

Variáveis Aleatórias Multidimensionais

Prof. José Roberto Silva dos Santos

Fortaleza, 09 de novembro de 2022

1 Variáveis Aleatórias Multidimensionais

1 Variáveis Aleatórias Multidimensionais

- Em muitas situações práticas há o interesse na descrição probabilística de mais de uma característica numéricas, associada a um experimento aleatório.

- Em muitas situações práticas há o interesse na descrição probabilística de mais de uma característica numéricas, associada a um experimento aleatório.
- Por exemplo, na distribuição de alturas e pesos de indivíduos de uma determinada população.

Variáveis aleatórias multidimensionais

- Em muitas situações práticas há o interesse na descrição probabilística de mais de uma característica numéricas, associada a um experimento aleatório.
- Por exemplo, na distribuição de alturas e pesos de indivíduos de uma determinada população.
- Portanto, é natural a extensão do conceito de variáveis aleatórias para mais de uma dimensão.

Variáveis aleatórias multidimensionais

Exemplo (Bussab & Morettin)

- Suponha que estamos interessados em estudar a composição de famílias com três crianças, quanto ao sexo. Definamos:

Variáveis aleatórias multidimensionais

Exemplo (Bussab & Morettin)

- Suponha que estamos interessados em estudar a composição de famílias com três crianças, quanto ao sexo. Definamos:

X = número de meninos,

$Y = \begin{cases} 1, & \text{se o primeiro filho for homem} \\ 0, & \text{se o primeiro filho for mulher,} \end{cases}$

Z = número de vezes em que houve variação do sexo entre um nascimento e outro, dentro da mesma família.

Variáveis aleatórias multidimensionais

Exemplo (Bussab & Morettin)

- Suponha que estamos interessados em estudar a composição de famílias com três crianças, quanto ao sexo. Definamos:

X = número de meninos,

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{se o primeiro filho for homem} \\ 0, & \text{se o primeiro filho for mulher,} \end{cases}$$

Z = número de vezes em que houve variação do sexo entre um nascimento e outro, dentro da mesma família.

- A seguir temos os possíveis valores para as três variáveis aleatórias.

Variáveis aleatórias multidimensionais

Exemplo (Bussab & Morettin)

Figura 1: Composição de famílias com três crianças, quanto ao sexo.

| Eventos | Probabilidade | X | Y | Z |
|---------|---------------|-----|-----|-----|
| HHH | 1/8 | 3 | 1 | 0 |
| HHM | 1/8 | 2 | 1 | 1 |
| HMH | 1/8 | 2 | 1 | 2 |
| MHH | 1/8 | 2 | 0 | 1 |
| HMM | 1/8 | 1 | 1 | 1 |
| MHM | 1/8 | 1 | 0 | 2 |
| MMH | 1/8 | 1 | 0 | 1 |
| MMM | 1/8 | 0 | 0 | 0 |

Variáveis aleatórias multidimensionais

Exemplo (Bussab & Morettin)

Figura 2: Distribuições de probabilidade unidimensionais.

| (a) | | | | |
|--------|-----|-----|-----|-----|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $p(x)$ | 1/8 | 3/8 | 3/8 | 1/8 |

| (b) | | |
|--------|-----|-----|
| y | 0 | 1 |
| $p(y)$ | 1/2 | 1/2 |

| (c) | | | |
|--------|-----|-----|-----|
| z | 0 | 1 | 2 |
| $p(z)$ | 1/4 | 1/2 | 1/4 |

Variáveis aleatórias multidimensionais

Exemplo (Bussab & Morettin)

- A seguir temos as probabilidades associadas aos pares de valores nas variáveis X e Y , denominada *distribuição conjunta* de X e Y .

Variáveis aleatórias multidimensionais

Exemplo (Bussab & Morettin)

- A seguir temos as probabilidades associadas aos pares de valores nas variáveis X e Y , denominada *distribuição conjunta* de X e Y .

Figura 3: Distribuição conjunta da v.a (X, Y) .

| (x, y) | $p(x, y)$ |
|----------|-----------|
| (0, 0) | 1/8 |
| (1, 0) | 2/8 |
| (1, 1) | 1/8 |
| (2, 0) | 1/8 |
| (2, 1) | 2/8 |
| (3, 1) | 1/8 |

Variáveis aleatórias multidimensionais

Exemplo (Bussab & Morettin)

- Nesse caso, também é possível utilizar uma tabela de dupla entrada da seguinte forma:

Variáveis aleatórias multidimensionais

Exemplo (Bussab & Morettin)

- Nesse caso, também é possível utilizar uma tabela de dupla entrada da seguinte forma:

Figura 4: Distribuição conjunta da v.a (X, Y) .

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | $p(y)$ |
|------------------|-----|-----|-----|-----|--------|
| 0 | 1/8 | 2/8 | 1/8 | 0 | 1/2 |
| 1 | 0 | 1/8 | 2/8 | 1/8 | 1/2 |
| $p(x)$ | 1/8 | 3/8 | 3/8 | 1/8 | 1 |

Variáveis aleatórias multidimensionais

Exemplo (Bussab & Morettin)

- Nesse caso, também é possível utilizar uma tabela de dupla entrada da seguinte forma:

Figura 4: Distribuição conjunta da v.a (X, Y) .

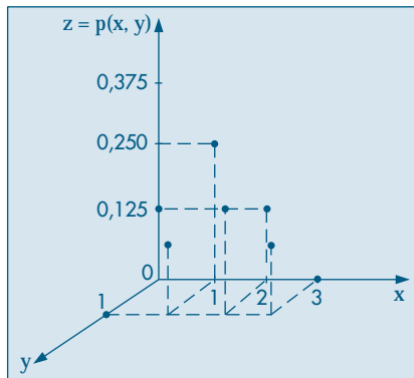
| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | $p(y)$ |
|------------------|-----|-----|-----|-----|--------|
| 0 | 1/8 | 2/8 | 1/8 | 0 | 1/2 |
| 1 | 0 | 1/8 | 2/8 | 1/8 | 1/2 |
| $p(x)$ | 1/8 | 3/8 | 3/8 | 1/8 | 1 |

- Podemos ver, então, as probabilidades conjuntas $p(x, y)$ e as probabilidades marginais $p(x)$ e $p(y)$.

Variáveis aleatórias multidimensionais

Exemplo (Bussab & Morettin)

Figura 5: Representação gráfica da distribuição da variável aleatória (X, Y) .



Distribuições Marginais e Condicionais

Exemplo (Bussab & Morettin)

- Os conjuntos de pares $(x, p(x))$ e $(y, p(y))$ são denominadas *distribuições marginais* das v.a's X e Y , respectivamente.

Distribuições Marginais e Condicionais

Exemplo (Bussab & Morettin)

- Os conjuntos de pares $(x, p(x))$ e $(y, p(y))$ são denominadas *distribuições marginais* das v.a's X e Y , respectivamente.
- Qual seria a distribuição do número de meninos, sabendo-se que o primeiro filho é do sexo masculino? Da definição de probabilidade condicional obtemos

Distribuições Marginais e Condicionais

Exemplo (Bussab & Morettin)

- Os conjuntos de pares $(x, p(x))$ e $(y, p(y))$ são denominadas *distribuições marginais* das v.a's X e Y , respectivamente.
- Qual seria a distribuição do número de meninos, sabendo-se que o primeiro filho é do sexo masculino? Da definição de probabilidade condicional obtemos

$$\mathbb{P}(X = x|Y = 1) = \frac{\mathbb{P}(X = x; Y = 1)}{\mathbb{P}(Y = 1)} = p(x|Y = 1)$$

para todo $x = 0, 1, 2, 3$.

- Tal distribuição é denominada *distribuição condicional*.

Distribuições Marginais e Condicionais

Exemplo (Bussab & Morettin)

Figura 6: Distribuição condicional de X , dado que $Y = 1$.

| x | 1 | 2 | 3 |
|------------|-----|-----|-----|
| $p(x Y=1)$ | 1/4 | 1/2 | 1/4 |

Distribuições Marginais e Condicionais

Exemplo (Bussab & Morettin)

Figura 6: Distribuição condicional de X , dado que $Y = 1$.

| x | 1 | 2 | 3 |
|------------|-----|-----|-----|
| $p(x Y=1)$ | 1/4 | 1/2 | 1/4 |

Figura 7: Distribuição condicional de Y , dado que $X = 2$.

| y | 0 | 1 |
|------------|-----|-----|
| $p(y X=2)$ | 1/3 | 2/3 |

Distribuições Marginais e Condicionais

Exemplo (Bussab & Morettin)

Definição:

Seja x um valor da v.a X , tal que $p(x) = \mathbb{P}(X = x) > 0$. A probabilidade

$$p(y|x) = \mathbb{P}(Y = y|X = x) = \frac{\mathbb{P}(Y = y; X = x)}{\mathbb{P}(X = x)} \text{ para todo } x$$

é denominada probabilidade de $Y = y$ dado que $X = x$ e, conjunto de pares $(y, p(y|x))$ é denominado *distribuição condicional* de Y dado que $X = x$.

Esperança Condicional

Exemplo (Bussab & Morettin)

- Considere a distribuição condicional de X , dado que $Y = 1$. Podemos determinar a esperança dessa distribuição, ou seja,

Esperança Condicional

Exemplo (Bussab & Morettin)

- Considere a distribuição condicional de X , dado que $Y = 1$. Podemos determinar a esperança dessa distribuição, ou seja,

$$\mathbb{E}(X|Y = 1) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{4} =$$

Esperança Condicional

Exemplo (Bussab & Morettin)

- Considere a distribuição condicional de X , dado que $Y = 1$. Podemos determinar a esperança dessa distribuição, ou seja,

$$\mathbb{E}(X|Y = 1) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{4} = 2$$

Esperança Condicional

Exemplo (Bussab & Morettin)

- Considere a distribuição condicional de X , dado que $Y = 1$. Podemos determinar a esperança dessa distribuição, ou seja,

$$\mathbb{E}(X|Y = 1) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{4} = 2$$

- Observe que $\mathbb{E}(X) = 1,5$, ao passo que $\mathbb{E}(X|Y = 1) = 2$.

Esperança Condicional

Exemplo (Bussab & Morettin)

- Considere a distribuição condicional de X , dado que $Y = 1$. Podemos determinar a esperança dessa distribuição, ou seja,

$$\mathbb{E}(X|Y = 1) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{4} = 2$$

- Observe que $\mathbb{E}(X) = 1,5$, ao passo que $\mathbb{E}(X|Y = 1) = 2$.
- De modo geral, no caso discreto, a esperança condicional de X dado que $Y = y$ é definida por

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \sum_x x \mathbb{P}(X = x|Y = y) \text{ para qualquer } y$$

Variáveis aleatórias multidimensionais

Exemplo (Bussab & Morettin)

- Considere agora a distribuição conjuntas das v.a's Y e Z

Variáveis aleatórias multidimensionais

Exemplo (Bussab & Morettin)

- Considere agora a distribuição conjuntas das v.a's Y e Z

Figura 8: Distribuição conjunta de Y e Z .

| $Y \backslash Z$ | 0 | 1 | 2 | $p(y)$ |
|------------------|-----|-----|-----|--------|
| 0 | 1/8 | 2/8 | 1/8 | 1/2 |
| 1 | 1/8 | 2/8 | 1/8 | 1/2 |
| $p(z)$ | 1/4 | 2/4 | 1/4 | 1 |

Variáveis aleatórias multidimensionais

Exemplo (Bussab & Morettin)

- Nesse caso, observamos que

Variáveis aleatórias multidimensionais

Exemplo (Bussab & Morettin)

- Nesse caso, observamos que

$$\mathbb{P}(Z = z|Y = y) = \frac{\mathbb{P}(Z = z; Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} =$$

Variáveis aleatórias multidimensionais

Exemplo (Bussab & Morettin)

- Nesse caso, observamos que

$$\mathbb{P}(Z = z|Y = y) = \frac{\mathbb{P}(Z = z; Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} = \mathbb{P}(Z = z)$$

para quaisquer z e y . O que significa dizer que

Variáveis aleatórias multidimensionais

Exemplo (Bussab & Morettin)

- Nesse caso, observamos que

$$\mathbb{P}(Z = z|Y = y) = \frac{\mathbb{P}(Z = z; Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} = \mathbb{P}(Z = z)$$

para quaisquer z e y . O que significa dizer que

$$\mathbb{P}(Z = z; Y = y) = \mathbb{P}(Z = z)\mathbb{P}(Y = y)$$

- Também é verdade que

Variáveis aleatórias multidimensionais

Exemplo (Bussab & Morettin)

- Nesse caso, observamos que

$$\mathbb{P}(Z = z|Y = y) = \frac{\mathbb{P}(Z = z; Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} = \mathbb{P}(Z = z)$$

para quaisquer z e y . O que significa dizer que

$$\mathbb{P}(Z = z; Y = y) = \mathbb{P}(Z = z)\mathbb{P}(Y = y)$$

- Também é verdade que

$$\mathbb{P}(Y = y|Z = z) =$$

Variáveis aleatórias multidimensionais

Exemplo (Bussab & Morettin)

- Nesse caso, observamos que

$$\mathbb{P}(Z = z|Y = y) = \frac{\mathbb{P}(Z = z; Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} = \mathbb{P}(Z = z)$$

para quaisquer z e y . O que significa dizer que

$$\mathbb{P}(Z = z; Y = y) = \mathbb{P}(Z = z)\mathbb{P}(Y = y)$$

- Também é verdade que

$$\mathbb{P}(Y = y|Z = z) = \mathbb{P}(Y = y)$$

qualquer que seja y e z . Neste caso, dizemos Y e Z são independentes.

Variáveis aleatórias multidimensionais

Exemplo (Bussab & Morettin)

Definição:

As variáveis aleatórias X e Y discretas são independentes se, e somente se, para quaisquer pares (x, y) tivermos

Variáveis aleatórias multidimensionais

Exemplo (Bussab & Morettin)

Definição:

As variáveis aleatórias X e Y discretas são independentes se, e somente se, para quaisquer pares (x, y) tivermos

$$\mathbb{P}(X = x; Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y).$$

Definição 1

- Sejam X e Y variáveis aleatórias. Denominaremos o vetor (X, Y) uma *variável aleatória bidimensional*.
- Se X_1, X_2, \dots, X_n forem n variáveis aleatórias, denominaremos (X_1, \dots, X_n) uma *variável aleatória n -dimensional* (ou vetor aleatório).

Variáveis aleatórias multidimensionais

Caso bidimensional

Definição 2

(a) Seja (X, Y) uma variável aleatória discreta bidimensional. A cada resultado possível (x, y) associaremos um número $p(x, y)$ representando $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ e satisfazendo às seguintes condições:

- ❶ $p(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) ,
- ❷ $\sum_{x=1}^{\infty} \sum_{y=1}^{\infty} p(x, y) = 1$.

(b) Seja (X, Y) uma variável aleatória contínua tomando todos os valores em alguma região B do plano euclidiano. A *função densidade de probabilidade conjunta* f é uma função que satisfaz às seguintes condições:

- ❶ $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in B$
- ❷ $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$.

Variáveis aleatórias multidimensionais

Caso n -dimensional

Definição 3

- (a) Seja (X_1, X_2, \dots, X_n) uma variável aleatória discreta n -dimensional. A cada resultado possível associaremos um número $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ representando $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$ e satisfazendo às seguintes condições:
- ① $p(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ para todo (x_1, \dots, x_n) ,
 - ② $\sum_{x_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{x_n=1}^{\infty} p(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$.
- (b) Seja (X_1, \dots, X_n) uma variável aleatória contínua tomando todos os valores em alguma região $B \subset \mathbb{R}^n$. A *função densidade de probabilidade conjunta* f é uma função que satisfaz às seguintes condições:
- ① $f(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ para todo $(x_1, \dots, x_n) \in B$
 - ② $\int_B \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 1$.

- Suponha que um fabricante de lâmpadas esteja interessado no número de lâmpadas encomendadas a ele durante os meses de janeiro e fevereiro. Sejam X e Y , respectivamente, o número de lâmpadas encomendadas durante esses dois meses. Admitiremos que (X, Y) seja uma variável aleatória contínua bidimensional, com a seguinte f.d.p conjunta

$$f(x, y) = c \begin{matrix} I(x) \\ [5.000, 10.000] \end{matrix} \begin{matrix} I(y) \\ [4.000, 9.000] \end{matrix}$$

- (a) Determine o valor de c .
- (b) Qual a probabilidade de que as vendas de fevereiro sejam no máximo igual as vendas de janeiro?

- Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional com f.d.p conjunta definida por

$$f(x, y) = \left(x^2 + \frac{xy}{3} \right) I_{[0,1]}(x) I_{[0,2]}(y)$$

- (a) Demostre que $f(x, y)$ é de fato uma f.d.p conjunta.
- (b) Determine a probabilidade do evento $B = \{X + Y \geq 1\}$.

Definição:

- Seja (X, Y) um vetor aleatório bidimensional com f.d.p conjunta $f(x, y)$ as funções densidade de probabilidade marginais de X e Y são dados por

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy; \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

Definição:

- Seja (X, Y) um vetor aleatório bidimensional com f.d.p conjunta $f(x, y)$ as funções densidade de probabilidade marginais de X e Y são dados por

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy; \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

- No caso multidimensional para determinar a distribuição marginal da k -ésima componente, é necessário integrar $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ para todas as variáveis, exceto x_i . Ou seja

$$f_{X_k}(x) = \int_B \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \text{ para todo } i \neq k.$$

Distribuições Marginais

Exemplo

- Seja (X, Y, Z) um vetor aleatório com densidade conjunta definida por

$$f(x, y, z) = kxy^2z I_{(0,1)}(x) I_{(0,1)}(y) I_{(0,\sqrt{2})}(z)$$

- (a) Determine o valor de k .
- (b) Determine as distribuições marginais de X , Y e Z .