2.09. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição da variável aleatória $X \sim N(\mu, 1)$

i. Mostre que $\widehat{\gamma} = \bar{X}^2 - \frac{1}{n}$ é não viciado para $g(\mu) = \mu^2$.

ii. Existe **ENVVUM** para $g(\mu) = \mu^2$?

iii. Encontre o limite inferior da variância dos estimadores não viciados de $g(\mu) = \mu^2$ e verifique se $\widehat{\gamma}$ é eficiente.

Solução:

Sabemos que

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{1}{n}\right).$$

$$E(\bar{X}^2) = Var(\bar{X}) + \mu^2 = \frac{1}{n} + \mu^2.$$

$$E\left(\bar{X}^2 - \frac{1}{n}\right) = E\left(\widehat{\gamma}\right) = \mu^2$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Normal(n\mu, n)$$

é suficiente e completa para μ

Devemos procurar $h(S)$ de sorte que

$$E[h(S)] = \mu^2.$$

Note que:

$$\widehat{\gamma} = \bar{X}^2 - \frac{1}{n} = \frac{S^2}{n^2} - \frac{1}{n} = h(S)$$

é o nosso **ENVVUM** procurado.

Vamos calcular a informação de Fisher para μ:

O suporte $A = (-\infty, \infty)$ independe de μ.

$$f(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$$

$$f(x, \mu) = (2\pi)^{-1/2} \; e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$$

Note que:

$$\log\left(f(X; \mu)\right) = -\frac{1}{2} \; \log(2\pi) - \frac{(X-\mu)^2}{2}$$

$$\log\left(\left(f(X; \mu)\right)\right) = -\frac{1}{2} \; \log(2\pi) - \frac{(X-\mu)^2}{2}.$$

$$V = \frac{\partial \log f(X;\mu)}{\partial \mu} = -\frac{-2(X-\mu)}{2} = X - \mu.$$

Note que:

$$E(V) = \frac{E(X) - \mu}{\sigma^2} = 0.$$

A informação de Fisher é dada por:

$$I_F(\mu) = Var(X - \mu) = Var(X) = 1.$$

Seja T um estimador não viciado de $g(\mu) = \mu^2$. Sabemos que

$$Var(T) \geq \frac{(g'(\mu))^2}{n\, I_F(\mu)} = \frac{4\mu^2}{n}.$$

Vamos calcular a variância de $\widehat{\gamma}$

$$Var(\widehat{\gamma}) = Var(\bar{X}^2 - \frac{1}{n}) = Var(\bar{X}^2) = E(\bar{X}^4) - E^2(\bar{X}^2).$$

Se $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, então

a. $E(X) = \mu$.
b. $E(X^2) = \mu^2 + \sigma^2$.
c. $E(X^3) = \mu^3 + 3\mu\,\sigma^2$.
d. $E(X^4) = \mu^4 + 6\mu^2\,\sigma^2 + 3\sigma^4$.

Note que

$$\bar{X} \sim N(\mu, 1/n)$$

$$E(\bar{X}^4) = \mu^4 + \frac{6\mu^2}{n} + \frac{3}{n^2}$$

$$E^2(\bar{X}^2) = \left[\mu^2 + \frac{1}{n}\right]^2 = \mu^4 + \frac{2\mu^2}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

$$Var(\widehat{\gamma}) = Var(\bar{X}^2) = \frac{4\mu^2}{n} + \frac{2}{n^2} > \frac{4\mu^2}{n} = LICR.$$

Assim o estimador não é eficiente pois supera o limite inferior de Cramer-Rao.