CC-0288 - Inferência Estatística I

Exemplo 1.3.5 - 17/03/2023

Prof. Maurício Mota

1. Vamos comentar o Exemplo 1.3.5 da página 10 do livro do Heleno e da Mônica.

   Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de X com $E(X) = \theta$ e $Var(X) = \sigma^2$, em que σ^2 é conhecido,.

   Consideramos agora os estimadores lineares:

$$X_L = \sum_{i=1}^{n} l_i \; X_i,$$

   em que $l_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ são constantes conhecidas.

   Vamos calcular a esperança de X_L:

$$E\left[X_L\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} l_i \; X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E\left[l_i \; X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \; l_i \; E\left[X_i\right],$$

$$E\left[X_L\right] = \sum_{i=1}^{n} \; l_i \; \theta = \theta \; \sum_{i=1}^{n} \; l_i,$$

   temos X_L é um estimador não viciado para θ se e somente se:

$$\sum_{i=1}^{n} \; l_i = 1.$$

   A variância de X_L é dada por:

$$Var\left[X_L\right] = Var\left[\sum_{i=1}^{n} l_i \; X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Var\left[l_i \; X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \; l_i^2 \; Var\left[X_i\right],$$

$$Var\left[X_L\right] = \sum_{i=1}^{n} \; l_i^2 \; \sigma^2 = \sigma^2 \; \sum_{i=1}^{n} \; l_i^2.$$

   Assim nosso problema agora como escolher os coeficientes l_i para

   achar um estimador não viciado com a menor variância.

   Assim teremos que minimizar $Var\left[X_L\right]$ sujeito à restrição $\sum_{i=1}^{n} \; l_i = 1.$

   O livro apresenta duas maneiras para esta busca.

   Note que

$$\bar{l} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \; l_i}{n} = \frac{1}{n}.$$

   Note que:

$$\sum_{i=1}^{n} (l_i - \bar{l})^2 = \sum_{i=1}^{n} l_i^2 - n\, \bar{l}^2 = \sum_{i=1}^{n} l_i^2 - n\, \frac{1}{n^2} = \sum_{i=1}^{n} l_i^2 - \frac{1}{n}.$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^{n} l_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (l_i - \bar{l})^2 + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} (l_i - \frac{1}{n})^2 + \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n}.$$

Isto só acontece quando:

$$l_i = \frac{1}{n}, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Assim

$$X_L = \sum_{i=1}^{n} l_i\, X_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\, X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}.$$

O estimador linear com a menor variância é a média amostral.

A segunda maneira é utilizar multiplicadores de Lagrange.

A função a ser minimizada é:

$$H(\lambda) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} l_i^2 - \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} l_i - 1 \right).$$

Derivando parcialmente em relação a l_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ temos:

$$2\, \sigma^2 l_j - \lambda = 0$$

logo

$$l_j = \frac{\lambda}{2\sigma^2}$$

Somando para $j = 1, 2, \ldots, n$ temos:

$$1 = \sum_{j=1}^{n} l_j = \frac{n\lambda}{2\sigma^2}.$$

Logo

$$\lambda = \frac{2\sigma^2}{n}.$$

$$l_i = \frac{\lambda}{2\sigma^2} = \frac{\frac{2\sigma^2}{n}}{2\sigma^2} = \frac{1}{n}.$$

Assim chegamos a mesma conclusão anterior.