Vamos começar a resolver os exercícios do capítulo 1 do livro da Mônica e do Bolfarine.

1.1. Verifique a validade da expressão **(1.3.2).**

$$EQM([\hat{\theta}]) = Var([\hat{\theta}] + B^2([\hat{\theta}],$$

em que

$$B([\hat{\theta}]) = E[\hat{\theta}] - \theta.$$

1.2. Verifique a validade da expressão **(1.3.3).**

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória X com $E(X) = \mu$ e $V(X) = \sigma^2$.

Seja

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n}.$$

Mostre que

$$E[\hat{\sigma}^2] = \frac{n-1}{n}\,\sigma^2.$$

1.3. Verifique a validade da expressão **(1.3.6).**

Seja X_1, X_2, X_3 uma amostra aleatória da variável aleatória X com $E(X) = \theta$ e $V(X) = 1$.

Considere

$$\hat{\theta}_1 = \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} \quad e \quad \hat{\theta}_2 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3.$$

Mostre que

$$E[\hat{\theta}_1] = \theta \quad e \quad V[\hat{\theta}_1] = \frac{1}{3},$$

$$E[\hat{\theta}_2] = \theta \quad e \quad V[\hat{\theta}_1] = \frac{6}{16}.$$

1.4. Verifique a validade das expressões **(1.3.10)** e **(1.3.11).**

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição da variável aleatória $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Seja

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{n}{n-1}\,\hat{\sigma}^2$$

Mostre que S^2 é um estimador não viciado para σ^2.

Além disso

$$EQM[S^2] = Var(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1},$$

$$EQM[\hat{\sigma}^2] = \frac{2\sigma^4}{n-1}\left[1 - \frac{3n-1}{2n^2}\right].$$

1.5. Encontre c_1 e c_2 na figura **1.1** que são os pontos de intersecção dos erros quadráticos médios de

$$\hat{\theta}_1 = \frac{S}{n} \quad e \quad \hat{\theta}_2 = \frac{S + \frac{\sqrt{n}}{2}}{n + \sqrt{n}},$$

em que

$$S \sim Bin(n, \theta).$$

No exemplo **1.3.7** temos $n = 9$.

1.6. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição da variável aleatória $X \sim U(0, \theta)$. Mostre que a função densidade de probabilidade de $X_{(n)} = Y_n = max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ é dada por:

$$f_{Y_n}(y|\theta) = \frac{ny^{n-1}}{\theta^n}\, I_A(y), A = (0, \theta), \theta > 0.$$

Além disso

$$E(Y_n) = \frac{n}{n+1}\,\theta \qquad e \qquad V(Y_n) = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\,\theta^2.$$

1.7. Mostre que

$$\hat{N}_5 = \frac{Y_n^{n+1} - (Y_n - 1)^{n+1}}{Y_n^n - (Y_n - 1)^n}$$

no exemplo 13.9 é um estimador não viciado para N.

Observação: $X_{(n)} = Y_n = max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

1.8. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim Normal(\mu, 1)$. Considere os estimadores

$$\hat{\mu}_1 = \bar{X} \quad e \quad \hat{\mu}_2 = 10.$$

Encontre o **EQM** de $\hat{\mu}_1$ e $\hat{\mu}_2$ como função de μ.

Faça um gráfico do **EQM** para $n = 10$.

1.9. Seja X uma única observação de uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli com parâmetro θ. Sejam

$$\hat{\theta}_1 = X \quad e \quad \hat{\theta}_2 = \frac{1}{2}.$$

(i) Verifique se $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ são não viciados para θ.

(ii) Compare os EQM. Faça um gráfico dos **EQM** como função de θ.

1.10. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição da variável aleatória X

$$f(x|\theta) = e^{-(x-\theta)} \; I_A(x), \quad A = (\theta, \infty), \theta > 0.$$

i. Especifique o espaço paramétrico e o suporte associado à distribuição de X.

ii. Verifique se

$$\hat{\theta}_1 = \bar{X} \qquad e \qquad \hat{\theta}_2 = Y_1 = min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

são estimadores não viciados para θ.

1.11. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição da variável aleatória X com f.d.p. dada por

$$f(x|\theta) = \frac{2x}{\theta^2} \, I_A(x), A = (0, \theta), \theta > 0.$$

i. Especifique o espaço paramétrico e o suporte associado à distribuição de X.

ii. Verifique se

$$\hat{\theta}_1 = \bar{X} \qquad e \qquad \hat{\theta}_2 = Y_n = max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

são estimadores não viciados para θ.

iii. Encontre e compare os EQM dos dois estimadores. Faça um gráfico dos EQM como função de θ.

1.12. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição da variável aleatória $X \sim U(0, \theta)$.

$$\hat{\theta}_1 = c_1 \, \bar{X} \qquad e \qquad \hat{\theta}_2 = c_2 \, Y_n = c_2 \; \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

i. Encontre c_1 e c_2 que tornem os estimadores não viciados .

ii. Encontre e compare os EQM dos dois estimadores.

1.13. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição da variável aleatória $X \sim N(0, \sigma^2)$.

Seja

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

Considere os estimadores

$$\hat{\sigma}_c^2 = c\, S^2.$$

i. Encontre o **EQM** do estimador acima.

ii. Encontre o valor de c que minimiza o **EQM** em **i**.