Simulazione Esame 22/12/2021

Cavalli Riccardo

January 13, 2022

Esercizio 1

Mostrare se i sequenti elencati sotto sono tautologie, opinioni o paradossi in logica classica con uguaglianza motivando la risposta: nel caso di sequente proposizionale non valido si indichi la riga della tabella di verità in cui il sequente è falso e nel caso di sequente predicativo non valido si mostri un contromodello (nel caso di non validità si assegna il doppio dei punti indicati).

A (3 punti): B ⊢ ¬(B & ¬B) & ¬ B

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\neg -ax_{sx1}\\ B, B, \neg B \vdash\end{array}}{B, B \,\&\, \neg B \vdash}\ \&\text{ -S}}{B \vdash \neg(B \,\&\, \neg B)}\ \neg\text{ -D} \qquad \dfrac{B, B \vdash}{B \vdash \neg B}\ \neg\text{ -D}}{B \vdash \neg(B \,\&\, \neg B) \,\&\, \neg B}\ \&\text{ -D}$$

La foglia B, B ⊢ diventa falsa per B = 1 e quindi anche il sequente radice è falso in tal riga.

Provo a negare il sequente radice: ⊢ ¬(B → ¬(B & ¬B) & ¬ B)

$$\dfrac{\dfrac{\vdash B \qquad \neg(B \,\&\, \neg B) \,\&\, \neg B \vdash}{B \to \neg(B \,\&\, \neg B) \,\&\, \neg B \vdash}\ \to\text{ -S}}{\vdash \neg(B \to \neg(B \,\&\, \neg B) \,\&\, \neg B)}\ \neg\text{ -D}$$

La foglia ⊢ B è falsa per B = 0 e quindi anche il sequente radice è falso in tal riga.
Essendo questo la negazione del sequente di partenza, allora il sequente originale è vero su tal riga.

Il sequente di partenza è quindi un'opinione.

B (6 punti): ¬ ∀x ∀y y=x, a = b ⊢ ∀x ∃y ¬x = y

$$\begin{array}{cl}
ax-id & \\
w = x, a = b, w = z \vdash w = z & \\ \hline
a = b, w = z, w = x \vdash x = z & = \text{ -S} \\ \hline
a = b, w = z \vdash \neg w = x, x = z & \neg\text{ -D} \\ \hline
a = b, w = z \vdash \exists y\ \neg w = y, x = z & \exists -D_v \\ \hline
a = b \vdash \neg w = z, \exists y\ \neg w = y, x = z & \neg\text{ -D} \\ \hline
a = b \vdash \exists y\ \neg w = y, x = z & \exists\text{ -D} \\ \hline
a = b \vdash x = z, \exists y\ \neg w = y & sc_{dx} \\ \hline
a = b \vdash \forall y\ y = z, \exists y\ \neg w = y & \forall\text{ -D (x} \notin \text{VL)} \\ \hline
a = b \vdash \forall x\ \forall y\ y = x, \exists y\ \neg w = y & \forall\text{ -D (z} \notin \text{VL)} \\ \hline
a = b, \neg\forall x\ \forall y\ y = x \vdash \exists y\ \neg w = y & \neg\text{ -S} \\ \hline
\neg\forall x\ \forall y\ y = x, a = b \vdash \exists y\ \neg w = y & sc_{sx} \\ \hline
\neg\forall x\ \forall y\ y = x, a = b \vdash \forall x\ \exists y\ \neg x = y & \forall\text{ -D (w} \notin \text{VL)}
\end{array}$$

Il sequente radice è derivabile, quindi è una tautologia.

C (5 punti): $\exists$z A(z), $\neg$ $\forall$x A(x) $\vdash$ $\neg$ $\forall$y $\neg$A(y)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\neg -ax_{sx1}}{A(w),\neg A(w)\vdash}}{A(w),\forall y\neg A(y)\vdash}\;\forall -S_v}{\forall y\neg A(y),A(w)\vdash}\;sc_{sx}}{\forall y\neg A(y),\exists zA(z)\vdash}\;\exists\text{ -S (w} \notin \text{VL)}}{\exists zA(z),\forall y\neg A(y)\vdash}\;sc_{sx}}{\exists zA(z),\neg\forall xA(x),\forall y\neg A(y)\vdash}\;in_{sx}}{\exists zA(z),\neg\forall xA(x)\vdash\neg\forall y\neg A(y)}\;\neg\text{ -D}$$

Il sequente radice è derivabile, quindi è una tautologia.

Esercizio 2

Formalizzare le seguenti asserzioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono tautologie, opinioni o paradossi nella logica classica con uguaglianza motivando la risposta: nel caso di sequente predicativo non valido si mostri un contromodello (nel caso di non validità si assegna il doppio dei punti indicati)

A (6 punti): $\forall$x($\neg$C(x) $\rightarrow$ $\neg$T(x)), $\forall$x($\neg$T(x) $\rightarrow$ C(x)) $\vdash$ $\forall$x C(x)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\neg -ax_{dx2}}{\vdash\neg C(w),\neg T(w),C(w)}\qquad\overset{ax-id}{\neg T(w)\vdash\neg T(w),C(w)}}{\neg C(w)\to\neg T(w)\vdash\neg T(w),C(w)}\;\to\text{ -S}}{\forall x(\neg C(x)\to\neg T(x))\vdash\neg T(w),C(w)}\;\forall -S_v\qquad\overset{ax-id}{\forall x(\neg C(x)\to\neg T(x)),C(w)\vdash C(w)}}{\forall x(\neg C(x)\to\neg T(x)),\neg T(w)\to C(w)\vdash C(w)}\;\to\text{ -S}}{\forall x(\neg C(x)\to\neg T(x)),\forall x(\neg T(x)\to C(x))\vdash C(w)}\;\forall -S_v}{\forall x(\neg C(x)\to\neg T(x)),\forall x(\neg T(x)\to C(x))\vdash\forall xC(x)}\;\forall\text{ -D (w} \notin \text{VL)}$$

Il sequente radice è derivabile, quindi è una tautologia.

B (6 punti): $\neg$ $\exists$x C(x) $\vdash$ $\exists$x($\neg$C(x) & $\neg$T(x))

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\neg -ax_{dx2}}{\vdash\neg C(x),\exists x(\neg C(x)\,\&\,\neg T(x)),C(x),\exists xC(x)}\qquad\dfrac{T(x)\vdash\exists x(\neg C(x)\,\&\,\neg T(x)),C(x),\exists xC(x)}{\vdash\neg T(x),\exists x(\neg C(x)\,\&\,\neg T(x)),C(x),\exists xC(x)}\;\neg\text{ -D}}{\vdash\neg C(x)\,\&\,\neg T(x),\exists x(\neg C(x)\,\&\,\neg T(x)),C(x),\exists xC(x)}\;\&\text{ -D}}{\vdash\exists x(\neg C(x)\,\&\,\neg T(x)),C(x),\exists xC(x)}\;\exists\text{ -D}}{\vdash C(x),\exists xC(x),\exists x(\neg C(x)\,\&\,\neg T(x))}\;sc_{dx}}{\vdash\exists xC(x),\exists x(\neg C(x)\,\&\,\neg T(x))}\;\exists\text{ -D}}{\neg\exists xC(x)\vdash\exists x(\neg C(x)\,\&\,\neg T(x))}\;\neg\text{ -S}$$

La foglia che non si riesce a derivare

T(x) $\vdash$ $\exists$x($\neg$C(x) & $\neg$T(x)), C(x), $\exists$x C(x)

suggerisce il seguente contromodello

D_{contra} = { Minni }

$T(x)^{D_{contra}}$(Minni) = 1

$C(x)^{D_{contra}}$(Minni) = 0

Il sequente radice non vale in tal modello perchè

$(\exists x\ C(x))^{D_{contra}} = 0$ perchè ci sono solo falsari nel dominio dato che c'è solo Minni

$(\neg\ \exists x\ C(x))^{D_{contra}} = \neg(\exists x\ C(x))^{D_{contra}} = \neg 0 = 1$

$(\exists x(\neg C(x)\ \&\ \neg T(x)))^{D_{contra}} = 0$ perchè $(\neg C(x)\ \&\ \neg T(x))^{D_{contra}} = 0$ avendo $C(x)^{D_{contra}}(\text{Minni}) = 0$ e $T(x)^{D_{contra}}(\text{Minni}) = 1$

Quindi $(\neg\ \exists x\ C(x) \vdash \exists x(\neg C(x)\ \&\ \neg T(x)))^{D_{contra}} = (\neg\ \exists x\ C(x))^{D_{contra}} \vdash (\exists x(\neg C(x)\ \&\ \neg T(x)))^{D_{contra}} = 1 \vdash 0 = 0$

Provo a negare il sequente radice: $\vdash \neg(\neg\ \exists x\ C(x) \to \exists x(\neg C(x)\ \&\ \neg T(x)))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{C(w) \vdash}{\exists x C(x) \vdash}\ \exists\text{ -S (w} \notin \text{VL)}}{\vdash \neg\exists x C(x)}\ \neg\text{ -D} \qquad \exists x(\neg C(x)\ \&\ \neg T(x)) \vdash}{\neg\exists x C(x) \to \exists x(\neg C(x)\ \&\ \neg T(x)) \vdash}\ \to\text{ -S}}{\vdash \neg(\neg\exists x C(x) \to \exists x(\neg C(x)\ \&\ \neg T(x)))}\ \neg\text{ -D}$$

La foglia che non si riesce a derivare

$C(w) \vdash$

suggerisce il seguente contromodello

$D_{contra} = \{\ \text{Minni}\ \}$

$C(w)^{D_{contra}}(\text{Minni}) = 1$

$T(w)^{D_{contra}}(\text{Minni}) = $ a piacere

Il sequente radice non vale in tal modello perchè

$(\exists x\ C(x))^{D_{contra}} = 1$ perchè $C(w)^{D_{contra}}(\text{Minni}) = 1$ (c'è un testimone)

$(\neg\ \exists x\ C(x))^{D_{contra}} = \neg(\exists x\ C(x))^{D_{contra}} = \neg 1 = 0$

Quindi $\neg((\neg\ \exists x\ C(x) \to \exists x(\neg C(x)\ \&\ \neg T(x)))^{D_{contra}}) =$
$\neg((\neg\ \exists x\ C(x))^{D_{contra}} \to (\exists x(\neg C(x)\ \&\ \neg T(x)))^{D_{contra}}) = \neg(0 \to ?) = \neg 1 = 0$

Questo contromodello è un modello del sequente di partenza essendo l'ultimo sequente analizzato la negazione di quello di partenza.

Infatti il sequente di partenza $(\neg\ \exists x\ C(x) \vdash \exists x(\neg C(x)\ \&\ \neg T(x)))^{D_{contra}} = 0 \to\ ?\ = 1.$

Quindi il sequente di partenza è un'opinione avendo un modello e un contromodello.

C (12 punti): ∀x ∃y((M(y,x) & ∀y1 ∀y2 (M(y1,x) & M(y2,x) → y1 = y2)) & ¬x = y) ⊢ ¬e = r → ¬M(e,l) ∨ (¬M(r,l) & ¬M(l,l))

$$
\begin{array}{cl}
\begin{array}{cc} \text{Per il ramo sx della \& da destra.} & \text{Per il ramo dx della \& da destra.} \\ \text{Vai sotto} & \text{Vai sotto} \\ \uparrow & \uparrow \end{array} & \\
\hline
M(w,l), \forall y1 \forall y2 (M(y1,l) \;\&\; M(y2,l) \rightarrow y1 = y2) \vdash \neg M(r,l) \;\&\; \neg M(l,l), l = w, e = r, \neg M(e,l) & \& \text{ -D} \\
\hline
M(w,l), \forall y1 \forall y2 (M(y1,l) \;\&\; M(y2,l) \rightarrow y1 = y2) \vdash l = w, e = r, \neg M(e,l), \neg M(r,l) \;\&\; \neg M(l,l) & sc_{dx} \\
\hline
M(w,l) \;\&\; \forall y1 \forall y2 (M(y1,l) \;\&\; M(y2,l) \rightarrow y1 = y2) \vdash l = w, e = r, \neg M(e,l), \neg M(r,l) \;\&\; \neg M(l,l) & \& \text{ -S} \\
\hline
M(w,l) \;\&\; \forall y1 \forall y2 (M(y1,l) \;\&\; M(y2,l) \rightarrow y1 = y2), \neg l = w \vdash e = r, \neg M(e,l), \neg M(r,l) \;\&\; \neg M(l,l) & \neg \text{ -S} \\
\hline
(M(w,l) \;\&\; \forall y1 \forall y2 (M(y1,l) \;\&\; M(y2,l) \rightarrow y1 = y2)) \;\&\; \neg l = w \vdash e = r, \neg M(e,l), \neg M(r,l) \;\&\; \neg M(l,l) & \& \text{ -S} \\
\hline
\exists y ((M(y,l) \;\&\; \forall y1 \forall y2 (M(y1,l) \;\&\; M(y2,l) \rightarrow y1 = y2)) \;\&\; \neg l = y) \vdash e = r, \neg M(e,l), \neg M(r,l) \;\&\; \neg M(l,l) & \exists \text{ -S (w} \notin \text{VL)} \\
\hline
\forall x \exists y ((M(y,x) \;\&\; \forall y1 \forall y2 (M(y1,x) \;\&\; M(y2,x) \rightarrow y1 = y2)) \;\&\; \neg x = y) \vdash e = r, \neg M(e,l), \neg M(r,l) \;\&\; \neg M(l,l) & \forall -S_v \\
\hline
\forall x \exists y ((M(y,x) \;\&\; \forall y1 \forall y2 (M(y1,x) \;\&\; M(y2,x) \rightarrow y1 = y2)) \;\&\; \neg x = y), \neg e = r \vdash \neg M(e,l), \neg M(r,l) \;\&\; \neg M(l,l) & \neg \text{ -S} \\
\hline
\forall x \exists y ((M(y,x) \;\&\; \forall y1 \forall y2 (M(y1,x) \;\&\; M(y2,x) \rightarrow y1 = y2)) \;\&\; \neg x = y), \neg e = r \vdash \neg M(e,l) \vee (\neg M(r,l) \;\&\; \neg M(l,l)) & \vee \text{ -D} \\
\hline
\forall x \exists y ((M(y,x) \;\&\; \forall y1 \forall y2 (M(y1,x) \;\&\; M(y2,x) \rightarrow y1 = y2)) \;\&\; \neg x = y) \vdash \neg e = r \rightarrow \neg M(e,l) \vee (\neg M(r,l) \;\&\; \neg M(l,l)) & \rightarrow \text{ -D}
\end{array}
$$

Sviluppo del ramo sinistro della & -D

$$
\begin{array}{cl}
\begin{array}{cc} \text{Per il ramo sx dell'implicazione.} & \\ \text{Vai sotto} & ax - id \\ \uparrow & M(w,l), e = r \vdash \neg M(r,l), l = w, e = r, \neg M(e,l) \end{array} & \\
\hline
M(w,l), M(e,l) \;\&\; M(r,l) \rightarrow e = r \vdash \neg M(r,l), l = w, e = r, \neg M(e,l) & \rightarrow \text{ -S} \\
\hline
M(w,l), \forall y2 (M(e,l) \;\&\; M(y2,l) \rightarrow e = y2) \vdash \neg M(r,l), l = w, e = r, \neg M(e,l) & \forall -S_v \\
\hline
M(w,l), \forall y1 \forall y2 (M(y1,l) \;\&\; M(y2,l) \rightarrow y1 = y2) \vdash \neg M(r,l), l = w, e = r, \neg M(e,l) & \forall -S_v
\end{array}
$$

Sviluppo del ramo sinistro della → -S

$$
\begin{array}{cl}
\begin{array}{cc} \neg -ax_{dx1} & \neg -ax_{dx1} \\ M(w,l) \vdash M(e,l), \neg M(r,l), l = w, e = r, \neg M(e,l) & M(w,l) \vdash M(r,l), \neg M(r,l), l = w, e = r, \neg M(e,l) \end{array} & \\
\hline
M(w,l) \vdash M(e,l) \;\&\; M(r,l), \neg M(r,l), l = w, e = r, \neg M(e,l) & \& \text{ -D}
\end{array}
$$

Completato lo sviluppo del ramo sinistro della & -D

Sviluppo del ramo destro della & -D

$$
\begin{array}{cl}
\begin{array}{cc} \text{Per il ramo sx dell'implicazione.} & \\ \text{Vai sotto} & ax - id \\ \uparrow & M(w,l), l = w \vdash \neg M(l,l), l = w, e = r, \neg M(e,l) \end{array} & \\
\hline
M(w,l), M(l,l) \;\&\; M(w,l) \rightarrow l = w \vdash \neg M(l,l), l = w, e = r, \neg M(e,l) & \rightarrow \text{ -S} \\
\hline
M(w,l), \forall y2 (M(l,l) \;\&\; M(y2,l) \rightarrow l = y2) \vdash \neg M(l,l), l = w, e = r, \neg M(e,l) & \forall -S_v \\
\hline
M(w,l), \forall y1 \forall y2 (M(y1,l) \;\&\; M(y2,l) \rightarrow y1 = y2) \vdash \neg M(l,l), l = w, e = r, \neg M(e,l) & \forall -S_v
\end{array}
$$

Sviluppo del ramo sinistro della → -S

$$
\begin{array}{cl}
\begin{array}{cc} \neg -ax_{dx1} & ax - id \\ M(w,l) \vdash M(l,l), \neg M(l,l), l = w, e = r, \neg M(e,l) & M(w,l) \vdash M(w,l), \neg M(l,l), l = w, e = r, \neg M(e,l) \end{array} & \\
\hline
M(w,l) \vdash M(l,l) \;\&\; M(w,l), \neg M(l,l), l = w, e = r, \neg M(e,l) & \& \text{ -D}
\end{array}
$$

Completato lo sviluppo del ramo destro della & -D

Il sequente radice è derivabile, quindi è una tautologia.

D (12 punti): ⊢ ¬ ∃x(∀y ((A(y,y) → ¬A(x,y)) & (¬A(x,y) → A(y,y))) & ¬A(x,x))

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\neg -ax_{dx2}$}
\noLine
\UnaryInfC{$A(w,w) \to \neg A(w,w) \vdash \neg A(w,w), A(w,w)$}
\AxiomC{$ax-id$}
\noLine
\UnaryInfC{$A(w,w) \to \neg A(w,w), A(w,w) \vdash A(w,w)$}
\RightLabel{$\to$ -S}
\BinaryInfC{$A(w,w) \to \neg A(w,w), \neg A(w,w) \to A(w,w) \vdash A(w,w)$}
\RightLabel{& -S}
\UnaryInfC{$(A(w,w) \to \neg A(w,w))\ \&\ (\neg A(w,w) \to A(w,w)) \vdash A(w,w)$}
\RightLabel{$\forall -S_v$}
\UnaryInfC{$\forall y((A(y,y) \to \neg A(w,y))\ \&\ (\neg A(w,y) \to A(y,y))) \vdash A(w,w)$}
\RightLabel{$\neg$ -S}
\UnaryInfC{$\forall y((A(y,y) \to \neg A(w,y))\ \&\ (\neg A(w,y) \to A(y,y))), \neg A(w,w) \vdash$}
\RightLabel{& -S}
\UnaryInfC{$\forall y((A(y,y) \to \neg A(w,y))\ \&\ (\neg A(w,y) \to A(y,y)))\ \&\ \neg A(w,w) \vdash$}
\RightLabel{$\exists$ -S (w $\notin$ VL)}
\UnaryInfC{$\exists x(\forall y((A(y,y) \to \neg A(x,y))\ \&\ (\neg A(x,y) \to A(y,y)))\ \&\ \neg A(x,x)) \vdash$}
\RightLabel{$\neg$ -D}
\UnaryInfC{$\vdash \neg \exists x(\forall y((A(y,y) \to \neg A(x,y))\ \&\ (\neg A(x,y) \to A(y,y)))\ \&\ \neg A(x,x))$}
\end{prooftree}
$$

Il sequente radice è derivabile, quindi è una tautologia.

Esercizio 3 (31 punti)

AX.1: D(e) → ¬ D(a)
AX.2: D(e) ∨ D(p) → D(a)
AX.3: ¬ D(a) → ¬ D(p) & D(g)
AX.4: D(g) → ∀x (D(x) ∨ ¬ D(x))
AX.5: D(a) → D(e) ∨ D(p)
AX.6: ¬ D(p) → ¬ D(g)

A Alice danza: D(a)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash AX.2$}
\AxiomC{$\vdash AX.3$}
\AxiomC{$\neg -ax_{dx2}$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash \neg D(a), D(e), D(p), D(a)$}
\AxiomC{$\vdash AX.6$}
\AxiomC{$ax-id$}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg D(p), D(g) \vdash \neg D(p), D(e), D(p), D(a)$}
\AxiomC{$\neg -ax_{sx1}$}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg D(p), D(g), \neg D(g) \vdash D(e), D(p), D(a)$}
\RightLabel{$\to$ -S}
\BinaryInfC{$\neg D(p), D(g), \neg D(p) \to \neg D(g) \vdash D(e), D(p), D(a)$}
\RightLabel{comp}
\BinaryInfC{$\neg D(p), D(g) \vdash D(e), D(p), D(a)$}
\RightLabel{& -S}
\UnaryInfC{$\neg D(p)\ \&\ D(g) \vdash D(e), D(p), D(a)$}
\RightLabel{$\to$ -S}
\BinaryInfC{$\neg D(a) \to \neg D(p)\ \&\ D(g) \vdash D(e), D(p), D(a)$}
\RightLabel{comp}
\BinaryInfC{$\vdash D(e), D(p), D(a)$}
\RightLabel{$\vee$ -D}
\UnaryInfC{$\vdash D(e) \vee D(p), D(a)$}
\AxiomC{$ax-id$}
\noLine
\UnaryInfC{$D(a) \vdash D(a)$}
\RightLabel{$\to$ -S}
\BinaryInfC{$D(e) \vee D(p) \to D(a) \vdash D(a)$}
\RightLabel{comp}
\BinaryInfC{$\vdash D(a)$}
\end{prooftree}
$$

E Eleonora non danza: ¬ D(e)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash T.1$}
\AxiomC{$\vdash AX.1$}
\AxiomC{$\neg -ax_{dx1}$}
\noLine
\UnaryInfC{$D(a) \vdash D(e), \neg D(e)$}
\AxiomC{$\neg -ax_{sx1}$}
\noLine
\UnaryInfC{$D(a), \neg D(a) \vdash \neg D(e)$}
\RightLabel{$\to$ -S}
\BinaryInfC{$D(a), D(e) \to \neg D(a) \vdash \neg D(e)$}
\RightLabel{comp}
\BinaryInfC{$D(a) \vdash \neg D(e)$}
\RightLabel{comp}
\BinaryInfC{$\vdash \neg D(e)$}
\end{prooftree}
$$

P Il primo ballerino danza: D(p)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash T.1$}
\AxiomC{$\vdash T.2$}
\AxiomC{$\vdash AX.5$}
\AxiomC{$ax-id$}
\noLine
\UnaryInfC{$D(a), \neg D(e) \vdash D(a), D(p)$}
\AxiomC{$\neg -ax_{sx2}$}
\noLine
\UnaryInfC{$D(a), \neg D(e), D(e) \vdash D(p)$}
\AxiomC{$ax-id$}
\noLine
\UnaryInfC{$D(a), \neg D(e), D(p) \vdash D(p)$}
\RightLabel{$\vee$ -S}
\BinaryInfC{$D(a), \neg D(e), D(e) \vee D(p) \vdash D(p)$}
\RightLabel{$\to$ -S}
\BinaryInfC{$D(a), \neg D(e), D(a) \to D(e) \vee D(p) \vdash D(p)$}
\RightLabel{comp}
\BinaryInfC{$D(a), \neg D(e) \vdash D(p)$}
\RightLabel{comp}
\BinaryInfC{$D(a) \vdash D(p)$}
\RightLabel{comp}
\BinaryInfC{$\vdash D(p)$}
\end{prooftree}
$$

G Se Gertrude danza anche Alice Danza: D(g) $\rightarrow$ D(a)

$$\dfrac{\dfrac{\vdash T.1 \qquad \overset{ax-id}{D(g), D(a) \vdash D(a)}}{D(g) \vdash D(a)}\,comp}{\vdash D(g) \rightarrow D(a)}\,\rightarrow\text{-D}$$

Q Qualcuno danza ma non tutti: $\exists$x D(x) & $\exists$x $\neg$ D(x)

$$\dfrac{\vdash T.1 \qquad \dfrac{\vdash T.2 \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{ax-id}{D(a), \neg D(e) \vdash D(a)}}{D(a), \neg D(e) \vdash \exists x D(x)}\,\exists -D_v \qquad \dfrac{\overset{ax-id}{D(a), \neg D(e) \vdash \neg D(e)}}{D(a), \neg D(e) \vdash \exists x \neg D(x)}\,\exists\ \text{-}{-}D_v}{D(a), \neg D(e) \vdash \exists x D(x)\ \&\ \exists x \neg D(x)}\,\&\text{ -D}}{D(a) \vdash \exists x D(x)\ \&\ \exists x \neg D(x)}\,comp}{\vdash \exists x D(x)\ \&\ \exists x \neg D(x)}\,comp$$

Esercizio 4 (60 punti)

AX.1: $\forall$x $\forall$y $\forall$z(C(x,y) & C(y,z) $\rightarrow$ $\neg$ C(x,z))
AX.2: $\neg$ $\exists$x C(p,x)
AX.3: $\forall$x $\forall$y(C(x,y) $\rightarrow$ C(y,x))
AX.4: C(v,m) & $\forall$x(C(v,x) $\rightarrow$ x=m)
AX.5: $\neg$($\exists$x $\neg$C(l,x))

P Piero non chiama Luca: $\neg$ C(p,l)

$$\dfrac{\vdash AX.2 \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\neg -ax_{dx1}}{\vdash C(p,l), \neg C(p,l)}}{\vdash \exists x C(p,x), \neg C(p,l)}\,\exists -D_v}{\neg \exists x C(p,x) \vdash \neg C(p,l)}\,\neg\text{ -S}}{\vdash \neg C(p,l)}\,comp$$

L Luca chiama Piero: C(l,p)

$$\dfrac{\vdash AX.5 \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\neg -ax_{dx2}}{\vdash \neg C(l,p), C(l,p)}}{\vdash \exists x \neg C(l,x), C(l,p)}\,\exists -D_v}{\neg \exists x \neg C(l,x) \vdash C(l,p)}\,\neg\text{ -S}}{\vdash C(l,p)}\,comp$$

Dopo aver mostrato una derivazione nella teoria in T_{ch} delle affermazioni precedenti noto una contraddizione tra i primi due teoremi e l'assioma 3.
Provo quindi a derivare il falso.

F Derivazione del falso

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash T.1$}
\AxiomC{$\vdash T.2$}
\AxiomC{$\vdash AX.3$}
\AxiomC{$ax-id$}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg C(p,l), C(l,p) \vdash C(l,p), \bot$}
\AxiomC{$\neg -ax_{sx2}$}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg C(p,l), C(l,p), C(p,l) \vdash \bot$}
\RightLabel{$\rightarrow$ -S}
\BinaryInfC{$\neg C(p,l), C(l,p), C(l,p) \rightarrow C(p,l)) \vdash \bot$}
\RightLabel{$\forall -S_v$}
\UnaryInfC{$\neg C(p,l), C(l,p), \forall y(C(l,y) \rightarrow C(y,l)) \vdash \bot$}
\RightLabel{$\forall -S_v$}
\UnaryInfC{$\neg C(p,l), C(l,p), \forall x \forall y(C(x,y) \rightarrow C(y,x)) \vdash \bot$}
\RightLabel{$comp$}
\BinaryInfC{$\neg C(p,l), C(l,p) \vdash \bot$}
\RightLabel{$comp$}
\BinaryInfC{$\neg C(p,l) \vdash \bot$}
\RightLabel{$comp$}
\BinaryInfC{$\vdash \bot$}
\end{prooftree}
$$

M Mila chiama Veronica: C(m,v)

Per derivare l'affermazione utilizzo come assioma il falso, che ho derivato utilizzando i primi due teoremi e l'assioma 3

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash \bot$}
\AxiomC{$ax-id$}
\noLine
\UnaryInfC{$\bot \vdash C(m,v)$}
\RightLabel{$comp$}
\BinaryInfC{$\vdash C(m,v)$}
\end{prooftree}
$$

N Nessuno chiama se stesso: ¬ ∃x C(x,x)

Per derivare l'affermazione utilizzo come assioma il falso, che ho derivato utilizzando i primi due teoremi e l'assioma 3

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash \bot$}
\AxiomC{$ax-id$}
\noLine
\UnaryInfC{$\bot \vdash \neg \exists x C(x,x)$}
\RightLabel{$comp$}
\BinaryInfC{$\vdash \neg \exists x C(x,x)$}
\end{prooftree}
$$

M Mila è diversa da Veronica: ¬m=v

Per derivare l'affermazione utilizzo come assioma il falso, che ho derivato utilizzando i primi due teoremi e l'assioma 3

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash \bot$}
\AxiomC{$ax-id$}
\noLine
\UnaryInfC{$\bot \vdash \neg m = v$}
\RightLabel{$comp$}
\BinaryInfC{$\vdash \neg m = v$}
\end{prooftree}
$$

Esercizio 5

Ipotesi: D'inverno non tutti non vanno a sciare: I $\to \exists$x S(x)

A Se è inverno qualcuno va a sciare e qualcuno non ci va: I $\to \exists$x S(x) & $\exists$x $\neg$ S(x)

$$
\dfrac{\vdash Ip \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} ax-id \\ I \vdash I, \exists x S(x) \end{array} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} ax-id \\ I, S(w) \vdash S(w) \end{array}}{I, S(w) \vdash \exists x S(x)}\ \exists -D_v}{I, \exists x S(x) \vdash \exists x S(x)}\ \exists\text{ -S (w} \notin \text{VL)}}{I, I \to \exists x S(x) \vdash \exists x S(x)}\ \to\text{ -S} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} ax-id \\ I \vdash I, \exists x \neg S(x) \end{array} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{I, S(w), S(w) \vdash \exists x \neg S(x)}{I, S(w) \vdash \neg S(w), \exists x \neg S(x)}\ \neg\text{ -D}}{I, S(w) \vdash \exists x \neg S(x)}\ \exists\text{ -D}}{I, \exists x S(x) \vdash \exists x \neg S(x)}\ \exists\text{ -S (w} \notin \text{VL)}}{I, I \to \exists x S(x) \vdash \exists x \neg S(x)}\ \to\text{ -S}}{I, I \to \exists x S(x) \vdash \exists x S(x)\ \&\ \exists x \neg S(x)}\ \&\text{ -D}}{I \to \exists x S(x), I \vdash \exists x S(x)\ \&\ \exists x \neg S(x)}\ sc_{sx}}{I \to \exists x S(x) \vdash I \to \exists x S(x)\ \&\ \exists x \neg S(x)}\ \to\text{ -D}}{\vdash I \to \exists x S(x)\ \&\ \exists x \neg S(x)}\ comp
$$

Contromodello di Ipotesi $\vdash$ Aff. A

La foglia che non si riesce a derivare

I, S(w), S(w) $\vdash \exists$x $\neg$S(x)

suggerisce il seguente contromodello

D_{contra}= { Minni }

$I^{D_{contra}}$=1

$S(w)^{D_{contra}}$(Minni)=1

In questo modello

$(\neg S(w))^{D_{contra}}$(Minni)=0

$(\exists x\ \neg S(x))^{D_{contra}} = 0$ perchè ci sono solo falsari nel dominio dato che c'è solo Minni

$(\exists x\ S(x))^{D_{contra}} = 1$ perchè $S(w)^{D_{contra}}$(Minni)=1 (c'è un testimone)

$\text{Ipotesi}^{D_{contra}}$: $I^{D_{contra}} \to (\exists x\ S(x))^{D_{contra}}$ equivale a $1 \to 1$ equivale a 1

Aff. $A^{D_{contra}}$: $I^{D_{contra}} \to (\exists x\ S(x)\ \&\ \exists x\ \neg S(x))^{D_{contra}}$: $I^{D_{contra}} \to (\exists x\ S(x))^{D_{contra}}\ \&\ (\exists x\ \neg S(x))^{D_{contra}}$

equivale a $1 \to 1\ \&\ 0$ equivale a $1 \to 0$ equivale a 0

Quindi, $(\text{Ipotesi} \vdash \text{Aff. A})^{D_{contra}}$ equivale a $1 \vdash 0$ equivale a 0

Ho trovato un contromodello, quindi l'affermazione A non è deducibile dall'ipotesi.

B Se è inverno qualcuno va a sciare oppure qualcuno non ci va: I $\to \exists$x S(x) $\vee$ $\exists$x $\neg$ S(x)

$$
\dfrac{\vdash Ip \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} ax-id \\ I \vdash I, \exists x S(x), \exists x \neg S(x) \end{array} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} ax-id \\ I, S(w) \vdash S(w), \exists x \neg S(x) \end{array}}{I, S(w) \vdash \exists x S(x), \exists x \neg S(x)}\ \exists -D_v}{I, \exists x S(x) \vdash \exists x S(x), \exists x \neg S(x)}\ \exists\text{ -S (w} \notin \text{VL)}}{I, I \to \exists x S(x) \vdash \exists x S(x), \exists x \neg S(x)}\ \to\text{ -S}}{I \to \exists x S(x), I \vdash \exists x S(x), \exists x \neg S(x)}\ sc_{sx}}{I \to \exists x S(x), I \vdash \exists x S(x) \vee \exists x \neg S(x)}\ \vee\text{ -D}}{I \to \exists x S(x) \vdash I \to \exists x S(x) \vee \exists x \neg S(x)}\ \to\text{ -D}}{\vdash I \to \exists x S(x) \vee \exists x \neg S(x)}\ comp
$$

L'affermazione B è deducibile dall'ipotesi.

C Se tutti vanno a sciare non è inverno: ∀x S(x) → ¬ I

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash Ip$}
\AxiomC{$\neg -ax_{dx1}$}
\noLine
\UnaryInfC{$\forall x S(x) \vdash I, \neg I$}
\AxiomC{$S(w), \forall x S(x), S(w) \vdash \neg I$}
\RightLabel{$\forall$ -S}
\UnaryInfC{$S(w), \forall x S(x) \vdash \neg I$}
\RightLabel{sc_{sx}}
\UnaryInfC{$\forall x S(x), S(w) \vdash \neg I$}
\RightLabel{$\exists$ -S (w $\notin$ VL)}
\UnaryInfC{$\forall x S(x), \exists x S(x) \vdash \neg I$}
\RightLabel{$\rightarrow$ -S}
\BinaryInfC{$\forall x S(x), I \rightarrow \exists x S(x) \vdash \neg I$}
\RightLabel{sc_{sx}}
\UnaryInfC{$I \rightarrow \exists x S(x), \forall x S(x) \vdash \neg I$}
\RightLabel{$\rightarrow$ -D}
\UnaryInfC{$I \rightarrow \exists x S(x) \vdash \forall x S(x) \rightarrow \neg I$}
\RightLabel{$comp$}
\BinaryInfC{$\vdash \forall x S(x) \rightarrow \neg I$}
\end{prooftree}
$$

Contromodello di Ipotesi ⊢ Aff. C

La foglia che non si riesce a derivare

S(w), ∀x S(x), S(w) ⊢ ¬ I

suggerisce il seguente contromodello

D_{contra}= { Minni }

$I^{D_{contra}}$=1

$S(w)^{D_{contra}}$(Minni)=1

In questo modello

$(\forall x\ S(x))^{D_{contra}} = 1$ perchè sono tutti testimoni dato che nel dominio c'è solo Minni

$(\exists x\ S(x))^{D_{contra}} = 1$ perchè $S(w)^{D_{contra}}$(Minni)=1 (c'è un testimone)

$(\neg I)^{D_{contra}}$=0

Ipotesi$^{D_{contra}}$: $I^{D_{contra}} \rightarrow (\exists x\ S(x))^{D_{contra}}$ equivale a 1 → 1 equivale a 1

Aff. C$^{D_{contra}}$: $(\forall x\ S(x))^{D_{contra}} \rightarrow (\neg\ I)^{D_{contra}}$ equivale a 1 → 0 equivale a 0

(Ipotesi ⊢ Aff. C)$^{D_{contra}}$ equivale a 1 ⊢ 0 equivale a 0

Ho trovato un contromodello, quindi l'affermazione C non è deducibile dall'ipotesi.

Esercizio 6 (15 punti)

Stabilire se la seguente regola è sicura rispetto alla semantica classica (nel caso di regola non sicura si analizzi entrambe le inverse)

A

$$\frac{F \vdash \neg C \ \& \ M \qquad\qquad C \vdash \neg M}{\neg\neg M \vee F \vdash \neg C}\ 1$$

Ipotesi
Sia r una riga fissata sulla tabella di verità
1) F → ¬C & M = 1, riscritta come ¬F ∨ (¬C & M) = 1
2) C → ¬M = 1, riscritta come ¬C ∨ ¬M = 1
3) ¬¬M ∨ F = 1, riscritta come M ∨ F = 1

Tesi ¬C = 1

Dimostrazione
Considero l'ipotesi 1.
Perchè ¬F ∨ (¬C & M) sia uguale a 1 ho due casi possibili:

Caso 1
¬F = 1 e quindi F = 0

Ipotesi 1) Dato che ¬F = 1 ottengo 1 ∨ (¬C & M) = 1 ok

Ipotesi 3) Dato che F = 0 ottengo M ∨ 0, quindi M = 1 in modo che 1 ∨ 0 = 1 ok

Ipotesi 2) Dato che M = 1 e ¬M = 0 ottengo ¬C ∨ 0, quindi ¬C = 1 in modo che 1 ∨ 0 = 1 ok

Tesi verificata per il caso 1 dato che ¬C = 1.

Caso 2
¬C & M = 1 e quindi ¬C = 1 e M = 1

Ipotesi 1) Dato che ¬C = 1 e M = 1 ottengo ¬F ∨ 1 = 1 ok

Ipotesi 2) Dato che ¬C = 1, M = 1 e ¬M = 0 ottengo 1 ∨ 0 = 1 ok

Ipotesi 3) Dato che M = 1 ottengo 1 ∨ F = 1 ok

Tesi verificata per il caso 2 dato che ¬C = 1.

Quindi la regola è valida.

Controllo la sicurezza della regola.

Prima regola inversa:

$$\frac{\neg\neg M \vee F \vdash \neg C}{F \vdash \neg C \ \& \ M}\ inv_1$$

Ipotesi
Sia r una riga fissata sulla tabella di verità
1) ¬¬M ∨ F → ¬C = 1, riscritta come ¬(M ∨ F) ∨ ¬C = 1
2) F = 1

Tesi ¬C & M = 0

Dimostrazione
Dall'ipotesi 2) so che F = 1, quindi l'ipotesi 1) diventa $\neg$(M $\vee$ 1) $\vee$ $\neg$C = 1

Qualsiasi sia il valore di M ottengo $\neg$1 $\vee$ $\neg$C = 1, che equivale a 0 $\vee$ $\neg$C = 1

Da ciò ricavo che $\neg$C = 1, così anche l'ipotesi 1) è ok

Essendo M un valore qualsiasi, decido di prendere M = 0

In questo modo la tesi $\neg$C & M = 0 diventa 1 & 0 = 0

La tesi quindi è verificata, perciò la regola non è valida.

Seconda regola inversa:

$$\frac{\neg\neg M \vee F \vdash \neg C}{C \vdash \neg M}\ inv_2$$

Ipotesi
Sia r una riga fissata sulla tabella di verità
1) $\neg\neg$M $\vee$ F $\rightarrow$ $\neg$C = 1, riscritta come $\neg$(M $\vee$ F) $\vee$ $\neg$C = 1
2) C = 1

Tesi $\neg$M = 1

Dimostrazione
Dall'ipotesi 2) so che C = 1, quindi l'ipotesi 1) diventa $\neg$(M $\vee$ F) $\vee$ $\neg$1 = 1

Ottengo quindi $\neg$(M $\vee$ F) $\vee$ 0 = 1

Da ciò ricavo che M = 0 e F = 0, così ho $\neg$(0 $\vee$ 0) $\vee$ 0, che equivale a $\neg$0 $\vee$ 0

Ottengo 1 $\vee$ 0 = 1, quindi anche l'ipotesi 1) è ok

Avendo M = 0, la tesi $\neg$M = 1 diventa $\neg$0 = 1

La tesi quindi è verificata, perciò la regola è valida.

Concludiamo che la regola di partenza 1 è valida ma non sicura dato che una sua regola inversa non è valida.

Esercizio 7 (32 punti)

In un gioco due amiche fanno un'affermazione, che è vera o falsa.
Un'affermazione è mancante e l'altra è riportata sotto:

AX.1: Morgana: almeno una di noi afferma il vero: M $\leftrightarrow$ M $\vee$ C riscritta come (M $\to$ M $\vee$ C) & (M $\vee$ C $\to$ M)

Si può dedurre, anche se non si conosce l'affermazione di Celeste, quante affermazioni sono vere?

Possibili soluzioni:
a) No, ma se Celeste dice il vero anche Morgana dice il vero.
a') No, ma se Morgana dice il vero anche Celeste dice il vero.
b) Sì, sono vere tutte e due le affermazioni.
c) Sì, è vera solo l'affermazione di Morgana.
d) Sì, è vera solo l'affermazione di Celeste.
e) Nessuna affermazione è vera.

Provo a verificare se entrambe dicono il vero.

1

$$\dfrac{(M \to M \vee C)\ \&\ (M \vee C \to M) \vdash M \qquad (M \to M \vee C)\ \&\ (M \vee C \to M) \vdash C}{(M \to M \vee C)\ \&\ (M \vee C \to M) \vdash M\ \&\ C}\ \&\text{-D}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash M, M \vee C, M \qquad \overset{ax-id}{M \vee C \vdash M \vee C, M}}{M \to M \vee C \vdash M \vee C, M}\ \to\text{-S} \qquad \overset{ax-id}{M \to M \vee C, M \vdash M}}{M \to M \vee C, M \vee C \to M \vdash M}\ \to\text{-S}}{(M \to M \vee C)\ \&\ (M \vee C \to M) \vdash M}\ \&\text{-S}$$

Non è vero che M afferma il vero perchè il sequente radice è falso per M = 0 e C = 0.
Già da questo posso escludere l'opzione b) secondo cui tutte e due le affermazioni sono vere.
Controllo ora se C afferma il vero.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash M, M \vee C, C \qquad \overset{ax-id}{M \vee C \vdash M \vee C, C}}{M \to M \vee C \vdash M \vee C, C}\ \to\text{-S} \qquad M \to M \vee C, M \vdash C}{M \to M \vee C, M \vee C \to M \vdash C}\ \to\text{-S}}{(M \to M \vee C)\ \&\ (M \vee C \to M) \vdash C}\ \&\text{-S}$$

Non è vero che C afferma il vero perchè il sequente radice è falso per M = 0 e C = 0.

Posso escludere ora l'opzione c) secondo cui è vera solo l'affermazione di Morgana.
Posso escludere l'opzione d) secondo cui è vera solo l'affermazione di Celeste.

Posso verificare adesso l'opzione e), dato che dalle affermazioni precedenti ho notato la possibilià che entrambe dicano il falso.

$$\dfrac{(M \to M \lor C) \;\&\; (M \lor C \to M) \vdash \neg M \qquad\qquad (M \to M \lor C) \;\&\; (M \lor C \to M) \vdash \neg C}{(M \to M \lor C) \;\&\; (M \lor C \to M) \vdash \neg M \;\&\; \neg C}\ \&\text{ -D}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg -ax_{dx1}}{M \to M \lor C \vdash M, C, \neg M}}{M \to M \lor C \vdash M \lor C, \neg M}\ \lor\text{ -D} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{ax-id}{M \vdash M, \neg M} \qquad \dfrac{M, M \lor C, M \vdash}{M, M \lor C \vdash \neg M}\ \neg\text{ -D}}{M, M \to M \lor C \vdash \neg M}\ \to\text{ -S}}{M \to M \lor C, M \vdash \neg M}\ sc_{sx}}{M \to M \lor C, M \lor C \to M \vdash \neg M}\ \to\text{ -S}}{(M \to M \lor C) \;\&\; (M \lor C \to M) \vdash \neg M}\ \&\text{ -S}$$

Non è vero che M afferma il falso perchè il sequente radice è falso per M = 1 e C = 1.
Già da questo posso escludere l'opzione e) secondo cui tutte e due dicono il falso.

Quindi non posso capire quante affermazioni sono vere.
Rimangono le opzioni a) e a').

Controllo l'opzione a).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{ax-id}{C, M \to M \lor C \vdash M, C, M}}{C, M \to M \lor C \vdash M \lor C, M}\ \lor\text{ -D} \qquad \dfrac{ax-id}{C, M \to M \lor C, M \vdash M}}{C, M \to M \lor C, M \lor C \to M \vdash M}\ \to\text{ -S}}{C, (M \to M \lor C) \;\&\; (M \lor C \to M) \vdash M}\ \&\text{ -S}}{(M \to M \lor C) \;\&\; (M \lor C \to M), C \vdash M}\ sc_{sx}}{(M \to M \lor C) \;\&\; (M \lor C \to M) \vdash C \to M}\ \to\text{ -D}$$

Il sequente è derivabile, quindi l'opzione a),
secondo cui se Celeste dice il vero anche Morgana dice il vero, è corretta.