

Appunti

Andreas Araya Osorio

3 June 2021

Contents

1 Insiemi

1.1 Introduzione

Definizione 1:

Un insieme è una "collezione" di oggetti.

Sia A un INSIEME, la scrittura $x \in A$ significa che x appartiene ad A .
Analogamente, scrivendo $x \notin A$ si intende che x non appartiene ad A .
Gli insiemi **finiti** si possono denotare all'interno di parentesi graffe " $\{, \}$ "
Un qualsiasi insieme può definirsi mediante una **proprietà astratta**

ESEMPIO 1.

$$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ pari} \} \quad (1)$$

Questo insieme raccoglie **tutti i numeri naturali pari** e si può meglio riscrivere così:

$$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} : x = 2y \} \quad (2)$$

1.2 Insiemi ed operazioni

Sia X un insieme e siano $A, B \subseteq X$

- **UNIONE** $A \cup B$, L'unione di A e B come l'insieme

$$A \cup B = \{ x \in X : x \in A \text{ o } x \in B \} \quad (3)$$

- **INTERSEZIONE** $A \cap B$, L'intersezione di A e B come l'insieme

$$A \cap B = \{ x \in X : x \in A \text{ e } x \in B \} \quad (4)$$

- **DIFFERENZA** $A \setminus B$, che equivale a

$$A \setminus B = \{ x \in X : x \in A \text{ e } x \notin B \} \quad (5)$$

- **COMPLEMENTARE** L'insieme complementare di A in X è:

$$A^C = X \setminus A = \{ x \in X : x \notin A \} \quad (6)$$

ESEMPIO 2.

Il complementare dell'unione è l'intersezione dei complementari, mentre il complementare dell'intersezione è l'unione dei complementari.

- $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$
- $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

DIMOSTRAZIONE 1.

Si dice relazione da A a B ogni sottoinsieme R di $A \times B$. Se $(a, b) \in R$, a è in relazione R con b , si scrive aRb .

$$R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \exists p \in \mathbb{N} \mid a = p \cdot b\} \quad (7)$$

1.3 Relazioni d'ordine

Sia $A \neq \emptyset$ un insieme non vuoto e sia $R \subseteq A \times A$ una relazione di A con A . R è:

1. riflessiva se $xRx \quad \forall x \in A$,
2. simmetrica se $xRy \rightarrow yRx$,
3. transitiva se $xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$,
4. antisimmetrica se $xRy \wedge yRz \rightarrow x = y$.

Una **relazione d'equivalenza** è tale se è RIFLESSIVA, SIMMETRICA E TRANSITIVA.

Definizione 2:

Una relazione d'ordine su un insieme $X \neq \emptyset$ è detta di ordine totale se $\forall x, y \in X$ si ha $x \leq y \vee y \leq x$. Se su X c'è una relazione d'ordine totale, X è totalmente ordinato.

Definizione 3:

Sia (X, \leq) , insieme non vuoto e ordinato e sia $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$

- $x \in X$ è un **maggiorante** di A se $a \leq x \quad \forall a \in A$
- $y \in X$ è un **minorante** di A se $y \leq a \quad \forall a \in A$
- A ha **massimo** se $\exists \lambda \in A \mid a \leq \lambda \quad \forall a \in A \implies \lambda = \max A$
- A ha **minimo** se $\exists \mu \in A \mid \mu \leq a \quad \forall a \in A \implies \mu = \min A$

Definizione 4:

Siano (X, \leq) un insieme ordinato e $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. A ha estremo superiore se l'insieme dei maggioranti di A è non vuoto e ha minimo. $\sup A$ è il più piccolo dei maggioranti. Analogamente l'estremo inferiore è presente se l'insieme dei minoranti di A è non vuoto ed esso ne è il più piccolo: $\inf A$.

Definizione 5:**Proprietà di sup e inf:**

Siano (X, \leq) un insieme ordinato e $A \subseteq X, A \neq \emptyset$.

SUP Si ha che $\lambda = \sup A$ **se e solo se**

1. $a \leq \lambda \quad \forall a \in A$;
2. $\lambda_1 \in X, a \leq \lambda_1 \quad \forall a \in A \implies \lambda \leq \lambda_1$

INF Si ha che $\mu = \inf A$ **se e solo se**

1. $\mu \leq a \quad \forall a \in A$;
2. $\mu_1 \in X, \mu_1 \leq a \quad \forall a \in A \implies \mu_1 \leq \mu$

Definizione 6:

Siano (X, \leq) un insieme ordinato e $A \subseteq X, A \neq \emptyset$, allora:

1. se A ha massimo, allora si ha $\max A = \sup A$
2. se A ha minimo, allora si ha $\min A = \inf A$

1.4 Numeri reali

Un **gruppo commutativo** e' un insieme X dotato di un'operazione binaria $*$: $X \times X \rightarrow X$ tale che:

1. PROPRIETÀ ASSOCIATIVA: $(x * y) * z = x * (y * z) \quad \forall x, y, z \in X$
2. ELEMENTO NEUTRO: $\exists e \in X \rightarrow e * x = x * e = e$
3. INVERSO: $\forall x \in X \quad \exists y \in X \rightarrow x * y = y * x = e$
4. PROPRIETÀ COMMUTATIVA; $\forall x, y \in X \rightarrow x * y = y * x$

Se le prime 3 proprietà sono valide allora X e' un *gruppo*. Se e' valida solo la prima allora si chiama *semigrupp*

Definizione 7 (Campo dei numeri reali \mathbb{R}):

I 6 assiomi di completezza:

- $A_1) (\mathbb{R}, +) \rightarrow$ gruppo commutativo, neutro = 0
- $A_2) (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \rightarrow$ gruppo commutativo, neutro = 1
- $A_3) x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$, proprietà distributiva

- $A_4) (\mathbb{R}, \leq) \rightarrow \text{totalmente ordinato}$
- $A_5) (\leq) \rightarrow \text{compatibile con } + \wedge \cdot$
- $A_6) (\mathbb{R}, \leq) \rightarrow \text{completo}$

Le proprietà $A_1, \dots, A_3 \implies (\mathbb{R}, +, \cdot) \rightarrow \text{campo}$

Le proprietà $A_1, \dots, A_6 \implies (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq) \rightarrow \text{campo } \mathbf{ordinato} \text{ e } \mathbf{completo}.$

Definizione 8 (Sottoinsiemi induttivi):

Un sottoinsieme $I \subseteq \mathbb{R}$ si dice **induttivo** se:

1. $1 \in I$
2. $x \in I \Rightarrow x + 1 \in I$

\mathcal{F} indica la famiglia degli insiemi induttivi di \mathbb{R} :

$$\mathbb{N} \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x \in I \forall I \in \mathcal{F}\} \quad (8)$$

\mathbb{N} è per definizione l'intersezione di tutti gli insiemi induttivi

$$\mathbb{N} = \bigcap_{I \in \mathcal{F}} I \quad (9)$$

DIMOSTRAZIONE 2 (Il principio di induzione).

Se $M \subseteq \mathbb{N}$ è induttivo $\iff M = \mathbb{N}$

Dato che M è induttivo $\mathbb{N} \subseteq M \iff \mathbb{N} = M$

Questo ragionamento introduce il *principio di induzione*.

Definizione 9 (Il minimo di \mathbb{N}):

$$1 \leq n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (10)$$

Il $\min \mathbb{N} = 1$

Definizione 10 (\mathbb{Z} l'anello dei numeri interi):

$$\mathbb{Z} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\} \quad (11)$$

\mathbb{Z} è chiuso per somma e moltiplicazione

$$n, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow n + m, n \cdot m \in \mathbb{Z} \quad (12)$$

Se $A \subseteq \mathbb{Z}$, $A \neq \emptyset$

- se A è superiormente limitato, ammette massimo $\exists \max A$

- se A è inferiormente limitato ammette minimo $\exists \min A$

Definizione 11 (\mathbb{Q} l'anello dei numeri razionali):

$$\mathbb{Q} \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\} \quad (13)$$

\mathbb{Q} è chiuso per somma e moltiplicazione

$$x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x + y, x \cdot y \in \mathbb{Q} \quad (14)$$

\mathbb{Q} è un campo totalmente ordinato ossia sono validi gli assiomi A_1, \dots, A_5 escluso l' A_6

1.5 Radice n-esima

Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$.

$y \in \mathbb{R}$ è la radice n-esima di x se $y \geq 0, y^n = x$

$$y \stackrel{\text{def.}}{=} x^{\frac{1}{n}}, \sqrt[n]{x} \quad (15)$$

Definizione 12:

Proprietà della radice n-esima: per ogni $x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 0$:

$$P_1 \quad x^n \leq y^n \iff x \leq y$$

$$P_2 \quad x^n = y^n \iff x = y$$

$$P_3 \quad x^n < y \iff \exists \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, : (x + \epsilon)^n < y$$

$$P_4 \quad x^n > y \iff \exists \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, : (x - \epsilon)^n > y$$

1.6 Funzioni esponenziali in \mathbb{Q}

Definizione 13:

Sia $a > 0, \forall x \in \mathbb{Q}$:

$$a^x := \sqrt[q]{a^p} \Rightarrow x = \frac{p}{q}, \quad p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \quad (16)$$

$$\text{Se } x = \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \implies np = mq$$

$$1. \quad a^{x+y} = a^x a^y \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

$$2. \quad a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{Q}$$

$$3. (a^x)^y = a^{xy} \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

se $a > 1$

$$x < y \implies a^x < a^y \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

se $a < 1$

$$x < y \implies a^y < a^x \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

In parole povere se la **base è minore di 1**, con un esponente maggiore (y) avremo un numero inferiore rispetto a quello di un esponente minore (x), viceversa quando avremo la **base maggiore di 1**, con esponente maggiore avremo un numero maggiore rispetto ad uno con base minore.

2 Successioni

2.1 Successioni in \mathbb{R}

Sia $X \neq \emptyset$, una qualsiasi funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ si dice: **successione in X** .

Una notazione si indica $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ o f_1, f_2, \dots, f_n

f_n si chiama termine n-esimo.

k_1, k_2, \dots, k_n è una successione di numeri naturali:

$$k_1 < k_2 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (17)$$

La successione $\{f_{k_n}\}$ è una *sottosuccessione* di $\{f_n\}$.

Definizione 14:

Se a_n tende a $l \in \mathbb{R}$ per $n \rightarrow \infty$, si dice che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \bar{n} : \forall n \in \mathbb{N} (n > \bar{n} \implies |a_n - l| < \epsilon) \quad (18)$$

$\{a_n\}$ converge ad l ed esso è il limite di $\{a_n\}$

ESEMPIO 3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad (19)$$

Ovvero

$$\forall \epsilon > 0 \exists \bar{n} : \forall n \in \mathbb{N} \left(n > \bar{n} \implies \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \epsilon \right) \quad (20)$$

DIMOSTRAZIONE 3 (Il limite se esiste è unico).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a_n = l \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a_n = m \quad \Longleftrightarrow \quad l = m \quad (21)$$

ESEMPIO 4.

Poniamo per assurdo che $l \neq m$ Fissiamo $\epsilon > 0$

$$\underbrace{|a_n - l| < \frac{\epsilon}{2}}_{n > \bar{n}_1} \quad \& \quad \underbrace{|a_n - m| < \frac{\epsilon}{2}}_{n > \bar{n}_2} \quad (22)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{n > \max\{\bar{n}_1, \bar{n}_2\}}$$

\Downarrow

Ricordiamo che $|a_n - m| = |m - a_n|$

$$|\cancel{a_n} - l - \cancel{a_n} + m| |a_n - l| + |m - a_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad (23)$$

\Downarrow

$$|m - l| < \epsilon \quad \Longrightarrow \quad |m - l| = 0 \quad (24)$$

Ma questo è assurdo perchè: $\epsilon > 0, \forall \epsilon \in \mathbb{R}$

$$m = l \quad (25)$$

Definizione 15:

Se $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ converge ad $l \in \mathbb{R}$ **ogni** sua sottosuccessione $\{a_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge ad l

DIMOSTRAZIONE 4 (Limiti).

Se $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge $l \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \{a_{k_n}\}_{k_n \in \mathbb{N}}$ converge $l \in \mathbb{R}$

\Downarrow

Si ha che:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : n > \bar{n} \Longrightarrow |a_n - l| < \epsilon \quad (26)$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : n > \bar{n} \Longrightarrow |a_{k_n} - l| < \epsilon \quad (27)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = l \quad (28)$$

ESEMPIO 5.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \& \quad k = 2, \lim_{k_n \rightarrow +\infty} \frac{1}{k_n} = 0 \quad (29)$$

ESERCIZIO 1.

DIMOSTRAZIONE 5.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = l + m \quad (30)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \quad \& \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = m \quad (31)$$

\Downarrow

$$|a_n - l| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{se} \quad n > \overline{n}_1 \quad (32)$$

$$|b_n - m| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{se} \quad n > \overline{n}_2 \quad (33)$$

$$n > \max\{\overline{n}_1, \overline{n}_2\}$$

$$|a_n + b_n - l - m| \leq |a_n - l| + |b_n - m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad (34)$$

\Downarrow

$$\forall \epsilon > 0, \exists \overline{n} \equiv \max\{\overline{n}_1, \overline{n}_2\} : n > \overline{n} \Rightarrow \underbrace{|(a_n + b_n) - (l + m)|}_0 < \epsilon \quad (35)$$

$$(a_n + b_n) - (l + m) = 0 \quad (36)$$

$$a_n + b_n = l + m \quad (37)$$

DIMOSTRAZIONE 6 (Permanenza del segno).

$$\forall \epsilon > 0, \exists \overline{n} \in \mathbb{N} : n > \overline{n} \Rightarrow \underbrace{|a_n - l|}_{l - \epsilon < a_n < l + \epsilon} < \epsilon \quad (38)$$

$$\epsilon = |l|$$

Da questo otteniamo che

$$\underbrace{l - |l|}_0 < a_n < \underbrace{l + |l|}_{2l} \quad (39)$$

In conclusione avremo che:

se $l > 0 \Rightarrow a_n > 0$

se $l < 0 \Rightarrow a_n < 0$

Definizione 16 (Teorema dei 2 carabinieri):

Se $\underbrace{\{a_n\}, \{b_n\}}_{\text{convergono a } l}, \{c_n\}$

è ovvio che: $a_n \leq c_n \leq b_n \implies c_n \text{ converge a } l$ (40)

DIMOSTRAZIONE 7.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \overline{n_1}, \overline{n_2} \in \mathbb{N} : \quad (41)$$

\Downarrow

$$l - \epsilon < a_n < l + \epsilon \quad \& \quad l - \epsilon < b_n < l + \epsilon \quad (42)$$

se $n > \max\{\overline{n_1}, \overline{n_2}\}$

\Downarrow

$$l - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < l + \epsilon \quad \forall n > \overline{n} \quad (43)$$

$$\underbrace{l - \epsilon < c_n < l + \epsilon}_{|c_n - l| < \epsilon} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = l \quad (44)$$

Definizione 17:

Sia una successione $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ è detta:

- *superiormente limitata*, se $\exists M \in \mathbb{R} : a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- *inferiormente limitata*, se $\exists M \in \mathbb{R} : a_n \geq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- *limitata*, se $\exists M \in \mathbb{R} : |a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Definizione 18 (Ogni successione convergente è limitata):

Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$

Allora (con $\epsilon = 1$)

$$\exists \bar{n} : \forall n \in \mathbb{N} (n > \bar{n} \Rightarrow |a_n - l| < 1) \quad (45)$$

3 Funzioni

3.1 Introduzione

Definizione 19:

Una funzione f è una relazione tra gli elementi di due insiemi A e B che ad ogni elemento di A associa **uno ed un solo** elemento di B .

Una funzione è definita assegnando:

- un insieme A detto DOMINIO
- un insieme B detto CODOMINIO
- una relazione $f : A \rightarrow B$ che associa ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B

3.2 Tipi di funzioni

Una funzione $f(x)$ può essere di 3 tipi:

1. **suriettiva**
2. **iniettiva**
3. **biiettiva** se è sia **iniettiva** e **suriettiva**

Definizione 20:

Una funzione si dice **iniettiva** quando ad elementi **distinti** del DOMINIO corrispondono elementi **distinti** del CODOMINIO

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \quad (46)$$

Definizione 21:

Una funzione si dice **suriettiva** quando **ogni** elemento del codominio è immagine di **almeno** un elemento del dominio.

$$b \in B \rightarrow \exists a \in A : f(a) = b \quad (47)$$

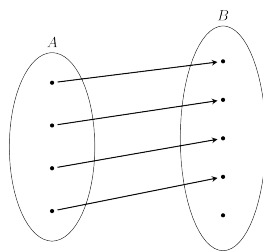


Figure 1: grafico iniettiva

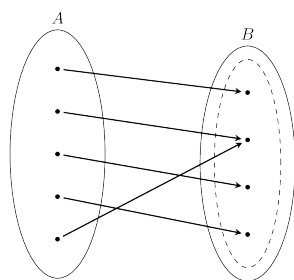


Figure 2: grafico suriettiva

ESERCIZIO 2.

Dimostra di che tipo è questa funzione:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 \quad (48)$$

DIMOSTRAZIONE 8.

Non può essere iniettiva perchè per ogni numero reale positivo ne esiste uno uguale negativo, il cui quadrato sarà il **medesimo**.

$$\text{se } x_1 = -x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = f(x_2) \quad (49)$$

si può provare inoltre che non è una funzione suriettiva in quanto **nessun** numero negativo fa parte del codominio ed esso è formato da \mathbb{R} dunque

$$-4 \neq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (50)$$

ESERCIZIO 3.

Dimostra di che tipo è questa funzione:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad f(x) = x^2 \quad (51)$$

DIMOSTRAZIONE 9.

se cambiamo il dominio e il codominio nell'insieme dei numeri naturali e consideriamo la stessa legge possiamo dedurre che:

$$\forall n, m : n \neq m \Rightarrow n^2 \neq m^2 \quad (52)$$

Per **qualsiasi** coppia di numeri naturali diversi fra loro non è possibile pensare che il loro quadrato sia uguale, per tanto la funzione è iniettiva. Inoltre **qualsiasi** numero dispari non avrà una propria immagine, in quanto l'insieme racchiude **solo** numeri interi positivi. Ovvero:

$$\exists \frac{x}{2} \in \mathbb{N} : \{y = x + 1\} \Rightarrow y \neq n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (53)$$

3.3 Funzioni invertibili

Definizione 22:

Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice invertibile se esiste una funzione $g : B \rightarrow A$ chiamata funzione inversa tale che:

- $\forall a \in A, \quad g(f(a)) = a$
- $\forall b \in B, \quad f(g(b)) = b$

Essa si può considerare invertibile se è **biiettiva**.

ESERCIZIO 4.

Dimostra se la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 2x + 1$ è inversibile.

DIMOSTRAZIONE 10.

Ponendo l'equazione $y = 2x + 1$ deduciamo che

$$f^{(-1)}(x) = \frac{x - 1}{2} \quad (54)$$

quindi:

$$f^{(-1)}(f(x)) = f^{(-1)}(2x + 1) = \frac{(2x + 1) - 1}{2} = x; \quad (55)$$

e allo stesso tempo

$$f(f^{(-1)}(y)) = f\left(\frac{y - 1}{2}\right) + 1 = y \quad (56)$$

3.4 Piano Cartesiano

Fissando un'origine e un'unità di misura ad **ogni** punto di una retta orientata corrisponde uno ed un solo numero reale. Si stabilisce così una **corrispondenza biunivoca** tra i punti della retta orientata e i numeri reali.

Data la funzione

$$f : A \rightarrow B \quad A, B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \quad (57)$$

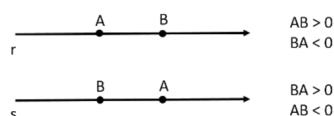


Figure 3: la retta orientata

Definizione 23:

Definiamo una **coppia** di rette orientate disposte **perpendicolarmente** fra loro **assi coordinati**.

- La retta da destra verso sinistra viene chiamata **asse delle ascisse**
- la retta dal basso verso l'alto viene chiamata **asse delle ordinate**

Il punto del piano in cui si incontrano viene chiamato **origine degli assi** e viene indicato con O

Un qualsiasi punto del piano P viene identificato con una ascissa x_p ed una ordinata y_p , quindi $P(x_p, y_p)$.

Il piano viene diviso in IV quadranti numerati in senso antiorario.

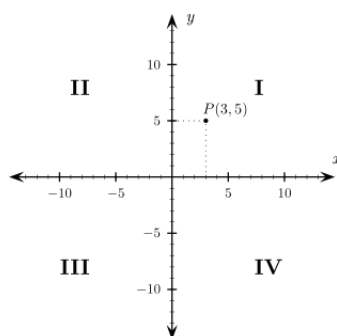


Figure 4: il piano cartesiano

3.5 Grafici di funzioni

Ora possiamo rappresentare graficamente coppie ordinate di numeri reali sul piano, quindi possiamo rappresentare il **grafico** di una funzione

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R} \quad (58)$$

e tutte le coppie $(x, f(x))$ tali che $x \in A$:

$$G(f) = \{(x, f(x))\} : x \in A \quad (59)$$

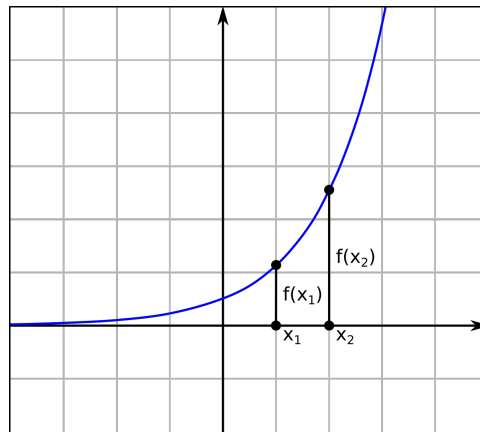


Figure 5: il grafico di una funzione crescente

3.6 Funzioni Pari e Dispari

Definizione 24:

Una funzione $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **pari** se $f(x) = f(-x)$

Si deduce quindi che il grafico di una funzione così definita è simmetrico rispetto all'**asse delle ordinate**

Definizione 25:

Una funzione $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **dispari** se $f(-x) = -f(x)$

Si deduce quindi che il grafico di una funzione così definita viene **specchiata** in due quadranti uno **opposto** all'altro

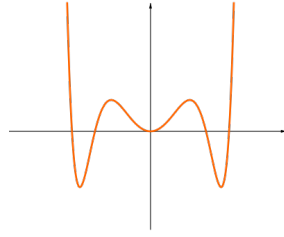


Figure 6: Una funzione pari

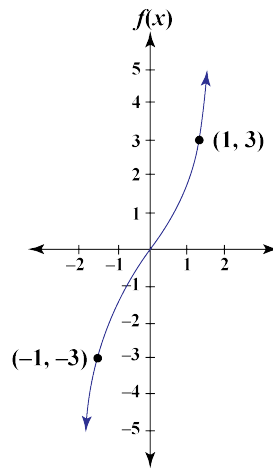


Figure 7: Una funzione dispari

3.7 Funzioni crescenti e decrescenti

Definizione 26:

Una funzione $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **crescente** se

$$f(x_2) \geq f(x_1) \quad \forall x_2 > x_1 \in [a, b] \quad (60)$$

Si dice **strettamente crescente** se

$$f(x_2) > f(x_1) \quad \forall x_2 > x_1 \in [a, b] \quad (61)$$

Definizione 27:

Una funzione $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **decrescente** se

$$f(x_2) \leq f(x_1) \quad \forall x_2 > x_1 \in [a, b] \quad (62)$$

Si dice **strettamente decrescente** se

$$f(x_2) < f(x_1) \quad \forall x_2 > x_1 \in [a, b] \quad (63)$$

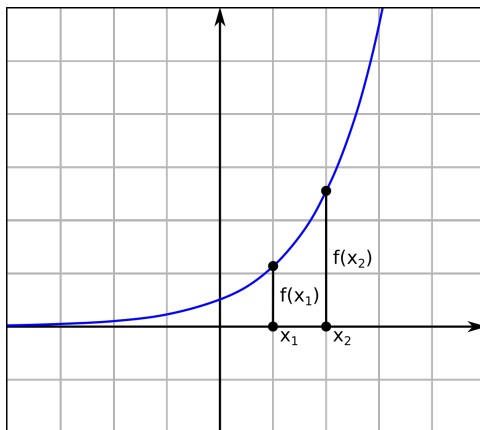


Figure 8: il grafico di una funzione crescente

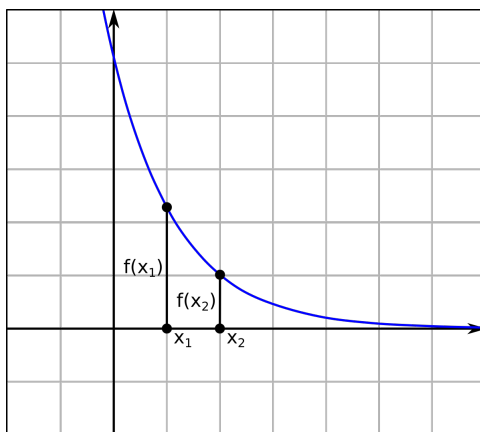


Figure 9: il grafico di una funzione decrescente

3.8 Funzioni inverse

Se i punti di una funzione $f : A \rightarrow B$ $A, B \subseteq \mathbb{R}$ si ottengono dalle coppie $(a, b) \in A \times B$

Definizione 28:

*Il grafico di una funzione inversa si ottiene invertendo le coordinate dei punti del grafico. Ovvero i punti del grafico della **funzione inversa** si ottengono dalle coppie $(b, a) \in B \times A$ // Per via grafica esso può essere ottenuto **riflettendo** il grafico rispetto alla **bisettrice del primo e terzo quadrante***

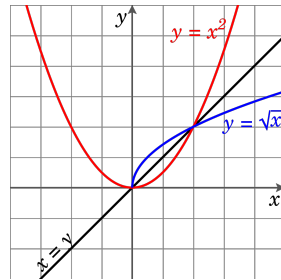


Figure 10: Il grafico di una funzione inversa

3.9 Modellizzazione matematica

Definizione 29:

Per **modellizzazione matematica** si intende un porcesso che ha per scopo quello di **interpretare** fenomeni legati al mondo reale partendo da dati sperimentali e **traducendoli** in **problemi matematici**

Per passare da un fenomeno reale alla sua descrizione mediante modello matematico è necessario un processo di **astrazione** e **traduzione** del fenomeno in termini matematici e rigorosi.

Quando si vuole modellizzare un certo fenomeno, si vuole capire **come** le variabili coinvolte siano in relazione tra loro, ovvero stabilire delle **leggi matematiche** che descrivono queste relazioni.

La procedura di modellizzazione è:

1. si identifica l'incognita del problema
2. si analizza il fenomeno fisico e si raccolgono informazioni
3. si individuano le relazioni tra le informazioni raccolte, che poi vengono tradotte in equazioni
4. si risolvono le equazioni ottenute e se ne verifica la validità del modello

In un modello matematico che coinvolge due grandezze x ed y ci interessa capire come la **variabile dipendente** (y) varia al variare di quella **indipendente**

ESEMPIO 6.

Supponiamo di aver formulato la legge $y = f(x)$

Se il modello è giusto potremmo ricavare il valore di y a partire da qualsiasi valore di x senza effettuare ulteriori esperimenti e misurazioni.

Rappresentandolo graficamente:

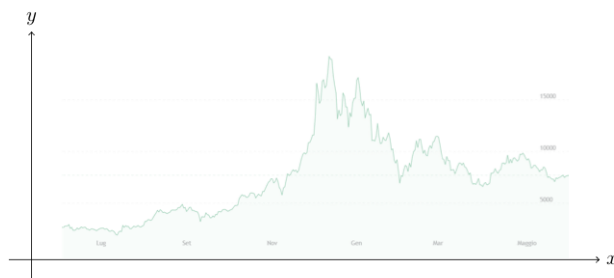


Figure 11: Il grafico dell'andamento dei bitcoin

Questo è il grafico di $y = f(x)$ dove y ="valore del bitcoin in dollari" e x ="tempo".

3.10 Proporzioni

Definizione 30:

Due grandezze A e B si dicono **direttamente proporzionali** se esiste un numero c detto **costante di proporzionalità** tale che:

$$A = cB \quad (64)$$

Questo significa che le due grandezze sono legate da una certa legge, per la quale quando una raddoppia, triplica, dimezza, di conseguenza la seconda raddoppia, triplica, dimezza etc.

ESEMPIO 7.

A = "quantità di chilometri che l'auto può percorrere"

B = "litri di carburante nel serbatoio"

Definizione 31:

Due grandezze A e B si dicono **inversamente proporzionali** se esiste un numero c detto **costante di proporzionalità** tale che:

$$AB = c \quad (65)$$

Questo significa che le due grandezze sono tali che all'aumentare di una, l'altra diminuisce proporzionalmente.

ESEMPIO 8.

A = "numero di partecipanti all'acquisto di un immobile"

B = "quota per partecipante"

c = costo dell'immobile

4 Combinatoria e probabilità

4.1 Introduzione

Definizione 32:

L'**analisi combinatoria** è la branca della matematica applicata per risolvere problemi nel quale è necessario saper "contare" efficacemente esiti e probabilità di determinate situazioni.

Essa è infatti la disciplina che ci permette di **contare senza contare**

4.2 Combinatoria

Definizione 33 (Principio di moltiplicazione):

Un insieme X soddisfa le ipotesi del principio di moltiplicazione se:

- è possibile ottenere ciascuno dei suoi elementi come risultato di una procedura composta da n fasi successive.
- se ad una fase intermedia si sono ottenuti due esiti distinti allora la procedura conduce ad elementi distinti di X

Nella prima fase avremo m_1 possibili esiti nella seconda fase avremo m_2 esiti sino alla n -esima fase avremo m_n esiti

$$|X| = m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k \quad (66)$$

ESERCIZIO 5.

Calcoliamo il numero di coppie ordinate (a, b) contenenti un numero primo ed uno non primo compresi tra 1 ed 8

DIMOSTRAZIONE 11.

I numeri primi tra 1 e 8 sono $\{2, 3, 5, 7\}$ mentre i numeri non primi tra 1 e 8 sono $\{1, 4, 6, 8\}$

I. Scegliamo un qualsiasi elemento di I_8 : abbiamo 8 possibilità.

II. Se il primo elemento era primo il secondo non lo sarà, e viceversa se il numero non era primo. In ogni caso avremo 4 distinte possibilità

Il numero di coppie è: $8 \times 4 = 32$

ESERCIZIO 6.

Consideriamo un'estrazione in successione di 3 numeri della tombola **tenendo conto dell'ordine**. Quanti sono i possibili esiti?

DIMOSTRAZIONE 12.

I numeri della tombola sono 90. Gli scenari possibili sono 2:

Nel primo caso **senza rimpiazzo** se ogni numero può essere scelto una volta sola, mentre sarà **con rimpiazzo** se un numero può essere scelto più di una volta.

Nel primo caso $(a_1, a_2, a_3) : \rightarrow (a_1 \neq a_2 \neq a_3) :$

I FASE: $a_1 = 90$

II FASE: $a_2 = 90 - 1 = 89$

III FASE: $a_3 = 90 - 2 = 88$

Quindi il numero di possibili esiti è:

$$90 \times 89 \times 88 = 704880 \quad (67)$$

Nel secondo caso $(a_1, a_2, a_3) : \rightarrow (a_1 = a_2 = a_3) :$

I FASE: $a_1 = 90$

II FASE: $a_2 = 90$

III FASE: $a_3 = 90$

Quindi il numero di possibili esiti è:

$$90 \times 90 \times 90 = 90^3 = 729000 \quad (68)$$

Definizione 34:

*Definiamo una regola general per k -sequenze di I_n . Siano $k, n \in \mathbb{N}$ definiamo k -sequenza di I_n una k -upla **ordinata** (a_1, \dots, a_k) di elementi **non necessariamente distinti** di I_n Ovvero:*

$$(a_1, \dots, a_k) \in \underbrace{I_n \times \dots \times I_n}_{k \text{ volte}} \quad (69)$$

Nella definizione di sequenze l'ordine degli elementi della k -upla è importante: le 3-sequenze $(2, 1, 3)$ e $(3, 1, 2)$ sono diverse anche se composte dagli stessi numeri. Vengono comunemente dette **disposizioni** di **n** oggetti a k a k

ESEMPIO 9.

Sia $I_4 = 1, 2, 3, 4$. Allora

$$(1, 2, 3, 3, 4), \quad (1, 1, 1, 1, 1), \quad (2, 2, 1, 3, 4) \quad (70)$$

sono 5-sequenze di I_4 . Invece

$$(1, 2, 3), \quad (1, 1, 1), \quad (2, 3, 4) \quad (71)$$

sono 3-sequenze di I_4

4.3 Fattoriale

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \quad (72)$$

$$n! = \begin{cases} n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 & \text{se } n \geq 1 \\ 1 & \text{se } n = 0 \end{cases} \quad (73)$$

Definizione 35:

Il **fattoriale** di un numero equivale al prodotto di quel numero per tutti i numeri che lo precedono. I valori dei fattoriale crescono esponenzialmente

$$0! = 1 \quad 5! = 120 \quad 6! = 720 \quad 7! = 5040 \quad 10! = 3628800 \quad (74)$$

4.4 Numero di Insiemi

Definizione 36:

Il **numero di sottoinsiemi** di k elementi di I_n si distinguono esclusivamente dagli elementi di cui fanno parte: **l'ordine non conta**.

Spesso un sottoinsieme di k elementi di un insieme di n elementi viene chiamato **combinazione** (semplice, senza ripetizioni) di n elementi a k a k

Definizione 37:

Siano $k, n \in \mathbb{N}$ il **binomiale** di n su k è:

$$\begin{cases} n \\ k \end{cases} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{se } k \leq n, \\ 0, & \text{se } k > n. \end{cases} \quad (75)$$

Il numero di sottoinsiemi di k elementi di I_n è

$$\begin{cases} n \\ k \end{cases}. \quad (76)$$

ESEMPIO 10.

Calcola i sottoinsiemi con 3 elementi di I_6

DIMOSTRAZIONE 13.

La soluzione è data da una semplice applicazione della formula prima vista:

$$\left\{ \begin{matrix} 6 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \frac{6!}{3!3!} = 20 \quad (77)$$

ESEMPIO 11.

Calcola il numero di partite giocate nella fase a gironi dei Mondiali di calcio. Ci sono 32 squadre divise in 8 gironi da 4 squadre ed in ogni girone una squadra deve giocare contro le altre una volta sola.

DIMOSTRAZIONE 14.

Il numero di partite totale è 8 volte le partite giocate in un singolo girone. L'insieme delle 4 squadre in un girone possiamo identificarlo con I_4 , e una partita tra 2 squadre con un sottoinsieme di 2 elementi di I_4 . Il numero di partite giocate in un girone è **il numero di sottoinsiemi** di 2 elementi di I_4 ovvero:

$$\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 2} = \frac{24}{4} = 6 \quad (78)$$

Infine il risultato equivale a: $6 \times 8 = 48$