

## Integração por partes

### Teorema

Se  $u = f(x)$  e  $v = g(x)$ , e se  $f'$  e  $g'$  são contínuas, então  $\int u dv = uv - \int v du$

Demonstração:

$$\text{Temos } D_x f(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\text{E então } f(x)g'(x) = D_x f(x)g(x) - g(x)f'(x)$$

Integrando ambos os membros, obtemos

$$\int f(x)g'(x)dx = \int D_x f(x)g(x)dx - \int g(x)f'(x)dx$$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

Como  $du = f'(x)dx$  e  $dv = g'(x)dx$ , temos

$$\int u dv = uv - \int v du$$

### Exemplo 1

Calcule  $\int x \sec^2 x \, dx$

Solução:

Fazendo  $u = x$  e  $dv = \sec^2 x \, dx$ , obtemos

$du = dx$  e  $v = \operatorname{tg} x$ . Assim

$$\int x \sec^2 x \, dx = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x \, dx$$

$$x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + c$$

### Exemplo 2

Calcule  $\int x^2 e^x \, dx$

Solução:

Fazendo  $u = x^2$  e  $dv = e^x \, dx$ , obtemos

$du = 2x dx$  e  $v = e^x$ . Assim

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

Para calcular  $\int x e^x dx$ , aplicamos mais uma vez a integração por partes.

Fazendo  $u = x$  e  $dv = e^x dx$ , obtemos

$du = dx$  e  $v = e^x$ . Assim

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c_1$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + c = \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c \end{aligned}$$