

1. Matrices

1.1. Definiciones generales

¿Qué es una matriz?

Definición de matriz

Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cuerpo conmutativo y $m, n \geq 1$ enteros. Una matriz $m \times n$ sobre \mathbb{K} (o de orden $m \times n$ sobre \mathbb{K}) es una tabla formada por elementos de \mathbb{K} dispuestos en m filas y n columnas de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ amb } a_{ij} \in \mathbb{K}; i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

¿Qué es una matriz?

Coefficientes de la matriz

Cada a_{ij} se denomina término, coeficiente o entrada de la matriz A . El primer subíndice, i , indica el número de la fila y el segundo, j , el de la columna que ocupa el término en la matriz.

¿Dónde están las matrices?

Conjunto de matrices

Se denotará por $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ el conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ sobre \mathbb{K} . Una matriz cualquiera de $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ se denotará indistintamente por A , por $(a_{ij})_{m \times n}$ o simplemente por (a_{ij}) .

Matrices cuadradas

Cuando $m = n$, el conjunto de todas las matrices de orden $M_{n \times n}$ se denota simplemente por $M_n(\mathbb{K})$ (las matrices que se clasifican como cuadradas se dicen que son de orden n en vez de $n \times n$ como veremos más adelante).

¿Cuándo son dos matrices iguales?

Igualdad de matrices

Dadas dos matrices del mismo orden $m \times n$, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ y $B = (b_{ij})_{m \times n}$ son iguales si:

$$a_{ij} = b_{ij} \forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n.$$

1.2. Tipos de matrices

Tipos de matrices

Matriz fila

Se denomina matriz fila a toda matriz que consta de una única fila:

$$A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \in M_{1 \times n}(\mathbb{K})$$

Tipos de matrices

Matriz columna

Se denomina matriz columna a toda matriz que consta de una única columna:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in M_{m \times 1}(\mathbb{K})$$

Tipos de matrices

Matriz cuadrada

Se denomina matriz cuadrada de orden n a toda matriz que consta de n filas y n columnas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

Matrices cuadradas

Dentro del ámbito de las matrices cuadradas caben las siguientes definiciones y tipos particulares de matrices:

Diagonal principal

Se denomina diagonal (principal) de una matriz cuadrada A a los elementos a_{ii} con $i = 1, \dots, n$.

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \mathbf{a_{nn}} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

Matrices cuadradas

Matriz diagonal

Una matriz diagonal es aquella en la cual $a_{ij} = 0$ siempre que $i \neq j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

Matrices cuadradas

Matriz escalar

Una matriz escalar es una matriz diagonal en la cual $a_{ii} = \lambda, \forall i = 1, \dots, n$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

Matrices cuadradas

Matriz identidad

Se denomina matriz unidad o matriz identidad de orden n , y se denota como I_n a la matriz escalar en la cual todos los elementos de la diagonal son unos.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

Matrices cuadradas

Matriz triangular superior

Se denomina matriz triangular superior a toda matriz en la cual $a_{ij} = 0$, $\forall i > j$. Es decir, todos los elementos situados por debajo de la diagonal principal son nulos.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

Matrices cuadradas

Matriz triangular inferior

Se denomina matriz triangular inferior a toda matriz en la cual $a_{ij} = 0$, $\forall i < j$. Es decir, todos los elementos situados por encima de la diagonal principal son nulos.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

Cas general

Para matrices en general (no necesariamente cuadradas) se mantendrá la denominación de matriz triangular superior cuando $a_{ij} = 0 \forall i > j$. Más adelante se estudiarán en profundidad unos tipos especiales de estas matrices (las matrices escalonadas) que tendrán una importancia determinante en nuestros estudios.

Caso general

Las matrices triangulares superiores, si no son cuadradas, se corresponden

con los siguientes casos dependiendo de si $m < n$ o $n < m$ respectivamente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2m} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices cuadradas

Matriz nula

Se denota como O a la matriz nula, matriz con todos sus coeficientes nulos.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

1.3. Operaciones con matrices

Operaciones con matrices

Suma de matrices

La suma de dos matrices A y B solo es posible si ambas son del mismo orden $m \times n$, entonces se suman término a término. Es decir, dadas $A = (a_{ij})_{m \times n}$ y $B = (b_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, se define la suma de A y B como la matriz:

$$C = (c_{ij})_{m \times n} \text{ on } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \\ \forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n$$

Operaciones con matrices

Producto por un escalar

Sea $a \in \mathbb{K}$ y $A = (a_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, se define el producto aA como una nueva matriz de orden $m \times n$ dada por:

$$aA = (a \cdot a_{ij})_{m \times n}$$

Operaciones con matrices

Producto de matrices

Para poder realizar el producto de una matriz A por una matriz B , el número de columnas de A ha de coincidir con el número de filas de B , entonces cada entrada ij de la matriz producto se obtiene multiplicando la fila i de A por la columna j de B .

Operaciones con matrices

Concretamente, si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ y $B \in M_{n \times p}(\mathbb{K})$, el producto AB es una matriz $C \in M_{m \times p}(\mathbb{K})$ definida como:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3j} & \cdots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = (c_{ij})$$

con $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$.

Nótese que $A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$.

1.4. Propiedades

Propiedades características

Siempre que tengan sentido las operaciones indicadas (es decir, las matrices son de los órdenes adecuados para poder realizarlas) se satisfacen las siguientes propiedades:

Propiedad conmutativa

$$A + B = B + A$$

Propiedad asociativa de la suma

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Propiedades características

Elemento neutro de la suma o elemento nulo

$$A + O = O + A = A$$

Matriz opuesta

$\forall A = (a_{ij})_{m \times n}$ existe $-A = (-a_{ij})_{m \times n}$ tal que

$$A + (-A) = (-A) + A = O$$

Propiedades características

Propiedad asociativa del producto

$$(AB)C = A(BC)$$

Propiedad distributiva del producto respecto de la suma

$$A(B + C) = AB + AC$$

Propiedades características

Elemento neutro del producto o elemento unidad

$$AI_n = A$$

$$I_n B = B$$

Propiedad distributiva del producto por escalares respecto de la suma

$$a(B + C) = aB + aC, \quad a \in \mathbb{K}$$

Propiedades características

Elemento neutro del producto por escalar

$$1A = A$$

Propiedad distributiva del producto por matrices respecto de la suma de escalares

$$(a + b)C = aC + bC, \quad a, b \in \mathbb{K}$$

Propiedades características

Propiedad asociativa del producto de escalares por una matriz

$$(ab)C = a(bC), \quad a, b \in \mathbb{K}$$

Propiedad asociativa del producto de un escalar por dos matrices

$$a(BC) = (aB)C, \quad a \in \mathbb{K}$$

Ejemplos

Ejemplo

$$(AB)C = A(BC)$$

- Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n \times p}(\mathbb{K})$ y $C \in M_{p \times q}(\mathbb{K})$.
- Se puede realizar el producto AB , el resultado será una matriz $m \times p$ que se podrá multiplicar por C y el producto $(AB)C$ será una matriz $m \times q$.
- Análogamente, se puede realizar el producto BC que dará una matriz $n \times q$ y se puede realizar también el producto $A(BC)$ que dará una matriz $m \times q$.
- Entonces la propiedad se puede expresar como:

$$(AB)C = A(BC)$$

Ejemplos

Ejercicios

Se consideran las matrices con coeficientes en \mathbb{R} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Probar que:

$$(AB)C = A(BC)$$

Ejemplos

Solución

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplos

Ejemplo

$$AI_n = A$$

$$I_n B = B$$

- Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ y $B \in M_{n \times p}(\mathbb{K})$.
- Se puede realizar el producto AI_n y el resultado será una matriz $m \times n$.
- Análogamente, se puede realizar el producto $I_n B$ y el resultado será una matriz $n \times p$.
- Además se puede comprobar que se verifica que:

$$AI_n = A \text{ i } I_n B = B$$

Ejemplos

Ejercicios

Considérense las matrices con coeficientes en \mathbb{R} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Probar que:

$$AI_3 = A$$

$$I_3 B = B$$

Ejemplos

Solución

$$AI_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$
$$I_3B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Ejemplos

Nota importante

Nótese que, en particular, para matrices cuadradas $A \in M_n(\mathbb{K})$, I_n es un elemento neutro del producto, es decir:

$$AI_n = I_nA = A$$

para toda matriz cuadrada A de orden n .

Excepciones

En general, *no se cumplen* las siguientes propiedades:

Propiedad conmutativa

La multiplicación de matrices no es conmutativa.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = BA$$

Excepciones

En general, *no se cumplen* las siguientes propiedades:

Ley de simplificación

No se cumple la ley de simplificación en un producto.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

satisfacen:

$$AB = AC$$

pero en cambio $B \neq C$.

Excepciones

En general, *no se cumplen* las siguientes propiedades:

Divisores de cero

Existen divisores de cero, es decir:

$$AB = 0 \not\Rightarrow A = 0 \text{ o } B = 0.$$

Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A, B \in M_2(\mathbb{R})$$

pero en cambio:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices diagonales

Proposición

Sean A, B dos matrices cuadradas de orden n .

- Si A y B son matrices diagonales con diagonales $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ i $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{nn}$ respectivamente, entonces A y B conmutan y la matriz producto $AB = BA$ también es diagonal con diagonal $a_{11}b_{11}, a_{22}b_{22}, \dots, a_{nn}b_{nn}$.
- Si A y B son matrices triangulares superiores (inferiores) entonces el producto AB es también una matriz triangular superior (inferior).

Matrices transpuestas

Transpuesta de una matriz

Sea $A = (a_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Se denomina transpuesta de la matriz A y se denota como A^t a la matriz $A^t = (a_{ji})_{n \times m} \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$.

Es decir, la matrix obtenida a partir de A intercambiando filas por columnas.

Por ejemplo, la transpuesta de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ es $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Matrices transpuestas

Entre las propiedades de las matrices transpuestas destacan las siguientes:

Idempotencia

Para toda matriz A :

$$(A^t)^t = A$$

Matrices transpuestas

Entre las propiedades de las matrices transpuestas destacan las siguientes:

Transpuesta de una suma

Si A y B son matrices del mismo orden $m \times n$, entonces $(A + B)^t = A^t + B^t$. Es decir, la transpuesta de una suma de matrices es la matriz obtenida por la suma de sus respectivas transpuestas. Además, el resultado se puede generalizar a r sumandos y se tiene que si A_i son todas del mismo orden, entonces:

$$\left(\sum_{i=1}^r A_i\right)^t = \sum_{i=1}^r A_i^t$$

Matrices transpuestas

Entre las propiedades de las matrices transpuestas destacan las siguientes:

Transpuesta de una suma

Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ y $B \in M_{n \times p}(\mathbb{K})$, entonces la transpuesta del producto de A por B es el producto de las transpuestas pero con el orden cambiado, es decir:

$$(AB)^t = B^t A^t \in M_{p \times m}(\mathbb{K})$$

Matrices cuadradas

Para acabar esta sección volvemos a las matrices cuadradas con unas cuantas definiciones adicionales. Primero nótese que la transposición, en el caso de matrices cuadradas, es una operación interna, es decir:

Transposición como operación interna

La transpuesta de una matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{K})$ es otra matriz cuadrada $A^t \in M(\mathbb{K})$.

Entonces tienen sentido las siguientes definiciones:

Matrices cuadradas

Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ una matriz cuadrada. Dícese que:

Matriz simétrica

A es simétrica si coincide con su transpuesta, esto causa la simetría de la matriz respecto a su diagonal.

$$A \text{ simetrica} \iff A = A^t \iff a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$$

Matrices cuadradas

Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ una matriz cuadrada. Dícese que:

Matriz antisimétrica

A es antisimétrica si su transpuesta coincide con su opuesta, lo cual exige que la diagonal esté compuesta únicamente por ceros y que los elementos simétricos sean opuestos entre sí.

$$A \text{ antisimetrica} \iff A^t = -A \iff a_{ij} = -a_{ji} \forall i, j$$

Matrices cuadradas

Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ una matriz cuadrada. Dícese que:

Matriz regular

A es invertible o regular si existe otra matriz cuadrada $A^{-1} \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Cuando existe esta matriz A^{-1} es siempre única, con la propiedad mencionada y se llama matriz inversa de A .

Nótese que no basta con cumplir solo $AA^{-1} = I_n$ (o solo $A^{-1}A = I_n$) ya que el producto no es en general conmutativo. Por tanto, la matriz inversa ha de verificar que los resultados de los dos productos son la matriz identidad.

Matrices cuadradas

Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ una matriz cuadrada. Dícese que:

Matriz singular

A es singular si no tiene inversa, es decir, cuando no es regular.

Matriz ortogonal

A es ortogonal si es regular y además su inversa coincide con su transpuesta. Dicho de otra manera:

$$A \text{ ortogonal} \iff AA^t = A^tA = I_n$$

Matrices cuadradas

Se verifica el siguiente resultado respecto a las matrices inversas:

Proposición

Sea $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Entonces si A y B son invertibles, también lo es su producto:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

En resumen

Las operaciones anteriores conforman el llamado álgebra matricial. Este nombre es adecuado ya que gracias a ellas es posible realizar la manipulación habitual de ecuaciones con matrices igual que se hace con números reales siempre y cuando se tenga precaución con aquellas propiedades que no se verifican, vistas ellas anteriormente.

Por ejemplo, en una ecuación con matrices todo lo que esté sumando pasa al otro término restando y viceversa.

De esta manera se pueden resolver ecuaciones del tipo: encuentre una matriz X tal que $A + 2X = 3B$ donde A y B son matrices conocidas. La solución será $X = 1/2(3B - A)$.

En resumen

Nótese sin embargo que las ecuaciones de la forma $AX = B$ no se pueden manipular de la forma habitual a no ser que la matriz A sea cuadrada e invertible. Entonces se tendrá $X = A^{-1}B$. Nótese que valdría multiplicar a la izquierda por A^{-1} pero no valdría hacerlo a la derecha. Si la ecuación que se tiene es de la forma $XA = B$ entonces, si A es invertible, será $X = BA^{-1}$, multiplicando a la derecha por A^{-1} .

En resumen

Se puede calcular también las potencias n -ésimas de las matrices de la forma habitual $A^n = A \cdot A \cdot \dots \cdot A$ (n veces). Nótese que el binomio de Newton para calcular $(A + B)^n$ solo se verifica en los casos en que A y B conmuten. Por ejemplo:

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

Si A y B conmutan, entonces $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Pasa exactamente lo mismo con las potencias sucesivas.

2. Operaciones elementales

2.1. Matrices escalonadas

Matrices escalonadas

Vamos a introducir ahora un tipo especial de matrices triangulares superiores (inferiores), las llamadas matrices escalonadas por filas (por columnas).

Matriz escalonada

Una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ es escalonada por filas cuando se cumplen simultáneamente las dos condiciones siguientes:

- El primer elemento no nulo de cada fila, denominado pivote, está a la derecha del pivote de la fila superior.

- Las filas nulas están en la parte inferior de la matriz.

Matrices escalonadas

Ejemplo

Estas matrices son escalonadas por filas:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Matrices escalonadas

Matriz escalonada reducida

Una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ es escalonada reducida por filas si es escalonada y además cumple los siguientes requisitos:

- Los pivotes son todos unos.
- Todos los elementos que están en la misma columna del pivote son nulos.

Matrices escalonadas

Ejemplo

Estas matrices son escalonadas reducidas por filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices escalonadas

Ejercicio

Dé definiciones equivalentes para las matrices escalonadas por columnas y matrices escalonadas reducidas por columnas.

Ponga dos ejemplos de cada tipo de matriz.

Operaciones elementales de una matriz

Operaciones elementales por filas

Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Las siguientes operaciones se llaman operaciones elementales por filas de la matriz A :

- Multiplicar una fila por un $a \in \mathbb{K}, a \neq 0$.
- Intercambiar dos filas.
- Sumar un múltiplo de una fila a otra.

De manera análoga se pueden definir las operaciones elementales por columnas.

Matrices equivalentes

Matrices equivalentes por filas

Dos matrices $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ son equivalentes por filas (por columnas) si una de ellas se puede obtener a partir de la otra mediante un número finito de operaciones elementales por filas (columnas).

Teorema

- Toda matriz es equivalente por filas (columnas) a una matriz escalonada por filas (columnas).
- Toda matriz es equivalente por filas (columnas) a una única matriz escalonada reducida por filas (columnas).

Matrices equivalentes

Lo demostraremos de manera constructiva. Es decir, hallaremos un algoritmo (método de Gauss) para encontrar la matriz escalonada en cada caso.

Demostración

Sea $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, entonces procederemos de la siguiente manera:

- 1 Si $a_{11} \neq 0$, se divide la primera fila por a_{11} y se obtiene una matriz equivalente en la que $a_{11} = 1$. Entonces este nuevo $a_{11} = 1$ será el primer pivote. Ahora, se resta a cada fila i la primera multiplicada por a_{i1} , la resta de elementos de la primera columna será 0 y se pasa al punto cuarto.

Matrices equivalentes

Demostración

- 2 Si $a_{11} = 0$, se busca el primer i tal que $a_{i1} \neq 0$. Entonces se intercambian la primera fila y la i obteniendo una matriz equivalente con un nuevo $a_{11} \neq 0$, volvemos al punto uno y repetimos el proceso.
- 3 Si $a_{i1} = 0$, para todo $i = 1, \dots, m$, entonces dejamos esta primera columna de ceros y aplicamos el algoritmo del paso uno a la matriz resultante de eliminar la primera columna.
- 4 Se repite el proceso a la matriz obtenida de eliminar la primera fila y la primera columna de nuestra matriz.

Matrices equivalentes

Nótese que con este método se obtiene la única matriz escalonada equivalente por filas cuyos pivotes son todos unos. Para obtener la matriz escalonada reducida, se aplica el primer algoritmo anterior con el fin de obtener la matriz escalonada por filas equivalente a la matriz dada. Enconces, si hay algún elemento a_{ij} distinto de cero en la columna de determinado pivote se resta a la fila de este elemento (la fila i) la fila del pivote multiplicada por a_{ij} y con este método se hacen cero todos los elementos situados por debajo de los pivotes.

Ejercicios

Ejercicio 1

Considérese la matriz $A \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$ dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 8 \\ 4 & -2 & -6 & 19 \\ 3 & -6 & -17 & 41 \end{pmatrix}$$

Calcúlese su matriz escalona y su escalonada reducida por filas.

Ejercicios

En este caso, $a_{11} = 1 \neq 0$ y por lo tanto podemos poner ceros mediante la resta con la primera columna:

$$A \sim f_2 = f_2 - 4f_1$$

$$A \sim f_3 = f_3 - 3f_1$$

Ejercicios

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & -2 & 6 & -13 \\ 0 & -3 & -8 & 17 \end{pmatrix}$$

Pasamos ahora al punto cuarto del algoritmo; es decir, se aplica el mismo razonamiento a la matriz 2×3 obtenida por eliminación de la primera fila y de la primera columna.

Ejercicios

$$\begin{pmatrix} -2 & 6 & -13 \\ -3 & -8 & 17 \end{pmatrix}$$

En este caso $a_{11} = 2$, comenzamos por dividir la primera fila por 2, haciendo ceros con la resta de la primera columna:

$$A \sim f_1 = f_1/2$$

$$A \sim f_2 = f_2 + 3f_1$$

Ejercicios

De esta manera, una matriz escalonada por filas equivalente a A sería:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & -13/2 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicios

Para calcular la única matriz escalonada reducida equivalente a A solo hace falta hacer ceros por debajo de cada pivote:

$$A \sim f_2 = f_2 - 3f_3$$

$$A \sim f_1 = f_1 + 3f_3$$

$$A \sim f_1 = f_1 + f_2$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicios

Ejercicio 2

Considérese la matriz $A \in M_{3 \times 5}(\mathbb{R})$ dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -3 & 8 \\ 1 & 0 & -2 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & -6 & -15 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcúlese su matriz escalonada y su escalonada reducida por filas.

Ejercicios

En este caso $a_{11} = 0$ pero en cambio $a_{21} \neq 0$, por tanto se comenzará por intercambiar las filas 1 y 2, después se hacen ceros por debajo del primer pivote:

$$A \sim f_2 \rightarrow f_1$$

$$A \sim f_3 = f_3 - 3f_1$$

Ejercicios

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Se llega al punto cuarto del algoritmo con la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

En esta matriz la primera columna está formada completamente por ceros.

Ejercicios

Según el algoritmo, lo que se ha de hacer es continuar con la matriz que se hace constar a continuación:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 8 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

En esta se divide la primera fila por -1 :

$$A \sim f_1/(-1)$$

$$A \sim f_2/3$$

Ejercicios

Por tanto una matriz escalonada por filas equivalente a A sería:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicios

Finalmente, para encontrar la matriz escalonada reducida por filas equivalente a A se hará:

$$A \sim f_2 = f_2 - 3f_3$$

$$A \sim f_1 = f_1 + 6f_3$$

$$A \sim f_1 = f_1 + 2f_2$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}$$

2.2. Rango de una matriz

Rango de una matriz

Dada la unicidad de la matriz escalonada reducida, se puede definir sobre una matriz A mediante su matriz escalonada reducida por filas (por columnas) equivalente:

Rango

Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Se denomina rango de A y se denota como $rg(A)$, al número de filas no nulas que tiene su única matriz escalonada reducida por filas equivalente.

Rango de una matriz

Teorema

Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. El rango de A coincidirá con el número de columnas no nulas de su única matriz escalonada reducida por columnas equivalente.

En realidad, el número de filas no nulas es siempre el mismo en cualquier matriz equivalente por filas (por columnas) a la dada. Por tanto, para calcular el rango de una matriz A bastará con encontrar una matriz B escalonada por filas (columnas) equivalente a A y contar el número de filas (columnas) no nulas de B .

Ejercicio

Ejercicio

Calcúlese el rango de la matriz A del ejercicio 1 anterior:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 8 \\ 4 & -2 & -6 & 19 \\ 3 & -6 & -17 & 41 \end{pmatrix}$$

Ejercicio

Se ha visto en el ejercicio 1 que:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \end{pmatrix}$$

Y por lo tanto, $rg(A)$ es simplemente el número de filas no nulas, $rg(A) = 3$

Ejercicios**Ejercicio 4**

Calcúlese el rango de la matriz B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicios

Se hacen las siguientes operaciones:

$$B \sim f_3 = f_3 - f_1$$

$$B \sim f_2 = f_2/2$$

$$B \sim f_3 = f_3 - 2f_2$$

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto la matriz escalonada obtenida tiene dos filas no nulas y consecuentemente $rg(B) = 2$.

2.3. Cálculo de la matriz inversa**Caracterización de las matrices invertibles**

Con las matrices escalonadas y las operaciones elementales no solo se puede calcular el rango de una matriz sino que también resultan útiles en el cálculo de matrices inversas como veremos a continuación. El primer aporte que pueden hacer es la caracterización de las matrices invertibles a través de su rango y de su matriz escalonada reducida.

Teorema de caracterización

Teorema

Sea A una matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{K})$. Entonces son equivalentes:

- A es invertible
- $rg(A) = n$
- La matriz escalonada reducida por filas (por columnas) equivalente a A es la matriz identidad I_n

Teorema de caracterización

Además, la tercera equivalencia aporta un método para calcular la matriz inversa de una matriz invertible $A \in M_n(\mathbb{K})$. Este consiste en escribir la matriz identidad I_n a la derecha de la matriz (escrito de forma abreviada $(A|I_n)$) y, a través de transformaciones elementales por filas (o por columnas), calcular la matriz escalonada reducida que será de la forma $(I_n|B)$. La matriz B resultante es precisamente la matriz inversa de A , es decir $A^{-1} = B$.

Cálculo de la matriz inversa

Ejercicio 5

Sea A la matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{K})$ dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Razónese si A es invertible y, si lo es, calcúlese su inversa.

Cálculo de la matriz inversa

Se comenzará por calcular su rango mediante las operaciones elementales siguientes:

$$A \sim f_3 = f_3 - f_1$$

$$A \sim f_2 = f_2/2$$

$$A \sim f_3 = f_3 + 3f_2$$

$$A \sim f_3 = 2f_3/11$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se obtiene una matriz escalonada con tres filas no nulas. Por lo tanto $rg(A) = 3$ y la matriz A es invertible.

Cálculo de la matriz inversa

Para calcular la matriz inversa se hará:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$A \sim f_3 = f_3 - f_1$$

$$A \sim f_2 = f_2/2$$

$$A \sim f_3 = f_3 + 3f_2$$

$$A \sim f_3 = 2f_3/11$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/11 & 3/11 & 2/11 \end{array} \right)$$

Cálculo de la matriz inversa

$$A \sim f_2 = f_2 - 3f_3/2$$

$$A \sim f_1 = f_1 - f_3$$

$$A \sim f_1 = f_1 - 2f_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7/11 & -5/11 & 4/11 \\ 0 & 1 & 0 & 3/11 & 1/11 & -3/11 \\ 0 & 0 & 1 & -2/11 & 3/11 & 2/11 \end{array} \right)$$

Cálculo de la matriz inversa

Por tanto:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7/11 & -5/11 & 4/11 \\ 3/11 & 1/11 & -3/11 \\ -2/11 & 3/11 & 2/11 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 7 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Ecuaciones y sistemas lineales

3.1. Ecuaciones matriciales

¿Qué es una ecuación matricial?

Una ecuación matricial es una ecuación donde la incógnita es una matriz. Se resuelven transformando la ecuación inicial en otra equivalente utilizando las propiedades y definiciones vistas. Para hallar la incógnita es necesaria la matriz inversa.

¿Qué es una ecuación matricial?

Método de resolución

$$XP = Q - R$$

- Se multiplica por la derecha en ambos términos por P^{-1}

$$XPP^{-1} = (Q - R)P^{-1}$$

- Por definición de matriz inversa $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

$$XI_n = (Q - R)P^{-1}$$

- Por propiedad de la matriz identidad $AI_n = I_nA = A$

$$X = (Q - R)P^{-1}$$

¿Qué es una ecuación matricial?

Ejercicios

Resuélvase la ecuación matricial $P + QX = RS - TX$. ¿Qué condición ha de cumplirse para que se pueda hallar X ?

¿Qué es una ecuación matricial?

$$\begin{aligned}P + QX &= RS - TX \\(P - P) + QX + TX &= RS - P + (-TX + TX) \\QX + TX &= RS - P \\(Q + T)X &= RS - P \\(Q + T)^{-1}(Q + T)X &= (Q + T)^{-1}(RS - P) \\I_n X &= (Q + T)^{-1}(RS - P) \\X &= (Q + T)^{-1}(RS - P)\end{aligned}$$

Para poder hallar X es necesario que la matriz $(Q + T)$ tenga inversa.

3.2. Sistemas de ecuaciones lineales

Sistemas de ecuaciones lineales

Definición

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \quad \quad \cdots \quad \quad \quad \cdots \quad \quad \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Con $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$ por $i = 1, 2, \dots, m$ i $j = 1, 2, \dots, n$ es conocido con el nombre de **sistema de ecuaciones lineales**. Una solución de este sistema es un conjunto de n valores $\alpha_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \dots, n$ tales que al hacer las sustituciones $x_i = \alpha_i$ en cada una de las m ecuaciones las convierten en identidades.

Sistemas de ecuaciones lineales

Forma matricial

Un sistema de ecuaciones se puede escribir en forma matricial como $AX = B$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

La matriz A se denomina **matriz de coeficientes**, la matriz B de **términos independientes** y la matriz X de **incógnitas**.

Sistemas de ecuaciones lineales

Matriz ampliada

Dado el sistema matricial $AX = B$, se define la **matriz ampliada** del sistema como:

$$(A|B)$$

como ya se ha visto en la sección anterior.

Sistema de ecuaciones lineales

Nota

Si resulta que $m = n$, entonces el sistema de ecuaciones lineales se puede resolver fácilmente:

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}AX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Basta encontrar la matriz inversa, si existe, y multiplicar las dos matrices A^{-1} y B .

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistemas compatibles e incompatibles

Un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas $AX = B$ es:

- **Compatible:** si tiene al menos una solución.

- **Determinado:** si la solución es única.
- **Indeterminat:** si tiene infinitas soluciones.
- **Incompatible:** si no tiene solución.

Dos sistemas lineales del mismo tamaño (es decir, los dos tienen el mismo número de ecuaciones y el mismo número de incógnitas) son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

Sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicios

Resuélvase el sistema lineal siguiente:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Sistemas de ecuaciones lineales

Se obtendrán una serie de sistemas lineales equivalentes más sencillos.

- La primera ecuación queda igual y se eliminará x_1 de las otras dos ecuaciones.
- A la segunda ecuación se le suma la primera multiplicada por -2 .
- A la tercera ecuación se le suma la primera multiplicada por -3 .

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_2 - 7x_3 = -17 \\ 3x_2 - 11x_3 = -27 \end{cases}$$

Sistemas de ecuaciones lineales

De forma análoga se eliminará la variable x_2 de la tercera ecuación, sumándole la segunda multiplicada por $-3/2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_2 - 7x_3 = -17 \\ -\frac{1}{2}x_3 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Sistemas de ecuaciones lineales

El sistema se puede resolver cómodamente por la sustitución regresiva:

- Se obtiene x_3 de forma directa de la tercera ecuación.

$$x_3 = 3$$

- Se sustituye x_3 en la segunda ecuación y se halla x_2 .

$$x_2 = \frac{-17 + 7 \cdot 3}{2} = 2$$

- Se sustituye x_3 y x_2 en la primera ecuación y se encuentra x_1 .

$$x_1 = 9 - 2 - 2 \cdot 3 = 1$$

3.3. El método de Gauss

El método de de Gauss

Ya se han visto las matrices escalonadas en una sección anterior.

Definición

Un sistema $HX = C$ es escalonado si la matriz ampliada $(H|C)$ es una matriz escalonada.

Las variables que se corresponden con los pivotes se llaman **variables dependientes** y el resto **variables independientes**.

Ya se ha visto el método de Gauss para obtener matrices escalonadas y para calcular el rango de una matriz A . Ahora se aplicará para encontrara las coluciones de los sistemas de ecuaciones lineales.

El método de Gauss

Método de Gauss

1. Entre todas las filas se seleccionará la que tenga el pivote los más a la izquierda posible y se colocará como primera fila.
2. Con el pivote de la primera fila se reducirán a cero todos los elementos que se encuentren por debajo de él.
3. Se repiten los pasos uno y dos con la submatriz formada por todas las filas excepto la primera. La nueva matriz que se obtiene tendrá ceros por debajo del pivote de la fila 2.
4. Se repite el proceso con el fin de obtener una matriz escalonada.

El método de Gauss

Ejercicios

Resuélvase el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 3 \\ & x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 & + x_3 = 4 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 & = 6 \end{cases}$$

El método de Gauss

Se realizan las siguientes operaciones:

$$f_3 \sim f_3 - f_1; f_4 \sim f_4 - 5f_1$$

$$f_3 \sim f_3 + f_2; f_4 \sim f_4 + 6f_1$$

$$f_4 \sim f_4 - \frac{7}{2}f_3$$

Se obtiene así una matriz escalonada con tres variables dependientes x_1, x_2 y x_3 ya que tiene tres pivotes.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

El método de Gauss

Aplicando sustitución regresiva se obtiene esto:

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$$

El método de Gauss

Ejercicios

Resuélvase el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 & = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 & = -1 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 & = 3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 & = 5 \end{cases}$$

El método de Gauss

Se hace lo siguiente:

$$f_2 \sim f_2 - 2f_1; f_3 \sim f_3 - 3f_1; f_4 \sim f_4 + f_1$$

$$f_3 \sim f_3 - f_2; f_4 \sim f_4 + f_2$$

Se obtiene una matriz escalonada con dos variables dependientes x_1 y x_2 y dos variables independientes x_3 y x_4 .

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

El método de Gauss

Aplicando sustitución regresiva se obtienen las variables dependientes en función de las independientes.

$$x_1 = -14 - x_3 + 3x_4$$

$$x_2 = -9 + x_4$$

$$x_3 = x_3$$

$$x_4 = x_4$$

4. Determinantes

4.1. El concepto de determinante

Concepto de determinante

Definición

Dada una matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{K})$ con $a_{ij} \in \mathbb{K}$ se denomina determinante de la matriz A y se denota como $|A|$ o como $\det(A)$ a un elemento del cuerpo \mathbb{K} que se define por inducción de la forma siguiente:

- Si $n = 1$, $A = (a_{11})$ entonces $|A| = a_{11}$.

- Si $n > 1$, $|A| = a_{11}\alpha_{11} - a_{12}\alpha_{12} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}\alpha_{1n}$

Donde α_{1i} es el determinante de la matriz de orden $n-1$ que se obtiene al suprimir la primera fila y la columna i -ésima de la matriz A .

Concepto de determinante

Ejercicio 1

Cálculase el determinante de una matriz cuadrada de orden 2 genérica:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Se tiene que:

$$\alpha_{11} = |a_{22}| = a_{22}$$

$$\alpha_{12} = |a_{21}| = a_{21}$$

Y por lo tanto el determinante es:

$$|A| = a_{11}\alpha_{11} - a_{12}\alpha_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Concepto de determinante

Ejercicio 2

Calcúlese el determinante de la matriz cuadrada de orden 3 genérica:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Se tiene que:

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \alpha_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \alpha_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Y por tanto el determinante es:

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

Este es el mismo resultado que se obtiene con la regla de Sarrus.

Concepto de determinante

Ejercicio 3

Calcúlese el determinante de la transpuesta de la matriz cuadrada de orden 2 genérica:

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Se tiene que:

$$\alpha_{11} = |a_{22}|, \alpha_{12} = |a_{12}|$$

Y por tanto el determinante es:

$$|A^t| = a_{11}\alpha_{11} - a_{21}\alpha_{12} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Por tanto se concluye que $|A^t| = |A|$.

Este resultado es cierto $\forall n \geq 1$: si $A \in M_n(\mathbb{K})$, $|A^t| = |A|$

4.2. Propiedades

Propiedades de los determinantes

Debido a que $A \in M_n(\mathbb{K})$, $|A^t| = |A|$, se puede deducir toda una serie de propiedades tanto por filas como por columnas.

Se denota como $\det(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)$ al determinante de la matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ que tiene como filas (o columnas) las matrices fila (o columna) u_i , $i = 1, \dots, n$.

Propiedades de los determinantes

Propiedad 1

$$\det(u_1, \dots, \lambda u_i, \dots, u_n) = \lambda \det(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)$$

En particular si $\lambda = 0$, entonces $\det(u_1, \dots, 0, \dots, u_n) = 0$.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 10 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 10 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Propiedades de los determinantes

Propiedad 2

$$\det(u_1, \dots, u_i + u'_i, \dots, u_n) = \det(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) + \det(u_1, \dots, u'_i, \dots, u_n)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1+2 & 1 \\ 3 & 3+2 & 1 \\ 1 & 1+2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Propiedades de los determinantes

Propiedad 3

Si se intercambian dos filas o columnas de un determinante, el determinante cambia de signo.

$$\det(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n) = -\det(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_n)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Propiedades de los determinantes

Propiedad 4

Si una matriz tiene dos filas o columnas iguales, su determinante es nulo.

$$\det(u_1, \dots, u_i, \dots, u_i, \dots, u_n) = 0$$

Propiedad 5

Si una matriz tiene dos filas o columnas proporcionales, su determinante es nulo.

$$\det(u_1, \dots, u_i, \dots, \lambda u_i, \dots, u_n) = 0$$

Propiedades de los determinantes

Propiedad 6

Si una fila o columna es combinación lineal de las otras, el determinante es nulo. Es decir, si $u_i = \sum_{k \neq i} a_k u_k$ entonces:

$$\det(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

En este caso la tercera columna es la suma de las dos anteriores.

Propiedades de los determinantes

Propiedad 7

El determinante no cambia si a una fila o columna se le suma una combinación lineal de las otras.

$$\det(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) = \det(u_1, \dots, u_i + \sum_{k \neq i} a_k u_k, \dots, u_n)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 9 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Dado que hemos obtenido el segundo determinante a partir del primero sumando a la tercera fila una suma de la primera y la segunda.

4.3. Matriz adjunta

Adjuntos de una matriz

Definición

Sea $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $n \geq 2$. Sea a_{ii} el elemento que ocupa la fila i y la columna j de la matriz A . Si se suprime la fila i y la columna j de A se obtiene una matriz cuadrada de orden $n - 1$.

- El determinante de esta matriz, que se denotará como α_{ij} y se llama menor complementario de a_{ij} .

- El elemento $A_{ij} = (-1)^{i+j}a_{ij}$ se denomina adjunto de a_{ij} .
- La matriz adjunta de $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $n \geq 2$, es la matriz que tiene como coeficientes a los adjuntos A_{ij} de los elementos a_{ij} de la matriz A . Se denota por $adj(A)$.

Adjuntos de una matriz

Ejercicio 4

Calcúlese la matriz adjunta de A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Adjuntos de una matriz

Solución

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 \\ -3 & -7 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

4.4. Cálculo de un determinante

Cálculo de un determinante

El determinante de una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de tipo $n \times n$ con $n \geq 2$ se puede calcular desarrollando por los adjuntos de los elementos de cualquiera de sus filas o columnas.

Cálculo de un determinante

Desarrollar un determinante por adjuntos

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden $n \times n$. Entonces se verifica:

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

(desarrollo de un determinante por los adjuntos de los elementos de una fila)
y también:

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

(desarrollo por los adjuntos de los elementos de una columna).

Cálculo de un determinante

Ejercicio 5

Calcúlese el determinante siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Desarróllese por los elementos de la primera fila.

Cálculo de un determinante

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 0 - 15 = -12$$

Cálculo de un determinante

Ejercicio 6

Calcúlese el determinante siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Desarróllese por los elementos de la segunda columna.

Cálculo de un determinante

$$|A| = -0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 7 - 5 = -12$$

Cálculo de un determinante

Ejemplo

Si se aplican estos desarrollos a las matrices triangulares se tiene que el determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \\ &= -3 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3(-4) = 12 \end{aligned}$$

En cada paso se ha hecho el desarrollo del determinante por los adjuntos de la última fila.

Cálculo de un determinante

El desarrollo de un determinante por los adjuntos de los elementos de una fila o de una columna, junto con las propiedades mencionadas arriba, permiten simplificar de manera considerable el cálculo de un determinante.

Cálculo de un determinante

Ejercicio 7

Calcúlese el determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Uséanse las propiedades de los determinantes para ello.

Cálculo de un determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 8$$

Primero se suma la primera fila a la tercera y después se ha desarrollado por los adjuntos de los elementos de la segunda columna.

Cálculo de un determinante

Ejercicio 8

Calcúlese el determinante que figura a continuación:

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b+c & b+c+a & c+b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Uséense las propiedades de los determinantes para ello.

Cálculo de un determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b+c & b+c+a & c+b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Se ha extraído factor común $a+b+c$ y el determinante resultante es nulo porque tiene dos filas iguales.

Cálculo de un determinante

Ejercicio 9

Calcúlese el determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Uséense las propiedades de los determinantes para ello.

Cálculo de un determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$1 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

Se ha desarrollado por la sexta fila, por la quinta columna, por la tercera fila y por la primera fila respectivamente.

Cálculo de un determinante

Exercici 10

Calcúlese el determinante de Vandermonde de orden 4. En el primer paso a cada fila se le resta la anterior multiplicada por a .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

Cálculo de un determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-ba & c^2-ca & d^2-da \\ 0 & b^3-b^2a & c^3-c^2a & d^3-d^2a \end{vmatrix} =$$

$$1 \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-ba & c^2-ca & d^2-da \\ b^3-b^2a & c^3-c^2a & d^3-d^2a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a) \end{vmatrix} =$$

Cálculo de un determinante

$$\begin{aligned} & (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} = \\ & (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c^2-cb & d^2-db \end{vmatrix} = \\ & (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} (c-b) & (d-b) \\ c(c-b) & d(d-b) \end{vmatrix} = \\ & (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{vmatrix} = \\ & (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c) \end{aligned}$$

4.5. Aplicaciones de los determinantes

Aplicaciones en el cálculo de matrices

Los determinantes son útiles para encontrar la inversa de una matriz, el rango de una matriz y, como veremos más adelante, para la resolución de sistemas lineales.

Aplicaciones en el cálculo de matrices

Teorema

Sean A y B matrices cuadradas de orden n , $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Entonces:

- A es invertible si y solo si $|A| \neq 0$
- $|AB| = |A| \cdot |B|$
- Si $|A| \neq 0$, entonces $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
- Si $|A| \neq 0$, entonces $|A^{-1}| = \frac{(\text{adj}A)^t}{|A|}$

Nótese que la última propiedad supone una nueva manera de calcular la matriz inversa de una matriz dada A . Para calcular la matriz inversa se ha de calcular la matriz adjunta, transponerla y dividirla por el determinante de la matriz dada.

Aplicaciones en el cálculo de matrices

Ejercicio 10

Calcúlese la matriz inversa de la matriz A con esta nueva técnica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aplicaciones en el cálculo de matrices

La matriz es invertible ya que $|A| = 7 \neq 0$.

$$(adj A)^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 8 & -2 & -9 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 8 & -2 & -9 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Además se puede afirmar que $\det(A^{-1}) = 7$.

Aplicaciones en el cálculo de matrices

Otra aplicación de los determinantes se halla en el cálculo del rango de una matriz.

Menores de orden k

Sea A una matriz de orden $m \times n$, $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ y sea $k < n$

- Se denomina menor de orden k de la matriz A al determinante de cualquier matriz cuadrada de orden k obtenida al suprimir $m - k$ filas y $n - k$ columnas de A .
- Dado un menor de orden k de la matriz A , orlar este menor consiste en completarlo hasta lograr un menor de orden $k + 1$ de A con otra fila y otra columna de la matriz dada A .

Aplicaciones en el cálculo de matrices

Se pueden utilizar estos menores para calcular el rango de una matriz A cualquiera.

Teorema

Sea A una matriz de orden $m \times n$, $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ y sea $k < n$. Entonces se puede encontrar un menor de orden k no nulo y todos los de orden $k + 1$ serán nulos, entonces el $\text{rang}(A) = k$. Es decir, el rango de la matriz A coincide con el orden del mayor menor no nulo obtenido de A .

Aplicaciones en el cálculo de matrices

El teorema anterior se puede mejorar con el siguiente segmento:

Teorema

Sea A una matriz de orden $m \times n$, $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ y sea $k < n$. Entonces, se puede encontrar un menor de orden k no nulo y todas las maneras posibles de orlar este menor darán menores nulos, entonces el $\text{rang}(A) = k$.

Aplicaciones en el cálculo de matrices

Ejercicio 12

Calcúlese el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aplicaciones en el cálculo de matrices

El primer menor de orden 2 es no nulo:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 8 = 6 \neq 0$$

Se sigue el primer teorema, hay que comprobar que todos los menores de orden 3, si todos son 0 el rango será 2, y sino será tres (el máximo ya que solo hay tres columnas).

Gracias al segundo teorema bastará comprobar los menores de orden 3 que se obtienen orlando el menor no nulo hallado.

Aplicaciones en el cálculo de matrices

De esta manera solo hay que probar los menores:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \dots = 0$$
$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \dots = 0$$

De esta forma se puede afirmar que $\text{rang}(A) = 2$.

Aplicaciones en el cálculo de matrices

Ejercicio 13

Determinése para qué valores del parámetro α la siguiente matriz es invertible y, en los casos en los que lo es, hallar la inversa

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 4 & 5 \\ -\alpha & 1 & 2 \\ -\alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicaciones en el cálculo de matrices

Para ser invertible el determinante ha de ser distinto de cero:

$$\det(A) = \alpha(7\alpha - 3)$$

Así la matriz es invertible si $\alpha \neq 0, 3/7$, en este caso la inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{7\alpha + 3} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3/\alpha \\ -2 & 5 & -7 \\ \alpha + 1 & \alpha - 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Aplicaciones en el cálculo de matrices

Ejercicio 14

Determinése el rango de la siguiente matriz según los valores del parámetro α

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \alpha + 1 & 1 \\ 0 & 2\alpha & \alpha - 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicaciones en el cálculo de matrices

Se ve de manera inmediata que el menor de orden 2 formado por las dos primeras columnas y las filas primera y tercera no son nulas, cualquiera que sea el valor de α

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Aplicaciones en el cálculo de matrices

Completándolo con la cuarta columna, que es la más sencilla por no tener parámetros, se obtiene:

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 2\alpha & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\alpha(\alpha - 1)$$

De esta manera el rango de la matriz será 3 (no puede ser superior porque la matriz solo tiene 3 filas) siempre que α sea distinto de 0, 1.

Aplicaciones en el cálculo de matrices

En el caso de que $\alpha = 0$, la matriz queda:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con menor no nulo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Por lo tanto en este caso, el rango de A es también 3.

Aplicaciones en el cálculo de matrices

En el caso de que $\alpha = 1$, la matriz queda así:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso los dos menores de orden 3 que comprenden nuestros menor de orden dos no nulo son 0. ya se sabe con la cuarta columna y con la tercera se tiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, en este caso, el rango de A es 2.

Aplicaciones a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Ya hemos visto cómo resolver sistemas de ecuaciones lineales con el método de Gauss. En esta sección veremos como emplear los conocimientos que tenemos sobre determinantes para hacer esta tarea de otra manera. En particular nos serán muy útiles para:

- Discutir un sistema; es decir, decidir si un sistema es o no compatible en función de los valores que tenga un parámetro dado.
- Resolver el sistema en el caso de compatibilidad.

Para ello se introduce el Teorema de Rouché-Frobenius.

Aplicaciones a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Rango de un sistema de ecuaciones lineal

Sea $AX = B$ un sistema de ecuaciones lineales. Se denotará por $\text{rang}(A)$ el rango del sistema y por $\text{rang}(A^*)$ el rango de la matriz ampliada $(A|B)$

Se satisface que:

$$\text{rang}(A) \leq \min(n, m)$$

Donde n es el número de ecuaciones y m el número de incógnitas.

Aplicaciones a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Sea $AX = B$ un sistema de ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incógnitas.

Teorema de Rouché-Frobenius

La condición necesaria y suficiente para que el sistema sea compatible es que $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*)$.

Además, si coincide que $\text{rang}(A) = n$, el sistema es compatible determinado. En caso contrario, si $\text{rang}(A) < n$, el sistema es compatible indeterminado.

- $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*)$: Sistema compatible
 - $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = n$: Sistema compatible determinado
 - $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) < n$: Sistema compatible indeterminado
- $\text{rang}(A) < \text{rang}(A^*)$: Sistema incompatible

Aplicaciones a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicios

Discútase el rango del sistema siguiente:

$$\begin{cases} 6x & - & y & + & 3z & = & 6 \\ -6x & + & 8y & & & = & -10 \\ 2x & - & 5y & - & z & = & 4 \end{cases}$$

Sol: $\text{rang}(A) = 2 < 3 = \text{rang}(A^*)$: sistema incompatible.

Aplicaciones a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicios

Dado el sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x & + & a_{12}y & + & a_{13}z & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & + & a_{23}z & = & b_2 \\ a_{31}x & + & a_{32}y & + & a_{33}z & = & b_3 \end{cases}$$

con

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

y $\text{rang}(A^*) = 2$, ¿qué se puede decir del sistema?

Sol: Sistema compatible indeterminado.

Aplicaciones a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema homogéneo es aquel donde $B = 0$. Al aplicar el teorema de Rouché-Frobenius se observa que siempre tienen solución, ya que al estudiar la matriz ampliada no se añade información adicional a la matriz de coeficientes.

Ejercicios

Discútase el rango del sistema siguiente:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Sol: $\text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(A^*) < n = 3$: sistema compatible indeterminado.

Aplicaciones a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicios

Discútase el rango del sistema en función del parámetro a .

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + 2y + az = 1 \\ 2x + y + z = a \end{cases}$$

Sol: $a \neq 1, 2$: sistema compatible determinado. $a = 1$: sistema compatible indeterminado. $a = 2$: sistema incompatible.

Regla de Cramer

Sistemas de Cramer

Un sistema $AX = B$ con m ecuaciones y n incógnitas se denomina regular o de Cramer si $\text{rang}(A) = n = m$.

Dado que el número de ecuaciones e incógnitas coinciden se trata de matrices cuadradas de tamaño igual al rango de la matriz.

De forma trivial, cualquier sistema de Cramer es compatible y determinado. En este caso la regla de Cramer permite calcular la solución el sistema de forma bastante sencilla.

Regla de Cramer

Regla de Cramer

Un sistema regular $AX = B$ donde A_i denota la columna i -ésima de la matriz A , admite una solución única dada por:

$$x_i = \frac{D_i}{D}, i = 1, 2, \dots, n$$

Donde:

$$D = \det(A_1, A_2, \dots, A_n)$$
$$D_i = \det(A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_n)$$

Regla de Cramer

Ejercicios

Discútase y resuélvase el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 6 \\ x - 5y + 2z = -4 \\ 3x + 2y - 3z = -6 \end{cases}$$

Sol: SCD con

$$x = 1, y = 3, z = 5$$

Regla de Cramer

Ejercicios

Discútase y resuélvase el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 10 \\ 2x - 4y - 2z = 5 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

Sol: SCD con

$$x = \frac{83}{16}, y = \frac{15}{8}, z = \frac{-17}{16}$$

Regla de Cramer

Ejercicios

Discútase y resuélvase el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 3x - 2y - z = 5 \\ 2x - 5y + 3z = -4 \\ x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$$

Sol: SCD con

$$x = 2, y = 1, z = 1$$

Regla de Cramer

Ejercicios

Discútase y resuélvase el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Sol: SCI con

$$x = z, y = -z, z = z$$

Regla de Cramer

Ejercicios

Discútase y resuélvase el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 3z - s + 2t = 0 \\ 3x - 6y + 5z - 2s + 4t = 0 \\ 5x - 10y + 7z - 3s + t = 0 \end{cases}$$

Sol: SCI con

$$x = x, y = \frac{x - 5t}{2}, z = -5t, t = t, s = -3t$$