01. Para decidirmos se os habitantes de uma ilha são descendentes da civilização A ou B, iremos proceder do seguinte modo:

(i) selecionamos uma amostra de 100 moradores adultos da ilha, e determinamos a altura média deles;

(ii) se essa altura média for superior a 176, diremos que são descendentes de B; caso contrário, são descendentes de A.

Os parâmetros das alturas das duas civilizações são:
A: $\mu = 175$ e $\sigma = 10$;

B: $\mu = 177$ e $\sigma = 10$.

Definamos: Erro de tipo I : dizer que os habitantes da ilha são descendentes de B quando, na realidade, são de A.

Definamos: Erro de tipo II : dizer que são de A quando, na realidade, são de B.

(a) Qual a probabilidade do erro de tipo I? E do erro de tipo II?

(b) Qual deve ser a regra de decisão se quisermos fixar a probabilidade do erro de tipo I em 5%? Qual a probabilidade do erro do tipo II, nesse caso?

(c) Se $\sigma_A = 5$, como ficariam as respostas de (b)?

(d) Quais as probabilidades do erro de tipo II, nas condições da questão (b), se a média $\mu_B = 178$? E $\mu_B = 180$? E $\mu_B = 181$?

Coloque num gráfico os pares $(\mu_B, P(erroII|\mu_B))$.

Solução:

Vamos testar as seguintes hipóteses:

$$H_0: \quad \text{Os habitantes são descendentes de A.}$$

$$H_1: \quad \text{Os habitantes são descendentes de B.}$$

Ou:

$$H_0 : \mu = 175 \quad versus \quad H_1 : \mu = 177.$$

Vamos responder ao item **a**:

Se H_0 é verdade:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu = 175, \frac{\sigma^2 = 100}{n = 100}\right) = N(175, 1)$$

$$\alpha = P\left(Rejeitar \;\; H_0 \;\; | \, H_0 \; verdade\right) = P(\bar{X} > 176 \mid \mu = 175)$$

$$\alpha = P(Z > 1) = 0,5 - P(0 < Z < 1) = 0,5 - 0,3413 = 0,1587.$$

Se H_1 é verdade:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu = 177, \frac{\sigma^2 = 100}{n = 100}\right) = N(177, 1)$$

$$\beta = P\left(Aceitar \;\; H_0 \;\; | \, H_1 \; verdade\right) = P(\bar{X} < 176 \mid \mu = 177)$$

$$\beta = P(Z < -1) = P(Z > 1) = 0,1587.$$

Vamos responder ao item **b**:
A região de rejeição é da forma:

$$\bar{X} > c$$

$$\alpha = P(\bar{X} > c \mid \mu = 175) = 0,05$$

$$\alpha = P(Z > c - 175) = 0,05 = P(Z > 1,65).$$

$$c - 175 = 1,65.$$

$$c = 176,65.$$

$$\beta = P(\bar{X} \leq 176,65 \mid \mu = 177) = P(Z \leq -0,35) = P(Z > 0,35) = 0,5 - P(0 < Z < 0,35) =$$

$$\beta = 0,5 - 0,13683 = 0,36317.$$

Vamos responder ao item **c**:
Se H_0 é verdade:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu = 175, \frac{\sigma^2 = 25}{n = 100}\right) = N(175; 0,25)$$

$$\alpha = P(\bar{X} > c \mid \mu = 175) = 0,05$$

$$\alpha = P(Z > (c - 175)/0,5 = 0,05 = P(Z > 1,65).$$

$$c - 175 = 0,5 \times 1,65.$$

$$c = 175 + 0,825 = 175,825 = 175,83.$$

Se H_1 é verdade temos:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu = 177, \frac{\sigma^2 = 100}{n = 100}\right) = N(177, 1)$$

$$z_{cal} = \frac{175,83 - 177}{1} = -1,18$$

$$\beta = P(\bar{X} \leq 175,825 \mid \mu = 177) = P(Z \leq -1,185) = P(Z > 1,18) = 0,5 - P(0 < Z < 1,18) = 0,5 - 0,381 =$$

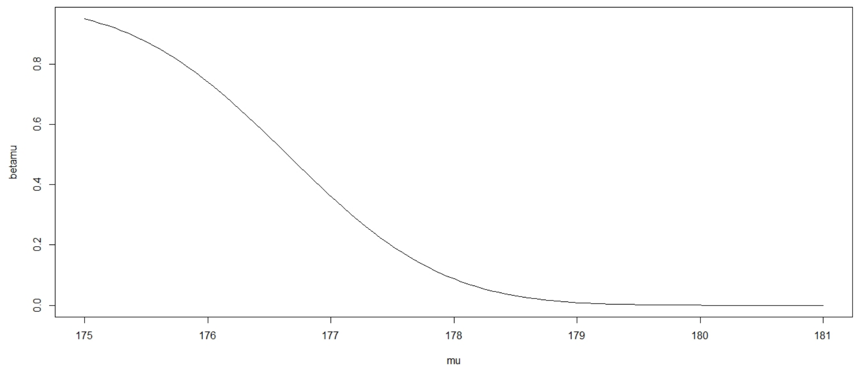

Figura 1:

```
>
> #####Capítulo 12: Questão 01
>
> ##X=altura do habitante da ilha
>
> ##E(X)=mu,  V(X)=100;muA=175;muB=177
>
> n=100;sigma=10;muA=175;muB=177
>
> ##H_0: mu=175(de A)  vs H_1:mu=177( de B)
>
> ##Rejeitar H_0 se XB >176
>
> c=176
> ##Se H_0 é verdade  XB~N(175,100/100)=N(175,1)
> epm=sigma/sqrt(n);epm
[1] 1
> z_cal=(176-175)/epm;z_cal
[1] 1
>
```

```
>
> ####Calcular o tamanho do erro do tipo I
>
> alfa=pnorm(z_cal,lower.tail=F);alfa;round(alfa,4)
[1] 0.1586553
[1] 0.1587
>
> ####Calcular o tamanho do erro do tipo II
>
>
>
> c=176
> ##Se H_1 é verdade  XB~N(177,100/100)=N(175,1)
> epm=sigma/sqrt(n);epm
[1] 1
> z_cal=(176-177)/epm;z_cal
[1] -1
>
> beta=pnorm(z_cal);beta;round(beta,4)
[1] 0.1586553
[1] 0.1587
>
> #####item b
>
> ###Se Xb >c rejeitar H_0
>
> ##Se H_0 é verdade:
>
>
> ###P(Xb>c)=P(Z >ztab)=0,05
>
> z_tab=qnorm(1-alfa);z_tab;round(z_tab,3)
[1] 1
[1] 1
>
> z_tab=1.645
>
> ###Padronizando c  temos:
>
> ##(c-175)/1=1,645
>
> c=175+1.645;c
[1] 176.645
>
> z_cal=(176.645-177)/1;z_cal
[1] -0.355
> beta=pnorm(z_cal);beta;round(beta,4)
[1] 0.3612948
[1] 0.3613
>
>
> ####Item c
```

```
>
>
> sigmaA=5
> epm_A=sigmaA/sqrt(n);epm_A
[1] 0.5
>
> ###Vamos determinar $c$
>
>
> ##P(Xb>c)=P(Z >ztab)=0,05
>
> ## (c-175)/0,5=1,645
>
> c=175+1.645/2;c
[1] 175.8225
>
> z_cal=(175.825-177)/0.5;z_cal
[1] -2.35
>
> beta=pnorm(z_cal);beta;round(beta,4)
[1] 0.009386706
[1] 0.0094
>
>
>
> #### item d:
>
>
>
> c=176.645
> ####Aceitar H_0 se Xb <=176,645)
>
> mu1_B=178
> z_cal=(c-mu1_B)/1;z_cal
[1] -1.355
> beta1=pnorm(z_cal);beta1;round(beta1,4)
[1] 0.08770878
[1] 0.0877
>
>
> mu2_B=180
> z_cal=(c-mu2_B)/1;z_cal
[1] -3.355
> beta2=pnorm(z_cal);beta2;round(beta2,4)
[1] 0.0003968249
[1] 4e-04
>
>
>
>
> mu3_B=181
> z_cal=(c-mu3_B)/1;z_cal
```

```
[1] -4.355
> beta3=pnorm(z_cal);beta3;round(beta3,4)
[1] 6.653346e-06
[1] 0
>
>
>
>
>
> betamu=function(mu) pnorm(176.645,mu,1)
>
> betamu(175)######1-alfa
[1] 0.9500151
>
> betamu(178);beta1
[1] 0.08770878
[1] 0.08770878
>
> betamu(180);beta2
[1] 0.0003968249
[1] 0.0003968249
>
> betamu(181);beta3
[1] 6.653346e-06
[1] 6.653346e-06
>
> ####Vamos esboçar o gráfico:
>
>
> plot(betamu,175,181,xlab="mu")
>
>
>
```