CC0293 - Análise Multivariada

Notas de aula sobre formas quadráticas

Prof. Gualberto Agamez Montalvo

1 Formas quadráticas

1.1 Conceitos básicos e propriedades

Definição 1.1. A forma quadrática associada a uma matriz $\mathbf{A}_n$ é dada por

$$Q\left(\mathbf{x}_n\right) = \mathbf{x}_n^\top \mathbf{A}_n \mathbf{x}_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

em que $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{0}$ é um vetor de tamanho n definido em $\mathbb{R}^n$ e a matriz $\mathbf{A}_n$ é dada por

$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.1. A expressão geral de uma forma quadrática associado ao vetor $\mathbf{x}_3^\top = (x_1, x_2, x_3)^\top$ é dada por

$$\begin{aligned} Q\left(\mathbf{x}_3\right) = {} & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \\ & + a_{31}x_1x_3 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3^2. \end{aligned}$$

Exemplo 1.2. A forma quadrática $Q\left(\mathbf{x}_2\right) = 5x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2$ pode ser representada pela matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix},$$

dado que

$$\begin{aligned}
Q(\mathbf{x}_2) &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 \\
&= 5x_1^2 - 5x_1x_2 - 5x_2x_1 + 3x_2^2 \\
&= 5x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2.
\end{aligned}$$

Exemplo 1.3. A forma quadrática $Q(\mathbf{x}_2) = 5x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2$ também pode ser reescrita como:

- $Q(\mathbf{x}_2) = 5x_1^2 - x_1x_2 - 9x_1x_2 + 3x_2^2$;
- $Q(\mathbf{x}_2) = 5x_1^2 - 2x_1x_2 - 8x_1x_2 + 3x_2^2$;
- $Q(\mathbf{x}_2) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2$.

Portanto, a forma quadrática $Q(\mathbf{x}_2) = 5x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2$ também pode ser representada pelas matrizes

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Observação: No Exemplo 1.3 podemos observar que uma forma quadrática poderia ser representada de diversas matrizes, entretanto, só existe uma única representação composta por uma matriz simétrica (neste caso quando $a_{12} = a_{21}$).

É importante ressaltar que qualquer forma quadrática pode ser representada por uma matriz simétrica. Considere o caso geral em que $Q(\mathbf{x}_n) = \mathbf{x}_n^\top \mathbf{A}_n \mathbf{x}_n$ e $\mathbf{B}_n$ é uma matriz assimétrica dada por

$$\mathbf{B}_n = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Então, vamos definir a matriz os $\mathbf{A}_n$ conformada pelos elementos a_{ij} tais que

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ii} = b_{ii}, & \text{para} i = j; \\ a_{ij} = a_{ji} = \frac{b_{ij}+b_{ji}}{2} & \text{para} i \neq j. \end{cases}$$

Resultando assim numa matriz simétrica, dado que

$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.4. Vamos considerar as matrizes $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$, apresentadas no Exemplo 1.3. Então, temos que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & \dfrac{-1-9}{2} \\ \dfrac{-1-9}{2} & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dfrac{b_{12}+b_{21}}{2} \\ \dfrac{b_{12}+b_{21}}{2} & b_{22} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & \dfrac{-2-8}{2} \\ \dfrac{-2-8}{2} & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dfrac{c_{12}+c_{21}}{2} \\ \dfrac{c_{12}+c_{21}}{2} & c_{22} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & \dfrac{-4-6}{2} \\ \dfrac{-4-6}{2} & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & \dfrac{d_{12}+d_{21}}{2} \\ \dfrac{d_{12}+d_{21}}{2} & d_{22} \end{bmatrix}$$

Observação: Quando a matriz que representa uma forma quadrática é simétrica, temos que

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}_n) &= \mathbf{x}_n^\top \mathbf{A}_n \mathbf{x}_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^{n} a_{ij} x_i x_j. \end{aligned}$$

Exemplo 1.5. Retomando o Exemplo 1.1, temos que a forma quadrática

$$
\begin{aligned}
Q\left(\mathbf{x}_3\right) = {} & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \\
& + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \\
& + a_{31}x_1x_3 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3^2,
\end{aligned}
$$

pode ser reescrita como

$$Q\left(\mathbf{x}_3\right) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2\left(a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3\right),$$

quando a matriz $\mathbf{A}_3$ é simétrica.

1.2 Classificação das formas quadráticas

Definição 1.2. Considere a forma quadrática $Q\left(\mathbf{x}_n\right) = \mathbf{x}_n^\top \mathbf{A}_n \mathbf{x}_n$. Então, $Q\left(\mathbf{x}_n\right)$ é dita

- definida positiva se $Q\left(\mathbf{x}_n\right) > 0$ para qualquer vetor de tamanho n (exceto $\mathbf{x}_n = 0$);
- semi-definida positiva se $Q\left(\mathbf{x}_n\right) \geq 0$ para qualquer vetor de tamanho n (exceto $\mathbf{x}_n = 0$);
- definida negativa se $Q\left(\mathbf{x}_n\right) < 0$ para qualquer vetor de tamanho n (exceto $\mathbf{x}_n = 0$);
- semi-definida negativa se $Q\left(\mathbf{x}_n\right) \leq 0$ para qualquer vetor de tamanho n (exceto $\mathbf{x}_n = 0$);
- indefinida se $Q\left(\mathbf{x}_n\right) > 0$ para algum $\mathbf{x}_n$ e $Q\left(\mathbf{x}_n\right) < 0$ para algum outro $\mathbf{x}_n$.

Exemplo 1.6. Vamos considerar alguns casos particulares com $n = 2$. Então, A forma quadrática:

- $Q(\mathbf{x}_2) = x_1^2 + x_2^2$ é definida positiva, dado que $Q(\mathbf{x}_2) > 0$ para todo $\mathbf{x}_2 \neq 0$;
- $Q(\mathbf{x}_2) = (x_1 + x_2)^2$ é semi-definida positiva, dado que $Q(\mathbf{x}_2) \geq 0$ para todo $\mathbf{x}_2 \neq 0$;
- $Q(\mathbf{x}_2) = -x_1^2 - x_2^2$ é definida negativa, dado que $Q(\mathbf{x}_2) < 0$ para todo $\mathbf{x}_2 \neq 0$;

- $Q(\mathbf{x}_2) = -(x_1 + x_2)^2$ é semi-definida positiva, dado que $Q(\mathbf{x}_2) \leq 0$ para todo $\mathbf{x}_2 \neq 0$;
- $Q(\mathbf{x}_2) = x_1^2 - x_2^2$ é indefinida, dado que $Q(\mathbf{x}_2) = 3 > 0$ para $\mathbf{x}_2 = (2,1)^\top$, e $Q(\mathbf{x}_2) = -3 < 0$ para $\mathbf{x}_2 = (1,2)^\top$.

Exemplo 1.7. Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Então, a forma quadrática associada à matriz $\mathbf{A}$ é dada por

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}_2) &= \mathbf{x}_2^\top \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2 \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= 2x_1^2 + 3x_2^2 \end{aligned}$$

Neste caso, $Q(\mathbf{x}_2) > 0$ para todo $\mathbf{x}_2 \neq (0,0)$. Portanto, a forma quadrática é definida positiva.

Exemplo 1.8. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Então:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}_2) &= \mathbf{x}_2^\top \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2 \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= 4x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 + 3x_1^2 + x_2^2. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq 0$. Assim $\mathbf{A}$ é positiva definida.

Exemplo 1.9. Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Então, a forma quadrática associada à matriz $\mathbf{A}$ é dada por

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}_2) &= \mathbf{x}_2^\top \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2 \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= 5x_1^2 - 2x_2^2 \end{aligned}$$

Neste caso, $Q(\mathbf{x}_2) = 3 > 0$ para $\mathbf{x}_2 = (1, 1)$, e $Q(\mathbf{x}_2) = -3 < 0$ para $\mathbf{x}_2 = (1, 2)$. Portanto, a forma quadrática é indefinida ou indeterminada.

Exemplo 1.10. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Então, a forma quadrática associada à matriz $\mathbf{A}$ é dada por

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}_3) &= \mathbf{x}_3^\top \mathbf{A}_3 \mathbf{x}_3 \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 2\left(2x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3\right) \\ &= 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3. \end{aligned}$$

Então, temos que

$$
\begin{aligned}
Q(\mathbf{x}_3) &= \left(x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2\right) + \left(x_1^2 + 2x_1x_3 + x_3^2\right) + \left(x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2\right) \\
&= \left(x_1 + 2x_2\right)^2 + \left(x_1 + x_3\right)^2 + \left(x_2 + x_3\right)^2 .
\end{aligned}
$$

Portanto, $Q(\mathbf{x}_3) > 0$ para todo $\mathbf{x}_3 \neq (0,0)$. Consequentemente, a forma quadrática é definida positiva.