# Appunti

Andreas Araya Osorio

3 June 2021

# Contents

# 1 Insiemi

## 1.1 Introduzione

**Definizione 1:**
*Un insieme è una "collezione" di oggetti.*

Sia $A$ un INSIEME, la scrittura $x \in A$ significa che $x$ *appartiene ad* $A$.
Analogamento, scrivendo $x \notin A$ si intende che $x$ *non appartiene ad* $A$.
Gli insiemi **finiti** si possono denotare all'interno di parentesi graffe "$\{,\}$"
Un qualsiasi insieme può definirsi mediante una **proprietà astratta**

ESEMPIO 1.

$$A \ = \ \{ \ x \in \mathbb{N} \mid x \ pari \ \} \tag{1}$$

Questo insieme raccoglie **tutti i numeri naturali pari** e si può meglio riscrivere così:

$$A \ = \ \{ \ x \ \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} \ : \ x \ = \ 2y \ \} \tag{2}$$

## 1.2 Insiemi ed operazioni

Sia $X$ un insieme e siano $A, B \ \subseteq \ X$

- **UNIONE** $A \cup B$, L'unione di A e B come l'insieme

$$A \cup B \ = \ \{x \in X \ : \ x \in A \ o \ x \in B \ \} \tag{3}$$

- INTERSEZIONE $A \cap B$, L'intersezione di A e B come l'insieme

$$A \cap B \ = \ \{x \in X \ : \ x \in A \ e \ x \in B \ \} \tag{4}$$

- DIFFERENZA $A \setminus B$, che equivale a

$$A \setminus B \ = \ \{x \in X \ : \ x \in A \ e \ x \notin B \ \} \tag{5}$$

- COMPLEMENTARE L'insieme complementare di $A$ in $X$ è:

$$A^C \ = \ X \setminus A \ = \ \{x \in X \ : \ x \notin A \ \} \tag{6}$$

ESEMPIO 2.
Il complementare dell'unione è l'intersezione dei complementari, mentre il complementare dell'intersezione è l'unione dei complementari.

- $X \setminus (A \cup B) \;=\; (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$
- $X \setminus (A \cap B) \;=\; (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

DIMOSTRAZIONE 1.
Si dice relazione da $A$ a $B$ ogni sottoinsieme $R$ di $A \times B$ Se $(a,b) \;\in\; R$. $a$ è in relazione $R$ con $b$, si scrive $aRb$.

$$R \;= \{(a,b) \in \mathbb{N} \;\times \mathbb{N} : \exists p \in \mathbb{N} \mid a \;= p \cdot b\;\} \tag{7}$$

## 1.3 Relazioni d'ordine

Sia $A \;\neq\; \varnothing$ un insieme non vuoto e sia $R \;\subseteq\; A \;\times\; A$ una relazione di $A$ con $A$. $R$ è:

1. riflessiva se $xRx \quad \forall x \in A$,
2. simmetrica se $xRy \;\rightarrow\; yRx$,
3. transitiva se $xRy \;\wedge\; yRz \;\rightarrow\; xRz$,
4. antisimmetrica se $xRy \;\wedge\; yRz \;\rightarrow\; x \;=\; y$.

Una **relazione d'equivalenza** è tale se è RIFLESSIVA, SIMMETRICA E TRANSITIVA.

**Definizione 2:**
*Una relazione d'ordine su un insieme $X \;\neq\; \varnothing$ è detta di ordine totale se $\forall\; x, y \;\in\; X$ si ha $x \;\leq\; y \;\vee\; y \;\leq\; x$. Se su $X$ c'è una relazione d'ordine totale, $X$ è totalmente ordinato.*

**Definizione 3:**
*Sia $(X, \leq)$, insieme non vuoto e ordinato e sia $A \subseteq X,\; A \neq\; \varnothing$*

- *$x \in X$ è un **maggiorante** di $A$ se $a \leq x\; \forall a \in A$*
- *$y \in X$ è un **minorante** di $A$ se $y \leq x\; \forall a \in A$*
- *$A$ ha **massimo** se $\exists \lambda \in A \mid a \leq \lambda\; \forall a \in A \;\implies\; \lambda \;=\; max\; A$*
- *$A$ ha **minimo** se $\exists \mu \in A \mid \mu \leq a\; \forall a \in A \;\implies\; \mu \;=\; min\; A$*

**Definizione 4:**
*Siano $(X, \leq)$ un insieme ordinato e $A \;\subseteq\; X, A \;\neq\; \varnothing$. $A$ ha estremo superiore se l'insieme dei maggioranti di $A$ è non vuoto e ha minimo. $supA$ è il più piccolo dei maggioranti. Analogamente l'estremo inferiore è presente se l'insieme dei minoranti di $A$ è non vuoto ed esso ne è il più piccolo: $infA$.*

**Definizione 5:**
***Proprietà di*** $sup$ ***e*** $inf$***:***

*Siano* $(X, \leq)$ *un insieme ordinato e* $A \subseteq X, A \neq \varnothing$.

***SUP*** *Si ha che* $\lambda = sup\ A$ ***se e solo se***

1. $a \leq \lambda \quad \forall a \in A$;
2. $\lambda_1 \in X,\ a \leq \lambda_1 \quad \forall a \in A \implies \lambda \leq \lambda_1$

***INF*** *Si ha che* $\mu = inf\ A$ ***se e solo se***

1. $\mu \leq a \quad \forall a \in A$;
2. $\mu_1 \in X,\ \mu_1 \leq a \quad \forall a \in A \implies \mu_1 \leq \mu$

**Definizione 6:**
*Siano* $(X, \leq)$ *un insieme ordinato e* $A \subseteq X, A \neq \varnothing$, *allora:*

1. *se* $A$ *ha massimo, allora si ha* $maxA = supA$
2. *se* $A$ *ha minimo, allora si ha* $minA = infA$

## 1.4 Numeri reali

Un **gruppo commutativo** e' un insieme $X$ dotato di un'operazione binaria $* : X \times X \to X$ tale che:

1. PROPRIETÀ ASSOCIATIVA: $(x \star y) \star z = x \star (y * z) \quad \forall x, y, z \in X$
2. ELEMENTO NEUTRO: $\exists e \in X \to e * x = x * e = e$
3. INVERSO: $\forall x \in X \quad \exists y \in X \to x * y = y * x = e$
4. PROPRIETÀ COMMUTATIVA; $\forall x, y \in X \ \to \ x * y = y * x$

Se le prime 3 proprietà sono valide allora $X$ e' un *gruppo*. Se e' valida solo la prima allora si chiama *semigruppo*

**Definizione 7 (Campo dei numeri reali $\mathbb{R}$):**
*I 6 assiomi di completezza:*

- $A_1$*)* $(\mathbb{R}, +) \to$ *gruppo commutativo, neutro = 0*
- $A_2$*)* $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \to$ *gruppo commutativo, neutro = 1*
- $A_3$*)* $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$, *proprietà distributiva*

- *$A_4$) $(\mathbb{R}, \leq) \rightarrow$ totalmente ordinato*
- *$A_5$) $(\leq)$ $\rightarrow$ compatibile con $+ \wedge \cdot$*
- *$A_6$) $(\mathbb{R}, \leq) \rightarrow$ completo*

*Le proprietà $A_1, \ldots, A_3 \Longrightarrow (\mathbb{R}, +, \cdot) \rightarrow$ campo*
*Le proprietà $A_1, \ldots, A_6 \Longrightarrow (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq) \rightarrow$ campo* ***ordinato e completo****.*

**Definizione 8** (Sottoinsiemi induttivi)**:**
*Un sottoinsieme $I \subseteq \mathbb{R}$ si dice* ***induttivo*** *se:*

1. $1 \in I$
2. $x \in I \;\Rightarrow\; x + 1 \in I$

*$\mathcal{F}$ indica la famiglia degli insiemi induttivi di $\mathbb{R}$:*

$$\mathbb{N} \overset{def.}{=} \{x \in \mathbb{R} \ : x \in I \forall I \in \mathcal{F}\} \tag{8}$$

*$\mathbb{N}$ è per definizione l'interesezione di tutti gli insiemi induttivi*

$$\mathbb{N} \ = \ \bigcap_{I \in \mathcal{F}} I \tag{9}$$

Dimostrazione 2 (Il principio di induzione).
Se $M \subseteq \mathbb{N}$ è induttivo $\iff$ $M = \mathbb{N}$
Dato che $M$ è induttivo $\mathbb{N} \subseteq M \iff \mathbb{N} \ = \ M$
Questo ragionamento introduce il *principio di induzione.*

**Definizione 9** (Il minimo di $\mathbb{N}$)**:**

$$1 \leq n \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{10}$$

*Il $min\mathbb{N} \ = \ 1$*

**Definizione 10** ($\mathbb{Z}$ l'anello dei numeri interi)**:**

$$\mathbb{Z} \overset{def.}{=} \ \mathbb{N} \ \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\} \tag{11}$$

*$\mathbb{Z}$ è chiuso per somma e motliplicazione*

$$n, m \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow n + m, \ n \cdot m \ \in \mathbb{Z} \tag{12}$$

*Se $A \subseteq \mathbb{Z}, \ A \neq \varnothing$*

- *se $A$ è superiormente limitato, ammette massimo $\exists \ maxA$*

- *se $A$ è inferiormente limitato ammette minimo $\exists\ minA$*

**Definizione 11** ($\mathbb{Q}$ l'anello dei numeri razionali)**:**

$$\mathbb{Q} \overset{def.}{=} \left\{ \frac{p}{q} :\in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\} \tag{13}$$

*$\mathbb{Q}$ è chiuso per somma e moltiplicazione*

$$x, y \in \mathbb{Q} \ \Rightarrow \ x + y, x \cdot y \in \mathbb{Q} \tag{14}$$

*$\mathbb{Q}$ è un campo totalmente ordinato ossia sono validi gli assiomi $A_1, \ \ldots, A_5$ escluso l' $A_6$*

## 1.5 Radice n-esima

Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$.
$y \in \mathbb{R}$ è la radice n-esima di $x$ se $y \geq 0, y^n \ = \ x$

$$y \overset{def.}{=} x^{\frac{1}{n}}, \ \sqrt[n]{x} \tag{15}$$

**Definizione 12:**
*Proprietà della radice n-esima: per ogni $x, y \in \mathbb{R}, \ x, y \geq 0$:*

$P_1$ $x^n \leq y^n \iff x \leq y$

$P_2$ $x^n = y^n \iff x = y$

$P_3$ $x^n < y \iff \exists \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, : (x + \epsilon)^n < y$

$P_4$ $x^n > y \iff \exists \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, : (x - \epsilon)^n > y$

## 1.6 Funzioni esponenziali in $\mathbb{Q}$

**Definizione 13:**
*Sia $a > 0, \ \forall x \in \mathbb{Q}$ :*

$$a^x \ := \sqrt[q]{a^p} \Rightarrow x = \frac{p}{q} \ , \ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \tag{16}$$

Se $x = \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \implies np = mq$

1. $a^{x+y} = a^x a^y \ \forall x, y \in \mathbb{Q}$

2. $a^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{Q}$

3. $(a^x)^y = a^{xy} \ \forall x, y \in \mathbb{Q}$

se $a > 1$

$$x < y \Longrightarrow a^x < a^y \ \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

se $a < 1$

$$x < y \Longrightarrow a^y < a^x \ \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

In parole povere se la **base è minore di 1**, con un esponente maggiore (y) avremo un numero inferiore rispetto a quello di un esponente minore (x), viceversa quando avremo la **base maggiore di 1**, con esponente maggiore avremo un numero maggiore rispetto ad uno con base minore.

# 2 Successioni

## 2.1 Successioni in $\mathbb{R}$

Sia $X \neq \varnothing$, una qualsiasi funzione $f : \mathbb{N} \to X$ si dice: **successione in** $X$.
Una notazione si indica $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o $f_1, f_2, \ldots, f_n$
$f_n$ si chiama termine n-esimo.
$k_1, k_2, \ldots, k_n$ è una successione di numeri naturali:

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \ldots \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{17}$$

La successione $\{f_{k_n}\}$ è una *sottosuccessione* di $\{f_n\}$.

**Definizione 14:**
*Se $a_n$ tende a $l \in \mathbb{R}$ per $n \to \infty$, si dice che $\lim_{n\to\infty} a_n = l$*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \overline{n} : \forall n \in \mathbb{N}(n > \overline{n} \ \Rightarrow \ |a_n - l| < \epsilon) \tag{18}$$

*$\{a_n\}$ converge ad $l$ ed esso è il limite di $\{a_n\}$*

Esempio 3.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{19}$$

Ovvero

$$\forall \epsilon > 0 \exists \overline{n} : \forall n \in \mathbb{N} \left( n > \overline{n} \ \Rightarrow \ |\frac{1}{n} - 0| < \epsilon \right) \tag{20}$$

Dimostrazione 3 (Il limite se esiste è unico).

$$\lim_{x\to\infty} a_n = l \quad \wedge \quad \lim_{x\to\infty} a_n = m \quad \Longleftrightarrow \quad l \ = \ m \tag{21}$$

Esempio 4.
Poniamo per assurdo che $l \neq m$ Fissiamo $\epsilon > 0$

$$\underbrace{\underbrace{|a_n - l| < \frac{\epsilon}{2}}_{n>\overline{n_1}} \quad \& \quad \underbrace{|a_n - m| < \frac{\epsilon}{2}}_{n>\overline{n_2}}}_{n \ > \ \max\{\overline{n_1},\overline{n_2}\}} \tag{22}$$

$$\Downarrow$$

Ricordiamo che $|a_n - m| = |m - a_n|$

$$|\cancel{-a_n} - l - \cancel{-a_n} + m||a_n - l| \ + \ |m - a_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \tag{23}$$

$$\Downarrow$$

$$|m - l| < \epsilon \quad \Longrightarrow \quad |m - l| = 0 \tag{24}$$

Ma questo è assurdo perchè: $\epsilon > 0, \forall \epsilon \in \mathbb{R}$

$$m = l \tag{25}$$

**Definizione 15:**
*Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ converge ad $l \in \mathbb{R}$ **ogni** sua sottosuccessione $\{a_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad $l$*

Dimostrazione 4 (Limiti).
Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge $l \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \{a_{k_n}\}_{k_{n\in\mathbb{N}}}$ converge $l \in \mathbb{R}$

$$\Downarrow$$

Si ha che:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ n > \overline{n} \implies |a_n - l| < \epsilon \tag{26}$$

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ n > \overline{n} \implies |a_{k_n} - l| < \epsilon \tag{27}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} \ = \ l \tag{28}$$

Esempio 5.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0 \qquad \& \qquad k=2, \lim_{k_n\to+\infty}\frac{1}{k_n}=0 \tag{29}$$

Esercizio 1.

Dimostrazione 5.

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=l+m \tag{30}$$

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=l \quad \& \quad \lim_{n\to+\infty}b_n=m \tag{31}$$

$$\Downarrow$$

$$|a_n-l|<\frac{\epsilon}{2} \quad \text{se} \quad n>\overline{n_1} \tag{32}$$

$$|b_n-m|<\frac{\epsilon}{2} \quad \text{se} \quad n>\overline{n_2} \tag{33}$$

$n>\max\{\overline{n_1},\overline{n_2}\}$

$$|a_n+b_n-l-m|\le|a_n-l|+|b_n-m|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon \tag{34}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall\epsilon>0,\exists\overline{n}\equiv\max\{\overline{n_1},\overline{n_2}\} \ : \ n>\overline{n} \ \Rightarrow \ \underbrace{|(a_n+b_n)-(l+m)|}_{0}<\epsilon \tag{35}$$

$$(a_n+b_n)-(l+m)=0 \tag{36}$$

$$a_n+b_n=l+m \tag{37}$$

Dimostrazione 6 (Permanenza del segno).

$$\forall\epsilon>0,\exists\overline{n}\in\mathbb{N} \ : \ n>\overline{n} \ \Rightarrow \ \underbrace{|a_n-l<\epsilon|}_{l-\epsilon<a_n<l+\epsilon \qquad \forall n>\overline{n}} \tag{38}$$

$$\epsilon=|l|$$

Da questo otteniamo che

$$\underbrace{l-|l|}_{0} < a_n < \underbrace{l+|l|}_{2l} \tag{39}$$

In conclusione avremo che:
se $l > 0 \Rightarrow a_n > 0$
se $l < 0 \Rightarrow a_n < 0$

**Definizione 16** (Teorema dei 2 carabinieri)**:**
*Se* $\underbrace{\{a_n\}\ ,\{b_n\}}_{\textit{convergono a } l}\ ,\{c_n\}$

$$\textit{è ovvio che: } a_n \leq c_n \leq b_n \implies c_n \textit{converge a } l \tag{40}$$

DIMOSTRAZIONE 7.

$$\forall\epsilon > 0, \exists\overline{n_1}, \overline{n_2} \in \mathbb{N} : \tag{41}$$

$$\Downarrow$$

$$l-\epsilon < a_n < l+\epsilon \qquad \& \qquad l-\epsilon < b_n < l+\epsilon \tag{42}$$

se $n > \max\{\overline{n_1}, \overline{n_2}\}$

$$\Downarrow$$

$$l-\epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < l+\epsilon \qquad \forall n > \overline{n} \tag{43}$$

$$\underbrace{l-\epsilon < c_n < l+\epsilon}_{|c_n-l|<\epsilon} \implies \lim_{n\to+\infty} c_n = l \tag{44}$$

**Definizione 17:**
*Sia una successione* $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ *è detta:*

- *superiormente limitata, se* $\exists M \in \mathbb{R}\ :\ a_n \leq M\ \forall n \in \mathbb{N}$
- *inferiormente limitata, se* $\exists M \in \mathbb{R}\ :\ a_n \geq M\ \forall n \in \mathbb{N}$
- *limitata, se* $\exists M \in \mathbb{R}\ :\ |a_n| \leq M\ \forall n \in \mathbb{N}$

**Definizione 18** (Ogni successione convergente è limitata)**:**
*Sia* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R},\ a_n \underset{n\to\infty}{\to} l$
*Allora (con* $\epsilon = 1$*)*

$$\exists \overline{n} : \forall n \in \mathbb{N}(n > \overline{n} \ \Rightarrow\ |a_n - l| < 1) \tag{45}$$

*Segue quindi che* $|a_n| \leq |a_n - l| + |l| < 1 + |l|,\ n > \overline{n}$

$$|a_n| \leq 1 + |l| \tag{46}$$

**Definizione 19** (Retta reala ampliata)**:**

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\} \tag{47}$$

**Definizione 20:**
*Sia* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$

$$\begin{gathered} \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \\ \Downarrow \\ \forall k \in \mathbb{R} \exists \overline{n} \in N\ :\ \forall n \in \mathbb{N}(n > \overline{n} \implies a_n > k) \end{gathered} \tag{48}$$

*La scrittura è analoga per* $-\infty$ *invertendo il segno:* $(a_n < k)$
*Potremo dire che* $a_n$ *diverge positivamente o negativamente*

## 2.2 Forme indeterminate

*Se* $\{a_n\}, \{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$ *e* $\{a_n\} \to +\infty, \{b_n\} \to -\infty\}$ *allora:*

$$a_n + b_n \to +\infty - \infty = \ ? \tag{49}$$

$+\infty$ *e* $-\infty$ *non sono veri e propri numeri, piuttosto sono dei* ***simboli****, quindi il risultato sarà detto:*FORMA INDETERMINATA $+\infty - \infty$

Altri tipi di forme indeterminate sono:

$$\frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ 0 \cdot \infty,\ 1^{\infty},\ 0^0,\ \infty^0 \tag{50}$$

## 2.3 Teoremi generali di esistenza

Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ è detta monotona crescente se $a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$
Si dice invece monotona decrescente se $a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Sono rispettivamente **strettamente** monotone crescenti o decrescenti se le disuguaglianze sono **strette**

Le scritture $a_n \nearrow$ e $a_n \searrow$ indicano monotonia crescente e decrescente

**Definizione 21:**
*Ogni successione monotona ammette limite:*
*Se* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$*:*

1. $a_n \nearrow \implies \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$

2. $a_n \searrow \implies \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$

Dimostrazione 8.
Se $\{a_n\}$ è superiormente limitata per l'assioma di completezza:

$$\exists \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \lambda \tag{51}$$

Per la proprietà del sup si ha che $a_n \leq \lambda, \forall n \in \mathbb{N}$ dunque:

$$a_n < \lambda + \epsilon \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall \epsilon > 0 \tag{52}$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ \lambda < a_{\overline{n}} + \epsilon \tag{53}$$

La definizione di limite è:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lambda \tag{54}$$

Esercizio 2 (Il numero di nepero $e$).

$$e \equiv \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{55}$$

Si nota che $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ sono successioni **convergenti** che hanno lo stesso limite $e$, inoltre sono **strettamente monotone**

$$a_n < a_{n+1} \quad \text{e} \quad b_n > b_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{56}$$

Inoltre

$$a_n < b_n \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{57}$$

allora:

$$a_n < a_p < b_p < b_m \quad \forall n, m, p; p = \max\{n, m\} \tag{58}$$

Entrambe le successioni convergono: $a_n$ è monotona crescente e superiormente limitata e $b_n$ è monotona decrescente e inferiormente limitata.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \tag{59}$$

Questo implica che:

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n = e \tag{60}$$

DIMOSTRAZIONE 9.

$$b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{61}$$

# 3 Funzioni

## 3.1 Introduzione

**Definizione 22:**
*Una funzione $f$ é una relazione tra gli elementi di due insieme $A$ e $B$ che ad ogni elemento di **A** associa **uno ed un solo** elemento di **B**.*

Una funzione è definita assegnando:

- un insieme $A$ detto DOMINIO
- un insieme $B$ detto CODOMINIO
- una relazione $f : A \to B$ che associa ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B

## 3.2 Tipi di funzioni

Una funzione $f(x)$ può essere di 3 tipi:

1. **suriettiva**
2. **iniettiva**
3. **biiettiva** se è sia **iniettiva** e **suriettiva**

**Definizione 23:**
*Una funzione si dice* ***iniettiva*** *quando ad elementi* ***distinti*** *del* DOMINIO corrispondono elementi **distinti** del CODOMINIO

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \tag{62}$$

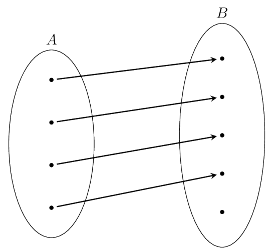


Figure 1: grafico iniettiva

**Definizione 24:**
*Una funzione si dice* ***suriettiva*** *qunado* ***ogni*** *elemento del codominio è immagine di* ***almeno*** *un elemento del dominio.*

$$b \in B \rightarrow \exists a \in A : f(a) = b \tag{63}$$

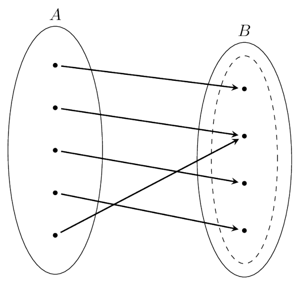


Figure 2: graifco suriettiva

ESERCIZIO 3.
Dimostra di che tipo è questa funzione:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2 \tag{64}$$

Dimostrazione 10.
Non può essere iniettiva perchè per ogni numero reale positivo ne esiste uno uguale negativo, il cui qudrato sarà il **medesimo**.

$$se \quad x_1 = -x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = f(x_2) \tag{65}$$

si può provare inoltre che non è una funzione suriettva in quanto **nessun** numero negativo fa parte del codominio ed esso è formato da $\mathbb{R}$ dunque

$$-4 \neq f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{66}$$

Esercizio 4.
Dimostra di che tipo è questa funzione:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad f(x) = x^2 \tag{67}$$

Dimostrazione 11.
se cambiamo il dominio e il codominio nell'insieme dei numeri naturali e consideriamo la stessa legge possiamo dedurre che:

$$\forall n, m : n \neq m \quad \Rightarrow \quad n^2 \neq m^2 \tag{68}$$

Per **qualsiasi** coppia di numeri naturali diversi fra loro non è possibile pensare che il loro quadrato sia uguale, per tanto la funzione è iniettiva. Inoltre **qualsiasi** numero dispari non avrà una propria immagine, in quanto l'insieme racchiude **solo** numeri interi positivi. Ovvero:

$$\exists \frac{x}{2} \in \mathbb{N} : \{y = x + 1\} \quad \Rightarrow \quad y \neq n^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{69}$$

## 3.3 Funzioni invertibili

**Definizione 25:**
*Una funzione $f : A \to B$ si dice invertibile se esiste una funzione $g : B \to A$ chiamata funzione inversa tale che:*

- $\forall a \in A, \quad g(f(a)) = a$
- $\forall b \in B, \quad f(g(b)) = b$

*Essa si può considerare invertibile se è **biiettiva**.*

Esercizio 5.
Dimostra se la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = 2x + 1$ è inversibile.

Dimostrazione 12.
Ponendo l'equazione $y = 2x + 1$ deduciamo che

$$f^{(-1)}(x) = \frac{x - 1}{2} \tag{70}$$

quindi:

$$f^{(-1)}(f(x)) = f^{(-1)}(2x + 1) = \frac{(2x + 1) - 1}{2} = x; \tag{71}$$

e allo stesso tempo

$$f(f^{(-1)}(y)) = f(\frac{y - 1}{2}) + 1 = y \tag{72}$$

## 3.4 Piano Cartesiano

Fissando un'origine e un'unità di misura ad **ogni** punto di una retta orientata corrisponde uno ed un solo numero reale. Si stabilisce così una **corrispondenza biunivoca** tra i punti della retta orientata e i numeri reali.
Data la funzione

$$f : A \to B \quad A, B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \tag{73}$$

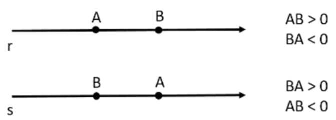


Figure 3: la retta orientata

**Definizione 26:**
*Definiamo una **coppia** di rette orientate disposte **perpendicolarmente** fra loro **assi coordinati**.*

- *La retta da destra verso sinistra viene chiamata **asse delle ascisse***
- *la retta dal basso verso l'alto viene chiamata **asse delle ordinate***

*Il punto del piano in cui si incontrano viene chiamato **origine degli assi** e viene indicato con O*

Un qualsiasi punto del piano $P$ viene identificato con una ascissa $x_p$ ed una ordinata $y_p$, quindi $P(x_p, y_p)$.
Il piano viene diviso in IV quadranti numerati in senso antiorario.

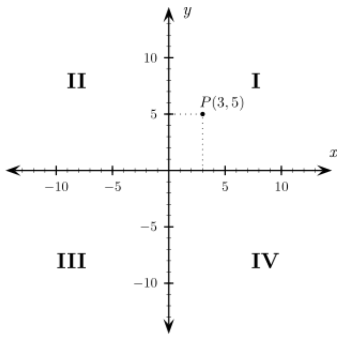


Figure 4: il piano cartesiano

### 3.5 Grafici di funzioni

Ora possiamo rappresentare graficamente coppie ordinate di numeri reali sul piano, quindi possiamo rappresentare il **grafico** di una funzione

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R} \tag{74}$$

e tutte le coppie $(x,\ f(x))$ tali che $x \in A$:

$$G(f) = \{(x,\ f(x))\} \ : \ x \in A \tag{75}$$

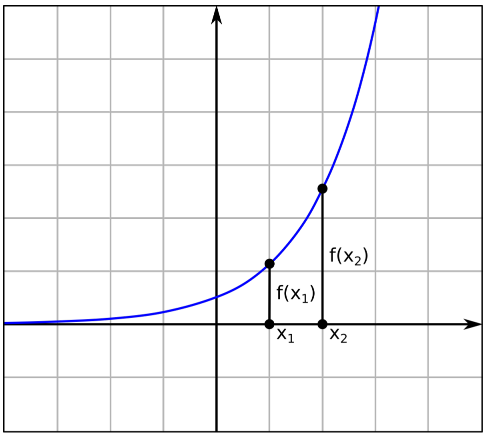


Figure 5: il grafico di una funzione crescente

### 3.6 Funzioni Pari e Dispari

**Definizione 27:**
*Una funzione* $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ *si dice* ***pari*** *se* $f(x) = f(-x)$

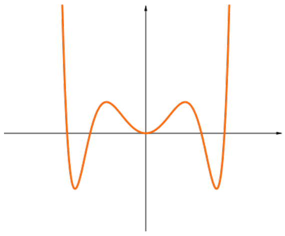

Figure 6: Una funzione pari

*Si deduce quindi che il grafico di una funzione così definita è simettrico rispetto all'**asse delle ordinate***

**Definizione 28:**
*Una funzione* $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ *si dice **dispari** se* $f(-x) = -f(x)$
*Si deduce quindi che il grafico di una funzione così definita viene **specchiata** in due quadranti uno **oppsoto** all'altro*

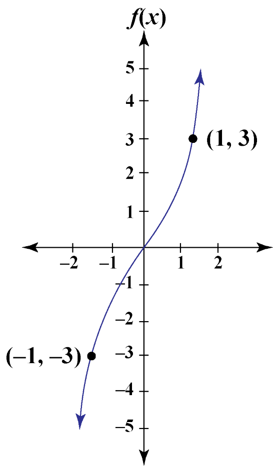


Figure 7: Una funzione dispari

## 3.7 Funzioni crescenti e decrescenti

**Definizione 29:**
*Una funzione* $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ *si dice **crescente** se*

$$f(x_2) \geq f(x_1) \quad \forall x_2 > x_1 \in [a, b] \tag{76}$$

*Si dice **strettamente crescente** se*

$$f(x_2) \quad f(x_1) \quad \forall x_2 > x_1 \in [a,b] \tag{77}$$

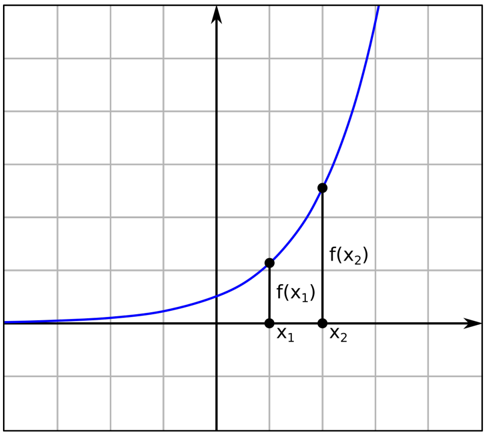


Figure 8: il grafico di una funzione crescente

**Definizione 30:**
*Una funzione* $f : [-a,a] \rightarrow \mathbb{R}$ *si dice* ***decrescente*** *se*

$$f(x_2) \;\leq\; f(x_1) \quad \forall x_2 > x_1 \in [a,b] \tag{78}$$

*Si dice* ***strettamente decrescente*** *se*

$$f(x_2) \;<\; f(x_1) \quad \forall x_2 > x_1 \in [a,b] \tag{79}$$

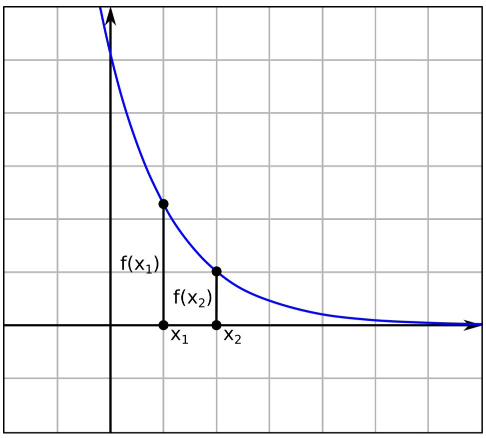


Figure 9: il grafico di una funzione decrescente

## 3.8 Funzioni inverse

Se i punti di una funzione $f : A \rightarrow B \quad A, B \subseteq \mathbb{R}$ si ottengono dalle coppie $(a, b) \in A \times B$

**Definizione 31:**
*Il grafico di una funzione inversa si ottiene invertendo le coordinate dei punti del grafico. Ovvero i punti del grafico della* ***funzione inversa*** *si ottengono dalle coppie* $(b, a) \in B \times A$ *// Per via grafica esso può essere ottenuto* ***riflettendo*** *il grafico rispetto alla* ***bisettrice*** *del* ***primo*** *e* ***terzo quadrante***

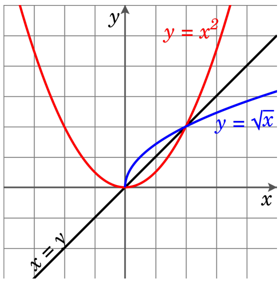


Figure 10: Il grafico di una funzione inversa

## 3.9 Modelizzazione matematica

**Definizione 32:**
*Per* ***modelizzazione matematica*** *si intende un porcesso che ha per scopo quello di* ***interpretare*** *fenomeni legati al mondo reale partendo da dati sperimentali e* ***traducendoli*** *in* ***problemi matematici***

Per passare da un fenomeno reale alla sua descrizione mediante modello matematico è necessario un processo di **astrazione** e **traduzione** del fenomeno in termini matematici e rigorosi.

Quando si vuole modelizzare un certo fenomeno, si vuole capire **come** le variabili coinvolte siano in relazione tra loro, ovvero stabilire delle **leggi matematiche** che descrivono queste relazioni.

La procedura di modelizzazione è:

1. si identifica l'incognita del problema
2. si analizza il fenomeno fisico e si raccolgono informazioni
3. si individuano le relazioni tra le informazioni raccolte, che poi vengono tradotte in equazioni

4. si risolvono le equazioni ottenute e se ne verifica la validità del modello

In un modello matematico che coinvolge due grandezze x ed y ci interessa capire come la **variabile dipendente** ($y$) varia al variare di quella **indipendente**

Esempio 6.
Supponiamo di aver formulato la legge $y = f(x)$
Se il modello è giusto potremmo ricavare il valore di $y$ a partire da qualsiasi valore di $x$ senza effettuare ulteriori esperimenti e misurazioni.
Rappresentandolo graficamente:

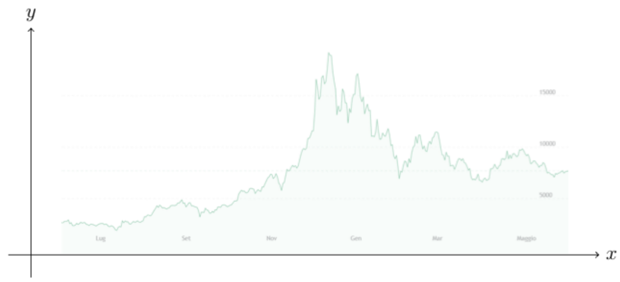


Figure 11: Il grafico dell'andamento dei bitcoin

Questo è il grafico di $y = f(x)$ dove y="valore del bitcoin in dollari" e x="tempo".

## 3.10 Proporzioni

**Definizione 33:**
*Due grandezze $A$ e $B$ si dicono* ***direttamente proprozionali*** *se esiste un numero $c$ detto* ***costante di proporzionalità*** *tale che:*

$$A = cB \tag{80}$$

Questo significa che le due grandezze sono legate da una certa legge, per la quale quando una raddoppia, triplica, dimezza, di conseguenza la seconda raddoppia, triplica, dimezza etc.

Esempio 7.
$A$ = "quantità di chilometri che l'auto può percorrere"
$B$ = "litri di carburante nel serbatoio"

**Definizione 34:**
*Due grandezze A e B si dicono* ***inversamente proprozionali*** *se esiste un numero c detto* ***costante di proporzionalità*** *tale che:*

$$AB \ = \ c \tag{81}$$

Questo significa che le due grandezze sono tali che all'aumentare di una, l'altra diminuisce proporzionalmente.

Esempio 8.
$A$ = "numero di partecipanti all'acquisto di un immobile"
$B$ = "quota per partecipante"
$c$ = costo dell'immobile

# 4 Combinatoria e probabilità

## 4.1 Introduzione

**Definizione 35:**
*L'**analisi combinatoria** è la branca della matematica applicata per risolvere problemi nel quale è necessario saper "contare" efficacemente esiti e probabilità di determinate situazioni.*
*Essa è infatti la disciplina che ci permette di* ***contare senza contare***

## 4.2 Combinatoria

**Definizione 36** (Principio di moltiplicazione)**:**
*Un insieme X soddisfa le ipotesi del principio di moltiplicazione se:*

- *è possibile ottenere ciascuno dei suoi elementi come risultato di una procedura composta da n fasi successive.*
- *se ad una fase interemedia si sono ottenuti due esisti distinti allora la procedura conduce ad elementi distinti di X*

*Nella prima fase avremo $m_1$ possibili esiti nella seconda fase avremo $m_2$ esiti sino alla n-esima fase avremo $m_n$ esiti*

$$|X| \ = m_1 \ \times \ m_2 \ \times \ ... \ \times \ m_k \tag{82}$$

Esercizio 6.
Calcoliamo il numero di coppie ordinate $(a, b)$ contenenti un numero primo ed uno non primo compresi tra 1 ed 8

DIMOSTRAZIONE 13.
I numeri primi tra 1 e 8 sono $\{2, 3, 5, 7\}$ mentre i numeri non primi tra 1 e 8 sono $\{1, 4, 6, 8\}$

I. Scegliamo un qualsiasi elemento di $I_8$: abbiamo 8 possibilità.

II. Se il primo elemento era primo il secondo non lo sarà, e viceversa se il numero non era primo. In ogni caso avremo 4 distinte possiblità

Il numero di coppie è: $8 \times 4 = 32$

ESERCIZIO 7.
Consideriamo un'estrazione in successione di 3 numeri della tombola **tenendo conto dell'ordine**. Quanti sono i possibili esiti?

DIMOSTRAZIONE 14.
I numeri della tombola sono 90. Gli scenari possibili sono 2:
Nel primo caso **senza rimpiazzo** se ogni numero può essere scelto una volta sola, mentre sarà **con rimpiazzo** se un numero può essere scelto più di una volta.

Nel primo caso $(a_1, a_2, a_3) \; :\to \; (a_1 \neq a_2 \neq a_3)$ :

I FASE: $a_1 = 90$

II FASE: $a_2 = 90 - 1 = 89$

III FASE: $a_3 = 90 - 2 = 88$

Quindi il numero di possibili esiti è:

$$90 \times 89 \times 88 = 704880 \tag{83}$$

Nel secondo caso $(a_1, a_2, a_3) :\to (a_1 = a_2 = a_3)$:

I FASE: $a_1 = 90$

II FASE: $a_2 = 90$

III FASE: $a_3 = 90$

Quindi il numero di possibili esiti è:

$$90 \times 90 \times 90 = 90^3 = 729000 \tag{84}$$

**Definizione 37:**
*Definiamo una regola general per $k$-sequenze di $I_n$. Siano $k, n \in \mathbb{N}$ definiamo $k$-sequenza di $I_n$ una $k$-upla* ***ordinata*** *$(a_1, \dots, a_k)$ di elementi* ***non necessariamente distinti*** *di $I_n$ Ovvero:*

$$(a_1, \dots, a_k) \in \underbrace{I_n \times \ \dots \ \times \ I_n} \tag{85}$$

Nella definzione di sequenze l'ordine degli elementi della $k$-upla è importante: le 3-sequenze (2, 1 ,3 ) e (3, 1, 2) sono diverse anceh se composte dagli stessi numeri. Vengono comunemente dette **disposizioni** di **n** oggetti a $k$ a $k$

Esempio 9.
Sia $I_4 = 1, 2, 3, 4$. Allora

$$(1, 2, 3, 3, 4), \qquad (1, 1, 1, 1, 1), \qquad (2, 2, 1, 3, 4) \tag{86}$$

sono 5-sequenze di $I_4$. Invece

$$(1, 2, 3), \qquad (1, 1, 1), \qquad (2, 3, 4) \tag{87}$$

sono 3-sequenze di $I_4$

## 4.3 Fattoriale

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \tag{88}$$

$$n! = \begin{cases} n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots 3 \times 2 \times 1 & \text{se } n \geq 1 \\ 1 & \text{se } n = 0 \end{cases} \tag{89}$$

**Definizione 38:**
*Il* ***fattoriale*** *di un numero equivale al prodotto di quel numero per tutti i numeri che lo precedono. I valori dei fattoriale crescono esponenzialmente*

$$0! = 1 \qquad 5! = 120 \qquad 6! = 720 \qquad 7! = 5040 \qquad 10! = 3628800 \tag{90}$$

## 4.4 Numero di Insiemi

**Definizione 39:**
*Il* ***numero di sottoinsiemi*** *di $k$ elementi di $I_n$ si distinguono esclusivamente dagli elementi di cui fanno parte:* ***l'ordine non conta****.*

Spesso un sottoinsieme di $k$ elementi di un insieme di $n$ elementi viene chiamato **combinazione** (semplice, senza ripetizioni) di $n$ elementi a $k$ a $k$

**Definizione 40:**
*Siano $k, n \in \mathbb{N}$ il **binomiale** di $n$ su $k$ è:*

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & se k \leq n, \\ 0, & se k > n. \end{cases} \tag{91}$$

*Il numero di sottoinsiemi di $k$ elementi di $I_n$ è*

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}. \tag{92}$$

Esempio 10.
Calcola i sotttoinsiemi con 3 elementi di $I_6$

Dimostrazione 15.
La soluzione è data da una semplice applicazione della formula prima vista:

$$\begin{Bmatrix} 6 \\ 3 \end{Bmatrix} = \frac{6!}{3!3!} = 20 \tag{93}$$

Esempio 11.
Calcola il numero di partite giocate nella fase a gironi dei Mondiali di calcio. Ci sono 32 squadre divise in 8 gironi da 4 squadre ed in ogni girone una squadra deve giocare contro le altre una volta sola.

Dimostrazione 16.
Il numero di partite totale è 8 volte le partite giocate in un singolo girone. L'insieme delle 4 squadre in un girone possiamo identificarlo con $I_4$, e una partita tra 2 squadre con un sottoinsieme di 2 elementi di $I_4$. Il numero di partite giocate in un girone**è il numero di sottoinsiemi** di 2 elementi di $I_4$ ovvero:

$$\begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 2} = \frac{24}{4} = 6 \tag{94}$$

Infine il risultato equivale a: $6 \times 8 = 48$