3.1. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória X, com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{x^2}\ x \geq \theta; \quad \theta > 0$$

Encontre o estimador de máxima verossimilhança de θ e de

$$E_\theta\left[\frac{1}{X}\right].$$

Solução:

Vamos escrever a f.d.p. usando indicadores:

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{x^2}\ I_A(x) \ \ A = [\theta, \infty).$$

Vamos calcular

$$E_\theta\left[\frac{1}{X}\right] = \int_\theta^\infty \ \frac{\theta}{x^3}\ dx = -\frac{\theta}{2}\frac{1}{x^2}\ \frac{\theta}{2}\frac{1}{x^2}\ \Big|_\theta^\infty = \frac{1}{2\theta} = \frac{1}{2\theta} = g(\theta).$$

A função de verossimilhança é dada por:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{\theta}{x_i^2}\ \ I_A(x_i)$$

$$L(\theta) = \theta^n\ \left[\prod_{i=1}^n x_i\right]^{-2} \prod_{i=1}^n\ I_A(x_i)$$

Mas

$$I_A(x_i) = 1, ß = 1, 2, \ldots, n.$$

$$\theta \leq x_1; \theta \leq x_2, \ldots, \theta \leq x_n$$

ou

$$\theta \leq min(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_1.$$

Assim

$$L(\theta) = \theta^n\ \left[\prod_{i=1}^n x_i\right]^{-2}\ I_{[0,y_1]}(\theta).$$

Note que $L(\theta)$ é um função estritamente crescente de θ, Seu máximo ocorre no limite superior do domínio.

Assim

$$\hat{\theta}_{MV} = min(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n).$$

Para responder a outra pergunta vamos utilizar a propriedade da invariância , isto é,

$$T_1 = \widehat{g(\theta)} = g\left(\hat{\theta}\right)$$

Como

$$g(\theta) = \frac{1}{2\theta}.$$

Assim

$$T_1 = \frac{1}{2\,Y_1}.$$