A fórmula de Taylor

A fórmula de Taylor é estabelecida pelo seguinte teorema:

Teorema

Seja f uma função real, de variável real, com as n primeiras derivadas contínuas no intervalo fechado $[a, b]$ e tal que $f^{(n+1)}(x)$ existe para todo x no intervalo aberto (a, b). Então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Observe que, para $n = 0$, temos $f(b) = f(a) + \frac{f'(c)}{1!}(b-a)$, isto é, $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}$. Então o Teorema acima pode ser considerado como uma generalização do Teorema do Valor Médio.

Quando substituímos b por x, obtemos a fórmula de Taylor
$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

Assim a fórmula de Taylor é válida sempre que f uma função com as n primeiras derivadas contínuas no intervalo fechado

$[a, x]$ e tal que $f^{(n+1)}(c)$ existe para todo c no intervalo aberto (a, x)

Podemos escrever a Fórmula de Taylor da seguinte forma:
$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$
Onde $P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$ e
$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$.
O polinômio $P_n(x)$ é chamado de Polinômio de Taylor de grau n no número a e $R_n(x)$ é chamado de resto na forma de Lagrange.
Uma outra fórmula para $R_n(x)$ é dada por

$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$, que é chamada de forma integral do resto da fórmula de Taylor.

O caso particular da fórmula de Taylor quando $[a, b] = [0, x]$, isto é,

$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$ é chamado de Fórmula de Maclaurin e o polinômio $P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ é chamado de polinômio de Maclaurin de grau n.

Aplicação:
Quando calculamos os valores de uma função polinomial usamos apenas um número finito de adições e multiplicações. Entretanto

existem muitas outras funções cujos valores não podem ser calculados tão facilmente.
Exemplos: Funções logarítmicas, funções exponenciais e funções trigonométricas.
Existem várias formas de aproximar uma função por um polinômio.
Uma destas formas é usando a fórmula de Taylor, onde usamos o polinômio de Taylor $P_n(x)$ para aproximar $f(x)$ na vizinhança de a.
Por exemplo, se $f(x) = e^x$, temos o polinômio de Maclaurin

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Assim temos

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = 1 + x$$
$$P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$
$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

Na página 679, Livro do Leithold, volume 1, temos as seguintes tabelas:

Tabela 1

n	$e^{0,4}$	$P_n(0,4)$	$e^{0,4} - P_n(0,4)$
0	1,4918	1	0,4918
1	1,4918	1,4	0,0918
2	1,4918	1,48	0,0118
3	1,4918	1,4907	0,0011

Tabela 2

n	$e^{0,2}$	$P_n(0,2)$	$e^{0,2} - P_n(0,2)$
0	1,2214	1	0,2214
1	1,2214	1,2	0,0214
2	1,2214	1,22	0,0014
3	1,2214	1,2213	0,0001

Observe que quanto maior for n e quanto mais próximo x estiver de zero, melhor será a aproximação.

Exemplo

Use o polinômio de Maclaurin para encontrar o valor de e com precisão de duas casas decimais.

Solução:

Temos $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ e $R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$

Queremos calcular $P_n(1)$ e então $c \in (0,1)$. Daí

$$R_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

Como queremos uma aproximação com duas casas decimais,

Devemos ter $R_n(1) < 0{,}005$

Assim, devemos ter $\frac{3}{(n+1)!} < 0{,}005 = \frac{5}{1000} = \frac{1}{200}$

$$\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{200} \Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{3} > 200 \Leftrightarrow (n+1)! > 600 \Leftrightarrow n \geq 5$$

Então $P_5(x)$ é uma aproximação com duas casas decimais para e

Como $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$,

$P_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$ e então

$P_5(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = \frac{120+120+60+20+5+1}{120} =$

$\frac{326}{120} \approx 2{,}71666\ldots$

Calculando o valor de e na calculadora, temos

$e = 2{,}71828182846$, o que mostra que o nosso cálculo é preciso até a segunda casa decimal.