# APUNTS DE L'ASSIGNATURA: MATEMÀTIQUES I. ÀLGEBRA LINEAL

Margalida Mas i Joan Torrens

# Capítol 5

# Diagonalització d'endomorfismes

En aquest apartat considerarem un $\mathbb{K}$-espai vectorial $E$ de dimensió $n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) i $f \in End(E)$ (és a dir $f : E \to E$ lineal).

Hem vist anteriorment que tota $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ defineix un endomorfisme

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^n \\ X & \mapsto & AX \end{array}$$

la matriu associada del qual respecte de la base canònica és $A$. Per tant, tot el que segueix referit a un endomorfisme $f \in End(E)$, serà vàlid per a una matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

**Definició 1.** *Sigui $f \in End(E)$, direm que $\lambda \in \mathbb{K}$ és un valor propi de $f$ si existeix algún $x \in E$, $x \neq 0$ tal que $f(x) = \lambda x$. En aquest cas direm que $x$ és un vector propi associat al valor propi $\lambda$.*

Si consideram l'endomorfisme identitat

$$\begin{array}{rcl} I : E & \to & E, \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

tenim que tot $x \in E$ amb $x \neq 0$ és un vector propi de $I$ de valor propi associat 1. Per altra banda, notem que escriure $f(x) = \lambda x$ és el mateix que escriure $f(x) = \lambda I(x)$ o també $(f - \lambda I)(x) = 0$. Així,

$$\lambda \in \mathbb{K} \quad \text{és valor propi de } f \quad \Longleftrightarrow \quad Ker(f - \lambda I) \neq \{0\}$$

i $x \in E$ amb $x \neq 0$ és un vector propi associat a $\lambda$ si i només si $x \in Ker(f - \lambda I)$.

Al subespai vectorial $Ker(f - \lambda I)$ l'anomenam subespai propi associat al valor propi $\lambda$ i el denotam per $E(\lambda)$.

**Proposició 2.** *(Càlcul dels valors propis)*

*Donat $\lambda \in \mathbb{K}$, es verifica*

$$\lambda \in \mathbb{K} \quad \textit{és valor propi de } f \quad \Longleftrightarrow \quad det(f - \lambda I) = 0.$$

**Demostració:** L'aplicació $f-\lambda I : E \to E$ és lineal i pel Teorema del rang tenim

$$dimE = dimKer(f-\lambda I) + rang(A-\lambda I_n)$$

on $A$ és la matriu associada a $f$ respecte d'una base fixada. Llavors tenim la següent cadena d'equivalències:

$$\lambda \in \mathbb{K} \quad \text{és valor propi de } f \quad \Longleftrightarrow \quad Ker(f-\lambda I) \neq \{0\} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad dimKer(f-\lambda I) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad rang(A-\lambda I_n) < n \quad \Longleftrightarrow \quad det(f-\lambda I) = 0.$$

□

Així, calcular els vectors propis associats a un valor propi $\lambda \in \mathbb{K}$, és trobar el subespai $E(\lambda) = Ker(f-\lambda I)$, que és el mateix que resoldre el sistema homogeni $(f-\lambda I)(x) = 0$ o equivalentment $(A-\lambda I_n)X = 0$.

**Exemple 3.** *Donat* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definit per*

$$f(x,y,z) = (-4x+8y-12z, 6x-6y+12z, 6x-8y+14z),$$

*volem calcular els valors propis de* $f$ *i els vectors propis associats.*

*Calculam primer els valors propis fent* $det(f-\lambda I) =| A-\lambda I_3 |= 0$ *on*

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 8 & -12 \\ 6 & -6 & 12 \\ 6 & -8 & 14 \end{pmatrix}$$

*és la matriu associada a* $f$ *respecte de la base canònica. Tenim*

$$| A-\lambda I_3 |= \begin{vmatrix} -4-\lambda & 8 & -12 \\ 6 & -6-\lambda & 12 \\ 6 & -8 & 14-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

*Si calculam aquest determinant obtenim* $-(2-\lambda)^2\lambda = 0$ *amb dues úniques solucions* $\lambda_1 = 2$ *i* $\lambda_2 = 0$.

*Per tant, els dos únics valors propis de* $f$ *són* $\lambda_1 = 2$ *i* $\lambda_2 = 0$.

*Calculem ara els vectors propis associats a cada un d'aquests valors propis. Per calcular* $E(\lambda_1) = E(2)$ *hem de resoldre el sistema* $(A-2I_3)X = 0$ *o equivalentment*

$$\begin{cases} -6x+8y-12z = 0 \\ 6x-8y+12z = 0 \\ 6x-8y+12z = 0 \end{cases}$$

*Aquest sistema és compatible indeterminat amb solucions:*

$$-6x+8y-12z = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{4}{3}y - 2z$$

*i per tant, si feim* $y = 1, z = 0$ *i* $y = 0, z = 1$*, obtenim que* $E(2) = \langle (4,3,0), (-2,0,1) \rangle$.
*Calculem ara* $E(\lambda_2) = E(0)$*. Hem de resoldre el sistema*

$$\left\{ \begin{array}{r} -4x + 8y - 12z = 0 \\ 6x - 6y + 12z = 0 \\ 6x - 8y + 14z = 0 \end{array} \right.$$

*Si aplicam el mètode de Gauss podem reduir la matriu com segueix*

$$\left( \begin{array}{rrr|r} -4 & 8 & -12 & 0 \\ 6 & -6 & 12 & 0 \\ 6 & -8 & 14 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \quad \textit{(Gauss)} \quad \dots \sim \left( \begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

*d'on el sistema és compatible indeterminat amb solucions*

$$\left\{ \begin{array}{rr} x - 2y = & -3z \\ y = & z \end{array} \right.$$

*i, si feim* $z = 1$ *obtenim que* $E(0) = \langle (-1,1,1) \rangle$.

**Definició 4.** *(Polinomi característic)*
*Donada* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *es defineix polinomi característic de la matriu* $A$ *el polinomi*

$$p_A(x) = \mid A - xI_n \mid .$$

*Si* $f \in End(f)$ *i* $A$ *és la matriu associada a* $f$ *respecte d'una base qualsevol, es defineix el polinomi característic de* $f$ *com el polinomi* $p_f(x) = p_A(x)$.
*Notem que si* $x = 0$, $p_A(0) = \mid A \mid$.

**Teorema 5.** *(Teorema de Cayley-Hamilton)*
*Tota matriu* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *verifica l'equació característica* $p_A(x) = 0$*, és a dir,* $p_A(A) = 0$.

Aquest resultat ens permet expressar la inversa d'una matriu $A$ mitjançant una expressió polinòmica amb $A$.

**Exemple 6.** *Donada la matriu*

$$\left( \begin{array}{rrr} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & a \end{array} \right), \qquad a \in \mathbb{R}$$

*volem calcular el seu polinomi característic.*

$$p_A(x) = \mid A - xI_n \mid = \left| \begin{array}{rrr} -x & 0 & 1 \\ 1 & -x & -1 \\ -1 & 1 & a - x \end{array} \right| = -x^3 + ax^2 - 2x + 1$$

*Aleshores, segons el Teorema de Cayley-Hamilton, tenim que*

$$p_A(A) = -A^3 + aA^2 - 2A + I = 0.$$

*Per una altra banda, com que* $| A |= p_A(0) = 1 \neq 0$*, la matriu* $A$ *és invertible i, si aïllam* $I$ *de l'equació anterior, obtenim* $I = A^3 - aA^2 + 2A$*. Si ara multiplicam per* $A^{-1}$ *ambdós membres de la igualtat tenim l'expressió de* $A^{-1}$

$$A^{-1} = (A^3 - aA^2 + 2A)A^{-1} = A^2 - aA + 2I.$$

**Definició 7.** *Direm que un endomorfisme* $f \in End(E)$ *és diagonalitzable si existeix una base de* $E$ *formada per vectors propis de* $f$*. Diagonalitzar* $f$ *és trobar una tal base. En tal cas, si* $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *és una base de vectors propis associats als valors propis* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *(no necessàriament diferents), la matriu associada a* $f$ *respecte d'aquesta base és la matriu diagonal*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

*ja que* $f(v_i) = \lambda_i v_i$*, per a tot* $i = 1, 2, \ldots, n$*.*

Notem que si $A$ és la matriu de $f$ respecte d'una altra base $\{e_1, \ldots, e_n\}$, podem escriure

$$D = P^{-1}AP$$

on $P$ és la matriu del canvi de base de $\{e_i\}$ a $\{v_i\}$.

Aquest fet ens resultarà molt útil per calcular potències successives de'una matriu $A$, ja que de la igualtat anterior tenim que $A = PDP^{-1}$ i aleshores

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}$$

i successivament

$$A^k = A^{k-1}A = (PD^{k-1}P^{-1})(PDP^{-1}) = PD^kP^{-1}.$$

Anem a veure sota quines condicions un endomorfisme $f$ (una matriu) és diagonalitzable.

**Proposició 8.** *Siguin* $f \in End(f)$ *i* $e_1, e_2, \ldots, e_r$ *vectors propis de* $f$ *amb valors propis associats* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ *respectivament. Aleshores, si* $\lambda_i \neq \lambda_j$ *per a tot* $i \neq j$*, els vectors* $e_1, e_2, \ldots, e_r$ *són L.I.*

**Demostració:** La farem per inducció sobre $r$.

Si $r = 1$, $e_1$ és un vector propi, d'on $e_1 \neq 0$ i per tant és L.I.

Suposem provat que $e_1, \ldots, e_{r-1}$ són L.I.. Provem-ho per a $r$. Considerem una combinació lineal

$$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_{r-1} e_{r-1} + \alpha_r e_r = 0 \tag{5.1}$$

Si aplicam $f$ a (5.1) tenim

$$f(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_{r-1} e_{r-1} + \alpha_r e_r) = f(0) = 0$$

o equivalentment

$$\alpha_1 \lambda_1 e_1 + \ldots + \alpha_{r-1} \lambda_{r-1} e_{r-1} + \alpha_r \lambda_r e_r = 0. \tag{5.2}$$

Si multiplicam ara (5.1) per $\lambda_r$ obtenim

$$\alpha_1 \lambda_r e_1 + \ldots + \alpha_{r-1} \lambda_r e_{r-1} + \alpha_r \lambda_r e_r = 0. \tag{5.3}$$

Si restam (5.2)-(5.3) obtenim

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_r) e_1 + \ldots + \alpha_{r-1}(\lambda_{r-1} - \lambda_r) e_{r-1} = 0$$

i com que, per hipòtesi, $e_1, \ldots, e_{r-1}$ són L.I. tenim que

$$\begin{aligned} \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_r) &= 0 \\ &\vdots \\ \alpha_{r-1}(\lambda_{r-1} - \lambda_r) &= 0. \end{aligned}$$

Com que $\lambda_i \neq \lambda_j$ per a tot $i \neq j$, obtenim que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{r-1} = 0$. Finalment, si substituïm aquests valors a (5.1) ens queda $\alpha_r e_r = 0$ d'on $\alpha_r = 0$ perquè $e_r \neq 0$. La qual cosa prova que $e_1, \ldots, e_r$ són L.I. □

**Corol·lari 9.** *El nombre de valors propis diferents d'un endomorfisme $f$ és com a màxim $n$. Si hi ha exactament $n$ valors propis diferents, aleshores $f$ és diagonalitzable.*

**Teorema 10.** *(Teorema de diagonalització)*

*Sigui $f \in End(E)$ ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), aleshores $f$ ($A$) és diagonalitzable si i només si el seu polinomi característic $p_f(x)$ ($p_A(x)$) descompon totalment en factors lineals i la multiplicitat de cada un dels seus zeros coincideix amb la dimensió del subespai propi associat corresponent. Dit d'una altra manera, el polinomi característic ha de ser de la forma*

$$p_f(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} (x - \lambda_2)^{n_2} \cdots (x - \lambda_r)^{n_r} \tag{5.4}$$

*amb $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$ i, per a cada $i = 1, \ldots, r$, ha de ser $n_i = dim E(\lambda_i)$.*

**Observació 11.** *i) Notem que, pel Teorema del rang, tenim de forma equivalent que $f$ $(A)$ és diagonalitzable si i només si $p_f(x)$ és de la forma (5.4) i per a tot $i = 1, \ldots, r$,se satisfà rang$(A - \lambda_i I_n) = n - n_i$.*

*ii) Per una altra part, quan un endomorfisme $f$ de $E$ és diagonalitzable, amb valors propis $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ i subespais propis $E(\lambda_1), \ldots, E(\lambda_r)$, llavors es veu fàcilment que $E$ admet la descomposició*

$$E = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus \ldots \oplus E(\lambda_r).$$

**Exemple 12.** *Estudiarem la diagonalització de la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 1 & a+2 & 1 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

*segons els valors de $a \in \mathbb{R}$.*

*Hem de resoldre $\mid A - \lambda I \mid= 0$.*

$$\mid A - \lambda I \mid= \begin{vmatrix} a+2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & a+2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & a+2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a+2-\lambda+2 & 1 & 1 \\ a+2-\lambda+2 & a+2-\lambda & 1 \\ a+2-\lambda+2 & 1 & a+2-\lambda \end{vmatrix} = (a+4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & a+2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(a+4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a+1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a+1-\lambda \end{vmatrix} = (a+4-\lambda)(a+1-\lambda)^2 = 0$$

*Otenim $\lambda_1 = a+4$ de multiplicitat 1 i $\lambda_2 = a+1$ de multiplicitat 2 i aleshores*

$$A \quad \text{serà diagonalitzable} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{rang}(A - \lambda_1 I) = 2 \quad i \quad \text{rang}(A - \lambda_2 I) = 1$$

*Si aplicam el mètode de Gauss per calcular el rang d'aquestes matrius tenim que*

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*d'on rang$(A - \lambda_1 I) = 2$. Si feim el mateix amb la matriu*

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*obtenim que* $rang(A - \lambda_2 I) = 1$ *per a tot* $a \in \mathbb{R}$.

*Per tant* $A$ *és diagonalitzable per a qualsevol valor de* $a \in \mathbb{R}$.

**Observació 13.** *Notem que la matriu anterior és simètrica* ($A = A^t$). *Si una matriu és simètrica és diagonalitzable.*