Integração das funções racionais por frações parciais

Uma função racional é um quociente de dois polinômios. Se o grau do numerador for maior ou igual que o grau do denominador, fazemos a divisão e então obtemos a soma de um polinômio com uma função racional, cujo grau do numerador é menor que o denominador.

Por exemplo:

$$f(x) = \frac{x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 1}{x^2 + 2x + 1} =$$

$$x^2 + x - 8 + \frac{15x + 9}{x^2 + 2x + 1}$$

Em geral estaremos interessados em calcular integrais de funções racionais $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, onde o grau de $p(x)$ é menor que o grau de $q(x)$. Para isto precisamos escrever $\frac{p(x)}{q(x)}$ como soma de frações parciais. Os denominadores dessas frações parciais são obtidos fatorando $q(x)$ em produto de polinômios lineares e polinômios quadráticos que não possuem raiz real. Vamos estudar separadamente os vários casos de fatoração de $q(x)$.

1º Caso

$q(x)$ se fatora em polinômios lineares sem repetição, ou seja,

$$q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \dots (a_nx + b_n)$$

Neste caso, escrevemos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx+b_n},$$

Onde $A_1, A_2, \dots, A_n$ são constantes a serem determinadas.

Exemplo:

Calcule $\int \frac{x+2}{x^2-3x+2} dx$

$$\frac{x+2}{x^2-3x+2} = \frac{x+2}{(x-1)(x-2)}$$

$$\frac{x+2}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A-B}{(x-1)(x-2)}$$

Então $\begin{cases} A + B = 1 \\ -2A - B = 2 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, obtemos $A = -3$ e $B = 4$.

Então $\frac{x+2}{x^2-3x+2} = -\frac{3}{x-1} + \frac{4}{x-2}$ e

$$\int \frac{x+2}{x^2-3x+2} dx = -\int \frac{3}{x-1} dx + \int \frac{4}{x-2} dx =$$

$$-3ln|x-1| + 4ln|x-2| + c$$

2º Caso

$q(x)$ se fatora em polinômios lineares e alguns se repetem.

Suponha que $(a_i x + b_i)$ se repete k vezes.

Então, correspondendo a esse fator teremos uma soma de k frações parciais

$$\frac{A_1}{a_i x+b_i} + \frac{A_2}{(a_i x+b_i)^2} + \cdots + \frac{A_{k-1}}{(a_i x+b_i)^{k-1}} + \frac{A_k}{(a_i x+b_i)^k} \ .$$

Onde $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, A_k$ são constantes a serem determinadas.

<u>Exemplo:</u>

Calcule $\int \frac{5x^3-12x^2+12x-}{x(x-1)^3}\,dx$

$$\frac{5x^3-12x^2+12x-4}{(x-1)^3 x} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x} =$$

$$\frac{Ax(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx+D(x-1)^3}{(x-1)^3x} =$$

$$\frac{A(x^3-2x^2+x)+B\left(x^2-x\right)+Cx+D(x^3-3x^2+3x-1)}{(x-1)^3x} =$$

$$\frac{(A+D)x^3+(-2A+B-3D)x^2+(A-B+C+3D)x-D}{(x-1)^3x} =$$

Então

$$\begin{cases} A + D = 5 \\ -2A + B - 3D = -12 \\ A - B + C + 3D = 12 \\ -D = -4 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos $D = 4$

$A + D = 5 \Rightarrow A + 4 = 5 \Rightarrow A = 1$

$-2A + B - 3D = -12 \Rightarrow -2 + B - 12 = -12 \Rightarrow B = 2$

$$A - B + C + 3D = 12 \Rightarrow 1 - 2 + c + 12 = 12 \ \Rightarrow C = 1$$

Então

$$\frac{5x^3 - 12x^2 + 12x - 4}{(x-1)^3 x} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{4}{x}$$

Portanto

$$\int \frac{5x^3-12x^2+12x-4}{x(x-1)^3} dx = \int \frac{1}{x-1} dx + 2\int \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int \frac{1}{(x-1)^3} dx + 4\int \frac{1}{x} dx =$$

$$ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + 4ln|x| + c =$$

$$ln|x^4(x-1)| - \frac{2}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + c$$

3º Caso

Na fatoração de $q(x)$ aparecem polinômios quadrático que não se repetem.

A cada fator quadrático $ax^2 + bx + c$ corresponde uma fração parcial da forma $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$

<u>Exemplo:</u>

Calcule $\int \frac{3x^2+2x+3}{(x^2+x+3)x} dx$

$$\frac{3x^2+2x+3}{(x^2+x+3)x} = \frac{Ax+B}{(x^2+x+3)} + \frac{C}{x} = \frac{Ax^2+Bx+C\quad{}^2+Cx+3C}{(x^2+x+3)x} = \frac{(A+C)x^2+(B+C)x+3C}{(x^2+x+3)x}$$

Então $\begin{cases} A + C = 3 \\ B + C = 2 \\ \quad 3C = 3 \end{cases}$

$$3C = 3 \Rightarrow C = 1$$

$$B + C = 2 \Rightarrow B + 1 = 2 \Rightarrow B = 1$$

$$A + C = 3 \Rightarrow A + 1 = 3 \Rightarrow A = 2$$

Então

$$\frac{3x^2+2x+3}{(x^2+x+3)x} = \frac{2x+1}{x^2+x+3} + \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{3x^2+2x+3}{(x^2+x+3)x} dx = \int \frac{2x+1}{x^2+x+3} dx + \int \frac{1}{x} dx = ln|x^2 + x + 3| + ln|x| + c =$$

$$ln|x^3 + x^2 + 3x| + c$$

4º Caso

Na fatoração de $q(x)$ aparecem polinômios quadráticos e alguns se repetem.

Suponha que $(a_i x^2 + b_i x + c)$ se repete k vezes.

Então, correspondendo a esse fator teremos uma soma de k frações parciais

$$\frac{A_1x+B_1}{a_ix^2+b_ix+c} + \frac{A_2x+B_2}{(a_ix^2+b_ix+c)^2} + \cdots + \frac{A_{k-1}x+B_{k-1}}{(a_ix^2+b_ix+c)^{k-1}} + \frac{A_kx+B_k}{(a_ix^2+b_ix+c)^k} \; .$$

<u>Exemplo:</u>

Calcule $\int \frac{2x^4+3x^2-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}dx$

$$\frac{2x^4+3x^2-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1} = \frac{2x^4+3x^2-x}{(x-1)(x^4+2x^2+1)} = \frac{2x^4+3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)^2} =$$

$$\frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} = \frac{A(x^2+1)^2+(Bx+C)\left(x^2+1\right)(x-1)+(Dx+E)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)^2} =$$

$$\frac{Ax^4+2Ax^2+A+Bx^4-Bx^3+Bx^2-Bx+Cx^3-Cx^2+Cx-C+Dx^2-Dx+Ex-E}{(x-1)(x^2+1)^2}=$$

$$\frac{(A+B)x^4+(-B+C)x^3+(2A+B-C+D)x^2+(-B+C-D+E)x+A-C-E}{(x-1)(x^2+1)^2}$$

Então

$$\begin{cases} A+B=2 \\ -B+C=0 \\ 2A+B-C+D=3 \\ -B+C-D+E=-1 \\ A-C-E=0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $A=B=C=D=1$ e $E=0$

Assim

$$\frac{2x^4+3x^2-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}=\frac{1}{(x-1)}+\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{x}{(x^2+1)^2}$$ e

$$\int \frac{2x^4+3x^2-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)}\,dx + \int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx + \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx =$$

$$\int \frac{1}{(x-1)}\,dx + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx + \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

Resolvendo cada uma das integrais, temos

i) $\int \frac{1}{(x-1)}\,dx = ln|x-1| + c_1$

ii) $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$

Fazendo $u = x^2 + 1$, temos $du = 2x\,dx$, e então

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\,ln|u| + c_2 = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c_2$$

iii) $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = arctg\ x + c_3$

iv) $\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$

Fazendo $u = x^2 + 1$, temos $du = 2x\,dx$, e então

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2}\,du = -\frac{1}{2u} + c_4 = -\frac{1}{2(x^2+1)} + c_4$$

Portanto,

$$\int \frac{2x^4+3x^2-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx =$$

$$ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + arctg\ x - \frac{1}{2(x^2+1)} + c =$$

$$ln\left(|x-1|\sqrt{x^2+1}\right) + arctg\ x - \frac{1}{2(x^2+1)} + c$$