

Loeb

Se la proposizione scritta
in questo riquadro è vera
allora
tu sei Superman

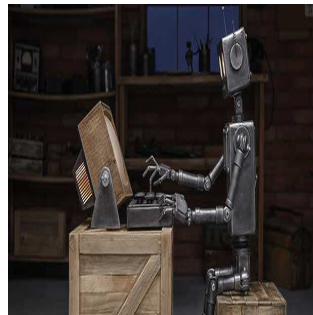


7. Lezione Corso di Logica 2021/2022

20 ottobre 2021

Maria Emilia Maietti

email: maietti@math.unipd.it



Come si istruisce un *robot* a *rispondere al test di logica*?

linguaggio formale + calcolo dei sequenti	= linguaggio di programmazione
regole del calcolo dei sequenti	= comandi
derivazione formale	= programma



A che serve il calcolo dei sequenti?

Teorema:

una **proposizione formale** pr è una **TAUTOLOGIA**

sse

il **sequente** $\vdash pr$

è radice di una **derivazione** nel **calcolo dei sequenti** LC_p



A che serve il calcolo dei sequenti?

Teorema:

un **sequente proposizionale** $\Gamma \vdash \Delta$ è una **TAUTOLOGIA**

sse

il **sequente** $\Gamma \vdash \Delta$

è radice di una **derivazione** nel **calcolo dei sequenti** LC_p



Come si propaga la verità nella derivazione

$$\begin{array}{c}
 \text{valido} \\
 \hline
 C, A, B \vdash A \\
 \hline
 C, A \& B \vdash A \quad \Downarrow_{\text{valido}} \\
 \hline
 A \& B, C \vdash A \quad \Downarrow_{\text{valido}} \\
 \hline
 (A \& B) \& C \vdash A \quad \Downarrow_{\text{valido}} \\
 \hline
 (A \& B) \& C \vdash A \& (B \& C)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{valido} \quad \text{valido} \\
 C, A, B \vdash B \quad C, A, B \vdash C \\
 \hline
 C, A, B \vdash B \& C \quad \Downarrow_{\text{valido}} \\
 \hline
 C, A \& B \vdash B \& C \quad \Downarrow_{\text{valido}} \\
 \hline
 A \& B, C \vdash B \& C \quad \Downarrow_{\text{valido}} \\
 \hline
 (A \& B) \& C \vdash B \& C \quad \Downarrow_{\text{valido}} \\
 \hline
 (A \& B) \& C \vdash A \& (B \& C)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{valido} \\
 \hline
 C, A, B \vdash B \& C \\
 \hline
 C, A \& B \vdash B \& C \quad \Downarrow_{\text{valido}} \\
 \hline
 A \& B, C \vdash B \& C \quad \Downarrow_{\text{valido}} \\
 \hline
 (A \& B) \& C \vdash B \& C \quad \Downarrow_{\text{valido}} \\
 \hline
 (A \& B) \& C \vdash A \& (B \& C)
 \end{array}$$

E



Come si propaga la verità nella derivazione

<i>valido</i>		<i>valido</i>	<i>valido</i>
$C, A, B \vdash A$		$C, A, B \vdash B$	$C, A, B \vdash C$
<hr/>		<hr/>	
$C, A \& B \vdash A$		$C, A, B \vdash B \& C$	$\Downarrow_{\text{valido}}$
$\Downarrow_{\text{valido}}$		$C, A \& B \vdash B \& C$	$\Downarrow_{\text{valido}}$
$A \& B, C \vdash A$		$A \& B, C \vdash B \& C$	$\Downarrow_{\text{valido}}$
$\Downarrow_{\text{valido}}$		$\Downarrow_{\text{valido}}$	$\Downarrow_{\text{valido}}$
$(A \& B) \& C \vdash A$		$(A \& B) \& C \vdash B \& C$	$\Downarrow_{\text{valido}}$
$\Downarrow_{\text{valido}}$		$\Downarrow_{\text{valido}}$	$\Downarrow_{\text{valido}}$
<hr/>		<hr/>	
$(A \& B) \& C \vdash A \& (B \& C)$		$\Downarrow_{\text{valido}}$	



Cosa succede alla **FALSITÀ**?

nelle regole del calcolo LC_p

la **FALSITÀ** **SCENDE** ↓ dall'ALTO verso il BASSO da **almeno UN** ramo

ma ANCHE

la **FALSITÀ** **SALE** ↑ dal BASSO verso l' ALTO verso **almeno UN** ramo



Come si propaga la falsità in questo albero?

$$\frac{\frac{P \vdash Q}{\vdash P \rightarrow Q} \rightarrow -D \quad \frac{Q \vdash P}{\vdash Q \rightarrow P} \rightarrow -D}{\vdash (P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P)} \& -D$$



questo albero NON è una **derivazione**

MA ci dice come sono fatte le **uscite**

sulle righe della **tabella di verità**

del sequente radice

guardando al **valore di verità delle sue foglie!**

Esempio di propagazione della falsità su una riga

vero su riga r $Q=1$ $P=0$

falso su riga r $Q=1$ $P=0$

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{P \vdash Q}{\vdash P \rightarrow Q} & \Downarrow_{\text{vero su } r} & \frac{Q \vdash P}{\vdash Q \rightarrow P} \\
 \hline
 \vdash (P \rightarrow Q) \ \& \ (Q \rightarrow P) & \Downarrow_{\text{falso su } r} &
 \end{array}$$



Esempio di come si propaga la **verità** su una riga

vero su riga r $Q=0$ $P=0$

vero su riga r $Q=0$ $P=0$

$$\begin{array}{c}
 \frac{P \vdash Q}{\vdash P \rightarrow Q} \quad \Downarrow_{\text{vero su r}} \quad \frac{Q \vdash P}{\vdash Q \rightarrow P} \quad \Downarrow_{\text{vero su riga}} \\
 \hline
 \vdash (P \rightarrow Q) \ \& \ (Q \rightarrow P) \quad \Downarrow_{\text{vero su r}}
 \end{array}$$



Come si propaga la falsità in questo albero?

$$\begin{array}{c}
 \frac{Q \vdash P, P}{Q, P \rightarrow Q \vdash P} \quad \frac{Q, Q \vdash P}{P \rightarrow Q, Q \vdash P} \text{SC}_{sx} \\
 \hline
 \frac{P \rightarrow Q \vdash Q \rightarrow P}{P \rightarrow Q \vdash Q \rightarrow P} \rightarrow -D
 \end{array}
 \rightarrow -S$$



questo albero NON è una **derivazione**

MA ci dice come sono fatte le **uscite**

sulle righe della **tabella di verità** del seguente radice

guardando al **valore di verità delle sue foglie!**

Esempio di propazione della falsità su una riga

falso su riga r $Q=1$ $P=0$

$Q \vdash P, P$

falso su riga r $Q=1$ $P=0$

$Q, Q \vdash P$

$$\begin{array}{c}
 \frac{Q, P \rightarrow Q \vdash P}{P \rightarrow Q, Q \vdash P} \Downarrow_{\text{falso su } r} \\
 \frac{P \rightarrow Q, Q \vdash P}{P \rightarrow Q \vdash Q \rightarrow P} \Downarrow_{\text{falso su } r}
 \end{array}
 \Downarrow_{\text{falso su } r}$$



Esempio di propagazione della verità su una riga

vero su riga r $Q=0$ $P=0$

$Q \vdash P, P$

vero su riga r $Q=0$ $P=0$

$Q, Q \vdash P$

$$\begin{array}{c}
 \frac{Q, P \rightarrow Q \vdash P}{P \rightarrow Q, Q \vdash P} \Downarrow_{\text{vero su } r} \\
 \frac{P \rightarrow Q, Q \vdash P}{P \rightarrow Q \vdash Q \rightarrow P} \Downarrow_{\text{vero su } r}
 \end{array}
 \quad \Downarrow_{\text{vero su } r}$$



perchè **derivare** con sequenti?

le regole del calcolo dei sequenti

CONSERVANO **VERITÀ** per riga ⇕

lungo **TUTTI I RAMI**

dall'ALTO di **TUTTE le FOGLIE** verso il BASSO ↓

e dal BASSO in ALTO verso **OGNI** FOGLIA ↑



le regole

CONSERVANO pure la **FALSITÀ** ⇕

lungo **ALMENO UN RAMO** (non tutti in genere!)

dall'ALTO di **QUALCHE** foglia

verso il BASSO ↓

e dal BASSO in ALTO verso **QUALCHE** FOGLIA ↑



<p>pr TAUTOLOGIA</p> <p>tutte le uscite 1 nella tabella di pr</p>	<p>pr NON TAUTOLOGIA</p> <p>= NON VALIDA</p> <p>almeno un'uscita 0 nella tabella di pr</p>
	<p>pr OPINIONE oppure pr PARADOSSO</p>



<p>pr PARADOSSO</p> <p>= INSODDISFACIBILE</p> <p>tutte le uscite = 0</p> <p>nella tabella di pr</p>	<p>pr NON PARADOSSO</p> <p>=SODDISFACIBILE</p> <p>almeno un'uscita = 1</p> <p>nella tabella di pr</p>
	<p>pr OPINIONE oppure pr TAUTOLOGIA</p>



pr	ha riga r che va a 0	sse	$\neg \text{pr}$	sulla stessa riga r va a 1
pr	ha riga r che va a 1	sse	$\neg \text{pr}$	sulla stessa riga r va a 0



pr TAUTOLOGIA	sse	$\neg pr$ PARADOSSO
pr PARADOSSO	sse	$\neg pr$ TAUTOLOGIA
pr OPINIONE	sse	$\neg pr$ OPINIONE
pr NON TAUTOLOGIA = NON VALIDA	sse	$\neg pr$ NON PARADOSSO = SODDISFACIBILE
pr NON PARADOSSO = SODDISFACIBILE	sse	$\neg pr$ NON TAUTOLOGIA = NON VALIDA



Idea chiave della procedura per classificare una proposizione

per classificare una proposizione pr

basta classificare il sequente $\vdash pr$

analizzando derivabilità di $\vdash pr$

e se questo NON è derivabile

si analizza anche la derivabilità di $\vdash \neg pr$



Chi è il **sequente negazione** di un sequente?

il **sequente negazione** di un sequente

$$\Gamma \vdash \Delta$$

è il SEQUENTE

$$\vdash \neg (\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$$



Idea chiave della procedura per classificare un sequente

per classificare un sequente $\Gamma \vdash \Delta$

basta analizzare la derivabilità di $\Gamma \vdash \Delta$

e se questo NON è derivabile

si analizza anche la derivabilità di $\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$



Procedura per classificare un sequente



Dato un sequente $\Gamma \vdash \Delta$:

passo 1: si prova a derivare $\Gamma \vdash \Delta$ in LC_p

come in sez.9.4.1 dispensa

(in breve: applicando le regole a tutte le possibili formule composte

fermandosi appena si trova un assioma - che può contenere anche formule composte! -)

{	se si deriva	$\Rightarrow \Gamma \vdash \Delta$ è tautologia
	se la procedura termina con una foglia NON derivabile	il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ NON è TAUTOLOGIA
		vai al passo 2 per trovare riga in cui va a 0

passo 2: **UNA riga** su cui la tabella di $\Gamma \vdash \Delta$ va a **0** si ottiene in tal modo:

prendi una foglia non assioma di sole variabili proposizionali

(per es. quella che ha fatto sì che la procedura termini con un NO)

e poni a **1** le **variabili a sx** del sequente (se ci sono!!) e a **0** le **variabili di dx** (se ci sono!)

\Rightarrow ogni riga che contiene tale assegnazione di variabili proposizionali manda a **0** il sequente $\Gamma \vdash \Delta$

poi vai al passo 3

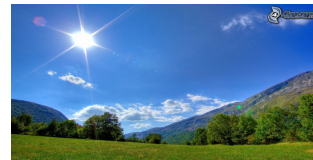
passo 3: prova a derivare $\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ in LC_p applicando la procedura di decisione sez. 9.4.1

{	se $\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ si deriva	$\Rightarrow \Gamma \vdash \Delta$ è un PARADOSSO
	se la procedura termina con $\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ NON derivabile	il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è un OPINIONE
		poi applica il passo 2 al sequente $\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ per trovare una riga in cui va a 0
		e la riga trovata assegna 1
		al sequente $\Gamma \vdash \Delta$
		$\Rightarrow \Gamma \vdash \Delta$ è soddisfacibile su tal riga

Esempio

per classificare il sequente

$\vdash A \& \neg A$



costruiamo l'albero

$$\frac{\vdash A \quad \frac{A \vdash}{\vdash \neg A} \neg\text{-D}}{\vdash A \& \neg A} \&\text{-D}$$

questo albero NON è una **derivazione**

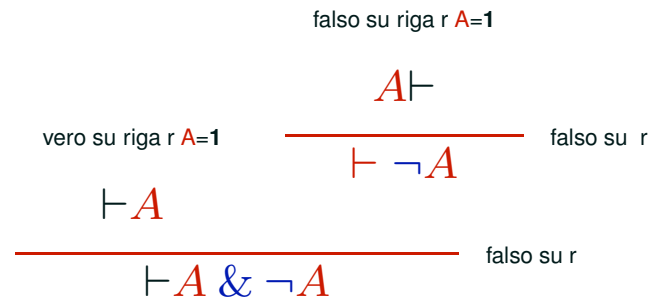
quindi il sequente radice $\vdash A \& \neg A$ **NON** è **TAUTOLOGIA**

poi la **foglia di sx** ci dice che per $A=0$ la radice va a 0

$$\begin{array}{c}
 \text{vero su riga } r \quad A=0 \\
 \frac{A \vdash}{\vdash \neg A} \quad \neg \neg D \\
 \text{falso su riga } r \quad A=0 \\
 \frac{\vdash A}{\vdash A \& \neg A} \quad \text{falso su } r
 \end{array}$$



NON esiste riga che rende **VERE** tutte le foglie



NON è possibile trovare una riga che rende vere
entrambe le foglie

$$A \vdash \quad e \quad \vdash A$$

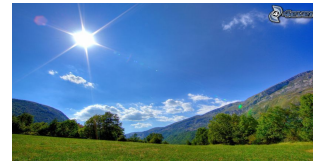
perchè A deve essere sia **0** che **1** !!!!

e infatti scopriamo che il sequente radice $\vdash A \& \neg A$ è un **paradosso**

Passiamo alla negazione

Passiamo a cercare di derivare la negazione

$$\vdash \neg (tt \rightarrow (A \& \neg A))$$



trovando la derivazione

$$\begin{array}{c}
 \text{ax-id} \\
 A \vdash A \\
 \hline
 A, \neg A \vdash \neg\neg S \\
 \hline
 A \& \neg A \vdash \&\neg S \\
 \text{ax-tt} \\
 \vdash tt \\
 \hline
 \vdash tt \rightarrow A \& \neg A \vdash \rightarrow\neg S \\
 \hline
 \vdash \neg (tt \rightarrow A \& \neg A) \vdash \neg\neg D
 \end{array}$$

dunque $\vdash \neg (tt \rightarrow (A \& \neg A))$ è **TAUTOLOGIA!!!**

la negazione del sequente di partenza

$\vdash \neg (t \rightarrow (A \& \neg A))$ è **TAUTOLOGIA**

e dunque il sequente di partenza $\vdash A \& \neg A$

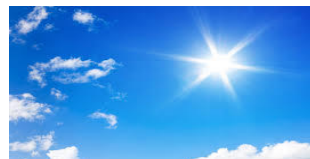
è un **paradosso**



Altro esempio

Per classificare

$$\vdash Q \& (Q \rightarrow P)$$



costruiamo l'albero

$$\frac{\vdash Q \quad \frac{\text{non serve continuare qui!}}{\vdash Q \rightarrow P}}{\vdash Q \& (Q \rightarrow P)} \&-D$$

questo albero ha la foglia di dx NON assioma

che si falsifica su riga $Q = 0$ e P definito a piacere

quindi il sequente di partenza $\vdash Q \& (Q \rightarrow P)$ **NON è TAUTOLOGIA**

perchè **falso** su riga $Q = 0$ e $P = 0$ (ad esempio)

Passiamo alla negazione

Passiamo a derivare la negazione

$$\vdash \neg (tt \rightarrow Q \& (Q \rightarrow P))$$



trovando l'albero (NON di derivazione!)

$$\begin{array}{c}
 \text{ax-id} \quad Q, P \vdash \\
 Q \vdash Q \\
 \hline
 Q, Q \rightarrow P \vdash \rightarrow -S \\
 \text{ax-tt} \quad \vdash tt \\
 \hline
 tt \rightarrow Q \& (Q \rightarrow P) \vdash \rightarrow -S \\
 \hline
 \vdash \neg (tt \rightarrow Q \& (Q \rightarrow P)) \neg -D
 \end{array}$$

Dunque $\vdash \neg (tt \rightarrow Q \& (Q \rightarrow P))$ **NON è TAUTOLOGIA**

perchè falso su riga $Q=P=1$

Conclusione della procedura

la negazione $\vdash \neg (\text{tt} \rightarrow Q \ \& \ (Q \rightarrow P))$ del sequente di partenza **NON** è **TAUTOLOGIA**

perchè falso su riga $Q = P = 1$

e dunque il sequente di partenza $\vdash Q \ \& \ (Q \rightarrow P)$ è vero sulla riga $Q=P = 1$

e siccome sapevamo che era falso sulla riga $Q=P = 0$

concludiamo che $\vdash Q \ \& \ (Q \rightarrow P)$ è un' **OPINIONE**

