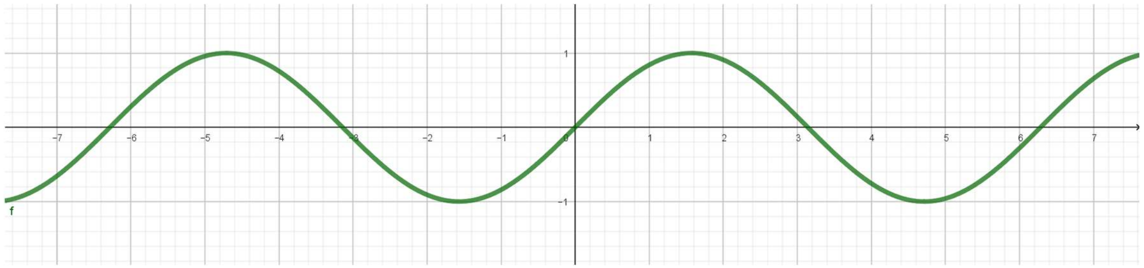
Funções trigonométricas inversas

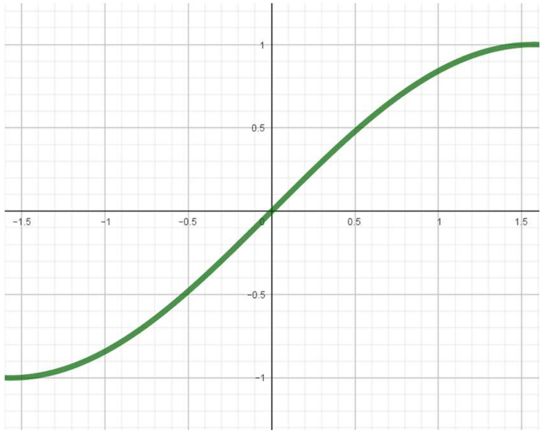
Inversa da função seno

O gráfico de $y = sen\ x$, abaixo, mostra que esta função não é bijetiva e portanto não admite inversa.



Entretanto a função $f\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ definida por $f(x) = sen\ x$ é bijetiva e portanto admite inversa.

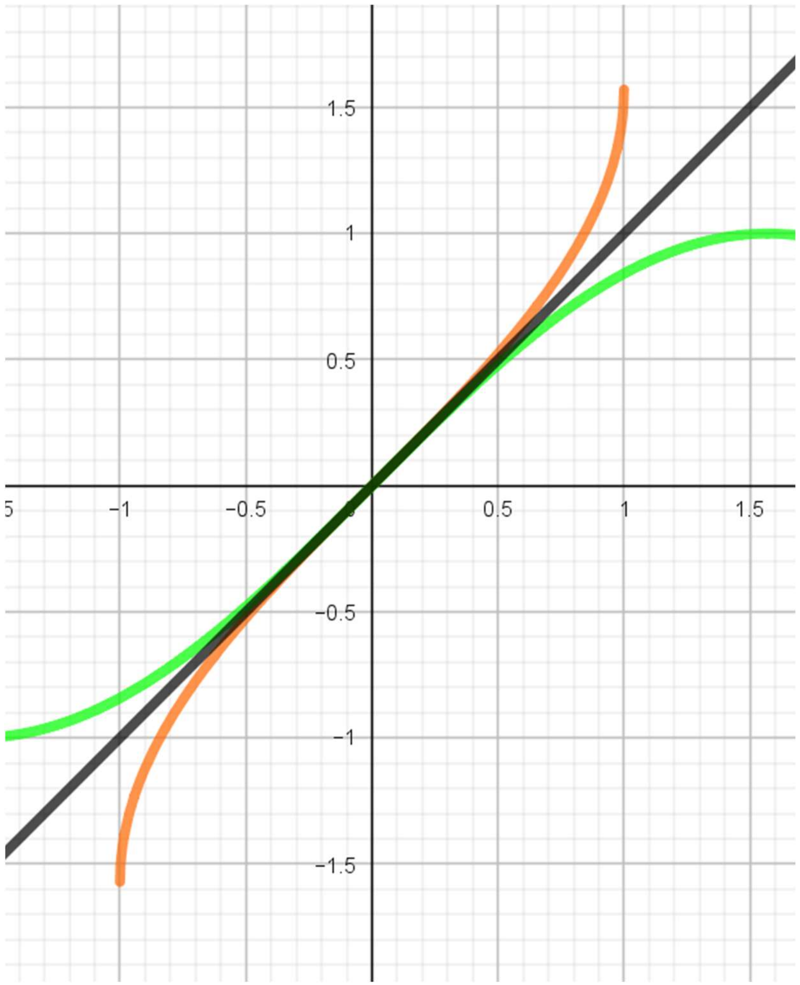
Gráfico de f



A inversa de f é denotada por sen^{-1} ou $arcsen$ e é chamada de inversa da função seno ou arco-seno.

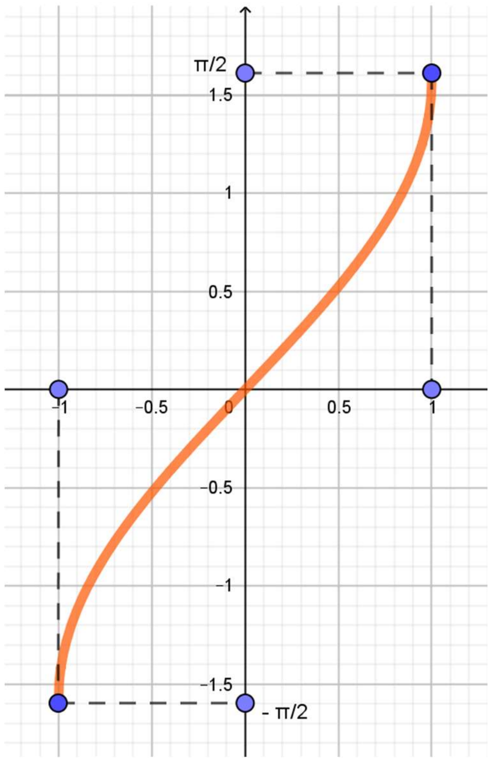
Portanto $arcsen\, x = y \Leftrightarrow sen\, y = x$ e $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

Assim, se $-1 \leq x \leq 1,\ arcsen\, x$ é o número y que pertence ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e tal que $sen\, y = x$.



1.5
1
0.5
−0.5
−1
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5

Gráfico de arcsen x



Observe que o domínio da função arco-seno é o intervalo $[-1,1]$ e a imagem é o intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

De acordo com a definição da função arco-seno, temos:

$$arcsen(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$arcsen\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

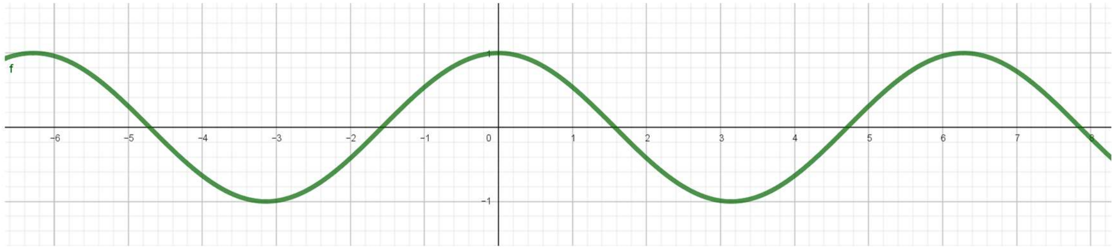
$$arcsen(0) = 0$$

$$arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$arcsen(1) = \frac{\pi}{2}$$

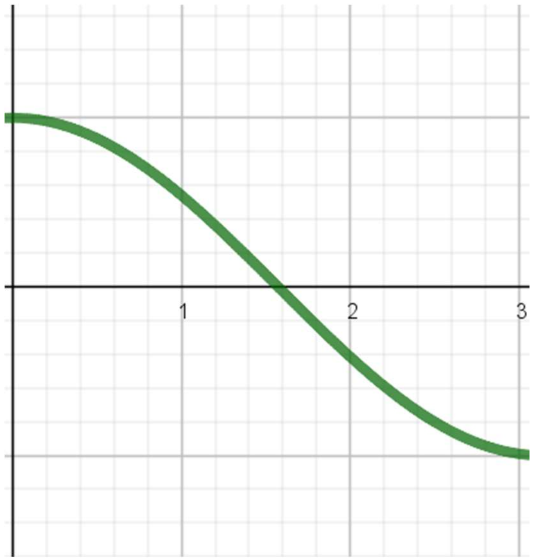
Inversa da função cosseno

O gráfico de $y = cos\ x$, abaixo, mostra que esta função não é bijetiva e portanto não admite inversa.



Entretanto a função $f: [0, \pi] \to [-1,1]$ definida por $f(x) = cos\ x$ é bijetiva e portanto admite inversa.

Gráfico de f



A inversa de f é denotada por cos^{-1} ou $arccos$ e é chamada de inversa da função cosseno ou arco-cosseno.

Portanto $arccos\, x = y \Leftrightarrow cos\, y = x$ e $0 \leq y \leq \pi$

Assim, se $-1 \leq x \leq 1$, $arcsen\, x$ é o número y que pertence ao intervalo $[0, \pi]$ e tal que $cos\, y = x$.

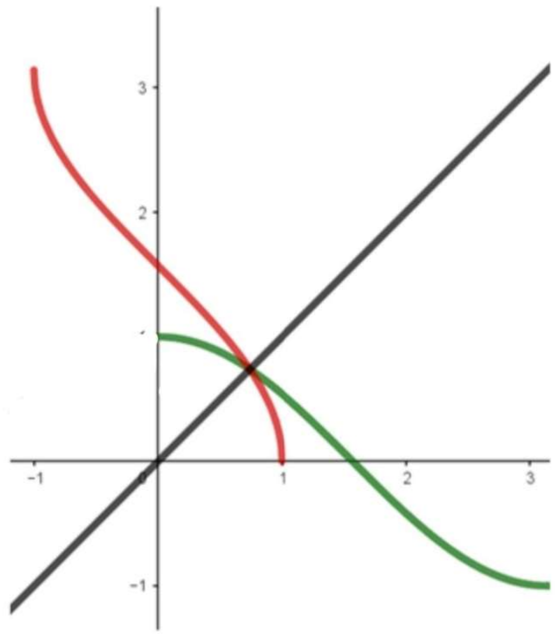
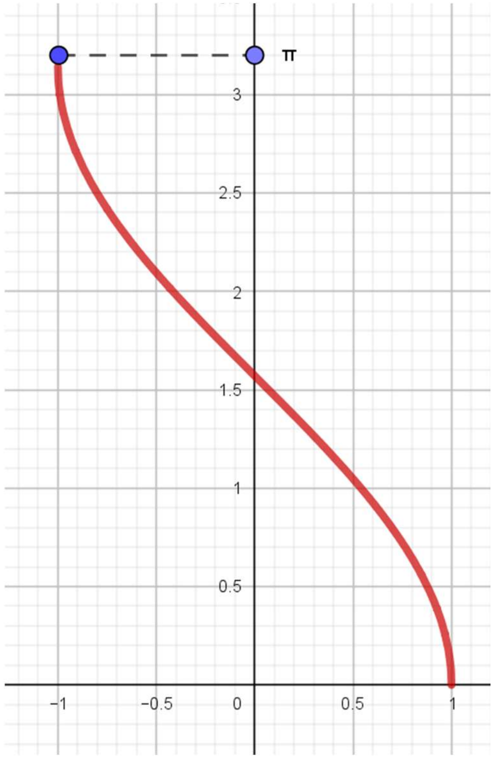

3
2
−1
−1
0
1
2
3

Gráfico de arccos x



Observe que o domínio da função arco-cosseno é o intervalo $[-1,1]$ e a imagem é o intervalo $[0,\pi]$

De acordo com a definição da função arco-cosseno, temos:

$$arccos(-1) = \pi$$

$$arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

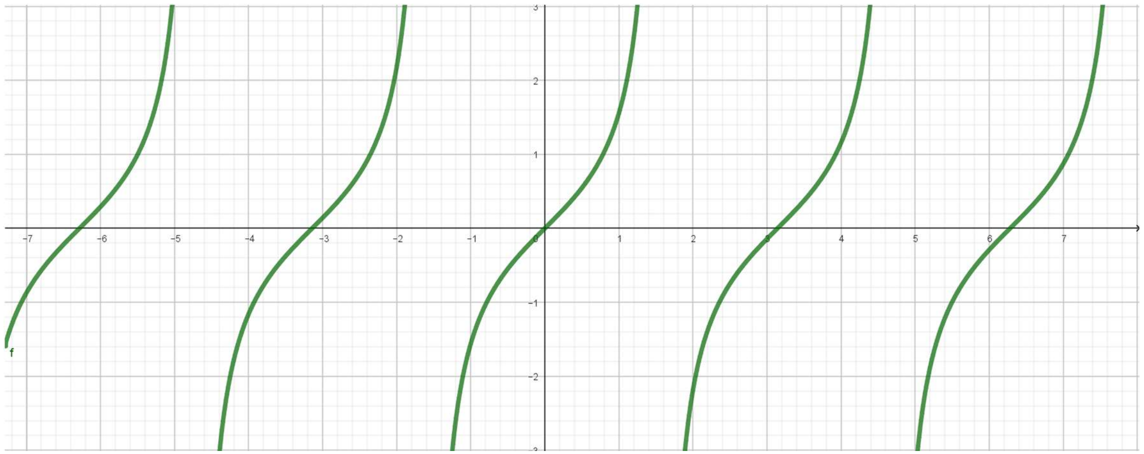
$$arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$arccos(1) = 0$$

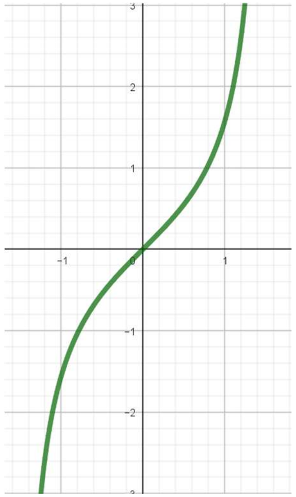
Inversa da função Tangente

O gráfico de $y = tg\ x$, abaixo, mostra que esta função não é bijetiva e portanto não admite inversa.



Entretanto a função $f\colon\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \to R$ definida por $f(x) = tg\ x$ é bijetiva e portanto admite inversa.

Gráfico de f



A inversa de f é denotada por tg^{-1} ou $arctg$ e é chamada de inversa da função tangente ou arco-tangente.

Portanto $arctg\ x = y \Leftrightarrow tg\ y = x$ e $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

Assim, se $x \in R,\ arcsen\ x$ é o número y que pertence ao intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e tal que $tg\ y = x$.

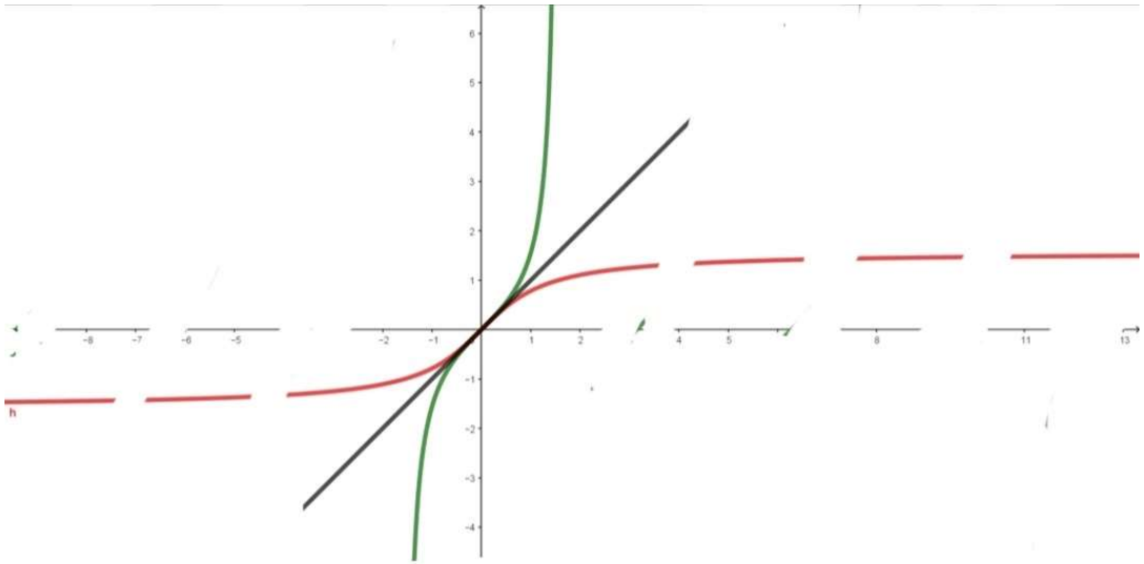
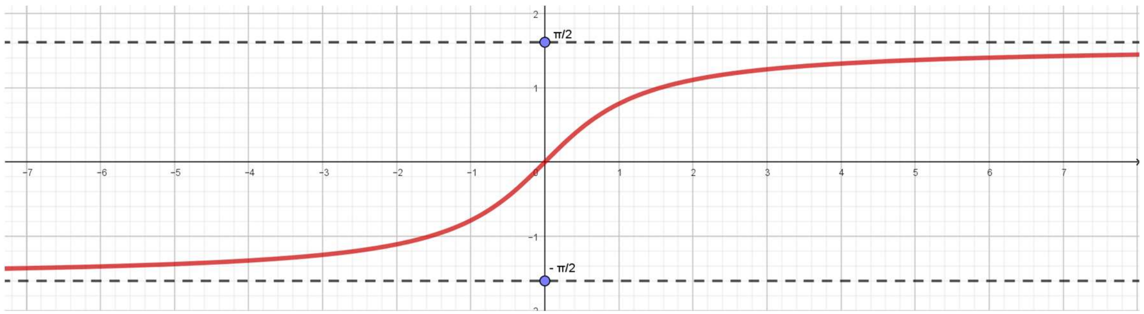


Gráfico de arctg x



Observe que o domínio da função arco-tangente é o é o conjunto de todos os números reais e a imagem é o intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

De acordo com a definição da função arco-tangente, temos:

$arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$

$$arctg\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

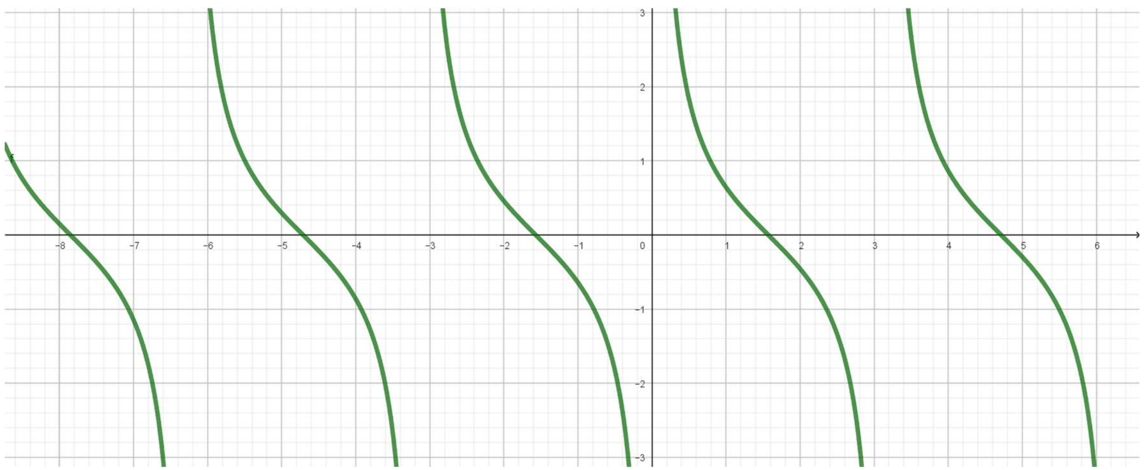
$$arctg(0) = 0$$

$$arctg\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$arctg(1) = \frac{\pi}{4}$$

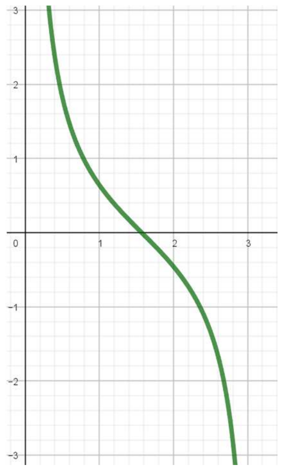
Inversa da função Cotangente

O gráfico de $y = cotg\ x$, abaixo, mostra que esta função não é bijetiva e portanto não admite inversa.



Entretanto a função $f: (0, \pi) \rightarrow R$ definida por $f(x) = cotg\ x$ é bijetiva e portanto admite inversa.

Gráfico de f

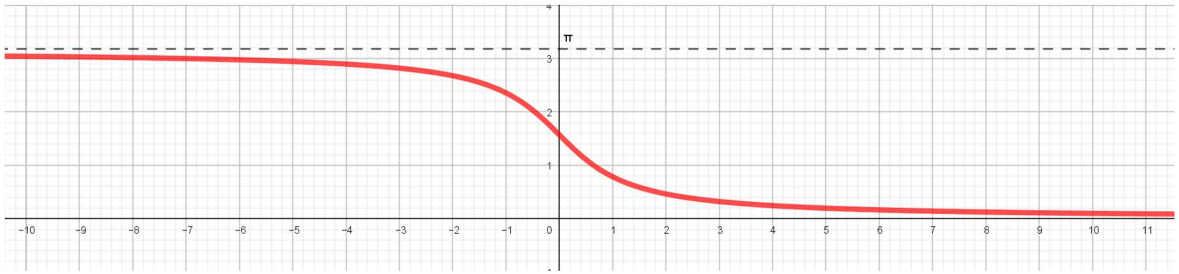


A inversa de f é denotada por $cotg^{-1}$ ou $arccotg$ e é chamada de inversa da função cotangente ou arco-cotangente.

Portanto $arccotg\ x = y \Leftrightarrow cotg\ y = x$ e $0 < y < \pi$

Assim, se $x \in R,\ arccot\ x$ é o número y que pertence ao intervalo $(0, \pi)$ e tal que $cotg\ y = x$.

Gráfico de arccotg x



Observe que o domínio da função arco-cotangente é o é o conjunto de todos os números reais e a imagem é o intervalo $(0, \pi)$

De acordo com a definição da função arco-cotangente, temos:

$$arccotg(-1) = \frac{3\pi}{4}; \quad arccotg(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6};$$

$$arccotg(0) = \frac{\pi}{2}; \; arccotg(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6};$$

$$arccotg(1) = \frac{\pi}{4}$$

Observação

Sabemos que $cotg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = tg\ x$

Daí $cotg\left(\frac{\pi}{2} - arctg\ x\right) = tg\ (arctg\ x) = x$, e então

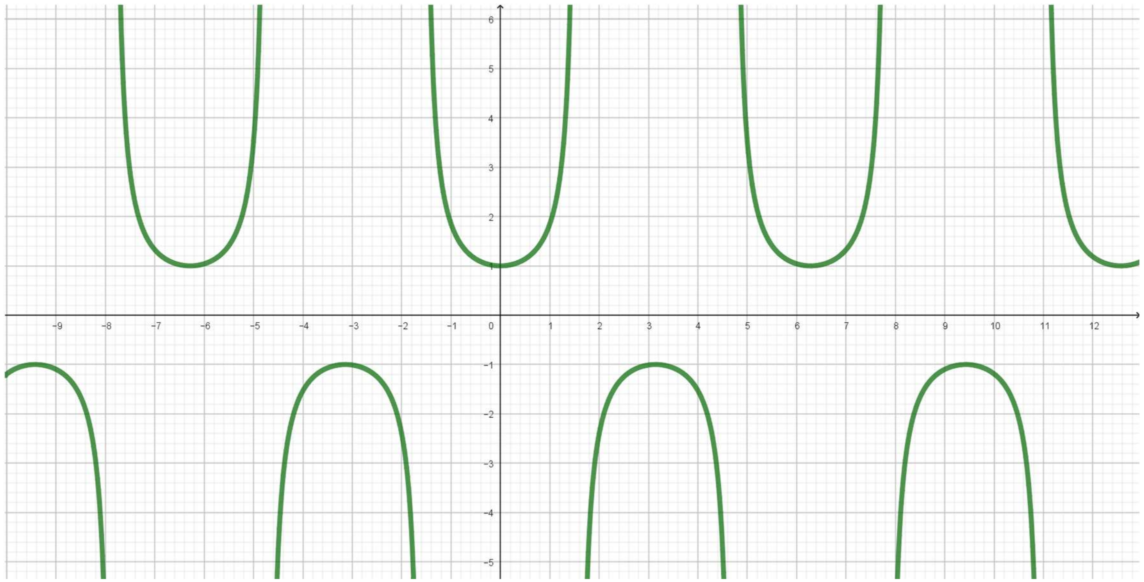
$$arccotg\ \left(cotg\left(\frac{\pi}{2} - arctg\ x\right)\right) = arccotg\ x$$

Assim $\frac{\pi}{2} - arctg\ x = arccotg\ x$

Podemos então definir $arccotg\ x = \frac{\pi}{2} - arctg\ x$

Inversa da função Secante

O gráfico de $y = sec\ x$, abaixo, mostra que esta função não é bijetiva e portanto não admite inversa.



Entretanto a função $f\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \rightarrow (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ definida por $f(x) = sec\ x$ é bijetiva e portanto admite inversa.

A inversa de f é denotada por sec^{-1} ou $arcsec$ e é chamada de inversa da função secante ou arco-secante.

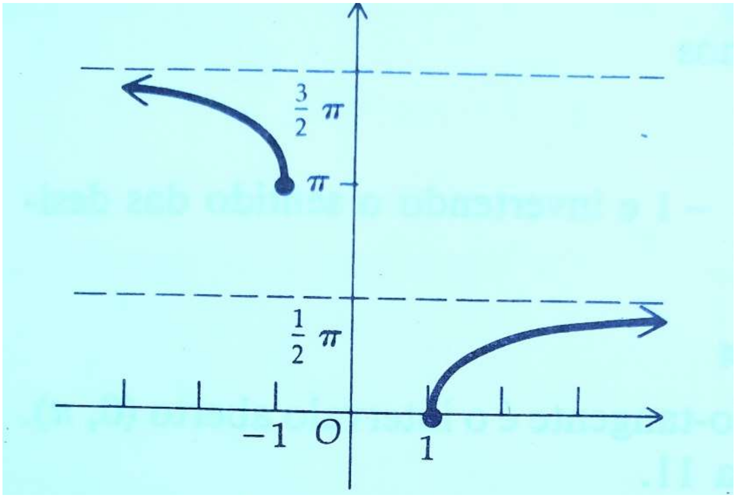
Portanto $arcsec\, x = y \Leftrightarrow sec\, y = x$ e

$y \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

Assim, se

$x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, $arcsec\, x$ é o número y que pertence ao intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup$ $[\pi, \frac{3\pi}{2})$ e tal que $sec\, y = x$.

Gráfico de $\operatorname{arcsec} x$



Observe que o domínio da função arco-secante é $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ e a imagem é $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

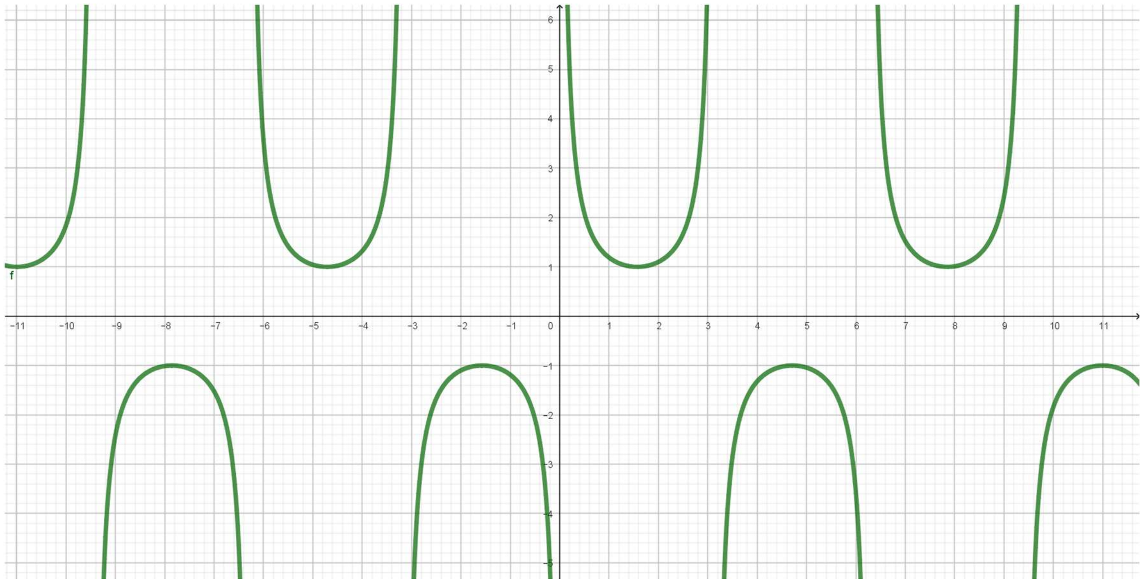
De acordo com a definição da função arco-secante, temos:

$arcsec(-2) = \frac{4\pi}{3}\,; arcsec(-1) = \pi$

$arcsec(1) = 0; arcsec(2) = \frac{\pi}{3}$

Inversa da função Cossecante

O gráfico de $y = cossec\ x$, abaixo, mostra que esta função não é bijetiva e portanto não admite inversa.



Entretanto a função

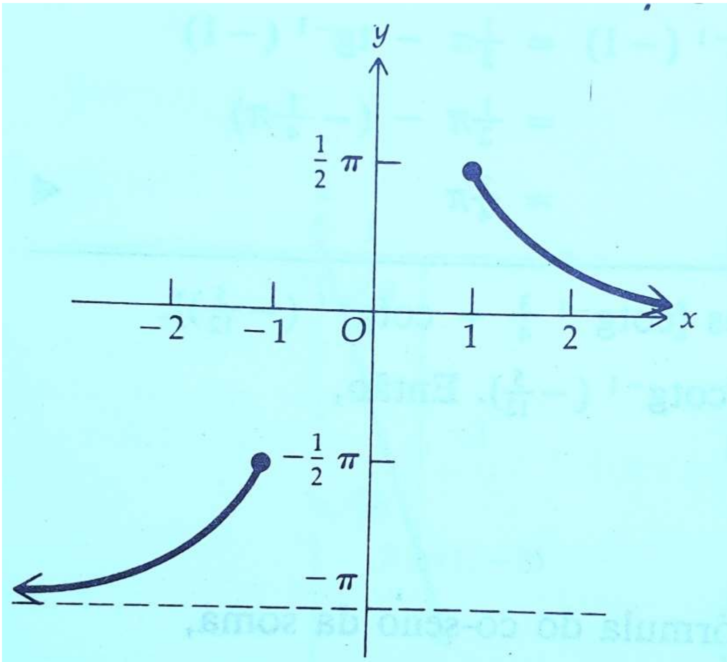
$f\colon \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup (0, \frac{\pi}{2}] \to (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ definida por $f(x) = cossec\ x$ é bijetiva e portanto admite inversa.

A inversa de f é denotada por cosec^{-1} ou $arccosec$ e é chamada de inversa da função cossecante ou arco-cossecante.

Portanto $arccosec\ x = y \Leftrightarrow cosec\ y = x$ e $y \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

Assim, se $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, $arcsec\ x$ é o número y que pertence ao intervalo$\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup (0, \frac{\pi}{2}]$ e tal que $cosec\ y = x$.

Gráfico de $\operatorname{arccosec} x$



Observe que o domínio da função arco-cossecante é $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ e a imagem é $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. De acordo com a definição da função arco-cossecante, temos: $arccosec(-2) = -\frac{5\pi}{6}$; $arccosec(-1) = -\frac{\pi}{2}$; $arccosec(1) = \frac{\pi}{2}$; $arccosec(2) = \frac{\pi}{6}$