Análise de Séries Temporais - Relatório Final

Universidade Federal do Ceará
Centro de Ciências
Departamento de Estatística e Matemática Aplicada
Bacharelado em Estatística

Antônio Arthur Silva de Lima

06 de junho de 2024

Sumário

Introdução

Séries temporais são sequências de dados ordenados no tempo ou em outra dimensão (espaço, por exemplo), e sua análise envolve técnicas estatísticas capazes de modelar e extrair padrões significativos do conjunto de observações, a fim de realizar predições que possam ser úteis no contexto envolvido. Exemplos práticos e muito importantes do tema, são cotações diárias de ações, o índice pluviométrico de dada região, o número de casos de dada doença no país ao longo de certo intervalo, dentre vários outros.

Objetivos

O presente trabalho busca aplicar técnicas e análises específicas a uma série temporal que apresente as componentes de tendência e sazonalidade, que seja recente, preferencialmente brasileira, e contenha ao menos 100 observações; como parte dos requisitos para aprovação na disciplina.

Escolha da série

A **Pesquisa Mensal do Comércio (PMC)**, realizada pelo **Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE)**, é um dos pilares para compreender o panorama econômico do país e/ou região, de forma a produzir indicadores que acompanham a conjuntura do comércio varejista. De maneira a realizar um estudo real, voltado aos indicadores econômicos do estado do Ceará, a série escolhida para análise é intitulada *Índice de volume de vendas no varejo - total - CE*, que contempla os índices de 2000 a 2022, obtidos como parte da **PMC** nos referidos anos. A série pode ser obtida no domínio público Sistema Gerenciador de Séries Temporais. O gráfio da série é apresentado na Figura 1.

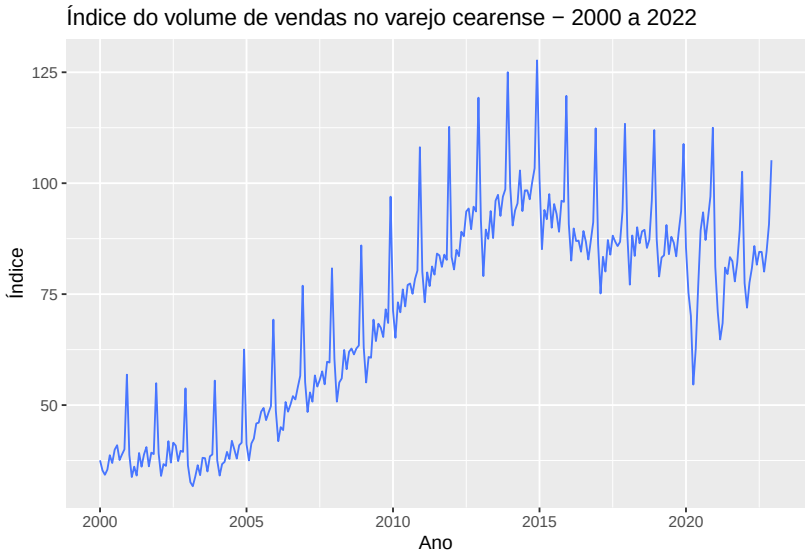


Figura 1: Gráfico da série

A partir do gráfico, percebe-se que a série é claramente não estacionária, contendo uma tendência de crescimento no geral — com alguns decréscimos entre 2015 e 2020 — e também, sazonalidade, com picos nos últimos meses do ano, baixas nos primeiros meses, e altas e baixas nos meses intermediários. Ambas as componentes não aparentam ser determinísticas, já que variam junto com a série, apesar da componente sazonal ter comportamento mais previsível.

Podemos ver tais propriedades de maneira mais específica a partir da decomposição da série, como mostra a Figura 2.

A decomposição realizada foi a decomposição aditiva clássica, que estima a tendência e sazonalidade por meio do método de médias móveis centradas, de ordem igual a frequência da série. Primeiro, a tendência é ajustada, e em seguida removida da série. Depois, estima-se a sazonalidade, tomando as médias de cada unidade de tempo para cada período, sendo centrada posteriormente, e logo após, também sendo removida da série. Com isso, obtém-se a componente de erro. No R, a decomposição aditiva é realizada com a função `decompose()`.

Como ambas tendência e sazonalidade não apresentam variações de amplitude significativas, parece mais razoável utilizar a decomposição aditiva em detrimento da multiplicativa, pois a última é mais adequada a séries que apresentam variação proporcional ao nível da série.

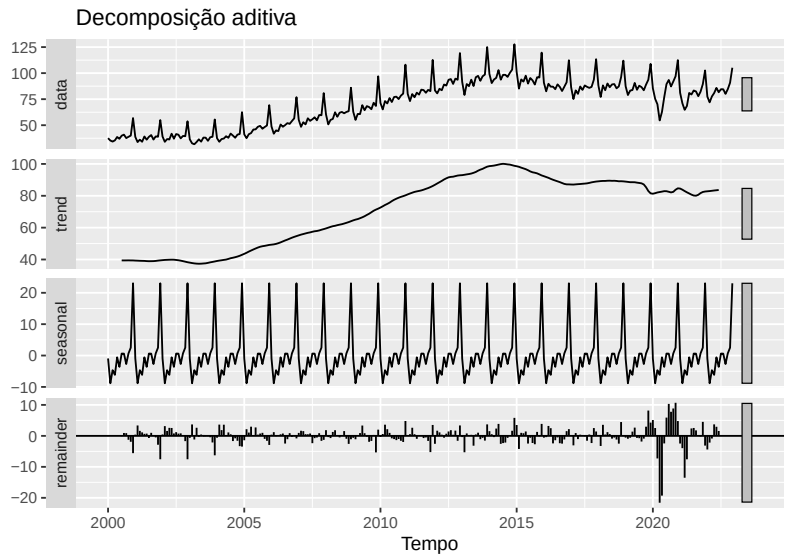


Figura 2: Decomposição clássica

Em um primeiro momento, pode-se infereir a partir do gráfico que tal comportamento deva-se a presença ou ausência de datas festivas ao longo dos meses, como natal e réveillon em dezembro (altos índices); carnaval, semana santa e festas juninas entre fevereiro e julho. Também é possível destacar a queda acentuada do índice no início de 2020, que foi marcado pela pandemia de Covid-19, e as seguintes altas e baixas, entre 2021 — ainda na pandemia — e 2022, que podem ter sido decorrentes da liberação do programa Auxílio Brasil, como forma de alavancar a economia naquele período.

Dados de treino e teste

Em muitos algoritmos de *machine learning*, costuma-se dividir os dados observados em dados de treino e dados de teste, visando **avaliar** e **validar** o(s) modelo(s) proposto(s). Geralmente, o tamanho desses cojuntos fica em torno de 70% e 30% para o treino e teste, respectivamente, podendo variar de acordo com o problema e também com a quantidade de dados disponíveis.

Na análise de séries temporais, não parece razoável seguir com uma divisão de 70%/30%, visto que, dessa forma, perde-se muita informação, uma vez que temos dados dispostos de forma contínua no tempo. Além disso, o modelo pode ser comprometido se a série tiver mudanças bruscas ou variações fortes no conjunto de teste, pois o mesmo será "cortado" do treinamento do modelo, e assim, previsões podem ser menos realistas. Também deve-se considerar o problema intríseco de previsões em séries temporais: quanto maior o horizonte de previsão, menos acurada será a mesma.

Assim, parece mais razoável utilizar uma parcela de dados maior para o conjunto de treino — principalmente quando dispomos de muitas observações — pois desta forma, não excluímos os pontos mais recentes da série,

e o modelo pode captar mais facilmente os padrões.

Finalmente, iremos dividir nossos dados da seguinte maneira:

- **Treino**: de 2000 a 2019 (240 observações, o que corresponde a aproximadamente 87% da série),
- **Teste**: de 2020 a 2022 (36 observações, o que corresponde a aproximadamente 13% da série).

Utilizando o R, a divisão é feita da seguinte maneira:

```
train = head(dados_ts, 240)
test = tail(dados_ts, -240)
```

onde *train* é o conjunto treino, *test*, o conjunto teste; e *dados_ts* a série no formato *time series* do R.

Modelagem

A partir das informações que já extraímos, podemos agora começar a propor modelos capazes de modelar o tipo de comportamento apresentado pela série. Como vimos que a mesma é não estacionária, isto é, possui tendência e sazonalidade, parece razoável utilizar:

1. Modelos de Suavização Exponencial;
2. Modelos ARIMA.

Modelos de Suavização Exponencial

Modelos de suavização exponencial estão entre os métodos mais eficazes para entender o comportamento de séries temporais. Previsões com base nesse método são, de maneira resumida, médias ponderadas de observações passadas, onde os pesos decaem exponencialmente quanto mais antiga for a observação, ou seja, é uma abordagem que prioza as observações mais recentes.

Dentro dessa classe de modelos, há três abordagens distintas, que cobrem grande parte de casos, sendo elas:

1. Suavização Exponencial Simples,
2. Suavização Exponencial com Tendência,
3. Suavização Exponencial com Sazonalidade.

O primeiro método é utilizado quando não há tendência e sazonalidade de forma clara, mas não necessariamente uma série estacionária. Uma maneira de representar tal modelo é através de uma componente, chamada comumente de l, que denota o nível da série. Assim, pode-se dividir uma equação maior em duas outras equações, sendo elas:

$$\begin{aligned} \text{Equação de previsão :} \quad & \hat{y}_{t+h|t} = l_t \\ \text{Equação de suavização :} \quad & l_t = \alpha y_t + (1-\alpha) l_{t-1} \end{aligned}$$

onde $0 \leq \alpha \leq 1$ é o parâmetro de suavização do nível, estimado posteriormente por mínimos quadrados, junto a l_0. Um problema ao utilizar tal método, é que ele nos fornece previsões exatamente iguais ao último nível da série, sendo portanto, um método *naive*.

No segundo método, além da componente de nível, também está presente a tendência, representada por b. Desta forma, temos 3 equações, sendo elas:

$$\begin{aligned}
\text{Equação de previsão :} \quad \hat{y}_{t+h|t} &= l_t + hb_t \\
\text{Equação do nível :} \quad l_t &= \alpha y_t + (1-\alpha)(l_{t-1} + b_{t-1}) \\
\text{Equação da tendência :} \quad b_t &= \beta(l_t - l_{t-1}) + (1-\beta)b_{t-1}
\end{aligned}$$

onde $0 \leq \beta \leq 1$ é o parâmetro de suavização da tendência, também estimado por mínimos quadrados.

Por fim , o último método também leva em consideração séries que tenham sazonalidade, adicionando então, uma componente sazonal denotada por s, e também um parâmetro de suavização desta componente, denotado por γ, estando este entre 0 e 1. Além disso, considera duas formas de como a componente sazonal pode entrar no modelo: de maneira aditiva ou multiplicativa.

O método aditivo é usado nos casos em que as variações sazonais são praticamente constantes, isto é, sem muitas mudanças (o que parece ser o caso da série escolhida), enquanto o método multiplicativo é preferível para situações onde as variações sazonais mudam proporcionalmente ao nível da série. Esta análise é praticamente a mesma realizada para escolher a melhor forma de decompor a série.

As equações para ambas as variações do modelo são dadas da seguinte maneira:

- Método **aditivo**

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{t+h|t} &= l_t + hb_t + s_{t+h-m(k+1)} \\
l_t &= \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1-\alpha)(l_{t-1} + b_{t-1}) \\
b_t &= \beta(l_t - l_{t-1}) + (1-\beta)b_{t-1} \\
s_t &= \gamma(y_t - l_{t-1} - b_{t-1}) + (1-\gamma)s_{t-m}
\end{aligned}$$

onde m é a periodicidade sazonal (para séries mensais, $m = 12$, para séries quaternais, $m = 4$, por exemplo), e k é dado por $\left[\frac{h-1}{m}\right]$.

- Método **multiplicativo**

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{t+h|t} &= (l_t + hb_t)s_{t+h-m(k+1)} \\
l_t &= \alpha\frac{y_t}{s_{t-m}} + (1-\alpha)(l_{t-1} + b_{t-1}) \\
b_t &= \beta(l_t - l_{t-1}) + (1-\beta)b_{t-1} \\
s_t &= \gamma\frac{y_t}{l_{t-1} + b_{t-1}} + (1-\gamma)s_{t-m}
\end{aligned}$$

Dentre as três classes de modelos possíveis dentro dos métodos de suavização exponencial, parece razoável considerar que o terceiro método — também chamado de modelo de Holt-Winters — seja o mais apropriado para descrever a série analisada, tendo em vista que a mesma possui tendência e sazonalidade, enquanto que os dois primeiros métodos não as levam em consideração de forma conjunta, performando mal na presença desses fatores.

Poderíamos ainda considerar uma terceira abordagem, que generaliza os métodos de suavização exponencial, chamada de *modelo de espaço de estados*. Esta abordagem consiste em equações que descrevem tanto a parte observada quanto as mudanças na parte aleatória ao longo do tempo, e considera a interação da última de maneira aditiva ou multiplicativa. Estes modelos são conhecidos pela forma **ETS(., ., .)**, que denota as componentes de Erro, Tendência e Sazonalidade. As possibilidades de ajuste para cada componente são

1. *Erro*: Aditiva ou Multiplicativa,
2. *Tendência*: Nula, Aditiva ou Aditiva Amortizada,
3. *Sazonalidade*: Nula, Aditiva ou Multiplicativa.

Para séries que apresentam uma tendência de crescimento de forma indefinida, ou para horizontes de previsão muito longos, os métodos de suavização exponencial tendem a superestimar o comportamento da série, especialmente no último caso. Desta forma, uma alternativa que surgiu foi acrescentar aos modelos um parâmetro de "amortização" da tendência, $0 < \phi < 1$, que interage com os parâmetros α , β e γ.

Finalmente, podemos ajustar então os modelos de Holt-Winters aditivo, multiplicativo e ETS nos dados de treino da nossa série, realizar previsões, e ver a qualidade do ajuste de cada modelo em relação aos dados de teste, comparando as três abordagens ao final da modelagem.

Ajuste do modelo aditivo

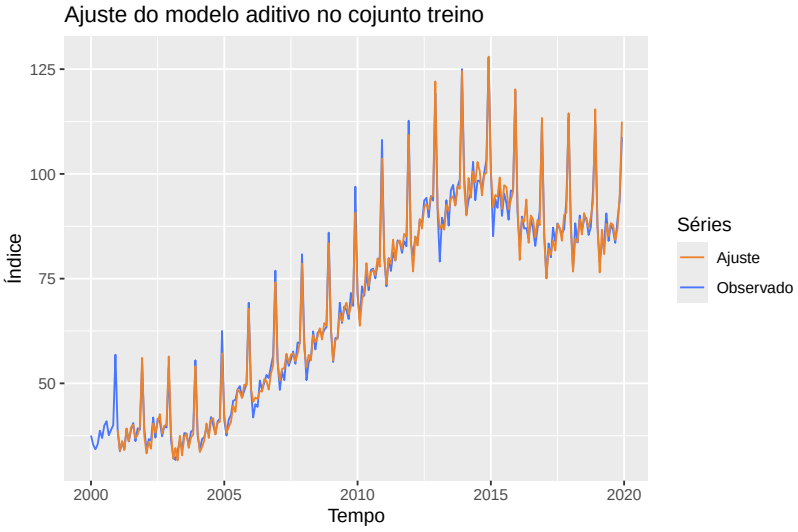
No R, ajustamos os dados de treino ao modelo aditivo a partir da função `HoltWinters()`, presente no pacote *stats*, da seguinte forma:

```
hw_a = HoltWinters(train)
```

A função irá automaticamente estimar os parâmetros de suavização e as componentes iniciais. Os parâmetros estimados foram:

$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$
0.470853	0.0493485	0.7640633

Com isso, podemos criar um gráfico dos valores ajustados, mostrado a seguir, e ter uma primeira impressão da qualidade do ajuste. Também devemos observar a soma dos quadrados dos resíduos, que neste caso foi de 929.8319.



Nota−se um bom ajuste através da sobreposição das linhas.

Com o modelo pronto, podemos agora realizar uma previsão de 3 anos à frente (36 meses), utilizando a função `forecast()`, do pacote *forecast*, da seguinte maneira:

```
hw_a_f = forecast(hw_a, h = 36)
```

Em seguida, vamos comparar os resultados previstos com os dados do conjunto de teste, como mostra a Figura 3.

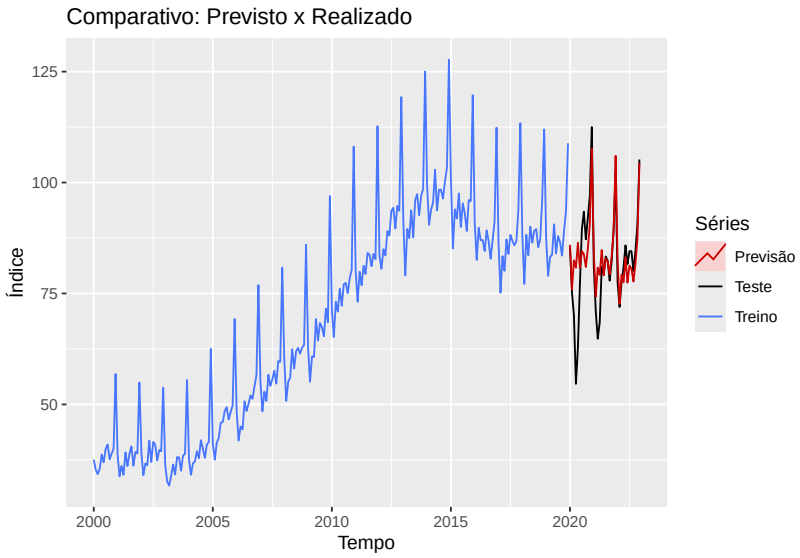


Figura 3: Previsto x Real no modelo aditivo

É possível notar que o modelo foi menos acertivo no ano de 2020, dado que neste ano ocorreu uma mudança brusca no índice, decorrente da queda na economia causada pela pandemia, enquanto os anos de 2021 e 2022 tiveram uma acertividade maior, onde o modelo foi capaz de captar os padrões sazonais no índice e pontos de mudança repentina.

Para validar numericamente o modelo, podemos utilizar algumas medidas capazes de nortear a precisão e acuracidade das previsões, obtendo-as a partir da função `accuracy()`, também do pacote *forecast*:

```
accuracy(hw_a_f, x = test)
```

A função nos retorna os seguintes indicadores:

	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE	ACF1	Theil's U
Treino	-0.0181999	2.019458	1.532047	0.0128043	2.257447	0.3393039	0.0001888	—
Teste	-1.3987664	7.861042	5.150156	-2.9077920	7.085141	1.1406105	0.7091539	0.9961126

De modo resumido, tais indicadores representam:

- **ME**: o erro médio, dado por $\frac{1}{n}\sum_1^n (y_i - \hat{y}_i)$
- **RMSE**: raíz quadrada do erro quadrático médio, dado por $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2}$
- **MAE**: erro absoluto médio, dado por $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|$
- **MPE**: erro percentual médio, dado por $\frac{100\%}{n}\sum_{i=1}^n \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i}$

- **MAPE**: erro absoluto percentual médio, dado por $\frac{100\%}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y_i-\hat{y}_i}{y_i}\right|$
- **MASE**: erro absoluto escalonado médio, dado por $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|y_i-\hat{y}_i|}{\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}|y_i-y_{i-1}|}$
- **ACF1**: função de autocorrelação no lag 1, dada por $\frac{\sum_{t=1}^{T-1}(y_t-\bar{y})(y_{t+1}-\bar{y})}{\sum_{t=1}^{T}(y_t-\bar{y})^2}$
- **Theil's U**: estatística U do tipo U2, que mede a qualidade da previsão em relação ao conjunto de teste, dada por $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\hat{Y}_i-Y_i}{Y_{i-1}}\right]^2}{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{Y_i-Y_{i-1}}{Y_{i-1}}\right]^2}}$

Analisando de maneira conjunta (não é recomendado analisar as métricas de forma individual), é possível concluir que o modelo consegue ter um bom ajuste aos dados, visto que praticamente todos os erros são considerados baixos, especialmente a função de autocorrelação dos resíduos no conjunto de treino. Dentre as medidas acima, uma bastante utilizada e difundida é o **MAPE**, pois entrega uma visão geral e rápida sobre a performance do modelo. No nosso caso, vemos que este valor é de aproximadamente 7,1% no conjunto de teste, reforçando a qualidade do ajuste. Geralmente, valores do **MAPE** abaixo de 10% indicam boa performance. Além disso, a estatística U fica abaixo de 1, indicando que as previsões encontradas pelo modelo são melhores que um método *naive*, isto é, melhores do que um simples chute.

Também devemos checar os resíduos e o comportamento da função de autocorrelação ao longo dos lags, esperando que a mesma seja baixa e dentro do esperado, isto é, que a autocorrelação entre os resíduos fique em torno de 0 e dentro do intervalo de confiança construído para a mesma, tendo poucos ou nenhum lag significativo (com autocorrelação distante do 0). Isso pode ser visto de maneira conjunta, graficamente, através da função `checkresiduals()` do pacote *forecast*:

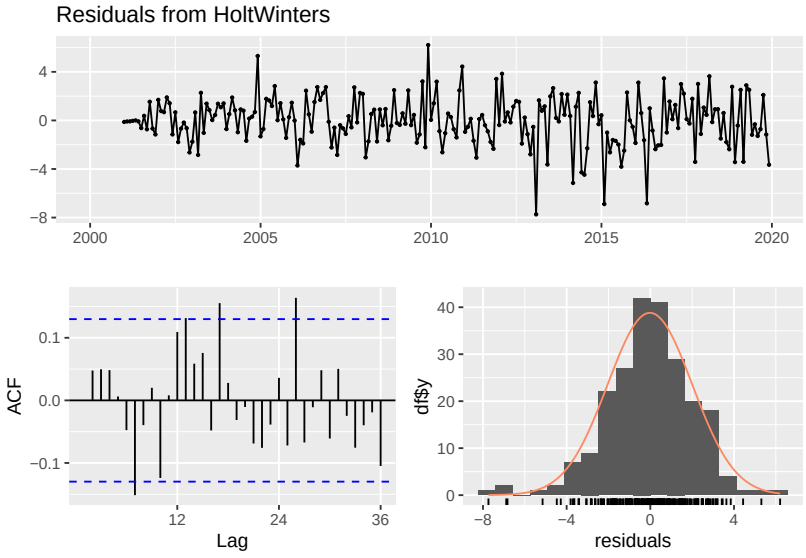


Figura 4: Análise Residual - modelo aditivo

Assim, temos que os resíduos são aproximadamente simétricos em torno do 0, e que a função de autocorrelação tem o comportamento esperado, ou seja, fica em torno de 0, com poucos lags significativos.

Também podemos plotar a função de autocorrelação parcial, esperando também que a mesma contenha poucos ou nenhum lag significativo, como mostra a figura abaixo.

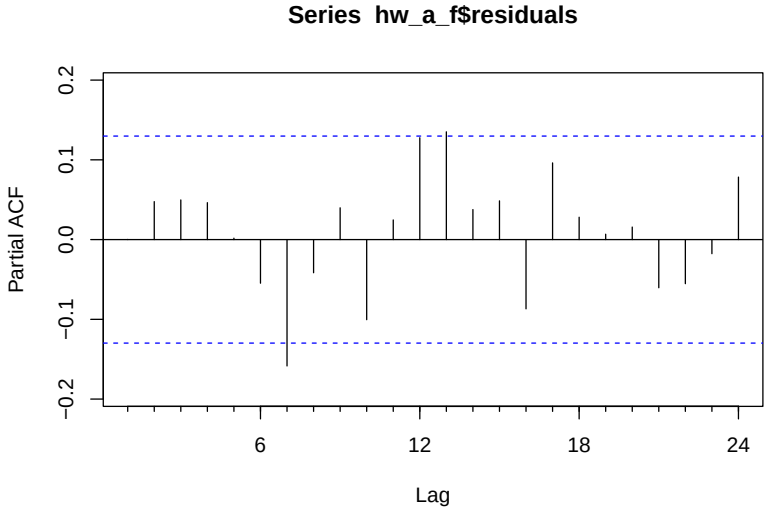


Figura 5: PACF residual - modelo aditivo

A função `checkresiduals()` também é capaz de retornar o resultado do teste de *Ljung-Box* para a autocorrelação, onde H_0 assume que os resíduos sejam não autocorrelacionados:

```
##
##  Ljung-Box test
##
## data:  Residuals from HoltWinters
## Q* = 31.588, df = 24, p-value = 0.1375
##
## Model df: 0.   Total lags used: 24
```

Portanto, a um nível de significância de 5%, não temos evidências para rejeitar a hipótese nula de que os resíduos não tenham correlação entre si.

Ainda, podemos utilizar dois outros testes estatísticos a fim de atestar que os resíduos do nosso modelo correspondem a um ruído branco, isto é, a um processo puramente aleatório, que por definição, é estacionário.

O primeiro teste é o *Teste Aumentado de Dickey-Fuller*, que testa a hipótese nula de que a série analisada tem uma raíz unitária, ou seja, que a mesma é não estacionária.

Já o segundo teste, chamado de *Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS)*, testa a hipótese nula de que a série analisada é estacionária, seja pelo nível ou pela tendência.

Computando ambos os testes, e considerando um nível de significância padrão de 5%, esperamos obter um *valor-p* < 0.05 no primeiro teste, e um *valor-p* > 0.05 no segundo teste. Com as funções `adf.test()` e `kpss.test()` presentes no pacote *tseries*, encontramos o resultado desejado, como mostram as saídas seguintes.

```
##
##  Augmented Dickey-Fuller Test
##
## data:  na.omit(hw_a_f$residuals)
## Dickey-Fuller = -6.5545, Lag order = 6, p-value = 0.01
## alternative hypothesis: stationary
```

```
##
##  KPSS Test for Level Stationarity
##
## data:  na.omit(hw_a_f$residuals)
## KPSS Level = 0.29498, Truncation lag parameter = 4, p-value = 0.1
```

Assim, vemos que os resíduos têm o comportanto de um ruído branco, isto é, com média e variância aproximadamente constantes. Com isso, finalizamos a validação do nosso modelo aditivo.

Ajuste do modelo multiplicativo

No R, ajustamos os dados de treino ao modelo multiplicativo também a partir da função `HoltWinters()`, presente no pacote *stats*, da seguinte forma:

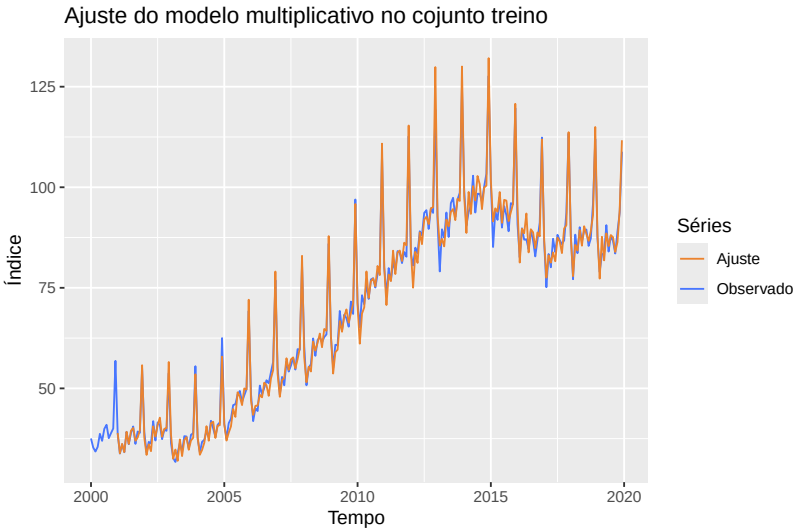
```
hw_m = HoltWinters(train, seasonal = 'mult')
```

Assim como anteriormente, a função irá automaticamente estimar os parâmetros de suavização e as componentes iniciais. A estimação resultou nos seguintes números:

$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$
0.4464225	0.0371133	0.7661509

Note que os valores estimados foram próximos ao modelo aditivo, estando a maior diferença entre as componentes de nível em cada modelo.

Novamente, é possível obter uma primeira impressão da qualidade do ajuste através do gráfico da série observada *vs* ajustada, mostrado abaixo. Perceba como as estimativas são próximas às observações, tais quais no método aditivo, porém captando melhor os picos da série. Apesar disso, a soma dos quadrados dos resíduos foi de 1015.6491.



Nota−se um bom ajuste através da sobreposição das linhas.

Agora, com os valores estimados em mãos, realizamos então a previsão do índice para os anos de 2020 a 2022 (36 meses):

```
hw_m_f = forecast(hw_m, h = 36)
```

Finalmente, iremos comparar graficamente os dados previstos com os dados reais do conjunto de teste, a partir da Figura 6:

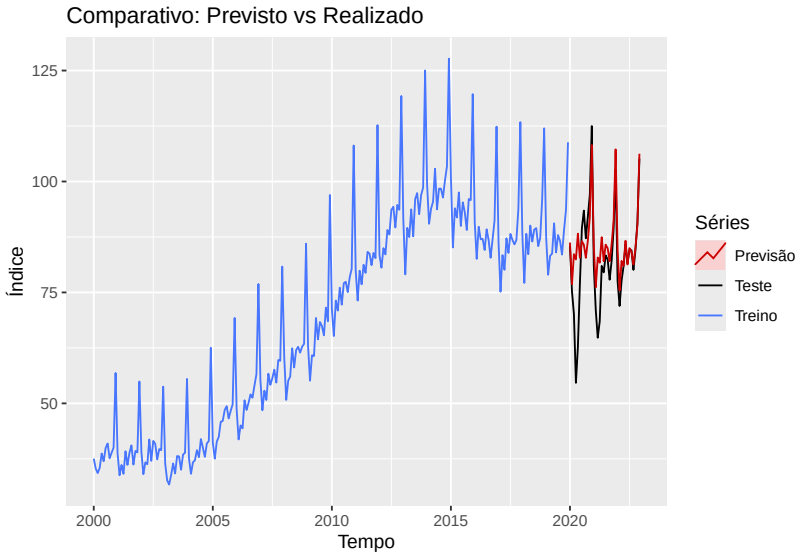


Figura 6: Previsto x Real no modelo multiplicativo

Assim como no modelo aditivo, o modelo multiplicativo não foi capaz de prever a queda brusca do índice em 2020, porém, conseguiu abstrair de maneira competente os padrões dos meses seguintes. O resultado da previsão foi bastante similar ao do primeiro modelo, sendo a diferença mais clara entre os meses intermediários de 2021 (que foi melhor no modelo aditivo) e de 2022 (melhor no modelo multiplicativo).

Para confirmar nossas inferências, iremos utilizar as mesmas métricas de avaliação do primeiro modelo, como mostra a tabela abaixo:

	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE	ACF1	Theil's U
Treino	-0.0666109	2.110593	1.595995	0.0739974	2.298064	0.3534667	0.0328520	—
Teste	-3.6752537	8.425691	5.393043	-5.7349928	7.556641	1.1944027	0.6956143	1.079249

É notório que os indicadores estão muito próximos aos do primeiro modelo, porém, ainda são um pouco maiores, especialmente a função de autocorrelação no conjunto de treino, que foi da ordem de 100 vezes maior no modelo multiplicativo, apesar de ter sido levemente maior no conjunto de teste no primeiro modelo. Outras medidas que confirmam a inferioridade do modelo multiplicativo são o **MPE**, que foi a medida que apresentou a maior diferença absoluta entre os dois modelos no conjunto de teste; o **MAPE**, sendo aproximadamente meio ponto percentual maior na segunda abordagem; e por fim, a estatística U, a qual indica que a qualidade das previsões realizadas por esse método são inferiores a métodos *naive*.

Também é necessário realizar, assim como no primeiro modelo, os gráficos para entender o comportamento dos resíduos e função de autocorrelação:

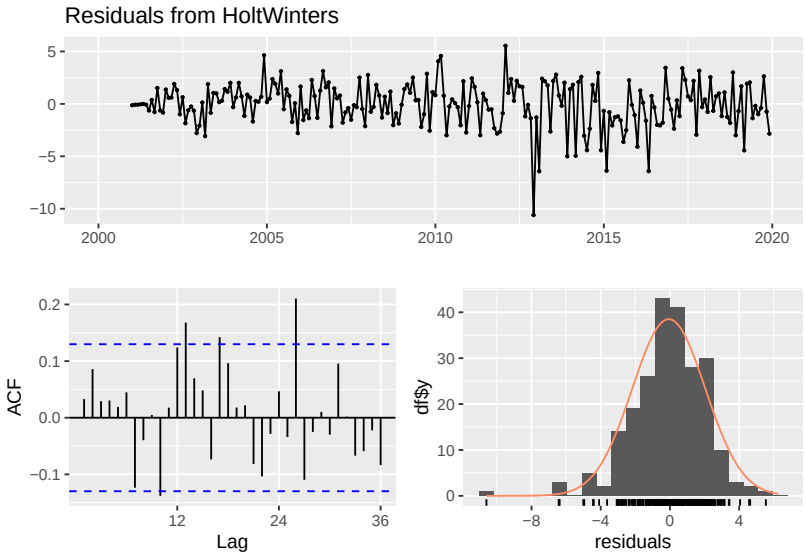
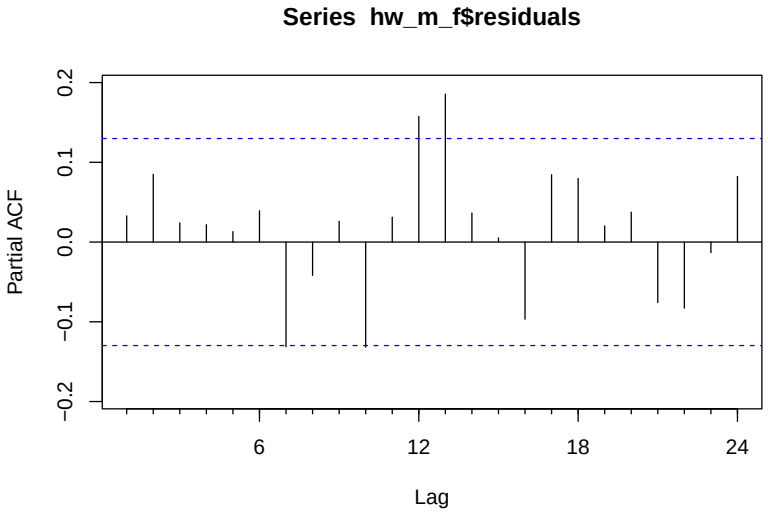


Figura 7: Análise Residual - modelo multiplicativo

Assim, é fácil perceber que os resíduos são levemente assimétricos à esquerda, e que a função de autocorrelação possui um comportamento esperado inferior ao do modelo aditivo, o que pode ser comprovado também pela função de autocorrelação parcial e pelo teste de *Ljung-Box*:




```
##
##  Ljung-Box test
##
## data:  Residuals from HoltWinters
## Q* = 38.062, df = 24, p-value = 0.03417
##
## Model df: 0.   Total lags used: 24
```

Logo, a um nível de 5% de significância, temos evidências suficientes para rejeitar a hipótese de que os resíduos sejam não correlacionados entre si.

Também devemos, assim como no modelo aditivo, testar a hipótese de estacionariedade do modelo, a um nível de significância de 5%.

```
##
##  Augmented Dickey-Fuller Test
##
## data:  na.omit(hw_m_f$residuals)
## Dickey-Fuller = -5.9876, Lag order = 6, p-value = 0.01
## alternative hypothesis: stationary
```

```
##
##  KPSS Test for Level Stationarity
##
## data:  na.omit(hw_m_f$residuals)
## KPSS Level = 0.40987, Truncation lag parameter = 4, p-value = 0.0729
```

O primeiro teste rejeita a hipótese nula de não estacionariedade, porém, com o valor da estatística de teste maior que a do modelo aditivo. Já o segundo teste não rejeita a hipótese nula de estacionariedade, apesar de o *valor-p* ter ficado muito próximo ao nível descritivo (0.05). Estes resultados são um indicativo de que o modelo multiplicativo não teve um ajuste tão bom quanto o modelo aditivo anterior.

Ajuste do modelo de ETS

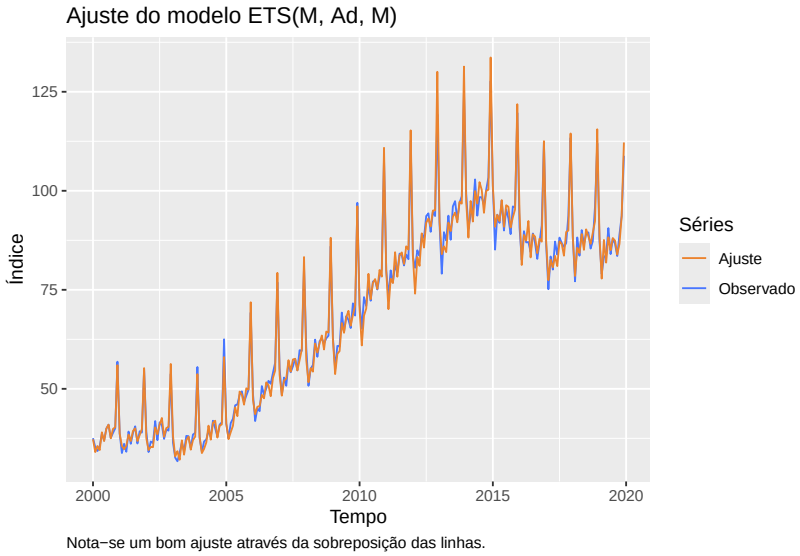
Modelos ETS podem ser facilmente obtidos no R com a função `ets()` presente no pacote *forecast*, que, assim como nas funções de ajuste anteriores, automatiza a escolha do modelo a partir de funções de perda e/ou de verossimilhança:

```
ssm = ets(train)
```

O ajuste nos forceneu um modelo **ETS(M, Ad, M)**, isto é, com erro na forma aditiva, tendência amortizada, e sazonalidade multiplicativa, com as seguintes estimativas dos parâmetros:

$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\phi}$
0.4679022	0.0306852	0.3301643	0.9787813

Novamente, podemos ter uma primeira impressão da qualidade do ajuste comparando as séries observada e ajustada de maneira conjunta, como mostra o gráfico logo abaixo. A soma dos quadrados resíduos foi bem maior que a dos modelos prévios: 1047.8438.



Realizamos então uma previsão de 3 anos, e comparamos os resultado com o conjunto de teste (Figura 8).

```
ssm_f = forecast(ssm, h = 36)
```

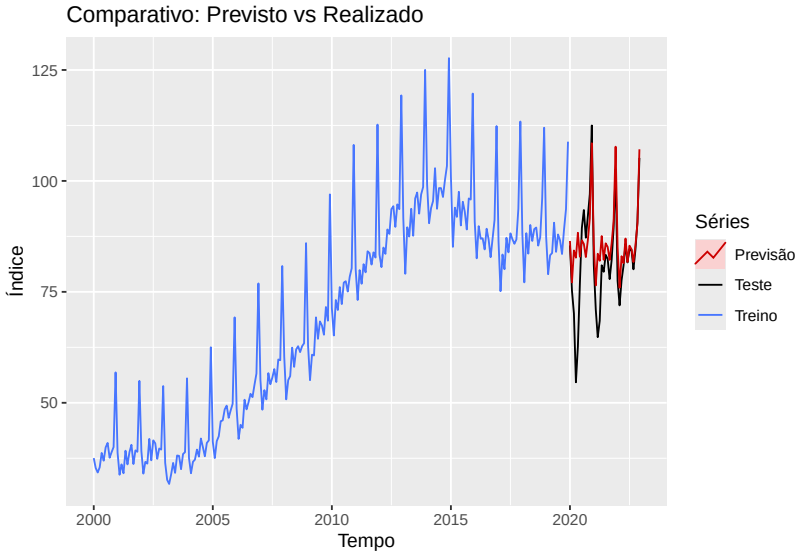


Figura 8: Previsto x Real no modelo ETS

Pelo comparativo gráfico, percebe-se um ajuste inferior aos modelos anteriores (apesar de próximo ao modelo multiplicativo), o que pode ser validado numericamente pelas medidas de erro mostradas na tabela abaixo.

	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE	ACF1	Theil's U
Treino	0.0274127	2.089501	1.554024	0.1459009	2.276634	0.3441712	-0.0244509	—
Teste	-3.9586058	8.613004	5.629441	-6.0940630	7.861769	1.2467582	0.6945784	1.098771

Note que a estatística U também ficou acima de 1, indicando a inferioridade do modelo frente a métodos *naive*, e que o **MPE** foi praticamenteo o dobro da medida do modelo multiplicativo.

Vamos ainda validar o modelo através da verificação de atendimento aos pressupostos, assim como nos casos anteriores.

A figura 9 nos aponta que, aparentemente, os resíduos gerados são ruídos brancos, com média e variância constante, e simétricos em torno de 0, além de haver poucos lags significativos na função de autocorrelação, que é muito similar à do método de Holt-Winters multiplicativo.

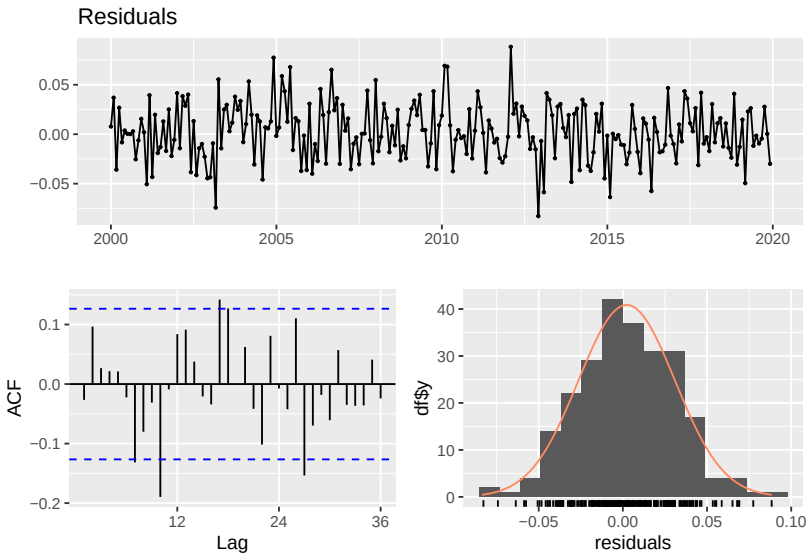
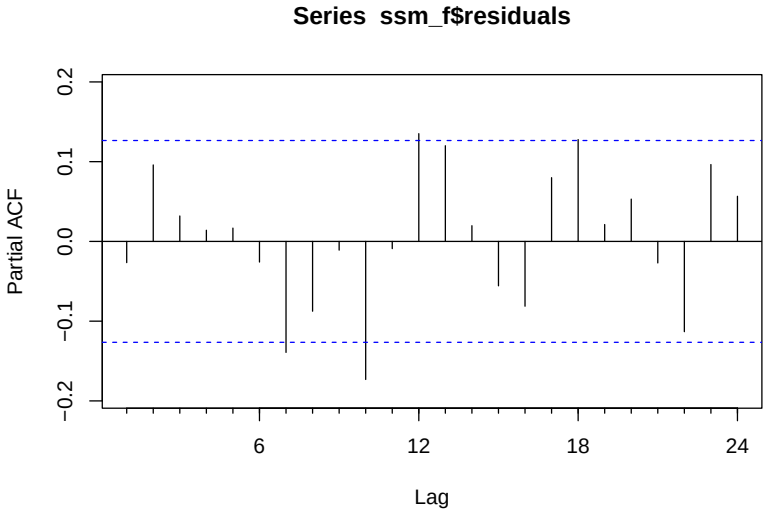


Figura 9: Análise Residual - modelo ETS

Também devemos avaliar a função de autocorrelação parcial dos resíduos, apresentada logo abaixo, além dos 3 testes estatísticos já utilizados anteriormente.



```
##
##  Ljung-Box test
##
## data:  Residuals
## Q* = 38.399, df = 24, p-value = 0.03155
##
## Model df: 0.   Total lags used: 24
```

```
##
##  Augmented Dickey-Fuller Test
##
## data:  ssm_f$residuals
## Dickey-Fuller = -6.331, Lag order = 6, p-value = 0.01
## alternative hypothesis: stationary
```

```
##
##  KPSS Test for Level Stationarity
##
## data:  ssm$residuals
## KPSS Level = 0.1693, Truncation lag parameter = 4, p-value = 0.1
```

Desta forma, vemos que a função de autocorrelação parcial apresentou 3 lags significativos: um a mais do que no modelo multiplicativo e dois a mais que no modelo aditivo. Os testes, em sua maioria, nos levaram a não rejeitar a hipótese de estacionariedade dos resíduos, com excessão do teste de *Ljung-Box*, que apresentou um *valor-p* abaixo do nível descritivo padrão, que foi também menor do que os dos ajustes anteriores.

Então, considerando todas as análises de forma conjunta, concluímos que o modelo aditivo teve o melhor ajuste, sendo este preferível para modelar a série histórica do índice de volume de vendas no varejo cearense, dentre a classe de modelos de suavização exponencial, e considerando também modelos de espaço de estados.

Por fim, com os modelos já validados, pode-se ajustar agora o primeiro método à série completa, utilizando os parâmetros estimados no conjunto treino, e em seguida, realizar uma previsão de, por exemplo, 12 meses, o que corresponde aos índices de 2023 (não inclusos no conjunto de dados).

Modelos ARIMA

A classe dos *Modelos Autorregressivos Integrados de Médias Móveis* é bastante ampla e muito utilizada na análise de séries temporais, entregando em geral, previsões com boa qualidade. Esse tipo de modelo, diferente dos métodos de suavização exponencial, tenta descrever os dados por meio do comportamento da sua autocorrelação, ao invés de descrever componentes de têndencia e sazonalidade.

Um método muito comum e recomendado ao se trabalhar com modelos ARIMA é o de *Box-Jenkins*, que consiste basicamente em quatro etapas, sendo elas

1. Identificação: onde o objetivo é entender o comportamento da série através de gráficos, realizar transformações caso necessário, e por fim, sugerir um modelo;
2. Estimação: com o modelo escolhido, realizar a estimação dos parâmetros utilizando máxima verossimilhança, mínimos quadrados ou uma combinação de métodos;
3. Validação: fazer o diagnóstico do modelo — por meio de análise residual e testes estatísticos — para verificar a qualidade do ajuste;
4. Previsão: caso o modelo seja validado, realizar a previsão h períodos à frente.

Este processo pode ser iterado várias vezes, até que se encontre um modelo satisfatório.

Aplicando a metodologia na série proposta no trabalho, e sabendo que a mesma não atende às condições iniciais para utilização de modelos ARIMA, podemos realizar transformações na mesma, como logarítmo e diferenças, objetivando encontrar estacionariedade.

A transformação logarítmica é mais indicada para séries com variância muito instável, que crescem ou decrescem bruscamente proporcionalmente ao nível da série, o que não parece ser o nosso caso. Já as diferenças são realizadas de maneira a estabilizar a média da série, objetivando torná-la estacionária. Ainda para as diferenças, é possível realizá-las considerando ou não a sazonalidade, de modo que a(s) diferença(s) sazonal(ais) é(são) realizada(s) primeiro, visando retirar a influência da sazonalidade. Outro detalhe em relação à diferenciação reside na perca de informação quanto maior a ordem das diferenças, por exemplo, se é realizada uma diferença simples, então, perde-se um dado; caso sejam duas diferenças, perde-se dois dados, e assim sucessivamente.

Como nossa série possui forte sazonalidade, parece então razoável considerar uma diferenciação sazonal, isto é, tomar diferenças com base em um lag de 12 meses, que é a frequência da mesma. Desta forma, perdemos as primeiras 12 observações.

```
Zt_diff_SZ = diff(dados_ts, lag = 12)
```

Podemos então verificar os gráficos da série transformada, da autocorrelação e autocorrelação parcial, como mostra a Figura 10.

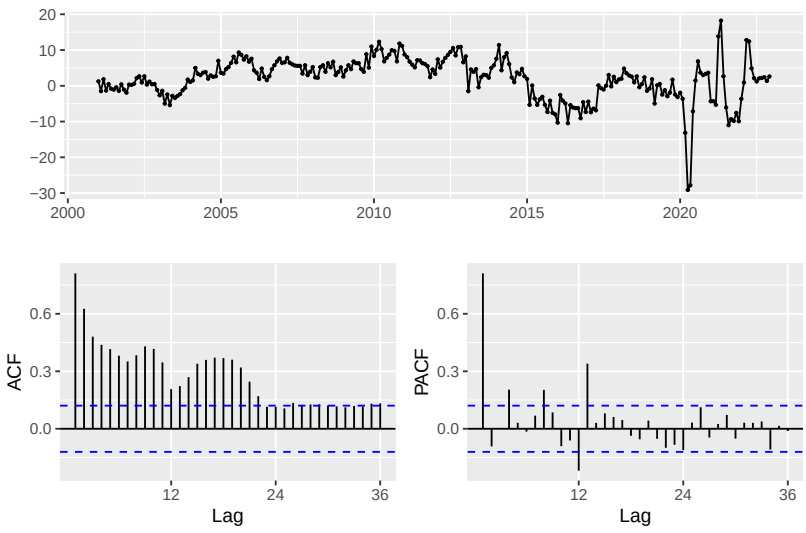


Figura 10: Verificação de estacionariedade: diferença sazonal

Note que a diferenciação sazonal ainda não torna a série estacionária. Isso pode ser solucionado tomando mais uma diferença, mas desta vez, na forma simples:

```
Zt_diff_SM = diff(Zt_diff_SZ)
```

Verificamos novamente o comportamento da série transformada através dos gráficos.

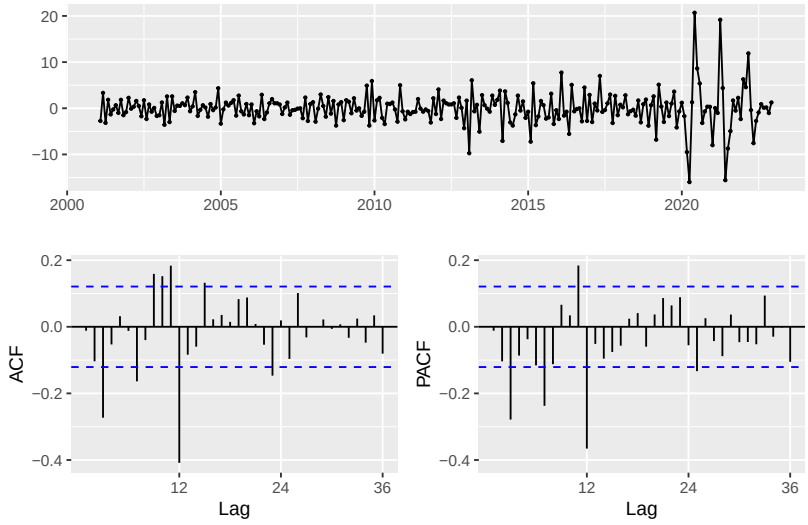


Figura 11: Verificação de estacionariedade: diferença sazonal e simples

Com isso, aparentemente a série tornou-se estacionária, visto que tanto a média quanto a variância parecem ser constantes/estáveis, além das funções de autocorrelação apresentarem poucos lags significativos. Para validar essa afirmação, podemos realizar 3 testes estatísticos, sendo eles o *Teste Aumentado de Dickey-Fuller*, o teste de *Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS)* e o teste *Ljung-Box*, realizados logo abaixo.

```
##
##  Augmented Dickey-Fuller Test
##
## data:  Zt_diff_SM
## Dickey-Fuller = -9.9526, Lag order = 6, p-value = 0.01
## alternative hypothesis: stationary
```

O teste aumentado de Dickey-Fuller nos aponta que há evidências suficientes para rejeitar a hipótese de não estacionariedade.

```
##
##  KPSS Test for Level Stationarity
##
## data:  Zt_diff_SM
## KPSS Level = 0.019199, Truncation lag parameter = 5, p-value = 0.1
```

O teste KPSS também indica que os dados sejam estacionários.

```
##
##  Box-Ljung test
##
## data:  Zt_diff_SM
## X-squared = 0.036755, df = 1, p-value = 0.848
```

Por fim, o teste de *Ljung-Box* também indica que a série diferençada seja estacionária, pois não há evidências para rejeitar a hipótese nula de não autocorrelação entre os lags.

Desta forma, já validando a nova série como sendo estacionária, podemos então olhar para o gráfico das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial (Figura 11), e com base neles, sugerir alguns modelos iniciais, comparando uns com os outros e verificando a performance de cada um.

Primeiro modelo sugerido

Analisando as funções de autocorrelação, nota-se que ambas aparentam ser curvas sinusoidais, com correlações mais significativas no lag 12. Nota-se também, em ambos os gráficos, aproximadamente 4 ou 5 lags significativos. Além disso, é fácil perceber que as funções decaem para 0 após o 12^o lag. Daí, é natural pensar primeiro em um modelo $ARIMA(12,1,12)(0,1,0)_{12}$, onde $p = 12$; $d = 1$; $q = 12$ e $D = 1$, que corresponde à parte sazonal. Entretanto, nem sempre modelos com mais parâmetros são os mais apropriados, tendo em vista que a estimação será mais lenta, que nem todos os parâmetros estimados serão significativos, e que haverá redução no critério da parcimônia.

No R, isto pode ser realizado da seguinte maneira:

```
m0_fit = Arima(dados_ts, order = c(12,1,12), seasonal = c(0,1,0))
```

Os coeficientes estimados e outros valores, como a variância dos estimadoroes, a log-verossimilhança e o critério da informação de Akaike (AIC) são:

```
## Series: dados_ts
## ARIMA(12,1,12)(0,1,0)[12]
##
## Coefficients:
##          ar1      ar2      ar3      ar4      ar5      ar6      ar7      ar8
##       0.1403  -0.1646  -0.2759  -0.0665  -0.2651  -0.0518  -0.2863  -0.1375
## s.e.  0.1074   0.1247   0.1338   0.1647   0.1272   0.1200   0.0997   0.1344
##           ar9    ar10    ar11     ar12      ma1     ma2     ma3      ma4
##       -0.1382  0.0269  0.0191  -0.1814  -0.2951  0.0412  0.0519  -0.0198
## s.e.   0.1617  0.1465  0.1104   0.1161   0.0999  0.1265  0.1351   0.1764
##          ma5      ma6     ma7     ma8     ma9     ma10    ma11     ma12
##       0.2046  -0.0969  0.1222  0.0812  0.1500  -0.1414  0.0088  -0.4868
## s.e.  0.1303   0.1207  0.0939  0.1433  0.1793   0.1764  0.1105   0.1162
##
## sigma^2 = 8.231:  log likelihood = -643.32
## AIC=1336.65   AICc=1342.13   BIC=1425.95
```

Afim de validar a primeira proposta de modelo, iremos novamente estudar o comportamento dos resíduos, como mostra a Figura 12.

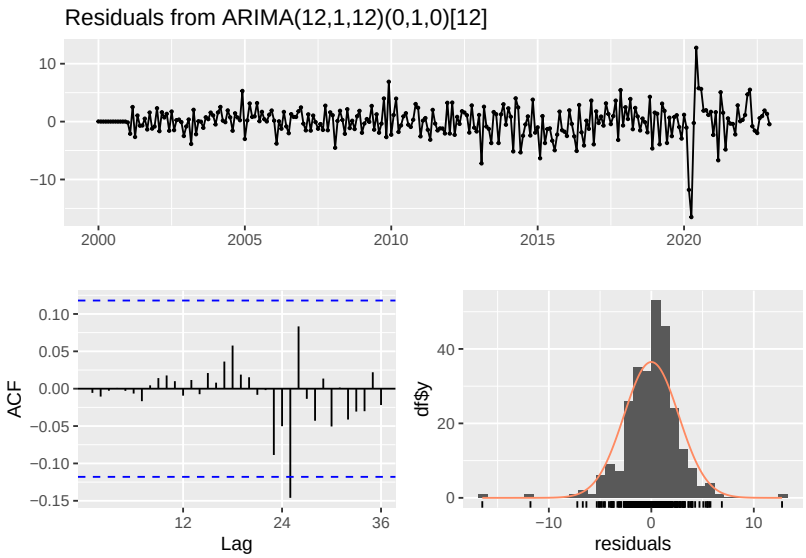


Figura 12: Análise residual

Com isso, nota-se que os resíduos são aproximadamente simétricos ao redor do 0, e só possuem um lag significativo, ainda que com fraca autocorrelação (≈ -0.15).

Podemos também validar o modelo através do teste *Ljung-Box*:

```
##
##  Ljung-Box test
##
## data:  Residuals from ARIMA(12,1,12)(0,1,0)[12]
## Q* = 13.989, df = 3, p-value = 0.00292
##
## Model df: 24.   Total lags used: 27
```

O teste acaba rejeitando a hipótese nula de independência entre os resíduos. Entretanto, é muito comum que isso aconteça em vários contextos, não significando necessariamente que o modelo seja ruim. Perceba que os gráficos residuais apresentaram bons resultados, indicando boa qualidade de ajuste.

Por fim, podemos avaliar a performance do modelo aplicando-o a dados de treino e teste, e verificar algumas métricas de avaliação, assim como nos modelos de Holt-Winters anteriormente. Para isso, aplicamos o modelo ajustado no conjunto treino, realizamos uma previsão de 36 meses, e em seguida, chamamos a função `accuracy()`, obtendo eventualmente os números a seguir.

	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE	ACF1	Theil's U
Treino	-0.0234018	1.748774	1.303742	0.0084043	1.906071	0.2887411	-0.0500014	—
Teste	-2.2131430	7.791811	4.932066	-3.8699356	6.870279	1.0923096	0.6972654	0.9996533

Com isso, concluimos que o modelo teve um ótimo ajuste, já que fica clara a baixa taxa de erro tanto no conjunto de treino quanto no de teste, menor inclusive que os erros dos modelos de suavização exponencial.

Segundo modelo sugerido

Terceiro modelo sugerido

Modelos alternativos