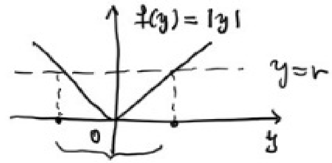
Esercizi Risolti : disuguaglianze

1) • $\underbrace{|x-a|}_{y=} \leq r \iff |y| \leq r$



$|y| \leq r$ è vera se $y \in [-r, r]$.

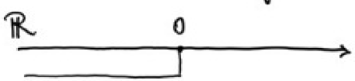
Perciò $|x-a| \leq r$ è vera (cioè, è risolta) per

$-r \leq x-a \leq r$, cioè $a-r \leq x \leq a+r$ ossia

$$x \in [a-r, a+r]$$

2) • $\boxed{x^3 + x < 0} \iff x \underbrace{(x^2+1)}_{>0} < 0 \iff x < 0$

Cioè la disug. è vera se $x<0$, ossia



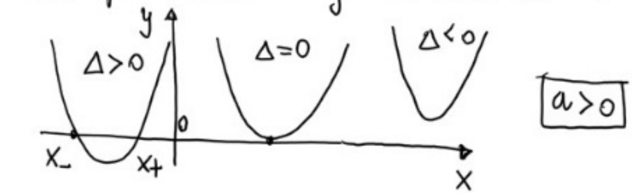
, ossia $x \in]-\infty, 0[$.

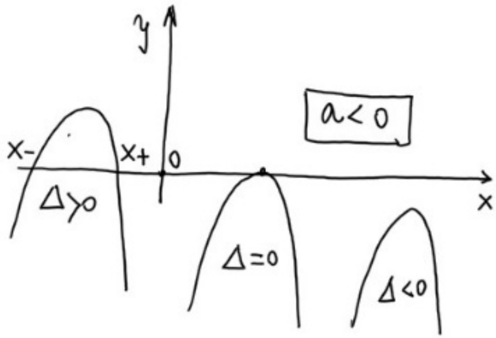
3) • $x^2 - 2x + 1 > 0$. Si ha $a=1$, $\Delta = b^2 - 4ac = -8 < 0$.

Allora $a>0$, $\Delta<0$ implicano che la disug. è sempre vera.

Infatti $ax^2+bx+c=0 \iff x_\pm = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

La parabola $y=ax^2+bx+c$ è come in fig.:



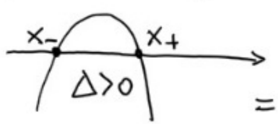


---

4) $-3x^2+4x+5<0 \iff$

$$x_\pm = \frac{-4\pm\sqrt{16+60}}{-6} = \frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{76/4}}{3} = \frac{2\pm\sqrt{19}}{3}$$

$\boxed{a<0}$



$Sol = \{x\in\mathbb{R} : x<x_- \text{ o } x>x_+\}$

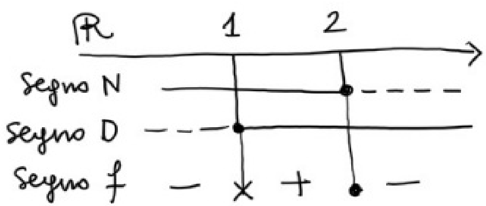
$=]-\infty, x_-[\cup]x_+, +\infty[$

$=]-\infty, \frac{2-\sqrt{19}}{3}[\cup]\frac{2+\sqrt{19}}{3}, +\infty[$

5) $\dfrac{2-x}{x-1} \geq 0$ $\qquad f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)} \quad (D(x) \neq 0)$

(Segno N) $\quad N \geq 0 \iff 2-x \geq 0 \iff x \leq 2$

(Segno D) $\quad D \leq 0 \iff x-1 \geq 0 \iff x \geq 1$



linea continua $\iff$ segno "+"

linea tratteggiata $\iff$ segno "$-$"

Il segno di f è dato dal prodotto dei segni di N e D.

NB "x" significa $\nexists$

---

6) $|x-1| \leq |x+1|$. Dato che sono ≥ 0, si possono elevare al quadrato ambo i membri

$\iff$

$|x-1|^2 \leq |x+1|^2 \iff$

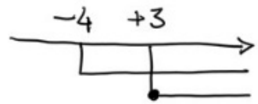
$x^2 - 2x + 1 \leq x^2 + 2x + 1 \iff 4x \geq 0 \iff x \geq 0$

Perciò la disug. è vera se $x \in [0, +\infty[= \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$

7) $|x-3| < 2x+1 \iff \begin{cases} (\mathrm{I}) \begin{cases} x-3 < 2x+1 \\ x \geq 3 \end{cases} \\ (\mathrm{II}) \begin{cases} 3-x < 2x+1 \\ x < 3 \end{cases} \end{cases}$

Adesso

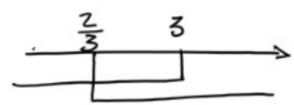
$(\mathrm{I}) \iff \begin{cases} x > -4 \\ x \geq +3 \end{cases}$



che è vera solo se entrambe soddisfatte (cioè si "intersecano le soluzioni") -

(I) risolto per $x \geq 3$ (cioè $x \in [3,+\infty[$)

$(\mathrm{II}) \iff \begin{cases} 3x > 2 \\ x < 3 \end{cases} \iff x > \frac{2}{3}$



(II) è risolto per $x \in]\frac{2}{3}, 3[$.

Quindi la soluzione è $]\frac{2}{3}, 3[\cup [3,+\infty[=$

$=]\frac{2}{3}, +\infty[$

8) $$\boxed{2+\frac{1}{x-1}\geq\frac{1}{x+1}} \iff$$

$$\underbrace{2+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}\geq 0$$

$$\iff \frac{2(x^2-1)+\cancel{(x}+1)-\cancel{(x}-1)}{(x-1)(x+1)}\geq 0$$

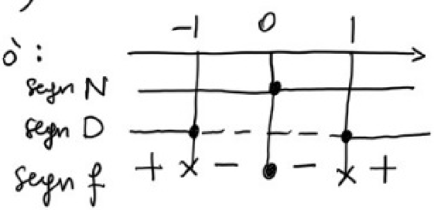
$$\iff \frac{2x^2\cancel{-1}\cancel{+1}}{x^2-1}\geq 0$$

$$\iff f(x)=\frac{2x^2}{x^2-1}\geq 0 \iff \begin{cases} 2x^2\geq 0 & \text{sempre} \\ x^2\neq 1 & (\exists) \\ x^2>1 \end{cases}$$

NB $x^2\neq 1$ è la cond. di esistenza

D'altre parte $N(x)\geq 0$ sempre ($=0$ solo se $x=0$).

Perciò:



La soluzione è $]-\infty,-1[\,\cup\,\{0\}\,\cup\,]1,+\infty[$