3.53. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim Exp(\theta)$.
Seja

$$g(\theta) = P(X > 1) = e^{-\theta}.$$

Encontre o estimador de máxima verossimilhança de $g(\theta$ e sua distribuição quando n é grande.

Solução:
A f.d.p. de X é dada por:

$$f(x|\theta) = \theta e^{-\theta x}\, I_{(0,\infty)}(x), \theta > 0.$$

A função de verossimilhança é dada por:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta \exp\left(-\theta x_i\right)$$

$$L(\theta) = \theta^n \exp\left(-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

O logaritmo da função de verossimilhança é dado por:

$$l(\theta) = n \log \theta - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i$$

A derivada primeira de $l(\mu)$ é dada por:

$$l^{'}(\theta) = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$l^{'}(\theta) = \frac{n}{\theta} - n\bar{x}.$$

A derivada segunda de $l(\mu)$ é dada por:

$$l^{''}(\mu) = -\frac{n}{\theta^2} < 0.$$

Fazendo $l^{'}(\theta) = 0$ temos

$$\hat{\theta}_{MV} = \frac{1}{\bar{X}}.$$

Seja

$$g(\theta) = e^{-\theta}.$$

Assim

$$g'(\theta) = -e^{-\theta}.$$

$$[g'(\theta)]^2 = \; e^{-2\theta}.$$

O estimador de MV de $g(\theta)$ é dado por

$$T_1 = g(1/\bar{X}) = e^{-2/\bar{X}}.$$

pela propriedade da invariância.

Vamos calcular a informação de Fisher de $X \sim Exp(\theta)$:

O suporte $A = (0, \infty)$ não depende de θ Assim

$$f(X|\theta) = \theta \exp\left(-\theta X\right)$$

$$\log\left(f(X \mid \theta)\right) = \log(\theta) - \theta X$$

$$V = \frac{\partial log f(X \mid \theta)}{\partial \theta} = -X + \frac{1}{\theta}$$

$$I_F(\theta) = Var(V) = Var\left(-X + \frac{1}{\theta}\right) = Var(X) = \frac{1}{\theta^2}.$$

$$\sqrt{n}\ \left(g\left(\hat{\theta}\right) - g(\theta)\right) \overset{a}{\sim} N\left(0, \frac{(g'(\theta))^2}{I_F(\theta)}\right).$$

Logo

$$\sqrt{n}\ \left(g\left(\hat{\theta}\right) - g(\theta)\right) \overset{a}{\sim} N\left(0,\ \frac{e^{-2\theta}}{1/\theta^2}\right).$$

$$\sqrt{n}\ \left(g\left(\hat{\theta}\right) - g(\theta)\right) \overset{a}{\sim} N\left(0,\ \theta^2\, e^{-2\theta}\right).$$