3.8. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória X, com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1}\, I_A(x), \quad A = [0,1]; \;\; \theta > 0$$

(i) Encontre estimador de máxima verossimilhança para θ.

(ii) Encontre o estimador de máxima verossimilhança de $g(\theta) = \frac{\theta}{1+\theta}$.

(iii) Encontre a distribuição aproximada dos estimadores obtidos em (i) e (ii).

Solução: Assim

$$X \sim beta(a = \theta, b = 1)$$

Note que

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)} = \frac{\Gamma(\theta+1)}{\Gamma(\theta)\,\Gamma(1)} = \frac{\theta\,\Gamma(\theta)}{\Gamma(\theta)\,0!} = \theta.$$

O valor esperado de X é dado por:

$$E_\theta(X) = \frac{\theta}{\theta+1} = g(\theta).$$

A função de verossimilhança é dada por:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta\, x_i^{\theta-1}$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \theta^n \left[\prod_{i=1}^{n} x_i\right]^{\theta-1}$$

O logaritmo da função de verossimilhança é dado por:

$$l(\theta) = n\log(\theta) + (\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\log(x_i)$$

A derivada primeira de $l(\theta)$ é dada por:

$$l'(\theta) = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n}\log(x_i)$$

A derivada segunda de $l(\theta)$ é dada por:

$$l'(\theta) = -\frac{n}{\theta^2} < 0.$$

De $l'(\theta) = 0$ temos:

$$\frac{n}{\theta} = -\sum_{i=1}^{n}\log(x_i)$$

é o nosso estimador de MV com

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{n} - \log(X_i)}{n}.$$

Vamos responder ao item **ii** usando a propriedade da invariância:

Se $\hat{\theta}$ é o estimador de MV de θ. Seja $g(\theta)$ uma função biunívoca de θ. O estimador de MV de $g(\theta)$ é dado por:

$$\widehat{g(\theta)} = g(\hat{\theta}).$$

Assim

$$\widehat{g(\theta)} = g(T) = \frac{T}{1+T} = \frac{nT}{n+nT}$$

$$\widehat{g(\theta)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} - \log(X_i)}{n + \sum_{i=1}^{n} - \log(X_i)}.$$

Vamos responder ao item **iii**:

Sabemos que se o tamanho da amostra é grande e as condições de regularidade estão satisfeitas temos:

$$\sqrt{n}\ \left(\hat{\theta} - \theta\right) \overset{a}{\sim} N\left(0, \frac{1}{I_F(\theta)}\right).$$

$$f(X|\theta) = \theta\ X^{\theta-1}.$$

Vamos calcular a informação de Fisher:

$$\log\left(f(X|\theta)\right) = \log\left(\theta\right) + (\theta - 1)\log(X).$$

$$V = \frac{\partial \log f(X;\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{\theta} + log(X) = \frac{1}{\theta} - (-log(X)) = \frac{1}{\theta} - Y.$$

Note que:

$$E(V) = \frac{1}{\theta} - E(Y) = \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta} = 0.$$

$$Var(V) = I_F(\theta) = Var(\frac{1}{\theta} - Y) = Var(-Y) = Var(Y) = \frac{1}{\theta^2}.$$

Vamos explicar com detalhes o último resultado.

A informação de Fisher é dada por:

$$I_F(\theta) = \frac{1}{\theta^2}.$$

$$\sqrt{n}\,\left(\hat{\theta} - \theta\right) \overset{a}{\sim} N\left(0, \frac{1}{1/\theta^2}\right) = N\left(0, \theta^2\right).$$

Po outro lado temos:

$$\sqrt{n}\,\left(g\left(\hat{\theta}\right) - g(\theta)\right) \overset{a}{\sim} N\left(, \frac{(g'(\theta))^2}{\theta^2}\right) = N\left(0, \theta^2\right).$$

De

$$g(\theta) = \frac{\theta}{1+\theta}$$

temos

$$g^{'}(\theta) = \frac{1}{(1+\theta)^2}.$$

$$\sqrt{n}\,\left(g\left(\hat{\theta}\right) - g(\theta)\right) \overset{a}{\sim} N\left(0, \frac{(g'(\theta))^2}{1/\theta^2}\right).$$

$$\sqrt{n}\,\left(g\left(\hat{\theta}\right) - g(\theta)\right) \overset{a}{\sim} N\left(0, \frac{\theta^2}{(1+\theta)^4}\right).$$

A resolução acaba aqui. Vou acrescentar mais um item.
Qual a distribuição exata do EMV?

$$T = \frac{n}{S} = \frac{1}{\bar{\bar{X}}}.$$

Sabemos que

$$S \sim Gama(n, \theta)$$

$$M_S(t) = \left[\frac{\theta}{\theta - t}\right]^n, t < \theta.$$

Sabemos que

$$M_{\bar{X}}(t) = M_S(t/n) = \left[\frac{\theta}{\theta - t/n}\right]^n, t/n < \theta.$$

$$M_{\bar{X}}(t) = \left[\frac{\theta}{n\theta - t}\right]^n, t < n\,\theta.$$

Assim

$$\bar{X} \sim Gama(n, n\theta).$$

Seja

$$W = \frac{1}{\bar{X}} \sim GamaInversa(\alpha, \beta)$$

$$f(w) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} w^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{w}} I_{(0,\infty)} w \tag{1}$$

Notação: $W \sim GI(\alpha, \beta)$.

A esperança e a variância são dadas por:

$$E(W) = \frac{\beta}{\alpha - 1},\ \alpha > 1$$

$$E(W) = \frac{n\theta}{n - 1},\ n > 1$$

$$Var(W) = \frac{\beta^2}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)},\ \alpha > 2$$

$$Var(W) = \frac{n^2\theta^2}{(n - 1)(n - 2)},\ n > 2$$

Um estimador não viciado de θ é dado por:

$$E\left(\frac{n-1}{n\bar{X}}\right) = E\left(\frac{n-1}{S}\right) = \theta.$$