Esercizio (T) $\quad f: A \xrightarrow[\text{su}]{1-1} B \iff f$ invertibile

(*) $\boxed{\exists g: B \to A : \; f \circ g = id_B, \; g \circ f = id_A}$

Soluzione

($\Rightarrow$) Dato che f è su, $\forall y \in B \; \exists x \in A : f(x) = y$.

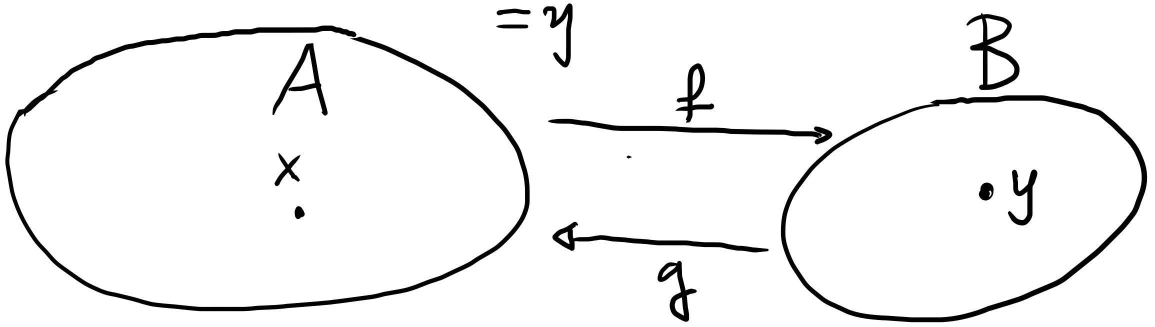
Essendo f 1-1 si ha che ne esiste solo uno

(cioè $\forall y \in B \; \exists! \, x \in A : f(x) = y$).

Perciò c'è una funzione $g : B \to A$ che manda $y \in B$ in $x \in A$. Per come è definita $f(\underbrace{g(y)}_{=x}) = y$.

Questo significa che $f \circ g = id_B$.

D'altra parte $g(\underbrace{f(x)}_{=y}) = x$ per ogni $x \in A$. (cioè $g \circ f = id_A$).



$f(x) = y$
$g(y) = x$

$(\Leftarrow)$ f è su. Infatti $\forall y \in B$ si ha $f(\underbrace{g(y)}_{x}) = y$.

Perciò, posto $x = g(y) \in A$, si ha che

$\forall y \in B \ \exists x \in A : \ y = f(x)$.

f è 1-1. Infatti se $f(x_1) = f(x_2)$ allora $g(\underbrace{f(x_1)}_{= x_1}) = g(\underbrace{f(x_2)}_{= x_2})$

e $g \circ f = id_A$ implica che $x_1 = x_2$.

Esercizio (T) Se $\exists$ l'inversa, allora è unica.

Soluzione Ad es.: g_1, g_2 siano inverse di f.

Allora: $$(\underbrace{g_1 \circ f}_{= id_A}) \circ g_2 = g_1 \circ (\underbrace{f \circ g_2}_{id_B}) \iff g_2 = g_1.$$

NB Si è usata l'associatività della composizione tra funzioni

Esercizi risolti

1) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x+1$. Dimostrare che f è 1-1 e su. Chi è f^{-1}?

Soluzione. $\forall y \in \mathbb{Z}$, $y = x+1 \iff x = y-1$, quindi $\forall y \in \mathbb{Z}\ \exists x \in \mathbb{Z} : f(x) = y$, cioè f è su.

D'altra parte $f(x_1) = f(x_2) \iff$
$x_1 + 1 = x_2 + 1 \iff x_1 = x_2$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$,
cioè f è 1-1.

Infine $g(y) = y-1$ è l'inversa di f.

2) Sia $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x+1$.
f è su?

Soluzione. No. Infatti $1 \notin f(\mathbb{N})$.

3) Sia $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) \stackrel{def}{=} \begin{cases} x+1, & x \text{ pari} \\ x-1, & x \text{ dispari} \end{cases}$

Dimostrare che f è SU e 1-1.

Soluzione Posto $y = f(x)$ allora

y è dispari se x è pari e viceversa.

Cioè $y = 2n+1$ se x è pari o $y = 2n$ se

x è dispari.

$$\begin{cases} \text{Se } y = 2n \text{ allora } y = x-1 \text{ con } x \text{ dispari} \\ \text{Se } y = 2n+1 \text{ allora } y = x+1 \text{ con } x \text{ pari} \end{cases}$$

quindi $\begin{cases} y = 2n = x-1 \Rightarrow x = 2n+1 \\ y = 2n+1 = x+1 \Rightarrow x = 2n \end{cases}$

ciò mostra che f è SU. [Si vede anche

che la funzione $x = g(y)$, $g(y) = \begin{cases} y+1, & y \text{ pari} \\ y-1, & y \text{ disp.} \end{cases}$

è l'inversa di f.]

Se x_1, x_2 pari (dispari) allora $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Se x_1 è pari e x_2 è dispari allora $f(x_1)$ è dispari e

$f(x_2)$ è pari. Perciò sono diversi.
Ciò mostra che f è 1-1

4) Esercizio. Sia $f: X \longrightarrow Y$ e siano $A, B \subseteq X$.
Allora $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Soluzione. $y \in f(A \cup B) \Rightarrow \exists x \in A \cup B : f(x) = y$.
Perciò $y \in f(A)$ oppure $y \in f(B)$, cioè
$y \in f(A) \cup f(B)$.
[cioè: $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$]
Viceversa, $y \in f(A) \cup f(B) \Rightarrow \exists x \in A$ oppure
$\exists x \in B$ tale che $f(x) = y$. Quindi
$\exists x \in A \cup B : f(x) = y$.
[cioè: $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$]

Le due inclusioni dimostrano che vale l'uguaglianza

5) Esercizio. Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$, limitati e non ϕ.
e supponiamo che $A \subseteq B$. Allora

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$$

Soluzione: L'estremo inf. è un minorante di A, e l'estremo superiore è un maggiorante.

Perciò $\quad \inf A \leq \sup A$.

D'altra parte $\inf B \leq b \quad \forall b \in B$.
In particolare $\inf B \leq a \quad \forall a \in A$.
Quindi $\quad \inf B \leq \inf A$.
Analogamente $\sup B \geqslant b \quad \forall b \in B$
Quindi $\quad \sup B \geqslant a \quad \forall a \in A \quad$ e infine

$\sup B \geqslant \sup A$.

6) Esercizio Siano $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ limitate.

Si ha
$$\begin{cases} \text{①} \ \inf f(X) + \inf g(X) \leq \inf (f+g)(X). \\ \text{②} \ \sup f(X) + \sup g(X) \geq \sup (f+g)(X) \end{cases}$$

NB
$$\begin{cases} \inf f(X) = \inf\limits_{x \in X} f(x) \quad e \\ \sup f(X) = \sup\limits_{x \in X} f(x). \end{cases}$$

Soluzione (1) Siano
$$\begin{cases} \mu_1 = \inf\limits_{x \in X} f(x) \\ \mu_2 = \inf\limits_{x \in X} g(x) \end{cases}.$$

Allora $\mu_1 \leq f(x)$ e $\mu_2 \leq g(x)$ $\forall x \in X$.

Perciò $\mu_1 + \mu_2 \leq f(x) + g(x)$ $\forall x \in X$ e

quindi $\mu_1 + \mu_2 \leq \inf\limits_{x \in X} (f+g)(x)$.

La (2) è analoga.

7) Esercizio (De Morgan) $X \supseteq A, B \ (\neq \emptyset)$, insiemi.

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B).$$

Infatti $x \in X \setminus (A \cap B) \iff x \in X$ e $x \notin (A \cap B)$

$\iff x \notin (A$ e $B) \iff x$ non appartiene

ad A e B. Ciò significa che

$x \notin A$ oppure $x \notin B$. Cioè

$x \in X \setminus A$ oppure $x \in X \setminus B \iff$

$x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.

Disequazioni irrazionali

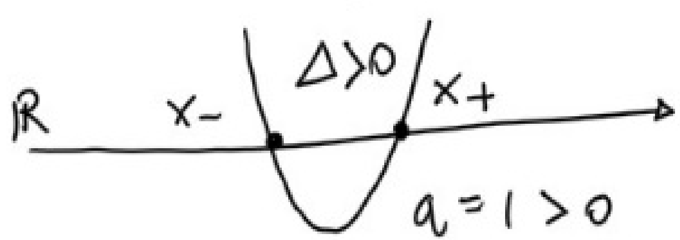
1) $\sqrt[3]{x^3-x^2+3x+2} > x$ (*)

Soluzione. $\sqrt[n]{p(x)} > q(x)$ n dispari $\iff$

$p(x) > q^n(x)$. Perciò (*) equivale a

$$\cancel{x^3}-x^2+3x+2 > \cancel{x^3} \iff \boxed{x^2-3x-2<0}$$

$$x_\pm = \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$$



La diseq. di 2° grado è vera se $x \in \left]x_-, x_+\right[$

e quindi (*) è risolta dagli $x \in \left]\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right[$.

2) $\sqrt{4x^2-1} < x-3$ $\quad(*)$

<u>Soluzione</u> Rientra nel caso $\sqrt[n]{p(x)} < q(x)$ con n pari. E' allora vero che

$$(*) \iff \begin{cases} p(x) < q^n(x) \\ p(x) \geq 0 \\ q(x) > 0 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} 4x^2-1 < (x-3)^2 \\ 4x^2-1 \geq 0 \\ x-3 > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4x^2-1 < x^2-6x+9 \iff \boxed{3x^2+6x-10<0} \;(A) \\ x^2 \geq 1/4 \quad (B) \\ x > 3 \quad (C) \end{cases}$$

(B) 

(B) ha sol. $]-\infty, -\frac{1}{2} \cup \frac{1}{2}, +\infty[$

$\Rightarrow$ (C) e (B) sono risolte dagli $x > 3$.

Risolviamo (A). $\quad x_{\pm} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36+120}}{6} = -1 \pm \dfrac{\sqrt{39}}{3}$

Ma $-1 + \dfrac{\sqrt{39}}{3} < 3$. Perciò $(*)$ NON ha soluzioni.

3) Esercizio $\sqrt{2-x^2} > 2x-1$ (*) $\left(Sol = [-\sqrt{2}, 1[\right)$

Soluzione.

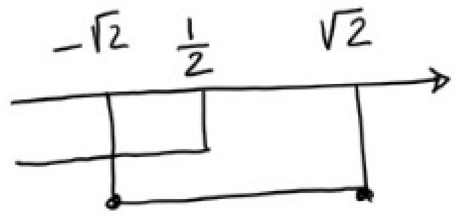
Risolvere (*) significa risolvere una diseq.

$$\sqrt[n]{p(x)} > q(x) \quad (n \text{ pari}) \iff$$

$$\begin{cases} q(x) < 0 \\ p(x) \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} q(x) \geq 0 \\ p(x) > (q(x))^2 \end{cases}$$

Cioè

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} 2x-1 < 0 \\ 2-x^2 \geq 0 \end{cases} \qquad \mathrm{II}) \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 2-x^2 > (2x-1)^2 \end{cases} \iff$$

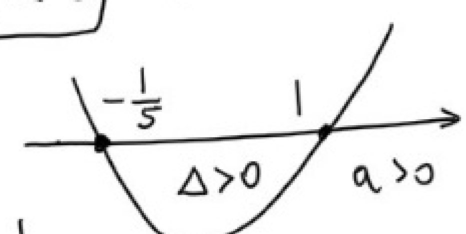
(I) 

cioè (II) è vero solo se $x \in [-\sqrt{2}, \frac{1}{2}[$.

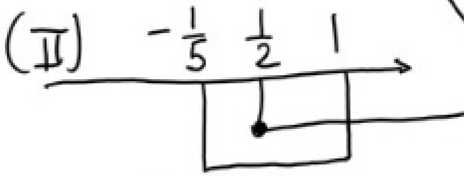
(II) $x \geq \frac{1}{2}$ e $2-x^2 > 4x^2-4x+1 \iff$

$$\boxed{5x^2-4x-1<0} \iff$$

$$x_{\pm} = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{10} = 1, -\frac{1}{5}$$



$x \in]-\frac{1}{5}, 1[$.

(II) 

(II) è vero se $x \in [\frac{1}{2}, 1[$.

Esercizio: dimostrare che se $a_n \longrightarrow \ell$, $b_n \longrightarrow m$, si ha:

1) $a_n + b_n \longrightarrow \ell + m$; 2) $a_n \cdot b_n \longrightarrow \ell \cdot m$

(NB: $\ell, m \in \mathbb{R}$)

Sol. Ad esempio la (1) si prova così:

$$\forall \varepsilon > 0 \begin{cases} \exists n_1 \in \mathbb{N} : & |a_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{se} \quad n > n_1 \\ \exists n_2 \in \mathbb{N} : & |b_n - m| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{se} \quad n > n_2 \end{cases} .$$

Perciò se $n > \max\{n_1, n_2\}$ si ha

$$|(a_n + b_n) - (\ell + m)| \overset{\text{dis. triang.}}{\leq} |a_n - \ell| + |b_n - m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Cioè $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \bar{n} = \max\{n_1, n_2\} : \forall n \in \mathbb{N}$

$$|(a_n + b_n) - (\ell + m)| \leq \varepsilon \iff \lim_n (a_n + b_n) = \ell + m .$$

Per dimostrare la (2) si noti che

$$(*) = |a_n b_n - \ell m| = |(a_n - \ell + \ell) b_n - \ell m| = |(a_n - \ell)\cdot b_n + \ell (b_n - m)|$$

$$\le |a_n - \ell| \cdot \underbrace{|b_n|}_{\le |b_n - m| + |m|} + |\ell| \cdot |b_n - m| \le \underbrace{|a_n - \ell|}_{\le \delta} \Big(\underbrace{|b_n - m|}_{\le \delta} + |m| \Big) + |\ell| \underbrace{|b_n - m|}_{\le \delta}$$

Sia $\delta > 0$ e siano n_1, n_2 : $\begin{cases} |a_n - \ell| \le \delta, & \text{se } n > n_1 \\ |b_n - m| \le \delta, & \text{se } n > n_2 \end{cases}$.

Allora se $n > \max\{n_1, n_2\}$ si ha

$$(*) \le \delta (\underbrace{|m| + |\ell| + \delta}) . \qquad \text{Sia } \delta < 1 .$$

$$\forall \delta \in]0,1[\ \exists \bar{n} : \Big(n > \bar{n} \Rightarrow \big(|a_n b_n - \ell m| < \delta (|\ell| + |m| + 1) \big) \Big)$$

Basta imporre $\delta (|m| + |\ell| + 1) < \varepsilon$.

Infatti sia $\varepsilon > 0$ arbitrario e scegliamo $\delta \in]0,1[$ t.c.

$$\delta(|m| + |\ell| + 1) \leq \varepsilon \quad , \text{ ossia } \quad \delta \leq \frac{\varepsilon}{|m| + |\ell| + 1} .$$

Quindi $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \bar{n} : \ n > \bar{n} \implies |a_n b_n - \ell m| \leq \varepsilon$