1. Da população $X \sim N(50, 100)$ retirou-se uma amostra casual simples de $n = 10$ elementos. Da população $Y \sim N(60, 100)$ retirou-se uma amostra casual simples de $m = 6$ indivíduos, independente da primeira. Obtemos as variâncias amostrais S_1^2 e S_2^2, respectivamente.

(a) Encontre o valor de **a**, tal que $P(S_1^2/S_2^2 < a) = 95\%$

(b) Encontre o valor de **b**, tal que $P(S_1^2/S_2^2 > b) = 95\%$

Solução: Se $U\chi^2(r_1)$ e $V\chi^2(r_2)$ independentes então

a variável aleatória

$$F = \frac{\frac{U}{r_1}}{\frac{V}{r_2}} \sim F(r_1, r_2).$$

Note que

$$F_1 = \frac{1}{F} = \frac{\frac{V}{r_2}}{\frac{U}{r_1}} \sim F(r_2, r_1).$$

Se $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de X

então

$$U = \frac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(r_1 = n-1).$$

Seja Y independente de X com

$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ e $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ uma amostra aleatória de Y

então

$$V = \frac{(m-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(r_2 = m-1).$$

Note que

$$\frac{U}{r_1} = \frac{\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2}}{n-1} = \frac{S_1^2}{\sigma_1^2}.$$

$$\frac{V}{r_2} = \frac{\frac{(m-1)S_2^2}{\sigma_2^2}}{m-1} = \frac{S_2^2}{\sigma_2^2}.$$

Assim

$$F = \frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \sim F(r_1 = n-1, r_2 = m-1).$$

Se por hipótese

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2,$$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(r_1 = n-1, r_2 = m-1).$$

Vamos resolver o item **a**:

Como $n = 10$ e $m = 6$ e $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2 = 100$ temos que

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(r_1 = 10-1, r_2 = 6-1) = F(9,5).$$

a é nonagésimo quinto percentil de $F(9,5)$. Logo

$$P\left(F(9,5) > a\right) = 0,05.$$

Olhando a tabela VI com $\nu_1 = 9$ e $\nu_2 = 5$ temos:

$$a = P_{95} = 4,77.$$

Usando o **R** temos:

```
> m=10;n=6
> a=qf(0.95,m-1,n-1);a
[1] 4.772466
> a=qf(0.95,m-1,n-1);a;round(a,2)
[1] 4.772466
[1] 4.77
```

Vamos resolver o item **b**:

De

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} > b\right) = 0,95$$

Logo

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \leq b\right) = 0,05$$

Logo b é o quinto percentil da $F(9,5)$.

Vamos preparar para olhar a tabela VI:

$$P\left(\frac{S_2^2}{S_1^2} \geq \frac{1}{b}\right) = 0,05$$

Seja $c = \frac{1}{b}$ é o percentil 95 da $F(6,9)$, perceba a inversão dos graus de liberdade.

Logo

$$c = 3,37.$$

E

$$b = \frac{1}{3,37} = 0,29.$$

```
> ###item b:direto no R.
>
> ####b é o quinto percentil da F(9,5)
>
> b=qf(0.05,m-1,n-1);b;round(b,2)
[1] 0.2872194
[1] 0.29
>
> c= qf(0.95,n-1,m-1);c;round(c,2)
[1] 3.481659
[1] 3.48
>
> b;1/c;round(b,2)
[1] 0.2872194
[1] 0.2872194
[1] 0.29
>
```