Algebra Lineal. Primer de Telemàtica. Segon parcial - 22 de Desembre, 2017

1 (3.5p) Considerau la següent matriu A donada en funció de dos paràmetres $a, b \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 2a-b & 0 & 2a-2b \\ 1 & a & 2 \\ -a+b & 0 & -a+2b \end{pmatrix}$$

1. (1p) Trobau els valors propis de la matriu A en funció de a, b i digau la seva dimensió algebraica.
2. (1p) En el cas en que $a = b$, trobau els vectors propis associats als valors propis de la matriu A i digau la seva dimensió geomètrica.
3. (1p) En el cas en que $a \neq b$, trobau els vectors propis associats als valors propis de la matriu A i digau la seva dimensió geomètrica.
4. (0.5p) En funció dels resultats anteriors, digau per a quins valors de a i b la matriu A diagonalitza. Trobau en aquests casos la matriu diagonal semblant a la matriu A així com la matriu de canvi de base.

2 (4p) Considerau $\mathbb{R}_2[x] = \{ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ l'espai de polinomis de grau menor o igual que 2 amb una variable i coeficients reals i considerau l'aplicació lineal

$$f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}$$

que donats un polinomi $p(x)$ l'envia a $f(p(x)) = p(2)$

1. (0.5p) Demostrau que l'aplicació f és una aplicació lineal.
2. (0.5p) Calculau la matriu de f en la base usual de $\mathbb{R}_2[x]$, és a dir $B = \{1, x, x^2\}$.
3. (0.5p) Demostrau que els polinomis $q_0(x) = x, q_1(x) = x - 1, q_2(x) = x(x-1)$ formen una base de $\mathbb{R}_2[x]$, diguem-li V.
4. (0.5p) Trobau les matrius de canvi de base de $P_{B\to V}$ i $P_{V\to P}$ de l'espai vectorial $\mathbb{R}_2[x]$.
5. (0.5p) Dibuixau un diagrama que relacioni l'aplicació f respecte de les bases B i V i la canònica de $\mathbb{R}$ i calculau la matriu de f en la base V de $\mathbb{R}_2[x]$.
6. (1.0p) Trobau una base del nucli i una de la imatge de f i discutiu quin tipus d'aplicació és (i.e. monomorfisme, epimorfisme, isomorfisme, automorfisme,...)
7. (0.5p) Demostrau o refutau que el conjunt de polinomis $p \in \mathbb{R}_2[x]$ tals que $f(p')$ formen un subespai vectorial.