Sequências e Séries

$\{a_n\}$ sequência. Ou $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$

a_n <u>converge</u> se $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n$. Caso contrário, dizemos que a_n é <u>divergente</u>.

<u>Obs:</u> Vale as propriedades de limite no infinito para sequências $\{a_n\}$.

<u>Séries</u>: "Somas infinitas"

Dada a sequência $\{a_n\}$, podemos definir a soma

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$, como segue:

$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
$\vdots$
$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

A sequência $\{S_n\}$ é a série infinita: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Se o limite $\lim_{n\to+\infty} S_n$, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

Caso contrário dizemos que série é divergente.

<u>Teste de divergência</u>:

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for convergente $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

<u>Conclusão</u>: Se $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

Obs. Podemos ter $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, mas $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergente.
Exemplo é a série harmônica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

Série geométrica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n + \dots$$

Converge se $|r|<1$ p/ $S = \frac{a}{1-r}$ e diverge se $|r| \geq 1$.

p- Série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{converge se } p>1 \\ \text{diverge se } p \leq 1 \end{cases}$$

Convergência X Divergência

1) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge $\Rightarrow \sum (a_n+b_n)$ diverge!

2) Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ for divergente, então $\sum (a_n+b_n)$ pode ou não ser convergente.

Teste da comparação

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ série de termos positivo (S.T.P)

i) Se $\sum b_n$ é S.T.P e convergente,

$a_n \leq b_n$, $\forall n$ inteiro positivo $\Rightarrow \sum a_n$ será convergente.

ii) Se $\sum c_n$ é S.T.P e divergente,

$c_n \geq b_n$, $\forall n$ inteiro positivo $\Rightarrow \sum c_n$ é divergente.

$4+12x^2$

Teste da comparação por limite

$\sum a_n$ e $\sum b_n$ S.T.P

i) Se $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0 \Rightarrow \sum a_n$ e $\sum b_n$ ambas converge ou diverge

ii) Se $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e se $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.

iii) Se $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ e se $\sum b_n$ diverge $\Rightarrow \sum a_n$ diverge.

Série Alternada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

Teste: Se $a_n > 0$ e $a_{n+1} < a_n$ para todo n inteiro positivo e $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ então a série alternada converge.