SUCCESSIONI: esercitazioni

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{3n^2-2n-4}_{=a_n}$

Sol. $a_n = 3n^2-2n-4 = 3n^2\left(1-\frac{2}{3n}-\frac{4}{3n^2}\right)$

Dato che $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2} \to 0 \quad (n\to+\infty)$ si ha

$$a_n = 3n^2\big(\underbrace{1+o(1)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty .$$

---

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n^3+n-3$

Sol. $a_n = -2n^3+n-3 = -2n^3\left(1-\frac{n}{2n^2}+\frac{3}{2n^3}\right)$

Dato che $\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3} \to 0 \quad (n\to+\infty)$, allora

$$a_n = -2n^3\big(1+o(1)\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty .$$

Osservazione :

In generale se $\boxed{a_n = \sum_{j=0}^{p} \alpha_j n^j}$, ossia

$a_n =$ polinomio di grado p nell'indeterminata n, si ha che il limite sarà dipendente dal segno di α_p (coeff. del termine di grado massimo).

Infatti
$$\sum_{j=0}^{p} \alpha_j n^j = \alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_p n^p =$$
$$= \alpha_p n^p \Big(1 + \underbrace{\frac{\alpha_{p-1}}{\alpha_p n} + \dots + \frac{\alpha_0}{\alpha_p n^p}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0} \Big).$$

Perciò se $\alpha_p > 0$ si ha

$\lim_n a_n = +\infty$.

Se invece $\alpha_p < 0$, allora $\lim_n a_n = -\infty$.

3) $\underbrace{\lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n+2}}_{=a_n}$.

<u>Sol.</u> $a_n = \frac{n+1}{n+2} = \frac{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})}{\cancel{n}(1+\frac{2}{n})}$, e dato che

$\frac{1}{n} \longrightarrow 0$, si ha $a_n = \frac{1+o(1)}{1+o(1)} \sim 1$.

Cioè $\lim_n a_n = 1$

---

4) $\lim_{n \to +\infty} \frac{n-1}{n^2+2}$

<u>Sol.</u> $a_n = \frac{n-1}{n^2+2} = \frac{\cancel{n}(1-\frac{1}{n})}{n^{\cancel{2}}(1+\frac{2}{n^2})}$.

Dato che $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2} \longrightarrow 0$ (per $n \to \infty$), si ha

$$a_n = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \underbrace{\frac{1+o(1)}{1+o(1)}}_{\to 1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Quindi $\lim_n a_n = 0$.

(*) Osservazione. Supponiamo che

$$a_n = \frac{\sum_{k=0}^{q} \alpha_k n^k}{\sum_{h=0}^{p} \beta_h n^h}.$$

Cioè a_n è una funzione (in n) "razionale" (quoziente di polinomi in n). Allora si mette in evidenza, a numeratore e a denominatore, il termine di grado massimo. Cioè:

$$a_n = \frac{\alpha_q n^q \left(1 + \frac{\alpha_{q-1} \cancel{n^{q-1}}}{\alpha_q \cancel{n^q}} + \dots + \frac{\alpha_0}{\alpha_q n^q}\right)}{\beta_p n^p \left(1 + \frac{\beta_{p-1}}{\beta_p n} + \dots + \frac{\beta_0}{\beta_p n^p}\right)} =$$

$$= \frac{\alpha_q}{\beta_p} \cdot n^{q-p} \cdot \boxed{\frac{1 + o(1)}{1 + o(1)}}.$$

Se $q > p$, $\lim_n a_n = \begin{cases} +\infty & \frac{\alpha_q}{\beta_p} > 0 \\ -\infty & \frac{\alpha_q}{\beta_p} < 0 \end{cases}$

Se $q < p$, $\lim_n a_n = 0$.

Se $q = p$, $\lim_n a_n = \frac{\alpha_p}{\beta_p} \in \mathbb{R}$

Es.5 $a_n = \dfrac{n^4+3n^2}{n^4+2n^3}$ $\lim_n a_n = 1$.

Sol.

Infatti $a_n = \dfrac{\cancel{n^4}\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\cancel{n^4}\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \dfrac{1+o(1)}{1+o(1)} \sim 1$.

Es.6 $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^4+n^3+2}{\sqrt{2}\,n+3n^3}$

Sol. $a_n = \dfrac{n^{\cancel{4}}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^4}\right)}{3\cancel{n^3}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{3n^2}\right)} = \dfrac{n}{3}\cdot\dfrac{1+o(1)}{1+o(1)}$

Cioè $a_n \sim \dfrac{n}{3}$. Quindi $a_n \to +\infty$.

Es.7 $\lim_n a_n$, dove $a_n = \dfrac{n^3}{2n^2(n+1)}$.

Sol. $a_n = \dfrac{\cancel{n^3}}{2\cancel{n^3}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{1}{2(1+o(1))} \sim \dfrac{1}{2}$

Cioè $\lim_n a_n = \dfrac{1}{2}$.

Es.8 $\displaystyle \lim_n \frac{(n+1)(n^3+1)}{n^2+3n+1}$

Sol. $$a_n = \frac{n^{\cancel{4}\,2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} =$$

$$= n^2 \underbrace{\left[\frac{(1+o(1))(1+o(1))}{(1+o(1))}\right]}_{\xrightarrow{n\to+\infty} 1} .$$

Quindi $a_n \sim n^2$ e si ha

$$\lim a_n = +\infty$$

Es.9 $\displaystyle \lim_n \frac{(2n+1)(3n^2-n^3+3)}{(n^2+2n+2)\left(\frac{n}{2}+1\right)}$

Sol. $$a_n = \frac{2n\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left[-n^3\left(1-\frac{3}{n}-\frac{3}{n^3}\right)\right]}{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}\right)\cdot\frac{n}{2}\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)} =$$

$$= \frac{-2n^4\,(1+o(1))}{\frac{n^3}{2}\,(1+o(1))} = -4n \underbrace{\left(\frac{1+o(1)}{1+o(1)}\right)}_{\xrightarrow{n\to+\infty} 1}$$

Cioè $a_n \sim -4n$ e $\lim a_n = -\infty$.

Le "tecniche" usate si applicano anche ai seguenti:

Es. 10 $\displaystyle \lim_n \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n}}$.

Sol. $$a_n = \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}}-\sqrt{\frac{1}{n}}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\overbrace{\sqrt{1+o(1)}}^{\to 1}}{\left(\underbrace{\sqrt{1+o(1)}}_{\to 1} + \underbrace{\sqrt{o(1)}}_{\to 0}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+o(1)\right). \quad \text{Cioè} \quad a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Quindi $\displaystyle \lim_n a_n = 0$

Es. 11 $\displaystyle \lim_n \frac{\sqrt{2+n^2}}{2n+3}$.

$$a_n = \frac{n\sqrt{1+2/n^2}}{2n\left(1+3/2n\right)} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\overbrace{\sqrt{1+o(1)}}^{\to 1}}{1+o(1)}\right) \sim \frac{1}{2}.$$

Cioè $\displaystyle \lim a_n = \frac{1}{2}$.

Es. 12 Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_n \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, (b) $\lim_n \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$

(c) $\lim_n \sqrt{2n+3} - \sqrt{3n}$, (d) $\lim_n \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}$.

Soluzioni

(a) $$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$$

$$= \frac{(\cancel{n}+1) - \cancel{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Infatti $$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right)$$
$$= \sqrt{n}\,(1 + O(1)) \quad (n \to +\infty)$$

Quindi $$a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

(c) $$a_n = \sqrt{2n+3} - \sqrt{3n} = \frac{3-n}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{3n}} =$$

$$= \frac{-n\left(1 - \frac{3}{n}\right)}{\sqrt{3n}\left(1 + \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{n}}\right)} = -\frac{n}{\sqrt{3}\sqrt{n}} \cdot \frac{1+O(1)}{1+O(1)}$$

$$= -\frac{1}{3\sqrt{n}}\,(1 + O(1)) \sim -\frac{1}{3\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

(b) $$a_n = \frac{\left((n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}\right)\left((n+1)^{\frac{2}{3}} + (n+1)^{\frac{1}{3}} n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}}\right)}{(n+1)^{\frac{2}{3}} + (n+1)^{\frac{1}{3}} n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{\cancel{n}+1 - \cancel{n}}{(n+1)^{\frac{2}{3}} + (n+1)^{\frac{1}{3}} n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}}} .$$

Dato che ogni addendo del denominatore tende a $+\infty$, a_n deve essere infinitesima.

Cioè $\lim a_n = 0$.

NB $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

(d) Si risolve, ad esempio, usando le stesse idee di (a) e (b). Il risultato è $\lim a_n = +\infty$.

Esercizio Calcolare i seguenti limiti (se $\exists$).

a) $\lim_n (-1)^n \frac{n}{n+1}$

b) $\lim_n \frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{n}$

c) $\lim_n \frac{n^{(-1)^n}}{n^{3/2}}$.

Sol. (a) $\begin{cases} a_{2n} = (-1)^{2n} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \sim 1 \\ a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = -\frac{2n+1}{2n+2} \sim -1 \end{cases}$

Cioè esistono limiti differenti per le sotto-successioni a_{2n} e a_{2n+1}. Cioè a_n non converge ($\nexists$ limite).

(b) Ricordare che $[x]$ = "parte intera".

Si ha $\frac{n-1}{2} \leq \left[\frac{n}{2}\right] \leq \frac{n}{2}$.

Perciò $\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leq \frac{[\frac{n}{2}]}{n} \leq \frac{1}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$, $\quad \frac{1}{2n} \to 0$

Allora per il Thm. dei 2 carabinieri,

$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$.

(c) Si ha che $n^{(-1)^n} = n$ se n è pari,

$n^{(-1)^n} = \frac{1}{n}$ se n è dispari. Perciò

$$\frac{1}{n \cdot n^{3/2}} \leq \frac{n^{(-1)^n}}{n^{3/2}} \leq \frac{n}{n^{3/2}} \iff$$

$\frac{1}{n^{5/2}} \leq a_n \leq \frac{1}{n^{1/2}}$. Perciò (2 carabinieri)

dato che $\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{n^{5/2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, allora

$\lim a_n = 0$.

CRITERIO DEL RAPPORTO

<u>Proposizione</u>: sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n > 0$ e

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell .\quad \text{Allora}$$

1) se $\ell > 1$, $\lim_n a_n = +\infty$
2) se $\ell \in [0,1[$ allora $\lim_n a_n = 0$.

Dimostrazione. Sia $\ell > 1$ e sia $\varepsilon > 0$ t.c. $\ell - \varepsilon > 1$. Allora $\exists\, \bar{n}$ t.c. $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \underbrace{\ell - \varepsilon}_{=:M}$ per ogni $n > \bar{n}$. Ma allora

$$a_{n+1} > M a_n \quad \forall\, n > \bar{n}.$$

Quindi $a_{\bar{n}+2} > M a_{\bar{n}+1}$, $a_{\bar{n}+3} > M^2 a_{\bar{n}+1}$, ...,

$$a_{\bar{n}+m} > M^{m-1} a_{\bar{n}+1}. \quad \forall\, m \geq 2.$$

La successione $b_m = a_{\bar{n}+m}$ deve divergere.
Infatti $b_m > M^{m-1} a_{\bar{n}+1}$ e $M^{m-1} \longrightarrow +\infty$.

Allora $b_m \longrightarrow +\infty$.

Se $\ell \in [0,1[$ sia $\varepsilon > 0$ tale che $\underbrace{\ell+\varepsilon}_{M:=} < 1$

Allora $\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n > \bar{n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \underbrace{\ell+\varepsilon} = M .$$

Quindi $\dfrac{a_{\bar{n}+2}}{a_{\bar{n}+1}} < M \implies a_{\bar{n}+2} < M \cdot a_{\bar{n}+1}$,

$a_{\bar{n}+3} < M a_{\bar{n}+2} < M^2 a_{\bar{n}+1}$, ...,

$a_{\bar{n}+m} < M^{m-1} \cdot a_{\bar{n}+1}$. Posto $b_m = a_{\bar{n}+m}$,

si ha che $b_m \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$. Infatti

$$0 \leq b_m < \underset{\substack{\downarrow\, m \to +\infty \\ 0}}{M^{m-1}} \cdot a_{\bar{n}+1} .$$

Quindi $b_m \to 0$ e

perciò $a_n \to 0$.

Questa proposizione è molto utile nella pratica.

Applicazioni del CRITERIO del RAPPORTO

Es. 1) Sia $\alpha > 0$. Calcolare

$$\lim_n \frac{n^\alpha}{h^n} \qquad (h \in \mathbb{R}_+).$$

Sol.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^\alpha}{h^{n+1}} \cdot \frac{\cancel{h^n}}{n^\alpha} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{h} =$$

$$= \Big(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\substack{n\to+\infty \\ \downarrow \\ 0}}\Big)^\alpha \cdot \frac{1}{h} = (1+o(1))^\alpha \cdot \frac{1}{h}$$

Quindi $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{h} \; (= \ell)$

$$\begin{cases} \text{Se } h > 1 \text{ allora } 0 \le \ell < 1 \text{ e } \lim a_n = 0. \\ \text{Se } h \in \,]0,1[\text{ allora } \ell > 1 \text{ e } \lim a_n = +\infty. \end{cases}$$

Es 2) $\lim_n \frac{h^n}{n!} \qquad (h \in \mathbb{R}_+)$.

Sol. $a_n = \frac{h^n}{n!}$, quindi $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{h^n}$.

Perciò $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Quindi

$\lim_n a_n = 0$.

<u>Es.3</u> $\lim_n \frac{\alpha^n}{n^\beta}$ (con $\alpha > 1$ e $\beta > 0$).

<u>Sol.</u> $a_n = \frac{\alpha^n}{n^\beta}$ allora $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^\beta} \cdot \frac{n^\beta}{\alpha^n} =$

$$= \underbrace{\alpha}_{>1} \cdot \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^\beta}_{\downarrow\, n\to+\infty \atop 1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha > 1.$$

Perciò $\lim a_n = +\infty$.

<u>Es.4</u> $\lim_n \frac{n^\beta}{n!}$ $(\beta > 0)$.

<u>Sol.</u> $a_n = \frac{n^\beta}{n!}$ e quindi $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^\beta}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^\beta} =$

$$= \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^\beta}_{\longrightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\longrightarrow 0} \longrightarrow 0.$$ Perciò $a_n \longrightarrow 0$.

Es. 5 $\lim_n \frac{n^n}{n!}$

Sol. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^n} =$

$= (n+1)^n \cdot \frac{1}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e > 1$

Perciò $\lim a_n = +\infty$.

Questo esercizio dice che $n! = o(n^n)$ per $n \to +\infty$

SUCCESSIONI PER RICORRENZA

Es.

Sia $\{a_n\}$ definita come

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2\sqrt{a_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Studiare il comportamento di $\{a_n\}$.

Sol. $a_0 = 1$, $a_1 = 2\sqrt{1} = 2$, $a_2 = 2\sqrt{2}$, ...,

$a_{n+1} = 2^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^n}}$.

N.B. Se $\exists \lim a_n = \ell$, allora deve essere

$$\lim_n (a_{n+1}) = \lim_n 2\sqrt{a_n} \iff$$

$$\ell = 2\sqrt{\ell} \iff \ell^2 = 4\ell \iff \boxed{\ell = 4}.$$

Cioè, se $\exists$, allora $\ell = 4$. Ma esiste?

Osservare che

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^n}\right) = \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \iff$$

$$1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^n} = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) \leq 2.$$

Quindi $0 < a_n \leq 2^2 = 4$.

Quindi $0 \leq a_n \leq 4$ e $\{a_n\}$ è limitata.

Vediamo che $a_n \nearrow$ (monotona crescente).

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2\sqrt{a_n}}{a_n} = \frac{2}{\sqrt{a_n}}.$$ Se, per assurdo,

$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, allora $\frac{2}{\sqrt{a_n}} < 1 \iff 2 < \sqrt{a_n}$

$\iff 4 < a_n$ che è assurdo ($a_n \leq 4$).

Perciò è vero che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Cioè $a_n \nearrow$ e perciò $\exists \lim_n a_n$.

Dato che $\exists \lim a_n = \ell$, e abbiamo visto che se $\exists \ell$ allora esso vale 4, si conclude che

$$\lim a_n = 4.$$

Esercizio Dimostrare che

$$\lim_n \sqrt[n]{\alpha} = 1 \qquad (\alpha \in \mathbb{R}_+)$$

Soluzione. N.B. Usare la disug. di Bernoulli,

Se $\alpha = 1$ non c'è niente da dimostrare.

Sia $\alpha > 1$. Allora $\sqrt[n]{\alpha} > 1$ e posto

$$b_n \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt[n]{\alpha} - 1 \quad \text{si ha} \quad b_n > 0 \quad \text{e}$$

$$\alpha = (1 + b_n)^n \underset{\text{(Bernoulli)}}{\geq} 1 + n b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Perciò si trova $0 \lneq b_n \leq \frac{\alpha - 1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Allora $b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ (Thm 2 carabinieri).

Quindi $\boxed{\lim_n \sqrt[n]{\alpha} = 1}$.

Osservazione.

A partire dal limite $\lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$,

si dimostra che:

$$(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad \boxed{\lim_n \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a}$$

Ad es. $\lim_n \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Oppure $\lim_n \left(1+\frac{3}{n}\right)^n = e^3$.

Esercizio $\lim_n \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = 1$.

Sol. Infatti $a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n}} =$

$$= \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}.$$

Dato che $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \longrightarrow e$, allora

$\lim_n a_n = \lim_n e^{\frac{1}{n}} = 1$.

Esercizio Dimostrare che $\lim_n \frac{4n}{n+2} = 4$.

Soluzione. Si tratta di usare la definizione di limite:

$$(\star)\quad \forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n}\in\mathbb{N}:\ \forall n\ (n>\bar{n} \Longrightarrow |a_n-4|<\varepsilon).$$

Sia quindi $\varepsilon>0$. Si ha

$$\left|\frac{4n}{n+2}-4\right| = 4\left|\frac{-2}{n+2}\right| = \frac{8}{n+2} \underbrace{<\varepsilon}_{(*)}$$

$(*)$ se $\quad 8<(n+2)\varepsilon \iff n>\frac{8}{\varepsilon}-2$.

Perciò se $\bar{n} \geqslant \frac{8}{\varepsilon}-2$, allora vale $(\star)$.

Esercizio Dimostrare che $\lim_n (\sqrt{n}-2n) = -\infty$.

Soluzione: $\forall M\ \exists \bar{n}:\ n>\bar{n} \Longrightarrow a_n<M$. $(\star)$

$$\sqrt{n}-2n = \sqrt{n}\,(\underbrace{1-2\sqrt{n}}_{\leq -1}) \leq -\sqrt{n} \overset{?}{<} M \quad \forall n\geq 1.$$

Se $-\sqrt{n} < M$ allora $\sqrt{n} > -M$ $(\iff n>M^2)$.

Perciò se $\bar{n} \geqslant M^2$ allora vale $(\star)$.