Equações diferenciais

Uma equação diferencial é uma equação que contém derivadas. A ordem de uma equação diferencial e a ordem da derivada de maior ordem que aparece na equação.

Uma equação diferencial de primeira ordem é da forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y(x))$

As equações diferenciais de primeira ordem mais simples são da forma $\frac{dy}{dx} = f(x)$. Escrevendo esta equação com diferenciais, temos $dy = f(x)dx$.

Outro tipo simples de equação diferencial de primeira ordem é da forma $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$. Escrevendo esta equação com diferenciais, temos $g(y)dy = f(x)dx$

Em ambos os tipos podemos separar as variáveis, com um dos membros da equação envolvendo a variável y e outro membro envolvendo a variável x. Dizemos então que estas equações diferenciais são equações diferenciais com variáveis separáveis.

a)No primeiro tipo temos $\frac{dy}{dx} = f(x)$.

Resolver esta equação diferencial significa encontrar todas as funções g tais que $y = g(x)$ e satisfazem $dy = f(x)dx$.

A solução completa será então $y = \int f(x)dx$

Exemplo

Resolva a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = x^3$

Temos então $dy = x^3dx$ e assim $y = \int x^3\, dx$

A solução completa é portanto $y = \frac{x^4}{4} + c$

b)No segundo tipo temos $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$

Resolver esta equação diferencial significa encontrar todas as equações envolvendo x e y, que satisfazem $g(y)dy = f(x)dx$

Exemplo

Resolva a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

Temos então $y\,dy = x\,dx$

Antidiferenciando ambos os membro, temos

$$\int y\,dy = \int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} + c_1 = \frac{x^2}{2} + c_2$$

$$y^2 + 2c_1 = x^2 + 2c_2$$

$$y^2 = x^2 + 2c_2 - 2c_1$$

$y^2 = x^2 + c$, que é a solução completa da equação diferencial.

Observe, que quando resolvemos uma equação diferencial, obtemos uma família de soluções, pois a constante pode assumir qualquer valor real.

Às vezes queremos apenas uma solução particular. Então precisamos de algum dado que nos possibilite encontrar a solução desejada. Neste caso dizemos que se trata de um problema de valor inicial.

Exemplo

Encontre a solução da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = x^3$, satisfazendo a condição inicial que $y = 1$ quando $x = 2$.

Então encontramos a solução geral e depois obtemos o valor da constante c, de modo que a condição inicial seja satisfeita.

A solução geral deste problema já vimos que é

$y = \frac{x^4}{4} + c$. Substituindo x por 2 e y por 1, obtemos

$1 = \frac{2^4}{4} + c$ e daí $c = 1 - 4 = -3$

Logo, a solução do problema de valor inicial é $y = \frac{x^4}{4} - 3$.

Equações diferenciais lineares de primeira ordem

Definição:

Um equação diferencial linear de primeira ordem é uma equação diferencial da forma $\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x)$.

Um método para resolver esta equação diferencial consiste em procurar encontrar $y(x)$, da forma $y(x) = u(x).v(x)$ para certas funções u e v.

Assim $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}.v + u.\frac{dv}{dx}$ e portanto, substituindo na equação diferencial, temos

$$\frac{du}{dx}.v + u.\frac{dv}{dx} + a(x).u.v = b(x)$$

$$v.\left(\frac{du}{dx} + a(x).u\right) + u.\frac{dv}{dx} = b(x)$$

Escolhendo u de forma que $\frac{du}{dx} + a(x).u = 0$, temos $u.\frac{dv}{dx} = b(x)$ e então

$\frac{dv}{dx} = \frac{b(x)}{u(x)}$ e daí $v(x) = \int \frac{b(x)}{u(x)} dx + c_1$

Resolvendo agora a equação diferencial $\frac{du}{dx} + a(x).u = 0$

Temos $\frac{du}{dx} = -a(x).u$ e então $\frac{1}{u}du = -a(x)dx$. Daí $ln|u| = -\int a(x)dx + c_2$

Portanto $u(x) = e^{-\int a(x)dx + c_2} = c_3.e^{-\int a(x)dx}$

Assim $y(x) = u(x).v(x) = c_3.e^{-\int a(x)dx}\left(\int \frac{b(x)}{u(x)}dx + c_1\right)$

$$y(x) = c_3.e^{-\int a(x)dx}\left(\int \frac{b(x)}{c_3.e^{-\int a(x)dx}}dx + c_1\right)$$

$y(x) = e^{-\int a(x)dx}\left(\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx + c\right)$, onde $c = c_3.c_1$

Exemplo:

Resolva a equação diferencial linear $x\frac{dy}{dx} - 2y = -x$

Solução:

Colocando na forma $\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x)$, temos $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = -1$

Então $a(x) = -\frac{2}{x}$ e $b(x) = -1$

$$\int a(x)dx = \int -\frac{2}{x}dx = -2\,ln|x| + k$$

$$y(x) = e^{-\int a(x)dx}\left(\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx + c\right),$$

$$e^{\int a(x)dx} = e^{-2\,ln|x|+k} = me^{-2\,ln|x|} = me^{\,ln\,x^{-2}} = \frac{m}{x^2}$$

Daí $y(x) = \frac{x^2}{m}\left(\int -\frac{m}{x^2}dx + c\right),$

$$y(x) = -x^2\left(\int \frac{1}{x^2}dx + c\right),$$

$$y(x) = x^2\left(\frac{1}{x} + c\right),$$

$$y(x) = x + cx^2,$$