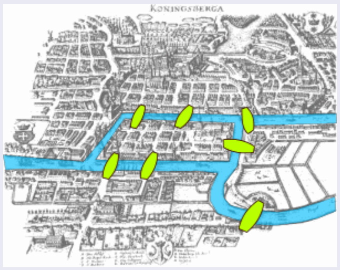
Índex

Introducció

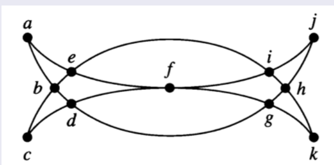
Els ponts de Königsberg

Es pot fer un tour pels ponts de Königsberg sense repetir-ne cap?



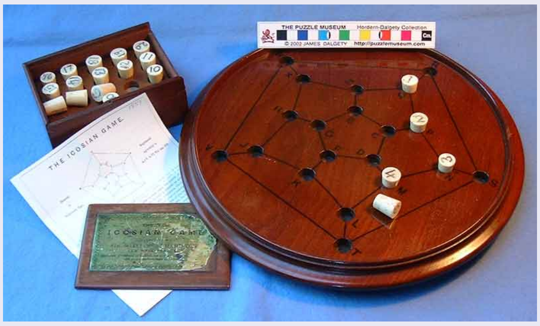
Dibuixar figures

Es pot dibuixar la figura següent en un sol traç?



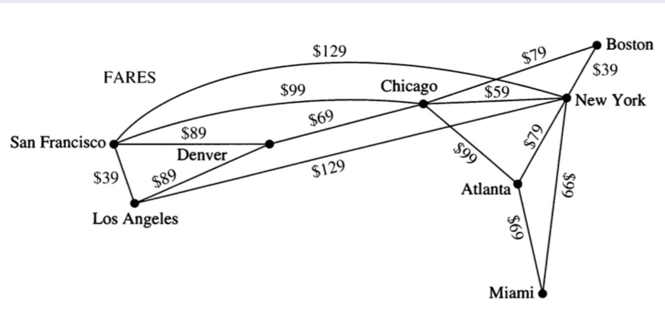
Visitar ciutats

Es poden visitar les ciutats següents sense repetir-ne cap?



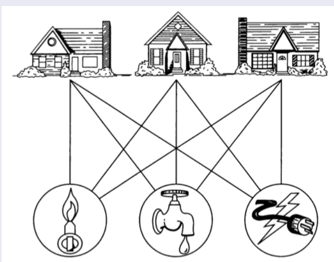
Trobar camins òptims

Quin és el preu mínim per viatjar de Boston a San Francisco?



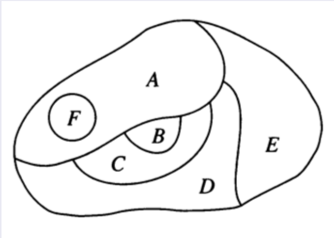
Dissenyar canalitzacions

Es poden connectar les cases a aigua, gas i electricitat sense que es creuin?



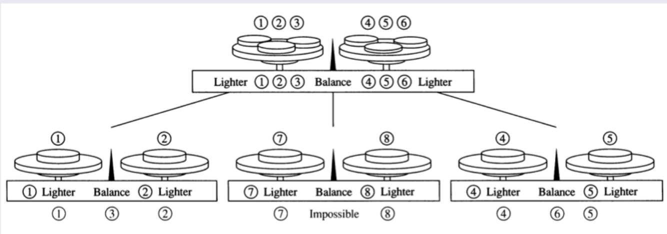
Colorar mapes

Quin és el mínim nombre de colors necessari per colorar el mapa?



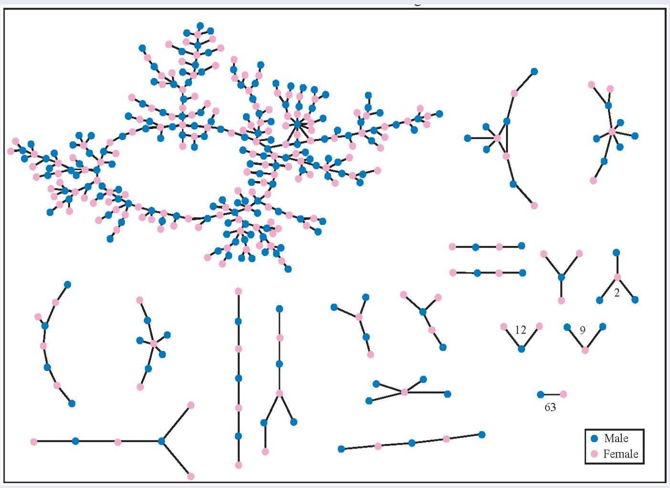
Problemes de decissions

Tenim 7 monedes “bones” i 1 de “falsa” (que pesa una mica menys).
Quantes pesades necesito per a detectar-la?



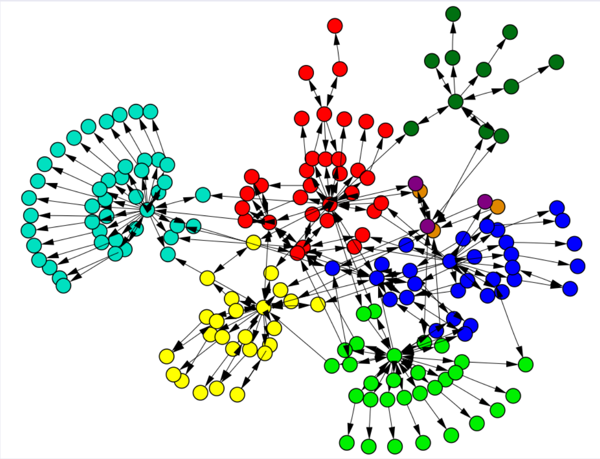
Estudi de xarxes socials

Representació de relacions entre estudiants d’institut durant 6 mesos



Estudi de xarxes a la web

Representació de la web d'una empresa



Grafs no dirigits

Grafs

$G = (V, E)$ *graf*:

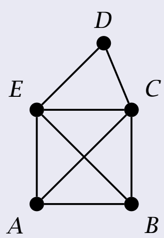
- $V = V(G)$ vèrtexos. $n = |V|$ *ordre* de G
- $E = E(G)$ arestes: parells no ordenats de vèrtexos. $m = |E|$ *mida* de G

Notacions:

- $e = \{u, v\} = uv$ *uneix* u i v
- u i v *extrems* de e
- u i $e = uv$ són *incidents*
- u, v *adjacents* si $\exists e = uv$
- u, v *independents* si $\nexists e = uv$

Altres conceptes:

- Llaç: aresta $e = uu$
- Multigraf: hi ha arestes repetides



Graus

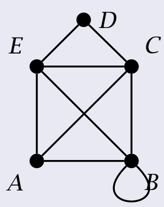
Donat $u \in V(G)$:

- $\Gamma(u)$: cjt. de vèrtexos adjacents a u
- $d(u)$: *grau* de u, $|\Gamma(u)|$
- Si té llaços: $d(u)$ puja 2

Altres conceptes:

$$\delta(G) = \min_{u \in V} d(u), \qquad \Delta(G) = \max_{u \in V} d(u)$$

Graf d-*regular*: tot $u \in V$ té $d(u) = d$



Lema de les encaixades de mans

$$2|E| = \sum_{u \in V} d(u)$$

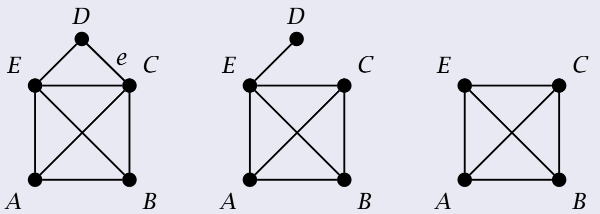
Corol·lari

Hi ha un nombre parell de vèrtexos de grau senar

Subgrafs

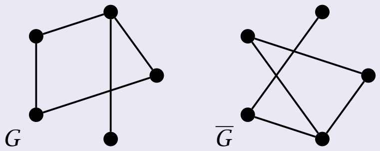
$G = (V, E)$ graf:

- $G' = (V', E')$ *subgraf* de G: $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$
- Si $V' = V$: *subraf generador*
- Donat $V' \subseteq V$: $G[V']$ (induït per V'): prendre $E' = E \cap (V')^{(2)}$
- Donat $W \subseteq V$: $G - W := G[V \setminus W]$
- Donat $w \in V$: $G - w := G - \{w\}$
- Donat $F \subseteq E$: $G - F := (V, E \setminus F)$
- Donat $e \in E$: $G - e := G - \{e\}$



Complementari d'un graf

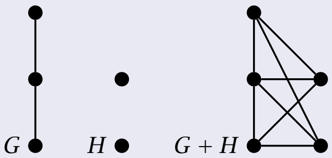
Si $G = (V, E)$, $\overline{G} = (V, \overline{E})$.



Graf suma

Si G, H grafs, $G + H$ graf amb

$$V = V(G) \cup V(H), \qquad E = E(G) \cup E(H) \cup \{uv \mid u \in V(G), v \in V(H)\}$$

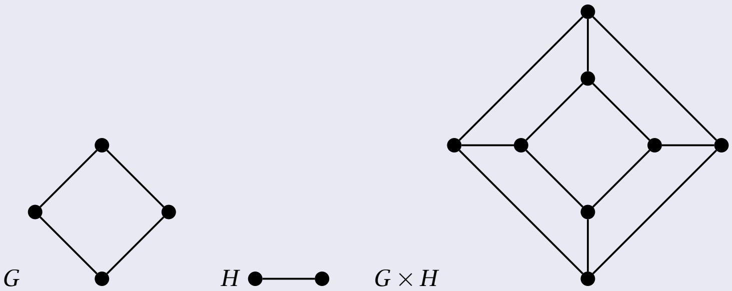


Graf producte

Si G, H grafs, $G \times H$ graf amb

$$V = V(G) \times V(H)$$

$$E = \{(u,v)(u,v') \mid vv' \in E(H)\} \cup \{(u,v)(u'v) \mid uu' \in E(G)\}$$

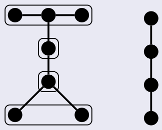


Graf quocient

Si $G = (V(G), E(G))$ graf, $\sim$ rel.d'eq. a $V(G)$, $G/\sim$ graf amb

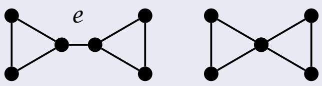
$$V = V(G)/\sim$$

$[u]$ i $[v]$ adjacents si $\exists\ u' \sim u$ i $v' \sim v$ amb $u'v' \in E$



Contracció d'aresta

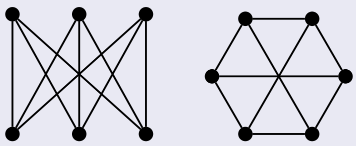
G graf, $e \in E$: $\sim$ només identifica extrems de e:



Isomorfisme

G i H *isomorfs* ($G \simeq H$) si:

- $\phi : V(G) \to V(H)$ bijecció
- $uv \in E(G) \iff \phi(u)\phi(v) \in E(H)$

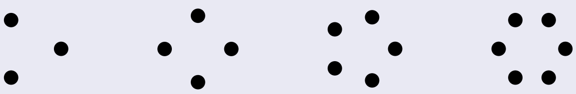


Invariants de classe d'isomorfisme

Paràmetres comuns a grafs isomorfs (ordre, mida, seqüència de graus,...)
Ull!!! Grafs no isomorfs poden tenir mateixos invariants

Graf buid

B_n: Té n vèrtexos i cap aresta



B_3 B_4 B_5 B_6

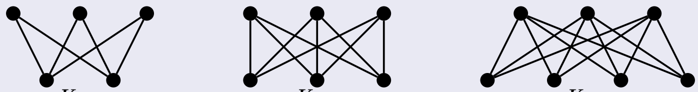
Graf complet

K_n: Té n vèrtexos i totes les arestes

K_3 K_4 K_5 K_6

Graf bipartit complet

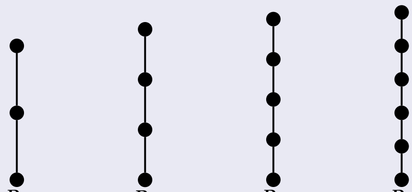
$K_{n,m}$: Té per vèrtexos $v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_m$ i arestes tots els $u_i v_j$



$K_{2,3}$ $K_{3,3}$ $K_{4,3}$

Graf camí

P_n:



P_3 P_4 P_5 P_6

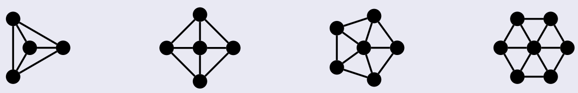
Graf cicle

C_n:

C_3 C_4 C_5 C_6

Graf roda

W_n:



W_3 W_4 W_5 W_6

Connectivitat

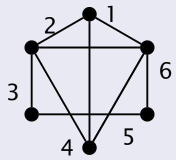
Recorreguts i camins

- *Recorregut* dins $G = (V, E)$ de u a v: Seqüència de vèrtexos

$$u = v_0, v_1, \dots, v_l = v \qquad v_i v_{i+1} \in E$$

  - u, v: vèrtexos inicial i final
  - $v_1, \dots, v_l$: vèrtexos intermitjos
  - l: longitud
- Recorregut *simple*: No repeteix arestes
- *Camí*: Recorregut on no es repeteixen vèrtexos
- *Circuit*: Recorregut amb vèrtex inicial i final coincidents
- *Cicle*: Circuit simple

Exemple



- $1, 4, 2, 6, 5, 3, 2, 1, 6$ és un recorregut
- $1, 4, 2, 6, 5, 3$ és un camí
- $1, 4, 2, 6, 5, 3, 2, 1$ és un circuit
- $1, 4, 2, 6, 1$ és un cicle

Accessibilitat

Un vèrtex v és *accessible des de* u si existeix recorregut (camí) de u a v.

Proposició

La relació d'accessibilitat és d'equivalència

Demostració

- Reflexiva: $u \rightsquigarrow u$ (longitud 0)
- Simètrica: Si $u \rightsquigarrow v$, invertint-lo, $v \rightsquigarrow u$
- Transitiva: Si $u \rightsquigarrow v$ i $v \rightsquigarrow w$, concatenant-los, $u \rightsquigarrow w$ □

Components connexos

- *Components connexos*: Subgrafs generats per classes d'equivalència
- *Graf connex*: Té un únic component connex

Proposició

Existeix recorregut $u \rightsquigarrow v$ ssi existeix camí $u \rightsquigarrow v$

Demostració

$\Leftarrow$ Tot camí és recorregut

$\Rightarrow$ Si $u, \ldots, w, \ldots, w, \ldots, v$, treure nodes intermitjos: $u, \ldots, w, \ldots, v$ i iterar. □

Proposició

Si $G = (V, E)$ connex, $n = |V|$ i $m = |E|$:

$$m \geq n - 1$$

Demostració

Inducció sobre n i m:

- Cas inicial: $n = 1$: Trivial
- Pas d'inducció: Suposar cert per a $|V| \leq n$ i $|E| < m$:
  - Si G conté cicle, e aresta del cicle:

    $$G' = G - e, \quad |V'| = |V|, \quad |E'| = |E| - 1 \quad \Longrightarrow |E'| \geq |V'| - 1$$

    Tenim $|E| \geq |V| - 1$.
  - Si G no conté cicle: Prendre camí de longitud màxima. Acaba en u amb $d(u) = 1$ (altrament s'allarga):

    $$G' = G - u, \quad |V'| = |V| - 1, \quad |E'| = |E| - 1 \quad \Longrightarrow |E'| \geq |V'| - 1$$

    Tenim $|E| \geq |V| - 1$. □

Distància entre nodes

$G = (V, E)$ graf. Per a $u, v \in V$, definim *distància*

$$d(u, v) = \text{long. mínima de camí } u \rightsquigarrow v$$

Proposició

La distància és distància:

- $d(u, v) = 0 \iff u = v$
- $d(u, v) = d(v, u)$
- $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$

Demostració

- Trivial
- Trivial: tot camí $u \rightsquigarrow v$ indueix camí $v \rightsquigarrow u$ i viceversa
- Si $u \rightsquigarrow v$ i $v \rightsquigarrow w$ són camins de long. mínima, concatenant-los es té camí $u \rightsquigarrow w$ (potser no òptim) □

Radi i diàmetre

- *Diàmetre* de G: $D(G) = \max_{u,v \in V} d(u, v)$
- *Distància mitjana* de G: $\overline{D} = \frac{1}{|V|^2} \sum_{u,v \in G} d(u, v)$
- *Excentricitat* de vèrtex u: $\mathrm{exc(u) = max_{v \in V}\, d(u, v)}$
- *Radi* de G: $r(G) = \min_{u \in V} \mathrm{exc(u)}$
- *Centre* de G: Vèrtexos amb excentricitat mínima

Proposició

G connex $\Longrightarrow r(G) \leq D(G) \leq 2r(G)$

Demostració

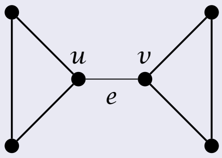
- $r(G) \leq D(G)$: Trivial
- $D(G) \leq 2r(G)$: Prenem u, v amb $d(u, v) = D(G)$ i w del centre; aleshores $D(G) = d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v) \leq 2r(G)$

Vèrtexos de tall, arestes pont

Idea: objectes que al treure'ls el graf es desconnecta

- $v \in V$ *vèrtex de tall*: $G - v$ té més components connexos que G
- $e \in E$ *aresta pont*: $G - e$ té més components connexos que G

Exemple



- u i v són els únics vèrtexos de tall
- e és la única aresta pont

Proposició

Tot graf té almenys dos vèrtexos que no són de tall

Demostració

Suposem que no: tot vèrtex (excepte potser un) és de tall.

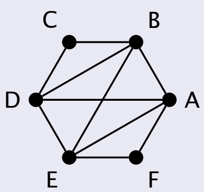
- Siguin u, v amb $D(G) = d(u, v)$. Puc suposar v de tall.
- Sigui w separat de u a $G - v$.
- Tot camí $u \rightsquigarrow w$ passa per v
- $\implies d(u, w) = d(u, v) + d(v, w)$
- $\implies d(u, w) > D(G)$!!! $\square$

Grafs eulerians i hamiltonians

Grafs eulerians

- Un *recorregut/cicle eulerià* recorre totes les arestes del graf
- Un *graf eulerià* és un graf que admet cicle eulerià

Exemple



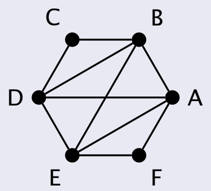
Teorema

Un graf admet un cicle eulerià si, i només si, és connex i tots els seus vèrtexos tenen grau parell

Demostració

- ⇒ Trivial: en un cicle, cada cop que fem servir una aresta per arribar a un vèrtex, en fem servir una altra per sortir d'ell.
- ⇐ Recursivament:
  - Fem un cicle qualsevol (el podem fer per paritat de graus)
  - Traiem el cicle
  - Si no hem fet servir totes les arestes, tornem a repetir
  - Enganxem els cicles que hem fet □

Exemple



Corol·lari

Un graf admet un recorregut eulerià si, i només si, és connex i té tots els seus vèrtexos de grau parell, excepte dos d'ells, que són necessàriament els extrems del recorregut eulerià.

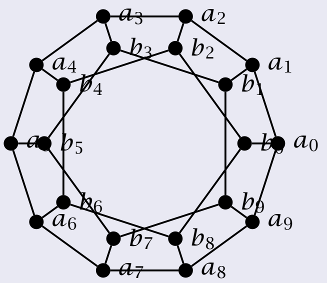
Demostració.

"Trivial": afegir una aresta entre els dos vèrtexos de grau senar (o entre els extrems del circuit, per a l'altra meitat de la demostració) □

Grafs hamiltonians

- Un *recorregut/cicle hamiltonià* passa exactament una vegada per cada vèrtex del graf
- Un *graf hamiltonià* és un graf que admet un cicle hamiltonià.

Exemple



Teorema

???

Algunes propietats

Condicions suficients per a hamiltonicitat ($\implies$ hamiltonià):

- G té ordre $n \geq 3$ i $\forall u \in V$, $\deg(u) \geq n/2$
- G té ordre $n \geq 3$ i $\forall u, v \in V$ t.q. $uv \notin E$, $d(u) + d(v) \geq n$
- G té ordre $n \geq 3$ i mida $m \geq (n^2 - 3n + 6)/2$

Condicions necessàries per a hamiltonicitat (hamiltonià $\implies$):

- G no té vèrtexos de tall
- Per a tot $S \subseteq V$, $G - S$ té $\leq |S|$ components connexos