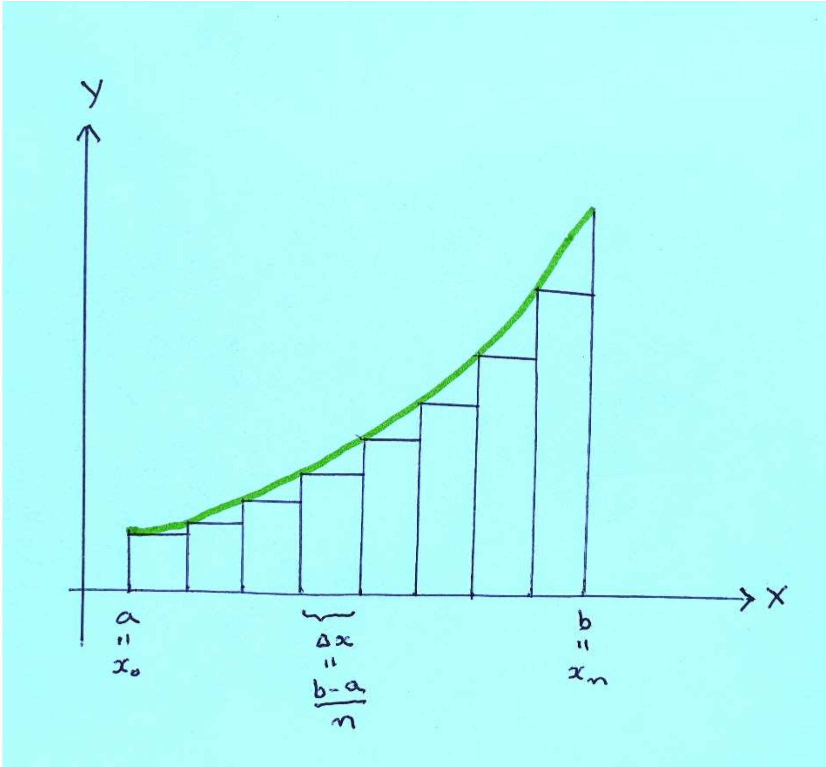
Integral Definida

Área

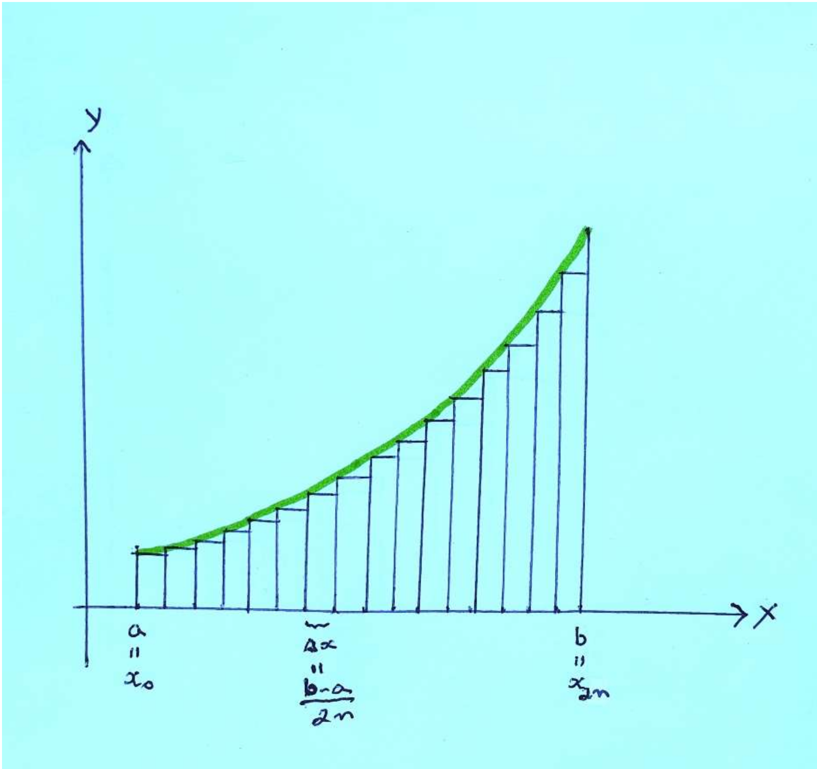
Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Suponha que $fx) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Seja R a região limitada pelo gráfico de f, pelo eixo-x e pelas retas $x = a$ e $x = b$.
Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos. Para simplificar, vamos considerar estes subintervalos de mesmo comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Denotemos os extremos destes intervalos por $x_o, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$, onde $x_o = a$, $x_1 = a + \Delta x$, $x_2 = a + 2\Delta x, \dots, x_i = a + i\Delta x, \dots, x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x$, $x_n = b$.
Seja $[x_{i-1}, x_i]$ o i-ésimo intervalo.
Como f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, ela é contínua em cada um dos subintervalos. Pelo teorema do valor extremo existe, para cada i, um número c_i no subintervalo , para o qual f tem um valor mínimo absoluto nesse intervalo.

Considere n retângulos, cada um com base de comprimento Δx unidades e altura de $f(c_i)$ unidades. A soma das áreas dos n retângulos será então $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$

Temos então $A \geq S_n$



Se, ao invés de n, dividirmos o intervalo $[a, b]$ em $2n$ subintervalos teremos $2n$ retângulos com bases de comprimento igual à metade do comprimento das bases dos retângulos anteriores. Observando a soma das áreas destes novos retângulos, vemos que está mais próxima do número que desejamos para representar a área da região R.



Quando aumentamos o número de subdivisões do intervalo $[a, b]$, Isto é, quando n cresce, o valor de S_n aumenta e valores sucessivos de $S_n$diferem um outro por quantidades que se tornam arbitrariamente pequenas. Isto é provado no curso de Cálculo Avançado, num teorema que afirma que se for contínua em $[a, b]$, então, quando n cresce indefinidamente, os valores de S_n tendem a um limite.

Definimos este limite como sendo a área A da região R. Mais precisamente definimos

A = $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, ou seja A = $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x$

Observação 1

Na definição anterior consideramos retângulos inscritos na região R. Poderíamos ter considerado retângulos circunscritos. Neste caso tomaríamos como alturas dos retângulos os valores máximos absolutos de f em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ e a existência deste valor máximo absoluto também é garantida pelo teorema do valor extremo. A soma das áreas dos retângulos circunscritos serão no mínimo tão grandes quanto a medida da área da região R e mostra-se, no curso de cálculo avançado, que o limite destas somas decresce indefinidamente quando n cresce e é exatamente o valor do limite obtido no caso dos retângulos se inscritos.

Observação 2

Na verdade, mostra-se no curso de cálculo avançado, que a medida da altura do retângulo do i-ésimo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ poderia ser tomada como sendo o valor funcional em qualquer número desse intervalo e o limite da soma das medidas das áreas do retângulo continuaria o mesmo, não importando os números escolhidos.

A definição de área que apresentamos, isto é , A = $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x$, é um caso particular de um tipo de limite que nos leva a integral definida.

Exemplo

Ache a área da região limitada pelo gráfico da função $f(x) = \mathrm{x}$, o eixo x e a reta $x = 2$, considerando retângulos inscritos.

Solução

Dividirmos o intervalo $[0,2]$ em n subintervalos de comprimento $\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$

Tomamos então $x_o = 0$, $x_1 = \Delta x$,$x_2 = 2\Delta x$, … ,$x_{i-1} = (i-1)\Delta x$, $x_i = i\Delta x$, … , $x_{n-1} = (n-1)\Delta x$, $x_n = 2$.

Como f é crescente no intervalo $[0,2]$, o valor mínimo absoluto de f no subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ é $f(x_i)$

Então A = $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\, \Delta x$

Como $x_i = i\Delta x$ e $f(x) = \mathrm{x}$ temos $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} f(i\Delta x)\Delta x =$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (i\Delta x)\ \Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{i}(\Delta x)^2 =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{i}\left(\frac{2}{n}\right)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} i.\frac{4}{n^2} = \frac{4}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{4}{n^2}.\frac{n(n-1)}{2} =$$

$$\frac{2(n^2-n)}{n^2} = \frac{2n^2-2n}{n^2} = 2 - \frac{2}{n}$$

Daí A = $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(2 - \frac{2}{n}\right) = 2$

Exemplo

Ache a área da região limitada pelo gráfico da função $f(x) = x^2$, o eixo x e a reta $x = 3$, considerando retângulos inscritos.

Solução

Dividirmos o intervalo $[0,3]$ em n subintervalos de comprimento $\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$

Tomamos então $x_o = 0$, $x_1 = \Delta x$,$x_2 = 2\Delta x$, … ,$x_{i-1} = (i-1)\Delta x$, $x_i = i\Delta x$, … , $x_{n-1} = (n-1)\Delta x$, $x_n = 3$.

Como f é crescente no intervalo $[0,3]$, O valor mínimo absoluto de f no subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ é $f(x_i)$

Então A = $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x$

Como $x_i = i\Delta x$ e $f(x) = x^2$ temos $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x =$

$$\sum_{i=0}^{n-1}((i\Delta x)^2\ \Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} i^2(\Delta x)^3 =$$

$\sum_{i=0}^{n-1} i^2 \left(\frac{3}{n}\right)^3 = \sum_{i=0}^{n-1} i^2 \frac{27}{n^3} = \frac{27}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 =$

$\frac{27}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{27}{n^3} . \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{9}{2} . \frac{2n^3+3n^2+n}{n^3} = \frac{9}{2} . \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$

Daí A = $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\, \Delta x = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{2} . \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{9}{2} \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) =$

$\frac{9}{2}(2 + 0 + 0) = 9$

Outra solução

Ache a área da região limitada pelo gráfico da função $f(x) = x^2$, o eixo x e a reta $x = 3$, considerando retângulos circunscritos.

Solução

Dividirmos o intervalo $[0,3]$ em n subintervalos de comprimento $\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$

Tomamos então $x_o = 0$, $x_1 = \Delta x$,$x_2 = 2\Delta x$, … ,$x_{i-1} = (i-1)\Delta x$, $x_i = i\Delta x$, … , $x_{n-1} = (n-1)\Delta x$, $x_n = 3$.

Como f é crescente no intervalo $[0,3]$, O valor máximo absoluto de f no subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ é $f(x_i)$

Então A = $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x$

Como $x_i = i\Delta x$ e $f(x) = x^2$ temos $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x =$

$$\sum_{i=1}^{n} (i\Delta x)^2\ \Delta x = \sum_{i=1}^{n} i^2 (\Delta x)^3 =$$

$\sum_{i=1}^{n} i^2 \left(\frac{3}{n}\right)^3 = \sum_{i=1}^{n} i^2 \frac{27}{n^3} = \frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 =$

$\frac{27}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{27}{n^3} . \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{27}{n^3} . \frac{n(2n^2+3n+1)}{6} = \frac{9}{2} . \frac{2n^2+3n+1}{n^2} =$

$\frac{9}{2} . \left(2 + \frac{3}{\mathrm{n}} + \frac{1}{n^2}\right) =$

Daí A = $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\, \Delta x = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{9}{2} . \left(2 + \frac{3}{\mathrm{n}} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{9}{2} \lim\limits_{n\to\infty} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) =$

$\frac{9}{2}(2 + 0 + 0) = 9$

A Integral Definida

Vamos considerar agora uma função f definida no intervalo fechado $[a, b]$.
Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, escolhendo arbitrariamente $n - 1$ pontos entre a e b. Sejam $x_o = a$, $x_n = b$, e $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ os pontos intermediários, com $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$.
Como os pontos não são necessariamente equidistantes os comprimentos dos subintervalos não são necessariamente iguais.
Seja $\Delta_i x$ o comprimento do i-ésimo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$
O conjunto de todos estes subintervalos é chamado de partição de $[a, b]$.
Denotaremos esta partição por Δ e denotaremos por $|\Delta|$ o comprimento do maior (ou dos maiores) subintervalo(s) da partição. $|\Delta|$ será chamado de norma da partição.
Escolhemos um ponto arbitrário ξ_i em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$
A soma $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x$ é chamada de soma de Gauss.

Definição

Seja f uma função cujo domínio contém o intervalo fechado $[a, b]$. Dizemos que f é integrável em $[a, b]$, se existir um número L satisfazendo a seguinte condição:

Para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que toda partição Δ para a qual $|\Delta| < \delta$, com $\xi_i \epsilon [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2, \ldots, n$, temos $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x \, - L\right| < \epsilon$

Nestas condições escrevemos $\lim\limits_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x = L$

Definição

Seja f uma função definida no intervalo fechado $[a, b]$. Então a integral definida de f de a até b, denotada por $\int_a^b f(x)dx$, é definida como $\lim\limits_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x$, se o limite existir.

Dizer que "f é integrável em $[a, b]$" é equivalente a dizer que "a integral definida $\int_a^b f(x)dx$ existe", isto é, $\lim\limits_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x$ existe.

Teorema

Se uma função for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então ela é integrável em $[a, b]$.

Definição

Seja f uma função definida no intervalo fechado $[a, b]$ e $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$.

Seja R a região limitada pelo gráfico de f, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$, Então a medida da área A da região R é dada por A =

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x = \int_a^b f(x) dx.$$

Definição

Se $a > b$ então, se $\int_b^a f(x)dx$ existir, definimos $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Definição

Se f está definida em a, definimos $\int_a^a f(x)dx = 0$

Propriedades da Integral definida

Teorema

Se Δ for qualquer partição do intervalo fechado $[a, b]$, então $\lim\limits_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x = b - a$

Teorema

Se f está definida no intervalo fechado $[a, b]$ e se $\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x$ existe, onde Δ é qualquer partição de $[a, b]$, então se k for uma constante qualquer,

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\, \Delta_i x = k \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x$$

Teorema

Se k for uma constante qualquer, então

$$\int_a^b k dx = k(b-a)$$

Teorema

Se f for uma função integrável no intervalo fechado $[a, b]$ e se k for uma constante qualquer, então $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

Teorema

Se as funções f e g forem integráveis no intervalo fechado $[a, b]$ então $f + g$ será integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Teorema

Se as funções $f_1, f_2, \ldots, f_n$ forem integráveis no intervalo fechado $[a, b]$ então $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ será integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)\ )dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)\ )dx$

Teorema

Se a função f for integrável nos intervalos fechados $[a, b]$,$[a, c]$ e $[c, b]$,onde $a < c < b$, então $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Teorema

Se a função f for integrável num intervalo fechado contendo os números $a, b\ e\ c$, não importando a ordem de $a, b\ e\ c$, então $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Teorema

Se as funções f e g forem integráveis no intervalo fechado $[a, b]$ e se $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Teorema

Se a função f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Se m e M são respectivamente os valores mínimo e máximo absolutos da função f em $[a, b]$, então

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Teorema do valor médio para Integrais

Se a função f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, existe um número c em $[a, b]$ tal que $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

Definição

Se a função f for integrável no intervalo fechado $[a, b]$, o valor médio de f em $[a, b]$ é $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$.

Teorema Fundamental do Cálculo

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$.

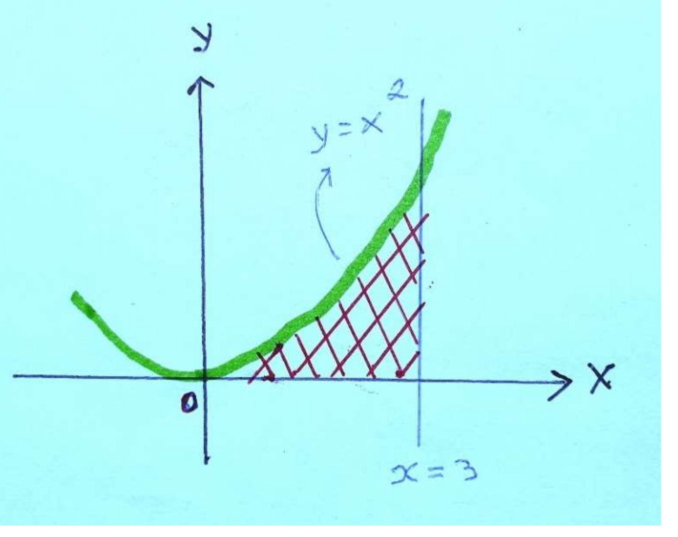
1ª Parte: Se a função G é definida por $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ para todo x em $[a, b]$, então G é uma antiderivada de f em $[a, b]$, isto é, $G'(x) = f(x)$ para todo x em $[a, b]$.

2ª Parte: Se F é qualquer antiderivada de f em $[a, b]$, então $\int_a^b f(t)dt = Fb) - F(a)$.

Exemplos

1. Ache a área da região limitada pelo gráfico da função $f(x) = x^2$, o eixo x e a reta $x = 3$.

Solução



Temos A $= \int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 x^2 dx$

Como a função $F(x) = \frac{x^3}{3}$ é uma antiderivada da função $f(x) = x^2$ temos

A $= \int_0^3 x^2 dx = F(3) - F(0) = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9$

Observação

Usaremos a notação $F(x)\Big|_a^b$ para representar $F(b) - F(a)$

Com esta notação, temos

A $= \int_0^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9$

2. Encontre a área da região limitada por $y = x^2$ e $y = x + 2$

Solução:

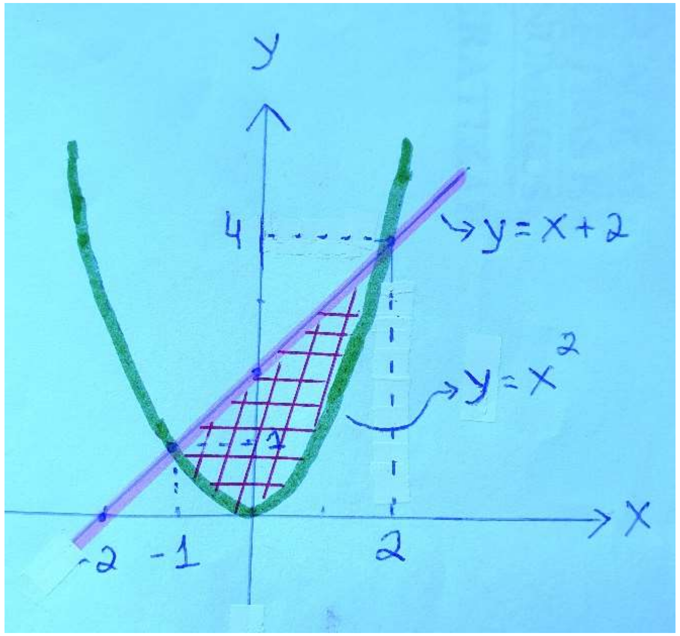
Inicialmente encontramos as abscissas dos pontos de interseção dos dois gráficos.

Estas abscissas são as soluções da equação $x^2 = x + 2$

$x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

Daí temos $x = -1$ ou $x = 2$



Então $A = \int_{-1}^{2}(x + 2 - x^2)dx =$

$\left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2} = \left(\frac{2^2}{2} + 2.2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 2.(-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right) =$

$\left(2 + 4 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$