SOLUCIONES Tema 3: Espacios vectoriales

EP3.1.- Estudiar si los vectores $\vec{u}=(3,0,0)$, $\vec{v}=(1,0,-3)$, $\vec{w}=(0,-2,4)$ son L.D. ó L.I.

1º: Hacemos una combinación lineal de los vectores y la igualamos al vector nulo:

$$\alpha\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}A(3\times3)\Rightarrow R_A\le 3\\(A/B)(3\times4)\Rightarrow R_B\le 3\\ \text{ni}=3\end{cases}$$

2º: Obtenemos un sistema homogéneo y por tanto siempre compatible: $\begin{cases}3\alpha+\beta=0\\-2\lambda=0\\-3\beta+4\lambda=0\end{cases}$

3º: Lo resolvemos por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix}3&1&0\\0&0&-2\\0&-3&4\end{pmatrix}\underset{F2\leftrightarrow F3}{\approx}\begin{pmatrix}3&1&0\\0&-3&4\\0&0&-2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}3\alpha+\beta=0 & & 3\alpha+0=0\rightarrow \quad \alpha=0\\-3\beta+4\lambda=0 & -3\beta+0=0\rightarrow & \beta=0\\-2\lambda=0 \quad\rightarrow\quad \lambda=0\end{cases}$$

4º: Solo admite la solución trivial, $0\cdot(3,0,0)+0\cdot(1,0,-3)+0\cdot(0,-2,4)=(0,0,0)$

Significado: La única forma de tener una C.L. de estos vectores cuyo resultado sea el vector nulo es que los escalares sean 0.

Al ser todos los escalares nulos no podemos despejar ningún vector en función de los demás ya que tendríamos que dividir por 0, es decir **ninguno** de los vectores puede expresarse como **combinación lineal de** $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ y por ello **son L.I.**

Calculando el rango:

Justificación:
El rango de un conjunto de vectores es el **máximo nº de vectores L.I. que puedo extraer del conjunto**.
Por tanto: Si el rango de $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ es 3 $\Rightarrow$ el conjunto es L.I.
Si el rango de $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ es <3 $\Rightarrow$ el conjunto es L.D.

$$\begin{pmatrix}3&0&0\\1&0&-3\\0&-2&4\end{pmatrix}\underset{F2\leftrightarrow F1}{\approx}\begin{pmatrix}1&0&-3\\3&0&0\\0&-2&4\end{pmatrix}\underset{F2n=F2-3F1}{\approx}\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&0&9\\0&-2&4\end{pmatrix}\underset{F2\leftrightarrow F3}{\approx}\begin{pmatrix}\mathbf{1}&0&-3\\0&\mathbf{-2}&4\\0&0&\mathbf{9}\end{pmatrix}$$

Rango: nº de f.n.n de una m.e.e

m.e.e con 3 f.n.n. $\Rightarrow$ $R=3$ $\Rightarrow$ L.I.

Con tema4 estudiado: El rango de un conjunto de vectores es el **orden del menor no nulo de mayor orden:**
En este caso solo necesitamos saber si el rango es el máximo o no.

$$\begin{vmatrix}3&0&0\\1&0&-3\\0&-2&4\end{vmatrix}\underset{F2\leftrightarrow F1}{=}-\begin{vmatrix}1&0&-3\\3&0&0\\0&-2&4\end{vmatrix}\underset{F2n=F2-3F1}{=}-\begin{vmatrix}1&0&-3\\0&0&9\\0&-2&4\end{vmatrix}\underset{F2\leftrightarrow F3}{=}\begin{vmatrix}\mathbf{1}&0&-3\\0&\mathbf{-2}&4\\0&0&\mathbf{9}\end{vmatrix}=-18\neq 0$$

menor de orden 3 no nulo $\Rightarrow$ $R=3$ $\Rightarrow$ L.I.

Encontrar, si es posible, una C.L. de dichos vectores tal que su resultado sea el vector $(-2,4,1)$

Comb. Lineal de vectores: suma de productos de escalares por los vectores.

$$\alpha\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}3\alpha+\beta=-2\\-2\lambda=4\\-3\beta+4\lambda=1\end{cases} \quad \begin{pmatrix}3&1&0&-2\\0&0&-2&4\\0&-3&4&1\end{pmatrix}\begin{cases}A(3\times 3)\Rightarrow R_A\le 3\\(A/B)(3\times 4)\Rightarrow R_B\le 3\\ \text{ni}=3\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}3&1&0&-2\\0&0&-2&4\\0&-3&4&1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}3&1&0&-2\\0&-3&4&1\\0&0&-2&4\end{pmatrix}$$

$F2\leftrightarrow F3$

$$\begin{cases}3\alpha+\beta=-2 & & 3\alpha-3=-2\rightarrow \quad \alpha=\dfrac{1}{3}\\ -3\beta+4\lambda=1 & -3\beta+4(-2)=1\rightarrow \quad \beta=-3 & \\ -2\lambda=4 \quad \rightarrow \quad \lambda=-2 & & \dfrac{1}{3}\cdot(3,0,0)-3(1,0,-3)-2\cdot(0,-2,4)=(-2,4,1)\end{cases}$$

b) ¿Es posible obtener cualquier vector (a,b,c) de R^3 como combinación lineal de $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$?

Sí, 3 vectores de R^3 L.I. forman base y por tanto generan cualquier otro vector de R^3.

Comprobación:

$$\alpha\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \quad \begin{cases}3\alpha+\beta=a\\-2\lambda=b\\-3\beta+4\lambda=c\end{cases} \quad \begin{pmatrix}3&1&0&a\\0&0&-2&b\\0&-3&4&c\end{pmatrix}\begin{cases}A(3\times 3)\Rightarrow R_A\le 3\\(A/B)(3\times 4)\Rightarrow R_B\le 3\\ \text{ni}=3\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}3&1&0&a\\0&0&-2&b\\0&-3&4&c\end{pmatrix}\xrightarrow{F2\leftrightarrow F3}\begin{pmatrix}3&1&0&a\\0&-3&4&c\\0&0&-2&b\end{pmatrix}$$

Matriz sistema: m.e.e con 3 f.n.n. $\Rightarrow$ $R_A=3$

Matriz ampliada: m.e.e con 3 f.n.n. $\Rightarrow$ $R_B=3$

$R_A=R_B=3$ Sistema compatible, por lo tanto cualquier vector es C.L. de $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$

Resolución sistema:

$$\begin{cases}3\alpha+\beta=a\\-3\beta+4\lambda=c\\-2\lambda=b\end{cases} \qquad \begin{cases}3\alpha+\beta=a & & 3\alpha-\dfrac{2b+c}{3}=a\rightarrow \quad \boxed{\alpha=\dfrac{3a+2b+c}{9}}\\ -3\beta+4\lambda=c & -3\beta+4\left(-\dfrac{b}{2}\right)=c\rightarrow \quad \boxed{\beta=-\dfrac{2b+c}{3}} & \\ -2\lambda=b \quad\rightarrow\quad \boxed{\lambda=-\dfrac{b}{2}} & & \end{cases}$$

EP3.2.- Dados los vectores $\vec{v}=(1,2,3)$ $\vec{u}=(-2,4,0)$ $\vec{w}=(3,-2,3)$

a) Encontrar números a,b,c tales que $a\cdot\vec{v}+b\cdot\vec{u}+c\cdot\vec{w}=\vec{0}$ ¿Son estos vectores linealmente dependientes?

$$a\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}3\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-2&3&0\\2&4&-2&0\\3&0&3&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&-2&3&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

M. sistema: m.e.e con 2 f.n.n. $\Rightarrow$ $R_A=2$ $\quad R_A=R_B=2<ni$

M. ampliada: m.e.e con 2 f.n.n. $\Rightarrow$ $R_B=2$ $\quad$ Comp. Ind.

Sist. Compatible e Indeterminado $\Rightarrow$ Infinitas soluciones. $\longrightarrow\begin{cases}a=-c\\b=c\\c=c\end{cases}$

Significado: Existen infinitas formas de tener C.L. de estos vectores cuyo resultado sea el vector nulo.

Por tanto habrá C.L. con los escalares NO TODOS nulos.

Entonces se podrá despejar algún vector en función de los demás: **alguno** de los vectores puede expresarse como **combinación lineal de** $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ $\Rightarrow$ **el conjunto** $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ **es L.D.**

Una posible solución sería: $c=2\Rightarrow\begin{cases}b=2\\a=-2\end{cases}\rightarrow -2\vec{v}+2\vec{u}+2\vec{w}=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}\vec{v}=\frac{2}{2}\cdot\vec{u}+\frac{2}{2}\cdot\vec{w}\Rightarrow\boxed{\vec{v}=\vec{u}+\vec{w}} & \text{ó}\\ \vec{u}=\frac{2}{2}\vec{v}-\frac{2}{2}\vec{w}\Rightarrow\boxed{\vec{u}=\vec{v}-\vec{w}} & \text{ó}\\ \vec{w}=\frac{2}{2}\cdot\vec{v}-\frac{2}{2}\vec{u}\Rightarrow\boxed{\vec{w}=\vec{v}-\vec{u}}\end{cases}$

b) ¿Es $\vec{v}$ combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{w}$? **Sí** $\vec{v}=\vec{u}+\vec{w}$

c) ¿Es $\vec{w}$ combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$? **Sí** $\vec{w}=\vec{v}-\vec{u}$

b) Expresar el vector (6,0,9) como combinación lineal de los mismos.

$$a\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}3\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\\9\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{cases}a=3-c\\b=c-\frac{3}{2}\\c=c\end{cases}$$

Sí es posible y existen infinitas combinaciones lineales de $\vec{v},\vec{u},\vec{w}$ **que dan el vector (6,0,9).**

Una de ellas sería: $c=1\Rightarrow\begin{cases}b=-\frac{1}{2}\\a=2\end{cases}$ $\qquad (6,0,9)=2\vec{v}-\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{w}$

EP3.3.- Determínese si los siguientes conjuntos de vectores de R^3 son L.D. ó L.I. y estudiar su rango.

a) $(1,-2,1),\ (2,1,-1),\ (7,-4,1)$

$$a\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Sist. equivalente de Gauss: $\begin{cases}a=-3c\\b=-2c\\c=c\end{cases}$ Sist. Comp. **Indeterm** $\Rightarrow$ **L.D.**

b) $(1,-3,7),\ (2,0,-6),\ (3,-1,-1),\ (2,4,-5)$

Seguro que 4 vectores de R^3 son L.D. En R^3 como máximo puede haber 3 vectores L.I.

Comprobación: $a\begin{pmatrix}1\\-3\\7\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}2\\0\\-6\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}2\\4\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad\begin{cases}a+2b+3c+2d=0\\-3a-c+4d=0\\7a-6b-c-5d=0\end{cases}$

Un sistema con más incógnitas que ecuaciones seguro que es indeterminado. **Son L.D.**

c) $(1,2,-3),(1,-3,2),(2,-1,5)$ $\quad a\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Sistema equivalente de Gauss: $\rightarrow\begin{cases}a+b+2c=0\\b+c=0\\6c=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=0\\b=0\\c=0\end{cases}$ S. Comp. **Det** $\Rightarrow$ **L.I.**

d) $(2,-3,7),(0,0,0),(3,-1,-4)$

Un conjunto de vectores que contiene al vector nulo es L.D. ya que el vector nulo es C.L. de cualesquiera vectores. $(0,0,0)=0\cdot(3,-1,-4)+0\cdot(2,-3,7)$

Por si a alguien se le ocurre hacerlo resolviendo una C.L. igualada al vector nulo.

$$a\begin{pmatrix}2\\-3\\7\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}3\\-1\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\left(\begin{array}{ccc|c}2&0&3&0\\-3&0&-1&0\\7&0&-4&0\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}2&0&3&0\\0&0&7&0\\0&0&-29&0\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}2&0&3&0\\0&0&7&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\begin{cases}2a+3c=0\\7c=0\\0=0\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}a=0\\c=0\end{cases}$$

Que la b no aparezca significa que puede valer cualquier cosa: $\begin{cases}a=0\\b=b\\c=0\end{cases}$ Sist. Comp. **Indet.** $\Rightarrow$ **L.D.**

Calculando el rango por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix}2&-3&7\\3&-1&-4\\0&0&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}2&-3&7\\0&7&-29\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$F2n=2F2-3F1$$

Rango: nº de f.n.n de una m.e.e

m.e.e con 2 f.n.n. $\Rightarrow$ $R=2$ $\Rightarrow$ L.D.

Con tema4 estudiado: calculando el rango por el método de menores:

$$\begin{vmatrix}2&-3&7\\3&-1&-4\\0&0&0\end{vmatrix}=0$$ único menor de orden 3 es nulo $\Rightarrow$ $R<3$ $\Rightarrow$ L.D.

Encontrar, si es posible, una C.L. de dichos vectores tal que su resultado sea el vector $(-2,4,1)$

Comb. Lineal de vectores: suma de productos de escalares por los vectores.

$$\alpha\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}3\alpha+\beta=-2\\-2\lambda=4\\-3\beta+4\lambda=1\end{cases}\quad\begin{pmatrix}3&1&0&-2\\0&0&-2&4\\0&-3&4&1\end{pmatrix}\underset{F2\leftrightarrow F3}{\approx}\begin{pmatrix}3&1&0&-2\\0&-3&4&1\\0&0&-2&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}3\alpha+\beta=-2 & 3\alpha-3=-2\rightarrow\quad\alpha=\dfrac{1}{3}\\-3\beta+4\lambda=1 & -3\beta+4(-2)=1\rightarrow\quad\beta=-3\\-2\lambda=4 & \rightarrow\quad\lambda=-2\end{cases}$$

$$\frac{1}{3}\cdot(3,0,0)-3(1,0,-3)-2(0,-2,4)=(-2,4,1)$$

e) $(1,1,1),(1,-1,5)$ Son L.I por no ser proporcionales. $\nexists a\in R$ tal que $(1,1,1)=a(1,-1,5)$ y viceversa.

f) $(1,1,1),(1,2,3),(2,-1,1)$

$$a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Sistema equivalente de Gauss: $\rightarrow\begin{cases}a+b+2c=0\\b-3c=0\\5c=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=0\\b=0\\c=0\end{cases}$ S. Comp. **Det** $\Rightarrow$ **L.I.**

g) $(2,2,-1),(4,2,-2)$ serán L.I por no ser proporcionales. $\nexists a\in R$ tal que $(4,2,-2)=a(2,2,-1)$

Otra forma (pero más larga): Combinación lineal nula y resolver el sistema homogéneo resultante.

$$a\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}2a+4b=0\\-2b=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}\rightarrow$$ S. Comp. **Det** $\Rightarrow$ **L.I.**

h) $(1,0,1,3),(0,0,2,-5),(-1,2,0,7)$

$$a\begin{pmatrix}1\\0\\1\\3\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\0\\2\\-5\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Sistema equivalente de Gauss: $\rightarrow\begin{cases}a-c=0\\b-2c=0\\c=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=0\\b=0\\c=0\end{cases}$ S. Comp. **Det** $\Rightarrow$ **L.I.**

EP3.4.- Demostrar que $\vec{a}=(x,y),\vec{b}=(z,t)\in R^2$ son L.D. si y solo si $x\,t-y\,z=0$

Si son L.D. son paralelos y por lo tanto proporcionales $\Rightarrow\ \dfrac{x}{z}=\dfrac{y}{t}\Rightarrow xt=yz\Rightarrow xt-yz=0$

EP3.5.- Hallar "a" para que los vectores $(-2,\ a,\ a)$, $(a,-2,\ a)$, $(a,\ a,-2)$ sean L.D.

$$\begin{pmatrix}-2 & a & a\\ a & -2 & a\\ a & a & -2\end{pmatrix}\overset{\begin{cases}F1n=F2\\F2n=F1\end{cases}}{\approx}\begin{pmatrix}a & -2 & a\\ -2 & a & a\\ a & a & -2\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}a & -2 & a\\ 0 & a^2-4 & a^2+2a\\ 0 & a+2 & -2-a\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}a & -2 & a\\ 0 & (a-2)(a+2) & a(a+2)\\ 0 & a+2 & -(2+a)\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}F2n=aF2+2F1\\F3n=F3-F1\end{cases}\xrightarrow{\qquad a\neq 0\qquad}$$

$$\begin{pmatrix}a & -2 & a\\ 0 & (a-2)(a+2) & a(a+2)\\ 0 & a+2 & -(2+a)\end{pmatrix}\overset{\begin{cases}F2n=\frac{1}{a+2}F2\\F3n=\frac{1}{a+2}F3\end{cases}}{\approx}\begin{pmatrix}a & -2 & a\\ 0 & a-2 & a\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\overset{\begin{cases}F2n=F3\\F3n=F2\end{cases}}{\approx}\begin{pmatrix}a & -2 & a\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & a-2 & a\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}a & -2 & a\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2(a-1)\end{pmatrix}$$

$$F3n=F3-(a-2)F2$$

$$\xrightarrow{\qquad a\neq -2\qquad}$$

Estudio casos: $a\neq -2,0,1$, $a=-2$, $a=0$ $a=1$

$a\neq -2,0,1$ $\Rightarrow$ 3 f.n.n en matriz escalonada equivalente $\Rightarrow$ rango 3 $\Rightarrow$ vectores L.I.

$a=-2$ sustituir en $\begin{pmatrix}a & -2 & a\\ 0 & (a-2)(a+2) & a(a+2)\\ 0 & a+2 & -(2+a)\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}-2 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ m.e.e con 1 f.n.n. $\Rightarrow R=1\Rightarrow$ **L.D.**

$a=0$ sustituir en $\begin{pmatrix}a & -2 & a\\ -2 & a & a\\ a & a & -2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0 & -2 & 0\\ -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ m.e.e con 3 f.n.n. $\Rightarrow R=3\Rightarrow$ **L.I.**

$a=1$ sustituir en $\begin{pmatrix}a & -2 & a\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2(a-1)\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & a\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ m.e.e con 2 f.n.n. $\Rightarrow R=2\Rightarrow$ **L.D.**

Para $a=1$ y $a=-2$ los vectores serán **L.D.**

EP3.6.- Dado el conjunto de vectores $U=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\vec{u}_4\}$ tal que $\vec{u}_4$ es combinación lineal de $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$, y $\vec{u}_3$ es combinación lineal de $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_4$ entonces podemos afirmar que:

a) Los vectores del subconjunto $\{\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ son L.I.

Sabemos que $\vec{u}_3$ es C.L. de $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_4$ y $\vec{u}_4$ es C.L. de $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ $\Rightarrow$ $\vec{u}_3$ es C.L. de $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ por tanto $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ es L.D.

Cualquier subconjunto de un conjunto L.D. puede ser L.D. o L.I.

En este caso puede ocurrir que

$\{\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ sea L.D. y al añadir $\vec{u}_1$ seguiría siendo L.D. ó

$\{\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ sea L.I. y que $\vec{u}_1$ sea C.L. de $\vec{u}_3$ y $\vec{u}_2$ y entonces $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ sería L.D.

c) Los vectores del subconjunto $U_1=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ son L.I.

Ya razonado en **a)** $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ es L.D.

d) Los vectores del subconjunto $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ son L.D.

Con los datos que nos dan no podemos afirmar nada respecto a su dependencia ó independencia lineal.

b) Los vectores de U son L.D. ya que uno de ellos es combinación lineal de los demás.

Cierto ya que si $\vec{u}_4$ es combinación lineal de $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ también lo es de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ y por definición de vectores L.D. si uno de los vectores es C.L. de los demás el conjunto es L.D.

EP3.7.- Determinar si los vectores $\vec{v}=(1,0,2),\vec{u}=(0,1,-3),\vec{w}=(1,1,0),\ \vec{z}=(0,0,-1)$ del espacio vectorial R^3 forman un sistema generador de R^3.

Lo serán si cualquier vector del espacio se puede expresar como C.L. de ellos.

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\qquad\begin{cases}A(3\times3)\Rightarrow R_A\le 3\\(A/B)(3\times4)\Rightarrow R_B\le 3\\ \text{ni}=3\end{cases}$$

Resolviendo por Gauss $\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&a\\0&-1&1&0&b\\0&0&1&-1&c-2a+3b\end{array}\right)$ Matriz sistema: m.e.e con 3 f.n.n. $\Rightarrow$ $R_A=3$

Matriz ampliada: m.e.e con 3 f.n.n. $\Rightarrow$ $R_B=3$

$R_A=R_B=3<ni$ Comp. Indet. Son sistema generador

Tomando una incógnita como parámetro $\rightarrow\begin{cases}\alpha=3a-3b-c-\gamma\\\beta=c-2a+2b+\gamma\\\lambda=c-2a+3b+\gamma\\\gamma=\gamma\end{cases}$ Infinitas soluciones

No son base de R^3. Si lo fuesen la solución sería única.

EP3.8.- Si $U=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\vec{u}_4,\vec{u}_5\}$ es un conjunto de vectores cuyo rango es 3 comenta la verdad o falsedad de las afirmaciones:

a) Todos los subconjuntos de U con 3 vectores, son conjuntos libres.

No es necesario que TODOS los subconjuntos con 3 vectores sean libres. **Basta que haya UNO.**

b) El vector $\vec{u}_3$ es L.I de los demás.

La frase correcta se escribiría: "el vector $\vec{u}_3$ NO ES COMBINACIÓN LINEAL de los demás"

c) Los vectores del subconjunto $U_1=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ son L.I.

Puede que sí pero no se puede asegurar ya que el rango 3 no asegura que cualquier subconjunto de 3 vectores sea L.I.

d) Algún subconjunto de U con 3 vectores es libre (sus vectores son L.I.) ya que el rango es el máximo nº de vectores L.I. que hay en el conjunto por lo que basta que haya un solo subconjunto de 3 vectores L.I.

Totalmente correcto por la definición de rango.

EP3.9.- Estudiar si los siguientes conjuntos de vectores cumplen los dos requisitos necesarios para formar base de R^3:

a) $A=\{(1,1,1),(3,1,-1),(-4,2,8)\}$

Para que un conjunto de vectores formen base de un espacio vectorial han de ser S.G. y L.I.

Para saber que 3 vectores de un espacio de dimensión 3 forman base basta demostrar que son generadores ó L.I.

En este problema demostraremos que son S.G.

$$\alpha\circ\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\circ\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}+\lambda\circ\begin{pmatrix}-4\\2\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&3&-4&a\\1&1&2&b\\1&-1&8&c\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}A(3\times3)\Rightarrow R_A\le 3\\(A/B)(3\times4)\Rightarrow R_B\le 3\\ \text{ni}=3\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&-4&a\\0&-2&6&b-a\\0&-4&12&c-a\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&3&-4&a\\0&-2&6&b-a\\0&0&0&c-2b+a\end{pmatrix}$$

M.sistema: m.e.e con 2 f.n.n. $\Rightarrow \quad R_A=2$

M. ampliada: m.e.e con 2 o 3 f.n.n. $\Rightarrow \quad R_B=\begin{cases}2\\3\end{cases}$

Estos vectores no generan cualquier vector del espacio R^3, solo generan aquellos vectores que cumplan:

$$c-2b+a=0$$

b) $B=\{(3,2,1),(2,1,0),(1,0,0)\}$

Para saber que 3 vectores de un espacio de dimensión 3 forman base basta demostrar que son L.I.

$$\alpha\circ\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}+\beta\circ\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda\circ\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3&2&1\\2&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\lambda=0\end{cases}$$ Son L.I.

EP3.10.- Considerar los vectores $(1,2,-1),(2,1,-1)$. Encontrar un vector tal que junto con los dos dados, formen una base de R^3.

Como estos dos vectores son L.I. si encontramos otro vector $\vec{x}=(a,b,c)$ que no sea C.L. de estos dos, los 3 serán L.I. y formarán una base de R^3.

El sistema $\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ ha de ser incompatible. Sist. Equivalente. $\begin{cases}\alpha+2\beta=a\\-3\beta=b-2a\\0=3c+a+b\end{cases}$ Si $3c+a+b\neq0$ el sistema NO tendrá solución. Por ejemplo: $c=1,\quad b=-1,\quad a=0 \quad \vec{x}=(0,-1,1)$

EP3.11.- Sea $\vec{u}$ el vector (2,1,3) en base canónica. Calcular $\vec{u}$ en base $B=\{(1,2,0),(1,-1,1),(0,1,1)\}$

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=2\\-3\beta+\lambda=-3\\4\lambda=6\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}\alpha=1/2\\\beta=3/2\\\lambda=3/2\end{cases}$$

EP3.12.- Probar que el conjunto $C=\{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,3)\}$ es una base de R^3. Encontrar, respecto de esta base, las coordenadas del vector (5,1,-3). Encontrar las coordenadas en base canónica del vector cuyas coordenadas en la base C son (3,1,-1).

Si demostramos que estos 3 vectores son L.I. ya podremos asegurar que forman una base.

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad\rightarrow\quad \begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \beta+2\lambda=0\\ \lambda=0\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \lambda=0\end{cases} \Rightarrow \text{son L.I.}$$

Encontrar, respecto de esta base las coordenadas de los vectores $(5,1,-3),(2,3,-1)$.

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\\-3\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta+\lambda=5\\ \beta+2\lambda=-8\\ \lambda=-4\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\alpha=9\\ \beta=0\\ \lambda=-4\end{cases} \quad 9\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+(-4)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\\-3\end{pmatrix}$$

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta+\lambda=2\\ \beta+2\lambda=-3\\ \lambda=1\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\alpha=6\\ \beta=-5\\ \lambda=1\end{cases} \quad 6\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+(-5)\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$$

EP3.13.- Expresar $\vec{v}=(1,-2,5)\in R^3$ como comb. lineal de los vectores $\vec{u}_1=(1,-3,2)$, $\vec{u}_2=(2,-4,-1)$, $\vec{u}_3=(1,-5,7)$. ¿Forman $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ una base de R^3?

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\-4\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\-5\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix} \quad\rightarrow\quad \begin{cases}\alpha+2\beta+\lambda=1\\ 2\beta-2\lambda=1\\ 0=11\end{cases}$$

Sistema Incompatible

¿Forman $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ una base de R^3?

El vector $\vec{v}=(1,-2,5)\in R^3$ NO se puede expresar como comb. lineal de los vectores $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$.

Esto nos dice que NO es un sistema generador de R^3 y por tanto tampoco forman base.

EP3.14.- Probar que el conjunto $D=\{(1,0,0,-1),(0,1,-1,0),(0,1,0,-1),(0,1,1,1)\}$ es una base de R^4. Obtener las coordenadas del vector $(-3,2,1,-2)$ en dicha base. Si el vector $\vec{u}$ tiene coordenadas $(3,0,-1,1)$ en base D obtener sus coordenadas en base canónica.

Como en R^4 las bases tienen 4 vectores, si demostramos que estos 4 vectores son L.I. ya podremos asegurar que forman una base.

$$\alpha(1,0,0,-1)+\beta(0,1,-1,0)+\lambda(0,1,0,-1)+\gamma(0,1,1,1)=(0,0,0,0)$$

$\alpha=0 \quad \beta=0 \quad \lambda=0 \quad \gamma=0 \quad \Rightarrow$ L.I.

Obtener las componentes del vector $(-3,2,1,-2)$ en dicha base.

$$\alpha(1,0,0,-1)+\beta(0,1,-1,0)+\lambda(0,1,0,-1)+\gamma(0,1,1,1)=(-3,2,1,-2)$$

$$\alpha=-3 \quad \beta=-\tfrac{5}{3} \quad \lambda=\tfrac{13}{3} \quad \gamma=-\tfrac{2}{3}$$