TEMA 4. DETERMINANTES. SISTEMAS DE CRAMER

1. INTRODUCCIÓN Y DEFINICIONES
2. CÁLCULO DE DETERMINANTES POR ADJUNTOS
   Menor complementario del elemento $\mathbf{a}_{i\,j}$
   Adjunto del elemento $\mathbf{a}_{i\,j}$
3. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES
4. CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA
   Matriz adjunta
5. CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ POR MENORES
6. APLICACIÓN DE LOS DETERMINANTES A LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES
   Teorema de Rouché-Fröbenius
7. SISTEMAS DE CRAMER
8. CÁLCULO DEL PRODUCTO VECTORIAL
9. CÁLCULO DEL PRODUCTO MIXTO

1. INTRODUCCION Y DEFINICIONES

La función determinante apareció por 1ª vez en la investigación de los sistemas de ecuaciones lineales.

A cada **matriz cuadrada** se le asigna un escalar denominado determinante de A, denotado por detA o |A|.

$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 5 & 3\end{pmatrix}$ matriz $\longrightarrow$ $\det A=|A|=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 5 & 3\end{vmatrix}$ determinante

Representaremos una matriz cuadrada A de tamaño n en función de sus columnas:

$A=(A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, A_n)$ $\quad A_1$ representa la columna 1, $\quad A_n$ representa la columna n.

D 1.1– APLICACIÓN DETERMINANTE

Dado el conjunto $M_n(R)$ de las matrices cuadradas de orden n; el determinante es una aplicación de $M_n(R) \longrightarrow R$ que a cada matriz cuadrada le hace corresponder un nº que designaremos como $|A|=\det(A)=\det(A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, A_n)$ siendo A_i la columna i de la matriz.

$A \longrightarrow |A|$ y que cumple una serie de requisitos:

a) Si una columna de un determinante $\begin{vmatrix}-6 & 3 & -1\\ 1 & 3 & 5\\ 4 & 6 & 2\end{vmatrix}$ se descompone en una suma $\begin{vmatrix}-3+(-3) & 3 & -1\\ 1+0 & 3 & 5\\ 3+1 & 6 & 2\end{vmatrix}$ de dos columnas entonces $\begin{vmatrix}-6 & 3 & -1\\ 1 & 3 & 5\\ 4 & 6 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & 3 & -1\\ 1 & 3 & 5\\ 3 & 6 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}(-3) & 3 & -1\\ 0 & 3 & 5\\ 1 & 6 & 2\end{vmatrix}$

$\det(A_1 \cdots \boldsymbol{A_i} \cdots A_n) = \det(A_1 \cdots \boldsymbol{B_i} \cdots A_n) + \det(A_1 \cdots \boldsymbol{C_i} \cdots A_n)$ con $A_i = B_i + C_i$

b) Si a una columna de un determinante $\begin{vmatrix}\mathbf{-6} & 3 & -1\\ \mathbf{0} & 3 & 5\\ \mathbf{4} & 6 & 2\end{vmatrix}$ la multiplicamos por un escalar ≠ 0, el valor del nuevo determinante $\begin{vmatrix}-6/2 & 3 & -1\\ 0/2 & 3 & 5\\ 2/2 & 6 & 2\end{vmatrix}$ es igual al del antiguo multiplicado por dicho escalar:

Determinante inicial $DI=\begin{vmatrix}\mathbf{-6} & 3 & -1\\ \mathbf{0} & 3 & 5\\ \mathbf{4} & 6 & 2\end{vmatrix}$ Dividimos la columna 1 por 2, $\begin{vmatrix}-6/2 & 3 & -1\\ 0/2 & 3 & 5\\ 2/2 & 6 & 2\end{vmatrix}=DF$

Determinante final $DF=\begin{vmatrix}-3 & 3 & -1\\ 0 & 3 & 5\\ 2 & 6 & 2\end{vmatrix}$ $\quad DF=\begin{vmatrix}-6/2 & 3 & -1\\ 0/2 & 3 & 5\\ 2/2 & 6 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\mathbf{-6} & 3 & -1\\ \mathbf{0} & 3 & 5\\ \mathbf{4} & 6 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}DI$

$$DF = {}^{1}\!/_{2}\, DI$$

Determinante inicial $DI = \begin{vmatrix} 3 & \mathbf{4} & -1 \\ 1 & \mathbf{3} & 5 \\ 5 & \mathbf{1} & 2 \end{vmatrix}$ Multiplicamos la columna 2 por 2, $\begin{vmatrix} 3 & \mathbf{4}\cdot 2 & -1 \\ 1 & \mathbf{3}\cdot 2 & 5 \\ 5 & \mathbf{1}\cdot 2 & 2 \end{vmatrix} = DF$

Determinante final $DF = \begin{vmatrix} 3 & 8 & -1 \\ 1 & 6 & 5 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ $DF = \begin{vmatrix} 3 & \mathbf{4}\cdot 2 & -1 \\ 1 & \mathbf{3}\cdot 2 & 5 \\ 5 & \mathbf{1}\cdot 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & \mathbf{4} & -1 \\ 1 & \mathbf{3} & 5 \\ 5 & \mathbf{1} & 2 \end{vmatrix} = 2DI$

$$DF = 2DI$$

$A_i = \boldsymbol{t}\, B_i$ $\det(A1 \cdots Ai \cdots An) = \det(A1 \cdots \boldsymbol{t}\, B_i \cdots An) = \boldsymbol{t} \det(A1 \cdots \boldsymbol{B_i} \cdots An)$

Ejemplos:

$\begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 18$ $\begin{vmatrix} -3\cdot 2 & 3 & -1 \\ 0\cdot 2 & 3 & 5 \\ 2\cdot 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 18\cdot 2$

Atención: $\begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3\cdot 2 & 3 & -1 \\ 0\cdot 2 & 3 & 5 \\ 2\cdot 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3\cdot 2 & 3\cdot 2 & -1\cdot 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3\cdot 2 & 3 & -1\cdot 2 \\ 0\cdot 2 & 3 & 5\cdot 2 \\ 2\cdot 2 & 0 & 2\cdot 2 \end{vmatrix}$

c) Si dos columnas son iguales, $A_i = A_j$, el determinante es cero:

$\det(A_1, A_2, \ldots\ldots, A_i, \ldots, A_j \ldots, A_n) = 0$ si $A_i = A_j$ $\begin{vmatrix} -6 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 0$

1– DETERMINANTES DE ORDEN UNO Y DOS.

Los determinantes de órdenes uno, dos y tres se definen como sigue:

D 1.2– DETERMINANTE ORDEN 1 $|a_{11}| = a_{11}$

D 1.3– DETERMINANTE ORDEN 2 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

≈**ER1.1** Calcular $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$ según **Def. 1.3** y comprobar que con ella se cumplen las propiedades a, b y c.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3 - (-2)\cdot 5 = 13$$

Propiedad a): Expresión de un determinante como suma de dos o más determinantes.

$p = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 13$ $p = \begin{vmatrix} 2-1 & -2 \\ 2+3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = \underbrace{2\cdot 3 - 2\cdot(-2)}_{10} + \underbrace{(-1)\cdot 3 - 3\cdot(-2)}_{3} = 10 + 3 = 13$

se cumple.

Propiedad b): Si multiplicamos una columna de un determinante, por un escalar, el valor del nuevo determinante es igual al del antiguo multiplicado por el escalar.

$$p=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 5 & 3\end{vmatrix}=1\cdot 3-(-2)\cdot 5=13 \qquad q=\begin{vmatrix}1\cdot 2 & -2\\ 5\cdot 2 & 3\end{vmatrix}=1\cdot 3\cdot 2-(-2)\cdot 5\cdot 2=26=13\cdot 2 \qquad q=\mathbf{2}p$$

se cumple.

Propiedad c): Si un determinante tiene dos columnas iguales el determinante es 0.

$$p=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 5 & 5\end{vmatrix}=1\cdot 5-1\cdot 5=0$$ **se cumple.**

≈≈≈≈≈

≈**ER1.2** Comprobar que con la definición $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}+a_{22}+a_{12}+a_{21}$ no se cumplen las propiedades a,b c.

Propiedad a): Expresión de un determinante como suma de dos o más determinantes.

$$\begin{vmatrix}1 & -2\\ 5 & 3\end{vmatrix}=7 \qquad \begin{vmatrix}2-1 & -2\\ 2+3 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 3 & 3\end{vmatrix}=\underbrace{2+3+2+(-2)}_{5}+\underbrace{(-1)+3+3+(-2)}_{3}=5+3=8$$

no se cumple.

Propiedad b): Si multiplicamos una columna de un determinante, por un escalar, el valor del determinante queda multiplicado por el escalar.

$$m=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 5 & 3\end{vmatrix}=1+3+(-2)+5=7 \qquad n=\begin{vmatrix}1\cdot 2 & -2\\ 5\cdot 2 & 3\end{vmatrix}=1\cdot 2+3+(-2)+5\cdot 2=13 \qquad m\neq 2n$$

no se cumple.

Propiedad c): Si un determinante tiene dos columnas iguales el determinante es 0.

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 5 & 5\end{vmatrix}=1+5+1+5\neq 0$$ **no se cumple.**

2. CALCULO DE DETERMINANTES POR ADJUNTOS

D 2.1– MENOR COMPLEMENTARIO DE UN "ELEMENTO"

Si a_{ij} es un elemento de la matriz A, su **menor complementario** es el **determinante** de la submatriz que resulta al suprimir en A la fila i y la columna j, es decir la fila y columna de dicho elemento.

D 2.2– ADJUNTO DE UN "ELEMENTO"

Se denomina adjunto del elemento a_{ij} y lo representamos por A_{ij} a su menor complementario afectado del signo + o – según que i+j sea par o impar respectivamente.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -2 & 5 & 1\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

Menor complementario de a_{23}: $\alpha_{23}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\end{vmatrix}=3$

Adjunto de a_{23} $A_{23}=(-1)^{2+3}\alpha_{23}=-3$

Observación: El valor del adjunto A_{ij} es totalmente independiente del valor del elemento a_{ij} y de todos los elementos situados en la fila i y en la columna j; solo depende del valor de los elementos situados fuera de dicha fila y columna.

Ejemplo: Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 8 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ observar que

$A_{12}=B_{12}=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$ los adjuntos del elemento situado en la fila 1 y columna 2 son los mismos aunque las matrices A y B tienen diferentes elementos en dicha fila y columna.

4.1. TEOREMA DE LAPLACE

El valor de un determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila (o columna) cualquiera por sus adjuntos respectivos.

≈**ER 2.1** Calcular $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ desarrollando **a)** por la columna 1, **b)** por la fila 2.

a) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{11}+2A_{21}+3A_{31}=1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=$

$$(-2+5)-2(3+20)+3(3+8)=-10$$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot A_{21}+2\cdot A_{22}+(-1)\cdot A_{23}=\underbrace{2\cdot(-1)^{2+1}\underbrace{\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}_{23}}_{-46}+\underbrace{2\cdot(-1)^{2+2}\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}_{11}}_{22}+\underbrace{(-1)\cdot(-1)^{2+3}\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}_{14}}_{14}=-10$

3. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

De los 3 requisitos que ha de cumplir la aplicación determinante se pueden deducir el resto de propiedades que cumple dicha aplicación. Las reunimos todas en la siguiente lista:

1) Si una columna (o fila) se descompone en una suma $A_i = B_i + C_i$ entonces

$\det(A_1 \cdots A_i \cdots A_n) = \det(A_1 \cdots B_i \cdots A_n) + \det(A_1 \cdots C_i \cdots A_n)$.

2) Si multiplicamos una columna de un determinante, por un escalar, el valor del determinante queda multiplicado por el escalar.

3) Si dos columnas (o filas) son iguales, $A_i = A_j$, el determinante es cero:

4) Si se cambian entre si dos filas (o dos columnas) , el determinante cambia de signo.

5) Si todos los elementos de una fila (o columna) de $|A|$ son 0, entonces $|A|$=0 .

6) Si los elementos de una fila (o columna) son múltiplos de otra, entonces $|A|$=0.

7) Si en el determinante de A, una fila (o columna) es combinación lineal de otras filas (o columnas) entonces $|A|$=0. (Si los vectores fila (o columna) son linealmente dependientes el determinante es 0).

8) El valor de un determinante no varía si se cambian todas sus filas por sus columnas conservando el orden. En otras palabras $|A| = |A^t|$

9) Si a una fila (o columna) le sumamos (o restamos) una combinación de otras filas (o columnas), el determinante no varía.

10) Si multiplicamos los elementos de una fila (o columna) por los adjuntos de otra fila (o columna), el resultado es 0.

11) El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal. Por eso si una matriz triangular tiene algún elemento diagonal nulo su determinante es 0.

≈ **ER 3.1** Expresar $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ como suma de dos determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+0 & -3 & -4 \\ 1+1 & 2 & -1 \\ 1+2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

Hay muchas formas de hacerlo. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5+2 & -4 \\ 2 & 1+1 & -1 \\ 3 & 2+3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

≈≈≈≈≈

≈ **ER 3.2** Calcular el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ y el de matriz $3A$.

Desarrollamos el determinante aplicando t. Laplace a la fila 1.

$$|A| = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-3)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(-4)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -10$$

Construimos la matriz $3A$: sus elementos son los de la matriz A, multiplicados todos ellos por el escalar 3,

$$3A = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 & -3\cdot 3 & -4\cdot 3 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 3 & -1\cdot 3 \\ 3\cdot 3 & 5\cdot 3 & -1\cdot 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante por fila 1.

$$|3A| = (-1)^{1+1}(1\cdot 3)\begin{vmatrix} 2\cdot 3 & -1\cdot 3 \\ 5\cdot 3 & -1\cdot 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-3\cdot 3)\begin{vmatrix} 2\cdot 3 & -1\cdot 3 \\ 3\cdot 3 & -1\cdot 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(-4\cdot 3)\begin{vmatrix} 2\cdot 3 & 2\cdot 3 \\ 3\cdot 3 & 5\cdot 3 \end{vmatrix} =$$

$$(1\cdot 3)3^2[-2+5]-(-3\cdot 3)3^2[-2+3]+(-4\cdot 3)3^2[10-6]=3^3\cdot[3+3\cdot 1-4\cdot 4]=3^3\cdot(-10)$$

Al observar el desarrollo de ambos determinantes vemos que $|3A| = 3^3\cdot(-10)=3^3\cdot|A|$

En general no es necesario realizar ambos determinantes, conociendo $|A|$ podremos calcular sin más que aplicar la propiedad 1 de los determinantes. Veámoslo:

$$|3A|=\begin{vmatrix}1\cdot 3 & -3\cdot 3 & -4\cdot 3\\ 2\cdot 3 & 2\cdot 3 & -1\cdot 3\\ 3\cdot 3 & 5\cdot 3 & -1\cdot 3\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}1 & -3\cdot 3 & -4\cdot 3\\ 2 & 2\cdot 3 & -1\cdot 3\\ 3 & 5\cdot 3 & -1\cdot 3\end{vmatrix}=3\cdot 3\cdot\begin{vmatrix}1 & -3 & -4\cdot 3\\ 2 & 2 & -1\cdot 3\\ 3 & 5 & -1\cdot 3\end{vmatrix}=3\cdot 3\cdot 3\cdot\begin{vmatrix}1 & -3 & -4\\ 2 & 2 & -1\\ 3 & 5 & -1\end{vmatrix}=3^3\cdot(-10)$$

$$\boxed{|3A|=3^3\cdot|A|}$$

En general si tenemos una matriz A orden n y calculamos su determinante obtendremos un número. Construimos la matriz αA, es decir otra matriz cuyos elementos son los de la matriz A, multiplicados todos ellos por el escalar α, y calculamos su determinante: $|\alpha A| = \alpha^n|A|$

≈≈≈≈≈

≈ **ER 3.3:** Calcular $\begin{vmatrix}1 & 3 & -4\\ 2 & 6 & -1\\ 3 & 9 & -1\end{vmatrix}$.

C2= 3·C1: $\begin{vmatrix}1 & 3\cdot 1 & -4\\ 2 & 3\cdot 2 & -1\\ 3 & 3\cdot 3 & -1\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & -4\\ 2 & 2 & -1\\ 3 & 3 & -1\end{vmatrix}$ **=0**

C1=C2

≈≈≈≈≈

≈ **ER 3.4.** Calcular $\begin{vmatrix}1 & -3 & -4\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}$.

Por determinante de matriz triangular: $1\cdot 2\cdot 2$

≈≈≈≈≈≈≈

≈ **ER 3.5** Calcular $\begin{vmatrix}1 & -3 & -4\\ 2 & 2 & -1\\ 3 & 5 & -1\end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix}1 & -3 & -4\\ 2 & 2 & -1\\ 3 & 5 & -1\end{vmatrix}=\begin{Bmatrix}F2\longleftarrow F2-2F1\\ F3\longleftarrow F3-3F1\end{Bmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -3 & -4\\ 0 & 8 & 7\\ 0 & 14 & 11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}8 & 7\\ 14 & 11\end{vmatrix}=88-98=-10$$

Triangularizando

$$\begin{vmatrix}1 & -3 & -4\\ 2 & 2 & -1\\ 3 & 5 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -3 & -4\\ 0 & 8 & 7\\ 0 & 14 & 11\end{vmatrix}=(F3\leftarrow \mathbf{8F3}-14F2)=\frac{1}{8}\begin{vmatrix}1 & -3 & -4\\ 0 & 8 & 7\\ 0 & 0 & -10\end{vmatrix}=\frac{-80}{8}=-10$$

≈≈≈≈≈≈≈

≈ **ER 3.6** Dadas las matrices A y B comprobar que $|A+B|\neq|A|+|B|$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 5 & -2 & 3\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}\qquad |A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 5 & -2 & 3\\ 4 & -2 & 1\end{vmatrix}=\begin{Bmatrix}F2\to F2+F1\\ F3\to F3+F1\end{Bmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 6 & 0 & 2\\ 5 & 0 & 0\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=20$$

$$B=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-1&0&4\\4&-2&1\end{pmatrix}\qquad |B|=\begin{vmatrix}1&2&-1\\-1&0&4\\4&-2&1\end{vmatrix}=\{F3\to F3+F1\}=\begin{vmatrix}1&2&-1\\-1&0&4\\5&0&0\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}2&-1\\0&4\end{vmatrix}=40$$

$$A+B=\begin{pmatrix}2&4&-2\\4&-2&7\\8&-4&2\end{pmatrix}\qquad |A+B|=\begin{vmatrix}2&4&-2\\4&-2&7\\8&-4&2\end{vmatrix}\overset{\begin{cases}F3\to F3-2F2\\F2\to F2-2F1\end{cases}}{=}\begin{vmatrix}2&4&-2\\0&-10&11\\0&0&-12\end{vmatrix}=2(-10)(-12)=\mathbf{240}$$

$$|A+B|=\mathbf{240}\qquad |A|+|B|=20+40=\mathbf{60}$$

≈≈≈≈≈≈≈

≈ **ER 3.7** Calcular

$$\begin{vmatrix}-1&2&0&3\\4&1&1&2\\-2&-1&3&2\\0&1&0&-2\end{vmatrix}\underset{C4\to C4+2C2}{=}\begin{vmatrix}-1&2&0&7\\4&1&1&4\\-2&-1&3&0\\0&1&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{4+2}\begin{vmatrix}-1&0&7\\4&1&4\\-2&3&0\end{vmatrix}\underset{C3\to C3+7C1}{=}\begin{vmatrix}-1&0&0\\4&1&32\\-2&3&-14\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}(-1)\begin{vmatrix}1&32\\3&-14\end{vmatrix}=110$$

Se han aplicado propiedades de los determinantes para hacer ceros en Fila 4 y teorema 1.

Triangularizando:

$$\begin{vmatrix}-1&2&0&3\\4&1&1&2\\-2&-1&3&2\\0&1&0&-2\end{vmatrix}=\begin{Bmatrix}F2\to F2+4F1\\F3\to F3-2F1\end{Bmatrix}=\begin{vmatrix}-1&2&0&3\\0&9&1&14\\0&-5&3&-4\\0&1&0&-2\end{vmatrix}=\{F3\leftrightarrow F1\}=-\begin{vmatrix}-1&2&0&3\\0&1&0&-2\\0&-5&3&-4\\0&9&1&14\end{vmatrix}=$$

$$\begin{Bmatrix}F3\to F3+5F2\\F4\to F4-9F2\end{Bmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&2&0&3\\0&1&0&-2\\0&0&3&-14\\0&0&1&32\end{vmatrix}=\{F4\to \mathbf{3}F4-F3\}=\frac{-1}{\mathbf{3}}\begin{vmatrix}-1&2&0&3\\0&1&0&-2\\0&0&3&-14\\0&0&0&110\end{vmatrix}=-\tfrac{1}{\mathbf{3}}(-1)\cdot 1\cdot 3\cdot 110=110$$

≈≈≈≈≈≈≈

≈ **ER 3.8** Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&-3&-4\\2&2&-1\\3&5&-1\end{pmatrix}$ comprobar la propiedad que dice: si multiplicamos los elementos de una fila (o columna) por los adjuntos de otra fila (o columna), el resultado es 0.

Elegiremos los elementos de la columna 2 y los adjuntos de columna 1: $A=\begin{pmatrix}1&-3&-4\\2&2&-1\\3&5&-1\end{pmatrix}$

$$a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31}=-3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&-1\\5&-1\end{vmatrix}+2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-3&-4\\5&-1\end{vmatrix}+5(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-3&-4\\2&-1\end{vmatrix}=-3\cdot 3-2\cdot 23+5\cdot 11=0$$

Vamos a intentar entender con un ejemplo el motivo por el que se cumple esta propiedad.
Escribimos otra matriz B cuya única diferencia con la A es la columna 1.

$$B=\begin{pmatrix}-3&-3&-4\\2&2&-1\\5&5&-1\end{pmatrix}$$

Por eso los adjuntos de los lugares (1,1), (2,1), (3,1) serán los mismos en ambas matrices

$A_{11}=B_{11}\qquad A_{21}=B_{21}\qquad A_{31}=B_{31}\qquad (1)$

Si aplicamos el teorema de Laplace a la columna 1 del determinante de B:

$$|B| = b_{11}B_{11} + b_{21}B_{21} + b_{31}B_{31}$$

Por (1) $|B| = b_{11}B_{11} + b_{21}B_{21} + b_{31}B_{31} = b_{11}A_{11} + A_{21}B_{21} + b_{31}A_{31}$

Además $\begin{array}{l} a_{12} = b_{11} = -3 \\ a_{22} = b_{21} = 2 \\ a_{32} = b_{31} = 5 \end{array} \Longrightarrow |B| = a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31}$

Pero sabemos que el determinante de la matriz B es 0 porque tiene dos columnas iguales: C1=C2 por lo cual

$$|B| = a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} = \mathbf{0}$$

Observar que la expresión $a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31}$ es la propiedad con la que estamos trabajando.

Así pues la expresión de la propiedad en la matriz A se corresponde con el valor del determinante en la B, valor que siempre es 0 por la forma en que se ha construido dicha matriz.

≈≈≈≈≈

≈ **ER 3.9** Comprobar que $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = (3)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (2)\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{es decir} \quad C2 = \mathbf{3}C1 + \mathbf{2}C3$$

Por Prop. 1 C1=C2 : C2=C3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3\cdot1+2\cdot(-4) & -4 \\ 2 & 3\cdot2+2\cdot(-1) & -1 \\ 3 & 3\cdot3+2\cdot(-1) & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3\cdot1 & -4 \\ 2 & 3\cdot2 & -1 \\ 3 & 3\cdot3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2\cdot(-4) & -4 \\ 2 & 2\cdot(-1) & -1 \\ 3 & 2\cdot(-1) & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & (-4) & -4 \\ 2 & (-1) & -1 \\ 3 & (-1) & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Por Prop. 2 Por Prop. 3: 0

Aplicando directamente la propiedad 7 ya que la columna 2 es C. L. de la 1 y la 3: $C2 = \mathbf{3}C1 + \mathbf{2}C3$

≈≈≈≈≈≈

≈ **ER 3.10.** Calcular aplicando propiedades de los determinantes

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = \left\{\begin{array}{l} F2 \to F2-F1 \\ F3 \to F3-F1 \\ F4 \to F4-F1 \end{array}\right\} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} = \left\{C1 \to \tfrac{1}{b-a}C1\right\}$$

Por columna 1

$$a(b-a)\begin{vmatrix} 1 & b-a & b-a \\ 1 & c-a & c-a \\ 1 & c-a & d-a \end{vmatrix} = \left\{\begin{array}{l} F2 \to F2-F1 \\ F3 \to F3-F1 \end{array}\right\} = a(b-a)\begin{vmatrix} 1 & b-a & b-a \\ 0 & c-b & c-b \\ 0 & c-b & d-b \end{vmatrix} = a(b-a)\begin{vmatrix} c-b & c-b \\ c-b & d-b \end{vmatrix} = \left\{\frac{1}{c-b}C1\right\}$$

Por columna 1

$$= a(b-a)(c-b)\begin{vmatrix} 1 & c-b \\ 1 & d-b \end{vmatrix} = \{F2 \to F2-F1\} = a(b-a)(c-b)\begin{vmatrix} 1 & c-b \\ 0 & d-c \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$$

Otra forma

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 1^{o})F4 \to F4-F3 \\ 2^{o})F3 \to F3-F2 \\ 3^{o})F2 \to F2-F1 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$$

Por determinante matriz triangular

≈≈≈≈≈≈

≈ **ER 3.11** Demostrar, sin desarrollar el determinante, que $\begin{vmatrix} -10 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ es múltiplo de 11.

$$\begin{vmatrix} -10 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 11 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -11.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \dot{11}$$

$$C2 \to C2 - C1 - C3$$

≈≈≈≈≈≈

≈ **ER 3.12** Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$ calcular $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ g & h & i \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & e & f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5 + 0 = 5$$

Por la propiedad P1 de los determinantes.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ -3a & -3b & -3c \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5 + 0 = 0$$

Por Prop.1 y Prop.6 (F2=-3F1).

4. CALCULO DE LA MATRIZ INVERSA

4.2 TEOREMA

Si A y $B \in M_n(K)$ se cumple $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B \iff |A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

COROLARIO

Si $A \in M_n(K)$ y det $A \neq 0 \Rightarrow |A^{-1}| = 1/|A|$

Demostración:

Si det $A \neq 0 \Rightarrow$ por **teorema 4.1** podemos afirmar que A tiene inversa.

$\exists A^{-1} \; : \; A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |I| = 1$ El determinante de la matriz identidad vale 1

Por **teorema 4.2**: $|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = 1/|A|$

≈ **ER 4.1** Comprobar que si $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 5 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$ se cumple $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 5 & 3\end{pmatrix}\longrightarrow |A|=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 5 & 3\end{vmatrix}=3+10=13 \qquad B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}\longrightarrow |B|=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=4+4=8$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-6 & -5\\ 22 & 1\end{pmatrix}\longrightarrow |\boldsymbol{A\cdot B}|=\begin{vmatrix}-6 & -5\\ 22 & 1\end{vmatrix}=-6+110=104=13\cdot 8=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$$

≈≈≈≈≈≈

≈ **ER 4.2: Comprobar que** $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ **siendo** $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 4\end{pmatrix} \qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$|A|=4-2=2 \qquad |A^{-1}|=1/2$$

$$\boxed{|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=1/2}$$

D 4.1– MATRIZ ADJUNTA

Sea $A\in M_n(K)$, se llama adjunta de A, Adj(A), a la matriz que resulta de sustituir cada elemento por su adjunto.

≈ **ER 4.3:** Calcular la matriz adjunta de $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 5 & 3\end{pmatrix}$.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 5 & 3\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}A_{11}=3\\ A_{12}=-5\\ A_{21}=-(-2)=2\\ A_{22}=1\end{cases} \qquad \boxed{AdjA=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 2 & 1\end{pmatrix}}$$

4.3 TEOREMA

Sea $\boldsymbol{A}\in M_n(K)$ **y det** $\boldsymbol{A}\neq \mathbf{0}$ $\Rightarrow$ $A^{-1}=\dfrac{(AdjA)^t}{|A|}$

Para una matriz tamaño 3:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} \qquad AdjA=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix} \qquad (AdjA)^t=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$$

Realizaremos el producto $A\cdot(AdjA)^t$

$$A\cdot(AdjA)^t=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=$$

Tenemos dos tipos de resultados:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=|A| \\ a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0 \\ a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}=0 \end{cases}$$

Suma de productos de los **elementos de la fila 1** por los **Adjuntos de la fila 1:** resultado = **determinante**

Suma de productos de los **elementos de la fila 1** por los **Adjuntos de la fila 2** resultado = **0**

Suma de productos de los **elementos de la fila 1** por los **Adjuntos de la fila 3** resultado = **0**

Elementos y adjuntos de la misma fila **Elementos de una fila y Adjuntos de otra fila.**

Análogamente para las filas 2 y 3.

$$A\cdot(AdjA)^t=\begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}=|A|\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=|A|\cdot I \quad\Rightarrow\quad A\cdot(AdjA)^t=|A|\cdot I$$

Premultiplicando los dos miembros de la igualdad por la inversa de A:

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I}\cdot(AdjA)^t=A^{-1}|A|\cdot I \quad\Leftrightarrow\quad A^{-1}A\cdot(AdjA)^t=|A|A^{-1} \quad\rightarrow\quad (AdjA)^t=|A|A^{-1} \quad\Leftrightarrow\quad A^{-1}=\frac{(AdjA)^t}{|A|}$$

4.4 TEOREMA

El rango de la matriz A de orden n es n, ssi det (A) es **no nulo**. Rango $A = n \Leftrightarrow |A|\neq 0$

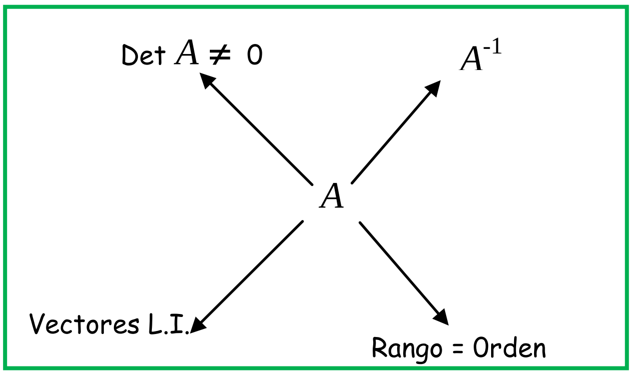
Entonces A es una matriz regular o no degenerada.

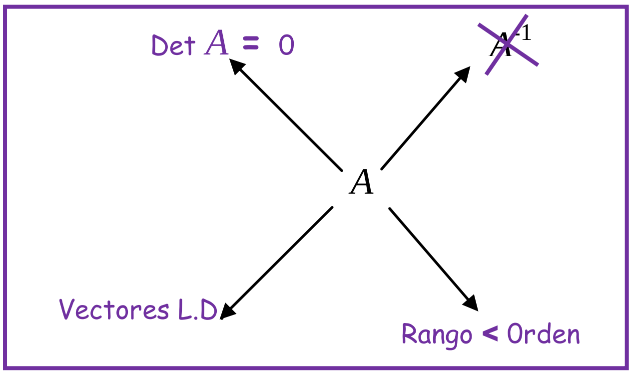
COROLARIO

matriz cuadrada de orden n tiene inversa ssi det(A) es no nulo.

A tiene inversa $\Leftrightarrow$ **rangA=n** $\Leftrightarrow$ **det(A)≠0**

Si el determinante de una matriz A no es 0, $|\mathbf{A}|\neq\mathbf{0}$, querrá decir que **ninguno** de los vectores fila o columna es combinación lineal del resto (si algún vector fila o columna fuese C. L. del resto el determinante sería 0: ver propiedad 8) y si esto ocurre todos los vectores fila o columna son L.I. es decir que su rango será máximo y la matriz A será invertible.





$|\mathbf{A}|\neq\mathbf{0}$ $\Rightarrow$ vectores columna (y fila) son L.I. $\Rightarrow$ Rango $A = n$ $\Rightarrow$ A invertible.