Analisi Matematica

Corso di Laurea in Informatica. Docente: Francescopaolo Montefalcone

Periodo: I anno - I trimestre — 28/09/2021 - 14/01/2022. Durata del corso: 96 ore
(24 ore del corso sono tenute dal Prof. Paolo Guiotto)

Descrizione delle finalità e del programma

Finalità: Scopo principale del corso è di fornire allo studente i concetti fondamentali dell'Analisi Matematica e le più significative tecniche di calcolo per funzioni di una variabile reale.

Sunto del Programma

(1) Numeri reali.
(2) Numeri complessi ed introduzione agli spazi vettoriali Euclidei.
(3) Successioni.
(4) Cardinalità.
(5) Topologia della retta Euclidea.
(6) Limiti di funzioni di 1 variabile reale.
(7) Continuità e proprietà globali delle funzioni continue.
(8) Calcolo differenziale.
(9) Integrale di Riemann.
(10) Tecniche di integrazione.
(11) Integrali generalizzati.
(12) Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine: le equazioni lineari e a variabili separabili.
(13) Serie numeriche.
(14) Cenni su alcune generalizzazioni della teoria (cfr. Footnote 1).

I seguenti materiali didattici, usati durante lo svolgimento del corso, sono disponibili sulla pagina Moodle e consentono allo studente una preparazione esaustiva:

- Dispense del corso a cura del docente.
- Lucidi delle lezioni tenute dal docente.
- Video-lezioni registrate.
- Materiale didattico integrativo: esercizi svolti, approfondimenti, pdf dei ricevimenti svolti, temi d'esame etc.

Nota: parte integrante del corso sono state alcune attività didattiche complementari come ad esempio, i ricevimenti studenti settimanali, le esercitazioni con il tutor (dott. Mattia Miolato), etc.

Bibliografia alternativa e note aggiuntive

In ordine di difficoltà crescente:

- P. Marcellini, C. Sbordone , *Analisi Matermatica uno,* Liguori Editore (qualsiasi edizione).
- E. Giusti, *Elementi di Analisi Matematica,* Bollati Boringhieri, 2008.

Per chi desiderasse un eserciziario, un classico è:

- B. Demidovic, *Esercizi e problemi di analisi matematica,* Editori Riuniti (qualsiasi edizione).

Per chi volesse approfondire, anche culturalmente, lo studio dell'analisi, suggerisco una lettura forse difficile, ma entusiasmante:

- R. Courant, H. Robbins, *Cos'è la Matematica?,* Bollati Boringhieri (qualsiasi edizione).

Modalità d'esame

- Vi sarà un'unica prova scritta divisa in due parti.

  La prima parte conterrà domande sulla teoria svolta e durerà un'ora circa.
  La seconda parte sarà incentrata su esercizi (calcolo di limiti di successioni e/o funzioni, studio di funzioni, calcolo di integrali e studio della convergenza per integrali generalizzati e serie, equazioni differenziali, induzione, numeri complessi, etc.). La seconda parte durerà circa (almeno) due ore.

  Le date dei primi due appelli scritti sono state già fissate per il 21 gennaio e il 17 febbraio del 2022.

  Questa prova verrà valutata con un unico voto espresso in trentesimi.
  L'esito della prova verrà comunicato dal docente a distanza di circa 4/5 giorni circa dalla prova.

  Lo studente che supererà la prova (con voto $\geq 18/30$) dovrà/potrà decidere se affrontare un'ulteriore prova orale in presenza.

- Coloro che desidereranno fare l'orale si iscriveranno ad una lista apposita su Uniweb.

- Coloro che invece non vorranno sostenere la prova orale in presenza potranno ottenere un voto complessivo $\leq 26/30$.

  In questo caso, il voto si determina in base a questa regola:
  se il voto ottenuto nella prova è ≤ 26, esso si conserva; invece i voti > 26 diventano 26.

Programma dettagliato

- **Teoria ingenua degli insiemi.** Insiemi ed operazioni insiemistiche (unione, intersezione, differenza, complementare); definizione di "insieme delle parti". Regole di De Morgan.
- **Relazioni.** Funzioni (iniettive, suriettive, biunivoche, invertibili). Preimmagine di un insieme. Funzione Inversa. Composizione di funzioni. Relazioni di equivalenza (esempi: uguaglianza; congruenza modulo p in $\mathbb{Z}$). Relazioni d'ordine (parziale e totale) ed esempi: ordine usuale su $\mathbb{Z}$; l'inclusione è un ordine parziale -non totale- sull'insieme delle parti.
  Definizioni di maggiorante/minorante, massimo/minimo, sup/inf.
  Proprietà elementari di max/min e sup/inf. Definizione di Completezza. $\mathbb{Q}$ non è completo. Esercizi (ad es.: f invertibile $\implies$ f suriettiva; f invertibile $\implies$ f iniettiva; se f è invertibile, l'inversa è unica).
- **Numeri Reali.** Definizione Assiomatica di $\mathbb{R}$ (definizione di gruppo commutativo, anello, etc.). Modulo (valore assoluto) e sue proprietà (disuguaglianza triangolare).
  Definizione di $\mathbb{N}$ (definizione di insieme induttivo; $\mathbb{N}$ è l'intersezione di tutti gli insiemi induttivi) e conseguenze. Principio di Induzione.
  Definizione di $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ (numeri interi e razionali) e loro proprietà elementari.
  Radice n-esima (teorema di Esistenza ed Unicità).
  Calcolo Combinatorio: fattoriale, coefficienti binomiali etc. La formula del Binomio. Esercizi.
- **Successioni.** Definizione generale di successione. Successioni in $\mathbb{R}$. Definizione di limite di una successione (convergente). Definizione di sotto-successione (o successione estratta). Unicità del limite. Ogni estratta di una successione convergente ha lo stesso limite.
  Teorema sul limite di somma, prodotto e reciproco di successioni convergenti.
  Permanenza del segno e suoi corollari (in particolare, le disuguaglianze si conservano al limite). Teorema dei due Carabinieri.
  Definizione di successione superiormente (inferiormente) limitata e di successione limitata.
  Ogni successione convergente è limitata. Definizione di successione divergente (positivamente e negativamente) e proprietà principali. Forme indeterminate.
  Definizione di successione monotona (crescente/ decrescente). Teorema di esistenza del limite per successioni monotone.
  Esempio: il numero "e" di Nepero.
  Teorema di Bolzano-Weierstrass (dimostrazione facoltativa).
  Successioni di Cauchy. Ogni successione convergente è di Cauchy .
  Teorema di completezza sequenziale di $\mathbb{R}$ (ogni successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ è convergente).
  Rappresentazione decimale dei numeri reali.
  Notazioni abbreviate di limite per successioni: "o piccolo, O grande, equivalente".
- **Cardinalità.** Insiemi equipotenti. Insiemi infiniti. Numerabilità. Esempi di insiemi numerabili: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$. Assioma della Scelta. Ogni insieme infinito contiene un numerabile. L'unione numerabile di insiemi numerabili è numerabile (procedimento diagonale di Cantor). $\mathbb{R}$ non è numerabile: potenza del continuo. La cardinalità dell'insieme delle parti 2^A di un dato insieme A è strettamente maggiore della cardinalità di A.
- **Topologia della retta reale.** Intervalli (aperti, chiusi, semiaperti e/o semichiusi a sn./ds., illimitati). Intorni (intorno aperto di un punto di raggio $r > 0$. Famiglia di intorni di un punto. Intorni di $+/-\infty$). Punto di Accumulazione e Derivato di un insieme. Punto di Aderenza e Chiusura di un insieme. Caratterizzazioni di derivato e chiusura. Compattezza (i compatti di $\mathbb{R}$ sono i chiusi e limitati). Punto Interno ed Interno di un insieme. Insieme Aperto (gli aperti sono complementari dei chiusi).

- **Definizione di Limite.** Limiti di funzioni: definizione. Esempi. Teorema di Unicità del limite. Località del limite ed esempi. Limite delle restrizioni e definizione di limite destro/sinistro. Conseguenze ed esempi. Teorema di collegamento tra limite di funzioni e limite di successioni. Teorema sul limite di somma, prodotto, reciproco, etc.
  Teorema dei due Carabinieri. Teorema (di Cauchy) sull'esistenza del limite in $\mathbb{R}$ di una funzione. Definizioni: funzione superiormente/inferiormente limitata; sup/inf, e max/min per funzioni. Funzioni monotone. Teorema di esistenza del limite per funzioni Monotone.

- **Continuità.** Definizione. Teorema su somma, prodotto, reciproco etc. di funzioni continue. Caratterizzazione della continuità mediante successioni. Teorema di continuità della composizione (la composizione di funzioni continue è continua). Teorema di Weierstrass.
  Funzioni continue su intervalli. Teorema di Bolzano e Teorema dei Valori Intermedi.
  Conseguenze: immagine di una funzione continua su un intervallo.
  Uniforme continuità e Teorema di Heine-Cantor.

- **Funzioni Elementari**: Esponenziali, Logaritmi e loro proprietà; Funzioni Trigonometriche Sin, Cos, Tan, e loro Inverse; Funzioni Iperboliche.

- **Limiti notevoli:** introduzione ai principali limiti notevoli e al loro uso.
  Notazioni di limite: O grande, o piccolo ed equivalenze asintotiche. Esempi.
  Calcolo di Limiti mediante approssimazione polinomiale. Esercizi ed esempi riassuntivi.

- **Calcolo differenziale.** Derivata: definizioni principali e prime proprietà.
  Derivate di funzioni elementari. Derivata di somma, prodotto, quoziente.
  Derivata della funzione composta e della funzione inversa.
  Funzioni derivabili su intervalli. Una funzione derivabile con derivata nulla su un intervallo è costante. Monotonia e derivabilità. Teorema di Rolle e Teoremi di Lagrange e di Cauchy. Teorema di Darboux. Teorema dell'Hôpital: applicazioni al calcolo dei limiti.
  Formula di Taylor: definizione di polinomio di Taylor e formula di Taylor con resto di Peano. Formula di Taylor con resto di Lagrange. Esempi: sviluppi di Taylor/McLaurin delle funzioni elementari e loro uso nel calcolo di limiti.
  Convessità (concavità) di funzioni definite su intervalli. Disuguaglianze geometriche equivalenti alla definizione. Conseguenze per funzioni derivabili una e/o due volte.
  Applicazioni allo studio di funzioni. Alcune definizioni (simmetrie e periodicità). Classificazione delle discontinuità di una funzione (discontinuità eliminabili, di prima e seconda specie). Concetto di asintoto (orizzontale, verticale, obliquo). Definizioni di punto angoloso e cuspide. Flessi. Derivabilità in un punto ed esempi significativi. Esercizi ed esempi riassuntivi.

- **Integrale di Riemann.** Scomposizione di un intervallo; famiglia delle scomposizioni di $[a, b]$. Misura di un intervallo. Somme Superiori e Somme Inferiori. Integrale Superiore ed Inferiore: integrabilità secondo Riemann (una funzione f definita sull'intervallo $[a, b]$ è Riemann-integrabile se coincidono Integrale Inferiore ed Integrale Superiore). Una funzione non integrabile: la funzione di Dirichlet. Disuguaglianza tra integrale inferiore e superiore. Teorema di Riemann.
  Classi di funzioni Riemann-Integrabili: funzioni continue e funzioni monotone; funzioni limitate con un numero finito di discontinuità.
  Proprietà dell'integrale definito: linearità, monotonia, etc.
  Teorema di Additività e Teorema della Media Integrale.
  Teoremi Fondamentali del Calcolo (primo e secondo) e loro corollari.
  Formule di Integrazione per parti ed Integrale mediante Sostituzione.
  Primitive delle funzioni elementari e principali tecniche di integrazione.
  Integrazione delle funzioni razionali. Esercizi ed esempi.

- **Integrali Generalizzati:** definizione di Integrabilità in senso generalizzato (=SG). Caratterizzazione "alla Cauchy" dell'integrabilità in SG. Definizione di Assoluta Integrabilità in SG e criterio di assoluta convergenza. Teorema del Confronto e corollari.
  Teorema di Convergenza degli integrali oscillanti. Esercizi ed esempi riassuntivi.
- **Teoria delle serie numeriche reali.** Esempi e motivazioni. Definizione di serie (convergente, divergente, oscillante). Serie assolutamente convergenti. Serie a termini positivi (e monotonia della successione delle somme parziali). Criterio di Cauchy e conseguenze. L'insieme delle serie convergenti è uno spazio vettoriale (rispetto alla somma e prodotto usuali in $\mathbb{R}$).
  Esempi: serie geometrica, serie telescopica. serie armonica.
  Teorema di Confronto e corollari: confronto asintotico. Teorema di Confronto con l'integrale.
  Conseguenze: studio della serie armonica generalizzata.
  Criteri della radice e del rapporto per serie a termini positivi.
  Criterio di Leibniz per serie (oscillanti). Esercizi ed esempi riassuntivi.
- **Equazioni Differenziali del primo ordine (lineari e a variabili separate).**
  Problema di Cauchy associato ad un'equazione del primo ordine. Teoremi di esistenza e unicità per equazioni lineari del primo ordine (formula risolutiva) e a variabili separabili.
  Esercizi ed esempi riassuntivi.
- **Numeri Complessi e preliminari di Algebra Lineare.** Definizioni. Varie rappresentazioni dei numeri complessi. Proprietà principali. Formula di De Moivre e radici n-esime.
  Breve introduzione allo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$: principali proprietà.
- **Cenni su alcune generalizzazioni dell'Analisi**[1]**.** Spazi metrici e definizione astratta di limite. Esempi di funzioni tra spazi euclidei di dimensioni diverse ("curve" e "superfici").
  Derivate parziali. Teorema di Dini nel piano.
  Cenni sull'integrale doppio: formula di riduzione per domini normali. Applicazione al calcolo dell'integrale della Gaussiana.

Francescopaolo Montefalcone

F. M.:
Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Padova,
Via Trieste, 63, 35121 Padova (Italy)
E-mail address: montefal@math.unipd.it

[1]Questa parte deve ancora essere svolta e non sarà oggetto della prova d'esame finale.