Exercicis Introducció a la Matemàtica discreta

1. Donats els conjunts $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, b, d, f, g\}$, $C = \{b, c, e, g, h\}$ i $D = \{d, e, f, g, h\}$, trobau:

$$A \cup B;\ B \cap C;\ C - D;\ A \cap (B \cup D);\ B - (C \cup D);$$

$$B \cap C \cap D;\ (A \cap D) \cup B;\ (C - A) - D.$$

2. Provau, mitjançant un contraexemple, que de la igualtat $A \cap B = A \cap C$ no es dedueix que $B = C$:

3. Donau tres conjunts A, B, C tals que $A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap C$.

4. Provau les lleis d'absorció:

$$A \cup (A \cap B) = A; \quad A \cap (A \cup B) = A.$$

5. Provau que: $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

6. Aplicau les propietats de les operacions de conjunts per a provar:

a) $A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$.
b) $A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B) = A \cup B$.
c) $A \cup B = B \cup (A - B)$ i $B \cap (A - B) = \emptyset$.
d) $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ i $(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$.
e) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.
f) $(A - B) = A - (A \cap B)$.
g) $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$.
h) $B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B)$.

7. Siguin A i B subconjunts d'un univers U, demostrau:

a) $A \cup B = A \cap B \Longleftrightarrow A = B$.
b) $A \cap B = A \Longleftrightarrow A \subseteq B$.

7. Donau en forma canònica disjuntiva les funcions següents:

1. $f_1(x, y, z) = x\overline{(\overline{y}z)}$
2. $f_2(x, y, z) = z(\overline{x} + y) + \overline{y}$
3. $f_3(x, y, z) = \overline{(\overline{x} + y)} + \overline{x}y$
4. $f_4(x, y, z) = x(x\overline{y} + \overline{x}y + \overline{y}z)$
5. $f_5(x, y, z) = (x + \overline{y}z)(y + \overline{z})$
6. $f_6(x, y, z) = \overline{(\overline{x} + y)} + \overline{y}z$
7. $f_7(x, y, z) = \overline{(\overline{x}y)}(\overline{x} + xy\overline{z})$
8. $f_8(x, y, z) = \overline{(x + y)}\ \overline{(x\overline{y})}$
9. $f_9(x, y, z) = y\overline{(x + yz)}$.

8. En aquest exercici, per a cada expressió booleana es dóna l'expressió conjuntista equivalent. Simplificau les expressions:

1. $(a+b)\overline{a}\,\overline{b}$; $(A \cup B) \cap A^c \cap B^c$ (Sol: $0; \emptyset$)
2. $abc + \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$; $(A \cap B \cap C) \cup A^c \cup B^c \cup C^c$ (Sol: $1; U$)
3. $ab + [c(\overline{a} + \overline{b})]$; $(A \cap B) \cup [C \cap (A^c \cup B^c)]$ (Sol: $ab + c; (A \cap B) \cup C$)
4. $(a + \overline{a}b)(b + bc)$; $[A \cup (A^c \cap B)] \cap [B \cup (B \cap C)]$ (Sol: $b; B$)
5. $[\overline{(\overline{a}\,\overline{b})} + c]\overline{(a + \overline{b})}$; $[(A^c \cap B^c)^c \cup C] \cap (A \cup B^c)^c$ (Sol: $\overline{a}b; A^c \cap B$)
6. $(a + \overline{b})(\overline{a} + b)(\overline{a} + \overline{b})$; $(A \cup B^c) \cap (A^c \cup B)(A^c \cup B^c)$ (Sol: $\overline{a}\,\overline{b}; (A^c \cup B^c)$)

9. Simplificau les funcions booleanes donades a la taula següent:

x	y	z	F_1	F_2	F_3	F_4
1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	0