Appunti

Andreas Araya Osorio

3 June 2021

Contents

1 Insiemi

1.1 Introduzione

Definizione 1:
Un insieme è una "collezione" di oggetti.

Sia A un INSIEME, la scrittura $x \in A$ significa che x *appartiene ad* A.
Analogamento, scrivendo $x \notin A$ si intende che x *non appartiene ad* A.
Gli insiemi **finiti** si possono denotare all'interno di parentesi graffe "$\{,\}$"
Un qualsiasi insieme può definirsi mediante una **proprietà astratta**

ESEMPIO 1.

$$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ } pari \} \tag{1}$$

Questo insieme raccoglie **tutti i numeri naturali pari** e si può meglio riscrivere così:

$$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} : x = 2y \} \tag{2}$$

1.2 Insiemi ed operazioni

Sia X un insieme e siano $A, B \subseteq X$

- **UNIONE** $A \cup B$, L'unione di A e B come l'insieme

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ } o \text{ } x \in B \} \tag{3}$$

- INTERSEZIONE $A \cap B$, L'intersezione di A e B come l'insieme

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \text{ } e \text{ } x \in B \} \tag{4}$$

- DIFFERENZA $A \setminus B$, che equivale a

$$A \setminus B = \{x \in X : x \in A \text{ } e \text{ } x \notin B \} \tag{5}$$

- COMPLEMENTARE L'insieme complementare di A in X è:

$$A^C = X \setminus A = \{x \in X : x \notin A \} \tag{6}$$

ESEMPIO 2.
Il complementare dell'unione è l'intersezione dei complementari, mentre il complementare dell'intersezione è l'unione dei complementari.

- $X \setminus (A \cup B) \ = \ (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$
- $X \setminus (A \cap B) \ = \ (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

DIMOSTRAZIONE 1.
Si dice relazione da A a B ogni sottoinsieme R di $A \times B$ Se $(a, b) \ \in \ R$. a è in relazione R con b, si scrive aRb.

$$R \ = \{(a, b) \in \mathbb{N} \ \times \mathbb{N} : \exists p \in \mathbb{N} \mid a \ = p \cdot b \ \} \tag{7}$$

1.3 Relazioni d'ordine

Sia $A \ \neq \ \varnothing$ un insieme non vuoto e sia $R \ \subseteq \ A \ \times \ A$ una relazione di A con A. R è:

1. riflessiva se $xRx \quad \forall x \in A$,
2. simmetrica se $xRy \ \rightarrow \ yRx$,
3. transitiva se $xRy \ \wedge \ yRz \ \rightarrow \ xRz$,
4. antisimmetrica se $xRy \ \wedge \ yRz \ \rightarrow \ x \ = \ y$.

Una **relazione d'equivalenza** è tale se è RIFLESSIVA, SIMMETRICA E TRANSITIVA.

Definizione 2:
Una relazione d'ordine su un insieme $X \ \neq \ \varnothing$ *è detta di ordine totale se* $\forall \ x, y \ \in \ X$ *si ha* $x \ \leq \ y \ \vee \ y \ \leq \ x$. *Se su* X *c'è una relazione d'ordine totale,* X *è totalmente ordinato.*

Definizione 3:
Sia $(X, \leq)$*, insieme non vuoto e ordinato e sia* $A \subseteq X, \ A \neq \ \varnothing$

- $x \in X$ *è un* ***maggiorante*** *di* A *se* $a \leq x \ \forall a \in A$
- $y \in X$ *è un* ***minorante*** *di* A *se* $y \leq x \ \forall a \in A$
- A *ha* ***massimo*** *se* $\exists \lambda \in A \mid a \leq \lambda \ \forall a \in A \quad \Longrightarrow \quad \lambda \ = \ max \ A$
- A *ha* ***minimo*** *se* $\exists \mu \in A \mid \mu \leq a \ \forall a \in A \quad \Longrightarrow \quad \mu \ = \ min \ A$

Definizione 4:
Siano $(X, \leq)$ *un insieme ordinato e* $A \ \subseteq \ X, A \ \neq \ \varnothing$. A *ha estremo superiore se l'insieme dei maggioranti di* A *è non vuoto e ha minimo.* $supA$ *è il più piccolo dei maggioranti. Analogamente l'estremo inferiore è presente se l'insieme dei minoranti di* A *è non vuoto ed esso ne è il più piccolo:* $infA$.

Definizione 5:
Proprietà di *sup* ***e*** *inf**:***
Siano $(X, \leq)$ un insieme ordinato e $A \subseteq X, A \neq \varnothing$.
SUP *Si ha che $\lambda = sup\ A$* ***se e solo se***

1. $a \leq \lambda \quad \forall a \in A$;
2. $\lambda_1 \in X,\ a \leq \lambda_1 \quad \forall a \in A \implies \lambda \leq \lambda_1$

INF *Si ha che $\mu = inf\ A$* ***se e solo se***

1. $\mu \leq a \quad \forall a \in A$;
2. $\mu_1 \in X,\ \mu_1 \leq a \quad \forall a \in A \implies \mu_1 \leq \mu$

Definizione 6:
Siano $(X, \leq)$ un insieme ordinato e $A \subseteq X, A \neq \varnothing$, allora:

1. *se A ha massimo, allora si ha $maxA = supA$*
2. *se A ha minimo, allora si ha $minA = infA$*

1.4 Numeri reali

Un **gruppo commutativo** e' un insieme X dotato di un'operazione binaria $* : X \times X \to X$ tale che:

1. PROPRIETÀ ASSOCIATIVA: $(x \star y) \star z = x \star (y * z) \quad \forall x, y, z \in X$
2. ELEMENTO NEUTRO: $\exists e \in X \to e * x = x * e = e$
3. INVERSO: $\forall x \in X \quad \exists y \in X \to x * y = y * x = e$
4. PROPRIETÀ COMMUTATIVA; $\forall x, y \in X \ \to \ x * y = y * x$

Se le prime 3 proprietà sono valide allora X e' un *gruppo*. Se e' valida solo la prima allora si chiama *semigruppo*

Definizione 7 (Campo dei numeri reali $\mathbb{R}$):
I 6 assiomi di completezza:

- *A_1) $(\mathbb{R}, +) \to$ gruppo commutativo, neutro = 0*
- *A_2) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \to$ gruppo commutativo, neutro = 1*
- *A_3) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$, proprietà distributiva*

- *A_4) $(\mathbb{R}, \leq) \rightarrow$ totalmente ordinato*
- *A_5) $(\leq)\ \rightarrow$ compatibile con $+ \wedge \cdot$*
- *A_6) $(\mathbb{R}, \leq) \rightarrow$ completo*

Le proprietà $A_1, \ldots, A_3 \Longrightarrow (\mathbb{R}, +, \cdot) \rightarrow$ campo
*Le proprietà $A_1, \ldots, A_6 \Longrightarrow (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq) \rightarrow$ campo **ordinato e completo**.*

Definizione 8 (Sottoinsiemi induttivi)**:**
*Un sottoinsieme $I \subseteq \mathbb{R}$ si dice **induttivo** se:*

1. $1 \in I$
2. $x \in I \;\Rightarrow\; x + 1 \in I$

$\mathcal{F}$ indica la famiglia degli insiemi induttivi di $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{N} \overset{def.}{=} \{x \in \mathbb{R}\ : x \in I \forall I \in \mathcal{F}\} \tag{8}$$

$\mathbb{N}$ è per definizione l'interesezione di tutti gli insiemi induttivi

$$\mathbb{N}\ =\ \bigcap_{I \in \mathcal{F}} I \tag{9}$$

Dimostrazione 2 (Il principio di induzione).
Se $M \subseteq \mathbb{N}$ è induttivo $\iff\ M = \mathbb{N}$
Dato che M è induttivo $\mathbb{N} \subseteq M \iff \mathbb{N}\ =\ M$
Questo ragionamento introduce il *principio di induzione.*

Definizione 9 (Il minimo di $\mathbb{N}$)**:**

$$1 \leq n\ \forall n \in \mathbb{N} \tag{10}$$

Il $min\mathbb{N}\ =\ 1$

Definizione 10 ($\mathbb{Z}$ l'anello dei numeri interi)**:**

$$\mathbb{Z} \overset{def.}{=}\ \mathbb{N}\ \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\} \tag{11}$$

$\mathbb{Z}$ è chiuso per somma e motliplicazione

$$n, m \in \mathbb{Z}\ \Rightarrow n + m,\ n \cdot m\ \in \mathbb{Z} \tag{12}$$

Se $A \subseteq \mathbb{Z},\ A \neq \varnothing$

- *se A è superiormente limitato, ammette massimo $\exists\ maxA$*

- *se A è inferiormente limitato ammette minimo $\exists\ minA$*

Definizione 11 ($\mathbb{Q}$ l'anello dei numeri razionali)**:**

$$\mathbb{Q} \overset{def.}{=} \left\{ \frac{p}{q} :\in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\} \tag{13}$$

$\mathbb{Q}$ è chiuso per somma e moltiplicazione

$$x, y \in \mathbb{Q} \ \Rightarrow\ x + y, x \cdot y \in \mathbb{Q} \tag{14}$$

$\mathbb{Q}$ è un campo totalmente ordinato ossia sono validi gli assiomi $A_1,\ \ldots, A_5$ escluso l' A_6

1.5 Radice n-esima

Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$.
$y \in \mathbb{R}$ è la radice n-esima di x se $y \geq 0, y^n \ =\ x$

$$y \overset{def.}{=} x^{\frac{1}{n}},\ \ \sqrt[n]{x} \tag{15}$$

Definizione 12:
Proprietà della radice n-esima: per ogni $x, y \in \mathbb{R},\ x, y \geq 0$:

P_1 $x^n \leq y^n \iff x \leq y$

P_2 $x^n = y^n \iff x = y$

P_3 $x^n < y \iff \exists \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, : (x + \epsilon)^n < y$

P_4 $x^n > y \iff \exists \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, : (x - \epsilon)^n > y$

1.6 Funzioni esponenziali in $\mathbb{Q}$

Definizione 13:
Sia $a > 0,\ \forall x \in \mathbb{Q}$:

$$a^x \ := \sqrt[q]{a^p} \Rightarrow x = \frac{p}{q}\ ,\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \tag{16}$$

Se $x = \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \implies np = mq$

1. $a^{x+y} = a^x a^y\ \forall x, y \in \mathbb{Q}$
2. $a^x > 0\ \forall x \in \mathbb{Q}$

3. $(a^x)^y = a^x y \; \forall x, y \in \mathbb{Q}$

se $a > 1$

$$x < y \Longrightarrow a^x < a^y \; \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

se $a < 1$

$$x < y \Longrightarrow a^y < a^x \; \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

In parole povere se la **base è minore di 1**, con un esponente maggiore (y) avremo un numero inferiore rispetto a quello di un esponente minore (x), viceversa quando avremo la **base maggiore di 1**, con esponente maggiore avremo un numero maggiore rispetto ad uno con base minore.

2 Successioni

2.1 Successioni in $\mathbb{R}$

Sia $X \neq \varnothing$, una qualsiasi funzione $f : \mathbb{N} \to X$ si dice: **successione in X**.
Una notazione si indica $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ o $f_1, f_2, \ldots, f_n$
f_n si chiama termine n-esimo.
$k_1, k_2, \ldots, k_n$ è una successione di numeri naturali:

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \ldots \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{17}$$

La successione $\{f_{k_n}\}$ è una *sottosuccessione* di $\{f_n\}$.

Definizione 14:
Se a_n tende a $l \in \mathbb{R}$ per $n \to \infty$, si dice che $\lim_{n \to \infty} a_n = l$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \overline{n} : \forall n \in \mathbb{N}(n > \overline{n} \;\Rightarrow\; |a_n - l| < \epsilon) \tag{18}$$

$\{a_n\}$ converge ad l ed esso è il limite di $\{a_n\}$

Esempio 3.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{19}$$

Ovvero

$$\forall \epsilon > 0 \exists \overline{n} : \forall n \in \mathbb{N} \left(n > \overline{n} \;\Rightarrow\; |\frac{1}{n} - 0| < \epsilon \right) \tag{20}$$

3 Funzioni

3.1 Introduzione

Definizione 15:
Una funzione f é una relazione tra gli elementi di due insieme A e B che ad ogni elemento di ***A*** *associa* ***uno ed un solo*** *elemento di* ***B****.*

Una funzione è definita assegnando:

- un insieme A detto DOMINIO
- un insieme B detto CODOMINIO
- una relazione $f : A \rightarrow B$ che associa ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B

3.2 Tipi di funzioni

Una funzione $f(x)$ può essere di 3 tipi:

1. **suriettiva**
2. **iniettiva**
3. **biiettiva** se è sia **iniettiva** e **suriettiva**

Definizione 16:
Una funzione si dice ***iniettiva*** *quando ad elementi* ***distinti*** *del* DOMINIO corrispondono elementi **distinti** del CODOMINIO

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \tag{21}$$

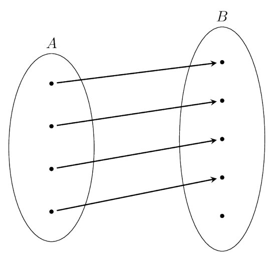

Figure 1: grafico iniettiva

Definizione 17:
Una funzione si dice ***suriettiva*** *qunado* ***ogni*** *elemento del codominio è immagine di* ***almeno*** *un elemento del dominio.*

$$b \in B \to \exists a \in A : f(a) = b \tag{22}$$

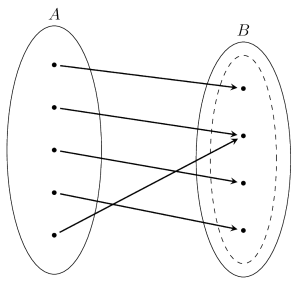

Figure 2: graifco suriettiva

Esercizio 1.
Dimostra di che tipo è questa funzione:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2 \tag{23}$$

Dimostrazione 3.
Non può essere iniettiva perchè per ogni numero reale positivo ne esiste uno uguale negativo, il cui qudrato sarà il **medesimo**.

$$se \quad x_1 = -x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = f(x_2) \tag{24}$$

si può provare inoltre che non è una funzione suriettva in quanto **nessun** numero negativo fa parte del codominio ed esso è formato da $\mathbb{R}$ dunque

$$-4 \neq f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{25}$$

Esercizio 2.
Dimostra di che tipo è questa funzione:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad f(x) = x^2 \tag{26}$$

Dimostrazione 4.
se cambiamo il dominio e il codominio nell'insieme dei numeri naturali e consideriamo la stessa legge possiamo dedurre che:

$$\forall n, m : n \neq m \quad \Rightarrow \quad n^2 \neq m^2 \tag{27}$$

Per **qualsiasi** coppia di numeri naturali diversi fra loro non è possibile pensare che il loro quadrato sia uguale, per tanto la funzione è iniettiva. Inoltre **qualsiasi** numero dispari non avrà una propria immagine, in quanto l'insieme racchiude **solo** numeri interi positivi. Ovvero:

$$\exists \frac{x}{2} \in \mathbb{N} : \{y = x + 1\} \quad \Rightarrow \quad y \neq n^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{28}$$

3.3 Funzioni invertibili

Definizione 18:
Una funzione $f : A \to B$ si dice invertibile se esiste una funzione $g : B \to A$ chiamata funzione inversa tale che:

- $\forall a \in A, \quad g(f(a)) = a$
- $\forall b \in B, \quad f(g(b)) = b$

*Essa si può considerare invertibile se è **biiettiva**.*

ESERCIZIO 3.
Dimostra se la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = 2x + 1$ è inversibile.

DIMOSTRAZIONE 5.
Ponendo l'equazione $y = 2x + 1$ deduciamo che

$$f^{(-1)}(x) = \frac{x - 1}{2} \tag{29}$$

quindi:

$$f^{(-1)}(f(x)) = f^{(-1)}(2x + 1) = \frac{(2x + 1) - 1}{2} = x; \tag{30}$$

e allo stesso tempo

$$f(f^{(-1)}(y)) = f(\frac{y - 1}{2}) + 1 = y \tag{31}$$

3.4 Piano Cartesiano

Fissando un'origine e un'unità di misura ad **ogni** punto di una retta orientata corrisponde uno ed un solo numero reale. Si stabilisce così una **corrispondenza biunivoca** tra i punti della retta orientata e i numeri reali.
Data la funzione

$$f : A \rightarrow B \quad A, B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \tag{32}$$

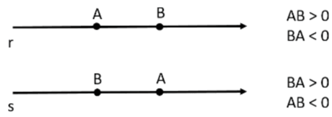

Figure 3: la retta orientata

Definizione 19:
*Definiamo una **coppia** di rette orientate disposte **perpendicolarmente** fra loro **assi coordinati**.*

- *La retta da destra verso sinistra viene chiamata **asse delle ascisse***
- *la retta dal basso verso l'alto viene chiamata **asse delle ordinate***

*Il punto del piano in cui si incontrano viene chiamato **origine degli assi** e viene indicato con O*

Un qualsiasi punto del piano P viene identificato con una ascissa x_p ed una ordinata y_p, quindi $P(x_p, y_p)$.
Il piano viene diviso in IV quadranti numerati in senso antiorario.

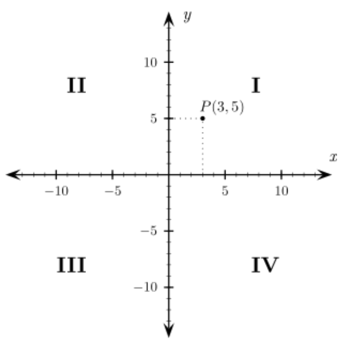

Figure 4: il piano cartesiano

3.5 Grafici di funzioni

Ora possiamo rappresentare graficamente coppie ordinate di numeri reali sul piano, quindi possiamo rappresentare il **grafico** di una funzione

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R} \tag{33}$$

e tutte le coppie $(x,\ f(x))$ tali che $x \in A$:

$$G(f) = \{(x,\ f(x))\} : x \in A \tag{34}$$

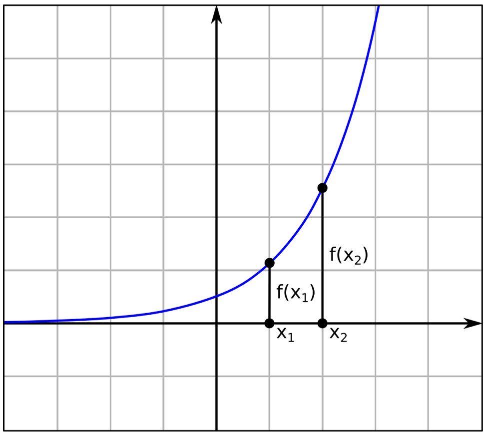

Figure 5: il grafico di una funzione crescente

3.6 Funzioni Pari e Dispari

Definizione 20:
Una funzione $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ *si dice **pari** se* $f(x) = f(-x)$
*Si deduce quindi che il grafico di una funzione così definita è simettrico rispetto all'**asse delle ordinate***

Definizione 21:
Una funzione $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ *si dice **dispari** se* $f(-x) = -f(x)$
*Si deduce quindi che il grafico di una funzione così definita viene **specchiata** in due quadranti uno **oppsoto** all'altro*

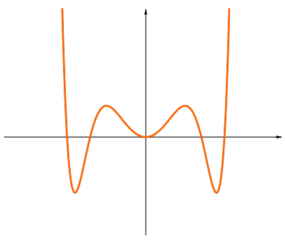

Figure 6: Una funzione pari

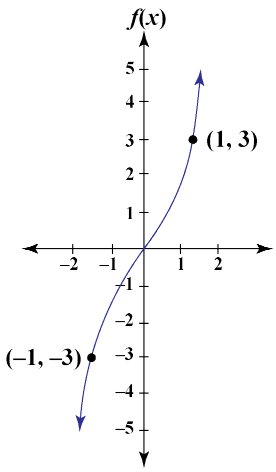

Figure 7: Una funzione dispari

3.7 Funzioni crescenti e decrescenti

Definizione 22:
Una funzione $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ *si dice* ***crescente*** *se*

$$f(x_2) \;\geq\; f(x_1) \quad \forall x_2 > x_1 \in [a, b] \tag{35}$$

Si dice ***strettamente crescente*** *se*

$$f(x_2) \quad f(x_1) \quad \forall x_2 > x_1 \in [a, b] \tag{36}$$

Definizione 23:
Una funzione $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ *si dice* ***decrescente*** *se*

$$f(x_2) \;\leq\; f(x_1) \quad \forall x_2 > x_1 \in [a, b] \tag{37}$$

Si dice ***strettamente decrescente*** *se*

$$f(x_2) \;<\; f(x_1) \quad \forall x_2 > x_1 \in [a, b] \tag{38}$$

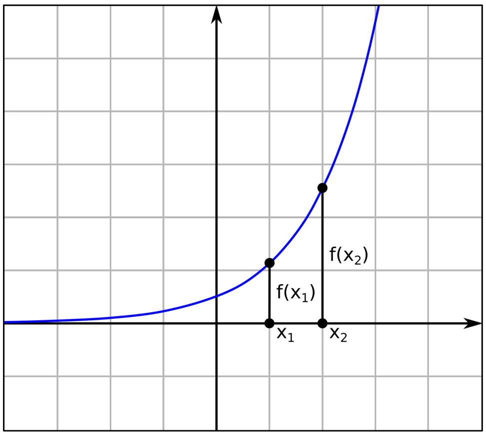

Figure 8: il grafico di una funzione crescente

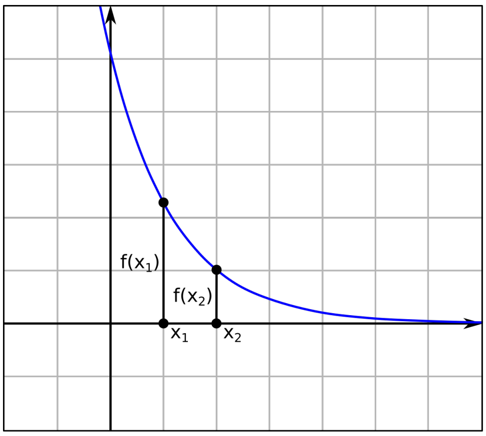

Figure 9: il grafico di una funzione decrescente

3.8 Funzioni inverse

Se i punti di una funzione $f : A \;\rightarrow\; B \quad A, B \subseteq \mathbb{R}$ si ottengono dalle coppie $(a, b) \in A \;\times\; B$

Definizione 24:
Il grafico di una funzione inversa si ottiene invertendo le coordinate dei punti del grafico. Ovvero i punti del grafico della ***funzione inversa*** *si ottengono dalle coppie* $(b, a) \;\in B \;\times\; A$ *// Per via grafica esso può essere ottenuto* ***riflettendo*** *il grafico rispetto alla* ***bisettrice*** *del* ***primo*** *e* ***terzo quadrante***

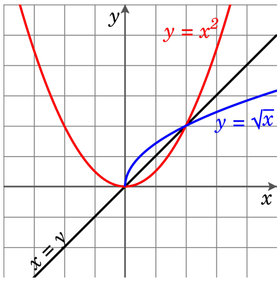

Figure 10: Il grafico di una funzione inversa

3.9 Modelizzazione matematica

Definizione 25:
*Per **modelizzazione matematica** si intende un porcesso che ha per scopo quello di **interpretare** fenomeni legati al mondo reale partendo da dati sperimentali e **traducendoli** in **problemi matematici***

Per passare da un fenomeno reale alla sua descrizione mediante modello matematico è necessario un processo di **astrazione** e **traduzione** del fenomeno in termini matematici e rigorosi.

Quando si vuole modelizzare un certo fenomeno, si vuole capire **come** le variabili coinvolte siano in relazione tra loro, ovvero stabilire delle **leggi matematiche** che descrivono queste relazioni.

La procedura di modelizzazione è:

1. si identifica l'incognita del problema
2. si analizza il fenomeno fisico e si raccolgono informazioni
3. si individuano le relazioni tra le informazioni raccolte, che poi vengono tradotte in equazioni
4. si risolvono le equazioni ottenute e se ne verifica la validità del modello

In un modello matematico che coinvolge due grandezze x ed y ci interessa capire come la **variabile dipendente** (y) varia al variare di quella **indipendente**

Esempio 4.
Supponiamo di aver formulato la legge $y = f(x)$
Se il modello è giusto potremmo ricavare il valore di y a partire da qualsiasi valore di x senza effettuare ulteriori esperimenti e misurazioni.
Rappresentandolo graficamente:

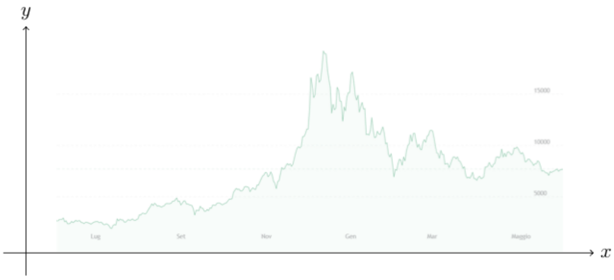

Figure 11: Il grafico dell'andamento dei bitcoin

Questo è il grafico di $y = f(x)$ dove y="valore del bitcoin in dollari" e x="tempo".

3.10 Proporzioni

Definizione 26:
Due grandezze A e B si dicono ***direttamente proprozionali*** *se esiste un numero c detto* ***costante di proporzionalità*** *tale che:*

$$A = cB \tag{39}$$

Questo significa che le due grandezze sono legate da una certa legge, per la quale quando una raddoppia, triplica, dimezza, di conseguenza la seconda raddoppia, triplica, dimezza etc.

Esempio 5.
A = "quantità di chilometri che l'auto può percorrere"
B = "litri di carburante nel serbatoio"

Definizione 27:
Due grandezze A e B si dicono ***inversamente proprozionali*** *se esiste un numero c detto* ***costante di proporzionalità*** *tale che:*

$$AB = c \tag{40}$$

Questo significa che le due grandezze sono tali che all'aumentare di una, l'altra diminuisce proporzionalmente.

Esempio 6.
A = "numero di partecipanti all'acquisto di un immobile"
B = "quota per partecipante"
c = costo dell'immobile

4 Combinatoria e probabilità

4.1 Introduzione

Definizione 28:
*L'**analisi combinatoria** è la branca della matematica applicata per risolvere problemi nel quale è necessario saper "contare" efficacemente esiti e probabilità di determinate situazioni.*
*Essa è infatti la disciplina che ci permette di **contare senza contare***

4.2 Combinatoria

Definizione 29 (Principio di moltiplicazione)**:**
Un insieme X soddisfa le ipotesi del principio di moltiplicazione se:

- *è possibile ottenere ciascuno dei suoi elementi come risultato di una procedura composta da n fasi successive.*
- *se ad una fase interemedia si sono ottenuti due esisti distinti allora la procedura conduce ad elementi distinti di X*

Nella prima fase avremo m_1 possibili esiti nella seconda fase avremo m_2 esiti sino alla n-esima fase avremo m_n esiti

$$|X| \ = m_1 \ \times \ m_2 \ \times \ ... \ \times \ m_k \tag{41}$$

Esercizio 4.
Calcoliamo il numero di coppie ordinate (a, b) contenenti un numero primo ed uno non primo compresi tra 1 ed 8

Dimostrazione 6.
I numeri primi tra 1 e 8 sono $\{2, 3, 5, 7\}$ mentre i numeri non primi tra 1 e 8 sono $\{1, 4, 6, 8\}$

I. Scegliamo un qualsiasi elemento di I_8: abbiamo 8 possibilità.

II. Se il primo elemento era primo il secondo non lo sarà, e viceversa se il numero non era primo. In ogni caso avremo 4 distinte possiblità

Il numero di coppie è: $8 \ \times \ 4 \ = \ 32$

Esercizio 5.
Consideriamo un'estrazione in successione di 3 numeri della tombola **tenendo conto dell'ordine**. Quanti sono i possibili esiti?

DIMOSTRAZIONE 7.
I numeri della tombola sono 90. Gli scenari possibili sono 2:
Nel primo caso **senza rimpiazzo** se ogni numero può essere scelto una volta sola, mentre sarà **con rimpiazzo** se un numero può essere scelto più di una volta.

Nel primo caso $(a_1, a_2, a_3) \; :\to \; (a_1 \neq a_2 \neq a_3 \;) :$

$$\text{I FASE: } a_1 = 90$$

$$\text{II FASE: } a_2 = 90 - 1 = 89$$

$$\text{III FASE: } a_3 = 90 - 2 = 88$$

Quindi il numero di possibili esiti è:

$$90 \times 89 \times 88 = 704880 \tag{42}$$

Nel secondo caso $(a_1, a_2, a_3) :\to (a_1 = a_2 = a_3)$:

$$\text{I FASE: } a_1 = 90$$

$$\text{II FASE: } a_2 = 90$$

$$\text{III FASE: } a_3 = 90$$

Quindi il numero di possibili esiti è:

$$90 \times 90 \times 90 = 90^3 = 729000 \tag{43}$$

Definizione 30:
Definiamo una regola general per k-sequenze di I_n. Siano $k, n \in \mathbb{N}$ definiamo k-sequenza di I_n una k-upla ***ordinata*** $(a_1, \ldots, a_k)$ *di elementi* ***non necessariamente distinti*** *di I_n Ovvero:*

$$(a_1, \ldots, a_k) \in \underbrace{I_n \times \; \ldots \; \times \; I_n} \tag{44}$$

Nella definzione di sequenze l'ordine degli elementi della k-upla è importante: le 3-sequenze (2, 1 ,3) e (3, 1, 2) sono diverse anceh se composte dagli stessi numeri. Vengono comunemente dette **disposizioni** di **n** oggetti a k a k

Esempio 7.
Sia $I_4 = 1, 2, 3, 4$. Allora

$$(1, 2, 3, 3, 4), \qquad (1, 1, 1, 1, 1), \qquad (2, 2, 1, 3, 4) \tag{45}$$

sono 5-sequenze di I_4. Invece

$$(1, 2, 3), \qquad (1, 1, 1), \qquad (2, 3, 4) \tag{46}$$

sono 3-sequenze di I_4

4.3 Fattoriale

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \tag{47}$$

$$n! = \begin{cases} n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots 3 \times 2 \times 1 & \text{se } n \geq 1 \\ 1 & \text{se } n = 0 \end{cases} \tag{48}$$

Definizione 31:
*Il **fattoriale** di un numero equivale al prodotto di quel numero per tutti i numeri che lo precedono. I valori dei fattoriale crescono esponenzialmente*

$$0! = 1 \qquad 5! = 120 \qquad 6! = 720 \qquad 7! = 5040 \qquad 10! = 3628800 \tag{49}$$

4.4 Numero di Insiemi

Definizione 32:
*Il **numero di sottoinsiemi** di k elementi di I_n si distinguono esclusivamente dagli elementi di cui fanno parte: **l'ordine non conta**.*

Spesso un sottoinsieme di k elementi di un insieme di n elementi viene chiamato **combinazione** (semplice, senza ripetizioni) di n elementi a k a k

Definizione 33:
*Siano $k, n \in \mathbb{N}$ il **binomiale** di n su k è:*

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & sek \leq n, \\ 0, & sek > n. \end{cases} \tag{50}$$

Il numero di sottoinsiemi di k elementi di I_n è

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}. \tag{51}$$

Esempio 8.
Calcola i sotttoinsiemi con 3 elementi di I_6

Dimostrazione 8.
La soluzione è data da una semplice applicazione della formula prima vista:

$$\begin{Bmatrix} 6 \\ 3 \end{Bmatrix} = \frac{6!}{3!3!} = 20 \tag{52}$$

Esempio 9.
Calcola il numero di partite giocate nella fase a gironi dei Mondiali di calcio. Ci sono 32 squadre divise in 8 gironi da 4 squadre ed in ogni girone una squadra deve giocare contro le altre una volta sola.

Dimostrazione 9.
Il numero di partite totale è 8 volte le partite giocate in un singolo girone. L'insieme delle 4 squadre in un girone possiamo identificarlo con I_4, e una partita tra 2 squadre con un sottoinsieme di 2 elementi di I_4. Il numero di partite giocate in un girone**è il numero di sottoinsiemi** di 2 elementi di I_4 ovvero:

$$\begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 2} = \frac{24}{4} = 6 \tag{53}$$

Infine il risultato equivale a: $6 \times 8 = 48$