Appunti

Andreas Araya Osorio

3 June 2021

Contents

1 Insiemi

1.1 Introduzione

Definizione 1:
Un insieme è una "collezione" di oggetti.

Sia A un INSIEME, la scrittura $x \in A$ significa che $x \quad appartiene \quad ad \quad A$.
Analogamento, scrivendo $x \notin A$ si intende che $x \quad non \quad appartiene \quad ad \quad A$.
Gli insiemi **finiti** si possono denotare all'interno di parentesi graffe "$\{,\}$"
Un qualsiasi insieme può definirsi mediante una **proprietà astratta**

ESEMPIO 1.

$$A \;=\; \{\; x \in \mathbb{N} \mid x \; pari \;\} \tag{1}$$

Questo insieme raccoglie **tutti i numeri naturali pari** e si può meglio riscrivere così:

$$A \;=\; \{\; x \;\; \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} \;:\; x \;=\; 2y \;\} \tag{2}$$

1.2 Insiemi ed operazioni

Sia X un insieme e siano $A, B \;\subseteq\; X$

- **UNIONE** $A \cup B$, L'unione di A e B come l'insieme

$$A \cup B \;=\; \{x \in X \;:\; x \in A \; o \; x \in B\;\} \tag{3}$$

- INTERSEZIONE $A \cap B$, L'intersezione di A e B come l'insieme

$$A \cap B \;=\; \{x \in X \;:\; x \in A \; e \; x \in B\;\} \tag{4}$$

- DIFFERENZA $A \setminus B$, che equivale a

$$A \setminus B \;=\; \{x \in X \;:\; x \in A \; e \; x \notin B\;\} \tag{5}$$

- COMPLEMENTARE L'insieme complementare di A in X è:

$$A^C \;=\; X \setminus A \;=\; \{x \in X \;:\; x \notin A\;\} \tag{6}$$

ESEMPIO 2.
Il complementare dell'unione è l'intersezione dei complementari, mentre il complementare dell'intersezione è l'unione dei complementari.

- $X \setminus (A \cup B) \;=\; (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$
- $X \setminus (A \cap B) \;=\; (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

DIMOSTRAZIONE 1.
Si dice relazione da A a B ogni sottoinsieme R di $A \times B$ Se $(a, b) \;\in\; R$. a è in relazione R con b, si scrive aRb.

$$R \;= \{(a, b) \in \mathbb{N} \;\times \mathbb{N} : \exists p \in \mathbb{N} \mid a \;= p \cdot b\;\} \tag{7}$$

1.3 Relazioni d'ordine

Sia $A \;\neq\; \varnothing$ un insieme non vuoto e sia $R \;\subseteq\; A \;\times\; A$ una relazione di A con A. R è:

1. riflessiva se $xRx \quad \forall x \in A$,
2. simmetrica se $xRy \;\rightarrow\; yRx$,
3. transitiva se $xRy \;\wedge\; yRz \;\rightarrow\; xRz$,
4. antisimmetrica se $xRy \;\wedge\; yRz \;\rightarrow\; x \;=\; y$.

Una **relazione d'equivalenza** è tale se è RIFLESSIVA, SIMMETRICA E TRANSITIVA.

Definizione 2:
Una relazione d'ordine su un insieme $X \;\neq\; \varnothing$ è detta di ordine totale se $\forall\; x, y \;\in\; X$ si ha $x \;\leq\; y \;\vee\; y \;\leq\; x$. Se su X c'è una relazione d'ordine totale, X è totalmente ordinato.

Definizione 3:
Sia $(X, \leq)$, insieme non vuoto e ordinato e sia $A \subseteq X,\; A \neq\; \varnothing$

- *$x \in X$ è un **maggiorante** di A se $a \leq x\; \forall a \in A$*
- *$y \in X$ è un **minorante** di A se $y \leq x\; \forall a \in A$*
- *A ha **massimo** se $\exists \lambda \in A \mid a \leq \lambda\; \forall a \in A \;\implies\; \lambda \;=\; max\; A$*
- *A ha **minimo** se $\exists \mu \in A \mid \mu \leq a\; \forall a \in A \;\implies\; \mu \;=\; min\; A$*

Definizione 4:
Siano $(X, \leq)$ un insieme ordinato e $A \;\subseteq\; X, A \;\neq\; \varnothing$. A ha estremo superiore se l'insieme dei maggioranti di A è non vuoto e ha minimo. $supA$ è il più piccolo dei maggioranti. Analogamente l'estremo inferiore è presente se l'insieme dei minoranti di A è non vuoto ed esso ne è il più piccolo: $infA$.

Definizione 5:
Proprietà di *sup* ***e*** *inf****:***
Siano $(X, \leq)$ *un insieme ordinato e* $A \subseteq X, A \neq \varnothing$.
SUP *Si ha che* $\lambda = sup\ A$ ***se e solo se***

1. $a \leq \lambda \quad \forall a \in A$;
2. $\lambda_1 \in X,\ a \leq \lambda_1 \quad \forall a \in A \implies \lambda \leq \lambda_1$

INF *Si ha che* $\mu = inf\ A$ ***se e solo se***

1. $\mu \leq a \quad \forall a \in A$;
2. $\mu_1 \in X,\ \mu_1 \leq a \quad \forall a \in A \implies \mu_1 \leq \mu$

Definizione 6:
Siano $(X, \leq)$ *un insieme ordinato e* $A \subseteq X, A \neq \varnothing$, *allora:*

1. *se A ha massimo, allora si ha* $maxA = supA$
2. *se A ha minimo, allora si ha* $minA = infA$

1.4 Numeri reali

Un **gruppo commutativo** e' un insieme X dotato di un'operazione binaria $* : X \times X \to X$ tale che:

1. PROPRIETÀ ASSOCIATIVA: $(x \star y) \star z = x \star (y * z) \quad \forall x, y, z \in X$
2. ELEMENTO NEUTRO: $\exists e \in X \to e * x = x * e = e$
3. INVERSO: $\forall x \in X \quad \exists y \in X \to x * y = y * x = e$
4. PROPRIETÀ COMMUTATIVA; $\forall x, y \in X \ \to \ x * y = y * x$

Se le prime 3 proprietà sono valide allora X e' un *gruppo*. Se e' valida solo la prima allora si chiama *semigruppo*

Definizione 7 (Campo dei numeri reali $\mathbb{R}$):
I 6 assiomi di completezza:

- A_1*)* $(\mathbb{R}, +) \to$ *gruppo commutativo, neutro = 0*
- A_2*)* $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \to$ *gruppo commutativo, neutro = 1*
- A_3*)* $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$, *proprietà distributiva*

- *A_4) $(\mathbb{R}, \leq) \rightarrow$ totalmente ordinato*
- *A_5) $(\leq)$ $\rightarrow$ compatibile con $+ \wedge \cdot$*
- *A_6) $(\mathbb{R}, \leq) \rightarrow$ completo*

Le proprietà $A_1, \ldots, A_3 \Longrightarrow (\mathbb{R}, +, \cdot) \rightarrow$ campo
Le proprietà $A_1, \ldots, A_6 \Longrightarrow (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq) \rightarrow$ campo ***ordinato e completo****.*

Definizione 8 (Sottoinsiemi induttivi)**:**
Un sottoinsieme $I \subseteq \mathbb{R}$ si dice ***induttivo*** *se:*

1. $1 \in I$
2. $x \in I \;\Rightarrow\; x + 1 \in I$

$\mathcal{F}$ indica la famiglia degli insiemi induttivi di $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{N} \overset{def.}{=} \{x \in \mathbb{R} \;: x \in I \forall I \in \mathcal{F}\} \tag{8}$$

$\mathbb{N}$ è per definizione l'interesezione di tutti gli insiemi induttivi

$$\mathbb{N} \;=\; \bigcap_{I \in \mathcal{F}} I \tag{9}$$

Dimostrazione 2 (Il principio di induzione).
Se $M \subseteq \mathbb{N}$ è induttivo $\iff$ $M = \mathbb{N}$
Dato che M è induttivo $\mathbb{N} \subseteq M \iff \mathbb{N} \;=\; M$
Questo ragionamento introduce il *principio di induzione.*

Definizione 9 (Il minimo di $\mathbb{N}$)**:**

$$1 \leq n \;\forall n \in \mathbb{N} \tag{10}$$

Il $min\mathbb{N} \;=\; 1$

Definizione 10 ($\mathbb{Z}$ l'anello dei numeri interi)**:**

$$\mathbb{Z} \overset{def.}{=} \;\mathbb{N} \;\cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\} \tag{11}$$

$\mathbb{Z}$ è chiuso per somma e motliplicazione

$$n, m \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow n + m,\; n \cdot m \;\in \mathbb{Z} \tag{12}$$

Se $A \subseteq \mathbb{Z},\; A \neq \varnothing$

- *se A è superiormente limitato, ammette massimo $\exists\; maxA$*

- *se A è inferiormente limitato ammette minimo $\exists\, minA$*

Definizione 11 ($\mathbb{Q}$ l'anello dei numeri razionali)**:**

$$\mathbb{Q} \stackrel{def.}{=} \left\{ \frac{p}{q} :\in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\} \tag{13}$$

$\mathbb{Q}$ è chiuso per somma e moltiplicazione

$$x, y \in \mathbb{Q} \;\Rightarrow\; x + y, x \cdot y \in \mathbb{Q} \tag{14}$$

$\mathbb{Q}$ è un campo totalmente ordinato ossia sono validi gli assiomi $A_1, \; \ldots, A_5$ escluso l' A_6

1.5 Radice n-esima

Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$.
$y \in \mathbb{R}$ è la radice n-esima di x se $y \geq 0, y^n \;=\; x$

$$y \stackrel{def.}{=} x^{\frac{1}{n}}, \;\; \sqrt[n]{x} \tag{15}$$

Definizione 12:
Proprietà della radice n-esima: per ogni $x, y \in \mathbb{R}, \;\; x, y \geq 0$:

P_1 $x^n \leq y^n \iff x \leq y$

P_2 $x^n = y^n \iff x = y$

P_3 $x^n < y \iff \exists \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, : (x + \epsilon)^n < y$

P_4 $x^n > y \iff \exists \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, : (x - \epsilon)^n > y$

1.6 Funzioni esponenziali in $\mathbb{Q}$

Definizione 13:
Sia $a > 0, \;\; \forall x \in \mathbb{Q}$:

$$a^x \;:= \sqrt[q]{a^p} \Rightarrow x = \frac{p}{q} \;, \;\; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \tag{16}$$

Se $x = \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \implies np = mq$

1. $a^{x+y} = a^x a^y \; \forall x, y \in \mathbb{Q}$

2. $a^x > 0 \; \forall x \in \mathbb{Q}$

3. $(a^x)^y = a^{xy}\ \forall x, y \in \mathbb{Q}$

se $a > 1$

$$x < y \Longrightarrow a^x < a^y\ \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

se $a < 1$

$$x < y \Longrightarrow a^y < a^x\ \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

In parole povere se la **base è minore di 1**, con un esponente maggiore (y) avremo un numero inferiore rispetto a quello di un esponente minore (x), viceversa quando avremo la **base maggiore di 1**, con esponente maggiore avremo un numero maggiore rispetto ad uno con base minore.

2 Successioni

2.1 Successioni in $\mathbb{R}$

Sia $X \neq \varnothing$, una qualsiasi funzione $f : \mathbb{N} \to X$ si dice: **successione in** X.
In notazione si indica $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o $f_1, f_2, \dots, f_n$
f_n si chiama termine n-esimo.
$k_1, k_2, \dots, k_n$ è una successione di numeri naturali:

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \dots \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{17}$$

La successione $\{f_{k_n}\}$ è una *sottosuccessione* di $\{f_n\}$.
Il limite di una successione $\{a_n\} = l$. Vale a dire che $l \in \mathbb{R}$ è un numero vicino ai termini della successione. Esso è più precisamente un **numero reale** tale che *comunque si scelga* un intervallo di numeri intorno ad a.

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{(a-\epsilon, a+\epsilon)}_{\text{un intervallo attorno a } l} \quad , \epsilon > 0 \mid \exists \quad \underbrace{\overline{n}}_{\text{un indice } n \text{ t.c.}} \quad n > \overline{n}. \tag{18}$$

a_n si trova in questo *intorno*

Definizione 14 (Successione)**:**
*Una successione è una legge che ad ogni numero **naturale** n fa corrispondere**uno ed uno solo** numero reale a_n.*

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \tag{19}$$

Una successione è una funzione che collega degli indici n a dei numeri reali $a \in \mathbb{R}$

Definizione 15:
Se a_n tende a $l \in \mathbb{R}$ per $n \to \infty$, si dice che

$$\begin{gathered}\lim_{n\to\infty} a_n = l \\ \Downarrow \\ \forall \epsilon > 0,\ \exists \overline{n} : (n > \overline{n} \ \Rightarrow\ |a_n - l| < \epsilon) \\ \Downarrow \\ |a_n - l| < \epsilon\end{gathered} \tag{20}$$

$\{a_n\}$ *converge ad l ed esso è il* ***limite*** *di tale* ***tale successione***

Esempio 3.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{21}$$

Ovvero

$$\forall \epsilon > 0 \exists \overline{n} : \forall n \in \mathbb{N} \left(n > \overline{n} \ \Rightarrow\ |\frac{1}{n} - 0| < \epsilon \right) \tag{22}$$

Dimostrazione 3 (Il limite se esiste è unico).

$$\lim_{x\to\infty} a_n = l \quad \wedge \quad \lim_{x\to\infty} a_n = m \quad \Longleftrightarrow \quad l \ = \ m \tag{23}$$

Esempio 4.
Poniamo per assurdo che $l \neq m$ Fissiamo $\epsilon > 0$

$$\underbrace{\underbrace{|a_n - l| < \frac{\epsilon}{2}}_{n > \overline{n_1}} \quad \& \quad \underbrace{|a_n - m| < \frac{\epsilon}{2}}_{n > \overline{n_2}}}_{n \ > \ \max\{\overline{n_1}, \overline{n_2}\}} \tag{24}$$

$$\Downarrow$$

Ricordiamo che $|a_n - m| = |m - a_n|$

$$|\cancel{-a_n} - l - \cancel{-a_n} + m||a_n - l| \ + \ |m - a_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \tag{25}$$

$$\Downarrow$$

$$|m - l| < \epsilon \quad \Longrightarrow \quad |m - l| = 0 \tag{26}$$

Ma questo è assurdo perchè: $\epsilon > 0, \forall \epsilon \in \mathbb{R}$

$$m = l \tag{27}$$

Definizione 16:
*Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ converge ad $l \in \mathbb{R}$ **ogni** sua sottosuccessione $\{a_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad l*

Dimostrazione 4 (Limiti).
Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge $l \in \mathbb{R} \quad \implies \quad \{a_{k_n}\}_{k_{n\in\mathbb{N}}}$ converge $l \in \mathbb{R}$

$$\Downarrow$$

Si ha che:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \overline{n} \in \mathbb{N}\ :\ n > \overline{n} \implies |a_n - l| < \epsilon \tag{28}$$

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \overline{n} \in \mathbb{N}\ :\ n > \overline{n} \implies |a_{k_n} - l| < \epsilon \tag{29}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} \ = \ l \tag{30}$$

Esempio 5.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \& \qquad k = 2, \lim_{k_n\to+\infty} \frac{1}{k_n} = 0 \tag{31}$$

Esercizio 1.

Dimostrazione 5.

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = l + m \tag{32}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \quad \& \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = m \tag{33}$$

$$\Downarrow$$

$$|a_n - l| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{se} \quad n > \overline{n_1} \tag{34}$$

$$|b_n - m| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{se} \quad n > \overline{n_2} \tag{35}$$

$n > \max\{\overline{n_1}, \overline{n_2}\}$

$$|a_n + b_n - l - m| \leq |a_n - l| + |b_n - m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \tag{36}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \overline{n} \equiv \max\{\overline{n_1}, \overline{n_2}\} \ : \ n > \overline{n} \ \Rightarrow \ \underbrace{|(a_n + b_n) - (l + m)|}_{0} < \epsilon \tag{37}$$

$$(a_n + b_n) - (l + m) = 0 \tag{38}$$

$$a_n + b_n = l + m \tag{39}$$

Dimostrazione 6 (Permanenza del segno).

$$\forall \epsilon > 0, \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ n > \overline{n} \ \Rightarrow \ \underbrace{|a_n - l < \epsilon|}_{l-\epsilon<a_n<l+\epsilon \quad \forall n>\overline{n}} \tag{40}$$

$$\epsilon = |l|$$

Da questo otteniamo che

$$\underbrace{l - |l|}_{0} < a_n < \underbrace{l + |l|}_{2l} \tag{41}$$

In conclusione avremo che:
se $l > 0 \Rightarrow a_n > 0$
se $l < 0 \Rightarrow a_n < 0$

Definizione 17 (Teorema dei 2 carabinieri)**:**
Se $\underbrace{\{a_n\}\ , \{b_n\}}_{convergono\ a\ \ l}\ \ , \{c_n\}$

$$\textit{è ovvio che: } a_n \leq c_n \leq b_n \ \Longrightarrow \ c_n \textit{converge a } l \tag{42}$$

Dimostrazione 7.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \overline{n_1}, \overline{n_2} \in \mathbb{N} : \tag{43}$$

$$\Downarrow$$

$$l - \epsilon < a_n < l + \epsilon \qquad \& \qquad l - \epsilon < b_n < l + \epsilon \tag{44}$$

se $n > \max\{\overline{n_1}, \overline{n_2}\}$

$$\Downarrow$$

$$l - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < l + \epsilon \qquad \forall n > \overline{n} \tag{45}$$

$$\underbrace{l - \epsilon < c_n < l + \epsilon}_{|c_n - l| < \epsilon} \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} c_n = l \tag{46}$$

Definizione 18:
Sia una successione $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ *è detta:*

- *superiormente limitata, se* $\exists M \in \mathbb{R} \ : \ a_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$
- *inferiormente limitata, se* $\exists M \in \mathbb{R} \ : \ a_n \geq M \ \forall n \in \mathbb{N}$
- *limitata, se* $\exists M \in \mathbb{R} \ : \ |a_n| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$

Definizione 19 (Ogni successione convergente è limitata)**:**
Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}, \ a_n \underset{n \to \infty}{\to} l$
Allora (con $\epsilon = 1$*)*

$$\exists \overline{n} : \forall n \in \mathbb{N}(n > \overline{n} \ \Rightarrow \ |a_n - l| < 1) \tag{47}$$

Segue quindi che $|a_n| \leq |a_n - l| + |l| < 1 + |l|, \ n > \overline{n}$

$$|a_n| \leq 1 + |l| \tag{48}$$

Definizione 20 (Retta reala ampliata)**:**

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\} \tag{49}$$

Definizione 21:
Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$

$$\begin{gathered} \lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \\ \Downarrow \\ \forall k \in \mathbb{R} \exists \overline{n} \in N \ : \ \forall n \in \mathbb{N}(n > \overline{n} \implies a_n > k) \end{gathered} \tag{50}$$

La scrittura è analoga per $-\infty$ *invertendo il segno: (*$a_n < k$*)*
Potremo dire che a_n *diverge positivamente o negativamente*

2.2 Forme indeterminate

Se $\{a_n\}, \{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$ *e* $\{a_n\} \to +\infty, \{b_n\} \to -\infty\}$ *allora:*

$$a_n + b_n \to +\infty - \infty = \,? \tag{51}$$

$+\infty$ *e* $-\infty$ *non sono veri e propri numeri, piuttosto sono dei* ***simboli****, quindi il risultato sarà detto:*FORMA INDETERMINATA $+\infty - \infty$

Altri tipi di forme indeterminate sono:

$$\frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ 0 \cdot \infty,\ 1^{\infty},\ 0^0,\ \infty^0 \tag{52}$$

2.3 Teoremi generali di esistenza

Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ è detta monotona crescente se

$$a_n \leq a_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N} \tag{53}$$

Si dice invece monotona decrescente se

$$a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N} \tag{54}$$

Sono rispettivamente **strettamente** monotone crescenti o decrescenti se le disuguaglianze sono **strette** $(<, >)$
Le scritture $a_n \nearrow$ e $a_n \searrow$ indicano monotonia crescente e decrescente

Definizione 22 (Successioni costanti)**:**
Se $a_n = a\ \forall n \in \mathbb{N}$*, con* a *numero reale fissato si dice che*

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = l,\ l \in \mathbb{R} \quad \{a_n\} \nearrow\searrow = \textit{costante} \tag{55}$$

Definizione 23:
Ogni successione monotona ammette limite:
Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$*:*

1. $a_n \nearrow \implies \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$
2. $a_n \searrow \implies \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$

DIMOSTRAZIONE 8.
Se $\{a_n\}$ è superiormente limitata per l'assioma di completezza:

$$\exists \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \lambda \tag{56}$$

Per la proprietà del sup si ha che $a_n \leq \lambda, \forall n \in \mathbb{N}$ dunque:

$$a_n < \lambda + \epsilon \;\forall n \in \mathbb{N},\; \forall \epsilon > 0 \tag{57}$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \;:\; \lambda < a_{\overline{n}} + \epsilon \tag{58}$$

La definizione di limite è:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lambda \tag{59}$$

Esercizio 2 (Il numero di nepero e).

$$e \equiv \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{60}$$

Si nota che $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ sono successioni **convergenti** che hanno lo stesso limite e, inoltre sono **strettamente monotone**

$$a_n < a_{n+1} \quad \text{e} \quad b_n > b_{n+1} \;\forall n \in \mathbb{N} \tag{61}$$

Inoltre

$$a_n < b_n \;\forall n \in \mathbb{N} \tag{62}$$

allora:

$$a_n < a_p < b_p < b_m \quad \forall n, m, p; p = \max\{n, m\} \tag{63}$$

Entrambe le successioni convergono: a_n è monotona crescente e superiormente limitata e b_n è monotona decrescente e inferiormente limitata.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \tag{64}$$

Questo implica che:

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = \lim_{n \to +\infty} a_n = e \tag{65}$$

Dimostrazione 9.

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \& \quad b_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)+1} \tag{66}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1 \implies \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)+1}} > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n+1^n}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right) > 1 \\
&= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^2 = \left(\frac{n+2^n}{n+1}\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 > 1 \\
&= \left(\frac{\cancel{(n+1)}(n+2)}{n\cancel{(n+1)}}\right)^n \cdot \left(\frac{\cancel{n+1}}{n}\right) \cdot \left(\frac{n+2}{\cancel{n+1}}\right)^2 > 1 \\
&= \left(\frac{n+2}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n}\right) \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) > 1 \\
&= \underbrace{\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n+1}}_{>1} > \underbrace{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}_{<1}
\end{aligned}
\tag{67}
$$

Definizione 24 (Bolzano - Weierstrass)**:**
Ogni successione reale limitata ammette una sottosuccessione convergente.

DIMOSTRAZIONE 10.
Per ogni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ esiste $M > 0 \ : \ |a_n| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N} \ \exists k_n \nearrow : \ a_{k_n} \underset{n\to+\infty}{\to} l \in \mathbb{R}$

$$-M \leq a_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{68}$$

$$\alpha_n = \sup a_k : k \geq n, \ n \in \mathbb{N} \qquad \implies \qquad -M \leq \alpha_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{69}$$

Quindi dalla definizione ne segue che:

$$
\begin{gathered}
\alpha_{n+1} \leq \alpha_n \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha_n \searrow \\
\Downarrow
\end{gathered}
\tag{70}
$$

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \alpha_n \equiv l \qquad \implies l \equiv \inf_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \tag{71}$$

$$
\begin{gathered}
\forall \epsilon > 0, \ \forall p \in \mathbb{N} \ \exists n \geq p : l - \epsilon \leq a_n \\
\alpha_p \searrow \Rightarrow l \leq \alpha_p \Rightarrow l - \epsilon < \alpha_p \ \forall \epsilon > 0 \ \forall p
\end{gathered}
\tag{72}
$$

Dato che $\alpha_p = \sup\{a_n : n \geq p\}$, deve esistere $n \geq p : a_n > l - \epsilon$
Sia $k_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} k_1 = \min\{k \in \mathbb{N} : l - 1 < a_k\} \\ k_{n+1} = \min\{k \in \mathbb{N} : k > k_n \wedge l - \dfrac{1}{n+1} < a_k\} \end{cases} \tag{73}$$

$$\Downarrow$$

$$k_{n+1} > k_n, \ \forall n \quad \wedge \quad l - \frac{1}{n} < a_{k_n} \ \forall n \tag{74}$$

Questo implica che $\{a_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ verifica le disuguaglianze

$$l - \frac{1}{n} < a_{k_n} \leq \alpha_{k_n} \implies \alpha_{k_n} \underset{n \to +\infty}{\to} l \implies a_{k_n} \to l \tag{75}$$

Definizione 25 (Successioni di Cauchy)**:**
Una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ si chiama successione di Cauchy se:

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} : \ \forall n, m \in \mathbb{N}(n, m > \overline{n} \Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon) \tag{76}$$

Una successione si dice di Cauchy se i suoi termini sono "arbitrariamente" vicini tra loro.

Definizione 26 (Ogni successione convergente è di Cauchy)**:**

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}, a_n \to l \in \mathbb{R} = \textit{di Cauchy} \tag{77}$$

DIMOSTRAZIONE 11.
Se $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ implica che:

$$\forall \epsilon, \epsilon > 0 \exists \overline{n} \forall n \left(n > \overline{n} \Rightarrow |a_n - l| < \frac{\epsilon}{2} \right) \tag{78}$$

La scrittura $\exists \overline{n}$ significa che esiste un indice dopo il quale ogni indice successivo sarà maggiore di quello.
Di conseguenza:

$$|a_n - a_m| = |(a_n - l) + (l - a_m) \leq |a_n - l| + |a_m - l| \leq \cancel{2} \cdot \frac{\epsilon}{\cancel{2}} \quad n, m > \overline{n} \tag{79}$$

$\{a_n\}$ è di Cauchy

$$\{a_n\} \text{ di Cauchy} \Rightarrow \{a_n\} \nearrow \iff \{a_n\} \nearrow \Rightarrow \{a_n\} \text{ di Cauchy} \tag{80}$$

2.4 Rappresentazione decimale di numeri reali

Se $x \in \mathbb{R}$ è:

$$[x] = \text{parte intera} = max\{p \in \mathbb{Z} : p < x\} \tag{81}$$

$$\Downarrow$$

$$[x] \leq x < [x] + 1 \; \forall x \in \mathbb{R} \tag{82}$$

$$\Downarrow$$

$$x_n = \frac{[b^n x]}{b^n} \tag{83}$$

Le seguenti affermazioni sono vere:

1. $\{x_n\} \nearrow$
2. $x_n \leq x < x_n + \frac{1}{b_n} \; \forall n \in \mathbb{N}$
3. $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$
4. $\exists \alpha_0 \in \mathbb{Z}, \exists \{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}$

Definizione 27 (Decimali)**:**
I numeri decimali sono i numeri razionali:

$$\frac{m}{10^n}(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}) \tag{84}$$

Ogni numero decimale si può scrivere come

$$x = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{10^n} \tag{85}$$

con $\alpha_0 \in \mathbb{Z},\; \alpha_1 \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$

Definizione 28 (Decimali propri)**:**
Sia $x \in \mathbb{R},\; x = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ *La rappresentazione decimale di* x *si dice* ***propria*** *se:*

$$\nexists p \in \mathbb{N} : \alpha_n = 9 \; \forall n \geq p \tag{86}$$

Ogni numero reale ammette un'**unica** rappresentazione decimale propria. Se $x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; x = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ è la rappresentazione decimale propria di x **se e solo se**

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \leq x < \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n + \frac{1}{10^n} \; \forall n \in \mathbb{N} \tag{87}$$

2.5 Cardinalità di insiemi

Due insiemi $A, B \neq \varnothing$ si dicono **equipotenti** se

$$\exists f : A \underset{1-1}{\overset{su}{\rightarrow}} B \quad \Longrightarrow \quad A \cong B \tag{88}$$

Vale a dire che esiste una **funzione biunivoca** fra i due insiemi ed essi hanno stessa **cardinalità**

$$card(A) = card(B) \tag{89}$$

$$\Downarrow$$

$$I_n = \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\}, \quad card(A) \cong card(I_n) \implies card(A) = n \tag{90}$$

A è un insieme finito. Un iniseme è infinito se non è finito.

- A è finito $B \subseteq A, B \neq \varnothing \implies B$ è finito
- A è finito e B è sottoinsieme proprio di $A \implies A \cong B$
- A è finito, allora il numero dei suoi elementi è unico
- B è infinito e $B \subseteq A \implies A$ è infinito

Altre proposizione che ne conseguono sono:

- $A \neq \varnothing \implies A \cong A$
- $A \cong B \iff B \cong A$
- $A \cong B, B \cong C \implies A \cong C$

L'equipotenza è una relazione di **equivalenza**

Definizione 29 ($\mathbb{N}$ è infinito)**:**
Dimostriamo che $\mathbb{N}$ *è equivalente ad un suo sottoinsieme proprio:*

$$P = \{n \in \mathbb{N} := 2m, n \in \mathbb{N}\},\ f : P \to \mathbb{N}, f(n) = \frac{n}{2} \tag{91}$$

f *è biunivoca quindi* $P \subset \mathbb{N} \implies P \cong \mathbb{N}$

Definizione 30 ($\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sono infiniti)**:**
Tutti questi insiemi contengono $\mathbb{N}$

Definizione 31 (Insiemi numerabili)**:**
*Un insieme si dice **numerabile** se è **equipotente** ad* $\mathbb{N}$

Un insieme A è numerabile se si possono *elencare i suoi elementi*: ovvero se esiste una successione biiettiva $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che ha come immagine A, il nome di tale successione è **numerazione**

Definizione 32:
Sia A un insieme numerbaile se $M \subseteq A$, M è infinito
$\implies M \cong \mathbb{N}$

Ogni sottoinsieme infinito di un insieme numerabile **è numerabile**.
Ogni sottoinsieme di $\mathbb{N}$ è un insieme **infinito o numerabile**.

Definizione 33 (Assioma della scelta)**:**
Sia $\mathcal{B}$ una famiglia $\neq \varnothing$ di insiemi. Sia A un insieme t.c.

$$B \subseteq A \ \forall B \in \mathcal{B} \tag{92}$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \varphi : \mathcal{B} \to A \ : \ \varphi(B) \in B \ \forall B \in \mathcal{B} \Rightarrow \boldsymbol{AC} \tag{93}$$

*Ovvero in parole: data una **famiglia** di insiemi $\mathcal{B}$ non vuoti, esiste una funzione che ad ogni insieme della famiglia fa corrispondere un suo elemento.*

L'assioma assicura che, quando viene data una collezione di insiemi non vuoti si può sempre costruire un nuovo insieme *"scegliendo"* un **singolo elemento** da ciascuno di quelli di partenza.

Definizione 34:
Dati due insiemi A, B:

$$card(A) \leq card(B) \tag{94}$$

Se esiste $B_0 \subseteq B$, t.c. $card(A) = card(B_0)$. Se $card(A) \leq card(B)$ e $card(A) \neq card(B) \implies card(A) < card(B)$

Un insieme si dice finito **se e solo se**: $card(A) < card(\mathbb{N})$

Definizione 35 (Numeri algebrici)**:**
*Un numero reale si dice **algebrico** se risolve un'equazione*

$$p(x) = 0, \qquad p \in \mathbb{Z} \tag{95}$$

con p un polinomio con coefficienti in $\mathbb{Z}$.
*I nuemri reali **non** algebrici si dicono **trascendenti***

DIMOSTRAZIONE 12.
I numeri algebrici sono i razionali , infatti essi sono:

$$x = \frac{m}{n} \implies nx - m = 0 \tag{96}$$

$$p(x) = 3x^7 - 5x^2 + 3 \rightarrow h = 7 + 3 + |-5| + 2 + 3 = 20 \tag{97}$$

Definizione 36 (Gerarchia di infiniti)**:**
Esiste una gerarchi di ***infiniti****, ovvero "certi infiniti valgono di più di altri infiniti"*

$$\mathcal{N}_0 = card(\mathbb{N}), \mathcal{N}_1 = card(\mathbb{R}) \implies \mathcal{N}_0 < \mathcal{N}_1 \tag{98}$$

2.6 O grande, o piccolo, $\sim$ equivalente

Definizione 37 (o piccolo)**:**
Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *due successioni reali, si dice che* a_n *è un "o piccolo" di* b_n *per* $n \to +\infty$

$$a_n = o(b_n)\ (n \to +\infty) \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \tag{99}$$

Definizione 38 (O grande)**:**
Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *due successioni reali, si dice che* a_n *è un "O grande" di* b_n *per* $n \to +\infty$

$$a_n = O(b_n)\ (n \to +\infty) \iff \exists \overline{n} \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}\ :\ \left(\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq M\ \forall n > \overline{n}\right) \tag{100}$$

Occore notare che se esiste il limite di $\frac{a_n}{b_n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R} \tag{101}$$

Si può sempre scrivere $a_n = O(b_n)$

Definizione 39 ($\sim$ equvialente)**:**
Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *due successioni reali, si dice che* a_n *è un "equivalente" di* b_n *per* $n \to +\infty$

$$a_n \sim b_n\ (n \to +\infty) \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \tag{102}$$

Questo vale a dire che le due successioni hanno lo stesso limite.

Consideriamo anche che, se due successioni sono equivalenti $a_n \sim b_n$ implica che :

$$a_n \sim b_n \implies a_n = O(b_n) \iff b_n = O(a_n) \tag{103}$$

3 Topologia della retta euclidea

3.1 Intervalli

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, si pone per definizione

$$\begin{aligned} \text{aperto }]a, b[&= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\ \text{semiaperto } [a, b[&= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\ \text{semiaperto }]a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\ \text{chiuso } [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \end{aligned} \tag{104}$$

Se uno degli estremi è $\pm\infty$, $(a = -\infty, b = +\infty)$

$$\begin{aligned}]a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \\ ]-\infty, a[&= \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \\ [a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \\ ]-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \end{aligned} \tag{105}$$

Definizione 40:
Se $x_0 \in \mathbb{R}, \rho > 0$, si pone

$$B(x_0, \rho) =]x_0 - \rho, x_0 + \rho[\tag{106}$$

si chiama intorno aperto di x_0 di raggio $\rho \in \mathbb{R}_+$.
La famiglia degli intorni aperti di x_0 si denota come

$$\mathcal{U}_{x_0} = \{]x_0 - \rho, x_0 + \rho[: \rho > 0\} \tag{107}$$

3.2 Punti di accumulazione, isolati e aderenti

Definizione 41 (Punti di accumulazione)**:**
Siano $A \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$, si dice che x_0 è un ***punto di accumulazione*** *di A se per ogni W (intorno) $\in \mathcal{U}_{x_0}$ (famiglia degli intorni):*

$$A \setminus \{x_0\} \cap W = \varnothing \tag{108}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \setminus \{x_0\}) \cap \,]x_0 - \rho, x_0 + \rho[\neq \varnothing \ \forall \rho > 0 \tag{109}$$

*In parole, se prendiamo l'insieme A e ad esso sottriamo un qualsiasi punto x_0 e ad esso intersechiamo l'intervallo formato di raggio rho "ρ" e con centro x_0. Questo insieme è un punto di accumulazione se quanto citato prima **non è** un insieme vuoto, ovvero in esso troviamo almeno **un elemento**.*
*L'**insieme** dei punti di accumulazione si chiama **derivato** di $A = D(A)$. Per definizione poniamo $D(\varnothing) = \varnothing$*

Definizione 42 (Punto isolato)**:**
*Se $x \in A$ e $x \notin D(A)$ si dice che x è un **punto isolato***

Dimostrazione 13.
Se $A \subset R$ è un insieme finito, questo implica che $D(A) = \varnothing$.

1. Se $A = \varnothing \implies D(\varnothing) = \varnothing$
2. Se $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ Nessuno $z \in \mathbb{R}$ è punto di accumulazione per A:

$$z \notin D(A), \ \forall z \in \mathbb{R} \tag{110}$$

   - Supponiamo che z non sia in $\mathbb{R}$:
     $z \in \mathbb{R} \setminus A \ \rightarrow \ z \neq x_j, \ \forall j = 1, \ldots, p$

$$\rho = \{|z - x_j| : \ j \ = \ 1, \ldots, p\} \tag{111}$$

     $|z - x_j| = 0 \iff z = x_j$ ma z è escluso dall'insieme A

$$(A \setminus \{z\} \cap \,]z - \rho, z + \rho[= \varnothing \tag{112}$$

   - Supponiamo invece che z sia in A:
     $z \in A \rightarrow z = x_1$

$$\rho = \{|x_1 - x_j| : \ j \ = \ 2, \ldots, p\} \tag{113}$$

     $\rho > 0$ dato che i punti di $x_j \in A$ sono diversi tra loro.
     Se ne deduce quindi che l'intorno aperto $B(x_1, \rho)$ di centro x_1 di raggio ρ esclude qualsiasi altro punto di A

$$(A \setminus \{x_1\}) \cap \,]x_1 - \rho, x_1 + \rho[= \varnothing \tag{114}$$

ESEMPIO 6 ($A \subseteq \mathbb{R}$ e $D(A) \neq \varnothing \implies A$ è **infinito**).
Ovvero, se A è un insieme contenuto nell'insieme dei numeri reali e l'insieme dei suoi punti di accumulazione **non** è vuoto allora A è infinito.
Ciò non è vero in quanto questa proposizione è solamente una **condizione necessaria** ma **non sufficiente**.
$\mathbb{N}$ è infinito ma $D(\mathbb{N}) = \varnothing$

Definizione 43:
Siano $A \subseteq \mathbb{R},\ x_0 \in \mathbb{R}$, allora:

$$x_0 \in D(A) \iff \exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{x_0\} : x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x_0 \tag{115}$$

Definizione 44:
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, A infinito e limitato, allora $D(A) \neq \varnothing$

DIMOSTRAZIONE 14.
A è infinito quindi esiste $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ t.c. $x_n \neq x_m,\ \forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m.$
A è limitato quindi $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
TEOREMA BOLZANO-WEIERSTRASS :

$$\exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\ :\ x_{k_n} \underset{n\to+\infty}{\to} x_0 \in \mathbb{R} \tag{116}$$

Se $x_{k_n} \neq x_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $\{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ e converge a x_0
Quindi $x_0 \in D(A)$
Se $x_{k_p} = x_0,\ p \in \mathbb{N}$, avremo che $\{x_{k_{n+p}}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ e questa successione converge ad x_0. $x_{k_n} \neq x_{k_p},\ \forall n \neq p.$
In entrambi i casi: $\exists x_0 \in D(A)$

Definizione 45 (Punti aderenti)**:**
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, sia $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0 è aderente in A se

$$A \cap W \neq \varnothing\ \forall W \in \mathcal{U}_{x_0} \tag{117}$$

$$\Downarrow$$

$$A \cap]x_0 - \rho, x_0 + \rho[\neq \varnothing\ \forall \rho > 0 \tag{118}$$

Definizione 46 (Chiusura)**:**
*Si dice **chiusura** di A, $\overline{A}$, l'insieme dei punti aderenti ad A:*

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \textit{è aderente ad} A\} \tag{119}$$

La chisura dell'insieme vuoto corrsiponde per convenzione all'insieme vuoto.

$$\overline{\varnothing} = \varnothing \tag{120}$$

Dalle definizioni precedenti ricaviamo:

$$D(A) \subseteq \overline{A} \ \& \ A \subseteq \overline{A} \tag{121}$$

Il fatto per cui, l'insieme dei punti di accumulazione di A è contenuto nell'insieme dei punti di aderenza di A è dovuto dal fatto che al primo insieme "togliamo" x_0, ovvero il centro dell'intervallo di riferimento, mentre fa parte del secondo.

Definizione 47 ($\overline{A} = A \cup D(A)$)**:**
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, si ha $\overline{A} \supseteq A, \ \& \ \overline{A} \supseteq D(A) \implies \bar{(}A) \supseteq A \cup D(A)$
Proviamo che:

$$x_0 \in A \cup D(A) \ \forall x_0 \in \overline{A} \tag{122}$$

Se x_0 è in A, è ovvio. Proviamolo nel caso in cui $x_0 \in \overline{A} \setminus A$.

$$A \cap W \neq \varnothing \ \forall W \in \mathcal{U}_{x_0} \tag{123}$$

$$\Downarrow$$

$$A \setminus \{x_0\} = A \implies A \setminus \{x_0\} \cap W \neq \varnothing \quad \forall W \in \mathcal{U}_{x_0} \tag{124}$$

Quindi $x_0 \in D(A)$.

Definizione 48:
Siano $A \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$:

$$x_0 \in \overline{A} \iff \exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A : x_n \underset{n \to +\infty}{to} x_0 \tag{125}$$

3.3 Insiemi aperti e chiusi. Insiemi compatti

Definizione 49 (Insieme chiuso)**:**
*$A \subseteq \mathbb{R}$ è **chiuso** se $A = \overline{A}$, ma questo è possibile se:*

$$A = \overline{A} \iff D(A) \subseteq A \tag{126}$$

Se $A \subseteq \mathbb{R}$ sono valide le seguenti affermazioni:

- A è chiuso

- Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\ x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x_0 \implies x_0 \in A$

Definizione 50 (Insieme compatto)**:**
*Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, A è detto **compatto** se ad ogni successione di punti di A si può estrarre una sotto-successione convergente ad un punto di A:*

$$A compatto \iff \begin{cases} \forall\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A & \exists\{x_{k_n}\} \\ \exists x_0 \in A & \lim\limits_{n\to+\infty} x_{k_n} = x_0 \end{cases} \tag{127}$$

Possiamo dimostrare che sia $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$A\text{compatto} \iff A\text{chiuso e limitato} \tag{128}$$

DIMOSTRAZIONE 15.
Se A è **chiuso e limitato** dimostriamo che A è **compatto**.
Data una successione $\{x_n\}$ estraiamo una sotto-successione convergente ad un $x_0 \in A$.
Ma se l'insieme che contiene la successione è **limitato** lo è pure la successione
Applichiamo il T. BOLZANO-WEIERSTRASS:

$$\{x_{k_n}\} \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} x_{k_n} = x_0 \tag{129}$$

Se $x_0 \in \overline{A}$ e $\overline{A} = A$ (essendo chiuso), quindi $x_0 \in A$

Definizione 51 (Punto interno e Insieme Aperto)**:**
*Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. x_0 si dice **interno** ad A se esiste $\rho > 0$ t.c.*

$$]x_0 - \rho, x_0 + \rho[\subseteq A \tag{130}$$

*Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è detto **aperto** se **ogni suo punto** è interno ad A*

$$A \text{ è aperto} \iff A = \mathring{A} \tag{131}$$

4 Limiti per funzioni

4.1 Definizioni

Definizione 52 (Intorno di $\pm\infty$)**:**
***L'intorno** di $+\infty$ è l'insieme:*

$$]k, +\infty[,\ k \in \mathbb{R} \tag{132}$$

L'intorno *di* $-\infty$ *è l'insieme:*

$$]-\infty, k[, \;\; k \in \mathbb{R} \tag{133}$$

Intendiamo che se $A \subseteq \mathbb{R}$ come i seguenti

$$\begin{aligned} supA = +\infty &\iff +\infty \in D(A) \\ infA = -\infty &\iff -\infty \in D(A) \end{aligned} \tag{134}$$

Un limite λ può essere:

$$\lambda \in \overline{R} \iff \begin{cases} \lambda \in R \\ \lambda = +\infty \\ \lambda = -\infty \end{cases} \tag{135}$$

Definizione 53:
Siano $A \subseteq \mathbb{R},\; x_0 \in D(A),\; \lambda \in \overline{R}.\; f : A \to \mathbb{R}.$
A un insieme contenuto fra i numeri reali, x_0 *si trovi in un punto di accumulazione di A,* λ *contenuto nella retta reale estesa e* f *una funzione che ad ogni elemento di A corrisponde un elemento di R.*
Diremo che $f(x)$ *tende a* λ *per* x *che tende a* x_0*.*

$$\forall V \in \mathcal{U}_\lambda \; \exists W \in \mathcal{U}_{x_0} \; : \; f(x) \in V \; \forall x \in A \setminus \{x_0\} \cap W \tag{136}$$

Qualunque intorno V all'interno della famiglia degl intorni $\mathcal{U}_\lambda$ *di* λ *(ricordando che* $\lambda \in \overline{R}$ *quindi può assumere o un valore reale o è uguale a* $\pm\infty$*), esiste un intorno W all'interno della famiglia degli insiemi di* $\mathcal{U}_{x_0}$ *di* x_0 *(un punto di accumulazione)*

$$x_0 \in \mathbb{R} \qquad]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\tag{137}$$

tale che l'immagine x sia in V tutte le volte che x in $A \setminus x_0$ *intersecato con l'intorno W,* W_{x_0} *è per definzione un punto di accumulazione quindi l'interesezione* ***è non vuota***
La scrittura semplificata:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \tag{138}$$

se ***per ogni*** $\epsilon > 0$ *esiste un numero* $\delta > 0$ *tale che per ogni* $x \in A,\; 0 < |x - x_0| < \delta$*.*

$$|f(x) - \lambda| < \epsilon \tag{139}$$

ESEMPIO 7.
Abbiamo $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\lambda = -\infty$ avremo che:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{x_0} &= \{]x_0 - \delta, x_0 + \delta[: \delta > 0\} \\ \mathcal{U}_\lambda = \mathcal{U}_{-\infty} &= \{] - \infty, k[: k \in \mathbb{R}\} \end{aligned} \tag{140}$$

Quindi avremo che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \tag{141}$$

se e solo se:

$$\forall k \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in A \setminus \{x_0\}\ \{|x - x_0| < \delta \implies f(x) < k\} \tag{142}$$

Vale a dire che: qualunque valore noi diamo a k che è un numero appartenente ai numeri reali (quindi ha un valore finito), esiste un numero δ maggiore di 0 tale che, quale che sia x contenuta in A meno x_0, il **modulo** della differenza di x e x_0 ($|x - x_0|$) è **minore** di δ, questo vuol dire che l'immagine di $f(x)$ è sempre **strettamente minore** di k.
Ovvero $f(x)$ avrà sempre un valore piccolissimo inferiore a qualsiasi numero reale

Anche se $f(x)$ è definita nel punto x_0 non è necessario che soddisfare $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$, quindi nel punto in cui $x = x_0$. Affermiamo che il valore del limite λ è indipendente dal valore della funzione nel punto x_0.

4.2 Teoremi Fondamentali

Definizione 54 (Unicità del limite)**:**
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e siano $x_0 \in D(A),\ x_0 \in \overline{R},\ f : A \to \mathbb{R}$.
Se esistono $\lambda, \mu \in \overline{\mathbb{R}}$ t.c.:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \quad \wedge \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \mu \qquad \iff \qquad \lambda = \mu \tag{143}$$

Prendiamo un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$, che è il dominio di una funzione $f(x) : A \to \mathbb{R}$, e prendiamo x_0 un punto di accumulazione dell'insieme A, contenuto in $\mathbb{R}$. Supponiamo che ci siano **due** limiti (per assurdo), ma allora questi due limiti **SONO UGUALI**.

DIMOSTRAZIONE 16.
Partiamo dalla nozione che: **punti distinti** ammettono **intorni disgiunti**:

$$\lambda, \mu \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \Longrightarrow \qquad \exists V \in \mathcal{U}_{\lambda}, W \in \mathcal{U}_{\mu} : \ V \cap W \neq \varnothing \tag{144}$$

Supponendo per assurdo che i due numeri siano diversi fra loro, allora ci basterà prendere un numero $\epsilon > 0$ minore della **metà** della distanza fra questi due numeri e noteremo che i due numeri hanno intorni distinti.
Questo è assurdo in quanto avevamo affermato che l'interesezione dei loro intorni era **non vuota**. Questo quando i due numeri λ, μ sono numeri reali, quando uno di questi due invece é $\pm\infty$ allora per l'assioma di completezza c'è sempre un numero reale che si trova fra questi due per seprararli.

Per assurdo $\lightning$, poniamo $\lambda \neq \mu$, per quanto abbaimo dimostrato prima abbiamo che **punti disgiunti** hanno **intorni disgiunti**. Ovvero:

$$\exists V \in \mathcal{U}_{\lambda}, \exists W \in \mathcal{U}_{\mu} \ : \ V \cap W = \varnothing. \tag{145}$$

Stiamo affermando che l'interesezione dei due intorni è un'insieme vuoto.
Notiamo anche che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \iff \exists U_1 \in \mathcal{U}_{x_0} : f(x) \in V \quad \forall x \in (A \setminus \{x_0\}) \cap U_1 \tag{146}$$

e che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \mu \iff \exists U_2 \in \mathcal{U}_{x_0} : f(x) \in W \quad \forall x \in (A \setminus \{x_0\}) \cap U_2 \tag{147}$$

Quindi avremo che:

$$f(x) \in V \cap W \ \forall x \in (A \setminus \{x_0\}) \cap (U_1 \cap U_2) \tag{148}$$

Questo é assurdo perchè $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_{x_0}$ e

$$x_0 \in D(A) \iff (A \setminus \{x_0\}) \cap (U_1 \cap U_2) \neq \varnothing \tag{149}$$

e questo dimostra che $V \cap W \neq \varnothing$ che contraddice il fatto che $V \cap W = \varnothing$

Definizione 55 (Località del limite)**:**
Siano $A \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D(A)$ intendendo che $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e $f, g : A \to \mathbb{R}$ e siano f, g due funzioni con dominio l'insieme A.
Se esiste $\tilde{W} \in \mathcal{U}_{x_0}$:

$$f(x) = g(x) \ \forall x \in \tilde{W} \cap (A \setminus \{x_0\}) \tag{150}$$

se esiste il $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, quindi esiste $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ e i due limiti coincidiono.

Esempio 8.
Prendiamo due funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} x \neq 0 \\ 0 & \text{se} x = 0 \end{cases} \tag{151}$$

e

$$f(x) = 1 \tag{152}$$

Possiamo subito osservare che $f(x) \neq g(x)$ se e solo se $x = 0$
Inoltre il limite di:

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 1 \qquad g(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{153}$$

Infatti non è importante il valore della funzione in quello specifico punto ma il valore che assume **nell'intorno** di quel punto.
Abbiamo dimostrato quindi che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$.

il limite è unico e dipende solo da un intorno del punto in cui lo calcoliamo e non dal valore assoluto della funzione nel punto.

Il vaolre assoluto avrà un valore importante nella nozione di continuità.

Definizione 56 (Restrizione di limiti)**:**
Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e $B \subseteq A$ diremo che la sua restrizione per B è:

$$f_{|_B} : B \to \mathbb{R} \qquad f_{|_B}(x) = f(x)^{\forall x \in B} \tag{154}$$

I punti della funzione ristretta in B sono tutti i punti della funzione di di partenza restrigendo il Dominio da A a B.
Se esiste il limite di $\lim_{x \to x_0} f(x)$ allora esite anche il limite di $\lim_{x \to x_0} f_{|_B}(x)$ e questi due limiti coincidono:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f_{|_B}(x) \tag{155}$$

Definizione 57:
*Se $A = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, $B =]x_0, +\infty[$ oppure $B =]-\infty, x_0[$ **limite destro** e **limite sinistro** di f in x_0 si definiscono:*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f_{|]x_0,+\infty[}(x) \qquad \wedge \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0} f_{|]-\infty,x_0[}(x) \tag{156}$$

Con x_0^+ intendiamo un numero poco più grande di x_0

Definizione 58:
La definizione di limite destro è:

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 : (x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - \lambda| < \epsilon) \tag{157}$$

per il limite sinistro serve una sostituzione ovvero:

$$x_0 - \delta < x < x_0 \tag{158}$$

Da quest'ultima definizione otteniamo che se $f(x)$ ha limite per $x \to x_0$ allora esiste il limite per $x \to x_0^+$ e per $x \to x_0^-$
Serve a precisare anche che se i limiti destro e sinistro di una funzione sono diversi fra loro in uno specifico punto x_0 allora il limite di $f(x)$ in x_0 non esiste

Definizione 59 (Teorema del collegamento)**:**
Siano $A \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D(A), \lambda, x_0 \in \overline{\mathbb{R}}, f : A \to \mathbb{R}$ *Abbiamo che:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda \iff \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lambda\ \forall\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{x_0\},\ x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x_0 \tag{159}$$

*Vuol dire che se abbiamo una funzione $f(x)$ con **limite**, possiamo "collegare" **ogni** successione contenuta nel dominio e se usiamo come immagine della funzione un qualsiasi valore della successione, avremo come limite di questa nuova funzione il limite iniziale.*
Questo teorema è fondamentale in quanto riconduce il limite di una funzione a quello di una successione.

IMPORTANTE: il simbolo di ∞ non preceduto da nessun segno non ha nessun valore e non dobbiamo utilizzarlo nella risoluzione degli esercizi in quanto è un simbolo troppo **impreciso e fuorviante**.

Definizione 60:
Il limite della somma di due limiti è la somma dei due limiti.
Il limite del prodotto di due funzioni è il prodotto dei due limiti.
Abbiamo vari casi a seconda del valore dei limiti:
Poniamo $A \subseteq \mathbb{R}, f, g : A \to \mathbb{R}, x_0 \in D(A) \cap \overline{\mathbb{R}}$, allora:

1. *A. i limiti sono dei numeri reali:*

$$
\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to x_0}{\to} \lambda \in \mathbb{R} \\
g(x) &\underset{x\to x_0}{\to} \mu \in \mathbb{R} \\
&\Downarrow \\
\textit{SOMMA: } f(x)+g(x) &\underset{x\to x_0}{\to} \lambda+\mu \\
\textit{PRODOTTO: } f(x)\cdot g(x) &\underset{x\to x_0}{\to} \lambda\cdot\mu \\
\textit{QUOZIENTE: } \frac{f(x)}{g(x)} &\underset{x\to x_0}{\to} \frac{\lambda}{\mu} \qquad (\mu \neq 0; g(x)\neq 0)
\end{aligned}
\tag{160}
$$

B. *i limiti sono* $\pm\infty$
Se le due funzioni f, g *hanno segni concordi per* $x \to x_0$*, allora:*
il limite della somma è $\pm\infty$
il limite del prodotto è il prodotto dei limiti e il segno è definito dal prodotto dei segni.

2. *Se* $f(x) \underset{x\to x_0}{\to} \pm\infty, f(x) \neq 0$ *in* $A \setminus \{x_0\}$*:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0 \tag{161}$$

e viceversa:
Se $f(x) \underset{x\to x_0}{\to} 0, f(x) > 0$ *in* $A \setminus \{x_0\}$*:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \pm\infty \tag{162}$$

3. A. *Se* $f(x) \leq g(x),\ \forall x \in A \setminus \{x_0\},\ \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *allora questo implica che* $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$

   B. *Se* $f(x) \leq g(x),\ \forall x \in A \setminus \{x_0\},\ \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ *allora questo implica che* $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$

4. $f(x) \underset{x\to x_0}{\to} \lambda \implies |f(x)| \underset{x\to x_0}{\to} |\lambda|$

Definizione 61 (2 carabinieri)**:**
Poniamo $A \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D(A) \cap \overline{\mathbb{R}};\ f, g, h : A \to \mathbb{R}$. *A è un sottoinsieme di* $\mathbb{R}$*,* x_0 *è un punto di accumulazione di A, e* f, g, h *sono delle funzioni con dominio A.*
Se esiste un intorno $W \in \mathcal{U}_{x_0}$ *tale che:*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)\ \forall x \in (A \setminus \{x_0\} \cap W \tag{163}$$

allora è vero che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \lambda \in \overline{\mathbb{R}} \implies \lim_{x \to x_0} h(x) = \lambda \tag{164}$$

Dimostrazione 17.
Per dimostrare questo teorema ci sono due casi differenti:

1. $\lambda = \pm\infty$, la dimostrazione è banale in quanto basta rivedere i lemmi derivati dai prodotti e le somme dei limiti.

2. $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Definiamo una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{x_0\},\ x_n \underset{n \to +\infty}{\rightarrow} x_0$ convergente in x_0.
   Dal teorema del "collegamento" sappiamo che

   $$f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\rightarrow} \lambda \ \&\ g(x_n) \underset{n \to +\infty}{\rightarrow} \lambda \tag{165}$$

   Sappiamo inoltre che esiste un indice $\overline{n}$ per il quale $x_n \in (A \setminus \{x_0\}) \cap W;\ \forall n > \overline{n}$
   Quindi è vero che:

   $$f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n)\ \forall n > \overline{n} \tag{166}$$

   Dal Teorema dei 2 Carabinieri (per successioni) otteniamo che $\lim_{n \to +\infty} h(x_n) = \lambda$

Definizione 62 (Cauchy)**:**
Poniamo $A \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D(A) \cap \overline{\mathbb{R}}, f : A \to \mathbb{R}$.
Allora sono equivalenti le seguenti:

1.
$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \tag{167}$$

2.
$$\forall \epsilon > 0 \exists W \in \mathcal{U}_{x_0} :\ \forall x, y \in A \setminus \{x_0\}\ (x, y \in W \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon \tag{168}$$

Questo teorema afferma che quando una funzione converge al proprio limite, esiste un numero positivo (ϵ) tale per cui esiste un intorno (W) per cui la differenza del modulo di due termini arbitrari (x, y) sono minori di qualsiasi numero positivo (ϵ) noi scegliamo.

DIMOSTRAZIONE 18. 1. $1 \implies 2$

$$\forall \epsilon > 0 \exists W \in \mathcal{U}_{x_0} : |f(x) - \lambda| < \frac{\epsilon}{2} \ \forall x \in W \cap (A \setminus \{x_0\} \tag{169}$$

Allora utilizzando un'applicazione della disuguaglianza triangolare:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \lambda + \lambda| \leq |f(x) - \lambda| + |\lambda - f(y) < \cancel{2}\frac{\epsilon}{\cancel{2}} = \epsilon \tag{170}$$

2. $2 \implies 1$
Sia $\{x_n\}$ una successione convergente (e quindi di Cauchy) $x_n \underset{n \to +\infty}{\to} x_0$, dalle nostre ipotesi sappiamo che:

$$\forall \epsilon > 0 \exists W \in \mathcal{U}_{x_0} : \ \forall x, y \in A \setminus \{x_0\} \ (x, y \in W \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon \tag{171}$$

Dato che la successione è convergente dai teoremi sulle successioni possiamo dedurre che esiste un indice $\overline{n}$ per il quale $n, m > \overline{n}$ il che implica che:

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon \ \forall n, m > \overline{n} \tag{172}$$

Quindi la successione $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy e dall'assioma di completezza sappiamo anche che:

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lambda \tag{173}$$

Ovvero che esiste un numero reale che è il limite di questa successione. Per dimostrare che questa condizione è valida **per ogni** successione convergente a x_0.
Consideriamo un'altra successione $\{y_n\} \subseteq A \setminus \{x_0\}$, $y_n \underset{n \to +\infty}{\to} x_0$. Allora deve esistere un indice $\overline{\overline{n}} \in \mathbb{N}$ per cui ogni indice maggiore di esso "cade" nell'intervallo W, ovvero:

$$n > \overline{\overline{n}} \implies y_n \in W \cap (A \setminus \{x_0\}) \tag{174}$$

Se allora consideriamo un indice n tale che esso sia maggiore del massimo dei due altri indici implica che le due successioni si trovano all'interno dell'intervallo W:

$$n > max\{\overline{n}, \overline{\overline{n}}\} \implies x_n, y_n \in (A \setminus \{x_0\}) \cap W \tag{175}$$

Dalla prima dimostrazione sappiamo che la differenza del modulo delle due funzioni è più piccola di un numero arbitrariamente piccolo (ϵ)

Perciò:

$$\lim_{n\to+\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0 \tag{176}$$

Ma dato che il limite di $f(x_n)$ è λ allora esso sarà il limite anche della funzione dell'altra successione:

$$\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \lambda \tag{177}$$

Questo è valido per qualsiasi arbitraria funzione $\{y_n\}$

4.3 Limiti di funzioni monotone

Definizione 63:
Poniamo $A \neq \varnothing, f : A \to \mathbb{R}$
. Si dice una funzione ***superiormente limitata*** *se è superiormente limitato l'insieme $f(A)$.*
Si dice una funzione ***inferiormente limitata*** *se è inferiormente limitato l'insieme $f(A)$.*
Più semplicemente diremo che esiste una costante (M) sempre maggiore (o minore) dei valori della funzione nel suo dominio:

$$\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \geq M, \ \forall x \in A \tag{178}$$

$$\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M, \ \forall x \in A \tag{179}$$

Si dice che una funzione è limitata se essa è minore del modulo di una costante (M):

$$\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq |M|, \ \forall x \in A \tag{180}$$

4.4 Notazione

Poniamo:

$$\underset{A}{sup} f = sup(f(A)), \quad \& \quad \underset{A}{inf} f = inf(f(A)) \tag{181}$$

Allora sono vere le seguenti affermazioni:

$$\underset{A}{sup} f = \lambda \iff \begin{cases} f(x) \leq \lambda, & \forall x \in A, \\ \forall \epsilon > 0, \ \exists \overline{x} \in A : & \lambda - \epsilon < f(\overline{x}) \end{cases} \tag{182}$$

La spiegazione segue che:
(1): se λ è il superiore della funzione $f(x), A \to \mathbb{R}$, allora **ogni** immagine di essa sarà inferiore o uguale a λ e questo e' valido per ogni elemento del dominio.
(2): Vale a dire che il sup é il minimo maggiorante, prendendo un qualsiasi numero positivo (ϵ) se sottraiamo questo numero dal *sup* questa differenza sarà minore di una certa immagine della funzione, se fosse vero il contrario $\lightning$, il *sup* non sarebbe il minimo maggiorante.
Delle derivazioni di queste affermazioni sono che:

- $\underset{A}{sup} f = +\infty$,
  implica che comunque noi scegliamo una costante M, esiste un elemento di x tale che la sua immagine sia maggiore di questa costante.

  $$\forall M \in \mathbb{R}, \ \exists x \in A : f(x) > M \tag{183}$$

  si ha un discorso analogo se l'inf e' $-\infty$

Il *sup* di una funzione puó appartenere alla funzione o no, mentre il *max* di una funzione

$$\underset{A}{max} f = max(f(A)) \tag{184}$$

appartiene alla funzione stessa perchè è un'elemento del dominio.

Definizione 64 (Monotonia di una funzione)**:**
Siano $A \subseteq \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}$ si dice che questa funzione è monotona crescente se

$$f(x) \leq f(y) \ \forall x, y \in A, \ x \leq y \tag{185}$$

*È **strettamente** crescente se le disuguaglianze sono **strette**. (<)*

$$f(x) < f(y)\ \forall x, y \in A,\ x < y \tag{186}$$

Mentre una funzione è strettamente decrescente se la definzione precedente è valida con le disuguaglianze invertite.

$$f \nearrow \equiv f \text{ crescente} \tag{187}$$

Con x_0 di solito ci si riferisce al punto di massimo della funzione.

Definizione 65:
Poniamo $A \subseteq \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}, f \nearrow$, allora è vero che:

1. $x_0 \in D(A \cap]x_0, +\infty[) \implies \lim_{x \to x_0^+} f(x)$
   se x_0 è un punto di accumulazione dell'insieme formato dal suo dominio intersecato con $]x_0, +\infty[$, esiste il limite destro di questo punto.
2. $x_0 \in D(A \cap] - \infty, x_0[) \implies \lim_{x \to x_0^-} f(x)$
   se x_0 è un punto di accumulazione dell'insieme formato dal suo dominio intersecato con $] - \infty, x_0[$, esiste il limite sinistro di questo punto.

4.5 Funzioni Continue

Definizione 66 (Continuità)**:**
Un modo pratico per definire la continuità di una funzione è quello di pensare di dover disegnare il grafico della funzione, se non si è mai staccata la penna dal foglio, allora la funzione sarà continua.
Definiamo $A \subseteq \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}, x_0 \in A$.
*Una funzione si definisce **continua** in x_0 se:*

$$\forall V \in \mathcal{U}_{f(x_0)} \exists W \in \mathcal{U}_{x_0} :\ \forall x \in A (x \in W \implies f(x) \in V) \tag{188}$$

Questa definizione è molto simile alla definzione di limite, in questa circostanza però il punto x_0 è incluso.

La notazione di continuità:

$$f \in C(A, \mathbb{R}) = \{f : A \to \mathbb{R} : f \text{continua}\} \tag{189}$$

Inoltre una funzione continua è composta da due punti diversi:

1. Se x_0 è un punto isolato:
   $x_0 \notin D(A)$, implica che la funzione è continua in x_0 quale che sia la funzione.

$$x_0 \notin D(A) \Longrightarrow \exists W \in \mathcal{U}_{x_0} : A \cap W = \{x_0\} \tag{190}$$

   Se x_0 è un punto isolato (quindi non un punto di accumulazione) esiste un intorno nella famiglia degli intorni di x_0. Se interesechiamo l'intorno scelto con il dominio, otterremo esattamente x_0.

$$\begin{gathered} \forall V \in \mathcal{U}_{f(x_0)}) \Longrightarrow f(x) \in V, \ \in A \cap W \\ x \in A \cap W \iff x = x_0 \end{gathered} \tag{191}$$

   Ogni intorno dell'immagine di x_0, ogni immagine di x si trova in questo intorno: se $x \in A \cap W$

2. Se x_0 è un punto di accumulazione:
   Allora f è continua in x_0 se e solo se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Dei teoremi che derivano da questa defінzione: Se $A \subseteq \mathbb{R},\ f, g \in C(A)$:

- $f + g \in C(A)$;
- $f \cdot g \in C(A)$;
- se $g \neq 0$ in A, allora $\frac{f}{g} \in C(A)$
- $|f| \in C(A)$

Definizione 67 (Continuità e successioni)**:**
Siano $A \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in A, f : A \to \mathbb{R}$.

$$f \in C(A) \iff \forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A, x_n \underset{n \to +\infty}{x_0}\ ;\ \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0) \tag{192}$$

Se abbiamo una funzione continua in un certo dominio, questo è valido se e solo se per ogni ***successione*** *contenuta in questo dominio converge a x_0 e il limite dell'immagine di questa successione è l'immagine del punto di convergenza.*

Dimostrazione 19.
Per dimostrare partendo dalla definzione di continuità:

$$\forall V \in \mathcal{U}_{f(x_0)} \exists W \in \mathcal{U}_{x_0} : \ \forall x \in A(x \in W \Longrightarrow f(x) \in V) \tag{193}$$

Sappiamo anche che per una successione convergente esiste un indice $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in W, n > \overline{n} \implies x_n \in A \implies x_n \in W \cap A \ (n > \overline{n}$

$$\forall V \in \mathcal{U}_{f(x_0)} \exists \overline{n} \in \mathbb{N} : \ \forall n(n > \overline{n} \Longrightarrow f(x) \in V) \tag{194}$$

Ma questo vuol dire che il limite dell'immagine della successione è l'immagine del punto di convergenza.

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0) \tag{195}$$

Dimostrazione 20.
Dimostriamo la continuità partendo dalla nozione per cui ogni successione convergente in un punto x_0 di A il limite dell'immagine della successione è l'immagine del punto di convergenza:
Per assurdo $\lightning$pensiamo che la funzione sia **non** continua:
(Neghiamo la definizione di continuità)

$$\exists V \in \mathcal{U}_{fx_0)} : \forall W \in \mathcal{U}_{x_0} \ \exists x \in A \cap W \ \& \ f(x) \notin V \tag{196}$$

Si può riscrivere come:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \exists x_n \in A \cap \left] x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n} \right[\ \& f(x_n) \notin V \tag{197}$$

La successione allora è contenuta in $A, x_n \to x_0$, dato che per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n} \tag{198}$$

Per ipotesi abbiamo posto che l'immagine della successione non si trova nell'intorno V ma allo stesso tempo è nell'intorno il che è assurdo.

$$f(x_n) \notin V; f(x_n) \in V \lightning \tag{199}$$

Definizione 68 (Teorema di Weierstrass)**:**
*Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme compatto, ovvero un insieme chiuso e limitato, se $f \in C(A)$ Allora la funzione ha **massimo** e **minimo***

Dimostrazione 21.
Sia $A \neq \varnothing, f : A \to \mathbb{R}$:

- $\exists\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A : \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \underset{A}{sup} f$
- $\exists\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A : \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = \underset{A}{inf} f$

Dimostriamo l'esistenza del massimo $max_A f$.
Sappiamo che esiste una successione che tende al *sup* della funzione.

$$\exists\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \ : \ \lim_{n\to+\infty} f(x) = sup_A f \tag{200}$$

Dato che l'insieme in cui la successione è contenuta possiamo estrarre una sottosuccessione $\{x_{k_n}\}$ che converge in un certo punto x_0.
Allo stesso tempo per la continuità della funzione che l'immagine della sottosuccessione converge all'immagine del punto in cui converge

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_{k_n}) = f(x_0) \tag{201}$$

Dai teoremi sulle successioni sappiamo che se una successione converge in un certo punto anche **ogni** sua sottosuccessione convergerà a quel punto. Quindi:

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_{k_n}) = \underset{A}{sup} f \tag{202}$$

Per il teorema dell'unicità del limite allora

$$f(x_0) = \underset{A}{sup} f \implies f(x_0) = \underset{A}{max} f \tag{203}$$

Definizione 69 (Teorema di Bolzano)**:**
Presupponiamo come ipotesi che:
$a, b \in \mathbb{R}, a < b$ *e* f *sia continua in questo intervallo,* $f \in C([a, b])$*, tale che* $f(a) \cdot f(b) \leq 0$.
Ipotizziamo che esista $x_0 \in [a, b] : f(x_0) = 0$

DIMOSTRAZIONE 22.
La dimostrazione di questo teorema si basa sul dividere la funzione a metà (trovandone il punto medio $\frac{a+b}{2} = c$).
In questo punto ci sono 3 scenari possibili:

1. $c = 0$, il punto medio è $= 0$, non abbiamo bisogno di procedere
2. la prima metà è $= 0$, quindi iteriamo il procedimento con questa parte della funzione.

3. la seconda metà della funzione è $= 0$, iteriamo il procedimento.

Iterando questo procedimento, per un certo indice $n \in \mathbb{N}$ otterremo che:

1. $f(c_n) = 0$, troviamo un certo punto medio uguale a 0;
2. otteniamo 2 successioni, $\{a_n\}, \{b_n\} \subseteq [a, b]$:

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n, \quad f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0 \tag{204}$$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N} \tag{205}$$

e il limite di queste due successioni è lo stesso

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n = x_0 \in [a, b] \tag{206}$$

Per la continuità della funzione, presupposta nell'ipotesi,

$$\begin{gathered} \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \cdot f(b_n) = (f(x_0)^2) \\ f^2(x_0) \leq 0 \Longleftarrow f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \\ f(x_0) = 0 \end{gathered} \tag{207}$$

Definizione 70 (Teorema dei valori intermedi)**:**
Una conseguenza del teorema di Blzano è il teorema dei valori intermedi:
Se $f : I \to \mathbb{R}, f \in C(I)$, allora $f(I)$ è un intervallo. Vale a dire che se abbiamo una funzione continua in un certo intervallo, l'immagine di questo intervallo è un intervallo.
Sia $I \subseteq R, f \in C(I), f$ non costante (altrimenti sarebbe banale).

$$\begin{gathered} \forall x_1, x_2 \in I : f(x_1) < f(x_2) \\ \forall y \in]f(x_1), f(x_2)[\ \exists x \in I : f(x) = y \end{gathered} \tag{208}$$

Dimostrazione 23.
Sappiamo che $x_1 \neq x_2$, allora poniamo $x_1 < x_2$, (ciò potrebbe essere invertito senza nessun problema).
Definiamo una funzione g che ha come dominio l'intervallo chiuso definito dalle due variabili prima definite:

$$g : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) - y \implies g \in C([x_1, x_2]) \tag{209}$$

Definiamo la funzione g nell'intervallo chiuso $[x_1, x_2]$, questa funzione sarà uguale alla funzione di partenza f se gli sottraiamo una costante y, che è un punto intermedio fra i due punti di partenza.

$$f(x_1) < f(x_0) = y < f(x_2) \tag{210}$$

Come conseguenza del teorema di Bolzano, esiste un punto della funzione $x_0 \in [x_1, x_2]$ tale che la funzione si annulli. $g(x_0) = 0$

Se $f : I \to \mathbb{R}, f \in C(I) \implies f(I)$ è un intervallo e:

1. $f(I) =]inf_I f,\ sup_I f[$ se f non ha nè max nè min
2. $f(I) =]inf_I f,\ max_I f[$ se f ha max e non ha min
3. $f(I) =]min_I f,\ sup_I f[$ se f non ha max ma ha min
4. $f(I) =]min_I f,\ max_I f[$ se f ha max e min

Possiamo osservare che se abbiamo un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$:

- Se $f \in C(I)$ e iniettiva, allora la funzione è **monotona**
- Se f è monotonae $f(I)$ è un intervallo allora la funzione è continua $f \in C(I)$

Un teorema che ne deriva è:
Se abbiamo una funzione continua in un certo intervallo $f \in C(I), I \subseteq \mathbb{R}$ e la funzione è iniettiva, poniamo $J = f(I)$:

- J è un intervallo e $f : I \to J$ è sia suriettiva che iniettiva
- L'inversa della funzione è continua nell'intervallo J:
  $f^{-1} \in C(J)$

4.6 Uniforme Continuità

Siano: $A \subseteq \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}$, si dice che una funzione è **uniformemente continua** su A, se:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x, y \in A(|x - y|) < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon \tag{211}$$

Si può leggere come: qualsiasi numero reale positivo noi scegliamo (ϵ), per quantopiccolo esso sia, esiste un altro numero reale positivo (δ), tale per cui, qualsiasi due elementi di una fuznione (x, y), la loro differenza sarà **sempre** minore di δ, e ciò implica che la differenza delle immagini di questi di punti sia minore di ϵ, questa è la condizione di **uniforme continuità**

Notiamo che la continuità non implica l'uniforme continuità, invece l'uniforme continuità implica la continuità.

Definizione 71 (Heine-Cantor)**:**
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme compatto, poniamo una funzione $f \in C(A)$ continua, allora questo implica che è anche uniformemente continua.
Più semplicemente, una funzione continua in un insieme compatto è uniformemente continua.

DIMOSTRAZIONE 24 (Facoltativa).
Ipotizziamo per assurdo $\lightning$ che la funzione non sia uniformemente continua:

$$\exists \epsilon > 0 : \ \forall \delta > 0 \ \exists x, y \in A : \ |x - y| < \delta \ \& |f(x) - f(y)| \geq \epsilon \tag{212}$$

Traducendo in termini di successioni (in particolare in una successione convergente per x_0) sostituiamo δ con un certo indice n della successione.

$$\forall n, \ \exists x_n, y_n \in A : |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \ \& \ |f(x_n) - f(y_n) \geq \epsilon \tag{213}$$

Sapendo che il dominio della funzione è un insieme compatto (ovvero chiuso e limitato), possiamo estrarre una sotto-successione $\{x_{k_n}\}$ che converge ad un punto $x_0 \in A$

$$|x_{k_n} - y_{k_n}| < \frac{1}{k_n} \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{214}$$

Questo implica che anche y_{k_n} converge a x_0
Inoltre possiamo dedurre dalla nozione di continuità che:

$$\lim_{n \to +\infty} (f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})) = f(x_0) - f(x_0) = 0 \tag{215}$$

Questo fatto è assurdo poichè per ipotesi avevamo posto che:

$$|f(x_{k_n} - f(y_{k_n})| \geq \epsilon > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{216}$$

FINE PARTE DI TEORIA