Formas Indeterminadas e a Regra de L'Hopital

Forma indeterminada do tipo $0/0$

Sabemos que, se $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ existem, então $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, desde que $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

Se $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, dizemos que a função f/g tem a forma indeterminada $0/0$ em a.

Um método mais geral para calcular o limite, se ele existir, de uma função que tem uma forma indeterminada $0/0$ é conhecido como regra de L'Hopital.

Teorema (Regra de L'Hopital)
Sejam f e g funções diferenciáveis em um intervalo aberto I, exceto possivelmente em um número a pertencente a I.
Se $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, se $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir e se, para todo $x \neq a$ em I, $g'(x) \neq 0$, então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Este teorema também é válido para limites laterais.

Exemplo:
Calcule $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3\cos x}{2x-\pi}$
Solução:
Temos $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 3\cos x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (2x-\pi) = 0$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{3 \cos x}{2x - \pi} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-3 \operatorname{sen} x}{2} = -\frac{3}{2}$$

A regra de L'Hopital, também é válida na seguinte situação:

Teorema (Regra de L'Hopital)
Sejam f e g funções diferenciáveis para todo $x > N$, onde N é uma constante positiva.
Se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, se $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir e se, para todo $x > N$, $g'(x) \neq 0$, então

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Este teorema também é válido se trocarmos $x \to +\infty$ por $x \to -\infty$

Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{Sen\,\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}$

Solução:

Temos $\lim\limits_{x \to +\infty} Sen\,\dfrac{2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{Sen\,\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{2}{x^2} cos\,\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} 2\,cos\,\frac{2}{x} = 2$$

Outras formas indeterminadas ($(+\infty)/(+\infty)$, $(-\infty)/(-\infty)$, $(-\infty)/(+\infty)$ e $(+\infty)/(-\infty)$)

Teorema (Regra de L'Hopital)
Sejam f e g funções diferenciáveis em um intervalo aberto I, exceto possivelmente em um número a pertencente a I.

Se $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$ ou $-\infty$, se $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir e se, para todo $x \neq a$ em I, $g'(x) \neq 0$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Este teorema também é válido para limites laterais.

Exemplo:

Calcule $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$

Solução:

Temos $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

Teorema (Regra de L'Hopital)

Sejam f e g funções diferenciáveis para todo $x > N$, onde N é uma constante positiva.

Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ ou $-\infty$, se $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir e se, para todo $x > N$, $g'(x) \neq 0$, então

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Este teorema também é válido se trocarmos $x \to +\infty$ por $x \to -\infty$

Exemplo:

Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(5+e^x)}{4x+3}$

Solução:

Temos $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(5+e^x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (4x+3) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(5+e^x)}{4x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{5+e^x}.e^x}{4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{20+4e^x}$$

Temos $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = \lim\limits_{x\to+\infty} (20+4e^x) = +\infty$

Aplicando novamente L'Hopital, temos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(5+e^x)}{4x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{4e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Outros Exemplos:

1) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\ln(x-1)}{x-2}$

Temos $\lim\limits_{x \to 2} \ln(x-1) = \lim\limits_{x \to 2} (x-2) = 0$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\ln(x-1)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{x-1}}{1} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x-1} = 1$$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^3}$

Temos $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{3x^2}$$

Temos $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty$. Aplicando novamente a Regra de l'Hopital, temos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{3x^2} = \operatorname*{Lim}_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{6x}$$

Temos $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = \lim\limits_{x\to+\infty} 6x = +\infty$. Aplicando novamente a Regra de l'Hopital, temos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{3x^2} = \operatorname*{Lim}_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{6x} = \operatorname*{Lim}_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{6} = +\infty$$

3) $\lim_{x \to 0^+} arc\ sen\ x\ .\ cosec\ x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\text{arcsen x}}{sen\ x}$

Temos $\lim_{x \to 0^+} \text{arcsen x} = \lim_{x \to 0^+} sen\ x = 0.$

$\lim_{x \to 0^+} (arc\ sen\ x\ .\ cosec\ x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\text{arcsen x}}{sen\ x} =$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{cos\ x} = \frac{1}{1} = 1$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2\sec x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sec x-1}{x^2\sec}\right)$

Temos $\lim\limits_{x\to 0}(\sec x-1)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\sec x=0.$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2\sec x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sec x-1}{x^2\sec x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sec x\ tg\ x}{2x\ sec\ x+x^2\sec x\operatorname{tg}x}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{2x+x^2\operatorname{tg}x}\right)$$

Temos $\lim\limits_{x\to 0}tg\ x=\lim\limits_{x\to 0}(2x+x^2\operatorname{tg}x)=0.$ Aplicando novamente a Regra de l'Hopital, temos

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2\sec x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sec x-1}{x^2\sec x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sec\quad tg\ x}{2x\ sec\ x+x^2\sec x\operatorname{tg}x}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{2x+x^2\operatorname{tg}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sec^2x}{2+2x\ tgx+x^2sec^2x}\right)=\frac{1}{2}$$