Vamos discutir agora intervalos de confiança para a média de uma população finita com nível de confiança $\gamma = 1 - \alpha$.

Seja N o tamanho de uma população regida por uma variável aleatória X com $E(X) = \mu$ e $V(X) = \sigma^2$. Uma amostra aleatória de tamanho n **sem** reposição é retirada.

Fato 1:

$$E(\bar{X}) = \mu \ \ e \ \ V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}\,\frac{N-n}{N-1}.$$

Fato 2:
O fator

$$fcor = \frac{N-n}{N-1},$$

é conhecido como fator de correção de população finito e deve ser usado sempre que a fração amostral

$$fa = \frac{n}{N} \geq 0,05.$$

Se a variância é conhecida o intervalo de confiança é dado por:

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\ ;\ \bar{X} + z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right],$$

com

$$P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}.$$

.
Se a variância é desconhecida o intervalo de confiança é dado por:

$$\left[\bar{X} - t_{\alpha/2}\,\frac{S}{\sqrt{n}}\,\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\ ;\ \bar{X} + z_{\alpha/2}\,\frac{S}{\sqrt{n}}\,\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right],$$

com

$$P(T(n-1) > t_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}.$$

Vamos construir um intervalo de confiança para p

$$\left[\hat{p} - z_{\alpha/2}\,\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\,\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\ ;\ \hat{p} + z_{\alpha/2}\,\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\,\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right].$$

com

$$P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}.$$

Vamos fazer três exemplos:

1. Sabe-se que as despesas mensais com alimentação dos 1000 estudantes de um faculdade no período escolar escolar são normalmente distribuídos com desvio padrão de 3 u.m.(unidades monetárias).

   Uma amostra sem reposição de 100 estudantes revelou uma despesa média mensal de 50 u.m.

   Determine um intervalo de confiança de 90% para a despesa média com alimentação no período escolar dos alunos dessa faculdade.

Solução:

Seja X o gasto mensal com alimentação dos estudantes da faculdade.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2), \ \ \sigma = 3 \ \ (conhecido).$$

$N = 1000$ o tamanho da população e $n = 100$ o tamanho da amostra. Assim

$$fa = \frac{n}{N} = \frac{100}{1000} = 0,10 \geq 0,05.$$

Vamos aplicar o fator de correção de população finita:

$$fcor = \frac{N-n}{N-1} = \frac{900}{999} - \frac{100}{111} = 0,9402$$

Acompanhe a solução pelo R.

```
> N=1000;n=100
>
> fa=n/N;fa
[1] 0.1
> fa<0.05  ##Se falso aplicar o fator de correção!!
[1] FALSE
>
> fcor=(N-n)/(N-1);fcor
[1] 0.9009009
> sqrt(fcor)
[1] 0.949158
>
> sigma=3;xb=50
>
> gama=0.90;alfa=1-gama;alfa
[1] 0.1
> ztab=qnorm(1-alfa/2);ztab
[1] 1.644854
> ztab=1.645
>
> e=ztab*(sigma/sqrt(n))*sqrt(fcor);e;round(e,2)
[1] 0.4684095
[1] 0.47
> e=0.47
>
> IC90=xb+c(-1,1)*e;IC90
[1] 49.53 50.47
```

```
>
>
>
>
> #####Considere com reposição
>
>
>
> round(xb+c(-1,1)*ztab*(sigma/sqrt(n)),2) ####Compare.
[1] 49.51 50.49
>
```

2. Um pequeno produtor de queijo utiliza processos artesanais em sua produção. Um particular cliente deseja encomendar 200 peças do produto padronizadas em 1 kg.

   Após a produção, para verificar se o lote produzido atende ao padrão desejado, uma amostra de 15 peças apresentou peso médio de 1,03 kg e desvio padrão 0,06 kg.

   Construa um intervalo de confiança de 95% para as peças produzidas neste lote. O lote atende ao padrão?

   Solução:

   Seja X o peso de cada peça de queijo, em kg, no lote.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2),$$

   $N = 200$ o tamanho da população e $n = 15$ o tamanho da amostra. Assim

$$fa = \frac{n}{N} = \frac{15}{200} = 0,075 \geq 0,05.$$

   Vamos aplicar o fator de correção de população finita:

$$fcor = \frac{N-n}{N-1} = \frac{185}{199} = 0,9402$$

   Coma a variância é desconhecida e $n = 15$ é pequeno vamos usar a distribuição t de Student.

   Acompanhe a solução pelo R.

```
>
>
> N=200;n=15
>
> fa=n/N;fa
[1] 0.075
> fa<0.05  ##Se falso aplicar o fator de correção!!
[1] FALSE
>
> fcor=(N-n)/(N-1);fcor
[1] 0.9296482
> sqrt(fcor)
```

```
[1] 0.9641827
>
> xb=1.03;s=0.06
>
> gama=0.95;alfa=1-gama;alfa
[1] 0.05
> ttab=qt(1-alfa/2,n-1);ttab
[1] 2.144787
> ttab=2.145
>
> e=ttab*(s/sqrt(n))*sqrt(fcor);e;round(e,2)
[1] 0.03203998
[1] 0.03
>
>
> IC95=xb+c(-1,1)*e;IC95
[1] 0.99796 1.06204
>
> round(IC95,3)
[1] 0.998 1.062
>
>
```

Como o intervalo de confiança de 95% contem o ponto 1 o lote foi aprovado.

3. Uma pesquisa recente efetuada com 130 funcionários selecionados ao acaso sem reposição dos 600 funcionários de uma empresa revelou que 52 deles não mantinham convênio com qualquer empresa particular de assistência médica .

   Construa um intervalo de confiança de 90% para a proporção de funcionários desta empresa que mantém convênio com alguma empresa particular de assistência médica.

   Solução:

   Seja $X = 1$ se o funcionário tem algum convênio e $X = 0$ caso contrário.

$$P(X = 1) = p \quad ; \; P(X = 0) = 1 - p, \quad X \sim Ber(p);$$

Temos

$$N = 600, n = 130; \; ; \quad fa = \frac{130}{600} => 0,05; \quad fcor = \frac{470}{599} =$$

```
>
> N=600;n=130
>
>
> fa=n/N;fa
[1] 0.2166667
> fa<0.05  ##Se falso aplicar o fator de correção!!
[1] FALSE
>
```

```
> fcor=(N-n)/(N-1);fcor
[1] 0.7846411
> sqrt(fcor)
[1] 0.8857997
>
>
> ztab=1.645
>
>
> s=n-52;s ###Número de sucessos na amostra
[1] 78
>
>
> pest=s/n;pest
[1] 0.6
>
>
> e=ztab*sqrt(pest*(1-pest)/n)*sqrt(fcor);e
[1] 0.0626088
>
>
> IC90=pest+c(-1,1)*e;IC90
[1] 0.5373912 0.6626088
>
> round(IC90,4)
[1] 0.5374 0.6626
```

Determinação do tamanho amostral para estimar uma média populacional.
Variância conhecida: :

Caso 1: Com reposição:

$$P\left(|\bar{X} - \mu| \leq e\right) = 1 - \alpha.$$

$$P\left(Z > ztab\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

$$n = \left(\frac{ztab \times \;\; \sigma}{e}\right)^2.$$

Vamos fazer um exemplo construindo uma função no R .

Solução:

Temos que:

$$\sigma = 2; \gamma = 0,95, ztab = 1,96; e = 0,5.$$

$$n1 = \left(\frac{1,96 \times 2}{0,5}\right)^2 = (4 \times 1,96)^2 = 7,84^2 = 61,46$$

Assim

$$n = 62.$$

```
> ztab=1.96;sigma=2;e=0.5
> aux=ztab*sigma/e;aux
[1] 7.84
> n1=aux^2;n1
[1] 61.4656
> n=ceiling(n1);n
[1] 62
>
```

Vamos fazer a função:

```
>
> tamanho.amostra <- function(gama, sigma, e)
+ {
+ ztab=qnorm((gama+1)/2)
+ ceiling((ztab*sigma/e)^2)
+ }
>
>
>
> n=tamanho.amostra(0.95,2,0.5);n
[1] 62
>
```

Exemplo 1 Uma população admite distribuição normal com desvio padrão $\sigma = 2$. Calcule o tamanho da amostra necessário para que possamos ter 95% de certeza do que não erraremos por mais de 0,5 unidades ao estimarmos a média populacional.

Caso 2: Sem reposição e população finita:

$$n = \frac{ztab^2 \times \sigma^2 \times N}{(N-1)e^2 + ztab^2 \times \sigma^2}.$$

Vamos fazer um exemplo construindo uma função no R .

Exemplo 2 Uma população composta por 200 elementos apresenta variância $\sigma^2 = 25,4$. Qual deve ser o tamanho da amostra aleatória necessário a que nos permita afirmar com 98% de certeza do que não erraremos por mais de 1,8 unidades ao estimarmos a média populacional.
Solução:

Temos que:

$$\sigma^2 = 25,4; \gamma = 0,98, ztab = 2,33; e = 1,8.$$

```
>
> qnorm(0.99)
[1] 2.326348
>
```

$$n_1 = \frac{200 \times 25,4 \times 2,33^2}{199 \times 1,8^2 + 25,4 \times 2,33^2} = 35,24$$

```
> ztab=qnorm(0.99);ztab
[1] 2.326348
> ztab=2.33
>
> sigma2=25.4
>
> e=1.8
> N=200
>
>
>
>
> Num=N*ztab^2*sigma2;Num
[1] 27578.81
> Den=(N-1)*e^2 + ztab^2*sigma2 ;Den
[1] 782.6541
>
> n1=Num/Den;n1
[1] 35.23755
> n=ceiling(n1);n
[1] 36
>
>
> tamanho.amostraFin <- function(N,gama, sigma, e)
+ {
+ ztab=qnorm((gama+1)/2)
+ Num=N*ztab^2*sigma^2
+ Den=(N-1)*e^2 + ztab^2*sigma^2
+ ceiling(Num/Den)
+ }
>
>
> n=tamanho.amostraFin (200,0.98,sqrt(25.4),1.8)
> n
[1] 36
>
>
```

Determinação do tamanho amostral na estimação de uma proporção populacional.

$$P\left(|\bar{p} - p| \leq e\right) = 1 - \alpha.$$

$$P\left(Z > ztab\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

$$n = \left(\frac{ztab \times \sqrt{\bar{p} \times \bar{q}}}{e} \right)^2 = \frac{ztab^2 \times \bar{p} \times \bar{q}}{e^2}.$$

Se a população for finita

$$n = \frac{ztab^2 \times \bar{p} \times \bar{q} \times N}{(N-1)e^2 + ztab^2 \times \bar{p} \times \bar{q}}.$$

Exemplo 3. Um instituto de pesquisa pretende avaliar a proporção de eleitores que votarão em um determinado candidato com 95% de certeza de que não errará por mais que 3%.

Para isto levantou uma amostra preliminar de 100 eleitores selecionados ao acaso e verificou que 20 votarão no candidato, Qual o tamanho da amostra necessário para atingir a precisão desejada?

Solução:

$X = 1$ se o eleitor votar no candidato e $X = 0$ caso contrário. Uma estimativa preliminar de p é

$$\hat{p} = 20/100 = 0,20; \; ; \; \hat{q} = 0,80 \quad ; \hat{p}\hat{q} = 0,16.$$

Além disso

$$ztab = 1.96; \quad e = 0,03.$$

$$n_1 = \frac{1,96^2 \times 0,16}{0,03^2} = 682,95$$

$$n = 683.$$

```
p_est=20/100;p_est
[1] 0.2
> q_est=1-p_est;q_est
[1] 0.8
> n_1=1.96^2 *0.16/0.03^2;n_1
[1] 682.9511
> n=ceiling(n_1)
> n
[1] 683
```

Se você não tirasse a amostra preliminar vamos usar $pq = 0.25$

$$n_1 = \frac{1,96^2}{0,03^2} = 4268,44.$$

$$n = 4269$$

```
> 1.96^2/0.03^2
[1] 4268.444
```

Informação custa dinheiro!!!!!

Exemplo 4: Um despachante que cuida da documentação de automóveis está interessado em estimar a proporção de clientes de carros no último ano para oferecer seus serviços. Para isto amostrou 80 do seu cadastro de 400 clientes e consultou-os por telefone verificando que 30 deles haviam trocado de carro no último ano. Determine o tamanho da amostra necessário para estimar com 90% de confiança esta proporção com um erro máximo de 4%.

Solução:

$X = 1$ se o cliente trocou de carro no último ano e $X = 0$ caso contrário. Uma estimativa de p é

$$\hat{p} = 30/80 = 0,375; \ ; \ \hat{q} = 0,625 \quad ; \hat{p}\hat{q} = 0,234375.$$

Além disso

$$ztab = 1,645; \quad e = 0,04.$$

```
N=400;e=0.04
> p_est=30/80;p_est
[1] 0.375
>
>
> q_est=1-p_est;q_est
[1] 0.625
>
> p_est*q_est
[1] 0.234375
>
> ztab=1.645
>
>
> Num=N*ztab^2*p_est*q_est;Num
[1] 253.6898
>
> Den=(N-1)*e^2+ztab^2*p_est*q_est;Den
[1] 1.272625
>
> n_1=Num/Den;n_1
[1] 199.3438
>
> n=ceiling(n_1);n
[1] 200
>
```

Exemplo 5: Queremos estimar a média de uma população normal. Para obter informação sobre a variância da população retirou-se uma amostra preliminar de tamanho 15 obtendo-se uma média de 40 e desvio padrão $s = 4,8$.

Queremos estimar a média com 95% de confiança e um erro máximo de 0.7.
Que tamanho de amostra vamos precisar?

Solução:

$$n = \left(\frac{ttab \times \ \ s}{e} \right)^2 .$$

pela tabela temos:

$$P(T(14) > 2,145) = 0,025.$$

$$n_1 = \left[\frac{ttab \times s}{e} \right]^2 = \left[\frac{2,145 \times 4,8}{0,7} \right]^2$$

$$n_1 = 216,34$$

e

$$n = 217.$$

Precisamos mais 202 observações pois ja temos 15.

```
> ttab=round(qt(0.975,14),3);ttab
[1] 2.145
> e=0.7
> s=4.8
>
> aux=ttab*s/e;aux
[1] 14.70857
>
> n_1=aux^2;n_1
[1] 216.3421
> n=ceiling(n_1);n
[1] 217
>
```