Índex

Principis combinatoris

Principi de la bijecció

Si hi ha bijecció entre dos conjunts, aquests tenen el mateix cardinal

Exemple

En la competició de futbol de la galàxia d'Andròmeda hi participen 1500 equips. Les regles estableixen que tot partit ha de tenir guanyador (no s'admeten empats) i que l'equip que perd un partit és immediatament exclòs de la competició.
Quants partits s'hauran de jugar fins conèixer el campió? 1499

Principi de la suma

Quan hi ha m casos diferents, de tal forma que per al cas i-èssim hi ha n_i opcions, i cap parell de casos té cap opció en comú, aleshores el nombre total d'opcions és $n_1 + \cdots + n_m$:

$$|A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_m| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_m|.$$

Exemple

S'ha d'escollir un representant a la junta del Departament. Els elegibles són 25 professors titulars i 6 catedràtics.
Quantes eleccions possibles hi ha? 31

Principi del producte

Si una tasca es pot descomposar en m passos, de manera que hi ha n_1 opcions per al primer pas, i que una vegada s'ha completat el pas i-èssim, hi ha n_{i+1} opcions per al pas següent, el nombre total de maneres de realitzar la tasca és $n_1 \cdots n_m$:

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_m|.$$

Exemple

En un determinat llenguatge de programació, les variables s'identifiquen amb cadenes formades per 3 lletres de l'alfabet i 2 dígits decimals. Quants noms de variables hi ha? $1.757.600$

Principi del quocient

Si un conjunt de n objectes s'agrupa en classes, de manera que cada classe conté m objectes, el nombre de classes que hi ha és $\frac{n}{m}$:

$$|S/\sim| = \frac{|S|}{|\text{classe d'equiv.}|}$$

Exemple

En una reunió, hi ha 5 persones que han d'asseure en una taula rodona. De quantes maneres ho poden fer? 24

Recompte de funcions

$A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ i $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ cjts finits ($m = |A|, n = |B|$). Hi ha:

- n^m funcions diferents $A \to B$
- $n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1) = n!/(n-m)!$ funcions injectives $A \to B$

Recompte de subconjunts

$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ conjunt finit ($n = |A|$). Hi ha:

- 2^n subconjunts de A.

Principi del colomar

Si n objectes s'han de posar en k caixes diferents, on $n > k$, almenys una caixa contindrà més d'un objecte.
Equiv.: Tota funció $f : A \to B$ amb $|A| > |B|$ és no-injectiva.

Exemple

En una reunió de 8 o més persones, n'hi ha dues que han nascut el mateix dia de la setmana.

Principi del colomar generalitzat

Si n objectes s'han de posar en k caixes diferents, aleshores alguna caixa conté almenys $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ objectes.

Exemple

En una reunió de 25 persones, n'hi ha com a mínim 4 que han nascut el mateix dia de la setmana.

Cardinals i funcions

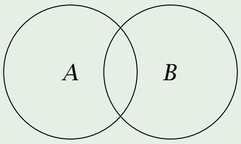
Sigui $f : A \to B$ una funció entre conjunts finits. Es té:

- Si f és injectiva, aleshores $|A| \leq |B|$.
- Si f és exhaustiva, aleshores $|A| \geq |B|$.
- Si f és bijectiva, aleshores $|A| = |B|$.
- Si f és injectiva i $|A| = |B|$, aleshores f és bijectiva.
- Si f és exhaustiva i $|A| = |B|$, aleshores f és bijectiva.

Principi d'inclusió/exclusió

Si A, B conjunts,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



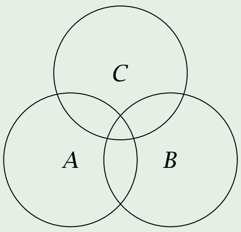
Exemple

De 70 persones observades, n'hi ha 37 que beuen cafè, 23 que beuen te, i 25 que no beuen ni te ni cafè.
Quantes beuen te i cafè? 15

Generalització

Amb 3 conjunts:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$



En general:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$

Permutacions, combinacions i particions

Permutacions

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$ conjunt $|A| = n$. Les seves *permutacions* són:

- Ordenacions de (tots) els elements de A.
- Bijeccions $[n] \to A$.

Nombre de permutacions:

$$P(n) = n!$$

Exemple

```
sage: Permutations([1,2,3,4]).list()
[[1, 2, 3, 4], [1, 2, 4, 3], [1, 3, 2, 4], [1, 3, 4, 2], [1, 4, 2, 3],
[1, 4, 3, 2], [2, 1, 3, 4], [2, 1, 4, 3], [2, 3, 1, 4], [2, 3, 4, 1],
[2, 4, 1, 3], [2, 4, 3, 1], [3, 1, 2, 4], [3, 1, 4, 2], [3, 2, 1, 4],
[3, 2, 4, 1], [3, 4, 1, 2], [3, 4, 2, 1], [4, 1, 2, 3], [4, 1, 3, 2],
[4, 2, 1, 3], [4, 2, 3, 1], [4, 3, 1, 2], [4, 3, 2, 1]]
sage: Permutations([1,2,3,4]).cardinality()
24
```

Exemple

De quantes maneres es poden reordenar els 11 jugadors d'un equip de futbol per fer-se la foto a l'inici del partit?
Solució: $11! = 39.916.800$

k-permutacions

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$ conjunt $|A| = n$. Les seves k-*permutacions* són:

- Ordenacions de k elements de A.
- Aplicacions injectives $[k] \to A$.

Nombre de k-permutacions:

$$P(n,k) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Exemple

```
sage: Permutations([1,2,3,4],2).list()
[[1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 1], [2, 3], [2, 4], [3, 1], [3, 2], [3, 4],
[4, 1], [4, 2], [4, 3]]
sage: Permutations([1,2,3,4],2).cardinality()
12
```


Exemple

De quantes maneres diferents poden saltar al camp els 11 jugadors d'un equip de futbol si hi ha 17 jugadors convocats?
Solució: $\frac{17!}{6!} = 494.010.316.800$

k-permutacions amb repetició

$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ conjunt $|A| = n$. k-permutacions amb repetició (arbitrària):

- Paraules amb els símbols $a_1, \ldots, a_n$.
- Aplicacions $[k] \to A$.

Nombre de k-permutacions amb repetició:

$$PR(n,k) = n^k$$

Exemple

La botiga oficial d'un equip de futbol ha de muntar un aparador amb 9 samarretes. Si disposen de samarretes de la primera equipació, de la segona equipació, i de la del porter, de quantes maneres poden muntar l'aparador?
Solució: $3^9 = 19.683$

k-permutacions amb repeticions fixades

$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ conjunt $|A| = n$. k-permutacions amb repeticions $k_1, \ldots, k_n$ ($k = k_1 + \cdots + k_n$)

- Paraules amb els símbols $a_1, \ldots, a_n$ on cada a_i apareix k_i vegades

Nombre de permutacions:

$$PR(n,k;k_1,\ldots,k_n) = \frac{k!}{k_1!\cdots k_n!}$$

Exemple

```
sage: Permutations([1,1,1,2,2,3]).cardinality()
60
sage: Permutations([1,1,1,2,2,3]).list()
[[1, 1, 1, 2, 2, 3], [1, 1, 1, 2, 3, 2], [1, 1, 1, 3, 2, 2], [1, 1, 2,
1, 2, 3], [1, 1, 2, 1, 3, 2], [1, 1, 2, 2, 1, 3], [1, 1, 2, 2, 3, 1],
[1, 1, 2, 3, 1, 2], [1, 1, 2, 3, 2, 1], [1, 1, 3, 1, 2, 2], [1, 1, 3, 2,
1, 2], [1, 1, 3, 2, 2, 1], [1, 2, 1, 1, 2, 3], [1, 2, 1, 1, 3, 2], [1,
2, 1, 2, 1, 3], [1, 2, 1, 2, 3, 1], [1, 2, 1, 3, 1, 2], [1, 2, 1, 3, 2,
1], [1, 2, 2, 1, 1, 3], [1, 2, 2, 1, 3, 1], [1, 2, 2, 3, 1, 1], [1, 2,
3, 1, 1, 2], [1, 2, 3, 1, 2, 1], [1, 2, 3, 2, 1, 1], [1, 3, 1, 1, 2, 2],
[1, 3, 1, 2, 1, 2], [1, 3, 1, 2, 2, 1], [1, 3, 2, 1, 1, 2], [1, 3, 2, 1,
2, 1], [1, 3, 2, 2, 1, 1], [2, 1, 1, 1, 2, 3], [2, 1, 1, 1, 3, 2], [2,
```

Exemple

A la botiga oficial d'un equip de futbol han de muntar un aparador amb 4 samarretes de la primera equipació, 3 de la segona equipació i 2 del porter. De quantes maneres poden col·locar les samarretes?

Solució: $\dfrac{(4+3+2)!}{4!\cdot 3!\cdot 2!} = 1260$

k-combinacions

$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ conjunt $|A| = n$. Les seves k-*combinacions* són:

- Subconjunts de A amb k elements.
- k-permutacions on ens oblidem de l'ordre.

Nombre de k-combinacions:

$$C(n,k) = \frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k}$$

Exemple

```
sage: Combinations([1,2,3,4],2).list()
[[1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 3], [2, 4], [3, 4]]
sage: Combinations([1,2,3,4],2).cardinality()
6
```


Exemple

De quantes maneres es poden escollir els 11 jugadors titulars d'entre els 17 convocats a un partit de futbol?

Solució: $\dbinom{17}{11} = \dfrac{17!}{11!\cdot 6!} = 12.376$

Identitats binomials

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i y^{n-i}$$

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$$

k-combinacions amb repetició

$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ conjunt $|A| = n$. k-combinacions amb repetició:

- Eleccions de k elements de A, amb repeticions i sense ordre
- Sub-multiconjunt de $A^{\oplus k}$ (tots elements amb multiplicitat k) de cardinal k
- Aplicació $f : A \to \mathbb{N}$ ($f(a_i)$ indica número d'aparicions de a_i) amb $\sum_i f(a_i) = k$

Número de k-combinacions amb repetició:

$$CR(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$$

Exemple

```
sage: Combinations([1,1,1,2,2,2,3,3,3,4,4,4] ,3).list()
[[1, 1, 1], [1, 1, 2], [1, 1, 3], [1, 1, 4], [1, 2, 2], [1, 2, 3], [1,
2, 4], [1, 3, 3], [1, 3, 4], [1, 4, 4], [2, 2, 2], [2, 2, 3], [2, 2, 4],
[2, 3, 3], [2, 3, 4], [2, 4, 4], [3, 3, 3], [3, 3, 4], [3, 4, 4], [4, 4,
4]]
sage: Combinations([1,1,1,2,2,2,3,3,3,4,4,4] ,3).cardinality()
20
```


Exemple

A la botiga oficial d'un equip de futbol preparen bosses de regal que contenen 5 samarretes de jugadors (no necessàriament diferents). Si tenen samarretes de 11 jugadors diferents, de quantes maneres poden preparar les bosses de regal?

Solució: $\binom{11+5-1}{5} = 3.003$

k-particions

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$ conjunt. Les seves *k-particions* són:

- Particions de A en k subconjunts

Nombre de k-particions:

$$S(n,k) = \left\{ {n \atop k} \right\}$$

Fórmula recursiva:

$$\left\{ {n \atop n} \right\} = \left\{ {n \atop 1} \right\} = 1$$

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} \quad (1 \le k < n)$$

Exemple

```
sage: SetPartitions([1,2,3,4],2).list()
[{{2, 3, 4}, {1}}, {{1, 3, 4}, {2}}, {{3}, {1, 2, 4}}, {{4}, {1, 2, 3}},
{{3, 4}, {1, 2}}, {{2, 4}, {1, 3}}, {{2, 3}, {1, 4}}]
```


Exemple

En un entrenament d'un equip de futbol, els 16 jugadors assistens s'han de repartir en 3 subgrups (que poden tenir qualsevol nombre ≥ 1 de jugadors). De quantes maneres es poden repartir?

Solució: $\left\{ {16 \atop 3} \right\} = 32.767$

Particions d'enters

Donat un enter positiu n:

- Una *partició* de n és: multi-subconjunt d'enters positius que sumen n
- Una *k-partició* de n és: partició de n amb k sumands:

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

Observació:

- Com que l'ordre és irrellevant, puc suposar-los ordenats:

$$n_1 \ge n_2 \ge \cdots \ge n_k$$

Exemple

```
sage: Partitions(5).list()
[[5], [4, 1], [3, 2], [3, 1, 1], [2, 2, 1], [2, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1]]
```

Nombre de particions

- Nombre de particions de n:

$$p(n)$$

- Nombre de k-particions de n:

$$p(n,k) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

Fórmules recursives:

$$p(n) = \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1, \qquad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{si } k > n)$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-k \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-k \\ 2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}$$

Exemple

La botiga oficial d'un equip de futbol ha de repartir les 53 samarretes que tenen de l'estrella de l'equip en 10 capses iguals. De quantes maneres les poden repartir, si cada capsa ha de contenir com a mínim una samarreta?

Solució: $\begin{bmatrix} 53 \\ 10 \end{bmatrix} = 25.608$

Resum: Les "12 formes"

Pensem el problema de "posar boles dins de caixes". Maneres de pensar:

- n boles distingibles/no distingibles
- m caixes distingibles/no distingibles
- Cada caixa té (una/com a màxim una/com a mínim una/les que sigui) bola

Tenim 12 (16) possibilitats diferents:

	$= 1_{(n=m)}$	$\leq 1_{(n \leq m)}$	$\geq 1_{(n \geq m)}$	?
Boles dist. Caixes dist.	$n!$	$\frac{m!}{(m-n)!}$	$m!\left\{ {n \atop m} \right\}$	m^n
Boles indis. Caixes dist.	1	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{m-1}$	$\binom{m+n-1}{n}$
Boles dist. Caixes indist.	1	1	$\left\{ {n \atop m} \right\}$	$\sum_{k=1}^{m} \left\{ {n \atop k} \right\}$
Boles indist. Caixes indist.	1	1	$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$	$\sum_{k=1}^{m} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$

Recurrències i funcions generatrius

Motivació

Tenim pedres

- blanques ($\circ$), de pes 1
- negres ($\bullet$), de pes 2

que podem anar apilant sobre una base per formar figuretes.
Quantes figuretes de pes n fixat podem fer?

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = 1, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

S'obté:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

Successió de Fibonacci $\rightsquigarrow$ Formula tancada?

Idea

Agrupar els coeficients en un únic objecte:

Coeficients (#finit) $(3, 2, 0, -4)$	$\rightsquigarrow$	Polinomi $3 + 2x - 4x^3$
Coeficients (#infinit) $(1, 1, 1, \dots)$	$\rightsquigarrow$	Sèrie formal $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

Sèries formals

- Definició: $(a_n)_{n\geq 0} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ successió.
  La seva *funció generatriu* és la *sèrie formal*:

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

- *Coeficients*:

$$[x^n]A(x) := \text{“coeficient } n\text{-èssim de } A(x)\text{”} = a_n$$

Observació

- No és sèrie numèrica (no s'avalua x a cap valor)
- És una altra forma d'escriure la successió

Operacions

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n, \qquad B(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$$

- Suma:

$$C(x) = A(x) + B(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n, \qquad c_n = a_n + b_n$$

- Producte:

$$C(x) = A(x)\cdot B(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n, \qquad c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

Producte?

Idea: Fer els productes i sumar les diagonals:

	b_0	b_1x	b_2x^2	b_3x^3	b_4x^4
a_0	a_0b_0	a_0b_1x	$a_0b_2x^2$	$a_0b_3x^3$	$a_0b_4x^4$
a_1x	a_1b_0x	$a_1b_1x^2$	$a_1b_2x^3$	$a_1b_3x^4$	$\dots$
a_2x^2	$a_2b_0x^2$	$a_2b_1x^3$	$a_2b_2x^4$	$\dots$	$\dots$
a_3x^3	$a_3b_0x^3$	$a_3b_1x^4$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_4x^4	$a_4b_0x^4$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Exemple

Si

$$A(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \qquad B(x) = 1 - x$$

tenim

$$A(x)B(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) - (x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots) = 1$$

Per tant:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

En general:

$$1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \alpha^3 x^3 + \cdots = \frac{1}{1-\alpha x}$$

Desplaçaments

$$
\begin{array}{llll}
a_n & (a_0, a_1, a_2, \dots) & \rightsquigarrow & A(x) \\
b_n = \begin{cases} a_{n-1} & (n \geq 1) \\ 0 & (n = 0) \end{cases} & (0, a_0, a_1, \dots) & \rightsquigarrow & B(x) = xA(x) \\
b_n = a_{n+1} & (a_1, a_2, a_3, \dots) & \rightsquigarrow & B(x) = \dfrac{A(x) - a_0}{x}
\end{array}
$$

Generalització

$$
b_n = \begin{cases} a_{n-k} & \text{si } n \geq k \\ 0 & \text{altrament} \end{cases} \qquad B(x) = x^k A(x)
$$

$$
b_n = a_{n+k} \qquad B(x) = \frac{A(x) - a_0 - a_1 x - \cdots - a_{k-1} x^{k-1}}{x^k}
$$

Aplicació a recurrències (exemple)

Successió de Fibonacci:

$$a_0 = 1 \quad a_1 = 1 \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \ (n \geq 0),$$

Amb funció generatriu:

$$\frac{A(x) - a_0 - a_1 x}{x^2} = \frac{A(x) - a_0}{x} + A(x) \quad \Longrightarrow \quad A(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

Descomposant en sumes ($r_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$)

$$A(x) = \frac{1}{(1 - r_+ x)(1 - r_- x)} = \frac{r_+/\sqrt{5}}{1 - r_+ x} - \frac{r_-/\sqrt{5}}{1 - r_- x}$$

Tornant a seqüencia:

$$a_n = \left(\frac{r_+}{\sqrt{5}} r_+^n - \frac{r_-}{\sqrt{5}} r_-^n \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$