Integração de Potências de tangente, cotangente, secante e cossecante

1º Caso:

$\int tg^n x \, dx$ ou $\int cotg^n x \, dx$, onde n é um inteiro maior que 1.

Para resolver uma integral desse tipo procedemos da seguinte forma:

Escrevemos $tg^n x = tg^{n-2} x \, tg^2 x = tg^{n-2} x \, (sec^2 x - 1)$ (respectivamente $cotg^n x = cotg^{n-2} x \, cotg^2 x = cotg^{n-2} x \, (cosec^2 x - 1)$) e fazemos a mudança de variável $u = \operatorname{tg} x$ (respectivamente $u = \operatorname{cotg} x$)

Exemplo 1

$\int tg^3x\,dx = \int tgx\,tg^2x\,dx = \int tgx\,(sec^2x - 1)\,dx =$

$$\int tgx\,sec^2x\,dx - \int tgx\,dx$$

Para calcular

$$\int tgx\,sec^2x\,dx$$

Fazemos $u = tgx$ e então $du = sec^2x\,dx$

Assim

$\int tgx\,sec^2x\,dx = \int udu = \frac{u^2}{2} + c_1 = \frac{1}{2}tg^2x + c_1$

Portanto, $\int tgx\,sec^2x\,dx - \int tgx\,dx = \frac{1}{2}tg^2x + ln|cosx| + c$

Exemplo 2

$\int tg^5x\,dx = \int tg^3x\,tg^2x dx = \int tg^3x\,(sec^2x - 1)\,dx =$

$\int (tg^3x\,sec^2x - tg^3x)\,dx =$

$$\int tg^3x\,sec^2x dx - \int tg^3x\,dx$$

Para calcular

$\int tg^3x\,sec^2x\,dx$, Fazemos $u = tgx$ e então $du = sec^2x\,dx$

Assim $\int tg^3x\,sec^2x\,dx = \int u^3du = \frac{u^4}{4} + c_1 = \frac{1}{4}tg^4x + c_1$

Portanto, $\int tg^3x\,sec^2x\,dx - \int tg^3x\,dx =$

$$\frac{1}{4}tg^4x - \frac{1}{2}tg^2x - ln|cosx| + c$$

2º Caso:

$\int sec^n x\, dx$ ou $\int cosec^n x\, dx$, onde n é um inteiro positivo par.

Para resolver uma integral desse tipo procedemos da seguinte forma:

Escrevemos $sec^n x = sec^{n-2} x\, sec^2 x = (tg^2 x + 1)^{\frac{n-2}{2}}\, sec^2 x$ (respectivamente $cosec^n x = cosec^{n-2} x\, cosec^2 x = (cotg^2 x + 1)^{\frac{n-2}{2}}\, cosec^2 x$) e fazemos a mudança de variável $u = \operatorname{tg} x$ (respectivamente $u = \operatorname{cotg} x$).

Exemplo:

$$\int sec^4x\, dx = \int sec^2x\, sec^2x\, dx = \int sec^2x\, (tg^2x + 1)\, dx$$

Fazendo $u = tg\ x$, temos $du = sec^2x\, dx$. Assim

$$\int sec^2x\, (tg^2x + 1)\, dx = \int (u^2 + 1)\, du = \frac{u^3}{3} + u + c =$$

$$\frac{tg^3x}{3} + tgx + c$$

3º Caso:

$\int sec^n x\, dx$ ou $\int cosec^n x\, dx$, onde n é um inteiro positivo ímpar.

Para resolver uma integral desse tipo usamos integração por partes

Exemplo:

$\int sec^3 x\, dx = \int \sec x\, sec^2 x\, dx$

Sejam $u = \sec x$ e $dv = sec^2 x\, dx$. Daí $du = \sec x\, tgx\, dx$ e $v = tgx$

Então $\int sec^3 x\, dx = \sec x\, tgx - \int \sec x\, tg^2 x\, dx$

$$\int sec^3 x\, dx = \sec x\, tgx - \int \sec x\,(sec^2 x - 1)dx$$

$$\int sec^3 x\, dx = \sec x\, tgx - \int (sec^3 x - secx)dx$$

$$\int sec^3x\,dx = \sec x\,tgx - \int sec^3x\,dx + \int \sec x\,dx$$

$$2\int sec^3x\,dx = \sec x\,tgx + \int \sec x\,dx$$

$$\int sec^3x\,dx = \frac{1}{2}\sec x\,tgx + \frac{1}{2}\int \sec x\,dx$$

$$\int sec^3x\,dx = \frac{1}{2}\sec x\,tgx + \frac{1}{2}ln|secx + tgx| + c$$

4º Caso:

$\int tg^m x\ sec^n x\ dx$ ou $\int cotg^m x\ cosec^n x\ dx$ onde n é um inteiro positivo par.

Para resolver este tipo de integral escrevemos $sec^n x = sec^{n-2} x\ sec^2 x = (sec^2 x)^{\frac{n-2}{2}}\ sec^2 x = (tg^2 x + 1)^{\frac{n-2}{2}}\ sec^2 x$ (respectivamente $cossec^n x = cossec^{n-2} x\ cossec^2 x = (cossec^2 x)^{\frac{n-2}{2}}\ cossec^2 x = (cotg^2 x + 1)^{\frac{n-2}{2}}\ cossec^2 x$)

e fazemos $u = tgx$ (respectivamente $u = cotgx$)

Exemplo:

$\int tg^3 x\ sec^4 x\ dx = \int tg^3 x\ sec^2 x\ sec^2 x\ dx =$

$\int tg^3 x (tg^2 x + 1) sec^2 x\ dx$

Fazendo $u = tgx$, temos $du = sec^2x\ dx$, Assim

$$\int tg^3x(tg^2x+1)sec^2x\ dx =$$

$$\int u^3(u^2+1)du = \int(u^5+u^3)du = \frac{u^6}{6}+\frac{u^4}{4}+c =$$

$$\frac{tg^6x}{6}+\frac{tg^4x}{4}+c$$

5º Caso:

$\int tg^m x \, sec^n x \, dx$ ou $\int cotg^m x \, cosec^n x \, dx$ onde m é um inteiro positivo ímpar.

Para resolver este tipo de integral, procedemos da seguinte forma:

Escrevemos $tg^m x \, sec^n x = tg^{m-1} x \, sec^{n-1} x \sec x \, tg \, x =$

$(tg^2 x)^{\frac{m-1}{2}} sec^{n-1} x \sec x \, tg \, x = (sec^2 x - 1)^{\frac{m-1}{2}} sec^{n-1} x \sec x \, tg \, x$
(respectivamente $cotg^m x \, cossec^n x =$
$cotg^{m-1} x \, cossec^{n-1} x \operatorname{cossec} x \, cotg \, x =$

$(cotg^2 x)^{\frac{m-1}{2}} cossec^{n-1} x \operatorname{cossec} x \, tg \, x =$
$(cossec^2 x - 1)^{\frac{m-1}{2}} cossec^{n-1} x \operatorname{cossec} x \, tg \, x$) e fazemos $u = \sec x$

(respectivamente $u = \operatorname{cossec} x$)

Exemplo:

$$\int tg^5x \; sec^6x \, dx =$$

$$\int tg^4x \; sec^5x \sec x \, tg \, x \; dx =$$

$$\int (tg^2x)^2 \; sec^5x \sec x \, tg \, x \; dx =$$

$$\int (sec^2x - 1)^2 \; sec^5x \sec x \, tg \, x \; dx$$

Fazendo $u = \sec x$, temos $du = \sec x \, tg \, x \, dx$, Assim

$$\int (sec^2x - 1)^2 \; sec^5x \sec x \, tg \, x \; dx =$$

$$\int (u^2 - 1)^2 \ u^5 \, du =$$
$$\int (u^4 - 2u^2 + 1) \ u^5 \, du =$$
$$\int (u^9 - 2u^7 + u^5) \ \ du = \frac{u^{10}}{10} - \frac{2u^8}{8} + \frac{u^6}{6} + c =$$
$$\frac{sec^{10}x}{10} - \frac{sec^8x}{4} + \frac{sec^6x}{6} + c$$

6º Caso:

$\int tg^m x \, sec^n x \, dx$ ou $\int cotg^m x \, cosec^n x \, dx$ onde m é um inteiro positivo par e n é um inteiro positivo ímpar

Este tipo de integral pode ser expresso em termos de potências ímpares de secante ou cossecante e então recaímos no cálculo de integrais do 3º caso.

<u>Exemplo:</u>

$$\int tg^4 x \, sec^3 x \, dx = \int (tg^2 x)^2 \, sec^3 x \, dx =$$

$$\int (sec^2 x - 1)^2 \, sec^3 x \, dx = \int (sec^4 x - 2sec^2 x + 1) \, sec^3 x \, dx =$$

$$\int (sec^7x - 2sec^5x + sec^3x)\ \ dx =$$

$$\int sec^7x\, dx - 2\int sec^5x\, dx + \int sec^3x\, dx$$

Vamos calcular estas integrais

i) $\int sec^7x\, dx = \int sec^5x\, sec^2x dx$

Fazendo $u = sec^5x$ e $dv = sec^2x\, dx$

temos $du = 5\, sec^5x\, tg\, x\, dx$ e $v = tg\, x$. Então

$$\int sec^7x\, dx = sec^5x\, tg\, x - 5\int sec^5x\, tg^2\, x\, dx$$

$$\int sec^7x\, dx = sec^5x\, tg\, x - 5\int sec^5x\, (sec^2\, x - 1)\, dx$$

$$\int sec^7x\, dx = sec^5x\, tg\, x - 5\int sec^7x\, dx + 5\int sec^5\, x\, dx$$

$$6 \int sec^7 x \, dx = sec^5 x \, tg \, x + 5 \int sec^5 \, x \, dx$$

$$\int sec^7 x \, dx = \frac{sec^5 x \, tg \, x}{6} + \frac{5}{6} \int sec^5 \, x \, dx$$

ii) $\int sec^5 x \, dx = \int sec^3 x \, sec^2 x dx$

Fazendo $u = sec^3 x$ e $dv = sec^2 x \, dx$

temos $du = 3 \, sec^3 x \, tg \, x \, dx$ e $v = tg \, x$. Então

$$\int sec^5 x \, dx = sec^3 x \, tg \, x - 3 \int sec^3 x \, tg^2 \, x \, dx$$

$$\int sec^5 x \, dx = sec^3 x \, tg \, x - 3 \int sec^3 x \, (sec^2 \, x - 1) \, dx$$

$$\int sec^5 x \, dx = sec^3 x \, tg \, x - 3 \int sec^5 x \, dx + 3 \int sec^3 \, x \, dx$$

$$4 \int sec^5 x \, dx = sec^3 x \, tg \, x + 3 \int sec^3 \, x \, dx$$

$$\int sec^5x\,dx = \frac{sec^3x\,tg\,x}{4} + \frac{3}{4}\int sec^3\,x\,dx$$

iii) $\int sec^3x\,dx = \frac{secx\ \ tg\,x}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sec x + tg\,x| + c_1$

Substituindo $\int sec^7x\,dx = \frac{sec^5x\,tg\,x}{6} + \frac{5}{6}\int sec^5\,x\,dx$

em $\int sec^7x\,dx - 2\int sec^5x\,dx + \int sec^3x\,dx$, obtemos

$$\frac{sec^5x\,tg\,x}{6} + \frac{5}{6}\int sec^5\,x\,dx - 2\int sec^5x\,dx + \int sec^3x\,dx =$$

$$\frac{sec^5x\,tg\,x}{6} - \frac{7}{6}\int sec^5\,x\,dx + \int sec^3x\,dx$$

Substituindo $\int sec^5x\,dx = \frac{sec^3x\,tg\,x}{4} + \frac{3}{4}\int sec^3\,x\,dx$ em

$$\frac{sec^5x\,tg\,x}{6} - \frac{7}{6}\int sec^5\,x\,dx + \int sec^3x\,dx$$, obtemos

$$\frac{sec^5x\,tg\,x}{6} - \frac{7}{6}\left(\frac{sec^3x\,tg\,x}{4} + \frac{3}{4}\int sec^3\,x\,dx\right) + \int sec^3x\,dx =$$

$$\frac{sec^5x\,tg\,x}{6} - \frac{7sec^3x\,tg\,x}{24} - \frac{21}{24}\int sec^3\,x\,dx + \int sec^3x\,dx =$$

$$\frac{sec^5x\,tg\,x}{6} - \frac{7sec^3x\,tg\,x}{24} + \frac{1}{8}\int sec^3\,x\,dx$$

Sbstituindo $\int sec^3x\,dx = \frac{secx\ \ tg\,x}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sec x + tg\,x| + c_1$

em $\frac{sec^5x\,tg\,x}{6} - \frac{7sec^3x\,tg\,x}{24} + \frac{1}{8}\int sec^3\,x\,dx$, obtemos

$$\frac{sec^5x\ tg\ x}{6} - \frac{7sec^3x\ tg\ x}{24} + \frac{1}{8}\left(\frac{secx\ \ tg\ x}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sec x + tg\ x| + c_1\right)$$

$$= \frac{sec^5x\ tg\ x}{6} - \frac{7sec^3x\ tg\ x}{24} + \frac{secx\ \ tg\ x}{16} + \frac{1}{16}\ln|\sec x + tg\ x| + c$$

Portanto $\int tg^4x\ sec^3x\ dx =$

$$\frac{sec^5x\ tg\ x}{6} - \frac{7sec^3x\ tg\ x}{24} + \frac{secx\ \ tg\ x}{16} + \frac{1}{16}\ln|\sec x + tg\ x| + c$$