2.2. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim Binomial(2, \theta)$

(i) Encontre o limite inferior da variância dos estimadores não viciados de θ.

(ii) Encontre uma estatística suficiente para θ.

(iii) Obtenha um estimador não viciado para θ que seja função da estatística suficiente.

(iv) Verifique se o estimador é eficiente.

Solução: A função de probabilidade de X é dada por:

$$f(x|\theta) = \binom{2}{x} \theta^x (1-\theta)^{2-x} \;\; I_A(x), \;\; A = \{0, 1, 2\}.$$

Note que:

$$\mu = E(X) = 2\,\theta \quad\quad e \quad\quad V(X) = \sigma^2 = 2\,\theta\,(1-\theta).$$

Para achar o limite inferior de **Cramer-Rao** vamos inicialmente
calcular a função escore:
O suporte $A = \{0, 1, 2\}$ não depende de θ.

$$f(X|\theta) = \binom{2}{X} \theta^X (1-\theta)^{2-X}.$$

$$\log\left(f(X|\theta)\right) = \log\left(\binom{2}{X}\right) + X\;\log(\theta) + (2-X)\;\log((1-\theta)).$$

$$V = \frac{\partial \log f(X;\theta)}{\partial\theta} = \frac{X}{\theta} - \frac{2-X}{1-\theta} = \frac{X-2\theta}{\theta(1-\theta)}.$$

A informação de Fisher é dada por:

$$I_F(\theta) = Var(V) = Var\left(\frac{X-2\theta}{\theta(1-\theta)}\right) = \frac{1}{(\theta(1-\theta))^2}\,V(X) = \frac{1}{(\theta(1-\theta))^2}\,2\,\theta\,(1-\theta)$$

$$I_F(\theta) = \frac{2}{\theta\,(1-\theta)}$$

Seja T um estimador não viciado de θ
Sabemos que:

$$Var(T) \geq \frac{1}{n\,I_F(\theta)} = LI(\theta).$$

Assim

$$Var(T) \geq \frac{\theta\,(1-\theta)}{2n} = LI(\theta).$$

Vamos responder ao item **ii** usando o critério da fatoração de Neyman:
A distribuição conjunta da amostra é dada por:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n|\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)=\prod_{i=1}^{n} \binom{2}{x_i}\theta^{x_i}(1-\theta)^{2-x_i}.$$

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n|\theta)=\theta^{s}\,(1-\theta)^{2n-s}\,\prod_{i=1}^{n}\binom{2}{x_i},$$

em que $s=\sum_{i=1}^{n} x_i$.

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n|\theta)=\left[\frac{\theta}{1-\theta}\right]^{s}(1-\theta)^{2n}\,\prod_{i=1}^{n}\binom{2}{x_i}=g(s,\theta)\;h(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Assim pelo critério da fatoração temos que:

$$S=\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Binomial(2n,\theta)$$

é uma estatística suficiente para θ.

Note que

$$E(S)=2n\;\theta.$$

$$E\left(\frac{S}{2n}\right)=\theta.$$

Assim

$$T=\frac{S}{2n}=\frac{\bar{X}}{2}$$

é o nosso estimador procurado.

A variância de T é dada por:

$$Var(T)=\frac{1}{4n^2}\,Var(S)=\frac{1}{4n^2}\,2n\,\theta\,(1-\theta)=\frac{\theta(1-\theta)}{2n}=LICR.$$

Assim T é eficiente.

Retire uma amostra de tamanho $n=100$ de $X\sim Binomial(2,\theta=0,5)$

e estime θ e seu erro padrão.

```
  set.seed(32)
>
> A=rbinom(100,2,1/2);A
[1] 1 1 2 1 0 2 2 2 1 1 1 1 1 2 1 1 2 1 1 2 1 2 1 0 1 2 1 1 1 1 1 2 2 2 1 2 1
[38] 0 2 2 1 2 0 1 2 0 1 2 2 0 2 2 1 1 0 0 2 2 1 2 2 0 1 0 0 2 2 0 2 1 2 1 1 0
[75] 0 0 1 0 1 1 1 1 1 0 0 1 1 2 0 2 0 1 0 1 1 0 1 1 0 0
> table(A)
A
0  1  2
24 45 31
```

```
>
> s=sum(A);s
[1] 107
> xb=mean(A);xb
[1] 1.07
>
>
>
> ###A estimativa de teta usando o estimador T é:
>
> t=xb/2;t  ####estimativa de teta!!!!
[1] 0.535
>
> ##Vamos estimar a variância de T
>
>
> ##
> n=100
> VT_est=t*(1-t)/(2*n);VT_est
[1] 0.001243875
>
> ep_est=sqrt(VT_est);ep_est
[1] 0.03526861
>
>
>
```