1.10. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição da variável aleatória X

$$f(x|\theta) = e^{-(x-\theta)} \ I_A(x), \quad A = (\theta, \infty), \theta > 0.$$

i. Especifique o espaço paramétrico e o suporte associado à distribuição de X.

ii. Verifique se

$$\hat{\theta}_1 = \bar{X} \quad e \quad \hat{\theta}_2 = Y_1 = min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

são estimadores não viciados para θ.

Solução: Vamos calcular a esperança de X.

$$E(X) = \int_\theta^\infty x \ e^{-(x-\theta)} \, dx$$

Fazendo a mudança de variável

$$y = x - \theta \quad \text{temos} \quad dy = dx \ \ e \ \ x = y + \theta.$$

$$E(X) = \int_0^\infty (y + \theta) \ e^{-y} \, dy = \theta \int_0^\infty y \, e^{-y} \, dy + \int_0^\infty e^{-y} \, dy$$

$$E(X) = \theta \, \Gamma(2) + \Gamma(1) = \theta \ 1! + 0! = \theta + 1.$$

Por outro lado temos:

$$E(X^2) = \int_\theta^\infty x^2 \ e^{-(x-\theta)} \, dx$$

Fazendo a mesma mudança de variável temos:

$$E(X^2) = \int_0^\infty (y + \theta)^2 \ e^{-y} \, dy = \int_0^\infty y^2 \, e^{-y} \, dy + 2\theta \int_0^\infty y \, e^{-y} \, dy + \theta^2 \int_0^\infty e^{-y} \, dy$$

$$E(X^2) = \Gamma(3) + 2\theta \, \Gamma(2) + \theta^2 \, \Gamma(1) = 2! + 2\theta \ 1! + \theta^2 \ 0!.$$

$$E(X^2) = 2 + 2\theta + \theta^2 = 1 + 1 + 2\theta + \theta^2 = 1 + (\theta + 1)^2.$$

A variância de X é dada por:

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 1 + (\theta + 1)^2 - (\theta + 1)^2 = 1.$$

Vamos responder ao item **i**:

O espaço paramétrico é dado por:

$$\Theta = (0, \infty).$$

O suporte é dado por:

$$A = (\theta, \infty).$$

O suporte depende do parâmetro θ.

Vamos responder ao item **ii**:

Sabemos que

$$E(\bar{X}) = \mu = \theta + 1 \neq \theta,$$

que é um estimador viciado de θ. Percebam que

$T = \bar{X} - 1$ é um estimador não viciado para θ.

Vamos achar a f.d.p. de $Y_1 = min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

A acumulada de Y_1 é dada por:

$$G_{Y_1}(y) = P(Y_1 \leq y) = 1 - P(Y_1 > y)$$

$$G_{Y_1}(y) = 1 - P(Min(X_1, X_2, \ldots, X_n) > y)$$

$$G_{Y_1}(y) = 1 - P(X_1 > y, X_2 > y, \ldots, X_n > y)$$

Como as variáveis são independentes temos:

$$G_{Y_1}(y) = 1 - P(X_1 > y)P(X_2 > y) \ldots P(X_n > y)$$

Como são identicamente distribuídas temos:

$$G_{Y_1}(y) = 1 - [P(X > y)]^2 = 1 - S(y)^n = 1 - [1 - F(y)]^n$$

A f.d.p. de $Y_1 = min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ é dada por:

$$g_{Y_1}(y) = n\,[1 - F(y)]^{n-1}\, f(y).$$

Note que:

Para $y > \theta$ temos:

$$P(X > y) = \int_y^\infty \; e^{-(x-\theta)}\, dx = \; e^{-(y-\theta)}.$$

Assim

$$g_{Y_1}(y) = n\left[e^{-(y-\theta)}\right]^{n-1} e^{-(y-\theta)}.$$

$$g_{Y_1}(y) = ne^{-n(y-\theta)}\; I_A(y).$$

A esperança de Y_1 é dada por:

$$E(Y_1) = \int_\theta^\infty n\; y\; e^{-n(y-\theta)}\; dy$$

$$E(Y_1) = \int_\theta^\infty y\ e^{-n(y-\theta)}\ n\ dy$$

Fazendo a mudança de variável

$$u = n(y-\theta) \quad \text{temos} \quad du = n\ dy \quad e \quad y = \frac{u}{n} + \theta.$$

$$E(Y_1) = \int_0^\infty (\frac{u}{n} + \theta)\ e^{-u}\ \ du = \frac{1}{n}\int_0^\infty ue^{-u}\ du + \theta\int_0^\infty\ e^{-u}\ du$$

$$E(Y_1) = \frac{1}{n}\ \Gamma(2) + \theta\ \Gamma(1) = \theta + \frac{1}{n} \neq \theta.$$

Y_1 é um estimador viciado de θ.

Assim

$$T_2 = Y_1 - \frac{1}{n}$$

é um estimador não viciado de θ.

Vamos responder ao item **iii**:

Sabemos que

$$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{n}.$$

O viés de $\hat{\theta}_1 = \bar{X}$ é dado por:

$$B(\bar{X}) = E((\bar{X})) - \theta = \theta + 1 - \theta = 1.$$

O eqm de $\bar{X}$ é:

$$EQM(\bar{X}) = Var(\bar{X}) + B^2(\bar{X}) = \frac{1}{n} + 1.$$

Vamos calcular $E(Y_1^2)$.

$$E(Y_1^2) = \int_\theta^\infty n\ y^2\ e^{-n(y-\theta)}\ dy$$

$$E(Y_1^2) = \int_\theta^\infty\ y^2\ e^{-n(y-\theta)}\ n\ dy$$

Fazendo a mudança de variável

$$u = n(y-\theta) \quad \text{temos} \quad du = n\ dy \quad e \quad y = \frac{u}{n} + \theta.$$

$$E(Y_1^2) = \int_0^\infty (\frac{u}{n} + \theta)^2\ e^{-u}\ \ du = \frac{1}{n^2}\int_0^\infty u^2\ e^{-u}\ \ du + \theta\ \frac{2}{n}\int_0^\infty ue^{-u}\ du + \theta^2\int_0^\infty\ e^{-u}\ du$$

$$E(Y_1^2) = \frac{1}{n^2}\,\Gamma(3) + \frac{2\theta}{n}\,\Gamma(2) + \theta^2\,\Gamma(1) = \frac{2}{n^2} + \frac{2\theta}{n} + \theta^2.$$

A variância de Y_1 é dada por:

$$Var(Y_1) = \frac{2}{n^2} + \frac{2\theta}{n} + \theta^2 - \left(\theta + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$$

O viés de Y_1 é dado por:

$$B(Y_1) = E(Y_1) - \theta = \theta + \frac{1}{n} - \theta = \frac{1}{n}.$$

O erro quadrático médio de Y_1 é dado por:

$$EQMY_1 = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{2}{n^2}.$$

Vamos estudar

$$EQM(\bar{X}) - EQMY_1 = \frac{1}{n} + 1 - \frac{2}{n^2} = \frac{n^2 + n - 2}{n^2}$$

$$EQM(\bar{X}) - EQMY_1 = \frac{(n-1)(n+2)}{n^2}.$$

Note que para $n = 1$

$$EQM(\bar{X}) = EQMY_1.$$

Note que para $n \geq 2$

$$EQM(\bar{X}) > EQMY_1,$$

pois o numerador é positivo.

Y_1 é melhor estimador seguindo o critério seguido.