3.21. Seja $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ variáveis aleatórias independentes em que

$$Y_i \sim N\left(\beta X_i, \sigma^2\, X_i\right),$$

com $X_i, i = 1, 2, \ldots, n$ são conhecidos. Note que, neste caso, as variáveis Y_i não são identicamente distribuídas. Obtenha os estimadores de mínimos quadrados de β e σ^2.

Solução: Temos que:

$$E(Y_i) = \beta X_i$$

Note que

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - E(Y_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta\, Y_i)^2$$

Derivando em relação a β temos:

$$S^{'}(\beta) = \sum_{i=1}^{n} = 2\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta\, X_i)\,(-X_i) = 2\left[-\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i + \beta; \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right]$$

A derivada segunda é dada por:

$$S^{''}(\beta) = 2\sum_{i=1}^{n} X_i^2 > 0$$

De $S^{'}(\beta) = 0$ temos que o estimador de mínimos quadrados para β é dado por:

$$\beta\, \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i\, Y_i,$$

$$b = \beta_{MQ} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\, Y_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2}.$$

Note que

$$\sum_{i=1}^{n} X_i\, Y_i = b\, \sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

Vamos mostrar que b é um estimador não viciado para β.

Sejam $Num = \sum_{i=1}^{n} X_i\, Y_i$ e $D = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

$$E[Num] = \sum_{i=1}^{n} X_i E(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i \beta X_i = \beta \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \beta D.$$

Logo

$$E(b) = E\left[\frac{Num}{D}\right] = \frac{\beta D}{D} = \beta.$$

A variância de Num é dada por:

$$Var(Num) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \; Var(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sigma^2 \; = \sigma^2 \; \sum_{i=1}^{n} X_i^3.$$

A variância de b é dada por:

$$Var(b) = \frac{Var(Num)}{D^2} = \frac{\sigma^2 \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^3}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2\right)^2}.$$

Além disso temos:

$$E(b^2) = Var(b) + E^2(b) = \frac{\sigma^2 \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^3}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2\right)^2} + \beta^2.$$

Vamos procurar o estimador de mínimos quadrados de σ^2: Seja

$$E_i = Y_i - bX_i, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Temos que:

$$\sum_{i=1}^{n} E_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - bX_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \; Y_i^2 - 2b \sum_{i=1}^{n} X_i + b^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} E_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \; Y_i^2 - 2b \times b \; \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + b^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} E_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \; Y_i^2 - b^2 \times \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

Vamos aplicar o operador esperança:

$$\sum_{i=1}^{n} E(E_i^2) = \sum_{i=1}^{n} \; E(Y_i^2) - E(b^2) \times \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

Temos que:

$$E(Y_i^2) = Var(Y_i) + E^2(Y_i) = \sigma^2 X_i + \beta^2 X_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} \; E(Y_i^2) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} X_i + \beta^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

$$\sum_{i=1}^{n} E(E_i^2) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} X_i + \beta^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \times \left[\frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^3}{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \right)^2} + \beta^2 \right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} E(E_i^2) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} X_i - \sigma^2 \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^3}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}.$$

$$\sum_{i=1}^{n} E(E_i^2) = \sigma^2 \; \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \times \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} X_i^3}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2} = aux \;\; \sigma^2,$$

com

$$aux = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \times \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} X_i^3}{}$$

Assim

$$\hat{\sigma}^2_{MQ} = \frac{1}{aux} \sum_{i=1}^{n} E_i^2 = \frac{1}{aux} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - bX_i)^2.$$

é o nosso estimador procurado.

Meu Deus!!!!!!