Índex

Conjunts

Conjunts i elements

- Conjunt: Objecte matemàtic bàsic (no es defineix a partir d'altres)
- Té sentit demanar si un *element* pertany o no al *conjunt*

$$x \in A, \quad \text{o} \quad x \notin A$$

- Es descriu per:
  - Enumeració d'elements:

$$A = \{a_1, \dots, a_n\}$$

  - Propietat definitòria:

$$A = \{x \mid P(x)\}$$

  - Operacions amb altres conjunts
- És irrellevant l'ordre i el nombre de cops que apareixen els elements

Exemple

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
- $B = \{n \mid n$ és enter parell i major que $1\} = \{2, 4, 6, \dots\}$
- C conjunt de paraules catalanes

Conjunts habituals

- Nombres naturals: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Nombres enters: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Interval de mida n: $[n] = \{1, \dots, n\}$

Conjunt buit

Conjunt que no conté cap element

$$\emptyset = \{\}$$

Compleix que $x \in \emptyset$ és sempre fals

Comparació de conjunts

- Igualtat: $A = B$ si tenen els mateixos elements

$$A = B \iff \forall x\,[(x \in A) \leftrightarrow (x \in B)]$$

- Inclusió: $A \subseteq B$ (A és *subconjunt* de B, A està *inclòs* dins B) si tot element de A ho és de B

$$A \subseteq B \iff \forall x\,[(x \in A) \rightarrow (x \in B)]$$

- Inclusió estricta: $A \subsetneq B$ ó $A \subset B$ (A és *subconjunt propi* de B, A està *inclòs estrictament* dins B) si $A \subseteq B$ i $A \neq B$

Observació

- No confondre $A \subsetneq B$ amb $A \nsubseteq B$
- Es té que $A = B \iff (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

Exemple

Considerem els conjunts:

- $A = \{n \mid n$ és un enter parell$\}$,
- $B = \{n \mid n$ és un enter múltiple de $4\}$,
- $C = \{n \mid n$ és un enter i $(-1)^n = 1\}$.

Aleshores:

$$B \subset A, \qquad A = C$$

Equipotència i cardinal

- Dos conjunts són *equipotents* si tenen mateix nombre d'elements (*cardinal*)
- Més formalment: Si hi ha bijecció entre els seus elements
- Notació: $A \sim B$ ó $|A| = |B|$

Conjunts finits i conjunts infinits

- Conjunt *finit*: equipotent a algun $[n]$ ($n = |A|$)
- Més formalment: *infinit* si és equipotent a subconjunt propi; altrament, és *finit*

Operacions amb conjunts

Si A, B conjunts dins univers Ω:

- Intersecció: Elements que pertanyen als dos
$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$
- Unió: Elements que pertanyen a algun dels dos
$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$
- Complement: Elements que no pertanyen al conjunt
$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$
- Diferència: Elements que pertanyen al primer però no al segon
$$A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$
- Diferència simètrica: Elements que pertanyen a un però no a l'altre
$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Exemple

Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{2, 3, 5, 7\}$, amb $\Omega = \mathbb{N}$:

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$
- $A \cap B = \{2, 3\}$
- $\overline{A} = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 4\}$
- $A \setminus B = \{1, 4\}$
- $A \triangle B = \{1, 4, 5, 7\}$

Observació

- La unió (i intersecció) s'estenen a famílies finites...
$$A \cup B \cup C$$
...o infinites
$$\bigcup_{i \in I} A_i$$
- La unió es diu *disjunta* si els conjunts tenen intersecció buida:
$$A \sqcup B = A \cup B, \text{ si } A \cap B = \emptyset$$

Producte cartesià

- Si A, B conjunts: $A \times B$ conjunt de parells ordenats:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

- Notació: $A^2 = A \times A = \{(a_1, a_2) \mid a_1 \in A, a_2 \in A\}$
- Es generalitza a:

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots$$

i

$$A^n = A \times A \times \overset{(n)}{\cdots} \times A$$

Exemple

Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{2, 3, 5, 7\}$:

- $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (2, 2), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 2), (3, 3), (3, 5), (3, 7), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (4, 7)\}$
- $A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$

Conjunt de parts d'un conjunt

- Parts de A: $\mathcal{P}(A)$ conjunt format pels subconjunts de A
- Ull!!! Els **elements** (de $\mathcal{P}(A)$) són **subconjunts** (de A)
- $\emptyset$ i A són sempre elements de $\mathcal{P}(A)$

Exemple

Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

- $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$

Particions

- Partició d'un conjunt A: Família de subconjunts $\{A_i\}_{i \in I}$ de A t.q. tot element de A pertany a un i només un subconjunt de la família
- Equivalentment:

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i, \qquad A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j)$$

- Una partició $\{A_i\}_{i \in I}$ *refina* una partició $\{B_j\}_{j \in J}$ si tot A_i és subconjunt d'algun B_j

Exemple

Considerem $X = \{1, \ldots, 10\}$. Les famílies:

$$A_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \qquad A_2 = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

i

$$B_1 = \{1, 5\}, \qquad B_2 = \{3, 7\}, \qquad B_3 = \{9\}, \qquad B_4 = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

són particions de X, i la partició $\{B_i\}$ és un refinament de la partició $\{A_i\}$.

Lleis d'equivalència

- Lleis d'identitat:
  $A \cap \Omega = A$
  $A \cup \varnothing = A$
- Lleis de dominació:
  $A \cap \varnothing = \varnothing$
  $A \cup \Omega = \Omega$
- Lleis d'idempotència:
  $A \cap A = A$
  $A \cup A = A$
- Llei de doble complement:
  $\overline{\overline{A}} = A$
- Lleis commutatives:
  $A \cap B = B \cap A$
  $A \cup B = B \cup A$
- Lleis associatives:
  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- Lleis de De Morgan:
  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- Lleis del tercer exclòs:
  $A \cap \overline{A} = \varnothing$
  $A \cup \overline{A} = \Omega$

Multiconjunts

Multiconjunt

- Idea: Estendre el concepte de conjunt per a admetre elements amb multiplicitat
- Cada $a \in A$ apareix amb *multiplicitat* $m_A(a) > 0$
- Si $a \notin A$, posem $m_A(a) = 0$

Exemple

Considerem el multiconjunt $A = \{1, 1, 1, 2, 2, 4, 5, 5\}$, on la multiplicitat que apareix en la descripció és la seva multiplicitat en el multiconjunt. Aleshores:

$$m_A(1) = 3, \quad m_A(2) = 2, \quad m_A(3) = 0, \quad m_A(4) = 1, \quad m_A(5) = 2.$$

Comparació i operacions amb multiconjunts

S'estenen tenint en compte multiplicitats

- Igualtat: $A = B \iff \forall x[m_A(x) = m_B(x)]$
- Inclusió: $A \subseteq B \iff \forall x[m_A(x) \leq m_B(x)]$
- Unió: $m_{A\cup B}(x) = \max(m_A(x), m_B(x))$
- Intersecció: $m_{A\cap B}(x) = \min(m_A(x), m_B(x))$
- Diferència: $m_{A\setminus B}(x) = \max(0, m_A(x) - m_B(x))$
- Cardinal: $|A| = \sum_{a\in A} m_A(a)$

Exemple

Si $A = \{1, 1, 1, 2, 2, 4, 5, 5\}$ i $B = \{1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 7\}$:

$$A \cup B = \{1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 7\}$$
$$A \cap B = \{1, 2, 2, 5, 5\}$$
$$A \setminus B = \{1, 1, 4\}$$

$$|A| = 8 \qquad |B| = 10 \qquad |A \cup B| = 13 \qquad |A \cap B| = 5$$

Relacions

Relacions entre conjunts

- A, B conjunts; *relació* entre A i B: $R \subseteq A \times B$
- Diu quins parells d'elements (un de A i un de B) estan relacionats
- Notació: $a\,R\,b$ si $(a,b) \in R$; $a \not R\, b$ si $(a,b) \notin R$

Propietats

Si R relació de A amb A, R pot ser (o no):

- Reflexiva: $\forall a : a\,R\,a$
- Irreflexiva: $\forall a : a \not R\, a$
- Simètrica: $\forall a,b : a\,R\,b \to b\,R\,a$
- Asimètrica: $\forall a,b : a\,R\,b \to b \not R\, a$
- Antisimètrica: $\forall a,b : a\,R\,b \wedge b\,R\,a \to a = b$
- Transitiva: $\forall a,b,c : a\,R\,b \wedge b\,R\,c \to a\,R\,c$
- Intransitiva: $\forall a,b,c : a\,R\,b \wedge b\,R\,c \to a \not R\, c$

Exemple

Considerem les relacions següents sobre el conjunt $A = \{1,2,3,4\}$:

$$\begin{aligned}
R_1 &= \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\},\\
R_2 &= \{(1,1),(1,2),(2,1)\},\\
R_3 &= \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\},\\
R_4 &= \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\},\\
R_5 &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\},\\
R_6 &= \{(3,4)\}.
\end{aligned}$$

Aleshores:

- La propietat reflexiva es compleix per a R_3 i R_5.
- La propietat irreflexiva es compleix per a R_4 i R_6.
- La propietat simètrica es compleix per a R_2 i R_3.
- La propietat asimètrica es compleix per a R_4 i R_6.
- La propietat antisimètrica es compleix per a R_4, R_5 i R_6.
- La propietat transitiva es compleix per a R_4, R_5 i R_6.

Observació

- La negació de la propietat reflexiva no és la propietat irreflexiva
- Anàlogament per a simètrica i asimètrica/antisimètrica

Clausura

Donada una relació R i una propietat $\mathcal{P}$ (simètrica, reflexiva,...):

- La *clausura* de R respecte $\mathcal{P}$ és la més petita relació que conté R i té la propietat $\mathcal{P}$
- Equiv: Intersecció de totes les relacions que contenen R i compleixen la propietat $\mathcal{P}$
- Ull!!! No sempre existeix

Exemple

La clausura transitiva de R_1 és
$\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4),(3,1),(3,2),(4,2)\}$

Relacions d'ordre parcial

- Una relació és d'*ordre parcial* si és: Reflexiva, antisimètrica i transitiva
- Normalment s'indica per $\leq$ la relació:
  - $a \leq b$ i $b \geq a$ són notacions equivalents
  - $a < b$ (o $b > a$) indica $a \leq b$ i $a \neq b$
- Un *conjunt parcialment ordenat* (o *poset*) és un conjunt amb relació d'ordre parcial

Exemple

- Els enters amb l'ordre habitual és un poset
- Els enters amb la divisibilitat és un poset
- El conjunt de parts d'un conjunt amb la inclusió és un poset

Observació

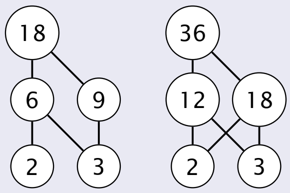
A un poset pot haver-hi elements no comparables:

- A $\mathbb{Z}$ amb la divisibilitat, $2 \nmid 3$ i $3 \nmid 2$

Diagrama de Hasse

- Manera de representar un poset
- Posar un node per a cada element
- Posar un arc (fletxa) entre un node a i un node b si:
  - $a \geq b$
  - No hi ha cap altre c amb $a \geq c \geq b$

Exemple



Mínims i minimals

Un element a d'un poset és

- *minimal* si no hi ha cap b amb $b \leq a$
- *mínim* si tot b compleix $a \leq b$

Observació

- El fet de poder existir elements no comparables fa que no sigui el mateix mínim i minimal
- Si existeix mínim, és únic i és també minimal
- A un conjunt finit sempre existeixen minimals

Exemple

A $S = \{2, 3, 6, 9, 18\}$ amb la relació de divisibilitat: 2 i 3 són elements minimals; no té mínim

Màxims i maximals

Un element a d'un poset és

- *maximal* si no hi ha cap b amb $a \leq b$
- *màxim* si tot b compleix $b \leq a$

Observació

- El fet de poder existir elements no comparables fa que no sigui el mateix màxim i maximal
- Si existeix màxim, és únic i és també maximal
- A un conjunt finit sempre existeixen maximals

Exemple

A $S = \{2, 3, 6, 9, 18\}$ amb la relació de divisibilitat: 18 és el màxim

Fites inferiors i ínfims

Un element a d'un poset $(S, \leq)$ és

- *Fita inferior* d'un subconjunt T si tot $b \in T$ compleix $a \leq b$
- *Ínfim* d'un subconjunt T si és fita inferior i tota altra fita inferior a' compleix que $a' \leq a$

Exemple

A $S = \{2, 3, 12, 18, 36\}$ amb la relació de divisibilitat: 2 i 3 són fites inferiors del subconjunt $\{12, 18\}$, però no hi ha ínfim

Fites superiors i suprems

Un element a d'un poset $(S, \leq)$ és

- *Fita superior* d'un subconjunt T si tot $b \in T$ compleix $b \leq a$
- *Suprem* d'un subconjunt T si és fita superior i tota altra fita superior a' compleix que $a \leq a'$

Exemple

A $S = \{2, 3, 12, 18, 36\}$ amb la relació de divisibilitat: 18 és fita superior del subconjunt $\{12, 18\}$, i és el seu suprem

Relacions d'equivalència

- Una relació és *d'equivalència* si és reflexiva, simètrica i transitiva
- Normalment s'indiquen per $\sim, \simeq, \cong, \equiv, =$
- *Classe d'equivalència* d'un element:

$$[a] = \{x \in A \mid a \sim x\}$$

  a és un *representant* de la seva classe
- Dos elements estan relacionats si, i només si, tenen la mateixa classe
- Les classes d'equivalència formen una partició del conjunt
- Recíprocament, tota partició indueix una relació d'equivalència: $a \sim b$ si a i b pertanyen al mateix subconjunt de la partició
- El conjunt de classes d'equivalència s'anomena *conjunt quocient*: $A/\sim$

Exemple

Considerem $\mathbb{Z}$ i fixem un enter N

- a, b són *congruents mòdul* N, $a \equiv b \pmod{N}$, si $N \mid a - b$
- Equiv. proporcionen el mateix residu al fer-ne la divisió euclidiana amb divisor N.
- La congruència mòdul N és una relació d'equivalència.
- Hi ha N classes d'equivalència, i es poden prendre com a representants d'aquestes els enters $0, \ldots, N-1$.
- El conjunt quocient s'indica per $\mathbb{Z}_n$ o $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}$$

Funcions

Funcions

- Una *funció* amb *domini* A i *codomini* B

$$f : A \to B$$

  és una forma d'assignar a cada $a \in A$ un únic element $f(a) \in B$

$$a \mapsto f(a)$$

- El seu *graf* és la relació $\{(a, f(a)) | a \in A\} \subseteq A \times B$

Imatges i antiimatges

- La *imatge* d'un element és un element
$$a \in A, \qquad f(a) \in B$$
- La *imatge* d'un subconjunt és un subconjunt
$$S \subseteq A, \qquad f(S) = \{f(s) | s \in S\} \subseteq B$$
- El *conjunt imatge* és
$$\mathrm{Im}(f) = f(A) = \{f(a) | a \in A\} \subseteq B$$
- La *antiimatge* d'un element és un **subconjunt**
$$b \in B, \qquad f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\} \subseteq A$$
- La *antiimatge* d'un subconjunt és un subconjunt
$$T \subseteq B, \qquad f^{-1}(T) = \{a \in A \mid f(a) \in T\} \subseteq A$$

Exemple

- *Funció característica*: Donat conjunt A i subconjunt $B \subseteq A$, la *funció característica de B* és
$$\chi_B : A \to \{0,1\}, \qquad \chi_B(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in B \\ 0 & \text{si } a \notin B \end{cases}$$
- *Funció modular:*
  - Donat un $n \in \mathbb{N}$, la funció de *residu mòdul* n,
  $$\mathbb{Z} \to \{0,\dots,n-1\}, \qquad k \mapsto k \bmod n$$
  assigna a cada enter k el residu que resulta en dividir-lo per n
  - L'antiimatge d'un $l \in \{0,\dots,n-1\}$ qualsevol és el conjunt d'enters $\{\dots,-2n+l,-n+l,l,n+l,2n+l,\dots\}$.
  - Dos enters diferents k, k' tenen la mateixa imatge ssi tenen el mateix residu mòdul n; equivalentment, ssi $n \mid k - k'$.

Tipus distingits

Una funció $f : A \to B$ és:

- *injectiva* si (equiv.):
  - Tot $b \in B$ té, com a molt, una antiimatge
  - Elements diferents de A tenen imatges diferents
  - Si $f(a) = f(a')$, aleshores $a = a'$
- *exhaustiva* si (equiv.):
  - Tot element $b \in B$ té almenys una antiimatge
  - $\mathrm{Im}(f) = B$
- *bijectiva* si (equiv.):
  - És injectiva i exhaustiva
  - Tot element $b \in B$ té una i només una antiimatge

Exemple

- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ donada per $f(n) = n^2$ no és ni injectiva ni exhaustiva
- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donada per $f(n) = n^2$ és injectiva, però no exhaustiva
- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ donada per $f(n) = |n|$ és exhaustiva però no injectiva
- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ donada per $f(n) = n + 3$ és bijectiva

Composició de funcions

- Si $f : A \to B$ i $g : B \to C$ són funcions, la *composició* és

$$g \circ f : A \to C, \qquad a \mapsto (g \circ f)(a) = g(f(a))$$

- Si $f : A \to A$ és funció, es pot composar amb ella mateixa:

$$f^2 = f \circ f : A \to A, \qquad a \mapsto f^2(a) = f(f(a))$$

I en general:

$$f^n = f \circ \overset{(n)}{\cdots} \circ f : A \to A, \qquad a \mapsto f^n(a) = f(f(\dots f(a)\dots))$$

Exemple

Prenem $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ donada per $f(n) = n + 1$:

- $f^2(n) = f(f(n)) = f(n+1) = (n+1) + 1 = n + 2$
- $f^k(n) = n + k$ (exc. d'inducció)

Funció inversa

- Si $f : A \to B$ és bijectiva, es defineix la *funció inversa*

$$f^{-1} : B \to A, \qquad b \mapsto \text{“únic } a \in A \text{ amb } f(a) = b\text{”}$$

- Es caracteritza per

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A, \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B$$

Exemple

Prenem $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ donada per $f(n) = n + 1$:

- La inversa és $f^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ donada per $f^{-1}(n) = n - 1$
- Vegem que

$$(f \circ f^{-1})(n) = f(f^{-1}(n)) = f(n-1) = (n-1) + 1 = n$$

$$(f^{-1} \circ f)(n) = f^{-1}(f(n)) = f^{-1}(n+1) = (n+1) - 1 = n$$

Funcions i relacions

- Tota funció $f : A \to B$ indueix una relació d'equivalència $\ker f = \sim_f$ sobre A, que "empaqueta" els elements que tenen la mateixa imatge:

$$a \sim_f a' \iff f(a) = f(a')$$

- Tota relació $\sim$ sobre A indueix una funció de pas al quocient

$$\pi_\sim : A \to A/\sim, \qquad \pi_\sim(a) = [a]$$

Funcions i relacions

- Una funció $f : A \to B$ qualsevol, *factoritza pel quocient* $A/\ker f$: existeix una única funció $\tilde{f} : A/\ker f \to B$ amb $f = \tilde{f} \circ \pi_{\ker f}$,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_{\ker f}"'] & & B \\ & A/\ker f \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

  $\tilde{f}$ determinada per $\tilde{f}([a]) = f(a)$
- Si $f : A \to B$ és funció i $\sim$ una rel. d'eq. sobre A, f factoritza per $A/\sim$ ssi la partició de A induïda per $\sim$ refina la induïda per $\ker f$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_\sim"'] & & B \\ & A/\sim \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

  On $\tilde{f}$ es defineix com $\tilde{f}([a]) = f(a)$ (independent del representant)

Funcions i productes cartesians

- Si $f_1 : A \to B_1$ i $f_2 : A \to B_2$ són funcions, defineixen

$$f = (f_1, f_2) : A \to B_1 \times B_2, \qquad f(a) = (f_1(a), f_2(a))$$

  Les funcions de projecció

$$\pi_1 : B_1 \times B_2 \to B_1, \qquad \pi_1(b_1, b_2) = b_1$$

$$\pi_2 : B_1 \times B_2 \to B_2, \qquad \pi_1(b_1, b_2) = b_2$$

  fan commutatiu el diagrama següent

$$\begin{tikzcd} & B_1 \\ A \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_2"'] & B_1 \times B_2 \arrow[u, "\pi_1"'] \arrow[d, "\pi_2"] \\ & B_2 \end{tikzcd}$$