Variáveis Aleatórias Contínuas

Prof. José Roberto Silva dos Santos

Depto. de Estatística e Matemática Aplicada - UFC

Fortaleza, 17 de agosto 2022

Sumário

Sumário

- Variáveis aleatórias contínuas: vamos considerar agora quantidades (variáveis) as quais não é possível associar uma tabela de probabilidades pontuais ou frequências

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Variáveis aleatórias contínuas: vamos considerar agora quantidades (variáveis) as quais não é possível associar uma tabela de probabilidades pontuais ou frequências
    - tempo de duração de uma chamada telefônica

- Variáveis aleatórias contínuas: vamos considerar agora quantidades (variáveis) as quais não é possível associar uma tabela de probabilidades pontuais ou frequências
  - tempo de duração de uma chamada telefônica
  - tempo de vida de uma lâmpada

- Variáveis aleatórias contínuas: vamos considerar agora quantidades (variáveis) as quais não é possível associar uma tabela de probabilidades pontuais ou frequências
  - tempo de duração de uma chamada telefônica
  - tempo de vida de uma lâmpada
  - altura das pessoas

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Variáveis aleatórias contínuas: vamos considerar agora quantidades (variáveis) as quais não é possível associar uma tabela de probabilidades pontuais ou frequências
  - tempo de duração de uma chamada telefônica
  - tempo de vida de uma lâmpada
  - altura das pessoas
- Para esse tipo de quantidades as quais não podemos associar frequências pontuais tais que a soma de todas elas seja igual a 1, surge o conceito de "função densidade de probabilidade" (f.d.p.).

Sumário

Função densidade de probabilidade

Definição:

- A função densidade de probabilidade de uma v.a. X é uma função f que verifica:

Função densidade de probabilidade

Definição:

- A função densidade de probabilidade de uma v.a. X é uma função f que verifica:
  - $f(x) \geq 0 \quad \forall \ x \in \mathbb{R}$

Função densidade de probabilidade

Definição:

- A função densidade de probabilidade de uma v.a. X é uma função f que verifica:
  - $f(x) \geq 0 \quad \forall \; x \in \mathbb{R}$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (f é integrável)

Função densidade de probabilidade

Definição:

- A função densidade de probabilidade de uma v.a. X é uma função f que verifica:
  - $f(x) \geq 0 \quad \forall \ x \in \mathbb{R}$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (f é integrável)
- Toda v.a. X à qual seja possível associar uma f.d.p. será chamada de v.a. contínua.

Função densidade de probabilidade

- A probabilidade de que uma v.a. X contínua pertença a um intervalo da reta (a,b], $a < b$ é dada por:

Função densidade de probabilidade

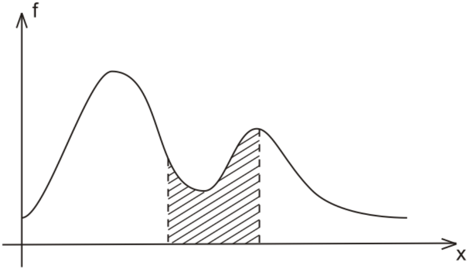
- A probabilidade de que uma v.a. X contínua pertença a um intervalo da reta (a,b], $a < b$ é dada por:

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Função densidade de probabilidade

- A probabilidade de que uma v.a. X contínua pertença a um intervalo da reta (a,b], $a < b$ é dada por:

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$



Sumário

Função de distribuição acumulada

- Notação: se X v.a. contínua com função densidade de probabilidade f, no lugar de f denotaremos f_X

Função de distribuição acumulada

- Notação: se X v.a. contínua com função densidade de probabilidade f, no lugar de f denotaremos f_X

- À probabilidade de que uma v.a. X contínua pertença ao intervalo da reta $(-\infty, x]$ daremos o nome de função de distribuição acumulada (f.d.a.), e a denotaremos por F_X.

Função de distribuição acumulada

- Notação: se X v.a. contínua com função densidade de probabilidade f, no lugar de f denotaremos f_X

- À probabilidade de que uma v.a. X contínua pertença ao intervalo da reta $(-\infty, x]$ daremos o nome de função de distribuição acumulada (f.d.a.), e a denotaremos por F_X.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Função de distribuição acumulada

- Notação: se X v.a. contínua com função densidade de probabilidade f, no lugar de f denotaremos f_X

- À probabilidade de que uma v.a. X contínua pertença ao intervalo da reta $(-\infty, x]$ daremos o nome de função de distribuição acumulada (f.d.a.), e a denotaremos por F_X.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \mathbb{P}(X \leq x)$$

- Nesse sentido, á função densidade de probabilidade de X é obtida a partir a f.d.a da seguinte forma

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x).$$

Função de distribuição acumulada

Propriedades

A função de distribuição acumulada satisfaz as seguintes condições:

(F1) *Monotonicidade.* Se $x \leq y$, então $F(x) \leq F(y)$.

(F2) *Continuidade à direita.* Se $x_n \downarrow x$, então $F(x_n) \downarrow F(x)$.

(F3) $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Função de distribuição acumulada

- *Observação:* É conveniente esclarecer que existe uma distinção de nomenclatura entre a variável aleatória e sua função de distribuição. Classificamos uma variável aleatória X como contínua, se sua função de distribuição F_X é absolutamente contínua (por ser integral da função densidade).

Função de distribuição acumulada

- *Observação:* É conveniente esclarecer que existe uma distinção de nomenclatura entre a variável aleatória e sua função de distribuição. Classificamos uma variável aleatória X como contínua, se sua função de distribuição F_X é absolutamente contínua (por ser integral da função densidade).
- Alguns autores são mais rigorosos e usam a mesma terminologia para X e F_X, denominando de *absolutamente contínua*, a variável que aqui chamamos simplesmente contínua.

- Exemplo: X v.a. contínua com f.d.p.:

- Exemplo: X v.a. contínua com f.d.p.:

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Exemplo: X v.a. contínua com f.d.p.:

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Pela definição de f.d.p.:

- Exemplo: X v.a. contínua com f.d.p.:

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Pela definição de f.d.p.:
    - $f(x) \geq 0 \quad \forall \; x \in \mathbb{R}$

- Exemplo: X v.a. contínua com f.d.p.:

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Pela definição de f.d.p.:
  - $f(x) \geq 0 \quad \forall \; x \in \mathbb{R}$
  - $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 (2-x)dx = 1$

- Exemplo: X v.a. contínua com f.d.p.:

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Pela definição de f.d.p.:
  - $f(x) \geq 0 \quad \forall \ x \in \mathbb{R}$
  - $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 (2-x)dx = 1$

- Podemos também calcular $\mathbb{P}(0 < X \leq 0,8) =$

- Exemplo: X v.a. contínua com f.d.p.:

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Pela definição de f.d.p.:
  - $f(x) \geq 0 \quad \forall \ x \in \mathbb{R}$
  - $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 (2-x)dx = 1$

- Podemos também calcular $\mathbb{P}(0 < X \leq 0,8) = \int_0^{0,8} xdx = 0,32$

- Propriedade: toda v.a. X contínua (ou seja, que possui f_X como f.d.p.) tem probabilidade pontual nula: $\mathbb{P}(X = x) = 0$

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Propriedade: toda v.a. X contínua (ou seja, que possui f_X como f.d.p.) tem probabilidade pontual nula: $\mathbb{P}(X = x) = 0$
- Resumindo: $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Propriedade: toda v.a. X contínua (ou seja, que possui f_X como f.d.p.) tem probabilidade pontual nula: $\mathbb{P}(X = x) = 0$
- Resumindo: $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$
  - caso discreto: $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} \mathbb{P}(X = x_i)$

- Propriedade: toda v.a. X contínua (ou seja, que possui f_X como f.d.p.) tem probabilidade pontual nula: $\mathbb{P}(X = x) = 0$
- Resumindo: $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$
    - caso discreto: $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} \mathbb{P}(X = x_i)$
    - caso contínuo: $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$

Exemplo

- Seja uma X v.a contínua e considere:

$$f_X(x) = \begin{cases} c(1-x^2), & \text{se } -1 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo

- Seja uma X v.a contínua e considere:

$$f_X(x) = \begin{cases} c(1 - x^2), & \text{se } -1 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Determine o valor de c tal que $f_X(x)$ seja uma legítima f.d.p.

Exemplo

- Seja uma X v.a contínua e considere:

$$f_X(x) = \begin{cases} c(1-x^2), & \text{se } -1 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Determine o valor de c tal que $f_X(x)$ seja uma legítima f.d.p.

(b) Determine a função de distribuição acumulada de X.