

Teoría de grafos

Estudios de Ingeniería

Juan Gabriel Gomila

Frogames

<https://frogames.es>

1 de julio de 2017

Índice

1 Teoría de grafos

- Un poco de historia

2 El concepto de grafo

- Definición geométrica del grafo
- Definición algebraica del grafo

3 Grafos y matrices

- Representación matricial
- Isomorfismo de grafos
- Grafos de Euler y grafos de Hamilton

1 Teoría de grafos

- Un poco de historia

2 El concepto de grafo

- Definición geométrica del grafo

- Definición algebraica del grafo

3 Grafos y matrices

- Representación matricial
- Isomorfismo de grafos
- Grafos de Euler y grafos de Hamilton

1 Teoría de grafos

- Un poco de historia

2 El concepto de grafo

- Definición geométrica del grafo

- Definición algebraica del grafo

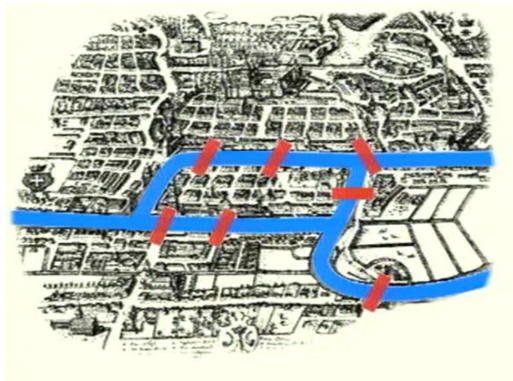
3 Grafos y matrices

- Representación matricial
- Isomorfismo de grafos
- Grafos de Euler y grafos de Hamilton

Origen de los grafos

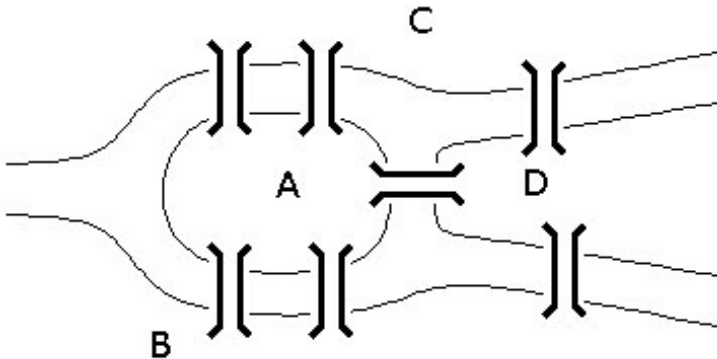
La teoría de grafos es una rama de la matemática que surge y se desarrolla para dar soluciones a problemas muy concretos.

El problema que la mayoría de autores señalan como el origen de la teoría de grafos es el **problema de los puentes de Königsberg**



Origen de los grafos

Durante el siglo XVIII, la ciudad de Königsberg (Prusia Oriental) estaba dividida en cuatro zonas por el río Prevel. Había siete puentes que comunicaban estas regiones como demuestra el dibujo:



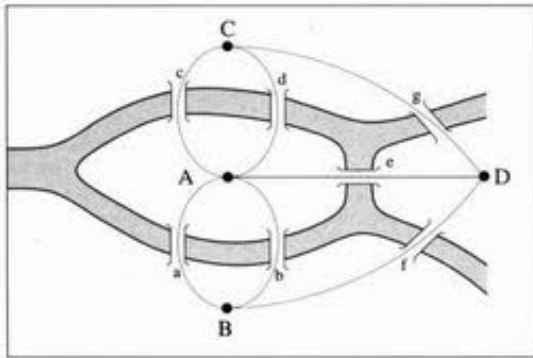
Origen de los grafos

Los habitantes de la ciudad no tenían ni BioFestes ni Univerlands, en lugar de tener vuestras mismas necesidades, necesitaban encontrar una manera de pasear por la ciudad que les permitiera ir a una determinada región, cruzar cada puente una única vez y volver al lugar de partida.



Origen de los grafos

Para resolver este problema, Euler representó las cuatro zonas de la ciudad por cuatro puntos y los puentes por aristas que uniesen los puntos, tal y como se ve en la figura:



Origen de los grafos

Actualmente, la teoría de grafos se aplica dentro y fuera de las matemáticas y sigue siendo un ramo de investigación muy activa. Sus aplicaciones son muy importantes en la ingeniería y resultan de gran utilidad para la representación de datos, diseño de redes de telecomunicación...

1 Teoría de grafos

- Un poco de historia

2 El concepto de grafo

- Definición geométrica del grafo

■ Definición algebraica del grafo

3 Grafos y matrices

- Representación matricial
- Isomorfismo de grafos
- Grafos de Euler y grafos de Hamilton

¿Qué es un grafo?

Los grafos se pueden considerar formalmente como diagramas (representaciones geométricas) o bien algebraicamente como un par de conjuntos (representación algebraica). Véanse ambos tipos de definiciones:

1 Teoría de grafos

- Un poco de historia

2 El concepto de grafo

- Definición geométrica del grafo

- Definición algebraica del grafo

3 Grafos y matrices

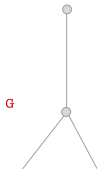
- Representación matricial
- Isomorfismo de grafos
- Grafos de Euler y grafos de Hamilton

Definición geométrica del grafo

Definición

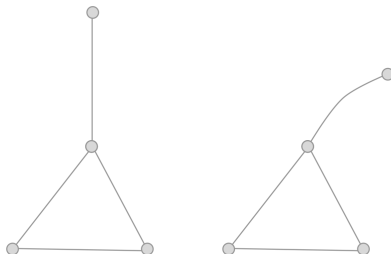
Geométricamente, un grafo G es un conjunto de puntos del espacio, algunos de los cuales están unidos entre ellos mediante líneas.

Este grafo puede simbolizar por ejemplo un mapa de carreteras donde los puntos representan ciudades y las líneas, las carreteras que las unen. En este caso, el grafo puede informar de las posibles comunicaciones que existen entre las ciudades, pero este grafo G también podría esquematizar un circuito eléctrico.



Definición geométrica del grafo

Se ha de hacer constar que un grafo solo contiene información sobre la conectividad entre puntos y no da información geométrica en sentido euclídeo (distancias, ángulos...). Así los siguientes diagramas representan el mismo grafo.



1 Teoría de grafos

- Un poco de historia

2 El concepto de grafo

- Definición geométrica del grafo

■ Definición algebraica del grafo

3 Grafos y matrices

- Representación matricial
- Isomorfismo de grafos
- Grafos de Euler y grafos de Hamilton

Definición algebraica del grafo

Definición

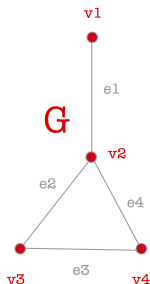
Un grafo G se define como un par ordenado de conjuntos $G = (V, E) = (V(G), E(G))$ donde:

- V es un conjunto no vacío de puntos $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ denominados **vértices**, y
- E es un conjunto de pares no ordenados de elementos de V , denominados **aristas**

Si dos vértices u, v están unidos por la misma arista, entonces dícese que son **adyacentes** y se representan por su arista por $\{u, v\}$. En este caso también se dirá que u y v son **incidentes** a la arista $\{u, v\}$.

Definición algebraica de grafo

Para representar algebraicamente un grafo es necesario poder distinguir los vértices y las aristas. Así:



$$G = (V(G), E(G))$$

$$V = V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}; \quad E = E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

Donde $e_1 = \{v_1, v_2\}$, $e_2 = \{v_2, v_3\}$, $e_3 = \{v_3, v_4\}$, $e_4 = \{v_2, v_4\}$

Definición algebraica de grafo

Definiciones

- El número de vértices del grafo G , $|V(G)|$ se denomina el **orden del grafo**.
- El número de aristas del grafo G , $|E(G)|$ se denomina el **tamaño del grafo**.

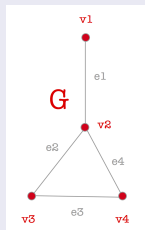
Grafo trivial

Un grafo G es finito si $|V(G)|$ y $|E(G)|$ son finitos. Si un grafo finito tiene un vértice y no tiene ninguna arista, nos referiremos a él como grafo trivial (corresponde a un solo punto)

Definición algebraica de grafo

Ejemplo

El siguiente diagrama no corresponde a un grafo ya que contiene:



- Aristas múltiples: las aristas e_4 y e_5 se unen a los vértices v_3 y v_4 (multigrafo).
- Bucles: la arista e_6 une el vértice v_2 con él mismo (pseudografo).

Definición algebraica de grafo

Ejemplo

Nótese en este caso:

$$E(G) = \{e_1 = \{v_1, v_2\}, e_2 = \{v_2, v_3\}, e_3 = \{v_1, v_4\},$$

$$e_4 = \{v_3, v_4\}, e_5 = \{v_3, v_4\}, e_6 = \{v_2, v_3\}\}$$

$E(G)$ no es un conjunto, ya que tiene elementos repetidos $\{v_3, v_4\}$; es decir, las aristas e_4 y e_5 y la arista e_6 comienzan y acaban en el mismo vértice.

Definición algebraica de grafo

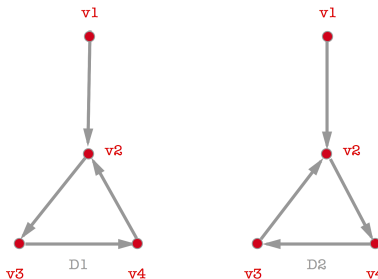
La definición de grafo dada anteriormente se corresponde con la definición que diversos autores dan de **grafo simple**. Y cuando se permiten aristas múltiples y/o bucles como los del ejemplo anterior, se clasifica como **grafo general**.

Grafos dirigidos

Otro concepto que resulta útil es el de digrafo o grafo dirigido.

Digrafo

Sea G un grafo simple (o grafo general). Si a cada arista se le asigna un sentido, se dirá que es un **digrafo**.



Las aristas en estos casos son pares ordenados $D_1 \neq D_2$.

Grado de un vértice

Aristas incidentes

Dícese que una arista e es **incidente** con un vértice v si v es extremo de e .

Grado de un vértice

El grado de un vértice v , $gr(v)$ es igual al número de aristas que son incidentes con v .

Grado de un vértice

Como cada arista es incidente a ambos vértices, se tiene el siguiente resultado útil:

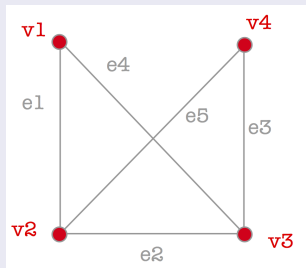
Teorema

Sea $G = (V, E)$ un grafo, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, entonces la suma de los grados de los vértices de G es igual al doble del número de aristas:

$$\sum_{i=1}^n \text{gr}(v_i) = 2|E|$$

Grado de un vértice

Ejemplo



$$gr(v_1) = 2 \quad gr(v_2) = 3 \quad gr(v_3) = 3 \quad gr(v_4) = 2$$

$$\sum_{i=1}^n gr(v_i) = 2 + 3 + 3 + 2 = 10 = 2 \cdot 5 = 2|E|$$

Grado de un vértice

Teorema

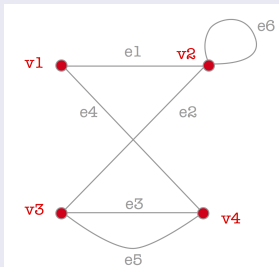
Un vértice es par o impar según su grado sea par o impar.

Nota

El teorema anterior también es válido para grafos generales.

Grado de un vértice

Ejemplo



$$gr(v_1) = 2 \quad gr(v_2) = 4 \quad gr(v_3) = 3 \quad gr(v_4) = 4$$

$$\sum_{i=1}^n gr(v_i) = 2 + 4 + 3 + 3 = 12 = 2 \cdot 6 = 2|E|$$

Grado de un vértice

Ejercicios

- 1 Dibújese, si es posible, un grafo con 5 vértices, de manera que el grado de cada vértice sea 3.
- 2 Dibújese, si es posible, un grafo con 5 vértices, de manera que el grado de cada vértice sea 2.

Caminos

En un grafo que represente, por ejemplo, una red de comunicaciones es importante conocer la existencia de caminos que recorren todas las aristas o todos los vértices y que, en cierta manera, sean los más económicos. Para eso se van a ver las siguientes definiciones básicas (la nomenclatura que se da aquí no es única, hay autores que dan nombres diferentes):

Caminos

Definición

Un camino en un grafo G es una secuencia finita alternada de vértices y aristas de G :

$$v_0 \rightarrow e_1 = \{v_0, v_1\} \rightarrow v_1 \rightarrow e_2 = \{v_1, v_2\} \cdots e_n = \{v_{n-1}, v_n\} \rightarrow v_n$$

$$v_0, e_1, v_1, e_2 \cdots e_n, v_n$$

Donde cada arista tiene por extremo los vértices inmediatamente precedentes o siguientes de la secuencia. Por lo que el camino también se puede representar por la secuencia de vértices v_0, v_1, \cdots, v_n .

Caminos

Extremos del camino

Los vértices v_0 y v_n se denominan extremos del camino y se dice que el camino va de v_0 a v_n o que conecta v_0 con v_n .

Longitud del camino

La longitud del camino es el número de aristas que contiene.

Caminos

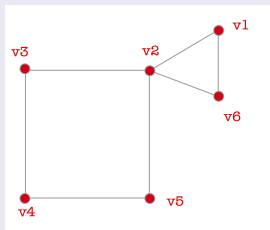
Clasificación de los caminos

- Recorrido: camino sin aristas repetidas.
- Camino simple: recorrido sin vértices repetidos excepto el primero y el último.
- Camino cerrado: camino en el cual sus dos extremos coinciden. Es decir, comienza y acaba en el mismo vértice. en caso contrario el camino es abierto.
- Circuito: recorrido cerrado.
- Ciclo: circuito que también es camino simple.

Caminos

Clasificación de los caminos

Dado el grafo, clasifíquense los siguientes caminos:



Caminos

Clasificación de los caminos

- $v_2 v_3 v_4 v_5 v_2$
- $v_2 v_3 v_4 v_5$
- $v_6 v_2 v_3 v_4 v_5 v_2 v_1 v_6$
- $v_1 v_2 v_6 v_1$

Conectividad

Existen grafos en los cuales para cada par de vértices v_i, v_j hay, al menos, un posible camino que los conecta y otros casos en los cuales es imposible unir dos vértices dados.

Conectividad

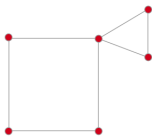
Grafo conexo

Un grafo G dicese conexo si existe un camino simple entre cualquier par de vértices v_i, v_j .

En caso contrario, el grafo es no conexo y los vértices v_i y v_j pertenecen a diferentes componentes conexas del grafo. El número de componentes conexos de un grafo se denota por $K(G)$.

Conectividad

Ejemplo



G_1



G_2



G_3

G_1 es un grafo conexo, mientras que G_2 y G_3 no lo son.
 $K(G_1) = 1$, $K(G_2) = 2$, $K(G_3) = 3$.

1 Teoría de grafos

- Un poco de historia

2 El concepto de grafo

- Definición geométrica del grafo

- Definición algebraica del grafo

3 Grafos y matrices

- Representación matricial
- Isomorfismo de grafos
- Grafos de Euler y grafos de Hamilton

1 Teoría de grafos

- Un poco de historia

2 El concepto de grafo

- Definición geométrica del grafo

- Definición algebraica del grafo

3 Grafos y matrices

■ Representación matricial

- Isomorfismo de grafos
- Grafos de Euler y grafos de Hamilton

Representación matricial de los grafos

Definición

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Se define su matriz de adyacencia como la matriz cuadrada:

$$A(G) = (a_{ij})_{n \times n} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ y } v_j \text{ son adyacentes} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Nótese que $A(G)$ es una matriz simétrica y que $a_{ii} = 0 \ \forall \ i = 1, \dots, n$.

La matriz de adyacencia no es única (depende de la ordenación de los vértices).

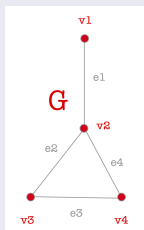
Representación matricial de los grafos

Definición

- Si $G = (V, E)$ es un grafo general $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, se define $A(G) = (a_{ij})_{n \times n}$ donde a_{ij} es el número de aristas que unen v_i con v_j . Entonces, $A(G)$ es simétrica.
- Si $G = (V, E)$ es un digrafo $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, se define $A(G) = (a_{ij})_{n \times n}$ donde a_{ij} es el número de aristas que unen v_i con v_j . Entonces, $A(G)$ no es simétrica.

Representación matricial de los grafos

Ejemplo

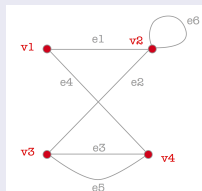


$$A(G) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Con $a_{ij} \in \{0, 1\}$ y $a_{ii} = 0$

Representación matricial de los grafos

Ejemplo



$$A(G) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

En este caso a_{ij} puede ser más grande que 1 ya que el grafo tiene aristas múltiples y $a_{ii} \neq 0$ (bucles)

Representación matricial de los grafos

Teorema

Sea $A(G)$ la matriz de adyacencia de un grafo con n vértices. Entonces la entrada (i, j) de la matriz A^m nos dará el número de caminos de longitud m que conecten los vértices v_i y v_j .

Representación matricial de los grafos

Ejemplo

Si se considera la matriz del ejemplo anterior:

$$A(G) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que:

$$A^2(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; A^3(G) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Representación matricial de los grafos

Ejemplo

Considérese por ejemplo el elemento a_{14} de estas tres matrices.

- El elemento a_{14} de $A(G)$ es cero, eso indica que no hay ningún camino entre los vértices v_1 y v_4 , pero eso no indica que no se puedan conectar estos vértices.
- El elemento $a_{14} \in A^2(G)$ toma el valor 1, indicando así que existe un camino de longitud 2 que conecta v_1 y v_4 . Este camino será: $v_1 v_2 v_4$.
- El elemento $a_{14} \in A^3(G)$ toma el valor 1, entonces existe un camino de longitud 3 que conecta v_1 y v_4 . Este camino será $v_1 v_2 v_3 v_4$.

1 Teoría de grafos

- Un poco de historia

2 El concepto de grafo

- Definición geométrica del grafo

- Definición algebraica del grafo

3 Grafos y matrices

- Representación matricial
- **Isomorfismo de grafos**
- Grafos de Euler y grafos de Hamilton

Isomorfismo de grafos

Definición

Sean $G(V, E)$ y $G'(V', E')$ dos grafos (o grafos generales sin bucles) y $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación biyectiva tal que

$$\{u, v\} \in E \iff \{f(u), f(v)\} \in E'$$

Entonces se dirá que f es un isomorfismo entre G y G' o que G y G' son grafos isomorfos.

En general no es fácil determinar cuando dos grafos son o no son isomorfos.

Es claro que si dos grafos son isomorfos han de tener el mismo número de vértices e igual número de aristas, pero eso no es suficiente.

Isomorfismo de grafos

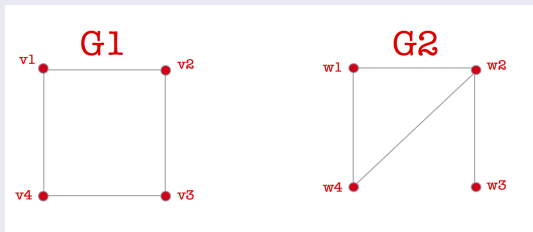
Teorema

Si G y G' son grafos isomorfos, entonces:

$$\text{si } v \in V \implies gr(v) = gr(f(v))$$

Isomorfismo de grafos

Ejemplo



G y G' tienen el mismo número de vértices y el mismo número de aristas.

$\forall v \in V(G)$, $gr(v) = 2$, pero en cambio $gr(w_3) = 1$, por tanto G y G' no pueden ser isomorfos.

1 Teoría de grafos

- Un poco de historia

2 El concepto de grafo

- Definición geométrica del grafo

- Definición algebraica del grafo

3 Grafos y matrices

- Representación matricial
- Isomorfismo de grafos
- Grafos de Euler y grafos de Hamilton

Grafos de Euler

Definición

Sea G un grafo conexo

- Un camino euleriano es un recorrido en el cual aparecen todas las aristas.
- Un circuito euleriano es un camino euleriano cerrado.
- Un grafo euleriano es un grafo con un circuito euleriano.

Grafos de Euler

Teorema

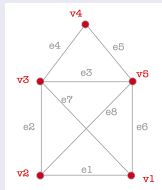
Sea G un grafo entonces:

- Si G tiene un circuito euleriano, el grado de cada vértice es par.
- Si G tiene un camino euleriano, el grafo G tiene exactamente dos vértices de grado impar (exactamente los vértices donde comienza y acaba el camino).

Grafos de Euler

Ejemplos

Considérese el grafo siguiente:



La secuencia $e_2 \ e_4 \ e_5 \ e_8 \ e_1 \ e_7 \ e_3 \ e_6$ es un camino euleriano.

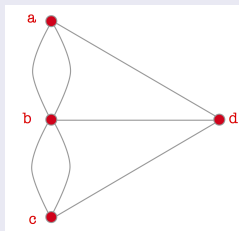
$$gr(v_1) = 3, gr(v_2) = 3, gr(v_3) = 4, gr(v_4) = 2, gr(v_5) = 4$$

Teniendo dos vértices de grado 3, el camino comienza en uno de ellos y acaba en el otro.

Grafos de Euler

Ejemplo

Considérese el grafo que representa los puentes de Königsberg.



Se observa que a , c y d tienen grado 3 y que b tiene grado 5. Como todos los vértices tienen grado impar se puede deducir que no existe ningún circuito euleriano. Por tanto el problema de los puentes de Königsberg no tiene solución.

Grafos de Hamilton

Definición

Sea G un grafo:

- Un camino de Hamilton es un camino que recorre todos los vértices solo una vez.
- Un circuito de Hamilton es un camino de Hamilton cerrado (recorre todos los vértices solo una vez salvo los extremos).
- Un grafo con un circuito de Hamilton se denomina un grafo de Hamilton.