

# Espacios vectoriales

## Estudios de Ingeniería

Juan Gabriel Gomila

Frogames

<https://frogames.es>

1 de julio de 2017

# Índice

- 1 Conjuntos libres y ligados
  - Combinaciones lineales
  - Dependencia e independencia lineal
  - Rango de un conjunto de vectores
- 2 Espacios vectoriales de dimensión finita
  - Espacios vectoriales
  - Sistema generador
  - Base de un espacio vectorial
  - Dimensión y coordenadas de una base
- 3 Cambio de base
  - El cambio de base
  - Matriz de cambio de base
- 4 Subespacios vectoriales
  - Concepto de subespacio vectorial
- 5 Bases ortogonales y ortonormales

## 1 Conjuntos libres y ligados

- Combinaciones lineales
- Dependencia e independencia lineal
- Rango de un conjunto de vectores

## 2 Espacios vectoriales de dimensión finita

- Espacios vectoriales
- Sistema generador
- Base de un espacio vectorial

- Dimensión y coordenadas de una base

## 3 Cambio de base

- El cambio de base
- Matriz de cambio de base

## 4 Subespacios vectoriales

- Concepto de subespacio vectorial

## 5 Bases ortogonales y ortonormales

- Método de diagonalización de Gram-Schmidt
- Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio

## 1 Conjuntos libres y ligados

### ■ Combinaciones lineales

- Dependencia e independencia lineal
- Rango de un conjunto de vectores

## 2 Espacios vectoriales de dimensión finita

- Espacios vectoriales
- Sistema generador
- Base de un espacio vectorial

- Dimensión y coordenadas de una base

## 3 Cambio de base

- El cambio de base
- Matriz de cambio de base

## 4 Subespacios vectoriales

- Concepto de subespacio vectorial

## 5 Bases ortogonales y ortonormales

- Método de diagonalización de Gram-Schmidt
- Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio

# Combinaciones lineales

## Combinación lineal

Recuérdese que dados  $p$  vectores  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$  y los escalares  $\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$  una combinación lineal de esos  $p$  vectores es un vector dado por una expresión de la forma:

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_p \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$$

## Ejercicios

Exprésese el vector  $(2, -4)$  como una combinación lineal de los vectores  $(1, 1)$  y  $(-2, 0)$ .

Sol:  $(2, -4) = -4(1, 1) - 3(-2, 0)$ .

# Combinaciones lineales

## Ejercicios

Exprésese el vector  $(4, -11)$  como una combinación de los vectores  $(2, -3)$  y  $(4, -6)$ .

Sol: no tiene solución.

## Ejercicios

Exprésese el vector  $(4, -11)$  como una combinación de los vectores  $(2, -1)$  y  $(1, 4)$ .

Sol:  $(4, -11) = 3(2, -1) - 2(1, 4)$ .

## Ejercicios

Pruébese que el vector  $(1, 0)$  no se puede expresar como una combinación lineal de  $(2, -3)$  y  $(4, -6)$

# Combinaciones lineales

## Ejercicios

Exprésese el vector  $(4, -5, 6)$  como una combinación lineal de los vectores  $(2, -3, 5)$  y  $(-1, 3, 2)$ .

Sol: no tiene solución

## Ejercicios

Exprésese el vector  $(4, -5, 7)$  como una combinación lineal de los vectores  $(0, -3, 5)$ ,  $(1, 0, -3)$  y  $(-1, 3, 4)$ .

Sol:  $(4, -5, 7) = \frac{31}{9}(0, -3, 5) + \frac{52}{9}(1, 0, -3) + \frac{16}{9}(-1, 3, 4)$ .

## Ejercicios

Exprésese, si es posible, el vector  $(0, 0, 0)$  como una combinación lineal de  $(-1, 3, 1)$ ,  $(1, 0, -3)$  y  $(-1, 3, 4)$ , distinta de  $(0, 0, 0)$ .

# Dependencia e independencia lineal

## Dependencia lineal

Dados el conjunto de vectores  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$  dicese que son linealmente dependientes si alguno de ellos se puede expresar como una combinación lineal del resto. Son LD si:

$$\exists 1 \leq i \leq p : \sum_{k \neq i} \alpha_k \vec{u}_k = \vec{u}_i$$



## 1 Conjuntos libres y ligados

- Combinaciones lineales
- Dependencia e independencia lineal
- Rango de un conjunto de vectores

## 2 Espacios vectoriales de dimensión finita

- Espacios vectoriales
- Sistema generador
- Base de un espacio vectorial

- Dimensión y coordenadas de una base

## 3 Cambio de base

- El cambio de base
- Matriz de cambio de base

## 4 Subespacios vectoriales

- Concepto de subespacio vectorial

## 5 Bases ortogonales y ortonormales

- Método de diagonalización de Gram-Schmidt
- Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio

# Dependencia e independencia lineal

## Ejercicios

Dígame si el conjunto de vectores  $(2, -4, 0)$ ,  $(1, 1, 1)$  y  $(-1, 2, 0)$  es linealmente dependiente.

## Ejercicios

Dígame si el conjunto de vectores  $(-1, 6, 5)$ ,  $(1, 0, -3)$  y  $(-1, 3, 4)$  es linealmente dependiente.

# Dependencia e independencia lineal

## Independencia lineal (II)

Dado el conjunto de vectores  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$  dicese que son linealmente dependientes si la ecuación vectorial

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}$$

tiene infinitas soluciones, y por tanto los escalares  $\alpha_i \in \mathbb{K}$  pueden tener valores no nulos.

## Ejercicios

Dígase si el conjunto de vectores  $(2, -4, 0)$ ,  $(1, 1, 1)$  y  $(-1, 2, 0)$  es linealmente dependiente.

# Dependencia e independencia lineal

## Independencia lineal

Dado el conjunto de vectores  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$  dicese que son linealmente independientes si no es posible expresarlos como una combinación lineal del resto. Son LI si:

$$\nexists 1 \leq i \leq p : \sum_{k \neq i} \alpha_k \vec{u}_k = \vec{u}_i$$

## Ejercicios

Dígase si el conjunto de vectores  $(2, -4, 0)$ ,  $(1, 1, 1)$  y  $(-1, 2, 1)$  es linealmente independiente.

# Dependencia e independencia lineal

## Dependencia lineal (II)

Dado el conjunto de vectores  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$  dícese que son linealmente independientes si la ecuación vectorial

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}$$

tiene como única solución la solución trivial, es decir  $\alpha_i = 0 \forall 1 \leq i \leq p$ .

## Ejercicios

Dígase si el conjunto de vectores  $(2, -4, 0)$ ,  $(1, 1, 1)$  y  $(-1, 2, 1)$  es linealmente independiente.

# Dependencia e independencia lineal

## Ejercicios

Demuéstrese que el conjunto  $(1, 1)$  y  $(1, 0)$  es LI.

## Ejercicios

Demuéstrese que el conjunto  $(1, 1)$  y  $(0, 1)$  es LI.

## Ejercicios

Demuéstrese que el conjunto  $(1, 1)$ ,  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$  es LD.

## 1 Conjuntos libres y ligados

- Combinaciones lineales
- Dependencia e independencia lineal
- Rango de un conjunto de vectores

## 2 Espacios vectoriales de dimensión finita

- Espacios vectoriales
- Sistema generador
- Base de un espacio vectorial

- Dimensión y coordenadas de una base

## 3 Cambio de base

- El cambio de base
- Matriz de cambio de base

## 4 Subespacios vectoriales

- Concepto de subespacio vectorial

## 5 Bases ortogonales y ortonormales

- Método de diagonalización de Gram-Schmidt
- Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio

# Rango de un conjunto de vectores

## Definición

Dado el conjunto de vectores  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$ , dicese que tienen rango  $r \leq p$  si existe como mínimo un subconjunto de  $r$  vectores linealmente independientes entre ellos y no existe ninguno de  $r + 1$  vectores que sea linealmente independiente. Es decir, es el número máximo de vectores linealmente independientes que pueden extraerse del conjunto.



# Rango de un conjunto de vectores

Un método para calcular el rango de un conjunto de vectores consiste en construir una matriz utilizando los vectores como columnas (o filas) y definir el rango de la matriz como el rango de sus vectores columna (o fila). Ya se ha aprendido cómo calcular el rango de una matriz en el Tema 1. Ahora se pondrá en práctica para calcular el rango de vectores.

## Definición

El rango de una matriz  $A$  coincide con el número de vectores fila o columna linealmente independientes.

## 1 Conjuntos libres y ligados

- Combinaciones lineales
- Dependencia e independencia lineal
- Rango de un conjunto de vectores

## 2 Espacios vectoriales de dimensión finita

- Espacios vectoriales
- Sistema generador
- Base de un espacio vectorial

## ■ Dimensión y coordenadas de una base

## 3 Cambio de base

- El cambio de base
- Matriz de cambio de base

## 4 Subespacios vectoriales

- Concepto de subespacio vectorial

## 5 Bases ortogonales y ortonormales

- Método de diagonalización de Gram-Schmidt
- Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio

## 1 Conjuntos libres y ligados

- Combinaciones lineales
- Dependencia e independencia lineal
- Rango de un conjunto de vectores

## 2 Espacios vectoriales de dimensión finita

- Espacios vectoriales
- Sistema generador
- Base de un espacio vectorial

- Dimensión y coordenadas de una base

## 3 Cambio de base

- El cambio de base
- Matriz de cambio de base

## 4 Subespacios vectoriales

- Concepto de subespacio vectorial

## 5 Bases ortogonales y ortonormales

- Método de diagonalización de Gram-Schmidt
- Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio

# Espacios vectoriales

Hasta ahora se han visto ejemplos de espacios de  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ , pero la gran mayoría de definiciones que se han presentado se han dado para espacios  $\mathbb{K}^n$  arbitrarios. Veremos que la estructura de estos espacios es una de las más importantes en el mundo del álgebra: el espacio vectorial.

# Espacios vectoriales

## Definición

Un espacio vectorial sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$  es un conjunto  $E$  no vacío y cerrado con las siguientes operaciones definidas:

- 1 Ley de composición interna

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in E$$

- 2 Ley de composición externa

$$\forall \vec{x} \in E, \alpha \in K \Rightarrow \alpha \vec{x} \in E$$

que cumplen las siguientes condiciones:

# Espacios vectoriales

## Definición

La ley de composición interna ha de cumplir:

- Propiedad conmutativa:  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x} \forall \vec{x}, \vec{y} \in E$
- Propiedad asociativa:

$$\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E$$

- Elemento neutro de la suma:  $\exists \vec{0} \in E : \vec{x} + \vec{0} = \vec{x} \forall \vec{x} \in E$
- Existencia del opuesto:  $\forall \vec{x} \in E \exists -\vec{x} \in E : \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$

# Espacios vectoriales

## Definición

La ley de composición externa ha de cumplir:

- Propiedad asociativa:  $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x} \forall \vec{x} \in E, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$
- Elemento neutro del producto:  $\exists 1 \in \mathbb{K} : 1\vec{x} = \vec{x} \forall \vec{x} \in E$
- Propiedad distributiva del producto respecto de la suma de vectores:

$$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y} \forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \alpha \in \mathbb{K}$$

- Propiedad distributiva del producto respecto de la suma de escalares:

$$(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x} \forall \vec{x} \in E, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

# Espacios vectoriales

## Ejemplos de espacios vectoriales

- El espacio  $\mathbb{R}^n$  formado por los vectores de  $n$  componentes  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$
- El conjunto  $P_n(\mathbb{K}) = \{a_n x^n + a_{n-1} x_{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 : a_i \in \mathbb{K} \forall 0 \leq i \leq n\}$ .
- El espacio  $M_{2 \times 2}(\mathbb{K})$  de las matrices  $2 \times 2$  con coeficientes sobre  $\mathbb{K}$ .
- El conjunto de las matrices continuas definidas sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$



# Espacios vectoriales

## No son espacios vectoriales

- El conjunto de matrices  $3 \times 2$  con coeficientes enteros ( $M_{3 \times 2}(\mathbb{Z})$ )
- El conjunto de polinomios de grado exactamente igual a 3 con coeficientes reales.

¿Por qué?

## 1 Conjuntos libres y ligados

- Combinaciones lineales
- Dependencia e independencia lineal
- Rango de un conjunto de vectores

## 2 Espacios vectoriales de dimensión finita

- Espacios vectoriales
- **Sistema generador**
- Base de un espacio vectorial

- Dimensión y coordenadas de una base

## 3 Cambio de base

- El cambio de base
- Matriz de cambio de base

## 4 Subespacios vectoriales

- Concepto de subespacio vectorial

## 5 Bases ortogonales y ortonormales

- Método de diagonalización de Gram-Schmidt
- Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio

# Sistema generador

## Definición

Dado un conjunto de vectores  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \in E$  dicese que forman un sistema generador del espacio vectorial  $E$  si cualquier vector  $\vec{u} \in E$  se puede expresar como una combinación lineal de ellos, es decir:

$$\forall \vec{u} \in E, \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n : \vec{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{u}_i$$

# Sistema generador

## Ejercicio 1

- a Exprésese el vector  $(-5, 15)$  como una combinación lineal de  $(1, -3)$  y  $(2, -6)$ .
- b Exprésese el vector  $(a, b)$  como una combinación lineal de  $(1, -3)$  y  $(2, -6)$ .
- c ¿Se puede formar con los vectores  $(1, -3)$  y  $(2, -6)$  un sistema generador de  $\mathbb{R}^2$ ? ¿Por qué?

# Sistema generador

## Ejercicio 2

- a Exprésese el vector  $(4, -11)$  como una combinación lineal de  $(2, -1)$  y  $(1, 4)$ .
- b Exprésese el vector  $(a, b)$  como una combinación lineal de  $(2, -1)$  y  $(1, 4)$ .
- c ¿Se puede formar con los vectores  $(1, -3)$  y  $(2, -6)$  un sistema generador de  $\mathbb{R}^2$ ? ¿Por qué?
- d Obtégase el vector  $(-7, 3)$  como una combinación lineal de  $(2, -1)$  y  $(1, 4)$ .

# Sistema generador

## Ejercicio 3

- a Razónese si los vectores  $(1, 1)$ ,  $(-2, 3)$  y  $(0, -1)$  forman un sistema generador de  $\mathbb{R}^2$ .
- b Obténgase el vector  $(-7, 3)$  como una combinación lineal de  $(1, 1)$ ,  $(-2, 3)$  y  $(0, -1)$ .

# Sistema generador

## Ejercicio 4

- a Compruébese si los vectores del ejercicio 2,  $(2, -1)$  y  $(1, 4)$  son LI.
- b Compruébese si los vectores del ejercicio 3,  $(1, 1)$ ,  $(-2, 3)$  y  $(0, -1)$  son LI.

## 1 Conjuntos libres y ligados

- Combinaciones lineales
- Dependencia e independencia lineal
- Rango de un conjunto de vectores

## 2 Espacios vectoriales de dimensión finita

- Espacios vectoriales
- Sistema generador
- Base de un espacio vectorial

- Dimensión y coordenadas de una base

## 3 Cambio de base

- El cambio de base
- Matriz de cambio de base

## 4 Subespacios vectoriales

- Concepto de subespacio vectorial

## 5 Bases ortogonales y ortonormales

- Método de diagonalización de Gram-Schmidt
- Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio



# Base de un espacio vectorial

Cuando se tiene un conjunto de vectores que son sistema generador de un espacio vectorial  $E$  y sean además LI, dícese que estos vectores constituyen una base del espacio.

## Definición

Dícese que un conjunto de vectores  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \in E$  son una base de  $E$  si:

- $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$  es un sistema generador de  $E$ .
- $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$  son linealmente independientes.

Por ejemplo, los vectores del ejercicio 2 son una base de  $\mathbb{R}^2$ , pero en cambio los del ejercicio 3 no son una base de  $\mathbb{R}^2$ .

# Base de un espacio vectorial

## Teorema

Si  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \in E$  es una base del espacio vectorial  $E$ , entonces cualquier vector  $\vec{u} \in E$  se puede expresar como una combinación lineal de  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$  de manera única.

$$\forall \vec{u} \in E, \exists! \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} : \vec{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{u}_i$$

## Corolario

Todas las bases de un mismo espacio vectorial tienen el mismo número de vectores.

Por ejemplo, las bases de  $\mathbb{K}^2$  tienen 2 elementos, las de  $\mathbb{K}^3$  tienen 3...

# Base de un espacio vectorial

## Ejercicios

Determinése si los vectores  $(2, -4, 0)$ ,  $(1, 1, 1)$  y  $(-1, 2, 0)$  forman una base de  $\mathbb{R}^3$ .

Sol: no, ya que son LD.

## Ejercicios

Determinése si los vectores  $(2, 1, 0)$ ,  $(1, -1, 1)$  y  $(0, 2, -3)$  forman una base de  $\mathbb{R}^3$ .

Sol: sí, ya que son 3 vectores LI de  $\mathbb{R}^3$ .

## Base de un espacio vectorial

Un espacio vectorial tiene infinitas bases. En cada espacio vectorial hay una que tiene unas características especiales. La denominada base canónica.

### La base canónica

- En  $\mathbb{R}^2$ , la base canónica es  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  con

$$\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)$$

- En  $\mathbb{R}^3$ , la base canónica es  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  con

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$$

Nótese que los vectores de la base canónica son unitarios y ortogonales entre sí.

## 1 Conjuntos libres y ligados

- Combinaciones lineales
- Dependencia e independencia lineal
- Rango de un conjunto de vectores

## 2 Espacios vectoriales de dimensión finita

- Espacios vectoriales
- Sistema generador
- Base de un espacio vectorial

## ■ Dimensión y coordenadas de una base

## 3 Cambio de base

- El cambio de base
- Matriz de cambio de base

## 4 Subespacios vectoriales

- Concepto de subespacio vectorial

## 5 Bases ortogonales y ortonormales

- Método de diagonalización de Gram-Schmidt
- Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio

## Dimensión de una base

Como el número de elementos de una base de un espacio vectorial dado  $E$  es único, tiene sentido definir la dimensión de  $E$ .

### Dimensión de un espacio vectorial

Dado un espacio vectorial  $E$ , se define su dimensión  $\dim(E)$  como el número de vectores que conforman cualquiera de sus bases.

Por ejemplo,  $\mathbb{R}^2$  tiene dimensión 2 ya que las bases tienen 2 elementos,  $\mathbb{R}^3$  tiene dimensión 3, etc...

# Coordenadas de un vector en una base

## Coordenadas

Dado un espacio vectorial  $E$  con una base  $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$  y un vector  $\vec{u} \in E$ , se sabe que existen unos únicos escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  tales que:

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n$$

estos escalares se denominan coordenadas del vector  $\vec{u}$  en la base  $B$ .

$$\vec{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)_B$$

Cada vector tiene coordenadas únicas en cada base del espacio al que pertenece, pero como hay infinitas bases, tendrá infinitos conjuntos de coordenadas asociadas.

## Coordenadas de un vector en una base

### Ejercicios

Dadas las dos bases  $B_1 = \{(2, 4, 0), (1, 0, 1), (-1, 2, 0)\}$  y  $B_2 = \{(2, 1, 0), (1, -1, 1), (0, 2, -3)\}$  calcúlese las coordenadas del vector  $\vec{u} = (3, -5, 1)$  en ambas bases.

Sol

$$\vec{u} = \left( \frac{-1}{8}, 1, \frac{-9}{4} \right)_{B_1} = (-2, 7, 2)_{B_2}$$



## Coordenadas de un vector en una base

Si se nos facilitan las coordenadas de un vector sin especificar la base, se sobreentiende que se trata de la base canónica. También reciben el nombre de coordenadas cartesianas y son las que en el Tema 2 hemos definido como las componentes de un vector.

## 1 Conjuntos libres y ligados

- Combinaciones lineales
- Dependencia e independencia lineal
- Rango de un conjunto de vectores

## 2 Espacios vectoriales de dimensión finita

- Espacios vectoriales
- Sistema generador
- Base de un espacio vectorial

- Dimensión y coordenadas de una base

## 3 Cambio de base

- El cambio de base
- Matriz de cambio de base

## 4 Subespacios vectoriales

- Concepto de subespacio vectorial

## 5 Bases ortogonales y ortonormales

- Método de diagonalización de Gram-Schmidt
- Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio

## 1 Conjuntos libres y ligados

- Combinaciones lineales
- Dependencia e independencia lineal
- Rango de un conjunto de vectores

## 2 Espacios vectoriales de dimensión finita

- Espacios vectoriales
- Sistema generador
- Base de un espacio vectorial

- Dimensión y coordenadas de una base

## 3 Cambio de base

- El cambio de base
- Matriz de cambio de base

## 4 Subespacios vectoriales

- Concepto de subespacio vectorial

## 5 Bases ortogonales y ortonormales

- Método de diagonalización de Gram-Schmidt
- Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio

## Cambio de base

Se sabe que todo vector de un espacio vectorial tiene asociado un conjunto de escalares que dependen de la base y que se denominan coordenadas o componentes del vector en esa base. También hemos visto que estas coordenadas son únicas en cada base pero distintas cuando cambian de base.

Partiendo de este punto el problema que se nos plantea es el de calcular las coordenadas de un vector en cierta base  $\hat{B}$  dadas las coordenadas del mismo en otra base  $B$ .

Si una de las dos bases es la canónica ya hemos visto que el problema es relativamente sencillo, véase el último ejercicio de la sección anterior. Si las dos bases son arbitrarias, se necesitará conocer la relación entre ambas bases y la resolución será un poco más elaborada.

# Cambio de base

## Ejercicios

Dado el vector  $\vec{u}$  de coordenadas  $(-2, 3, 5)_B$  en la base:

$$B = \{(2, 4, 0), (1, 0, 1), (-1, 2, 0)\}$$

Calcúlense sus coordenadas en la base canónica  $C$ .

## Cambio de base

### Solución

$$\begin{aligned}(-2, 3, 5)_B &= -2 \cdot (2, 4, 0)_C + 3 \cdot (1, 0, 1)_C + 5 \cdot (-1, 2, 0)_C \\ &= (-6, 2, 3)_C = -6 \cdot (1, 0, 0) + 2 \cdot (0, 1, 0) + 3 \cdot (0, 0, 1)\end{aligned}$$

Sol

$$\vec{u} = (-6, 2, 3)_C$$

Donde  $C$  es la base canónica del espacio.

# Cambio de base

## Ejercicio

Dadas las bases  $B_u = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  y  $B_v = \{\vec{u}_v, \vec{u}_v, \vec{u}_v\}$  de un espacio vectorial de dimensión 3 sabemos que:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 &= 2\vec{u}_1 &- \vec{u}_2 &+ \vec{u}_3 \\ \vec{v}_2 &= &- \vec{u}_2 &+ 2\vec{u}_3 \\ \vec{v}_3 &= -\vec{u}_1 &+ \vec{u}_2 &- 3\vec{u}_3 \end{cases}$$

¿Cuáles son las coordenadas de los vectores  $\vec{v}_i$  en a base  $B_u$ ?

¿Y las de  $\vec{u}_i$  en la base  $B_v$ ? (Pista: empléese Gauss).

Calcúlense las coordenadas del vector  $\vec{x}$  en la base  $B_u$  sabiendo que en la base  $B_v$  tiene coordeadas  $(1, -1, 0)$ .

## Cambio de base

### Solución

Según la definición, las coordenadas de  $\vec{v}_i$  en  $B_u$ , son los escalares que acompañan a los vectores  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  que genera  $v_i$ :

$$\vec{v}_1 = 2\vec{u}_1 + (-1)\vec{u}_2 + 1\vec{u}_3 = (2, -1, 1)_{B_u}$$

$$\vec{v}_2 = 0\vec{u}_1 + (-1)\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3 = (0, -1, 2)_{B_u}$$

$$\vec{v}_3 = (-1)\vec{u}_1 + 1\vec{u}_2 + (-3)\vec{u}_3 = (-1, 1, -3)_{B_u}$$



## Cambio de base

### Solución

Para calcular las coordenadas de los vectores de  $B_u$  en la base  $B_v$ , se han de expresar los vectores  $\vec{u}_i$  como una combinación lineal de los vectores  $\vec{v}_i$ . Nótese que la relación del enunciado se provee con el orden cambiado. Queda hallar los  $\vec{u}_i$  en función de los  $\vec{v}_i$ , cosa que se puede hacer empleando Gauss con  $\vec{u}_i$  como incógnita y  $\vec{v}_i$  como términos independientes. La solución se obtiene al operar sistema:

$$\vec{u}_1 = \left( \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right), \vec{u}_2 = \left( -\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{4}{3} \right), \vec{u}_3 = \left( -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right)$$

## Cambio de base

### Solución

Se sabe que  $\vec{x} = (1, -1, 0)_{B_v} = 1\vec{v}_1 + (-1)\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$ ,

$$\begin{aligned}\vec{x} &= 1(2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3) + (-1)(-\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3) + 0(-\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 3\vec{u}_3) \\ &= 2\vec{u}_1 - \vec{u}_3 = (2, 0, -1)_{B_u}\end{aligned}$$

# Cambio de base

## Solución

Nótese pues que:

$$2\vec{u}_1 - \vec{u}_3 = \vec{v}_1 + (-1)\vec{v}_2$$

Así se puede decir que si se conocen explícitamente las coordenadas de  $\vec{v}_i$  i de  $\vec{u}_i$  en la base canónica, y las sustituimos en la expresión anterior, se obtendrá una igualdad: las coordenadas del vector  $\vec{x}$  en la base canónica.

# Cambio de base

## Ejercicios

Dadas las bases  $B_u = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  y  $B_v = \{\vec{u}_v, \vec{u}_v, \vec{u}_v\}$  de un espacio vectorial de dimensión 3 y sabiéndose que:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 &= 2\vec{u}_1 &- \vec{u}_2 &+ \vec{u}_3 \\ \vec{v}_2 &= &- \vec{u}_2 &+ 2\vec{u}_3 \\ \vec{v}_3 &= -\vec{u}_1 &+ \vec{u}_2 &- 3\vec{u}_3 \end{cases}$$

Considérese el vector  $\vec{x} = (2, 0, -1)_{B_u}$  y calcúlense sus coordenadas en la base  $B_v$ .

# Cambio de base

## Solución

$$\begin{aligned}\vec{x} &= a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 = \\ a(2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3) + b(-\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3) + c(-\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 3\vec{u}_3) &= \\ (2a - c)\vec{u}_1 + (-a - b + c)\vec{u}_2 + (a + 2b - 3c)\vec{u}_3\end{aligned}$$

Debería ser:

$$\vec{x} = 2\vec{u}_1 + 0\vec{u}_2 + (-1)\vec{u}_3$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales resultante de igualar ambas expresiones (ya que las coordenadas de un vector en una base son únicas) se obtiene:

$$\vec{x} = (1, -1, 0)_{B_v} = (2, 0, -1)_{B_u}$$

# Cambio de base

En los ejercicios anteriores se ha visto que la notación para expresar las coordenadas de un vector se puede hacer en forma de matriz fila o columna. Si se conocen las coordenadas de un vector en una base se pueden emplear las operaciones matriciales ya conocidas para pasar de una base a otra sin mayor complicación.

# Cambio de base

Ténganse los vectores de la base  $B_V$  en la base  $B_U$  dados por:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 &= 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3 \\ \vec{v}_2 &= \phantom{2\vec{u}_1} - \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3 \\ \vec{v}_3 &= -\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 3\vec{u}_3 \end{cases}$$

## Cambio de base

Expresión que en forma matricial tiene la forma (I):

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vec{u}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix}$$

En la matriz superior, las filas son las coordenadas de los vectores  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  i  $\vec{v}_3$  en la base  $B_u$ . En la matriz inferior, las columnas son las coordenadas de los vectores  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  i  $\vec{v}_3$  en la base  $B_u$ .



## Cambio de base

Por otro lado, se puede expresar el vector  $\vec{x}$  en ambas bases de la siguiente manera:

$$\vec{x} = 1\vec{v}_1 + (-1)\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3 = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_v} = (1, -1, 0) \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = 2\vec{u}_1 + 0\vec{u}_2 + (-1)\vec{u}_3 = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{B_u} = (2, 0, -1) \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vec{u}_3 \end{pmatrix}$$

## Cambio de base

Como ya se sabe, el resultado de operar en ambas expresiones serían las coordenadas del vector en la base canónica (por unicidad), por lo tanto se pueden igualar las expresiones:

$$\vec{x} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_v} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{B_u}$$

o

$$\vec{x} = (2, 0, -1) \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vec{u}_3 \end{pmatrix} = (1, -1, 0) \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{pmatrix}$$

$$2\vec{u}_1 - \vec{u}_3 = 1\vec{v}_1 + (1)\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3 \text{ (eq 2)}$$

## Cambio de base

Empleando las relaciones establecidas por (I):

$$(\vec{u}_1 \quad \vec{u}_2 \quad \vec{u}_3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = (\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3)$$

Y sustituyendo en la ecuación (II):

$$\vec{x} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_v} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{B_u}$$

Se obtiene:

## Cambio de base

Se obtiene:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_v} =$$
$$\begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{B_u}$$

Si se comparan ambos miembros se halla que por unicidad de coordenadas de un vector en la misma base (en este caso  $B_u$ ):

# Cambio de base

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{B_u}$$

## 1 Conjuntos libres y ligados

- Combinaciones lineales
- Dependencia e independencia lineal
- Rango de un conjunto de vectores

## 2 Espacios vectoriales de dimensión finita

- Espacios vectoriales
- Sistema generador
- Base de un espacio vectorial

- Dimensión y coordenadas de una base

## 3 Cambio de base

- El cambio de base
- Matriz de cambio de base

## 4 Subespacios vectoriales

- Concepto de subespacio vectorial

## 5 Bases ortogonales y ortonormales

- Método de diagonalización de Gram-Schmidt
- Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio

## Cambio de base

### En general

Dado un vector  $\vec{x}$  de coordenadas  $X_v$  (vector columna) en la base  $B_v$  (vector fila) y las coordenadas  $X_u$  (vector columna) en la base  $B_u$  (vector fila) entonces se puede escribir:

$$\vec{x} = B_v \cdot X_v = B_u \cdot X_u$$

Si la relación entre las bases dadas por  $B_u \cdot P = B_v$  se sustituyen en la expresión del vector  $\vec{x}$ :

$$\vec{x} = (B_u \cdot P) \cdot X_v = B_u \cdot X_u$$

# Cambio de base

## En general

Empleando la propiedad asociativa:

$$\vec{x} = B_u \cdot (P \cdot X_v) = B_u \cdot X_u$$

Se obtiene que  $X_u = P \cdot X_v$

La matriz  $P$  se denomina la matriz de cambio de base  $B_v$  a la base  $B_u$ .



# Cambio de base

The diagram illustrates the change of basis from  $B_v$  to  $B_u$  using the transition matrix  $P$ .

At the top, the basis matrices are shown:  $B_v$  (blue) and  $B_u$  (pink), connected by a red arrow labeled  $P$ .

Below this, a yellow box contains the equation:  $B_v = B_u \cdot P$ . A curved arrow points from this box to the  $B_v$  term in the equation below.

The main equation shows the transformation of a vector  $\vec{x}$ :  
$$\vec{x} = B_v \cdot X_v = B_u \cdot X_u$$

Below this, the equation is expanded by substituting the expression for  $B_v$  from the yellow box:  
$$\vec{x} = \underbrace{(B_u \cdot P)}_{B_v} \cdot X_v = B_u \cdot X_u$$

To the right of this equation, another yellow box contains the equation for the change of coordinates:  $X_u = P \cdot X_v$ .

# Matriz de cambio de base

## Matriz de cambio de base

Dado un espacio vectorial de dimensión  $n$  y dos bases diferentes  $B_u$  y  $B_v$ . Se denomina matriz de cambio de base de  $B_v$  a  $B_u$  a la matriz  $P$  las columnas de la cual son las coordenadas de la base  $B_v$  en la base  $B_u$ .

## Matriz de cambio de base

### Ejercicios

Dadas las bases  $B_u = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  y  $B_v = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ , y el vector  $\vec{x}$  de coordenadas  $(2, 1, 0)$  en la base  $B_v$ , calcúlese sus coordenadas en la base  $B_u$  sabiendo que:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 &= 2\vec{u}_1 &- \vec{u}_2 &+ \vec{u}_3 \\ \vec{v}_2 &= &- \vec{u}_2 &+ 2\vec{u}_3 \\ \vec{v}_3 &= -\vec{u}_1 &+ \vec{u}_2 &- 3\vec{u}_3 \end{cases}$$

# Matriz de cambio de base

Sol

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Donde  $B_v = B_u \cdot P$

$$\vec{x} = (4, -3, 4)_{B_u}$$

# Matriz de cambio de base

## Ejercicios

Exprésese el vector  $(-1, 0, 4)$  de la base canónica en la base  $B = \{(1, 3, -1), (-1, 1, 0), (0, 2, 0)\}$  de  $\mathbb{R}^3$  calculando previamente la matriz de cambio de base necesaria.

Pista:  $P$  es la matriz que porta la base canónica a  $B$ , la cual tiene como columnas los vectores de la base canónica expresados en la base  $B$ . este problema es más sencillo si se busca la matriz  $Q$  que porta  $B$  a la base canónica (sus columnas serán los vectores de  $B$  en la base canónica que son ellos mismos) y que resulta ser la inversa de  $P$ .

## Matriz de cambio de base

Sol

$$P = Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}$$

Donde  $X_B = P \cdot X_e$

$$\vec{x} = \left( -4, -3, \frac{15}{2} \right)_B$$

## 1 Conjuntos libres y ligados

- Combinaciones lineales
- Dependencia e independencia lineal
- Rango de un conjunto de vectores

## 2 Espacios vectoriales de dimensión finita

- Espacios vectoriales
- Sistema generador
- Base de un espacio vectorial

- Dimensión y coordenadas de una base

## 3 Cambio de base

- El cambio de base
- Matriz de cambio de base

## 4 Subespacios vectoriales

- Concepto de subespacio vectorial

## 5 Bases ortogonales y ortonormales

- Método de diagonalización de Gram-Schmidt
- Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio

## 1 Conjuntos libres y ligados

- Combinaciones lineales
- Dependencia e independencia lineal
- Rango de un conjunto de vectores

## 2 Espacios vectoriales de dimensión finita

- Espacios vectoriales
- Sistema generador
- Base de un espacio vectorial

- Dimensión y coordenadas de una base

## 3 Cambio de base

- El cambio de base
- Matriz de cambio de base

## 4 Subespacios vectoriales

- Concepto de subespacio vectorial

## 5 Bases ortogonales y ortonormales

- Método de diagonalización de Gram-Schmidt
- Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio



# Subespacio vectorial

## Definición

Sea  $F \subseteq E$  un subconjunto no vacío del espacio vectorial  $E$  sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$ . Dícese que  $F$  es un subespacio vectorial de  $E$  si y solo si se verifica:

- La suma de dos elementos de  $F$  es otro elemento  $F$

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in F \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in F$$

- El producto de un escalar por un elemento  $F$  es otro elemento de  $F$

$$\forall \vec{x} \in F, \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha \vec{x} \in F$$

# Subespacio vectorial

## Subespacios triviales

Si  $E$  es un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial, se verifica siempre que  $E$  y  $\{0\}$  son subespacios vectoriales de  $E$ . Se denominan subespacios vectoriales triviales o impropios.

## Corolario

Si  $S$  es un subespacio vectorial de  $E$ , entonces  $\vec{0} \in S$ .

Este corolario solo se puede emplear recíprocamente ya que si se comprueba que por alguna razón  $\vec{0} \notin S$ , entonces este conjunto no puede ser nunca un subespacio vectorial.

# Subespacio vectorial

## Ejercicios

Compruébese que el siguiente conjunto es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$ :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$$

Nota: compruébese primero si  $F$  contiene el vector cero y, si así es, compruébense las dos condiciones de la definición de subespacio.

# Subespacio vectorial

## Ecuaciones de un subespacio vectorial

Un subespacio vectorial  $F$  de un espacio vectorial  $E$  queda identificado si:

- Se conoce una base de  $F$
- Se conoce un sistema generador de  $F$
- A partir de sus ecuaciones paramétricas
- A partir de las ecuaciones cartesianas o implícitas (un sistema homogéneo las incógnitas del cual son las coordenadas del vector genérico).

# Subespacio vectorial

## Ejercicios

Identifíquese el subespacio  $F$  del ejercicio anterior de todas las formas posibles:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$$

# Subespacio vectorial

## Obtener una base de un subespacio vectorial

- Se parte de las ecuaciones paramétricas del subespacio.
- Se expresa el vector genérico como combinación lineal de vectores.
  - En primer lugar se consiguen tantos sumandos como parámetros tenga el subespacio y se separan en vectores diferentes
  - Se extrae un escalar de cada uno de los vectores y se deja expresado como combinación lineal
- Los vectores que aparecen en la combinación lineal son un sistema generador del subespacio.
- Se extrae del conjunto de vectores un subconjunto linealmente independiente con tantos vectores como indique el rango. Se tiene así una base del subespacio.

# Subespacio vectorial

## Ejercicios

Obtégase la dimensión, las ecuaciones paramétricas y una base del subespacio  $F_1$  dado por:

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 3z = 0, -x + y - z = 0, x - 2y = 0\}$$

Pista: Comiéntese por hacer Gauss al sistema de ecuaciones lineales.

# Subespacio vectorial

## Ejercicios

Obtégase la dimensión, las ecuaciones paramétricas y una base del subespacio  $F_2$  dado por:

$$F_2 = \{(\alpha + \beta, \alpha + \beta, \alpha + \beta + \gamma, 0) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

Pista: Comiéntese por hacer Gauss al sistema de ecuaciones lineales.



## 1 Conjuntos libres y ligados

- Combinaciones lineales
- Dependencia e independencia lineal
- Rango de un conjunto de vectores

## 2 Espacios vectoriales de dimensión finita

- Espacios vectoriales
- Sistema generador
- Base de un espacio vectorial

- Dimensión y coordenadas de una base

## 3 Cambio de base

- El cambio de base
- Matriz de cambio de base

## 4 Subespacios vectoriales

- Concepto de subespacio vectorial

## 5 Bases ortogonales y ortonormales

- Método de diagonalización de Gram-Schmidt
- Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio

# Bases ortogonales y ortonormales

## Base ortogonal

Dada una base  $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$  de un espacio vectorial  $E$ , dicese ortogonal si sus elementos son ortogonales dos a dos:

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0 \forall i \neq j$$

## Base ortonormal

Dada una base  $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$  de un espacio vectorial  $E$ , dicese ortonormal si sus elementos son ortogonales dos a dos y además son unitarios:

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0 \quad \forall i \neq j$$

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i = 1 \quad \forall i$$

## 1 Conjuntos libres y ligados

- Combinaciones lineales
- Dependencia e independencia lineal
- Rango de un conjunto de vectores

## 2 Espacios vectoriales de dimensión finita

- Espacios vectoriales
- Sistema generador
- Base de un espacio vectorial

- Dimensión y coordenadas de una base

## 3 Cambio de base

- El cambio de base
- Matriz de cambio de base

## 4 Subespacios vectoriales

- Concepto de subespacio vectorial

## 5 Bases ortogonales y ortonormales

- Método de diagonalización de Gram-Schmidt
- Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio

# Método de diagonalización de Gram-Schmidt

Este método permite contruir una base ortogonal a partir de una base cualquiera del espacio vectorial. Primero se realizará la contrucción para un espacio vectorial de dos dimensiones:

# Método de diagonalización de Gram-Schmidt

## Caso 2D

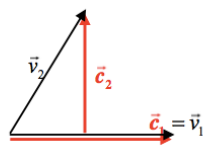
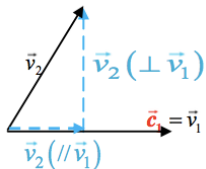
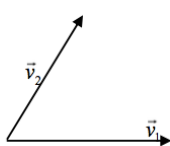
Sea  $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  una base de un espacio vectorial de dos dimensiones. A partir de los vectores de esta base se construirá una nueva  $B = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$  que será ortogonal y del mismo espacio.

- 1 Se toma  $\vec{w}_1 = \vec{v}_1$  como primer vector de la nueva base.
- 2 El segundo vector será una combinación lineal  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  para asegurarse de que la nueva base genera el mismo subespacio vectorial. Así, se descompone:

$$\vec{v}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 : \vec{u}_1 \parallel \vec{v}_1 \quad \vec{u}_2 \perp \vec{v}_1$$

En particular  $\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - t\vec{v}_1 = \vec{v}_2 - t\vec{w}_1$  y será el siguiente vector de nuestra nueva base:  $\vec{w}_2$ . Solo resta encontrar  $t$ .

# Método de diagonalización de Gram-Schmidt



# Método de diagonalización de Gram-Schmidt

## Caso 2D

Se tiene que  $\vec{w}_1 \perp \vec{w}_2$ . Se impone la condición de que  $\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - t\vec{w}_1$  y el producto escalar con  $\vec{w}_1 = \vec{v}_1$  ha de ser cero:

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = \vec{w}_1 \cdot (\vec{v}_2 - t\vec{w}_1) = \vec{w}_1 \cdot \vec{v}_2 - \vec{w}_1 \vec{w}_1 = 0$$

Por lo tanto:

$$t = \frac{\vec{w}_1 \cdot \vec{v}_2}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1}$$

$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{w}_1 \cdot \vec{v}_2}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1} \vec{w}_1$$

Entonces  $B_r = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$  es una base ortogonal que genera el mismo subespacio que  $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ .

# Método de diagonalización de Gram-Schmidt

## Caso general

Sea  $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  una base de un espacio vectorial de  $n$  dimensiones  $E$ . A partir de los vectores de esta base se construirá una nueva  $B_r = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n\}$  que será ortogonal y del mismo espacio.

- 1 Se toma  $\vec{w}_1 = \vec{v}_1$  como primer vector de la nueva base.
- 2 El segundo vector será una combinación lineal  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  de la forma  $\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - t\vec{w}_1$ , al cual se impondrá la condición de que  $\vec{w}_1 \perp \vec{w}_2$ . Operando se obtiene:



# Método de diagonalización de Gram-Schmidt

## Caso general

$$t = \frac{\vec{w}_1 \cdot \vec{v}_2}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1}$$

$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{w}_1 \cdot \vec{v}_2}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1} \vec{w}_1$$

# Método de diagonalización de Gram-Schmidt

## Caso general

Sea  $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  una base de un espacio vectorial de  $n$  dimensiones  $E$ . A partir de los vectores de esta base se construirá una nueva  $B_r = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n\}$  que será ortogonal de  $E$ .

- 3 Para calcular el tercer vector, se procede de la misma forma: el tercer vector  $\vec{w}_3$  será una combinación lineal de  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  y  $\vec{v}_3$  de la forma  $\vec{w}_3 = \vec{v}_3 - t_1 \vec{w}_1 - t_2 \vec{w}_2$ , a la cual se impondrán las condiciones  $\vec{w}_1 \perp \vec{w}_3$  i  $\vec{w}_2 \perp \vec{w}_3$ . Operando se obtiene:

# Método de diagonalización de Gram-Schmidt

## Caso general

$$t_1 = \frac{\vec{w}_1 \cdot \vec{v}_3}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1} \quad t_2 = \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{v}_3}{\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2}$$
$$\vec{w}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\vec{w}_1 \cdot \vec{v}_3}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1} \vec{w}_1 - \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{v}_3}{\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2} \vec{w}_2$$

# Método de diagonalización de Gram-Schmidt

## Caso general

4 Análogamente:

$$\vec{w}_4 = \vec{v}_4 - \frac{\vec{w}_1 \cdot \vec{v}_4}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1} \vec{w}_1 - \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{v}_4}{\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2} \vec{w}_2 - \frac{\vec{w}_3 \cdot \vec{v}_4}{\vec{w}_3 \cdot \vec{w}_3} \vec{w}_3$$

n Y con el fin de hallar el último:

$$\vec{w}_n = \vec{v}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\vec{w}_i \cdot \vec{v}_n}{\vec{w}_i \cdot \vec{w}_i} \vec{w}_i$$

n+1 Finalmente, si se designa una base ortonormal, basta dividir cada vector por su norma.

# Método de diagonalización de Gram-Schmidt

## Ejercicios

Calcúlese una base ortogonal del subespacio vectorial generado por los vectores

$$\vec{u}_1 = (1, 1, 0, 1), \vec{u}_2 = (0, 0, 1, 1), \vec{u}_3 = (2, 0, -1, 0)$$

Sol:

$$(1, 1, 0, 1), (1, 1, -3, -2), (1, -1, 0, 0)$$

## 1 Conjuntos libres y ligados

- Combinaciones lineales
- Dependencia e independencia lineal
- Rango de un conjunto de vectores

## 2 Espacios vectoriales de dimensión finita

- Espacios vectoriales
- Sistema generador
- Base de un espacio vectorial

- Dimensión y coordenadas de una base

## 3 Cambio de base

- El cambio de base
- Matriz de cambio de base

## 4 Subespacios vectoriales

- Concepto de subespacio vectorial

## 5 Bases ortogonales y ortonormales

- Método de diagonalización de Gram-Schmidt
- Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio

# Vector ortogonal a un subespacio

## Vector ortogonal a un subespacio

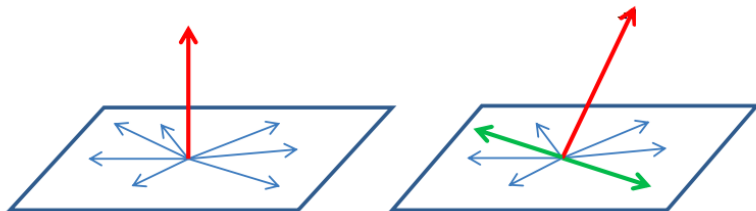
Un vector  $\vec{u} \in E$  es ortogonal a un subespacio vectorial  $S \subseteq E$  si y solo si:

$$\vec{u} \cdot \vec{x} = 0 \quad \forall \vec{x} \in S$$

## Teorema

Un vector  $\vec{u} \in E$  es ortogonal a un subespacio vectorial  $S \subseteq E$  si y solo si es ortogonal a todos los vectores de una base de  $S$ .

# Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio





# Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio

## Teorema

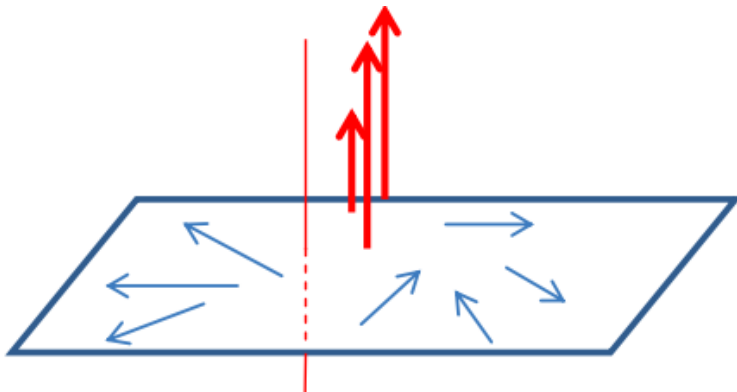
Dos subespacios  $V$  y  $W$  de  $E$  son ortogonales si:

$$\forall \vec{x} \in V \quad \forall \vec{y} \in W \Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

## Teorema

Para que dos subespacios  $V$  y  $W$  sean ortogonales, es suficiente con que los vectores de una base de  $V$  sean ortogonales a los vectores de una base de  $W$ .

# Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio



# Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio

## Proyección ortogonal

Como se recordará, el vector proyección ortogonal de un vector  $\vec{u}$  sobre otro  $\vec{v}$ , se expresa como:

$$P_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{v}||^2} \vec{v}$$

# Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio

## Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio

Dado  $S$  un subespacio vectorial de un espacio vectorial  $E$ , todo vector  $\vec{u} \in E$  se descompone de manera única en:

$$\vec{u} = \vec{u}_S + \vec{u}_0$$

Con  $\vec{u}_S \in S$  y  $\vec{u}_0 \in S^\perp$ . En particular, el vector  $\vec{u}_S \in S$  se denomina vector proyección ortogonal de  $\vec{u}$  sobre  $S$ .

# Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio

## Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio

Si se toma en  $S$  una base ortogonal  $\{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_r\}$ , la proyección de  $\vec{u}$  sobre  $S$  viene dada por:

$$P_{\vec{u}}(\vec{v}) = \vec{u}_S = \sum_{i=1}^r \frac{\vec{u} \cdot \vec{s}_i}{\|\vec{s}_i\|^2} \vec{s}_i$$