Analisi Matematica 1

by F. Montefalcone

Funzioni esponenziali

Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Abbiamo in precedenza già definito la funzione a^x per $x \in \mathbb{Q}$.

Estendiamo ad $\mathbb{R}$ questa funzione. Per farlo, sia $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e sia

$$x = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots$$

la rappresentazione decimale di x.
Tronchiamo la successione delle cifre decimali di x all'n-esima cifra.
Cioè, consideriamo la successione

$$x_n \overset{def.}{=} \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Definizione

Si pone

$$\boxed{a^x \overset{def.}{=} \lim_{n \to +\infty} a^{x_n}}.$$

In seguito useremo solo le proprietà di a^x per $x \in \mathbb{Q}$ assieme alla seguente:

Proprietà (♣). *Siano* $x \in \mathbb{R}$ *e* $\{y_n\}_n \subseteq \mathbb{Q}$, $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. *Allora*

$$\lim_{n\to+\infty} a^{y_n} = a^x.$$

Tale proprietà fornisce sostanzialmente la continuità dell'esponenziale.

Con questi ingredienti si riesce a dimostrare il seguente:

Funzioni elementari (esponenziali e logaritmi)

Teorema (Proprietà dell'esponenziale $f(x) = a^x$)

Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. *Valgono le seguenti:*

1) $a^{x+y} = a^x a^y \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$;
2) $a^x > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$;
3) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ *si ha* $\begin{cases} x < y \implies a^x < a^y & \text{se } a > 1 \\ x < y \implies a^y < a^x & \text{se } a \in \,]0,1[\end{cases}$;
4) $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \forall\, \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *si ha*
$$x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x \implies a^{x_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} a^x;$$
5) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Osservazione

Sia $a > 0$. Si può dimostrare che

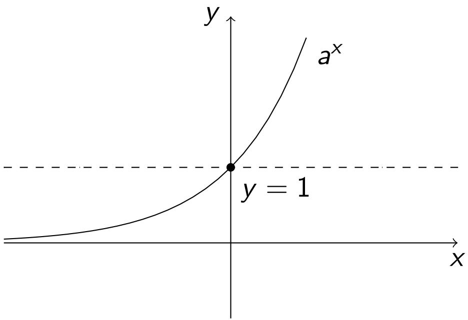
$$\lim_{n \to +\infty} a^{\frac{1}{n}} \left(= \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} \right) = 1.$$

Questo "limite notevole" si dimostra usando la disuguaglianza di Bernoulli.

Per mezzo di questo limite si dimostra la Proprietà ($\clubsuit$).

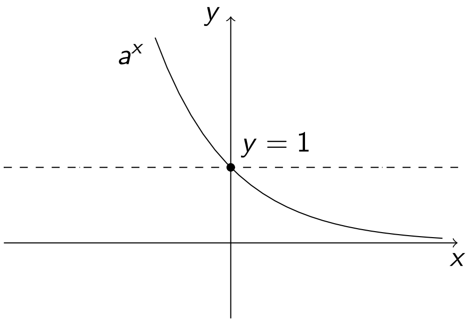
Il resto della dimostrazione del teorema precedente usa le proprietà delle funzioni esponenziali in $\mathbb{Q}$.

Funzioni elementari (esponenziali e logaritmi)



(a) se $a > 1$

Figura: Grafico della funzione esponenziale a^x



(a) se $a \in]0, 1[$

Figura: Grafico della funzione esponenziale a^x

Funzioni logaritmiche

Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. D'ora in poi si chiamerà funzione esponenziale la funzione

$$f_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \; f_a(x) = a^x.$$

Dato che f_a è continua si ha $f_a(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$ se $a \neq 1$. Inoltre si vede che

$$f_a \colon \mathbb{R} \xrightarrow[1-1]{su} \mathbb{R}_+$$

è biiettiva. Perciò esiste $f_a^{-1} \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

D'ora in poi chiameremo *logaritmo in base a di* $y \in \mathbb{R}_+$ il numero reale $f_a^{-1}(y)$.

Si pone

$$\boxed{\log_a y := f_a^{-1}(y)}.$$

Per definizione di inversa si ha

$$\log_a y = x \iff y = a^x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},\; y \in \mathbb{R}_+.$$

Elenchiamo alcune proprietà fondamentali:

1) $\log_a a^x = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.
2) $a^{\log_a y} = y \quad \forall\, y \in \mathbb{R}_+$.
3) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+$.

Dimostrazione.

La proprietà 3) si dimostra così. Si ha

$$xy = a^{\log_a(x\cdot y)} = \underbrace{a^{\log_a x}}_{x} \cdot \underbrace{a^{\log_a y}}_{y} = a^{\log_a x + \log_a y} \iff \log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y,$$

che è la tesi. $\square$

4) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+$ si ha $x < y \implies \begin{cases} \log_a x < \log_a y & \text{se } a > 1 \\ \log_a y < \log_a x & \text{se } a \in \,]0,1[\end{cases}.$

5) $\forall\, y \in \mathbb{R}_+\ \forall\, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$, si ha

$$y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} y \implies \lim_{n \to +\infty} \log_a y_n = \log_a y.$$

6) $\log_a \alpha^\beta = \beta \log_a \alpha \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, \beta \in \mathbb{R}.$

7) $\boxed{\log_a y = \log_a b \cdot \log_b y}$ $\quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}_+, \ \forall\, y \in \mathbb{R}_+.$

Quest'ultima formula è nota come "formula del cambiamento di base".

Dimostrazione.

Dimostriamo la 7). Si ha

$$a^{(\log_a b)\log_b y} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b y} = b^{\log_b y} = y = a^{\log_a y}.$$

$\square$

Osservazione

C'è un'altra proprietà degli esponenziali intuitivamente ovvia, ma che abbiamo formulato soltanto per l'esponenziale su $\mathbb{Q}$. Più precisamente, si ha

$$(\alpha^x)^y = \alpha^{xy} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Per dimostrarla, si noti che la 6) implica che

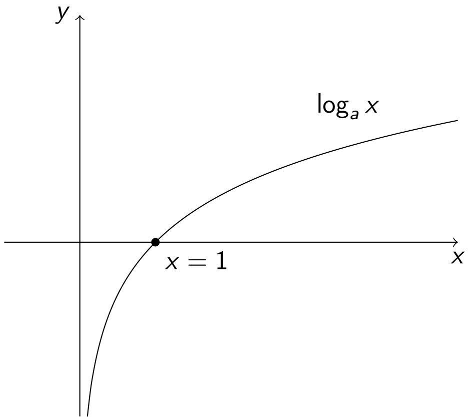
$$\log_a (\alpha^x)^y = y \log_a \alpha^x = yx \log_a \alpha = \log_a \alpha^{xy}.$$

Notazione. D'ora in poi se $a = e$ scriveremo equivalentemente

$$\log_e,\ \lg,\ \log,\ \ln$$

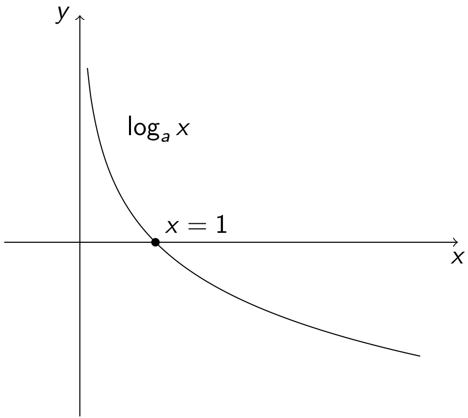
per indicare il cosiddetto "logaritmo naturale" (ossia in base e).

Funzioni elementari (esponenziali e logaritmi)



(a) se $a > 1$

Figura: Grafico del logaritmo $\log_a x$



(a) se $a \in]0,1[$

Figura: Grafico del logaritmo $\log_a x$

Ripassiamo alcuni fatti di trigonometria. Partiamo col grafico della circonferenza unitaria che ci consentirà di dare le principali definizioni.

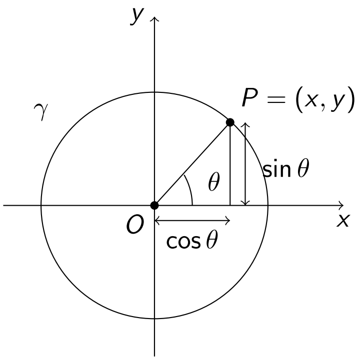


Figura: Circonferenza unitaria $x^2 + y^2 = 1$

Per costruzione, θ è l'angolo tra la semiretta $\overline{PO}$ e l'asse x e $P \in \gamma$, dove γ è la circonferenza unitaria descritta dall'equazione

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Per definizione si pone

$$x \stackrel{def.}{=} \cos\theta, \quad y \stackrel{def.}{=} \sin\theta.$$

Per costruzione risulta

$$\begin{cases} \cos(\theta + 2k\,\pi) = \cos\theta & \forall\,\theta \in [0, 2\pi[\\ \sin(\theta + 2k\,\pi) = \sin\theta & \forall\,k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Si pone anche

$$\operatorname{tg}\theta \overset{def.}{=} \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \forall\,\theta \in \mathbb{R},\ \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Analogamente, si ha

$$\operatorname{tg}(\theta + k\,\pi) = \operatorname{tg}\theta \qquad \forall\,\theta \in \mathbb{R},\ \forall\,k \in \mathbb{Z}.$$

La funzione reciproca della tangente si chiama *cotangente*, si indica come cotg. In altre parole, si ha

$$\operatorname{cotg}\theta := \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \forall\,\theta \in \mathbb{R},\ \theta \neq k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Tabella archi noti

θ	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$\mathrm{tg}\,\theta$
0	1	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1	$\nexists$

Funzioni trigonometriche elementari

D'ora in poi $\theta = x$ (cioè, x è la variabile indipendente).

Elenchiamo qualche proprietà. Valgono le seguenti:

1) $|\sin x|, \ |\cos x| \leq 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.
2) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.
3) La funzione sin è dispari, mentre la funzione cos è pari, ossia

$$\sin(-x) = -\sin x \quad \forall\, x \in \mathbb{R};$$
$$\cos(-x) = \cos x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

4) *Formule di addizione e sottrazione.* Valgono le seguenti:

$$\begin{cases} \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}; \\ \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Da queste formule si ottiene (per esercizio):

$$\mathrm{tg}(x \pm y) = \frac{\mathrm{tg}\, x \pm \mathrm{tg}\, y}{1 \mp \mathrm{tg}\, x\, \mathrm{tg}\, y} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

5) *Formule di duplicazione.* Vale la seguente (per esercizio):

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

.

6) Posto $t = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$, valgono le seguenti *formule parametriche:*

$$\sin x = \frac{2\,t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2\,t}{1-t^2}.$$

I grafici di sin, cos e tg sono (qualitativamente) i seguenti:

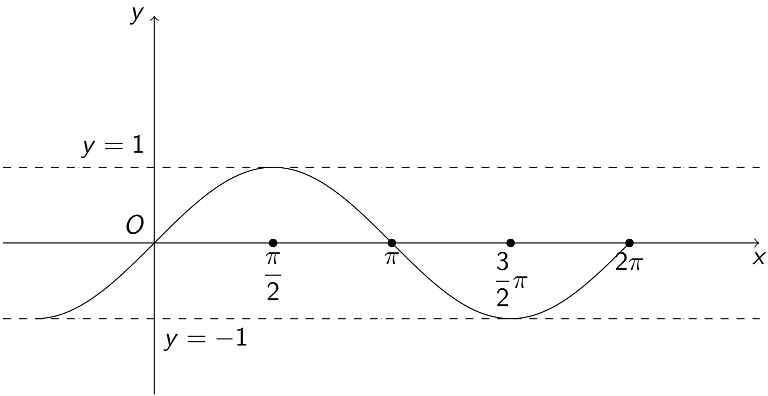


Figura: Grafico della funzione $y = \sin x$, $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$

I grafici di sin, cos e tg sono (qualitativamente) i seguenti:

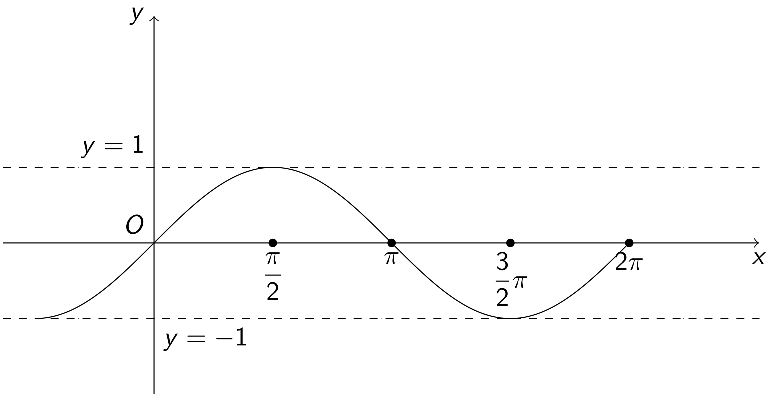


Figura: Grafico della funzione $y = \sin x$, $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$

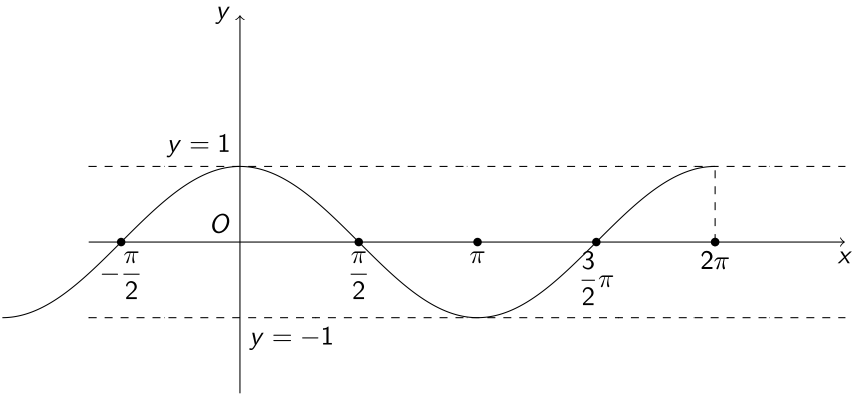
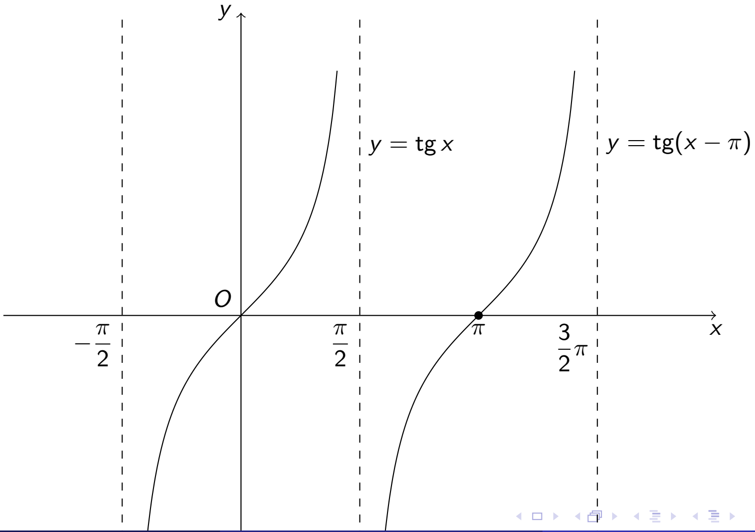


Figura: Grafico della funzione $y = \cos x$, $\cos\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$

Figura: Grafico della funzione $y = \operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} \colon \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[\to \mathbb{R}$



Funzioni trigonometriche inverse

Discutiamo brevemente le "inverse" di sin, cos e tg.

Definizione

Valgono le seguenti definizioni.

1) L'inversa della funzione $x \to \sin x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ si chiama *arcoseno* e si denota come arcsin.

2) L'inversa della funzione $x \to \cos x,\ x \in [0, \pi]$ si chiama *arcocoseno* e si denota come arccos.

3) L'inversa della funzione $x \to \operatorname{tg} x,\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ si chiama *arcotangente* e si denota come arctg.

I grafici di queste funzioni sono qualitativamente i seguenti:

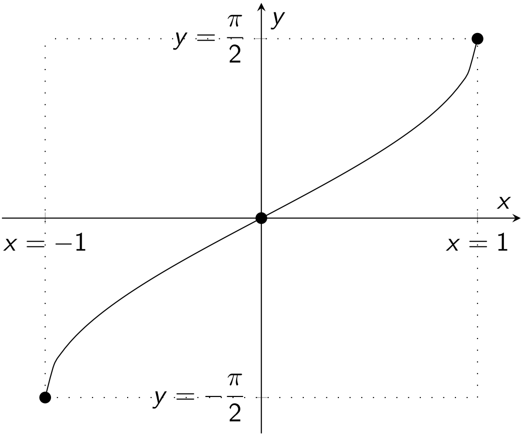


Figura: Grafico della funzione $y = \arcsin x$, $\arcsin\colon [-1,1] \xrightarrow[1-1]{su} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Funzioni trigonometriche inverse

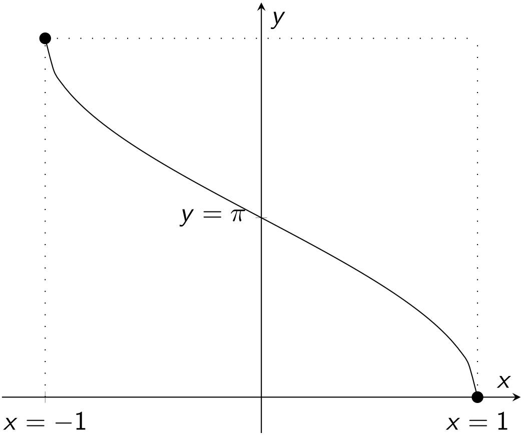


Figura: Grafico della funzione $y = \arccos x$, $\arccos\colon [-1,1] \xrightarrow[1-1]{su} [0,\pi]$

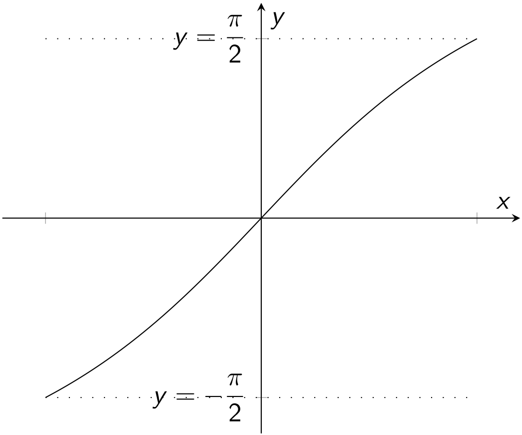


Figura: Grafico della funzione $y = \operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arctg}\colon \mathbb{R} \xrightarrow[1-1]{su} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Funzioni iperboliche

Definizione

Si pone

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Si chiamano *seno iperbolico* e *coseno iperbolico*.

E' facile vedere che

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x \quad \text{(dispari)} \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

e che

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x \quad \text{(pari)} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Vale l'identità fondamentale (per esercizio):

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Tali funzioni sono pertanto legate da questa relazione (analogamente a quanto accade per sin e cos).

Funzioni iperboliche

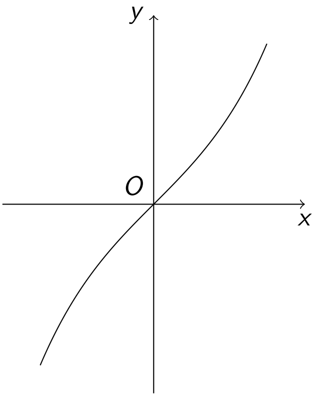


Figura: Grafico della funzione $y = \operatorname{sh} x$

Funzioni iperboliche

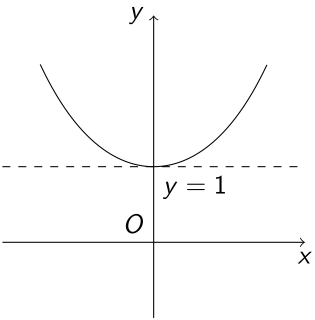


Figura: Grafico della funzione $y = \operatorname{ch} x$

Funzioni iperboliche

Si incontrano in Analisi le funzioni tgh "tangente iperbolica"

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

e le inverse di sh, ch (denotate come settsh e settch oppure sh^{-1}, ch^{-1}, etc.).
Torneremo su queste funzioni in seguito.

Osservazione

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti (per esercizio):

- $\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1)$;
- $\cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$;
- $\sinh x \cosh x = \frac{\sinh 2x}{2}$.

Queste formule, analoghe a quelle trigonometriche, sono utili nel calcolo di certe primitive.