Appunti

Andreas Araya Osorio

3 June 2021

1 Funzioni

1.1 Introduzione

Definizione 1:
*Una funzione f é una relazione tra gli elementi di due insieme A e B che ad ogni elemento di **A** associa **uno ed un solo** elemento di **B**.*

Una funzione è definita assegnando:

- un insieme A detto DOMINIO
- un insieme B detto CODOMINIO
- una relazione $f : A \to B$ che associa ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B

1.2 Tipi di funzioni

Una funzione $f(x)$ può essere di 3 tipi:

1. **suriettiva**
2. **iniettiva**
3. **biiettiva** se è sia **iniettiva** e **suriettiva**

Definizione 2:
*Una funzione si dice **iniettiva** quando ad elementi **distinti** del* DOMINIO corrispondono elementi **distinti** del CODOMINIO

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \tag{1}$$

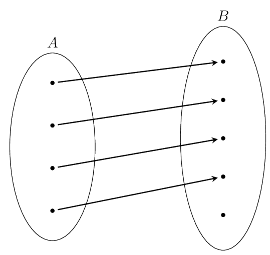

Figure 1: grafico iniettiva

Definizione 3:
*Una funzione si dice **suriettiva** qunado **ogni** elemento del codominio è immagine di **almeno** un elemento del dominio.*

$$b \in B \to \exists a \in A : f(a) = b \tag{2}$$

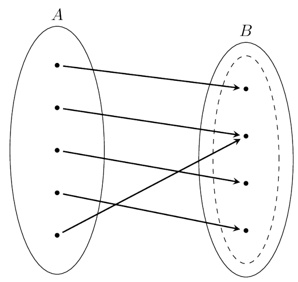

Figure 2: graifco suriettiva

Esercizio 1.
Dimostra di che tipo è questa funzione:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2 \tag{3}$$

Dimostrazione 1.
Non può essere iniettiva perchè per ogni numero reale positivo ne esiste uno uguale negativo, il cui qudrato sarà il **medesimo**.

$$se \quad x_1 = -x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = f(x_2) \tag{4}$$

si può provare inoltre che non è una funzione suriettva in quanto **nessun** numero negativo fa parte del codominio ed esso è formato da $\mathbb{R}$ dunque

$$-4 \neq f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{5}$$

Esercizio 2.
Dimostra di che tipo è questa funzione:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad f(x) = x^2 \tag{6}$$

Dimostrazione 2.
se cambiamo il dominio e il codominio nell'insieme dei numeri naturali e consideriamo la stessa legge possiamo dedurre che:

$$\forall n, m : n \neq m \quad \Rightarrow \quad n^2 \neq m^2 \tag{7}$$

Per **qualsiasi** coppia di numeri naturali diversi fra loro non è possibile pensare che il loro quadrato sia uguale, per tanto la funzione è iniettiva. Inoltre **qualsiasi** numero dispari non avrà una propria immagine, in quanto l'insieme racchiude **solo** numeri interi positivi. Ovvero:

$$\exists \frac{x}{2} \in \mathbb{N} : \{y = x + 1\} \quad \Rightarrow \quad y \neq n^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{8}$$

1.3 Funzioni invertibili

Definizione 4:
Una funzione $f : A \to B$ si dice invertibile se esiste una funzione $g : B \to A$ chiamata funzione inversa tale che:

- $\forall a \in A, \quad g(f(a)) = a$
- $\forall b \in B, \quad f(g(b)) = b$

*Essa si può considerare invertibile se è **biiettiva**.*

Esercizio 3.
Dimostra se la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = 2x + 1$ è inversibile.

Dimostrazione 3.
Ponendo l'equazione $y = 2x + 1$ deduciamo che

$$f^{(-1)}(x) = \frac{x - 1}{2} \tag{9}$$

quindi:

$$f^{(-1)}(f(x)) = f^{(-1)}(2x + 1) = \frac{(2x + 1) - 1}{2} = x; \tag{10}$$

e allo stesso tempo

$$f(f^{(-1)}(y)) = f(\frac{y - 1}{2}) + 1 = y \tag{11}$$

1.4 Piano Cartesiano

Fissando un'origine e un'unità di misura ad **ogni** punto di una retta orientata corrisponde uno ed un solo numero reale. Si stabilisce così una **corrispondenza biunivoca** tra i punti della retta orientata e i numeri reali.
Data la funzione

$$f : A \to B \quad A, B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \tag{12}$$

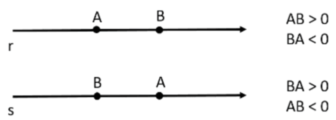

Figure 3: la retta orientata

Definizione 5:
Definiamo una ***coppia*** *di rette orientate disposte* ***perpendicolarmente*** *fra loro* ***assi coordinati****.*

- *La retta da destra verso sinistra viene chiamata* ***asse delle ascisse***
- *la retta dal basso verso l'alto viene chiamata* ***asse delle ordinate***

Il punto del piano in cui si incontrano viene chiamato ***origine degli assi*** *e viene indicato con O*

Un qualsiasi punto del piano P viene identificato con una ascissa x_p ed una ordinata y_p, quindi $P(x_p, y_p)$.
Il piano viene diviso in IV quadranti numerati in senso antiorario.

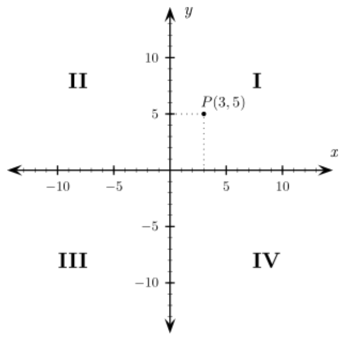

Figure 4: il piano cartesiano

1.5 Grafici di funzioni

Ora possiamo rappresentare graficamente coppie ordinate di numeri reali sul piano, quindi possiamo rappresentare il **grafico** di una funzione

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R} \tag{13}$$

e tutte le coppie $(x,\ f(x))$ tali che $x \in A$:

$$G(f) = \{(x,\ f(x))\} \ :\ x \in A \tag{14}$$

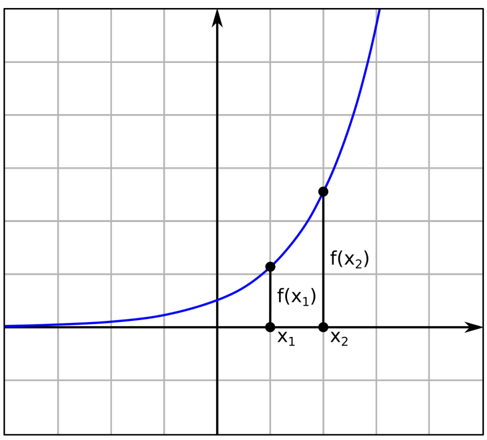

Figure 5: il grafico di una funzione crescente

1.6 Funzioni Pari e Dispari

Definizione 6:
*Una funzione $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **pari** se $f(x) = f(-x)$*

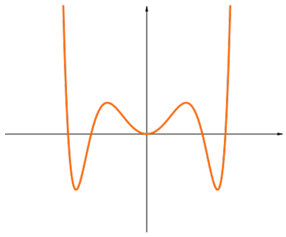

Figure 6: Una funzione pari

*Si deduce quindi che il grafico di una funzione così definita è simmetrico rispetto all'**asse delle ordinate***

Definizione 7:
*Una funzione $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **dispari** se $f(-x) = -f(x)$*
*Si deduce quindi che il grafico di una funzione così definita viene **specchiata** in due quadranti uno **oppsoto** all'altro*

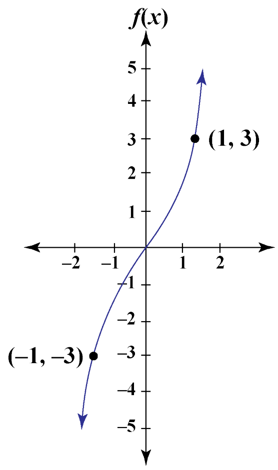

Figure 7: Una funzione dispari

1.7 Funzioni crescenti e decrescenti

Definizione 8:
*Una funzione $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **crescente** se*

$$f(x_2) \geq f(x_1) \quad \forall x_2 > x_1 \in [a, b] \tag{15}$$

*Si dice **strettamente crescente** se*

$$f(x_2) \quad f(x_1) \quad \forall x_2 > x_1 \in [a, b] \tag{16}$$

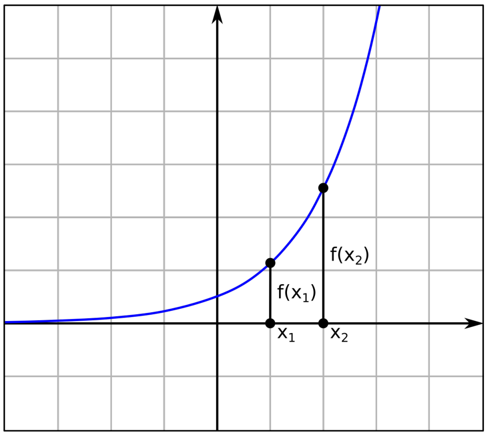

Figure 8: il grafico di una funzione crescente

Definizione 9:
Una funzione $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ *si dice* ***decrescente*** *se*

$$f(x_2) \;\leq\; f(x_1) \quad \forall x_2 > x_1 \in [a, b] \tag{17}$$

Si dice ***strettamente decrescente*** *se*

$$f(x_2) \;<\; f(x_1) \quad \forall x_2 > x_1 \in [a, b] \tag{18}$$

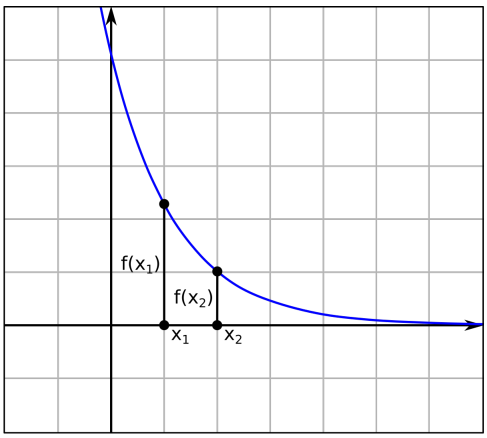

Figure 9: il grafico di una funzione decrescente

1.8 Funzioni inverse

Se i punti di una funzione $f : A \rightarrow B \quad A, B \subseteq \mathbb{R}$ si ottengono dalle coppie $(a, b) \in A \times B$

Definizione 10:
Il grafico di una funzione inversa si ottiene invertendo le coordinate dei punti del grafico. Ovvero i punti del grafico della ***funzione inversa*** *si ottengono dalle coppie* $(b, a) \in B \times A$ *// Per via grafica esso può essere ottenuto* ***riflettendo*** *il grafico rispetto alla* ***bisettrice*** *del* ***primo*** *e* ***terzo quadrante***

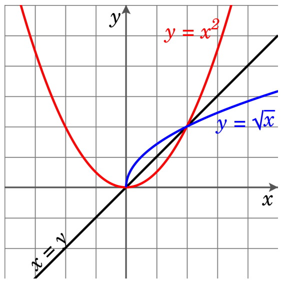

Figure 10: Il grafico di una funzione inversa

1.9 Modelizzazione matematica

Definizione 11:
Per ***modelizzazione matematica*** *si intende un porcesso che ha per scopo quello di* ***interpretare*** *fenomeni legati al mondo reale partendo da dati sperimentali e* ***traducendoli*** *in* ***problemi matematici***

Per passare da un fenomeno reale alla sua descrizione mediante modello matematico è necessario un processo di **astrazione** e **traduzione** del fenomeno in termini matematici e rigorosi.

Quando si vuole modelizzare un certo fenomeno, si vuole capire **come** le variabili coinvolte siano in relazione tra loro, ovvero stabilire delle **leggi matematiche** che descrivono queste relazioni.

La procedura di modelizzazione è:

1. si identifica l'incognita del problema
2. si analizza il fenomeno fisico e si raccolgono informazioni
3. si individuano le relazioni tra le informazioni raccolte, che poi vengono tradotte in equazioni

4. si risolvono le equazioni ottenute e se ne verifica la validità del modello

In un modello matematico che coinvolge due grandezze x ed y ci interessa capire come la **variabile dipendente** (y) varia al variare di quella **indipendente**

Esempio 1.
Supponiamo di aver formulato la legge $y = f(x)$
Se il modello è giusto potremmo ricavare il valore di y a partire da qualsiasi valore di x senza effettuare ulteriori esperimenti e misurazioni.
Rappresentandolo graficamente:

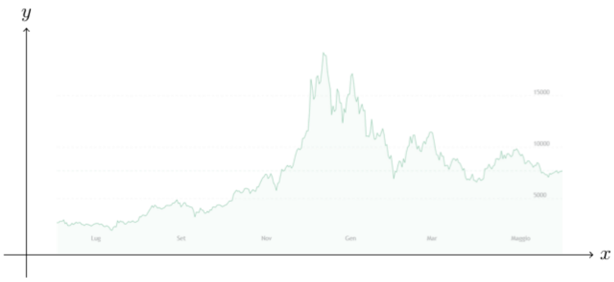

Figure 11: Il grafico dell'andamento dei bitcoin

Questo è il grafico di $y = f(x)$ dove y="valore del bitcoin in dollari" e x="tempo".

1.10 Proporzioni

Definizione 12:
*Due grandezze A e B si dicono **direttamente proprozionali** se esiste un numero c detto **costante di proporzionalità** tale che:*

$$A = cB \tag{19}$$

Questo significa che le due grandezze sono legate da una certa legge, per la quale quando una raddoppia, triplica, dimezza, di conseguenza la seconda raddoppia, triplica, dimezza etc.

Esempio 2.
A = "quantità di chilometri che l'auto può percorrere"
B = "litri di carburante nel serbatoio"

Definizione 13:
*Due grandezze A e B si dicono **inversamente proprozionali** se esiste un numero c detto **costante di proporzionalità** tale che:*

$$AB \;=\; c \tag{20}$$

Questo significa che le due grandezze sono tali che all'aumentare di una, l'altra diminuisce proporzionalmente.

Esempio 3.
A = "numero di partecipanti all'acquisto di un immobile"
B = "quota per partecipante"
c = costo dell'immobile

2 Combinatoria e probabilità

2.1 Introduzione

Definizione 14:
*L'**analisi combinatoria** è la branca della matematica applicata per risolvere problemi nel quale è necessario saper "contare" efficacemente esiti e probabilità di determinate situazioni.*
*Essa è infatti la disciplina che ci permette di **contare senza contare***

2.2 Combinatoria

Definizione 15 (Principio di moltiplicazione)**:**
Un insieme X soddisfa le ipotesi del principio di moltiplicazione se:

- *è possibile ottenere ciascuno dei suoi elementi come risultato di una procedura composta da n fasi successive.*
- *se ad una fase interemedia si sono ottenuti due esisti distinti allora la procedura conduce ad elementi distinti di X*

Nella prima fase avremo m_1 possibili esiti nella seconda fase avremo m_2 esiti sino alla n-esima fase avremo m_n esiti

$$|X| \;= m_1 \;\times\; m_2 \;\times\; ... \;\times\; m_k \tag{21}$$

Esercizio 4.
Calcoliamo il numero di coppie ordinate (a, b) contenenti un numero primo ed uno non primo compresi tra 1 ed 8

Dimostrazione 4.
I numeri primi tra 1 e 8 sono $\{2, 3, 5, 7\}$ mentre i numeri non primi tra 1 e 8 sono $\{1, 4, 6, 8\}$

I. Scegliamo un qualsiasi elemento di I_8: abbiamo 8 possibilità.

II. Se il primo elemento era primo il secondo non lo sarà, e viceversa se il numero non era primo. In ogni caso avremo 4 distinte possiblità

Il numero di coppie è: $8 \times 4 = 32$

Esercizio 5.
Consideriamo un'estrazione in successione di 3 numeri della tombola **tenendo conto dell'ordine**. Quanti sono i possibili esiti?

Dimostrazione 5.
I numeri della tombola sono 90. Gli scenari possibili sono 2:
Nel primo caso **senza rimpiazzo** se ogni numero può essere scelto una volta sola, mentre sarà **con rimpiazzo** se un numero può essere scelto più di una volta.
Nel primo caso $(a_1, a_2, a_3) \; :\rightarrow \; (a_1 \neq a_2 \neq a_3)$:

I fase: $a_1 = 90$

II fase: $a_2 = 90 - 1 = 89$

III fase: $a_3 = 90 - 2 = 88$

Quindi il numero di possibili esiti è:

$$90 \times 89 \times 88 = 704880 \tag{22}$$

Nel secondo caso $(a_1, a_2, a_3) :\rightarrow (a_1 = a_2 = a_3)$:

I fase: $a_1 = 90$

II fase: $a_2 = 90$

III fase: $a_3 = 90$

Quindi il numero di possibili esiti è:

$$90 \times 90 \times 90 = 90^3 = 729000 \tag{23}$$

Definizione 16:
*Definiamo una regola general per k-sequenze di I_n. Siano $k, n \in \mathbb{N}$ definiamo k-sequenza di I_n una k-upla **ordinata** $(a_1, \ldots, a_k)$ di elementi **non necessariamente distinti** di I_n Ovvero:*

$$(a_1, \ldots, a_k) \in \underbrace{I_n \times \ \ldots \ \times \ I_n} \tag{24}$$

Nella definzione di sequenze l'ordine degli elementi della k-upla è importante: le 3-sequenze (2, 1 ,3) e (3, 1, 2) sono diverse anceh se composte dagli stessi numeri. Vengono comunemente dette **disposizioni** di **n** oggetti a k a k

Esempio 4.
Sia $I_4 = 1, 2, 3, 4$. Allora

$$(1, 2, 3, 3, 4), \qquad (1, 1, 1, 1, 1), \qquad (2, 2, 1, 3, 4) \tag{25}$$

sono 5-sequenze di I_4. Invece

$$(1, 2, 3), \qquad (1, 1, 1), \qquad (2, 3, 4) \tag{26}$$

sono 3-sequenze di I_4

2.3 Fattoriale

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \tag{27}$$

$$n! = \begin{cases} n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots 3 \times 2 \times 1 & \text{se } n \geq 1 \\ 1 & \text{se } n = 0 \end{cases} \tag{28}$$

Definizione 17:
*Il **fattoriale** di un numero equivale al prodotto di quel numero per tutti i numeri che lo precedono. I valori dei fattoriale crescono esponenzialmente*

$$0! = 1 \qquad 5! = 120 \qquad 6! = 720 \qquad 7! = 5040 \qquad 10! = 3628800 \tag{29}$$

2.4 Numero di Insiemi

Definizione 18:
*Il **numero di sottoinsiemi** di k elementi di I_n si distinguono esclusivamente dagli elementi di cui fanno parte: **l'ordine non conta**.*

Spesso un sottoinsieme di k elementi di un insieme di n elementi viene chiamato **combinazione** (semplice, senza ripetizioni) di n elementi a k a k

Definizione 19:
Siano $k, n \in \mathbb{N}$ il ***binomiale*** *di n su k è:*

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & sek \ \leq \ n, \\ 0, & sek \ > n. \end{cases} \tag{30}$$

Il numero di sottoinsiemi di k elementi di I_n è

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}. \tag{31}$$