

1 Insiemi

1.1 Introduzione

Definizione 1:

Un insieme è una "collezione" di oggetti.

Sia A un INSIEME, la scrittura $x \in A$ significa che x appartiene ad A .

Analogamente, scrivendo $x \notin A$ si intende che x non appartiene ad A .

Gli insiemi **finiti** si possono denotare all'interno di parentesi graffe " $\{, \}$ "

Un qualsiasi insieme può definirsi mediante una **proprietà astratta**

ESEMPIO 1.

$$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ pari} \} \quad (1)$$

Questo insieme raccoglie **tutti i numeri naturali pari** e si può meglio riscrivere così:

$$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} : x = 2y \} \quad (2)$$

1.2 Insiemi ed operazioni

Sia X un insieme e siano $A, B \subseteq X$

- **UNIONE** $A \cup B$, L'unione di A e B come l'insieme

$$A \cup B = \{ x \in X : x \in A \text{ o } x \in B \} \quad (3)$$

- **INTERSEZIONE** $A \cap B$, L'intersezione di A e B come l'insieme

$$A \cap B = \{ x \in X : x \in A \text{ e } x \in B \} \quad (4)$$

- **DIFFERENZA** $A \setminus B$, che equivale a

$$A \setminus B = \{ x \in X : x \in A \text{ e } x \notin B \} \quad (5)$$

- **COMPLEMENTARE** L'insieme complementare di A in X è:

$$A^C = X \setminus A = \{ x \in X : x \notin A \} \quad (6)$$

ESEMPIO 2.

Il complementare dell'unione è l'intersezione dei complementari, mentre il complementare dell'intersezione è l'unione dei complementari.

- $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$
- $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

DIMOSTRAZIONE 1.

Si dice relazione da A a B ogni sottoinsieme R di $A \times B$. Se $(a, b) \in R$, a è in relazione R con b , si scrive aRb .

$$R = \{ (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \exists p \in \mathbb{N} \mid a = p \cdot b \} \quad (7)$$

1.3 Relazioni d'ordine

Sia $A \neq \emptyset$ un insieme non vuoto e sia $R \subseteq A \times A$ una relazione di A con A . R è:

1. riflessiva se $xRx \quad \forall x \in A$,
2. simmetrica se $xRy \rightarrow yRx$,
3. transitiva se $xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$,
4. antisimmetrica se $xRy \wedge yRz \rightarrow x = y$.

Una **relazione d'equivalenza** è tale se è RIFLESSIVA, SIMMETRICA E TRANSITIVA.

Definizione 2:

Una relazione d'ordine su un insieme $X \neq \emptyset$ è detta di **ordine totale** se $\forall x, y \in X$ si ha $x \leq y \vee y \leq x$. Se su X c'è una relazione d'ordine totale, X è **totalmente ordinato**.

Definizione 3:

Sia (X, \leq) , insieme non vuoto e ordinato e sia $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$

- $x \in X$ è un **maggiorante** di A se $a \leq x \quad \forall a \in A$
- $y \in X$ è un **minorante** di A se $y \leq a \quad \forall a \in A$
- A ha **massimo** se $\exists \lambda \in A \mid a \leq \lambda \quad \forall a \in A \implies \lambda = \max A$
- A ha **minimo** se $\exists \mu \in A \mid \mu \leq a \quad \forall a \in A \implies \mu = \min A$

Definizione 4:

Siano (X, \leq) un insieme ordinato e $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. A ha **estremo superiore** se l'insieme dei maggioranti di A è non vuoto e ha minimo. $\sup A$ è il più piccolo dei maggioranti. Analogamente l'estremo inferiore è presente se l'insieme dei minoranti di A è non vuoto ed esso ne è il più piccolo: $\inf A$.

Definizione 5:

Proprietà di \sup e \inf :

Siano (X, \leq) un insieme ordinato e $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$.

SUP Si ha che $\lambda = \sup A$ se e solo se

1. $a \leq \lambda \quad \forall a \in A$;
2. $\lambda_1 \in X$, $a \leq \lambda_1 \quad \forall a \in A \implies \lambda \leq \lambda_1$

INF Si ha che $\mu = \inf A$ se e solo se

1. $\mu \leq a \quad \forall a \in A$;
2. $\mu_1 \in X$, $\mu_1 \leq a \quad \forall a \in A \implies \mu_1 \leq \mu$

Definizione 6:

Siano (X, \leq) un insieme ordinato e $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$, allora:

1. se A ha massimo, allora si ha $\max A = \sup A$
2. se A ha minimo, allora si ha $\min A = \inf A$

1.4 Numeri reali

Un **gruppo commutativo** e' un insieme X dotato di un'operazione binaria $*$: $X \times X \rightarrow X$ tale che:

1. PROPRIETÀ ASSOCIATIVA: $(x \star y) \star z = x \star (y \star z) \quad \forall x, y, z \in X$
2. ELEMENTO NEUTRO: $\exists e \in X \rightarrow e \star x = x \star e = e$
3. INVERSO: $\forall x \in X \quad \exists y \in X \rightarrow x \star y = y \star x = e$
4. PROPRIETÀ COMMUTATIVA; $\forall x, y \in X \rightarrow x \star y = y \star x$

Se le prime 3 proprietà sono valide allora X e' un *gruppo*. Se e' valida solo la prima allora si chiama *semigrupp*

Definizione 7 (Campo dei numeri reali \mathbb{R}):

I 6 assiomi di completezza:

- $A_1) (\mathbb{R}, +) \rightarrow$ gruppo commutativo, neutro = 0
- $A_2) (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \rightarrow$ gruppo commutativo, neutro = 1
- $A_3) x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$, proprietà distributiva
- $A_4) (\mathbb{R}, \leq) \rightarrow$ totalmente ordinato
- $A_5) (\leq) \rightarrow$ compatibile con $+$ e \cdot
- $A_6) (\mathbb{R}, \leq) \rightarrow$ completo

Le proprietà $A_1, \dots, A_3 \implies (\mathbb{R}, +, \cdot) \rightarrow$ campo

Le proprietà $A_1, \dots, A_6 \implies (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq) \rightarrow$ campo **ordinato e completo**.

Definizione 8 (Sottoinsiemi induttivi):

Un sottoinsieme $I \subseteq \mathbb{R}$ si dice **induttivo** se:

1. $1 \in I$
2. $x \in I \Rightarrow x + 1 \in I$

\mathcal{F} indica la famiglia degli insiemi induttivi di \mathbb{R} :

$$\mathbb{N} \stackrel{def.}{=} \{x \in \mathbb{R} : x \in I \forall I \in \mathcal{F}\} \quad (8)$$

\mathbb{N} è per definizione l'intersezione di tutti gli insiemi induttivi

$$\mathbb{N} = \bigcap_{I \in \mathcal{F}} I \quad (9)$$

DIMOSTRAZIONE 2 (Il principio di induzione).

Se $M \subseteq \mathbb{N}$ è induttivo $\iff M = \mathbb{N}$

Dato che M è induttivo $\mathbb{N} \subseteq M \iff \mathbb{N} = M$

Questo ragionamento introduce il *principio di induzione*.

Definizione 9 (Il minimo di \mathbb{N}):

$$1 \leq n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (10)$$

$$\min \mathbb{N} = 1$$

Definizione 10 (\mathbb{Z} l'anello dei numeri interi):

$$\mathbb{Z} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\} \quad (11)$$

\mathbb{Z} è chiuso per somma e moltiplicazione

$$n, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow n + m, n \cdot m \in \mathbb{Z} \quad (12)$$

Se $A \subseteq \mathbb{Z}$, $A \neq \emptyset$

- se A è superiormente limitato, ammette massimo $\exists \max A$
- se A è inferiormente limitato ammette minimo $\exists \min A$

Definizione 11 (\mathbb{Q} l'anello dei numeri razionali):

$$\mathbb{Q} \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\} \quad (13)$$

\mathbb{Q} è chiuso per somma e moltiplicazione

$$x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x + y, x \cdot y \in \mathbb{Q} \quad (14)$$

\mathbb{Q} è un campo totalmente ordinato ossia sono validi gli assiomi A_1, \dots, A_5 escluso l' A_6

1.5 Radice n-esima

Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$.

$y \in \mathbb{R}$ è la radice n-esima di x se $y \geq 0, y^n = x$

$$y \stackrel{\text{def.}}{=} x^{\frac{1}{n}}, \sqrt[n]{x} \quad (15)$$

Definizione 12:

Proprietà della radice n-esima: per ogni $x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 0$:

$$P_1 \quad x^n \leq y^n \iff x \leq y$$

$$P_2 \quad x^n = y^n \iff x = y$$

$$P_3 \quad x^n < y \iff \exists \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, : (x + \epsilon)^n < y$$

$$P_4 \quad x^n > y \iff \exists \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, : (x - \epsilon)^n > y$$

1.6 Funzioni esponenziali in \mathbb{Q}

Definizione 13:

Sia $a > 0$, $\forall x \in \mathbb{Q}$:

$$a^x := \sqrt[q]{a^p} \Rightarrow x = \frac{p}{q}, \quad p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \quad (16)$$

Se $x = \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \Rightarrow np = mq$

1. $a^{x+y} = a^x a^y \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$

2. $a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{Q}$

3. $(a^x)^y = a^{xy} \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$

se $a > 1$

$$x < y \Rightarrow a^x < a^y \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

se $a < 1$

$$x < y \Rightarrow a^y < a^x \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

In parole povere se la **base è minore di 1**, con un esponente maggiore (y) avremo un numero inferiore rispetto a quello di un esponente minore (x), viceversa quando avremo la **base maggiore di 1**, con esponente maggiore avremo un numero maggiore rispetto ad uno con base minore.