CC-0288 - Inferência Estatística I

Comentário 01 - 17/03/2023

Prof. Maurício Mota

1. Vamos comentar a tabela 1.1 da página 15 do livro do Heleno e da Mônica.

   Eles querem estimar o parâmetro θ de $X \sim U(0, \theta)$ baseado nos erros quadráticos médios dos dois estimadores obtidos em uma amostra aleatória de tamanho n.

   Os estimadores são:

$$\hat{\theta}_1 = \bar{X} \quad e \quad \hat{\theta}_2 = Y_n = max(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

   Sabemos que :

$$EQM[\hat{\theta}_1] = \frac{1+3n}{12n} \ \theta^2,$$

$$EQM[\hat{\theta}_2] = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \ \theta^2.$$

   O problema afirma $\hat{\theta}_2 = Y_n$ é melhor estimador do que $\hat{\theta}_1 = \bar{X}$. Vamos criar uma função no **R** para analisar.

   Seja

$$g(n) = \frac{EQM[\hat{\theta}_2]}{EQM[\hat{\theta}_1]} = \frac{24n}{(n+1)(n+2)(1+3n)}.$$

   Vamos calcular para $n = 1, 2, \ldots, 20$:

```
> n=1:20
>
> gn=function(n) (24*n)/((n+1)*(n+2)*(1+3*n))
> gn(3)
[1] 0.36
> gn(5)
[1] 0.1785714
> gn(10)
[1] 0.05865103
>
> gn(20)
[1] 0.01703215
>
> tab=cbind(n,gn(n));tab
n
[1,]  1 1.00000000
[2,]  2 0.57142857
[3,]  3 0.36000000
[4,]  4 0.24615385
```

```
[5,]   5 0.17857143
[6,]   6 0.13533835
[7,]   7 0.10606061
[8,]   8 0.08533333
[9,]   9 0.07012987
[10,] 10 0.05865103
[11,] 11 0.04977376
[12,] 12 0.04276804
[13,] 13 0.03714286
[14,] 14 0.03255814
[15,] 15 0.02877238
[16,] 16 0.02561024
[17,] 17 0.02294197
[18,] 18 0.02066986
[19,] 19 0.01871921
[20,] 20 0.01703215
>
```

Note que os valores da terceira coluna não batem!!!!!!!

Temos que provar que vale para todo n.

Siga os passos:

$$EQM[\hat{\theta}_1] - EQM[\hat{\theta}_2] = (n-1)(3n^2 + 13n - 2)\ \theta^2$$

$$EQM[\hat{\theta}_1] - EQM[\hat{\theta}_2] = (n-1)(3n^2 + 11n + 2(n-1))\ \theta^2$$

que é positiva para $n \geq 2$.

Quando $n = 1$ temos:

$$\hat{\theta}_1 = X_1 \quad e \quad \hat{\theta}_2 = X_1$$

por isso a igualdade.