1.13. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição da variável aleatória $X \sim N(0, \sigma^2)$.

Seja

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

Considere os estimadores

$$\hat{\sigma}_c^2 = c\, S^2.$$

i. Encontre o **EQM** do estimador acima.

ii. Encontre o valor de c que minimiza o **EQM** em **i**.

Solução:

Como $X \sim N(0, \sigma^2)$

Sabemos que

$$E(X) = 0 \ \ e \ \ V(X) = \sigma^2.$$

Assim

$$E(X^2) = Var(X) + E^2(X) = \sigma^2.$$

Assim,

$$E(S^2) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = n\, \sigma^2.$$

Seja $T = cS^2$ o eqm de T é dado por:

$$E(T) = cE(S^2) = cn\sigma^2.$$

$$Var(T) = c^2 Var(S^2) = c^2 \sum_{i=1}^{n} Var(X_i^2).$$

Sabemos que

$$Var(X^2) = E(X^4) - E^2(X^2) = 3\sigma^4 - \sigma^4 = 2\sigma^4.$$

Assim,

$$Var(T) = 2nc^2\sigma^4.$$

O viés de T é dado que:

$$B(T) = E(T) - \theta = nc\sigma^2 - \sigma^2 = (nc-1)\sigma^2.$$

O quadrado do viés de T é dado que:

$$B^2(T) = (nc-1)^2\sigma^4.$$

$$EQM(T) = Var(T) + B^2(T) = 2nc^2\sigma^4 + (nc-1)^2\sigma^4$$

$$EQM(T) = \left[2nc^2 + (nc-1)^2\right]\sigma^4 = g(c)\sigma^4.$$

$$g(c) = 2nc^2 + n^2c^2 - 2nc + 1 = (n^2+2n)c^2 - 2nc + 1.$$

Vamos minimizar $g(c)$.

$$g'(c) = 2(n^2+2n)c - 2n = 0$$

$$2(n^2+2n)c = 2n$$

$$(n+2)c = 1 \quad e \quad c = \frac{1}{n+2}.$$

A derivada segunda de $g(c)$ é dada por:

$$g''(c) = 2(n^2+2n) > 0$$

Logo

$$c = \frac{1}{n+2}$$

é o ponto de mínimo procurado.

Note que $g(c)$ é uma função quadrática com $a = n^2+2n > 0$, $b = -2n$ e $c = 1$. Como $a > 0$ temos um mínimo absoluto em

$$c_{min} = \frac{-b}{2a} = \frac{2n}{2n(n+2)} = frac1n+2.$$

Nosso estimador procurado é :

$$T = \frac{S^2}{n+2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n+2}.$$