1. Vamos definir uma família de distribuições que tem um papel relevante na teoria estatística.

Definição Dizemos que a distribuição da variável aleatória X pertence à família exponencial unidimensional de distribuições se pudermos escrever sua função de probabilidade ou sua função de densidade de probabilidade como

$$f(x|\theta) = \exp\left(c(\theta)T(x) + d(\theta) + b(x)\right)\ I_A(x),$$

em que c, d são funções reais de θ, T, h são funções reais de x e o suporte A **não** depende de θ.

Fica mais operacional usar a definição:

$$\log\left(f(x|\theta)\right) = c(\theta)T(x) + d(\theta) + b(x).$$

Um fato bem relevante é a obtenção da esperança e da variância de $T(X)$ usando apenas derivação:

Fato 1: Seja $Y = T(X)$

então

$$E(Y) = E[T(X)] = -\frac{d'(\theta)}{c'(\theta)}.$$

Prova: Vamos supor que X seja uma variável aleatória contínua.

Assim,

$$\int_A f(x|\theta)\ dx = 1.$$

$$\int_A \exp\left(c(\theta)T(x) + d(\theta) + h(x)\right)\ dx = 1.$$

Simplificando a notação temos $y = T(x)$ temos:

$$\int_A \exp\left(c(\theta)y + d(\theta) + h(x)\right)\ dx = 1.$$

Derivando em relação θ lembrando que o suporte A não depende de θ podemos inverter a ordem de derivação e integração:

$$\int_A \left(c^{'}(\theta)y + d^{'}(\theta)\right)\ \exp(c(\theta)y + d(\theta) + h(x))\ dx = 0.$$

Vamos colocar na forma:

$$\int_A \left(c^{'}(\theta)y + d^{'}(\theta)\right)\ f(x|\theta)\ dx = 0.$$

Logo,

$$c^{'}(\theta) \int_A yf(x|\theta)\ dx + d^{'}(\theta) \int_A f(x|\theta)\ dx = 0.$$

Como:

$$\int_A yf(x|\theta)\ dx = E(Y) \quad e \quad \int_A f(x|\theta)\ dx = 1$$

temos:

$$c^{'}(\theta)\ \ E(Y) + d^{'}(\theta) = 0$$

$$E(Y) = E[T(X)] = -\frac{d'(\theta)}{c'(\theta)}.$$

Fato 2: Seja $Y = T(X)$
então

$$Var(Y) = Var[T(X)] = \frac{c^{''}(\theta)\ d'(\theta) - d^{''}(\theta)\ c'(\theta)}{(c'(\theta))^3}.$$

Fato 3: Seja

$$S = \sum_{i=1}^{n} T(X_i)$$

Então S é uma estatística suficiente e completa para θ.

Além disso

$$E(S) = n\ E(T(X)) \qquad Var(S) = n\ Var(T(X)).$$

S será usada para a realização do teste de hipóteses bem como para achar a quantidade pivotal para achar um intervalo de confiança.

A função geradora de momentos de S é dada por:

$$M_S(t) = [M_X(t)]^n$$

que será usada para achar a distribuição amostral de S.

Fato 4: Na procura do melhor estimador de variância mínima para $g(\theta)$ basta encontrar uma função de S, $h(S)$, de sorte que

$$E\left[h(S)\right] = g(\theta).$$

Vamos fazer vários exemplos.

2. Mostre que as distribuições a seguir pertencem à família exponencial:

a.
$$X \sim Exp(\theta), \theta > 0.$$

O espaço paramérico é dado por:

$$\Theta = (0, \infty).$$

A f.d.p. de X é dada por:

$$f(x|\theta) = \theta \, e^{-\theta x} \, I_A(x) \; A = (0, \infty).$$

O suporte não depende de θ

$$\log(f(x|\theta)) = \log(\theta e^{-\theta x}) = \log(\theta) - \theta x$$

$$\log(f(x|\theta)) = -\theta x + \log(\theta) = c(\theta)T(x) + d(\theta) + b(x)$$

com

$$c(\theta) = -\theta \quad , T(x) = x, \; d(\theta) = \log(\theta) \quad , b(x) = 0.$$

Note que:

$$c'(\theta) = -1 \quad e \;\; d'(\theta) = \frac{1}{\theta}.$$

$$c''(\theta) = 0 \quad e \;\; d''(\theta) = -\frac{1}{\theta^2}.$$

Finalmente

$$E[T(X)] = E(X) = -\frac{-1}{\theta} = \frac{1}{\theta}.$$

$$Var[T(X)] = V(X) = \frac{c''(\theta)\, d'(\theta) - d''(\theta)\, c'(\theta)}{(c'(\theta))^3} = \frac{0 \times \frac{1}{\theta} - (-\frac{1}{\theta^2}) \times (-1)}{(-1)^3} = \frac{1}{\theta^2}.$$

Além disso

$$S = \sum_{i=1}^{n} T(X_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

é uma estatística suficiente e completa para θ.

Encontre o estimador não viciado de variância mínima para $g(\theta) = \frac{1}{\theta}$.

Note que se $X \sim Exp(\theta)$

$$M_X(t) = \frac{\theta}{\theta - t}, \;\; t < \theta.$$

$$M_S(t) = \left[\frac{\theta}{\theta - t}\right]^n, \;\; t < \theta.$$

Assim

$$S \sim Gama(n, \theta)$$

$$E(S) = \frac{n}{\theta}$$

$$E\left(\frac{S}{n}\right) = E(\bar{X}) = \frac{1}{\theta}$$

$$h(S) = \frac{S}{n} = \bar{X}.$$

Encontre o estimador não viciado de variância mínima para $g(\theta) = \frac{1}{\theta^2}$.

$$S \sim Gama(n, \theta)$$

$$E(S^2) = V(S) + E^2(S) = \frac{n}{\theta^2} + \frac{n^2}{\theta^2} = \frac{n(n+1)}{\theta^2}$$

Logo

$$E\left(\frac{S^2}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{\theta^2}.$$

$$h(S) = \frac{S^2}{n(n+1)}.$$

Encontre o estimador não viciado de variância mínima para $g(\theta) = \theta$.

A f.d.p de S é dada por:

$$f(s) = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \; s^{n-1} \; e^{-\theta s} \;\; I_A(s), \;\; A = (0, \infty).$$

Vamos calcular:

$$E\left(\frac{1}{S}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{s} \; \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \; s^{n-1} \; e^{-\theta s} \; ds$$

$$= \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \; s^{(n-1)-1} \; e^{-\theta s} \; ds$$

$$= \frac{\theta^n}{\Gamma(n)}\ IGG(a = n, b = n-1, c = 1),$$

com $a = n - 1 > 0$,$c = 1 > 0$ e $b = \theta > 0$.
Assim para $n > 1$ temos:

$$\frac{a}{c} = n - 1.$$

$$E\left(\frac{1}{S}\right) = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)}\ \frac{\Gamma(n-1)}{1\ \theta^{n-1}} = \frac{\theta}{n-1}$$

pois

$$\Gamma(n) = (n-1)\ \Gamma(n-1), n > 1.$$

Logo,

$$E\left(\frac{n-1}{S}\right) = \theta.$$

$$h(S) = \frac{n-1}{S}.$$

b.

$$X \sim Ber(p)$$

$$f(x|p) = p^x(1-p)^{1-x}\; I_A(x),\; A = \{0,1\}, \Theta = [0,1].$$

O suporte não depende de p.

$$f(x|p) = p^x(1-p)^{1-x}$$

$$\log(f(x|p)) = x\log(p) + (1-x)\log(1-p)$$

$$\log(f(x|p)) = x\log(p)\; - x\log(1-p) + \log(1-p)$$

$$\log(f(x|p)) = [\log(p)\; - \log(1-p)]\, x + \log(1-p)$$

Assim

$$c(p) = \log(p)\; - \log(1-p)\;\; , T(x) = x,\;\; d(p) = \log(1-p)\;\; b(x) = 0$$

Logo pertence à família exponencial.

Note que $Y = T(X) = X$ e

$$c'(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} = \frac{1}{p(1-p)}\; ;\; d'(p) = -\frac{1}{1-p}.$$

$$E(Y) = -\frac{d'(p)}{c'(p)} = -\frac{-\frac{1}{(1-p)}}{\frac{1}{p(1-p)}} = p.$$

$$c^{''}(p) = \frac{2p-1}{(p(1-p))^2}\; ;\; d^{''}(p) = \frac{1}{(1-p)^2}.$$

$$Var[T(X)] = V(X) = \frac{c^{''}(p)\; d'(p) - d^{''}(p)\; c'(p)}{(c'(p))^3}.$$

$$Var[T(X)] = \frac{num}{den}$$

$$den = \frac{1}{p^3(1-p)^3} = p^{-3}(1-p)^{-3}.$$

$$num = -\frac{2p-1}{p^2\;(1-p)^2} \times \frac{1}{1-p} - \frac{1}{(1-p)^2} \times (-1)\frac{1}{p(1-p)}$$

$$num = -\frac{2p-1}{p^2(1-p)^3} + \frac{1}{p(1-p)^3} =$$

$$num = \frac{-2p+1+p}{p^2(1-p)^3} = \frac{1-p}{p^2(1-p)^3} = \frac{1}{p^2(1-p)^2} = p^{-2}(1-p)^{-2}$$

$$Var[T(X)] = \frac{num}{den} = \frac{p^{-2}(1-p)^{-2}}{p^{-3}(1-p)^{-3}} = p\,(1-p).$$

Note que se $X \sim Ber(p)$

$$M_X(t) = pe^t + q$$

$$M_S(t) = \left[pe^t + q\right]^n, \quad .$$

Assim

$$S \sim Bin(n,p)$$

Além disso

$$S = \sum_{i=1}^{n} T(X_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

é uma estatística suficiente e completa para p.

Encontre o estimador não viciado de variância mínima para $g(p) = p$.

Como $E(S) = np$ temos:

$$E\left(\frac{S}{n}\right) = E(\bar{X}) = p$$

$$h(S) = \frac{S}{n} = \bar{X}.$$

Encontre o estimador não viciado de variância mínima para $g(p) = p^2$.

$$E(S^2) = V(S) + E^2(S) = np(1-p) + n^2\,p^2 = np - np^2 + n^2p^2 = np + (n^2-n)p^2.$$

Lembrando que $E(S) = np$ temos:

$$E(S^2) = E(S) + n(n-1)p^2$$

$$E(S^2 - S) = E(S(S-1)) = n(n-1)p^2$$

Logo

$$E\left(\frac{S(S-1)}{n(n-1)}\right) = p^2.$$

$$h(S) = \frac{S(S-1)}{n(n-1)}.$$

c.

$$X \sim Poisson(\lambda)$$

$$f(x|\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^x}{x!} I_A(x),\ A = \{0, 1 \ldots\},\ \Theta = (0, \infty).$$

O suporte não depende de λ.

$$\log(f(x|\lambda)) = -\lambda + x\ \log(\lambda)\ -\log(x!)$$

Fazendo

$$c(\lambda) = \log(\lambda)\ ;\ T(x) = x\ \ ;\ \ d(\lambda) = -\lambda\ ;\ b(x) = -\log(x!)$$

Logo pertence à família exponencial.

Note que $Y = T(X) = X$ e

$$c'(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\ ;\ d'(\lambda) = -1.$$

$$E(Y) = -\frac{d'(\lambda)}{c'(\lambda)} = \lambda.$$

Além disso:

$$c''(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2}\ ;\ d''(\lambda) = 0.$$

$$Var(Y) = Var[T(X)] = \frac{c''(\lambda)\ d'(\lambda) - d''(\lambda)\ c'(\lambda)}{(c'(\lambda))^3}.$$

Como $d''(\lambda) = 0$temos:

$$Var(Y) = Var[T(X)] = \frac{c''(\lambda)\ d'(\lambda)}{(c'(\lambda))^3} = \frac{-1 \times \lambda^{-1}}{-\lambda^{-2}} = \lambda.$$

Note que se $X \sim Poisson(\lambda)$

$$M_X(t) = e^{\lambda(t-1)}.$$

$$M_S(t) = \left[e^{\lambda(t-1)}\right]^n = e^{n\lambda(t-1)},\ \ .$$

Assim

$$S \sim Poisson(n\lambda)$$

$$E(S) = Var(S) = n\ \lambda$$

Além disso

$$S = \sum_{i=1}^{n} T(X_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

é uma estatística suficiente e completa para λ.

Encontre o estimador não viciado de variância mínima para $g(\lambda) = \lambda^2$.

$$E(S^2) = V(S) + E^2(S) = n\lambda + n^2\ \lambda^2 = E(S) + n^2\lambda^2 =$$

Lembrando que $E(S) = n\lambda$ temos:

$$E(S^2) = E(S) + n^2\lambda^2$$

$$E(S^2) - E(S) = E(S(S-1)) = n^2\lambda^2$$

Logo

$$E\left(\frac{S(S-1)}{n^2}\right) = \lambda^2.$$

$$h(S) = \frac{S(S-1)}{n^2}.$$

d. $X \sim N(\mu, 1)$.

O suporte

$$A = (-\infty, \infty)$$

não depende de μ.

$$f(x|\mu) = (2\pi)^{-1/2}\, exp\left(-\frac{1}{2}\,(x-\mu)^2\right)$$

$$f(x|\mu) = (2\pi)^{-1/2}\, exp\left(-\frac{1}{2}\,(x^2 - 2\mu x + \mu^2)\right)$$

$$f(x|\mu) = (2\pi)^{-1/2}\, exp\left(-\frac{x^2}{2} + \mu x - \frac{\mu^2}{2}\right)$$

$$\log(f(x|\mu)) = -\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{x^2}{2} + \mu x - \frac{\mu^2}{2}$$

$$\log(f(x|\mu)) = \mu x - \frac{\mu^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log(2\pi)$$

Fazendo

$$c(\mu) = \mu \; ; \; T(x) = x \;\; ; \;\; d(\mu) = -\frac{\mu^2}{2} \; ; \; b(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log(2\pi)$$

Logo pertence à família exponencial.

Note que $Y = T(X) = X$ e

$$c'(\mu) = 1 \; ; \; d'(\mu) = -\mu.$$

$$E(Y) = E(X) = -\frac{d'(\mu)}{c'(\mu)} = \mu.$$

Além disso

$$S = \sum_{i=1}^{n} T(X_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n).$$

é uma estatística suficiente e completa para μ.
Como

$$E(S) = n\mu,$$

temo que

$$\bar{X} = \frac{S}{n}$$

é o melhor estimador não viciado de variância mínima para μ.

e. $X \sim N(0, \sigma^2)$.

O espaço paramétrico é:

$$\Theta = (0, \infty).$$

O suporte

$$A = (-\infty, \infty)$$

não depende de σ^2.

$$f(x|\sigma^2) = (2\pi)^{-1/2} (\sigma^2)^{-1/2} \, exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\log(f(x|\sigma^2)) = -\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(\sigma^2) - \frac{x^2}{2\sigma^2}$$

$$\log(f(x|\sigma^2)) = -\frac{1}{2\sigma^2}\, x^2 - \frac{1}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2}\log(2\pi)$$

Fazendo

$$c(\sigma^2) = -\frac{1}{2\sigma^2} \; ; \; T(x) = x^2 \;\; ; \;\; d(\sigma^2) = -\frac{1}{2}\log(\sigma^2) \; ; \; b(x) = -\frac{1}{2}\log(2\pi)$$

Logo pertence à família exponencial.

Note que $Y = T(X) = X^2$ e

$$c'(\sigma^2) = \frac{1}{2\sigma^4} \; ; \; d'(\sigma^2) = -\frac{1}{2\sigma^2}.$$

$$E(Y) = E(X^2) = -\frac{d'(\sigma^2)}{c'(\sigma^2)} = \sigma^2.$$

Além disso

$$S = \sum_{i=1}^{n} T(X_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

é uma estatística suficiente e completa para σ^2.

f. $X \sim Gama(3, \theta)$.

$$f(x|\theta) = \frac{1}{2}\, \theta^3\, x^2 e^{-\theta x}\, I_A(x)\ A = (0, \infty);\ \Theta = (0, \infty).$$

O suporte não depende de θ

$$\log(f(x|\theta)) = \log(x^2/2) + 3\log(\theta) - \theta x$$

$$\log(f(x|\theta)) = -\theta x + 3\log(\theta) + \log(x^2/2)$$

com

$$c(\theta) = -\theta \quad , T(x) = x,\ d(\theta) = 3\log(\theta) \quad , b(x) = \log(x^2/2).$$

Note que:

$$c'(\theta) = -1 \quad e\ \ d'(\theta) = \frac{3}{\theta}.$$

Finalmente

$$E[T(X)] = E(X) = -\frac{\frac{3}{\theta}}{-1} = \frac{3}{\theta}.$$

Além disso

$$S = \sum_{i=1}^{n} T(X_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

é uma estatística suficiente e completa para θ.

g. $X \sim Beta(\theta, 1)$.

$$f(x|\theta) = \theta \; x^{\theta-1} \; I_A(x), \; A = (0,1), \Theta = (0, \infty).$$

O suporte $A = (0,1)$ não depende de θ.

$$\log(f(x|\theta)) = \log(\theta) + (\theta - 1) \; \log(x)$$

$$\log(f(x|\theta)) = \theta \; \log(x) + \log(\theta) - \log(x)$$

com

$$c(\theta) = \theta \quad , T(x) = \log(x), \; d(\theta) = \log(\theta) \quad , b(x) = -\log(x).$$

Note que:

$$c'(\theta) = 1 \quad e \;\; d'(\theta) = \frac{1}{\theta}.$$

Finalmente

$$E[T(X)] = E(\log(X)) = -\frac{1}{\theta}.$$

Além disso

$$S = \sum_{i=1}^{n} T(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \log(X_i)$$

é uma estatística suficiente e completa para θ.

h. $X \sim Gumbel(\alpha = \theta, \beta = 1)$.

$$f(x|\theta) = e^{-(x-\theta)} \, \exp\left(-e^{-(x-\theta)}\right) \, I_A(x), \; A = (-\infty, \infty), \;\; \Theta = (-\infty, \infty).$$

O suporte A não depende de θ.

$$f(x|\theta) = e^{-(x-\theta)} \, \exp\left(-e^{-(x-\theta)}\right)$$

$$f(x|\theta) = e^{-x} e^{\theta} \, \exp\left(-e^{\theta} \, e^{-x}\right)$$

$$\log(f(x|\theta)) = -x + \theta - e^{\theta} \, e^{-x}$$

$$\log(f(x|\theta)) = -e^{\theta} \, e^{-x} + \theta - x$$

om

$$c(\theta) = -e^{\theta} \quad , T(x) = e^{-x}, \; d(\theta) = \theta \;\; , b(x) = -x.$$

Note que:

$$c'(\theta) = -e^{\theta} \quad e \;\; d'(\theta) = 1.$$

Finalmente

$$E[T(X)] = E(e^{-X}) = -\frac{1}{-e^{\theta}} = e^{-\theta}.$$

Além disso

$$S = \sum_{i=1}^{n} T(X_i) = \sum_{i=1}^{n} e^{-X_i}$$

é uma estatística suficiente e completa para θ.

i. $X \sim Geom(p)$.
A função de probabilidade de X é dada por:

$$f(x|p) = p^(1-p)^x \; I_A(x), A = \{0, 1, 2, \ldots, \}, \Theta = [0, 1].$$

O suporte não depende de p.
Note que X é o número de fracassos que precedem o primeiro sucesso.

$$\mu = E(X) = \frac{1-p}{p} \quad e \quad \sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$

Note que se $X \sim Geom(p)$ a função geradora de probabilidade é dada por:

$$G_X(t) = \frac{p}{1-qt}, |t| < \frac{1}{q}.$$

Vamos provar este resultado:

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{x=0}^{\infty} t^x \; pq^x = p\sum_{x=0}^{\infty}(qt)^x = p\,\frac{1}{1-a} = \frac{p}{1-qt}.$$

Temos um PG infinita de razão $a = qt$. Para convergir temos

$$|a| < 1, \quad q|t| < 1, \quad |t| < \frac{1}{q}$$

A função geradora de momentos de X é dada por:

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = E\left[(e^t)^X\right] = G(e^t) = \frac{p}{1-qe^t},$$

Com

$$|e^t| = e^t < \frac{1}{q} \text{ ou } \quad t < -\log(t).$$

Vamos mostrar que X pertence à família exponencial:

$$\log(f(x|p)) = \log(p) + x\log(1-p)$$

Assim

$$c(p) = \log(1-p) \quad , T(x) = x, \;\; d(p) = \log(p) \;\; ; b(x) = 0$$

Logo pertence à família exponencial.

Note que $Y = T(X) = X$ e

$$c'(p) = -\frac{1}{1-p} = -\frac{1}{q} \;;\; d'(p) = \frac{1}{p}.$$

$$E(Y) = -\frac{d'(p)}{c'(p)} = -\frac{\frac{1}{(p)}}{-\frac{1}{(1-p)}} = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{p}.$$

$$c''(p) = \frac{1}{(1-p)^2} = -\frac{1}{q^2} \;;\; d''(p) = -\frac{1}{p^2}.$$

$$Var[T(X)] = V(X) = \frac{c''(p)\, d'(p) - d''(p)\, c'(p)}{(c'(p))^3}.$$

$$Var[T(X)] = \frac{num}{den}$$

$$den = -\frac{1}{q^3}.$$

$$num = -\frac{1}{q^2} \times \frac{1}{p} - (-\frac{1}{p^2}) \times (-\frac{1}{q})$$

$$num = \frac{1}{pq^2} - \frac{1}{p^2 q} = -\frac{1}{p^2 q^2}.$$

$$Var[T(X)] = VarX = \frac{num}{den} = \frac{q}{p^2}.$$

A função geradora de probabilidade de $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é dada por:

$$G_S(t) = E\left[t^{X_1+X_2+\ldots+X_n}\right] = E\left[t^{X_1}\, t^{X_2} \ldots t^{X_n}\right]$$

Como são independentes temos:

$$G_S(t) = E\left[\prod_{i=1}^{n} t^{X_i}\right] = \prod_{i=1}^{n} E[t^{X_i}]$$

$$G_S(t) = [G_X(t)]^n = \left[\frac{p}{1-qt}\right]^n, \quad |t| < \frac{1}{q},$$

que é a geradora de probabilidades da distribuição de Pascal ou Binomial negativa de parâmetros r e p.
Assim

$$S \sim Pascal(n, p)$$

Além disso

$$S = \sum_{i=1}^{n} T(X_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

é uma estatística suficiente e completa para p.

Encontre o estimador não viciado de variância mínima para $g(p) = \frac{1}{p}$.

Como

$$E(S) = n\,\frac{q}{p} = n\,\frac{1-p}{p}$$

temos:

$$E\left(\frac{S}{n}\right) = \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p} - 1$$

$$E\left(\frac{S}{n} + 1\right) = \frac{1}{p}.$$

$$h(S) = \frac{S+n}{n} = \bar{X} + 1.$$

Encontre o estimador não viciado de variância mínima para $g(p) = p$.
A função de probabilidade de S é dada por:

$$P(S=s) = \binom{n+s-1}{n-1} p^n\, q^s\, I_A(s), \quad A = \{0,1,2,\ldots\}.$$

Na distribuição de Pascal começando no zero S representa o número de fracassos que precedem a ocorrência do n-ésimo sucesso última observação sempre é sucesso assim das $n+s-1$ primeiras observações temos $(n-1)$ sucessos logo um estimador para p seria:

$$T = \frac{n-1}{n+S-1}$$

$$E(T) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{n-1}{n+s-1} \binom{n+s-1}{n-1} p^n\, q^s$$

Logo Note que:

$$\frac{n-1}{n+s-1} \binom{n+s-1}{n-1} = \frac{n-1}{n+s-1} \frac{(n+s-1)!}{(n-1)!s!} =$$

$$= \frac{(n+s-2)!}{(n-2)!s!} = \binom{n+s-2}{n-2}.$$

Logo,

$$E(T) = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{n+s-2}{n-2} p^n q^s = p \sum_{s=0}^{\infty} \binom{n-1+s-1}{n-1-1} p^{n-1} q^s = p \times 1 = p$$

Note que o somatório vale um pois temos uma Pascal de parâmetros $r = n-1$ e p.
Assim

$$h(S) = \frac{n-1}{n+S-1}$$

é o nosso estimador não viciado para p.
Isto parece mágica. Na prática procuramos um função de S tal que:

$$E\left[h(S)\right] = p.$$

Se $S \sim Pascal(r,p)$ temos:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \binom{r+s-1}{r-1} p^r q^s = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{r+s-1}{s} p^r q^s = 1$$

que pode ser colocada na forma:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \binom{r+s-1}{s} p^r q^s = \frac{1}{p^r} = \frac{1}{(1-q)^r}.$$

Sabemos que:

$$E\left[h(S)\right] = \sum_{s=0}^{\infty} h(s) \binom{n+s-1}{s} p^n q^s = p$$

Logo

$$E\left[h(S)\right] = \sum_{s=0}^{\infty} h(s) \binom{n+s-1}{s} q^s = \frac{p}{p^n} = \frac{1}{p^{n-1}}.$$

Note que

$$\frac{1}{p^{n-1}} = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{n-1+s-1}{s} q^s$$

Assim

$$\sum_{s=0}^{\infty} h(s) \binom{n+s-1}{s} q^s = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{n-1+s-1}{s} q^s.$$

Temos a igualdade de duas séries de potências logo:
Para todo s temos:

$$h(s) \binom{n+s-1}{s} = \binom{n-2+s}{s}$$

$$h(s) \frac{(n-s-1)!}{s!(n-1)!} = \frac{(n-s-2)!}{s!(n-2)!}$$

$$h(s) \frac{(n-s-1)(n-s-2)!}{s!(n-1)(n-2)!} = \frac{(n-s-2)!}{s!(n-2)!}$$

$$h(s) = \frac{n-1}{n-s-1}.$$

Finalmente temos:

$$h(S) = \frac{n-1}{n-S-1}.$$