TEMA 5. APLICACIONES LINEALES.

1. DEFINICIONES

   Aplicación entre dos conjuntos.
   Aplicación exhaustiva.
   Aplicación inyectiva.
   Aplicación biyectiva.

2. APLICACIONES LINEALES

3. NUCLEO E IMAGEN DE UNA APLICACION LINEAL. RANGO

4. CLASIFICACION DE APLICACIONES LINEALES

5. MATRIZ DE UNA APLICACIÓN LINEAL

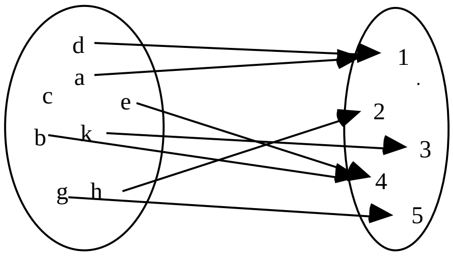
6. ECUACIÓN MATRICIAL DE UNA APLICACIÓN LINEAL. TEOREMAS.

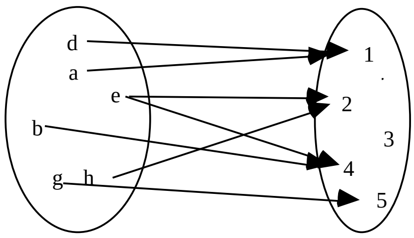
1. DEFINICIONES

D 1.1– APLICACIÓN ENTRE DOS CONJUNTOS.

Sean A y B dos conjuntos dados, una correspondencia que a cada elemento $x \in A$ le asocia un elemento $y \in B$, y solo uno, se llama una **aplicación de A en B .**

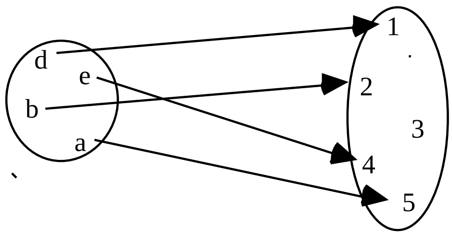
Ejemplos de correspondencias no aplicaciones:



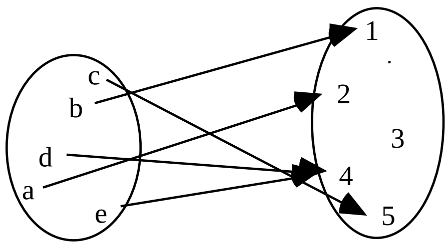


D 1.2– APLICACIÓN EXHAUSTIVA

Sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación; f es exhaustiva ssi $f(A) = B$ es decir si todos los elementos de B tienen anti-imagen o antecedente (todo elemento de B resulta ser imagen de uno o varios elementos de A). Se dice que f es una aplicación de A <u>sobre</u> B.



exhaustiva



no exhaustiva

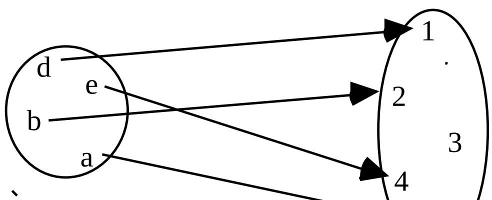
D 1.3– APLICACIÓN INYECTIVA

Sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación, f es inyectiva, si elementos distintos de A tienen distinta imagen,

$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq f(y)$$

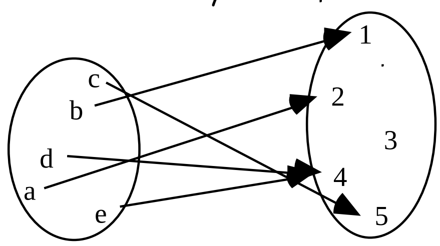
o lo que es lo mismo si cada elemento $y \in f(A)$ es imagen de un solo elemento $x \in A$:

$$f(x) = f(y) \quad \Rightarrow \quad x = y$$



inyectiva

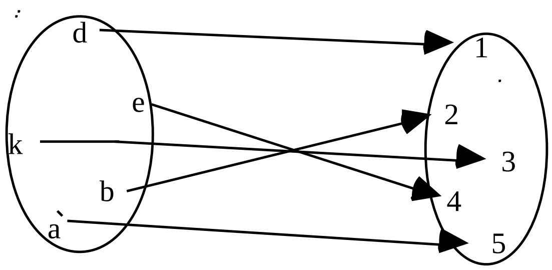
No inyectiva



De la definición anterior se desprende que cada elemento de B tendrá a lo sumo un solo antecedente, es decir que la anti-imagen de un elemento de B es un solo elemento de A o el conjunto vacio.

D 1.4– APLICACIÓN BIYECTIVA

Sea $f: A \longrightarrow B$ una aplicación; si f es inyectiva y exhaustiva le diremos biyectiva o biunívoca.



2. APLICACIONES LINEALES

Ejemplo 2.1: Consideremos un espacio E y la aplicación identidad que transforma a cada vector de E en él mismo:

$$\begin{aligned} I: E &\longrightarrow E \\ x &\longrightarrow x \end{aligned}$$

En primer lugar vamos a estudiar si existe relación entre **la imagen** de una **suma** de vectores $I(x+y)$ y **las imágenes** de **cada sumando**: $I(x)$, $I(y)$

Por definición de aplicación identidad: $I(x+y)=x+y$

$$\left.\begin{aligned} I(x)=x \\ I(y)=y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad I(x)+I(y)=x+y$$

Por lo que podemos escribir $I(x+y)=x+y=I(x)+I(y)$

$$I(x+y)=I(x)+I(y)$$

La imagen de la suma es la suma de las imágenes

En segundo lugar vamos a estudiar si existe relación entre **la imagen** de escalar **por** vector $I(\lambda x)$ **y la imagen del vector** $I(x)$

por definición de aplicación identidad: $I(\lambda x)=\lambda x$

$$I(x)=x$$

Por lo que podemos escribir $I(\lambda x)=\lambda x=\lambda I(x)$

$$I(\lambda x)=\lambda I(x)$$

La imagen de escalar por vector es el escalar por la imagen del vector.

Ejemplo 2.2: Ahora vamos a estudiar la aplicación definida en R que transforma a cada nº real en el nº real 2.

$$\begin{aligned} f: R &\longrightarrow R \\ x &\longrightarrow 2 \end{aligned}$$

Análogamente al ejemplo anterior estudiamos **la imagen** de una **suma** de vectores $f(x+y)$ y **las imágenes** de **cada sumando**: $f(x)$, $f(y)$

Por definición de f: $f(x+y)=2$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=2 \\ f(y)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(x)+f(y)=2+2=4$$

En este caso deberemos escribir $f(x+y)=2\neq 4=f(x)+f(y)$

$$f(x+y)\neq f(x)+f(y)$$

La imagen de la suma NO es la suma de las imágenes

Estudiaremos también **la imagen** de escalar **por** vector $f(\lambda x)$

y **la imagen del vector** $f(x)$

por definición de f: $f(\lambda x)=2$

$$f(x)=2 \quad \Rightarrow \quad \lambda f(x)=2\lambda$$

Por lo que podemos escribir $f(\lambda x)=2\neq 2\lambda=\lambda f(x)$

$$f(\lambda x)\neq \lambda f(x)$$

La imagen de escalar por vector NO es el escalar por la imagen del vector.

Diremos que la aplicación del ejemplo 1 es una **aplicación lineal**

Diremos que la aplicación del ejemplo 2 **NO** es una **aplicación lineal**

$f[\lambda(x,y)]=f(\lambda x,\lambda y)=\lambda x=\lambda f(x,y)$ **D 2.1– APLICACIÓN LINEAL**

Sean E y F dos espacios vectoriales sobre R. Sea $f:E\longrightarrow F$ una aplicación, diremos que f es lineal si verifica:

i) $\forall \vec{x},\vec{y}\in E \quad f(\vec{x}+\vec{y})=f(\vec{x})+f(\vec{y})$

ii) $\forall \lambda\in R \quad \forall x\in E \quad f(\lambda\vec{x})=\lambda f(\vec{x})$

Estas dos condiciones son equivalentes a una tercera.

$\forall x,y\in E \qquad \forall \lambda,\mu\in R \qquad f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y)$

≈ **ER 2.1** Estudiar la siguiente aplicación y comprobar que es lineal: $f:R^2\longrightarrow R$

$$(x,y)\longrightarrow x$$

1) $f[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)]=f(x_1+x_2,y_1+y_2)=x_1+x_2 \qquad f(x_1,y_1)=x_1 \qquad f(x_2,y_2)=x_2$

$$f[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)]=x_1+x_2=f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)$$

2) $f[\lambda\circ(x,y)]=f(\lambda x,\lambda y)=\lambda x \qquad f(x,y)=x$

$$f[\lambda\circ(x,y)]=\lambda x=\lambda\circ f(x,y)$$

Vamos a intentar responder a las siguientes preguntas:

Si tenemos una aplicación lineal $f:E\longrightarrow F$

a) ¿cuál será la imagen del elemento neutro de E?

b) ¿Existe relación entre la imagen de un vector $f(\vec{x})$ y la de su opuesto $f(-\vec{x})$?

Veámoslo en primer lugar en un ejemplo:

Dada la aplicación lineal $\begin{array}{l} f: R^2 \longrightarrow R \\ (x,y) \longrightarrow x \end{array}$ del **ER 2.1** calcular $f(\vec{0}_E)$, $f(x,y)$, $f(-x,-y)$

La aplicación asocia cada vector con el nº real igual a su primera coordenada.

$\vec{0}_E = (0,0)$ $\longrightarrow$ La primera coordenada del vector nulo vale 0 $\longrightarrow$ $f(0,0)=0$

En este caso la imagen del vector nulo de R^2 es el vector nulo de R. ¿Será siempre así?

$$\begin{array}{l} f(-x,-y) = -x \\ f(x,y) = x \end{array} \longrightarrow f(-x,-y) = -f(x,y)$$

En este caso la imagen del vector opuesto de un vector $\vec{v}$ es el v. opuesto de la imagen de $\vec{v}$ ¿Será siempre así?

1– CONSECUENCIAS DE LA DEFINICIÓN

Tenemos una aplicación lineal $f: E \longrightarrow F$; entonces

a) La imagen del vector nulo de E es el vector nulo de F : $\boldsymbol{f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F}$

Demostración:

El vector nulo $\vec{0}_E$ es el elemento neutro de la suma por tanto $\forall \vec{x} \in E$ $\quad \vec{x} + \vec{0}_E = \vec{x}$

Como $\vec{x} + \vec{0}_E = \vec{x}$ $\Rightarrow$ $f(\vec{x} + \vec{0}_E) = f(\vec{x})$ (1)

Por ser f lineal $f(\vec{x} + \vec{0}_E) = f(\vec{x}) + f(\vec{0}_E)$ (2)

De (1) y (2) se desprende $f(\vec{x}) + f(\vec{0}_E) = f(\vec{x})$ Luego $f(\vec{0}_E)$ es el e. neutro de la suma en F.

$$f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$$

b) $\boldsymbol{f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})}$

Demostración:

La suma de un vector y su opuesto es el e. neutro por tanto $\forall \vec{x} \in E$ $\quad \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}_E$

Como $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}_E$ $\Rightarrow$ $f(\vec{x} + (-\vec{x})) = f(\vec{0}_E)$ (1)

Por ser f lineal $f(\vec{x} + (-\vec{x})) = f(\vec{x}) + f(-\vec{x})$ (2)

De (1) y (2) se desprende $f(\vec{x}) + f(-\vec{x}) = f(\vec{0}_E)$

Por apartado **a)** sabemos $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ $\Rightarrow$ $f(\vec{x}) + f(-\vec{x}) = \vec{0}_F$

Por la propiedad del elemento opuesto necesariamente $f(-\vec{x})$ ha de ser el opuesto de $f(\vec{x})$

es decir $f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$

3. NUCLEO E IMAGEN DE UNA APLICACION LINEAL. RANGO

D3.1–NÚCLEO

Sea $f: E \longrightarrow F$ una aplicación lineal. Se llama núcleo de f y se denota por $Ker(f)$ o $Nuc(f)$, al conjunto de elementos de E cuya imagen es el cero de F: $Ker(f) = \{\vec{x} \in E / f(\vec{x}) = \vec{0}_F\}$

5.1–TEOREMA

Sea $f: E \longrightarrow F$ una aplicación lineal, $Ker(f)$ es un s. e. v. de E.

≈ **ER 3.1:** Sea $f: R^3 \longrightarrow R^2$ tal que $f(x,y,z) = (x+y-2z, x-y+z)$. Buscar $Ker(f)$

<u>Cálculo del núcleo</u>: vectores de R^3 cuya imagen es el vector $(0,0)$

$f(x,y,z) = (x+y-2z, x-y+z) = (0,0)$ es decir $\begin{cases} y-2z+x=0 \\ -y+z+x=0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} y-2z=-x \\ -z=-2x \end{cases} \qquad \begin{cases} x=x \\ y=3x \\ z=2x \end{cases}$$

Son los vectores de la forma $(x,3x,2x)$. Una base sería $\{(1,3,2)\}$

5.2–TEOREMA

Una aplicación lineal $f: E \longrightarrow F$ es inyectiva ssi el núcleo se reduce al elemento neutro de E.

f inyectiva $\Leftrightarrow$ $Ker(f) = \{\vec{0}_E\}$

5.3–TEOREMA

Sea $\vec{x}_1, \vec{x}_2 ......\vec{x}_n$ un conjunto de vectores L.I. pertenecientes a E y

$f: E \longrightarrow F$ una aplicación lineal inyectiva

Entonces $f(\vec{x}_1), f(\vec{x}_2)......f(\vec{x}_n)$ son vectores L.I. pertenecientes a F

D3.2–IMAGEN

Dada una aplicación lineal $f: E \longrightarrow F$ llamamos imagen de f y se designa por $\text{Im}(f)$ al conjunto formado por los elementos de F que tienen anti-imagen: $\text{Im}(f) = \{y \in F / \exists \vec{x} \in E \quad con \quad f(\vec{x}) = \vec{y}\}$

5.4–TEOREMA

Sea $f: E \longrightarrow F$ una aplicación lineal, $\text{Im}(f)$ es un s. e. v. de F.

≈ **ER 3.2** Sea $f: R^3 \longrightarrow R^2$ tal que $f(x,y,z) = (x+y-2z, x-y+z)$. Buscar $\text{Im}(f)$

<u>Cálculo de la imagen</u> $\text{Im}(f) = \{y \in F / \exists x \in E \quad con \quad f(x) = y\}$

$f(x,y,z) = (x+y-2z, x-y+z) = (x,x) + (y,-y) + (-2z,z) = x(1,1) + y(1,-1) + z(-2,1)$

$(1,1),(1,-1),(-2,1)$ forman un sistema generador de $\text{Im}(f)$.

En R^2 el número máximo de vectores L.I. es 2. Una base estaría formada por $(1,1),(1,-1)$

5.5–TEOREMA

Si E es un e. v. de dimensión n y $f: E \longrightarrow F$ una aplicación lineal $\Rightarrow$ $\operatorname{Im}(f)$ es de dimensión finita menor o igual que n: dim $\operatorname{Im}(f) \leq n$.

5.6–TEOREMA (núcleo-imagen)

Sean E y F espacios vectoriales sobre R y $f: E \longrightarrow F$ una aplicación lineal. Si dim E es finita, podemos asegurar que:

- dim $Ker(f)$, dim $\operatorname{Im}(f)$ son finitas
- $\dim E = \dim Ker(f) + \dim \operatorname{Im}(f)$

D3.3– RANGO DE UNA APLICACIÓN LINEAL

Sea $f: E \longrightarrow F$ una aplicación lineal, dim E finita. Se llama rango de f a la dimensión del subespacio vectorial $\operatorname{Im}(f)$: rango(f) = dim $\operatorname{Im}(f)$.

4. CLASIFICACION DE APLICACIONES LINEALES

D4.1–MONOMORFISMO – EPIMORFISMO - ISOMORFISMO

Sea $f: E \longrightarrow F$ aplicación lineal: Si f es inyectiva diremos que es **monomorfismo**

Si f es exhaustiva diremos que es **epimorfismo**

Si f es biyectiva diremos que es **isomorfismo**

D4.2– ENDOMORFISMO

Sea $f: E \longrightarrow E$ aplicación lineal; Entonces f es **endomorfismo**.

D4.3– AUTOMORFISMO

Es un endomorfismo biyectivo.

5.7–TEOREMA

Sean E y F espacios vectoriales de dimensión finita sobre R, $f: E \longrightarrow F$ una aplicación lineal. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) f es isomorfismo b) $\dim E = \dim F$ y $Ker(f) = \{0_E\}$

5. MATRIZ DE UNA APLICACIÓN LINEAL

Antes de dar una definición general vamos a ilustrarla con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 5.1 Sea $f: R^2 \longrightarrow R^3$ la aplicación lineal tal que $f(x,y)_C = (x+y, y-2x, x+y)_C$.

a) Obtener las **imágenes** de los vectores de la **base canónica** de R^2

$B_C = \{(1,0),(0,1)\}$

$f(1,0) = (1+0, 0-2, 1+0)_C = (1,-2,1)_C$

$f(0,1) = (1,1,1)_C$

Colocando las coordenadas de $f(1,0)$ y de $f(0,1)$ como columnas de una matriz obtendremos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} f\boxed{(1,0)} = (1,-2,1)_{\boxed{C}} \\ f\boxed{(0,1)} = (1,1,1)_{\boxed{C}} \end{matrix} \qquad \boxed{\left(f(1,0), f(0,1)\right) = \left((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Se calculan las **imágenes** de los vectores de la **base canónica** de R^2 y estas **imágenes** vienen expresadas en **base canónica de** R^3

b) Obtener las **imágenes** de los vectores de la base $B_E = \{(1,-1),(2,1)\}$ de R^2 expresadas en **base canónica de** R^3

$$f(1,-1) = (1+(-1),-1-2,1+(-1))_C = (0,-3,0)_C$$

$$f(2,1) = (2+1,1-4,2+1)_C = (3,-3,3)_C$$

Colocando las coordenadas de $f(1,-1)$ y de $f(2,1)$ como columnas de una matriz obtendremos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} f\boxed{(1,-1)} = (0,-3,0)_{\boxed{C}} \\ f\boxed{(2,1)} = (3,-3,3)_{\boxed{C}} \end{matrix} \qquad \boxed{\left(f(1,-1), f(2,1)\right) = \left((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\right)\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

Se calculan las **imágenes** de los vectores de la **base** B_E de R^2 y estas **imágenes** vienen expresadas en **base canónica de** R^3

c) Obtener las **imágenes** de los vectores de la **base canónica** de R^2 expresadas en **base** B_F **de** R^3

$$B_C = \{(1,0),(0,1)\} \qquad\qquad B_F = \{(1,-1,0),(1,0,-1),(1,1,1)\}$$

$$f(1,0) = (1,-2,1)_C \qquad\qquad B_C \xrightarrow{P} B_F$$

$$f(0,1) = (1,1,1)_C$$

Hay que hacer un cambio de base para obtener las coordenadas en B_F:

$$B_C \xrightarrow{P} B_F$$

$$(1,-2,1)_C \xrightarrow{P} (a,b,c)_{B_F}$$

$$(1,1,1)_C \xrightarrow{P} (m,n,p)_{B_F}$$

Según la definición de matriz cambio de base P sería la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de B_C expresados en la base B_F.

Dado que lo que conocemos es justo lo contrario, es decir las coordenadas de B_F expresados en B_C, calcularemos la matriz cambio de base $B_F \xrightarrow{Q} B_C$

La matriz P será la inversa de la matriz Q.

$$Q = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{-2}\\ \mathbf{1}\end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}_{B_F} = \begin{pmatrix}2\\ -1\\ 0\end{pmatrix}_{B_F} \qquad P\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{1}\\ \mathbf{1}\end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix}m\\ n\\ p\end{pmatrix}_{B_F} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}_{B_F}$$

Colocando las coordenadas de $f(1,0)$ y de $f(0,1)$ como columnas de una matriz obtendremos:

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} f\boxed{(1,0)} = (2,-1,0)_{B_F} \\ f\boxed{(0,1)} = \ \ (0,0,1)_{B_F}\end{array}$$

$$\boxed{\left(f(1,0), f(0,1)\right) = \left((1,-1,0),(1,0,-1),(1,1,1)\right)\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$$

Se calculan las **imágenes** de los vectores de la **base canónica** de R^2 y estas **imágenes** vienen expresadas en **base** B_F de R^3

d) Obtener las imágenes de los vectores de la base B_E de R^2 expresadas en **base** B_F **de** R^3

$B_E = \{(1,-1),(2,1)\}$ $\qquad$ $B_F = \{(1,-1,0),(1,0,-1),(1,1,1)\}$

$f(1,-1) = (0,-3,0)_C$

$f(2,1) = (3,-3,3)_C$

Hay que hacer un cambio de base para obtener las coordenadas en B_F:

$$P\begin{pmatrix}0\\ -3\\ 0\end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix}\mathbf{2}\\ \mathbf{-1}\\ \mathbf{-1}\end{pmatrix}_{B_F} \qquad P\begin{pmatrix}3\\ -3\\ 3\end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix}\mathbf{4}\\ \mathbf{-2}\\ \mathbf{1}\end{pmatrix}_{B_F}$$

Colocando las coordenadas de $f(1,-1)$ y de $f(2,1)$ como columnas de una matriz obtendremos:

$$\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} f\boxed{(1,-1)} = (2,-1,-1)_{B_F} \\ f\boxed{(2,1)} = \ \ (4,-2,1)_{B_F}\end{array}$$

$$\boxed{\left(f(1,-1), f(2,1)\right) = \left((1,-1,0),(1,0,-1),(1,1,1)\right)\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}}$$

Se calculan las **imágenes** de los vectores de la **base** B_E de R^2 y estas **imágenes** vienen expresadas en **base** B_F **de** R^3

En todos los casos hay que calcular las imágenes de los vectores de una base del espacio origen, y estas imágenes se expresan en una cierta base del espacio correspondiente.

Estas matrices son matrices asociadas a la aplicación lineal:

En caso **a)** $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ $\quad \begin{array}{l} f\boxed{(1,0)} = (1,-2,1)_C \\ f\boxed{(0,1)} = \ \ (1,1,1)_C\end{array}$ respecto a las bases **canónica** de R^2 y **canónica** de R^3

$$\boxed{\left(f(1,0), f(0,1)\right) = \left((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\right)\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}}$$

En caso **b)** $\begin{pmatrix}0 & 3\\ -3 & -3\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ $\quad \begin{array}{l} f\boxed{(1,-1)} = (0,-3,0)_C \\ f\boxed{(2,1)} = \ \ (3,-3,3)_C\end{array}$ respecto a las bases B_E de R^2 y **canónica** de R^3

$$\boxed{\left(f(1,-1),f(2,1)\right)=\left((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\right)\begin{pmatrix}0&3\\-3&-3\\0&3\end{pmatrix}}$$

En caso **c)** $\begin{pmatrix}2&0\\-1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $\begin{array}{l}f\boxed{(1,0)}=\boxed{(2,-1,0)_{B_F}}\\ f\boxed{(0,1)}=\boxed{(0,0,1)_{B_F}}\end{array}$ respecto a las bases **canónica** de R^2 y B_F de R^3

$$\boxed{\left(f(1,0),f(0,1)\right)=\left((1,-1,0),(1,0,-1),(1,1,1)\right)\begin{pmatrix}2&0\\-1&0\\0&1\end{pmatrix}}$$

En caso **d)** $\begin{pmatrix}2&4\\-1&-2\\-1&1\end{pmatrix}$ $\begin{array}{l}f\boxed{(1,-1)}=\boxed{(2,-1,-1)_{B_F}}\\ f\boxed{(2,1)}=\boxed{(4,-2,1)_{B_F}}\end{array}$ respecto a las bases B_E de R^2 y B_F de R^3

$$\boxed{\left(f(1,-1),f(2,1)\right)=\left((1,-1,0),(1,0,-1),(1,1,1)\right)\begin{pmatrix}2&4\\-1&-2\\-1&1\end{pmatrix}}$$

D5.1– MATRIZ DE UNA APLICACIÓN LINEAL

Sean E y F espacios vectoriales de dimensión p y q respectivamente: $B_E=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,..........,\vec{u}_p\}$ una base de E y $B_F=\{\vec{g}_1,\vec{g}_2,..........,\vec{g}_q\}$ una base de F y sea $f:E\longrightarrow F$ una aplicación lineal:

Llamamos **matriz de** f **respecto de las bases** B_E,B_F a aquella cuyas **columnas** son las coordenadas de los vectores $\left[f(\vec{u}_1),f(\vec{u}_2),.....,f(\vec{u}_p)\right]$ en la base $B_F=\{\vec{g}_1,\vec{g}_2,..........,\vec{g}_q\}$.

$$f(\vec{u}_1)\in F\Rightarrow f(\vec{u}_1)=a_{11}\vec{g}_1+a_{21}\vec{g}_2+............+a_{q1}\vec{g}_q$$
$$f(\vec{u}_2)\in F\Rightarrow f(\vec{u}_2)=a_{12}\vec{g}_1+a_{22}\vec{g}_2+............+a_{q2}\vec{g}_q$$
....
$$f(\vec{u}_p)\in F\Rightarrow f(\vec{u}_p)=a_{1p}\vec{g}_1+a_{2p}\vec{g}_2+............+a_{qp}\vec{g}_q$$

Estas son las imágenes de los vectores de la base B_E expresadas en la base B_F.

Si expresamos estas igualdades en forma matricial se escribiría:

$$\left[f(\vec{u}_1),f(\vec{u}_2),.....,f(\vec{u}_p)\right]=\left[\vec{g}_1,.......,\vec{g}_q\right]\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&.&.&a_{1p}\\a_{21}&a_{22}&&&a_{2p}\\.&&.&&.\\.&&&.&.\\a_{q1}&a_{q2}&.&.&a_{qp}\end{pmatrix}$$

La columna i son las coordenadas del vector $f(\vec{u}_i)$ en base B_F

El tamaño de la matriz A será qxp q: dimensión de F, p: dimensión de E

La igualdad (1) se puede escribir $\boxed{\left[f(\vec{u}_1),f(\vec{u}_2),.....,f(\vec{u}_p)\right]=\left[\vec{g}_1,.......,\vec{g}_q\right]\boldsymbol{A}}$

≈ **ER5.1** Sean $B_1=\{(1,1,0),(-1,1,2),(0,2,1)\}$ una base de R^3 y $B_2=\{(1,1),(-1,1)\}$ una base de R^2. Sea $f:R^3\longrightarrow R^2$ la aplicación lineal tal que $f(x,y,z)=(x+y-2z,x-y+z)$. Obtener la matriz asociada a f respecto de las bases B_1 de R^3 y B_2 de R^2.

Por lo tanto hay que:

Calcular imágenes de los vectores de B_1:

$$f(1,1,0)=(1+1-0,1-1+0)=(2,0)_C$$
$$f(-1,1,2)=(-1+1-4,-1-1+2)=(-4,0)_C$$
$$f(0,2,1)=(0+2-2,0-2+1)=(0,-1)_C$$

Expresarlas en la base B_2 **:**

Hay que hacer un cambio de base, de base canónica a base $B_2=\{(1,1),(-1,1)\}$

Conocemos los vectores de B_2 en base canónica: $B_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}} B_c$

Matriz cambio de base: $B_2=B_C\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$ por tanto $B_C=B_2\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}^{-1}=B_2\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$

$$\vec{x}=B_C\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}_C=B_2\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}_C$$
$$\vec{x}=B_2\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}_{B_2}$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}_{B_2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}_C$$

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}_C=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}_{B_2}\qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}_C=\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}_{B_2}\qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}_C=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\end{pmatrix}_{B_2}$$

Formamos una matriz con las coordenadas calculadas $\begin{pmatrix}1&-2&-1/2\\-1&2&-1/2\end{pmatrix}_{B_1(R^3),B_2(R^2)}$

$$\boxed{\left(f(1,1,0),f(-1,1,2),f(0,2,1)\right)=\left((1,1),(-1,1)\right)\begin{pmatrix}1&-2&-1/2\\-1&2&-1/2\end{pmatrix}_{B_1(R^3),B_2(R^2)}}$$

6. ECUACION MATRICIAL DE UNA APLICACIÓN LINEAL

Sea $f:E\longrightarrow F$, A la matriz asociada a $\boldsymbol{f}$ respecto a dos bases B_E y B_F de E y F respectivamente.

Vamos a encontrar una relación entre las coordenadas en base B_E de un vector $\vec{x}\in E$ y las coordenadas en base B_F del vector $f(\vec{x})\in F$

Comenzaremos con un ejemplo.

Ejemplo 6.1 Sea $f: \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ la aplicación lineal tal que su matriz asociada en bases **canónica** de R^2 y **canónica de** R^3 es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular las coordenadas del vector imagen de $\vec{x} = (2,-1)_C \in R^2$ expresado en base canónica.

$$(2,-1)_C = 2\circ(1,0)+(-1)\circ(0,1) = ((1,0),(0,1))\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aplicamos $\boldsymbol{f}$ a los dos miembros de la igualdad; como ambos miembros son iguales y $\boldsymbol{f}$ es aplicación (un mismo origen no puede tener dos imágenes distintas) sus imágenes también serán iguales.

$f(2,-1)_C = f\left(2\circ(1,0)+(-1)\circ(0,1)\right) =$ por ser $\boldsymbol{f}$ lineal $= 2\circ f(1,0)+(-1)\circ f(0,1)$

$$f(2,-1)_C = \left(f(1,0), f(0,1)\right)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (6.1)$$

Por definición de matriz asociada a $\boldsymbol{f}$ respecto a dos bases B_E y B_F sabemos que

$$\boxed{\left(f(1,0), f(0,1)\right) = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \qquad (6.2)$$

Sustituyendo (6.2) en (6.1)

$$f(2,-1)_C = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

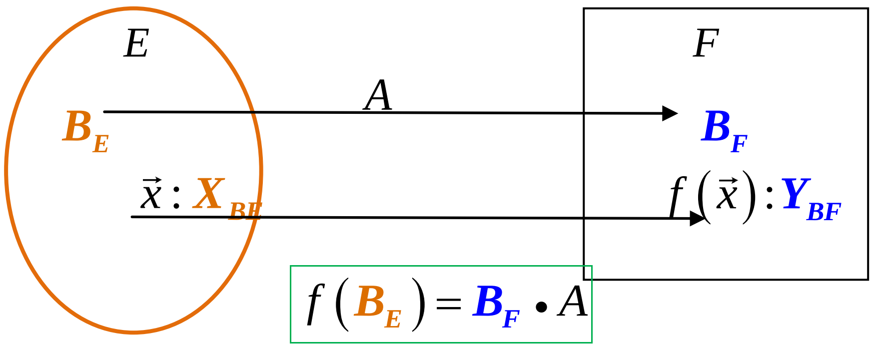
Llamando $\boldsymbol{Y}_C$ a las coordenadas del vector $f(2,-1)_C$ en base canónica de R^3 podemos escribir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{Y}_C \qquad \boldsymbol{Y}_C = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}_C$$

Planteamiento general: $f: E \longrightarrow F$, A matriz asociada a $\boldsymbol{f}$ respecto a $\boldsymbol{B}_E$ y $\boldsymbol{B}_F$.

$\boldsymbol{X}_{BE}$: coordenadas en base $\boldsymbol{B}_E$ de un vector $\vec{x} \in E$

$\boldsymbol{Y}_{BF}$: coordenadas en base $\boldsymbol{B}_F$ del vector $f(\vec{x}) \in F$



Se puede demostrar que $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X}_{BE} = \boldsymbol{Y}_{BF}$

D6.1– ECUACIÓN MATRICIAL DE LA APLICACIÓN LINEAL

$A \bullet X_{BE} = Y_{BF}$ es la ecuación matricial de la aplicación lineal que relaciona las coordenadas de un vector $\vec{x}$ de E en una base B_E con las coordenadas de $f(\vec{x})$ en una base B_F.

5.8–TEOREMA

Sea $A \in M_n(R)$, una matriz cuadrada tamaño n, las condiciones siguientes son equivalentes

i) A es invertible

ii) Los vectores columna de la matriz A son base de R^n.

ii) La aplicación lineal definida por $f_A : R^n \longrightarrow R^n$ es biyectiva

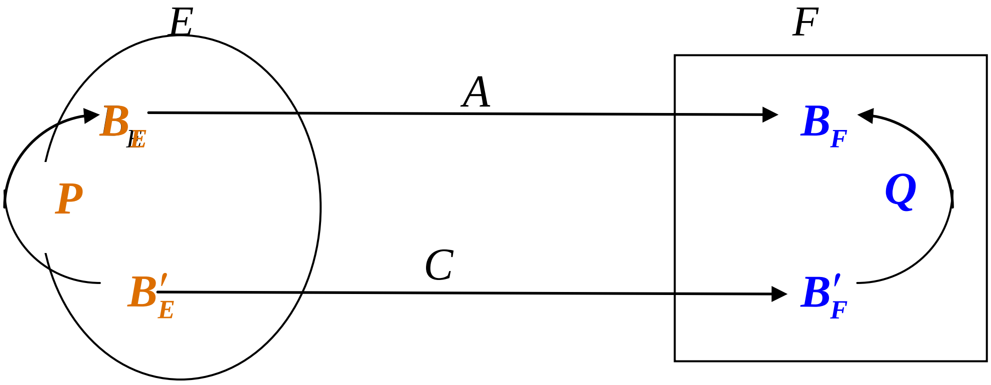
$$X \longrightarrow AX$$

5.9–TEOREMA

Sea la aplicación lineal $f: E \longrightarrow F$.

A es la matriz de la aplicación lineal en las bases B_E y B_F

C es la matriz de la aplicación lineal en otras bases B'_E y B'_F



Sea P la matriz de cambio de base B'_E a B_E : $B'_E \xrightarrow{P} B_E$

Sea Q la matriz de cambio de base B'_F a B_F : $B'_F \xrightarrow{Q} B_F$

Entonces se cumple que $Q^{-1} \bullet A \bullet P = C$

Ecuación matricial de la aplicación lineal para A, B_E y B_F : $A \bullet X_{BE} = Y_{BF}$

Ecuación matricial de la aplicación lineal para C, B'_E y B'_F : $C \bullet X'_{BE} = Y'_{BF}$

Ecuación del cambio de base $B'_E \xrightarrow{P} B_E$ $\quad X_{BE} = P \bullet X'_{BE}$

Ecuación del cambio de base $B'_F \xrightarrow{Q} B_F$ $\quad Y_{BF} = Q \bullet Y'_{BF}$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} A \bullet X_{BE} = Y_{BF} \\ X_{BE} = P \bullet X'_{BE} \end{array}\right\} \rightarrow A \bullet (P \bullet X'_{BE}) = Y_{BF} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad Y_{BF} = Q \bullet Y'_{BF} \end{array}\right\} \quad A \bullet (P \bullet X'_{BE}) = Q \bullet Y'_{BF}$$

Multiplicando ambos miembros por Q^{-1} y aplicando propiedad asociativa del producto de matrices:

B_E obtenemos $\left(Q^{-1}\bullet A\bullet P\right)\bullet X'_{BE}=Y'_{BF}$ que es la ecuación matricial de f en B'_E y B'_F

Por lo tanto $Q^{-1}\bullet A\bullet P$ será la matriz asociada a f en esas bases: $Q^{-1}\bullet A\bullet P=C$

5.9–COROLARIO

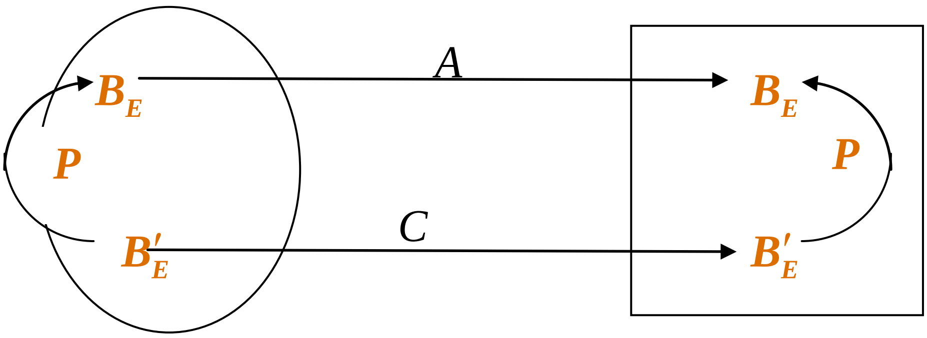
Sea la aplicación lineal $f:E\longrightarrow E$

A es la matriz de la aplicación lineal en la base B_E

C es la matriz de la aplicación lineal en otra base B'_E

Sea P la matriz de cambio de base B'_E a B_E : $B'_E\xrightarrow{P}B_E$

Entonces se cumple que $P^{-1}\bullet A\bullet P=C$



≈ **ER 6.1** Sea $f:R^2\longrightarrow R^3$ tal que $f(x,y)=(x+y,y-2x,x+y)$. Encontrar la matriz de f respecto a la **base canónica** de R^2 y la base $B_F=\{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,-2)\}$ de R^3.

Aplicando el esquema del **teorema 5.8**

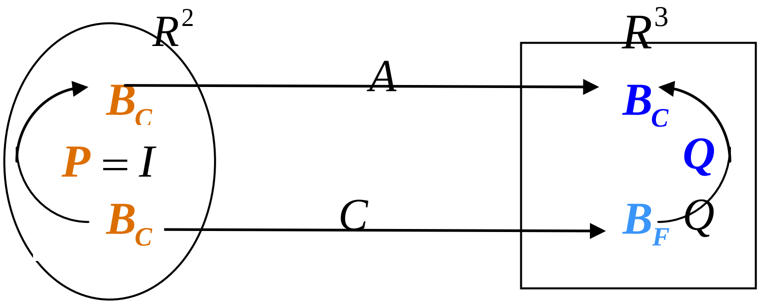
A es la matriz asociada en bases canónicas. Calculada en **Ejemplo 5.1 c)** $\begin{pmatrix}1&1\\-2&1\\1&1\end{pmatrix}$

P es la matriz identidad de orden 2 y

Q es la matriz de cambio de base B_F a B_C en R^3.

$B_F\xrightarrow{Q}B_C$

$$Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&-2\end{pmatrix}$$



$$C=Q^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-3&0\\-2&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}\\\mathbf{-3}&\mathbf{0}\\\mathbf{-2}&\mathbf{-\frac{1}{2}}\end{pmatrix}$$