

Aplicações de Integral

Volume de Sólidos

Fatiamento e Cascas Cilíndricas

Prof.^º Carlos Galvão¹

¹Campus Avançado em Jandaia do Sul
Universidade Federal do Paraná

Novembro, 2016

This work is licensed under a Creative Commons
“Attribution-ShareAlike 4.0 International” license.



1 Aplicações de Integral

- Rotação em torno de um eixo
- Volume de Sólidos
 - Volume de sólidos por fatiamento
 - Volume de sólido de revolução por fatiamento
 - Volume de sólido de revolução por cascas cilíndricas

Aplicações de Integral

Volume de Sólido

Uma aplicação das integrais de uma variável é o cálculo de volume de um sólido

1 Aplicações de Integral

■ Rotação em torno de um eixo

■ Volume de Sólidos

- Volume de sólidos por fatiamento
- Volume de sólido de revolução por fatiamento
- Volume de sólido de revolução por cascas cilíndricas

Uma área pode ser rotacionada em torno dos eixos, ou em torno de alguma outra reta no gráfico, gerando um sólido.

Em torno do eixo x

Em torno do eixo y

1 Aplicações de Integral

- Rotação em torno de um eixo

■ Volume de Sólidos

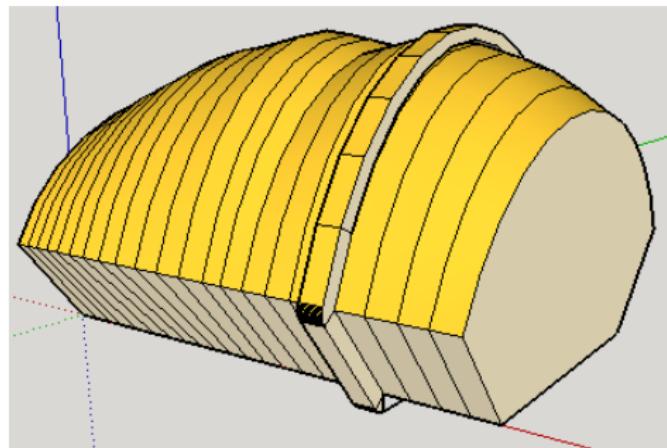
- Volume de sólidos por fatiamento
- Volume de sólido de revolução por fatiamento
- Volume de sólido de revolução por cascas cilíndricas

Volume de Sólido

Fatiamento

A primeira técnica que apresentamos aqui é o “fatiamento”.

Nesta técnica, “fatiamos” um sólido, sabendo que o volume do sólido será a soma do volume de cada fatia.

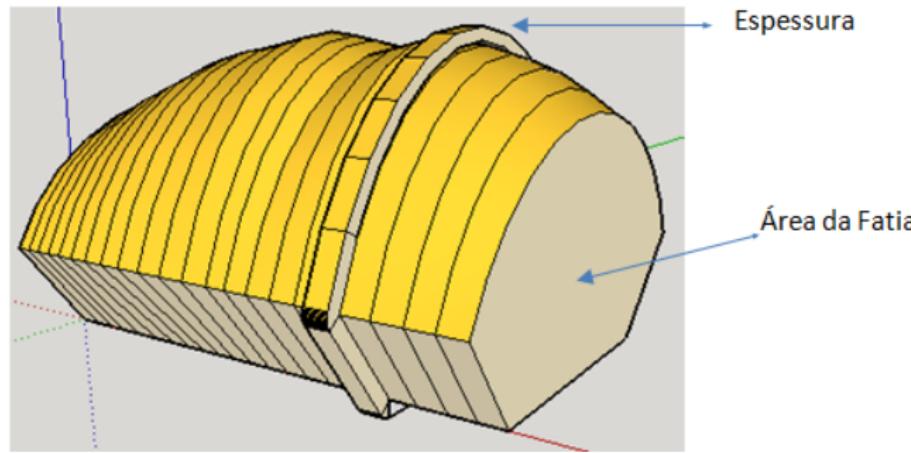


Volume de Sólido

Fatiamento

Nesta técnica, “fatiamos” um sólido, sabendo que o volume do sólido será a soma do volume de cada fatia.

O Volume de cada fatia é aproximadamente a sua espessura vezes a área da fatia



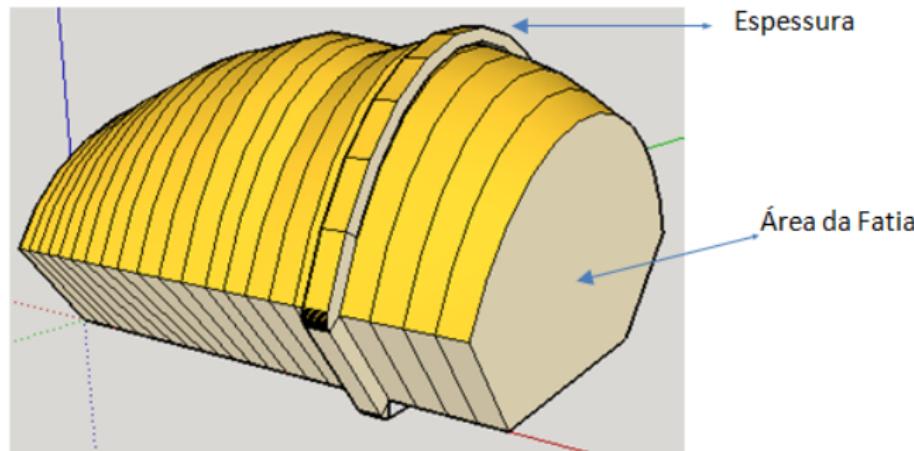
Volume de Sólido

Fatiamento

Sendo $A(x)$ uma função que calcule a área da face, e Δx a espessura da fatia, temos o volume da fatia dado por $V_i = A(x)\Delta x$.

Assim, o volume do sólido todo será a soma dos volumes das n fatias

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n A(x)\Delta x$$



Volume de Sólido

Fatamento

Considerando que, no gráfico, a primeira fatia começa em **a** e a última termina em **b** e fazendo o número de fatias crescer ($n \rightarrow \infty$), a espessura das fatias tende a 0 ($\Delta x \rightarrow dx$) e

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n V_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x) \Delta x = \int_a^b A(x) dx$$

Assim, calculando uma integral, conseguimos obter o volume do sólido.

Volume de Sólido

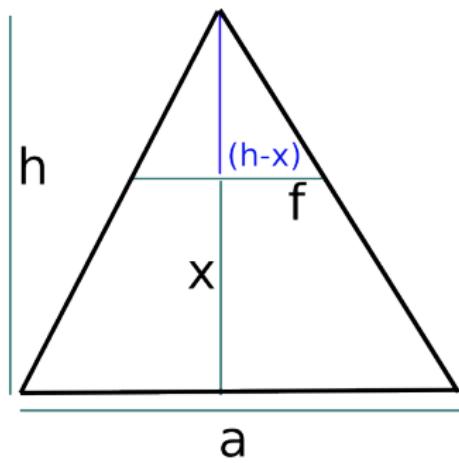
Fatiamento - Exemplo

Exemplo: Mostrar a fórmula de cálculo de volume de uma pirâmide de base quadrada, com aresta da base a .

Volume de Sólido

Fatiamento - Exemplo

A fórmula da área do quadrado é a^2 . O tamanho das arestas diminui de forma linear. Para $x = 0$, a aresta é a e a área a^2 . Para $x = h$ temos o vértice, ou seja área 0. Precisamos da relação entre a posição da fatia e sua aresta.



Sendo f a aresta da fatia em uma certa altura, temos que

$$\frac{h}{a} = \frac{h-x}{f}$$

Assim, $f = \frac{a(h-x)}{h}$ e a área da fatia que está na altura x será

$$A(x) = \left(\frac{a(h-x)}{h} \right)^2$$

Volume de Sólido

Fatiamento - Exemplo

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h A(x) dx = \int_0^h \left(\frac{a(h-x)}{h} \right)^2 dx = \frac{a^2}{h^2} \int_0^h (x-h)^2 dx \\ &= \frac{a^2}{h^2} \int_0^h x^2 - 2hx + h^2 dx = \frac{a^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} - 2h \frac{x^2}{2} + h^2 x \right]_0^h \\ &= \frac{a^2}{h^2} \left(\frac{h^3}{3} - 2h \frac{h^2}{2} + h^2 h \right) = \frac{a^2}{h^2} \cdot h^3 \left(\frac{1}{3} - 1 + 1 \right) = \frac{a^2 h}{3} \end{aligned}$$

Volume de sólido de revolução

Fatiamento

As fatias de um sólido de revolução normalmente são círculos, ou “arruelas” (roscas). Área do Círculo: πr^2 .

Em torno do eixo x

Em torno do eixo y

Volume de sólido de revolução

Fatiamento

Em torno do eixo x , a posição das fatias varia em um intervalo no eixo x .

Se a fatia for um círculo

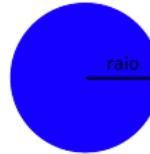
$$V = \int_a^b \pi (\text{raio})^2 dx$$

sendo o raio uma função de x .

Se a fatia for uma rosca

$$V = \int_a^b \pi [(r. \text{ maior})^2 - (r. \text{ menor})^2] dx$$

sendo os raios funções de x .



Em torno do eixo y , a posição das fatias varia em um intervalo no eixo y .

Se a fatia for um círculo

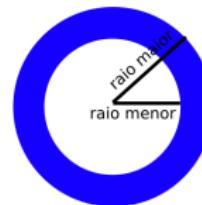
$$V = \int_a^b \pi (\text{raio})^2 dy$$

sendo o raio uma função de y .

Se a fatia for uma rosca

$$V = \int_a^b \pi [(r. \text{ maior})^2 - (r. \text{ menor})^2] dy$$

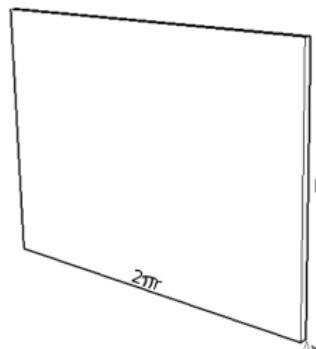
sendo os raios funções de y .



Volume de sólido de revolução

Cascas Cilíndricas

Outra forma de se calcular volumes de sólidos de revolução é através do método das cascas cilíndricas



Formação da casca

Planificação da casca

O volume do sólido é a soma dos volumes das cascas. Cada casca pode ser planificada

Comprimento da casca: $2\pi r$, sendo r raio da casca.

Altura: h , normalmente dada como função

Espessura: Δx , que tende a dx quando o número de fatia tende ao infinito.

Volume de sólido de revolução

Cascas Cilíndricas

Temos então uma forma para cálculo de volume:

$$V_i = 2\pi(\text{raio da casca}) \cdot (\text{altura da casca}) \cdot \Delta x \quad \text{e} \quad V = \sum_{i=1}^n V_i$$

Semelhante ao fatiamento, teremos uma integral que pode ser expressa genericamente como

$$V = \int_a^b 2\pi(\text{raio da casca}) \cdot (\text{altura da casca}) d(\text{"variável"})$$

O raio da casca é a distância entre a casca calculada e o eixo de rotação. O intervalo de integração $[a, b]$ é dado pela variação deste raio, sendo **a** o menor raio possível e **b** o maior raio.

A altura da casca muitas vezes tem relação com a função que originou o sólido, mas nem sempre é a própria função.

A "variável" depende do eixo/reta no qual foi feita a rotação.

Volume de sólido de revolução

Cascas Cilíndricas

Em torno do eixo y

Em torno do eixo x

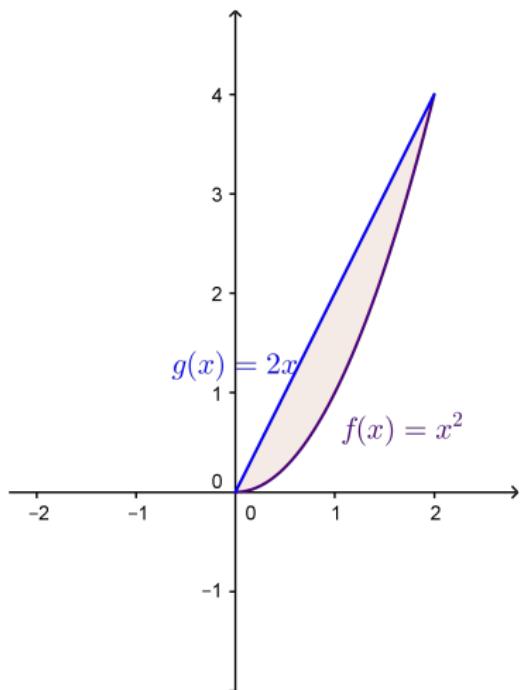
$$V = \int_a^b 2\pi \cdot r(x) \cdot (\text{altura da casca}) dx$$

$$V = \int_a^b 2\pi \cdot r(y) \cdot (\text{altura da casca}) dy$$

Volume de sólido de revolução

Cascas Cilíndricas - Exemplo

Calcular o volume do sólido gerado pela rotação da diferença entre as funções $g(x) = 2x$ e $f(x) = x^2$ em torno do eixo y pelo método de Cascas Cilíndricas.



Volume de sólido de revolução

Cascas Cilíndricas - Exemplo

Precisamos achar os pontos de interseção das funções para obter o intervalo.

$$2x = x^2 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0$$

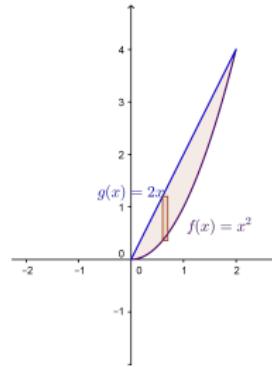
$$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x - 2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$$

Este será o intervalo de variação do raio da casca e, por isso, o intervalo de integração

Volume de sólido de revolução

Cascas Cilíndricas - Exemplo

A altura da função deve ser analisada pelo gráfico (esboço).



Para o caso em questão, a altura da casca será $g(x) - f(x)$

Volume de sólido de revolução

Cascas Cilíndricas - Exemplo

Para este caso o raio da casca será o próprio x , por ser uma rotação em torno de y com a figura começando em 0, à direita do eixo. Para cada caso é preciso analisar (desenhar uma casca) para compreender o tamanho do raio.

Volume de sólido de revolução

Cascas Cilíndricas - Exemplo

$$\begin{aligned}V &= \int_0^2 2\pi \cdot x \cdot (g(x) - f(x)) dx = 2\pi \int_0^2 x \cdot (2x - x^2) dx \\&= 2\pi \int_0^2 2x^2 - x^3 dx = 2\pi \cdot \left[2\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 2\pi \left(2\frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{4} \right) \\&= 2\pi \left(\frac{16}{3} - 4 \right) = \frac{8\pi}{3}\end{aligned}$$