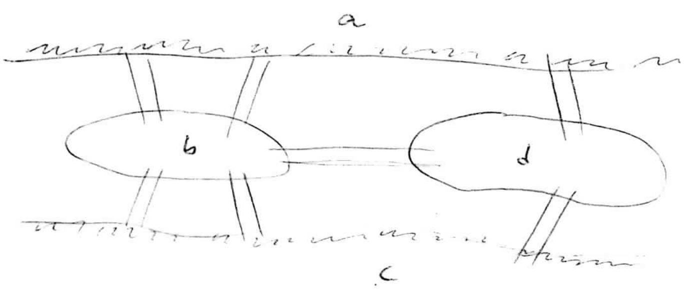
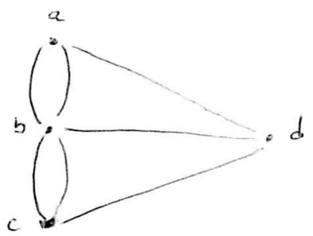
INTRODUCCIÓ A LA TEORIA DE GRAFS

La teoria de grafs és una branca de la matemàtica que ha sorgit i desenvolupat per donar solucions a problemes concrets.
El problema que la majoria d'autors assenyalen com a l'origen de la teoria de grafs és el problema dels ponts de Königsberg:



Durant el segle XVIII, la ciutat de Königsberg (Prússia Oriental) estava dividida en quatre zones pel riu Pregel. Hi havia set ponts que comunicaven aquestes regions com mostra el dibuix.
Els habitants de la ciutat volien trobar, si era possible, una manera de passejar per la ciutat que els permetés anar d'una determinada regió, creuar cada pont una única vegada i tornar al lloc de partida.

Per a resoldre aquest problema, Euler va representar les quatre zones de la ciutat per quatre punts i els ponts per arestes que uneixen els punts, tal com ho mostra la figura:



Actualment, la teoria de grafs s'aplica dins i fora de les matemàtiques i segueix sent una branca d'investigació molt activa.
Les seves aplicacions són molt importants en Enginyeria; resulten de gran utilitat per a la representació de dades, disseny de xarxes de comunicació, ...

CONCEPTE DE GRAF

Els grafs poden ser considerats formalment com a diagrames (representació diagramàtica) o bé algebraicament com un parell de conjunts (representació algebraica).

- Definició geomètrica

Geomètricament, un graf G és un conjunt de punts a l'espai, alguns dels quals estan units entre ells mitjançant línies.

Aquest graf pot simbolitzar, per exemple, un mapa de carreteres on els punts representen ciutats i les línies representen les carreteres que les uneixen. En aquest cas, el graf ens pot informar de les possibles comunicacions que existeixen entre les ciutats, però també aquest graf G podria esquematitzar un circuit elèctric, etc.

Hem de fer notar que un graf només conté informació sobre la connectivitat entre punts i no dóna informació geomètrica en sentit euclidià (distàncies, angles...) Així els següents diagrames representen el mateix graf.

Definició algebraica

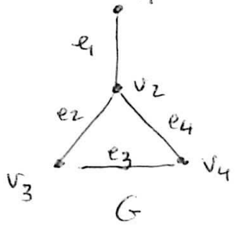
Un graf G es defineix com un parell ordenat de conjunts
$G = (V, E) = (V(G), E(G))$ on

- V és un conjunt no buit de punts $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ anomenats vèrtexs, i
- E és un conjunt de parells no ordenats d'elements de V, anomenats arestes.

Ambdós conjunts V i E són finits (en la majoria de casos d'interès pràctic).

Si <u>dos vèrtexs</u> u, v estan units per la mateixa aresta, direm que són <u>adjacents</u> i representarem l'aresta $\{u, v\}$.
En aquest cas també direm que u i v són incidents a l'aresta $\{u, v\}$.

Per representar algebraicament un graf és necessari poder distingir els vèrtexs i les arestes. Així



$G = (V(G), E(G))$

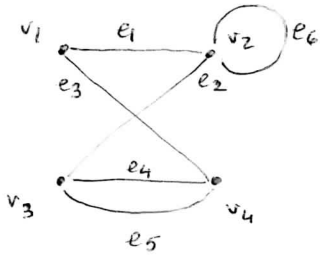
$V = V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$E = E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ on

$e_1 = \{v_1, v_2\}$, $e_2 = \{v_2, v_3\}$, $e_3 = \{v_3, v_4\}$ i $e_4 = \{v_2, v_4\}$

- El nombre de vèrtexs del graf G, $|V(G)|$ s'anomena <u>ordre del graf</u>.
- El nombre d'arestes del graf G, $|E(G)|$ s'anomena <u>mida del graf</u>.
- Un graf G és <u>finit</u> si $|V(G)|$ i $|E(G)|$ són finits. Si un graf finit té un vèrtex i no té cap aresta, li direm graf trivial (correspon a un punt)

<u>Exemple</u> El següent diagrama no correspon a un graf.



Aquest diagrama conté:

- <u>arestes múltiples</u>: les arestes e_4 i e_5 uneixen els vèrtexs v_4 i v_4 (Multigraf)
- <u>bucles</u>: l'aresta e_6 uneix el vèrtex v_2 amb ell mateix (pseudograf).

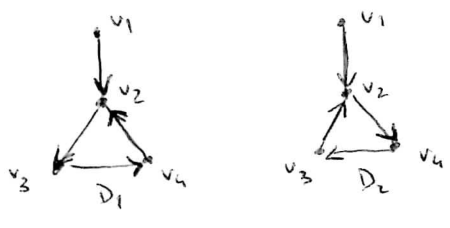
Notem que en aquest cas

$E(G) = \{ e_1 = \{v_1, v_2\}, e_2 = \{v_2, v_3\}, e_3 = \{v_1, v_4\}, e_4 = \{v_3, v_4\}\ e_5 = \{v_3, v_4\}, e_6 = \{v_1, v_1\}\}$

<u>$E(G)$ en aquest cas no és un conjunt</u>, té elements repetits $\{v_3, v_4\}$ (les arestes e_4, e_5) i l'aresta e_6 comença i acaba en el mateix vèrtex.

La definició de graf donada anteriorment es correspon amb la definició que diversos autors donen de <u>graf simple</u>.
I quan <u>es permeten arestes múltiples i/o bucles</u>, com a l'exemple anterior, l'entenen com a <u>graf general</u>.

Un altre concepte útil és el <u>digraf</u> (o graf dirigit).
Sigui G és un graf simple (o graf general), si a cada aresta se li assigna un sentit, direm que és un digraf.



Les arestes en aquests casos són parells ordenats.

$D_1 \neq D_2$

GRAU D'UN VÈRTEX.

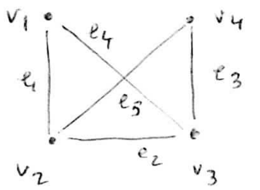
- Direm que una aresta e és incident amb un vèrtex v, si v és extrem de e.
- El grau d'un vèrtex v, $gr(v)$ és igual al nombre d'arestes que són incidents amb v.

Com que cada aresta és incident amb dos vèrtexs, tenim el següent resultat.

Teorema: Sigui $G=(V,E)$ un graf. $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, aleshores la suma dels graus dels vèrtexs de G és igual al doble del nombre d'arestes

$$\sum_{i=1}^{n} gr(v_i) = 2|E|$$

Exemple: Donat el graf



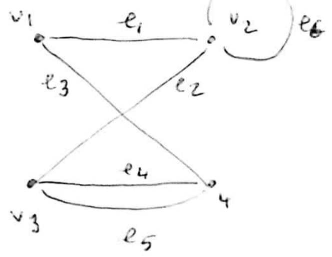
$gr(v_1)=2$
$gr(v_2)=3$
$gr(v_3)=3$
$gr(v_4)=2$

$$\longrightarrow \sum_{i=1}^{4} gr(v_i) = 2+3+3+2 = 10 = 2\cdot 5 = 2|E|$$

- Un vèrtex direm que és parell o imparell segons que el seu grau sigui parell o imparell.

NOTA: El teorema anterior també és vàlid per a grafs generals.

Exemple: Considerem el graf general (té arestes múltiples i un bucle)



$gr(v_1)=2$
$gr(v_2)=4$
$gr(v_3)=3$
$gr(v_4)=3$

$$\sum_{i=1}^{4} gr(v_i) = 2|E|$$

Exercici:

a) Dibuixau, si és possible, un graf amb 5 vèrtexs, el grau de cada vèrtex sigui 3.

b) Dibuixau, si és possible, un graf amb 5 vèrtexs, el grau de cada vèrtex sigui 2.

CAMINS.

En un graf que representi, per exemple, una xarxa de comunicacions és important conèixer l'existència de camins que recorrin totes les arestes o tots els vèrtexs i que, en certa manera, siguin els més "econòmics". Per això donam les següents definicions bàsiques (la nomenclatura que donam aquí no és única, hi ha autors que donen noms diferents).

Definició

- Un camí en un graf G és una seqüència finita alternada de vèrtexs i arestes de G:

$$v_0 \to e_1=\{v_0,v_1\} \to v_1 \to e_2=\{v_1,v_2\} \to \cdots \to e_n=\{v_{n-1},v_n\} \to v_n$$

$$v_0\, e_1\, v_1\, e_2, \ldots, e_n\, v_n$$

on cada aresta té per extrems els vèrtexs immediatament precedent i següent de la seqüència. Per la qual cosa, el camí també pot representar-se, per la seqüència de vèrtexs: $v_0 v_1 \cdots v_n$.

- Els vèrtexs v_0 i v_n s'anomenen extrems del camí, i hom diu que el camí va de v_0 a v_n o que connecta v_0 i v_n.

- La longitud del camí és el nombre d'arestes que conté.

Classificació de camins

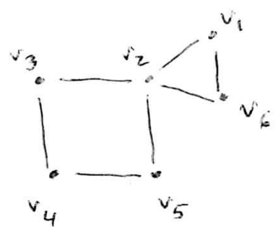
- Recorregut: camí sense arestes repetides.
- Camí simple: recorregut sense vèrtexs repetits excepte, potser, el primer i l'últim.

- Camí tancat: camí en el qual els seus extrems coincideixen, és a dir, si comença i acaba en el mateix vèrtex.

  En cas contrari, el camí és obert.

- Circuit: recorregut tancat.
- Cicle: circuit que també és camí simple.

Exemple: Donat el graf



Classifiquem els següents camins:

- $v_2\, v_3\, v_4\, v_5\, v_2$
- $v_2\, v_3\, v_4\, v_5$
- $v_6\, v_2\, v_3\, v_4\, v_5\, v_2\, v_1\, v_6$
- $v_1\, v_2\, v_6\, v_1$

CONNECTIVITAT

Existeixen grafs en els quals per a cada parell de vèrtexs v_i, v_j hi ha, almenys, un possible camí que els connecta.

<u>Definició</u>. Graf connex

Un graf G hom diu connex si existeix un camí simple entre qualsevol parell de vèrtexs v_i i v_j.

En cas contrari el graf és no connex i els vèrtexs v_i i v_j pertanyen a diferents components connexes del graf.

El nombre de components connexes d'un graf el notam per $k(G)$.

<u>Exemple</u>

G_1 G_2 G_3

G_1 és graf connex mentre que G_2 i G_3 no ho són.

$k(G_1) = 1$, $k(G_2) = 2$ i $k(G_3) = 3$.

REPRESENTACIÓ MATRICIAL DELS GRAFS.

Sigui $G = (V, E)$ un graf simple amb $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

Es defineix la <u>matriu d'adjacència</u> de G com la matriu quadrada

$$A(G) = (a_{ij})_{n\times n} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ i } v_j \text{ són adjacents} \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Notem que $A(G)$ és simètrica i $a_{ii} = 0$ $\forall i = 1, \dots, n$.

La matriu d'adjacència no és única (depèn de l'ordenació dels vèrtexs).

- Si $G=(V,E)$ és un graf general $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$

  $A(G)=(a_{ij})_{n\times n}$ on a_{ij} = nombre d'arestes que uneixen v_i i v_j

  $A(G)$ és simètrica.

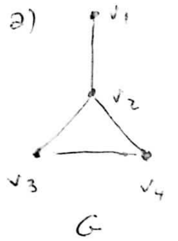
- Si $G=(V,E)$ és un digraf, $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$

  $A(G)=(a_{ij})_{n\times n}$ on a_{ij} = nº d'arestes que van des de v_i a v_j.

  $A(G)$ no simètrica.

<u>Exemple</u>: Considerem el graf simple

a)

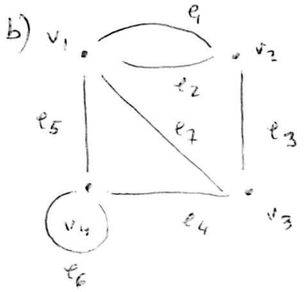


$$A(G)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$a_{ij}\in\{0,1\}$; $a_{ii}=0$

<u>Exemple</u>:

b)



$$A(G)=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

En aquest cas a_{ij} pot ser major que 1 (arestes múltiples)

i

$a_{ii}\neq 0$ (bucles).

<u>Teorema</u> Sigui $A(G)$ la matriu d'adjacència d'un graf amb n vèrtexs, aleshores l'entrada (i,j) de la matriu A^m ens dóna el nombre de camins de longitud m que connecten els vèrtexs v_i i v_j.

<u>Exemple</u>: Si considerem l'exemple a) anterior tenim que

$$A^1(G)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix};\quad A^2(G)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix};\quad A^3(G)=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 4 & 4\\ 1 & 4 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

Considerem, per exemple, l'element a_{14} d'aquestes tres matrius.

L'element a_{14} de $A(G)$ és zero, això indica que no hi ha cap camí entre els vèrtexs v_1 i v_4, però això no indica que no es puguin connectar aquests vèrtexs.

L'element $a_{14} \in A^2(G)$ pren el valor 1, indicant així que existeix un camí de longitud 2 que connecta v_1 i v_4.
Aquest camí serà : $v_1 v_2 v_4$.

L'element $a_{14} \in A^3(G)$ pren el valor 1, aleshores existeix un camí de longitud 3 que connecta v_1 i v_4.
Aquest camí és $v_1 v_2 v_3 v_4$.

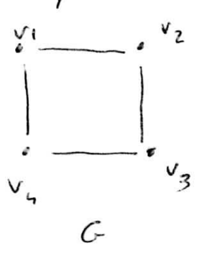
ISOMORFISME DE GRAFS.

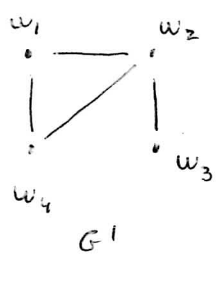
Definició. Siguin $G(V,E)$ i $G'(V',E')$ dos grafs (o grafs generals sense bucles) i $f: V \longrightarrow V'$ una aplicació bijectiva tal que $\{u,v\} \in E \Longleftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E'$. Aleshores diem que f és un isomorfisme entre G i G' o que G i G' són grafs isomorfs

En general, no és fàcil determinar quan dos grafs són o no isomorfs.
És clar que si dos grafs són isomorfs han de tenir el mateix nombre de vèrtexs i igual nombre d'arestes, però això no és suficient.

- Si G i G' són isomorfs s'ha de satisfer que si $v \in V \Rightarrow gr(v) = gr(f(v))$

Exemple :





G i G' tenen igual nombre de vèrtexs i igual nombre d'arestes.

$\forall v \in V(G)$ $gr(v) = 2$, però $gr(w_3) = 1 \Rightarrow$
G i G' no són isomorfs.

Grafs d'Euler i grafs de Hamilton

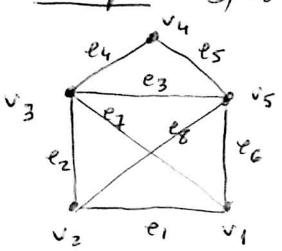
Definició. Sigui G un graf connex.

- Un camí eulerià és un recorregut en el qual apareixen totes les arestes.
- Un circuit eulerià és un camí eulerià tancat.
- Un graf eulerià és un graf amb un circuit eulerià.

Teorema. Sigui G un graf, aleshores:

- Si G té un circuit eulerià, el grau de cada vèrtex és parell
- Si G té un camí eulerià, el graf G té exactament dos vèrtexs de grau imparell (exactament els vèrtexs on comença i acaba el camí).

Exemple: a) Considerem el graf



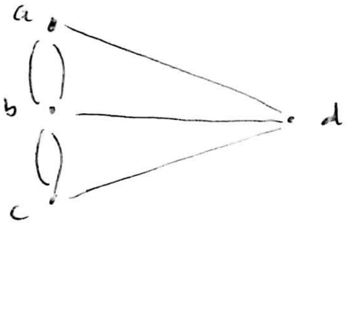
G

La sequència $e_2\, e_4\, e_5\, e_8\, e_1\, e_7\, e_3\, e_6$ és un camí eulerià.

$gr(v_1)=3$; $gr(v_2)=3$; $gr(v_3)=4$; $gr(v_4)=2$; $gr(v_5)=4$

Tenim dos vèrtexs de grau 3, el camí eulerià comença en un dels vèrtexs de grau 3 i acaba en l'altre.

b) Si consideram el graf que representa els ponts de Königsberg



observam que a, c i d tenen grau 3 i b té grau 5.
Com que tots els vèrtexs tenen grau imparell podem deduir que no existeix cap circuit eulerià. Per tant el problema dels ponts de Königsberg no té solució.

Definició. Sigui G un graf

- Un camí de Hamilton és un camí que recorre tots els vèrtexs només una vegada.
- Un circuit de Hamilton és un camí de Hamilton tancat (recorre tots els vèrtexs només una vegada tret dels extrems).
- Un graf amb un circuit de Hamilton s'anomena graf de Hamilton.