1 Successioni

1.1 Successioni in $\mathbb{R}$

Sia $X \neq \varnothing$, una qualsiasi funzione $f : \mathbb{N} \to X$ si dice: **successione in** X.
In notazione si indica $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o $f_1, f_2, \dots, f_n$
f_n si chiama termine n-esimo.
$k_1, k_2, \dots, k_n$ è una successione di numeri naturali:

$$k_1 < k_2 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

La successione $\{f_{k_n}\}$ è una *sottosuccessione* di $\{f_n\}$.
Il limite di una successione $\{a_n\} = l$. Vale a dire che $l \in \mathbb{R}$ è un numero vicino ai termini della successione. Esso è più precisamente un **numero reale** tale che *comunque si scelga* un intervallo di numeri intorno ad a.

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{(a-\epsilon, a+\epsilon)}_{\text{un intervallo attorno a } l} \quad , \epsilon > 0 \mid \exists \quad \underbrace{\overline{n}}_{\text{un indice } n \text{ t.c.}} \quad n > \overline{n}. \tag{2}$$

a_n si trova in questo *intorno*

Definizione 1 (Successione)**:**
*Una successione è una legge che ad ogni numero **naturale** n fa corrispondere**uno ed uno solo** numero reale a_n.*

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \tag{3}$$

Una successione è una funzione che collega degli indici n a dei numeri reali $a \in \mathbb{R}$

Definizione 2:
Se a_n tende a $l \in \mathbb{R}$ per $n \to \infty$, si dice che

$$\begin{gathered}\lim_{n\to\infty} a_n = l \\ \Downarrow \\ \forall \epsilon > 0,\ \exists \overline{n} : (n > \overline{n} \ \Rightarrow\ |a_n - l| < \epsilon) \\ \Downarrow \\ |a_n - l| < \epsilon\end{gathered} \tag{4}$$

$\{a_n\}$ *converge ad l ed esso è il **limite** di tale **tale successione***

Esempio 1.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{5}$$

Ovvero

$$\forall \epsilon > 0 \exists \overline{n} : \forall n \in \mathbb{N} \left(n > \overline{n} \ \Rightarrow \ |\frac{1}{n} - 0| < \epsilon \right) \tag{6}$$

Dimostrazione 1 (Il limite se esiste è unico).

$$\lim_{x \to \infty} a_n = l \quad \wedge \quad \lim_{x \to \infty} a_n = m \quad \Longleftrightarrow \quad l \ = \ m \tag{7}$$

Esempio 2.
Poniamo per assurdo che $l \neq m$ Fissiamo $\epsilon > 0$

$$\underbrace{\underbrace{|a_n - l| < \frac{\epsilon}{2}}_{n > \overline{n_1}} \quad \& \quad \underbrace{|a_n - m| < \frac{\epsilon}{2}}_{n > \overline{n_2}}}_{n \ > \ \max\{\overline{n_1}, \overline{n_2}\}} \tag{8}$$

$$\Downarrow$$

Ricordiamo che $|a_n - m| = |m - a_n|$

$$|\cancel{-a_n} - l - \cancel{-a_n} + m||a_n - l| \ + \ |m - a_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \tag{9}$$

$$\Downarrow$$

$$|m - l| < \epsilon \quad \Longrightarrow \quad |m - l| = 0 \tag{10}$$

Ma questo è assurdo perchè: $\epsilon > 0, \forall \epsilon \in \mathbb{R}$

$$m = l \tag{11}$$

Definizione 3:
Se $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ converge ad $l \in \mathbb{R}$ ***ogni*** *sua sottosuccessione $\{a_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge ad l*

Dimostrazione 2 (Limiti).
Se $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge $l \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \{a_{k_n}\}_{k_{n \in \mathbb{N}}}$ converge $l \in \mathbb{R}$

$$\Downarrow$$

Si ha che:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ n > \overline{n} \implies |a_n - l| < \epsilon \tag{12}$$

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ n > \overline{n} \implies |a_{k_n} - l| < \epsilon \tag{13}$$

$$\lim_{n \to \infty} a_{k_n} \ = \ l \tag{14}$$

Esempio 3.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \& \qquad k = 2, \lim_{k_n \to +\infty} \frac{1}{k_n} = 0 \tag{15}$$

Esercizio 1.

Dimostrazione 3.

$$\lim_{n \to +\infty} (a_n + b_n) = l + m \tag{16}$$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l \quad \& \quad \lim_{n \to +\infty} b_n = m \tag{17}$$

$$\Downarrow$$

$$|a_n - l| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{se} \quad n > \overline{n_1} \tag{18}$$

$$|b_n - m| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{se} \quad n > \overline{n_2} \tag{19}$$

$n > \max\{\overline{n_1}, \overline{n_2}\}$

$$|a_n + b_n - l - m| \leq |a_n - l| + |b_n - m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \tag{20}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \overline{n} \equiv \max\{\overline{n_1}, \overline{n_2}\} \ : \ n > \overline{n} \ \Rightarrow \ \underbrace{|(a_n + b_n) - (l + m)|}_{0} < \epsilon \tag{21}$$

$$(a_n + b_n) - (l + m) = 0 \tag{22}$$

$$a_n + b_n = l + m \tag{23}$$

Dimostrazione 4 (Permanenza del segno).

$$\forall\epsilon > 0, \exists\overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ n > \overline{n} \ \Rightarrow \quad \underbrace{|a_n - l < \epsilon|}_{l-\epsilon<a_n<l+\epsilon \quad \forall n>\overline{n}} \tag{24}$$

$$\epsilon = |l|$$

Da questo otteniamo che

$$\underbrace{l - |l|}_{0} < a_n < \underbrace{l + |l|}_{2l} \tag{25}$$

In conclusione avremo che:
se $l > 0 \Rightarrow a_n > 0$
se $l < 0 \Rightarrow a_n < 0$

Definizione 4 (Teorema dei 2 carabinieri)**:**
Se $\underbrace{\{a_n\}\ ,\{b_n\}}_{convergono\ a\ \ l}\ \ ,\{c_n\}$

$$\textit{è ovvio che: } a_n \leq c_n \leq b_n \implies c_n \textit{converge a } l \tag{26}$$

Dimostrazione 5.

$$\forall\epsilon > 0, \exists\overline{n_1}, \overline{n_2} \in \mathbb{N} : \tag{27}$$

$$\Downarrow$$

$$l - \epsilon < a_n < l + \epsilon \qquad \& \qquad l - \epsilon < b_n < l + \epsilon \tag{28}$$

se $n > \max\{\overline{n_1}, \overline{n_2}\}$

$$\Downarrow$$

$$l - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < l + \epsilon \qquad \forall n > \overline{n} \tag{29}$$

$$\underbrace{l - \epsilon < c_n < l + \epsilon}_{|c_n - l| < \epsilon} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} c_n = l \tag{30}$$

Definizione 5:
Sia una successione $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ *è detta:*

- *superiormente limitata, se* $\exists M \in \mathbb{R} \ : \ a_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$
- *inferiormente limitata, se* $\exists M \in \mathbb{R} \ : \ a_n \geq M \ \forall n \in \mathbb{N}$
- *limitata, se* $\exists M \in \mathbb{R} \ : \ |a_n| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$

Definizione 6 (Ogni successione convergente è limitata)**:**
Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}, \ a_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} l$
Allora (con $\epsilon = 1$*)*

$$\exists \overline{n} : \forall n \in \mathbb{N}(n > \overline{n} \ \Rightarrow \ |a_n - l| < 1) \tag{31}$$

Segue quindi che $|a_n| \leq |a_n - l| + |l| < 1 + |l|, \ n > \overline{n}$

$$|a_n| \leq 1 + |l| \tag{32}$$

Definizione 7 (Retta reala ampliata)**:**

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\} \tag{33}$$

Definizione 8:
Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$

$$\begin{gathered} \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \\ \Downarrow \\ \forall k \in \mathbb{R} \exists \overline{n} \in N \ : \ \forall n \in \mathbb{N}(n > \overline{n} \implies a_n > k) \end{gathered} \tag{34}$$

La scrittura è analoga per $-\infty$ *invertendo il segno:* $(a_n < k)$
Potremo dire che a_n *diverge positivamente o negativamente*

1.2 Forme indeterminate

Se $\{a_n\}, \{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$ *e* $\{a_n\} \to +\infty, \{b_n\} \to -\infty\}$ *allora:*

$$a_n + b_n \to +\infty - \infty = \ ? \tag{35}$$

$+\infty$ *e* $-\infty$ *non sono veri e propri numeri, piuttosto sono dei* ***simboli****, quindi il risultato sarà detto:*FORMA INDETERMINATA $+\infty - \infty$

Altri tipi di forme indeterminate sono:

$$\frac{\infty}{\infty}, \ \frac{0}{0}, \ 0 \cdot \infty, \ 1^{\infty}, \ 0^0, \ \infty^0 \tag{36}$$

1.3 Teoremi generali di esistenza

Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ è detta monotona crescente se

$$a_n \leq a_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N} \tag{37}$$

Si dice invece monotona decrescente se

$$a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N} \tag{38}$$

Sono rispettivamente **strettamente** monotone crescenti o decrescenti se le disuguaglianze sono **strette** $(<,>)$
Le scritture $a_n \nearrow$ e $a_n \searrow$ indicano monotonia crescente e decrescente

Definizione 9 (Successioni costanti)**:**
Se $a_n = a\ \forall n \in \mathbb{N}$, con a numero reale fissato si dice che

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = l,\ l \in \mathbb{R} \quad \{a_n\} \nearrow\searrow = \textit{costante} \tag{39}$$

Definizione 10:
Ogni successione monotona ammette limite:
Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$:

1. $a_n \nearrow \implies \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$
2. $a_n \searrow \implies \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$

Dimostrazione 6.
Se $\{a_n\}$ è superiormente limitata per l'assioma di completezza:

$$\exists \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \lambda \tag{40}$$

Per la proprietà del sup si ha che $a_n \leq \lambda, \forall n \in \mathbb{N}$ dunque:

$$a_n < \lambda + \epsilon\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall \epsilon > 0 \tag{41}$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \overline{n} \in \mathbb{N}\ :\ \lambda < a_{\overline{n}} + \epsilon \tag{42}$$

La definizione di limite è:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lambda \tag{43}$$

Esercizio 2 (Il numero di nepero e).

$$e \equiv \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{44}$$

Si nota che $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ sono successioni **convergenti** che hanno lo stesso limite e, inoltre sono **strettamente monotone**

$$a_n < a_{n+1} \quad \text{e} \quad b_n > b_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N} \tag{45}$$

Inoltre

$$a_n < b_n\ \forall n \in \mathbb{N} \tag{46}$$

allora:

$$a_n < a_p < b_p < b_m \quad \forall n, m, p; p = \max\{n, m\} \tag{47}$$

Entrambe le successioni convergono: a_n è monotona crescente e superiormente limitata e b_n è monotona decrescente e inferiormente limitata.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 \tag{48}$$

Questo implica che:

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n = e \tag{49}$$

Dimostrazione 7.

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \& \quad b_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)+1} \tag{50}$$

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1 \implies \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)+1}} > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\begin{aligned}
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n+1^n}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right) > 1 \\
&= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^2 = \left(\frac{n+2^n}{n+1}\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 > 1 \\
&= \left(\frac{\cancel{(n+1)}(n+2)}{n\cancel{(n+1)}}\right)^n \cdot \left(\frac{\cancel{n+1}}{n}\right) \cdot \left(\frac{n+2}{\cancel{n+1}}\right)^2 > 1 \\
&= \left(\frac{n+2}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n}\right) \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) > 1 \\
&= \underbrace{\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n+1}}_{>1} > \underbrace{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}_{<1}
\end{aligned} \tag{51}$$

Definizione 11 (Bolzano - Weierstrass)**:**
Ogni successione reale limitata ammette una sottosuccessione convergente.

Dimostrazione 8.
Per ogni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ esiste $M > 0 \ : \ |a_n| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N} \ \exists k_n \nearrow : \ a_{k_n} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} l \in \mathbb{R}$

$$-M \leq a_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{52}$$

$$\alpha_n = \sup a_k : k \geq n, \ n \in \mathbb{N} \qquad \Longrightarrow \qquad -M \leq \alpha_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{53}$$

Quindi dalla definizione ne segue che:

$$\begin{gathered}\alpha_{n+1} \leq \alpha_n \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha_n \searrow \\ \Downarrow\end{gathered} \tag{54}$$

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \alpha_n \equiv l \qquad \Longrightarrow l \equiv \inf_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \tag{55}$$

$$\begin{gathered}\forall \epsilon > 0, \ \forall p \in \mathbb{N} \ \exists n \geq p : l - \epsilon \leq a_n \\ \alpha_p \searrow \Rightarrow l \leq \alpha_p \Rightarrow l - \epsilon < \alpha_p \ \forall \epsilon > 0 \ \forall p\end{gathered} \tag{56}$$

Dato che $\alpha_p = \sup\{a_n : n \geq p\}$, deve esistere $n \geq p : a_n > l - \epsilon$
Sia $k_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} k_1 = \min\{k \in \mathbb{N} : l - 1 < a_k\} \\ k_{n+1} = \min\{k \in \mathbb{N} : k > k_n \wedge l - \dfrac{1}{n+1} < a_k\} \end{cases} \tag{57}$$

$$\Downarrow$$

$$k_{n+1} > k_n,\ \forall n \quad \wedge \quad l - \frac{1}{n} < a_{k_n}\ \forall n \tag{58}$$

Questo implica che $\{a_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ verifica le disuguaglianze

$$l - \frac{1}{n} < a_{k_n} \leq \alpha_{k_n} \implies \alpha_{k_n} \underset{n\to+\infty}{\to} l \implies a_{k_n} \to l \tag{59}$$

Definizione 12 (Successioni di Cauchy)**:**
Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ si chiama successione di Cauchy se:

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\overline{n} \in \mathbb{N} :\ \forall n, m \in \mathbb{N}(n, m > \overline{n} \Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon) \tag{60}$$

Una successione si dice di Cauchy se i suoi termini sono "arbitrariamente" vicini tra loro.

Definizione 13 (Ogni successione convergente è di Cauchy)**:**

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}, a_n \to l \in \mathbb{R} = \textit{di Cauchy} \tag{61}$$

DIMOSTRAZIONE 9.
Se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ implica che:

$$\forall\epsilon, \epsilon > 0\exists\overline{n}\forall n \left(n > \overline{n} \Rightarrow |a_n - l| < \frac{\epsilon}{2}\right) \tag{62}$$

La scrittura $\exists\overline{n}$ significa che esiste un indice dopo il quale ogni indice successivo sarà maggiore di quello.
Di conseguenza:

$$|a_n - a_m| = |(a_n - l) + (l - a_m) \leq |a_n - l| + |a_m - l| \leq \cancel{2} \cdot \frac{\epsilon}{\cancel{2}} \quad n, m > \overline{n} \tag{63}$$

$\{a_n\}$ è di Cauchy

$$\{a_n\} \text{ di Cauchy} \Rightarrow \{a_n\} \nearrow \iff \{a_n\} \nearrow \Rightarrow \{a_n\} \text{ di Cauchy} \tag{64}$$

1.4 Rappresentazione decimale di numeri reali

Se $x \in \mathbb{R}$ è:

$$[x] = \text{parte intera} = max\{p \in \mathbb{Z} : p < x\} \tag{65}$$

$$\Downarrow$$

$$[x] \leq x < [x] + 1 \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{66}$$

$$\Downarrow$$

$$x_n = \frac{[b^n x]}{b^n} \tag{67}$$

Le seguenti affermazioni sono vere:

1. $\{x_n\} \nearrow$
2. $x_n \leq x < x_n + \frac{1}{b_n} \ \forall n \in \mathbb{N}$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$
4. $\exists \alpha_0 \in \mathbb{Z}, \exists \{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}$

Definizione 14 (Decimali)**:**
I numeri decimali sono i numeri razionali:

$$\frac{m}{10^n}(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}) \tag{68}$$

Ogni numero decimale si può scrivere come

$$x = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{10^n} \tag{69}$$

con $\alpha_0 \in \mathbb{Z}, \ \alpha_1 \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$

Definizione 15 (Decimali propri)**:**
Sia $x \in \mathbb{R}, \ x = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ *La rappresentazione decimale di* x *si dice* ***propria*** *se:*

$$\nexists p \in \mathbb{N} : \alpha_n = 9 \ \forall n \geq p \tag{70}$$

Ogni numero reale ammette un'**unica** rappresentazione decimale propria. Se $x \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ x = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ è la rappresentazione decimale propria di x **se e solo se**

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \leq x < \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n + \frac{1}{10^n} \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{71}$$

1.5 Cardinalità di insiemi

Due insiemi $A, B \neq \varnothing$ si dicono **equipotenti** se

$$\exists f : A \overset{su}{\underset{1-1}{\to}} B \quad \Longrightarrow \quad A \cong B \tag{72}$$

Vale a dire che esiste una **funzione biunivoca** fra i due insiemi ed essi hanno stessa **cardinalità**

$$card(A) = card(B) \tag{73}$$

$$\Downarrow$$

$$I_n = \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\}, \quad card(A) \cong card(I_n) \implies card(A) = n \tag{74}$$

A è un insieme finito. Un iniseme è infinito se non è finito.

- A è finito $B \subseteq A, B \neq \varnothing \implies B$ è finito
- A è finito e B è sottoinsieme proprio di $A \implies A \cong B$
- A è finito, allora il numero dei suoi elementi è unico
- B è infinito e $B \subseteq A \implies A$ è infinito

Altre proposizione che ne conseguono sono:

- $A \neq \varnothing \implies A \cong A$
- $A \cong B \iff B \cong A$
- $A \cong B, B \cong C \implies A \cong C$

L'equipotenza è una relazione di **equivalenza**

Definizione 16 ($\mathbb{N}$ è infinito)**:**
Dimostriamo che $\mathbb{N}$ è equivalente ad un suo sottoinsieme proprio:

$$P = \{n \in \mathbb{N} := 2m, n \in \mathbb{N}\},\ f : P \to \mathbb{N}, f(n) = \frac{n}{2} \tag{75}$$

f è biunivoca quindi $P \subset \mathbb{N} \implies P \cong \mathbb{N}$

Definizione 17 ($\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sono infiniti)**:**
Tutti questi insiemi contengono $\mathbb{N}$

Definizione 18 (Assioma della scelta)**:**
Sia $\mathcal{B}$ una famiglia $\neq \varnothing$ di insiemi. Sia A un insieme t.c.

$$B \subseteq A \ \forall B \in \mathcal{B} \tag{76}$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \varphi : \mathcal{B} \to A \ : \ \varphi(B) \in B \ \forall B \in \mathcal{B} \tag{77}$$