1 Successioni

1.1 Successioni in $\mathbb{R}$

Sia $X \neq \varnothing$, una qualsiasi funzione $f : \mathbb{N} \to X$ si dice: **successione in** X.
Una notazione si indica $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o $f_1, f_2, \dots, f_n$
f_n si chiama termine n-esimo.
$k_1, k_2, \dots, k_n$ è una successione di numeri naturali:

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \dots \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

La successione $\{f_{k_n}\}$ è una *sottosuccessione* di $\{f_n\}$.

Definizione 1:
Se a_n tende a $l \in \mathbb{R}$ per $n \to \infty$, si dice che $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \overline{n} : \forall n \in \mathbb{N}(n > \overline{n} \;\Rightarrow\; |a_n - l| < \epsilon) \tag{2}$$

$\{a_n\}$ converge ad l ed esso è il limite di $\{a_n\}$

Esempio 1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{3}$$

Ovvero

$$\forall \epsilon > 0 \exists \overline{n} : \forall n \in \mathbb{N} \left(n > \overline{n} \;\Rightarrow\; |\frac{1}{n} - 0| < \epsilon \right) \tag{4}$$

Dimostrazione 1 (Il limite se esiste è unico).

$$\lim_{x\to\infty} a_n = l \quad \wedge \quad \lim_{x\to\infty} a_n = m \quad \Longleftrightarrow \quad l \;=\; m \tag{5}$$

Esempio 2.
Poniamo per assurdo che $l \neq m$ Fissiamo $\epsilon > 0$

$$\underbrace{\underbrace{|a_n - l| < \frac{\epsilon}{2}}_{n>\overline{n_1}} \quad \& \quad \underbrace{|a_n - m| < \frac{\epsilon}{2}}_{n>\overline{n_2}}}_{n \;>\; \max\{\overline{n_1},\overline{n_2}\}} \tag{6}$$

$$\Downarrow$$

Ricordiamo che $|a_n - m| = |m - a_n|$

$$|\cancel{-a_n} - l - \cancel{-a_n} + m||a_n - l| \ + \ |m - a_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \tag{7}$$

$$\Downarrow$$

$$|m - l| < \epsilon \quad \Longrightarrow \quad |m - l| = 0 \tag{8}$$

Ma questo è assurdo perchè: $\epsilon > 0, \forall \epsilon \in \mathbb{R}$

$$m = l \tag{9}$$

Definizione 2:
Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ converge ad $l \in \mathbb{R}$ ***ogni*** *sua sottosuccessione $\{a_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad l*

Dimostrazione 2 (Limiti).
Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge $l \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \{a_{k_n}\}_{k_{n\in\mathbb{N}}}$ converge $l \in \mathbb{R}$

$$\Downarrow$$

Si ha che:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ n > \overline{n} \implies |a_n - l| < \epsilon \tag{10}$$

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ n > \overline{n} \implies |a_{k_n} - l| < \epsilon \tag{11}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} \ = \ l \tag{12}$$

Esempio 3.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \& \qquad k = 2, \lim_{k_n\to+\infty} \frac{1}{k_n} = 0 \tag{13}$$

Esercizio 1.

Dimostrazione 3.

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = l + m \tag{14}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \quad \& \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = m \tag{15}$$

$$\Downarrow$$

$$|a_n - l| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{se} \quad n > \overline{n_1} \tag{16}$$

$$|b_n - m| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{se} \quad n > \overline{n_2} \tag{17}$$

$n > \max\{\overline{n_1}, \overline{n_2}\}$

$$|a_n + b_n - l - m| \leq |a_n - l| + |b_n - m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \tag{18}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \overline{n} \equiv \max\{\overline{n_1}, \overline{n_2}\} \ : \ n > \overline{n} \ \Rightarrow \ \underbrace{|(a_n + b_n) - (l + m)|}_{0} < \epsilon \tag{19}$$

$$(a_n + b_n) - (l + m) = 0 \tag{20}$$

$$a_n + b_n = l + m \tag{21}$$

Dimostrazione 4 (Permanenza del segno).

$$\forall \epsilon > 0, \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ n > \overline{n} \ \Rightarrow \ \underbrace{|a_n - l < \epsilon|}_{l - \epsilon < a_n < l + \epsilon \quad \forall n > \overline{n}} \tag{22}$$

$$\epsilon = |l|$$

Da questo otteniamo che

$$\underbrace{l - |l|}_{0} < a_n < \underbrace{l + |l|}_{2l} \tag{23}$$

In conclusione avremo che:
se $l > 0 \Rightarrow a_n > 0$
se $l < 0 \Rightarrow a_n < 0$

Definizione 3 (Teorema dei 2 carabinieri)**:**
Se $\underbrace{\{a_n\}\ ,\{b_n\}}_{convergono\ a\ \ l}\ \ ,\{c_n\}$

$$\textit{è ovvio che: } a_n \leq c_n \leq b_n \implies c_n \textit{converge a } l \tag{24}$$

DIMOSTRAZIONE 5.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \overline{n_1}, \overline{n_2} \in \mathbb{N} : \tag{25}$$

$$\Downarrow$$

$$l - \epsilon < a_n < l + \epsilon \qquad \& \qquad l - \epsilon < b_n < l + \epsilon \tag{26}$$

se $n > \max\{\overline{n_1}, \overline{n_2}\}$

$$\Downarrow$$

$$l - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < l + \epsilon \qquad \forall n > \overline{n} \tag{27}$$

$$\underbrace{l - \epsilon < c_n < l + \epsilon}_{|c_n - l| < \epsilon} \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} c_n = l \tag{28}$$

Definizione 4:
Sia una successione $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ *è detta:*

- *superiormente limitata, se* $\exists M \in \mathbb{R} \ : \ a_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$
- *inferiormente limitata, se* $\exists M \in \mathbb{R} \ : \ a_n \geq M \ \forall n \in \mathbb{N}$
- *limitata, se* $\exists M \in \mathbb{R} \ : \ |a_n| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$

Definizione 5 (Ogni successione convergente è limitata)**:**
Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}, \ a_n \underset{n \to \infty}{\to} l$
Allora (con $\epsilon = 1$*)*

$$\exists \overline{n} : \forall n \in \mathbb{N}(n > \overline{n} \ \Rightarrow \ |a_n - l| < 1) \tag{29}$$

Segue quindi che $|a_n| \leq |a_n - l| + |l| < 1 + |l|, \ n > \overline{n}$

$$|a_n| \leq 1 + |l| \tag{30}$$

Definizione 6 (Retta reala ampliata)**:**

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\} \tag{31}$$

Definizione 7:
Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$

$$\begin{gathered}\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \\ \Downarrow \\ \forall k \in \mathbb{R} \exists \overline{n} \in N \ : \ \forall n \in \mathbb{N}(n > \overline{n} \implies a_n > k)\end{gathered} \tag{32}$$

La scrittura è analoga per $-\infty$ *invertendo il segno:* $(a_n < k)$
Potremo dire che a_n *diverge positivamente o negativamente*

1.2 Forme indeterminate

Se $\{a_n\}, \{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$ *e* $\{a_n\} \to +\infty, \{b_n\} \to -\infty\}$ *allora:*

$$a_n + b_n \to +\infty - \infty = \ ? \tag{33}$$

$+\infty$ *e* $-\infty$ *non sono veri e propri numeri, piuttosto sono dei* ***simboli****, quindi il risultato sarà detto:*FORMA INDETERMINATA $+\infty - \infty$

Altri tipi di forme indeterminate sono:

$$\frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ 0 \cdot \infty,\ 1^{\infty},\ 0^0,\ \infty^0 \tag{34}$$

1.3 Teoremi generali di esistenza

Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ è detta monotona crescente se $a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$
Si dice invece monotona decrescente se $a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.
Sono rispettivamente **strettamente** monotone crescenti o decrescenti se le disuguaglianze sono **strette**

Le scritture $a_n \nearrow$ e $a_n \searrow$ indicano monotonia crescente e decrescente

Definizione 8:
Ogni successione monotona ammette limite:
Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$*:*

1. $a_n \nearrow \implies \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$
2. $a_n \searrow \implies \lim_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$

Dimostrazione 6.
Se $\{a_n\}$ è superiormente limitata per l'assioma di completezza:

$$\exists \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \lambda \tag{35}$$

Per la proprietà del sup si ha che $a_n \leq \lambda, \forall n \in \mathbb{N}$ dunque:

$$a_n < \lambda + \epsilon \; \forall n \in \mathbb{N}, \; \forall \epsilon > 0 \tag{36}$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \; : \; \lambda < a_{\overline{n}} + \epsilon \tag{37}$$

La definizione di limite è:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lambda \tag{38}$$

Esercizio 2 (Il numero di nepero e).

$$e \equiv \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{39}$$

Si nota che $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ sono successioni **convergenti** che hanno lo stesso limite e, inoltre sono **strettamente monotone**

$$a_n < a_{n+1} \quad \text{e} \quad b_n > b_{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N} \tag{40}$$

Inoltre

$$a_n < b_n \; \forall n \in \mathbb{N} \tag{41}$$

allora:

$$a_n < a_p < b_p < b_m \quad \forall n, m, p; p = \max\{n, m\} \tag{42}$$

Entrambe le successioni convergono: a_n è monotona crescente e superiormente limitata e b_n è monotona decrescente e inferiormente limitata.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \tag{43}$$

Questo implica che:

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n = e \tag{44}$$

Dimostrazione 7.

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \& \quad b_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)+1} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1 \implies \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)+1}} > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\
&= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n+1^n}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right) > 1 \\
&= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^2 = \left(\frac{n+2^n}{n+1}\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 > 1 \\
&= \left(\frac{\cancel{(n+1)}(n+2)}{n\cancel{(n+1)}}\right)^n \cdot \left(\frac{\cancel{n+1}}{n}\right) \cdot \left(\frac{n+2}{\cancel{n+1}}\right)^2 > 1 \\
&= \left(\frac{n+2}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n}\right) \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) > 1 \\
&= \underbrace{\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n+1}}_{>1} > \underbrace{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}_{<1}
\end{aligned} \tag{46}$$

Definizione 9 (Bolzano - Weierstrass)**:**
Ogni successione reale limitata ammette una sottosuccessione convergente.

Dimostrazione 8.
Per ogni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ esiste $M > 0 \ : \ |a_n| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N} \ \exists k_n \nearrow : \ a_{k_n} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} l \in \mathbb{R}$

$$-M \leq a_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{47}$$

$$\alpha_n = \sup a_k : k \geq n, \ n \in \mathbb{N} \quad \implies \quad -M \leq \alpha_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{48}$$

Quindi dalla definizione ne segue che:

$$\begin{gathered} \alpha_{n+1} \leq \alpha_n \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha_n \searrow \\ \Downarrow \end{gathered} \tag{49}$$

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \alpha_n \equiv l \quad \implies l \equiv \inf_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \tag{50}$$

$$\begin{aligned} &\forall\epsilon > 0,\ \forall p \in \mathbb{N}\ \exists n \geq p : l - \epsilon \leq a_n \\ &\alpha_p \searrow \Rightarrow l \leq \alpha_p \Rightarrow l - \epsilon < \alpha_p\ \forall\epsilon > 0\ \forall p \end{aligned} \tag{51}$$

Dato che $\alpha_p = \sup\{a_n : n \geq p\}$, deve esistere $n \geq p : a_n > l - \epsilon$
Sia $k_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} k_1 = \min\{k \in \mathbb{N} : l - 1 < a_k\} \\ k_{n+1} = \min\{k \in \mathbb{N} : k > k_n \wedge l - \dfrac{1}{n+1} < a_k\} \end{cases} \tag{52}$$

$$\Downarrow$$

$$k_{n+1} > k_n,\ \forall n \quad \wedge \quad l - \frac{1}{n} < a_{k_n}\ \forall n \tag{53}$$

Questo implica che $\{a_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ verifica le disuguaglianze

$$l - \frac{1}{n} < a_{k_n} \leq \alpha_{k_n} \implies \alpha_{k_n} \underset{n\to+\infty}{\to} l \implies a_{k_n} \to l \tag{54}$$