

Vectors

Grau en Enginyeria Telemàtica

Juan Gabriel Gomila

Grau en Enginyeria Telemàtica

Universitat de les Illes Balears

juangabriel.gomila@uib.es

1 de junio de 2017

Índex

1 Vectors

- Definicions
- Vectors fixs
- Vectors lliures

2 Operacions amb vectors

- Suma i resta de vectors lliures
- Producte de vector per escalar
- Combinació lineal de vectors

3 Propietats de les operacions amb vectors

4 Estructura euclidiana de \mathbb{R}^n

- Producte escalar
- Norma o longitud
- Distància entre dos punts
- Angle entre dos vectors
- Desigualtat de Cauchy-Schwarz

1 Vectors

- Definicions
- Vectors fixs
- Vectors lliures

2 Operacions amb vectors

- Suma i resta de vectors lliures
- Producte de vector per escalar
- Combinació lineal de vectors

3 Propietats de les operacions amb vectors

4 Estructura euclidiana de \mathbb{R}^n

- Producte escalar
- Norma o longitud
- Distància entre dos punts
- Angle entre dos vectors
- Desigualtat de Cauchy-Schwarz

5 Producte Vectorial. Producte Mixt

- Producte Vectorial
- Producte Mixt

1 Vectors

■ Definicions

- Vectors fixs
- Vectors lliures

2 Operacions amb vectors

- Suma i resta de vectors lliures
- Producte de vector per escalar
- Combinació lineal de vectors

3 Propietats de les operacions amb vectors

4 Estructura euclidiana de \mathbb{R}^n

- Producte escalar
- Norma o longitud
- Distància entre dos punts
- Angle entre dos vectors
- Desigualtat de Cauchy-Schwarz

5 Producte Vectorial. Producte Mixt

- Producte Vectorial
- Producte Mixt

Vectors

Els vectors tenen un paper fonamental no només al món de les Matemàtiques, si no també en la Física, Enginyeria i altres camps científics.

Ja coneixem d'anys precedents les nocions de vectors en el pla o en l'espai. Els vectors en general tenen dues vessants íntimament lligades: l'àlgebra i la geometria.

Veurem en primer lloc els vectors des del punt de vista geomètric.

Vectors

Sigui \mathbb{K} un cos

Punt en la recta \mathbb{K}

Donats un origen i una unitat de longitud, cada punt de la recta ve definit per un i només un escalar del cos \mathbb{K} i viceversa.

Punt en el pla \mathbb{K}^2

Donats un origen, dos eixos (rectes) i una unitat de longitud, un punt del pla és una parella (x, y) on x i y son dos elements del cos \mathbb{K} .

Punt en l'espai \mathbb{K}^3

Donats un origen, tres eixos (rectes) i una unitat de longitud, un punt del pla és una parella (x, y, z) on x, y i z son dos elements del cos \mathbb{K} .

Vectors

Punts a \mathbb{K}^n

Un punt a l'espai \mathbb{R}^n es defineix com una n -epla de nombres

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

on n es la dimensió de l'espai \mathbb{K}^n .

Coordenades del punt

Les coordenades de X són els valors x_1, x_2, \dots, x_n del punt X .

1 Vectors

- Definicions
- Vectors fixs
- Vectors lliures

2 Operacions amb vectors

- Suma i resta de vectors lliures
- Producte de vector per escalar
- Combinació lineal de vectors

3 Propietats de les operacions amb vectors

4 Estructura euclidiana de \mathbb{R}^n

- Producte escalar
- Norma o longitud
- Distància entre dos punts
- Angle entre dos vectors
- Desigualtat de Cauchy-Schwarz

5 Producte Vectorial. Producte Mixt

- Producte Vectorial
- Producte Mixt

Vectors fixs

Les següents definicions ens permeten veure els vectors des d'una perspectiva geomètrica.

Vector fix

Un vector fix es una parella de punts A i B , que indicarem com \vec{AB} . El punt A s'anomena **origen** i el punt B **extrem**.

Normalment els vectors en el pla o en l'espai de tres dimensions es solen representar mitjançant segments acabats en una punta de fletxa en un dels seus extrems.

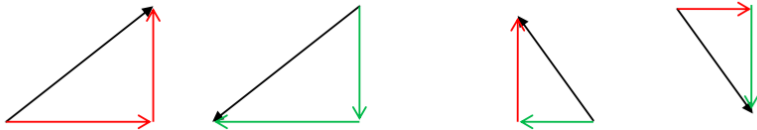
Las componentes cartesianas de un vector son los vectores que se obtienen al proyectarlo sobre los ejes de un sistema de coordenadas situado en el origen del vector.

Components d'un vector fix \vec{AB}

Vector fix

Les components d'un vector fix \vec{AB} són els vectors que s'obtenen en projectarlo sobre els eixos d'un sistema de coordenades situat sobre l'origen del vector.

Figura: Criteri de colors. **Rojo:**+ **Verde:**-. Les components poden ser positives o negatives



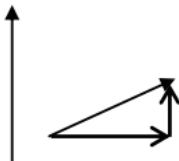
Vectors fixs

Components d'un vector fix \vec{AB}

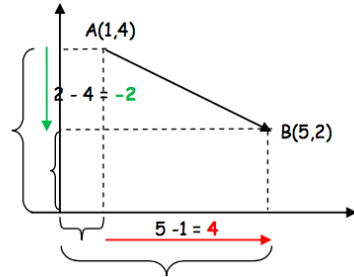
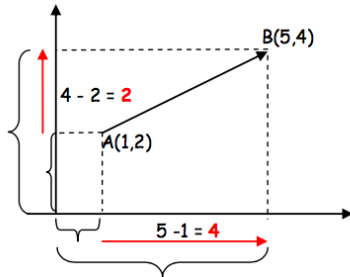
Si $A = (a_x, a_y)$ i $B = (b_x, b_y)$ aleshores les components del vector \vec{AB} s'obtenen restant les coordenades del punt extrem B al punt origen A :

$$\vec{AB} = (b_x - a_x, b_y - a_y)$$

El valor absolut de les components del vector coincideix amb la longitud dels catets del triangle rectangle format i tal que el vector sigui la seva hipotenusa.



Vectors fixos



Vectors fixs

Caracterització d'un vector fix (I)

En el context geomètric, les 3 característiques d'un vector fix són:

- Origen: el punt d'aplicació on comença el vector
- Mòdul: la longitud del segment
- Direcció: la de la recta a la qual pertany
- Sentit: el que determina la punta de la flecha del vector.

Vectors fixs

Caracterització d'un vector fix (II)

També queda completament determinat amb:

- Les seves componets
- El punt origen

Vectors fixs

Caracterització d'un vector fix (III)

O fins i tot si coneixem:

- Les coordenades del punt origen
- Les coordenades del punt extrem

Vectors equivalents

Vectors equivalents

Dos vectors \vec{AB} i \vec{CD} són equivalents si tenen les mateixes components, és a dir:

$$(b_x - a_x, b_y - a_y) = (d_x - c_x, d_y - c_y)$$

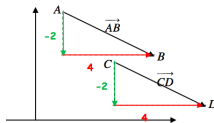


Figura: \vec{AB} i \vec{CD} són equivalents tot i tenir diferents orígens i extrems.

Geomètricament, les longituds dels segments de la recta determinats per la parella de punts i els sentits d'ambdós vectors

Vectors equivalents

Exercici

Trobau un vector equivalent a \vec{AB} on $A = (1, 2)$ i $B = (5, 4)$

Sol: Punts qualssevol C i D tals que:

$$(d_x - c_x, d_y - c_y) = (4, 2)$$

Vectors equivalents

Exercici

Trobau un vector equivalent a \vec{AB} on $A = (3, 4)$ i $B = (7, 6)$ amb origen al punt $A' = (-1, 0)$.

Sol:

$$B' = (3, 2)$$

1 Vectors

- Definicions
- Vectors fixs
- Vectors lliures

2 Operacions amb vectors

- Suma i resta de vectors lliures
- Producte de vector per escalar
- Combinació lineal de vectors

3 Propietats de les operacions amb vectors

4 Estructura euclidiana de \mathbb{R}^n

- Producte escalar
- Norma o longitud
- Distància entre dos punts
- Angle entre dos vectors
- Desigualtat de Cauchy-Schwarz

5 Producte Vectorial. Producte Mixt

- Producte Vectorial
- Producte Mixt

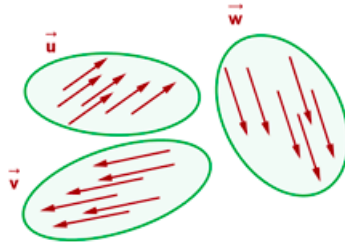
Vectors lliures

Tots els vectors fixs equivalents entre sí tenen les mateixes components. En aquest sentit es pot establir una relació d'equivalència que identifica tots els vectors fixs equivalents i els representa per un únic representant de la classe d'equivalència corresponent, el **vector lliure**. Aquest representant defineix un conjunt infinit de vectors i els representa a tots ells.

Vectors lliures

Vectors lliures

El conjunt de tots els vectors fixs equivalents entre si s'anomena vector lliure. Un vector lliure no té un origen fix, si no que es pot ubicar a qualsevol punt de l'espai. Cada vector fix és un representant del vector lliure.

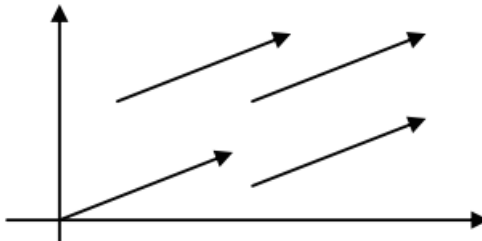


Vectors lliures

Vectors fix en l'origen

És de tots els representants del vector fix, aquell que té el seu punt origen a l'origen de coordenades.

En aquest cas, les coordenades del punt extrem coincideixen numèricament amb les components del vector, ja que el punt origen es $0 = (0, 0)$.



Vectors lliures

Per tant, tot vector lliure té un representant situat a l'origen de coordenades on el punt extrem té les mateixes coordenades que les components del vector. En aquest sentit podem dir:

Resultat

Existeix una correspondència un a un entre els vectors lliures i punts segons la qual cada punt $P = (a, b)$ s'identifica amb un vector $\vec{OP} = (a, b)$.

Vectors lliures

Caracterització d'un vector lliure (I)

Per caracteritzar un vector lliure necessitam mòdul, direcció i sentit.

Caracterització d'un vector lliure (II)

També el podem caracteritzar coneixent-ne les components.

El mòdul, al igual que en els vectors fixs ve donat per la longitud del segment i la direcció i sentit venen definits per l'angle que forma el vector amb la direcció positiva de l'eix OX .

Vectors lliures

Exercici

Troba mòdul, direcció i sentit del vector de components (7,-5).

$$\text{Sol: mòdul} = \sqrt{74} \text{ i } \tan \alpha = \frac{-5}{7}$$

Exercici

Donat el vector de mòdul 8 i que forma un angle de 135° amb l'eix OX, calcula les seves components

$$\text{Sol: } (8 \cos 135, 8 \sin 135)$$

1 Vectors

- Definicions
- Vectors fixs
- Vectors lliures

2 Operacions amb vectors

- Suma i resta de vectors lliures
- Producte de vector per escalar
- Combinació lineal de vectors

3 Propietats de les operacions amb vectors

4 Estructura euclidiana de \mathbb{R}^n

- Producte escalar
- Norma o longitud
- Distància entre dos punts
- Angle entre dos vectors
- Desigualtat de Cauchy-Schwarz

5 Producte Vectorial. Producte Mixt

- Producte Vectorial
- Producte Mixt

1 Vectors

- Definicions
- Vectors fixs
- Vectors lliures

2 Operacions amb vectors

- Suma i resta de vectors lliures
- Producte de vector per escalar
- Combinació lineal de vectors

3 Propietats de les operacions amb vectors

4 Estructura euclidiana de \mathbb{R}^n

- Producte escalar
- Norma o longitud
- Distància entre dos punts
- Angle entre dos vectors
- Desigualtat de Cauchy-Schwarz

5 Producte Vectorial. Producte Mixt

- Producte Vectorial
- Producte Mixt

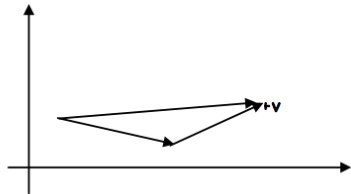
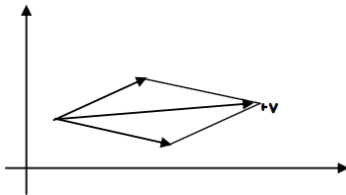
Suma de vectors lliures

Definició

Sigui $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, aleshores

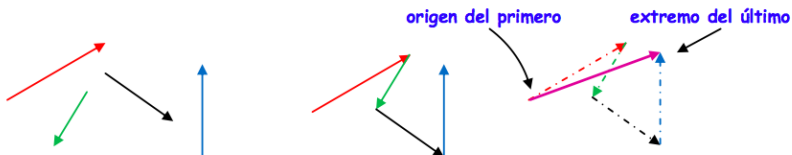
$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

Geomètricament és el vector format per la diagonal del paralelogram que té als dos vectors sumands com a costats i origen el mateix que ambdós.



Suma de vectors lliures

Si s'han de sumar més de dos vectors, resulta més útil la segona construcció gràfica. Basta col·locar cada origen dels vectors sumands sobre l'extrem del vector sumand precedent.



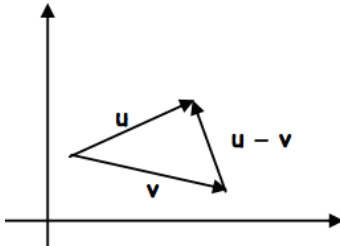
Resta de vectors lliures

Definició

Sigui $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, aleshores

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, \dots, u_n - v_n)$$

Geomètricament se realitza la suma entre el vector minuent i l'oposat del substraend.



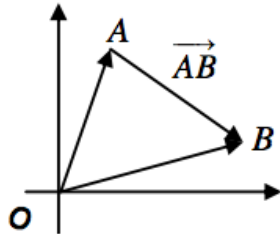
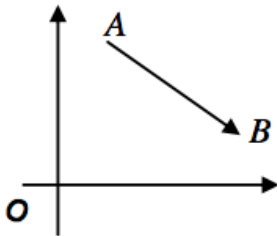
Resta de vectors lliures

Una petita observació: en realitzar la resta $\vec{u} - \vec{v}$ cercam un vector \vec{w} tal que si se li suma al substraend ha de donar el minuend:



Obtenció de les components d'un vector \vec{AB}

Si tenim un vector \vec{AB} obtingut a partir dels punts A i B i dibuixam els vectors \vec{OA} i \vec{OB}



aleshores podem veure com \vec{AB} , \vec{OA} i \vec{OB} formen un triangle vectorial i podem escriure les relacions

$$\vec{OA} + \vec{AB} - \vec{OB} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

Obtenció de les components d'un vector \vec{AB}

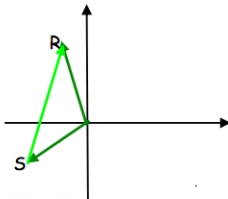
Exercici

Obteniu \vec{SR} a partir de $\vec{OR} = (-1, 4)$ i $\vec{OS} = (-3, -2)$

Exercici

Obteniu $\vec{PR} - \vec{PS}$ a partir de $\vec{OR} = (-1, 4)$, $\vec{OS} = (-3, -2)$ i $\vec{OP} = (3, 0)$.

Obtenció de les components d'un vector \vec{AB}

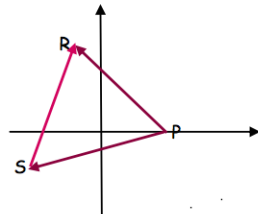


$$\overline{PR} = \overline{OR} - \overline{OP} = (-1, 4) - (3, 0) = (-4, 4)$$

$$\overline{PS} = \overline{OS} - \overline{OP} = (-3, -2) - (3, 0) = (-6, -2)$$

$$\overline{PR} - \overline{PS} = (-4, 4) - (-6, -2) = (2, 6)$$

$$\overline{SR} = \overline{OR} - \overline{OS} = (-1, 4) - (-3, -2) = (2, 6)$$



1 Vectors

- Definicions
- Vectors fixs
- Vectors lliures

2 Operacions amb vectors

- Suma i resta de vectors lliures
- Producte de vector per escalar
- Combinació lineal de vectors

3 Propietats de les operacions amb vectors

4 Estructura euclidiana de \mathbb{R}^n

- Producte escalar
- Norma o longitud
- Distància entre dos punts
- Angle entre dos vectors
- Desigualtat de Cauchy-Schwarz

5 Producte Vectorial. Producte Mixt

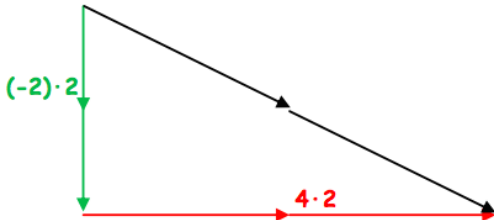
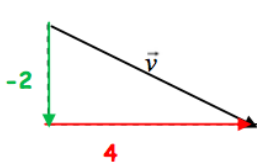
- Producte Vectorial
- Producte Mixt

Producte per escalar

Definició

Sigui $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n$ i sigui $\lambda \in \mathbb{K}$ aleshores

$$\lambda \vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_n) \in \mathbb{K}^n$$



Producte per escalar

En l'exemple anterior $\vec{v} = (4, -2)$ i $2\vec{v} = (8, -4)$. A més, la longitud de $\vec{v} = 2\sqrt{5}u.l$ i la de $2\vec{v} = 4\sqrt{5}$, d'on observam que en duplicar el vector, també duplicam el seu mòdul o longitud. En canvi la direcció i sentit de $2\vec{v}$ coincideix amb la de \vec{v} . Vegem que no sempre serà així.

Producte per escalar

El resultat de multiplicar un escalar $\lambda \neq 0$ per un vector \vec{v} és un altre vector \vec{u} de la mateixa direcció que \vec{v} , de sentit igual o contrari segons si el signe de l'escalar és $+$ o $-$, i de mòdul igual a $|\lambda|$ vegades el de \vec{v} .

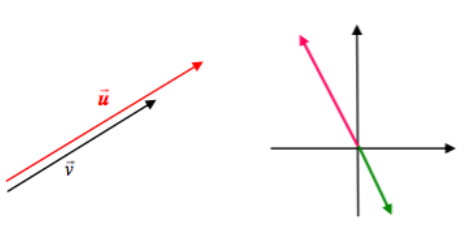


Figura: A la figura de la dreta, si el vector $\vec{v} = (1, -2)$ el multiplicam per l'escalar -2 obtindrem un altre vector \vec{u} paral·lel a \vec{v} i de components $\vec{u} = (-2, 4)$.

Producte per escalar

Vectors paral·lels

Dos vectors $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ són paral·lels (o proporcionals) si existeix un valor $\lambda \neq 0$ tal que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$.

Seran del mateix sentit si $\lambda > 0$ i de sentits oposats si $\lambda < 0$.

Producte per escalar

Exercici

Donats els punts $A = (1, 2, 3)$, $B = (0, -1, 2)$ i $C = (-2, -7, 0)$, si D és el punt de coordenades $(-1, x, 0)$ troba, si es possible, el valor de x perquè els vectors \vec{AB} i \vec{CD} siguin paral·lels. Raona el procediment emprat.

Sol: el problema no té solució.

Producte per escalar

Exercici

Donats els vectors $\vec{u} = (2, 3, 0)$ i $\vec{v} = (-3, 0, 1)$ troba el valor de k perquè els vectors \vec{a} i \vec{b} siguin paral·les, on $\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v}$ i $\vec{b} = -3\vec{u} + k\vec{v}$.

Sol: $k = \frac{3}{2}$.

1 Vectors

- Definicions
- Vectors fixs
- Vectors lliures

2 Operacions amb vectors

- Suma i resta de vectors lliures
- Producte de vector per escalar
- Combinació lineal de vectors

3 Propietats de les operacions amb vectors

4 Estructura euclidiana de \mathbb{R}^n

- Producte escalar
- Norma o longitud
- Distància entre dos punts
- Angle entre dos vectors
- Desigualtat de Cauchy-Schwarz

5 Producte Vectorial. Producte Mixt

- Producte Vectorial
- Producte Mixt

Combinació lineal

Combinació lineal de vectors

Donats $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ un conjunt de vectors de \mathbb{K}^n i $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ es defineix la combinació lineal dels vectors de V com el vector \vec{w} :

$$\vec{w} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{v}_i$$

La combinació lineal de vectors no és una operació nova, si no que reuneix en un mateix lloc la suma de vectors i el producte per escalars. Per poder fer combinacions lineals de vectors, és necessari que tots ells tinguin el mateix nombre de components i el resultat serà un altre vector d'aquestes mateixes característiques.

Combinació lineal

Exercici

És el vector $(2, 3)$ combinació lineal de $(3, 1)$ i $(-6, -2)$? Justifica la teva resposta gràficament.

Sol: no.

1 Vectors

- Definicions
- Vectors fixs
- Vectors lliures

2 Operacions amb vectors

- Suma i resta de vectors lliures
- Producte de vector per escalar
- Combinació lineal de vectors

3 Propietats de les operacions amb vectors

4 Estructura euclidiana de \mathbb{R}^n

- Producte escalar
- Norma o longitud
- Distància entre dos punts
- Angle entre dos vectors
- Desigualtat de Cauchy-Schwarz

5 Producte Vectorial. Producte Mixt

- Producte Vectorial
- Producte Mixt

Propietats de les operacions amb vectors

En definir les operacions de suma i producte per un escalar convé prendre consciència de les diferències i similituds entre ambdues.

Llei de composició interna

La suma de vectors s'anomena llei de composició interna ja que opera entre elements d'un conjunt donat, \mathbb{K}^n i el resultat és un altre element d'aquest conjunt:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\mapsto \vec{u} + \vec{v} \end{aligned}$$

Propietats de les operacions amb vectors

Llei de composició externa

El producte d'un escalar per un vector té com a operands conjunts diferents: escalars per una banda i vectors per una altra. El resultat cau del costat dels vectors, i l'operació s'anomena llei de composició externa:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ (\lambda, \vec{v}) &\mapsto \lambda \vec{v} \end{aligned}$$

Propietats de la suma de vectors

Siguin $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{K}^n$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ aleshores es compleix

Propietats

- Llei associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- Llei conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- Element neutre de la suma: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
- Vector oposat: $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$

Propietats del producte de vectors per un escalar

Propietats

- Llei distributiva del producte d'un escalar per la suma de vectors: $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
- Llei distributiva del producte d'un vector per la suma d'escalars: $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
- Llei associativa del producte entre escalars i vectors: $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u}) = \beta(\alpha\vec{u})$
- Element unitat: $1\vec{u} = \vec{u}$

1 Vectors

- Definicions
- Vectors fixs
- Vectors lliures

2 Operacions amb vectors

- Suma i resta de vectors lliures
- Producte de vector per escalar
- Combinació lineal de vectors

3 Propietats de les operacions amb vectors

4 Estructura euclidiana de \mathbb{R}^n

- Producte escalar
- Norma o longitud
- Distància entre dos punts
- Angle entre dos vectors
- Desigualtat de Cauchy-Schwarz

5 Producte Vectorial. Producte Mixt

- Producte Vectorial
- Producte Mixt

1 Vectors

- Definicions
- Vectors fixs
- Vectors lliures

2 Operacions amb vectors

- Suma i resta de vectors lliures
- Producte de vector per escalar
- Combinació lineal de vectors

3 Propietats de les operacions amb vectors

4 Estructura euclidiana de \mathbb{R}^n

■ Producte escalar

- Norma o longitud
- Distància entre dos punts
- Angle entre dos vectors
- Desigualtat de Cauchy-Schwarz

5 Producte Vectorial. Producte Mixt

- Producte Vectorial
- Producte Mixt

Producte Escalar

El producte escalar és la tercera operació bàsica entre vectors de \mathbb{R}^n .

Producte escalar

Siguin $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ dos vectors de \mathbb{R}^n . Es defineix el producte escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ com el nombre real

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

D'ell es deriven conceptes mètrics com l'ortogonalitat, la norma, l'angle i s'obren camins a múltiples aplicacions geomètriques i físiques de l'àlgebra lineal.

Producte Escalar

Exemple

Siguin $\vec{u} = (2, 3, 0)$ i $\vec{v} = (-1, -3, 1)$ dos vectors de \mathbb{R}^3 . Calcula el seu producte escalar

Sol:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -11$$

Propietats del producte escalar

Propietats

- Comutativa: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- Distributiva respecte de la suma: $\vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
- Associativa i comutativa entre escalars i vectors:

$$(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

- Si $\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} = 0$.
- Si $\vec{u} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} > 0$.

Propietats del producte escalar

Exercici

Donats els vectors $\vec{u} = (2, -1, 5)$, $\vec{v} = (-3, 4, 1)$ i $\vec{w} = (-1, 0, 5)$

- 1 Comprovau que el producte escalar té la propietat conmutativa.
- 2 Comprovau que el producte escalar té la propietat distributiva respecte de la suma.
- 3 Comprovau que el producte escalar té la propietat associativa entre escalars i vectors.

Propietats del producte escalar

Exercici

Demostrau que si $\vec{u} \neq \vec{0}$ aleshores $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$

1 Vectors

- Definicions
- Vectors fixs
- Vectors lliures

2 Operacions amb vectors

- Suma i resta de vectors lliures
- Producte de vector per escalar
- Combinació lineal de vectors

3 Propietats de les operacions amb vectors

4 Estructura euclidiana de \mathbb{R}^n

- Producte escalar
- **Norma o longitud**
- Distància entre dos punts
- Angle entre dos vectors
- Desigualtat de Cauchy-Schwarz

5 Producte Vectorial. Producte Mixt

- Producte Vectorial
- Producte Mixt

Norma d'un vector

Norma

Donat $\vec{u} = (u_1, u_2 \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ la seva norma o longitud ve donada per

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

En molts de casos resulta útil la norma al quadrat d'un vector:

$$||\vec{u}||^2 = (\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}})^2 \Rightarrow ||\vec{u}||^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$$

Norma d'un vector

Exercici

Donat $\vec{u} = (2, 3, -1) \in \mathbb{R}^3$, calcula la seva longitud.

Sol:

$$||\vec{u}|| = \sqrt{14}$$

Norma d'un vector

Propietats

- $\|\vec{u}\| > 0, \forall \vec{u} \neq \vec{0}$
- $\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{u}\|$
- $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (Desigualtat triangular)
- $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$ (teorema de Pitàgoras)
- $\|\vec{u} \cdot \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$ (Desigualtat de Cauchy-Schwarz)

Norma d'un vector

Exercicis

Donat $\vec{u} = (2, 3, -1)$ comprovau que

$$||2\vec{u}|| = 2||\vec{u}||$$

$$||-2\vec{u}|| = |-2| ||\vec{u}|| = 2||\vec{u}||$$

Norma d'un vector

Vector unitari

Un vector unitari \vec{e} és aquell que té norma 1:

$$||\vec{e}|| = 1$$

Per exemple el vector $(1, 0, 0)$ és un vector unitari.

Norma d'un vector

Exercici

Donat el vector $\vec{u} = (2, 3, -1)$ comprova que si el dividim per la seva norma, obtenim un altre vector que és unitari

Exercici

Demotra que qualsevol vector \vec{u} dividit per la seva norma és unitari.

Exercici

Donat el vector $\vec{u} = (2, 3, -1)$ troba un altre vector de la mateixa direcció, sentit però de norma igual a 3.

1 Vectors

- Definicions
- Vectors fixs
- Vectors lliures

2 Operacions amb vectors

- Suma i resta de vectors lliures
- Producte de vector per escalar
- Combinació lineal de vectors

3 Propietats de les operacions amb vectors

4 Estructura euclidiana de \mathbb{R}^n

- Producte escalar
- Norma o longitud
- **Distància entre dos punts**
- Angle entre dos vectors
- Desigualtat de Cauchy-Schwarz

5 Producte Vectorial. Producte Mixt

- Producte Vectorial
- Producte Mixt

Distància entre dos punts

Distància entre dos punts

Donats dos punts A i B es defineix la distància entre ambdós com

$$d(A, B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{\vec{AB} \cdot \vec{AB}}$$

Aquest valor coincideix amb la intuïció geomètrica quan A i B són dos punts del pla. Equival a la longitud del vector fix \vec{AB} .

Exercici

Donats dos punts $A = (1, 2)$ i $B = (4, 3)$ troba la distància entre ambdós.

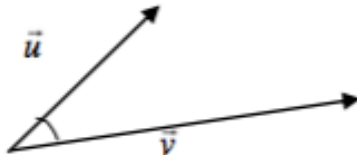
Sol: $\sqrt{10}$.

Distància entre dos punts

Teorema

Donats dos vectors \vec{u} i \vec{v} i α l'angle que formen ambdós, aleshores es verifica que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha$$



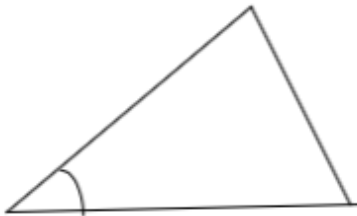
Distància entre dos punts

Per fer la demostració emprarem un resultat previ.

Teorema del cosinus

En un triangle ABC qualsevol i siguin α, β, γ els angles i a, b, c els costats dels costats respectivament oposats a aquests angles, llavors

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \alpha$$



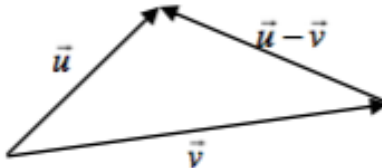
Distància entre dos punts

Demostració

En primer lloc dibuixam el vector $\vec{u} - \vec{v}$ amb el que queda dibuixat un triangle. Aplicam la definició de norma sota la forma

$||\vec{w}||^2 = \vec{w} \cdot \vec{w}$ al vector $\vec{u} - \vec{v}$ resulta

$$||\vec{u} - \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

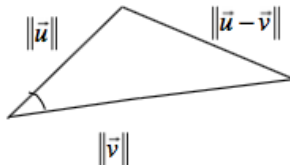


Distància entre dos punts

Demostració

D'altra banda si aplicam el teorema del cosinus al triangle format per \vec{u} , \vec{v} i $\vec{u} - \vec{v}$

$$||\vec{u} - \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2(||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cos \alpha)$$



Distància entre dos punts

Demostració

Si comparam ambdúes expresions obtenim el resultat:

$$||\vec{u} - \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$||\vec{u} - \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2(||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cos \alpha)$$

1 Vectors

- Definicions
- Vectors fixs
- Vectors lliures

2 Operacions amb vectors

- Suma i resta de vectors lliures
- Producte de vector per escalar
- Combinació lineal de vectors

3 Propietats de les operacions amb vectors

4 Estructura euclidiana de \mathbb{R}^n

- Producte escalar
- Norma o longitud
- Distància entre dos punts
- **Angle entre dos vectors**
- Desigualtat de Cauchy-Schwarz

5 Producte Vectorial. Producte Mixt

- Producte Vectorial
- Producte Mixt

Angle entre dos vectors

Com acabam de veure, si \vec{u} i \vec{v} formen un angle α aleshores podem definir el seu producte escalar com: $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cos \alpha$.

Angle entre dos vectors

Es defineix l'angle que formen dos vectors com el valor real α :

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||}$$

Exercici

Troba l'angle que formen els vectors $(2, 3, -1)$ i $(-2, 0, 3)$

$$\text{Sol: } \cos \alpha = -\frac{\sqrt{182}}{26}$$

Angle entre dos vectors

Vectors ortogonals

Dos vectors són ortogonals si el seu producte escalar és zero

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Vectors ortonormals

Dos vectors són ortonormals si són ortogonals i de norma 1.

Per exemple, $(0, 1)$ i $(1, 0)$ són dos vectors ortonormals.

Angle entre dos vectors

Exercici

Troba a perquè $(a, 0, -1, 3)$ sigui perpendicular a $(1, 7, a - 1, 2a + 3)$.

Sol: $a = -\frac{5}{3}$

Exercici

Per quins valors de x són ortogonals $(x, -x - 8, x, x)$ i $(x, 1, -2, 1)$?

Sol: $x = -2$ i $x = 4$.

1 Vectors

- Definicions
- Vectors fixs
- Vectors lliures

2 Operacions amb vectors

- Suma i resta de vectors lliures
- Producte de vector per escalar
- Combinació lineal de vectors

3 Propietats de les operacions amb vectors

4 Estructura euclidiana de \mathbb{R}^n

- Producte escalar
- Norma o longitud
- Distància entre dos punts
- Angle entre dos vectors
- Desigualtat de Cauchy-Schwarz

5 Producte Vectorial. Producte Mixt

- Producte Vectorial
- Producte Mixt

Desigualtat de Cauchy-Schwarz

Resultat

A partir de l'expressió

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||}$$

i tenint en compte que el cosinus de qualssevol angle és sempre menor o igual que 1 podem obtenir:

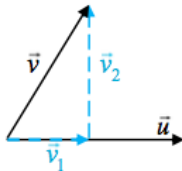
$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||$$

És a dir, que el producte escalar de dos vectors és menor o igual que el producte de les seves normes.

Projecció ortogonal

Projecció ortogonal

La projecció ortogonal d'un vector \vec{v} sobre un altre vector \vec{u} és un vector paral·lel a \vec{u} tal que sumat a un altre perpendicular a \vec{u} dona \vec{v}



Projecció ortogonal

Es tracta d'obtenir $P_{\vec{v}}(\vec{u}) = \vec{v}_1$ coneguent els vectors \vec{u} o \vec{v}

Càlcul de la Projecció ortogonal

- Descomponem el vector $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ on $\vec{v}_1 \parallel \vec{u}$ i $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$.
- $\vec{v}_1 = \lambda \vec{u}$
- $\vec{v} = \lambda \vec{u} + \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_2 = \vec{v} - \lambda \vec{u}$
- $\vec{v}_2 \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (\vec{v} - \lambda \vec{u}) \cdot \vec{u} = 0$
- $\lambda = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$

Per tant

$$P_{\vec{v}}(\vec{u}) = \vec{v}_1 = \lambda \vec{u} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}$$

Projecció ortogonal

Càlcul de la Projecció ortogonal

Projectau el vector $\vec{v} = (1, 2)$ sobre $\vec{u} = (3, 1)$.

Sol: $P_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{1}{2}(3, 1)$.

1 Vectors

- Definicions
- Vectors fixs
- Vectors lliures

2 Operacions amb vectors

- Suma i resta de vectors lliures
- Producte de vector per escalar
- Combinació lineal de vectors

3 Propietats de les operacions amb vectors

4 Estructura euclidiana de \mathbb{R}^n

- Producte escalar
- Norma o longitud
- Distància entre dos punts
- Angle entre dos vectors
- Desigualtat de Cauchy-Schwarz

5 Producte Vectorial. Producte Mixt

- Producte Vectorial
- Producte Mixt

1 Vectors

- Definicions
- Vectors fixs
- Vectors lliures

2 Operacions amb vectors

- Suma i resta de vectors lliures
- Producte de vector per escalar
- Combinació lineal de vectors

3 Propietats de les operacions amb vectors

4 Estructura euclidiana de \mathbb{R}^n

- Producte escalar
- Norma o longitud
- Distància entre dos punts
- Angle entre dos vectors
- Desigualtat de Cauchy-Schwarz

5 Producte Vectorial. Producte Mixt

- Producte Vectorial
- Producte Mixt

Producte vectorial

Producte vectorial

Sguin $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectors de \mathbb{R}^3 . El producte vectorial de \vec{u} i \vec{v} es defineix com el vector:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Producte vectorial

Resultats

Si multiplicam escalarment:

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$$

$$\vec{v} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$$

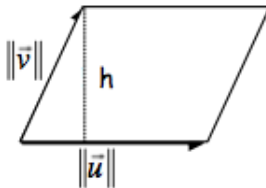
D'on veim que és perpendicular a \vec{u} i \vec{v} .

Producte vectorial

Resultats

El sentit del producte vectorial és el que indicaria la regla de la mà dreta en dur el primer vector sobre el segon pel camí més curt i de mòdul l'àrea del paral·lelogram determinat per \vec{u} i \vec{v}

$$||\vec{u} \wedge \vec{v}|| = ||\vec{u}|| \cdot h = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \sin \alpha$$



Producte vectorial

Producte vectorial com a determinant

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\vec{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\vec{k}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Producte vectorial

Propietats

- Propietat anticonmutativa: $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- Propietat distributiva:

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

$$(\vec{v} + \vec{w}) \wedge \vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{u}$$

- Associativa de vectors i escalars:

$$\alpha \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\alpha \cdot \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\alpha \cdot \vec{v})$$

- $\vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0} \wedge \vec{u} = \vec{0}$
- $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$

1 Vectors

- Definicions
- Vectors fixs
- Vectors lliures

2 Operacions amb vectors

- Suma i resta de vectors lliures
- Producte de vector per escalar
- Combinació lineal de vectors

3 Propietats de les operacions amb vectors

4 Estructura euclidiana de \mathbb{R}^n

- Producte escalar
- Norma o longitud
- Distància entre dos punts
- Angle entre dos vectors
- Desigualtat de Cauchy-Schwarz

5 Producte Vectorial. Producte Mixt

- Producte Vectorial
- Producte Mixt

Producte mixt de tres vectors

Producte mixt

Sguin $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ i $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ tres vectors de \mathbb{R}^3 distints del zero. El producte mixt de \vec{u} , \vec{v} i \vec{w} es defineix com el vector:

$$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \vec{u}(\vec{v} \wedge \vec{w})$$
$$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Si aquest determinant és zero, vol dir que alguna de les files és combinació lineal de les restants, i que per tant un vector és pot obtenir com a CL dels altres: són coplanaris.

Producte mixt de tres vectors

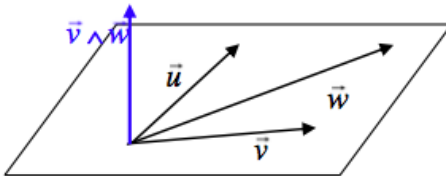
Propietats

- $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} =$
 $u_1 v_2 w_3 - u_1 v_3 w_2 + u_2 v_3 w_1 - u_2 v_1 w_3 + u_3 v_1 w_2 - u_3 v_2 w_1$
- $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \{\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\} = \{\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}\} = -\{\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}\} =$
 $-\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}\} = -\{\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}\}$

Producte mixt de tres vectors

Propietats

- Si els tres vectors són coplanaris, aleshores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = 0$
- Si $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = 0$ aleshores o algun vector és $\vec{0}$ o els tres vectors són coplanaris



Producte mixt de tres vectors

Propietats

- Geomètricament $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ representa el volum del paral·lelepíped determinat pels tres vectors

Pista $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v} \wedge \vec{w}\| \cos \alpha$, on $\|\vec{v} \wedge \vec{w}\|$ = àrea de la base i $\|\vec{u}\| \cos \alpha$ és la projecció escalar del vector \vec{u} sobre la direcció perpendicular a la base, és a dir, l'altura.

