Séries infinitas de Termos Constantes

Considere a sequência $\{a_n\}$
A sequência $\{s_n\}$, onde $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ é chamada de sequência das somas parciais da sequência $\{a_n\}$.

Definição

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é chamada de série infinita.
Os números $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n \ldots$ são chamados de termos da série infinita. Os números $s_1, s_2, s_3 \ldots s_n \ldots$ são chamados de somas parciais da série infinita.

Definição

Dizemos que a série infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente se a sequência das somas parciais $\{s_n\}$ for convergente. Caso contrário, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

Definição

Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for convergente, isto é, se existir um número S tal que $\lim_{n\to+\infty} s_n = S$, escrevemos $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S$ e dizemos que S é a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Teorema

Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for convergente, então $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Exemplo:

Considerando a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$, vemos que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} \neq 0$. Portanto esta série é divergente.

Teorema

Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for convergente e se $\{s_n\}$ é a sequência das somas parciais desta série. Então para todo $\in > 0$, existe um número N tal que se $r > N$ e $t > N$ temos $|s_r - s_t| < \in$.

Exemplo:

Considere a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, a qual é chamada de série harmônica.

Temos $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ e

$s_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

De acordo com o teorema acima, se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ fosse convergente, deveríamos ter:
Dado $\in > 0$, existe $N > 0$, tal que se $2n > N$ e $n > N$,
$|s_{2n} - s_n| < \in$.
Entretanto, tomando $\in = \frac{1}{2}$, isto não se verifica pois $s_{2n} - s_n > \frac{1}{2}$.
Logo a série harmônica é divergente.

Definição

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1}$ é chamada de série geométrica.

Teorema

Se $|r| < 1$ série geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1}$ converge e sua soma é $\frac{a}{1-r}$. Se Se $|r| \geq 1$ série geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1}$ diverge.

Exemplos:

1. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7}{9^{n-1}}$ é uma série geométrica de razão $r = \frac{1}{9} < 1$ e portanto é convergente.
2. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} 9^{n-1}$ é uma série geométrica de razão $r = 9 > 1$ e portanto é divergente.

Teorema

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são duas séries infinitas que diferem somente pelos seus m primeiros termos, isto é, $a_k = b_k$ se $k > m$, então ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem.

Teorema

Seja c é uma constante não nula.

i) Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for convergente e sua soma for S, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} ca_n$ é convergente e sua soma é $c.S$

ii) Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for divergente , então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} ca_n$ também é divergente.

Teorema

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são duas séries infinitas convergentes cujas somas são respectivamente R e S, então

i) $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ é uma série convergente e sua soma é $R + S$.

ii) $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - b_n)$ é uma série convergente e sua soma é $R - S$.

Teorema

Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for convergente e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ for divergente, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ é divergente.

Séries infinitas de termos positivos

Teorema

Uma série infinita de temos positivos é convergente se e somente se sua sequência de somas parciais tiver um limitante superior.

Teorema (Teste da comparação)

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos positivos

i) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ for uma série de temos positivos convergente e se $a_n \leq b_n$ para todo inteiro positivo n, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também é convergente.

ii) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ for uma série de temos positivos divergente e se $a_n \geq c_n$ para todo inteiro positivo n, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também é divergente.

Exemplo:

Verifique se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{7^{n-1}+3}$ é convergente ou divergente.

Solução:

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{7^{n-1}}$ é a série geométrica, de razão $r = \frac{1}{7}$. Como $|r| < 1$ esta série converge.

Cosiderando $a_n = \frac{5}{7^{n-1}+3}$ e $b_n = \frac{5}{7^{n-1}}$, temos $a_n = \frac{5}{7^{n-1}+3} < \frac{5}{7^{n-1}} = b_n$, isto é $a_n < b_n$.

Então , como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{7^{n-1}}$ convege, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{7^{n-1}+3}$ também converge.

Teorema (Teste da comparação com limite)

Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries de termos positivos.

i) Se $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$, então ambas convergem ou ambas divergem.

ii) Se $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também converge.

iii) Se $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$, e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também diverge.

Exemplo:

Verifique se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{7^{n-1}+3}$ é convergente ou divergente.

Solução:

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{7^{n-1}}$ é a série geométrica, de razão $r = \frac{1}{7}$. Como $|r| < 1$ esta série converge.

Cosiderando $a_n = \frac{5}{7^{n-1}+3}$ e $b_n = \frac{5}{7^{n-1}}$, temos $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} =$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{5}{7^{n-1}+3}}{\frac{5}{7^{n-1}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{7^{n-1}}{7^{n-1}+3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{7^{n-1}}} = 1 > 0.$$

Então , como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{7^{n-1}}$ convege, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{7^{n-1}+3}$ também converge.

Teorema

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for uma série convergente de termos positivos, seus termos podem ser agrupados de qualquer forma e a série resultante continua convergente e com a mesma soma que a série original.

De fato, se agruparmos a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ da qualquer forma, por exemplo $a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_s + a_6) + \cdots$ para formar uma nova série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$. Cada soma parcial $t_m$desta nova série será uma soma parcial da série anterior. Portanto quando m tende para infinito n também tende a infinito. Assim, se $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = S$, então $\lim\limits_{m\to+\infty} t_m = S$.

Teorema

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for uma série convergente de termos positivos. Se rearranjarmos seus termos de qualquer forma, a série resultante continua convergente e com a mesma soma que a série original.

Série p ou série híper harmônica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$

Se $p = 1$, temos a série harmônica que, como sabemos, diverge.

Se $p < 1$, $n^p < n$ e daí $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}$. Como $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ também diverge.

Se $p > 1$, agrupamos a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, da seguinte forma:

$$\frac{1}{1^p} + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p} + \frac{1}{9^p} + \cdots + \frac{1}{15^p}\right) + \cdots$$

Cada termo desta série é menor que o termo correspondente na série

$$\frac{1}{1^p}+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{8^p}\right)+\cdots$$

$=\frac{1}{1^p}+\frac{2}{2^p}+\frac{4}{4^p}+\frac{8}{8^p}+\cdots=\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^p}$, que é uma série geométrica de razão $\frac{2}{2^p}=\frac{1}{2^{p-1}}<1$, que converge.

Portanto $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$, também converge.

A série p é muito usada no teste da comparação.

Teorema (Teste da integral)

Seja f uma função contínua, decrescente e com valores positivo para todo $x \geq 1$. Então a série infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ será convergente se a integral imprópria $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ existir e será divergente se $\lim_{b \to +\infty} \int_1^{b} f(x)dx = +\infty$.

Exemplo:

Verifique se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n}$ é convergente ou divergente.

Solução:

Seja $f(x) = xe^{-x}$

Temos $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x) < 0$, para todo $x > 1$.

Então f é função contínua, decrescente e com valores positivo para todo $x \geq 1$.

Podemos então, aplicar o teste da integral.

$$\int xe^{-x}dx = -e^{-x}(x+1) + c$$

$$\int_1^{+\infty} xe^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b xe^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} [-e^{-x}(x+1)]_1^b =$$

$$\lim_{b\to+\infty} [-e^{-b}(b+1) + 2e^{-1}] =$$

$$\lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{(b+1)}{e^b} + \frac{2}{e}\right]$$

$$\lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{(b+1)}{e^b}\right] = \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{e^b}\right] = 0$$

Então

$$\lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{(b+1)}{e^b} + \frac{2}{e}\right] = \frac{2}{e}$$

Portanto a série $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n}$ é convergente.

Séries Alternadas

Definição

Se $a_n > 0$ para todo inteiro positivo n, então as séries $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}a_n$ são chamadas de séries alternadas.

Exemplo:

A série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ é uma série alternada.

Teorema (Teste para séries alternadas)

Considere a série alternada $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ ou $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}a_n$, onde $a_n > 0$ e $a_{n+1} < a_n$, para todo inteiro positivo n. Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, a série alternada converge

Exemplo:

Mostre que a série alternada $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ é convergente.

Solução:

Temos $a_n = \frac{1}{n} > 0$. Como $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, temos $a_{n+1} < a_n$.

Por outro lado

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Assim a série alternada $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ é convergente.

Convergência absoluta e convergência condicional

Definição

Dizemos que a serie infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ for convergente

Exemplo:

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{5^{n-1}}$ é absolutamente convergente, pois a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^{n+1} \frac{4}{5^{n-1}}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{5^{n-1}}$ é convergente, já que é uma série geométrica de razão $r = \frac{1}{5} < 1$

Definição

Uma série que é convergente mas não é absolutamente convergente é denominada condicionalmente convergente.

Exemplo:

Como vimos, série alternada $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ é convergente, entretanto a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ é divergente.

Portanto a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ é condicionalmente convergente.

Teorema

Se a série infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for absolutamente convergente, ela será convergente e $\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$

Teorema (Teste da razão)

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série infinita para a qual $a_n \neq 0$. Então

i) Se $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

ii) Se $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$, ou se $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

iii) Se $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, então nenhuma conclusão quanto a convergência ou divergência pode ser tirada do teste.

Exemplos:

1. Verifique se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{5^{n-1}}$ é convergente ou divergente

Solução:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{5^n}}{\frac{n}{5^{n-1}}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{5n} = \frac{1}{5} < 1$$

Logo a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{5^{n-1}}$ é convergente.

2. Verifique se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^{n-1}}{n}$ é convergente ou divergente

Solução:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{5^n}{n+1}}{\frac{5^{n-1}}{n}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{5n}{n+1} = 5 > 1$$

Logo a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^{n-1}}{n}$ é divergente

Teorema (Teste da raiz)

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série infinita para a qual $a_n \neq 0$. Então

i) Se $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

ii) Se $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$, ou se $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = +\infty$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

iii) Se $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, enão nenhuma conclusão quanto a convergência ou divergência pode ser tirada do teste.

Exemplo:

Verifique se a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^n}$ é convergente ou divergente

Solução:

Se $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n^n}\right|} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} =$
$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0 < 1.$

Logo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^n}$ é absolutamente convergente e portanto é convergente.