1.11. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição da variável aleatória X com f.d.p. dada por

$$f(x|\theta) = \frac{2x}{\theta^2}\, I_A(x), A = (0, \theta), \theta > 0.$$

i. Especifique o espaço paramétrico e o suporte associado à distribuição de X.

ii. Verifique se

$$\hat{\theta}_1 = \bar{X} \quad e \quad \hat{\theta}_2 = Y_n = max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

são estimadores não viciados para θ.

iii. Encontre e compare os EQM dos dois estimadores. Faça um gráfico dos EQM como função de θ.

Solução:

inicialmente vamos identificar a lei de X.

$$X \sim Triangular(a, b, c),$$

com $a = 0, b = \theta, c = \theta$.

$$E(X) = \frac{a+b+c}{3} = \frac{2\theta}{3}.$$

$$Var(X) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18} = \frac{\theta^2}{18}.$$

Note que:

$$E(X^r) = \frac{2}{\theta^2}\int_0^\theta x^{r+1}\, dx = \frac{2}{\theta^2}\, \frac{x^{r+2}}{r+2}\Big|_0^\theta = \frac{2\,\theta^r}{r+2}.$$

Assim

$$\mu = \frac{2\,\theta}{1+2} = \frac{2\theta}{3}.$$

$$E(X^2) = \frac{2\,\theta^2}{2+2} = \frac{\theta^2}{2}.$$

A variância de X é dada por:

$$\sigma^2 = E(X^2) - E^2(X) = \frac{\theta^2}{2} - \frac{4\theta^2}{9} = \frac{\theta^2}{18}.$$

Agora vamos responder ao item **i**:

Temos que o suporte $A = (0, \theta)$ depende de θ.

O espaço paramétrico é dado por:

$$\Theta = (0, \infty).$$

Agora vamos responder ao item **ii**:

Sabemos que

$$E(\bar{X}) = \mu = \frac{2\theta}{3} \neq \theta$$

que é viciado para θ.

Vamos achar a acumulada de X.

Para $x \leq 0$ temos $F(x) = 0$. Para $x \geq \theta$ temos $F(x) = 1$. Para $0 < x < \theta$ temos:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\ dt + \int_{0}^{x} \frac{2t}{\theta^2}\ dt = \frac{t^2}{\theta^2}\Big|_0^x = \frac{x^2}{\theta^2}.$$

A f.d.p. de $Y_n = max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ é dada por:

$$g(y) = n[F(y)]^{n-1}\ f(y).$$

$$g(y) = n[\frac{y^2}{\theta^2}]^{n-1}\frac{2y}{\theta^2}.$$

$$g(y) = 2n\frac{y^{2n-1}}{\theta^{2n}}\ I_A(y),\ A = (0, \theta).$$

A esperança de Y_n é dada por:

$$E(Y_n) = \frac{2n}{\theta^{2n}} \int_0^\theta y^{2n}\ dy = \frac{2n}{\theta^{2n}}\ \frac{y^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^\theta = \frac{2n}{2n+1}\ \theta \neq \theta$$

que é viciado para θ.

Os dois estimadores propostos são viciados.

Agora vamos responder ao item **iii**:

O viés do primeiro estimador é dado por:

$$B(\bar{X}) = E(\bar{X}) - \theta = \frac{2\theta}{3} - \theta = -\frac{\theta}{3}.$$

O quadrado do viés é dado por:

$$B^2(\bar{X}) = \frac{\theta^2}{9}.$$

A variância de $\bar{X}$ é dada por:

$$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\theta^2}{18n}.$$

O erro quadrático médio de $\bar{X}$ é dado por:

$$EQM[\bar{X}] = Var(\bar{X}) + B^2(\bar{X}) = \frac{\theta^2}{18n} + \frac{\theta^2}{9} = \frac{(2n+1)\theta^2}{18n}.$$

O viés do segundo estimador é dado por:

$$B(Y_n) = E(Y_n) - \theta = \frac{2n\theta}{2n+1} - \theta = -\frac{\theta}{2n+1}.$$

O quadrado do viés é dado por:

$$B^2(Y_n) = \frac{\theta^2}{(2n+1)^2}.$$

A esperança de Y_n^2 é dada por:

$$E(Y_n^2) = \frac{2n}{\theta^{2n}} \int_0^\theta y^{2n+1}\, dy = \frac{2n}{\theta^{2n}} \left. \frac{y^{2n+2}}{2n+2} \right|_0^\theta = \frac{2n}{2n+2}\, \theta^2 = \frac{n}{n+1}\, \theta^2$$

A variância de Y_n é dada por:

$$Var(Y_n) = E(Y_n^2) - E^2(Y_n) = \frac{n}{n+1}\, \theta^2 - \frac{4n^2\theta^2}{(2n+1)^2}$$

$$Var(Y_n) = \frac{n(2n+1)^2 - 4n^2(n+1)}{(n+1)(2n+1)^2}\, \theta^2.$$

Mas

$$n(2n+1)^2 - 4n^2(n+1) = 4n^3 + 4n^2 + n - 4n^3 - 4n^2 = n.$$

$$Var(Y_n) = \frac{n}{(n+1)(2n+1)^2}\, \theta^2.$$

O erro quadrático médio de Y_n é dado por:

$$EQM[Y_n] = Var(Y_n) + B^2(Y_n) = \frac{n}{(n+1)(2n+1)^2}\, \theta^2 + \frac{\theta^2}{(2n+1)^2} = \frac{\theta^2}{(n+1)(2n+1)}.$$

Note que:

$$EQM[\bar{X}] - EQM[Y_n] = \frac{(2n+1)\theta^2}{18n} - \frac{\theta^2}{(n+1)(2n+1)}.$$

Para $n = 1$ temos que:

$$EQM[\bar{X}] - EQM[Y_n] = \frac{1}{6}\, \theta^2 - \frac{1}{6}\, \theta^2 = 0.$$

Para $n \geq 2$ temos que:

$$EQM[\bar{X}] - EQM[Y_n] = \theta^2 \left[\frac{(2n+1)}{18n} - \frac{1}{(n+1)(2n+1)}. \right]$$

Vamos provar que

$$(n+1)(2n+1)^2 - 18n > 0$$

$$num = (n+1)(2n+1)^2 - 18n = (n+1)(4n^2+4n+1) - 18n =$$

$$num = 4n^3 + 4n^2 + n + 4n + 1 - 18n = 4n^3 + 8n^2 - 13n + 1$$

$$num = (n-1)(4n^2 + 12n - 1) > 0, \; n \geq 2.$$

Assim

$$EQM[\bar{X}] - EQM[Y_n] > 0$$

Y_n é melhor estimador do que $\bar{X}$.

Vamos fazer o gráfico para $n = 5$.

$$EQM[\bar{X}] = \frac{11}{90}\,\theta^2 \quad e \quad EQM[Y_n] = \frac{1}{66}\;\theta^2.$$

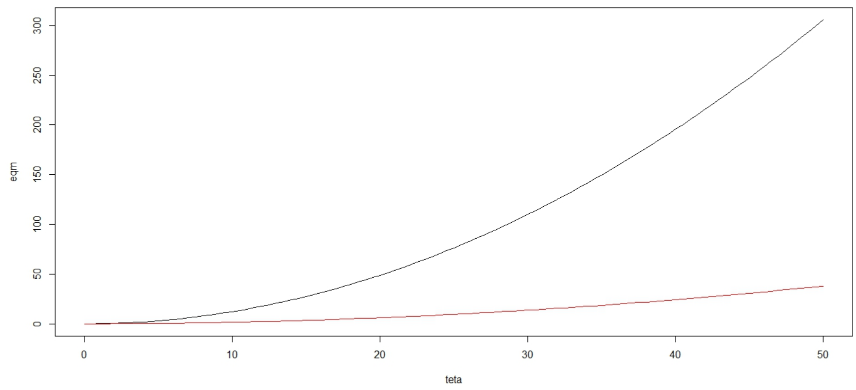

Figura 1:

Como a parábola de vermelho representa o erro quadrático médio de Y_n fica evidente a sua superioridade em relação à média amostral.