TP noté de fin d'UE

UE Informatique quantique et Recherche opérationnelle

9 janvier 2024

ENSIIE - MPRO

Ce TP noté se fera en binôme, et devra être restitué (code + réponses aux questions) en fin de séance sous forme numérique. Le temps imparti est de deux fois 1h45, soit 3h30 au total. Le total des points est de 21 points, avec 1 point bonus. Le barème donné est indicatif.

Le but de ce TP est de résoudre le problème de graphe de couverture minimale par les arêtes à l'aide de deux algorithmes quantiques différents : QAOA et l'algorithme de Grover.

1 Description du problème et question préliminaire (2 points)

Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté, avec $|V| = n$ sommets et $|E| = m$ arêtes. Le problème de couverture minimale par les arêtes consiste à trouver une couverture minimale, c'est-à-dire un ensemble d'arêtes U dans E de cardinalité minimale qui couvre tous les sommets de V. On rappelle qu'un sommet $v \in V$ est couvert si et seulement si au moins une arête adjacente à ce sommet est dans U.

Écrire le modèle mathématique de ce problème, où les variables de décision sont les arêtes du graphe. (2 points)

Par la suite, nous ne travaillerons que sur des graphes dont les sommets sont tous de degré 1 ou 2. Écrire l'implication de cette hypothèse sur la formulation précédente du modèle. (0 points)

2 Résolution avec QAOA (9 points + 1 point bonus)

QAOA nécessite en entrée un problème sous forme QUBO. L'évacuation des contraintes du problème se fait par leur intégration dans la fonction objectif de la façon suivante : étant donné une contrainte $\mathcal{C}$ de la forme $g(x) \leq 0$, trouver un fonction de pénalité $p_{\mathcal{C}}$ (qui peut être non linéaire) telle que

$$\begin{cases} p_{\mathcal{C}}(x) = 0, & \text{si } x \text{ satisfait la contrainte } \mathcal{C}, \text{ i.e. } g(x) \leq 0 \\ p_{\mathcal{C}}(x) > 0, & \text{si } x \text{ ne satisfait pas la contrainte } \mathcal{C}, \text{ i.e. } g(x) > 0 \end{cases}$$

Ensuite, additionner les termes de pénalités de chaque contrainte du problème initial à la fonction objectif initiale, chacun multiplié par un réel $\lambda_{\mathcal{C}}$ appelé coefficient de pénalité.

1. Reformuler le problème de couverture minimale par les arêtes en problème QUBO pour les graphes d'intérêts respectant l'hypothèse de travail (degré égal à 1 ou 2). Vous expliciterez le choix des termes de pénalités pour chaque type de contraintes, ainsi que le signe des coefficients de pénalités. (3 points)
   Question bonus : quel obstacle rencontreriez-vous pour la reformulation en QUBO du problème de couverture par arêtes sans l'hypothèse de travail considérée ici (degré égal à 1 ou 2) ? Quel travail supplémentaire faudrait-il faire ? (1 point)

2. Écrire l'Hamiltonien associé. (2 points)

3. Résoudre ce problème sur le simulateur IBM à 32 qubits, pour le graphe G donné Figure 1 avec la fonction QAOA pré-codée sur Qiskit. Illustrer l'influence de la profondeur p du circuit. (4 points)

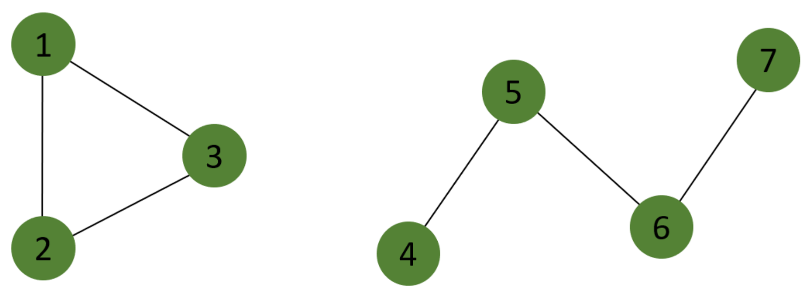

Figure 1: Instance G pour le problème de couverture minimale par les arêtes.

3 Résolution avec l'algorithme de Grover (9 points)

Afin de résoudre le problème de couverture minimale par les arêtes avec l'algorithme de Grover, nous allons commencer par résoudre le problème de décision associé.

3.1 Résolution du problème de décision associé

L'oracle de l'algorithme de Grover associé au problème de *décision* de couverture minimale par les arêtes se décompose en deux parties. La première partie marque uniquement les solutions réalisables, tandis que la seconde partie sélectionne les solutions dont la valeur est inférieure à un entier fixé k.

1. Écrire le problème de décision associé au problème de couverture minimale par les arêtes pour les graphes d'intérêt (degré égal à 1 ou 2). (0.5 point)

2. Proposer schématiquement la construction de l'oracle du problème de décision, en précisant le rôle de chaque partie de l'oracle. (3 points)

3. L'implémenter pour le graphe Figure 1, pour la valeur $k = 3$. Vous pourrez vous aider du circuit Figure 2 qui applique la porte X sur le qubit $|q_4\rangle$ si et seulement si
$$q_0 + 2q_1 < q_2 + 2q_3$$
pour $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \{0, 1\}$. Vous noterez que les qubits $|q_5\rangle, \ldots |q_8\rangle$ sont des qubits auxiliaires. (2 points)

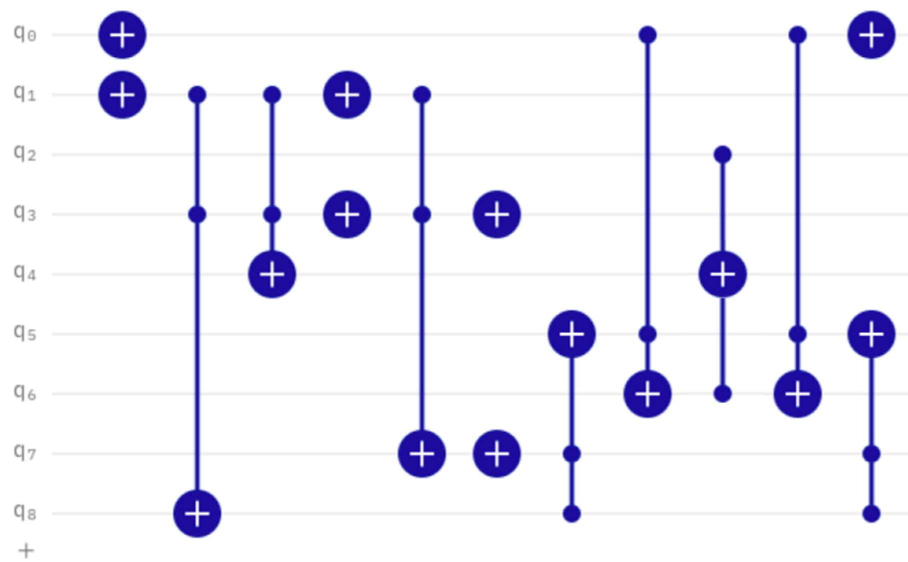

Figure 2: Circuit comparateur inférieur strict.

3.2 Résolution du problème d'optimisation

Nous revenons au problème initial, qui est le problème d'optimisation de couverture minimale par les arêtes.

4. Proposer de façon schématique le fonctionnement de l'algorithme d'optimisation. (1.5 points)

5. L'implémenter pour le graphe Figure 1. (2 points)