

Variáveis Aleatórias Multidimensionais

Prof. José Roberto Silva dos Santos

Fortaleza, 18 de novembro de 2022

1 Variáveis Aleatórias Multidimensionais

- Função Geradora de Momentos Multidimensional
- Distribuição da soma de v.a's e o Teorema Central do Limite

1 Variáveis Aleatórias Multidimensionais

- Função Geradora de Momentos Multidimensional
- Distribuição da soma de v.a's e o Teorema Central do Limite

Variáveis aleatórias multidimensionais

Exemplo

- Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional com f.d.p conjunta definida por

$$f(x, y) = \left(x^2 + \frac{xy}{3} \right) I_{[0,1]}(x) I_{[0,2]}(y)$$

- (a) Determine as densidades marginais.
- (b) Determine as densidades condicionais.
- (c) Determine as esperanças condicionais.
- (d) Determine a covariância entre X e Y .

1 Variáveis Aleatórias Multidimensionais

- Função Geradora de Momentos Multidimensional
- Distribuição da soma de v.a's e o Teorema Central do Limite

Definição:

- Seja $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ um vetor aleatório e $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)' \in \mathbb{R}^n$. Definimos a *função geradora de momentos multidimensional* por

$$M_{\mathbf{X}}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \mathbb{E} \left(e^{\mathbf{t}'\mathbf{X}} \right) =$$

Definição:

- Seja $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ um vetor aleatório e $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)' \in \mathbb{R}^n$. Definimos a *função geradora de momentos multidimensional* por

$$M_{\mathbf{X}}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \mathbb{E} \left(e^{\mathbf{t}'\mathbf{X}} \right) = \mathbb{E} \left(e^{t_1 X_1 + t_2 X_2 + \dots + t_n X_n} \right)$$

Função Geradora de Momentos Multidimensional

Propriedades:

- $M_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}) = 1$, em que $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)'$
- Sejam k_1, k_2, \dots, k_n inteiros não negativos tais que, $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$. Então,

$$\frac{\partial^k}{\partial t_1^{k_1} \dots \partial t_n^{k_n}} M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}} = \mathbb{E}(X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n})$$

- Seja \mathbf{A} uma matriz $m \times n$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Então a f.g.m de $\mathbf{Y} = \mathbf{AX} + \mathbf{b}$ é dada por

$$M_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t}) = e^{\mathbf{t}'\mathbf{b}} M_{\mathbf{X}}(\mathbf{A}'\mathbf{t}).$$

- A função geradora de momentos marginal da k -ésima componente é obtida da seguinte forma:

$$M_{X_k}(t) = M_{\mathbf{X}}(0, 0, \dots, t_k, \dots, 0)$$

em que, somente $t_k \neq 0$.

Função Geradora de Momentos Multidimensional

Exemplo:

- Seja (X_1, X_2, X_3) um vetor aleatório com f.g.m conjunta dada por

$$M_{\mathbf{X}}(t_1, t_2, t_3) = (p_1 e^{t_1} + p_2 e^{t_2} + p_3 e^{t_3})^n$$

em que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

- (a) Determine as f.g.m's marginais.
- (b) Determine a covariância entre X_1 e X_2

Definição:

- Sejam X_1, X_2, \dots, X_n v.a's independentes com funções geradoras de momentos $M_{X_i}(t)$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$, respectivamente. A f.g.m de $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ existe e é dada por

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t).$$

Definição:

- Sejam X_1, X_2, \dots, X_n v.a's independentes com funções geradoras de momentos $M_{X_i}(t)$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$, respectivamente. A f.g.m de $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ existe e é dada por

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t).$$

- Sejam X_1, X_2, \dots, X_n v.a's independentes com função geradora de momentos conjunta $M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$. Nesse caso, é possível mostrar que

$$M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t_i).$$

1 Variáveis Aleatórias Multidimensionais

- Função Geradora de Momentos Multidimensional
- Distribuição da soma de v.a's e o Teorema Central do Limite

Soma de algumas v.a's

Teorema 2

Sejam $X_i \sim B(m_i, p)$ para todo $i = 1, \dots, n$, v.a's independentes. Então

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i \sim B\left(\sum_{i=1}^n m_i, p\right).$$

Teorema 3

Sejam $X_i \sim P(\lambda_i)$ para todo $i = 1, \dots, n$, v.a's independentes. Então

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i \sim P\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right).$$

Teorema 4

Sejam $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ para todo $i = 1, \dots, n$, v.a's independentes.
Então

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right).$$

Teorema Central do Limite (TCL)

Em geral não é fácil determinar a distribuição exata da soma de v.a's independentes. O próximo resultado fornece uma distribuição *aproximada* para somas.

Teorema 5

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de v.a's independentes com variância finita. Sendo $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ a sequência de somas parciais, então para n suficientemente grande, temos que

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 1).$$

Lê-se: para n grande, a distribuição da v.a. $\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}}$ é aproximadamente uma normal padrão.

Teorema Central do Limite (TCL)

Corolário 1

Seja $X_1, X_2 \dots$ uma sequência de v.a's independentes com variância finita então o TCL estabelece que

$$\mathbb{P} \left(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \leq x \right) \approx \Phi(x)$$

Teorema Central do Limite (TCL)

Corolário 2

Seja $X_1, X_2 \dots$ uma sequência de v.a's independentes e identicamente distribuídas com média μ e variância $\sigma^2 < \infty$. Então, quando $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n} \left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 1) \text{ ou, equivalentemente } \bar{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Teorema Central do Limite (TCL)

Exemplos

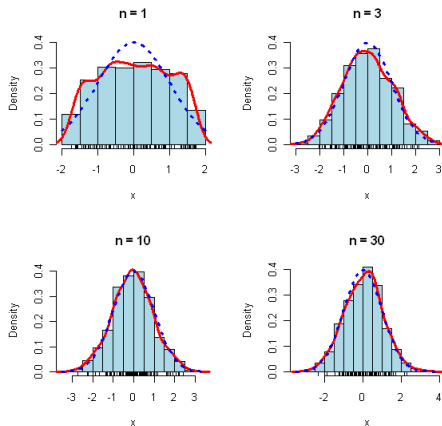


Figura 1: Ilustração do TCL para amostras provenientes de uma população uniforme com média $1/2$ e desvio-padrão $1/\sqrt{12}$

Teorema Central do Limite (TCL)

Exemplos

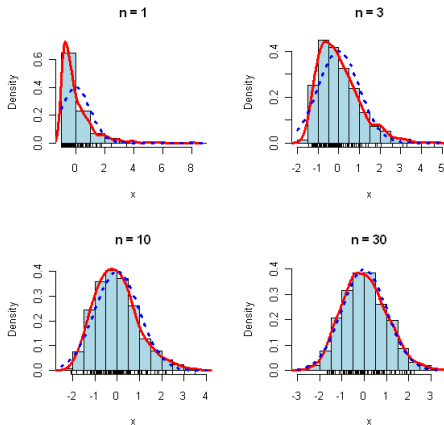


Figura 2: Ilustração do TCL para amostras provenientes de uma população exponencial com média 1 e desvio-padrão 1

Teorema Central do Limite (TCL)

Exemplos

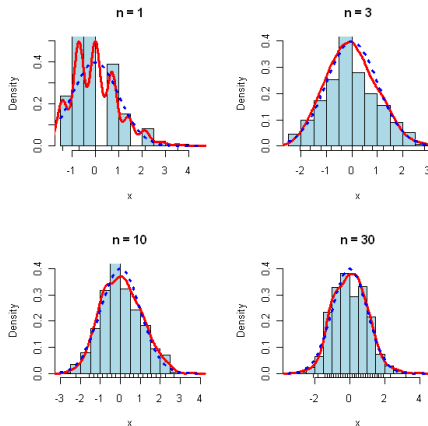


Figura 3: Ilustração do TCL para amostras provenientes de uma população Poisson com média 2 e desvio-padrão $\sqrt{2}$

Teorema Central do Limite (TCL)

Exemplos

- Sabe-se que 80% das peças produzidas por uma indústria passam por três testes de qualidade. Uma amostra de 200 peças é escolhida ao acaso da linha de produção. Qual a probabilidade de que o número de peças na amostra que passam pelos três testes de qualidade esteja compreendido entre 154 e 170.

Teorema Central do Limite (TCL)

Exemplos

- Utilizado o teorema central do limite mostre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Teorema Central do Limite (TCL)

Exemplos

- Um dado é lançado 2500 vezes. Determine a probabilidade aproximada de que soma dos pontos seja menor do que 8850.