Prova 3 - Cálculo II.

Aluna - Giovanna Mariano de Andrade.
(510898).

01ª questão: • $\frac{1}{n^2}$ = CONVER. $p = 2 > 1$ • $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+1}{2n^3+5}$

• para o teste da comparação do limite, usaremos a série
$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\frac{3n+1}{2n^3+5}}{\frac{1}{n^2}} \right)$$

• Simplificando a expressão acima, vamos obter $= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{(3n+1)n^2}{2n^3+5} \right)$

• Usando a propriedade distributiva, fica igual á:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{3n^3+n^2}{2n^3+5} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\cancel{n^3}\left(3+\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n^3}\left(2+\frac{5}{n^3}\right)} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3+\frac{1}{n}}{2+\frac{5}{n^3}} \right)$$

• Calculando o limite: $\frac{3+0}{2+5.0} = \frac{3}{2}$ //

• Podemos observar que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, assim pelo fato dessa série convergir e $\frac{3}{2} > 0$, a série $\sum \frac{3n+1}{2n^3+5}$ é convergente, já que ambas convergem.

02ª questão: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+2} \cdot (-1)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(-1) \cdot n^2}{n^3+2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \underbrace{\left(\frac{-n^2}{n^3+2}\right)}_{an}$

- Usando o teste da série alternada:

1) $\lim_{n\to\infty} an \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{-n^2}{n^3+2} = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

2) $an > an+1$

$\sum (-1)^{n+1} \cdot \frac{n^2}{n^3+2}$

$f(x) = \frac{x^2}{x^3+2}$

fazendo a derivada: $f'(x) = \frac{2x(x^3+2) - x^2(3x^2)}{(x^3+2)^2} = \frac{4x - x^4}{(x^3+2)^2}$

$f'(x) < 0 \rightarrow 4x - x^4 < 0$

$x(4 - x^3) < 0$

$4 - x^3 < 0$

$x > \sqrt[3]{4}$

$f'(x) < 0$ em $(\sqrt[3]{4}, +\infty)$.

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n^2}{n^3+2}$ é convergente //

03ª questão: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n x^n}{n 3^n}$.

- Usaremos o teste da razão: $\left|\frac{an+1}{an}\right|$, logo $an = \frac{2^n \cdot x^n}{n \cdot 3^n}$.

- fazendo a substituição, vamos obter: $\left(\frac{\frac{2^{n+1} \cdot x^{n+1}}{(n+1) \cdot 3^{n+1}}}{\frac{2^n \cdot x^n}{n \cdot 3^n}}\right)$

- fazendo a divisão:

$$\left|\frac{(\cancel{2^n} \cdot 2^1) \cdot (\cancel{x^n} \cdot x^1)}{(n+1) \cdot (\cancel{3^n} \cdot 3^1)} \cdot \frac{n \cdot \cancel{3^n}}{\cancel{2^n} \cdot \cancel{x^n}}\right|$$

- deixaremos apenas o x em módulo por ser um número variável e tiramos o n do módulo por ser um número natural, o que resulta em: $|x| \cdot \frac{2 \cdot n}{n+1 \cdot 3}$.

Tirando o limite para achar a idéia que há de convergência:

$\lim_{n\to+\infty} |x| \cdot \frac{2\cancel{n}}{3\cancel{n}} = |x| \cdot \frac{2}{3} < 1 \therefore |x| < \frac{3}{2}$ //

$\frac{3}{2}$ é o raio da convergência.

Giovanna Mariano
(510898).

Logo, temos que $-\frac{3}{2} < x \leq \frac{3}{2}$.

Se $x = -\frac{3}{2}$; $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n \cdot \left(\frac{-3}{2}\right)^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-1)^n \cdot \cancel{3^n}}{n \cdot \cancel{3^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{1}{n}$

Se $x = \frac{3}{2}$; $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1^n \cdot \cancel{3^n}}{n \cdot \cancel{3^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{1}{n}$

Temos como intervalo de convergência:

$$\left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] //$$

04ª questão: $f(x) = \cos x$

→ Série de Maclaurin:

$$P(x) = \frac{f(0)x^0}{0!} + \frac{f'(0)x^1}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} \dots \frac{f^n(0)x^n}{n!}$$

$f(x) = \cos x$
$f'(x) = -\operatorname{sen} x$
$f''(x) = -\cos x$
$f'''(x) = \operatorname{sen} x$
$f^{IV}(x) = \cos x$

Logo após um ciclo de 4 funções, essa sequência irá recomeçar.

$$P(x) = \frac{\cos 0 \cdot 0^0}{0!} + \frac{(-\operatorname{sen} 0) \cdot 0^1}{1!} + \frac{(-\cos 0) \cdot 0^2}{2!} \dots$$

$$P(x) = 1 + 0 - \frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + 0 - \frac{x^6}{6!} \dots$$

$$\underbrace{P(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} // \dots}$$

Obs → o resultado de quando calcularmos os termos ímpares será 0, já que sen 0 = 0.

Giovanna Mariano.
(510898).

05ª questão: • $x\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y, \quad x > 0, \; y(2) = 4.$

$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{3y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} \underbrace{\left(-\frac{3}{x}\right)}_{P(x)} \cdot y = x$$

• fator: $e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{-3\int \frac{dx}{x}} = e^{-3\ln x} = (e^{\ln x})^{-3} = (e^{\log_e x})^{-3} = \frac{1}{x^3}$

• agora vamos multiplicar os 2 lados da equação pelo fator que já calculamos:

$$\frac{1}{x^3}\cdot\frac{dy}{dx} - \frac{3y}{x^4} = \frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x^3}\cdot y\right)' = \frac{1}{x^2}$$

$$\cancel{\int}\left(\frac{1}{x^3}\cdot y\right)^{\cancel{\prime}} = \int \frac{1}{x^2}$$

calculamos a integral $= -\frac{1}{x} + C.$

$$\frac{1}{x^3}\cdot y = -\frac{1}{x} + C$$

$$y = x^3\left(-\frac{1}{x} + C\right)$$

$$y = -x^2 + x^3 C \quad C = 1$$

$$\boxed{y = -x^2 + x^3 \cancel{C}}$$

• $y(2) = 4$ $\quad x = 2$, $y = 4$

$4 = -(2)^2 + 2^3 C$

$4 = -4 + 8C$

$8 = 8C$

$C = 1$

Giovanna Mariano

(510898)