1 Limiti per funzioni

1.1 Definizioni

Definizione 1 (Intorno di $\pm\infty$)**:**
L'intorno *di* $+\infty$ *è l'insieme:*

$$]k, +\infty[, \; k \in \mathbb{R} \tag{1}$$

L'intorno *di* $-\infty$ *è l'insieme:*

$$]-\infty, k[, \; k \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Intendiamo che se $A \subseteq \mathbb{R}$ come i seguenti

$$\begin{aligned} supA = +\infty \quad &\iff \quad +\infty \in D(A) \\ infA = -\infty \quad &\iff \quad -\infty \in D(A) \end{aligned} \tag{3}$$

Un limite λ può essere:

$$\lambda \in \overline{R} \quad \iff \quad \begin{cases} \lambda \in R \\ \lambda = +\infty \\ \lambda = -\infty \end{cases} \tag{4}$$

Definizione 2:
Siano $A \subseteq \mathbb{R}, \; x_0 \in D(A), \; \lambda \in \overline{R}. \; f : A \to \mathbb{R}.$
A un insieme contenuto fra i numeri reali, x_0 *si trovi in un punto di accumulazione di A,* λ *contenuto nella retta reale estesa e f una funzione che ad ogni elemento di A corrisponde un elemento di R.*
Diremo che $f(x)$ *tende a* λ *per* x *che tende a* x_0*.*

$$\forall V \in \mathcal{U}_\lambda \; \exists W \in \mathcal{U}_{x_0} \; : \; f(x) \in V \; \forall x \in A \setminus \{x_0\} \cap W \tag{5}$$

Qualunque intorno V all'interno della famiglia degl intorni $\mathcal{U}_\lambda$ *di* λ *(ricordando che* $\lambda \in \overline{R}$ *quindi può assumere o un valore reale o è uguale a* $\pm\infty$*), esiste un intorno W all'interno della famiglia degli insiemi di* $\mathcal{U}_{x_0}$ *di* x_0 *(un punto di accumulazione)*

$$x_0 \in \mathbb{R} \qquad]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\tag{6}$$

tale che l'immagine x sia in V tutte le volte che x in $A \setminus x_0$ *intersecato con l'intorno W,* W_{x_0} *è per definzione un punto di accumulazione quindi l'interesezione* ***è non vuota***
La scrittura semplificata:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \tag{7}$$

se ***per ogni*** $\epsilon > 0$ *esiste un numero* $\delta > 0$ *tale che per ogni* $x \in A$, $0 < |x - x_0| < \delta$.

$$|f(x) - \lambda| < \epsilon \tag{8}$$

Esempio 1.
Abbiamo $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\lambda = -\infty$ avremo che:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{x_0} &= \{]x_0 - \delta, x_0 + \delta[: \delta > 0\} \\ \mathcal{U}_\lambda = \mathcal{U}_{-\infty} &= \{] - \infty, k[: k \in \mathbb{R}\} \end{aligned} \tag{9}$$

Quindi avremo che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \tag{10}$$

se e solo se:

$$\forall k \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in A \setminus \{x_0\}\ \{|x - x_0| < \delta \implies f(x) < k\} \tag{11}$$

Vale a dire che: qualunque valore noi diamo a k che è un numero appartenente ai numeri reali (quindi ha un valore finito), esiste un numero δ maggiore di 0 tale che, quale che sia x contenuta in A meno x_0, il **modulo** della differenza di x e x_0 ($|x - x_0|$) è **minore** di δ, questo vuol dire che l'immagine di $f(x)$ è sempre **strettamente minore** di k.
Ovvero $f(x)$ avrà sempre un valore piccolissimo inferiore a qualsiasi numero reale

Anche se $f(x)$ è definita nel punto x_0 non è necessario che soddisfare $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lambda$, quindi nel punto in cui $x = x_0$. Affermiamo che il valore del limite λ è indipendente dal valore della funzione nel punto x_0.

Definizione 3 (Unicità del limite)**:**
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ *e siano* $x_0 \in D(A)$, $x_0 \in \overline{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$.
Se esistono $\lambda, \mu \in \overline{\mathbb{R}}$ *t.c.:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \quad \wedge \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \mu \quad \iff \quad \lambda = \mu \tag{12}$$

Dimostrazione 1.