CC0288 - Inferência Estatística I

Lista Especial 3 - 28/04/2023.

Prof. Maurício

Vamos fazer uma lista com as questões de Inferência que caíram na prova de Seleção do Mestrado da UFMG

1. (Mestrado-UFMG-2017-2018-Questão 9.) Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas uniformemente no intervalo $[0;\theta]$, $\theta > 0$. Considere que θ_{MM} seja o estimador para θ via método dos momentos. O valor esperado e o erro quadrático médio são dados respectivamente por:

   a. $\frac{n\theta}{n+1}$ e $\frac{\theta^2}{3n}$

   b. θ e $\frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$

   c. $\frac{(n+1)\theta}{n}$ e $\frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$

   d. θ e $\frac{\theta^2}{3n}$.

2. (Mestrado-UFMG-2011-2012-Questão 9)

   Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória com função de densidade

   $$f(x;\theta) = \theta\, e^{-\theta x}\, I_{(0,\infty)}\,(x), \;\; \theta > 0.$$

   I. O estimador de máxima verossimilhança para o parâmetro θ é

   $$\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}.$$

   II. O estimador encontrado no item (I) é consistente para θ.

   Considerando os itens (I) e (II) acima escolha a alternativa correta:

   (a) Falso Falso.

   (b) Falso Verdadeiro.

   (c) Verdadeiro Falso.

   (d) Verdadeiro Verdadeiro

3. (Mestrado-UFMG-2011-2012-Questão 10)

   Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória com função de densidade

   $$f(x;\theta) = \frac{1}{6\,\theta^4}\; x^3\, e^{-\frac{x}{\theta}}\, I_{(0,\infty)}\,(x), \;\; \theta > 0.$$

   I. A estatística $\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$ é suficiente, mas não é completa para θ.

II. A estatística $\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$ é suficiente e completa para θ.

Considerando os itens (I) e (II) acima escolha a alternativa correta:

(a) Falso Falso.

(b) Falso Verdadeiro.

(c) Verdadeiro Falso.

(d) Verdadeiro Verdadeiro.

4. (Mestrado-UFMG-2011-2012-Questão 15)

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com parâmetro λ. Calcule $E[min(X_1, X_2, \ldots, X_n)]$.

a. $\frac{1}{(n\lambda)^n}$ *b.* $\frac{n}{\lambda}$ *c.* $\frac{1}{n\lambda}$ *d.* λ^n

5. (Mestrado-UFMG-2012-2013-Questão 7)

Deseja-se estimar o tempo médio diário (em minutos) que os candidatos a um concurso gastam estudando um determinado tópico do programa. Supondo que o tempo de estudo diário tem distribuição normal, escolha, dentre as alternativas apresentadas, aquela que apresenta o tamanho da amostra necessário para se estimar o tempo médio com uma margem de erro de 20 minutos. Suponha que se deseja um nível de confiança de 90% e que um estudo piloto tenha demonstrado que o desvio padrão do tempo de estudo é estimado em 100 minutos.

(a) 11 (b) 41 (c) 68 (d) 97.

6. (Mestrado-UFMG-2012-2013-Questão 8)

Os dados a seguir referem-se a uma amostra aleatória de tamanho n=5 da variável aleatória X: número de colônias de bactérias por 10 ml de água de um lago. Suponha que a distribuição de X seja Poisson $(\theta), \theta > 0$, desconhecido. Seja $g(\theta)$ a probabilidade de que seja encontrada uma colonia de bactérias a cada 10 ml de água do lago. Sejam $\hat{g}_1(\theta)$ e $\hat{g}_2(\theta)$ os estimadores UMVU e de máxima verossimilhança de $g(\theta)$. Uma amostra aleatória de tamanho $n = 5$ da variável aleatória X resultou nos seguintes valores:

$$x_1 = 4, ; x_2 = 7,\ x_3 = 5,\ x_4 = 4,\ x_5 = 3$$

Com base nos dados amostrais pode-se afirmar que

(a) a estimativa de máxima verossimilhança de $g(\theta)$ é igual a UMVU.

(b) a estimativa de máxima verossimilhança de $g(\theta)$ é maior que a UMVU.

(c) a estimativa de máxima verossimilhança de $g(\theta)$ é menor que a UMVU.

(d) não há relação entre as estimativas pois a estimativa UMVU não existe.

7. (Mestrado-UFMG-2013-2014-Questão 3) Considere a variável aleatória contínua X com distribuição exponencial e densidade dada por:

$$f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x} \;\; I_{(0,\infty)} \;\; (x), \lambda > 0.$$

A função geradora de momentos de uma variável aleatória, se existir, é dada por $E[e^{tX}]$, onde $t \in \mathbb{R}$.

Considere $s > 0$ e $E[e^{-sX}] = 0,25$, indique o valor de $E[e^{-2sX}]$.

a. 1 b. 1/3 c. 1/5 d. 1/7.

8. (Mestrado-UFMG-2013-2014-Questão 5) Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória X com distribuição uniforme no intervalo $[0, \theta]$, com $\theta > 0$. Assuma $T = max(X_, X_2, \ldots, , X_n)$ e considere um estimador para θ, definido por $\delta = aT$, onde a é uma constante real. Encontre o valor de a que minimiza a função risco deste estimador. A função risco é dada por

$$R(\delta, \theta) = E[(aT - \theta)^2].$$

a. $\frac{n+2}{n+1}$

b. $\frac{n+2}{n+3}$

c. $\frac{n+1}{n+2}$

d. $\frac{n}{n+1}$

9. (Mestrado-UFMG-2013-2014-Questão 7) Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição geométrica com função distribuição de probabilidade

$$P(X = x) = \theta\; (1 - \theta)^{x-1} \;\; I_{\{1,2,\ldots\}} \; (x), 0 < \theta < 1.$$

O limite inferior da desigualdade de Cramer-Rao para a variância de estimadores não viciados de $1 - \theta$ é dado por:

a. $\frac{n}{\theta\;(1-\theta)}$

b. $\frac{\theta\;(1-\theta)^2}{n}$

c. $\frac{\theta^2\;(1-\theta)}{n}$

d. $\frac{n}{\theta^2\;(1-\theta)}$.

10. (Mestrado-UFMG-2013-2014-Questão 15) Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição com função de densidade dada por

$$f(x) = \theta x^{\theta-1} \; I_{(0,1)}(x), \quad \theta > 0.$$

O estimador de máxima verossimilhança e uma estatística suficiente para θ são respectivamente

a. $Max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ e $\prod_{i=1}^{n} X_i$.

b. $-\dfrac{\sum_{i=1}^{n} log(X_i)}{n}$ e $\sum_{i=1}^{n} X_i$.

c. $\prod_{i=1}^{n} X_i$ e $-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} log(X_i)}$.

d. $-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} log(X_i)}$ e $\prod_{i=1}^{n} X_i$.

11. (Mestrado-UFMG-2008-2009-Questão 12) Considere as variáveis aleatórias independentes X e Y com funções de densidade dada pela distribuição exponencial com média 1. Ou seja: $f(x) = e^{-x},\ x > 0$ e $f(y) = e^{-y},\ y > 0$.

Deseja-se calcular $E[Min(X,Y)] + E[Max(X,Y)]$.

Assinale a alternativa que corresponda a resposta correta.

a $\frac{5}{2}$.
b $\frac{3}{2}$.
c $\frac{1}{2}$.
d. 2.

12. (Mestrado-UFMG-2008-2009-Questão 3) Um estatístico decide realizar um experimento computacional. De uma distribuição normal com média 100 e desvio padrão 10 ele gera 50000 amostras de tamanho 10 cada uma. Para cada amostra calcula a variância de

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}.$$

Em seguida calcula o percentual de variâncias com resultados inferiores 46,33. Assinale a alternativa que apresenta o resultado mais provável.

a. 5%

b. 0%

c. 20%

d. 10%.