1.12. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição da variável aleatória $X \sim U(0, \theta)$.

$$\hat{\theta}_1 = c_1\ \bar{X} \quad\quad e \quad\quad \hat{\theta}_2 = c_2\, Y_n = c_2\ \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

i. Encontre c_1 e c_2 que tornem os estimadores não viciados .

ii. Encontre e compare os EQM dos dois estimadores.

Solução:

Sabemos que

$$E(X) = \mu = \frac{\theta}{2}\ \ e\ \ \ Var(X) = \frac{\theta^2}{12}.$$

Seja

$$T_1 = \hat{\theta}_1 = c_1\ \bar{X}.$$

$$E(T_1) = c_1 E(\bar{X}) = c_1\mu = c_1\ \frac{\theta}{2} = \frac{c_1}{2}\theta = \theta$$

Assim

$$\frac{c_1}{2} = 1\ \ e\ \ c_1 = 2.$$

Logo

$$T_1 = 2\ \bar{X}$$

é um estimador não viciado para θ.

Agora

$$T_2 = \hat{\theta}_2 = c_2\ Y_n = c_2\ max(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Sabemos pelo exemplo **1.3.8.** que:

$$E(Y_n) = \frac{n}{n+1}\ \theta.$$

Logo

$$\frac{n+1}{n} E(Y_n) = \theta$$

$$E\left(\frac{n+1}{n} Y_n\right) = E(c_2 Y_n) = \theta.$$

$$c_2 = \frac{n+1}{n}.$$

Agora vamos responder ao item **ii**:

Como os estimadores são não viciados basta comparar suas variâncias.

$$Var(T_1) = Var(2\bar{X}) = 4Var(\bar{X}) = 4\,\frac{\theta^2}{12n} = \frac{\theta^2}{3n}.$$

$$Var(T_2) = Var\left(\frac{n+1}{n}Y_n\right) = \frac{(n+1)^2}{n^2}Var(Y_n) = \frac{(n+1)^2}{n^2}\frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}.$$

$$Var(T_2) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}.$$

Note que

$$\frac{Var(T_2)}{Var(T_1)} = \frac{3n}{n(n+2)} = \frac{3}{n+2}.$$

Note que para $n = 1$ ocorre a igualdade. Para $n > 1$
temos

$$n + 2 > 3$$

e

$$1 > \frac{3}{n+2} = \frac{Var(T_2)}{Var(T_1)}$$

Logo

$$Var(T_2) < Var(T_1).$$