Coordenadas Polares

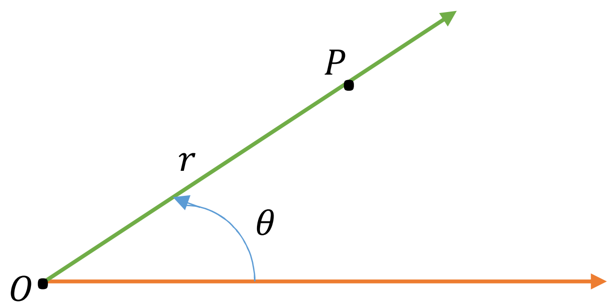
Até agora usamos o sistema de coordenadas cartesianas, para representar pontos no plano.

Usaremos agora um novo sistema de coordenadas, chamado de sistema de coordenadas polares.

A representação de um ponto P do plano, no sistema de coordenadas polares, é determinada por sua posição em relação a um ponto fixo O, chamado polo (ou origem) e a uma semi-reta fixa, chamada de eixo polar.

Seja P um ponto distinto de O. Seja θ a medida do ângulo (em graus ou radiano) entre o eixo polar e a semi-reta OP, do eixo polar para OP, considerada positiva no sentido anti-horário e negativa no sentido horário. Seja r a distância de O até P.

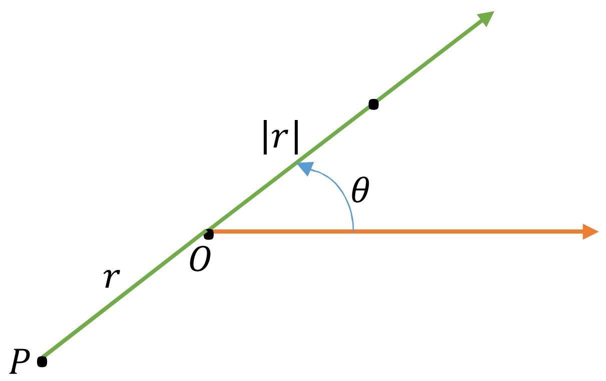
Então r e θ são as coordenadas polares de P, que representamos por (r, θ).



Observe que (r, θ) e $(r, \theta + 2k\pi)$, onde k é um inteiro qualquer, representam o mesmo ponto. Assim um ponto pode ser representado, em coordenadas polares, de infinitas formas, o que não ocorre no sistema de coordenadas cartesianas, onde um ponto tem uma única representação.

Se $r = 0$ e θ é um número real qualquer, temos $O = (0, \theta)$.

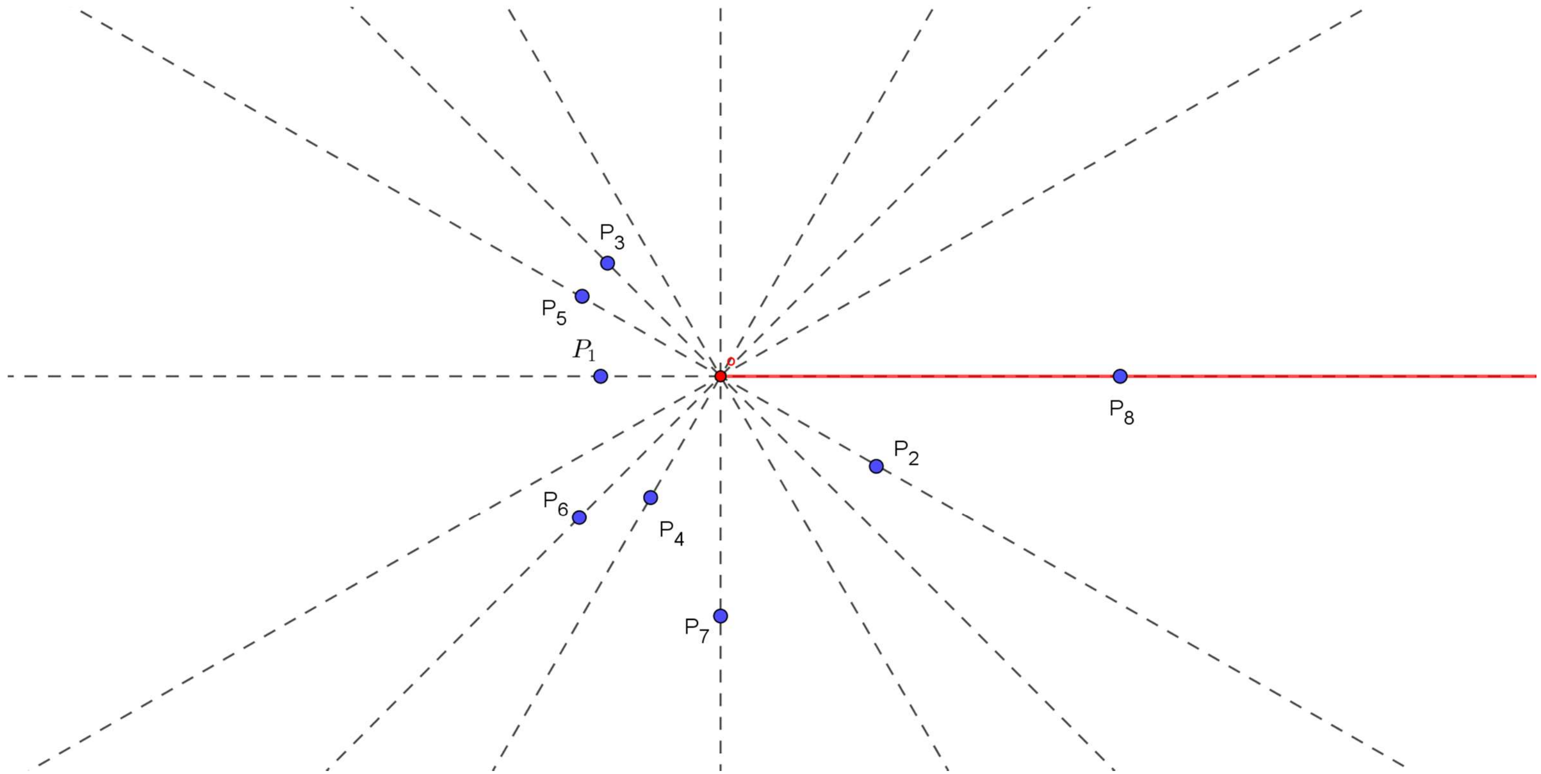
Podemos também considerar coordenadas polares com r negativo. Neste caso o ponto (r, θ) será o ponto simétrico do ponto $(|r|, \theta)$, em relação à origem.



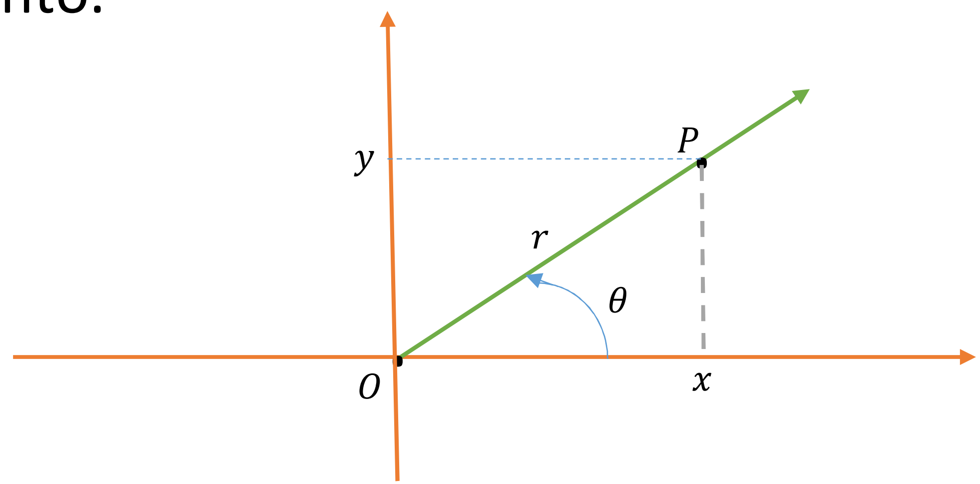
Exemplo: Represente geometricamente os pontos

$P_1 = (6, \pi), P_2 = \left(9, -\frac{\pi}{6}\right), P_3 = \left(8, \frac{3\pi}{4}\right), P_4 = (-7, \frac{\pi}{3})\ , P_5 = \left(-8, -\frac{\pi}{6}\right),$

$P_6 = \left(-10, \frac{\pi}{4}\right), P_7 = \left(-12, \frac{\pi}{2}\right) e\ P_8 = (20{,}0)$



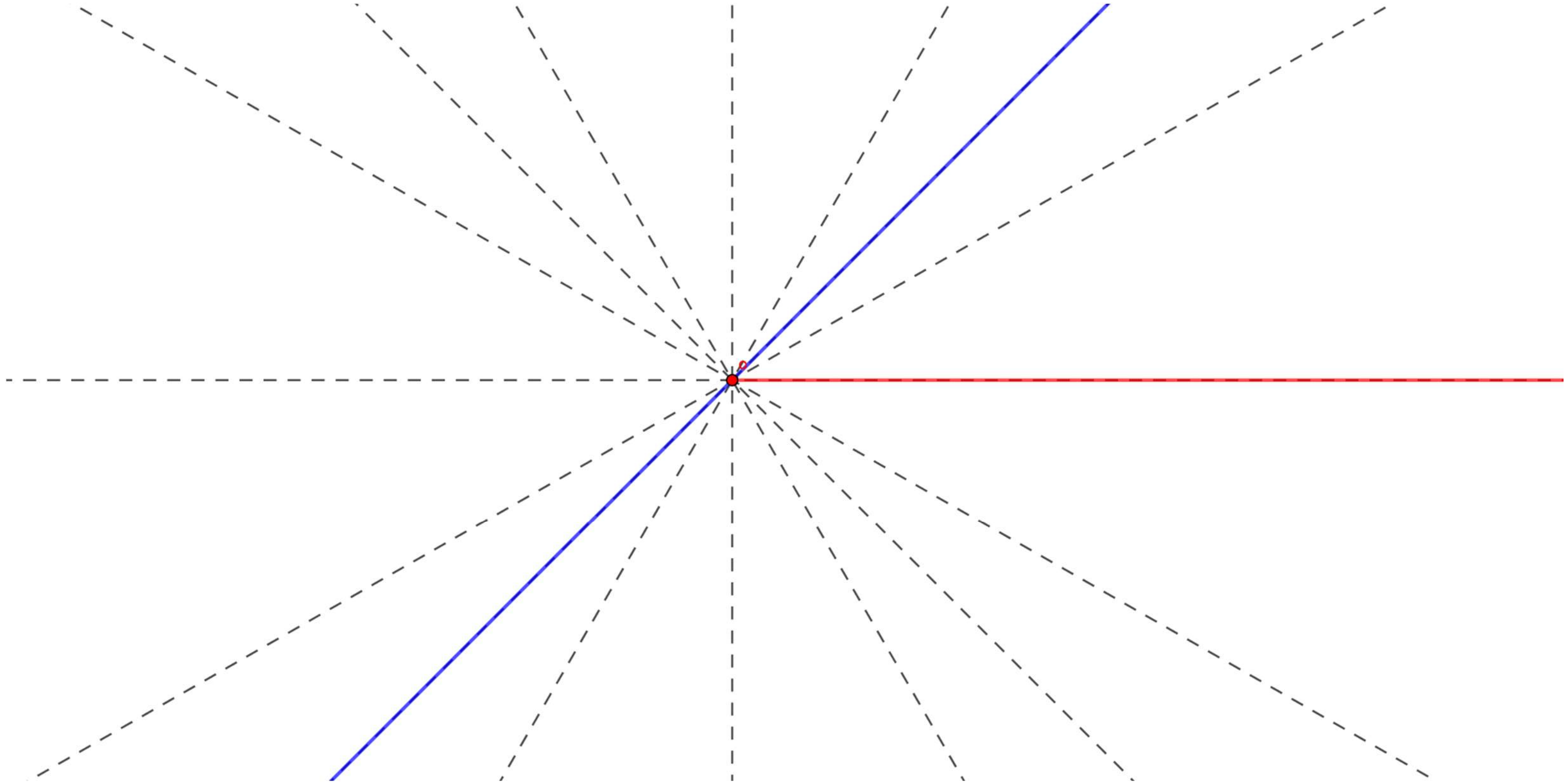
Relação entre as Coordenas Polares e as Coordenadas Cartesianas de um ponto.



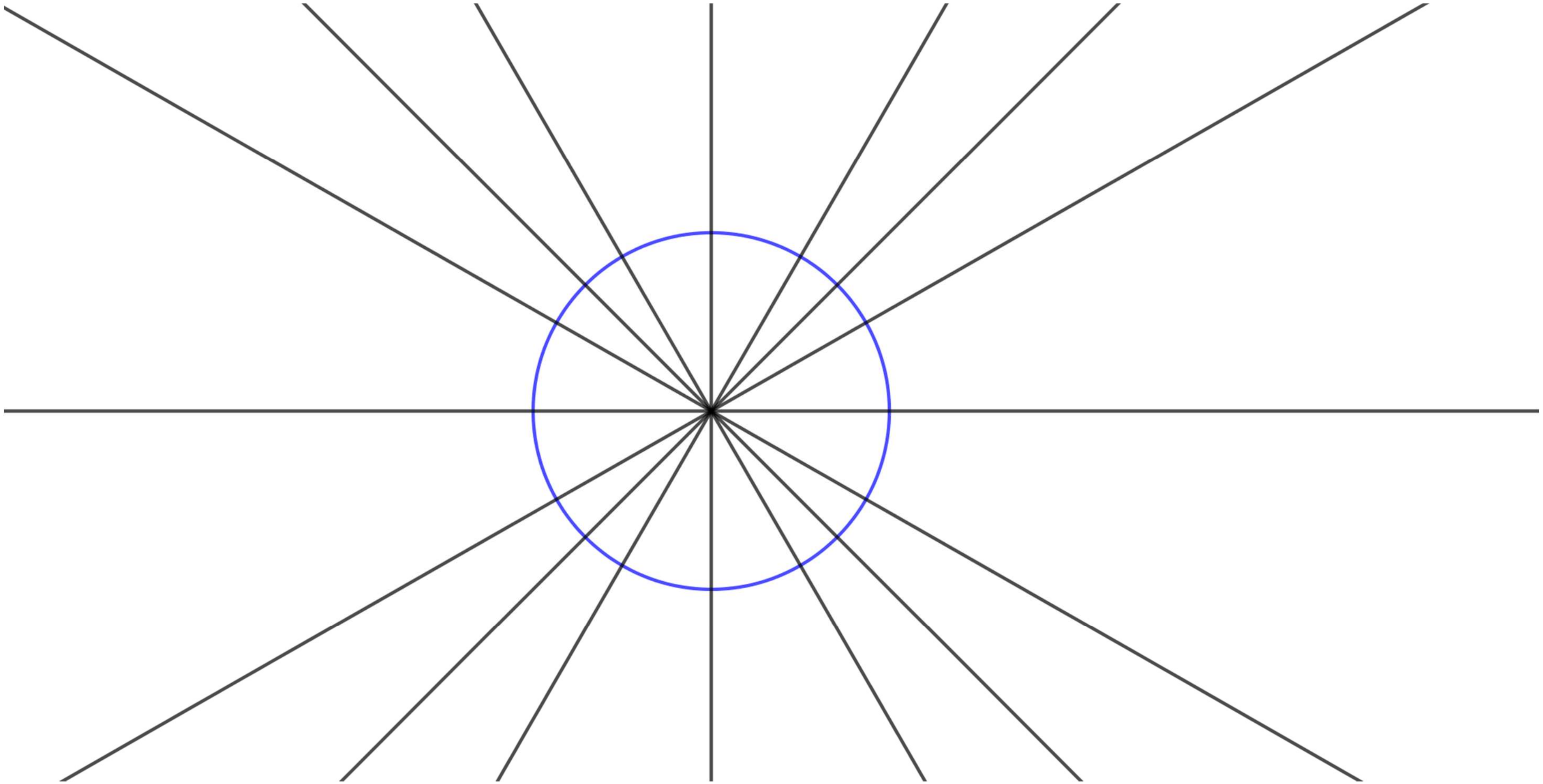
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} r = \pm\sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\,\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Exemplos

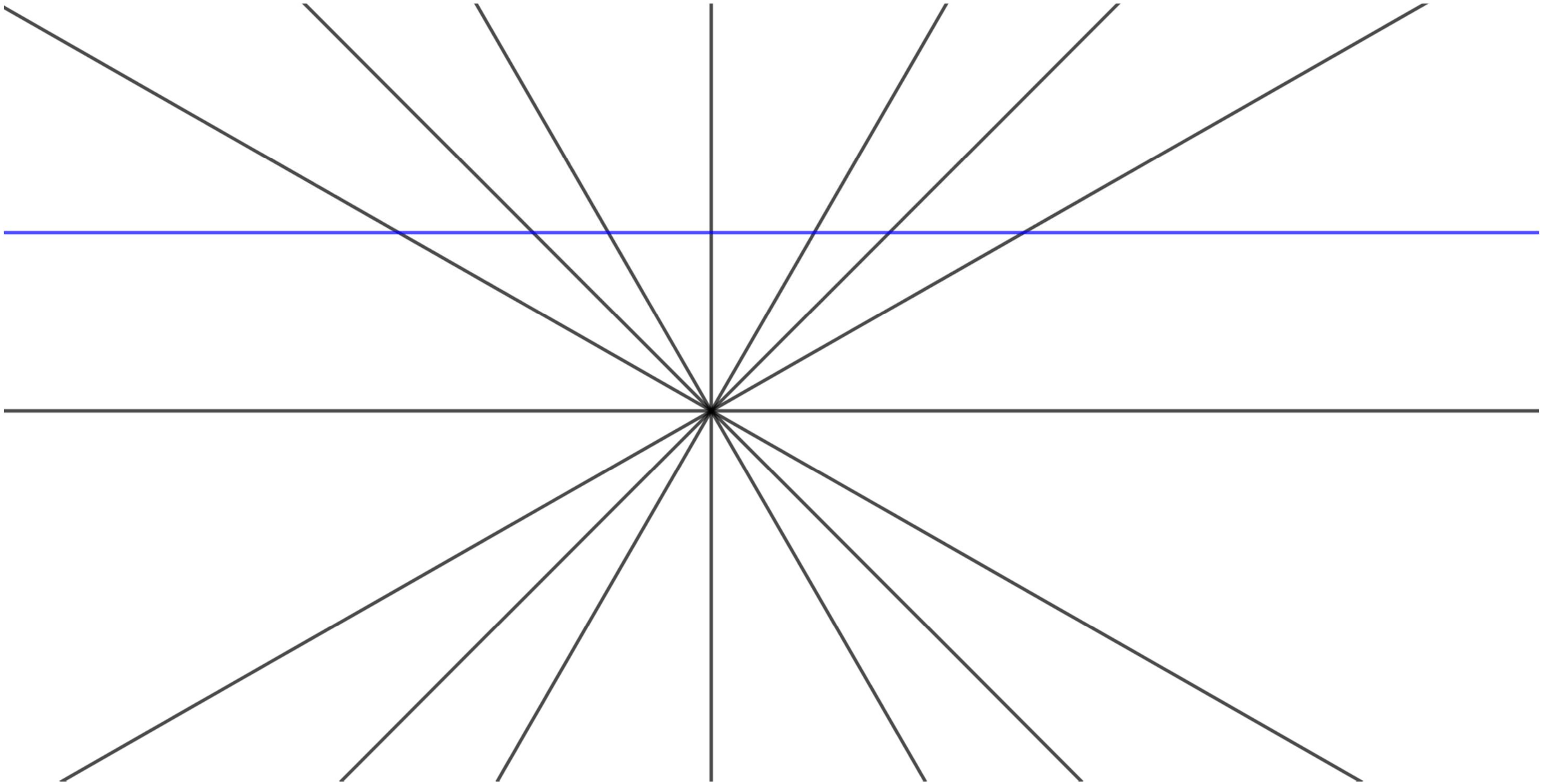
1) $\theta = \frac{\pi}{4}$



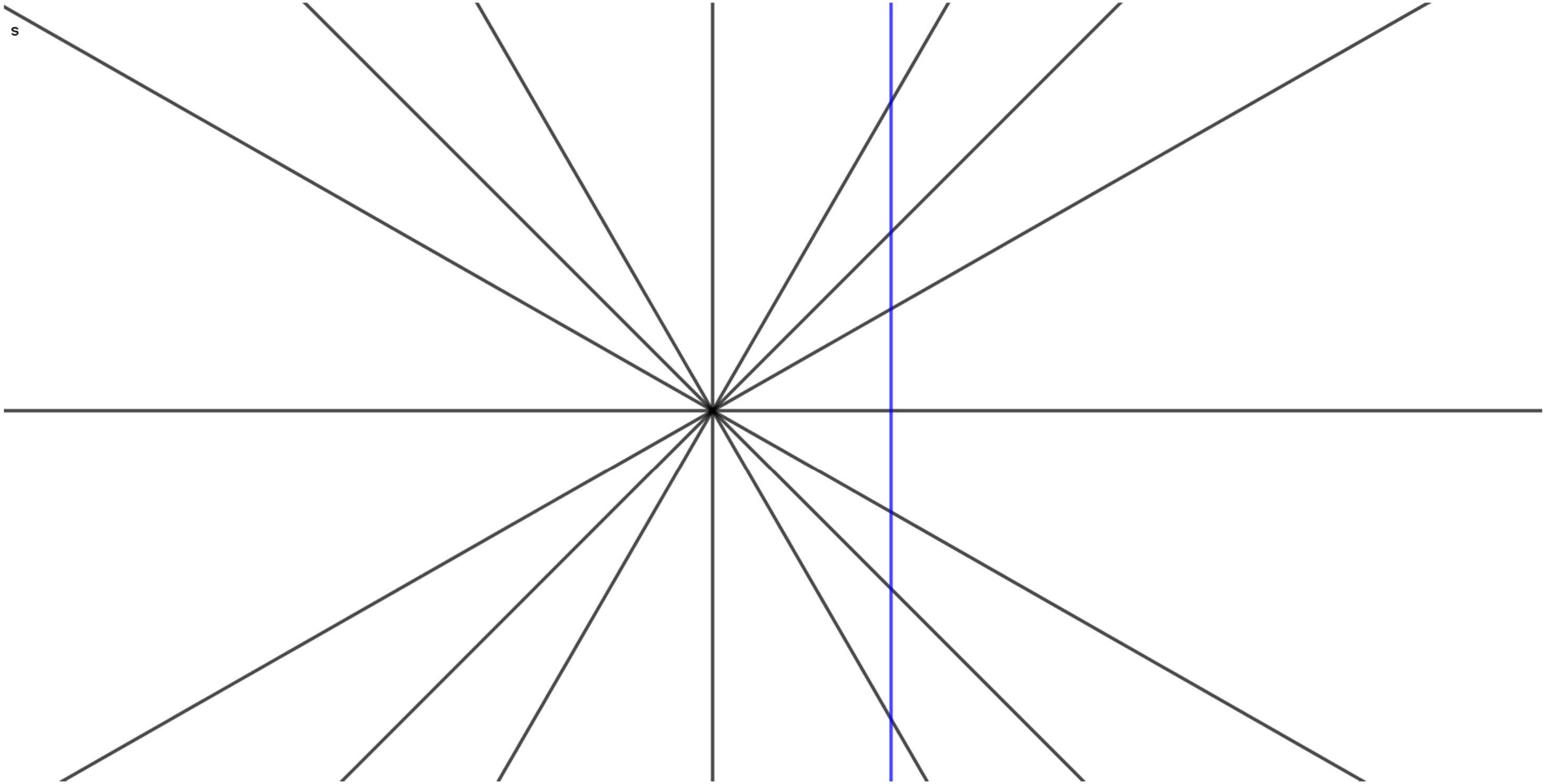
2) $r = 3$



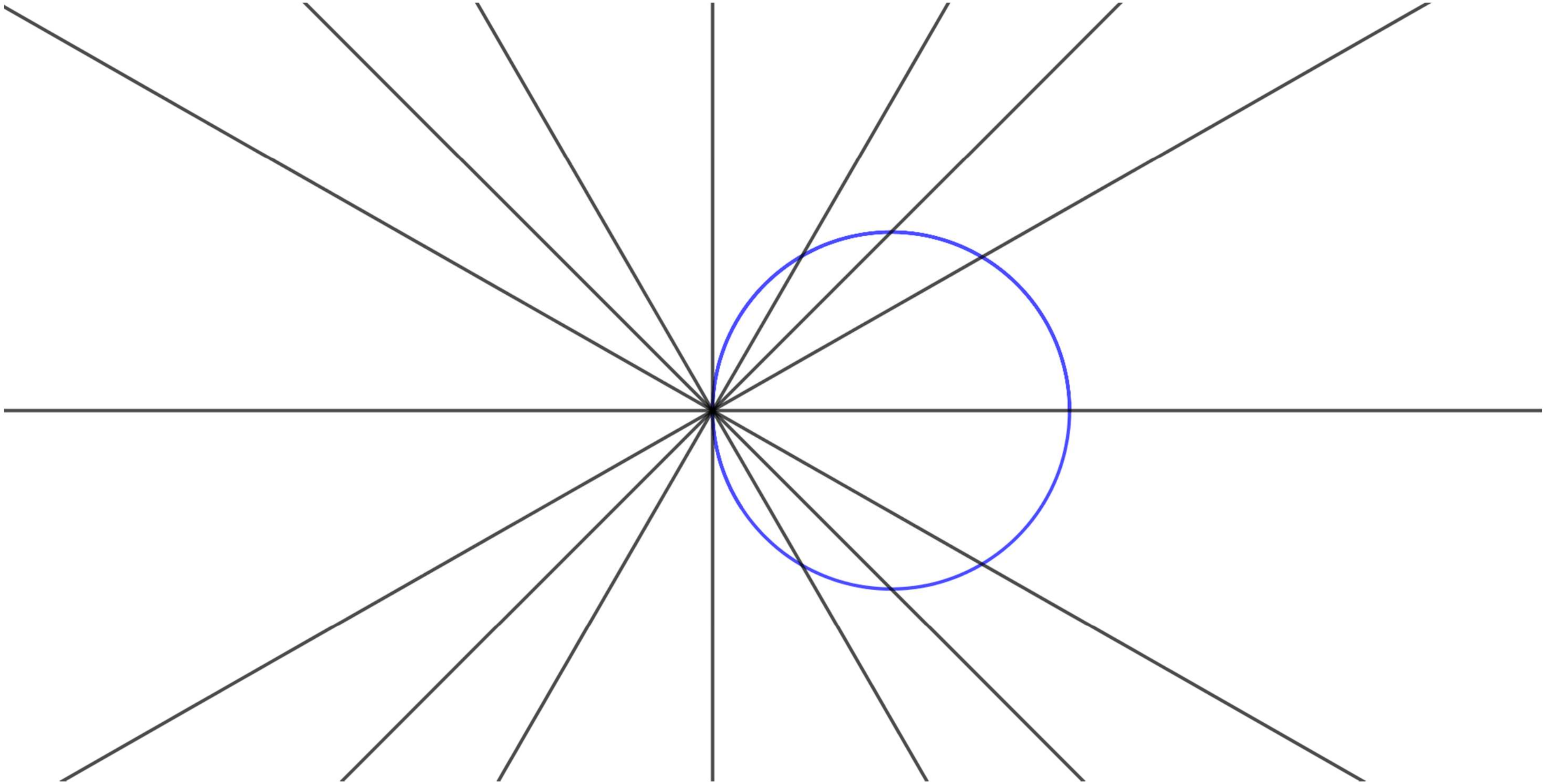
3) $r\ sen\ \theta = 3$



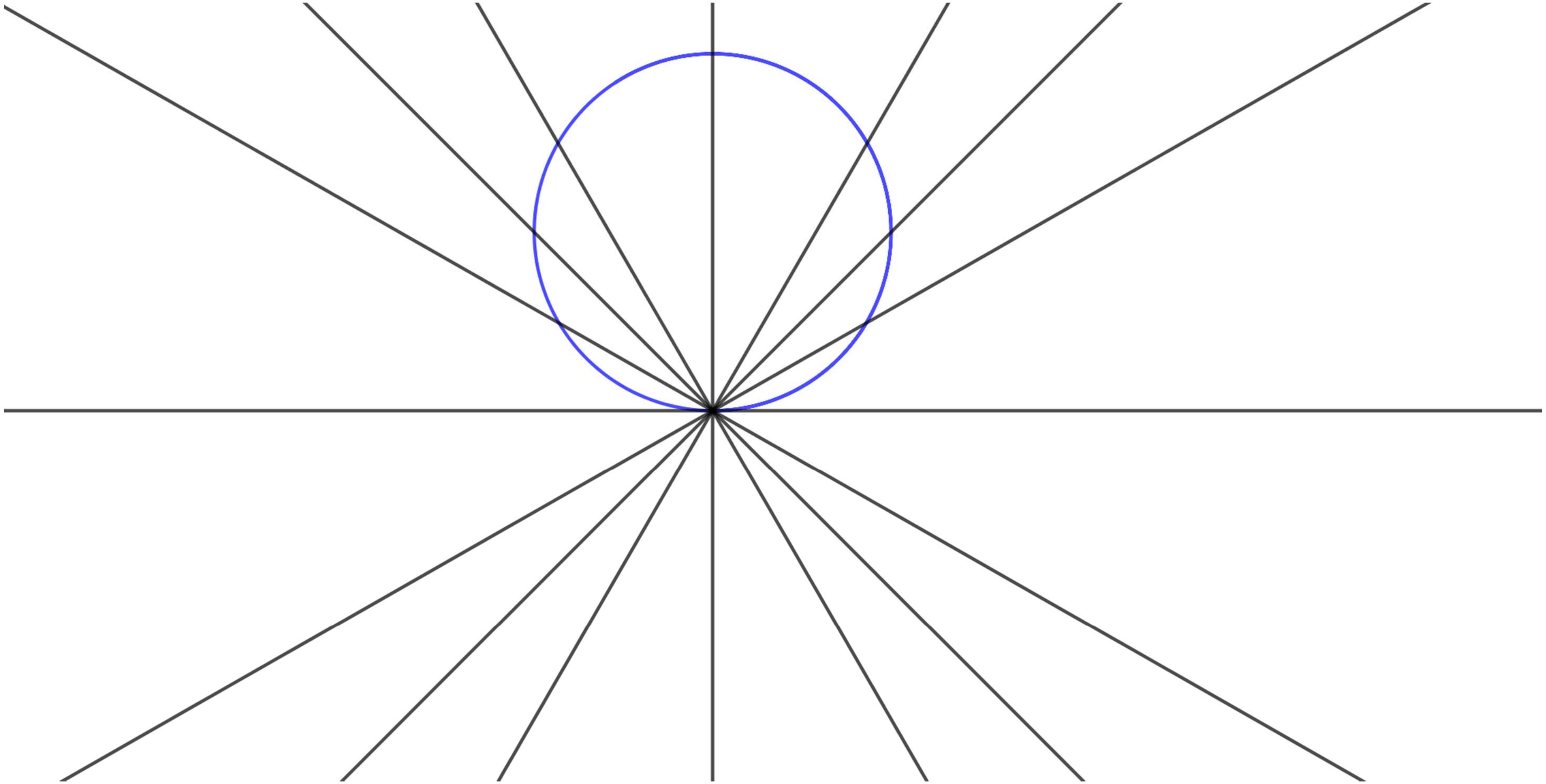
4) $r\cos\theta = 3$



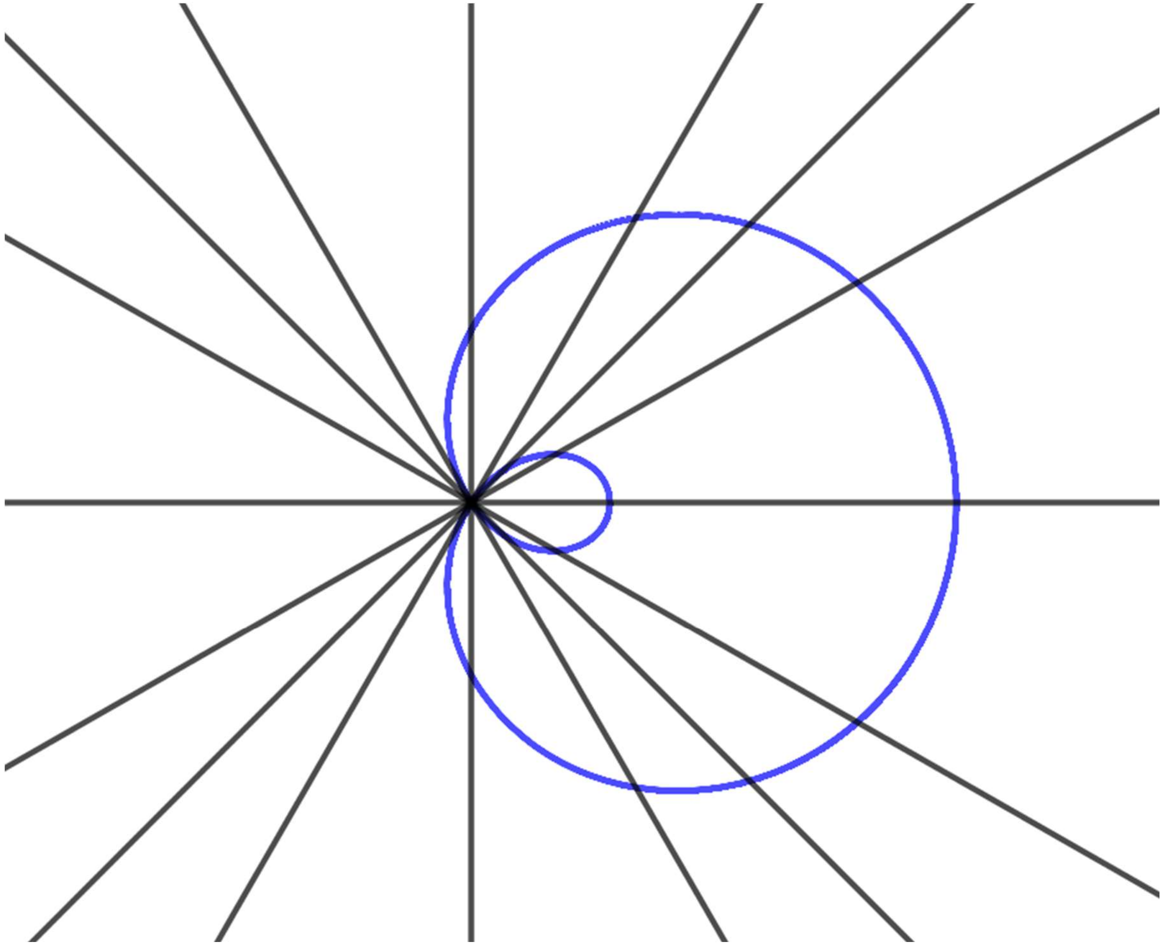
5) $r = 18\cos\theta$



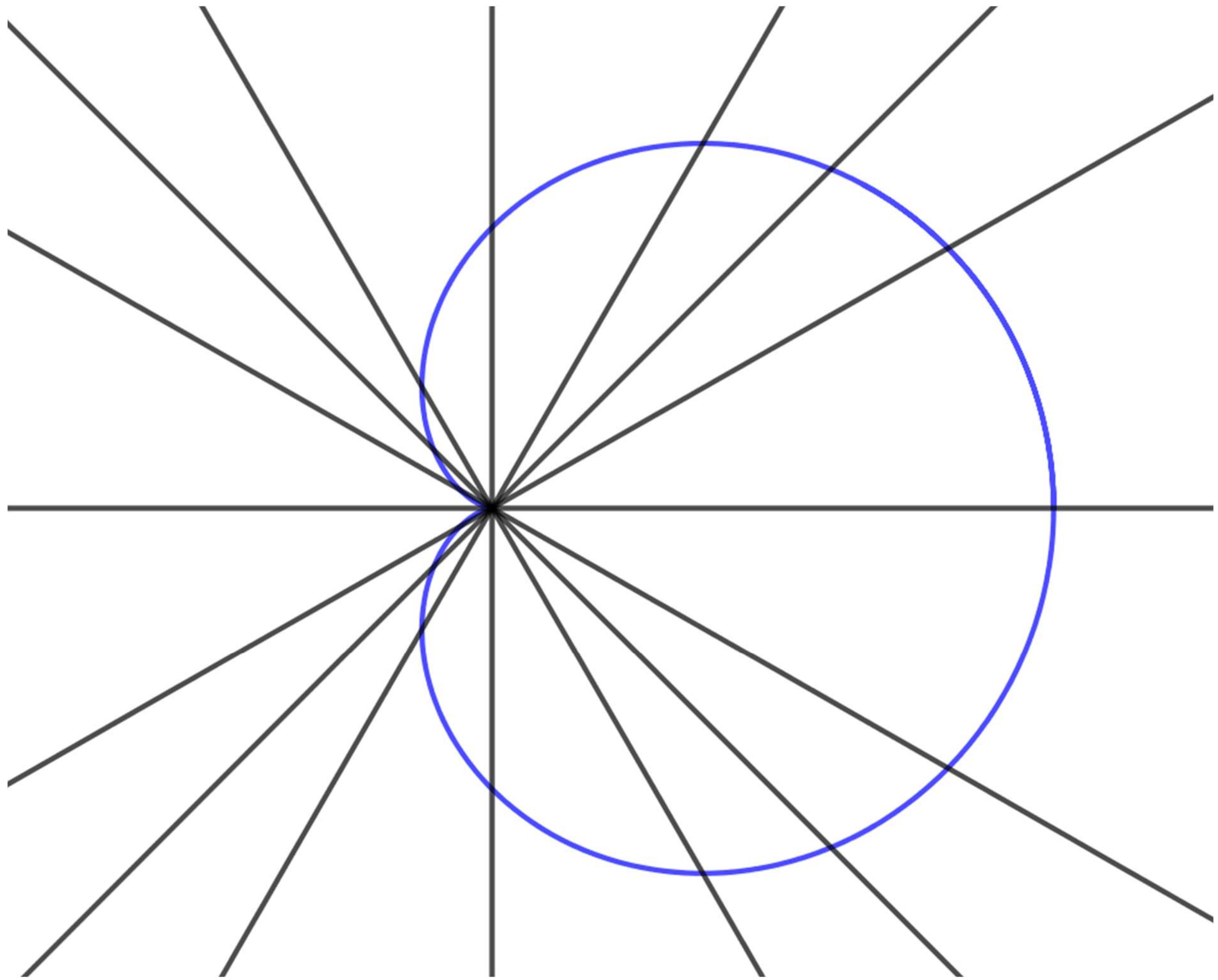
6) $r = 18\,\text{sen}\,\theta$



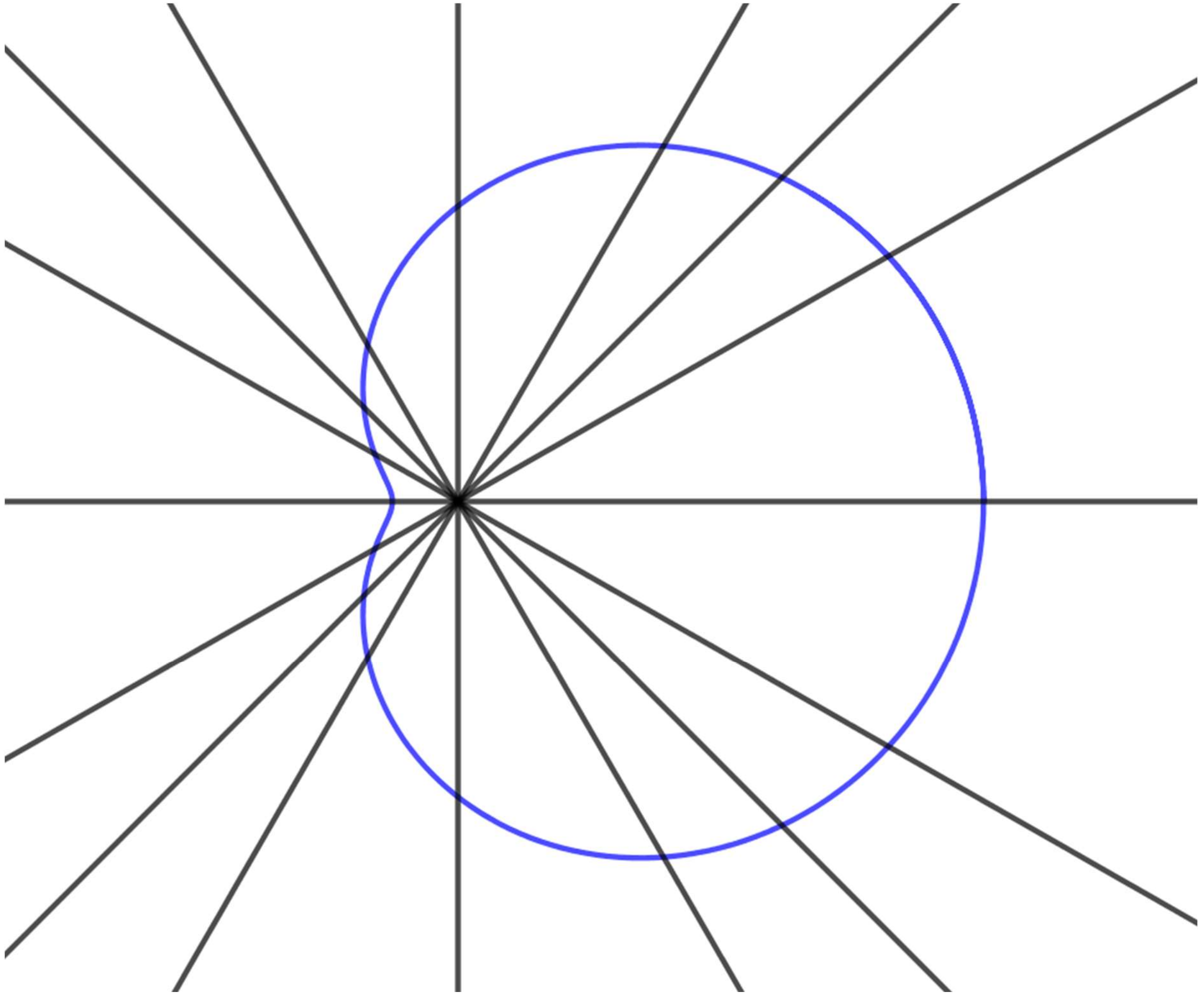
7) i) $r = 5 + 9\cos\theta$ (Limaçon com um laço)



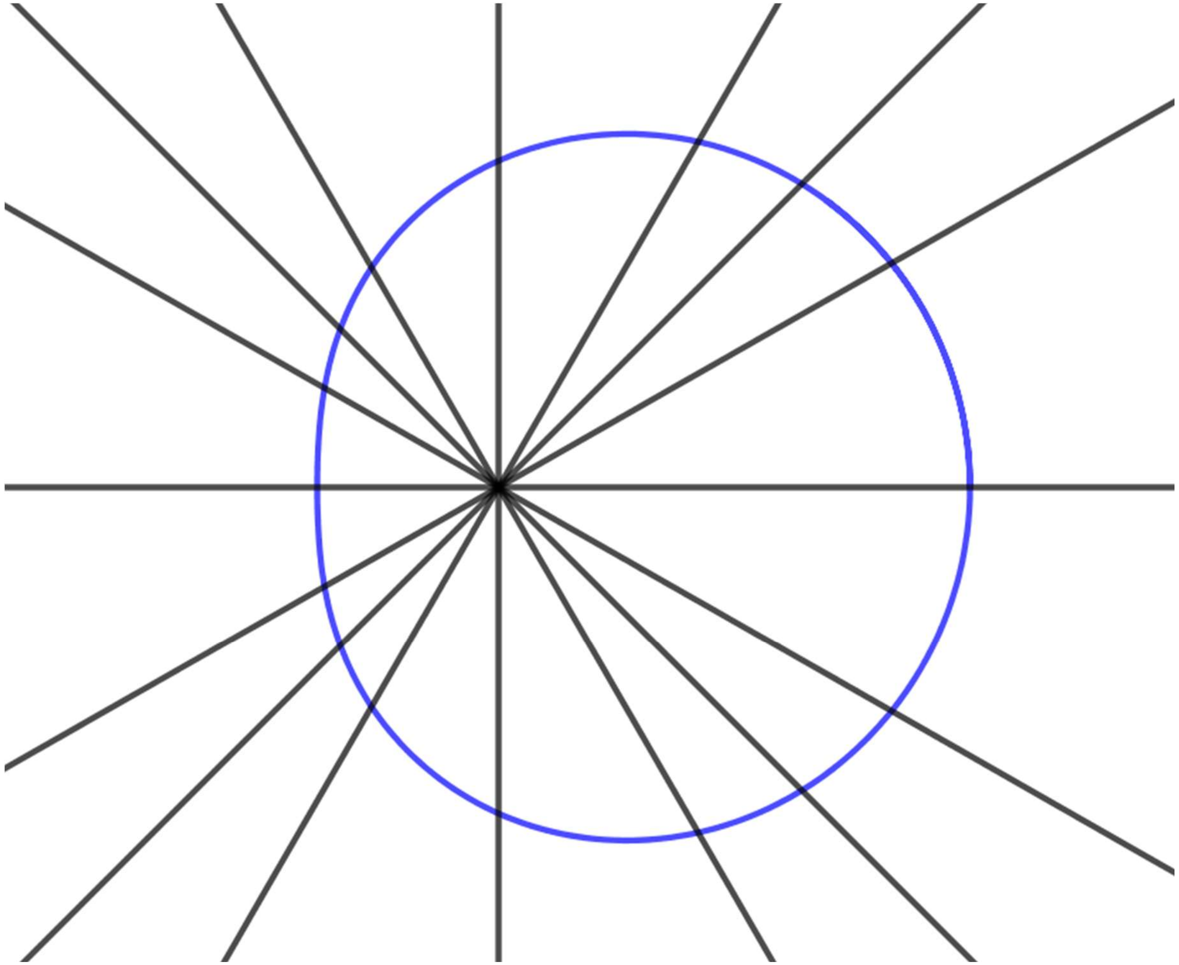
ii) $r = 9 + 9\cos\theta$ (Cardióide)



$iii)\ r = 9 + 8\cos\theta$ (Limaçon com um dente)



$iv)\ r = 9 + 4\cos\theta$ (Limaçon convexa – sem dente)



Gráficos em coordenadas polares

1) $\theta = c$
2) $r = c$
3) $r \, sen \, \theta = b$
4) $r \cos \theta = a$
5) $r = 2a \, sen \, \theta$
6) $r = 2b \cos \theta$

7) $r = a \pm b\ cos\ \theta$, com $a, b > 0$

i) Se $0 < \frac{a}{b} < 1$. Limaçon de um laço

ii) Se $\frac{a}{b} = 1$. Cardióide

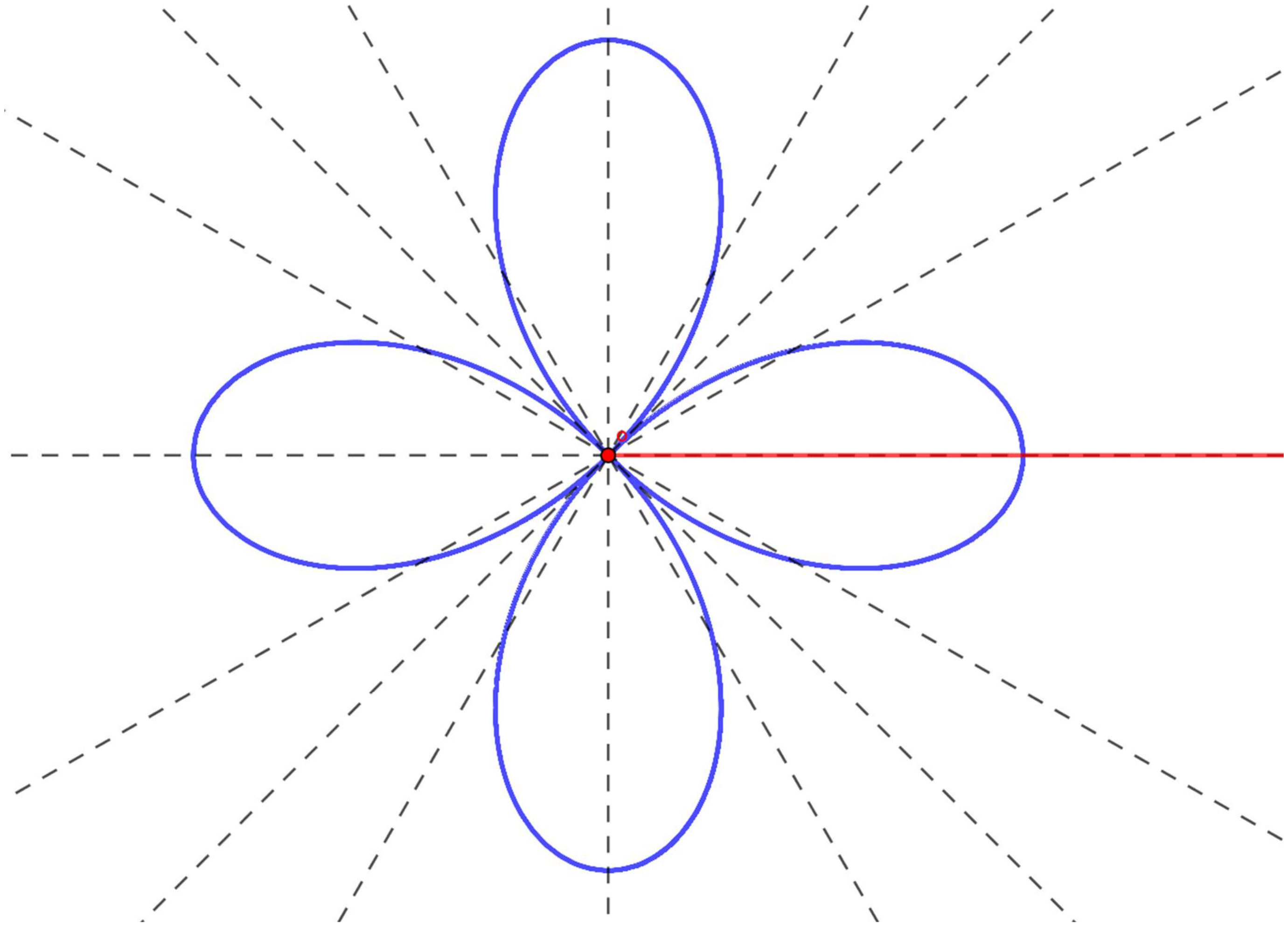
iii) Se $1 < \frac{a}{b} < 2$. Limaçon com um dente

iv) Se $2 \leq \frac{a}{b}$. Limaçon convexa (sem dente)

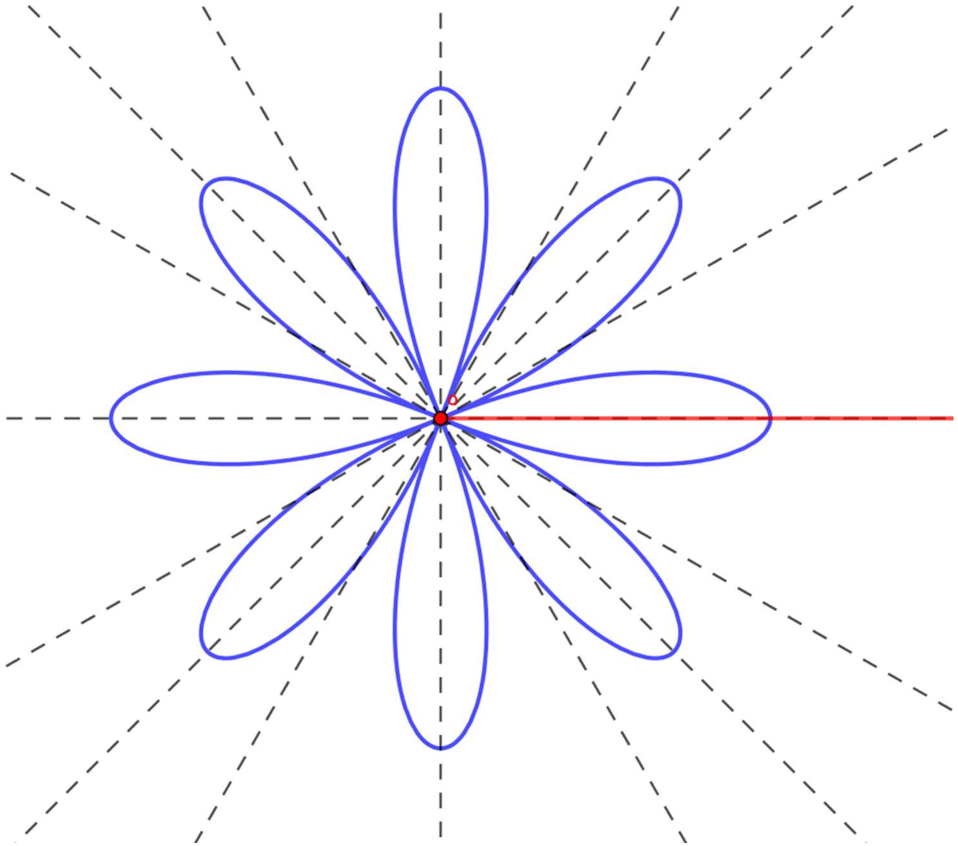
8) $r = a \pm b\ sen\ \theta$, com $a, b > 0$ (limaçons)

9) $r = a\ cos\ n\theta$ ou $r = a\ sen\ n\theta$ (Rosáceas de n folhas, se n for ímpar e de 2n folhas, se n for par)

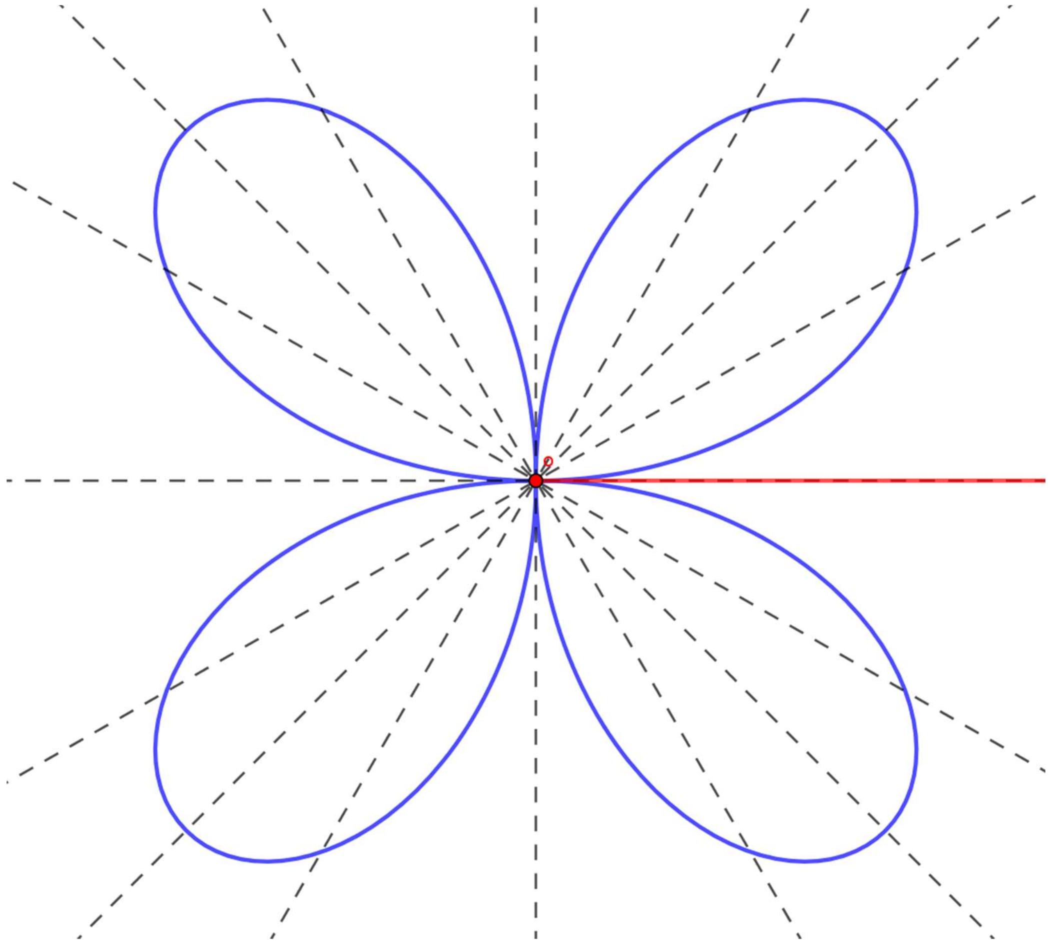
Exemplo: $r = 4\cos 2\theta$ (rosácea de 4 folhas)



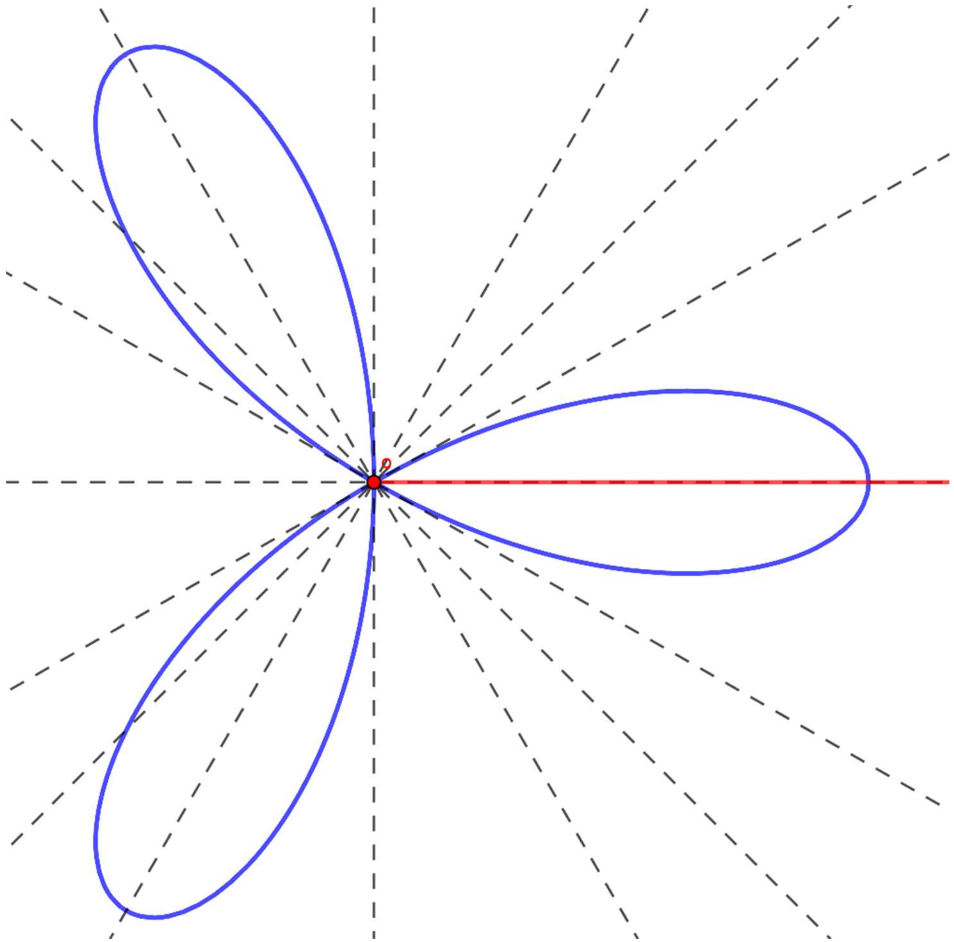
Exemplo: $r = 4\cos 4\theta$ (rosácea de 8 folhas)



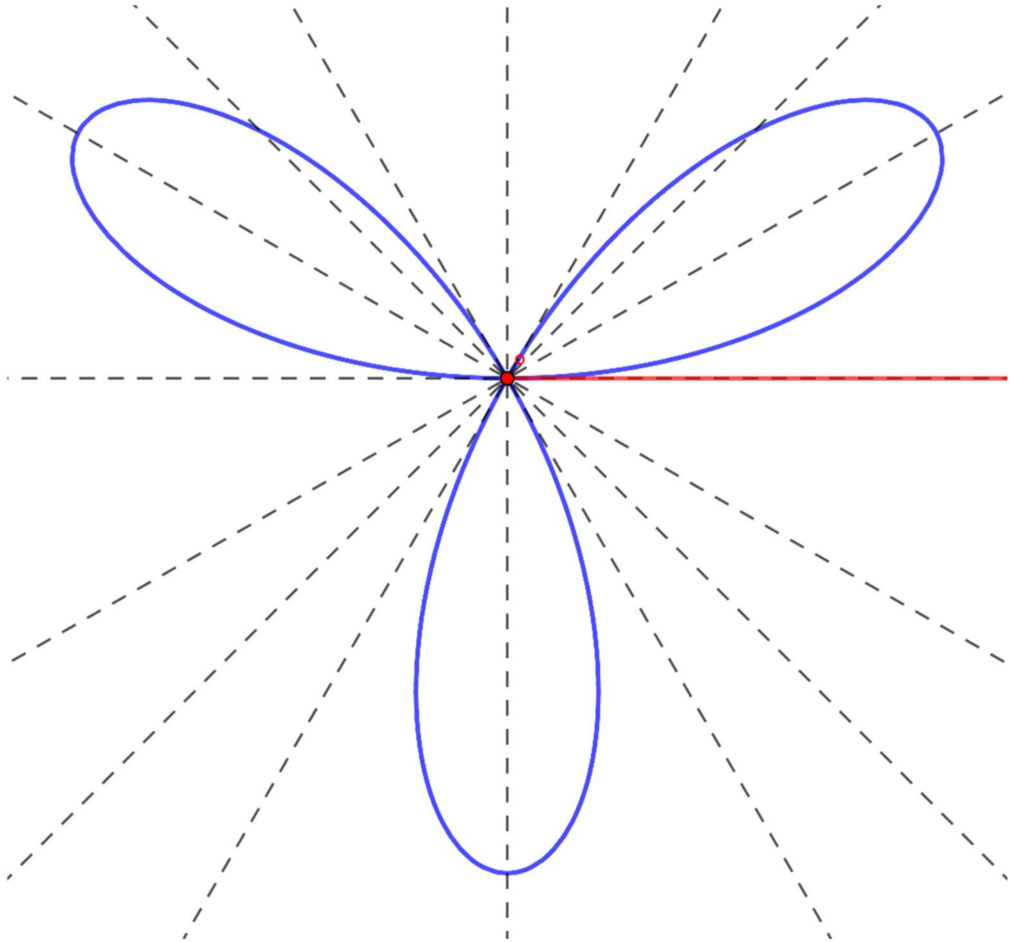
Exemplo: $r = 4sen2\theta$ (rosácea de 4 folhas)



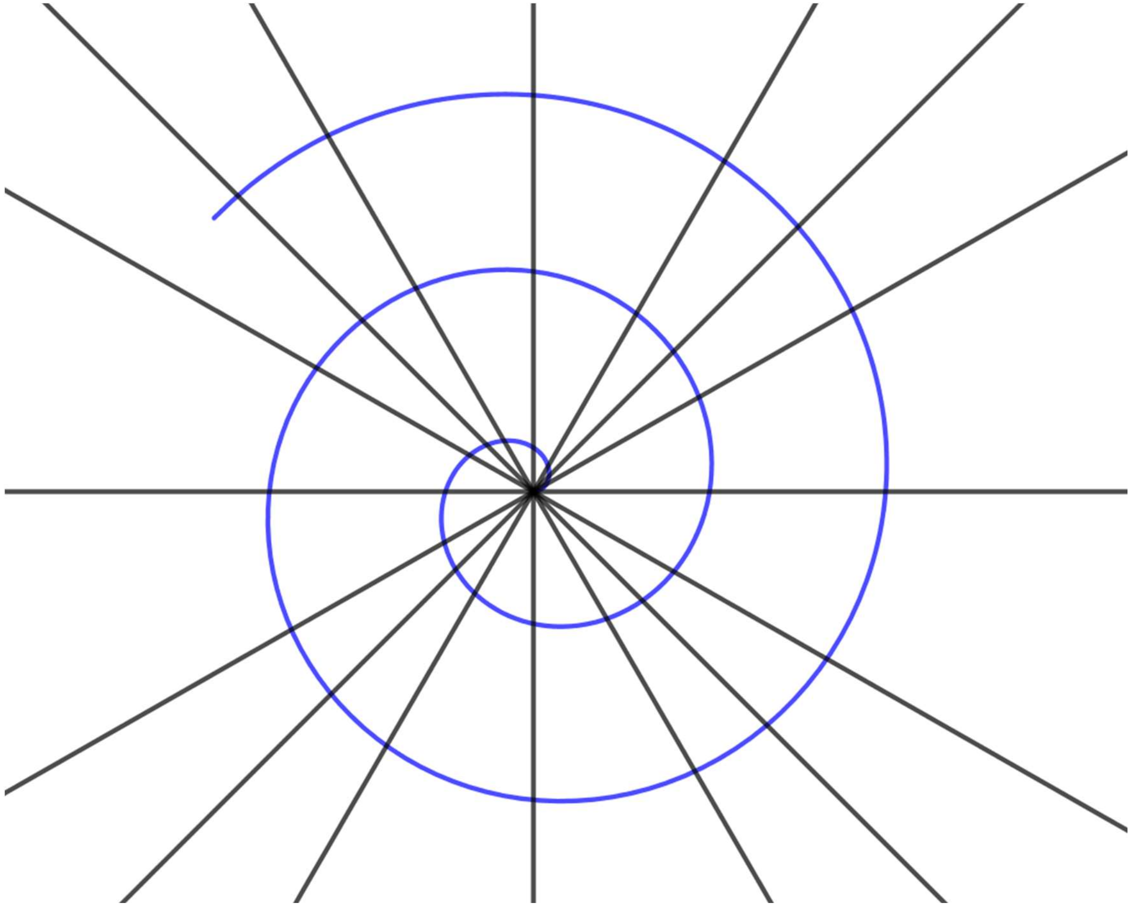
Exemplo: $r = 4\cos 3\,\theta$ (rosácea de 3 folhas)



Exemplo: $r = 4\,\text{sen}\,3\,\theta$ (rosácea de 3 folhas)

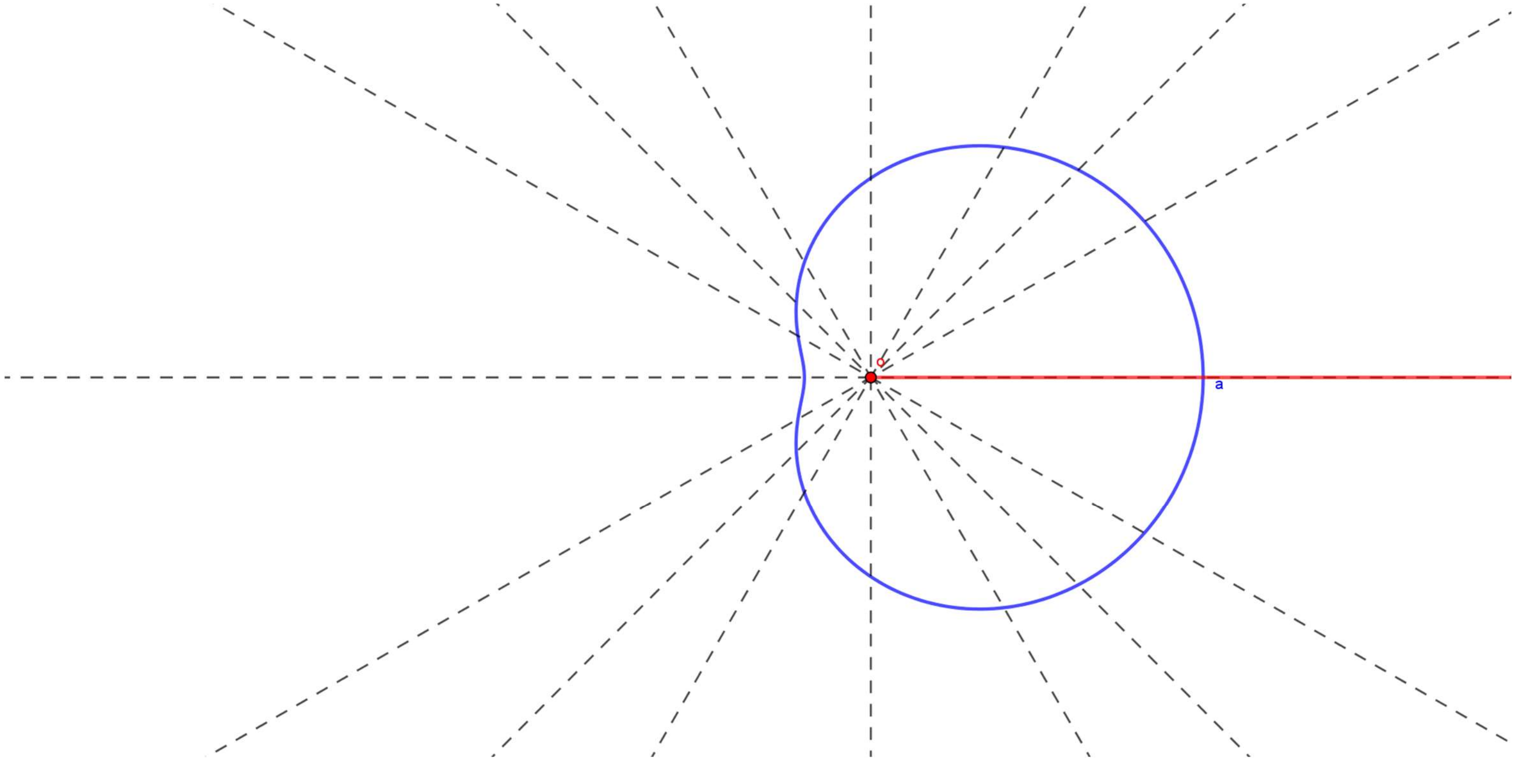


10) $r = \theta$ (Espiral)

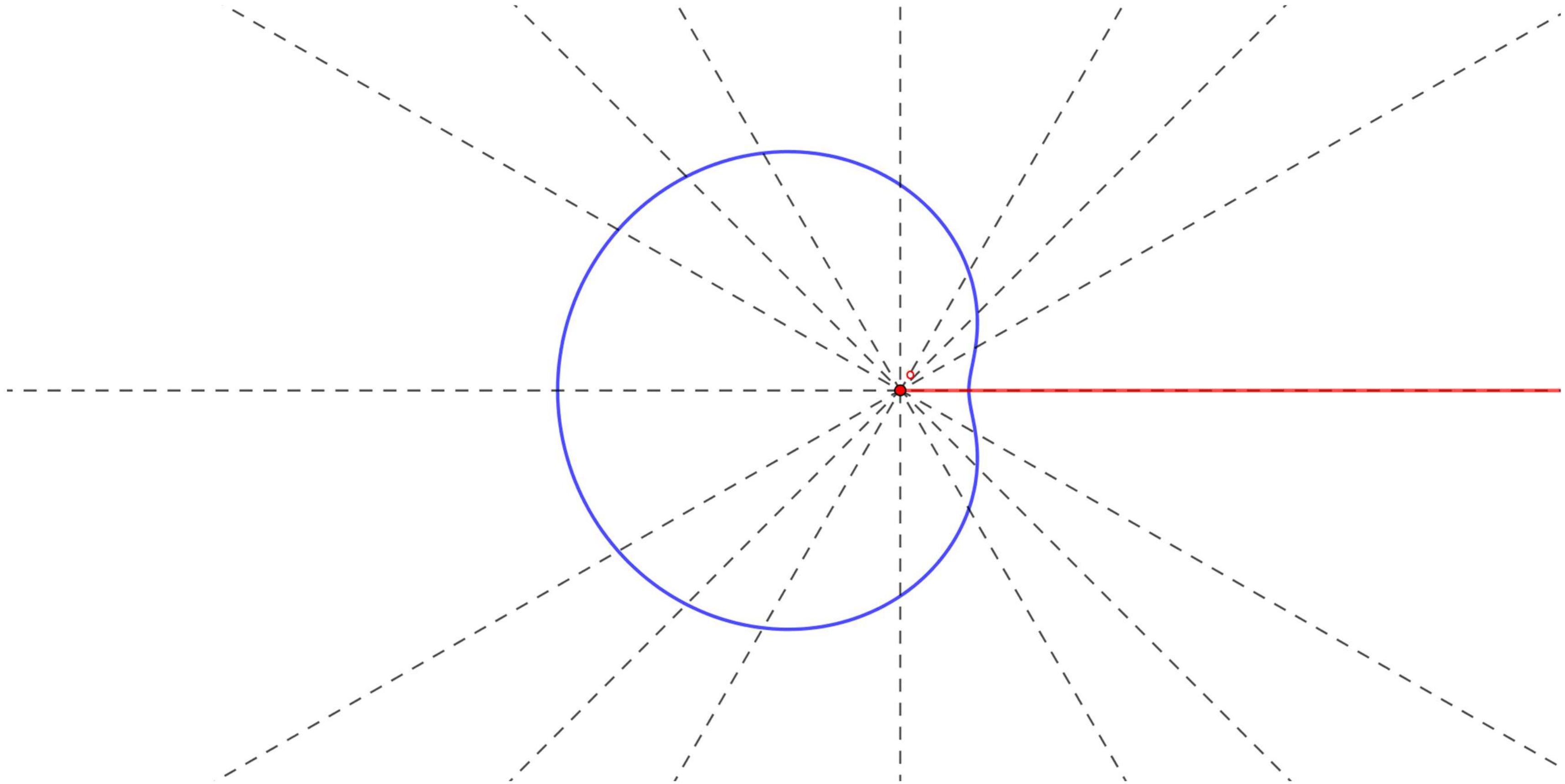


Outros Exemplos: Limaçons com 1 dente

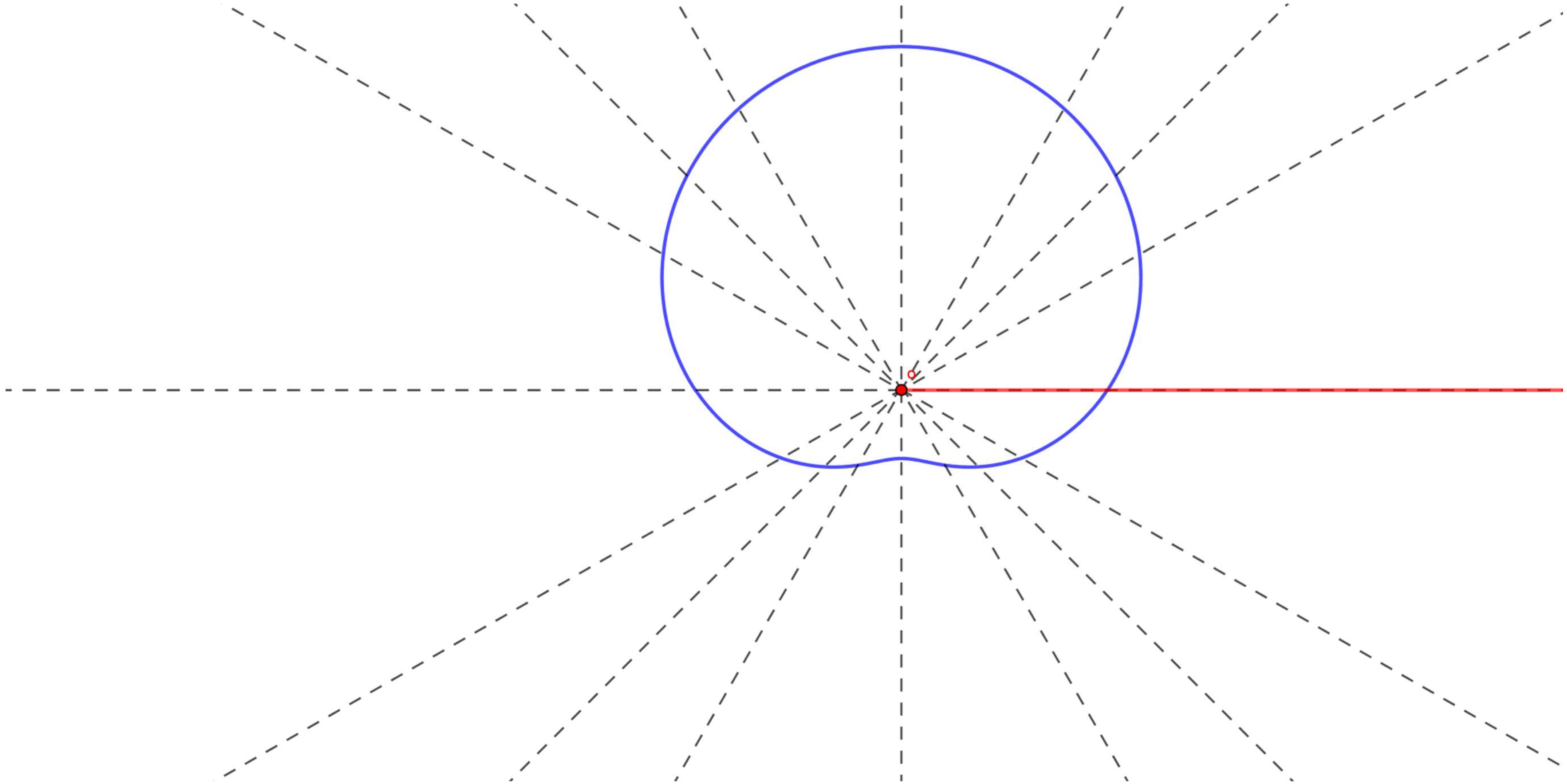
$$r = 3 + 2\,cos\theta$$



$$r = 3 - 2\,cos\theta$$



$$r = 3 + 2\ sen\theta$$



$$r = 3 - 2\,sen\theta$$