



Loeb

Se la proposizione scritta
in questo riquadro è **vera**
allora
tu sei Superman



7. Lezione Corso di Logica 2021/2022

20 ottobre 2021

Maria Emilia Maietti

email: maietti@math.unipd.it



*Come si istruisce un **robot** a rispondere al test di logica?*

linguaggio formale + calcolo dei sequenti	= linguaggio di programmazione
regole del calcolo dei sequenti	= comandi
derivazione formale	= programma



A che serve il calcolo dei sequenti?

Teorema:

una **proposizione formale** **pr** è una **TAUTOLOGIA**

sse

il **sequente** \vdash **pr**

è radice di una **derivazione** nel **calcolo dei sequenti** LC_p



A che serve il calcolo dei sequenti?

Teorema:

un **sequente proposizionale** $\Gamma \vdash \Delta$ è una **TAUTOLOGIA**

sse

il **sequente** $\Gamma \vdash \Delta$

è radice di una **derivazione** nel **calcolo dei sequenti** LC_p



Come si propaga la verità nella derivazione

$$\frac{\begin{array}{c} valido \\ C, A, B \vdash A \\ \hline C, A \& B \vdash A \end{array} \quad \begin{array}{c} valido \\ C, A, B \vdash B \\ \hline C, A, B \vdash B \& C \end{array} \quad \begin{array}{c} valido \\ C, A, B \vdash C \\ \hline C, A, B \vdash B \& C \end{array}}{(A \& B) \& C \vdash A \& (B \& C)} \quad E \quad \frac{\begin{array}{c} valido \\ C, A, B \vdash A \\ \hline C, A \& B \vdash A \end{array} \quad \begin{array}{c} valido \\ C, A, B \vdash B \\ \hline C, A \& B \vdash B \& C \end{array} \quad \begin{array}{c} valido \\ C, A, B \vdash C \\ \hline C, A \& B \vdash B \& C \end{array}}{(A \& B) \& C \vdash B \& C} \quad E}$$

\Downarrow_{valido} \Downarrow_{valido} \Downarrow_{valido}
 \Downarrow_{valido} \Downarrow_{valido} \Downarrow_{valido}
 \Downarrow_{valido} \Downarrow_{valido} \Downarrow_{valido}



Come si propaga la verità nella derivazione

$$\frac{\begin{array}{c} valido \\ C, A, B \vdash A \\ \hline C, A \& B \vdash A \end{array} \quad \begin{array}{c} valido \\ C, A, B \vdash B \\ \hline C, A, B \vdash B \& C \end{array} \quad \begin{array}{c} valido \\ C, A, B \vdash C \\ \hline C, A \& B \vdash C \end{array}}{(A \& B) \& C \vdash A \& (B \& C)} \quad \vdash$$

$\frac{\begin{array}{c} valido \\ C, A, B \vdash B \\ \hline C, A \& B \vdash B \& C \end{array} \quad \begin{array}{c} valido \\ C, A, B \vdash C \\ \hline A \& B, C \vdash B \& C \end{array}}{(A \& B) \& C \vdash B \& C} \quad \vdash$

$\frac{\begin{array}{c} valido \\ C, A, B \vdash B \& C \\ \hline C, A \& B \vdash B \& C \end{array} \quad \begin{array}{c} valido \\ A \& B, C \vdash B \& C \\ \hline (A \& B) \& C \vdash B \& C \end{array}}{(A \& B) \& C \vdash A \& (B \& C)} \quad \vdash$



Cosa succede alla FALSITÀ?

nelle regole del calcolo LC_p

la **FALSITÀ SCENDE** ↓ dall'ALTO verso il BASSO da **almeno UN** ramo

ma ANCHE

la **FALSITÀ SALE** ↑ dal BASSO verso l' ALTO verso **almeno UN** ramo



Come si propaga la falsità in questo albero?

$$\frac{\frac{P \vdash Q}{\vdash P \rightarrow Q} \rightarrow \neg D \quad \frac{Q \vdash P}{\vdash Q \rightarrow P} \rightarrow \neg D}{\vdash (P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P)} \& \neg D$$



questo albero NON è una **derivazione**

MA ci dice come sono fatte le **uscite**

sulle righe della **tabella di verità**

del sequente radice

guardando al **valore di verità delle sue foglie!**

Esempio di propagazione della falsità su una riga

$$\frac{\frac{P \vdash Q}{\vdash P \rightarrow Q} \Downarrow_{vero\ su\ r} \quad \frac{Q \vdash P}{\vdash Q \rightarrow P} \Downarrow_{falso\ su\ r}}{\vdash (P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P)} \Downarrow_{falso\ su\ r}$$

vero su riga r $Q=1 \quad P=0$ falso su riga r $Q=1 \quad P=0$



Esempio di come si propaga la **vertà** su una riga

vero su riga r $Q=0 \quad P=0$

vero su riga r $Q=0 \quad P=0$

$$\frac{\frac{P \vdash Q}{\vdash P \rightarrow Q} \Downarrow_{vero\ su\ r} \quad \frac{Q \vdash P}{\vdash Q \rightarrow P} \Downarrow_{vero\ su\ riga}}{\vdash (P \rightarrow Q) \ \& \ (Q \rightarrow P)} \Downarrow_{vero\ su\ r}$$



Come si propaga la falsità in questo albero?

$$\frac{\frac{Q \vdash P, P \quad Q, Q \vdash P}{Q, P \rightarrow Q \vdash P \quad Q, Q \vdash P} \rightarrow -S}{P \rightarrow Q, Q \vdash P} \text{ sc}_{sx}$$
$$\frac{P \rightarrow Q, Q \vdash P}{P \rightarrow Q \vdash Q \rightarrow P} \rightarrow -D$$



questo albero NON è una derivazione

MA ci dice come sono fatte le uscite

sulle righe della tabella di verità del sequente radice

guardando al valore di verità delle sue foglie!

Esempio di propagazione della falsità su una riga

falso su riga r $Q=1 \quad P=0$

$$Q \vdash P, P$$

falso su riga r $Q=1 \quad P=0$

$$Q, Q \vdash P$$

$$\frac{Q, P \rightarrow Q \vdash P}{\frac{P \rightarrow Q, Q \vdash P}{P \rightarrow Q \vdash Q \rightarrow P}} \Downarrow_{falso\ su\ r} \Downarrow_{falso\ su\ r} \Downarrow_{falso\ su\ r}$$



Esempio di propagazione della **verità** su una riga

vero su riga r $Q=0 \quad P=0$

$$Q \vdash P, P$$

vero su riga r $Q=0 \quad P=0$

$$Q, Q \vdash P$$

$$\frac{Q, P \rightarrow Q \vdash P}{\frac{P \rightarrow Q, Q \vdash P}{P \rightarrow Q \vdash Q \rightarrow P}} \Downarrow_{vero\ su\ r} \Downarrow_{vero\ su\ r} \Downarrow_{vero\ su\ r}$$



perchè derivare con sequenti?

le regole del calcolo dei sequenti

CONSERVANO **VERITÀ** per riga \Updownarrow

lungo **TUTTI I RAMI**

dall'ALTO di **TUTTE le FOGLIE** verso il BASSO \Downarrow

e dal BASSO in ALTO verso **OGNI FOGLIA** \Uparrow



le regole

CONSERVANO pure la **FALSITÀ** \Updownarrow

lungo **ALMENO UN RAMO** (non tutti in genere!)

dall'ALTO di **QUALCHE foglia**

verso il BASSO \Downarrow

e dal BASSO in ALTO verso **QUALCHE FOGLIA** \Uparrow



pr TAUTOLOGIA	pr NON TAUTOLOGIA
tutte le uscite 1 nella tabella di pr	= NON VALIDA almeno un'uscita 0 nella tabella di pr
pr OPINIONE oppure pr PARADOSSO	



pr PARADOSSO = INSODDISFACIBILE tutte le uscite = 0 nella tabella di pr	pr NON PARADOSSO = SODDISFACIBILE almeno un'uscita = 1 nella tabella di pr
pr OPINIONE	oppure pr TAUTOLOGIA



pr	ha riga r che va a 0	sse	$\neg\text{pr}$	sulla stessa riga r va a 1
pr	ha riga r che va a 1	sse	$\neg\text{pr}$	sulla stessa riga r va a 0



pr TAUTOLOGIA	sse	\neg pr PARADOSSO
pr PARADOSSO	sse	\neg pr TAUTOLOGIA
pr OPINIONE	sse	\neg pr OPINIONE
pr NON TAUTOLOGIA = NON VALIDA	sse	\neg pr NON PARADOSSO = SODDISFACIBILE
pr NON PARADOSSO = SODDISFACIBILE	sse	\neg pr NON TAUTOLOGIA = NON VALIDA



Idea chiave della procedura per **classificare** una **proposizione**

per **classificare** una proposizione **pr**

basta classificare il **sequente** $\vdash \text{pr}$

analizzando **derivabilità** di $\vdash \text{pr}$

e se questo NON è derivabile

si analizza anche la **derivabilità** di $\vdash \neg \text{pr}$



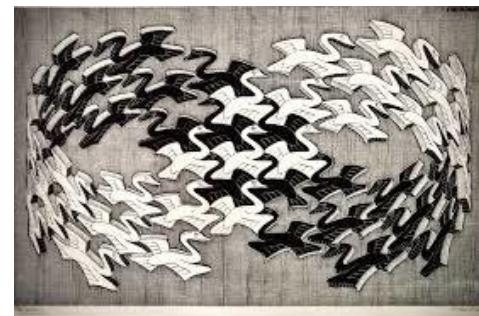
Chi è il **sequente negazione** di un sequente?

il **sequente negazione** di un sequente

$$\Gamma \vdash \Delta$$

è il SEQUENTE

$$\vdash \neg(\Gamma^& \rightarrow \Delta^\vee)$$



Idea chiave della procedura per **classificare** un **semente**

per **classificare** un sequente $\Gamma \vdash \Delta$

basta analizzare la **derivabilità** di $\Gamma \vdash \Delta$

e se questo NON è derivabile

si analizza anche la **derivabilità** di $\vdash \neg(\Gamma^& \rightarrow \Delta^\vee)$



Procedura per classificare un sequente

Dato un sequente $\Gamma \vdash \Delta$:

passo 1: si prova a derivare $\Gamma \vdash \Delta$ in LC_P

come in sez.9.4.1 dispensa

(in breve: applicando le regole a tutte le possibili formule composte

fermandosi appena si trova un assioma - che può contenere anche formule composte! -)

$\begin{cases} \text{se si deriva} & \Rightarrow \Gamma \vdash \Delta \text{ è tautologia} \\ \text{se la procedura termina con una foglia NON derivabile} & \text{il sequente } \Gamma \vdash \Delta \text{ NON è TAUTOLOGIA} \\ & \text{vai al passo 2 per trovare riga in cui va a 0} \end{cases}$

passo 2: UNA riga su cui la tabella di $\Gamma \vdash \Delta$ va a 0 si ottiene in tal modo:

prendi una foglia non assioma di sole variabili proposizionali

(per es. quella che ha fatto sì che la procedura termini con un NO)

e poni a 1 le variabili a sx del sequente (se ci sono!!) e a 0 le variabili di dx (se ci sono!)

\Rightarrow ogni riga che contiene tale assegnazione di variabili proposizionali manda a 0 il sequente $\Gamma \vdash \Delta$

poi vai al passo 3

passo 3: prova a derivare $\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ in LC_P applicando la procedura di decisione sez. 9.4.1

$\begin{cases} \text{se } \vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}) \text{ si deriva} & \Rightarrow \Gamma \vdash \Delta \text{ è un PARADOSSO} \\ \text{se la procedura termina con } \vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}) \text{ NON derivabile} & \text{il sequente } \Gamma \vdash \Delta \text{ è un OPINIONE} \\ & \text{poi applica il passo 2 al sequente } \vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}) \text{ per trovare una riga in cui va a 0} \\ & \text{e la riga trovata assegna 1} \\ & \text{al sequente } \Gamma \vdash \Delta \\ & \Rightarrow \Gamma \vdash \Delta \text{ è soddisfacibile su tal riga} \end{cases}$



Esempio

per classificare il sequente

$$\vdash A \& \neg A$$



costruiamo l'albero

$$\frac{\vdash A \quad \frac{\vdash \neg A}{\vdash \neg A} \text{ &-D}}{\vdash A \& \neg A}$$

questo albero NON è una **derivazione**

quindi il sequente radice $\vdash A \& \neg A$ **NON È TAUTOLOGIA**

poi la **foglia di sx** ci dice che per $A=0$ la radice va a **0**

$$\frac{\begin{array}{c} \text{falso su riga r } A=0 \\ \vdash A \end{array}}{\vdash A \ \& \ \neg A} \quad \frac{\begin{array}{c} \text{vero su riga r } A=0 \\ A \vdash \\ \vdash \neg A \end{array}}{\neg \neg D}$$



NON esiste riga che rende VERE tutte le foglie

$$\frac{\begin{array}{c} \text{falso su riga r } A=1 \\ \text{vero su riga r } A=1 \\ \vdash A \end{array}}{\vdash A \& \neg A} \quad \text{falso su r}$$



NON è possibile trovare una riga che rende vere
entrambe le foglie

$$A \vdash \quad \text{e} \quad \vdash A$$

perchè A deve essere sia **0** che **1** !!!!

e infatti scopriamo che il seguente radice $\vdash A \& \neg A$ è un **paradosso**

Passiamo alla negazione

Passiamo a cercare di derivare la negazione

$$\vdash \neg (\text{tt} \rightarrow (A \& \neg A))$$



trovando la derivazione

$$\begin{array}{c} \text{ax-id} \\[10pt] \text{ax-tt} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{\overline{A, \neg A \vdash}} \neg S \quad \& -S}{A \& \neg A \vdash} \\ \vdash tt} {\dfrac{\neg(\text{tt} \rightarrow A \& \neg A) \vdash}{\vdash \neg(\text{tt} \rightarrow (A \& \neg A))}} \neg D \end{array}$$

dunque $\vdash \neg (\text{tt} \rightarrow (A \& \neg A))$ è TAUTOLOGIA!!!

la negazione del sequente di partenza

$\vdash \neg (tt \rightarrow (A \& \neg A))$ è TAUTOLOGIA

e dunque il sequente di partenza $\vdash A \& \neg A$

è un **paradosso**



Altro esempio

Per classificare

$$\vdash Q \& (Q \rightarrow P)$$



costruiamo l'albero

$$\frac{\vdash Q \quad \frac{}{\vdash Q \rightarrow P} \text{ non serve continuare qui!}}{\vdash Q \& (Q \rightarrow P)} \&-D$$

questo albero ha la **foglia di dx** NON assioma

che si falsifica su riga $Q = 0$ e P definito a piacere

quindi il sequente di partenza $\vdash Q \& (Q \rightarrow P)$ **NON è TAUTOLOGIA**

perchè **falso** su riga $Q = 0$ e $P = 0$ (ad esempio)

Passiamo alla negazione

Passiamo a derivare la negazione

$$\vdash \neg (\text{tt} \rightarrow Q \ \& \ (Q \rightarrow P))$$



trovando l'albero (NON di derivazione!)

$$\begin{array}{c} \text{ax-id} \\ Q \vdash Q \\ \hline \frac{\text{ax-tt} \quad Q, P \vdash}{\frac{Q, Q \rightarrow P \vdash}{\frac{Q \& (Q \rightarrow P) \vdash}{\frac{\text{tt} \rightarrow Q \ \& \ (Q \rightarrow P) \vdash}{\vdash \neg (\text{tt} \rightarrow Q \ \& \ (Q \rightarrow P))}}}} \rightarrow\text{-S} \quad \$\text{-S} \\ \vdash \text{tt} \\ \hline \frac{\text{tt} \rightarrow Q \ \& \ (Q \rightarrow P) \vdash}{\vdash \neg (\text{tt} \rightarrow Q \ \& \ (Q \rightarrow P))} \rightarrow\text{-S} \quad \neg\text{-D} \end{array}$$

Dunque $\vdash \neg (\text{tt} \rightarrow Q \ \& \ (Q \rightarrow P))$ **NON è TAUTOLOGIA**
perchè falso su riga $Q=P=1$

Conclusione della procedura

la negazione $\vdash \neg (\text{tt} \rightarrow Q \ \& \ (Q \rightarrow P))$ del sequente di partenza **NON è TAUTOLOGIA**
perchè falso su riga $Q = P = 1$
e dunque il sequente di partenza $\vdash Q \ \& \ (Q \rightarrow P)$ è vero sulla riga $Q=P = 1$
e siccome sapevamo che era falso sulla riga $Q=P = 0$
concludiamo che $\vdash Q \ \& \ (Q \rightarrow P)$ è un' **OPINIONE**

