1 Successioni

1.1 Successioni in $\mathbb{R}$

Sia $X \neq \varnothing$, una qualsiasi funzione $f : \mathbb{N} \to X$ si dice: **successione in** X.
Una notazione si indica $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o $f_1, f_2, \dots, f_n$
f_n si chiama termine n-esimo.
$k_1, k_2, \dots, k_n$ è una successione di numeri naturali:

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \dots \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

La successione $\{f_{k_n}\}$ è una *sottosuccessione* di $\{f_n\}$.

Definizione 1:
Se a_n tende a $l \in \mathbb{R}$ per $n \to \infty$, si dice che $\lim_{n\to\infty} a_n = l$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \overline{n} : \forall n \in \mathbb{N}(n > \overline{n} \;\Rightarrow\; |a_n - l| < \epsilon) \tag{2}$$

$\{a_n\}$ converge ad l ed esso è il limite di $\{a_n\}$

Esempio 1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{3}$$

Ovvero

$$\forall \epsilon > 0 \exists \overline{n} : \forall n \in \mathbb{N} \left(n > \overline{n} \;\Rightarrow\; |\frac{1}{n} - 0| < \epsilon \right) \tag{4}$$

Dimostrazione 1 (Il limite se esiste è unico).

$$\lim_{x\to\infty} a_n = l \quad \wedge \quad \lim_{x\to\infty} a_n = m \qquad \Longleftrightarrow \qquad l \;=\; m \tag{5}$$

Esempio 2.
Poniamo per assurdo che $l \neq m$ Fissiamo $\epsilon > 0$

$$\underbrace{\underbrace{|a_n - l| < \frac{\epsilon}{2}}_{n>\overline{n_1}} \quad \& \quad \underbrace{|a_n - m| < \frac{\epsilon}{2}}_{n>\overline{n_2}}}_{n \;>\; \max\{\overline{n_1},\overline{n_2}\}} \tag{6}$$

$$\Downarrow$$

Ricordiamo che $|a_n - m| = |m - a_n|$

$$|\cancel{-a_n} - l - \cancel{-a_n} + m||a_n - l| \; + \; |m - a_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \tag{7}$$

$$\Downarrow$$

$$|m - l| < \epsilon \quad \implies \quad |m - l| = 0 \tag{8}$$

Ma questo è assurdo perchè: $\epsilon > 0, \forall \epsilon \in \mathbb{R}$

$$m = l \tag{9}$$