Integração por substituição trigonométrica

As integrais envolvendo expressões do tipo $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ ou $\sqrt{x^2 - a^2}$, onde $a > 0$, em geral podem ser resolvidas por uma substituição trigonométrica.

1º Caso:

Se o integrando contém uma expressão da forma $\sqrt{a^2 - x^2}$, fazemos a substituição $x = a\, sen\, \theta$, com $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Assim $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 sen^2\theta} = \sqrt{a^2(1 - sen^2\theta)} = \sqrt{a^2 cos^2\theta} = a \cos\theta$, pois $a > 0$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Exemplo:

Calcule $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2} dx$

Fazendo $x = 4\ sen\ \theta$, temos d$x = 4\ cos\ \theta\ d\theta$. Então $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2} dx =$

$$\int \frac{\sqrt{16-16\ sen^2\theta}}{16\ sen^2\theta} 4\ cos\ \theta\ d\theta = \int \frac{\sqrt{16(1-\ sen^2\theta)}}{4\ sen^2\theta}\ cos\ \theta\ d\theta =$$

$$\int \frac{\sqrt{16\ cos^2\theta}}{4\ sen^2\theta}\ cos\ \theta\ d\theta = \int \frac{4\ cos\ \theta}{4\ sen^2\theta}\ cos\ \theta\ d\theta = \int \frac{cos^2\ \theta}{sen^2\theta}\ d\theta =$$

$$\int cotg^2\ \theta\ \ d\theta = \int (cossec^2\theta - 1) d\theta\ = -cotg\theta - \theta + c$$

$$x = 4\, sen\, \theta \Rightarrow \frac{x}{4} = sen\, \theta \Rightarrow cos\, \theta = \sqrt{1 - sen^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} =$$

$$\sqrt{\frac{16-x^2}{16}} = \frac{\sqrt{16-x^2}}{4} \Rightarrow cotg\, x = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}$$

$$\frac{x}{4} = sen\, \theta \ \Rightarrow \theta = arcsen\frac{x}{4}.$$

Logo $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{16-x^2}}{x} - arcsen\frac{x}{4} + c$

2º Caso:

Se o integrando contém uma expressão da forma $\sqrt{a^2 + x^2}$, fazemos a substituição $x = a\, tg\, \theta$, com $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Assim $\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 tg^2\theta} = \sqrt{a^2(1 + tg^2\theta)} = \sqrt{a^2 sec^2\theta} = a \sec\theta$, pois $a > 0$ e $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Exemplo:

Calcule $\int \sqrt{4 + x^2} dx$

Fazendo $x = 2\, tg\, \theta$, onde $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, se $x \geq 0$ e $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$, se $x < 0$, temos d$x = 2sec^2\theta\, d\theta$. Então

$$\int \sqrt{4+x^2}dx = 2\int \sqrt{4+4tg^2\theta}\ sec^2\theta\ d\theta =$$

$$4\int \sqrt{1+tg^2\theta}\ sec^2\theta\ d\theta = 4\int \sqrt{sec^2\theta}\ sec^2\theta\ d\theta = 4\int sec^3\theta\ d\theta =$$

$$4\left(\frac{1}{2}\sec\theta\ tg\theta + \frac{1}{2}ln|sec\theta + tg\theta|\right) + c =$$

$$2\sec\theta\ tg\theta + 2ln|sec\theta + tg\theta| + c$$

Temos $sec^2\theta = 1 + tg^2\theta = 1 + \frac{x^2}{4} = \frac{4+x^2}{4}$ e então $\sec\theta = \sqrt{\frac{4+x^2}{4}} =$

$\frac{\sqrt{4+x^2}}{2}$ (pois $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$)

Portanto,

$$\int \sqrt{4+x^2}dx = \frac{2\sqrt{4+x^2}}{2}.\frac{x}{2} + 2ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + c =$$

$$\frac{x\sqrt{4+x^2}}{2} + 2ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + c =$$

$$\frac{x\sqrt{4+x^2}}{2} + 2ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}+x}{2}\right| + c =$$

$$\frac{x\sqrt{4+x^2}}{2} + 2ln\frac{\left|\sqrt{4+x^2}+x\right|}{2} + c =$$

$$\frac{x\sqrt{4+x^2}}{2} + 2ln\left|\sqrt{4+x^2}+x\right| - 2ln2 + c =$$

$$\frac{x\sqrt{4+x^2}}{2} + 2ln\left|\sqrt{4+x^2}+x\right| + k$$

3º Caso:

Se o integrando contém uma expressão da forma $\sqrt{x^2 - a^2}$, com $a > 0$, fazemos a substituição $x = a\, sec\, \theta$, com $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$.

Assim $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 sec^2\theta - a^2} = \sqrt{a^2(sec^2\theta - 1)} = \sqrt{a^2 tg^2\theta} = a \operatorname{tg} \theta$, pois $a > 0$ e $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$

Exemplo:

Calcule $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$

Fazendo $x = \sec\theta$ temos $dx = \sec\theta\, tg\, \theta\, d\theta$,

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sec\theta\ tg\ \theta d\theta}{sec^3\theta\sqrt{sec^2\theta-1}} = \int \frac{\sec\theta\ tg\ \theta d\theta}{sec^3\theta\sqrt{tg^2\theta}} =$$

$$\int \frac{\sec\theta\ tg\ \theta d\theta}{sec^3\theta\ tg\ \theta} = \int \frac{d\theta}{sec^2\theta} = \int cos^2\theta d\theta =$$

$$\int \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2}\int(1+\cos 2\theta)d\theta = \frac{1}{2}\left(\int d\theta + \int \cos 2\theta\ d\theta\right) =$$

$$\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4} sen\ 2\theta + c.$$

Como $x = \sec\theta$, temos $\theta = \operatorname{arcsec} x$ e

$$sen\ 2\theta = 2\ sen\ \theta \cos\theta = 2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\ \frac{1}{x} = 2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}\ \frac{1}{x} = \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x^2}$$

Portanto, $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}\operatorname{arcsec} x + \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x^2} + c$