CC0308 - Análise de Séries Temporais
Lista de Exercícios: Modelos
Profa. Jeniffer J. Duarte Sanchez

1. Seja X que tem distribuição com média μ e variância σ^2, e seja $Y_t = X$ para todo t.
   - Mostre que $\{Y_t\}$ é estacionária de forma estrita e de segunda ordem.
   - Encontre a função de autocovariância de $\{Y_t\}$.
   - Faça um esboço de um gráfico típico de Y_t.

2. Considere os momentos de ordem $(r_1, \ldots, r_n)$ das v.a. $Z(t_1), \cdots, Z(t_n)$, para qualquer $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mu(r_1, \ldots, r_n; t_1, \ldots, t_n) &= E\{Z^{r_1}(t_1) \cdots Z^{r_n}(t_n)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} z_1^{r_1} \cdots z_n^{r_n} f(z_1, \ldots, z_n; t_1, \ldots, t_n) dz_1 \cdots dz_n\end{aligned}$$

   em que $f(z_1, \ldots, z_n; t_1, \ldots, t_n)$ é a fdp correspondente. Mostre que se $Z(t)$ é estacionário, então $\mu(t)$ e $V(t)$ são constantes.

3. Prove que o passeio aleatório

$$X_t = \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_t,$$

   em que $\{\epsilon_t, t \geq 1\}$ é uma sequência de v.a. i.i.d. $(\mu_\epsilon, \sigma^2_\epsilon)$, tem facv dada por $\gamma(t_1, t_2) = \sigma^2_\epsilon \min(t_1, t_2)$.

4. Considere as observações

t	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967
Z_t	15	19	13	17	22	18	22

   Calcule c_k e r_k, $k = 0, 1, \ldots, 6$.

5. Considere o processo estocástico $Z_t = a_t$, em que a_t é ruído branco, com $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ e

$$a_t = \begin{cases} 1 & \text{com probabilidade } 1/2; \\ -1 & \text{com probabilidade } 1/2. \end{cases}$$

   - Obtenha a média do processo Z_t;

- Calcule $\gamma(\tau)$, $\tau = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;
- Calcule $\rho(\tau)$, $\tau = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ e faça o seu gráfico.

6. Seja $\{Z_t\}$ um processo estacionário com média μ_Z e função de autocovariância γ_Z. Um novo processo é definido por $Y_t = Z_t - Z_{t-1}$. Obtenha a média e a função de autocovariância de $\{Y_t\}$ em termos de μ_Z e γ_Z. Mostre que $\{Y_t\}$ é um processo estacionário.

7. Prove que, se $\{Z(t),\ t \in R\}$ for Gaussiano e estacionário de segunda ordem, então ele será estritamente estacionário.

8. Seja $Z_t = a_t + ca_{t-1} + \cdots + ca_1$, $t \geq 1$, em que c é uma constante a $a_t \sim RB(0, \sigma_a^2)$.

   - Encontre a média e a autocovariância de Z_t. Ela é estacionária?
   - Encontre a média e a autocovariância de $(1 - B)Z_t$. Ela é estacionária?

9. Dado o processo X_t, a primeira diferença é dada por $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ e, sucessivamente, $\Delta^2 X_t = \Delta(\Delta X_t)$, $\Delta^3 X_t = \Delta(\Delta^2 X_t)$, etc. Suponha que $Y_t = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + X_t$, em que α, β e γ são constantes e x_t é estacionário com função de autocovariância $\gamma_X(t)$. Mostre que $\Delta^2 Y_t$ é estacionário e encontre sua função de autocovariância.

10. Suponha $X_t \sim RB(0, \sigma^2)$ e seja $Y_t = X_t \cos(2\pi f_0\, t + \phi)$, $0 < f_0 < 1/2$ fixada.

    - Mostre que, se ϕ é uma constante, Y_t não é estacionário;
    - Mostre que se ϕ for uma v.a. uniformemente distribuída sobre o intervalo $[-\pi\,,\,\pi]$ e independente de X_t, então Y_t é um ruído branco.