Examen Parcial de Matemàtica Discreta — Gener 2015

1. Resoleu el sistema de congruències següent **1.5 pt**

$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{7} \\ x \equiv 4 \pmod{9} \\ x \equiv 2 \pmod{2} \end{cases}$$

Per a resoldre el sistema de congruències emprarem el Teorema xinès dels residus.

Primer de tot, cal assegurar-se de que aquest sistema tendrà solució. Per a fer-ho, emprarem el resultat que ens diu: *Si $M_1, \ldots, M_k$ són nombres positius relativament primers dos a dos, llavors el sistema de congruències $x \equiv a_i$ (mod M_i), $i = 1, \ldots, k$, té sempre solució.* Notem que pel nostre cas particular els nombres 7, 9 i 2 són relativament primers dos a dos ($\text{mcd}(7,9) = 1$, $\text{mcd}(7,2) = 1$ i $\text{mcd}(9,2) = 1$), i per tant el sistema tindrà solució.

Per a trobar la solució al sistema de 3 equacions amb congruències, resoldrem primer el sistema per a dues d'elles (és igual quines); per exemple, les dues primeres. Anem a resoldre doncs el sistema:

$$\begin{cases} x \equiv 5 \text{ (mod 7)} \\ x \equiv 4 \text{ (mod 9)} \end{cases}$$

Les solucions d'aquest sistema compleixen que existeixen y, z nombres enters tals que

$$x = 5 + 7y = 4 + 9z,$$

d'on tenim que

$$9z + 7(-y) = 1.$$

Fent servir l'algoritme estès d'Euclides obtenim la solució

$$9 \cdot (-3) + 7 \cdot (4) = 1$$

i, per tant, podem prendre $y = -4$ i $z = -3$. Aleshores

$$x = 4 + 9 \cdot (-3) = -23$$

és una solució del sistema.

Un cop obtinguda una solució particular del sistema, totes les solucions d'aquest són les de la congruència

$$x \equiv -23 \text{ (mod mcm}(7,9))$$

és a dir

$$x \equiv -23 \text{ (mod 63)}.$$

Així doncs la solució del sistema format per les dues primeres equacions és

$$x \equiv 40 \pmod{63},$$

ja que $40 = -23 + 63 \cdot 1$.

Un cop obtinguda la solució del sistema format per les dues primeres equacions caldrà resoldre el sistema format per aquesta darrera i per la que ens manca del sistema inicial. És a dir, haurem de resoldre el sistema en congruències

$$\begin{cases} x \equiv 40 \pmod{63} \\ x \equiv 2 \pmod{2} \end{cases}$$

Notem que resoldre l'equació $x \equiv 2 \pmod{2}$, és equivalent a resoldre l'equació $x \equiv 0 \pmod{2}$, perquè el reste de dividir 2 entre 2 és 0. Així doncs, qualssevol nombre parell és solució de l'equació $x \equiv 0 \pmod{2}$. En particular $x = 40$ n'és una solució.

Per tant, $x = 40$ és una solució particular del sistema

$$\begin{cases} x \equiv 40 \pmod{63} \\ x \equiv 2 \pmod{2} \end{cases}$$

Procedint com en el cas anterior, totes les solucions d'aquest sistema, i per tant, totes les solucions dels sistema de l'enunciat, són les de la congruència

$$x \equiv 40 \pmod{\mathrm{mcm}(63, 2)}$$

és a dir

$$x \equiv 40 \pmod{126}.$$

Això vol dir que qualssevol x de la forma $x = 40 + 126k$ per algún k enter, és solució del sistema.

2. Una parella està fent el banquet de la seva boda en un restaurant. Hi ha una taula rectangular gran per asseure els amics i una taula rectangular molt més petita on hi seuen els nuvis i els pares d'aquests. En la taula dels amics hi caben 60 persones, de les quals 6 seuen als costats curts (3 a cadascun) i la resta repartits a parts iguals en els dos costats llargs de la taula. Tots els asseguts en una banda de la taula gran veuen de front la taula dels nuvis i, els de l'altra banda, els donen l'esquena. En la taula dels nuvis seuen tots en la mateixa banda deixant els extrems i la banda oposada desocupats. **5 pt**

   (a) De quantes maneres es poden asseure a la taula dels nuvis si, tant els nuvis com els respectius pares, han de seure cadascú al costat de la seva parella i els nuvis ocupen les 2 cadires centrals?

Si els nuvis ocupen les dues cadires centrals, els nuvis es poden asseure de dues maneres. Per a cada una de les posicions dels nuvis tenim dues opcions per als respectius pares, i per a cada opció dels pares, dues opcions més (mare/pare o pare/mare). Així doncs tenim $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ maneres d'asseure's a la taula dels nuvis.

(b) El nuvi ha convidat 38 amics, i la núvia n'ha convidat 28 (alguns són amics comuns) de manera que hi ha 60 amics en total.

Els que són únicament amics del nuvi volen ocupar completament un dels costats llargs de la taula, sense importar-los quina, i els que no caben a aquest costat es volen asseure tots junts. Els que són únicament amics de la núvia són més oberts i els és igual asseure, o no, tots junts. Els amics comuns han de seure en els costats curts de la taula. De quantes formes es poden asseure tots els amics en la taula gran?

Si en total hi ha 60 amics, 38 del nuvi i 28 de la núvia, pel principi d'inclusió/exclusió sabem que hi ha 6 amics comuns, que són els que seuen als costats curts de la taula. Per tant hi ha $6!$ maneres d'asseure els amics comuns. Pel que fa als amics únicament del nuvi, que són 32, 27 se seuran a un costat de la taula i els altres 5 a l'altre costat. Hi ha $C(32, 27)$ maneres de triar els 27 amics que se seuran al mateix costat de la taula i per a cada una d'aquestes tríes, la manera en que es poden asseure els 27 amics és $27!$. A més, a l'altra costat de la taula, on s'asseuen els amics de la núvia i 5 amics del nuvi junts, hi ha $23! \cdot 5!$ (22 dels amics de la núvia i 1 pels 5 amics junts) maneres d'asseure. Finalment, dues opcions més per triar el costat de la taula on hi ha tots els amics del nuvi. En total tenim

$$2 \cdot 6! \cdot C(32, 27) \cdot 27! \cdot 5! \cdot 23! = 2 \cdot 6! \cdot 32! \cdot 23!$$

maneres d'asseure tots els amics en la taula gran.

(c) El restaurant disposa d'un gran stock de copes de 4 tipus diferents que canvien únicament segons el perfil acolorit que tenen: daurat, platejat, vermell o blanc. El cambrer vol posar una copa per cada comensal en la taula gran, de manera que hi hagi el mateix nombre de copes de cadascun dels 4 tipus. De quantes maneres ho pot fer?

Si hi ha d'haver el mateix nombre de copes de cadascun dels 4 tipus i en total són 60 copes, hi ha 15 copes de cada tipus. I les maneres en que es poden repartir es corresponen a les permutacions en repetició fixades, és a dir, $PR(60; 15, 15, 15, 15) = \frac{60!}{15!15!15!15!}$.

(d) Un cop acabat el banquet, els amics volen fer, entre ells, un concurs de ball de la conga. Per a fer-lo decideixen fer 5 grups. De quantes maneres han pogut quedar distribuïts els grups si tots els amics han participat?

El que ens demanen a aquest apartat és de quantes maneres podem distribuir 60 persones en 5 grups, és a dir, quantes particions de 5 classes hi ha, o el que seria equivalent, de quantes maneres podem posar 60 objectes diferents (les persones) en 5 capses (els grups). La solució doncs és $S(60,5)$.

(e) Fent un recompte entre els amics resulta haver-hi 35 homes i 25 dones. Un cop acabada la vetllada, els nuvis volen donar un recordatori a tots els seus amics. Per això el nuvi repartirà 60 purets entre tots els homes i, la núvia, repartirà 10 cistellets amb un llaç vermell i 15 cistellets amb un llaç lila entre les dones. De quantes formes poden els nuvis repartir els recodatoris entre els amics si cap d'ells se'n va sense recordatori cap a casa?

Si s'han de repartir 60 purets (tots iguals) entre 35 homes de manera que tots tenguin al menys un puret, aleshores donam primer un puret a cada home, en queden 25, i ara aquests 25 els repartim entre els 35 homes sense cap restricció. Tenim doncs, $CR(35,25)$ maneres de fer-ho.

Si s'han de repartir 15 cistells amb un llaç vermell i 10 amb un llaç lila entre 25 dones, un cop triades les 15 del llaç vermell, la resta ja queden amb el llaç lila. Per tant tenim $C(25,15)$ maneres de fer-ho.

En total tendrem $CR(35,25) \cdot C(25,15) = \frac{59!}{34!25!} \cdot \frac{25!}{10!15!}$ maneres de repartir els recordatoris.

3. Contesteu de manera breu i raonada les següents qüestions: **2 pt**

(a) Si 680 persones han anat a comprar un mòbil a una botiga, i aquesta en té de 60 models diferents per escollir, quin és el nombre màxim de mòbils exactament iguals que podem garantir que s'han venut? Quin principi combinatori heu fet servir?

Per poder saber el nombre màxim de mòbils que podem garantir que s'han venut hem de pensar en el cas en que es reparteixen de forma més equitativa possible, és a dir, si cada persona hagués escollit per ordre un model de mòbil de forma ordenada, quin és el màxim nombre de mòbils que s'han venut d'un cert tipus.

Per això utilitzarem el *principi del colomar generalitzat* ja que volem assignar les 680 persones a qualcun dels 60 tipus de mòbils, llavors podem garantir que hi haurà almenys un tipus de mòbil del qual s'hauran venut $\left\lceil \dfrac{680}{60} \right\rceil = 12$ mòbils.

(b) Quin principi combinatori empram per comptar de quantes maneres es poden asseure n persones a una taula rodona si només ens interessa la posició relativa dels assistents?

El principi combinatori utilitzat és el *principi del quocient* ja que com només ens interessa la posició relativa dels assistents no hem de tenir en compte les rotacions de la taula.

Per tant, d'un conjunt de n persones que s'han de seure tenim $n!$ possibilitats de seure en una filera. Però, si la taula és circular només ens interessa la posició relativa dels assistents, i per tant hi ha n classes d'equivalència, una per cada seient que la primera persona de la filera pot triar.

Llavors hi ha $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ possibilitats.

4. Contesteu de manera breu i raonada les següents qüestions: **1.5 pt**

   (a) Pot existir un graf 3-regular amb 7 vèrtexs?

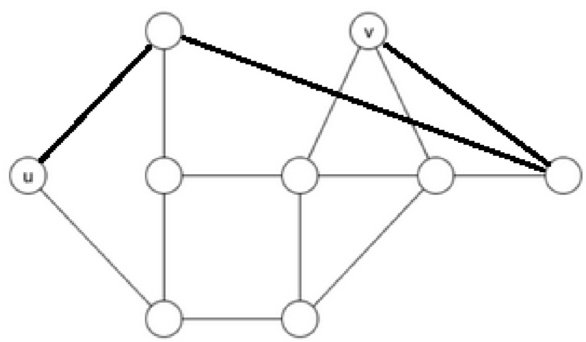
   Un graf 3-regular té tots els seus vèrtexs amb grau 3, en aquest cas tenim 7 vèrtexs. Sigui m el nombre d'arestes d'aquest graf. Pel lema de les encaixades de mans tenim:

$$2m = \sum_{u \in V(G)} d(u) = 7 \cdot 3 = 21 \Rightarrow m = \frac{21}{2}$$

   Llavors el nombre d'arestes, m, no podria ser un nombre enter i per tant arribam a contradicció.

   Llavors no pot existir aquest graf.

   (b) Donau la distància entre els vèrtexs u, i v del graf següent.



   La distància entre dos vèrtexs d'un graf es defineix com la longitud del camí més curt entre aquest dos vèrtexs.

   Per tant $d(u, v) = 3$, que són el nombre d'arestes que uneixen u i v al recorregut marcat a la imatge.