TUTORIAL TRABALHO · DIVERGENTE E ROTACIONAL DE CAMPOS VETORIAIS

DEFINIÇÃO. Um Campo Vetorial Espacial é uma aplicação $F(x,y,z): U \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, onde U é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^3$, que a cada $(x,y,z) \in U$ associa o vetor $F(x,y,z) = M(x,y,z)i + N(x,y,z)j + R(x,y,z)k$; as três funções reais $M(x,y,z)$, $N(x,y,z)$ e $R(x,y,z)$ são denominadas as componentes do campo $F(x,y,z)$;

Vejamos exemplos:

(i) $F(x,y,z) = x^2yz\,i + xy^2z\,j + xyz^2k$, é um campo vetorial espacial cujas componentes são:

$$M(x,y,z) = x^2yz;\ N(x,y,z) = xy^2z;\ \text{e}\ R(x,y,z) = xyz^2;$$

(ii) $F(x,y,z) = \operatorname{arctg}(yz)i + \operatorname{arctg}(xz)j + \operatorname{arctg}(xy)k$, é um campo vetorial espacial cujas componentes

são: $M(x,y,z) = \operatorname{arctg}(yz)$; $N(x,y,z) = \operatorname{arctg}(xz)$; e $R(x,y,z) = \operatorname{arctg}(xy)$;

DEFINIÇÃO. Dado um Campo Vetorial Espacial $F(x,y,z) = M(x,y,z)i + N(x,y,z)j + R(x,y,z)k$, para o qual existam as três derivadas parciais: $\dfrac{\partial M(x,y,z)}{\partial x}$; $\dfrac{\partial N(x,y,z)}{\partial y}$; e $\dfrac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}$; definimos o DIVERGENTE do campo $F(x,y,z)$, denotado por $\operatorname{div}F$, como sendo o seguinte escalar (função real):

$$\operatorname{div}F := \frac{\partial M(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial N(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z};$$

Vejamos exemplos:

(iii) Seja $F(x,y,z) = x^2yz\,i + xy^2z\,j + xyz^2k$, o mesmo campo vetorial do exemplo (i), acima, seu Divergente é: $\operatorname{div}F = \dfrac{\partial M(x,y,z)}{\partial x} + \dfrac{\partial N(x,y,z)}{\partial y} + \dfrac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} = \dfrac{\partial(x^2yz)}{\partial x} + \dfrac{\partial(xy^2z)}{\partial y} + \dfrac{\partial(xyz^2)}{\partial z} = 2xyz + 2xyz + 2xyz = 6xyz;$

(iv) Agora, seja $F(x,y,z) = \operatorname{arctg}(yz)i + \operatorname{arctg}(xz)j + \operatorname{arctg}(xy)k$, o mesmo campo vetorial do exemplo (ii), acima, seu Divergente é: $\operatorname{div}F = \dfrac{\partial M(x,y,z)}{\partial x} + \dfrac{\partial N(x,y,z)}{\partial y} + \dfrac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0;$

OBSERVAÇÃO. Quando ocorre de o $\operatorname{div}F$ ser a função real identicamente nula, ou seja: $\operatorname{div}F = 0$; dizemos que o campo vetorial F é incompressível; o campo do exemplo (iv) é incompressível;

DEFINIÇÃO. Dado um Campo Vetorial Espacial $F(x,y,z)=M(x,y,z)i+N(x,y,z)j+R(x,y,z)k$, para o qual existam as seis derivadas parciais: $\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y}$; $\frac{\partial N(x,y,z)}{\partial z}$; $\frac{\partial M(x,y,z)}{\partial z}$; $\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x}$; $\frac{\partial M(x,y,z)}{\partial y}$; e $\frac{\partial N(x,y,z)}{\partial x}$, definimos o **ROTACIONAL** do campo $F(x,y,z)$, denotado por $\text{rot}F$, como sendo o seguinte vetor em R^3 (campo vetorial espacial):

$$\text{rot}F := \left(\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y,z)}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial M(x,y,z)}{\partial z} - \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial N(x,y,z)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y,z)}{\partial y}\right)k;$$

É comum, na literatura especializada, a utilização da seguinte notação simplificada:

$$\text{rot}F := (R_y - N_z)i + (M_z - R_x)j + (N_x - M_y)k;$$

A qual, daqui em diante, é a que vamos utilizar:

Vejamos exemplos:

(v) Seja $F(x,y,z) = x^2yz\,i + xy^2z\,j + xyz^2\,k$, o mesmo campo vetorial do exemplo (i), seu Rotacional é:

$\text{rot}F = (R_y - N_z)i + (M_z - R_x)j + (N_x - M_y)k = ((xyz^2)_y - (xy^2z)_z)i + ((x^2yz)_z - (xyz^2)_x)j + ((xy^2z)_x - (x^2yz)_y)k;$

ou seja: $\text{rot}F = (xz^2 - xy^2)i + (x^2y - yz^2)j + (y^2z - x^2z)k;$

(vi) Seja $F(x,y,z) = x^2i + y^2j + z^2k$, o seu Rotacional é:

$\text{rot}F = (R_y - N_z)i + (M_z - R_x)j + (N_x - M_y)k = ((z^2)_y - (y^2)_z)i + ((x^2)_z - (z^2)_x)j + ((y^2)_x - (x^2)_y)k;$

ou seja: $\text{rot}F = (0-0)i + (0-0)j + (0-0)k = 0i + 0j + 0k = 0$, o vetor nulo de R^3;

Observação. Quando ocorre de o $\text{rot}F$ ser o campo vetorial espacial nulo, ou seja: o vetor nulo de R^3; dizemos que o campo vetorial F é irrotacional; o campo do exemplo (vi) é irrotacional;

LEMA.1. Sejam: $g(x,y,z): V \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função real satisfazendo às hipóteses do Teorema de Clairaut; e seu gradiente: $\nabla g = g_x i + g_y j + g_z k$; então: $rot(\nabla g) = 0$, o campo vetorial nulo em $\mathbb{R}^3$;

Prova: percebamos que $\nabla g = g_x i + g_y j + g_z k$, é um campo vetorial com componentes: $M = g_x$; $N = g_y$; e $R = g_z$; e como:

$$rot(\nabla g) = (R_y - N_z)i + (M_z - R_x)j + (N_x - M_y)k = [(g_z)_y - (g_y)_z]i + [(g_x)_z - (g_z)_x]j + [(g_y)_x - (g_x)_y]k;$$

ou seja: $rot(\nabla g) = (g_{zy} - g_{yz})i + (g_{xz} - g_{zx})j + (g_{yx} - g_{xy})k$;

Ocorre, que por hipótese $g(x,y,z)$ satisfaz ao Teorema de Clairaut, então: $g_{zy} = g_{yz}$; $g_{xz} = g_{zx}$; $g_{yx} = g_{xy}$;

ou seja: $rot(\nabla g) = 0i + 0j + 0k = 0$, o campo vetorial nulo em $\mathbb{R}^3$;

LEMA.2. Seja $F(x,y,z) = M(x,y,z)i + N(x,y,z)j + R(x,y,z)k$ um campo vetorial espacial, para o qual suas componentes $M(x,y,z)$, $N(x,y,z)$ e $R(x,y,z)$, satisfaçam às hipóteses do Teorema de Clairaut; então:

$div(rot F) = 0$, a função real idênticamente nula;

Prova: percebamos que $rot F = (R_y - N_z)i + (M_z - R_x)j + (N_x - M_y)k$, tem: como componente i, $R_y - N_z$; como componente j, $M_z - R_x$; e como componente k, $N_x - M_y$; logo seu divergente é:

$$div(rot F) = (R_y - N_z)_x + (M_z - R_x)_y + (N_x - M_y)_z = R_{yx} - N_{zx} + M_{zy} - R_{xy} + N_{xz} - M_{yz};$$

Ocorre, que por hipótese, M, N e R satisfazem ao Teorema de Clairaut, então:

$R_{yx} = R_{xy}$; $N_{xz} = N_{zx}$; e $M_{zy} = M_{yz}$; logo, $div(rot F) = 0$, a função real idênticamente nula;

OBSERVAÇÃO. As definições de Divergente e Rotacional são fácilmente adaptadas para quando tivermos, apenas, um campo vetorial plano $F(x,y) = M(x,y)i + N(x,y)j$; com efeito:

$div F = M_x + N_y$;

e $rot F = (N_x - M_y)k$;