3.4. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da variável aleatória X, com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x|\theta) = \frac{x}{\theta^2}\ \exp(-\frac{x}{\theta})\ I_A(x),\ A = (0, \infty), \theta > 0.$$

(i) Encontre o estimador de máxima verossimilhança de θ e verifique se ele é eficiente.

(ii) Encontre o estimador de máxima verossimilhança de $g(\theta) = Var(X)$ e encontre sua distribuição aproximada em grandes amostras.

(iii) Qual a distribuição amostral exata do estimador obtido no item **i**?

(iv) Qual o estimador pelo método dos momentos de θ?

(v) Qual o estimador pelo método dos mínimos quadrados de θ?

Solução: Temos que $X \sim Gama\left(r = 2\ \ \lambda = \frac{1}{\theta}\right)$.
Assim

$$E(X) = \frac{2}{\lambda} = 2\theta;\ V(X) = \frac{2}{\lambda^2} = 2\theta^2.$$

A f.g.m. de X é dada por:

$$M(t) = \left[\frac{\lambda}{\lambda - t}\right]^r,\ \ t < \lambda.$$

$$M(t) = \left[\frac{\frac{1}{\theta}}{\frac{1}{\theta} - t}\right]^2 = \left[\frac{1}{1 - \theta t}\right]^2,\ \ t < \frac{1}{\theta}.$$

A função de verossimilhança é dada por:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\theta^2}\ \exp(-\frac{x_i}{\theta})$$

$$L(\theta) = \theta^{-2n} \prod_{i=1}^{n} x_i\ \ \exp(-\frac{1}{\theta}\ \sum_{i=1}^{n} x_i)$$

Aplicando logaritmo neperiano temos:

$$l(\theta) = \log\left[L(\theta)\right] = -2n\ \log(\theta) + \sum_{i=1}^{n} \log(x_i) - \frac{1}{\theta}\ \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Derivando em relação à θ temos:

$$l^{'}(\theta) = -\frac{2n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\ \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

.

A segunda derivada em relação à θ temos:

$$l^{''}(\theta) = \frac{2n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3}\ \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{2n}{\theta^2} - \frac{2n\bar{x}}{\theta^3} = 2n\ \frac{\theta - \bar{x}}{\theta^3}.$$

De

$$l^{'}(\theta) = 0$$

temos:

$$\frac{2n}{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^2}.$$

Assim

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{2n} = \frac{\bar{x}}{2}.$$

Como

$$\theta - \bar{x} = \frac{\bar{x}}{2} - \bar{x} = -\frac{\bar{x}}{2} < 0$$

Assim

$$T = \hat{\theta}_{MV} = \frac{\bar{X}}{2}.$$

Vamos verificar se ele é eficiente?

A variância de T é dada por:

$$Var(T) = Var\left(\frac{\bar{X}}{2}\right) = \frac{1}{4}\,Var(\bar{X}) = \frac{1}{4}\,\frac{\sigma^2}{n}.$$

$$Var(T) = \frac{1}{4}\,\frac{2\theta^2}{n} = \frac{\theta^2}{2n}.$$

Seja T um estimador não viciado de θ. O Limite inferior de Cramer-Rao é dado por:

$$LICR = \frac{1}{n\,I_F(\theta)}.$$

Sabemos que:

O suporte de X , $A = (0, \infty)$ não depende de θ.

$$\log(f(X|\theta)) = \log(X) - 2\log(\theta) - \frac{X}{\theta}$$

$$V = \frac{\partial \log f(X;\theta)}{\partial \theta} = -\frac{2}{\theta} + \frac{X}{\theta^2}.$$

A informação de Fisher é dada por:

$$Var(V) = I_F(\theta) = Var(-\frac{2}{\theta} + \frac{X}{\theta^2}) = \frac{1}{\theta^4}Var(X) = \frac{1}{\theta^4}\,\theta^2 = \frac{1}{\theta^2}.$$

$$LICR = \frac{1}{n\,I_F(\theta)} = \frac{\theta^2}{n} = Var(T).$$

Logo,

$$T = \frac{\bar{X}}{2}$$

é eficiente.

Seja

$$g(\theta) = Var(X) = 2\theta^2.$$

e

Para responder o item ii vamos utilizar a propriedade da invariância , isto é,

$$T_1 = \widehat{g(\theta)} = g\left(\hat{\theta}\right)$$

$$T_1 = 2\,\frac{\bar{X}^2}{4} = \frac{\bar{X}^2}{2}$$

é o nosso estimador de MV pedido.

Sabemos que se o tamanho da amostra é grande e as condições de regularidade estão satisfeitas temos:

$$\sqrt{n}\ \left(g\left(\hat{\theta}\right) - g(\theta)\right) \overset{a}{\sim} N\left(0, \frac{(g'(\theta))^2}{I_F(\theta)}\right).$$

Assim,

$$g'(\theta) = 4\ \theta \quad [g'(\theta)]^2 = 16\theta^2.$$

$$\frac{(g'(\theta))^2}{I_F(\theta)} = \frac{16\theta^2}{1/\theta^2} = 16\theta^4.$$

$$\sqrt{n}\ \left(g\left(\hat{\theta}\right) - g(\theta)\right) \overset{a}{\sim} N\left(0, 16\theta^4\right).$$

Vamos responder ao item **iii**:

Sabemos que

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gama(2n, \frac{1}{\theta}),$$

pois

$$M_S(t) = M(t)^n = \left[\left[\frac{\frac{1}{\theta}}{\frac{1}{\theta} - t}\right]^2\right]^n = \left[\frac{\frac{1}{\theta}}{\frac{1}{\theta} - t}\right]^{2n}, t < \frac{1}{\theta}.$$

Note que:

$$V = \frac{\bar{X}}{2} = \frac{S}{2n}.$$

A f.g.m. de V é dada por:

$$M_V(t) = M_S(t/2n)$$

A condição de existência é dada por:

$$\frac{t}{2n} < \frac{1}{\theta}$$

$$t < \frac{2n}{\theta}.$$

Logo,

$$M_V(t) = \left[\frac{\frac{1}{\theta}}{\frac{1}{\theta} - t/2n}\right]^{2n}$$

que pode ser colocada na forma:

$$M_V(t) = \left[\frac{\frac{2n}{\theta}}{\frac{2n}{\theta} - t}\right]^{2n}, \ t < \frac{2n}{\theta}$$

Assim

$$V \sim Gama(2n \ \frac{2n}{\theta}).$$

Note que

$$E(V) = \frac{2n}{2n/\theta} = \theta \quad e \quad Var(V) = \frac{2n}{4n^2/\theta^2} = \frac{\theta^2}{2n}.$$

Vamos responder ao item **iv**:

$$E_\theta(X) = \bar{X}.$$

$$2\,\theta = \bar{X}.$$

$$\theta_{MM} = \frac{\bar{X}}{2} = \theta_{MV}.$$

Vamos responder ao item **v**:

Devemos minimizar a soma de quadrados

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ (X_i - E(X_i))^2$$

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ (X_i - 2\theta)^2$$

Derivando em relação a θ temos:

$$S^{'}(\theta) = 2\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - 2\theta\right)(-2) = -4\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - 2\theta\right)$$

$$S^{'}(\theta) = -4\sum_{i=1}^{n} X_i + 8n\theta$$

A derivada segunda é dada por:

$$S^{'}(\theta) = 8n > 0.$$

Assim de $S'(\theta) = 0$ temos:

$$8n\theta = 4\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\hat{\theta}_{MQ} = \frac{\bar{X}}{2} = \hat{\theta}_{MM} = \hat{\theta}_{MV}.$$