Appunti

Andreas Araya Osorio

3 June 2021

Contents

1 Insiemi

1.1 Introduzione

Definizione 1:
Un insieme è una "collezione" di oggetti.

Sia A un INSIEME, la scrittura $x \in A$ significa che x *appartiene ad* A.
Analogamento, scrivendo $x \notin A$ si intende che x *non appartiene ad* A.
Gli insiemi **finiti** si possono denotare all'interno di parentesi graffe "$\{,\}$"
Un qualsiasi insieme può definirsi mediante una **proprietà astratta**

ESEMPIO 1.

$$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ pari} \} \tag{1}$$

Questo insieme raccoglie **tutti i numeri naturali pari** e si può meglio riscrivere così:

$$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} : x = 2y \} \tag{2}$$

1.2 Insiemi ed operazioni

Sia X un insieme e siano $A, B \subseteq X$

- **UNIONE** $A \cup B$, L'unione di A e B come l'insieme

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ o } x \in B \} \tag{3}$$

- INTERSEZIONE $A \cap B$, L'intersezione di A e B come l'insieme

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \text{ e } x \in B \} \tag{4}$$

- DIFFERENZA $A \setminus B$, che equivale a

$$A \setminus B = \{x \in X : x \in A \text{ e } x \notin B \} \tag{5}$$

- COMPLEMENTARE L'insieme complementare di A in X è:

$$A^C = X \setminus A = \{x \in X : x \notin A \} \tag{6}$$

ESEMPIO 2.
Il complementare dell'unione è l'intersezione dei complementari, mentre il complementare dell'intersezione è l'unione dei complementari.

- $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$
- $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

DIMOSTRAZIONE 1.
Si dice relazione da A a B ogni sottoinsieme R di $A \times B$ Se $(a, b) \in R$. a è in relazione R con b, si scrive aRb.

$$R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \exists p \in \mathbb{N} \mid a = p \cdot b\} \tag{7}$$

1.3 Relazioni d'ordine

Sia $A \neq \varnothing$ un insieme non vuoto e sia $R \subseteq A \times A$ una relazione di A con A. R è:

1. riflessiva se $xRx \quad \forall x \in A$,
2. simmetrica se $xRy \rightarrow yRx$,
3. transitiva se $xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$,
4. antisimmetrica se $xRy \wedge yRz \rightarrow x = y$.

Una **relazione d'equivalenza** è tale se è RIFLESSIVA, SIMMETRICA E TRANSITIVA.

Definizione 2:
Una relazione d'ordine su un insieme $X \neq \varnothing$ è detta di ordine totale se $\forall\, x, y \in X$ si ha $x \leq y \vee y \leq x$. Se su X c'è una relazione d'ordine totale, X è totalmente ordinato.

Definizione 3:
Sia $(X, \leq)$, insieme non vuoto e ordinato e sia $A \subseteq X,\ A \neq \varnothing$

- *$x \in X$ è un **maggiorante** di A se $a \leq x\ \forall a \in A$*
- *$y \in X$ è un **minorante** di A se $y \leq x\ \forall a \in A$*
- *A ha **massimo** se $\exists \lambda \in A \mid a \leq \lambda\ \forall a \in A \implies \lambda = max\ A$*
- *A ha **minimo** se $\exists \mu \in A \mid \mu \leq a\ \forall a \in A \implies \mu = min\ A$*

Definizione 4:
Siano $(X, \leq)$ un insieme ordinato e $A \subseteq X, A \neq \varnothing$. A ha estremo superiore se l'insieme dei maggioranti di A è non vuoto e ha minimo. $supA$ è il più piccolo dei maggioranti. Analogamente l'estremo inferiore è presente se l'insieme dei minoranti di A è non vuoto ed esso ne è il più piccolo: $infA$.

Definizione 5:
Proprietà di *sup* ***e*** *inf****:***
Siano $(X, \leq)$ *un insieme ordinato e* $A \subseteq X, A \neq \varnothing$.
SUP *Si ha che* $\lambda = sup\ A$ ***se e solo se***

1. $a \leq \lambda \quad \forall a \in A$;
2. $\lambda_1 \in X,\ a \leq \lambda_1 \quad \forall a \in A \implies \lambda \leq \lambda_1$

INF *Si ha che* $\mu = inf\ A$ ***se e solo se***

1. $\mu \leq a \quad \forall a \in A$;
2. $\mu_1 \in X,\ \mu_1 \leq a \quad \forall a \in A \implies \mu_1 \leq \mu$

Definizione 6:
Siano $(X, \leq)$ *un insieme ordinato e* $A \subseteq X, A \neq \varnothing$*, allora:*

1. *se* A *ha massimo, allora si ha* $maxA = supA$
2. *se* A *ha minimo, allora si ha* $minA = infA$

1.4 Numeri reali

Un **gruppo commutativo** e' un insieme X dotato di un'operazione binaria $* : X \times X \to X$ tale che:

1. PROPRIETÀ ASSOCIATIVA: $(x \star y) \star z = x \star (y * z) \quad \forall x, y, z \in X$
2. ELEMENTO NEUTRO: $\exists e \in X \to e * x = x * e = e$
3. INVERSO: $\forall x \in X \quad \exists y \in X \to x * y = y * x = e$
4. PROPRIETÀ COMMUTATIVA; $\forall x, y \in X \ \to \ x * y = y * x$

Se le prime 3 proprietà sono valide allora X e' un *gruppo*. Se e' valida solo la prima allora si chiama *semigruppo*

Definizione 7 (Campo dei numeri reali $\mathbb{R}$):
I 6 assiomi di completezza:

- A_1*)* $(\mathbb{R}, +) \to$ *gruppo commutativo, neutro = 0*
- A_2*)* $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \to$ *gruppo commutativo, neutro = 1*
- A_3*)* $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$*, proprietà distributiva*

- *A_4) $(\mathbb{R}, \leq) \to$ totalmente ordinato*
- *A_5) $(\leq)$ $\to$ compatibile con $+ \wedge \cdot$*
- *A_6) $(\mathbb{R}, \leq) \to$ completo*

Le proprietà $A_1, \dots, A_3 \Longrightarrow (\mathbb{R}, +, \cdot) \to$ campo
*Le proprietà $A_1, \dots, A_6 \Longrightarrow (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq) \to$ campo **ordinato e completo**.*

Definizione 8 (Sottoinsiemi induttivi)**:**
*Un sottoinsieme $I \subseteq \mathbb{R}$ si dice **induttivo** se:*

1. $1 \in I$
2. $x \in I \ \Rightarrow \ x + 1 \in I$

$\mathcal{F}$ indica la famiglia degli insiemi induttivi di $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{N} \overset{def.}{=} \{x \in \mathbb{R} \ : x \in I \forall I \in \mathcal{F}\} \tag{8}$$

$\mathbb{N}$ è per definizione l'interesezione di tutti gli insiemi induttivi

$$\mathbb{N} \ = \ \bigcap_{I \in \mathcal{F}} I \tag{9}$$

Dimostrazione 2 (Il principio di induzione).
Se $M \subseteq \mathbb{N}$ è induttivo $\iff$ $M = \mathbb{N}$
Dato che M è induttivo $\mathbb{N} \subseteq M \iff \mathbb{N} \ = \ M$
Questo ragionamento introduce il *principio di induzione.*

Definizione 9 (Il minimo di $\mathbb{N}$)**:**

$$1 \leq n \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{10}$$

Il $min\mathbb{N} \ = \ 1$

Definizione 10 ($\mathbb{Z}$ l'anello dei numeri interi)**:**

$$\mathbb{Z} \overset{def.}{=} \ \mathbb{N} \ \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\} \tag{11}$$

$\mathbb{Z}$ è chiuso per somma e motliplicazione

$$n, m \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow n + m, \ n \cdot m \ \in \mathbb{Z} \tag{12}$$

Se $A \subseteq \mathbb{Z}, \ A \neq \varnothing$

- *se A è superiormente limitato, ammette massimo $\exists \ maxA$*

- *se A è inferiormente limitato ammette minimo $\exists\ minA$*

Definizione 11 ($\mathbb{Q}$ l'anello dei numeri razionali)**:**

$$\mathbb{Q} \stackrel{def.}{=} \left\{ \frac{p}{q} :\in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\} \tag{13}$$

$\mathbb{Q}$ è chiuso per somma e moltiplicazione

$$x, y \in \mathbb{Q} \ \Rightarrow \ x + y, x \cdot y \in \mathbb{Q} \tag{14}$$

$\mathbb{Q}$ è un campo totalmente ordinato ossia sono validi gli assiomi $A_1, \ \ldots, A_5$ escluso l' A_6

1.5 Radice n-esima

Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$.
$y \in \mathbb{R}$ è la radice n-esima di x se $y \geq 0, y^n \ = \ x$

$$y \stackrel{def.}{=} x^{\frac{1}{n}}, \ \sqrt[n]{x} \tag{15}$$

Definizione 12:
Proprietà della radice n-esima: per ogni $x, y \in \mathbb{R}, \ x, y \geq 0$:

P_1 $x^n \leq y^n \iff x \leq y$

P_2 $x^n = y^n \iff x = y$

P_3 $x^n < y \iff \exists \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, : (x + \epsilon)^n < y$

P_4 $x^n > y \iff \exists \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, : (x - \epsilon)^n > y$

1.6 Funzioni esponenziali in $\mathbb{Q}$

Definizione 13:
Sia $a > 0, \ \forall x \in \mathbb{Q}$:

$$a^x \ := \sqrt[q]{a^p} \Rightarrow x = \frac{p}{q} \ , \ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \tag{16}$$

Se $x = \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \implies np = mq$

1. $a^{x+y} = a^x a^y \ \forall x, y \in \mathbb{Q}$

2. $a^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{Q}$

3. $(a^x)^y = a^{xy} \; \forall x, y \in \mathbb{Q}$

se $a > 1$

$$x < y \Longrightarrow a^x < a^y \; \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

se $a < 1$

$$x < y \Longrightarrow a^y < a^x \; \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

In parole povere se la **base è minore di 1**, con un esponente maggiore (y) avremo un numero inferiore rispetto a quello di un esponente minore (x), viceversa quando avremo la **base maggiore di 1**, con esponente maggiore avremo un numero maggiore rispetto ad uno con base minore.

2 Successioni

2.1 Successioni in $\mathbb{R}$

Sia $X \neq \varnothing$, una qualsiasi funzione $f : \mathbb{N} \to X$ si dice: **successione in** X.
In notazione si indica $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o $f_1, f_2, \dots, f_n$
f_n si chiama termine n-esimo.
$k_1, k_2, \dots, k_n$ è una successione di numeri naturali:

$$k_1 < k_2 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{17}$$

La successione $\{f_{k_n}\}$ è una *sottosuccessione* di $\{f_n\}$.
Il limite di una successione $\{a_n\} = l$. Vale a dire che $l \in \mathbb{R}$ è un numero vicino ai termini della successione. Esso è più precisamente un **numero reale** tale che *comunque si scelga* un intervallo di numeri intorno ad a.

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{(a-\epsilon, a+\epsilon)}_{\text{un intervallo attorno a } l} \quad , \epsilon > 0 \mid \exists \quad \underbrace{\overline{n}}_{\text{un indice } n \text{ t.c.}} \quad n > \overline{n}. \tag{18}$$

a_n si trova in questo *intorno*

Definizione 14 (Successione)**:**
*Una successione è una legge che ad ogni numero **naturale** n fa corrispondere**uno ed uno solo** numero reale a_n.*

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \tag{19}$$

Una successione è una funzione che collega degli indici n a dei numeri reali $a \in \mathbb{R}$

Definizione 15:
Se a_n tende a $l \in \mathbb{R}$ per $n \to \infty$, si dice che

$$\begin{gathered}\lim_{n\to\infty} a_n = l \\ \Downarrow \\ \forall \epsilon > 0,\ \exists \overline{n} : (n > \overline{n} \ \Rightarrow \ |a_n - l| < \epsilon) \\ \Downarrow \\ |a_n - l| < \epsilon\end{gathered} \tag{20}$$

$\{a_n\}$ *converge ad l ed esso è il* ***limite*** *di tale* ***tale successione***

Esempio 3.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{21}$$

Ovvero

$$\forall \epsilon > 0 \exists \overline{n} : \forall n \in \mathbb{N} \left(n > \overline{n} \ \Rightarrow \ |\frac{1}{n} - 0| < \epsilon \right) \tag{22}$$

Dimostrazione 3 (Il limite se esiste è unico).

$$\lim_{x\to\infty} a_n = l \quad \wedge \quad \lim_{x\to\infty} a_n = m \quad \iff \quad l \ = \ m \tag{23}$$

Esempio 4.
Poniamo per assurdo che $l \neq m$ Fissiamo $\epsilon > 0$

$$\underbrace{\underbrace{|a_n - l| < \frac{\epsilon}{2}}_{n > \overline{n_1}} \quad \& \quad \underbrace{|a_n - m| < \frac{\epsilon}{2}}_{n > \overline{n_2}}}_{n \ > \ \max\{\overline{n_1}, \overline{n_2}\}} \tag{24}$$

$$\Downarrow$$

Ricordiamo che $|a_n - m| = |m - a_n|$

$$|\cancel{-a_n} - l - \cancel{-a_n} + m||a_n - l| \ + \ |m - a_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \tag{25}$$

$$\Downarrow$$

$$|m - l| < \epsilon \quad \Longrightarrow \quad |m - l| = 0 \tag{26}$$

Ma questo è assurdo perchè: $\epsilon > 0, \forall \epsilon \in \mathbb{R}$

$$m = l \tag{27}$$

Definizione 16:
*Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ converge ad $l \in \mathbb{R}$ **ogni** sua sottosuccessione $\{a_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad l*

Dimostrazione 4 (Limiti).
Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge $l \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \{a_{k_n}\}_{k_{n\in\mathbb{N}}}$ converge $l \in \mathbb{R}$

$$\Downarrow$$

Si ha che:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ n > \overline{n} \implies |a_n - l| < \epsilon \tag{28}$$

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ n > \overline{n} \implies |a_{k_n} - l| < \epsilon \tag{29}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} \ = \ l \tag{30}$$

Esempio 5.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \& \qquad k = 2, \lim_{k_n\to+\infty} \frac{1}{k_n} = 0 \tag{31}$$

Esercizio 1.

Dimostrazione 5.

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = l + m \tag{32}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \quad \& \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = m \tag{33}$$

$$\Downarrow$$

$$|a_n - l| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{se} \quad n > \overline{n_1} \tag{34}$$

$$|b_n - m| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{se} \quad n > \overline{n_2} \tag{35}$$

$n > \max\{\overline{n_1}, \overline{n_2}\}$

$$|a_n + b_n - l - m| \leq |a_n - l| + |b_n - m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \tag{36}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \overline{n} \equiv \max\{\overline{n_1}, \overline{n_2}\} \ : \ n > \overline{n} \ \Rightarrow \ \underbrace{|(a_n + b_n) - (l + m)|}_{0} < \epsilon \tag{37}$$

$$(a_n + b_n) - (l + m) = 0 \tag{38}$$

$$a_n + b_n = l + m \tag{39}$$

Dimostrazione 6 (Permanenza del segno).

$$\forall \epsilon > 0, \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ n > \overline{n} \ \Rightarrow \ \underbrace{|a_n - l < \epsilon|}_{l-\epsilon<a_n<l+\epsilon \qquad \forall n>\overline{n}} \tag{40}$$

$$\epsilon = |l|$$

Da questo otteniamo che

$$\underbrace{l - |l|}_{0} < a_n < \underbrace{l + |l|}_{2l} \tag{41}$$

In conclusione avremo che:
se $l > 0 \Rightarrow a_n > 0$
se $l < 0 \Rightarrow a_n < 0$

Definizione 17 (Teorema dei 2 carabinieri)**:**
Se $\underbrace{\{a_n\} \ , \{b_n\}}_{convergono \ a \ \ l} \ , \{c_n\}$

$$\textit{è ovvio che: } a_n \leq c_n \leq b_n \ \Longrightarrow \ c_n \textit{converge a } l \tag{42}$$

Dimostrazione 7.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \overline{n_1}, \overline{n_2} \in \mathbb{N} : \tag{43}$$

$$\Downarrow$$

$$l - \epsilon < a_n < l + \epsilon \qquad \& \qquad l - \epsilon < b_n < l + \epsilon \tag{44}$$

se $n > \max\{\overline{n_1}, \overline{n_2}\}$

$$\Downarrow$$

$$l - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < l + \epsilon \qquad \forall n > \overline{n} \tag{45}$$

$$\underbrace{l - \epsilon < c_n < l + \epsilon}_{|c_n - l| < \epsilon} \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} c_n = l \tag{46}$$

Definizione 18:
Sia una successione $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ *è detta:*

- *superiormente limitata, se* $\exists M \in \mathbb{R} \ : \ a_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$
- *inferiormente limitata, se* $\exists M \in \mathbb{R} \ : \ a_n \geq M \ \forall n \in \mathbb{N}$
- *limitata, se* $\exists M \in \mathbb{R} \ : \ |a_n| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$

Definizione 19 (Ogni successione convergente è limitata)**:**
Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}, \ a_n \underset{n \to \infty}{\to} l$
Allora (con $\epsilon = 1$*)*

$$\exists \overline{n} : \forall n \in \mathbb{N}(n > \overline{n} \ \Rightarrow \ |a_n - l| < 1) \tag{47}$$

Segue quindi che $|a_n| \leq |a_n - l| + |l| < 1 + |l|, \ n > \overline{n}$

$$|a_n| \leq 1 + |l| \tag{48}$$

Definizione 20 (Retta reala ampliata)**:**

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\} \tag{49}$$

Definizione 21:
Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$

$$\begin{gathered} \lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \\ \Downarrow \\ \forall k \in \mathbb{R} \exists \overline{n} \in N \ : \ \forall n \in \mathbb{N}(n > \overline{n} \implies a_n > k) \end{gathered} \tag{50}$$

La scrittura è analoga per $-\infty$ *invertendo il segno: (*$a_n < k$*)*
Potremo dire che a_n *diverge positivamente o negativamente*

2.2 Forme indeterminate

Se $\{a_n\},\{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$ *e* $\{a_n\} \to +\infty, \{b_n\} \to -\infty\}$ *allora:*

$$a_n + b_n \to +\infty - \infty = \ ? \tag{51}$$

$+\infty$ *e* $-\infty$ *non sono veri e propri numeri, piuttosto sono dei* ***simboli****, quindi il risultato sarà detto:*FORMA INDETERMINATA $+\infty - \infty$

Altri tipi di forme indeterminate sono:

$$\frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ 0 \cdot \infty,\ 1^{\infty},\ 0^0,\ \infty^0 \tag{52}$$

2.3 Teoremi generali di esistenza

Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ è detta monotona crescente se

$$a_n \leq a_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N} \tag{53}$$

Si dice invece monotona decrescente se

$$a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N} \tag{54}$$

Sono rispettivamente **strettamente** monotone crescenti o decrescenti se le disuguaglianze sono **strette** $(<,>)$
Le scritture $a_n \nearrow$ e $a_n \searrow$ indicano monotonia crescente e decrescente

Definizione 22 (Successioni costanti)**:**
Se $a_n = a\ \forall n \in \mathbb{N}$*, con* a *numero reale fissato si dice che*

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = l,\ l \in \mathbb{R} \quad \{a_n\} \nearrow\searrow = \textit{costante} \tag{55}$$

Definizione 23:
Ogni successione monotona ammette limite:
Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$*:*

1. $a_n \nearrow \implies \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$
2. $a_n \searrow \implies \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$

DIMOSTRAZIONE 8.
Se $\{a_n\}$ è superiormente limitata per l'assioma di completezza:

$$\exists \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \lambda \tag{56}$$

Per la proprietà del sup si ha che $a_n \leq \lambda, \forall n \in \mathbb{N}$ dunque:

$$a_n < \lambda + \epsilon \; \forall n \in \mathbb{N}, \; \forall \epsilon > 0 \tag{57}$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \; : \; \lambda < a_{\overline{n}} + \epsilon \tag{58}$$

La definizione di limite è:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lambda \tag{59}$$

Esercizio 2 (Il numero di nepero e).

$$e \equiv \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{60}$$

Si nota che $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ sono successioni **convergenti** che hanno lo stesso limite e, inoltre sono **strettamente monotone**

$$a_n < a_{n+1} \quad \text{e} \quad b_n > b_{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N} \tag{61}$$

Inoltre

$$a_n < b_n \; \forall n \in \mathbb{N} \tag{62}$$

allora:

$$a_n < a_p < b_p < b_m \quad \forall n, m, p; p = \max\{n, m\} \tag{63}$$

Entrambe le successioni convergono: a_n è monotona crescente e superiormente limitata e b_n è monotona decrescente e inferiormente limitata.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \tag{64}$$

Questo implica che:

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = \lim_{n \to +\infty} a_n = e \tag{65}$$

Dimostrazione 9.

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \& \quad b_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)+1} \tag{66}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1 \implies \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)+1}} > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n+1^n}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right) > 1 \\
&= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^2 = \left(\frac{n+2^n}{n+1}\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 > 1 \\
&= \left(\frac{\cancel{(n+1)}(n+2)}{n\cancel{(n+1)}}\right)^n \cdot \left(\frac{\cancel{n+1}}{n}\right) \cdot \left(\frac{n+2}{\cancel{n+1}}\right)^2 > 1 \\
&= \left(\frac{n+2}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n}\right) \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) > 1 \\
&= \underbrace{\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n+1}}_{>1} > \underbrace{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}_{<1}
\end{aligned}
\tag{67}
$$

Definizione 24 (Bolzano - Weierstrass)**:**
Ogni successione reale limitata ammette una sottosuccessione convergente.

Dimostrazione 10.
Per ogni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ esiste $M > 0 \ : \ |a_n| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N} \ \exists k_n \nearrow : \ a_{k_n} \underset{n\to+\infty}{\to} l \in \mathbb{R}$

$$-M \leq a_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{68}$$

$$\alpha_n = \sup a_k : k \geq n, \ n \in \mathbb{N} \quad \implies \quad -M \leq \alpha_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{69}$$

Quindi dalla definizione ne segue che:

$$\alpha_{n+1} \leq \alpha_n \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha_n \searrow \\ \Downarrow \tag{70}$$

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \alpha_n \equiv l \quad \implies l \equiv \inf_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \tag{71}$$

$$
\begin{gathered}
\forall \epsilon > 0, \ \forall p \in \mathbb{N} \ \exists n \geq p : l - \epsilon \leq a_n \\
\alpha_p \searrow \Rightarrow l \leq \alpha_p \Rightarrow l - \epsilon < \alpha_p \ \forall \epsilon > 0 \ \forall p
\end{gathered}
\tag{72}
$$

Dato che $\alpha_p = \sup\{a_n : n \geq p\}$, deve esistere $n \geq p : a_n > l - \epsilon$
Sia $k_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} k_1 = \min\{k \in \mathbb{N} : l - 1 < a_k\} \\ k_{n+1} = \min\{k \in \mathbb{N} : k > k_n \wedge l - \dfrac{1}{n+1} < a_k\} \end{cases} \tag{73}$$

$$\Downarrow$$

$$k_{n+1} > k_n,\ \forall n \quad \wedge \quad l - \frac{1}{n} < a_{k_n}\ \forall n \tag{74}$$

Questo implica che $\{a_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ verifica le disuguaglianze

$$l - \frac{1}{n} < a_{k_n} \leq \alpha_{k_n} \implies \alpha_{k_n} \underset{n\to+\infty}{\to} l \implies a_{k_n} \to l \tag{75}$$

Definizione 25 (Successioni di Cauchy)**:**
Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ si chiama successione di Cauchy se:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} :\ \forall n, m \in \mathbb{N}(n, m > \overline{n} \Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon) \tag{76}$$

Una successione si dice di Cauchy se i suoi termini sono "arbitrariamente" vicini tra loro.

Definizione 26 (Ogni successione convergente è di Cauchy)**:**

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}, a_n \to l \in \mathbb{R} = \textit{di Cauchy} \tag{77}$$

Dimostrazione 11.
Se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ implica che:

$$\forall \epsilon, \epsilon > 0 \exists \overline{n} \forall n \left(n > \overline{n} \Rightarrow |a_n - l| < \frac{\epsilon}{2}\right) \tag{78}$$

La scrittura $\exists \overline{n}$ significa che esiste un indice dopo il quale ogni indice successivo sarà maggiore di quello.
Di conseguenza:

$$|a_n - a_m| = |(a_n - l) + (l - a_m) \leq |a_n - l| + |a_m - l| \leq \cancel{2} \cdot \frac{\epsilon}{\cancel{2}} \quad n, m > \overline{n} \tag{79}$$

$\{a_n\}$ è di Cauchy

$$\{a_n\} \text{ di Cauchy} \Rightarrow \{a_n\} \nearrow \iff \{a_n\} \nearrow \Rightarrow \{a_n\} \text{ di Cauchy} \tag{80}$$

2.4 Rappresentazione decimale di numeri reali

Se $x \in \mathbb{R}$ è:

$$[x] = \text{parte intera} = max\{p \in \mathbb{Z} : p < x\} \tag{81}$$

$$\Downarrow$$

$$[x] \leq x < [x] + 1 \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{82}$$

$$\Downarrow$$

$$x_n = \frac{[b^n x]}{b^n} \tag{83}$$

Le seguenti affermazioni sono vere:

1. $\{x_n\} \nearrow$
2. $x_n \leq x < x_n + \frac{1}{b_n} \ \forall n \in \mathbb{N}$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$
4. $\exists \alpha_0 \in \mathbb{Z}, \exists \{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}$

Definizione 27 (Decimali)**:**
I numeri decimali sono i numeri razionali:

$$\frac{m}{10^n}(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}) \tag{84}$$

Ogni numero decimale si può scrivere come

$$x = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{10^n} \tag{85}$$

con $\alpha_0 \in \mathbb{Z}, \ \alpha_1 \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$

Definizione 28 (Decimali propri)**:**
Sia $x \in \mathbb{R}, \ x = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ *La rappresentazione decimale di* x *si dice* ***propria*** *se:*

$$\nexists p \in \mathbb{N} : \alpha_n = 9 \ \forall n \geq p \tag{86}$$

Ogni numero reale ammette un'**unica** rappresentazione decimale propria. Se $x \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ x = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ è la rappresentazione decimale propria di x **se e solo se**

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \leq x < \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n + \frac{1}{10^n} \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{87}$$

2.5 Cardinalità di insiemi

Due insiemi $A, B \neq \varnothing$ si dicono **equipotenti** se

$$\exists f : A \underset{1-1}{\overset{su}{\rightarrow}} B \quad \implies \quad A \cong B \tag{88}$$

Vale a dire che esiste una **funzione biunivoca** fra i due insiemi ed essi hanno stessa **cardinalità**

$$card(A) = card(B) \tag{89}$$

$$\Downarrow$$

$$I_n = \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\}, \quad card(A) \cong card(I_n) \implies card(A) = n \tag{90}$$

A è un insieme finito. Un iniseme è infinito se non è finito.

- A è finito $B \subseteq A, B \neq \varnothing \implies B$ è finito
- A è finito e B è sottoinsieme proprio di $A \implies A \cong B$
- A è finito, allora il numero dei suoi elementi è unico
- B è infinito e $B \subseteq A \implies A$ è infinito

Altre proposizione che ne conseguono sono:

- $A \neq \varnothing \implies A \cong A$
- $A \cong B \iff B \cong A$
- $A \cong B, B \cong C \implies A \cong C$

L'equipotenza è una relazione di **equivalenza**

Definizione 29 ($\mathbb{N}$ è infinito)**:**
Dimostriamo che $\mathbb{N}$ è equivalente ad un suo sottoinsieme proprio:

$$P = \{n \in \mathbb{N} := 2m, n \in \mathbb{N}\}, \; f : P \to \mathbb{N}, f(n) = \frac{n}{2} \tag{91}$$

f è biunivoca quindi $P \subset \mathbb{N} \implies P \cong \mathbb{N}$

Definizione 30 ($\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sono infiniti)**:**
Tutti questi insiemi contengono $\mathbb{N}$

Definizione 31 (Insiemi numerabili)**:**
*Un insieme si dice **numerabile** se è **equipotente** ad* $\mathbb{N}$

Un insieme A è numerabile se si possono *elencare i suoi elementi*: ovvero se esiste una successione biiettiva $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che ha come immagine A, il nome di tale successione è **numerazione**

Definizione 32:
Sia A un insieme numerbaile se $M \subseteq A$, M è infinito
$\implies M \cong \mathbb{N}$

Ogni sottoinsieme infinito di un insieme numerabile **è numerabile**.
Ogni sottoinsieme di $\mathbb{N}$ è un insieme **infinito o numerabile**.

Definizione 33 (Assioma della scelta)**:**
Sia $\mathcal{B}$ una famiglia $\neq \varnothing$ di insiemi. Sia A un insieme t.c.

$$B \subseteq A \ \forall B \in \mathcal{B} \tag{92}$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \varphi : \mathcal{B} \to A \ : \ \varphi(B) \in B \ \forall B \in \mathcal{B} \Rightarrow \boldsymbol{AC} \tag{93}$$

*Ovvero in parole: data una **famiglia** di insiemi $\mathcal{B}$ non vuoti, esiste una funzione che ad ogni insieme della famiglia fa corrispondere un suo elemento.*

L'assioma assicura che, quando viene data una collezione di insiemi non vuoti si può sempre costruire un nuovo insieme *"scegliendo"* un **singolo elemento** da ciascuno di quelli di partenza.

Definizione 34:
Dati due insiemi A, B:

$$card(A) \leq card(B) \tag{94}$$

Se esiste $B_0 \subseteq B$, t.c. $card(A) = card(B_0)$. Se $card(A) \leq card(B)$ e $card(A) \neq card(B) \implies card(A) < card(B)$

Un insieme si dice finito **se e solo se**: $card(A) < card(\mathbb{N})$

Definizione 35 (Numeri algebrici)**:**
*Un numero reale si dice **algebrico** se risolve un'equazione*

$$p(x) = 0, \qquad p \in \mathbb{Z} \tag{95}$$

con p un polinomio con coefficienti in $\mathbb{Z}$.
*I nuemri reali **non** algebrici si dicono **trascendenti***

DIMOSTRAZIONE 12.
I numeri algebrici sono i razionali , infatti essi sono:

$$x = \frac{m}{n} \implies nx - m = 0 \tag{96}$$

$$p(x) = 3x^7 - 5x^2 + 3 \rightarrow h = 7 + 3 + |-5| + 2 + 3 = 20 \tag{97}$$

Definizione 36 (Gerarchia di infiniti)**:**
*Esiste una gerarchi di **infiniti**, ovvero "certi infiniti valgono di più di altri infiniti"*

$$\mathcal{N}_0 = card(\mathbb{N}), \mathcal{N}_1 = card(\mathbb{R}) \implies \mathcal{N}_0 < \mathcal{N}_1 \tag{98}$$

2.6 O grande, o piccolo, $\sim$ equivalente

Definizione 37 (o piccolo)**:**
Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *due successioni reali, si dice che* a_n *è un "o piccolo" di* b_n *per* $n \to +\infty$

$$a_n = o(b_n)\ (n \to +\infty) \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \tag{99}$$

Definizione 38 (O grande)**:**
Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *due successioni reali, si dice che* a_n *è un "O grande" di* b_n *per* $n \to +\infty$

$$a_n = O(b_n)\ (n \to +\infty) \iff \exists \overline{n} \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}\ :\ \left(\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq M\ \forall n > \overline{n}\right) \tag{100}$$

Occore notare che se esiste il limite di $\frac{a_n}{b_n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R} \tag{101}$$

Si può sempre scrivere $a_n = O(b_n)$

Definizione 39 ($\sim$ equvialente)**:**
Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *due successioni reali, si dice che* a_n *è un "equivalente" di* b_n *per* $n \to +\infty$

$$a_n \sim b_n\ (n \to +\infty) \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \tag{102}$$

Questo vale a dire che le due successioni hanno lo stesso limite.

Consideriamo anche che, se due successioni sono equivalenti $a_n \sim b_n$ implica che :

$$a_n \sim b_n \implies a_n = O(b_n) \iff b_n = O(a_n) \tag{103}$$

3 Topologia della retta euclidea

3.1 Intervalli

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, si pone per definizione

$$\begin{aligned} \text{aperto }]a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\ \text{semiaperto } [a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\ \text{semiaperto }]a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\ \text{chiuso } [a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \end{aligned} \tag{104}$$

Se uno degli estremi è $\pm\infty$, $(a = -\infty, b = +\infty)$

$$\begin{aligned}]a,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \\ ]-\infty,a[&= \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \\ [a,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \\ ]-\infty,a] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \end{aligned} \tag{105}$$

Definizione 40:
Se $x_0 \in \mathbb{R}, \rho > 0$, si pone

$$B(x_0, \rho) =]x_0 - \rho, x_0 + \rho[\tag{106}$$

si chiama intorno aperto di x_0 di raggio $\rho \in \mathbb{R}_+$.
La famiglia degli intorni aperti di x_0 si denota come

$$\mathcal{U}_{x_0} = \{]x_0 - \rho, x_0 + \rho[: \rho > 0\} \tag{107}$$

3.2 Punti di accumulazione, isolati e aderenti

Definizione 41 (Punti di accumulazione)**:**
*Siano $A \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$, si dice che x_0 è un **punto di accumulazione** di A se per ogni W (intorno) $\in \mathcal{U}_{x_0}$ (famiglia degli intorni):*

$$A \setminus \{x_0\} \cap W = \varnothing \tag{108}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \setminus \{x_0\}) \cap\,]x_0 - \rho, x_0 + \rho[\neq \varnothing \; \forall \rho > 0 \tag{109}$$

*In parole, se prendiamo l'insieme A e ad esso sottriamo un qualsiasi punto x_0 e ad esso intersechiamo l'intervallo formato di raggio rho "ρ" e con centro x_0. Questo insieme è un punto di accumulazione se quanto citato prima **non è** un insieme vuoto, ovvero in esso troviamo almeno **un elemento**.*
*L'**insieme** dei punti di accumulazione si chiama **derivato** di $A = D(A)$. Per definizione poniamo $D(\varnothing) = \varnothing$*

Definizione 42 (Punto isolato)**:**
*Se $x \in A$ e $x \notin D(A)$ si dice che x è un **punto isolato***

DIMOSTRAZIONE 13.
Se $A \subset R$ è un insieme finito, questo implica che $D(A) = \varnothing$.

1. Se $A = \varnothing \implies D(\varnothing) = \varnothing$
2. Se $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ Nessuno $z \in \mathbb{R}$ è punto di accumulazione per A:
$$z \notin D(A),\ \forall z \in \mathbb{R} \tag{110}$$
   - Supponiamo che z non sia in $\mathbb{R}$:
     $z \in \mathbb{R} \setminus A \;\to\; z \neq x_j,\ \forall j = 1, \ldots, p$
     $$\rho = \{|z - x_j| : \; j \;=\; 1, \ldots, p\} \tag{111}$$
     $|z - x_j| = 0 \iff z = x_j$ ma z è escluso dall'insieme A
     $$(A \setminus \{z\} \cap\,]z - \rho, z + \rho[= \varnothing \tag{112}$$
   - Supponiamo invece che z sia in A:
     $z \in A \to z = x_1$
     $$\rho = \{|x_1 - x_j| : \; j \;=\; 2, \ldots, p\} \tag{113}$$
     $\rho > 0$ dato che i punti di $x_j \in A$ sono diversi tra loro.
     Se ne deduce quindi che l'intorno aperto $B(x_1, \rho)$ di centro x_1 di raggio ρ esclude qualsiasi altro punto di A
     $$(A \setminus \{x_1\}) \cap\,]x_1 - \rho, x_1 + \rho[= \varnothing \tag{114}$$

Esempio 6 ($A \subseteq \mathbb{R}$ e $D(A) \neq \varnothing \implies A$ è **infinito**).
Ovvero, se A è un insieme contenuto nell'insieme dei numeri reali e l'insieme dei suoi punti di accumulazione **non** è vuoto allora A è infinito.
Ciò non è vero in quanto questa proposizione è solamente una **condizione necessaria** ma **non sufficiente**.
$\mathbb{N}$ è infinito ma $D(\mathbb{N}) = \varnothing$

Definizione 43:
Siano $A \subseteq \mathbb{R},\ x_0 \in \mathbb{R}$, allora:

$$x_0 \in D(A) \iff \exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{x_0\} : x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x_0 \tag{115}$$

Definizione 44:
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, A infinito e limitato, allora $D(A) \neq \varnothing$

Dimostrazione 14.
A è infinito quindi esiste $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ t.c. $x_n \neq x_m,\ \forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m.$
A è limitato quindi $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
TEOREMA BOLZANO-WEIERSTRASS :

$$\exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\ :\ x_{k_n} \underset{n\to+\infty}{\to} x_0 \in \mathbb{R} \tag{116}$$

Se $x_{k_n} \neq x_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $\{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ e converge a x_0
Quindi $x_0 \in D(A)$
Se $x_{k_p} = x_0,\ p \in \mathbb{N}$, avremo che $\{x_{k_{n+p}}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ e questa successione converge ad x_0. $x_{k_n} \neq x_{k_p},\ \forall n \neq p.$
In entrambi i casi: $\exists x_0 \in D(A)$

Definizione 45 (Punti aderenti)**:**
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, sia $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0 è aderente in A se

$$A \cap W \neq \varnothing\ \forall W \in \mathcal{U}_{x_0} \tag{117}$$

$$\Downarrow$$

$$A \cap]x_0 - \rho, x_0 + \rho[\neq \varnothing\ \forall \rho > 0 \tag{118}$$

Definizione 46 (Chiusura)**:**
*Si dice **chiusura** di A, $\overline{A}$, l'insieme dei punti aderenti ad A:*

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \textit{è aderente ad} A\} \tag{119}$$

La chisura dell'insieme vuoto corrsiponde per convenzione all'insieme vuoto.

$$\overline{\varnothing} = \varnothing \tag{120}$$

Dalle definizioni precedenti ricaviamo:

$$D(A) \subseteq \overline{A} \ \& \ A \subseteq \overline{A} \tag{121}$$

Il fatto per cui, l'insieme dei punti di accumulazione di A è contenuto nell'insieme dei punti di aderenza di A è dovuto dal fatto che al primo insieme "togliamo" x_0, ovvero il centro dell'intervallo di riferimento, mentre fa parte del secondo.

Definizione 47 ($\overline{A} = A \cup D(A)$)**:**
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, *si ha* $\overline{A} \supseteq A,\ \& \ \overline{A} \supseteq D(A) \implies \bar{(A)} \supseteq A \cup D(A)$
Proviamo che:

$$x_0 \in A \cup D(A)\ \forall x_0 \in \overline{A} \tag{122}$$

Se x_0 *è in* A, *è ovvio. Proviamolo nel caso in cui* $x_0 \in \overline{A} \setminus A$.

$$A \cap W \neq \varnothing\ \forall W \in \mathcal{U}_{x_0} \tag{123}$$

$$\Downarrow$$

$$A \setminus \{x_0\} = A \implies A \setminus \{x_0\} \cap W \neq \varnothing \quad \forall W \in \mathcal{U}_{x_0} \tag{124}$$

Quindi $x_0 \in D(A)$.

Definizione 48:
Siano $A \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$*:*

$$x_0 \in \overline{A} \iff \exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A : x_n \underset{n\to+\infty}{to} x_0 \tag{125}$$

3.3 Insiemi aperti e chiusi. Insiemi compatti

Definizione 49 (Insieme chiuso)**:**
$A \subseteq \mathbb{R}$ *è **chiuso** se* $A = \overline{A}$, *ma questo è possibile se:*

$$A = \overline{A} \iff D(A) \subseteq A \tag{126}$$

Se $A \subseteq \mathbb{R}$ sono valide le seguenti affermazioni:

- A è chiuso

- Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x_0 \implies x_0 \in A$

Definizione 50 (Insieme compatto)**:**
*Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, A è detto **compatto** se ad ogni successione di punti di A si può estrarre una sotto-successione convergente ad un punto di A:*

$$A compatto \iff \begin{cases} \forall\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A & \exists\{x_{k_n}\} \\ \exists x_0 \in A & \lim\limits_{n\to+\infty} x_{k_n} = x_0 \end{cases} \tag{127}$$

Possiamo dimostrare che sia $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$A \text{compatto} \iff A \text{chiuso e limitato} \tag{128}$$

Dimostrazione 15.
Se A è **chiuso e limitato** dimostriamo che A è **compatto**.
Data una successione $\{x_n\}$ estraiamo una sotto-successione convergente ad un $x_0 \in A$.
Ma se l'insieme che contiene la successione è **limitato** lo è pure la successione
Applichiamo il T. BOLZANO-WEIERSTRASS:

$$\{x_{k_n}\} \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} x_{k_n} = x_0 \tag{129}$$

Se $x_0 \in \overline{A}$ e $\overline{A} = A$ (essendo chiuso), quindi $x_0 \in A$

Definizione 51 (Punto interno e Insieme Aperto)**:**
*Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. x_0 si dice **interno** ad A se esiste $\rho > 0$ t.c.*

$$]x_0 - \rho, x_0 + \rho[\subseteq A \tag{130}$$

*Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è detto **aperto** se **ogni suo punto** è interno ad A*

$$A \text{ è aperto} \iff A = \mathring{A} \tag{131}$$

4 Limiti per funzioni

4.1 Definizioni

Definizione 52 (Intorno di $\pm\infty$)**:**
***L'intorno** di $+\infty$ è l'insieme:*

$$]k, +\infty[, \ k \in \mathbb{R} \tag{132}$$

L'intorno *di $-\infty$ è l'insieme:*

$$]-\infty, k[, \ \ k \in \mathbb{R} \tag{133}$$

Intendiamo che se $A \subseteq \mathbb{R}$ come i seguenti

$$\begin{aligned} supA = +\infty \iff +\infty \in D(A) \\ infA = -\infty \iff -\infty \in D(A) \end{aligned} \tag{134}$$

Un limite λ può essere:

$$\lambda \in \overline{R} \iff \begin{cases} \lambda \in R \\ \lambda = +\infty \\ \lambda = -\infty \end{cases} \tag{135}$$

Definizione 53:
Siano $A \subseteq \mathbb{R}, \ x_0 \in D(A), \ \lambda \in \overline{R}. \ f : A \to \mathbb{R}$.
A un insieme contenuto fra i numeri reali, x_0 si trovi in un punto di accumulazione di A, λ contenuto nella retta reale estesa e f una funzione che ad ogni elemento di A corrisponde un elemento di R.
Diremo che $f(x)$ tende a λ per x che tende a x_0.

$$\forall V \in \mathcal{U}_\lambda \ \exists W \in \mathcal{U}_{x_0} \ : \ f(x) \in V \ \forall x \in A \setminus \{x_0\} \cap W \tag{136}$$

Qualunque intorno V all'interno della famiglia degl intorni $\mathcal{U}_\lambda$ di λ (ricordando che $\lambda \in \overline{R}$ quindi può assumere o un valore reale o è uguale a $\pm\infty$), esiste un intorno W all'interno della famiglia degli insiemi di $\mathcal{U}_{x_0}$ di x_0 (un punto di accumulazione)

$$x_0 \in \mathbb{R} \qquad]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\tag{137}$$

tale che l'immagine x sia in V tutte le volte che x in $A \setminus x_0$ intersecato con l'intorno W, W_{x_0} è per defnzione un punto di accumulazione quindi l'interesezione ***è non vuota***
La scrittura semplificata:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \tag{138}$$

se ***per ogni*** *$\epsilon > 0$ esiste un numero $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in A, \ 0 < |x - x_0| < \delta$.*

$$|f(x) - \lambda| < \epsilon \tag{139}$$

Esempio 7.
Abbiamo $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\lambda = -\infty$ avremo che:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{x_0} &= \{]x_0 - \delta, x_0 + \delta[: \delta > 0\} \\ \mathcal{U}_\lambda = \mathcal{U}_{-\infty} &= \{] - \infty, k[: k \in \mathbb{R}\} \end{aligned} \tag{140}$$

Quindi avremo che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \tag{141}$$

se e solo se:

$$\forall k \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in A \setminus \{x_0\}\ \{|x - x_0| < \delta \implies f(x) < k\} \tag{142}$$

Vale a dire che: qualunque valore noi diamo a k che è un numero appartenente ai numeri reali (quindi ha un valore finito), esiste un numero δ maggiore di 0 tale che, quale che sia x contenuta in A meno x_0, il **modulo** della differenza di x e x_0 ($|x - x_0|$) è **minore** di δ, questo vuol dire che l'immagine di $f(x)$ è sempre **strettamente minore** di k.
Ovvero $f(x)$ avrà sempre un valore piccolissimo inferiore a qualsiasi numero reale

Anche se $f(x)$ è definita nel punto x_0 non è necessario che soddisfare $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lambda$, quindi nel punto in cui $x = x_0$. Affermiamo che il valore del limite λ è indipendente dal valore della funzione nel punto x_0.

4.2 Teoremi Fondamentali

Definizione 54 (Unicità del limite)**:**
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e siano $x_0 \in D(A),\ x_0 \in \overline{R},\ f : A \to \mathbb{R}$.
Se esistono $\lambda, \mu \in \overline{\mathbb{R}}$ t.c.:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \quad \wedge \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \mu \quad \iff \quad \lambda = \mu \tag{143}$$

Prendiamo un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$, che è il dominio di una funzione $f(x) : A \to \mathbb{R}$, e prendiamo x_0 un punto di accumulazione dell'insieme A, contenuto in $\mathbb{R}$. Supponiamo che ci siano **due** limiti (per assurdo), ma allora questi due limiti **SONO UGUALI**.

Dimostrazione 16.
Partiamo dalla nozione che: **punti distinti** ammettono **intorni disgiunti**:

$$\lambda, \mu \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \Longrightarrow \qquad \exists V \in \mathcal{U}_\lambda, W \in \mathcal{U}_\mu : \ V \cap W \neq \varnothing \tag{144}$$

Supponendo per assurdo che i due numeri siano diversi fra loro, allora ci basterà prendere un numero $\epsilon > 0$ minore della **metà** della distanza fra questi due numeri e noteremo che i due numeri hanno intorni distinti.
Questo è assurdo in quanto avevamo affermato che l'interesezione dei loro intorni era **non vuota**. Questo quando i due numeri λ, μ sono numeri reali, quando uno di questi due invece é $\pm\infty$ allora per l'assioma di completezza c'è sempre un numero reale che si trova fra questi due per seprararli.

Per assurdo $\lightning$, poniamo $\lambda \neq \mu$, per quanto abbaimo dimostrato prima abbiamo che **punti disgiunti** hanno **intorni disgiunti**. Ovvero:

$$\exists V \in \mathcal{U}_\lambda, \exists W \in \mathcal{U}_\mu \ : \ V \cap W = \varnothing. \tag{145}$$

Stiamo affermando che l'interesezione dei due intorni è un'insieme vuoto.
Notiamo anche che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \iff \exists U_1 \in \mathcal{U}_{x_0} : f(x) \in V \quad \forall x \in (A \setminus \{x_0\}) \cap U_1 \tag{146}$$

e che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \mu \iff \exists U_2 \in \mathcal{U}_{x_0} : f(x) \in W \quad \forall x \in (A \setminus \{x_0\}) \cap U_2 \tag{147}$$

Quindi avremo che:

$$f(x) \in V \cap W \ \forall x \in (A \setminus \{x_0\}) \cap (U_1 \cap U_2) \tag{148}$$

Questo é assurdo perchè $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_{x_0}$ e

$$x_0 \in D(A) \iff (A \setminus \{x_0\}) \cap (U_1 \cap U_2) \neq \varnothing \tag{149}$$

e questo dimostra che $V \cap W \neq \varnothing$ che contraddice il fatto che $V \cap W = \varnothing$

Definizione 55 (Località del limite)**:**
Siano $A \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D(A)$ intendendo che $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e $f, g : A \to \mathbb{R}$ e siano f, g due funzioni con dominio l'insieme A.
Se esiste $\tilde{W} \in \mathcal{U}_{x_0}$:

$$f(x) = g(x) \ \forall x \in \tilde{W} \cap (A \setminus \{x_0\}) \tag{150}$$

se esiste il $\lim_{x \to x_0} f(x)$, quindi esiste $\lim_{x \to x_0} g(x)$ e i due limiti coincidiono.

Esempio 8.
Prendiamo due funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} x \neq 0 \\ 0 & \text{se} x = 0 \end{cases} \tag{151}$$

e

$$f(x) = 1 \tag{152}$$

Possiamo subito osservare che $f(x) \neq g(x)$ se e solo se $x = 0$
Inoltre il limite di:

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 1 \qquad g(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{153}$$

Infatti non è importante il valore della funzione in quello specifico punto ma il valore che assume **nell'intorno** di quel punto.
Abbiamo dimostrato quindi che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$.

il limite è unico e dipende solo da un intorno del punto in cui lo calcoliamo e non dal valore assoluto della funzione nel punto.

Il vaolre assoluto avrà un valore importante nella nozione di continuità.

Definizione 56 (Restrizione di limiti)**:**
Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e $B \subseteq A$ diremo che la sua restrizione per B è:

$$f_{|_B} : B \to \mathbb{R} \qquad f_{|_B}(x) = f(x)^{\forall x \in B} \tag{154}$$

I punti della funzione ristretta in B sono tutti i punti della funzione di di partenza restrigendo il Dominio da A a B.
Se esiste il limite di $\lim_{x \to x_0} f(x)$ allora esite anche il limite di $\lim_{x \to x_0} f_{|_B}(x)$ e questi due limiti coincidono:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f_{|_B}(x) \tag{155}$$

Definizione 57:
*Se $A = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, $B =]x_0, +\infty[$ oppure $B =]-\infty, x_0[$ **limite destro** e **limite sinistro** di f in x_0 si definiscono:*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f_{|]x_0,+\infty[}(x) \qquad \wedge \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0} f_{|]-\infty,x_0[}(x) \tag{156}$$

Con x_0^+ intendiamo un numero poco più grande di x_0

Definizione 58:
La definizione di limite destro è:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : (x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - \lambda| < \epsilon) \tag{157}$$

per il limite sinistro serve una sostituzione ovvero:

$$x_0 - \delta < x < x_0 \tag{158}$$

Da quest'ultima definizione otteniamo che se $f(x)$ ha limite per $x \to x_0$ allora esiste il limite per $x \to x_0^+$ e per $x \to x_0^-$
Serve a precisare anche che se i limiti destro e sinistro di una funzione sono diversi fra loro in uno specifico punto x_0 allora il limite di $f(x)$ in x_0 non esiste

Definizione 59 (Teorema del collegamento)**:**
Siano $A \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D(A), \lambda, x_0 \in \overline{\mathbb{R}}, f : A \to \mathbb{R}$ *Abbiamo che:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \iff \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lambda \; \forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{x_0\}, \; x_n \underset{n \to +\infty}{\to} x_0 \tag{159}$$

*Vuol dire che se abbiamo una funzione $f(x)$ con **limite**, possiamo "collegare" **ogni** successione contenuta nel dominio e se usiamo come immagine della funzione un qualsiasi valore della successione, avremo come limite di questa nuova funzione il limite iniziale.*
Questo teorema è fondamentale in quanto riconduce il limite di una funzione a quello di una successione.

IMPORTANTE: il simbolo di ∞ non preceduto da nessun segno non ha nessun valore e non dobbiamo utilizzarlo nella risoluzione degli esercizi in quanto è un simbolo troppo **impreciso e fuorviante**.

Definizione 60:
Il limite della somma di due limiti è la somma dei due limiti.
Il limite del prodotto di due funzioni è il prodotto dei due limiti.
Abbiamo vari casi a seconda del valore dei limiti:
Poniamo $A \subseteq \mathbb{R}, f, g : A \to \mathbb{R}, x_0 \in D(A) \cap \overline{\mathbb{R}}$, *allora:*

1. *A. i limiti sono dei numeri reali:*

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to x_0}{\to} \lambda \in \mathbb{R} \\ g(x) &\underset{x\to x_0}{\to} \mu \in \mathbb{R} \\ &\Downarrow \\ \textit{SOMMA: } f(x)+g(x) &\underset{x\to x_0}{\to} \lambda+\mu \\ \textit{PRODOTTO: } f(x)\cdot g(x) &\underset{x\to x_0}{\to} \lambda\cdot\mu \\ \textit{QUOZIENTE: } \frac{f(x)}{g(x)} &\underset{x\to x_0}{\to} \frac{\lambda}{\mu} \qquad (\mu\neq 0; g(x)\neq 0) \end{aligned} \tag{160}$$

B. *i limiti sono* $\pm\infty$
Se le due funzioni f, g *hanno segni concordi per* $x \to x_0$*, allora:*
il limite della somma è $\pm\infty$
il limite del prodotto è il prodotto dei limiti e il segno è definito dal prodotto dei segni.

2. *Se* $f(x) \underset{x\to x_0}{\to} \pm\infty, f(x)\neq 0$ *in* $A\setminus\{x_0\}$*:*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = 0 \tag{161}$$

e viceversa:
Se $f(x) \underset{x\to x_0}{\to} 0, f(x) > 0$ *in* $A\setminus\{x_0\}$*:*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = \pm\infty \tag{162}$$

3. A. *Se* $f(x)\leq g(x),\ \forall x\in A\setminus\{x_0\},\ \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *allora questo implica che* $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$

   B. *Se* $f(x)\leq g(x),\ \forall x\in A\setminus\{x_0\},\ \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ *allora questo implica che* $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$

4. $f(x) \underset{x\to x_0}{\to} \lambda \implies |f(x)| \underset{x\to x_0}{\to} |\lambda|$

Definizione 61 (2 carabinieri)**:**
Poniamo $A\subseteq\mathbb{R}, x_0\in D(A)\cap\overline{\mathbb{R}};\ f,g,h : A\to\mathbb{R}$*.* A *è un sottoinsieme di* $\mathbb{R}$*,* x_0 *è un punto di accumulazione di* A*, e* f, g, h *sono delle funzioni con dominio* A*.*
Se esiste un intorno $W\in\mathcal{U}_{x_0}$ *tale che:*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)\ \forall x \in (A \setminus \{x_0\} \cap W \tag{163}$$

allora è vero che:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \lambda \in \overline{\mathbb{R}} \implies \lim_{x\to x_0} h(x) = \lambda \tag{164}$$

DIMOSTRAZIONE 17.
Per dimostrare questo teorema ci sono due casi differenti:

1. $\lambda = \pm\infty$, la dimostrazione è banale in quanto basta rivedere i lemmi derivati dai prodotti e le somme dei limiti.

2. $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Definiamo una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{x_0\},\ x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x_0$ convergente in x_0.
   Dal teorema del "collegamento" sappiamo che

   $$f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} \lambda\ \&\ g(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} \lambda \tag{165}$$

   Sappiamo inoltre che esiste un indice $\overline{n}$ per il quale $x_n \in (A \setminus \{x_0\}) \cap W;\ \forall n > \overline{n}$
   Quindi è vero che:

   $$f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n)\ \forall n > \overline{n} \tag{166}$$

   Dal Teorema dei 2 Carabinieri (per successioni) otteniamo che $\lim_{n\to+\infty} h(x_n) = \lambda$

Definizione 62 (Cauchy)**:**
Poniamo $A \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D(A) \cap \overline{\mathbb{R}}, f : A \to \mathbb{R}$.
Allora sono equivalenti le seguenti:

1.

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda \tag{167}$$

2.

$$\forall \epsilon > 0 \exists W \in \mathcal{U}_{x_0} :\ \forall x, y \in A \setminus \{x_0\}\ (x, y \in W \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon \tag{168}$$

Questo teorema afferma che quando una funzione converge al proprio limite, esiste un numero positivo (ϵ) tale per cui esiste un intorno (W) per cui la differenza del modulo di due termini arbitrari (x, y) sono minori di qualsiasi numero positivo (ϵ) noi scegliamo.

DIMOSTRAZIONE 18.

$$\forall \epsilon > 0 \exists W \in \mathcal{U}_{x_0} : |f(x) - \lambda| < \frac{\epsilon}{2} \; \forall x \in W \cap (A \setminus \{x_0\} \tag{169}$$

Allora utilizzando un'applicazione della disuguaglianza triangolare:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \lambda + \lambda| \leq |f(x) - \lambda| + |\lambda - f(y) < \cancel{2}\frac{\epsilon}{\cancel{2}} = \epsilon \tag{170}$$

5 Funzioni

5.1 Introduzione

Definizione 63:
Una funzione f é una relazione tra gli elementi di due insieme A e B che ad ogni elemento di ***A*** *associa* ***uno ed un solo*** *elemento di* ***B****.*

Una funzione è definita assegnando:

- un insieme A detto DOMINIO
- un insieme B detto CODOMINIO
- una relazione $f : A \to B$ che associa ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B

5.2 Tipi di funzioni

Una funzione $f(x)$ può essere di 3 tipi:

1. **suriettiva**
2. **iniettiva**
3. **biiettiva** se è sia **iniettiva** e **suriettiva**

Definizione 64:
Una funzione si dice ***iniettiva*** *quando ad elementi* ***distinti*** *del* DOMINIO corrispondono elementi **distinti** del CODOMINIO

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \tag{171}$$

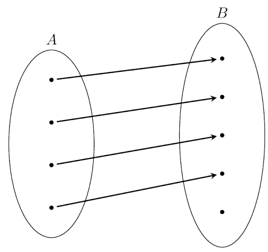

Figure 1: grafico iniettiva

Definizione 65:
Una funzione si dice ***suriettiva*** *qunado* ***ogni*** *elemento del codominio è immagine di* ***almeno*** *un elemento del dominio.*

$$b \in B \to \exists a \in A : f(a) = b \tag{172}$$

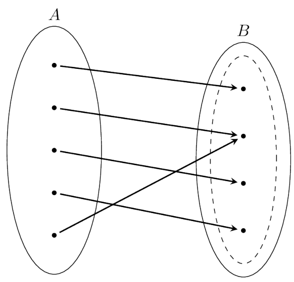

Figure 2: graifco suriettiva

Esercizio 3.
Dimostra di che tipo è questa funzione:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2 \tag{173}$$

Dimostrazione 19.
Non può essere iniettiva perchè per ogni numero reale positivo ne esiste uno uguale negativo, il cui qudrato sarà il **medesimo**.

$$se \quad x_1 = -x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = f(x_2) \tag{174}$$

si può provare inoltre che non è una funzione suriettva in quanto **nessun** numero negativo fa parte del codominio ed esso è formato da $\mathbb{R}$ dunque

$$-4 \neq f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{175}$$

Esercizio 4.
Dimostra di che tipo è questa funzione:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad f(x) = x^2 \tag{176}$$

Dimostrazione 20.
se cambiamo il dominio e il codominio nell'insieme dei numeri naturali e consideriamo la stessa legge possiamo dedurre che:

$$\forall n, m : n \neq m \quad \Rightarrow \quad n^2 \neq m^2 \tag{177}$$

Per **qualsiasi** coppia di numeri naturali diversi fra loro non è possibile pensare che il loro quadrato sia uguale, per tanto la funzione è iniettiva. Inoltre **qualsiasi** numero dispari non avrà una propria immagine, in quanto l'insieme racchiude **solo** numeri interi positivi. Ovvero:

$$\exists \frac{x}{2} \in \mathbb{N} : \{y = x + 1\} \quad \Rightarrow \quad y \neq n^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{178}$$

5.3 Funzioni invertibili

Definizione 66:
Una funzione $f : A \to B$ si dice invertibile se esiste una funzione $g : B \to A$ chiamata funzione inversa tale che:

- $\forall a \in A, \quad g(f(a)) = a$
- $\forall b \in B, \quad f(g(b)) = b$

Essa si può considerare invertibile se è ***biiettiva****.*

Esercizio 5.
Dimostra se la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = 2x + 1$ è inversibile.

Dimostrazione 21.
Ponendo l'equazione $y = 2x + 1$ deduciamo che

$$f^{(-1)}(x) = \frac{x - 1}{2} \tag{179}$$

quindi:

$$f^{(-1)}(f(x)) = f^{(-1)}(2x + 1) = \frac{(2x + 1) - 1}{2} = x; \tag{180}$$

e allo stesso tempo

$$f(f^{(-1)}(y)) = f(\frac{y - 1}{2}) + 1 = y \tag{181}$$

5.4 Piano Cartesiano

Fissando un'origine e un'unità di misura ad **ogni** punto di una retta orientata corrisponde uno ed un solo numero reale. Si stabilisce così una **corrispondenza biunivoca** tra i punti della retta orientata e i numeri reali.
Data la funzione

$$f : A \to B \quad A, B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \tag{182}$$

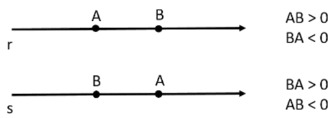

Figure 3: la retta orientata

Definizione 67:
Definiamo una ***coppia*** *di rette orientate disposte* ***perpendicolarmente*** *fra loro* ***assi coordinati****.*

- *La retta da destra verso sinistra viene chiamata* ***asse delle ascisse***
- *la retta dal basso verso l'alto viene chiamata* ***asse delle ordinate***

Il punto del piano in cui si incontrano viene chiamato ***origine degli assi*** *e viene indicato con O*

Un qualsiasi punto del piano P viene identificato con una ascissa x_p ed una ordinata y_p, quindi $P(x_p, y_p)$.
Il piano viene diviso in IV quadranti numerati in senso antiorario.

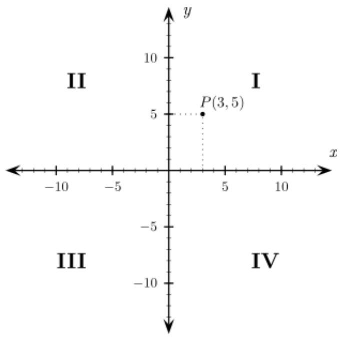

Figure 4: il piano cartesiano

5.5 Grafici di funzioni

Ora possiamo rappresentare graficamente coppie ordinate di numeri reali sul piano, quindi possiamo rappresentare il **grafico** di una funzione

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R} \tag{183}$$

e tutte le coppie $(x,\ f(x))$ tali che $x \in A$:

$$G(f) = \{(x,\ f(x))\} \ : \ x \in A \tag{184}$$

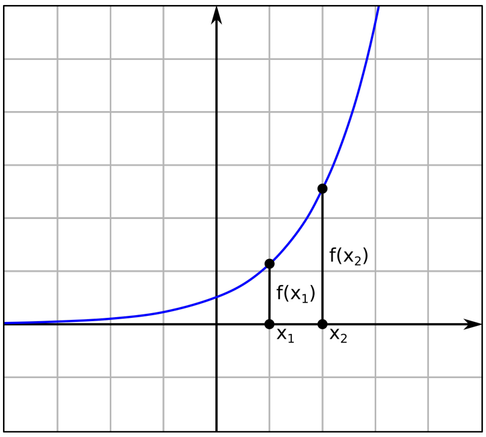

Figure 5: il grafico di una funzione crescente

5.6 Funzioni Pari e Dispari

Definizione 68:
Una funzione $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ *si dice* ***pari*** *se* $f(x) = f(-x)$

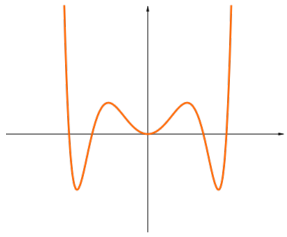

Figure 6: Una funzione pari

*Si deduce quindi che il grafico di una funzione così definita è simettrico rispetto all'**asse delle ordinate***

Definizione 69:
Una funzione $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ *si dice **dispari** se* $f(-x) = -f(x)$
*Si deduce quindi che il grafico di una funzione così definita viene **specchiata** in due quadranti uno **oppsoto** all'altro*

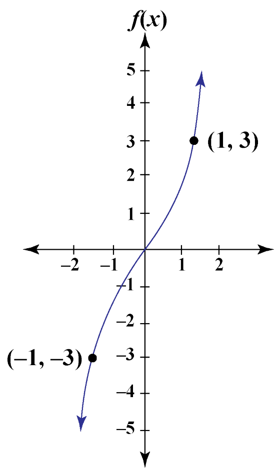

Figure 7: Una funzione dispari

5.7 Funzioni crescenti e decrescenti

Definizione 70:
Una funzione $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ *si dice **crescente** se*

$$f(x_2) \ \geq \ f(x_1) \quad \forall x_2 > x_1 \in [a, b] \tag{185}$$

*Si dice **strettamente crescente** se*

$$f(x_2) \quad f(x_1) \quad \forall x_2 > x_1 \in [a,b] \tag{186}$$

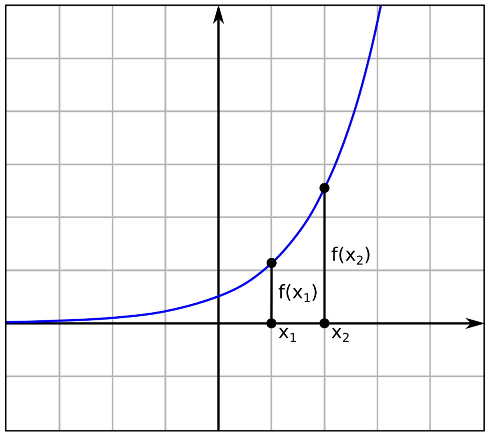

Figure 8: il grafico di una funzione crescente

Definizione 71:
Una funzione $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ *si dice* ***decrescente*** *se*

$$f(x_2) \ \leq \ f(x_1) \quad \forall x_2 > x_1 \in [a,b] \tag{187}$$

Si dice ***strettamente decrescente*** *se*

$$f(x_2) \ < \ f(x_1) \quad \forall x_2 > x_1 \in [a,b] \tag{188}$$

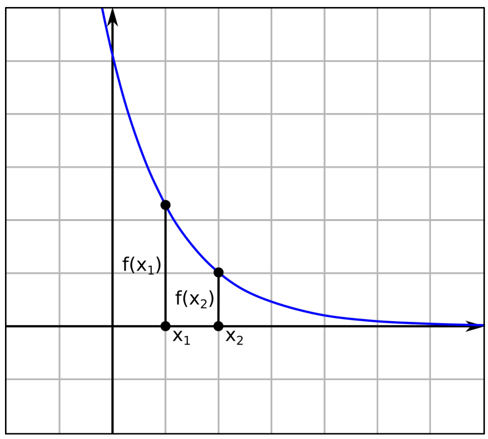

Figure 9: il grafico di una funzione decrescente

5.8 Funzioni inverse

Se i punti di una funzione $f : A \rightarrow B \quad A, B \subseteq \mathbb{R}$ si ottengono dalle coppie $(a, b) \in A \times B$

Definizione 72:
Il grafico di una funzione inversa si ottiene invertendo le coordinate dei punti del grafico. Ovvero i punti del grafico della ***funzione inversa*** *si ottengono dalle coppie* $(b, a) \in B \times A$ *// Per via grafica esso può essere ottenuto* ***riflettendo*** *il grafico rispetto alla* ***bisettrice*** *del* ***primo*** *e* ***terzo quadrante***

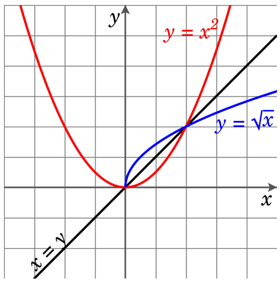

Figure 10: Il grafico di una funzione inversa

5.9 Modelizzazione matematica

Definizione 73:
Per ***modelizzazione matematica*** *si intende un porcesso che ha per scopo quello di* ***interpretare*** *fenomeni legati al mondo reale partendo da dati sperimentali e* ***traducendoli*** *in* ***problemi matematici***

Per passare da un fenomeno reale alla sua descrizione mediante modello matematico è necessario un processo di **astrazione** e **traduzione** del fenomeno in termini matematici e rigorosi.

Quando si vuole modelizzare un certo fenomeno, si vuole capire **come** le variabili coinvolte siano in relazione tra loro, ovvero stabilire delle **leggi matematiche** che descrivono queste relazioni.

La procedura di modelizzazione è:

1. si identifica l'incognita del problema
2. si analizza il fenomeno fisico e si raccolgono informazioni
3. si individuano le relazioni tra le informazioni raccolte, che poi vengono tradotte in equazioni

4. si risolvono le equazioni ottenute e se ne verifica la validità del modello

In un modello matematico che coinvolge due grandezze x ed y ci interessa capire come la **variabile dipendente** (y) varia al variare di quella **indipendente**

Esempio 9.
Supponiamo di aver formulato la legge $y = f(x)$
Se il modello è giusto potremmo ricavare il valore di y a partire da qualsiasi valore di x senza effettuare ulteriori esperimenti e misurazioni.
Rappresentandolo graficamente:

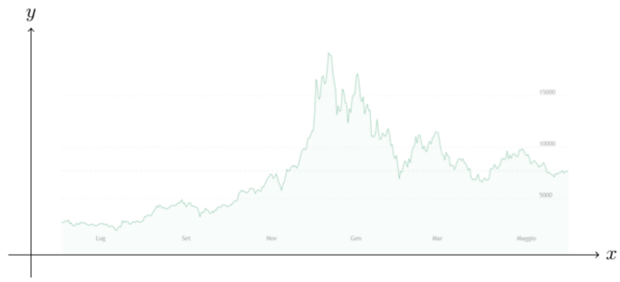

Figure 11: Il grafico dell'andamento dei bitcoin

Questo è il grafico di $y = f(x)$ dove y="valore del bitcoin in dollari" e x="tempo".

5.10 Proporzioni

Definizione 74:
Due grandezze A e B si dicono ***direttamente proprozionali*** *se esiste un numero c detto* ***costante di proporzionalità*** *tale che:*

$$A = cB \tag{189}$$

Questo significa che le due grandezze sono legate da una certa legge, per la quale quando una raddoppia, triplica, dimezza, di conseguenza la seconda raddoppia, triplica, dimezza etc.

Esempio 10.
$A =$ "quantità di chilometri che l'auto può percorrere"
$B =$ "litri di carburante nel serbatoio"

Definizione 75:
Due grandezze A e B si dicono ***inversamente proprozionali*** *se esiste un numero c detto* ***costante di proporzionalità*** *tale che:*

$$AB = c \tag{190}$$

Questo significa che le due grandezze sono tali che all'aumentare di una, l'altra diminuisce proporzionalmente.

Esempio 11.
$A =$ "numero di partecipanti all'acquisto di un immobile"
$B =$ "quota per partecipante"
$c =$ costo dell'immobile

6 Combinatoria e probabilità

6.1 Introduzione

Definizione 76:
*L'****analisi combinatoria*** *è la branca della matematica applicata per risolvere problemi nel quale è necessario saper "contare" efficacemente esiti e probabilità di determinate situazioni.*
Essa è infatti la disciplina che ci permette di ***contare senza contare***

6.2 Combinatoria

Definizione 77 (Principio di moltiplicazione)**:**
Un insieme X soddisfa le ipotesi del principio di moltiplicazione se:

- *è possibile ottenere ciascuno dei suoi elementi come risultato di una procedura composta da n fasi successive.*
- *se ad una fase interemedia si sono ottenuti due esisti distinti allora la procedura conduce ad elementi distinti di X*

Nella prima fase avremo m_1 possibili esiti nella seconda fase avremo m_2 esiti sino alla n-esima fase avremo m_n esiti

$$|X| = m_1 \times m_2 \times ... \times m_k \tag{191}$$

Esercizio 6.
Calcoliamo il numero di coppie ordinate (a, b) contenenti un numero primo ed uno non primo compresi tra 1 ed 8

DIMOSTRAZIONE 22.
I numeri primi tra 1 e 8 sono $\{2, 3, 5, 7\}$ mentre i numeri non primi tra 1 e 8 sono $\{1, 4, 6, 8\}$

I. Scegliamo un qualsiasi elemento di I_8: abbiamo 8 possibilità.

II. Se il primo elemento era primo il secondo non lo sarà, e viceversa se il numero non era primo. In ogni caso avremo 4 distinte possiblità

Il numero di coppie è: $8 \times 4 = 32$

ESERCIZIO 7.
Consideriamo un'estrazione in successione di 3 numeri della tombola **tenendo conto dell'ordine**. Quanti sono i possibili esiti?

DIMOSTRAZIONE 23.
I numeri della tombola sono 90. Gli scenari possibili sono 2:
Nel primo caso **senza rimpiazzo** se ogni numero può essere scelto una volta sola, mentre sarà **con rimpiazzo** se un numero può essere scelto più di una volta.

Nel primo caso $(a_1, a_2, a_3) \; :\rightarrow \; (a_1 \neq a_2 \neq a_3)$:

I FASE: $a_1 = 90$

II FASE: $a_2 = 90 - 1 = 89$

III FASE: $a_3 = 90 - 2 = 88$

Quindi il numero di possibili esiti è:

$$90 \times 89 \times 88 = 704880 \tag{192}$$

Nel secondo caso $(a_1, a_2, a_3) :\rightarrow (a_1 = a_2 = a_3)$:

I FASE: $a_1 = 90$

II FASE: $a_2 = 90$

III FASE: $a_3 = 90$

Quindi il numero di possibili esiti è:

$$90 \times 90 \times 90 = 90^3 = 729000 \tag{193}$$

Definizione 78:
Definiamo una regola general per k-sequenze di I_n. Siano $k, n \in \mathbb{N}$ definiamo k-sequenza di I_n una k-upla ***ordinata*** $(a_1, \ldots, a_k)$ *di elementi* ***non necessariamente distinti*** *di I_n Ovvero:*

$$(a_1, \ldots, a_k) \in \underbrace{I_n \times \ \ldots \ \times \ I_n} \tag{194}$$

Nella definzione di sequenze l'ordine degli elementi della k-upla è importante: le 3-sequenze (2, 1 ,3) e (3, 1, 2) sono diverse anceh se composte dagli stessi numeri. Vengono comunemente dette **disposizioni** di **n** oggetti a k a k

Esempio 12.
Sia $I_4 \ = \ 1, 2, 3, 4$. Allora

$$(1, 2, 3, 3, 4), \qquad (1, 1, 1, 1, 1), \qquad (2, 2, 1, 3, 4) \tag{195}$$

sono 5-sequenze di I_4. Invece

$$(1, 2, 3), \qquad (1, 1, 1), \qquad (2, 3, 4) \tag{196}$$

sono 3-sequenze di I_4

6.3 Fattoriale

$$5! = \ 5 \ \times \ 4 \ \times \ 3 \ \times \ 2 \ \times \ 1 \tag{197}$$

$$n! = \begin{cases} n \ \times \ (n-1) \ \times \ (n-2) \ \times \ \ldots \ 3 \ \times \ 2 \ \times \ 1 & \text{se } n \geq \ 1 \\ 1 & \text{se } n \ = \ 0 \end{cases} \tag{198}$$

Definizione 79:
Il ***fattoriale*** *di un numero equivale al prodotto di quel numero per tutti i numeri che lo precedono. I valori dei fattoriale crescono esponenzialmente*

$$0! = \ 1 \qquad 5! = \ 120 \qquad 6! = \ 720 \qquad 7! = \ 5040 \qquad 10! = \ 3628800 \tag{199}$$

6.4 Numero di Insiemi

Definizione 80:
Il ***numero di sottoinsiemi*** *di k elementi di I_n si distinguono esclusivamente dagli elementi di cui fanno parte:* ***l'ordine non conta****.*

Spesso un sottoinsieme di k elementi di un insieme di n elementi viene chiamato **combinazione** (semplice, senza ripetizioni) di n elementi a k a k

Definizione 81:
Siano $k, n \in \mathbb{N}$ il ***binomiale*** *di n su k è:*

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & sek \leq n, \\ 0, & sek > n. \end{cases} \tag{200}$$

Il numero di sottoinsiemi di k elementi di I_n è

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}. \tag{201}$$

Esempio 13.
Calcola i sotttoinsiemi con 3 elementi di I_6

Dimostrazione 24.
La soluzione è data da una semplice applicazione della formula prima vista:

$$\begin{Bmatrix} 6 \\ 3 \end{Bmatrix} = \frac{6!}{3!3!} = 20 \tag{202}$$

Esempio 14.
Calcola il numero di partite giocate nella fase a gironi dei Mondiali di calcio. Ci sono 32 squadre divise in 8 gironi da 4 squadre ed in ogni girone una squadra deve giocare contro le altre una volta sola.

Dimostrazione 25.
Il numero di partite totale è 8 volte le partite giocate in un singolo girone. L'insieme delle 4 squadre in un girone possiamo identificarlo con I_4, e una partita tra 2 squadre con un sottoinsieme di 2 elementi di I_4. Il numero di partite giocate in un girone**è il numero di sottoinsiemi** di 2 elementi di I_4 ovvero:

$$\begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 2} = \frac{24}{4} = 6 \tag{203}$$

Infine il risultato equivale a: $6 \times 8 = 48$