

2.4. Seja  $X_1, X_2$  uma amostra aleatória da distribuição da variável aleatória  $X \sim \text{Poisson}(\theta)$ ,  $\theta > 0$ .

Mostre que  $T = X_1 + 2X_2$  não é suficiente para  $\theta$ .

**Solução:** Sabemos que

$$P(X = x) = f(x|\theta) = \frac{e^{-\theta} \theta^x}{x!} I_A(x), \quad A = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Vamos supor que  $T$  seja suficiente para  $\theta$ .

Assim

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2 \mid T = t)$$

independe de  $\theta$  para qualquer valor de  $T = t$ .

Para mostrar que não é basta um contra-exemplo.

Suponha que nossa amostra é  $x_1 = 1, x_2 = 1$ . O valor de  $t$  é dado por:

$$t = x_1 + 2x_2 = 1 + 2 = 3.$$

$$P(T = 3) = P(X_1 = 3, X_2 = 0) + P(X_1 = 1, X_2 = 1) = P(X_1 = 3)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)$$

$$P(T = 3) = \frac{e^{-\theta} \theta^3}{3!} \frac{e^{-\theta} \theta^0}{0!} + \frac{e^{-\theta} \theta^1}{1!} \frac{e^{-\theta} \theta^1}{1!}$$

$$P(T = 3) = \frac{e^{-2\theta} \theta^3}{3!} + e^{-2\theta} \theta^2 = e^{-2\theta} \theta^2 \left[ \frac{\theta}{6} + 1 \right]$$

$$P(T = 3) = e^{-2\theta} \theta^2 \left[ \frac{\theta + 6}{6} \right]$$

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1 \mid T = 3) = \frac{P(X_1 = 1, X_2 = 1, T = 3)}{P(T = 3)} = \frac{P(X_1 = 1, X_2 = 1)}{P(T = 3)}$$

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1 \mid T = 3) = \frac{e^{-2\theta} \theta^2}{e^{-2\theta} \theta^2 \left[ \frac{\theta+6}{6} \right]} = \frac{6}{6 + \theta},$$

que obviamente depende de  $\theta$ . Logo  $T = X_1 + 2X_2$  não é suficiente para  $\theta$ .