UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

BACHARELADO EM ESTATÍSTICA

ANTÔNIO ARTHUR SILVA DE LIMA (508492)

PROF. CIRO NOGUEIRA FILHO

TRABALHO DE CÁLCULO III: DIVERGENTE E ROTACIONAL

FORTALEZA

28/11/2022

1.

a) $F(x,y,z) = xy^2z^2i + x^2yz^2j + x^2y^2zk$

Primeiro, iremos identificar as componentes M, N e R do campo vetorial F:

$M = xy^2z^2$; $N = x^2yz^2$; $R = x^2y^2z$

Logo:

$$\begin{aligned} div\, F &= (xy^2z^2)_X + (x^2yz^2)_Y + (x^2y^2z)_Z \\ &= (y^2z^2) + (x^2z^2) + (x^2y^2) \end{aligned}$$

Agora, iremos calcular o rotacional:

$$\begin{aligned} rot\, F &= [(x^2y^2z)_Y - (x^2yz^2)_Z]i + [(xy^2z^2)_Z - (x^2y^2z)_X]j + [(x^2yz^2)_X - (xy^2z^2)_Y]k \\ &= (2x^2yz - 2x^2yz)i + (2xy^2z - 2xy^2z)j + (2xyz^2 - 2xyz^2)k \\ &= (0)i + (0)j + (0)k \\ &= 0 \end{aligned}$$

b) $F(x,y,z) = e^x i + e^y j + e^z k$

Identificando as componentes: $M = e^x$; $N = e^y$; $R = e^z$

Divergente:

$$\begin{aligned} div\, F &= (e^x)_X + (e^y)_Y + (e^z)_Z \\ &= e^x + e^y + e^z \end{aligned}$$

Rotacional:

$$\begin{aligned} rot\, F &= [(e^z)_Y - (e^y)_Z]i + [(e^x)_Z - (e^z)_X]j + [(e^y)_X - (e^x)_Y]k \\ &= (0-0)i + (0-0)j + (0-0)k \\ &= 0 \end{aligned}$$

c) $F(x,y,z) = zcosyi + xcoszj + ycosxk$

Componentes: $M = zcosy$; $N = xcosz$; $R = ycosx$

Divergente:

$$\begin{aligned} div\ F &= (zcosy)_X + (xcosz)_Y + (ycosx)_Z \\ &= 0+0+0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Rotacional:

$$\begin{aligned} rot\ F &= [(ycosx)_Y - (xcosz)_Z]i + [(zcosy)_Z - (ycosx)_X]j + [(xcosz)_X - (zcosy)_Y]k \\ &= (cosx + xsenz)i + (cosy + ysenx)j + (cosz + zseny)k \end{aligned}$$

d) $F(x,y,z) = ylnxi + zlnyj + xlnzk$

Componentes: $M = ylnx$; $N = zlny$; $R = xlnz$

Divergente:

$$\begin{aligned} div\ F &= (ylnx)_X + (zlny)_Y + (xlnz)_Z \\ &= \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \end{aligned}$$

Rotacional:

$$\begin{aligned} rot\ F &= [(xlnz)_Y - (zlny)_Z]i + [(yln)_Z - (xlnz)_X]j + [(zlny)_X - (ylnx)_Y]k \\ &= (0 - lny)i + (0 - lnz)j + (0 - lnx)k \\ &= -lnyi - lnzj - lnxk \end{aligned}$$

2.

- Incompressíveis: **c)**;

- Irrotacionais: **a)** e **b)**.

3. $F(x,y,z) = f(x)i + g(y)j + h(z)k$, com f, g e h diferenciáveis.

Primeiramente, temos que as componentes do campo vetorial são $M = f(x)$, $N = g(y)$ e $R = h(z)$. Encontraremos agora o rotacional da função.

$$\begin{aligned}
rot\ F &= [h(z)_Y - g(y)_Z]i + [f(x)_Z - h(z)_X]j + [g(y)_X - f(x)_Y]k \\
&= (0-0)i + (0-0)j + (0-0)k \\
&= 0
\end{aligned}$$

Portanto, o campo vetorial $F(x,y,z)$ é *irrotacional*.

4. $F(x,y,z) = f(y,z)i + g(x,z)j + h(x,y)k$.

As componentes do campo vetorial são $M = f(y,z)$, $N = g(x,z)$, e $R = h(x,y)$. Calcularemos então o divergente da função.

$$\begin{aligned}
div\, F &= f(y,z)_X + g(x,z)_Y + h(x,y)_Z \\
&= 0+0+0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Portanto, o campo vetorial $F(x,y,z)$ é *incompressível*.

5.

Vamos supor que exista o campo vetorial espacial $F(x,y,z) = M(x,y,z)i + N(x,y,z)j + R(x,y,z)k$ tal que $rot\ F = xi + yj + zk$. Então, sabemos que $div(rot\ F)$ deve ser igual a 0. Iremos verificar:

$$
\begin{aligned}
div(xi+yj+zk) &= (x)_X+(y)_Y+(z)_Z \\
&= 1+1+1 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Como $div(rot\ F)=3\neq 0$, logo, o campo vetorial espacial $F(x,y,z)$ **não existe**.

6.

Supondo que a função $g(x,y,z)$ exista, sabemos que $rot(\nabla g)=0$. Encontraremos então esse rotacional, tomando como componentes $M=x^2-y$; $N=y^2-z$ e $R=z^2-x$.

$$
\begin{aligned}
rot(\nabla g) &= [(z^2-x)_Y-(y^2-z)_Z]i+[(x^2-y)_Z-(z^2-x)_X]j+ \\
&\quad [(y^2-z)_X-(x^2-y)_Y]k \\
&= (0+1)i+(0+1)j+(0+1)k \\
&= i+j+k
\end{aligned}
$$

Como $rot(\nabla g)=i+j+k\neq 0$, então podemos afirmar que a função $g(x,y,z)$ **não existe**.

7. $F(x,y,z)=xi+yj-2zk$.

Calculando o divergente do campo F:

$$
\begin{aligned}
div\,F &= (x)_X+(y)_Y+(-2z)_Z \\
&= 1+1-2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Calculando o rotacional do campo F:

$$\begin{aligned} rot\ F &= [(-2z)_Y - (y)_Z]i + [(x)_Z - (-2z)_X]j + [(y)_X - (x)_Y]k \\ &= (0-0)i + (0-0)j + (0-0)k \\ &= 0 \end{aligned}$$

Observamos que $div\ F = 0$, $rot\ F = 0$, porém, $F \neq 0$. Portanto, a afirmação "Se $div\ F = 0$ e $rot\ F = 0$, então, $F = 0$" é **falsa**.