Q07. Seja X_1, X_2 uma amostra aleatória de tamanho 2 da distribuição $N(\mu, 1)$.
Seja $Y_1 < Y_2$ a amostra ordenada correspondente.

a. Encontre o coeficiente de confiança associado ao intervalo (Y_1, Y_2)
b. Considere o intervalo de confiança para μ baseado na quantidade pivotal $\bar{X} - \mu$, onde

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}.$$

Compare o comprimento esperado deste intervalo com o comprimento esperado do intervalo em(i) usando o mesmo nível de confiança γ

Solução:

Seja

$$\gamma = P\left(Y_1 \leq \mu \leq Y2\right).$$

Sabemos que:

$$P(\mu < Y_1) + P\left(Y_1 \leq \mu \leq Y2\right) + P(\mu > Y_2) = 1.$$

Mas

$$p_2 = P(\mu > Y_2) = P(Y_2 < \mu) = P(Max(X_1, X_2) < \mu)$$

$$p_2 = P(X_1 < \mu, X_2 < \mu) = P(X_1 < \mu)P(X_2 < \mu) = P(Z < 0)P(Z < 0) = \frac{1}{4}.$$

$$p_1 = P(\mu < Y_1) = P(Y_1 > \mu) = P(Min(X_1, X_2) > \mu)$$

$$p_2 = P(X_1 > \mu, X_2 > \mu) = P(X_1 > \mu)P(X_2 > \mu) = P(Z > 0)P(Z > 0) = \frac{1}{4}.$$

$$\gamma = 1 - 2\,\frac{1}{4} = 0,5.$$

Seja

$$\bar{X} \sim N(\mu, 1/2)$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{1/\sqrt{2}} \sim N(0, 1)$$

O intervalo é dado por:

$$\bar{X} \pm z_{tab}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{X} \pm z_{tab}\,\frac{1}{\sqrt{2}}$$

O comprimento deste intervalo é:

$$C_2 = Ls - Li = 2z_{tab}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}z_{tab}$$

Como C_2 é uma constante temos:

$$E(C_2) = C_2 = \sqrt{2}z_{tab} = 1,414 \times 0,67 = 0,9475.$$

Sabemos que

$$P(0 < Z < z_{tab}) = 0,25 = P(Z < 0,67).$$

Vamos calcular o valor esperado do comprimento

$$C_1 = Y_2 - Y_1 = max(X_1, X_2) - minx(X_1, X_2) = |X_1 - X_2| = |V|,$$

$$V \sim N(0, 2)$$

$$E(|V|) = \int_{-\infty}^{\infty} |v| \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}\, e^{-v^2/4}\, dv$$

O integrando é uma função par. Assim:

$$E(|V|) = 2\,\frac{1}{2\,\sqrt{\pi}}\,\int_0^{\infty} v\, e^{-v^2/4}\, dv$$

$$E(|V|) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, IGG(2, 1/4, 2) =$$

$$E(|V|) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{2\,\frac{1}{4}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}.}$$

Assim

$$E(C_1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1,1284.$$

```
qnorm(0.75)
[1] 0.6744898
> round(qnorm(0.75),2)
[1] 0.67
> EC2=sqrt(2)*0.67;EC2
[1] 0.9475231
> EC1=2/sqrt(pi);EC1
[1] 1.128379
>
> EC1>EC2
[1] TRUE
>
```

O primeiro intervalo tem comprimento maior.