1 Topologia della retta euclidea

1.1 Intervalli

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, si pone per definizione

$$\begin{aligned} \text{aperto }]a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\ \text{semiaperto } [a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\ \text{semiaperto }]a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\ \text{chiuso } [a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \end{aligned} \tag{1}$$

Se uno degli estremi è $\pm\infty$, $(a = -\infty, b = +\infty)$

$$\begin{aligned}]a,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \\ ]-\infty,a[&= \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \\ [a,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \\ ]-\infty,a] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \end{aligned} \tag{2}$$

Definizione 1:
Se $x_0 \in \mathbb{R}, \rho > 0$, si pone

$$B(x_0,\rho) =]x_0 - \rho, x_0 + \rho[\tag{3}$$

si chiama intorno aperto di x_0 di raggio $\rho \in \mathbb{R}_+$.
La famiglia degli intorni aperti di x_0 si denota come

$$\mathcal{U}_{x_0} = \{]x_0 - \rho, x_0 + \rho[: \rho > 0\} \tag{4}$$

1.2 Punti di accumulazione, isolati e aderenti

Definizione 2 (Punti di accumulazione)**:**
*Siano $A \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$, si dice che x_0 è un **punto di accumulazione** di A se per ogni W (intorno) $\in \mathcal{U}_{x_0}$ (famiglia degli intorni):*

$$A \setminus \{x_0\} \cap W = \varnothing \tag{5}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \setminus \{x_0\}) \cap\ ]x_0 - \rho, x_0 + \rho[\neq \varnothing \ \forall \rho > 0 \tag{6}$$

In parole, se prendiamo l'insieme A e ad esso sottriamo un qualsiasi punto x_0 e ad esso intersechiamo l'intervallo formato di raggio rho "ρ" e con centro

x_0. *Questo insieme è un punto di accumulazione se quanto citato prima* ***non è*** *un insieme vuoto, ovvero in esso troviamo almeno* ***un elemento****.*
*L'****insieme*** *dei punti di accumulazione si chiama* ***derivato*** *di* $A = D(A)$.
Per definizione poniamo $D(\varnothing) = \varnothing$

Definizione 3 (Punto isolato)**:**
Se $x \in A$ *e* $x \notin D(A)$ *si dice che* x *è un* ***punto isolato***

DIMOSTRAZIONE 1.
Se $A \subset R$ è un insieme finito, questo implica che $D(A) = \varnothing$.

1. Se $A = \varnothing \implies D(\varnothing) = \varnothing$
2. Se $A = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ Nessuno $z \in \mathbb{R}$ è punto di accumulazione per A:
$$z \notin D(A),\ \forall z \in \mathbb{R} \tag{7}$$
   - Supponiamo che z non sia in $\mathbb{R}$:
     $z \in \mathbb{R} \setminus A \ \rightarrow \ z \neq x_j,\ \forall j = 1, \dots, p$
     $$\rho = \{|z - x_j| : \ j \ = \ 1, \dots, p\} \tag{8}$$
     $|z - x_j| = 0 \iff z = x_j$ ma z è escluso dall'insieme A
     $$(A \setminus \{z\} \cap \,]z - \rho, z + \rho[= \varnothing \tag{9}$$
   - Supponiamo invece che z sia in A:
     $z \in A \rightarrow z = x_1$
     $$\rho = \{|x_1 - x_j| : \ j \ = \ 2, \dots, p\} \tag{10}$$
     $\rho > 0$ dato che i punti di $x_j \in A$ sono diversi tra loro.
     Se ne deduce quindi che l'intorno aperto $B(x_1, \rho)$ di centro x_1 di raggio ρ esclude qualsiasi altro punto di A
     $$(A \setminus \{x_1\}) \cap \,]x_1 - \rho, x_1 + \rho[= \varnothing \tag{11}$$

ESEMPIO 1 ($A \subseteq \mathbb{R}$ e $D(A) \neq \varnothing \implies A$ è **infinito**).
Ovvero, se A è un insieme contenuto nell'insieme dei numeri reali e l'insieme dei suoi punti di accumulazione **non** è vuoto allora A è infinito.
Ciò non è vero in quanto questa proposizione è solamente una **condizione necessaria** ma **non sufficiente**.
$\mathbb{N}$ è infinito ma $D(\mathbb{N}) = \varnothing$

Definizione 4:
Siano $A \subseteq \mathbb{R},\ x_0 \in \mathbb{R}$, allora:

$$x_0 \in D(A) \iff \exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{x_0\} : x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x_0 \tag{12}$$

Definizione 5:
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, A infinito e limitato, allora $D(A) \neq \varnothing$

DIMOSTRAZIONE 2.
A è infinito quindi esiste $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ t.c. $x_n \neq x_m,\ \forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m.$
A è limitato quindi $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
TEOREMA BOLZANO-WEIERSTRASS :

$$\exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\ :\ x_{k_n} \underset{n\to+\infty}{\to} x_0 \in \mathbb{R} \tag{13}$$

Se $x_{k_n} \neq x_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $\{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ e converge a x_0
Quindi $x_0 \in D(A)$
Se $x_{k_p} = x_0,\ p \in \mathbb{N}$, avremo che $\{x_{k_{n+p}}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ e questa successione converge ad x_0. $x_{k_n} \neq x_{k_p},\ \forall n \neq p.$
In entrambi i casi: $\exists x_0 \in D(A)$

Definizione 6 (Punti aderenti)**:**
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, sia $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0 è aderente in A se

$$A \cap W \neq \varnothing\ \forall W \in \mathcal{U}_{x_0} \tag{14}$$

$$\Downarrow$$

$$A \cap]x_0 - \rho, x_0 + \rho[\neq \varnothing\ \forall \rho > 0 \tag{15}$$

Definizione 7 (Chiusura)**:**
*Si dice **chiusura** di A, $\overline{A}$, l'insieme dei punti aderenti ad A:*

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \text{è aderente ad} A\} \tag{16}$$

La chiusura dell'insieme vuoto corrsiponde per convenzione all'insieme vuoto.

$$\overline{\varnothing} = \varnothing \tag{17}$$

Dalle definizioni precedenti ricaviamo:

$$D(A) \subseteq \overline{A}\ \&\ A \subseteq \overline{A} \tag{18}$$

Il fatto per cui, l'insieme dei punti di accumulazione di A è contenuto nell'insieme dei punti di aderenza di A è dovuto dal fatto che al primo insieme "togliamo" x_0, ovvero il centro dell'intervallo di riferimento, mentre fa parte del secondo.

Definizione 8 ($\overline{A} = A \cup D(A)$)**:**
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, si ha $\overline{A} \supseteq A$, & $\overline{A} \supseteq D(A) \implies \bar(A) \supseteq A \cup D(A)$
Proviamo che:

$$x_0 \in A \cup D(A) \; \forall x_0 \in \overline{A} \tag{19}$$

Se x_0 è in A, è ovvio. Proviamolo nel caso in cui $x_0 \in \overline{A} \setminus A$.

$$A \cap W \neq \varnothing \; \forall W \in \mathcal{U}_{x_0} \tag{20}$$

$$\Downarrow$$

$$A \setminus \{x_0\} = A \implies A \setminus \{x_0\} \cap W \neq \varnothing \quad \forall W \in \mathcal{U}_{x_0} \tag{21}$$

Quindi $x_0 \in D(A)$.

Definizione 9:
Siano $A \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$:

$$x_0 \in \overline{A} \iff \exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A : x_n \underset{n \to +\infty}{to} x_0 \tag{22}$$

1.3 Insiemi aperti e chiusi. Insiemi compatti

Definizione 10 (Insieme chiuso)**:**
*$A \subseteq \mathbb{R}$ è **chiuso** se $A = \overline{A}$, ma questo è possibile se:*

$$A = \overline{A} \iff D(A) \subseteq A \tag{23}$$

Se $A \subseteq \mathbb{R}$ sono valide le seguenti affermazioni:

- A è chiuso
- Se $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $x_n \underset{n \to +\infty}{\to} x_0 \implies x_0 \in A$

Definizione 11 (Insieme compatto)**:**
*Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, A è detto **compatto** se ad ogni successione di punti di A si può estrarre una sotto-successione convergente ad un punto di A:*

$$A compatto \iff \begin{cases} \forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A & \exists \{x_{k_n}\} \\ \exists x_0 \in A & \lim\limits_{n \to +\infty} x_{k_n} = x_0 \end{cases} \tag{24}$$

Possiamo dimostrare che sia $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$A \text{compatto} \iff A \text{chiuso e limitato} \tag{25}$$

DIMOSTRAZIONE 3.
Se A è **chiuso e limitato** dimostriamo che A è **compatto**.
Data una successione $\{x_n\}$ estraiamo una sotto-successione convergente ad un $x_0 \in A$.
Ma se l'insieme che contiene la successione è **limitato** lo è pure la successione
Applichiamo il T. BOLZANO-WEIERSTRASS:

$$\{x_{k_n}\} \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} x_{k_n} = x_0 \tag{26}$$

Se $x_0 \in \overline{A}$ e $\overline{A} = A$ (essendo chiuso), quindi $x_0 \in A$

Definizione 12 (Punto interno e Insieme Aperto)**:**
*Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. x_0 si dice **interno** ad A se esiste $\rho > 0$ t.c.*

$$]x_0 - \rho, x_0 + \rho[\subseteq A \tag{27}$$

*Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è detto **aperto** se **ogni suo punto** è interno ad A*

$$A \text{ è aperto} \iff A = \mathring{A} \tag{28}$$