Universidade Federal do Ceará
Centro de Ciências
Departamento de Estatística e Matemática Aplicada
Disciplina: CC0282 - Probabilidade 1 – **Período:** 2021.2
Professor: Leandro Chaves Rêgo
Sétima Lista de Exercícios

1. Suponha que X_1 and X_2 são variáveis independentes com média 0 e variância σ^2. Determine:
   (a) Qual a covariância entre $U = X_1 + 2X_2$ e $V = 4X_1 - 3X_2$?
   (b) Qual o coeficiente de correlação entre $U = X_1 + 2X_2$ e $V = 4X_1 - 3X_2$?

2. Mostre que:

$$Cov(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{m} b_j X_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j Cov(X_i, X_j).$$

3. Sejam X e Y variáveis tais que suas variâncias sejam positivas e finitas. Mostre que se $E(X|Y)$ é constante para todos os valores de Y, então X e Y são não correlacionadas.

4. Suponha que X e Y sejam variáveis aleatórias independentes com distribuição de probabilidade dada na tabela a seguir:

	0	1	2
X	0,2	0,5	0,3
Y	0,4	0,1	0,5

   Utilizando função geradora de probabilidade, determine a distribuição de $X + Y$.

5. Utilizando a função geradora de probabilidade, mostre que se X tem distribuição $Poisson(\lambda)$, ou seja, que $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$, então

$$E(X(X-1)(X-2)\cdots(X-k)) = \lambda^{k+1}.$$

6. A variável X tem função geradora de momentos dada por $M(t) = e^{\alpha t + \beta t^2}$, com $t \in I\!R$, $\alpha \in I\!R$ e $\beta > 0$. Determine a média e a variância de X.

7. Suponha que X tem distribuição $Binomial(n, p)$, ou seja, que $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, então verifique, usando funções geradoras de momentos, se é ou não verdade que $Y = 2X$ tem distribuição $Binomial(2n, p)$.

8. Numa rodovia, o número de acidentes por semana tem distribuição de Poisson com parâmetro α. Em cada acidente, o número de feridos tem distribuição de Poisson com parâmetro β. Assuma independência entre o número de feridos por acidente e número de acidentes por semana. Obtenha o número médio de feridos por semana.

9. Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de de variáveis independentes e identicamente distribuídas. Seja N uma outra variável, independente dos X_i's, e com valores inteiros não-negativos. Determine a média e a variância de $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$.

10. A função geradora de momentos conjunta de X_1 e X_2 é dada por

$$M(t_1, t_2) = [\frac{1}{3}(e^{t_1+t_2} + 1) + \frac{1}{6}(e^{t_1} + e^{t_2})]^2, t_1, t_2 \in I\!R.$$

Calcule a covariância entre as variáveis.