

**Algebra Lineal. Primer de Telemàtica. 16/17 Examen de recuperació - 26 de Juny, 2017**

1 [2p] Donats els vectors no nuls  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  demostra les següents proposicions

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \alpha = \frac{\pi}{2}$ .
- $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

2 [2.5p] Un endomorfisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  està determinat per  $f(x, y, z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$  en la base canònica. Es demana

1. Trobar el nucli i la imatge de  $f$ . Classifica el morfisme  $f$  segons els resultats obtinguts.
2. Trobar la matriu de  $f$  en aquesta base
3. Trobar la matriu de  $f$  en la base  $V$  constituïda pels vectors  $v_1 = (1, 1, 1)$ ,  $v_2 = (1, 1, 0)$ ,  $v_3 = (1, 0, 0)$
4. L'expressió analítica de  $f$  en aquesta base  $V$

3 [2.5p] Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & a \\ a & a & 2 \end{pmatrix}$$

1. Troba els valors propis de  $A$  en funció del paràmetre  $a$
2. Troba els vectors propis de  $A$  en funció del paràmetre  $a$
3. Per quins valors de  $A$  és la matriu diagonalitzable? Per aquests casos donau la matriu diagonal i la matriu de canvi que base pertinent.
4. En els casos en que la matriu diagonalitzi, donau una expressió per  $A^n$  en funció del paràmetre  $a$ .

4 [3p] La vora externa dels planetes de la Galaxia Llunyana està conformada per cinc planetes connectats en forma de pentàgon: Alderaan, que dista 1 any llum de Dantooine, que dista 20 anys llum de Naboo, que dista 15 anys llum de Tatooine, que dista 1 any llum de Utapau, el qual dista 2 anys llums del primer planeta, Alderaan. El nucli profund dels planetes de la mateixa galaxia està conformada per cinc planetes més connectats en forma d'estrella de cinc puntes: Coruscant, que dista 4 anys llum de Mustafar, que dista 9 anys llum de Hoth, que dista 1 any llum d'Endor, que dista 2 anys llum de Polis Massa, el qual dista 1 any llums del primer planeta, Coruscant. Finalment, cada planeta de l'òrbita exterior es connecta amb exactament un planeta de l'òrbita interior: Alderaan amb Coruscant a una distància de 9 anys llum, Dantooine amb Endor a 7 anys llum, Naboo amb Mustafar a 2 anys llum, Tatooine amb Polis Massa a 4 anys llum i Utapau amb Hoth a 1 any llum.

1. Dibuixa un graf on es vegi la connexió entre els diferents planetes de la galaxia indicant a cada node el planeta en qüestió i a cada aresta la distància entre ells.
2. Donau la matriu associada al graf anterior (on hi hagi un zero no cal que poseu cap número).
3. Troba el planeta o planetes de major grau del graf i donau un recorregut simple que comenci en el planeta indicat i passi per tots els altres. Donau també si és possible un cicle que passi per tots els planetes.
4. Donau un arbre recobridor mínim, és a dir, per quines vies intergalàctiques posaríeu la xarxa de fibra òptica intergalàctica per tal de gastar el mínim de fibra òptica possible (que va un poc cara segons ens diuen els tècnics de Darth Vaderfònica).
5. És possible fer un recorregut que passi per tots els planetes de la galaxia sense repetir-ne cap? Justifica la resposta amb algun dels resultats que heu vist a classe (no val dir si o no sense més). En cas afirmatiu, marcau-ne un, i en cas negatiu digau perquè és impossible trobar tal camí.

**Que la força us acompanyi!**