**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**

**CENTRO DE CIÊNCIAS**

**BACHARELADO EM ESTATÍSTICA**

**ANTÔNIO ARTHUR SILVA DE LIMA (508492)**

**PROF. CIRO NOGUEIRA FILHO**

# TRABALHO DE CÁLCULO III:
# DIVERGENTE E ROTACIONAL

**Fortaleza**

**28/11/2022**

## 1.

**a)** $F(x,y,z) = xy^2z^2i + x^2yz^2j + x^2y^2zk$

Primeiro, iremos identificar as componentes $M$, $N$ e $R$ do campo vetorial F:

$M = xy^2z^2$; $N = x^2yz^2$; $R = x^2y^2z$

Logo:

$$\begin{aligned} div\, F &= (xy^2z^2)_X + (x^2yz^2)_Y + (x^2y^2z)_Z \\ &= (y^2z^2) + (x^2z^2) + (x^2y^2) \end{aligned}$$

Agora, iremos calcular o rotacional:

$$\begin{aligned} rot\, F &= [(x^2y^2z)_Y - (x^2yz^2)_Z]i + [(xy^2z^2)_Z - (x^2y^2z)_X]j + [(x^2yz^2)_X - (xy^2z^2)_Y]k \\ &= (2x^2yz - 2x^2yz)i + (2xy^2z - 2xy^2z)j + (2xyz^2 - 2xyz^2)k \\ &= (0)i + (0)j + (0)k \\ &= 0 \end{aligned}$$

**b)** $F(x,y,z) = e^xi + e^yj + e^zk$

Identificando as componentes: $M = e^x$; $N = e^y$; $R = e^z$

Divergente:

$$\begin{aligned} div\, F &= (e^x)_X + (e^y)_Y + (e^z)_Z \\ &= e^x + e^y + e^z \end{aligned}$$

Rotacional:

$$\begin{aligned} rot\, F &= [(e^z)_Y - (e^y)_Z]i + [(e^x)_Z - (e^z)_X]j + [(e^y)_X - (e^x)_Y]k \\ &= (0-0)i + (0-0)j + (0-0)k \\ &= 0 \end{aligned}$$

**c)** $F(x,y,z) = zcosyi + xcoszj + ycosxk$

Componentes: $M = zcosy$; $N = xcosz$; $R = ycosx$

Divergente:

$$\begin{aligned} div\ F &= (zcosy)_X + (xcosz)_Y + (ycosx)_Z \\ &= 0+0+0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Rotacional:

$$\begin{aligned} rot\ F &= [(ycosx)_Y - (xcosz)_Z]i + [(zcosy)_Z - (ycosx)_X]j + [(xcosz)_X - (zcosy)_Y]k \\ &= (cosx + xsenz)i + (cosy + ysenx)j + (cosz + zseny)k \end{aligned}$$

**d)** $F(x,y,z) = ylnxi + zlnyj + xlnzk$

Componentes: $M = ylnx$; $N = zlny$; $R = xlnz$

Divergente:

$$\begin{aligned} div\ F &= (ylnx)_X + (zlny)_Y + (xlnz)_Z \\ &= \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \end{aligned}$$

Rotacional:

$$\begin{aligned} rot\ F &= [(xlnz)_Y - (zlny)_Z]i + [(yln)_Z - (xlnz)_X]j + [(zlny)_X - (ylnx)_Y]k \\ &= (0 - lny)i + (0 - lnz)j + (0 - lnx)k \\ &= -lnyi - lnzj - lnxk \end{aligned}$$

**2.**

- Incompressíveis: **c)**;
- Irrotacionais: **a)** e **b)**.

**3.** $F(x,y,z) = f(x)i + g(y)j + h(z)k$, com $f$, $g$ e $h$ diferenciáveis.

Primeiramente, temos que as componentes do campo vetorial são $M = f(x)$, $N = g(y)$ e $R = h(z)$. Encontraremos agora o rotacional da função.

$$\begin{aligned} rot\ F &= [h(z)_Y - g(y)_Z]i + [f(x)_Z - h(z)_X]j + [g(y)_X - f(x)_Y]k \\ &= (0-0)i + (0-0)j + (0-0)k \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, o campo vetorial $F(x,y,z)$ é *irrotacional*.

**4.** $F(x,y,z) = f(y,z)i + g(x,z)j + h(x,y)k$.

As componentes do campo vetorial são $M = f(y,z)$, $N = g(x,z)$, e $R = h(x,y)$. Calcularemos então o divergente da função.

$$\begin{aligned} div\ F &= f(y,z)_X + g(x,z)_Y + h(x,y)_Z \\ &= 0+0+0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, o campo vetorial $F(x,y,z)$ é *incompressível*.

**5.**

Vamos supor que exista o campo vetorial espacial $F(x,y,z) = M(x,y,z)i + N(x,y,z)j + R(x,y,z)k$ tal que $rot\ F = xi + yj + zk$. Então, sabemos que $div(rot\ F)$ deve ser igual a 0. Iremos verificar:

$$\begin{aligned} div(xi + yj + zk) &= (x)_X + (y)_Y + (z)_Z \\ &= 1 + 1 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Como $div(rot\ F) = 3 \neq 0$, logo, o campo vetorial espacial $F(x,y,z)$ **não existe**.

**6.**

Supondo que a função $g(x,y,z)$ exista, sabemos que $rot(\nabla g) = 0$. Encontraremos então esse rotacional, tomando como componentes $M = x^2 - y$; $N = y^2 - z$ e $R = z^2 - x$.

$$\begin{aligned} rot(\nabla g) &= [(z^2 - x)_Y - (y^2 - z)_Z]i + [(x^2 - y)_Z - (z^2 - x)_X]j + \\ &\quad [(y^2 - z)_X - (x^2 - y)_Y]k \\ &= (0 + 1)i + (0 + 1)j + (0 + 1)k \\ &= i + j + k \end{aligned}$$

Como $rot(\nabla g) = i + j + k \neq 0$, então podemos afirmar que a função $g(x,y,z)$ **não existe**.

**7.** $F(x,y,z) = xi + yj - 2zk$.

Calculando o divergente do campo $F$:

$$\begin{aligned} div\, F &= (x)_X + (y)_Y + (-2z)_Z \\ &= 1 + 1 - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Calculando o rotacional do campo $F$:

$$\begin{aligned} rot\ F &= [(-2z)_Y - (y)_Z]i + [(x)_Z - (-2z)_X]j + [(y)_X - (x)_Y]k \\ &= (0-0)i + (0-0)j + (0-0)k \\ &= 0 \end{aligned}$$

Observamos que $div\ F = 0$, $rot\ F = 0$, porém, $F \neq 0$. Portanto, a afirmação "Se $div\ F = 0$ e $rot\ F = 0$, então, $F = 0$" é **falsa**.