Teoria de grafs

Grau en Enginyeria Telemàtica

Juan Gabriel Gomila

Grau en Enginyeria Telemàtica

Universitat de les Illes Balears

juangabriel.gomila@uib.es

15 de diciembre de 2017

Índex

1 Teoria de Grafs
- Una mica d'historia
- Per què me pot servir un graf?

2 El concepte de graf
- Definició geomètrica de graf
- Definició algebraica de graf

3 Grafs i Matrius
- Representació matricial
- Isomorfisme de grafs
- Grafs d'Euler i grafs de Hamilton

4 Arbres i connectivitat
- Connectivitat
- Arbre generador minimal

1 Teoria de Grafs
- Una mica d'historia
- Per què me pot servir un graf?

2 El concepte de graf
- Definició geomètrica de graf
- Definició algebraica de graf

3 Grafs i Matrius
- Representació matricial
- Isomorfisme de grafs
- Grafs d'Euler i grafs de Hamilton

4 Arbres i connectivitat
- Connectivitat
- Arbre generador minimal

1 Teoria de Grafs
- Una mica d'historia
- Per què me pot servir un graf?

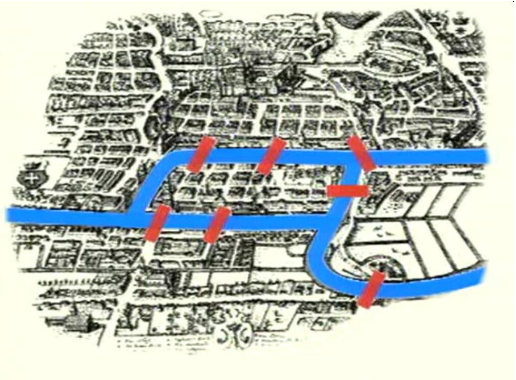
2 El concepte de graf
- Definició geomètrica de graf
- Definició algebraica de graf

3 Grafs i Matrius
- Representació matricial
- Isomorfisme de grafs
- Grafs d'Euler i grafs de Hamilton

4 Arbres i connectivitat
- Connectivitat
- Arbre generador minimal

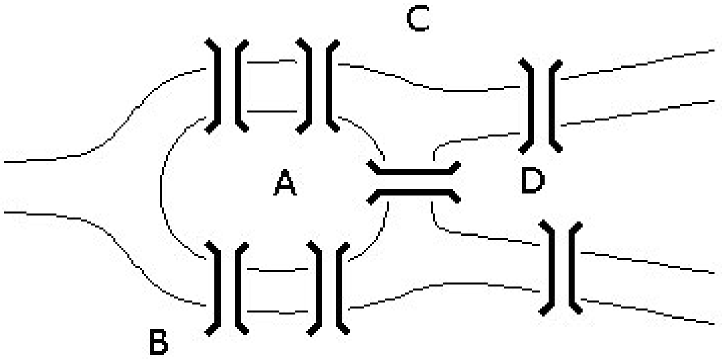
D'on venen els grafs

La teoria de grafs és una branca de la matemàtica que ha sorgit i s'ha desenvolupat per donar solucions a problemes molt concrets. El problema que la majoria d'autors assenyalen com a l'origen de la teoria de grafs és el **problema dels ponts de Königsberg**



D'on venen els grafs

Durant el segle XVIII, la ciutat de Künigsberg (la Prúsia Oriental(estava dividida en quatre zones pel riu Prevel. Hi havia set punts que comunicaven aquestes regions com demostra el dibuix.

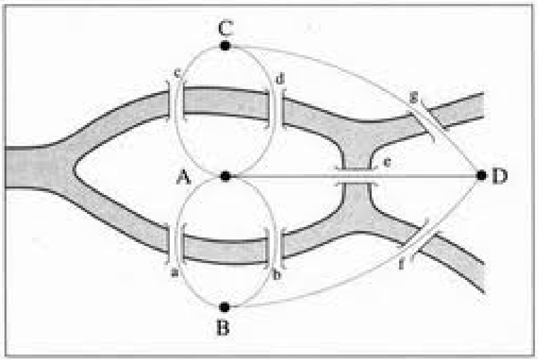


D'on venen els grafs

Els habitants de la ciutat no tenien biofestes ni univerlands, i enlloc de tenir les mateixes necessitats que vosaldres, volien trobar, si era possible una manera de passejar per la ciutat que els permetès anar d'una determinada regio, creuar cada pont una única vegada i tornar al lloc de partida.

D'on venen els grafs

Per a resoldre aquest problema, Euler va representar les quadre zones de la ciutat per quatre punts i els ponts per arestes que uneixen els punts, tal i com es veu a la figura



D'on venen els grafs

Actualment, la teoria de grafs s'aplica dins i fora de les matemàtiques i segueix sent una branca d'investigació molt activa. Les seves aplicacions són molt importants a l'enginyeria i resulten de gran utilitat per a la representació de dades, disseny de xarxes de telecomunicació...

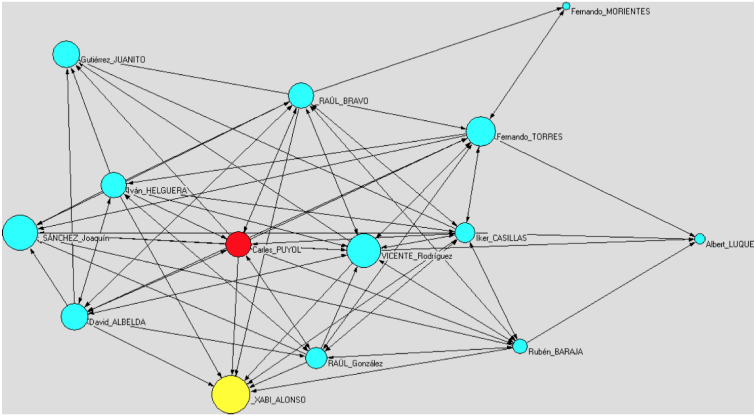
1 Teoria de Grafs
- Una mica d'historia
- Per què me pot servir un graf?

2 El concepte de graf
- Definició geomètrica de graf
- Definició algebraica de graf

3 Grafs i Matrius
- Representació matricial
- Isomorfisme de grafs
- Grafs d'Euler i grafs de Hamilton

4 Arbres i connectivitat
- Connectivitat
- Arbre generador minimal

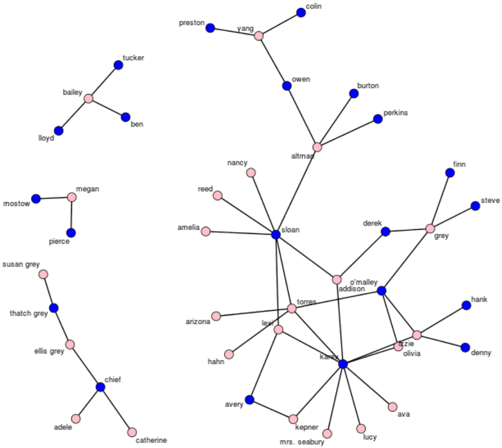
Els xuts de la selecció



Per saber les relacions entre passades i xuts dels jugadors de la selecció espanyola en el partit Espanya - Portugal del 2004

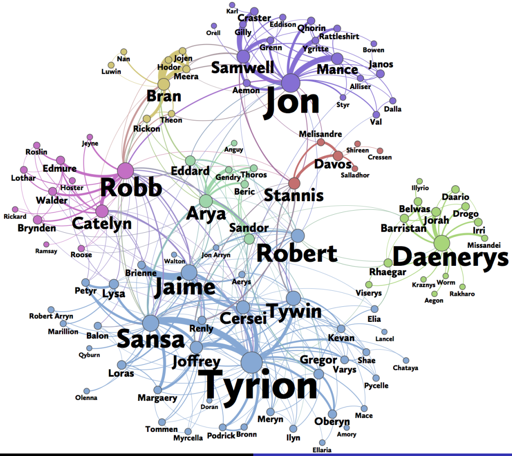
Relacions sexuals a Anatomia de Grey

Per representar totes les relacions sexuals a Anatomia de Grey i preveure quines hi haurà a les pròximes temporades (spoiler!)



Relacions entre personatges de Game of Thrones

Per representar les relacions i relevància dels personatges de GoT (en particular del llibre Storm of Swords)



1. Teoria de Grafs
   - Una mica d'historia
   - Per què me pot servir un graf?
2. El concepte de graf
   - Definició geomètrica de graf
   - Definició algebraica de graf
3. Grafs i Matrius
   - Representació matricial
   - Isomorfisme de grafs
   - Grafs d'Euler i grafs de Hamilton
4. Arbres i connectivitat
   - Connectivitat
   - Arbre generador minimal

Què és un graf?

Els grafs poden ser considerats formalment com a diagrames (representacions geomètriques) o bé algebraicament com un parell de conjunts (representacions algebraiques). Vegem ambdós tipus de definicions.

1 Teoria de Grafs
- Una mica d'historia
- Per què me pot servir un graf?

2 El concepte de graf
- Definició geomètrica de graf
- Definició algebraica de graf

3 Grafs i Matrius
- Representació matricial
- Isomorfisme de grafs
- Grafs d'Euler i grafs de Hamilton

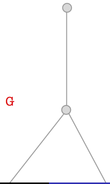
4 Arbres i connectivitat
- Connectivitat
- Arbre generador minimal

Definició geomètrica de graf

Definició

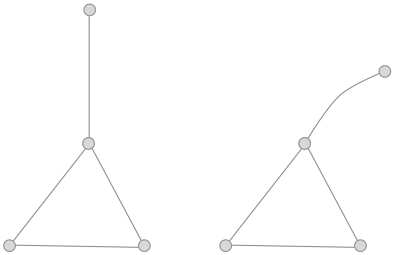
Geomètricament, un graf G és un conjunt de punts a l'espai, alguns dels quals estan units entre ells mitjançant línies.

Aquest graf pot simbolitzar per exemple un mapa de carreteres on els punts representen cuitats i les línies representen les carreteres que les uneixen. En aquest cas, el graf ens pot informar de les possibles comunicacions que existeixen entre les ciutats, però també aquest graf G podria esquematitzar un circuït elèctric.



Definició geomètrica de graf

Hem de fer notar que un graf només conté informació sobre la connectivitat entre punts i no dóna informació geomètrica en sentit euclidià (distàncies, àngles...) Així els següents diagrames representen el mateix graf.



1 Teoria de Grafs
- Una mica d'historia
- Per què me pot servir un graf?

2 El concepte de graf
- Definició geomètrica de graf
- Definició algebraica de graf

3 Grafs i Matrius
- Representació matricial
- Isomorfisme de grafs
- Grafs d'Euler i grafs de Hamilton

4 Arbres i connectivitat
- Connectivitat
- Arbre generador minimal

Definició algebraica de graf

Definició

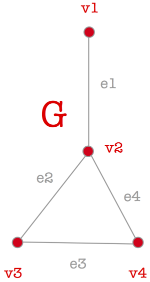
Un graf G es defineix com un parell ordenat de conjunts $G = (V, E) = (V(G), E(G))$ on

- V és un conjunt no buid de punts $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ anomenat **vèrtexs**, i
- E és un conjunt de parells no ordenats d'elements de V, anomenats **arestes**

Si dos vèrtexs u, v estan units per la mateixa aresta, aleshores direm que són **adjacents** i es representarà la seva aresta per $\{u, v\}$ En aquest cas també direm que u i v són **incidents** a l'aresta $\{u, v\}$

Definició algebraica de graf

Per representar algebraicament un graf és necessari poder distingir els vèrtexs i les arestes. Així



$$G = (V(G), E(G))$$

$$V = V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}; \quad E = E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

on $e_1 = \{v_1, v_2\}, e_2 = \{v_2, v_3\}, e_3 = \{v_3, v_4\}, e_4 = \{v_2, v_4\}$

Definició algebraica de graf

Definicions

- El nombre de vèrtexs del graf G, $|V(G)|$ s'anomena l'**ordre del graf**.
- El nombre d'arestes del graf G, $|E(G)|$ s'anomena la **mida del graf**.

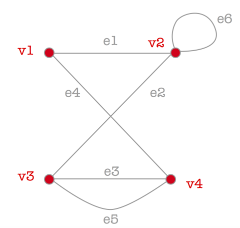
Graf trivial

Un graf G és finit si $|V(G)|$ i $|E(G)|$ són finits. Si un graf finit, té un vèrtex i no té cap aresta, li direm graf trivial (correspon a un sol punt)

Definició algebraica de graf

Exemple

El següent diagrama no correspon a un graf ja que conté



- Arestes múltiples: les arestes e_4 i e_5 uneixen els vèrtexs v_3 i v_4 (multigraf).
- Bucles: l'aresta e_6 uneix el vèrtex v_2 amb ell mateix (pseudograf).

Definició algebraica de graf

Exemple

Notem que en aquest cas,

$$E(G) = \{e_1 = \{v_1, v_2\}, e_2 = \{v_2, v_3\}, e_3 = \{v_3, v_4\},$$

$$e_4 = \{v_1, v_4\}, e_5 = \{v_3, v_4\}, e_6 = \{v_2, v_2\}\}$$

$E(G)$ no és un conjunt, ja que té els elements repetits $\{v_3, v_4\}$, és a dir, les arestes e_3 i e_5 i l'aresta e_6 comença i acaba en el mateix vèrtex.

Definició algebraica de graf

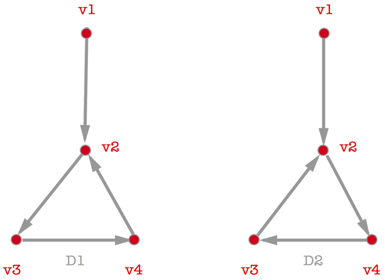
La definició de graf donada anteriorment es correspon amb la definició que diversos autors donen de **graf simple**. I quan es permeten arestes múltiples i/o bucles com els de l'exemple anterior, l'entenen com a **graf general**.

Grafs dirigits

Un altre concepte que resulta útil és el de digraf o graf dirigit

Digraf

SIgui G un graf simple (o graf general). Si a cada aresta se li assigna un sentit, direm que és un **digraf**.



Grau d'un vèrtex

Arestes incidents

Direm que una aresta e és **incident** amb un vèrtex v si v és extrem de e.

Grau d'un vèrtex

El grau d'un vèrtex v, $gr(v)$ és igual al nombre d'arestes que són incidents amb v.

Grau d'un vèrtex

Com que cada aresta és incident amb dos vèrtexos, tenim el següent resultat útil

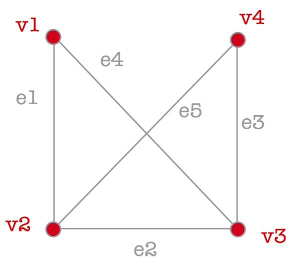
Teorema

Sigui $G = (V, E)$ un graf, $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, aleshores la suma dels graus dels vèrtexs de G és igual al doble del nombre d'arestes

$$\sum_{i=1}^{n} gr(v_i) = 2|E|$$

Grau d'un vèrtex

Exemple



$$gr(v_1) = 2 \quad gr(v_2) = 3 \quad gr(v_3) = 3 \quad gr(v_4) = 2$$

$$\sum_{i=1}^{n} gr(v_i) = 2 + 3 + 3 + 2 = 10 = 2 \cdot 5 = 2|E|$$

Grau d'un vèrtex

Definició

Un vèrtex és parell o imparell segons que el seu grau sigui parell o imparell.

Teorema

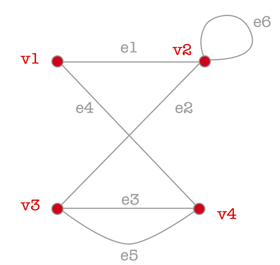
El nombre de vèrtex de grau senar d'un graf sempre és parell

Nota

El teorema anterior també és vàlid per a grafs generals

Grau d'un vèrtex

Exemple



$$gr(v_1) = 2 \quad gr(v_2) = 4 \quad gr(v_3) = 3 \quad gr(v_4) = 3$$

$$\sum_{i=1}^{n} gr(v_i) = 2 + 4 + 3 + 3 = 12 = 2 \cdot 6 = 2|E|$$

Grau d'un vèrtex

Exercicis

1. Dibuixau, si és possible, un graf amb 5 vèrtexs, de manera que el grau de cada vèrtex sigui 3.
2. Dibuixau, si és possible, un graf amb 5 vèrtexs, de manera que el grau de cada vèrtex sigui 2.

Camins

En un graf que representi, per exemple, una xarxa de comunicacions és important conèixer l'existència de camins que recorrin totes les arestes o tots els vèrtexs i que, en certa manera, siguin els més econòmics. Per això veurem les següents definicions bàsiques (la nomenclatura que donam aquí no és única, hi ha autors que donen noms diferents.

Camins

Definició

Un camí en un graf G és una seqüència finita alternada de vèrtexs i arestes de G:

$$v_0 \to e_1 = \{v_0, v_1\} \to v_1 \to e_2 = \{v_1, v_2\} \cdots e_n = \{v_{n-1}, v_n\} \to v_n$$

$$v_0, e_1, v_1, e_2 \cdots e_n, v_n$$

on cada aresta té per extrems els vèrtexs immediataments precedent o següent de la seqüència. Per la qual cosa, el camí també pot representar-se per la seqüència de vèrtexs: $v_0, v_1, \cdots, v_n$.

Camins

Extrems del camí

Els vèrtexs v_0 i v_n s'anomenen els extrems del camí i hom diu que el camí va de v_0 a v_n o que connecta v_0 amb v_n.

Longitud del camí

La longitud del camí és el nombre d'arestes que conté.

Camins

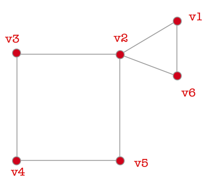
Classificació dels camins

- Recorregut: camí sense arestes repetides.
- Camí simple: recorregut sense vèrtexs repetits excepte el primer i l'últim.
- Camí tancat: camí en el qual els seus extrems coincideixen, és a dir, si comença i acaba en el mateix vèrtex. En cas contrari, el camí és obert.
- Circuit: recorregut tancat.
- Cicle: circuit que també és camí simple

Camins

Classificació dels camins

Donat el graf classificau els següents camins



- $v_2 \, v_3 \, v_4 \, v_5 \, v_2$
- $v_2 \, v_3 \, v_4 \, v_5$
- $v_6 \, v_2 \, v_3 \, v_4 \, v_5 \, v_2 \, v_1 \, v_6$
- $v_1 \, v_2 \, v_6 \, v_1$

Connectivitat

Existeixen grafs en els quals per a cada parell de vèrtexs v_i, v_j hi ha, almenys, un possible camí que els connecta i altres casos en els quals és impossible unir dos vèrtexs donats.

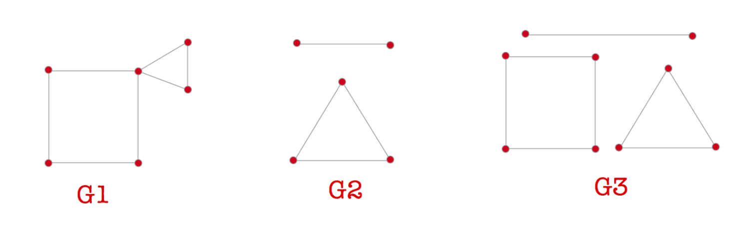
Connectivitat

Graf connex

Un graf G es diu que és connex si existeix un camí simple entre qualssevol parell de vèrtexs v_i, v_j.
En cas contrari, el graf és no connex i els vèrtexs v_i i v_j pertanyen a diferents components connexes del graf.
El nombre de components connexes d'un graf el notam per $K(G)$.

Connectivitat

Exemple



G_1 és un graf connex, metres que G_2 i G_3 no ho son.
$K(G_1) = 1, K(G_2) = 2, K(G_3) = 3.$

1 Teoria de Grafs
- Una mica d'historia
- Per què me pot servir un graf?

2 El concepte de graf
- Definició geomètrica de graf
- Definició algebraica de graf

3 Grafs i Matrius
- Representació matricial
- Isomorfisme de grafs
- Grafs d'Euler i grafs de Hamilton

4 Arbres i connectivitat
- Connectivitat
- Arbre generador minimal

1 Teoria de Grafs
- Una mica d'historia
- Per què me pot servir un graf?

2 El concepte de graf
- Definició geomètrica de graf
- Definició algebraica de graf

3 Grafs i Matrius
- Representació matricial
- Isomorfisme de grafs
- Grafs d'Euler i grafs de Hamilton

4 Arbres i connectivitat
- Connectivitat
- Arbre generador minimal

Representació matricial dels grafs

Definició

Sigui $G = (V, E)$ un graf simple amb $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. Es defineix la seva matriu d'adjacència com la matriu quadrada

$$A(G) = (a_{ij})_{n\times n} = \begin{cases} 1 & si\ v_i\ i\ v_j\ son\ adjacents \\ 0 & altrament \end{cases}$$

Notem que $A(G)$ és una matriu simètrica i que $a_{ii} = 0\ \forall\ i = 1, \cdots, n$.
La matriu d'adjacència no és única (depèn de l'ordenació dels vèrtexs).

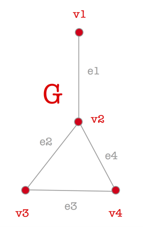
Representació matricial dels grafs

Definició

- Si $G = (V, E)$ és un graf general $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, es defineix $A(G) = (a_{ij})_{n\times n}$ on a_{ij} és el nombre d'arestes que uneixen v_i amb v_j. Aleshores, $A(G)$ és simètrica.
- Si $G = (V, E)$ és un digraf $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, es defineix $A(G) = (a_{ij})_{n\times n}$ on a_{ij} és el nombre d'arestes que uneixen v_i amb v_j. Aleshores, $A(G)$ no és simètrica.

Representació matricial dels grafs

Exemple

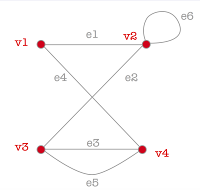


$$A(G) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Amb $a_{ij} \in \{0, 1\}$ i $a_{ii} = 0$

Representació matricial dels grafs

Exemple



$$A(G) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

El aquest cas a_{ij} pot ser més gran que 1 ja que el graf té arestes múltiples i $a_{ii} \neq 0$ (bucles)

Representació matricial dels grafs

Teorema

Sigue $A(G)$ la matriu d'adjacència d'un graf amb n vèrtexs. Aleshores l'entrada (i, j) de la matriu A^m ens dóna el nombre de camins de longitud m que connecten els vèrtexs v_i i v_j.

Representació matricial dels grafs

Exemple

Si consideram la matriu de l'exemple anterior

$$A(G) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenim que

$$A^2(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} ; \; A^3(G) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Representació matricial dels grafs

Exemple

Considerem per exemple l'element a_{14} d'aquestes tres matrius.

- L'element a_{14} de $A(G)$ és zero, això indica que no hi ha cap camí entre els vèrtexs v_1 i v_4, però això no indica que no es puguin connectar aquests vèrtexs.
- L'element $a_{14} \in A^2(G)$ prem el valor 1, indicant així que existeix un camí de longitud 2 que connecta v_1 i v_4. Aquest camí serà $v_1 v_2 v_4$.
- L'element $a_{14} \in A^3(G)$ pren el valor 1, aleshores existeix un camí de longitud 3 que connecta v_1 i v_4. Aquest camí serà $v_1 v_2 v_3 v_4$.

1 Teoria de Grafs
- Una mica d'historia
- Per què me pot servir un graf?

2 El concepte de graf
- Definició geomètrica de graf
- Definició algebraica de graf

3 Grafs i Matrius
- Representació matricial
- Isomorfisme de grafs
- Grafs d'Euler i grafs de Hamilton

4 Arbres i connectivitat
- Connectivitat
- Arbre generador minimal

Isomorfisme de grafs

Definició

Siguin $G(V, E)$ i $G'(V', E')$ dos grafs (o grafs generals sense bucles) i $f : V \longrightarrow V'$ una aplicació bijectiva tal que

$$\{u, v\} \in E \iff \{f(u), f(v)\} \in E'$$

Aleshores direm que f és un isomorfisme entre G i G' o que G i G' són grafs isomorfs.

En general no és fácil determinar quan dos grafs són o no són isomorfs.
Es clar que si dos grafs són isomorfs han de tenir el mateix nombre de vèrtexs i igual nombre d'arestes, però això no és suficient.

Isomorfisme de grafs

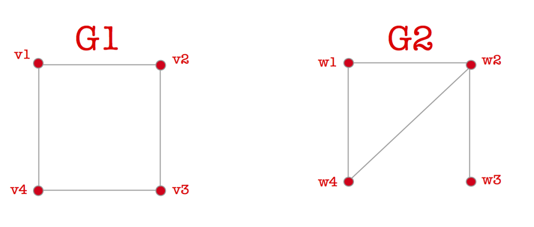
Teorema

Si G i G' són grafs isomorfs, aleshores

$$si\ v \in V \Longrightarrow gr(v) = gr(f(v))$$

Isomorfisme de grafs

Exemple



G i G' tenen el mateix nombre d'arestes i el mateix nombre d'arestes.
$\forall\ v \in V(G),\ gr(v) = 2$, però en canvi $gr(w_3) = 1$, per tant G i G' no poden ser isomorfs.

1 Teoria de Grafs
- Una mica d'historia
- Per què me pot servir un graf?

2 El concepte de graf
- Definició geomètrica de graf
- Definició algebraica de graf

3 Grafs i Matrius
- Representació matricial
- Isomorfisme de grafs
- Grafs d'Euler i grafs de Hamilton

4 Arbres i connectivitat
- Connectivitat
- Arbre generador minimal

Grafs d'Euler

Definició

Sigui G un graf connex

- Un camí eulerià és un recorregut en el qual apareixen totes les arestes.
- Un circuit eulerià és un camí eulerià tancat.
- Un graf eulerià és un graf amb un circuit eulerià.

Grafs d'Euler

Teorema

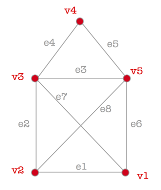
Sigui G un graf aleshores

- Si G té un cirucit eulerià, el grau de cada vèrtex és parell
- Si G té un camí eulerià, el graf G té exactament dos vèrtexs de grau imparell (exactament els vèrtexs on comença i acaba el camí).

Grafs d'Euler

Exemple

Considerem el graf següent:



La seqüencia $e_2\ e_4\ e_5\ e_8\ e_1\ e_7\ e_3\ e_6$ és un camí eulerià

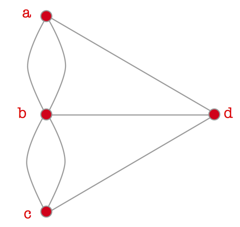
$$gr(v_1) = 3, gr(v_2) = 3, gr(v_3) = 4, gr(v_4) = 2, gr(v_5) = 4$$

Tenim dos vèrtexs de grau 3, el camí eulerià comença en un d'ells i acaba en l'altre.

Grafs d'Euler

Exemple

Considerem el graf que representa els ponts de Königsberg.



Observam que a, c i d tenen grau 3 i que b té grau 5. Com que tots els vèrtexs tenen grau imparell podem deduir que no existeix cap circuit eulerià. Per tant, el problema dels ponts de Königsberg no té solució.

Grafs de Hamilton

Definició

Sigui G un graf

- Un camí de Hamilton és un camí que recorre tots els vèrtexs només una vegada.
- Un circuit de Hamilton és un camí de Hamilton tancat (recorre tots els vèrtexs només una vegada tret dels extrems).
- Un graf amb un circuit de Hamilton s'anomena un graf de Hamilton.

1. Teoria de Grafs
   - Una mica d'historia
   - Per què me pot servir un graf?
2. El concepte de graf
   - Definició geomètrica de graf
   - Definició algebraica de graf
3. Grafs i Matrius
   - Representació matricial
   - Isomorfisme de grafs
   - Grafs d'Euler i grafs de Hamilton
4. Arbres i connectivitat
   - Connectivitat
   - Arbre generador minimal

1 Teoria de Grafs
- Una mica d'historia
- Per què me pot servir un graf?

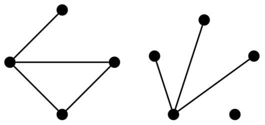
2 El concepte de graf
- Definició geomètrica de graf
- Definició algebraica de graf

3 Grafs i Matrius
- Representació matricial
- Isomorfisme de grafs
- Grafs d'Euler i grafs de Hamilton

4 Arbres i connectivitat
- Connectivitat
- Arbre generador minimal

Components connexes d'un graf

Les components connexes d'un graf són els subgrafs on tots els nodes es poden connectar.



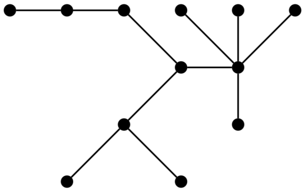
Un graf és connex si té una única component connexa. És a dir, si tot node és accessible desde tot node.

Proposició

Si $G = (V, E)$ és connex, aleshores $|E| \geq |V| - 1$

Arbres

Un arbre és un graf connex sense cicles



Arbres

Proposició

Sigui $G = (E, V)$ un graf, són equivalents:

1. G és connex i sense cicles
2. Tot parell de nodes de G està connectat per un únic camí
3. G és connex i $|E| = |V| - 1$
4. G és connex però si li treim una aresta $e \in E$ deixa de ser-ho
5. G és acíclic, però si afegim una nova aresta uv amb qualsevols $u, v \in V$ conté un cicle.

Arbres

Definició

Un arbre generador d'un graf connex és un subgraf que conté tots els nodes i és, a més, un arbre.

Proposició

Tot graf connex té sempre arbre generador

1 Teoria de Grafs
- Una mica d'historia
- Per què me pot servir un graf?

2 El concepte de graf
- Definició geomètrica de graf
- Definició algebraica de graf

3 Grafs i Matrius
- Representació matricial
- Isomorfisme de grafs
- Grafs d'Euler i grafs de Hamilton

4 Arbres i connectivitat
- Connectivitat
- Arbre generador minimal

Arbre generador minimal

Definició

- Un graf amb pesos a les arestes és un graf amb funció
$$w : E \to \mathbb{R}^+$$
.
- El pes d'un subgraf és la suma dels pesos de les seves arestes.
- Un arbre generador minimal és un arbre generador que té pes mínim.

Algorisme de Prim

Algorisme

Donat un graf $G = (V, E)$ amb pesos a les arestes, l'algorisme següent calcula un arbre generador minimal

1. Sigui $e = uv$ una aresta de pes mínim de G. Prenim

$$V_1 = \{u, v\};\ E_1 = \{E\};\ T = (V_1, E_1)$$

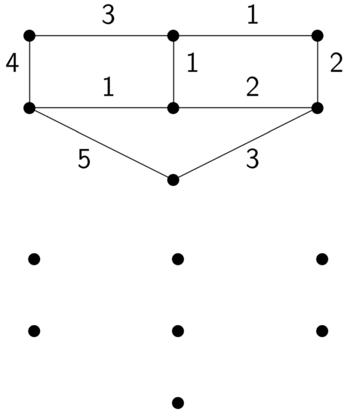
2. Per $k = 2, \cdots, |V| - 1$
   - Sigui $e_k = u_k v_k$ una aresta de pes mínim tal que

$$u_k \in V_{k-1};\ v_k \notin V_{k-1}$$

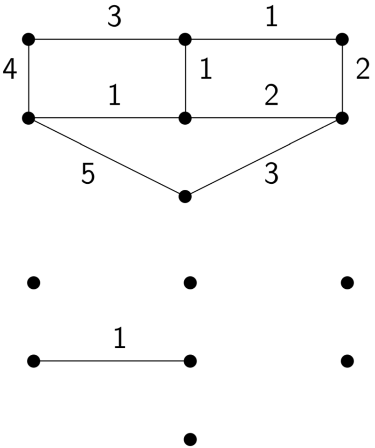
   - Feim

$$V_k = V_{k-1} \cup \{v_k\};\ E_k = E_{k-1} \cup \{e_k\};\ T = (V_k, E_k)$$

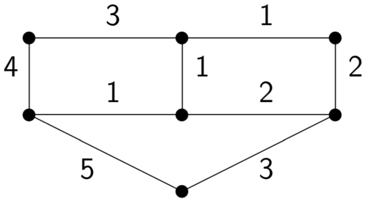
Algoritme de Prim - Exemple

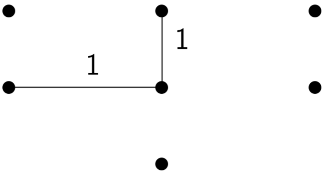


Algoritme de Prim - Exemple

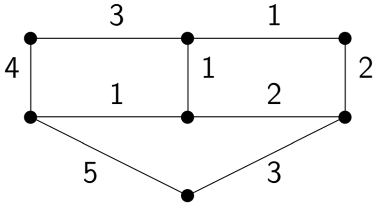


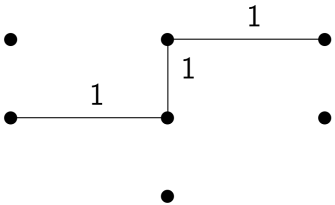
Algoritme de Prim - Exemple



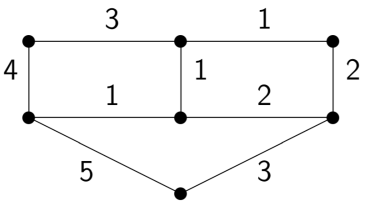


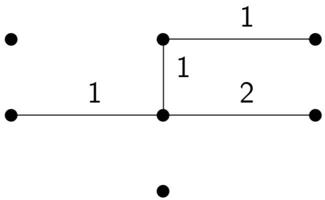
Algoritme de Prim - Exemple



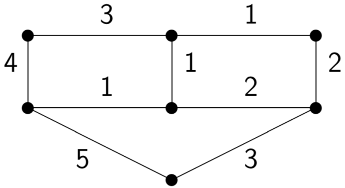


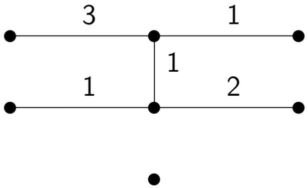
Algoritme de Prim - Exemple



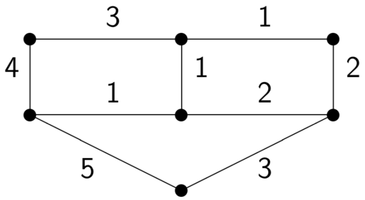


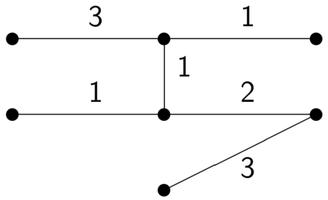
Algoritme de Prim - Exemple



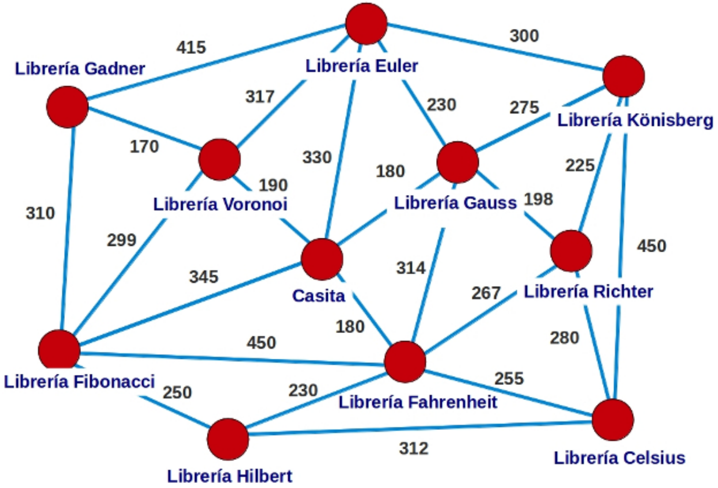


Algoritme de Prim - Exemple





Algoritme de Prim - Exercici



Algoritme de Prim - Solucio