Q07. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma variável aleatória X com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x|\theta) = \theta\, e^{-\theta x} \quad I_{(0,\infty)}\ (x).$$

Encontre intervalos de confiança para $E(X) = \frac{1}{\theta}$ e $V(X) = \frac{1}{\theta^2}$, com coeficiente de confiança $\gamma = 1 - \alpha$.

Solução: Sabemos que

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gama(n, \theta).$$

e

$$V = 2\theta S \sim \chi^2(2n).$$

Considere

$$P(V \leq q_1) = \frac{\alpha}{2} \quad e \quad P(V \geq q_2) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Logo

$$P\left(q_1 \leq V \leq q_2\right) = 1 - \alpha.$$

$$P\left(q_1 \leq 2\theta S \leq q_2\right) = 1 - \alpha.$$

$$P\left(\frac{q_1}{2S} \leq \theta \leq \frac{q_2}{2S}\right) = 1 - \alpha.$$

Assim

$$P\left(\frac{2S}{q_2} \leq \frac{1}{\theta} \leq \frac{2S}{q_1}\right) = 1 - \alpha.$$

$$P\left(\frac{2S}{q_2} \leq E(X) \leq \frac{2S}{q_1}\right) = 1 - \alpha. \tag{1}$$

Temos o nosso intervalo procurado para $E(X)$.

Elevando **(1)** ao quadrado:

$$P\left(\frac{4S^2}{q_2^2} \leq \frac{1}{\theta^2} \leq \frac{4S^2}{q_1^2}\right) = 1 - \alpha. \tag{2}$$

Temos o nosso intervalo procurado para $V(X)$.

Foi gerada uma amostra de $X \sim \exp(\theta = 2)$.

Vamos construir um intervalo de confiança de 95% para $E(X)$ e $V(X)$.

```
>
> set.seed(32)
>
> X=rexp(15,2);X
[1] 0.005840523 0.094808387 0.308747133 0.228819726 0.801097443 0.261156262
[7] 0.173441774 0.620824681 0.158002483 0.489312787 0.112075020 0.272636139
[13] 0.378998001 0.248802135 0.299449358
>
> S=sum(X);S
[1] 4.454012
> n=15
>
> k=2*n;k
[1] 30
>
> alfa=0.05
>
> q_1=qchisq(alfa/2,k);q_1;round(q_1,3)
[1] 16.79077
[1] 16.791
>
> q_2=qchisq(1-alfa/2,k);q_2;round(q_2,3)
[1] 46.97924
[1] 46.979
>
> li=2*S/q_2;li
[1] 0.1896162
>
> ls=2*S/q_1;ls
[1] 0.5305309
>
> IC95EX=c(li,ls);round(IC95EX,2)
[1] 0.19 0.53
>
> EX=1/2;EX
[1] 0.5
>
> IC95VX=c(li^2,ls^2);round(IC95VX,2)
[1] 0.04 0.28
>
>
>
> VX=1/4;VX
[1] 0.25
>
>
```