Análise Multivariada

Antônio Arthur Silva de Lima (508492)

Decomposição LU e espectral

Decomposição LU

A decomposição LU é uma operação matricial utilizada para "fatorar" uma matriz quadrada não singular como o produto de outras duas: uma matriz triangular inferior ("L" é de "lower") e uma matriz triangular superior ("U" de "upper"). Esta decomposição é muitas vezes usada para resolver sistemas de equações ou encontrar matrizes inversas.

Proposição: Seja $\underset{\sim}{A}_n$ uma matriz quadrada, não singular, de ordem n. Então, existe uma única matriz triangular inferior $\underset{\sim}{L}$, com diagonal unitária (i.e. $l_{ij} = 1$ $\forall\, i = j$), e uma única matriz triangular superior $\underset{\sim}{U}$, tal que $\underset{\sim}{L}\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{A}$. Geralmente, $\underset{\sim}{U}$ será a matriz escalonada de $\underset{\sim}{A}$, pela eliminação de Gauss, e $\underset{\sim}{L}$ terá os elementos l_{ij} iguais aos produtos utilizados no escalonamento, $\forall\, i > j$.

Exemplos:

1. Decomponha a matriz $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ pela fatoração LU.

$$* \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -\frac{L_1}{3} \\ -\frac{4}{3}L_1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & -10/3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -L_2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{U}$$

$*$ multiplicadores de L_2: $\frac{1}{3}$

multiplicadores de L_3: $\frac{4}{3}$; 1

$$\left.\right\} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{L}$$

Assim, $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$. Ver uso no R.

2. Decomponha a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$ pela fatoração LU.

$$* \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2L_1 \\ -4L_1 \\ -3L_1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -3L_2 \\ -4L_2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -L_3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{U}$$

$*$ multiplicadores de L_2: 2

" de L_3: 4; 3

" de L_4: 3; 4; 1

$$\left.\right\} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{L}$$

Assim, $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Ver uso no R.

Interpretação Geométrica

A matriz A representa uma transformação linear completa, que por meio da decomposição, é dividida em duas: L, que representa operações de dilatação e rotação nas direções dos vetores escalonados; e U, que completa a transformação em outra direção.

Decomposição Espectral

Essa abordagem decompõe uma matriz quadrada $\underset{\sim}{A}$ simétrica em uma forma que envolve seus autovalores e autovetores, sendo muito utiliza na resolução de sistemas lineares complexos que envolvam matrizes simétricas.

Proposição:

$$\underset{\sim}{A}_{p \times p} = \underset{\sim}{P}\,\underset{\sim}{\Lambda}\,\underset{\sim}{P}^T, \text{ onde}$$

- $\underset{\sim}{P} = [e_1, e_2, \ldots, e_p]$ é a matriz linha dos autovetores ortogonais de $\underset{\sim}{A}$
- $\underset{\sim}{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \end{bmatrix}$ é a matriz diagonal dos autovalores de $\underset{\sim}{A}$

Exemplos:

1. Realize a decomposição espectral da matriz $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

$*\ \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{v} = \lambda \underset{\sim}{v} \therefore \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{v} - \lambda \underset{\sim}{v} = 0 \therefore (\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I})\underset{\sim}{v} = 0 .\ \det(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I}) = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{bmatrix} = B.$$

$$\det(B) = (-1-\lambda)^2 - 4 = 0 \therefore \lambda_1 = 1 \ ; \lambda_2 = -3$$

$$\cdot\ \lambda_1 : \begin{bmatrix} -1-1 & 2 \\ 2 & -1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \quad \therefore$$

$$\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \therefore x = y \therefore \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\cdot\ \lambda_2 : \begin{bmatrix} -1+3 & 2 \\ 2 & -1+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \therefore \begin{matrix} x = -y \\ \text{ou} \\ -x = y \end{matrix} \therefore \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Normalizando os autovetores, temos $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$

Assim, a matriz original pode ser expressa como:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

2. Realize a decomposição espectral da matriz $\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

* $\begin{bmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{bmatrix}$; $(9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = 0 \therefore 54 - 9\lambda - 6\lambda + \lambda^2 - 4 = 0 \therefore$
$\lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0$

$\Delta = (15)^2 - 4(1)(50) = 25$; $\lambda_1 = \frac{15+5}{2} = 10$; $\lambda_2 = \frac{15-5}{2} = 5$

* $\begin{bmatrix} 9-5 & -2 \\ -2 & 6-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \therefore \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases} \therefore x = \frac{y}{2} \therefore \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 9-10 & -2 \\ -2 & 6-10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \therefore \begin{cases} -x - 2y = 0 \\ -2x - 4y = 0 \end{cases} \therefore -x = 2y \therefore \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

* Normalizando os autovetores:

- $\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \therefore \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$;
- $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \therefore \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 1/\sqrt{5} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$;

Assim, podemos expressar a matriz na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Interpretação Geométrica

A decomposição espectral permite interpretar uma matriz simétrica como uma transformação que escala vetores em direções específicas (os autovetores) escaladas pelos seus autovalores, rotacionando o espaço vetorial. Ou seja, os autovalores indicam o "alongamento" ou "contração", enquanto os autovetores indicam a direção no espaço.