DERIVADAS PARCIAIS DE ORDENS SUPERIORES

Seja $u = f(x,y): U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais. Então, suas duas derivadas parciais $u_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $u_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ são, também, funções reais nas duas variáveis x e y.

Logo, podemos pensar nas funções derivadas parciais de $u_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, com relação à x e com relação à y, definidas por:

$$u_{xx} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \quad e \quad u_{xy} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x};$$

Bem como, podemos pensar nas funções derivadas parciais de $u_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, com relação à x e com relação à y, definidas por:

$$u_{yx} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}; \quad e \quad u_{yy} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2};$$

Estas quatro derivadas parciais são denominadas <u>derivadas parciais de 2ª ordem</u> da função $u = f(x,y)$.

Vejamos exemplos:

(a) Dada $f(x,y) = xy^2 + x^2y^3 + x^3y^4$, encontre suas derivadas parciais de 2ª ordem:

$$\bullet\ f(x,y) = xy^2 + x^2y^3 + x^3y^4 \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 2xy^3 + 3x^2y^4 \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^3 + 6xy^4; \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2y + 6xy^2 + 12x^2y^3; \end{cases} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 3x^2y^2 + 4x^3y^3 \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y + 6xy^2 + 12x^2y^3; \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x + 6x^2y + 12x^3y^2; \end{cases} \end{cases}$$

(b) Dada $f(x,y) = x\,\text{sen}\,y + y\,\text{sen}\,x + xy$, encontre suas derivadas parciais de 2ª ordem:

$$\bullet\ f(x,y) = x\,\text{sen}\,y + y\,\text{sen}\,x + xy \begin{cases} f_x = \text{sen}\,y + y\cos x + y \begin{cases} f_{xx} = -y\,\text{sen}\,x; \\ f_{xy} = \cos y + \cos x + 1; \end{cases} \\ f_y = x\cos y + \text{sen}\,x + x \begin{cases} f_{yx} = \cos y + \cos x + 1; \\ f_{yy} = -x\,\text{sen}\,y; \end{cases} \end{cases}$$

Olhando com atenção os dois exemplos anteriores constatamos que, nos dois casos, as derivadas parciais mistas restaram iguais. Com efeito:

No exemplo (a) vemos que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2y + 6xy^2 + 12x^2y^3 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y};$$

E, no exemplo (b) vemos que:

$$f_{xy} = \cos y + \cos x + 1 = f_{yx};$$

Não se trata de coincidência. As duas funções $f(x,y)$ satisfazem às hipóteses do seguinte teorema, devido ao matemático Alexis Clairaut (1713-1765):

TEOREMA DE CLAIRAUT.

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^2$ um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^2$. Seja, também, uma função real de duas variáveis reais $u = f(x,y): U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que f, f_x, f_y, f_{xy} e f_{yx} sejam todas contínuas em U. Então:

$$f_{xy} = f_{yx}, \text{ em } U;$$

Faremos uma demonstração deste teorema num Anexo, após a resolução da Lista de exercícios.

As definições de derivadas parciais de 2ª ordem são facilmente estendidas à funções reais de três variáveis reais, $u = f(x,y,z)$. Vejamos um exemplo:

(c) Dada $f(x,y,z) = xy^2z + x^2yz + xyz^2$, encontre suas derivadas parciais de 2ª ordem:

$$f(x,y,z) = xy^2z + x^2yz + xyz^2 \begin{cases} f_x = y^2z + 2xyz + yz^2 \begin{cases} f_{xx} = 2yz; \\ f_{xy} = 2yz + 2xz + z^2; \\ f_{xz} = y^2 + 2xy + 2yz; \end{cases} \\ f_y = 2xyz + x^2z + xz^2 \begin{cases} f_{yx} = 2yz + 2xz + z^2; \\ f_{yy} = 2xz; \\ f_{yz} = 2xy + x^2 + 2xz; \end{cases} \\ f_z = xy^2 + x^2y + 2xyz \begin{cases} f_{zx} = y^2 + 2xy + 2yz; \\ f_{zz} = 2xy; \\ f_{zy} = 2xy + x^2 + 2xz; \end{cases} \end{cases}$$

Mais uma vez, constatamos a igualdade entre as derivadas parciais mistas. Com efeito: $f_{xy} = 2yz + 2xz + z^2 = f_{yx}$;

$$f_{xz} = y^2 + 2xy + 2yz = f_{zx};$$

$$f_{yz} = 2xy + x^2 + 2xz = f_{zy};$$

Embora na maior parte das aplicações necessitemos calcular derivadas parciais até 2ª ordem, nada impede, se solicitado, que calculemos derivadas parciais de ordens superiores à 2ª ordem. Vejamos exemplos:

ⓓ Dada $u = f(x,y) = x^3y^5 - 2x^2y + x$, encontre: f_{xxx}; f_{yyy}; e f_{xyx};

Temos: $f_x = 3y^5x^2 - 4yx + 1$; $f_{xx} = 6y^5x - 4y$; $f_{xxx} = 6y^5$;

$f_y = 5x^3y^4 - 2x^2$; $f_{yy} = 20x^3y^3$; $f_{yyy} = 60x^3y^2$;

Como já conhecemos $f_{xx} = 6y^5x - 4y$ e por Clairaut $f_{xyx} = f_{xxy}$, obtemos:

$$f_{xyx} = f_{xxy} = \frac{\partial(f_{xx})}{\partial y} = \frac{\partial(6y^5x - 4y)}{\partial y} = 30xy^4 - 4;$$

ⓔ Dada $u = f(x,y,z) = (4x - 3y + 2z)^5$, encontre $\dfrac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial y \partial x}$;

Temos: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 5(4x-3y+2z)^4 . 4 = 20(4x-3y+2z)^4$;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(20(4x-3y+2z)^4\right)}{\partial y} = 80(4x-3y+2z)^3.(-3) = -240(4x-3y+2z)^3;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial z \partial y \partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right)}{\partial z} = \frac{\partial\left(-240(4x-3y+2z)^3\right)}{\partial z} = -720(4x-3y+2z)^2.2 = -1440(4x-3y+2z)^2;$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial y \partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial^3 u}{\partial z \partial y \partial x}\right)}{\partial z} = -2880(4x-3y+2z).2 = -5760(4x-3y+2z);$$