INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA DISCRETA

Introducción a la Matemática Discreta

En este tema se repasan conceptos básicos y se profundizan algunos aspectos

- TEORÍA DE CONJUNTOS
  - usar notación propia de teoría de conjuntos
  - identificar elementos de un conjunto y sus operaciones
  - plantear problemas cotidianos a partir de la teoría de conjuntos
- TÉCNICAS DE RECUENTO
  - conocer el lenguaje y las aplicaciones de la combinatoria
- INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA DE BOOLE
  - conocer axiomas del álgebra de Boole y sus propiedades
  - plantear problemas cotidianos usando el álgebra de Boole
  - simplificar funciones booleanas

Teoría de Conjuntos

Empezaremos estudiando la estructura discreta fundamental: el conjunto. Los conjuntos se utilizan para agrupar objetos.

Definición

Un **conjunto** es una colección desordenada de objetos.

Definición

Los objetos de un conjuntos se llaman **elementos** del conjunto. Se dice que un conjunto contiene a sus elementos.

El término *objeto* se ha utilizado sin especificar qué es. Los elementos del conjunto pueden ser cualquier cosa: números, palabras, personas, ...

Teoría de Conjuntos

Definición extensional: un conjunto queda completamente determinado si se enumeran sus elementos. La notación utilizada: $S = \{a, b, c, d\}$ representa a un conjunto S con cuatro elementos a, b, c y d.

Ejemplo

Define extensionalmente a) el conjunto V de las vocales del alfabeto; b) el conjunto A de los números enteros, positivos, múltiplos de 3, menores que 10; c) el conjunto M de los números enteros, positivos, menores que 50.

Solución:
$V = \{a, e, i, o, u\}$. $A = \{3, 6, 9\}$. $M = \{1, 2, 3, \ldots, 49\}$.
Cuando el patrón es obvio se enumeran algunos elementos y se usan puntos suspensivos.

Teoría de Conjuntos

El símbolo $\in$ describe la **pertenencia** a un conjunto. Escribimos $a \in V$ si a es un elemento de S; $p \notin S$ indica que p no pertenece al conjunto S.

Ejemplo

Para los conjuntos definidos en el ejemplo anterior:

Solución: $a \in V$ y $q \notin V$.
$3 \in A$ y $7 \notin A$.
$10 \in M$ y $153 \notin M$.
IMPORTANTE: Debe quedar claro la diferencia entre conjunto y elemento, $\{2\} \neq 2$. $\{2\}$ es un conjunto cuyo único elemento es 2 y 2 (sea lo que sea) no es un conjunto. Lo que si podemos decir es $2 \in \{2\}$.

Teoría de Conjuntos

Definición intensional el conjunto se define a partir de una propiedad común que satisfacen todos los elementos del conjunto: $A = \{x \in S | P(x)\}$. El conjunto A está formado por todos los elementos x del conjunto S tal que se satisface $P(x)$.

Ejemplo

Define intensionalmente a) el conjunto de las vocales del alfabeto; b) el conjunto de los números enteros, positivos, múltiplos de 3, menores que 10; c) el conjunto de los números enteros, positivos, menores que 50.

Solución: $V = \{x \in \mathrm{L} | x \text{ es vocal}\}$
$A = \{x \in \mathbf{Z}^+ | x \text{ es múltiplo de 3 y menor que } 10\}$
$M = \{x \in \mathbf{Z}^+ | x < 50\}$.

Teoría de Conjuntos

Definición

El **conjunto universal** U, es el que contiene a todos los elementos en consideración. El **conjunto vacio** $\emptyset$ es aquel que no contiene ningún elemento, $\emptyset = \{\ \}$.

Definición

Dos conjuntos son **iguales** si, y sólo si, tienen los mismos elementos.

Definición

Dados dos conjuntos A y B, se dice que A es **subconjunto** de B (A está contenido en B), si, y sólo si, todo elemento de A es también elemento de B. Se representa por $A \subseteq B$.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\ (x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \text{ if } x \in A \text{ then } x \in B$$

Teoría de Conjuntos

Propiedades de la inclusión: Sean A, B y C dos subconjuntos de U,

1. $\emptyset \subseteq A$
2. $A \subseteq A$
3. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ entonces $A = B$
4. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$

Teoría de Conjuntos

Definición

Sean A y B subconjuntos del conunto universal U. La **unión** de los conjuntos A y B, $A \cup B$, es el conjunto de todos los elementos x de U tal que x es de A **o** x es de B (o x es de ambos).

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \text{ or } (x \in B)\} = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

Definición

Sean A y B subconjuntos del conunto universal U. La **intersección** de los conjuntos A y B, $A \cap B$, es el conjunto de todos los elementos x de U tal que x es de A **y** x es de B (x es de ambos).

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \text{ and } (x \in B)\} = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

Definición

Dos conjuntos A y B se dice que son **disjuntos** si, y sólo si no tienen elementos en común.

$$A \text{ y } B \text{ son disjuntos } \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

Definición

Sea A un subconjunto del conjunto universal U. El **complementario** del conjunto A, denotada $\overline{A}$ (A^c), es el conjunto de todos los elementos x de U tal que x no es de A.

$$\overline{A} = \{x \mid (x \notin A)\}$$

Teoría de Conjuntos

Definición

Sean A y B subconjuntos del conunto universal U. La **diferencia** de los conjuntos A y B, denotada $A - B$, es el conjunto de todos los elementos x de U tal que x es de A **y** x no es de B.

$$A - B = \{x \mid (x \in A) \text{ and } (x \notin B)\} = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

NOTA: El complementario de A es la diferencia de los conjuntos U y A: $\overline{A} = U - A$.

Ejemplo

Dados $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $A = \{a, c, e, g\}$ y $B = \{d, e, f, g\}$ encontrar: $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$ y $B - A$

Solución: $A \cup B = \{a, c, d, e, f, g\}$
$A \cap B = \{e, g\}$
$\overline{A} = \{b, d, f\}$
$B - A = \{d, f\}$

Teoría de Conjuntos

Identidades entre conjuntos:

IDENTIDAD	NOMBRE
$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$	Leyes de identidad
$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	Leyes de denominación
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Leyes idempotentes
$\overline{(\overline{A})} = A$	Ley de doble complementación

Teoría de Conjuntos

IDENTIDAD	NOMBRE
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Leyes conmutativas
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Leyes asociativas
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Leyes distributivas

Teoría de Conjuntos

IDENTIDAD	NOMBRE
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	Leyes de De Morgan
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Leyes de absorción
$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$	Leyes de complemento

Técnicas de Recuento

La acción de contar es una de las primeras actividades Matemáticas. Esta actividad surge de forma natural y al comienzo usamos los dedos para contar. Pero en otras ocasiones la forma de realizar un recuento es menos evidente y se hace necesario establecer procesos matemáticos.

Definición

Regla del producto. Sea una tarea que se puede dividir en dos tareas consecutivas. Si hay m maneras de realizar la primera tarea y n formas de hacer la segunda tarea una vez completada la primera, entonces hay mn formas de completar la tarea. (Esta idea se puede generalizar para más de dos tareas.)

Ejemplo

Las matriculas de los coches constan de una serie de 3 letras seguida de tres dígitos. ¿Cuántas matrículas diferentes hay? (Suponer que ninguna secuencia está prohibida.)

Solución: Hay 26 letras diferentes y 10 dígitos diferentes. Por consiguiente por la regla del producto hay un total de $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 17{,}576{,}000$ matrículas.

Técnicas de Recuento

Definición

Regla de la suma. Si una primera tarea se puede realizar de m maneras y una segunda tarea se puede realizar de n formas, y si las dos tareas son incompatibles (no se pueden realizar a la vez), entonces hay $m + n$ formas de realizar una de las dos tareas.

Ejemplo

Un estudiante debe elegir un proyecto de trabajo entre tres profesores. El primer profesor tiene 23 propuestas de trabajo, el segundo profesor 15 propuestas y el tercer profesosr 19. ¿Cuántos posibles proyectos tiene el estudiante para elegir?

Solución: El estudiante puede elegir el trabajo de 23 formas diferentes de las propuestas del primer profesor, de 15 formas de las propuestas del segundo profesor, y de 19 formas del tercer profesor. Por tanto, hay $23 + 15 + 19 = 57$ proyectos para elegir.

Técnicas de Recuento

A veces hay que utilizar la regla del producto y la regla de la suma simultáneamente para resolver los problemas.

Ejemplo

Cada usuario de un ordenador tiene una contraseña, con una longitud entre seis y ocho caracteres, cada uno de los cuales es bien un dígito o una letra mayúscula. Cada contraseña debe contener al menos un dígito. ¿Cuántas contraseñas diferentes admite el sistema?

Técnicas de Recuento

Solución: P representa el número total de contraseñas y P_6, P_7 y P_8, número de contraseñas según longitud. Por la regla de la suma $P = P_6 + P_7 + P_8$.

Calculamos P_6 a partir del número total de secuencias de 6 caracteres (letras y números) al que restaremos las secuencias que no tienen ningún número. Según la regla del producto, el número de secuencias de 6 caracteres es $(26 + 10)^6$ y el número de secuencias de 6 caracteres sin ningún dígito es 26^6.

Por tanto, $P_6 = 36^6 - 26^6 = 1{,}867{,}866{,}560$

Analogamente $P_7 = 36^7 - 26^7 = 70{,}332{,}353{,}920$ y

$P_8 = 36^8 - 26^8 = 2{,}612{,}282{,}842{,}880$

Por tanto $P = P_6 + P_7 + P_8 = 2{,}684{,}483{,}063{,}360$

Técnicas de Recuento

Cuando dos tareas se puede realizar simultáneamente, no se puede utilizar la regla de la suma para contar las maneras en que se puede realizar una de las dos tareas. De usarlo, estamos contando dos veces las tareas que se realizan simultáneamente. Para contar de forma correcta las maneras de realizar una de las dos tareas, se suman las maneras de realizar cada una de ellas y a esta suma se le resta las formas de realizar ambas tareas simultáneamente.
Principio de inclusión-exclusión: para encontrar el cardinal de la unión de dos conjuntos finitos

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Ejemplo

Se a realizado una encuesta a 200 estudiantes sobre sus preferencias de refrescos de las marcas **A** y **B**, 25 de ellos beben exclusivamente refrescos de la marca **A**; 10 sólo refrescos de la marca **B**. ¿Cuántos estudiantes toman refrescos de ambas marcas?

Solución: Si A y B son los conjuntos de estudiantes que beben refrescos de las marcas **A** y **B**, sabemos que: $|A \cup B| = 200$; $|A \cap \overline{B}| = 25$; $|\overline{A} \cap B| = 10$.

$$|A \cup B| = |A \cap \overline{B}| + |A \cap B| + |\overline{A} \cap B|$$

$$|A \cap B| = 200 - (25 + 10) = 165$$

Técnicas de Recuento

Cuando el número de objetos es reducido resulta fácil contar el número de resultados posibles. Si disponemos de un gran número de objetos no suele ser fácil el recuento de esos resultados. Vamos a introducir unas reglas que nos ayuden a contar. Empezaremos introduciendo la notación factorial.

Definición

Llamaremos n factorial (o factorial de n), y lo designamos $n!$, al producto de los n primeros números naturales.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

Observación: Por convenio se toma: $0! = 1$.

Definición

Dados n elementos, llamamos permutaciones de orden n a todas las agrupaciones distintas que se pueden formar con esos n elementos variando solamente el orden. El número de permutaciones de orden n es igual a:

$$P_n = n!$$

Ejemplo

Un equipo de balonmano se ha clasificado para la fase final de un campeonato en la que ocho equipos juegan una liguilla todos contra todos. ¿Cuántas son las posibles clasificaciones posibles?

Solución: Cada clasificación final es una lista ordenada de los ocho equipos que participan, es una permutación de ocho elementos. Por tanto, hay $P_8 = 8! = 40{,}320$ posibles clasificaciones finales.

Definición

Dados n elementos, llamamos variaciones de orden r (o variaciones de n elementos tomados de r en r) a todas las agrupaciones distintas que se pueden formar con r de los n elementos. Dos agrupaciones son distintas si difieren en algún elemento o si teniendo los mismos elementos difieren en el orden de los mismos. El número de variaciones de orden r es igual a:

$$V_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejemplo

¿Cuántas formas existen de escoger el primer, segundo y tercer clasificado de un concurso si hay un total de 100 concursantes?

Solución: Se tiene en cuenta el orden en que se gana el concurso. El número de formas de escoger los tres ganadores es el número de variaciones de orden 3 de un conjunto de 100 elementos.

$$V_{100,3} = \frac{100!}{(100-3)!} = 100 \cdot 99 \cdot 98 = 970{,}200$$

Definición

Dados n elementos, llamamos combinaciones de orden r (o combinaciones de n elementos tomados de r en r) a todas las agrupaciones distintas que se pueden formar con r de los n elementos. Dos agrupaciones son distintas si difieren en al menos uno de sus elementos. El número de combinaciones de orden r es igual a:

$$C_{n,r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} = \binom{n}{r}$$

Ejemplo

¿De cuántas formas se pueden seleccionar cinco jugadores de entre un grupo de diez para formar un equipo?

Solución: El orden en que se eligen los componentes del equipo no influye en el equipo resultante. El número de equipos diferentes que se pueden formar son combinaciones de cinco elementos de un conjunto de diez elementos,

$$C_{10,5} = \frac{10!}{5! \cdot (10-5)!} = \frac{10!}{5!5!} = 252$$

En ocasiones los elementos se repiten

Definición

Llamamos permutaciones con repetición de n objetos, donde hay r_1 objetos indistinguibles de tipo 1, r_2 objetos indistinguibles de tipo 2, ..., r_k objetos indistinguibles de tipo k a todas las agrupaciones distintas que se pueden formar con esos n elementos variando solamente el orden. El número de permutaciones con repetición de orden e orden r_1, r_2, ..., r_k de n objetos es igual a:

$$PR_{n,r_1,r_2,\ldots,r_k} = \frac{(r_1 + r_2 + \cdots + r_k)!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}$$

Ejemplo

¿Cuántas cadenas diferentes se pueden formar reordenando las letras de la palabra PAPAYA?

Solución: Algunas letras de la palabra PAPAYA están repetidas, contiene tres veces la letra A, dos veces la letra P y una vez la letra Y. El número de cadenas diferentes serán permutaciones con repetición de 6 elementos (las 6 letras), donde hay 3 letras A indistinguibles, 2 letras P indistinguibles y una letra Y.

$$PR_{6,3,2,1} = \frac{6!}{3!2!1!} = 60$$

Técnicas de Recuento

Definición

Sea un conjunto formado por n elemento distintos, llamamos variaciones con repetición de orden r a todas las agrupaciones distintas que se pueden formar con r elementos, no necesariamente distintos, de los n elementos dados. Dos agrupaciones son distintas si difieren en algún elemento o si teniendo los mismos elementos difieren en el orden de los mismos. Al poder repetir elementos puede ocurrir que $r > n$. El número de variaciones con repetición de orden r de n elementos es igual a:

$$VR_{n,r} = n^r$$

Ejemplo

¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con las nueves cifras significativas del sistema decimal?

Solución: Al tratarse de números el orden importa, además pueden repetirse los dígitos, estamos considerando variaciones con repetición de orden 3 de 9 elementos.

$$VR_{9,3} = 9^3 = 729$$

Definición

Llamamos combinaciones con repetición de orden r de n objetos a todas las agrupaciones distintas que se pueden formar con r elementos no necesariamente distintos de los n elementos sin importar el orden. El número de combinaciones con repetición de n tomados de r en r es igual a:

$$CR_{n,r} = C_{n+r-1,r} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)! \cdot r!} = \binom{n+r-1}{r}$$

Ejemplo

En una heladería se sirven helados de 20 sabores diferentes, ¿de cuántas maneras diferentes se pueden comprar 12 helados? Si la mitad son de nata, ¿de cuántas maneras diferentes se pueden comprar los helados?

Solución: El orden no importa y los sabores pueden repetirse, cada compra es una combinación con repetición

$$CR_{20,12} = C_{20+12-1,12} = \frac{31!}{19! \cdot 12!} = \binom{31}{12}$$

Si hay 6 helados de nata el número de compras para los otros 6 es también una combinación con repetición:

$$CR_{20,6} = C_{20+6-1,6} = \frac{25!}{19! \cdot 6!} = \binom{25}{6}$$

Álgebra de Boole

En su libro "An Investigation of the Laws of Thought´´ de 1854 (Las leyes del pensamiento), George Boole enuncia las reglas que son el fundamento del álgebra de Boole.
Una definición abstracta del álgebra de Boole permite que una vez que se demuestre que una estructura concreta es un álgebra de Boole, todos los resultados enunciados para un álgebra de Boole genérica serán válidos en esta estructura particular.

Álgebra de Boole

Definición abstracta de álgebra de Boole

Sea $\mathcal{B} =< B, z, u, \circ, \dagger, \bar{} >$ donde:

- B es un conjunto, no vacio;
- $z, u \in B$ son elementos especiales;
- $\circ$ y $\dagger$ son operaciones internas $f : B^2 \rightarrow B$, tal que, $\forall a, b \in B \quad a \circ b \in B$ y $a \dagger b \in B$;
- $\bar{}$ es una aplicación $f : B \rightarrow B$, tal que, $\forall a \in B \quad \bar{a} \in B$.

Álgebra de Boole

$\mathcal{B}$ es un álgebra de Boole si se satisfacen los siguientes axiomas:

A1. $\circ$ y $\dagger$ son conmutativos, $\forall a, b \in B \;\; a \circ b = b \circ a$ y $a \dagger b = b \dagger a$

A2. $\circ$ y $\dagger$ son distributivos uno respecto del otro, $\forall a, b, c \in B$ $a \circ (b \dagger c) = (a \circ b) \dagger (a \circ c)$ y $a \dagger (b \circ c) = (a \dagger b) \circ (a \dagger c)$

A3. El conjunto B tiene dos elementos identidad, representados por z y u, tal que $\forall a \in B$ $\exists z \in B \quad a \dagger z = z \dagger a = a$ y $\exists u \in B \quad a \circ u = u \circ a = a$. A z se le llama el cero o elemento identidad respecto a la operación $\dagger$ y u es la unidad o elemento identidad respecto a la operación $\circ$.

A4. Existencia del complemento, $\forall a \in B \quad \exists \overline{a} \in B$ tal que $a \dagger \overline{a} = u$ y $a \circ \overline{a} = z$

Por conveniencia, $\dagger$ and $\circ$ son representados normalmente como "*suma*" y "*producto*", $a \dagger b = a + b$ y $a \circ b = a \cdot b$. En ciertas disciplinas, $\dagger$ y $\circ$ son definidos como "*or*" y "*and*" respectivamente.

Para poder eliminar algunos paréntesis, hay un orden definido sobre los operadores: $\circ$ tiene precedencia sobre $\dagger$. Por lo tanto, los paréntesis pueden ser eliminados de los productos. Cuando no hay ambigüedad de los símbolos usados el $\cdot$ es eliminado. Por ejemplo, $a + (b \cdot c)$ se escribe como $a + b\,c$.

Álgebra de Boole

Propiedades y teoremas:

IDENTIDAD	NOMBRE
$x + 0 = x$ $x \cdot 1 = x$	elemento neutro
$x + 1 = 1$ $x \cdot 0 = 0$	acotación
$x + x = x$ $x \cdot x = x$	idempotencia
$\overline{(\overline{x})} = x$	doble complemento
$x + y = y + x$ $x \cdot y = y \cdot x$	conmutativas

Álgebra de Boole

IDENTIDAD	NOMBRE
$x + (y + z) = (x + y) + z$ $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	asociativas
$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$	distributivas
$\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$ $\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$	De Morgan
$x + (x \cdot y) = x$ $x \cdot (x + y) = x$	absorción
$x + \overline{x} = 1$ $x \cdot \overline{x} = 0$	inverso para 1 inverso para 0

Lógica y cálculo proposicional

Definición

Una proposición es una oración declarativa que es verdadera o falsa pero no las dos cosas a la vez. Las proposiciones se representan por las letras p, q, r, s, ...

Si una proposición p es verdadera se dice que toma el valor verdadero y se representa por **V**. Si p no es verdadera tomará el valor falso, indicándose por **F**.

Álgebra de Boole

Lógica y cálculo proposicional

Los operadores (o conectivos) lógicos son negación ($\neg$), conjunción ($\wedge$) y disyunción ($\vee$).

Una tabla de verdad muestra las relaciones entre los valores de verdad de las proposiciones y son valiosas para determinar los valores de verdad de proposiciones compuestas. La siguiente tabla muestra la tabla de verdad para los tres operadores lógicos.

p	$\neg p$
V	F
F	V

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Álgebra de Boole binaria

Los circuitos de ordenadores y ortos componentes electrónicos reciben datos de entrada, cada uno de los cuales es un 0 o un 1, y producen como salida una secuencia de también ceros y/o unos. Los circuitos pueden construirse utilizando cualquier elemento básico que posea dos estados diferentes. En 1938 Claude Shannon demostró como utilizar las reglas de la lógica (enunciadas por Boole) para diseñar circuitos.

Álgebra de Boole

El álgebra de Boole proporciona las operaciones y las leyes para trabajar en el conjunto $\mathcal{B} = \{0, 1\}$. Las operaciones son el **complemento** de un elemento, denotado por una barra, $\bar{}$; la **suma booleana**, denotada por $+$; y el **producto booleano**, denotada por $\cdot$. Estas operaciones quedan definidas en las siguientes tablas.

x	$\overline{x}$
1	0
0	1

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Álgebra de Boole

Definición

Una variable x es una **variable booleana**, si unicamente toma valores del conjunto $\mathcal{B} = \{0, 1\}$, esto es, los únicos valores posible son 0 y 1.

Definición

Dado el conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ donde $x_i \in \mathcal{B} = \{0, 1\}$, $1 \leq i \leq n$ la aplicación $F : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ recibe el nombre de **función booleana de grado** n. Las x_i son variables booleanas independientes de la función.

Álgebra de Boole

El dominio de la aplicación F son todas las posibles secuencias de n elementos binarios. Los valores que toma una función booleana se indican mediante una tabla de valores. La siguiente tabla muestra dos funciones booleanas para $n = 3$.

x_1	x_2	x_3	F_j	F_k
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Es evidente que existen más de dos funciones booleanas de grado 3.

Ejemplo

¿Cuántas funciones booleanas de grado n hay?

Solución: Aplicando la regla del producto se obtiene que hay 2^n n-tuplas diferentes formadas por ceros y unos. Cada función booleana asigna el valor 0 el 1 a cada una de estas n-tuplas. Si volvemos a aplicar la regla del producto resulta que hay 2^{2^n} funciones booleanas de grado n. El número de funciones booleanas crece muy rápidamente.

Para $n = 2$, hay $2^{2^2} = 16$ functiones booleanas

x_1	x_2	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

x_1	x_2	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Álgebra de Boole

Podemos definir operaciones de funciones booleanas $F_j = f_{ji}$, $i = 0, 1, \ldots N-1$ $(N = 2^n)$; i indica la componente.

- $\cdot^F$ es la operación definida sobre funciones booleanas que consiste en multiplicar (producto booleano) componentes concordantes de las funciones booleanas:
  $F_j \cdot^F F_k = f_{ji} \cdot f_{ki}, i = 0, 1, \ldots, N-1$
- $+^F$ es la operación definida sobre funciones booleanas que consiste en sumar (suma booleana) componentes concordantes de las funciones booleanas:
  $F_j +^F F_k = f_{ji} + f_{ki}, i = 0, 1, \ldots, N-1$
- $^{-F}$ es la operación definida sobre funciones booleanas que consiste en complementar las componentes de las funciones booleanas: $\overline{F_j} = \overline{f_{ji}}, i = 0, 1, \ldots, N-1$

Definición

Una **expresión booleana** es una expresión formada por funciones booleanas y los operadores booleanos $^{-F}$, $\cdot^{F}$, $+^{F}$. Las expresiones booleanas en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se definen recursivamente.

Cada expresión booleana representa una función booleana. Los valores de esta función se obtienen sustituyendo las variables de la expresión por todas las combinaciones posibles de ceros y unos. Los resultados se dan en una tabla.

Ejemplo

Calcula los valores de la función booleana
$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + \overline{x_3}$.

Solución: La siguiente tabla muestra los valores de la función.

x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$\overline{x_3}$	$x_1 x_2 + \overline{x_3}$
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

Álgebra de Boole

Ejemplo

Calcula los valores de la función booleana
$F(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + \overline{x_3}$.

Solución: La siguiente tabla muestra los valores de la función.

x_1	x_2	x_3	x_1x_2	$\overline{x_3}$	$x_1x_2 + \overline{x_3}$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

Álgebra de Boole

Definición

Se dice que dos expresiones booleanas F y G son **equivalentes** si representan la misma función, es decir sí, y sólo si, $F(b_1, b_2, \ldots, b_n) = G(b_1, b_2, \ldots, b_n)\ \forall b_1, b_2, \ldots, b_n$.
Si dos expresiones booleanas son equivalentes una puede obtenerse a partir de la otra mediante la aplicación de operaciones booleanas.

Las equivalencias entre expresiones booleanas se pueden comprobar

- comparando columnas a partir de la tabla de valores;
- algebraicamente, partiendo de una de ellas llegar hasta la otra aplicando propiedades del álgebra de Boole.

Álgebra de Boole

A partir de una función booleana resulta muy sencillo obtener la tabla de valores pero, ¿cómo podemos obtener una expresión booleana a partir de una tabla de valores? Es más, de todas las expresiones que representan a la misma función ¿cuál es la más "pequeña"?

Definición

Un **literal** es una variable booleana o su complemento.

Definición

Un término mínimo o **minterm** en las variables booleanas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es un producto booleano de n literales (uno por variable).

Un minterm vale 1 para una y sólo una combinación de sus variables.

Una función booleana está en **forma normal disyuntiva** si está escrita como suma booleana de minterms. Toda función booleana se puede escribir en forma normal disyuntiva. Dada una tabla de valores de una función booleana, se puede construir una suma booleana de aquellos minterms que valgan 1 cuando la función booleana vale 1 y que valga 0 cuando la función tome el valor 0.

Ejemplo

Escribe la función booleana $F(x, y, z) = (x + y)\,\overline{z}$ en forma normal disyuntiva.

Solución: Vamos a calcular la forma normal disyuntiva de dos maneras: a) algebraicamente utilizando las propiedades del álgebra de Boole; y b) como suma booleana de minterms.

a) A cada paso están indicadas las identidades que se emplean.

$$\begin{aligned}
F(x,y,z) &= (x+y)\,\overline{z} && \text{propiedad distributiva}\\
&= x\,\overline{z} + y\,\overline{z} && \text{identidad}\\
&= x\,1\,\overline{z} + 1\,y\,\overline{z} && \text{inverso para 1}\\
&= x\,(y+\overline{y})\,\overline{z} + (x+\overline{x})\,y\,\overline{z} && \text{propiedad distributiva}\\
&= x\,y\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,\overline{z} + x\,y\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,\overline{z} && \text{idempotencia}\\
&= x\,y\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,\overline{z}
\end{aligned}$$

Álgebra de Boole

En primer lugar necesitamos la tabla de los valores de F para todos los posibles valores de las variables.

x	y	z	$x+y$	$\overline{z}$	$(x+y)\overline{z}$	minterm
0	0	0	0	1	0	
0	0	1	0	0	0	
0	1	0	1	1	1	$\overline{x}\,y\,\overline{z}$
0	1	1	1	0	0	
1	0	0	1	1	1	$x\,\overline{y}\,\overline{z}$
1	0	1	1	0	0	
1	1	0	1	1	1	$x\,y\,\overline{z}$
1	1	1	1	0	0	

Los minterms corresponden a las 3 filas de la tabla en las que la función vale 1, esto ocurre cuando los 3 literales valen 1. Por lo tanto, $F(x,y,z) = \overline{x}\,y\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,\overline{z} + x\,y\,\overline{z}$.

Ejemplo

Un motor M está controlado por tres interruptores x, y, z y funciona cuando únicamente dos de los interruptores están en posición "ON". Deduce la tabla de valores de la función $M(x, y, z) : \mathcal{B}^3 \to \mathcal{B}$ y la expresión booleana de M en forma normal disyuntiva.

Solución: Los interruptores x, y, z son variables booleanas ya que toman dos valores. Acordaremos que el valor 1 corresponde a interruptores en posición "ON" y el valor 0 a interruptores en posición "OFF". El motor M tambien toma dos valores el valor 1 cuando está encendido y el valor 0 cuando está apagado.

Álgebra de Boole

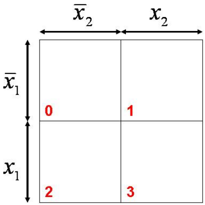
Construímos la tabla de valores de M a partir de las condiciones del problema.

x	y	z	M
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

La expresión booleana de $M(x, y, z)$ estará formada por aquellos minterms que hacen que la función tome el valor 1 (motor encendido): $M(x, y, z) = \overline{x}\, y\, z + x\, \overline{y}\, z + x\, y\, \overline{z}$.

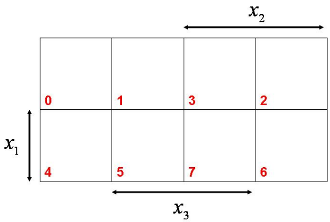
Simplificación de expresiones booleanas

Las funciones booleanas escritas en forma normal disjuntivas pueden simplificarse utilizando las identidades y propiedades del álgebra de Boole. Los diagramas o mapas de Karnaugh son un método visual muy útil para realizar simplificaciones. El diagrama de Karnaugh para dos variables x_1, x_2 está formado por $2^2 = 4$ cuadrados que representan todos los minterms de grado 2.



Álgebra de Boole

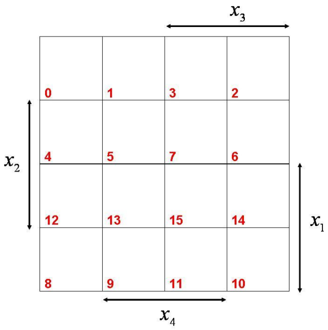
El diagrama de Karnaugh para 3 variables consta de $2^3 = 8$ cuadrados.



En un diagrama de Karnaugh se dice que dos cuadrados son adyacentes si difieren únicamente en un literal. Al movernos horizontal o verticalmente sólo una variable cambia entre dos cuadrados adyacentes.

Álgebra de Boole

La figura representa el diagrama de Karnaugh para 4 variables. Fijaros como los cuadrados de los bordes superiores (de la izquierda) son adyacentes a los cuadrados inferiores (de la derecha) ya que sólo difieren en un literal.



Álgebra de Boole

Las funciones booleanas pueden representarse mediante los diagramas de Karnaugh introduciendo en cada cuadrado el valor de la función.

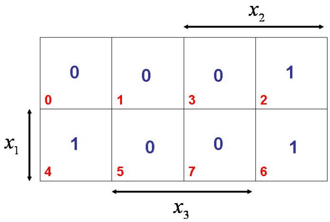
Ejemplo

Representa la función F usando el diagrama de Karnaugh.

x_1	x_2	x_3	$F(x_1, x_2, x_3)$	minterm
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	1	$\overline{x_1}\, x_2\, \overline{x_3}$
0	1	1	0	
1	0	0	1	$x_1\, \overline{x_2}\, \overline{x_3}$
1	0	1	0	
1	1	0	1	$x_1\, x_2\, \overline{x_3}$
1	1	1	0	

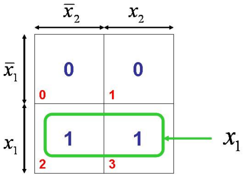
Álgebra de Boole

Solución: En el diagrama de Karnaugh habrá 3 cuadrados con el valor 1, los correspondientes a los minterms $\overline{x_1}\, x_2\, \overline{x_3} = m_2$, $x_1\, \overline{x_2}\, \overline{x_3} = m_4$ y $x_1\, x_2\, \overline{x_3} = m_6$. Los cuadrados restantes tienen el valor 0.

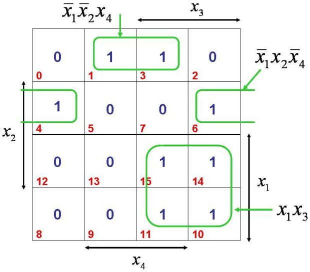


Álgebra de Boole

Para simplificar expresiones booleanas a partir de los diagramas de Karnaugh usamos la siguiente regla: siempre que en un diagrama de Karnaugh, dos cuadrados adyacentes contengan el valor 1, los minterms representados por esos cuadrados pueden combinarse en un producto que contendrá sólo los literales comunes a los dos minterms.



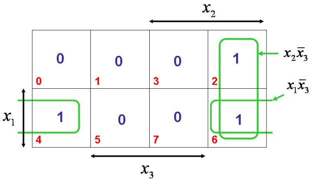
Esta idea puede generalizarse, se pueden combinar los minterms pertenecientes a cuadrados adyacentes de tal forma que el total de cuadrados combinados sea una potencia de 2. Un bloque formado por un cuadrado elimina 0 variables; un bloque de 2 cuadrados elimina 1 variable; un bloque de 4 cuadrados elimina 2 variables; . . . .



Ejemplo (continuación del Ejempo anterior)

Simplifica usando el diagrama de Karnaugh la función booleana $F(x_1, x_2, x_3)$.

Solución: A partir del diagrama de Karnaugh vamos agrupando cuadrados adyacentes.



$$F(x_1, x_2, x_3) = x_2\,\overline{x_3} + x_1\,\overline{x_3}$$

Ejemplo

Un ascensor dispone de un dispositivo de seguridad: el ascensor funciona cuando está vacio o con pesos entre 25 y 300 kg. El ascensor tiene 3 sensores: A sensible a cualquier peso: B sensible a pesos mayores de 25 kg y C sensible a pesos superiores a 300 kg. Encuentra la función booleana más sencilla que cumpla con las condiciones.

Solución: Primeramente hay que plantear el problema, identificar las variables y la función booleana y determinar sus valores.
Las variables booleanas a, b y c corresponden a los sensores y la función booleana F corresponde al ascensor (se pondrá en marcha si se satisfacen las condiciones de seguridad).

Álgebra de Boole

Las variables a, b y c toman el valor 1, si detectan peso (según límites), y 0 si no detectan peso. La función $F(a, b, c)$ valdrá 1 cuando el ascensor se pone en marcha (se satisfacen las condiciones de seguridad) y 0 cuando no se pone en marcha.

- $F(0, 0, 0) = 1$, ningún sensor detecta peso (el ascensor está vacío); el ascensor se pone en marcha.
- $F(1, 0, 0) = 0$, A detecta peso pero B y C no detectan peso (dentro del ascensor hay un peso entre 0 y 25 kg); el ascensor no arranca.
- $F(1, 1, 0) = 1$, A y B detectan peso pero C no (la carga del ascensor está entre 25 y 300 kg); el ascensor arranca.
- $F(1, 1, 1) = 0$, todos los sensores detectan peso (la carga del ascensor es superior a 300 kg); el ascensor no se pone en marcha.

Álgebra de Boole

a	b	c	$F(a,b,c)$
0	0	0	1
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	0
1	0	1	
1	1	0	1
1	1	1	0

¿Y para el resto de combinaciones de valores de a, b o c?

$F(0,1,0)$ corresponde a la situación donde el sensor A no detecta peso; el sensor B detecta peso entre 25 y 300 kg; en sensor C no detecta peso. Esto corresponde a una situación imposible.
En ocasiones, puede ocurrir que ciertas combinaciones de las variables no se pueden tomar o bien que que el valor de F no depende de cuáles sean los valores de sus variables; tales casos reciben el nombre de **casos imposibles o indiferentes**. En estas condiciones no importa el valor que se le asigne a F, por defecto asignaremos $*$.

Álgebra de Boole

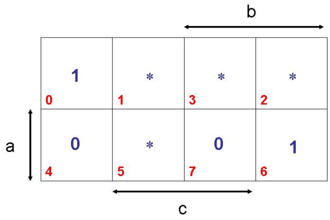
a	b	c	$F(a,b,c)$
0	0	0	1
0	0	1	$\star$
0	1	0	$\star$
0	1	1	$\star$
1	0	0	0
1	0	1	$\star$
1	1	0	1
1	1	1	0

Una expresión booleana para F es:

$$F(a,b,c) = a\,b\,\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$$

Álgebra de Boole

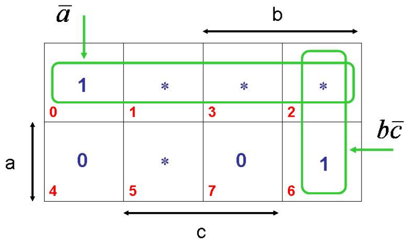
El diagrama de Karnaugh es:



El criterio que usaremos es asignar aquel valor que permita simplificar la expresión definida por el diagrama de Karnaugh. Queremos obtener los bloques del mayor tamaño posible juntando los cuadrados que contengan 1 y $\star$. Los cuadrados correspondientes a situaciones imposibles pueden cubrirse con los bloques o quedar descubiertas.

Álgebra de Boole

La simplificación del diagrama de Karnaugh es:



$$F(a, b, c) = \overline{a} + b\overline{c}$$

"El ascensor se pone en marcha si, o bien el sensor A no detecta peso, o bien el sensor B detecta peso y el sensor C no".