**Problemes de Diagonalització de matrius. Treball de classe.**

**1)** Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -9 \\ 8 & 9 & 18 \\ -2 & -3 & -7 \end{pmatrix}$, comprovau que $\lambda = -1$ és un valor propi de $A$ i $(3, -6, 2)$ és un vector propi associat a $\lambda$. És el vector $(1, 2, -1)$, un vector propi associat a $\lambda = -1$?

**2)** Justificau si són o no diagonalitzables les següents matrius:

$$\textbf{a)}\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \textbf{b)}\ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**3)** Provau si són o no diagonalitzables les següents matrius de $M_3(\mathbb{R})$ i, en cas de que ho siguin, trobau una matriu $P$ de vectors propis i la matriu diagonal.

$$\textbf{a)}\ A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \textbf{b)}\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{c)}\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

**4)** Discutiu, segons els valors del paràmetre real $a$, la diagonalització de les següents matrius. Quan sigui possible, donau una matriu $P$ de vectors propis i la matriu diagonal.

$$\textbf{a)}\ \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad \textbf{b)}\ \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & a+1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{c)}\ \begin{pmatrix} a & 1 & a-1 \\ 1 & 2a & -1 \\ 2a+1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

**5)** Estudiau, segons els valors dels paràmetres reals $\alpha, \beta$, la diagonalització de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} \alpha+1 & \alpha+\beta & \beta \\ -\alpha & -\alpha & -1 \\ \alpha & \alpha-1 & 0 \end{pmatrix}$$

**6)** Sigui $A$ la matriu real, quadrada d'ordre $p$, amb tots els coeficients iguals a 1.

**a)** Demostrau que $A^n = p^{n-1}A$, per a tot enter $n \geq 1$.

**b)** Calculau els valors propis de $A$ .

**c)** Trobau, si és possible, una matriu $P$ tal que $P^{-1}AP$ sigui diagonal i calculau $P^{-1}$.

**7)** Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Provau que $A$ és diagonalitzable.

2. Calculau $A^n$ per a tot $n \geq 1$.

3. Provau que $p_A(A) = 0$, on $p_A(x)$ és el polinomi característic de la matriu $A$.

**8)** Donades les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calculau, utilitzant el teorema de Cayley-Hamilton, $A^{-1}$, $B^4$, i $B^5$.

**9)** Donat $a \in \mathbb{R}$, considerau la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

**a)** Demostrau que $A^3 - aA^2 + 2A - I_3 = 0$.

**b)** Demostrau que $A$ és invertible i calculau $A^{-1}$.

**c)** Trobau el valor de $A^5 - aA^4 + A^3 - (1-a)A^2 - A + I_3$.

**10)** Sigui $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriu quadrada d'ordre $n$. Demostrau que els valors propis de $A$ i de $A^t$ coincideixen.

**11)** Calculau $A^n$ per a tot $n \in \mathbb{N}$, si $A$ és la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

**12)** Trobau el terme general de la successió $a_n/b_n$ definida per

$$a_1 = b_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 2b_n, \quad b_{n+1} = a_n + b_n \quad \text{per a tot} \quad n \in \mathbb{N}$$

**13)** Considerau les successions definides recurrentment per a tot $n \geq 1$ per:

$$u_n = -4u_{n-1} - 6v_{n-1} \quad v_n = 3u_{n-1} + 5v_{n-1} \quad w_n = 3u_{n-1} + 6v_{n-1} + 5w_{n-1}$$

Calculau $u_n, v_n, w_n$ en funció de $u_0, v_0, w_0$.