3. SUBESPACIOS VECTORIALES (S.E.V.)

TEOREMA 3. DE CARACTERIZACIÓN DE SUBESPACIOS VECTORIALES

Si F es un subconjunto no vacío de un espacio vectorial E diremos que F es subespacio vectorial de E ssi se verifica:

i) la suma de dos elementos de F es otro elemento de F: $\vec{x}+\vec{y}\in F \quad \forall \vec{x},\vec{y}\in F$

ii) el producto de un escalar por un elemento de F es otro elemento de F: $\forall\ \vec{x}\in F$ y $\forall \alpha\in R \quad \alpha\vec{x}\in F$

Si E es un espacio vectorial cualquiera se verifica siempre que E y $\{\vec{0}\}$, son subespacios vectoriales de E. Se llaman triviales o impropios.

COROLARIO T3. Si S es subespacio vectorial de E, entonces $\vec{0}\in S$

Este corolario se suele utilizar a la recíproca ya que si se comprueba que $\vec{0}\notin S$, este conjunto no será subespacio vectorial.

♥**ER 3.1.- a)** Comprobar que el siguiente conjunto es subespacio vectorial de R^3.

$F=\{(x,y,z)\in R^3 \mid x+y+z=0\}$ conjunto de vectores de R^3 en que la suma de sus coordenadas es 0.

- Comprobemos en primer lugar si el vector nulo $(0,0,0)$ pertenece a F.

- ¿ $(0,0,0)\in F$? Sí porque cumple que $0+0+0=0$

Aplicando el teorema de caracterización de subespacios veamos si:

- **1.-** Dados dos vectores cualesquiera de F, (a,b,c) (x,y,z), su suma también pertenece a F.

$(a,b,c)\in F\Rightarrow a+b+c=0$ (1)

$(x,y,z)\in F\Rightarrow x+y+z=0$ (2)

$$\boxed{(x,y,z)+(a,b,c)=(x+a,y+b,z+c)}$$

Vamos a ver si el vector suma $(x+a,y+b,z+c)$ pertenece a F. o sea si $(x+a)+(y+b)+(z+c)=0$

$(x+a)+(y+b)+(z+c)=(x+y+z)+(a+b+c)$ por p. conmutativa y asociativa de la suma de escalares.

Por (1) se cumple que $a+b+c=0$ y por (2) $x+y+z=0$

Luego también se cumple que: $(x+a)+(y+b)+(z+c)=(x+y+z)+(a+b+c)=0+0=0$

- **2.-** El producto de un escalar por un vector de F también pertenece a F.

$\lambda\circ(x,y,z)=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$ con $\lambda\in R$ y $(x,y,z)\in F$

Vamos a ver si el vector $(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$ también pertenece a F es decir si $\lambda x+\lambda y+\lambda z=0$

$\lambda x+\lambda y+\lambda z=\lambda(x+y+z)$ por propiedad distributiva del producto de reales respecto a la suma

Por (2) se cumple que $x+y+z=0 \Rightarrow \lambda x+\lambda y+\lambda z=\lambda(x+y+z)=0$

El conjunto F es subespacio vectorial de R^3.

3.1 ECUACIONES DE UN SUBESPACIO VECTORIAL

Un subespacio vectorial F de un espacio vectorial V queda identificado:

- conocida una base de F
- conocido un sistema generador de F
- a partir de unas ecuaciones paramétricas o
- por sus ecuaciones cartesianas o implícitas (sistema homogéneo cuyas incógnitas son las coordenadas del vector genérico)

Siempre es posible pasar de unas ecuaciones a otras, obtener una base y determinar su dimensión.

♥**ER 3.2.- a)** Identificar el subespacio vectorial del **ER3.1** en todas sus formas.

En este caso el subespacio viene definido por sus **ecuaciones cartesianas** o **implícitas**

$$F=\{(x,y,x)\in R^3 \;|\; \boxed{x+y+z=0}\}$$

Para pasar a ecuaciones paramétricas tenemos que resolver el sistema formado por las ecuaciones implícitas:

$$x+y+z=0 \longrightarrow \begin{cases} x=-\beta-\alpha \\ y=\beta \\ z=\alpha \end{cases}$$

Un vector genérico del subespacio tendrá la forma $(-\beta-\alpha,\beta,\alpha) \longrightarrow$ A partir de este vector genérico podemos abtener un sistema generador del subespacio y posteriormente una base:

$$(-\beta-\alpha,\beta,\alpha)=(-\beta-\alpha,0,0)+(-0,\beta,0)+(0,0,\alpha)=$$

$$(-\alpha,0,0)+(-\beta,0,0)+(-0,\beta,0)+(0,0,\alpha)=$$

$$(-\alpha,0,\alpha)+(-\beta,\beta,0)=\alpha\circ(-1,0,1)+\beta\circ(-1,1,0)$$

Vemos que haciendo combinaciones lineales con los vectores $(-1,0,1),(-1,1,0)$ obtendremos cualquier vector del subespacio F.

$(-1,0,1),(-1,1,0)$ constituyen un sistema generador de F.

Además son dos vectores no proporcionales, $(1,0,-1)\neq\lambda(0,1,-1)$, por lo tanto forman un conjunto L.I.

Un sistema generador y L.I. constituye una base del subespacio. $B_F=\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$

En general la forma de obtener una base de un subespacio conociendo las ecuaciones del mismo tienen los siguientes pasos

1. Partiremos de las ecuaciones paramétricas del subespacio: $(-\beta-\alpha,\beta,\alpha)$
2. Expresaremos el vector genérico como combinación lineal de vectores:

2.1 En primer lugar conseguiremos tantos sumandos como parámetros tenga el subespacio y estos aparecerán en vectores distintos. $(-\beta-\alpha,\beta,\alpha)=(-\alpha,0,\alpha)+(-\beta,\beta,0)$

2.2 Aplicaremos la definición de producto de escalar por vector y sacaremos cada uno de los parámetros como escalares de la combinación lineal.

$$(-\alpha,0,\alpha)+(-\beta,\beta,0)=\alpha\circ(-1,0,1)+\beta\circ(-1,1,0)$$

3. Los vectores que aparecen en la combinación lineal formarán un sistema generador del subespacio.
4. Extrayendo de ese conjunto un subconjunto L.I. con tantos vectores como indique su rango tendremos una base del subespacio.

♥**ER 3.3.-** Obtener la dimensión, unas ecuaciones paramétricas y una base del subespacio E dado por:

$$E=\left\{(x,y,z)\in R^3 \ \middle|\ \boxed{2x-y+3z=0,\ -x+y-z=0,\ x-2y=0}\right\}$$

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones implícitas del subespacio:

$$\begin{cases}2x-y+3z=0\\-x+y-z=0\\x-2y=0\end{cases} \quad \begin{pmatrix}2&-1&3\\-1&1&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1&1&-1\\2&-1&3\\1&-2&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&1&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} \quad \begin{cases}-x+y-z=0\\y+z=0\end{cases}$$

Ecuaciones paramétricas $\rightarrow \begin{cases}x=-2\lambda\\y=-\lambda\\z=\lambda\end{cases}$

Un vector genérico del subespacio tendrá la forma $(-2\lambda,-\lambda,\lambda)=\lambda(-2,-1,1)$

Base del subespacio: $\{(-2,-1,1)\}$

La base encontrada tiene un vector $\Rightarrow$ La dimensión del subespacio es 1.

♥**ER 3.4.-** Obtener una base, la dimensión y las ecuaciones implícitas del subespacio E dado por:

$$E=\{(\alpha+\beta,\alpha+\beta,\alpha+\beta+\gamma,0)\ \ \alpha,\beta,\gamma\in R\}$$

Con las ecuaciones parámetricas buscamos una base del subespacio:

$$(\alpha+\beta,\alpha+\beta,\alpha+\beta+\gamma,0)=(\alpha,\alpha,\alpha,0)+(\beta,\beta,\beta,0)+(0,0,\gamma,0)=\alpha(1,1,1,0)+\beta(1,1,1,0)+\gamma(0,0,1,0)$$

Sistema generador: $(1,1,1,0),(1,1,1,0),(0,0,1,0)$ Base: $(1,1,1,0),(0,0,1,0)$

La base encontrada tiene 2 vectores $\Rightarrow$ La dimensión del subespacio es 2.

Las ecuaciones implícitas forman un sistema homogéneo cuyas incógnitas son las coordenadas (x,y,z,t)

$$\begin{cases}x=\alpha+\beta\\y=\alpha+\beta\\z=\alpha+\beta+\gamma\\t=0\end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&x\\1&1&0&y\\1&1&1&z\\0&0&0&t\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&x\\0&0&0&y-x\\0&0&1&z-x\\0&0&0&t\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&x\\0&0&1&z-x\\0&0&0&y-x\\0&0&0&t\end{array}\right)$$

Para que el sistema sea compatible: $\begin{cases} y-x=0 \\ t=0 \end{cases}$ Ecuaciones implícitas

4. BASES ORTOGONALES Y ORTONORMALES. GRAM-SCHMIDT.

D4.1 BASES ORTOGONALES

Son aquellas cuyos vectores son ortogonales dos a dos.

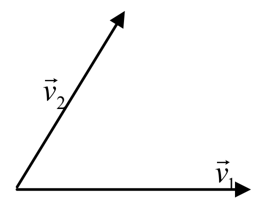
D4.2 BASES ORTONORMALES

Son bases ortogonales de vectores unitarios.

2– MÉTODO DE ORTOGONALIZACIÓN DE GRAM-SCHMIDT.

Este método nos permite construir una base ortogonal a partir de una base cualquiera del espacio.

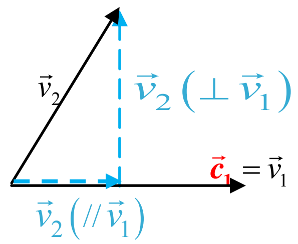
Supongamos una base en un espacio de dos dimensiones, $B=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$



A partir de los vectores de esta base del espacio vectorial, construiremos los vectores que formaran una base $\{\vec{c}_1,\vec{c}_2\}$ ortogonal del mismo espacio vectorial.

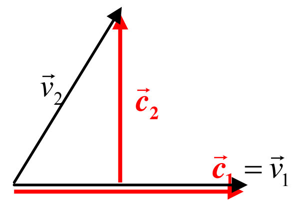
1.- Tomaremos $\boxed{\vec{c}_1=\vec{v}_1}$ como primer vector de la nueva base.

2.- El segundo vector será una C.L. de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ porque así aseguramos que los vectores $\vec{c}_1,\vec{c}_2$ generan el mismo subespacio que los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.



Descomponiendo el vector $\vec{v}_2$ en suma de un vector paralelo a $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2(//\vec{v}_1)$ y otro perpendicular a $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2(\perp\vec{v}_1)$, este último vendrá expresado de la forma $\vec{v}_2(\perp\vec{v}_1)=\vec{v}_2-t\circ\vec{v}_1=\vec{v}_2-t\circ\vec{c}_1$ y será el segundo vector de la nueva base: $\vec{c}_2$

Sabemos que es posible encontrar un escalar t tal que $\vec{c}_1\perp\vec{c}_2$.



Lo haremos imponiendo la condición de que $\vec{c}_2=\vec{v}_2-t\circ\vec{c}_1$ multiplicado escalarmente por $\vec{c}_1=\vec{v}_1$ ha de dar 0.

$$\vec{c}_1\bullet\vec{c}_2=\vec{c}_1\bullet(\vec{v}_2-t\circ\vec{c}_1)=\vec{c}_1\bullet\vec{v}_2-t\cdot\vec{c}_1\bullet\vec{c}_1=0 \quad\Rightarrow\quad t=\frac{\vec{c}_1\bullet\vec{v}_2}{\vec{c}_1\bullet\vec{c}_1} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{c}_2=\vec{v}_2-\frac{\vec{c}_1\bullet\vec{v}_2}{\vec{c}_1\bullet\vec{c}_1}\vec{c}_1}$$

$B_r=\{\vec{c}_1,\vec{c}_2\}$ base ortogonal que genera el mismo espacio que $B=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$

En general si tenemos un espacio E y una base $B=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,.........,\vec{v}_n\}$ construiremos una base ortogonal $B_r=\{\vec{c}_1,\vec{c}_2,\vec{c}_3,........,\vec{c}_n\}$ que genere el mismo espacio E que la base B.

Empezaremos de la misma forma que en el caso de solo dos vectores.

1.- Tomaremos $\vec{c}_1=\vec{v}_1$ como primer vector de la nueva base.

2.- El segundo vector será una C.L. de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ de la forma $\vec{c}_2=\vec{v}_2-t\circ\vec{c}_1$ al que impondremos la condición $\vec{c}_1\perp\vec{c}_2$ con lo que obtendremos $t=\dfrac{\vec{c}_1\bullet\vec{v}_2}{\vec{c}_1\bullet\vec{c}_1}$ y $\vec{c}_2=\vec{v}_2-\dfrac{\vec{c}_1\bullet\vec{v}_2}{\vec{c}_1\bullet\vec{c}_1}\vec{c}_1$.

3.- Para calcular el 3er vector procederemos de la misma forma:

El vector $\vec{c}_3$ será una C.L. de $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ de la forma $\vec{c}_3 = \vec{v}_3 - t_1 \circ \vec{c}_1 - t_2 \circ \vec{c}_2$ al que impondremos la condición $\vec{c}_1 \perp \vec{c}_3$ y $\vec{c}_2 \perp \vec{c}_3$

$\vec{c}_1 \bullet \vec{c}_3 = \vec{c}_1 \bullet (\vec{v}_3 - t_1 \circ \vec{c}_1 - t_2 \circ \vec{c}_2) = 0$ y $\vec{c}_2 \bullet \vec{c}_3 = \vec{c}_2 \bullet (\vec{v}_3 - t_1 \circ \vec{c}_1 - t_2 \circ \vec{c}_2) = 0$

$\vec{c}_1 \bullet \vec{c}_3 = \vec{c}_1 \bullet \vec{v}_3 - \vec{c}_1 \bullet (t_1 \circ \vec{c}_1) - \vec{c}_1 \bullet (t_2 \circ \vec{c}_2) = 0$ $\quad$ $\vec{c}_2 \bullet \vec{c}_3 = \vec{c}_2 \bullet \vec{v}_3 - \vec{c}_2 \bullet (t_1 \circ \vec{c}_1) - \vec{c}_2 \bullet (t_2 \circ \vec{c}_2) = 0$

$\vec{c}_1 \bullet \vec{v}_3 - t_1 \cdot (\vec{c}_1 \bullet \vec{c}_1) - t_2 \cdot \underbrace{(\vec{c}_1 \bullet \vec{c}_2)}_{0} = 0$ $\quad$ $\vec{c}_2 \bullet \vec{v}_3 - t_1 \cdot \underbrace{(\vec{c}_2 \bullet \vec{c}_1)}_{0} - t_2 \cdot (\vec{c}_2 \bullet \vec{c}_2) = 0$

$$t_1 = \frac{\vec{c}_1 \bullet \vec{v}_3}{\vec{c}_1 \bullet \vec{c}_1} \qquad\qquad t_2 = \frac{\vec{c}_2 \bullet \vec{v}_3}{\vec{c}_2 \bullet \vec{c}_2}$$

$$\vec{c}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\vec{c}_1 \bullet \vec{v}_3}{\vec{c}_1 \bullet \vec{c}_1} \circ \vec{c}_1 - \frac{\vec{c}_2 \bullet \vec{v}_3}{\vec{c}_2 \bullet \vec{c}_2} \circ \vec{c}_2$$

Análogamente seguiríamos construyendo el resto de vectores:

$$\vec{c}_4 = \vec{v}_4 - \frac{\vec{c}_1 \bullet \vec{v}_4}{\vec{c}_1 \bullet \vec{c}_1} \circ \vec{c}_1 - \frac{\vec{c}_2 \bullet \vec{v}_4}{\vec{c}_2 \bullet \vec{c}_2} \circ \vec{c}_2 - \frac{\vec{c}_3 \bullet \vec{v}_4}{\vec{c}_3 \bullet \vec{c}_3} \circ \vec{c}_3$$

……………………………………………………

$$\vec{c}_n = \vec{v}_n - \frac{\vec{c}_1 \bullet \vec{v}_n}{\vec{c}_1 \bullet \vec{c}_1} \circ \vec{c}_1 - \frac{\vec{c}_2 \bullet \vec{v}_n}{\vec{c}_2 \bullet \vec{c}_2} \circ \vec{c}_2 - \frac{\vec{c}_3 \bullet \vec{v}_n}{\vec{c}_3 \bullet \vec{c}_3} \circ \vec{c}_3 - \dots\dots\dots - \frac{\vec{c}_{n-1} \bullet \vec{v}_n}{\vec{c}_{n-1} \bullet \vec{c}_{n-1}} \circ \vec{c}_{n-1}$$

Resumen

$$\vec{c}_1 = \vec{v}_1$$

$$\vec{c}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{c}_1 \bullet \vec{v}_2}{\vec{c}_1 \bullet \vec{c}_1} \vec{c}_1$$

$$\vec{c}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\vec{c}_1 \bullet \vec{v}_3}{\vec{c}_1 \bullet \vec{c}_1} \circ \vec{c}_1 - \frac{\vec{c}_2 \bullet \vec{v}_3}{\vec{c}_2 \bullet \vec{c}_2} \circ \vec{c}_2$$

$$\vec{c}_4 = \vec{v}_4 - \frac{\vec{c}_1 \bullet \vec{v}_4}{\vec{c}_1 \bullet \vec{c}_1} \circ \vec{c}_1 - \frac{\vec{c}_2 \bullet \vec{v}_4}{\vec{c}_2 \bullet \vec{c}_2} \circ \vec{c}_2 - \frac{\vec{c}_3 \bullet \vec{v}_4}{\vec{c}_3 \bullet \vec{c}_3} \circ \vec{c}_3$$

……………………………………………………

$$\vec{c}_n = \vec{v}_n - \frac{\vec{c}_1 \bullet \vec{v}_n}{\vec{c}_1 \bullet \vec{c}_1} \circ \vec{c}_1 - \frac{\vec{c}_2 \bullet \vec{v}_n}{\vec{c}_2 \bullet \vec{c}_2} \circ \vec{c}_2 - \frac{\vec{c}_3 \bullet \vec{v}_n}{\vec{c}_3 \bullet \vec{c}_3} \circ \vec{c}_3 - \dots\dots\dots - \frac{\vec{c}_{n-1} \bullet \vec{v}_n}{\vec{c}_{n-1} \bullet \vec{c}_{n-1}} \circ \vec{c}_{n-1}$$

Si se desea una base ortonormal se divide cada vector por su norma.

♥**ER4.1:** Calcular una base ortogonal del subespacio generado por los vectores $\vec{u}_1 = (1,1,0,1)$, $\vec{u}_2 = (0,0,1,1)$, $\vec{u}_3 = (2,0,-1,0)$

Estos 3 vectores son L.I. por lo tanto forman una base del subespacio.

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \alpha + 2\lambda = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta - \lambda = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

Vamos a construir una base ortogonal.

$\vec{c}_1 = \vec{u}_1 = (1,1,0,1)$

$$\vec{c}_2 = \vec{u}_2 - \frac{\vec{c}_1 \bullet \vec{u}_2}{\vec{c}_1 \bullet \vec{c}_1}\vec{c}_1 = ((0,0,1,1)) - \frac{(1,1,0,1)\cdot(0,0,1,1)}{(1,1,0,1)\cdot(1,1,0,1)}(1,1,0,1) = (0,0,1,1) - \frac{0+0+0+1}{1+1+0+1}(1,1,0,1)$$

$$\vec{c}_2 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}\right)$$

Podemos tomar como vector de la nueva base el vector $(\vec{c}_2)' = (1,1,-3,-2)$ que es proporcional al $\vec{c}_2$ y por ello sigue siendo ortogonal al $\vec{c}_1$

$$\vec{c}_3 = \vec{u}_3 - \frac{\vec{c}_1 \bullet \vec{u}_3}{\vec{c}_1 \bullet \vec{c}_1} \circ \vec{c}_1 - \frac{\vec{c}_2 \bullet \vec{u}_3}{\vec{c}_2 \bullet \vec{c}_2} \circ \vec{c}_2 =$$

$$(2,0,-1,0) - \frac{(1,1,0,1)\cdot(2,0,-1,0)}{(1,1,0,1)\cdot(1,1,0,1)}(1,1,0,1) - \frac{(1,1,-3,-2)\cdot(2,0,-1,0)}{(1,1,-3,-2)\cdot(1,1,-3,-2)}(1,1,-3,-2)$$

$$\vec{c}_3 = (2,0,-1,0) - \frac{2}{3}(1,1,0,1) - \frac{1}{3}(1,1,-3,-2) = (1,-1,0,0) \qquad \vec{c}_3 = (1,-1,0,0)$$

Los vectores $\{(1,1,0,1),(1,1,-3,-2),(1,-1,0,0)\}$ forman una base ortogonal del espacio generado por la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$

5. PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN VECTOR SOBRE UN SUBESPACIO

D5.1. VECTOR ORTOGONAL A UN SUBESPACIO

Un vector $\vec{u}$ es ortogonal a un subespacio $S \subset E$ si y sólo si $\vec{u}\cdot\vec{x} = 0 \quad \forall \vec{x} \in S$ es decir **si es ortogonal a todos los vectores** de S.

TEOREMA 4

Un vector $\vec{u}$ es ortogonal a un subespacio $S \subset E$ si y sólo si **es ortogonal a todos los vectores de una base** de S.

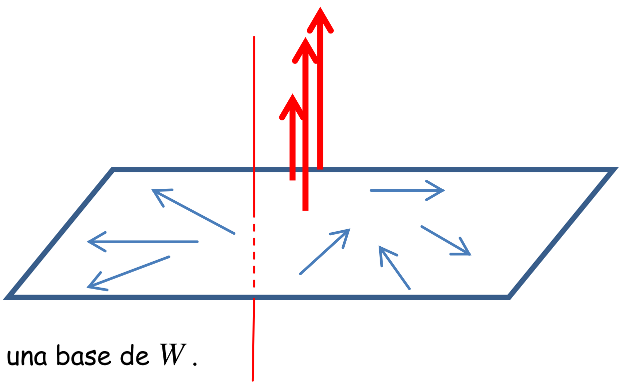
TEOREMA 5

Dos subespacios V y W de E son ortogonales si

$\forall \vec{x} \in V$ y $\forall \vec{y} \in W$ se cumple $\vec{x} \bullet \vec{y} = 0$.

TEOREMA 6

Para que dos subespacios V y W sean ortogonales es necesario y suficiente que los vectores de una base de V sean ortogonales con los vectores de una base de W.



Como se recordará el vector proyección ortogonal de un vector $\vec{u}$ sobre otro $\vec{v}$ se expresa como:

$$proy\,\vec{u}\left(\vec{v}\right)=\frac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{\vec{v}\bullet\vec{v}}\,\vec{\boldsymbol{v}}=\frac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{\left\|\vec{v}\right\|^2}\,\vec{\boldsymbol{v}}$$

A continuacion definiremos el vector **proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio.**

D5.2 VECTOR PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN VECTOR $\vec{u}\in E$ SOBRE UN SUBESPACIO $S\subset E$

Sea S un subespacio de un espacio vectorial E. Todo vector $\vec{u}\in E$ se descompone de manera única de la forma $\vec{u}=\vec{\boldsymbol{u}}_S+\vec{\boldsymbol{u}}_O$ siendo $\vec{\boldsymbol{u}}_S\in S$ y $\vec{\boldsymbol{u}}_O$ ortogonal a S.

El vector $\vec{\boldsymbol{u}}_S\in S$ es el vector proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre S.

Si tomamos en S una base ortogonal, $\{\vec{s}_1,\vec{s}_2,\ldots\ldots\ldots,\vec{s}_r\}$, la proyección de $\vec{u}$ sobre S viene dada por

$$proy\,\vec{u}\left(S\right)=\vec{\boldsymbol{u}}_S=\frac{\vec{u}\bullet\vec{s}_1}{\left\|\vec{s}_1\right\|^2}\,\vec{s}_1+\frac{\vec{u}\bullet\vec{s}_2}{\left\|\vec{s}_2\right\|^2}\,\vec{s}_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{\vec{u}\bullet\vec{s}_r}{\left\|\vec{s}_r\right\|^2}\,\vec{s}_r$$

6. SUMAS Y SUMAS DIRECTAS

D6.1 SUMA DE SUBESPACIOS

Sean V y W dos subespacios de un espacio vectorial E de dimensión n. Se llama suma de V y W a un subconjunto de E que denotamos por $V+W$, formado por todos los vectores obtenidos al sumar un vector de V y uno de W.

$$V+W=\{\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}\ \mid\ \vec{y}\in V,\ \vec{z}\in W\}$$

El conjunto suma de subespacios no tiene nada que ver con el conjunto unión de subespacios.

TEOREMA 7

La suma de dos subespacios V y W de un espacio vectorial E también es subespacio vectorial de E.

TEOREMA 8

Sean V y W dos subespacios de dimensión finita de un espacio vectorial E. En ese caso $V+W$ tiene dimensión finita y $\dim\left(V+W\right)=\dim V+\dim W-\dim\left(V\cap W\right)$

D6.2 SUMA DIRECTA DE SUBESPACIOS

Se dice que E es suma directa de los subespacios V y W si todo vector $\vec{x}\in E$ se escribe como suma de un vector de V y uno de W **de forma única**:

Existe un único $\vec{y}\in V$ y un único $\vec{z}\in W$ tales que $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}\qquad\forall\vec{x}\in E$

Y se expresa de la forma $E=V\oplus W$

D6.3 SUBESPACIOS SUPLEMENTARIOS

Si $\boldsymbol{E}$ es suma directa de los subespacios $\boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{W}$ estos se denominan subespacios suplementarios.

TEOREMA 9

Si $\boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{W}$ son subespacios suplementarios se cumple: $V+W=E$ y $V\cap W=\{\vec{0}\}$

TEOREMA 10

Si $\boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{W}$ son de dimensión finita $V\oplus W$ también lo es y $\dim V\oplus W=\dim V+\dim W$

TEOREMA 11

Si $\boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{W}$ son subespacios suplementarios y B_V es una base de $\boldsymbol{V}$ y B_W es una base de $\boldsymbol{W}$ entonces $B_V\cup B_W=B_E$ es decir que tomando los vectores de ambas bases formaremos una base de $\boldsymbol{E}$.

En el caso en que $\boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{W}$ no sean suplementarios $B_V\cup B_W$ nos dará un conjunto generador de $V+W$.

♥**ER6.1:** Se consideran los subespacios de R^3: $V=\{(\alpha,0,0),\alpha\in R\}$ y $W=\{(0,\beta,\lambda)\ \beta,\lambda\in R\}$
Demostrar que $V\oplus W=R^3$

Demostraremos: **a)** $V\cap W=\{\vec{0}\}$ **b)** $V+W=R^3$

a) Sea $(x,y,z)\in V\cap W \Rightarrow \begin{matrix}(x,y,z)\in V\\(x,y,z)\in W\end{matrix} \Rightarrow$ $\begin{matrix}\text{Por pertenencer a } V:\ y=z=0\\ \text{Por pertenecer a } W:\ x=0\end{matrix}$ $\Rightarrow (x,y,z)\in(0,0,0)$

Por lo tanto $V\cap W=\{\vec{0}\}$

b) Todo vector $(x,y,z)\in R^3$ se puede expresar como $(x,y,z)=(x,0,0)+(0,y,z)$ es decir como suma de $(x,0,0)$, un vector de $\boldsymbol{V}$, y $(0,y,z)$, un vector de W por tanto $V+W=R^3$.

Así pues queda demostrado que $V\oplus W=R^3$