Problemes de Classe d'Algebra Lineal. Primer de Telemàtica.   Tema 5 - Diagonalització

1 Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -9 \\ 8 & 9 & 18 \\ -2 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

Comprovau que $\lambda = -1$ és un valor propi de A i que $(3, -6, 2)$ és un vector propi associat a λ. És el vector $(1, 2, -1)$ un vector propi associat a $\lambda = -1$?

2 Justificau si són diagonalitzables les següents matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3 Provau si són o no diagonalitzables les següents matrius de $M_3(\mathbb{R})$ i, en cas de que ho siguin, trobau una matriu P de vectors propis i la matriu diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & a+1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} a & 1 & a-1 \\ 1 & 2a & -1 \\ 2a+1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} a+1 & a+b & b \\ -a & -a & -1 \\ a & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

4 Sigui A una matriu real, quadrada d'ordre p amb tots els coeficients igual a 1.

1. Demostrau que $A^n = p^{n-1}A$ per a tot enter $n \geq 1$.
2. Calculau els valors propis de A.
3. Trobau, si es possible, una matriu P tal que P^-1AP sigui diagonal i calculau P^-1.

5 Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Provau que A és diagonalitzable
2. Calculau A^n per a tot $n \geq 1$

3. Provau que $p_A(A) = 0$ on $p_A(x)$ és el polinomi característic de la matriu A.

6 Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculau, utilitzant el teorema de Cayley-Hamilton A^{-1}, B^4 i B^5

7 Donat $a \in \mathbb{R}$, considerau la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

1. Demostrau que $A^3 - aA^2 + 2A - I_3 = 0$
2. Demostrau que A és invertible i calculau A^{-1}
3. Trobau el valor de $A^5 - aA^4 + A^3 - (1-a)A^2 - a + I_3$

8 Sigui $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriu quadrada d'ordre n. Demostrau que els valors propis de A i de A^t coincideixen.

9 Calculau A^n per a tot $n \in \mathbb{N}$, si la matriu A és

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

10 Trobau el terme general de la successió a_n/b_n definida per

$$a_1 = b_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 2b_n, \quad b_{n+1} = a_n + b_n$$

11 Considereu les successions definides recurrentment per a tot $n \geq 1$ per

$$u_n = -4u_{n-1} - 6v_{n-1} \quad v_n = 3u_{n-1} + 5v_{n-1} \quad w_n = 3u_{n-1} + 6v_{n-1} + 5w_{n-1}$$

Calculau u_n, v_n, w_n en funció de u_0, v_0, w_0.