EP3.15.- Sea $B_1=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ una base de un espacio vectorial V. Sabiendo que $\begin{cases} v_1 = 2u_1 - u_2 \\ v_2 = -u_1 + u_3 \\ v_3 = u_2 \end{cases}$

obtener las coordenadas de $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ en la base B_1.

Según la definición, coordenadas de un vector en una base son

" los escalares de la C.L. de los vectores de la base cuyo resultado es el vector"

$$\begin{aligned} v_1 &= 2u_1 - u_2 \longrightarrow (2,-1,0)_{B1} \\ v_2 &= -u_1 + u_3 \longrightarrow (-1,0,1)_{B1} \\ v_3 &= u_2 \longrightarrow (0,1,0)_{B1} \end{aligned}$$

Demuestra que $B_2=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ también es una base de V.

Basta demostrar que $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ son vectores L.I.

Hipótesis: $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ base $\Rightarrow$ L.I. $\Rightarrow$ Toda combinación lineal nula tiene solución única: **escalares nulos**

$$\boxed{a\,\vec{u}_1 + b\,\vec{u}_2 + c\,\vec{u}_3 = \vec{0} \;\Rightarrow\; a=b=c=\mathbf{0}}$$

Tesis: $\alpha\,\vec{v}_1 + \beta\,\vec{v}_2 + \lambda\,\vec{v}_3 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha=\beta=\lambda=\mathbf{0}$

Sustituimos los vectores $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ en función de los $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$:

$$\alpha\,\vec{v}_1 + \beta\,\vec{v}_2 + \lambda\,\vec{v}_3 = \vec{0} \quad \longrightarrow \quad \alpha\left(2\vec{u}_1 - \vec{u}_2\right) + \beta\left(-\vec{u}_1 + \vec{u}_3\right) + \lambda\left(\vec{u}_2\right) = \vec{0}$$

y arreglamos la ecuación vectorial para que nos aparezca una C.L. de los vectores $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$:

$$(2\alpha-\beta)\vec{u}_1 + (-\alpha+\lambda)\vec{u}_2 + (\beta)\vec{u}_3 = \vec{0}$$

Por hipótesis $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ vectores L.I. $\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha-\beta=0 \\ -\alpha+\lambda=0 \\ \beta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=0 \\ \lambda=0 \end{cases} \Rightarrow$ $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ son L.I. c.q.d.

Otra forma:

$\vec{v}_1 = (2,-1,0)_{B1}$

$\vec{v}_2 = (-1,0,1)_{B1}$ Calcularemos el rango de estos vectores:

$\vec{v}_3 = (0,1,0)_{B1}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{F2n=2F2+F1}{\approx} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{F3n=F3+F2}{\approx} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Rango: nº de f.n.n de una m.e.e

m.e.e con 3 f.n.n. $\Rightarrow$ $R=3$ $\Rightarrow$ L.I.

Sean (2,1,3) las coordenadas del vector $\vec{u}$ en base B_1. Calcular sus coordenadas en base $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$

$\alpha\circ\vec{v}_1 + \beta\circ\vec{v}_2 + \lambda\circ\vec{v}_3 = 2\circ\vec{u}_1 + 1\circ\vec{u}_2 + 3\circ\vec{u}_3$ Sustituimos $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ según $\begin{cases} v_1 = 2u_1 - u_2 \\ v_2 = -u_1 + u_3 \\ v_3 = u_2 \end{cases}$

$$\alpha\circ(2\circ\vec{u}_1-\vec{u}_2)+\beta\circ(-\vec{u}_1+\vec{u}_3)+\lambda\circ\vec{u}_2=2\circ\vec{u}_1+1\circ\vec{u}_2+3\circ\vec{u}_3$$
$$(2\alpha-\beta)\circ\vec{u}_1+(-\alpha+\lambda)\circ\vec{u}_2+\beta\circ\vec{u}_3=2\circ\vec{u}_1+1\circ\vec{u}_2+3\circ\vec{u}_3$$

$$\begin{cases}2\alpha-\beta=2\\-\alpha+\lambda=1\\\beta=3\end{cases}\qquad\begin{cases}\alpha=\frac{5}{2}\\\lambda=\frac{7}{2}\\\beta=3\end{cases}\qquad\left(\frac{5}{2},3,\frac{7}{2}\right)_{B2}$$

Otra forma:

Calculamos los vectores $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ en función de los $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$

Partiendo de las ecuaciones del enunciado las trataremos como un sistema de ecuaciones lineales en las que $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ $\vec{v}_3$ forman el término independiente:

$$\begin{pmatrix}2&-1&0&\vec{v}_1\\-1&0&1&\vec{v}_2\\0&1&0&\vec{v}_3\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1&0&1&\vec{v}_2\\2&-1&0&\vec{v}_1\\0&1&0&\vec{v}_3\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1&0&1&\vec{v}_2\\0&-1&2&\vec{v}_1+2\vec{v}_2\\0&1&0&\vec{v}_3\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1&0&1&\vec{v}_2\\0&-1&2&\vec{v}_1+2\vec{v}_2\\0&0&2&\vec{v}_3+\vec{v}_1+2\vec{v}_2\end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_1=\frac{1}{2}\vec{v}_1+\frac{1}{2}\vec{v}_3\qquad\vec{u}_2=\vec{v}_3\qquad\vec{u}_3=\frac{1}{2}\vec{v}_1+\vec{v}_2+\frac{1}{2}\vec{v}_3$$

Y ahora según la definición de coordenadas de un vector en una base, $\vec{u}=2\circ\vec{u}_1+1\circ\vec{u}_2+3\circ\vec{u}_3$

$$\vec{u}=2\circ\left(\frac{1}{2}\vec{v}_1+\frac{1}{2}\vec{v}_3\right)+1\circ\vec{v}_3+3\circ\left(\frac{1}{2}\vec{v}_1+\vec{v}_2+\frac{1}{2}\vec{v}_3\right)=\frac{5}{2}\circ\vec{v}_1+3\circ\vec{v}_2+\frac{7}{2}\circ\vec{v}_3\longrightarrow\left(\frac{5}{2},3,\frac{7}{2}\right)_{B2}$$

Con matriz cambio de base

$B_1 \longrightarrow P \longrightarrow B_2$

P : Matriz cambio de base de B_1 a B_2

$(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)=(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)\cdot P$

Sus columnas son los vectores de la base B_1 expresados en la base B_2.

$B_2 \longrightarrow Q \longrightarrow B_1$

Q : Matriz cambio de base de B_2 a B_1.

$(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)=(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)\cdot Q$

Sus columnas son los vectores de la base B_2 expresados en la base B_1.

El problema nos proporciona como dato la matriz Q : $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)=(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)\bullet\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

$$(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)\bullet\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1}=(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)\qquad P=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&0&1/2\\0&0&1\\1/2&1&1/2\end{pmatrix}$$

$$\vec{u}=(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\text{ (1)}\qquad\vec{u}=(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\text{ (2)}$$

Utilizando la relación $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)=(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)\cdot P$ sustituimos en (1) y comparamos con (2)

(1) $\vec{u}=(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)\cdot P\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ (2) $\vec{u}=(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $P\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/2\\3\\7/2\end{pmatrix}_{B2}$

EP3.16.- Sea $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ una base de V. Demostrar que si $\vec{u}_1=\vec{v}_1$, $\vec{u}_2=\vec{v}_1+\vec{v}_2$, $\vec{u}_3=\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3$ el conjunto $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ también es base de V.

Resolución análoga al problema anterior:

Basta demostrar que $\{u_1,u_2,u_3\}$ son vectores L.I.

Hipótesis: $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ base $\Rightarrow$ L.I. $\Rightarrow$ Toda combinación lineal nula tiene solución única: **escalares nulos**

$$\boxed{\alpha\,\vec{v}_1+\beta\,\vec{v}_2+\lambda\,\vec{v}_3=\vec{0} \;\Rightarrow\; \alpha=\beta=\lambda=\mathbf{0}}$$

Tesis: $a\,\vec{u}_1+b\,\vec{u}_2+c\,\vec{u}_3=\vec{0} \;\Rightarrow\; a=b=c=\mathbf{0}$

Sustituimos los vectores $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ en función de los $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$:

$$a\circ\vec{u}_1+b\circ\vec{u}_2+c\circ\vec{u}_3=\vec{0} \quad\longrightarrow\quad a\circ\vec{v}_1+b\circ(\vec{v}_1+\vec{v}_2)+c\circ(\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3)=\vec{0}$$

y arreglamos la ecuación vectorial para que nos aparezca una C.L. de los vectores $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$

$$(a+b+c)\circ\vec{v}_1+(b+c)\circ\vec{v}_2+(c)\circ\vec{v}_3=\vec{0}$$

Por hipótesis $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ vectores L.I. $\Rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ b+c=0 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow$ $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ **son L.I. c.q.d.**

Otra forma:

$$\begin{aligned}\vec{u}_1&=(1,0,0)_{Bv}\\ \vec{u}_2&=(1,1,0)_{Bv}\\ \vec{u}_3&=(1,1,1)_{Bv}\end{aligned} \quad \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}\mathbf{1}&0&0\\0&\mathbf{1}&0\\0&0&\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

Rango: nº de f.n.n de una m.e.e

m.e.e con 3 f.n.n. $\Rightarrow R=3 \Rightarrow \{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ L.I.

EP3.17.- a) Si $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ son vectores L.I demostrar que $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ son L.I siendo $\begin{cases}\vec{u}_1=2\vec{e}_1+\vec{e}_3\\ \vec{u}_2=3\vec{e}_3\\ \vec{u}_3=\vec{e}_2-\vec{e}_3\end{cases}$

Hipótesis: $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ L.I. $\Rightarrow$ Toda combinación lineal nula tiene solución única: **escalares nulos**

$$\boxed{\alpha\circ\vec{e}_1+\beta\circ\vec{e}_2+\lambda\circ\vec{e}_3=\vec{0} \;\Rightarrow\; \alpha=\beta=\lambda=\mathbf{0}}$$

Tesis: $a\,\vec{u}_1+b\,\vec{u}_2+c\,\vec{u}_3=\vec{0} \;\Rightarrow\; a=b=c=\mathbf{0}$

Sustituimos los vectores $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ en función de los $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$:

$$a\circ\vec{u}_1+b\circ\vec{u}_2+c\circ\vec{u}_3=\vec{0} \quad\longrightarrow\quad a\circ(2\vec{e}_1+\vec{e}_3)+b\circ(3\vec{e}_3)+c\circ(\vec{e}_2-\vec{e}_3)=\vec{0}$$

y arreglamos la ecuación vectorial para que nos aparezca una C.L. de los vectores $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$

$$(2a)\circ\vec{e}_1+(c)\circ\vec{e}_2+(a+3b-c)\circ\vec{e}_3=\vec{0}$$

Por hipótesis $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ vectores L.I. $\Rightarrow \begin{cases} 2a=0 \\ c=0 \\ a+3b-c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow$ $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ son L.I. c.q.d.

b) Dado un vector $\vec{v}=2\vec{e}_1+\vec{e}_2-3\vec{e}_3$ expresarlo como combinación lineal de $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$.

1ª forma

$\vec{v}=a\,\vec{u}_1+b\,\vec{u}_2+c\,\vec{u}_3$. Sustituimos los vectores $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ en función de los $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$

$\vec{v}=a(2\vec{e}_1+\vec{e}_3)+b\cdot 3\vec{e}_3+c(\vec{e}_2-\vec{e}_3)=2a\vec{e}_1+\ c\ \vec{e}_2+(a+3b-c)\vec{e}_3=2\vec{e}_1+\vec{e}_2-3\vec{e}_3$

Igualamos coeficientes y obtenemos $a=1$ $\quad b=-1$ $\quad c=1$ $\qquad \vec{v}=\vec{u}_1-\vec{u}_2+\vec{u}_3$

2ª forma

Obtenemos la expresión de los vectores $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ en función de los $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$.

Nos lo dan $\downarrow$ $\qquad$ Despejamos los vectores $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$

$$\begin{cases}\vec{u}_1=2\vec{e}_1+\vec{e}_3\\ \vec{u}_2=3\vec{e}_3\\ \vec{u}_3=\vec{e}_2-\vec{e}_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{e}_1=\frac{1}{2}\vec{u}_1-\frac{1}{6}\vec{u}_2\\ \vec{e}_2=\vec{u}_3+\frac{1}{3}\vec{u}_2\\ \vec{e}_3=\frac{1}{3}\vec{u}_2\end{cases}$$

Y los sustituimos: $\vec{v}=2\vec{e}_1+\vec{e}_2-3\vec{e}_3=\vec{u}_1-\vec{u}_2+\vec{u}_3$

EP3.18.- Dada la base $B_1=\{(1,2,0,0),(-1,0,1,1),(0,0,-2,1),(-1,0,-1,0)\}$ de R^4, el vector $\vec{u}$ de coordenadas $(-3,2,1,-2)$ en B_1. Si $B_2=\{(1,0,0,\text{-}1),(0,1,\text{-}1,0),(0,1,0,\text{-}1),(0,1,1,1)\}$ obtener las coordenadas de $\vec{u}$ en B_2.

Dato del problema: $\vec{u}=-3(1,2,0,0)+2(-1,0,1,1)+(0,0,-2,1)-2(-1,0,-1,0)=(-3,-6,2,3)$

Tiene coordenadas $(-3,-6,2,3)$ en base canónica.

$$(-3,-6,2,3)=a(1,0,0,-1)+b(0,1,-1,0)+c(0,1,0,-1)+d(0,1,1,1)$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&-3\\0&1&1&1&-6\\0&-1&0&1&2\\-1&0&-1&1&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}A(4\times4)\Rightarrow R_A\le4\\(A/B)(4\times5)\Rightarrow R_B\le4\\ \text{ni}=4\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&-3\\0&1&1&1&-6\\0&-1&0&1&2\\-1&0&-1&1&3\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&0&0&0&-3\\0&1&1&1&-6\\0&0&1&2&-4\\0&0&0&3&-4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}a=-3\\b+c+d=-6\\c+2d=-4\\3d=-4\end{cases}\rightarrow(a,b,c,d)=\left(-3,-\frac{10}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)$$

También se puede plantear directamente, sin pasar por base canónica:

$\vec{u}=-3(1,2,0,0)+2(-1,0,1,1)+(0,0,-2,1)-2(-1,0,-1,0)$

$\vec{u}=a(1,0,0,-1)+b(0,1,-1,0)+c(0,1,0,-1)+d(0,1,1,1)$

$$\begin{cases}a=-3\\b+c+d=-6\\-b+d=2\\-a-c+d=3\end{cases}\quad\begin{pmatrix}1&0&0&0&-3\\0&1&1&1&-6\\0&-1&0&1&2\\-1&0&-1&1&3\end{pmatrix}\rightarrow(a,b,c,d)=\left(-3,-\frac{10}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)$$

Con matriz cambio de base

$$B_2=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\right\} \longrightarrow \quad \boldsymbol{P} \quad \longrightarrow \quad B_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$\boldsymbol{P}$: Matriz cambio de base de B_2 a B_1.

Tenemos que calcular las coordenadas de los vectores de B_2 en la base B_1:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&1&1&2\\0&-1&0&1&0\\-1&0&-1&1&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&1&1&2\\0&-1&0&1&0\\0&0&-1&1&1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&1&1&2\\0&0&1&2&2\\0&0&-1&1&1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&1&1&2\\0&0&1&2&2\\0&0&0&3&3\end{pmatrix}$$

$\{F4\to F4+F1 \qquad \{F3\to F3+F2 \qquad \{F4\to F4+F3$

$$\begin{cases}a=1\\b+c+d=2\\c+2d=2\\3d=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\\c=0\\d=1\end{cases}$$

Para los siguientes vectores basta aplicar las operaciones entre filas al término independiente ya que el resto de la matriz es la misma en todos los casos.

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&-1\\0&1&1&1&0\\0&-1&0&1&1\\-1&0&-1&1&1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&0&0&0&-1\\0&1&1&1&0\\0&0&1&2&1\\0&0&0&3&1\end{pmatrix}\quad\begin{cases}a=-1\\b+c+d=0\\c+2d=1\\3d=1\end{cases}\quad \begin{array}{l}a=-1\\b=-2/3\\c=1/3\\d=1/3\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&1&1&0\\0&-1&0&1&-2\\-1&0&-1&1&1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&1&1&0\\0&0&1&2&-2\\0&0&0&3&-1\end{pmatrix}\quad\begin{cases}a=0\\b+c+d=0\\c+2d=-2\\3d=-1\end{cases}\quad \begin{array}{l}a=0\\b=5/3\\c=-4/3\\d=-1/3\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&-1\\0&1&1&1&0\\0&-1&0&1&-1\\-1&0&-1&1&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&0&0&0&-1\\0&1&1&1&0\\0&0&1&2&-1\\0&0&0&3&-2\end{pmatrix}\quad\begin{cases}a=-1\\b+c+d=0\\c+2d=-1\\3d=-2\end{cases}\quad \begin{array}{l}a=-1\\b=1/3\\c=1/3\\d=-2/3\end{array}$$

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2/3 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & -4/3 & 1/3 \\ 1 & 1/3 & -1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$ Matriz cambio de base de B_2 a B_1.

$$\vec{u}=B_2\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (1) \qquad \vec{u}=B_1\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad (2) \qquad \vec{u}=B_1\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2/3 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & -4/3 & 1/3 \\ 1 & 1/3 & -1/3 & -2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}=B_1\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2/3 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & -4/3 & 1/3 \\ 1 & 1/3 & -1/3 & -2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ -10/3 \\ -4/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}_{B1}$$

EP3.19.- Sea $B_v=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ una base de R^3 y sean los vectores $\begin{cases} \vec{u}_1=3\vec{v}_1+2\vec{v}_2-\vec{v}_3 \\ \vec{u}_2=4\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3 \\ \vec{u}_3=2\vec{v}_1-\vec{v}_2+\vec{v}_3 \end{cases}$.

a) Probar que $B_u=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ es base de R^3.

Basta demostrar que $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ son L.I.

Hipótesis: $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ base $\Rightarrow$ vectores L.I. $\Rightarrow$ La única C. L. que da el vector nulo es la que tiene **todos sus escalares nulos** $\boxed{\alpha\,\vec{v}_1+\beta\,\vec{v}_2+\lambda\,\vec{v}_3=\vec{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha=\beta=\lambda=\mathbf{0}}$

Si $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ también son L.I. ocurrirá lo mismo: $a\,\vec{u}_1+b\,\vec{u}_2+c\,\vec{u}_3=\vec{0} \Rightarrow a=b=c=\mathbf{0}$

Sustituimos los vectores $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ en función de los $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$:

$$a\,\vec{u}_1+b\,\vec{u}_2+c\,\vec{u}_3=\vec{0} \quad \longrightarrow \quad a\left(3\vec{v}_1+2\vec{v}_2-\vec{v}_3\right)+b\left(4\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3\right)+c\left(2\vec{u}_1-\vec{u}_2+\vec{u}_3\right)=\vec{0}$$

y arreglamos la ecuación vectorial para que nos aparezca una combinación lineal de los $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$:

$$(3a+4b+2c)\vec{v}_1+(2a+b-c)\vec{v}_2+(-a+b+c)\vec{v}_3=\vec{0}$$

Por hipótesis $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ vectores L.I. $\Rightarrow$ **escalares todos nulos**

$$\begin{cases} 3a+4b+2c=0 \\ 2a+b-c=0 \\ -a+b+c=0 \end{cases} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{3} & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{8} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow \{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\} \text{ L.I.}$$

Otra forma:

$$\begin{matrix} \vec{u}_1=(3,2,-1)_{Bv} \\ \vec{u}_2=(4,1,1)_{Bv} \\ \vec{u}_3=(2,-1,1)_{Bv} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 & 1 \\ 0 & \mathbf{3} & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{-8} \end{pmatrix}$$

Rango: nº de f.n.n de una m.e.e

m.e.e con 3 f.n.n. $\Rightarrow$ $R=3$ $\Rightarrow$ $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ L.I.

b) Encontrar la matriz de paso de B_u a B_v. Idem de B_v a B_u.

Por el enunciado $\begin{cases} \vec{u}_1 = 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3 \\ \vec{u}_2 = 4\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \\ \vec{u}_3 = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \end{cases}$ disponemos de $\boldsymbol{P}$: $B_u \longrightarrow \boldsymbol{P} \longrightarrow B_v$

Por definición: $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$B_v \longrightarrow \boldsymbol{Q} \longrightarrow B_u$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \qquad \boldsymbol{Q} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 \\ -1 & 5 & 7 \\ 3 & -7 & -5 \end{pmatrix}$$

c) Encontrar las coordenadas de los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ en la base B_u.

Por matriz cambio de base: $B_v \longrightarrow \boldsymbol{Q} \longrightarrow B_u$

$\boldsymbol{Q} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 \\ -1 & 5 & 7 \\ 3 & -7 & -5 \end{pmatrix}$ las columnas son las coordenadas de los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ en la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$

$$\vec{v}_1 = \left(\tfrac{2}{8}, \tfrac{-1}{8}, \tfrac{3}{8}\right)_{Bu} \qquad \vec{v}_2 = \left(\tfrac{-2}{8}, \tfrac{5}{8}, \tfrac{-7}{8}\right)_{Bu} \qquad \vec{v}_3 = \left(\tfrac{-6}{8}, \tfrac{7}{8}, \tfrac{-5}{8}\right)_{Bu}$$

Otra forma:

Partiendo de las ecuaciones del enunciado las trataremos como un sistema de ecuaciones lineales en las que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ forman el término independiente:

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3 \\ \vec{u}_2 = 4\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \\ \vec{u}_3 = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & \vec{u}_1 \\ 4 & 1 & 1 & \vec{u}_2 \\ 2 & -1 & 1 & \vec{u}_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} A(3\times 3) \Rightarrow R_A \le 3 \\ (A/B)(3\times 4) \Rightarrow R_B \le 3 \\ \text{ni} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & \vec{u}_1 \\ 4 & 1 & 1 & \vec{u}_2 \\ 2 & -1 & 1 & \vec{u}_3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & \vec{u}_3 \\ 4 & 1 & 1 & \vec{u}_2 \\ 3 & 2 & -1 & \vec{u}_1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & \vec{u}_3 \\ 0 & 3 & -1 & \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3 \\ 0 & 7 & -5 & 2\vec{u}_1 - 3\vec{u}_3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 & 1 & \vec{u}_3 \\ 0 & \mathbf{3} & -1 & \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3 \\ 0 & 0 & \mathbf{-8} & 6\vec{u}_1 - 7\vec{u}_2 + 5\vec{u}_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{2}\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{u}_3 \\ \mathbf{3}\vec{v}_2 - \vec{v}_3 = \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3 \\ \mathbf{-8}\vec{v}_3 = 6\vec{u}_1 - 7\vec{u}_2 + 5\vec{u}_3 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema ya escalonado obtendríamos los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ en la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$

Otra forma:

$$\vec{v}_1 = a_1\,\vec{u}_1 + b_1\,\vec{u}_2 + c_1\,\vec{u}_3 = \begin{cases} \vec{u}_1 = 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3 \\ \vec{u}_2 = 4\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \\ \vec{u}_3 = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \end{cases} = a_1\,(3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3) + b_1\,(4\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3) + c_1\,(2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3)$$

$$\vec{v}_1 = (3a_1 + 4b_1 + 2c_1)\vec{v}_1 + (2a_1 + b_1 - c_1)\vec{v}_2 + (-a_1 + b_1 + c_1)\vec{v}_3$$

Igualamos los escalares de cada miembro: $\begin{cases}3a_1+4b_1+2c_1=1\\2a_1+b_1-c_1=0\\-a_1+b_1+c_1=0\end{cases}$

$$\begin{pmatrix}3&4&2&1\\2&1&-1&0\\-1&1&1&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1&1&1&0\\2&1&-1&0\\3&4&2&1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1&1&1&0\\0&3&1&0\\0&7&5&1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1&1&1&0\\0&3&1&0\\0&0&8&3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a_1=2/8\\b_1=-1/8\\c_1=3/8\end{cases}\quad \vec{v}_1=\left(2/8,-1/8,3/8\right)$$

Para el vector $\vec{v}_2$ obtendríamos $\vec{v}_2=(3a_2+4b_2+2c_2)\vec{v}_1+(2a_2+b_2-c_2)\vec{v}_2+(-a_2+b_2+c_2)\vec{v}_3$

$$\begin{pmatrix}3&4&2&0\\2&1&-1&1\\-1&1&1&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1&1&1&0\\2&1&-1&1\\3&4&2&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1&1&1&0\\0&3&1&1\\0&7&5&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1&1&1&0\\0&3&1&1\\0&0&8&-7\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a_2=-2/8\\b_2=5/8\\c_2=-7/8\end{cases}\quad \vec{v}_2=\left(-2/8,5/8,-7/8\right)$$

Finalmente para el vector $\vec{v}_3$ obtendríamos $\vec{v}_3=(3a_3+4b_3+2c_3)\vec{v}_1+(2a_3+b_3-c_3)\vec{v}_2+(-a_3+b_3+c_3)\vec{v}_3$

$$\begin{pmatrix}3&4&2&0\\2&1&-1&0\\-1&1&1&1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\2&1&-1&0\\3&4&2&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\0&3&1&2\\0&7&5&3\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\0&3&1&2\\0&0&8&-5\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a_3=-6/8\\b_3=7/8\\c_3=-5/8\end{cases}\quad \vec{v}_3=\left(-6/8,7/8,-5/8\right)$$

$$\begin{pmatrix}3&4&2&1\\2&1&-1&0\\-1&1&1&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1&1&1&0\\2&1&-1&0\\3&4&2&1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1&1&1&0\\0&3&1&0\\0&7&5&1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1&1&1&0\\0&3&1&0\\0&0&8&3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a_1=2/8\\b_1=-1/8\\c_1=3/8\end{cases}\quad \vec{v}_1=\left(2/8,-1/8,3/8\right)$$

Para el vector $\vec{v}_2$ obtendríamos $\vec{v}_2=(3a_2+4b_2+2c_2)\vec{v}_1+(2a_2+b_2-c_2)\vec{v}_2+(-a_2+b_2+c_2)\vec{v}_3$

$$\begin{pmatrix}3&4&2&0\\2&1&-1&1\\-1&1&1&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1&1&1&0\\2&1&-1&1\\3&4&2&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1&1&1&0\\0&3&1&1\\0&7&5&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1&1&1&0\\0&3&1&1\\0&0&8&-7\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a_2=-2/8\\b_2=5/8\\c_2=-7/8\end{cases}\quad \vec{v}_2=\left(-2/8,5/8,-7/8\right)$$

Finalmente para el vector $\vec{v}_3$ obtendríamos $\vec{v}_3=(3a_3+4b_3+2c_3)\vec{v}_1+(2a_3+b_3-c_3)\vec{v}_2+(-a_3+b_3+c_3)\vec{v}_3$

$$\begin{pmatrix}3&4&2&0\\2&1&-1&0\\-1&1&1&1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\2&1&-1&0\\3&4&2&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\0&3&1&2\\0&7&5&3\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\0&3&1&2\\0&0&8&-5\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a_3=-6/8\\b_3=7/8\\c_3=-5/8\end{cases}\quad \vec{v}_3=\left(-6/8,7/8,-5/8\right)$$

c) El vector $\vec{x}\in R^3$ tiene coordenadas (1,2,3) en B_v. Calcular las coordenadas de $\vec{x}$ en la base B_u.

Por definición de coordenadas: $\vec{x}=\vec{v}_1+2\,\vec{v}_2+3\,\vec{v}_3$

Buscamos (a,b,c) tales que $\vec{x}=a\circ\vec{u}_1+b\circ\vec{u}_2+c\circ\vec{u}_3$

1ª forma:

Sustituimos en $\vec{x}=a\circ\vec{u}_1+b\circ\vec{u}_2+c\circ\vec{u}_3$ los vectores $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ en función de los vectores $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$:

$$\vec{x}=a\left(3\vec{v}_1+2\vec{v}_2-\vec{v}_3\right)+b\left(4\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3\right)+c\left(2\vec{v}_1-\vec{v}_2+\vec{v}_3\right)=$$

$$\left(3a+4b+2c\right)\vec{v}_1+\left(2a+b-c\right)\vec{v}_2+\left(-a+b+c\right)\vec{v}_3$$

E igualamos a la expresión $\vec{x}=\vec{v}_1+2\,\vec{v}_2+3\,\vec{v}_3$

$$\left(3a+4b+2c\right)\vec{u}_1+\left(2a+b-c\right)\vec{u}_2+\left(-a+b+3c\right)\vec{u}_3=\vec{u}_1+2\vec{u}_2+3\vec{u}_3$$

$$\approx\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 3\\ 2 & 1 & -1 & 2\\ 3 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 3 & 1 & 8\\ 0 & 7 & 5 & 10\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 3 & 1 & 8\\ 0 & 0 & 8 & -26\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a_1=-10/4\\ b=15/4\\ c=-13/4\end{cases}$$

coordenadas de $\vec{x}$ en la base B_u

$$\vec{x}=\left(-10/4,15/4,-13/4\right)_{Bu}$$

Con matriz cambio de base: $X_u=\boldsymbol{Q}\bullet X_v$

$$\frac{1}{8}\begin{pmatrix}2 & -2 & -6\\ -1 & 5 & 7\\ 3 & -7 & -5\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5/2\\ 15/4\\ -13/4\end{pmatrix}_{Bu}\qquad\begin{cases}3a+4b+2c=1\\ 2a+b-c=2\\ -a+b+c=3\end{cases}\qquad\begin{pmatrix}3 & 4 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

EP3.20.- Expresar el vector $(3,1,4)$ en la base de $\boldsymbol{R}^3$ formada por los vectores $(1,-2,-1),(1,-1,0)$ y $(0,0,-3)$ calculando previamente la matriz de cambio de base necesaria.

En este caso al no especificarnos nada quiere decir que $(3,1,4)$ son coordenadas en la base canónica

Aplicando la definición de coordenadas de un vector en una base:

$$a\,(1,-2,-1)+b\,(1,-1,0)+c\,(0,0,-3)=(3,1,4)$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 3\\ -2 & -1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & -3 & 4\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 7\\ 0 & 1 & -3 & 7\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 7\\ 0 & 0 & -3 & 0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\ 7\\ 0\end{pmatrix}$$

Con matriz cambio de base:

$$B=\left\{\vec{a}\,(1,-2,-1),\vec{b}\,(1,-1,0),\vec{c}\,(0,0,-3)\right\}\longrightarrow\quad\boldsymbol{P}\longrightarrow B_C$$

$\boldsymbol{P}$: Matriz cambio de base de B a B_c $\quad\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)\cdot\boldsymbol{P}\qquad\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -3\end{pmatrix}$

$$\vec{u}=\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)\cdot\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 4\end{pmatrix}\qquad\vec{u}=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

(1) $\vec{u}=\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)\cdot\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 4\end{pmatrix}\qquad\vec{u}=\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)\cdot\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 4\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\ \mathbf{1}\\ \mathbf{4}\end{pmatrix}}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-4} \\ \mathbf{7} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

EP3.22.- Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de los espacios que se indican. Dar una base en los casos que sean subespacios.

a) $U = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x - z = 0\}$

Comprobemos en primer lugar si el vector nulo $(0,0,0)$ pertenece a U.

- ¿ $(0,0,0) \in U$? Sí porque cumple que $0 - 0 = 0$

Aplicando el teorema de caracterización de subespacios veamos si:

1.- Dados dos vectores cualesquiera de U: (a,b,c) (x,y,z) su suma también pertenece a U.

$(a,b,c) \in U \Rightarrow a - c = 0$ (1)

$(x,y,z) \in U \Rightarrow x - z = 0$ (2)

$$\boxed{(x,y,z) + (a,b,c) = (x+a, y+b, z+c)}$$

Vamos a ver si el vector suma $(x+a, y+b, z+c)$ pertenece a U.

Para ello se tiene que cumplir que $(x+a)-(z+c)=0$

Veámoslo:

$(x+a)-(z+c)=(x-z)+(a-c)$ por las propiedades conmutativa y asociativa de la suma de escalares.

Por (1) se cumple que $a-c=0$ y por (2) $x-z=0$

Luego también se cumple que: $(x+a)-(z+c)=0$

2.- El producto de un escalar por un vector de U también pertenece a U.

Si $(x,y,z) \in U$ y $\lambda \in R$ se cumple $\lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in U$ con $\lambda \in R$

$\lambda x - \lambda z = \lambda(x-z)$ por la propiedad distributiva del producto respecto a la suma de escalares.

Por (2) se cumple que $x - z = 0 \Rightarrow \lambda x - \lambda z = \lambda(x-z) = \mathbf{0}$

El conjunto U es subespacio vectorial de R^3.

$x - z = 0 \Rightarrow$ Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$ Base: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $W = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x - y + z = 0\}$

Comprobemos en primer lugar si el vector nulo $(0,0,0)$ pertenece a W.

- ¿ $(0,0,0) \in W$? Sí porque cumple que $0 - 0 + 0 = 0$

Aplicando el teorema de caracterización de subespacios veamos si:

1.- Dados dos vectores cualesquiera de W: (a,b,c) (x,y,z) su suma también pertenece a W.

$(a,b,c) \in W \Rightarrow a - b + c = 0$ (1)

$(x,y,z) \in W \Rightarrow x - y + z = 0$ (2)

$$\boxed{(x,y,z) + (a,b,c) = (x+a, y+b, z+c)}$$

Vamos a ver si el vector suma $(x+a, y+b, z+c)$ pertenece a W.

Para ello se tiene que cumplir que $(x+a)-(y+b)+(z+c)=0$

Veámoslo: $(x+a)-(y+b)+(z+c)=(x-y+z)+(a-b+c)$

por las propiedades conmutativa y asociativa de la suma de escalares.

Por (1) se cumple que $a-b+c=0$ y por (2) $x-y+z=0 \Rightarrow (x+a)-(y+b)+(z+c)=0$

2.- El producto de un escalar por un vector de W también pertenece a W.

Si $(x,y,z)\in W$ y $\lambda \in R$ se cumple $\lambda(x,y,z)=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\in W$

$\lambda x-\lambda y+\lambda z=\lambda(x-y+z)$ por la propiedad distributiva del producto respecto a la suma de escalares.

Por (2) se cumple que $x-y+z=0 \Rightarrow \lambda x-\lambda y+\lambda z=\mathbf{0}$

El conjunto W es subespacio vectorial de R^3.

$x-y+z=0 \Rightarrow$ Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x=y-z \\ y=y \\ z=z \end{cases}$ Base: $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

c) $X=\{(x,y,z)\in R^3 \mid x=0, y+z=0\}$

Comprobemos en primer lugar si el vector nulo $(0,0,0)$ pertenece a X

- ¿ $(0,0,0)\in X$? Sí porque cumple que $0=0$ y $0+0=0$

Aplicando el teorema de caracterización de subespacios veamos si:

1.- Dados dos vectores cualesquiera de X: (a,b,c) (x,y,z) su suma también pertenece a X.

$(a,b,c)\in X \Rightarrow a=0$ y $b+c=0$ (1)

$(x,y,z)\in X \Rightarrow x=0$ y $y+z=0$ (2)

$(x,y,z)+(a,b,c)=(x+a,y+b,z+c)$

Vamos a ver si el vector suma $(x+a,y+b,z+c)$ pertenece a X.

Para ello se tiene que cumplir que $(x+a)=0$ y $(y+b)+(z+c)=0$. Veámoslo:

Por (1) se cumple $a=0$ y por (2) $x=0 \Rightarrow (x+a)=0$

$(y+b)+(z+c)=(y+z)+(b+c)$ por las propiedades conmutativa y asociativa de la suma de escalares.

Por (1) se cumple que $b+c=0$ y por (2) $y+z=0 \Rightarrow (y+b)+(z+c)=0$

2.- El producto de un escalar por un vector de X también pertenece a X.

Si $(x,y,z)\in X$ y $\lambda\in R$ se cumple $\lambda(x,y,z)=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\in X$

Por (2) $x=0 \Rightarrow \lambda x=0$

Por (2) $y+z=0 \Rightarrow \lambda y+\lambda z=\lambda(y+z)=0$ por prop. distributiva del prod. respecto a la suma.

El conjunto X es subespacio vectorial de R^3.

Ecuaciones cartesianas: $\begin{cases} x=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow$ Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x=0 \\ y=-z \\ z=z \end{cases}$ Una base: $\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

d) $A=\{(a,b,0)\in R^3\}$

¿ $(0,0,0)\in A$? Sí porque es de la forma $(a,b,0)$ con $a=b=0$

1.- Dados dos vectores cualesquiera de A: $(a,b,0)$ $(x,y,0)$ su suma $(a,b,0)+(x,y,0)=(a+x,b+y,0)\in A$ también pertenece a A.

2.- El producto de un escalar por un vector de A

Si $(x,y,0)\in A$ y $\lambda\in R$ se cumple $\lambda(x,y,0)=(\lambda x,\lambda y,0)\in A$ también pertenece a A.

El conjunto A es subespacio vectorial de R^3.

$\begin{cases} x=a \\ y=b \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow$ Ecuaciones cartesianas: $z=0$ Base: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

e) $B=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid b=a+c+d+1\}$

¿ $(0,0,0,0)\in B$? es decir se cumple que $0=0+0+0+1$ NO

Aunque sabemos que no es s.e.v. estudiaremos las dos condiciones del teorema:

1.- Dados dos vectores cualesquiera de B: (a,b,c,d) (x,y,z,t) ¿ su suma también pertenece a B ?

$(a,b,c,d)\in B \Rightarrow b=a+c+d+1$ (1)

$(x,y,z,t)\in B \Rightarrow y=x+z+t+1$ (2)

$$\boxed{(x,y,z,t)+(a,b,c,d)=(x+a,y+b,z+c,t+d)}$$

Vamos a ver si el vector suma pertenece a B.

Para ello se tiene que cumplir que $(y+b)=(x+a)+(z+c)+(t+d)+1$. Veámoslo:

Por (1) se cumple $b=a+c+d+1$

y por (2) $y=x+z+t+1$ y con las propiedades conmutativa y asociativa de la suma de escalares.

$\Rightarrow (y+b)=(x+a)+(z+c)+(t+d)+2$

Que NO es lo que se debería cumplir.

2.- El producto de un escalar por un vector de B ¿ también pertenece a B ?.

Si $(x,y,z,t)\in B$ y $\lambda\in R$ se cumple $\lambda(x,y,z,t)=(\lambda x,\lambda y,\lambda z,\lambda t)$

Vamos a ver si el vector $\lambda(x,y,z,t)$ pertenece a B es decir que: $\lambda y=\lambda x+\lambda z+\lambda t+1$

Por (2) $y=x+z+t+1$ y distributiva del prod. respecto a la suma. $\Rightarrow$

$$\lambda y=\lambda(x+z+t+1)=\lambda x+\lambda z+\lambda t+\lambda$$

Que NO es lo que se debería cumplir.

Este subconjunto **NO** es subespacio de R^3

f) $C=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid b=a+c \text{ , } d=2a\}$

¿ $(0,0,0,0)\in C$? es decir se cumple que $0=0+0$ y $0=2\cdot 0$ Si

1.- Dados dos vectores cualesquiera de C: $(a,a+c,c,2a)$, $(x,x+z,z,2x)$ su suma

$$(a,a+c,c,2a)+(x,x+z,z,2x)=(a+x,a+c+x+z,c+z,2a+2x)=(a+x,(a+x)+(c+z),c+z,2(a+x))$$

por las propiedades conmutativa y asociativa de la suma de escalares, y también pertenece a C

2.- El producto de un escalar por un vector de C

Si $(a,a+c,c,2a)\in C$ y $\lambda\in R$ se cumple $\lambda(a,a+c,c,2a)\in C=(\lambda a,\lambda a+\lambda c,\lambda c,2\lambda a)\in C$

por la propiedad distributiva del producto respecto a la suma también pertenece a C.

El conjunto C es subespacio vectorial de R^3.

$\begin{cases} a-b+c=0 \\ 2a-d=0 \end{cases} \Rightarrow$ Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} a=a \\ b=b \\ c=b-a \\ d=2a \end{cases}$ Base: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

EP3.23.- a) Encontrar una base del subespacio E generado por $\vec{v}_1=(1,-2,0,3)$, $\vec{v}_2(2,-5,-3,6)$, $\vec{v}_3(0,1,3,0)$, $\vec{v}_4(2,-1,4,-7)$ y $\vec{v}_5=(5,-8,1,2)$

Calcularemos el rango de estos vectores:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & -7 \\ 5 & -8 & 1 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -13 \\ 0 & 2 & 1 & -13 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & -5 & -13 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

m.e.e con 3 f.n.n. $\Rightarrow R=3$

Generan un subespacio de dimensión 3.

Base: las 3 filas no nulas de la matriz escalonada equivalente formarían una base del subespacio.

$(1,-2,0,3),(0,-1,-3,0),(0,0,5,13)$

También lo serían los 3 vectores de los que preceden esas filas no nulas.

$\vec{v}_1=(1,-2,0,3)$, $\vec{v}_2(2,-5,-3,6)$, $\vec{v}_4(2,-1,4,-7)$

Otra base sería: $\vec{v}_1=(1,-2,0,3)$, $\vec{v}_2(2,-5,-3,6)$, $\vec{v}_5=(5,-8,1,2)$

b) Encontrar una base del subespacio

$$F=\langle(1,2,1,0),(0,0,1,0),(1,2,0,0)\rangle$$

Una base: $(1,2,1,0),(0,0,1,0)$

Otra base: $(1,2,1,0),(1,2,0,0)$

Otra base: $(0,0,1,0),(1,2,0,0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EP3.24.- Probar que $\left\langle(1,-1,-1,1),(1,-2,-2,1),(0,1,1,0)\right\rangle=\left\langle(1,0,0,1),(0,-1,-1,0)\right\rangle$.

Vectores generados por $(1,-1,-1,1),(1,-2,-2,1),(0,1,1,0)$

$$a\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}1&1&0&x\\-1&-2&1&y\\-1&-2&1&z\\1&1&0&t\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&1&0&x\\0&-1&1&y+x\\0&-1&1&z+x\\0&0&0&t-x\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}\mathbf{1}&1&0&x\\0&\mathbf{-1}&1&y+x\\0&0&0&z-y\\0&0&0&t-x\end{pmatrix}$$

Aquellos vectores que cumplen $\begin{matrix}z-y=0\\t-x=0\end{matrix}$ ecs. cartesianas del subespacio.

Vectores generados por $(1,0,0,1),(0,-1,-1,0)$

$$\begin{pmatrix}1&0&x\\0&-1&y\\0&-1&z\\1&0&t\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&0&x\\0&-1&y\\0&-1&z\\0&0&t-x\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}\mathbf{1}&0&x\\0&\mathbf{-1}&y\\0&0&z-y\\0&0&t-x\end{pmatrix}$$

Aquellos vectores que cumplen $\begin{matrix}z-y=0\\t-x=0\end{matrix}$ ecs. cartesianas del subespacio.

Mismas ecs. cartesianas $\Rightarrow$ Mismo subespacio

Dar una base de este subespacio.

Los vectores $(1,0,0,1),(0,-1,-1,0)$ generan el subespacio (por enunciado), no son paralelos $\Rightarrow$ son L.I.

Forman una base del subespacio.

EP3.25.- Sea E el espacio generado por los vectores $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$, $E=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$, donde $\vec{v}_1=(2,1,0,3)$, $\vec{v}_2=(3,-1,5,2)$, $\vec{v}_3=(-1,0,2,1)$. Determinar la dimensión de E y decir si los vectores $(1,1,1,1)(2,3,-7,3)$ pertenecen a E.

Calcularemos el rango de estos vectores:

$$\begin{pmatrix}2&1&0&3\\3&-1&5&2\\-1&0&2&1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}2&1&0&3\\0&-5&10&-5\\0&1&4&5\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}2&1&0&3\\0&1&-2&1\\0&1&4&5\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}\mathbf{2}&1&0&3\\0&\mathbf{1}&-2&1\\0&0&\mathbf{6}&4\end{pmatrix}$$

m.e.e con 3 f.n.n.

$\Rightarrow R=3 \Rightarrow$ vectores L.I.

Generan un subespacio de dimensión 3 y ellos forman una base del mismo.

Vectores generados por $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$: $\alpha(2,1,0,3)+\beta(3,-1,5,2)+\lambda(-1,0,2,1)=(x,y,z,t)$

$$\begin{pmatrix}2&3&-1&x\\1&-1&0&y\\0&5&2&z\\3&2&1&t\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&-1&0&y\\2&3&-1&x\\0&5&2&z\\3&2&1&t\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&-1&0&y\\0&5&-1&x-2y\\0&5&2&z\\0&5&1&t-3y\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&-1&0&y\\0&5&-1&x-2y\\0&0&3&z-x+2y\\0&0&2&t-x-y\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}\mathbf{1}&-1&0&y\\0&\mathbf{5}&-1&x-2y\\0&0&\mathbf{3}&z-x+2y\\0&0&0&3t-x-7y-2z\end{pmatrix}$$

Aquellos vectores que cumplen $-x-7y-2z+3t=0$ ecs. cartesianas del subespacio.

$(1,1,1,1)$ $\quad -1-7\cdot 1-2\cdot 1+3\cdot 1=-6\neq 0$ $\quad (1,1,1,1)$ no está generado por estos vectores, $(1,1,1,1)\notin E$

$(2,3,-7,3)$ $\quad -2-7\cdot 3-2\cdot(-7)+3\cdot 3=0$ $\quad (2,3,-7,3)$ está generado por estos vectores, $(2,3,-7,3)\in E$

EP3.26.- Demostrar que el conjunto de matrices de la forma $\begin{pmatrix} x-3y & 5y \\ -4y & x+3y \end{pmatrix}$ $x,y\in Q$ constituyen un subespacio vectorial del espacio $\mathcal{M}_2$ (Q) de todas las matrices de orden 2 sobre el cuerpo Q.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-3y & 5y \\ -4y & x+3y \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} a&=x-3y \\ b&=5y \\ c&=-4y \\ d&=x+3y \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -3 & a \\ 0 & 5 & b \\ 0 & -4 & c \\ 1 & 3 & d \end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix} 1 & -3 & a \\ 0 & 5 & b \\ 0 & -4 & c \\ 0 & 6 & d-a \end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix} 1 & -3 & a \\ 0 & 5 & b \\ 0 & 0 & 5c+4b \\ 0 & 0 & 5d-5a-6b \end{pmatrix}$$

$x,y,a,b,c,d\in Q$

Los elementos de este subconjunto de $\mathcal{M}_2$ (Q) son las matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que cumplen $\begin{cases} 5c+4b=0 \\ 5d=5a+6b \end{cases}$

Comprobemos en primer lugar que el elemento nulo pertenece al conjunto, llamémosle S.

- ¿ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in S$? $\qquad$ Sí porque cumple que $\begin{aligned} 5\cdot 0+4\cdot 0&=0 \\ 5\cdot 0&=5\cdot 0+6\cdot 0 \end{aligned}$

Aplicando el teorema de caracterización de subespacios veamos si:

1.- Dados dos elementos cualesquiera de S su suma también pertenece a S.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in S\Rightarrow\begin{cases} 5c+4b=0 \\ 5d=5a+6b \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\in S\Rightarrow\begin{cases} 5z+4y=0 \\ 5t=5x+6y \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+t \end{pmatrix}$$

Para que $\begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+t \end{pmatrix}\in S$ se tiene que cumplir que $\begin{cases} 5(c+z)+4(b+y)=0 \\ 5(d+t)=5(a+x)+6(b+y) \end{cases}$

Veámoslo:

$$\begin{cases} 5(c+z)+4(b+y)\overset{(3)}{=}(5c+5z)+(4b+4y)\overset{(4)y(5)}{=}(5c+4b)+(5z+4y)\overset{(1)y(2)}{=}0 \\ 5(d+t)\overset{(3)}{=}5d+5t\overset{(1)y(2)}{=}(5a+6b)+(5x+6y)\overset{(4)y(5)}{=}(5a+5x)+(6b+6y)\overset{(3)}{=}5(a+x)+6(b+y) \end{cases}$$

c.q.d.

(4) y (5) las propiedades conmutativa y asociativa de la suma de racionales

(3) la propiedad distributiva del producto respecto a la suma de racionales.

2.- El producto de un escalar $\lambda\in Q$ por un vector de S también pertenece a S.

Si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in S$ $\quad$ y $\lambda\in Q$ $\qquad \lambda\circ\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$

Para que $\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} \in S$ se tiene que cumplir que $\begin{cases} 5(\lambda c)+4(\lambda b)=0 \\ 5(\lambda d)=5(\lambda a)+6(\lambda b) \end{cases}$

Veámoslo:

$$\begin{cases} 5(\lambda c)+4(\lambda b) \overset{(6)y(7)}{=} \lambda 5c+\lambda 4b \overset{(3)}{=} \lambda(5c+4b) \overset{(1)}{=} 0 \\ 5(\lambda d) \overset{(6)y(7)}{=} \lambda 5d \overset{(1)}{=} \lambda(5a+6b) \overset{(3)}{=} \lambda 5a+\lambda 6b \overset{(6)y(7)}{=} 5(\lambda a)+6(\lambda b) \end{cases}$$ c.q.d.

(6) y (7) las propiedades conmutativa y asociativa del producto de racionales

El conjunto S es subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2$ (Q).

Ecuaciones parámetricas: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $\begin{matrix} a = x-3y \\ b=5y \\ c=-4y \\ d=x+3y \end{matrix}$

Ecuaciones cartesianas: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $\begin{cases} 5c+4b=0 \\ 5d=5a+6b \end{cases}$

Matriz genérica: $\begin{pmatrix} x-3y & 5y \\ -4y & x+3y \end{pmatrix}$ Una base: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

EP3.27.- Sea $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Probar que $E=\{B\in \mathcal{M}_2(R) | A\bullet B = B\bullet A\}$ es un subespacio de $\mathcal{M}_2(R)$.

El conjunto E es el de las matrices cuadradas orden 2 que conmutan con la matriz A.

Comprobemos en primer lugar que el elemento nulo pertenece al conjunto E.

- ¿ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in E$? Sí porque cumple que $\begin{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$ conmuta con la matriz A

Aplicando el teorema de caracterización de subespacios veamos si:

1.- Dados dos elementos cualesquiera de E su suma también pertenece a E.

$$B_1, B_2 \in E \to \begin{cases} A\bullet B_1 = B_1 \bullet A & (1) \\ A\bullet B_2 = B_2 \bullet A & (2) \end{cases}$$

Para que $B_1+B_2 \in E$ se tiene que cumplir que $A\bullet(B_1+B_2)=(B_1+B_2)\bullet A$

Veámoslo:

$$A\bullet(B_1+B_2) \overset{(3)}{=} A\bullet B_1 + A\bullet B_2 \overset{(1)y(2)}{=} B_1\bullet A + B_2 \bullet A \overset{(3)}{=} (B_1+B_2)\bullet A$$ c.q.d.

(3) la propiedad distributiva del producto de matrices respecto a la suma de matrices.

2.- El producto de un escalar $\lambda \in R$ por una matriz de E también pertenece a E.

Si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$ y $\lambda \in Q$ $\quad \lambda \circ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$

Para que $\lambda \circ B_1 \in E$ se tiene que cumplir que $A \bullet (\lambda \circ B_1) = (\lambda \circ B_1) \bullet A$

Veámoslo:

$A \bullet (\lambda \circ B_1) \overset{(4)}{=} \lambda \circ (A \bullet B_1) \overset{(1)}{=} \lambda \circ (B_1 \bullet A) \overset{(4)}{=} (\lambda \circ B_1) \bullet A$ c.q.d.

(4) propiedad asociativa y conmutativa de los productos entre escalares y matrices y producto de matrices.

El conjunto E es subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2(R)$.

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 2x + y = 2x + z \\ x + y = 2y + t \\ 2z + t = x + z \\ z + t = y + t \end{cases} \quad \begin{cases} y - z = 0 \\ x - y - t = 0 \\ x - z - t = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y - z = 0 \\ x - y - t = 0 \\ x - z - t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x - z - t = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = z + t \\ y = z \\ z = z \\ t = t \end{cases}$$

Ecuaciones parámetricas: $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tales que $\begin{cases} x = z + t \\ y = z \\ z = z \\ t = t \end{cases}$

Ecuaciones cartesianas: $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tales que $\begin{cases} x - z - t = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

Matriz genérica: $\begin{pmatrix} z + t & z \\ z & t \end{pmatrix}$ Una base: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

EP3.28.- Dada la base $\{(1,2,1),(0,1,0)\}$ de un subespacio de R^3. Calcular una base ortonormal de ese subespacio.

Tomaremos $\vec{c}_1 = (1,2,1)$ como primer vector de la nueva base.

El segundo vector será $\vec{c}_2 = (0,1,0) - t(1,2,1)$ porque así aseguramos que los vectores $\vec{c}_1, \vec{c}_2$ generan el mismo subespacio que los vectores $\{(1,2,1),(0,1,0)\}$.

Imponemos la condición de ortogonalidad $\vec{c}_1 \perp \vec{c}_2$ y calcularemos el escalar

$$\vec{c}_1 \bullet \vec{c}_2 = (1,2,1) \bullet ((0,1,0) - t(1,2,1)) = (1,2,1) \bullet (0,1,0) - t(1,2,1) \bullet (1,2,1) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$t = \frac{(1,2,1) \bullet (0,1,0)}{(1,2,1) \bullet (1,2,1)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \vec{c}_2 = (0,1,0) - \frac{1}{3}(1,2,1) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Base ortogonal: $\vec{c}_1 = (1,2,1)$ y $\vec{c}_2 = (-1,1,-1)$

Base ortonormal: $\vec{k}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)$ y $\vec{k}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)$

Si $(1,2)$ son las coordenadas de un vector en la base dada, calcular sus coordenadas en la nueva base calculada.

$$1\circ(1,2,1)+2\circ(0,1,0)=a\circ\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+b\circ\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\begin{cases} 1=\dfrac{a}{\sqrt{6}}-\dfrac{b}{\sqrt{3}} \\ 4=\dfrac{2a}{\sqrt{6}}+\dfrac{b}{\sqrt{3}} \\ 1=\dfrac{a}{\sqrt{6}}-\dfrac{b}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{6}=a-b\sqrt{2} \\ 4\sqrt{6}=2a+b\sqrt{2} \end{cases} \qquad a=\frac{5\sqrt{6}}{3} \qquad b=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

EP3.29.- Dado el subespacio F generado por la base $\{(1,2,1,0),(0,0,1,0),(2,1,0,-1)\}$ encontrar la proyección del vector $(1,2,0,0)$ sobre el subespacio F.

Buscaremos el subespacio ortogonal a F

$$(x,y,z,t)\bullet(1,2,1,0)=0$$
$$(x,y,z,t)\bullet(0,0,1,0)=0$$
$$(x,y,z,t)\bullet(2,1,0,-1)=0$$

$$F^{\perp}=\{(x,y,z,t)\mid x+2y+z=0,\ z=0,\ 2x+y-t=0\}$$

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ z=0 \\ 2x+y-t=0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1&2&1&0\\0&0&1&0\\2&1&0&-1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1&2&1&0\\0&0&1&0\\0&-3&-2&-1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1&2&1&0\\0&3&2&1\\0&0&1&0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x+2y+z=0 \\ 3y+2z+t=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-2y \\ y=y \\ z=0 \\ t=-3y \end{cases} \qquad \text{Una base} \begin{pmatrix} -2\\1\\0\\-3 \end{pmatrix}$$

$$(1,2,0,0)=a(1,2,1,0)+b(0,0,1,0)+c(2,1,0,-1)+d(-2,1,0,-3)$$

$$\begin{pmatrix} 1&0&2&-2&1\\2&0&1&1&2\\1&1&0&0&0\\0&0&-1&-3&0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1&0&2&-2&1\\0&0&-3&5&0\\0&1&-2&2&-1\\0&0&-1&-3&0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1&0&2&-2&1\\0&1&-2&2&-1\\0&0&-1&-3&0\\0&0&-3&5&0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1&0&2&-2&1\\0&1&-2&2&-1\\0&0&-1&-3&0\\0&0&0&14&0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+2c-2d=\mathbf{1} \\ b-2c+2d=\mathbf{-1} \\ -c-3d=\mathbf{0} \\ 14d=\mathbf{0} \end{cases} \qquad \begin{cases} a=\mathbf{1} \\ b=\mathbf{-1} \\ c=\mathbf{0} \\ d=\mathbf{0} \end{cases}$$

El vector $(1,2,0,0)$ es C.L. de $(1,2,1,0),(0,0,1,0),(2,1,0,-1)$ por lo que está contenido en el subespacio F así que la proyección ortogonal del vector sobre ese subespacio F es él mismo.