Q09. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}$ uma amostra aleatória de tamanho $n+1$ da distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, onde μ e σ^2 são desconhecidos.

i. Encontre c tal que

$$\frac{c(\bar{X} - X_{n+1})}{S} \sim t(n-1),$$

onde

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \quad e \quad S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

ii. Se $n = 8$, encontre k de modo que

$$P\left(\bar{X} - kS \leq X_9 \leq \bar{X} + kS\right) = 0,80.$$

Solução:

Sabemos que

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n) \quad e \qquad X_{n+1} \sim N(\mu, \sigma^2),$$

e são independentes.

Assim

$$\bar{X} - X_{n+1} \sim N(0, (1 + 1/n)\sigma^2).$$

$$\bar{X} - X_{n+1} \sim N\left(0, \frac{n+1}{n}\sigma^2\right).$$

Logo,

$$Z = \frac{\bar{X} - X_{n+1}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}\sigma^2}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \quad \frac{(\bar{X} - X_{n+1})}{\sigma}.$$

Sabemos que

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

Usamos a fórmula de S^2 dada temos:

$$V = \frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

Assim

$$A = \frac{V}{n-1} = \frac{n}{n-1} \frac{S^2}{\sigma^2}$$

$$\sqrt{A} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\ \frac{S}{\sigma}.$$

Sabemos

$$T = \frac{Z}{\sqrt{A}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}\ \frac{(\bar{X} - X_{n+1})}{\sigma}\ \sqrt{\frac{n-1}{n}}\,\frac{\sigma}{S}$$

$$T = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\,\frac{(\bar{X} - X_{n+1})}{S} \sim t(n-1).$$

Logo

$$c = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}.$$

Vamos responder ao item **ii**:

De

$$P\left(\bar{X} - kS \le X_9 \le \bar{X} + kS\right) = 0,80.$$

$$P\left(-kS \le X_9 - \bar{X} \le kS\right) = 0,80.$$

$$P\left(-kS \le \bar{X} - X_9 \le kS\right) = 0,80.$$

Multiplicando por (-1) temos:

$$P\left(-kS \le \bar{X} - X_9 \le kS\right) = 0,80.$$

Dividindo por S temos:

$$P\left(-k \le \frac{(\bar{X} - X_9)}{S} \le k\right) = 0,80.$$

Multiplicando pela constante c temos:

$$P\left(-kc \le \frac{c(\bar{X} - X_9)}{S} \le ck\right) = 0,80.$$

$$P\left(-kc \le t(7) \le ck\right) = 0,80$$

$$P\left(|t(7)| \le kc\right) = 0,80$$

Olhando na tabela t do Bussab& Morettin com 7 graus de liberdade e
$p = 1 - 0.80 = 0,20$
temos

$$kc = 1,415.$$

$$c = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} = \sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Logo

$$k = 1,415 \times \frac{3}{\sqrt{7}} = 1,6044.$$

```
 n=8
> aux=(n-1)/(n+1);aux
[1] 0.7777778
> t_tab=qt(0.9,n-1);t_tab
[1] 1.414924
> c=sqrt(aux);c
[1] 0.8819171
> k=t_tab/c;k
[1] 1.604373
```