Q04. Seja X uma única observação da densidade

$$f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1}\, I_A(x),\ A = (0,1), \theta > 0.$$

i Mostre que $V = -\theta \log(X)$ é uma quantidade pivotal e use-a para construir um intervalo de confiança para θ coeficiente de confiança $\gamma = 1 - \alpha$.

ii. Seja

$$Y = (-\log(X))^{-1} = \frac{1}{\log(X)}.$$

Encontre o coeficiente de confiança associado ao intervalo:

$$(Y/2; Y).$$

Solução:

Seja G a acumulada de V.

Note que

$$0 < x < 1$$

$$-\infty < lnx < 0$$

multiplicando por $-\theta$ temos:

$$0 < -\theta lnx < \infty$$

$$0 < v < \infty.$$

A acumulada de V para $v > 0$ é dada por:

$$G_V(v) = P(V \leq v) = P(-\theta\ log(X) \leq v)$$

$$G_V(v) = P\left(log(X) \geq -\frac{v}{\theta}\right)$$

$$G_V(v) = P\left(X \geq e^{-v/\theta}\right) = 1 - F\left(e^{-v/\theta}\right)$$

Derivando em relação a θ temos:

$$g_V(v) = \frac{1}{\theta}\, e^{-v/\theta}\ f\left(e^{-v/\theta}\right)$$

$$g_V(v) = \frac{1}{\theta}\, e^{-v/\theta}\ \theta\ \left[e^{-v/\theta}\right]^{\theta-1} = e^{-v}$$

Logo

$$V = -\theta log(X) \sim Exp(1),$$

provando assim que é uma quantidade pivotal.

$$P\left(v_1 \leq V \leq v_2\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(v_1 \leq -\theta log(X) \leq v_2\right) = 1 - \alpha$$

note que

$$-log(X) > 0$$

Logo,

$$P\left(\frac{v_1}{-log(X)} \leq \theta \leq \frac{v_2}{-log(X)}\right) = 1 - \alpha$$

$$IC(\theta) = \left[\frac{v_1}{-log(X)}; \frac{v_2}{-log(X)}\right].$$

Como achar v_1 e v_2?
Suponha que

$$G(v_1) = p_1; \;\; G_Q(v_2) = 1 - p_2; \quad p_1 + p_2 = \alpha.$$

Sabemos que para $v > 0$ temos:

$$G(v) = 1 - e^{-v}$$

Logo

$$1 - e^{-v_1} = p_1$$

$$e^{-v_1} = 1 - p_1 \quad ; v_1 = -\log(1 - p_1)$$

$$1 - e^{-v_2} = 1 - p_2$$

$$e^{-v_2} = p_2 \quad ; v_2 = -\log(p_2).$$

Existem várias maneiras de escolher p_1 e p_2. A mais comum é tomar:

$$p_1 = p_2 = \frac{\alpha}{2}.$$

Vamos resolver o item **ii**:

$$P\left(\frac{Y}{2} \leq \theta \leq Y\right) = 1 - \alpha$$

Note que $Y > 0$:

$$P\left(\frac{1}{2} \leq \frac{\theta}{Y} \leq 1\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{1}{2} \leq -\theta \log(X) \leq 1\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{1}{2} \leq V \leq 1\right) = 1 - \alpha$$

$$S_V(1/2) - S_V(1) = e^{-1/2} - e^{-1} = 0,2387.$$

```
> gama=exp(-1/2)-exp(-1);gama
[1] 0.2386512
> ###utilizando a distribuição exponencial:
> pexp(1,1)-pexp(0.5,1)
[1] 0.2386512
>
```