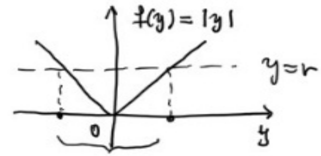
Esercizi Risolti : disuguaglianze

1) • $|\underbrace{x-a}_{y=}| \le r \iff |y| \le r$



$|y| \le r$ è vera se $y \in [-r, r]$.

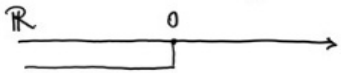
Perciò $|x-a| \le r$ è vera (cioè, è risolta) per

$-r \le x-a \le r$, cioè $a-r \le x \le a+r$ ossia

$$x \in [a-r, a+r]$$

2) • $\boxed{x^3 + x < 0} \iff x\underbrace{(x^2+1)}_{>0} < 0 \iff x < 0$

Cioè la disug. è vera se $x<0$, ossia



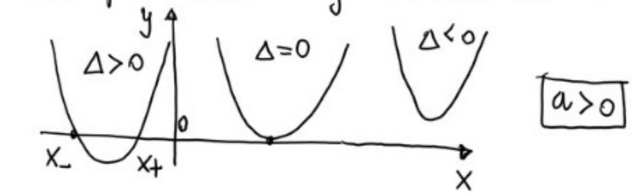
, ossia $x \in \,]-\infty, 0[$.

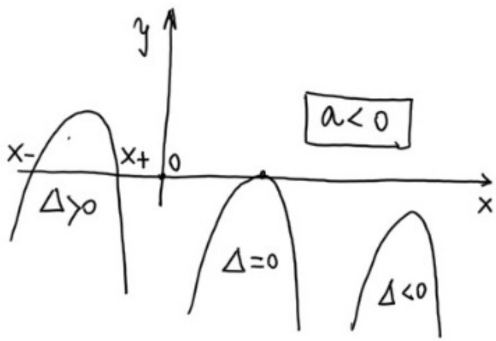
3) • $x^2 - 2x + 1 > 0$. Si ha $a = 1$, $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ **N.B. $x^2-2x+1=(x-1)^2$**

Allora $a>0$, $\Delta = 0$ implicano che la disug. è sempre vera se $x \neq 1$, falsa se $x = 1$.

Infatti $ax^2+bx+c=0 \iff x_\pm = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

La parabola $y = ax^2+bx+c$ è come in fig.:

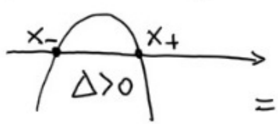




4) $-3x^2+4x+5<0 \iff$

$$x_\pm = \frac{-4 \pm \sqrt{16+60}}{-6} = \frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{76/4}}{3} = \frac{2 \pm \sqrt{19}}{3}$$

$\boxed{a<0}$



$$\text{Sol} = \{x \in \mathbb{R} : x < x_- \text{ o } x > x_+\}$$

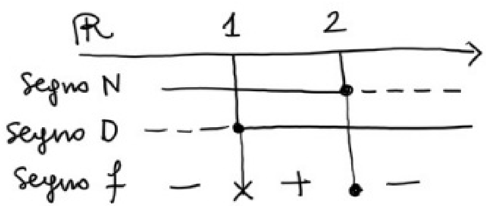
$$= \left]-\infty, x_-\right[\cup \left]x_+, +\infty\right[$$

$$= \left]-\infty, \frac{2-\sqrt{19}}{3}\right[\cup \left]\frac{2+\sqrt{19}}{3}, +\infty\right[$$

5) $\dfrac{2-x}{x-1} \geqslant 0$ $\qquad f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)} \quad (D(x) \neq 0)$

(Segno N) $\quad N \geqslant 0 \iff 2-x \geqslant 0 \iff x \leq 2$

(Segno D) $\quad D \leq 0 \iff x-1 \geqslant 0 \iff x \geqslant 1$



linea continua $\iff$ segno "+"

linea tratteggiata $\iff$ segno "−"

Il segno di f è dato dal prodotto dei segni di N e D.

NB "×" significa $\nexists$

---

6) $|x-1| \leq |x+1|$. Dato che sono $\geqslant 0$, si possono elevare al quadrato ambo i membri

$\iff$

$|x-1|^2 \leq |x+1|^2 \iff$

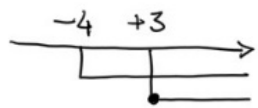
$x^2-2x+1 \leq x^2+2x+1 \iff 4x \geqslant 0 \iff x \geqslant 0$

Perciò la disug. è vera se $x \in [0,+\infty[= \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$

7) $|x-3| < 2x+1 \iff \begin{cases} (\mathrm{I}) \begin{cases} x-3 < 2x+1 \\ x \geq 3 \end{cases} \\ (\mathrm{II}) \begin{cases} 3-x < 2x+1 \\ x < 3 \end{cases} \end{cases}$

Adesso

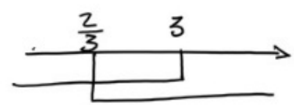
$(\mathrm{I}) \iff \begin{cases} x > -4 \\ x \geqslant +3 \end{cases}$



che è vera solo se entrambe soddisfatte (cioè si "intersecano le soluzioni") -

(I) risolto per $x \geqslant 3$ (cioè $x \in [3, +\infty[$)

$(\mathrm{II}) \iff \begin{cases} 3x > 2 \\ x < 3 \end{cases} \iff x > \frac{2}{3}$



(II) è risolto per $x \in]\frac{2}{3}, 3[$.

Quindi la soluzione è $]\frac{2}{3}, 3[\cup [3, +\infty[=$

$=]\frac{2}{3}, +\infty[$

8) $\boxed{2+\frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{x+1}} \iff$

$$\underbrace{2+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}} \geq 0$$

$$\iff \frac{2(x^2-1)+\cancel{(x}+1)-\cancel{(x}-1)}{(x-1)(x+1)} \geq 0$$

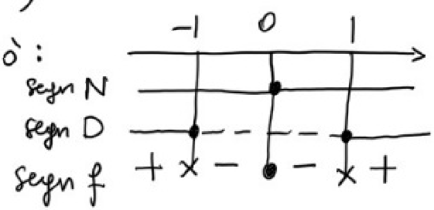
$$\iff 2\,\frac{x^2\cancel{-1}\cancel{+1}}{x^2-1} \geq 0$$

$$\iff f(x)=\frac{2x^2}{x^2-1} \geq 0 \iff \begin{cases} 2x^2 \geq 0 & \text{sempre} \\ x^2 \neq 1 & (\exists) \\ x^2 > 1 & \end{cases}$$

NB $x^2 \neq 1$ è la cond. di esistenza

D'altra parte $N(x) \geq 0$ sempre (= 0 solo se $x=0$).

Perciò:



La soluzione è $]-\infty,-1[\, \cup \{0\} \cup \,]1,+\infty[$