14. Suponha que estejamos testando $H_0 : p = 0,5$ contra $H1 : p \neq 0,5$, e que, para uma amostra de tamanho$n = 10$, decidimos pela região crítica $RC = \{0, 1, 2, 8, 9, 10\}$.

(a) Determine o nível de significância α.

(b) Calcule o poder do teste para p = 0,2, 0,4, 0,6, 0,8. Faça um gráfico do poder como função de p.

(c) Qual o poder do teste para p = 0,5?

Solução: Seja $X \sim Ber(p)$. Uma amostra aleatória de tamanho $n = 10$ é retirada. Seja S o número total de sucessos na amostra.

Assim

$$S \sim Bin(10, p).$$

Se H_0 é verdade temos $p = 0,5$

$$P(S = s) = \binom{10}{s} 0,5^s \, 0,5^{10-s} \;\; I_{\{0,1,2,\ldots,9,10\}}\,(s).$$

A região crítica $RC = \{0, 1, 2, 8, 9, 10\}$ e

A região de aceitação é dada por:

$$RA = \{3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Sabemos que

$$\alpha = P(Rejeitar\ H_0 \mid H_0 \text{ é verdade}) = P\left(S \leq 2 |\, p = 0,5\right) + P\left(S \geq 8 |\, p = 0,5\right) =$$

Mas

$$P\left(S \leq 2 |\, p = 0,5\right) = \frac{\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2}}{1024} = \frac{56}{1024}.$$

$$P\left(S \geq 8 |\, p = 0,5\right) = \frac{\binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10}}{1024} = \frac{56}{1024}.$$

$$\alpha = 2 \times \frac{56}{1024} = \frac{7}{64}.$$

A função poder do teste é definida por :

$$\pi(p) = P(Rejeitar\ H_0 \mid p) = 1 - P(Aceitar\ H_0 \mid p).$$

$$\pi(p) = P(S \leq 2 \mid p) + P(S \leq 8 \mid p).$$

Assim para $p = 0,2$

$$\pi(0,2) = P(S \leq 2 \mid p = 0,2) + P(S \geq 8 \mid p = 0,2).$$

Vamos utilizar a tabela I com $n = 10$ e $p = 0,2$.

$$P(S \leq 2 \mid p = 0,2) = P(S = 0) + P(S = 1) + P(S = 2) = 0,107 + 0,268 + 0,302 = 0,678.$$

```
> p0=dbinom(0,10,p=0.2);p0;round(p0,3)
[1] 0.1073742
[1] 0.107
> p1=dbinom(1,10,p=0.2);p1;round(p1,3)
[1] 0.2684355
[1] 0.268
> p2=dbinom(2,10,p=0.2);p2;round(p2,3)
[1] 0.3019899
[1] 0.302
> pbinom(2,10,p=0.2)
[1] 0.6777995
> pbinom(2,10,p=0.2);p0+p1+p2
[1] 0.6777995
[1] 0.6777995
> round(p0+p1+p2,3)
[1] 0.678
>
```

$$P(S \geq 8 \mid p = 0,2) = P(S = 8) + P(S = 9) + P(S = 10) = 0^+ + 0^+ + 0^+ \approx 0 = 0.$$

$$\pi(0,2) = P(S \leq 2 \mid p = 0,2) + P(S \geq 8 \mid p = 0,2) = 0,768 + 0 = 0,678.$$

Vamos utilizar a tabela I com $n = 10$ e $p = 0,4$.

$$P(S \leq 2 \mid p = 0,4) = P(S = 0) + P(S = 1) + P(S = 2) = 0,006 + 0,040 + 0,121 = 0,167.$$

$$P(S \geq 8 \mid p = 0,4) = P(S = 8) + P(S = 9) + P(S = 10) = 0,011 + 0,002 + 0^+ \approx 0 = 0,13.$$

$$\pi(0,4) = P(S \leq 2 \mid p = 0,4) + P(S \geq 8 \mid p = 0,4) = 0,18.$$

```
>
> p0=dbinom(0,10,p=0.4);p0;round(p0,3)
[1] 0.006046618
[1] 0.006
> p1=dbinom(1,10,p=0.4);p2;round(p2,3)
[1] 0.1209324
[1] 0.121
> p2=dbinom(2,10,p=0.4);p2;round(p2,3)
[1] 0.1209324
```

```
[1] 0.121
>
> pbinom(2,10,p=0.4);p0+p1+p2
[1] 0.1672898
[1] 0.1672898
>
> round(p0+p1+p2,3)
[1] 0.167
>
>
>
>
> p8=dbinom(8,10,p=0.4);p8;round(p8,3)
[1] 0.01061683
[1] 0.011
> p9=dbinom(9,10,p=0.4);p9;round(p9,3)
[1] 0.001572864
[1] 0.002
> p10=dbinom(10,10,p=0.4);p10;round(p10,3)
[1] 0.0001048576
[1] 0
>
> rb=p0+p1+p2+p8+p9+p10;round(rb,3)
[1] 0.18
```

Vamos utilizar a tabela I com $n = 10$ e $p = 0,6$.

$$P(S \leq 2 \mid p = 0,6) = P(S = 0) + P(S = 1) + P(S = 2) = 0,011 + 0,002 + 0^+ \approx 0 = 0,013.$$

$$P(S \geq 8 \mid p = 0,6) = P(S = 8) + P(S = 9) + P(S = 10) = 0,006 + 0,040 + 0,121 = 0,167.$$

$$\pi(0,6) = P(S \leq 2 \mid p = 0,6) + P(S \geq 8 \mid p = 0,6) = 0,18.$$

```
> p0=dbinom(0,10,p=0.6);p0;round(p0,3)
[1] 0.0001048576
[1] 0
> p1=dbinom(1,10,p=0.6);p2;round(p2,3)
[1] 7.3728e-05
[1] 0
> p2=dbinom(2,10,p=0.6);p2;round(p2,3)
[1] 0.01061683
[1] 0.011
> pbinom(2,10,p=0.4);p0+p1+p2
[1] 0.1672898
[1] 0.01229455
> pbinom(2,10,p=0.6);p0+p1+p2
```

```
[1] 0.01229455
[1] 0.01229455
> round(p0+p1+p2,3)
[1] 0.012
> p8=dbinom(8,10,p=0.6);p8;round(p8,3)
[1] 0.1209324
[1] 0.121
> p9=dbinom(9,10,p=0.6);p9;round(p9,3)
[1] 0.04031078
[1] 0.04
> p10=dbinom(10,10,p=0.6);p10;round(p10,3)
[1] 0.006046618
[1] 0.006
> rb=p0+p1+p2+p8+p9+p10;round(rb,3)
[1] 0.18
```

Vamos utilizar a tabela I com $n = 10$ e $p = 0,8$.

$$P(S \leq 2 \mid p = 0,8) = P(S = 0) + P(S = 1) + P(S = 2) = 0^+ + 0^+ + 0^+ \approx 0.$$

$$P(S \geq 8 \mid p = 0,8) = P(S = 8) + P(S = 9) + P(S = 10) = 0,107 + 0,268 + 0,302 = 0,678.$$

$$\pi(0,8) = P(S \leq 2 \mid p = 0,8) + P(S \geq 8 \mid p = 0,8) = 0,678.$$

```
> p0=dbinom(0,10,p=0.8);p0;round(p0,3)
[1] 1.024e-07
[1] 0
> p1=dbinom(1,10,p=0.8);p2;round(p2,3)
[1] 7.3728e-05
[1] 0
> p2=dbinom(2,10,p=0.8);p2;round(p2,3)
[1] 7.3728e-05
[1] 0
>
> pbinom(2,10,p=0.4);p0+p1+p2
[1] 0.1672898
[1] 7.79264e-05
>
> round(p0+p1+p2,3)
[1] 0
>
>
>
>
> p8=dbinom(8,10,p=0.8);p8;round(p8,3)
```

```
[1] 0.3019899
[1] 0.302
> p9=dbinom(9,10,p=0.8);p9;round(p9,3)
[1] 0.2684355
[1] 0.268
> p10=dbinom(10,10,p=0.8);p10;round(p10,3)
[1] 0.1073742
[1] 0.107
>
> rb=p0+p1+p2+p8+p9+p10;round(rb,3)
[1] 0.678
```

Usando os comandos teremos o gráfico da função poder:

```
pidep=function(p) pbinom(2,10,p) +1- pbinom(7,10,p)
 round(pidep(0.2),3)
[1] 0.678
> round(pidep(0.4),3)
[1] 0.18
> round(pidep(0.6),3)
[1] 0.18
> round(pidep(0.8),3)
[1] 0.678
>
```

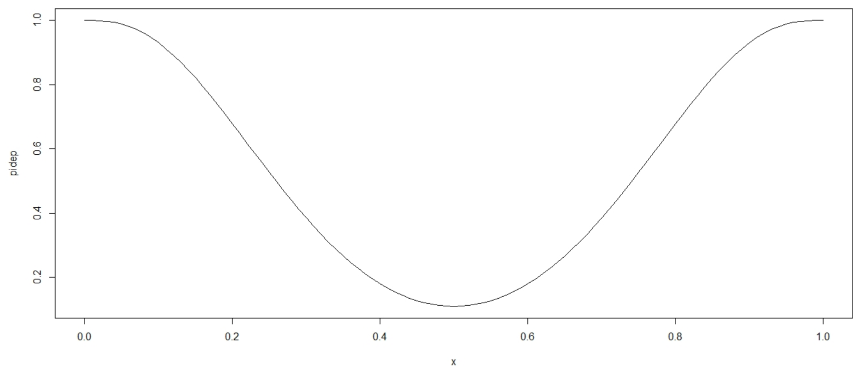

Figura 1:

Vamos responder o item **c**:

$$\pi(0,5) = P(S \leq 2 \mid p = 0,5) + P(S \geq 8 \mid p = 0,5) = 2 \times P(S \leq 2 \mid p = 0,5) = 0,109 = \alpha.$$

```
 pidep(0.5);7/64
[1] 0.109375
[1] 0.109375
> round(pidep(0.5),3)
```

```
[1] 0.109
>
```