

### Grafs III

#### **Prob 4, examen Febrer 2012**

El nou govern ha decidit renovar una xarxa de carreteres entre 8 ciutats diferents, anomenades  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $G$  i  $H$ . La xarxa de carreteres existents ve representada a la taula següent, on els nombres indiquen l'existència de carretera i el cost de renovació de la mateixa.

|   | B | C  | D  | E  | F  | H  |
|---|---|----|----|----|----|----|
| A | 6 | 6  | 10 | 13 |    | 5  |
| B |   | 7  |    |    |    | 6  |
| D | 8 | 8  |    | 5  | 12 |    |
| F |   |    |    | 11 |    | 9  |
| G |   | 6  |    | 5  | 10 | 10 |
| H |   | 12 | 8  |    |    |    |

**Nota:** Totes les carreteres són bidireccionals, tot i que a la taula només s'indica un dels sentits per a cada carretera.

Es demana:

- (a) El director general corresponent ha de recórrer tots els trams de carretera per comprovar l'estat de les mateixes. Ho podria fer sense passar dues vegades per la mateixa carretera?
- (b) Una vegada que el director general ha visitat tots els trams de carretera, decideix fer una visita de cortesia a tots els batles de les diferents ciutats per saber el seu parer i, per tant, ha d'anar a cada ciutat. Pot fer la visita a tots els batles sense tenir que passar dues vegades per la mateixa ciutat?
- (c) Finalment, veuen que tenen doblers assignats al pressupost per renovar alguns trams de carreteres però no tots. Quins trams de carretera haurien de renovar de forma que el pressupost invertit fos el mínim possible i de forma que totes les ciutats quedassin connectades per trams renovats?

**Observació:** El problema s'ha de plantejar a partir de la teoria de grafs donada, justificant les respostes a partir dels algorismes i els teoremes vists.

#### **Prob 5, examen Febrer 2012**

Donat un arbre binari arrelat  $T$  amb arrel  $r$ , es defineix l'*altura* d'un node qualsevol  $u$ , i s'indica per  $h(u)$ , com el màxim de les longituds dels camins que van del node en qüestió a les fulles, i es defineix la seva *profunditat*, i s'indica per  $d(u)$ , com la longitud de l'únic camí que va de l'arrel al node en qüestió.

Demostreu que si  $T$  té  $n$  fulles, aleshores  $h(u) + d(u) \leq n - 1$  per a tot node  $u$  de  $T$ .

### Prob 3, examen Setembre 2012

La matriu següent representa la matriu d'adjacència del graf que relaciona set jugadors diferents d'un joc en xarxa.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Els vèrtexs del graf representen els diferents jugadors, i dos vèrtexs són adjacents si, i només si, els jugadors corresponents s'han seleccionat com a contrincants. Sense representar el graf, i a partir de la informació de la matriu d'adjacència, responeu les següents preguntes de manera justificada i relacionant-les amb la teoria de grafs:

- (a) Si cada jugador juga una partida amb cadascun dels seus contrincants, quantes partides es duran a terme?
- (b) És el graf un arbre?
- (c) Si un jugador guanya a un altre, aquest pot triar, com a següent oponent seu, un dels contrincants del jugador a qui ha guanyat. Si el jugador va guanyant totes les partides que juga i no repeteix cap contrincant contra el que ja ha jugat, podria d'aquesta forma jugar contra tots els altres jugadors?
- (d) És el graf un graf bipartit?