Outra substituições

Se o integrando envolver potências fracionárias de uma variável x, podemos simplificar o integrando, fazendo a substituição $x = z^n$, onde n é o mmc dos denominadores dos expoentes.

Exemplo

Calcule $\int \frac{dx}{2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$

Solução

Fazemos $x = z^6$ e então $dx = 6z^5dz$

Assim$\int \frac{dx}{2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} = \int \frac{6z^5dz}{2z^2+z^3} =$

$\int \left(6z^2 - 12z + 24 - \frac{48z^2}{z^3+2z^2}\right) dz =$

$$\int \left(6z^2 - 12z + 24 - \frac{48}{z+2}\right) dz =$$

$$2z^3 - 6z^2 + 24z - 48ln|z+2| + c =$$

$$2x^{\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{1}{3}} + 24x^{\frac{1}{6}} - 48ln\left|x^{\frac{1}{6}} + 2\right| + c$$

Se o integrando for uma função racional de $sen\ x$ e $cos\ x$, poderá ser reduzido a uma função racional de z, pela substituição

$z = tg\ \frac{1}{2}x$. Neste caso precisaremos do teorema a seguir.

Teorema

Se $z = tg\ \frac{1}{2}x$, então $sen\ x = \frac{2z}{1+z^2}$,

$cos\ x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$ e $dx = \frac{2}{1+z^2}dz$

Demonstração

i) $sen\ x = 2sen\ \frac{1}{2}x \cos\frac{1}{2}x =$

$$\frac{2sen\,\frac{1}{2}x \cos^2\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x} = 2\ tg\,\frac{1}{2}x \cos^2\ \frac{1}{2}x =$$

$$\frac{2\ tg\frac{1}{2}x}{\sec^2\frac{1}{2}x} = \frac{2\ tg\frac{1}{2}x}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{1}{2}x} = \frac{2z}{1+z^2}$$

ii) $cos\ x = 2\cos^2 \frac{1}{2}x - 1 =$

$\frac{2}{\sec^2 \frac{1}{2}x} - 1 = \frac{2}{1+\mathrm{tg}^2 \frac{1}{2}x} - 1 =$

$\frac{2}{1 + \mathrm{z}^2} - 1 = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}$

iii) $z = tg\ \frac{1}{2}x \Rightarrow dz = \frac{1}{2} sec^2\ \frac{1}{2}xdx =$

$\frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{tg}^2\ \frac{1}{2}x\right) dx = \frac{1 + z^2}{2} dx$

Logo $dx = \frac{2}{1+z^2} dz$

Exemplo

Calcule $\int \frac{3}{8+7\ cox\ x}\,dx$

Solução:

Fazendo $z = tg\ \frac{1}{2}x$, temos $cos\ x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$ e $dx = \frac{2}{1+z^2}\,dz$.

Daí $\int \frac{3}{8+\frac{7(1-z^2)}{1+z^2}} \cdot \frac{2}{1+z^2}\,dz = \int \frac{3}{\frac{(15+z^2)}{1+z^2}} \cdot \frac{2}{1+z^2}\,dz =$

$\int \frac{6}{15+z^2}\,dz = \frac{6}{\sqrt{15}}\,arc\ tg\,\frac{z}{\sqrt{15}} + c =$

$\frac{6}{\sqrt{15}}\,arc\ tg\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\,tg\ \frac{1}{2}x\right) + c$