**Problemes d'Àlgebra Lineal i Matemàtica discreta. Treball de classe.**
**Tema 1. Matrius i determinants**

**1)** Considerau les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Realitzau les següents operacions:

(a) $A \cdot B$, (b) $B \cdot C$, (c) $B^t$, (d) $B^t \cdot A$ (e) $C^t \cdot B^t$.

**2)** Escriviu la matriu $(3 \times 4)$ que té per entrada $(i, j)$ l'element $a_{ij} = (-1)^{i+j}/(i+j)$.

**3)** Idem per a la matriu $(n+1) \times (n+1)$ on l'entrada $(ij)$ ve definida per

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ 1 & \text{si } i = j \\ k^{j-i} & \text{si } j > i \end{cases}$$

on $k$ és un nombre real qualsevol.

**4)** Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

trobau totes les matrius quadrades $2 \times 2$ tals que $AX = 0$.

**5)** Considerau les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

demostrau que $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ però que $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

**6)** Trobau matrius $A$ i $B$ tals que

$$4A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad 3A + B = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 0 \\ 2 & 1/2 & 5 \end{pmatrix}$$

**7)** Siguin $a, b, c \in I\!R$ i sigui $A$ la matriu donada per

$$A = \begin{pmatrix} a & a+b & a-c \\ a-b & b & b-c \\ a+c-2 & c-b & c \end{pmatrix}$$

Digau què han de verificar $a, b, c$ perquè $A$ sigui
$i)$ triangular superior, $ii)$ triangular inferior $iii)$ simètrica.

**8)** Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculau $A + A^2 + \ldots + A^n$ per a qualsevol $n \geq 1$.

**9)** Sigui $A$ una matriu quadrada d'ordre $n$. Deim que $B$ és una arrel quadrada de $A$ si $B^2 = A$.

- Trobau tres arrels quadrades diferents de $I_2$.
- Demostrau que la matriu $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no té arrels quadrades.

**10)** Trobau totes les matrius reals que commuten amb la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**11)** Trobau les potències $n$-èsimes de les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**12)** Siguin $A, B \in M_n(I\!R)$ dues matrius tals que $A$ és simètrica i $B$ és antisimètrica. Demostrau que $AB + BA$ és antisimètrica i $AB - BA$ és simètrica.

**13)** Sigui $A$ una matriu quadrada d'ordre $n$. Demostrau que:

- $A + A^t$ és simètrica
- $A - A^t$ és antisimètrica
- $A$ es pot posar sempre com suma d'una matriu simètrica i una antisimètrica.

**14)** Siguin $A$ i $B$ matrius quadrades d'ordre $n$ de manera que $B$ és simètrica. Demostrau que:

- $AA^t$ és simètrica
- $ABA^t$ és simètrica
- Si $A$ és antisimètrica llavors $A^2$ és simètrica.
- Si $A^2 = 0$ llavors $A(A + I_n)^i = A$ per a tot $i = 0, 1, 2, 3, ...$

**15)** Una matriu $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ s'anomena *estocàstica* si:

- tots els coeficients són no negatius, és a dir $a_{ij} \geq 0$ per a tots $i, j = 1, \ldots, n$
- la suma dels coeficients de cada fila val 1, és a dir

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1, \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

i *doblement estocàstica* si endemés la suma dels coeficients de cada columna també val 1, és a dir

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$

a) Donau un exemple de matriu $A \in M_4(\mathbb{R})$ estocàstica.

b) Donau un exemple de matriu $B \in M_4(\mathbb{R})$ doblement estocàstica.

c) Donau un exemple de matriu estocàstica i simètrica.

**16)** Considerem la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a partir d'ella definim la matriu $B$ per

$$B = A - \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 - \frac{1}{4}A^4 + \ldots$$

Demostrau que en aquest sumatori només hi ha un nombre finit de termes no nuls i calculau $B$. Demostrau també que el sumatori

$$B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \frac{1}{4!}B^4 + \ldots$$

només té un nombre finit de termes no nuls i que la seva suma és $A$.

**17)** Trobau les formes escalonades i escalonades reduïdes per files de les matrius:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\1&3&2&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&2\\1&1&0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}2&4&-3\\-1&-2&3\\-1&-2&-3\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&4&1&2\\2&1&-5&-3\\-3&1&2&7\end{pmatrix}$$

**18)** Calculau els rangs de les següents matrius:

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&-2\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&2&3&4&5\\1&2&1&3&2\\0&4&4&7&7\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&-2&1&0&2\\0&1&2&-1&1\\1&2&0&-2&1\\2&1&3&-3&4\\3&-2&2&-2&5\end{pmatrix}.$$

**19)** Trobau les inverses de les següents matrius:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&-1&3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-2&1&3\\0&-1&1\\1&2&0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&-1\\0&0&2\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}i&0&0\\0&0&1\\1&i&0\end{pmatrix}$$

**20)** Calculau els següents determinants:

$$1)\ \begin{vmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\1&2&3\end{vmatrix}\quad 2)\ \begin{vmatrix}1&-1&1\\0&-1&1\\-1&2&-3\end{vmatrix}\quad 3)\ \begin{vmatrix}1&-2&3\\2&1&-1\\-2&0&3\end{vmatrix}$$

**21)** Emprant determinants calculau, si existeixen, les inverses de les matrius

$$A=\begin{pmatrix}-1&2&3\\0&1&2\\1&0&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&6\\-2&0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0&-1&2&0\\1&0&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

**22)** Calculau, utilitzant determinants, els rangs de les matrius

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&-2\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-1&2&3&4&5\\1&2&1&3&2\\0&4&4&7&7\end{pmatrix}.$$

**23)** Calculau els següents determinants sense desenvolupar ni per files ni per columnes:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & b & c \\ a & b & 0 & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}$$

**24)** Sabent que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -1$, calculau:

$$\begin{vmatrix} -x & -y & -z \\ 3p+a & 3q+b & 3r+c \\ 2p & 2q & 2r \end{vmatrix}$$

**25)** Provau la igualtat $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$.

**26)** Calculau el determinant $\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$.

**27)** Resoleu les següents ecuacions:

1. $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = 0$ 2. $\begin{vmatrix} x^3 & 3x^2 & 3x & 1 \\ x^2 & x^2+2x & 2x+1 & 1 \\ x & 2x+1 & x+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$ 4. $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0$

**28)** Calculau el determinant de Vandermonde:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}.$$

Calculau el determinant de Vandermonde d'ordre 5.

**29)** Discutiu, segons els diferents valors dels paràmetres $a$ i $b$, el rang de les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2a & b & 1 \\ 2 & ab & 1 \\ 2 & b & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculau també per a quins valors de $a$ i $b$ són invertibles aquestes matrius i en aquests casos calculau les seves inverses.

**30)** Calculau per a quins valors de $a$ la següent matriu té rang 2:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & a-1 & -2 & 0 & 4 & 2a \\ 1 & 2 & a^2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 8 & -1 & a+1 & 2a-2 \end{pmatrix}$$

**31)** Trobau quina condició han de verificar els paràmetres $a, b, c$ perquè la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 2 & b \\ 2 & 1 & c \end{pmatrix} \in M_n(I\!R)$$

sigui invertible.