Introducción a la Teoría de Grafos

Teoría de grafos

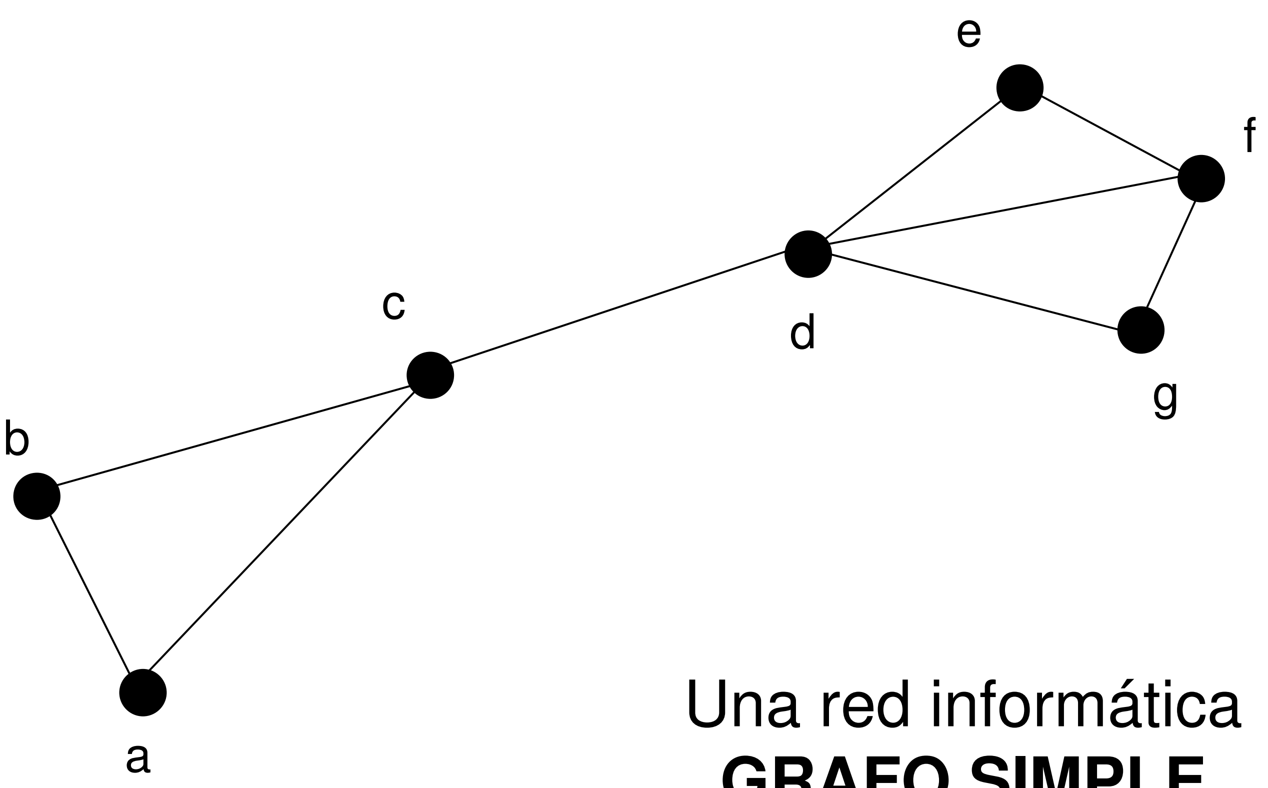
- La teoría de grafos es una disciplina antigua con aplicaciones modernas
- Los grafos son estructuras discretas que constan de vértices y de aristas que conectan entre sí estos vértices
- Los grafos se emplean para:
  - Estudiar la estructura de la red de internet
  - Determinar si dos ordenadores están conectados
  - Determinar el camino más corto entre dos ciudades en una red de transporte
  - ....

Terminología básica

- Un grafo simple $G = (V, E)$ es una pareja formada por
  - $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un conjunto no vacío de vértices
  - $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ un conjunto de pares no ordenados de vértices diferentes, las aristas (edges)

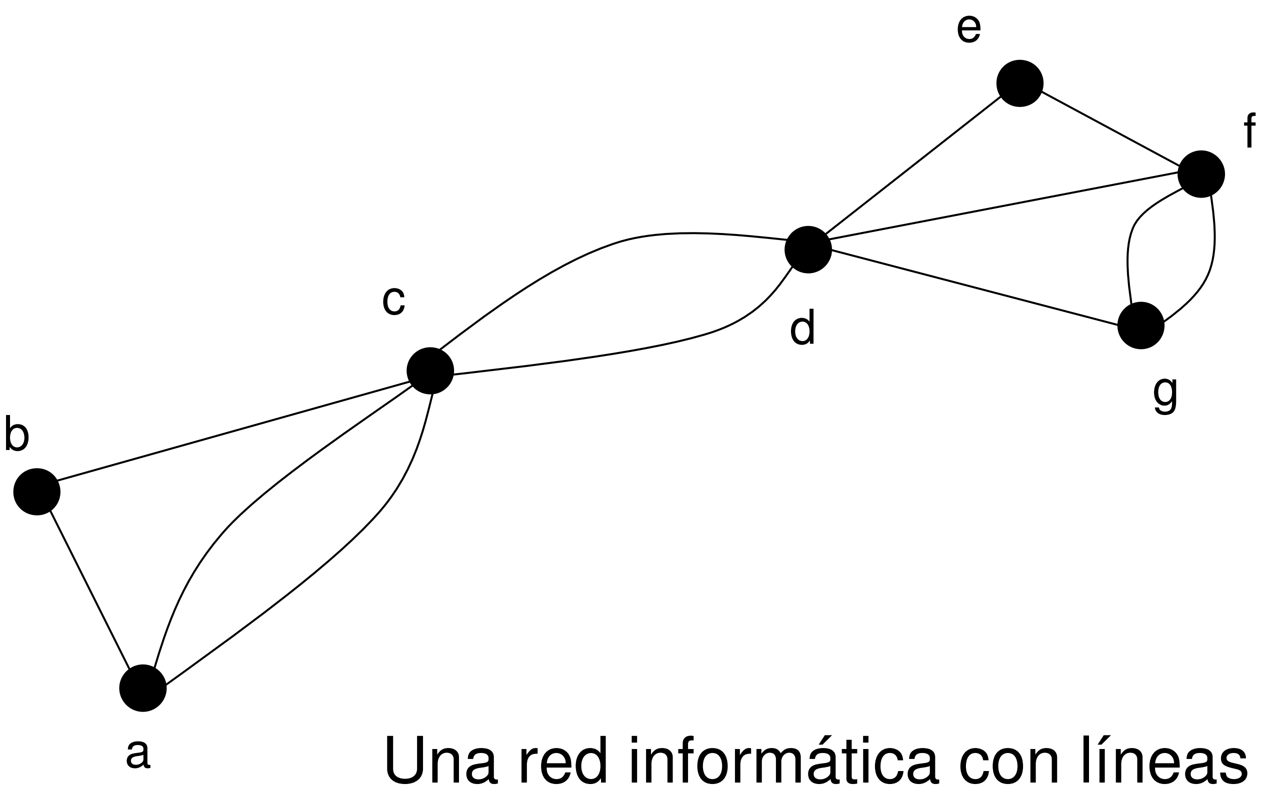
    $e = \{v_1, v_2\} = v_1v_2 = v_2v_1$
  - Dado $e = v_1v_2$ decimos:
    - v_1 y v_2 son vértices adyacentes
    - e es incidente con los vértices v_1 y v_2
    - v_1 y v_2 son extremos de la arista e
    - La arista e conecta v_1 y v_2

Los vértices representan ordenadores
Los segmentos representan líneas telefónicas entre ordenadores



Una red informática
GRAFO SIMPLE

Cuando hay mucho tráfico de información puede haber líneas múltiples



Una red informática con líneas múltiples

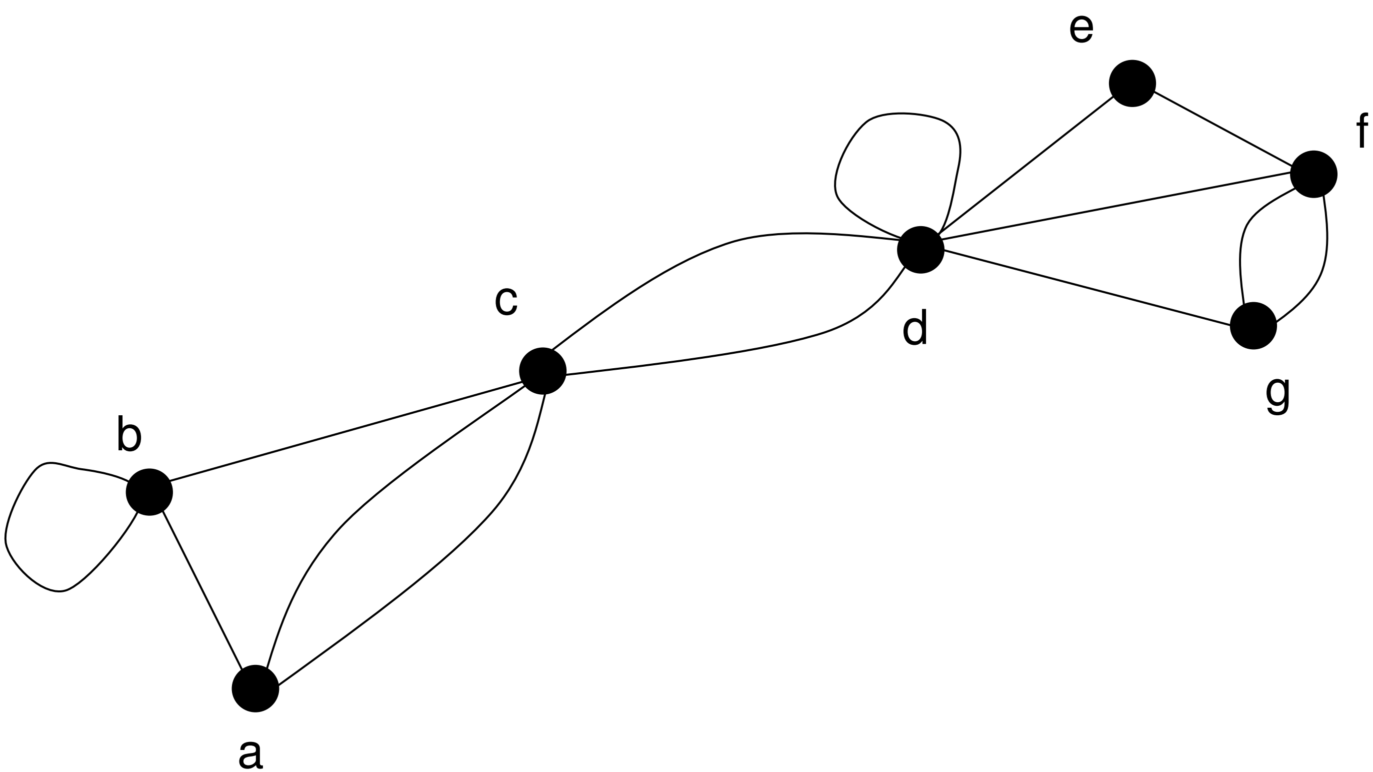
MULTIGRAFO

Terminología básica

- Un multigrafo G = (V, E) consta de
  - $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un conjunto no vacío de vértices
  - $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ un multiconjunto conjunto de aristas

    e_1 y e_2 son aristas múltiples o paralelas si unen los mismos vértices

    Si $v_1 = v_2$ la arista recibe el nombre de bucle o lazo



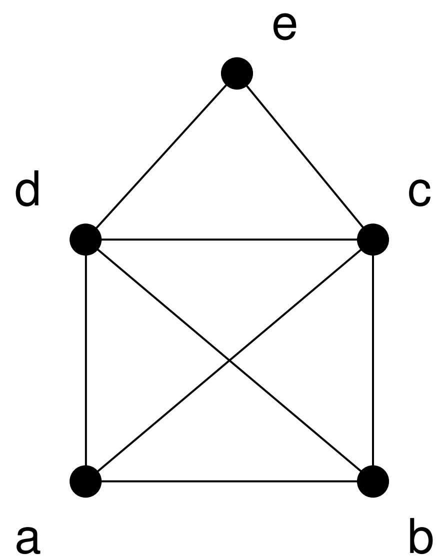
Una red informática con líneas múltiples y bucles

PSEUDOGRAFO

Terminología básica

- Un grafo de orden n posee n vértices
- La medida de un grafo es el número de aristas

Grafo de orden 5 y medida 8



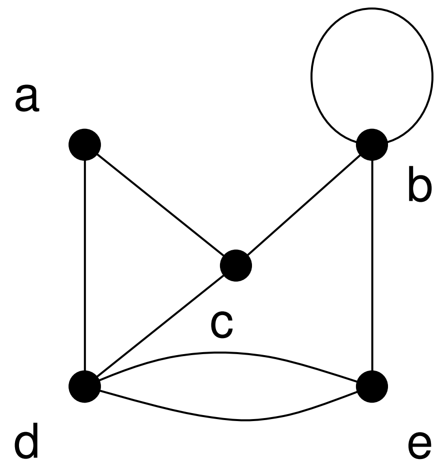
Terminología básica

- Dado un grafo $G = (V, E)$, el grado de un vértice $v \in V$, $\delta(v)$, es el número de aristas incidentes en él.

  Nota: los bucles inciden doblemente en las aristas (convenio)
  - Si $\delta(v) = 0$, v es vértice aislado
  - Si $\delta(v) = 1$, v es vértice hoja o colgante

Halla el grado de los vértices del grafo de la figura

- $\delta(a) =$
- $\delta(b) =$
- $\delta(c) =$
- $\delta(d) =$
- $\delta(e) =$

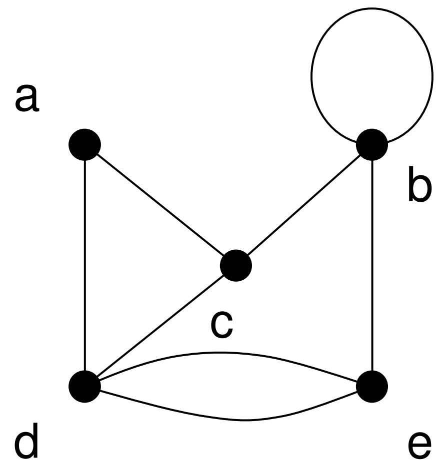


Halla el grado de los vértices del grafo de la figura

- $\delta(a) = 2$
- $\delta(b) = 4$
- $\delta(c) = 3$
- $\delta(d) = 4$
- $\delta(e) = 3$

$$\sum_{v\in V} \delta(v) = 2m$$

2+4+3+4+3 = 16 = 2·8



TEOREMA: La suma de los grados de un grafo coincide con el doble del numero de aristas

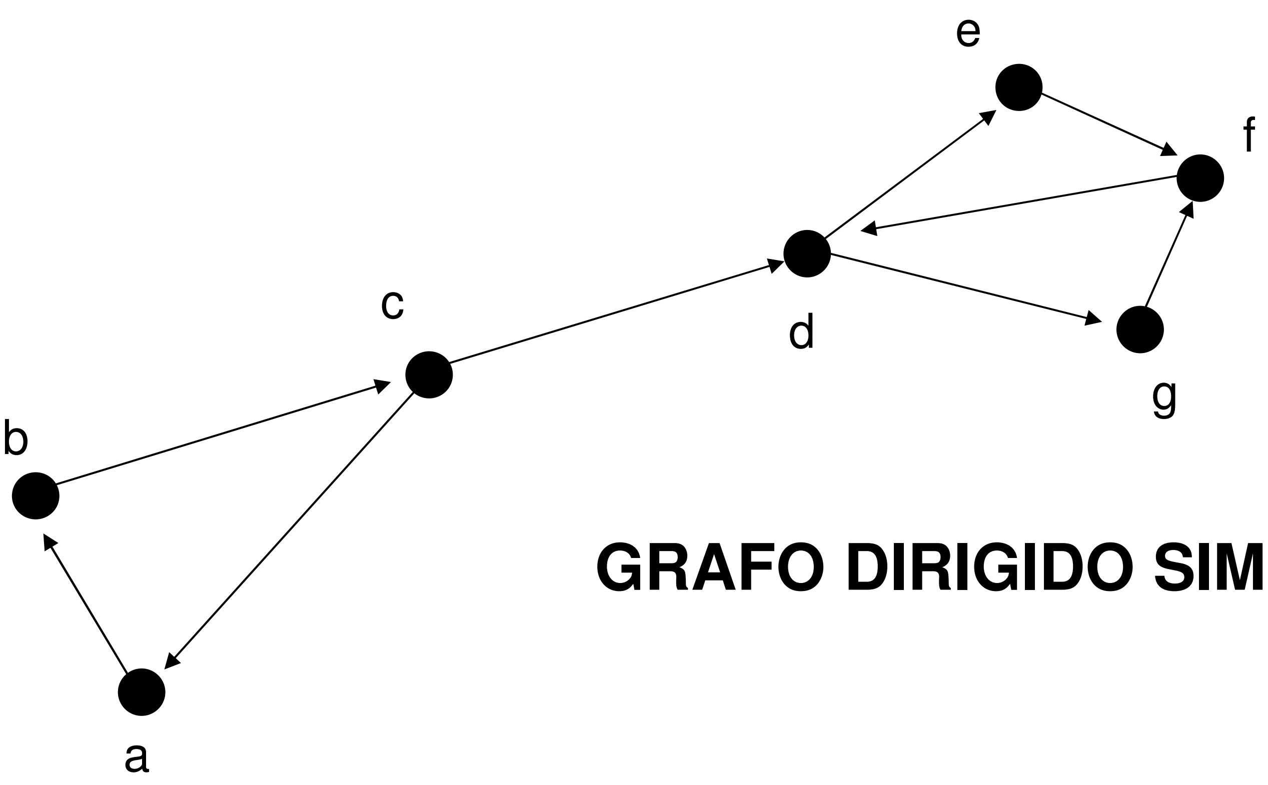
$$\sum_{v\in V} \delta(v) = 2m$$

COROLARIO: En un grafo, el número de vértices de grado impar siempre es par

Grafos dirigidos

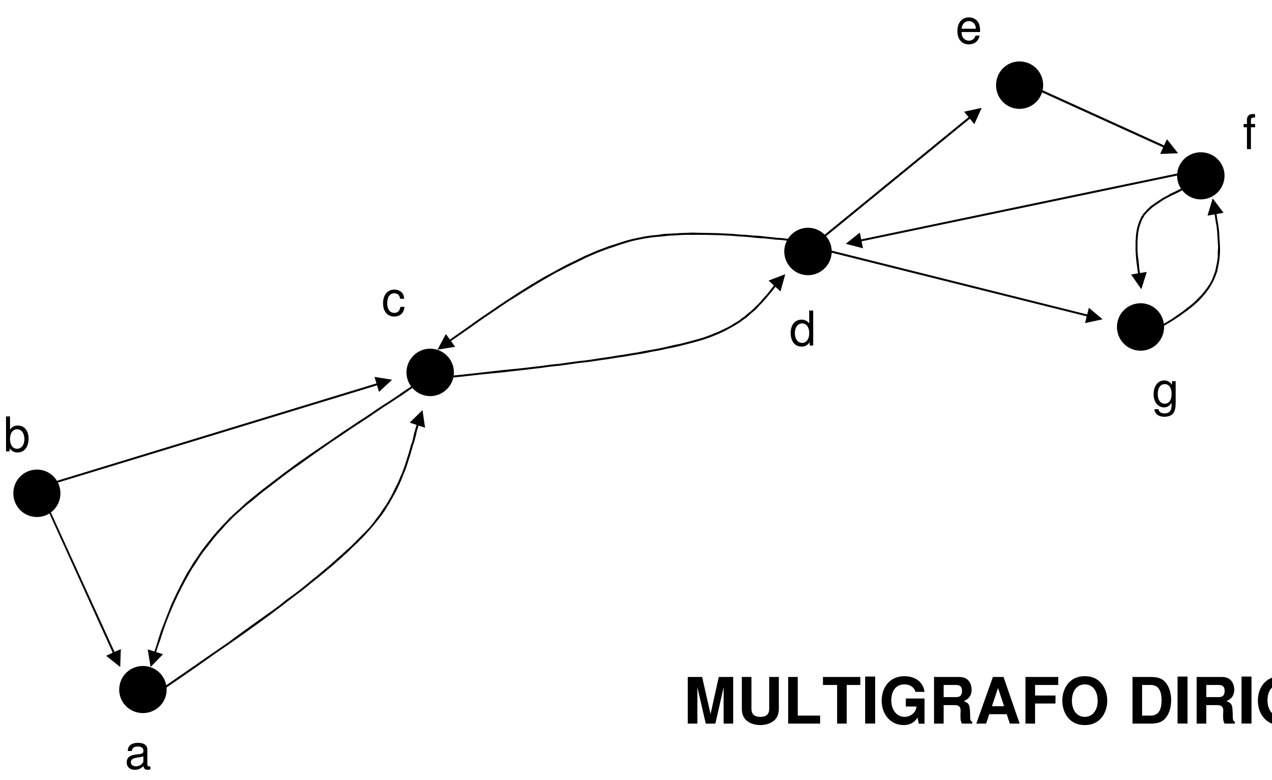
- Un **grafo dirigido o digrafo** $G = (V, E)$ consta de un conjunto V de vértices y de un conjunto E de arcos, que son pares **ordenados** de elementos de V. Se usa una flecha desde u a v para indicar la dirección del arco uv

Los vértices representan ordenadores
Las flechas representan líneas telefónicas unidireccionales entre ordenadores



GRAFO DIRIGIDO SIMPLE

Se aceptan arcos múltiples que unen los mismos vértices



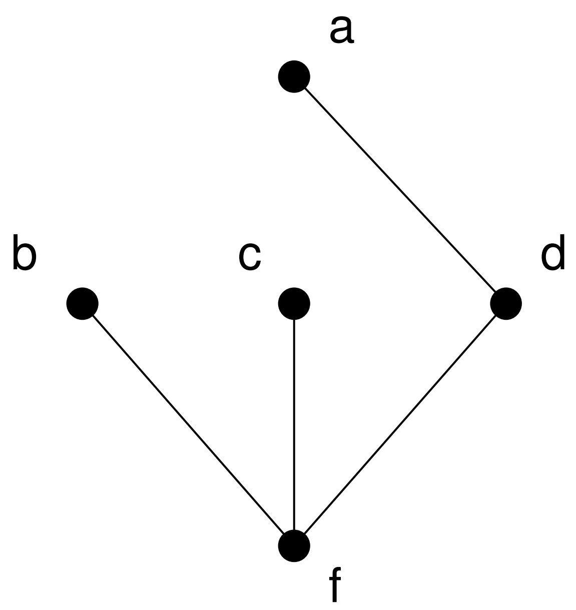
MULTIGRAFO DIRIGIDO

Grafos obtenidos a partir de otros

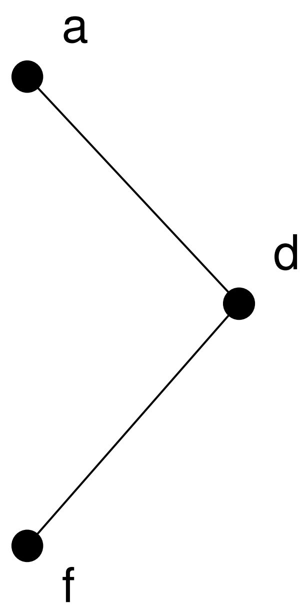
- Dado un grafo $G = (V, E)$, decimos que $G_1 = (V_1,E_1)$ es un subgrafo de G, si
  - G_1 es un grafo
  - $V_1 \subseteq V$ y $E_1 \subseteq E$

  G_1 se obtiene eliminando vértices y/o aristas

  Cuando $V_1 = V$, G_1 es subgrafo maximal de G



$G\ (V, E)$

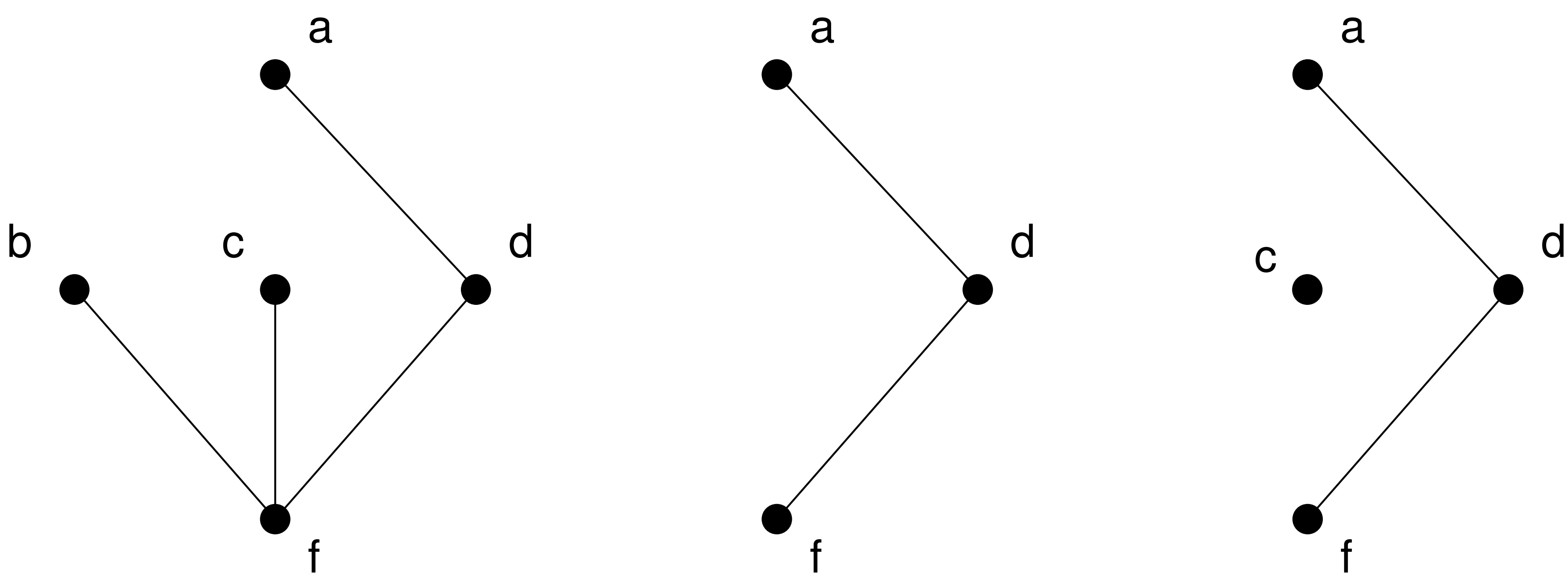


$G_1\ (V_1, E_1)$

- G_1 es subgrafo de G
  - $V_1 = \{a, d, f\} \subseteq \{a, b, c, d, e, f\} = V$
  - $E_1 = \{ad, df\} \subseteq \{ad, bf, cf, df\} = E$
- G_1 no es subgrafo maximal

Grafos obtenidos a partir de otros

- Sea G = (V, E), dado U $\subseteq$ V, llamamos subgrafo de G inducido por U a aquel cuyos vértices forman U y con aristas de E que tienen extremos en U



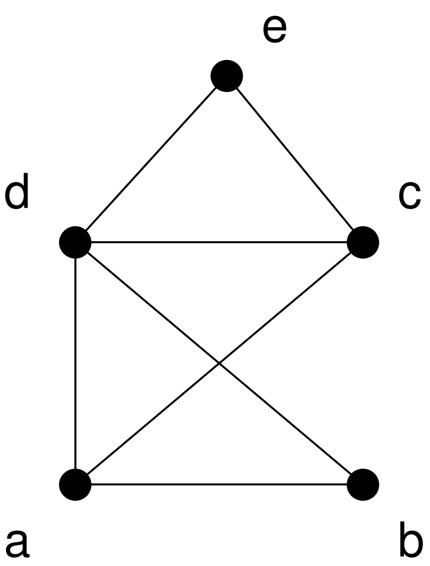
$G\ (V, E)$ $\qquad$ $G_1\ (V_1, E_1)$ $\qquad$ $G_2\ (V_2, E_2)$

- G_1 es subgrafo de G inducido por $U = \{a, d, f\}$
- G_2 no es subgrafo de G inducido por $U = \{a, c, d, f\}$

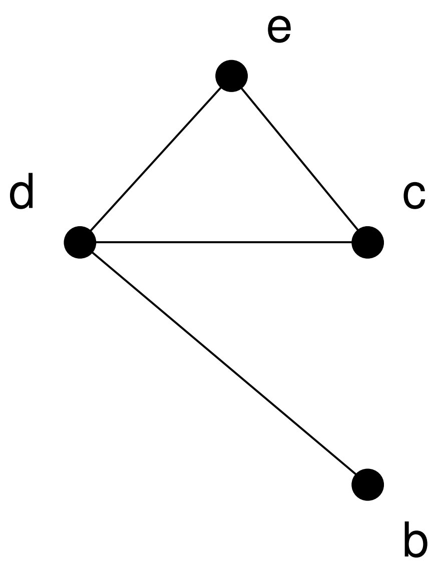
Grafos obtenidos a partir de otros

Dado un grafo $G = (V, E)$

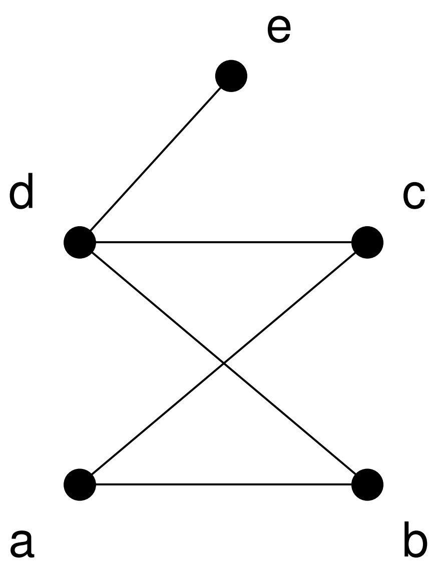
- El subgrafo $G - W$, $W \subset V$, es el obtenido al eliminar los vértices de W y sus aristas incidentes
- El subgrafo $G - F$, $F \subset E$, es el obtenido al eliminar las aristas de F manteniendo el conjunto de vértices



$G\ (V, E)$



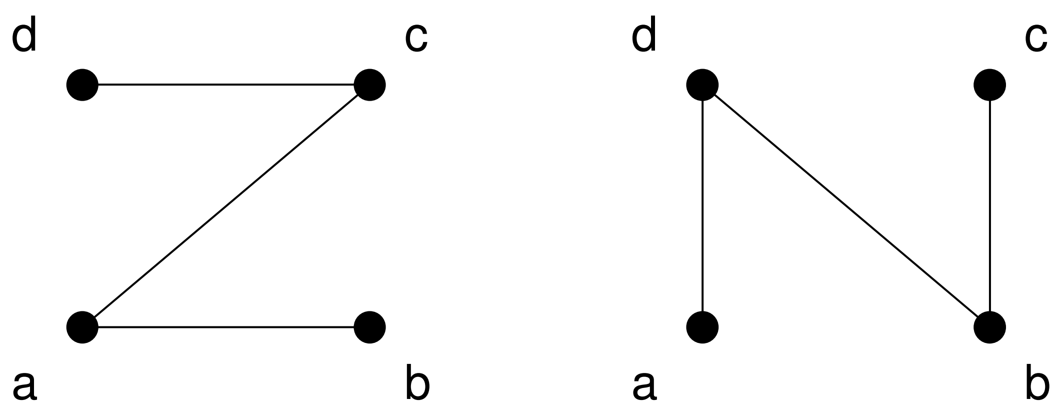
$G - W = G - \{ a \}$



$G - F = G - \{ ec, ad \}$

Grafos obtenidos a partir de otros

- El grafo complementario de $G = (V, E)$ es $\overline{G} = (V, \overline{E})$, dos vértices son adyacentes en $\overline{G}$ si y sólo si no lo son en G



G $\qquad\qquad$ $\overline{G}$

Grafos obtenidos a partir de otros

Dados dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ llamamos grafo unión $G_1 \cup G_2$ al grafo cuyo conjunto de vértices es $V_1 \cup V_2$ y cuyo conjunto de aristas es $E_1 \cup E_2$

Representación matricial de grafos

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con

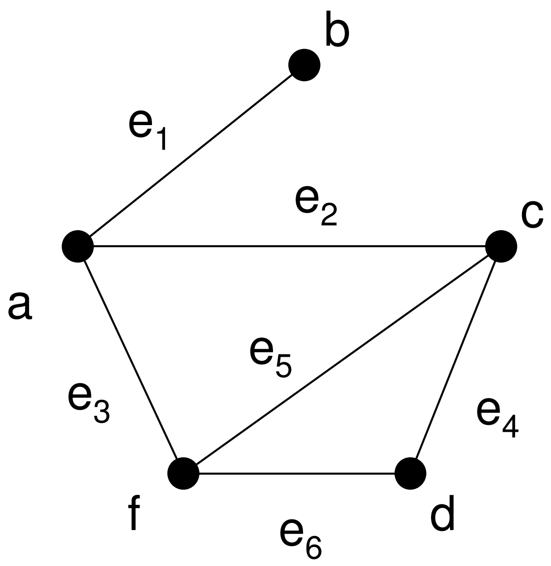
$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$

- La matriz de adyacencia de G, $A(G) = [a_{ij}] \in \boldsymbol{M}_{nxn}$ tal que

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

- La matriz de incidencia de G, $M(G) = [m_{ij}] \in \boldsymbol{M}_{nxm}$ tal que

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } v_i \text{ es extremo de } e_j \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

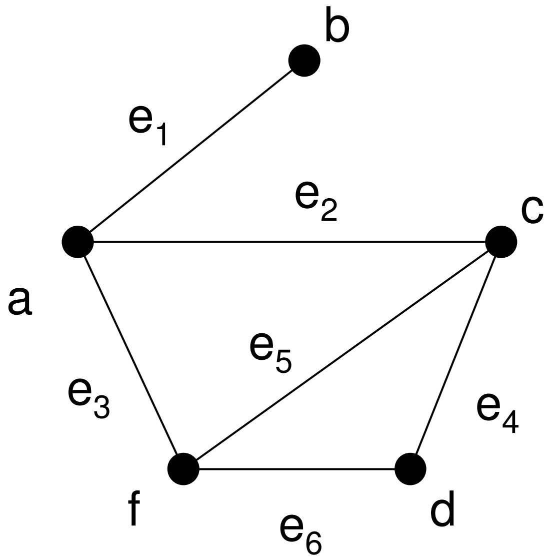


$A =$

$M =$

Simétrica
0 en la diagonal

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



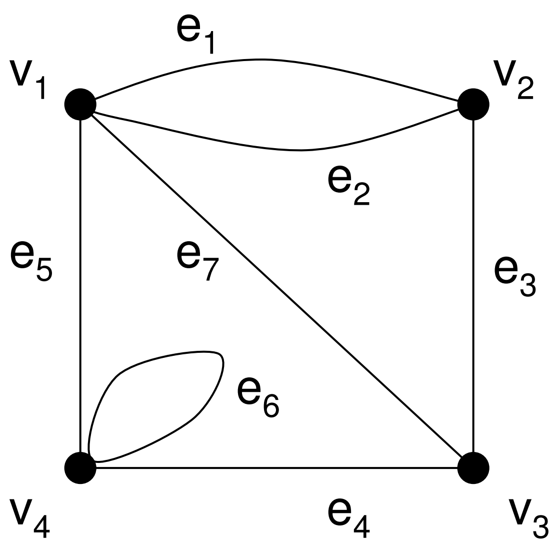
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Representación matricial de grafos

Sea $G = (V, E)$ un pseudografo con

$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$

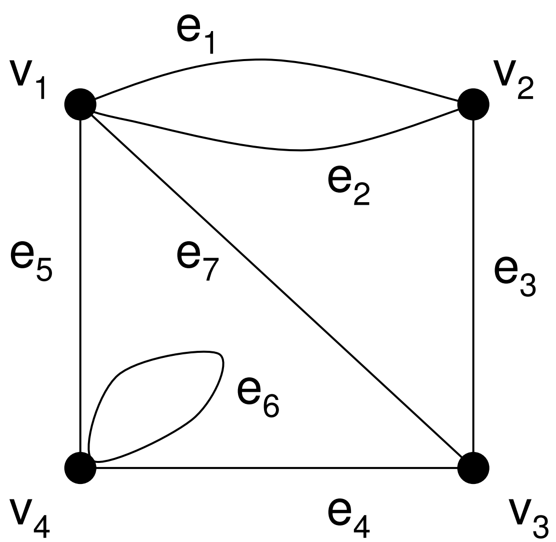
- La matriz de adyacencia de G, $A(G) = [a_{ij}] \in \boldsymbol{M}_{nxn}$ donde a_{ij} es el número de aristas que van de v_i a v_j
- La matriz de incidencia de G, $M(G) = [m_{ij}] \in \boldsymbol{M}_{nxm}$ donde m_{ij} es el número de veces que la arista e_j incide en el vértice v_i (m_{ij} toma valores 0, 1 o 2)



G (V, E)

$A =$

$M =$



G (V, E)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Dados $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

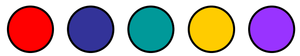
$E = \{e_1=v_1v_2, e_2=v_2v_3, e_3=v_3v_4, e_4=v_4v_5, e_5=v_5v_1\}$

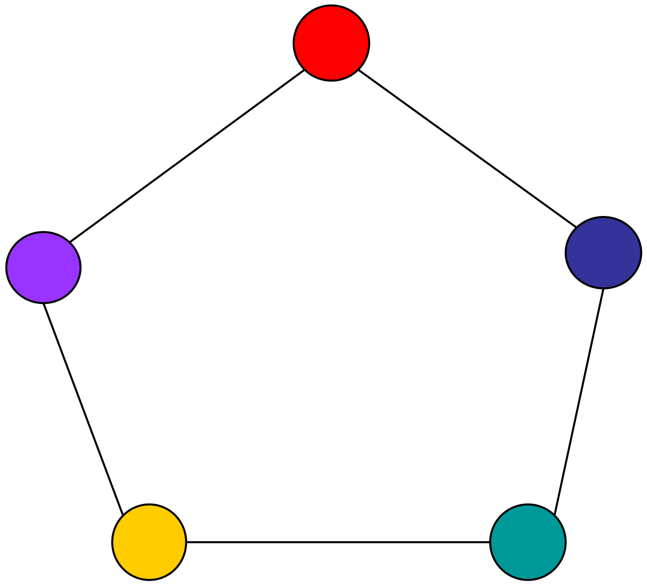
dibujar el grafo $G = (V, E)$

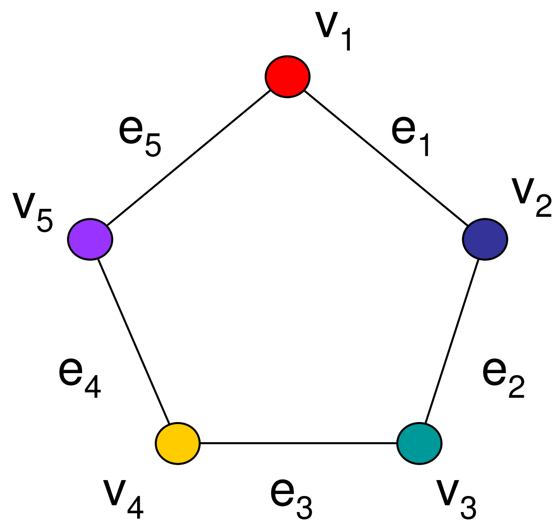
Dados $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E = \{e_1=v_1v_2, e_2=v_2v_3, e_3=v_3v_4, e_4=v_4v_5, e_5=v_5v_1\}$

dibujar el grafo $G = (V, E)$





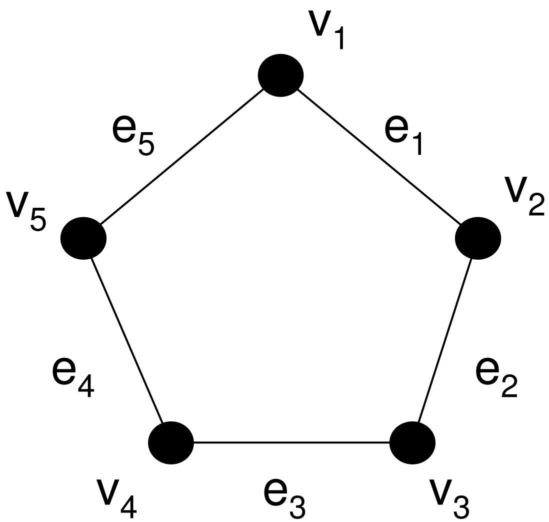


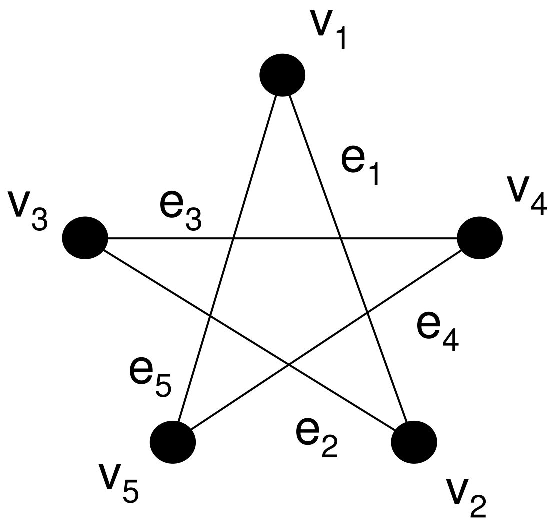
Todas las figuras representan el mismo grafo

Dados $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E = \{e_1=v_1v_2, e_2=v_2v_3, e_3=v_3v_4, e_4=v_4v_5, e_5=v_5v_1\}$

dibujar el grafo $G = (V, E)$





Ambas figuras representan el mismo grafo

Isomorfismo

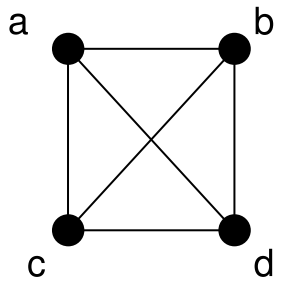
- Se dice que dos grafos simples $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son **isomorfos** si existe una biyección $f: V_1 \to V_2$ tal que

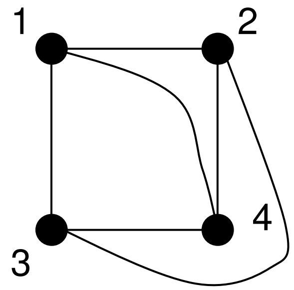
  $\forall\ u,v \in V_1\ \ \{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_2$
- La función f que satisface esta condición es un **isomorfismo de grafos** entre los grafos G_1 y G_2
- Dos grafos simples son isomorfos si existe una función biyectiva entre los dos conjuntos de vértices que preserva las adyacencias

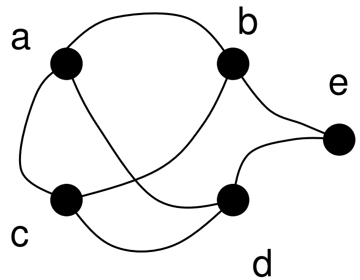
Propiedades invariantes por isomorfismo:

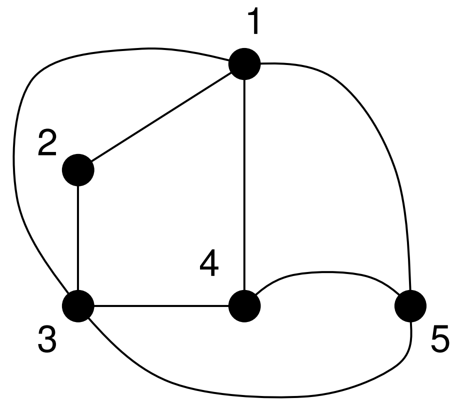
- Dos grafos isomorfos deben tener el mismo número de vértices y aristas
- Si f es isomorfismo de grafo, entonces para cada $u \in V_1$ se tiene que $\delta(u) = \delta(f(u))$

¿Son isomorfos? En caso afirmativo, indica el isomorfismo









$$V_1 \xrightarrow{f} V_2$$

$a \longrightarrow 1$

$b \longrightarrow 2$

$c \longrightarrow 3$

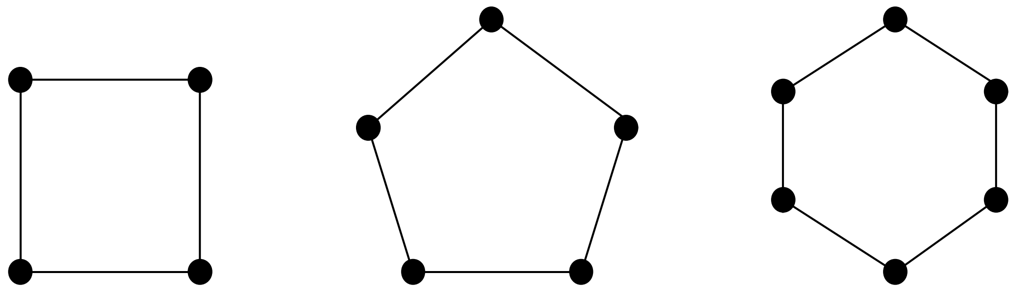
$d \longrightarrow 4$

No son isomorfos,
G_1 tiene 7 aristas
y G_2 tiene 8

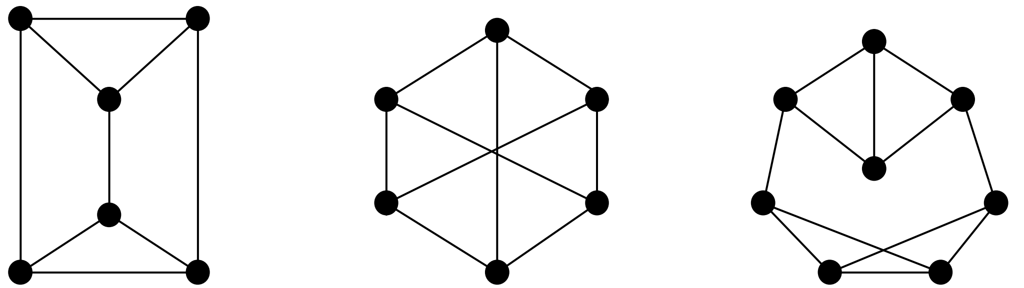
Tipos de grafos

- Un grafo $G = (V,E)$ se dice grafo **regular** de grado k si cada vértice tiene grado k
- Los grafos k-regulares satisfacen

$$k\,n = 2\,m$$

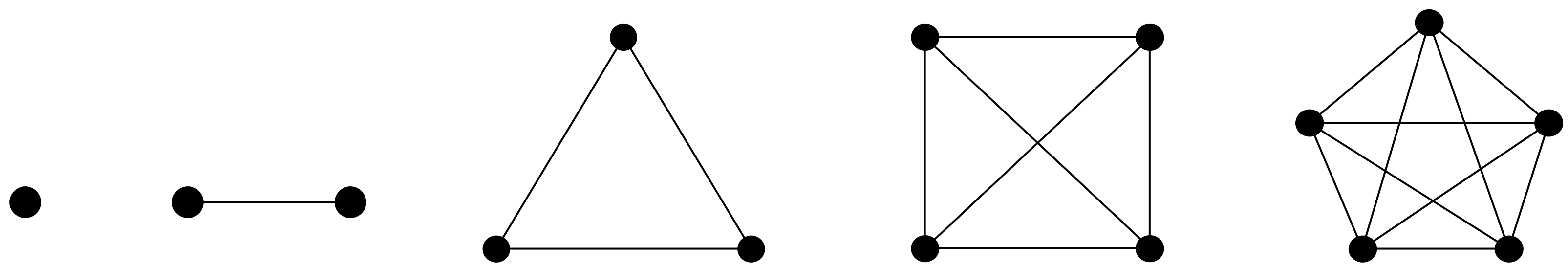


Grafos regulares de grado 2



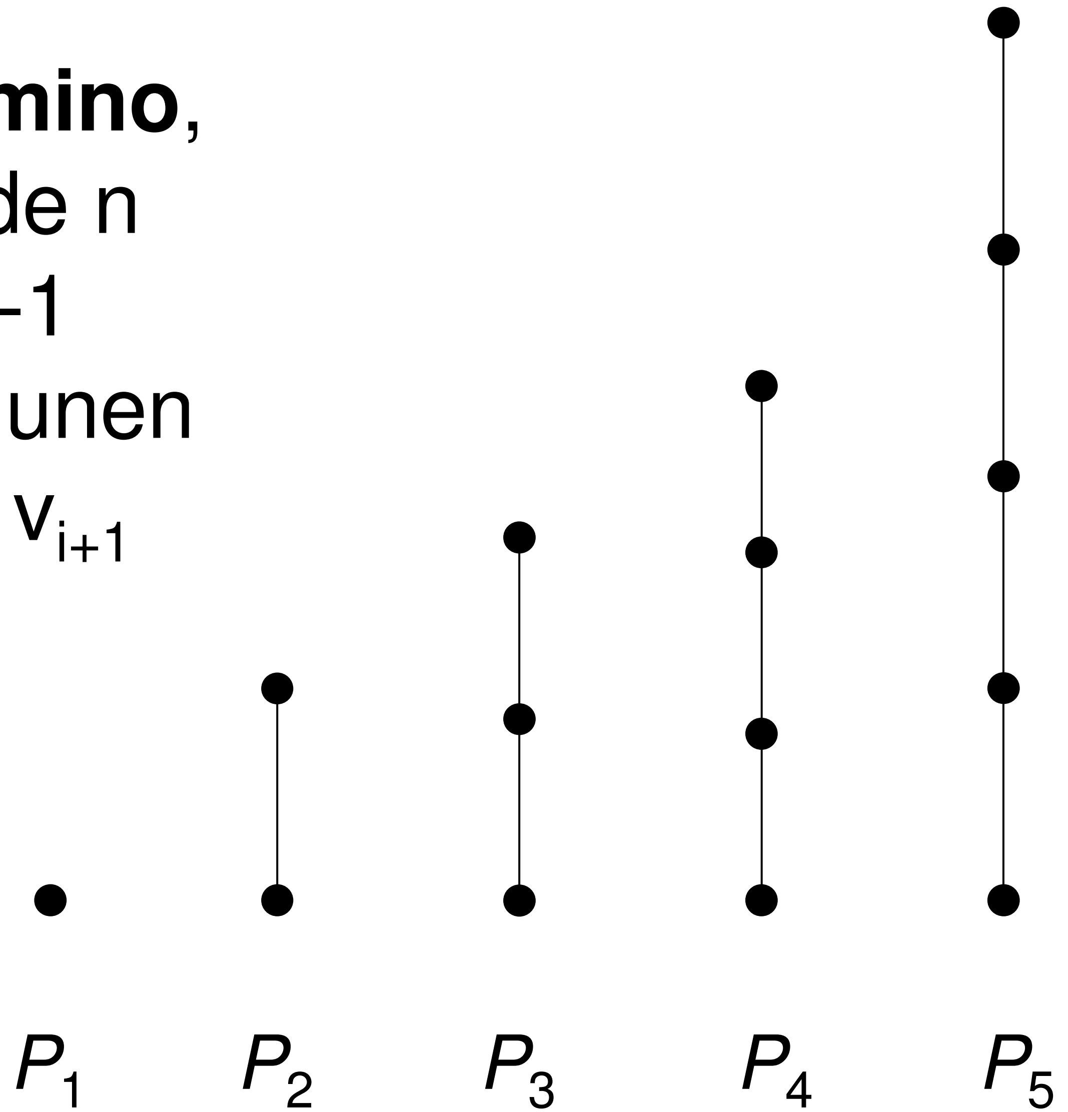
Grafos regulares de grado 3

- Un grafo G = (V,E) se dice grafo **completo** si cada vértice está conectado a cualquier otro vértice en G
- El grafo completo de n vértices se denota K_n

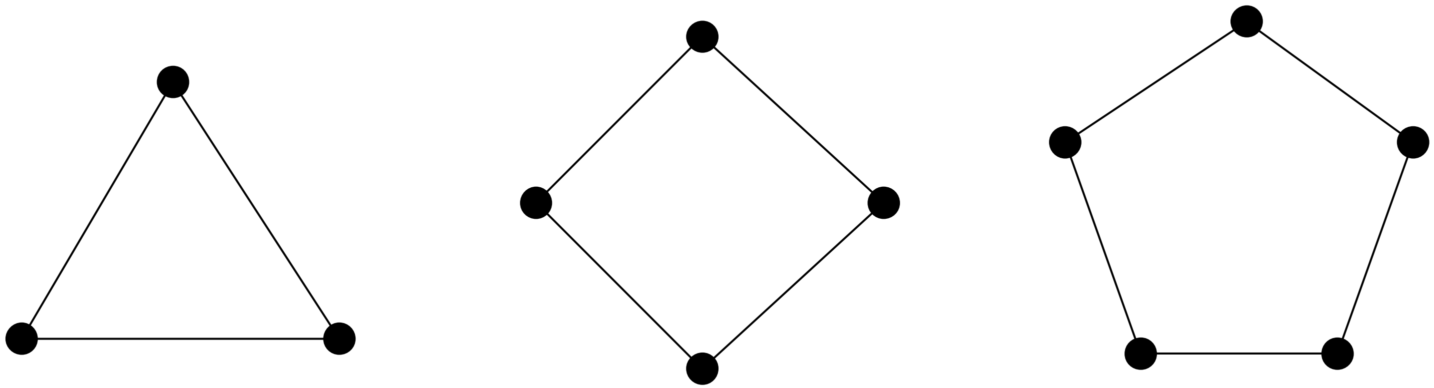


K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

- El grafo **camino**, P_n, consta de n vértices y n-1 aristas que unen cada v_i con v_{i+1}

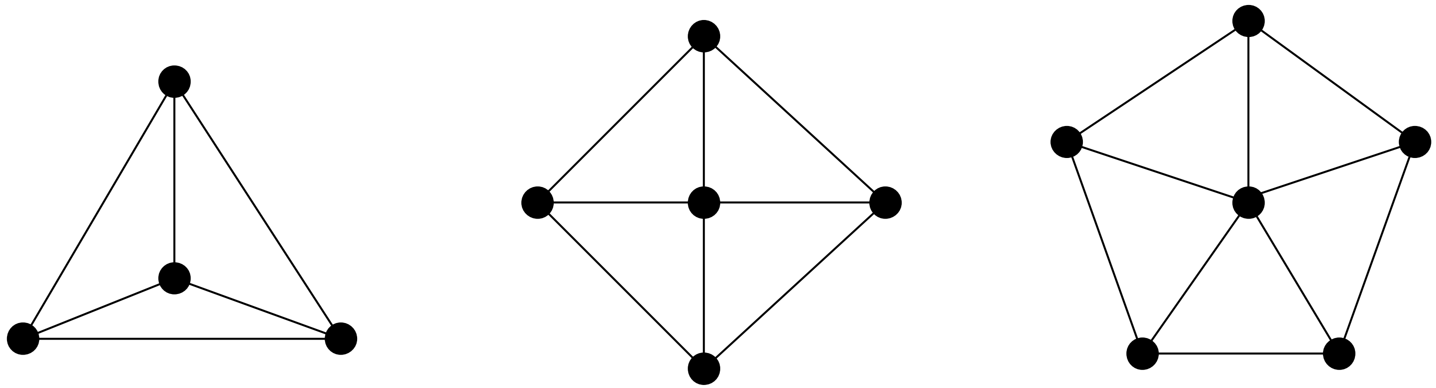


- El **ciclo**, C_n, n $\geq$ 3, consta de n vértices y n aristas



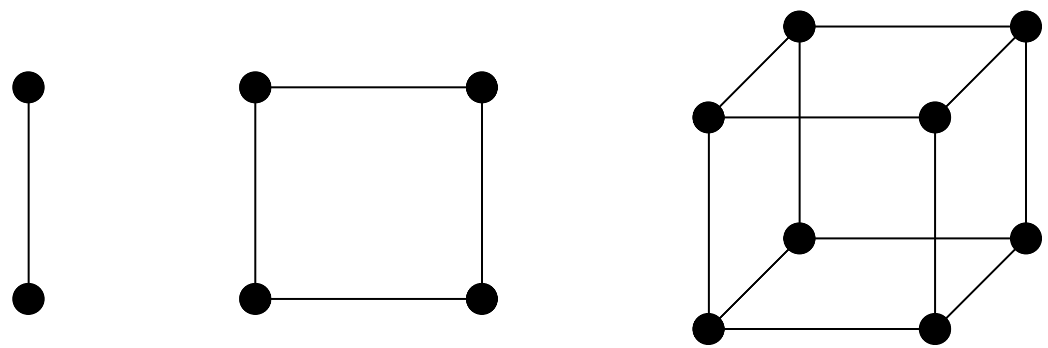
C_3 C_4 C_5

- Las **ruedas** W_n se obtienen al añadir un vértice adicional al ciclo y conectar este nuevo vértice con cada uno de los n vértices mediante una nueva arista



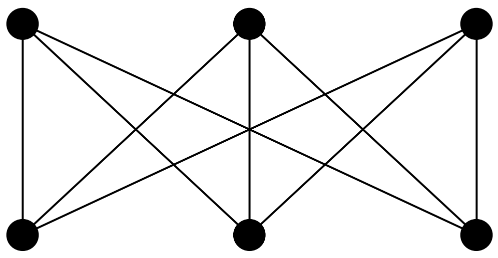
W_4 W_5 W_6

- Los **hipercubos** de dimensión n, Q_n, es el grafo cuyos vértices representan 2^n cadenas de bits de longitud n (dos vértices son adyacentes si difieren en una posición)

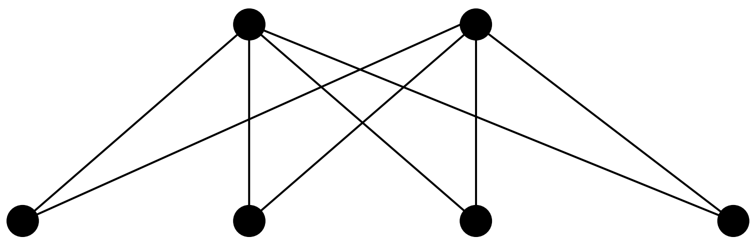


Q_1 Q_2 Q_3

- Un grafo simple $G = (V, E)$ es **bipartito** si el conjunto de vértices V se puede dividir en dos subconjuntos disjuntos V_1 y V_2, de tal manera que toda arista une un vértice de V_1 con un vértice de V_2
- El grafo **bipartito completo** $K_{n,p}$ es el grafo bipartito con n vértices en V_1 y p vértices en V_2 de tal manera que toda arista une un vértice de V_1 con un vértice de V_2



$K_{3,3}$



$K_{2,4}$

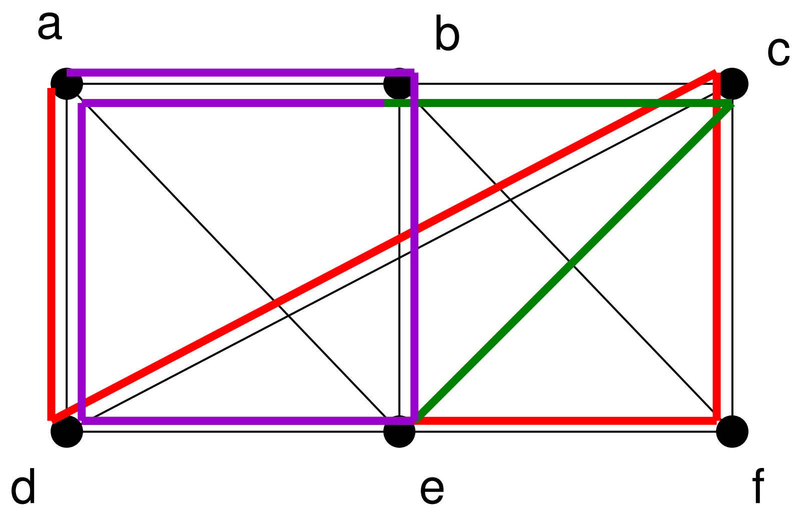
Caminos y ciclos

- Un **camino** o recorrido en un grafo G es una sucesión de vértices y aristas
- Un **camino de longitud l** en un grafo G se representa mediante una secuencia de vértices $(u_0,u_1,\ldots,u_l)$ tales que, para todo $i=0,\ldots.,l$ $e_i=u_{i-1}u_i$ son aristas de G

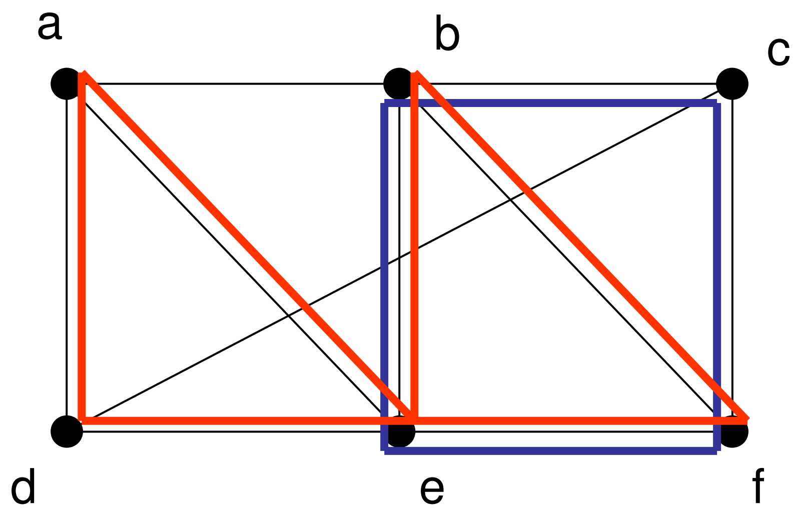
  El vértice u_0 es el vértice inicial y u_l el vértice final

Caminos y ciclos

- Si el vértice inicial coincide con el vértice final el camino es **cerrado**, en caso contrario el camino es abierto
- Un camino es **simple** si no contiene la misma arista más de una vez
- Todo camino cerrado en un grafo que no repite aristas es un **circuito**
- Un **ciclo** es un camino cerrado sin vértices repetidos (excepto los extremos)



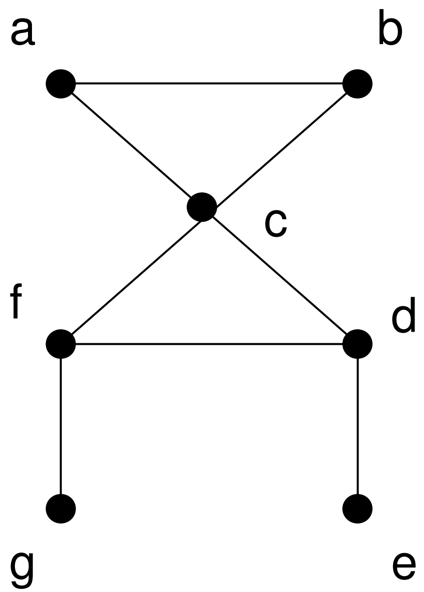
- (a, d, c, f, e) es un camino simple de longitud 4
- (d, e, c, a) no es camino ya que ec no es arista de G
- (a, b, e, d, a, b) es un camino que no es simple ya que se repite la arista ab



- (a, e, b, f, e, d, a) es un circuito pero no es un ciclo porque se repite el vértice e
- (b, c, f, e, b) es un ciclo

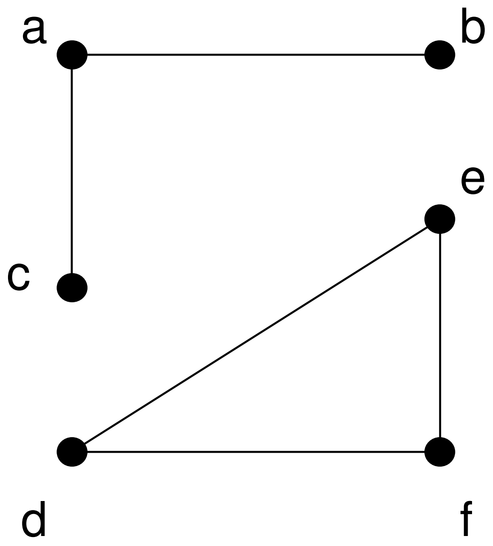
Conexión

- Se dice que un grafo es **conexo** si hay un camino entre cada par de vértices distintos del grafo

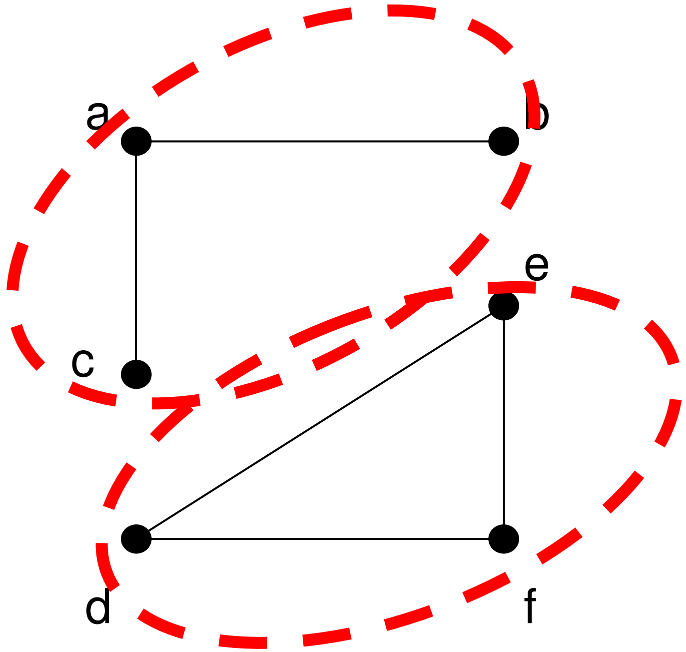


CONEXO

NO CONEXO

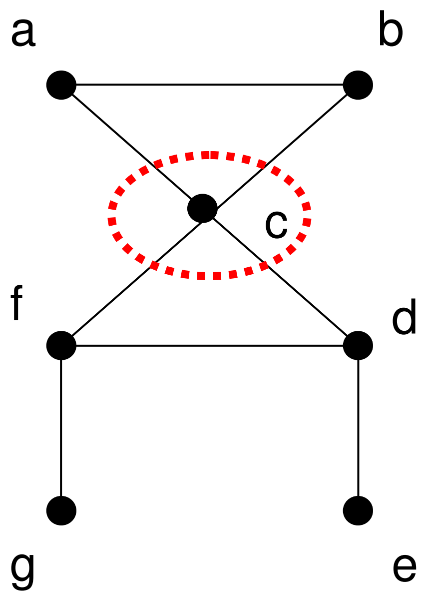


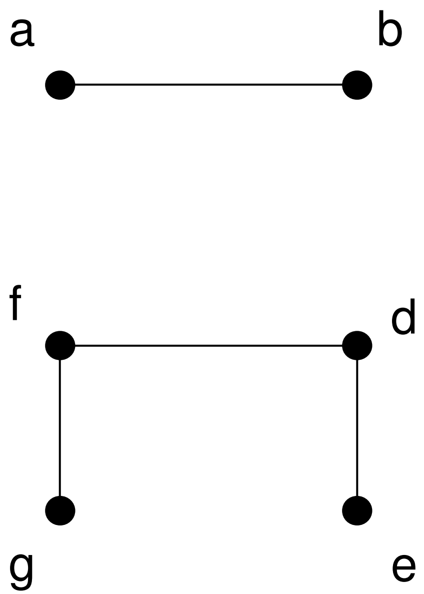
- Un grafo que no es conexo, es la unión de dos o más subgrafos conexos disjuntos que reciben el nombre de **componentes conexas** del grafo



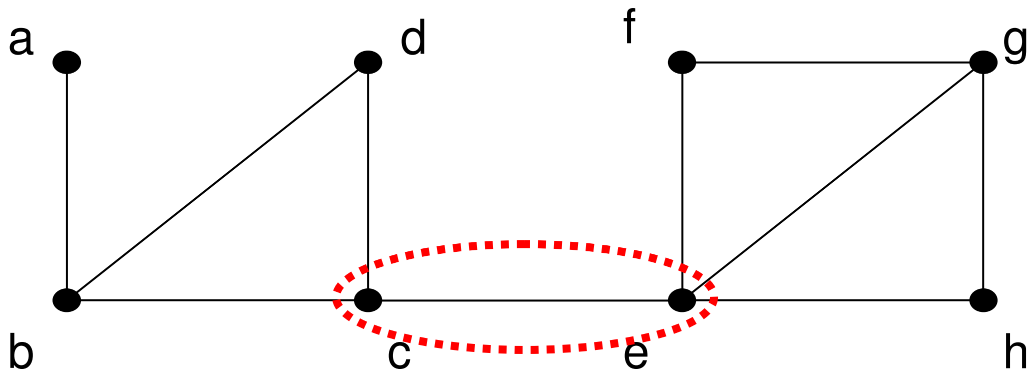
TEOREMA: Hay un camino simple entre cada par de vértices distintos de un grafo conexo

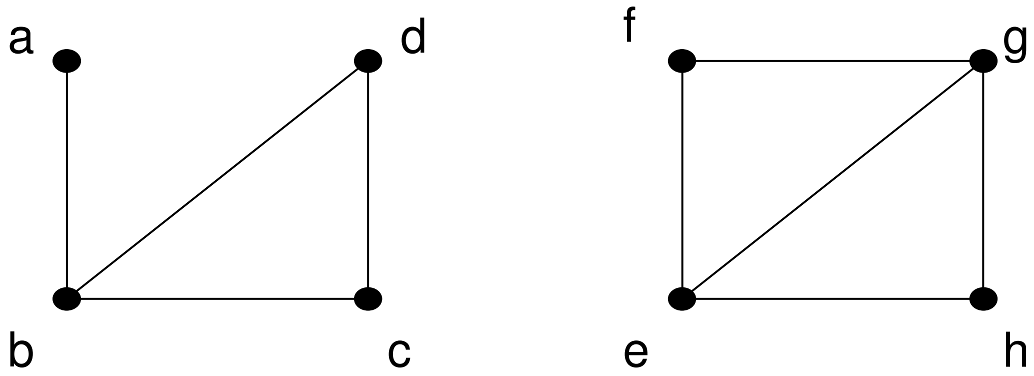
- Un vértice de G es **vértice de corte** o articulación, si al eliminarlo del grafo con todas las aristas incidentes con él se obtiene un subgrafo de G con más componentes





- Una arista de G es arista de corte o **puente**, si al eliminarlo del grafo se obtiene un subgrafo de G con más componentes

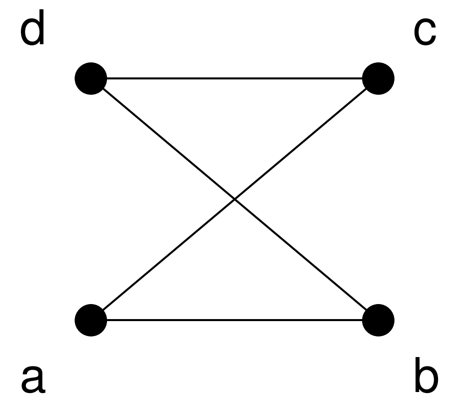




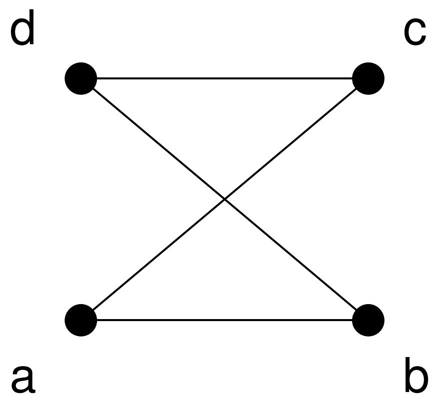
Número de caminos

TEOREMA: Sea G un grafo y A su matriz de adyacencia, el número de caminos distintos de longitud r ($r>0$) de v_i a v_j es igual al elemento ij de la matriz A^r

$A =$

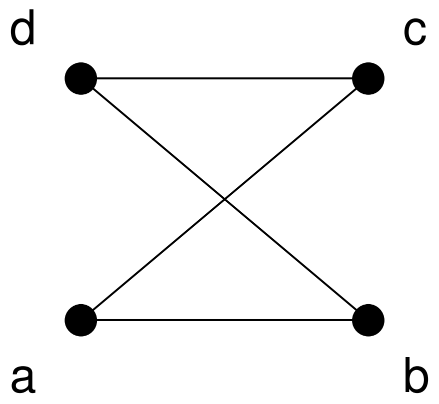


$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



El número de caminos entre a y d de longitud 4

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



El número de caminos entre a y d de longitud 4

$$A^4 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Hay 8 caminos

- Camino: es una sucesión de vértices y aristas
- Longitud del camino: número de aristas
- Camino cerrado: vértice inicial coincide con vértice final
- Circuito: camino cerrado en un grafo que no repite aristas
- Ciclo: es un camino cerrado sin vértices repetidos (excepto los extremos)

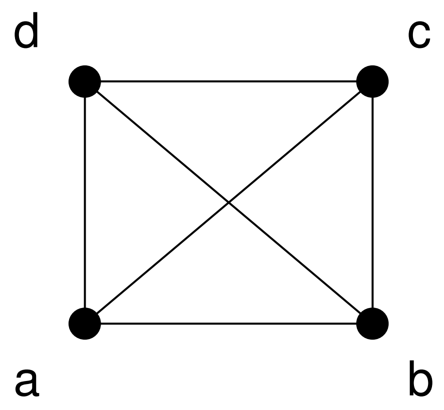
Grafo eulerianos

Se pueden visitar los vértices cuantas veces sea necesario,

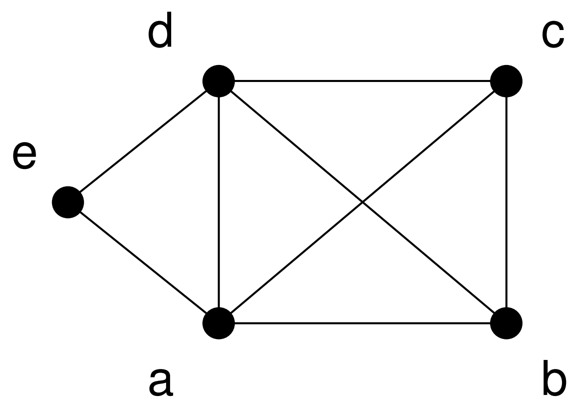
pero las aristas se pueden repetir solo una vez

Dado un grafo simple G = (V, E)

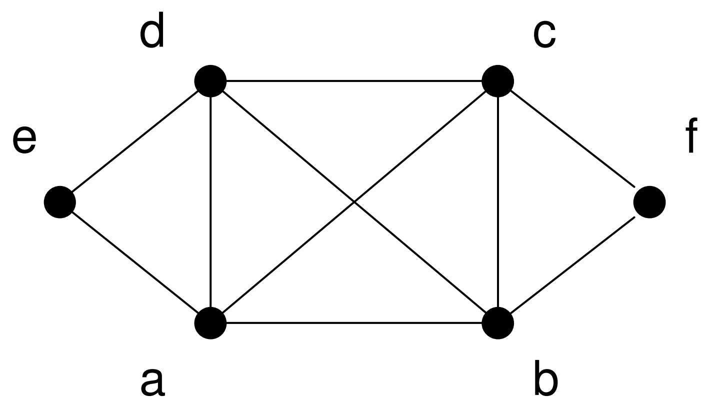
- un **camino** (recorrido) **euleriano** es un camino que pasa exactamente una vez por cada una de las aristas de G
- un **circuito euleriano** es un circuito que contiene todas las aristas de G
- un **grafo euleriano** es aquel que admite un circuito euleriano



no admite ningún
camino euleriano



Camino euleriano
(c, d, b, a, e, d, a, c, b)



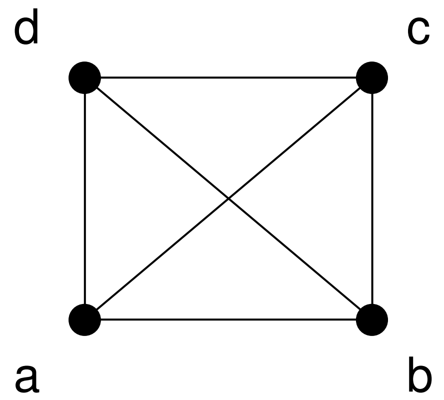
Circuito euleriano
(e, d, a, c, d, b, f, c, b, a, e)

Criterios de existencia

- Teorema: Un multigrafo conexo contiene un camino euleriano, pero no un circuito euleriano, si y sólo si, tiene exactamente dos vértices de grado impar. (El camino euleriano empieza en estos vértices)
- Teorema: Un multigrafo conexo contiene un circuito euleriano, si y sólo si, cada uno de sus vértices tiene grado par

$\delta(a) =$; $\delta(b) =$

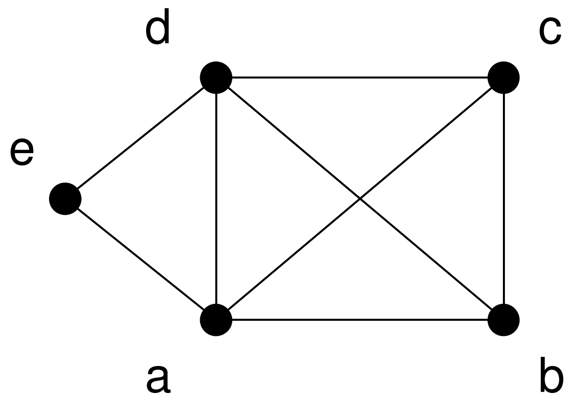
$\delta(c) =$; $\delta(d) =$



$\delta(a) =$; $\delta(b) =$

$\delta(c) =$; $\delta(d) =$

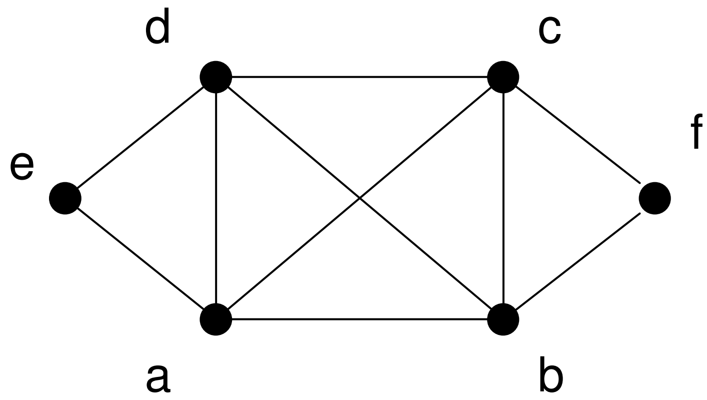
$\delta(e) =$



$\delta(a) =$; $\delta(b) =$

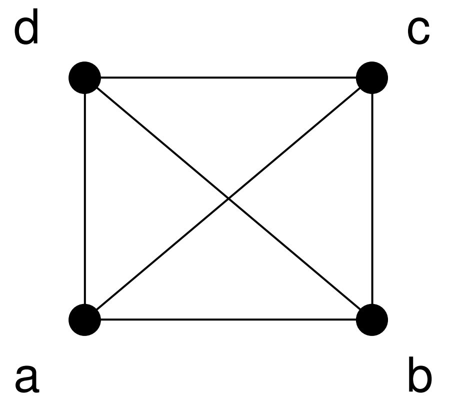
$\delta(c) =$; $\delta(d) =$

$\delta(e) =$; $\delta(f) =$



$\delta(a) = 3 \quad ; \quad \delta(b) = 3$

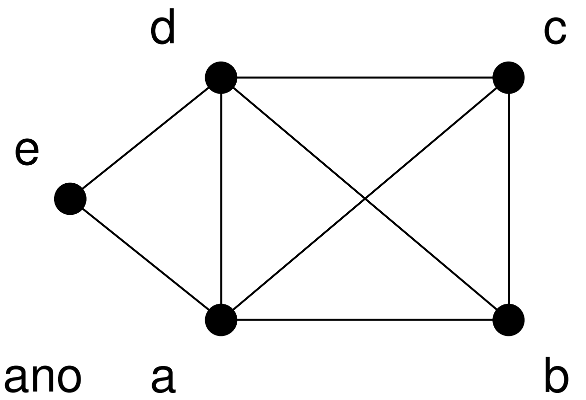
$\delta(c) = 3 \quad ; \quad \delta(d) = 3$



$\delta(a) = 4 \quad ; \quad \delta(b) = 3$

$\delta(c) = 3 \quad ; \quad \delta(d) = 4$

$\delta(e) = 2$

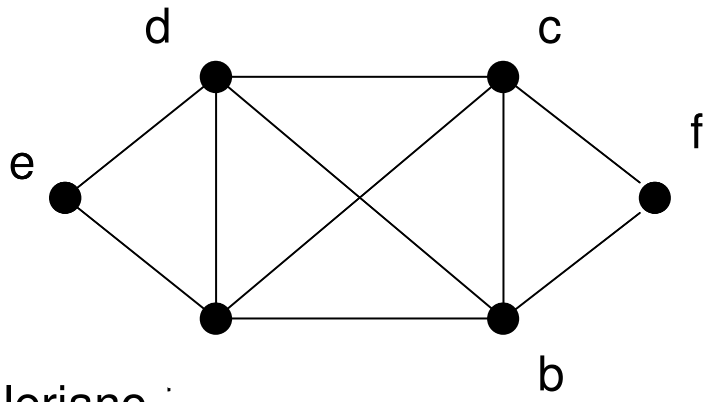


Dos vértices de grado impar: camino euleriano

$\delta(a) = 4 \quad ; \quad \delta(b) = 4$

$\delta(c) = 4 \quad ; \quad \delta(d) = 4$

$\delta(e) = 2 \quad ; \quad \delta(f) = 2$



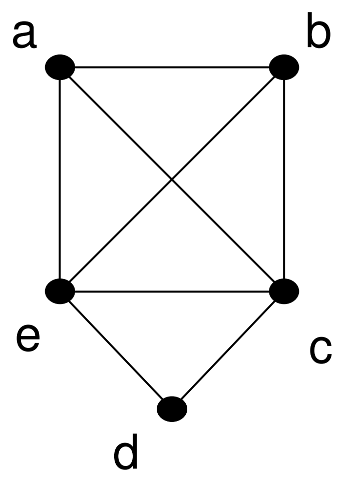
Todos los vértices de grado par: circuito euleriano

Grafo hamiltoniano

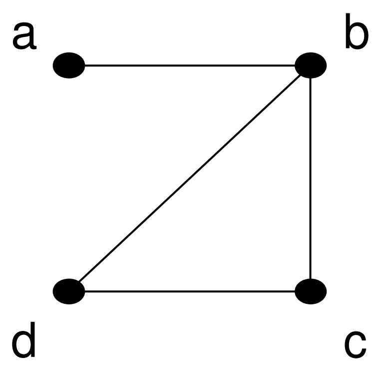
Los aristas se pueden recorrer una o mas veces

Dado un grafo simple G = (V, E),

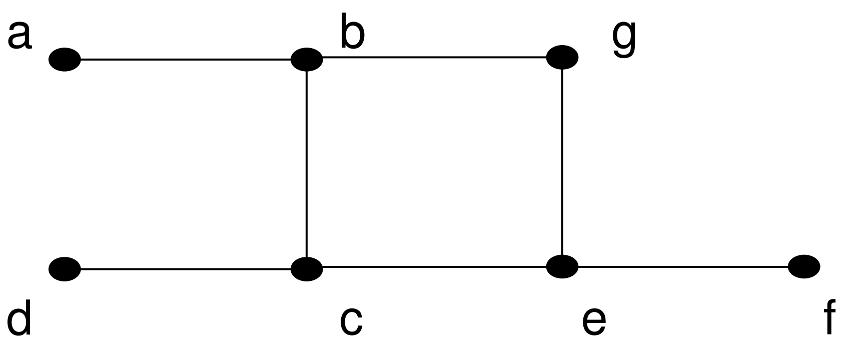
- un **camino hamiltoniano** es un camino simple que recorre todos los vértices del grafo exactamente una vez
- un **ciclo hamiltoniano** es un ciclo que contiene todos los vértices de G
- un **grafo hamiltoniano** es aquel que admite un ciclo hamiltoniano



ciclo hamiltoniano
(a, b, c, d, e, a)



camino hamiltoniano
(a, b, c, d)



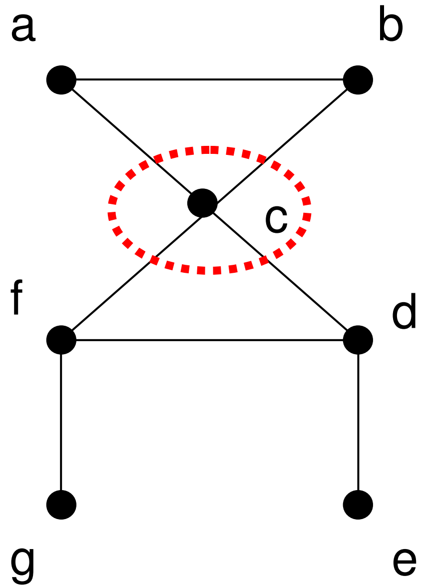
no admite ningún
recorrido hamiltoniano

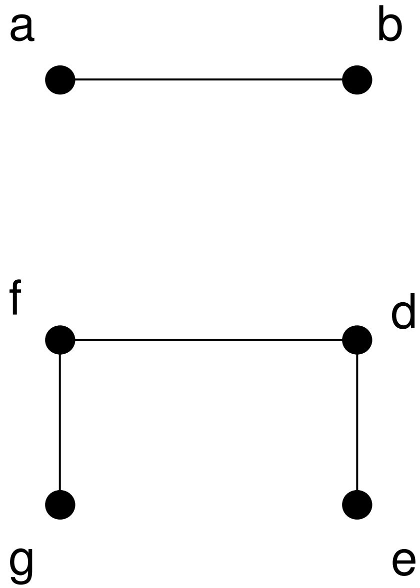
Criterios de existencia

- Teorema: Sea G un grafo simple con n vértices, $n \geq 3$, si todos los vértices de G tienen grado mayor o igual que n/2 , entonces G contiene un ciclo hamiltoniano
- Teorema: Sea G un grafo simple con n vertices, $n \geq 3$, si $\delta(u) + \delta(v) \geq n$ para cada par de vértices no adyacentes, entonces G posee un ciclo hamiltoniano
- Teorema: sea G un grafo hamiltoniano, entonces G no tiene vértices de corte

  (Si G tiene vértice de corte no es hamiltoniano)

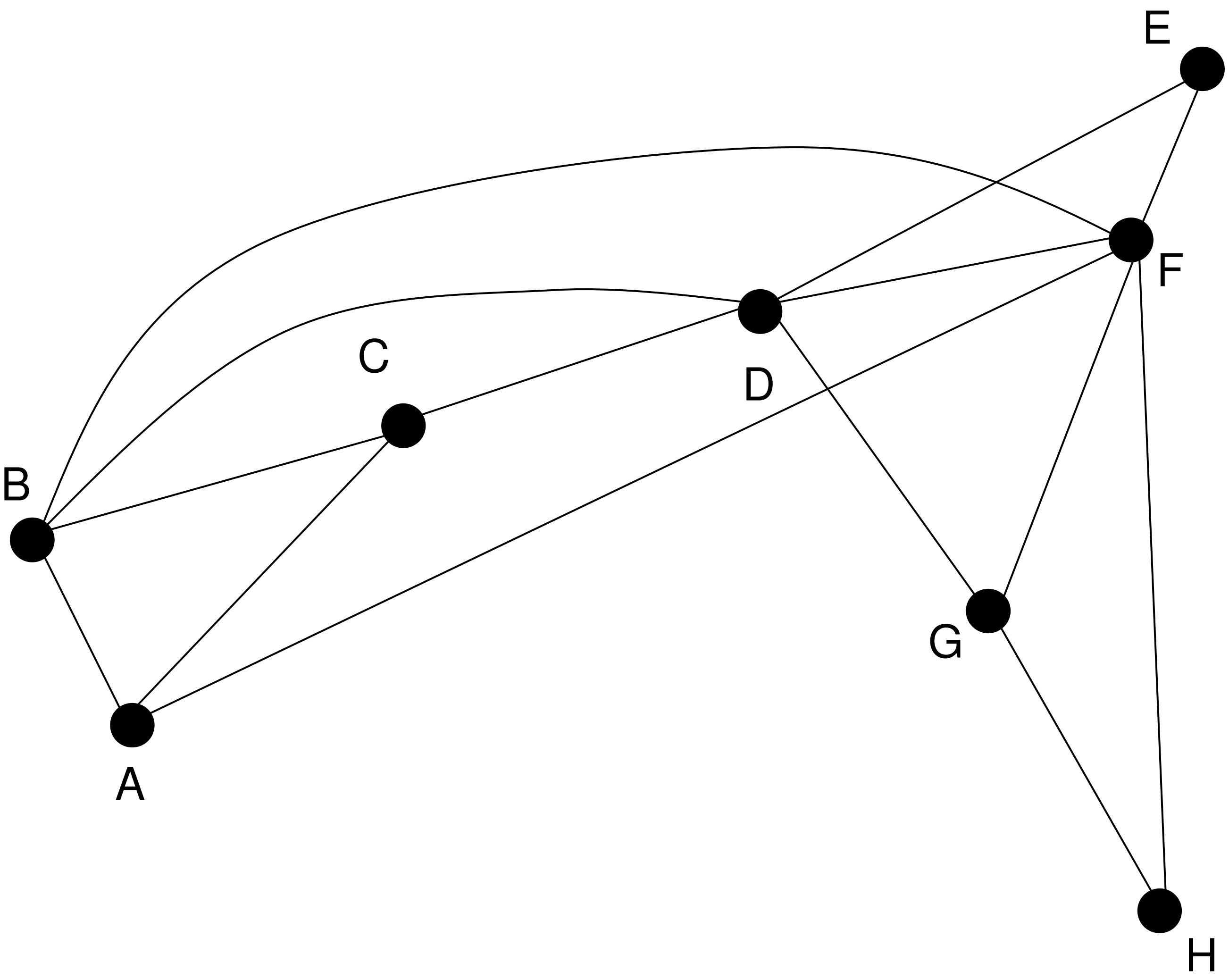
- Un vértice de G es **vértice de corte** o articulación, si al eliminarlo del grafo con todas las aristas incidentes con él se obtiene un subgrafo de G con más componentes



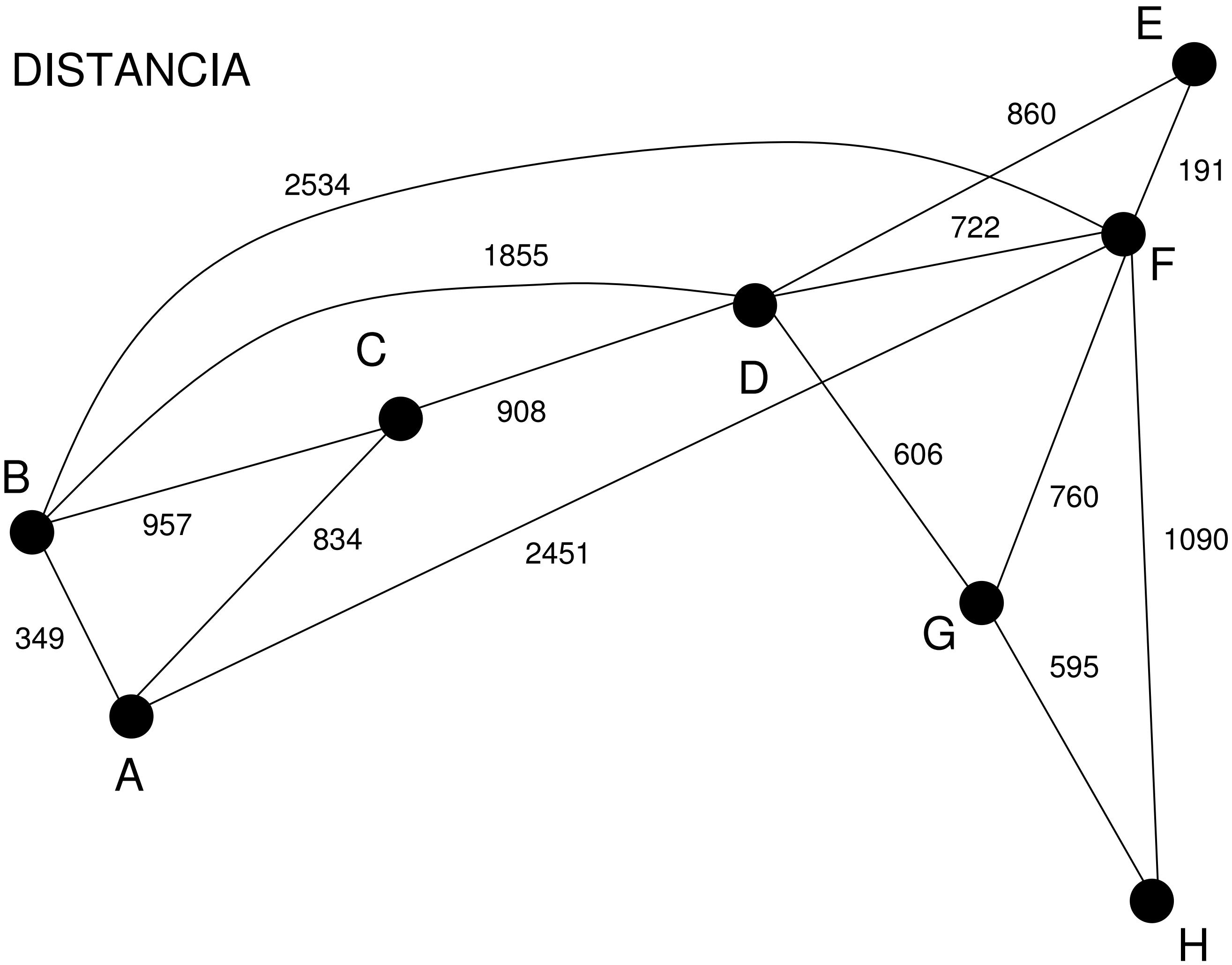


Grafo ponderado

- Los grafos a los que se asigna un número, el peso, a cada arista son **grafos ponderados**
- La **longitud** de un camino en un grafo ponderado es la suma de los pesos de las aristas de ese camino

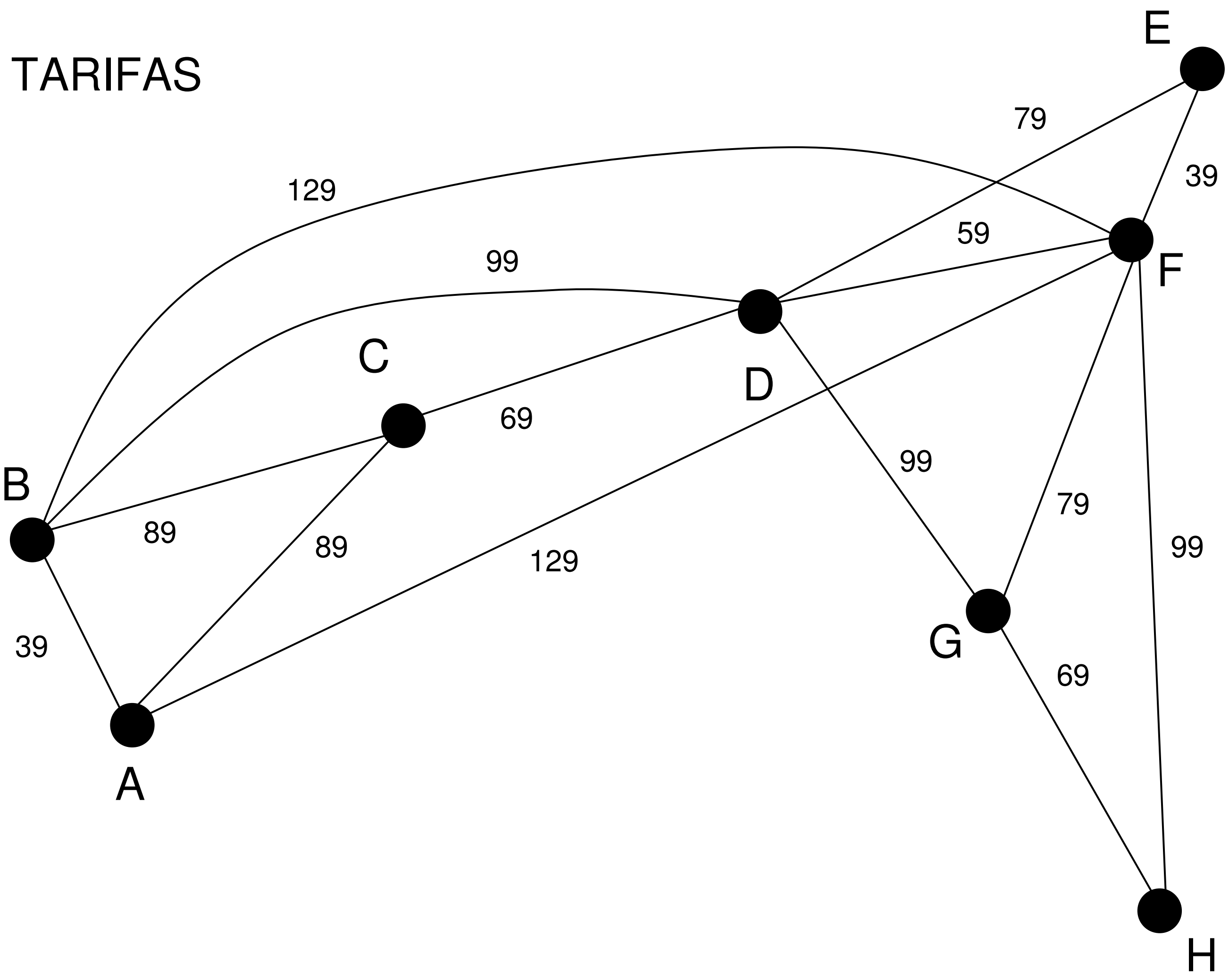

E
F
C
D
B
G
A
H

DISTANCIA

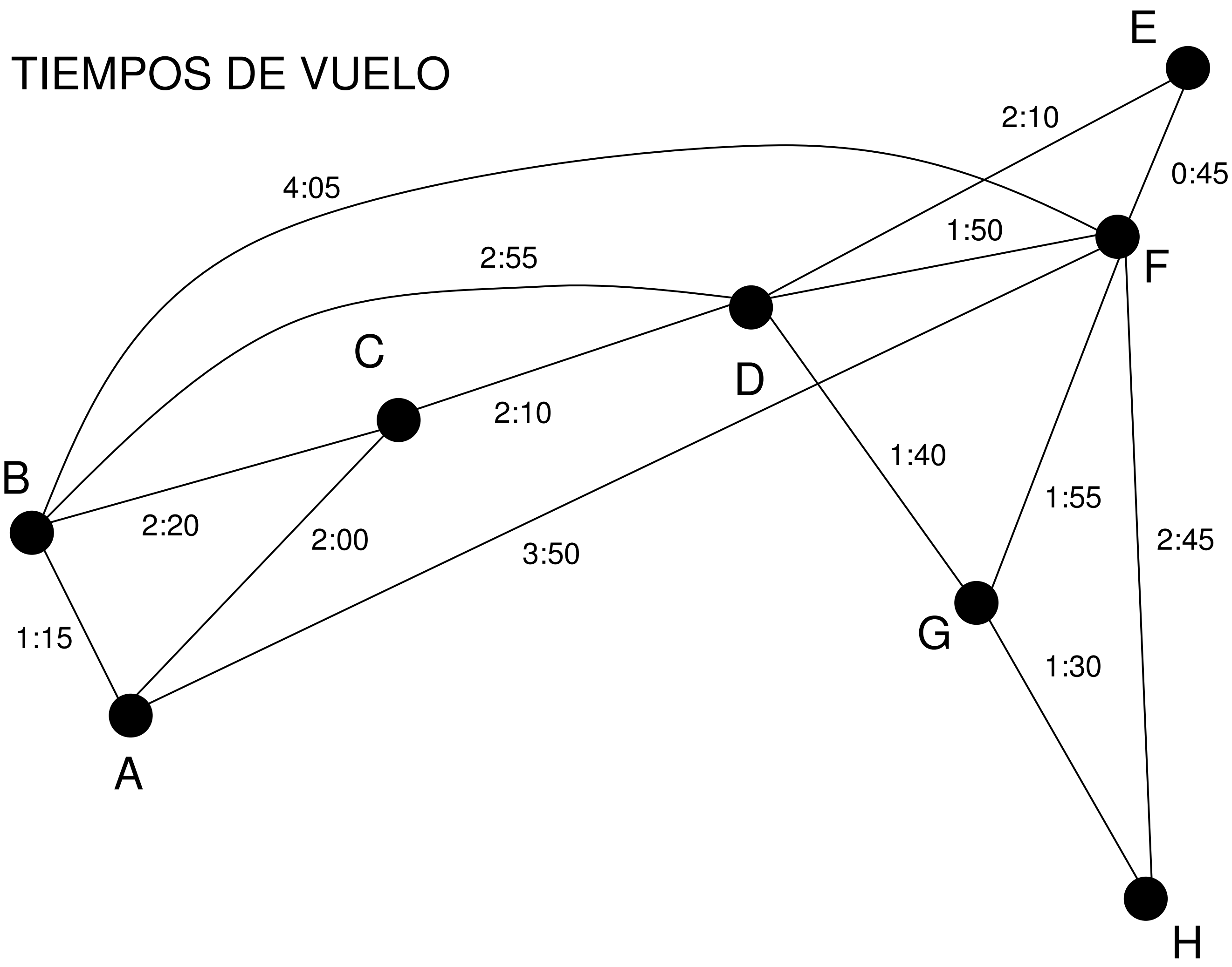


Longitud entre A y H $= 2451 + 1090 = 3541$ (AFH)
$= 834 + 906 + 606 + 595 = 2931$ (ACDGH)

TARIFAS



TIEMPOS DE VUELO

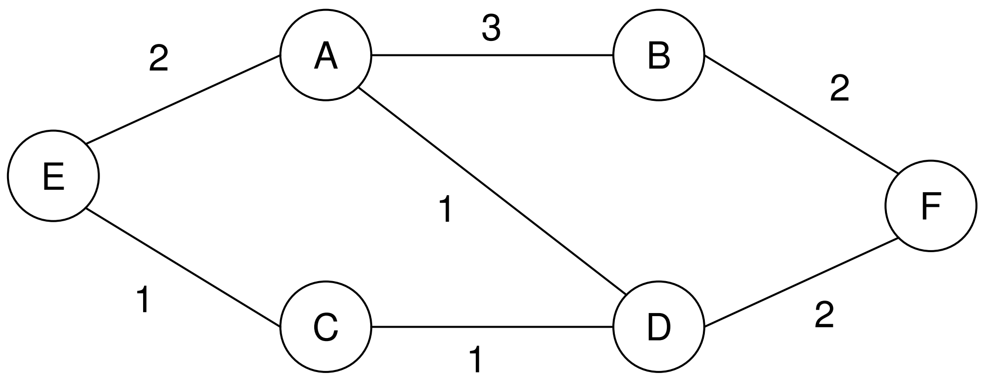


Problemas típicos

- Determinar el camino de longitud mínima entre dos vértices del grafo. Nos podemos preguntar
  - ¿cuál es la distancia más corta entre los vértices A y H del grafo de la figura?
  - ¿qué combinación de vuelos tiene el menor tiempo total de vuelo entre E y A (no consideramos el tiempo entre vuelos)?
  - ¿cuál es la tarifa más barata entre G y B?
- Determinar un circuito de longitud mínima que visita exactamente una vez cada uno de los vértices de un grafo (problema del viajante)

Caminos de longitud mínima

- Encontrar el camino de longitud mínima entre E y F, por inspección



EABF → 2+3+2 = 7

EADF → 2+1+2 = 5

ECDF → 1+1+2 = 4

Algoritmo de Dijkstra

- Da una solución al camino de longitud mínima en G, un grafo ponderado, simple y conexo, todos los pesos w_{ij} deben ser no negativos (también válido para grafos dirigidos)
- Input: grafo ponderado G = (E, V) y el vértice inicial (o fuente) $s \in V$
- Output: longitud de los caminos mínimos (o los caminos mínimos) entre s y los demás vértices de V

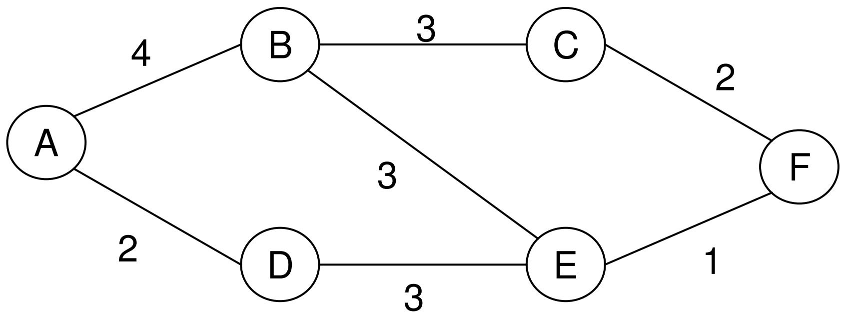
Algoritmo de Dijkstra

- Idea básica:
  Si el vértice u se encuentra en un camino C de longitud mínima entre los vértices s y z entonces la parte de C comprendida entre los vértices s y u forma un camino de longitud mínima entre s y u
- Notación: L[u] = longitud (suma de pesos) del camino más corto entre s y u

Algoritmo de Dijkstra

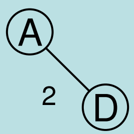
- Controlamos el conjunto S de vértices para los que conocemos el camino más corto (desde s) y lo ampliamos hasta que S = V. Hay que etiquetar cada vértice u con la longitud del camino más corto ya encontrado entre s y u, L(u)
  - Asignación inicial: $S = \emptyset$, $L(s) = 0$, $L(v) = \infty \ \forall v \neq s$, s es vértice actual
  - Actualización: para todos los vértices adyacentes a s, calculamos la longitud y seleccionamos el vértice v con longitud mínima, añadimos v a S y actualizamos la L(v)
  - Repetimos hasta que $S = V$ o $L(v) = \infty \ \forall v \notin S$

- Encontrar el camino más corto entre A y F



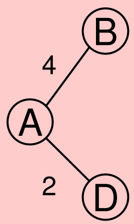
ASIGNACIÓN INICIAL
L[A] = 0
L[otros] = ∞

PRIMERA ITERACIÓN
S = {A}
A es vértice actual
Vértices adyacentes
B L[B] = 0+4 = 4
D L[D] = 0+2 = 2
Seleccionamos D



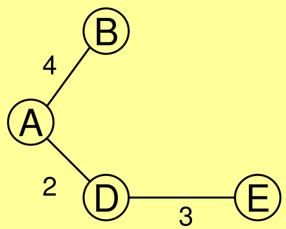
SEGUNDA ITERACIÓN
S = {A, D}

L[B] =4; L[otros] = ∞
D es vértice actual
Vértices adyacentes
E L[E] = 2+3 = 5
Seleccionamos B



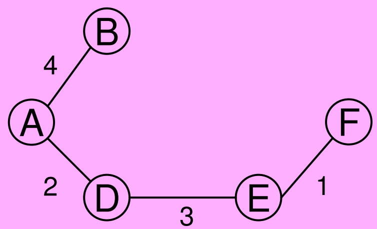
TERCERA ITERACIÓN
S = {A, D, B}

L[E] = 5; L[otros] = ∞
B es vértice actual
Vértices adyacentes
C L[C] = 4+3 = 7
E L[E] = 4+3 = 7
Seleccionamos E (por D)

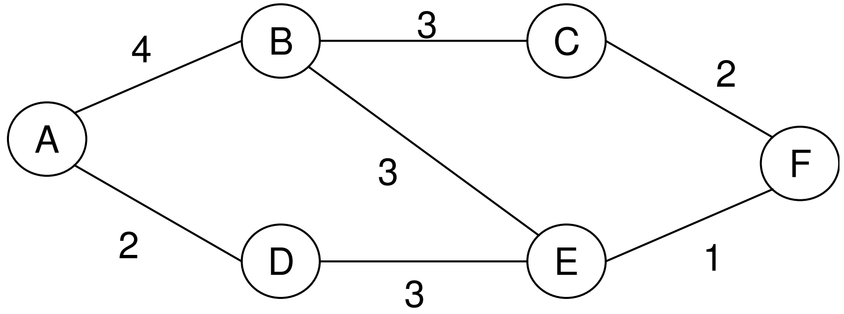


CUARTA ITERACIÓN
S = {A, D, B, E}

L[C] = 7; L[otros] = ∞
E es vértice actual
Vértices adyacentes
F L[E] = 2+3+1 = 6
Seleccionamos F

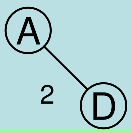


- Encontrar el camino más corto entre A y los demás vértices



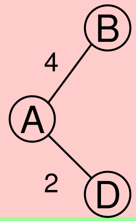
ASIGNACIÓN INICIAL
L[A] = 0
L[otros] = ∞

PRIMERA ITERACIÓN
S = {A}
A es vértice actual
Vértices adyacentes
B L[B] = 0+4 = 4
D L[D] = 0+2 = 2
Seleccionamos D



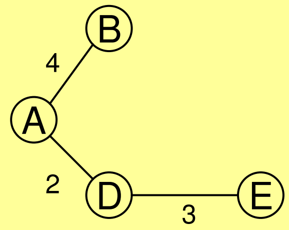
SEGUNDA ITERACIÓN
S = {A, D}

L[B] = 4; L[otros] = ∞
D es vértice actual
Vértices adyacentes
E L[E] = 2+3 = 5
Seleccionamos B



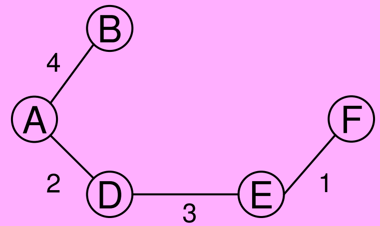
TERCERA ITERACIÓN
S = {A, D, B}

L[E] = 5; L[otros] = ∞
B es vértice actual
Vértices adyacentes
C L[C] = 4+3 = 7
E L[E] = 4+3 = 7
Seleccionamos E (por D)



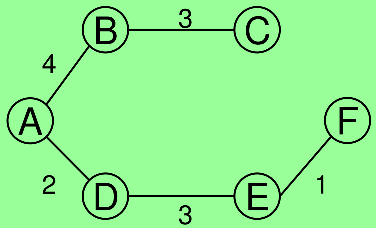
CUARTA ITERACIÓN
S = {A, D, B, E}

L[C] = 7; L[otros] = ∞
E es nodo actual
Vértices adyacentes
F L[F] = 5+1 = 6
Seleccionamos F



QUINTA ITERACIÓN
S = {A, D, B, E, F}

L[C] = 7; L[otros] = ∞
F es vértice actual
Vértices adyacentes
C L[C] = 2+3+1+2 = 8
Seleccionamos C (por B)



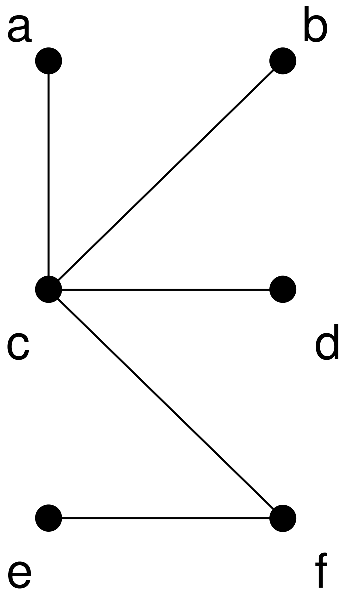
Como S = {A, D, B, E, F, C} = V , el proceso ha terminado, se ha obtenido el árbol de caminos mínimos desde A a los demás vértices del grafo

Árboles

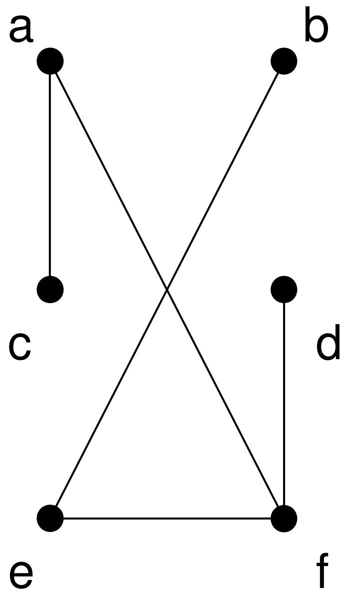
- Un árbol es un grafo no dirigido, conexo y sin ciclos
- Dado que un árbol no tiene ciclos, no puede tener bucles o aristas múltiples, es un grafo simple
- Se designa a un vértice en particular como raíz y se dibujan con la raíz en la parte superior
- Hay un camino único entre dos vértices del grafo

Conexo, acíclico
ÁRBOL

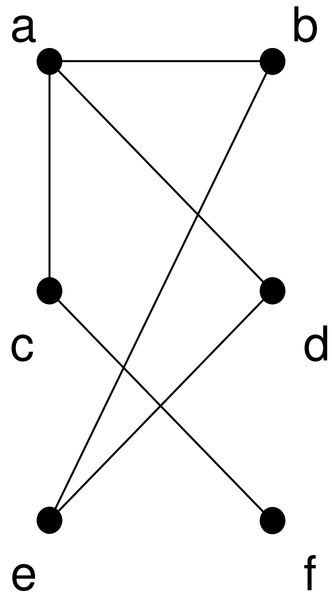
No conexo
NO es ÁRBOL



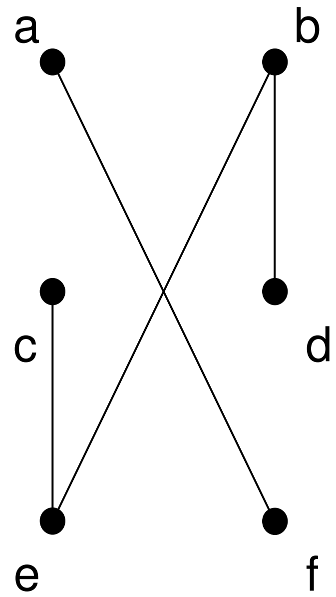
G_1



G_2



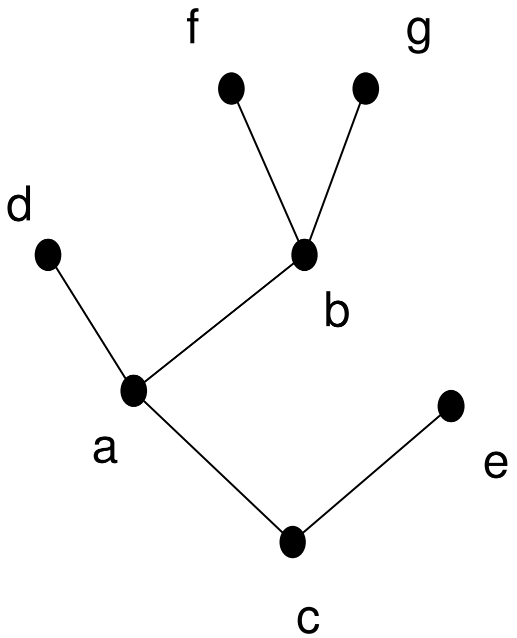
G_3



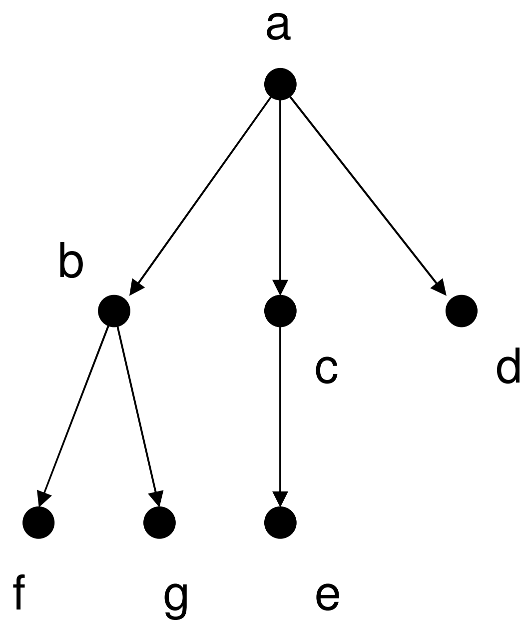
G_4

Conexo, acíclico
ÁRBOL

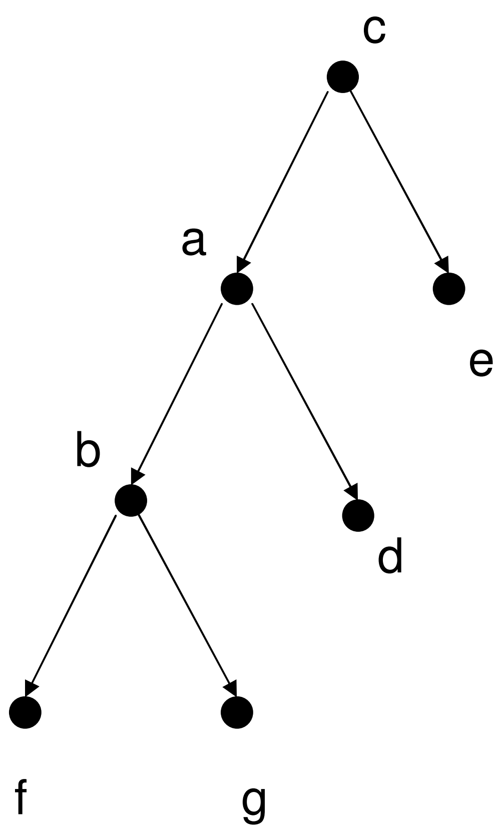
(e, b, a, d, e) es un ciclo
NO es ÁRBOL



T

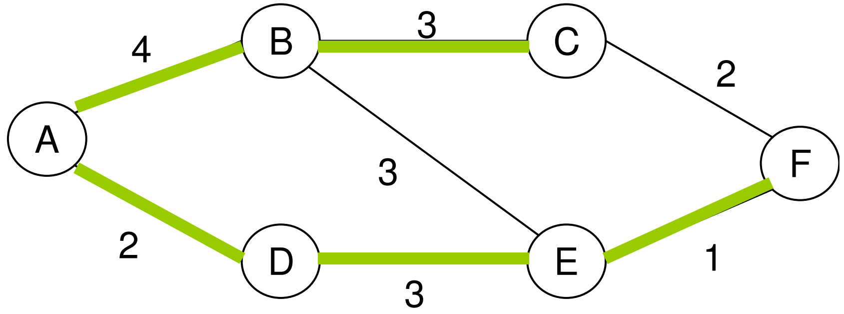


Con raíz en a



Con raíz en c

Encontrar el camino más corto entre A y F



Árbol de caminos mínimos desde A

Iteración	**S**	L_A	L_B	L_C	L_D	L_E	L_F
Inicial	$\varnothing$	0	∞	∞	∞	∞	∞
1	{A}		4	∞	2	∞	∞
2	{A, D}		4	∞		5	∞
3	{A, D, B}			7		5	∞
4	{A, D, B, E}			7			6
5	{A, D, B, E, F}			7			
6	{A,D,B,E,F,C}	**0**	**4**	**7**	**2**	**5**	**6**

$4 + 3 = 7 > 5$

Algoritmo de Dijkstra, pseudocódigo

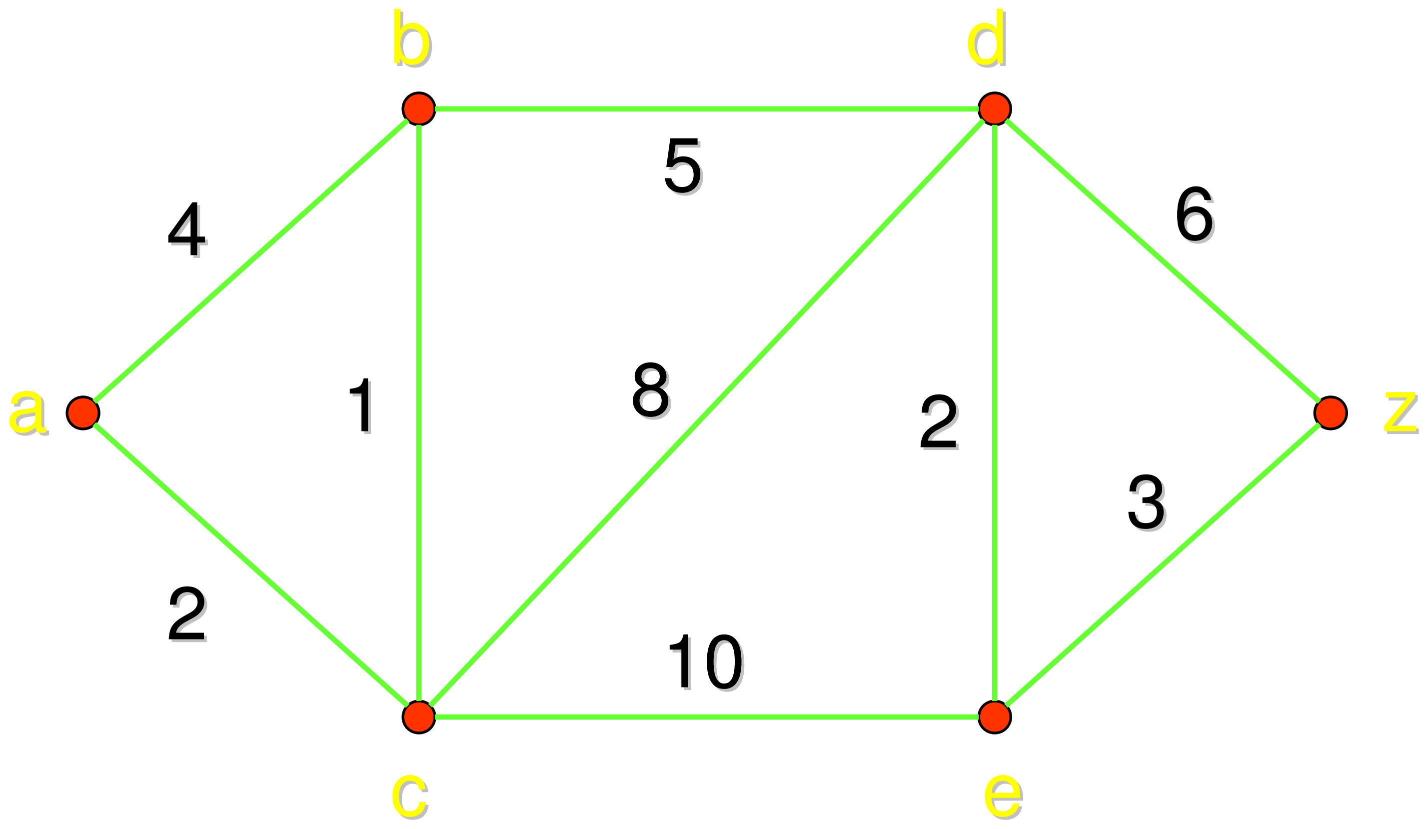
$S \leftarrow \varnothing$
$Q \leftarrow V$
$L[s] \leftarrow 0$
for all $v \in V - \{s\}$ **do** $L[v] \leftarrow \infty$

ASIGNACIÓN INICIAL
El conjunto de vértices visitados S está vacío
La cola Q contiene todos los vértices
La longitud al vértice fuente es 0
Asignamos a las demás longitudes la etiqueta ∞

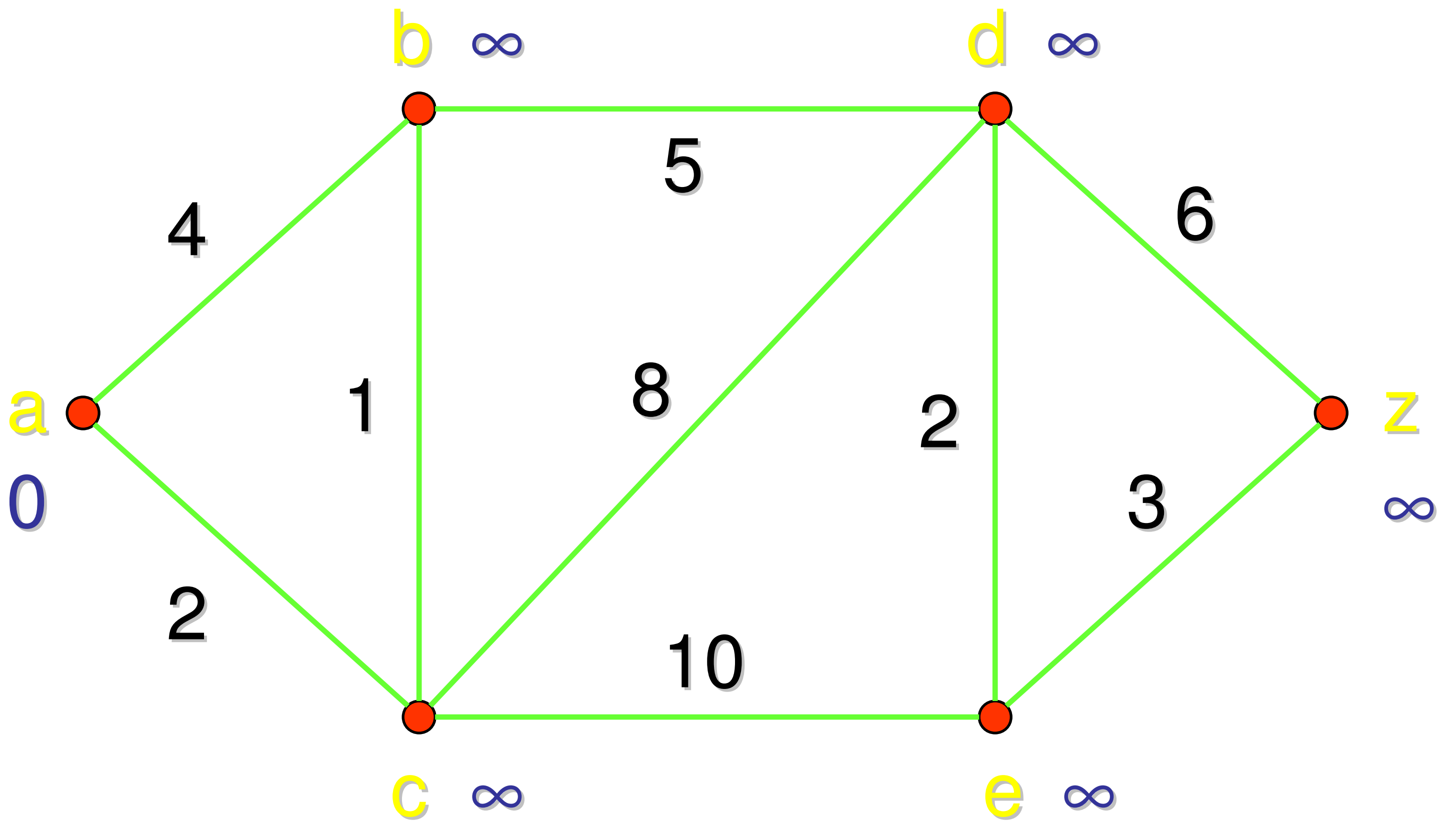
while $Q \neq \varnothing$
do $u \leftarrow$ mindistance$(Q,dist)$
$S \leftarrow S \cup \{u\}$
for all $v \in$ vecinos$[u]$
do if $L[v] > L[u] + w(u, v)$
then $L[v] \leftarrow L[u] + w(u, v)$
return L

Mientras queden vértices por visitar
Seleccionamos el elemento de Q con distancia mínima
Añadimos u a la lista de vértices visitados
Actualizamos las etiquetas de los vértices

Dado el grafo de la figura encontrar el árbol de camino mínimo desde a



Algoritmo de Dijkstra

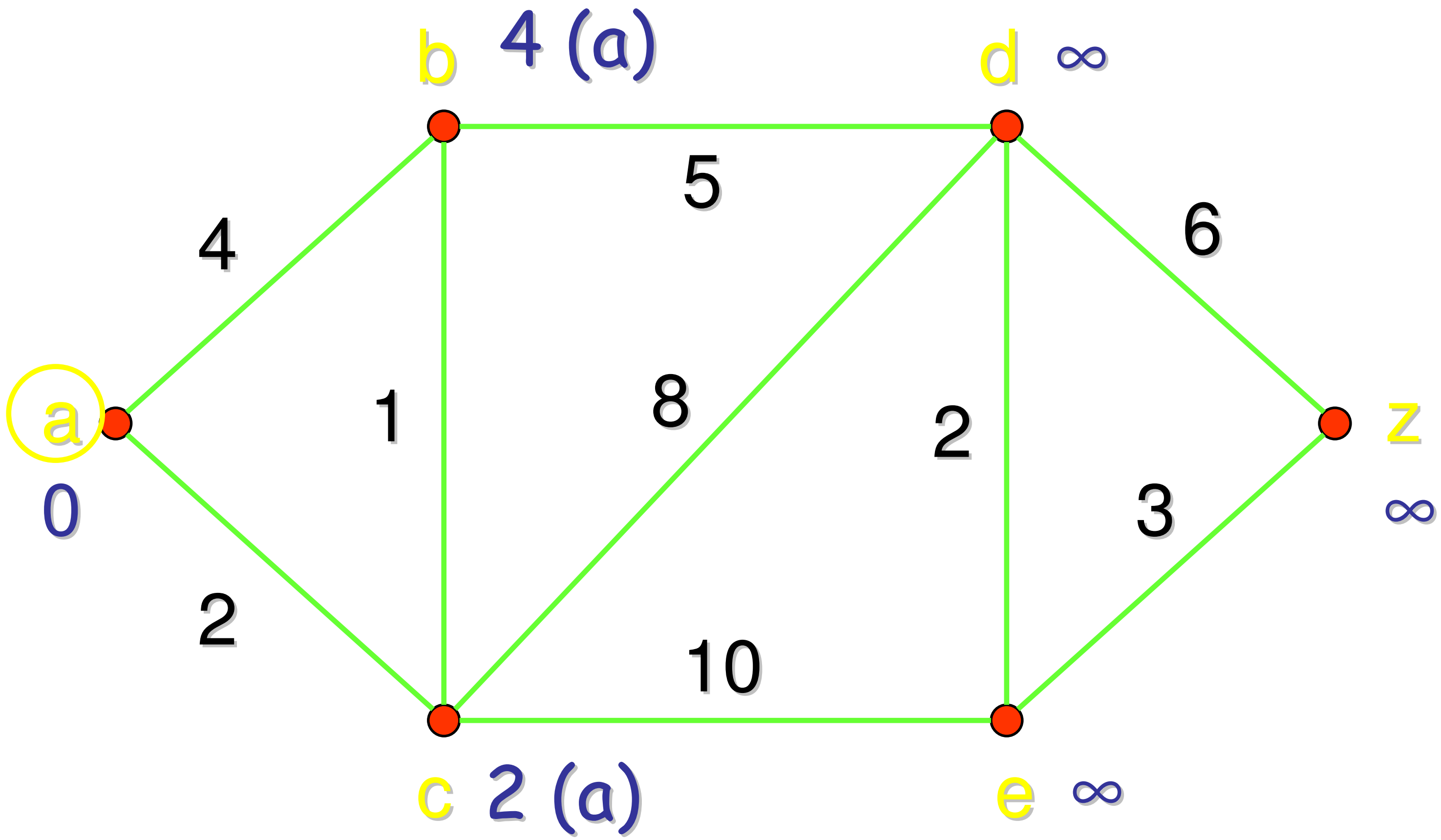


Asignación inicial

$S = \varnothing$

$Q = \{a, b, c, d, e, f\}$

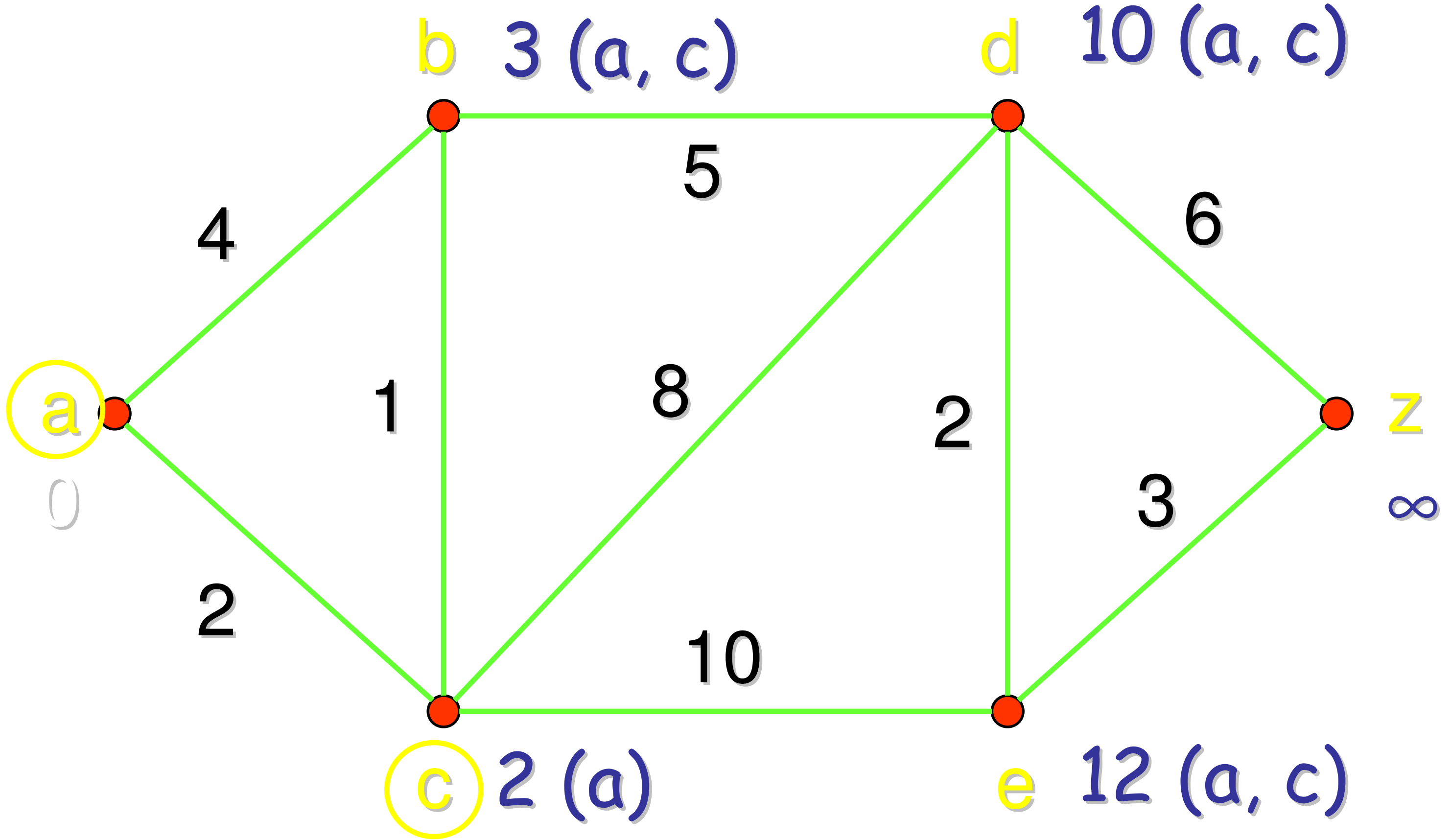
Algoritmo de Dijkstra



ITERACIÓN 1

S = {a}
Q = {b, c, d, e, f}

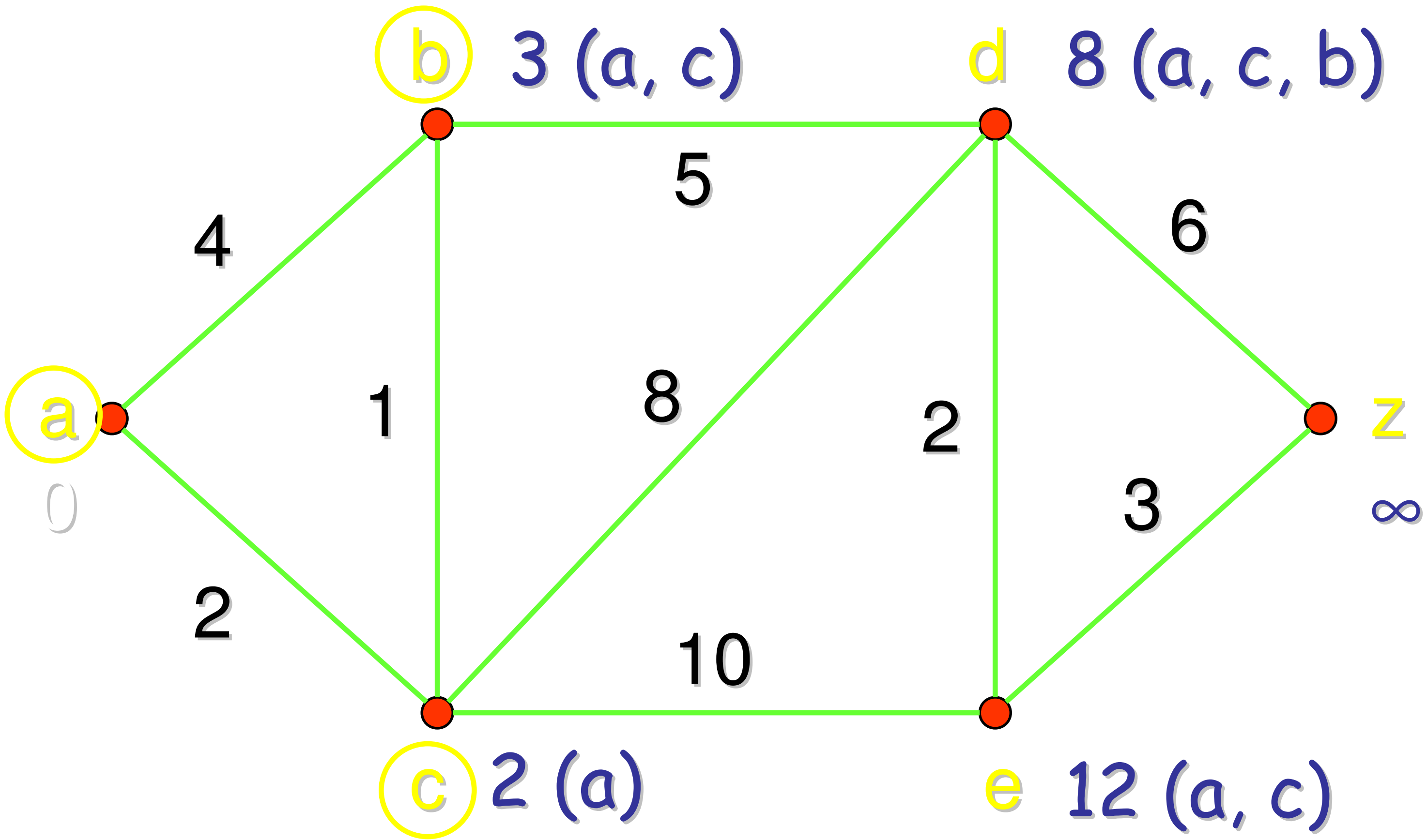
Algoritmo de Dijkstra



ITERACIÓN 2

S = {a, c}
Q = {b, d, e, f}

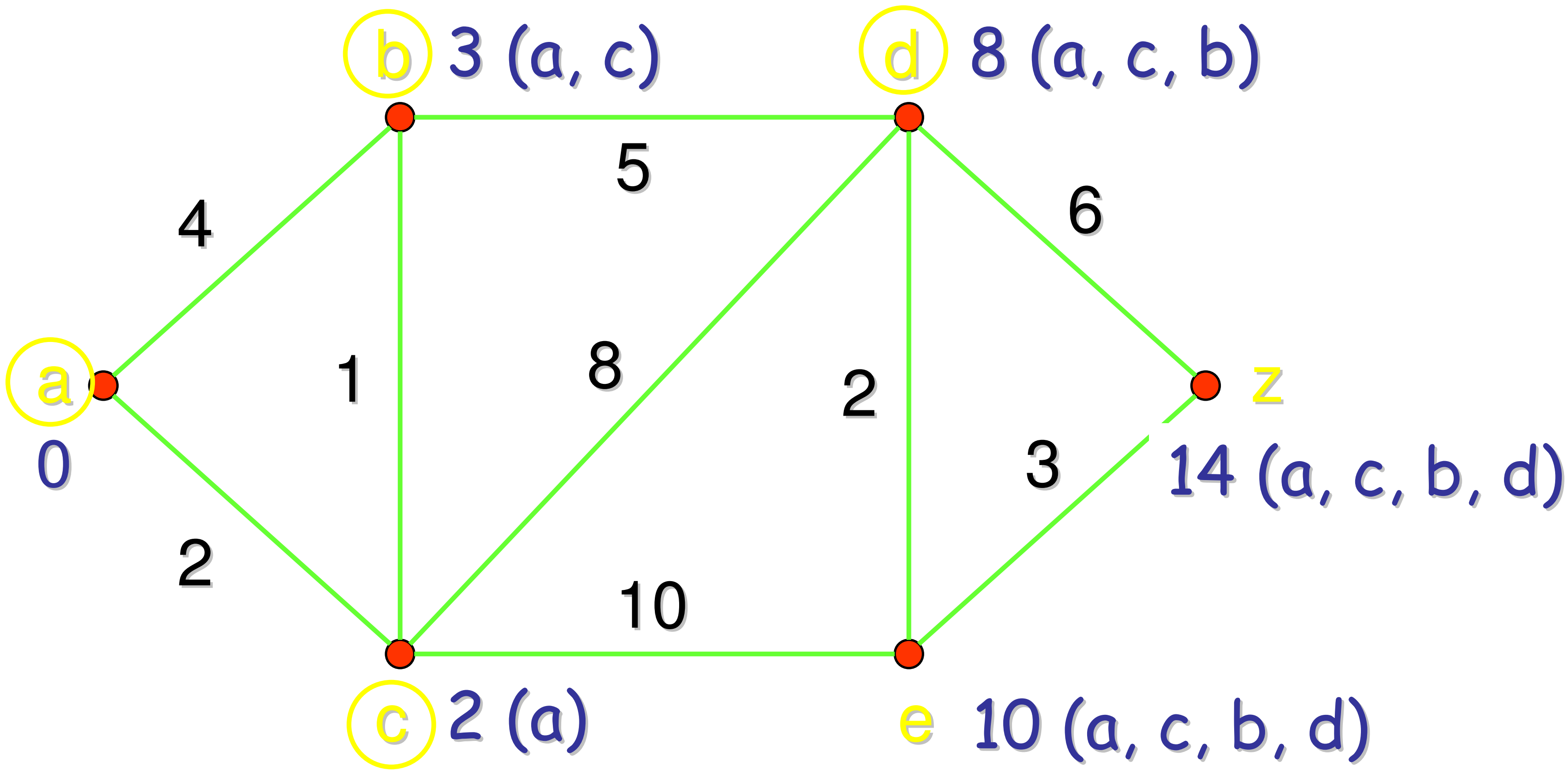
Algoritmo de Dijkstra



ITERACIÓN 3

S = {a, c, b}
Q = {d, e, f}

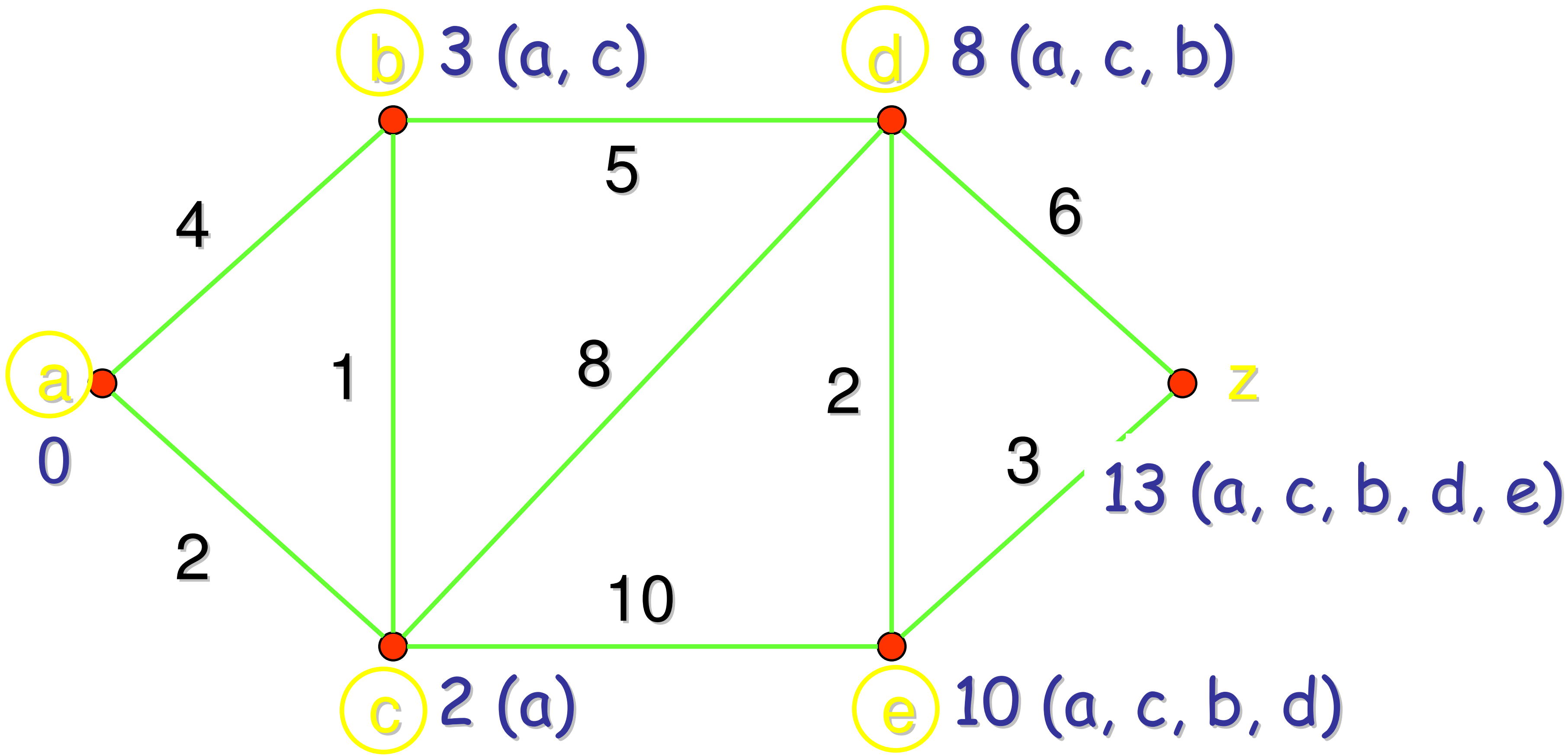
Algoritmo de Dijkstra



ITERACIÓN 4

S = {a, c, b, d}
Q = {e, f}

Algoritmo de Dijkstra

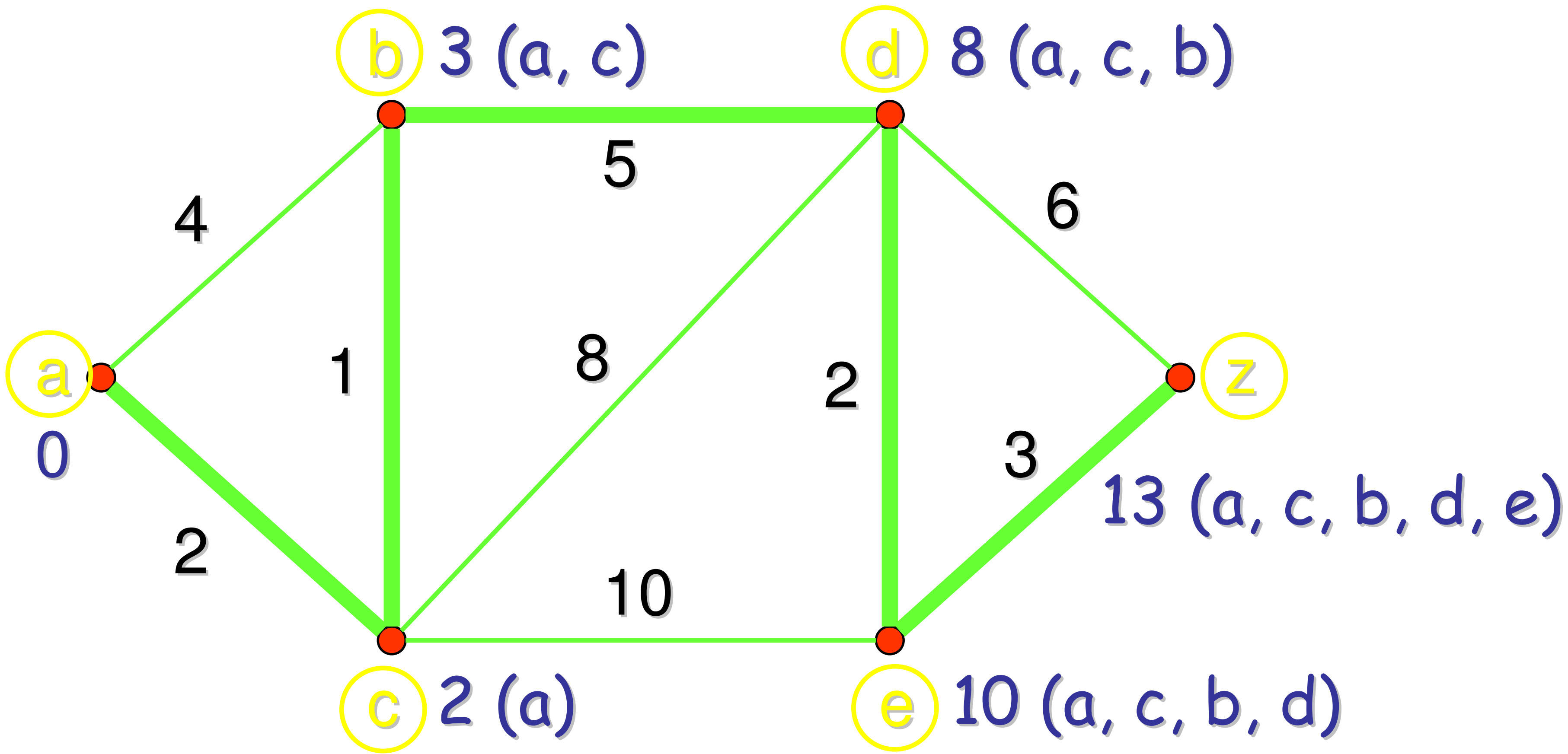


ITERACIÓN 5

S = {a, c, b, d, e}
Q = {f}

Algoritmo de Dijkstra

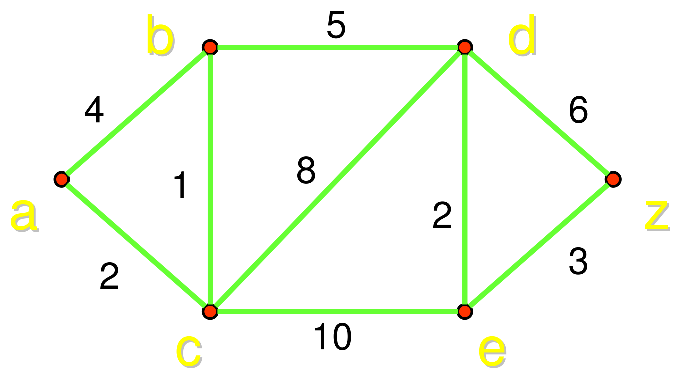
CAMINO MÍNIMO DESDE a



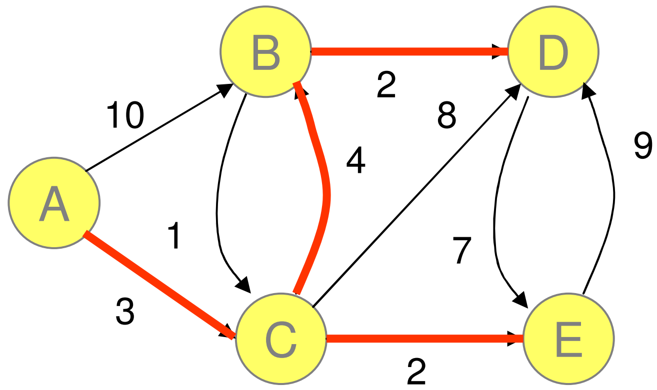
ITERACIÓN 6

S = {a, c, b, d, e, f}

Q = ∅



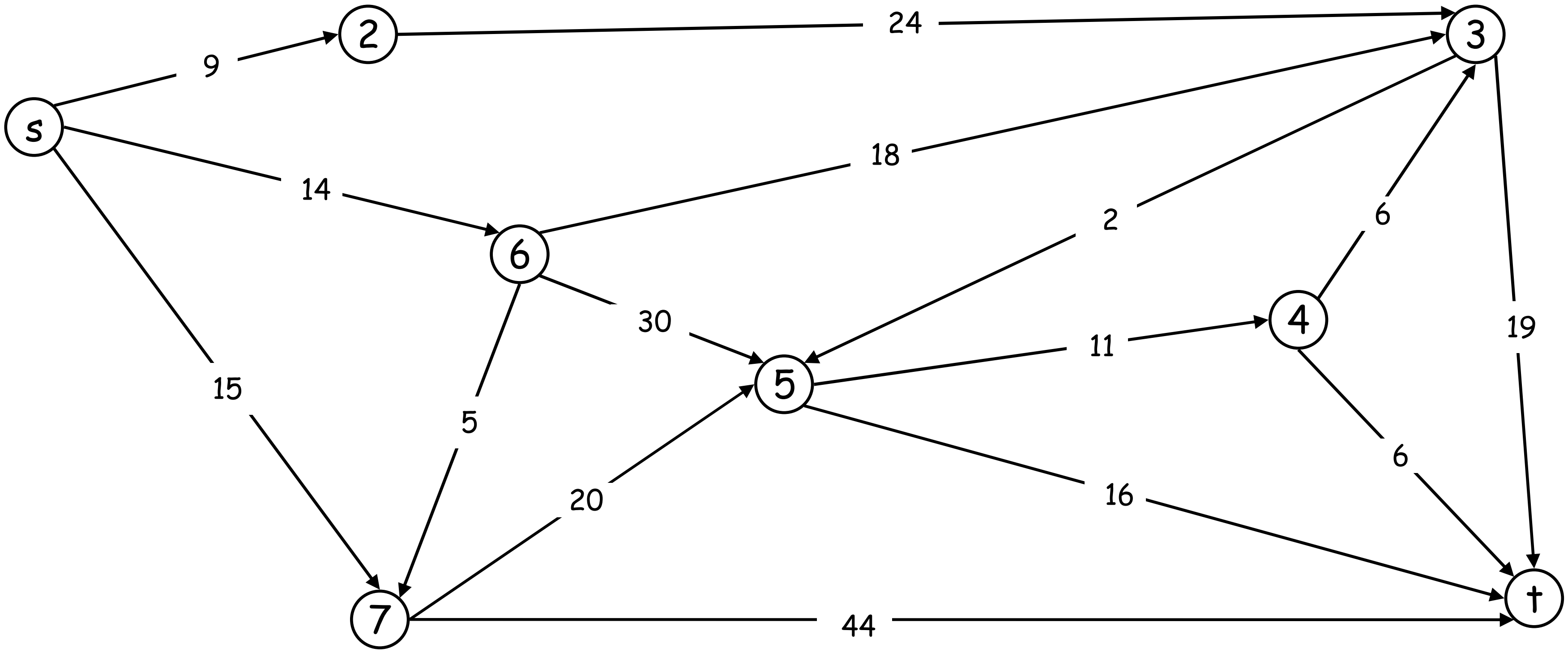
Iteración	**S**	L_a	L_b	L_c	L_d	L_e	L_z
Inicial	∅	0	∞	∞	∞	∞	∞
1	{a}		4	2	∞	∞	∞
2	{a,c}		3		10	12	∞
3	{a,c,b}				8	12	∞
4	{a,c,b,d}					10	14
5	{a,c,b,d,e}						13
6	{a,c,b,d,e,z}	**0**	**3**	**2**	**8**	**10**	**13**



S	L_A	L_B	L_C	L_D	L_E
∅	0	∞	∞	∞	∞
{A}		10	3	∞	∞
{A, C}		7		11	5
{A, C, E}		7		11	
{A, C, E, B}				9	
{A, C, E, B, D}	**0**	**7**	**3**	**9**	**5**

Algoritmo de Dijkstra

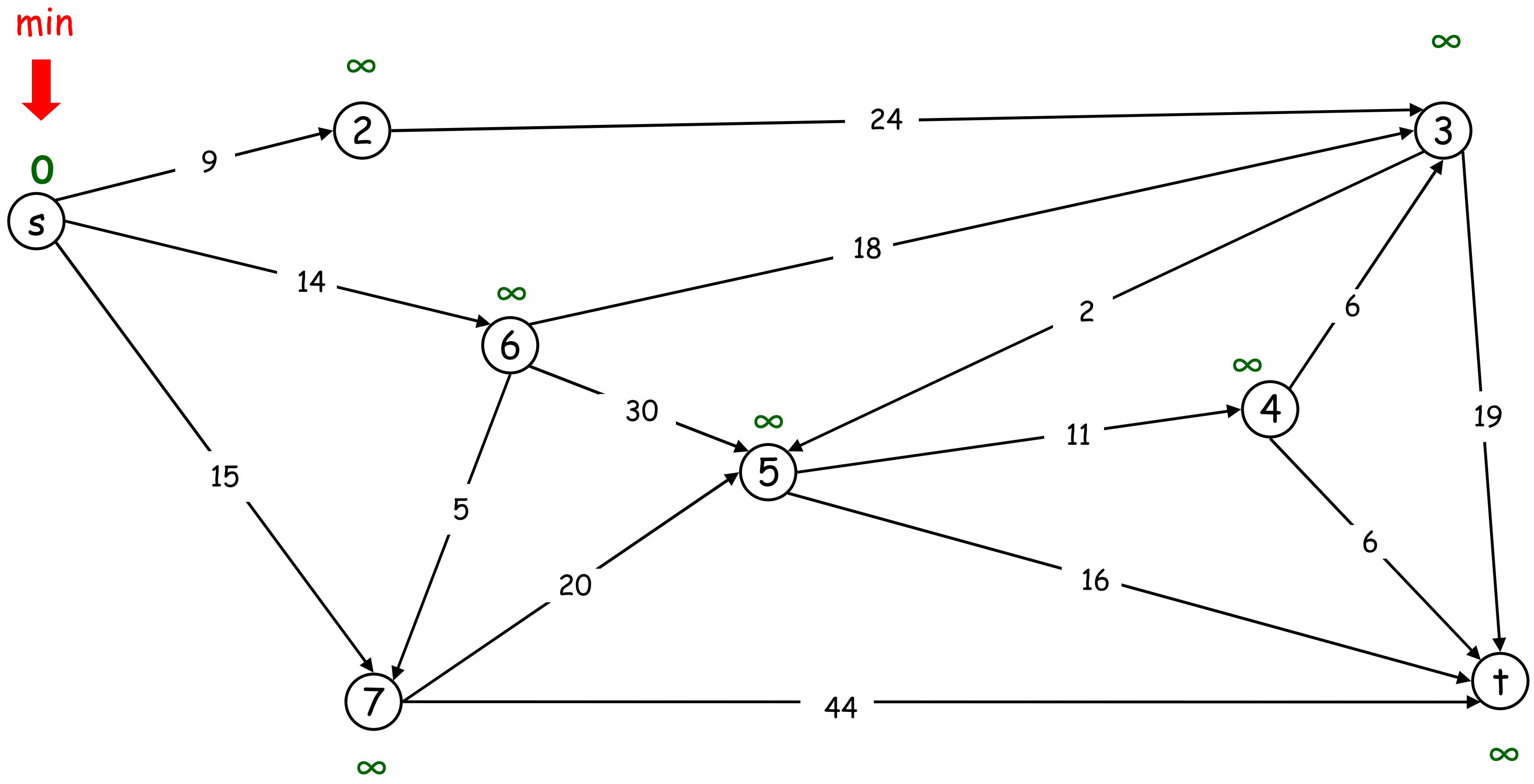
Encuentra el camino de longitud mínima desde s hasta t



Etiquetamos los vértices, L(v)

S = { }

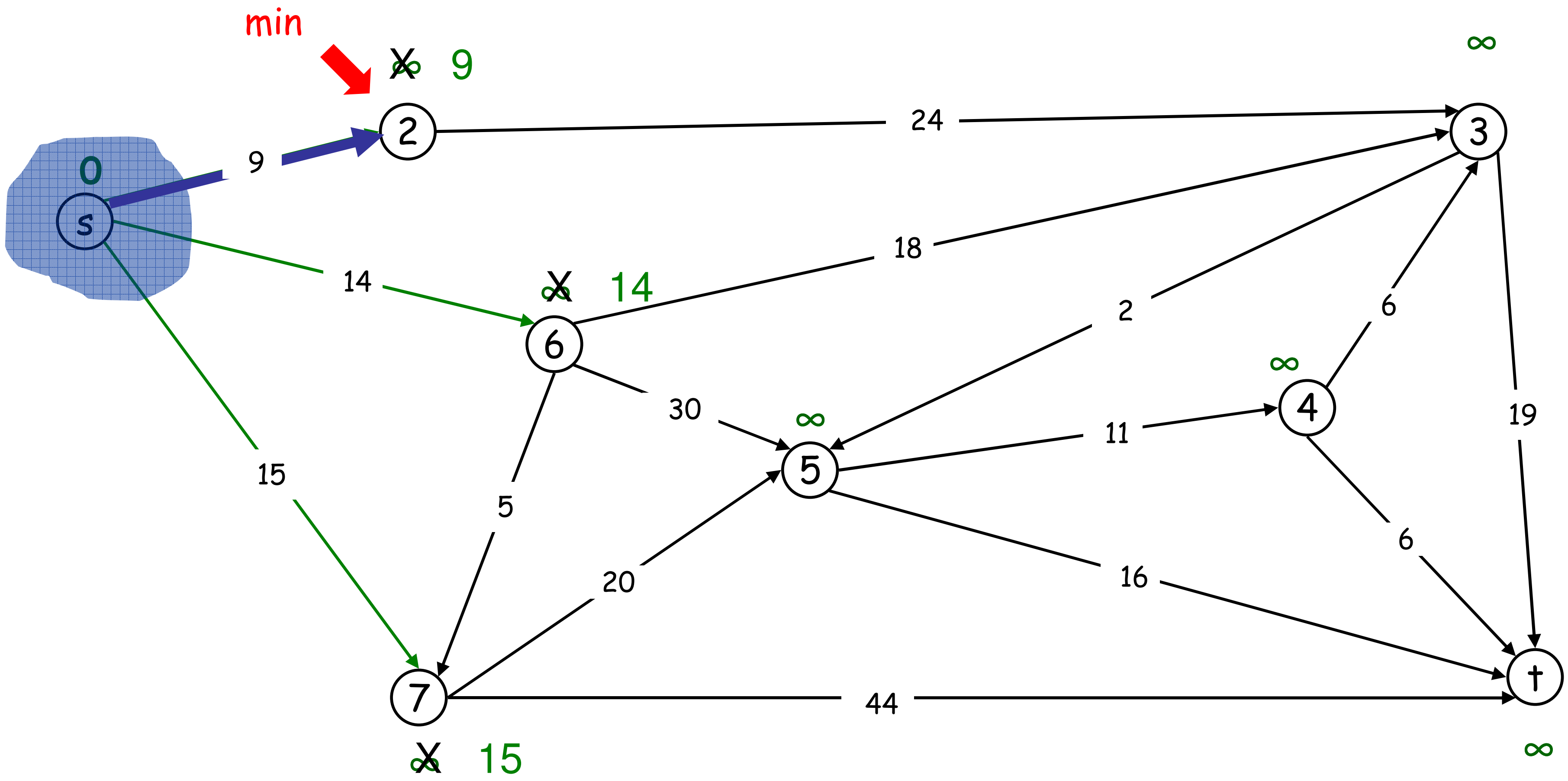
Q = { s, 2, 3, 4, 5, 6, 7, t }



Actualizamos etiquetas

S = {s}

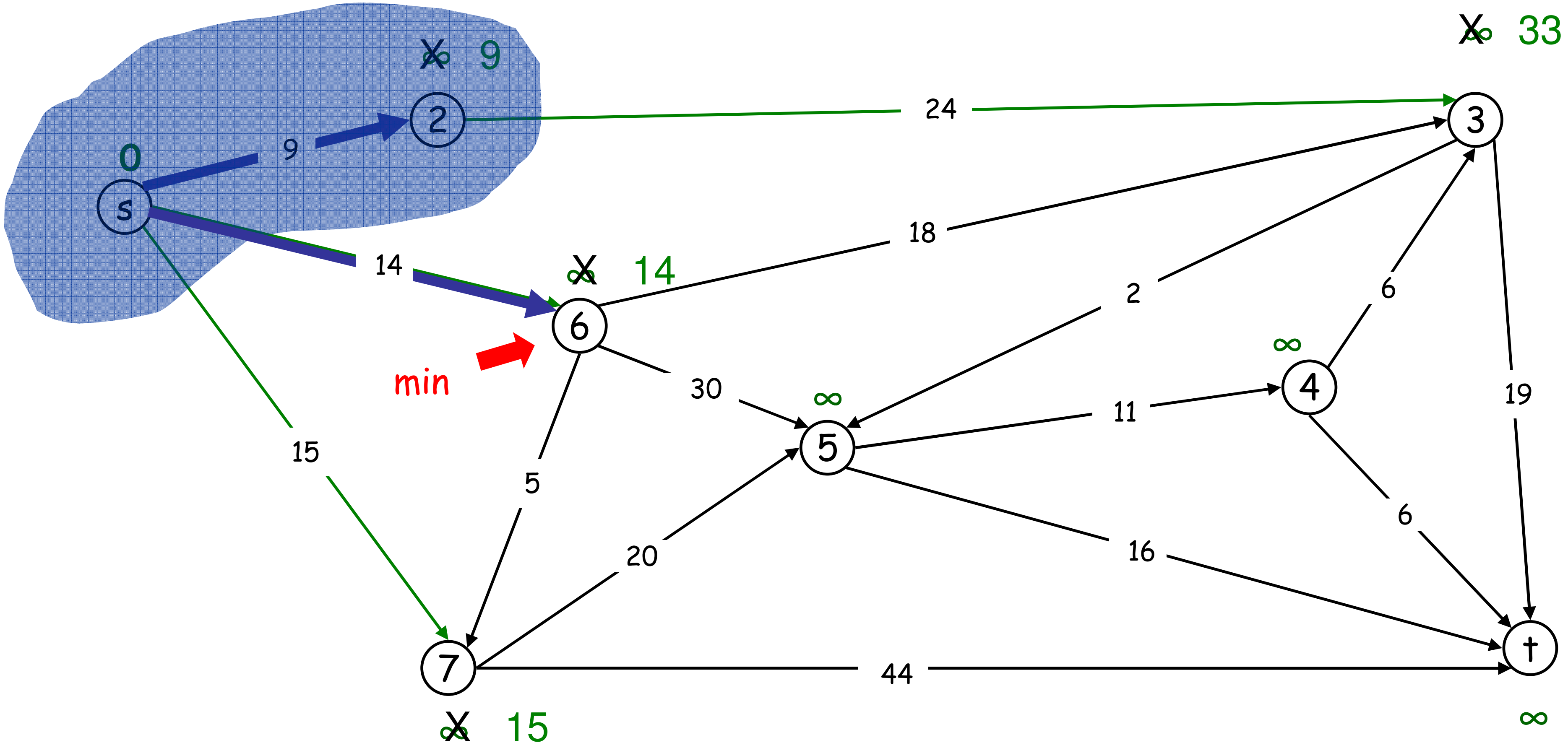
Q = {2, 3, 4, 5, 6, 7, t }



Actualizamos etiquetas

S = {s, 2}

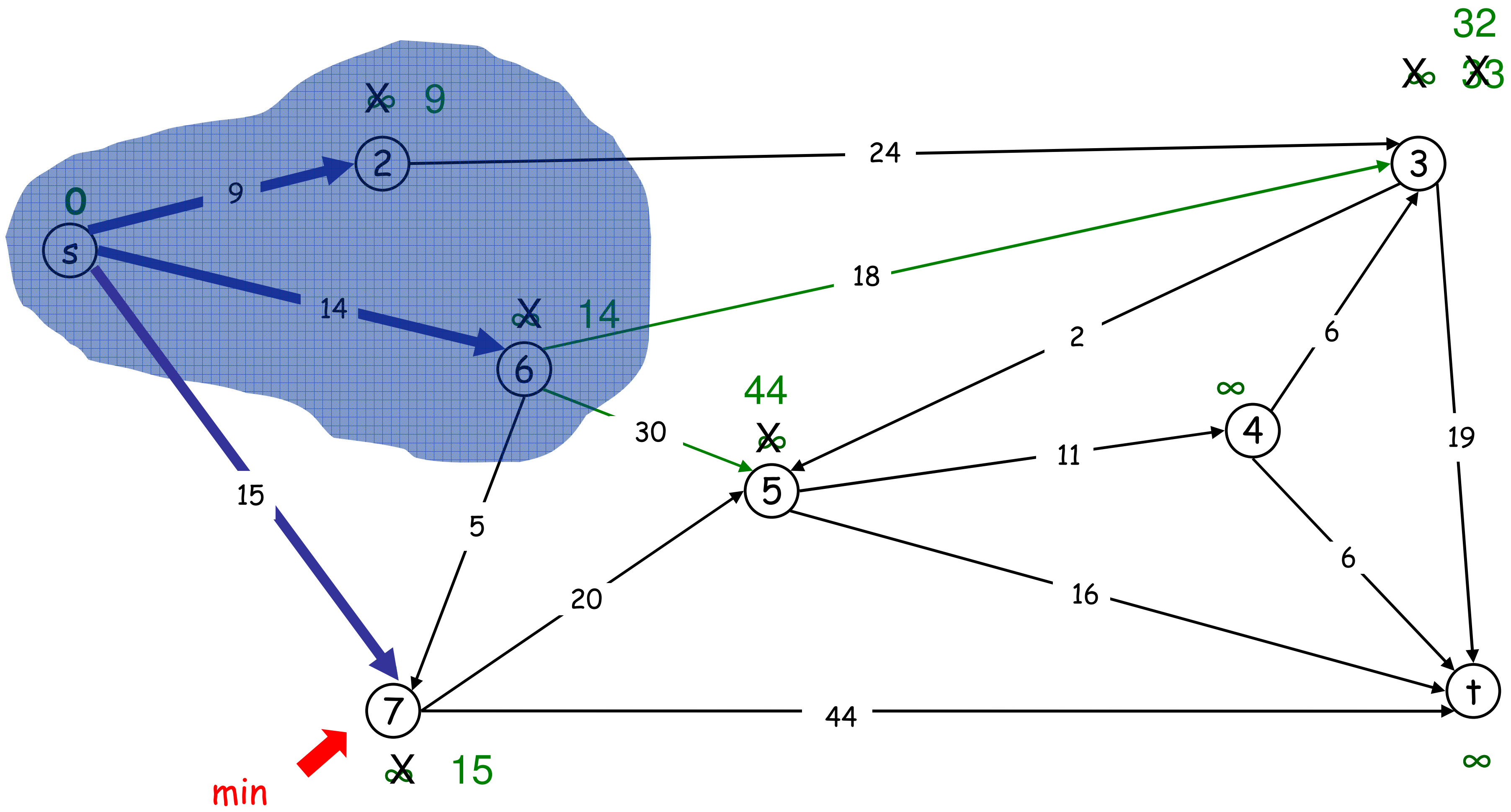
Q = {3, 4, 5, 6, 7, t }



Actualizamos etiquetas

S = {s, 2, 6}

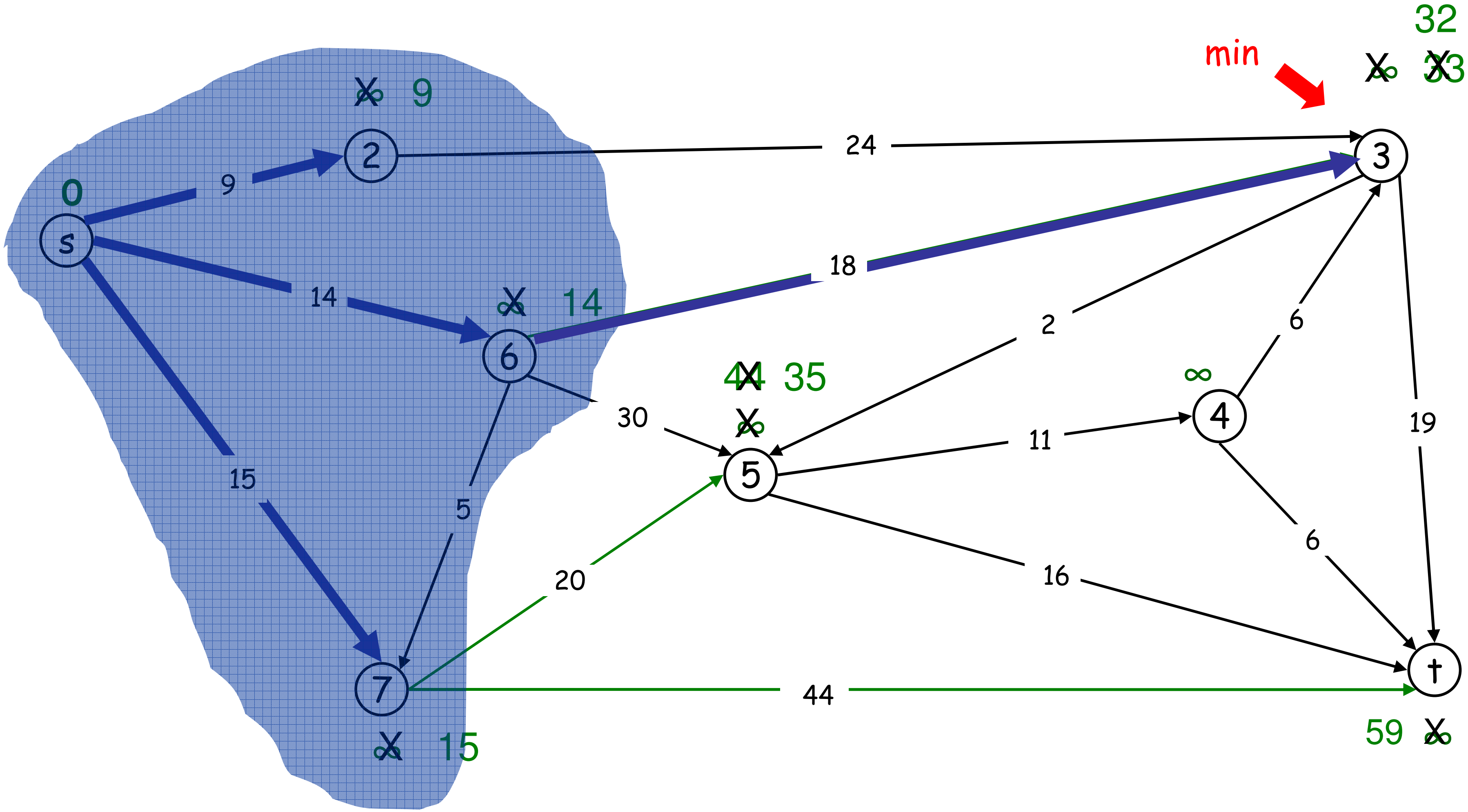
Q = {3, 4, 5, 7, t }



Actualizamos etiquetas

S = {s, 2, 6, 7}

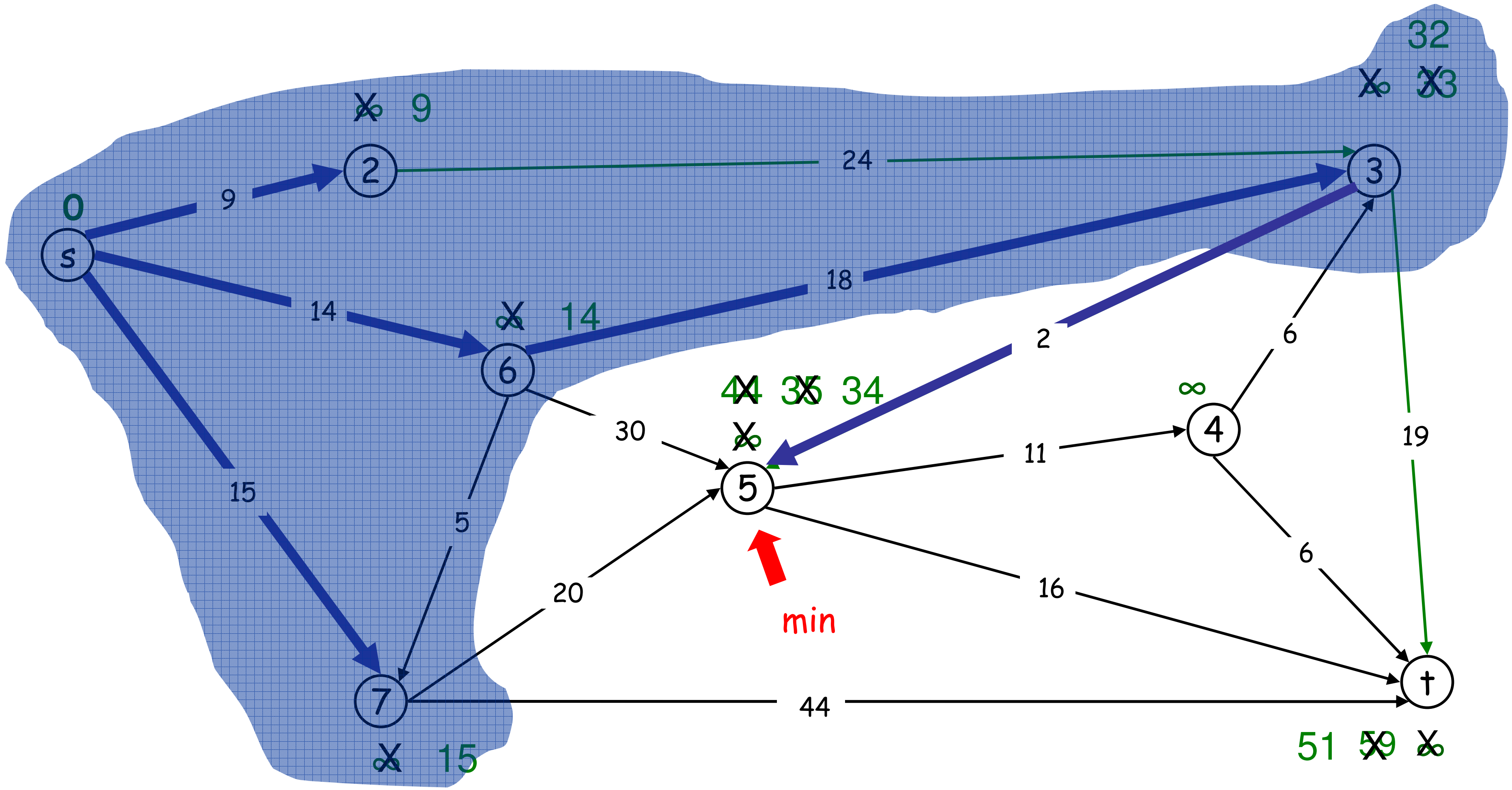
Q = {3, 4, 5, t }



Actualizamos etiquetas

S = {s, 2, 6, 7, 3}

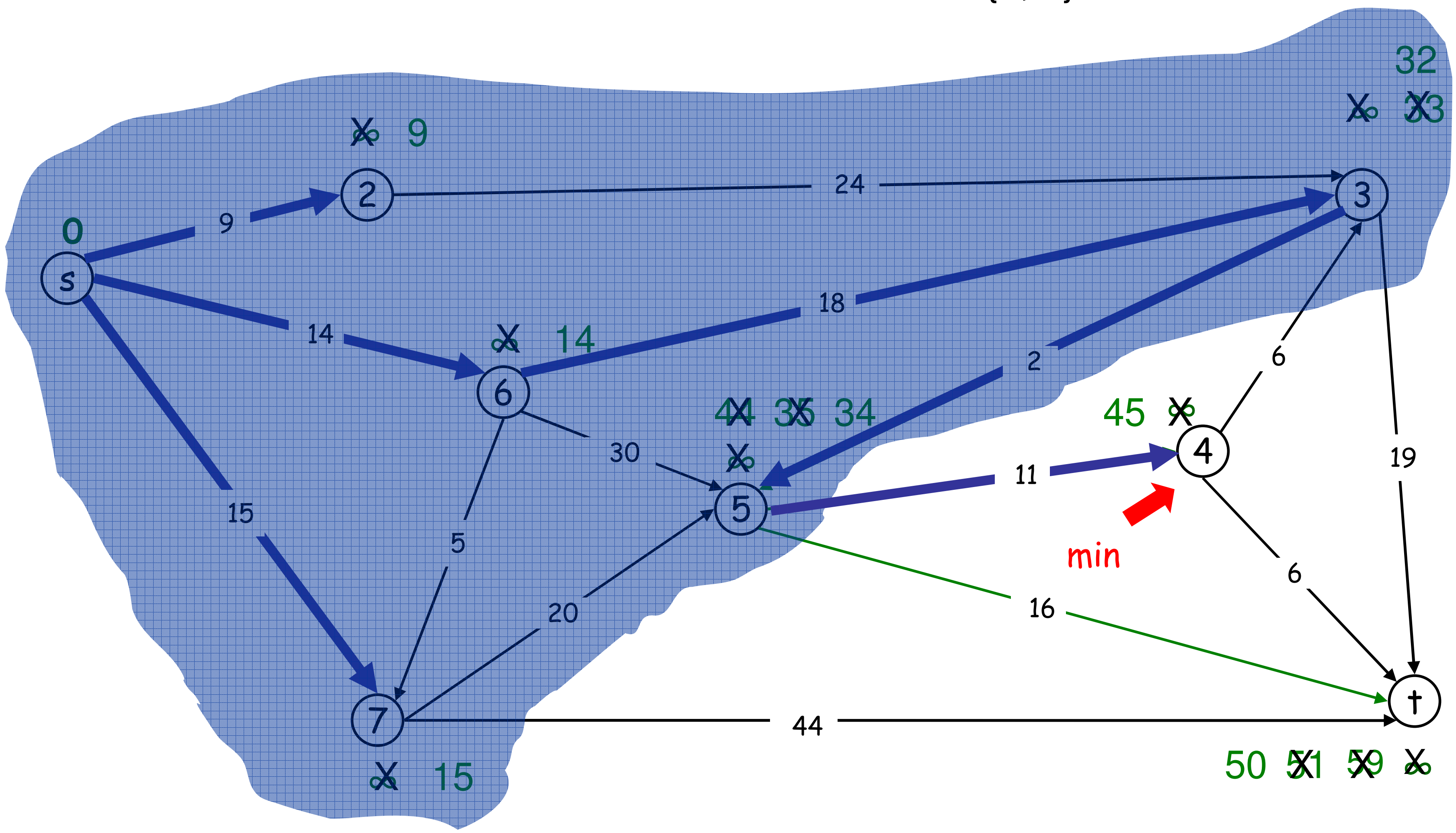
Q = {4, 5, t }



Actualizamos etiquetas

S = {s, 2, 6, 7, 3, 5}

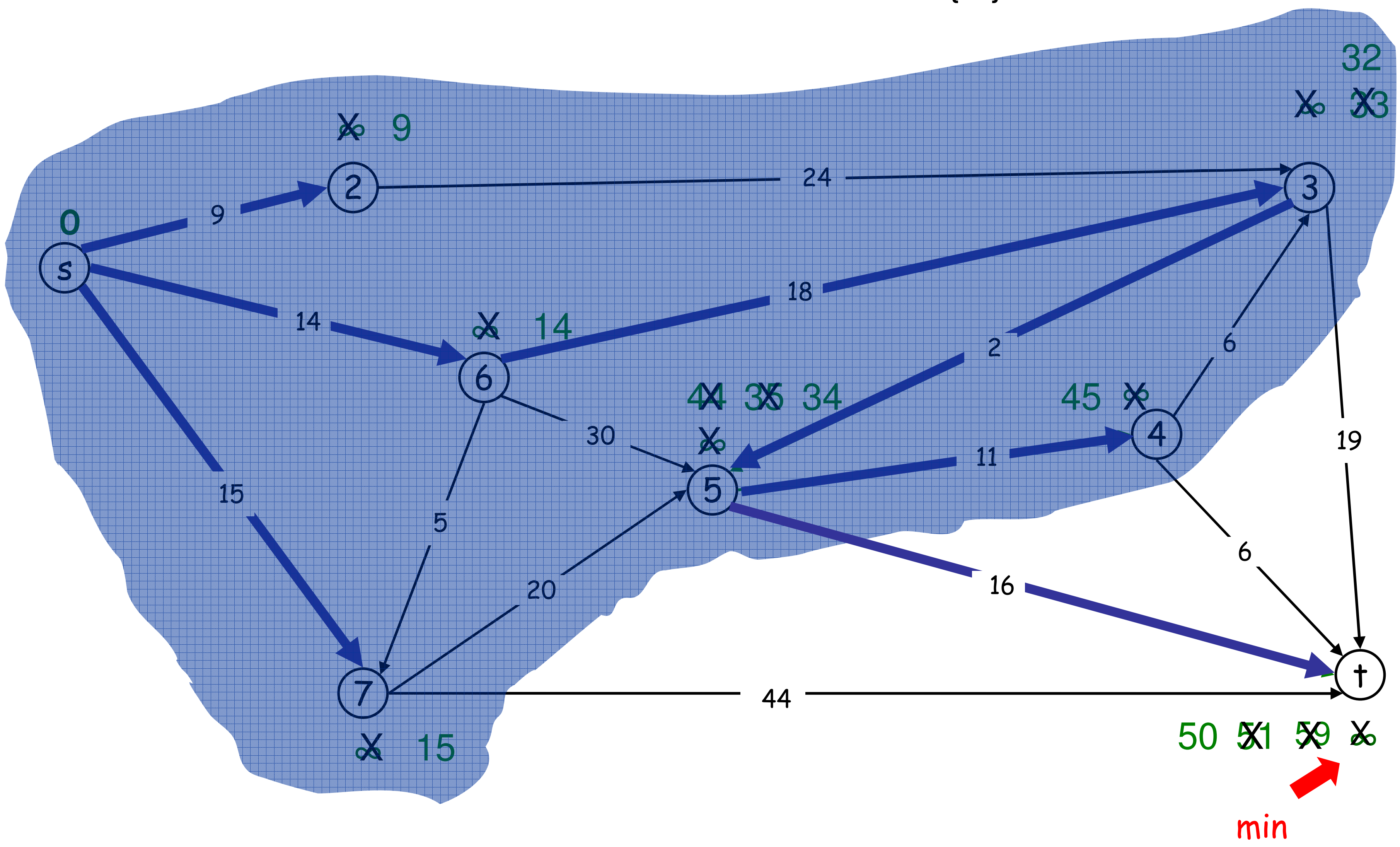
Q = {4, t }



Actualizamos etiquetas

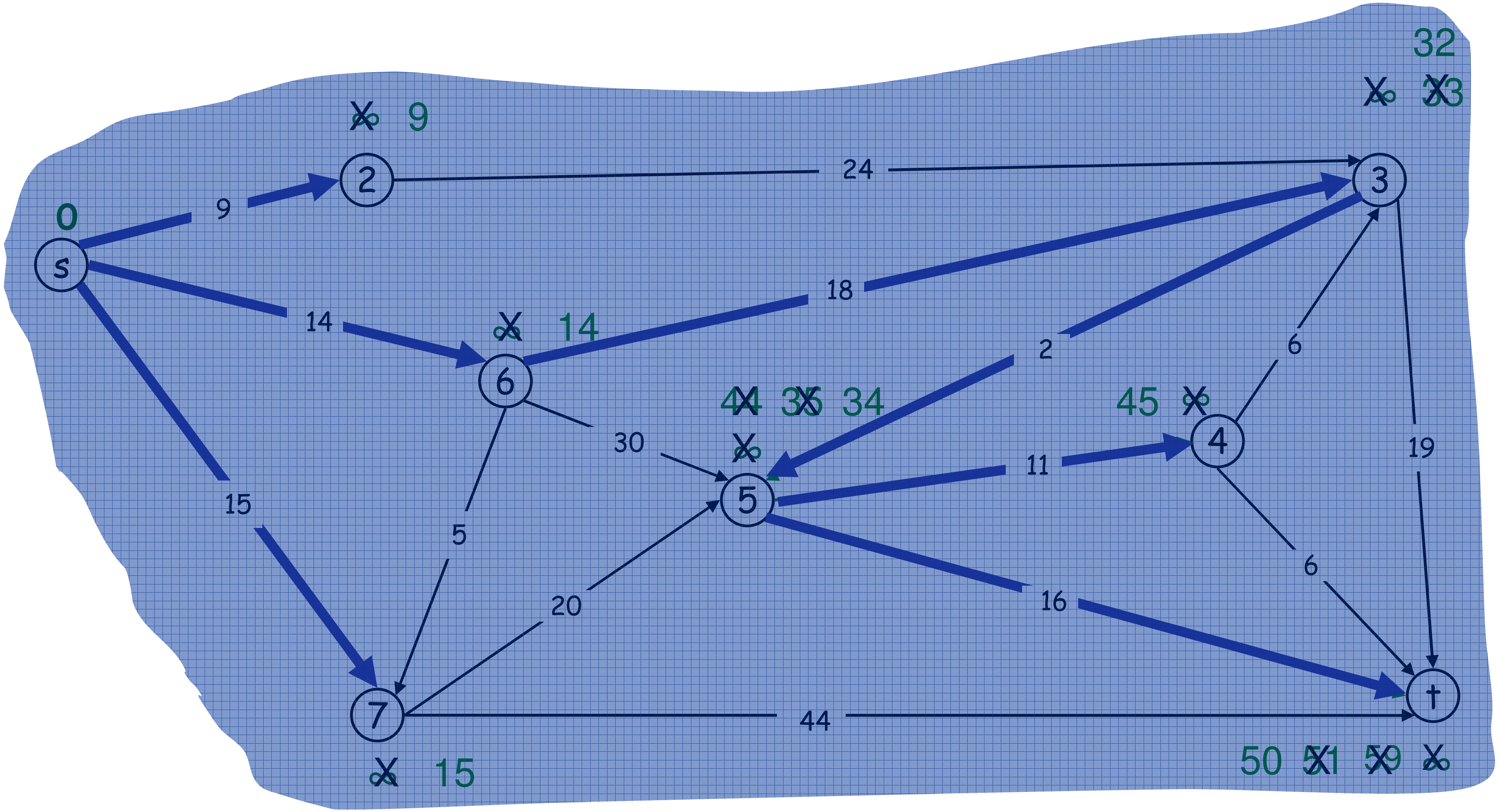
S = {s, 2, 6, 7, 3, 5, 4}

Q = { t }



$S = \{s, 2, 6, 7, 3, 5, 4, t\}$

$Q = \{\ \}$



32
$\cancel{\infty}$ $\cancel{33}$
$\cancel{\infty}$ 9
0
24
9
18
14
$\cancel{\infty}$ 14
2
6
$\cancel{44}$ $\cancel{35}$ 34
45 $\cancel{\infty}$
$\cancel{\infty}$
30
11
19
15
5
6
20
16
44
$\cancel{\infty}$ 15
50 $\cancel{51}$ $\cancel{59}$ $\cancel{\infty}$
s
2
3
6
5
4
7
t

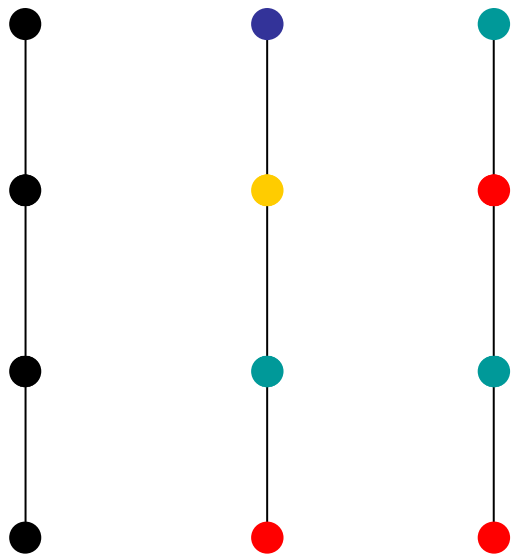
Coloración de grafos

- Dado una grafo G = (V, E) y un conjunto de colores $C = \{a, b, \ldots\}$, una **coloración** de G con colores de C es una aplicación

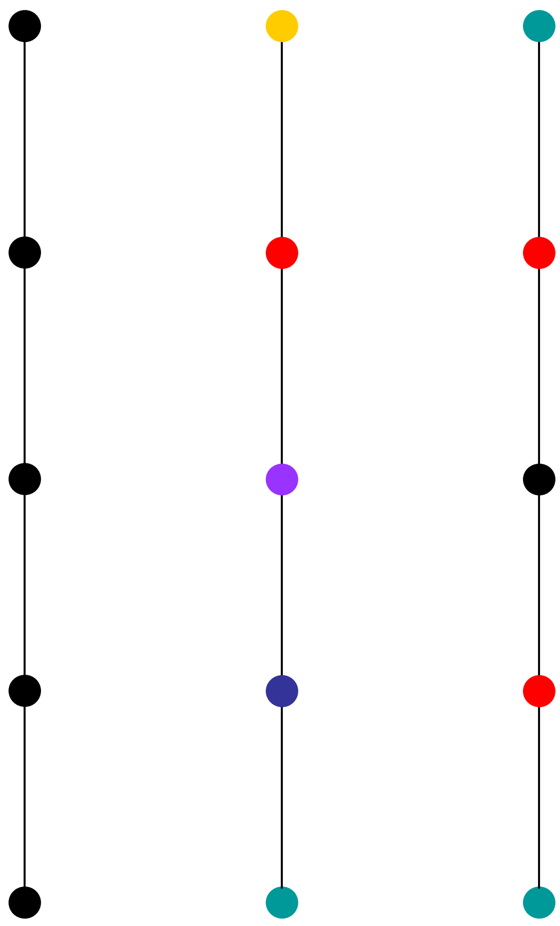
$$\gamma: V \rightarrow C$$

tal que si $uw \in E$ entonces $\gamma(u) \neq \gamma(w)$

- es una asignación de a los vértices de G de colores de manera que los extremos de cada arista reciban distintos colores



P_4

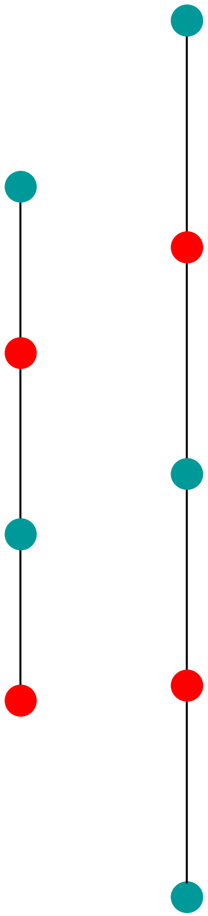


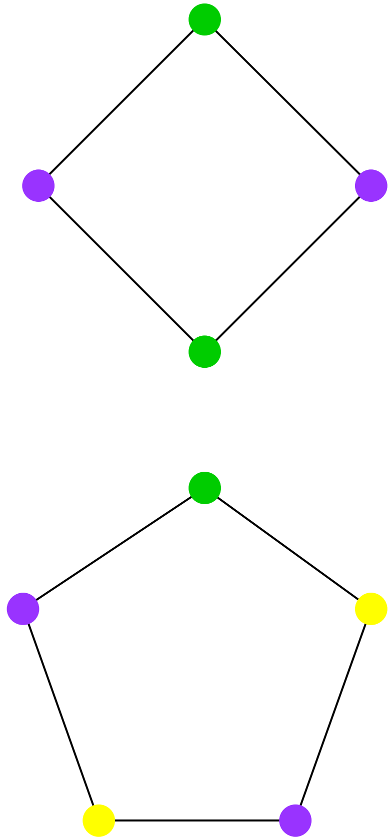
P_5

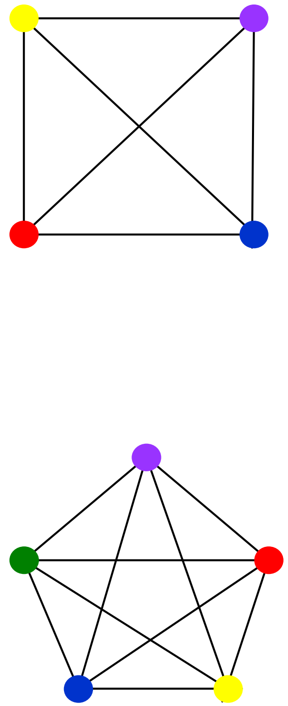
Número cromático

- El **número cromático**, $\chi(G)$, es el número mínimo de colores que se requieren para una coloración del grafo
- Para todo grafo G, $\chi(G) \leq |V|$. Podemos colorear asignando a cada vértice un color distinto, poco efectivo
- Si $|E| \geq 1$, entonces $\chi(G) \geq 2$. Si el grafo hay al menos una arista, necesitaremos dos colores como mínimo
- Si G contiene a G_1 como subgrafo, entonces $\chi(G) \geq \chi(G_1)$
- Si G tiene k componentes conexas $G_1, G_2, \ldots, G_k$ que tienen números cromáticos $\chi(G_1), \chi(G_2), \ldots, \chi(G_k)$, entonces $\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2), \ldots, \chi(G_k)\}$
- Si G y G' son isomorfos, entonces $\chi(G) = \chi(G')$

Encuentra el número cromático de P_n, C_n y K_n







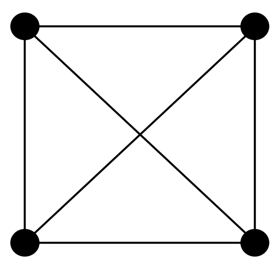
$\chi(P_n) = 2$

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 \text{ si n es par} \\ 3 \text{ si n es impar} \end{cases}$$

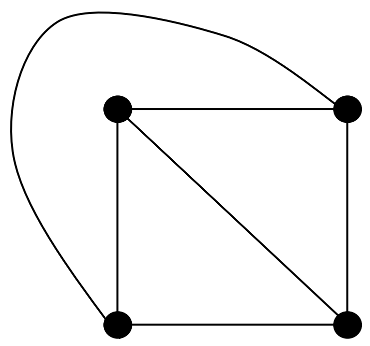
$\chi(K_n) = n$

Grafos planos

- Grafo plano, aquel cuyas aristas no se cortan
- Un grafo puede ser plano aunque habitualmente se dibuje con corte de aristas



K_4

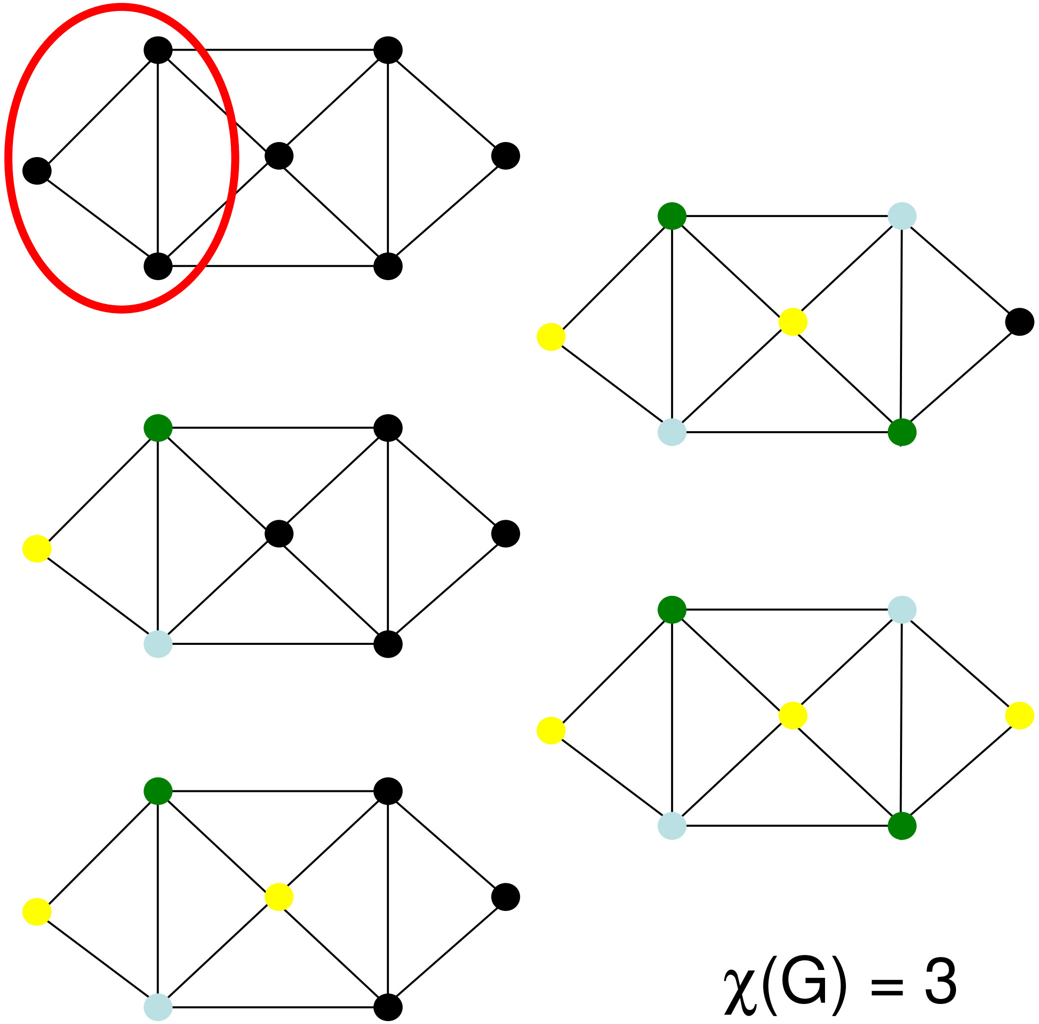


Representación plana de K_4

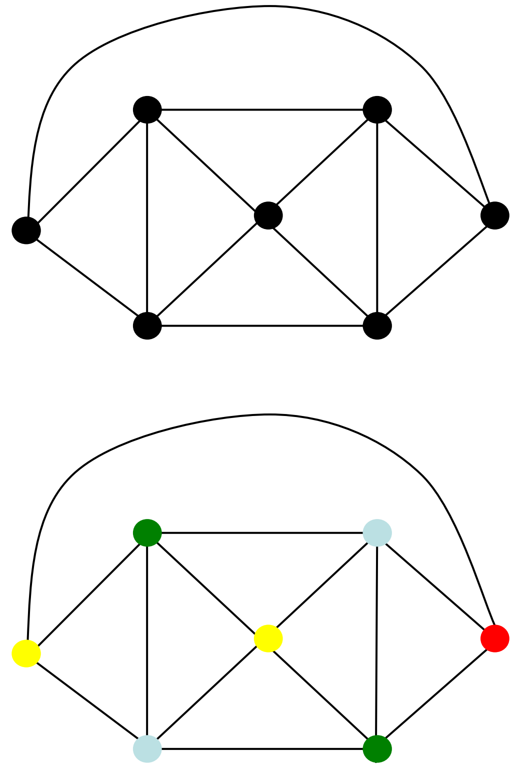
Teorema de los cuatro colores

El número cromático de un grafo plano es menor o igual que cuatro

Halla los números cromáticos de los grafos de la figura



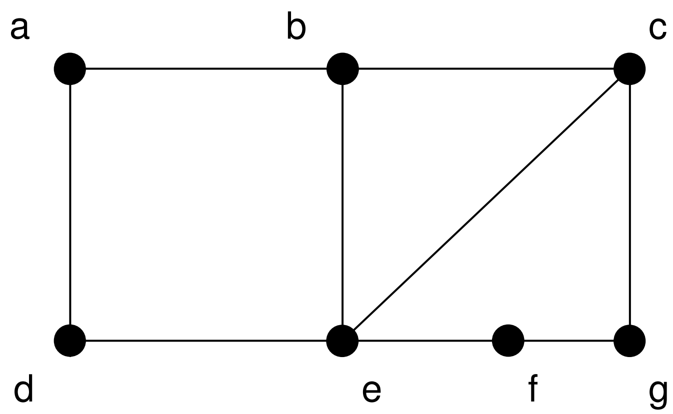
$\chi(G) = 3$



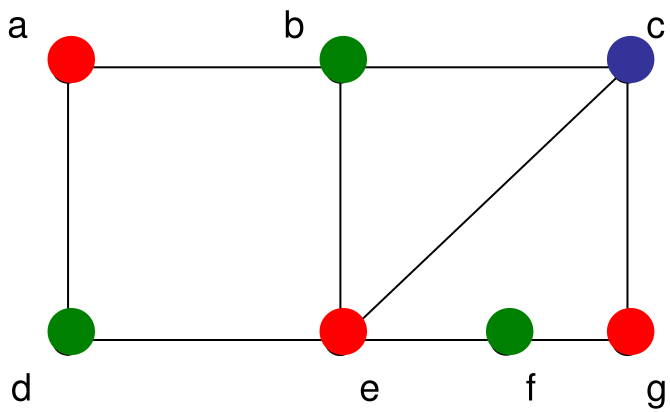
$\chi(H) = 4$

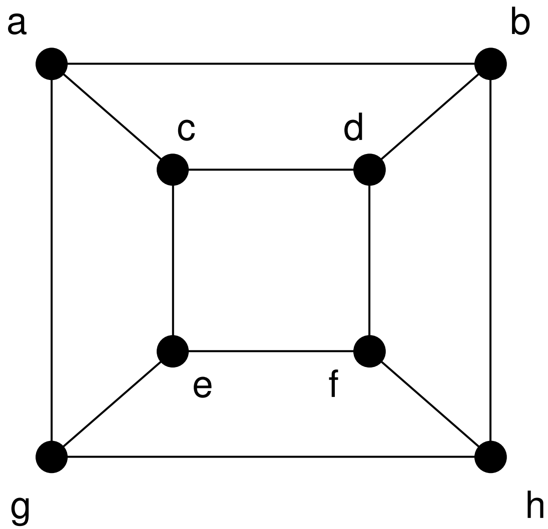
Algoritmo austero para colorear

- Ordenamos los vértices y los colores
  - $v_1, v_2, \ldots., v_n$
  - $c_1, c_2, \ldots.c_n$
- Asignamos el primer color c_1 a v_1
- Asignamos un color a v_2
  - Si es adyacente a v_1, le asignamos color c_2
  - En otro caso, c_1
- …..
- Asignamos un color a v_k, para ello miramos los colores de los vértices adyacentes, y le asignamos el primero disponible de la lista C

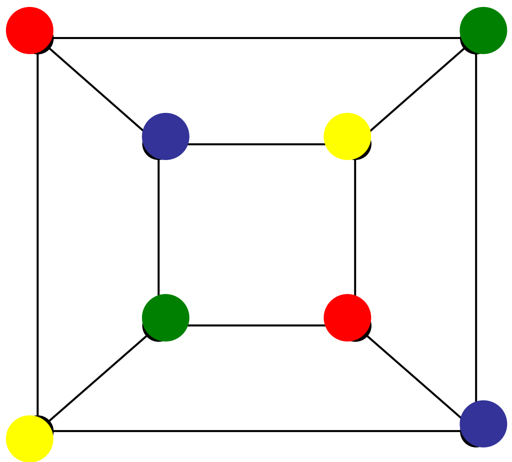


a, b, e, c, g, d, f

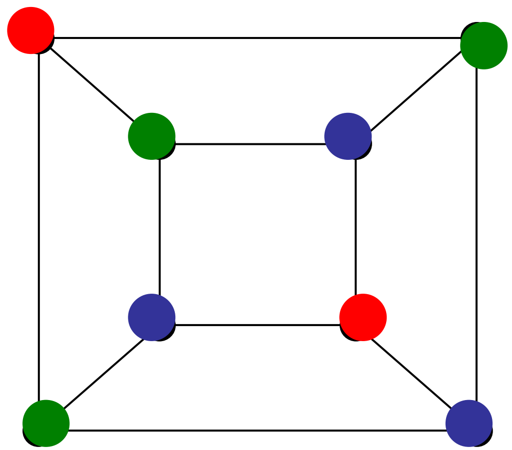




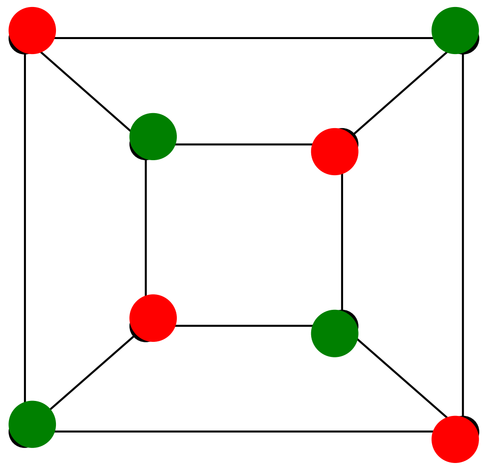
a, f, e, b, h, c, d, g



a, f, c, d, b, h, g, e



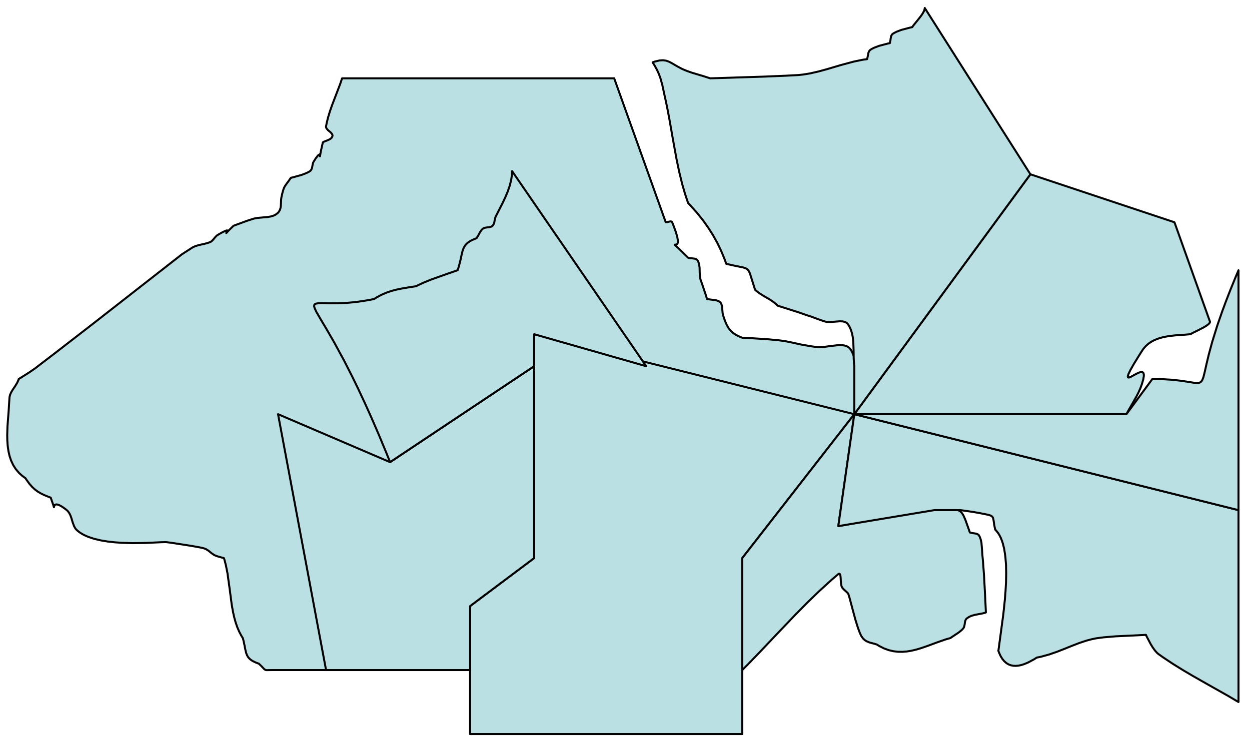
a, c, e, d, f, h, b, g



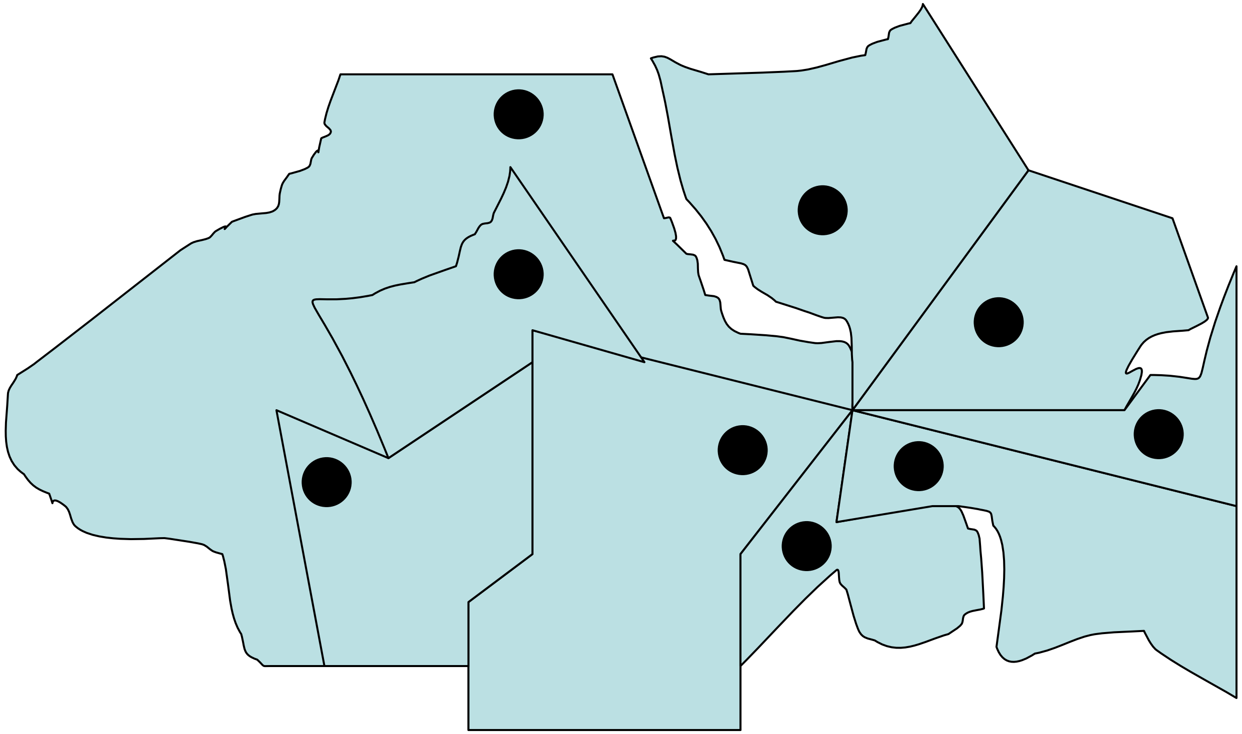
La eficiencia del algoritmo depende del orden de los vértices

Aplicaciones

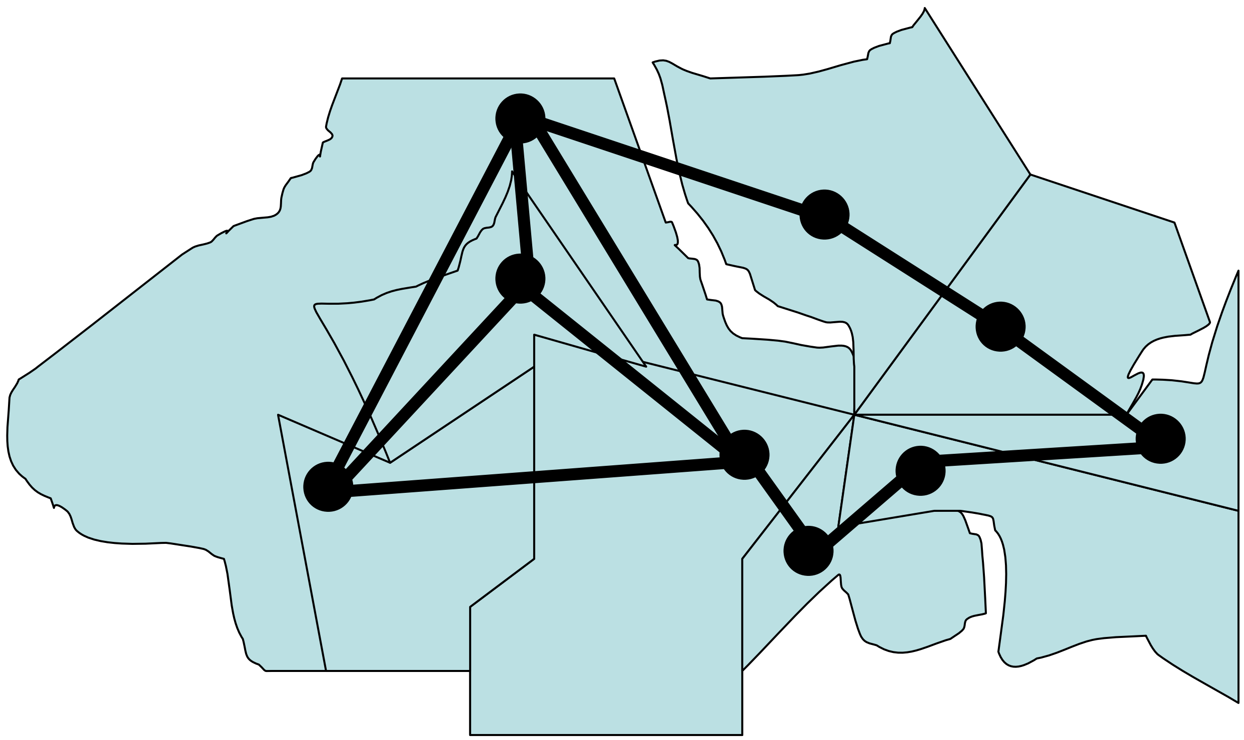
- Coloreado de mapas con teoría de grafos



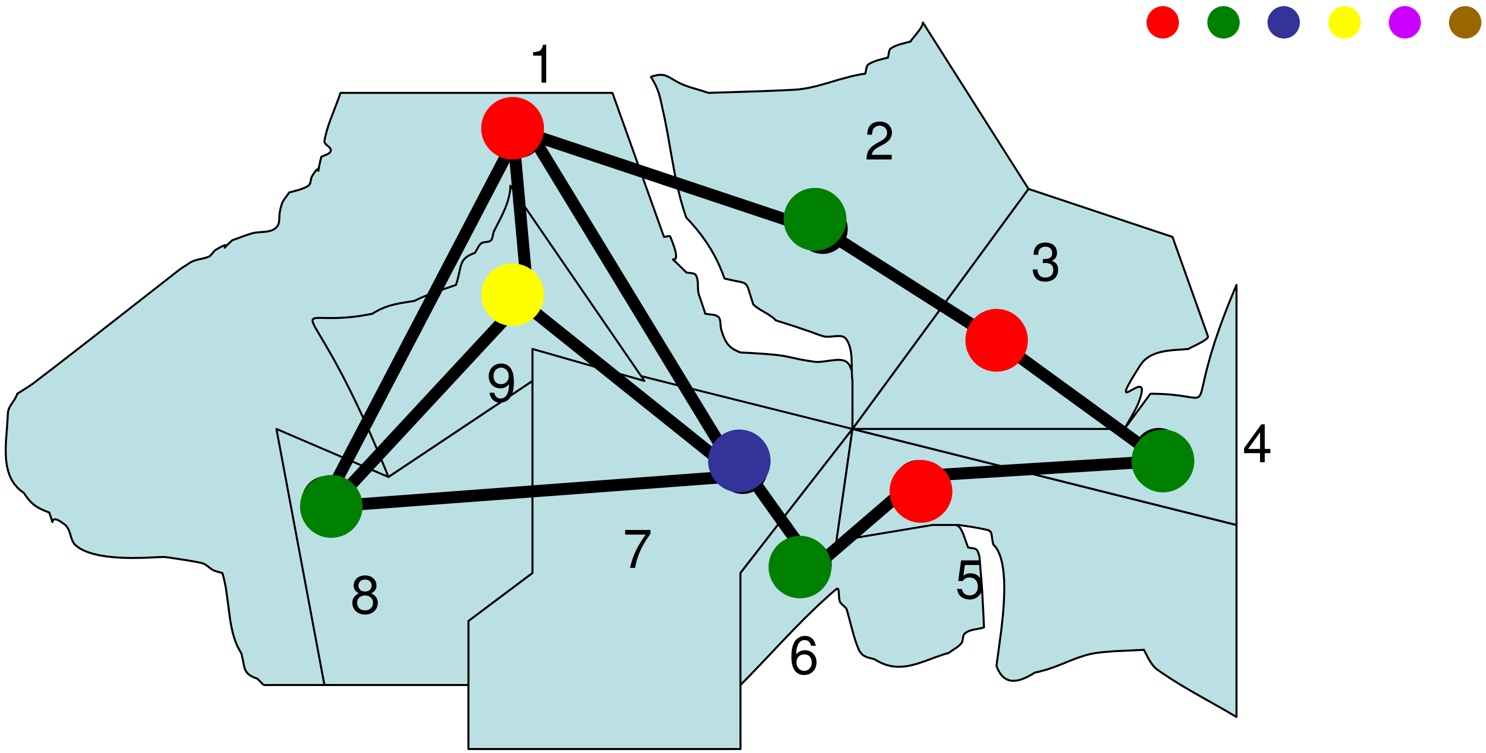
- Vértice = país

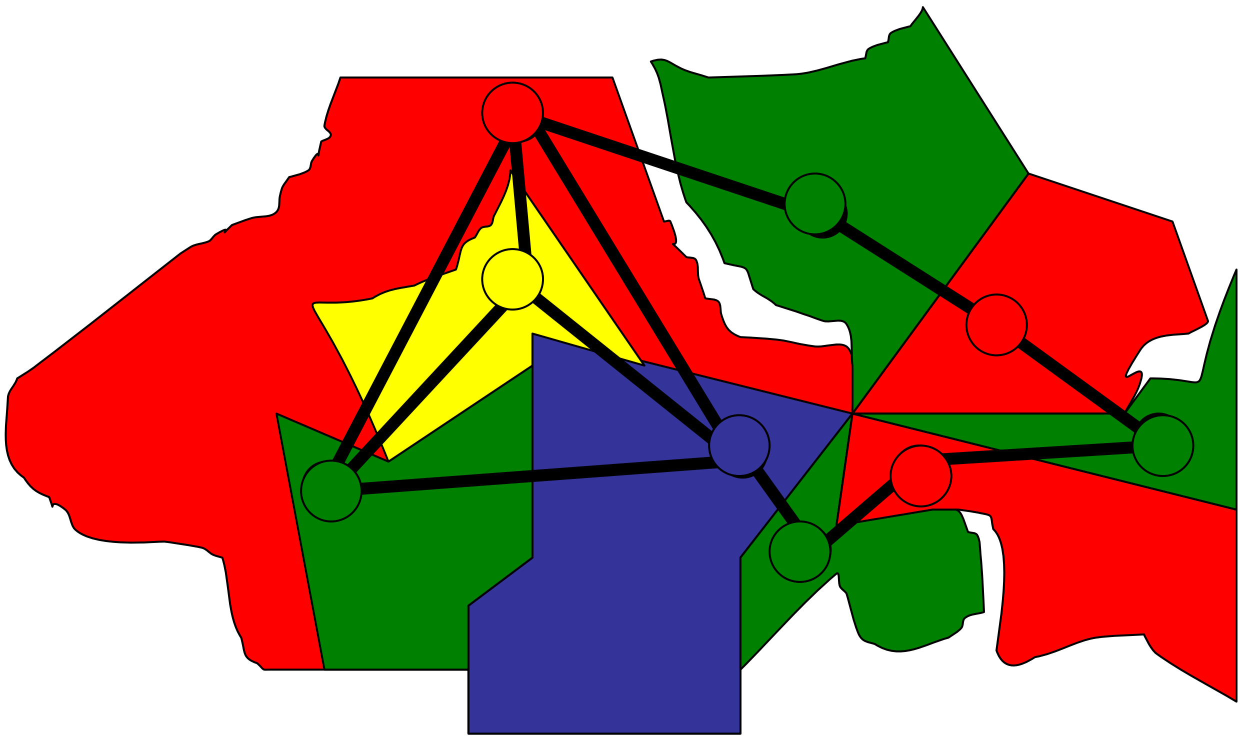


- Vértice = país
- Arista = frontera común



- Vértice = país
- Arista = frontera común
- Colorear mapa = colorear vértices



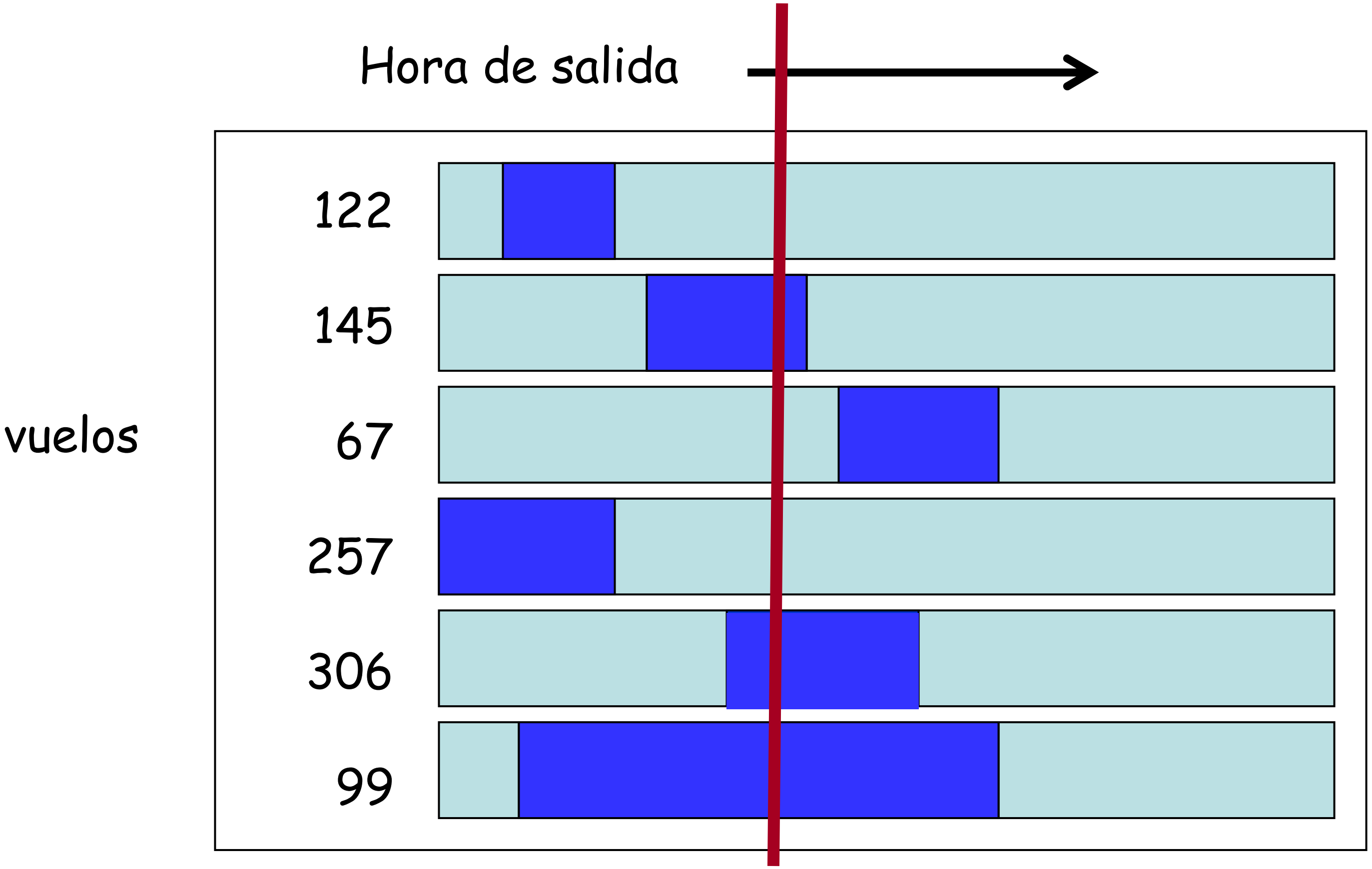


Aplicaciones

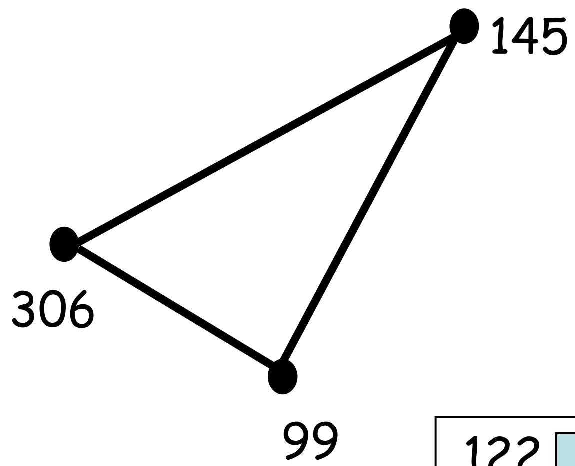
- Conflictos horarios

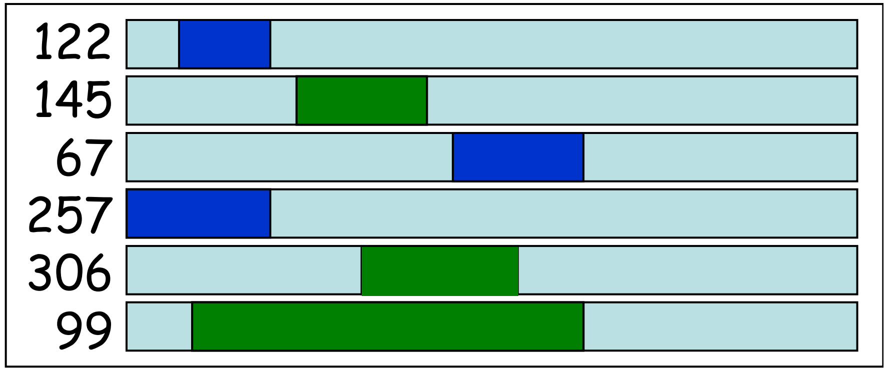
Las horas de salida solapan

¿Cuántas puertas necesitamos?

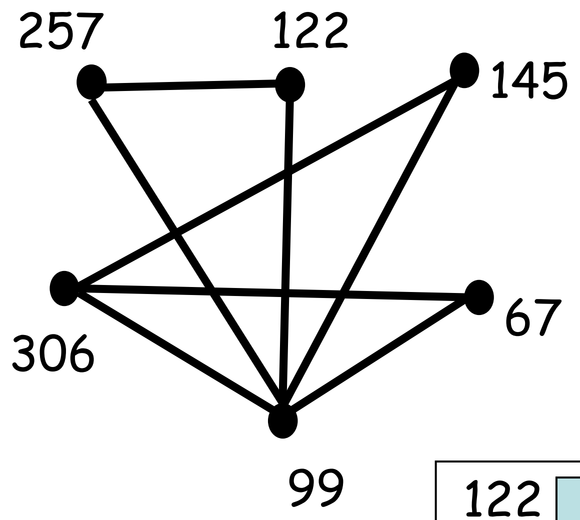


- Vértices = vuelos
- Aristas = conflicto horario

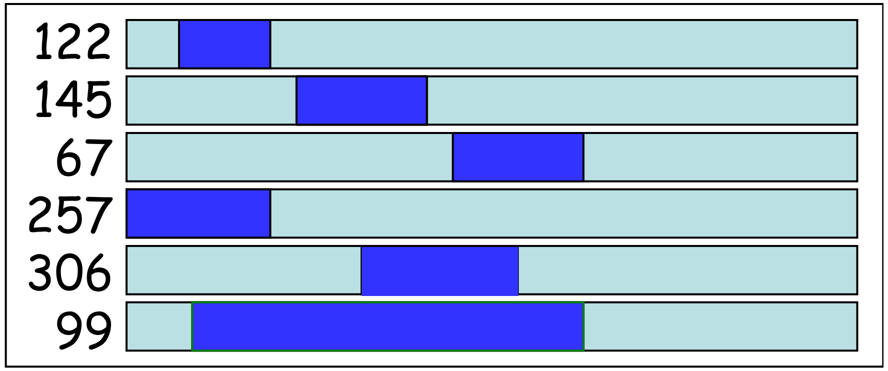




- Vértices = vuelos
- Aristas = conflicto horario

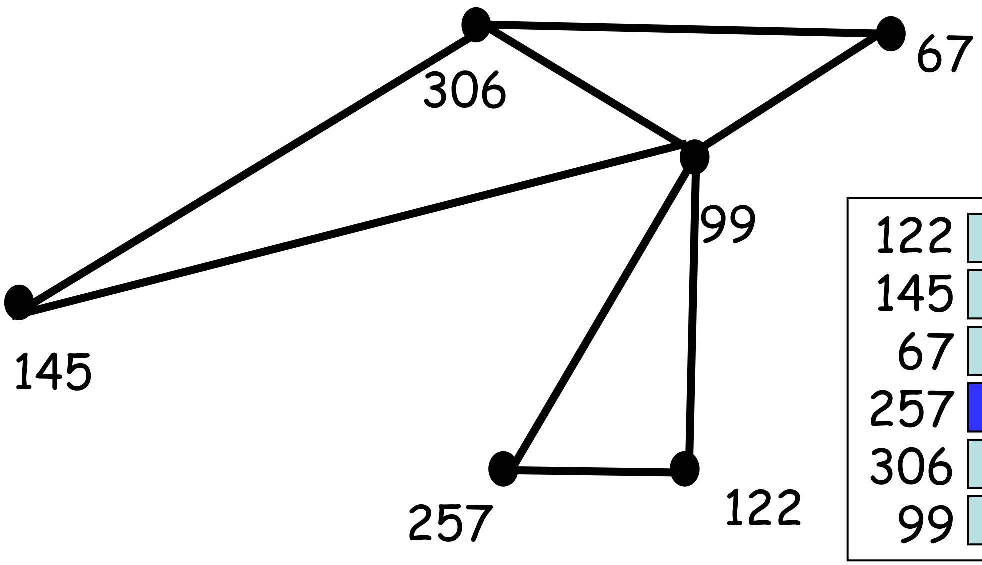


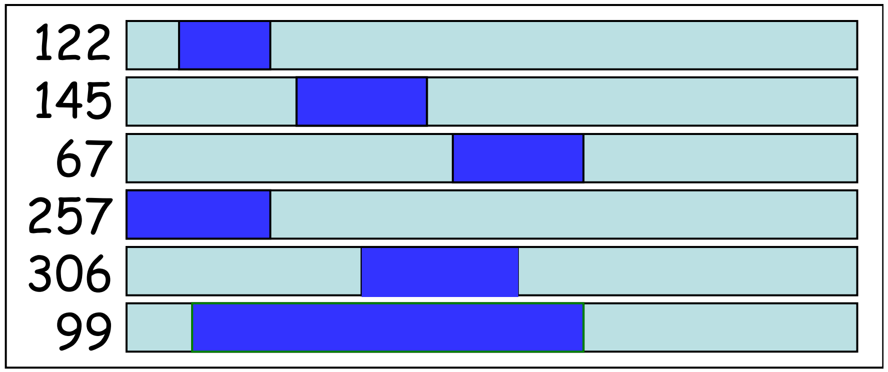
¿Es un grafo plano?



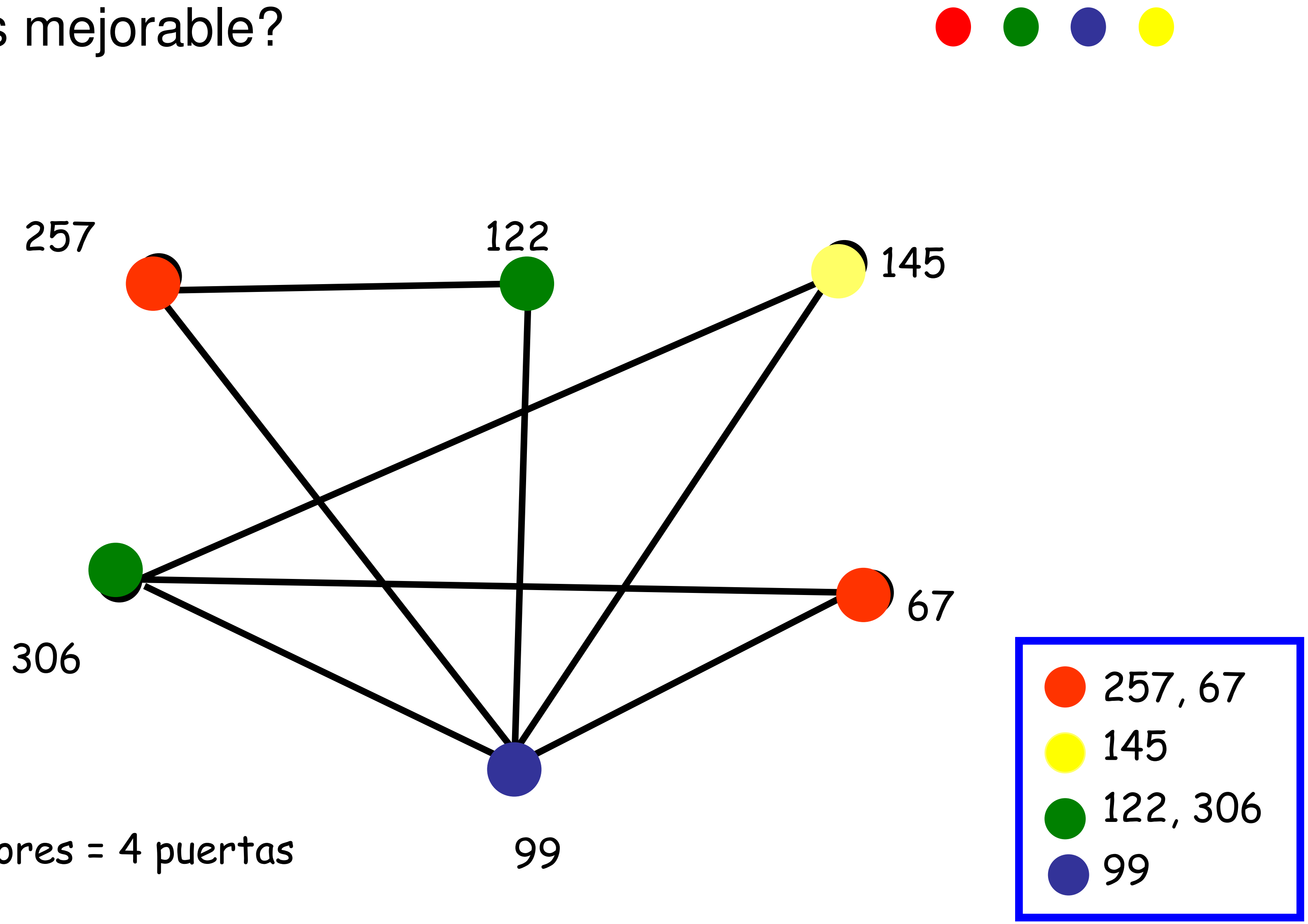
- Vértices = vuelos
- Aristas = conflicto horario

Grafo plano: 4 colores o menos





¿Es mejorable?

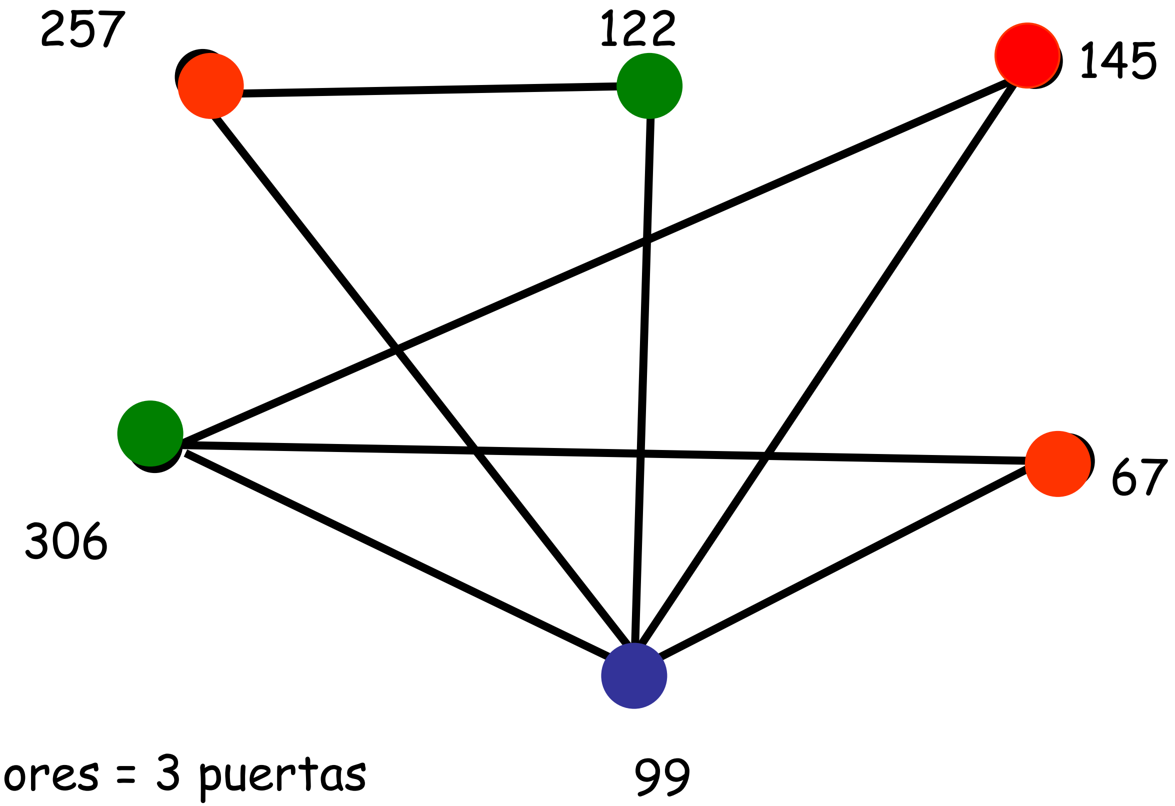


4 colores = 4 puertas

257, 122, 145, 67, 306, 99

¿Qué peculiaridades tiene esta ordenación?

Interesa colocar los vértices de mayor grado al final



3 colores = 3 puertas

257, 145, 67
122, 306
99

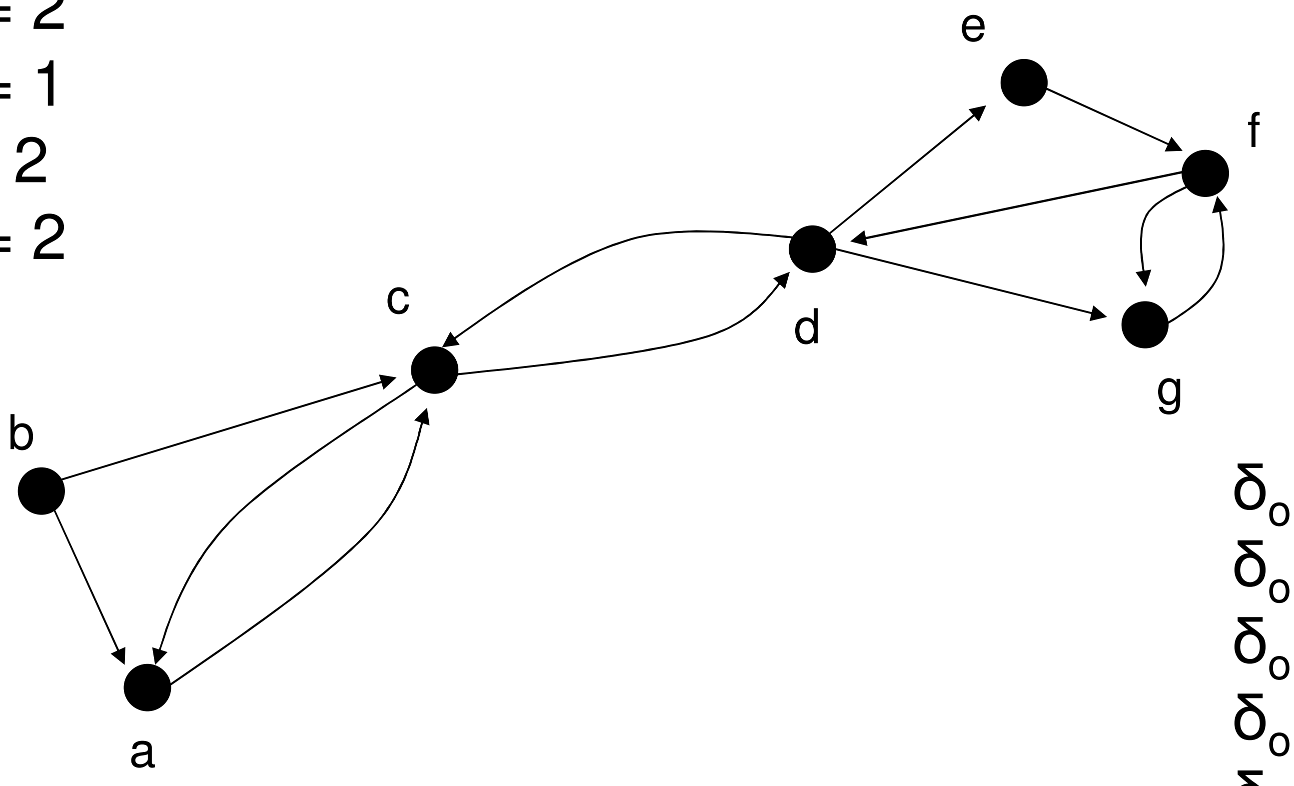
Grafos dirigidos

- Un **grafo dirigido o dígrafo** G = (V, E) consta de un conjunto V de vértices y de un conjunto E de arcos, que son pares **ordenados** de elementos de V. Se usa una flecha desde u a v para indicar la dirección del arco uv
- Un **multigrafo dirigido** G=(V,E), consta de un conjunto no vacío de vértices V y de un multiconjunto de arcos E. Un arco uv va desde el vértice u al v, se dice que los arcos e_1 y e_2 son arcos múltiples o paralelas si unen los mismos vértices.
- Los **pseudografos dirigidos** son más generales que los multigrafos, ya que los pseudografos también admiten bucles, arcos que conectan un vértice consigo mismo.

Dígrafos

- En un dígrafo distinguimos entre el grado entrante al vértice u ($\delta_{in}(u)$) y el grado saliente del vértice ($\delta_{out}(u)$) .
- El **grado entrante** (o de entrada) al vértice u indica el número de arcos que tienen al vértice u como vértice terminal.
- El **grado saliente** (o de salida) al vértice u indica el número de arcos que tiene el vértice u como vértice inicial.
- Un bucle contribuye con una unidad tanto al grado entrante como al grado saliente del vértice.

$\delta_{in}(a) = 2$
$\delta_{in}(b) = 0$
$\delta_{in}(c) = 3$
$\delta_{in}(d) = 2$
$\delta_{in}(e) = 1$
$\delta_{in}(f) = 2$
$\delta_{in}(g) = 2$



$\delta_{out}(a) = 1$
$\delta_{out}(b) = 2$
$\delta_{out}(c) = 2$
$\delta_{out}(d) = 3$
$\delta_{out}(e) = 1$
$\delta_{out}(f) = 2$
$\delta_{out}(g) = 1$

Teorema

Si G = (V, E) es un dígrafo, entonces

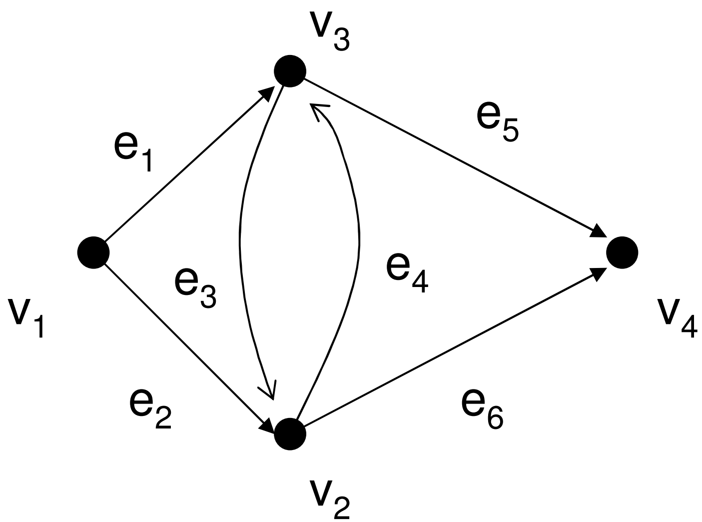
$$\Sigma\ \delta_{in}(u) = \Sigma\ \delta_{out}(u) = |E|$$

Representación matricial de dígrafos

- La matriz de adyacencia del dígrafo G, $A(G) = [a_{ij}] \in \boldsymbol{M}_{nxn}$ donde a_{ij} es el número de arcos que van de v_i a v_j (en esta dirección).

  La matriz de adyacencia no tiene por que ser simétrica, ya que puede haber un arco de v_i a v_j y no haberla de v_j a v_i
- La matriz de incidencia del dígrafo G, $M(G) = [m_{ij}] \in \boldsymbol{M}_{nxm}$ donde
  - $m_{ij} = 0$ si v_i no es extremo del arco e_j
  - $m_{ij} = 1$ si v_i es vértice inicial del arco e_j
  - $m_{ij} = -1$ si v_i es vértice final del arco e_j
  - $m_{ij} = 2$ si e_j es bucle

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$