18. De uma população $X \sim N(50, 100)$ retira-se uma amostra de dez elementos e calculam-se os valores $\hat{\sigma}^2$ e $S^2$. Encontre os valores pedidos abaixo, com a maior precisão possível.

a. Se $P\left(\hat{\sigma}^2 > a\right) = 10\%$, encontre o valor de $a$.

b. Sabendo que $P(S^2 < a) = 5\%$ e $P(S^2 > b) = 5\%$, encontre $a$ e $b$ ,

c. Se $P(S^2 < 163,16) = \alpha$, encontre $\alpha$.

d. Se $P(S^2 > 100) = \alpha$, encontre $\alpha$.

e. Se $P(S^2 < 18 = \alpha$, encontre $\alpha$.

f. Se o valor observado de $S^2$ foi de 180, qual a probabilidade de encontrar uma amostra que produza um $S^2$ maior ou igual do que o observado:

**Solução:**

De acordo com o enunciado temos $X$ tem distribuição Normal com média $\mu = 50$ e

desvio padrão $\sigma = 10$.

Uma amostra de tamanho $n = 10$ é retirada. Sabemos que

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

Como $n = 10$ e $\sigma^2 = 100$ temos:

$$V = \frac{9S^2}{100} \sim \chi^2(9).$$

Note ainda:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n} = \frac{(n-1)S^2}{n}.$$

Para $n = 10$ temos:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{9S^2}{10}.$$

Vamos responder ao item **a**:

$$P\left(\hat{\sigma}^2 > a\right) = 0,10.$$

Vamos colocar na forma:

$$P\left(\hat{\sigma}^2 > a\right) = 0,10.$$

$$P\left(\frac{9S^2}{10} > a\right) = 0,10.$$

$$P\left(S^2 > \frac{10}{9}\,a\right) = 0,10.$$

Devemos achar o percentil 90 da distribuição de $S^2$.

Vamos transformar para a qui-quadrado $V$:

$$P\left(\frac{9}{100}S^2 > \frac{9}{100}\,\frac{10}{9}\,a\right) = 0,10.$$

$$P(V > \frac{a}{10}) = 0,10.$$

$$\frac{a}{10} = P_{90}.$$

$$a = 10 \times P_{90} = 146,84.$$

Olhando a tabela IV com $p = 10\%$ e $\nu = 9$ temos:

$$P_{90} = 14,684.$$

```
 mu=50;sigma=10
> n=10
>
> P90=qchisq(0.90,n-1);P90
[1] 14.68366
>
> a=sigma*P90;a; round(a,2)
[1] 146.8366
[1] 146.84
>
```

Vamos responder: item **b**:

$a = P5$ é o quinto percentil de $S^2$.

$$P(S^2 < a) = 0,05$$

$$P(\frac{(n-1)}{\sigma^2}\;S^2\;<\frac{9}{100}\,a) = 0,05$$

$$P\left(V < \frac{9a}{100}\right) = 0,05$$

Olhando a tabela IV com $p = 95\%$ e $\nu = 9$ temos:

$$P_5 = 3,325.$$

Assim

$$\frac{9a}{100} = 3,325,$$

$$a = \frac{100 \times 3,325}{9} = 36,946.$$

```
> P5=qchisq(0.05,n-1);P5;round(P5,3)
[1] 3.325113
[1] 3.325
>
> a=100*P5/9;a;round(a,3)
[1] 36.9457
[1] 36.946
>
```

$b = P_{95}$ é o nonagésimo quinto percentil de $S^2$.

$$P(S^2 > b) = 0,05$$

$$P(\frac{(n-1)}{\sigma^2}\ S^2\ > \frac{9}{100}\ b) = 0,05$$

$$P\left(V > \frac{9b}{100}\right) = 0,05$$

Olhando a tabela IV com $p = 5\%$ e $\nu = 9$ temos:

$$P_{95} = 16,919.$$

Assim

$$\frac{9b}{100} = 16,919$$

$$b = \frac{100 \times 16,919}{9} = 187,989.$$

```
>
> P95=qchisq(0.95,n-1);P5;round(P95,3)
[1] 3.325113
[1] 16.919
>
> b=100*P95/9;b;round(b,3)
[1] 187.9886
[1] 187.989
>
```

Vamos responder: item **c**:

$$P\left(S^2 < 163,16\right) = P\left(\frac{(n-1)}{\sigma^2}\, S^2 \; < \frac{9}{100}\, 163,16\right) = \alpha.$$

$$\alpha = P\left(V < 14,684\right)$$

$$1 - \alpha = P\left(V \geq 14,684\right) = 0,90$$

$$\alpha = 0,10.$$

Olhando a tabela IV com $v = 14,684$ e $\nu = 9$ temos:
temos

$$p = 0,90$$

$$\alpha = 1 - p = 0,10.$$

```
>
> n=10;sigma=10
> v=((n-1)/sigma^2)*163.16;v;round(v,3)
[1] 14.6844
[1] 14.684
> p=pchisq(v,n-1);p;round(p,2)
[1] 0.9000222
[1] 0.9
>
>
> alfa=1-p;alfa;round(alfa,2)
[1] 0.0999778
[1] 0.1
>
```

Vamos responder: item **d**:

$$P\left(S^2 > 100\right) = P\left(\frac{(n-1)}{\sigma^2}\, S^2 \;> \frac{9}{100}\, 100\right) = P\left(V > 9\right)$$

Olhando a tabela IV percebemos que o valor 9 não está listado. Procuramos dois valores $v_1$ e $v_2$ tais que:

$$v_1 < 9 < v_2$$

de modo que $v_2 - v_1$ seja o menor possível.
Assim:

$$P(V \geq 8,343) = 0,50 \quad P(V \geq 10,656) = 0,30.$$

Logo,

$$P(V \geq 10,656) < P(S^2 > 9) < P(V \geq 8,343)$$

Finalmente,

$$0,30 < \alpha < 0,50.$$

A probabilidade exata só usando o **R**.

```
> s2=100
>
> vo=(n-1)*s2/sigma^2;vo
[1] 9
>
> alfa=pchisq(vo,n-1,lower.tail=F);alfa
[1] 0.4372742
>
> ###pela tabela temos:
>
> p1=1-pchisq(8.343,n-1);p1
[1] 0.4999835
>
> p2=1-pchisq(10.656,n-1);p2
[1] 0.3000271
>
> alfa >p2
[1] TRUE
> alfa >p1
[1] FALSE
>
```

Vamos responder: item **e**:

$$P\left(S^2 < 18\right) = P\left(\frac{(n-1)}{\sigma^2}\,S^2\ < \frac{9}{100}\,18\right) = P\left(V < 1,62\right)$$

Pela tabela IV temos:

$$P(V < 2,088) = 0,01.$$

Assim

$$\alpha = P\left(V < 1,62\right) < P(V < 2,088) = 0,01.$$

A probabilidade exata só usando o **R**:

```
> alfa=pchisq(1.62,n-1);alfa
[1] 0.003845217
>
> pchisq(2.088,n-1)
[1] 0.01000175
>
> alfa <pchisq(2.088,n-1)
[1] TRUE
>
```

Vamos responder: item **f**:

$$P\left(S^2 \geq 180\right) = P\left(\frac{(n-1)}{\sigma^2}\,S^2\ \geq \frac{9}{100}\,180\right) = P\left(V \geq 16,2\right)$$

Pela tabela IV temos:

$$P\left(V \geq 16,919\right) < P\left(V \geq 16,2\right) < P\left(V \geq 14,614\right)$$

$$0,05 < P\left(V \geq 16,2\right) < 0,10.$$

a probabilidade exata é dada por:

```
> nd=pchisq(16.2,n-1,lower.tail=F);nd
[1] 0.06282072
>
```

Sabemos que a distribuição amostral de $S^2 \sim Gama(r, \lambda)$

$$r = \frac{n-1}{2} = 4,5$$

$$\lambda = \frac{n-1}{2\sigma^2} = \frac{9}{200} = 0,045.$$

Vamos responder novamente ao item **f**:

```
>
> nd=pchisq(16.2,n-1,lower.tail=F);nd
[1] 0.06282072
>
>
> r=(n-1)/2;r
[1] 4.5
> lambda=(n-1)/(2*sigma^2);lambda
[1] 0.045
>
> p=pgamma(180,r,lambda,lower.tail=F);p
[1] 0.06282072
>
```