Capítulo 4

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GRAFOS

La teoría de grafos es una disciplina antigua con muchas aplicaciones modernas. Los grafos se emplean para estudiar la estructura de la red de Internet; para determinar si dos ordenadores están conectados; para determinar el camino más corto entre dos ciudades en una red de transporte. Los grafos son estructuras discretas que constan de vértices y de aristas que conectan entre sí esos vértices.

4.1. Terminología básica

Definición 4.1. *Un **grafo simple** $G = (V, E)$, es una pareja formada por un conjunto no vacío de vértices V y de un conjunto E de pares no ordenados de vértices diferentes llamados aristas. Un grafo que posea n vértices es un grafo de orden n o un n-grafo.*

Ejemplo 4.1. *Sea una red de ordenadores y de líneas telefónicas que conectan estos ordenadores. Representamos cada ordenador mediante un punto y cada línea telefónica mediante un segmento, tal como se muestra en la figura. En este ejemplo $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y $E = \{ab, ac, bc, cd, de, df, dg, ef, fg\}$.*

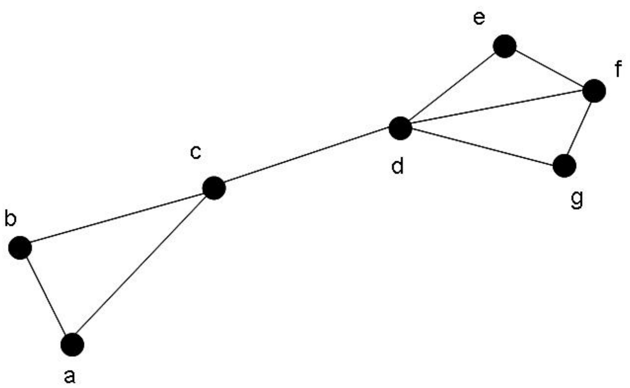


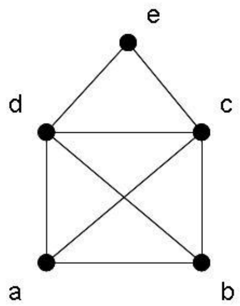
Figura 4.1: Una red informática

Cuando hay mucho tráfico de información puede haber líneas telefónicas múltiples entre los ordenadores de la red. Los grafos simples no bastan para modelar la red.

Definición 4.2. *Un **multigrafo** $G = (V, E)$, consta de un conjunto no vacío de vértices V y de un multiconjunto de aristas E. Una arista $e = \{u, v\}$ une los vértices u y v, para simplificar la notación las aristas se indican uv (uv y vu indican la misma arista). Se dice que las aristas e_1 y e_2 son aristas múltiples o paralelas si unen los mismos vértices. En el caso de que $u = v$, la arista recibe el nombre de **bucle**.*
Dos vértices u y v de un grafo son vértices adyacentes si uv es una arista del grafo. Si $e = uv$, se dice que e es incidente con los vértices u y v; o que la arista e conecta u y v; o que u y v son los extremos de la arista e.

Todo grafo simple es un multigrafo. No todos los multigrafos son grafos simples, ya que en un multigrafo puede haber dos o más aristas conectando un mismo par de vértices. Los **pseudografos** son más generales que los multigrafos, ya que los pseudografos admiten bucles, aristas que conectan un vértice consigo mismo.

Ejemplo 4.2. *El grafo $G = (V, E)$ con $V = \{a, b, c, d, e\}$ y $E = \{ab, ac, ae, bc, be, cd, ce, de\}$ es de orden 5 y tiene 8 aristas, es decir, su medida es 8. Una posible representación gráfica es:*



Definición 4.3. *El **grado de un vértice** v de un grafo $G = (V, E)$ es el número de aristas incidentes en él, hay que tener en cuenta que cada bucle contribuye con dos unidades al grado del vértice. Se representa por $\delta(v)$. A los vértices de grado cero se les llama vértices **aislados**. Los vértices de grado uno son vértices **hoja** o colgantes.*

Teorema 4.1. *Sea $G = (V, E)$ un grafo con m aristas. Entonces,*

$$2m = \sum_{v \in V} \delta(v)$$

Demostración. Cada arista contribuye con dos unidades a la suma de los grados de los vértices, ya que cada arista es incidente con dos vértices. Los bucles contribuyen con dos unidades al grado de su único extremo. □

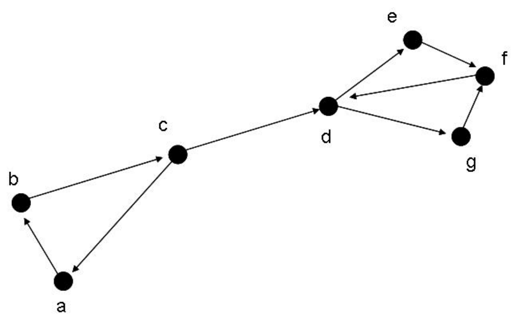
Corolario 4.1. *Todo grafo tiene un número par de vértices de grado impar.*

4.2. Grafos Dirigidos

Hasta ahora hemos visto grafos no dirigidos, cuyos vértices están conectados por aristas, pares no ordenados de vértices. En ocasiones, existe la necesidad de asignar un sentido a las aristas de los grafos.

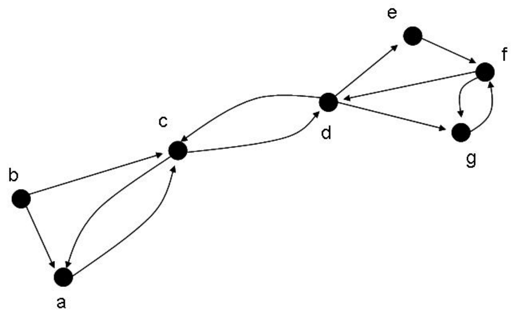
Definición 4.4. *Un **grafo dirigido o digrafo** $G = (V, E)$ consta de un conjunto V de vértices y de un conjunto E de arcos, que son pares ordenados de elementos de V. Gráficamente, utilizamos una flecha desde u a v para indicar la dirección del arco uv.*

Ejemplo 4.3. *Sea una red de ordenadores y de líneas telefónicas unidireccionales que conectan estos ordenadores. Representamos cada ordenador mediante un punto y cada línea telefónica unidireccional mediante una flecha, tal como se muestra en la figura.*



Como en el caso de grafos no dirigidos, también son aceptados los arcos con multiplicidad y los bucles.

Definición 4.5. *Un* ***multigrafo dirigido*** $G = (V, E)$, *consta de un conjunto no vacío de vértices* V *y de un multiconjunto de arcos* E. *Un arco* uv *va desde el vértice* u *al* v, *se dice que los arcos* e_1 *y* e_2 *son arcos múltiples o paralelas si unen los mismos vértices. Los* ***pseudografos dirigidos*** *son más generales que los multigrafos, ya que los pseudografos también admiten bucles, arcos que conectan un vértice consigo mismo.*



Hay muchas propiedades de un grafo que no dependen de la dirección de las aristas. Al grafo no dirigido que resulta de ignorar las direcciones de las aristas se le llama **grafo no dirigido subyaciente**.
En un digrafo distinguimos entre el grado entrante al vértice u ($\delta_{in}(u)$) y el grado saliente del vértice ($\delta_{out}(u)$). El **grado entrante** o de entrada al vértice u indica el número de arcos que tienen al vértice u como vértice terminal. El **grado saliente** o de salida al vértice u indica el número de arcos que tiene el vértice u como vértice inicial. Un bucle contribuye con una unidad tanto al grado entrante como al grado saliente del vértice.

Teorema 4.2. *Si* $G = (V, E)$ *es un digrafo, entonces*

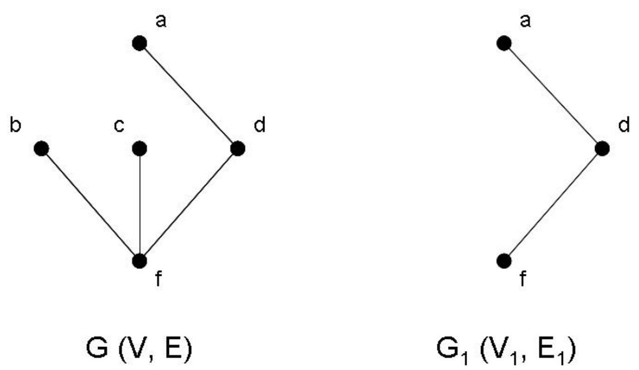
$$\sum_{u \in V} \delta_{in}(u) = \sum_{u \in V} \delta_{out}(u) = |E|$$

4.3. Grafos obtenidos a partir de otros

En ocasiones sólo necesitamos una parte de un grafo para resolver un problema o combinar dos o más grafos de varias formas.

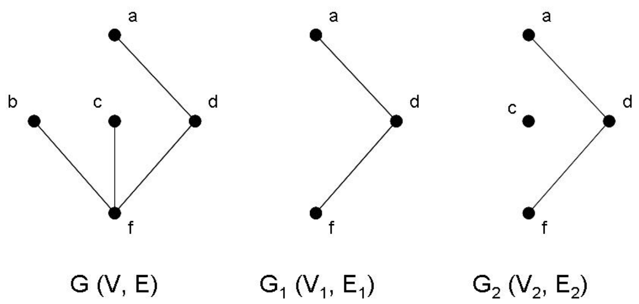
Definición 4.6. *Sea* $G = (V, E)$ *un grafo, decimos que* $G_1 = (V_1, E_1)$ *es un* ***subgrafo*** *de* G *si* $V_1 \subseteq V$ *y* $E_1 \subseteq E$, *las aristas de* E_1 *conectan vértices de* V_1. *Es decir,* G_1 *se obtiene eliminando vértices y aristas de* G. *Cuando* $V_1 = V$, *se eliminan únicamente aristas, se dice que* G_1 *es un* ***subgrafo maximal*** *de* G.

Ejemplo 4.4. *En este caso,* G_1 *es un subgrafo de* G.



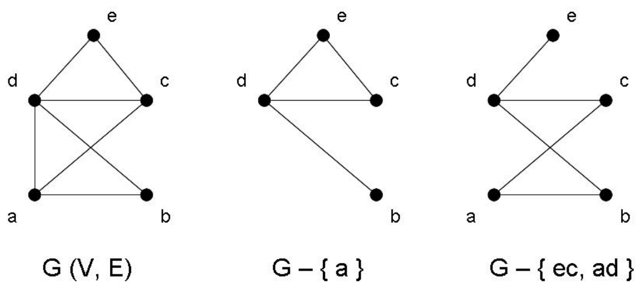
Definición 4.7. *Sea* $G = (V, E)$ *un grafo, dado* $U \subseteq V$) *llamamos* ***subgrafo de*** G ***inducido por*** U *a aquel grafo cuyos vértices forman* U *y con aristas de* E *que tienen extremos en* U.

Ejemplo 4.5. *Volviendo al ejemplo anterior,* G_1 *es un subgrafo de* G *inducido por* $U = \{a, d, f\}$. *Las aristas* ad *y* df *de* G *son también aristas de* G_1 *formadas a partir de los vértices de* U. *Sin embargo* G_2 *no es un subgrupo inducido por* $U' = \{a, c, d, f\}$ *ya que falta la arista* cf.



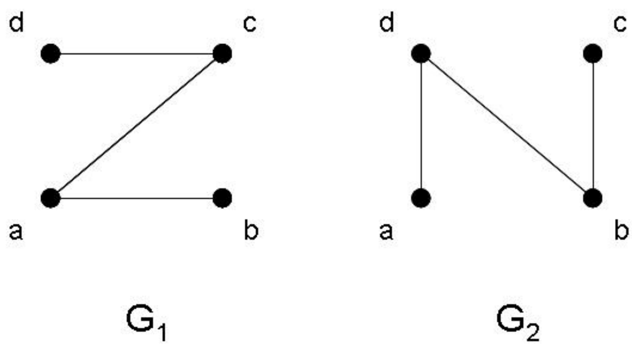
Definición 4.8. *Sea v un vértice de un grafo $G(V,E)$, el subgrafo $G_1 = G - \{v\}$ posee el conjunto de vértices $V_1 = V - \{v\}$ y el subconjunto de aristas $E_1 \subseteq E$ que no contiene las aristas incidentes con el vértice v.*
Dado un grafo $G(V,E)$, sea $W \subset V$ el subgrafo $G - W$ es el obtenido al eliminar los vértices de W y sus aristas incidentes.
Dado un grafo $G(V,E)$, sea $F \subset E$ el subgrafo $G - F$ es el obtenido al eliminar las aristas de F manteniendo el conjunto de vértices.

Ejemplo 4.6. *Dado el grafo $G(V,E)$ de la figura, obtener $G - \{a\}$ y $G - \{ec, ad\}$.*



Definición 4.9. *Dado un grafo $G = (V,E)$, el grafo complementario de G es $\overline{G} = (V, \overline{E})$, dos vértices son adyacentes en $\overline{G}$ si y sólo si no lo son en G.*

Ejemplo 4.7. *Los grafos G_1 y G_2 son complementarios.*



Definición 4.10. *Dados dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ llamamos grafo unión de G_1 y G_2, $G_1 cup G_2$, al grafo cuyo conjunto de vértices es $V_1 \cup V_2$ y cuo conjunto de aristas es $E_1 \cup E_2$. Este nuevo grafo contiene todos los vértices y todas las aristas de G_1 y G_2.*

4.4. Representación matricial de grafos

Existen dos tipos de matrices que son muy útiles para la representación de grafos: la matriz de adyacencia y la matriz de incidencia.

Definición 4.11. *Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con n vértices $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, la* ***matriz de adyacencia*** *de G es una matriz $n \times n$, $A = [a_{ij}]$, tal que*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \text{ es arista de } G \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

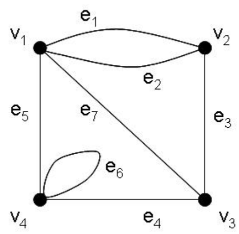
Definición 4.12. *Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con n vértices $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y m aristas $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, la* ***matriz de incidencia*** *de G es una matriz de orden $n \times m$, $M = [m_{ij}]$, tal que*

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la arista } e_j \text{ es incidente con el vértice } v_i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definición 4.13. *Sea $G = (V, E)$ un pseudografo con n vértices $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, la* ***matriz de adyacencia*** *de G es una matriz $n \times n$, $A = [a_{ij}]$, donde a_{ij} es el número de aristas que van de v_i a v_j.*

Definición 4.14. *Sea $G = (V, E)$ un pseudografo con n vértices $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y m aristas $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, la* ***matriz de incidencia*** *de G es una matriz de orden $n \times m$, $M = [m_{ij}]$, donde m_{ij} es el número de veces que la arista e_j incide en el vértice v_i; los valores de m_{ij} son 0, 1 o 2 (2 en el caso de que la arista sea un bucle).*

Ejemplo 4.8. *Halla la matriz de incidencia y la matriz de adyacencia del grafo G.*



G (V, E)

Solución:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
v_1	1	1	0	0	1	0	1
v_2	1	1	1	0	0	0	0
v_3	0	0	1	1	0	0	1
v_4	0	0	0	1	1	2	0

$M(G)$

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	2	1	1
v_2	2	0	1	0
v_3	1	1	0	1
v_4	1	0	1	1

$A(G)$

Los grafos dirigidos también pueden representarse matricialmente. En este caso, los elementos de la matriz están asociados con los arcos incidentes en los vértices.

Definición 4.15. *Sea $G = (V, E)$ un dígrafo con n vértices $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, la* ***matriz de adyacencia*** *de G es una matriz $n \times n$, $A = [a_{ij}]$, tal que el elemento a_{ij} es igual al número de arcos (v_i, v_j), los que van desde v_i a v_j.*

La matriz de adyacencia no tiene por que ser simétrica, ya que puede haber un arco de v_i a v_j y no haberla de v_j a v_i.

Definición 4.16. *Sea $G = (V, E)$ un dígrafo con n vértices $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y m arcos $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, la* ***matriz de incidencia*** *de G es una matriz de orden $n \times m$, $M = [m_{ij}]$, tal que*

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es vértice inicial de } e_j \\ -1 & \text{si } v_i \text{ es vértice final de } e_j \\ 0 & \text{si } v_i \text{ no es extremo de } e_j \\ 2 & \text{si } e_j \text{ es bucle} \end{cases}$$

4.5. Isomorfismos de grafos

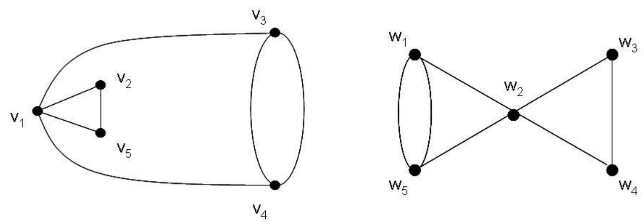
Definición 4.17. *Se dice que dos grafos simples $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son **isomorfos** si existe una biyección $f : V_1 \to V_2$ tal que $\forall u, v \in V_1$*

$$\{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_2$$

*De la función f que satisface dicha condición se dice que es un **isomorfismo de grafos** entre los grafos G_1 y G_2.*

En otras palabras, dos grafos simples son isomorfos si existe una función biyectiva entre los dos conjuntos de vértices que preserva las adyacencias. Esta definición se extiende a multigrafos teniendo en cuenta el número de aristas entre cada par de vértices.

Ejemplo 4.9. *Determina si los grafos de la figura son isomorfos. En caso afirmativo, da el isomorfismo de grafos.*



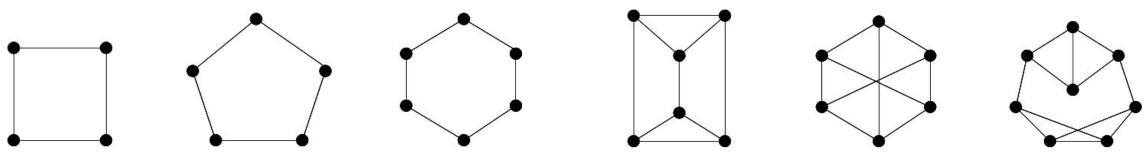
Solución: Los grafos de la figura son isomorfos. Existe una función f tal que $f(v_1) = w_2$, $f(v_2) = w_3$, $f(v_3) = w_1$, $f(v_4) = w_5$, $f(v_5) = w_4$, que es isomorfismo de grafos.
A menudo es difícil determinar si dos grafos simples son isomorfos. Hay que encontrar criterios para determinar si dos grafos son isomorfos que no precisen de la comprobación de todas las adyacencias. Estos criterios se basan en el hecho de que hay ciertas propiedades invariantes por isomorfismo, es decir, si un grafo las verifica, cualquier grafo isomorfo con él las debe verificar también.

- dos grafos isomorfos deben tener el mismo número de vértices y el mismo número de aristas.
- si $f : V_1 \to V_2$ establece un isomorfismo entre los grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$, entonces para cada $u \in V_1$ se tiene que $\delta(u) = \delta(f(u))$

Estos resultados permiten comprobar con cierta facilidad que algunos grafos no son isomorfos.

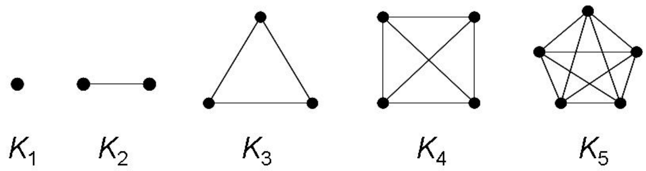
4.6. Tipos de grafos

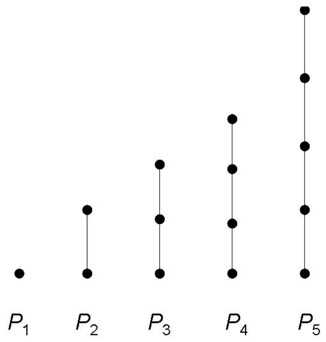
Los grafos se pueden clasificar desde diferentes puntos de vista.
Un grafo $G = (V, E)$ se dice **grafo libre** o vacío si contiene n vértices y ninguna arista, $E = \emptyset$. Se designa B_n.
Un grafo $G = (V, E)$ se dice **grafo regular de grado** k o k-regular si cada vértice tiene grado k, es decir, todos los vértices tienen el mismo grado.



Grafos regulares de grado 2 Grafos regulares de grado 3

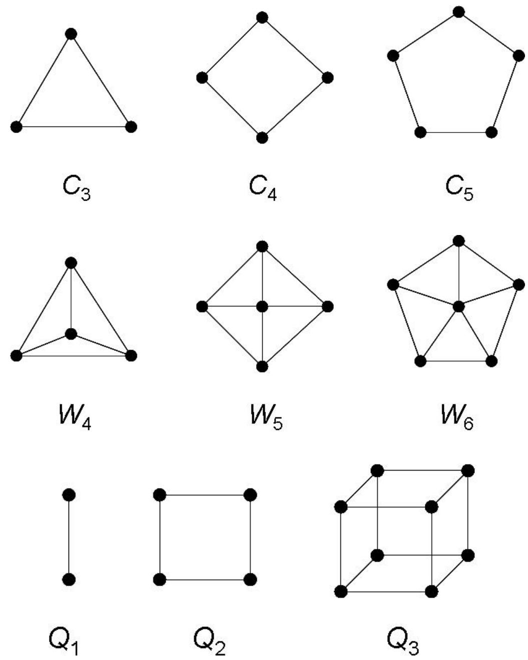
Los grafos k-regulares satisfacen $k \cdot n = 2 \cdot m$, siendo n el número de vértices y m el número de aristas.
Un grafo $G = (V, E)$ se dice **grafo completo** si cada vértice está conectado a cualquier otro vértice en G. Es aquel grafo simple que contiene exactamente una arista entre entre cada par de vértices distintos. El grafo completo de n vértices se denota K_n.





El **grafo camino o lineal** consta de n vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ y $n-1$ aristas que unen cada v_i con v_{i+1}, para $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Se denotan P_n.
El **ciclo** C_n, $n \geq 3$, consta de n vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ y n aristas v_1v_2, v_2v_3, $\ldots$, $v_{n-1}v_n$ y v_nv_1.
Las **ruedas** W_n se obtienen al añadir un vértice adicional al ciclo C_n, $n \geq 3$, y conectar este nuevo vértice con cada uno de los n vértices de C_n mediante una nueva arista.
Los n-**Cubos** o hipercubos de dimensión n, denotados Q_n, es el grafo cuyos vértices representan las 2^n cadenas de bits de longitud n, dos vértices son adyacentes si difieren en exactamente una posición.

Definición 4.18. *Se dice que un grafo simple $G = (V, E)$ es* ***bipartito*** *si el conjunto de vértices V se puede dividir en dos subconjuntos disjuntos V_1 y V_2 ($V_1 \cup V_2 = V$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$), de tal manera que toda arista $e \in E$ une un vértice de V_1 con un vértice de V_2.*
El grafo bipartito completo $K_{n,p}$ es el grafo bipartito cuyo conjunto de vértices está formado por dos conjuntos V_1 con n y V_2 con p vértices, de tal manera que toda arista une un vértice de V_1 con un vértice de V_2.



4.7. Caminos, ciclos y conexiones

Muchos problemas representados mediante grafos se pueden resolver mediante caminos que se forman al ir recorriendo las aristas del grafo.

Definición 4.19. *Sea G un grafo, un* ***camino*** *en G es una sucesión de vértices y aristas. Si el vértice inicial coincide con el vértice final el camino es cerrado, en caso contrario el camino es abierto. La longitud de un camino es el número total de aristas que lo componen.*
Un camino de longitud l en un grafo G es una secuencia de vértices $(u_0, u_1, \ldots, u_l)$ tales que, para todo $i = 1, \ldots, l$ $e_i = u_{i-1}u_i$ son aristas de G. Los vértices $u_0, \ldots, u_l$ son los vértices del recorrido y las aristas e_i sus aristas. El vértice u_0 es el vértice inicial y v_l el vértice final.

Un camino es simple si no contiene la misma arista más de una vez. Todo camino cerrado en un grafo que no repite aristas es un **circuito**. Un **ciclo** es un camino cerrado sin vértices repetidos (excepto los extremos).

Ejemplo 4.10. *Considerando el grafo de la figura:*

- (a, d, c, f, e) *es un camino simple de longitud 4;*
- (d, e, c, a) *no es camino ya que ec no es arista de G;*
- (a, b, e, d, a, b) *no es simple ya que se repite la arista ab;*
- (b, c, f, e, b) *es un circuito.*

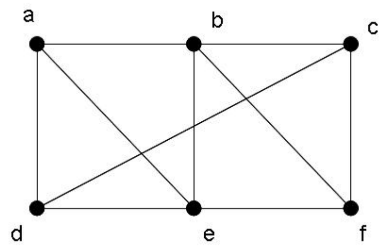
Definición 4.20. *Se dice que un grafo es* ***conexo*** *si hay un camino entre cada par de vértices distintos del grafo.*

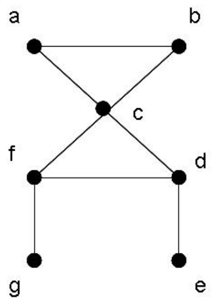
Un grafo que no es conexo, es la unión de dos o más subgrafos conexos disjuntos que reciben el nombre de **componentes conexas** del grafo.

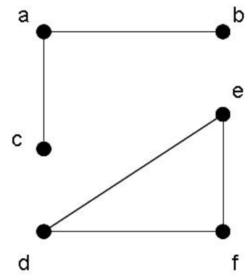
Ejemplo 4.11. *Estudia si los grafos de la figura son conexos.*

Solución: El grafo de la izquierda es conexo. En cambio el grafo de la derecha no es conexo ya que no hay ningún camino entre c y d.
Además, el grafo de la derecha es la unión de dos subgrafos conexos disjuntos. Estos subgrafos son las componentes conexas de G.

Teorema 4.3. *Hay un camino simple entre cada par de vértices distintos de un grafo conexo.*







Demostración. Sean u y v dos vértices distintos del grafo conexo $G = (V, E)$. Como G es conexo hay al menos un camino entre u y v. Sea $(u_0, u_1, \ldots, u_l)$ con $u_0 = u$ y $u_l = v$ la secuencia de vértices de un camino de longitud mínima. Este camino de mínima longitud es simple. Si no fuera simple, entonces $x_i = x_j$ para algunos i y j con $0 \leq i < j$. Esto significa que hay un camino entre u y v de menor longitud que se obtiene eliminando las aristas que corresponden a los vértices $x_i, \ldots, x_{j-1}$. □

Definición 4.21. *Un vértice de G es* ***vértice de corte*** *o articulación, si al eliminarlo del grafo con todas las aristas incidentes con él se obtiene un subgrafo de G con más componentes.*

Ejemplo 4.12. *Dado el grafo de la figura, encuentra un vértice de corte.*

Solución: El vértice c es un vértice de corte ya que si eliminamos el vértice c y las aristas incidentes se obtiene un subgrafo con más componentes, ver figura.

Definición 4.22. *Una arista de G es arista de corte o* ***puente****, si al eliminarlo del grafo se obtiene un subgrafo de G con más componentes.*

Ejemplo 4.13. *Dado el grafo de la figura, encuentra una arista de corte.*

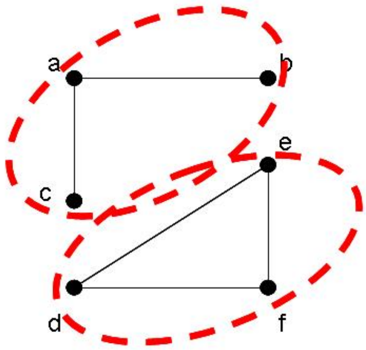
Solución: La arista ce es una arista de corte ya que si eliminamos la arista ce se obtiene un subgrafo con más componentes, ver figura.

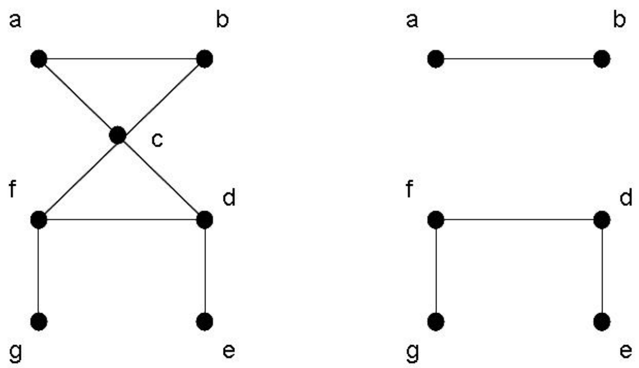
Teorema 4.4. *Sea G un grafo y A su matriz de adyacencia con respecto a la ordenación $v_1, v_2, \ldots, v_n$, el número de caminos distintos de longitud r $(r > 0)$ de v_i a v_j es igual al elemento (i, j) de la matriz A^r.*

Dado un grafo simple $G = (V, E)$, un camino es una secuencia de vértices y aristas. Si no se repiten las aristas, el camino es simple. Si el vértice inicial coincide con el vértice final el camino es cerrado, en caso contrario el camino es abierto. La longitud de un camino es el número total de aristas que lo componen. Un circuito es un camino cerrado que no repite aristas. Un ciclo es un camino cerrado sin vértices repetidos.
En el caso de un multigrafo (aristas múltiples) hay que denotar el camino dando la secuencia de aristas, para distinguir entre las aristas múltiples.

4.8. Caminos eulerianos y hamiltonianos

Definición 4.23. *Dado un grafo simple $G = (V, E)$, un* ***camino euleriano*** *es un camino simple que recorre todas las aristas del grafo. Un* ***circuito euleriano*** *es un circuito que contiene todas las aristas de G. Un* ***grafo euleriano*** *es aquel que admite un circuito euleriano.*





Ejemplo 4.14. *Consideremos los grafos de la figura, el grafo de la izquierda no admite ningún recorrido euleriano. El grafo del centro contiene un camino euleriano, $(c, d, b, a, e, d, a, c, b)$. El grafo de la derecha contiene un circuito euleriano $e, d, a, c, d, b, f, c, b, a, e$.*

Existen unos criterios sencillos para determinar si un multigrafo contiene un camino o circuito euleriano.

Teorema 4.5. *Un multigrafo conexo contiene un circuito euleriano, si y sólo si, cada uno de sus vértices tiene grado par.*

Teorema 4.6. *Un multigrafo conexo contiene un camino euleriano, pero no un circuito euleriano, si y sólo si, tiene exactamente dos vértices de grado impar. (El camino euleriano empieza en estos vértices.)*

Los caminos y circuitos eulerianos son muy útiles para resolver problemas prácticos.

Definición 4.24. *Dado un grafo simple $G = (V, E)$, un* ***camino hamiltoniano*** *es un camino simple que recorre todas los vértices del grafo exactamente una vez. Un* ***ciclo hamiltoniano*** *es un ciclo que contiene todos los vértices de G. Un* ***grafo hamiltoniano*** *es aquel que admite un ciclo hamiltoniano.*

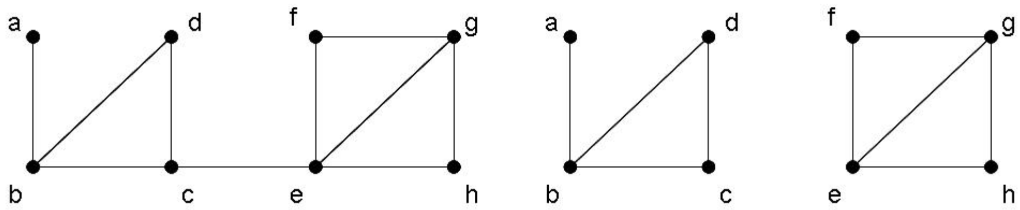
Ejemplo 4.15. *Consideremos los grafos de la figura, el grafo de la izquierda admite ciclo hamiltoniano a, b, c, d, e, a. El grafo del centro contiene un camino hamiltoniano, (a, b, c, d). El grafo de la derecha no admite ni ciclo hamiltoniano ni camino hamiltoniano, debido a que cualquier camino que pase por todos los vértices tiene que contener más de una vez a una de las aristas ab, ef y cd.*

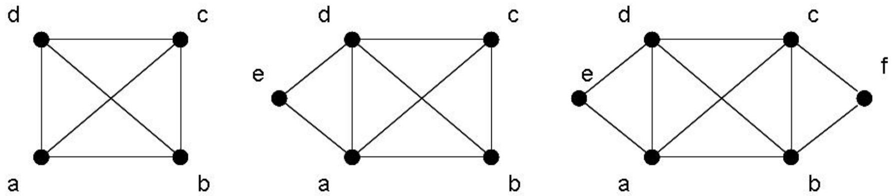
No existe nungún criterio sencillo para determinar la existencia de ciclos hamiltonianos. Cuantos más aristas tenga el grafo´, más probable que exista el ciclo hamiltoniano. Por ello, las condiciones suficientes para la existencia de ciclos hamiltonianos depende de que el grado de los vértices sean suficientemente grandes.

Teorema 4.7. *Sea G un grafo simple con n vértices, $n \geq 3$. Si todos los vértices de G tienen grado mayor o igual que $\frac{n}{2}$, entonces G contiene un circuito hamiltoniano.*

Teorema 4.8. *Sea G un grafo simple con n vértices, $n \geq 3$. Si $\delta(u) + \delta(v) \geq n$ para cada par de vértices no adyacentes u y v de G, entonces G posee un ciclo hamiltoniano.*

Teorema 4.9. *Sea G un grafo hamiltoniano, entonces G no tiene vértices de corte.*





4.9. Caminos de longitud mínima

Muchos problemas se pueden representar utilizando grafos a los que se asigna un peso a cada una de las aristas. Por ejemplo, el sistema de vuelos de una compañía aérea se puede representar mediante un grafo en donde los vértices son las ciudades y las aristas los vuelos entre ciudades. Si considereamos un problema relacionado con distancias, asignamos a las aristas un número que representa la distancia entre ciudades; si consideramos un problema relacionado con tiempos de vuelo, asignamos a las aristas los tiempos de vuelo correspondientes; si consideramos un problema relacionado con las tarifas de los vuelos, asignamos los precios a las aristas.

Definición 4.25. *Llamamos **grafos ponderados** a los grafos en los que se le asigna un número o peso* (w_{ij})*a cada una de las aristas* v_iv_j. *La **longitud** de un camino en un grafo ponderado es la suma de los pesos de las aristas de ese camino.*

Un problema típico relacionado con los grafos ponderados es el de determinar el camino de longitud mínima entre dos vértices del grafo. Nos podemos preguntar, ¿cuál es la distancia más corta entre los vértices A y E del grafo de la figura?; ¿qué combinación de vuelos tiene el menor tiempo total de vuelo entre E y A (no consideramos el tiempo entre vuelos)?; ¿cuál es la tarifa más barata entre G y B?
Otro problema que involucra a grafos ponderados pide determinar un circuito de longitud mínima que visita exactamente una vez cada uno de los vértices de un grafo (problema del viajante).

4.9.1. Árboles

Los grafos se pueden utilizar para modelar y resolver muchos problemas. Ahora nos centraremos en un grafo particularmente útil en informática: el árbol.

Definición 4.26. *Un árbol es un grafo T no dirigido, conexo y sin ciclos.*

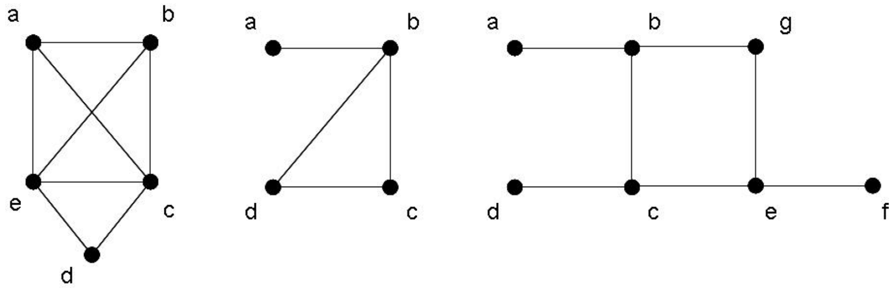
Ejemplo 4.16. *Los árboles genealógicos son grafos que representan parentescos; los vértices representan los miembros de la familia y las aristas las relaciones entre padres e hijos.*

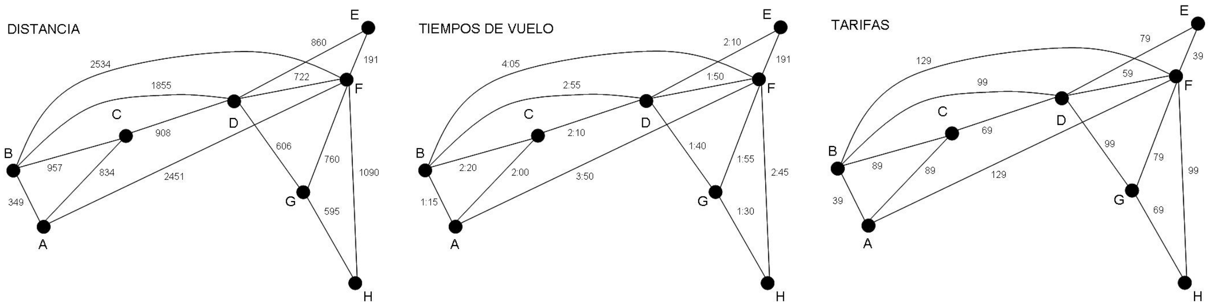
Dado que un árbol no tiene ciclos, es un grafo acíclico, tampoco puede tener bucles o aristas múltiples. Un árbol es un grafo simple.

Ejemplo 4.17. *Los grafos G_1 y G_2 son árboles, ambos son conexos y acíclicos. El grafo G_3 no es árbol puesto que (e, b, a, d, e) es un ciclo, G_4 tampoco es árbol porque no es conexo.*

Teorema 4.10. *Un grafo no dirigido es un árbol si, y sólo si, hay un único camino entre cada pareja de vértices.*

Muchas veces se designa a un vértice particular como la raíz. Una vez especificada la raíz, dado que existe un único camino entre la raíz y cada uno de los restantes vértices, se asigna una dirección a las aristas de modo que se alejan de la raíz. Un árbol junto con su raíz produce un grafo dirigido llamado **árbol con raíz**. Las distintas elecciones de la raíz producen diferentes árboles. Normalmente los árboles se dibujan con la raíz en la parte superior, y se omiten las flechas de los arcos ya que la elección de la raíz determina las direcciones de las aristas (hacia abajo).





Definición 4.27. *Un árbol con raíz (T, r) es un árbol T con un vértice r, llamado raíz.*

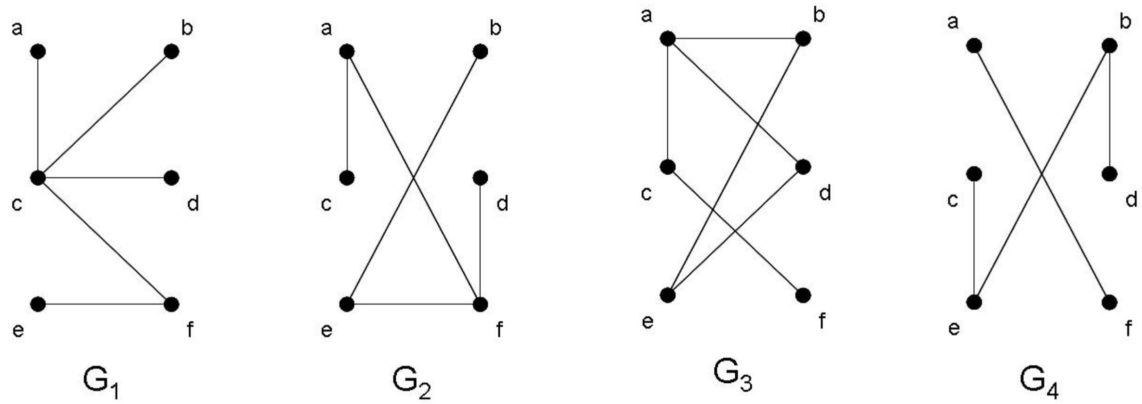
El hecho de distinguir un vértice en particular puede entenderse como que un isomorfismo de árboles con raíz entre (T, r) y (T', r') es un isomorfismo de grafos entre T y T' que tiene que llevar a r hacia r' necesariamente.

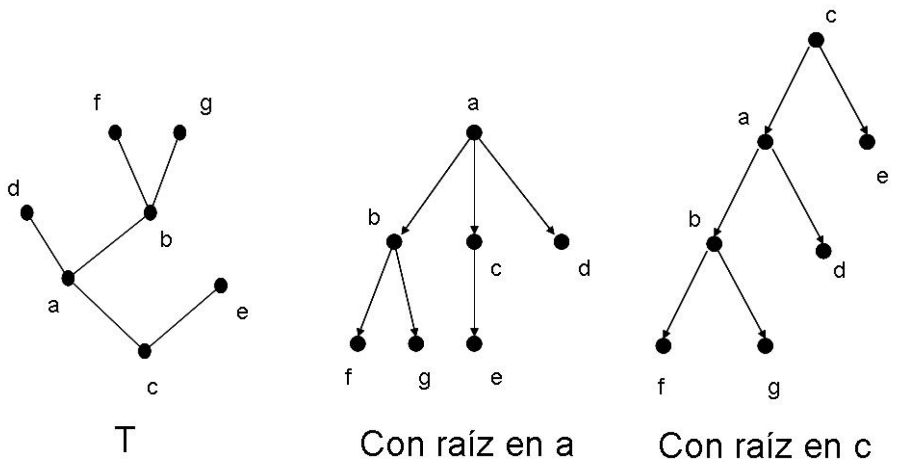
Ejemplo 4.18. *En la figura vemos el árbol T y los árboles con raíz formados al designar los vértices a y c como raíz.*

Un árbol con raíz es un grafo acíclico dirigido con un único vértice con $\delta_{in}(r) = 0$ y tal que para todo vértice $u \neq r$, existe un camino único de r a u; esto implica que $\delta_{in}(u) = 1$. La terminología más usual tiene orígenes genealógicos. Si hay un arco de u a v, se dice que u es el **padre** de v, o que v es un **hijo** de u; dos nodos son **hermanos** si tienen el mismo padre. Los **antecesores** de un nodo diferente de la raíz son todos los vértices que aparecen en el camino desde la raíz hasta ese vértice (excluido). Los descendientes de un nodo v son aquellos vértices para los que v es un antecesor. Un nodo de un árbol se dice **nodo hoja** si no tiene hijos. Los vértices con hijos son **nodos interiores**.

4.9.2. Algoritmo de Dijkstra

Existen diferentes algoritmos para hallar un camino de longitud mínima entre dos vértices de un grafo. El que presentamos a continuación encuentra el camino mínimo para grafos ponderados no dirigidos con pesos no negativos. El input es un grafo ponderado $G = (V, E)$ y el vértice inicial (o fuente) $s \in V$. El output es la longitud de los caminos mínimos (o los caminos mínimos) entre s y los demás vértices de V.
La idea básica es: si el vértice u se encuentra en un camino C de longitud mínima entre los vértices s y z entonces la parte de C comprendida entre los vértices s y u forma un camino de longitud mínima entre s y u.
La notación que usamos es: $L[u]$ = longitud (suma de pesos w) del camino más corto entre s y u.
Controlamos el conjunto S de vértices para los que conocemos el camino más corto (desde s) y lo ampliamos hasta que $S = V$. Hay que etiquetar cada vértice u con la longitud $L(u)$ del camino más corto ya encontrado entre s y u. Para todos los vértices adyacentes de s, calculamos la longitud y seleccionamos el vértice v con longitud mínima, añadimos v a S y actualizamos la etiqueta $L(v)$ teniendo en cuenta que en la iteración k $L_k(v) = min\{L_{k-1}(v), L_{k-1}(u) + w(u, v)\}$. El proceso se repite hasta que $S = V$.
El algoritmo de Dijkstra empieza asignando valores iniciales a las longitudes de los caminos desde s a todos los nodos del grafo. Se van realizando iteraciones que mejoran estas longitudes.





Algoritmo de **Dijkstra** para el cálculo del camino mínimo:

Dado un grafo ponderado $G = (V, E)$ y un vértice inicial (o fuente) s:

Paso 1: Inicialización, $S = \emptyset$, asignamos al vértice inicial s longitud 0, $L[s] = 0$; asignamos a los demás vértices longitud ∞, $L[v_k] = \infty$, $\forall v_k \neq s$. Designamos a s como vértice actual y añadimos s al conjunto S.

Paso 2: Actualización, sea v_i el vértice actual,

a) Encontramos el conjunto J de vértices que no pertenezcan a S y que son adyacentes a v_i; para cada $v_j \in J$ calculamos la longitud del camino desde s. La longitud se obtiene sumando pesos $L[v_j] = L[v_i] + w_{ij}$. Para cada $v_j \in J$, se actualiza el valor de L, escogiendo el mínimo entre el valor que ya tenemos de $L[v_j]$ y el que acabamos de calcular $L[v_i] + w_{ij}$:

$$\text{nuevo } L[v_j] = min\{ \text{ viejo } L[v_j], L[v_i] + w_{ij}\}$$

b) De entre todos los $v_j \in J$, seleccionamos aquel vértice v^* con el valor $L[v_j]$ mínimo. Si hay varios vértices con longitud mínima, se elige uno arbitrariamente.

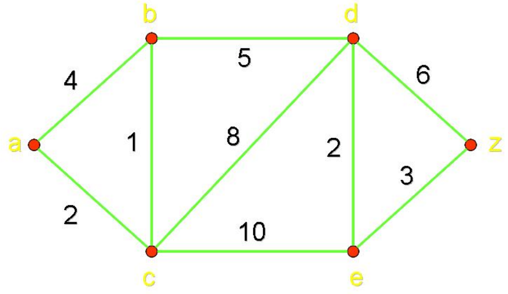
c) Añadimos v^* al conjunto S y lo designamos como vértice actual. Repetimos el paso 2.

Paso 3: El proceso finaliza cuando:

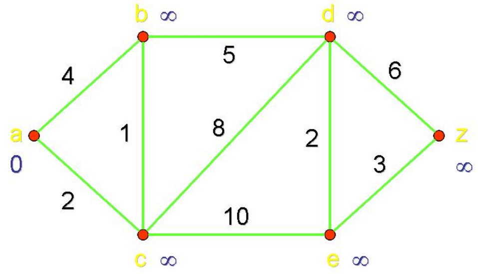
a) Todos los vértices del grafo pertenecen al conjunto S;

b) Todos los vértices adyacentes al vértice actual pertenecen a S.

Ejemplo 4.19. *Para el grafo ponderado de la figura encontrar el camino de longitud mínima entre a y z.*

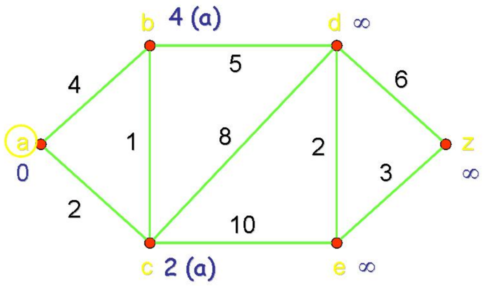


Solución: Encontraremos el camino de longitud mínima aplicando el algoritmo de Dijkstra. Realizaremos las asignaciones sobre las figuras.
Paso 1: Inicialización: $S = \emptyset$, $L[a] = 0$, $L[b] = \infty$, $L[c] = \infty$, $L[d] = \infty$, $L[e] = \infty$, $L[z] = \infty$.



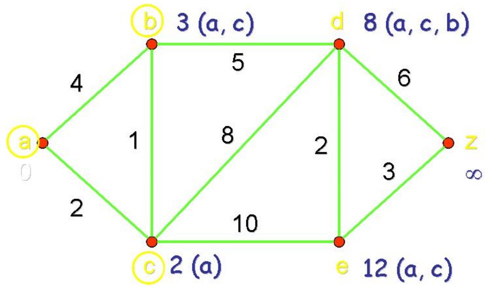
Asignación inicial

El vértice a es vértice actual y $S = \{a\}$.
Paso 2: Actualización, este paso se repetirá varias veces.
ITERACIÓN 1: los vértices adyacentes al vértice actual son el b y el c, para estos vértices actualizamos el valor mínimo de L: $L[b] = 4$ y $L[c] = 2$ y seleccionamos el vértice de longitud mínima, el vértice c.

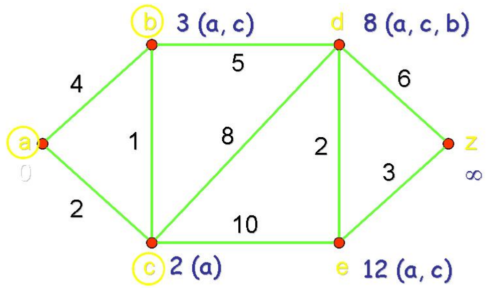


ITERACIÓN 1

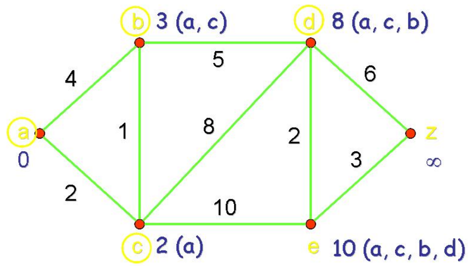
Designamos a c como vértice actual y $S = \{a, c\}$.
ITERACIÓN 2: los vértices adyacentes al vértice actual que no pertenezcan a S son el b, el d y el e, para estos vértices actualizamos el valor mínimo de L: $L[b] = 3$ $L[d] = 10$ y $L[e] = 12$; seleccionamos el vértice de longitud mínima, el vértice b.
Designamos a b como vértice actual y $S = \{a, c, b\}$.
ITERACIÓN 3: los vértices adyacentes al vértice actual que no pertenezcan a S es el d, actualizamos el valor mínimo de L: $L[d] = 8$ y $L[e] = 12$; seleccionamos el vértice de longitud mínima, el vértice d.
Designamos a d como vértice actual y $S = \{a, c, b, d\}$.
ITERACIÓN 4: los vértices adyacentes al vértice actual que no pertenezcan a S son el e y el z, actualizamos el valor mínimo de L: $L[e] = 10$ y $L[z] = 14$; seleccionamos el vértice de longitud mínima, el vértice e.
Designamos a d como vértice actual y $S = \{a, c, b, d, e\}$.
ITERACIÓN 5: los vértices adyacentes al vértice actual que no pertenezcan a S es el z, actualizamos el valor mínimo de L: $L[z] = 13$; seleccionamos el vértice de longitud mínima, el vértice z.



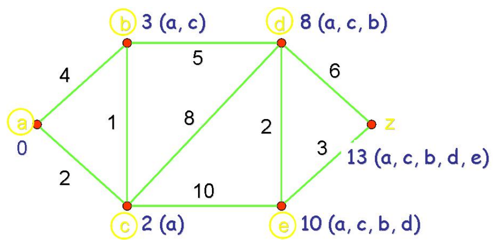
ITERACIÓN 3



ITERACIÓN 3



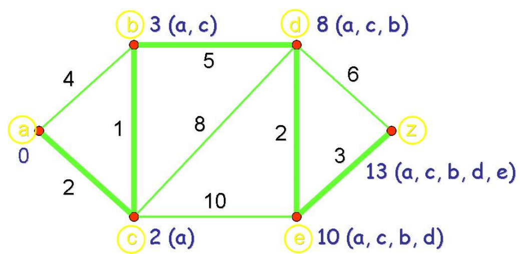
ITERACIÓN 4



ITERACIÓN 5

Designamos a z como vértice actual y $S = \{a, c, b, d, e, z\}$. Todos los vértices del grafo pertenecen a S, el procedimiento ha terminado.
El árbol de caminos mínimos desde a es:

CAMINO MÍNIMO DESDE a



En ocasiones se utiliza una tabla para resumir los resultados obtenidos al aplicar el algoritmo de Dijkstra.

iteración	S	$L[a]$	$L[b]$	$L[c]$	$L[d]$	$L[e]$	$L[z]$
inicial	$\emptyset$	$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞
1	$\{a\}$		4	$\boxed{2}$	∞	∞	∞
2	$\{a,c\}$		$\boxed{3}$		10	12	∞
3	$\{a,c,b\}$				$\boxed{8}$	12	∞
4	$\{a,c,b,d\}$					$\boxed{10}$	14
5	$\{a,c,b,d,e\}$						$\boxed{13}$
final	$\{a,c,b,d,e,z\}$	**0**	**3**	**2**	**8**	**10**	**13**

4.10. Coloreado de grafos

Dado una grafo G y un conjunto de dolores $\mathcal{C} = \{a, b, \ldots\}$, una coloración de G con los colores de $\mathcal{C}$ es una asignación de a los vértices de G de colores de manera que los extremos de cada arista reciban distintos colores.

Definición 4.28. *Dado una grafo $G = (V, E)$ y un conjunto de colores $\mathcal{C} = \{a, b, \ldots\}$, una **coloración** de G con colores de $\mathcal{C}$ es una aplicación*

$$\gamma : V \to \mathcal{C}$$

tal que si $uw \in E$ entonces $\gamma(u) \neq \gamma(w)$.

Un grafo puede colorearse asignándole un color distinto a cada vértice. Generalmente, puede encontrarse una coloración que utiliza menos colores que el número de vértices.

Definición 4.29. *El **número cromático** de un grafo G, $\chi(G)$, es el número mínimo de colores que se requieren para una coloración del grafo.*

Observaciones inmediatas sobre el número cromático:

1. Para todo grafo G, $\chi(G) \leq |V|$. Siempre podemos colorear asignándo a cada vértice un color distinto, ésta es la forma menos efectiva de colorear.
2. Si $|E| \geq 1$, entonces $\chi(G) \geq 2$. Si el grafo contiene al menos una arista, necesitaremos dos colores como mínimo.
3. Si G contine a G_1 como subgrafo, entonces $\chi(G) \geq \chi(G_1)$.
4. Si G tiene k componentes conexas G_1, G_2, $\ldots$, G_k que tienen números cromáticos $\chi(G_1)$, $\chi(G_2)$, $\ldots$, $\chi(G_k)$, entonces $\chi(G) = max\{\chi(G_1), \chi(G_2), \ldots, \chi(G_k)\}$.
5. Si G y G' son isomorfos, entonces $\chi(G) = \chi(G')$.

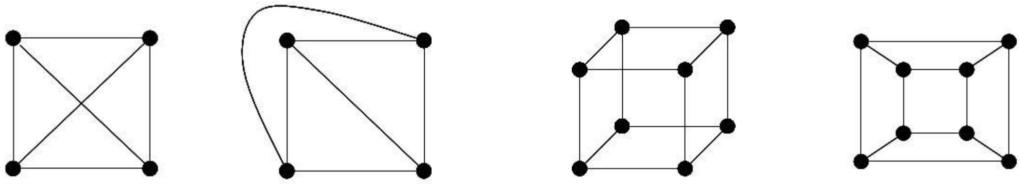
Ejemplo 4.20. *Encuentra el número cromático de P_n, C_n y K_n.*

Solución: El grafo lineal de n vértices, P_n, tiene número cromático 2. Asignamos colores de forma alternativa: $\chi(P_n) = 2$.
Los grafos ciclos C_n tienen una 2-coloración si n es par y una 3-coloración para n impar.

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ es par} \\ 3 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

El número cromático de K_n es n, hay que asignar un color distinto a cada vértice ya que dos vértices cualesquiera son siempre adyacentes, $\chi(K_n) = n$.
Hay muchas maneras de representar un grafo, nos vamos a centrar en los grafos planos. El que un grafo sea o no plano desempeña un papel importante en la resolución de ciertos tipos de problemas.

Definición 4.30. *Se dice que un grafo es **plano** si puede dibujarse en el plano demanera que ningún par de arista se corte. Por corte de aristas se entiende la intersección de las líneas que representan a las aristas en un punto distinto de los extremos. A ese dibujo se le llama **representación plana** del grafo.*



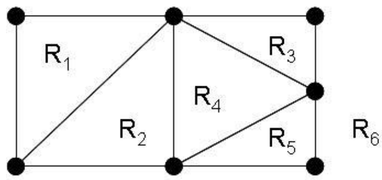
K_4 Representación plana de K_4 Q_3 Representación plana de Q_3

Un grafo puede ser plano aunque habitualmente se dibuje con corte de aristas como puede verse en la figura. Una representación plana de un grafo divide el plano en **regiones**, una de ellas no acotada (región exterior). Las regiones están limitadas por las aristas del grafo. Dos puntos se encuentran en la misma región si existe una línea contínua que los une sin cruzar ninguna arista o vértice. El grado de una región es el número de lados que son frontera de dicha región. Si al dibujar el borde de una región, recorremos dos veces una arista, esa arista contribuye al grado con dos unidades.

Teorema 4.11 (Ecuación de Euler)**.** *Sea G un grafo plano simple y conexo con $|E|$ aristas y $|V|$ vértices. Sea $|R|$ el número de regiones de una representación plana de G, entonces:*

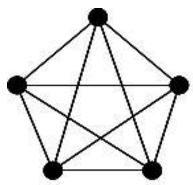
$$|R| = |E| - |V| + 2$$

Ejemplo 4.21. *En el grafo de la figura, el número de vértices es 7, el número de aristas es 11 y el número de regiones es 6. Se verifica la fórmula de Euler para grafos planares conexos:* $11 - 7 + 2 = 6$.



Corolario 4.2. *Si G es un grafo plano simple y conexo con $|E|$ aristas, $|V|$ vértices y $|V| \geq 3$, entonces $|E| \leq 3|V| - 6$.*

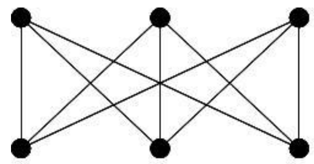
Ejemplo 4.22. *Demuestra que K_5 no es plano.*
El grafo K_5 tiene cinco vértices y 10 aristas. La desigualdad $|E| \leq 3|V| - 6$ no se satisface ya que: $3 \cdot 5 - 6 = 9 > 10$. *Por consiguiente K_5 no es plano.*



K_5

Corolario 4.3. *Si G es un grafo plano simple y conexo con $|E|$ aristas, $|V|$ vértices con $|V| \geq 3$ y no contiene circuitos de longitud 3, entonces $|E| \leq 2|V| - 4$.*

Ejemplo 4.23. *Demuestra que $K_{3,3}$ no es plano.*
Como $K_{3,3}$ es conexo y no tiene circuitos de longitud 3, podemos utilizar el corolario anterior. $K_{3,3}$ tiene 6 vértices y nueve aristas, como $2 \cdot 6 - 4 = 8 > 6$, no se satisface el Corolario anterior lo que nos lleva a que $K_{3,3}$ no es plano.

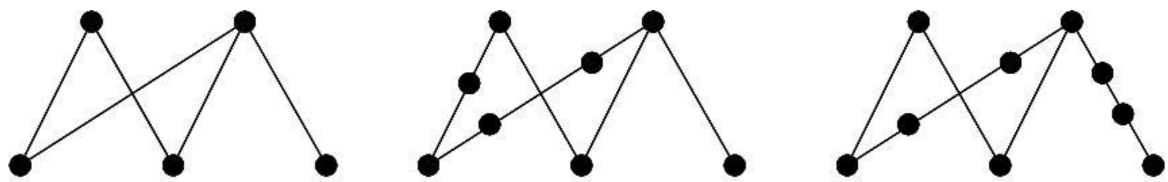


$K_{3,3}$

Si un grafo es plano, también lo será cualquier subgrafo. Si un subgrafo no es plano tampoco lo será el grafo que lo contenga. Sabemos que K_5 y $K_{3,3}$ no son planos, cualquier grafo que contenga a cualquiera de esos dos grafos tampoco será plano.

Definición 4.31. *Sea $G = (V, E)$ un grafo, se dice que se produce una* ***subdivisión elemental*** *de G cuando se suprime del grafo una arista $uv \in E$, se añade un vértice $w \notin V$ y las aristas uw y vw. Sustituimos una arista por un vértice unido a los vértices de la arista eliminada. Se dice que los grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son* ***homeomorfos*** *si se pueden obtener a partir de un mismo grafo a partir de una secuencia de subdivisiones elementales.*

Los tres grafos de la figura son homeomorfos, todos se pueden obtener a partir del primer grafo mediante subdivisiones elementales.



Teorema 4.12 (Teorema de Kuratowski)**.** *Un grafo es plano si, y sólo si, no contiene ningún subgrafo homeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$.*

Si un grafo contiene un subgrafo homeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$ entonces no es plano.

Teorema 4.13 (Teorema de los cuatro colores)**.** *El número cromático de un grafo plano es menor o igual que cuatro.*

Algoritmo austero (greedy) para el coloreado de grafos:

Paso 1: Ordenamos los vértices y los colores

$$v_1, v_2, \ldots, v_n$$

$$c_1, c_2, \ldots, c_n$$

Paso 2: Asignamos el primer color c_1 al primer vértice v_1.
Paso 3: Asignamos un color a v_2. Si es adyacente a v_1, le asignamos color c_2; en otro caso, le asignamos el color c_1.
Paso 4: Asignamos un color a v_k, para ello miramos los colores de los vértices adyacentes, y le asignamos el primero disponible de la lista de colores.
La eficiencia del algoritmo depende del orden de los vértices.