Ejercicios

Espacios vectoriales

Curso Álgebra Lineal

Pregunta 1

Considera los vectores $\vec{u} = (3, 0, 0),\ \vec{v} = (1, 0, -3),\ \vec{w} = (0, -2, 4)$

- Estudiad si son linealmente independientes o linealmente dependientes
- Encontrad, si es posible, una combinación lineal de estos vectores tal que su resultado sea el vector $(2, -4, 1)$
- ¿Es posible obtener cualquier vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ como combinación lineal de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$?

Pregunta 2

Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3),\ \vec{v} = (2, 4, 0),\ \vec{w} = (3, -2, 3)$

- Encuentra tres números reales a, b, c tales que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$
- ¿Es $\vec{u}$ combinación lineal de $\vec{v}, \vec{w}$?
- ¿Es $\vec{w}$ combinación lineal de $\vec{u}, \vec{v}$?
- Expresa el vector $(6, 0, 9)$ como combinación lineal de los 3 vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

Pregunta 3

Determina si los siguientes conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes o independientes. Estudia su rango:

- $\{(1, -2, 1), (2, 1, -1), (7, -4, 1)\}$
- $\{(1, -3, 7), (2, 0, -6), (3, -1, -1), (2, 4, 5)\}$
- $\{(1, 2, -3), (1, -3, 2), (2, -1, 5)\}$
- $\{(2, -3, 7), (0, 0, 0), (3, -1, -4)\}$
- $\{(1, 1, 1), (1, -1, 5)\}$
- $\{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, -1, 1)\}$
- $\{(2, 2, -1), (4, 2, -2), (7, -4, 1)\}$

Pregunta 4

Demostrad que $\vec{u} = (x, y)$ y $\vec{v} = (z, t)$ son linealmente dependientes si, y solo si, $xt - yz = 0$

Pregunta 5

Encontrad los valores de α tales que los vectores $(-2, \alpha, \alpha), (\alpha, -2, \alpha), (\alpha, \alpha, -2)$ sean linealmente dependientews

Pregunta 6

Dado el conjunto de vectores $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ tal que u_4 es combinación lineal de u_1, u_2 y u_3 es combinación lineal de u_1, u_4, discutid si los vectores de este conjunto son LI o LD y decid cuál es el rango de U

Pregunta 7

Determinad si los vectores $u = (1, 0, 2)$, $v = (0, 1, -3)$, $w = (1, 1, 0)$ y $z = (0, 0, -1)$ de $\mathbb{R}^3$ forman un sistema generador de $\mathbb{R}^3$.

Pregunta 8

Si $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ es un conjunto de vectores de rango 3, comenta la verdad o la falsedad de las siguientes afirmaciones

- Todos los subconjuntos de U de 3 vectores son conjuntos libres
- El vector u_3 es linealmente independiente del resto
- Los vectores del subconjunto $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ son LI
- Algún subconjunto de U de 3 vectores es libre (sus vectores son LI) ya que el rango es el número máximo de vectores LI que podemos encontrar en el conjunto. Por tanto, es suficiente con que haya al menos un subconjunto de 3 vectores LI

Pregunta 9

Estudiad si los siguientes conjuntos de vectores cumplen los requisitos para formar una base de $\mathbb{R}^3$

- $A = \{(1, 1, 1), (3, 1, -1), (-4, 2, 8)\}$
- $B = \{(3, 2, 1), (2, 1, 0), (1, 0, 0)\}$

Pregunta 10

Considerad los vectores $(1, 2, -1), (2, 1, -1)$. Encontrad un vector tal que con los otros dos forme una base de $\mathbb{R}^3$

Pregunta 11

Sea $\vec{u} = (2, 1, 3)$ en la base canónica. Calculad las componentes de $\vec{u}$ en la nueva base $B = \{(1, 2, 0), (1, -1, 1), (0, 1, 1)\}$

Pregunta 12

Expresad el vector $(3, 1, 4)$ en la base de $\mathbb{R}^3$ formada por los vectores $(1, -2, -1), (1, -1, 0), (0, 0, 3)$

Pregunta 13

Indica cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de los espacios indicados. Dad una base en el caso en que sea subespacio

- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - z = 0\}$
- $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - y + z = 0\}$
- $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = 0, \ y + z = 0\}$
- $D = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$
- $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \ y = x + z + t + 1\}$
- $F = \{(x, y, z, y) \in \mathbb{R}^4 \ y = x + z, \ t = 2x :\}$

Pregunta 14

Dentro del espacio vectorial de las matrices cuadradas $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, decid cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales

- El conjunto de las matrices diagonales
- El conjunto $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix} : \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$
- El conjunto $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \quad a + b = 0, \ a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$