CC0288 - Inferência Estatística I

Sétima Verificação de Aprendizagem - 30/06/2023.

Prof. Maurício

aluno:____

A prova tem 3 questões valendo 11 pontos.

1. (Valor 2 pontos) Considere as seguintes afirmações acerca de um teste de hipótese:
   Coloque V ou F conforme a veracidade da afirmação.

   a. (**F**) O erro do tipo I é definido como a probabilidade de não rejeitar a hipótese nula quando a hipótese nula é falsa.

   Justificativa: O erro do tipo I ocorre quando rejeitamos H_0 sendo ela verdadeira.

   b. (**F**) O poder de um teste é definido como a probabilidade de não rejeitar a hipótese nula quando a hipótese nula é verdadeira.

   Justificativa O poder de um teste é definido como a probabilidade de rejeitar a hipótese nula quando o parâmetro varia no espaço paramétrico Θ.

   c. (**F**) O erro do tipo II é definido como a probabilidade de não rejeitar a hipótese nula quando a hipótese alternativa é verdadeira.

   Justificativa: O erro do tipo II ocorre quando aceitamos H_0 sendo ela falsa ou H_1 verdadeira.

   d. (**V**) O p-valor de um teste é a probabilidade, sob a hipótese nula, de obter um valor da estatística do teste pelo menos tão extremo quanto o observado.

   e. (**V**) Se um intervalo de confiança de 95% para a média populacional, calculado a partir de uma amostra aleatória , excluir o valor **zero**, pode-se rejeitar que a média populacional seja nula, ao nível de significância de 5%.

2. Valor (2 pontos) Um laboratório faz oito determinações da quantidade de impurezas em porções de certo composto:

   Os valores, em mg, foram:

$$x_1 = 12,4\ ; x_2 = 12,6\ ; x_3 = 12,0;\ x_4 = 12,0;\ x_5 = 12,1\ x_6 = 12,3;\ x_7 = 12,5;\ x_8 = 12,7.$$

   a. Valor(0,5 ponto) Estimar a variância populacional σ^2.

   b. Valor(1,0 ponto) Testar se variância populacional $\sigma^2 = 0,1$ usando um nível de significância de 5%.

   c. Valor(0,5 ponto) Calcule o nível descritivo do teste.

Solução: Seja X, a quantidade de impurezas em porções doo composto em miligramas,

A suposição básica é

$$X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

Foi retirada uma amostra aleatória de tamanho $n = 8$ e temos:

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 98,6 \quad e \quad \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 1215,76.$$

Vamos responder ao item a:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{8}(X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{8} X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{8} X_i\right)^2}{n}}{n-1}.$$

A nossa estimativa pontual é dada por:

$$s^2 = \frac{SX2 - SX^2/n}{n-1} = \frac{1215,76 - 98,6^2/8}{7} = 0,07357143.$$

Alguns alunos construíram uma estimativa intervalar usando $\gamma = 0,95$.

Assim $\alpha = 0,05$. Sabemos que

$$Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2\ (n-1) = \chi^2\ (7).$$

Vamos usar a tabela IV do Bussab&Morettin.

$$P(Q > q_1) = 0,975$$

logo

$$q_1 = 1,690.$$

$$P(Q > q_2) = 0,025$$

logo

$$q_2 = 16,013.$$

O limite inferior do nosso intervalo é dado por:

$$Li = \frac{(n-1)s^2}{q_2} = \frac{0,515}{16,013} = 0,0322.$$

O limite superior do nosso intervalo é dado por:

$$Ls = \frac{(n-1)s^2}{q_1} = \frac{0,515}{1,69} = 0,3048.$$

$$IC\left[\sigma^2, 95\%\right] = [0,322 \quad ; \quad 0,3048].$$

Vamos responder ao item **b**:

Queremos testar :

$$H_0 : \sigma^2 = 0,1 \quad versus \quad H_1 : \sigma^2 \neq 0,1 \quad ,$$

ao nível de significância de 5%.

Pelo intervalo de confiança do item **a** não podemos rejeitar H_0 pois o ponto 0,10 pertence ao IC95.

Nossa regra de decisão fica:

Se

$$1,69 \leq q_{obs} \leq 16,013$$

Não rejeitar H_0. Caso contrário rejeitar.

Note que:

$$q_{obs} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{0,515}{0,10} = 5,15.$$

Como

$$1,69 \leq q_{obs} = 5,15 \leq 16,013$$

não rejeitamos H_0, isto é, a variância populacional é 0,10.

Vamos responder ao item **c**:

Como a hipótese alternativa é bilateral vamos calcular duas probabilidades

$$p_1 = P(\chi^2(7) \geq 5,15)$$

e

$$p_2 = P(\chi^2(7) \leq 5,15)$$

O nível descritivo é dado por=

$$nd = 2 \times min(p_1, p_2) =$$

```
>
> X=c(12.4,12.6,12,12,12.1,12.3,12.5,12.7)
>
> n=length(X);n
[1] 8
>
>
> SX=sum(X);SX
[1] 98.6
> SX2=sum(X^2);SX2
[1] 1215.76
>
> NUM=SX2 -SX^2/n;NUM
[1] 0.515
>
> S2=NUM/(n-1);S2
[1] 0.07357143
>
> ##############################################################
> alfa=0.05
> q_1=qchisq(alfa/2,n-1);q_1;round(q_1,3)
[1] 1.689869
[1] 1.69
>
> q_2=qchisq(1-alfa/2,n-1);q_2;round(q_2,3)
[1] 16.01276
[1] 16.013
>
> Li=NUM/q_2;Li
[1] 0.03216184
>
> Ls=NUM/q_1;Ls
[1] 0.3047573
>
> IC95=c(Li,Ls);round(IC95,4)
[1] 0.0322 0.3048
>
>
> #######################################################################
>
> ##H_0:sigma2=0,1   versus H_1: sigma2 diferente de 0,1
>
>
> sigma2_0=0.1
> q_obs=num/sigma2_0;q_obs
[1] 5.15
>
> q_obs <q_1;q_obs >q_2
```

```
[1] FALSE
[1] FALSE
>
>
> ###Logo  H_0 verdade.
>
> p_2=pchisq(q_obs,n-1);p_2
[1] 0.3583362
> p_2<1/2
[1] TRUE
>
> p_1=1-p_2;p_1
[1] 0.6416638
>
>
> nd= 2*min(p_1,p_2);nd
[1] 0.7166725
>
>
> ####tabela do Bussab&Morettin
>
>
> #####4,671 < 5,15< 6,346
>
>
> a_1=pchisq(4.671,n-1);a_1 ;round(a_1,2)
[1] 0.2999599
[1] 0.3
>
>
>
> a_2=pchisq(6.346,n-1);a_2 ;round(a_2,2)
[1] 0.5000213
[1] 0.5
>
>
> ## 2*a_1=0,6<nd< 2*a_2=1,
>
>
>
```

3. (Valor 7 pontos) Duas fábricas, A e B, produzem determinado tipo de lâmpada. Um comprador decide verificar a origem do seu estoque. Para isso seleciona 100 unidades de estoque e verifica a duração de cada uma delas. Se a duração média for maior que 170 horas , conclui que a lâmpada foi fabricada pela empresa B; caso contrário pela empresa A.

   Os dois fabricantes asseguram que a duração de suas lâmpadas (em horas) segue distribuição normal com:

$$\mu_A = 169, \quad \mu_B = 171 \quad ; \sigma_A = \sigma_B = 10.$$

   Formule o teste em termos das médias populacionais μ_A e μ_B. (1 ponto).

   Classifique as hipóteses (1 ponto).

   Solução:

   Queremos testar as seguintes hipóteses:

   H_0: o estoque do comprador é da fábrica A.

   H_1: o estoque do comprador é da fábrica B

   que colocado em termos da média populacional μ fica:

$$H_0 : \mu = 1269 (simples)$$

$$H_1 : \mu = 1271 (simples).$$

   Temos um tamanho amostral

   A alternativa foi construída com base na região crítica

$$\bar{X} > 170.$$

   A região de aceitação é dada por:

$$\bar{X} \leq 170.$$

   Note que

$$X \sim N(\mu, 100).$$

   Assim

$$\bar{X} \sim N(\mu, 100/100) = N(\mu, 1).$$

   Logo

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{1} = \bar{X} - \mu \sim N(0, 1).$$

   Agora julgue as alternativas:

a. Valor(0,5) (**V**) A probabilidade do erro do tipo I é 0,1587.

Solução:

$$\alpha = P(Rejeitar\ H_0 \mid H_0\ verdade) = P(\bar{X} > 170 |\ \mu = 169),$$

$$\alpha = P(Z > 170 - 169) = P(Z > 1) = 0,5 - P() < Z < 1 = 0,5 - 0,3413 = 0,1587.$$

b. Valor(0,5) (**F**) A probabilidade do erro do tipo II é diferente de 0,1587.

Solução:

$$\beta = P(Aceitar\ H_0 \mid H_0\ falsoe) = P(\bar{X} \leq 170 |\ \mu = 171),$$

$$\beta = P(Z \leq 170 - 171) = P(Z \leq -1) = P(Z > 1) = 0,1587.$$

c. Valor(1)(**V**) A regra de decisão, ao nível de significância de 5%, será:

Se a duração média média for maior que 170,64, as lâmpadas foram fabricadas pela empresa B, do contrário pela empresa A.

Solução: Pelo enunciado temos que a nossa região critica é do tipo:

$$\bar{X} > c,$$

pois $171 > 169$.

$$\alpha = P(Rejeitar\ H_0 \mid H_0\ verdade) = P(\bar{X} > c |\ \mu = 169) = 0,05,$$

$$\alpha = P(Z > c - 169) = 0,05 = P(Z > 1,64).$$

$$c - 169 = 1,64$$

$$c = 170,64,$$

o item é verdadeiro.

d. Valor(1 ponto)(**F**) A probabilidade do erro do tipo II, para o nível de significância de 5%, é 0,70.

Solução:

$$\beta = P(Aceitar\ H_0 \mid H_0\ falsoe) = P(\bar{X} \leq 170,64 |\ \mu = 171),$$

$$\beta = P(Z \leq 170,64 - 171) = P(Z \leq -0,36) = P(Z > 0,36),$$

$$\beta = 0,5 - P(0 < Z < 0,36) = 0,5 - 0,14058 = 0,35942 \neq 0,70.$$

e. Valor(1 ponto) (**V**) Para o teste de hipótese

$$H_0 : \mu = 169 \quad vs \quad H_1 : \mu > 169.$$

, a função poder do teste é crescente como função da média μ usando a mesma regra de decisão do item c.

Esboce a função poder.

Solução: A função poder é definida por:

$$\pi(\mu) = P(Rejeitar\ H_0\ |\mu) = P(Z > 170,64 - \mu) = 1 - P(Z \leq 170,64 - \mu)$$

$$\pi(\mu) = 1 - \Phi(170,64 - \mu).$$

Suponha que

$$\mu_1 < \mu_2$$

Logo

$$-\mu_1 > -\mu_2$$

$$170,64 - \mu_1 > 170,64 - \mu_2$$

Logo como a função de distribuição da Normal é crescente temos:

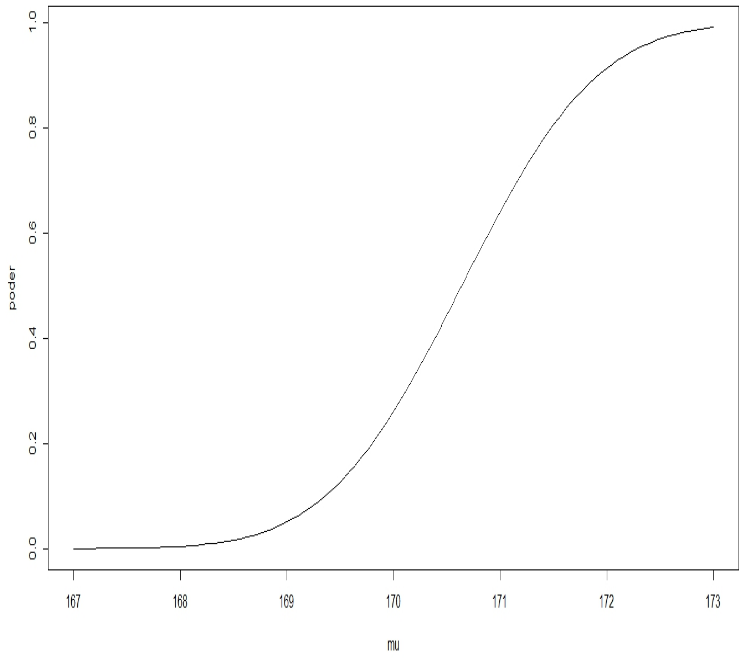
$$\Phi(170,64 - \mu_1) > \Phi(170,64 - \mu_2)$$

$$-\Phi(170,64 - \mu_1) < -\Phi(170,64 - \mu_2)$$

$$1 - \Phi(170,64 - \mu_1) < 1 - \Phi(170,64 - \mu_2)$$

$$\pi(\mu_1) < \pi(\mu_2),$$

logo a função poder é crescente. Veja o gráfico a seguir:



.

```
 sigma=10
>
> mu_0=169;mu_1=171
> ##alfa=P_H0(Xb> 170|)
> c=170;n=100
> z_obs=(c-mu_0)/(sigma/sqrt(n));z_obs
[1] 1
>
> alfa=1-pnorm(z_obs);alfa;round(alfa,4)
[1] 0.1586553
[1] 0.1587
>
> z_1=(c-mu_1)/(sigma/sqrt(n));z_1
[1] -1
>
> beta=pnorm(z_1);beta;round(beta,4)
[1] 0.1586553
[1] 0.1587
>
>
>
> ### k=170.64
>
>
> k=170.64
>
> z_2=(k-mu_1)/(sigma/sqrt(n));z_2
[1] -0.36
```

```
>
> beta=pnorm(z_2);beta
[1] 0.3594236
>
>
>
> ####Poder= P(rejeitar H_0| mu)=P(Xb>170,64|mu)=1-P(Z<=(170,64-mu)/1)
>
> poder=function (mu) 1- pnorm(170.64-mu)
>
>
>
```

f. Valor(1 ponto) (**V**) A região crítica dada no item c é a mais poderosa de tamanho $\alpha = 0,05$ para o teste inicial.

.

Solução: Notemos que para

$$X \sim N(\mu, 100)$$

Sua f.d.p. é dada por:

$$f(x|\mu) = (200\pi)^{-1/2}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{200}}\, I_A(x), A = (-\infty, \infty).$$

Note que:

$$L(\mu; \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\mu) = \prod_{i=1}^{n} (200\pi)^{-1/2}\, e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{200}}.$$

$$L(\mu; \mathbf{x}) = (200\pi)^{-n/2} \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{1}{200}\,(x_i-\mu)^2}$$

$$L(\mu; \mathbf{x}) = (200\pi)^{-n/2}\, e^{-\frac{1}{200}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}.$$

Se a hipótese nula é verdadeira temos $\mu = 169$:

$$L_0(\mathbf{x}) = (200\pi)^{-n/2}\, e^{-\frac{1}{200}\sum_{i=1}^{n}(x_i-169)^2}.$$

Seja $s = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Se a hipótese alternativa é verdadeira temos $\mu = 171$:

$$L_1(\mathbf{x}) = (200\pi)^{-n/2}\, e^{-\frac{1}{200}\sum_{i=1}^{n}(x_i-171)^2}.$$

Pelo Lema de Neyman-Pearson , utilizando a razão de verossimilhança simples, temos que o teste mais poderoso será aquele com região crítica dada por

$$A_1^* = \{\mathbf{x}; \frac{L_1(\mathbf{x})}{L_0(\mathbf{x})} \geq k\}.$$

Vamos com calma:

$$\frac{L_1(\mathbf{x})}{L_0(\mathbf{x})} = \frac{(200\pi)^{-n/2}\, e^{-\frac{1}{200}\sum_{i=1}^{n}(x_i-171)^2}}{(200\pi)^{-n/2}\, e^{-\frac{1}{200}\sum_{i=1}^{n}(x_i-169)^2}}.$$

$$\frac{L_1(\mathbf{x})}{L_0(\mathbf{x})} = \exp\left(-\frac{1}{200}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-171)^2 - (x_i-169)^2\right)\right)$$

Assim

$$\frac{L_1(\mathbf{x})}{L_0(\mathbf{x})} = \exp\left(-\frac{1}{200}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 342\, x_i + 171^2 - x_i^2 + 338\, x_i - 169^2)\right)$$

$$\frac{L_1(\mathbf{x})}{L_0(\mathbf{x})} = \exp\left(-\frac{1}{200}\sum_{i=1}^{n}(-4\, x_i + 171^2 - 169^2)\right)$$

$$\frac{L_1(\mathbf{x})}{L_0(\mathbf{x})} = \exp\left(\frac{4}{200}\sum_{i=1}^{n}\, x_i - n\, \frac{(171^2-169^2)}{200}\right)$$

Mas

$$(171^2 - 169^2) = (171+169)\times(171-169) = 340\times 2 = 680.$$

$$\frac{L_1(\mathbf{x})}{L_0(\mathbf{x})} = \exp\left(\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{n}\, x_i - \frac{680n}{200}\right)$$

$$\frac{L_1(\mathbf{x})}{L_0(\mathbf{x})} = \exp\left(\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{n}\, x_i - 3,4n\right)$$

Seja

$$s = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

De

$$\frac{L_1(\mathbf{x})}{L_0(\mathbf{x})} \geq k$$

temos

$$\log\left(exp\left(\frac{s}{50} - 3,4n\right)\right) \geq \log(k)$$

$$\frac{s}{50} - 3,4n \geq \log(k)$$

$$\frac{s}{50} \geq \log(k) + 3,4n$$

Logo

$$s \geq 50(\log(k) + 3,4n)$$

Dividindo por n temos:

$$\bar{x} \geq \frac{50(\log(k) + 3,4n)}{n} = c$$

A nossa região crítica é da forma:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \geq c.$$

Por isso é melhor testar

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad versus \quad H_0 : \mu = \mu_1; \;\; \mu_1 > \mu_0.$$