CC0288 - Inferência Estatística I

Primeira Verificação de Aprendizagem - 30/09/2022.

Prof. Maurício

1. Seja X uma variável aleatória com a seguinte f.d.p.:

$$f(x|\theta) = \frac{\theta^4}{6}\, x^3 e^{-\theta x}\; x > 0,\; \theta > 0.$$

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de X.

a. Identifique a variável aleatória especificando seu suporte, espaço paramétrico, sua média e variância.

Solução:
Note que o espaço paramétrico é $\Theta = (0, \infty)$ e o suporte $A = (0, \infty)$.
Logo,

$$S \sim Gama(4, \theta).$$

$$\mu = \frac{4}{\theta} \quad e \quad \sigma^2 = \frac{4}{\theta^2}.$$

b. Mostre que que ela pertence à família exponencial.

Solução: O suporte A naão depende de θ e

$$log\,(f(x|\theta)) = 4\ \log(\theta) - \log(6) + 3\ \log(x) - \theta\ x$$

$$c(\theta) = -\theta\ ; T(x) = x\ ;\ d(\theta) = 4\ log(\theta)\ \ ;\ h(x) = 3\ \log(x) - log(6).$$

Note que:

$$c'(\theta) = -1\ ; \quad d'(\theta) = \frac{4}{\theta}$$

c. Qual a função escore e a informação de Fisher?

Solução:

$$\log(f(X;\theta)) = 4\ \log(\theta) - \log(6) + 3\ \log(X) - \theta\ X.$$

Derivando em relação a θ temos:

$$V = \frac{\partial \log f(X;\theta)}{\partial \theta} = \frac{4}{\theta} - X$$

é a função escore.

$$I_F(\theta) = Var\left(\frac{4}{\theta} - X\right) = Var(X) = \frac{4}{\theta^2}.$$

d. Encontre uma estatística suficiente e completa, S,para θ . Qual a distribuição amostral?

Solução: Temos família exponencial assim

$$S = \sum_{i=1}^{n} t(X_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

é uma estatística suficiente e completa para θ.
A f.g.m. de X é dada por:

$$M(t) = \left[\frac{\theta}{\theta - t}\right]^4, \quad t < \theta.$$

A f.g.m. de S é dada por:

$$M_S(t) = M(t)^n = \left[\frac{\theta}{\theta - t}\right]^{4n}, \quad t < \theta.$$

$$S \sim Gama(4n, \theta).$$

e. Seja T um estimador não viciado de $g(\theta) = \frac{4}{\theta}$. Ache um limite inferior para a variância de T?

Solução:
A derivada de $g(\theta)$ é dada por:

$$g'(\theta) = -\frac{4}{\theta^2}.$$

Sabemos que:

$$LICR = \frac{(g'(\theta))^2}{n\, I_F(\theta)} = \frac{16/\theta^4}{n\; 4/\theta^2} = \frac{4}{n\; \theta^2}$$

f. Existe alguma função de θ para a qual existe um estimador não viciado cuja variância coincida com o limite inferior de Cramer-Rao?

Solução:
Estamos na família exponencial asim

$$g(\theta) = -\frac{d'(\theta)}{c'(\theta)} = \frac{4}{\theta}.$$

g. Encontre a distribuição conjunta da amostra e utilize-a para encontrar uma estatística suficiente pata θ.

Solução:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^4}{6}\, x_i^3 e^{-\theta x_i} = \frac{\theta^{4n}}{6^n}\left[\prod_{i=1}^{n} x_i\right]^3 e^{-\theta s},$$

$$s = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\theta) = \theta^{4n} \times e^{-\theta s} \times \left[\prod_{i=1}^{n} x_i\right]^3 \frac{1}{6} = g(s,\theta) \times h(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Assim pelo critério da fatoração

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

é uma estatística suficiente para θ

h. Ache o melhor estimador não viciado para $g(\theta) = \frac{1}{\theta}$ baseado em S. Ele é eficiente?

Solução:
Temos que

$$E(S) = \frac{4n}{\theta} = n\,\frac{4}{\theta}$$

$$E(S/n) = E(\bar{X}/4) = \frac{1}{\theta}.$$

Assim $T = \frac{\bar{X}}{4}$ é o nosso melhor estimador.
Além disso

$$Var(\bar{X}/4) = \frac{1}{16}\frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{16}\frac{4}{n\theta^2} = \frac{1}{4\,n\theta^2}.$$

Assim $\bar{X}$ é eficiente!!!!
Seja T_1 um estimador não viciado para $g(\theta) = \frac{1}{\theta}$

$$Var(T_1) \geq \frac{(g'(\theta))^2}{n\,I_F(\theta)} = \frac{1/\theta^4}{n\,4\,\theta^2} = \frac{1}{4\,n\theta^2}.$$

Como

$$Var(T_1) = var(T)$$

temos que ele é eficiente.

i. Qual o estimador pelo método dos momentos para θ?

Solução:

$$E(X) = \bar{X}$$

$$\frac{4}{\theta} = \bar{X}$$

$$\widehat{\theta}_{MM} = \frac{4}{\bar{X}}.$$

j. Qual o estimador pelo método da máxima verossimilhança para θ? **Solução:**

$$L(\theta) = \theta^{4n} \times e^{-\theta s} \times \left[\prod_{i=1}^{n} x_i\right]^3 \frac{1}{6}$$

$$l(\theta) = \log(L(\theta)) = 4n\log(\theta) + 3\sum_{i=1}^{n} \log(x_i) - \theta\ s$$

$$l^{'}(\theta) = \frac{4n}{\theta} - s$$

$$l^{''}(\theta) = -\frac{4n}{\theta}^2 < 0$$

De $l^{'}(\theta) = 0$ temos

$$\widehat{\theta}_{MV} = \frac{4}{\bar{X}}.$$

i. Qual o estimador pelo método dos mínimos quadrados para θ?

Solução:
Sabemos que $E(X) = \frac{4}{\theta}$

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^{n}(X_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - 4/\theta)^2$$

Derivando em relação a θ temos:

$$S^{'}(\theta) = 2\sum_{i=1}^{n}(X_i - 4/\theta)\ \frac{-4}{\theta^2} = -\frac{8}{\theta^2}[\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{4n}{\theta}] = 0$$

Assim

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{4n}{\theta}$$

Dividindo por n temos:

$$\bar{X} = \frac{4}{\theta}$$

$$\widehat{\theta}_{MQ} = \frac{4}{\bar{X}}.$$

Os três métodos fornecem o mesmo estimador.