1 Successioni

1.1 Successioni in $\mathbb{R}$

Sia $X \neq \varnothing$, una qualsiasi funzione $f : \mathbb{N} \to X$ si dice: **successione in** X.
Una notazione si indica $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o $f_1, f_2, \dots, f_n$
f_n si chiama termine n-esimo.
$k_1, k_2, \dots, k_n$ è una successione di numeri naturali:

$$k_1 < k_2 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

La successione $\{f_{k_n}\}$ è una *sottosuccessione* di $\{f_n\}$.

Definizione 1:
Se a_n tende a $l \in \mathbb{R}$ per $n \to \infty$, si dice che $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \overline{n} : \forall n \in \mathbb{N}(n > \overline{n} \ \Rightarrow \ |a_n - l| < \epsilon) \tag{2}$$

$\{a_n\}$ *converge ad* l *ed esso è il limite di* $\{a_n\}$

Esempio 1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{3}$$

Ovvero

$$\forall \epsilon > 0 \exists \overline{n} : \forall n \in \mathbb{N} \left(n > \overline{n} \ \Rightarrow \ |\frac{1}{n} - 0| < \epsilon \right) \tag{4}$$

Dimostrazione 1 (Il limite se esiste è unico).

$$\lim_{x\to\infty} a_n = l \quad \wedge \quad \lim_{x\to\infty} a_n = m \quad \Longleftrightarrow \quad l \ = \ m \tag{5}$$

Esempio 2.
Poniamo per assurdo che $l \neq m$ Fissiamo $\epsilon > 0$

$$\underbrace{\underbrace{|a_n - l| < \frac{\epsilon}{2}}_{n>\overline{n_1}} \quad \& \quad \underbrace{|a_n - m| < \frac{\epsilon}{2}}_{n>\overline{n_2}}}_{n \ > \ \max\{\overline{n_1},\overline{n_2}\}} \tag{6}$$

$$\Downarrow$$

Ricordiamo che $|a_n - m| = |m - a_n|$

$$|\cancel{-a_n} - l - \cancel{-a_n} + m||a_n - l| \; + \; |m - a_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \tag{7}$$

$$\Downarrow$$

$$|m - l| < \epsilon \quad \Longrightarrow \quad |m - l| = 0 \tag{8}$$

Ma questo è assurdo perchè: $\epsilon > 0, \forall \epsilon \in \mathbb{R}$

$$m = l \tag{9}$$

Definizione 2:
Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ converge ad $l \in \mathbb{R}$ ***ogni*** *sua sottosuccessione $\{a_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad l*

Dimostrazione 2 (Limiti).
Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge $l \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \{a_{k_n}\}_{k_{n\in\mathbb{N}}}$ converge $l \in \mathbb{R}$

$$\Downarrow$$

Si ha che:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \; : \; n > \overline{n} \implies |a_n - l| < \epsilon \tag{10}$$

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \; : \; n > \overline{n} \implies |a_{k_n} - l| < \epsilon \tag{11}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} \; = \; l \tag{12}$$

Esempio 3.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \& \qquad k = 2, \lim_{k_n\to+\infty} \frac{1}{k_n} = 0 \tag{13}$$

Esercizio 1.

Dimostrazione 3.

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = l + m \tag{14}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \quad \& \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = m \tag{15}$$

$$\Downarrow$$

$$|a_n - l| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{se} \quad n > \overline{n_1} \tag{16}$$

$$|b_n - m| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{se} \quad n > \overline{n_2} \tag{17}$$

$n > \max\{\overline{n_1}, \overline{n_2}\}$

$$|a_n + b_n - l - m| \leq |a_n - l| + |b_n - m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \tag{18}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \overline{n} \equiv \max\{\overline{n_1}, \overline{n_2}\} \ : \ n > \overline{n} \ \Rightarrow \ \underbrace{|(a_n + b_n) - (l + m)|}_{0} < \epsilon \tag{19}$$

$$(a_n + b_n) - (l + m) = 0 \tag{20}$$

$$a_n + b_n = l + m \tag{21}$$

DIMOSTRAZIONE 4 (Permanenza del segno).

$$\forall \epsilon > 0, \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ n > \overline{n} \ \Rightarrow \ \underbrace{|a_n - l < \epsilon|}_{l-\epsilon<a_n<l+\epsilon \quad \forall n>\overline{n}} \tag{22}$$

$$\epsilon = |l|$$

Da questo otteniamo che

$$\underbrace{l - |l|}_{0} < a_n < \underbrace{l + |l|}_{2l} \tag{23}$$

In conclusione avremo che:
se $l > 0 \Rightarrow a_n > 0$
se $l < 0 \Rightarrow a_n < 0$

Definizione 3 (Teorema dei 2 carabinieri)**:**
Se $\underbrace{\{a_n\}\ , \{b_n\}}_{\textit{convergono a } l} \ , \{c_n\}$

$$\textit{è ovvio che: } a_n \leq c_n \leq b_n \implies c_n \textit{converge a } l \tag{24}$$

Dimostrazione 5.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \overline{n_1}, \overline{n_2} \in \mathbb{N} : \tag{25}$$

$$\Downarrow$$

$$l - \epsilon < a_n < l + \epsilon \qquad \& \qquad l - \epsilon < b_n < l + \epsilon \tag{26}$$

se $n > \max\{\overline{n_1}, \overline{n_2}\}$

$$\Downarrow$$

$$l - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < l + \epsilon \qquad \forall n > \overline{n} \tag{27}$$

$$\underbrace{l - \epsilon < c_n < l + \epsilon}_{|c_n - l| < \epsilon} \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} c_n = l \tag{28}$$

Definizione 4:
Sia una successione $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ *è detta:*

- *superiormente limitata, se* $\exists M \in \mathbb{R} \ : \ a_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$
- *inferiormente limitata, se* $\exists M \in \mathbb{R} \ : \ a_n \geq M \ \forall n \in \mathbb{N}$
- *limitata, se* $\exists M \in \mathbb{R} \ : \ |a_n| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$

Definizione 5 (Ogni successione convergente è limitata)**:**
Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}, \ a_n \underset{n \to \infty}{\to} l$
Allora (con $\epsilon = 1$*)*

$$\exists \overline{n} : \forall n \in \mathbb{N}(n > \overline{n} \ \Rightarrow \ |a_n - l| < 1) \tag{29}$$