Q06. Seja $X_1, X_2, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de uma variável aleatória X com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x|\theta) = I_{(\theta-1/2, \theta+1/2)}\ \ (x).$$

Sejam $Y_1 = min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ e $Y_n = max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Seja (Y_1, Y_n) um intervalo de confiança para θ .Calcule seu coeficiente de confiança. Mostre que o resultado vale para qualquer distribuição simétrica em torno de θ. Seja

Solução: Temos que X tem uma distribuição uniforme com:

$$a = \theta - 1/2 \quad b = \theta + 1/2 \quad b - a = 1.$$

A média de X vale:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} = \theta.$$

Note que a acumulada de X no suporte é dada por:

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a} = \frac{x - \theta + 1/2}{1} = x - \theta + 1/2.$$

θ é a mediana pois

$$F(\theta) = \theta - \theta + 1/2 = 1/2.$$

A confiança do intervalo (Y_1, Y_n) é

$$P(Y_1 \leq \theta \leq Y_n) = \gamma.$$

Sabemos que

$$P(\theta < Y_1) + P(Y_1 \leq \theta \leq Y_n) + P(\theta > Y_n) = 1.$$

$$P(\theta < Y_1) + \gamma + P(\theta > Y_n) = 1.$$

$$\gamma = 1 - P(\theta > Y_n) - P(\theta < Y_1) 1 - p_1 - p_2.$$

Note que:

$$p_1 = P(\theta > Y_n) = P(Y_n < \theta) = P(max(X_1, X_2, \dots, X_n) < \theta)$$

$$p_1 = P(X_1 < \theta, X_2 < \theta, \dots, X_n < \theta) = P(X_1 < \theta)P(X_2 < \theta)\dots P(X_n < \theta).$$

$$p_1 = [P(X < \theta)]^n = \frac{1}{2^n}.$$

$$p_2 = P(\theta < Y_1) = P(Y_1 > \theta) = P(min(X_1, X_2, \dots, X_n) > \theta)$$

$$p_2 = P(X_1 > \theta, X_2 > \theta, \ldots, X_n > \theta) = P(X_1 > \theta)P(X_2 > \theta)\ldots P(X_n > \theta).$$

$$p_2 = [P(X > \theta)]^n = \frac{1}{2^n}$$

Logo

$$\gamma = 1 - p_1 - p_2 = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{2}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Vamos mostrar o nível de confiança para θ para $n = 2, 3, \ldots, 11$.

```
> n=2:11;n
[1]  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11
> gama=1-1/2^(n-1)
> tab=cbind(n,gama);round(tab,4)
n   gama
[1,]  2 0.5000
[2,]  3 0.7500
[3,]  4 0.8750
[4,]  5 0.9375
[5,]  6 0.9688
[6,]  7 0.9844
[7,]  8 0.9922
[8,]  9 0.9961
[9,] 10 0.9980
[10,] 11 0.9990
>
```

Seja X uma variável aleatória contínua simétrica em torno de θ.

Assim θ é a mediana de X e

$$P(X < \theta) = P(X > \theta) = 0,5.$$