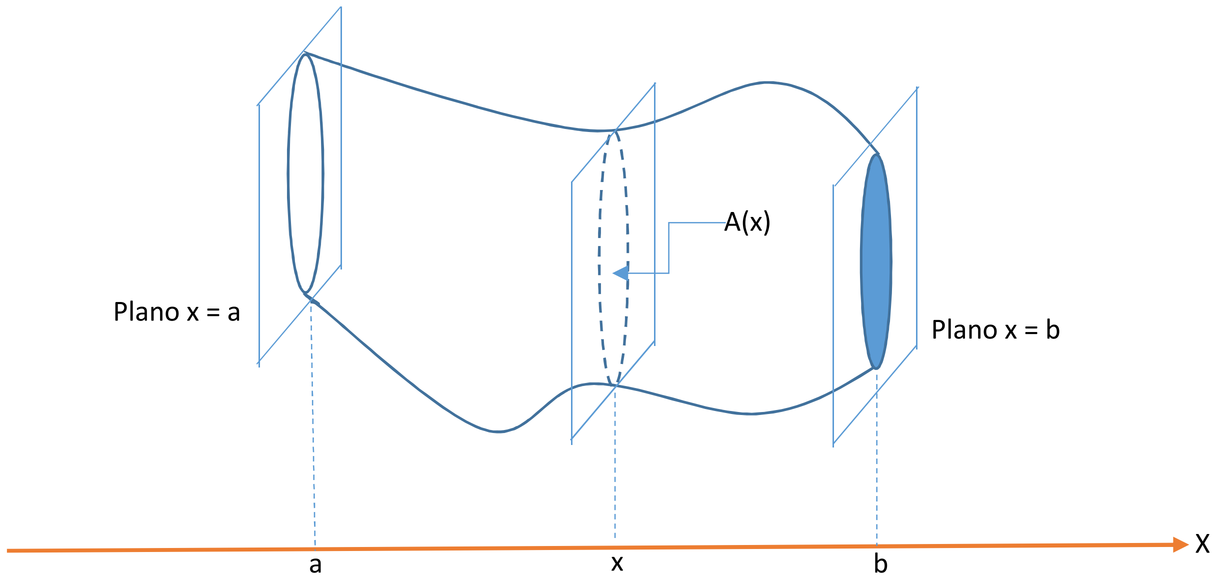
# Aplicações da Integral definida

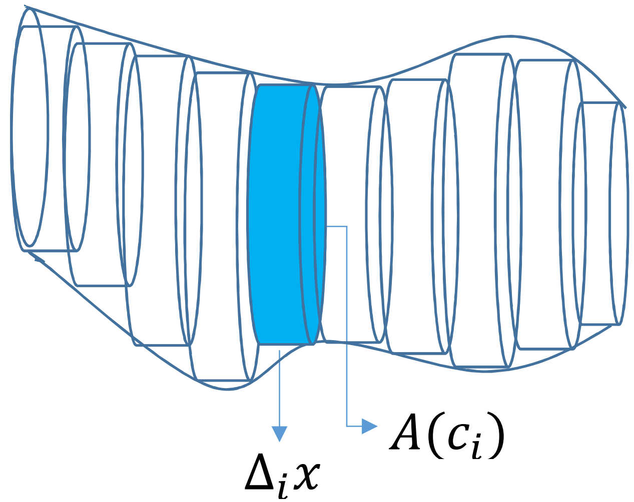
## i) Volumes por secções transversais

Considere um sólido para o qual a área de qualquer secção plana perpendicular a um eixo seja função da distância dessa secção plana a um ponto do eixo.



Seja $\Delta$ uma partição do intervalo $[a, b]$ dada por

$a = x_o < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Temos então $n$ subintervalos da forma $[x_{i-1,} x_i]$, $i = 1,2, \ldots, n$ , de comprimento $\Delta_i x$. Para cada $i$, escolhemos um número qualquer $c_i$ no intervalo $[x_{i-1,} x_i]$ e construímos cilindros retos de altura $\Delta_i x$ e área da base igual a $A(c_i)$, como mostra a figura abaixo




O volume do $i$-ésimo cilindro será então $\Delta_i V = A(c_i)\Delta_i x$

A soma dos volumes dos $n$ cilindros será então a soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \sum_{i=1}^{n} A(c_i)\Delta_i x$$

Definição:

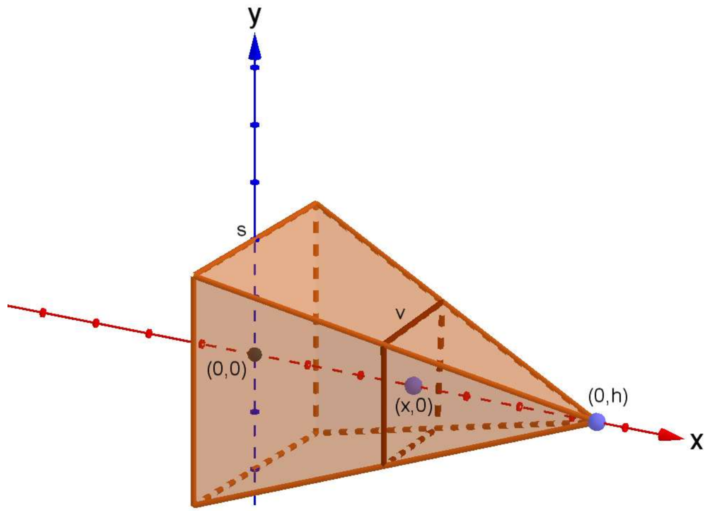
Seja S um sólido que está entre dois planos perpendiculares ao eixo $X$ em $a$ e em $b$.

Se a área de cada secção plana perpendicular ao eixo $X$ em $x$ for dada por $A(x)$, onde $A$ é uma função contínua em $[a, b]$, então a medida do volume de S é

$$V = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(c_i)\Delta_i x = \int_a^b A(x)dx$$

Exemplo 1

Calcule o volume da Pirâmide cuja altura é $h$ e cuja base é um quadrado de lado $s$.




Solução:

A área da secção perpendicular ao eixo $x$ no ponto $(x, 0)$ é $v^2$

Usando semelhança de triângulos, obtemos $\frac{\frac{v}{2}}{h-x} = \frac{\frac{s}{2}}{h}$

Daí $vh = s(h-x)$ e então $v = \frac{s(h-x)}{h}$

Portanto $A(x) = \frac{s^2}{h^2}(h-x)^2$ e

$$V = \int_0^h A(x)dx = \int_0^h \frac{s^2}{h^2}(h-x)^2 dx =$$

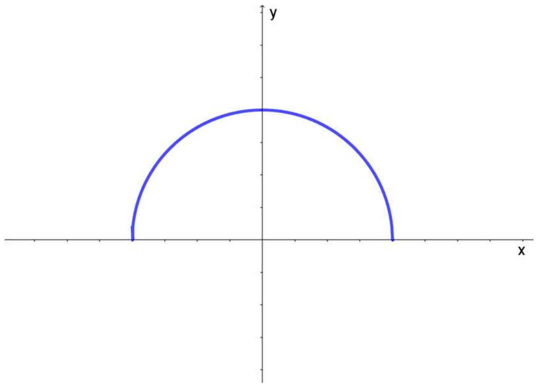
$$\frac{s^2}{h^2}\int_0^h (h-x)^2 dx = \frac{s^2}{h^2}\left[-\frac{(h-x)^3}{3}\right]\Big|_0^h =$$

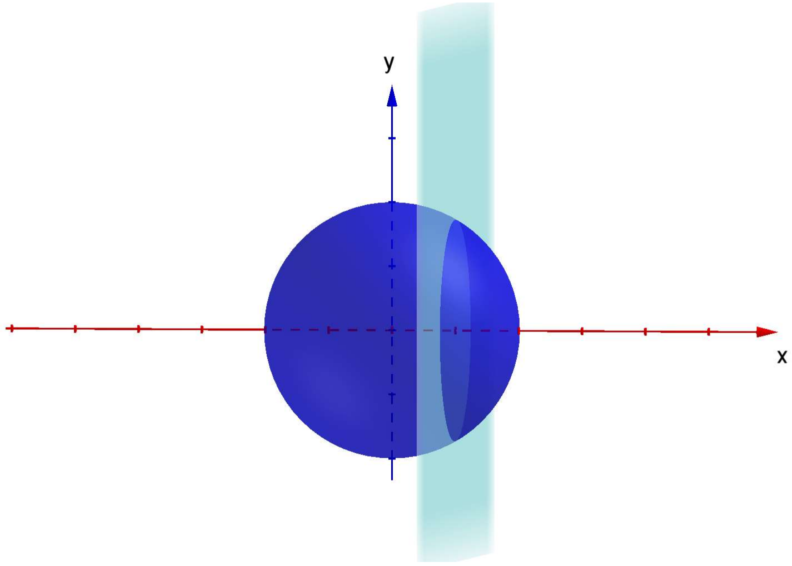
$$\frac{s^2}{h^2}.\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}s^2 h$$

## Exemplo 2

Calcule o volume da esfera de raio $r$

A esfera de raio $r$ é obtida pela rotação, em torno do eixo $x$, da curva $y = \sqrt{r^2 - x^2}$



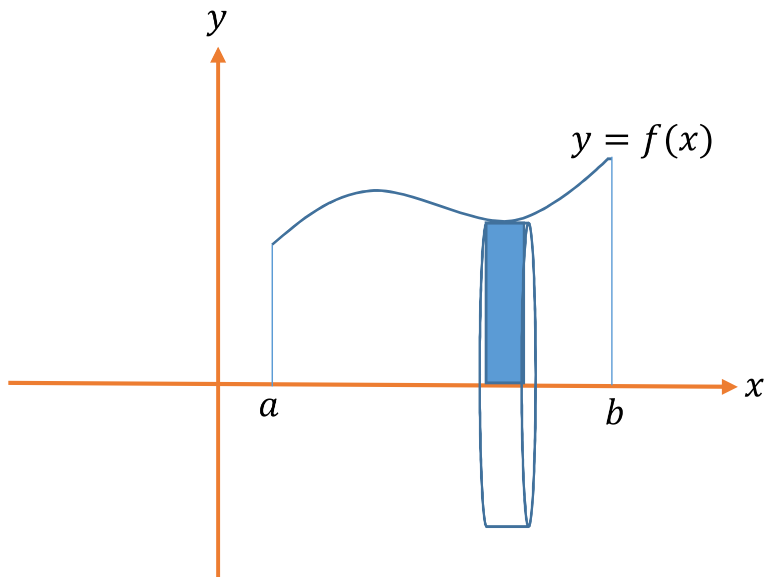
$$V = 2\int_0^r \pi y^2 dx =$$

$$V = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)dx =$$

$$2\pi\left(r^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^r = 2\pi\left(r^2.r - \frac{r^3}{3}\right) =$$

$$2\pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = 2\pi\left(\frac{2r^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Em geral quando giramos o gráfico de uma função $f$, contínua e não negativa no intervalo $[a, b]$, em torno do eixo $x$, o volume do sólido gerado é dado por $V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$, pois quando giramos elementos de área perpendiculares ao eixo de rotação, obtemos cilindros circulares cujo raio da base é $f(x)$.



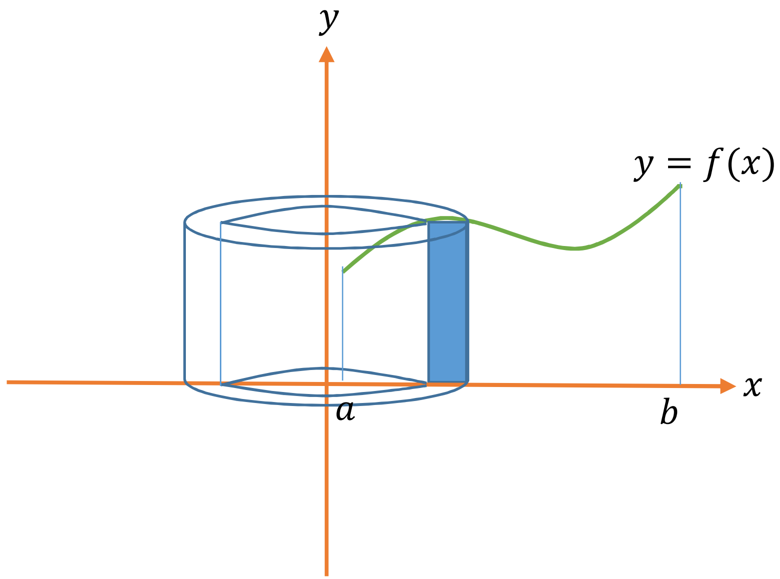
y
y = f(x)
x
a
b

## ii) Volumes por invólucros cilíndricos

No caso anterior, para calcularmos o volume de sólidos de revolução, giramos elementos de área perpendiculares ao eixo de rotação. Uma alternativa para os casos em que este procedimento não resolver o problema é tomarmos elementos de área paralelos ao eixo de rotação.

Quando um tal elemento de área é rotacionado em torno do eixo de rotação (eixo $y$, na figura abaixo) obtemos um invólucro cilíndrico, isto é, um sólido contido entre dois cilindros, com mesmo centro e mesmo eixo.

Se invólucro tiver um raio interno $r_1$ e raio externo $r_2$ e altura $h$, seu volume será $V = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h$,




Seja $R$ a região limitada pelo gráfico da curva $y = f(x)$, pelo eixo $x$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$, sendo $f$ contínua não negativa em $[a, b]$.

Ao girarmos a região $R$, em torno do eixo $y$, obtemos um sólido $S$.

Para calcularmos o volume de $S$, tomamos elementos de área paralelos ao eixo $y$ e procedemos da seguinte forma:

Tomamos uma parição $\Delta$ do intervalo $[a,b]$, dada por

$a = x_o < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Temos então $n$ subintervalos da forma $[x_{i-1,}x_i]$, $i = 1,2,\dots,n$ , de comprimento $\Delta_i x$. Para cada $i$, escolhemos o ponto médio $m_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$ do intervalo $[x_{i-1,}x_i]$. Consideramos então o retângulo de altura $f(m_i)$ e comprimento $\Delta_i x$.

Quando giramos esse retângulo em torno do eixo $y$, obtemos um invólucro cilíndrico de volume $\Delta_i V = \pi x_i^2 f(m_i) - \pi x_{i-1}^2 f(m_i) =$

$$\pi\left(x_i^2 - x_{i-1}^2\right)f(m_i) = \pi(x_i - x_{i-1})(x_i + x_{i-1})f(m_i)$$

Como $x_i - x_{i-1} = \Delta_i x$ e $x_i + x_{i-1} = 2m_i$, temos

$$\Delta_i V = 2\pi m_i f(m_i)\Delta_i x$$

Teorema

Seja $f$ uma função contínua e não negativa no intervalo $[a, b]$ e $a \geq 0$. Se $R$ for a região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo $x$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$. Se $S$ for o sólido de revolução obtido pela rotação de $R$ em torno do eixo $y$ e se $V$ for o volume de $S$, então

$$V = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_1^n 2\pi m_i f(m_i)\Delta_i x = 2\pi \int_a^b x f(x)dx$$

Exemplo 1

Calcule o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo $y$, da região limitada pelo gráfico da curva $y = x^3$, pelo eixo $x$ e pelas retas $x = 1$ e $x = 3$.

Solução1

$$V = 2\pi \int_1^3 x.x^3 dx = 2\pi \int_1^3 x^4 dx = 2\pi \frac{x^5}{5}\Big|_1^3 = 2\pi \frac{3^5}{5} - 2\pi \frac{1^5}{5} =$$

$$2\pi \left(\frac{243}{5} - \frac{1}{5}\right) = 2\pi \left(\frac{242}{5}\right) = \frac{484\pi}{5}$$

Solução 2 (Usando secções transversais)

$$V = \int_0^1 \pi(3^2 - 1^2)dy + \int_1^{27} \pi\left(3^2 - \sqrt[3]{y^2}\right)dy =$$

$$8\pi \int_0^1 dy + \pi \int_1^{27}\left(9 - \sqrt[3]{y^2}\right)dy =$$

$$8\pi y \,\Big|_0^1 + \pi(9y - \tfrac{3}{5} y^{\frac{5}{3}}) \,\Big|_1^{27} =$$

$$8\pi + \pi\left(9.27 - \frac{3}{5}(27)^{\frac{5}{3}}\right) - \pi\left(9 - \frac{3}{5}\right) =$$

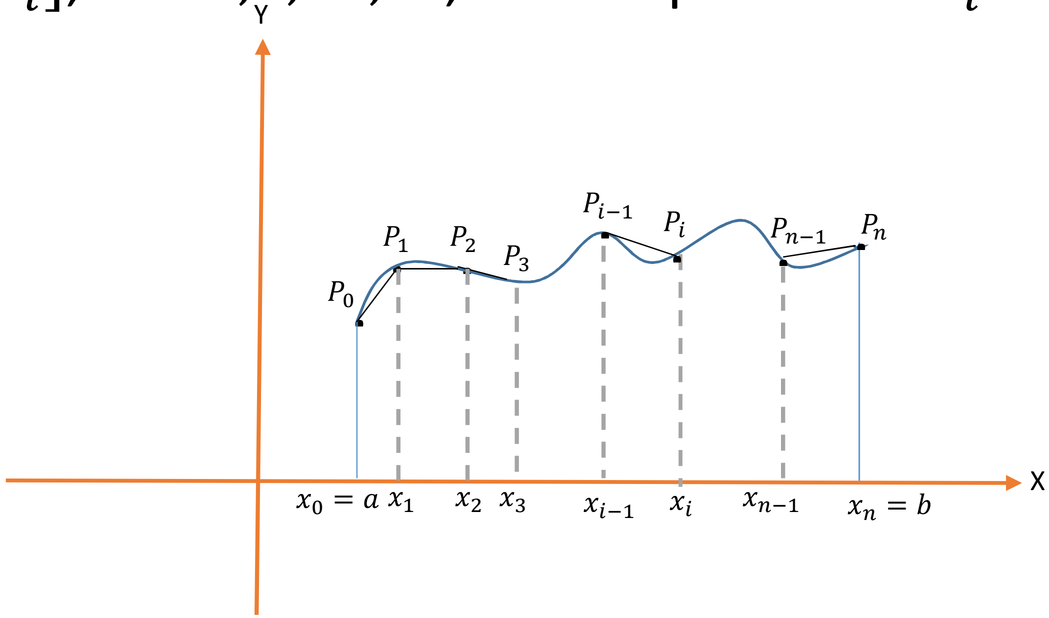
$$8\pi + \pi\left(243 - \frac{729}{5}\right) - \pi\left(9 - \frac{3}{5}\right) =$$

$$8\pi + \frac{486}{5}\pi - \frac{42}{5}\pi = \frac{484\pi}{5}$$

## iii) Comprimento de arco do gráfico de uma função

Seja $f$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$.Tomamos uma partição $\Delta$ do intervalo $[a, b]$, dada por

$a = x_o < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Temos então $n$ subintervalos da forma $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2, \ldots, n$ , de comprimento $\Delta_i x$. Para cada $i$,



Temos $|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$

Definição:

Seja $f$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e suponhamos que exista um número $L$ com as seguintes propriedades:

Para todo $\in > 0$ exista um número $\delta > 0$, tal que para toda partição $\Delta$ do intervalo $[a, b]$ ,

$|\Delta| < \delta \Rightarrow |\sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| - L| < \in$

Neste caso $L = \lim\limits_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|$ e dizemos que $L$ é o comprimento do arco da curva $y = f(x)$ do ponto $(a, f(a))$ ao ponto $(b, f(b))$

Fazendo $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ e $\Delta_i y = y_i - y_{i-1}$, temos

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(\Delta_i x)^2 + (\Delta_i y)^2}$$

Como $\Delta_i x \neq 0$,

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta_i y}{\Delta_i x}\right)^2}\ \Delta_i x$$

Se $f'$ também for contínua em $[a, b]$, as hipótese do teorema do valor médio são satisfeitas e então existe $c_i$ no intervalo aberto $(a, b)$ tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1})\ .$$

Assim $\frac{\Delta_i y}{\Delta_i x} = f'(c_i)$ e portanto

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\Delta_i x$$

Daí $\sum_{i=1}^{n}|P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f'(c_i))^2}\Delta_i x$ e então

$\lim\limits_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n}|P_{i-1}P_i| = \lim\limits_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f'(c_i))^2}\Delta_i x$ . Este limite existe pois $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ é contínua em $[a,b]$ e $c_i \in (a,b)$, sendo portanto o limite de uma soma de Riemann, que é uma integral definida.

Logo $L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$.

Temos então o seguinte Teorema:

Se a função $f$ e sua derivada $f'$ são contínuas em $[a,b]$, então o comprimento de arco da curva $y=f(x)$ do ponto $(a,f(a))$ ao ponto $(b,f(b))$ é dado por $L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$.

Exemplo 1

Calcule o comprimento de arco da curva $y = x^{\frac{2}{3}}$ do ponto $(1,1)$ ao ponto $(8,4)$.

Solução:

Temos então $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = \int_1^8 \sqrt{1 + \left(\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}\right)^2}\,dx =$

$\int_1^8 \sqrt{1 + \frac{4}{9x^{\frac{2}{3}}}}\,dx = \frac{1}{3}\int_1^8 \frac{\sqrt{9x^{\frac{2}{3}}+4}}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx$

Fazendo $u = 9x^{\frac{2}{3}} + 4$, temos $du = 9.\frac{2}{3}.x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{6}{x^{\frac{1}{3}}}dx$

Se $x = 1$, temos $u = 13$ e Se $x = 8$, temos $u = 40$

Então $\frac{1}{3}\int_1^8 \frac{\sqrt{9x^{\frac{2}{3}}+4}}{x^{\frac{1}{3}}}dx = \frac{1}{3}.\frac{1}{6}\int_{13}^{40}\sqrt{u}\,du = \frac{1}{18}.\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_{13}^{40} = \frac{1}{27}\left(40^{\frac{3}{2}} - 13^{\frac{3}{2}}\right)$

Portanto $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = \frac{1}{27}\left(40^{\frac{3}{2}} - 13^{\frac{3}{2}}\right)$

Exemplo 2

Calcule o comprimento do círculo de raio r.

Solução:

$$L = 4\int_0^r \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$$

Temos $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ e daí $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$

Assim $[f'(x)]^2 = \frac{x^2}{r^2-x^2}$. Então

$$L = 4\int_0^r \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx = 4\int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx = 4r\int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx$$

Fazendo $x = r\ sen\ t$ , temos $dx = r\ cos\ t\ dt$.

$x = 0 \Rightarrow t = 0$ e $x = r \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

Então $4r \int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 4r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{r^2 - r^2\ sen^2 t}} r\ cos\ t\ dt =$

$4r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - sen^2 t}}\ cos\ t\ dt = 4r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{cos\ t}\ cos\ t\ dt =$

$4r \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = 4rt \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4r \frac{\pi}{2} = 2\pi r$

Logo, o comprimento da circunferência de raio $r$ é $2\pi r$.