

# Vectores

## Estudios de Ingeniería

Juan Gabriel Gomila

Frogames

<https://frogames.es>

1 de julio de 2017

# Índice

## 1 Vectores

- Definiciones
- Vectores fijos
- Vectores libres

## 2 Operaciones con vectores

- Suma y resta de vectores libres
- Producto de vector por escalar
- Combinación lineal de vectores

## 3 Propiedades de las operaciones con vectores

## 4 Estructura euclidiana de $\mathbb{R}^n$

- Producto escalar
- Norma o longitud
- Distancia entre dos puntos
- Ángulo entre dos vectores
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz

## 1 Vectores

- Definiciones
- Vectores fijos
- Vectores libres

## 2 Operaciones con vectores

- Suma y resta de vectores libres
- Producto de vector por escalar
- Combinación lineal de vectores

## 3 Propiedades de las operaciones con vectores

## 4 Estructura euclidiana de $\mathbb{R}^n$

- Producto escalar
- Norma o longitud
- Distancia entre dos puntos
- Ángulo entre dos vectores
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz

## 5 Producto vectorial. Producto mixto

- Producto vectorial
- Producto mixto

## 1 Vectores

### ■ Definiciones

- Vectores fijos
- Vectores libres

## 2 Operaciones con vectores

- Suma y resta de vectores libres
- Producto de vector por escalar
- Combinación lineal de vectores

## 3 Propiedades de las operaciones con vectores

## 4 Estructura euclidiana de $\mathbb{R}^n$

- Producto escalar
- Norma o longitud
- Distancia entre dos puntos
- Ángulo entre dos vectores
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz

## 5 Producto vectorial. Producto mixto

- Producto vectorial
- Producto mixto

# Vectores

Los vectores tienen un papel fundamental no solo en matemáticas sino también en la física, la ingeniería e incluso otros campos científicos.

Ya se conocen de años anteriores las nociones de vectores en el plano o en el espacio. Los vectores en general tienen dos vertientes íntimamente ligadas: la algebraica y la geométrica.

Se verá en primer lugar los vectores desde un punto de vista geométrico.

# Vectores

Sea  $\mathbb{K}$  un cuerpo

## Punto en la recta $\mathbb{K}$

Dados un origen y una unidad de longitud, cada punto de la recta viene definido por un, y solo un, escalar del cuerpo  $\mathbb{K}$  y viceversa.

## Punto en el plano $\mathbb{K}^2$

Dados un origen, dos ejes (rectas) y una unidad de longitud, un punto del plano es un par  $(x, y)$  donde  $x$  y  $y$  son dos elementos del  $\mathbb{K}$ .

# Vectores

## Punto en el espacio $\mathbb{K}^3$

Dados un origen, tres ejes (rectas) y una unidad de longitud, un punto del plano es una terna  $(x, y, z)$  donde  $x, y$  y  $z$  son dos elementos del cuerpo  $\mathbb{K}$ .

# Vectores

## Puntos en $\mathbb{K}^n$

Un punto del espacio  $\mathbb{R}^n$  se define como una  $n$ -tupla de números:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Donde  $n$  es la dimensión del espacio  $\mathbb{K}^n$ .

## Coordenadas del punto

Las coordenadas de  $X$  son los valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$  del punto  $X$ .



## 1 Vectores

- Definiciones
- Vectores fijos
- Vectores libres

## 2 Operaciones con vectores

- Suma y resta de vectores libres
- Producto de vector por escalar
- Combinación lineal de vectores

## 3 Propiedades de las operaciones con vectores

## 4 Estructura euclidiana de $\mathbb{R}^n$

- Producto escalar
- Norma o longitud
- Distancia entre dos puntos
- Ángulo entre dos vectores
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz

## 5 Producto vectorial. Producto mixto

- Producto vectorial
- Producto mixto

# Vectores fijos

Las siguientes definiciones permiten ver los vectores desde una perspectiva geométrica:

## Vector fijo

Un vector fijo es un par de puntos  $A$  y  $B$ , que se indicarán como  $\vec{AB}$ . El punto  $A$  se denomina **origen** y el punto  $B$  **extremo**.

Normalmente los vectores en el plano o en el espacio de tres dimensiones se suelen representar mediante segmentos acabados en una punta de flecha en uno de sus dos extremos.

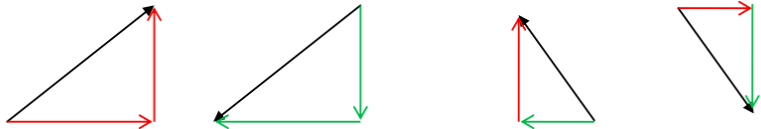
Las componentes cartesianas de un vector son los vectores que se obtienen al proyectarlo sobre los ejes de un sistema de coordenadas situado en el origen del vector.

# Componentes de un vector fijo $\vec{AB}$

## Vector fijo

Las componentes de un vector fijo  $\vec{AB}$  son los vectores que se obtienen al proyectarlo sobre los ejes de un sistema de coordenadas situado sobre el origen del vector.

**Figura:** Criterio de colores. Rojo:+ Verde:-. Las componentes pueden ser positivas o negativas



# Vectores fijos

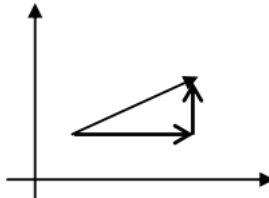
## Componentes de un vector fijo $\vec{AB}$

Si  $A = (a_x, a_y)$  y  $B = (b_x, b_y)$  entonces las componentes del vector  $\vec{AB}$  se obtienen restando las coordenadas del punto extremo  $B$  al punto de origen  $A$ :

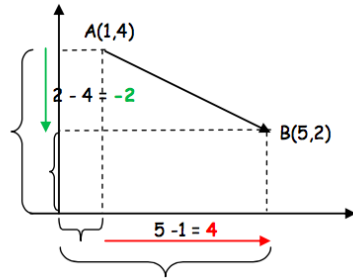
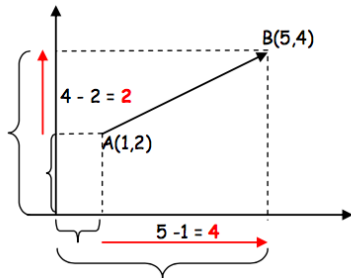
$$\vec{AB} = (b_x - a_x, b_y - a_y)$$

# Vectores fijos

El valor absoluto de las componentes del vector coincide con la de los catetos del triángulo rectángulo formado y tal que el vector sea su hipotenusa.



# Vectores fijos



# Vectores fijos

## Caracterización de un vector fijo (I)

En el contexto geométrico, las 3 características de un vector fijo son:

- Origen: el punto de aplicación donde comienza el vector
- Módulo: la longitud del segmento
- Dirección: la de la recta a la cual pertenece
- Sentido: el que determina la punta de la flecha del vector



# Vectores fijos

## Caracterización de un vector fijo (II)

También queda completamente determinado con:

- Sus componentes
- El punto origen

# Vectores fijos

## Caracterización de un vector fijo (III)

O incluso si se conocen:

- Las coordenadas del punto origen
- Las coordenadas del punto extremo

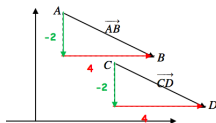
# Vectores equivalentes

## Vectores equivalentes

Dos vectores  $\vec{AB}$  y  $\vec{CD}$  son equivalentes si tienen las mismas componentes; es decir:

$$(b_x - a_x, b_y - a_y) = (d_x - c_x, d_y - c_y)$$

# Vectores equivalentes



**Figura:**  $\vec{AB}$  y  $\vec{CD}$  son equivalentes incluso al tener diferentes orígenes y extremos

Geoméricamente, las longitudes de los segmentos de la recta determinados por el par de puntos y los sentidos de ambos vectores son iguales.

# Vectores equivalentes

## Ejercicios

Encuéntrese un vector equivalente a  $\vec{AB}$  donde  $A = (1, 2)$  y  $B = (5, 4)$

Sol: Puntos cualesquiera  $C$  y  $D$  tales que:

$$(d_x - c_x, d_y - c_y) = (4, 2)$$

# Vectores equivalentes

## Ejercicios

Encuéntrese un vector equivalente a  $\vec{AB}$  donde  $A = (3, 4)$  y  $B = (7, 6)$  con origen en el punto  $A = (-1, 0)$ .

Sol:

$$B' = (3, 2)$$

## 1 Vectores

- Definiciones
- Vectores fijos
- Vectores libres

## 2 Operaciones con vectores

- Suma y resta de vectores libres
- Producto de vector por escalar
- Combinación lineal de vectores

## 3 Propiedades de las operaciones con vectores

## 4 Estructura euclidiana de $\mathbb{R}^n$

- Producto escalar
- Norma o longitud
- Distancia entre dos puntos
- Ángulo entre dos vectores
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz

## 5 Producto vectorial. Producto mixto

- Producto vectorial
- Producto mixto

# Vectores libres

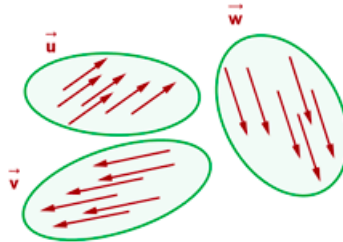
Todos los vectores fijos equivalentes entre sí tienen las mismas componentes. En este sentido es posible establecer una relación de equivalencia correspondiente, el **vector libre**. Este representante define un conjunto infinito de vectores y los representa a todos ellos.



# Vectores libres

## Vectores libres

El conjunto de todos los vectores fijos equivalentes entre sí se denomina vector libre. Un vector libre no tiene un origen fijo, sino que se puede ubicar en cualquier punto del espacio. Cada vector fijo es un representante del vector libre.

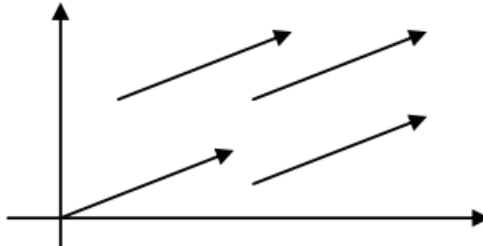


# Vectores libres

## Vector fijo en el origen

Es aquel de los representantes del vector fijo que tienen su punto origen en el origen de coordenadas.

En este caso, las coordenadas del punto extremo coinciden numéricamente con las componentes del vector, ya que el punto de origen es  $0 = (0, 0)$ .



# Vectores libres

Por tanto, todo vector libre tiene un representante situado en el origen de coordenadas donde el punto extremo tiene las mismas coordenadas que las componentes del vector. En este sentido se puede decir:

## Resultado

Existe una correspondencia uno a uno entre los vectores libres y los puntos según el cual cada punto  $P = (a, b)$  se identifica con un vector  $\vec{OP} = (a, b)$ .

# Vectores libres

## Caracterización de un vector libre (I)

Para caracterizar un vector libre se necesitará el módulo, la dirección y el sentido.

## Caracterización de un vector libre (II)

También se puede caracterizar si se conocen las componentes

El módulo, al igual que en los vectores fijos, viene dado por la longitud del segmento y la dirección y sentido vienen definidos por el ángulo que forma el vector con la dirección positiva del eje  $OX$ ..

# Vectores libres

## Ejercicios

Encuétrse el módulo, dirección y sentido del vector de componentes  $(7, -5)$ .

Sol: módulo =  $\sqrt{74}$  y  $\tan \alpha = \frac{-5}{7}$

## Ejercicios

Dado el vector de módulo 8 y el hecho de que forma un ángulo de 135 grados con el eje  $OX$ , calcúlense sus componentes.

Sol:  $(8 \cos 135, 8 \sin 135)$

## 1 Vectores

- Definiciones
- Vectores fijos
- Vectores libres

## 2 Operaciones con vectores

- Suma y resta de vectores libres
- Producto de vector por escalar
- Combinación lineal de vectores

## 3 Propiedades de las operaciones con vectores

## 4 Estructura euclidiana de $\mathbb{R}^n$

- Producto escalar
- Norma o longitud
- Distancia entre dos puntos
- Ángulo entre dos vectores
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz

## 5 Producto vectorial. Producto mixto

- Producto vectorial
- Producto mixto

## 1 Vectores

- Definiciones
- Vectores fijos
- Vectores libres

## 2 Operaciones con vectores

- Suma y resta de vectores libres
- Producto de vector por escalar
- Combinación lineal de vectores

## 3 Propiedades de las operaciones con vectores

## 4 Estructura euclidiana de $\mathbb{R}^n$

- Producto escalar
- Norma o longitud
- Distancia entre dos puntos
- Ángulo entre dos vectores
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz

## 5 Producto vectorial. Producto mixto

- Producto vectorial
- Producto mixto

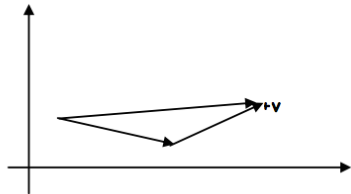
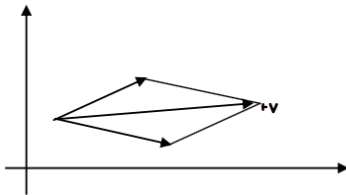
# Suma de vectores libres

## Definición

Sea  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ , entonces:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

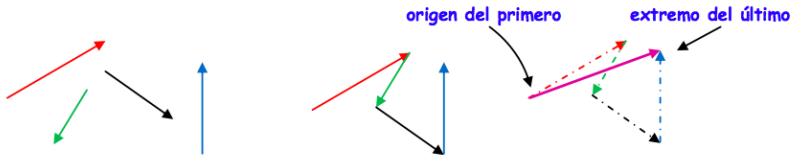
Geométricamente es el vector formado por la diagonal del paralelogramo que tiene los dos vectores sumandos como lados y origen el mismo que ambos.





# Suma de vectores libres

Si se han de sumar más de dos vectores, resulta más útil la segunda construcción gráfica. Basta colocar cada origen de los vectores sumandos sobre el extremo del vector sumando precedente



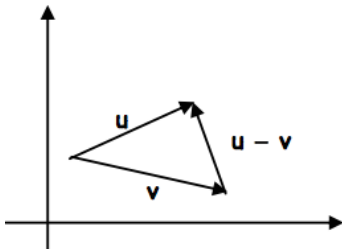
## Resta de vectores libres

### Definición

Sea  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ , entonces

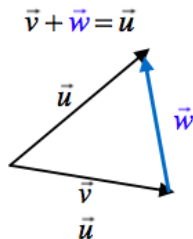
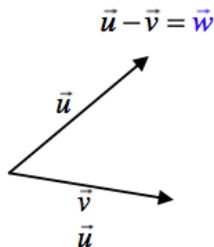
$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, \dots, u_n - v_n)$$

Geométricamente se realiza la suma entre el vector minuendo y el opuesto del sustraendo.



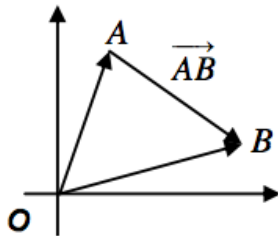
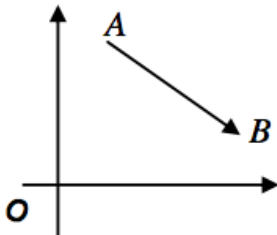
## Resta de vectores libres

Una pequeña observación: al realizar la resta  $\vec{u} - \vec{v}$  se busca un vector  $\vec{w}$  tal que si se le suma al sustraendo ha de dar el minuendo:



## Obtención de las componentes de un vector $\vec{AB}$

Si se tiene un vector  $\vec{AB}$  obtenido a partir de los puntos  $A$  y  $B$  y se dibujan los vectores  $\vec{OA}$  y  $\vec{OB}$



Entonces se puede ver como  $\vec{AB}$ ,  $\vec{OA}$  y  $\vec{OB}$  forman un triángulo vectorial y se pueden escribir las relaciones siguientes:

$$\vec{OA} + \vec{AB} - \vec{OB} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

# Obtención de las componentes de un vector $\vec{AB}$

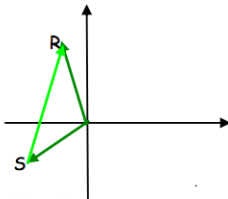
## Ejercicios

Obtégase  $\vec{SR}$  a partir de  $\vec{OR} = (-1, 4)$  i  $\vec{OS} = (-3, -2)$

## Ejercicios

Obtégase  $\vec{PR} - \vec{PS}$  a partir de  $\vec{OR} = (-1, 4)$ ,  $\vec{OS} = (-3, -2)$  i  $\vec{OP} = (3, 0)$ .

# Obtención de las componentes de un vector $\vec{AB}$

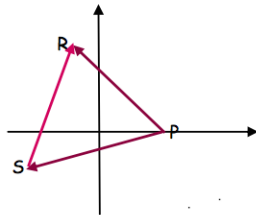


$$\overline{PR} = \overline{OR} - \overline{OP} = (-1, 4) - (3, 0) = (-4, 4)$$

$$\overline{PS} = \overline{OS} - \overline{OP} = (-3, -2) - (3, 0) = (-6, -2)$$

$$\overline{PR} - \overline{PS} = (-4, 4) - (-6, -2) = (2, 6)$$

$$\overline{SR} = \overline{OR} - \overline{OS} = (-1, 4) - (-3, -2) = (2, 6)$$



## 1 Vectores

- Definiciones
- Vectores fijos
- Vectores libres

## 2 Operaciones con vectores

- Suma y resta de vectores libres
- Producto de vector por escalar
- Combinación lineal de vectores

## 3 Propiedades de las operaciones con vectores

## 4 Estructura euclidiana de $\mathbb{R}^n$

- Producto escalar
- Norma o longitud
- Distancia entre dos puntos
- Ángulo entre dos vectores
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz

## 5 Producto vectorial. Producto mixto

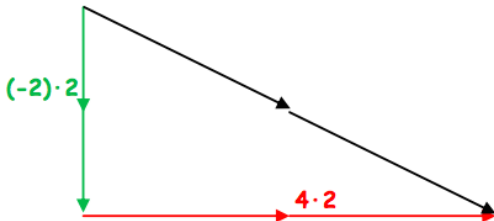
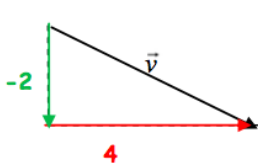
- Producto vectorial
- Producto mixto

# Producto por escalar

## Definición

Sea  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n$  y sea  $\lambda \in \mathbb{K}$  entonces:

$$\lambda \vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_n) \in \mathbb{K}^n$$



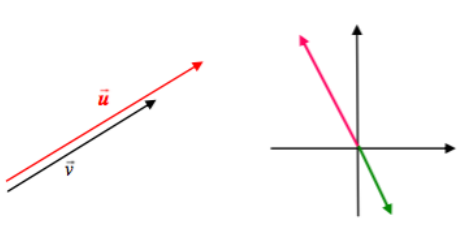


## Producto por escalar

En el ejemplo anterior  $\vec{v} = (4, -2)$  y  $2\vec{v} = (8, -4)$ . Además, la longitud de  $\vec{v} = 2\sqrt{5}$  y la de  $2\vec{v} = 4\sqrt{5}$ , donde se observa que al duplicar el vector, también se duplica su módulo o longitud. En cambio la dirección y sentido de  $2\vec{v}$  coincide con la de  $\vec{v}$ . Se verá que no siempre será así.

## Producto por escalar

El resultado de multiplicar un escalar  $\lambda \neq 0$  por un vector  $\vec{v}$  es otro vector  $\vec{u}$  de la misma dirección que  $\vec{v}$ , de sentido igual o contrario según sea el signo del escalar  $+$  o  $-$ , y de módulo igual a  $|\lambda|$  veces el de  $\vec{v}$ .



**Figura:** A la figura de la derecha, si el vector  $\vec{v} = (1, -2)$  se multiplica por el escalar  $-2$  se obtiene otro vector  $\vec{u}$  paralelo a  $\vec{v}$  y de componente  $\vec{u} = (-2, 4)$ .

# Producto por escalar

## Vectores paralelos

Dos vectores  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  son paralelos (o proporcionales) si existe un valor  $\lambda \neq 0$  tal que  $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ .

Serán del mismo sentido si  $\lambda > 0$  y de sentidos opuestos si  $\lambda < 0$ .

# Producto por escalar

## Ejercicios

Dados los puntos  $A = (1, 2, 3)$ ,  $B = (0, -1, 2)$  y  $C = (-2, -7, 0)$ , si  $D$  es el punto de coordenadas  $(-1, x, 0)$  encuéntrase, si es posible, el valor de  $x$  para el que los vectores  $\vec{AB}$  y  $\vec{CD}$  son paralelos. Razónese el procedimiento empleado.

Sol: el problema no tiene solución.

# Producto por escalar

## Ejercicios

Dados los vectores  $\vec{u} = (2, 3, 0)$  y  $\vec{v} = (-3, 0, 1)$  encuéntrase el valor de  $k$  para el que los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son paralelos, donde  $\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v}$  y  $\vec{b} = -3\vec{u} + k\vec{v}$ .

Sol:  $k = \frac{3}{2}$ .

## 1 Vectores

- Definiciones
- Vectores fijos
- Vectores libres

## 2 Operaciones con vectores

- Suma y resta de vectores libres
- Producto de vector por escalar
- Combinación lineal de vectores

## 3 Propiedades de las operaciones con vectores

## 4 Estructura euclidiana de $\mathbb{R}^n$

- Producto escalar
- Norma o longitud
- Distancia entre dos puntos
- Ángulo entre dos vectores
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz

## 5 Producto vectorial. Producto mixto

- Producto vectorial
- Producto mixto

# Combinación lineal

## Combinación lineal de vectores

Dados  $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$  un conjunto de vectores de  $\mathbb{K}^n$  y  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$  se define la combinación lineal de los vectores de  $V$  como el vector  $\vec{w}$ :

$$\vec{w} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{v}_i$$

La combinación lineal de vectores no es una operación nueva, sino que reúne en un mismo lugar la suma de vectores y el producto por escalares. Para poder hacer combinaciones lineales de vectores es necesario que todos ellos tengan el mismo número de componentes y el resultado será otro vector de estas mismas características.

# Combinación lineal

## Ejercicios

¿Es el vector  $(2, 3)$  combinación lineal de  $(3, 1)$  y  $(-6, -2)$ ?  
Justifíquese gráficamente la respuesta.

Sol: no.



## 1 Vectores

- Definiciones
- Vectores fijos
- Vectores libres

## 2 Operaciones con vectores

- Suma y resta de vectores libres
- Producto de vector por escalar
- Combinación lineal de vectores

## 3 Propiedades de las operaciones con vectores

## 4 Estructura euclidiana de $\mathbb{R}^n$

- Producto escalar
- Norma o longitud
- Distancia entre dos puntos
- Ángulo entre dos vectores
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz

## 5 Producto vectorial. Producto mixto

- Producto vectorial
- Producto mixto

## Propiedades de las operaciones con vectores

Al definir las operaciones de suma y producto por un escalar conviene tener presentes las diferencias y similitudes entre ambos.

### Ley de composición interna

La suma de vectores se denomina ley de composición interna ya que opera entre elementos de un conjunto dado,  $\mathbb{K}^n$  y el resultado es otro elemento de este conjunto:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\mapsto \vec{u} + \vec{v} \end{aligned}$$

# Propiedades de las operaciones con vectores

## Ley de composición externa

El producto de un escalar por un vector tiene como operandos conjuntos diferentes: escalares por un lado y vectores por el otro. El resultado cae del lado de los vectores, y la operación se denomina ley de composición externa:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ (\lambda, \vec{v}) &\mapsto \lambda \vec{v} \end{aligned}$$

## Propiedades de la suma de vectores

Sea  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{K}^n$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  entonces se cumple:

### Propiedades

- Ley asociativa:  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- Ley conmutativa:  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- Elemento neutro de la suma:  $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
- Vector opuesto:  $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$

# Propiedades del producto por un escalar

## Propiedades

- Ley distributiva del producto por un escalar para la suma de vectores:  $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
- Ley distributiva del producto de un vector por la suma de escalares:  $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
- Ley asociativa del producto entre escalares y vectores:  $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u}) = \beta(\alpha\vec{u})$
- Elemento unidad:  $1\vec{u} = \vec{u}$

## 1 Vectores

- Definiciones
- Vectores fijos
- Vectores libres

## 2 Operaciones con vectores

- Suma y resta de vectores libres
- Producto de vector por escalar
- Combinación lineal de vectores

## 3 Propiedades de las operaciones con vectores

## 4 Estructura euclidiana de $\mathbb{R}^n$

- Producto escalar
- Norma o longitud
- Distancia entre dos puntos
- Ángulo entre dos vectores
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz

## 5 Producto vectorial. Producto mixto

- Producto vectorial
- Producto mixto

## 1 Vectores

- Definiciones
- Vectores fijos
- Vectores libres

## 2 Operaciones con vectores

- Suma y resta de vectores libres
- Producto de vector por escalar
- Combinación lineal de vectores

## 3 Propiedades de las operaciones con vectores

## 4 Estructura euclidiana de $\mathbb{R}^n$

### ■ Producto escalar

- Norma o longitud
- Distancia entre dos puntos
- Ángulo entre dos vectores
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz

## 5 Producto vectorial. Producto mixto

- Producto vectorial
- Producto mixto

# Producto Escalar

El producto escalar es la tercera operación básica entre vectores de  $\mathbb{R}^n$ .

## Producto escalar

Sean  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  dos vectores de  $\mathbb{R}^n$ . Se define el producto escalar  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  como el número real

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

De ello se derivan los conceptos métricos como la ortogonalidad, la norma, el ángulo y se abre camino a múltiples aplicaciones geométricas y físicas del álgebra lineal.



# Producto escalar

## Ejemplo

Sean  $\vec{u} = (2, 3, 0)$  y  $\vec{v} = (-1, -3, 1)$  dos vectores de  $\mathbb{R}^3$ . Calcúlese su producto escalar:

Sol:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -11$$

# Propiedades del producto escalar

## Propiedades

- Conmutativa:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- Distributiva respecto de la suma:  $\vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
- Asociativa y conmutativa entre escalares y vectores:

$$(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

- Si  $\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ .
- Si  $\vec{u} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} > 0$ .

# Propiedades del producto escalar

## Ejercicios

Dados los vectores  $\vec{u} = (2, -1, 5)$ ,  $\vec{v} = (-3, 4, 1)$  y  $\vec{w} = (-1, 0, 5)$

- 1 Compruébese que el producto escalar tiene la propiedad conmutativa.
- 2 Compruébese que el producto escalar tiene la propiedad distributiva respecto de la suma.
- 3 Compruébese que el producto escalar tiene la propiedad asociativa entre escalares y vectores.

# Propiedades del producto escalar

## Ejercicios

Demuéstrese que si  $\vec{u} \neq \vec{0}$  entonces  $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$

## 1 Vectores

- Definiciones
- Vectores fijos
- Vectores libres

## 2 Operaciones con vectores

- Suma y resta de vectores libres
- Producto de vector por escalar
- Combinación lineal de vectores

## 3 Propiedades de las operaciones con vectores

## 4 Estructura euclidiana de $\mathbb{R}^n$

- Producto escalar
- **Norma o longitud**
- Distancia entre dos puntos
- Ángulo entre dos vectores
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz

## 5 Producto vectorial. Producto mixto

- Producto vectorial
- Producto mixto

# Norma de un vector

## Norma

Dado  $\vec{u} = (u_1, u_2 \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$  su norma o longitud viene dada por:

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

En muchos casos resulta útil la norma al cuadrado de un vector:

$$||\vec{u}||^2 = (\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}})^2 \Rightarrow ||\vec{u}||^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$$

# Norma de un vector

## Ejercicios

Dado  $\vec{u} = (2, 3, -1) \in \mathbb{R}^3$ , calcúlese su longitud.

Sol:

$$||\vec{u}|| = \sqrt{14}$$

# Norma de un vector

## Propiedades

- $||\vec{u}|| > 0, \forall \vec{u} \neq \vec{0}$
- $||\lambda \vec{u}|| = |\lambda| \cdot ||\vec{u}||$
- $||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$  (Desigualdad triangular)
- $||\vec{u} + \vec{v}|| = ||\vec{u}|| + ||\vec{v}|| \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$  (teorema de Pitágoras)
- $||\vec{u} \cdot \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||$  (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)



# Norma de un vector

## Ejercicios

Dado  $\vec{u} = (2, 3, -1)$  compruébese que:

$$||2\vec{u}|| = 2||\vec{u}||$$

$$||-2\vec{u}|| = |-2| ||\vec{u}|| = 2||\vec{u}||$$

# Norma de un vector

## Vector unitario

Un vector unitario  $\vec{e}$  es aquel que tiene la norma 1:

$$||\vec{e}|| = 1$$

Por ejemplo el vector  $(1, 0, 0)$  es un vector unitario.

# Norma de un vector

## Ejercicios

Dado el vector  $\vec{u} = (2, 3, -1)$  compruébese que si se divide por su norma se obtiene otro vector que es unitario.

## Ejercicios

Demuéstrese que cualquiera que sea el vector  $\vec{u}$ , al ser dividido por su norma es unitario.

## Ejercicios

Dado el vector  $\vec{u} = (2, 3, -1)$  encuéntrase otro vector de la misma dirección y sentido pero de norma igual a 3.

## 1 Vectores

- Definiciones
- Vectores fijos
- Vectores libres

## 2 Operaciones con vectores

- Suma y resta de vectores libres
- Producto de vector por escalar
- Combinación lineal de vectores

## 3 Propiedades de las operaciones con vectores

## 4 Estructura euclidiana de $\mathbb{R}^n$

- Producto escalar
- Norma o longitud
- **Distancia entre dos puntos**
- Ángulo entre dos vectores
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz

## 5 Producto vectorial. Producto mixto

- Producto vectorial
- Producto mixto

# Distancia entre dos puntos

## Distancia entre dos puntos

Dados dos puntos  $A$  y  $B$  se define la distancia entre ambos como:

$$d(A, B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{\vec{AB} \cdot \vec{AB}}$$

Este valor coincide con la intuición geométrica cuando  $A$  y  $B$  son dos puntos del plano. Equivale a la longitud del vector fijo  $\vec{AB}$ .

## Ejercicios

Dados dos puntos  $A = (1, 2)$  y  $B = (4, 3)$  encuentra la distancia entre ambos.

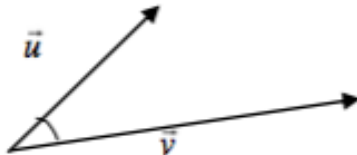
Sol:  $\sqrt{10}$ .

# Distancia entre dos puntos

## Teorema

Dados dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  y  $\alpha$  el ángulo que forman ambos, entonces se cumple que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos \alpha$$



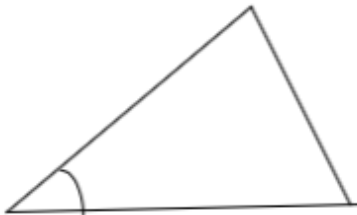
# Distancia entre dos puntos

Para hacer la demostración se utilizará un resultado previo.

## Teorema del coseno

En un triángulo  $ABC$  cualquiera y siendo  $\alpha, \beta, \gamma$  los ángulos, y  $a, b, c$  los ángulos de los lados opuestos a los anteriores, entonces:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \alpha$$

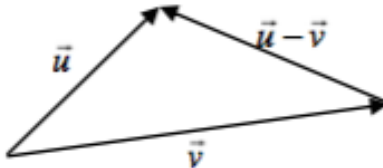


# Distancia entre dos puntos

## Demostración

En primer lugar se dibuja el vector  $\vec{u} - \vec{v}$  con lo que queda dibujado un triángulo. Se aplica la definición de norma bajo la forma  $||\vec{w}||^2 = \vec{w} \cdot \vec{w}$  al vector  $\vec{u} - \vec{v}$ , resulta:

$$||\vec{u} - \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v})$$



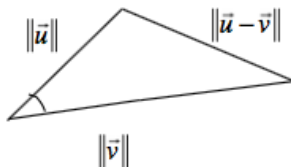


# Distancia entre dos puntos

## Demostración

Por otro lado si se aplica el teorema del coseno al triángulo formado por  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{u} - \vec{v}$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2(\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \alpha)$$



# Distancia entre dos puntos

## Demostración

Si se comparan ambas expresiones se obtiene el resultado:

$$||\vec{u} - \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$||\vec{u} - \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2(||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cos \alpha)$$

## 1 Vectores

- Definiciones
- Vectores fijos
- Vectores libres

## 2 Operaciones con vectores

- Suma y resta de vectores libres
- Producto de vector por escalar
- Combinación lineal de vectores

## 3 Propiedades de las operaciones con vectores

## 4 Estructura euclidiana de $\mathbb{R}^n$

- Producto escalar
- Norma o longitud
- Distancia entre dos puntos
- **Ángulo entre dos vectores**
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz

## 5 Producto vectorial. Producto mixto

- Producto vectorial
- Producto mixto

## Ángulo entre dos vectores

Como se acaba de ver, si  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  forman un ángulo  $\alpha$  entonces se puede definir su producto escalar como  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \alpha$ .

### Ángulo entre dos vectores

Se define el ángulo que forman dos vectores como el valor real  $\alpha$ :

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

### Ejercicios

Encuéntrese el ángulo que forman los vectores  $(2, 3, -1)$  y  $(-2, 0, 3)$

Sol:  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{182}}{26}$

# Ángulo entre dos vectores

## Vectores ortogonales

Dos vectores son ortogonales si su producto escalar es cero:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

## Vectores ortonormales

Dos vectores son ortonormales si son ortogonales y de norma 1.

Por ejemplo,  $(0, 1)$  y  $(1, 0)$  son dos vectores ortonormales.

# Ángulo entre dos vectores

## Ejercicios

Encuéntrese el valor de  $a$  para el cual  $(a, 0, -1, 3)$  sea perpendicular a  $(1, 7, a - 1, 2a + 3)$ .

Sol:  $a = -\frac{5}{3}$

## Ejercicios

¿Para que valores de  $x$  son ortogonales  $(x, -x - 8, x, x)$  y  $(x, 1, -2, 1)$ ?

Sol:  $x = -2$  y  $x = 4$ .

## 1 Vectores

- Definiciones
- Vectores fijos
- Vectores libres

## 2 Operaciones con vectores

- Suma y resta de vectores libres
- Producto de vector por escalar
- Combinación lineal de vectores

## 3 Propiedades de las operaciones con vectores

## 4 Estructura euclidiana de $\mathbb{R}^n$

- Producto escalar
- Norma o longitud
- Distancia entre dos puntos
- Ángulo entre dos vectores
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz

## 5 Producto vectorial. Producto mixto

- Producto vectorial
- Producto mixto

# Desigualdad de Cauchy-Schwarz

## Resultado

A partir de la expresión:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||}$$

Y teniendo en cuenta que el coseno de cualquier ángulo es siempre menor o igual que 1 se puede obtener:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||$$

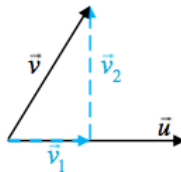
Es decir, que el producto escalar de dos vectores es menor o igual que el producto de sus normas.



# Proyección ortogonal

## Proyección ortogonal

La proyección ortogonal de un vector  $\vec{v}$  sobre otro vector  $\vec{u}$  es un vector paralelo a  $\vec{u}$  tal que sumado a otro perpendicular a  $\vec{u}$  dará  $\vec{v}$



# Proyección ortogonal

Se trata de obtener  $P_{\vec{v}}(\vec{u}) = \vec{v}_1$  conociendo los vectores  $\vec{u}$  o  $\vec{v}$

## Cálculo de la proyección ortogonal

- Se descompone el vector  $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$  donde  $\vec{v}_1 \parallel \vec{u}$  i  $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$ .
- $\vec{v}_1 = \lambda \vec{u}$
- $\vec{v} = \lambda \vec{u} + \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_2 = \vec{v} - \lambda \vec{u}$
- $\vec{v}_2 \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (\vec{v} - \lambda \vec{u}) \cdot \vec{u} = 0$
- $\lambda = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{||\vec{u}||^2}$

Por tanto:

$$P_{\vec{v}}(\vec{u}) = \vec{v}_1 = \lambda \vec{u} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{||\vec{u}||^2} \vec{u}$$

# Proyección ortogonal

## Cálculo de la proyección ortogonal

Proyéctese el vector  $\vec{v} = (1, 2)$  sobre  $\vec{u} = (3, 1)$ .

Sol:  $P_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{1}{2}(3, 1)$ .

## 1 Vectores

- Definiciones
- Vectores fijos
- Vectores libres

## 2 Operaciones con vectores

- Suma y resta de vectores libres
- Producto de vector por escalar
- Combinación lineal de vectores

## 3 Propiedades de las operaciones con vectores

## 4 Estructura euclidiana de $\mathbb{R}^n$

- Producto escalar
- Norma o longitud
- Distancia entre dos puntos
- Ángulo entre dos vectores
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz

## 5 Producto vectorial. Producto mixto

- Producto vectorial
- Producto mixto

## 1 Vectores

- Definiciones
- Vectores fijos
- Vectores libres

## 2 Operaciones con vectores

- Suma y resta de vectores libres
- Producto de vector por escalar
- Combinación lineal de vectores

## 3 Propiedades de las operaciones con vectores

## 4 Estructura euclidiana de $\mathbb{R}^n$

- Producto escalar
- Norma o longitud
- Distancia entre dos puntos
- Ángulo entre dos vectores
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz

## 5 Producto vectorial. Producto mixto

- Producto vectorial
- Producto mixto

# Producto vectorial

## Producto vectorial

Sean  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  dos vectores de  $\mathbb{R}^3$ . El producto vectorial de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  se define como el vector:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

# Producto vectorial

## Resultados

Si se multiplica escalarmente:

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$$

$$\vec{v} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$$

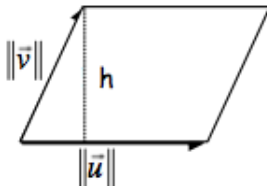
Donde se ve que es perpendicular a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

# Producto vectorial

## Resultados

El sentido del producto vectorial es el de indicaría la regla de la mano derecha al llevar el primer vector sobre el segundo por el camino más corto y con módulo el área del paralelogramo del determinante dado por  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$

$$||\vec{u} \wedge \vec{v}|| = ||\vec{u}|| \cdot h = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \text{sen } \alpha$$





# Producto vectorial

## Producto vectorial como determinante

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\vec{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\vec{k}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

# Producto vectorial

## Propiedades

- Propiedad anticonmutativa:  $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- Propiedad distributiva:

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

$$(\vec{v} + \vec{w}) \wedge \vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{u}$$

- Propiedad asociativa de vectores y escalares:

$$\alpha \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\alpha \cdot \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\alpha \cdot \vec{v})$$

- $\vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0} \wedge \vec{u} = \vec{0}$
- $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$

## 1 Vectores

- Definiciones
- Vectores fijos
- Vectores libres

## 2 Operaciones con vectores

- Suma y resta de vectores libres
- Producto de vector por escalar
- Combinación lineal de vectores

## 3 Propiedades de las operaciones con vectores

## 4 Estructura euclidiana de $\mathbb{R}^n$

- Producto escalar
- Norma o longitud
- Distancia entre dos puntos
- Ángulo entre dos vectores
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz

## 5 Producto vectorial. Producto mixto

- Producto vectorial
- Producto mixto

# Producte mixto de tres vectores

## Producto mixto

Sean  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  y  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$  tres vectores de  $\mathbb{R}^3$  distintos del cero. El producto mixto de  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  se define como el vector:

$$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \vec{u}(\vec{v} \wedge \vec{w})$$
$$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Si este determinante es cero se puede decir que alguna de las filas es combinación lineal de las restantes y que por lo tanto uno de los vectores se puede obtener como combinación lineal de los otros: son coplanarios.

# Producto mixto de tres vectores

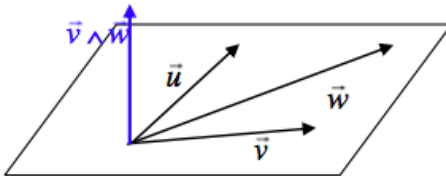
## Propiedades

- $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} =$   
 $u_1 v_2 w_3 - u_1 v_3 w_2 + u_2 v_3 w_1 - u_2 v_1 w_3 + u_3 v_1 w_2 - u_3 v_2 w_1$
- $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \{\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\} = \{\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}\} = -\{\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}\} =$   
 $-\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}\} = -\{\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}\}$

# Producto mixto de tres vectores

## Propiedades

- Si los tres vectores son coplanarios, entonces  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = 0$
- Si  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = 0$  entonces o algún vector es  $\vec{0}$  o los tres vectores son coplanarios



# Producto mixto de tres vectores

## Propiedades

- Geométricamente  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  representa el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores

Pista  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v} \wedge \vec{w}\| \cos \alpha$ , donde  $\|\vec{v} \wedge \vec{w}\|$  = área de la base y  $\|\vec{u}\| \cos \alpha$  es la proyección escalar del vector  $\vec{u}$  sobre la dirección perpendicular a la base, es decir, la altura.

