19. Observou-se a produção mensal de uma indústria durante vários anos, verificando-se que ela obedecia a uma distribuição normal, com variância 300. Foi adotada uma nova técnica de produção e, durante 24 meses, observou-se a produção mensal. Após esse período, constatou-se que $barx = 10.000$ e $s^2 = 400$. Há razões para se acreditar que a variância mudou, ao nível de 20%?

Solução:

Seja X a produção mensal da indústria .

$$X \sim N\left(\mu, \sigma^2 = 300\right).$$

$$H_0 : \sigma^2 = 300 \quad vs \quad H_1 : \sigma^2 \neq 300.$$

Uma amostra de tamanho $n = 24$ é retirada. Sabemos que

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

Como $n = 24$ e $\sigma^2 = 300$ temos:

$$V = \frac{23S^2}{300} \sim \chi^2(23).$$

Temos $\alpha = 0,20$.
Devemos achar o percentil 90 da distribuição de $\chi^2(23)$.

$$P\left(V > q_2\right) = 0,10.$$

Olhando a tabela IV com $p = 10\%$ e $\nu = 23$ temos:

$$q_2 = 32,007.$$

Devemos achar o percentil 10 da distribuição de $\chi^2(23)$.

$$P(V > q_1) = 0,90.$$

Olhando a tabela IV com $p = 90\%$ e $\nu = 23$ temos:

$$q_1 = 14,848.$$

Assim a região de aceitação do teste é:
Se

$$14,448 < V_{cal} < 32,007$$

não rejeitar H_0. Caso contrário rejeitar.

Se H_0 é verdade temos:

$$V_{cal} = \frac{23 \times 400}{300} = 30,67$$

Como

$$14,448 < 30,67 < 32,007$$

não podemos rejeitar H_0 ao nível de significância de 20%.

Poderíamos expressar a região de aceitação da seguinte maneira :

$$\frac{(n-1)s_1^2}{300} = 14,848$$

$$s_1^2 = \frac{14,848 \times 300}{23} = 193,67.$$

$$\frac{(n-1)s_2^2}{300} = 32,007$$

$$s_1^2 = \frac{32,007 \times 300}{23} = 417,48.$$

Assim se

$$193,67 < S^2 < 417,48$$

não rejeitar H_0.

Note que:

$$193,67 < 400 < 417,48,$$

confirmando nossa decisão anterior.

Vamos achar o nível descritivo:

$$p_1 = P(S^2 \leq 400) = P(V \leq 30,67) = 0,8688$$

$$p_2 = P(S^2 \geq 400) = P(V \geq 30,67) = 0,1312 = 1 - p_1,$$

no cado contínuo.

$$\hat{\alpha} = 2 \times min(p_1, p_2) = 2 \times 0,1312 = 0,2624.$$

Como

$$\alpha = 0,20 < 0,2624$$

não rejeitamos H_0.

```
> n=24;s2=400
> sigma02=300
> alfa=0.2
>
> q_1=qchisq(alfa/2,n-1);q_1;round(q_1,3)
[1] 14.84796
[1] 14.848
> q_2=qchisq(1-alfa/2,n-1);q_2;round(q_2,3)
[1] 32.0069
[1] 32.007
>
> qui_cal=(n-1)*s2/sigma02;qui_cal
[1] 30.66667
>
> qui_cal < q_2
[1] TRUE
>
> qui_cal>q_1
[1] TRUE
>
> p_1=pchisq(qui_cal,n-1);p_1
[1] 0.8687953
> p_2=1-pchisq(qui_cal,n-1);p_2
[1] 0.1312047
>
> nd=2*min(p_1,p_2);nd
[1] 0.2624094
>
>
```

Construa agora um intervalo de confiança de 80% para σ^2.

Este intervalo é dado por:

$$L_i = \frac{(n-1)s^2}{q_2} \qquad L_s = \frac{(n-1)s^2}{q_1},$$

em que

$$P\left(\chi^2(n-1) > q_2\right) = \frac{\alpha}{2} \qquad P\left(\chi^2(n-1) > q_1\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Assim

$$q_2 = 32,007 \quad .6 \quad q_1 = 14,848.$$

$$L_i = \frac{(n-1)s^2}{q_2} = \frac{23 \times 400}{32,007} = 287,4380.$$

$$L_s = \frac{(n-1)s^2}{q_1} = \frac{23 \times 400}{14,848} = 619,6139.$$

Assim,

$$IC(\sigma^2, 80\%) = [287,4380; 619,6139].$$

Como 300 pertence ao IC concluímos que a variância não mudou!!!

```
gama=0.80
> alfa=0.20;alfa;alfa/2
[1] 0.2
[1] 0.1
> n=24;s2=400
> q_2=qchisq(0.90,23);q_2;round(q_2,3)
[1] 32.0069
[1] 32.007
> q_1=qchisq(0.10,23);q_1;round(q_1,3)
[1] 14.84796
[1] 14.848
> Li=(n-1)*s2/q_2;Li
[1] 287.438
> Ls=(n-1)*s2/q_1;Ls
[1] 619.6139
>
> IC80=c(Li,Ls);IC80
[1] 287.4380 619.6139
>
> ###H_0: sigma2=300=sigma0^2
>
> sigma02=300
>
> sigma02 <Ls
[1] TRUE
>
> sigma02 >Li
[1] TRUE
>
>
> ##Assim a variância não mudou!!!!!
```