APUNTS DE L'ASSIGNATURA: MATEMÀTIQUES I. ÀLGEBRA LINEAL

Margalida Mas i Joan Torrens

Capítol 1

Matrius

Si hi ha uns objectes matemàtics que apareixen per tot arreu, que presenten moltes i molt variades aplicacions (veure darrer apartat d'aquest tema) i que són essencials en l'estudi de l'Àlgebra Lineal, aquests són les matrius. El concepte de matriu no pot ser més senzill (una llista o taula d'elements disposats en un cert ordre per files i columnes) però, i això ja passa sovint en matemàtiques, la seva utilitat i el seu abast supera amb escreig el de molts conceptes més complexos.

Nosaltres treballarem principalment amb matrius de nombres reals o matrius sobre $\mathbb{R}$, però es pot treballar també amb matrius sobre un cos qualsevol, com els nombres complexos $\mathbb{C}$, els racionals $\mathbb{Q}$, els cossos finits $\mathbb{Z}/p$, etc. De fet, donarem les definicions sobre un cos general i particularitzarem a $\mathbb{R}$ quan faci falta.

1.1 Tipus de matrius i propietats bàsiques

Definició 1. *Siguin* $(\mathbb{K},+,.)$ *un cos commutatiu i* $m,n\geq 1$ *enters. Una* matriu *$m\times n$ sobre $\mathbb{K}$ (o d'*ordre *$m\times n$ sobre $\mathbb{K}$) és una taula formada per elements de $\mathbb{K}$ disposats en m files i n columnes de la forma*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} \quad \textit{amb } a_{ij}\in\mathbb{K};\ i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n$$

Cada a_{ij} s'anomena terme, coeficient *o* entrada *de la matriu A. El primer subíndex, i, indica el número de la fila i el segon, j, el de la columna que ocupa el terme dins la matriu.*

Denotarem per $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ el conjunt de totes les matrius d'ordre $m\times n$ sobre $\mathbb{K}$. Una matriu qualsevol de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ la denotarem indistintament per A, per $(a_{ij})_{m\times n}$ o simplement per (a_{ij}). Quan $m=n$, el conjunt de totes les matrius d'ordre $n \times n$ se denota simplement per $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (aquestes matrius s'anomenen matrius quadrades com veurem tot seguit i sovint es diu que són d'ordre n en comptes de $n \times n$, per abreujar).

Definició 2. *(Igualtat de matrius)*
Dues matrius del mateix ordre $m \times n$, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ i $B = (b_{ij})_{m\times n}$ són iguals si $a_{ij} = b_{ij}$ $\forall i = 1, \ldots, m$, $\forall j = 1, \ldots, n$.

Tipus de Matrius

- Es denomina *matriu fila* a tota matriu que consta d'una única fila.

$$A = (a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1n}) \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{K}).$$

- Es denomina *matriu columna* a tota matriu que consta d'una única columna.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K}).$$

- Es denomina *matriu quadrada* d'ordre n a tota matriu que consta de n files i n columnes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

  Dins l'àmbit de les matrius quadrades podem donar les següents definicions i tipus particulars de matrius.

  - Es denomina *diagonal (principal)* d'una matriu quadrada A als elements a_{ii} per a $i = 1, \ldots, n$.

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \mathbf{a_{nn}} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

  - Una *matriu diagonal* és aquella en la qual $a_{ij} = 0$ sempre que $i \neq j$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

– Una *matriu escalar* és una matriu diagonal en la qual $a_{ii} = \lambda$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

– S'anomena *matriu unitat* o *matriu identitat* d'ordre n la matriu escalar en la qual tots els elements de la diagonal són uns. Es denota per I_n.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

– S'anomena matriu *triangular superior* a tota matriu en la qual $a_{ij} = 0$ $\forall i > j$ (tots els elements situats per davall de la diagonal principal són nuls).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

– S'anomena matriu *triangular inferior* a tota matriu en la qual $a_{ij} = 0$ $\forall i < j$ (tots els elements situats per damunt de la diagonal principal són nuls).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Per a matrius en general (no necessàriament quadrades) mantendrem la notació de matriu triangular superior com aquella en la qual $a_{ij} = 0$ $\forall i > j$. Més endavant estudiarem amb detall un tipus especial d'aquestes matrius (les matrius escalonades) que tendran un paper primordial en el nostre estudi. Les matrius triangulars superiors, en el cas de matrius no quadrades, corresponen als següents casos depenent de si $m < n$ o $n < m$ respectivament:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2m} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{mm} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Operacions amb matrius

- **Suma:** La suma de dues matrius A i B només és possible si ambdues són del mateix ordre $m \times n$ i aleshores se sumen terme a terme. És a dir, donades $A = (a_{ij})_{m\times n}$ i $B = (b_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, es defineix la suma de A i B com la matriu $C = (c_{ij})_{m\times n}$, on $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $\forall i = 1, \ldots, m$, $\forall j = 1, \ldots, n$.

- **Producte per un escalar:** Siguin $a \in \mathbb{K}$ i $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, es defineix el producte aA com una nova matriu d'ordre $m \times n$ donada per $aA = (a \cdot a_{ij})_{m\times n}$.

- **Producte de matrius:** Per poder realitzar el producte d'una matriu A per una matriu B, el nombre de columnes de A ha de coincidir amb el nombre de files de B i aleshores cada entrada " ij " de la matriu producte s'obté multiplicant la fila i de A per la columna j de B. Concretament, si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ i $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, el producte AB és una matriu $C \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ definida com:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3j} & \cdots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = (c_{ij})$$

on $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

Notem que $A_{m\times \underline{n}} \cdot B_{\underline{n}\times p} = C_{m\times p}$.

Propietats

Sempre que tenguin sentit les operacions indicades (és a dir, les matrius siguin dels ordres adequats per poder realitzar-les) se satisfan les següents propietats:

1. $A + B = B + A$ (*commutativa*)
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (*associativa*)
3. $A + O = O + A = A$ (*element neutre de la suma o element nul*)
4. $\forall A = (a_{ij})_{m\times n}$ existeix $-A = (-a_{ij})_{m\times n}$ tal que $A + (-A) = (-A) + A = O$ (*matriu oposada*)
5. $(AB)C = A(BC)$ (*associativa*)
6. $A(B + C) = AB + AC$ (*distributiva* del producte respecte de la suma)
7. $AI_n = A$ i $I_nB = B$ (*element neutre del producte o element unitat*)
8. $a(B + C) = aB + aC$, $a \in \mathbb{K}$ (*distributiva* del producte per escalars respecte de la suma)
9. $1A = A$, $1 \in \mathbb{K}$
10. $(a + b)C = aC + bC$, $a, b \in \mathbb{K}$
11. $(ab)C = a(bC)$, $a, b \in \mathbb{K}$
12. $a(BC) = (aB)C$, $a \in \mathbb{K}$

Detallam el que vol dir que les operacions tenguin sentit en els casos 5 i 7 que són els més complexos.

5. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ i $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$. Llavors es pot realitzar el producte AB i donarà una matriu $m \times p$ que es podrà multiplicar per C i el producte $(AB)C$ serà una mtriu $m \times q$. Anàlogament, es pot realitzar el producte BC que donarà una matriu $n \times q$ i es pot realitzar també el producte $A(BC)$ que donarà una matriu $m \times q$. Aleshores, la propietat diu que
$$A(BC) = (AB)C \in \mathcal{M}_{m\times q}(\mathbb{K}).$$

Exemple 3. *Si consideram les matrius amb coeficients en $\mathbb{R}$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; llavors tenim:*

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ i $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, llavors es poden realitzar els productes AI_n (que serà una matriu $m \times n$) i I_nB (que serà una matriu $n \times p$) i es verifica $AI_n = A$ i $I_nB = B$.

   Exemple 4. *Si consideram les matrius amb coeficients en* $\mathbb{R}$*:* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *i* $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$*; llavors tenim:*

$$AI_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A \quad i \quad I_3B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

   Notau que en particular, per a matrius quadrades $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, I_n és un element neutre pel producte, és a dir, $AI_n = I_nA = A$ per a tota matriu quadrada A d'ordre n.

No es cumpleixen en general (hi ha casos en que sí, però en general no) les següents propietats:

- Commutativa. La multiplicació no és commutativa:
  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- No és vàlida la llei de simplificació:
  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ satisfan $AB = AC$ i $B \neq C$

- $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ o $B = 0$ (és a dir, hi ha divisors de zero):
  $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$, $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ i $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Proposició 5. *Siguin* A, B *matrius quadrades d'ordre* n*.*

- *Si A i B són matrius diagonals amb diagonals* $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ *i* $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{nn}$ *respectivament, llavors A i B commuten i la matriu producte* $AB = BA$ *també és diagonal amb diagonal* $a_{11}b_{11}, a_{22}b_{22}, \ldots, a_{nn}b_{nn}$*.*

- *Si A i B són matrius triangulars superiors (inferiors) llavors el producte AB és també una matriu triangular superior (inferior).*

Una altra operació important en matrius és la transposició.

Definició 6. *(Transposada d'una matriu) Sigui $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. S'anomena* transposada *de la matriu A, i es denota per A^t, la matriu $A^t = (a_{ji})_{n\times m}$. És a dir, la matriu obtinguda a partir de A intercanviant files per columnes.*

Exemple 7. *La transposada de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ és $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.*

Entre les propietats d'aquesta nova operació podem destacar les següents.

1. $(A^t)^t = A$ per a tota matriu A.

2. Si A i B són matrius del mateix ordre $m \times n$, llavors $(A + B)^t = A^t + B^t$. És a dir, la transposada d'una suma de matrius és la suma de les respectives transposades. El resultat es pot generalitzar a r sumands i tenim que si A_i són totes del mateix ordre llavors

$$(\sum_{i=1}^{r} A_i)^t = \sum_{i=1}^{r} A_i^t$$

3. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ i $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, llavors la transposada del producte de A per B és el producte de transposades però amb ordre canviat. És a dir, $(AB)^t = B^t A^t \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{K})$.

Per acabar aquesta secció, tornem a les matrius quadrades amb unes quantes definicions més. Primer notem que la transposició, en el cas de matrius quadrades és una operació interna, és a dir, la transposada d'una matriu quadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ és una altra matriu quadrada $A^t \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Aleshores tenen sentit les següents definicions.

Definició 8. *Sigui $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriu quadrada. Aleshores, es diu que*

- *A és* simètrica *si coincideix amb la seva transposada, la qual cosa fa que la matriu sigui simètrica respecte de la seva diagonal.*

$$A \text{ és simètrica} \iff A = A^t \iff a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j$$

- *A és* antisimètrica *si la seva oposada i la seva transposada coincideixen, la qual cosa fa que la diagonal de A sigui tota de zeros i els elements simètrics respecte de la diagonal siguin oposats un de l'altre.*

$$A \text{ és antisimètrica} \iff A^t = -A \iff a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i, j$$

- *A és* invertible *o* regular *si existeix una altra matriu quadrada $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.*[1] *Quan existeix aquesta matriu A^{-1} és sempre única amb la propietat esmentada i s'anomena la matriu* inversa *de A.*

- *A és* singular *si no té inversa, és a dir, quan no és regular.*

- *A és* ortogonal *si és regular i a més a més la seva inversa coincideix amb la seva transposada. Dit d'una altra manera,*

$$A \text{ és ortogonal} \quad \Longleftrightarrow \quad AA^t = A^tA = I_n.$$

Es verifica el següent resultat respecte de matrius inverses.

Proposició 9. *Siguin $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Llavors si A i B són invertibles també ho és el seu producte i $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Amb les operacions anteriors tenim el que s'anomena l'àlgebra de matrius perquè amb elles es pot realitzar l'habitual manipulació algebraica d'equacions amb matrius igual que amb nombres reals anant alerta amb les condicions que no es verifiquen (com les esmentades abans). Per exemple, en una equació amb matrius tot el que está sumant passa restant i vice-versa. Així podem resoldre equacions del tipus trobar una matriu X tal que $A + 2X = 3B$ on A i B són matrius conegudes. La solució serà $2X = 3B - A$ i per tant, $X = 1/2(3B - A)$. Notau en canvi que equacions de la forma $AX = B$ no es poden manipular de la forma habitual a no ser que la matriu A sigui quadrada i invertible. Llavors sí que tendrem $X = A^{-1}B$. Notau que hem multiplicat per l'esquerra per A^{-1}, però no valdria fer-ho per la dreta. Si l'equació que tenim és de la forma $XA = B$ llavors, si A és invertible, sí que seria $X = BA^{-1}$, multiplicant per la dreta. Podem també calcular potències n-èsimes de matrius quadrades de la forma habitual $A^n = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$ (n vegades). Notau però que el binomi de Newton per calcular $(A + B)^n$ només es verifica en els casos en que A i B commuten. Per exemple,

$$(A+B)^2 = A^2+AB+BA+B^2 \quad \text{si } A \text{ i } B \text{ commuten, llavors} \quad (A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$$

i igual amb les altres potències successives.

1.2 Operacions elementals per files i columnes. Matrius escalonades reduïdes

Anem a introduir ara un tipus especial de matrius triangulars superiors (inferiors), les anomenades matrius escalonades per files (per columnes).

[1] Notem que no basta dir només $AA^{-1} = I_n$ (o només $A^{-1}A = I_n$) ja que el producte no és en general commutatiu. Per tant, la matriu inversa ha de verificar que els dos productes donin la matriu identitat.

Definició 10. *Una matriu* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *direm que és* escalonada per files *si:*

- *el primer element no nul de cada fila, anomenat pivot, està a la dreta del pivot de la fila superior i*
- *les files nul·les estan en la part inferior de la matriu.*

Direm que és escalonada reduïda per files *si és escalonada i:*

- *els pivots són tots 1 i*
- *tots els elements que estan en la mateixa columna del pivot són nuls.*

Exemple 11. *De les següents matrius, les dues primeres són escalonades per files i les altres dues són escalonades reduïdes per files:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercici: Donau definicions equivalents de *matriu escalonada per columnes* i *matriu escalonada reduïda per columnes.*

Operacions elementals per files Sigui $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Les següents operacions s'anomenen *operacions elementals per files* de la matriu A:

1. Multiplicar una fila per un $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$.
2. Intercanviar dues files.
3. Sumar un múltiple d'una fila a una altra.

De manera anàloga podem definir les *operacions elementals per columnes.*

Definició 12. *Dues matrius* $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *són* equivalents per files *(*per columnes*) si una d'elles es pot obtenir a partir de l'altra mitjançant un nombre finit d'operacions elementals per files (columnes).*

Teorema 13.

- *Tota matriu és equivalent per files (columnes) a una matriu escalonada per files (columnes).*
- *Tota matriu és equivalent per files (columnes) a una* única *matriu escalonada reduïda per files (columnes).*

Demostració: Ho demostrarem de manera constructiva. És a dir, donarem un algoritme (mètode de Gauss) per trobar la matriu escalonada en cada cas. Sigui $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, llavors procedirem de la següent manera:

1. Si $a_{11} \neq 0$, dividim la primera fila per a_{11} i aconseguim una matriu equivalent en la qual $a_{11} = 1$. Llavors aquest nou $a_{11} = 1$ serà el primer pivot. Ara, restant a cada fila i la primera multiplicada per a_{i1}, la resta d'elements de la primera columna seràn 0 i passam al punt 4.

2. Si $a_{11} = 0$ cercam el primer i tal que $a_{i1} \neq 0$. Llavors si intercanviant les files 1 i i obtenim una matriu equivalent amb el nou $a_{11} \neq 0$ i passam al punt 1.

3. Si $a_{i1} = 0$ per a tot $i = 1, \ldots, m$, llavors deixam aquesta primera columna de zeros i aplicam l'algoritme des del pas 1 a la matriu resultant d'eliminar de la nostra aquesta primera columna.

4. Repetim el procés a la matriu que s'obté de la nostra matriu eliminant la primera fila i la primera columna.

Notem que amb aquest mètode obtenim l'única matriu escalonada equivalent per files, els pivots de la qual són tots uns. Per obtenir la matriu escalonada reduïda, aplicam primer l'algoritme anterior fins a obtenir una matriu escalonada equivalent per files a la matriu donada. Llavors, si per sobre d'algun pivot en la seva columna hi ha algun element a_{ij} distint de 0, restam a la fila d'aquest element (la fila i), la fila del pivot multiplicada per a_{ij} i amb aquest mètode anam fent zero tots els elements situats per sobre dels pivots.

Exemple 14. *Considerem la matriu $A \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$, donada per*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 8 \\ 4 & -2 & -6 & 19 \\ 3 & -6 & -17 & 41 \end{pmatrix}.$$

Anem a calcular una matriu escalonada i la escalonada reduïda per files. En aquest cas $a_{11} = 1 \neq 0$ i per tant podem posar zeros en la resta de la primera columna:

$$A \sim_{f_2-4f_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 2 & 6 & -13 \\ 3 & -6 & -17 & 41 \end{pmatrix} \sim_{f_3-3f_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 2 & 6 & -13 \\ 0 & -3 & -8 & 17 \end{pmatrix}.$$

Pasam ara al punt 4 de l'algoritme, és a dir, aplicam el mateix raonament a la matriu 2×3 obtinguda eliminant la primera fila i la primera columna $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -13 \\ -3 & -8 & 17 \end{pmatrix}$. En aquest cas, $a_{11} = 2$ i començam dividint la primera fila per 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -13 \\ -3 & -8 & 17 \end{pmatrix} \sim_{f_1/2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -13/2 \\ -3 & -8 & 17 \end{pmatrix} \sim_{f_2+3f_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -13/2 \\ 0 & 1 & -5/2 \end{pmatrix}.$$

D'aquesta manera una matriu escalonada per files equivalent a A seria:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & -13/2 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \end{pmatrix}.$$

Si ara volem calcular l'única matriu escalonada reduïda equivalent a A només ens cal posar zeros per sobre de cada pivot.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & -13/2 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \end{pmatrix} \sim_{f_2-3f_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim_{f_1+3f_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \end{pmatrix} \sim_{f_1+f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \end{pmatrix}$$

Exemple 15. *Vegem-ne un altre exemple amb la matriu $A \in \mathcal{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$, donada per*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -3 & 8 \\ 1 & 0 & -2 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & -6 & -15 & 4 \end{pmatrix}.$$

En aquest cas $a_{11} = 0$ però $a_{21} \neq 0$. Així començam per intercanviar les files 1 i 2.

$$A \sim_{f_2 \to f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 8 \\ 3 & 0 & -6 & -15 & 4 \end{pmatrix} \sim_{f_3-3f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Arribam al punt 4 de l'algoritme i hem de començar amb la matriu $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ en la qual la primera columna està formada tota per zeros. Segons l'algoritme, el que hem de fer és continuar amb la matriu $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 8 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, en la qual començam dividint per (-1) la primera fila:

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 8 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim_{f_1/(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -8 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim_{f_2/3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Per tant, una matriu escalonada per files equivalent a A seria:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Finalment, per trobar la matriu escalonada reduïda per files equivalent a A farem:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix} \sim_{f_2-3f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim_{f_1+6f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix} \sim_{f_1+2f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Donada aquesta unicitat de la matriu escalonada reduïda, podem definir conceptes sobre una matriu S mitjançant la seva única matriu escalonada reduïda per files (per columnes) equivalent.

Definició 16. *Sigui $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Anomenarem* rang *de A i ho denotarem per $rg(A)$, al nombre de files no nul.les que té la seva única matriu escalonada reduïda per files equivalent.*

Teorema 17. *Sigui $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Aleshores el rang de A coincideix amb el nombre de columnes no nul.les de la seva única matriu escalonada reduïda per columnes equivalent.*

En realitat, el nombre de files no nul.les és sempre el mateix en qualsevol matriu escalonada equivalent per files (per columnes) a la donada. Per tant, per calcular el rang d'una matriu A bastarà trobar una matriu B escalonada per files (columnes) equivalent a A i comptar el nombre de files (columnes) no nul·les de B.

Exemple 18. *Calcularem el rang de la matriu A de l'exemple 14. Hem vist que per files*

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & -13/2 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \end{pmatrix}$$

i per tant $rg(A)$ és simplement el nombre de files no nul.les, $rg(A) = 3$.

Vegem un altre exemple. Volem calcular el rang de la matriu B:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim_{f_3-f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim_{f_2/2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim_{f3-2f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriu escalonada obtinguda té dues files no nul·les i per tant $rg(B) = 2$.

Amb les matrius escalonades i les operacions elementals no només es pot calcular el rang d'una matriu, sinó que també resulten útils en el càlcul de matrius inverses com veurem tot seguit. El primer que podem donar és una caracterització de les matrius invertibles a través del seu rang i de la seva matriu escalonada reduïda.

Teorema 19. *Sigui A una matriu quadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Aleshores, són equivalents:*

- *A és invertible*
- *$rg(A) = n$*
- *La matriu escalonada reduïda per files (per columnes) equivalent a A és la matriu identitat I_n*

A més a més, la tercera equivalència ens aporta un mètode per calcular la matriu inversa d'una matriu invertible $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Aquest consisteix en escriure la matriu identitat I_n a la dreta de la matriu A (ho escriurem en forma abreujada $(A \mid I_n)$ i, a través de transformacions elementals per files (o per columnes), calcular la matriu escalonada reduïda que segur serà de la forma $(I_n \mid B)$. La matriu B resultant és precisament la matriu inversa de A, és a dir $A^{-1} = B$.

Exemple 20. *Volem saber si la matriu quadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donada per $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ és invertible i si ho és calcular la seva inversa. Començarem per calcular el seu rang.*

$$A \sim_{f_3-f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim_{f_2/2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim_{f_3+3f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 11/2 \end{pmatrix}.$$

Si ara dividim la tercera fila per $11/2$ obtenim una matriu escalonada amb tres files no nul.les. Per tant, $rg(A) = 3$ i la matriu A és invertible. Anem a calcular la seva inversa:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{f_3-f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{f_2/2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim f_3 + 3f_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 11/2 & -1 & 3/2 & 1 \end{array}\right) \sim_{\frac{f_3}{11/2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/11 & 3/11 & 2/11 \end{array}\right) \sim_{f_2-\frac{3}{2}f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/11 & 1/11 & -3/11 \\ 0 & 0 & 1 & -2/11 & 3/11 & 2/11 \end{array}\right)$$

$$\sim_{f_1-f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 13/11 & -3/11 & -2/11 \\ 0 & 1 & 0 & 3/11 & 1/11 & -3/11 \\ 0 & 0 & 1 & -2/11 & 3/11 & 2/11 \end{array}\right)$$

$$\sim_{f_1-2f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7/11 & -5/11 & 4/11 \\ 0 & 1 & 0 & 3/11 & 1/11 & -3/11 \\ 0 & 0 & 1 & -2/11 & 3/11 & 2/11 \end{array}\right).$$

Per tant,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7/11 & -5/11 & 4/11 \\ 3/11 & 1/11 & -3/11 \\ -2/11 & 3/11 & 2/11 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 7 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.3 Sistemes d'equacions lineals

Volem veure en aquesta secció com les transformacions elementals es poden aplicar també a la resolució dels sistemes d'equacions lineals en general, amb un nombre m qualsevol d'equacions i un nombre n qualsevol d'incògnites.

Definició 21. *Un* sistema de m equacions lineals amb n incógnites *és un sistema de la forma*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

on $x_1, x_2, \ldots, x_n$ són les incògnites, a_{ij} són els coeficients del sistema i b_i són els termes independents; $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}\ \forall i, j$.

En el cas $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ el sistema es diu homogeni.

Notem que podem escriure aquest sistema en forma matricial. Senzillament considerant les matrius

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

aleshores el sistema anterior es pot escriure com

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

o, en forma abreujada, $AX = B$ on la matriu A s'anomena la *matriu del sistema* o matriu de coeficients del sistema.

Però també es pot escriure matricialment com:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$$

o, de forma abreujada $(A \mid B)$ que s'anomena la *matriu ampliada* del sistema, on cada fila representa l'equació corresponent del sistema (1.1).

Normalment treballarem amb la darrera matriu.

Solució d'un sistema d'equacions. Sistemes equivalents.

Definició 22. *Direm que* $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{K}^n$ *és una* solució del sistema *(1.1) si, substituint cada incògnita* x_i *pel respectiu valor* s_i*, se satisfan totes les equacions del sistema.*

Podem fer aquesta classificació dels sistemes d'equacions lineals, segons tinguin o no solució, i segons quantes en tenguin:

- Sistemes *compatibles*: tenen almenys una solució.
  - Sistemes compatibles *determinats*: tenen una única solució.
  - Sistemes compatibles *indeterminats*: tenen més d'una solució.
- Sistemes *incompatibles*: no tenen solució.

Notem que un sistema homogeni $AX = O$ sempre té, almenys, la solució $(0, 0, \dots, 0)$ que rep el nom de solució *trivial*. Per tant, sempre és compatible.

Teorema de Rouché–Frobenius

Un sistema $AX = B$ de m equacions lineals amb n incógnites és compatible si i només si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B) = r$ i en aquest cas:

- Si $r = n$ és determinat (té solució única).
- Si $r < n$ és indeterminat (té més d'una solució).

Si $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A|B)$ el sistema és incompatible.

Definició 23. *Dos sistemes* $AX = B$ *i* $A'X = B'$ *són* equivalents *si tenen exactament el mateix conjunt de solucions.*

Així per resoldre un sistema de la forma $AX = B$ haurem de començar calculant els rangs de la matriu A i de la matriu ampliada $(A \mid B)$. En el cas en que ambdós coincideixen anem a veure com calcular la o les solucions del sistema.

Les transformacions elementals tornen a ser aquí de gran utilitat. És evident que si en un sistema d'equacions de la forma (1.1) canviam dues files d'ordre, multiplicam una equació per un nombre no nul o sumam a una equació un múltiple de l'altra, les solucions seràn exactament les mateixes[2]. Això vol dir que si consideram la matriu ampliada del sistema $(A \mid B)$ i trobam una matriu escalonada per files (no per columnes) equivalent, el sistema corresponent a aquesta nova matriu tendrà les mateixes solucions, serà equivalent. I exactament igual si el que trobam és la

[2]De fet quan resolem un sistema senzill (per exemple 2×2) pel mètode de reducció, el que feim són precisament operacions d'aquestes.

matriu escalonada reduïda equivalent per files (sempre per files, mai per columnes). Per una altra part, notem que un sistema corresponent a una matriu escalonada, o escalonada reduïda, té solució immediata. Així, mitjançant transformacions elementals es poden resoldre tot tipus de sistemes d'equacions lineals. Vegem-ne uns exemples.

Exemple 24. *Considerem el sistema*

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2y+3z=-5 \\ x+4y+4z=3 \end{cases}$$

Consideram la seva matriu ampliada i l'anam reduint a una matriu escalonada reduïda:

$$(A \mid B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \mid & 1 \\ 0 & 2 & 3 & \mid & -5 \\ 1 & 4 & 4 & \mid & 3 \end{pmatrix} \sim_{f_3-f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \mid & 1 \\ 0 & 2 & 3 & \mid & -5 \\ 0 & 2 & 3 & \mid & 2 \end{pmatrix} \sim_{f3-f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \mid & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & \mid & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \mid & 7 \end{pmatrix}.$$

No cal continuar, hem arribat a una matriu que correspon a un sistema d'equacions en el qual la darrera equació s'escriu $0=7$ que no es verifica mai (per a cap valor de x, y, z. Per tant, el sistema és incompatible *i el nostre inicial també.*

Exemple 25. *Considerem el sistema*

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2y+3z=-1 \\ x-y+2z=2 \end{cases}$$

En traiem la seva matriu ampliada i l'anam reduint a una matriu escalonada reduïda:

$$(A \mid B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \mid & 0 \\ 0 & 2 & 3 & \mid & -1 \\ 1 & -1 & 2 & \mid & 2 \end{pmatrix} \sim_{f_3-f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \mid & 0 \\ 0 & 2 & 3 & \mid & -1 \\ 0 & -3 & 1 & \mid & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim_{1/2f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \mid & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & \mid & -1/2 \\ 0 & -3 & 1 & \mid & 2 \end{pmatrix} \sim_{f_3+3f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \mid & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & \mid & -1/2 \\ 0 & 0 & 11/2 & \mid & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\sim_{2/11f_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \mid & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & \mid & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & \mid & 1/11 \end{pmatrix} \sim_{f_2-3/2f_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \mid & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mid & -7/11 \\ 0 & 0 & 1 & \mid & 1/11 \end{pmatrix}$$

$$\sim_{f_1-f_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \mid & -1/11 \\ 0 & 1 & 0 & \mid & -7/11 \\ 0 & 0 & 1 & \mid & 1/11 \end{pmatrix} \sim_{f_1-2f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mid & 13/11 \\ 0 & 1 & 0 & \mid & -7/11 \\ 0 & 0 & 1 & \mid & 1/11 \end{pmatrix}$$

Hem arribat a un sistema equivalent de la forma

$$\begin{cases} x = 13/11 \\ y = -7/11 \\ z = 1/11 \end{cases}$$

i per tant el nostre sistema inicial és compatible determinat *amb solució única* $x = 13/11, y = -7/11, z = 1/11$.

En aquests casos quadrats (3 equacions amb 3 incògnites) quan el sistema és compatible determinat, vol dir que la matriu A és invertible i per tant la solució única del sistema $AX = B$ també es pot trobar fent $X = A^{-1}B$. En el nostre exemple, sabem que (veure Exemple 20)

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

i així la solució vé donada per

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/11 \\ -7/11 \\ 1/11 \end{pmatrix}.$$

Exemple 26. *Considerem ara el sistema*

$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ y + z + t = 1 \\ 2x + 2y = -2 \\ x - z + t = -1 \end{cases}$$

De nou en traiem la seva matriu ampliada i la transformam en una matriu escalonada reduïda:

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim_{f_3-2f_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim_{f_4-f_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim_{f_3+2f_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim_{f_3+2f_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim_{1/2f_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\sim_{f_2-f_4}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&1&0\\0&1&1&0&1/2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&1/2\end{array}\right)\sim_{f_1-f_4}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&0&-1/2\\0&1&1&0&1/2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&1/2\end{array}\right)$$

$$\sim_{f_1-2f_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&0&-3/2\\0&1&1&0&1/2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&1/2\end{array}\right)\sim_{f_3\to f_4}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&0&-3/2\\0&1&1&0&1/2\\0&0&0&1&1/2\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

Hem arribat a una matriu escalonada reduïda que correspon al sistema:

$$\begin{cases}x-z=-3/2\\y+z=1/2\\t=1/2\end{cases}$$

Els pivots estan a les columnes 1, 2 i 4 que corresponen a les variables principals x,y,t*. Aleshores el sistema és* compatible indeterminat *amb solucions*

$$x=z-3/2,\quad y=1/2-z\quad i\quad t=1/2,$$

variant z *dins els reals.*

1.4 Producte per blocs i factoritzacions triangulars

Hem vist com el producte de matrius funciona multiplicant files per columnes. Però, en el cas de matrius d'ordres elevats els càlculs poden resultar més senzills dividint les matrius per blocs i fent el producte per blocs. Per fer això s'ha de dividir les dues matrius a multiplicar en blocs (o submatrius) de manera que cada fila de blocs de la primera sigui multiplicable per cada columna de blocs de la segona. És a dir, si volem multiplicar A per B dividirem per exemple en

$$A=\begin{pmatrix}C&|&D\\--&|&--\\E&|&F\end{pmatrix}\quad\text{i}\quad B=\begin{pmatrix}G&|&H\\--&|&--\\J&|&K\end{pmatrix}$$

de manera que tot els productes indicats en la matriu següent es puguin realitzar i llavors

$$AB=\begin{pmatrix}CG+DJ&|&CH+DK\\----&|&----\\EG+FJ&|&EH+FK\end{pmatrix}.$$

Exemple 27. *Suposem que volem multiplicar les matrius*

$$AB=\begin{pmatrix}1&-1&2&4\\2&0&4&5\\1&1&2&-3\\-2&3&5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&3\\2&-1&0\\-3&2&1\\0&1&2\end{pmatrix},$$

llavors podem dividir les matrius per

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & | & 2 & 4\\ 2 & 0 & | & 4 & 5\\ -- & -- & | & -- & --\\ 1 & 1 & | & 2 & -3\\ -2 & 3 & | & 5 & 0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 4 & | & 3\\ 2 & -1 & | & 0\\ -- & -- & | & --\\ -3 & 2 & | & 1\\ 0 & 1 & | & 2\end{pmatrix},$$

on C, D, E, F, G, H, J, K són per ordre les matrius enquadrades de A i B respectivament. Llavors,

$$CG+DJ=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 13\\ -10 & 21\end{pmatrix},$$

$$CH+DK=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\ 20\end{pmatrix},$$

i anàlogament

$$EG+FJ=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -11 & -1\end{pmatrix}\quad i\quad EH+FK=\begin{pmatrix}-1\\ -1\end{pmatrix}.$$

Per tant, tenim que

$$AB=\begin{pmatrix}CG+DJ & | & CH+DK\\ ---- & | & ----\\ EG+FJ & | & EH+FK\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 13 & | & 13\\ -10 & 21 & | & 20\\ -- & -- & | & --\\ -3 & 4 & | & -1\\ -11 & -1 & | & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 13 & 13\\ -10 & 21 & 20\\ -3 & 4 & -1\\ -11 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Aquest producte per blocs és especialment interessant quan alguns dels blocs són matrius senzilles amb molts de 0's o matrius conegudes com matrius diagonals, matrius nul.les, matrius identitat, etc.

Exemple 28. *Suposem que A i B són matrius quadrades d'ordre n, I_n la matriu identitat i O la matriu zero d'ordre n. Llavors, considerant les matrius*

$$C=\begin{pmatrix}I_n & | & A\\ -- & | & --\\ 0 & | & I_n\end{pmatrix}\quad i\quad D=\begin{pmatrix}I_n & | & B\\ -- & | & --\\ 0 & | & I_n\end{pmatrix}$$

tenim

$$CD=\begin{pmatrix}I_n^2+A0 & | & I_nB+AI_n\\ --- & | & ---\\ 0I_n+I_n0 & | & 0A+I_n^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_n & | & B+A\\ -- & | & --\\ 0 & | & I_n\end{pmatrix}$$

i anàlogament $DC=\begin{pmatrix}I_n & | & A+B\\ -- & | & --\\ 0 & | & I_n\end{pmatrix}$. És a dir, matrius C i D d'aquest tipus commuten entre elles qualssevol que siguin A i B.

També a l'hora de calcular inverses, tenim casos de matrius per blocs en els quals el càcul de la inversa se simplifica considerablement. Per exemple, tenim el següent resultat.

Proposició 29. *Sigui A una matriu quadrada dividida per blocs de la forma* $A = \begin{pmatrix} B & | & C \\ -- & | & -- \\ 0 & | & D \end{pmatrix}$ *on B és quadrada d'ordre p, D és quadrda d'ordre q i C d'ordre $p \times q$. Aleshores, A és invertible si i només si ho són B i D, i llavors:*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B & | & C \\ -- & | & -- \\ 0 & | & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & | & -B^{-1}CD^{-1} \\ -- & | & ------ \\ 0 & | & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

En particular, si $C = 0$, llavors A és invertible si i només si ho són C i D, i

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B & | & 0 \\ -- & | & -- \\ 0 & | & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & | & 0 \\ -- & | & -- \\ 0 & | & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

Factoritzacions triangulars.

Volem veure en aquest apartat com i quan una matriu quadrada[3] es pot escriure com a producte d'una matriu triangular inferior i una triangular superior. Per això, repassarem les operaciones elementals i veurem com cada una d'aquestes operacions es pot dur a terme simplement multiplicant (per l'esquerra) per una matriu que s'obté de la matriu identitat.

Proposició 30. *Sigui A una matriu $m \times n$ sobre un cos $\mathbb{K}$, $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Aleshores cada una de les transformacions elementals que es poden realitzar sobre A correspon a multiplicar la matriu A per l'esquerra per una matriu (que anomenarem* elemental*) que s'obté a partir de la matriu identitat I_m de la següent manera:*

- *Intercanviar les files i, j de la matriu A. Correspon a multiplicar la matriu A per l'esquerra per la matriu elemental F_{ij} obtinguda a partir de I_m intercanviant-li les files i, j.*
- *Multiplicar la fila i per un nombre $\alpha \in \mathbb{K}$. Correspon a multiplicar la matriu A per l'esquerra per la matriu elemental $F_i(\alpha)$ obtinguda a partir de I_m multiplicant-li la fila i per α.*
- *Sumar a la fila i de la matriu A, la fila j multiplicada per un nombre $\alpha \in \mathbb{K}$. Correspon a multiplicar la matriu A per l'esquerra per la matriu $F_{ij}(\alpha)$ obtinguda a partir de I_m sumant-li a la fila i la fila j multiplicada per α.*

[3]Per a matrius no quadrades es pot fer un estudi semblant sense majors dificultats.

Exemple 31. *Considerem la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & -1 & -5 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Llavors, intercanviar les files 1 i 4 correspon a multiplicar per la matriu F_{14}

$$F_{14}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & -1 & -5 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & -1 & -5 & -2 \\ -7 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Multiplicar la fila 2 de A per 3 correspon a multiplicar per la matriu $F_2(3)$

$$F_2(3)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & -1 & -5 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 6 & 3 & 6 \\ -3 & 4 & -1 & -5 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per últim, sumar a la fila 3 de A la fila 4 multiplicada per 2 correspon a multiplicar per la matriu $F_{34}(2)$

$$F_{34}(2)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & -1 & -5 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 6 & -3 & -7 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podeu veure fàcilment com a exercici que les transformacions elementals per columnes corresponen igualment a multiplicar, en aquest cas per la dreta, per matrius elementals similars obtingudes a partir de la matriu identitat operant per columnes: $C_{ij}, C_i(\alpha)$ i $C_{ij}(\alpha)$

Anem a veure ara certes propietats d'aquestes matrius elementals.

Proposició 32. *Totes les matrius elementals són invertibles i les seves inverses tornen a ser matrius elementals:*

$$F_{ij}^{-1} = F_{ij}, \quad F_i(\alpha)^{-1} = F_i(1/\alpha) \quad i \quad F_{ij}(\alpha)^{-1} = F_{ij}(-\alpha).$$

Les matrius $F_i(\alpha)$ *són diagonals i les matrius* $F_{ij}(\alpha)$ *són triangulars superiors si* $i < j$ *i triangulars inferiors si* $i > j$*.*

Amb aquests resultats ja podem donar els teoremes relatius a les factoritzacions triangulars.

Teorema 33. *Sigui* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *i* U *una matriu escalonada per files equivalent amb tots els pivots 1 (que serà triangular superior).*

- *Si U es pot obtenir a partir de A sense necessitat de fer cap permutació entre les seves files, llavors existeix una matriu triangular inferior L de manera que $A = LU$. A més a més, si A és invertible aquesta factorització és única.*

- *Si per arribar a U calen permutacions de files i A és invertible, llavors existeix una matriu P tal que $PA = LU$ on P és simplement un producte de matrius elementals de la forma F_{ij}. Per a cada P (n´hi pot haver més d'una), la factorització és única.*

L'algoritme per trobar una factorització LU d'una matriu qualsevol A és senzill. Es comença per trobar una matriu escalonada per files amb pivots 1 equivalent a A que serà la nostra U. Per fer-ho haurem fet una sèrie de transformacions elementals corresponents a matrius elementals de la forma $F_i(\alpha)$ i $F_{ij}(\alpha)$ amb $i < j$. Així tendrem $U = L_n \dots L_1 A$ amb L_i matrius elementals corresponents a les operacions elementals per files fetes amb l'ordre corresponent. LLavors,

$$A = (L_n \dots L_1)^{-1} U = L_1^{-1} \dots L_n^{-1} U = LU$$

on L és triangular inferior perquè totes les L_i^{-1} ho són.

Vegem-ne uns exemples.

Exemple 34. *Considerem la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ -3 & -5 & -6 & -6 \\ -1 & -3 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

i calculem-li una factorització LU. Començam trobant la seva forma escalonada reduïda per files:

$$A \sim_{f_3+3f_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \\ -1 & -3 & 4 & 13 \end{pmatrix} \sim_{f_4+f_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 16 \end{pmatrix} \sim_{1/4f_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\sim_{f_3-4f_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 16 \end{pmatrix} \sim_{f_4-5f_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

Per obtenir aquesta matriu escalonada hem realitzat 5 operacions elementals que corresponen a multiplicar A per l'esquerra per les següents matrius elementals amb l'ordre donat:

$$U = F_{43}(-5) \cdot F_{32}(-4) \cdot F_2(1/4) \cdot F_{41}(1) \cdot F_{31}(3) \cdot A$$

D'aquesta manera multiplicant per les inverses tenim:

$$A = F_{31}(-3) \cdot F_{41}(-1) \cdot F_2(4) \cdot F_{32}(4) \cdot F_{43}(5) \cdot U = LU$$

on L és la matriu triangular superior donada pel producte de les matrius elementals indicades. És a dir,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad i \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 35. *Anem a estudiar ara la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si calculam la seva forma escalonada reduïda per files, tenim:

$$A \sim_{f_3 \to f_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim_{f_2 - 2f_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sim_{f_3 \to f_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_{1/2 f_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U.$$

En aquest cas hem hagut de fer dues permutacions de files, primer la fila f_1 per la fila f_3 i després la fila f_2 per la fila f_3. Això correspon a multiplicar per l'esquerra per les matrius F_{13} i F_{23}. D'aquesta manera si deim

$$P = F_{23} \cdot F_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tenim que PA admet una factorització LU. Les operacions elementals que hem de fer ara sobre $PA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ per arribar a U corresponen a multiplicar per les matrius elementals $F_{31}(-2)$ i $F_2(1/2)$. Així, $U = F_2(1/2) \cdot F_{31}(-2) \cdot P \cdot A$ i per tant

$$L = F_{31}(2) \cdot F_2(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podeu comprovar ara que efectivament $PA = LU$.

Una de les aplicacions d'aquestes factoritzacions triangulars es pot trobar en la resolució de sistemes d'equacions lineals. Quan volem resoldre un mateix sistema però per a molts de termes independents diferents, utilitzar el mètode de Gauss ens fa repetir les operacions elementals per a cada cas. En canvi, amb la factorització $A = LU$ o $PA = LU$ hem de fer els càlculs només una vegada i llavors resoldre els sistemes trivials per a cada terme independent.

Exemple 36. *Considerem el sistema:*

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \end{cases}$$

Podem excriure el sistema com $AX = B$ on

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad i \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Notem que A és la matriu de l'exemple anterior que admet la factorització $PA = LU$ on P, L, U són les matrius de l'exemple esmentat. Evidentment els sistemes $Ax = B$ i $PAx = PB$ tendran les mateixes solucions ja que d'un a l'altre només hem fet permutacions de files (d'equacions). Ara $PAX = PB$ és el mateix que

$$LUX = PB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Així, si deim $Y = UX$, cercam Y de manera que

$$LY = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

que té solució immediata $y_1 = -2$, $y_2 = 1/2$ i $2y_1 + y_3 = 3$, és a dir, $y_3 = 3 - 2(-2) = 7$.

D'aquesta manera les solucions del nostre sistema seran els X tals que $UX = Y$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1/2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

que té solució $x_3 = 7$, $x_2 + 3/2x_3 = 1/2$ o equivalentment $x_2 = 1/2 - 21/2 = -10$, i finalment $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2$. És a dir, $x_1 = -2 + 2x_2 - 3x_3 = -2 - 20 - 21 = -43$. Finalment, el sistema té solució única

$$X = \begin{pmatrix} -43 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Notau que si ara canviam el terme independent B, la factorització trobada $PA = LU$ ens serveix igual i només hem de fer càlculs trivials. Per exemple, podeu comprovar que per a

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \textit{la solució és} \quad X = \begin{pmatrix} 9 \\ 5/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1.5 Aplicacions de les matrius

Veurem en aquesta secció algunes de les aplicacions de les matrius en molts de camps que van des de les ciències (física, química, estadística) fins a l'economia i les finances, la informàtica i els gràfics per ordinador, etc.

Àlgebra lineal i geometria. És aquest el camp en el que les aplicacions són més nombroses i en el que treballarem en aquesta assignatura (i altres posteriors). Ja hem vist per exemple com les matrius i la manipulació de les mateixes a través de transformacions elementals permet resoldre tot tipus de sistemes d'equacions lineals. Però, en aquest camp hi ha moltes altres aplicacions, com ara el fet que totes les transformacions lineals, tots els moviments en el pla i en l'espai es representen mitjançant matrius: translacions, simetries, girs, desplaçaments, rotacions. Tots tenen una matriu adequada que els representa i a través de la qual es pot calcular l'efecte de cada un d'aquests moviments sobre qualsevol punt del pla o de l'espai.

Al llarg d'aquesta assignatura (i de les següents en Àlgebra lineal i Geometria) es veuran aquestes transformacions.

Models lineals en enginyeria i economia. S'anomenen models lineals aquells que poden descriure un problema mijançant una o diverses equacions lineals. Molts de models en economia, nutrició, xarxes elèctriques, enginyeria, admeten models lineals sovint involucrant una gran quantitat d'equacions lineals que han de ser resolts per computadors utilitzant tècniques com les que hem vist i seguirem estudiant.

Un altre exemple que podem analitzar és el format per **equacions en diferències**. En camps com ecologia, economia o enginyeria, apareixen sistemes dinàmics que evolucionen amb el temps. Algunes característiques d'aquests sistemes es mesuren a cada interval de temps produint una seqüència de valors $x_0, x_1, x_2, \ldots$ Cada entrada x_i ens dóna la informació del nostre sistema en el moment i-èsim. Quan existeix una matriu A tal que

$$x_{i+1} = Ax_i \quad \text{per a tot} \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

tenim el que s'anomena una equació lineal en diferències, que permet estudiar l'evolució del nostre sistema amb el temps.

Exemple 37. *Analitzarem en aquest exemple un model senzill en demografia de moviment de poblacions. Suposem que en un any inicial (suposem l'any 2000) la* *població a una ciutat (per exemple Palma) i als seus suburbis és* r_0 *i* s_0*, respectivament. Denotam per* x_0 *la matriu columna de població inicial, és a dir,* $x_0 = \begin{pmatrix} r_0 \\ s_0 \end{pmatrix}$ *i anàlogament per* $x_i = \begin{pmatrix} r_i \\ s_i \end{pmatrix}$ *la població existent en el instant (any) i. Suposem que els estudis demogràfics mostren que cada any el* 5 *per cent de la població de la ciutat es muda als suburbis, mentre que el* 3 *per cent de la població suburbana es muda a la ciutat. D'aquesta manera, la població al cap d'un any en la ciutat (*r_1*) vendrà donada per el 95 per cent de la població que ja hi havia (*$0.95r_0$*) més el 3 per cent de la dels suburbis que s'ha mudat (*$0.03s_0$*). Anàlogament, la població al cap d'un any en els suburbis (*s_1*) vendrà donada per el* 97 *per cent de la població que ja hi havia (*$0.97s_0$*) més el* 5 *per cent de la urbana que s'ha mudat (*$0,05r_0$*). Això ho odem escriure com:*

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ s_0 \end{pmatrix}$$

o, abreujadament, $x_1 = Ax_0$ *on* A *és la matriu quadrada anterior, anomenada* matriu de migració.

Si els percentatges de migració permaneixen constants amb els anys, podem escriure en general $x_{i+1} = Ax_i$ *per a tot i, i consequentment,* $x_i = A^i x_0$*. Si suposam que l'any 2000 hi havia 500000 habitants (*$r_0 = 500000$*) a Palma i* 200000 *als suburbis (*$s_0 = 200000$*), llavors l'any 2001 tendriem*

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500000 \\ 200000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 481000 \\ 219000 \end{pmatrix}.$$

L'any 2020 correspondria al valor $i = 20$ *que obtendriem calculant prèviament la potencia* A^{20}*. Parlarem més endavant de com calcular potències de matrius.*

L'exemple que hem presentat és un model molt senzill. Hi ha equacions en diferències d'ordre n on l'estat x_{i+n} vé donat per una equació lineal entre les n entrades anteriors $x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+n-1}$ amb un comportament més complicat però que també es pot resoldre amb mètodes d'àlgebra lineal i matrius.

Tractament d'imatges i disseny assistit per ordinador. Ja heu vist segur, en l'assignatura d'Informàtica, que una de les aplicacions més immediates de les matrius en aquest àmbit consisteix amb l'emmagatzament d'informació. Però les aplicacions són molt més àmplies, vegem-ne una per exemple en el disseny assistit per ordinador. En aquest camp l'ús continu de gràfics i la manipulació dels mateixos en l'ordinador és constant. Per tal de canviar l'orientació o l'escala del gràfic, fer-ne zooms o allunyaments, girs, canvis de perspectiva, etc, s'utilitzen precisament matrius i àlgebra lineal en general.

Uns dels símbols gràfics més senzills en 2D són les lletres. Una lletra qualsevol en una imatge o pantalla queda determinada pels punts del pla que la delimiten. Llavors li podem aplicar el moviment que volguem i trobar-ne la lletra resultant del moviment. Vegem-ne un exemple.

Exemple 38. *La lletra* **I** *queda determinada per exemple pels 4 punts que delimiten el seu rectangle. Suposem que aquests punts són* $P_1 = (0,0), P_2 = (0.5,0), P_3 = (0,6)$ *i* $P_4 = (0.5,6)$*. Podem amagatzemar aquestes dades en una matriu on les files corresponen a la primera i segona component de cada punt, i les columnes als punts* P_1, P_2, P_3, P_4*. D'aquesta forma,*

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Suposem que volem inclinar aquesta lletra en la nostra imatge. Això correspon a aplicar una transformació lineal qe ve donada per la matriu[4] $A = \begin{pmatrix} 1 & 0.25 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Així, la* **I** *inclinada vendrà donada pels punts*

$$AI = \begin{pmatrix} 1 & 0.25 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 2 & 1.5 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Matrius booleanes, grafs i relacions. S'anomenen matrius booleanes les formades només per 0's i 1's. Ja heu vist en l'assignatura de Matemàtica Discreta com aquestes matrius es poden utilitzar per a representar grafs tant dirigits com no dirigits a través de les matrius d'incidència o d'adjacència. No insistirem en aquest punt que ja coneixeu, però sí que veurem com, d'una manera similar, es poden utilitzar també per representar relacions binàries (que també ja heu vist a Matemàtica Discreta) entre conjunts finits. Donats per exemple els conjunts $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ i $Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ i una relació $R \subseteq X \times Y$, llavors podem associar a R una matriu booleana $M_R = (a_{ij})$ dòrdre $m \times n$ de manera que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_j, y_i) \in R \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Això permet estudiar les relacions a través de les seves matrius associades i resulta que les operacions entre relacions es corresponen amb operacions entre matrius. Per exemple, si R, S són relacions entre els conjunts X i Y anteriors, tenim:

- $R \subseteq S$ si i només si $M_R \leq M_S$.
- $M_{R\cup S} = \max(M_R, M_S)$.
- $M_{R\cap S} = \min(M_R, M_S)$.
- $M_{R^{-1}} = (M_R)^t$.
- Si T és una relació entre el conjunt Y i el conjunt $Z = \{z_1, ..., z_p\}$, llavors $M_{T\circ R} = M_T * M_R$.

[4] Ja hem comentat que tots els moviments del pla es representen per matrius. Això ho començarem a veure en aquesta assignatura més endavant i acabareu en successives assignatures.

on, a les tres primeres propietats, les operacions amb matrius es realitzen entrada a entrada, mentre que el producte $*$ s'anomena el *producte max-min* i es realitza com el producte habitual de matrius (files per columnes) però amb les operacions màxim i mínim. És a dir, si $M_R = (a_{ij})$ de tipus $m \times n$ i $M_T = (b_{ij})$ de tipus $p \times m$, llavors $M_T * M_R = (c_{ij})$ és de tipus $p \times n$ de manera que

$$c_{ij} = \max(\min(b_{i1}, a_{ij}), ..., \min(b_{im}, a_{mj})).$$

Exemple 39. *Suposem els conjunts* $X = \{a, b, c\}, Y = \{1, 2, 3\}, Z = \{p, q\}$*, i les relacions*

$$R = \{(a, 1), (b, 1), (b, 2), (c, 2)\}; \quad S = \{(a, 3), (b, 1)\} \quad i \quad T = \{(1, q)\}.$$

Llavors les corresponents matrius booleanes serien

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i \quad M_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'aquesta manera també tendriem per exemple que

$$M_{R \cup S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad i \qquad M_{T \circ R} = M_T * M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notau que en el cas de relacions binàries sobre un conjunt $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ les matrius booleanes associades són matrius quadrades d'ordre n. A més es poden estudiar les propietats habituals d'aquestes relacions mijançant les matrius i així tenim que, donada una relació $R \subseteq X \times X$:

- R és reflexiva si i només si la diagonal de M_R està formada per 1's.
- R és simètrica si i només si $M_R = (M_R)^t$ (és a dir, si M_R és simètrica respecte de la diagonal).
- R és anti-simètrica si i només si la matriu $min(M_R, (M_R)^t)$ és diagonal.
- R és transitiva si i només si $M_R * M_R \leq M_R$.

Matrius estocàstiques i Estadística. Un vector de probabilidad és una matriu columna amb entrades no negatives que sumen 1. Una matriu estocástica és una matriu quadrada de manera que cada columna (i cada fila) forma un vector de probabilidad. Les matrius estocàstiques són molt útils en estadística i probabilitats per molts de motius, per exemple en les anomenades *cadenes de Markov*. Una cadena de Markov es uns successió de vectors de probabilidad $x_0, x_1, ...x_n, ...$ juntament amb una matriu estocàstica A de manera que

$$x_{i+1} = Ax_i \qquad \text{per a tot} \quad i = 0, 1, 2, ...$$

Quan una cadena de Markov de vectors de $\mathbb{R}^n$ descriu un sistema o una successió d'experiments, les entrades de cada x_i representen, respectivament, les probabiitats de que el sistema es trobi en cada un dels n estats possibles, o de que el resultat d'un experiment sigui cada un dels n possibles.

La manipulació d'aquestes matrius i de les cadenes de Markov permet fer prediccions de com pot evolucionar el sistema que s'està estudiant. En aquest sentit, donada una metriu estocástica A, es defineix un *vector estacionari* com un vector de probabilidad q tal que $Aq = q$. Es pot demostrar que si la matriu A verifica certes condicions (alguna de les seves potències té totes les seves entrades estrictament possitives) llavors A té sempre un únic vector estacionari i la cadena de Markov $x_{i+1} = Ax_i$ convergeix (desde qualsevol estat inicial x_0 al vector estacionari.

Notau que la intersecció de les matrius estocàstiques amb les matrius booleanes dona lloc a matrius de 0's i 1's en les quals cada columna (i cada fila) té un 1 i només un. Aquest tipus de matrius, que s'anomenen *matrius de permutacions*, no només són importants en estadística sino que també ho són en altres camps. En particular, cada matriu de permutacions quadrada d'ordre n, $A = (a_{ij})$, representa una permutació σ del grup simètric $S_n = \{\text{permutacions del conjunt } X = \{1, 2, ..., n\}\}$, de la següent manera:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(i) = j \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Així per exemple la següent permutació $\sigma \in S_5$ té matriu associada M_σ:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad M_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Llavors, el producte de dues matrius de permutacions és una matriu de permutacions que correspon a la composició de les permutacions corresponents i així, a través de les matrius podem estudiar les permutacions i viceversa.

Equacions diferencials i sistemes dinàmics. Una altra part de les matemàtiques amb moltes aplicacions i en la qual les matrius hi estàn presents, són les equacions diferencials i els sistemes dinàmics. De manera molt simplificada poden dir que un sistema dinàmic és aquell que estudia l'evolució de diverses variables que varien simultàniament amb el temps i de manera que influeixen unes amb les altres. Això és molt habitual en economia, biologia, ecologia, enginyeria, cicuits elèctrics, etc. Per exemple, quan un vol analitzar el comportament i l'evolució de la població de diverses espècies animals en un mateix hàbitat, és habitual obtenir sistemes del tipus

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases} \tag{1.2}$$

on les x_i són funcions del temps t que indiquen la població d'una determinada espècie en cada instant, i les x_i' indiquen les derivades d'aquestes funcions i representen la velocitat de creixement (o decreixament) de la població de cada una d'aquestes espècies.

Una equació del tipus (1.2) s'anomena un *sistema d'equacions diferencials* i la seva resolució es redueix habitualment a un problema de matrius. Podem considerar com sempre la matriu del sistema $A = (a_{ij})$. Llavors si aquesta matriu és diagonal el sistema té solució immediata.

Exemple 40. *Suposem que l'ecosistema en consideració està format per tres espècies x, y, z i que la matriu ve donada per*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

això vol dir que el sistema d'equacions diferencials ve donat per

$$x' = 3x, \quad y' = -2y \quad i \quad z' = 6z.$$

Així, sabeu que la solució és trivial i que

$$x = k_1e^{3t}, \quad y = K_2e^{-2t} \quad i \quad z = K_3e^{6t}.$$

D'aquesta manera per resoldre sistemes més complicats en els que la matriu no és diagonal, un mètode es basa en aconseguir una matriu "equivalent" que sigui diagonal, resoldre-la i tornar enrera. Veurem precisament com "diagonalitzar" matrius en el darrer tema d'aquesta assignatura. Cal notar que hi ha matrius no diagonalitzables, però en aquests casos sempre es poden trobar matrius equivalents en formes prou simples perquè el sistema resultant també tengui solucions senzilles. Aquestes "formes simples", anomenades *formes de Jordan*, les veureu més endavant en la segona assignatura d'Àlgebra Lineal.