Integração de Potências de seno e cosseno

1º Caso:

$\int sen^n x \, dx$ ou $\int cos^n x \, dx$, onde n é um inteiro ímpar.

Para resolver uma integral desse tipo procedemos da seguinte forma:

Se $n = 1$, temos simplesmente $\int senx \, dx$ ou $\int cosx \, dx$, Podemos então supor que $n > 1$. Então Escrevemos $sen^n x = sen^{n-1} x \, sen \, x = (sen^2 x)^{\frac{n-1}{2}} sen \, x = (1 - cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}} sen \, x$ (respectivamente $cos^n x = cos^{n-1} x \, cos \, x = (cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}} cos \, x = (1 - sen^2 x)^{\frac{n-1}{2}} cos \, x$) e fazemos a mudança de variável $u = \cos x$ (respectivamente $u = \operatorname{sen} x$)

Exemplo 1

$\int sen^5x\,dx = \int (sen^2x)^2\,sen\,x\,dx =$

$\int (1 - cos^2x)^2\,sen\,x\,dx$

Fazendo $u = \cos x$ temos $du = -\mathrm{sen}\,x\,dx$. Daí

$$\int (1 - cos^2x)^2\,sen\,x\,dx =$$

$$-\int (1 - u^2)^2\,du = \ -\int (1 - 2u^2 + u^4)\,du =$$

$$-u + \frac{2u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + c =$$

$$-\cos x + \frac{2}{3}cos^3x - \frac{1}{5}cos^5x + c$$

Exemplo 2

$$\int cos^3x\ dx = \int cos^2x\ cos\ x\ dx =$$

$$\int (1 - sen^2x)\ cos\ x\ dx$$

Fazendo $u = \operatorname{sen} x$ temos $du = \cos x\ dx$. Daí

$$\int (1 - sen^2x)\ cos\ x\ dx =$$

$$\int (1 - u^2)\ du =$$

$$u - \frac{u^3}{3} + c =$$

$$\operatorname{sen} x - \frac{1}{3} sen^3x + c$$

2º Caso:

$\int sen^n x\, cos^m x\, dx$, onde pelo menos um dos expoentes é um inteiro ímpar.

Para resolver uma integral desse tipo procedemos da seguinte forma:

Se $n = 1$ (respectivamente $m = 1$) fazemos a mudança de variável $u = \cos x$ (respectivamente $u = sen\, x$).

Se n for um número ímpar maior que 1 (respectivamente, se m for um número ímpar maior que 1), escrevemos

$sen^n x\, cos^m x = sen\, x\, (sen^2 x)^{\frac{n-1}{2}}\, cos^m x =$

$sen\, x\, (1 - cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}}\, cos^m x$ (respectivamente $sen^n x\, cos^m x =$ $sen^n\, x\, (cos^2 x)^{\frac{m-1}{2}}\, cosx = sen^n\, x\, (1 - sen^2 x)^{\frac{m-1}{2}}\, cosx$) e fazemos a mudança de variável $u = \cos x$ (respectivamente $u = \operatorname{sen} x$)

<u>Exemplo 1:</u>

$\int sen^3 x\, cos^6 x\, dx = \int sen\, x\, sen^2 x\, cos^6 x\, dx =$

$$\int sen\, x\, (1 - cos^2 x\,) cos^6 x\, dx$$

Fazendo $u = \cos x$, temos $du = -\operatorname{sen} xdx$

<u>Assim,</u>

$$-\int (1-u^2\,)u^6\,du = -\int (u^6 - u^8\,)\,du =$$

$$-\frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + c = -\frac{cos^7 x}{7} + \frac{cos^9 x}{9} + c =$$

<u>Exemplo 2</u>

$$\int \cos 2x\, sen^2 2x\; dx$$

Fazendo $u = sen\ 2x$, temos $du = 2\ cos\ 2x\ dx$. Então

$$\int \cos 2x\, sen^2 2x\; dx = \frac{1}{2}\int u^2 du = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}u^3 + c = \frac{1}{6}u^3 + c =$$

$$\frac{1}{6}\ sen^3 2x + c$$

3º Caso:

$\int sen^n x\, dx$ ou $\int cos^n x\, dx$, onde n é um inteiro par.

Para resolver uma integral desse tipo usaremos as identidades $sen^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ e $cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

Exemplo 1

$$\int sen^4 x\, dx = \int (sen^2 x)^2\, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2\, dx =$$

$$\int \frac{1-2\cos 2x+cos^2 2x}{4}\, dx = \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x+cos^2 2x)\, dx =$$

$$\frac{1}{4}\int \left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx =$$

$$\frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2}-2\cos 2x+\frac{\cos 4x}{2}\right)\,dx=$$

$$\frac{3}{8}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2x dx+\frac{1}{8}\int\cos 4x\ \ dx=$$

$$\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x+\frac{\operatorname{sen}4x}{32}+c$$

<u>Exemplo 2</u>

$$\int cos^2x\,dx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)dx=$$

$$\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}sen2x\right)+c=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}sen2x+c$$

4º Caso:

$\int sen^n x\ cos^m x\ dx$ onde n e m são inteiros pares.

Para resolver uma integral desse tipo procedemos de forma semelhante ao 3º caso usando portanto as identidades $sen^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ e $cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

Exemplo

$\int sen^4 x\ cos^2 x\ dx =$

$\int (sen^2 x)^2\ cos^2 x\ dx =$

$$\int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx =$$

$$\int \left(\frac{1-2\cos 2x + cos^2 2x}{4}\right) \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx =$$

$$\frac{1}{8}\int (1-2\cos 2x + cos^2 2x)\,(1+\cos 2x)\, dx =$$

$$\frac{1}{8}\int (1+\cos 2x - 2\cos 2x - 2cos^2 2x + cos^2 2x + cos^3 2x) dx =$$

$$\frac{1}{8}\int (1-\cos 2x - cos^2 2x + cos^3 2x) dx =$$

$$\frac{1}{8}\int (1-\cos 2x - cos^2 2x + \cos 2x\, cos^2 2x) dx =$$

$$\frac{1}{8}\int (1-\cos 2x - cos^2 2x + \cos 2x\,(1-sen^2 2x)dx =$$

$$\frac{1}{8}\int (1-\cos 2x - cos^2 2x + \cos 2x - \cos 2x\, sen^2 2x)dx =$$

$$\frac{1}{8}\int (1 - cos^2 2x - \cos 2x\, sen^2 2x)dx =$$

$$\frac{1}{8}\left[\int dx - \int cos^2 2xdx - \int \cos 2x\, sen^2 2x\right] =$$

$$\frac{1}{8}\left[\int dx - \int \frac{1+\cos 4x}{2}dx - \int \cos 2x\, sen^2 2x\right] =$$

$$\frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 4x\,dx - \int \cos 2x\, sen^2 2x\right] =$$

$$\frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \cos 4x\, dx - \frac{1}{8}\int \cos 2x\, sen^2 2x =$$

$$\frac{1}{16}x - \frac{1}{64}sen4x - \frac{1}{48}sen^3 2x + c$$