Appunti

Andreas Araya Osorio

3 June 2021

Contents

1 Insiemi

1.1 Introduzione

Definizione 1:
Un insieme è una "collezione" di oggetti.

Sia A un INSIEME, la scrittura $x \in A$ significa che x *appartiene ad* A.
Analogamento, scrivendo $x \notin A$ si intende che x *non appartiene ad* A.
Gli insiemi **finiti** si possono denotare all'interno di parentesi graffe "$\{,\}$"
Un qualsiasi insieme può definirsi mediante una **proprietà astratta**

ESEMPIO 1.

$$A = \{\ x \in \mathbb{N} \mid x \ pari\ \} \tag{1}$$

Questo insieme raccoglie **tutti i numeri naturali pari** e si può meglio riscrivere così:

$$A = \{\ x \ \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N}\ :\ x = 2y\ \} \tag{2}$$

1.2 Insiemi ed operazioni

Sia X un insieme e siano $A, B \subseteq X$

- **UNIONE** $A \cup B$, L'unione di A e B come l'insieme

$$A \cup B = \{x \in X\ :\ x \in A\ o\ x \in B\ \} \tag{3}$$

- INTERSEZIONE $A \cap B$, L'intersezione di A e B come l'insieme

$$A \cap B = \{x \in X\ :\ x \in A\ e\ x \in B\ \} \tag{4}$$

- DIFFERENZA $A \setminus B$, che equivale a

$$A \setminus B = \{x \in X\ :\ x \in A\ e\ x \notin B\ \} \tag{5}$$

- COMPLEMENTARE L'insieme complementare di A in X è:

$$A^C = X \setminus A = \{x \in X\ :\ x \notin A\ \} \tag{6}$$

ESEMPIO 2.
Il complementare dell'unione è l'intersezione dei complementari, mentre il complementare dell'intersezione è l'unione dei complementari.

- $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$
- $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

DIMOSTRAZIONE 1.
Si dice relazione da A a B ogni sottoinsieme R di $A \times B$ Se $(a, b) \in R$. a è in relazione R con b, si scrive aRb.

$$R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \exists p \in \mathbb{N} \mid a = p \cdot b\} \tag{7}$$

1.3 Relazioni d'ordine

Sia $A \neq \varnothing$ un insieme non vuoto e sia $R \subseteq A \times A$ una relazione di A con A. R è:

1. riflessiva se $xRx \quad \forall x \in A$,
2. simmetrica se $xRy \rightarrow yRx$,
3. transitiva se $xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$,
4. antisimmetrica se $xRy \wedge yRz \rightarrow x = y$.

Una **relazione d'equivalenza** è tale se è RIFLESSIVA, SIMMETRICA E TRANSITIVA.

Definizione 2:
Una relazione d'ordine su un insieme $X \neq \varnothing$ è detta di ordine totale se $\forall\, x, y \in X$ si ha $x \leq y \vee y \leq x$. Se su X c'è una relazione d'ordine totale, X è totalmente ordinato.

Definizione 3:
Sia $(X, \leq)$, insieme non vuoto e ordinato e sia $A \subseteq X,\ A \neq \varnothing$

- *$x \in X$ è un **maggiorante** di A se $a \leq x\ \forall a \in A$*
- *$y \in X$ è un **minorante** di A se $y \leq x\ \forall a \in A$*
- *A ha **massimo** se $\exists \lambda \in A \mid a \leq \lambda\ \forall a \in A \implies \lambda = max\ A$*
- *A ha **minimo** se $\exists \mu \in A \mid \mu \leq a\ \forall a \in A \implies \mu = min\ A$*

Definizione 4:
Siano $(X, \leq)$ un insieme ordinato e $A \subseteq X, A \neq \varnothing$. A ha estremo superiore se l'insieme dei maggioranti di A è non vuoto e ha minimo. $supA$ è il più piccolo dei maggioranti. Analogamente l'estremo inferiore è presente se l'insieme dei minoranti di A è non vuoto ed esso ne è il più piccolo: $infA$.

Definizione 5:
Proprietà di *sup* ***e*** *inf* ***:***

Siano $(X, \leq)$ *un insieme ordinato e* $A \subseteq X, A \neq \varnothing$.

SUP *Si ha che* $\lambda = sup\ A$ ***se e solo se***

1. $a \leq \lambda \quad \forall a \in A$;
2. $\lambda_1 \in X,\ a \leq \lambda_1 \quad \forall a \in A \implies \lambda \leq \lambda_1$

INF *Si ha che* $\mu = inf\ A$ ***se e solo se***

1. $\mu \leq a \quad \forall a \in A$;
2. $\mu_1 \in X,\ \mu_1 \leq a \quad \forall a \in A \implies \mu_1 \leq \mu$

Definizione 6:
Siano $(X, \leq)$ *un insieme ordinato e* $A \subseteq X, A \neq \varnothing$*, allora:*

1. *se A ha massimo, allora si ha* $maxA = supA$
2. *se A ha minimo, allora si ha* $minA = infA$

1.4 Numeri reali

Un **gruppo commutativo** e' un insieme X dotato di un'operazione binaria $* : X \times X \to X$ tale che:

1. PROPRIETÀ ASSOCIATIVA: $(x \star y) \star z = x \star (y * z) \quad \forall x, y, z \in X$
2. ELEMENTO NEUTRO: $\exists e \in X \to e * x = x * e = e$
3. INVERSO: $\forall x \in X \quad \exists y \in X \to x * y = y * x = e$
4. PROPRIETÀ COMMUTATIVA; $\forall x, y \in X \ \to \ x * y = y * x$

Se le prime 3 proprietà sono valide allora X e' un *gruppo*. Se e' valida solo la prima allora si chiama *semigruppo*

Definizione 7 (Campo dei numeri reali $\mathbb{R}$):
I 6 assiomi di completezza:

- A_1*)* $(\mathbb{R}, +) \to$ *gruppo commutativo, neutro = 0*
- A_2*)* $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \to$ *gruppo commutativo, neutro = 1*
- A_3*)* $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$*, proprietà distributiva*

- *A_4) $(\mathbb{R}, \leq) \rightarrow$ totalmente ordinato*

- *A_5) $(\leq)$ $\rightarrow$ compatibile con $+ \wedge \cdot$*

- *A_6) $(\mathbb{R}, \leq) \rightarrow$ completo*

Le proprietà $A_1, \ldots, A_3 \Longrightarrow (\mathbb{R}, +, \cdot) \rightarrow$ campo
*Le proprietà $A_1, \ldots, A_6 \Longrightarrow (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq) \rightarrow$ campo **ordinato e completo**.*

Definizione 8 (Sottoinsiemi induttivi)**:**
*Un sottoinsieme $I \subseteq \mathbb{R}$ si dice **induttivo** se:*

1. $1 \in I$

2. $x \in I \;\Rightarrow\; x + 1 \in I$

$\mathcal{F}$ indica la famiglia degli insiemi induttivi di $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{N} \overset{def.}{=} \{x \in \mathbb{R} \;: x \in I \forall I \in \mathcal{F}\} \tag{8}$$

$\mathbb{N}$ è per definizione l'interesezione di tutti gli insiemi induttivi

$$\mathbb{N} \;=\; \bigcap_{I \in \mathcal{F}} I \tag{9}$$

Dimostrazione 2 (Il principio di induzione).
Se $M \subseteq \mathbb{N}$ è induttivo $\iff$ $M = \mathbb{N}$
Dato che M è induttivo $\mathbb{N} \subseteq M \iff \mathbb{N} \;=\; M$
Questo ragionamento introduce il *principio di induzione.*

Definizione 9 (Il minimo di $\mathbb{N}$)**:**

$$1 \leq n \;\forall n \in \mathbb{N} \tag{10}$$

Il $min\mathbb{N} \;=\; 1$

Definizione 10 ($\mathbb{Z}$ l'anello dei numeri interi)**:**

$$\mathbb{Z} \overset{def.}{=} \;\mathbb{N} \;\cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\} \tag{11}$$

$\mathbb{Z}$ è chiuso per somma e motliplicazione

$$n, m \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow n + m,\; n \cdot m \;\in \mathbb{Z} \tag{12}$$

Se $A \subseteq \mathbb{Z},\;\; A \neq \varnothing$

- *se A è superiormente limitato, ammette massimo $\exists\; maxA$*

- *se A è inferiormente limitato ammette minimo $\exists\ minA$*

Definizione 11 ($\mathbb{Q}$ l'anello dei numeri razionali)**:**

$$\mathbb{Q} \overset{def.}{=} \left\{ \frac{p}{q} :\in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\} \tag{13}$$

$\mathbb{Q}$ è chiuso per somma e moltiplicazione

$$x, y \in \mathbb{Q} \ \Rightarrow \ x + y, x \cdot y \in \mathbb{Q} \tag{14}$$

$\mathbb{Q}$ è un campo totalmente ordinato ossia sono validi gli assiomi $A_1, \ \ldots, A_5$ escluso l' A_6

1.5 Radice n-esima

Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$.
$y \in \mathbb{R}$ è la radice n-esima di x se $y \geq 0, y^n \ = \ x$

$$y \overset{def.}{=} x^{\frac{1}{n}}, \ \sqrt[n]{x} \tag{15}$$

Definizione 12:
Proprietà della radice n-esima: per ogni $x, y \in \mathbb{R}, \ x, y \geq 0$:

P_1 $x^n \leq y^n \iff x \leq y$

P_2 $x^n = y^n \iff x = y$

P_3 $x^n < y \iff \exists \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, : (x + \epsilon)^n < y$

P_4 $x^n > y \iff \exists \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, : (x - \epsilon)^n > y$

2 Funzioni

2.1 Introduzione

Definizione 13:
*Una funzione f é una relazione tra gli elementi di due insieme A e B che ad ogni elemento di **A** associa **uno ed un solo** elemento di **B**.*

Una funzione è definita assegnando:

- un insieme A detto DOMINIO
- un insieme B detto CODOMINIO
- una relazione $f : A \to B$ che associa ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B

2.2 Tipi di funzioni

Una funzione $f(x)$ può essere di 3 tipi:

1. **suriettiva**
2. **iniettiva**
3. **biiettiva** se è sia **iniettiva** e **suriettiva**

Definizione 14:
Una funzione si dice ***iniettiva*** *quando ad elementi* ***distinti*** *del* DOMINIO corrispondono elementi **distinti** del CODOMINIO

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \tag{16}$$

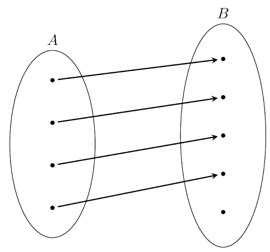

Figure 1: grafico iniettiva

Definizione 15:
Una funzione si dice ***suriettiva*** *qunado* ***ogni*** *elemento del codominio è immagine di* ***almeno*** *un elemento del dominio.*

$$b \in B \rightarrow \exists a \in A : f(a) = b \tag{17}$$

ESERCIZIO 1.
Dimostra di che tipo è questa funzione:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2 \tag{18}$$

DIMOSTRAZIONE 3.
Non può essere iniettiva perchè per ogni numero reale positivo ne esiste uno uguale negativo, il cui qudrato sarà il **medesimo**.

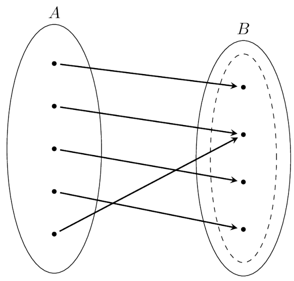

Figure 2: graifco suriettiva

$$se \quad x_1 = -x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = f(x_2) \tag{19}$$

si può provare inoltre che non è una funzione suriettva in quanto **nessun** numero negativo fa parte del codominio ed esso è formato da $\mathbb{R}$ dunque

$$-4 \neq f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{20}$$

Esercizio 2.
Dimostra di che tipo è questa funzione:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad f(x) = x^2 \tag{21}$$

Dimostrazione 4.
se cambiamo il dominio e il codominio nell'insieme dei numeri naturali e consideriamo la stessa legge possiamo dedurre che:

$$\forall n, m : n \neq m \quad \Rightarrow \quad n^2 \neq m^2 \tag{22}$$

Per **qualsiasi** coppia di numeri naturali diversi fra loro non è possibile pensare che il loro quadrato sia uguale, per tanto la funzione è iniettiva. Inoltre **qualsiasi** numero dispari non avrà una propria immagine, in quanto l'insieme racchiude **solo** numeri interi positivi. Ovvero:

$$\exists \frac{x}{2} \in \mathbb{N} : \{y = x + 1\} \quad \Rightarrow \quad y \neq n^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{23}$$

2.3 Funzioni invertibili

Definizione 16:
Una funzione $f : A \to B$ si dice invertibile se esiste una funzione $g : B \to A$ chiamata funzione inversa tale che:

- $\forall a \in A, \quad g(f(a)) = a$
- $\forall b \in B, \quad f(g(b)) = b$

*Essa si può considerare invertibile se è **biiettiva**.*

ESERCIZIO 3.
Dimostra se la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = 2x + 1$ è inversibile.

DIMOSTRAZIONE 5.
Ponendo l'equazione $y = 2x + 1$ deduciamo che

$$f^{(-1)}(x) = \frac{x - 1}{2} \tag{24}$$

quindi:

$$f^{(-1)}(f(x)) = f^{(-1)}(2x + 1) = \frac{(2x + 1) - 1}{2} = x; \tag{25}$$

e allo stesso tempo

$$f(f^{(-1)}(y)) = f(\frac{y - 1}{2}) + 1 = y \tag{26}$$

2.4 Piano Cartesiano

Fissando un'origine e un'unità di misura ad **ogni** punto di una retta orientata corrisponde uno ed un solo numero reale. Si stabilisce così una **corrispondenza biunivoca** tra i punti della retta orientata e i numeri reali.
Data la funzione

$$f : A \to B \quad A, B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \tag{27}$$

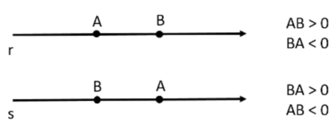

Figure 3: la retta orientata

Definizione 17:
*Definiamo una **coppia** di rette orientate disposte **perpendicolarmente** fra loro **assi coordinati**.*

- *La retta da destra verso sinistra viene chiamata* ***asse delle ascisse***
- *la retta dal basso verso l'alto viene chiamata* ***asse delle ordinate***

Il punto del piano in cui si incontrano viene chiamato ***origine degli assi*** *e viene indicato con O*

Un qualsiasi punto del piano P viene identificato con una ascissa x_p ed una ordinata y_p, quindi $P(x_p, y_p)$.
Il piano viene diviso in IV quadranti numerati in senso antiorario.

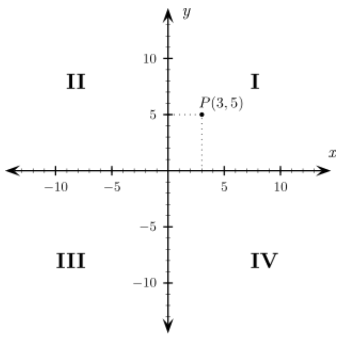

Figure 4: il piano cartesiano

2.5 Grafici di funzioni

Ora possiamo rappresentare graficamente coppie ordinate di numeri reali sul piano, quindi possiamo rappresentare il **grafico** di una funzione

$$f : A \ \subseteq \mathbb{R} \ \rightarrow \ B \subseteq \mathbb{R} \tag{28}$$

e tutte le coppie $(x, \ f(x))$ tali che $x \in A$:

$$G(f) \ = \{(x, \ f(x))\} \ : \ x \in A \tag{29}$$

2.6 Funzioni Pari e Dispari

Definizione 18:
Una funzione $f : [-a, a] \ \rightarrow \ \mathbb{R}$ *si dice* ***pari*** *se* $f(x) = f(-x)$
*Si deduce quindi che il grafico di una funzione così definita è simettrico rispetto all'****asse delle ordinate***

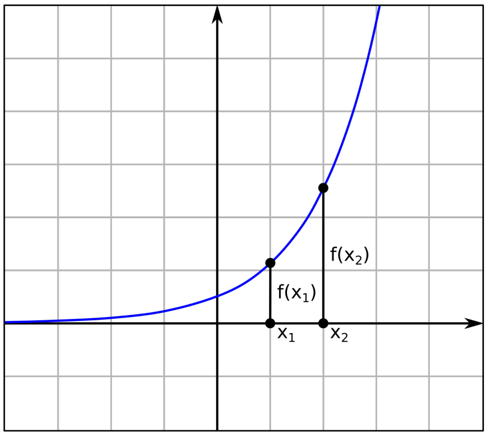

Figure 5: il grafico di una funzione crescente

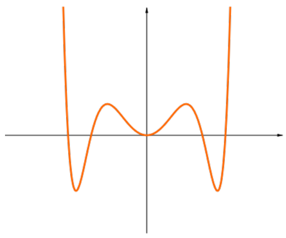

Figure 6: Una funzione pari

Definizione 19:
Una funzione $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ *si dice* ***dispari*** *se* $f(-x) = -f(x)$
Si deduce quindi che il grafico di una funzione così definita viene ***specchiata*** *in due quadranti uno* ***oppsoto*** *all'altro*

2.7 Funzioni crescenti e decrescenti

Definizione 20:
Una funzione $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ *si dice* ***crescente*** *se*

$$f(x_2) \ \geq \ f(x_1) \quad \forall x_2 > x_1 \in [a, b] \tag{30}$$

Si dice ***strettamente crescente*** *se*

$$f(x_2) \quad f(x_1) \quad \forall x_2 > x_1 \in [a, b] \tag{31}$$

Definizione 21:
Una funzione $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ *si dice* ***decrescente*** *se*

$$f(x_2) \ \leq \ f(x_1) \quad \forall x_2 > x_1 \in [a, b] \tag{32}$$

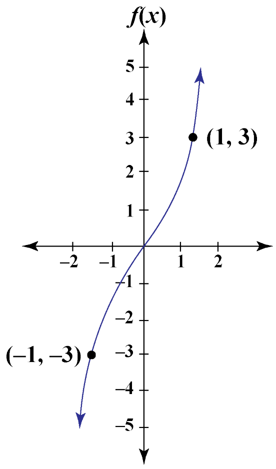

Figure 7: Una funzione dispari

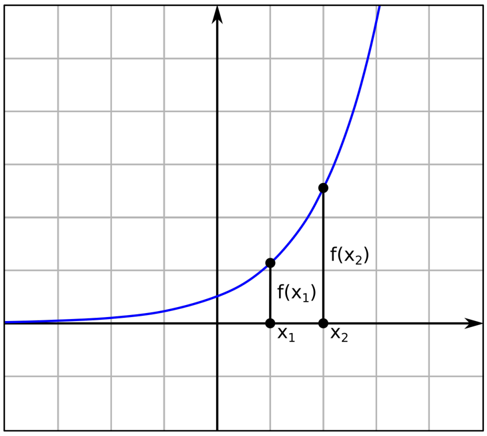

Figure 8: il grafico di una funzione crescente

Si dice ***strettamente decrescente*** *se*

$$f(x_2) \ < \ f(x_1) \quad \forall x_2 > x_1 \in [a, b] \tag{33}$$

2.8 Funzioni inverse

Se i punti di una funzione $f : A \ \rightarrow \ B \quad A, B \subseteq \mathbb{R}$ si ottengono dalle coppie $(a, b) \in A \ \times \ B$

Definizione 22:
Il grafico di una funzione inversa si ottiene invertendo le coordinate dei

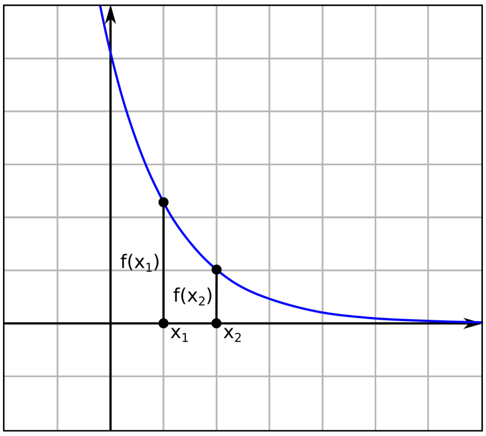

Figure 9: il grafico di una funzione decrescente

*punti del grafico. Ovvero i punti del grafico della **funzione inversa** si ottengono dalle coppie* $(b, a) \in B \times A$ *// Per via grafica esso può essere ottenuto **riflettendo** il grafico rispetto alla **bisettrice** del **primo** e **terzo quadrante***

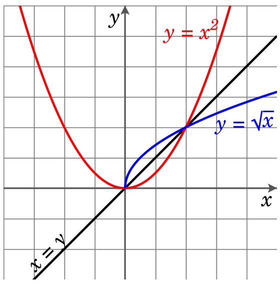

Figure 10: Il grafico di una funzione inversa

2.9 Modelizzazione matematica

Definizione 23:
*Per **modelizzazione matematica** si intende un porcesso che ha per scopo quello di **interpretare** fenomeni legati al mondo reale partendo da dati sperimentali e **traducendoli** in **problemi matematici***

Per passare da un fenomeno reale alla sua descrizione mediante modello matematico è necessario un processo di **astrazione** e **traduzione** del fenomeno in termini matematici e rigorosi.

Quando si vuole modelizzare un certo fenomeno, si vuole capire **come** le variabili coinvolte siano in relazione tra loro, ovvero stabilire delle **leggi matematiche** che descrivono queste relazioni.

La procedura di modelizzazione è:

1. si identifica l'incognita del problema
2. si analizza il fenomeno fisico e si raccolgono informazioni
3. si individuano le relazioni tra le informazioni raccolte, che poi vengono tradotte in equazioni
4. si risolvono le equazioni ottenute e se ne verifica la validità del modello

In un modello matematico che coinvolge due grandezze x ed y ci interessa capire come la **variabile dipendente** (y) varia al variare di quella **indipendente**

ESEMPIO 3.
Supponiamo di aver formulato la legge $y = f(x)$
Se il modello è giusto potremmo ricavare il valore di y a partire da qualsiasi valore di x senza effettuare ulteriori esperimenti e misurazioni.
Rappresentandolo graficamente:

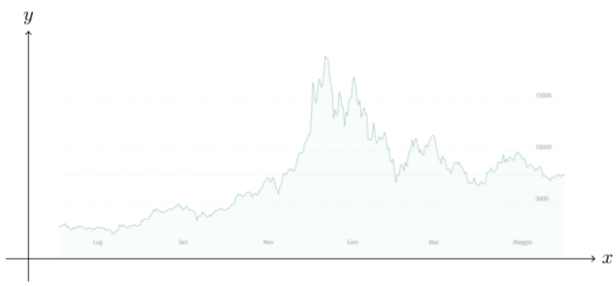

Figure 11: Il grafico dell'andamento dei bitcoin

Questo è il grafico di $y = f(x)$ dove y="valore del bitcoin in dollari" e x="tempo".

2.10 Proporzioni

Definizione 24:
Due grandezze A e B si dicono ***direttamente proprozionali*** *se esiste un numero c detto* ***costante di proporzionalità*** *tale che:*

$$A = cB \tag{34}$$

Questo significa che le due grandezze sono legate da una certa legge, per la quale quando una raddoppia, triplica, dimezza, di conseguenza la seconda raddoppia, triplica, dimezza etc.

ESEMPIO 4.
A = "quantità di chilometri che l'auto può percorrere"
B = "litri di carburante nel serbatoio"

Definizione 25:
*Due grandezze A e B si dicono **inversamente proprozionali** se esiste un numero c detto **costante di proporzionalità** tale che:*

$$AB = c \tag{35}$$

Questo significa che le due grandezze sono tali che all'aumentare di una, l'altra diminuisce proporzionalmente.

ESEMPIO 5.
A = "numero di partecipanti all'acquisto di un immobile"
B = "quota per partecipante"
c = costo dell'immobile

3 Combinatoria e probabilità

3.1 Introduzione

Definizione 26:
*L'**analisi combinatoria** è la branca della matematica applicata per risolvere problemi nel quale è necessario saper "contare" efficacemente esiti e probabilità di determinate situazioni.*
*Essa è infatti la disciplina che ci permette di **contare senza contare***

3.2 Combinatoria

Definizione 27 (Principio di moltiplicazione)**:**
Un insieme X soddisfa le ipotesi del principio di moltiplicazione se:

- *è possibile ottenere ciascuno dei suoi elementi come risultato di una procedura composta da n fasi successive.*

- *se ad una fase interemedia si sono ottenuti due esisti distinti allora la procedura conduce ad elementi distinti di X*

Nella prima fase avremo m_1 possibili esiti nella seconda fase avremo m_2 esiti sino alla n-esima fase avremo m_n esiti

$$|X| \ = m_1 \ \times \ m_2 \ \times \ ... \ \times \ m_k \tag{36}$$

Esercizio 4.
Calcoliamo il numero di coppie ordinate (a, b) contenenti un numero primo ed uno non primo compresi tra 1 ed 8

Dimostrazione 6.
I numeri primi tra 1 e 8 sono $\{2, 3, 5, 7\}$ mentre i numeri non primi tra 1 e 8 sono $\{1, 4, 6, 8\}$

I. Scegliamo un qualsiasi elemento di I_8: abbiamo 8 possibilità.

II. Se il primo elemento era primo il secondo non lo sarà, e viceversa se il numero non era primo. In ogni caso avremo 4 distinte possiblità

Il numero di coppie è: $8 \ \times \ 4 \ = \ 32$

Esercizio 5.
Consideriamo un'estrazione in successione di 3 numeri della tombola **tenendo conto dell'ordine**. Quanti sono i possibili esiti?

Dimostrazione 7.
I numeri della tombola sono 90. Gli scenari possibili sono 2:
Nel primo caso **senza rimpiazzo** se ogni numero può essere scelto una volta sola, mentre sarà **con rimpiazzo** se un numero può essere scelto più di una volta.

Nel primo caso $(a_1, a_2, a_3) \ :\to \ (a_1 \ \neq \ a_2 \ \neq \ a_3 \ )$:

I fase: $a_1 = 90$

II fase: $a_2 = 90 - 1 = 89$

III fase: $a_3 = 90 - 2 = 88$

Quindi il numero di possibili esiti è:

$$90 \ \times \ 89 \ \times \ 88 \ = \ 704880 \tag{37}$$

Nel secondo caso $(a_1, a_2, a_3) :\to (a_1 \ = \ a_2 \ = \ a_3)$:

I FASE: $a_1 \ = \ 90$

II FASE: $a_2 \ = \ 90$

III FASE: $a_3 \ = \ 90$

Quindi il numero di possibili esiti è:

$$90 \ \times \ 90 \ \times \ 90 \ = \ 90^3 \ = \ 729000 \tag{38}$$

Definizione 28:
Definiamo una regola general per k-sequenze di I_n. Siano $k, n \ \in \ \mathbb{N}$ definiamo k-sequenza di I_n una k-upla ***ordinata*** *$(a_1, \ldots, a_k)$ di elementi* ***non necessariamente distinti*** *di I_n Ovvero:*

$$(a_1, \ldots, a_k) \in \underbrace{I_n \times \ \ldots \ \times \ I_n}_{} \tag{39}$$

Nella definzione di sequenze l'ordine degli elementi della k-upla è importante: le 3-sequenze (2, 1 ,3) e (3, 1, 2) sono diverse anceh se composte dagli stessi numeri. Vengono comunemente dette **disposizioni** di **n** oggetti a k a k

Esempio 6.
Sia $I_4 \ = \ 1, 2, 3, 4$. Allora

$$(1, 2, 3, 3, 4), \qquad (1, 1, 1, 1, 1), \qquad (2, 2, 1, 3, 4) \tag{40}$$

sono 5-sequenze di I_4. Invece

$$(1, 2, 3), \qquad (1, 1, 1), \qquad (2, 3, 4) \tag{41}$$

sono 3-sequenze di I_4

3.3 Fattoriale

$$5! = \ 5 \ \times \ 4 \ \times \ 3 \ \times \ 2 \ \times \ 1 \tag{42}$$

$$n! = \begin{cases} n \ \times \ (n-1) \ \times \ (n-2) \ \times \ \ldots \ 3 \ \times \ 2 \ \times \ 1 & \text{se } n \geq \ 1 \\ 1 & \text{se } n \ = \ 0 \end{cases} \tag{43}$$

Definizione 29:
Il ***fattoriale*** *di un numero equivale al prodotto di quel numero per tutti i numeri che lo precedono. I valori dei fattoriale crescono esponenzialmente*

$$0! = \ 1 \qquad 5! = \ 120 \qquad 6! = \ 720 \qquad 7! = \ 5040 \qquad 10! = \ 3628800 \tag{44}$$

3.4 Numero di Insiemi

Definizione 30:
Il ***numero di sottoinsiemi*** *di k elementi di I_n si distinguono esclusivamente dagli elementi di cui fanno parte:* ***l'ordine non conta****.*

Spesso un sottoinsieme di k elementi di un insieme di n elementi viene chiamato **combinazione** (semplice, senza ripetizioni) di n elementi a k a k

Definizione 31:
Siano $k, n \in \mathbb{N}$ il ***binomiale*** *di n su k è:*

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & se k \leq n, \\ 0, & se k > n. \end{cases} \tag{45}$$

Il numero di sottoinsiemi di k elementi di I_n è

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}. \tag{46}$$

Esempio 7.
Calcola i sotttoinsiemi con 3 elementi di I_6

Dimostrazione 8.
La soluzione è data da una semplice applicazione della formula prima vista:

$$\begin{Bmatrix} 6 \\ 3 \end{Bmatrix} = \frac{6!}{3!3!} = 20 \tag{47}$$

Esempio 8.
Calcola il numero di partite giocate nella fase a gironi dei Mondiali di calcio. Ci sono 32 squadre divise in 8 gironi da 4 squadre ed in ogni girone una squadra deve giocare contro le altre una volta sola.

Dimostrazione 9.
Il numero di partite totale è 8 volte le partite giocate in un singolo girone. L'insieme delle 4 squadre in un girone possiamo identificarlo con I_4, e una partita tra 2 squadre con un sottoinsieme di 2 elementi di I_4. Il numero di partite giocate in un girone**è il numero di sottoinsiemi** di 2 elementi di I_4 ovvero:

$$\begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 2} = \frac{24}{4} = 6 \tag{48}$$

Infine il risultato equivale a: $6 \times 8 = 48$