Funções hiperbólicas

A função seno hiperbólico é definida por

$$senh\ x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

O domínio e a imagem da função seno hiperbólico é o conjunto de todos os números reais.

A função cosseno hiperbólico é definida por

$$cosh\ x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

O domínio da função cosseno hiperbólico é o conjunto de todos os números reais e a imagem é o intervalo $[1, +\infty)$.

Proposição:

$senh(-x) = -\, senh\, x$ e $cosh(-x) = cosh\, x$ e

Demonstração:

$$senh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} =$$

$$-\, senh\, x.$$

$$cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = cosh\, x$$

Assim, seno hiperbólico é uma função ímpar e o cosseno hiperbólico é uma função par.

Observe que $\frac{e^{x} + e^{-x}}{2} > 0$, isto é, $cosh\, x > 0$

Por outro lado temos

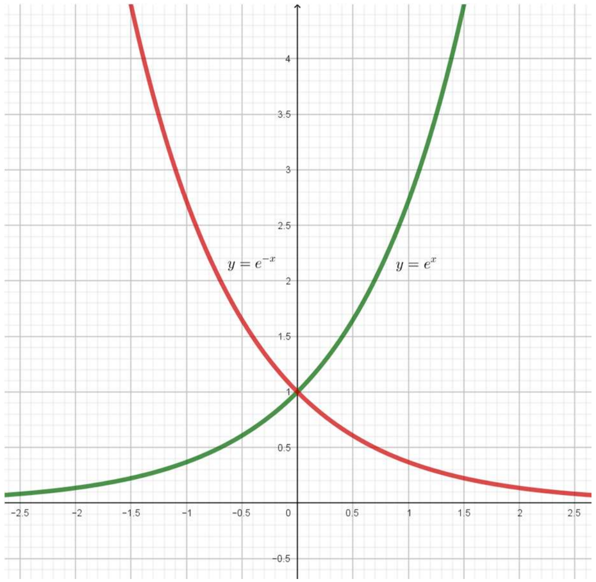
i) $e^x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow$

$2x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

ii) $e^x - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0.$

iii) $e^x - e^{-x} < 0 \Leftrightarrow e^x < e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} < 1 \Leftrightarrow 2x < 0 \Leftrightarrow x < 0$

Observe os gráficos abaixo:



Como $senh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, temos

$Senh\,x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$Senh\,x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$Senh\,x < 0 \Leftrightarrow x < 0$

Portanto, o sinal da função seno hiperbólico é

<u>---------------</u> 0 <u>+++++++++++</u>

Derivadas:

$$D_x(senh\,x) = D_x\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \ cosh\,x$$

$$D_x(cosh\,x) = D_x\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \ senh\,x$$

Teorema:

Se u é uma função de x, que é derivável, então

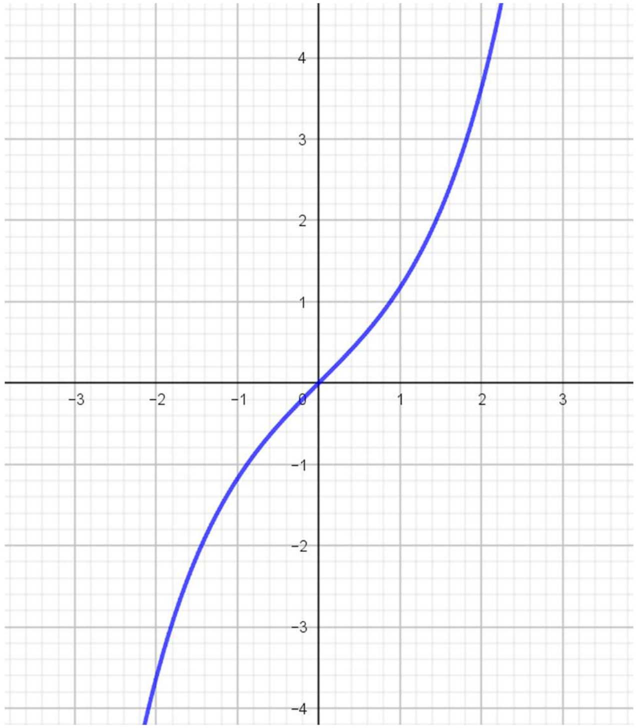
$$D_x(senh\, u) = \ cosh\, u\, D_x u$$

$$D_x(cosh\, u) = \ senh\, u\, D_x u$$

Como $D_x(senh\, x) = \ cosh\, x > 0$, a função seno hiperbólico é crescente.

A derivada segunda do seno hiperbólico é $D_x cosh\, x = \ senh\, x$. Observando sinal de $senh\, x$, vemos que o gráfico da função seno hiperbólico é côncavo para baixo se $x < 0$ e é côncavo para cima se $x > 0$.

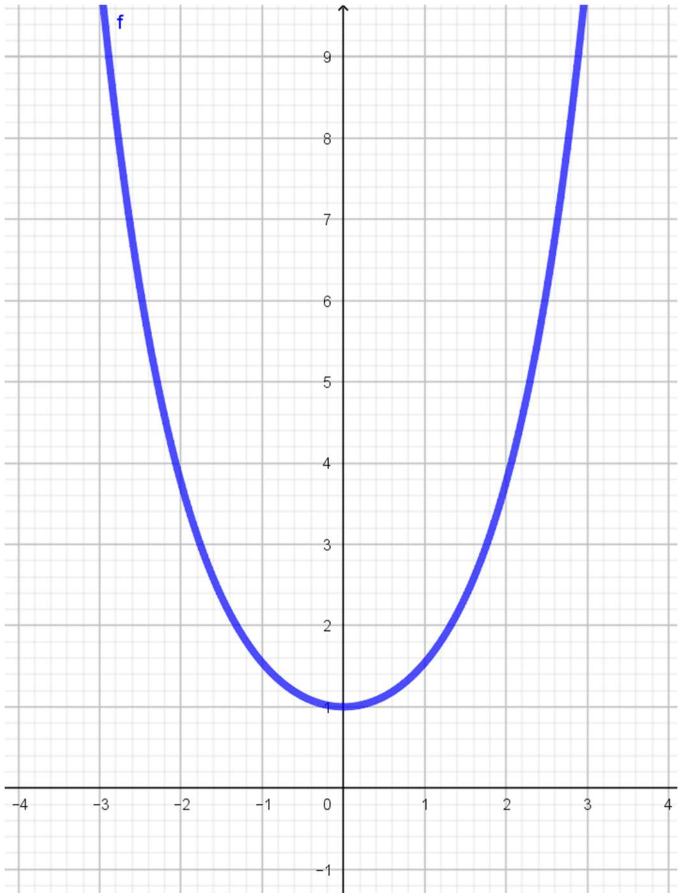
Portanto o gráfico da função seno hiperbólico é



Como $D_x(cosh\ x) = \ senh\ x$, a função cosseno hiperbólico é decrescente no intervalo $(-\infty, 0]$ e é crescente no intervalo $[0, +\infty)$. Portanto a função cosseno hiperbólico assume um valor mínimo quando $x = 0$. Como $cosh\ 0 = \frac{e^0+e^{-0}}{2} = 1$, temos $cosh \geq 1$ para todo $x \in R$.

A derivada segunda do cosseno hiperbólico é $D_x senh\ x = \ cosh\ x > 0$. Portanto o gráfico da função cosseno hiperbólico é sempre côncavo para cima.

Portanto o gráfico da função cosseno hiperbólico é



As funções tangente hiperbólica, cotangente hiperbólica, secante hiperbólica e cossecante hiperbólica são definidas por:

$$tgh\, x = \frac{senh\, x}{\cosh x}$$

$$cotgh\, x = \frac{cosh\, x}{\operatorname{senh} x}$$

$$sech\, x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$cossech\, x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$$

Em termos das exponenciais, estas funções podem ser escritas da seguinte forma:

$$tgh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,.$$

$$cotgh\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$sech\, x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$cossech\, x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

Observe que o domínio da função tangente hiperbólica e da função secante hiperbólica é o conjunto de todos os números reais enquanto que o domínio da função cotangente hiperbólica e da cossecante hiperbólica é o conjunto dos números reais não nulos.

Como $1 \leq cosh\, x$, $0 < sech\, x \leq 1$

Teorema

i) $tgh\, x = \frac{1}{cotg \quad x}$

ii) $cosh^2\, x - senh^2\, x = 1$

iii) $sech^2 x = 1 - tgh^2\, x$

iv) $cossech^2 x = cotgh^2\, x - 1$

Demonstração:

i) $tgh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}} = \frac{1}{cotgh\, x}$

ii) $cosh^2\, x - senh^2\, x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} =$
$\frac{4}{4} = 1$

iii) $sech^2 x + tgh^2\, x = \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2 = \frac{4}{e^{2x} + 2 + e^{-2x}} + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{e^{2x} + 2 + e^{-2x}} =$
$\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{e^{2x} + 2 + e^{-2x}} = 1$. Logo $sech^2 x = 1 - tgh^2\, x$

iv) $cossech^2 x - cotgh^2\, x = \left(\frac{2}{e^x - e^{-x}}\right)^2 - \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)^2 =$

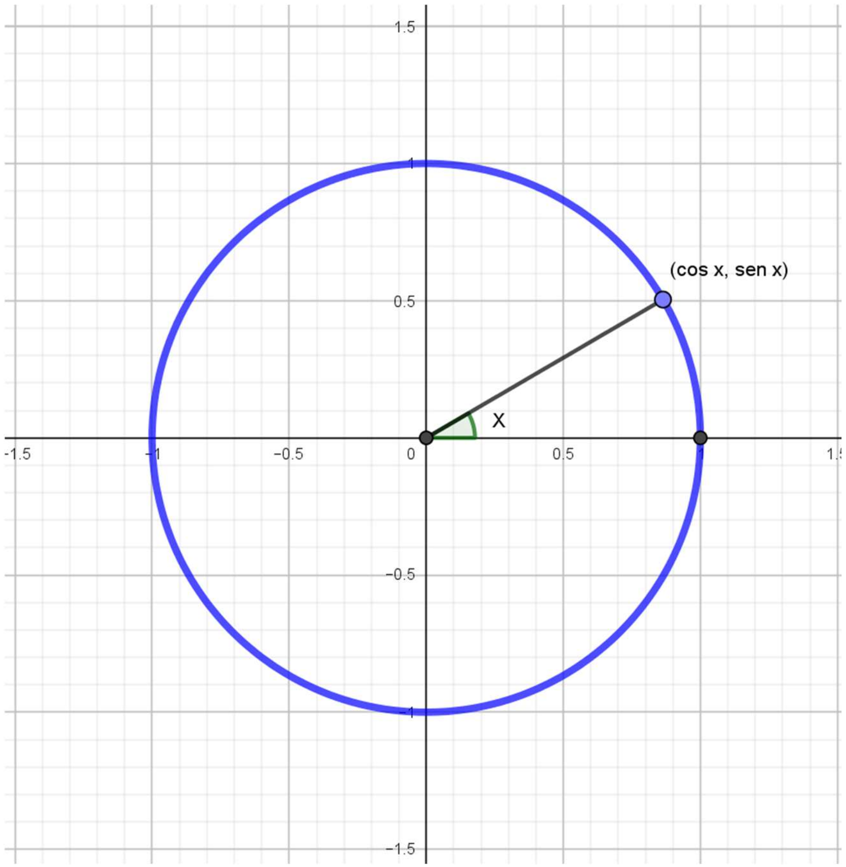
$$\frac{4}{e^{2x}-2+e^{-2x}} - \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{e^{2x}-2+e^{-2x}} = \frac{-e^{2x}+2-e^{-2x}}{e^{2x}-2+e^{-2x}} = -\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{e^{2x}-2+e^{-2x}} = -1.$$

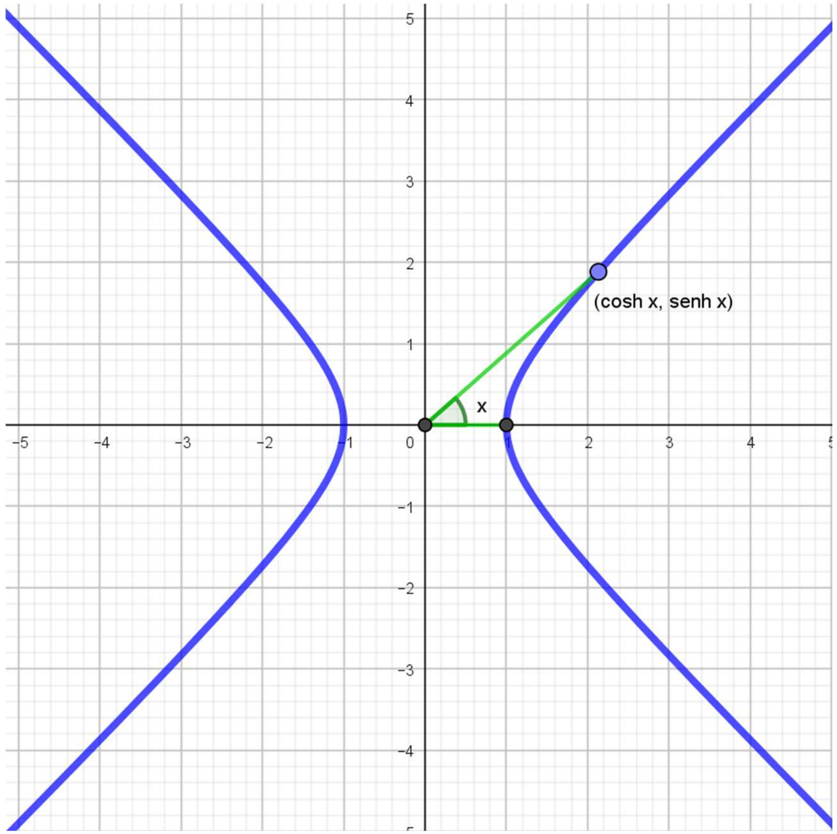
Logo $cossech^2 x = cotgh^2\, x - 1$

Como vimo, as funções hiperbólicas possuem propriedades análogas às funções trigonométricas. Elas possuem as mesmas relações com a hipérbole, que as funções trigonométricas têm com o círculo, por isso o nome de funções hiperbólicas.

A identidade $sen^2 x + cos^2\, x = 1$, implica que o ponto $(\cos x, sen\ x)$ pertence ao círculo $x^2 + y^2 = 1$.

A identidade $cosh^2\, x - senh^2\, x = 1$, implica que o ponto $(\cosh x, senh\ x)$ pertence à hipérbole $x^2 - y^2 = 1$.


(cos x, sen x)
X
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
0.5
-0.5
-1.5


(cosh x, senh x)
x
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

Teorema

i) $D_x tgh\ x = sech^2 x$

ii) $D_x cotgh\ x = -cosech^2 x$

iii) $D_x sech\ x = -sech\ x\ tgh\ x$

iv) $D_x cossech\ x = -cossech\ x\ cotgh\ x$

Demonstração de (i)

$tgh\ x = \frac{sen\quad x}{\cos} \Rightarrow D_x tgh\ x = D_x \frac{senh\ x}{\cosh} = \frac{cosh^2\ x - sen\quad ^2\ x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} =$
$sech^2 x$.

Demonstração de (iii)

$sechx = \frac{1}{\cosh x} \Rightarrow D_x sech\ x = D_x \frac{1}{\cosh x} = \frac{-senh\ x}{\cosh^2 x} = -\frac{1}{\cosh x} . \frac{senh\ x}{\cosh x} =$
$-sech\ x\ tgh\ x$

Como consequência da regra da cadeia, temos o seguinte Teorema:

Teorema:

Se u é uma função de x, derivável, então:

$D_x tgh\, u = sech^2 u\, D_x u$

$D_x cotgh\, u = -cosech^2 u\, D_x u$

$D_x sech\, u = -sech\, u\, tgh\, u\, D_x u$

$D_x cossech\, u = -cossech\, u\, cotgh\, u\, D_x u$

Como

$D_x tgh\, x = sech^2 x > 0$, o gráfico da função tangente hiperbólica é crescente.

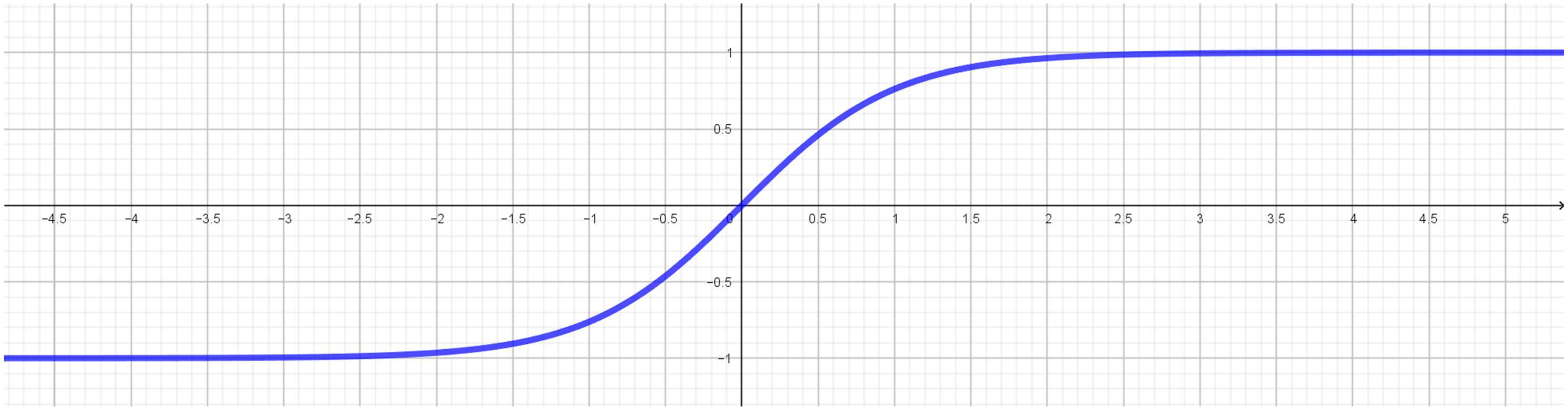
Como $tgh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, e $e^x + e^{-x} > 0$ o sinal de $tgh\, x$ é o sinal de $e^x - e^{-x}$, ou seja, ---------------- 0 +++++++++++

Como a derivada segunda da função tangente hiperbólica é $-2sech^2 x\,.\,tgh\,x$, seu sinal é +++++++++++ 0 ----------------

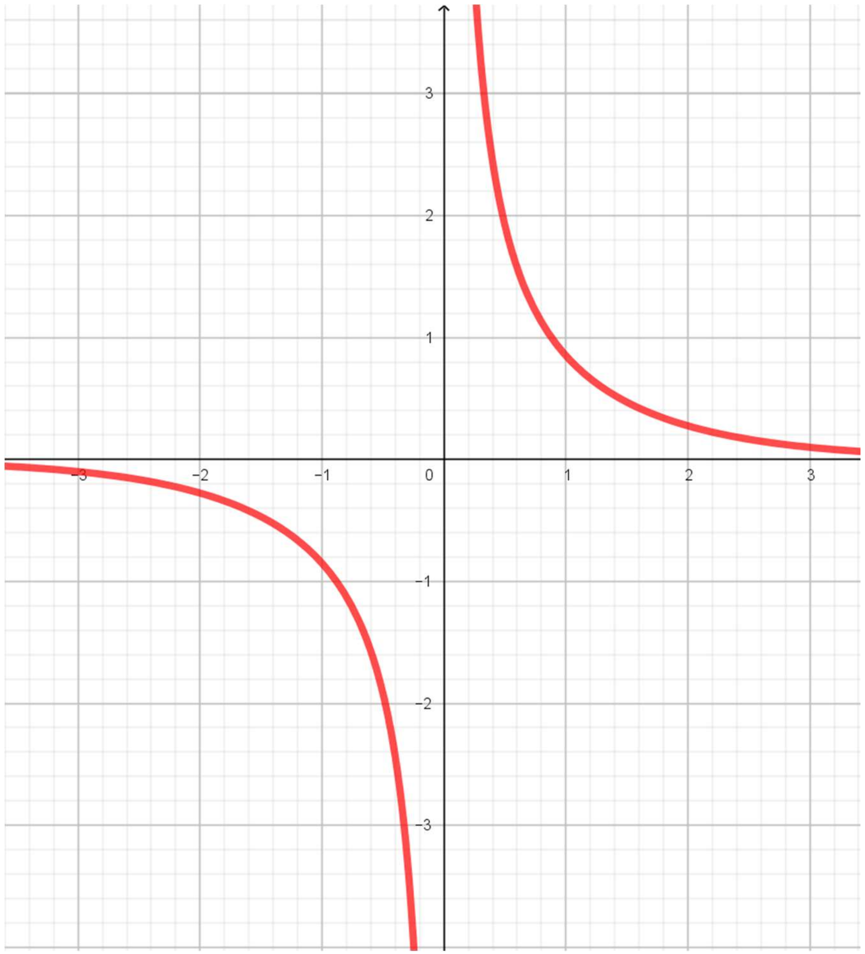
Assim o gráfico da função tangente hiperbólica é côncavo para cima, se $x < 0$ e é côncavo para baixo, se $x > 0$.

Do sinal de $e^x - e^{-x}$, concluímos que $|e^x - e^{-x}| = \begin{cases} e^x - e^{-x}, se \;\; x \geq 0 \\ e^{-x} - e^x, se\; x < 0 \end{cases}$ e daí $\left|\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right| < 1$. Assim $-1 < tgh\,x < 1$

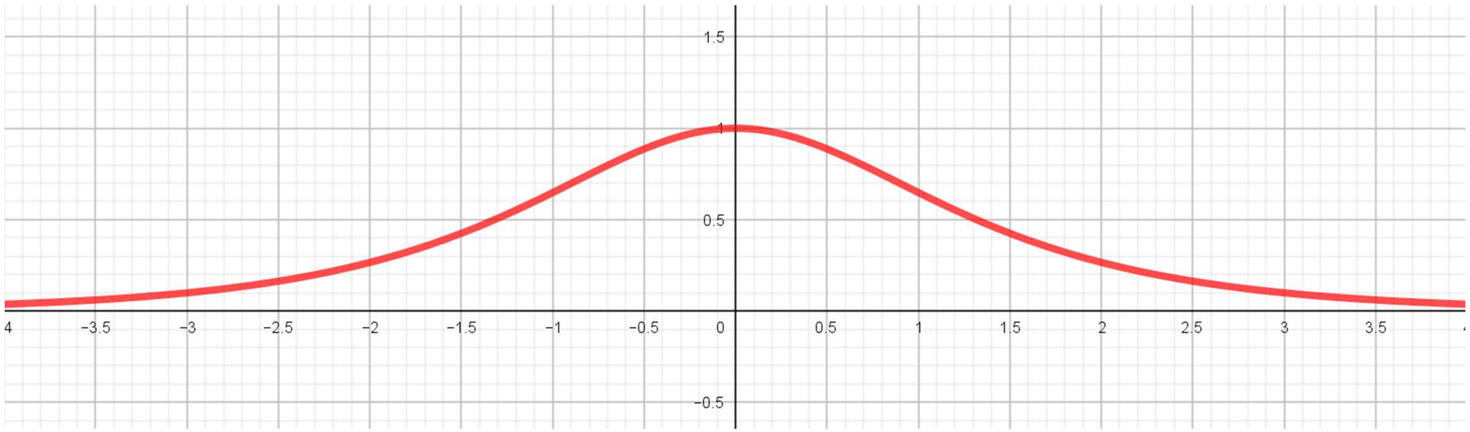
Portanto, o gráfico da tangente hiperbólica é o seguinte:



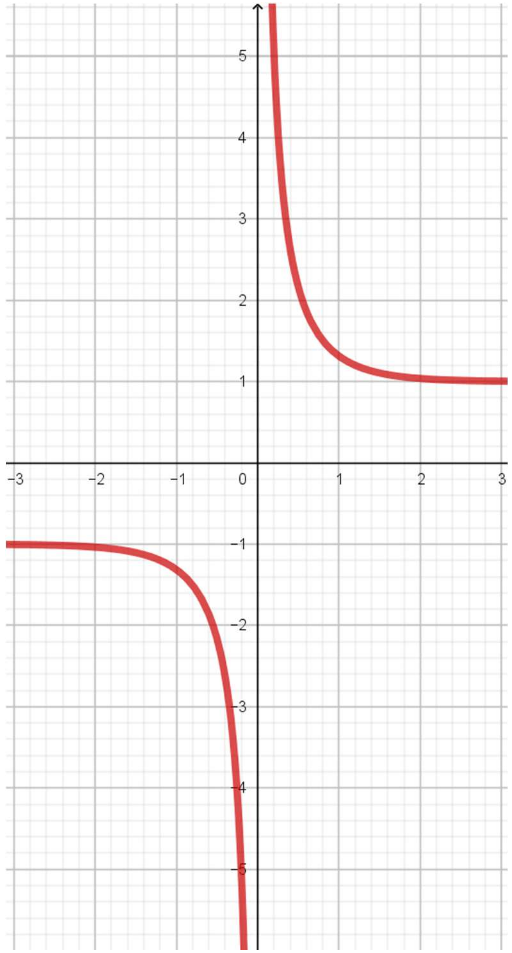
A partir do gráfico da função seno hiperbólica obtemos um esboço do Gráfico da função cossecante hiperbólica



A partir do gráfico da função cosseno hiperbólica obtemos um esboço do gráfico do função da secante hiperbólica



A partir do gráfico da função tangente hiperbólica obtemos um esboço do gráfico da função cotangente hiperbólica



Integrais resultantes das derivadas das funções hiperbólicas

1. $\int \cosh x \; dx = senh \; x + c$
2. $\int \operatorname{senh} x \; dx = cosh \; x + c$
3. $\int \operatorname{sech}^2 x \; dx = tgh \; x + c$
4. $\int \cosh^2 x \; dx = - \; cotgh \; x + c$
5. $\int \operatorname{sech} x \; tgh \; x \; dx = - \; sech \; x + c$
6. $\int \operatorname{cossech} x \; cotgh \; x \; dx = - \; cossech \; x + c$