Simulazione Esame Prima Parte (Teorie) 15/12/2021

Cavalli Riccardo

January 8, 2022

Esercizio 1 (31 punti)

AX.1: D(e) → ¬ D(a)
AX.2: D(e) ∨ D(p) → D(a)
AX.3: ¬ D(a) → ¬ D(p) & D(g)
AX.4: D(g) → ∀x (D(x) ∨ ¬ D(x))
AX.5: D(a) → D(e) ∨ D(p)
AX.6: ¬ D(p) → ¬ D(g)

A Alice danza: D(a)

$$\dfrac{\vdash AX.2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash AX.3 \qquad \dfrac{\overset{\neg -ax_{dx2}}{\vdash \neg D(a), D(e), D(p), D(a)} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash AX.6 \qquad \dfrac{\overset{ax-id}{\neg D(p), D(g) \vdash \neg D(p), D(e), D(p), D(a)} \qquad \overset{\neg -ax_{sx1}}{\neg D(p), D(g), \neg D(g) \vdash D(e), D(p), D(a)}}{\neg D(p), D(g), \neg D(p) \rightarrow \neg D(g) \vdash D(e), D(p), D(a)} \rightarrow\text{-S}}{\neg D(p), D(g) \vdash D(e), D(p), D(a)}\, comp}{\neg D(p)\ \&\ D(g) \vdash D(e), D(p), D(a)} \,\&\text{-S}}{\neg D(a) \rightarrow \neg D(p)\ \&\ D(g) \vdash D(e), D(p), D(a)} \rightarrow\text{-S}}{\vdash D(e), D(p), D(a)}\, comp}{\vdash D(e) \vee D(p), D(a)} \vee\text{-D} \qquad \overset{ax-id}{D(a) \vdash D(a)}}{D(e) \vee D(p) \rightarrow D(a) \vdash D(a)} \rightarrow\text{-S}}{\vdash D(a)}\, comp$$

E Eleonora non danza: ¬ D(e)

$$\dfrac{\vdash T.1 \qquad \dfrac{\vdash AX.1 \qquad \dfrac{\overset{\neg -ax_{dx1}}{D(a) \vdash D(e), \neg D(e)} \qquad \overset{\neg -ax_{sx1}}{D(a), \neg D(a) \vdash \neg D(e)}}{D(a), D(e) \rightarrow \neg D(a) \vdash \neg D(e)} \rightarrow\text{-S}}{D(a) \vdash \neg D(e)}\, comp}{\vdash \neg D(e)}\, comp$$

P Il primo ballerino danza: D(p)

$$\dfrac{\vdash T.1 \qquad \dfrac{\vdash T.2 \qquad \dfrac{\vdash AX.5 \qquad \dfrac{\overset{ax-id}{D(a), \neg D(e) \vdash D(a), D(p)} \qquad \dfrac{\overset{\neg -ax_{sx2}}{D(a), \neg D(e), D(e) \vdash D(p)} \qquad \overset{ax-id}{D(a), \neg D(e), D(p) \vdash D(p)}}{D(a), \neg D(e), D(e) \vee D(p) \vdash D(p)} \vee\text{-S}}{D(a), \neg D(e), D(a) \rightarrow D(e) \vee D(p) \vdash D(p)} \rightarrow\text{-S}}{D(a), \neg D(e) \vdash D(p)}\, comp}{D(a) \vdash D(p)}\, comp}{\vdash D(p)}\, comp$$

G Se Gertrude danza anche Alice Danza: D(g) → D(a)

$$\dfrac{\dfrac{\vdash T.1 \qquad \overset{ax-id}{D(g), D(a) \vdash D(a)}}{D(g) \vdash D(a)}\ comp}{\vdash D(g) \to D(a)}\ \to \text{-D}$$

Q Qualcuno danza ma non tutti: ∃x D(x) & ∃x ¬ D(x)

$$\dfrac{\vdash T.1 \qquad \dfrac{\vdash T.2 \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{ax-id}{D(a), \neg D(e) \vdash D(a)}}{D(a), \neg D(e) \vdash \exists x D(x)}\ \exists -D_v \qquad \dfrac{\overset{ax-id}{D(a), \neg D(e) \vdash \neg D(e)}}{D(a), \neg D(e) \vdash \exists x \neg D(x)}\ \exists -D_v}{D(a), \neg D(e) \vdash \exists x D(x)\ \&\ \exists x \neg D(x)}\ \&\text{ -D}}{D(a) \vdash \exists x D(x)\ \&\ \exists x \neg D(x)}\ comp}{\vdash \exists x D(x)\ \&\ \exists x \neg D(x)}\ comp$$

Esercizio 2 (60 punti)

AX.1: ∀x ∀y ∀z(C(x,y) & C(y,z) → ¬ C(x,z))
AX.2: ¬ ∃x C(p,x)
AX.3: ∀x ∀y(C(x,y) → C(y,x))
AX.4: C(v,m) & ∀x(C(v,x) → x=m)
AX.5: ¬(∃x ¬C(l,x))

P Piero non chiama Luca: ¬ C(p,l)

$$\dfrac{\vdash AX.2 \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\neg -ax_{dx1}}{\vdash C(p,l), \neg C(p,l)}}{\vdash \exists x C(p,x), \neg C(p,l)}\ \exists -D_v}{\neg \exists x C(p,x) \vdash \neg C(p,l)}\ \neg\text{ -S}}{\vdash \neg C(p,l)}\ comp$$

L Luca chiama Piero: C(l,p)

$$\dfrac{\vdash AX.5 \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\neg -ax_{dx2}}{\vdash \neg C(l,p), C(l,p)}}{\vdash \exists x \neg C(l,x), C(l,p)}\ \exists -D_v}{\neg \exists x \neg C(l,x) \vdash C(l,p)}\ \neg\text{ -S}}{\vdash C(l,p)}\ comp$$

Dopo aver mostrato una derivazione nella teoria in T_{ch} delle affermazioni precedenti noto una contraddizione tra i primi due teoremi e l'assioma 3.
Provo quindi a derivare il falso.

F Derivazione del falso

$$\dfrac{\vdash T.1 \qquad \dfrac{\vdash T.2 \qquad \dfrac{\vdash AX.3 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{ax-id}{\neg C(p,l), C(l,p) \vdash C(l,p), \bot} \qquad \overset{\neg -ax_{sx2}}{\neg C(p,l), C(l,p), C(p,l) \vdash \bot}}{\neg C(p,l), C(l,p), C(l,p) \to C(p,l)) \vdash \bot}\ \to\text{-S}}{\neg C(p,l), C(l,p), \forall y(C(l,y) \to C(y,l)) \vdash \bot}\ \forall -S_v}{\neg C(p,l), C(l,p), \forall x \forall y(C(x,y) \to C(y,x)) \vdash \bot}\ \forall -S_v}{\neg C(p,l), C(l,p) \vdash \bot}\ comp}{\neg C(p,l) \vdash \bot}\ comp}{\vdash \bot}\ comp$$

M Mila chiama Veronica: C(m,v)

Per derivare l'affermazione utilizzo come assioma il falso, che ho derivato utilizzando i primi due teoremi e l'assioma 3

$$\dfrac{\vdash \bot \qquad \overset{ax-id}{\bot \vdash C(m,v)}}{\vdash C(m,v)}\ comp$$

N Nessuno chiama se stesso: ¬ ∃x C(x,x)

Per derivare l'affermazione utilizzo come assioma il falso, che ho derivato utilizzando i primi due teoremi e l'assioma 3

$$\dfrac{\vdash \bot \qquad \overset{ax-id}{\bot \vdash \neg \exists x C(x,x)}}{\vdash \neg \exists x C(x,x)}\ comp$$

M Mila è diversa da Veronica: ¬m=v

Per derivare l'affermazione utilizzo come assioma il falso, che ho derivato utilizzando i primi due teoremi e l'assioma 3

$$\dfrac{\vdash \bot \qquad \overset{ax-id}{\bot \vdash \neg m = v}}{\vdash \neg m = v}\ comp$$

Esercizio 3

Ipotesi: D'inverno non tutti non vanno a sciare: I $\rightarrow$ $\exists$x S(x)

A Se è inverno qualcuno va a sciare e qualcuno non ci va: I $\rightarrow$ $\exists$x S(x) & $\exists$x $\neg$ S(x)

$$
\dfrac{\vdash Ip \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{ax-id}{I \vdash I, \exists x S(x)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{ax-id}{I, S(w) \vdash S(w)}}{I, S(w) \vdash \exists x S(x)}\;\exists -D_v}{I, \exists x S(x) \vdash \exists x S(x)}\;\exists\text{ -S}}{I, I \rightarrow \exists x S(x) \vdash \exists x S(x)}\;\rightarrow\text{ -S} \qquad \dfrac{\dfrac{ax-id}{I \vdash I, \exists x \neg S(x)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{I, S(w), S(w) \vdash \exists x \neg S(x)}{I, S(w) \vdash \neg S(w), \exists x \neg S(x)}\;\neg\text{ -D}}{I, S(w) \vdash \exists x \neg S(x)}\;\exists\text{ -D}}{I, \exists x S(x) \vdash \exists x \neg S(x)}\;\exists\text{ -S}}{I, I \rightarrow \exists x S(x) \vdash \exists x \neg S(x)}\;\rightarrow\text{ -S}}{I, I \rightarrow \exists x S(x) \vdash \exists x S(x)\ \&\ \exists x \neg S(x)}\;\&\text{ -D}}{I \rightarrow \exists x S(x), I \vdash \exists x S(x)\ \&\ \exists x \neg S(x)}\;sc_{sx}}{I \rightarrow \exists x S(x) \vdash I \rightarrow \exists x S(x)\ \&\ \exists x \neg S(x)}\;\rightarrow\text{ -D}}{\vdash I \rightarrow \exists x S(x)\ \&\ \exists x \neg S(x)}\;comp
$$

Contromodello di Ipotesi $\vdash$ Aff. A

La foglia che non si riesce a derivare

I, S(w), S(w) $\vdash$ $\exists$x $\neg$S(x)

suggerisce il seguente contromodello

D_{contra}= { Minni }

$I^{D_{contra}}$=1

$S(w)^{D_{contra}}$(Minni)=1

In questo modello

$(\neg S(w))^{D_{contra}}$(Minni)=0

$(\exists x\ \neg S(x))^{D_{contra}} = 0$ perchè ci sono solo falsari nel dominio dato che c'è solo Minni

$(\exists x\ S(x))^{D_{contra}} = 1$ perchè $S(w)^{D_{contra}}$(Minni)=1 (c'è un testimone)

$\text{Ipotesi}^{D_{contra}}$: $I^{D_{contra}} \rightarrow (\exists x\ S(x))^{D_{contra}}$ equivale a $1 \rightarrow 1$ equivale a 1

Aff. $A^{D_{contra}}$: $I^{D_{contra}} \rightarrow (\exists x\ S(x)\ \&\ \exists x\ \neg S(x))^{D_{contra}}$: $I^{D_{contra}} \rightarrow (\exists x\ S(x))^{D_{contra}}\ \&\ (\exists x\ \neg S(x))^{D_{contra}}$

equivale a $1 \rightarrow 1\ \&\ 0$ equivale a $1 \rightarrow 0$ equivale a 0

Quindi, $(\text{Ipotesi} \vdash \text{Aff. A})^{D_{contra}}$ equivale a $1 \vdash 0$ equivale a 0

Ho trovato un contromodello, quindi l'affermazione A non è deducibile dall'ipotesi.

B Se è inverno qualcuno va a sciare oppure qualcuno non ci va: I $\rightarrow$ $\exists$x S(x) $\vee$ $\exists$x $\neg$ S(x)

$$
\dfrac{\vdash Ip \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{ax-id}{I \vdash I, \exists x S(x), \exists x \neg S(x)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{ax-id}{I, S(w) \vdash S(w), \exists x \neg S(x)}}{I, S(w) \vdash \exists x S(x), \exists x \neg S(x)}\;\exists -D_v}{I, \exists x S(x) \vdash \exists x S(x), \exists x \neg S(x)}\;\exists\text{ -S}}{I, I \rightarrow \exists x S(x) \vdash \exists x S(x), \exists x \neg S(x)}\;\rightarrow\text{ -S}}{I \rightarrow \exists x S(x), I \vdash \exists x S(x), \exists x \neg S(x)}\;sc_{sx}}{I \rightarrow \exists x S(x), I \vdash \exists x S(x) \vee \exists x \neg S(x)}\;\vee\text{ -D}}{I \rightarrow \exists x S(x) \vdash I \rightarrow \exists x S(x) \vee \exists x \neg S(x)}\;\rightarrow\text{ -D}}{\vdash I \rightarrow \exists x S(x) \vee \exists x \neg S(x)}\;comp
$$

L'affermazione B è deducibile dall'ipotesi.

C Se tutti vanno a sciare non è inverno: ∀x S(x) → ¬ I

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash Ip$}
\AxiomC{$\neg -ax_{dx1}$}
\noLine
\UnaryInfC{$\forall x S(x) \vdash I, \neg I$}
\AxiomC{$S(w), \forall x S(x), S(w) \vdash \neg I$}
\RightLabel{$\forall$ -S}
\UnaryInfC{$S(w), \forall x S(x) \vdash \neg I$}
\RightLabel{sc_{sx}}
\UnaryInfC{$\forall x S(x), S(w) \vdash \neg I$}
\RightLabel{$\exists$ -S}
\UnaryInfC{$\forall x S(x), \exists x S(x) \vdash \neg I$}
\RightLabel{$\rightarrow$ -S}
\BinaryInfC{$\forall x S(x), I \rightarrow \exists x S(x) \vdash \neg I$}
\RightLabel{sc_{sx}}
\UnaryInfC{$I \rightarrow \exists x S(x), \forall x S(x) \vdash \neg I$}
\RightLabel{$\rightarrow$ -D}
\UnaryInfC{$I \rightarrow \exists x S(x) \vdash \forall x S(x) \rightarrow \neg I$}
\RightLabel{$comp$}
\BinaryInfC{$\vdash \forall x S(x) \rightarrow \neg I$}
\end{prooftree}
$$

Contromodello di Ipotesi ⊢ Aff. C

La foglia che non si riesce a derivare

S(w), ∀x S(x), S(w) ⊢ ¬ I

suggerisce il seguente contromodello

D_{contra}= { Minni }

$I^{D_{contra}}$=1

$S(w)^{D_{contra}}$(Minni)=1

In questo modello

$(\forall x\ S(x))^{D_{contra}} = 1$ perchè sono tutti testimoni dato che nel dominio c'è solo Minni

$(\exists x\ S(x))^{D_{contra}} = 1$ perchè $S(w)^{D_{contra}}$(Minni)=1 (c'è un testimone)

$(\neg I)^{D_{contra}}$=0

Ipotesi$^{D_{contra}}$: $I^{D_{contra}} \rightarrow (\exists x\ S(x))^{D_{contra}}$ equivale a 1 → 1 equivale a 1

Aff. $C^{D_{contra}}$: $(\forall x\ S(x))^{D_{contra}} \rightarrow (\neg I)^{D_{contra}}$ equivale a 1 → 0 equivale a 0

(Ipotesi ⊢ Aff. C)$^{D_{contra}}$ equivale a 1 ⊢ 0 equivale a 0

Ho trovato un contromodello, quindi l'affermazione C non è deducibile dall'ipotesi.