Tema 4: Teoria de grafs

1. Descriu, dibuixa o explica per què no pot existir:
   (a) Un graf amb 7 vèrtexos, tots ells de grau 3.
   (b) Un graf amb 15 vèrtexos i 106 arestes.
   (c) Un parell de grafs no isomorfs, cadascun d'ells amb 6 vèrtexos, tots ells de grau 2.

2. A una festa assisteixen 5 parelles, i es produeixen salutacions entre els assistents. Se suposa que no se saluden entre ells els components de cadascuna de les parella. A la sortida, en Jordi pregunta a cadascun dels altres assistents quantes persones l'han saludat i rep 9 respostes diferents.

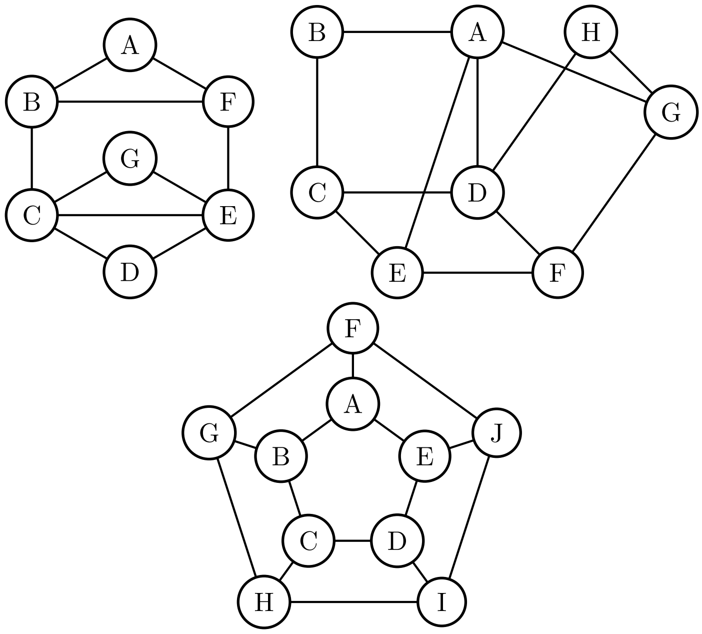
   Quantes persones ha saludat en Jordi i quantes n'ha saludat la seva parella?

3. En una reunió de 20 persones hi ha, en total, 48 parells de persones que es coneixen mútuament.
   (a) Justifica per què hi ha, almenys, una persona que coneix, com a màxim, a quatre de les altres persones.
   (b) Suposant que només hi ha una persona que coneix com a màxim a quatre persones, a quantes persones coneix exactament?

4. Disposem de 6 ordinadors i 9 cables de connexió. Volem que cada ordenador es connecti amb altres 3 ordinadors. Existeix alguna manera de connectar-los? És única?

5. Sigui G un graf (sense llaços) amb n vèrtexos i m arestes, el vèrtexos del qual tenen grau o bé k o bé $k+1$ (per a cert enter k). Demostreu que si G té n_k vèrtexos de grau k, llavors $n_k = (k+1)n - 2m$.

6. Determineu quins del següents grafs són bipartits:



7. Obteniu tots els grafs 4-regulars d'ordre 6.

8. Vegeu si són certes les afirmacions següents:

(a) Els grafs C_n són regulars.

(b) K_3 és isomorf a C_3.

(c) C_4 és isomorf a W_3.

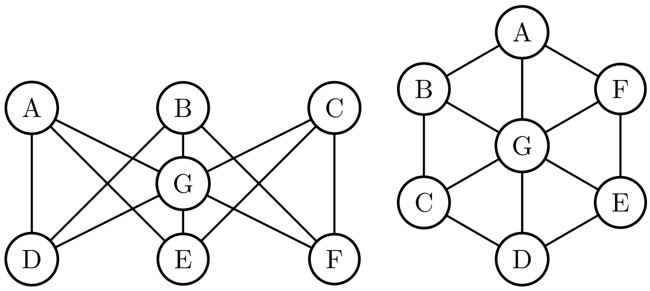
(d) Si el nombre d'arestes de K_n és m, aleshores es té $2m = n^2 - n$.

9. Siguin p i q són nombres enters positius i més petits que quatre. Determineu els grafs bipartits complets $K_{p,q}$ que són regulars.

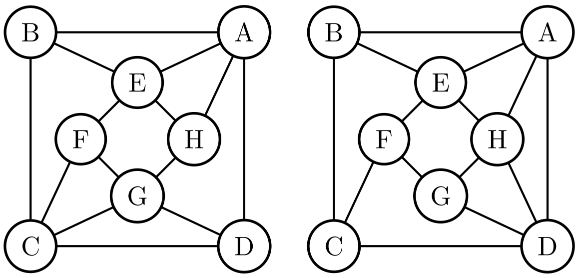
10. Quants de grafs no isomorfs amb tres vèrtexos es poden construir? I amb quatre vèrtexos? I amb cinc?

11. Estudieu si els següents parells de grafs són isomorfs:

(a)



(b)



12. Demostreu que dos grafs amb el mateix ordre $n \leq 3$ són isomorfs si, i només si, tenen la mateixa mida.

13. Sigui $G = (V, E)$ un graf simple i $G' = (V, E')$ el seu graf complementari. Es demana:

(a) Si G té n vèrtexos i m arestes, quants de vèrtexos i arestes té G'?

(b) Proveu que dos grafs són isomorfs si, i només si, ho són els seus complementaris.

(c) Trobeu un graf amb 5 vèrtexos que sigui isomorf al seu complementari.

(d) Existeix un graf amb tres vèrtexos que sigui isomorf al seu complementari? I amb 6 vèrtexos?

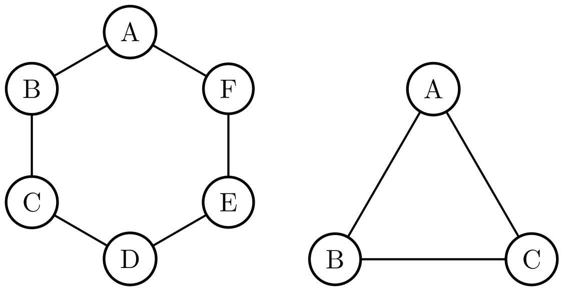
(e) Si G té n vèrtexos i la seva successió de graus és $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$, quina és la successió de graus de G'?

14. Trobeu el graf complementari de K_n, per a tot n, i determineu-ne la tipologia.

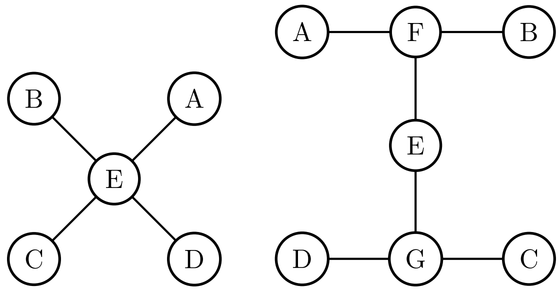
15. Quants subgrafs amb almenys un vèrtex té W_3?

16. Trobeu el graf unió, el graf suma i el graf producte dels següents parells de grafs:

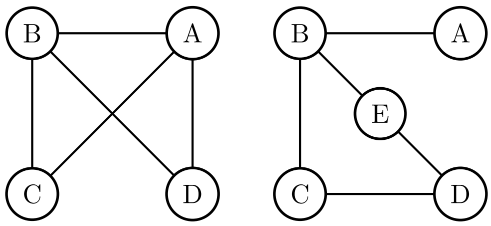
(a)



(b)



(c)



17. Siguin S un conjunt i C un conjunt finit de subconjunts de S. El *graf intersecció de C*, indicat per $I(C)$, és el graf que té C com a conjunt de vèrtexos, i dos vèrtexos $A, B \in C$ són adjacents si, i només si, $A \cap B \neq \emptyset$.

    (a) Siguin $S = [6]$ i $C = \{\{1,2\},\{2,4\},\{1,2\},\{1,2,3\},\{3,4,5\},\{5,6\}\}$. Representeu gràficament el graf $I(C)$.

    (b) Considereu el graf G que té $[4]$ com a conjunt de vèrtexos i arestes 12, 23, 34 i 41. Per a cada $i \in [4]$, considereu el conjunt S_i format pels vèrtexos i i les dues arestes incidents amb i. Sigui $S = \cup_{i=1}^{4} S_i$ i $C = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$. Demostreu que $I(C)$ és isomorf a G

    (c) Demostreu que si G és un graf, aleshores existeixen un conjunt S i un conjunt finit C de subconjunts de S tals que G és isomorf a $I(C)$.

18. Un graf té ordre 13 i 3 components connexos. Demostreu que almenys un dels seus components connexos té com a mínim 5 vèrtexos.

19. Sigui $G = (V, E)$ un graf amb $|V| = p \geq 2$, i suposem que el grau de cada vèrtex $v \in V$ satisfà $d(v) \geq \frac{1}{2}(p-1)$. Proveu que G és un graf connex. Podem afirmar que són connexos els grafs amb seqüències de graus següents?

    (a) 2, 2, 2, 2.

    (b) 2, 2, 2, 2, 2.

    (c) 3, 3, 3, 3, 3.

    (d) 3, 3, 3, 3, 3, 3.

    (e) 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3.

20. Sigui $G = (V, E)$ un graf (sense llaços) amb $|V| = n$. Proveu que si es compleix que $d(x) + d(y) \geq n - 1$ per a tot parell $x, y \in V$ de vèrtexos diferents, aleshores G és connex.

21. (a) Demostreu que els grafs cicles C_n són els grafs connexos 2-regulars; és a dir, que els grafs cicles són connexos i 2-regulars, i que tot graf connex 2-regular és isomorf a una graf cicle C_n per a cert n.

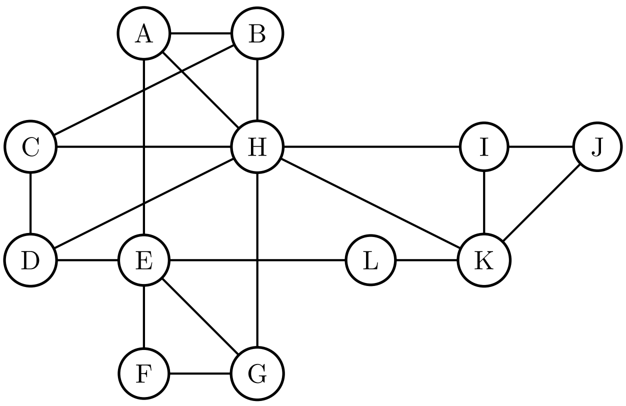
    (b) A una reunió assisteixen n persones. Cadascuna coneix exactament dues persones de la reunió (i se suposa que la coneixença és mútua). Proveu que es poden asseure a l'entorn d'una o més taules rodones de manera que cadascú s'assegui al costat de les dues persones que coneix.

22. Sigui G un graf connex que conté només vèrtexos de grau parell. Demostreu que G no pot contenir cap aresta pont.

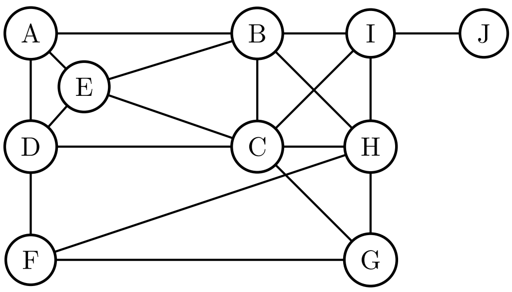
23. Trobeu el diàmetre dels grafs següents: K_n, $K_{m,n}$, C_n,, W_n i el graf de Petersen.

24. Trobeu el diàmetre i el centre dels grafs següents:

    (a)



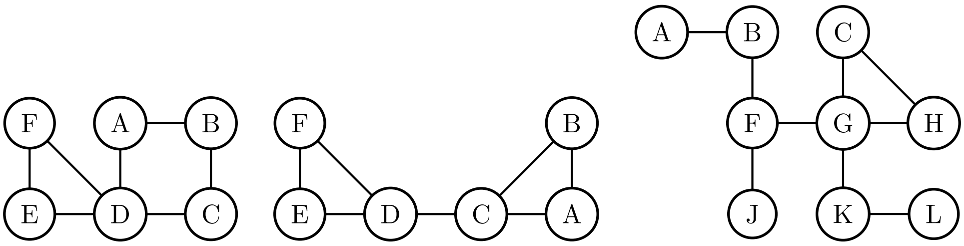
    (b)



25. Si en un graf connex G, un vèrtex v té excentricitat h, comproveu que l'excentricitat dels veïns de v o bé és h o bé és $h + 1$, o bé és $h - 1$. Utilitzeu el resultat anterior per provar que en un graf connex hi ha vèrtexos amb excentricitat igual a tots els valors possibles inclosos entre el seu radi $r(G)$ i el seu diàmetre $D(G)$.

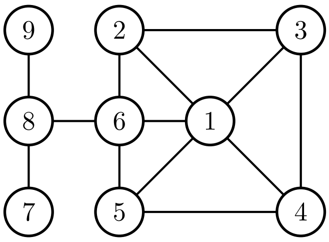
26. Sigui G un graf bipartit, connex, d−regular i d'ordre $n \geq 3$. Proveu que G no té arestes pont.

27. Trobeu tots els vèrtexos de tall i totes les arestes pont dels grafs següents:



28. Demostreu que un vèrtex c d'un graf simple connex és un vèrtex de tall si, i només si, hi ha dos vèrtexos u i v, ambdós diferents de c, tals que tot camí entre u i v passa per c.

29. Considereu el graf corresponent a la representació següent:

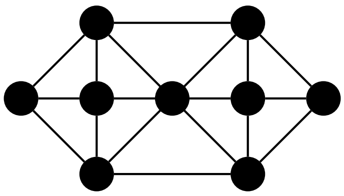


   (a) Determineu els seus vèrtexos de tall i les seves arestes pont.

   (b) Cerqueu els components connexos dels grafs que resulten de suprimir els vèrtexos de tall i dels que resulten de suprimir les arestes pont.

   (c) Digueu si el graf té algun circuit o algun recorregut eulerià i si té algun cicle o algun camí hamiltonià.

30. Determineu, si n'hi ha, circuits i recorreguts eulerians i cicles i camins hamiltonians dins del graf corresponent a la representació:



31. Considerem el joc del N-dòmino generalitzat. En aquest joc es tenen fitxes, cadascuna de les quals està etiquetada amb dos nombres, $a, b \in \{0, \ldots, N\}$, i que indicarem per $[a \bullet b]$; les fitxes es poden girar; es a dir, la fitxa $[a \bullet b]$ i la fitxa $[b \bullet a]$ són indistingibles.

   (a) Suposant que no hi ha fitxes repetides, amb quantes fitxes juguem?

   Una partida de dòmino és una seqüència de fitxes, $[a_1 \bullet b_1][a_2 \bullet b_2] \ldots [a_k \bullet b_k]$, de manera que els nombres adjacents de fitxes diferents coincideixen, és a dir, amb $b_i = a_{i+1}$ per a tot $i = 1, \ldots, k-1$.

   (b) És possible fer una partida on s'emprin totes les fitxes del joc?

   (c) És possible fer una partida $[a_1 \bullet b_1][a_2 \bullet b_2] \ldots [a_k \bullet b_k]$ on s'emprin totes les fitxes i, a més, $a_1 = b_k$, és a dir, on el joc es pot tancar per formar un cicle?

32. Sigui $n \geq 4$. A partir de K_n es construeix un nou graf no dirigit afegint a K_n un vèrtex u i l'aresta $\{u, u_1\}$, on u_1 és un vèrtex qualsevol de K_n.

   (a) Determineu $d(v) + d(w)$ per a tota parella de vèrtexos v i w del nou graf.

(b) Vegeu que el nou graf té un camí hamiltonià, però no un cicle hamiltonià.

33. En una xarxa de 10 ordinadors, cadascun d'ells està connectat amb almenys altres 6 ordinadors. Se sap que el nombre de connexions és múltiple de 13. És connexa la xarxa? Quantes connexions té? És hamiltoniana la xarxa? Si la xarxa és euleriana, quants ordinadors connectats exactament a altres 6 ordinadors hi ha?

34. Demostreu que si G és un graf amb n vèrtexos i amb mida $m \geq \binom{n-1}{2} + 2$, aleshores G és hamiltonià.

35. Donat un graf k-regular que conté un nombre senar d'arestes i un nombre parell de vèrtexos, demostreu que no pot contenir cap circuit eulerià.

36. Per a quins valors de n són eulerians els grafs C_n? I els grafs K_n?

37. És cert que tot graf eulerià és hamiltonià? I a l'inrevés? (Raona la teva resposta, donant un contraexemple si la resposta és negativa).

38. Són certes les afirmacions següents? Demostreu-les o doneu-ne contraexemples.

    (a) Tot graf bipartit complet eulerià té un nombre parell d'arestes.

    (b) Tot graf simple eulerià amb un nombre parell de vèrtexos té un nombre parell d'arestes.

39. Sigui G un graf que té exactament dos components connexos que són eulerians. Trobeu el mínim nombre d'arestes que cal afegir per obtenir un graf eulerià.

40. Per a classificar els grups sanguinis es consideren tres antígens: A, B i Rh. Cada sang es classifica doblement. Per una banda, és Rh positiva si es detecta antigen Rh, i negativa en cas contrari. Per altra banda, pot ser de grup A, B, AB o O si es detecta, presència dels antigens A, B, tots dos o cap d'ells (respectivament). Una persona pot rebre sang d'una altra si té tots els antigens del donant.

    (a) Dibuixeu el dígraf que representa la situació de possibles donants

    (b) Verifiqueu si el dígraf obtingut és fortament connex.

    (c) Té circuits?

41. Un projecte es composa de 8 tasques: a, b, c, d, e, f, g, h. Per a l'execució de les tasques s'han de respetar les següents restriccions:

    (a) a, b i e poden iniciar-se immediatament;

    (b) c i d poden executar-se simultàneament, però ambdues s'han de realitzar una vegada acabades a i e.

    (c) Per començar f s'ha d'acabar c.

    (d) h només es pot començar una vegada acabades d, e i f.

    (e) Per a l'inici de g és necessària la finalització de c i de b.

    (f) El projecte acaba quan g i h s'han realitzat.

    Dibuixeu un esquema que representi la situació indicada i determineu si s'han enunciat condicions supèrflues.

42. Sigui D un DAG qualsevol.

    (a) Demostreu que existeixen vèrtexos v i w tals que $d_s(v) = d_e(w) = 0$.

    (b) Demostreu que si el graf no dirigit subjacent a D és complet d'ordre n, aleshores la seqüència de graus de sortida dels vèrtexos és $n-1$, $n-2, \ldots, 0$.