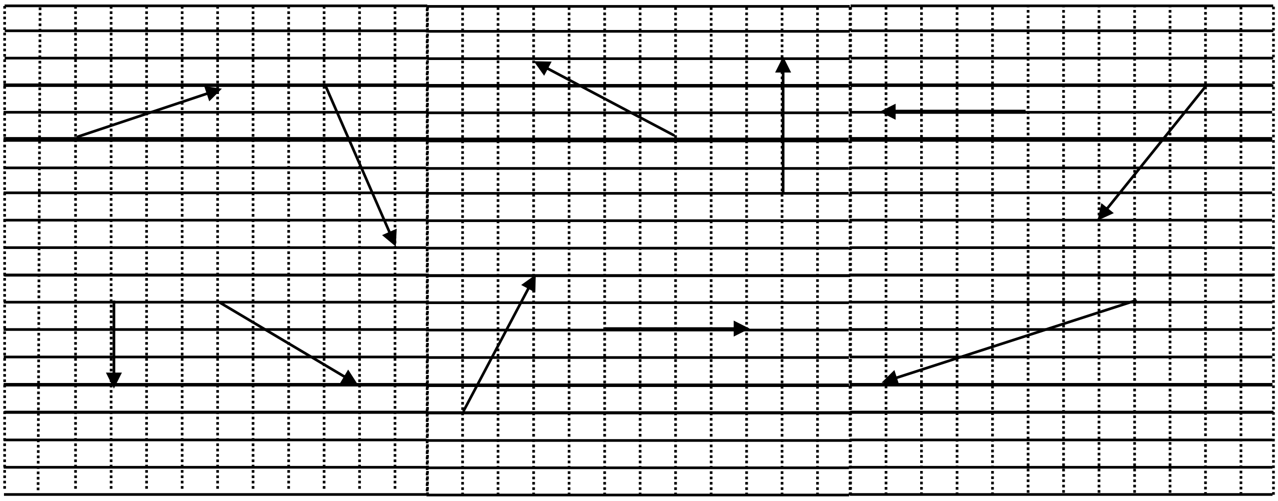
EP 2.1.- Calcular componentes, módulo, dirección y sentido. Cada cuadrito es una unidad de medida.



Recorrido de izquierda a derecha y de arriba abajo:

$(4,2)$ $\sqrt{(4,2)\cdot(4,2)}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=\mathbf{2\sqrt{5}}$ $\alpha=\arctan\frac{1}{2}$ **ángulo del 1er cuadrante**

$(2,-6)$ $\sqrt{(2,-6)\cdot(2,-6)}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=\mathbf{2\sqrt{10}}$ $\alpha=\arctan(-3)$ **ángulo del 4° cuadrante**

$(-4,3)$ $\sqrt{(-4,3)\cdot(-4,3)}=\sqrt{16+9}=\mathbf{5}$ $\alpha=\arctan\left(-\frac{3}{4}\right)$ **ángulo del 2° cuadrante**

$(0,5)$ $\sqrt{(0,5)\cdot(0,5)}=\sqrt{25}=\mathbf{5}$ $\alpha=\frac{\pi}{2}$

$(-4,0)$ $\sqrt{(-4,0)\cdot(-4,0)}=\sqrt{16}=\mathbf{4}$ $\alpha=\pi$

$(-3,-5)$ $\sqrt{(-3,-5)\cdot(-3,-5)}=\sqrt{9+25}=\mathbf{\sqrt{34}}$ $\alpha=\arctan\frac{5}{3}$ **ángulo del 3er cuadrante**

$(0,-3)$ $\sqrt{(0,-3)\cdot(0,-3)}=\sqrt{9}=\mathbf{3}$ $\alpha=3\frac{\pi}{2}$

$(4,-3)$ $\sqrt{(4,-3)\cdot(4,-3)}=\sqrt{16+9}=\mathbf{5}$ $\alpha=\arctan\left(-\frac{3}{4}\right)$ **ángulo del 4° cuadrante**

$(2,5)$ $\sqrt{(2,5)\cdot(2,5)}=\sqrt{4+25}=\mathbf{\sqrt{29}}$ $\alpha=\arctan\frac{5}{2}$ **ángulo del 1er cuadrante**

$(4,0)$ $\sqrt{(4,0)\cdot(4,0)}=\sqrt{16}=\mathbf{4}$ $\alpha=0$

$(-7,-3)$ $\sqrt{(-7,-3)\cdot(-7,-3)}=\sqrt{49+9}=\mathbf{\sqrt{58}}$ $\alpha=\arctan\frac{3}{7}$ **ángulo del 3er cuadrante**

EP 2.2.- Calcular componentes, módulo, dirección y sentido de $\overrightarrow{AB}$ siendo

a) A(1,2) y B(2,5)

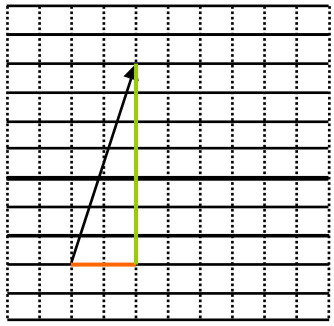
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2,5)-(1,2)=(1,3)$$

$$\sqrt{(1,3)\cdot(1,3)}=\sqrt{1\cdot1+3\cdot3}=\sqrt{10}$$

Definición de norma: $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$ Raíz cuadrada del producto escalar del vector por él mismo

Definición de producto escalar: suma de productos de componente respectivas.

$$\tan\alpha=\frac{2^{a}\text{ componente}}{1^{a}\text{ componente}}=\frac{3}{1}$$



α es el ángulo formado por el vector y la dirección positiva del eje OX

su tangente es el cociente entre la 2ª componente y la 1ª.

el signo de las componentes nos permite situar el ángulo en el 1er cuadrante

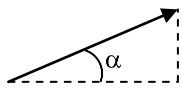
Una vez documentado el apartado a) en el resto únicamente se darán los resultados.

(R) **b) A(–8,2) y B(–5, –6)** → $\overrightarrow{AB}=(3,-8)$ → $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{73}$ → $\alpha=\arctan\left(-\frac{8}{3}\right)$ → 4º cuadrante

(R) **c) A(2,–2) y B(1, –5)** → $\overrightarrow{AB}=(-1,-3)$ → $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{10}$ → $\alpha=\arctan 3$ → 3er cuadrante

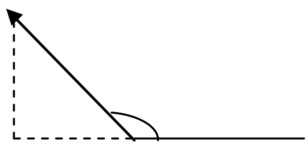
EP 2.3.- Calcula las componentes del vector de:

a) Módulo 3, ángulo 30 $(3\cos30^{o},3\sin30)=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$



b) Módulo 5, ángulo 120

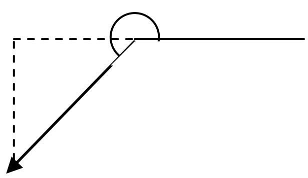
$$(5\cos120^{o},3\sin120)=(-5\cos60^{o},5\sin60)=\left(-\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$$



c) Módulo –3, ángulo 180, Datos incorrectos. Un módulo no puede ser negativo.

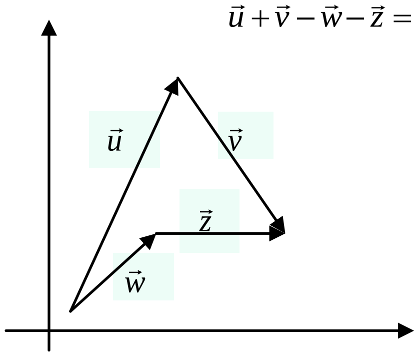
d) módulo 1, ángulo 240 y dibújalos.

$$(1\cdot\cos240^{o},1\cdot\sin240)=(-\cos60^{o},-\sin60)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

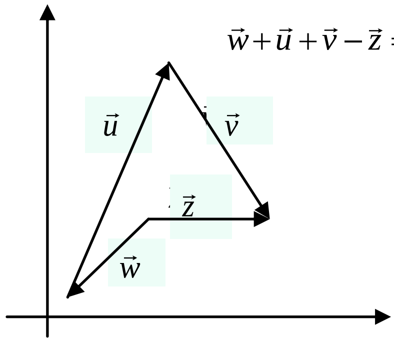


EP 2.4.- Expresar una relación vectorial entre los vectores de las figuras:

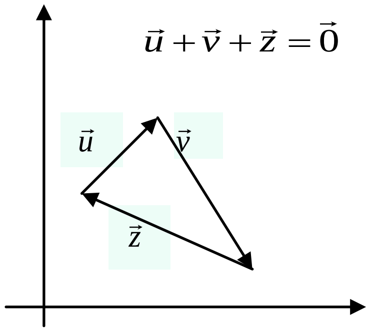
$\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}-\vec{z}=\vec{0}$



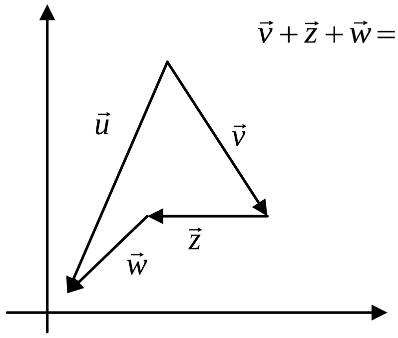
$\vec{w}+\vec{u}+\vec{v}-\vec{z}=\vec{0}$



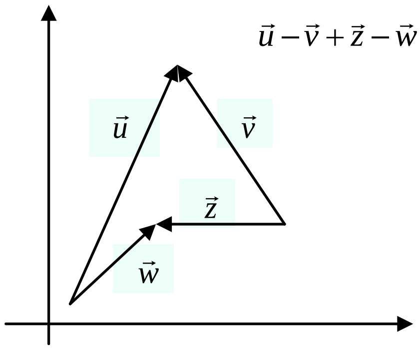
$\vec{u}+\vec{v}+\vec{z}=\vec{0}$



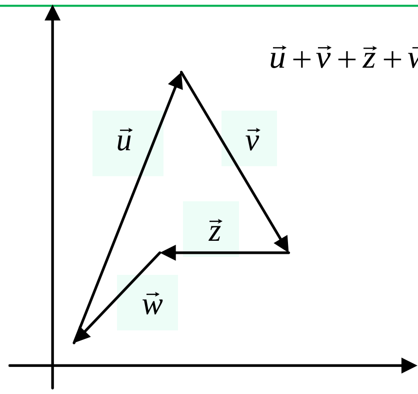
$\vec{v}+\vec{z}+\vec{w}=\vec{u}$



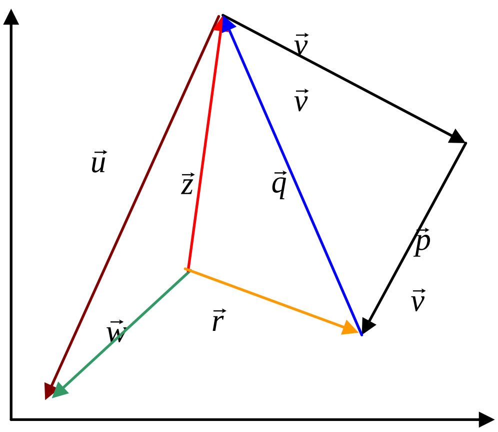
$\vec{u}-\vec{v}+\vec{z}-\vec{w}=\vec{0}$



$\vec{u}+\vec{v}+\vec{z}+\vec{w}=\vec{0}$



EP 2.5.- Expresar relaciones vectoriales entre los vectores de las figuras:

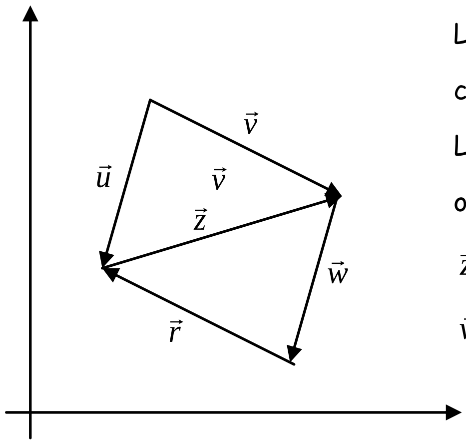


$\vec{z}+\vec{u}=\vec{w}$ $\qquad$ $\vec{r}+\vec{q}+\vec{u}=\vec{w}$

$\vec{r}+\vec{q}=\vec{z}$ $\qquad$ $\vec{z}+\vec{v}+\vec{p}=\vec{r}$

$\vec{v}+\vec{p}+\vec{q}=\vec{0}$ $\qquad$ $\vec{v}+\vec{p}+(-\vec{r})+\vec{w}=\vec{u}$

etc ....



Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$ son iguales. Tienen las mismas componentes, misma norma dirección y sentido.

Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{r}$ son opuestos. Tienen las componentes opuestas, misma norma y dirección y sentidos contrarios.

$\vec{z}+\vec{u}-\vec{v}=\vec{0}$ $\qquad$ $\vec{v}+\vec{w}+\vec{r}-\vec{u}=\vec{0}$

$\vec{w}+\vec{r}+\vec{z}=\vec{0}$

EP2.6.- Comprueba, de dos formas distintas, si los puntos $A(1,2,3)$, $B(0,-1,2)$, $C(-2,-7,0)$ están o no alineados. Razona ambos métodos y los pasos de cada procedimiento.

Si 3 puntos están alineados los vectores formados con ellos deberán tener la misma dirección: **a)** uno de ellos es igual a un escalar por el otro

b) componentes proporcionales.

<u>Cálculo componentes vectores:</u>

Teniendo en cuenta que $A(1,2,3)\leftrightarrow\overrightarrow{OA}=(1,2,3)$ y $B(0,-1,2)\leftrightarrow\overrightarrow{OB}=(0,-1,2)$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(0,-1,2)-(1,2,3)=(-1,-3,-1)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB}=(-1,-3,-1)$

Procediendo de forma análoga con C y A:

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(-2,-7,0)-(1,2,3)=(-3,-9,-3)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC}=(-3,-9,-3)$

a) Para que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ sean paralelos ha de existir algún escalar λ no nulo que multiplicado por $\overrightarrow{AB}$ nos de $\overrightarrow{AC}$ o viveversa.

$$\lambda\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC} \qquad \lambda(-1,-3,-1)=(-3,-9,-3) \rightarrow \begin{cases}-1\cdot\lambda=-3\\-3\cdot\lambda=-9\\-1\cdot\lambda=-3\end{cases}$$

El valor $\lambda=3$ satisface las 3 ecuaciones

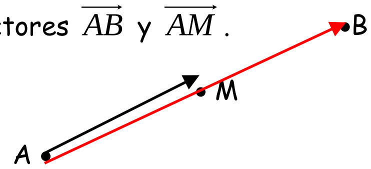
b) componentes proporcionales

$$\frac{-3}{-1}\overset{?}{=}\frac{-9}{-3}\overset{?}{=}\frac{-3}{-1}$$

Sí, por lo tanto los puntos están alineados.

EP2.7.- Obtener las coordenadas del punto que divide en dos partes iguales el segmento de extremos A$(2,0,-4)$ y B$(-4,4,-2)$.

Llamando M de coordenadas (p,q,n) al punto pedido, formamos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AM}$.



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-4,3,-1)-(2,0,-4)=(-6,3,3)$

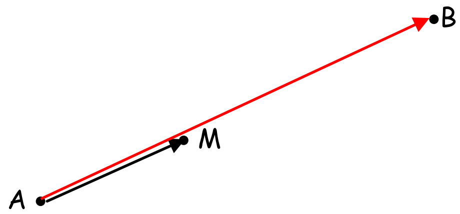
$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=(p,q,n)-(2,0,-4)=(p-2,q,n+4)$

Estos dos vectores son paralelos; obtendríamos el vector $\overrightarrow{AB}$ multiplicando por 2 al vector $\overrightarrow{AM}$, la longitud de $\overrightarrow{AB}$ es dos veces la del $\overrightarrow{AM}$ y sus componentes son también el doble que las del $\overrightarrow{AM}$.

$$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AM} \quad\Rightarrow\quad (-6,3,3)=2(p-2,q,n+4) \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}-6=2(p-2)\\ 3=2q\\ 3=2(n+4)\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}p=-1\\ q=3/2\\ n=-5/2\end{cases}$$

El punto M tiene por coordenadas $\left(-1,3/2,-5/2\right)$

EP2.8.- Obtener las coordenadas de los puntos que dividen en tres partes iguales el segmento de extremos $A(2,0,-4)$ **y** $B(-4,3,-1)$**.**



Estos dos vectores son paralelos; obtendríamos el vector $\overrightarrow{AB}$ multiplicando por 3 al vector $\overrightarrow{AM}$, la longitud de $\overrightarrow{AB}$ es tres veces la del $\overrightarrow{AM}$ y sus componentes son también el triple que las del $\overrightarrow{AM}$.

$$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AM} \quad\Rightarrow\quad (-6,3,3)=3(p-2,q,n+4) \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}-6=3(p-2)\\ 3=3q\\ 3=3(n+4)\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}p=0\\ q=1\\ n=-3\end{cases}$$

El punto M tiene por coordenadas $(0,1,-3)$

EP2.9.- Dados $\vec{u}=(1,2,-3),\vec{v}=(-2,-1,4),\vec{w}=(0,2,0),\vec{z}=(1,0,-3)$**, calcular analíticamente**

a) $\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}+\vec{z}=(0,-1,-2)$

b) $(\vec{u}+\vec{v})-(\vec{w}+\vec{z})=(-2,-1,4)$

c) $3\vec{u}-2\vec{v}+4\vec{w}-\vec{z}=(6,16,-14)$

EP2.10.- Estudiar si $\vec{v}=(1,2,-1)$ **es combinación lineal de** $\vec{a}=(1,2,2)$ $\vec{b}=(0,0,3)$ $\vec{c}=(-2,4,-3)$

¿$\exists\alpha,\beta,\lambda,$ tales que $(1,2,-1)=\alpha(1,2,2)+\beta(0,0,3)+\lambda(-2,4,-3)$?

$$\begin{cases}1=\alpha-2\lambda\\ 2=2\alpha+4\lambda\\ -1=2\alpha+3\beta-3\lambda\end{cases} \qquad \begin{pmatrix}1&0&-2&1\\2&0&4&2\\2&3&-3&-1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&0&8&0\\0&3&1&-3\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&3&1&-3\\0&0&1&0\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}\longrightarrow\boldsymbol{\alpha=1}\\ \longrightarrow\boldsymbol{\beta=-1}\\ \boldsymbol{\lambda=0}\end{cases}$$

Así pues la respuesta es sí: $\boldsymbol{\vec{v}=\vec{a}-\vec{b}+0\cdot\vec{c}}$

EP2.11.- Dado el conjunto de vectores $A=\{\vec{a}=(1,2,1),\vec{b}=(-1,0,3),\vec{c}=(2,1,-4),\vec{v}=(-3,-2,4)\}$ **averiguar si el vector** $\vec{v}$ **es combinación lineal de** $\vec{a},\vec{b}$ y $\vec{c}$ **y si** $\vec{c}$ **es combinación lineal de** $\vec{a}$ y $\vec{b}$ **.**

1º: ¿$\exists \alpha,\beta,\lambda$ tales que $\begin{pmatrix}-3\\-2\\4\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}$?

$$\begin{cases}\alpha-\beta+2\lambda=-3\\2\alpha+\lambda=-2\\\alpha+3\beta-4\lambda=4\end{cases}\quad\begin{pmatrix}1&-1&2&-3\\2&0&1&-2\\1&3&-4&4\end{pmatrix}\underset{\begin{cases}F2n\to F2-2F1\\F3n\to F3-F1\end{cases}}{\approx}\begin{pmatrix}1&-1&2&-3\\0&2&-3&4\\0&4&-6&7\end{pmatrix}\underset{F3n\to F3-2F2}{\approx}\begin{pmatrix}1&-1&2&-3\\0&2&-3&4\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{cases}\alpha-\beta+2\lambda=-3\\2\beta-3\lambda=4\\0=-1\end{cases}$$

El sistema tiene la ecuación $0=-1$ por lo que es incompatible.

EP2.12.- Dados los puntos P=(3,0,0), Q=(0,2,0), R=(0,0, –4), S=(3, –2,4), calcular la norma de los vectores $\overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{RS},\ \overrightarrow{OP},\ \overrightarrow{OR}$ **. Calcular la distancia entre P y Q, R y S, O y P, O y R.**

$\overrightarrow{PQ}=(-3,2,0)$ $\quad\|\overrightarrow{PQ}\|=\sqrt{13}$ $\quad d(P,Q)=\|\overrightarrow{PQ}\|=\sqrt{13}$

$\overrightarrow{RS}=(3,-2,8)$ $\quad d(R,S)=\|\overrightarrow{RS}\|=\sqrt{77}$ $\quad\overrightarrow{OP}=(3,0,0)$ $\quad d(O,P)=\|\overrightarrow{OP}\|=\mathbf{3}$

$\overrightarrow{OR}=(0,0,-4)$ $\quad d(O,P)=\|\overrightarrow{OR}\|=\mathbf{4}$

Calcular vectores unitarios proporcionales a $\overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{RS},\ \overrightarrow{OP},\ \overrightarrow{OR}$ **.**

$\overrightarrow{PQ}_u=\dfrac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|}=\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{13}}}(\mathbf{-3,2,0})$ $\quad\overrightarrow{RS}_u=\dfrac{\overrightarrow{RS}}{\|\overrightarrow{RS}\|}=\dfrac{1}{\sqrt{77}}(\mathbf{3,-2,8})$ $\quad\overrightarrow{OP}_u=(\mathbf{1,0,0})$ $\quad\overrightarrow{OR}_u=(\mathbf{0,0,-1})$

Encontrar si es posible una combinación lineal de $\overrightarrow{OP}$ **y** $\overrightarrow{OR}$ **tal que su resultado sea el vector** $\overrightarrow{PQ}$ **.**

¿ Existen escalares a y b tales que $\overrightarrow{PQ}=a\ \overrightarrow{OP}+b\ \overrightarrow{OR}$?

$(-3,2,0)=a\ (3,0,0)+b\ (0,0,-4)$ $\quad\begin{cases}-3=3a\\2=0\\0=-4b\end{cases}$ La segunda ecuación hace el sistema incompatible.

Luego el vector $\overrightarrow{PQ}$ no puede expresarse como combinación lineal de $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OR}$.

Encontrar si es posible una combinación lineal de $\overrightarrow{OP}$ **,** $\overrightarrow{OR}$ **y** $\overrightarrow{PS}$ **tal que su resultado sea el vector** $\overrightarrow{PQ}$ **.**

¿ Existen escalares a, b y c tales que $\overrightarrow{PQ}=a\ \overrightarrow{OP}+b\ \overrightarrow{OR}+c\ \overrightarrow{PS}$?

$(-3,2,0)=a\ (3,0,0)+b\ (0,0,-4)+c(0,-2,4)$ $\quad\boldsymbol{\overrightarrow{PQ}=-\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{PS}}$

EP2.13.- Encontrar a y b para que (a,b, –37, –3) sea combinación lineal de (1,2, –5,3) y (2, –1,4,7)

$$(a,b,-37,-3)=\alpha(1,2,-5,3)+\beta(2,-1,4,7) \qquad \beta=-\frac{126}{47}\Rightarrow\alpha=\frac{247}{47} \qquad a=-\frac{5}{47} \quad b=\frac{620}{47}$$

EP2.14.- Escribe razonadamente 2 vectores de R^3 que sean perpendiculares.

Escribimos un vector cualquiera de R^3 : $\vec{u}=(-2,3,-5)$

$\vec{p}=(a,b,c)$ vector perpendicular a $\vec{u}$.

$\vec{p}(a,b,c)\perp\vec{u} \Rightarrow$ su producto escalar será 0: $(-2,3,-5)\bullet(a,b,c)=-2a+3b-5c=0$

Como tenemos 3 incógnitas y solo una ecuación habrá muchas soluciones: damos valores cualesquiera a dos de las variables:

Para $c=1$, $b=-1 \Rightarrow -2a+3(-1)-5\cdot1=0 \Rightarrow 2a=-8 \Rightarrow a=-4$ $\qquad \vec{p}=(-4,-1,1)$

Obtén un tercer vector que sea perpendicular a los dos anteriores.

Buscamos un vector $\vec{w}=(x,y,z)$ perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{p}$.

$\vec{w}\perp\vec{u} \Rightarrow$ producto escalar = 0: $(-2,3,-5)\bullet(x,y,z)=-2x+3y-5z=0$

$\vec{w}\perp\vec{p} \Rightarrow$ producto escalar = 0: $(-4,-1,1)\bullet(x,y,z)=-4x-y+z=0$

Sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas: daremos valor a una de ellas.

Para $z=7$, $y=11 \Rightarrow x=-1$ $\qquad \vec{w}=(-1,11,7)$

Otra forma:

Calculando el producto vectorial de ambos vectores obtendremos un vector perpendicular a ambos:

$$\vec{u}\wedge\vec{p}=(-2,3,-5)\wedge(-4,-1,1)=(3\cdot1-(-5)(-1),(-5)(-4)-(-2)\cdot1,(-2)\cdot(-1)-3\cdot(-4))=(-2,22,14)$$

EP2.15.- Dados $\vec{u}(1,2,-3),\vec{v}(-2,-1,4),\vec{w}(0,2,0),\vec{z}(1,0,-3)$ calcular

1) $\vec{u}\bullet\vec{v}=1(-2)+2(-1)+(-3)4=-2-2-12=-16$ 📎

2) $\vec{u}\bullet(-\vec{v})=(1,2,-3)\bullet(2,1,-4)=2+2+12=16$ 📎

3) $(\vec{u}+\vec{v})\bullet(\vec{u}+\vec{v})=(-1,1,1)\bullet(-1,1,1)=1+1+1=3$ **Suma de vectores y** 📎

4) $(\vec{u}-\vec{v})\bullet(\vec{u}-\vec{v})=(3,3,-7)\bullet(3,3,-7)=9+9+49=67$ **Resta de vect. Y** 📎

5) $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}\bullet\vec{u}}=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$ ☺**1**

6) $\|\vec{v}\|=\sqrt{\vec{v}\bullet\vec{v}}=\sqrt{4+1+16}=\sqrt{21}$ ☺**1**

7) $\|\vec{u}-\vec{v}\|$ **de dos formas**

1ª forma:

$$\|\vec{u}-\vec{v}\| = \sqrt{(\vec{u}-\vec{v})\bullet(\vec{u}-\vec{v})} = \sqrt{\vec{u}\bullet\vec{u}-\vec{u}\bullet\vec{v}-\vec{v}\bullet\vec{u}+\vec{v}\bullet\vec{v}} = \sqrt{\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}\bullet\vec{v}} = \sqrt{14+21-2\cdot 16} = \sqrt{67}$$

☺1 **distributiva y conmutativa de** 📎

☺2

2º forma: $\|\vec{u}-\vec{v}\| = \sqrt{(\vec{u}-\vec{v})\bullet(\vec{u}-\vec{v})} = \sqrt{(3,3,-7)\bullet(3,3,-7)} = \sqrt{9+9+49} = \sqrt{67}$

☺1 **Resta de vectores y** 📎

8) $\|\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}\|$ **de dos formas**

8) 1ª forma: $\|\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}\| = \sqrt{(\vec{u}+\vec{v}-\vec{w})\bullet(\vec{u}+\vec{v}-\vec{w})} = \sqrt{\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+\|\vec{w}\|^2+2\vec{u}\bullet\vec{v}-2\vec{u}\bullet\vec{w}-2\vec{v}\bullet\vec{w}} =$

$$\sqrt{14+21+\cancel{4}-2\cdot 16-2\cdot\cancel{4}-\cancel{2(-2)}} = \sqrt{3}$$

2º forma: $\|\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}\| = \sqrt{(\vec{u}+\vec{v}-\vec{w})\bullet(\vec{u}+\vec{v}-\vec{w})} = \sqrt{(-1,-1,1)\bullet(-1,-1,1)} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

EP2.16.- La distancia entre los puntos A(2,-3) y B(-2,5) es:

a) el vector $\overrightarrow{AB}=(-4,8)$ **b)** $4\sqrt{5}$ **c) 80** **d)** $A\bullet B=-19$

$d(A,B)=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=4\sqrt{5}$ Opción correcta: **b)**

EP2.17.- Averiguar cuáles de los pares siguientes de vectores son ortogonales. En cualquier caso determinar el ángulo que forman:

a) (1,2) y (–2,1) $(1,2)\bullet(2,-1)=2-2=0\Rightarrow\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ **Son perpendiculares**

b) (1, –1,1) y (–1,1, –1) $(1,-1,1)\bullet(-1,1,-1)=-1-1-1=-3$ $\cos\alpha=\dfrac{-3}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=-1\Rightarrow\alpha=\pi$

c) (a, –b,1) y (b,a,0) $(a,-b,1)\bullet(b,a,0)=ab-ab=0 \Rightarrow\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ **Son perpendiculares**

EP2.18.- a) Obtener un vector unitario en la misma dirección y sentido que $\vec{u}=(1,2,-3)$.

$\vec{u}(1,2,-3)$ $\vec{v}_{unit}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{14}},\dfrac{2}{\sqrt{14}},\dfrac{-3}{\sqrt{14}}\right)$

b) Ídem un vector en la misma dirección y sentido que $\vec{u}$ **y de módulo 3.**

$$3\cdot\vec{v}_{unit}=\left(\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{6}{\sqrt{14}},\frac{-9}{\sqrt{14}}\right)$$

c) Ídem un vector perpendicular a $\vec{u}$ y unitario.

$\vec{p}(a,b,c)\perp\vec{u} \Rightarrow$ su producto escalar será 0: $\quad (1,2,-3)\bullet(a,b,c)=a+2b-3c=0$

Infinitas soluciones. Por ejemplo para c=0, b=1 $\Rightarrow a+2b-3c=0 \Rightarrow a=-2 \quad \vec{p}=(-2,1,0)$

$$\vec{v}_{unit}=\frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|}=\left(\frac{-2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)$$

> Def. producto escalar de 2 vect.: SUMA de los productos de las componentes respectivas.
> ☺ Def. norma de un vect: Raíz cuadrada del producto escalar del vector por él mismo. ☺1) $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}\bullet\vec{u}}$
> ☺2) $\vec{u}\bullet\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$

EP2.19.- Dados $\vec{u}(2,0,0)$, $\vec{v}(0,1,-3)$ y $\vec{w}=a\circ\vec{u}+b\circ\vec{v}$ ¿qué relación deben cumplir a y b para que:

a1) $\vec{w}$ sea ortogonal al vector (1,1,1)

Dos vectores ortogonales forman un ángulo de 90°, cos90=0 y su p. escalar $\vec{a}\bullet\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|cos\alpha$ es 0.

$$\vec{w}=a\circ\vec{u}+b\circ\vec{v}=a\circ(2,0,0)+b\circ(0,1,-3)=(2a,b,-3b)$$

$$\vec{w}\cdot(1,1,1)=(2a,b,-3b)\bullet(1,1,1)=2a\cdot1+b\cdot1-3b\cdot1=2a-2b$$

$$\vec{w}\perp(1,1,1) \quad\Rightarrow\quad 2a-2b=0 \quad\Rightarrow\quad a=b$$

a2) ¿qué relación deben cumplir a y b para que $\vec{w}$ sea unitario?

Un vector unitario tiene norma 1. Si $\vec{w}$ es unitario es porque su norma será 1:

$$\|\vec{w}\|=\sqrt{(2a,b,-3b)\bullet(2a,b,-3b)}=\sqrt{4a^2+b^2+9b^2}=\sqrt{4a^2+10b^2} \qquad ☺1$$

$\vec{w}$ unitario $\quad\Rightarrow\quad \sqrt{4a^2+10b^2}=1 \quad\Rightarrow\quad 4a^2+10b^2=1$

a3) ¿qué relación deben cumplir a y b para que $\vec{w}$ sea paralelo a (1,-2,6)?

Dos vectores paralelos tienen sus componentes proporcionales:

$$(2a,b,-3b)\propto(1,-2,6) \quad\Rightarrow\quad \frac{2a}{1}=\frac{b}{-2}=\frac{-3b}{6}=\lambda \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}6b=6b & \forall b\\ -4a=b\end{cases}$$

Otra forma: Su producto vectorial es $\vec{0}$:

$$(2a,b,-3b)\wedge(1,-2,6)=(0,-3b-12a,-4a-b)=(0,0,0)\rightarrow\left.\begin{array}{l}0=0\\ -3b-12a=0\rightarrow b=-4a\\ -4a-b=0\rightarrow b=-4a\end{array}\right\}\rightarrow 4a+b=0$$

a4) Para a=1 y b=-1 calcular un vector de longitud 3 en sentido opuesto a $\vec{w}$.

$$\vec{w}=(2a,b,-3b) \quad\rightarrow\quad (2,-1,3)$$

Todo vector $\vec{w}$ dividido por su norma da como resultado **otro vector** $\vec{u}_w$ que es **unitario y en la misma**

dirección y sentido que $\vec{w}$: $\vec{u}_w = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \frac{\vec{w}}{\sqrt{\vec{w}\bullet\vec{w}}} = \frac{1}{\sqrt{4+1+9}} \circ (2,-1,3)$

Para que tenga longitud 3 multiplicaremos el vector por 3 y para que sea de sentido opuesto a $\vec{w}$ lo multiplicaremos por – 1.

Vector pedido: $\vec{p}_w = \frac{-3}{\sqrt{14}} \circ (2,-1,3) = \left(\frac{-6}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-9}{\sqrt{14}}\right)$

EP2.20.- Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores tales que $\|\vec{a}\| = 3$ y $\|\vec{b}\| = 2$. ¿Puede ocurrir que $\vec{a}\bullet\vec{b} = -7$?

$\vec{a}\bullet\vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \boldsymbol{cos\alpha} = 3 \cdot 2 \cdot \boldsymbol{cos\alpha} = 6 \cdot \boldsymbol{cos\alpha}$

¿ $6 \cdot \boldsymbol{cos\alpha} = -7$? Si fuese cierto, $\boldsymbol{cos\alpha} = -7/6 = -1,...$ el coseno del ángulo tomaría un valor imposible ya que ha de estar comprendido entre -1 y 1. Luego no puede ser cierto.

¿Qué valores puede tomar $\vec{a}\bullet\vec{b}$?

Como $\boldsymbol{-1} \le \cos\boldsymbol{\alpha} \le \boldsymbol{1}$ y $\vec{a}\bullet\vec{b} = 6 \cdot \cos\alpha$ $\qquad -6 \le \vec{a}\bullet\vec{b} \le 6$

¿Cuál es el valor máximo que puede tomar $\|\vec{a}-\vec{b}\|$?

$$\|\vec{a}-\vec{b}\| = \sqrt{(\vec{a}-\vec{b})\bullet(\vec{a}-\vec{b})} = \sqrt{(\vec{a}-\vec{b})\bullet(\vec{a}-\vec{b})} = \sqrt{\vec{a}\bullet\vec{a} - \vec{b}\bullet\vec{a} - \vec{a}\bullet\vec{b} + \vec{b}\bullet\vec{b}} = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\vec{a}\bullet\vec{b}}$$

Esta expresión tendrá su valor máximo cuando $2\vec{a}\bullet\vec{b}$ sea lo menor posible (ya que está restando) y esto ocurre cuando los vectores forman un ángulo de 180º en cuyo caso $2\vec{a}\bullet\vec{b} = -2\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$

$$\|\vec{a}-\vec{b}\| = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

¿Cuál es el valor mínimo que puede tomar $\|\vec{a}-\vec{b}\|$?

Esta expresión tendrá su valor mínimo cuando $2\vec{a}\bullet\vec{b}$ sea lo mayor posible (ya que está restando) y esto ocurre cuando los vectores forman un ángulo de 0º en cuyo caso $2\vec{a}\bullet\vec{b} = 2\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$

$$\|\vec{a}-\vec{b}\| = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\| \bullet \|\vec{b}\|}$$

¿Cuánto vale $\|\vec{a}-\vec{b}\|$ si $\vec{a} \perp \vec{b}$?

Si $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a}\bullet\vec{b} = 0 \Rightarrow$ $\|\vec{a}-\vec{b}\| = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\vec{a}\bullet\vec{b}} = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2}$

EP2.21.- Demostrar que $\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\| \le \left\|\vec{a}\right\| + \left\|\vec{b}\right\|$

Como ambos miembros de la desigualdad son positivos demostrar que $\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\| \le \left\|\vec{a}\right\| + \left\|\vec{b}\right\|$ se cumple,

equivaldrá a demostrar que $\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|^2 \le \left(\left\|\vec{a}\right\| + \left\|\vec{b}\right\|\right)^2$

Empezamos a trabajar con el primer miembro: $\left\|\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}\right\|^2$

Por definición de norma: $\left\|\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}\right\|^2 = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\bullet\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$

Y aplicando la propiedad distributiva del producto escalar respecto a la suma:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\bullet\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \vec{a}\bullet\vec{a}+\vec{b}\bullet\vec{a}+\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{b}\bullet\vec{b}$$

Por definición de norma: $\vec{a}\bullet\vec{a} = \left\|\vec{a}\right\|^2$ y $\vec{b}\bullet\vec{b} = \left\|\vec{b}\right\|^2$

y por la propiedad conmutativa del producto escalar $\vec{b}\bullet\vec{a} = \vec{a}\bullet\vec{b} \Rightarrow \vec{b}\bullet\vec{a}+\vec{a}\bullet\vec{b} = 2\vec{a}\bullet\vec{b}$

$$\vec{a}\bullet\vec{a}+\vec{b}\bullet\vec{a}+\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{b}\bullet\vec{b} = \left\|\vec{a}\right\|^2 + 2\vec{a}\bullet\vec{b} + \left\|\vec{b}\right\|^2 \quad \Rightarrow \quad \left\|\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}\right\|^2 = \left\|\vec{a}\right\|^2 + 2\vec{a}\bullet\vec{b} + \left\|\vec{b}\right\|^2$$

Por definición de producto escalar: $\left\|\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}\right\|^2 = \left\|\vec{a}\right\|^2 + 2\vec{a}\bullet\vec{b} + \left\|\vec{b}\right\|^2 = \left\|\vec{\boldsymbol{a}}\right\|^2 + \boldsymbol{2}\left(\left\|\vec{\boldsymbol{a}}\right\|\left\|\vec{\boldsymbol{b}}\right\| \boldsymbol{cos\alpha}\right) + \left\|\vec{\boldsymbol{b}}\right\|^2$

Ahora trabajamos con el segundo miembro: $\left(\left\|\vec{a}\right\| + \left\|\vec{b}\right\|\right)^2$

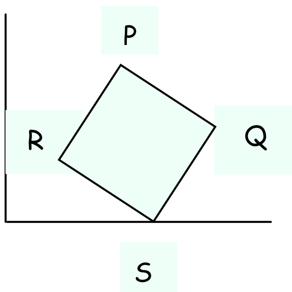
$$\left(\left\|\vec{a}\right\| + \left\|\vec{b}\right\|\right)^2 = \left\|\vec{\boldsymbol{a}}\right\|^2 + \boldsymbol{2}\left\|\vec{\boldsymbol{a}}\right\|\left\|\vec{\boldsymbol{b}}\right\| + \left\|\vec{\boldsymbol{b}}\right\|^2$$

Comparando ambas expresiones $\begin{cases} \left\|\vec{\boldsymbol{a}}\right\|^2 + \boldsymbol{2}\left(\left\|\vec{\boldsymbol{a}}\right\|\left\|\vec{\boldsymbol{b}}\right\| \boldsymbol{cos\alpha}\right) + \left\|\vec{\boldsymbol{b}}\right\|^2 \\ \left\|\vec{\boldsymbol{a}}\right\|^2 + \boldsymbol{2}\left\|\vec{\boldsymbol{a}}\right\|\left\|\vec{\boldsymbol{b}}\right\| \qquad\quad + \left\|\vec{\boldsymbol{b}}\right\|^2 \end{cases}$ vemos que dos de los sumandos son iguales,

veamos cómo es el otro: $\begin{cases} \boldsymbol{2}\left\|\vec{\boldsymbol{a}}\right\|\left\|\vec{\boldsymbol{b}}\right\| \boldsymbol{\cos\alpha} \\ \boldsymbol{2}\left\|\vec{\boldsymbol{a}}\right\|\left\|\vec{\boldsymbol{b}}\right\| \end{cases}$ Como $\cos\alpha \le 1$ y $2\left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\|\cos\alpha \le 2\left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\|$

Entonces $\left\|\vec{\boldsymbol{a}}\right\|^2 + \boldsymbol{2}\left\|\vec{\boldsymbol{a}}\right\|\left\|\vec{\boldsymbol{b}}\right\| \boldsymbol{cos\alpha} + \left\|\vec{\boldsymbol{b}}\right\|^2 \le \left\|\vec{\boldsymbol{a}}\right\|^2 + \boldsymbol{2}\left\|\vec{\boldsymbol{a}}\right\|\left\|\vec{\boldsymbol{b}}\right\| + \left\|\vec{\boldsymbol{b}}\right\|^2 \Rightarrow \left\|\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}\right\|^2 \le \left(\left\|\vec{\boldsymbol{a}}\right\| + \left\|\vec{\boldsymbol{b}}\right\|\right)^2$

EP2.22.- Sean P(5,7) y Q(8,3) los vértices del cuadrado PQSR.
a) Calcular el punto S sabiendo que se encuentra sobre el eje OX.



Resolución documentada.

(1) Por encontrarse sobre el eje OX su ordenada será 0: **S (a,0)**

(2) Vector $\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OQ} = \left(a-8, 0-3\right) = \left(a-8, -3\right)$

Como se trata de un cuadrado los vectores $\overrightarrow{QS}$ y $\overrightarrow{QP}$ han de ser perpendiculares **(3)**; por tanto su producto escalar ha de ser 0. **(4)**

$\overrightarrow{QP}=(5-8,7-3)$

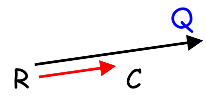
(9) $\overrightarrow{QS}\bullet\overrightarrow{QP}=(a-8,-3)\bullet(-3,4)=-3a+24-12=0\Rightarrow a=4$ **S (4,0)**

b) Calcular el punto R: R (x,y)

Los vectores $\overrightarrow{SR}$ y $\overrightarrow{QP}$ son paralelos y con igual norma: $\overrightarrow{SR}=\overrightarrow{QP}$ **(5)**:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{SR}=(x-4,y)\\ \overrightarrow{QP}=(-3,4)\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x-4=-3\\ y=4\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1\\ y=4\end{array}\right.$$ **R (1,4)**

c) Calcular el centro y el área del cuadrado.



El centro $C(c_1,c_2)$ será el punto medio del segmento RQ **(6)** por lo que $\overrightarrow{RQ}=2\overrightarrow{RC}$

$\overrightarrow{RQ}=(8-1,3-4)=(7,-1)$

$\overrightarrow{RC}=(c_1-1,c_2-4)$

(7) $\overrightarrow{RQ}=2\overrightarrow{RC}$ $\Rightarrow$ $(7,-1)=2(c_1-1,c_2-4)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}2(c_1-1)=7\\ 2(c_2-4)=-1\end{array}\right.$ $\Rightarrow$ $\left\{\begin{array}{l}c_1=\dfrac{9}{2}\\ c_2=\dfrac{7}{2}\end{array}\right.$ $C\left(\dfrac{9}{2},\dfrac{7}{2}\right)$

(8) (9) y (10) Area=Lado^2=$\left\|\overrightarrow{QP}\right\|^2=\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QP}=\left\|(-3,4)\right\|^2=(-3,4)\cdot(-3,4)=\mathbf{9+16}=$ **25 u.a.**

Sería lo mismo con cualquier vector que une dos vértices consecutivos.

Conocimientos utilizados:

(1) Los puntos el eje OX tienen su ordenada igual a 0.

(2) Cálculo de las componentes de un vector conociendo origen y extremo. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

Qué es un cuadrado: cuadrilátero, paralelogramo,

con los cuatro lados iguales,

los cuatro ángulos iguales y rectos, **(3)**

las dos diagonales iguales que se cortan en su punto medio. **(6)**

Área = ladoxlado **(8)**

(4) Producto escalar de vectores perpendiculares igual a 0 (a partir de $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\alpha$)

(5) Igualdad de vectores libres: Igualdad de sus componentes.

(7) Cálculo del punto medio M de un segmento AB: establecer la proporcionalidad de dos vectores $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AM}$ ó $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{MB}$ ó $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$

Hay que observar que la resolución no sería correcta si hiciésemos:

distancia entre A y B igual al doble de la distancia entre A y M .

(9) Cálculo del producto escalar a partir de las componentes de los vectores.

(10) Cálculo de la norma de un vector: $\|\vec{v}\|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

EP2.23.- Comprobar que la operación entre dos vectores de R^3 definida por:
$(a,b,c)\bullet(a',b',c')=aa'+2bb'+3cc'$ **cumple las propiedades de producto escalar.**
Calcular la norma del vector $\vec{u}=(-1,0,2)$ con esta definición y con el producto escalar usual.

1.- Conmutativa $\vec{u}\bullet\vec{v}=\vec{v}\bullet\vec{u}$

$$\vec{u}\bullet\vec{v}=(a,b,c)\bullet(a',b',c')=aa'+2bb'+3cc'$$
$$\vec{v}\bullet\vec{u}=(a',b',c')\bullet(a,b,c)=a'a+2b'b+3c'c$$

Ambas expresiones son iguales porque el **producto** de **números** tiene la propiedad conmutativa: $\begin{matrix} aa'=a'a \\ bb'=b'b \\ cc'=c'c \end{matrix}$

2.- Distributiva respecto a la suma

$$\vec{v}\bullet(\vec{u}+\vec{w})=(a',b',c')\bullet((a,b,c)+(x,y,z))=(a',b',c')\bullet(a+x,b+y,c+z)=$$
$$a'(a+x)+2b'(b+y)+3c'(c+z)$$

$$\vec{v}\bullet\vec{u}+\vec{v}\bullet\vec{w}=(a',b',c')\bullet(a,b,c)+(a',b',c')\bullet(x,y,z)=a'a+2b'b+3c'c+a'x+2b'y+3c'z=$$

prop. conmutativa suma de números $\rightarrow$ $a'a+a'x+2b'b+2b'y+3c'c+3c'z=$

prop. distributiva $(\times)$ respecto $(+$ de números$)$ $\rightarrow a'(a+x)+2b'(b+y)+3c'(c+z)$

3.- Asociativa entre escalares y vectores

$$(\lambda\circ\vec{u})\bullet\vec{v}=(\lambda a,\lambda b,\lambda c)\bullet(a',b',c')=(\lambda a)a'+2(\lambda b)b'+3(\lambda c)c'$$
$$\lambda\cdot(\vec{u}\bullet\vec{v})=\lambda\cdot((a,b,c)\bullet(a',b',c'))=\lambda(aa'+2bb'+3cc')=\lambda(aa')+\lambda(2bb')+\lambda(3cc')$$

$\begin{cases}(\lambda a)a'=\lambda(aa') \\ 2(\lambda b)b'=\lambda(2bb') \\ 3(\lambda c)c'=\lambda(3cc')\end{cases}$ por las propiedades conmutativa y asociativa del **producto** de **números**

Análogamente para $\vec{u}\bullet(\lambda\circ\vec{v})=\lambda\cdot(\vec{u}\bullet\vec{v})$

4a.- Si $\vec{u}=\vec{0}\ \Rightarrow\vec{u}\bullet\vec{u}=0$ **4b.-** Si $\vec{u}\neq\vec{0}\Rightarrow\ \vec{u}\bullet\vec{u}>0$

$$\vec{u}\bullet\vec{u}=(a,b,c)\bullet(a,b,c)=aa+2bb+3cc=a^2+2b^2+3c^2$$

Si $\vec{u}=\vec{0}\ \Rightarrow\ a=b=c=0\ \Rightarrow\ \vec{u}\bullet\vec{u}=a^2+2b^2+3c^2=0$

Si $\vec{u}\neq\vec{0}\ \Rightarrow$ habrá como mínimo una componente no nula $\Rightarrow\ \vec{u}\bullet\vec{u}=a^2+2b^2+3c^2>0$ por ser una suma de cuadrados

Calcular la norma del vector $\vec{u}=(-1,0,2)$ con esta definición y con el producto escalar usual.

Con $\vec{u}\bullet\vec{u}=(a,b,c)\bullet(a,b,c)=aa+2bb+3cc=a^2+2b^2+3c^2\longrightarrow\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}\bullet\vec{u}}=\sqrt{a^2+2b^2+3c^2}$

$$\|(-1,0,2)\|=\sqrt{1+0+3\cdot2^2}=\sqrt{1+12}=\sqrt{\mathbf{13}}$$

Con $\vec{u}\bullet\vec{u}=(a,b,c)\bullet(a,b,c)=aa+bb+cc=a^2+b^2+c^2\longrightarrow\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}\bullet\vec{u}}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$$\|(-1,0,2)\|=\sqrt{1+0+2^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{\mathbf{5}}$$

EP2.24.- Calcular el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sabiendo que $\|\vec{a}\|=3$, $\|\vec{b}\|=5$ y $\|\vec{a}+\vec{b}\|=7$.

A partir de la definición de producto escalar $\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$

Además de las normas de los vectores necesitamos conocer también $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Como no conocemos los vectores no podemos calcular $\vec{a}\cdot\vec{b}$ a partir de sus componentes.

Utilizaremos el dato $\|\vec{a}+\vec{b}\|=7$.

Sabemos que cuando aplicamos la definición de norma aparecen productos escalares:

Por definición de norma: $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2=(\vec{a}+\vec{b})\bullet(\vec{a}+\vec{b})$

Y aplicando la propiedad distributiva del producto escalar respecto a la suma:

$$(\vec{a}+\vec{b})\bullet(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\bullet\vec{a}+\vec{b}\bullet\vec{a}+\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{b}\bullet\vec{b}$$

Por definición de norma: $\vec{a}\bullet\vec{a}=\|\vec{a}\|^2$ y $\vec{b}\bullet\vec{b}=\|\vec{b}\|^2$

y por la propiedad conmutativa del producto escalar $\vec{b}\bullet\vec{a}=\vec{a}\bullet\vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{b}\bullet\vec{a}+\vec{a}\bullet\vec{b}=2\vec{a}\bullet\vec{b}$

$$\vec{a}\bullet\vec{a}+\vec{b}\bullet\vec{a}+\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{b}\bullet\vec{b}=\|\vec{a}\|^2+2\vec{a}\bullet\vec{b}+\|\vec{b}\|^2 \quad \Rightarrow \quad \|\vec{a}+\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2+2\vec{a}\bullet\vec{b}+\|\vec{b}\|^2$$

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{a}+\vec{b}\|^2-\|\vec{a}\|^2-\|\vec{b}\|^2\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{a}\bullet\vec{b}=\frac{1}{2}(49-9-25)=\frac{15}{2}$$

Y ahora lo utilizamos en la expresión $\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}=\dfrac{15/2}{3\cdot 5}=\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha=60^{\circ}$

EP2.25.- a) Obtener un vector perpendicular a $\vec{u}=(1,2,-3)$ y a $\vec{v}=(0,-2,1)$.

Calculando el producto vectorial de ambos vectores obtendremos un vector perpendicular a ambos:

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=(1,2,-3)\wedge(0,-2,1)=(2\cdot 1-(-3)(-2),(-3)\cdot 0-1\cdot 1,1(-2)-2\cdot 0)=(-4,-1,-2)$$

b) Obtener un vector unitario y perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

Dividiendo el vector $\vec{u}\wedge\vec{v}$ por su norma obtendremos otro vector perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ y unitario.

$$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\sqrt{(-4,-1,-2)\cdot(-4,-1,-2)}=\sqrt{16+1+4}=\sqrt{21} \qquad \text{vector pedido: } \frac{1}{\sqrt{21}}(-4,-1,-2)$$

c) Obtener un vector perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ y que tenga norma 3.

Multiplicaremos al vector obtenido en el apartado anterior por 3:

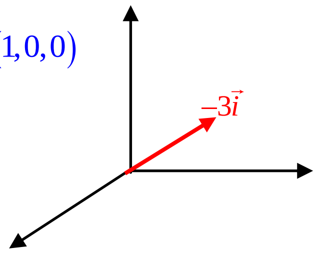
$$\frac{3}{\sqrt{21}}(-4,-1,-2)=\left(-\frac{12}{\sqrt{21}},-\frac{3}{\sqrt{21}},-\frac{6}{\sqrt{21}}\right)$$

EP2.26.- Dados los puntos $A(1,-1,3), B(1,0,-2), C(-2,4,0)$ calcular, si es posible, un punto D tal que la figura formada uniendo los puntos consecutivamente sea un paralelogramo. Calcular su área.

$D=(-2,3,5)$ Área = $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}\right\| = \left\|(0,1,-5)\wedge(-3,4,2)\right\| = \left\|(22,15,3)\right\| = \sqrt{718} = 26{,}8\ u.a.$

EP2.27.- Elige la opción CORRECTA:

Dados dos vectores de R^3, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, tales que $\vec{u}\wedge\vec{v}=-3\vec{i}$ siendo $\vec{i}=(1,0,0)$



a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores perpendiculares

b) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos

c) las condiciones del enunciado no se cumplen nunca.

d) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares al eje OX.

La única condición que han de cumplir 3 vectores relacionados por un producto vectorial es que el vector resultante del producto ha de ser perpendicular a los vectores con los que opero.

En este caso el resultado es un vector que va en la dirección del eje OX y en sentido negativo, por lo tanto los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ han de ser perpendiculares al eje OX, **luego la opción correcta es la d).**

EP2.28.- ¿Cómo han de ser dos vectores para que su producto escalar tome el valor máximo? ¿Cuál es en este caso su producto vectorial? Justifícalo.

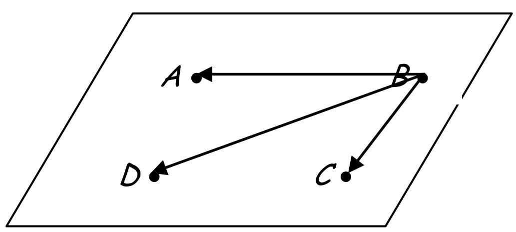
Producto escalar $\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\alpha$ máximo: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$ para $\cos\alpha=1 \Rightarrow \alpha=0^{\circ}$

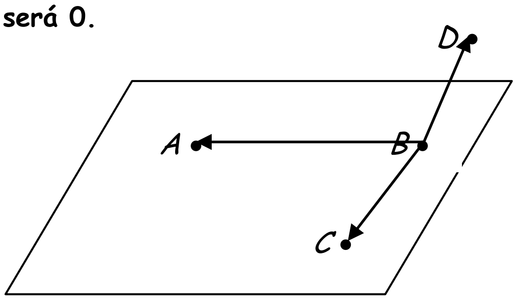
Si forman un ángulo $\alpha=0^{\circ} \Rightarrow \sin\alpha=0 \Rightarrow \left\|\vec{a}\wedge\vec{b}\right\|=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin\alpha=0 \Rightarrow \vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{0}$ Prod. Vect. = vect nulo

EP2.29.- Dados los puntos $A(1,4,-3), B(-1,0,2), C(5,-4,1)$ encontrar un cuarto punto D tal que los 4 puntos estén en un mismo plano. Emplear el producto mixto.

Para descubrir lo que nos piden formaremos vectores a partir de los puntos ya que tenemos una forma sencilla de saber si tres vectores son o no coplanarios.

Si 3 vectores son coplanarios su producto mixto será 0.





Uniendo los 4 puntos A,B,C,D se nos pueden presentar dos situaciones:

que los 4 puntos sean coplanarios
En este caso los vectores formados uniendo los puntos son coplanarios y su producto mixto será 0.

que los 4 puntos NO están en el mismo plano
En este caso los vectores formados uniendo los puntos NO son coplanarios y su producto mixto será DIFERENTE de 0.

$A(1,4,-3), B(-1,0,2), C(5,-4,1) \quad D=(a,b,c)$

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=(2,4,-5)$$
$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(6,-4,-1)$$
$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}=(a+1,b,c-2)$$

$$\left\{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right\}=(2,4,-5)\cdot\left(-4(c-2)-(-1)b,(-1)(a+1)-6(c-2),6b-(-4)(a+1)\right)=$$
$$2\left(-4(c-2)-(-1)b\right)+4\left((-1)(a+1)-6(c-2)\right)-5\left(6b-(-4)(a+1)\right)=$$
$$-8(c-2)+2b-4(a+1)-24(c-2)-30b-20(a+1)=-24a-28b-32c+40$$

Para que los vectores sean coplanarios el producto mixto ha de ser 0: $-24a-28b-32c+40=0$

$$6a+7b+8c=10$$

Para obtener un punto *D* que cumpla con la ecuación daremos valores a dos de las coordenadas:

$c=5$
$b=-6$ $\quad 6a+7(-6)+8\cdot5=10 \Rightarrow 6a=10+42-40=12 \Rightarrow a=2 \qquad D=(2,-6,5)$

EP2.30.- Dados los puntos $A(1,4,-3), B(-1,0,2), C(5,-4,1)$ encontrar un cuarto punto D tal que los 4 puntos NO estén en un mismo plano. Emplear el producto mixto.

Buscaremos un punto *D* que no verifique la ecuación $6a+7b+8c=10$. De esta forma el producto mixto no será 0 y los 3 vectores formados por los puntos no serán coplanarios.

Si $\begin{matrix} c=5 \\ b=-6 \end{matrix}$ y $a=1$ $\left\{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right\}=6a+7b+8c=10 \Rightarrow 6-42+40\neq 10 \qquad D=(1,-6,5)$