

1 Derivate

1.1 Rapporto incrementale e derivate

Per poter comprendere le derivate è essenziale comprendere il concetto di **rapporto incrementale**

Definizione 1 (Rapporto Incrementale):

Premettiamo: $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A \cap D(A)$

x_0 è un punto di accumulazione, non isolato e f una funzione con dominio A e codominio \mathbb{R} .

$$R_f(x_0) : A \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad R_f(x_0)(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1)$$

Una funzione si dice **derivabile** in x_0 se esiste il limite, ed è finito:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R_f(x_0) : A \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}, = \lim_{x \rightarrow x_0} R_f(x_0)(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2)$$

Il limite che abbiamo appena definito si chiama **derivata** di f in x_0

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} R_f(x_0)(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f'(x_0) \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Se il limite, del rapporto incrementale, non appartiene ai numeri reali ed è $\pm\infty$, allora la funzione è derivabile in senso esteso.

Il limite del rapporto incrementale si può riscrivere come:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (h = x - x_0) \quad (4)$$

Definizione 2:

Se una funzione f è derivabile in un punto x_0 allora:

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists \omega : A \rightarrow \mathbb{R} \quad \omega(x) \rightarrow 0 \mid x \rightarrow x_0 \quad (5)$$

Allora:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \lambda \cdot (x - x_0) + \omega(x)(x - x_0) \quad \forall x \in A \\ \lambda &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \omega(x) \text{ è infinitesima } (=0) \\ \lambda &= f'(x_0) \end{aligned} \quad (6)$$

Definizione 3:

Premettiamo: $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A \cap D(A)$

x_0 è un punto di accumulazione, non isolato e f una funzione con dominio A e codominio \mathbb{R} .

Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0 .

Questa nozione è dimostrabile sapendo che: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, e la tesi viene provata dal fatto che

x_0 è un punto di accumulazione del suo dominio A .

ESEMPIO 1.

Non è vero l'opposto di quanto abbiamo appena affermato: esistono infatti funzioni continue non derivabili, come per esempio la funzione **modulo**:

$$f(x) = |x| \quad (7)$$

DIMOSTRAZIONE 1.

Lo si può facilmente dimostrare per il limite destro e sinistro in 0:

$$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} |x| : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^+} |x|, & 1 \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} |x|, & -1 \end{cases} \quad (8)$$

Dato che i due limiti non coincidono il limite, nel punto x_0 non esiste.

ESEMPIO 2.

La derivata di $f'(e^x) = e^x$

Alcune proprietà delle derivate:

- La somma delle derivate è la derivata della somma, ed è derivabile in x_0 :

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \quad (9)$$

- La regola di Leibniz: $(f \cdot g)$ è derivabile in x_0

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \quad (10)$$

- La derivata del quoziente (ponendo $g(x_0) \neq 0$), $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0 ;

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} \quad (11)$$

- La derivata della composta è:

Prendiamo due funzioni tali che:

$A, B \subseteq \mathbb{R}, f : A \rightarrow \mathbb{R}, g : B \rightarrow \mathbb{R}, f(A) \subseteq B; x_0 \in A \cap D(A), f$ derivabile in $x_0, f(x_0) \in D(B), g$ derivabile in $f(x_0)$:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \quad (12)$$

- L'inversa della derivata è la complementare della derivata:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad (13)$$

Definizione 4 (Estremanti massimo, minimi e relativi):

Sia $A \subseteq \mathbb{R}, f : A \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, sia $x_0 \in \dot{A}$ (che vuol dire che esiste un intorno di x_0 tutto dentro a A).

Se x_0 è un punto **estremante relativo** (min o max relativo) allora $f'(x_0) = 0$

DIMOSTRAZIONE 2.

Prendiamo come esempio x_0 max relativo, allora sarà vero:

$$\exists \rho > 0 : f(x) - f(x_0) \leq 0 \quad \forall x \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[\quad (14)$$

Sapendo che x_0 è tutto interno, supponiamo che sia tutto incluso in A :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \forall x \in]x_0, x_0 + h[$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \forall x \in]x_0 - h, x_0[$$

Dalla derivabilità della funzione possiamo capire che:

$$\begin{cases} f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \\ f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \end{cases} \quad (15)$$

Quindi $f'(x_0)$ deve essere uguale a 0

1.2 Teoremi Fondamentali delle derivate

Definizione 5 (Rolle):

Prendiamo due numeri naturali, di cui uno strettamente maggiore dell'altro: $a, b \in \mathbb{R}; a < b$ e una funzione continua nell'intervallo formato da questi due numeri: $f \in C([a, b])$, e questa funzione è derivabile nell'insieme formato dai due numeri, estremi esclusi: $]a, b[$. Se l'immagine del primo elemento è uguale a quella dell'altro $f(a) = f(b)$ allora è vero che:

$$\exists c \in]a, b[: f'(c) = 0 \quad (16)$$

Esiste un elemento all'interno dell'intervallo formato dai due punti, la cui derivata è uguale a 0.

DIMOSTRAZIONE 3.

La dimostrazione di questo teorema deriva dal fatto che:

essendo la funzione limitata, applicando il teorema di Weierstrass sappiamo che esistono due punti della funzione $x_1, x_2 \in [a, b]$ che sono punti di \min, \max assoluti nell'intervallo.

Quindi, o le due immagini sono uguali, se e solo se sono i due estremi $x_1, x_2 \in a, b$:

$$f(x_1) = \min f, f(x_2) = \max f \implies f(x_1) = f(x_2) \quad (17)$$

La funzione è costante e quindi la derivata di un qualsiasi punto:

$$f'(c) = 0 \quad \forall c \in]a, b[\quad (18)$$

Se invece uno dei punti è all'interno dell'intervallo $x_1 \in]a, b[$, abbiamo prima dimostrato che se un elemento ha un intorno tutto all'interno di un intervallo ed esso è \min, \max relativo la sua derivata è 0

Definizione 6 (Valor medio o Lagrange):

Siano $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \in C([a, b])$, f derivabile all'interno dell'intervallo dei due punti $]a, b[$, allora:

$$\exists c \in]a, b[: \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad (19)$$

DIMOSTRAZIONE 4.

Consideriamo una funzione $g(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$.

Sostituendo la variabile x con $a \vee b$, otteniamo

$$g(a) = f(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - a) \quad (20)$$

Inoltre:

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = \cancel{f(b)} - \cancel{f(b)} + f(a) = f(a) \quad (21)$$

Quindi logicamente

$$g(a) = f(a), g(b) = f(a) \implies g(a) = g(b) \quad (22)$$

Un'altra nozione che abbiamo premesso è che la funzione è continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$, dalle conclusioni del teorema di Rolle:

$$\exists c \in]a, b[: g'(c) = 0 \quad (23)$$

Che non vuol dire niente di meno di quanto abbia affermato nella nostra tesi:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (24)$$

Definizione 7 (Cauchy):

Siano $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f, g \in C([a, b])$ e derivabili in $]a, b[, g' \neq 0$, allora:

$$\exists c \in]a, b[: \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (25)$$

Questo si può facilmente dimostrare applicando il teorema di Rolle

Delle brevi osservazioni:

Se abbiamo un intervallo non vuoto $I \subseteq \mathbb{R}$ e una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile su questo intervallo, se:

$$f'(x) = 0, \forall x \in I \quad (26)$$

Allora la funzione è costante in tutto l'intervallo.

Se invece:

$$f'(x) \geq 0 \forall x \in I \quad (27)$$

La funzione è monotona crescente nell'intervallo. Viceversa se è monotona crescente allora sarà sempre minore uguale a 0 la derivata della funzione.

Definizione 8 (Darboux):

Sia $I \subseteq \mathbb{R} \neq \emptyset$ un intervallo non vuoto e sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile nell'intervallo, allora:

$$f'(I) = f'(x) : x \in I \quad (28)$$

È un intervallo di \mathbb{R} .

Definizione 9 (Primitive):

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, diremo che la primitiva di questa funzione è una qualsiasi funzione derivabile $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$$\phi'(x) = f(x) \forall x \in I \quad (29)$$

In parole povere la primitiva è come se fosse "l'operazione inversa" alla derivata, ovvero la primitiva di una funzione è l'immagine di partenza $f(x)$.

Il teorema di Darboux dice inoltre che se esiste una primitiva di una funzione f su I allora $f(I) = \phi'(I)$ è un intervallo, questa è una condizione necessaria affinché la funzione abbia una primitiva.

Definizione 10 (Hôpital):

Consideriamo un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$ e sia un numero $a \in D(I)$, allora siano due funzioni $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili in ogni punto di $I \setminus a$, $g'(x) \neq 0$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty \end{cases} \quad (30)$$

Se esiste:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \implies \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (31)$$

e possiamo concludere che:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (32)$$

Definizione 11 (Derivate successive):

Possiamo generalizzare induttivamente il concetto di derivata.

Premettiamo che sia: $A \subseteq \mathbb{R}, (A \neq \emptyset); f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq D(A), x_0 \in A$, la derivata seconda di f in x_0 è:

$$(f')'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f')(x) - (f')(x_0)}{x - x_0} \quad (33)$$

Per indicare le derivate seconde utilizziamo i seguenti simboli:

$$f''(x_0), D^2 f(x_0), f^{(2)}(x_0) \quad (34)$$

La derivata n-esima si indica come:

$$f^{(n)}(x_0), D^n f(x_0), \dots \quad (35)$$

La derivata n-esima è la derivata della funzione $f^{(n-1)}(x)$

La seguente notazione:

$$C^n(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{R}, f^{(n)}(x) \in C(A), f \text{ derivabile } n\text{-volte in } A\} \quad (36)$$

Per esempio $C^0(A) = C(A)$ è l'insieme delle funzioni continue in $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

Osserviamo che $C^n(A)$ è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} .

Se usiamo il simbolo $C^\infty(A)$ si indica lo spazio vettoriale delle funzioni che sono infinitamente derivabili in A .

$$C^\infty(A) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(A) \quad (37)$$

Definizione 12 (Polinomi di Taylor):

Sia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Un **polinomio** è una funzione $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di grado $\leq n$, se esistono $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \forall x \in \mathbb{R} \quad (38)$$

Per indicare la famiglia delle funzioni polinomiali \mathcal{P}_n , essa è uno spazio vettoriale su \mathbb{R}

1.3 Tabelle Utili

Funzione $f(x)$	Derivata della funzione $f'(x_0)$
k	0
$ x $	$\operatorname{sgn} x$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
x	1
$\log_a x$	$\frac{1}{x} \log_a e$
$\log x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x $	$\frac{1}{ x }$
$\log x $	$\frac{1}{x}$
$\log f(x) $	$\frac{f'(x_0)}{f(x)}$
a^x	$a^x \log a$
e^x	e^x
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x)$	sviluppo ($x \rightarrow 0$)	formula generale
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$	$\frac{x^n}{n!} \quad n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$
$\log(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$	$\frac{x^n}{n} \quad n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$
$\sin(x)$	$x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$	
$\sinh(x)$	$x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$	
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$	
$\cosh(x)$	$1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$	
$\tan(x)$	$x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$	
$\arctan(x)$	$x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$	
$(1+x)^a$	$1 + ax + \frac{a \cdot (a-1)}{2} \cdot x^2 + o(x^2)$	

1.4 Studi di Funzioni

Di seguito i passi da svolgere per eseguire lo studio di una funzione:

1.4.1 Dominio della funzione

Come primo passo dobbiamo determinare il dominio della funzione, ovvero dove questa è definita.

ESEMPIO 3.

Se la funzione è il quoziente di una frazione dobbiamo premettere che il divisore **deve** essere diverso da 0

$$\begin{aligned}f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} &\implies h(x) \neq 0 \\f(x) = \frac{x^2 + 4}{2x} &\implies 2x \neq 0 \iff x \neq 0 \\Dom\ f &= \mathbb{R} \setminus \{0\}\end{aligned}\tag{39}$$

L'argomento di un logaritmo deve essere diverso da 0, la base di un esponenziale deve essere maggiore di 0

- $\log a \iff a \neq 0$
- $a^x \iff a > 0$

1.4.2 Limiti agli estremi del dominio

Si calcolano i limiti agli estremi del dominio della funzione e si verifica la presenza di asintoti verticali e/o orizzontali.

ESEMPIO 4.

Se una funzione è definita su tutti i numeri reali $Dom\ f = \mathbb{R}$, allora gli estremi del dominio sono $\pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lambda\tag{40}$$

$$\begin{cases} \lambda = \pm\infty, x = a, a \in \mathbb{R} &\implies \text{asintoto verticale} \\ \lambda = \pm\infty, x \rightarrow \pm\infty &\implies \text{asintoto orizzontale/obliquo} \end{cases}\tag{41}$$

1.4.3 Asintoti obliqui

Se sono presenti degli asintoti orizzontali, verifichiamo la presenza di asintoti obliqui. Troveremo l'equazione di una retta, la quale definisce l'asintoto obliquo:

$$y = mx + q\tag{42}$$

Per trovare m dividiamo il limite della funzione per x .

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}\tag{43}$$

Una volta trovato m , (se esiste) cerchiamo il valore q (quota, il punto in cui la retta interseca l'asse delle ordinate)

Per trovare q :

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) \quad (44)$$

1.4.4 Monotonia

Per poter studiare la monotonia della funzione ne studiamo la derivata

$$f'(x) \quad (45)$$

Studiamo il comportamento della funzione, esaminando il segno della funzione derivata.

1.4.5 Derivabilità

Studiamo se la funzione è derivabile nei punti in cui si annulla ($=0$)

1.4.6 Derivata seconda e conseguenze

Studiamo la derivata seconda della funzione e verifichiamo la presenza di convessità, concavità, punti di flesso, attraverso lo studio del segno della derivata seconda.