2.10. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição da variável aleatória $X \sim Bernoulli(\theta)$. Obtenha o **ENVVUM** para $g(\theta) = \theta(1-\theta)$.

Solução: Foi mostrado em sala de aula que a família Bernoulli pertence à família exponencial. Assim

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

é suficiente e completa para θ

Devemos procurar $h(S)$ de sorte que

$$E[h(S)] = \theta(1-\theta) = \sigma^2 = V(X).$$

Já sabemos que

$$E(S^2) = \theta(1-\theta),$$

Note que

$$(n-1)S^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i - n\bar{X}^2$$

pois na família Bernoulli temos:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad X_i = 0, 1.$$

$$(n-1)S^2 = n\bar{X} - n\bar{X}^2 = n\bar{X}\left[1 - \bar{X}\right].$$

$$S^2 = \frac{n\bar{X}\left[1-\bar{X}\right]}{n-1} = \frac{S\left[n-S\right]}{n(n-1)}$$