# Analisi Matematica 1

Siano $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \geq k$.

Fattoriale: si pone

$$0! = 1, \quad n! \overset{def.}{=} (n-1)! \cdot n,$$

ossia

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \ldots \ \cdot (n-1) \cdot n.$$

Quella appena data è una definizione *ricorsiva*

Coefficiente binomiale: si pone

$$C_{n,k} \overset{def.}{=} \binom{n}{k} \overset{def.}{=} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

**N.B.** Una formula è detta ricorsiva se: i) è noto il primo termine $s_1$; ii) la formula fornisce il termine $(n+1)$-esimo in funzione del termine $n$-esimo, ossia $s_{n+1} = f(s_n)$, dove $f$ rappresenta la "legge" ricorsiva..

Siano $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \geq k$.

Ricordiamo pure le seguenti nozioni:

Disposizioni semplici(di lunghezza $k$ di $n$ elementi): si pone

$$D_{n,k} \overset{def.}{=} k! \cdot C_{n,k} = \frac{n!}{n-k!}.$$

Disposizioni con ripetizione (di lunghezza $k$ di $n$ elementi): si pone

$$F_{n,k} \overset{def.}{=} n^k.$$

# Calcolo combinatorio: breve introduzione

(1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1;\ \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

(2) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(3) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Dimostrarle, per esercizio (induzione).

**Teorema (Binomio di Newton)**

*Per ogni* $a, b \in \mathbb{R}$ *si ha*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k. \qquad (1)$$

Precisazione: s'intende, per convenzione, che se $a$ o $b$, o entrambi, sono nulli, allora la formula continua a valere anche se $n = 0$.

**Dimostrazione.** Per induzione. La (1) vale per $n = 0$ e, se $n = 1$, si ha

$$(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k}\, b^k = a + b$$

che è vera. Pertanto assumiamo che (1) vale fino all'indice $n$-esimo (e bisogna quindi verificarne la validità per l'indice $(n+1)$-esimo).

Si ha

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b) = \left( \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k \right) (a+b) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left[ \binom{n}{k} a^{n-k+1}\, b^k + \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^{k+1} \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1}\, b^k + \underbrace{\sum_{h=1}^{n+1}}_{\text{sost.``}k=h-1\text{''}} \binom{n}{h-1} a^{n-h+1}\, b^h =$$

$$\underset{(\star)}{=} \sum_{k=1}^{n} \left[ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n-k+1}\, b^k + \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} a^{n+1} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} b^{n+1} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1}\, b^{k} + a^{n+1} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1}\, b^{k}
\end{aligned}
$$

che è quanto si doveva provare. $\square$

**N.B.** Nell'uguaglianza $(\star)$ si riutilizza (nella seconda sommatoria) l'indice $k$.

Notare che l'ultimo membro è ciò che si trova sostituendo $n+1$ ad $n$ nella formula (1).

Notare infine che si sono usate le proprietà dei coefficienti binomiali ed in particolare la (3), ossia

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

# Calcolo combinatorio: breve introduzione

Elenchiamo soltanto alcune proprietà, ma senza darne dimostrazione.

Si osservi che i coefficienti binomiali si "dispongono" con la seguente modalità (nota con il nome di *triangolo di Tartaglia*):

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & \to & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & \to & 2 & \to & 1 & & & & \\
 & & & 1 & \to & 3 & \to & 3 & \to & 1 & & & \\
 & & 1 & \to & 4 & \to & 6 & \to & 4 & \to & 1 & & \\
 & 1 & \to & 5 & \to & 10 & \to & 10 & \to & 5 & \to & 1 & \\
1 & \to & 6 & \to & 15 & \to & 20 & \to & 15 & \to & 6 & \to & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Figura: Triangolo di Tartaglia

Ciascun elemento di una data riga si trova sommando la coppia di elementi che gli sta sopra, sulla riga "precedente", come in figura.

- Il fattoriale fornisce il numero delle permutazioni di $n$ elementi.
- $D_{n,k}$ corrisponde al numero delle applicazioni (funzioni) iniettive di un insieme formato da $k$ elementi in un altro insieme formato da $n$ elementi.

  $D_{n,k}$ si ottiene pensando di sistemare $n$ oggetti distinti in $k$ cassetti. Allora, nel primo cassetto ne possiamo mettere $n$, nel secondo $n-1$, nel terzo $n-3$,..., nel $k$-esimo $n-k+1$: moltiplicando questi numeri tra loro si ottiene proprio $D_{n,k}$.

  In effetti, il fattoriale si ottiene in modo analogo e si ha $D_{n,n} = n!$.

# Calcolo combinatorio: breve introduzione

- $C_{n,k}$ è detto "numero" delle *combinazioni di n elementi di classe k* e fornisce il numero dei sottoinsiemi $B$ di $k$ elementi di un dato insieme $A$ formato da $n$ elementi.

  Osservare che $C_{n,k}$ si ottiene da $D_{n,k}$ dividendo per $k!$.

  Infatti, se vogliamo contare i sottoinsiemi di $k$ elementi di un insieme di $n$ elementi, allora non ci interessano i modi in cui disponiamo i $k$ elementi di ogni sottoinsieme: se quindi partiamo da $D_{n,k}$ basta dividere per $k!$.

- $F_{n,k}$ corrisponde al numero delle funzioni di un insieme di $k$ elementi in un insieme di $n$ elementi.

  $F_{n,k} = n^k$ si ottiene pensando di sistemare $n$ oggetti in $k$ cassetti, ma potendo "ripetere" le scelte degli oggetti.
  Allora, nel primo cassetto ne possiamo mettere $n$, nel secondo $n$,..., nel $k$-esimo $n$: moltiplicando questi numeri tra loro si ottiene ovviamente $n^k$.

- Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme formato da $n$ elementi?
  In effetti, si ha

$$\underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} \underset{(\star)}{=} (1+1)^n = 2^n.$$

$\uparrow$ corrisponde all'insieme $\varnothing$ $\qquad$ $\uparrow$ corrisponde all'insieme stesso

(notare che $(\star)$ segue dalla formula del binomio di Newton).

Per dimostrare ciò, si ricordi che $\binom{n}{k}$ sono i sottoinsiemi di $k$ elementi presi tra $n$ elementi: basta sommare questi numeri per $k$ che va da 0 a $n$.

Per questa ragione, l'insieme delle parti di $A$ si denota con il simbolo $2^A$.

## Esercizio

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Dimostrare per induzione che se $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, si ha

$$(\star) \qquad y^n - x^n = (y - x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + y\, x^{n-2} + x^{n-1}).$$

Ovviamente si ha $y^1 - x^1 = (y - x) \cdot 1$.

Assumiamo la validità di $(\star)$ (è l'ipotesi induttiva) e proviamo che $(\star)$ vale con $(n+1)$ al posto di $n$. Cioè, si deve provare che

$$(I :=) \quad y^{n+1} - x^{n+1} \stackrel{?}{=} (y - x)(y^n + \underbrace{y^{n-1}x + \cdots + y\, x^{n-1} + x^n}_{=C}) \quad (=: II).$$

Osserviamo che

$$C = x\left(y^{n-1} + xy^{n-1} + \cdots + y\,x^{n-2} + x^{n-1}\right) \underset{\text{Hp Ind}}{=} x\left(\frac{y^n - x^n}{y - x}\right).$$

Allora

$$II = (y-x)(y^n + C) = (y-x)\left(y^n + x\left(\frac{y^n - x^n}{y-x}\right)\right) =$$

$$= (y-x)\left(\frac{y^{n+1} - y^n x + xy^n - x^{n+1}}{y-x}\right) = y^{n+1} - x^{n+1} = I \iff I = II.$$

Ciò prova $(\star)$ nel caso $(n+1)$-esimo.

La tesi segue dal Principio di Induzione.

## Esercizio

Dimostrare col principio d'induzione che si ha

$$(\star) \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

*Soluzione.* Ovviamente $1 = \sum_{k=1}^{1} k = \frac{1(1+1)}{2} = 1$. Possiamo assumere $(\star)$ al passo $n$ (è la nostra ipotesi iduttiva) e dimostrare la formula al passo $n+1$. Si ha

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Ciò prova $(\star)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Quest'identità si usa nel prossimo esercizio.

### Esercizio

*Dimostrare col principio d'induzione che si ha*

$$(\star\star) \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left( \sum_{k=1}^{n} k \right)^2 .$$

Ovviamente $1 = \sum_{k=1}^{1} k^3 = \left( \sum_{k=1}^{1} k \right)^2 = 1^2 = 1.$

Assumiamo vera $(\star\star)$ al passo $n$ (è l'ipotesi iduttiva) e dimostriamo la formula al passo $n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^2(n+1)$$

$$\underbrace{=}_{per(\star\star)} \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1)^2(n+1) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^2(n+1)$$

$$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + 2\frac{(n+1)^2 n}{2} + (n+1)^2$$

$$= \left(\frac{n(n+1)}{2} + n + 1\right)^2$$

$$= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2.$$

Ciò prova $(\star\star)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, dove l'ultima uguaglianza segue dall'identità $(\star)$ dell'esercizio precedente.

## Esercizio

Dimostrare col principio d'induzione che si ha

$$(\star) \qquad n! \geq 2^{n-1} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

*Soluzione.* Ovviamente si ha $1 \geq 2^{1-1} = 1$. Assumendo ora $(\star)$ proviamo che $(n+1)! \geq 2^n$. In effetti, si ha

$$(n+1)! = n!(n+1) \underbrace{\geq}_{per(\star)} 2^{n-1}(n+1) \geq 2^{n-1} \cdot 2 = 2^n.$$

Ciò prova $(\star)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

## Esercizio

Dimostrare col principio d'induzione che

$$(\star) \qquad n^n \geq n! \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

*Soluzione.* Ovviamente si ha $1 = 1^1 \geq 1! = 1$. Assumiamo la validità di $(\star)$ (è l'ipotesi induttiva) e proviamo che $(\star)$ vale con $(n+1)$ al posto di $n$.
Cioè, dovremmo provare che

$$(n+1)^{n+1} \overset{?}{\geq} (n+1)!.$$

**N.B.** Quest'ultima è equivalente a

$$(I :=) \quad (n+1)^n \geq n! \quad (=: II).$$

Infatti ciò segue dividendo per $(n+1)$ ambo i membri della disuguaglianza precedente. A questo punto basta osservare che

$$n! \underset{\text{hp Ind.}}{\leq} n^n \leq (n+1)^n \iff I \geq II,$$

che è quanto si doveva dimostrare. Ciò prova $(\star)$ nel caso $(n+1)$-esimo e la tesi segue dal Principio di Induzione.

# Esercizi

## Esercizio

Risolvere le seguenti disuguaglianze elementari:

$$|x - a| \leq r, \quad x^2(2 - x) > 0, \quad x^3 + x < 0, \quad 3x^2 - 2x + 1 > 0,$$

$$\frac{2 - x}{x - 1} \geq 0, \quad |x - 1| \leq |x + 1|.$$