3.3. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim N(\mu, 1)$.
Encontre o estimador de máxima verossimilhança de $g(\mu) = P_\mu[X > 0]$ e sua distribuição quando n é grande.

Solução:

A f.d.p. usando indicadores:

$$f(x|\mu) = (2\pi)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2}\right)$$

A função de verossimilhança é dada por:

$$L(\mu) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} (2\pi)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(x_i-\mu)^2}{2}\right)$$

$$L(\mu) = (2\pi)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)$$

O logaritmo da função de verossimilhança é dado por:

$$l(\mu) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

A derivada primeira de $l(\mu)$ é dada por:

$$l^{'}(\mu) = -\frac{1}{2}\, 2 \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)(-1)$$

$$l^{'}(\mu) = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = n\bar{x} - n\mu.$$

A derivada segunda de $l(\mu)$ é dada por:

$$l^{''}(\mu) = -n < 0.$$

Fazendo $l^{'}(\mu) = 0$ temos

$$\hat{\mu}_{MV} = \bar{X}.$$

A distribuição exata do nosso estimador é:

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{1}{n}),$$

de modo que

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{1/\sqrt{n}} = \sqrt{n}(\bar{X}-\mu) \sim N(0,1).$$

Seja

$$g(\mu) = P_\mu[X > 0] = P(Z > -\mu) = P(-Z < -\mu) = P(Z < -\mu) = \Phi(-\mu).$$

$$g(\mu) = \int_{-\infty}^{-\mu} (2\pi)^{-1/2}\, e^{-z^2/2}\, dz$$

Assim

$$g'(\mu) = -(2\pi)^{-1/2}\, e^{-\mu^2/2}.$$

$$[g'(\mu)]^2 = (2\pi)^{-1}\, e^{-\mu^2}.$$

O estimador de MV de $g(\mu)$ é dado por

$$T_1 = \Phi(-\bar{X}),$$

pela propriedade da invariância.

Vamos calcular a informação de Fisher de $X \sim N(\mu, 1)$:

Assim

$$f(X|\mu) = (2\pi)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(X-\mu)^2}{2}\right)$$

$$\log\left(f(X \mid \mu)\right) = -\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\,(X-\mu)^2$$

$$V = \frac{\partial log f(X \mid \mu)}{\partial \mu} = -X + \mu$$

$$I_F(\mu) = Var(V) = Var(-X+\mu) = Var(X) = 1.$$

$$\sqrt{n}\ \left(g\left(\hat{\mu}\right) - g(\mu)\right) \overset{a}{\sim} N\left(0, \frac{(g'(\mu))^2}{I_F(\theta)}\right).$$

Logo

$$\sqrt{n}\ \left(g\left(\hat{\mu}\right) - g(\mu)\right) \overset{a}{\sim} N\left(0, \frac{(2\pi)^{-1}\, e^{-\mu^2}}{1}\right).$$

$$\sqrt{n}\ \left(g\left(\hat{\mu}\right) - g(\mu)\right) \overset{a}{\sim} N\left(0, (2\pi)^{-1}\, e^{-\mu^2}\right).$$