CC0288 - Inferência Estatística I

Aula - 26/04/2023.

Prof. Maurício

1. Distribuição de Weibull.

$$f(x) = abx^{b-1}e^{-ax^b}I_{(0,\infty)}(x). \tag{1}$$

Notação: $X \sim Weibull(a,b)$.

A função de distribuição (fd) de $X \sim W(a,b)$ é definida por

$$F(x) = [1-e^{-ax^b}]I_{(0,\infty)}(x)$$

Seja $X \sim Weibull(a,2)$. Baseado em uma amostra aleatória $X_1, X_2, \ldots, X_n$ qual o estimador de MV de a?

Solução: A f.d.p. de X é dada por:

$$f(x|a) = 2axe^{-ax^2}I_{(0,\infty)}(x). \tag{2}$$

A função de verossimilhança é dada por:

$$L(a) = \prod_{i=1}^{n} 2ax_i e^{-ax_i^2}$$

$$L(a) = 2^n\ a^n \prod_{i=1}^{n} x_i\ \ e^{-a\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \tag{3}$$

O logaritmo da função de verossimilhança é dado por:

$$l(a) = n\ \log(2) + nlog(a) + \sum_{i=1}^{n}\log(x_i) + -a\sum_{i=1}^{n} x_i^2. \tag{4}$$

A derivada primeira de $l(a)$ é dada por:

$$l^{'}(a) = \frac{n}{a} - \sum_{i=1}^{n} x_i^2. \tag{5}$$

A derivada segunda de $l(a)$ é dada por:

$$l^{''}(a) = -\frac{n}{a^2} < 0. \tag{6}$$

De $l^{'}(a) = 0$ temos

$$\frac{n}{a} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Assim,

$$\hat{a}_{MV} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}. \tag{7}$$

2. Seja $X \sim Weibull(1, b)$. Baseado em uma amostra aleatória $X_1, X_2, \ldots, X_n$ qual o estimador de MV de b?

   Solução;

$$f(x|b) = bx^{b-1}e^{-x^b}I_{(0,\infty)}(x). \tag{8}$$

A função de verossimilhança é dada por:

$$L(b) = \prod_{i=1}^{n} bx_i^{b-1}e^{-x_i^b}$$

$$L(b) = b^n \left[\prod_{i=1}^{n} x_i\right]^{b-1} e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i^b} \tag{9}$$

O logaritmo da função de verossimilhança é dado por:

$$l(b) = n\log(b) + (b-1)\sum_{i=1}^{n}\log(x_i) + -\sum_{i=1}^{n} x_i^b. \tag{10}$$

A derivada primeira de $l(b)$ é dada por:

$$l^{'}(b) = \frac{n}{b} + \sum_{i=1}^{n}\log(x_i) - \sum_{i=1}^{n}\log(x_i)x_i^b. \tag{11}$$

A derivada segunda de $l(b)$ é dada por:

$$l^{''}(b) = -\frac{n}{b^2} - \sum_{i=1}^{n}(\log(x_i))^2\; x_i^b < 0. \tag{12}$$

De $l^{'}(b) = 0$ temos

$$\frac{n}{b} + \sum_{i=1}^{n}\log(x_i) - \sum_{i=1}^{n}\log(x_i)x_i^b = 0,$$

que não tem solução explícita e temos que procurar uma solução através do método de Newton-Raphson.

3. Método de Newton-Raphson

   Como não temos solução explícita precisamos de métodos numéricos para achar a estimativa de MV procurada.

   Note que:

   Seja $L(\theta)$ a função de verossimilhança e $l(\theta) = \log\left(L(\theta)\right)$.

Seja a função escore

$$U(\theta) = \frac{\partial l}{\partial \theta}.$$

Temos que o estimador de MV de θ, $\hat{\theta}$ satisfaz:

$$U(\hat{\theta}) = 0,$$

de modo que expandindo $U(\hat{\theta})$ em série de Taylor, em torno de um ponto θ_0, obtemos

$$0 = U(\hat{\theta}) \approx U(\theta_0) + (\hat{\theta} - \theta_0)U^{'}(\theta_0)$$

Assim

$$\hat{\theta} - \theta_0 \approx -\frac{U(\theta_0)}{U^{'}(\theta_0)}$$

e

$$\hat{\theta} \approx \theta_0 - \frac{U(\theta_0)}{U^{'}(\theta_0)}$$

Esta última equação gera o procedimento iterativo conhecido como Newton-Raphson.

$$\theta_{j+1} = \theta_j - \frac{U(\theta_j)}{U^{'}(\theta_j)}$$

que é iniciado com um valor θ_0 e daí um novo valor θ_1 é obtido
através de

$$\theta_1 = \theta_0 - \frac{U(\theta_0)}{U^{'}(\theta_0)}$$

e assim por diante até a estabilização do processo, ou seja, dado $\epsilon > 0$ pequeno

$$|\theta_{j+1} - \theta_j| < \epsilon.$$

4. Método Scoring de Fisher

Vamos colocar a equação de Newton-Raphson na forma:

$$\theta_{j+1} = \theta_j + \frac{U(\theta_j)}{-U^{'}(\theta_j)}$$

Vamos substituir $U^{'}(\theta_j)$ por $E\left(U^{'}(\theta_j)\right) = -I_F(\theta)$. Assim

$$\theta_{j+1} = \theta_j + \frac{U(\theta_j)}{I_F(\theta_j)}$$

Este método apresenta uma significativa simplificação no procedimento.

Vamos empregar no exemplo a seguir:

5. As folhas de uma planta são examinadas para a contagem do número de insetos. O número de insetos por folha tem distribuição de Poisson com média μ, exceto porque muitas folhas não tem insetos em virtude delas serem indesejáveis para a alimentação e não devido a variação aleatória permitida pela lei de Poisson. As folhas vazias não são çontadas.

   a. Ache a distribuição condicional que a folha contenha i insetos , dado que ela contém pelo menos um inseto. Esta distribuição é conhecida como distribuição de Poisson truncada no zero.

   b. Suponha que x_i folhas são observadas com i insetos $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, em que $\sum x_i = n$. Mostre que a estimativa de máxima verossimilhança de μ satisfaz a equação

   $$\hat{\mu} = \bar{x}(1 - \exp(-\hat{\mu})),$$

   em que $\bar{x} = \sum i x_i / n$.

   c. Determine $\hat{\mu}$ numericamente para o caso $\bar{x} = 3,2$.

Solução Vamos obter a função de probabilidade da variável

$$X \sim \text{Poisson truncada no zero de parâmetro} \quad \mu > 0.$$

Seja

$$Y \sim Poisson(\mu),\ \mu.0$$

Quereremos estudar a lei de:

$$X = Y\ |Y > 0.$$

Assim Para $x = 1, 2, \ldots,$

$$P(X = x) = P(Y = x|Y > 0) = \frac{P(Y = x)}{1 - e^{-\mu}} = \frac{\frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}}{1 - e^{-\mu}}.$$

Logo,

$$P(X = x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{(1 - e^{-\mu})x!}\ \ I_A(x),$$

que pode ser posta na forma:

$$P(X = x) = \frac{\mu^x}{(e^{\mu} - 1)x!}\ \ I_A(x),$$

$$A = \{1, 2, \ldots\}.$$

A esperança de X é dada por:

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x \times \frac{e^{-\mu}\mu^x}{(1 - e^{-\mu})x!} = \frac{1}{(1 - e^{-\mu})} \ \sum_{x=1}^{\infty} x \times \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!},$$

$$E(X) = \frac{1}{(1 - e^{-\mu})} \ \sum_{x=0}^{\infty} x \times \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!} = \frac{1}{1 - e^{-\mu}} \times E(Y) = \frac{\mu}{1 - e^{-\mu}}.$$

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de X. A função de verossimilhança de mu é dada por:

$$L(\mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu^{x_i}}{(e^{\mu}-1)x_i!} = \frac{\mu^s}{(e^{\mu}-1)^n\, C},$$

em que

$$s = \sum_{x=1}^{n} x_i \quad e \;\; C = \prod_{i=1}^{n} x_i!.$$

O logaritmo da função de verossimilhança é dado por:

$$l(\mu) = s\;\log(\mu) - n\log((e^{\mu}-1)) - \log(C).$$

A função escore é dada por:

$$l'(\mu) = \frac{s}{\mu} - n\frac{e^{\mu}}{(e^{\mu}-1)} = \frac{s}{\mu} - \frac{n}{(1-e^{-\mu})}.$$

Vamos achar

$$l'(\mu) = 0$$

temos

$$\frac{s}{\mu} = n\frac{e^{\mu}}{(e^{\mu}-1)}.$$

Dividindo por n temos:

$$\frac{\bar{x}}{\mu} = \frac{1}{1-e^{-\mu}}.$$

A possível estimativa de máxima verossimilhança é raiz da equação:

$$\bar{x}\;(1-e^{-\mu}) = \mu.$$

A derivada segunda de $l(\mu)$ é dada por:

$$H(\mu) = l^{''}(\mu) = -\frac{s}{\mu^2} + \frac{ne^{-\mu}}{(1-e^{-\mu})^2}.$$

$$H(\mu) = n\left[-\frac{\bar{x}}{\mu^2} + \frac{e^{-\mu}}{(1-e^{-\mu})^2}.\right]$$

Se $\bar{x} = 3,2$ temos que resolver a equação:

$$3,2(1-e^{-\mu}) = \mu,$$

temos que:

$$g(u) = 3,2(1-e^{-\mu}) - \mu = 0$$

Temos então que achar uma raiz de $g(\mu)$. Vamos brincar com o R:
Considere a função;

$$g(y) = 3,2(1 - e^{-y}) - y.$$

Fazendo o gráfico da função:

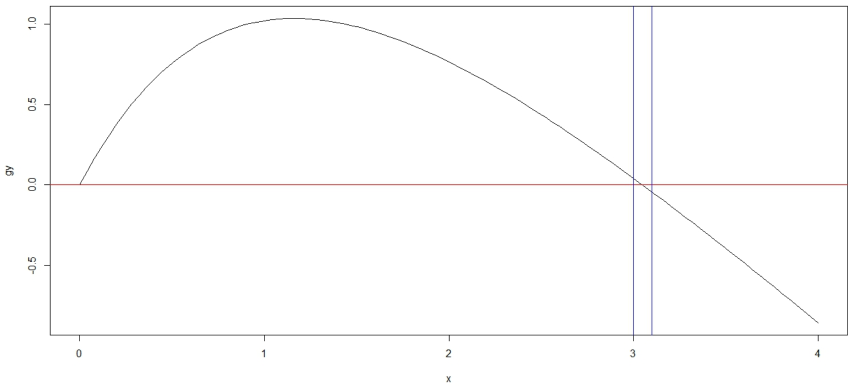

Figura 1:

Analisando o gráfico temos uma raiz da equação no intervalo $(3; 3,1)$. Vamos descrever um método ingênuo para descobrir a raiz. Além disso vamos usar a função uniroot do R que calcula a raiz diretamente.:

```
> ############################################ Método Ingênuo.
>
>
>  gy=function(y) 3.2*(1-exp(-y))-y
>  gy(3)
[1] 0.04068138
>
>  gy(3.1)
[1] -0.04415745
>
>  gy(3.1) #######<0
[1] -0.04415745
>
>  gy(3.05) ######<0 a raiz pertence ao intervalo (3;3,05)
[1] -0.001548558
>  gy(3.04)####### >0  a raiz pertence ao intervalo (3,04;3,05)
[1] 0.006928354
>  gy(3.045)####### >0  a raiz pertence ao intervalo (3,04;3,05)
[1] 0.002691802
>  gy(3.049)####### >0  a raiz pertence ao intervalo (3,045;3,05)
[1] -0.0007001824
>  gy(3.047)####### >0  a raiz pertence ao intervalo (3,045;3,05)
[1] 0.0009961136
>  gy(3.047)####### >0  a raiz pertence ao intervalo (3,047;3,049)
[1] 0.0009961136
>
>  gy(3.048)####### >0  a raiz pertence ao intervalo (3,048;3,049)
[1] 0.0001480415
```

Nossa estimativa de MV está no intervalo $(3,048; 3,049)$.

Sempre é bom brincar com o R para achar um intervalo no qual a raiz pertence. este valor pode ser usado na função uniroot.

Agora vamos utilizar a função uniroot do R: é preciso fornecer um intervalo de busca para a raiz.

```
>  uniroot(gy,lower=3,upper=3.1)
$root

$root
[1] 3.048175

$f.root
[1] -2.164566e-08

$iter
```

```
[1] 3

$init.it
[1] NA

$estim.prec
[1] 6.103516e-05

>
```

Vamos apresentar o método de Newton para o caso de um único parâmetro.
Suponha que queremos achar uma raiz $\hat{\theta}$ de

$$g(\theta) = 0.$$

Seja θ_0 um valor perto de $\hat{\theta}$ e considere a expansão em série de Taylor de $g(\theta)$ em torno do θ_0.

$$g(\theta) = g(\theta_0) + g'(\theta_0) \times \frac{(\theta - \theta_0)^1}{1!} + g^{(2)}(\theta_0) \times \frac{(\theta - \theta_0)^2}{2!} + \sum_{k=3}^{\infty} g^{(k)}(\theta_0) \frac{(\theta - \theta_0)^k}{k!}.$$

Para $|\theta - \theta_0|$ vamos aproximar nossa função por:

$$g(\theta) \approx g(\theta_0) + g'(\theta_0) \times (\theta - \theta_0)$$

Desde que $g(\hat{\theta}) = 0$ temos

$$g(\hat{\theta}) \approx g(\theta_0) + g'(\theta_0) \times (\hat{\theta} - \theta_0) = 0.$$

$$\hat{\theta} = \theta_0 - \frac{g(\theta_0)}{g'(\theta_0)}.$$

Assim o método de Newton a partir de um valor inicial atualiza este valor para:

$$\theta_1 = \theta_0 - \frac{g(\theta_0)}{g'(\theta_0)}.$$

Em seguida atualiza o valor de θ_1 para um valor θ_2

$$\theta_2 = \theta_1 - \frac{g(\theta_1)}{g'(\theta_1)}.$$

O processo continua até que

$$\theta_{i+1} \approx \theta_i.$$

Assim

$$\hat{\theta} = \theta_i.$$

Na prática nosso critério de parada é:

$$|\theta_{i+1} - \theta_i| < 10^{-5}.$$

Em Inferência queremos achar um estimativa de MV. Assim

$$g(\theta) = l'(\theta) = S(\theta).$$

e

$$g'(\theta) = l''(\theta) = -I(\theta).$$

O método de Newton fica:

$$\theta_{i+1} = \theta_i - \frac{g(\theta_i)}{g'(\theta_i)} = \theta_i + \frac{S(\theta_i)}{I(\theta_i)}.$$

Vamos fazer o exemplo:

Assim,

$$S(\mu) = \frac{s}{\mu} - \frac{n\ e^u}{e^\mu - 1} = \frac{n\bar{x}}{\mu} - \frac{n\ e^u}{e^\mu - 1} = n\left(\frac{\bar{x}}{\mu} - \frac{1}{1 - e^\mu}\right)$$

A derivada de $S(\mu)$ é dada por:

$$S'(\mu) = -n\left(\frac{\bar{x}}{\mu^2} + \frac{e^\mu}{(1 - e^\mu)^2}\right) < 0.$$

Logo

$$I = -S'(\mu) = n\left(\frac{\bar{x}}{\mu^2} + \frac{e^\mu}{(1 - e^\mu)^2}\right).$$

Vamos usar o usar o R para descrever o passo a passo do método de Newton:

```
>
> S=function(u) 3.2/u- exp(u)/(exp(u) -1)
>
> H=function(u) -3.2*u^(-2) + exp(-u)/(1- exp(-u))^2
> ###primeira iteração:
>
> u_0=3
> S(u_0);H(u_0)
[1] 0.01427097
[1] -0.3004146
>
> u_1=u_0 - S(u_0)/H(u_0);u_1
[1] 3.047504
>
> d_1=abs(u_1-u_0);d_1
[1] 0.04750426
> d_1 < 10^{-5}
[1] FALSE
>
>
```

```
> #####Segunda iteração
>
>
> S(u_1);H(u_1)
[1] 0.0001958393
[1] -0.2922291
>
> u_2=u_1- S(u_1)/H(u_1);u_2
[1] 3.048174
>
> d_2=abs(u_2-u_1);d_2
[1] 0.0006701569
> d_2 < 10^{-5}
[1] FALSE
>
> ##### Terceira iteração
>
>
> S(u_2);H(u_2)
[1] 3.784771e-08
[1] -0.2921162
>
> u_3=u_2- S(u_2)/H(u_2);u_3
[1] 3.048175
>
> d_3=abs(u_3-u_2);d_3
[1] 1.295639e-07
> d_3< 10^{-5}
[1] TRUE
>
>
>
> #####Portanto
>
> mu_est=u_3;mu_est
[1] 3.048175
>
> ################################################################################
>
>
> ####Ponto de máximo relativo
>
> round(S(mu_est),6)
[1] 0
>
> H(mu_est);H(mu_est)<0
[1] -0.2921161
[1] TRUE
>
>
>
> #####Confirmado!!!!!!!!
```

```
>
```

A informação de Fisher de μ é dada por:

$$IF(\mu) = E\left(-\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\ \log\left(f(X|\mu)\right)\right)$$

Assim,

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\ \log\left(f\left(X|\mu\right)\right) = \frac{X}{\mu} - \frac{e^{-\mu}}{(1-e^{-\mu})}.$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\ \log\left(f\left(X|\mu\right)\right) = -\frac{X}{\mu^2} + \frac{e^{-\mu}}{(1-e^{-\mu})^2}.$$

e multiplicando por (-1) temos:

$$-\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\ \log\left(f\left(X|\mu\right)\right) = \frac{X}{\mu^2} - \frac{e^{-\mu}}{(1-e^{-\mu})^2}.$$

A informação de Fisher de μ é dada por:

$$IF(\mu) = E\left(-\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\ \log\left(f(X|\mu)\right)\right)$$

$$IF(\mu) = \ E\left(\frac{\bar{X}}{\mu^2} - \frac{e^{-\mu}}{(1-e^{-\mu})^2}\right).$$

$$IF(\mu) = \left(\frac{1}{\mu^2}\ E(\bar{X}) - \frac{e^{-\mu}}{(1+e^{-\mu})^2} + \right).$$

$$IF(\mu) = \ \left(\frac{1}{\mu^2}\frac{\mu}{(1-e^{-\mu})} - \frac{e^{-\mu}}{(1-e^{-\mu})^2}\right).$$

$$IF(\mu) = \ \left(\frac{1}{\mu\ (1-e^{-\mu})} - \frac{e^{-\mu}}{(1-e^{-\mu})^2}\right).$$

$$IF(\mu) = \ \left(\frac{1-e^{-\mu}-\mu\ e^{-\mu}}{\mu(1-e^{-\mu})^2}\right) = \ \left(\frac{1-(\mu+1)\ e^{-\mu}}{\mu(1-e^{-\mu})^2}\right)$$

Vamos achar a raiz usando o método Scoring de Fisher.

```
S=function(u) 3.2/u- exp(u)/(exp(u) -1)
> IF=function(u) (1-(u+1)*exp(-u))/(u*(1-exp(-u)^2 ))
>
> ###primeira iteração:
> u_0=3
> S(u_0);IF(u_0)
[1] 0.01427097
```

```
[1] 0.2676139
>
> u_1=u_0+ S(u_0)/IF(u_0);u_1
[1] 3.053327
>
> d_1=abs(u_1-u_0);d_1
[1] 0.05332671
> d_1 < 10^{-5}
[1] FALSE
>
>
> #####Segunda iteração
>
>
> S(u_1);IF(u_1)
[1] -0.001502798
[1] 0.2654423
>
> u_2=u_1+ S(u_1)/IF(u_1);u_2
[1] 3.047665
>
> d_2=abs(u_2-u_1);d_2
[1] 0.005661487
> d_2 < 10^{-5}
[1] FALSE
>
> ##### Terceira iteração
>
> S(u_2);IF(u_2)
[1] 0.0001488028
[1] 0.2656733
>
> u_3=u_2+ S(u_2)/IF(u_2);u_3
[1] 3.048225
>
> d_3=abs(u_3-u_2);d_3
[1] 0.0005600969
> d_3< 10^{-5}
[1] FALSE
>
>
>
> ##### Quarta iteração
>
> S(u_3);IF(u_3)
[1] -1.483217e-05
[1] 0.2656505
>
> u_4=u_3+ S(u_3)/IF(u_3);u_4
[1] 3.048169
>
> d_4=abs(u_4-u_3);d_4
```

```
[1] 5.583342e-05
> d_4 < 10^{-5}
[1] FALSE
>
> ##### Quinta iteração
>
>
> S(u_4);IF(u_4)
[1] 1.477453e-06
[1] 0.2656528
>
> u_5=u_4+ S(u_4)/IF(u_4);u_5
[1] 3.048175
>
> d_5=abs(u_5-u_4);d_5
[1] 5.561596e-06
> d_5 < 10^{-5}
[1] TRUE
> mu_est=u_5;mu_est
[1] 3.048175
> ####Ponto de máximo relativo
>
> round(S(mu_est),6)
[1] 0
> IF(mu_est);IF(mu_est)>0
[1] 0.2656525
[1] TRUE
>
```

6. Uma variável aleatória X tem distribuição $N(\mu, 1)$. Tomam-se 20 observações de X, mas em vez de se registrar o valor real somente anotamos se X era negativo ou não. Suponha que o evento $\{X < 0\}$ tenha ocorrido 14 vezes. Utilizando essa informação, determine a estimativa de MV para μ.