

1 [3p] Considerau la matriu A següent:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calcula el determinant de A emprant les propietats dels determinants que consideris oportunes.
2. Calcula els setze adjunts de la matriu A anterior
3. Empra els resultats anteriors per donar la inversa de A .

2 [2p] Trobau en cada cas el vector o vectors de \mathbb{R}^3 que compleixen

1. Té norma $\sqrt{2}$ i és perpendicular a $\vec{u} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ i a $\vec{v} = (\sqrt{3}, 0, \sqrt{3})$.
2. Té norma 1 i és perpendicular a $\vec{u} = (a^2, a^2, 1)$ i a l'eix positiu de les X .

3 [2p] Definiu els següents conceptes:

1. Espai vectorial sobre un cos \mathbb{K} .
2. Subespai vectorial.

4 [3p] Considerau el conjunt

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0; -x + y + z = 0\}$$

1. Demostrau que és un subespai vectorial de \mathbb{R}^3 .
2. Donau una base i dimensió del subespai.
3. Donau un vector que sigui perpendicular al subespai vectorial.

5 [5p] Donada la funció f de \mathbb{R}^3 a $\mathbb{R}_2[t]$ determinada per $f(x, y, z) = (y + z)t^2 + (x + y)t + z$ en les bases canòniques respectives. Es demana:

1. Demostrar que és una aplicació lineal
2. Donar la matriu de f en les bases canòniques.
3. Trobar el nucli de f .
4. Trobar la imatge de f .
5. Donat el conjunt de vectors de l'espai vectorial \mathbb{R}^3 $U = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ provau que en formen una base i donau la matriu de canvi de base de U a la canònica d'aquest espai.
6. Donau la matriu de canvi de base de la canònica a U de \mathbb{R}^3
7. Donat el conjunt de polinomis de l'espai vectorial $\mathbb{R}_2[t]$ $V = \{t + 1, t^2 + 1, t^2 + t\}$ provau que en formen una base i donau la matriu de canvi de base de V a la canònica d'aquest espai.
8. Donau la matriu de canvi de base de la canònica a V de $\mathbb{R}_2[t]$
9. Calculau l'expressió matricial de f que comença a \mathbb{R}^3 en la base U i acaba a $\mathbb{R}_2[t]$ en la base V
10. Donau l'expressió analítica de la funció f calculada a l'apartat anterior.

6 [2p] Proveu que si A és una matriu diagonalitzable i semblant a B , aleshores B també és diagonalitzable.

7 [3p] Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Què ha de verificar el paràmetre a perquè la matriu A sigui diagonalitzable?
2. En els casos que diagonalitzi, cercau una base de vectors propis i la matriu diagonal.
3. Calculau A^n per a tot n natural emprant els resultats obtinguts.

8 [3p] Per tal d'estar alerta davant les possibles invasions de Caminants Blancs que s'acosten al mur al Nord dels Set Regnes, el capità Jon Snow ha apostat quatre Corbs Negres que vigilaran zones estratègiques del Nord els quals, en cas de detectar perill, encendran una foguera ben gran per alertar els defensors del mur. Aquests, faràn sonar tres cops un corn que alerti del perill que s'acosta als camperins de les regions properes si s'encenen tres o bé les quatre fogueres. Si només s'activen dues de les fogueres, que facin sonar o no el corn és totalment indiferent i dependrà del vigilant de torn. El corn mai ha de sonar si només s'encen una o cap foguera per no asustar els camperins sense motiu. Finalment, per raons de seguretat, si s'activa només la darrera de les quatre fogueres, la més propera al mur es farà sonar si o si el Corn per estar segurs de l'amenaça imminent que s'acosta.

1. Descriure les variables d'una funció booleana F (les que considereu necessàries) que compleixin totes aquestes condicions.
2. Donar la seva taula de veritats.
3. Donar una expressió booleana de F .
4. Dibuixar el seu mapa de Karnaugh i una simplificació de l'expressió booleana anterior.

9 [3p] Christian Grey és un magnat molt gelós de la seva nova al·lota, la senyoreta Anastasia Steele, i li imposa una sèrie de normes que ha de complir i firmar en un document per poder dur la seva relació envant. Les normes es refereixen als tres aspectes següents:

- x : prendre vi reserva
- y : dur roba elegant per sortir
- z : conduir el cotxe d'en Christian

Les normes que li imposa son que

- mai prendrà alcohol de reserva si alhora ha de conduir,
- o bé prendrà vi reserva en cas de anar elegant per sortir o bé conduirà el cotxe si va elegant i no ha begut vi.

N'Anastasia accedeix a la segona però es rebel·la contra la primera i diu que mai la complirà, cosa que en Christian acaba acceptant. Donades les restriccions anteriors,

1. Donau la funció booleana $f(x, y, z)$ que resumeix les condicions que acorden la parella.
2. Simplificau-la per donar-ne la forma canònica conjuntiva.
3. Simplificau-la per donar-ne la forma canònica disjuntiva.

10 [4p] Un dels jocs favorits del Dr. Sheldon Cooper per resoldre conflictes i prendre decisions és el de pedra, paper, tisores, llangardaix, Spock. En aquest joc, es segueixen una sèrie de regles bàsiques:

El paper cobreix la pedra, aquesta esclafa el llangardaix, aquest enverina n'Spock, aquest vaporitza la pedra, aquesta romp les tisores que a la seva vegada decapiten el llangardaix, aquest té gana i es menja el paper, el qual desprestigia n'Spock, que a la seva vegada romp les tisores, i com no, aquestes tallen el paper.

1. Dibuixau un graf dirigit on es vegin els cinc possibles moviments del joc i la relació que s'estableix entre cadascun d'ells.
2. Donau el node o nodes de major grau del graf i indicau-ne el valor.
3. El graf que heu dibuixat és un arbre? Perquè?
4. El graf que heu dibuixat és connex? Perquè? Quantes components connexes té?
5. Digau si conté un circuit i/o recorregut eulerià justificant la vostra resposta.
6. Digau si conté un circuit i/o recorregut hamiltonià justificant la vostra resposta.
7. Donat un graf $G = (V, E)$ s'anomena graf complementari al graf que conté els mateixos vèrtexos que G però les arestes que no contenia el graf original. Dibuixau i donau el graf complementari de G .
8. Son isomorfs el graf original G i el seu complementari G' ? En cas afirmatiu donau un isomorfisme, i en cas negatiu explica-hi perquè no ho poden ser.
9. Escriviu amb paraules les regles del joc que resulten del graf complementari de G de forma original (per exemple, n'Spock es menja el llangardaix).
10. Dibuixau el graf original ara no dirigit i assignau a cada aresta el pes equivalent a la suma de vocals entre les dues paraules de cada node que uneix l'aresta (per exemple, l'aresta que uneix pedra amb Spock haurà de tenir pes 3). Donau-ne un arbre recobridor mínim.

Segurament el curs podria haver estat més complet i amb més contingut, exercicis i demostracions però mai hagues pogut ser més divertit que com ha estat. Molta sort i fins el cuatrimestre que ve!