Ricevimento Studenti

(F. Montefalcone) 29 Novembre

Es. 1) Sia $f(x) = \begin{cases} \alpha(\operatorname{artg}(\sin x)+1), & x \leq 0 \\ e^{x+1}, & x > 0 \end{cases}$, $(\alpha \in \mathbb{R})$.

Determinare α in modo che graf(f) abbia tangente in $(0, f(0))$ e scriverne l'equazione.

Risposta Prima di tutto f è continua in $x=0$ se e solo se

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)}.$$

Si ha $\underline{f(0) = \alpha}$ e $\boxed{\lim_{x\to 0^-} f(x) = \alpha}$ $\left(\sin x \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \text{ e } \operatorname{artg} x \underset{x\to 0}{\sim} x\right)$

D'altra parte $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{x+1} = e}$.

Perciò f è continua in $x=0 \iff \boxed{\alpha = e}$.

Studiamo la derivabilità: facciamo i limiti di f' per $x \to 0^{\pm}$.

Si ha $$\boxed{f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{1+\sin^2 x} \cdot \cos x & \text{se } x<0 \\ e^{x+1} & \text{se } x>0 \end{cases}}.$$

Dato che $\underline{\alpha = e}$ si ottiene $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{x+1} = e = f'_+(0)$

e $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{e}{1+\sin^2 x} \cos x = e = f'_-(0)$

Dato che $\boxed{\exists\, f'(0) = f'_+(0) = f'_-(0) = e}$ si può concludere che

$\underline{f \in C^1(\mathbb{R})}$ e che $\underline{y - f(0) = f'(0)(x-0)}$ è l'eq. della retta tg in $(0, f(0))$ al grafico di f.

Si ha: $y - e = ex \iff \underline{y = e(x+1)}$ retta tg in $(0, f(0))$

Es. 2)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\operatorname{tg}x-1)(\sin 2x-1)}{(4x-\pi)^3} \quad (= f(x))$$

$$\begin{cases} D\operatorname{tg}x = \frac{1}{\cos^2 x} \\ \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Risposta **1° Metodo**: Taylor in $x=\frac{\pi}{4}$ per $\operatorname{tg}x$ e $\sin 2x$.

$$\begin{cases} \operatorname{tg}x = \underbrace{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}_{=1} + \underbrace{D(\operatorname{tg}x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}}_{=\frac{1}{\cos^2 x}\big|_{\frac{\pi}{4}} = 2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right) & x\to\frac{\pi}{4} \\ \sin 2x = \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} + \underbrace{D(\sin 2x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}}_{=2\cos 2x|_{\frac{\pi}{4}} = 0}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\underbrace{D^{(2)}(\sin 2x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}}_{=-4\sin 2x|_{\frac{\pi}{4}} = -4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\right) & \left(x\to\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}x = 1 + 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + o\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin 2x = 1 - \frac{\cancel{4}\,2}{\cancel{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + o\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 \end{cases} \quad \left(x\to\frac{\pi}{4}\right)$$

Pertanto

$$f(x) \sim \frac{2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\right)}{(4x-\pi)^3} = -\frac{\cancel{4}}{4^{\cancel{3}}{}^{2}}\,\frac{\cancel{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}}{\cancel{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}} = -\frac{1}{16}$$

Cioè $\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x) = -\frac{1}{16}}$.

NB Usare il Thm dell'Hopital è abbastanza difficile (troppi calcoli...)

2° Metodo

Alternativamente porre $\boxed{y = x - \frac{\pi}{4}}$ e studiare il limite

$$\lim_{y \to 0} \frac{\left(tg\left(y+\frac{\pi}{4}\right)-1\right)\left(\sin\left(2y+\frac{\pi}{2}\right)-1\right)}{4^3 \, y^3} \qquad \left(= g(y) = \frac{N(y)}{4^3 y^3} \right)$$

$$\sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right) = \cos a \implies \sin\left(2y+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(2y) = 1 - \frac{(2y)^2}{2} + o(y^2)$$

$(y \to 0)$

N.B. Usiamo Mclaurin di $tg\left(y+\frac{\pi}{4}\right)$ in $y=0$:

$$tg\left(y+\frac{\pi}{4}\right) = \underbrace{tg\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{=1} + \underbrace{D\left(tg\left(y+\frac{\pi}{4}\right)\right)}_{\left.\frac{1}{\cos^2\left(y+\frac{\pi}{4}\right)}\right|_{y=0} = 2}\Bigg|_{y=0} y + o(y)$$

$$= 1 + 2y + o(y) \quad \text{per } y \to 0$$

Pertanto $$N(y) = \left(\cancel{1} - 2y^2 + o(y^2) - \cancel{1}\right)\left(\cancel{1} + 2y + o(y) - \cancel{1}\right)$$

$$= -4y^3\left(1+o(1)\right) \sim -4y^3$$

Perciò $$g(y) \sim \frac{-\cancel{4}y^3}{\cancel{4}^{3\,2} y^3} = -\frac{1}{16} \quad \text{per } y \to 0$$

Es. 3) $\lim_{x \to -\infty} x \lg\left(\frac{1-x}{3-x}\right)$

Risposta è una forma indeterminata "$0 \cdot \infty$".

Poiché $\frac{1-x}{3-x} = \frac{3-x-2}{3-x} = 1 - \frac{2}{3-x} = 1 + \frac{2}{x-3}$,

e $\frac{2}{x-3} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$, si può usare $\lg(1+y) \sim y$ per $y \to 0$

e si ottiene $\lim_{x \to -\infty} x \lg\left(\frac{1-x}{3-x}\right) = \lim_{x \to -\infty} x \left(\frac{2}{x-3}\right) = 2$.

Es. 4) Studiare monotonia e derivabilità della funzione

• $f(x) = |(x+3)\lg(x+3)|$. $x \neq -3$

Risposta Conviene studiare la "nuova" funzione $g(y) = |y \lg y|$ $(y > 0)$

Sia quindi $g(y) = |y \lg y|$ allora $\text{Dom}\, g = \mathbb{R}_+$ e

$g(y) \geq 0$. Inoltre $g(y) = 0 \iff y = 1$. $(\lg y = 0 \iff y = 1)$

E' il limite notevole $\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \log^\beta(x) = 0$ $(\alpha > 0, \forall \beta)$

Chiaramente $\lim_{y \to 0} g(y) = 0$. Quindi g è prolungabile con continuità in $y = 0$ (cioè $g \in C([0, +\infty[)$) .

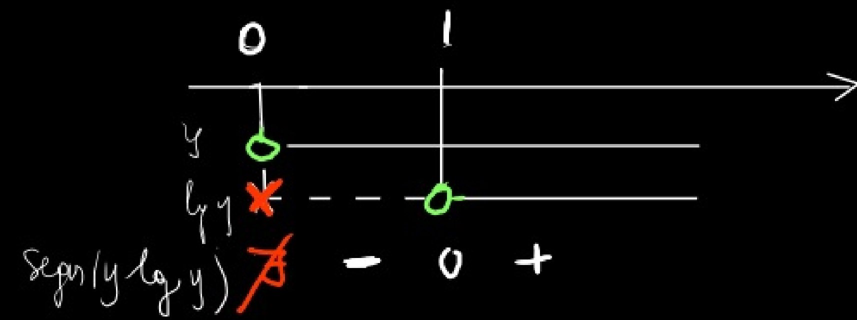
Si calcola $\boxed{g'(y) = \text{segn}(\underbrace{y \lg y}_{=0 \text{ se } y=0,1}) (\lg y + 1)}$ e $\text{Dom}\, g' = \mathbb{R}_+ \setminus \{0, 1\}$

NB I pti $y = 0, 1$ sono pti di non derivabilità per g

Segno di $g'(y) = \boxed{\text{segn}(y \lg y)\cdot(\lg y+1)} \geq 0$

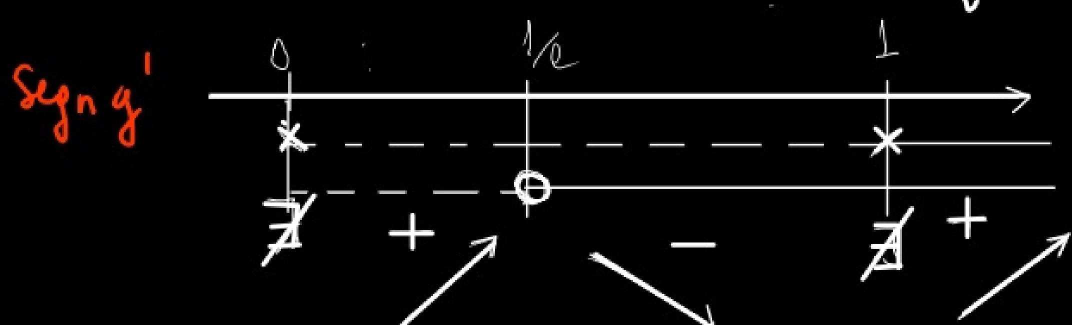
• $\lg y + 1 \geq 0 \iff \lg y \geq -1 \iff y \geq \frac{1}{e}$

$y \lg y \geq 0$



Pertanto • $\text{segn}(y \lg y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y > 1 \\ -1 & \text{se } y \in]0,1[\end{cases}$

Inoltre • $\lim_{x \to 0^+} g'(y) = +\infty$ e $\begin{cases} \lim_{x \to 1^-} g'(y) = -1 \\ \lim_{x \to 1^+} g'(y) = +1 \end{cases}$ ($y = 1$ pto ang.)



Conclusione: g cresce in]0,1/e[, decresce in]1/e, 1[e cresce in]1,+infinito[. Inoltre g non è derivabile in y=0 e y=1. Precisamente y=0 è pto a tg verticale, y=1 è pto angoloso

Allora occorre "traslare" ..., cioè riscrivere quanto trovato nella variabile x

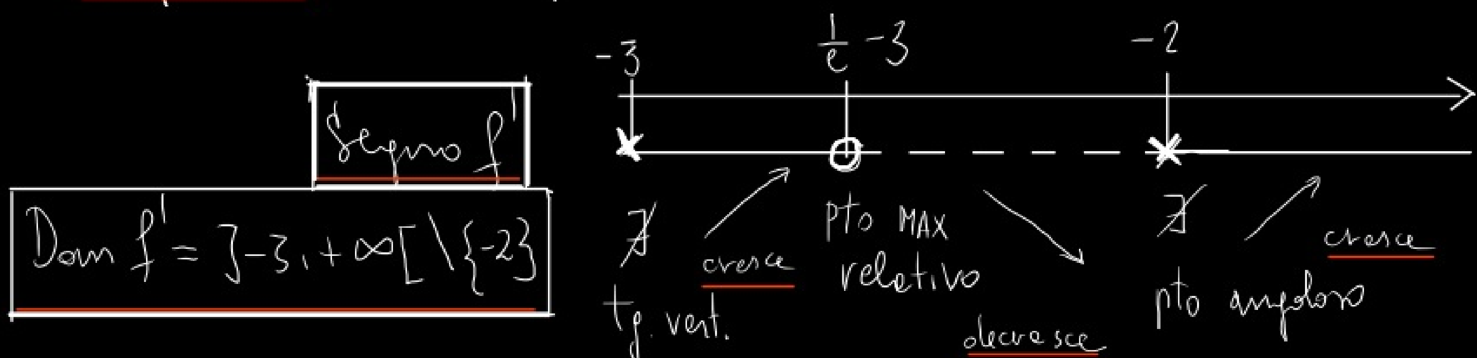
$$(y = x+3 \iff x = y-3).$$

<u>NB</u> $\quad y = 0, \frac{1}{e}, 1 \implies x = -3, \frac{1}{e}-3, -2$

Quindi <u>f è derivabile in $\{x \in \mathbb{R} : x > -3\} \setminus \{-2\}$</u>

continua fino a $x = -3$, cioè $f \in C([-3,+\infty[)$.

Inoltre i pti $x = -3, -2$ sono pti di non derivabilità di f, e precisamente <u>$x = -3$ è a tg. verticale</u> mentre <u>$x = -2$ è un pto angoloso</u>. Infine la monotonia è riassunta nello schema sotto:



$\left\{ x = \frac{1}{e} - 3 \right.$ è un pto di MAX rel. (stretto)

Es. 5) Monotonia e concavità/convessità di $f(x) = \operatorname{arctg}|x^2-1|$

Osserviamo preliminarmente che

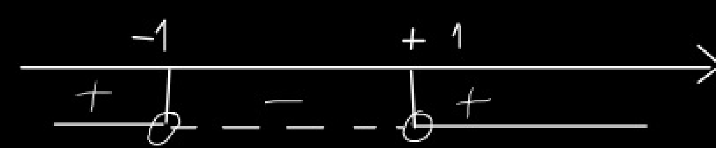
· $f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \frac{\pi}{2}$ e $f \in C(\mathbb{R})$. Inoltre $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

cioè f è PARI. Infine, $f(0) = \operatorname{atg} 1 = \frac{\pi}{4}$ e $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

(Monotonia)

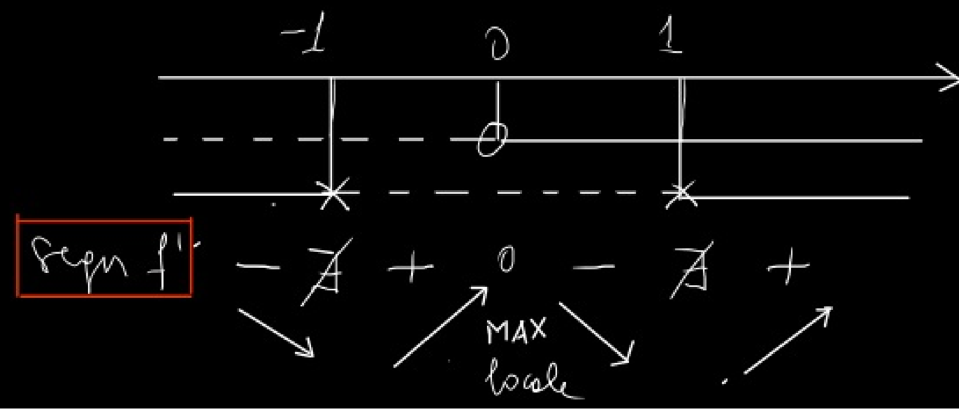
$$f'(x) = \frac{\operatorname{segn}(x^2-1) \cdot 2x}{1 + |x^2-1|^2} \qquad \forall x \neq \pm 1 .$$

Dato che $x^2 - 1 \geq 0 \iff$



Si ha $\operatorname{segn}(f'(x)) = \operatorname{segn}\left(\operatorname{segn}(x^2-1) \cdot 2x\right)$ dato che il denominatore

è $D(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Perciò



I punti +/-1 sono entrambi pti angolosi (salto della derivata prima).

La funzione cresce in]-1,0[e in]1,+infinito[, mentre decresce in]-infinito, -1 e in]0,1[.

Il pto x=0 è un max relativo stretto

Concavità / Convessità (flessi)

Se $x \neq \pm 1$ si ha

$$D^2 f = D\left(\frac{2x \cdot \text{segn}(x^2-1)}{1+|x^2-1|^2}\right) = 2\,\text{segn}(x^2-1)\; D\left(\frac{x}{1+|x^2-1|^2}\right) =$$

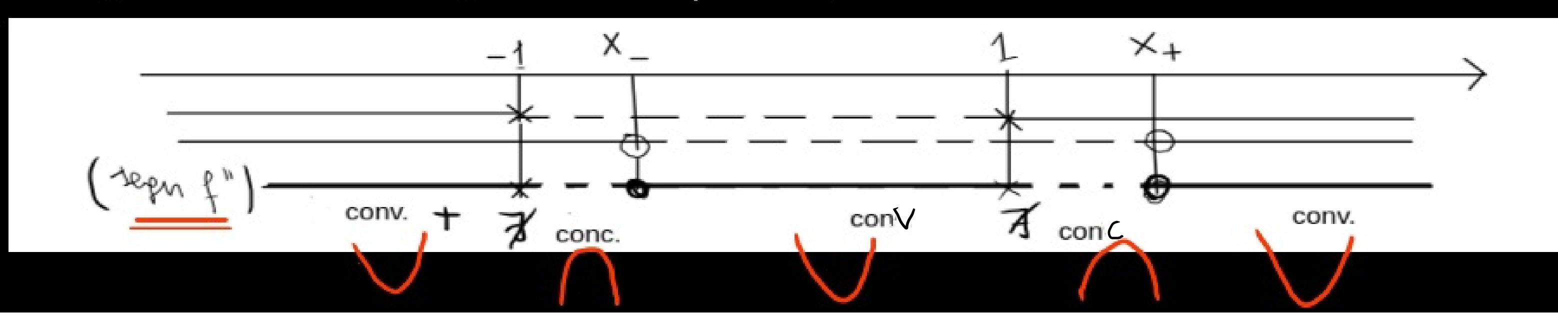
$$= \left(2\,\text{segn}(x^2-1)\right) \frac{1+|x^2-1|^2 - x\left(2\underbrace{|x^2-1|\,\text{segn}(x^2-1)}_{=x^2-1}\cdot 2x\right)}{\left(1+|x^2-1|^2\right)^2}$$

$$= \left(2\,\text{segn}(x^2-1)\right) \frac{1+(x^4-2x^2+1)-4x^2(x^2-1)}{1+|x^2-1|^2} = \frac{-3x^4+2x^2+2}{1+|x^2-1|^2}\left(2\cdot\text{segn}(x^2-1)\right)$$

Occorre quindi studiare $f''(x) \geq 0$ e basta il segno del numeratore:

$$P(x) = -3x^2+2x+2 = 0 \iff x_\pm = \frac{-2 \pm \sqrt{4+24}}{-6} = \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{7}}{3}$$

(N.B. $x_- \in]-1,-\frac{1}{2}[$ $\quad x_+ > 1$).



I pti x_ e x+ sono pti di flesso

x=+/-1 sono entrambi pti angolosi e di flesso