SOLUCIONES TEMA 6: DIAGONALIZACIÓN

EP6.1.- Calcular los vectores propios de las matrices y las multiplicidades algebraicas y geométricas de sus autovalores.

a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0-\lambda & -1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$ No hay valores propios reales

b) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 & -4 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ -4 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(\lambda+2)^2$

$\lambda_1 = 6 \rightarrow n_1 = 1$

$\begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 \\ 0 & -8 & 0 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases}$ $\begin{cases} \text{Vector genérico: } (-z,0,z) \\ \text{Una base:} (-1,0,1) \end{cases}$ $\dim H_{\lambda_1} = 1 = n_1$

$\lambda_2 = -2 \rightarrow n_2 = 2$

$\begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x = y + z$ $\begin{cases} \text{Vector genérico: } (y+z,y,z) \\ \text{Una base:} \{(1,1,0)(1,0,1)\} \end{cases}$ $\dim H_{\lambda_2} = 2 = n_2$

Como las multiplicidades coinciden A es diagonalizable.
Base de R^3 formada por vectores propios: $(-1,0,1),(1,1,0),(1,0,1)$.

c) $\begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ -7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 & 3 \\ -2 & 4-\lambda & 2 \\ -7 & 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 & 0 \\ -2 & 4-\lambda & \lambda-2 \\ -7 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 & 0 \\ -2 & 4-\lambda & 1 \\ -7 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$

$$(\lambda-2)\begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 & 0 \\ -9 & 7-\lambda & 0 \\ -7 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -(\lambda-2)\begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 \\ -9 & 7-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda+2)$$

$\lambda_1 = 2 \rightarrow n_1 = 1$ $\begin{pmatrix} -7 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$ $\begin{cases} \text{Vector genérico: } (0,-z,z) \\ \text{Una base: } (0,-1,1) \end{cases}$ $\dim H_{\lambda_1} = 1$

$\lambda_2 = 4 \rightarrow n_2 = 1$ $\begin{pmatrix} -9 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -7 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} y = 2x \\ z = x \end{cases}$ $\begin{cases} \text{Vector genérico: } (x,2x,x) \\ \text{Una base: } (1,2,1) \end{cases}$ $\dim H_{\lambda_2} = 1$

$\lambda_3 = -2 \rightarrow n_3 = 1$ $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ -7 & 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \text{Vector genérico: } (z,0,z) \\ \text{Una base: } (1,0,1) \end{cases}$ $\dim H_{\lambda_3} = 1$

Al ser los 3 valores propios distintos las multiplicidades coinciden y la matriz es diagonalizable.

d) $D=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1&1\\1&1-\lambda&-1&-1\\1&-1&1-\lambda&-1\\1&-1&-1&1-\lambda\end{vmatrix}\overset{\substack{1)\,C1n=C1+C2\\2)\,C2n\to C2-C3\\3)\,C3n\to C3-C4}}{=}\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0&1\\2-\lambda&2-\lambda&0&-1\\0&\lambda-2&2-\lambda&-1\\0&0&\lambda-2&1-\lambda\end{vmatrix}\overset{\substack{1)\,F1n=F1-F2\\2)\,F3n\to F3+F4}}{=}$

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0&1\\0&2-\lambda&0&-2\\0&\lambda-2&0&-\lambda\\0&0&\lambda-2&1-\lambda\end{vmatrix}\overset{F3n\to F3+F2}{=}\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0&1\\0&2-\lambda&0&-2\\0&0&0&-\lambda-2\\0&0&\lambda-2&1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^2(\lambda-2)(\lambda+2)$$

$\lambda_1=2 \quad n_1=3$

$\lambda_2=-2 \quad n_2=1$

$\lambda_1=2\rightarrow n_1=3$ $\quad\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\1&-1&-1&-1\\1&-1&-1&-1\\1&-1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\1&-1&-1&-1\\1&-1&-1&-1\\1&-1&-1&-1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

m.e.e.
1 f.n.n
Rango=1

Nº de incógnitas - rango = 4 - 1 = 3 parámetros

$x-y-z-t=0\quad\begin{cases}x=y+z+t\\y=y\\z=z\\t=t\end{cases}\quad\begin{cases}\text{Vector genérico: }(y+z+t,y,z,t)\\\text{Una base: }(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1)\end{cases}\quad\dim H_{\lambda_1}=3=n_1$

$\lambda_1=2\rightarrow n_1=3$ $\quad\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\1&-1&-1&-1\\1&-1&-1&-1\\1&-1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\1&-1&-1&-1\\1&-1&-1&-1\\1&-1&-1&-1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

m.e.e.
1 f.n.n
Rango=1

$\lambda_1=-2\rightarrow n_2=1\quad\begin{matrix}1\le\dim H_{\lambda_2}\le n_2\\n_2=1\end{matrix}\quad\Rightarrow\quad 1\le\dim H_{\lambda_2}\le 1\quad\Rightarrow\quad\dim H_{\lambda_2}=1=n_2$

Ambos valores propios tienen igulaes las multiplicidades algebraica y geométrica $\Rightarrow$ matriz diagonalizable

$\begin{pmatrix}1&-1&-1&3\\1&3&-1&-1\\1&-1&3&-1\\3&1&1&1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&-1&-1&3\\0&4&0&-4\\0&0&4&-4\\0&4&4&-8\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&-1&-1&3\\0&4&0&-4\\0&0&4&-4\\0&0&4&-4\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&-1&-1&3\\0&4&0&-4\\0&0&4&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

m.e.e.
3 f.n.n
Rango=3

Nº de incógnitas - rango = 4 - 3 = 1 parámetros

$\begin{cases}x-y-z+3t=0\\y-t=0\\z-t=0\end{cases}\quad\begin{cases}x=-t\\y=t\\z=t\\t=t\end{cases}\quad\begin{cases}\text{Vector genérico: }(-t,t,t,t)\\\text{Una base: }(-1,1,1,1)\end{cases}$

EP6.2.- Decidir cuáles de las siguientes matrices son diagonalizables:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)$ Valores propios distintos $\Rightarrow$ Diagonalizable

$\lambda_1 = 1 \rightarrow n_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = x \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Vector genérico: } (x,0) \\ \text{Una base:} (1,0) \end{cases} \quad \dim H_{\lambda_1} = 1 = n_1$$

$\lambda_1 = 3 \rightarrow n_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad -x+2y = 0 \rightarrow \begin{cases} y = y \\ x = 2y \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Vector genérico: } (2y,y) \\ \text{Una base:} (2,1) \end{cases} \quad \dim H_{\lambda_2} = 1 = n_2$$

Base de R^2 formada por vectores propios: $\{(1,0),(2,1)\}$.

$$VP = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Adj(VP) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad |VP| = 1\cdot 1 - 2\cdot 0 = 1 \quad (VP)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = (VP)^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} VP = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $B = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 13 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & -7 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ -1 & 13 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} \overset{F1n=F1+F2}{=}$

$$(4-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & -2-\lambda \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda+2)^2 \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 4 & n_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 & n_2 = 2 \end{matrix}$$

Solo es necesario estudiar el valor propio de multiplicidad algebraica 2 para saber si es diagonalizable.

$$\lambda_2 = -2 \rightarrow n_2 = 2 \quad \begin{pmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 13 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 13 & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

m.e.e.
2 f.n.n
Rango=2

Nº de incógnitas - rango = 3 - 2 = 1 parámetro

$\dim H_{\lambda_2} = 1 \neq n_2 = 2$ No es diagonalizable.

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} \overset{F1n=F1-F2}{=} \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} \overset{C1n=C1+C2}{=}$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2+\lambda & 0 \\ -2-\lambda & -5-\lambda & 3 \\ 0 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda)\begin{vmatrix} 2+\lambda & 0 \\ -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda)^2(4-\lambda) \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 4 & n_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 & n_2 = 2 \end{matrix}$$

Solo es necesario estudiar el valor propio de multiplicidad algebraica 2 para saber si es diagonalizable.

$$\lambda_2=-2\rightarrow n_2=2 \qquad \begin{pmatrix}3&-3&3\\3&-2&3\\6&-6&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}3&-3&3\\3&-3&3\\6&-6&6\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}3&-3&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

m.e.e.
1 f.n.n
Rango=1

Nº de incógnitas - rango = 3 - 1 = 2 parámetros

$$\dim H_{\lambda_2}=2=n_2=2$$

Y sabemos que $\dim H_{\lambda_1}=n_1=1$

Luego es diagonalizable.

$$x-y+z=0 \quad \begin{cases}x=y-z\\y=y\\z=z\end{cases} \qquad \begin{cases}\text{Vector genérico: } (y-z,y,z)\\ \text{Una base: } (1,1,0),(-1,0,1)\end{cases}$$

$$\lambda_2=4\rightarrow n_2=1 \qquad \begin{pmatrix}-3&-3&3\\3&-9&3\\6&-6&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Ya sabemos que el rango es 2. Elegiremos un menor de orden 2 no nulo

$$\begin{pmatrix}3&3\\6&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9y\\6y\end{pmatrix} \qquad x=\frac{1}{\begin{vmatrix}3&3\\6&0\end{vmatrix}}\begin{vmatrix}9y&3\\6y&0\end{vmatrix}=y \qquad z=\frac{1}{-18}\begin{vmatrix}3&9y\\6&6y\end{vmatrix}=2y \qquad \begin{cases}\text{Vector genérico: } (y,y,2y)\\ \text{Una base: } (1,1,2)\end{cases}$$

Base de R^3 formada por vectores propios: $\{(1,1,2),(1,1,0),(-1,0,1)\}$.

$$VP=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix} \qquad Adj(VP)=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-1&3&2\\1&-1&0\end{pmatrix} \qquad |VP|=2 \qquad (VP)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&3&-1\\-2&2&0\end{pmatrix}\frac{1}{2}$$

$$D=VP^{-1}\bullet C\bullet VP=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&3&-1\\-2&2&0\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

EP6.3.- Sea la matriz A. Encontrar sus valores y vectores propios. Determinar los subespacios propios asociados. Diagonalizar la matriz A si es posible.

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix}1-\lambda&-1&-1\\-1&1-\lambda&-1\\-1&-1&1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&-1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{vmatrix}=-(\lambda-2)^2(\lambda+1)$$

$$\lambda_1=2\rightarrow n_1=2\rightarrow\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow R_A=1\Rightarrow\dim H_{\lambda_1}=2=n_1 \quad \{x+y+z=0$$

$$\begin{cases}\text{Vector genérico: } (-y-z,y,z)\\ \text{Una base: } \{(-1,1,0),(-1,0,1)\}\end{cases}$$

$$\lambda_2=-1\rightarrow n_1=1\rightarrow\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow R_A=2\Rightarrow \dim H_{\lambda_2}=1=n_2\rightarrow\begin{cases}x=y\\z=x\end{cases}$$

$$\begin{cases}\text{Vector genérico: } (x,x,x)\\ \text{Una base: } (1,1,1)\end{cases}$$

Como las multiplicidades coinciden A es diagonalizable.

Base de R^3 formada por vectores propios: $\{(1,1,1),(-1,1,0),(-1,0,1)\}$.

$$VP=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

Diagonalización ortogonal:

Base de R^3 formada por vectores propios: $\{(1,1,1),(-1,1,0),(-1,0,1)\}$.

Hemos de buscar una base de vectores propios que sean ortonormales:

$$(1,1,1)\cdot(-1,1,0)=0$$
$$(1,1,1)\cdot(-1,0,1)=0$$

Tenemos que ortogonalizar la base $\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$ del subespacio H_{λ_1}:

$$\vec{v}_1=(1,1,1)$$

$$\vec{v}_2=(-1,1,0)$$

$$\vec{v}_3=(-1,0,1)-\frac{(-1,0,1)\cdot(-1,1,0)}{(-1,1,0)\cdot(-1,1,0)}(-1,1,0)-\frac{(-1,0,1)\cdot(1,1,1)}{(1,1,1)\cdot(1,1,1)}(1,1,1)=(-1,0,1)-\frac{1}{2}(-1,1,0)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$$

Base ortogonal de R^3 $\left\{(1,1,1),(-1,1,0),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)\right\}$

$$\|(1,1,1)\|=\sqrt{3}\qquad \|(-1,1,0)\|=\sqrt{(-1,1,0)\cdot(-1,1,0)}=\sqrt{2}\qquad \left\|\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)\right\|=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Base ortonormal de R^3 $\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1),\frac{\sqrt{2}}{2}(-1,1,0),\frac{\sqrt{6}}{2}\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)\right\}$

Matriz ortogonal: $Q=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}$ $\qquad Q^t \cdot A Q = D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

EP6.4.- Dada la matriz A encontrar los valores y vectores propios. ¿Es diagonalizable?.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 & 4 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(4-\lambda)(4+\lambda) \qquad \begin{matrix} \lambda_1=0 & n_1=1 \\ \lambda_2=4 & n_2=1 \\ \lambda_3=-4 & n_3=1 \end{matrix}$$

Valores propios distintos $\Rightarrow$ Diagonalizable

$$\lambda_1=0 \rightarrow n_1=1 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} z=0 \\ x=-2y \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{Vector genérico: } (-2y,y,0) \\ \text{Una base: } \{(-2,1,0)\} \end{cases}$$

$$\lambda_2=4 \rightarrow n_2=1 \qquad \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} z=x \\ x=y \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{Vector genérico: } (y,y,y) \\ \text{Una base: } \{(1,1,1)\} \end{cases}$$

$$\lambda_3=-4 \rightarrow n_3=1 \qquad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x=-z \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{Vector genérico: } (x,0,x) \\ \text{Una base: } \{(1,0,1)\} \end{cases}$$

EP6.5.- Sea la matriz A. Encontrar si se puede una base de R^3 formada por autovectores de A.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(4-\lambda) \rightarrow \begin{matrix} \lambda_1=2 & n_1=2 \\ \lambda_2=4 & n_2=1 \end{matrix}$$

$$\lambda_1=2 \rightarrow n_1=2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow R_A=1 \qquad \dim H_{\lambda_1}=2=n_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x-y+z=0 \\ x=y-z \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{Vector genérico: } (y-z,y,z) \\ \text{Una base: } \{(1,1,0),(-1,0,1)\} \end{cases}$$

$$\lambda_2=4 \rightarrow n_2=1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} y=0 \\ x=z \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{Vector genérico: } (z,0,z) \\ \text{Una base: } \{(1,0,1)\} \end{cases}$$

Valores propios con multiplicidades iguales $\Rightarrow$ Diagonalizable

EP6.6.- Estudiar para que valores del parámetro son diagonalizables las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -4 & 0\\ 0 & 4a & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda & -4 & 0\\ 0 & 4a-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 3-\lambda\end{vmatrix} = (\lambda-1)(4a-\lambda)(\lambda-3) \qquad \begin{matrix}\lambda_1=1 & n_1=1\\ \lambda_2=3 & n_2=1\\ \lambda_3=4a & n_3=1\end{matrix}$$

Si $4a\neq 1,3$ Valores propios distintos $\Rightarrow$ Diagonalizable

Si $4a=1$ $\begin{matrix}\lambda_1=1 & n_1=2\\ \lambda_2=3 & n_2=1\end{matrix}$ Hay que estudiarlo

El valor propio sencillo no da problemas.

Veamos el de multiplicidad 2.

$$\lambda_1=1 \quad n_1=2 \quad \rightarrow \begin{pmatrix}0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix}-4 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow R_A=2 \Rightarrow \dim H_{\lambda_1}=1\neq n_1 \Rightarrow \text{No diagonalizable}$$

Si $4a=3$ $\begin{matrix}\lambda_1=1 & n_1=1\\ \lambda_2=3 & n_2=2\end{matrix}$ Hay que estudiarlo

El valor propio sencillo no da problemas. Veamos el de multiplicidad 2.

$$\lambda_2=3 \quad n_2=2 \quad \rightarrow \begin{pmatrix}-2 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow R_A=1 \Rightarrow \dim H_{\lambda_2}=2=n_2 \Rightarrow \text{Diagonalizable}$$

$$B=\begin{pmatrix}\alpha & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad B-\lambda I=\begin{pmatrix}\alpha-\lambda & 2 & 0\\ 0 & -1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix}$$

$$|B-\lambda I|=\begin{vmatrix}\alpha-\lambda & 2 & 0\\ 0 & -1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix} = -(\alpha-\lambda)(1+\lambda)(1-\lambda) \qquad \begin{matrix}\lambda_1=\alpha\\ \lambda_2=1\\ \lambda_3=-1\end{matrix}$$

Casos:

i) Para que los tres valores propios sean distintos se deberá cumplir que $\alpha\neq 1,-1$ $\Rightarrow$ Diagonalizable

ii) Si $\alpha=1$ $\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{matrix}\lambda_1=1 & n_1=2\\ \lambda_2=-1 & n_2=1\end{matrix}$ Hay que estudiarlo

El valor propio sencillo no da problemas ya que $1\leq \dim H_{\lambda_i}\leq n_i$ **Si** $n_i=1 \Rightarrow \dim H_{\lambda_i}=1$. **(1)**

Veamos el de multiplicidad 2.

$\lambda_1 = 1 \quad n_1 = 2 \qquad B - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R_A = 1 \Rightarrow \dim H_{\lambda_1} = \mathbf{2} = \boldsymbol{n_1}$ Diagonaliz.

iii) Si $\alpha = -1 \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = -1 & n_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 & n_2 = 1 \end{matrix}$ Hay que estudiarlo

Por **(1)** solo estudiaremos el valor propio de multiplicidad 2.

$\lambda_1 = -1 \quad n_1 = 2 \qquad B - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R_A = 2 \Rightarrow \dim H_{\lambda_1} = \mathbf{1} \neq \boldsymbol{n_1}$ NO diag.

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \qquad C - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & t-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|C - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & t-\lambda \end{vmatrix} = (t-\lambda)(3-\lambda)^2 \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = t & n_1 = ? \\ \lambda_2 = 3 & n_2 = ? \end{matrix}$$

Casos:

i) Si $t = 3 \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = 3 \quad n_1 = 3$ Hay que estudiarlo

$\lambda_1 = 3 \quad n_1 = 3 \qquad C - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R_A = 2 \Rightarrow \dim H_{\lambda_1} = \mathbf{1} \neq \boldsymbol{n_1}$ **No diagonalizable**

ii) Si $t \neq 3 \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = t \to & n_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \to & n_2 = 2 \end{matrix}$

$\lambda_1 = t \to \quad n_1 = 1$ **El valor propio sencillo no da problemas ya que** $1 \leq \dim H_{\lambda_i} \leq n_i$

Si $n_i = 1 \Rightarrow \dim H_{\lambda_i} = 1$.

Veamos el de multiplicidad 2.

$\lambda_2 = 3 \to \quad n_2 = 2 \qquad C - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & t-3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

m.e.e. 2 f.n.n **Rango=2**

Nº de incógnitas - rango = 3 - 2 = 1 parámetro

$\dim H_{\lambda_2} = 1 \neq n_2 = 2$

No Diagonalizable

EP6.7.- Dada la matriz, $A=\begin{pmatrix} a+1 & a-1 & a \\ a-1 & a+1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Estudiar si A es o no diagonalizable según los valores del parámetro *a*.
b) Para *a* = 0, calcular A^n

$$\begin{pmatrix} a+1 & a-1 & a \\ a-1 & a+1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a+1-\lambda & a-1 & a \\ a-1 & a+1-\lambda & a \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(2a-\lambda) \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2a \\ \lambda_3 = 2 \end{matrix}$$

Casos:

Si $2a \neq 1,2$ Valores propios distintos $\Rightarrow$ Diagonalizable

Si $2a = 1$ $\begin{matrix} \lambda_1 = 1 & n_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 & n_2 = 1 \end{matrix}$ Hay que estudiarlo

Por **(1)** solo estudiaremos el valor propio de multiplicidad 2.

$$\lambda_1 = 1 \quad n_1 = 2 \qquad A-\lambda I = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{Por Gauss}$$

$\Rightarrow R_A = 2 \Rightarrow \dim H_{\lambda_1} = 1 \neq n_1$ $\Rightarrow$ No diagonalizable

Si $2a = 2$ $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \lambda_1 = 1 & n_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 & n_2 = 2 \end{matrix}$ Hay que estudiarlo

Por **(1)** solo estudiaremos el valor propio de multiplicidad 2.

$$\lambda_2 = 2 \quad n_2 = 2 \qquad A-\lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R_A = 1 \Rightarrow \dim H_{\lambda_2} = 2 = n_2 \Rightarrow \text{Diagonalizable}$$

b) Para $a = 0$ **calcular** A^n

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A-\lambda I| = (2-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 2 \end{matrix}$$

$\lambda_1 = 1 \rightarrow n_1 = 1$ Una base: $\{(0,0,1)\}$ $\dim H_{\lambda_1} = 1 = n_1$

$\lambda_2 = 0 \rightarrow n_2 = 1$ Una base: $\{(1,1,0)\}$ $\dim H_{\lambda_2} = 1 = n_2$

$\lambda_3 = 2 \rightarrow n_3 = 1$ Una base: $\{(-1,1,0)\}$ $\dim H_{\lambda_3} = 1 = n_3$

Matriz de vectores propios: $VP=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ Matriz inversa: $(VP)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&2\\1&1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}$

$(VP)^{-1}A(VP)=D$ $\quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&2\\1&1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

$A=(VP)D(VP)^{-1}$ $\quad A^n=(VP)D(VP)^{-1}(VP)D(VP)^{-1}\ldots\ldots\ldots\ldots(VP)D(VP)^{-1}=(VP)D^n(VP)^{-1}$

$$A^n=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&2\\1&1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2^n&-2^n&0\\-2^n&2^n&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

EP6.8.- Estudiar, para que valores de los parámetros son diagonalizables las matrices:

$$C=\begin{pmatrix}0&1&b\\a^2&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}-\lambda&1&b\\a^2&-\lambda&0\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\left[\lambda^2-a^2\right]=(1-\lambda)(\lambda-a)(\lambda+a)\qquad \begin{matrix}\lambda_1=1\\\lambda_2=a\\\lambda_3=-a\end{matrix}$$

Casos:

i) Para que los tres valores propios sean distintos se deberá cumplir que $a\neq 1,-1,0$ (Si $a=0\Rightarrow -a=0$)

Valores propios distintos $\Rightarrow$ Diagonalizable

ii) Si $a=1$ **o** $a=-1$ $\quad A=\begin{pmatrix}0&1&b\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix}\lambda_1=1 & n_1=2\\ \lambda_2=-1 & n_2=1\end{matrix}$ Hay que estudiarlo

Por **(1)** solo estudiaremos el valor propio de multiplicidad 2.

$\lambda_1=1\quad n_1=2\qquad A-\lambda_1 I=\begin{pmatrix}-1&1&b\\1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1&1&b\\0&0&b\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\begin{cases}b\neq 0\Rightarrow R_A=2\Rightarrow \dim H_{\lambda_2}=\mathbf{1}\neq \boldsymbol{n_2}\\ b=0\Rightarrow R_A=1\Rightarrow \dim H_{\lambda_2}=\mathbf{2}=\boldsymbol{n_2}\end{cases}$

$b\neq 0\Rightarrow$ NO Diagonalizable $\qquad b=0\Rightarrow$ Diagonalizable

iii) Si $a=0$ $\quad A=\begin{pmatrix}0&1&b\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix}\lambda_1=0 & n_1=2\\ \lambda_2=1 & n_2=1\end{matrix}$ Hay que estudiarlo

$\lambda_1=0\quad n_1=2\qquad A-\lambda_1 I=\begin{pmatrix}0&1&b\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix}1&b\\0&1\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow R_A=2\Rightarrow \dim H_{\lambda_2}=\mathbf{1}\neq\boldsymbol{n_2}$ NO Diagonaliz.

Resumiendo:

a) Si $a\neq 1,-1,0$ Valores propios distintos $\Rightarrow$ Diagonalizable

b) Si $a=1$ **ó** $a=-1$ $\quad b=0\Rightarrow$ Diagonalizable

$$R=\begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ h & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} t-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ h & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(t-\lambda)(3-\lambda) \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = t \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 3 \end{matrix}$$

i) Si $t \neq 1,3$ los tres valores propios son distintos

Valores propios distintos $\Rightarrow$ Diagonalizable

ii) Si $t=1$ $\quad R=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ h & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \rightarrow & n_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 \rightarrow & n_2 = 1 \end{matrix}$ Hay que estudiarlo

Solo estudiaremos el valor propio de multiplicidad 2.

$$\lambda_1 = 1 \quad n_1 = 2 \qquad R-I=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ h & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} h \neq 0 \Rightarrow R_A = 2 \Rightarrow \dim H_{\lambda_1} = \mathbf{1} \neq \boldsymbol{n_1} \\ h = 0 \Rightarrow R_A = 1 \Rightarrow \dim H_{\lambda_1} = \mathbf{2} = \boldsymbol{n_1} \end{cases}$$

$h \neq 0 \Rightarrow$ NO Diagonalizable $\qquad h = 0 \Rightarrow$ Diagonalizable

iii) Si $t=3$ $\quad R=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ h & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 3 \rightarrow & n_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \rightarrow & n_2 = 1 \end{matrix}$ Hay que estudiarlo

$$\lambda_1 = 3 \quad n_1 = 2 \qquad R-3I=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ h & 0 & -2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} h & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow R_A = 2 \Rightarrow \dim H_{\lambda_1} = \mathbf{1} \neq \boldsymbol{n_1}$$

NO Diagonaliz.