Problemas Tema 4: Determinantes. Sistemas de Cramer

EP4.1.- Calcular los determinantes siguientes:

a1) $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{C3n= C3+2C1}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{Por C3}}{=} -1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{3}$$

a2) $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{F1n = F1+2F3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{Por\ C1}{=} \mathbf{13}$$

a3) $$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{F2n=F2+F1} \\ \text{F3n=F3+F1} \\ \text{F4n=F4+F1}}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{Por C1}}{=} (-1)\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{C3n=C3−C2}}{=} (-1)\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \underset{\text{Por F1}}{=} 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{-16}$$

a4) $$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} \underset{\text{C3n=C3-C4}}{=} \begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 5 & -3 \end{vmatrix} \underset{\text{Por Fila 3}}{=} -\begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{F2n=F2+F3} \\ \text{F1n=F1+2F3}}}{=} -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 11 \\ -2 & 0 & 7 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -\left[(-2)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 11 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}\right] = \mathbf{-72}$$

EP4.2.- Comprobar que detA=0 y que el de B es múltiplo de 5 sin calcularlos.

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2/5 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2/5 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$ ya que C3 = -5C1

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} \underset{\text{F3n=F3+F2}}{=} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 10 & 10 & 15 \end{vmatrix} \underset{\text{F3n= }\frac{1}{5}\text{ F3}}{=} 5.\overbrace{\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}}^{\text{nº entero}} = \dot{5}$$

EP4.3.- Si sabemos que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} = 3$ calcular $\begin{vmatrix} 2x & 2z & 2y \\ 2m & 2p & 2n \\ 2a & 2c & 2b \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2x & 2z & 2y \\ 2m & 2p & 2n \\ 2a & 2c & 2b \end{vmatrix} = 2.2.2.\begin{vmatrix} x & z & y \\ m & p & n \\ a & c & b \end{vmatrix} \underset{F3 \leftrightarrow F2}{=} -8.\begin{vmatrix} x & z & y \\ a & c & b \\ m & p & n \end{vmatrix} \underset{F1 \leftrightarrow F2}{=} 8\begin{vmatrix} a & c & b \\ x & z & y \\ m & p & n \end{vmatrix} \underset{C3 \leftrightarrow C2}{=} -8\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} = -24$$

EP4.4.- Indica qué propiedad de los determinantes da lugar a cada una de las siguientes igualdades:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ por ser C3=3C1 b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ por ser $|A| = |A^t|$

c) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \\ -1 & -9 & 3 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ por la propiedad que permite que un escalar factor común en una fila o columna salga fuera del determinante sin que éste cambie su valor, en este caso en C2.

EP4.5.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ calcular sin desarrollar:

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{3}$

b) $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{1}$

c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y+0 & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x & 2y & 2z \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{1}$

EP4.6.- Demostrar sin desarrollar el determinante que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} \overset{\substack{F4n=F4-F3 \\ F3n=F3-F2 \\ F2n=F2-F1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} \overset{\text{Por } F2=F3}{=} \mathbf{0}$

EP4.7.- Comprobar, sin desarrollar, que los determinantes siguientes son nulos:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$ ya que C3n=C2+2C1

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 8 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$

$\begin{cases} F2n = F2 - 2F1 \\ F3n = F3 - 3F1 \end{cases}$ Por $F2 = F3$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} \overset{C4n=C4-C3-C2-C1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} \overset{\text{Por } C4=C3}{=} \mathbf{0}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 7 & 2 \\ 6 & 2 & 14 & 4 \end{vmatrix} \overset{F4=2F3}{=} \mathbf{0}$ ya

EP4.8.- Utilizando las propiedades de los determinantes, calcular los valores de:

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = x.\begin{vmatrix} 1 & x+1 & x+2 \\ 1 & x+3 & x+4 \\ 1 & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = x.\begin{vmatrix} 1 & x+1 & x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$^{1)}F3n = F3 - F2$
$^{2)}F2n = F2 - F1$

$$\begin{vmatrix} x & x & x \\ x+1 & x+5 & x+9 \\ x+3 & x+5 & x+7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ x+1 & 4 & 4 \\ x+3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

$^{1)}C3n = C3 - C2$ Por C2=C3
$^{2)}C2n = C2 - C1$

EP4.10.- Demostrar sin desarrollar que:

a) $$\begin{vmatrix} \mathbf{bc} & \mathbf{a} & \mathbf{a^2} \\ \mathbf{ac} & \mathbf{b} & \mathbf{b^2} \\ \mathbf{ba} & \mathbf{c} & \mathbf{c^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} \boxed{abc} & a\cdot a & a^2\cdot a \\ \boxed{acb} & b\cdot b & b^2\cdot b \\ \boxed{bac} & c\cdot c & c^2\cdot c \end{vmatrix} = \frac{\boxed{abc}}{abc}\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{a^2} & \mathbf{a^3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{b^2} & \mathbf{b^3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{c^2} & \mathbf{c^3} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathrm{F1}n = a\mathrm{F1} \\ \mathrm{F2}n = b\mathrm{F2} \\ \mathrm{F3}n = c\mathrm{F3} \end{cases} \qquad C1n = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{abc}}C1$$

b) $$\begin{vmatrix} a & d & a+pd \\ b & e & b+pe \\ c & f & c+pf \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & a \\ b & e & b \\ c & f & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & d & pd \\ b & e & pe \\ c & f & pf \end{vmatrix} = 0 + 0 = \mathbf{0}$$

c) $$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a-b-c & 0 & 2a \\ 0 & -a-b-c & 2b \\ a+b+c & a+b+c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^2\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2a \\ 0 & -1 & 2b \\ 1 & 1 & c-a-b \end{vmatrix} =$$

$C1\,n = C1 - C3$
$C2\,n = C2 - C3$

$$= (\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^3$$

EP4.11.- Calcular el valor de:

a) $$\begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 5a & 5b & 5c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \mathbf{50(b-a)(c-a)(c-b)}$$

b) $$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \mathbf{(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)}$$

c) $$\underbrace{\begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix}}_{\mathbf{4a+1}}$$

d) $$\underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-1 & b+2 & c-1 \\ a+1 & b-3 & c+2 \end{vmatrix}}_{\mathbf{(a+b+c)}}$$

e) $$\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}}_{\mathbf{(3+3x)(3-x)^3}}$$

EP4.12.- Resolver las ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} x^4-6 & x \\ x^3-3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} x^4-6-x\left(x^3-3\right) & 0 \\ x^3-3 & 1 \end{vmatrix} = x^4-6-x^4+3x = -6+3x = 3(x-2) = 0 \Rightarrow \mathbf{x=2}$

F1n=F1 – xF2

b) $\begin{vmatrix} x & 1 & x \\ -1 & x+1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & 1-x & x \\ -5 & x-1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & -(x-1) \\ -5 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)\cdot\begin{vmatrix} -x & -1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} -x-5 & 0 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} =$

C1n=C1 – 2C3
C2n=C1 – C3

Por F3

F1n= F1+F2

$= -(x-1)\cdot(x+5) = 0 \Rightarrow \mathbf{x=1,} \quad \mathbf{x=-5}$

c) $\begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ 2 & x & 3 \\ 3 & 3 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 2 \\ 2-x & x-3 & 3 \\ 0 & 3-x & x \end{vmatrix} = (x-2)(x-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = (x-2)(x-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} =$

1) C1n=C1 – C2
2) C2n=C2 – C3

F2n= F2+F1

Por F1

$= (x-2)(x-3)(x+5) = 0 \Rightarrow \mathbf{x=1,} \quad \mathbf{x=2,} \quad \mathbf{x=-5}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & x & 7 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} \Rightarrow \mathbf{x=2}$

e) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 8 \\ 5 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 8 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} \Rightarrow$ **x=7**

f) $\begin{vmatrix} x-1 & x^2-1 \\ 2x-4 & x^2-4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x=0, \; x=1, \; x=2$

g) $\begin{vmatrix} x^3 & 3x^2 & 3x & 1 \\ x^2 & x^2+2x & 2x+1 & 1 \\ x & 2x+1 & x+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} x^3 & 3x^2 & 3x & 1 \\ x^2 & x^2+2x & 2x+1 & 1 \\ x & 2x+1 & x+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2(x-1) & 2x(x-1) & x-1 & 0 \\ x(x-1) & (x+1)(x-1) & x-1 & 0 \\ x-1 & 2(x-1) & x-1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$

$^{1)}\, F1 \rightarrow F1-F2$
$^{2)}\, F2 \rightarrow F2-F3$ y factorizando
$^{3)}\, F3 \rightarrow F3-F4$

Por C4

$\begin{vmatrix} x^2(x-1) & 2x(x-1) & x-1 \\ x(x-1) & (x-1)(x+1) & x-1 \\ (x-1) & 2(x-1) & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^3\begin{vmatrix} x^2 & 2x & 1 \\ x & 1+x & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)^3\begin{vmatrix} x(x-1) & x-1 & 0 \\ x-1 & x-1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)^5\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$

$^{1)}\, F1 \rightarrow F1-F2$
$^{2)}\, F2 \rightarrow F2-F3$ y factorizando

Por C3

$(x-1)^5\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (\mathbf{x-1})^{\mathbf{6}} = 0 \Rightarrow x=1$

h) $\begin{vmatrix} a & b & c & x \\ b & a & x & c \\ c & x & a & b \\ x & c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c+x)(a+b-c-x)(a-b+c-x)(a-b-c+x)=0$

$a-b-c+x=0 \qquad \boldsymbol{x=b+c-a} \qquad a+b+c+x=0 \qquad \boldsymbol{x=-a-b-c}$

$a-b+c-x=0 \qquad \boldsymbol{x=a-b+c} \qquad a+b-c-x=0 \qquad \boldsymbol{x=a+b-c}$

EP4.13.- Comprobar la igualdad sin desarrollar los determinantes

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ abc & abc & abc \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$\begin{cases} \mathrm{C}1n = \mathbf{a}C1 \\ \mathrm{C}2n = \mathbf{b}C2 \\ \mathrm{C}3n = \mathbf{c}C3 \end{cases} \qquad \mathrm{F}3n = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{abc}}F3 \qquad F2 \leftrightarrow F3 \qquad F1 \leftrightarrow F2$

EP4.14.- Calcular el valor de:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{-a}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+b & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+c \end{vmatrix} = \boldsymbol{abc}$ c) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{(a^2-b^2)^4}$

d) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4+a & 1 & 1 & 1 \\ 4+a & 1+a & 1 & 1 \\ 4+a & 1 & 1+a & 1 \\ 4+a & 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = (4+a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \boldsymbol{a^3(4+a)}$

C1n=C1+C2+C3+C4

F2n=F2-F1
F3n=F3-F1
F4n=F4-F1

EP4.15.- Demostrar que: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac & d^2-ad \\ 0 & b^3-ab^2 & c^3-ac^2 & d^3-ad^2 \end{vmatrix} =$

$F4n{=}F4{-}aF3$
$F3n{=}F3{-}aF2$
$F2n{=}F2{-}aF1$

Por C1 y factorizando

$$\begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b(b-a) & c(b-a) & d(b-a) \\ b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} =$$

$F3n = F3 - bF2$
$F2n = F2 - bF1$

$$(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & c-b & d-b\\ 0 & c^2-bc & d^2-bd\end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix}c-b & d-b\\ c(c-b) & d(d-b)\end{vmatrix} =$$

Por C1 y factorizando

$$(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix}1 & 1\\ c & d\end{vmatrix} = \boldsymbol{(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)}$$

EP4.16.- Determinar si son invertibles las matrices siguientes y calcular cuando se pueda su inversa.

a) $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix} = 1 \neq 0$ $\Rightarrow$ Tiene inversa $Adj\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}}$

b) $\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 1 \neq 0$ $\Rightarrow$ Tiene inversa $Adj\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 7\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 7\end{pmatrix}}$

c) $\begin{pmatrix}2 & 5 & -1\\ 4 & -1 & 2\\ 6 & 4 & 1\end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix}2 & 5 & -1\\ 4 & -1 & 2\\ 6 & 4 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 5 & -1\\ 8 & 9 & 0\\ 8 & 9 & 0\end{vmatrix} = 0$ $\Rightarrow$ No tiene inversa

d) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 0\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} = -2 \neq 0$ $\Rightarrow$ Tiene inversa

$$Adj\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 2 & -4\\ -2 & -2 & 2\\ -3 & -1 & 2\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix}4 & -2 & -3\\ 2 & -2 & -1\\ -4 & 2 & 2\end{pmatrix}}$$

e) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -6\\ 0 & -6 & -12\end{vmatrix} = 0$ $\Rightarrow$ No

f) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ a & 0 & b\\ -b & 0 & a\end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ a & 0 & b\\ -b & 0 & a\end{vmatrix} = -\left(a^2+b^2\right)$ Tiene inversa para $-\left(a^2+b^2\right) \neq 0$ es decir si $a \neq 0$ ó $b \neq 0$.

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ a & 0 & b\\ -b & 0 & a\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}0 & a & -b\\ \left(a^2+b^2\right) & 0 & 0\\ 0 & b & a\end{pmatrix}$$

EP4.17.- El sistema $\left.\begin{matrix} x+y-z=2 \\ y-z=0 \\ 3x+y=7 \end{matrix}\right\}$ puede ser expresado en forma matricial mediante la ecuación $AX=B$.

Resuelve matricialmente el sistema.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Para poder despejar $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ estudiaremos si la matriz del sistema es invertible.

Para que una matriz cuadrada tenga inversa es necesario y suficiente que su determinante sea no nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1\neq 0 \Rightarrow$$ Tiene inversa

Por lo tanto podemos despejar el vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Sabiendo que $A^{-1}=\dfrac{(AdjA)^t}{|A|}$

$$Adj\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\longrightarrow (AdjA)^t=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\mathbf{1} \longrightarrow \textbf{Inversa=}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

EP4.18.- Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} x-2 & 0 & 2 \\ 4 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$

a) Calcular los valores reales de x para los que existe la inversa de A.

$$|A|=x\begin{vmatrix} x-2 & 0 \\ 4 & x-2 \end{vmatrix}=x(x-2)^2$$

Tendrá inversa para $x\neq 0,2$

$$A^{-1}=\frac{1}{x(x-2)^2}\begin{pmatrix} x(x-2) & 0 & -2(x-2) \\ -4x & x(x-2) & 8 \\ 0 & 0 & (x-2)^2 \end{pmatrix}$$

b) Encontrar la matriz Y que es solución de la ecuación matricial: $(YA+B)^{-1}=I$ donde A es la matriz anterior para x=3 y B es la matriz $B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&0&0\\3&1&0\end{pmatrix}$

$(YA+B)^{-1}=I \quad \rightarrow Y=(I-B)\cdot A^{-1}$

Para $x=3 \rightarrow A=\begin{pmatrix}1&0&2\\4&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ Como $3\neq 0,2$ tendrá inversa: $|A|=3$ $\quad \boldsymbol{A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&0&-2\\-12&3&8\\0&0&1\end{pmatrix}}$

$$\boldsymbol{Y=\begin{pmatrix}0&0&1\\-18&3&12\\3&-3&-1\end{pmatrix}\frac{1}{3}}$$

EP4.19.- Estudiar para qué valores de m las matrices siguientes tienen inversa:

$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&m&3\\4&1&-m\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix}1&0&-1\\0&m&3\\4&1&-m\end{vmatrix}=-(m-3)(m-1)$ Tiene inversa si $\boldsymbol{m\neq 3,1}$

$AdjA=\begin{pmatrix}-m^2-3&12&-4m\\-1&-m+4&-1\\m&-3&m\end{pmatrix}$ $\quad \boldsymbol{A^{-1}=\frac{1}{(m-3)(m-1)}\begin{pmatrix}m^2+3&1&-m\\-12&m-4&3\\4m&1&-m\end{pmatrix}}$

$B=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&0&1\\3&2&m\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix}1&2&-1\\2&0&1\\3&2&m\end{vmatrix}=-4m$ Inversa si $\boldsymbol{m\neq 0}$ $\quad \boldsymbol{B^{-1}=\frac{1}{-4m}\begin{pmatrix}-2&-2m-2&2\\3-2m&m+3&-3\\4&4&-4\end{pmatrix}}$

EP4.20.- Calcula los valores del parámetro para los cuales las siguientes matrices tienen inversa y calcularlas después para λ=1.

$A=\begin{pmatrix}1&1&\lambda\\\lambda&2&-1\\3&1&1\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&\lambda&0\\\lambda&1&2\end{pmatrix}$

EP4.21.- Calcular el rango de las matrices por menores y orlando:

a) $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&3\end{pmatrix}$ Matriz 2x3 $\Rightarrow$ **R ≤ 2** $\quad F1,\ F2$ $\quad C1,\ C2,\ C3$

Elegimos un menor de orden 1 no nulo: $M_1=|3|\neq 0 \Rightarrow$ R ≥ 1 $\quad \cancel{F1},\ F2$ $\quad C1,\ C2,\ \cancel{C3}$

Posibilidades para orlar M_1: Con $F2, C1,\quad F2, C2$

Orlamos M_1 con F2 C2: $M_2=\begin{vmatrix}2&3\\4&3\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow$ R ≥ 2 como **R ≤ 2** $\Rightarrow$ **R = 2**

b) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ Matriz 3x3 $\Rightarrow$ **R ≤ 3** $F1,\ F2,\ F3$ / $C1,\ C2,\ C3$

Elegimos un menor de orden 1 no nulo: $M_1 = |-1| \neq 0 \Rightarrow$ R ≥ 1 $\cancel{F1},\ F2,\ F3$ / $\cancel{C1},\ C2,\ C3$

Posibilidades para orlar M_1: Con $F2,C2,\quad F2,C3,\quad F3,C2,\quad F3,C3$

Orlamos M_1 con F2 C2: $M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ R ≥ 2 $\cancel{F1},\ \cancel{F2},\ F3$ / $\cancel{C1},\ \cancel{C2},\ C3$

Posibilidades para orlar M_2: Con $F3,C3$

Orlamos M_2 con $F3,C3$: $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \{C3 \to C3 - C1\} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$ $\cancel{F1},\ \cancel{F2},\ \cancel{F3}$ / $\cancel{C1},\ \cancel{C2},\ \cancel{C3}$

NO hay más posibilidades para orlar M_2.

Como el único menor de orden 3 es 0 el rango no es 3 y por tanto será 2: **R = 2**

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Matriz 3x3 $\Rightarrow$ **R ≤ 3 (*)** $F1,\ F2,\ F3$ / $C1,\ C2,\ C3$

Elegimos un menor de orden 1 no nulo: $M_1 = |1| \neq 0 \Rightarrow$ R ≥ 1 $\cancel{F1},\ F2,\ F3$ / $\cancel{C1},\ C2,\ C3$

Posibilidades para orlar M_1: Con $F2,C2,\quad F2,C3,\quad F3,C2,\quad F3,C3$

Orlamos M_1 con F3 C3: $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ Seguir orlando, si es posible: $F2,C2,\ F2,C3,\ F3,C2,\ \cancel{F3,C3}$

Orlamos M_1 con F3 C2: $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ $\cancel{F1},\ F2,\ \cancel{F3}$ / $\cancel{C1},\ \cancel{C2},\ C3$

Posibilidades para orlar M_2: Con $F2,C3$

Orlamos M_2 con $F2,C3$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq \mathbf{0} \Rightarrow$ R ≥ 3 **(*)** Como **R ≤ 3** $\Rightarrow$ **R = 3**

d) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -2 & 5 \\ 3 & 10 & -6 & 11 & 10 \end{pmatrix}$ Matriz 3x5 $\Rightarrow$ **R ≤ 3** $F1,\ F2,\ F3$ / $C1,\ C2,\ C3,\ C4,\ C5$

Para abreviar elegimos un menor de orden 2 no nulo: $M_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ R ≥ 2 $\cancel{F1},\ \cancel{F2},\ F3$ / $C1,\ C2,\ C3,\ \cancel{C4},\ \cancel{C5}$

Posibilidades para orlar M_2: Con $F3,C1,\quad F3,C2,\quad F3,C3$

Orlamos M_2 con $F3, C3$: $M_3^1 = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ -6 & 11 & 10 \end{vmatrix} = \{F3 \to F3 - 3F1\} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & -4 & 10 \end{vmatrix} = -2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 10 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$

Seguir orlando, si es posible: $F3, C1,\quad F3, C2,\quad \cancel{F3, C3}$

Orlamos M_2 con $F3, C2$: $M_3^2 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \\ 10 & 11 & 10 \end{vmatrix} = \{F3 \to F3 - 2F2\} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \\ 12 & 15 & 0 \end{vmatrix} = 5(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 12 & 15 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$

Seguir orlando, si es posible: $F3, C1,\quad \cancel{F3, C2},\quad \cancel{F3, C3}$

Orlamos M_2 con $F3, C1$: $M_3^3 = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \\ 3 & 11 & 10 \end{vmatrix} = \{F3 \to F3 - 2F2\} = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \\ -3 & 15 & 0 \end{vmatrix} = 5(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 15 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$

Seguir orlando, si es posible: **NO** ($\cancel{F3, C1},\quad \cancel{F3, C2},\quad \cancel{F3, C3}$)

Hemos orlado M_2 de todas las formas posibles y todos los menores orlados M_3^1, M_3^2 y M_3^3 son 0 $\Rightarrow$ **R = 2**

e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$ Matriz 3x4 $\Rightarrow$ **R ≤ 3**

Para abreviar elegimos un menor de orden 2 no nulo: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$ $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow R \geq 2$

Orlamos M_2 con F3 C3: $M_3^1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$ Seguir orlando, si es posible: **SI**

Orlamos M_2 con F3 C4 $M_3^2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$ Seguir orlando, si es posible: **NO**

Hemos orlado M_2 de todas las formas posibles y todos los menores orlados M_3^1 y M_3^2 son 0 $\Rightarrow$ **R = 2**

f) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ Matriz 4x5 $\Rightarrow$ **R ≤ 4**

Para abreviar elegimos un menor de orden 2 no nulo: $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow R \geq 2$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

Orlamos M_2 con F3 C3 $M_3^1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$ Seguir orlando, si es posible: **SI**

Orlamos M_2 con F3 C4 $M_3^2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$ Seguir orlando, si es posible: **SI**

Orlamos M_2 con F3 C5 $M_3^3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$ Seguir orlando, si es posible: **SI**

Orlamos M_2 con F4 C3 $M_3^4 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & \mathbf{-1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$ Seguir orlando, si es posible: **SI**

Orlamos M_2 con F4 C4 $M_3^5 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & \mathbf{1} \\ 1 & 0 & \mathbf{2} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-2} & \mathbf{4} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$ Seguir orlando, si es posible: **SI**

Orlamos M_2 con F4 C5 $M_3^6 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & \mathbf{3} \\ 1 & 0 & \mathbf{3} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-2} & \mathbf{9} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$ Seguir orlando, si es posible: **NO**

Hemos orlado M_2 de todas las formas posibles y todos los menores orlados orden 3 son 0 $\Rightarrow$ **R = 2**

g) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -6 & 1 \\ -3 & -8 & 8 & 7 \\ -7 & -13 & 15 & 10 \end{pmatrix}$ Matriz 4x4 $\Rightarrow$ **R ≤ 4** $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ R ≥ 2

Orlamos M_2 con F3 C3 $M_3^1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & \mathbf{1} \\ 5 & 2 & \mathbf{-6} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-8} & \mathbf{8} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$ Seguir orlando, si es posible: **SI**

Orlamos M_2 con F3 C4 $M_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & \mathbf{4} \\ 5 & 2 & \mathbf{1} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-8} & \mathbf{7} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$ Seguir orlando, si es posible: **SI**

Orlamos M_2 con F4 C3 $M_3^3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & \mathbf{1} \\ 5 & 2 & \mathbf{-6} \\ \mathbf{-7} & \mathbf{-13} & \mathbf{15} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$ Seguir orlando, si es posible: **SI**

Orlamos M_2 con F4 C4 $M_3^4 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & \mathbf{4} \\ 5 & 2 & \mathbf{1} \\ \mathbf{-7} & \mathbf{-13} & \mathbf{10} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$ Seguir orlando, si es posible: **NO**

Hemos orlado M_2 de todas las formas posibles y todos los menores orlados orden 3 son 0 $\Rightarrow$ **R = 2**

EP4.22.- Discutir según los valores del parámetro el rango de las matrices

1) $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ Matriz 3x3 $\Rightarrow$ **R ≤ 3**

Elegimos un menor de orden 2 no nulo: $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ R ≥ 2

Orlamos M_2 con F3 C3 $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -a+4$

i) $a \neq 4 \Rightarrow M_3 \neq 0 \Rightarrow$ Como hay un menor de orden 3 no nulo **R = 3**

ii) $a = 4$ Sustituimos en la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Ya habíamos encontrado $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ y el único menor de orden 3 $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4+4 = \mathbf{0} \Rightarrow$ **R = 2**

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ Matriz 3x4 $\Rightarrow$ **R ≤ 3**

Como las filas 2 y 3 son proporcionales $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12}$**, el rango como máximo valdrá 2.**

Por ello trabajaremos únicamente con las filas 1 y 2.

Elegimos un menor de orden 1 no nulo: $M_1 = |2| \neq 0 \Rightarrow$ R ≥ 1

Orlamos M_1 con F1 C2 $\longrightarrow M_2^1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$ Seguir orlando, si es posible: **SI**

Orlamos M_1 con F1 C3 $\longrightarrow M_2^2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$ Seguir orlando, si es posible: **SI**

Orlamos M_1 con F1 C4 $\longrightarrow M_2^3 = \begin{vmatrix} 1 & t \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = \mathbf{8 - 2t = 2(4-t)}$

Casos:

i) $a \neq 4 \Rightarrow M_2^3 \neq \mathbf{0} \Rightarrow$ R ≥ 2 (Rango máximo=2) $\Rightarrow$ **R = 2**

ii) $a = 4$ Sustituimos en la matriz $\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$

Como las filas 1 y 2 son proporcionales concluiremos que R = 1

OTRA FORMA:

Como tenemos una matriz 3x4 $\Rightarrow$ R $\leq$ 3 pero como las filas 2 y 3 son proporcionales el rango como mucho valdrá 2.

Buscamos un menor de orden 2 $\longrightarrow M_2^3 = \begin{vmatrix} 1 & t \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = \mathbf{8 - 2t}$

Casos:

i) $a \neq 4 \;\Rightarrow\; M_2^3 \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow$ R $\geq$ 2 (Rango máximo=2) $\Rightarrow$ **R = 2**

ii) $a = 4$ Sustituimos en la matriz $\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$

Elegimos un menor de orden 1 no nulo: $M_1 = |2| \neq 0 \;\Rightarrow$ R $\geq$ 1

Si orlamos M_1 con F3 todos los menores de orden 2 serán nulos.

Orlamos M_1 con F1 C2 $\longrightarrow M_2^1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$ Seguir orlando, si es posible: **SI**

Orlamos M_1 con F1 C3 $\longrightarrow M_2^2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$ Seguir orlando, si es posible: **SI**

Orlamos M_1 con F1 C4 $\longrightarrow M_2^3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$ Seguir orlando, si es posible: **NO**

Como ya no hay más menores orlados orden 2 concluiremos que **R = 1**

En resumen si a = 4 R = 1

si a ≠ 4 R = 2

3) $\begin{pmatrix} t & 0 & t & 0 \\ 4 & -6 & 8 & -2 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ Matriz 3x4 $\Rightarrow$ R $\leq$ 3 **Fila 2 es múltiplo de fila 3 $\Rightarrow$ R ≤ 2.**

Elegimos un menor de orden 1 no nulo: $M_1 = |4| \neq 0 \;\Rightarrow$ R $\geq$ 1

Orlamos M_1 con F1 C2 $\longrightarrow M_2^1 = \begin{vmatrix} t & 0 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = \mathbf{-6t}$

Casos:

i) $t \neq 0 \;\Rightarrow\; M_2^1 \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow$ R $\geq$ 2 (Rango máximo=2) $\Rightarrow$ **R = 2**

ii) $t = 0$ Sustituimos en la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 8 & -2 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

Al tener F2=-2F3 y nula la Fila 1 todos los menores de orden 2 obtenidos al orlar M_1, serán nulos. Por lo tanto el rango será 1.

En resumen si t = 0 R = 1

si t ≠ 0 R = 2

4) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ Matriz 3x4 $\Rightarrow$ **R ≤ 3**

Busco un menor de orden 3 $\longrightarrow M_3 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} = -9 + 3\lambda = 3(\lambda - 3)$

Casos:

i) $\lambda \neq 3 \;\Rightarrow\; M_3 \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow$ R ≥ 3 (Rango máximo=3) $\Rightarrow$ **R = 3**

ii) $\lambda = 3$ Sustituimos en la matriz $\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

Como no es la matriz nula buscamos directamente un menor de orden 2 no nulo:

$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow$ R ≥ 2

Orlamos M_2 con F3, C3: $M_3^1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 10 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 5 \\ 1 & 7 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 5 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$ Seguir orlando, si es posible: **SI**

Orlamos M_2 con F3, C4: $M_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 1 \\ 1 & 7 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$ Seguir orlando, si es posible: **NO**

Como todos los menores orden 3 obtenidos orlando $M_2 \neq \mathbf{0}$ son 0, concluiremos que **R = 2**

OTRA FORMA: Orlando desde el principio (de pequeño a grande)

$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ 3x4 $\Rightarrow$ R ≤ 3 Buscamos un menor de orden 2 no nulo $\longrightarrow M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} \neq \mathbf{0}$

Orlamos M_2 con F1 C4 $\longrightarrow M_3^1 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda-10 & 1 \\ 0 & -21 & 3 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 3(\lambda - 10 + 7) = 3(\lambda - 3)$

Casos:

i) $\lambda \neq 3 \;\Rightarrow\; M_3^1 \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow$ R ≥ 3 (Rango máximo=3) $\Rightarrow$ **R = 3**

ii) $\lambda = 3$ Sustituimos en la matriz $\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

Ya teníamos $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} \neq \mathbf{0}$

Orlamos M_2 con F1 C3 $\longrightarrow M_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 10 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -7 & 5 \\ 0 & -21 & 15 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 7\cdot 3\cdot 5 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$

Como ya no hay más menores orlados orden 3 no nulos concluiremos que **R = 2**

En resumen si λ =3 R=2

si λ ≠3 R=3

EP4.23.- Obtener k para que sea 2 el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & k & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

Elegimos un menor de orden 2 no nulo: $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ R ≥ 2

Orlamos $M_2 \neq \mathbf{0}$ con F3 C3 $\longrightarrow M_3^1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & k & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \\ 4 & k & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ k & 7 \end{vmatrix} = \mathbf{-7(1+k)}$

Casos:

i) $k=-1$ Sustituimos en la matriz $\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

Recordemos que tenemos $M_2 \neq 0$ y un menor orlado orden 3 $M_3^1 = \mathbf{0}$ Seguir orlando, si es posible: **SI**

Orlamos $M_2 \neq \mathbf{0}$ con F3 C4 $\longrightarrow M_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$ Seguir orlando, si es posible: **SI**

Orlamos $M_2 \neq \mathbf{0}$ con F3 C5 $\longrightarrow M_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$ Seguir orlando, si es posible: **NO**

Como todos los menores orlados de orden 3 son 0 el rango no es 3 y por tanto será 2: **R = 2**

ii) $k \neq -1 \Rightarrow M_3^1 \neq \mathbf{0} \Rightarrow$ R ≥ 3 (Rango máximo=3) $\Rightarrow$ **R = 3**

Para que el rango de la matriz sea 2 $k=-1$

EP4.24.- Discutir los siguientes sistemas por menores y orlando:

a1) $\begin{cases} 3x+4y=4 \\ 2x+6y=23 \\ -2x+3y=1 \end{cases} \qquad A/B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 23 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} A(3\times 2) \Rightarrow R_A \leq 2 \\ (A/B)(3\times 3) \Rightarrow R_B \leq 3 \\ \text{ni}=2 \end{cases}$

Estudiamos el rango por menores y orlando: $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathrm{R_A} = 2$

$\mathrm{R_B}=\begin{cases}2 \text{ ó}\\ 3\end{cases}$ debemos partir del menor $M_2=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 6\end{vmatrix}\neq \mathbf{0}$ y orlamos con F3C3: $M_3=\begin{vmatrix}3 & 4 & 4\\ 2 & 6 & 23\\ -2 & 3 & 1\end{vmatrix}\neq \mathbf{0}$

$\Rightarrow \mathrm{R_B}=3 \qquad \mathrm{R_A}\neq \mathrm{R_B} \quad \Rightarrow$ **Incomp.**

a2) $\begin{cases}x-y-z=0\\ x+y+3z=0\\ x-5y-9z=0\end{cases}$ Homogéneo $\Rightarrow \mathrm{R_A}=\mathrm{R_B}$ $\quad A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & -5 & -9\end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases}\mathrm{A{:}3x3}\Rightarrow \mathrm{R_A}\leq 3\\ \mathrm{ni}=3\end{cases}$

$M_2=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\neq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{R_A\geq 2}$ **y** $|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & -5 & -9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & -4 & -8\end{vmatrix}=\mathbf{0} \quad R_A=2=R_B<3=ni$

C. Indeterminado

Como $M_2=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\neq \mathbf{0}$ no quedamos con las ecuaciones 1 y 2 y las incógnitas x e y.

Sistema equivalente: $\begin{cases}x-y=z\\ x+y=-3z\end{cases}$ $\quad \boldsymbol{x}=\dfrac{\begin{vmatrix}z & -1\\ -3z & 1\end{vmatrix}}{2}=\boldsymbol{-z} \qquad \boldsymbol{y}=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & z\\ 1 & -3z\end{vmatrix}}{2}=\boldsymbol{-2z}$

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=\lambda(\mathbf{-1,-2,1})$$

a3) $\begin{cases}x+y=3\\ y+z=5\\ x+z=4\\ 5x-y+z=6\end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 5\\ 1 & 0 & 1 & 4\\ 5 & -1 & 1 & 6\end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases}A(4\times 3)\Rightarrow R_A\leq 3\\ (A/B)(4\times 4)\Rightarrow R_B\leq 4\\ \mathrm{ni}=3\end{cases}$

Matriz del sistema

$F1,\ F2,\ F3,\ F4$

$C1,\ C2,\ C3,\ C4$

Para abreviar elegimos un menor de orden 2 no nulo: $M_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{R_A}\geq 2$ $\quad \cancel{F1},\ \cancel{F2},\ F3,\ F4$

$\cancel{C1},\ \cancel{C2},\ C3,\ C4$

Posibilidades para orlar M_2: Con $F3, C3$, $\quad F4, C3$

Orlamos M_2 con $F3, C3$: $\quad M_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}\neq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \begin{cases}\mathrm{R_A}\geq 3\\ \text{Por tamaño } R_A\leq 3\end{cases} \Rightarrow \mathrm{R_A}=3$

$\cancel{F1},\ \cancel{F2},\ \cancel{F3},\ F4$

$\cancel{C1},\ \cancel{C2},\ \cancel{C3},\ C4$

Matriz ampliada

$\mathrm{R_B}=\begin{cases}R_A \text{ ó}\\ R_A+1\end{cases}$ en este caso $\mathrm{R_B}=\begin{cases}3\ (M_3\neq \mathbf{0}) \text{ ó}\\ 4\end{cases}$ $\qquad$ Partimos de $M_3\neq \mathbf{0}$

Posibilidades para orlar M_3: Con $F4, C4$

orlamos $M_3 \neq \mathbf{0}$ con F4C4 $M_4 = |A/B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$ M_4:único menor orlado orden 4 $\Rightarrow R_B = 3$

$\cancel{F1}, \cancel{F2}, \cancel{F3}, \cancel{F4}$

$\cancel{C1}, \cancel{C2}, \cancel{C3}, \cancel{C4}$

$R_A = R_B = 3 \Rightarrow$ Compatible

$R_A = R_B = ni \Rightarrow$ Determinado

Sistema equivalente: Nos quedamos con un sistema cuya matriz del sistema sea aquella cuyo determinante es M_3:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ x + z = 4 \end{cases} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A'| = M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{2}$$

Tenemos un sistema de Cramer: $R_{A'} = R_{B'} = ni$ **F3→F3-F1**

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{3} & 1 & 0 \\ \mathbf{5} & 1 & 1 \\ \mathbf{4} & 0 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \mathbf{1} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{3} & 0 \\ 0 & \mathbf{5} & 1 \\ 1 & \mathbf{4} & 1 \end{vmatrix}}{2} = \mathbf{2} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{3} \\ 0 & 1 & \mathbf{5} \\ 1 & 0 & \mathbf{4} \end{vmatrix}}{2} = \mathbf{3}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}}$$

a4) $\begin{cases} x + 11y - 4z = 0 \\ -2x + 4y + z = 1 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - 16y + 5z = 2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 11 & -4 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -16 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} A(4\times 3) \Rightarrow R_A \le 3 \\ (A/B)(4\times 4) \Rightarrow R_B \le 4 \\ \mathrm{ni} = 3 \end{cases}$

Estudiamos el rango por menores y orlando: $M_2(F1, F2, C1, C2) = \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathrm{R_A} \ge 2$

orlamos $M_2 \neq \mathbf{0}$ con F3C3 $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 11 & -4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathrm{R_A} = 3$

Rango de la matriz ampliada: $\mathrm{R_B} = \begin{cases} 3 \text{ ó} \\ 4 \end{cases}$ debemos partir del menor $M_3 \neq \mathbf{0}$ y

orlamos con F4C4 $M_4 = |A/B| = \begin{vmatrix} 1 & 11 & -4 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -16 & 5 & 2 \end{vmatrix} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathrm{R_B} = 4$ $R_A \neq R_B \Rightarrow$ Incompatible

b1) $\begin{cases} x-y+3z=1 \\ 3x-y+2z=3 \\ -2y+7z=0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} A(3\times 3) \Rightarrow R_A \le 3 \\ (A/B)(3\times 4) \Rightarrow R_B \le 3 \\ \text{ni}=3 \end{cases}$

Estudiamos el rango por menores y orlando: $M_2(F1,F2,C1,C2)=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \ne \mathbf{0} \quad \Rightarrow \ \mathrm{R_A}=2$

orlamos $M_2 \ne \mathbf{0}$ con F3C3 $M_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix}=\mathbf{0}$ Único menor orden 3=0 $\Rightarrow \ \mathrm{R_A}=2$

Rango de la matriz ampliada: $\mathrm{R_B}=\begin{cases} R_A \text{ ó} \\ R_A+1 \end{cases}$ en este caso $\mathrm{R_B}=\begin{cases} 2 \ (M_2 \ne \mathbf{0}) \text{ ó} \\ 3 \end{cases}$

orlamos $M_2 \ne \mathbf{0}$ con F3C4 $M_3^1=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}=\mathbf{0}$ No hay más menores orlados en A/B $\Rightarrow \ \mathrm{R_B}=2$

$R_A=R_B=2 \Rightarrow$ Comp.
$R_A=R_B<ni \Rightarrow$ Indet.

Sistema equivalente: $\begin{cases} x-y=1-3z \\ 3x-y=3-2z \end{cases}$ $\quad \boldsymbol{x}=\dfrac{\begin{vmatrix} 1-3z & -1 \\ 3-2z & -1 \end{vmatrix}}{4}=\mathbf{1}+\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{z} \qquad \boldsymbol{y}=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1-3z \\ 3 & 3-2z \end{vmatrix}}{4}=\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{z}$

$$\boxed{(\boldsymbol{x,y,z})=\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{z},\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}\right)=(\mathbf{1,0,0})+z\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{7}{2},\mathbf{1}\right)}$$

b2) $\begin{cases} x-y+3z=1 \\ 3x-y+2z=3 \\ -2y+7z=10 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 10 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} A(3\times 3) \Rightarrow R_A \le 3 \\ (A/B)(3\times 4) \Rightarrow R_B \le 3 \\ \text{ni}=3 \end{cases}$

Estudiamos el rango por menores y orlando: $M_2(F1,F2,C1,C2)=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \ne \mathbf{0} \quad \Rightarrow \ \mathrm{R_A}=2$

orlamos $M_2 \ne \mathbf{0}$ con F3C3 $M_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix}=\mathbf{0}$ Único menor orden 3=0 $\Rightarrow \ \mathrm{R_A}=2$

Rango de la matriz ampliada: $\mathrm{R_B}=\begin{cases} 2 \text{ ó} \\ 3 \end{cases}$ debemos partir del menor $M_2 \ne \mathbf{0}$ y

orlamos con F3C4 $M_3^1=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} \ne \mathbf{0} \quad \Rightarrow \ \mathrm{R_B}=3 \qquad R_A \ne R_B \Rightarrow$ Incompatible

b3) $\begin{cases} x+y+az=0 \\ ax-y\ =-1 \\ x+4y+6z=0 \end{cases}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ a & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} A(3\times 3) \Rightarrow R_A \le 3 \\ (A/B)(3\times 4) \Rightarrow R_B \le 3 \\ \text{ni=3} \end{cases}$

Estudio del rango de A

Por ser cuadrada estudiamos su determinante que es el único menor de orden 3:

$$M_3 = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 \\ 1+4a & 4 & 6 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1+a & a \\ 1+4a & 6 \end{vmatrix} = 4(a-2)\left(a+\frac{3}{4}\right)$$

$C1 \to C1 + aC2$

Casos:

i) Si $a \ne -\frac{3}{4}, 2 \;\Rightarrow\; R_A = 3$ Como $\begin{cases} R_B = 3 \text{ ó } 4 \\ R_B \le 3 \end{cases} \Rightarrow R_B = 3$ $\begin{cases} \mathbf{ni = 3} \\ \boldsymbol{R_A = 3} \\ \boldsymbol{R_B = 3} \end{cases}$ $\quad \mathbf{ni} = \boldsymbol{R_A} = \boldsymbol{R_B}$ **Comp. Det.**

ii) Si $a = 2$ al ser $M_3 = 0$ y el único menor orden 3 de la matriz A $\Rightarrow$ $R_A < 3$ $(*)$

sustituimos en A/B: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Estudio del rango de A:

Elegimos un menor de orden 2 no nulo: $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \ne \mathbf{0} \;\Rightarrow\; R_A \ge 2$ $\qquad$ Por $(*)$ $\Rightarrow$ $R_A = 2$

Estudio del rango de B: Sabemos que $R_B = \begin{cases} 2 \text{ ó} \\ 3 \end{cases}$

Debemos partir del menor de orden 2 no nulo M_2 ya encontrado en la matriz A:

Orlamos $M_2 \ne \mathbf{0}$ con F3 **C4**: $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \ne \mathbf{0} \;\Rightarrow\; R_B = 3$

$R_A = 2 \ne R_B = 3$ $\quad$ S. Incompatible

iii) Si $a = -\frac{3}{4}$ al ser $M_3 = 0$ y el único menor orden 3 de la matriz A $\Rightarrow$ $R_A < 3$ $(*)$

sustituimos en A/B: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3/4 & 0 \\ -3/4 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Estudio del rango de A:

Elegimos un menor de orden 2 no nulo: $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \ne \mathbf{0} \;\Rightarrow\; R_A \ge 2$

Por $(*)$ $\Rightarrow$ $R_A = 2$

Estudio del rango de B: Sabemos que $R_B = \begin{cases} 2 \text{ ó} \\ 3 \end{cases}$

Debemos partir del menor de orden 2 no nulo M_2 ya encontrado en la matriz A:

Orlamos $M_2 \neq \mathbf{0}$ con F2 ***C4***: $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \neq \mathbf{0} \Rightarrow R_B = 3$

$R_A = 2 \neq R_B = 3$ S. Incompatible

b4) $\begin{cases} x+y=k \\ kx-y=13 \\ 5x+3y=16 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ k & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} A(3\times 2) \Rightarrow R_A \leq 2 \\ (A/B)(3\times 3) \Rightarrow R_B \leq 3 \\ \text{ni=2} \end{cases}$ $(*)$

Estudio del rango de A:

Elegimos un menor de orden 2 no nulo: $M_2(F1,F3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \neq \mathbf{0} \Rightarrow R_A \geq 2$ Por $(*)$ $\Rightarrow R_A = 2$

Estudio del rango de B: Sabemos que $R_B = \begin{cases} 2 \text{ ó} \\ 3 \end{cases}$

Orlamos $M_2 \neq \mathbf{0}$ con F2 ***C3***: $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ k & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{vmatrix} = \mathbf{3}(k-2)\left(k-\frac{5}{3}\right)$

Casos:

i) Si $k \neq \frac{5}{3}, 2 \Rightarrow M_3 \neq \mathbf{0} \Rightarrow R_B = 3 \Rightarrow R_A = 2 \neq R_B = 3$ **S. Incompatible**

ii) Si $k = 2$ al ser $M_3 = \mathbf{0}$ y el único menor orden 3 de la matriz A/B $\Rightarrow R_B = 2$

$R_A = R_B = 2 = ni$ **Comp. Det.**

ii) Si $k = \frac{5}{3}$ al ser $M_3 = \mathbf{0}$ y el único menor orden 3 de la matriz A/B $\Rightarrow R_B = 2$

$R_A = R_B = 2 = ni$ **Comp. Det.**

EP4.25.- Dado un sistema lineal de 3 ecuaciones, 5 incógnitas y rango del sistema 5 . ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta ?.

a) Como nº incog = rango sistema será compatible y determinado.

b) No se puede afirmar nada porque hay que conocer el rango de la matriz ampliada.

c) Los datos del enunciado son imposibles.

Matriz sistema:3x5 mínimo de 3 y 5 = 3

Rango matriz: nº máximo de vectores fila ó columna L.I: 3 filas $\Rightarrow$ rango máximo = 3

d) Como nº ecuac. < nº incogn. será siempre compatible.