2.1. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim Normal(0, \sigma^2)$

(i) Encontre o limite inferior da variância dos estimadores não viciados de σ^2.

(ii) Encontre uma estatística suficiente para σ^2.

(iii) Obtenha um estimador não viciado para σ^2 que seja função da estatística suficiente.

(iv) Verifique se o estimador é eficiente.

Solução: A f.d.p. de X é dada por:

$$f(x \mid \sigma^2) = (2\pi)^{-1/2}\ (\sigma^2)^{-1}\ \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\ I_A(x),\ A = (-\infty, \infty).$$

Vamos resolver usando o critério da fatoração de Neyman :

A distribuição conjunta da amostra é dada por:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} (2\pi)^{-1/2}\ (\sigma^2)^{-1/2}\ \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right)\ \ I_A(x_i)$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\sigma^2) = (2\pi)^{-n/2}\ (\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \prod_{i=1}^{n}\ I_A(x_i)$$

Seja $s = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Assim

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\sigma^2) = (\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\ s\right)\ (2\pi)^{-n/2}\quad \prod_{i=1}^{n}\ I_A(x_i)$$

Fazendo

$$g(s, \sigma^2) = (\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\ s\right) \quad e \quad h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (2\pi)^{-n/2} \quad \prod_{i=1}^{n}\ I_A(x_i)$$

temos a fatoração desejada.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\sigma^2) = g(s, \sigma^2) \times h(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Logo

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

é a nossa estatística suficiente para σ^2.

Uma outra maneira é verificar se a lei de X pertence à família exponencial.

Vamos mostrar que esta família pertence à família exponencial.

Note que o suporte A não depende de σ^2.

$$\log\left(f(x; \sigma^2)\right) = -\frac{1}{2}\ \log(2\pi) - \frac{1}{2}\ \log(\sigma^2) - \frac{x^2}{2\ \sigma^2}.$$

$$\log(f(x|\sigma^2)) = -\frac{1}{2\sigma^2}\, x^2 - \frac{1}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2}\log(2\pi)$$

Fazendo

$$c(\sigma^2) = -\frac{1}{2\sigma^2} \;;\; T(x) = x^2 \;\;;\;\; d(\sigma^2) = -\frac{1}{2}\log(\sigma^2) \;;\; h(x) = -\frac{1}{2}\log(2\pi)$$

Logo pertence à família exponencial.

Note que $Y = T(X) = X^2$ e

$$c'(\sigma^2) = \frac{1}{2\sigma^4} \;;\; d'(\sigma^2) = -\frac{1}{2\sigma^2}.$$

$$E(Y) = E(X^2) = -\frac{d'(\sigma^2)}{c'(\sigma^2)} = \sigma^2.$$

Além disso

$$S = \sum_{i=1}^{n} T(X_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

é uma estatística suficiente e completa para σ^2.
Seja T um estimador não viciado de $\theta = \sigma^2$. Vamos calcular a função escore:

Vamos preparar para derivar em relação a σ^2:

$$\log\big(f(X;\mu,\sigma^2)\big) = -\frac{1}{2}\;\log(2\pi) - \frac{1}{2}\;\log(\sigma^2) - \frac{1}{2}\,X^2\;\;(\sigma^2)^{-1}.$$

Vamos derivar agora:

$$V = \frac{\partial \log f(X|\sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{1}{2}\;\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\,X^2\;(-1)(\sigma^2)^{-2}.$$

$$V = -\frac{1}{2\sigma^4}\left[X^2 - \sigma^2\right] = -\frac{1}{2\sigma^2}\left[\frac{X^2}{\sigma^2} - 1\right].$$

Seja

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X}{\sigma} \sim N(0,1).$$

$$V = -\frac{1}{2\sigma^2}(Z^2 - 1)$$

Note que:

$$Z^2 \sim \chi^2(1) \;\;;\;\; E(Z^2) = 1 \;;\; V(Z^2) = 2.$$

$$E(V) = -\frac{1}{2\sigma^4}\left[E(X^2) - \sigma^2\right] = 0.$$

Ou

$$E(V) = -\frac{1}{2\sigma^2}\left[E(Z^2) - 1\right] = 0.$$

$$I_F(\sigma^2) = Var(V) = V\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(Z^2-1)\right) = \frac{1}{4\sigma^4}\,V(Z^2-1).$$

$$I_F(\sigma^2) = \frac{1}{4\sigma^4}\,V(Z^2) = \frac{1}{4\sigma^4}\,\left[E(Z^4) - E^2(Z^2)\right] = \frac{1}{4\sigma^4}\,(3-1) = \frac{1}{2\sigma^4},$$

pois $E(Z^4) = 3$ que é a curtose da normal.
Assim

$$E(Z^4) = E(\frac{X^4}{\sigma^4}) = 3$$

$$E(X^4) = 3\sigma^4.$$

E

$$V(X^2) = E(X^4) - E^2(X^2) = 3\sigma^4 - \sigma^4 = 2\sigma^4.$$

Assim

$$LI(\sigma^2) = \frac{1}{n\,\frac{1}{2\sigma^4}} = \frac{2\,\sigma^4}{n}.$$

Já sabemos

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

é uma estatística suficiente para σ^2.
Note que

$$E(S) = n\,E(X^2) = n\sigma^2.$$

$$E\left(\frac{S}{n}\right) = \sigma^2.$$

Assim

$$T = \frac{S}{n} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}$$

é o nosso estimador procurado.

A variância de T é dada por:

$$Var(T) = \frac{1}{n^2}\, Var(S) = \frac{1}{n^2}\, n\, V(X^2) = \frac{2\,\sigma^4}{n} = LICR.$$

Assim T é eficiente.

Retire uma amostra de tamanho $n = 25$ de $X \sim Normal(0, \sigma^2 = 16)$
e estime σ^2 e seu erro padrão.

```
> set.seed(32)
>
> A=rnorm(100,0,4);round(A,2)
[1]   0.06   3.49  -4.11   2.74   1.80   1.63   1.14  -2.50   3.36   1.25
[11]   1.90  -0.40   0.81  -0.38   0.40  -1.07   5.38  -0.59   0.20   3.33
[21]  -1.16  -4.34   3.76   1.44   2.96   3.53   2.11  -8.20   3.93   1.89
[31]   3.28   2.36  -3.25   4.08   6.21   3.94  -0.47  -4.85   2.64  -1.22
[41]   0.32   0.33  -3.71  -0.48  -3.50  -6.41  -4.60  -2.46  -2.57  -4.99
[51]   1.50  -0.78  -1.89  -0.25  -6.11  -2.95   3.08  -0.75   3.53  -2.40
[61]  -4.07  -8.32  -1.19   0.87   0.50  -3.72  -3.14   1.63   1.57  -0.15
[71]  -4.48   1.27   1.41  -2.07  -3.51  -1.43   5.56 -10.79   1.35  -1.63
[81]   5.44  -4.81  -4.77  -7.71   1.06   4.39   3.75   0.67   3.30  -3.03
[91]  -2.11   0.45   5.24   5.36   2.37   0.95  -3.06  -2.06  -2.77  -0.04
> Ao=sort(A)
> round(Ao,2)
[1] -10.79  -8.32  -8.20  -7.71  -6.41  -6.11  -4.99  -4.85  -4.81  -4.77
[11]  -4.60  -4.48  -4.34  -4.11  -4.07  -3.72  -3.71  -3.51  -3.50  -3.25
[21]  -3.14  -3.06  -3.03  -2.95  -2.77  -2.57  -2.50  -2.46  -2.40  -2.11
[31]  -2.07  -2.06  -1.89  -1.63  -1.43  -1.22  -1.19  -1.16  -1.07  -0.78
[41]  -0.75  -0.59  -0.48  -0.47  -0.40  -0.38  -0.25  -0.15  -0.04   0.06
[51]   0.20   0.32   0.33   0.40   0.45   0.50   0.67   0.81   0.87   0.95
[61]   1.06   1.14   1.25   1.27   1.35   1.41   1.44   1.50   1.57   1.63
[71]   1.63   1.80   1.89   1.90   2.11   2.36   2.37   2.64   2.74   2.96
[81]   3.08   3.28   3.30   3.33   3.36   3.49   3.53   3.53   3.75   3.76
[91]   3.93   3.94   4.08   4.39   5.24   5.36   5.38   5.44   5.56   6.21
> mean(A);var(A)
[1] -0.2572461
[1] 11.89615
>
>
> S=sum(A^2);S
[1] 1184.337
> n=100
> t=S/n;t  ####Estimativa de sigma^2
[1] 11.84337
>
>
> VT_est=2*t^4/n;VT_est
[1] 393.4872
>
> ep_est=sqrt(VT_est);ep_est
[1] 19.83651
```

```
>
>
```