21. De uma população $X \sim N(50, 100)$ retira-se uma amostra de dez elementos e calculam-se os valores $\bar{X}$, S e o respectivo valor de t.

a. Se $P\left(|\bar{X} - 50| < \frac{tS}{\sqrt{10}}\right) = 90\%$, encontre o valor de t.

b. Se $\bar{X} = 48$ e $S^2 = 120$, qual a probabilidade de encontrar um valor de t menor ou igual produzido por esta amostra?

c. Se $S^2 = 120$, calcule encontre $P\left(|\bar{X} - 50| < 2\right)$

Solução:

De acordo com o enunciado temos X tem distribuição Normal com média $\mu = 50$ e

desvio padrão $\sigma = 10$.
Uma amostra de tamanho n é retirada.
Sabemos que

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Assim,

$$Z = \frac{\sqrt{n}\left(\bar{X} - \mu\right)}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

Sabemos que

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

Além disso $\bar{X}$ e S^2 são independentes.

Fato Importante Se $Z \sim N(0, 1)$ e $V \sim \chi^2(r)$, independentes
então

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{r}}} \sim t(r).$$

Assim,

$$\frac{V}{r} = \frac{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}{n-1} = \frac{S^2}{\sigma^2}.$$

$$\sqrt{\frac{V}{r}} = \frac{S}{\sigma}.$$

Finalmente,

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{r}}} = \frac{\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}}{\sqrt{\frac{S}{\sigma}}} = \frac{\sqrt{n}\left(\bar{X}-\mu\right)}{S} \sim t(n-1).$$

Vamos responder: item **a**:

Como $n = 10$ e $\mu = 50$ temos que

$$T = \frac{\sqrt{n}\left(\bar{X}-50\right)}{S} \sim t(9).$$

$$P\left(|\bar{X}-50| < \frac{tS}{\sqrt{10}}\right) = 0,90$$

$$P\left(\frac{|\bar{X}-50|}{\frac{S}{\sqrt{10}}} < t\right) = 0,90$$

$$P\left(|T| < t\right) = 0,90$$

Note que

$$P(T \leq t) = 0,95$$

e t é o nonagésimo quinto percentil de $T \sim t(9)$.

Olhando a tabela V com $p = 10\%$ e $\nu = 9$ temos:

$$P_{95} = 1,883.$$

```
> t=qt(0.95,n-1);t;round(t,3)
[1] 1.833113
[1] 1.833
>
```

Vamos responder: item **b**:

$$p_b = P\left(\bar{X} \leq 48\right) = P\left(\bar{X}-50 \leq 48-50\right)$$

$$p_b = P\left(\bar{X}-50 \leq -2\right)$$

Note que

$$\sqrt{S^2/n} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} = 2 \times 1,732.$$

Assim

$$p_b = P\left(\frac{\bar{X}-50}{S/\sqrt{n}} \leq -\frac{2}{2 \times 1,732}\right)$$

$$p_b = 0,2889$$

```
n=10;xb=48;mu=50;s2=120;s=sqrt(120);s
[1] 10.95445
> s/sqrt(n)
[1] 3.464102
> tcal=(xb-mu)/(s/sqrt(n));tcal
[1] -0.5773503
> pb=pt(tcal,n-1);pb
[1] 0.2889289
>
```

Para dar a resposta do livro $\bar{X} = 47,85$ e não 48:

```
> qt(0.275,9)
[1] -0.6210023
> w=qt(0.275,9);w
[1] -0.6210023
> xb=50+w*s/sqrt(n);xb
[1] 47.84878
>
```

Vamos responder: item **c**:

Seja

$$p_c = P\left(|\bar{X} - 50| < 2\right) = P\left(|T| < 0,577\right)$$

Usando a tabela V notamos:

$$0,543 < 0,577 < 0,703$$

Assim

$$P(|T| < 0,543) = 1 - 0,60 = 0,40.$$

$$P(|T| < 0,703) = 1 - 0,50 = 0,50.$$

e

$$0,40 < P\left(|T| < 0,577\right) < 0,50.$$

$$\frac{S^2}{n} = \frac{120}{10} = 12$$

$$t_{cal} = \frac{2}{\sqrt{12}} = 0,577$$

Logo

$$0,40 < pc < 0,50.$$

Vamos calcular a probabilidade exata usando o R:

```
> tcal=2/(s/sqrt(n));tcal
[1] 0.5773503
>
> pc1=pt(tcal,n-1);pc1
[1] 0.7110711
>
> pc2=pt(-tcal,n-1);pc2
[1] 0.2889289
>
> pc=pc1-pc2;pc;round(pc,3)
[1] 0.4221421
[1] 0.422
>
```