Tema 1: Lògica i fonamentació

1. Sigui p la proposició "En Joan va caure" i q la proposició "En Joan es va rompre una cama".
   (a) Escriviu les sentències corresponents a cada una de les següents proposicions:
   $$p \wedge q, \quad \neg p \wedge \neg q, \quad \neg(p \wedge q), \quad q \vee \neg p.$$
   (b) Quan és que $\neg(p \wedge q)$ és vertadera i $q \vee \neg p$ falsa? I a l'inrevés?
   (c) Amb p i q les donades, sota quines condicions és la proposició $p \vee q$ vertadera? I $p \oplus q$?
2. Un dimarts al matí en Pere diu: "Si avui és dimecres, llavors avui és dimarts". Discutiu el valor de veritat de la proposició de'n Pere. I si la diu un dimecres?
3. Donau les taules de veritat per a cada una de les següents formes proposicionals:
   (a) $p \oplus (p \leftrightarrow q)$
   (b) $p \to (p \to p)$
   (c) $(p \oplus q) \to (p \oplus \neg q)$
   (d) $(q \to \neg p) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
   (e) $\neg(\neg p \to q) \vee \neg(\neg p \to q)$
   (f) $\neg p \wedge (q \to \neg r)$
   (g) $(p \to q) \wedge (\neg p \to r)$
4. Emprau les taules de veritat per determinar quines de les següents proposicions són tautologies:
   (a) $p \to (\neg p \to q)$
   (b) $(p \wedge q) \to (p \vee r)$
   (c) $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$
   (d) $((p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)) \to r$
5. (a) Donau una forma proposicional lògicament equivalent a $p \to (q \to r)$ en la qual el símbol $\to$ no hi aparegui.
   (b) Donau una forma proposicional lògicament equivalent a $p \vee q$ en la qual els únics connectius lògics siguin $\neg$ i $\wedge$.
   (c) Deduïu que qualsevol connectiu es pot sustituir per una forma proposicional equivalent que únicament utilitzi els connectius $\wedge$ i $\neg$.
6. Escrivim $p \uparrow q$ com una abreviatura de $\neg(p \wedge q)$. Aquest connectiu $\uparrow$ es diu NAND (per NO-AND). Emprau taules de veritat per a verificar les següents equivalències lògiques:
   (a) $\neg p \Leftrightarrow p \uparrow p$
   (b) $p \vee q \Leftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$
   (c) $p \wedge q \Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$
   (d) Donau una forma proposicional equivalent per a $p \to q$ utilitzant el connectiu NAND únicament.

   Equivalentment definim $p \downarrow q$ com una abreviatura de $\neg(p \vee q)$. Aquest connectiu $\downarrow$ es diu NOR (per NO-OR). Trobau els equivalents dels quatre connectius bàsics usant únicament el connectiu NOR.

7. A Steve li agradaria determinar qui cobra més d'entre tres dels seus col·legues utilitzant dos fets. Primer, sap que si Fred no és el millor pagat dels tres, llavors ho és Janice. Segon, sap que si Janice no és la pitjor pagada, llavors Maggie és la que més cobra. És possible determinar l'ordre dels salaris de Janice, Maggie i Fred amb només aquestes dades? Si és així, qui és el que cobra més i qui és el que cobra menys?

8. Tradueix aquestes sentències a llenguatge natural, a on $R(x)$ és "x és un conill" i $H(x)$ és "x bota" i el domini consisteix en tots els animals.

   (a) $\forall x(R(x) \to H(x))$
   (b) $\forall x(H(x) \to R(x))$
   (c) $\forall x(R(x) \wedge H(x))$
   (d) $\exists x(R(x) \to H(x))$
   (e) $\exists x(H(x) \to R(x))$
   (f) $\exists x(R(x) \wedge H(x))$

9. Etiquetau cada un dels següents enunciats amb *vertader* o *fals*, segons correspongui. Tots aquests enunciats es refereixen a nombres reals.

   (a) $\forall x((x \geqslant 0) \to \exists y(y^2 = x))$
   (b) $\forall x \exists! y(y^3 = x)$
   (c) $\forall x \exists! y(xy = 0)$

10. Suposau que estau treballant amb nombres reals. Trobau predicats $P(x)$ i $Q(x)$ de manera que les proposicions $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ i $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ tenguin valors de veritat oposats.

11. Expressau els següents enunciats simbòlicament, emprant quantificadors, connectius lògics i símbols matemàtics estàndard de l'aritmètica, però sense emprar paraules:

   (a) Hi ha un enter positiu, el cub del qual, quan se suma a 15, dóna 22.
   (b) Tot enter positiu té la propietat que quan el seu cub se suma a 15, el resultat és 22.
   (c) No és cert que tot nombre real sigui un quadrat d'un nombre real.
   (d) Tot nombre real té una única arrel cúbica.
   (e) Hi ha un nombre real que no és el quadrat d'un nombre real.

12. Siguin $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ i $S(x)$ els predicats "x és un ànec", "x és un au del meu corral", "x és un jove guapo" i "x vol ballar un vals", respectivament a l'univers de totes les persones i els animals. Expressau cada un dels següents enunciats emprant quantificadors, connectius lògics i $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ i $S(x)$.

   (a) Cap ànec vol ballar un vals.
   (b) Cap jove guapo rebutja ballar un vals.
   (c) Totes les aus del meu corral són ànecs.
   (d) Les aus del meu corral no són joves guapos.
   (e) Hi ha un ànec que és un au del meu corral.
   (f) Hi ha un jove guapo que no vol ballar un vals.

13. Dins el conjunte de nombres més grans o iguals a zero amb $a = 0$, $b = 1$, $P(w_1, w_2) =$ "$w_1 < w_2''$ i $Q(w_1, w_2) =$ "$w_1 + w_2 > 10''$, valorau:

   (a) $P(x, y) \to Q(x, y)$
   (b) $\exists x(P(a, b) \to Q(a, x))$

(c) $P(x, x) \wedge Q(x, x)$

(d) $\forall x \neg(P(a, b) \rightarrow Q(a, x))$

14. Suposem que tenim la següent afirmació: "Tota persona major de 18 anys beu alcohol". Suposem que tenim quatre persones diferents, de les quals tenim les següents dades:

    - Persona A té 23 anys
    - Persona B beu Coca-Cola
    - Persona C té 15 anys
    - Persona D beu ron amb taronja

    A cada una d'aquestes persones lis podem demanar quina beguda beuen o quina edat tenen, segons correspongui. Emprant les eines de la lògica de predicats, averiguau quin és el nombre mínim de questions que s'han de fer per verificar l'afirmació donada. Com ho farieu en lògica de proposicions?

15. Realitzau un raonament vàlid usant les regles d'inferència per mostrar que les hipòtesis "Si no plou o si no hi ha boira, llavors es celebrarà la competició de vaixells i es farà una demostració dels socorristes", "Si es celebra la competició de vaixells, s'entregarà un trofeu" i "El trofeu no s'ha entregat" impliquen la conclusió "Va ploure".

16. Per cada un dels següents arguments, digau si són correctes o no. Si l'argument és correcte, quina és la regla d'inferència emprada? Si no ho és, quin error lògic s'ha comés?

    (a) Sigui $S(x, y)$ el predicat "x és més baix que y". Donada la premisa $\exists x S(x, \text{Randy})$, podem deduir que $S(\text{Randy}, \text{Randy})$. Llavors es té que $\exists x S(x, x)$, és a dir, existeix algú que és més baix que ell mateix.

    (b) A tots els lloros els hi agrada la fruita. Al meu ocell no li agrada la fruita. El meu ocell no és un lloro.

    (c) Tots els estudiants del Grau de Matemàtiques cursen Matemàtica Discreta. Na Miquela cursa Matemàtica Discreta. Per tant, na Miquela és estudiant d'Enginyeria Informàtica.

    (d) Na Joana, una estudiant de primer de Matemàtiques, té un descapotable vermell. A tots els que tenen un descapotable vermell els han multat alguna vegada per excés de velocitat. Llavors a alguna estudiant de primer de Matemàtiques l'han multada per excés de velocitat.

Tema 2: Teoria de conjunts

1. Enumerau els elements dels següents conjunts:
   (a) $\{x \mid x \text{ és un nombre real positiu tal que } x^2 = 1\}$
   (b) $\{x \mid x \text{ és el quadrat d'un enter i } x < 100\}$
   (c) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ és primer i } (x \text{ és parell o } 3 \leq x \leq 10)\}$
   (d) $\{x \in \mathbb{Z} \mid \text{existeix un element } y \in \mathbb{Z}^+ \text{ amb } x^2 + y^2 \leq 25\}$

2. Descriviu cada un dels següents conjunts en el format $\{x \mid P(x)\}$
   (a) $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \ldots\}$
   (b) $B = \{1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, \ldots\}$
   (c) $C = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, \ldots\}$
   (d) $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

3. Etiquetau cada enunciat amb *vertader* o *fals*, segons correspongui:
   (a) $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$
   (b) $\{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3, 3, 2\}$
   (c) $\{5, \emptyset\} = \{5\}$
   (d) $\{5\} \in \{2, 5\}$
   (e) $\emptyset \in \{1, 2\}$
   (f) $\{1, 2\} \in \{3, \{1, 2\}\}$

4. Provau les següents implicacions:
   (a) $A \subset B \Rightarrow B \not\subset A$
   (b) $A \subseteq \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$

5. Provau que si $A \subset B$ i $B \subseteq C$ llavors $A \subset C$.

6. Siguin A i B conjunts. Provau que $A \subseteq B$ si i només si tot subconjunt de A és un subconjunt de B.

7. Siguin $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ és parell }\}$. Determinau cada un dels següents conjunts:
   (a) $A \cup B$
   (b) $B \cap A$
   (c) $A \backslash B$
   (d) $B \backslash A$
   (e) $(A \cap B) \cap C$
   (f) $B \cup \emptyset$
   (g) $(A \cap B) \cup C$
   (h) $A \times B$
   (i) $\mathcal{P}(A)$

8. Agafau $\mathbb{Z}$ com el conjunt universal. Emprant els conjunts A, B i C definits a l'exercici anterior determinau $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ i $\overline{(A \cap C)}$.

9. És cert que $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \backslash C$? Justificau la resposta.

10. Què pots dir sobre els conjunts A i B si es sap que:

    (a) $A \cup B = A$
    (b) $A \cap B = A$
    (c) $A \backslash B = A$
    (d) $A \backslash B = B \backslash A$?

11. Siguin $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i $B = \{4, 5, 6\}$. Determinau els següents conjunts:

    (a) $\mathcal{P}(A \cap B)$
    (b) $\mathcal{P}(B \backslash A)$
    (c) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

12. Sota quines condicions sobre els conjunts A i B és cert que $\mathcal{P}(A \backslash B) = \mathcal{P}(A)$? Enunciau i provau una condició necessària i suficient.

13. Provau que si S és un conjunt qualsevol, llavors

$$\{1, 2\} \times S = (\{1\} \times S) \cup (\{2\} \times S)$$

14. Provau que $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.

15. Sigui n un enter positiu i suposau un conjunt A_i donat per cada $i \in I = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, tal que $A_i \subseteq A_j$ per a tot $j \geq i$. Provau que

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A_n, \qquad \bigcap_{i \in I} A_i = A_1.$$

16. Siguin A i B els multiconjunts $\{a, a, a, b, b, c\}$ i $\{a, a, b, b, b, d, d, d, d\}$, respectivament. Trobau:

    (a) $A \cup B$
    (b) $A \cap B$
    (c) $A \backslash B$
    (d) $B \backslash A$

17. Trobau el multiconjunt B que compleixi simultàniament les dues condicions següents:

$$B \cup \{2, 2, 3, 4\} = \{2, 2, 3, 3, 4, 4, 5\}$$
$$B \cap \{2, 2, 3, 4, 5\} = \{2, 3, 4, 5\}.$$

18. Enumerau els parells ordenats de la relació R de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ en $B = \{1, 2, 3\}$, a on $(a, b) \in R$ si, i només si:

    (a) $a + b = 4$
    (b) $a > b$
    (c) $\mathrm{mcd(a, b)} = 1$
    (d) $\mathrm{mcm(a, b)} = 2$

19. Considerem el conjunt $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ amb la relació de divisibilitat. Enumerau tots els parells ordenats de la mateixa i indicau quines propietats té i quines no té la relació, justificant la vostra resposta.

20. Determinau si la relació R en el conjunt de tots els nombres reals és reflexiva, irreflexiva, simètrica, asimètrica, antisimètrica i/o transitiva, a on $(x, y) \in R$ si, i només si,

(a) $x \neq y$

(b) x és un múltiple de y

(c) $xy \geq 1$

(d) x i y són ambos negatius o ambdós no negatius

21. Pot ser una relació en un conjunt no ser ni reflexiva ni irreflexiva? En cas afirmatiu, donau un exemple.

22. Una relació asimètrica ha de ser a la força antisimètrica? I a l'inrevés? Raonau la vostra resposta.

23. Sigui R la relació en el conjunt dels enters tal que $(a, b) \in R$ si, i només si, $a \neq b$. Quina és la seva clausura reflexiva?

24. Sigui R la relació de divisibilitat en el conjunt dels enters. Quina és la seva clausura simètrica? És un ordre parcial en $\mathbb{Z}^+$?

25. Quins dels següents conjunts són conjunts parcialment ordenats?

    (a) $(\mathbb{Z}, \neq)$

    (b) $(\mathbb{Z}, \geq)$

    (c) $(\mathbb{Z}, \nmid)$

26. Dibuixau el diagrama de Hasse de les següents relacions:

    (a) la relació "major o igual" en el conjunt $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

    (b) la relació d'inclusió en el conjunt $\mathcal{P}(S)$ a on $S = \{a, b, c, d\}$

27. Donat el conjunt parcialment ordenat $\{1, 3, 5, 9, 15, 24, 45\}$ amb la relació de divisibilitat, es demana:

    (a) Trobau els elements maximals i minimals

    (b) Hi ha mínim? I màxim?

28. Donat el conjunt parcialment ordenat $\{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ amb la relació inclusió, es demana:

    (a) Trobau els elements maximals i minimals

    (b) Hi ha mínim? I màxim?

29. Siguin $(S, \leq_1)$ i $(T, \leq_2)$ dos conjunts parcialment ordenats. Demostrau que $(S \times T, \leq)$ és un conjunt parcialment ordenat, essent $(s, t) \leq (u, v)$ si, i només si, $s \leq_1 u$ i $t \leq_2 v$.

30. Sigui $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $A = S \times S$. Es defineix sobre A la relació:

    $$(a, b)\ R\ (a', b') \Leftrightarrow ab' = a'b.$$

    Provau que R és una relació d'equivalència i calculau A/R.

31. Quines de les següents relacions en el conjunt de totes les funcions de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ són relacions d'equivalència? Donau les classes d'equivalència d'aquelles que siguin relacions d'equivalència.

    (a) $\{(f, g) \mid f(1) = g(1)\}$

    (b) $\{(f, g) \mid f(0) = g(0) \text{ o } f(1) = g(1)\}$

    (c) $\{(f, g) \mid f(x) - g(x) = c \text{ per algun } c \in \mathbb{Z} \text{ i per a tot } x \in \mathbb{Z}\}$

32. Quines d'aquestes col·leccions de subconjunts són particions del conjunt de cadenes de bits de longitud 8?

    (a) El conjunt de cadenes de bits que comencen per 1, el conjunt de cadenes de bits que comencen per 00 i el conjunt de cadenes de bits que comencen per 01.
    (b) El conjunt de cadenes de bits que conté la cadena 00, el conjunt de cadenes de bits que conté la cadena 01, el conjunt de cadenes de bits que conté la cadena 10 i el conjunt de cadenes de bits que conté la cadena 11.

33. Quines d'aquestes col·leccions de subconjunts són una partició del conjunt de nombres reals?

    (a) Els nombres reals negatius, $\{0\}$, els nombres reals positius.
    (b) El conjunt dels nombres irracionals, el conjunt dels nombres racionals.
    (c) El conjunt d'intervals $[k, k+1]$, $k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
    (d) El conjunt d'intervals $(k, k+1)$, $k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
    (e) El conjunt d'intervals $[k, k+1)$, $k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
    (f) Els conjunts $\{x + n | n \in \mathbb{Z}\}$ per a tot $x \in [0, 1)$.

34. Comprovau que la relació definida en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de la forma $(a, b)R(c, d)$ si, i només si, $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ és d'equivalència i representau gràficament el conjunt quocient.

35. Determinau si les següents f són funcions o no, dins el domini i la imatge donats:

    (a) $f(x) = 1/x$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$,
    (b) $f(n) = \pm n$ de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$,
    (c) $f(n) = \sqrt{n^2 + 1}$ de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$.

36. Determinau si les següents funcions són injectives, exhaustives i/o bijectives:

    (a) $f : \{a, b, c, d\} \to \{a, b, c, d\}$, amb $f(a) = d$, $f(b) = b$, $f(c) = c$ i $f(d) = d$,
    (b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, amb $f(n) = n^2 + 1$,
    (c) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, amb $f(m, n) = 2m - n$,
    (d) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, amb $f(m, n) = |n|$,
    (e) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, amb $f(m, n) = m$,
    (f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, amb $f(x) = (x^2 + 1)/(x^2 + 2)$.

37. Suposem que g és una funció de A en B i que f és una funció de B en C.

    (a) Demostrau que si tant f com g són funcions injectives, llavors $f \circ g$ també ho és.
    (b) Demostrau que si tant f com g són funcions exhaustives, llavors $f \circ g$ també ho és.
    (c) Demostrau que si tant f com g són funcions bijectives, llavors $f \circ g$ també ho és.
    (d) Si f i $f \circ g$ són injectives, és g injectiva? Justificau la vostra resposta
    (e) Si f i $f \circ g$ són exhaustives, és g exhaustiva? Justificau la vostra resposta

38. Siguin S i T conjunts amb tres elements i dos elements respectivament. En cada cas enunciau la resposta i justificau-la.

    (a) Quantes funcions hi ha de S en T?
    (b) Quantes funcions injectives hi ha de S en T?
    (c) Quantes funcions exhaustives hi ha de S en T?
    (d) Quantes funcions bijectives hi ha de S en T?

(e) Conjecturau les respostes a a) i a b) si S té m elements i T té n elements.

39. Siguin $f(x) = ax + b$ i $g(x) = cx + d$. a on a, b, c i d són constants. Determinau per a quins valors de a, b, c i d es compleix que $f \circ g = g \circ f$.

40. Sigui f una funció del conjunt A en el conjunt B. Siguin L i M subconjunts de A, i S i T subconjunts de B. Demostrau que:

    (a) $f(L \cup M) = f(L) \cup f(M)$
    (b) $f(L \cap M) \subseteq f(L) \cap f(M)$
    (c) $f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$
    (d) $f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$

41. Sigui f la funció part entera donada per $f(x) = [x]$. Trobau:

    (a) $f^{-1}(\{0\})$
    (b) $f^{-1}(\{-1, 0, 1\})$
    (c) $f^{-1}(\{x \mid 0 < x < 1\})$

42. Siguin $f : A \to B$ i $g : B \to C$ funcions. Si $C_0 \subseteq C$, provau que $(g \circ f)^{-1}(C_0) = f^{-1}(g^{-1}(C_0))$.

43. Sigui A un conjunt i un subconjunt seu $B \subseteq A$. Consideram la funció característica $\chi_B : A \to \{0, 1\}$.

    (a) Donau les fórmules per a les funcions característiques $\chi_\emptyset$ i χ_A.
    (b) Sigui $\overline{B}$ el conjunt complementari de B en A. Comparau les fórmules de χ_B i $\chi_{\overline{B}}$.
    (c) Provau que si B i C són subconjunts de A, llavors $B = C \Leftrightarrow \chi_B = \chi_C$.
    (d) Provau que si B i C són subconjunts de A, llavors

$$\chi_{B \cap C}(x) = \chi_B(x) \cdot \chi_C(x) \quad \forall x \in A$$
$$\chi_{B \cup C}(x) = \chi_B(x) + \chi_C(x) - \chi_B(x) \cdot \chi_C(x) \quad \forall x \in A$$

Tema 3: Aritmètica

1. Demostreu que si x, y són enters tals que $x \cdot y = 0$ i $x \neq 0$, aleshores $y = 0$.

2. Demostreu que si a i b són enters tals que $a \cdot b = 1$, aleshores o bé $a = b = 1$ o bé $a = b = -1$.

3. Donats a, b i c enters, demostreu que si $c|a$ i $c|b$, aleshores $c|xa + yb$ per a x i y enters qualssevol.

4. Demostreu que per a tot enter no negatiu n, es té que $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ és múltiple de 17.

5. Proveu que en tot conjunt de cinc enters positius n'hi ha sempre tres tals que la seva suma és divisible per 3.

6. (a) Demostreu que per a tot enter n el valor de $n \cdot (n^2 + 2)$ és múltiple de 3.
   (b) Deduïu de l'apartat anterior que la suma dels cubs de tres enters consecutius és sempre múltiple de 9.

7. Emprant l'algoritme d'Euclides, trobeu el màxim comú divisor i resoleu la identitat de Bezout per als parells d'enters següents:
   (a) 34 i 21,
   (b) 136 i 51,
   (c) 64 i 230,
   (d) 357 i 942,
   (e) 481 i 325,
   (f) -12 i 86,
   (g) -253 i 94,
   (h) 8771 i 3206.

8. Donats a i b dos nombres enters positius qualssevol, demostreu que $a \cdot b = \text{mcd}(a, b)\,\text{mcm}(a, b)$.

9. Empreu el resultat anterior per trobar el mínim comú múltiple dels parells de nombres de l'exercici 7.

10. Siguin a i b enters. Proveu que si $\text{mcd}(a, b) = 1$, llavors $\text{mcd}(a, a + b) = 1$.

11. Proveu que si x, y i z són enters positius tal que $\text{mcd}(x, y) = 1$ i $xy = z^2$, llavors existeixen enters positius m, n tals que $x = m^2$ i $y = n^2$.

12. Demostreu que donats enters $a, b \in \mathbb{Z}$, ambdós no nuls, amb màxim comú divisor d, es té que a/d i b/d són relativament primers.

13. Proveu que, per a qualsevol natural n, la fracció $\frac{2n+3}{4n+5}$ és irreductible.

14. Siguin $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tals que $mcd(a, b) = 1$. Demostreu:
    (a) $a|bc \Rightarrow a|c$
    (b) $a|c$ i $b|c \Rightarrow ab|c$

15. Per a tot enter positiu n es defineix $\tau(n)$ com el nombre de divisors positius de n. De manera natural, podem veure τ com una funció $\tau : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$.
    (a) Trobeu el valor de $\tau(n)$ per a valors de n entre 1 y 10.
    (b) Trobeu una fórmula per calcular $\tau(n)$ a partir de la descomposició de n en factors primers.

(c) Proveu que la funció τ és exhaustiva, és a dir, per a tot enter positiu m, existeix almenys un enter n amb $\tau(n) = m$. Trobeu els tres enters positius més petits que tinguin exactament sis divisors.

(d) Demostreu que, per a tot enter $k > 1$, el conjunt d'enters positius que tenen exactament k divisors és infinit. Concloeu que la funció τ no és injectiva.

(e) Demostreu que si $\text{mcd}(n, m) = 1$, aleshores $\tau(n \cdot m) = \tau(n) \cdot \tau(m)$.

16. Proveu que si n és un nombre enter compost, llavors n té un divisor primer $p \leq \sqrt{|n|}$.

17. Sigui n un enter positiu. Proveu que si $2^n - 1$ és primer, llavors n és primer.

18. Demostreu que la relació de congruència mòdul un enter N qualsevol, definida sobre $\mathbb{Z}$, és efectivament una relació d'equivalència.

19. Indiqueu si els següents enunciats són certs o fals, justificant la resposta:

    (a) $a \equiv b \pmod m$ i $n|m \Rightarrow a \equiv b \pmod n$

    (b) $a \equiv b \pmod m$ i $m|n \Rightarrow a \equiv b \pmod n$

    (c) $a \equiv b \pmod m \Rightarrow a^2 \equiv b^2 \pmod{m^2}$

    (d) $a \equiv b \pmod m$ i $a \equiv b \pmod n \Rightarrow a \equiv b \pmod{\text{mcd}(m, n)}$

    (e) $a \equiv b \pmod m$ i $a \equiv b \pmod n \Rightarrow a \equiv b \pmod{mn}$

    (f) $(10^{50} - 1)^{12} \equiv 6 \pmod 3$.

20. Proveu que si n és un enter senar, llavors $n^2 \equiv 1 \pmod 8$.

21. Sabem que si x, y són enters tals que $xy = 0$ a $\mathbb{Z}$ i $x \neq 0$, aleshores $y = 0$. Doneu un contraexemple que mostri que aquesta propietat no se safisfà a $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_8$ i $\mathbb{Z}_{15}$. En podeu donar algun a $\mathbb{Z}_7$?.

22. Demostreu que si un $x \in \mathbb{Z}_p$ compleix que $x = x^{-1}$ en $\mathbb{Z}_p$, aleshores compleix també que $x^2 - 1 = 0$. Deduïu d'això que 1 i -1 són els únics elements de $\mathbb{Z}_p$ que són iguals al seu propi invers.

23. (a) Trobeu el conjunt U de les unitats (elements invertibles) de $\mathbb{Z}_{20}$.Comproveu que la funció $f : U \to U$, donada per $f(x) = 3x$ en $\mathbb{Z}_{20}$, és una bijecció.

    (b) En general, sigui U_n el conjunt d'unitats de $\mathbb{Z}_n$. Demostreu que fixat un $u \in U_n$ qualsevol, la funció $f : U_n \to U_n$ definida per $f(x) = ux$ és una bijecció del conjunt U_n en si mateix.

24. Considereu la funció $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ amb p primer, definida per $f(x) = x^{p-1}$.

    (a) Per a quins valors de p la funció anterior és bijectiva?

    (b) Proveu que la funció $g : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, definida per $g(x) = x^p$ és la funció identitat.

25. Demostreu que si $n > 4$ no és primer, aleshores $(n - 1)! \equiv 0 \pmod n$.

26. Calculeu $1 + 2^n + 2^{2n}$ mòdul 7.

27. Considerem la funció ϕ d'Euler, que pot ser calculada per mitjà de l'expressió

$$\phi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \cdots (1 - \frac{1}{p_r}),$$

on $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$ és la descomposició de n en producte de potències de nombres primers diferents dos a dos.

    (a) Comproveu la fórmula donada per $n = 10, 11, 12, \ldots, 20$.

(b) Calculeu $\phi(1000)$ i $\phi(1001)$. És cert en general que $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$? Raoneu la resposta.

28. Considereu el nombre $n = 10644031 = pq$, on $p > q$ són dos nombres primers i $\phi(n) = 10637464$. Trobeu $p + q$, sense trobar explícitament p i q.

29. Calculeu la resta de dividir:

    (a) 7457^{2748} entre 5.

    (b) $3752^{9784} + 274^{2780} - 4 \cdot 3^{158}$ entre 11.

30. Resoleu els sistemes de congruències següents:

    (a) $\begin{cases} 2x \equiv 3 \pmod 5 \\ 3x \equiv 2 \pmod 4 \end{cases}$

    (b) $\begin{cases} x \equiv 7 \pmod{12} \\ x \equiv 5 \pmod{18} \end{cases}$

31. En una editorial tenen un determinat nombre d'exemplars d'un llibre. Si els empaqueten en caixes de deu, en sobren dos llibres, i si ho fan en caixes de 13 en sobra 1. Quants d'exemplars hi ha si sabem que el nombre de llibres està comprés entre 2000 i 2100?

32. S'han llançat a un ordinador tres processos que periòdicament accedeixen a un recurs compartit. Si dos d'ells ho fan a la vegada no hi ha cap problema, però si ho fan tres a la vegada es produirà un bloqueig. Considerant els temps d'accés al recurs que es recullen a la taula següent:

Procés	Accedeix per primera vegada al recurs	Accedeix cada
1	10:00 hores	5 min.
2	10:02 hores	12 min.
3	c minuts després de les 10:00 h	4 min.

    (a) Plantegeu un sistema de congruències i estudieu per a quins valors de c es produeixen bloquejos.

    (b) Si $c = 6$, calculeu l'hora en què es produirà el primer bloqueig després de les 16 h.

Tema 4: Combinatòria

1. En una certa universitat hi ha 18 estudiants de matemàtiques i 325 d'informàtica.
   (a) De quantes maneres es poden escollir dos representants, de forma que un d'ells sigui estudiant de matemàtiques i l'altre sigui estudiant d'informàtica?
   (b) De quantes maneres es pot escollir un representant que sigui estudiant de matemàtiques o d'informàtica?

2. Un qüestionari es composa de deu preguntes, cada una de les quals té quatre possibles respostes.
   (a) De quantes formes pot contestar un estudiant el qüestionari si respon a totes les preguntes?
   (b) De quantes formes pot contestar un estudiant el qüestionari si pot deixar preguntes sense contestar?

3. Quantes cadenes de deu bits comencen i acaben en 1?

4. Quantes cadenes de lletres minúscules existeixen de longitud quatre o menys? Quantes d'aquestes contenen la lletra "x"? (suposarem sempre que les lletres de l'alfabet estan formades per les 26 lletres de l'alfabet llatí, no incloent "ç" ni les variants accentuades).

5. Dels enters menors que 1000,
   (a) Quants són divisibles per 7?
   (b) Quants són divisibles per 7, però no per 11?
   (c) Quants són divisibles per 7 i per 11?

6. Un palíndrom és una cadena que es llegeix igual de dreta a esquerra que d'esquerra a dreta. Quantes cadenes de n caràcters són palíndroms?

7. En un grup de matemàtica discreta, tots els estudiants són o bé estudiants de matemàtiques, o bé estudiants d'informàtica o bé d'una titulació conjunta en matemàtiques i informàtica. Quants d'estudiants formen el grup si hi ha 38 estudiants d'informàtica (incloent els de la titulació conjunta), 27 de matemàtiques (incloent els de la titulació conjunta) i 7 estudiants de la titulació conjunta?

8. En un calaix hi ha una dotzena de calcetins marrons i una dotzena de calcetins negres. Un home elegeix els calcetins a l'atzar, sense mirar.
   (a) Quants calcetins ha de treure per assegurar-se que almenys dos seran del mateix color?
   (b) Quants calcetins ha de treure per assegurar-se que almenys dos són negres?

9. Demostrau que a qualsevol grup de cinc enters consecutius qualsevol n'hi ha dos que donen el mateix residu quan es divideixen entre quatre.

10. Quants d'enters s'han d'escollir del conjunt $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ per assegurar que almenys una parella d'ells suma 16?

11. Suposem que en un grup de 6 persones, cada dues persones són, o bé amigues, o bé enemigues. Demostrau que en el grup hi ha, o bé un grup de tres amics entre sí, o bé un grup de tres enemics entre sí.

12. Escrivim A^n per denotar el producte cartesià $A \times \cdots \times A$ (n vegades).
    (a) Si A té k elements, quants elements té el conjunt A^n?

(b) Llistau els elements de $\{0,1\}^3$ i comprovau que n'hi ha exactament el nombre que correspon amb la fórmula trobada a l'apartat anterior.

13. Els alumnes de primer del grau de matemàtiques han organitzat un sorteig per tal de finançar el viatge de fi de curs. Han venut un total de 1000 paperetes i els premis són un DVD gravador, un MP4 i un lot de llibres. De quantes maneres diferents poden quedar distribuïts aquests premis?

14. Amb els set colors de l'espectre quantes banderes de quatre franges horitzontals de diferents colors podem formar?

15. Amb les 10 xifres de la numeració decimal quants nombres diferents de 4 xifres que acabin en 12 podem escriure?

16. Un restaurant vegetarià fa sopes amb tres verdures diferents, que pot triar el client entre les 20 verdures diferents de què disposa el restaurant. Quants dies trigarà un client determinat a provar tots els tipus de sopa si cada dia varia la seva tria?

17. De quantes maneres diferents es poden col·locar 8 alumnes en una filera?

18. Tenim cinc colors diferents per pintar les quatre habitacions d'una casa: lila, blanc, verd, celest i groc. De quantes maneres puc pintar-les

    a) si totes les habitacions han de tenir colors diferents?
    b) si dues habitacions que jo he triat han de tenir el mateix color i les altres diferents entre sí i diferents a aquestes dues?
    c) si hi ha d'haver com a mínim dues habitacions (és igual quines) de color blanc? (-,0.5p)
    d) si hi ha d'haver dues habitacions, que no hem triat, de color blanc i dues habitacions, que no s'han triat, de color celest?

19. Es volen assignar cinc tasques diferents, $\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ a quatre persones, $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, de forma que cada tasca la realitza una única persona.

    a) De quantes maneres es pot fer?
    b) De quantes maneres es pot fer de forma que cap persona es quedi sense fer res?
    c) De quantes maneres es pot fer de forma que exactament una persona es quedi sense fer res?
    d) De quantes maneres es poden assignar de forma que les tasques t_1 i t_2 les faci la mateixa persona?

20. De quantes formes podem ordenar les 26 lletres de l'alfabet de manera que no es presenti cap de les configuracions VENT, SOL MAR?

21. Tenim dotze llibres i cinc persones.

    a) De quantes formes podem triar nou llibres?
    b) De quantes maneres podem repartir aquests nou llibres que hem triat si volem que cada persona rebi, com a mínim, un llibre?
    c) De quantes formes podem repartir els nou llibres de forma que en Joan rebi com a mínim dos llibres concrets?

22. Amb les lletres de la paraula "congre" quantes paraules diferents es poden formar? (no cal que aquestes paraules tinguin sentit). Quantes d'aquestes paraules comencen per "on"? Quantes acaben en "gr"?

23. En un concurs de natació participen 12 nadadors. Els premis són medalla d'or, de plata i de bronze.

(a) De quantes maneres poden ser distribuïdes?

(b) Si a més es donen 4 plaques honorífiques iguals als 4 següents classificats, quins són els possibles resultats?

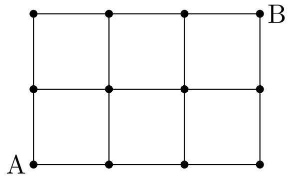
24. Quantes paraules podem formar amb les lletres de la paraula EMMAGATZEMATGE? Quantes d'aquestes disposicions no tenen tres lletres A adjacents?

25. Resoleu aquests dos enunciats equivalents:

    (a) Si un partit de futbol ha acabat amb una victòria per tres gols a dos a favor de l'equip de casa, de quantes maneres es pot haver arribat a aquest resultat?

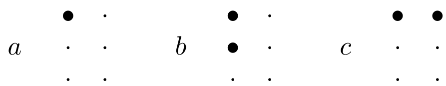
    (b) Es considera una xarxa rectangular formada per 12 punts disposats en tres files de quatre punts cada una. Anomenem A i B els vèrtexos inferior esquerre i superior dret, respectivament.

    Considerem els camins que surten d'A i arriben a B, de manera que els desplaçaments horitzontals es fan sempre cap a la dreta, i els verticals en sentit ascendent. Quants de camins d'aquest tipus hi ha?



    c) Generalitzau el segon enunciat per a una xarxa de $m \times n$ punts.

26. En el sistema Braille s'aconsegueix representar un símbol (una lletra, un símbol de puntuació,...) ressaltant, almenys, un dels sis punts disposats en dues columnes de tres elements cada una. Per exemple, les 3 primeres lletres de l'alfabet són:



    (a) Quants de símbols podem aconseguir amb aquest sistema?

    (b) Quants de símbols tenen exactament tres punts ressaltats?

    (c) Quants tenen un nombre parell de punts ressaltats?

27. De quantes formes es poden distribuir deu bolles idèntiques entre cinc nins si:

    (a) no hi ha restriccions?

    (b) cada nin ha de rebre, almenys, una bolla?

    (c) el major ha de rebre, almenys, dues bolles?

    (d) el major ha de rebre, exactament, quatre bolles?

28. Suposem que k i n són enters naturals tals que $1 \leq k < n$. Demostrau la identitat hexagonal

$$\binom{n-1}{k-1} \cdot \binom{n}{k+1} \cdot \binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k} \cdot \binom{n}{k-1} \cdot \binom{n+1}{k+1}$$

29. Demostrau per inducció que es verifica $2^n < \binom{2n}{n} < 4^n$ per tot enter $n \geq 2$.

30. (a) Demostrau que si p és primer llavors $\binom{p}{r}$ és múltiple de p per qualsevol r, $1 \leq r \leq p-1$.

    (b) Donau un contraexemple de què la propietat anterior no és certa si p no és primer.

    (c) Utilitzau la propietat de l'apartat a per demostrar per inducció que si p és primer llavors $n^p - n$ és múltiple de p per qualsevol enter positiu n.

Tema 4: Teoria de grafs

1. Descriu, dibuixa o explica per què no pot existir:
   (a) Un graf amb 7 vèrtexos, tots ells de grau 3.
   (b) Un graf amb 15 vèrtexos i 106 arestes.
   (c) Un parell de grafs no isomorfs, cadascun d'ells amb 6 vèrtexos, tots ells de grau 2.

2. A una festa assisteixen 5 parelles, i es produeixen salutacions entre els assistents. Se suposa que no se saluden entre ells els components de cadascuna de les parella. A la sortida, en Jordi pregunta a cadascun dels altres assistents quantes persones l'han saludat i rep 9 respostes diferents.

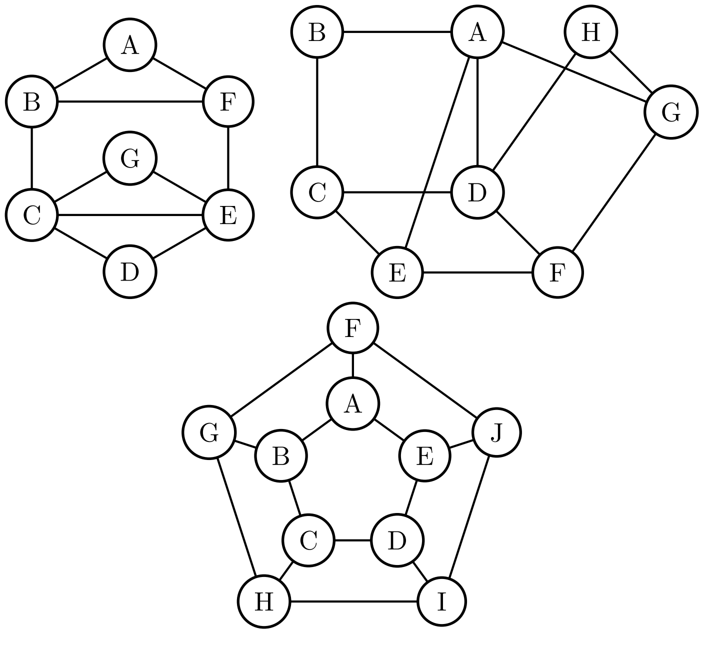
   Quantes persones ha saludat en Jordi i quantes n'ha saludat la seva parella?

3. En una reunió de 20 persones hi ha, en total, 48 parells de persones que es coneixen mútuament.
   (a) Justifica per què hi ha, almenys, una persona que coneix, com a màxim, a quatre de les altres persones.
   (b) Suposant que només hi ha una persona que coneix com a màxim a quatre persones, a quantes persones coneix exactament?

4. Disposem de 6 ordinadors i 9 cables de connexió. Volem que cada ordenador es connecti amb altres 3 ordinadors. Existeix alguna manera de connectar-los? És única?

5. Sigui G un graf (sense llaços) amb n vèrtexos i m arestes, el vèrtexos del qual tenen grau o bé k o bé $k+1$ (per a cert enter k). Demostreu que si G té n_k vèrtexos de grau k, llavors $n_k = (k+1)n - 2m$.

6. Determineu quins del següents grafs són bipartits:



7. Obteniu tots els grafs 4-regulars d'ordre 6.

8. Vegeu si són certes les afirmacions següents:

(a) Els grafs C_n són regulars.

(b) K_3 és isomorf a C_3.

(c) C_4 és isomorf a W_3.

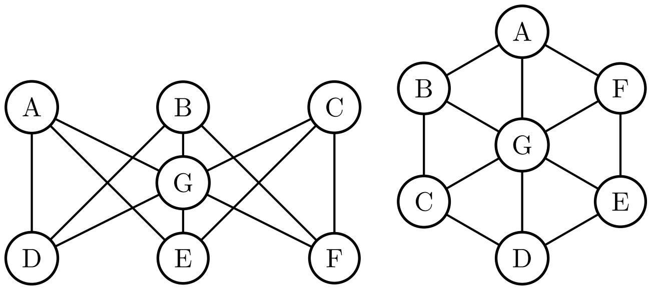
(d) Si el nombre d'arestes de K_n és m, aleshores es té $2m = n^2 - n$.

9. Siguin p i q són nombres enters positius i més petits que quatre. Determineu els grafs bipartits complets $K_{p,q}$ que són regulars.

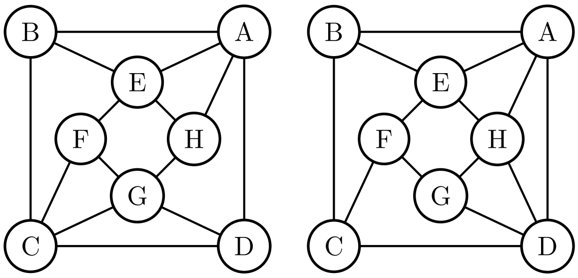
10. Quants de grafs no isomorfs amb tres vèrtexos es poden construir? I amb quatre vèrtexos? I amb cinc?

11. Estudieu si els següents parells de grafs són isomorfs:

(a)



(b)



12. Demostreu que dos grafs amb el mateix ordre $n \leq 3$ són isomorfs si, i només si, tenen la mateixa mida.

13. Sigui $G = (V, E)$ un graf simple i $G' = (V, E')$ el seu graf complementari. Es demana:

(a) Si G té n vèrtexos i m arestes, quants de vèrtexos i arestes té G'?

(b) Proveu que dos grafs són isomorfs si, i només si, ho són els seus complementaris.

(c) Trobeu un graf amb 5 vèrtexos que sigui isomorf al seu complementari.

(d) Existeix un graf amb tres vèrtexos que sigui isomorf al seu complementari? I amb 6 vèrtexos?

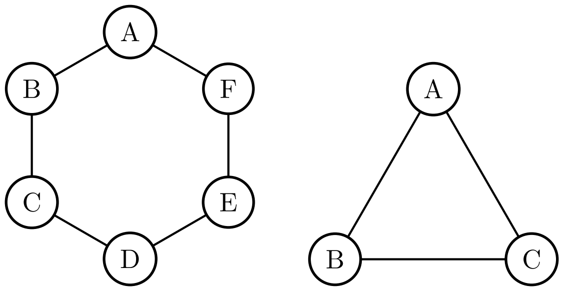
(e) Si G té n vèrtexos i la seva successió de graus és $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$, quina és la successió de graus de G'?

14. Trobeu el graf complementari de K_n, per a tot n, i determineu-ne la tipologia.

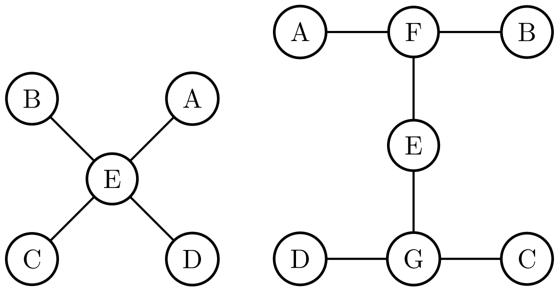
15. Quants subgrafs amb almenys un vèrtex té W_3?

16. Trobeu el graf unió, el graf suma i el graf producte dels següents parells de grafs:

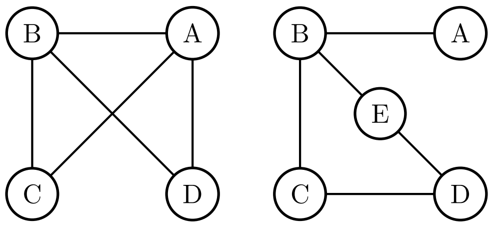
(a)



(b)



(c)



17. Siguin S un conjunt i C un conjunt finit de subconjunts de S. El *graf intersecció de* C, indicat per $I(C)$, és el graf que té C com a conjunt de vèrtexos, i dos vèrtexos $A, B \in C$ són adjacents si, i només si, $A \cap B \neq \emptyset$.

    (a) Siguin $S = [6]$ i $C = \{\{1,2\},\{2,4\},\{1,2\},\{1,2,3\},\{3,4,5\},\{5,6\}\}$. Representeu gràficament el graf $I(C)$.

    (b) Considereu el graf G que té $[4]$ com a conjunt de vèrtexos i arestes 12, 23, 34 i 41. Per a cada $i \in [4]$, considereu el conjunt S_i format pels vèrtexos i i les dues arestes incidents amb i. Sigui $S = \cup_{i=1}^{4} S_i$ i $C = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$. Demostreu que $I(C)$ és isomorf a G

    (c) Demostreu que si G és un graf, aleshores existeixen un conjunt S i un conjunt finit C de subconjunts de S tals que G és isomorf a $I(C)$.

18. Un graf té ordre 13 i 3 components connexos. Demostreu que almenys un dels seus components connexos té com a mínim 5 vèrtexos.

19. Sigui $G = (V, E)$ un graf amb $|V| = p \geq 2$, i suposem que el grau de cada vèrtex $v \in V$ satisfà $d(v) \geq \frac{1}{2}(p-1)$. Proveu que G és un graf connex. Podem afirmar que són connexos els grafs amb seqüències de graus següents?

    (a) 2, 2, 2, 2.

    (b) 2, 2, 2, 2, 2.

    (c) 3, 3, 3, 3, 3.

    (d) 3, 3, 3, 3, 3, 3.

    (e) 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3.

20. Sigui $G = (V, E)$ un graf (sense llaços) amb $|V| = n$. Proveu que si es compleix que $d(x) + d(y) \geq n - 1$ per a tot parell $x, y \in V$ de vèrtexos diferents, aleshores G és connex.

21. (a) Demostreu que els grafs cicles C_n són els grafs connexos 2-regulars; és a dir, que els grafs cicles són connexos i 2-regulars, i que tot graf connex 2-regular és isomorf a una graf cicle C_n per a cert n.

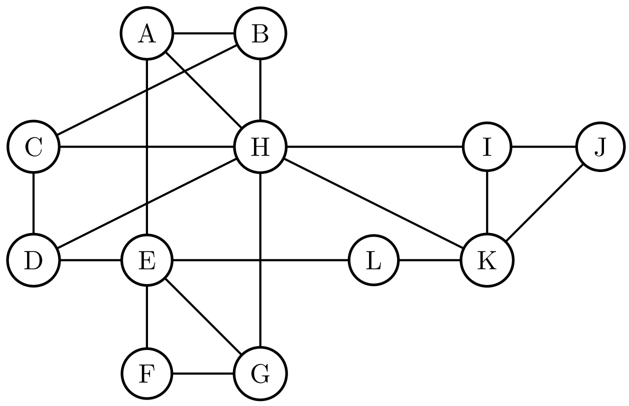
    (b) A una reunió assisteixen n persones. Cadascuna coneix exactament dues persones de la reunió (i se suposa que la coneixença és mútua). Proveu que es poden asseure a l'entorn d'una o més taules rodones de manera que cadascú s'assegui al costat de les dues persones que coneix.

22. Sigui G un graf connex que conté només vèrtexos de grau parell. Demostreu que G no pot contenir cap aresta pont.

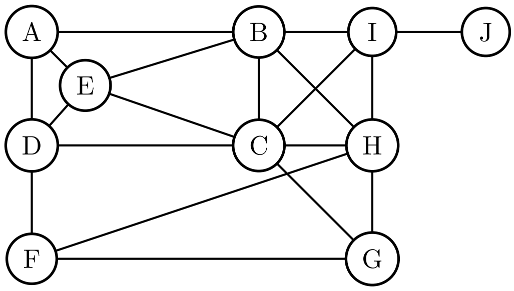
23. Trobeu el diàmetre dels grafs següents: K_n, $K_{m,n}$, C_n,, W_n i el graf de Petersen.

24. Trobeu el diàmetre i el centre dels grafs següents:

    (a)



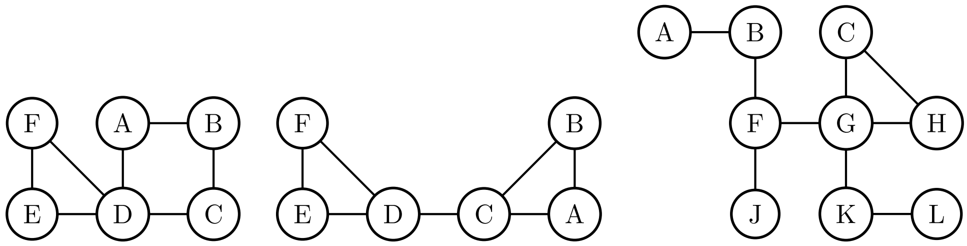
    (b)



25. Si en un graf connex G, un vèrtex v té excentricitat h, comproveu que l'excentricitat dels veïns de v o bé és h o bé és $h+1$, o bé és $h-1$. Utilitzeu el resultat anterior per provar que en un graf connex hi ha vèrtexos amb excentricitat igual a tots els valors possibles inclosos entre el seu radi $r(G)$ i el seu diàmetre $D(G)$.

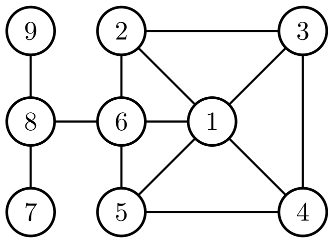
26. Sigui G un graf bipartit, connex, $d-$regular i d'ordre $n \geq 3$. Proveu que G no té arestes pont.

27. Trobeu tots els vèrtexos de tall i totes les arestes pont dels grafs següents:



28. Demostreu que un vèrtex c d'un graf simple connex és un vèrtex de tall si, i només si, hi ha dos vèrtexos u i v, ambdós diferents de c, tals que tot camí entre u i v passa per c.

29. Considereu el graf corresponent a la representació següent:

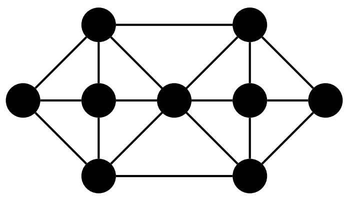


   (a) Determineu els seus vèrtexos de tall i les seves arestes pont.

   (b) Cerqueu els components connexos dels grafs que resulten de suprimir els vèrtexos de tall i dels que resulten de suprimir les arestes pont.

   (c) Digueu si el graf té algun circuit o algun recorregut eulerià i si té algun cicle o algun camí hamiltonià.

30. Determineu, si n'hi ha, circuits i recorreguts eulerians i cicles i camins hamiltonians dins del graf corresponent a la representació:



31. Considerem el joc del N-dòmino generalitzat. En aquest joc es tenen fitxes, cadascuna de les quals està etiquetada amb dos nombres, $a, b \in \{0, \ldots, N\}$, i que indicarem per $[a \bullet b]$; les fitxes es poden girar; es a dir, la fitxa $[a \bullet b]$ i la fitxa $[b \bullet a]$ són indistingibles.

   (a) Suposant que no hi ha fitxes repetides, amb quantes fitxes juguem?

   Una partida de dòmino és una seqüència de fitxes, $[a_1 \bullet b_1][a_2 \bullet b_2] \ldots [a_k \bullet b_k]$, de manera que els nombres adjacents de fitxes diferents coincideixen, és a dir, amb $b_i = a_{i+1}$ per a tot $i = 1, \ldots, k-1$.

   (b) És possible fer una partida on s'emprin totes les fitxes del joc?

   (c) És possible fer una partida $[a_1 \bullet b_1][a_2 \bullet b_2] \ldots [a_k \bullet b_k]$ on s'emprin totes les fitxes i, a més, $a_1 = b_k$, és a dir, on el joc es pot tancar per formar un cicle?

32. Sigui $n \geq 4$. A partir de K_n es construeix un nou graf no dirigit afegint a K_n un vèrtex u i l'aresta $\{u, u_1\}$, on u_1 és un vèrtex qualsevol de K_n.

   (a) Determineu $d(v) + d(w)$ per a tota parella de vèrtexos v i w del nou graf.

(b) Vegeu que el nou graf té un camí hamiltonià, però no un cicle hamiltonià.

33. En una xarxa de 10 ordinadors, cadascun d'ells està connectat amb almenys altres 6 ordinadors. Se sap que el nombre de connexions és múltiple de 13. És connexa la xarxa? Quantes connexions té? És hamiltoniana la xarxa? Si la xarxa és euleriana, quants ordinadors connectats exactament a altres 6 ordinadors hi ha?

34. Demostreu que si G és un graf amb n vèrtexos i amb mida $m \geq \binom{n-1}{2} + 2$, aleshores G és hamiltonià.

35. Donat un graf k-regular que conté un nombre senar d'arestes i un nombre parell de vèrtexos, demostreu que no pot contenir cap circuit eulerià.

36. Per a quins valors de n són eulerians els grafs C_n? I els grafs K_n?

37. És cert que tot graf eulerià és hamiltonià? I a l'inrevés? (Raona la teva resposta, donant un contraexemple si la resposta és negativa).

38. Són certes les afirmacions següents? Demostreu-les o doneu-ne contraexemples.

    (a) Tot graf bipartit complet eulerià té un nombre parell d'arestes.

    (b) Tot graf simple eulerià amb un nombre parell de vèrtexos té un nombre parell d'arestes.

39. Sigui G un graf que té exactament dos components connexos que són eulerians. Trobeu el mínim nombre d'arestes que cal afegir per obtenir un graf eulerià.

40. Per a classificar els grups sanguinis es consideren tres antígens: A, B i Rh. Cada sang es classifica doblement. Per una banda, és Rh positiva si es detecta antigen Rh, i negativa en cas contrari. Per altra banda, pot ser de grup A, B, AB o O si es detecta, presència dels antigens A, B, tots dos o cap d'ells (respectivament). Una persona pot rebre sang d'una altra si té tots els antigens del donant.

    (a) Dibuixeu el dígraf que representa la situació de possibles donants

    (b) Verifiqueu si el dígraf obtingut és fortament connex.

    (c) Té circuits?

41. Un projecte es composa de 8 tasques: a, b, c, d, e, f, g, h. Per a l'execució de les tasques s'han de respetar les següents restriccions:

    (a) a, b i e poden iniciar-se immediatament;

    (b) c i d poden executar-se simultàneament, però ambdues s'han de realitzar una vegada acabades a i e.

    (c) Per començar f s'ha d'acabar c.

    (d) h només es pot començar una vegada acabades d, e i f.

    (e) Per a l'inici de g és necessària la finalització de c i de b.

    (f) El projecte acaba quan g i h s'han realitzat.

    Dibuixeu un esquema que representi la situació indicada i determineu si s'han enunciat condicions supèrflues.

42. Sigui D un DAG qualsevol.

    (a) Demostreu que existeixen vèrtexos v i w tals que $d_s(v) = d_e(w) = 0$.

    (b) Demostreu que si el graf no dirigit subjacent a D és complet d'ordre n, aleshores la seqüència de graus de sortida dels vèrtexos és $n-1$, $n-2, \ldots, 0$.

(c) Demostreu que hi ha $n!$ DAG's que tenen conjunt de vèrtexos donat de cardinal n i que tenen com a graf subjacent el graf complet.

43. Trobeu les matrius d'adjacència i d'incidència (amb una ordenació adequada dels vèrtexos i de les arestes) dels grafs següents:

    (a) El graf nul d'ordre 5, B_5.

    (b) El graf complet d'ordre 5, K_5.

    (c) El graf cicle d'ordre 5, C_5.

    (d) El graf camí d'ordre 5, P_5.

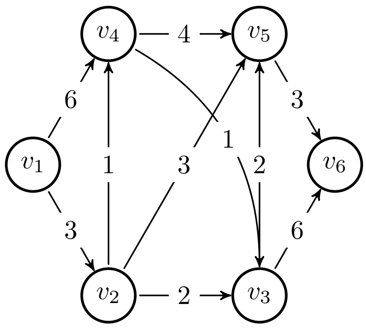
    (e) El graf bipartit complet $K_{2,3}$.

    (f) El graf roda d'ordre 6, W_6.

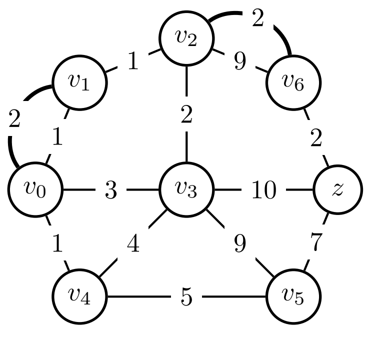
44. Demostreu que un graf és bipartit si, i només si, admet una matriu d'adjacència de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix}$$

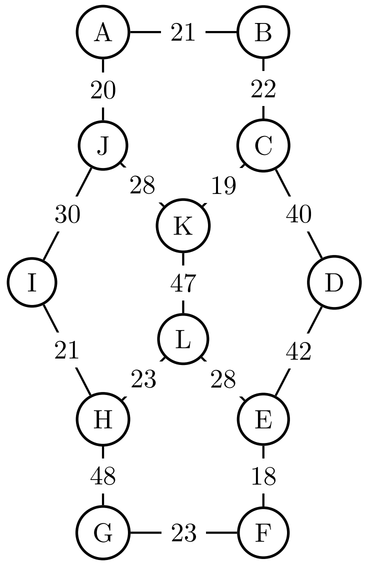
45. Emprant l'algorisme de Dijkstra trobeu el camí de pes mínim des del vèrtex v_1 fins al v_6 en el graf següent:



46. Determineu el camí de llargària mínima entre els vèrtexos v_0 i z del graf següent.



47. En la xarxa telefònica representada a la figura s'han detectat algunes avaries. Responeu les següents preguntes relacionant les teves respostes amb la teoria de grafs:



(a) El tècnic decideix revisar tots els trams (arestes) de la xarxa per detectar la possible avaria. Pot fer-ho sense passar dues vegades pel mateix tram?

(b) Els nombres anotats a cada tram indiquen els respectius costos de reparació. Suposant que tots els trams estan defectuosos, quins són els trams que s'han de renovar per a què tots els vèrtexos quedin connectats per trams renovats i amb un cost mínim?

(c) Es decideix reparar de forma urgent només els trams que permetin les connexions entre els nodes A i F. Quins seran els trams que s'hauran de reparar per a què el cost sigui mínim? Quin serà el cost d'aquesta reparació?

(d) S'ha decidit també renovar tots els nodes de la xarxa, però per problemes de connexions dos nodes directament connectats no poden estar fets del mateix material. Quin es el nombre mínim de materials necessaris per a la fabricació dels nodes?

48. Dibuixeu tots els arbres, llevat d'isomorfismes, que tenen ordre dos, tres i quatre (respectivament).

49. Calculeu el nombre d'arestes que cal afegir a un bosc de k components connexos per a obtenir un arbre.

50. Proveu que si v és un vèrtex de grau d d'un arbre T, aleshores $T - v$ té exactament d components connexos.

51. Sigui $G = (V, E)$ un graf connex amb seqüència de graus 4, 4, 4, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1. Proveu que és un arbre. Obteniu tots els arbres amb aquesta seqüència de graus, llevat d'isomorfismes.

52. Quin és el nombre de vèrtexos d'un arbre que té 3 vèrtexos de grau 2, 2 vèrtexos de grau 3, 1 vèrtex de grau 4 i la resta dels vèrtexos de grau 1?

53. Demostreu que un graf simple és un arbre si, i només si, és connex i tota aresta seva és una aresta pont.

54. Sigui T un arbre de 21 vèrtexos amb graus 1, 3, 5 i 6. Sabem que T té 15 fulles i un vèrtex de grau 6. Quants de vèrtexos de grau 5 té?

55. Sigui $T = (V, E)$ un arbre d'ordre $n \geq 3$. Proveu que el nombre de fulles de T és:

$$1 + \frac{1}{2} \sum_{v \in V} |d(v) - 2|.$$

56. Determineu quants d'arbres generadors tenen els grafs següents i doneu-ne un exemple per a cadascun:

   (a) K_3
   (b) K_4
   (c) $K_{2,2}$
   (d) C_5

57. En quin cas una aresta d'un graf simple connex pertany a tots els possibles arbres generadors del graf?

58. Les taules següents representen grafs amb pesos a les arestes i sense vèrtexos aïllats. Calculeu els seus arbres generadors minimals:

   (a)

aresta	ab	ac	ae	bc	bd	cd	ce	de
pes	11	5	9	3	18	13	4	12

   (b)

aresta	ab	ad	bc	be	cf	de	dg	ef	eh	fi	gh	hi
pes	11	7	2	8	9	3	10	4	11	12	5	6

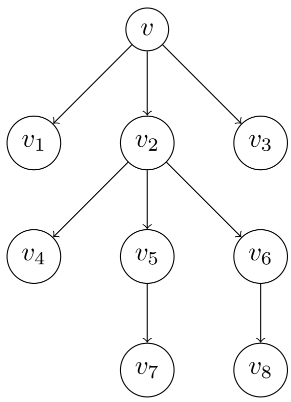
   (c)

aresta	ab	ae	ad	bc	bd	cd	cg	de	df	dg	ef	fg
pes	1	6	2	5	3	8	1	10	3	4	5	2

59. Demostreu que si un graf amb pesos a les arestes té totes les arestes amb pesos diferents dos a dos, aleshores conté un únic arbre generador minimal.

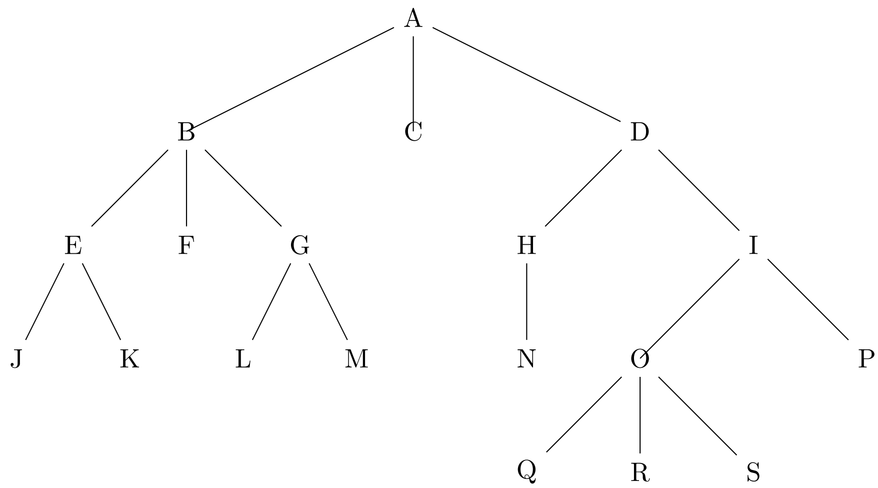
60. (a) Diguem $n_5(h)$ el nombre d'arbres arrelats, llevat d'isomorfismes, amb cinc vèrtexos, i altura h. Comproveu que $n_5(1) = 1$, $n_5(2) = 4$, $n_5(3) = 3$ i $n_5(4) = 1$.
   (b) Dibuixeu dos arbres arrelats no isomorfs d'altura quatre amb dotze vèrtexos i sis fulles.

61. Donat l'arbre de la figura:



   (a) Quins són els vèrtexos de nivell tres i quina és l'altura de l'arbre?
   (b) Quin és el pare i quins són els germans i els fills de v_4?
   (c) Quins vèrtexos són fulles?
   (d) Quins són els ascendents i els descendents de cadascun dels vèrtexos de nivell dos?

62. Contesteu les preguntes següents relatives a l'arbre arrelat que es mostra a la figura:



(a) Quin és el vèrtex arrel?

(b) Quins són els vèrtexos interiors?

(c) Quins vèrtexos són fulles?

(d) Quins vèrtexos són fills de J?

(e) Quin vèrtex és el pare de H?

(f) Quins vèrtexos són germans de O?

63. Determineu el recorregut en preordre i en postordre de l'arbre de l'exercici anterior.

64. Quants arbres arrelats hi ha amb tres vèrtexos, llevat d'isomorfismes? I amb 5 vèrtexos?

65. Quantes fulles té un arbre binari amb 100 vèrtexos?

66. Quantes pesades d'una bàscula es necessiten per trobar la moneda més lleugera d'un grup de quatre?

67. Construeix l'arbre arrelat ordenat, el recorregut en preordre del qual és $a, b, f, c, g, h, i, d, e, j, k, l$, i a on a té quatre fills, c té tres fills, j té dos fills, b i e tenen un fill cada un i la resta de vèrtexos són fulles.

68. Demostreu que un arbre ordenat amb arrel queda unívocament determinat quan s'especifica una llista de vèrtexos generada per un recorregut en preordre i el nombre de fills de cada vèrtex. Demostreu el enunciat anàleg amb el recorregut en postordre.