1 Distribuição Gumbel-Prof. Maurício-23.1

Definição. Uma variável aleatória X tem distribuição Gumbel de parâmetros α e β se sua densidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\beta}\, e^{-\frac{(x-\alpha)}{\beta}}\; e^{-e^{-\frac{(x-\alpha)}{\beta}}} I_{(-\infty,\infty)}(x),\ \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}^{+}. \tag{1}$$

Notação: $X \sim \mathit{Gumbel}(\alpha, \beta)$.

Observação 1. Lê-se a notação do seguinte modo: *X segue distribuição Gumbel de parâmetro de posição α e parâmetro de escala β.*

Observação 2. O suporte da densidade é $A = \mathbb{R}$ e o espaço paramétrico é $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+}$.

Observação 3. Quando $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, temos a Gumbel Padrão e sua fdp é dada por:

$$g(z) = e^{-z}\, e^{-e^{-z}} I_{(-\infty,\infty)}(z). \tag{2}$$

Na Figura 1, apresentamos o gráfico da função densidade de probabilidade (1) para certos valores de α e β.

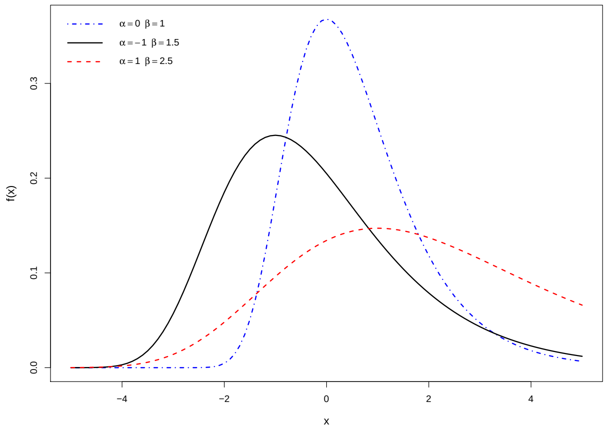

Figura 1: Gráfico da função densidade Gumbel

1.1 Função Densidade de Probabilidade "fdp"

Vamos agora mostrar que a expressão (1) é realmente uma fdp.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta}\, e^{-\frac{(x-\alpha)}{\beta}}\, e^{-e^{-\frac{(x-\alpha)}{\beta}}}\, dx.$$

Fazendo

$$y = e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}} \Rightarrow dy = -\frac{1}{\beta}\, e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}\, dx$$

Assim,

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{y\to-\infty} e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}} = \infty$$

Desse modo, invertendo os limites de integração, a integral fica:
Assim

$$I = \int_{\infty}^{0} -e^{-y}\, dy = \int_{0}^{\infty} e^{-y}\, dy = \Gamma(1) = 0! = 1.$$

Como $f(x) > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, então a expressão (1) é realmente uma fdp

pois satisfaz:

i. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

ii. $f(x) \geq 0$.

1.2 Função de Distribuição e de Sobrevivência

A função de distribuição da Gumbel de parâmetros α e β é definida por:

$$F(x) = e^{-e^{-\frac{(x-\alpha)}{\beta}}}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vamos mostrar o fato acima:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\beta}\ e^{-\frac{(t-\alpha)}{\beta}}\ e^{-e^{-\frac{(t-\alpha)}{\beta}}}\ dt.$$

Fazendo

$$y = e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}} \Rightarrow dy = -\frac{1}{\beta}\ e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}\ dx$$

Assim,

$\lim_{t\to x} y = \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}} = e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}$

$\lim_{t\to -\infty} y = \lim_{y\to -\infty} e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}} = \infty$

Desse modo, invertendo os limites de integração, a integral fica:

$$F(x) = \int_{\infty}^{e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}} -e^{-y}\ dy = \int_{e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}}^{\infty} e^{-y}\ dy = e^{-e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}}.$$

Vamos apresentar na Figura 2 a acumulada para alguns valores de α e β.

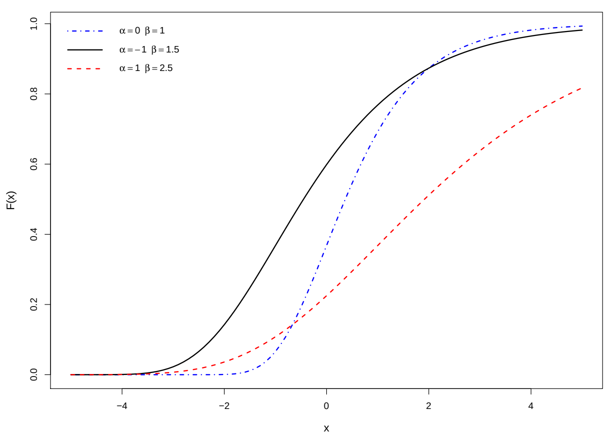

Figura 2: Gráfico da função de distribuição Gumbel

A função de sobrevivência da Gumbel de parâmetros α e β é definida por:

$$S(x) = 1 - e^{-e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}}.$$

Vamos apresentar na Figura 3 a sobrevivência para alguns valores de α e β.

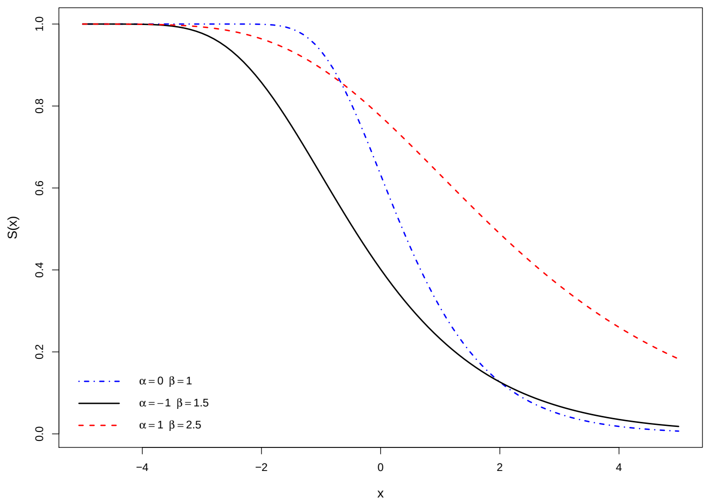

Figura 3:

1.3 Quantis de ordem q

Seja x_q, $0 < q < 1$, o q-ésimo quantil da distribuição Gumbel. Ele é dado por:

$$x_q = \alpha - \beta \ \ln(-\ln(q)).$$

Prova :
Ele satisfaz a seguinte equação

$$F(x_q) = q$$

Assim

$$e^{-e^{-\frac{x_q-\alpha}{\beta}}} = q \ \Rightarrow \ -e^{-\frac{x_q-\alpha}{\beta}} = \ln(q) \ \Rightarrow$$

$$e^{\frac{-(x_q-\alpha)}{\beta}} = -ln(q) \Rightarrow \frac{-(x_q-\alpha)}{\beta} = \ln(-\ln(q))$$

$$\frac{(x_q-\alpha)}{\beta} = -\ln(-\ln(q))$$

Logo

$$x_q = \alpha - \beta \ln\left[-\ln(q)\right].$$

Observação 4
A mediana de X, $x_{0,5}$, será dada por:

$$x_{0,5} = \alpha - \beta \ln\left[-\ln(\frac{1}{2})\right] = \alpha - \beta \ln\left[\ln(2)\right].$$

O 1° quartil, $x_{0,25}$, será dado por

$$x_{0,25} = \alpha - \beta \ln\left[-\ln(\frac{1}{4})\right] = \alpha - \beta \ln\left[\ln(4)\right]$$

O 3° quartil, $x_{0,75}$, será dado por

$$x_{0,75} = \alpha - \beta \ln\left[-\ln(\frac{3}{4})\right] = \alpha - \beta \ln\left[\ln(\frac{4}{3})\right].$$

1.4 Moda da Distribuição Gumbel

Seja

$$f(x) = \frac{1}{\beta}\ e^{-\frac{(x-\alpha)}{\beta}}\ e^{-e^{-\frac{(x-\alpha)}{\beta}}} I_{(-\infty,\infty)}(x)$$

Considere

$$g(x) = \ln\left[f(x)\right] = -\ln(\beta) - \frac{(x-\alpha)}{\beta} - e^{-\frac{(x-\alpha)}{\beta}}.$$

Derivando em relação a x temos

$$g'(x) = -\frac{1}{\beta}\left[1 - e^{-\frac{(x-\alpha)}{\beta}}\right] = 0$$

$$e^{-\frac{(x-\alpha)}{\beta}} = 1 \Rightarrow \frac{(x-\alpha)}{\beta} = 0, \Rightarrow\ x = \alpha.$$

Então $x = \alpha$ será a moda de X desde que $g''(\alpha) < 0$.
A derivada segunda de $g(x)$ é

$$g^{''}(x) = -\frac{1}{\beta^2}\, e^{-\frac{(x-\alpha)}{\beta}} < 0,\ \forall x.$$

1.5 Transformações da Gumbel

Proposição 1: Se $X \sim Gumbel(\alpha, \beta)$ então $Z = \frac{X-\alpha}{\beta}$ tem distribuição Gumbel Padrão.

Prova Seja z real então

$$G(z) = P(Z \leq z) = P\left(\frac{X-\alpha}{\beta} \leq z\right) = P(X \leq \alpha + \beta z) = F(\alpha + \beta z).$$

Assim

$$g(z) = \beta\, f(\alpha + \beta z) = \frac{1}{\beta}\,\beta\, e^{-z}\, e^{-e^{-z}} = e^{-z}\, e^{-e^{-z}} I_{_{(-\infty,\infty)}}(z).$$

Proposição 2: Se $X \sim Gumbel(\alpha, \beta)$ então $Y = e^{-\frac{X-\alpha}{\beta}}$ tem distribuição Exponencial de parâmetro $\lambda = 1$.

Prova
Seja y real positivo, então

$$G(y) = P(Y \leq y) = P\left(e^{-\frac{X-\alpha}{\beta}} \leq y\right) = P(-\frac{X-\alpha}{\beta} \leq \ln(y)).$$

$$G(y) = P(\frac{X-\alpha}{\beta} \geq -\ln(y)) = P\left(X \geq \alpha - \beta\ln(y)\right) = 1 - F\left(\alpha - \beta ln(y)\right).$$

Assim

$$g(y) = \frac{\beta}{y}\ \ f\left(\alpha - \beta\ln(y)\right) = \frac{\beta}{y}\,\frac{1}{\beta}\, e^{\ln(y)}\, e^{-e^{\ln(y)}} = e^{-y}\ I_{_{(0,\infty)}}(y),$$

pois $e^{ln(y)} = y$.

Proposição 3: Se $X \sim Gumbel(\alpha, \beta)$ *então* $Y = e^{-X}$ *tem distribuição de Weibull de parâmetros* $a = exp\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ *e* $b = \frac{1}{\beta}$.

Prova

Como $y = e^{-x} > 0$ *temos para* $y > 0$

$$G(y) = P(Y \leq y) = P\left(e^{-X} \leq y\right) = P\left(-X \leq ln(y)\right) = P(X \geq -ln(y)) = S\left(-ln(y)\right),$$

Assim,

$$G(y) = 1 - e^{-e^{(-lny+\alpha)/beta}} = 1 - e^{-e^{\alpha/\beta}\, y^{1/\beta}}$$

Fazendo

$$a = e^{\frac{\alpha}{\beta}} \quad e \quad b = \frac{1}{\beta}$$

temos o resultado.

Note que se $\beta = 1$ *temos* $Y = e^{-X} \sim Exp(\lambda = e^{\alpha})$.

Proposição 4: Se $X \sim Weibull(a, b)$ *então*

$$Y = -\ln(X) \sim Gumbel(\alpha = \frac{\ln(a)}{b}, \beta = \frac{1}{b}).$$

Prova

A f.d.p. de X, *para* $x > 0$ *é dada por:*

$$f(x) = ab\, x^{b-1}\, e^{-ax^b}.$$

Assim $y = -ln(x)$ *é um número real, então*

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(-ln(X) \leq y) = P(ln(X) \geq -y) = P(X \geq e^{-y}) = S_X(e^{-y}).$$

A densidade de Y *é dada por:*

$$g(y) = G'(y) = -S'_X(y) = e^{-y}\ ab\ e^{-(b-1)y}\ e^{-ae^{-by}} = ab\ e^{-by}\ e^{-ae^{-by}},$$

Fazendo

$$\beta = \frac{1}{b}$$

e lembrando que:

$$a\ e^{-by} = e^{ln(a)}\ e^{-by} = e^{-by+ln(a)} = e^{-b(y-\frac{ln(a)}{b})} = e^{-\frac{y-\alpha}{\beta}},$$

fazendo

$$\alpha = \frac{ln(a)}{b}.$$

Assim chegamos ao resultado desejado.

Proposição 5: Se U é uniforme padrão então ,

$$X = F^{-1}(U) = \alpha - \beta\ log(-log(U)) \sim Gumbell(\alpha, \beta).$$

Prova

$$G(x) = P(X \leq x) = P(\alpha - \beta log(-log(U)) \leq x) = P(\beta log(-log(U)) \geq \alpha - x),$$

$$G(x) = P(\beta log[-log(U)] \geq -(x-\alpha)),$$

$$G(x) = P(log(-log(U)) \geq \frac{-(x-\alpha)}{\beta}) = P\left(-log(U) \geq e^{-\frac{-(x-\alpha)}{\beta}}\right),$$

$$G(x) = P\left(-log(U) \geq e^{-\frac{-(x-\alpha)}{\beta}}\right) = 1 - e^{-\frac{-(x-\alpha)}{\beta}}$$

1.6 Função Geradora de Momentos.

Inicialmente vamos estudar a função geradora de momentos da Gumbel Padrão.

Prova

$$g(z) = e^{-z}\, e^{-e^{-z}} I_{(-\infty,\infty)}(z).$$

Fato 1. A função geradora de momentos da Gumbel Padrão é

$$M_Z(t) = \Gamma(1-t), t < 1.$$

Prova Sabemos que

$$\begin{aligned}
M_Z(t) &= E(e^{tZ}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} e^{-z}\, e^{-e^{-z}} dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-z})^{-t} e^{-z}\, e^{-e^{-z}} dz \\
&= \int_{0}^{\infty} u^{-t} e^{-u} du \\
&= \int_{0}^{\infty} u^{1-t-1} e^{-u} du \\
&= \Gamma(1-t),
\end{aligned}$$

com a condição $1-t > 0$, isto é, $t < 1$.

Foi usada a mudança de variável

$$u = e^{-z},\;\; du = -e^{zy} dz\;,\; u^t = e^{-tz} \quad e \;\; u^{-t} = e^{tz}.$$

Fato 2. A função geradora de momentos da Gumbel (α , β) é

$$M_X(t) = e^{\alpha t}\, \Gamma(1-\beta t),\;\; t < 1/\beta.$$

Prova Sabemos que $Z = \frac{X-\alpha}{\beta}$ tem distribuição Gumbel padrão e daí temos

$$X = \alpha + \beta Z.$$

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= E(e^{tX}) \\
&= E(e^{t(\alpha+\beta t Z)} \\
&= e^{t\alpha}\, E(\beta t Z) \\
&= e^{t\alpha}\, M_Z(\beta t) \\
&= e^{t\alpha}\, \Gamma(1-\beta t),
\end{aligned}$$

desde que $\beta\, t < 1$ e portanto $t < 1/\beta$.

Prove a proposição usando função geradora de momentos.

Prova

O r-ésimo momento de X é dado por

$$E(X^r) = a^{-r/b}\,\Gamma(1 + r/b).$$

A função geradora de momentos de Y é dada por:

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E[e^{-t\ln(X)}] = E[e^{\ln(X^{-t})}] = E[X^{-t}] = a^{t/b}\,\Gamma(1 - t/b),$$

com $t < b$.

A função geradora de momentos de Y Gumbel(α, β) é dada por:

$$M_Y(t) = e^{\alpha t}\Gamma(1 - \beta t),\ t < 1/\beta.$$

Comparando as duas funções geradoras temos:

$$\beta = 1/b$$

e

$$e^{\alpha} = a^{-1/b} \quad \Rightarrow \alpha = \frac{\ln(a)}{b}.$$

1.7 Função Geradora de Cumulantes.

Fato 3. A função geradora de Cumulantes da Gumbel (α , β) é

$$K_X(t) = \alpha t + \ln\left[\Gamma(1 - \beta t)\right],\ \ t < 1/\beta.$$

Prova

$$K(t) = \ln\left[M_X(t)\right] = \ln\left[e^{t\alpha}\Gamma(1 - \beta t)\right] = \alpha t + \ln\left[\Gamma(1 - \beta t)\right],\ \ t < 1/\beta.$$

A derivada primeira de $K(t)$ é dada por:

$$K'(t) = t + (-1)\ \ \beta\,\frac{\Gamma'(1 - \beta t)}{\Gamma(1 - \beta t)} = t +\ (-1)\,\beta\,\Psi(1 - \beta t).\ \ t < 1/\beta,$$

onde $\Psi(x)$ é a função digama. Vamos recordar!!!!! Sabemos que

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1}\, e^{-u} du.$$

Derivando $\Gamma(\alpha)$ em relação a α temos:

$$\Gamma'(\alpha) = \int_0^\infty \ln(u) u^{\alpha-1}\, e^{-u} du.$$

Fazendo $\alpha = 1$ temos:

$$\Gamma'(1) = \int_0^\infty \ln(u)\, e^{-u} du = -\gamma,$$

conforme a página 99 do Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas-Coleção Schaum-Spiegel.

Para calcularmos momentos de ordem superior a 1 temos que falar da função digama que é definida por:

$$\Psi(a) = (\ln[\Gamma(a)])' = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}.$$

Note que

$$\Psi(1) = \Gamma'(1),$$

pois $\Gamma(1) = 1$.

Vamos usar o R para trabalhar com a função digama.

```
  > digamma(1)
[1] -0.5772157
>
> gama=-digamma(1);gama #### Constante de Euler
[1] 0.5772157
>
```

Além disso precisamos da derivada de ordem r da função gama que é dada por:

$$\Gamma^{(r)}(\alpha) = \int_0^\infty [\ln(u)]^r u^{\alpha-1}\, e^{-u} du.$$

E para $\alpha = 1$ temos:

$$\Gamma^{(r)}(1) = \int_0^\infty [\ln(u)]^r \, e^{-u} du.$$

O R fornece as derivadas de ordem r da função $\Psi(a)$ são dadas através da função psigamma$(a, deriv = r)$.

Para achar as derivadas de ordem r da função $\Gamma(a)$ vamos utilizar $\Psi^{(r)}(a)$.

Sabemos que $\Gamma^{(1)}(a) = \Psi(a)\Gamma(a)$ e vamos derivar novamente

$$\Gamma^{(2)}(a) = \Psi^{(1)}(a)\Gamma(a) + \Psi(a)\Gamma^{(1)}(a).$$

Assim para $a = 1$ temos:

$$\Gamma^{(2)}(1) = \Psi^{(1)}(1)\Gamma(1) + \Psi(1)\Gamma^{(1)}(1) = \Psi^{(1)}(1) + \Psi(1)\Gamma^{(1)}(1).$$

Como $\Gamma^{(1)}(1) = \Psi(1)$ temos:

$$\Gamma^{(2)}(1) = \Psi^{(1)}(1) + [\Psi(1)]^2.$$

Mostraremos que $\Gamma^{(2)}(1) = 1,978112$. Fazendo no R temos:

Vamos fazer uma função no R para gerar estas derivadas de ordem r da função Gama. Esta ideia foi dada pelo Professor Gualberto Agamez.

```
> f <- function(x,r) (log(x))^r*exp(-x)
> Deriv_Gama <- function(r) integrate(f, 0, Inf, r=r)$value
> Deriv_Gama(1); Deriv_Gama(2);Deriv_Gama(3);Deriv_Gama(4)
[1] -0.5772157
[1] 1.978112
[1] -5.444874
[1] 23.56148
>
```

```
Assim,

$$ \Gamma^{(1)}(0)= -0,5772157\;\;,\;\Gamma^{(2)}(0)=  1,978112\;\; \Gamma^{(3)}
```

1.8 Função Característica

A função característica da Gumbel (α , β) é

$$C_X(t) = e^{\alpha i t}\Gamma(1 - \beta i t).$$

1.9 Momentos em Relação à Origem da Gumbel Padrão

Se Z é Gumbel padrão então:

a. $E(Z) = -\Gamma'(1) = \gamma$, *onde* $\gamma = 0,5772...$, *a constante de texttttEULER.*

Prova:

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-z}\, e^{-e^{-z}} dz \\ &= \int_{\infty}^{0} -\ln(u) e^{-u}(-1) du \\ &= -\int_{0}^{\infty} \ln(u) e^{-u} du \\ &= -\int_{0}^{\infty} \ln(u) e^{-u} du \\ &= -\Gamma'(1) = -(-\gamma) = \gamma \end{aligned}$$

Foi feita a seguinte mudança de variável:

$$u = e^{-z}, \;\; z = -\ln(u), \;\; dz = -du/u.$$

Além disso $\lim_{z \to \infty} u = 0$ *e* $\lim_{z \to -\infty} u = \infty$.

b. $E(Z^2) = \dfrac{\pi^2}{6} + \gamma^2$.

Prova:

$$
\begin{aligned}
E(Z^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z}\ e^{-e^{-z}} dz \\
&= \int_{\infty}^{0} (-\ln(u))^2 e^{-u}(-1) du \\
&= \int_{0}^{\infty} (\ln(u))^2 e^{-u} du \\
&= \int_{0}^{\infty} [\ln(u)]^2 e^{-u} du \\
&= \Gamma^{(2)}(1).
\end{aligned}
$$

Vamos calcular $\Gamma^{(2)}(1)$.

Fazendo a mudança de variável $u = st$, *onde* s *é constante positiva. Assim*

$$
t = \frac{u}{s}, \quad du = s\ dt, \ \lim_{u \to \infty} t = \infty, \ \lim_{u \to 0} t = 0.
$$

Além disso,

$$
\ln(u) = \ln(st) = \ln(s) + \ln(t)
$$

e

$$
[\ln(u)]^2 = [\ln(s) + \ln(t)]^2 = [\ln(s)]^2 + [\ln(t)]^2 + 2\ln(s)\ln(t).
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{(2)}(1) &= \int_{0}^{\infty} \big[[\ln(s)]^2 + [\ln(t)]^2 + 2\ln(s)\ln(t)\big]\ e^{-st}\ s\ dt \\
&= [\ln(s)]^2 \int_{0}^{\infty} s\ \ e^{-st}\ dt + s\int_{0}^{\infty} [\ln(t)]^2\ e^{-st}\ dt + 2s\ \ln(s) \int_{0}^{\infty} \ln(t)\ e^{-st} dt \\
&= [\ln(s)]^2 + sI_1 + 2s\ln(s) I_2
\end{aligned}
$$

onde

$I_2 = \int_0^\infty \ln(t)\ e^{-st}dt$ é a transformada de Laplace da função $\ln(t)$ que é obtida na página 169 do livro do Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas- Coleção Schaum-Spiegel.

$$I_2 = \int_0^\infty \ln(t)\ e^{-st}dt = -\frac{\gamma + \ln(s)}{s}.$$

e

$$2s\ln(s)I_2 = -2\gamma\ln(s) - 2[\ln(s)]^2.$$

Vamos calcular I_1:

A integral dada por:

$$\int_0^\infty [\ln(t)]^2\ e^{-st}\ dt,$$

é a transformada de Laplace da função $[\ln(t)]^2$ que vem tabelada na página 169 do livro do Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas- Coleção Schaum-Spiegel.

Assim

$$\int_0^\infty [\ln(t)]^2\ e^{-st}\ dt = \frac{1}{s}\left[\frac{\pi^2}{6} + (\gamma + \ln(s))^2\right].$$

logo

$$sI_1 = \left[\frac{\pi^2}{6} + (\gamma + \ln(s))^2\right].$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(2)}(1) &= [\ln(s)]^2 + sI_1 + 2s\ln(s)I_2 = [\ln(s)]^2 + \left[\frac{\pi^2}{6} + (\gamma + \ln(s))^2\right] - 2\gamma\ln(s) - 2[\ln(s)]^2 \\
&= \frac{\pi^2}{6} + [\ln(s)]^2 + \gamma^2 + 2\gamma\ln(s) + [\ln(s)]^2 + 2\gamma\ln(s) - 2[\ln(s)]^2 \\
&= \frac{\pi^2}{6} + \gamma^2.
\end{aligned}$$

```
> ###E(Z^2), Z~Gumbel(0,1)
> psigamma(1,deriv=1);pi^2/6
[1] 1.644934
[1] 1.644934
>
```

c. *O r-ésimo momento em relação à origem da Gumbel Padrão é dado por*

$$E(Z^r) = (-1)^r \, \Gamma^{(r)}(1),$$

onde $\Gamma^{(r)}(1)$ *é a r-ésima derivada da função gama calculada no ponto* $\alpha = 1$.

Prova:

$$\begin{aligned}
E(Z^r) &= \int_{-\infty}^{\infty} z^r e^{-z} \, e^{-e^{-z}} dz \\
&= \int_{\infty}^{0} (-\ln(u))^r e^{-u} (-1) du \\
&= \int_{0}^{\infty} (-1)^r (\ln(u))^r e^{-u} du \\
&= (-1)^r \int_{0}^{\infty} [\ln(u)]^r e^{-u} du \\
&= (-1)^r \Gamma^{(r)}(1).
\end{aligned}$$

d. *A variância da Gumbel padrão é dada por:*

$$Var\,(Z) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Prova: A variância da Gumbel Padrão é dada por

$$Var(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = [\Gamma(1)]^2 - [\Gamma'(1)]^2 = \frac{\pi^2}{6} + \gamma^2 - \gamma^2 = \frac{\pi^2}{6}.$$

1.10 Momentos em Relação à Origem da Gumbel Geral

a. $E(X) = \alpha + \beta\gamma.$

Prova:

Como $X = \alpha + \beta Z,$

temos que

$$E(X) = E(\alpha + \beta Z) = \alpha + \beta E(Z) = \alpha + \beta\,\gamma.$$

b. $E(X^2) = (\alpha + \beta\,\gamma)^2 + \dfrac{\beta^2\pi^2}{6}.$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= E\,(\alpha + \beta Z)^2 \\ &= \alpha^2 + 2\,\alpha\,\beta\,E(Z) + \beta^2 E(Z^2) \\ &= E\,(\alpha + \beta Z)^2 \\ &= \alpha^2 + 2\,\alpha\,\beta\,\gamma + \beta^2\,\left(\frac{\pi^2}{6} + \gamma^2\right) \\ &= (\alpha + \beta\,\gamma)^2 + \frac{\beta^2\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

Prova:

Proposição O r-ésimo momento em relação à origem da Gumbel de parâmetros α *e* β *é dado por*

$$E(X^r) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i\,\Gamma^{(i)}(1) \binom{r}{i}\,\beta^i\,\alpha^{r-i},$$

onde $\Gamma^{(i)}(1)$ *é a i-ésima derivada da função gama calculada no ponto* $\alpha = 1.$

Prova:

$$
\begin{aligned}
E(X^r) &= E\left(\alpha+\beta Z\right)^r \\
&= E\left(\sum_{i=1}^{r} \binom{r}{i} \beta^i \; Z^i \; \alpha^{r-i}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \beta^i \; E(Z^i) \; \alpha^{r-i} \\
&= \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \; \Gamma^{(i)}(1) \binom{r}{i} \beta^i \; \alpha^{r-i}.
\end{aligned}
$$

1.11 Variância da Distribuição Gumbel

Proposição Seja $X \sim$ Gumbel(α, β). Sua variância é dada por:

$$Var\left(X\right) = \frac{\beta^2 \pi^2}{6}.$$

Como

$$Var(X) = Var(\alpha + \beta Z) = \beta^2 \; Var(Z) = \frac{\beta^2 \pi^2}{6}.$$

1.12 Terceiro Momento Central da Distribuição Gumbel

O terceiro momento central é dado por:

$$\mu_3 = E\left(X-\mu\right)^3 = 2\;\xi(3)\beta^3.$$

Note que $\xi(3)$ é a função zeta de Riemmann calculada no ponto $s = 3$

$$\xi(3) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3} = 1,202056903....,$$

que é conhecida como constante de Apéry. Ela é um número irracional.

1.13 Assimetria da Distribuição Gumbel

O coeficiente de Assimetria da distribuição Gumbel é dado por:

$$\alpha_3 = \frac{12\sqrt{6}\;\xi(3)}{\pi^3} \approx 1,14.$$

1.14 Quarto Momento Central da Distribuição Gumbel

O quarto momento central é dado por:

$$\mu_4 = E\left(X - \mu\right)^4 = \frac{3\beta^4\pi^4}{20}.$$

1.15 Curtose da Distribuição Gumbel

A curtose da distribuição Gumbel é dada por:

$$\alpha_4 = 5,4.$$

A distribuição Gumbel é sempre leptocúrtica.

1.16 Exemplos

A distribuição Gumbel pode ser empregada como modelo para as velocidades máximas anuais dos ventos de um certa região ou para previsão de enchentes (nível máximo de um rio).

1. *Supondo que a velocidade máxima anual do vento de uma região tem uma distribuição Gumbel com média de* $100m/s$ *e desvio padrão de* $50m/s$*. Calcule a probabilidade de que em um dado ano a velocidade máxima do vento seja no mínimo* $200m/s$*?*

   Solução:

   Como $\sigma = \dfrac{\beta\pi}{\sqrt{6}} = 50,$ *temos que*

   $$\beta = \frac{50\sqrt{6}}{\pi} = 38,9848.$$

   Como $E(X) = \alpha\beta\gamma = 100$ *temos que:*

   $$\alpha = 100 - \beta\gamma = 100 - 0,5772 * 38,9848 = 77,498.$$

   A probabilidade pedida é dada por:

   $$P(X > 200) = 1 - P(\leq 200) = 1 - F(200) = 1 - e^{-e^{-\frac{200-\alpha}{\beta}}} = 1 - e^{-e^{-3,1423}},$$

   e

   $$P(X > 200) = 1 - e^{-0,0432} = 0,0423.$$

1.17 Gumbel no R

Seja $X \sim Gumbel(\alpha = a = 3, \beta = b = 2)$. Vamos calcular a assimetria e a curtose de X só usando R sem o auxilio do pacote evd.

```
> ###CC0285- Probabilidade II.
>
> ###############################Distribuição Gumbel-#############################
>
>
>
>
> #######################################################
>
> #####Sem usar  pacotes.
>
>
>
>
> ## Parâmetros: alfa=a, real e beta=b>0
>
> ##f(x)= (1/b)* exp(-(x-a)/b- exp( -(x-a)/b)
>
> a = 3; b = 2
>
> f = function(x) (1/b)* exp(-(x-a)/b- exp( -(x-a)/b))
>
> I=integrate(f,-Inf,Inf)$value;I
[1] 1
>
>
>
> plot(f,-3,15)
> abline(h=0,col="red")
>
> #####É realmente uma f.d,p.!!!!!!!!!!!!!!!
>
> #####Calcular a média de X:  E(X)=a -b*psi(1)=3-2*psi(1)
>
>
> xf=function(x) x*f(x)
```

```
> EX=integrate(xf,-Inf,Inf)$value;EX
[1] 4.154431
>
> digamma(1)
[1] -0.5772157
>
>
> a-b*digamma(1);EX
[1] 4.154431
[1] 4.154431
>
>
> #####Calcular E(X^2):
>
> x2f=function(x) x^2*f(x)
> EX2=integrate(x2f,-Inf,Inf)$value;EX2
[1] 23.83904
>
>
>
> #####Calcular a Variância de X
>
> VX=EX2-EX^2;VX
[1] 6.579736
>
> sigma2=(b^2*pi^2)/6;sigma2
[1] 6.579736
>
>
> #####Calcular E(X^3):
>
> x3f=function(x) x^3*f(x)
> EX3=integrate(x3f,-Inf,Inf)$value;EX3
[1] 172.9407
>
>
> #####Calcule o terceiro momento central.
>
> mu_3=EX3-3*EX2*EX+2*EX^3;mu_3
[1] 19.23291
>
```

```
>
> ####Calcule o coeficiente de assimetria
>
>
> alfa_3=mu_3/(sigma2)^(3/2);alfa_3
[1] 1.139547
>
>
>
> i=1:1000000
>
> ai=1/i^3
> zeta3=sum(ai);zeta3
[1] 1.202057
>
> (1.14*pi^3)/(12*sqrt(6))#####aproximação dada nas notas de aulas.
[1] 1.202535
>
> #####Calcular E(X^4):
>
> x4f=function(x) x^4*f(x)
> EX4=integrate(x4f,-Inf,Inf)$value;EX4
[1] 1532.642
>
>
> #####Calcule o quarto momento central.
>
>
> mu_4=EX4- 4*EX3*EX+ 6*EX2*EX^2 -3*EX^4;mu_4
[1] 233.7818
>
>
> ####Calcule o coeficiente de curtose
>
>
> alfa_4=mu_4/(sigma2)^2;alfa_4
[1] 5.4
>
> alfa_4 >3  ######Distribuição Gumbel é sempre leptocúrtica.
[1] TRUE
>
```

```
>
>
```

Agora vamos utilizar o pacote evd.

```
> #####################install.packages("evd")
> require(evd)
> a=3;b=2
>
> fx = function(x) dgumbel(x,a,b)
>
>
> plot(fx,-3,15)
> abline(h=0,col="red")
>
> I=integrate(fx,-Inf,Inf)$value;I
[1] 1
>
>
> ###Acumulada de X.
> Fx= function(x) pgumbel(x,a,b)
>
> plot(Fx,-3,15)
> abline(h=c(0,1),col="red")
>
>
>
> ### Sobrevivencia de  X.
> Sx= function(x) 1-pgumbel(x,a,b)
>
> plot(Sx,-3,15)
> abline(h=c(0,1),col="red")
>
>
>
>
> ####Calcule os quartis da Gumbel (a=2,b=0,2)
>
>
>
```

```
>
> q=c(25,50,75)/100
> quartis=qgumbel(q,2,0.2);quartis
[1] 1.934673 2.073303 2.249180
>
>
>
> pgumbel(quartis,2,0.2)
[1] 0.25 0.50 0.75
>
>
>
> a=2;b=0.2
>
>
> ####Calcule os quartis diretamente.
>
> F=function(x) exp(-exp(-(x-2)/0.2))
>
> F(quartis)
[1] 0.25 0.50 0.75
>
>
> x_q=function(q) a -b*log(-log(q))
> x_q(q)
[1] 1.934673 2.073303 2.249180
>
```

Agora resolva o exercício usando o pacote evd.

```
> #####Resolver o exercício:
>
> mu=100;sigma=50
>
> b=sqrt(6*sigma^2)/pi;b
[1] 38.98484
>
> a=mu+digamma(1)*b;a
[1] 77.49734
>
```

```
>
> ##P(X>200)
>
> p=1-pgumbel(200,a,b);p
[1] 0.0422636
>
```

1.18 Exercícios Teóricos

Seja $X \sim Gumbel(\alpha = \theta, \beta = 1)$.

a. *Escreva a f.d.p. de* X.
   Solução

$$f(x) = e^{-(x-\theta)}\ exp(-e^{-(x-\theta)})\ \ I_{(-\infty,\infty)}(x),\ \theta \in \mathbb{R}$$

   Esta densidade pode ser posta na forma:

$$f(x) = exp(-e^{\theta}\ e^{-x} + \theta + x)\ \ I_{(-\infty,\infty)}(x),\ \theta \in \mathbb{R}$$

b. *Mostre* $X \sim Gumbel(\alpha = \theta, \beta = 1)$ *pertence à família exponencial.*
   Solução
   Devemos mostrar que:

$$f(x;\theta) = exp(c(\theta)\ T(x) + d(\theta) + s(x))\ \ I_A(x),$$

   onde o suporte A *não depende de* θ.
   Logo temos: $A = (-\infty, \infty)$ *que não depende* θ.
   Fazendo:

$$c(\theta) = -e^{\theta}\ \ t(x) = e^{-x},\ \ (\theta) = \theta\ \ es(x) = x,$$

   temos que a dada família de densidades pertence à família exponencial.

c. *Ache a função escore.*
   Solução
   A função escore é dada por:

$$V = \frac{\partial\, ln(f(X))}{\partial\theta}.$$

Mas,

$$ln(f(X)) = -e^{\theta}\, e^{-X} + \theta + X.$$

Logo,

$$V = \frac{\partial\, ln(f(X))}{\partial\theta} = -e^{\theta}\, e^{-X} + 1.$$

d. *Mostre que a esperança da função escore é nula.*
Solução

$$\begin{aligned} E(V) &= E\left(-e^{\theta}\, e^{-X} + 1\right) \\ &= -e^{\theta} E\left(e^{-X}\right) + 1 \\ &= -e^{\theta} M_X(-1) + 1 \\ &= -e^{\theta} e^{-\theta} + 1 \\ &= -1 + 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

A função geradora de momentos de X é dada por:

$$M_X(t) = e^{\theta\, t}\, \Gamma(1-t), \quad t < 1.$$

Logo,

$$M_X(-1) = e^{-\theta}\, \Gamma(2) = e^{-\theta}.$$

e. *A informação de Fisher relativa à distribuição Gumbel de parâmetros θ e $\beta = 1$ é dada por:*

$$I_F(\theta) = 1.$$

Prova:

A informação de Fisher é a variância da função escore. Assim,

$$I_F(\theta) = Var(V) = E(V^2),$$

pois $E(V) = 0$ *sempre.*
Logo,

$$I_F(\theta) = Var\left(-e^{\theta}\ e^{-X} + 1\right) = e^{2\theta}\ \ Var(e^{-X}) = e^{2\theta}\ e^{-2\theta} = 1.$$

Mas,

$$Var(e^{-X}) = E(e^{-2X}) - E^2(e^{-X}) = M_X(-2) - M_X^2(-1).$$

Logo,

$$M_X(-2) = e^{-2\theta}\ \Gamma(3) = 2\ e^{-2\theta}.$$

Assim,

$$Var(e^{-X}) = 2\ e^{-2\theta} -\ e^{-2\theta} = e^{-2\theta}.$$

f. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *uma amostra aleatória de* X*. Ache o estimador de* θ *pelo método dos momentos.*

Solução

O primeiro momento populacional de X *é dada por:*

$$E(X) = \alpha - \beta\ \Gamma'(1) = \theta - \Gamma'(1).$$

O primeiro momento amostral é dado por:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i+1}^{n} X_i}{n}.$$

A solução do sistema

$$E(X) = \bar{X},$$

fornece o estimador pelo método dos momentos de θ*.*
Assim,

$$\hat{\theta}_{MM} = \bar{X} + \Gamma'(1).$$

g. *Qual a função de verossimilhança da amostra?*
Solução

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) \\ &= \prod_{i=1}^{n} exp(-e^{\theta}\ e^{-x_i} + \theta + x_i) \\ &= exp(-e^{\theta} \sum_{i=1}^{n} e^{-x_i} + n\,\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i. \end{aligned}$$

h. *Qual o estimador de máxima verosimilhança de θ?*
Solução *Devemos maximizar $L(\theta)$ ou $l(\theta) = ln[\theta]$, assim*

$$l(\theta) = -e^{\theta} \sum_{i=1}^{n} e^{-x_i} + n\,\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Derivando em relação a θ temos:

$$l'(\theta) = -e^{\theta} \sum_{i=1}^{n} e^{-x_i} + n.$$

A derivada segunda de $l(\theta)$ é dada por:

$$l'(\theta) = -e^{\theta} \sum_{i=1}^{n} e^{-x_i} < 0.$$

De $l'(\theta) = 0$ temos:

$$e^{\theta} \sum_{i=1}^{n} e^{-x_i} = n,$$

tirando o valor de e^{θ}

$$e^{\theta} = \frac{n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} e^{-x_i}},$$

assim,

$$\theta = ln(n) - ln(\sum_{i=1}^{n} e^{-x_i}).$$

Logo o estimador de máxima verosimilhança de θ é dado por:

$$\hat{\theta}_{MV} = ln(n) - ln\left(\sum_{i=1}^{n} e^{-X_i}\right).$$

h. *Seja T um estimador não viciado de θ. Qual o limite inferior de Cramer-Rao para a variância de T?*

Solução *Seja T um estimador não viciado de $g(\theta)$.*

$$Var(T) \geq \frac{[g'(\theta)]^2}{n\ I_F(\theta)} = LICR,$$

Como $g(\theta) = \theta$ temos $g'(\theta) = 1$ e

$$Var(T) \geq \frac{1}{n\ 1} = \frac{1}{n} = LICR.$$

i. *Seja T um estimador não viciado de $e^{-\theta}$. Qual o limite inferior de Cramer-Rao para a variância de T?*

Solução *Seja T um estimador não viciado de $g(\theta) = e^{-\theta}$. Assim*

$$g'(\theta) = -e^{-\theta} \ \text{ e } \ (g'(\theta))^2 = e^{-2\theta}.$$

$$Var(T) \geq \frac{e^{-2\theta}}{n\ 1} = \frac{e^{-2\theta}}{n} = \frac{1}{n\ e^{2\theta}} = LICR.$$

j. *Seja $S = \sum_{i=1}^{n} e^{-X_i}$. Qual a distribuição amostral de S?*

Solução *Seja $X \sim Gumbel(\alpha, \beta)$. A lei de $Y = e^{-X}$ é exponencial com parâmetro $\lambda = e^{\theta}$ pela proposição 3 pois $\beta = 1$. Sabemos que a soma de exponenciais independentes de mesmo parâmetro é gama temos que:*

$$S \sim Gama(n, e^{\theta}).$$

k. Calcule $E(lnS)$.

Solução

$$\begin{aligned}
E(lnS) &= \int_{-\infty}^{\infty} ln(s)\ f_S(s)\ ds \\
&= \int_{0}^{\infty} ln(s)\ \frac{e^{n\theta}}{\Gamma(n)}\ s^{n-1}\ e^{-e^{\theta}s}\ ds \\
&= \frac{e^{n\theta}}{\Gamma(n)} \int_{0}^{\infty} ln(s)\ s^{n-1}\ e^{-e^{\theta}s}\ ds \\
&= \frac{e^{n\theta}}{\Gamma(n)}\ I.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de varável $u = e^{\theta}s$ em I temos:

$$du = e^{\theta}; ds \ \ s = e^{-\theta}\ s \ \ e \ \ ln(u) = \theta + ln(s),$$

$$ln(s) = ln(u) - \theta.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
I &= \int_{0}^{\infty} ln(s)\ s^{n-1}\ e^{-e^{\theta}s}\ ds \\
&= \int_{0}^{\infty} (ln(u) - \theta)\ e^{-(n-1)\theta}\ u^{n-1}\ e^{-u}\ e^{-\theta}\ du \\
&= e^{-n\theta} \int_{0}^{\infty} (ln(u) - \theta)\ u^{n-1} e^{-u}\ du \\
e^{n\theta}\ I &= \int_{0}^{\infty} (ln(u)\ u^{n-1} e^{-u}\ du - \theta \int_{0}^{\infty} u^{n-1} e^{-u}\ du \\
&= \Gamma'(n) - \theta\ \Gamma(n).
\end{aligned}$$

Logo,

$$E(lnS) = \frac{1}{\Gamma(n)}\ e^{n\theta}\ I = \frac{1}{\Gamma(n)} \left(\Gamma'(n) - \theta\ \Gamma(n)\right),$$

$$E(lnS) = \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} - \theta.$$

l. Ache uma função de S tal que Calcule $E(h(S)) = \theta$.

Solução

Note que:

$$E(ln(S)) - \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}) = -\theta,$$

e

$$T = \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}) - E(ln(S)) = \theta.$$

Logo,

$$T = \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}) - ln\left(\sum_{i=1}^{n} e^{-X_i}\right),$$

é um estimador não viciado de θ. Dentre os estimadores não viciados de θ ele é o que tem menor variância pois como a densidade pertence à família exponencial temos que a estatística

$$S = \sum_{i=1}^{n} t(X_i) = \sum_{i=1}^{n} e^{-X_i},$$

é uma estatística suficiente e completa para θ.