Q10. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma variável aleatória $X \sim Exp(\theta_1)$ e $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ uma amostra aleatória de uma variável aleatória $Y \sim Exp(\theta_2)$.

Assumindo que as duas amostras são independentes.

i. Obtenha uma quantidade pivotal para construir um intervalo de confiança para $\beta = \frac{\theta_1}{\theta_2}$.

ii. Suponha que $\theta_1 = 1,5$ e $\theta_2 = 2$. Simule um amostra aleatória de tamanho 10 da variável X e com $m = 15$ da variável Y. Como fica o seu intervalo obtido a partir da quantidade pivotal encontrada em **i** com confiança de 95%.

Solução: Sabemos que

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gama(n, \theta_1).$$

e

$$Q_1 = 2\theta_1 S_1 \sim \chi^2(2n).$$

e também

$$S_2 = \sum_{j=1}^{m} Y_j \sim Gama(m, \theta_2).$$

e

$$Q_2 = 2\theta_2 S_2 \sim \chi^2(2m),$$

com Q_1 e Q_2 independentes.

Note que

$$Q = \frac{2\theta_1 \; S_1/2n}{2\;\theta_2 \; S_2/2m} = \frac{m}{n}\;\frac{S_1}{S_2}\frac{\theta_1}{\theta_2} \sim F(2n, 2m).$$

é a nossa quantidade pivotal procurada.

Vamos escolher f_1 e f_2 de sorte que

$$P(Q \leq f_1) = \frac{\alpha}{2} \qquad e \;\; P(Q \geq f_2) = \frac{\alpha}{2}$$

Logo

$$P\left(f_1 \leq Q \leq f_2\right) = 1 - \alpha.$$

$$P\left(f_1 \leq \frac{m}{n}\;\frac{S_1}{S_2}\frac{\theta_1}{\theta_2} \leq f_2\right) = 1 - \alpha.$$

$$P\left(f_1\;\frac{n}{m}\;\frac{S_2}{S_1} \leq \frac{\theta_1}{\theta_2} \leq f_2\;\frac{n}{m}\;\frac{S_2}{S_1}\right) = 1 - \alpha.$$

Fazendo

$$l_i = f_1 \, \frac{n}{m} \, \frac{S_2}{S_1} \qquad l_s = f_2 \, \frac{n}{m} \, \frac{S_2}{S_1}$$

temos o nosso intervalo de confiança procurado.

Como $n = 10$ e $m = 15$ temos que a nossa $F \sim (20, 30)$.

Pela tabela VI do Bussab& Morettin temos

$$P(F(20, 30) > 2,07) = 0,025.$$

Assim

$$f_2 = 2,07.$$

Por outro lado

$$P(F(20, 30) < f_1) = 0,025.$$

Para olhar na tabela temos que brincar:

$$P\left(\frac{1}{F(20, 30)} > \frac{1}{f_1}\right) = 0,025.$$

$$P\left(F(30, 20) > \frac{1}{f_1}\right) = 0,025.$$

Olhando na tabela temos:

$$P\left(F(30, 20) > 2,35\right) = 0,025.$$

Logo,

```
>
> gama=0.95;alfa=1-gama;alfa/2
[1] 0.025
>
> n=10;m=15
> gl1=2*n;gl1
[1] 20
> gl2=2*m;gl2
[1] 30
> f_2=qf(1-alfa/2,gl1,gl2);f_2;round(f_2,2)
[1] 2.19516
[1] 2.2
> f_2=2.20
>
>
> f_1=qf(alfa/2,gl1,gl2);f_1;round(f_1,2)
[1] 0.4257851
[1] 0.43
> f_1=0.43
>
```

```
>
>
> aux=qf(1-alfa/2,gl2,gl1);aux;round(aux,2)
[1] 2.348602
[1] 2.35
> 1/aux;qf(alfa/2,gl1,gl2)
[1] 0.4257851
[1] 0.4257851
>
```

```
>
> teta_1=1.5;teta_2=2
> set.seed(32)
> X=rexp(n,teta_1);X
[1] 0.007787364 0.126411182 0.411662845 0.305092968 1.068129924 0.348208349
[7] 0.231255698 0.827766241 0.210669977 0.652417049
>
> S_1=sum(X);S_1
[1] 4.189402
>
> set.seed(33)
> Y=rexp(m,teta_2);Y
[1] 0.48334897 0.17929971 0.35195136 1.12999823 0.81180920 0.34324669
[7] 0.27474887 0.62095956 0.73620746 0.01481053 0.46829828 0.09663026
[13] 0.55991466 0.25870834 0.36867512
>
> S_2=sum(X);S_2
[1] 4.189402
>
>
> l_i=f_1*(n/m)*(S_2/S_1);l_i
[1] 0.2866667
>
> l_s=f_2*(n/m)*(S_2/S_1);l_s
[1] 1.466667
>
>
> beta=teta_1/teta_2;beta
[1] 0.75
>
>
> ICbeta95=c(l_i,l_s);ICbeta95
[1] 0.2866667 1.4666667
>
>
> ##Note que o verdadeiro beta pertence ao Nosso IC.
>
```