7 Valors propis

Prob 7.1 Determinau els valors propis i els vectors propis de cada una de les matrius :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix} \ , \ a > 0 \ , \ b > 0$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

Calculau també la dimensió del subespai propi $E(\lambda)$

Prob 7.2 (*)Demostrau que si f és un endomorfisme sobre un espai vectorial de dimensió finita, tal que tot vector distint del zero és vector propi, llavors f és una homotècia ($f(x) = cx$ on c és un escalar).

Prob 7.3 Determinau a, b, c, d, e, f si tenim que els vectors $(1, 1, 1)$, $(1, 0, -1)$, $(1, -1, 0)$ són vectors propis de la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Prob 7.4 Si A i B són matrius d'ordre n i A és regular ($\det(A) \neq 0$), provau que $A \cdot B$ i $B \cdot A$ tenen els mateixos valors propis.

Prob 7.5 Diagonalitzau, si és posible, les següents matrius

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Trobau en cada cas la matriu del canvi de base i l'expressió que relaciona la matriu diagonal amb la matriu donada.

Prob 7.6 Estudiau si són o no diagonalitzables els endomorfismes $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donats per :
a) $f(x,y,z) = (2x+y, y-z, 2y+4z)$.
b) $f(x,y,z) = (-x,-z,y)$.

Prob 7.7 Estudiau si són o no diagonalitzables les següents matrius de $M_3(\mathbb{C})$ i, en cas de que ho siguin, trobau una base de vectors propis i la matriu diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Prob 7.8 Es considera la matriu $n \times n$ de nombres reals de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{pmatrix}$$

a) Demostrau que $\operatorname{rang} A \geq n-1$. Averiguau quan $\operatorname{rang} A = n$.
b) En el cas $n = 3$ i $\operatorname{rang} A = 2$ estudiau la diagonalització i la triangularització de A.

Prob 7.9 Calculau A^n per a tot $n \in \mathbb{N}$, si A és la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Prob 7.10 Trobau el terme general de la successió $\dfrac{a_n}{b_n}$ definida per

$$a_1 = b_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 2b_n, \quad b_{n+1} = a_n + b_n \quad \text{per a tot} \quad n \in \mathbb{N}$$

Prob 7.11 Considerau les successions definides recurrentment per a tot $n \geq 1$ per:

$$u_n = -4u_{n-1} - 6v_{n-1} \quad v_n = 3u_{n-1} + 5v_{n-1} \quad w_n = 3u_{n-1} + 6v_{n-1} + 5w_{n-1}$$

Calculau u_n, v_n, w_n en funció de u_0, v_0, w_0.

Prob 7.12 Discutiu, segons els valors de a, quan les següents matrius són diagonalitzables. Quan es pugui, donau una base de vectors propis i la matriu diagonal.

a) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & a+1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} a & 1 & a-1 \\ 1 & 2a & -1 \\ 2a+1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Prob 7.13 Sigui e_1, e_2, e_3 la base canònica de $\mathbb{R}^3$. Estudiau, segons els valors de α, β, la diagonalització de l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definit per:

$$f(e_1) = (\alpha+1)e_1 - \alpha e_2 + \alpha e_3;\ f(e_2) = (\alpha+\beta)e_1 - \alpha e_2 + (\alpha-1)e_3;\ f(e_3) = \beta e_1 - e_2$$

Prob 7.14 Considerem l'endomorfisme $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ donat per $f(A) = A^t$. Diagonalitzau A, donau una base de vectors propis.

Prob 7.15 (*)Sigui A la matriu real, quadrada d'ordre p, amb tots els coeficients iguals a 1.
a) Demostrau que si $p_A(x)$ és el polinomi característic de A, aleshores $p_A(A) = 0$.
b) Demostrau que $A^n = p^{n-1}A$, per a tot enter $n \geq 1$.
c) Calculau els valors propis de A i una base de cada un dels subespais propis associats.
d) Trobau P tal que $P^{-1}AP$ sigui diagonal i calculau P^{-1}.

Prob 7.16 Definim l'endomorfisme $f : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ mitjançant $f(p(x)) = p(x+1)$.
a) Demostrau que f és lineal i trobau la matriu de f respecte de la base $1, x, x^2, \ldots, x^n$.
b) Calculau els valors propis de f. És f diagonalitzable?

Prob 7.17 Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donada per $f(x, y, z) = (2x-y-z, x-z, -x+y+2z)$.

a) Diagonalitzau l'endomorfisme f i trobau la matriu de canvi de base.

b) Trobau $f^n(1, 1, 1)$

(Examen, juny 2000)

Prob 7.18 Considerem les successions definides en forma recurrent, per a tot $n \geq 1$, per:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} a_n & = & a_{n-1} & + & b_{n-1} & + & c_{n-1} \\ b_n & = & a_{n-1} & - & 2b_{n-1} & & \\ c_n & = & & & 3b_{n-1} & + & c_{n-1} \end{array}\right\}$$

amb a_0, b_0 i c_0 valors reals fixos.

a) Trobau la matriu A tal que $(a_n, b_n, c_n)^T = A(a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1})^T$.

b) Calculau a_n, b_n i c_n en funció de a_0, b_0 i c_0. (Indicació: utilitzeu diagonalització).

(Examen, setembre 2000)

Prob 7.19 Considerem que s'emeten tres valors en un canal de comunicació x_0, x_1 i x_2. Aquests valors es passen repetidament per un filtre definit per:

$$S_n = \frac{1}{2}S_{n-1} + \frac{5}{2}S_{n-2} + S_{n-3} \text{ per a } n \geq 3.$$

$$S_0 = x_0, \quad S_1 = x_1, \quad S_2 = x_2$$

a) Calculau una matriu A tal que $A \begin{pmatrix} S_{n-1} \\ S_{n-2} \\ S_{n-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_n \\ S_{n-1} \\ S_{n-2} \end{pmatrix}$

b) Diagonalitzau A i calculau A^{n-2} en funció de la matriu diagonal i de les matrius de canvi de base. Aquesta expressió donarà directament S_n en funció de n, x_0, x_1 i x_2.

(Examen, febrer 2001)

Prob 7.20 Amb la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Trobau els valors propis de A i la seva matriu diagonal.

b) Trobau la matriu de canvi de base de A a la matriu diagonal.

c) Calculau A^n per a tot $n \in \mathbb{N}$.

(Examen, juny 2001)

Prob 7.21 Donada l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida com

$$f(x, y, z) = (3x - 2y, -2x + 3y, 5z)$$

trobau una base de $\mathbb{R}^3$ en relació amb la qual la matriu de f sigui diagonal. (Examen, setembre 2001)

Prob 7.22 Donada la matriu següent

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Trobau el polinomi característic de la matriu i els seus valors propis.

b) Trobau els subespais propis associats a cada valor propi. Diagonalitza la matriu?

c) Quina és la relació entre la matriu A i la seva matriu diagonal associada?

(Examen, febrer 2002)

Prob 7.23 Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació definida com $f(x, y, z) = (x, x + 2y - 3z, x - y)$.

a) Demostrau que f és una aplicació lineal.

b) És el vector $(0, 2, 2)$ un vector propi de f?

c) Trobau una base de $\mathbb{R}^4$ tal que la matriu associada a f en aquesta base sigui diagonal.

(Examen, juny 2002)

Prob 7.24 Amb la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Trobau els valors propis de A i la seva matriu diagonal.

b) Trobau la matriu de canvi de base de A a la matriu diagonal.

c) Calculau A^n per a tot $n \in \mathbb{N}$.

(Examen, setembre 2002)

Prob 7.25 Es donen les seqüents successions recurrents

$$\begin{array}{rcrcr} u_n & = & 3u_{n-1} & + & 3v_{n-1} \\ v_n & = & 5u_{n-1} & + & v_{n-1} \end{array}$$

amb $u_0 = v_0 = 1$.
Calculau les expressions de u_n i v_n en funció de u_0 i v_0.
(Examen, febrer 2003)

Prob 7.26 Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfisme amb la següent matriu associada: $A = \begin{pmatrix} -11 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ -12 & -4 & 9 \end{pmatrix}$

a) Calcular els valors propis de l'endomorfisme.

b) Calcular els subespais propis associats a cada valor propi.

c) Diagonalitza la matriu? Per què?.

d) Calcular l'expressió general de A^n.

(Examen, juny 2003)

Prob 7.27 Donada la matriu següent:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Trobar el polinomi característic de la matriu i els seus valors propis.

b) Trobar els subespais propis associats a cada valor propi. Diagonalitza la matriu?

c) Quina és la relació entre la matriu A i la seva matriu diagonal associada? Calcular explicitament totes les matrius implicades en aquesta relació.

(Examen, setembre 2003)

Prob 7.28 Donada la matriu següent:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Trobau l'expressió de l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que té la matriu A coma a matriu associada en la base canònica (inicial i final).

b) Calculau el polinomi característic de f i trobau els valors propis de l'endomorfisme.

c) Calculau els subespais propis associats a cada valor propi.

d) Aplicau el Teorema de Diagonalització per decidir si l'endomorfisme diagonalitza o no. En cas afirmatiu digueu quina és la matriu diagonal D i la matriu de canvi de base C tal que $A = C.D.C^{-1}$.

Indicació: cada valor propi apareix en la matriu diagonal tantes vegades com el valor de la seva multiplicitat com a valor propi.
(Examen, febrer 2004)

Prob 7.29 Calculau l'expressió general de A^n, on n és la matriu següent:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(Examen, setembre 2004)

Prob 7.30 Donada la matriu.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{amb } (a \neq 0)$$

a) Cercau els valors propis en $\mathbb{R}$ de la matriu. **0.75 pt**

b) Calculau els subespais propis associats a cada valor propi i determinau si la matriu és diagonalitzable. **2 pt**

c) Indicau quina és la matriu diagonal i trobau la matriu del canvi de base. **0.75 pt**

(Examen, setembre 2005)