

Appunti

Andreas Araya Osorio

3 June 2021

1 Insiemi

1.1 Introduzione

Definizione 1:

Un insieme è una "collezione" di oggetti.

Sia A un INSIEME, la scrittura $x \in A$ significa che x appartiene ad A . Analogamente, scrivendo $x \notin A$ si intende che x non appartiene ad A . Gli insiemi **finiti** si possono denotare all'interno di parentesi graffe " $\{, \}$ ". Un qualsiasi insieme può definirsi mediante una **proprietà astratta**

ESEMPIO 1.

$$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ pari} \} \quad (1)$$

Questo insieme raccoglie **tutti i numeri naturali pari** e si può meglio riscrivere così:

$$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} : x = 2y \} \quad (2)$$

1.2 Insiemi ed operazioni

Sia X un insieme e siano $A, B \subseteq X$

- **UNIONE** $A \cup B$, L'unione di A e B come l'insieme

$$A \cup B = \{ x \in X : x \in A \text{ o } x \in B \} \quad (3)$$

- **INTERSEZIONE** $A \cap B$, L'intersezione di A e B come l'insieme

$$A \cap B = \{ x \in X : x \in A \text{ e } x \in B \} \quad (4)$$

- DIFFERENZA $A \setminus B$, che equivale a

$$A \setminus B = \{x \in X : x \in A \text{ e } x \notin B\} \quad (5)$$

- COMPLEMENTARE L'insieme complementare di A in X è:

$$A^C = X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\} \quad (6)$$

ESEMPIO 2.

Il complementare dell'unione è l'intersezione dei complementari, mentre il complementare dell'intersezione è l'unione dei complementari.

- $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$
- $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

DIMOSTRAZIONE 1.

Si dice relazione da A a B ogni sottoinsieme R di $A \times B$. Se $(a, b) \in R$, a è in relazione R con b , si scrive aRb .

$$R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \exists p \in \mathbb{N} \mid a = p \cdot b\} \quad (7)$$

1.3 Relazioni d'ordine

Sia $A \neq \emptyset$ un insieme non vuoto e sia $R \subseteq A \times A$ una relazione di A con A . R è:

1. riflessiva se $xRx \quad \forall x \in A$,
2. simmetrica se $xRy \rightarrow yRx$,
3. transitiva se $xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$,
4. antisimmetrica se $xRy \wedge yRz \rightarrow x = y$.

Una **relazione d'equivalenza** è tale se è RIFLESSIVA, SIMMETRICA E TRANSITIVA.

Definizione 2:

Una relazione d'ordine su un insieme $X \neq \emptyset$ è detta di ordine totale se $\forall x, y \in X$ si ha $x \leq y \vee y \leq x$. Se su X c'è una relazione d'ordine totale, X è totalmente ordinato.

Definizione 3:

Sia (X, \leq) , insieme non vuoto e ordinato e sia $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$

- $x \in X$ è un **maggiorante** di A se $a \leq x \ \forall a \in A$
- $y \in X$ è un **minorante** di A se $y \leq a \ \forall a \in A$
- A ha **massimo** se $\exists \lambda \in A \mid a \leq \lambda \ \forall a \in A \implies \lambda = \max A$
- A ha **minimo** se $\exists \mu \in A \mid \mu \leq a \ \forall a \in A \implies \mu = \min A$

Definizione 4:

Siano (X, \leq) un insieme ordinato e $A \subseteq X, A \neq \emptyset$. A ha estremo superiore se l'insieme dei maggioranti di A è non vuoto e ha minimo. $\sup A$ è il più piccolo dei maggioranti. Analogamente l'estremo inferiore è presente se l'insieme dei minoranti di A è non vuoto ed esso ne è il più piccolo: $\inf A$.

Definizione 5:

Proprietà di \sup e \inf :

Siano (X, \leq) un insieme ordinato e $A \subseteq X, A \neq \emptyset$.

SUP Si ha che $\lambda = \sup A$ se e solo se

1. $a \leq \lambda \ \forall a \in A$;
2. $\lambda_1 \in X, a \leq \lambda_1 \ \forall a \in A \implies \lambda \leq \lambda_1$

INF Si ha che $\mu = \inf A$ se e solo se

1. $\mu \leq a \ \forall a \in A$;
2. $\mu_1 \in X, \mu_1 \leq a \ \forall a \in A \implies \mu_1 \leq \mu$

Definizione 6:

Siano (X, \leq) un insieme ordinato e $A \subseteq X, A \neq \emptyset$, allora:

1. se A ha massimo, allora si ha $\max A = \sup A$
2. se A ha minimo, allora si ha $\min A = \inf A$

1.4 Numeri reali

Un **gruppo commutativo** è un insieme X dotato di un'operazione binaria $*$: $X \times X \rightarrow X$ tale che:

1. PROPRIETÀ ASSOCIATIVA: $(x * y) * z = x * (y * z) \ \forall x, y, z \in X$
2. ELEMENTO NEUTRO: $\exists e \in X \rightarrow e * x = x * e = e$
3. INVERSO: $\forall x \in X \ \exists y \in X \rightarrow x * y = y * x = e$

4. PROPRIETÀ COMMUTATIVA; $\forall x, y \in X \rightarrow x * y = y * x$

Se le prime 3 proprietà sono valide allora X è un *gruppo*. Se è valida solo la prima allora si chiama *semigrupp*

Definizione 7:

Campo dei numeri reali \mathbb{R}

- $A_1) (\mathbb{R}, +) \rightarrow$ gruppo commutativo, neutro = 0
- $A_2) (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \rightarrow$ gruppo commutativo, neutro = 1
- $A_3) x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$, proprietà distributiva
- $A_4) (\mathbb{R}, \leq) \rightarrow$ totalmente ordinato
- $A_5) (\leq) \rightarrow$ compatibile con $+$ e \cdot
- $A_6) (\mathbb{R}, \leq) \rightarrow$ completo

Le proprietà $A_1, \dots, A_3 \implies (\mathbb{R}, +, \cdot) \rightarrow$ campo

Le proprietà $A_1, \dots, A_6 \implies (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq) \rightarrow$ campo **ordinato e completo**.

Definizione 8:

Un sottoinsieme $I \subseteq \mathbb{R}$ si dice **induttivo** se:

1. $1 \in I$
2. $x \in I \Rightarrow x + 1 \in I$

F indica la famiglia degli insiemi induttivi di \mathbb{R} :

$$\mathbb{N} \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x \in I \forall I \in F\} \quad (8)$$

2 Funzioni

2.1 Introduzione

Definizione 9:

Una funzione f è una relazione tra gli elementi di due insiemi A e B che ad ogni elemento di A associa **uno ed un solo** elemento di B .

Una funzione è definita assegnando:

- un insieme A detto DOMINIO
- un insieme B detto CODOMINIO
- una relazione $f : A \rightarrow B$ che associa ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B

2.2 Tipi di funzioni

Una funzione $f(x)$ può essere di 3 tipi:

1. **suriettiva**
2. **iniettiva**
3. **biiettiva** se è sia **iniettiva** e **suriettiva**

Definizione 10:

Una funzione si dice **iniettiva** quando ad elementi **distinti** del DOMINIO corrispondono elementi **distinti** del CODOMINIO

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \quad (9)$$

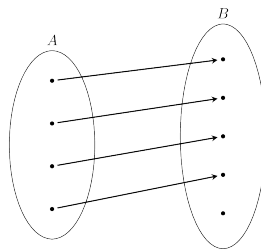


Figure 1: grafico iniettiva

Definizione 11:

Una funzione si dice **suriettiva** quando **ogni** elemento del codominio è immagine di **almeno** un elemento del dominio.

$$b \in B \rightarrow \exists a \in A : f(a) = b \quad (10)$$

ESERCIZIO 1.

Dimostra di che tipo è questa funzione:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 \quad (11)$$

DIMOSTRAZIONE 2.

Non può essere iniettiva perchè per ogni numero reale positivo ne esiste uno uguale negativo, il cui quadrato sarà il **medesimo**.

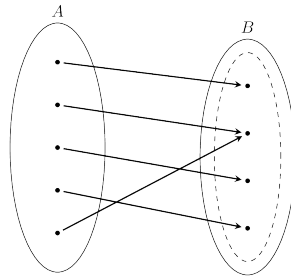


Figure 2: graifco suriettiva

$$se \quad x_1 = -x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = f(x_2) \quad (12)$$

si può provare inoltre che non è una funzione suriettva in quanto **nessun** numero negativo fa parte del codominio ed esso è formato da \mathbb{R} dunque

$$-4 \neq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (13)$$

ESERCIZIO 2.

Dimostra di che tipo è questa funzione:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad f(x) = x^2 \quad (14)$$

DIMOSTRAZIONE 3.

se cambiamo il dominio e il codominio nell'insieme dei numeri naturali e consideriamo la stessa legge possiamo dedurre che:

$$\forall n, m : n \neq m \quad \Rightarrow \quad n^2 \neq m^2 \quad (15)$$

Per **qualsiasi** coppia di numeri naturali diversi fra loro non è possibile pensare che il loro quadrato sia uguale, per tanto la funzione è iniettiva. Inoltre **qualsiasi** numero dispari non avrà una propria immagine, in quanto l'insieme racchiude **solo** numeri interi positivi. Ovvero:

$$\exists \frac{x}{2} \in \mathbb{N} : \{y = x + 1\} \quad \Rightarrow \quad y \neq n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (16)$$

2.3 Funzioni invertibili

Definizione 12:

Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice invertibile se esiste una funzione $g : B \rightarrow A$ chiamata funzione inversa tale che:

- $\forall a \in A, \quad g(f(a)) = a$
- $\forall b \in B, \quad f(g(b)) = b$

Essa si può considerare invertibile se è **biiettiva**.

ESERCIZIO 3.

Dimostra se la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 2x + 1$ è inversibile.

DIMOSTRAZIONE 4.

Ponendo l'equazione $y = 2x + 1$ deduciamo che

$$f^{(-1)}(x) = \frac{x - 1}{2} \quad (17)$$

quindi:

$$f^{(-1)}(f(x)) = f^{(-1)}(2x + 1) = \frac{(2x + 1) - 1}{2} = x; \quad (18)$$

e allo stesso tempo

$$f(f^{(-1)}(y)) = f\left(\frac{y - 1}{2}\right) + 1 = y \quad (19)$$

2.4 Piano Cartesiano

Fissando un'origine e un'unità di misura ad **ogni** punto di una retta orientata corrisponde uno ed un solo numero reale. Si stabilisce così una **corrispondenza biunivoca** tra i punti della retta orientata e i numeri reali.

Data la funzione

$$f : A \rightarrow B \quad A, B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \quad (20)$$

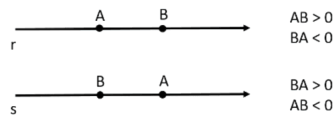


Figure 3: la retta orientata

Definizione 13:

Definiamo una **coppia** di rette orientate disposte **perpendicolarmente** fra loro **assi coordinati**.

- La retta da destra verso sinistra viene chiamata **asse delle ascisse**
- la retta dal basso verso l'alto viene chiamata **asse delle ordinate**

Il punto del piano in cui si incontrano viene chiamato **origine degli assi** e viene indicato con O

Un qualsiasi punto del piano P viene identificato con una ascissa x_p ed una ordinata y_p , quindi $P(x_p, y_p)$.

Il piano viene diviso in IV quadranti numerati in senso antiorario.

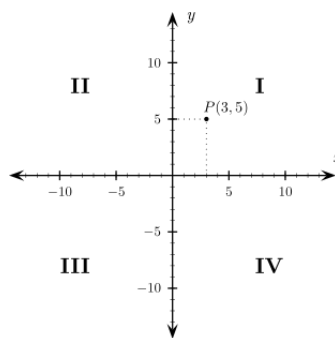


Figure 4: il piano cartesiano

2.5 Grafici di funzioni

Ora possiamo rappresentare graficamente coppie ordinate di numeri reali sul piano, quindi possiamo rappresentare il **grafico** di una funzione

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R} \quad (21)$$

e tutte le coppie $(x, f(x))$ tali che $x \in A$:

$$G(f) = \{(x, f(x))\} : x \in A \quad (22)$$

2.6 Funzioni Pari e Dispari

Definizione 14:

Una funzione $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **pari** se $f(x) = f(-x)$

Si deduce quindi che il grafico di una funzione così definita è simmetrico rispetto all'**asse delle ordinate**

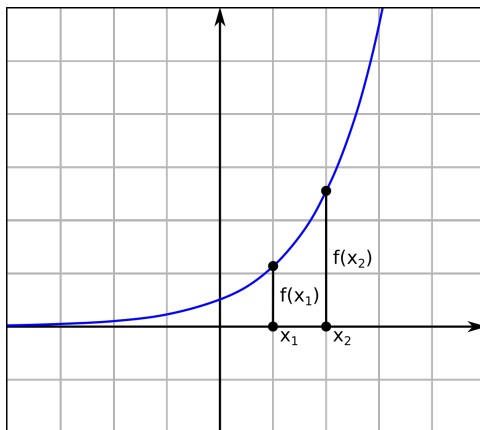


Figure 5: il grafico di una funzione crescente

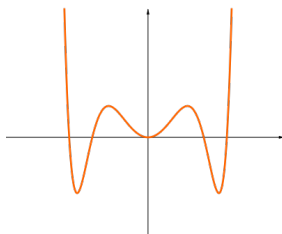


Figure 6: Una funzione pari

Definizione 15:

Una funzione $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **dispari** se $f(-x) = -f(x)$.
Si deduce quindi che il grafico di una funzione così definita viene **specchiata** in due quadranti uno **opposto** all'altro.

2.7 Funzioni crescenti e decrescenti

Definizione 16:

Una funzione $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **crescente** se

$$f(x_2) \geq f(x_1) \quad \forall x_2 > x_1 \in [a, b] \quad (23)$$

Si dice **strettamente crescente** se

$$f(x_2) > f(x_1) \quad \forall x_2 > x_1 \in [a, b] \quad (24)$$

Definizione 17:

Una funzione $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **decrescente** se

$$f(x_2) \leq f(x_1) \quad \forall x_2 > x_1 \in [a, b] \quad (25)$$

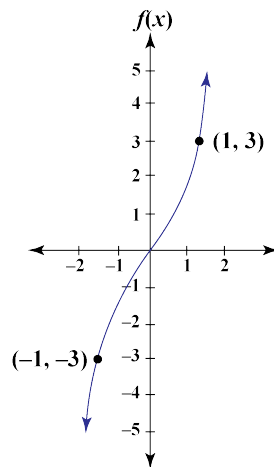


Figure 7: Una funzione dispari

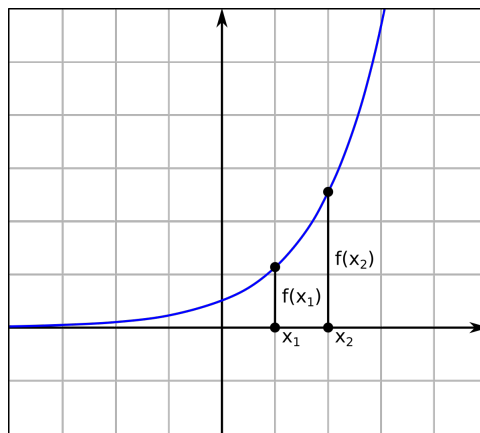


Figure 8: il grafico di una funzione crescente

Si dice **strettamente decrescente** se

$$f(x_2) < f(x_1) \quad \forall x_2 > x_1 \in [a, b] \quad (26)$$

2.8 Funzioni inverse

Se i punti di una funzione $f : A \rightarrow B$ $A, B \subseteq \mathbb{R}$ si ottengono dalle coppie $(a, b) \in A \times B$

Definizione 18:

Il grafico di una funzione inversa si ottiene invertendo le coordinate dei

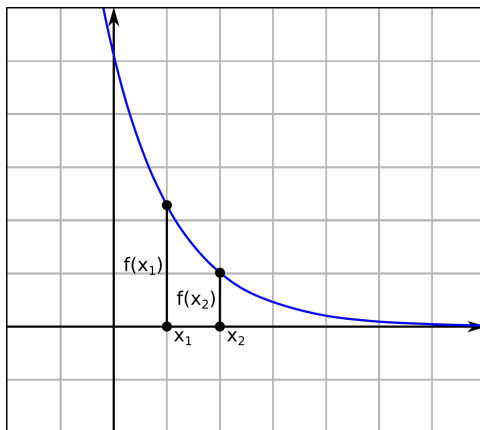


Figure 9: il grafico di una funzione decrescente

*punti del grafico. Ovvero i punti del grafico della **funzione inversa** si ottengono dalle coppie $(b, a) \in B \times A$ // Per via grafica esso può essere ottenuto **riflettendo** il grafico rispetto alla **bisettrice del primo e terzo quadrante***

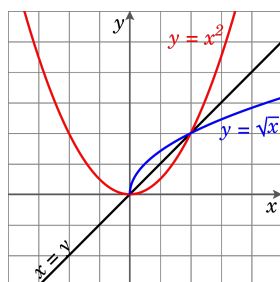


Figure 10: Il grafico di una funzione inversa

2.9 Modellizzazione matematica

Definizione 19:

*Per **modellizzazione matematica** si intende un porcesso che ha per scopo quello di **interpretare** fenomeni legati al mondo reale partendo da dati sperimentali e **traducendoli** in **problemi matematici***

Per passare da un fenomeno reale alla sua descrizione mediante modello matematico è necessario un processo di **astrazione** e **traduzione** del fenomeno in termini matematici e rigorosi.

Quando si vuole modellizzare un certo fenomeno, si vuole capire **come** le variabili coinvolte siano in relazione tra loro, ovvero stabilire delle **leggi matematiche** che descrivono queste relazioni.

La procedura di modellizzazione è:

1. si identifica l'incognita del problema
2. si analizza il fenomeno fisico e si raccolgono informazioni
3. si individuano le relazioni tra le informazioni raccolte, che poi vengono tradotte in equazioni
4. si risolvono le equazioni ottenute e se ne verifica la validità del modello

In un modello matematico che coinvolge due grandezze x ed y ci interessa capire come la **variabile dipendente** (y) varia al variare di quella **indipendente**

ESEMPIO 3.

Supponiamo di aver formulato la legge $y = f(x)$

Se il modello è giusto potremmo ricavare il valore di y a partire da qualsiasi valore di x senza effettuare ulteriori esperimenti e misurazioni.

Rappresentandolo graficamente:



Figure 11: Il grafico dell'andamento dei bitcoin

Questo è il grafico di $y = f(x)$ dove y ="valore del bitcoin in dollari" e x ="tempo".

2.10 Proporzioni

Definizione 20:

Due grandezze A e B si dicono **direttamente proporzionali** se esiste un numero c detto **costante di proporzionalità** tale che:

$$A = cB \quad (27)$$

Questo significa che le due grandezze sono legate da una certa legge, per la quale quando una raddoppia, triplica, dimezza, di conseguenza la seconda raddoppia, triplica, dimezza etc.

ESEMPIO 4.

A = "quantità di chilometri che l'auto può percorrere"

B = "litri di carburante nel serbatoio"

Definizione 21:

Due grandezze A e B si dicono **inversamente proporzionali** se esiste un numero c detto **costante di proporzionalità** tale che:

$$AB = c \quad (28)$$

Questo significa che le due grandezze sono tali che all'aumentare di una, l'altra diminuisce proporzionalmente.

ESEMPIO 5.

A = "numero di partecipanti all'acquisto di un immobile"

B = "quota per partecipante"

c = costo dell'immobile

3 Combinatoria e probabilità

3.1 Introduzione

Definizione 22:

*L'**analisi combinatoria** è la branca della matematica applicata per risolvere problemi nel quale è necessario saper "contare" efficacemente esiti e probabilità di determinate situazioni.*

*Essa è infatti la disciplina che ci permette di **contare senza contare***

3.2 Combinatoria

Definizione 23 (Principio di moltiplicazione):

Un insieme X soddisfa le ipotesi del principio di moltiplicazione se:

- *è possibile ottenere ciascuno dei suoi elementi come risultato di una procedura composta da n fasi successive.*

- se ad una fase intermedia si sono ottenuti due esiti distinti allora la procedura conduce ad elementi distinti di X

Nella prima fase avremo m_1 possibili esiti nella seconda fase avremo m_2 esiti sino alla n -esima fase avremo m_n esiti

$$|X| = m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k \quad (29)$$

ESERCIZIO 4.

Calcoliamo il numero di coppie ordinate (a, b) contenenti un numero primo ed uno non primo compresi tra 1 ed 8

DIMOSTRAZIONE 5.

I numeri primi tra 1 e 8 sono $\{2, 3, 5, 7\}$ mentre i numeri non primi tra 1 e 8 sono $\{1, 4, 6, 8\}$

I. Scegliamo un qualsiasi elemento di I_8 : abbiamo 8 possibilità.

II. Se il primo elemento era primo il secondo non lo sarà, e viceversa se il numero non era primo. In ogni caso avremo 4 distinte possibilità

Il numero di coppie è: $8 \times 4 = 32$

ESERCIZIO 5.

Consideriamo un'estrazione in successione di 3 numeri della tombola **tenendo conto dell'ordine**. Quanti sono i possibili esiti?

DIMOSTRAZIONE 6.

I numeri della tombola sono 90. Gli scenari possibili sono 2:

Nel primo caso **senza rimpiazzo** se ogni numero può essere scelto una volta sola, mentre sarà **con rimpiazzo** se un numero può essere scelto più di una volta.

Nel primo caso $(a_1, a_2, a_3) : \rightarrow (a_1 \neq a_2 \neq a_3) :$

I FASE: $a_1 = 90$

II FASE: $a_2 = 90 - 1 = 89$

III FASE: $a_3 = 90 - 2 = 88$

Quindi il numero di possibili esiti è:

$$90 \times 89 \times 88 = 704880 \quad (30)$$

Nel secondo caso $(a_1, a_2, a_3) : \rightarrow (a_1 = a_2 = a_3) :$

I FASE: $a_1 = 90$

II FASE: $a_2 = 90$

III FASE: $a_3 = 90$

Quindi il numero di possibili esiti è:

$$90 \times 90 \times 90 = 90^3 = 729000 \quad (31)$$

Definizione 24:

Definiamo una regola general per k -sequenze di I_n . Siano $k, n \in \mathbb{N}$ definiamo k -sequenza di I_n una k -upla **ordinata** (a_1, \dots, a_k) di elementi **non necessariamente distinti** di I_n . Ovvero:

$$(a_1, \dots, a_k) \in \underbrace{I_n \times \dots \times I_n}_k \quad (32)$$

Nella definizione di sequenze l'ordine degli elementi della k -upla è importante: le 3-sequenze $(2, 1, 3)$ e $(3, 1, 2)$ sono diverse anche se composte dagli stessi numeri. Vengono comunemente dette **disposizioni** di n oggetti a k a k

ESEMPIO 6.

Sia $I_4 = \{1, 2, 3, 4\}$. Allora

$$(1, 2, 3, 3, 4), \quad (1, 1, 1, 1, 1), \quad (2, 2, 1, 3, 4) \quad (33)$$

sono 5-sequenze di I_4 . Invece

$$(1, 2, 3), \quad (1, 1, 1), \quad (2, 3, 4) \quad (34)$$

sono 3-sequenze di I_4

3.3 Fattoriale

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \quad (35)$$

$$n! = \begin{cases} n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 & \text{se } n \geq 1 \\ 1 & \text{se } n = 0 \end{cases} \quad (36)$$

Definizione 25:

Il **fattoriale** di un numero equivale al prodotto di quel numero per tutti i numeri che lo precedono. I valori dei fattoriale crescono esponenzialmente

$$0! = 1 \quad 5! = 120 \quad 6! = 720 \quad 7! = 5040 \quad 10! = 3628800 \quad (37)$$

3.4 Numero di Insiemi

Definizione 26:

Il **numero di sottoinsiemi** di k elementi di I_n si distinguono esclusivamente dagli elementi di cui fanno parte: **l'ordine non conta**.

Spesso un sottoinsieme di k elementi di un insieme di n elementi viene chiamato **combinazione** (semplice, senza ripetizioni) di n elementi a k a k

Definizione 27:

Siano $k, n \in \mathbb{N}$ il **binomiale** di n su k è:

$$\begin{cases} n \\ k \end{cases} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{se } k \leq n, \\ 0, & \text{se } k > n. \end{cases} \quad (38)$$

Il numero di sottoinsiemi di k elementi di I_n è

$$\begin{cases} n \\ k \end{cases}. \quad (39)$$

ESEMPIO 7.

Calcola i sottoinsiemi con 3 elementi di I_6

DIMOSTRAZIONE 7.

La soluzione è data da una semplice applicazione della formula prima vista:

$$\begin{cases} 6 \\ 3 \end{cases} = \frac{6!}{3!3!} = 20 \quad (40)$$

ESEMPIO 8.

Calcola il numero di partite giocate nella fase a gironi dei Mondiali di calcio. Ci sono 32 squadre divise in 8 gironi da 4 squadre ed in ogni girone una squadra deve giocare contro le altre una volta sola.

DIMOSTRAZIONE 8.

Il numero di partite totale è 8 volte le partite giocate in un singolo girone. L'insieme delle 4 squadre in un girone possiamo identificarlo con I_4 , e una partita tra 2 squadre con un sottoinsieme di 2 elementi di I_4 . Il numero di partite giocate in un girone è il **numero di sottoinsiemi** di 2 elementi di I_4 ovvero:

$$\begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 2} = \frac{24}{2} = 6 \quad (41)$$

Infine il risultato equivale a: $6 \times 8 = 48$