LISTA · DERIVADAS PARCIAIS DE ORDENS SUPERIORES

01 Em cada caso, confirme a igualdade entre as derivadas parciais mistas:

ⓐ $f(x,y)=x^4y^3-y^3+x^2$; ⓑ $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$; ⓒ $f(x,y)=\cos(x^2y)$;

ⓓ $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$; ⓔ $f(x,y)=e^x \operatorname{sen} y$; ⓕ $f(x,y)=e^x+x\ln y+y\ln x$;

02 Em cada caso, calcule a derivada parcial de ordem superior, indicada, para a função apresentada:

ⓐ f_{xyx} para $f(x,y)=x^4y^2-x^3y$; ⓑ f_{yxyx} para $f(x,y)=\operatorname{sen}(2x+5y)$;

ⓒ f_{xyz} para $f(x,y,z)=e^x\cos(yz)$; ⓓ f_{yxzz} para $f(x,y,z)=xy^2z^3+\operatorname{senh}(x\sqrt{z})$;

03 Em cada caso, decida se existe uma função real $f(x,y)$ satisfazendo às condições dadas. Se não, justifique. Se sim, apresente uma função:

ⓐ com $f_x=xy$ e $f_y=x^2$; ⓑ com $f_x=2xy$ e $f_y=x^2$;

04 Suponha que as hipóteses do Teorema de Clairaut são sempre satisfeitas para todas as funções envolvidas. Então, mostre que:

$$f_{xyy}=f_{yxy}=f_{yyx};$$

05 Lembrando que você pode, pelo Teorema de Clairaut, escolher uma ordem adequada para cada parcela, indique, em cada caso, um caminho mais certo para mostrar que a derivada parcial de ordem superior solicitada, para a função dada, é igual à zero:

ⓐ f_{xyz}, para $f(x,y,z)=\sqrt{1+xz}+\sqrt{1-xy}$; ⓑ f_{zwxywz}, para $f(x,y,z,w)=\dfrac{x^2+e^yw}{3y^2+\ln(1+z^2)}$;

06 Em cada caso, verifique se a função real $u(x,t)$ dada, satisfaz à equação unidimensional da onda: $u_{tt}=a^2u_{xx}$, $a>0$; devida ao matemático D'Alembert (1717-1783):

ⓐ $u(x,t)=(x-at)^6+(x+at)^6$; ⓑ $u(x,t)=\operatorname{sen}(a\omega t)\operatorname{sen}(\omega x)$, $\omega\in\mathbb{R}$;

07 Em cada caso, verifique se a função real $u(x,t)$ dada, satisfaz à equação unidimensional do calor: $u_t=a^2u_{xx}$, $a>0$; devida ao matemático Fourier (1768-1830):

ⓐ $u(x,t)=e^{-a^2k^2t}\cdot\cos(kx)$, $k\in\mathbb{R}$; ⓑ $u(x,t)=\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cdot e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{L^2}t}$, $n>0$ e $L>0$;

(08) Em cada caso, verifique se a função real $u(x,y)$ dada, satisfaz à equação bidimensional de Laplace (1749-1827): $u_{xx}+u_{yy}=0$;

(a) $u(x,y)=e^{x}\cos y+e^{y}\operatorname{sen} x$; (b) $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)+2\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$;

(09) Verifique se a função real $u(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ satisfaz à equação tridimensional de Laplace: $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$;

(10) Mostre que se $c^2=a^2+b^2$ então a função real $u(x,y,z)=e^{ax+by}.\operatorname{sen}(cz)$, satisfaz à equação tridimensional de Laplace;

(11) Mostre que se $u(x,y)$ e $v(x,y)$ satisfazem à equação bidimensional de Laplace, então a função real $w(x,y)=u(x,y)+v(x,y)$ também satisfaz à mesma equação;

(12) Enuncie e demonstre um resultado análogo ao da questão anterior para duas funções reais, de três variáveis reais;

(13) Diz-se que $u(x,y)$ e $v(x,y)$ satisfazem às equações de Cauchy (1789-1857) - Riemann (1826-1866), quando: $u_x=v_y$ e $u_y=-v_x$. Então, em cada caso, verifique se $u(x,y)$ e $v(x,y)$, dadas, satisfazem às equações de Cauchy-Riemann:

(a) $u(x,y)=e^{x}\cos y$; $v(x,y)=e^{x}\operatorname{sen} y$; (b) $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$; $v(x,y)=2\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$;

(14) Sejam $f(x)$ e $g(t)$ funções reais satisfazendo, respectivamente, às equações diferenciais $f''(x)+\lambda^2 f(x)=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$, e $g''(t)+a^2\lambda^2 g(t)=0$, $a>0$. Então, verifique se a função real $u(x,t)=f(x)g(t)$ satisfaz à equação de D'Alembert;

(15) Sejam $f(x)$ e $g(t)$ funções reais satisfazendo, respectivamente, às equações diferenciais $f''(x)+\lambda^2 f(x)=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$, e $g'(t)+a^2\lambda^2 g(t)=0$, $a>0$. Então, verifique se a função real $u(x,t)=f(x)g(t)$ satisfaz à equação de Fourier;

(16) Mostre que se $u(x,y)$ e $v(x,y)$ satisfazem às equações de Cauchy-Riemann, bem como as hipóteses do Teorema de Clairaut, então $u(x,y)$ e $v(x,y)$ também satisfazem à equação bidimensional de Laplace.