2. ESPACIOS VECTORIALES DE DIMENSION FINITA

Hasta este momento y para ejemplarizar definiciones y conceptos hemos trabajado fundamentalmente con vectores de los espacios R^2 y R^3. En ambos conjuntos hemos definido y realizado operaciones:
La suma de vectores y el producto de escalar por vector que obedecían a ciertas propiedades. Ahora vamos a generalizar para definir una de las estructuras más importantes del Álgebra: el espacio vectorial.

D2.1– ESPACIO VECTORIAL

Si tenemos un conjunto E y definimos en él **dos operaciones**:

i) una **ley de composición interna:** la suma de dos elementos de E es otro elemento de E:

$$\forall \vec{x},\vec{y}\in E \quad \Rightarrow \quad \vec{x}+\vec{y}\in E$$

ii) una **ley de composición externa:** producto de escalar por elemento de E es otro elemento de E

$$\forall \vec{x}\in E \ \text{ y } \ \forall \alpha \in R \Rightarrow \alpha \circ \vec{x}\in E$$

que cumplen las **propiedades** siguientes:

1. $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ **Ley asociativa de la suma**
2. $\vec{u}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{u}$ **Ley conmutativa de la suma**
3. $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$ **Elemento neutro de la suma**
4. $\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$ **Vector opuesto de la suma**
5. $\alpha\circ(\vec{u}+\vec{w})=\alpha\circ\vec{u}+\alpha\circ\vec{w}$ **L. distributiva del producto escalar·vector respecto a la suma de vectores**
6. $(\alpha+\beta)\circ\vec{u}=\alpha\circ\vec{u}+\beta\circ\vec{u}$ **L. distrib. del producto escalar·vector respecto a la suma de escalares**
7. $(\alpha\cdot\beta)\circ\vec{u}=\alpha\circ(\beta\circ\vec{u})=\beta\circ(\alpha\circ\vec{u})$ **L. asociativa del producto entre escalares y vectores**
8. $1\circ\vec{u}=\vec{u}$ **Elemento unidad**

$\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w}\in E$, α,β escalares (reales) cualesquiera.

Ejemplos de espacios vectoriales sobre el cuerpo de los reales:

1) El espacio R^n, formado por los **vectores de n componentes** (x1, . . .,xn)

2) El conjunto P_2 de los **polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales**: $P_2=\{ax^2+bx+c \mid a,b,c\in R\}$

3) El conjunto M_{2x2} de las **matrices 2x2 con términos reales:**

4) El conjunto de las funciones continuas definidas en $\Re$.

Por el contrario:

5) El conjunto de las **matrices 3x2 con términos enteros NO es** un espacio vectorial real,

6) El conjunto G de **los polinomios de grado = 3** (solo los que tienen grado 3) **con coeficientes reales, NO es** un espacio vectorial.

2.1 SISTEMA GENERADOR Y BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL

D2.2– SISTEMA GENERADOR

Diremos que el conjunto de los vectores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, \vec{x}_n \in E$ es un sistema generador de E si todo vector $\vec{x} \in E$ puede expresarse como una combinación lineal de ellos, es decir que:

$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, \vec{x}_n \in E$ es sistema generador de E si $\forall\ \vec{x} \in E$ existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, \alpha_n$ tales que $\vec{x} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_n \vec{x}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$

Ejemplo: el vector $(4,-5,7) \in R^3$ no puede expresarse como combinación lineal de $(2,-3,5)$ y $(-1,3,2)$ como hemos visto en **ER 1.5 a)**. Según la definición que hemos dado el conjunto de vectores formado por $(2,-3,5)$ y $(-1,3,2)$ no es un sistema generador de R^3.

♥**ER 2.1: a)** Expresar el vector (–5,15) como combinación lineal de (1, –3) y (2,–6) .

$$(-5,15) = \alpha \circ (1,-3) + \beta \circ (2,-6) \longrightarrow \begin{cases} -5 = \alpha + 2\beta \\ 15 = -3\alpha - 6\beta \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -3 & -6 & 15 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha + 2\beta = -5 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -5 - 2y \\ \beta = \beta \end{cases} \Rightarrow \text{Infinitas soluciones}$$

Una posible solución sería: $(-5,15) = 3 \circ (1,-3) - 4 \circ (2,-6)$

Aunque los vectores (1, –3) y (2,–6) generan el vector (–5,15) no podemos asegurar que sean un sistema generador de R^2. Veamos si estos mismos vectores generan otro vector de R^2.

♥♥♥♥♥

♥**b)** Expresar el vector (a,b) como combinación lineal de (1, –3) y (2,–6) .

$$(a,b) = \alpha \circ (1,-3) + \beta \circ (2,-6) \longrightarrow \begin{cases} a = \alpha + 2\beta \\ b = -3\alpha - 6\beta \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ -3 & -6 & b \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & b+3a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = -4 \\ 0 = b + 3a \end{cases}$$

Si $b+3a$ es distinto de 0 $\Rightarrow$ Sist. Incompatible

Por ejemplo el vector $(-4,8)$ no es C.L. de (1, –3) y (2,–6) ya que $8+3 \cdot (-4) \neq 0$

Por lo tanto podemos afirmar que los vectores (1, –3) y (2,–6) no generan el espacio R^2.

♥♥♥♥♥

♥**ER 2.2: a)** Expresar el vector (4, –11) como combinación lineal de (2, –1) y (1,4).

$$(4,-11) = \alpha \circ (2,-1) + \beta \circ (1,4) \longrightarrow \begin{cases} 4 = 2\alpha + \beta \\ -11 = -\alpha + 4\beta \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & -11 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -4 & 11 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -4 & 11 \\ 0 & 9 & -18 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 11 = \alpha - 4\beta \\ -18 = 9\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -2 \\ \alpha = 11 - 8 = 3 \end{cases}$$

Por tanto $(4,-11) = 3 \circ (2,-1) + (-2) \circ (1,4)$ **Los escalares buscados son 3 y –2**

♥ **b)** ¿Son los vectores (2, −1) y (1,4) generadores de R^2?

Resulta evidente que con un solo vector no podemos afirmar que los vectores (2, −1) y (1,4) generan R^2.

Para ello lo que haremos es coger un vector cualquiera $(a,b)\in R^2$ y demostrar que la ecuación vectorial $(a,b)=\alpha\circ(2,-1)+\beta\circ(1,4)$ tiene solución para cualesquiera valores de a y b.

$$\begin{cases}2\alpha+\beta=a\\-\alpha+4\beta=b\end{cases}\quad \begin{pmatrix}2 & 1 & a\\-1 & 4 & b\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1 & -4 & -b\\2 & 1 & a\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1 & -4 & -b\\0 & 9 & a+2b\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{cases}\alpha-4\beta=-b\\9\beta=a+2b\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha=-b+4\dfrac{a+2b}{9}=\dfrac{b+4a}{9}\\ \beta=\dfrac{a+2b}{9}\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{b+4a}{9}\\ \beta=\dfrac{a+2b}{9}\end{cases}$$

El sistema tiene solución y es única. Esto significa que los **vectores (2,−1) y (1,4) generan** R^2.

Observar que en este sistema "a" y "b" son datos aunque representan cantidades desconocidas.

♥♥♥♥♥

♥ **c)** Obtener el vector $(-7,3)$ como combinación lineal de (2, −1) y (1,4)

Bastará sustituir $a=-7$, $b=3$ en las expresiones ya obtenidas.

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{3-28}{9}=-\dfrac{25}{9}\\ \beta=\dfrac{-7+6}{9}=-\dfrac{1}{9}\end{cases}\qquad \text{con lo cual}\qquad (-7,3)=-\frac{25}{9}\circ(2,-1)-\frac{1}{9}\circ(1,4)$$

♥♥♥♥♥

♥**ER 2.3: a)** Averiguar si los vectores $(1,1),(-2,3),(0,-1)$ forman un sistema generador de R^2.

Para ello hay que ver que un vector cualquiera $(a,b)\in R^2$ se puede expresar como combinación lineal de $(1,1),(-2,3),(0,-1)$ es decir que el sistema $(a,b)=\alpha\circ(1,1)+\beta\circ(-2,3)+\lambda\circ(0,-1)$ tiene solución para cualesquiera valores de a y b.

$$\begin{cases}\alpha-2\beta=a\\ \alpha+3\beta-\lambda=b\end{cases}\quad \begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & a\\1 & 3 & -1 & b\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & a\\0 & 5 & -1 & b-a\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{cases}\alpha-2\beta=a\\ 5\beta-\lambda=b-a\end{cases}$$

$$\lambda=\lambda\longrightarrow\beta=\frac{b-a+\lambda}{5}\longrightarrow\alpha=\frac{3a+2b+2\lambda}{5}$$

El sistema tiene infinitas soluciones. Esto significa que los vectores $(1,1),(-2,3),(0,-1)$ generan R^2.

♥♥♥♥♥

♥ **b)** Obtener el vector $(-7,3)$ como combinación lineal de $(1,1),(-2,3),(0,-1)$

En este caso el vector $(-7,3)$ podrá generarse de infinitas maneras; veamos algunas de ellas:

Para $\lambda=0$ $$\left.\begin{matrix}\lambda=0\\a=-7\\b=3\end{matrix}\right\}\rightarrow\beta=\frac{3+7+0}{5}=2\rightarrow\alpha=\frac{-21+6}{5}=-3\qquad(-7,3)=-3(1,1)+2(-2,3)$$

Para $\lambda = 1$ $\quad \begin{matrix} \lambda = 1 \\ a = -7 \\ b = 3 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{3+7+1}{5} = \dfrac{11}{5} \\ \alpha = \dfrac{-21+6+2}{5} = -\dfrac{13}{5} \end{cases}$ $\qquad (-7,3) = -\dfrac{13}{5}(1,1) + \dfrac{11}{5}(-2,3) + 1(0,-1)$

Para $\lambda = -5$ $\quad \left. \begin{matrix} \lambda = -5 \\ a = -7 \\ b = 3 \end{matrix} \right\} \rightarrow \beta = \dfrac{3+7-5}{5} = 1 \rightarrow \alpha = \dfrac{-21+6-10}{5} = -5$

$$(-7,3) = -5 \circ (1,1) + 1 \circ (-2,3) - 5 \circ (0,-1)$$

Observando los resultados del ejercicio anterior vemos que en ambos casos los vectores que nos dan son sistema generador del espacio R^2. Sin embargo en el caso **ER2.2** los sistemas de ecuaciones que resolvemos tienen solución única y en el **ER2.3** infinitas soluciones.

♥♥♥♥♥

♥**ER 2.4: a)** Comprobar que el conjunto de vectores (2, –1) y (1,4) del **ER2.2** es L.I.

$(0,0) = \alpha \circ (2,-1) + \beta \circ (1,4)$ $\quad \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + 4\beta = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ 9\beta = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$

Solución única $\Rightarrow$ Son L.I.

♥♥♥♥♥

♥**b)** Comprobar que el conjunto de vectores $(1,1),(-2,3),(0,-1)$ del **ER2.3** es L.D.

$(0,0) = \alpha \circ (1,1) + \beta \circ (-2,3) + \lambda \circ (0,-1)$

$\begin{cases} \alpha - 2\beta = a \\ \alpha + 3\beta - \lambda = b \end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta = 0 \\ 5\beta - \lambda = 0 \end{cases}$

$$\lambda = \lambda \longrightarrow \beta = \frac{\lambda}{5} \longrightarrow \alpha = \frac{2\lambda}{5}$$

El sistema tiene infinitas soluciones que se obtendrían dando valores a λ $\Rightarrow$ Los vectores son L.D.

Cuando tenemos un conjunto de vectores que generan un espacio y además son L.I. diremos que los vectores constituyen una base del espacio.

D2.3– BASE

Diremos que el conjunto de vectores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, \vec{x}_n \in E$ es base de E si

a) $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, \vec{x}_n$ es sistema generador de E

b) Es L.I.

TEOREMA 1– Si $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ es base de un espacio vectorial E todo vector $\vec{x} \in \boldsymbol{E}$ puede expresarse como una combinación lineal de $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ y además de manera única.

$\forall\ \vec{x} \in$ E existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ únicos tales que

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + ... + \alpha_n \vec{x}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$$

En **ER 2.2** los vectores (2, –1) y (1,4) forman una base de R^2 ya que es sistema generador y es L.I.

En el **ER 2.3** el conjunto de vectores $(1,1),(-2,3),(0,-1)$ **NO** es una base de R^2 ya que, a pesar de ser sistema generador de R^2, NO es L.I.

TEOREMA 2– Todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo nº de vectores.

En el caso de R^2 todas sus bases tienen 2 vectores, en R^3 tienen 3 vectores. Por ello resulta muy sencillo encontrar distintas bases de un mismo espacio. Si se trata de R^2 bastará buscar 2 vectores L.I.; en el caso de R^3 buscaremos 3 vectores L.I. y así en general.

♥**ER 2.5: a)** Estudiar si el conjunto de vectores (2,–4,0) (1,1,1) y (–1,2,0) forman una base de R^3.

Como se vio en **ER1.8** estos 3 vectores son linealmente dependientes. Por lo tanto no forman base de R^3.

♥♥♥♥♥

b) Averiguar si el conjunto de vectores (2,1,0) (1, –1,1) y (0,2, –3) forman una base de R^3.

Como tenemos 3 vectores y sabemos que todas las bases de R^3 están formadas por 3 vectores bastará estudiar si son L.I. para concluir que forman una base de R^3.

$$a \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 2a + b = 0 \\ a - b + 2c = 0 \\ b - 3c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ -3b + 4c = 0 \\ -5c = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Solo admite la solución trivial, por lo tanto son L.I.

Los vectores (2,1,0) (1, –1,1) y (0,2, –3) forman una base de R^3.

Un espacio vectorial tiene infinitas bases. En cada espacio vectorial existe una base con unas características especiales, llamada base canónica.

En R^2 la base canónica es $\{e_1, e_2\}$ con $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$

En R^3 la base canónica es $\{e_1, e_2, e_3\}$ con $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$

Observar que los vectores de la base canónica son unitarios y mutuamente ortogonales.

D2.4– DIMENSIÓN

Llamaremos dimensión de un espacio vectorial al nº de vectores de cualquiera de sus bases.

Así R^2 tiene dimensión 2 porque todas sus bases están formadas por dos vectores. Por análoga razón R^3 es un espacio vectorial de dimensión 3.

D2.5– COORDENADAS

Dado un espacio vectorial E, un vector $\vec{x} \in E$, y una base $B=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,.............,\vec{v}_n\}$ de E; sabemos que existirán escalares $\alpha_1,\alpha_2,.............,\alpha_n$ únicos tales que $\vec{x}=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+............+\alpha_n\vec{v}_n$
A dichos escalares se les llama **coordenadas del vector** $\vec{x}$ en la base B.

Cada vector tiene coordenadas únicas en cada base del espacio al que pertenece pero al haber infinitas bases tendrá asociados infinitos conjuntos de coordenadas.

♥**ER 2.6:** Dadas las bases $B_1=\{(2,4,0),\ (1,0,1),\ (-1,2,0)\}$ y $B_2=\{(2,1,0),\ (1,-1,1),\ (0,2,-3)\}$ calcular las coordenadas del vector $\vec{x}=(3,-5,1)$ en ambas bases.

En base B_1: $\alpha\circ\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}+\beta\circ\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda\circ\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}$ $\quad\begin{cases}2\alpha+\beta-\lambda=3\\4\alpha+2\lambda=-5\\\beta=1\end{cases}$

$$\begin{pmatrix}2&1&-1&3\\4&0&2&-5\\0&1&0&1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}2&1&-1&3\\0&-2&4&-11\\0&1&0&1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}2&1&-1&3\\0&-2&4&-11\\0&0&4&-9\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}2\alpha+\beta-\lambda=3\\-2\beta+4\lambda=-11\\4\lambda=-9\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha=-\frac{1}{8}\\\beta=1\\\lambda=-\frac{9}{4}\end{cases}$$

Coordenadas de $\vec{x}=(3,-5,1)$ en la base B_1

$\vec{x}=(3,-5,1)_C=\left(-\frac{1}{8},1,-\frac{9}{4}\right)_{B1}$

$$-\frac{1}{8}\circ\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}+1\circ\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{9}{4}\circ\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}$$

En base B_2: $a\circ\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+b\circ\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+c\circ\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}$ $\quad\begin{cases}2a+b=3\\a-b+2c=-5\\b-3c=1\end{cases}$

$$\begin{pmatrix}2&1&0&3\\1&-1&2&-5\\0&1&-3&1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}2&1&0&3\\0&-3&4&-13\\0&1&-3&1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}2&1&0&3\\0&-3&4&-13\\0&0&-5&-10\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}2a+b=3\\-3b+4c=-13\\-5c=-10\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=-2\\b=7\\c=2\end{cases}$$

Coordenadas de $\vec{x}=(3,-5,1)$ en la base B_2

$\vec{x}=(3,-5,1)_C=(-2,7,2)_{B2}$

$$-2\circ\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+7\circ\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+2\circ\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}$$

Observación: Cuando nos dan las coordenadas de un vector sin especificar en qué base están dadas se sobre-entiende que es en la base canónica. Se les conoce también como coordenadas cartesianas y también son las que hemos definido en el tema 2 como componentes de un vector.

3 CAMBIOS DE BASE

Sabemos que todo vector de un espacio vectorial tiene asociado un conjunto de escalares que dependen de la base en que se exprese y que se denominan "coordenadas del vector en esa base"; también hemos visto que esas coordenadas son únicas en esa base pero distintas cuando se cambia de base.

Partiendo de ello el problema que se nos plantea es el de calcular las coordenadas de un vector en una cierta base B_1, teniendo como dato sus coordenadas en otra base B_2.

Si una de las bases es la base canónica el problema es sencillo (Ver **ER2.7**). Si ambas bases son distintas de la canónica necesitaremos conocer cuál es la relación entre ambas bases y la resolución resulta un poco más elaborada.

♥**ER 3.1:** Dado el vector $\vec{x}$ cuyas coordenadas en la base $B_1 = \{(2,4,0),\ (1,0,1),\ (-1,2,0)\}$ son $(-2,3,5)$ calcular sus coordenadas en base canónica.

Notar que las coordenadas de los vectores de B_1 están en base canónica.

$(-2,3,5)$: coordenadas de $\vec{x}$ en base B_1. Por tanto: $\vec{x} = -2 \circ \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}_C + 3 \circ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_C + 5 \circ \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}_C$

El resultado de la combinación lineal estará en base canónica:

$$\vec{x} = -2 \circ \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}_C + 3 \circ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_C + 5 \circ \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix}-4+3-5\\-8+0+10\\0+3+0\end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix}-6\\2\\3\end{pmatrix}_C \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}_{B1} = \begin{pmatrix}-6\\2\\3\end{pmatrix}_C$$

$$\vec{x} = -2 \circ \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}_C + 3 \circ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_C + 5 \circ \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}_C = -6 \circ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 2 \circ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 3 \circ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

♥**ER 3.2:** Dadas las bases $B_v = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ y $B_u = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ de un espacio vectorial de dimensión 3 y sabiendo que $\begin{cases}\vec{v}_1 = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3\\ \vec{v}_2 = -\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3\\ \vec{v}_3 = -\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 3\vec{u}_3\end{cases}$ ¿cuáles son las coordenadas de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ en la base B_u?

Según la definición, las coordenadas de $\vec{v}_1$ en B_u son los escalares de la C.L. de los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ que genera $\vec{v}_1$. Análogamente con los demás.

$$\vec{v}_1 = 2 \circ \vec{u}_1 + (-1) \circ \vec{u}_2 + 1 \circ \vec{u}_3 \longrightarrow \vec{v}_1 = (2,-1,1)_{B_u}$$

$$\vec{v}_2 = (-1) \circ \vec{u}_2 + 2 \circ \vec{u}_3 \longrightarrow \vec{v}_2 = (0,-1,2)_{B_u}$$

$$\vec{v}_3 = (-1) \circ \vec{u}_1 + 1 \circ \vec{u}_2 + (-3) \circ \vec{u}_3 \longrightarrow \vec{v}_3 = (-1,1,-3)_{B_u}$$

♥ **b)** Calcular las coordenadas de los vectores de la base B_u en la base B_v

Para ello debemos expresar los vectores $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ como C.L. de los vectores de $B_v=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$

Consideramos los vectores $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ como las incógnitas del sistema $\begin{cases}\vec{v}_1=2\vec{u}_1-\vec{u}_2+\vec{u}_3\\ \vec{v}_2=-\vec{u}_2+2\vec{u}_3\\ \vec{v}_3=-\vec{u}_1+\vec{u}_2-3\vec{u}_3\end{cases}$ que podemos expresar utilizando notación matricial:

$$\begin{cases}2\circ\vec{u}_1-\vec{u}_2+\vec{u}_3=\vec{v}_1\\ -\vec{u}_2+2\circ\vec{u}_3=\vec{v}_2\\ -\vec{u}_1+\vec{u}_2-3\circ\vec{u}_3=\vec{v}_3\end{cases}\longrightarrow\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&-1&2\\-1&1&-3\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}\vec{u}_1\\\vec{u}_2\\\vec{u}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{v}_1\\\vec{v}_2\\\vec{v}_3\end{pmatrix}$$

Y aplicaremos el algoritmo de Gauss a la forma matricial resultante de escribir la matriz de coeficientes y el término independiente formado por cada uno de los vectores de B_v.

$$\begin{pmatrix}2&-1&1&\vec{v}_1\\0&-1&2&\vec{v}_2\\-1&1&-3&\vec{v}_3\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}2&-1&1&\vec{v}_1\\0&-1&2&\vec{v}_2\\0&1&-5&2\vec{v}_3+\vec{v}_1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}\mathbf{2}&-1&1&\vec{v}_1\\0&\mathbf{-1}&2&\vec{v}_2\\0&0&\mathbf{-3}&2\vec{v}_3+\vec{v}_1+\vec{v}_2\end{pmatrix}\quad\begin{cases}2\circ\vec{u}_1-\vec{u}_2+\vec{u}_3=\vec{v}_1\\ -\vec{u}_2+2\circ\vec{u}_3=\vec{v}_2\\ -3\circ\vec{u}_3=2\vec{v}_3+\vec{v}_1+\vec{v}_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\vec{u}_3=-\frac{1}{3}\circ\left(2\circ\vec{v}_3+\vec{v}_1+\vec{v}_2\right)=\boxed{-\frac{1}{3}\circ\vec{v}_1-\frac{1}{3}\circ\vec{v}_2-\frac{2}{3}\circ\vec{v}_3}\\ \vec{u}_2=-\vec{v}_2+2\circ\left(-\frac{1}{3}\circ\vec{v}_1-\frac{1}{3}\circ\vec{v}_2-\frac{2}{3}\circ\vec{v}_3\right)=-\vec{v}_2-\frac{2}{3}\circ\vec{v}_1-\frac{2}{3}\circ\vec{v}_2-\frac{4}{3}\circ\vec{v}_3=\boxed{-\frac{2}{3}\circ\vec{v}_1-\frac{5}{3}\circ\vec{v}_2-\frac{4}{3}\circ\vec{v}_3}\\ 2\circ\vec{u}_1=\vec{v}_1+\vec{u}_2-\vec{u}_3=\vec{v}_1+\left(-\frac{2}{3}\circ\vec{v}_1-\frac{5}{3}\circ\vec{v}_2-\frac{4}{3}\circ\vec{v}_3\right)-\left(-\frac{1}{3}\circ\vec{v}_1-\frac{1}{3}\circ\vec{v}_2-\frac{2}{3}\circ\vec{v}_3\right)=\boxed{\frac{2}{3}\circ\vec{v}_1-\frac{4}{3}\circ\vec{v}_2-\frac{2}{3}\circ\vec{v}_3}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\vec{u}_1=\frac{1}{3}\circ\vec{v}_1-\frac{2}{3}\circ\vec{v}_2-\frac{1}{3}\circ\vec{v}_3\longrightarrow\vec{u}_1=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)_{B_v}\\ \vec{u}_2=-\frac{2}{3}\circ\vec{v}_1-\frac{5}{3}\circ\vec{v}_2-\frac{4}{3}\circ\vec{v}_3\longrightarrow\vec{u}_2=\left(-\frac{2}{3},-\frac{5}{3},-\frac{4}{3}\right)_{B_v}\\ \vec{u}_3=-\frac{1}{3}\circ\vec{v}_1-\frac{1}{3}\circ\vec{v}_2-\frac{2}{3}\circ\vec{v}_3\longrightarrow\vec{u}_3=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)_{B_v}\end{cases}$$

♥♥♥♥♥

♥ **c)** Calcular las coordenadas del vector $\vec{x}$ en la base B_u sabiendo que en la base B_v sus coordenadas son $(1,-1,0)$.

Coordenadas de $\vec{x}$ en base B_v: $(1,-1,0)$ por tanto: $\vec{x}=\mathbf{1}\circ\vec{v}_1+(\mathbf{-1})\circ\vec{v}_2+\mathbf{0}\circ\vec{v}_3$

Como queremos expresar el vector como C.L. de los vectores B_u sustituiremos los vectores $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ por sus expresiones en función de los vectores $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$

$$\begin{cases}\vec{v}_1 = 2\circ\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3\\ \vec{v}_2 = -\vec{u}_2 + 2\circ\vec{u}_3\\ \vec{v}_3 = -\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 3\circ\vec{u}_3\end{cases} \qquad \vec{x} = \mathbf{1}\circ\overbrace{\left(2\circ\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3\right)}^{\vec{v}_1} + (\mathbf{-1})\circ\overbrace{\left(-\vec{u}_2 + 2\circ\vec{u}_3\right)}^{\vec{v}_2} + \mathbf{0}\circ\overbrace{\left(-\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 3\circ\vec{u}_3\right)}^{\vec{v}_3} = \mathbf{2}\circ\vec{u}_1 - \vec{u}_3$$

Coordenadas de $\vec{x}$ en base B_u: $(2,0,-1)_{B_u}$.

$$\vec{x} = (\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)\bullet\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{-1}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}_{B_v} = (\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)\bullet\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{-1}\end{pmatrix}_{B_u} \quad\Leftrightarrow\quad (2,0,-1)\bullet\begin{pmatrix}\vec{u}_1\\ \vec{u}_2\\ \vec{u}_3\end{pmatrix} = (\mathbf{1},\mathbf{-1},\mathbf{0})\bullet\begin{pmatrix}\vec{v}_1\\ \vec{v}_2\\ \vec{v}_3\end{pmatrix}$$

$$2\circ\vec{u}_1 - \vec{u}_3 = \mathbf{1}\circ\vec{v}_1 + (\mathbf{-1})\circ\vec{v}_2 + \mathbf{0}\circ\vec{v}_3$$

Si conociésemos las coordenadas de los vectores $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ y $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ en base canónica y las sustituyésemos en las expresiones $2\circ\vec{u}_1 - \vec{u}_3$ y $\mathbf{1}\circ\vec{v}_1 + (\mathbf{-1})\circ\vec{v}_2 + \mathbf{0}\circ\vec{v}_3$ obtendríamos en ambas el mismo resultado, que serían las coordenadas del vector $\vec{x}$ en la base canónica.

♥♥♥♥♥

ER 3.3.- Sea el vector $\vec{x}$ de coordenadas $(2,0,-1)$ en la base $B_u = \{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$. Calcular sus coordenadas en la base $B_v = \{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ sabiendo que $\begin{cases}\vec{v}_1 = 2\circ\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3\\ \vec{v}_2 = -\vec{u}_2 + 2\circ\vec{u}_3\\ \vec{v}_3 = -\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 3\circ\vec{u}_3\end{cases}$

Coordenadas de $\vec{x}$ en base B_v: (a,b,c) $\longrightarrow$ $\vec{x} = \boldsymbol{a}\circ\vec{v}_1 + \boldsymbol{b}\circ\vec{v}_2 + \boldsymbol{c}\circ\vec{v}_3$

Coordenadas de $\vec{x}$ en base B_u: $(2,0,-1)$. por tanto: $\vec{x} = \mathbf{2}\circ\vec{u}_1 + \mathbf{0}\circ\vec{u}_2 + (\mathbf{-1})\circ\vec{u}_3$

En forma matricial:

$$\vec{x} = \boldsymbol{a}\circ\vec{v}_1 + \boldsymbol{b}\circ\vec{v}_2 + \boldsymbol{c}\circ\vec{v}_3 = \boldsymbol{a}\circ\left(2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3\right) + \boldsymbol{b}\circ\left(-\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3\right) + \boldsymbol{c}\circ\left(-\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 3\vec{u}_3\right) =$$

$$\vec{x} = (2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c})\circ\vec{u}_1 + (-\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})\circ\vec{u}_2 + (\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{c})\circ\vec{u}_3$$

$$\vec{x} = \quad \mathbf{2} \quad\circ\ \vec{u}_1 \ + \quad \mathbf{0} \quad\circ\ \vec{u}_2 + \quad (\mathbf{-1}) \quad\circ\ \vec{u}_3$$

Como las coordenadas de un vector en una base son únicas: $\begin{cases}2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c} = \mathbf{2}\\ -\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \mathbf{0}\\ \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{c} = \mathbf{-1}\end{cases}$

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & -1 & \mathbf{2}\\ -1 & -1 & 1 & \mathbf{0}\\ 1 & 2 & -3 & \mathbf{-1}\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & \mathbf{-1}\\ -1 & -1 & 1 & \mathbf{0}\\ 2 & 0 & -1 & \mathbf{2}\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & \mathbf{-1}\\ 0 & 1 & -2 & \mathbf{-1}\\ 0 & -4 & 5 & \mathbf{4}\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}\mathbf{1} & 2 & -3 & \mathbf{-1}\\ 0 & \mathbf{1} & -2 & \mathbf{-1}\\ 0 & 0 & \mathbf{-3} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{c} = \mathbf{-1}\\ \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{c} = \mathbf{-1}\\ -3\boldsymbol{c} = \mathbf{0}\end{cases} \qquad \begin{cases}\boldsymbol{a} = \mathbf{1}\\ \boldsymbol{b} = \mathbf{-1}\\ \boldsymbol{c} = \mathbf{0}\end{cases} \qquad \vec{x} = (\mathbf{1},\mathbf{-1},\mathbf{0})_{B_v} = (2,0,-1)_{B_u}$$

Como se puede ver en estos ejercicios la notación para expresar las coordenadas de un vector se puede hacer en forma de matriz fila o matriz columna. La cuestión es que se adecue a los productos que se tengan que realizar con él.

Revisemos los problemas anteriores:

Tenemos los vectores de la base B_v expresados en la base B_u.

$$\begin{cases} 2\circ\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = \vec{v}_1 \\ -\vec{u}_2 + 2\circ\vec{u}_3 = \vec{v}_2 \\ -\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 3\circ\vec{u}_3 = \vec{v}_3 \end{cases}$$

Estas ecuaciones las podemos expresar en forma matricial: **(*)**

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vec{u}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix}$$

En la matriz de la izquierda las filas son las coordenadas de los vectores $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ en la base B_u.
En la matriz de la derecha **las columnas** son las coordenadas de los vectores $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ en la base B_u.

Por otra parte tenemos el vector expresado en ambas bases:

$$\vec{x} = \mathbf{1}\circ\vec{v}_1 + (\mathbf{-1})\circ\vec{v}_2 + \mathbf{0}\circ\vec{v}_3 = (\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}_{B_v} = (\mathbf{1},\mathbf{-1},\mathbf{0})\begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \mathbf{2}\circ\vec{u}_1 + \mathbf{0}\circ\vec{u}_2 + (\mathbf{-1})\circ\vec{u}_3 = (\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}_{B_u} = (\mathbf{2},\mathbf{0},\mathbf{-1})\begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vec{u}_3 \end{pmatrix}$$

Como ya se ha dicho el resultado de operar en ambas expresiones serían las coordenadas del vector en base canónica por lo que podemos igualarlas.

$$\vec{x} = (\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}_{B_v} = (\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}_{B_u} \Leftrightarrow (2,0,-1)\begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vec{u}_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{1},\mathbf{-1},\mathbf{0})\begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{pmatrix}$$

$$2\circ\vec{u}_1 - \vec{u}_3 = \mathbf{1}\circ\vec{v}_1 + (\mathbf{-1})\circ\vec{v}_2 + \mathbf{0}\circ\vec{v}_3 \quad (**)$$

Ahora solo queda emplear la relación entre bases (*) para sustituirla en (**).

Utilizaremos las expresiones

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{x} = (\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)\bullet\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}_{B_v} = (\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)\bullet\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}_{B_u}$$

en las que los vectores de ambas bases aparecen en formato FILA, las coordenadas del vector en forma de matriz columna y la matriz que relaciona ambas bases tiene como COLUMNAS las coordenadas de los vectores de una base, en este caso los vectores $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ en la base B_u

Sustituyendo $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)\bullet\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}=(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$ en $\vec{x}=(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)\bullet\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}_{B_v}=(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)\bullet\begin{pmatrix}2\\ 0\\ -1\end{pmatrix}_{B_u}$

$$\vec{x}=(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)\bullet\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}_{B_v}=(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)\bullet\begin{pmatrix}2\\ 0\\ -1\end{pmatrix}_{B_u}$$

Comparando ambos miembros nos encontramos que $\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}_{B_v}$ representan las coordenadas del vector en la base B_u. Como las coordenadas de un vector en una base son únicas podemos decir que

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}_{B_v}=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ -1\end{pmatrix}_{B_u}$$

En general:

Dado un vector $\vec{x}$ cuyas coordenadas en base B_v (FILA) vienen dadas por X_v (vector columna) y cuyas coordenadas en base B_u (FILA) vienen dadas por X_u (vector columna)

podremos escribir: $\vec{x}=B_v\bullet X_v=B_u\bullet X_u$

Si la relación entre ambas bases viene dada por $B_u\bullet P=B_v$ sustituiremos esta relación en la expresión del vector $\vec{x}$

$$\vec{x}=\overbrace{(B_u\bullet P)}^{B_v}\bullet X_v=B_u\bullet X_u$$

Propiedad asociativa de $\bullet$: $\vec{x}=B_u\bullet(P\bullet X_v)=B_u\bullet X_u$

Y finalmente $X_u=P\bullet X_v$

A la matriz P se le llama: matriz cambio de base B_v a base B_u

Esquema: $B_v \xrightarrow{P} B_u$

$$\boxed{B_v=B_u\bullet P}$$

$$\vec{x}=B_v\bullet X_v \quad = \quad B_u\bullet X_u$$

$$\vec{x}=\overbrace{(B_u\bullet P)}^{B_v}\bullet X_v \quad = \quad B_u\bullet X_u \qquad \boxed{X_u=P\bullet X_v}$$

D3.1– MATRIZ DE CAMBIO DE BASE

Dado un espacio vectorial de dimensión n y dos bases distintas B_u y B_v. Se llama "matriz de cambio de base de B_v a B_u" a la matriz P cuyas columnas son las coordenadas de la base B_v en la base B_u.

♥ **ER 3.4.-** Dadas las bases $B_u=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ y $B_V=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ y el vector $\vec{x}$ de coordenadas $(2,1,0)$ en la base B_V. Calcular las coordenadas de este vector en la base B_u sabiendo que:

$$\begin{cases}\vec{v}_1=(2)\circ\vec{u}_1+(-1)\circ\vec{u}_2+(1)\circ\vec{u}_3\\ \vec{v}_2=(-1)\circ\vec{u}_2+(2)\circ\vec{u}_3\\ \vec{v}_3=(-1)\circ\vec{u}_1+(1)\circ\vec{u}_2+(-3)\circ\vec{u}_3\end{cases}$$

Matriz de cambio de base de B_V a B_u: $P=\begin{pmatrix}2&0&-1\\-1&-1&1\\1&2&-3\end{pmatrix}$ $\qquad B_v\xrightarrow{P}B_u$

$$B_v=B_uP$$

$\vec{x}$: coordenadas en B_V: $X_v=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{x}=B_VX_v$

$$\vec{x}=B_VX_v=B_uX_u$$

coordenadas en B_u: $X_u=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{x}=B_uX_u$

$$\overbrace{(B_u\bullet P)}^{B_V}\bullet X_v=B_u\bullet X_u$$

$$X_u=P\bullet X_v$$

$X_u=P\bullet X_v=\begin{pmatrix}2&0&-1\\-1&-1&1\\1&2&-3\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-3\\4\end{pmatrix}$ Las coordenadas X_u en base B_u son $(4,-3,4)$

♥♥♥♥♥

ER 3.5.- Expresar el vector $(-1,0,4)_{BC}$ en la base $B=\{(1,3,-1),(-1,1,0),(0,2,0)\}$ de R^3 calculando previamente la matriz de cambio de base necesaria.

Queremos hacer el cambio de base: Base Canónica $\xrightarrow{P}$ B

Matriz de cambio de base de BC a B es la que tiene como **columnas** los vectores de la **base canónica** expresados en la base B.

En este problema es muy sencillo calcular la matriz cambio de base contraria es decir $B\xrightarrow{Q}BC$

Q es la matriz cuyas columnas son las corrdenadas de los vectores de B en la Base Canónica es decir

$Q=\begin{pmatrix}1&-1&0\\3&1&2\\-1&0&0\end{pmatrix}$ $\qquad B=BC\bullet Q$ $\qquad$ y como consecuencia $\vec{x}=BC\bullet X_{BC}=B\bullet X_B$

$$\vec{x}=BC\bullet X_{BC}=BC\bullet Q\bullet X_B$$

Como lo que buscamos es X_B la despejaremos $\qquad X_{BC}=Q\bullet X_B$

de la ecuación matricial: $Q^{-1}\bullet X_{BC}=Q^{-1}\bullet Q\bullet X_B$ $\qquad X_B=Q^{-1}\bullet X_{BC}$

$Q^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&0&-1\\1/2&1/2&2\end{pmatrix}$ $\qquad X_B=Q^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&0&-1\\1/2&1/2&2\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-3\\7.5\end{pmatrix}$