Teo: ogni succ. reale limitata ammette una sottosucc. convergente.

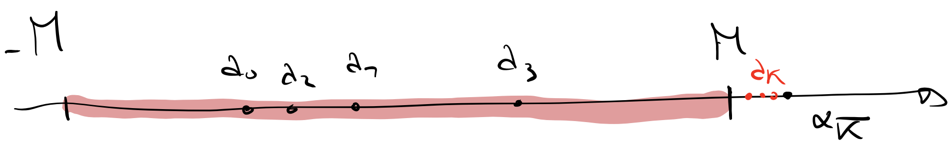
$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$

- limitata $\Rightarrow$ $|a_n| \leq M$, $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\alpha_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$|a_n| \leq M$

$|\alpha_n| = |\sup\{a_k \mid k \geq n\}| \leq M$



$\exists\ \alpha_{\bar{k}}$ t.c. $\alpha_{\bar{k}} > M \Rightarrow \sup\{a_k \mid k \geq \bar{k}\} > M$

$\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$

$\alpha_{n+1} := \sup\{\ \}$

$\underbrace{a_n, \overbrace{a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\ldots}}$

$\alpha_n := \sup\{\ \}$

$$\alpha_n = \max\{a_n, \sup\{a_k \mid k \geq n+1\}\} = \max\{a_n, \alpha_{n+1}\}$$

$$\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$$

$\alpha_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\}$ è monotona decrescente

α_n è decrescente e limitata $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = l$

! $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non è una sottosucc. di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$\alpha_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\}$

$a_k \leq \alpha_n \quad \forall k \geq n$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k$ t.c. $\alpha_n - \varepsilon \leq a_k$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = l$

$\forall \varepsilon > 0 \ \forall p \in \mathbb{N} \ \exists n \geq p : l - \varepsilon < a_n$

$\alpha_p = \sup\{a_k \mid k \geq p\} \Rightarrow \exists n \quad \alpha_p - \varepsilon < a_n$

$l = \inf \alpha_n$

$\Rightarrow l - \varepsilon < a_n$

(*) $l - \varepsilon < \alpha_p \quad \forall \varepsilon > 0 \ \forall p$

$\alpha_p = \sup\{a_k : k \geq p\} \Rightarrow \forall \varepsilon_1 > 0 \ \exists k$ t.c. $\alpha_p - \varepsilon_1 < a_k$

$a_p < a_k + \varepsilon_1$

$\Rightarrow l - \varepsilon < a_p < a_k + \varepsilon_1$ $\quad \forall \varepsilon \ \forall p \ \exists k_p \geq p$

$l - \underbrace{(\varepsilon + \varepsilon_1)}_{\varepsilon} < a_{k_p} \Rightarrow l - \varepsilon < a_{k_p}$

$\{a_{k_p}\}_{p \in \mathbb{N}}$

$$\begin{cases} k_1 = \min \{k \in \mathbb{N} \mid l - 1 < a_k\} \\ k_{n+1} = \min \{k \in \mathbb{N} \mid k > k_n \text{ e } l - \frac{1}{n+1} < a_k\} \end{cases}$$

- Esercizio l'induzione
- Disuguaglianza triangolare

---

1) Dimostrare che $a_n = 10^n - 1$ è divisibile per 9, $n \geq 1$.

A) Caso base

B) Passo induttivo

A) $\underline{n=1}$: $a_1 = 10^1 - 1 = 9$ è divisibile per 9 ✓

B) Se diamo per vera la proposizione nel caso n allora dobbiamo verificare che è vera anche per $n+1$.

Sappiamo che $a_n = 10^n - 1$ è divisibile per 9

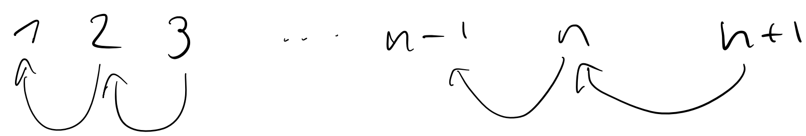
e vogliamo dimostrare che $10^{n+1} - 1$ è divisibile per 9.

$$a_{n+1} = 10^{n+1} - 1 = 10 \cdot 10^n - 1 = \boxed{10 \cdot 10^n - 10} + 9 =$$

$$= 10(10^n - 1) + 9 = 10 \cdot a_n + 9$$

$\begin{cases} a_n \text{ è divisibile per } 9 \\ 9 \text{ è } \text{"} \text{ per } 9 \end{cases} \Rightarrow 10\, a_n + 9$ è divisibile per 9 ✓

$\Rightarrow a_n = 10^n - 1$ è divisibile per 9 $\forall n \geq 1$



---

2) Dimostrare che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \geq 1$ usando una dimostrazione per induzione.

· Caso base: $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$$

$$\frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$$ ✓

- <u>Passo induttivo</u>:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

e cerchiamo di dimostrare $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$= (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + \frac{(n+1)}{1}\right] =$$

$$= (n+1)\left[\frac{2n^2+n+6(n+1)}{6}\right] =$$

$$= (n+1)\left[\frac{2n^2+n+6n+6}{6}\right] =$$

$$= (n+1)\cdot\frac{2n^2+7n+6}{6} \underset{(\star)}{=} \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$2n^2+7n+6$$

$$\Delta = 7^2 - 4\cdot 2\cdot 6 = 49 - 48 = 1$$

$$n_{1,2} = \frac{-7\pm\sqrt{1}}{2\cdot 2} = \frac{-7\pm 1}{4} = \begin{cases} -\frac{8}{4} = -2 \\ -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow 2n^2 + 7n + 6 = 2\left(n - (-2)\right)\left(n - \left(-\frac{3}{2}\right)\right) =$

$= 2(n+2)\left(n + \frac{3}{2}\right) = (n+2)(2n+3)$ (☆)

$(n+2)\left(n + \frac{3}{2}\right) = (n+2)\left(\frac{2n+3}{2}\right) = \frac{1}{2}(n+2)(2n+3)$