02. Fazendo o teste $H_0 : \mu = 1.150$ $(\sigma = 150)$ contra $H_1 : \mu = 1.200$ $(\sigma = 200)$,

e $n = 100$, estabeleceu-se a seguinte região crítica:

$$RC = [1170;\ \infty[.$$

a. Qual a probabilidade α de rejeitar H_0 quando verdadeiro?
b. Qual a probabilidade β de aceitar H_0 quando H_1 é verdadeiro?
c. Qual deve ser a região crítica para que $\alpha = \beta$?

Solução: Seja $\bar{X}$ a média da amostra de tamanho $n = 100$
A região de rejeição da hipótese nula é dada por:

$$\bar{X} \geq 1170.$$

Se H_0 é verdade então:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu = 1150, (150/10)^2 = 225\right).$$

$$\alpha = P(Rejeitar\ \ H_0\ |H_0\ \ verdade) = P\left(\bar{X} \geq 1170 \mid \mu = 1150, \sigma = 150\right)$$

$$\alpha = P(Z \geq (1170 - 1150)/15) = P(Z \geq 1,33) = 0,0918.$$

```
> round(4/3,2)
[1] 1.33
>
> alfa=1-pnorm(1.33);alfa
[1] 0.09175914
>
> round(alfa,4)
[1] 0.0918
> 100*round(alfa,4)
[1] 9.18
>
```

Se H_1 é verdade temos:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu = 1200, (200/10)^2 = 400\right).$$

$$\beta = P(Aceitar\ \ H_0\ |H_1\ \ verdade) = P\left(\bar{X} < 1170 \mid \mu = 1200, \sigma = 200\right)$$

$$\beta = P\left(Z < \frac{1170 - 1200}{20}\right) = P(Z < -1,5) = P(Z > 1,5)$$

$$\beta = 0,5 - P(0 < Z < 1,5) = 0,5 - 0,43319 = 0,0668.$$

```
>
> beta=pnorm(-1.5);beta
[1] 0.0668072
>
> aux=pnorm(1.5)-pnorm(0);aux
[1] 0.4331928
> 0.5-aux
[1] 0.0668072
> 100*beta
[1] 6.68072
>
```

Note que na hipótese alternativa o valor $\mu = 1200$ é maior que na hipótese nula $\mu = 1150$. Assim a região crítica é dada por:

$$\bar{X} > c \quad (c > 1150)$$

.

A região de aceitação é dada por:

$$\bar{X} \leq c$$

Assim

$$\alpha = P\left(Z > \frac{c - 1150}{15}\right).$$

$$\beta = P\left(Z \leq \frac{c - 1200}{20}\right).$$

Como $\alpha = \beta$ temos que os pontos são simétricos:

$$\frac{c - 1150}{15} = -\frac{c - 1200}{20}$$

Multiplicando por 5 temos:

$$\frac{c - 1150}{3} = -\frac{c - 1200}{4}$$

logo

$$4c - 4600 = -3c + 3600$$

$$7c = 8200$$

$$c = \frac{8200}{7} = 1171,43.$$

```
> 8200/7
[1] 1171.429
> round(8200/7,2)
[1] 1171.43
>
```