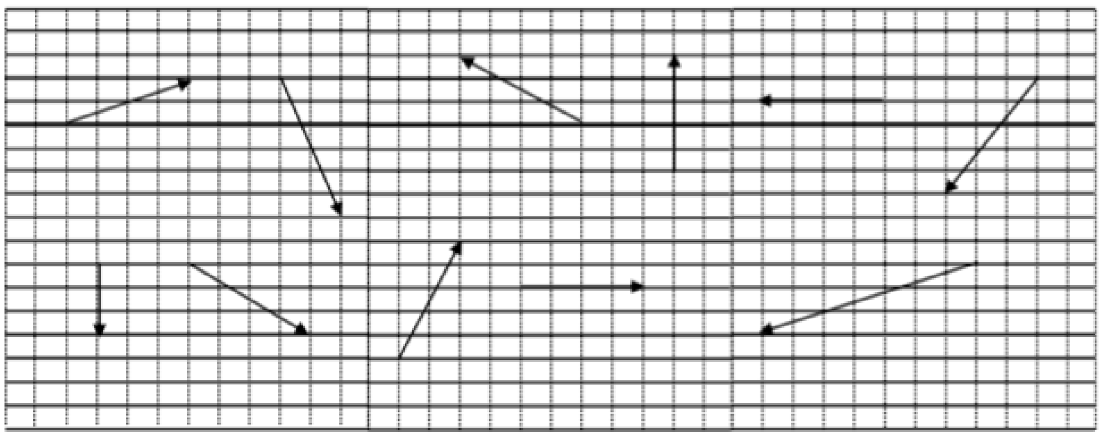
# Problemes Tema 2

## Vectors

1. Calcula les components, mòdul, direcció i sentit dels següents vectors (cada quadret és una unitat de mesura).



2. Calcula les components, mòdul, direcció i sentit de $\overrightarrow{AB}$ on

   *a*) A(1,2) i B(2,5)

   *b*) A(-8,2) i B(-5,-6)

   *c*) A(2,-2) i B(1,-5)

3. Dibuixa i calcula les components del vector de

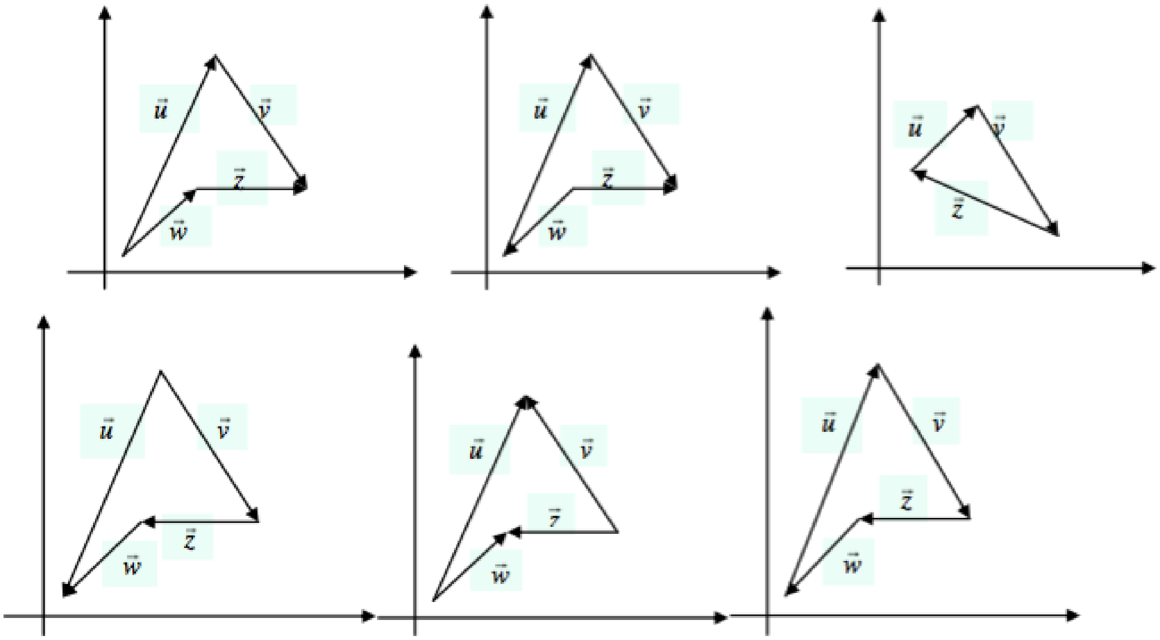
   *a*) Mòdul 3, angle 30

   *b*) Mòdul 5, angle 120

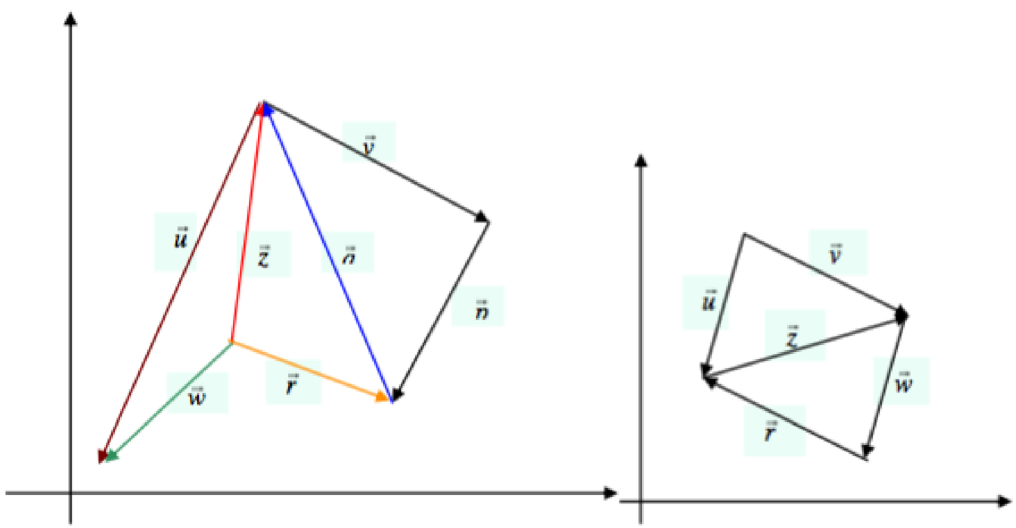
   *c*) Mòdul 3, angle 180

   *d*) Mòdul 1, angle 240

4. Expressa una relació vectorial entre els vectors de les següents figures




5. Expressa relacions vectorials entre els vectors de les figures:




6. Comprova de dues formes diferents si els punts A(1,2,3), B(0,-1,2) i C(-2,-7,0) están o no alineats. Raona ambdós mètodes i les passes de cada procediment.

7. Obten les coordenades del punt que divideix en dues parts iguals el segment d'extrems A(2,0,-4) i B(-4,4,-2).

8. Obten les coordenades dels dos punts que divideixen en tres parts iguals el segment d'extrems A(2,0,-4) i B(-4,4,-2).

9. Donats $\vec{u} = (1, 2, -3), \vec{v} = (-2, -1, 4), \vec{w} = (0, 2, 0), \vec{z} = (1, 0, -3)$, calculeu analíticament el valor de

   *a)* $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} + \vec{z}$

   *b)* $(\vec{u} + \vec{v}) - (\vec{w} + \vec{z})$

   *c)* $3\vec{u} - 2\vec{v} + 4\vec{w} - \vec{z}$

10. Estudiar si $\vec{v} = (1, 2, -1)$ és combinació lineal dels vectors $\vec{a} = (1, 2, 2), \vec{b} = (0, 0, 3), \vec{c} = (-2, 4, -3)$.

11. Donat el conjunt de vectors $\vec{a} = (1, 2, 1), \vec{b} = (-1, 0, 3), \vec{c} = (2, 1, -4), \vec{v} = (-3, -2, 4)$, esbrinau si el vector $\vec{v}$ és combinació lineal de $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$. Esbrinau també si $\vec{c}$ és combinació lineal de $\vec{a}$ i $\vec{b}$

12. Donats els punts $P = (3, 0, 0), Q = (0, 2, 0), R = (0, 0, -4), S = (3, -2, 4)$,

    *a)* Calcula la norma dels vectors $PQ, RS, OP, OR$

    *b)* Calcula la distància entre P i Q, R i S, O i P, O i R.

    *c)* Calcula vectors unitaris proporcionals a $PQ, RS, OP, OR$

    *d)* Troba, si és possible, una combinació lineal de $OP$ i $OR$ tal que el seu resultat sigui el vector $PQ$.

    *e)* Troba, si és possible, una combinació lineal de $OP, OR$ i $PS$ tal que el seu resultat sigui el vector $PQ$.

13. Trobau el valor de $a$ i $b$ per tal que $(a, b, -37, -3)$ sigui combinació lineal de $(1, 2, -5, 3)$ i $(2, -1, 4, 7)$

14. Escriu raonadament dos vectors de l'espai $\mathbb{R}^3$ que siguin perpendiculars. Obtén també un tercer vector perpendicular als altres dos.

15. Donats $\vec{u} = (1, 2, -3), \vec{v} = (-2, -1, 4), \vec{w} = (0, 2, 0)$ i $\vec{z} = (1, 0, -3)$ calculau

    *a)* $\vec{u} \cdot \vec{v}$

    *b)* $\vec{u} \cdot (-\vec{v})$

    *c)* $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$

    *d)* $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

    *e)* $||\vec{u}||$

    *f)* $||\vec{v}||$

    *g)* $||\vec{u} - \vec{v}||$

    *h)* $||\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}||$

16. Calcula la distància entre els punts $A(2, -3)$ i $B(-2, 5)$

17. Esbrina quines de les següents parelles de vectors són ortogonals. Determina en cada cas l'angle que formen els vectors

a) $(1,2)$ i $(-2,1)$
b) $(1,-1,1)$ i $(-1,1,-1)$
c) $(a,-b,1)$ i $(b,a,0)$

18. Sigui $\vec{u} = (1,2,-3)$

    a) Troba un vector unitari de la mateixa direcció i sentit que $\vec{u}$.
    b) Troba un vector de la mateixa direcció i sentit que $\vec{u}$ i de mòdul 3.
    c) Troba un vector unitari perpendicular a $\vec{u}$.

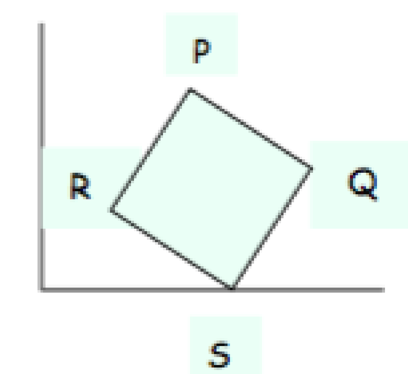
19. Donats els vectors $\vec{u} = (2,0,0), \vec{v} = (0,1,-3)$ i $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, quina condició han de cumplir els escalars $a$ i $b$ per tal de que

    a) $\vec{w}$ sigui ortogonal al vector $(1,1,1)$
    b) $\vec{w}$ sigui unitari
    c) $\vec{w}$ sigui paral·lel al vector $(1,-2,6)$
    d) Per a $a = 1$ i $b = -1$, calculau el vector de longitud 3, en sentit oposat a $\vec{w}$

20. Siguin $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dos vectors tals que $||\vec{a}|| = 3$ i $||\vec{b}|| = 2$. Pot ocorrer que $\vec{a} \cdot \vec{b} = -7$? Quins valors pot prendre el producte escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$? Quin és el màxim valor que pot prendre $||\vec{a} - \vec{b}||$? I el mínim? Quant val $||\vec{a} - \vec{b}||$ si els dos vectors són perpendiculars?

21. Demostra que $||\vec{a} + \vec{b}|| \leq ||\vec{a}|| + ||\vec{b}||$.

22. Siguin $P = (5,7)$ i $Q = (8,3)$ els vèrtexos del quadrat $PQSR$




    a) Calcula el punt $S$ saben que es troba sobre l'eix $OX$
    b) Calcula el punt $R$
    c) Calcula el centre i l'àrea del quadrat

23. Comprova que l'operació entre dos vectors de $\mathbb{R}^3$ definida per

$$(a, b, c) \cdot (a', b', c') = aa' + 2bb' + 3cc'$$

compleix les condicions de producte escalar. Calcula la norma del vector $\vec{u} = (-1, 0, 2)$ amb aquesta definició i emprant també la del producte escalar usual.

24. Calcula l'angle que formen $\vec{a}$ i $\vec{b}$ sabent que $||\vec{a}|| = 3, ||\vec{b}|| = 5$ i $||\vec{a} + \vec{b}|| = 7$.

25. Siguin $\vec{u} = (1, 2, -3)$ i $\vec{v} = (0, -2, 1)$

    *a*) Obteniu un vector perpendicular als dos.

    *b*) Obteniu un vector perpendicular i unitari als dos.

    *c*) Obteniu un vector perpendicular als dos i de norma 3.

26. Donats els punts $A = (1, -1, 3), B = (1, 0, -2)$ i $C = (-2, 4, 0)$ calculau si és possible un punt $D$ tal que la figura formada unint els punts consecutivament formi un paralel·logram. Calculau-ne l'àrea.

27. Tria l'opció correcta. Donats dos vectors de $\mathbb{R}^3$, $\vec{u}$ i $\vec{v}$ tals que $\vec{u} \wedge \vec{v} = -3\vec{i}$, on $\vec{i} = (1, 0, 0)$.

    *a*) $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són perpendiculars.

    *b*) $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són paral·lels.

    *c*) Les condicions de l'enunciat no es poden complir mai.

    *d*) $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són perpendiculars a l'eix $OX$.

28. Com han de ser dos vectors per tal que el seu producte escalar sigui màxim? Quien és en aquest cas el producte vectorial? Justifica-ho.

29. Donats els punts $A = (1, 4, -3), B = (-1, 0, 2)$ i $C = (5, -4, 1)$, troba un quart punt $D$ tal que els quatre punts estiguin en el mateix pla. Pista: empra el producte mixt.

30. Donats els punts $A = (1, 4, -3), B = (-1, 0, 2)$ i $C = (5, -4, 1)$, troba un quart punt $D$ tal que els quatre punts NO estiguin en el mateix pla. Pista: empra el producte mixt.