1 Considereu els vectors $\vec{u} = (3, 0, 0), \vec{v} = (1, 0, -3)$ i $\vec{w} = (0, -2, 4)$

1. Estudiau si són linealment dependents o linealment independents.
2. Trobau, si és possible, una combinació lineal d'aquests vectors tal que el seu resultat sigui el vector $(-2, 4, 1)$.
3. Finalment, és possible obtenir qualsevol vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ com a combinació lineal de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$? Raonau la resposta.

2 Donats els vectors $\vec{v} = (1, 2, 3), \vec{u} = (2, 4, 0), \vec{w} = (3, -2, 3)$.

1. Troba tres nombres a, b, c tals que $a\vec{v} + b\vec{u} + c\vec{w} = \vec{0}$.
2. És $\vec{v}$ combinació lineal de $\vec{u}$ i $\vec{w}$?
3. És $\vec{w}$ combinació lineal de $\vec{u}$ i $\vec{v}$?
4. Expressa el vector $(6, 0, 9)$ com a combinació lineal dels tres vectors.

3 Determina si els següents conjunts de vectors de $\mathbb{R}^3$ són linealment dependents o independents. Estudia el seu rang:

1. $(1, -2, 1), (2, 1, -1), (7, -4, 1)$.
2. $(1, -3, 7), (2, 0, -6), (3, -1, -1), (2, 4, -5)$.
3. $(1, 2, -3), (1, -3, 2), (2, -1, 5)$.
4. $(2, -3, 7), (0, 0, 0), (3, -1, -4)$.
5. $(1, 1, 1), (1, -1, 5)$.
6. $(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, -1, 1)$.
7. $(2, 2, -1), (4, 2, -2), (7, -4, 1)$.
8. $(1, 0, 1, 3), (0, 0, 2, -5), (-1, 2, 0, 7)$.

4 Demostrau que $\vec{a} = (x, y)$ i $\vec{b} = (z, t)$ de $\vec{R}^2$ són linealment dependents si i només si $xt - yz = 0$.

5 Trobau els valors d'a per tal que els vectors $(-2, a, a), (a, -2, a), (a, a, -2)$ siguin linealment dependets.

6 Donat el conjunt de vectors $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ tal que $\vec{u}_4$ és combinació lineal de $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$, i $\vec{u}_3$ és combinació lineal de $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_4$, discutiu si els vectors de U són LI o LD, i quin és el rang de U.

7 Determinar si els vectors $\vec{v} = (1, 0, 2), \vec{u} = (0, 1, -3), \vec{w} = (1, 1, 0), \vec{z} = (0, 0, -1)$ de l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$ formen un sistema generador de $\mathbb{R}^3$.

8 Si $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5\}$ és un conjunt de vectors de rang 3, comenta la veritat o falsetat de les següents afirmacions.

1. Tots els subconjunts de U de tres vectors són conjunts lliures.

2. El vector $\vec{u}_3$ és linealment independent dels altres.

3. Els vectors del subconjunt $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ són linealment independents.

4. Algun subconjunt de U de tres vectors és lliure (els seus vectors són linealment independents) ja que el rang és el nombre màxim de vectors LI que podem trobar en el conjunt. Per tant és suficient amb que hi hagi almenys un subconjunt de 3 vectors LI.

9 Estudiar si els següents conjunts de vectors compleixen els requisits per formar una base de $\mathbb{R}^3$:

1. $A = \{(1,1,1),(3,1,-1),(-4,2,8)\}$
2. $B = \{(3,2,1),(2,1,0),(1,0,0)\}$

10 Considerau els vectors $(1,2,-1),(2,1,-1)$. Trobau un vector tal que amb els altres dos formi una base de $\mathbb{R}^3$.

11 Sigui $\vec{u} = (2,1,3)$ en la base canònica. Calculau les components de $\vec{u}$ en la nova base $B = \{(1,2,0),(1,-1,1),(0,1,1)\}$.

12 Provau que el conjunt $C = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,3)\}$ formen una base de $\mathbb{R}^3$. Trobau, respecte d'aquesta base, les coordenades del vector $(5,1,-3)$. Trobau les coordenades en la base canònica del vector que té per coordenades $(3,1,-1)$ en la base C.

13 Expressau $\vec{v} = (1,-2,5) \in \mathbb{R}^3$ com a combinació lineal dels vectors $\vec{u}_1 = (1,-3,2), \vec{u}_2 = (2,-4,-1), \vec{u}_3 = (1,-5,7)$. Formen $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ una base de $\mathbb{R}^3$?

14 Provau que el conjunt $D = \{(1,0,0,-1),(0,1,-1,0),(0,1,0,-1),(0,1,1,1)\}$ formen una base de $\mathbb{R}^4$. Obteniu les coordenades del vector $(-3,2,1,-2)$ en aquesta base. Si el vector $\vec{u}$ té coordenades $(3,0,-1,1)$ en la base D obteniu-ne les coordenades en la base canònica.

15 Sigui $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base d'un espai vectorial V. Sabent que

$$\left\{ \begin{array}{lcrcl} \vec{v}_1 & = & 2\vec{u}_1 & - & \vec{u}_2 \\ \vec{v}_2 & = & -\vec{u}_1 & + & \vec{u}_3 \\ \vec{v}_3 & = & \vec{u}_2 & & \end{array} \right.$$

obteniu les coordenades de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ en la base B_1. Demostrau que $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ també forma una base de V. Siguin $(2,1,3)$ les coordenades del vector $\vec{u}$ en la base B_1, calculau les coordenades en la base B_2.

16 Sigui $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ una base de V. Demostrau que si

$$\left\{ \begin{array}{lcccccc} \vec{u}_1 & = & \vec{v}_1 & & & & \\ \vec{u}_2 & = & \vec{v}_1 & + & \vec{v}_2 & & \\ \vec{u}_3 & = & \vec{v}_1 & + & \vec{v}_2 & + & \vec{v}_3 \end{array} \right.$$

el conjunt $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ també és una base de V.

17 Considerem $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ tres vectors LI.

1. Demostrau que $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ són també LI, on

$$\begin{cases} \vec{u}_1 &=& 2\vec{e}_1 &+& \vec{e}_3 \\ \vec{u}_2 &=& 3\vec{e}_3 && \\ \vec{u}_3 &=& \vec{e}_2 &-& \vec{e}_3 \end{cases}$$

2. Donat un vector $\vec{v} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$, expressau-lo com a combinació lineal de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$.

18 Donada la base $\{(1,2,0,0), (-1,0,1,1), (0,0,-2,1), (-1,0,-1,0)\}$ de $\mathbb{R}^4$ i donat $\vec{u}$ de components $(-3,2,1,-2)$ en aquesta base, obteniu les components en la base formada pels vectors $(1,0,0,-1), (0,1,-1,0), (0,1,0,-1), (0,1,$

19 Sigui $B_V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ una base d'$\mathbb{R}^3$ i siguin els vectors

$$\begin{cases} \vec{u}_1 &=& 3\vec{v}_1 &+& 2\vec{v}_2 &-& \vec{v}_3 \\ \vec{u}_2 &=& 4\vec{v}_1 &+& \vec{v}_2 &+& \vec{v}_3 \\ \vec{u}_3 &=& 2\vec{v}_1 &-& \vec{v}_2 &+& \vec{v}_3 \end{cases}$$

Provau que:

1. $B_U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ és una base de $\mathbb{R}^3$.
2. Trobau les coordenades dels vectors $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ en la base B_U.
3. El vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ té coordenades $(1,2,3)$ en la base B_V. Calcula les coordenades de $\vec{x}$ en la base B_U.

20 Expressau el vector $(3,1,4)$ en la base d'$\mathbb{R}^3$ formada pels vectors $(1,-2,-1), (1,-1,0), (0,0,3)$.

21 Sigui la base $B_1 = \{(1,0,0,-1), (0,1,-1,0), (0,1,0,-1), (0,1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^4$. Obteniu les components en aquesta base del vector $\vec{u}$ que té coordenades $(-3,2,1,-2)$ en la base B_2 formada pels vectors $(1,2,0,0), (-1,0,1,1), (0,0,-2,1), (-1,0,-1,0)$.

22 Indicau quins dels següents conjunts són subespais vectorials dels espais indicats. Donau una base en el cas que siguin subespais:

1. $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x - z = 0\}$
2. $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x - y + z = 0\}$
3. $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = 0, \ y + z = 0\}$
4. $X = \{(a,b,0) \in \mathbb{R}^3\}$
5. $Y = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \ : \ b = a + c + d + 1\}$
6. $Z = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \ : \ b = a + c, \ d = 2a\}$

23 Trobau una base del subespai vectorial E generat per $\vec{v}_1 = (1,-2,0,3), \vec{v}_2 = (2,-5,-3,6), \vec{v}_3 = (0,1,3,0), \vec{v}_4 = (2,-1,4,-7)$ i $\vec{v}_5 = (5,-8,1,2)$.

24 Trobau una base del subespai vectorial $F = \langle (1,2,1,0), (0,0,1,0), (1,2,0,0) \rangle$

25 Provau que

$$\langle (1,-1,-1,1), (1,-2,-2,1), (0,1,1,0) \rangle = \langle (1,0,0,1), (0,-1,-1,0) \rangle$$

Donau una base d'aquest subespai vectorial.

26 Sigui E l'espai vectorial generat pels vectors $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, $E = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$ on $\vec{v}_1 = (2,1,0,3), \vec{v}_2 = (3,-1,5,2), \vec{v}_3 = (-1,0,2,1)$. Determinau la dimensió de E i dir si els vectors $(1,1,1,1)$ i $(2,3,-7,3)$ pertanyen o no a E.

27 Demostrau que el conjunt de les matrius de la forma

$$\begin{pmatrix} x-3y & 5y \\ -4y & x+3y \end{pmatrix}$$

amb $x, y \in \mathbb{Q}$ formen un subespai vectorial de l'espai de matrius d'ordre 2 sobre el cos dels racionals $M_2(\mathbb{Q})$.