Esercizi sul Dominio di Funzioni

Esercizio

Studiare il dominio di $f(x) = \left(\arccos\left(\frac{x}{x+4}\right) - \frac{\pi}{3}\right)^{\sin(x)}$.

Il dominio di una funzione "potenza" $f(x) := h(x)^{g(x)}$ è dato da

a^b ha senso se $a>0$ e b in $\mathbb{R}$

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : h(x) > 0\} \cap Dom(g).$$

Si ha che $Dom(g) = Dom(\sin) = \mathbb{R}$. Perciò studiamo la disequazione

$$\arccos\left(\frac{x}{x+4}\right) > \frac{\pi}{3}.$$

Esercizi sul Dominio di Funzioni

N.B. Ricordare che

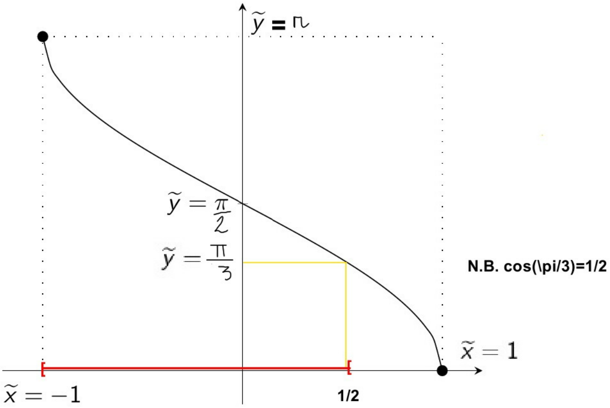


Figura: Grafico della funzione $\widetilde{y} = \arccos \widetilde{x}$, $\arccos : [-1, 1] \xrightarrow[1-1]{su} [0, \pi]$

Esercizi sul Dominio di Funzioni

Notare che dev'essere $x \neq -4$. Inoltre ricordare che $\arccos \widetilde{x} = \frac{\pi}{3}$ se e solo se $\widetilde{x} = \frac{1}{2}$. Pertanto, dalla stretta decrescenza della funzione arccos sul suo dominio $[-1, 1]$, si ottiene che

$$\arccos \widetilde{x} > \frac{\pi}{3} \Longleftrightarrow \widetilde{x} \in \left[-1, \frac{1}{2}\right[.$$

Rimane quindi da studiare l'insieme

$$(\star) \qquad -1 \leq \frac{x}{x+4} < \frac{1}{2},$$

ossia il sistema

$$\begin{cases} \frac{x}{x+4} < \frac{1}{2} \\ -1 \leq \frac{x}{x+4} \end{cases} .$$

Esercizi sul Dominio di Funzioni

La prima diseq. è risolta per $x \in]-4,4[$. *Inoltre la seconda diseq. è risolta per* $x \in]-\infty,-4[\cup[-2,+\infty[$.

Infatti, ad es., la prima si risolve così:

$$\frac{x}{x+4} < \frac{1}{2} \iff \frac{\cancel{2}x - (\cancel{x}+4)}{x+4} < 0 \iff \frac{x-4}{x+4} < 0$$

$$\iff \begin{cases} x < 4 \\ x > -4 \end{cases} \cup \begin{cases} x > 4 \\ x < -4 \end{cases} \iff x \in]-4,4[.$$

Esercizi sul Dominio di Funzioni

La prima diseq. è risolta per $x \in]-4, 4[$. *Inoltre la seconda diseq. è risolta per* $x \in]-\infty, -4[\cup[-2, +\infty[$.

Infatti, ad es., la prima si risolve così:

$$\frac{x}{x+4} < \frac{1}{2} \iff \frac{\cancel{2}x - (\cancel{x} + 4)}{x+4} < 0 \iff \frac{x-4}{x+4} < 0$$

$$\iff \begin{cases} x < 4 \\ x > -4 \end{cases} \cup \begin{cases} x > 4 \\ x < -4 \end{cases} \iff x \in]-4, 4[.$$

Esercizi sul Dominio di Funzioni

Usando la stessa "tecnica", la seconda si risolve così:

$$\frac{x}{x+4} \geq -1 \iff \frac{x+(x+4)}{x+4} \geq 0 \iff \frac{\cancel{2}(x+2)}{x+4} \geq 0$$

$$\iff \begin{cases} x \geq -2 \\ x > -4 \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq -2 \\ x < -4 \end{cases} \iff x \in [-2, +\infty[\, \cup\,]-\infty, -4[.$$

Ora si "intersecano" le soluzioni della prima e della seconda:

La soluzione è quindi $Dom(f) = [-2, 4[$.

Esercizio

Studiare il dominio di $f(x) = (\sqrt{-x^2+5x-6}+7-3x)^{\arctan\left(\frac{1}{x-2}\right)}$.

Come prima, il dominio di $f(x) := h(x)^{g(x)}$ è dato da

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : h(x) > 0\} \cap Dom(g).$$

Si ha che $Dom(g) = \underbrace{Dom(\text{arctan})}_{=\mathbb{R}} \cap \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}$.

Quindi $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : h(x) > 0\} \setminus \{2\}$.

N.B. Ricordare che

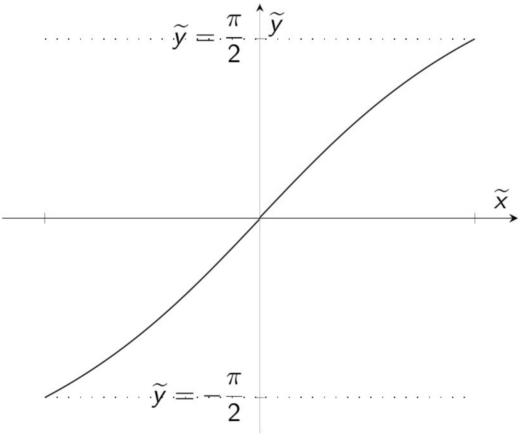


Figura: Grafico della funzione $\widetilde{y} = \operatorname{arctg} \widetilde{x}$, $\operatorname{arctg} \colon \mathbb{R} \xrightarrow[1-1]{su} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Occorre adesso studiare la disequazione

$$(\star) \quad \sqrt{-x^2+5x-6}+7-3x>0.$$

È equivalente ai seguenti due sistemi:

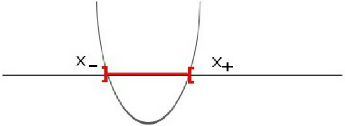
$$(I) \begin{cases} 3x-7\geq 0 \\ -x^2+5x-6>(3x-7)^2 \end{cases} \qquad (II) \begin{cases} 3x-7<0 \\ -x^2+5x-6\geq 0 \end{cases}.$$

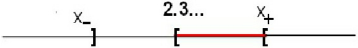
N.B. La soluzione di $(\star)$ è l'**<u>unione</u>** delle soluzioni dei sistemi (I) e (II). Notare che in (I) non c'è la condizione di esistenza della radice quadrata, dato che questa è verificata automaticamente, in virtù della seconda diseq.

Risolviamo (I).
La prima diseq. è risolta dagli $x \geq \frac{7}{3} = 2.\overline{3}$. Inoltre, la seconda diseq. è equivalente a

$$10x^2 - 47x + 55 < 0.$$

L'eq. associata ha sol. $x_{\pm} = \frac{47 \pm \sqrt{47^2 - 55 \cdot 40}}{20} = \frac{47 \pm 3}{20} = 2.2$ e 2.5.





La diseq. è risolta per $x \in]2.2, 2.5[$ ed (I) ha per soluzione l'intervallo

$$]2.2, 2.5[\cap [2.\overline{3}, +\infty[= [2.\overline{3}, 2.5[.$$

Risolviamo (II).

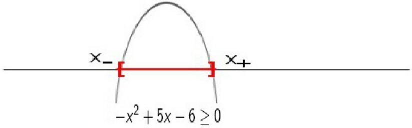
La prima diseq. è risolta dagli $x < \frac{7}{3} = 2.\overline{3}$. Inoltre, l'eq.

eq. associata alla diseq. $$x^2 - 5x + 6 = 0$$

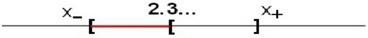
ha soluzioni

$$x_\pm = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = 2 \text{ e } 3.$$

Segue che la seconda diseq. è risolta per $x \in [2,3]$.



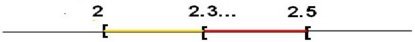
Ne segue che (II) ha per soluzione l'intervallo



$$[2,3] \cap]-\infty, 2.\overline{3}[= [2, 2.\overline{3}[.$$

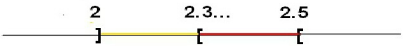
Si uniscono gli intervalli soluzione di (I) e (II)

Allora la soluzione di $(\star)$ è



$$[2.\overline{3}, 2.5[\cup[2, 2.\overline{3}[= [2, 2.5[$$

e pertanto $Dom(f) = [2, 2.5[\setminus\{2\} =]2, 2.5[$.



Dominio di *f*

Esercizi su Sup/Inf (e Max/Min)

Esercizio

Studiare inf / sup *degli insiemi*

$$A = \left\{ \frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}, \qquad B = \left\{ \frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Dimostriamo che

$$\sup A = 1 = \inf B.$$

Dalla nota caratterizzazione del sup, si ha che $\sup A = 1$ se e solo se

$$\begin{aligned} &1) \qquad a \leq 1 \qquad \forall\, a \in A; \\ &2) \qquad \forall \epsilon > 0\ \exists\ a \in A : 1 - \epsilon < a. \end{aligned}$$

2) $\forall \epsilon > 0 \ \exists \ a \in A : 1 - \epsilon < a.$

Negando la 2) si avrebbe che 1 non sarebbe il MIN maggiorante di A

$\exists \ \varepsilon > 0 \ \ \forall \ a \text{ in } A \ \ 1 \geqslant a + \varepsilon$

Ciò contraddice che 1 è il minimo maggiorantedi A

Esercizi su Sup/Inf (e Max/Min)

Poniamo ora $a_n := \frac{n-1}{n}$ e $b_n := \frac{n+1}{n}$. Evidentemente, si ha

$$a_n \leq 1, \qquad b_n \geq 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Per cui 1) è vera. Per dimostrare 2) si osservi che

$$\frac{n-1}{n} + \epsilon > 1 \iff 1 - \frac{1}{n} + \epsilon > 1 \iff n > \frac{1}{\epsilon}.$$

Pertanto, se $\epsilon > 0$ esiste $\overline{n}$ tale che se $n \geq \overline{n}$ allora $1 - \epsilon < a_n$ (infatti, basta scegliere $\overline{n} > \frac{1}{\epsilon}$).

Esercizi su Sup/Inf (e Max/Min)

Poniamo ora $a_n := \frac{n-1}{n}$ e $b_n := \frac{n+1}{n}$. Evidentemente, si ha

$$a_n \leq 1, \qquad b_n \geq 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Per cui 1) è vera. Per dimostrare 2) si osservi che

$$\frac{n-1}{n} + \epsilon > 1 \iff 1 - \frac{1}{n} + \epsilon > 1 \iff n > \frac{1}{\epsilon}.$$

Pertanto, se $\epsilon > 0$ esiste $\overline{n}$ tale che se $n \geq \overline{n}$ allora $1 - \epsilon < a_n$ (infatti, basta scegliere $\overline{n} > \frac{1}{\epsilon}$).

$$2) \qquad \forall \epsilon > 0\ \exists\, a \in A : 1 - \epsilon < a.$$

Esercizi su Sup/Inf (e Max/Min)

Il fatto che $\inf B = 1$ si dimostra analogamente, ma usando le proprietà caratteristiche dell'inf. Ossia, $\inf B = 1$ se e solo se

$$
\begin{array}{lll}
1)' & b \geq 1 & \forall\, b \in B; \\
2)' & \forall \epsilon > 0 \;\exists\; b \in B : 1 + \epsilon > b. &
\end{array}
$$

Sappiamo già che $1)'$ è vera. Per dimostrare $2)'$ si osservi che

$$1 + \epsilon > \frac{n+1}{n} \iff 1 + \epsilon > 1 + \frac{1}{n} \iff n > \frac{1}{\epsilon}.$$

Pertanto, come prima, dato $\epsilon > 0$ esiste $\overline{n}$ tale che se $n \geq \overline{n}$ allora $1 + \epsilon > b_n$ (a tale scopo basta scegliere $\overline{n} > \frac{1}{\epsilon}$).

Esercizi su Sup/Inf (e Max/Min)

Il fatto che $\inf B = 1$ si dimostra analogamente, ma usando le proprietà caratteristiche dell'inf. Ossia, $\inf B = 1$ se e solo se

$$\begin{array}{lll} 1)' & b \geq 1 & \forall\, b \in B; \\ 2)' & \forall \epsilon > 0\ \exists\ b \in B : 1 + \epsilon > b. & \end{array}$$

Sappiamo già che $1)'$ è vera. Per dimostrare $2)'$ si osservi che

$$1 + \epsilon > \frac{n+1}{n} \iff 1 + \epsilon > 1 + \frac{1}{n} \iff n > \frac{1}{\epsilon}.$$

Pertanto, come prima, dato $\epsilon > 0$ esiste $\overline{n}$ tale che se $n \geq \overline{n}$ allora $1 + \epsilon > b_n$ (a tale scopo basta scegliere $\overline{n} > \frac{1}{\epsilon}$).

Esercizi su Sup/Inf (e Max/Min)

Notare che $1 \notin A \cup B$ visto che $\frac{n \pm 1}{n} = 1 \implies \pm 1 = 0$, che è assurdo.

Pertanto $\nexists \max A$ e $\nexists \min B$.

Infine è evidente che $\inf A = \min A = 0$ ed inoltre che $\sup B = \max B = 2$.

Esercizi su Sup/Inf (e Max/Min)

Esercizio

Studiare inf / sup *e/o* min / max *dell'insieme*

$$A = \left\{ \frac{2n}{1+n^2} : n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Poniamo $a_n := \frac{2n}{1+n^2}$. Si ha

$$-1 \leq a_n \leq 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Dimostriamolo.

Esercizi su Sup/Inf (e Max/Min)

Le due disequazioni sono verificate dato che sono equivalenti alla diseq. $(n \pm 1)^2 \geq 0$ (che è sempre vera).

Pertanto A è limitato e contenuto in $[-1, 1]$. Ma se $n = \pm 1$ si ottiene

$$a_{-1} = -1, \qquad a_1 = 1,$$

ossia i valori ± 1 sono assunti da elementi di A. Allora

$$\inf A = \min A = -1 \qquad \text{e} \qquad \sup A = \max A = 1.$$

Esercizi su Sup/Inf (e Max/Min)

Esercizio

Studiare inf / sup *e/o* min / max *dell'insieme*

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq 2, \quad \left| \frac{x-3}{x+2} \right| \leq 1 \right\}.$$

Si osservi che per $y \in \mathbb{R}$ la diseq. $|y| \leq 1$ è equivalente a $-1 \leq y \leq 1$.
Pertanto occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{x-3}{x+2} \leq 1 \\ \frac{x-3}{x+2} \geq -1 \end{cases} .$$

La prima diseq. è risolta per $x > -2$. La seconda diseq. è risolta per $x \in]-\infty, -2[\cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Esercizi su Sup/Inf (e Max/Min)

Infatti, ad es., la prima si risolve così:

$$\frac{x-3}{x+2} \le 1 \iff \frac{\cancel{x}-3-(\cancel{x}+2)}{x+2} \le 0 \iff \frac{-5}{x+2} \le 0 \iff x+2>0.$$

Analogamente, la seconda si risolve così:

$$\frac{x-3}{x+2} \ge -1 \iff \frac{x-3+(x+2)}{x+2} \ge 0 \iff \frac{2x-1}{x+2} \ge 0$$

$$\iff \begin{cases} 2x-1 \ge 0 \\ x+2>0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} 2x-1 \le 0 \\ x+2<0 \end{cases}$$

$$\iff \left\{x \ge \frac{1}{2}\right\} \cup \{x<-2\}.$$

Esercizi proposti

Esercizio

Dimostrare, usando la definizione, la validità dei seguenti:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2+2n} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n-1} = +\infty.$$

Esercizio ($\star$)

Sia $x_1 = 0$ e si ponga $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Supponendo che esista, trovare il limite della successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Dimostrare poi l'esistenza di tale limite.