2.11. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição da variável aleatória X com distribuição Geométrica de parâmetro θ, isto é, Obtenha o **ENVVUM** para $g(\theta) = \frac{1}{\theta}$.

$$f(x|\theta) = \theta(1-\theta)^x \, I_A(x), \; A = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Solução:

Vamos mostrar que a família Geométrica pertence à família exponencial.

Temos que $A = \{0, 1, 2, \ldots\}$ não depende de θ. Assim

$$\log\left[f(x|\theta)\right] = \log(\theta) + x \; \log(1-\theta) = \log(1-\theta) \times x + \log(\theta) + 0.$$

$$c(\theta) = \log(1-\theta) \quad t(x) = x \quad d(\theta) = \log(\theta) \quad b(x) = 0.$$

Temos que

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Pascal(n, \theta)$$

é suficiente e completa para θ

Devemos procurar $h(S)$ de sorte que

$$E[h(S)] = \frac{1}{\theta}.$$

Já sabemos que

$$E(S) = n \, \frac{1-\theta}{\theta}.$$

$$E\left[\frac{S}{n}\right] = \frac{1-\theta}{\theta} = \frac{1}{\theta} - 1$$

$$E\left[\frac{S}{n} + 1\right] = \frac{1}{\theta}.$$

Assim

$$h(S) = \frac{S}{n} + 1 = \frac{S+n}{n}.$$

Agora obtenha o **ENVVUM** para $g(\theta) = \theta$.

A f.p. de S é dada por:

$$P(S = s) = \binom{n-s+1}{n-1} \theta^n (1-\theta)^s \, I_A(s), A = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Do fato que

$$\sum_{s=0}^{\infty} P(S = s) = 1$$

temos:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \binom{n-s+1}{n-1} (1-\theta)^s = \frac{1}{\theta^n}.$$

Assim vamos achar:

$$E(h(S)) = \theta.$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} h(s) \binom{n-s+1}{n-1} \theta^n \, (1-\theta)^s = \theta$$

Logo

$$\sum_{s=0}^{\infty} h(s) \binom{n-s+1}{n-1} \; (1-\theta)^s = \frac{1}{\theta^{n-1}}$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} h(s) \binom{n-s+1}{n-1} \; (1-\theta)^s = \sum_{s=0}^{\infty} \; \binom{n-1-s+1}{n-1-1} \; (1-\theta)^s = \sum_{s=0}^{\infty} \; \binom{n-s}{n-2} \; (1-\theta)^s.$$

Logo

$$h(s) \binom{n-s+1}{n-1} = \binom{n-s}{n-2}$$

$$h(s) \; \frac{(n-s+1)!}{(n-1)!(s-2)!} = \frac{(n-s)!}{(n-2)!(s-2)!}$$

$$h(s) \; \frac{(n-s+1)(n-s)!}{(n-1)(n-2)!} = \frac{(n-s)!}{(n-2)!}$$

$$h(s) \; \frac{(n-s+1)}{(n-1)} = 1.$$

$$h(s) = \frac{n-1}{n-s+1}.$$

Logo

$$h(S) = \frac{n-1}{n-S+1}.$$