Ejercicio 32

Su alimentación requiere que lo que coma pertenezca a uno de los siguientes grupos de alimentos (pastel de chocolate, helado, refrescos, y pastel de queso). Dispone de los siguientes alimentos para el consumo: bizcochos de chocolate, helado de chocolate, cola, y pastel de queso, siendo su coste de 4 euros cada bizcocho, 2 euros cada bola de helado de chocolate, 3 euros una botella de refresco, y 6 euros una porción de pastel de queso. Cada día necesita ingerir por lo menos 600 calorías, 20 gramos de chocolate, 30 gramos de azúcar, y 25 gramos de grasa. El contenido nutritivo unitario de cada elemento se muestra en la tabla.

	Calorías	Chocolate	Azúcar	Grasa
Bizcocho	300	2	1	1
Helado	200	1	1	2
Refresco	100	0	2	1
Pastel queso	400	0	3	3

Resolviendo el programa lineal correspondiente, se obtiene la siguiente solución:

	Variable	Valor	Coste reducido
Bizcocho	X_B	0	- 1,5
Helado de chocolate	X_H	20	0
Refresco	X_R	5	0
Pastel de queso	X_P	0	- 1,5
	E_1	3900	0
	E_2	0	- 0,5
	E_3	0	- 1,5
	E_4	20	0

Se pide:

1. Determine si la solución actual sigue siendo óptima en el caso de que el precio unitario del bizcocho aumente hasta 5 euros y el precio de una porción de pastel de queso disminuya hasta 5 euros. En caso de que no siga siendo óptima la solución, halle la nueva solución óptima.

La solución óptima expresada en formato tabular:

	Z	X_B	X_H	X_R	X_P	E_1	E_2	E_3	E_4	
Z	1	- 1,5	0	0	- 1,5	0	- 0,5	- 1,5	0	
X_H	0		1	0		0			0	20
X_R	0		0	1		0			0	5
E_1	0		0	0		1			0	3900
E_4	0		0	0		0			1	20

Dado que el bizcocho y el pastel de fresa son variables no básicas, si varía su coste unitario, únicamente cambia en la tabla óptima el coste reducido de dichas variables.

$$Z_{X_B} - C_{X_B}^{\text{nuevo}} = \left(Z_{X_B} - C_{X_B}^{\text{actual}}\right) + C_{X_B}^{\text{actual}} - C_{X_B}^{\text{nuevo}} = -1{,}5 + 4 - 5 = -2{,}5$$

$$Z_{X_P} - C_{X_P}^{\text{nuevo}} = \left(Z_{X_P} - C_{X_P}^{\text{actual}}\right) + C_{X_P}^{\text{actual}} - C_{X_P}^{\text{nuevo}} = -1{,}5 + 6 - 5 = -0{,}5$$

La solución sigue siendo óptima dado que ninguna variable puede entrar en la base y mejorar la solución actual, ya que el coste reducido de las variables no básicas es negativo y el problema es de minimización. Siendo la solución óptima:

$$X_H = 20 \qquad X_R = 5 \qquad X_B = 0 \qquad X_P = 0$$

2. Hasta que valor puede rebajarse el precio de un bizcocho de forma que la base actual siga siendo óptima.

Formulando el programa lineal original, resulta:

$$\text{Min}\left\{4\,X_B + 2\,X_H + 3\,X_R + 6\,X_P\right\}$$

$$300\,X_B + 200\,X_H + 100\,X_R + 400\,X_P \geq 600$$

$$2\,X_B + 1\,X_H + 0\,X_R + 0\,X_P \geq 20$$

$$1\,X_B + 1\,X_H + 2\,X_R + 3\,X_P \geq 30$$

$$1\,X_B + 2\,X_H + 1\,X_R + 3\,X_P \geq 25$$

$$X_i \geq 0$$

Incluya en el modelo las variables de exceso y las variables artificiales que corresponda:

$$300\,X_B + 200\,X_H + 100\,X_R + 400\,X_P - 1\,E_1 + 1\,A_1 = 600$$

$$2\,X_B + 1\,X_H + 0\,X_R + 0\,X_P - 1\,E_2 + 1\,A_2 = 20$$

$$1\,X_B + 1\,X_H + 2\,X_R + 3\,X_P - 1\,E_3 + 1\,A_3 = 30$$

$$1\,X_B + 2\,X_H + 1\,X_R + 3\,X_P - 1\,E_4 + 1\,A_4 = 25$$

Resuelva la fase I del método simplex:

$$\text{Min}\,\{+1\,A_1 + 1\,A_2 + 1\,A_3 + 1\,A_4\}$$

$$300\,X_B + 200\,X_H + 100\,X_R + 400\,X_P - 1\,E_1 + 1\,A_1 = 600$$

$$2\,X_B + 1\,X_H + 0\,X_R + 0\,X_P - 1\,E_2 + 1\,A_2 = 20$$

$$1\,X_B + 1\,X_H + 2\,X_R + 3\,X_P - 1\,E_3 + 1\,A_3 = 30$$

$$1\,X_B + 2\,X_H + 1\,X_R + 3\,X_P - 1\,E_4 + 1\,A_4 = 25$$

$$X_i \geq 0 \qquad\qquad A_i \geq 0$$

En la primera fila de la tabla debe colocar los costes reducidos de cada variable, así como el valor de la función objetivo:

$$Z_j - C_j = C_B \cdot B^{-1} \cdot N - C_N$$

$$Z_j - C_j = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 300 & 200 & 100 & 400 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} - [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] = [304 \quad 204 \quad 103 \quad 406]$$

$$Z = C_B \cdot X_B = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 600 \\ 20 \\ 30 \\ 25 \end{bmatrix} = 675$$

	Z	X_B	X_H	X_R	X_P	E_1	E_2	E_3	E_4	A_1	A_2	A_3	A_4	
Z	1	304	204	103	406	- 1	- 1	- 1	- 1	0	0	0	0	675
A_1	0	300	200	100	400	- 1	0	0	0	1	0	0	0	600
A_2	0	2	1	0	0	0	- 1	0	0	0	1	0	0	20
A_3	0	1	1	2	3	0	0	- 1	0	0	0	1	0	30
A_4	0	1	2	1	3	0	0	0	- 1	0	0	0	1	25

Iteración 1 - Entra en la base X_P ya que tiene el coste reducido positivo, y de todos los positivos, el mayor. Sale de la base:

$$\text{Min}\left\{\frac{B^{-1}\,b}{Y_{X_P}}, Y_{X_P} > 0\right\} = \text{Min}\left\{\frac{600}{400}, -, \frac{30}{3}, \frac{25}{3}\right\} = \frac{600}{400} \;\rightarrow\; A_1$$

	Z	X_B	X_H	X_R	X_P	E_1	E_2	E_3	E_4	A_1	A_2	A_3	A_4	
Z	1	- 0,5	1	1,5	0	0,015	- 1	- 1	- 1	- 1,015	0	0	0	66
X_P	0	0,75	0,5	0,25	1	- 0,0025	0	0	0	0,0025	0	0	0	1,5
A_2	0	2	1	0	0	0	- 1	0	0	0	1	0	0	20
A_3	0	- 1,25	- 0,5	1,25	0	0,0075	0	- 1	0	- 0,0075	0	1	0	25,5
A_4	0	- 1,25	0,5	0,25	0	0,0075	0	0	- 1	- 0,0075	0	0	1	20,5

Iteración 2 - Entra en la base X_R ya que tiene el coste reducido positivo, y de todos los positivos, el mayor. Sale de la base:

$$\text{Min}\left\{\frac{B^{-1}\,b}{Y_{X_R}}, Y_{X_R} > 0\right\} = \text{Min}\left\{\frac{1{,}5}{0{,}25}, -, \frac{25{,}5}{1{,}25}, \frac{20{,}5}{0{,}25}\right\} = \frac{1{,}5}{0{,}25} \quad \rightarrow \quad X_P$$

	Z	X_B	X_H	X_R	X_P	E_1	E_2	E_3	E_4	A_1	A_2	A_3	A_4	
Z	1	- 5	- 2	0	- 6	0,03	- 1	- 1	- 1	- 1,03	0	0	0	57
X_R	0	3	2	1	4	- 0,01	0	0	0	0,01	0	0	0	6
A_2	0	2	1	0	0	0	- 1	0	0	0	1	0	0	20
A_3	0	- 5	- 3	0	- 5	0,02	0	- 1	0	- 0,02	0	1	0	18
A_4	0	- 2	0	0	- 1	0,01	0	0	- 1	- 0,01	0	0	1	19

Iteración 3 - Entra en la base E_1 ya que tiene el coste reducido positivo, y de todos los positivos, el mayor. Sale de la base:

$$\text{Min}\left\{\frac{B^{-1}\,b}{Y_{E_1}}, Y_{E_1} > 0\right\} = \text{Min}\left\{-, -, \frac{18}{0{,}02}, \frac{19}{0{,}01}\right\} = \frac{18}{0{,}02} \quad \rightarrow \quad A_3$$

	Z	X_B	X_H	X_R	X_P	E_1	E_2	E_3	E_4	A_1	A_2	A_3	A_4	
Z	1	2,5	2,5	0	1,5	0	- 1	0,5	- 1	- 1	0	- 1,5	0	30
X_R	0	0,5	0,5	1	1,5	0	0	- 0,5	0	0	0	0,5	0	15
A_2	0	2	1	0	0	0	- 1	0	0	0	1	0	0	20
E_1	0	- 250	- 150	0	- 250	1	0	- 50	0	- 1	0	50	0	900
A_4	0	0,5	1,5	0	1,5	0	0	0,5	- 1	0	0	- 0,5	1	10

Iteración 4 - Entra en la base X_H ya que tiene el coste reducido positivo, y de todos los positivos, el mayor. Sale de la base:

$$\text{Min}\left\{\frac{B^{-1}\,b}{Y_{X_H}}, Y_{X_H} > 0\right\} = \text{Min}\left\{\frac{15}{0{,}5}, \frac{20}{1}, -, \frac{10}{1{,}5}\right\} = \frac{10}{1{,}5} \quad \rightarrow \quad A_4$$

	Z	X_B	X_H	X_R	X_P	E_1	E_2	E_3	E_4	A_1	A_2	A_3	A_4	
Z	1	1,66	0	0	- 1	0	- 1	- 0,3	0,66	- 1	0	- 0,6	- 1,6	13,3
X_R	0	0,33	0	1	1	0	0	- 0,6	0,33	0	0	0,66	- 0,3	11,6
A_2	0	1,66	0	0	- 1	0	- 1	- 0,3	0,66	0	1	0,33	- 0,6	13,3
E_1	0	- 200	0	0	- 100	1	0	0	- 100	- 1	0	0	100	1900
X_H	0	0,33	1	0	1	0	0	0,33	- 0,6	0	0	- 0,3	0,66	6,66

Iteración 5 - Entra en la base X_B ya que tiene el coste reducido positivo, y de todos los positivos, el mayor. Sale de la base:

$$\text{Min}\left\{\frac{B^{-1}\,b}{Y_{X_B}}, Y_{X_B} > 0\right\} = \text{Min}\left\{\frac{11{,}6}{0{,}33}, \frac{13{,}3}{1{,}66}, -, \frac{6{,}66}{0{,}33}\right\} = \frac{13{,}3}{1{,}66} \quad \rightarrow \quad A_2$$

	Z	X_B	X_H	X_R	X_P	E_1	E_2	E_3	E_4	A_1	A_2	A_3	A_4	
Z	1	0	0	0	0	0	0	0	0	- 1	- 1	- 1	- 1	0
X_R	0	0	0	1	1,20	0	0,20	- 0,6	0,2	0	- 0,20	0,6	- 0,20	9
X_B	0	1	0	0	- 0,6	0	- 0,6	- 0,2	0,4	0	0,6	0,2	- 0,4	8
E_1	0	0	0	0	- 220	1	- 120	- 40	- 20	- 1	120	40	20	3500
X_H	0	0	1	0	1,20	0	0,20	0,4	- 0,8	0	- 0,20	- 0,4	0,8	4

Fase 2:

$$\text{Min}\{4\,X_B + 2\,X_H + 3\,X_R + 6\,X_P + M\,A_1 + M\,A_2 + M\,A_3 + M\,A_4\}$$

$$300\,X_B + 200\,X_H + 100\,X_R + 400\,X_P - 1\,E_1 + 1\,A_1 = 600$$

$$2\,X_B + 1\,X_H + 0\,X_R + 0\,X_P - 1\,E_2 + 1\,A_2 = 20$$

$$1\,X_B + 1\,X_H + 2\,X_R + 3\,X_P - 1\,E_3 + 1\,A_3 = 30$$

$$1\,X_B + 2\,X_H + 1\,X_R + 3\,X_P - 1\,E_4 + 1\,A_4 = 25$$

$$X_i \geq 0$$

$$Z_j - C_j = C_B \cdot B^{-1} \cdot N - C_N$$

$$C_B \cdot B^{-1} \cdot N = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,20 & 0,20 & -0,6 & 0,2 & 0 & -0,20 & 0,6 & -0,20 \\ -0,6 & -0,6 & -0,2 & 0,4 & 0 & 0,6 & 0,2 & -0,4 \\ -220 & -120 & -40 & -20 & -1 & 120 & 40 & 20 \\ 1,20 & 0,20 & 0,4 & -0,8 & 0 & -0,20 & -0,4 & 0,8 \end{bmatrix}$$

$$Z_j - C_j = \begin{bmatrix} 3,6 & -1,4 & -1,8 & 0,6 & 0 & 1,4 & 1,8 & -0,6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & M & M & M & M \end{bmatrix}$$

$$Z_j - C_j = \begin{bmatrix} -2,4 & -1,4 & -1,8 & 0,6 & -M & 1,4-M & 1,8-M & -0,6-M \end{bmatrix}$$

$$Z = C_B \cdot X_B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 3500 \\ 4 \end{bmatrix} = 67$$

	Z	X_B	X_H	X_R	X_P	E_1	E_2	E_3	E_4	A_1	A_2	A_3	A_4	
Z	1	0	0	0	- 2,4	0	- 1,4	- 1,8	0,6	- M	1,4 - M	1,8 - M	- 0,6 - M	67
X_R	0	0	0	1	1,20	0	0,20	- 0,6	0,2	0	- 0,2	0,6	- 0,2	9
X_B	0	1	0	0	- 0,6	0	- 0,6	- 0,2	0,4	0	0,6	0,2	- 0,4	8
E_1	0	0	0	0	- 220	1	- 120	- 40	- 20	- 1	120	40	20	3500
X_H	0	0	1	0	1,20	0	0,20	0,4	- 0,8	0	- 0,2	- 0,4	0,8	4

Iteración 1 - Entra en la base E_4 ya que tiene el coste reducido positivo, y de todos los positivos, el mayor. Sale de la base:

$$\text{Min}\left\{\frac{B^{-1}\ b}{Y_{E_4}}, Y_{E_4} > 0\right\} = \text{Min}\left\{\frac{9}{0,2}, \frac{8}{0,4}, -, -\right\} = \frac{8}{0,4} \quad \rightarrow \quad X_B$$

	Z	X_B	X_H	X_R	X_P	E_1	E_2	E_3	E_4	A_1	A_2	A_3	A_4	
Z	1	- 1,5	0	0	- 1,5	0	- 0,5	- 1,5	0	- M	0,5 - M	1,5 - M	- M	55
X_R	0	- 0,5	0	1	1,5	0	0,50	- 0,5	0	0	- 0,5	0,5	0	5
E_4	0	2,5	0	0	- 1,5	0	- 1,5	- 0,5	1	0	1,5	0,5	- 1	20
E_1	0	50	0	0	- 250	1	- 150	- 50	0	- 1	150	50	0	3900
X_H	0	2	1	0	0	0	- 1	0	0	0	1	0	0	20

La solución hallada es óptima dado que ninguna variable puede entrar en la base y mejorar la solución actual, ya que el coste reducido de las variables no básicas es negativo y el problema es de minimización.

De donde la inversa de la base:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0,5 & -1 \\ -1 & 150 & 50 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Z_{X_B} - C_{X_B} = C_B \cdot B^{-1} \cdot N - C_N = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,5 \\ 2,5 \\ 50 \\ 2 \end{bmatrix} - C_{X_B} = 2,5 \; - \left[4 + \Delta C_{X_B} \right]$$

$$Z_{X_B} - C_{X_B} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 2,5 \; - \left[4 + \Delta C_{X_B} \right] \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta C_{X_B} \geq -1,5$$

El precio de un bizcocho puede rebajarse hasta 4 – 1,5 = 2,5 euros de forma que la base actual siga siendo óptima.

3. Hasta que valor puede rebajarse el precio de una porción de pastel de queso de forma que la base actual siga siendo óptima.

$$Z_{X_P} - C_{X_P} = C_B \cdot B^{-1} \cdot N - C_N = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,5 \\ -1,5 \\ -250 \\ 0 \end{bmatrix} - C_{X_P} = 4,5 \; - \left[6 + \Delta C_{X_P} \right]$$

$$Z_{X_B} - C_{X_P} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 4,5 \; - \left[6 + \Delta C_{X_P} \right] \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta C_{X_P} \geq -1,5$$

El precio de una porción de pastel de queso puede rebajarse hasta 6 – 1,5 = 4,5 euros de forma que la base actual siga siendo óptima.