Derivadas das funções trigonométricas inversas

1) $y = arcsen\ x$

Vamos calcular $\frac{dy}{dx}$

$y = arcsen\ x$ equivale a $x = sen\ y$, com y pertencendo ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Derivando, em relação a y, ambos os membros da igualdade $x = sen\ y$ obtemos $\frac{dx}{dy} = cos\ y$, com y no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Substituindo $sen\ y$ por x em $sen^2 y + cos^2 y = 1$, obtemos $cos^2 y = 1 - x^2$

Como y está em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $cos\ y$ é não negativo e então $cos\ y = \sqrt{1 - x^2}$.

Então $\frac{dx}{dy} = \sqrt{1 - x^2}$

Logo $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, isto é, $D_x(arcsen\ x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Assim o domínio da derivada da inversa da função seno é o intervalo $(-1,1)$.

Como consequência da regra da cadeia, temos o seguinte

Teorema:

Se u é uma função de x, derivável, então

$$D_x(arcsen\ u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$$

Exemplo

Se $y = arcsen\ x^4$, então $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^8}}(4x^3) = \frac{4x^3}{\sqrt{1-x^8}}$

2) $y = arccos\ x$

Vamos calcular $\frac{dy}{dx}$

$y = arccos\ x$ equivale a $x = cos\ y$, com y pertencendo ao intervalo $[0, \pi]$

Derivando, em relação a y, ambos os membros da igualdade $x = cos\ y$ obtemos $\frac{dx}{dy} = -sen\ y$, com y no intervalo $[0, \pi]$.

Substituindo $cos\ y$ por x em $sen^2y + cos^2y = 1$, obtemos $sen^2y = 1 - x^2$

Como y está em $[0, \pi]$, $sen\ y$ é não negativo e então $sen\ y = \sqrt{1 - x^2}$.

Então $\frac{dx}{dy} = -\sqrt{1 - x^2}$

Logo $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, isto é, $D_x(arccos\ x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Assim o domínio da derivada da inversa da função cosseno é o intervalo $(-1,1)$.

Como consequência da regra da cadeia, temos o seguinte

Teorema:

Se u é uma função de x, derivável, então

$$D_x(arccos\ u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$$

Exemplo

Se $y = arccos\ x^4$, então $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^8}}(4x^3) = -\frac{4x^3}{\sqrt{1-x^8}}$

3) $y = arctg\ \ x$

Vamos calcular $\frac{dy}{dx}$

$y = arctg\ x$ equivale a $x = tg\ y$, com y pertencendo ao intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Derivando, em relação a y, ambos os membros da igualdade $x = tg\ y$ obtemos $\frac{dx}{dy} = sec^2\ y$, com y no intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Substituindo $tg\ y$ por x em $sec^2 y = 1 + tg^2 y$, obtemos $sec^2 y = 1 + x^2$

Então $\frac{dx}{dy} = 1 + x^2$

Logo $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$, isto é,

$$D_x(arctg\ x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Assim o domínio da derivada da inversa da função tangente é o conjunto de todos os números reais.

Como consequência da regra da cadeia, temos o seguinte

Teorema:

Se u é uma função de x, derivável, então

$$D_x(arctg\ u) = \frac{1}{1+u^2} D_x u$$

Exemplo

Se $y = arctg\ \frac{4}{x+3}$, então $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\frac{16}{(x+3)^2}} \cdot \frac{-4}{(x+3)^2} =$

$\frac{-4}{(x+3)^2+16} = \frac{-4}{x^2+6x+25}$

4) $y = arccotg\ x$

Para calcular $\frac{dy}{dx}$ vamos usar o fato de que $arccotg\ x = \frac{\pi}{2} - arctg\ x$

Derivando em relação a x, obtemos

$$D_x arccotg\ x = -\frac{1}{1 + x^2}$$

Como consequência da regra da cadeia, temos o seguinte

Teorema:

Se u é uma função de x, derivável, então $D_x(arccotg\ u) = -\frac{1}{1+u^2} D_x u$

Exemplo

Se $y = arccotg\ \frac{4}{x+3}$, então $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+\frac{16}{(x+3)^2}} \cdot \frac{(-4)}{(x+3)^2} = \frac{4}{(x+3)^2+16} = \frac{4}{x^2+6x+25}$

$5) y = arcsec\ x$

Vamos calcular $\frac{dy}{dx}$

$y = arcsec\ x$ equivale a $x = sec\ y$, com y pertencendo ao intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

Derivando, em relação a y, ambos os membros da igualdade $x = sec\ y$ obtemos $\frac{dx}{dy} = \sec y\ tg\ y$, com y no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Substituindo $sec\ y$ por x em $tg^2 y = sec^2 y - 1$, obtemos $tg^2 y = x^2 - 1$

Como, em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, a tangente é não negativa, temos $\frac{dx}{dy} = x\sqrt{x^2 - 1}$

Logo $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, isto é,

$$D_x(arcsec\ x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

Assim o domínio da derivada da inversa da função secante é o conjunto dos números reais x, tais que $|x| > 1$.

Como consequência da regra da cadeia, temos o seguinte

Teorema:

Se u é uma função de x, derivável, então

$$D_x(arcsec\, u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}} D_x u$$

Exemplo

Se $y = arcsec\, e^{2x}$, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^{2x}\sqrt{e^{4x}-1}}.2e^{2x} = \frac{2}{\sqrt{e^{4x}-1}}$$

6) $y = arccossec\ \ x$

Para calcular $\frac{dy}{dx}$ vamos usar o fato de que $arccossec\ x = \frac{\pi}{2} - arcsec\ x$

Derivando em relação a x, obtemos

$$D_x arccossec\ x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Como consequência da regra da cadeia, temos o seguinte

Teorema:

Se u é uma função de x, derivável, então

$$D_x arccossec\ x = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} D_x u$$

Exemplo

Se $y = arccossec\ e^{2x}$, então $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{e^{2x}\sqrt{e^{4x}-1}} . 2e^{2x} = -\frac{2}{\sqrt{e^{4x}-1}}$

Integrais que resultam das derivadas das funções trigonométricas inversas

1) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsen\, x + c$

2) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg\, x + c$

3) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = arcsec\, x + c$

Se $a > 0$, estas integrais podem ser generalizadas da seguinte forma:

4) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + c$

5) $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} arctg\left(\frac{x}{a}\right) + c$

6) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}} dx = \frac{1}{a} arcsec\left(\frac{x}{a}\right) + c$

Prova de (4)

$$D_x\ \left(arcsen\left(\frac{x}{a}\right)+c\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}.\frac{1}{a}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}}.\frac{1}{a}=\quad\frac{1}{\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{|a|}}.\frac{1}{a}=\frac{1}{\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}}.\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

Prova de (5)

$$D_x\ \left(\frac{1}{a}arctg\left(\frac{x}{a}\right)+c\right)=\frac{1}{a}.\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}.\frac{1}{a}=$$

$$\frac{1}{a^2}.\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}=\frac{1}{a^2}.\frac{1}{\frac{a^2+x^2}{a^2}}=\frac{1}{a^2+x^2}$$

Prova de (6)

$$D_x \left(\frac{1}{a} arcsec\left(\frac{x}{a}\right) + c\right) = \frac{1}{a} . \frac{1}{\frac{x}{a}\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}} . \frac{1}{a} =$$

$$\frac{1}{a} . \frac{1}{\frac{x}{a}\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}} . \frac{1}{a} = \frac{1}{a} . \frac{1}{\frac{x}{a}\sqrt{\frac{x^2 - a^2}{a^2}}} . \frac{1}{a} =$$

$$\frac{1}{a^2} \frac{1}{\frac{x}{a} . \frac{1}{|a|}\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a^2} \frac{1}{\frac{x}{a^2}\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$$

Exemplos:

1) $\int \frac{1}{\sqrt{17 - x^2}} dx = arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{17}}\right) + c$

2) $\int \frac{1}{12 + 3x^2} dx = \int \frac{1}{3(4 + x^2)} dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{(4 + x^2)} dx = \frac{1}{3} . \frac{1}{2} arctg\left(\frac{x}{2}\right) + c =$

$\frac{1}{6} arctg\left(\frac{x}{2}\right) + c$

3) $\int \frac{4}{x\sqrt{x^2 - 25}} dx = 4\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 25}} dx = 4 . \frac{1}{5} arcsec\left(\frac{x}{5}\right) + c = \frac{4}{5} arcsec\left(\frac{x}{5}\right) + c$