23. Estamos desconfiados de que a média das receitas municipais per capita das cidades pequenas (0 - 20.000 habitantes) é maior do que a das receitas do estado, que é de 1.229 unidades. Para comprovar ou não essa hipótese, sorteamos dez cidades pequenas, e obtivemos os seguintes resultados:

1.230; 582; 576; 2.093; 2.621; 1.045; 1.439; 717; 1.838; 1.359.

Obs.: Para facilitar os cálculos, informamos que a soma das observações é 13.500, e a soma dos quadrados das observações é 22.335.650 ($13.500^2 = l82.250.000$).

Para ajudar veja a saída:

```
> X=c(1230, 582, 576, 2093,2621,1045,1439, 717, 1838, 1359)
> sort(X)
[1]  576  582  717 1045 1230 1359 1439 1838 2093 2621
> n=length(X);n
[1] 10
> SX=sum(X);SX
[1] 13500
> SX^2
[1] 182250000
> SX2=sum(X^2);SX2
[1] 22335650
> Xb=mean(X);SX/n;Xb
[1] 1350
[1] 1350
> S2=(SX2-SX^2/n)/(n-1);S2
[1] 456738.9
> s=sqrt(S2);s
[1] 675.8246
> var(X);sd(X)
[1] 456738.9
[1] 675.8246
>
```

(a) Mostre que o teste de hipótese usado, com $\alpha = 0,05$, levará à aceitação de que a média das cidades pequenas é igual à do estado.

(b) Você não acha estranha essa conclusão quando observa que a média da amostra obtida é bem maior do que a média do estado? Como você explicaria isso?

Solução:

Seja X a receita municipal per capita das cidades pequenas.

$$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right).$$

Seja $\mu_0 = 1229$ o rendimento médio per capta do estado:

$$H_0 : \mu = 1229 \quad vs \quad H_1 : \mu > 1229.$$

Uma amostra de tamanho $n = 10$ é retirada e forneceu $\bar{x} = 1350$ e $s = 675,8246$.

Vamos usar a seguinte estatística:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1) = t(9).$$

O nível descritivo do teste é dado por:

$$\hat{\alpha} = P(\bar{X} \geq 1350) = P\left(t(9) \geq \frac{1350 - 1229}{675,8246/\sqrt{10}}\right)$$

$$\hat{\alpha} = P\left(t(9) \geq 0,566\right)$$

Como

$$0,543 < 0,566 < 0,703$$

Olhando a tabela V temos

$$P(t(9) > 0,703) = 0,25,$$

e

$$P(t(9) > 0,543) = 0,30,$$

e

$$P(t(9) > 0,703) < P(t(9) > 0,566) < P(t(9) > 0,543)$$

$$0,25 < \hat{\alpha} < 0,30.$$

O valor exato é:

$$\hat{\alpha} = 0,2916.$$

```
t_obs=(1350-1229)/(675.8246/sqrt(10));t_obs
[1] 0.5661759
> nd=1-pt(t_obs,n-1);nd;round(nd,4)
[1] 0.2925565
[1] 0.2926
> alfa=0.05
> nd>alfa
[1] TRUE
> t_tab=qt(1-alfa,n-1);t_tab
[1] 1.833113
> t_tab >t_obs ###Não rejeitar H_0!!!!!
[1] TRUE
```

```
> t.test(X,mu=1229,alternative="greater" )

One Sample t-test

data:  X
t = 0.56618, df = 9, p-value = 0.2926
alternative hypothesis: true mean is greater than 1229
95 percent confidence interval:
958.2372      Inf
sample estimates:
mean of x
1350
```

Vamos responder ao item **b**:

A diferença entre $\bar{x} = 1350$ e $\mu_0 = 1229$ é $1350 - 1229 = 121$ u.m.

O coeficiente de variação na nossa amostra é :

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{675,8246}{1350} = 0,50$$

que é bastante alto.

Note ainda que a amplitude amostral é dada por:

$$A = Y_{10} - Y_1 = 2621 - 576 = 2045$$

quase o dobro da média.

O erro padrão da média é dado por:

$$epm_est = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{675,8246}{\sqrt{10}} = 213,7145.$$

O coeficiente de precisão é dado por:

$$CP = \frac{epm_{est}}{\bar{x}} = \frac{213,7145}{1350} = 0,1583.$$

Vamos construir um intervalo de confiança para μ com confiança de 95%

Temos que

$$t_{tab} = 2,131.$$

O erro de estimação é dado por:

$$e = 2,131 \times epm_est = 2,131 \times 213,7145 = 455,4256$$

$$1350 \pm 455,43.$$

$$IC95[\mu, 95\%] = [894,57\ ;\ 1805,43]$$

note que $\mu_0 = 1229$ pertence ao IC.