Esercizio: Studiare continuità, derivabilità e continuità della derivata delle seguenti funzioni:

1) $$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \lg|x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

2) $$f(x) = \begin{cases} e^{\alpha x}, & x > 0 \\ \beta, & x = 0 \\ x^2 + x + \gamma, & x < 0 \end{cases}.$$

Solusione.

1) Si ha $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$.

Se $x \neq 0$, $f(x)$ è derivabile in quanto è composizione di funzioni derivabili (se $x \neq 0$: sia $|\cdot|$, sia $\lg(\cdot)$ sono derivabili).

La derivata (se $x \neq 0$) è:

$$f'(x) = \alpha |x|^{\alpha-1} \lg|x| \operatorname{segn} x + |x|^\alpha \cdot \frac{\operatorname{segn} x}{|x|}$$
$$= |x|^{\alpha-1} (\alpha \lg|x| + 1) \operatorname{segn} x .$$

Questa funzione è evidentemente continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Questa funzione è evidentemente continua se $x \neq 0$.

Perciò $f \in C^1(\mathbb{R}\setminus\{0\})$.

Studiamo f in 0.

1) f continua in 0 se $\exists \lim_{x \to 0} |x|^\alpha \lg|x| = 0$.

Ciò è vero solo se $\alpha > 0$. Altrimenti il limite è $-\infty$, cioè f diverge a $-\infty$ in 0.

(Richiamo: $\lg^\beta|x| = o\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right) \quad \forall \beta \in \mathbb{R}, \forall \alpha > 0$)

2) f' esiste in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Calcoliamo $\lim_{x \to 0} f'(x)$.

Si ha
$$\lim_{x \to 0^\pm} |x|^{\alpha-1} \underbrace{(\alpha \lg|x| + 1)}_{\to \pm\infty} \underbrace{\operatorname{segn} x}_{= \pm 1} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ \pm\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

N.B. Se $\alpha \leq 1$ $f'(0)$ non esiste. Perciò f può essere derivabile in $x = 0$ solo se $\alpha > 1$.

Studiamo anche il rapporto incrementale in 0.

3) Studio $R_f(0)(x) = \dfrac{|x|^\alpha \lg|x| - 0}{x} = |x|^{\alpha-1} \lg|x| \cdot \operatorname{segn} x$.

$(|x| = x \cdot \operatorname{segn} x)$

Perciò se $\alpha > 1$ $\exists \lim_{x \to 0} R_f(0)(x) = f'(0) = 0$.

Se invece $\alpha \leq 1$ si ha:

$$\lim_{x \to 0^\pm} |x|^{\alpha-1} \lg|x| \cdot \operatorname{segn} x = \mp\infty \quad (\exists \text{ infiniti})$$

Perciò $\nexists f'(0) \in \mathbb{R}$ cioè f non è deriv. in 0.

Solusione 2: $f(x) = \begin{cases} e^{\alpha x}, & x > 0 \\ \beta, & x = 0 \\ x^2 + x + \gamma, & x < 0 \end{cases}$.

1) continuità: f è cont. in $x=0$ solo se i limiti dx e sx di f in 0 coincidono con $f(0) = \beta$.

Perciò: $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^+} f(x) = e^{\alpha \cdot 0} = 1 \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow$ f cont. in $x=0$ se e solo se $\beta = \gamma = 1$.

Si osservi che se $x \neq 0$ f è certamente continua.
In effetti $f(x)$ è di classe C^∞ fuori dall'origine (cioè $f \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$) dato che è composizione di funzioni di classe C^∞ (esponenziale, polinomi e costanti sono infinitamente derivabili).

2) Derivabilità in $x=0$. Si ha:

$$\exists \quad f'(x) = \begin{cases} \alpha e^{\alpha x}, & x>0 \\ 2x+1, & x<0 \end{cases} \qquad (x \neq 0) \quad .$$

Si ha perciò
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = f'_+(0) = \alpha \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = f'_-(0) = 1 \end{cases} .$$

Ne segue che f è derivabile in $x=0$ solo se $\alpha = 1$ (perchè in tal caso $f'_+(0) = f'_-(0)$) e $\beta = \gamma = 1$.

Quanto affermato segue dalla Proposizione che caratterizza la derivabilità in un pto.

Tuttavia verifichiamolo direttamente:

$$R_f(0)(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\alpha x} - 1}{x} & \text{se } x > 0 \\[2ex] \dfrac{x^2 + x + \cancel{1} - \cancel{1}}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{e^{\alpha x} - 1}{\alpha x} \cdot \alpha \xrightarrow[x \to 0^+]{} \alpha \\[2ex] x + 1 \xrightarrow[x \to 0^-]{} 1 \end{cases}$$

. Perciò $\exists\, f'(0)$ se e solo se $\alpha = 1$ $(\beta = \gamma = 1)$.

Infatti $\exists \lim_{x \to 0} R_f(0)(x) = f'(0)$ solo se $\alpha = 1$

e se f è continua in 0 che è vero se $\beta = \gamma = 1$.

N.B. In ogni caso se $\alpha = \beta = \gamma = 1$ si ha anche $f \in C^1(\mathbb{R})$ in quanto $f'(x) \xrightarrow[x \to 0]{} f'(0)$.

Esercizio. Studiare $f(x) = \frac{|x^2-5x+6|}{x-1}$ nel suo dominio naturale.

Soluzione.

1) Dominio di f: $\quad \mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Infatti il denominatore deve essere $\neq 0$:

c'è un asintoto verticale in $x=0$.

2) Non ci sono simmetrie evidenti.

3) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty .$$

Infatti $\frac{|x^2-5x+6|}{x-1} = \frac{x^2|1+o(1)|}{x(1+o(1))} \sim x \quad |x| \to +\infty.$

Inoltre

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 1} f(x) \quad e$$

f ha un asintoto verticale ($a +\infty$ a ds e $a -\infty$ a sn di $x=1$).

Osservazione. La funzione $f(x)=|x|$ è derivabile fuori dall'origine. Perciò occorre escludere gli zeri del polinomio x^2-5x+6 dall'insieme di derivabilità di f.

Si ha $x^2-5x+6=0 \iff x_\pm = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = 2, 3.$

Perciò studiamo $f'(x)$ in $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$. Si ha:

$$f'(x) = \frac{\operatorname{segn}(x^2-5x+6)\cdot(2x-5)(x-1) - |x^2-5x+6|}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{\operatorname{segn}(x^2-5x+6)\left[(2x-5)(x-1)-(x^2-5x+6)\right]}{(x-1)^2}$$

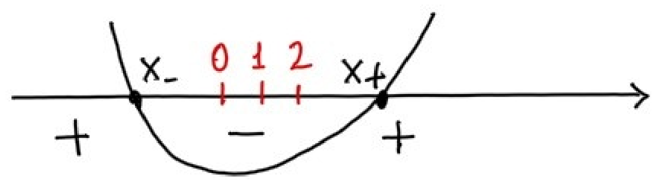
$$= \frac{\operatorname{segn}(x^2-5x+6)\,(x^2-2x-1)}{(x-1)^2} \qquad \forall\, x \neq 1, 2, 3.$$

Studiamo la monotonia ($f'(x) \geq 0$):

Si ha $x^2 - 2x - 1 \geq 0$ se e solo se

$x \in]-\infty, 1-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{2}, +\infty[$. Infatti

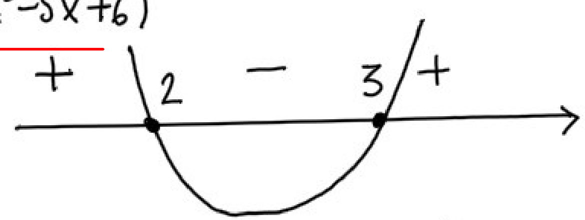
$$x_\pm = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2} .$$



Ovviamente $(x-1)^2 \geq 0$ (è $= 0$ solo se $x = 1$).

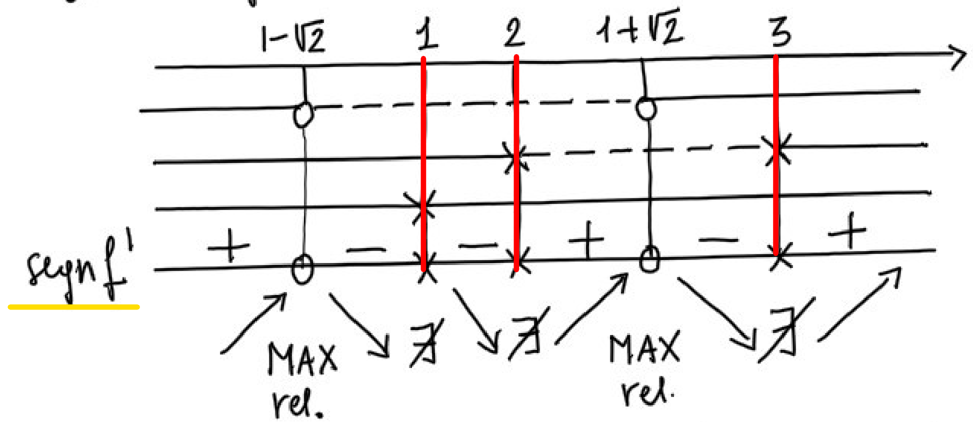
Inoltre $\text{segn}(x^2-5x+6) = \begin{cases} 1 & \text{se } x^2-5x+6>0 \\ -1 & \text{se } x^2-5x+6<0 \end{cases}$

$\underline{\text{segn}(x^2-5x+6)}$



Perciò $\text{segn}(x^2-5x+6) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[\\ -1 & \text{se } x \in]2, 3[\end{cases}$.

Di conseguenza

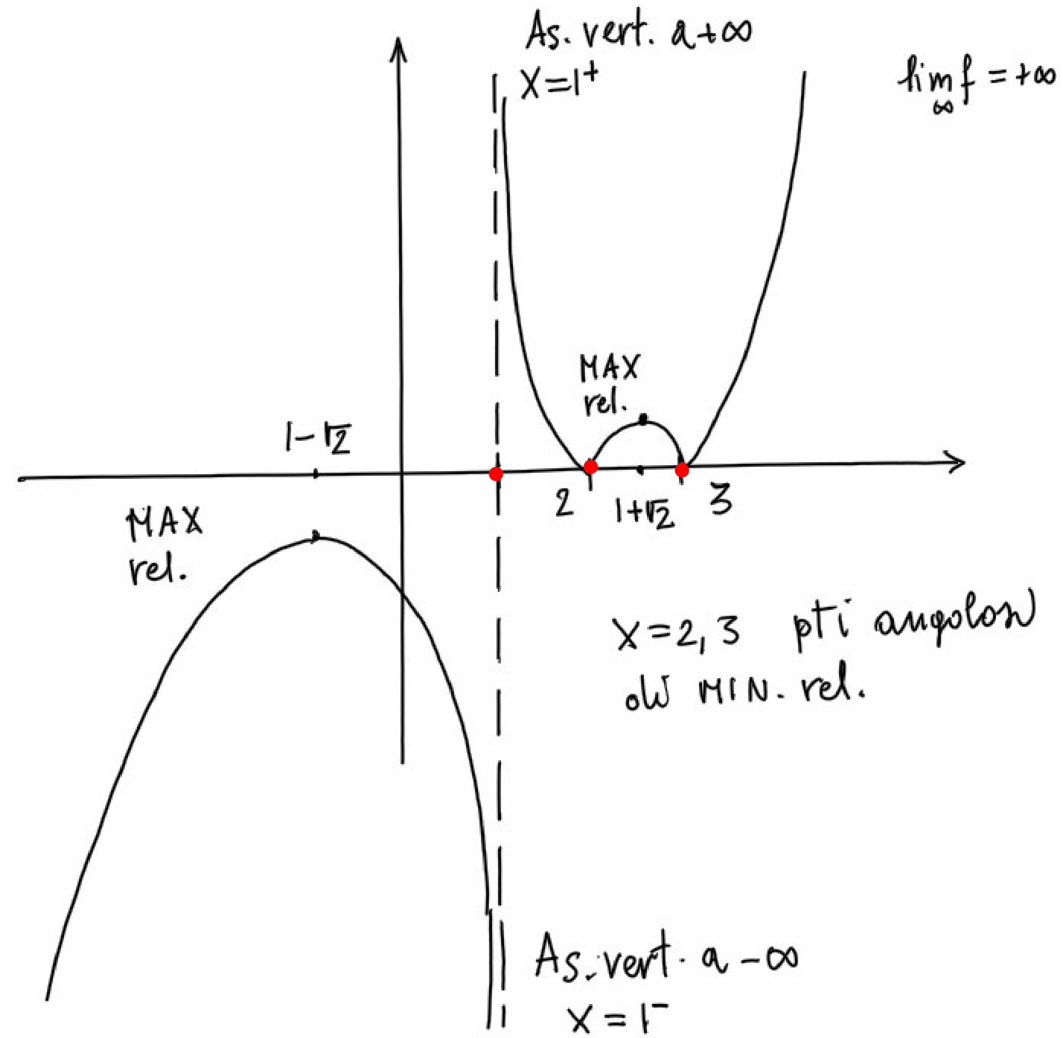


(f cresce, decr., decr., cresce, decr., cresce).

Se $x = 2, 3$ allora f' ha disc. di 1ª specie ("salto"). Infatti $f'(x)$ ha limiti dx e sx finiti ma diversi tra loro per $x \to 2^{\pm}$ e per $x \to 3^{\pm}$. Perciò $x = 2, 3$ sono pti angolosi.

(Invece $\lim_{x \to 1} f'(x) = -\infty$ e sappiamo già che in $x = 1$ f ha un asintoto verticale).

Mettiamo tutte insieme le informazioni ottenute:



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\nexists$ MAX/MIN assoluti : $\sup f = +\infty$

$\inf f = -\infty$.

Esercizio. Discutere il numero di soluzioni dell'equazione
$$e^x = x + \alpha$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Studiamo questo problema nella forma
$$f(x) = \alpha \ , \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Perciò $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^x - x$. $\quad \operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$.

Inoltre • $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$.

(Infatti $f(x) \sim e^x$ per $x \to +\infty$ e $f(x) \sim -x$ per $x \to -\infty$).

Si ha:

- $f'(x) = e^x - 1 \geqslant 0 \iff e^x \geqslant 1 \iff x \geqslant 0$.
- $f(0) = 1$
- $f(x) > 0 \iff e^x > x$. Quest'ultima è sempre vera. Si può verificare ciò graficamente.

Esercizio. Discutere il numero di soluzioni dell'equazione

$$e^x = x + \alpha$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Studiamo questo problema nella forma

$$f(x) = \alpha \ , \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Perciò $f(x) \overset{\text{def}}{=} e^x - x$. $\quad \text{Dom} f = \mathbb{R}$.

Inoltre
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$.

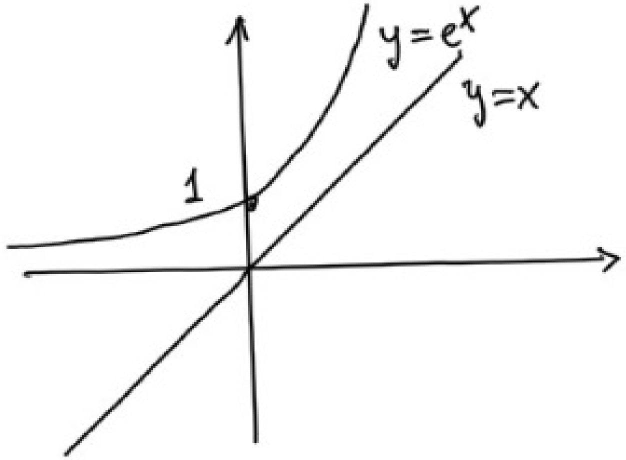
(Infatti $f(x) \sim e^x$ per $x \to +\infty$ e $f(x) \sim -x$ per $x \to -\infty$).

Si ha:

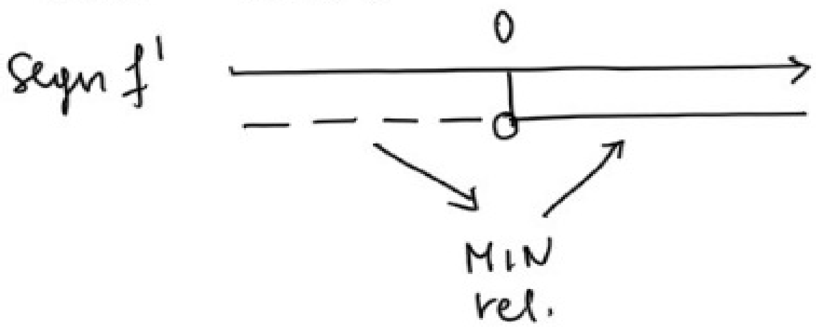
- $f'(x) = e^x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq 1 \iff x \geq 0$.

- $f(0) = 1$

- $f(x) > 0 \iff e^x > x$. Quest'ultima è sempre vera. Si può verificare ciò graficamente.

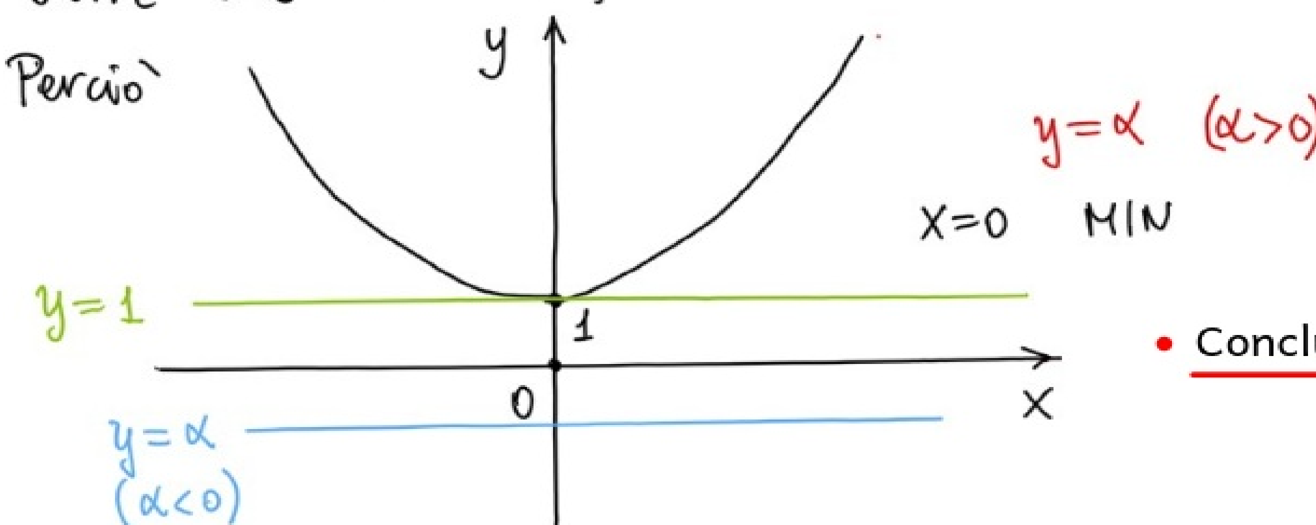


Perciò vale :



Dato che f decresce a sn e cresce a ds di $x=0$, oltre che relativo, $x=0$ è anche minimo assoluto.

Perciò



- Conclusione: 2 soluzioni se $\alpha>1$,
  1 soluzione se $\alpha=1$,
  nessuna soluzione se $\alpha<1$.