- $f(x) \overset{x \to 0}{=} o(x)$.

a) $f(x)$ è limitata in un intorno di 0.

$\Leftrightarrow |f(x)| < M$ se $x \in I_0$ VERA

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad \leadsto \quad f(x) \in (-M, M)$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta$ t.c. se $|x - 0| < \delta$ allora

$$\left| \frac{f(x)}{x} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$|x| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{x} \right| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon |x|$$

$$\Rightarrow |f(x)| < \varepsilon \cdot d = M$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = f'(x)$$

$$D(f(x))$$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f derivabile.

f è monotona $\Leftrightarrow$ segno di f' è costante.

$(\Rightarrow)$ Supponiamo f monotona crescente

Se $x < y$, allora $f(x) < f(y)$

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Se $y > x$, $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0$

Se $y < x$, $\dfrac{\overbrace{\boxed{f(y) - f(x)}}^{<0}}{\underbrace{y - x}_{<0}} > 0$

Grazie al teo. della permanenza del segno, troviamo che $f'(x) \geq 0$

$(\Leftarrow)$ f' ha segno costante, allora f è monotona.

Supponiamo $f'(x) > 0$

allora $\lim_{y \to x} \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x) > 0$

$\Rightarrow$ Per il teo della permanenza del segno si ha che $\dfrac{f(y)-f(x)}{x-y} > 0$

Se $x<y \Rightarrow f(x) < f(y) \Rightarrow f$ è monotona crescente

---

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\log(1+x)-\log(x) - \frac{\alpha}{x}\right)^2}{\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 + e^{-x}}$$

$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ ($x\to 0$)

$\underline{N}$: $\left(\log\left(\frac{1+x}{x}\right) - \frac{\alpha}{x}\right)^2 = \left(\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{\alpha}{x}\right)^2 =$ ($\frac{1}{x} \to 0$)

$= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{\alpha}{x}\right)^2 =$

$= \left[(1-\alpha)\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]^2 =$

$\underline{D}$: $\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 + e^{-x} =$ ($\frac{1}{x} \to 0$)

$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$= \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right)^2 + e^{-x} =$

$= \left(\frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^2 + e^{-x} = \frac{1}{4x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) + e^{-x}$

$e^{-x} \in o\left(\frac{1}{x^4}\right) \iff \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{x^4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{e^x} = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left[(1-\alpha)\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]^2}{\frac{1}{4x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)}$$

- Se $\underline{\alpha=1}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)^2}{\frac{1}{4x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{4x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)}{\frac{1}{4x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)} = 1$$

- Se $\alpha \neq 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left[(1-\alpha)\frac{1}{x} \overbrace{- \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}^{o\left(\frac{1}{x}\right)}\right]^2}{\frac{1}{4x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1-\alpha)^2\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{4x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)}$$

$$= +\infty$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\cos(t)} \cdot \sin(t^\beta)}{t^\alpha}\, dt \quad , \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$\underline{\text{In } 0}$:

$$\left|\frac{e^{-\cos(t)} \cdot \sin(t^\beta)}{t^\alpha}\right| \overset{t\to 0^+}{\sim} \begin{cases} \frac{e^{-1} \cdot t^\beta}{t^\alpha} & \beta > 0 \\ \frac{e^{-1} \cdot \sin(1)}{t^\alpha} & \beta = 0 \\ \frac{e^{-1} |\sin(t^\beta)|}{t^\alpha} & \beta < 0 \end{cases}$$

$$\sin(t) \overset{t\to 0}{=} t + o(t)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{e^{-1}}{t^{\alpha-\beta}} & \text{se } \beta > 0 \iff \alpha-\beta < 1 \\ \dfrac{e^{-1}\sin(1)}{t^{\alpha}} & \text{se } \beta = 0 \iff \alpha < 1 \\ \dfrac{e^{-1}|\sin(t^{\beta})|}{t^{\alpha}} & \text{se } \beta < 0 \iff \alpha < 1 \end{cases}$$

$$\frac{e^{-1}|\sin(t^{\beta})|}{t^{\alpha}} \leq \frac{e^{-1}}{t^{\alpha}}$$

In 0 l'int. converge

$$\iff (\beta > 0 \wedge (\alpha-\beta < 1)) \vee (\beta \leq 0 \wedge \alpha < 1)$$

A $+\infty$:

$$\left|e^{-\cos(t)}\right| \leq e^{1}$$

$$\left|\frac{e^{-\cos(t)}\sin(t^{\beta})}{t^{\alpha}}\right| \leq \frac{e^{1}|\sin(t^{\beta})|}{t^{\alpha}}$$

$$\frac{|\sin(t^{\beta})|}{t^{\alpha}} \overset{t\to+\infty}{\sim} \begin{cases} \dfrac{|\sin(t^{\beta})|}{t^{\alpha}} & \beta > 0 \\ \dfrac{\sin(1)}{t^{\alpha}} & \beta = 0 \\ \dfrac{t^{\beta}}{t^{\alpha}} & \beta < 0 \end{cases}$$

Se $\beta < 0$ $\quad t^{\beta} = \dfrac{1}{t^{-\beta}} \xrightarrow{t\to+\infty} 0$, $\quad \sin(x) \overset{x\to 0}{=} x + o(x)$

Se $\beta > 0$ conv se $\alpha > 1$

Se $\beta = 0$ conv se $\alpha > 1$

Se $\beta < 0$ conv. se $\alpha - \beta > 1$

In 0: $(\beta > 0 \wedge (\alpha - \beta < 1)) \vee (\beta \leq 0 \wedge \alpha < 1)$

- $\beta > 0 \wedge (\alpha - \beta < 1) \wedge (\alpha > 1)$
- $\beta = 0 \wedge \alpha < 1 \wedge \alpha > 1 = \emptyset$
- $\beta < 0 \wedge \alpha < 1 \wedge \alpha - \beta > 1$

L'int. conv. assolutamente $\Leftrightarrow$

$(\beta > 0 \wedge \alpha - \beta < 1 \wedge \alpha > 1) \vee (\beta < 0 \wedge \alpha < 1 \wedge \alpha - \beta > 1)$

- Se $\beta = 1$: (Studiare la convergenza semplice)

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\cos(t)} \sin(t)}{t^\alpha} dt$$

In 0: $\frac{e^{-\cos(t)} \sin(t)}{t^\alpha} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{e^{-1} \cdot t}{t^\alpha} = \frac{e^{-1}}{t^{\alpha - 1}}$

In 0 l'int. conv. $\Leftrightarrow \alpha - 1 < 1 \Leftrightarrow \alpha < 2$

A $+\infty$: $\quad \dfrac{e^{-\cos(t)}\sin(t)}{t^\alpha}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\cos(t)}\sin(t)}{t^\alpha}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{\overbrace{e^{-\cos(t)}\sin(t)}^{f'(t)}}{\underbrace{t^\alpha}_{g(t)}}\,dt$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{e^{-\cos(x)}}{x^\alpha}}_{\xrightarrow{x\to+\infty}\ 0} - \frac{e^{-\cos(1)}}{1} - \underbrace{\int_1^x -\alpha\,\frac{e^{-\cos(t)}}{t^{\alpha+1}}\,dt}_{\text{convergente}}$$

Se $\alpha > 0$: $\quad 0 \qquad$ convergente

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\cos(t)}\sin(t)}{t^\alpha}\,dt \quad \text{conv.} \iff \alpha > 0$$

$$\int_1^{+\infty} -\alpha\,\frac{e^{-\cos(t)}}{t^{\alpha+1}}\,dt \le \int_1^{+\infty} \alpha\,\frac{e^{1}}{t^{\alpha+1}}\,dt$$

$\boxed{\text{Se } \alpha \le 0}$

$$\frac{e^{-\cos(t)}\sin(t)}{t^\alpha} \not\xrightarrow{t\to+\infty} 0 \to \text{l'int. non converge}$$

$\Rightarrow$ Se $\beta = 1$, l'int. conv. $\iff 0 < \alpha < 2$

$$\int_1^{+\infty} f(t)\cdot g(t)\,dt$$

$g(t)$ è oscillante e con primitiva limitata

$f(t)$ monotona e $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$

Allora l'int. converge.

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\cos(t)}\sin(t)}{t^\alpha}\,dt$$

$g(t) = e^{-\cos(t)}\sin(t)$

$G(t) = e^{-\cos(t)}$ è limitata

$f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ e se $\alpha > 0$ $f(t)$ è monotona decrescente e $\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^\alpha} = 0$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\cos(t)}\sin(t)}{t^\alpha}\,dt \text{ è convergente se } \alpha > 0$$

Se $\alpha \leq 0$, $\frac{e^{-\cos(t)}\sin(t)}{t^\alpha} \not\xrightarrow{t\to+\infty} 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n! \cdot x^n} \quad , x \in \mathbb{R}$$

- Studiamo la conv. assoluta

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!\, |x|^n}$$

Crit. asint. rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\underbrace{(n+1)!}_{(n+1)\cdot n!}\, |x|^{n+1}} \cdot \left(n!\, |x|^n\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)\cdot |x|} \overset{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}}{=} 0 < 1$$

$\Rightarrow$ Grazie al crit. asint rapporto, la serie conv assolutamente $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow$ La serie conv. anche semplicemente

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \sqrt{x^2-2}}\, dx \quad , \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{x^\alpha \sqrt{x^2-2}} > 0 \quad \text{se} \quad x \in (\sqrt{2}, +\infty)$$

In $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{x^{\alpha}\sqrt{x^2-2}} = \frac{1}{x^{\alpha}\sqrt{x-\sqrt{2}}\,\sqrt{x+\sqrt{2}}} \overset{x\to\sqrt{2}}{\sim}$$

$$\sim \frac{1}{(\sqrt{2})^{\alpha}(x-\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{2}}} = \frac{c}{(x-\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int_a^b \frac{1}{(x-b)^{\beta}}dx \quad \text{conv} \iff \beta < 1$$

In $\sqrt{2}$ l'int converge $\forall \alpha$

A $+\infty$:

$$\frac{1}{x^{\alpha}\sqrt{x^2-2}} \overset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha+1}}$$

ed è conv $\iff \alpha+1>1 \iff \alpha>0$

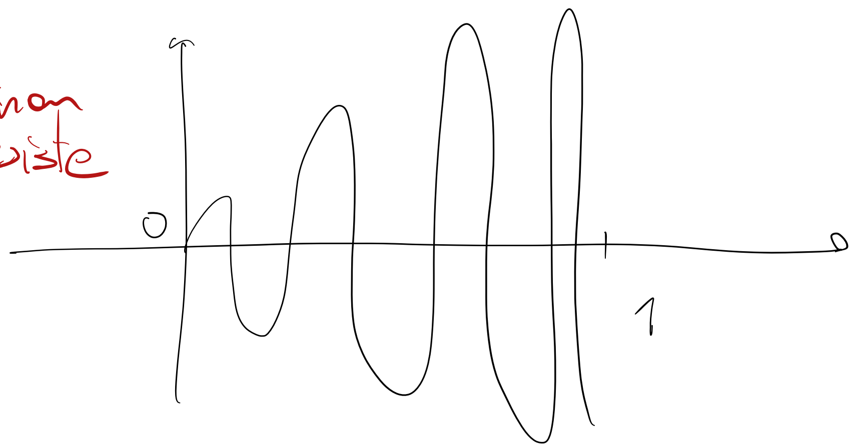
$\Rightarrow$ L'int. converge $\iff \alpha>0$

$$\sqrt{4x^2+2} \overset{x\to+\infty}{\sim} 2x$$

$f(x)$ cont. in $[0,1[$, $f([0,1[) = \mathbb{R}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = l \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to 1^-} f(x)$ non esiste



$$f(x) = \frac{1}{x-1} \cdot \sin\left(\frac{1}{x-1}\right)$$ controesempio

a^x , $a > 0$

$(-1)^x$ non è definito

$f : [0,1] \cup [2,3] \to \mathbb{R}$, f è continua

Se $f(1) = f(2)$, allora $f([0,1] \cup [2,3])$ è un intervallo

f è continua $\Rightarrow$ f manda intervalli in intervalli

Se I, J sono intervalli $f(I) = J$

$f([0,1])$ è un intervallo I_1

$f([2,3])$ è un intervallo I_2

$f(1) \in I_1$
$f(2) \in I_2$ e $f(1) = f(2)$

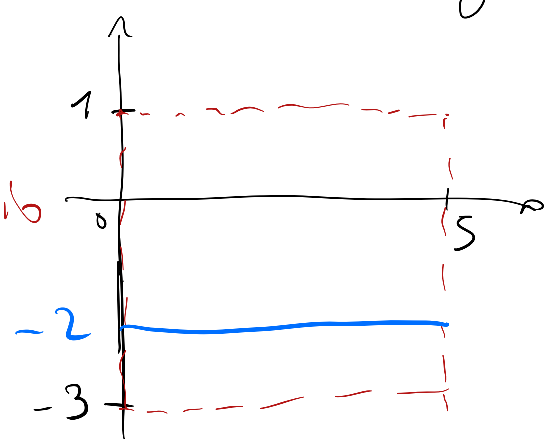
$\Rightarrow I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$

$\Rightarrow I_1 \cup I_2$ è un unico intervallo

$f : [0,5[\to]-3,1]$ Codominio $\neq$ l'insieme immagine

- $\inf(f(\Delta)) = -3$

$f(x) = 0$ controesempio



- $\sup(f(\Delta)) \geq 0$

$f(x) = -2$ controesempio

- $\sup(f$

$f(x) = x^2$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non iniettiva
non suriettiva

$f(x) = x^2$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ non iniettiva
sì suriettiva

$f(x) = x^2$ $\quad f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sì iniettiva
sì suriettiva