Sequências infinitas de termos constantes

Definição

Uma sequência é uma função cujo domínio é o conjunto de todos os inteiros positivos.
Como o domínio de uma sequência é sempre o mesmo os elementos da imagem podem ser usados para representar a sequência.
Os números da imagem são chamados elementos da sequência e a imagem de n é denotada por a_n.
A sequência $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ será representada por $\{a_n\}$.

Exemplos

1) Os elementos da sequência $\left\{\frac{1}{3^n}\right\}$ são $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \ldots, \frac{1}{3^n}, \ldots$
2) Os elementos da sequência $\{3^n\}$ são $3, 3^2, \ldots, 3^n, \ldots$

Definição

A sequência $\{a_n\}$ tem limite L se dado $\in > 0$ existir $N > 0$ tal que, se n for um inteiro positivo maior que N, então $|a_n - L| < \in$. Neste caso escrevemos $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$

Teorema 1

Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ e f estiver definida para todo inteiro positivo, então $\lim_{n\to+\infty} f(n) = L$ quando n for inteiro positivo qualquer.

Definição

Se a sequência $\{a_n\}$ tiver um limite dizemos que ela é convergente e converge para o limite. Se a sequência não tiver um limite, dizemos que ela é divergente.

Exemplos

1. A sequência $\left\{\frac{1}{3^n}\right\}$ é convergente pois, considerando $f(x) = \frac{1}{3^x}$, temos $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3^x} = 0$ e portanto $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} = 0$
2. A sequência $\{(-1)^n\}$ é divergente.
   De fato, os elementos da sequência $\{(-1)^n\}$ são $-1,1,-1,1,\dots,(-1)^n,\dots$

Suponha que esta sequência seja convergente e tem limite L. Então, dado $\in > 0$ existe $N > 0$ tal que, se n for um inteiro maior que N, então $|a_n - L| < \in$.

Tomando $\in = 1$, temos que existe $N > 0$ tal que, se n for um inteiro maior que N, então $|a_n - L| < 1$.

Se n for par, temos $|1 - L| < 1$ e, se n for ímpar, temos $|-1 - L| < 1$.

$|1 - L| < 1 \Leftrightarrow |L - 1| < 1 \Leftrightarrow -1 < L - 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < L < 2$.

$|-1 - L| < 1 \Leftrightarrow |L + 1| < 1 \Leftrightarrow -1 < L + 1 < 1 \Leftrightarrow -2 < L < 0$.

Assim devemos ter $0 < L < 2$ e $-2 < L < 0$, o que é uma contradição.

Logo a sequência diverge.

Teorema 2

Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ forem convergentes e se c for uma constante, então

i) $\lim\limits_{n \to +\infty} c\, a_n = c \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$

ii) $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n \pm \lim\limits_{n \to +\infty} b_n$

iii) $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n . b_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n . \lim\limits_{n \to +\infty} b_n$

iv) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n \to +\infty} a_n}{\lim\limits_{n \to +\infty} b_n}$, se $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n \neq 0$ e $b_n \neq 0$ para todo n.

Definição

Dizemos que uma sequência $\{a_n\}$ é crescente se $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n e dizemos que $\{a_n\}$ é decrescente se $a_n \geq a_{n+1}$ para todo

n. Chamamos de monótona, uma sequência que é crescente ou que é decrescente.

Exemplos

1. A sequência $\left\{\frac{1}{3^n}\right\}$ é decrescente pois $\frac{1}{3^n} > \frac{1}{3^{n+1}}$
2. A sequência $\{3^n\}$ é crescente pois $3^n < 3^{n+1}$

Definição

O número m é chamado limitante inferior da sequência $\{a_n\}$ se $m \leq a_n$ para todo inteiro positivo n e o número M é chamado limitante superior da sequência $\{a_n\}$ se $M \geq a_n$ para todo inteiro positivo n.

Definição

Se A for um limitante inferior da sequência $\{a_n\}$ e se A satisfizer a propriedade de que $A \geq B$ para todo limitante inferior B então A é chamado limitante inferior máximo da sequência.

Analogamente se A for um limitante superior da sequência $\{a_n\}$ e se A satisfizer a propriedade de que $A \leq B$ para todo limitante superior B então A é chamado limitante superior mínimo da sequência.

Exemplos

1. Todos os elementos da sequência $\left\{\frac{1}{3^n}\right\}$ são menores ou iguais a $\frac{1}{3}$. Logo qualquer número maior ou igual a $\frac{1}{3}$ é um limitante superior para esta sequência e $\frac{1}{3}$ é o limitante superior mínimo.

2. Todos os elementos da sequência $\{3^n\}$ são maiores ou iguais a 3. Logo qualquer número menor ou igual a 3 é um limitante inferior para esta sequência e 3 é o limitante inferior máximo.

Definição

Dizemos que uma sequência é limitada se, e somente se, ela tiver limitantes superior e inferior.

Exemplo

A sequência $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ é limitada, pois $0 < \frac{1}{n} \leq 1$, e portanto 0 é um limitante inferior e 1 é um limitante superior.

Teorema 3

Uma sequência monótona limitada é convergente.

Exemplo

Já vimos que a sequência $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ é limitada. Como $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ ela é monótona. O teorema 3 nos garante que ela é convergente.

Teorema 4

Seja $\{a_n\}$ uma sequência crescente e suponhamos que A seja um limitante superior da sequência. Então $\{a_n\}$ será convergente e $\lim_{n \to +\infty} a_n \leq A$

Teorema 5

Seja $\{a_n\}$ uma sequência decrescente e suponhamos que A seja um limitante inferior da sequência. Então $\{a_n\}$ será convergente e $\lim_{n \to +\infty} a_n \geq A$

Teorema 6

Uma sequência monótona convergente é limitada