1 Funzioni

1.1 Introduzione

Definizione 1:
Una funzione f é una relazione tra gli elementi di due insieme A e B che ad ogni elemento di ***A*** *associa* ***uno ed un solo*** *elemento di* ***B****.*

Una funzione è definita assegnando:

- un insieme A detto DOMINIO
- un insieme B detto CODOMINIO
- una relazione $f : A \to B$ che associa ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B

1.2 Tipi di funzioni

Una funzione $f(x)$ può essere di 3 tipi:

1. **suriettiva**
2. **iniettiva**
3. **biiettiva** se è sia **iniettiva** e **suriettiva**

Definizione 2:
Una funzione si dice ***iniettiva*** *quando ad elementi* ***distinti*** *del* DOMINIO corrispondono elementi **distinti** del CODOMINIO

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \tag{1}$$

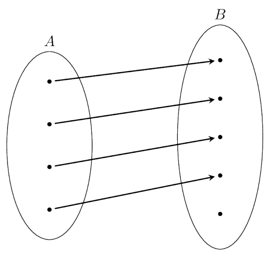

Figure 1: grafico iniettiva

Definizione 3:
*Una funzione si dice **suriettiva** qunado **ogni** elemento del codominio è immagine di **almeno** un elemento del dominio.*

$$b \in B \rightarrow \exists a \in A : f(a) = b \tag{2}$$

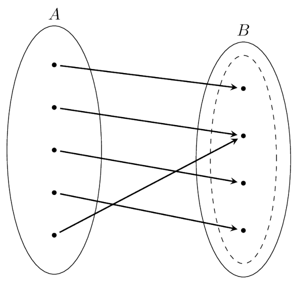

Figure 2: graifco suriettiva

ESERCIZIO 1.
Dimostra di che tipo è questa funzione:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2 \tag{3}$$

DIMOSTRAZIONE 1.
Non può essere iniettiva perchè per ogni numero reale positivo ne esiste uno uguale negativo, il cui qudrato sarà il **medesimo**.

$$se \quad x_1 = -x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = f(x_2) \tag{4}$$

si può provare inoltre che non è una funzione suriettva in quanto **nessun** numero negativo fa parte del codominio ed esso è formato da $\mathbb{R}$ dunque

$$-4 \neq f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{5}$$

ESERCIZIO 2.
Dimostra di che tipo è questa funzione:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \qquad f(x) = x^2 \tag{6}$$

DIMOSTRAZIONE 2.
se cambiamo il dominio e il codominio nell'insieme dei numeri naturali e consideriamo la stessa legge possiamo dedurre che:

$$\forall n, m : n \neq m \quad \Rightarrow \quad n^2 \neq m^2 \tag{7}$$

Per **qualsiasi** coppia di numeri naturali diversi fra loro non è possibile pensare che il loro quadrato sia uguale, per tanto la funzione è iniettiva. Inoltre **qualsiasi** numero dispari non avrà una propria immagine, in quanto l'insieme racchiude **solo** numeri interi positivi. Ovvero:

$$\exists \frac{x}{2} \in \mathbb{N} : \{y = x + 1\} \quad \Rightarrow \quad y \neq n^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{8}$$

1.3 Funzioni invertibili

Definizione 4:
Una funzione $f : A \to B$ si dice invertibile se esiste una funzione $g : B \to A$ chiamata funzione inversa tale che:

- $\forall a \in A, \quad g(f(a)) = a$
- $\forall b \in B, \quad f(g(b)) = b$

Essa si può considerare invertibile se è ***biiettiva****.*

Esercizio 3.
Dimostra se la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = 2x + 1$ è inversibile.

Dimostrazione 3.
Ponendo l'equazione $y = 2x + 1$ deduciamo che

$$f^{(-1)}(x) = \frac{x - 1}{2} \tag{9}$$

quindi:

$$f^{(-1)}(f(x)) = f^{(-1)}(2x + 1) = \frac{(2x + 1) - 1}{2} = x; \tag{10}$$

e allo stesso tempo

$$f(f^{(-1)}(y)) = f(\frac{y - 1}{2}) + 1 = y \tag{11}$$

1.4 Piano Cartesiano

Fissando un'origine e un'unità di misura ad **ogni** punto di una retta orientata corrisponde uno ed un solo numero reale. Si stabilisce così una **corrispondenza biunivoca** tra i punti della retta orientata e i numeri reali.
Data la funzione

$$f : A \rightarrow B \quad A, B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \tag{12}$$

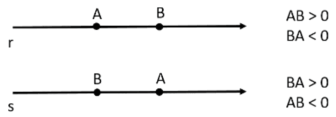

Figure 3: la retta orientata

Definizione 5:
Definiamo una ***coppia*** *di rette orientate disposte* ***perpendicolarmente*** *fra loro* ***assi coordinati****.*

- *La retta da destra verso sinistra viene chiamata* ***asse delle ascisse***
- *la retta dal basso verso l'alto viene chiamata* ***asse delle ordinate***

Il punto del piano in cui si incontrano viene chiamato ***origine degli assi*** *e viene indicato con O*

Un qualsiasi punto del piano P viene identificato con una ascissa x_p ed una ordinata y_p, quindi $P(x_p, y_p)$.
Il piano viene diviso in IV quadranti numerati in senso antiorario.

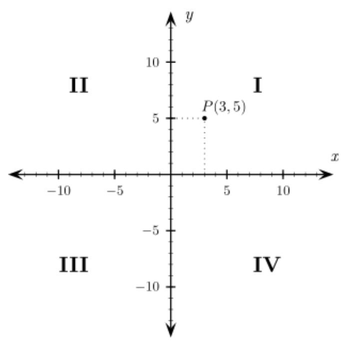

Figure 4: il piano cartesiano

1.5 Grafici di funzioni

Ora possiamo rappresentare graficamente coppie ordinate di numeri reali sul piano, quindi possiamo rappresentare il **grafico** di una funzione

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R} \tag{13}$$

e tutte le coppie $(x,\ f(x))$ tali che $x \in A$:

$$G(f) = \{(x,\ f(x))\} : x \in A \tag{14}$$

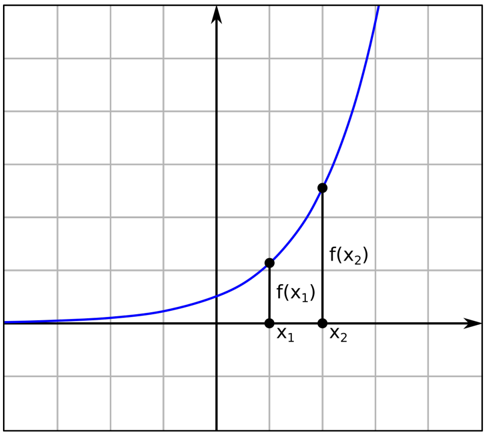

Figure 5: il grafico di una funzione crescente

1.6 Funzioni Pari e Dispari

Definizione 6:
*Una funzione $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **pari** se $f(x) = f(-x)$*
*Si deduce quindi che il grafico di una funzione così definita è simettrico rispetto all'**asse delle ordinate***

Definizione 7:
*Una funzione $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **dispari** se $f(-x) = -f(x)$*
*Si deduce quindi che il grafico di una funzione così definita viene **specchiata** in due quadranti uno **oppsoto** all'altro*

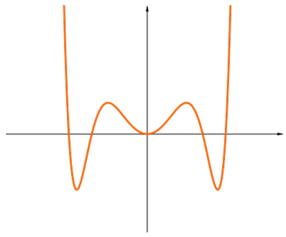

Figure 6: Una funzione pari

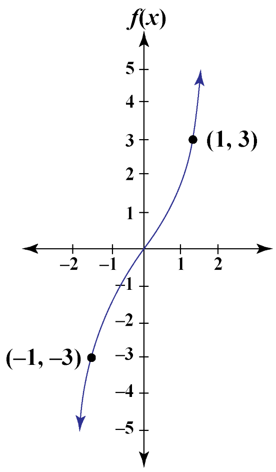

Figure 7: Una funzione dispari

1.7 Funzioni crescenti e decrescenti

Definizione 8:
Una funzione $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ *si dice* ***crescente*** *se*

$$f(x_2) \geq f(x_1) \quad \forall x_2 > x_1 \in [a, b] \tag{15}$$

Si dice ***strettamente crescente*** *se*

$$f(x_2) \quad f(x_1) \quad \forall x_2 > x_1 \in [a, b] \tag{16}$$

Definizione 9:
Una funzione $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ *si dice* ***decrescente*** *se*

$$f(x_2) \leq f(x_1) \quad \forall x_2 > x_1 \in [a, b] \tag{17}$$

Si dice ***strettamente decrescente*** *se*

$$f(x_2) < f(x_1) \quad \forall x_2 > x_1 \in [a, b] \tag{18}$$

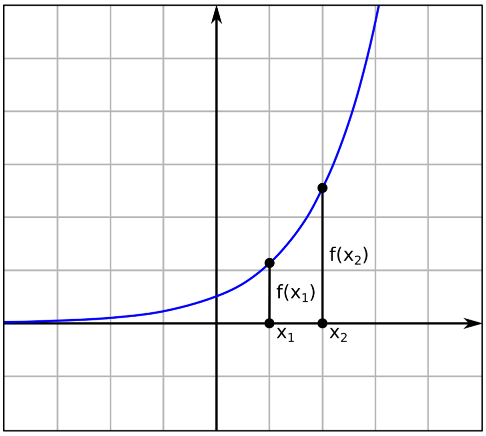

Figure 8: il grafico di una funzione crescente

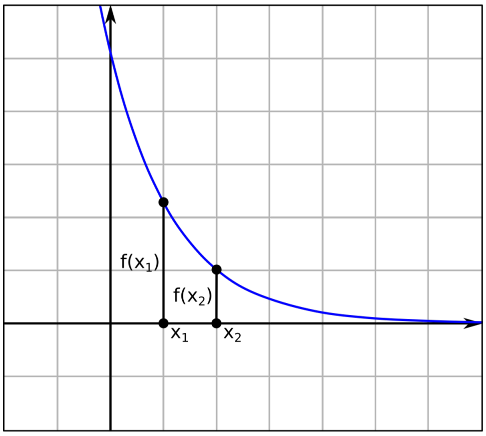

Figure 9: il grafico di una funzione decrescente

1.8 Funzioni inverse

Se i punti di una funzione $f : A \ \rightarrow \ B \quad A, B \subseteq \mathbb{R}$ si ottengono dalle coppie $(a, b) \in A \ \times \ B$

Definizione 10:
*Il grafico di una funzione inversa si ottiene invertendo le coordinate dei punti del grafico. Ovvero i punti del grafico della **funzione inversa** si ottengono dalle coppie $(b, a) \ \in B \ \times \ A$ // Per via grafica esso può essere ottenuto **riflettendo** il grafico rispetto alla **bisettrice** del **primo** e **terzo quadrante***

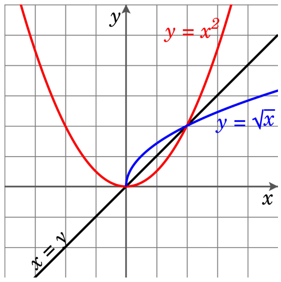

Figure 10: Il grafico di una funzione inversa

1.9 Modelizzazione matematica

Definizione 11:
*Per **modelizzazione matematica** si intende un porcesso che ha per scopo quello di **interpretare** fenomeni legati al mondo reale partendo da dati sperimentali e **traducendoli** in **problemi matematici***

Per passare da un fenomeno reale alla sua descrizione mediante modello matematico è necessario un processo di **astrazione** e **traduzione** del fenomeno in termini matematici e rigorosi.
Quando si vuole modelizzare un certo fenomeno, si vuole capire **come** le variabili coinvolte siano in relazione tra loro, ovvero stabilire delle **leggi matematiche** che descrivono queste relazioni.
La procedura di modelizzazione è:

1. si identifica l'incognita del problema
2. si analizza il fenomeno fisico e si raccolgono informazioni
3. si individuano le relazioni tra le informazioni raccolte, che poi vengono tradotte in equazioni
4. si risolvono le equazioni ottenute e se ne verifica la validità del modello

In un modello matematico che coinvolge due grandezze x ed y ci interessa capire come la **variabile dipendente** (y) varia al variare di quella **indipendente**

Esempio 1.
Supponiamo di aver formulato la legge $y = f(x)$
Se il modello è giusto potremmo ricavare il valore di y a partire da qualsiasi valore di x senza effettuare ulteriori esperimenti e misurazioni.
Rappresentandolo graficamente:

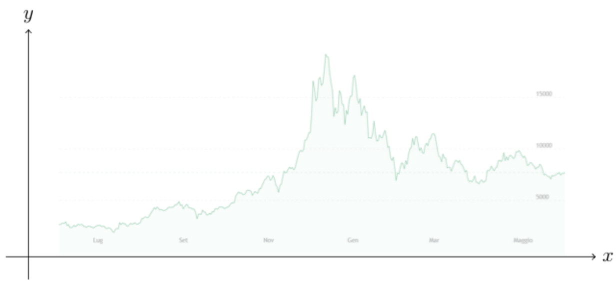

Figure 11: Il grafico dell'andamento dei bitcoin

Questo è il grafico di $y = f(x)$ dove y="valore del bitcoin in dollari" e x="tempo".

1.10 Proporzioni

Definizione 12:
*Due grandezze A e B si dicono **direttamente proprozionali** se esiste un numero c detto **costante di proporzionalità** tale che:*

$$A = cB \tag{19}$$

Questo significa che le due grandezze sono legate da una certa legge, per la quale quando una raddoppia, triplica, dimezza, di conseguenza la seconda raddoppia, triplica, dimezza etc.

Esempio 2.
A = "quantità di chilometri che l'auto può percorrere"
B = "litri di carburante nel serbatoio"

Definizione 13:
*Due grandezze A e B si dicono **inversamente proprozionali** se esiste un numero c detto **costante di proporzionalità** tale che:*

$$AB = c \tag{20}$$

Questo significa che le due grandezze sono tali che all'aumentare di una, l'altra diminuisce proporzionalmente.

Esempio 3.
A = "numero di partecipanti all'acquisto di un immobile"
B = "quota per partecipante"
c = costo dell'immobile