6.3
Cálculo de Volumes por Cascas Cilíndricas

Nesta seção aprenderemos como aplicar o método das cascas cilíndricas para encontrar o volume de um sólido.

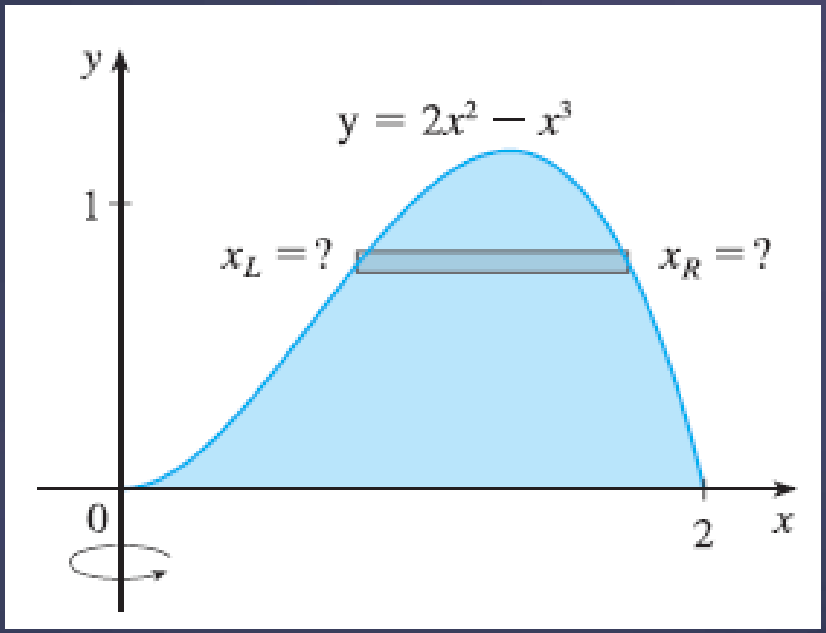
CENGAGE Learning™

VOLUMES POR CASCAS CILÍNDRICAS

- Alguns problemas de volume são muito difíceis de lidar pelos métodos da seção anterior.

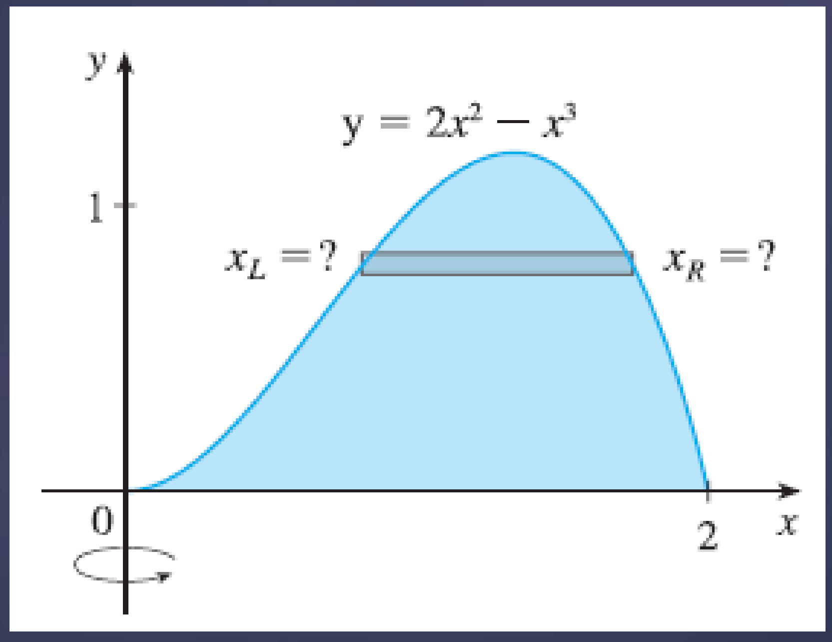
VOLUMES POR CASCAS CILÍNDRICAS

- Vamos considerar o problema de encontrar o volume de um sólido obtido pela rotação em torno do eixo *y* da região limitada por $y = 2x^2 - x^3$ e $y = 0$.



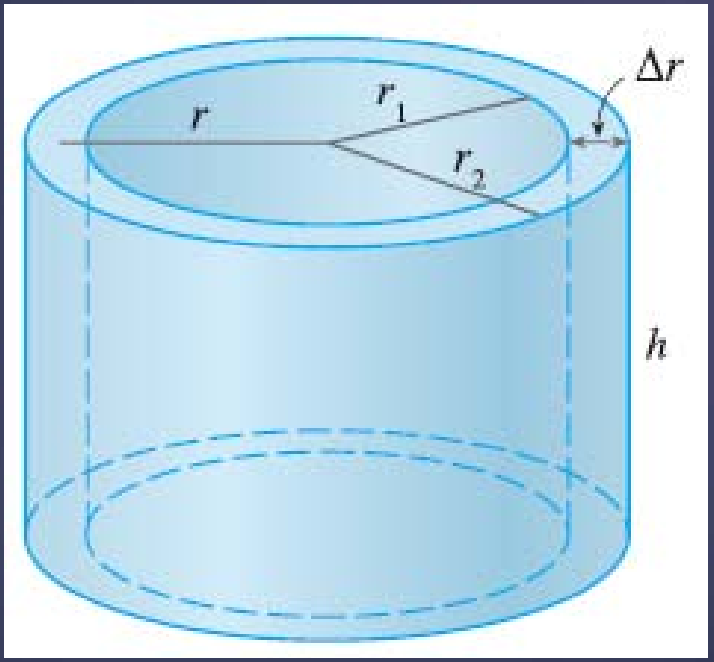
VOLUMES POR CASCAS CILÍNDRICAS

- Se a fatiarmos perpendicularmente ao eixo *y*, obteremos uma arruela.
  - Mas para calcularmos Os raios interno e externo da arruela, teríamos de resolver a equação cúbica $y = 2x^2 - x^3$ para *x* em termos de *y*; e isto não é fácil.



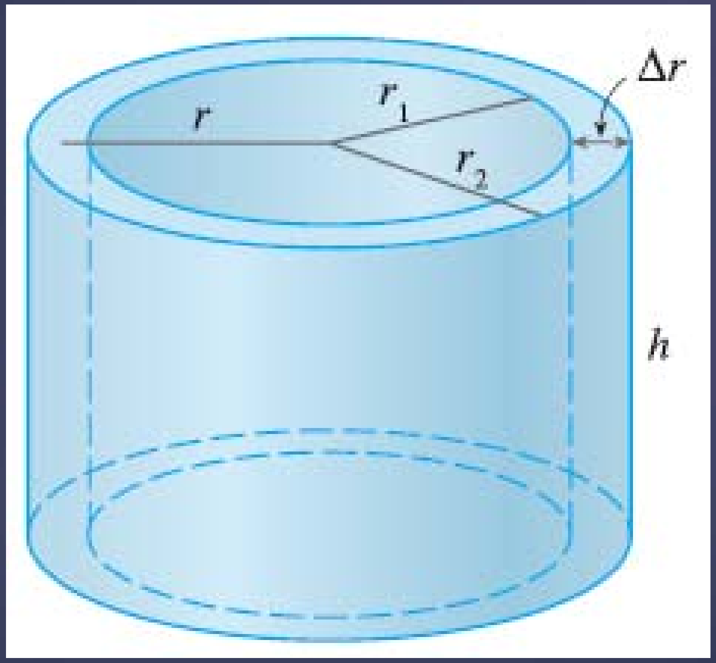
VOLUMES POR CASCAS CILÍNDRICAS

- Felizmente, existe um método chamado **Método das Cascas Cilíndricas**, que é mais fácil de usar em casos como esse.
    - A Figura mostra uma casca cilíndrica de raio interno r_1, raio externo r_2, e altura *h.*



MÉTODO DAS CASCAS CILÍNDRICAS

- O seu volume V é calculado pela subtração do volume V_1 do cilindro interno do volume V_2 do cilindro externo.



MÉTODO DAS CASCAS CILÍNDRICAS

- Assim, temos:

$$\begin{aligned} V &= V_2 - V_1 \\ &= \pi r_2^{\,2} h - \pi r_1^{\,2} h \\ &= \pi (r_2^{\,2} - r_1^{\,2}) h \\ &= \pi (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) h \\ &= 2\pi \frac{r_2 + r_1}{2} h (r_2 - r_1) \end{aligned}$$

MÉTODO DAS CASCAS CILÍNDRICAS Fórmula 1

- Se fizermos $\Delta r = r_2 - r_1$ (a espessura da casca) e $r = \frac{1}{2}\left(r_2 + r_1\right)$ (o raio médio da casca), então a fórmula para o volume de uma casca cilíndrica se torna:

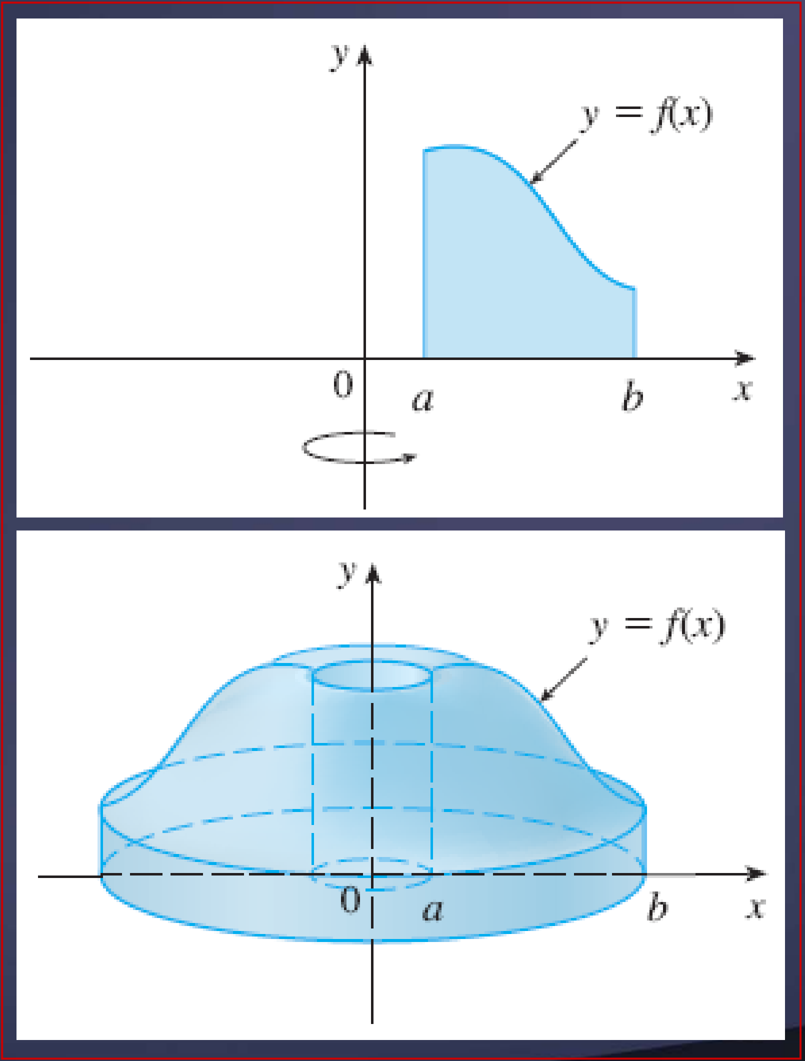
$$\boxed{V = 2\pi r h \Delta r}$$

- E pode ser memorizada como:

V [circunferência][altura][espessura]

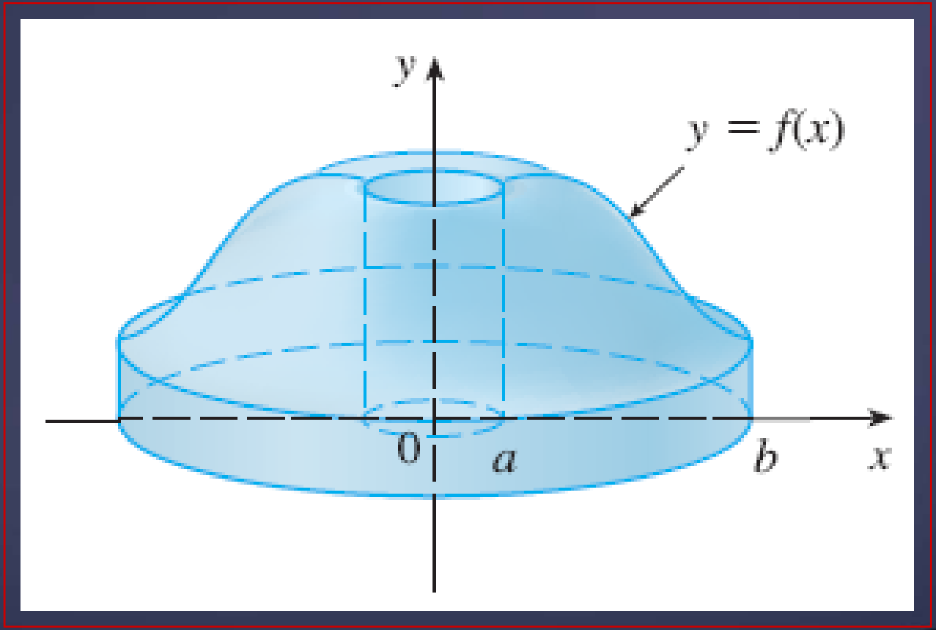
MÉTODO DAS CASCAS CILÍNDRICAS

- Agora, considere S como o sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região limitada por $y = f(x)$ [onde $f(x) \geq 0$], $y = 0$, $x = a$ e $x = b$, onde $b > a \geq 0$.



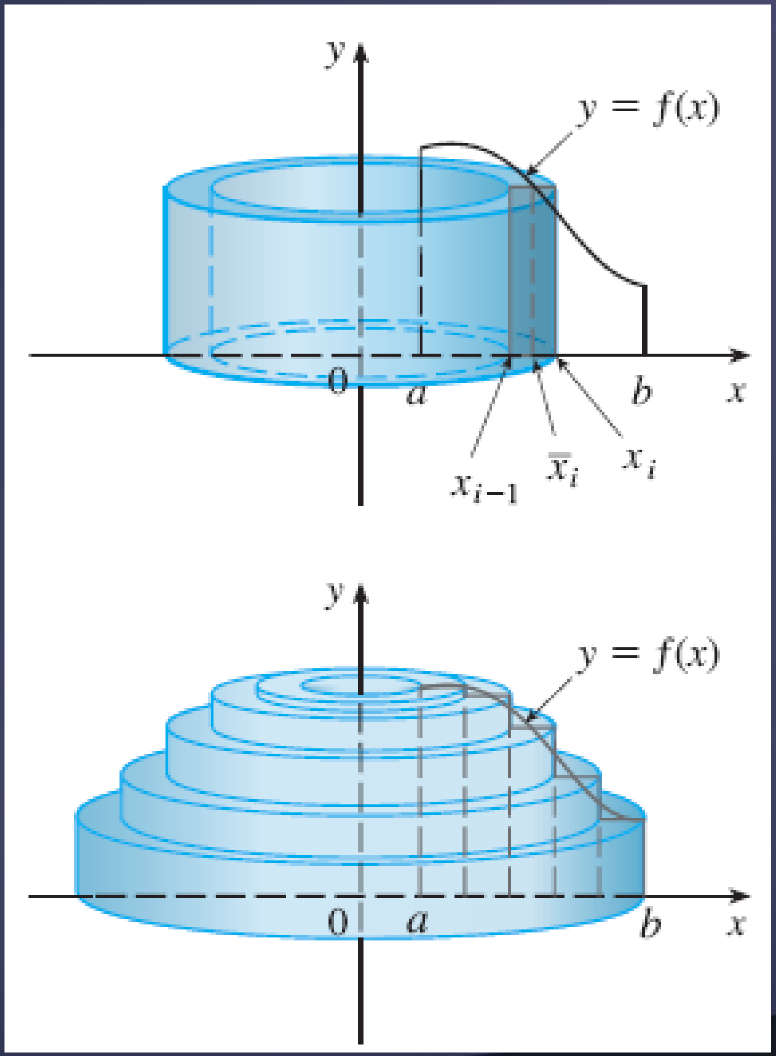
MÉTODO DAS CASCAS CILÍNDRICAS

- Dividimos o intervalo [*a*, *b*] em *n* subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de mesma largura Δx e consideramos $\overline{x}_i$ o ponto médio do *i*-ésimo subintervalo.



MÉTODO DAS CASCAS CILÍNDRICAS

- Se o retângulo com base $[x_{i-1}, x_i]$ e altura $f(\bar{x}_i)$ é girado ao redor do eixo y, então o resultado é uma casca cilíndrica com raio médio $\bar{x}_i$ altura $f(\bar{x}_i)$, e espessura Δx.



MÉTODO DAS CASCAS CILÍNDRICAS

- Assim, pela Fórmula 1 seu volume é:

$$V_i = (2\pi \bar{x}_i)[f(\bar{x}_i)]\Delta x$$

- Portanto, uma aproximação para o volume *V* de *S* é dada pela soma dos volumes dessas cascas:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\Delta x$$

MÉTODO DAS CASCAS CILÍNDRICAS

- Essa aproximação parece tornar-se melhor quando $n \to \infty$.

- Mas, pela definição de integral, sabemos que:

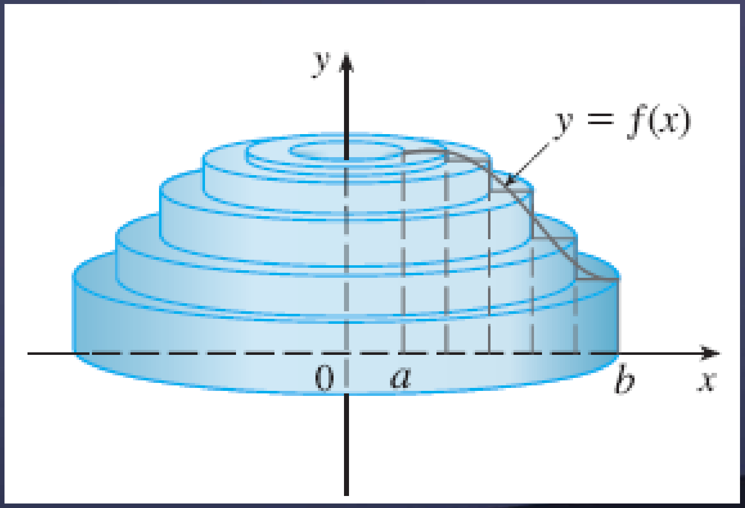
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\Delta x = \int_a^b 2\pi x \, f(x)dx$$

MÉTODO DAS CASCAS CILÍNDRICAS **Fórmula 2**

- Então, a seguinte definição parece plausível:
  - O volume do sólido na Figura, obtido pela rotação em torno do eixo *y* da região sob a curva *y* = *f*(*x*) de *a* até *b*, é:

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$

onde $0 \leq a < b$



CENGAGE Learning™

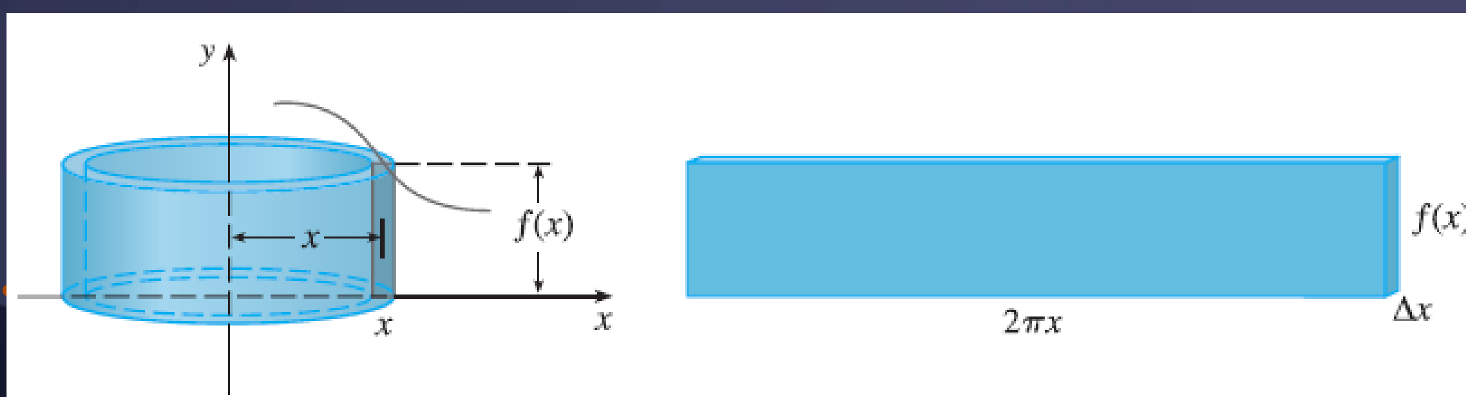
MÉTODO DAS CASCAS CILÍNDRICAS

- Usando o argumento das cascas cilíndricas, a Fórmula 2 parece razoável, porém mais tarde seremos capazes de demonstrá-la.

MÉTODO DAS CASCAS CILÍNDRICAS

- A melhor maneira para se lembrar da Fórmula 2 é pensar em uma casca típica, cortada e achatada como na Figura.
  - Com raio *x*, circunferência $2\pi x$, altura (x), e espessura Δx ou dx:

$$\int_a^b \underbrace{(2\pi x)}_{\text{circunferência}} \underbrace{[f(x)]}_{\text{altura}} \underbrace{dx}_{\text{espessura}}$$



MÉTODO DAS CASCAS CILÍNDRICAS

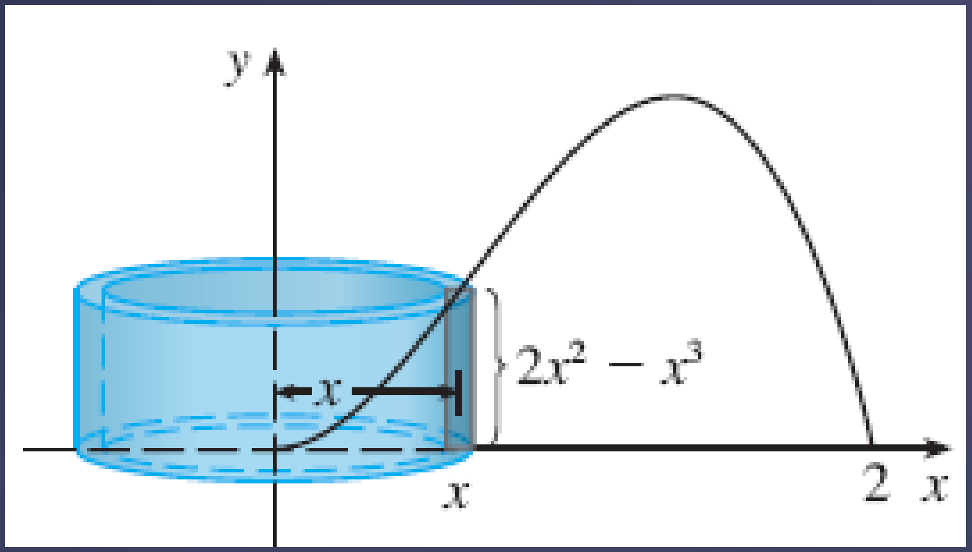
- Esse tipo de argumento será útil em outras situações, tais como quando giramos em torno de outras retas além do eixo *y*.

MÉTODO DAS CASCAS CILÍNDRICAS Exemplo 1

- Ache o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região limitada por $y = 2x^2 - x^3$ e $y = 0$.

MÉTODO DAS CASCAS CILÍNDRICAS Exemplo 1

- Do esboço da Figura, vemos que uma casca típica tem raio x, circunferência $2\pi x$, e altura $f(x) = 2x^2 - x^3$.



MÉTODO DAS CASCAS CILÍNDRICAS Exemplo 1

- Então, pelo método das cascas, o volume é:

$$V = \int_0^2 (2\pi x)\left(2x^2 - x^3\right)dx$$

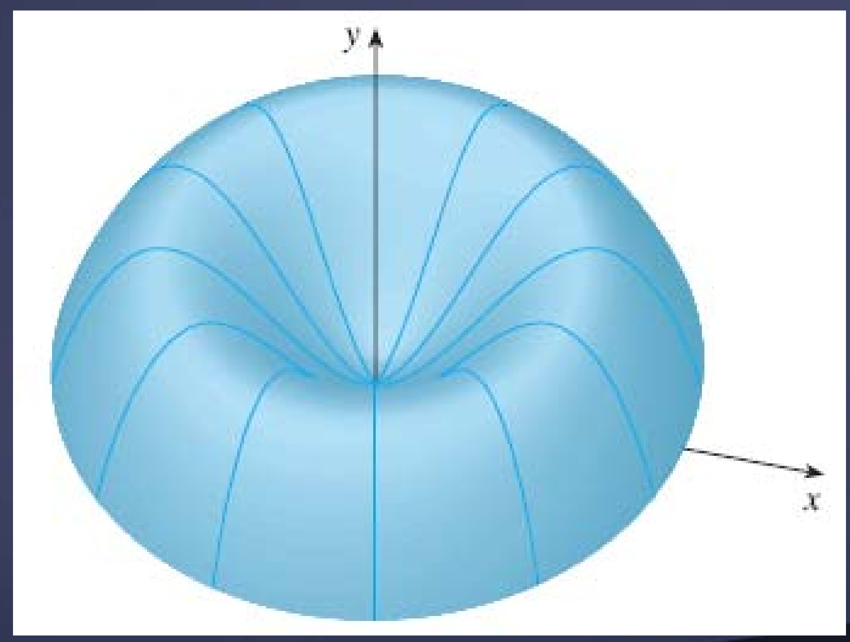
$$= \int_0^2 (2\pi x)(2x^3 - x^4)dx$$

$$= 2\pi\left[\tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5\right]_0^2$$

$$= 2\pi\left(8 - \tfrac{32}{5}\right) = \tfrac{16}{5}\pi$$

MÉTODO DAS CASCAS CILÍNDRICAS   Exemplo 1

- Pode-se verificar que o método das cascas dá a mesma resposta que o método das fatias.
  - A Figura mostra o gráfico gerado pelo computador do sólido do qual calculamos o volume no Exemplo 1.



OBSERVAÇÃO

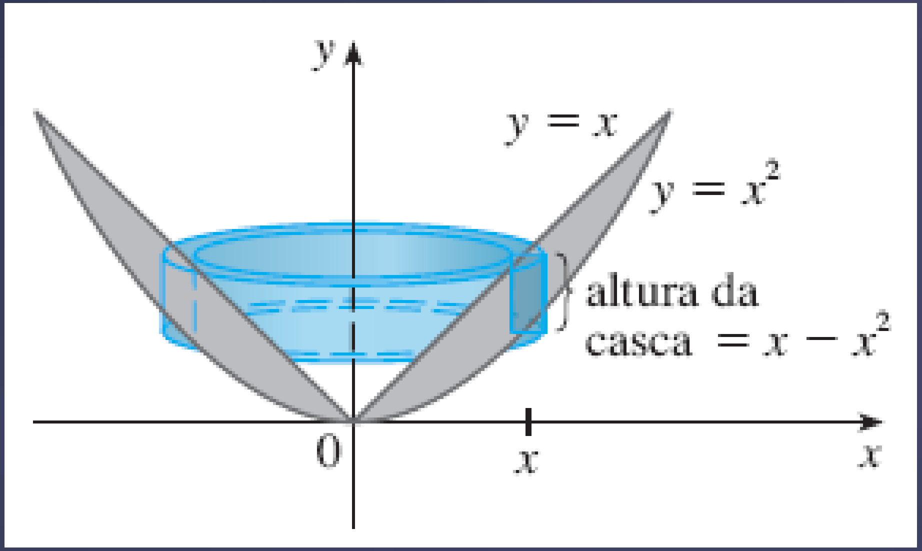
- Comparando a solução do Exemplo 1 com as observações no começo desta seção, vemos que o método das cascas cilíndricas é muito mais prático que o método das arruelas para esse problema.
  - Não tivemos de encontrar as coordenadas do máximo local e não tivemos de resolver a equação da curva para x em termos de y.
  - Contudo, em outros exemplos, utilizar os métodos da seção anterior podem ser mais fáceis.

MÉTODO DAS CASCAS CILÍNDRICAS Exemplo 2

- Ache o volume de um sólido obtido pela rotação em torno do eixo *y* da região entre $y = x$ e $y = x^2$.

MÉTODO DAS CASCAS CILÍNDRICAS Exemplo 2

- A região e uma casca típica são mostradas na Figura.
  - Vemos que a casca tem raio x, circunferência $2\pi x$, e altura $x - x^2$.



CENGAGE Learning

MÉTODO DAS CASCAS CILÍNDRICAS — Exemplo 2

- Então o volume é:

$$V = \int_0^1 (2\pi x)\left(x - x^2\right)dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(x^2 - x^3\right)dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

MÉTODO DAS CASCAS CILÍNDRICAS

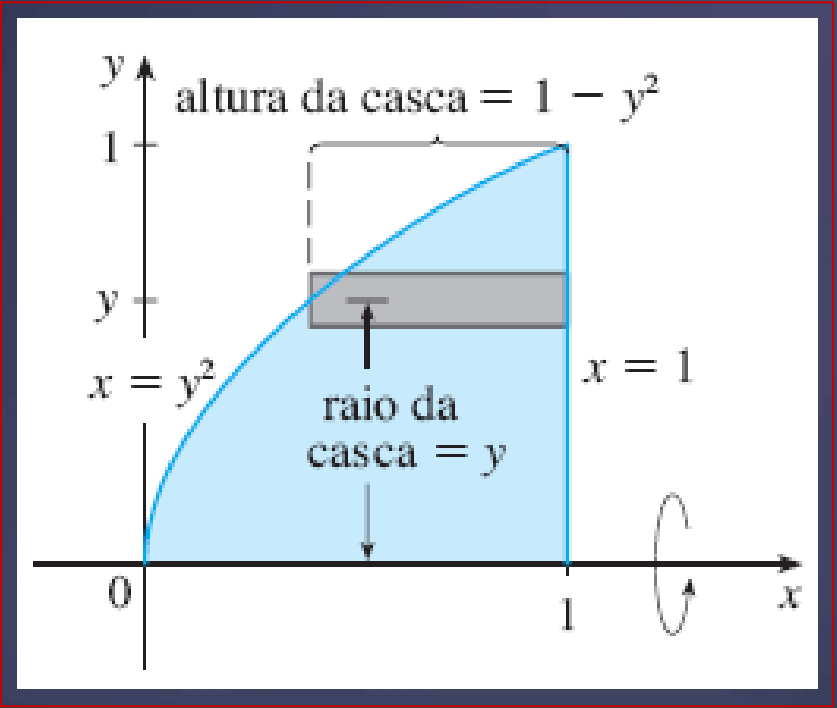
- Como o exemplo a seguir mostra, o método das cascas cilíndricas funciona bem também quando giramos ao redor do eixo *x*.
  - Simplesmente temos de desenhar um diagrama para identificar o raio e a altura da casca.

MÉTODO DAS CASCAS CILÍNDRICAS Exemplo 2

- Use cascas cilíndricas para encontrar o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo *x* da região sob a curva $y = \sqrt{x}$ de 0 a 1.
  - Esse problema foi resolvido usando-se os discos no Exemplo 2 da Seção 6.2.

MÉTODO DAS CASCAS CILÍNDRICAS   Exemplo 3

- Para usar as cascas reescrevemos $y = \sqrt{x}$ como $x = y^2$.
  - Pela rotação em torno do eixo *x*, vemos que uma casca típica tem raio *y*, circunferência $2\pi y$, e altura $1 - y^2$.



MÉTODO DAS CASCAS CILÍNDRICAS Exemplo 3

- Então, o volume é:

$$V = \int_0^1 (2\pi y)\left(1 - y^2\right) dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 (y - y^3) dy$$

$$= 2\pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

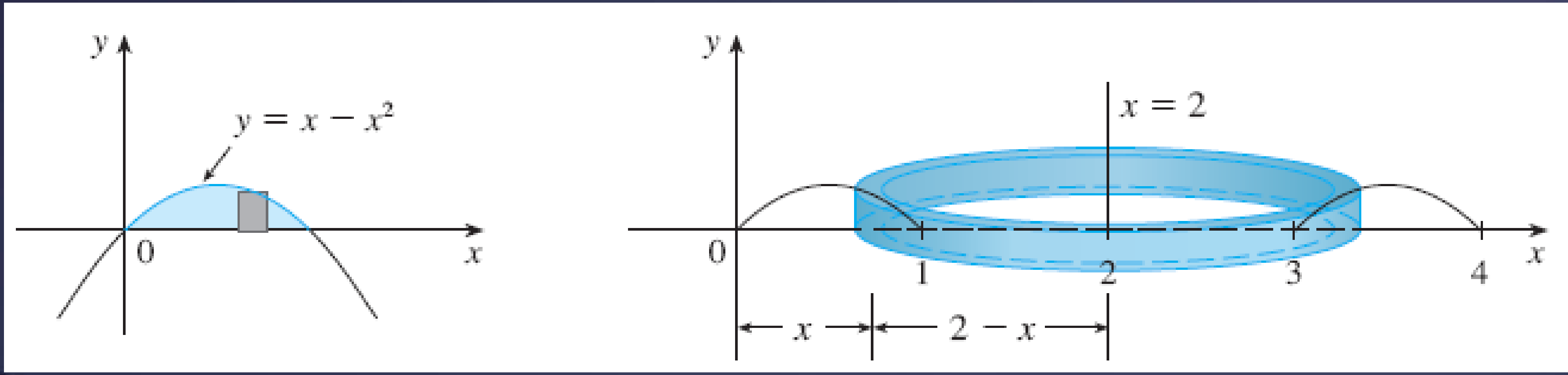
- Neste exemplo, o método do disco foi mais simples.

MÉTODO DAS CASCAS CILÍNDRICAS   Exemplo 4

- Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada por $y = x - x^2$ e $y = 0$ em torno da reta $x = 2$.

MÉTODO DAS CASCAS CILÍNDRICAS Exemplo 4

- A Figura mostra a região e a casca cilíndrica formada pela rotação em torno da reta $x = 2$, esta tem raio $2 - x$, circunferência $2\pi(2 - x)$, e altura $x - x^2$.



CENGAGE Learning

MÉTODO DAS CASCAS CILÍNDRICAS Exemplo 4

- O volume do sólido é:

$$V = \int_1^0 2\pi(2-x)\left(x-x^2\right)dx$$

$$= 2\pi\int_1^0 \left(x^3 - 3x^2 + 2x\right)dx$$

$$= 2\pi\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$