È vero che

‘Nel villaggio di Cantù

c’e’ un barbiere

che **NON** rade tutti e soli i barbieri che si radono da soli

??

6. Lezione Corso di Logica 2021/2022

15 ottobre 2021

Maria Emilia Maietti

email: maietti@math.unipd.it

Chiusura della derivabilità per sostituzione

data la derivazione

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash Q}\ \text{ax-id}}{P\&Q \vdash Q}\ \&-\mathrm{S} \qquad \dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash P}\ \text{ax-id}}{P\&Q \vdash P}\ \&-\mathrm{S}}{P\&Q \vdash Q\&P}\ \&-\mathrm{D}
$$

ne otteniamo un'altra **SOSTITUENDO** P con A e Q con $C \rightarrow D$:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, C \rightarrow D \vdash C \rightarrow D}\ \text{ax-id}}{A\&(C \rightarrow D) \vdash C \rightarrow D}\ \&-\mathrm{S} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A, C \rightarrow D \vdash A}\ \text{ax-id}}{A\&(C \rightarrow D) \vdash A}\ \&-\mathrm{S}}{A\&(C \rightarrow D) \vdash (C \rightarrow D)\&A}\ \&-\mathrm{D}
$$

Chiusura della derivabilità per sostituzione

data una **derivazione**

$$\frac{\pi}{\Gamma \vdash \Delta}$$

è **derivazione** pure l'albero

$$\frac{\pi[\mathbf{A}/\mathtt{pr}]}{\Gamma[\mathbf{A}/pr] \vdash \Delta[\mathbf{A}/pr]}$$

ottenuto sostituendo nella derivazione π

TUTTE le occorrenze di $\mathbf{A}$ con la proposizione pr

(e la scrittura $[\mathbf{A}/\mathrm{p}r]$ indica l'operazione di sostituzione

di $\mathbf{A}$ con la proposizione pr

sia in un albero che in una lista di proposizioni)

Altra presentazione di $\mathbf{LC}_p$

le regole del calcolo includono quelle che seguono

+ TUTTE quelle ottenibili da loro SOSTITUENDO le variabili A e B con proposizioni `pr` qualsiasi

ax-id

$$\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'$$

ax-$\perp$

$$\Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla$$

ax-`tt`

$$\Gamma \vdash \nabla, \mathtt{tt}, \nabla'$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta}\ \rightarrow -\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}\ \rightarrow -\mathrm{S}$$

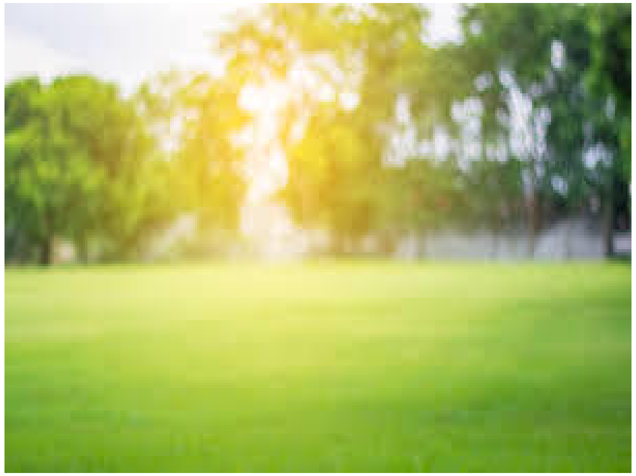
TABELLA di verità di un SEQUENTE

La tabella di verità di un sequente

$$\Gamma \vdash \Delta$$

è la tabella di verità della proposizione

$$\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$$



classificazione verità di un SEQUENTE

$\Gamma \vdash \Delta$ è **TAUTOLOGIA**/**OPINIONE**/**PARADOSSO**

sse

$\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ è **TAUTOLOGIA**/**OPINIONE**/**PARADOSSO**

$\Gamma \vdash \Delta$	TAUTOLOGIA	sse	$\neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$	PARADOSSO
$\Gamma \vdash \Delta$	PARADOSSO	sse	$\neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$	TAUTOLOGIA
$\Gamma \vdash \Delta$	OPINIONE	sse	$\neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$	OPINIONE
$\Gamma \vdash \Delta$	NON TAUTOLOGIA	sse	$\neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$	NON PARADOSSO
$\Gamma \vdash \Delta$	NON PARADOSSO	sse	$\neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$	NON TAUTOLOGIA

Utile tautologia su vero

$$(\texttt{tt} \rightarrow \mathbf{A}) \leftrightarrow \mathbf{A}$$

è una **tautologia**

e ANALOGAMENTE per ogni proposizione $\texttt{pr}$

$$(\texttt{tt} \rightarrow \texttt{pr}) \leftrightarrow \texttt{pr}$$

è **tautologia**

la tautologia $(\mathtt{tt}\rightarrow\mathtt{pr}) \leftrightarrow \mathtt{pr}$

ci dice che

$\mathtt{tt}\rightarrow\mathtt{pr}$ è una **tautologia**

sse

$\mathtt{pr}$ è una **tautologia**

(infatti essendo proposizioni equivalenti hanno ugual tabella di verità!)

Utile tautologia su falso

$$(\mathbf{A} \rightarrow \perp) \leftrightarrow \neg \mathbf{A}$$

è una **tautologia**

e ANALOGAMENTE per ogni proposizione $\mathtt{pr}$

$$(\mathtt{pr} \rightarrow \perp) \leftrightarrow \neg \mathtt{pr}$$

è **tautologia**

la tautologia $(\mathtt{pr} \rightarrow \perp) \leftrightarrow \neg \mathtt{pr}$

ci dice che

$\mathtt{pr} \rightarrow \perp$ è una **tautologia**

sse

$\neg \mathtt{pr}$ è una **tautologia**

(infatti essendo proposizioni equivalenti hanno ugual tabella di verità!)

ATTENZIONE a dove STA il segno di sequente $\vdash$

data una proposizione $\mathtt{pr}$

$\vdash \mathtt{pr}$	significa	$[\,]^{\&} \rightarrow \mathtt{pr}$	$= \mathtt{tt} \rightarrow \mathtt{pr}$
$\mathtt{pr} \vdash$	significa	$\mathtt{pr} \rightarrow [\,]^{\vee}$	$= \mathtt{pr} \rightarrow \perp$
			$= \neg \mathtt{pr}$

$\Downarrow$

" affermare $\mathtt{pr}$"	=	"affermare $\vdash \mathtt{pr}$"
" affermare $\neg \mathtt{pr}$"	=	"affermare $\mathtt{pr} \vdash$"

Formalizzare e classificare in LC$_P$

“ Se passerete l’esame di logica al I appello,

allora a giugno farete una vacanza alle Hawai,

oppure

se a giugno farete una vacanza alle Hawai

allora passerete l’esame di logica al I appello”

ponendo

$\mathbf{A}$=Passerete l’esame di logica al I appello

$\mathbf{B}$=A giugno farete una vacanza alle Hawai

La proposizione formale ottenuta

$$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$$

è una **tautologia**

sse

il sequente

$$\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$$

ha un albero di derivazione in $\mathbf{LC_P}$

Derivazione in $\mathbf{LC_P}$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\textsf{ax-id}}{A, B \vdash A, B}}{A \vdash B \rightarrow A, B}\ \rightarrow\!-\mathrm{D}}{A \vdash B, B \rightarrow A}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{dx}}}{\vdash A \rightarrow B, B \rightarrow A}\ \rightarrow\!-\mathrm{D}}{\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)}\ \vee\!-\mathrm{D}
$$

Quindi la proposizione

$$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$$

è una **tautologia**

perchè derivare con sequenti?

le regole del calcolo dei sequenti

CONSERVANO verità dei sequenti

dall'ALTO di TUTTE le FOGLIE verso il BASSO $\Downarrow$

e (**ANCHE**!!!) dal basso verso l'alto $\Uparrow$

SIGNIFICATO della DERIVAZIONE

$$A \,\&\, B \rightarrow A \vee B$$

$$\Updownarrow$$

$$A \rightarrow (B \rightarrow A) \vee B$$

$$\Updownarrow$$

$$A \rightarrow B \vee (B \rightarrow A)$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathtt{tt} \rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$$

Dunque siccome $A \,\&\, B \rightarrow A \vee B$ è una **ovvia** **TAUTOLOGIA**

se le equivalenze sono tutte corrette

ne segue che

$\mathtt{tt} \rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$ è pure una **tautologia**!

SIGNIFICATO della DERIVAZIONE

$$A \,\&\, B \rightarrow A \vee B$$

$$\Updownarrow$$

$$A \rightarrow (B\rightarrow A) \vee B$$

$$\Updownarrow$$

$$A \rightarrow B \;\vee (B\rightarrow A)$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathtt{tt} \;\rightarrow\; (\; A\rightarrow B\;) \vee (B\rightarrow A)$$

Dunque queste equivalenze mostrano che

$\mathtt{tt} \;\rightarrow\; (\; A\rightarrow B\;) \vee (B\rightarrow A)$ è una **tautologia**

e dalla tautologia $(\mathtt{tt}\rightarrow\mathtt{pr}) \leftrightarrow \mathtt{pr}$ sappiamo che

$$(\; A\rightarrow B\;) \vee (B\rightarrow A)$$

è una **tautologia**