1 Derivate

1.1 Rapporto incrementale e derivate

Per poter comprendere le derivate è essenziale comprendere il concetto di **rapporto incrementale**

Definizione 1 (Rapporto Incrementale):
Premettiamo: $A \subseteq \mathbb{R},\ f : A \to \mathbb{R},\ x_0 \in A \cap D(A)$
x_0 *è un punto di accumulazione, non isolato e* f *una funzione con dominio* A *e codominio* $\mathbb{R}$.

$$R_f(x_0) : A \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}, \quad R_f(x_0)(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1}$$

*Una funzione si dice **derivabile** in* x_0 *se esiste il limite, ed è finito:*

$$\lim_{x \to x_0} R_f(x_0) : A \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}, = \lim_{x \to x_0} R_f(x_0)(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{2}$$

*Il limito che abbiamo appena definito si chiama **derivata** di* f *in* x_0

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} R_f(x_0)(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},\ f'(x_0) \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Se il limite, del rapporto incrementale, non appartiene ai numeri reali ed è $\pm\infty$, allora la funzione è derivabile in senso esteso.
Il limite del rapporto incrementale si può riscrivere come:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad (h = x - x_0) \tag{4}$$

Definizione 2:
Se una funzione f *è derivabile in un punmto* x_0 *allora:*

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists \omega : A \to \mathbb{R}\ \omega(x) \to \omega(x_0) = 0 | x \to x_0 \tag{5}$$

Allora:

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + \lambda \cdot (x - x_0) + \omega(x)(x - x_0)\ \forall x \in A \\ \lambda =& \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad w(x) \text{\textit{è infinitesima (=0)}} \\ \lambda =& f'(x_0) \end{aligned} \tag{6}$$

Definizione 3:
Premettiamo: $A \subseteq \mathbb{R},\ f : A \to \mathbb{R},\ x_0 \in A \cap D(A)$
x_0 *è un punto di accumulazione, non isolato e* f *una funzione con dominio* A *e codominio* $\mathbb{R}$.
Se f *è derivabile in* x_0 *allora* f *è continua in* x_0.
Questa nozione è dimostrabile sapendo che: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, *e la tesi viene provata dal fatto che* x_0 *è un punto di accumulazione del suo dominio* A.

Esempio 1.
Non è vero l'opposto di quanto abbiamo appena affermato: esistono infatti funzioni continue non derivabili, come per esempio la funzione **modulo**:

$$f(x) = |x| \tag{7}$$

Dimostrazione 1.
Lo si può facilmente dimostrare per il limite destro e sinistro in 0:

$$\nexists \lim_{x\to x_0} |x| : \begin{cases} \lim_{x\to x_0^+} |x|, & 1 \\ \lim_{x\to x_0^-} |x|, & -1 \end{cases} \tag{8}$$

Dato che i due limiti non coincidiono il limite, nel punto x_0 non esiste.

Esempio 2.
La derivata di $f'(e^x) = e^x$

Alcune proprietà delle derivate:

- La somma delle derivate è la derivata della somma, ed è derivabile in x_0:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \tag{9}$$

- La regola di Leibniz: ($f \cdot g$ è derivabile in x_0)

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \tag{10}$$

- La derivata del quoziente (ponendo $g(x_0) \neq 0$), $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0;

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} \tag{11}$$

- La derivata della composta è:
  Prendiamo due funzioni tali che:
  $A, B \subseteq \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}, g : B \to \mathbb{R}, f(A) \subseteq B;\ x_0 \in A \cap D(A), f$ derivabile in x_0, $f(x_0) \in D(B), g$ derivabile in $f(x_0)$:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \tag{12}$$

- L'inversa della derivata è la complementare della derivata:

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \tag{13}$$

Definizione 4 (Estremanti massimo, minimi e relativi)**:**
Sia $A \subseteq \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}$ derivabile, sia $x_0 \in \dot{A}$ (che vuol dire che esiste un intorno di x_0 tutto dentro a ad A).
*Se x_0 è un punto **estremante relativo** (min o max realtivo) allora $f'(x_0) = 0$*

Dimostrazione 2.
Prendiamo come esempio x_0 max relativo, allora sarà vero:

$$\exists \rho > 0 : f(x) - f(x_0) \leq 0\ \forall x \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[\tag{14}$$

Sapendo che x_0 è tutto interno, supponiamo che sia tutto incluso in A:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0\ \forall x \in]x_0, x_0 + h[$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \ \forall x \in]x_0-h, x_0[$$

Dalla derivabilità della funzione possiamo capire che:

$$\begin{cases} f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \\ f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \end{cases} \tag{15}$$

Quindi $f'(x_0)$ deve essere uguale a 0

1.2 Teoremi Fondamentali delle derivate

Definizione 5 (Rolle):
Prendiamo due numeri naturali, di cui uno strettamente maggiore dell'altro: $a, b \in \mathbb{R}; a < b$ *e una funzione continua nell'intervallo formato da questi due numeri:* $f \in C([a,b])$*, e questa funzione è derivabile nell'insieme formato dai due numeri, estremi esclusi:* $]a,b[$ *Se l'immagine del primo elemento è uguale a quella dell'altro* $f(a) = f(b)$ *allora è vero che:*

$$\exists c \in]a,b[: f'(c) = 0 \tag{16}$$

Esiste un elemento all'interno dell'intervallo formato dai due punti, la cui derivata è uguale a 0.

Dimostrazione 3.
La dimostrazione di questo teorema deriva dal fatto che:
essendo la funzione limitata, applicando il teorema di Weierstrass sappiamo che esistono due punti della funzione $x_1, x_2 \in [a,b]$ che sono punti di min, max assoluti nell'intervallo.
Quindi, o le due immagini sono uguali, se e solo se sono i due estremi $x_1, x_2 \in a, b$:

$$f(x_1) = minf, \ f(x_2) = maxf \implies f(x_1) = f(x_2) \tag{17}$$

La funzione è costante e quindi la derivata di un qualsiasi punto:

$$f'(c) = 0 \forall c \in]a,b[\tag{18}$$

Se invece uno dei punti è all'interno dell'intervallo $x_1 \in]a,b[$, abbiamo prima dimostrato che se un elemento ha un intorno tutto all'interno di un intervallo ed esso è min, max relativo la sua derivata è 0

Definizione 6 (Valor medio o Lagrange):
Siano $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : [a,b] \to \mathbb{R}, f \in C([a,b]), f$ *derivabile all'interno dell'intervallo dei due punti* $]a,b[$*, allora:*

$$\exists c \in]a,b[: \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \tag{19}$$

Dimostrazione 4.
Consideriamo una funzione $g(x) : [a,b] \to \mathbb{R}, \ g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$.
Sostituendo la variabile x con $a \vee b$, otteniamo

$$g(a) = f(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (\underbrace{\cancel{a-a}}_{0}) \tag{20}$$

Inoltre:

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}} \cdot (\cancel{b-a}) = \cancel{f(b)-f(b)} + f(a) = f(a) \tag{21}$$

Quindi logicamente

$$g(a) = f(a),\ g(b) = f(a) \quad \implies g(a) = g(b) \tag{22}$$

Un'altra nozione che abbiamo premesso è che la funzione è continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$, dalle conclusioni del teorema di Rolle:

$$\exists c \in]a,b[\colon g'(c) = 0 \tag{23}$$

Che non vuol dire niente di meno di quanto abbia affermato nella nostra tesi:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{24}$$

Definizione 7 (Cauchy):
Siano $a,b \in \mathbb{R}, a < b,\ f,g \in C([a,b])$ e derivabili in $]a,b[,\ g' \neq 0$, allora:

$$\exists c \in]a,b[\colon \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{25}$$

Questo si può facilmente dimostrare applicando il teorema di Rolle

Delle brevi osservazioni:
Se abbiamo un intervallo non vuoto $I \subseteq \mathbb{R}$ e una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile su questo intervallo, se:

$$f'(x) = 0,\ \forall x \in I \tag{26}$$

Allora la funzione è costante in tutto l'intervallo.
Se invece:

$$f'(x) \geq 0\ \forall x \in I \tag{27}$$

La funzione è monotona crescente nell'intervallo. Viceversa se è monotona crescente allora sarà sempre minore uguale a 0 la derivata della funzione.

Definizione 8 (Darboux):
Sia $I \subseteq \mathbb{R} \neq \varnothing$ un intervallo non vuoto e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nell'intervallo, alllora:

$$f'(I) = f'(x) : x \in I \tag{28}$$

È un intervallo di $\mathbb{R}$.

Definizione 9 (Primitive):
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, diremo che la primitva di questa funzione è una qualsiasi funzione derivabile $\phi : I \to \mathbb{R}$ tale che:

$$\phi'(x) = f(x)\ \forall x \in I \tag{29}$$

In parole povere la primitiva è come se fosse "l'operazione inversa" alla derivata, ovvero la primitiva di una funzione è l'immagine di partenza $f(x)$.
Il teorema di Darboux dice inoltre che se esiste una primitiva di una funzione f su I allora $f(I) = \phi'(I)$ è un intervallo, questa è una condizione necessaria affinchè la funzione abbia una primitiva.

Definizione 10 (Hôpital):
Consideriamo un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$ e sia un numero $a \in D(I)$, allora siano due funzioni $f, g : I \to \mathbb{R}$ derivabili in ogni punto di $I \setminus a, g'(x) \neq 0$

$$\begin{cases} \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \\ \lim_{x\to a} |f(x)| = \lim_{x\to a} |g(x) = +\infty \end{cases} \tag{30}$$

Se esiste:

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g(x)} \implies \exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{31}$$

e possiamo concludere che:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{32}$$

Definizione 11 (Derivate successive):
Possiamo generalizzare induttivamente il concetto di derivata.
Premettiamo che sia: $A \subseteq \mathbb{R}, (A \neq \varnothing); f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq D(A), x_0 \in A$, la derivata seconda di f in x_0 è:

$$(f')'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{(f')(x) - (f')(x_0)}{x - x_0} \tag{33}$$

Per indicare le derivate seconde utilizziamo i seguenti simboli:

$$f''(x_0), D^2 f(x_0), f^{(2)}(x_0) \tag{34}$$

La derivata n-esima si indica come:

$$f^{(n)}(x_0), D^n f(x_0), \ldots \tag{35}$$

La derivata n-esima è la derivata della funzione $f^{(n-1)}(x)$
La seguente notazione:

$$C^n(A) = f : A \to \mathbb{R}, f^n(x) = C(A), f\text{derivabile n-volte in } A \tag{36}$$

Per esempio $C^0(A) = C(A)$ è l'insieme delle funzioni continue in $f : A \to \mathbb{R}$
Osserviamo che $C^n(A)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.
Se usiamo il simbolo $C^\infty(A)$ si indica lo spazio vettoriale delle funzioni che sono infinitamente derivabili in A.

$$C^\infty(A) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(A) \tag{37}$$

Definizione 12 (Polinomi di Taylor):
Un'espressione matematica può essere riscritta sottoforma di polinomio di un certo grado arbitrario: Sia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Un ***polinomio*** *è una funzione $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di grado $\leq n$, se esistono $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tali che*

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \forall x \in \mathbb{R} \tag{38}$$

Per indicare la famiglia delle funzioni polinomiali $\mathcal{P}_n$, essa è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

Definizione 13 (Formula di Taylor con resto di Peano):
Con la formula di Taylor possiamo 'approssimare' ***localmente*** *tutte le funzioni sufficiemente regolari con dei polinomi: Deve essere la funzione $f(x)$ definita in un certo intervallo $(-\delta, \delta), \delta > 0$ e:*

- *$f(x)$ derivabile $n-1$ volte nell'intervallo definito*
- *esista la derivata n-esima almeno in x_0*

$$f(x) = T_n(x) + o(x^n) \ x \to x_0 \tag{39}$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!} \cdot x^k \tag{40}$$

1.3 Tablle Utili

Funzione $f(x)$	Derivata della funzione $f'(x_0)$
k	0
$\|x\|$	$sgnx$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
x	1
$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e$
$\log x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a \|x\|$	$\frac{1}{\|x\|}$
$\log \|x\|$	$\frac{1}{x}$
$\log \|f(x)\|$	$\frac{f'(x_0)}{f(x)}$
a^x	$a^x \log a$
e^x	e^x
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$1+\tan^2 x$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x)$	sviluppo $(x \to 0)$	formula generale
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$	$\frac{x^n}{n!}\ n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$
$\log(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$	$\frac{x^n}{n}\ n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$
$\sin(x)$	$x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$	
$\sinh(x)$	$x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$	
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$	
$\cosh(x)$	$1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$	
$\tan(x)$	$x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$	
$\arctan(x)$	$x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$	
$(1+x)^a$	$1 + ax + \frac{a \cdot (a-1)}{2} \cdot x^2 + o(x^2)$	

1.4 Studi di Funzioni

Di seguito i passi da svolgere per eseguire lo studio di una funzione:

1.4.1 Dominio della funzione

Come primo passo dobbiamo determinare il dominio della funzione, ovvero dove questa è definita.

ESEMPIO 3.
Se la funzione è il quoziente di una frazione dobbiamo premettere che il divisore **deve** essere diverso da 0

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{g(x)}{h(x)} \implies h(x) \neq 0 \\ f(x) &= \frac{x^2+4}{2x} \implies 2x \neq 0 \iff x \neq 0 \\ Dom\ f &= \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned} \tag{41}$$

L'argomento di un logaritmo deve essere diverso da 0, la base di un esponenziale deve essere maggiore di 0

- $\log a \iff a \neq 0$
- $a^x \iff a > 0$

1.4.2 Limiti agli estremi del dominio

Si calcolano i limiti agli estremi del dominio della funzione e si verifica la presenza di asintoti verticali e/o orizzontali.

ESEMPIO 4.
Se una funzione è definita su tutti i numeri reali $Dom\ f = \mathbb{R}$, allora gli estremi del dominio sono $\pm\infty$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lambda \tag{42}$$

$$\begin{cases} \lambda = \pm\infty,\ x = a,\ a \in \mathbb{R} & \implies \text{asintoto verticale} \\ \lambda = \pm\infty,\ x \to \pm\infty & \implies \text{asintoto orizzontale/obliquo} \end{cases} \tag{43}$$

1.4.3 Asintoti obliqui

Se sono presenti degli asintoti orizzontali, verifichiamo la presenza di asintoti obliqui. Troveremo l'equazione di una retta, la quale definisce l'asintoto obliquo:

$$y = mx + q \tag{44}$$

Per trovare m dividiamo il limite della funzione per x.

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \tag{45}$$

Una volta trovato m, (se esiste) cerchiamo il valore q (quota, il punto in cui la retta interseca l'asse delle ordinate)
Per trovare q:

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) \tag{46}$$

1.4.4 Monotonia

Per poter studiare la monotonia della funzione ne studiamo la derivata

$$f'(x) \tag{47}$$

Studiamo il comportamento della funzione, esaminando il segno della funzione derivata.

1.4.5 Derivabilità

Studiamo se la funzione è derivabile nei punti in cui si annulla (=0)

1.4.6 Derivata seconda e conseguenze

Studiamo la derivata seconda della funzione e verifichiamo la presenza di convessità, concavità, punti di flesso, attraverso lo studio del segno della derivata seconda.