3.2. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória X, com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1}\, I_A(x), \quad A = [0,1]; \;\; \theta > 0$$

a. Encontre o estimador de máxima verossimilhança de θ.
b. Encontre o estimador de máxima verossimilhança de $g(\theta) = \frac{\theta}{1+\theta}$.

Solução:

A função de verossimilhança é dada por:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta x_i^{\theta-1}$$

O logaritmo da função de verossimilhança é dado por:

$$l(\theta) = n\log(\theta) - (\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\log(x_i)$$

A derivada primeira de $l(\theta)$ é dada por:

$$l'(\theta) = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n}\log(x_i)$$

A derivada segunda de $l(\theta)$ é dada por:

$$l'(\theta) = -\frac{n}{\theta^2} < 0.$$

De $l'(\theta) = 0$ temos:

$$\hat{\theta}_{MV} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} -\log(X_i)} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} Y_i} = \frac{n}{S},$$

em que $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ é uma amostra aleatória de $Y = -\log(X) \sim Exp(\theta)$.

Vamos achar a lei de Y através de sua geradora de momentos:

$$M_Y(t) = E\left(e^{tY}\right) = E\left(e^{-t\log(X)}\right) = E\left(e^{\log(X^{-t})}\right) = E(X^{-t}).$$

$$M_Y(t) = \int_0^1 x^t\, \theta\, x^{\theta-1}\, dx = \theta \int_0^1 x^{(\theta-t)-1}\, dx$$

Para

$$\theta - t > 0 \quad ou \quad t < \theta$$

$$M_Y(t) = \theta\, \frac{x^{\theta-t}}{\theta-t}\,\Big|_0^1 = \frac{\theta}{\theta-t}, \;\; t < \theta$$

Assim

$$Y \sim Exp(\theta), \theta > 0.$$

e

$$S \sim Gama(n, \theta).$$

Para responder o item ii vamos utilizar a propriedade da invariância , isto é,

$$T_1 = \widehat{g(\theta)} = g\left(\hat{\theta}\right)$$

$$T_1 = \frac{\frac{n}{S}}{1 + \frac{n}{S}} = \frac{n}{n+S}$$

Para responder o item iii

Sabemos que se o tamanho da amostra é grande e as condições de regularidade estão satisfeitas temos:

$$\sqrt{n}\ \left(\hat{\theta} - \theta\right) \overset{a}{\sim} N\left(0, \frac{1}{I_F(\theta)}\right).$$

Qual a distribuição exata do EMV

$$T = \frac{n}{S}$$

Sabemos que

$$S \sim Gama(n, \theta)$$

$$f(X|\theta) = \theta\ X^{\theta-1}.$$

Vamos calcular a informação de Fisher:

$$\log\left(f(X|\theta)\right) = \log\left(\theta\right) + (\theta - 1)\log(X).$$

$$V = \frac{\partial \log f(X;\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{\theta} + log(X) = \frac{1}{\theta} - (-log(X)) = \frac{1}{\theta} - Y.$$

Note que:

$$E(V) = \frac{1}{\theta} - E(Y) = \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta} = 0.$$

$$Var(V) = I_F(\theta) = Var(\frac{1}{\theta} - Y) = Var(-Y) = Var(Y) = \frac{1}{\theta^2}.$$

Vamos explicar com detalhes o último resultado.

A informação de Fisher é dada por:

$$I_F(\theta) = \frac{1}{\theta^2}.$$

$$\sqrt{n}\ \left(\hat{\theta} - \theta\right) \overset{a}{\sim} N\left(0, \frac{1}{1/\theta^2}\right) = N\left(0, \theta^2\right).$$

Po outro lado temos:

$$\sqrt{n}\ \left(g\left(\hat{\theta}\right) - g(\theta)\right) \overset{a}{\sim} N\left(, \frac{(g'(\theta))^2}{\theta^2}\right) = N\left(0, \theta^2\right).$$

De

$$g(\theta) = \frac{\theta}{1+\theta}$$

temos

$$g^{'}(\theta) = \frac{1}{(1+\theta)^2}.$$

$$\sqrt{n}\ \left(g\left(\hat{\theta}\right) - g(\theta)\right) \overset{a}{\sim} N\left(0, \frac{(g'(\theta))^2}{1/\theta^2}\right).$$

$$\sqrt{n}\ \left(g\left(\hat{\theta}\right) - g(\theta)\right) \overset{a}{\sim} N\left(0, \frac{\theta^2}{(1+\theta)^4}\right).$$

Qual a distribuição exata do EMV

$$T = \frac{n}{S} = \frac{1}{\bar{\bar{X}}}.$$

Sabemos que

$$S \sim Gama(n, \theta)$$

$$M_S(t) = \left[\frac{\theta}{\theta - t}\right]^n, t < \theta.$$

Sabemos que

$$M_{\bar{X}}(t) = M_S(t/n) = \left[\frac{\theta}{\theta - t/n}\right]^n, t/n < \theta.$$

$$M_{\bar{X}}(t) = \left[\frac{\theta}{n\theta - t}\right]^n, t < n\ \theta.$$

Assim

$$\bar{X} \sim Gama(n, n\theta).$$

Seja

$$W = \frac{1}{\bar{X}} \sim GamaInversa(\alpha, \beta)$$

$$f(w) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} w^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{w}} I_{(0,\infty)} w \tag{1}$$

Notação: $W \sim GI(\alpha, \beta)$.

A esperança e a variância são dadas por:

$$E(W) = \frac{\beta}{\alpha - 1},\ \alpha > 1$$

$$E(W) = \frac{n\theta}{n - 1},\ n > 1$$

$$Var(W) = \frac{\beta^2}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)},\ \alpha > 2$$

$$Var(W) = \frac{n^2\theta^2}{(n - 1)(n - 2)},\ n > 2$$

Um estimador não viciado de θ é dado por:

$$E\left(\frac{n-1}{n\bar{X}}\right) = E\left(\frac{n-1}{S}\right) = \theta.$$