Universidade Federal do Ceará
Centro de Ciências
Departamento de Estatística e Matemática Aplicada
Professor: Maurício Mota

1. Vamos achar os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros μ e σ^2

   baseados em uma amostra aleatória de tamanho n de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
   A função de verossimilhança é dada por:

$$L(\mu, \sigma^2) = (2\pi)^{-n/2} \, (\sigma^2)^{-n/2} \, \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \, \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \right).$$

   O logaritmo da função de verossimilhança é dado por:

$$l(\theta) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \, \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2.$$

   Vamos calcular as derivadas parciais de primeira ordem:

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu}{\sigma^2} = n \, \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma^2}.$$

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = n \, \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma^2}. \tag{1}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \, \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2.$$

   Lembrando que:

$$\left[\log(\sigma^2)\right]' = \frac{1}{\sigma^2} \quad e \quad \left[(\sigma^{-2})\right]' = -\frac{1}{\sigma^4}.$$

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 - n\sigma^2}{2\sigma^4}. \tag{2}$$

Vamos calcular as derivadas parciais de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \mu^2} = -\,\frac{n}{\sigma^2}. \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \mu\,\partial \sigma^2} = -n\,\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma^4}. \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial (\sigma^2)^2} = \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma^6}, \tag{5}$$

Lembrando que

$$\left[\frac{1}{\sigma^4}\right]' = \left[(\sigma^2)^{-2}\right]' = (-2)(\sigma^2)^{-3} = -2\,\frac{1}{\sigma^6}.$$

De

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = n\,\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma^2} = 0$$

temos

$$\mu = \bar{x}.$$

De

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma^2} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - n\sigma^2}{2\sigma^4} = 0$$

temos

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - n\sigma^2 = 0$$

lembrando que $\mu = \bar{x}$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 - n\sigma^2 = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}.$$

Precisamos verificar se o ponto crítico $(\bar{x}, \hat{\sigma}^2)$ obtido é ponto de máximo relativo. Vamos formar uma matriz com as derivadas parciais de segunda ordem.

$$H(\mu, \sigma^2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l}{\partial \mu^2} & \dfrac{\partial^2 l}{\partial \mu \, \partial \sigma^2} \\ \dfrac{\partial^2 l}{\partial \mu \, \partial \sigma^2} & \dfrac{\partial^2 l}{\partial (\sigma^2)^2} \end{bmatrix}.$$

Assim

$$H(\mu, \sigma^2) = \begin{bmatrix} -\frac{n\bar{x}}{\sigma^2} & -n\,\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma^4} \\ -n\,\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma^4} & \frac{n}{2\sigma^4} - \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{\sigma^6} \end{bmatrix}.$$

Logo

$$H_{12}(\bar{x}, \hat{\sigma}^2) = H_{21}(\bar{x}, \hat{\sigma}^2) = -n\,\frac{\bar{x} - \bar{x}}{\hat{\sigma}^4} = 0.$$

$$H_{22}(\bar{x}, \sigma^2) = \frac{n}{2\hat{\sigma}^4} - \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{\hat{\sigma}^6}$$

$$H_{22}(\bar{x}, \hat{\sigma}^2) = \frac{n}{2\hat{\sigma}^4} - \frac{n\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^6} = \frac{n}{2\hat{\sigma}^4} - \frac{n}{\hat{\sigma}^4} = -\frac{n}{2\hat{\sigma}^4} < 0$$

Quanto a

$$H_{11}(\bar{x}, \hat{\sigma}^2) = -\frac{n}{\hat{\sigma}^2} < 0$$

Assim

$$H(\bar{x}, \hat{\sigma}^2) = \begin{bmatrix} -\frac{n}{\hat{\sigma}^2} & 0 \\ 0 & -\frac{n}{2\hat{\sigma}^2} \end{bmatrix}.$$

O determinante dessa matriz vale:

$$\Delta = \frac{n^2}{2\hat{\sigma}^4} > 0.$$

Dizemos que (x_0, y_o) é um ponto de máximo relativo de $f(x, y)$ quando

$$\Delta(x_0, y_0) > 0$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_o) < 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_o) < 0.$$

Veja que atendemos as suposições.

Logo nossos estimadores de MV são:

$$\hat{\mu}_{MV} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n},$$

$$\hat{\sigma}^2_{MV} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n}.$$