2.3. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição da variável aleatória $X \sim Beta(\theta, 1)$, $\theta > 0$, com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x|\theta) = \theta\, x^{\theta-1}\, I_A(x),\ A = (0, 1).$$

é uma estatística suficiente e completa para θ.

(i) Mostre que a f.d.p. pertence à família exponencial.

(ii) Encontre o limite inferior da variância dos estimadores não viciados de θ.

(iii) Encontre uma estatística suficiente para θ e sua distribuição amostral. Obtenha um estimador não viciado para σ^2 que seja

(iv) Sugira um estimador não viciado para θ que seja função da estatística suficiente. Verifique se o estimador é eficiente.

Solução:

O suporte $A = (0, 1)$ não depende de θ.

$$\log(f(x|\theta)) = \log(\theta) + (\theta - 1)\ \log(x)$$

$$\log(f(x|\theta)) = \theta\ (-\log(x)) + \log(\theta) - \log(x)$$

$$\log(f(x|\theta)) = -\ \theta\ (-\log(x)) + \log(\theta) - \log(x)$$

com

$$c(\theta) = -\theta \quad , T(x) = -\log(x),\ d(\theta) = \log(\theta) \quad , h(x) = -\log(x).$$

Note que:

$$c'(\theta) = -1 \quad e \ \ d'(\theta) = -\frac{1}{\theta}.$$

Finalmente

$$E[T(X)] = E(-\log(X)) = \frac{1}{\theta}.$$

Além disso

$$S = \sum_{i=1}^{n} T(X_i) = \sum_{i=1}^{n} -\log(X_i) = \sum_{i=1}^{n}\ Y_i,$$

em que $Y_1, Y_2, \ldots . Y_n$ é uma amostra aleatória de

$$Y = -\log(X).$$

$$E(S) = \frac{n}{\theta}.$$

$$f(X|\theta) = \theta\, X^{\theta-1}.$$

$$\log\left(f(X|\theta)\right) = \log(\theta) + (\theta-1)\log(X).$$

$$V = \frac{\partial \log f(X;\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{\theta} + log(X) = \frac{1}{\theta} - (-log(X)) = \frac{1}{\theta} - Y.$$

Note que:

$$E(V) = \frac{1}{\theta} - E(Y) = \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta} = 0.$$

$$Var(V) = I_F(\theta) = Var(\frac{1}{\theta} - Y) = Var(-Y) = Var(Y) = \frac{1}{\theta^2}.$$

Vamos explicar com detalhes o último resultado.

Vamos achar a lei de Y através de sua geradora de momentos:

$$M_Y(t) = E\left(e^{tY}\right) = E\left(e^{-t\log(X)}\right) = E\left(e^{\log(X^{-t})}\right) = E(X^{-t}).$$

$$M_Y(t) = \int_0^1 x^t\, \theta\, x^{\theta-1}\, dx = \theta \int_0^1 x^{(\theta-t)-1}\, dx$$

Para

$$\theta - t > 0 \quad ou \quad t < \theta$$

$$M_Y(t) = \theta\, \frac{x^{\theta-t}}{\theta-t}\,\Big|_0^1 = \frac{\theta}{\theta-t},\ \ t<\theta$$

Assim

$$Y \sim Exp(\theta), \theta > 0.$$

Logo

$$S = \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim Gama(n, \theta).$$

A informação de Fisher é dada por:

$$I_F(\theta) = \frac{1}{\theta^2}.$$

Seja T um estimador não viciado de θ

Sabemos que:

$$Var(T) \geq \frac{1}{n\, I_F(\theta)} = \frac{\theta^2}{n} = LI.$$

Vamos procurar um estimador não viciado função de S para S.

Note que:

$$f_S(s) = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)}\, s^{n-1}\, e^{-\theta s}\, I_A(s), \quad A = (0, \infty).$$

A esperança de $W = \frac{1}{S}$ é dada por:

$$E(W) = \int_0^\infty \frac{1}{s}\, \frac{\theta^n}{\Gamma(n)}\, s^{n-1}\, e^{-\theta s}\, ds$$

$$= \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty s^{(n-1)-1}\, e^{-\theta s}\, ds = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)}\, IGG(a = n-1 > 0, b = \theta, c = 1)$$

Para $n > 1$ temos:

$$E(W) = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \times \frac{\Gamma(n-1)}{\theta^{n-1}} = \frac{\theta}{n-1},$$

pois

$$\Gamma(n) = (n-1)\, \Gamma(n-1).$$

Assim

$$T = \frac{n-1}{S}$$

é o nosso estimador não viciado procurado.

Para ver se ele é eficiente vamos calcular sua variância.

$$Var(T) = (n-1)^2\, Var\left(\frac{1}{S}\right).$$

Mas

$$Var\left(\frac{1}{S}\right) = E\left(\frac{1}{S^2}\right) - E^2\left(\frac{1}{S}\right).$$

A esperança de $W^2 = \frac{1}{S^2}$ é dada por:

$$E(W^2) = \int_0^\infty \frac{1}{s^2}\, \frac{\theta^n}{\Gamma(n)}\, s^{n-1}\, e^{-\theta s}\, ds$$

$$= \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty s^{(n-2)-1}\, e^{-\theta s}\, ds = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)}\, IGG(a = n-2 > 0, b = \theta, c = 1)$$

Para $n > 2$ temos:

$$E(W^2) = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \times \frac{\Gamma(n-2)}{\theta^{n-2}} = \frac{\theta^2}{(n-1)(n-2)},$$

pois

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\, \Gamma(n-2).$$

$$Var\left(\frac{1}{S}\right) = \frac{\theta^2}{(n-1)(n-2)} - \frac{\theta^2}{(n-1)^2} = \frac{\theta^2}{(n-1)^2(n-2)}.$$

Assim,

$$Var(T) = (n-1)^2\ Var\left(\frac{1}{S}\right) = (n-1)^2\ \frac{\theta^2}{(n-1)^2(n-2)} = \frac{\theta^2}{n-2}.$$

Vamos ver se ele é eficiente?

Como $n > 2$

$$n - 2 < n$$

temos

$$\frac{1}{n-2} > \frac{1}{n}$$

multiplicando por θ^2 temos:

$$\frac{\theta^2}{n-2} > \frac{\theta^2}{n}$$

$$Var(T) > LICR.$$

Como o linite inferior não é atingido temos que ele não é eficiente.

```
> A=rbeta(100,2,1);round(A,2)
[1] 0.67 0.89 0.86 0.80 0.79 0.76 0.42 0.89 0.77 0.81 0.63 0.73 0.63 0.70 0.57
[16] 0.95 0.61 0.68 0.56 0.24 0.90 0.78 0.87 0.82 0.04 0.91 0.81 0.89 0.84 0.92
[31] 0.97 0.91 0.62 0.20 0.85 0.55 0.69 0.70 0.30 0.62 0.22 0.42 0.41 0.19 0.79
[46] 0.59 0.48 0.64 0.37 0.88 0.60 0.90 0.43 0.55 0.74 0.71 0.30 0.36 0.79 0.79
[61] 0.65 0.23 0.77 0.78 0.46 0.32 0.53 0.96 0.77 0.51 0.95 0.75 0.93 0.90 0.72
[76] 0.89 0.37 0.46 0.71 0.95 0.95 0.84 0.75 0.36 0.47 0.39 0.66 0.44 0.81 0.59
[91] 0.57 0.70 0.45 0.69 0.80 0.69 0.75 0.41 0.98 0.24
>
> B=-log(A)
> round(B,2)
[1] 0.40 0.11 0.15 0.22 0.23 0.28 0.87 0.12 0.27 0.21 0.46 0.31 0.46 0.35 0.57
[16] 0.05 0.49 0.38 0.59 1.41 0.10 0.25 0.14 0.19 3.23 0.09 0.21 0.12 0.18 0.09
[31] 0.03 0.09 0.47 1.60 0.16 0.60 0.36 0.36 1.20 0.47 1.50 0.86 0.88 1.65 0.24
[46] 0.52 0.73 0.44 0.98 0.13 0.52 0.11 0.84 0.59 0.30 0.34 1.21 1.04 0.23 0.24
[61] 0.43 1.46 0.26 0.25 0.77 1.14 0.63 0.04 0.26 0.67 0.05 0.28 0.08 0.10 0.32
[76] 0.12 1.00 0.78 0.35 0.05 0.05 0.17 0.29 1.01 0.76 0.94 0.41 0.82 0.22 0.53
[91] 0.56 0.35 0.79 0.37 0.23 0.37 0.29 0.90 0.02 1.43
>
> S=sum(B);S
[1] 50.7802
> n=100
>
>
```

```
> t=(n-1)/S;t #####Estimativa de teta
[1] 1.949579
>
>
>  VT_est=t^2/(n-2);VT_est
[1] 0.03878427
>
>
>
> ep_est=sqrt(VT_est);ep_est
[1] 0.1969372
>
>
```