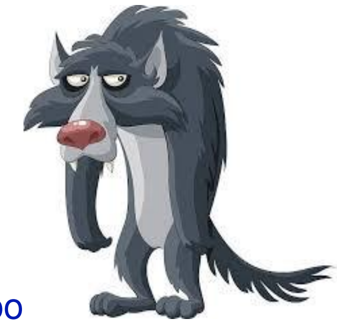
il Lupo a Cappuccetto Rosso:

”Guarda che

ti mangio in un boccone

se e solo se NON indovini subito cosa sto per fare!!”

Cappuccetto Rosso al Lupo: “Mi mangi in un boccone!”

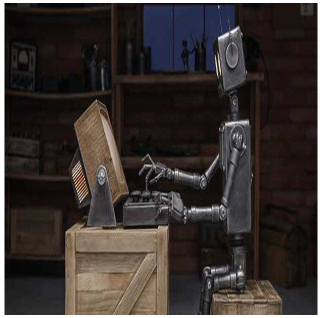
e il Lupo  se ne andò triste...

5. Lezione Corso di Logica 2021/2022

13 ottobre 2021

Maria Emilia Maietti

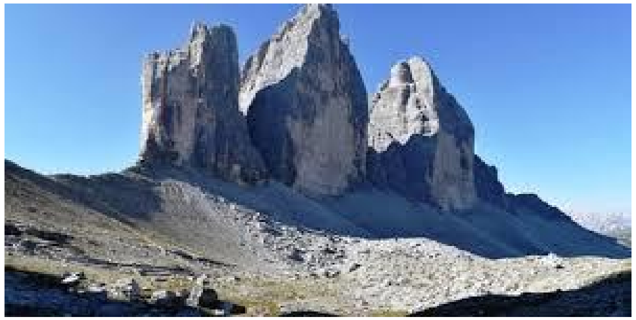
email: maietti@math.unipd.it



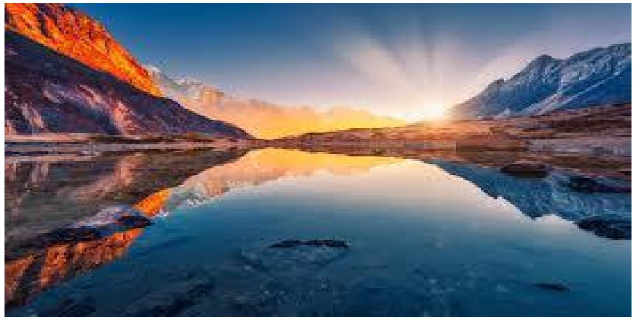
classificazione in logica classica delle proposizioni formali

Per ogni proposizione formale `pr` definiamo

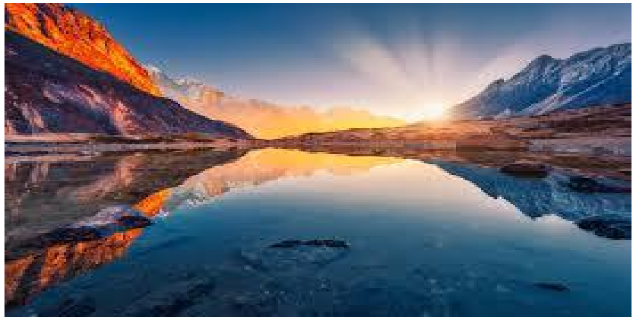
`pr` **TAUTOLOGIA**	`pr` **OPINIONE**	`pr` PARADOSSO
TUTTE le uscite 1 nella tabella di `pr`	ALMENO un'uscita 1 + ALMENO un'uscita 0 nella tabella di `pr`	TUTTE le uscite 0 nella tabella di `pr`



pr	TAUTOLOGIA	sse	¬pr	???
pr	PARADOSSO	sse	¬pr	???
pr	OPINIONE	sse	¬pr	???



pr TAUTOLOGIA	sse	¬pr PARADOSSO
pr PARADOSSO	sse	¬pr TAUTOLOGIA
pr OPINIONE	sse	¬pr OPINIONE



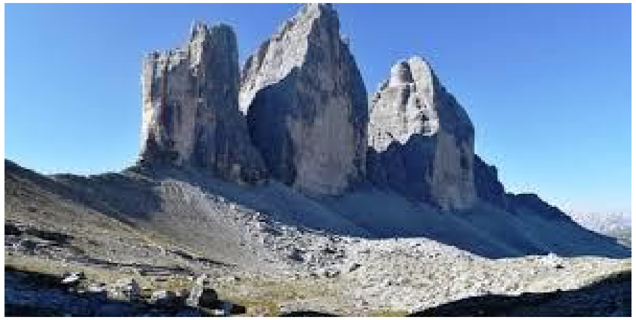
metodo **AUTOMATICO** per **classificare** **proposizioni formali**

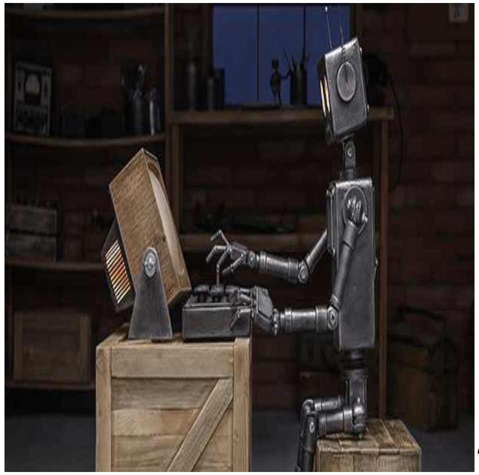
Come **stabilire** se una proposizione `pr`

è **tautologia**

oppure un' **opinione**

oppure un **paradosso**

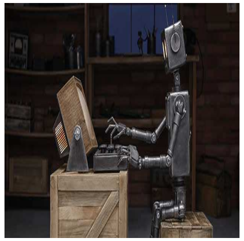


in modo **automatico**, ovvero **robotizzabile**  ??

per classificare una proposizione $\mathtt{pr}$

Basta avere una procedura $\mathcal{P}$ per stabilire

se $\mathtt{pr}$ è una **tautologia** o **NON lo è**



Procedura per classificare una proposizione `pr`

supposto di avere una **procedura** $\mathcal{P}$ per stabilre se $\mathtt{pr}$ è **tautologia** o **NON** lo è

si trova la seguente

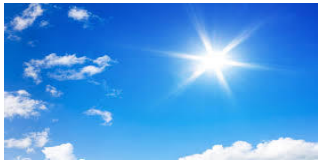
Procedura per classificare una proposizione $\mathtt{pr}$

passo 1: si applichi la procedura $\mathcal{P}$ per stabilire

se $\mathtt{pr}$ è **tautologia** o **NON** lo è

Vi sono due casi:

- caso I : $\mathcal{P}$ dice che $\mathtt{pr}$ è **tautologia** (e $\neg\mathtt{pr}$ è **paradosso**)
- caso II : $\mathcal{P}$ dice che $\mathtt{pr}$ **NON** è **tautologia** vai al passo 2



passo 2: si applichi la procedura $\mathcal{P}$ per stabilire

se $\neg\mathtt{pr}$ è **tautologia** o **NON** lo è

Vi sono due casi:

- caso III : $\mathcal{P}$ dice che $\neg\mathtt{pr}$ è **tautologia** quindi $\mathtt{pr}$ è **paradosso**
- caso IV : $\mathcal{P}$ dice che $\neg\mathtt{pr}$ **NON** è **tautologia** quindi $\mathtt{pr}$ è **opinione** e pure $\neg\mathtt{pr}$ è **opinione**

alcune **Tautologie classiche**

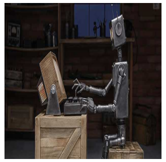
essenza $\rightarrow$	$(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg A \vee B$
associatività $\vee$	$(A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
associatività $\&$	$(A \& B) \& C \leftrightarrow A \& (B \& C)$
commutatività $\vee$	$A \vee B \leftrightarrow B \vee A$
commutatività $\&$	$A \& B \leftrightarrow B \& A$
distributività $\vee$ su $\&$	$A \vee (B \& C) \leftrightarrow (A \vee B) \& (A \vee C)$
distributività $\&$ su $\vee$	$A \& (B \vee C) \leftrightarrow (A \& B) \vee (A \& C)$

idempotenza $\vee$	$A \vee A \leftrightarrow A$
idempotenza $\&$	$A \& A \leftrightarrow A$
leggi di De Morgan	$\neg(B \vee C) \leftrightarrow \neg B \& \neg C$
	$\neg(B \& C) \leftrightarrow \neg B \vee \neg C$
legge della doppia negazione	$\neg\neg A \leftrightarrow A$
legge della NON contraddizione	$\neg(A \& \neg A)$
legge del terzo escluso	$A \vee \neg A$

3 strategie per classificare `pr`

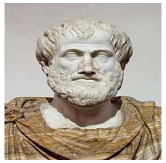
1. strategia delle **tabella di verità**:

fai la tabella di verità di $\mathtt{pr}$

vantaggio: **automatica**/**robotizzabile** 

svantaggio: COSTOSO in tempo

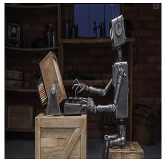
2. strategia MATEMATICA: *riduci* $\mathtt{pr}$ *tramite equivalenze note ad una tautologia classica nota*

vantaggio: strategia veloce, COMPRENSIBILE, se termina 

svantaggio: **NON automatica**/**NON robotizzabile** e non sempre terminante in una proposizione nota

3. strategia dei **sequenti**: *DERIVA* $\mathtt{pr}$ *come sequente*

nel calcolo dei sequenti $\mathbf{LC}_P$

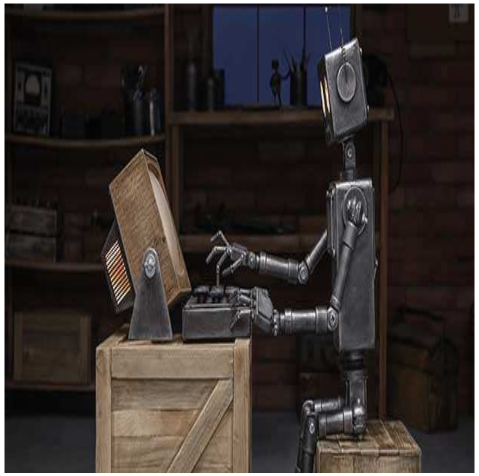
vantaggio: **automatico**/**robotizzabile** 

e meno costosa di 1.

nostra strategia per classificare `pr`

utilizziamo

il calcolo dei sequenti

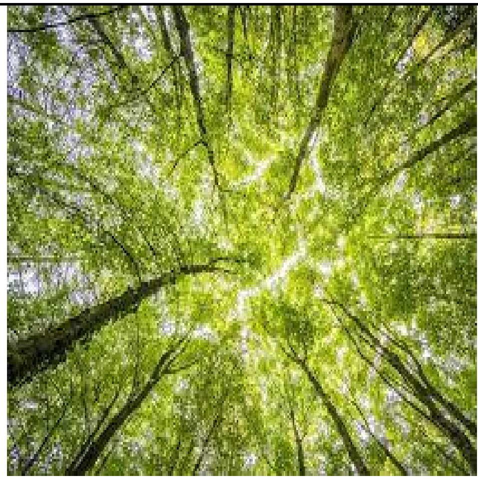


a che serve il calcolo dei sequenti?

a costruire alberi di derivazione

con SEQUENTI

come nodi



ADDENDUM al linguaggio formale: la proposizione costante falso

Per motivi tecnici, aggiungiamo al linguaggio formale

la proposizione costante falso

$\perp$

con tabella

$\perp$
0

ADDENDUM al linguaggio formale: la proposizione costante vero

Per motivi tecnici, aggiungiamo al linguaggio formale

la proposizione costante vero

`tt`

con tabella

tt
1

cosa è un sequente?

un sequente nel linguaggio delle **proposizioni formali** è una scrittura che può essere di 4 tipi diversi:

1. un primo tipo di sequente è la scrittura

$$\mathsf{pr}_1, \mathsf{pr}_2, \ldots \mathsf{pr}_n \quad \vdash \quad \mathsf{cl}_1, \mathsf{cl}_2, \ldots \mathsf{cl}_m$$

che significa

"se pr_1 è *vero* e pr_2 è *vero*... e pr_n è *vero*

allora

o cl_1 è *vero* oppure cl_2 è *vero*... oppure cl_m è *vero*"

o equivalentemente

$$\mathsf{pr}_1, \mathsf{pr}_2, \ldots \mathsf{pr}_n \quad \vdash \quad \mathsf{cl}_1, \mathsf{cl}_2, \ldots \mathsf{cl}_m$$

significa $\quad (\,\mathsf{pr}_1 \& \mathsf{pr}_2\,) \ldots \& \mathsf{pr}_n \quad \longrightarrow \quad (\,\mathsf{cl}_1 \vee \mathsf{cl}_2\,) \ldots \vee \mathsf{cl}_m$ *è vera*

ove le pr_i per $i = 1, \ldots, n$ sono premesse

e le cl_i per $i = 1, \ldots, m$ sono conclusioni

2. un altro tipo di sequente è la scrittura

$$\vdash \quad \mathsf{cl}_1, \mathsf{cl}_2, \ldots \mathsf{cl}_m$$

che significa

"o cl_1 è *vero* oppure cl_2 è *vero*...oppure cl_m è *vero*"

o equivalentemente

$$(\,\mathsf{cl}_1 \vee \mathsf{cl}_2\,) \ldots \vee \mathsf{cl}_m \qquad \text{\textit{è vera}}$$

o anche equivalentemente

$$\mathtt{tt} \;\rightarrow\; (\,\mathsf{cl}_1 \vee \mathsf{cl}_2\,) \ldots \vee \mathsf{cl}_m \qquad \text{è vera}$$

ove le cl_i per $i = 1, \ldots, m$ sono conclusioni

Utile tautologia su vero

$$(\mathtt{tt} \rightarrow \mathbf{A}) \leftrightarrow \mathbf{A}$$

è una **tautologia**

e ANALOGAMENTE per ogni proposizione $\mathtt{pr}$

$$(\mathtt{tt} \rightarrow \mathtt{pr}) \leftrightarrow \mathtt{pr}$$

è **tautologia**

3. un altro tipo di sequente è la scrittura

$$\mathsf{pr}_1, \mathsf{pr}_2, \ldots \mathsf{pr}_n \quad \vdash$$

che significa

"se pr_1 è *vero* e pr_2 è vero... e pr_n *è vero*

allora la costante falso *è vera*"

o equivalentemente

$$(\,\mathsf{pr}_1 \& \mathsf{pr}_2\,) \ldots \& \mathsf{pr}_n \quad \longrightarrow \quad \perp \textit{ è vera}$$

e le pr_i per $i = 1, \ldots, n$ sono premesse

Utile tautologia su falso

$$(\mathbf{A} \rightarrow \perp) \leftrightarrow \neg \mathbf{A}$$

è una **tautologia**

e ANALOGAMENTE per ogni proposizione $\mathtt{pr}$

$$(\mathtt{pr} \rightarrow \perp) \leftrightarrow \neg \mathtt{pr}$$

è **tautologia**

4. infine un sequente è anche la scrittura

$$\vdash$$

che significa

"la costante falso è vera"

o equivalentemente

$\perp$ *è vera*

o anche equivalentemente $\mathtt{tt} \rightarrow \perp$ *è vera*

Notazione generica per un sequente

$$\Gamma \vdash \Delta$$

ove

Γ= lista (anche vuota) di proposizioni arbitrarie

Δ= lista (anche vuota) di proposizioni arbitrarie

Significato di sequente

il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ rappresenta la proposizione

$$\Gamma^{\&} \quad \rightarrow \quad \Delta^{\vee}$$

$$\Gamma^{\&} \equiv (\, \mathtt{pr}_1 \& \mathtt{pr}_2 \,) \ldots \& \mathtt{pr}_n$$

è la congiunzione delle proposizioni

se $\quad \Gamma \equiv \mathtt{pr}_1, \mathtt{pr}_2, \ldots \mathtt{pr}_n$

oppure

$\Gamma^{\&} \equiv \mathtt{tt}$ (costante vero) se Γ è la lista vuota

oppure

$\Gamma^{\&} \equiv \mathtt{pr}_1$ se $\Gamma \equiv \mathtt{pr}_1$

$$\Delta^{\vee} \equiv (\mathtt{pr}_1 \vee \mathtt{pr}_2) \ldots \vee \mathtt{pr}_n$$

è la disgiunzione delle proposizioni

se $\quad \Delta \equiv \mathtt{pr}_1, \mathtt{pr}_2, \ldots \mathtt{pr}_n$

oppure

$\Delta^{\vee} \equiv \bot$ (costante falso) se Δ è la lista vuota

oppure

$\Delta^{\vee} \equiv \mathtt{pr}_1$ se $\Delta \equiv \mathtt{pr}_1$

a che servono i sequenti ?

per stabilire se

la proposizione `pr` è **TAUTOLOGIA**

seguiremo una procedura **AUTOMATICA**

che opera sul **sequente** $\vdash$ `pr`

attraverso la costruzione di **alberi di derivazione**

utilizzando le **regole** del **calcolo dei sequenti**

che tipo di regole ha il calcolo dei sequenti?

ha due tipi di regole

$$\frac{\Gamma' \vdash \mathtt{pr}'}{\Gamma \vdash \mathtt{pr}}\ regola1premessa \qquad \frac{\Gamma'' \vdash \mathtt{pr}'' \quad \Gamma"'' \vdash \mathtt{pr}"''}{\Gamma \vdash \mathtt{pr}}\ regola2premesse$$

+ assiomi come per esempio

ax-id

$$\Gamma_1, \mathtt{pr}, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \mathtt{pr}, \Delta_2$$

Calcolo dei sequenti $\mathbf{LC}_p$

ax-id

$$\Gamma, \mathtt{pr}, \Gamma' \vdash \Delta, \mathtt{pr}, \Delta'$$

ax-$\perp$

$$\Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla$$

ax-tt

$$\Gamma \vdash \nabla, \mathtt{tt}, \nabla'$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathtt{pr}_1, \Delta \quad \Gamma \vdash \mathtt{pr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash (\mathtt{pr}_1) \& (\mathtt{pr}_2), \Delta}\ \&-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, \mathtt{pr}_1, \mathtt{pr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, (\mathtt{pr}_1) \& (\mathtt{pr}_2) \vdash \Delta}\ \&-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathtt{pr}_1, \mathtt{pr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash (\mathtt{pr}_1) \vee (\mathtt{pr}_2), \Delta}\ \vee-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, \mathtt{pr}_1 \vdash \Delta \quad \Gamma, \mathtt{pr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, (\mathtt{pr}_1) \vee (\mathtt{pr}_2) \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, \mathtt{pr}_1 \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg(\mathtt{pr}_1), \Delta}\ \neg-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathtt{pr}_1, \Delta}{\Gamma, \neg(\mathtt{pr}_1) \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, \mathtt{pr}_1 \vdash \mathtt{pr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash (\mathtt{pr}_1) \rightarrow (\mathtt{pr}_2), \Delta}\ \rightarrow-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathtt{pr}_1, \Delta \quad \Gamma, \mathtt{pr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, (\mathtt{pr}_1) \rightarrow (\mathtt{pr}_2) \vdash \Delta}\ \rightarrow-\mathrm{S}$$

Idea di albero nel calcolo

un albero nel calcolo è una sequenza di istanze di regole

$$\dfrac{\mathtt{pr}_1 \vdash \mathtt{pr}_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\mathtt{pr}_5 \vdash \mathtt{pr}_5}{\Gamma_3 \vdash \mathtt{pr}_3}\, regola1 \qquad \dfrac{\mathtt{pr}_6 \vdash \mathtt{pr}_6}{\Gamma_4 \vdash \mathtt{pr}_4}\, regola1}{\Gamma_2 \vdash \mathtt{pr}_2}\, regola2}{\Gamma \vdash \mathtt{pr}}\, regola2$$

con **radice** il sequente $\Gamma \vdash \mathtt{pr}$

e con **foglie** i sequenti $\mathtt{pr}_1 \vdash \mathtt{pr}_1$ (nel primo ramo)

$\mathtt{pr}_5 \vdash \mathtt{pr}_5$ (nel secondo ramo)

$\mathtt{pr}_6 \vdash \mathtt{pr}_6$ (nel terzo ramo)

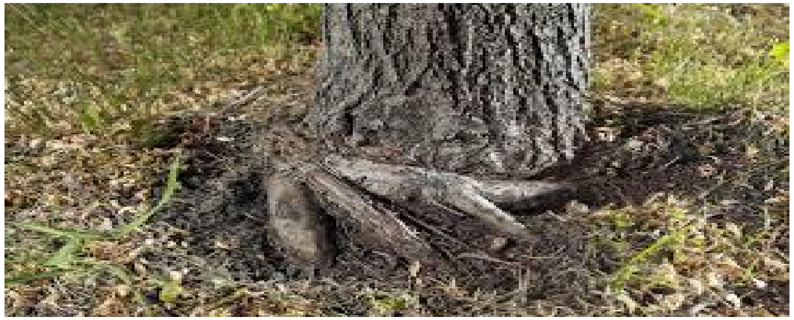
Definizione di albero in un calcolo dei sequenti

Più precisamente

un albero π nel calcolo $\mathcal{C}$ dei sequenti è definito per induzione come segue:

1. Ogni sequente $\Gamma \vdash \psi$ è un albero

avente il sequente sia come radice che come unica foglia.



2. Dato un albero nel calcolo $\mathcal{C}$

$$\frac{\pi_1}{\Gamma \vdash \psi}$$

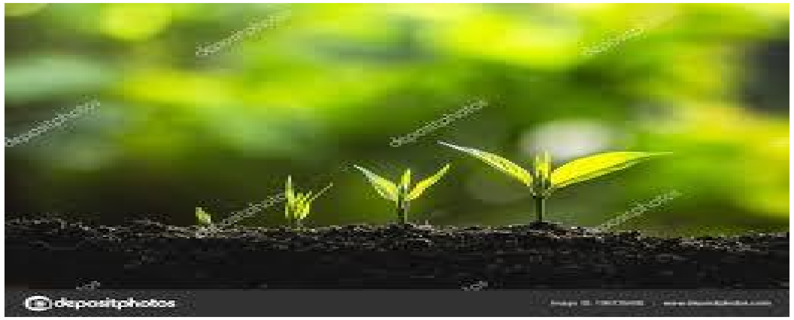
allora

$$\cfrac{\cfrac{\pi_1}{\Gamma \vdash \psi}}{\Gamma' \vdash \psi'}\ reg*$$

è un albero ottenuto estendendo π con una regola $reg*$ del calcolo $\mathcal{C}$

con *radice* $\Gamma' \vdash \psi'$

e con *foglie* le foglie di π_1



3. Dati due alberi nel calcolo C

$$\frac{\pi_1}{\Gamma_1 \vdash \psi_1} \qquad\qquad \frac{\pi_2}{\Gamma_2 \vdash \psi_2}$$

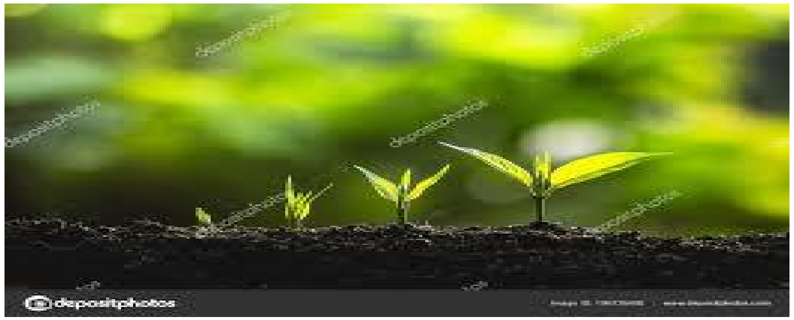
allora

$$\frac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma_1 \vdash \psi_1} \qquad \dfrac{\pi_2}{\Gamma_2 \vdash \psi_2}}{\Gamma_3 \vdash \psi_3}\ reg*$$

è un albero ottenuto estendendo π_1 e π_2 con una regola di ψ di $\mathcal{C}$

con *radice* $\Gamma_3 \vdash \psi_3$

e con *foglie* l'unione delle foglie di π_1 e di π_2



Definizione di (ALBERO di) DERIVAZIONE

un **ALBERO di DERIVAZIONE** per $\Gamma \vdash \Delta$

o semplicemente una **DERIVAZIONE** per $\Gamma \vdash \Delta$

=

albero con radice $\Gamma \vdash \Delta$

ottenuto con regole del calcolo

avente assiomi come foglie.

Def. sequente derivabile

un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ si dice derivabile

in un calcolo dei sequenti $\mathcal{C}$

=

se $\Gamma \vdash \Delta$ è radice

di un albero di derivazione in $\mathcal{C}$.

A che serve il calcolo dei sequenti?

data una proposizione formale pr

il **sequente** $\vdash$ pr

è radice di una **derivazione** nel **calcolo dei sequenti** LC_p

sse

pr è una TAUTOLOGIA

Esempio di derivazione

$$\cfrac{\cfrac{\overset{\text{ax-id}}{P, Q \vdash Q}}{P\&Q \vdash Q}\;\&-\mathrm{S} \qquad \cfrac{\overset{\text{ax-id}}{P, Q \vdash P}}{P\&Q \vdash P}\;\&-\mathrm{S}}{P\&Q \vdash Q\&P}\;\&-\mathrm{D}$$

esempio di DERIVAZIONE in LC$_p$

$$\cfrac{\cfrac{\overset{\text{ax-id}}{P, Q \vdash Q}}{P\&Q \vdash Q}\;\&-\mathrm{S} \qquad \cfrac{\overset{\text{ax-id}}{P, Q \vdash P}}{P\&Q \vdash P}\;\&-\mathrm{S}}{P\&Q \vdash Q\&P}\;\&-\mathrm{D}$$

$P\&Q \vdash Q\&P$ è RADICE

$P, Q \vdash Q$ foglia sx

$P, Q \vdash P$ foglia dx

e sono entrambe ASSIOMI

Γ e Δ possono essere liste vuote!!!

il sequente

$$A \vdash A$$

è un'assioma identità

con Γ, Γ', Δ e Δ' tutte liste VUOTE

in quanto istanza dell'assioma identità del calcolo

scritto nella forma

$$\text{ax-id}$$
$$\Gamma, \mathtt{pr_1}, \Gamma' \vdash \Delta, \mathtt{pr_1}, \Delta'$$

anche nelle regole dei sequenti le metavariabili

$$\Gamma \qquad \Delta \qquad \Sigma$$

stanno per LISTE DI PROPOSIZIONI anche VUOTE

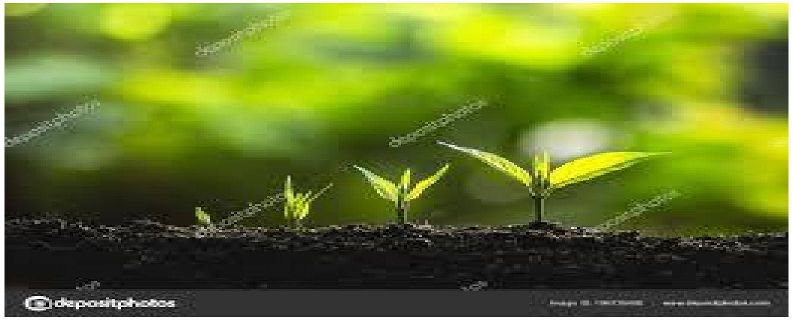
quindi

$$\frac{P\&Q\vdash Q\&P \qquad P\&Q\vdash C\vee P}{P\&Q\vdash (Q\&P)\&(C\vee P)}\ \&-\mathrm{D}$$

è corretta applicazione della regola $\&-\mathrm{D}$

$$\frac{\Gamma\vdash \mathtt{pr}_1, \Delta \quad \Gamma\vdash \mathtt{pr}_2, \Delta}{\Gamma\vdash (\mathtt{pr}_1)\&(\mathtt{pr}_2), \Delta}\ \&-\mathrm{D}$$

con



$\Gamma \equiv P\&Q$

$\Delta \equiv$ lista vuota

$\mathtt{pr}_1 \equiv Q\&P$

$\mathtt{pr}_2 \equiv C\vee P$

derivazioni con radice=foglia

chi sono gli **alberi di derivazione**

formati da un singolo sequente

che è sia radice che foglia

?

=

gli **assiomi** sono gli unici **alberi di derivazione**

formati da un singolo sequente

che è sia radice che foglia

=

i singoli sequenti

$$\text{ax-}\perp \qquad\qquad \text{ax-}\top$$

$$\perp\vdash \qquad\qquad \vdash \mathtt{tt}$$

sono **assiomi** (rispettivamente del *falso* e del *vero*)

e quindi sono **alberi di derivazione**

che hanno

=

i singoli sequenti

$$\vdash \qquad\qquad \vdash\perp \qquad\qquad \mathtt{tt}\vdash$$

NON sono **assiomi**

e quindi **NON** sono **alberi di derivazione**

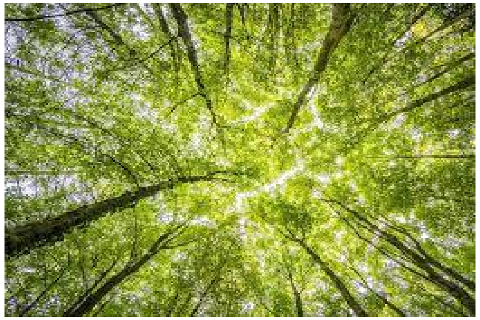
pur avendo

=

Derivare l'associatività della $\&$

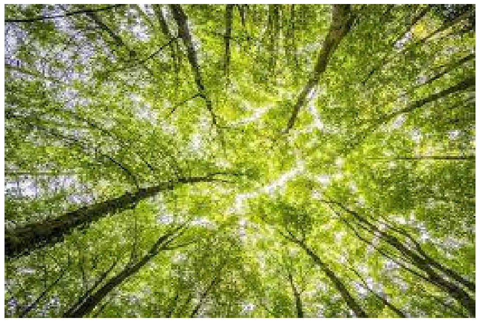
Derivare nel calcolo **LC**$_p$

$$(A\&B)\&C \vdash A\&(B\&C)$$



Derivazione associatività in LC$_p$

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\text{ax-id}}{C, A, B \vdash A}
}{C, A\&B \vdash A}\ \&-\mathrm{S}
}{A\&B, C \vdash A}\ \mathrm{sc_{sx}}
}{(A\&B)\&C \vdash A}\ \&-\mathrm{S}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\text{ax-id}}{C, A, B \vdash B}
\qquad
\dfrac{\text{ax-id}}{C, A, B \vdash C}
}{C, A, B \vdash B\&C}\ \&-\mathrm{D}
}{C, A\&B \vdash B\&C}\ \&-\mathrm{S}
}{A\&B, C \vdash B\&C}\ \mathrm{sc_{sx}}
}{(A\&B)\&C \vdash B\&C}\ \&-\mathrm{S}
}{(A\&B)\&C \vdash A\&(B\&C)}\ \&-\mathrm{D}
$$



attenzione agli scambi!!!

$$\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{A, B, C \vdash A}}{A \& B, C \vdash A} \; \&-\mathrm{S}$$

NON è derivazione per SCORRETTA applicazione di $\&-\mathrm{S}$!!!

una corretta applicazione di $\&-\mathrm{S}$ in LC_p è

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{C, A, B \vdash A}}{C, A \& B \vdash A} \; \&-\mathrm{S}}{A \& B, C \vdash A} \; \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}}$$