APUNTS DE L'ASSIGNATURA: MATEMÀTIQUES I. ÀLGEBRA LINEAL

Margalida Mas i Joan Torrens

Capítol 4

Aplicacions lineals

Una vegada estudiada l'estructura d'espai vectorial, el següent és estudiar les funcions o aplicacions que conserven aquesta estructura. En general, aquest tipus de funcions s'anomenen *morfismes*, però en el cas d'espais vectorials s'utilitza més el terme *aplicació lineal*.

Definició 1. *Siguin E i F espais vectorials sobre el mateix cos $\mathbb{K}$. Direm que una aplicació $f : E \to F$ és lineal si compleix*

i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ *per a tots* $x, y \in E$.

ii) $f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$ *per a tot* $\alpha \in \mathbb{K}$ *i per a tot* $x \in E$.

Proposició 2. *Siguin E, F dos $\mathbb{K}$-espais vectorials i $f : E \to F$ una aplicació. Aleshores són equivalents*

i) f *és lineal.*

ii) $f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y)$ *per a tots* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *i per a tots* $x, y \in E$.

iii) $f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot f(x_i)$ *per a tots* $a_i \in \mathbb{K}$ *i* $x_i \in E$.

Demostració: $i) \Longrightarrow ii)$. Com que f és lineal tenim

$$f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = f(\alpha \cdot x) + f(\beta \cdot y) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y).$$

$ii) \Longrightarrow iii)$. És un simple exercici d'inducció.

$iii) \Longrightarrow i)$. És evident ja que la suma de dos vectors i el producte d'un escalar per un vector són casos particulars de combinacions lineals. $\square$

Exemple 3. *Les aplicacions següents són exemples d'aplicacions lineals:*

1. *L'aplicació* $Id : E \to E$ *definida per* $Id(x) = x$ *per a tot* $x \in E$ *(aplicació identitat).*

2. *L'aplicació* $f : E \to F$ *definida per* $f(x) = 0$ *per a tot* $x \in E$ *(aplicació zero, habitualment denotada també per* 0*).*

3. *Fixat qualsevol* $\alpha \in \mathbb{K}$*, l'aplicació* $f_\alpha : E \to E$ *definida per* $f_\alpha(x) = \alpha x$ *per a tot* $x \in E$*.*

4. *L'aplicació* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definida per* $f(x, y) = (x + y, 2x - y, y - x)$ *per a tot* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*.*

5. *L'aplicació* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *definida per*

$$f(x_1, \dots, x_n) = (\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i, \dots, \sum_{i=1}^{n} a_{mi}x_i)$$

   amb tots els $a_{ji} \in \mathbb{K}$ *per* $i = 1, \dots, n$*,* $j = 1, \dots, m$*.*

6. *Sigui* E *un* $\mathbb{K}$*-espai vectorial qualsevol i* F *un subespai vectorial. Llavors les aplicacions*

$$\begin{array}{rl} i_F: & F \to E \\ & x \mapsto x \end{array} \quad \textit{(inclusió de } F \textit{ en } E\textit{)}, \qquad \begin{array}{rl} \pi_F: & E \to E/F \\ & x \mapsto [x]_F \end{array} \textit{(projecció sobre } F\textit{)}$$

   són aplicacions lineals.

7. *Si* E *és un* $\mathbb{K}$*-espai vectorial i* $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *és una base de* E*, sabem que tot element* $x \in E$ *s'escriu de forma única com* $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$*. Aleshores, l'aplicació* $f : E \to K^n$ *definida per* $f(x) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ *és lineal (exercici).*

8. *Si* F, G *són subespais vectorials complementaris d'un* $\mathbb{K}$*-espai vectorial, llavors sabem que* $E = F \oplus G$ *i que tot* $x \in E$ *s'escriu de manera única com* $x = y_x + z_x$ *amb* $y_x \in F$ *i* $z_x \in G$*. Llavors les aplicacions*

$$p_F : E \to F \qquad i \qquad p_G : E \to G$$

   definides respectivament per $p_F(x) = y_x$ *i* $p_G(x) = z_x$ *per a tot* $x \in E$ *són lineals. Vegem-ho, siguin* $x = y_x + z_x$ *i* $u = y_u + z_u$ *les descomposicions de* x *i* u*, i siguin* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$*. Notem que llavors*

$$\alpha \cdot x + \beta \cdot u = \alpha \cdot (y_x + z_x) + \beta \cdot (y_u + z_u) = (\alpha \cdot y_x + \beta \cdot y_u) + (\alpha \cdot z_x + \beta \cdot z_u)$$

   essent aquesta darrera expressió l'única manera d'escriure $\alpha \cdot x + \beta \cdot u$ *com suma d'un element de* F *més un de* G*. Per tant,*

$$p_F(\alpha \cdot x + \beta \cdot u) = \alpha \cdot y_x + \beta \cdot y_u = \alpha \cdot p_F(x) + \beta \cdot p_F(u).$$

   Anàlogament es veu per p_G*.*

Exemple 4. *L'aplicació $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida per*

$$f(x, y) = (x + y, x + y - 1, y)$$

no és lineal. Ho podeu veure com a exercici directament de la definició. Però també és immediat a partir de la proposició següent ja que, per aquesta f, $f(0, 0) = (0. - 1, 0) \neq (0, 0, 0)$.

Proposició 5. *Siguin E, F dos $\mathbb{K}$-espais vectorials i $f : E \to F$ una aplicació lineal. Aleshores:*

1. $f(0_E) = 0_F$
2. $f(-x) = -f(x)$
3. *Si H és un subespai vectorial de E, aleshores $f(H)$ és subespai vectorial de F.*
4. *Si K és un subespai vectorial de F, aleshores $f^{-1}(K)$ és un subespai vectorial de E.*
5. *Si G és un altre $\mathbb{K}$-espai vectorial i $f : E \to F$, $g : F \to G$ són aplicacions lineals, aleshores l'aplicació $g \circ f : E \to G$ és lineal.*

Demostració: Vegem les propietats una per una.

- $f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E)$, d'on necessàriament, restant $f(0_E)$ a cada banda, tenim $f(0_E) = 0_F$.

- Notem que $f(-x) + f(x) = f(-x + x) = f(0_E) = 0_F$ i per tant, $f(-x) = -f(x)$.

- Suposem que H és un subespai vectorial de E i siguin $y_1, y_2 \in f(H)$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Per definició de $f(H)$, existiran $x_1, x_2 \in H$ tals que $y_i = f(x_i)$ per a $i = 1, 2$ i llavors

$$\alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2 = \alpha \cdot f(x_1) + \beta \cdot f(x_2) = f(\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2) \in f(H)$$

ja que $\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2$ és un element de H per ser H subespai vectorial.

- Sigui K un subespai vectorial de F i siguin $x_1, x_2 \in f^{-1}(K)$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Per definició de $f^{-1}(H)$, tendrem que $f(x_1), f(x_2) \in G$ i, per ser K subespai vectorial de F, també $\alpha \cdot f(x_1) + \beta \cdot f(x_2)$ és un element de K. Però,

$$f(\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2) = \alpha \cdot f(x_1) + \beta \cdot f(x_2) \in K$$

d'on $\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2 \in f^{-1}(K)$.

- Per a tots $x_1, x_2 \in E$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, tenim

$$g \circ f(\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2) = g(f(\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2)) = g(\alpha \cdot f(x_1) + \beta \cdot f(x_2)) =$$

$$= \alpha \cdot g(f(x_1)) + \beta \cdot g(f(x_2)) = \alpha \cdot (g \circ f)(x_1) + \beta \cdot (g \circ f)(x_2)$$

on la segona igualtat és certa per ser f lineal i la tercera ho és per ser g lineal. $\square$

Definició 6. *Com a cas particular de la proposició anterior tenim que $F(E)$ és un subespai vectorial de F que s'anomena* subespai vectorial imatge *de f i es denota també per*

$$f(E) = Img(f) = \{f(x) \mid x \in E\}.$$

Anàlogament, tenim que $f^{-1}(\{0\})$ és un subespai vectorial de E que s'anomena nucli *de f i es denota per*

$$Ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\}.$$

Notació: Denotarem per $\mathcal{L}(E, F) = \{f : E \to F \mid f \text{ és lineal}\}$.

Exercici 7. *Provau que $\mathcal{L}(E, F)$ amb les operacions*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad f, g \in \mathcal{L}(E, F)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad f \in \mathcal{L}(E, F), \alpha \in \mathbb{K}$$

és un $\mathbb{K}$-espai vectorial. (Només cal demostrar que la suma d'aplicacions lineals és lineal i que el producte d'un escalar per una aplicació lineal és també lineal).

Definició 8. *Sigui $f : E \to F$ una aplicació lineal, direm que*

- *és un* monomorfisme *si f és injectiva.*
- *és un* epimorfisme *si f és exhaustiva.*
- *és un* isomorfisme *si f és bijectiva.*
- *Si $E = F$ direm que f és un* endomorfisme.
- *Si f és un endomorfisme bijectiu direm que és un* automorfisme.
- *Donats dos $\mathbb{K}$-espais vectorials E, F, si existeix un isomorfisme $f : E \to F$ es diu que E i F són* isomorfs *i es denota per $E \cong F$.*

Proposició 9. *Siguin E, F dos $\mathbb{K}$-espais vectorials isomorfs. Sigui $f : E \to F$ un isomorfisme, llavors existeix l'aplicació inversa de f, $f^{-1}F \to E$, i és també lineal.*

Demostració: Si f és un isomorfisme és bijectiva i per tant existeix la seva inversa $f^{-1} : F \to E$. Per veure que és lineal, siguin $y_1, y_2 \in F$, com que f és bijectiva existeixen uns únics $x_1, x_2 \in E$ tals que $f(x_i) = y_i$ per a $i = 1, 2$ o, equivalentment, $x_i = f^{-1}(y_i)$. Llavors

$$f^{-1}(y_1+y_2) = f^{-1}(f(x_1)+f(x_2)) = f^{-1}(f(x_1+x_2)) = x_1+x_2 = f^{-1}(y_1)+f^{-1}(y_2).$$

Anàlogament es veu que $f^{-1}(\alpha \cdot y) = \alpha \cdot f^{-1}(y)$ i per tant f^{-1} és lineal. $\square$

Exemple 10. *$\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{C}$ són dos $\mathbb{R}$-espais vectorials isomorfs. Un isomorfisme seria $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ donat per*

$$f(x, y) = x + yi \qquad \text{per a tot} \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Comprovau com a exercici que aquesta aplicació és efectivament lineal i bijectiva.

Proposició 11. *Sigui $f : E \to F$ una aplicació lineal, aleshores:*

1. *f és monomorfisme $\Leftrightarrow Ker(f) = \{0\}$.*
2. *f és epimorfisme $\Leftrightarrow F = Img(f)$.*

Demostració: Demostrarem només l'apartat 1 ja que el segon és obvi per definició d'aplicació exhaustiva. Per demostrar 1, suposem primer que f és un monomorfisme. Sigui $x \in Ker(f)$, aleshores $f(x) = 0$ i per ser f lineal, $f(0) = 0$. Així tenim que $f(x) = f(0)$, i com que f és injectiva $x = 0$.

Recíprocament, suposem $f(x) = f(x')$. Aleshores $f(x) - f(x') = 0$ i, per ser f lineal, tenim que $f(x) - f(x') = f(x - x') = 0$, d'on $x - x' \in Ker(f) = \{0\}$. Conseqüentment $x - x' = 0$, és a dir, $x = x'$. □

Exemple 12. *a) L'aplicació $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida per*

$$f(x, y, z) = (x + y - 2z, x - y + z)$$

és lineal: Notem que el seu nucli són els vectors $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tals que $f(x, y, z) = (x + y - 2z, x - y + z) = (0, 0)$, que és el mateix que

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - 2z = 0 \\ x - y + z = 0. \end{array} \right.$$

Si resolem aquest sistema homogeni obtenim que les solucions són $\{(x, 3x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. D'aquesta manera, $Ker(f) =< (1, 3, 2) >$.

b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida per $f(x, y, z) = (x + y + z, x + z, x + y, x)$ és un monomorfisme, ja que és lineal i en aquest cas el nucli ve donat pels $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tals que

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x + y = 0 \\ x = 0. \end{array} \right.$$

amb solució única $(0, 0, 0)$. És a dir, $Ker(f) = \{0\}$ i f és injectiva.

c) Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial i F, G dos subespais vectorials de E amb $F \cap G = \{0\}$. Hem vist en el capítol anterior que podem construir la suma directa de F i G com a $\mathbb{K}$-espais vectorials i també com a subespais vectorials, denotant *els dos conceptes per $F \oplus G$. Vegem que els dos espais vectorials resultants són isomorfs. Definim,*

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & F \oplus G & \to & F \oplus G \\ & (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$$

Llavors, φ és lineal ja que

$$\begin{aligned} \varphi((x,y)+(x',y')) = & \ \varphi(x+x',y+y') = (x+x')+(y+y') = \\ = & \ (x+y)+(x'+y') = \varphi(x,y)+\varphi(x',y'). \end{aligned}$$

φ és exhaustiva ja que tot element de $F \oplus G$ és de la forma $x+y$ amb $x \in F$ i $y \in G$. Per últim, tanbé és injectiva ja que si $\varphi(x,y)=0$, llavors

$$x+y=0 \implies x=-y \in F \cap G \implies x=y=0 \implies (x,y)=(0,0).$$

Tenim per tant que φ és un isomorfisme.

En el cas d'espais vectorials de dimensió finita, els subespais nucli i imatge d'una aplicació lineal f estan sempre lligats pel següent resultat conegut amb el nom de *Teorema del rang.*

Teorema 13. *Siguin E, F dos $\mathbb{K}$-espais vectorial amb E de dimensió finita n i $f: E \to F$ una aplicació lineal. Aleshores $Ker(f)$ i $Img(f)$ són de dimensió finita i*

$$dimE = dimKer(f) + dimImg(f).$$

Demostració: Sabem que $Ker(f)$ és un subespai vectorial de E i per tant haurà de ser de dimensió finita. Suposem $dim(Ker(f)) = r$ i sigui $u_1, \ldots, u_r$ una base de $Ker(f)$. Completem-la fins a una base de E: $u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n$. Les imatges per f dels k primers vectors són 0 (ja que són vectors del nucli), vegem que les imatges dels altres $n-r$ vectors $f(u_{r+1}), \ldots, f(u_n)$ són una base de $Img(f)$.

- Linealment independents. Sigui $\sum_{i=^r+1}^n a_i \cdot f(u_i) = 0$ una combinació lineal d'ells igual a 0. Llavors,

  $$0 = \sum_{i=r+1}^n a_i \cdot f(u_i) = f\left(\sum_{i=r+1}^n a_i \cdot u_i\right).$$

  Així, $\sum_{i=r+1}^n a_i \cdot u_i \in Ker(f)$ i per tant serà combinació lineal de la base de $ker(f)$:

  $$\sum_{i=r+1}^n a_i \cdot u_i = \sum_{i=1}^r a_i \cdot u_i \implies \sum_{i=1}^r a_i \cdot u_i - \sum_{i=r+1}^n a_i \cdot u_i = 0.$$

  Ara bé, com que $u_1, \ldots, u_n$ és una base de E, són linealment independents i per tant, tots els escalars anteriors han de ser 0. En particular, $a_{r+1} = \ldots = a_n = 0$.

- Generen. Sigui $y \in Img(f)$, existirà un $x \in E$ tal que $y = f(x)$ i aquest x serà combinació lineal de la base $u_1, \ldots, u_n$. Per tant,

$$y = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot f(u_i) = \sum_{i=r+1}^{n} a_i \cdot f(u_i)$$

ja que els r primers verifiquen $f(u_i) = 0$ per ser vectors del nucli de f.

Amb les notacions que hem considerat tenim $dimE = n$, $dimKer(f) = r$ i amb el que hem provat $dimImg(f) = n - r$. Per tant, tenim efectivament que $dimE = dimKer(f) + dimImg(f)$. □

Definició 14. *La dimensió del subespai vetorial imatge s'anomena habitualment* rang *de f, i es denota per $rang(f)$. És a dir: $rang(f) = dimImg(f)$. Notem que aleshores el Teorema del rang queda*

$$dimE = dimKer(f) + rang(f).$$

El Teorema del rang ens permet veure una caracterització senzilla de quan dos espais vectorials de dimensió finita són isomorfs.

Proposició 15. *Dos $\mathbb{K}$-espais vectorials de dimensió finita E i F són isomorfs si i només si $dimE = dimF$*

Demostració: Si E i F són isomorfs existeix un isomorfisme $f : E \to F$. Com que f és bijectiu es verifica $Ker(f) = \{0\}$ i $Img(f) = F$ i, aplicant el Teorema del rang, tenim

$$dim(E) = dimKer(f) + dimImg(f) = 0 + dimF \quad \Longrightarrow \quad dimE = dimF.$$

Recíprocament, si $dimE = dimF = n$ considerem $u_1, \ldots, u_n$ una base de E i $v_1, \ldots, v_n$ una base de F. Donat un $x \in E$ qualsevol s'escriurà de manera única com $x = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot u_i$ i llavors definim l'aplicació $f : E \to F$ donada per

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i.$$

Aquesta f és:

- Lineal, ja que

$$f(x+y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot u_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot u_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) \cdot u_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) \cdot v_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot v_i = f(x) + f(y),$$

i anàlogament es veu que $f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$.

- Exhaustiva, ja que tot $y \in F$ és combinació lineal dels v_i, $y = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i$ i llavors $x = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot u_i$ és clarament una antiimatge.
- Injectiva, ja que si $x = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot u_i$ és tal que $f(x) = 0$ llavors $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i = 0$ i com que els v_i són linealment independents $a_i = 0$ per a tot $i = 1, \ldots, n$. Però llavors $x = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot u_i = 0$. És a dir $Ker(f) = \{0\}$ i f és injectiva.

D'aquesta manera l'aplicació f definida és un isomorfisme i E, F són isomorfs. □

Una versió similar al resultat anterior però referit a quan una aplicació f concreta és un isomorfisme és el següent.

Proposició 16. *Siguin E i F dos $\mathbb{K}$-espais vectorials de dimensió finita i $f : E \to F$ una aplicació lineal. Aleshores f és un isomorfisme si i només si $dimE = dimF$ i $Kerf = \{0\}$.*

Demostració: Si f és un isomorfisme, E i F són isomorfs i per tant $dimE = dimF$. A més a més $Ker(f) = \{0\}$ ja que f és injectiva.

Recíprocament, f és injectiva per ser $Ker(f) = \{0\}$ i, aplicant el Teorema del rang a l'aplicació lineal f, tenim

$$dimF = dimE = dimKer(f) + rang(f) = 0 + dimImg(f).$$

Així, $Img(f)$ és un subespai vectorial de F de la mateixa dimensió i, per tant, $Img(f) = F$, és a dir f és exhaustiva. Per tant, f és un isomorfisme. □

Proposició 17. *Siguin E i F dos $\mathbb{K}$-espais vectorials, $f : E \to F$ una aplicació lineal i $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vectors de E.*

a) Si f és injectiva (monomorfisme) i $u_1, u_2, \ldots, u_n$ són linealment independents, aleshores $f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)$ són linealment independents.

b) Si f és un exhaustiva (epimorfisme) i $u_1, u_2, \ldots, u_n$ generen E, aleshores $f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)$ generen F.

Demostració: a). Sigui $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot f(u_i) = 0$ una combinació lineal igual a zero. Llavors, per ser f lineal tendrem $f(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot u_i) = 0$ i, per ser f injectiva, el nucli és trivial d'on $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot u_i = 0$. Ara, com que els u_i són linealment independents, tots els escalars han de ser 0, és a dir, $a_1 = \ldots = a_n = 0$.

b). Sigui $y \in F$. Per ser f exhaustiva existeix un $x \in E$ tal que $f(x) = y$. Com que els u_i generen E, x serà combinació lineal d'ells i llavors

$$y = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot f(u_i),$$

és a dir, els $f(u_i)$ generen tot F. □

Observació 18. *Notau que la mateixa demostració de l'apartat b) anterior prova que, si* $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *generen* E *i* $f : E \to F$ *és una aplicació lineal qualsevol, llavors* $f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)$ *generen* $Img(f)$*. En el cas de ser* f *exhaustiva,* $Img(f) = F$ *i per tant, en aquest cas,* $f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)$ *generen tot* F*.*

Una altra aplicació del teorema del rang és la següent proposició.

Proposició 19. *Sigui* $f : E \to F$ *una aplicació lineal entre* $\mathbb{K}$*-espais vectorials amb* E *de dimensió finita i* G *un subespai vectorial de* E*. Aleshores es verifica*

$$dim(G) = dim(G \cap Ker(f)) + dim(f(G)).$$

Demostració: Basta considerar $f_{/G} : G \to F$ la restricció de f al subespai G. Clarament aquesta restricció continua sent lineal i el seu nucli ve donat per $G \cap Ker(f)$. Llavors, aplicant-li el teorema del rang obtenim el resultat. □

Proposició 20. (Primer Teorema d'Isomorfia) *Sigui* $f : E \to F$ *una aplicació lineal. Llavors* $E/Ker(f) \cong Img(f)$*. Més concretament, l'aplicació que a cada classe mòdul el nucli de* f*, li fa correspondre la imatge per* f *d'un qualsevol dels seus representants,* $[x] \mapsto f(x)$ *és un isomorfisme d'espais vectorials.*

Demostració: Definim l'aplicació $\varphi : E/Ker(f) \to Img(F)$ donada per $\varphi([x]) = f(x)$ i veim que és un isomorfisme.

i) φ està ben definida. És a dir no depèn del representant elegit. Si $[x] = [y]$, llavors $x \sim_{Ker(f)} y$, és a dir,

$$x - y \in Ker(f) \implies f(x - y) = 0 \implies f(x) - f(y) = 0 \implies f(x) = f(y).$$

ii) φ és lineal, ja que

$$\varphi([x] + [y]) = \varphi([x + y]) = f(x + y) = f(x) + f(y) = \varphi([x]) + \varphi([y]).$$

iii) φ és injectiva ja que si $\varphi([x]) = f(x) = 0$ tenim que $x \in Ker(f)$ i per tant $[x] = [0]$.

iv) φ és exhaustiva perquè tot element de $Img(f)$ és de la forma $f(x)$ amb un $x \in E$ i llavors $[x]$ és una antiimatge. □

Observació 21. *Aquest teorema és cert per espais vectorials de qualsevol dimensió (no necessàriament finita). Notem que en el cas de* $dim(E)$ *finita, podiem haver vist que* $E/Ker(f)$ *i* $Img(f)$ *són isomorfs simplement perquè tenen la mateixa dimensió, ja que*

$$dim(E/Ker(f)) = dim(E) - dim(Ker(f)) = dim(Img(f)$$

on la darrera igualtat és deguda al Teorema del rang.

Exemple 22. *Considerem l'aplicació lineal* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *donada per* $f(x, y) = x-y$. *El nucli de* f *correspon al subespai vectorial* $Ker(f) = \{(x, y) \mid x = y\} = \langle(1, 1)\rangle$. *Aleshores el conjunt quocient* $\mathbb{R}^2/Ker(f)$ *està format per totes les rectes paral.leles al vector* $v = (1, 1)$ *(paral.leles a la diagonal de* $\mathbb{R}^2$*). Notem que* f *és exhaustiva, és a dir,* $Img(f) = \mathbb{R}$. *L'isomorfisme* φ *donat per la Proposició 20 és,*

$$\varphi([(x, y)]) = f(x, y) = x - y = f([(x - y, 0)]).$$

Cada classe d'equivalència $[(x, y)]$ *correspon a una recta paral.lela a* $(1, 1)$ *que talla a l'eix de les* $x's$ *en el punt* $(x - y, 0)$. *Així,* φ *fa correspondre a cada recta de* $\mathbb{R}^2/Ker(f)$ *la seva intersecció amb l'eix de les* $x's$.

Proposició 23. Descomposició canònica d'una aplicació lineal *Sigui* $f : E \to F$ *una aplicació lineal. Llavors* f *es pot posar com a composició de tres aplicacions lineals, una exhaustiva, una bijectiva (isomorfisme) i una injectiva, segons el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} E & \to^{f} & F \\ \downarrow^{\pi} & & \uparrow_{i} \\ E/Ker(f) & \to^{\varphi} & Img(f) \end{array}$$

on π *denota la projecció,* i *la inclusió i* φ *l'isomorfisme donat pel primer teorema d'isomorfia. És a dir,* $f = i \circ \varphi \circ \pi$.

Demostració: Efectivament tenim que per a tot $x \in E$,

$$i \circ \varphi \circ \pi(x) = i \circ \varphi([x]) = i(f(x)) = f(x).$$

$\square$

Del primer teorema d'isomorfia en poden deduir fàcilment l'anomenat segon teorem d'isomorfia.

Proposició 24. (Segon Teorems d'isomorfia) *Sigui* E *un* $\mathbb{K}$*-espai vectorial i* F, G *subespais vectorials de* E. *Llavors es cumpleix,*

$$(F + G)/F \;\cong\; G/(F \cap G).$$

Demostració: Definim l'aplicació $f : G \to (F + G)/F$ donada per

$$f(y) = [y] = [0 + y] \in (F + G)/F \qquad \text{per a tot} \quad y \in G.$$

És clar que f és una aplicació lineal. Vegem que també és exhaustiva. Donats $x \in F, y \in G$ tenim que y és una antiimatge de $[x + y]$, ja que

$$[x + y] = [x] + [y] = [0] + [y] = [y] = f(y).$$

A més a més, el nucli d'aquesta aplicació és

$$Ker(f) = \{y \in G \mid f(y) = [y] = [0]\} = \{y \in G \mid y \in F\} = F \cap G.$$

Aleshores, aplicant el primer teorema d'isomorfia a l'aplicació f tenim el isomorfisme desitjat. $\square$

4.1 Matriu associada a una aplicació lineal.

Començam aquesta secció amb un resultat que ens assegura que tota aplicació lineal $f : E \to F$ queda totalment determinada si coneixem la imatge dels vectors d'una base de E i que aquesta pot venir donada per n vectors quassevol (diferents o no) de F.

Proposició 25. *Siguin E i F dos $\mathbb{K}$-espais vectorials, E de dimensió finita,*[1] *$\{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de E i $\{v_1, \ldots, v_n\}$ n vectors qualssevol de F. Aleshores existeix una única aplicació lineal $f : E \to F$ tal que*

$$f(u_i) = v_i \qquad \text{per a} \quad i = 1, \ldots, n.$$

A més a més, aquesta aplicació f verifica

i) f és monomorfisme si i només si $v_1, \ldots, v_n$ són linealment independents.

ii) f és epimorfisme si i només si $v_1, \ldots, v_n$ generen F.

iii) f és isomorfisme si i només si $v_1, \ldots, v_n$ són base de F.

Demostració: Per a tot $x \in E$ tendrem $x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot u_i$ i llavors, com que tota aplicació lineal transforma una combinació lineal en la combinació lineal de les imatges, l'aplicació que cercam ha de verificar per força

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot u_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot v_i.$$

Així l'única possible és aquesta i una demostració idèntica a la feta a la Proposició 15 prova que aquesta aplicació així definida és efectivament lineal. A més a més

i) si f és monomorfisme aleshores $v_1, \ldots, v_n$ són linealment independents (Proposició 17-a). Recíprocament, sigui $x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot u_i \in Ker(f)$, llavors

$$0 = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot u_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot v_i$$

i com que els v_i són linealment independents ha de ser $a_i = 0$ per a tot $i = 1, \ldots, n$. És a dir, $x = 0$.

ii) si f és epimorfisme aleshores $v_1, \ldots, v_n$ generen F (Proposició 17-b). Recíprocament, sigui $y \in F$ qualsevol, llavors existeixen escalars $a_1, \ldots, a_n$ tals que

$$y = \sum_{i=1}^n a_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^n a_i \cdot f(u_i) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot u_i\right)$$

d'on y és imatge d'un vector de E i per tant, f és exhaustiva.

iii) Evident a partir de *i*) i *ii*). □

[1] El resultat és cert també per dimensions infinites. Aleshores si $\{u_i \mid i \in I\}$ és una base de E i $\{v_i \mid i \in I\}$ vectors qualssevol de F, existeix una única aplcació lineal tal que $f(u_i) = v_i$ per a tot $i \in I$.

Definició 26. *(Matriu associada a una aplicació lineal)*

Siguin E, F $\mathbb{K}$-espais vectorials de dimensió finita i $f : E \to F$ lineal. Siguin $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base ordenada de E i $B' = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ una base ordenada de F. Aleshores

$f(u_1) \in F \Rightarrow f(u_1) = \sum_{i=1}^{m} a_{i1} \cdot v_i = a_{11} \cdot v_1 + a_{21} \cdot v_2 + \ldots + a_{m1} \cdot v_m$

$f(u_2) \in F \Rightarrow f(u_2) = \sum_{i=1}^{m} a_{i2} \cdot v_i = a_{12} \cdot v_1 + a_{22} \cdot v_2 + \ldots + a_{m2} \cdot v_m$

$\vdots$

$f(u_j) =\in F \Rightarrow f(u_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot v_i = a_{1j} \cdot v_1 + a_{2j} \cdot v_2 + \ldots + a_{mj} \cdot v_m$

$\vdots$

$f(u_n) \in F \Rightarrow f(u_n) = \sum_{i=1}^{m} a_{in} \cdot v_i = a_{1n} \cdot v_1 + a_{2n} \cdot v_2 + \ldots + a_{mn} \cdot v_m.$

S'anomena matriu associada a f respecte de les bases donades B i B', la matriu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

on els elements de la columna j són les coordenades de $f(u_j)$, $j = 1, \ldots, n$, respecte de la base $B' = \{v_1, \ldots, v_m\}$ de F.

En els casos d'un endomorfisme $f : E \to E$, la matriu de f respecte de les bases B i B s'anomena simplement matriu de f respecte de la base B.

Quan en una aplicació lineal volguem explicitar quines són les bases considerades a cada espai vectorial ho escriurem per $f : E_B \to F_{B'}$ o també $f : E_{\{u_i\}} \to F_{\{v_i\}}$. Així, la matriu associada a $f : E \to F$ respecte de les bases B i B' l'escriurem habitualment com $A = M(f : E_B \to F_{B'})$ indicant per subíndexos quines són les bases considerades a cada espai vectorial.

Fixades unes bases de E i F, la matriu associada a una aplicació lineal, respecte d'aquestes bases, és l'eina amb que, molt sovint, estudiam aquesta aplicació lineal. Notem per exemple que se satisfà

$$rang(f) = dimImg(f) = dim\left(\langle f(e_1), \ldots, f(e_n)\rangle\right) = rang(A).$$

A més a més, aquesta matriu ens permet calcular les coordenades de la imatge d'un vector qualsevol, de la següent manera.

Proposició 27. *(Equació matricial d'una aplicació lineal)*

Siguin E, F $\mathbb{K}$-espais vectorials de dimensió finita i $f : E \to F$ lineal. Siguin $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base ordenada de E i $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ una base ordenada de F.

A tot $x \in E, x = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot u_j = x_1 \cdot u_1 + x_2 \cdot u_2 + \ldots + x_n \cdot u_n$, li associam la matriu columna

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

formada per les coordenades de x respecte de la base $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

Al vector $y = f(x) \in F, y = \sum_{i=1}^{m} y_i \cdot v_i = y_1 \cdot v_1 + y_2 \cdot v_2 + \ldots + y_m \cdot v_m$, li associam la matriu columna

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

formada per les coordenades de y respecte de la base $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$.

Si A és la matriu associada a f respecte de les bases donades, aleshores $Y = AX$. En forma desenvolupada:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Demostració: Sabem que si $x = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot u_j$ llavors

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot u_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot f(u_j)$$

i com que les coordenades de cada $f(u_j)$ en la base v_i venen donades per la columna j de A, tenim,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot v_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) \cdot v_i.$$

Això ens diu que les coordenades de $y = f(x)$ en la base v_i són.

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad \text{per a tot} \quad i = 1, \ldots, n$$

com voliem demostrar. $\square$

Exemple 28. *Sigui* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definida per* $f(x,y,z) = (x+y, y-z)$. *Clarament* f *és lineal, volem trobar la matriu associada a* f *respecte de les bases canòniques de* $\mathbb{R}^3$ *i* $\mathbb{R}^2$ *respectivament. Calculam*

$$f(e_1) = f(1,0,0) = (1,0); \quad f(e_2) = f(0,1,0) = (1,1); \quad f(e_3) = f(0,0,1) = (0,-1).$$

Llavors la matriu cercada és

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Notem que llavors

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y-z \end{pmatrix}.$$

Observació 29. *Tota matriu* $A_{m\times n}$ *es pot considerar com a la matriu associada a una aplicació lineal* $f : E \to F$ *(on* $dimE = n, dimF = m$*) respecte d'unes bases donades. Si no deim el contrari, quan diguem que* $A_{m\times n}$ *és la matriu associada a* f*, ens referirem que ho serà respecte de les bases canòniques de* E *i* F *respectivament.*

Exemple 30. *Sabem que la matriu*

$$A_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

és la matriu associada a l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *(respecte de les bases canòniques). Llavors per saber de quina aplicació lineal es tracta basta fer* $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (y_1,y_2,y_3)$ *on*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_4 \end{pmatrix}.$$

Així, f *és l'aplicació lineal definida per*

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4, x_2 + x_3, x_1 + x_4).$$

Exemple 31. 1.- *Sigui* E *un* $\mathbb{K}$*-espai vectorial de dimensió* n *i sigui* $B = \{u_i\}_{i=1}^n$ *una base ordenada de* E*. Llavors la matriu de l'aplicació lineal identitat (*$Id : E \to E$*) respecte de la base* B *(en els dos llocs), és la matriu identitat* I_n *(cada columna* j *correspon a escriure el vector* $Id(u_j) = u_j$ *com a combinació lineal de* $u_1, \ldots, u_n$*). És a dir*

$$M(Id : E_B \to E_B) = I_n \qquad \text{per a qualsevol base } B \text{ de } E.$$

2.- *Suposem en canvi que consideram l'aplicació lineal identitat, $Id : E \to E$, i volem calcular la seva matriu associada respecte de les bases $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ i $B' = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Llavors cada columna correspondrà a escriure el vector $Id(u_j) = u_j$ com a combinació lineal de la base $v_1, \ldots, v_n$. Però aquesta matriu és exactament la matriu que haviem anomenat* matriu del canvi de base de *B' a B. És a dir*

$$M(Id : E_B \to E_{B'}) = \textit{matriu del canvi de base de } B' \textit{ a } B.$$

3.- *Suposem ara $f : E \to F$ un isomorfisme. Llavors, si consideram una base qualsevol $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de E i la base $f(B) = \{f(u_1), \ldots, f(u_n)\}$ de F (que sabem que és base per ser f un isomorfisme), la matriu associada a f respecte d'aquestes bases és la matriu identitat I_n. És a dir,*

$$M(f : E_B \to F_{f(B)}) = I_n \qquad \textit{per a qualsevol base } B \textit{ de } E.$$

Exemple 32. *Sigui $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ la base de $\mathbb{R}^3$ donada per $u_1 = (1,0,0), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,1,1)$. Si B és la base canònica, trobau la matriu associada a l'aplicació identitat $Id : \mathbb{R}^3_{B'} \to \mathbb{R}^3_B$. Calculau també les coordenades del vector $u = (-1,-2,7)$ respecte de la base B'.*

Per calcular la matriu només hem d'escriure cada element u_j com a combinació lineal de la base canònica. És a dir, la matriu cercada és

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que correspon a la matriu del canvi de base de B a B'. Per trobar les coordenades del vector $u = (-1,-2,7)$ en la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ recordem que

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

d'on

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

i així

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Proposició 33. *Siguin E, F i G $\mathbb{K}$-espais vectorials de dimensió finita i siguin $f : E \to F$ i $g : F \to G$ aplicacions lineals. Siguin $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}, \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ i $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ bases ordenades de E, F i G respectivament.*

$$\underbrace{E_{\{e_i\}} \xrightarrow{f} F_{\{u_i\}} \xrightarrow{g} G_{\{v_i\}}}_{g \circ f}$$

Siguin A, B, C les matrius de f, g i $g \circ f$ respecte d'aquestes bases. Aleshores, $C = BA$, és a dir:

$$M(g \circ f : E_{\{e_i\}} \to G_{\{v_i\}}) = M(g : F_{\{u_i\}} \to G_{\{v_i\}})\ M(f : E_{\{e_i\}} \to F_{\{u_i\}}).$$

Demostració: Si $A = (a_{ij})$ és la matriu de f en les bases $\{e_j\}, \{u_i\}$ i $B = (b_{jk})$ és la de g en les bases $\{u_i\}, \{v_k\}$, llavors:

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot v_i, \qquad \text{i} \qquad g(u_i) = \sum_{k=1}^{s} b_{ki} \cdot v_k.$$

Per tant,

$$(g \circ f)(e_j) = g(f(e_j)) = g\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot u_i\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot g(u_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot \left(\sum_{k=1}^{s} b_{ki} \cdot v_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij}\right) \cdot v_k = \sum_{k=1}^{s} c_{kj} \cdot v_k.$$

És a dir, cada element c_{kj} de la matriu C coincideix amb l'expressió $\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij}$ que no és més que la fila k de B multiplicada per la columna j de A. $\square$

Aquest darrer resultat demostra en particular que el producte de matrius és associatiu (es correspon amb la composició d'aplicacions lineals i aquesta sabem que és associativa). A més a més, s'en deduiex el següent corol·lari.

Corol·lari 34. *Siguin E, F $\mathbb{K}$-espais vectorials isomorfs de dimensió finita i siguin $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}, \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ bases ordenades de E i F respectivament. Sigui $f : E \to F$ un isomorfisme i siguin A i B les matrius associades a f i f^{-1} respecte d'aquestes bases respectivament. Aleshores, A i B són invertibles i $B = A^{-1}$. És a dir,*

$$M(f^{-1} : F_{\{v_i\}} \to F_{\{e_i\}}) = M(f : E_{\{e_i\}} \to F_{\{v_i\}})^{-1}$$

Demostració: Immediat ja que per la proposició anterior

$$M(f : E_{\{e_i\}} \to F_{\{v_i\}})\ M(f^{-1} : F_{\{v_i\}} \to E_{\{e_i\}}) = M(Id : F_{\{v_i\}} \to F_{\{v_i\}}) = I_n$$

i

$$M(f^{-1} : F_{\{v_i\}} \to E_{\{e_i\}})\ M(f : E_{\{e_i\}} \to F_{\{v_i\}}) = M(Id : E_{\{e_i\}} \to E_{\{e_i\}}) = I_n.$$

$\square$

En particular, si en el Corol·lari anterior prenem $E = F$ i $\{e_i\}, \{v_i\}$ bases de E, obtenim que la matriu del canvi de base de $\{e_i\}$ a $\{v_i\}$ i la matriu del canvi de base de $\{v_i\}$ a $\{e_i\}$ són inverses l'una de l'altra (cosa que ja haviem demostrat en el tema anterior).

Proposició 35. *Siguin E, F $\mathbb{K}$-espais vectorials de dimensió finita, n i m respectivament. Llavors l'espai vectorial de les aplicaciuons lineals de E en F, $\mathcal{L}(E, F)$, és de dimensió finita $m \times n$.*

Demostració: Fixem $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base de E i $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ una base de F. Donada una $f : E \to F$ lineal, definim la següent aplicació $\varphi : \mathcal{L}(E, F) \to M_{m\times n}(\mathbb{K})$ donada per

$$\varphi(f) = M(f : E_{\{u_i\}} \to F_{\{v_i\}}).$$

Clarament φ és una aplicació lineal ja que, fixades les bases, (vegeu-ho com a exercici)

$$M(f + g : E_{\{u_i\}} \to F_{\{v_i\}}) = M(f : E_{\{u_i\}} \to F_{\{v_i\}}) + M(g : E_{\{u_i\}} \to F_{\{v_i\}})$$

i

$$M(\alpha \cdot f : E_{\{u_i\}} \to F_{\{v_i\}}) = \alpha \cdot M(f : E_{\{u_i\}} \to F_{\{v_i\}})$$

(vegeu-ho com a exercici). A més a més, és un isomorfisme ja que

- φ és injectiva. Si $\varphi(f) = 0$ llavors $M(f : E_{\{u_i\}} \to F_{\{v_i\}}) = 0$ i per tant $f(u_j) = 0$ per a tot $j = 1, \ldots, n$. És a dir f és l'aplicació lineal 0 i $Ker(\varphi) = \{0\}$.
- φ és exhaustiva. Ja hem vist que qualsevol matriu $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ és la matriu associada a una aplicació lineal respecte de les bases fixades.

Hem trobat un isomorfisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ i $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ i per tant els dos espais vectorials tenen la mateixa dimensió $m \times n$. □

Observació 36. *L'isomorfisme definit en la demostració anterior té un invers $\varphi^{-1} : M_{m\times n}(\mathbb{K}) \to \mathcal{L}(E, F)$ i sabem que també és isomorfisme. Per tant, transforma bases en bases. Així, la imatge de la base canònica de $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ és una base de $\mathcal{L}(E, F)$:*

$$\varphi^{-1}(e_{ij}) = f_{ij}.$$

Notau que cada $f_{ij} : E \to F$ és l'aplicació lineal definida per

$$f_{ij}(u_j) = v_i, \quad i \quad f_{ij}(u_k) = 0 \quad \text{per a tot } k \neq j$$

ja que la seva matriu respecte de les bases $\{u_i\}$ i $\{v_i\}$ ha de ser e_{ij}.

Proposició 37. *(Canvi de bases en aplicacions lineals)*
Siguin E, F $\mathbb{K}$-espais vectorials de dimensió finita, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base de E i $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ una base de F. Sigui $f : E \to F$ lineal i A la matriu associada a f respecte d'aquestes bases. Siguin $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ i $\{v'_1, v'_2, \ldots, v'_m\}$ bases E i de F respectivament. Llavors, si B és la matriu associada a f respecte d'aquestes noves bases, es verifica que

$$B = Q^{-1}AP$$

on P és la matriu del canvi de base de $\{e_i\}$ a $\{e'_i\}$ i Q és la matriu del canvi de base de $\{v_j\}$ a $\{v'_j\}$.

Demostració: Tenim el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ E_{\{e_i\}} & \longrightarrow & F_{\{v_j\}} \\ & & \\ Id \uparrow & & \downarrow Id \\ & & \\ E_{\{e'_i\}} & \longrightarrow & F_{\{v'_j\}} \\ & f & \end{array}$$

que simplement expressa el fet que $f = Id \circ f \circ Id$. Però detallant les bases tenim:

$$M(f : E_{\{e'_i\}} \to F_{\{v'_j\}}) =$$

$$= M(Id : F_{\{v_j\}} \to F_{\{v'_j\}})\ M(f : E_{\{e_i\}} \to F_{\{v_j\}})\ M(Id : E_{\{e'_i\}} \to E_{\{e_i\}}).$$

Ara bé, sabem que la matriu $M(Id : E_{\{e'_i\}} \to E_{\{e_i\}})$ correspon a la matriu del canvi de base de $\{e_i\}$ a $\{e'_i\}$ (que hem anomenat P) i la matriu $M(Id : F_{\{v_j\}} \to F_{\{v'_j\}})$ correspon a la matriu del canvi de base de $\{v'_j\}$ a $\{v_j\}$ (o equivalentment, a la inversa de la matriu del canvi de base de $\{v_j\}$ a $\{v'_j\}$, que hem anomenat Q). D'aquesta manera la igualtat de matrius anterior s'escriu

$$B = Q^{-1}AP.$$

□

Observació 38. *Notem que en el cas $E = F$, si les bases $\{e_i\}$, $\{v_i\}$ coincideixen i les bases $\{e'_i\}$, $\{v'_i\}$ també coincideixen, llavors l'expressió anterior queda:*

$$B = P^{-1}AP.$$

Exemple 39. *Sigui $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'aplicació lineal definida per*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_3, x_1 + x_3, x_2 - 2x_3, x_4)$$

- *Volem calcular la matriu associada a f respecte de la base canònica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.*
  $f(1,0,0,0) = (0,1,0,0)$
  $f(0,1,0,0) = (0,0,1,0)$
  $f(0,0,1,0) = (2,1,-2,0)$
  $f(0,0,0,1) = (0,0,0,1)$
  d'on la matriu que cercam és

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- *Trobem ara la matriu associada a f respecte de la base $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ on*

$$u_1 = e_1, \quad u_2 = e_1 + e_2, \quad u_3 = e_1 + e_2 + e_3, \quad u_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4.$$

  Si deim B a aquesta matriu aleshores

$$B = P^{-1}AP$$

  on P és la matriu del canvi de base de $\{e_i\}$ a $\{u_i\}$, és a dir

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Si calculam P^{-1} obtenim

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  i aleshores

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 40. *Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ i*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

la matriu associada a f respecte de les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$. Si consideram les bases $\{u_1, u_2, u_3\}$ i $\{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ respectivament donades per

$$u_1 = e_1 + e_2 + e_3 \quad u_2 = e_2 + 2e_3, \quad u_3 = 2e_2 + e_3$$

i

$$v_1 = 2e_1 + e_2, \quad v_2 = e_1,$$

la matriu associada a f respecte d'aquestes noves bases serà

$$B = Q^{-1}AP$$

on P és la matriu del canvi de base de $\{e_i\}$ a $\{u_i\}$ i Q és la matriu del canvi de base de $\{e_i\}$ a $\{v_i\}$. Per tant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad i \qquad Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d'on

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad i \qquad B = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definició 41. *Sigui E un $\mathbb{K}$- espai vectorial de dimensió n i $f : E \to E$ un endomorfisme. Es defineix determinant de l'endomorfisme f com $\det f = \mid A \mid$ on A és la matriu associada a f respecte d'una base de E.*

Notem que si A' és la matriu associada a f respecte d'una altra base, tenim que $A' = P^{-1}AP$ d'on

$$\mid A' \mid = \mid P^{-1} \mid \mid A \mid \mid P \mid = \mid P \mid^{-1} \mid A \mid \mid P \mid = \mid A \mid,$$

és a dir, el determinant d'un endomorfisme no depèn de la base utilitzada.