Domanda Studiare la convergenza della serie al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\lg n!}{n^\alpha} \qquad \left(= \sum_{n\geq 1} a_n\right)$$

1°) $a_n \geq 0$ $\left(\text{infatti } \lg n! = \sum_{k=2}^{n} \underbrace{\lg k}_{>0} > 0\right)$.

Quindi la serie o converge o diverge a $+\infty$ (non può "oscillare").

2°) Si ha $\quad n \lg 2 \leq \lg n! \leq n \lg n \qquad \forall\, n \geq 1$

(inoltre valgono le disuguaglianze strette se $n > 1$.)

Pertanto (*) $\boxed{\dfrac{\lg 2}{n^{\alpha-1}} \leq \dfrac{\lg n!}{n^\alpha} \leq \dfrac{\lg n}{n^{\alpha-1}}}$ e potremo usare il Teorema del confronto.

Precisamente occorre ora "studiare in breve" le serie:

$$(A) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \quad e \quad (B) \sum_{n\geq 1} \frac{\lg n}{n^{\alpha-1}} .$$

(A) È la serie armonica generalizzata di esponente $\alpha-1$ e converge se $\alpha-1>1$, mentre diverge a $+\infty$ se $\alpha-1\leq 1$ (cioè, se converge, allora $\alpha>2$)

(B) La serie $\sum \frac{\lg n}{n^{\beta}}$ $(\beta=\alpha-1)$ si può studiare così:

$\forall \varepsilon>0$ si ha che $\lg n = o(n^{\varepsilon})$ per $n\to+\infty$

(infatti $\frac{\lg n}{n^{\varepsilon}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ se $\varepsilon>0$). Perciò

$$b_n = \frac{\lg n}{n^{\beta}} = \frac{o(n^{\varepsilon})}{n^{\beta}} = o\left(\frac{1}{n^{\beta-\varepsilon}}\right) \quad \text{per } n\to+\infty .$$

(Infatti $\frac{\lg n}{n^{\beta}} \cdot n^{\beta-\varepsilon} = \frac{\lg n}{n^{\varepsilon}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$).

Quindi $b_n = o\left(\frac{1}{n^{\beta-\varepsilon}}\right)$ e per il Teorema del confronto asintotico la serie $\sum_{n\geq 1} b_n = \sum \frac{\log n}{n^\beta}$ converge quando converge la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\beta-\varepsilon}}$, cioè se $\beta - \varepsilon > 1 \iff \beta > 1+\varepsilon$.

Quindi la serie (B) converge se $\beta = \alpha - 1 > 1 + \varepsilon$, cioè se $\alpha > 2 + \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$ (cioè $\forall \alpha > 2$)

Di conseguenza (per il teorema del confronto e (*)) si ha che la serie converge (assolutamente) se $\boxed{\alpha > 2}$ e diverge $\boxed{\forall \alpha \leq 2}$

Chiudo con una "curiosità" (approfondimento):

Vale la seguente approssimazione (Formula di Stirling):

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \qquad n \longrightarrow +\infty$$

Allora $\lg n! \sim \lg\left(n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\right) = n \lg n - n + \lg\sqrt{2\pi n}$

NB
$$\begin{cases} \cdot \ \lg\sqrt{2\pi n} = \lg(2\pi n)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\lg 2\pi + \lg n\right) \sim \frac{\lg n}{2}; \\ \cdot \ n = o(n \lg n) \quad \text{per } n \longrightarrow +\infty \\ \cdot \ \lg n = o(n \lg n) \quad \text{per } n \longrightarrow +\infty \end{cases}$$

Perciò $\lg n! \sim n \lg n$ per $n \longrightarrow +\infty$.

Adesso, usando il Teorema del Confronto asintotico, si ottiene

che $\sum \frac{\lg n!}{n^\alpha}$ converge se e solo se converge $\sum \frac{\lg n}{n^{\alpha-1}}$.

Quest'ultima serie (vedere sopra) converge $\forall \alpha > 2$.