CC0288 - Inferência Estatística I

Método dos Momentos - 10/04/2023.

Prof. Maurício

1. Este método de estimação é um dos métodos mais antigos de estimação. Ele é utilizado desde o século XVIII. A ideia é bem simples. Vamos inicialmente definir para o caso uniparamétrico:

   Seja X uma variável aleatória com a seguinte f.d.p. ou f.p. , $f(x \mid \theta)$, suporte A , espaço paramétrico Θ e $E_\theta(X^r) < \infty,\ r = 1, 2, \ldots$.

   Seja a amostra aleatória $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de X . Vamos igualar o primeiro populacional ao primeiro momento amostral, isto é,

$$E_\theta(X) = \bar{X}.$$

   Vamos fazer alguns exemplos para fixar o conceito calculando também sua variância amostral.

   Exemplo 1: $X \sim U((0, \theta)$

$$E_\theta(X) = \frac{\theta}{2} \quad ; \; V(X) = \frac{\theta^2}{12}.$$

   Assim,

$$E_\theta(X) = \frac{\theta}{2} = \bar{X}.$$

   O valor de θ é:

$$\theta = 2\bar{X}.$$

   Assim o estimador pelo método dos momentos de θ é dado por:

$$\widehat{\theta} = T_1 = 2\bar{X}.$$

   Note que:

$$E(\bar{X}) = \mu = \frac{\theta}{2}.$$

   Assim

$$E(T_1) = E(2\bar{X}) = 2\ E(\bar{X}) = 2\ \frac{\theta}{2} = \theta,$$

   T_1 é um estimador não viciado de θ.

   Note que:

$$Var(\bar{X}) = \frac{\frac{\theta^2}{12}}{n} = \frac{\theta^2}{12n}.$$

Assim

$$Var(T_1) = Var(2\bar{X}) = 4\; Var(\bar{X}) = 4\;\frac{\theta^2}{12n} = \frac{\theta^2}{3n}.$$

Exemplo 2: $X \sim U_d(A), \;\; A = \{1, 2, \ldots, \theta\}$
O espaço paramétrico é dado por:

$$\Theta = \{1, 2, \ldots\}.$$

Sabemos que:

$$E_\theta(X) = \frac{1+\theta}{2} \quad ; \; V(X) = \frac{\theta^2 - 1}{12}.$$

Assim,

$$E_\theta(X) = \frac{1+\theta}{2} = \bar{X}.$$

O valor de θ é:

$$\theta = 2\bar{X} - 1.$$

Assim o estimador pelo método dos momentos de θ é dado por:

$$\widehat{\theta} = T_2 = 2\bar{X} - 1.$$

Note que:

$$E(\bar{X}) = \mu = \frac{1+\theta}{2}.$$

Assim

$$E(T_2) = E(2\bar{X} - 1) = 2\; E(\bar{X}) - 1 = 2\;\frac{1+\theta}{2} - 1 = \theta,$$

T_2 é um estimador não viciado de θ.
Note que:

$$Var(\bar{X}) = \frac{\frac{\theta^2-1}{12}}{n} = \frac{\theta^2 - 1}{12n}.$$

Assim

$$Var(T_2) = Var(2\bar{X} - 1) = 4\; Var(\bar{X}) = 4\;\frac{\theta^2 - 1}{12n} = \frac{\theta^2 - 1}{3n}.$$

Exemplo 3: $X \sim Normal(\mu, 9)$.
Sabemos que:

$$A = (-\infty, \infty) \;\; ; \;\; \Theta = (-\infty, \infty).$$

Além disso:

$$E_\mu = \mu \;\; ; \;\; V(X) = 9.$$

Logo,

$$E_\mu = \mu = \bar{X}.$$

Assim

$$\widehat{\mu} = T_3 = \bar{X}$$

é o estimador pelo método dos momentos para μ.
Note que

$$E(T_3) = \mu \quad Var(T_3) = \frac{9}{n}.$$

Exemplo 4: $X \sim Exponencial(\lambda)$.
Sabemos que:

$$A = (0, \infty) \;\; ; \;\; \Theta = (0, \infty).$$

Além disso:

$$E_\lambda = \frac{1}{\lambda} \;\; ; \;\; V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

O estimador pelo método dos momentos é dado por:

$$E_\lambda = \frac{1}{\lambda} = \bar{X}.$$

Logo,

$$\widehat{\lambda} = T_4 = \frac{1}{\bar{X}}.$$

Sabemos que

$$S \sim Gama(n, \lambda).$$

Note que:

$$M_S(t) = \left[\frac{\lambda}{\lambda - t}\right]^n, \; t < \lambda.$$

A função geradora de momentos de $\bar{X}$ é dada por:

$$M_{\bar{X}}(t) = M_S(t/n) = \left[\frac{\lambda}{\lambda - t/n}\right]^n, \ t/n < \lambda.$$

$$M_{\bar{X}}(t) = \left[\frac{n\lambda}{n\lambda - t}\right]^n, \ t < n\lambda.$$

Assim

$$V = \bar{X} \sim Gama(n, n\lambda).$$

A densidade de V é dada por:

$$f_V(v) = \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} v^{n-1} \, e^{-n\lambda v} \ \ I_A(v), \ A = (0, \infty).$$

Note que:

$$T_4 = \frac{1}{\bar{X}} = \frac{1}{V}.$$

Logo

$$E(T_4) = \int_0^\infty \frac{1}{v} \, \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} v^{n-1} \, e^{-n\lambda v} \, dv$$

$$E(T_4) = \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty v^{(n-1)-1} \, e^{-n\lambda v} \, dv.$$

$$E(T_4) = \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} \, IGG(a = n-1, b = n\lambda, c = 1),$$

com $a = n - 1 > 0$ ou $n > 1$.

$$E(T_4) = \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} \, \frac{\Gamma(n-1)}{(n\lambda)^{n-1}} = \frac{n\lambda}{n-1} = \frac{n}{n-1} \, \lambda \neq \lambda$$

Logo T_4 é um estimador viciado de λ. Mas ele é assintoticamente não viciado para λ.
Vamos calcular a variância de T_4:

$$E(T_4^2) = \int_0^\infty \frac{1}{v^2} \, \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} v^{n-1} \, e^{-n\lambda v} \, dv$$

$$E(T_4^2) = \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty v^{(n-2)-1} \, e^{-n\lambda v} \, dv.$$

$$E(T_4^2) = \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} \, IGG(a = n-2, b = n\lambda, c = 1),$$

com $a = n - 2 > 0$ ou $n > 2$.

$$E(T_4^2) = \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} \, \frac{\Gamma(n-2)}{(n\lambda)^{n-2}} = \frac{n^2\lambda^2}{(n-1)(n-2)} = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} \, \lambda^2$$

A variância de T_4 é dada por:

$$Var(T_4) = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}\,\lambda^2 - \frac{n^2}{(n-1)^2}\,\lambda^2$$

$$Var(T_4) = \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\,\lambda^2$$

Note que

$$\lim_{n\to\infty} V(T_4) = 0,$$

assim T_4 é um estimador consistente para λ.

O próximo exemplo mostrará uma situação distinta das anteriores.

Exemplo 5: $Y_i \sim Normal\left(\mu_i = \beta X_i, \sigma^2\right), i = 1, 2, \ldots, n,$ independentes, com $X_i, i = 1, 2, \ldots, n$ constantes conhecidas.

Note que:

$$E(Y_i) = \beta X_i, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Quando as variáveis não são identicamente distribuídas precisamos de uma definição alternativa para o estimador pelo método dos momentos:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} E(Y_i)}{n} = \bar{Y}.$$

Logo

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \beta X_i}{n} = \bar{Y}.$$

$$\beta\ \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \bar{Y}.$$

$$\beta\bar{X} = \bar{Y}.$$

$$\widehat{\beta} = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} = \frac{1}{n\bar{X}}\ \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

O estimador pelo método dos momentos é uma combinação linear de $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$.

Vamos mostrar que ele é não viciado.

$$E\left(\widehat{\beta}\right) = \frac{1}{n\bar{X}} \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = \frac{1}{n\bar{X}} \sum_{i=1}^{n} \beta X_i.$$

$$E\left(\widehat{\beta}\right) = \beta \frac{1}{n\bar{X}} \sum_{i=1}^{n} X_i = \beta.$$

Vamos calcular agora a variância:

$$Var\left(\widehat{\beta}\right) = \frac{1}{n^2 \bar{X}^2} \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) = \frac{1}{n^2 \bar{X}^2} n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n \bar{X}^2}.$$

Exemplo 6 Seja $X \sim N(0, \sigma^2)$. Qual o estimador T pelo Método dos momentos para σ^2?
Note que:

$$E(X) = 0 \quad E(X^2) = \sigma^2.$$

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}.$$

Note que:

$$E(T) = \sigma^2.$$

$$Var(T) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V(X_i^2) = \frac{nV(X^2)}{n^2} = \frac{V(X^2)}{n}.$$

Mas

$$Var(X^2) = E(X^4) - E^2(X^2).$$

Sabemos que

$$Z^4 = \left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right]^4 = \frac{X^4}{\sigma^4}.$$

A curtose da normal vale 3 logo:

$$E(Z^4) = 3.$$

$$E(X^4) = 3\sigma^4.$$

$$V(X^2) = 3\sigma^4 - \sigma^4 = 2\sigma^4.$$

Logo,

$$Var(T) = \frac{2\sigma^4}{n}.$$

Agora vamos estudar o caso biparamétrico:

2. Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Calcule os estimadores pelo método dos momentos para μ e σ^2.

   Como

$$E(X) = \mu \quad e \quad E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2.$$

   Assim vamos igualar os dois primeiros momentos populacionais aos dois primeiros momentos amostrais:

$$E(X) = \mu = \bar{X}.$$

$$\widehat{\mu} = \bar{X}.$$

$$E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}.$$

   Logo,

$$\widehat{\sigma^2} + \hat{\mu^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}.$$

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - \bar{X}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\,\bar{X}^2}{n}$$

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n} = \frac{(n-1)S^2}{n}.$$

   Note que

$$E\left(\widehat{\sigma^2}\right) = \frac{n-1}{n} E(S^2) = \frac{n-1}{n}\,\sigma^2,$$

   que é viciado mas assintoticamente não viciado.

   Por outro lado temos:

$$Var\left(\widehat{\sigma^2}\right) = \frac{(n-1)^2}{n^2} Var(S^2) = \frac{(n-1)^2}{n^2}\,\frac{2\sigma^4}{n-1} = \frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4.$$

Note que $\widehat{\sigma^2}$ é um estimador consistente para σ^2.

Exemplo 7: Seja $X \sim Gama(\alpha > 0, \beta > 0)$. A f.d.p. de X é dada por:

$$f(x|\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}\, e^{-\beta\, x}\, I_A(x), \quad A = (0,\infty).$$

Note que

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta} \quad , V(X) = \frac{\alpha}{\beta^2} \qquad ;\ E(X^2) = \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\alpha^2}{\beta^2}.$$

Sejam $\widehat{\alpha}$ e $\widehat{\beta}$ os estimadores pelo método dos momentos:
Assim

$$\frac{\widehat{\alpha}}{\widehat{\beta}} = \bar{X}$$

Assim,

$$\widehat{\alpha} = \bar{X}\,\widehat{\beta}.$$

$$\frac{\widehat{\alpha}}{\widehat{\beta}^2} + \frac{\widehat{\alpha}^2}{\widehat{\beta}^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

Note que:

$$\frac{\hat{\alpha}}{\widehat{\beta}}\,\frac{1}{\widehat{\beta}} + \frac{\hat{\alpha}^2}{\hat{\beta}^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

$$\bar{X}\,\frac{1}{\widehat{\beta}} + \bar{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

$$\bar{X}\,\frac{1}{\hat{\beta}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2}{n} = \hat{\sigma^2}$$

logo,

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{X}}{\hat{\sigma^2}}.$$

$$\hat{\alpha} = \bar{X}\,\widehat{\beta} = \frac{\bar{X}^2}{\widehat{\sigma^2}}.$$

Uma maneira mais rápida de achar este estimadores é notar que:

$$\frac{E(X)}{V(X)} = \beta$$

logo

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{X}}{\widehat{\sigma^2}}.$$

Note que podemos usar tantos os momentos em relação à origem como os centrais.