CC0288 - Inferência Estatística I

Aula de Exercícios Intervalos de Confiança e TH - 05/06/2023.

Prof. Maurício

1. (Seção 7.1- Exercício 20.) O seguinte resultado de saída a partir do MINITAB mostra o resultado de um teste de hipótese para a diferença $p_1 - p_2$ entre duas proporções populacionais.

Test and CI for Two Proportions

Sample	X	n	Sample p
1	41	97	0.422680
2	37	61	0.606557

Difference = p (1) - p (2)

Estimate for difference: -0.183877

95% CI for difference: (-0.341016, -0.026738)

Test for difference = 0 (vs not 0): Z = -2.25 P-Value = 0.024

a. Este teste é unilateral ou bilateral?
b. Qual é a hipótese nula?
c. H_0 pode ser rejeitada ao nível de 5%? O que você acha?

Solução: Temos duas populações independentes

$$X \sim Ber(p_1) \;\; e \;\; Y \sim Ber(p_2)$$

Uma amostra aleatória de tamanho $n = 97$ de X apresentou:

$$S_X = \sum_{i=1}^{n} X_i = 41.$$

Uma amostra aleatória de tamanho $m = 61$ de Y apresentou:

$$S_Y = \sum_{j=1}^{m} Y_j = 37.$$

As estimativas pontuais de p_1 e p_2 são:

$$\hat{p}_1 = \frac{S_X}{n} = \frac{41}{97} = 0,422680,$$

e

$$\hat{p}_2 = \frac{S_Y}{m} = \frac{37}{61} = 0,606557.$$

Seja

$$\Delta = p_1 - p_2$$

Logo,

$$\hat{\Delta} = \hat{p}_1 - \hat{p}_2 = 0,422680 - 0,606557 = -0,183877.$$

Ele quer testar

$$H_0 : p_1 = p_2 \quad \text{versus} \quad H_1 : p_1 \neq p_2,$$

que é equivalente a:

$$H_0 : p_1 - p_2 = 0 \quad \text{versus} \quad H_1 : p_1 - p_2 \neq 0.$$

O teste é bilateral. A hipótese nula é:

$$H_0 : p_1 - p_2 = 0.$$

A hipótese alternativa é:

$$H_0 : p_1 - p_2 \neq 0.$$

o nível descritivo do teste é:

$$nd = 0,024.$$

O nível de significância do teste é

$$\alpha + 0,05.$$

Vamos adotar a seguinte regra de decisão:
Se

$$\alpha > nd$$

rejeitamos H_0.
Como

$$0,05 > 0,024$$

vamos rejeitar H_0 , isto é, as proporções não são as mesmas.
Isto também pode ser visto através do Intervalo de confiança dado
A estatística do teste é dada por:

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{p_1 q_1/n + p_2 q_2/m}} \sim N(0,1)$$

Se H_0 é verdade temos:

$$Z_{cal} = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\,(1/n + 1/m)}} \sim N(0,1),$$

em que

$$\hat{p} = \frac{SX + SY}{n+m} \quad e \quad \hat{q} = 1 - \hat{p}.$$

Assim temos

$$\hat{p} = \frac{SX + SY}{n+m} = \frac{78}{158} = 0,4936709$$

```
> n=97;SX=41;m=61;SY=37
>
> p1_est=SX/n;p1_est
[1] 0.4226804
>
>
> p2_est=SY/m;p2_est
[1] 0.6065574
>
> delta_est=p1_est-p2_est;delta_est
[1] -0.183877
>
>
> ##Vamos estimar p
>
> Num=SX+SY;Num
[1] 78
> Den=n+m;Den
[1] 158
> p_est=Num/Den;p_est
[1] 0.4936709
>
> q_est=1- p_est;q_est
[1] 0.5063291
>
>
> p_est*q_est
[1] 0.2499599
>
> sqrt(p_est*q_est)
[1] 0.4999599
>
>
>
> ####Vamos calcular a estatística do teste
>
>
>
> aux=p_est*q_est*(1/n+1/m);aux
```

```
[1] 0.006674611
>
> sqrt(aux)
[1] 0.08169829
>
> Z=delta_est/sqrt(aux);Z;
[1] -2.250683
>
> z_cal=round(Z,2);z_cal
[1] -2.25
>
>
>
>
>
>
> p_1=pnorm(z_cal);p_1
[1] 0.01222447
>
> nd=2*min(p_1,1-p_1);nd
[1] 0.02444895
>
>
> #####ou
>
>
>
> z_1=abs(z_cal);z1
[1] 2.25
>
>
> ##nd=mms=P(|Z|>2,25)=2P(Z>2.25)=2*( 0,5- P(0<Z<2,25)=2*(0,5-0,48778)
>
>
>
> 2*(0.5-0.48778)
[1] 0.02444
>
>
> ###Vamos obter o IC95 para $p_1-p_2$
>
>
> z_tab=1.96
>
> aux1=p1_est*(1-p1_est)/n + p2_est*(1-p2_est)/m;aux1
[1] 0.006427909
> sqrt(aux1)
[1] 0.08017424
>
>
> epm=sqrt(aux1);epm
[1] 0.08017424
```

```
>
> e=z_tab*epm;e
[1] 0.1571415
>
> IC95=delta_est+c(-e,e);IC95 ####Não bate com o do livro
[1] -0.34101848 -0.02673545
>
>
>
```

O nível descritivo do teste é dado por:

$$nd = P(|Z| > |z_{cal}|) = P(|Z| > 1,29) =$$

$$nd = 2P(Z > 1,29) = 2[0,5 - P(0 < Z < 1,29)] = 2[0,5 - 0,40147] =$$

$$nd = 2 \times 0,09853 = 0,19716$$

A nossa quantidade pivotal é dada por:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

Usando $\gamma = 0,95$ temos

$$P(Z \leq 1,96) = 0,975.$$

```
 ###Navidi -Exercício 14 da seção 6.1 =página 231.
>
> ## E(X)=mu    ;V(X)=sigma2
>
> n=145####tamanho da amostra  bem grande-Use O TLC.
>
>
> sigma=2.3634
>
> xb=73.2461
>
>
> #####H_0:mu=73,5 \;\;\;versus H_1: mu diferente de 73,5.
>
>
>
>
> ###O teste é bilateral. A hipótese nula é  H_0:mu=73,5
> ##### e o nível descritivo é nd=0,196.
>
>
>
```

```
>
>
> ####Vamos obter os valores da saída
>
>
> epm=sigma/sqrt(n);epm;round(epm,4)
[1] 0.1962697
[1] 0.1963
>
> mu_0=73.5
>
>
> z_cal=(xb-mu_0)/(sigma/sqrt(n));z_cal;round(z_cal,2)
[1] -1.293628
[1] -1.29
>
>
>
> ##nd=P(|Z| >|z_cal))=P(|Z|>1,29)=2[0,5 - P(0<Z<1,29))
>
>
>
> #####Pela tabela temos P(0<Z<1,29)=0,40147
>
> nd=2*(0.5-0.40147);nd;round(nd,3)
[1] 0.19706
[1] 0.197
>
>
> p_1=pnorm(z_cal);p_1
[1] 0.09789694
> nms=2*min(p_1,1-p_1);nms;round(nms,3)
[1] 0.1957939
[1] 0.196
>
> z_tab=qnorm(0.975);z_tab
[1] 1.959964
>
> z_tab=1.96
>
> e=z_tab*epm;e
[1] 0.3846886
>
> IC95=xb+c(-1,1)*e;IC95;round(IC95,4)
[1] 72.86141 73.63079
[1] 72.8614 73.6308
>
> ###Baseado nos intervalos de confiança não podemos rejeitar H_0:
>
>
>
> ####Vamos responder ao item d:
```

```
>
>
> #####Sabemos que P(Z> -1,645)=0,95
>
> 1-pnorm(-1.645)
[1] 0.9500151
> z_tab=-1.645
> mu_0=73.6
> z_cal=(xb-mu_0)/(sigma/sqrt(n));z_cal;round(z_cal,2)
[1] -1.803131
[1] -1.8
>
> z_cal <z_tab
[1] TRUE
> lim=xb+1.645*epm;lim
[1] 73.56896
>
> mu_0<lim
[1] FALSE
>
>
> nd=pnorm(-1.8);nd
[1] 0.03593032
>
>
>
>
>
>
>
>
> ####Vamos responder ao item e:
>
>
>
>
>
> z_tab=qnorm(0.995);z_tab
[1] 2.575829
>
> z_tab=2.58
>
> e=z_tab*epm;e
[1] 0.5063758
>
> IC99=xb+c(-1,1)*e;IC99;round(IC99,4)
[1] 72.73972 73.75248
[1] 72.7397 73.7525
>
>
```