Universidade Federal do Ceará
Centro de Ciências
Departamento de Estatística e Matemática Aplicada
{Coordenação do Curso de Estatística } Professor: Maurício Mota
Lista - Função Escore-Informação de Fisher- CC0288-Inferência I - 30/03/2023

1. **Seja X uma variável aleatória com função de probabilidade ou função densidade de probabilidade $f(x \mid \theta)$ e suporte $A = \{x \in \mathbf{R} \mid f(x \mid \theta) > 0\}$ que não depende de θ. A notação log significa logaritmo neperiano.**

   A quantidade
   $$V = \frac{\partial log f(X|\theta)}{\partial \theta},$$
   é uma variável aleatória chamada função escore. Pode-se mostrar que
   $$E(V) = 0 \ \text{ e } \ Var(V) = I_F(\theta).$$

   A quantidade
   $$I_F(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial log f(X|\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right] = E(V^2),$$
   é chamada de Informação de Fisher.

   Seja a variável aleatória
   $$W = \frac{\partial^2 log f(X|\theta)}{\partial \theta^2},$$
   um resultado importante que ajuda no cálculo de $I_F(\theta)$ pois:
   $$I_F(\theta) = E(V^2) = E(-W).$$
   Vamos aplicar essa teoria !!!!!!!A primeira coisa a verificar é se o suporte depende do parâmetro desconhecido. Não esqueça!!!!

2. **Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ em que σ^2 é conhecido. Mostre que:**

   a. $log[f(X \mid \mu)] = -\frac{1}{2}log(2\pi) - \frac{1}{2}log(\sigma^2) - \frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}$.

   b. $V = \dfrac{\partial log f(X|\mu)}{\partial \mu} = \dfrac{X-\mu}{\sigma^2}$.

c. $E(V) = 0$ **e** $I_F(\theta) = \dfrac{1}{\sigma^2}$**.**

d. $W = -\dfrac{1}{\sigma^2}$ **e** $I_F(\theta) = E(-W) = \dfrac{1}{\sigma^2}$**.**

3. Seja $X \sim Exp(\theta),\ \theta > 0$**. Mostre que:**

a. $log[f(X \mid \theta)] = log(\theta) - \theta X$**.**

b. $V = \dfrac{\partial log f(X \mid \theta)}{\partial\theta} = \dfrac{1}{\theta} - X = -(X - \dfrac{1}{\theta})$.

c. $E(V) = 0$ **e** $I_F(\theta) = \dfrac{1}{\theta^2}$**.**

d. $W = -\dfrac{1}{\theta^2}$ **e** $I_F(\theta) = E(-W) = \dfrac{1}{\theta^2}$**.**

4. Seja $X \sim Poisson(\theta),\ \theta > 0$**. Mostre que:**

a. $log[f(X \mid \theta)] = -log(X!) + X log(\theta) - \theta$**.**

b. $V = \dfrac{\partial log f(X \mid \theta)}{\partial\theta} = \dfrac{X}{\theta} - 1$.

c. $E(V) = 0$ **e** $I_F(\theta) = \dfrac{1}{\theta}$**.**

d. $W = -\dfrac{1}{\theta}$ **e** $I_F(\theta) = E(-W) = \dfrac{1}{\theta}$**.**

5. Seja $X \sim Beta(\theta, 1),\ \theta > 0$**. Mostre que:**

a. $log[f(X \mid \theta)] = (\theta - 1) ln(X) + log(\theta)$**.**

b. $V = \dfrac{\partial log f(X \mid \theta)}{\partial\theta} = \dfrac{1}{\theta} + log(X)$.

c. $Y = -logX \sim Exp(\theta)$.

d. $E(V) = 0$ **e** $I_F(\theta) = \dfrac{1}{\theta^2}$.

e. $W = -\dfrac{1}{\theta^2}$ **e** $I_F(\theta) = E(-W) = \dfrac{1}{\theta^2}$.

6. Seja $X \sim N(0, \sigma^2)$ **. Mostre que:**

a. $log[f(X \mid \sigma^2)] = -\frac{1}{2}log(2\pi) - \frac{1}{2}log(\sigma^2) - \frac{X^2}{2\sigma^2}$.

b. $V = \dfrac{\partial log f(X|\sigma^2)}{\partial \sigma^2} = \dfrac{-1}{2\sigma^2} + \dfrac{X^2}{2\sigma^4} = \dfrac{Z^2 - 1}{2\sigma^2}$.

c. $Z = \dfrac{X}{\sigma} \sim N(0,1)$ **e** $Z^2 = \dfrac{X^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$.

Portanto $E(X^2) = \sigma^2$ **e** $Var(X) = 2\sigma^4$.

d. $E(V) = 0$ **e** $I_F(\sigma^2) = \dfrac{1}{2\sigma^4}$.

e. $W = \dfrac{1}{2\sigma^4} - \dfrac{X^2}{\sigma^6}$ **e** $I_F(\sigma^2) = E(-W) = \dfrac{1}{2\sigma^4}$.

7. Seja $X \sim Bin(r, \theta),\ 0 < \theta < 1$**,** r **conhecido. Mostre que:**

a. $log[f(X \mid \theta)] = log[\binom{r}{X}] + Xlog(\theta) + (r - X)log(1-\theta)$.**špace0.5cm**

b. $V = \dfrac{\partial log f(X \mid \theta)}{\partial \theta} = \dfrac{X - r\theta}{\theta(1-\theta)}$.

c. $E(V) = 0$ **e** $I_F(\theta) = \dfrac{r}{\theta(1-\theta)}$.

d. $W = -\dfrac{X}{\theta^2} + \dfrac{r - X}{(1-\theta)^2}$ **e** $I_F(\theta) = E(-W) = \dfrac{r}{\theta(1-\theta)}$.

8. **Dizemos que uma variável aleatória tem distribuição $X \sim Gumbel(\theta, 1)$ se sua f.d.p. é da forma:**

$$f(x \mid \theta) = exp\left(-(x-\theta) - e^{-(x-\theta)}\right),$$

em que x e θ são reais. Mostre que:

   a. $log[f(X \mid \theta)] = -(X-\theta) - e^{-(X-\theta)} = \theta - X - e^{-X}e^{\theta}$.

   b. $V = \dfrac{\partial log f(X \mid \theta)}{\partial \theta} = 1 - e^{-X}e^{\theta}.$

   c. $Y = e^{-X} \sim Exp(e^{\theta})$.

   d. $E(V) = 0$ **e** $I_F(\theta) = 1$.

   e. $W = -e^{\theta}e^{-X}$ **e** $I_F(\theta) = E(-W) = 1$.

9. **Seja X uma variável aleatória com distribuição geométrica e suporte $A = \{0, 1, \ldots\}$. Sua f.p. é dada por:**

$$f(x \mid \theta) = \theta(1-\theta)^x I_A(x).$$

   a. $log[f(X \mid \theta)] = log(\theta) + X log(1-\theta))$.

   b. $V = \dfrac{\partial log f(X \mid \theta)}{\partial \theta} = \dfrac{1}{\theta} - \dfrac{X}{1-\theta}.$

   c. $E(V) = 0$ **e** $I_F(\theta) = \dfrac{1}{\theta(1-\theta)}$.

   d. $W = -\dfrac{1}{\theta^2} + \dfrac{X}{(1-\theta)^2}$ **e** $I_F(\theta) = E(-W) = \dfrac{1}{\theta(1-\theta)}$.

10. **Nos exercícios vimos que $E(V) = 0$. Vamos provar? Suponha que X seja uma variável aleatória contínua com densidade $f(x \mid \theta)$ e suporte A que não depende de θ.**

$$E(V) = \int_A \frac{\partial log f(x|\theta)}{\partial \theta} f(x \mid \theta) dx,$$

mas

$$\frac{\partial log f(x|\theta)}{\partial \theta} = \frac{\frac{\partial f(x|\theta)}{\partial \theta}}{f(x \mid \theta)},$$

portanto

$$\frac{\frac{\partial f(x|\theta)}{\partial \theta}}{f(x \mid \theta)} f(x \mid \theta) = \frac{\partial f(x|\theta)}{\partial \theta},$$

Logo,

$$E(V) = \int_A \frac{\partial log f(x|\theta)}{\partial \theta} f(x \mid \theta) dx = \int_A \frac{\partial f(x|\theta)}{\partial \theta} dx = \frac{\partial}{\partial \theta} \int_A f(x|\theta) dx = \frac{\partial}{\partial \theta} 1 = 0,$$

pois como A não depende de θ podemos inverter as ordens de integração e derivação.

11. **Mostre que**

$$I_F(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial log f(X|\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right] = E\left(-\frac{\partial^2 log f(X|\theta)}{\partial \theta^2}\right),$$

no caso em que X é uma v.a.c.

12. **Segundo Heleno e Mônica, uma outra importante propriedade estabelece que para uma amostra aleatória $X_1, X_2, \ldots, X_n$, da variável alatória X com f.d.p. ou f.p. $f(x \mid \theta)$ e informação total de Fisher de θ correspondente à amostra observada é a soma da informação de $Fisher$ das n observações da amostra. Considere a distribuição conjunta da amostra**

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta).$$

Note que

$$log[f(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \theta)] = \sum_{i=1}^{n} log[f(x_i \mid \theta)].$$

Assim

$$E\left[\left(\frac{\partial log f(X_1, X_2, \ldots, X_n|\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right] = -E\left[\frac{\partial^2 log f(X_1, X_2, \ldots, X_n|\theta)}{\partial \theta^2}\right].$$

Mas

$$-E\left[\frac{\partial^2 log f(X_1, X_2, \ldots, X_n|\theta)}{\partial\theta^2}\right] = \sum_{i=1}^{n} E\left[-\frac{\partial^2 log f(X_i|\theta)}{\partial\theta^2}\right] = nI_F(\theta),$$

pois X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ possuem a mesma informação que X.

Seja T um estimador não viciado de θ. A informação da amostra de Fisher nos fornece um limitante inferior para a variância de T. Vamos enunciar agora a Desigualdade da Informação.

Ela nos diz que, sob determinadas condições de regularidade,

$$Var(T) \geq \frac{1}{nI_F(\theta)} = LI(\theta).$$

As condições de regularidade são basicamente duas:

a. **O suporte $A = \{x, f(x \mid \theta) > 0\}$ não depende de θ.**
b. **Ser possível a troca das ordens das operações de derivação e integração sob a distribuição da variável aleatória X.**

Uma outra propriedade nos fala sobre a eficiência de um estimador T não viciado para um parâmetro θ que é definida por:

$$e(T) = \frac{LI(\theta)}{Var(T)}.$$

Se $e(T) = 1$ o estimador T é dito ser eficiente. Nem sempre esse limite inferior é atingido. A Desigualdade da Informação foi inicialmente chamada de desigualdade de Cramer-Rao.

13. **Mostre que $\bar{X}$ é um estimador eficiente de θ quando uma amostra aleatória de tamanho n é retirada de $X \sim Poisson(\theta)$.**

14. **Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória X com com f.d.p. ou f.p. $f(x \mid \theta)$ e informação total de Fisher de θ para a qual as condições de regularidade estão satisfeitas. Seja T um estimador não viciado para $g(\theta)$. Uma versão da desigualdade da Informação nos diz:**

$$Var(T) \geq \frac{[g'(\theta)]^2}{nI_F(\theta)}.$$

Considere $g(\theta) = \theta^2$ para a questão 13. Qual o limite inferior para a variância dos estimadores não viciados de θ^2?

15. **Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim N(\mu, 1)$. Seja $\bar{X}$, a média amostral.**

a. **Mostre que $\bar{X}$ é um estimador não viciado de μ.**

b. **Mostre que $T = \bar{X}^2 - 1/n$ é um estimador não viciado de $g(\mu) = \mu^2$.**

c. **Ache o limite inferior da variância dos estimadores não viciados de μ^2 e verifique se T é eficiente.**

d. **Existe ENVVUM (UMVUE) para μ^2? Que lição isso nos traz?**

16. **Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n > 2$, uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim Exp(\beta)$. Sejam $\bar{X}$, a média amostral, e $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$.**

a. **Mostre que $\bar{X}$ é um estimador não viciado de β.**

b. **Mostre que $S \sim Gama(n, \beta)$ e $\bar{X} \sim Gama(n, n\beta)$.**

c. **Mostre que $Y = 1/S$ tem uma distribuição Gama Inversa. Além disso $E(S) = \dfrac{n-1}{\beta}$ e $Var(S) = \dfrac{\beta^2}{(n-1)^2(n-2)}$**

d. **Mostre que $I_F(\beta) = 1/\beta^2$.**

e. **Ache o limite inferior da variância dos estimadores não viciados de β?**

f. **Ache o limite inferior da variância dos estimadores não viciados de $1/\beta$ e verifique se $\bar{X}$ é eficiente.**

g. **Mostre que $T = \dfrac{n-1}{S}$ é um estimador não viciado de β e que $Var(T) = \dfrac{\beta^2}{(n-2)}$**

h. **Existe ENVVUM (UMVUE) para β? Que lição isso nos traz?**

17. **Descubra o que há de errado no seguinte argumento:**

Seja $X \sim Unif[0\ ,\ \theta]$**. Assim**

$$f(X \mid \theta) = \frac{1}{\theta} I_A(x),$$

logo,

$$log[f(X \mid \theta)] = -log(\theta),$$

e

$$\frac{\partial log f(X|\theta)}{\partial \theta} = -\frac{1}{\theta}.$$

Logo

$$I_F(\theta) = \frac{1}{\theta^2}.$$

Seja T **um estimador não viciado de** θ **e pela desigualdade da Informação temos que:**

$$Var(T) \geq 1/I_F(\theta) = \theta^2.$$

Por outro lado $E(X) = \theta/2$ **e** $E(2X) = \theta$**. Logo** $T_1 = 2X$ **é um estimador não viciado de** θ**. Mas**

$$Var(T_1) = 4Var(X) = 4\theta^2/12 = \theta^2/3$$

.

Mas

$$Var(T_1) = \theta^2/3 \geq Var(T) = \theta^2,$$

que implica $1/3 \geq 1$**. Explique o absurdo!!!!**

18. **Seja** $X_1, X_2, \ldots, X_n$ **uma amostra aleatória da variável aleatória** X **com com f.d.p. ou f.p.** $f(x \mid \theta)$ **e informação total de Fisher de** θ **para a qual as condições de regularidade estão satisfeitas. Para responder à pergunta: Existe alguma função de** θ, $g(\theta)$**, para a qual exista um estimador não viciado cuja variância coincida com o limite inferior de Cramer-Rao?**

Para responder vai-se utilizar o seguinte resultado encontrado nas páginas 315 a 320 do livro do Mood, Graybill & Boes.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial log f(X_i|\theta)}{\partial \theta} = K(\theta, n) \left[t(X_1, X_2, \ldots, X_n) - g(\theta) \right].$$

Assim $g(\theta)$ **é a função procurada e** $T = t(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ **é seu estimador com** $Var(T) = LICR.$

Para cada uma das distribuições apresentadas responda : Existe alguma função de θ, $g(\theta)$, para a qual exista um estimador não viciado cuja variância coincida com o limite inferior de Cramer-Rao?

a. $X \sim Geom(\theta)$**,** $A = \{0, 1, 2, \ldots\}$**.**

b. $X \sim Binomial(2, \theta)$**. Se não houver justifique.**

c. $X \sim Gumbel(\theta, 1)$**.**

d. $f(x \mid \theta) = \dfrac{log(\theta)}{\theta - 1}\,\theta^x I_{(0,1)}(x), \;\; \theta > 1.$