Funções Geradoras

Prof. Leandro Chaves Rêgo

Departamento de Estatística e Matemática Aplicada - UFC

Fortaleza, 12 de janeiro de 2022

Funções Geradoras

Funções geradoras têm um papel importante na teoria da probabilidade. Considere uma sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ de números reais, uma função geradora baseada nesta sequência é definida por:

$$G(s) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i,$$

para os valores de s nos quais esta soma é convergente. Para uma dada sequência, existe um raio de convergência r tal que a soma converge se $|s| < r$ e diverge se $|s| > r$. Quando $|s| < r$, $G(s)$ pode ser derivada ou integrada termo a termo qualquer número de vezes.

Função Geradora de Probabilidade

Considere uma variável aleatória que só assume valores não-negativos, a função geradora de probabilidade de X é dada por:

$$G_X(s) = E(s^X) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i s^i,$$

em que $p_i = P(X = i)$. Note que $G_X(1) = 1$ e que $G_X(0) = p_0$. Então, o raio de convergência de G_X é pelo menos igual a 1.

O próximo teorema afirma que a função geradora de probabilidade determina unicamente a distribuição de uma variável aleatória.

Teorema

Sejam X e Y com funções geradoras de probabilidade $G_X(s)$ e $G_Y(s)$, respectivamente. Então, $G_X(s) = G_Y(s)$, $\forall s \in \mathbb{R}$, se, e somente se, X e Y tiverem a mesma distribuição de probabilidade.

Prova: Omitida. ∎

Derivadas da Função Geradora de Probabilidade

Dada uma função geradora de probabilidade de uma variável aleatória discreta X, pode-se obter a probabilidade de $X = i$, calculando o valor da i-ésima derivada de $G_X(s)$ no ponto $s = 0$ e dividindo por $i!$. Além disso, o próximo teorema ilustra qual a relação dos momentos de X com as derivadas de $G_X(s)$ calculada em $s = 1$.

Teorema

$G_X^{(n)}(1) = E[X(X-1)\cdots(X-n+1)]$.

Prova

Prova: Assumindo que pode-se trocar a ordem do somatório com a derivada temos que:

$$G_X^{(n)}(s) = \sum_{i=0}^{\infty} p_{i+n}(i+n)(i+n-1)\cdots(i+1)s^i.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} G_X^{(n)}(1) &= \sum_{i=0}^{\infty} p_{i+n}(i+n)(i+n-1)\cdots(i+1) \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} p_k(k)(k-1)\cdots(k-n+1) = E[X(X-1)(X-2)\cdots(X-n+1)] \end{aligned}$$

∎

Obtendo Esperança e Variância

Corolário

$EX = G_X^{(1)}(1)$ e $V(X) = G_X^{(2)}(1) + G_X^{(1)}(1) - (G_X^{(1)}(1))^2$.

Prova: Do Teorema 2.2, temos que $G_X^{(1)}(1) = EX$ e $G_X^{(2)}(1) = E(X(X-1)) = EX^2 - EX$. Logo,

$$V(X) = EX^2 - (EX)^2 = G_X^{(2)}(1) + G_X^{(1)}(1) - (G_X^{(1)}(1))^2.$$

∎

Função Geradora de Probabilidade de Função de V.A.

Se $Y = H(X)$, então a função geradora de probabilidade de Y é dada por:

$$G_Y(s) = G_{H(X)}(s) = E(s^{H(X)}).$$

Por exemplo, se $Y = a + bX$, temos que:

$$G_Y(s) = G_{H(X)}(s) = E(s^{a+bX}) = s^a G_X(s^b).$$

Exemplo

Exemplo

Se X é uma variável aleatória que só assume os valores 0 e 1 e $P(X = 1) = p$, então

$$G_X(s) = (1 - p) + ps.$$

Deste modo,

$$G_X^{(1)}(s) = p$$

e

$$G_X^{(2)}(s) = 0.$$

Portanto,

$$EX = G_X^{(1)}(1) = p$$

e

$$V(X) = G_X^{(2)}(1) + G_X^{(1)}(1) - (G_X^{(1)}(1))^2 = p(1 - p).$$

Exemplo

Exemplo

Se X é uma variável aleatória tal que $P(X=i)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$, $\lambda>0$ e $i\geq 0$, então sua função geradora de probabilidade é dada por:

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}s^i \\ &= e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(s\lambda)^i}{i!}=e^{-\lambda}e^{s\lambda}=e^{\lambda(s-1)}. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$G_X^{(1)}(s)=\lambda e^{\lambda(s-1)}$$

e

$$G_X^{(2)}(s)=\lambda^2 e^{\lambda(s-1)}.$$

Portanto,

$$EX=G_X^{(1)}(1)=\lambda$$

e

$$V(X)=G_X^{(2)}(1)+G_X^{(1)}(1)-(G_X^{(1)}(1))^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda.$$

Soma de Variáveis Aleatórias Independentes

Suponha que X_1, X_2, ..., X_n são variáveis aleatórias discretas independentes com funções geradoras de probabilidades $G_{X_1}(s)$, $G_{X_2}(s)$, ..., $G_{X_n}(s)$, respectivamente, então a função geradora de probabilidade da soma $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ é dada por:

$$G_{S_n}(s) = E(s^{S_n}) = E(s^{X_1+\cdots+X_n}) = E(\prod_{i=1}^{n} s^{X_i}) = \prod_{i=1}^{n} E(s^{X_i}) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(s).$$

Exemplo

Exemplo

Se X_k é uma variável aleatória tal que $P(X_k = i) = \frac{e^{-\lambda_k}\lambda_k^i}{i!}$, $\lambda_k > 0$ e $k = 1, 2$, então a função geradora de probabilidade de $X_1 + X_2$ é dada por:

$$G_{X_1+X_2}(s) = G_{X_1}(s)G_{X_2}(s) = e^{\lambda_1(s-1)}e^{\lambda_2(s-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(s-1)}.$$

Logo, $P(X_1 + X_2 = i) = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^i}{i!}$.

Soma de uma Quantidade Aleatória de Variáveis Aleatórias Independentes

Suponha que N, X_1, X_2, ..., X_n são variáveis aleatórias discretas não-negativas independentes. Suponha que N tem função geradora de probabilidade $G_N(s)$ e que as variáveis X_i's são identicamente distribuídas e possuem função geradora de probabilidade $G_X(s)$. Então, a função geradora de probabilidade da soma $S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$, em que assume-se que se $N = 0$, $S_N = 0$, é dada por:

$$\begin{aligned} G_{S_N}(s) &= E(s^{S_N}) = \sum_{n=0}^{\infty} E(s^{S_N}|N=n)P(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} E(s^{S_n})P(N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (G_X(s))^n P(N=n) = G_N(G_X(s)). \end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo

Suponha que o número de consumidores que chegam em um restaurante em um dia é uma variável aleatória N tal que $P(N = i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$, $\lambda > 0$ e $i \geq 0$ e que 90% destes consumidores saem satisfeitos com o serviço. Determine a distribuição do número de consumidores satifeitos por dia neste restaurante. Seja X_i uma variável aleatória que indica que o i-ésimo consumidor ficou satisfeito com o serviço do restaurante. Então, o número total de consumidores satisfeitos por dia neste restaurante é calculado como $S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$. Assumindo que a satisfação dos consumidores são independnetes e independentes do número de consumidores atendidos no restaurante, temos que

$$G_{S_N}(s) = G_N(G_X(s)),$$

em que $G_N(s) = e^{\lambda(s-1)}$ e $G_X(s) = (1-p) + ps$. Portanto,

$$G_{S_N}(s) = e^{\lambda((1-p)+ps-1)} = e^{p\lambda(s-1)},$$

que a função geradora de uma variável aleatória com a mesma distribuição de N só que ao invés do parâmetro λ possui parâmetro $p\lambda$.

Função Geradora de Momentos

Como vimos na seção anterior, pode-se obter através das derivadas da função geradora de probabilidade a distribuição da variável aleatória. Nesta seção, apresentaremos uma função geradora que facilita o cálculo dos momentos da variável aleatória através de suas derivadas. Além disso, a função geradora de momentos definida para outros tipos de variáveis aleatórias e não somente discretas e não-negativas.

Dada uma variável aleatória X, sua função geradora de momentos é definida por:

$$M_X(t) = E(e^{tX}),$$

desde que a esperança seja finita para t real em algum intervalo $-t_0 < t < t_0$, com $t_0 > 0$.

No caso de uma variável aleatória discreta assumindo os valores $x_1, x_2, \ldots$ com probabilidades $p_1, p_2, \ldots$, respectivamente, tem-se que

$$M_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i e^{tx_i}.$$

Exemplo

Exemplo

Seja X uma variável aleatória Binomial, ou seja, possuindo função probabilidade de massa dada por $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, para $k = 0, 1, \ldots, n$. Então, sua função geradora de momentos é dada por:

$$\begin{aligned} M_X(t) = E(e^{tX}) &= \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^t)^k (1-p)^{n-k} = (pe^t + 1 - p)^n. \end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo

Seja X uma variável aleatória Poisson, ou seja, possuindo função probabilidade de massa dada por $P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$. Então, sua função geradora de momentos é dada por:

$$\begin{aligned} M_X(t) = E(e^{tX}) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^t\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{-\lambda(1-e^t)}. \end{aligned}$$

Obtendo Momentos

Teorema

Suponha que a função geradora de momentos de X exista para $|t| < t_0$, $t_0 > 0$. Então, $E(X^n)$ existe para $n = 1, 2, \ldots$ e temos:

$$E(X^n) = M_X^{(n)}(0).$$

Prova

Prova: Pela expansão da função exponencial, temos

$$e^{tX} = 1 + tX + \frac{(tX)^2}{2!} + \frac{(tX)^3}{3!} + \cdots .$$

Tomando a esperança em ambos os lados, assumindo que pode-se trocar a ordem entre a soma infinita e a esperança, temos

$$M_X(t) = 1 + tE(X) + \frac{t^2}{2!}E(X^2) + \frac{t^3}{3!}E(X^3) + \cdots .$$

Fazendo a primeira derivada, temos

$$M_X^{(1)}(t) = 0 + E(X) + \frac{2t}{2!}E(X^2) + \frac{3t^2}{3!}E(X^3) + \cdots .$$

Calculando no ponto zero, temos $M_X^{(1)}(0) = E(X)$.
Fazendo a n-ésima derivada, temos

$$M_X^{(n)}(t) = 0 + E(X^n) + tE(X^{n+1}) + \cdots .$$

Calculando no ponto zero, temos $M_X^{(n)}(0) = E(X^n)$. ∎

Exemplo

Vamos obter E(X) e V(X) para as distriuições Binomial e Poisson. Suponha que Y tem distribuição binomial com parâmentros n e p, então $M_Y(t) = (pe^t + 1 - p)^n$. Então,

$$M_Y^{(1)}(t) = npe^t(pe^t + 1 - p)^{n-1}, \text{ e}$$

$$M_Y^{(2)}(t) = np[(n-1)pe^{2t}(pe^t + 1 - p)^{n-2} + e^t(pe^t + 1 - p)^{n-1}].$$

Logo,

$$E(Y) = M_Y^{(1)}(0) = np, \text{ e}$$

$$E(Y^2) = M_Y^{(2)}(0) = np[(n-1)p + 1].$$

Portanto, a variância de Y é

$$V(Y) = E(Y^2) - (EY)^2 = np[np - p + 1] - (np)^2 = np(1-p).$$

Exemplo

Similarmente, se W tem distribuição Poisson com parâmetro λ, então $M_W(t) = e^{-\lambda(1-e^t)}$. Então

$$M_W^{(1)}(t) = (\lambda e^t)e^{-\lambda(1-e^t)}, \text{ e}$$

$$M_W^{(2)}(t) = \lambda[e^t e^{-\lambda(1-e^t)} + \lambda e^{2t} e^{-\lambda(1-e^t)}].$$

Logo,

$$E(W) = M_W^{(1)}(0) = \lambda, \text{ e}$$

$$E(W^2) = M_W^{(2)}(0) = \lambda[1+\lambda].$$

Portanto, a variância de W é

$$V(W) = E(W^2) - (EW)^2 = \lambda[1+\lambda] - \lambda^2 = \lambda.$$

Propriedades

A seguir listamos algumas outras propriedades da função geradora de momentos.

P1. A função geradora de momentos de qualquer variável aleatória assume o valor 1 no ponto 0: $M_X(0) = 1$.
Prova: $M_X(0) = Ee^{0X} = E1 = 1$. ∎

P2. Se X e Y são independentes com funções geradoras de momentos $M_X(t)$ e $M_Y(t)$ definidas para $|t| < t_0$, então $M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$, para $|t| < t_0$.
Prova:
$M_{X+Y}(t) = Ee^{t(X+Y)} = E(e^{tX}e^{tY}) = E(e^{tX})E(e^{tY}) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$. ∎

É fácil provar por indução que se $X_1, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes com funções geradoras de momentos $M_{X_k}(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, definidas para $|t| < t_0$, então $M_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} M_{X_k}(t)$, para $|t| < t_0$.

Propriedades

P3. A função geradora de momentos de uma variável aleatória determina a função de distribuição acumulada.

Prova: A prova deste fato é longa será omitida. ∎

P4. Se uma variável aleatória X possuir função geradora de momentos $M_X(t)$, para $|t| < t_0$, então ela tem distribuição simétrica em torno de 0 se, e somente se, $M_X(t)$ é uma função par para todo $|t| < t_0$.

Prova: X é simétrica em torno de 0 se e somente se $P(X \leq x) = P(X \geq -x), \forall x \in R$. Como $X \geq -x \Leftrightarrow -X \leq x$, nós temos que $F_X = F_{-X}$, ou seja, $M_X = M_{-X}$. Como

$$M_{-X}(t) = Ee^{t(-X)} = Ee^{(-t)X} = M_X(-t),$$

para $|t| < t_0$. Então, X é simétrica em torno de 0 se e somente se $M_X(t)$ for uma função par para todo $|t| < t_0$. ∎

Propriedades

P5. Se $Y = aX + b$, onde a e b são números reais constantes,
$M_Y(t) = e^{tb} M_X(at)$.

Prova: $M_Y(t) = Ee^{tY} = Ee^{t(aX+b)} = Ee^{tb}e^{taX} = e^{tb}Ee^{(at)X} = e^{tb}M_X(at)$.

∎

Exemplo

Exemplo

Sejam X_1 e X_2 duas variáveis aleatórias i.i.d. com função geradora de momentos $M(t)$, definida para $|t| < t_0$, e seja $Y = X_1 - X_2$. Qual a função geradora de momentos de Y?

Solução: Por P5, temos que $M_{-X_2}(t) = M(-t)$. Então, como X_1 e X_2 são independentes, por P2, temos que

$$M_Y(t) = M(t)M(-t).$$

Portanto, $M_Y(t)$ é uma função par e, por P4, temos que Y é uma variável aleatória simétrica em torno do zero.

Soma de uma Quantidade Aleatória de Variáveis Aleatórias Independentes

Suponha que N, X_1, X_2, ..., X_n são variáveis aleatórias independentes. Suponha que N é uma variável aleatória discreta, não-negativa e que tem função geradora de momentos $M_N(t)$. Suponha que as variáveis X_i's são identicamente distribuídas e possuem função geradora de momentos $M_X(t)$. Então, a função geradora de momentos da soma $S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$, em que assume-se que se $N = 0$, $S_N = 0$, é dada por:

$$\begin{aligned} M_{S_N}(t) &= E(e^{tS_N}) = \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{tS_N}|N=n)P(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{tS_n})P(N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (M_X(t))^n P(N=n) = M_N(\ln(M_X(t))). \end{aligned}$$

Função Geradora de Momentos de um Vetor Aleatório

Definição

Seja $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ um vetor aleatório k-dimensional. A função geradora de momentos de $\vec{X}$ é a função $M_{\vec{X}} : \boldsymbol{R}^k \to \boldsymbol{R}$ definida por

$$M_{\vec{X}}(\vec{t}) = Ee^{\vec{t}\cdot\vec{X}} = Eexp(\sum_{j=1}^{k} t_j X_j).$$

$M_{\vec{X}}$ é também chamada de função geradora de momentos conjunta de $X_1, \ldots, X_k$.

Propriedades

A função geradora de momentos multivariada tem propriedades análogas a todas as propriedades enunciadas para a função geradora de momentos de uma variável aleatória. P3 permanece válida e as propriedades P1 e P4 permanecem válidas substituindo o zero da reta pela origem do $\boldsymbol{R}^k$. Para P2, supõe-se que $\vec{X}$ e $\vec{Y}$ sejam vetores de mesma dimensão. Sob esta condição, a independência de $\vec{X}$ e $\vec{Y}$ implica que

$$M_{\vec{X}+\vec{Y}}(\vec{t}) = M_{\vec{X}}(\vec{t})M_{\vec{Y}}(\vec{t}).$$

Propriedades

Também é fácil analisar o comportamento da função geradora de momentos multivariada de transformações lineares de vetores aleatórios em analogia a propriedade P5. (Assumiremos que um vetor $\vec{X}$ k-dimensional é uma matriz coluna com dimensão $k \times 1$. Deste modo $\vec{t} \cdot \vec{X} = (\vec{t})^T \vec{X}$.) Por exemplo, seja $\vec{Y} = \mathrm{A}\vec{X} + \vec{b}$, então

$$
\begin{aligned}
M_{\vec{Y}}(\vec{t}) &= Ee^{(\vec{t})^T \vec{Y}} = Ee^{(\vec{t})^T (\mathrm{A}\vec{X} + \vec{b})} \\
&= E(e^{(\vec{t})^T \vec{b}} e^{(\mathrm{A}^T \vec{t})^T \vec{X}}) = e^{(\vec{t})^T \vec{b}} M_{\vec{X}}(\mathrm{A}^T \vec{t}),
\end{aligned}
$$

onde utilizamos o fato que $(\mathrm{AB})^T = \mathrm{B}^T \mathrm{A}^T$ e que $e^{(\vec{t})^T \vec{b}}$ não é aleatório e pode sair fora da operação de esperança.

Propriedades

Analogamente ao Teorema 3.3, correlações de ordem maiores podem ser facilmente calculadas diferenciando-se a função geradora de momentos conjunta repetidamente. Formalmente, seja $p = \sum_{k=1}^{n} p_k$ para números naturais quaisquer p_k, temos

$$E(\prod_{1}^{n} X_k^{p_k}) = \frac{\partial^p M_{\vec{X}}(\vec{t})}{\partial t_1^{p_1} \cdots \partial t_n^{p_n}}|_{\vec{t}=\vec{0}}.$$

No caso particular de $\vec{X} = (X_1, X_2)$, temos que

$$EX_1X_2 = \frac{\partial^2 M_{X_1,X_2}(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}|_{t_1=t_2=0}.$$

Propriedades

Assim como é fácil obter a distribuição marginal dada uma distribuição conjunta de variáveis aleatórias, também é fácil obter a função geradora de momentos de qualquer distribuição marginal. Para isso basta fazer todos os termos "extras" iguais a zero na função geradora de momentos multivariada. Por exemplo, para as variáveis aleatórias X, Y, e Z, temos $Ee^{i(xX+yY)} = Ee^{i(xX+yY+\mathbf{0}Z)}$, ou seja, $M_{X,Y}(x,y) = M_{X,Y,Z}(x,y,0)$, para todo (x,y) para o qual a função geradora de momentos conjunta está definida.

Exemplo

Exemplo

Suponha que um vetor aleatório $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$ tenha uma distribuição multinomial com função de probabilidade conjunta dada por:

$$p(i_1, i_2, i_3) = \frac{n!}{i_1!\, i_2!\, i_3!} p_1^{i_1} p_2^{i_2} p_3^{i_3},$$

em que $i_1 + i_2 + i_3 = n$, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ e $i_1, i_2, i_3 \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

(a) Determine a função geradora de momento conjunta de $\vec{X}$.

(b) Determine as funções geradoras de momentos marginais de X_1, X_2 e X_3.

(c) Determine a função geradora de momento conjunta de (X_1, X_2).

(d) Determine $Cov(X_1, X_2)$.

Solução:

Parte (a). Temos que a função geradora de momentos conjunta de $\vec{X}$ é dada por:

$$\begin{aligned} M_{\vec{X}}(\vec{t}) &= \sum_{i_1=0}^{n}\sum_{i_2=0}^{n-i_1} e^{t_1 i_1 + t_2 i_2 + t_3 i_3} \frac{n!}{i_1!i_2!i_3!} p_1^{i_1} p_2^{i_2} p_3^{i_3} \\ &= \sum_{i_1=0}^{n}\sum_{i_2=0}^{n-i_1} \frac{n!}{i_1!i_2!i_3!} (e^{t_1}p_1)^{i_1}(e^{t_2}p_2)^{i_2}(e^{t_3}p_3)^{i_3} \\ &= (p_1e^{t_1} + p_2e^{t_2} + p_3e^{t_3})^n, \end{aligned}$$

em que $i_3 = n - i_1 - i_2$ e $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Parte (b). Para obter a função geradora de momento marginal de X_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, basta fazer $t_j = 0$, para todo $j \neq i$ na expressão de $M_{\vec{X}}(\vec{t})$. Deste modo:

$$M_{X_i}(t_i) = (p_ie^{t_i} + 1 - p_i)^n,$$

em que foi usado o fato de que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Parte (c). A função geradora de momentos conjunta de (X_1, X_2) pode ser obtida da expressão de $M_{\vec{X}}(\vec{t})$ fazendo $t_3 = 0$. Deste modo:

$$M_{X_1,X_2}(t_1, t_2) = (p_1e^{t_1} + p_2e^{t_2} + 1 - p_1 - p_2)^n.$$

Solução:

Parte (d). Pode-se obter a correlação entre X_1 e X_2 derivando-se $M_{X_1,X_2}(t_1,t_2)$ parcialmente em relação a t_1 e t_2 e calculando o valor em $t_1 = t_2 = 0$:

$$\begin{aligned} EX_1X_2 &= \frac{\partial^2 M_{X_1,X_2}(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}\Big|_{t_1=t_2=0} \\ &= n(n-1)p_1p_2e^{t_1+t_2}(p_1e^{t_1}+p_2e^{t_2}+1-p_1-p_2)^{n-2}\Big|_{t_1=t_2=0} = n(n-1)p_1 \end{aligned}$$

Portanto,

$$Cov(X_1,X_2) = EX_1X_2 - EX_1EX_2 = n(n-1)p_1p_2 - n^2p_1p_2 = -np_1p_2.$$

Independência

Terminaremos nossa discussão de funções geradoras de momento multidimensionais considerando um critério para independência de vetores aleatórios.

Teorema

Sejam $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_m)$ e $\vec{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ vetores aleatórios, onde $m \geq 1, n \geq 1$ com funções geradores de momentos $M_{\vec{X}}(x_1, \ldots, x_m)$ e $M_{\vec{Y}}(y_1, \ldots, y_n)$, definidas em uma certa vizinhança da origem. $\vec{X}$ e $\vec{Y}$ são independentes se, e somente se,

$$M_{X_1,\ldots,X_m,Y_1,\ldots,Y_n}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = M_{\vec{X}}(x_1, \ldots, x_m) M_{\vec{Y}}(y_1, \ldots, y_n),$$

para todo $(x_1, \ldots, x_m)$ e $(y_1, \ldots, y_n)$ para os quais $M_{\vec{X}}(x_1, \ldots, x_m)$ e $M_{\vec{Y}}(y_1, \ldots, y_n)$ estão definidas.

Prova

Prova: Suponhamos primeiro que $\vec{X}$ e $\vec{Y}$ sejam variáveis aleatórias X e Y $(m = 1, n = 1)$, com X e Y independentes. Então temos,

$$M_{X,Y}(x,y) = Ee^{(xX+yY)} = Ee^{xX}e^{yY} = Ee^{xX}Ee^{yY} = M_X(x)M_Y(y),$$

para todo x e y para os quais M_X e M_Y estão definidos.
Reciprocamente, suponha que $M_{X,Y}(x,y) = M_X(x)M_Y(y)$ para todo x e y para os quais M_X e M_Y estão definidos. Então a independência de X e Y é conseqüência do Teorema da Unicidade: se X e Y fossem independentes, elas teriam função característica conjunta $M_{X,Y}(x,y) = M_X(x)M_Y(y)$ pela parte inicial desta demonstração. Se não fossem independentes, elas teriam uma função característica diferente, o que contraria a hipótese. Logo, são independentes.
A prova no caso geral é análoga e omitida. ∎

Independência

Um resultado semelhante vale para um número finito qualquer de vetores aleatórios. Consideremos o caso mais simples em que $X_1, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias. Então, temos $X_1, \ldots, X_n$ independentes se, e somente se,

$$M_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{j=1}^{n} M_{X_j}(t_j),$$

para todo t_j tal que $M_{X_j}(t_j)$ esteja definida, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Exemplo

Exemplo

As variáveis aleatórias X_1, X_2 e X_3 do Exemplo 4.2 não são independentes, pois $M_{\vec{X}}(\vec{t}) \neq M_{X_1}(t_1)M_{X_2}(t_2)M_{X_3}(t_3)$.

Exemplo

Suponha que a função geradora de momentos conjunta do vetor aleatório (Y_1, Y_2) é dada por:

$$M_{Y_1,Y_2}(t_1,t_2) = \frac{e^{t_1^2+t_2^2}}{1-(t_1+t_2)^2}.$$

(a) Y_1 e Y_2 são independentes? Justifique.

(b) Calcule $E(Y_2)$.

(c) Determine EY_1Y_2.

(d) Se

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 - Y_2 \\ Y_1 + 2Y_2 \end{pmatrix},$$

determine $M_{Z_1,Z_2}(t_1,t_2)$.