Integrais impróprias

Integrais com intervalo de integração infinito

Definição:

Se f for contínua para todo $x \geq a$, então

$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$, se este limite existir.

Exemplo:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b \to +\infty} [-e^{-x}]_0^b = \lim_{b \to +\infty} \left(-e^{-b} + 1\right) = 1$$

Definição:

Se f for contínua para todo $x \leq b$, então

$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$, se este limite existir.

Exemplo:

$$\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{(x+2)^2} = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{2} \frac{dx}{(x+2)^2} = \lim_{a \to -\infty} \left[-\frac{1}{x+2}\right]_{a}^{2} = \lim_{a \to -\infty} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{a+2}\right) = -\frac{1}{4}$$

Definição:

Se f for contínua para todo x e c for um número real qualquer, então

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b \to +\infty} \int_{c}^{b} f(x)dx$, se estes limites existirem.

Exemplo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{x^2+1} + \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$\lim_{a \to -\infty} [arc\ tg\ x]_a^0 + \lim_{b \to +\infty} [arc\ tg\ x]_0^b =$$

$$\lim_{a \to -\infty} (arc\ tg\ 0 - arc\ tg\ a) + \lim_{b \to +\infty} (arc\ tg\ b - arc\ tg\ 0) =$$

$$\lim_{a \to -\infty} (-arc\ tg\ a) + \lim_{b \to +\infty} (arc\ tg\ b) =$$

$$-\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Integrais de funções com descontinuidade no integrando.

Definição:

Se f for contínua em $[a, b)$, e descontínua em b então

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$, se este limite existir.

Exemplo:

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{t \to 0^-} \int_{-1}^{t} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{t \to 0^-} \left[\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}\right]_{-1}^{t} = \lim_{t \to 0^-} \left(\frac{3t^{\frac{2}{3}}}{2} - \frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

Definição:

Se f for contínua em $(a, b]$, e descontínua em a então
$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx$, se este limite existir.

Exemplo:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{t \to 0^+} \left[\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}\right]_t^1 = \lim_{t \to 0^+} \left(\frac{3}{2} - \frac{3t^{\frac{2}{3}}}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

A integral imprópria $\int_a^b f(x)dx$ é chamada convergente se o limite correspondente existir e é chamada divergente se o limite correspondente não existir.

Definição:
Se $a < c < b$ e f for contínua em $[a, b]$, exceto em c então
$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{s \to c^+} \int_s^b f(x)dx$, se estes limites existirem.

Exemplo:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{t \to 0^-} \int_{-1}^{t} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \lim_{s \to 0^+} \int_{s}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{t \to 0^-} \left[\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}\right]_{-1}^{t} + \lim_{s \to 0^+} \left[\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}\right]_{s}^{1} =$$

$$\lim_{t \to 0^-} \left(\frac{3t^{\frac{2}{3}}}{2} - \frac{3}{2}\right) + \lim_{s \to 0^+} \left(\frac{3}{2} - \frac{3s^{\frac{2}{3}}}{2}\right) = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

Exemplo:

Verifique se a integral $\int_0^{\pi/2} secx\, dx$ é convergente ou divergente.

Solução:

$$\int_0^{\pi/2} secx\, dx = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \int_0^t secx\, dx = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} ln|\sec x + tgx| \Big|_0^t =$$

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} (ln|\sec t + tgt| - ln|\sec 0 + tg0|) =$$

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} (ln|\sec t + tgt| - ln1) = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} (ln|\sec t + tgt|) = +\infty$$

Portanto a integral $\int_0^{\pi/2} secx\, dx$ é divergente.