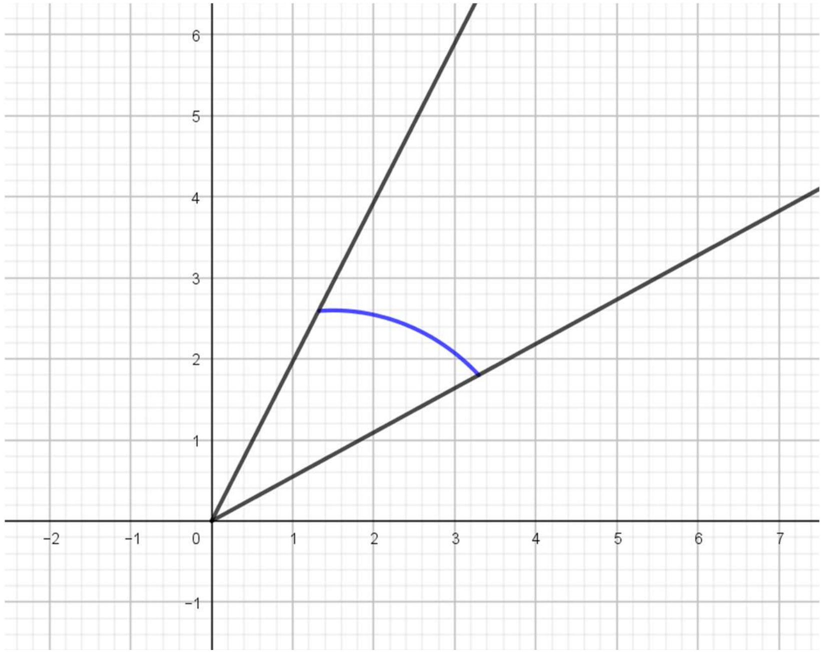
Área em Coordenadas Polares

Calcularemos a área de uma região limitada por duas retas que passam pela origem e por uma curva cuja equação é dada em coordenadas polares
Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[\alpha, \beta]$. Suponha que $f x) \geq 0$ para todo $x \in [\alpha, \beta]$. Seja R a região limitada pelo gráfico de $r = f(\theta)$ e pelas retas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$.



Considere a partição Δ do intervalo $[\alpha, \beta]$ dada por $\alpha = \theta_o < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta$

Seja $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ o i-ésimo intervalo.

Seja ρ_i um valor de θ no subintervalo $[\theta_{i-1}, \theta_i]$. A medida do ângulo , em radianos, do ângulo entre as retas $\theta = \theta_{i-1}$ e $\theta = \theta_i$ será denotada por $\Delta_i\theta$.

A área do setor circular de raio $f(\rho_i)$ e ângulo central $\Delta_i\theta$ é dada por

$\frac{1}{2}[f(\rho_i)]^2\Delta_i\theta$.

Para cada dos n subintervalos temos um setor dessa forma

A soma das áreas dos n setores será então

$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} [f(\rho_i)]^2 \, \Delta_i \theta$

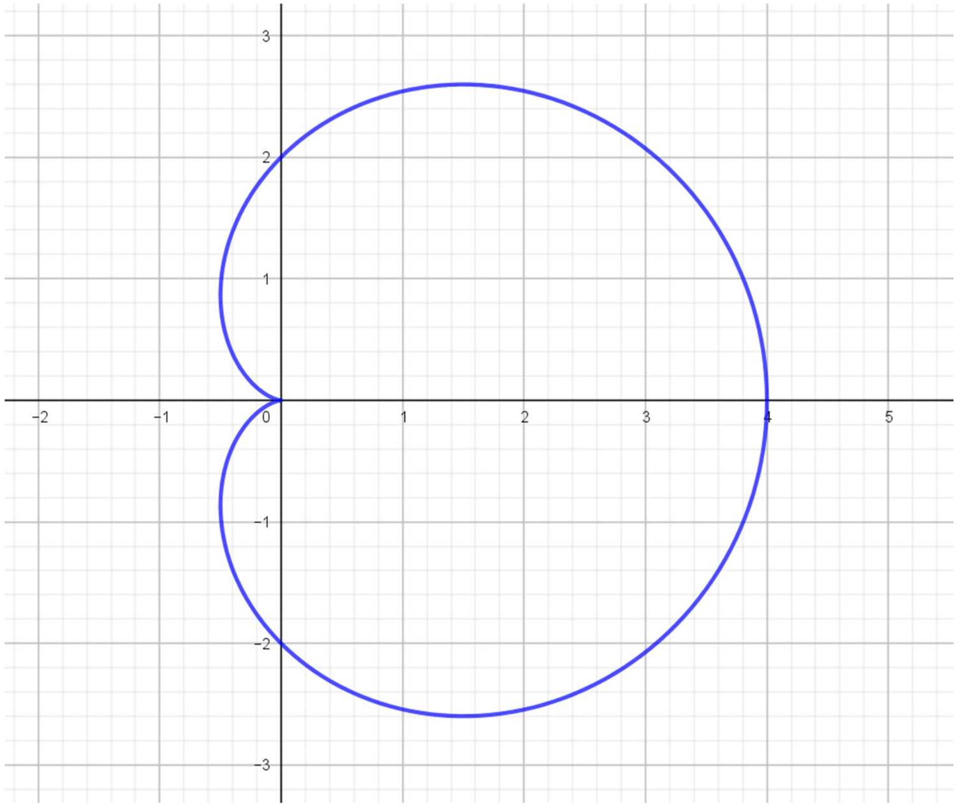
Definição

Seja R a região limitada pelo gráfico de $r = f(\theta)$ e pelas retas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$, onde f é uma função contínua no intervalo fechado $[\alpha, \beta]$. Então a área de R é

$$\mathrm{A} = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} [f(\rho_i)]^2 \, \Delta_i \theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [f(\theta)]^2 d\theta$$

Exemplo

Calcule a área da região limitada pelo gráfico de $r = 2 + 2\cos\theta$



Solução:

$$A = 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2}[2 + 2\cos\theta]^2 d\theta = \int_0^{\pi}(4 + 8\cos\theta + 4\,cos^2\theta)d\theta =$$

$$4\int_0^{\pi}(1 + 2\cos\theta + cos^2\theta)d\theta =$$

$$4\int_0^{\pi}\left(1 + 2\cos\theta + \frac{1+cos\,2\theta}{2}\right)d\theta =$$

$$4\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{cos\,2\theta}{2}\right)d\theta =$$

$$4\left(\frac{3}{2}\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{sen\,2\theta}{4}\right)\Big|_0^{\pi} = 6\pi$$