

DIMOSTRAZIONE 1 (Principio d'induzione e binomio di Newton).

IPOTESI:  $P(n)$  è vera

$$P(n) = (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad (1)$$

Per il principio di induzione dovremmo essere capaci di dimostrare anche:  $P(n+1)$  come vera.

$$P(n+1) = (a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \quad (2)$$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n \Rightarrow (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad (3)$$

Ricordiamo la proprietà distributiva:  $(a+b)c = ac + bc$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \quad (4)$$

$\Downarrow$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n-1}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{0}{n} a^0 b^{n+1-0} \quad (5)$$

$\Downarrow$

$$\sum_{k=0}^{n+1} [\binom{n-1}{k-1} + \binom{n}{k}] a^k b^{n+1-k} \quad (6)$$

$\Downarrow$

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\underline{n!}}{(k-1)!(n-k+1)(n-k)!} + \frac{\underline{n!}}{k(k-1)!(n-k)!} \quad (7)$$

$\Downarrow$

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left( \frac{1}{(n-k+1)} + \frac{1}{k} \right) \quad (8)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{k+n-k+1}{k(n-k+1)} \quad (9)$$

$$\Downarrow$$

$$\overbrace{\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k(n-k+1)}} = \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!} \quad (10)$$

L'ultima semplificazione è conseguenza di:  $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$  e di  $(n-1)! \cdot n = n!$

In conclusione abbiamo che:

$$\sum_{k=0}^{n+1} [{}^{(k-1)}_n + {}^{(k)}_n] a^k b^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} {}^{(k)}_{n+1} a^k b^{n+1-k} = (a+b)^{n+1} \quad (11)$$