CC-0288 - Inferência Estatística I

Exemplo 1.3.6 - 17/03/2023

Prof. Maurício Mota

1. Vamos comentar o Exemplo 1.3.6 da página 12 do livro do Heleno e da Mônica.
Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
Seja

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}.$$

Sabemos que

$$E(S^2) = \sigma^2 \quad e \quad EQM(S^2) = Var(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}.$$

Considere

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{(n-1)S^2}{n}.$$

Note que:

$$E\left[\hat{\sigma}^2\right] = \frac{n-1}{n}\, E(S^2) = \frac{n-1}{n}\, \sigma^2.$$

O estimador $\hat{\sigma}^2$ é um estimador viciado para σ^2 mas assintoticamente não viciado.
Seu viés é dado por:

$$B\left[\hat{\sigma}^2\right] = E\left[\hat{\sigma}^2\right] - \sigma^2 = \frac{n-1}{n}\, \sigma^2 - \sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{n}.$$

O quadrado do viés é dado por:

$$B^2\left[\hat{\sigma}^2\right] = \frac{\sigma^4}{n^2}.$$

A variância de $\hat{\sigma}^2$ é dada por:

$$Var\left[\hat{\sigma}^2\right] = Var\left[\frac{(n-1)S^2}{n}\right] = \frac{(n-1)^2}{n^2}\, Var(S^2),$$

$$Var\left[\hat{\sigma}^2\right] = \frac{(n-1)^2}{n^2}\, \frac{2\sigma^4}{n-1} = \frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2}.$$

O erro médio quadrático de $\hat{\sigma}^2$ é dado por:

$$EQM\left[\hat{\sigma}^2\right] = Var\left[\hat{\sigma}^2\right] + B^2\left[\hat{\sigma}^2\right]$$

$$EQM\left[\hat{\sigma}^2\right] = \frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2} + \frac{\sigma^4}{n^2} = \frac{(2n-1)\sigma^4}{n^2}.$$

Vamos trabalhar com a resposta do livro:

$$EQM\left[\hat{\sigma}^2\right] = \frac{2\sigma^4}{n-1}\left[1 - \frac{(3n-1)}{2n^2}\right],$$

que pode ser colocado na forma:

$$EQM\left[\hat{\sigma}^2\right] = \frac{2\sigma^4}{n-1}\frac{2n^2-3n+1}{2n^2},$$

como

$$2n^2 - 3n + 1 = (n-1)(2n-1)$$

temos:

$$EQM\left[\hat{\sigma}^2\right] = \frac{2\sigma^4}{n-1}\frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2} = \frac{(2n-1)\sigma^4}{n^2}.$$

A resposta bate!!!!

A comparação final fica óbvia:

$$EQM\left[\hat{\sigma}^2\right] = \frac{2\sigma^4}{n-1}\left[1 - \frac{(3n-1)}{2n^2}\right] < \frac{2\sigma^4}{n-1} = EQM(S^2)$$

pois

$$0 < 1 - \frac{2n-1}{2n^2} < 1.$$

Viram a besteira que fiz na sala!!!!!!