

# 1 Successioni

## 1.1 Successioni in $\mathbb{R}$

Sia  $X \neq \emptyset$ , una qualsiasi funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$  si dice: **successione in  $X$** .

Una notazione si indica  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  o  $f_1, f_2, \dots, f_n$

$f_n$  si chiama termine  $n$ -esimo.

$k_1, k_2, \dots, k_n$  è una successione di numeri naturali:

$$k_1 < k_2 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

La successione  $\{f_{k_n}\}$  è una *sottosuccessione* di  $\{f_n\}$ .

### Definizione 1:

Se  $a_n$  tende a  $l \in \mathbb{R}$  per  $n \rightarrow \infty$ , si dice che  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \bar{n} : \forall n \in \mathbb{N} (n > \bar{n} \Rightarrow |a_n - l| < \epsilon) \quad (2)$$

$\{a_n\}$  converge ad  $l$  ed esso è il limite di  $\{a_n\}$

ESEMPIO 1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad (3)$$

Ovvero

$$\forall \epsilon > 0 \exists \bar{n} : \forall n \in \mathbb{N} \left( n > \bar{n} \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \epsilon \right) \quad (4)$$

DIMOSTRAZIONE 1 (Il limite se esiste è unico).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a_n = l \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a_n = m \quad \Longleftrightarrow \quad l = m \quad (5)$$

ESEMPIO 2.

Poniamo per assurdo che  $l \neq m$  Fissiamo  $\epsilon > 0$

$$\underbrace{|a_n - l| < \frac{\epsilon}{2}}_{n > \bar{n}_1} \quad \& \quad \underbrace{|a_n - m| < \frac{\epsilon}{2}}_{n > \bar{n}_2} \quad (6)$$
$$\underbrace{\hspace{10em}}_{n > \max\{\bar{n}_1, \bar{n}_2\}}$$

$\Downarrow$

Ricordiamo che  $|a_n - m| = |m - a_n|$

$$|\cancel{a_n} - l - \cancel{a_n} + m| |a_n - l| + |m - a_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad (7)$$

$\Downarrow$

$$|m - l| < \epsilon \implies |m - l| = 0 \quad (8)$$

Ma questo è assurdo perchè:  $\epsilon > 0, \forall \epsilon \in \mathbb{R}$

$$m = l \quad (9)$$

### Definizione 2:

Se  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$  converge ad  $l \in \mathbb{R}$  **ogni** sua sottosuccessione  $\{a_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge ad  $l$

DIMOSTRAZIONE 2 (Limiti).

Se  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge  $l \in \mathbb{R} \implies \{a_{k_n}\}_{k_n \in \mathbb{N}}$  converge  $l \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$

Si ha che:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : n > \bar{n} \implies |a_n - l| < \epsilon \quad (10)$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : n > \bar{n} \implies |a_{k_n} - l| < \epsilon \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = l \quad (12)$$

ESEMPIO 3.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \& \quad k = 2, \lim_{k_n \rightarrow +\infty} \frac{1}{k_n} = 0 \quad (13)$$

ESERCIZIO 1.

DIMOSTRAZIONE 3.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = l + m \quad (14)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \quad \& \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = m \quad (15)$$

$\Downarrow$

$$|a_n - l| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{se} \quad n > \overline{n}_1 \quad (16)$$

$$|b_n - m| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{se} \quad n > \overline{n}_2 \quad (17)$$

$$n > \max\{\overline{n}_1, \overline{n}_2\}$$

$$|a_n + b_n - l - m| \leq |a_n - l| + |b_n - m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad (18)$$

$\Downarrow$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \overline{n} \equiv \max\{\overline{n}_1, \overline{n}_2\} : n > \overline{n} \Rightarrow \underbrace{|(a_n + b_n) - (l + m)|}_0 < \epsilon \quad (19)$$

$$(a_n + b_n) - (l + m) = 0 \quad (20)$$

$$a_n + b_n = l + m \quad (21)$$

DIMOSTRAZIONE 4 (Permanenza del segno).

$$\forall \epsilon > 0, \exists \overline{n} \in \mathbb{N} : n > \overline{n} \Rightarrow \underbrace{|a_n - l|}_{l - \epsilon < a_n < l + \epsilon} < \epsilon \quad (22)$$

$$\epsilon = |l|$$

Da questo otteniamo che

$$\underbrace{l - |l|}_0 < a_n < \underbrace{l + |l|}_{2l} \quad (23)$$

In conclusione avremo che:

$$\text{se } l > 0 \Rightarrow a_n > 0$$

$$\text{se } l < 0 \Rightarrow a_n < 0$$

**Definizione 3** (Teorema dei 2 carabinieri):

Se  $\underbrace{\{a_n\}, \{b_n\}}_{\text{convergono a } l}, \{c_n\}$

$$\text{è ovvio che: } a_n \leq c_n \leq b_n \implies c_n \text{ converge a } l \quad (24)$$

DIMOSTRAZIONE 5.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \overline{n_1}, \overline{n_2} \in \mathbb{N} : \quad (25)$$

$\Downarrow$

$$l - \epsilon < a_n < l + \epsilon \quad \& \quad l - \epsilon < b_n < l + \epsilon \quad (26)$$

se  $n > \max\{\overline{n_1}, \overline{n_2}\}$

$\Downarrow$

$$l - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < l + \epsilon \quad \forall n > \overline{n} \quad (27)$$

$$\underbrace{l - \epsilon < c_n < l + \epsilon}_{|c_n - l| < \epsilon} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = l \quad (28)$$

**Definizione 4:**

Sia una successione  $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$  è detta:

- *superiormente limitata*, se  $\exists M \in \mathbb{R} : a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- *inferiormente limitata*, se  $\exists M \in \mathbb{R} : a_n \geq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- *limitata*, se  $\exists M \in \mathbb{R} : |a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**Definizione 5** (Ogni successione convergente è limitata):

Sia  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ ,  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$

Allora (con  $\epsilon = 1$ )

$$\exists \overline{n} : \forall n \in \mathbb{N} (n > \overline{n} \implies |a_n - l| < 1) \quad (29)$$

Segue quindi che  $|a_n| \leq |a_n - l| + |l| < 1 + |l|$ ,  $n > \overline{n}$

$$|a_n| \leq 1 + |l| \quad (30)$$

**Definizione 6** (Retta reale ampliata):

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\} \quad (31)$$

**Definizione 7:**

Sia  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \\ \Downarrow \\ \forall k \in \mathbb{R} \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} (n > \bar{n} \implies a_n > k) \end{aligned} \quad (32)$$

La scrittura è analoga per  $-\infty$  invertendo il segno:  $(a_n < k)$

Potremo dire che  $a_n$  diverge positivamente o negativamente

**1.2 Forme indeterminate**

Se  $\{a_n\}, \{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$  e  $\{a_n\} \rightarrow +\infty, \{b_n\} \rightarrow -\infty$  allora:

$$a_n + b_n \rightarrow +\infty - \infty = ? \quad (33)$$

$+\infty$  e  $-\infty$  non sono veri e propri numeri, piuttosto sono dei **simboli**, quindi il risultato sarà detto: FORMA INDETERMINATA  $+\infty - \infty$

Altri tipi di forme indeterminate sono:

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0 \quad (34)$$

**1.3 Teoremi generali di esistenza**

Una successione  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$  è detta monotona crescente se  $a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

Si dice invece monotona decrescente se  $a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Sono rispettivamente **strettamente** monotone crescenti o decrescenti se le disuguaglianze sono **strette**

Le scritture  $a_n \nearrow$  e  $a_n \searrow$  indicano monotonia crescente e decrescente

**Definizione 8:**

Ogni successione monotona ammette limite:

Se  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ :

1.  $a_n \nearrow \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$
2.  $a_n \searrow \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$

DIMOSTRAZIONE 6.

Se  $\{a_n\}$  è superiormente limitata per l'assioma di completezza:

$$\exists \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = \lambda \quad (35)$$

Per la proprietà del sup si ha che  $a_n \leq \lambda, \forall n \in \mathbb{N}$  dunque:

$$a_n < \lambda + \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \epsilon > 0 \quad (36)$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \lambda < a_{\bar{n}} + \epsilon \quad (37)$$

La definizione di limite è:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lambda \quad (38)$$

ESERCIZIO 2 (Il numero di nepero  $e$ ).

$$e \equiv \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (39)$$

Si nota che  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  e  $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  sono successioni **convergenti** che hanno lo stesso limite  $e$ , inoltre sono **strettamente monotone**

$$a_n < a_{n+1} \quad \text{e} \quad b_n > b_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (40)$$

Inoltre

$$a_n < b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (41)$$

allora:

$$a_n < a_p < b_p < b_m \quad \forall n, m, p; p = \max\{n, m\} \quad (42)$$

Entrambe le successioni convergono:  $a_n$  è monotona crescente e superiormente limitata e  $b_n$  è monotona decrescente e inferiormente limitata.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \quad (43)$$

Questo implica che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = e \quad (44)$$