

1 Derivate

1.1 Rapporto incrementale e derivate

Per poter comprendere le derivate è essenziale comprendere il concetto di **rapporto incrementale**

Definizione 1 (Rapporto Incrementale):

Premettiamo: $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A \cap D(A)$

x_0 è un punto di accumulazione, non isolato e f una funzione con dominio A e codominio \mathbb{R} .

$$R_f(x_0) : A \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad R_f(x_0)(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1)$$

Una funzione si dice **derivabile** in x_0 se esiste il limite, ed è finito:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R_f(x_0) : A \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}, = \lim_{x \rightarrow x_0} R_f(x_0)(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2)$$

Il limite che abbiamo appena definito si chiama **derivata** di f in x_0

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} R_f(x_0)(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f'(x_0) \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Se il limite, del rapporto incrementale, non appartiene ai numeri reali ed è $\pm\infty$, allora la funzione è derivabile in senso esteso.

Il limite del rapporto incrementale si può riscrivere come:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (h = x - x_0) \quad (4)$$

Definizione 2:

Se una funzione f è derivabile in un punto x_0 allora:

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists \omega : A \rightarrow \mathbb{R} \quad \omega(x) \rightarrow 0 \mid x \rightarrow x_0 \quad (5)$$

Allora:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \lambda \cdot (x - x_0) + \omega(x)(x - x_0) \quad \forall x \in A \\ \lambda &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \omega(x) \text{ è infinitesima } (=0) \\ \lambda &= f'(x_0) \end{aligned} \quad (6)$$

Definizione 3:

Premettiamo: $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A \cap D(A)$

x_0 è un punto di accumulazione, non isolato e f una funzione con dominio A e codominio \mathbb{R} .

Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0 .

Questa nozione è dimostrabile sapendo che: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, e la tesi viene provata dal fatto che

x_0 è un punto di accumulazione del suo dominio A .

ESEMPIO 1.

Non è vero l'opposto di quanto abbiamo appena affermato: esistono infatti funzioni continue non derivabili, come per esempio la funzione **modulo**:

$$f(x) = |x| \quad (7)$$

DIMOSTRAZIONE 1.

Lo si può facilmente dimostrare per il limite destro e sinistro in 0:

$$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} |x| : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^+} |x|, & 1 \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} |x|, & -1 \end{cases} \quad (8)$$

Dato che i due limiti non coincidono il limite, nel punto x_0 non esiste.

ESEMPIO 2.

La derivata di $f'(e^x) = e^x$

Alcune proprietà delle derivate:

- La somma delle derivate è la derivata della somma, ed è derivabile in x_0 :

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \quad (9)$$

- La regola di Leibniz: $(f \cdot g)$ è derivabile in x_0

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \quad (10)$$

- La derivata del quoziente (ponendo $g(x_0) \neq 0$), $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0 ;

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} \quad (11)$$

- La derivata della composta è:

Prendiamo due funzioni tali che:

$A, B \subseteq \mathbb{R}, f : A \rightarrow \mathbb{R}, g : B \rightarrow \mathbb{R}, f(A) \subseteq B; x_0 \in A \cap D(A), f$ derivabile in $x_0, f(x_0) \in D(B), g$ derivabile in $f(x_0)$:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \quad (12)$$

- L'inversa della derivata è la complementare della derivata:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad (13)$$

Definizione 4 (Estremanti massimo, minimi e relativi):

Sia $A \subseteq \mathbb{R}, f : A \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, sia $x_0 \in \dot{A}$ (che vuol dire che esiste un intorno di x_0 tutto dentro a A).

Se x_0 è un punto **estremante relativo** (min o max relativo) allora $f'(x_0) = 0$

DIMOSTRAZIONE 2.

Prendiamo come esempio x_0 max relativo, allora sarà vero:

$$\exists \rho > 0 : f(x) - f(x_0) \leq 0 \quad \forall x \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[\quad (14)$$

Sapendo che x_0 è tutto interno, supponiamo che sia tutto incluso in A :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \forall x \in]x_0, x_0 + h[$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \forall x \in]x_0 - h, x_0[$$

Dalla derivabilità della funzione possiamo capire che:

$$\begin{cases} f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \\ f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \end{cases} \quad (15)$$

Quindi $f'(x_0)$ deve essere uguale a 0

1.2 Teoremi Fondamentali delle derivate

Definizione 5 (Rolle):

Prendiamo due numeri naturali, di cui uno strettamente maggiore dell'altro: $a, b \in \mathbb{R}; a < b$ e una funzione continua nell'intervallo formato da questi due numeri: $f \in C([a, b])$, e questa funzione è derivabile nell'insieme formato dai due numeri, estremi esclusi: $]a, b[$. Se l'immagine del primo elemento è uguale a quella dell'altro $f(a) = f(b)$ allora è vero che:

$$\exists c \in]a, b[: f'(c) = 0 \quad (16)$$

Esiste un elemento all'interno dell'intervallo formato dai due punti, la cui derivata è uguale a 0.

DIMOSTRAZIONE 3.

La dimostrazione di questo teorema deriva dal fatto che:

essendo la funzione limitata, applicando il teorema di Weierstrass sappiamo che esistono due punti della funzione $x_1, x_2 \in [a, b]$ che sono punti di \min, \max assoluti nell'intervallo.

Quindi, o le due immagini sono uguali, se e solo se sono i due estremi $x_1, x_2 \in a, b$:

$$f(x_1) = \min f, f(x_2) = \max f \implies f(x_1) = f(x_2) \quad (17)$$

La funzione è costante e quindi la derivata di un qualsiasi punto:

$$f'(c) = 0 \quad \forall c \in]a, b[\quad (18)$$

Se invece uno dei punti è all'interno dell'intervallo $x_1 \in]a, b[$, abbiamo prima dimostrato che se un elemento ha un intorno tutto all'interno di un intervallo ed esso è \min, \max relativo la sua derivata è 0

Definizione 6 (Valor medio o Lagrange):

Siano $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \in C([a, b])$, f derivabile all'interno dell'intervallo dei due punti $]a, b[$, allora:

$$\exists c \in]a, b[: \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad (19)$$

DIMOSTRAZIONE 4.

Consideriamo una funzione $g(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$.

Sostituendo la variabile x con $a \vee b$, otteniamo

$$g(a) = f(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - a) \quad (20)$$

Inoltre:

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = \cancel{f(b)} - \cancel{f(b)} + f(a) = f(a) \quad (21)$$

Quindi logicamente

$$g(a) = f(a), g(b) = f(a) \implies g(a) = g(b) \quad (22)$$

Un'altra nozione che abbiamo premesso è che la funzione è continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$, dalle conclusioni del teorema di Rolle:

$$\exists c \in]a, b[: g'(c) = 0 \quad (23)$$

Che non vuol dire niente di meno di quanto abbia affermato nella nostra tesi:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (24)$$

Definizione 7 (Cauchy):

Siano $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, $f, g \in C([a, b])$ e derivabili in $]a, b[$, $g' \neq 0$, allora:

$$\exists c \in]a, b[: \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (25)$$

Questo si può facilmente dimostrare applicando il teorema di Rolle

Delle brevi osservazioni:

Se abbiamo un intervallo non vuoto $I \subseteq \mathbb{R}$ e una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile su questo intervallo, se:

$$f'(x) = 0, \forall x \in I \quad (26)$$

Allora la funzione è costante in tutto l'intervallo.

Se invece:

$$f'(x) \geq 0 \forall x \in I \quad (27)$$

La funzione è monotona crescente nell'intervallo. Viceversa se è monotona crescente allora sarà sempre minore uguale a 0 la derivata della funzione.

Definizione 8 (Darboux):

Sia $I \subseteq \mathbb{R} \neq \emptyset$ un intervallo non vuoto e sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile nell'intervallo, allora:

$$f'(I) = f'(x) : x \in I \quad (28)$$

È un intervallo di \mathbb{R} .

Definizione 9 (Primitive):

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, diremo che la primitiva di questa funzione è una qualsiasi funzione derivabile $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$$\phi'(x) = f(x) \forall x \in I \quad (29)$$

In parole povere la primitiva è come se fosse "l'operazione inversa" alla derivata, ovvero la primitiva di una funzione è l'immagine di partenza $f(x)$.

Il teorema di Darboux dice inoltre che se esiste una primitiva di una funzione f su I allora $f(I) = \phi'(I)$ è un intervallo, questa è una condizione necessaria affinché la funzione abbia una primitiva.

Definizione 10:

ciao

1.3 Tabelle Utili

Funzione $f(x)$	Derivata della funzione $f'(x_0)$
k	0
$ x $	$\operatorname{sgn} x$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
x	1
$\log_a x$	$\frac{1}{x} \log_a e$
$\log x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x $	$\frac{1}{ x }$
$\log x $	$\frac{1}{x}$
$\log f(x) $	$\frac{f'(x_0)}{f(x)}$
a^x	$a^x \log a$
e^x	e^x
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Integrali per parti