dir, si $n = a_0 + a_1 \cdot 10 + \cdots + a_k \cdot 10^k$, aleshores $n \equiv a_0 + \cdots + a_k \pmod 9$.

   (b) Trobeu el conjunt de parts del conjunt

   $$A = \{2, \{3\}, \{2, 3\}\}.$$

2. Sigui T un arbre arrelat, i diguem r la seva arrel. Sobre el conjunt de vèrtexs definim la relació R com: **2.5 pt**

   $$uRv \iff \begin{cases} u = v \\ \text{ó} \\ u \text{ està al camí de } r \text{ a } v \end{cases}$$

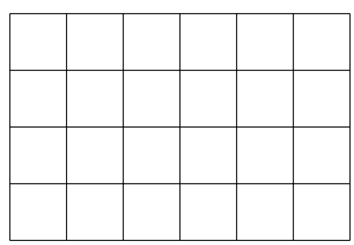
   (a) Demostreu que R és un ordre parcial.

   (b) L'ordre donat té elements minimals? I mínims?

   (c) Quins són els elements maximals?

3. Resoleu els apartats següents: **2.5 pt**

   (a) Quants rectangles diferents podem construir dins una quadrícula 4×6 com la de la figura?

   (b) Quants nombres hi ha entre 1 i 1000 (ambdós inclosos) que no siguin divisibles ni per 3 ni per 5 ni per 7?

4. Considerem el joc del N-dòmino generalitzat. En aquest joc es tenen fitxes, cadascuna de les quals està etiquetada amb dos nombres, $a, b \in \{0, \ldots, N\}$, i que indicarem per $[a \bullet b]$; les fitxes es poden girar; es a dir, la fitxa $[a \bullet b]$ i la fitxa $[b \bullet a]$ són indistingibles. **2.5 pt**

   (a) Suposant que no hi ha fitxes repetides, amb quantes fitxes juguem?

   Una partida de dòmino és una seqüència de fitxes, $[a_1 \bullet b_1][a_2 \bullet b_2] \ldots [a_k \bullet b_k]$, de manera que els nombres adjacents de fitxes diferents coincideixen, és a dir, amb $b_i = a_{i+1}$ per a tot $i = 1, \ldots, k-1$.

   (b) És possible fer una partida on s'emprin totes les fitxes del joc?

Parcial de Matemàtica Discreta — Novembre 2013

1. Cinc coneguts, en Mateu, n'Esteve, en Julià, na Bàrbara i na Cristina estan planejant anar-se'n uns dies d'acampada, però la decisió de partir-hi, o no, depèn de la dels seus companys. Sabem que: si en Mateu hi va llavors hi anirà na Bàrbara; si en Julià hi va llavors hi anirà na Cristina; en Mateu o en Julià hi van; na Bàrbara, al final, no hi va; si na Cristina hi va llavors hi anirà n'Esteve. Emprant les proposicions lògiques que trobis adients i les regles d'inferència, explica quins dels cinc coneguts acabaran anant a la acampada i quins no.

   (2.5 punts)

2. (a) Planteja el sistema d'equacions en congruències que et permet resoldre el següent problema: (Nota: no l'heu de resoldre, només plantejar el sistema).

   En unes illes del pacífic, una banda de 17 pirates han abordat un vaixell i se n'han emportat un botí de monedes d'or. Sabem que quan els pirates s'han intentat repartir les monedes a parts iguals, n'han sobrades 3. Amb la trifulca provocada per veure qui es quedava amb les monedes sobrants, un pirata ha estat assassinat. Llavors, quan han tornat a fer el repartiment de les monedes, han vist que en sobraven 10. De nou, i veïent que la situació tornava ser problemàtica, ha tornat haver-hi una disputa entre ells on ha mort un altre pirata. Finalment, repartint les monedes un altre cop, han vist que no en sobrava cap. Quin és el nombre mínim de monedes d'or que poden haver robat els pirates? (1 punt)

   (b) Resoleu el sistema d'equacions amb congruències següent emprant els mètodes vists a classe i donau la solució més gran possible i menor que 100. (2 punts)

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 3 \pmod{6} \end{cases}$$

3. Contesta raonadament cada un dels apartats següents:

   (a) Sigui R la relació definida sobre els nombres reals tal que aRb sí, i només sí, $a - b$ és un nombre enter.

   - Posa un exemple de dos elements que estiguin relacionats i un altre de dos elements que no hi estiguin.
   - És R una relació d'equivalència? En cas afirmatiu, calcula la classe d'equivalència d'1 i digues si $[\frac{1}{2}] = [\frac{5}{2}]$.
   - És R una relació d'ordre parcial? En cas afirmatiu, troba els elements minimals i maximals del poset corresponent.

   (2 punts)

(b) Sigui $\mathcal{U} = \{1, 2, 3\}$. Donada la funció

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{P}(\mathcal{U}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathcal{U}) \\ & C & \longmapsto & C \cap \{1, 2\} \end{array}$$

on $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ indica el conjunt de parts de $\mathcal{U}$, i C representa un element genèric de $\mathcal{P}(\mathcal{U})$,

(a) Calculeu $\mathcal{P}(\mathcal{U})$.

(b) Trobeu el conjunt imatge de f, és a dir, la imatge per f de tots els elements de $\mathcal{P}(\mathcal{U})$.

(c) Calculeu $f^{-1}(\{1, 2\})$.

(d) És f injectiva?

(e) És f exhaustiva?

(2.5 punts)

Examen Parcial de Matemàtica Discreta — Novembre 2013

Problemes

1. Considerem l'univers format per totes les persones. Usant la lògica de predicats escriviu el següent argument i digau si és correcte. "Tots els empleats de la Caixa Agrícola Murera (CAM) han de saber Java. Tots el empleats de la CAM encarregats de les sol.licituts de prèstecs han de saber C++. Na Catalina és una treballadora de la CAM, però no sap C++. Na Margalida sap C++ però no Java. Per tant, na Catalina no és encarregada de sol.licituts de prèstecs i na Margalida no és treballadora de la CAM". (2.5 punts)

2. a) Dissabte passat vaig anar a comprar bolles per l'arbre de Nadal. Com que hi havia una oferta, vaig aprofitar i vaig comprar moltes més capses de les que inicialment volia comprar. Vaig pensar de repartir les bolles entre les meves 3 germanes, la meva mare i la meva sogra, però vaig veure que així en sobrarien 4. Per tal de fer el repartiment més just, vaig regalar 12 bolles a la meva amiga Carol, però quan vaig tornar a fer el repartiment, va resultar que la meva mare i la meva sogra ja n'havien anat a comprar, i si feia el repartiment entre les meves germanes en sobraven 2. Així doncs, vaig decidir regalar 6 bolles al meu compnay de despatx, i la resta de bolles les vaig repartir a parts iguals entre els 5 membres del meu grup de recerca. Quin és el nombre mínim de bolles que vaig comprar? Plantejau un sistema d'equacions amb congruències (sense resoldre'l) que us permeti donar resposta a la pregunta. (1 punt)

   b) Resoleu el següent sistema d'equacions amb congruències emprant el mètodes vists a classe i donau la solució més gran possible i menor que 100. (2 punt)

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 4 \\ x \equiv 3 \pmod 5 \\ x \equiv 5 \pmod 6 \end{cases}$$

3. Sigui $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Definim la relació

$$xRy \Leftrightarrow x^2 + x = y^2 + y$$

   a) Demostrau que R és una relació d'equivalència sobre A. (1.25 punts)

   b) Trobau el conjunt quocient A/R. (1 punt)

4. Sigui $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Definim la relació sobre $\mathcal{P}(\mathcal{U})$

$$A\,R\,B \Leftrightarrow A \cap X = B \cap X,\ \forall X \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$$

   a) És R és una relació d'ordre parcial? (1.5 punts)

   b) En cas afirmatiu, trobau els elements minimals i maximals del poset corresponent. (0.75 punts)

Parcial de Matemàtica Discreta — Gener 2014

1. a) Quantes cadenes de deu bits contenen almenys tres uns i tres zeros?

   b) Explica que és el principi d'inclusió/exclusió per a dos conjunts i aplica'l per a calcular:

      1. Quantes cadenes de deu bits comencen amb 000 o acaben amb 00?
      2. Quantes cadenes de vuit bits contenen la cadena 000 o la cadena 1111?

   (3 punts)

2. Na María ha de traslladar 150 llibres i per fer el trasllat disposa de 5 capses. D'aquestes 5 capses n'hi ha 2 de groges, 2 de blaves i 1 de vermella. A la nova casa, ha fet fer una prestatgeria a mida de fusta per posar els seus llibres. Ha comptat que té 60 llibres de butxaca, que ha de repartir en 3 prestatges disposats en vertical, és a dir, un damunt l'altre. I a més, hi ha un altre prestatge per posar-hi tots els llibres de la col·lecció *Matemàtica Recreativa* que consta de 30 llibres.

   a) De quantes maneres pot posar els 30 llibres de la col·lecció *Matemàtica Recreativa* al seu prestatge a la prestatgeria?

   b) De quantes maneres pot posar els 60 llibres de butxaca als 3 prestatges de manera que hi hagi 20 llibres a cada prestatge?

   c) De quantes maneres pot posar els 150 llibres en les 5 capses de manera que totes tenguin llibres i que hi hagi en total 50 llibres a les capses groges, 50 a les capses blaves i 50 a la capsa vermella?

   (3 punts)

3. Contesta raonadament i relacionant amb la teoria de grafs vista a classe, cada una de les següents preguntes.

   a) Quants vèrtexs té un graf 4-regular amb 10 arestes? Existeix un graf regular d'ordre 5 i mida 6?

   b) Sigui G un graf connex simple (sense llaços) d'ordre n i G' el seu graf simple complementari. Quin serà el grau d'un node diguem-li u_1 dins G' si aquest mateix node té grau g_1 dins G? Si sabem que G té 15 arestes i G' en té 13, quant val n?

   c) En una xarxa connexa de 10 ordinadors, cadascun d'ells està connectat amb almenys altres 6 ordinadors. Se sap que el nombre de connexions és múltiple de 13. Quantes connexions té la xarxa? És hamiltoniana la xarxa? Si la xarxa és euleriana, quants ordinadors connectats exactament a altres 6 ordinadors hi ha?

   d) Sigui G un graf connex amb almenys 3 vèrtexs i amb una única aresta pont. Pot ser G eulerià? I hamiltonià? En cas afirmatiu dibuixeu el graf i, en cas contrari, expliqueu perquè no pot ser eulerià i/o hamiltonià.

   (4 punts)

Nota: als dos problemes de combinatòria podeu deixar indicat el resultat amb els nombres combinatoris, no cal calcular el seu valor. Ara bé, a cada apartat de cada problema heu d'explicar detalladament la vostra solució. Si només posau el nombre combinatori corresponent sense cap explicació, no se us comptarà cap punt de l'apartat.

Examen Final de Matemàtica Discreta — Febrer 2014

1. Considerem les següents afirmacions:

   A1: "La lògica és difícil o a pocs estudiants els agrada la lògica",

   A2: "Si les matemàtiques són fàcils, llavors la lògica no és difícil".

   i les següents conclusions que volem intentar deduïr:

   C1: "Si a molts estudiants els agrada la lògica, llavors les matemàtiques no són fàcils",

   C2: "Les matemàtiques no són fàcils o la lògica és difícil".

   Determinau si a partir de les dues afirmacions es pot deduïr lògicament, o no, alguna de les conclusions. (1.5 punts)

2. Sigui $C = \{1, 2, \ldots, n\}$ i sigui $g : C \to C$ una funció qualsevol. Considerem la relació R definida sobre C de la següent manera: $x\,R\,y$, si i només si, $g(x) \leq g(y)$, on $\leq$ és l'ordre habitual dels nombres naturals.

   a) Prova que R és una relació d'ordre parcial sempre que g sigui injectiva.

   b) Suposem ara que (C, R) és un poset. Troba, si existeix, el mínim i el màxim.

   (2 punts)

3. Considerem totes les banderes amb tres franges horitzontals que es poden fer amb cinc colors diferents (les franges, en principi, no tenen per què ser de diferent color).

   (a) Quantes banderes podem fer en total?

   (b) Quantes d'elles són monocromàtiques (d'un sol color)?

   (c) Quantes són tricolor?

   (d) Quantes són bicolor?

   (2 punts)

4. Sigui G un graf del qual sabem que és connex, no dirigit i que no té llaços. Únicament a partir de la seva matriu d'adjacència i, sense pintar el graf, explica detalladament com podríes esbrinar

   a) si és, o no, eulerià.

   b) quina mida té.

   c) si és, o no, un arbre.

   Sigui ara G el graf on els nodes són escoles públiques i les arestes són les carreteres que hi ha entre elles, i sigui la següent matriu $A = (a_{ij})$ la seva matriu d'adjacència amb pesos. És a dir, l'element a_{ij} indica el temps en minuts que es necessita per anar de l'escola i a l'escola j.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 4 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

   d) Dibuixa el graf G amb els corresponents pesos sobre les arestes.

e) Un inspector de la conselleria ha d'anar de l'escola 3 a l'escola 5 i de l'escola 5 a l'escola 4. Si a cada escola hi està mitja hora, suposant que arriba a les 9:00 hores a l'escola 1, pot arribar després a una reunió a l'escola 8 a les 10:50? Justificau la vostra resposta.

(3 punts)

5. Troba el conjunt de nombres enters x tal que $-1234 \leq x \leq 4567$ que verifiquen les següents condicions aritmètiquès: al dividir per 3 donen reste 2, són congruents amb 4 mòdul 7 i són múltiples de 5. (1.5 punts)

Nota: als problemes de combinatòria podeu deixar indicat el resultat amb els nombres combinatoris, no cal calcular el seu valor. Ara bé, a cada apartat de cada problema heu d'explicar detalladament la vostra solució. Si només posau el nombre combinatori corresponent sense cap explicació, no se us comptarà cap punt de l'apartat. No podeu emprar calculadora i heu d'entregar cada problema en fulls separats

Examen Final de Matemàtica Discreta — Setembre 2014

1. Diguem p, q, r a tres proposicions lògiques i sigui $A = \{0, 1, 2, 3\}$.

   (a) Digau si són certes o falses les següents afirmacions i explicau detalladament la vostra resposta.

      i. $\neg((p \to q) \vee q) \Leftrightarrow ((\neg q) \vee (p \wedge \neg q))$ és una tautologia.

      ii. $\neg(p \wedge \neg q) \Rightarrow (q \to p)$.

      iii. $(\emptyset \subseteq A) \wedge (\{3\} \in A) \wedge (\{3\} \subseteq (A \cap \{2, 3\}))$.

      iv. $(\{\{2\}, \{3\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)) \vee (|\mathcal{P}(A) \setminus A| = 7)$.

   (b) Sobre $\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ definim la següent relació d'ordre parcial

   $$X\,R\,Y \Leftrightarrow \sum_{x \in X} x \leq \sum_{y \in Y} y$$

   Trobau els elements maximals, minimals, màxim i mínim quan existeixin.

   (2.5 punts)

2. Suposem que tenim tres varetes verticals clavades sobre una base de fusta i 50 discs, tots ells de grandària diferent i amb un forat al mig perquè es puguin apilar un sobre l'altre a la base de fusta passant per les varetes. A més, els discs han de ser apilats de major a menor radi, és a dir, un disc de major grandària no pot descansar sobre un de grandària més petit. Responeu explicant i justificant la vostra resposta.

   a) De quantes maneres es poden apilar els discs sobre les varetes?

   b) De quantes si no pot quedar cap vareta buida?

   Suposem ara que tenim 4 varetes, 25 discs de color blanc i 25 discs de color negre. De nou, els discs són tots de grandària diferent.

   c) Si a la segona vareta només hi poden anar discs blancs i a la cuarta només discs negres, de quantes maneres es poden apilar tots els discs sobre les varetes? (2.25 punts)

3. Donada una malla rectangular de dimensió $n \times m$, amb $n, m \geq 2$, es considera el graf $G_{n,m}$ que té per vèrtexos els quadrats de la malla i les arestes venen donades per parells de vèrtexs corresponents a quadrats de la mateixa fila o columna.

   a) Donau l'ordre i la mida de $G_{n,m}$.

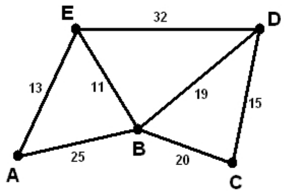
   b) Demostrau que $G_{n,m}$ és eulerià sí, i només sí, $n + m$ és parell.

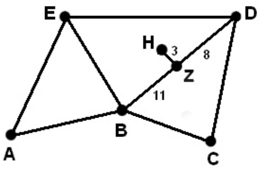
   c) Demostrau que $G_{3,4}$ és hamiltonià especificant-ne el cicle obtingut. (2.25 punts)

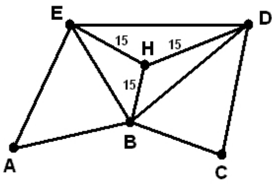
4. L'Escola Politècnica vol que tots els seus alumnes desfilin a una comparsa el dia de la Rua. Es sap que hi aniran més de 3000 alumnes i menys de 4000. Al fer un primer assaig amb tots els participants a la comparsa, la Directora de l'Escola proposa col·locar-los en files de cinc, però fent-ho així en sobren dos. Decideixen col·locar-los en files de 6 i en sobren 4, i, fent-ho en files de 7 en sobren 5. Finalment veuen que la millor manera és col·locar-los en files de 11, ja que d'aquesta forma no sobra cap alumne. Quants d'alumnes es presenten per fer la comparsa? (1.5 punts)

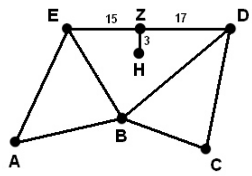
5. El següent graf representa el mapa de cablejat que uneix cinc localitats diferents. Cada aresta es troba etiquetada amb el cost, en euros, de posar el cable corresponent.

   Es preten construir un nova central elèctrica que doni servei a les cinc localitats diferents. Els que realitzen els estudis orogràfics han presentat tres possibles propostes que es mostren als grafs següents (on el nou vèrtex representaria la localització de la central i les noves arestes estan etiquetades com en el graf original):









Quina seria la millor proposta de les tres, tenint en compte que es desitja que arribi electricitat a totes les localitats i que el cost total del cablejat sigui el menor possible? Justifica la teva resposta utilitzant un dels algoritmes vists a teoria de grafs i explicant els càlculs realitzats.

(1.5 punts)

Nota: als problemes de combinatòria podeu deixar indicat el resultat amb els nombres combinatoris, no cal calcular el seu valor. Ara bé, a cada apartat de cada problema heu d'explicar detalladament la vostra solució. Si només posau el nombre combinatori corresponent sense cap explicació, no se us comptarà cap punt de l'apartat. No podeu emprar calculadora i heu d'entregar cada problema en fulls separats