1 Insiemi

1.1 Introduzione

Definizione 1:
Un insieme è una "collezione" di oggetti.

Sia A un INSIEME, la scrittura $x \in A$ significa che $x \quad appartiene \quad ad \quad A$.
Analogamento, scrivendo $x \notin A$ si intende che $x \quad non \quad appartiene \quad ad \quad A$.
Gli insiemi **finiti** si possono denotare all'interno di parentesi graffe "$\{,\}$"
Un qualsiasi insieme può definirsi mediante una **proprietà astratta**

ESEMPIO 1.

$$A \;=\; \{\; x \in \mathbb{N} \mid x \; pari \;\} \tag{1}$$

Questo insieme raccoglie **tutti i numeri naturali pari** e si può meglio riscrivere così:

$$A \;=\; \{\; x \;\in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} \;:\; x \;=\; 2y \;\} \tag{2}$$

1.2 Insiemi ed operazioni

Sia X un insieme e siano $A, B \;\subseteq\; X$

- **UNIONE** $A \cup B$, L'unione di A e B come l'insieme

$$A \cup B \;=\; \{x \in X \;:\; x \in A \; o \; x \in B\;\} \tag{3}$$

- INTERSEZIONE $A \cap B$, L'intersezione di A e B come l'insieme

$$A \cap B \;=\; \{x \in X \;:\; x \in A \; e \; x \in B\;\} \tag{4}$$

- DIFFERENZA $A \setminus B$, che equivale a

$$A \setminus B \;=\; \{x \in X \;:\; x \in A \; e \; x \notin B\;\} \tag{5}$$

- COMPLEMENTARE L'insieme complementare di A in X è:

$$A^C \;=\; X \setminus A \;=\; \{x \in X \;:\; x \notin A\;\} \tag{6}$$

ESEMPIO 2.
Il complementare dell'unione è l'intersezione dei complementari, mentre il complementare dell'intersezione è l'unione dei complementari.

- $X \setminus (A \cup B) \ = \ (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$
- $X \setminus (A \cap B) \ = \ (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

DIMOSTRAZIONE 1.
Si dice relazione da A a B ogni sottoinsieme R di $A \times B$ Se $(a, b) \ \in \ R$. a è in relazione R con b, si scrive aRb.

$$R \ = \{(a, b) \in \mathbb{N} \ \times \mathbb{N} : \exists p \in \mathbb{N} \mid a \ = p \cdot b \ \} \tag{7}$$

1.3 Relazioni d'ordine

Sia $A \ \neq \ \varnothing$ un insieme non vuoto e sia $R \ \subseteq \ A \ \times \ A$ una relazione di A con A. R è:

1. riflessiva se $xRx \quad \forall x \in A$,
2. simmetrica se $xRy \ \rightarrow \ yRx$,
3. transitiva se $xRy \ \wedge \ yRz \ \rightarrow \ xRz$,
4. antisimmetrica se $xRy \ \wedge \ yRz \ \rightarrow \ x \ = \ y$.

Una **relazione d'equivalenza** è tale se è RIFLESSIVA, SIMMETRICA E TRANSITIVA.

Definizione 2:
Una relazione d'ordine su un insieme $X \ \neq \ \varnothing$ *è detta di ordine totale se* $\forall \ x, y \ \in \ X$ *si ha* $x \ \leq \ y \ \vee \ y \ \leq \ x$. *Se su* X *c'è una relazione d'ordine totale,* X *è totalmente ordinato.*

Definizione 3:
Sia $(X, \leq)$*, insieme non vuoto e ordinato e sia* $A \subseteq X, \ A \neq \ \varnothing$

- $x \in X$ *è un* ***maggiorante*** *di* A *se* $a \leq x \ \forall a \in A$
- $y \in X$ *è un* ***minorante*** *di* A *se* $y \leq x \ \forall a \in A$
- A *ha* ***massimo*** *se* $\exists \lambda \in A \mid a \leq \lambda \ \forall a \in A \quad \Longrightarrow \quad \lambda \ = \ max \ A$
- A *ha* ***minimo*** *se* $\exists \mu \in A \mid \mu \leq a \ \forall a \in A \quad \Longrightarrow \quad \mu \ = \ min \ A$

Definizione 4:
Siano $(X, \leq)$ *un insieme ordinato e* $A \ \subseteq \ X, A \ \neq \ \varnothing$. A *ha estremo superiore se l'insieme dei maggioranti di* A *è non vuoto e ha minimo.* $supA$ *è il più piccolo dei maggioranti. Analogamente l'estremo inferiore è presente se l'insieme dei minoranti di* A *è non vuoto ed esso ne è il più piccolo:* $inf A$.

Definizione 5:
Proprietà di sup ***e*** inf***:***
Siano $(X, \leq)$ *un insieme ordinato e* $A \subseteq X, A \neq \varnothing$.
SUP *Si ha che* $\lambda = sup\ A$ ***se e solo se***

1. $a \leq \lambda \quad \forall a \in A$;

2. $\lambda_1 \in X,\ a \leq \lambda_1 \quad \forall a \in A \implies \lambda \leq \lambda_1$

INF *Si ha che* $\mu = inf\ A$ ***se e solo se***

1. $\mu \leq a \quad \forall a \in A$;

2. $\mu_1 \in X,\ \mu_1 \leq a \quad \forall a \in A \implies \mu_1 \leq \mu$

Definizione 6:
Siano $(X, \leq)$ *un insieme ordinato e* $A \subseteq X, A \neq \varnothing$*, allora:*

1. *se* A *ha massimo, allora si ha* $maxA = supA$

2. *se* A *ha minimo, allora si ha* $minA = infA$

1.4 Numeri reali

Un **gruppo commutativo** e' un insieme X dotato di un'operazione binaria $* : X \times X \to X$ tale che:

1. PROPRIETÀ ASSOCIATIVA: $(x \star y) \star z = x \star (y * z) \quad \forall x, y, z \in X$

2. ELEMENTO NEUTRO: $\exists e \in X \to e * x = x * e = e$

3. INVERSO: $\forall x \in X \quad \exists y \in X \to x * y = y * x = e$

4. PROPRIETÀ COMMUTATIVA; $\forall x, y \in X \ \to \ x * y = y * x$

Se le prime 3 proprietà sono valide allora X e' un *gruppo*. Se e' valida solo la prima allora si chiama *semigruppo*

Definizione 7 (Campo dei numeri reali $\mathbb{R}$):
I 6 assiomi di completezza:

- A_1*)* $(\mathbb{R}, +) \to$ *gruppo commutativo, neutro = 0*

- A_2*)* $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \to$ *gruppo commutativo, neutro = 1*

- A_3*)* $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$*, proprietà distributiva*

- *A_4) $(\mathbb{R}, \leq) \rightarrow$ totalmente ordinato*
- *A_5) $(\leq)$ $\rightarrow$ compatibile con $+ \wedge \cdot$*
- *A_6) $(\mathbb{R}, \leq) \rightarrow$ completo*

Le proprietà $A_1, \ldots, A_3 \Longrightarrow (\mathbb{R}, +, \cdot) \rightarrow$ campo
Le proprietà $A_1, \ldots, A_6 \Longrightarrow (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq) \rightarrow$ campo ***ordinato e completo****.*

Definizione 8 (Sottoinsiemi induttivi)**:**
Un sottoinsieme $I \subseteq \mathbb{R}$ si dice ***induttivo*** *se:*

1. $1 \in I$
2. $x \in I \;\Rightarrow\; x+1 \in I$

$\mathcal{F}$ indica la famiglia degli insiemi induttivi di $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{N} \overset{def.}{=} \{x \in \mathbb{R} \ : x \in I \forall I \in \mathcal{F}\} \tag{8}$$

$\mathbb{N}$ è per definizione l'interesezione di tutti gli insiemi induttivi

$$\mathbb{N} \ = \ \bigcap_{I \in \mathcal{F}} I \tag{9}$$

Dimostrazione 2 (Il principio di induzione).
Se $M \subseteq \mathbb{N}$ è induttivo $\iff \quad M = \mathbb{N}$
Dato che M è induttivo $\mathbb{N} \subseteq M \quad \iff \quad \mathbb{N} \ = \ M$
Questo ragionamento introduce il *principio di induzione.*

Definizione 9 (Il minimo di $\mathbb{N}$)**:**

$$1 \leq n \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{10}$$

Il $min\mathbb{N} \ = \ 1$

Definizione 10 ($\mathbb{Z}$ l'anello dei numeri interi)**:**

$$\mathbb{Z} \overset{def.}{=} \ \mathbb{N} \ \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\} \tag{11}$$

$\mathbb{Z}$ è chiuso per somma e motliplicazione

$$n, m \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow n+m, \ n \cdot m \ \in \mathbb{Z} \tag{12}$$

Se $A \subseteq \mathbb{Z}, \ A \neq \varnothing$

- *se A è superiormente limitato, ammette massimo $\exists \ maxA$*

- *se A è inferiormente limitato ammette minimo $\exists\, minA$*

Definizione 11 ($\mathbb{Q}$ l'anello dei numeri razionali)**:**

$$\mathbb{Q} \overset{def.}{=} \left\{ \frac{p}{q} :\in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\} \tag{13}$$

$\mathbb{Q}$ è chiuso per somma e moltiplicazione

$$x, y \in \mathbb{Q} \;\Rightarrow\; x + y, x \cdot y \in \mathbb{Q} \tag{14}$$

$\mathbb{Q}$ è un campo totalmente ordinato ossia sono validi gli assiomi $A_1, \ \ldots, A_5$ escluso l' A_6

1.5 Radice n-esima

Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$.
$y \in \mathbb{R}$ è la radice n-esima di x se $y \geq 0, y^n \ = \ x$

$$y \overset{def.}{=} x^{\frac{1}{n}}, \ \sqrt[n]{x} \tag{15}$$

Definizione 12:
Proprietà della radice n-esima: per ogni $x, y \in \mathbb{R}, \ x, y \geq 0$:

P_1 $x^n \leq y^n \iff x \leq y$

P_2 $x^n = y^n \iff x = y$

P_3 $x^n < y \iff \exists \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, : (x + \epsilon)^n < y$

P_4 $x^n > y \iff \exists \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, : (x - \epsilon)^n > y$

1.6 Funzioni esponenziali in $\mathbb{Q}$

Definizione 13:
Sia $a > 0, \ \forall x \in \mathbb{Q}$:

$$a^x \ := \sqrt[q]{a^p} \Rightarrow x = \frac{p}{q} \ , \ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \tag{16}$$

Se $x = \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \implies np = mq$

1. $a^{x+y} = a^x a^y \ \forall x, y \in \mathbb{Q}$

2. $a^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{Q}$

3. $(a^x)^y = a^x y \ \forall x, y \in \mathbb{Q}$

se $a > 1$

$$x < y \Longrightarrow a^x < a^y \ \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

se $a < 1$

$$x < y \Longrightarrow a^y < a^x \ \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

In parole povere se la **base è minore di 1**, con un esponente maggiore (y) avremo un numero inferiore rispetto a quello di un esponente minore (x), viceversa quando avremo la **base maggiore di 1**, con esponente maggiore avremo un numero maggiore rispetto ad uno con base minore.