Analisi Matematica

Corso di Laurea in Informatica
Docente: Francescopaolo Montefalcone
I anno - primo semestre - 28/9/2021 – 24/01/2022
Durata del corso: 96 ore/ 12CFU
Versione provvisoria aggiornata il 23/9/2021

Allez en avant et la foi vous viendra.
J.B. d'Alembert

Premessa

▼ Queste note contengono il materiale didattico che useremo per il nostro corso: in effetti, le mie lezioni saranno largamente modellate su di esse. Lo scopo che mi prefiggevo nello scriverle era che lo studente potesse disporre di un testo sintetico e senza troppi fronzoli, ma al contempo esauriente e rigoroso. Le note sono una rivisitazione di quelle da me preparate ed utilizzate per il corso di Analisi 1 per Informatica, tenuto nel quadriennio 2012-2016. In questa versione ho arricchito alcune parti e, specialmente il Capitolo 13, dedicato ad alcune generalizzazioni della teoria. Nell' Appendice A ho aggiunto alcune sezioni dedicate a richiami, approfondimenti e, in particolare, ad argomenti che nell'"era pre-Covid" erano tipici delle "esercitazioni in presenza" (disuguaglianze elementari, studio qualitativo di grafici, tecniche di integrazione, etc.). Infine, nell'Appendice B, ho abbozzato una sezione dedicata agli esercizi (alcuni svolti, altri proposti).

Vi invito a non esitare nel segnalarmi eventuali ulteriori sviste, refusi, etc.. In particolare, vi invito a farmi domande, sia a lezione, sia durante i ricevimenti: confrontarsi con il docente, domandare qualcosa di non chiaro, è un ottimo modo (se non il migliore) per capire.

Nella pagina successiva, a conclusione di questo preambolo, troverete una lista di alcuni libri utilizzati nella redazione di queste note. ▲

Francescopaolo Montefalcone

Bologna, 23/9/2021

■ Bibliografia essenziale

- G. C. Barozzi, S. Matarasso *Analisi matematica 1,* Zanichelli, 1991.
- J. P. Cecconi, G. Stampacchia, Lezioni di analisi matematica, I: Funzioni di una variabile, Napoli : Liguori, 1974.
- E. Giusti, *Analisi Matematica 1,* Bollati Boringhieri, ristampa 1991.
- ——, *Analisi Matematica 2,* Bollati Boringhieri, ristampa 1995.
- ——, *Esercizi e Complementi di Analisi Matematica, Volume 1,* Bollati Boringhieri, 1991.
- E. Lanconelli, *Lezioni di Analisi Matematica 1,* Pitagora Editrice, Bologna, 1994.
- ——, *Lezioni di Analisi Matematica 2,* Pitagora Editrice, Bologna, 1995.
- S. Lang, *Algebra Lineare,* Bollati Boringhieri, ristampa del 1989.
- G. Prodi, *Analisi matematica,* Bollati Boringhieri, 1972.
- W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis,* 3rd Ed., International Editions 1976, McGraw-Hill Book.

Segnalo, infine, due utili strumenti on-line:

- Enciclopedia on-line: *Wikipedia.org*
  Può essere utile per avere ulteriori referenze, spiegazioni alternative, esempi, note storiche, etc.
- Sito internet: *Wolfram.com*
  È utilissimo per fare calcoli, grafici, integrali, serie, etc.

Indice

Capitolo 1

Teoria degli Insiemi

1.1 Insiemi

Il termine *insieme* "intuitivamente" significa *collezione di oggetti.*

Sia A un insieme. Allora la scrittura $x \in A$ significa che x *è un elemento di A.* Altrimenti si scrive $x \notin A$, per dire che x *non è elemento di A.*

Ossia

$$x \in A \overset{def.}{\iff} x \text{ appartiene ad } A$$

$$x \notin A \overset{def.}{\iff} x \text{ non appartiene ad } A.$$

Un qualsiasi insieme finito si può denotare mediante parentesi graffe "$\{\,,\}$" ed elencandone tutti gli elementi. Quindi $A = \{1, 3, 27\}$, $A = \{a, b, c, 33\}$, oppure $A = \{\alpha, \beta, \pi, \clubsuit, 0, 1003\}$ sono tutti esempi di insiemi finiti. In altre parole, si elencano, uno per uno, tutti gli elementi dell'insieme A.
Inoltre, un insieme qualsiasi (finito o no) si può definire mediante una proprietà "astratta" che vale (cioè, è vera) per ogni elemento dell'insieme. Ad esempio, se $\mathbb{N}$ indica l'insieme dei numeri naturali (cioè $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$) allora la scrittura $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è pari}\}$ definisce l'insieme (o meglio, il *sottoinsieme* di $\mathbb{N}$) dei numeri naturali pari. In modo analogo, l'insieme A viene individuato scrivendo

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists\, y \in \mathbb{N} : x = 2y\}.$$

(Il simbolo "|" nella scrittura $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è pari}\}$ si legge "tale che". Stesso significato hanno i due punti ":").
In generale, se X è un insieme e se $x \in X$, si indica con $P(x)$ una "proprietà"

che dipende da x. Per cui si può definire un sottoinsieme A di X associato (individuato dalla) alla proprietà P come $A = \{x \in X \mid P(x)\}$ (ove si intende tacitamente che la proprietà $P(x)$ è *vera*).

Definizione 1.1.1. Siano A e B due insiemi. Allora $A = B$ (ossia sono *uguali*) se ogni elemento $a \in A$ è elemento di B e, viceversa, se ogni elemento $b \in B$ è elemento di A. Se ogni elemento $a \in A$ è elemento di B si scrive $A \subseteq B$ oppure $A \subset B$. Se $A \subseteq B$ e $A \neq B$ (il simbolo "$\neq$" significa "diverso" ossia, non uguale) allora si scrive $A \subsetneq B$ e si dice che A è *sottoinsieme proprio* di B.

Osservare che $A = B \overset{equivale}{\Longleftrightarrow} A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Designiamo col simbolo "$\varnothing$" l'*insieme vuoto*, ossia l'insieme privo di elementi.

Osservazione 1.1.1. Si ha che $\varnothing \subseteq A$ per ogni insieme A. In altre parole, l'insieme vuoto è sottoinsieme di qualsiasi insieme. Infatti, altrimenti, esisterebbe $x \in \varnothing$ tale che $x \notin A$. Ma ciò è assurdo perché $\varnothing$ non possiede alcun elemento. ■

Dato un insieme A, l'insieme composto da tutti i sottoinsiemi di A è detto *insieme delle parti* di A e si indica coi simboli "$\mathscr{P}(A)$" o "2^A".

Esempio 1.1.1. Se $A = \{1, 2, 3\}$, allora

$$\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Per ovvie ragioni è sempre vero che $\varnothing$ e $A \in \mathscr{P}(A)$.

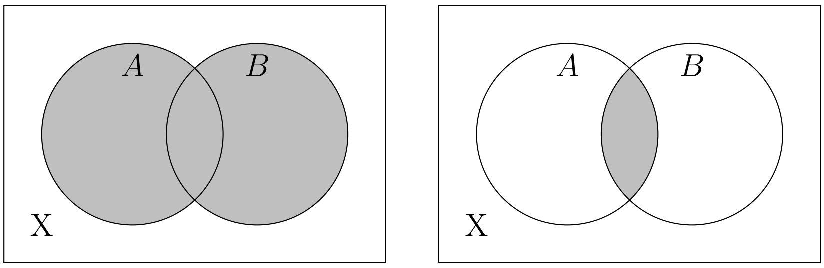
1.2 Insiemi ed Operazioni

Sia X un insieme e siano $A, B \subseteq X$.

UNIONE $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$ Si definisce l'*unione* di A e B come l'insieme

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ } o \text{ } x \in B\}$$

(nella definizione data il connettivo "o" significa "oppure", ed è usato in modo non esclusivo).



(a) $A \cup B$ (b) $A \cap B$

Figura 1.1: Unione e intersezione di A e B

INTERSEZIONE $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$ L'*intersezione* di A e B è l'insieme

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \; e \; x \in B\}.$$

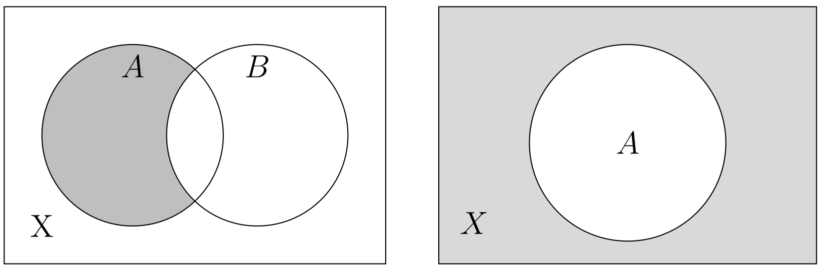
DIFFERENZA $(\mathbf{A} \setminus \mathbf{B})$ Per definizione si pone

$$A \setminus B = \{x \in X : x \in A \; e \; x \notin B\}.$$

L'insieme $A \setminus B$ si chiama insieme differenza di A e B.

COMPLEMENTARE L'insieme complementare ("il complementare") di A in X è l'insieme

$$A^C = X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\}.$$



(a) $A \setminus B$ (b) A^C

Figura 1.2: Differenza di A e B e complementare di A in X

Esercizio 1.2.1 (Leggi di De Morgan)**.** Dimostrare che valgono le seguenti proprietà:

- $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$;
- $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.

A parole, si possono riassumere dicendo che *il complementare dell'unione è l'intersezione dei complementari e che il complementare dell'intersezione è l'unione dei complementari.*

Definizione 1.2.1 (Prodotto Cartesiano $A \times B$ di A e B)**.** Siano assegnati due insiemi non vuoti A, B. Siano $a \in A$ e $b \in B$. In tal caso, si dice che (a, b) è una *coppia ordinata*, dove a è la prima coordinata e b è la seconda coordinata. L'insieme di tutte le coppie ordinate (a, b), con $a \in A$ e $b \in B$, è il *prodotto cartesiano* $A \times B$ di A per B, cioè

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \; e \; b \in B\}.$$

In generale, si ha $A \times B \neq B \times A$.

Definizione 1.2.2 (Relazione)**.** Si dice *relazione da* A *a* B ogni sottoinsieme $\mathcal{R}$ di $A \times B$. Se $(a, b) \in \mathcal{R}$ si dice che a è in relazione $\mathcal{R}$ con b. Altrimenti, se $(a, b) \notin \mathcal{R}$ allora si dice che a non è in relazione $\mathcal{R}$ con b. Talvolta si scrive $a \, \mathcal{R} \, b$ per indicare che a è in relazione $\mathcal{R}$ con b, o $a \not\mathcal{R} \, b$ se ciò non è vero.

Esempio 1.2.1. Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali. Allora

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \exists \, p \in \mathbb{N} \text{ tale che } a = p \cdot b\}$$

definisce una relazione per la quale

$$a \, \mathcal{R} \, b \iff a \text{ è un multiplo di } b.$$

Definizione 1.2.3 (Funzione)**.** Una funzione f da A a B è una relazione da A a B tale che

(1) $\forall \, x \in A \quad \exists \, y \in B$ tale che $(x, y) \in f$;

(2) se $(x, y) \in f$ e $(x, y') \in f$ allora $y = y'$ (ossia f è *univoca*).

Data una funzione f, useremo d'ora in avanti la notazione $f \colon A \to B$. In tal caso A è chiamato il *dominio* di f, mentre B è il *codominio* di f.
In altre parole, se $f \colon A \to B$ è una funzione si ha che

$$\forall \, x \in A \; \exists! \, y \in B \; : \; (x, y) \in f.$$

Si pone inoltre $y = f(x)$, e si dice che y è il valore di f in x.

Esempi.

1. Sia $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = y^2\}$. Allora f *non* è una funzione.

   Infatti se $x < 0$ si ha che $\nexists\, y \in \mathbb{R}$ tale che $(x, y) \in f$, perché se $x = y^2$ allora $x \geq 0$.

2. Sia $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = x^2\}$. Allora f è una funzione.

   Infatti $\forall\, x \in \mathbb{R}$ si ha che $\exists\, y \in \mathbb{R}$ tale che $(x, y) \in f$, cioè $y = x^2$. Inoltre, se (x, y) e $(x, y') \in f$, allora $y = x^2$ e $y' = x^2$. Pertanto $y = y'$.

Notazione. D'ora in poi, se è nota la "regola"che definisce f, la si usa per indicare la funzione data. Per esempio, se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione tale che $f(x) = x^2$, ciò significa che

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = x^2\}.$$

Definizione 1.2.4. Siano A, B insiemi ed $f\colon A \to B$ una funzione. L'*immagine* di $C \subseteq A$ tramite f è l'insieme

$$f(C) = \{y \in B : \exists\, x \in C \text{ tale che } y = f(x)\}.$$

L'*immagine inversa* (o "*preimmagine*") di $K \subseteq B$ tramite f è l'insieme

$$f^{-1}(K) = \{x \in A : f(x) \in K\}.$$

Si dice che $f\colon A \to B$ è *suriettiva* se si ha che $f(A) = B$. In tal caso si scrive $f\colon A \xrightarrow{su} B$ e si dice che f *è su* (cioè, suriettiva).
Si dice che $f\colon A \to B$ è *iniettiva* se per ogni $x_1, x_2 \in X$ si ha che

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

In tal caso si scrive $f\colon A \xrightarrow[1-1]{} B$ e si dice che f *è 1–1* (cioè, iniettiva).

Si dice che $f\colon A \to B$ è *biunivoca* se f è 1–1 e su (ossia f è sia suriettiva che iniettiva). In breve, si scrive $f\colon A \xrightarrow[1-1]{su} B$.

Definizione 1.2.5. Se $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ sono funzioni assegnate, si chiama funzione *composta* di g con f la funzione $g \circ f\colon A \to C$ data da

$$(g \circ f)(x) \overset{def.}{=} g(f(x)).$$

Esempi.

1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ non è su.

   Infatti $f(\mathbb{R}) \subsetneq \mathbb{R}$ perché se $y < 0$ allora $y \notin f(\mathbb{R})$.

2. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$ è su.

   Infatti $\forall\, y \in \mathbb{R}$ l'equazione $x - 1 = y$ ha sempre soluzione.

3. La funzione $f(x) = x^2$ non è 1–1.

   Infatti $\forall\, x \in \mathbb{R}$ si ha che $f(x) = f(-x)$.

4. Date le funzioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \overset{def.}{=} \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $f(x) = 2 + x^2$ e $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $g(t) = \frac{1}{t}$, allora $\forall\, x \in \mathbb{R}$ si ha

   $$(g \circ f)(x) \overset{def.}{=} g(f(x)) = g(2 + x^2) = \frac{1}{2 + x^2}.$$

   Notare che il codominio di f coincide con il dominio di g (altrimenti non avrebbe senso effettuare la composizione di g con f).

Notazione. Sia $i_A\colon A \to A$ la *funzione identità,* ossia la funzione

$$i_A(x) \overset{def.}{=} x \quad \forall\, x \in A.$$

Definizione 1.2.6. Si dice che $f\colon A \to B$ è *invertibile* se esiste $g\colon B \to A$ tale che $g \circ f = i_A$ e $f \circ g = i_B$. In tal caso g è, per definizione, la funzione inversa di f e si pone

$$g \overset{def.}{=} f^{-1}.$$

Teorema 1.2.1. *Se f è invertibile, l'inversa è unica. Inoltre $f\colon A \to B$ è invertibile se e solo se f è biunivoca.*

Dimostrazione. Per esercizio (almeno l'unicità). □

Corollario 1.2.1. *Se $f\colon A \to B$ è invertibile allora $f^{-1}\colon B \to A$ è invertibile e $(f^{-1})^{-1} = f$.*

1.3 Relazioni (d'ordine)

Definizione 1.3.1. Sia $A \neq \varnothing$ un insieme non vuoto e sia $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ una relazione di A con A. Si dice che $\mathcal{R}$ è:

1) *riflessiva* se $x \,\mathcal{R}\, x \quad \forall\, x \in A$;

2) *simmetrica* se $x \,\mathcal{R}\, y \overset{implica}{\Longrightarrow} y \,\mathcal{R}\, x$;

3) *transitiva* se $x \,\mathcal{R}\, y$ e $y \,\mathcal{R}\, z \overset{implica}{\Longrightarrow} x \,\mathcal{R}\, z$;

4) *antisimmetrica* se $x \,\mathcal{R}\, y$ e $y \,\mathcal{R}\, x \overset{implica}{\Longrightarrow} x = y$.

Si dice che una relazione $\mathcal{R}$ è una relazione d'*equivalenza* se $\mathcal{R}$ è riflessiva, simmetrica e transitiva.
Esempi:

- l'usuale uguaglianza tra numeri interi e/o reali;
- la congruenza modulo[1] p in $\mathbb{Z}$.

Si dice che $\mathcal{R}$ è una relazione d'*ordine* (oppure di *ordine parziale*) se $\mathcal{R}$ è riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Per le relazioni d'ordine useremo sempre il simbolo "$\leq$". Quando A ammette una relazione d'ordine $\leq$ si scriverà $(A, \leq)$.

Esempio 1.3.1. Sull'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ si pone

$$x \,\mathcal{R}\, y \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \exists\, h \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x + h = y.$$

Allora $\mathcal{R}$ è una relazione d'ordine, che coincide con l'usuale $\leq$.

Esempio 1.3.2. Sia $X \neq \varnothing$ un insieme non vuoto. Allora

$$A \,\mathcal{R}\, B \overset{def.}{\Longleftrightarrow} A \subseteq B$$

definisce una relazione d'ordine su 2^X (cioè, sull'insieme delle parti di X).

[1]Siano $a, b \in \mathbb{Z}$ e sia $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Per definizione si pone

$$a \cong b \quad \text{mod.}\, p \Longleftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{Z} \;:\; a = b + np$$

e, in tal caso, si dice che a è congruo a b modulo p.

Definizione 1.3.2. Una relazione d'ordine su un insieme $X \neq \varnothing$ è detta di *ordine totale* se $\forall\ x, y \in X$ si ha $x \leq y$ o $y \leq x$. Se su X c'è una relazione d'ordine totale si dice che X è *totalmente ordinato.*

In altre parole, una relazione d'ordine è totale se tutte le coppie $x, y \in X$ sono *confrontabili* tra loro mediante la relazione $\leq$.

Definizione 1.3.3. Sia $(X, \leq)$ un insieme non vuoto e ordinato (parzialmente e/o totalmente) e sia $A \subseteq X$, $A \neq \varnothing$.

- Si dice che $x \in X$ è un *maggiorante* di A se $a \leq x\ \forall\ a \in A$.
- Si dice che $y \in X$ è un *minorante* di A se $y \leq a\ \forall\ a \in A$.
- Si dice che A ha *massimo* se $\exists\ \lambda \in A$ tale che $a \leq \lambda\ \forall\ a \in A$.
  In tal caso $\lambda \overset{def.}{=} \max A$.
- Si dice che A ha *minimo* se $\exists\ \mu \in A$ tale che $\mu \leq a\ \forall\ a \in A$.
  In tal caso $\mu \overset{def.}{=} \min A$.

Teorema 1.3.1. *Siano* $(X, \leq)$ *un insieme ordinato ed* $A \subseteq X$, $A \neq \varnothing$.
Se esiste $\max A$ *(risp.* $\min A$*) allora esso è unico.*

Dimostrazione. Siano $\lambda_1 = \max A$, $\lambda_2 = \max A$. Allora $\lambda_1, \lambda_2 \in A$ e si ha $a \leq \lambda_1\ \forall\ a \in A$, $a \leq \lambda_2\ \forall\ a \in A$. Dunque, $\lambda_1 \leq \lambda_2$ e $\lambda_2 \leq \lambda_1$. Pertanto $\lambda_1 = \lambda_2$. □

Definizione 1.3.4 (Estremi superiore ed inferiore: sup, inf)**.** Siano $(X, \leq)$ un insieme ordinato e $A \subseteq X$, $A \neq \varnothing$. Si dice che A ha *estremo superiore* in $(X, \leq)$ se l'insieme dei maggioranti di A è non vuoto e ha minimo. Tale elemento (se esiste) si indica con $\sup A$.
(Osservare che se esiste $\sup A$, allora esso è il minimo dei maggioranti).

Per analogia, sia $A \subseteq X$, $A \neq \varnothing$. Se l'insieme dei minoranti di A in $(X, \leq)$ è non vuoto e ha massimo, allora esso è detto *estremo inferiore* di A e si indica con $\inf A$.
(Pertanto, se esiste $\inf A$ esso è il massimo dei minoranti di A).

Proprietà di sup e inf

Siano $(X, \leq)$ un insieme ordinato e $A \subseteq X$, $A \neq \varnothing$.

(SUP) Si ha che $\lambda = \sup A$ se e solo se valgono entrambe le seguenti:

1) $a \leq \lambda \quad \forall\, a \in A$;
2) $\lambda_1 \in X,\ a \leq \lambda_1 \quad \forall\, a \in A \implies \lambda \leq \lambda_1$.

(INF) Si ha che $\mu = \inf A$ se e solo se valgono entrambe le seguenti:

1) $\mu \leq a \quad \forall\, a \in A$;
2) $\mu_1 \in X,\ \mu_1 \leq a \quad \forall\, a \in A \implies \mu_1 \leq \mu$.

Si dimostra (ma omettiamo di farlo) il seguente:

Teorema 1.3.2. *Siano* $(X, \leq)$ *un insieme ordinato (parzialmente) ed* $A \subseteq X$, $A \neq \varnothing$. *Valgono le seguenti:*

1) *se* A *ha massimo, allora si ha* $\max A = \sup A$*;*

2) *se* A *ha minimo, allora si ha* $\min A = \inf A$.

La dimostrazione è un semplice esercizio, basato sulle definizioni.

Definizione 1.3.5. Sia $A \subseteq X$, $A \neq \varnothing$, dove $(X, \leq)$ è un insieme ordinato. Si dice che A è *superiormente limitato* se esiste (almeno) un maggiorante di A. Inoltre A è *inferiormente limitato* se esiste (almeno) un minorante di A. Infine l'insieme A è detto *limitato* se esistono (almeno) un minorante e un maggiorante di A.

Definizione 1.3.6 (Completezza)**.** Si dice che un insieme ordinato $(X, \leq)$ è *completo* se ogni suo sottoinsieme $A \neq \varnothing$ che sia superiormente limitato ammette estremo superiore.

Vale il seguente:

Teorema 1.3.3. *Sia* $(X, \leq)$ *un insieme ordinato e completo. Sia* $A \subseteq X$, $A \neq \varnothing$. *Se* A *è inferiormente limitato allora* A *ammette estremo inferiore (cioè,* $\exists \inf A$*).*

Nell'esempio seguente mostreremo che $\mathbb{Q}$, il campo dei numeri razionali, non è completo.

Esempio 1.3.3 (Importante: $(\mathbb{Q}, \leq)$ non è completo)**.** Si consideri l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ munito dell'usuale relazione d'ordine $\leq$.
Sia quindi $A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ e } x^2 < 2\}$. Si vede facilmente che $A \neq \varnothing$ e che A è superiormente limitato.

Infatti $1 \in A$. Inoltre

$$\begin{aligned} x \in A \implies x > 0,\, x^2 < 2 \implies x > 0,\, x^2 < 4 \\ \implies x > \ 0,\, (x-2)(x+2) < 0 \implies x - 2 < 0 \\ \implies x < 2. \end{aligned}$$

Affermiamo ora che $\nexists \sup A$*.*
Per dimostrare tale affermazione, ragioniamo per assurdo. Se

$$\exists\ \lambda = \sup A$$

allora dev'essere vera una delle seguenti alternative:

(1) $\lambda^2 < 2$ oppure

(2) $\lambda^2 = 2$ oppure

(3) $\lambda^2 > 2$.

Dimostreremo che in ognuno di questi tre casi si arriva ad un assurdo.
I casi (1) e (3) sono simili.
Proviamo che se vale (1) si arriva ad una contraddizione.
Infatti affermiamo che, se $\lambda^2 < 2$, allora esiste $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$, tale che

$$(\lambda + \varepsilon)^2 < 2.$$

Proveremo più avanti quest'affermazione.

Pertanto $\lambda + \varepsilon \in A$ e dunque $\lambda + \varepsilon \leq \sup A = \lambda$, cioè $\varepsilon \leq 0$. Assurdo.
Nel caso (2), si ha $\lambda^2 = 2$*.*
Dato che $\lambda \in \mathbb{Q}$ e $\lambda > 0$ (lo è essendo almeno $\lambda \geq 1$) si può assumere $\lambda = p/q$ con p, q naturali e primi tra loro. Segue che $p^2/q^2 = 2$ e dunque $p^2 = 2\,q^2$; cioè p^2 è pari. Ma allora p è pari[2]. Allora $p = 2\,r$ per qualche $r \in \mathbb{N}$. Segue che $4\,r^2 = 2\,q^2$, cioè $2\,r^2 = q^2$. Si vede pertanto che q è pari. Assurdo, perché p, q sono primi tra loro (cioè, non hanno divisori comuni).

[2]Quest'affermazione è equivalente alla seguente: p dispari $\implies$ p^2 dispari.

Proviamo infine che se vale (3) si arriva ad una contraddizione.

Se $\lambda^2 > 2$ allora affermiamo che esiste $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, tale che $(\lambda - \varepsilon)^2 > 2$ (proveremo tra poco anche quest'affermazione). In tal caso, si ha $\lambda > \lambda - \varepsilon$ e ciò contraddice che λ sia il minimo maggiorante di A.

Conclusione. $\mathbb{Q}$ non è completo perché si è visto che A non ha sup (in effetti, l'estremo superiore di A è il numero reale $\sqrt{2}$ che non è in $\mathbb{Q}$).

Dimostriamo a questo punto le due affermazioni fatte, nei casi 1) e 3).
Sia $y := \lambda - \frac{\lambda^2-2}{\lambda+2} = \frac{2\lambda+2}{\lambda+2}$. Allora risulta che

$$y^2 - 2 = \frac{2(\lambda^2 - 2)}{(\lambda + 2)^2} < 0 \implies y^2 < 2.$$

Ma $y > \lambda$ e quindi è della forma $y = \lambda + \varepsilon$ con $\varepsilon = \frac{2-\lambda^2}{\lambda+2}$.
Lo stesso argomento funziona nel caso 3). Precisamente, se vale $\lambda^2 > 2$ allora ragionando come prima si trova y della forma $y = \lambda - \varepsilon$ tale che $y^2 > 2$. In altre parole, se $\lambda^2 > 2$ allora esiste $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \lambda$, tale che $(\lambda - \varepsilon)^2 > 2$.

Esercizio 1.3.1. Sia $A = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x < 1\}$. Allora A non ha massimo. Si ha $\sup A = 1, \inf A = \min A = 0$.

Capitolo 2

Numeri e Funzioni

Partiamo da una definizione “assiomatica”[1] dei numeri reali (un argomento veramente centrale dell’Analisi). A partire da questa nozione, introdurremo gli altri insiemi numerici standard (naturali, interi e razionali) come sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Questa definizione è rapida ma non è “costruttiva”. Più avanti (cfr. Appendice 3.2) ritorneremo sui numeri reali e sulla loro rappresentazione.

2.1 Numeri reali

Ricordare che *gruppo commutativo* è un insieme X dotato di un’operazione binaria $*\colon X \times X \to X$ tale che:

1) $(x * y) * z = x * (y * z) \quad \forall\, x, y, z \in X$ (proprietà associativa);

2) $\exists\, e \in X$, elemento neutro, tale che $e * x = x * e = x$;

3) $\forall\, x \in X \quad \exists\, y \in X$, l’inverso, tale che $x * y = y * x = e$;

4) $\forall\, x, y \in X$ si ha $x * y = y * x$ (proprietà commutativa).

Se invece valgono solo 1), 2) e 3), allora X è un *gruppo*. Se infine, vale solo la 1) si dice che X è un *semigruppo*.

Possiamo ora dare la definizione assiomatica dei numeri reali come segue:

[1] Col termine “assioma” si indica un insieme di enunciati che, pur non essendo stati dimostrati, sono considerati veri. Gli assiomi forniscono il punto di partenza di una teoria.

Definizione 2.1.1 (**$\mathbb{R}$ campo dei numeri reali**)**.** Si assume che:

A_1) $(\mathbb{R}, +)$ è gruppo commutativo (con elemento neutro 0);

A_2) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ è gruppo commutativo (con elemento neutro 1);

A_3) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$ (proprietà distributiva);

A_4) $(\mathbb{R}, \leq)$ è totalmente ordinato;

A_5) la relazione d'ordine $\leq$ è compatibile con $+$ e $\cdot$, cioè:

$$x \leq y \quad \text{e} \quad z \in \mathbb{R} \implies x + z \leq y + z;$$

$$x \leq y \quad \text{e} \quad z \in \mathbb{R},\, z \geq 0 \implies x \cdot z \leq y \cdot z;$$

A_6) $(\mathbb{R}, \leq)$ è completo.

Le proprietà $A_1, \ldots, A_3$ si possono riassumere dicendo che $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un *campo*. Le proprietà $A_1, \ldots, A_6$ si possono riassumere dicendo che $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *è un campo totalmente ordinato e completo.*

Valgono le usuali regole dell'aritmetica che omettiamo di verificare.

Definizione 2.1.2 ("Modulo" o "valore assoluto")**.** Sia $x \in \mathbb{R}$. Si pone

$$|x| \overset{def.}{=} \max\{x, -x\}.$$

Proposizione 2.1.1. *Valgono le seguenti proprietà:*

(1) $x \leq |x|$ *e* $-x \leq |x| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$*;*

(2) $|x| \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ *e* $|x| = 0$ *se e solo se* $x = 0$*;*

(3) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$*;*

(4) $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$ *(disuguaglianza triangolare);*

(5) $|-x| = |x| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$*;*

(6) $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$*;*

(7) $||x| - |y|| \leq |x - y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$*;*

(8) $|x + y| = |x| + |y| \iff x\, y \geq 0.$

Dimostrazione. Per esercizio.
Dimostriamo solo la (4). Poiché $|x+y| \geq 0$ e $|x|+|y| \geq 0$ si ha

$$|x+y| \leq |x|+|y| \iff |x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2.$$

Inoltre

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2+y^2+2\,xy = |x|^2+|y|^2+2\,xy \leq |x|^2+|y|^2+2|x||y| = (|x|+|y|)^2.$$

$\square$

Definizione 2.1.3 ($\mathbb{N}$ come sottoinsieme di $\mathbb{R}$)**.** Un sottoinsieme $I \subseteq \mathbb{R}$ si dice *induttivo* se valgono le seguenti:

1) $1 \in I$;

2) $x \in I \implies x+1 \in I$.

Se $\mathscr{F}$ indica la famiglia degli insiemi induttivi di $\mathbb{R}$ si pone

$$\mathbb{N} \stackrel{def.}{=} \{x \in \mathbb{R} : x \in I \;\forall\, I \in \mathscr{F}\}.$$

In altre parole, per definizione, $\mathbb{N}$ è l'intersezione di tutti gli insiemi induttivi, ossia $\mathbb{N} = \bigcap_{I \in \mathscr{F}} I$.

Teorema 2.1.1. *$\mathbb{N}$ è induttivo e $\mathbb{N} \subseteq I \;\forall\, I \in \mathscr{F}$.*

Dimostrazione. Infatti $1 \in I \;\forall\, I \in \mathscr{F}$ implica $1 \in \mathbb{N}$. Inoltre, se $n \in \mathbb{N}$ allora $n \in I \;\forall\, I \in \mathscr{F}$ e pertanto $n+1 \in I \;\forall\, I \in \mathscr{F}$ che implica $n+1 \in \mathbb{N}$. $\square$

Corollario 2.1.1. *Se $M \subseteq \mathbb{N}$ è induttivo, allora $M = \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Dato che M è induttivo, $\mathbb{N} \subseteq M$. Ma allora $\mathbb{N} = M$. $\square$

Questa definizione consente di introdurre un principio fondamentale, noto come *Principio di Induzione.* Esso consente di dimostrare molte proposizioni più o meno elementari concernenti l'insieme dei numeri naturali.

Corollario 2.1.2 (Induzione)**.** *Sia $P(n)$ una proposizione dipendente da un indice $n \in \mathbb{N}$. Si assuma che:*

1) *$P(1)$ è vera;*

2) *Se $P(n)$ è vera allora $P(n+1)$ è vera.*

Allora $P(n)$ è vera $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Sia $M = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ è vera}\}$. Allora $M \subseteq \mathbb{N}$ ed M è induttivo. Il precedente Corollario 2.1.1 implica che $M = \mathbb{N}$ e dunque $P(n)$ è vera $\forall\, n \in \mathbb{N}$. $\square$

Osservazione 2.1.1. Si osservi che

$$1 \leq n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

In effetti $B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ è induttivo e pertanto $\mathbb{N} \subseteq B$ e da ciò segue che $\min \mathbb{N} = 1$. $\blacksquare$

Più in generale si ha:

Teorema 2.1.2. *Ogni sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \varnothing$, ammette minimo.*

Definizione 2.1.4 ($\mathbb{Z}$ anello[2] dei numeri interi). Poniamo

$$\mathbb{Z} \overset{def.}{=} \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Si osservi che $\mathbb{Z}$ è *chiuso* per somma e moltiplicazione, ossia

$$n, m \in \mathbb{Z} \implies n + m,\, n \cdot m \in \mathbb{Z}.$$

Osservare inoltre che se $A \subseteq \mathbb{Z}$, $A \neq \varnothing$, allora valgono le seguenti:

1) *se A è superiormente limitato allora A ammette massimo, ossia $\exists \max A$;*

2) *se A è inferiormente limitato allora A ammette minimo, ossia $\exists \min A$.*

Definizione 2.1.5 ($\mathbb{Q}$ anello dei numeri razionali). Poniamo

$$\mathbb{Q} \overset{def.}{=} \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N} \right\}.$$

[2] Si chiama *anello* un insieme $(X, +, \cdot)$, munito di due operazioni binarie $+$ e $\cdot$ (somma e moltiplicazione), tale che $(X, +)$ è un gruppo commutativo, $(X, \cdot)$ è un semigruppo e la moltiplicazione $\cdot$ è distributiva rispetto alla somma $+$, ossia per ogni $x, y, z \in X$ si ha $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ e $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$.

Anche in questo caso si ha che $\mathbb{Q}$ è chiuso per somma e moltiplicazione, cioè

$$x, y \in \mathbb{Q} \implies x + \ y, \, x \cdot y \in \mathbb{Q}.$$

Si può verificare che $\mathbb{Q}$ *è un campo totalmente ordinato*. Ossia, valgono gli assiomi $A_1, \ldots, A_5$ ma *non* A_6.

Si osservi infine che valgono le seguenti proprietà (che non dimostriamo):

1) $\mathbb{N}$ *non è superiormente limitato*;

2) $\mathbb{R}$ *è Archimedeo*, ossia

$$\forall \, x, y \in \mathbb{R}, \, x > 0, \, \exists \, n \in \mathbb{N} \ : \ n \, x > y;$$

3) $\mathbb{Q}$ *è denso in* $\mathbb{R}$, ossia

$$\forall \, x, y \in \mathbb{R}, \, x < y, \, \exists \, r \in \mathbb{Q} \ : \ x < r < y;$$

4) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *è denso in* $\mathbb{R}$.

2.2 Radice n-esima

Definizione 2.2.1. Sia $n \in \mathbb{N}$ fissato e sia $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$. Si dice che $y \in \mathbb{R}$ è la *radice n-esima* di x se $y \geq 0$ e $y^n = x$. In tal caso si scrive $y \overset{def.}{=} x^{\frac{1}{n}}$ o $\sqrt[n]{x}$.

Proprietà della radice n-esima. Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y \geq 0$ valgono le seguenti proprietà:

(P1) $x^n \leq y^n \iff x \leq y$;

(P2) $x^n = y^n \iff x = y$;

(P3) $x^n < y \iff \exists \, \varepsilon \in \mathbb{R}, \, \varepsilon > 0$, tale che $(x + \varepsilon)^n < y$;

(P4) $x^n > y \iff \exists \, \varepsilon \in \mathbb{R}, \, \varepsilon > 0$, tale che $(x - \varepsilon)^n > y$.

Usando queste proprietà e la completezza di $\mathbb{R}$ si può dimostrare il seguente:

Teorema 2.2.1. *Ogni numero reale $x \geq 0$ ammette un'unica radice n-esima.*

Dimostrazione. (Unicità) Sia $x \geq 0$ e siano $y, z \in \mathbb{R}$, $y, z \geq 0$ tali che $y^n = x$ e $z^n = x$. Allora $y^n = z^n$ e dunque usando la (P2) si ha $y = z$, cioè l'unicità.

(Esistenza) Si deve provare che, dato $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, $\exists\, y \geq 0$ tale che $y^n = x$. Se $x = 0$ ciò è ovvio (basta $y = 0$!).
Sia $x > 0$. Sia inoltre $A = \{a \in \mathbb{R} : a \geq 0 \text{ e } a^n \leq x\}$. $A \neq \varnothing$. Infatti $0 \in A$.
A è superiormente limitato. Infatti per ogni $a \in A$ si ha

$$a^n \leq x < 1 + x < (1+x)^n \Longrightarrow a^n \lneqq (1+x)^n$$

(e dato che a, $1 + x \geq 0$) ciò implica che $a \lneqq 1 + x$ (per la (P1)) per ogni $a \in A$. Per la completezza di $(\mathbb{R}, \leq)$ segue che

$$\exists \sup A \stackrel{def.}{=} y.$$

Necessariamente $y \geq 0$. Vediamo che $y^n = x$.
Assumiamo per assurdo che $y^n \neq x$. Allora $y^n < x$ o $y^n > x$. Nel primo caso si usa (P3), cioè

$$\exists\, \varepsilon > 0 : (y + \varepsilon)^n < x.$$

Allora $y + \varepsilon \in A$ (e dato che $y + \varepsilon > 0$) e dunque $y + \varepsilon \leq \sup A = y$. Assurdo. Pertanto rimane da verificare il secondo caso: $y^n > x$. Analogamente, si usa (P4) e si ottiene

$$\exists\, \varepsilon > 0 : (y - \varepsilon)^n > x \quad \text{e} \quad y - \varepsilon > 0.$$

Ciò implica

$$(y - \varepsilon)^n > x \geq a^n \quad \forall\, a \in A.$$

Da ciò segue

$$y - \varepsilon \gneqq a \quad \forall\, a \in A.$$

Ossia $y - \varepsilon$ è maggiorante di A. Pertanto $y - \varepsilon \geq y$. Assurdo. □

Dimostriamo ora le proprietà (P1), (P2) e (P3). La (P4) è simile alla (P3) e ne omettiamo la dimostrazione.

Dimostrazione. Facoltativa.

(P1) E' ovvia se $x = 0$ o se $n = 1$. Sia pertanto $x > 0$ e $n \geq 2$. Dato che

$$y^n - x^n = (y - x)(\underbrace{y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + y\,x^{n-2} + x^{n-1}}_{\gneqq 0 \text{ perché } y \geq 0 \text{ ed } x > 0})$$

Ossia $y^n \geq x^n \iff y \geq x$.

(P2) segue da (P1).

(P3) Per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in]0,1[$ (cioè $0 < \varepsilon < 1$), si ha:
$(x+\varepsilon)^n = ((x+\varepsilon)^n - x^n) + x^n =$
$= \varepsilon(\underbrace{(x+\varepsilon)^{n-1} + \cdots + x^{n-1}}_{n \text{ termini}}) + x^n \leq \varepsilon \cdot n \cdot (x+1)^{n-1} + x^n.$
Allora $(x+\varepsilon)^n < y$ con $\varepsilon \in]0,1[$ se

$$\varepsilon\, n(x+1)^{n-1} + x^n < y \iff \varepsilon < \frac{y - x^n}{n(x+1)^{n-1}} \overset{def.}{:\equiv} \varepsilon_0 > 0.$$

Basta quindi scegliere $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tale che $0 < \varepsilon < \min\{1, \varepsilon_0\}$. $\square$

Proposizione 2.2.1. *Siano $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y \geq 0$ ed $n \in \mathbb{N}$. Allora*

1) $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$;

2) $\sqrt[np]{x^p} = \sqrt[n]{x}$;

3) $x \leq y \iff \sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{y}$.

Dimostrazione. Ovvia. $\square$

2.3 Funzioni esponenziali in $\mathbb{Q}$

E' noto cosa significa a^m se $a \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$.

Definizione 2.3.1 (esponenziale con esponente intero)**.** Se $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $m \in \mathbb{Z}$, $m < 0$ si pone

$$a^m \overset{def.}{=} \left(\frac{1}{a}\right)^{-m}$$

Se $m = 0$ e $a \neq 0$ si pone $a^0 \overset{def.}{=} 1$.

Proposizione 2.3.1. *Siano $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Per ogni $m, n \in \mathbb{Z}$ si ha:*

1) $a^{m+n} = a^m a^n$;

2) $(a\,b)^m = a^m b^m$;

3) $(a^m)^n = a^{m\,n}$.

Dimostrazione. Ovvia. $\square$

Definizione 2.3.2 (esponenziale con esponente razionale)**.** Sia $a > 0$. Per ogni $x \in \mathbb{Q}$ si pone

$$a^x \overset{def.}{:=} \sqrt[q]{a^p} \quad \text{dove } x = \frac{p}{q} \text{ con } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}.$$

N.B. Se $x = \frac{p}{q} = \frac{m}{n}$ segue che $n\,p = m\,q$ e dunque che $\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[n]{a^m}$. In altre parole, la definizione è ben posta (cioè, non contraddittoria).

Teorema 2.3.1. *Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Valgono le seguenti:*

(1) $a^{x+y} = a^x a^y \quad \forall\, x, y \in \mathbb{Q}$;

(2) $a^x > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{Q}$;

(3) $(a^x)^y = a^{x\,y} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{Q}$;

(4) *se $a > 1$, allora*

$$x < y \implies a^x < a^y \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{Q};$$

altrimenti, se $a < 1$, si ha

$$x < y \implies a^y < a^x \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{Q}.$$

Dimostrazione. Dimostriamo solo la (4) (le altre sono quasi ovvie).
Se $a > 1$ si ha $a^h > 1\ \forall\, h \in \mathbb{Q}$, $h > 0$. Infatti è chiaro che $h = p/q$ $(p, q \in \mathbb{N})$ e si ha $a^h = \sqrt[q]{a^p} > \sqrt[q]{a} > \sqrt[q]{1} = 1$ (dove si è usato che $x \leq y \iff \sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{y}$, cfr. Proposizione 2.2.1).
Se $y - x > 0$ segue che $a^y - a^x = \underbrace{a^x}_{>0}(\underbrace{a^{y-x} - 1}_{>0}) > 0$, cioè la tesi, se $a > 1$.
Se $a < 1$ ci si riconduce al caso $a > 1$. □

Capitolo 3

Successioni

Sia $X \neq \varnothing$ un insieme non vuoto. Per definizione, una qualsiasi funzione $f\colon \mathbb{N} \to X$ si dice *successione* in X (oppure, a valori in X). Di solito, per indicare una successione, invece di $f(n)$, si usano le notazioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{f_n\}$, oppure $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$.
Il termine f_n si chiama *termine n-esimo* della successione $\{f_n\}$.
Se $k_1, k_2, \ldots, k_n$ è una successione di numeri naturali tale che

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \ldots \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

allora la successione $\{f_{k_n}\}$ si dice *sotto-successione* di $\{f_n\}$ (oppure *successione estratta* di $\{f_n\}$).

Esempio 3.0.1. La successione $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ è una successione in $\mathbb{Q}$. Precisamente, si ha che i suoi termini sono

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots.$$

In modo analogo, si usa la notazione $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Ad esempio, $\left\{\frac{1}{2n}\right\}, \left\{\frac{1}{2n+1}\right\}, \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ sono sotto-successioni (o estratte) di $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

3.1 Successioni in $\mathbb{R}$

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ una successione a valori reali.

Definizione 3.1.1. Si dice che a_n tende a $l \in \mathbb{R}$ per n che tende all'∞ (e in tal caso si scrive $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$, oppure[1] $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$) se

$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \bar{n} : \forall\, n \in \mathbb{N}\ (n > \bar{n} \implies |a_n - l| < \varepsilon)}. \tag{3.1}$$

Si dice che $\{a_n\}$ *converge ad* l e che l è il *limite* di $\{a_n\}$.

Esempio 3.1.1. Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Ciò significa che

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \bar{n} : \forall\, n\ \left(n > \bar{n} \implies \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon\right), \tag{3.2}$$

ossia $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \bar{n}$ tale che se $n > \bar{n}$ allora $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Troviamo $\bar{n}$. Se ε è fissato, si può sempre trovare $\bar{n}$ tale che $\frac{1}{\bar{n}} < \varepsilon$ ossia $\bar{n} > \frac{1}{\varepsilon}$. Se $n \in \mathbb{N}$, $n > \bar{n}$, si ha $\frac{1}{n} < \frac{1}{\bar{n}} < \varepsilon$. Cioè, dato ε, se $\bar{n} > \frac{1}{\varepsilon}$ allora la (3.2) è verificata.

Teorema 3.1.1. *Il limite se esiste è unico.*
Equivalentemente, sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ e siano $l, m \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l, \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = m.$$

Allora $l = m$.

Dimostrazione. Se $l \neq m$, sia $\varepsilon > 0$ fissato. Esistono $\bar{n}_1, \bar{n}_2 \in \mathbb{N}$ tali che

$$|a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{se } n > \bar{n}_1 \quad \text{e} \quad |a_n - m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{se } n > \bar{n}_2.$$

Se $n \gneq \max\{\bar{n}_1, \bar{n}_2\}$, ne segue che

$$|l - m| = |(l - a_n) + (a_n - m)| \leq |l - a_n| + |a_n - m| < \cancel{2} \cdot \frac{\varepsilon}{\cancel{2}} = \varepsilon.$$

Cioè

$$|l - m| < \varepsilon \quad \forall\, \varepsilon > 0,$$

ossia $l = m$. □

[1] A volte, se è chiaro dal contesto, si omette la scrittura $n \to +\infty$ e si scrive solo $a_n \to l$.

Teorema 3.1.2. *Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ converge ad $l \in \mathbb{R}$ allora ogni sua sotto-successione $\{a_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad l.*

Dimostrazione. Si ha

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \bar{n} : \forall\, n\, (n > \bar{n} \implies |a_n - l| < \varepsilon).$$

Se $k_n \geq n\, \forall\, n$, si ha

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \bar{n} : \forall\, n\, (n > \bar{n} \implies |a_{k_n} - l| < \varepsilon).$$

Cioè, $\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = l$. □

Esempio 3.1.2. La successione $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non ha limite.
Basta infatti osservare che

$$(-1)^{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{e} \quad (-1)^{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1.$$

Ciò mostra pure che le due estratte considerate hanno limiti differenti.

Teorema 3.1.3. *Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} m$.*
Valgono le seguenti:

(1) $a_n + b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l + m$

(2) $a_n b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} lm$

(3) *Se $a_n \neq 0\, \forall\, n \in \mathbb{N}$ e se $l \neq 0$ si ha*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{l}.$$

Dimostrazione. Per esercizio. □

Teorema 3.1.4 (Permanenza del segno)**.** *Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$. Se $l > 0\, (l < 0)$ si ha che*

$$\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} : a_n > 0\, (a_n < 0)\, \forall\, n > \bar{n}.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} : l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon \quad \forall\, n > \bar{n}.$$

Perciò, se $\varepsilon = |l|$ si ha

$$l - |l| < a_n < l + |l| \quad \forall\, n > \bar{n}.$$

Quindi, se $l > 0$ si ha

$$0 = l - |l| < a_n \quad \forall\, n > \bar{n}.$$

Altrimenti, se $l < 0$ si ha

$$a_n < l + |l| = 0 \quad \forall\, n > \bar{n}.$$

□

Corollario 3.1.1. *Siano* $\{a_n\}, \{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$ *successioni tali che* $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = m$. *Se* $l < m$, *allora esiste* $\bar{n} \in \mathbb{N}$ *tale che* $a_n < b_n$ *per ogni* $n > \bar{n}$.

Dimostrazione. Dalle ipotesi segue che $b_n - a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} m - l > 0$. Cioè

$$\exists\, \bar{n} : b_n - a_n > 0 \quad \forall\, n > \bar{n}.$$

□

Corollario 3.1.2. *Siano* $\{a_n\}, \{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$ *successioni tali che* $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = m$. *Se* $a_n \le b_n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$, *allora* $l \le m$.

In altre parole, *le disuguaglianze si conservano al limite.*

Dimostrazione. Per assurdo, se $l > m$, per il Corollario 3.1.1 si ha che

$$\exists\, \bar{n} : b_n - a_n < 0 \quad \forall\, n > \bar{n}.$$

Ossia $b_n < a_n \;\; \forall\, n > \bar{n}$, ciò che è assurdo. □

Teorema 3.1.5 (2 Carabinieri). *Siano* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *e si assuma che* $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$ *e che* $lim_{n\to+\infty} b_n = l$. *Se* $a_n \le c_n \le b_n\ \forall\, n$, *si ha* $\lim_{n\to+\infty} c_n = l$.

Dimostrazione. Si ha

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \bar{n}_1, \bar{n}_2 \in \mathbb{N} \text{ tali che}$$

$$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon \quad \forall\, n > \bar{n}_1 \quad \text{e} \quad l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon \quad \forall\, n > \bar{n}_2.$$

Se $n > \max\{\bar{n}_1, \bar{n}_2\} = \bar{n}$ ne segue che

$$l - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < l + \varepsilon \quad \forall\, n > \bar{n},$$

cioè $c_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$. □

Definizione 3.1.2. Sia $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$. Allora tale successione è detta:

- *superiormente limitata*, se $\exists\, M \in \mathbb{R} : a_n \leq M \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$;
- *inferiormente limitata*, se $\exists\, M \in \mathbb{R} : a_n \geq M \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$;
- *limitata*, se $\exists\, M \in \mathbb{R} : |a_n| \leq M \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.1.6. *Ogni successione convergente è limitata.*

Dimostrazione. Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$. Allora (ponendo $\varepsilon = 1$ nella definizione di limite) si trova che

$$\exists\, \bar{n} : \forall\, n \in \mathbb{N}\ (n > \bar{n} \implies |a_n - l| < 1).$$

Segue quindi che $|a_n| \leq |a_n - l| + |l| < 1 + |l|$ se $n > \bar{n}$. Allora

$$|a_n| \leq \left\{ \max_{i=1}^{\bar{n}} |a_i| \right\} \quad \text{oppure} \quad |a_n| \leq 1 + |l|.$$

Cioè $|a_n| \leq \max\{1 + |l|, |a_1|, \ldots, |a_{\bar{n}}|\} \overset{def.}{\equiv} M$. □

Teorema 3.1.7. *Se $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata e $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è "infinitesima"*[2]*, si ha*

$$\lim_{n \to +\infty} a_n b_n = 0.$$

Dimostrazione. Per esercizio. □

[2]Per definizione, $\{b_n\}$ è infinitesima se $\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$.

In seguito sarà utile "ampliare" la nozione di limite alla cosiddetta "retta reale ampliata"

$$\overline{\mathbb{R}} \overset{def.}{:=} \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}.$$

Ciò si potrebbe fare in modo unitario, dando una definizione generale di limite[3]. Per ora ci "accontentiamo" della seguente:

Definizione 3.1.3. Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Si scrive

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \quad \text{oppure } a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

se e solo se

$$\forall\, k \in \mathbb{R}\ \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall\, n \in \mathbb{N}\ (n > \bar{n} \implies a_n > k).$$

Analogamente, si scrive

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty \ \text{ oppure } \ a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$$

se e solo se

$$\forall\, k \in \mathbb{R}\ \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall\, n \in \mathbb{N}\ (n > \bar{n} \implies a_n < k).$$

In tal caso si dice che a_n *diverge positivamente/negativamente.*

Elenchiamo (senza dimostrazione) le proprietà ed i fatti che valgono per questa utile generalizzazione.

Osservazione 3.1.1. Valgono le seguenti affermazioni:

- $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \pm\infty \implies \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = +\infty$ (risp. $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = -\infty$);
- $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \in \mathbb{R} \implies a_n \nrightarrow \pm\infty$;
- $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \in \overline{\mathbb{R}} \implies a_{k_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$;

  (k_n "individua" una successione crescente in $\mathbb{N}$, cosicché a_{k_n}è una sottosuccessione generica).

[3]Ma non lo faremo, perché occorrerebbe un po' troppo lavoro...

- $\left.\begin{array}{l} a_n \to \pm\infty \\ b_n \to \pm\infty \end{array}\right\} \implies a_n + b_n \to \pm\infty$ (segno $=$);

- $\left.\begin{array}{l} a_n \to \pm\infty \\ b_n \to \pm\infty \end{array}\right\} \implies a_n\, b_n \to +\infty$ (segno $=$);

  oppure

- $\left.\begin{array}{l} a_n \to \pm\infty \\ b_n \to \mp\infty \end{array}\right\} \implies a_n\, b_n \to -\infty$ (segno $\neq$);

- $\left.\begin{array}{l} a_n \to \pm\infty \\ b_n \to m > 0 \end{array}\right\} \implies \begin{array}{r} a_n\, b_n \to \pm\infty \\ a_n + b_n \to \pm\infty \end{array};$

- $\left.\begin{array}{l} a_n \to \pm\infty \\ b_n \to m < 0 \end{array}\right\} \implies \begin{array}{r} a_n\, b_n \to \mp\infty \\ a_n + b_n \to \pm\infty \end{array};$

- $(a_n \to \pm\infty,\, a_n \neq 0) \implies \frac{1}{a_n} \to 0$;

- $(a_n \to 0,\, a_n > 0) \implies \frac{1}{a_n} \to +\infty$;

- $(a_n \to 0,\, a_n < 0) \implies \frac{1}{a_n} \to -\infty$;

- $a_n \leq b_n$ e $a_n \to +\infty \implies b_n \to +\infty$;

- $a_n \leq b_n$ e $b_n \to -\infty \implies a_n \to -\infty$.

■

3.1.1 Forme indeterminate

Se $\{a_n\}, \{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$ e $a_n \to +\infty$, $b_n \to -\infty$ allora si dovrebbe avere

$$a_n + b_n \overset{?}{\to} +\infty - \infty$$

ma ciò non significa nulla, in generale. Infatti, i simboli $\pm\infty$ non sono numeri nel senso usuale ed occorre un po' di cautela nel maneggiarli. Stesso discorso se $a_n \to -\infty$ e $b_n \to +\infty$. In entrambi questi casi, il limite della somma viene comunemente chiamato *forma indeterminata* "$\infty - \infty$".
Analogamente, se $\frac{a_n}{b_n}$ e si ha che $|a_n| \to +\infty$, $|b_n| \to +\infty$, si dice che il limite del

quoziente è una *forma indeterminata* "$\frac{\infty}{\infty}$". In modo simile, se $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, si dice che il limite del quoziente è una *forma indeterminata* "$\frac{0}{0}$". Se inoltre $|a_n| \to +\infty$ e $b_n \to 0$ si dice che la successione prodotto $a_n \cdot b_n$ è una *forma indeterminata* "$0 \cdot \infty$". Le altre forme indeterminate nelle quali ci si imbatte (e che si definiscono analogamente) sono le seguenti:

$$1^\infty, \ 0^0, \ \infty^0.$$

In seguito, negli esercizi che faremo, capiremo meglio come si "trattano" questi problemi.

Osservazione 3.1.2. È importante osservare che ogni forma indeterminata del tipo "$\frac{\infty}{\infty}$" si "riconduce" facilmente ad una del tipo "$\frac{0}{0}$". Infatti , si noti che

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{b_n}}{\frac{1}{a_n}}.$$

Inoltre, osservando che

$$a_n + b_n = \frac{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}}{\frac{1}{a_n\, b_n}},$$

ogni forma indeterminata del tipo "$\infty - \infty$" si "riconduce" ad una forma indeterminata del tipo"$\frac{0}{0}$".

Esercizio 3.1.1. Costruire, per ciascuna forma indeterminata, un esempio. Inoltre, cercare di capire come, per ciascuna di esse, si possono trovare esempi che hanno risultati molto diversi tra loro. Ad esempio, nel caso di una forma del tipo $\infty - \infty$ si vede facilmente che:

- $a_n = 2n, \ b_n = n \Longrightarrow a_n - b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty,;$
- $a_n = 2n, \ b_n = 3n \Longrightarrow a_n - b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty,$
- $a_n = n + \frac{1}{n^2}, \ b_n = n \Longrightarrow a_n - b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$

3.1.2 Teoremi generali di esistenza

Definizione 3.1.4. Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ è detta *monotona crescente* se $a_n \leq a_{n+1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ e *monotona decrescente* se si ha $a_n \geq a_{n+1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.
Si dice inoltre che $\{a_n\}$ è *strettamente monotona crescente/decrescente* se le disuguaglianze usate nella definizione sono strette[4], ossia se $a_n < a_{n+1}\ \ \forall n \in \mathbb{N}$ e $a_n > a_{n+1}\ \ \forall n \in \mathbb{N}$, rispettivamente.

Notazione. Le scritture $a_n \nearrow$ e $a_n \searrow$ indicano, rispettivamente, che a_n è monotona crescente oppure monotona decrescente (ma non necessariamente strettamente).

Teorema 3.1.8. *Ogni successione monotona ammette limite.*
Più precisamente, se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, valgono le seguenti affermazioni:

1) $a_n \nearrow \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$;

2) $a_n \searrow \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Dimostrazione. 1) Se $\{a_n\}$ è superiormente limitata, allora per la completezza di $(\mathbb{R}, \leq\ )$ si ha che

$$\exists \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \stackrel{def.}{=} \lambda.$$

Per le proprietà del sup si ha che $a_n \leq \lambda\ \ \forall n \in \mathbb{N}$ e dunque

$$a_n < \lambda + \varepsilon \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \forall\, \varepsilon > 0.$$

Inoltre, si ha che

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}\ :\ \lambda < a_{\bar{n}} + \varepsilon$$

(ciò segue subito dalla definizione di sup).
Pertanto, per monotonia, $a_{\bar{n}} \leq a_n$ e dunque $\lambda - \varepsilon < a_n\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n > \bar{n}$. Quindi

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}\ :\ \lambda - \varepsilon < a_n < \lambda + \varepsilon \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ n > \bar{n}.$$

Questa è la definizione di limite, cioè $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lambda$.

Se invece $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = +\infty$ allora $\forall\ k\ \exists\ \bar{n}\ :\ a_{\bar{n}} > k$, ma allora $a_n \geq a_{\bar{n}}$ ed infine $a_n > k\ \ \ \forall\ n > \bar{n}$, e ciò significa che $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.
La prova della proprietà 2) è del tutto analoga (per esercizio). □

[4]Come noto, le disuguaglianze strette $a < b$ e $a > b$ significano, rispettivamente, "$a \leq b$ e $a \neq b$" e "$a \geq b$ e $a \neq b$".

Esempio 3.1.3 (e numero di Nepero)**.** Per definizione si pone

$$\boxed{e \overset{def.}{\equiv} \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Si dimostra che $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ sono successioni convergenti che hanno stesso limite (cioè e). Inoltre si vede che esse sono strettamente monotone, ossia che

$$a_n < a_{n+1} \quad \text{e} \quad b_n > b_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Dato che

$$a_n < b_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

si trova che

$$a_n \leq a_p \lneq b_p \leq b_m \quad \forall\, n, m, \text{ dove } p = \max\{n, m\}.$$

Da ciò segue subito che a_n *converge*, perché monotona crescente e superiormente limitata, e che b_n *converge*, perché monotona decrescente ed inferiormente limitata. Infine, si vede che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Pertanto si ottiene che

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n \overset{def.}{=} e.$$

N.B. Il fatto (per nulla banale) che le successioni a_n e b_n siano strettamente monotone crescenti e decrescenti si può dimostrare usando la seguente disuguaglianza (che è elementare ma utilissima):

$$\boxed{(1+x)^n \geq 1 + n\,x} \qquad \text{(disuguaglianza di Bernoulli)}$$
$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x > -1,\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 3.1.2. Dimostrare la disuguaglianza di Bernoulli per induzione.

Osservazione 3.1.3. Ad esempio, vediamo che si ha $a_n \nearrow$ (l'altra dimostrazione è del tutto simile). In effetti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} =$$

$$= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n} \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n} \cdot \frac{n+2}{n+1} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n} \cdot \frac{n+2}{n+1} \overset{\text{Bernoulli}}{\geq} \left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right) \cdot \frac{n+2}{n+1} =$$

$$= \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1.$$

Ossia, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Ciò implica che

$$a_{n+1} > a_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

■

Esercizio 3.1.3. Provare a dimostrare che

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Osservazione 3.1.4. Il criterio più importante di convergenza per successioni è dovuto a Cauchy e si basa sull'osservazione elementare che se una successione $\{a_n\}$ converge, se n è scelto abbastanza grande, allora *i suoi termini sono arbitrariamente vicini tra loro.* A questo proposito ci potremmo domandare, se ciò accade, se è vero che allora $\{a_n\}$ converge. D'ora in avanti tratteremo tale questione in dettaglio. ■

Si ha il seguente importantissimo:

Teorema 3.1.9 (di Bolzano - Weierstrass)**.** *Ogni successione reale limitata ammette una sotto-successione convergente.*

Più precisamente, per ogni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *per la quale esiste* $M > 0$ *tale che* $|a_n| \leq M$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$, *si ha che esiste* $k_n \nearrow$ *tale che* $a_{k_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Data $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ limitata, esiste $M > 0$ tale che

$$-M \leq a_n \leq M \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Sia

$$\alpha_n \overset{def.}{=} \sup\{a_k : k \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Allora anche

$$-M \leq \alpha_n \leq M \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Inoltre, segue da come è definita che

$$\alpha_{n+1} \leq \alpha_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N};$$

cioè $\alpha_n \searrow$ e α_n è limitata. Allora

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \alpha_n \equiv l.$$

Notare che $l \equiv \inf_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$.

Affermiamo che

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, p \in \mathbb{N} \quad \exists\, n \geq p : \; l - \varepsilon \leq a_n. \tag{3.3}$$

Dimostriamo la (3.3). Infatti

$$\alpha_p \searrow \implies l \leq \alpha_p \implies l - \varepsilon < \alpha_p \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, p.$$

Dato che $\alpha_p = \sup\{a_n : n \geq p\}$, deve esistere $n \geq p$ tale che $a_n > l - \varepsilon$. $\square$

Sia ora $k_n \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita (*"per ricorrenza"*) come segue

Def. $\begin{cases} k_1 = \min\{k \in \mathbb{N} : l - 1 < a_k\}, \\ k_{n+1} = \min\left\{k \in \mathbb{N} : k > k_n \;\text{ e }\; l - \frac{1}{n+1} < a_k\right\}. \end{cases}$

(Notare che la (3.3) implica che tutti questi insiemi sono non vuoti).
Pertanto

$$k_{n+1} > k_n \quad \forall\, n \quad \text{ e } \quad l - \frac{1}{n} < a_{k_n} \quad \forall\, n.$$

Ciò implica che $\{a_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ verifica le disuguaglianze

$$l - \frac{1}{n} < a_{k_n} \leq \alpha_{k_n}.$$

Ma allora, dato che $\alpha_{k_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, segue infine che $a_{k_n} \to l$. $\square$

Definizione 3.1.5. Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ è detta *successione di Cauchy* se vale la seguente:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall\, n, m \in \mathbb{N}\ (n, m > \bar{n} \implies |a_n - a_m| < \varepsilon).$$

In altre parole, $\{a_n\}$ *è di Cauchy se i suoi termini sono "arbitrariamente" vicini tra loro, purché gli indici dei termini considerati siano abbastanza grandi.*

Proposizione 3.1.1. *Se* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, $a_n \to l \in \mathbb{R}$, *allora* $\{a_n\}$ *è di Cauchy.*

In altre parole, *ogni successione reale convergente è di Cauchy.*

Dimostrazione. Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$, allora deve essere

$$\forall\, \varepsilon\ \exists\, \bar{n} : \forall\, n\ \Big(n > \bar{n} \implies |a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}\Big).$$

Quindi

$$|a_n - a_m| = |(a_n - l) + (l - a_m)| \le |a_n - l| + |a_m - l| \le \cancel{2} \cdot \frac{\varepsilon}{\cancel{2}}, \quad \text{se } n, m > \bar{n}.$$

Cioè, $\{a_n\}$ è di Cauchy. □

Teorema 3.1.10 (Completezza sequenziale di $\mathbb{R}$)**.** *Ogni successione di Cauchy in* $\mathbb{R}$ *è convergente ad un qualche numero reale* $l \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Sia $\{a_n\}$ di Cauchy in $\mathbb{R}$. Si ha

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \bar{n} : \forall\, n, m\ \Big(n, m > \bar{n} \implies |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}\Big).$$

Si deve dimostrare che

$$\exists\, l \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\ +\infty} a_n = l.$$

1° Passo. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è limitata.*
(E' una proprietà di interesse autonomo).

Infatti, se $\varepsilon = 1$ si ha $|a_n - a_m| < \frac{1}{2}\ \forall\, n, m > \bar{n}$ e dunque $\forall\, n > \bar{n}$

$$|a_n| \le \underbrace{|a_n - a_{\bar{n}+1}|}_{<\frac{1}{2}<1} + |a_{\bar{n}+1}| < 1 + |a_{\bar{n}+1}|.$$

Perciò

$$|a_n| \le \underbrace{\max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{\bar{n}}|, 1 + |a_{\bar{n}+1}|\}}_{\overset{def.}{\equiv} M}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

2° Passo. Il Teorema di Bolzano-Weierstrass implica ora che esiste $\{a_{k_n}\}$, sotto-successione di $\{a_n\}$ tale che $a_{k_n} \to l \in \mathbb{R}$, ossia

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \bar{n}_1 \in \mathbb{N} : \forall\, n \left(n > \bar{n}_1 \implies |a_{k_n} - l| < \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

3° Passo: conclusione. Se $\bar{\bar{n}} = \max\{\bar{n}, \bar{n}_1\}$ e $n > \bar{\bar{n}}$ si ha

$$|a_n - l| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(infatti $k_n \geq n \implies k_n > \bar{\bar{n}} \quad \forall\, n > \bar{\bar{n}}$).
Pertanto

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \bar{\bar{n}} : \forall\, n \in \mathbb{N}\ (n > \bar{\bar{n}} \implies |a_n - l| < \varepsilon).$$

Questo è quanto dovevamo dimostrare. □

3.2 Rappresentazione decimale di numeri reali

Se $x \in \mathbb{R}$ si pone

$$[x] \stackrel{def.}{=} \text{parte intera} = \max\{p \in \mathbb{Z} : p < x\}.$$

Notare che

$$[x] \leq x < [x] + 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Teorema 1. *Sia $b \in \mathbb{N}$, $b > 1$. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sia*

$$x_n \stackrel{def.}{=} \frac{[b^n x]}{b^n}.$$

Allora valgono le seguenti:

1) $\{x_n\} \nearrow$ *(ossia, è monotona crescente);*

2) $x_n \leq x < x_n + \frac{1}{b^n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$*;*

3) $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$*;*

4) $\exists\, \alpha_0 \in \mathbb{Z}$, $\exists\, \{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}$ *tali che*

$$0 \leq \alpha_n \leq b - 1 \quad e \quad x_n = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{b} + \frac{\alpha_2}{b^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{b^n}.$$

Omettiamo, per semplicità, la dimostrazione del precedente.

Definizione 3.2.1. I *numeri decimali* sono i numeri razionali del tipo

$$\frac{m}{10^n} \quad (m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}).$$

Teorema 2. *Ogni numero decimale si può scrivere come*

$$x = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{10^n},$$

dove $\alpha_0 \in \mathbb{Z}$ *e* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

Dimostrazione. Infatti, se $x = \frac{m}{10^n}$ ($m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$) allora si ha

$$x = \frac{[10^n x]}{10^n}.$$

L'affermazione segue dalla 4) del Teorema 1 con $b = 10$. $\square$

Teorema 3. *Siano* $\alpha \in \mathbb{Z}$ *e* $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ *una successione di cifre decimali, cioè*

$$\alpha_n \in \{0, 1, \dots, 9\} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Allora la successione $\{x_n\}$*, dove*

$$x_n \overset{def.}{=} \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \cdots + \frac{\alpha_n}{10^n},$$

è convergente in $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Dato che $x_{n+1} = x_n + \frac{\alpha_{n+1}}{10^{n+1}} \geq x_n$ si ha che $x_n \nearrow$ e basta dimostrare che è superiormente limitata. Ciò segue perché

$$x_n = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \cdots + \frac{\alpha_n}{10^n} \leq \alpha_0 + \frac{9}{10} + \cdots + \frac{9}{10^n} =$$

$$= \alpha_0 + \frac{9}{10} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}}\right)}_{\text{progressione geometrica}} =$$

$$= \alpha_0 + \frac{9}{10} \underbrace{\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}}\right)}_{<1} < \alpha_0 + 1. \qquad \square$$

Esercizio 3.2.1 (Progressione geometrica)**.** Usando il principio d'induzione, dimostrare la formula

$$1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \qquad \forall\, x \neq 1.$$

N.B. Se $x = 1$, si ha più semplicemente $\underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{n+1 \text{ volte}} = n + 1$.

Definizione 3.2.2. Siano $\alpha_0 \in \mathbb{Z}$, $\alpha_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$.

Se $x \in \mathbb{R}$, $x = \lim_n \underbrace{\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \cdots + \frac{\alpha_n}{10^n}\right)}_{=x_n}$, si pone

$$x \overset{def.}{=} \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_n \dots .$$

La scrittura a secondo membro si chiama *rappresentazione decimale* di x.

Si noti che se da un certo k in poi si ha $\alpha_n = 0$ per ogni $n > k$, allora si scrive semplicemente $x = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k$.

Osservazione 3.2.1. Il Teorema 1 con $(b = 10)$ dice che ogni $x \in \mathbb{R}$ ammette una rappresentazione decimale. Inoltre il Teorema 3 implica che se $\alpha_0 \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_n \in \{0, \dots, 9\}$ allora esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $x = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \dots$. ■

Esempio 3.2.1. Si ha

$$\frac{1}{5} = 0,2 = \frac{2}{10}.$$

Però si ha pure

$$\frac{1}{5} = 0,1\bar{9} \quad (\text{cioè } 0,1999 \dots 9 \dots).$$

Infatti, se $x_n = 0,1\,\underbrace{9...9}_{n \text{ volte}}$, si ha

$$x_n = \frac{1}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^n} =$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{9}{10^2}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{10}}\right) \to \frac{1}{10} + \frac{9}{10^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} =$$

$$= \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

se $n \to +\infty$.

Definizione 3.2.3. Sia $x \in \mathbb{R}$, $x = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \dots$. La rappresentazione decimale $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \dots$ di x è detta *propria* se e solo se

$$\nexists\, p \in \mathbb{N} \,:\, \alpha_n = 9 \quad \forall\, n \geq p.$$

Teorema 4. *Ogni numero reale ammette un'unica rappresentazione decimale propria. Inoltre, se $x \in \mathbb{R}$, allora $x = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \dots$ è la rappresentazione decimale propria di x se e solo se*

$$\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \leq x < \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n + \frac{1}{10^n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Osservazione 3.2.2. Il Teorema 1 dà esattamente la rappresentazione decimale propria di x quando si pone $b = 10$. ■

3.3 Calcolo combinatorio: breve introduzione

Definizione 3.3.1. Siano $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \geq k$.

Fattoriale: si pone

$$0! = 1, \quad n! \stackrel{def.}{=} (n-1)! \cdot n,$$

ossia

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \dots \ \cdot (n-1) \cdot n.$$

Quella appena data è una definizione *ricorsiva*[5].

Coefficiente binomiale: si pone

$$C_{n,k} \stackrel{def.}{=} \binom{n}{k} \stackrel{def.}{=} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Ricordiamo pure le seguenti nozioni (che non useremo in seguito).

Disposizioni semplici (di lunghezza k di n elementi): si pone

$$D_{n,k} \stackrel{def.}{=} k! \cdot C_{n,k} = \frac{n!}{n-k!}.$$

Disposizioni con ripetizione (di lunghezza k di n elementi): si pone

$$F_{n,k} \stackrel{def.}{=} n^k.$$

[5]In termini semplici, una formula è detta ricorsiva se: i) è noto il primo termine s_1; ii) la formula fornisce il termine $(n+1)$-esimo in funzione del termine n-esimo, ossia $s_{n+1} = f(s_n)$, dove f rappresenta la "legge" ricorsiva.

Proprietà dei coefficienti binomiali

(1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

(2) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(3) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Dimostrazione. Per esercizio (per induzione). $\square$

Teorema 5 (Binomio di Newton)**.** *Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si ha*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k. \tag{3.4}$$

Precisazione: s'intende, per convenzione, che se a o b, o entrambi, sono nulli, allora la formula continua a valere anche se $n = 0$.

Dimostrazione. Per induzione. La (3.4) vale per $n = 0$ e, se $n = 1$, si ha

$$(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k}\, b^k = a + b$$

che è vera. Pertanto assumiamo che (3.4) vale fino all'indice n-esimo (e bisogna quindi verificarne la validità per l'indice $(n+1)$-esimo). Si ha

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \cdot (a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k \right) (a+b) = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} a^{n-k+1}\, b^k + \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^{k+1} \right] = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1}\, b^k + \underbrace{\sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} a^{n-h+1}\, b^h}_{\text{sost. “}k=h-1\text{”}} = \\
&\underset{(\star)}{=} \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n-k+1}\, b^k + \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} a^{n+1} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} b^{n+1} = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1}\, b^k + a^{n+1} + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1}\, b^k
\end{aligned}$$

che è quanto si doveva provare.
N.B. Nell'uguaglianza ($\star$) si riutilizza l'indice k nella seconda sommatoria.
Si osservi anche che l'ultimo membro è ciò che si trova sostituendo $n+1$ ad n nella formula (3.4). □

Notare che si sono usate le proprietà dei coefficienti binomiali ed in particolare la (3), ossia

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Queste nozioni a noi interessano solo "parzialmente" e saranno poi sviluppate nel corso di Probabilità. Qui di seguito elenchiamo soltanto alcune proprietà, ma senza darne dimostrazione.

Si osservi che i coefficienti binomiali si "dispongono" con la seguente modalità (nota con il nome di *triangolo di Tartaglia*):

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & \to & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & \to & 2 & \to & 1 & & & & \\
 & & & 1 & \to & 3 & \to & 3 & \to & 1 & & & \\
 & & 1 & \to & 4 & \to & 6 & \to & 4 & \to & 1 & & \\
 & 1 & \to & 5 & \to & 10 & \to & 10 & \to & 5 & \to & 1 & \\
1 & \to & 6 & \to & 15 & \to & 20 & \to & 15 & \to & 6 & \to & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Figura 3.1: Triangolo di Tartaglia

Osservazione 3.3.1. Ciascun elemento di una data riga si ottiene sommando la coppia di elementi che gli sta immediatamente sopra, sulla riga "precedente", come in Figura 3.1. ■

Facciamo alcune osservazioni conclusive.

1. Il fattoriale fornisce il numero delle permutazioni di n elementi.

2. $D_{n,k}$ corrisponde al numero delle applicazioni (funzioni) iniettive di un insieme formato da k elementi in un altro insieme formato da n elementi. $D_{n,k}$ si ottiene pensando di sistemare n oggetti distinti in k cassetti.

Allora, nel primo cassetto ne possiamo mettere n, nel secondo $n-1$, nel terzo $n-3$,..., nel k-esimo $n-k+1$: moltiplicando questi numeri tra loro si ottiene proprio $D_{n,k}$. In effetti, il fattoriale si ottiene in modo analogo e si ha $D_{n,n} = n!$.

3. $C_{n,k}$ è detto "numero" delle *combinazioni di n elementi di classe k* e fornisce il numero dei sottoinsiemi B di k elementi di un dato insieme A formato da n elementi. Osservare che $C_{n,k}$ si ottiene da $D_{n,k}$ dividendo per $k!$. Infatti, se vogliamo contare i sottoinsiemi di k elementi di un insieme di n elementi, allora non ci interessano i modi in cui disponiamo i k elementi di ogni sottoinsieme: se quindi partiamo da $D_{n,k}$ basta dividere per $k!$.

4. $F_{n,k}$ corrisponde al numero delle funzioni di un insieme di k elementi in un insieme di n elementi. $F_{n,k} = n^k$ si ottiene pensando di sistemare n oggetti in k cassetti, ma potendo "ripetere" le scelte degli oggetti. Allora, nel primo cassetto ne possiamo mettere n, nel secondo n,..., nel k-esimo n: moltiplicando questi numeri tra loro si ottiene ovviamente n^k.

5. Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme formato da n elementi?
In effetti, si ha

$$\underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} \underset{(\star)}{=} (1+1)^n = 2^n.$$

$\uparrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\uparrow$

corrisponde all'insieme $\varnothing$ $\qquad$ corrisponde all'insieme stesso

Notare che $(\star)$ segue dalla formula del binomio di Newton.

Per dimostrare quest'affermazione si ricordi l'osservazione (1) che dice che $\binom{n}{k}$ sono i sottoinsiemi di k elementi: basta sommare questi numeri per k che va da 0 a n.

Proprio per questa ragione, l'insieme delle parti di A si denota con il simbolo 2^A.

3.4 Cardinalità di insiemi

Siano $A, B \neq \varnothing$ insiemi. A e B sono detti *equipotenti* se

$$\exists\, f \colon A \xrightarrow[1-1]{su} B,$$

ossia, esiste una funzione biunivoca tra A e B.

Notazione. Se ciò avviene, si pone $A \cong B$.

Inoltre, in tal caso, si dice che A e B hanno stessa *cardinalità* e si scrive

$$\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(B).$$

Se $I_n = \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\}$ e $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(I_n)$ si dice che A ha n elementi, ossia $\operatorname{card}(A) = n$. In altre parole A è un insieme *finito*. Un insieme è detto *infinito* se non è finito.

Osservazione 3.4.1. Valgono le seguenti:

1) Se A è finito e $B \subseteq A$, $B \neq \varnothing$, allora B è finito.
2) Se A è finito e se B è sottoinsieme proprio di A allora A e B non sono equipotenti.
3) Se A è finito il numero di elementi di A è unico.
4) Se B è infinito e $B \subseteq A$, allora A è infinito.

■

Valgono inoltre le seguenti proposizioni:

1) *Sia $A \neq \varnothing$. Allora A è equipotente a se stesso* (ossia, $A \cong A$).

   Dimostrazione. Sia $id_A \colon A \to A$, $id_A(x) = x$. Ovviamente id_A è una biiezione. □

2) *A è equipotente a B se e solo se B è equipotente ad A*
   (ossia, $A \cong B \iff B \cong C$).

   Dimostrazione. Se $f \colon A \xrightarrow[1-1]{su} B$ allora $f^{-1} \colon B \xrightarrow[1-1]{su} A$. □

3) *Se A è equipotente a B e B è equipotente a C allora si ha che A è equipotente a C* (ossia, $A \cong B$ e $B \cong C \implies A \cong C$).

Dimostrazione. Abbiamo

$$A \cong B \iff \exists\, f\colon A \xrightarrow[1-1]{su} B;$$

$$B \cong C \iff \exists\, g\colon B \xrightarrow[1-1]{su} C.$$

Pertanto $g \circ f\colon A \xrightarrow[1-1]{su} C$. □

In altre parole l'equipotenza $\cong$ è una relazione d'equivalenza.

Teorema 3.4.1. $\mathbb{N}$ *è infinito.*

Dimostrazione. Basta dimostrare che $\mathbb{N}$ è equipotente ad un suo sottoinsieme proprio. Siano $P = \{n \in \mathbb{N} : n = 2m,\, m \in \mathbb{N}\}$ ed $f\colon P \to \mathbb{N}$, $f(n) = \frac{n}{2}$. Essendo f biunivoca, segue subito che $P \subsetneq \mathbb{N}$ e $P \cong \mathbb{N}$.

Dimostrazione alternativa. Sia $f\colon \mathbb{N} \to M$, dove $M = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 2\}$, e dove $f(n) = n + 1$. Allora f è biunivoca e $M \subsetneq \mathbb{N}$. □

Teorema 3.4.2. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *sono infiniti.*

Dimostrazione. Tutti contengono $\mathbb{N}$ come sottoinsieme proprio. □

Definizione 3.4.1. Un insieme si dice *numerabile* se è equipotente ad $\mathbb{N}$.

In altre parole, A è numerabile se si possono elencare i suoi elementi, ossia se esiste una successione biiettiva $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che ha come immagine A. Tale successione, se esiste, si chiama *numerazione.*

Teorema 3.4.3. *Sia A un insieme numerabile. Se $M \subseteq A$ e M è infinito allora $M \cong \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Cenni. Sia $\{a_n\}$ una numerazione di A. Definiamo l'estratta di $\{a_n\}$ formata da tutti gli elementi di M. Essa è una numerazione di M. □

Osservazione 3.4.2. Ogni sottoinsieme infinito di un insieme numerabile è numerabile. Ogni sottoinsieme di $\mathbb{N}$ è un insieme finito o numerabile (ciò vale per ogni insieme numerabile). ■

Teorema 3.4.4. *Valgono le seguenti affermazioni:*

(1) $\mathbb{Z}$ *è numerabile;*

(2) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *è numerabile;*

(3) $\mathbb{Q}$ *è numerabile.*

Dimostrazione. Dimostriamo solo la (1). Sia

$$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \quad f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \geq 1 \\ -2x+1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Tale f è una biiezione (verificarlo per esercizio).

N.B. La prova delle affermazioni (2) e (3) si potrebbe effettuare dimostrando direttamente che $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ è numerabile e poi provando che la funzione f, definita come segue

$$f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\ f(x) = (p,q) \quad \text{se } x = \frac{p}{q} \quad \text{con } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \text{ relativamente primi},$$

è una biiezione tra $\mathbb{Q}$ e $f(\mathbb{Q})$. Dato che $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, allora esso è finito o numerabile. Ma $\mathbb{Q}$ è infinito e pertanto $\mathbb{Q}$ è numerabile. □

Teorema 3.4.5. *Ogni insieme infinito contiene un insieme numerabile.*

Il Teorema 3.4.5, importante anche se intuitivo, si può dimostrare facendo uso del seguente fondamentale:
Assioma della Scelta. *Sia $\mathscr{B}$ una famiglia $\neq \varnothing$ di insiemi. Sia A un insieme tale che*

$$B \subseteq A \quad \forall\, B \in \mathscr{B}.$$

Allora esiste $\varphi\colon \mathscr{B} \to A$ tale che

$$\varphi(B) \in B \quad \forall\, B \in \mathscr{B}.$$

Dimostriamo adesso il Teorema 3.4.5.

Dimostrazione. Sia A infinito. Sia $\varphi\colon 2^A \setminus \{\varnothing\} \to A$ una funzione che soddisfa il precedente assioma della scelta. Allora definiamo *per ricorrenza* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ come segue:

$$a_1 \stackrel{def.}{=} \varphi(A), \quad a_{n+1} \stackrel{def.}{=} \varphi\left(A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}\right).$$

Allora si ha che
$$A \setminus \{a_1, \dots, a_n\} \neq \varnothing \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$
visto che A è infinito. Per la sua stessa definizione, si ha
$$a_{n+1} = \varphi\left(A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}\right) \in A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$$
e dunque
$$a_{n+1} \neq a_m \quad \forall\, m \in \{1, \dots, n\}. \tag{3.5}$$
Sia $B = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Allora B è numerabile. Infatti la funzione
$$f\colon \mathbb{N} \to B,\ f(n) = a_n$$
è, ovviamente, suriettiva, ma anche iniettiva, per (3.5). Ne segue che B è un sottoinsieme numerabile di A. □

Enunciamo un altro risultato importante.

Teorema 3.4.6. *L'unione di un'infinità numerabile di insiemi numerabili è numerabile.*

Dimostrazione. Facoltativa. Sia $\{A_n\}$ una famiglia di insiemi numerabili e sia $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Sia $\left\{a_k^{(n)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ una numerazione di A_n, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Disponiamo tali successioni come segue:
$$\begin{array}{ccccccc}
a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & a_4^{(1)} & a_5^{(1)} & a_6^{(1)} & \dots \\
 & a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & a_4^{(2)} & a_5^{(2)} & \dots \\
 & & a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & a_4^{(3)} & \dots \\
 & & & a_1^{(4)} & a_2^{(4)} & a_3^{(4)} & \dots \\
 & & & & a_1^{(5)} & a_2^{(5)} & \dots \\
 & & & & & \dots & \dots
\end{array}.$$

Si sono messi tutti gli elementi di A_1 nella prima riga, poi tutti quelli di A_2 nella seconda riga, ma avanzati di una colonna, etc. Notare che le colonne di questo riordinamento si caratterizzano così: la somma di indice e pedice degli elementi di una qualsiasi colonna è costante (ad esempio sulla 1° colonna la somma vale 2, sulla 2° vale 3, sulla 3° vale 4,...). In questo modo, l'elemento $a_n^{(k)}$ si trova sulla colonna $(n + k - 1)$-esima. Quindi *tutti* gli elementi di A si trovano in qualche colonna. Basta allora contarli... In altre parole, la seguente è una numerazione di A:
$$a_1^{(1)},\ a_2^{(1)},\ a_1^{(2)},\ a_3^{(1)},\ a_2^{(2)},\ a_1^{(3)},\ a_4^{(1)},\ a_3^{(2)},\ a_2^{(3)},\ a_1^{(4)} \dots$$
□

Osservazione 3.4.3. Usando quest'ultimo risultato si ottiene rapidamente una dimostrazione alternativa del fatto che $\mathbb{Q}$ è numerabile. Sia infatti F l'insieme delle frazioni $\frac{m}{n}$ con numeratore $m \in \mathbb{Z}$ e denominatore $n \in \mathbb{N}$. Allora F è un insieme numerabile. Infatti l'insieme delle frazioni aventi come denominatore un fissato $n \in \mathbb{N}$ è numerabile (essendo $\mathbb{Z}$ numerabile). E allora F è unione numerabile di insiemi numerabili. Ma $\mathbb{Q} \subseteq F$ e quindi, essendo $\mathbb{Q}$ infinito, dev'essere numerabile. ■

Teorema 3.4.7. *L'insieme* $[0,1[\, = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x < 1\}$ *è infinito ma non numerabile.*

Dimostrazione. Facoltativa. Si ha che $[0,1[$ è infinito. Infatti $B\left\{\frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ è contenuto in $[0,1[$. Infatti, se per assurdo fosse numerabile esisterebbe $f\colon \mathbb{N} \xrightarrow[1-1]{su} [0,1[$. Sia ora $0,\alpha_1^{(n)}\alpha_2^{(n)}\dots\alpha_p^{(n)}\dots$ la rappresentazione decimale *propria* di $f(n)$. Sia inoltre

$$y \overset{def.}{=} 0,\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_p\dots \quad \text{con} \quad \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha_p^{(p)} \neq 1 \\ 2 & \text{se } \alpha_p^{(p)} = 1 \end{cases}.$$

Si ha che $y \in [0,1[$. Dimostriamo quest'affermazione. Notare che $y = \lim_{p\to+\infty} y_p$ dove $y_p := 0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_p$ (cfr. Teorema 1 a pagina 29). Pertanto, si ha

$$0 \le \lim_{p\to+\infty} \underbrace{\left(\frac{\alpha_1}{10} + \dots + \frac{\alpha_p}{10^p}\right)}_{=y_p} \le \lim_{p\to+\infty} \left(\frac{2}{10} + \dots + \frac{2}{10^p}\right) =$$

$$= \lim_{p\to+\infty} \frac{2}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{10^{p-1}}\right) = \frac{2}{\cancel{10}} \cdot \frac{1}{\frac{9}{\cancel{10}}} = \frac{2}{9} < 1.$$

Infatti

$$1 + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{10^{p-1}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^p}{1 - \frac{1}{10}} \to \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{\frac{9}{10}}.$$

Poiché f è suriettiva esiste $p \in \mathbb{N} : y = f(p)$. Ciò è assurdo. Infatti si ha che per costruzione la p-esima cifra decimale di y è diversa dalla p-esima cifra decimale di $f(p)$. □

Definizione 3.4.2. Dati A, B insiemi, si pone

$$\text{card}(A) \le \text{card}(B)$$

se esiste $B_0 \subseteq B$ tale che $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B_0)$.
Se $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$ e se $\mathrm{card}(A) \neq \mathrm{card}(B)$ si scrive $\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(B)$.

Osservazione 3.4.4. Si ha $\mathrm{card}(\mathbb{N}) < \mathrm{card}\,([0,1[)$. Si noti anche che

$$\mathrm{card}(\mathbb{N}) \leq \mathrm{card}(A) \quad \forall\ A \text{ infinito.}$$

Un insieme è finito se e solo se $\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(\mathbb{N})$. ■

Definizione 3.4.3. Si dice che $[0,1[$ ha la *potenza del continuo.*

Si osservi pertanto che $\mathbb{R}$ ha la potenza del continuo.

Definizione 3.4.4. Un numero reale si dice *algebrico* se risolve un'equazione $p(x) = 0$ dove p è un polinomio a coefficienti in $\mathbb{Z}$. I numeri reali non algebrici si chiamano *trascendenti.*

Ad esempio, sono numeri algebrici i numeri razionali: infatti $x = \frac{m}{n}$ risolve l'equazione di 1° grado $nx - m = 0$. Sono numeri algebrici le radici n-esime di numeri razionali: sono infatti soluzioni dell'equazione $qx^n - p = 0$.

Teorema 3.4.8. *I numeri algebrici sono numerabili.*

Dimostrazione. Facoltativa. Per definizione, si dice "altezza $h \in \mathbb{N}$ di $p(x)$" la somma del grado di p e dei valori assoluti dei suoi coefficienti[6]. Allora per ogni $h \in \mathbb{N}$ ci sono solo un numero finito di equazioni di altezza h: per ognuna di esse ci sono solo un numero finito di soluzioni (ossia di numeri algebrici). Ordiniamo tali numeri dal minore al maggiore. Una numerazione dell'insieme dei numeri algebrici si ottiene quindi elencando prima le soluzioni delle equazioni di altezza $h = 2$, poi quelle di altezza $h = 3$, etc. □

Osservazione 3.4.5. Come corollario dell'ultimo teorema, si ha che i numeri trascendenti sono non numerabili. ■

Concludiamo osservando che esiste una "gerarchia" di "infiniti", nel senso seguente. Posto

$$\aleph_0 = \mathrm{card}(\mathbb{N}),\ \aleph_1 = \mathrm{card}(\mathbb{R}),$$

allora $\aleph_0 < \aleph_1$.

Inoltre si può dimostrare il seguente:

Teorema 3.4.9. *Sia $A \neq \varnothing$ un insieme. Allora* $\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(2^A)$.

Pertanto si può porre $\aleph_2 = \mathrm{card}(2^{\mathbb{R}})$, $\aleph_3 = \mathrm{card}(2^{2^{\mathbb{R}}}), \dots$ e quindi risulta che la gerarchia degli infiniti *non è superiormente limitata.*

[6]Ad esempio, l'altezza di $p(x) = 3x^7 - 5x^2 + 3$ è $h = 7 + 3 + |-5| + 3 = 18$.

3.5 O grande, o piccolo, $\sim$ equivalente

1. Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ due successioni reali. Si dice che a_n è un *"o piccolo"* di b_n per $n \to +\infty$, ed in tal caso si scrive

$$a_n = o(b_n) \qquad (n \to +\infty),$$

se e solo se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

In particolare, osservare che la scrittura

$$a_n = o(1) \qquad (n \to +\infty)$$

significa che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0,$$

ossia *"a_n è infinitesima"* per $n \to +\infty$.

Ovviamente, in questo caso si sottintende che $b_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

2. Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ due successioni reali. Si dice che a_n è un *"O grande"* di b_n per $n \to +\infty$, ed in tal caso si scrive

$$a_n = O(b_n) \qquad (n \to +\infty),$$

se e solo se

$$\exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} \ \exists\, M \in \mathbb{R} \ : \ \left(\left| \frac{a_n}{b_n} \right| \leq M \quad \forall\, n > \overline{n} \right).$$

In particolare, osservare che la scrittura

$$a_n = O(1) \qquad (n \to +\infty)$$

significa che *"a_n è limitata"* per $n \to +\infty$.

Osservazione 3.5.1. Se esiste finito il limite di $\frac{a_n}{b_n}$, cioè

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R},$$

allora si può sempre scrivere $a_n = O(b_n) \qquad (n \to +\infty)$. ■

3. Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ due successioni reali.

   Si dice che a_n è un *"equivalente"* di b_n per $n \to +\infty$, ed in tal caso si scrive
$$a_n \sim b_n \qquad (n \to +\infty),$$
   se e solo se
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$
   In altre parole, la scrittura $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$ significa che a_n e b_n hanno stesso limite per $n \to +\infty$.

Esempi.

1. Sia $a_n = \frac{1}{n}$. Allora $a_n = o(1)$ per $n \to +\infty$.

   Infatti sappiamo che a_n tende a 0 per $n \to +\infty$.

2. Siano $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Allora $a_n = o(b_n)$ per $n \to +\infty$.

   Infatti si vede subito che $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ tende a 0 per per $n \to +\infty$.

3. Siano $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = \frac{21}{n}$. Allora $a_n = O(b_n)$ per $n \to +\infty$.

   Infatti si ha $\frac{a_n}{b_n} = \frac{(-1)^n}{21}$ e dunque, ad esempio, $\left|\frac{(-1)^n}{21}\right| = \frac{1}{21} < 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In effetti, la successione $\frac{(-1)^n}{21}$ non ha limite, pur essendo limitata.

4. Siano $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Allora $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$.

   Infatti, si ha $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$ per $n \to +\infty$. Ovviamente, in questo caso si può anche scrivere $a_n = O(b_n)$ per $n \to +\infty$.

L'ultimo esempio suggerisce la seguente:

Osservazione 3.5.2. Se $a_n \sim b_n$, allora si ha pure $a_n = O(b_n)\,(n \to +\infty)$. In altri termini, se due successioni sono equivalenti si ha sempre $a_n = O(b_n)$ e $b_n = O(a_n)$. ■

Capitolo 4

Preliminari di Algebra Lineare

4.1 Lo spazio $\mathbb{R}^n$. Definizioni e proprietà

Fissata un'unità di misura per le lunghezze, i numeri[1] si possono usare per rappresentare i punti di una retta. Una coppia (ordinata) di numeri (x, y) si può usare per rappresentare un punto di un piano. Lo stesso si può fare con una terna (ordinata) di numeri, che si può usare per rappresentare un punto dello spazio tridimensionale. Queste osservazioni si possono usare per dare una definizione (astratta e rigorosa) di spazio n-dimensionale, dove $n \in \mathbb{N}$ è un numero naturale.

Definizione 4.1.1. Sia $n \in \mathbb{N}$ un numero naturale. Si chiama *punto dell'n-spazio* una qualsiasi n-upla ordinata di numeri $(x_1, x_2, ..., x_n)$. I numeri $x_1, ..., x_n$ sono le *coordinate* del punto. Lo spazio (numerico) n-dimensionale si denota con il simbolo $\mathbb{R}^n$.

In questo capitolo, i punti di $\mathbb{R}^n$ saranno indicati con lettere maiuscole come A, B, C....

Definiamo adesso due operazioni elementari sui punti di $\mathbb{R}^n$: la *somma* (o addizione) e la *moltiplicazione per uno scalare*[2].

Definizione 4.1.2. Siano A, B punti dello spazio n-dimensionale $\mathbb{R}^n$, ossia $A = (a_1, ..., a_n)$, $B = (b_1, ..., b_n)$. Si pone

$$A + B := (a_1 + b_1, ..., a_i + b_i, ..., a_n + b_n) \in \mathbb{R}^n.$$

[1] In questo capitolo, il termine "numero" significa "numero reale".
[2] "Scalare" significa "numero".

Sia inoltre $c \in \mathbb{R}$. Allora poniamo

$$cA := (ca_1, ..., ca_i, ..., ca_n) \in \mathbb{R}^n.$$

In altre parole, il punto $A + B$ (somma di A e B) è il punto di $\mathbb{R}^n$ le cui coordinate si ottengono sommando le coordinate di A e di B. Inoltre, il punto cA è il punto di $\mathbb{R}^n$ le cui coordinate si ottengono moltiplicando per c le coordinate di A.

Osservazione 4.1.1 (Fondamentale)**.** Valgono le seguenti proprietà:

(1) $(A + B) + C = A + (B + C) \quad \forall\, A, B, C \in \mathbb{R}^n$ (associatività);

(2) $A + B = B + A \quad \forall\, A, B \in \mathbb{R}^n$ (commutatività);

(3) $c(A + B) = cA + cB \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^n, \forall\, c \in \mathbb{R}$;

(4) $(c_1 + c_2)A = c_1A + c_2A, \quad (c_1c_2)A = c_1(c_2A) \quad \forall\, A \in \mathbb{R}^n, \forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;

(5) Si ponga $\mathbf{0} := (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$. Allora si ha $A+\mathbf{0} = \mathbf{0}+A = A \quad \forall\, A \in \mathbb{R}^n$;

(6) $1 \cdot A = A \quad \forall\, A \in \mathbb{R}^n$. Posto $-A := (-a_1, ..., -a_n) \in \mathbb{R}^n$, allora si ha $A + (-A) = \mathbf{0} \quad \forall\, A \in \mathbb{R}^n$.

Tutte le proprietà precedenti sono molto facili da dimostrare ed è anche molto utile verificarle con qualche esempio (fatelo!).

Ad esempio, dimostriamo la (3). Siano $A = (a_1, ..., a_n)$, $B = (b_1, ..., b_n)$ e $c \in \mathbb{R}$. Allora $A + B = (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n)$ e pertanto

$$\begin{aligned} c(A + B) &= (c(a_1 + b_1), ..., c(a_n + b_n)) \\ &= (ca_1 + cb_1, ..., ca_n + cb_n) \\ &= (ca_1, ..., ca_n) + (cb_1, ..., cb_n) \\ &= cA + cB. \end{aligned}$$

Le operazioni introdotte hanno una semplice interpretazione geometrica che ora illustriamo nel caso del 2-spazio (ossia, il piano) $\mathbb{R}^2$.

Siano $A = (2, 4)$ e $B = (-1, 1)$; allora il punto $A + B = (1, 5)$ si può vedere come il vertice di un *parallelogramma* che ha un vertice nell'origine $\mathbf{0}$ e gli altri due vertici nei punti A e B, rispettivamente. (Si noti che il segmento di estremi $\mathbf{0}$ e $A + B$ rappresenta una diagonale del parallelogramma i cui vertici sono i punti $\mathbf{0}, A, B, (A + B)$).

Il prodotto per uno scalare positivo $c > 0$ di un punto A, invece, si può pensare come un'operazione che "dilata" (allunga o accorcia) il segmento di estremi $\mathbf{0}$ e A: se $c > 1$ lo allunga, se $c < 1$ lo accorcia. Se $c = 1$ lo lascia invariato, ovviamente. Cosa succede se invece $c < 0$? Semplicemente, questa operazione ne *cambia il verso.* Ossia, fornisce come risultato un punto cA che giace sulla stessa retta individuata dai punti $\mathbf{0}$ ed A, ma si trova dalla parte opposta rispetto all'origine $\mathbf{0}$ del piano.

Esercizio 4.1.1. Trovare (e disegnare) $A+B$, $A-B$, $3A$, $-2B$ in ognuno dei seguenti casi:

- $A = (2, -1)$, $B = (-1, 1)$;
- $A = (-1, 3)$, $B = (0, 4)$;
- $A = (2, -1, 5)$, $B = (-1, 1, 1)$;
- $A = (\pi, -1, 5)$, $B = (2\pi, -\pi, -5)$;

4.2 Vettori applicati

Siano $A, B \in \mathbb{R}^n$. Si chiama *vettore applicato* ogni coppia (ordinata) di punti (A, B). D'ora in poi useremo il simbolo $\overrightarrow{AB}$ per denotare il vettore applicato associato alla coppia (A, B). A rappresenta l'*origine* (o *punto di applicazione*) di $\overrightarrow{AB}$, mentre B è detto *punto d'arrivo* di $\overrightarrow{AB}$. In seguito, il vettore applicato $\overrightarrow{AB}$ verrà "identificato" con il punto $B - A \in \mathbb{R}^n$.

Si osservi che il punto d'arrivo B si ottiene usando le coordinate dell'origine A e quelle del vettore applicato. Infatti, vale l'identità

$$B = A + (B - A).$$

Siano $A, B, C, D \in \mathbb{R}^n$. Si dice che due vettori applicati $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ sono *equivalenti* se riesce

$$B - A = D - C.$$

Notare che ogni vettore applicato ha un equivalente avente come suo punto di applicazione $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Ossia, si ha $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\mathbf{0}(B - A)}$. Si noti che questo è l'unico vettore applicato equivalente ad $\overrightarrow{AB}$ che ha come punto di applicazione l'origine $\mathbf{0}$ di $\mathbb{R}^n$.

Si dice inoltre che due vettori applicati $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ sono *paralleli* se esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $B - A = c(D - C)$. In tal caso, se $c > 0$, si dice che $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ hanno lo stesso verso; se invece $c < 0$, si dice che essi hanno versi opposti.

D'ora in avanti, ogni vettore applicato nell'origine $\mathbf{0}$ di $\mathbb{R}^n$, si chiamerà semplicemente, *vettore.* Ogni punto $A \in \mathbb{R}^n$ si può quindi pensare anche come vettore applicato nell'origine, cioè $\overrightarrow{\mathbf{0}A}$.

4.3 Prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$

Vale la seguente importantissima definizione:

Definizione 4.3.1. (Applicazione Lineare) Siano $n, m \in \mathbb{N}$ ed $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione. Si dice che F è *lineare* se valgono le seguenti:

- $F(A + B) = F(A) + F(B)$ per ogni $A, B \in \mathbb{R}^n$.
- $F(cA) = cF(A)$ per ogni $A, B \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $c \in \mathbb{R}$.

Se $m = 1$, si dice che F è un *funzionale lineare.*

Siano $A = (a_1, ..., a_n)$, $B = (b_1, ..., b_n)$ due vettori in $\mathbb{R}^n$. Definiamo ora cos'è il loro *prodotto scalare*[3]. Precisamente, si pone

$$\langle A, B\rangle := \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + ... + a_n b_n \in \mathbb{R}.$$

Il numero (reale) $\langle A, B\rangle$ è detto prodotto scalare di A e B.

Esempio 4.3.1. Siano $A = (1, 3, -2)$, $B = (-1, 4, -3) \in \mathbb{R}^3$. Allora, si calcola facilmente che $\langle A, B\rangle = -1 + 12 + 6 = 17$.

Rinviamo di un pò l'interpretazione geometrica del prodotto scalare, ma formuliamo subito alcune sue proprietà fondamentali e di facile dimostrazione.

Proposizione 4.3.1. *Valgono le seguenti proprietà:*

(PS-1) $\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle \quad \forall\, A, B \in \mathbb{R}^n$ *(simmetria);*

(PS-2) $\langle A, B + C\rangle = \langle A, B\rangle + \langle A, C\rangle = \langle B + C, A\rangle \quad \forall\, A, B, C \in \mathbb{R}^n$*;*

(PS-3) $\langle cA, B\rangle = c\langle A, B\rangle = \langle A, cB\rangle \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^n$*,* $\forall\, c \in \mathbb{R}$*;*

(PS-4) *se* $A = \mathbf{0}$*, allora* $\langle A, A\rangle = 0$*; altrimenti, se* $A \neq \mathbf{0}$*, si ha* $\langle A, A\rangle > 0$.

[3] Da non confondere col prodotto per scalare definito in precedenza.

Le proprietà (PS-2), (PS-3) si riassumono dicendo che il prodotto scalare è *bilineare,* ossia lineare in entrambi i suoi argomenti.

La dimostrazione delle proprietà enunciate è elementare ed è anche un utile esercizio.

Ad esempio, la (PS-1) si dimostra così:

$$\langle A, B\rangle = a_1b_1 + ... + a_nb_n = b_1a_1 + ... + b_na_n = \langle B, A\rangle.$$

Osserviamo anche che la (PS-4) si può dimostrare così:

$$\langle A, A\rangle = a_1a_1 + ... + a_na_n = (a_1)^2 + ... + (a_n)^2 \geq 0.$$

La disuguaglianza scritta adesso segue dal fatto che si stanno sommando n quadrati[4]. Pertanto se c'è almeno una coordinata di A, ad esempio a_i, tale che $(a_i)^2 > 0$, allora anche $\langle A, A\rangle > 0$, mentre se tutte le coordinate di A sono nulle, si ha necessariamente $\langle A, A\rangle = 0$.

Esercizio 4.3.1. Dimostrare la Proposizione 4.3.1.

Esercizio 4.3.2. Dimostrare le seguenti identità[5]

- $\langle A + B, A + B\rangle = \langle A, A\rangle + 2\langle A, B\rangle + \langle B, B\rangle$;
- $\langle A - B, A - B\rangle = \langle A, A\rangle - 2\langle A, B\rangle + \langle B, B\rangle$.

Definizione 4.3.2. Si dice che due vettori $A, B \in \mathbb{R}^n$ sono *perpendicolari* (oppure, *ortogonali*) se si ha $\langle A, B\rangle = 0$. In tal caso, si usa la notazione

$$A \perp B.$$

Esercizio 4.3.3. .Quali delle seguenti coppie di vettori sono ortogonali?

- $A = (1, -1, 1)$, $B = (2, 1, 5)$;
- $A = (1, -1, 1)$, $B = (2, 3, 1)$;
- $A = (-5, 2, 7)$, $B = (3, -1, 2)$;
- $A = (\pi, 2, 0)$, $B = (-2, \pi, 130)$.

Esercizio 4.3.4. Dimostrare che se $A \in \mathbb{R}^n$ è perpendicolare ad ogni vettore $X \in \mathbb{R}^n$, allora $A = \mathbf{0}$.

[4]Osservare che il quadrato a^2 di un qualsiasi numero $a \in \mathbb{R}$ è sempre maggiore o uguale a 0, ossia $a^2 \geq 0$; inoltre $a^2 = 0$ se e solo se $a = 0$.

[5]Notare che queste identità sono formalmente analoghe alle ben note formule: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

4.4 Norma di un vettore di $\mathbb{R}^n$

Proposizione 4.4.1 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). *Siano $A, B \in \mathbb{R}^n$. Allora, vale la seguente:*

$$(\langle A, B \rangle)^2 \leq \langle A, A \rangle \langle B, B \rangle.$$

Dimostrazione. Poniamo $x = \langle B, B \rangle$ e $y = -\langle A, B \rangle$. Per la (PS-4) si ha

$$0 \leq \langle (xA + yB), (xA + yB) \rangle = x^2 \langle A, A \rangle + 2xy \langle A, B \rangle + y^2 \langle B, B \rangle.$$

Sostituendo i valori di x e y, si ottiene

$$0 \leq (\langle B, B \rangle)^2 \langle A, A \rangle - 2 \langle B, B \rangle (\langle A, B \rangle)^2 + (\langle A, B \rangle)^2 \langle B, B \rangle.$$

Se $B = \mathbf{0}$, allora la disuguaglianza è ovvia (visto che $0 \leq 0$). Se invece $B \neq \mathbf{0}$, allora $\langle B, B \rangle > 0$ e si può dividere per $\langle B, B \rangle$ l'ultima espressione, ottenendo

$$0 \leq \langle A, A \rangle \langle B, B \rangle - (\langle A, B \rangle)^2,$$

che è quanto dovevamo dimostrare. □

Definizione 4.4.1 (Norma di un vettore). Sia $A \in \mathbb{R}^n$. Si pone

$$\|A\| := \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2}.$$

Il numero $\|A\|$ si chiama *norma* (oppure *modulo*) di A.

Si noti che $\|A\| \geq 0$. La norma di un vettore $A \in \mathbb{R}^n$ coincide con la "distanza" dall'origine $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ del punto A. In altre parole, $\|A\|$ fornisce la "lunghezza" del vettore A. Quest'ultima affermazione, evidente almeno nei casi del piano e del 3-spazio, segue dal Teorema di Pitagora.

Osservazione 4.4.1. La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si può riscrivere così:

$$|\langle A, B \rangle| \leq \|A\| \|B\| \qquad \forall\, A, B \in \mathbb{R}^n.$$

Infatti, basta estrarre la radice quadrata di ambo i membri della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (ricordando che $\sqrt{x^2} = |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$).

La seguente è una semplice (ma fondamentale) disuguaglianza.

Proposizione 4.4.2 (Disuguaglianza triangolare). *Siano $A, B \in \mathbb{R}^n$. Vale la seguente disuguaglianza:*

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

Dimostrazione. Entrambi i membri della disuguaglianza sono positivi e quindi possiamo dimostrare la disuguaglianza passando ai quadrati. In altre parole, dimostreremo che

$$\|A+B\|^2 = \langle (A+B),(A+B)\rangle \leq (\|A\|+\|B\|)^2.$$

Sviluppando il primo membro, si ottiene

$$\langle (A+B),(A+B)\rangle = \|A\|^2 + 2\langle A,B\rangle + \|B\|^2.$$

Usando disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha subito che

$$\|A\|^2 + 2\langle A,B\rangle + \|B\|^2 \leq \|A\|^2 + 2\|A\|\|B\| + \|B\|^2.$$

Notando che $\|A\|^2 + 2\|A\|\|B\| + \|B\|^2 = (\|A\|+\|B\|)^2$, segue che

$$\langle (A+B),(A+B)\rangle \leq (\|A\|+\|B\|)^2,$$

che è la tesi (se si estrae la radice quadrata di ambo i membri). □

Proposizione 4.4.3. *Siano $x \in \mathbb{R}$ ed $A \in \mathbb{R}^n$. Allora*

$$\|xA\| = |x|\|A\|.$$

Dimostrazione. Per definizione, si ha $\|xA\|^2 = \langle xA, xA\rangle$. Si vede subito che $\langle xA, xA\rangle = x^2\langle A,A\rangle = x^2\|A\|^2$. La tesi segue allora effettuando la radice quadrata di ambo i membri. □

Definizione 4.4.2. Si dice che $A \in \mathbb{R}^n$ è un *vettore unitario* se si ha $\|A\| = 1$. Si dice che $A, B \in \mathbb{R}^n$ hanno lo *stesso verso* se esiste $c > 0$ tale che $A = cB$. Viceversa, si dice che A e B hanno *versi opposti* se esiste $c < 0$ tale che $A = cB$. In particolare, il vettore unitario $\frac{A}{\|A\|}$ ha lo stesso verso di A.

Definizione 4.4.3. Siano $A, B \in \mathbb{R}^n$. Si definisce *distanza* di A e B il numero (reale positivo) $\|A - B\|$.

In altre parole, posto $d(A,B) := \|A - B\|$, resta definita una "funzione distanza" $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Questa funzione "misura" la distanza di due arbitrari elementi di $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 4.4.1. Siano $A, B, C \in \mathbb{R}^n$. Dimostrare le seguenti proprietà:

(D-1) $d(A,B) \geq 0$ e $d(A,B) = 0$ se e solo se $A = B$;

(D-2) $d(A,B) = d(B,A)$ (simmetria);

(D-3) $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$ (disuguaglianza triangolare).

Osservazione 4.4.2 (Ortogonalità)**.** Da un punto di vista geometrico, è facile[6] formulare la nozione di perpendicolarità di due vettori $A, B \in \mathbb{R}^n$ in termini della seguente uguaglianza

$$\|A - B\| = \|A + B\|.$$

Inoltre, si osservi che sviluppando quest'uguaglianza si vede facilmente che essa è equivalente al fatto che $\langle A, B\rangle = 0$, ossia

$$\|A - B\| = \|A + B\| \iff \langle A, B\rangle = 0 \iff A \perp B.$$

Definizione 4.4.4 (Coseno dell'angolo tra due vettori)**.** Siano $A, B \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Sia $\theta \in [0, \pi]$ l'angolo formato da A e B. Per definizione, si pone

$$\cos(\theta) := \frac{\langle A, B\rangle}{\|A\|\|B\|}.$$

Si osservi, in effetti, che il numero reale $\frac{\langle A,B\rangle}{\|A\|\|B\|}$ è, in valore assoluto, sempre minore o uguale a 1, cioè vale

$$\left|\frac{\langle A, B\rangle}{\|A\|\|B\|}\right| \leq 1.$$

Pertanto esiste sempre un unico $\theta \in [0, \pi]$ tale che $\cos(\theta) := \frac{\langle A,B\rangle}{\|A\|\|B\|}$.

Esercizio 4.4.2. Siano $A, B \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ e sia θ l'angolo da essi formato. Dimostrare che se $\cos(\theta) = 1$ allora A e B hanno stesso verso e che, invece, se $\cos(\theta) = -1$ allora A e B hanno verso opposto.

Esercizio 4.4.3. Calcolare norma, distanza e coseno dell'angolo compreso per ognuna delle coppie di vettori dell'Esercizio 4.3.3.

---

[6] Si può ragionare così. Disegnare A e B in un piano, e poi disegnare il punto $-B$, che si trova sulla retta congiungente B all'origine $\mathbf{0}$, ma dalla parte opposta. Tracciare poi i segmenti congiungenti A con B e con $-B$. Per definizione di distanza di due punti, la distanza di A da B è data da $\|A - B\|$, mentre la distanza di A da $-B$ è data da $\|A + B\|$. Ma è evidente dalla geometria elementare che A e B sono tra loro ortogonali se e solo se i triangoli $\widehat{A\mathbf{0}B}$ e $\widehat{A\mathbf{0}-B}$ sono congruenti e, quindi, se e solo se sono triangoli rettangoli, e ciò avviene se e solo se $\|A + B\| = \|A - B\|$.

4.5 Rette, piani e iperpiani

Definizione 4.5.1 (Retta parametrica)**.** Sia $P \in \mathbb{R}^n$ un punto fissato e sia $A \in \mathbb{R}^n$ una direzione fissata. Allora la funzione $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definita da $X(t) := P + tA$ è detta *equazione parametrica* della retta passante per P e parallela ad A.

Esempio 4.5.1. Nel caso del piano (ossia $n = 2$), è molto facile ricavare il parametro t e trovare la forma nota dell'equazione di una retta. Infatti, sia $X(t) = (x_1(t), x_2(t))$; allora, si ottiene $x_1(t) = p_1 + ta_1$ e $x_2(t) = p_2 + ta_2$. Da ciò segue che $\frac{x_1-p_1}{a_1} = \frac{x_2-p_2}{a_2}$. Tuttavia ciò non si può fare, in generale se $n > 2$. Perciò l'equazione parametrica di una retta è l'unica "comoda" da usare.

Per ulteriore semplicità, in seguito –nel caso del piano– useremo spesso la notazione $X = (x, y)$ al posto di $X = (x_1, x_2)$.

Esercizio 4.5.1. Se $P = (2, 1)$ e $A = (-1, 5)$, scrivere l'equazione parametrica della retta retta passante per P e parallela ad A. Ricavare l'equazione implicita della retta e, se possibile, anche quella esplicita[7].

Definizione 4.5.2 (Iperpiano)**.** Siano $P \in \mathbb{R}^n$ un punto fissato ed $N \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ una direzione fissata. Allora si dice *iperpiano* passante per P e perpendicolare ad N l'insieme dei punti $X \in \mathbb{R}^n$ tali che $\langle (X - P), N\rangle = 0$. Quest'equazione si può anche scrivere così: $\langle X, N\rangle = \langle P, N\rangle$.

Osserviamo che, se $n = 2$, l'"iperpiano" è una retta. Invece, se $n = 3$, l'"iperpiano" sopra definito è nient'altro che un "usuale" piano. In generale, si dice anche che la direzione N è *normale* al piano.

Esempio 4.5.2 (2-spazio e 3-spazio)**.** Mettiamoci nel 2-spazio. Siano, ad esempio, $P = (4, -3)$ ed $N = (-5, 2)$. Allora si ottiene che l'"iperpiano" (come detto è una retta) passante per P e normale ad N, per definizione, soddisfa l'equazione

$$-5x + 2y = -20 - 6 = -26.$$

Mettiamoci ora nel 3-spazio e usiamo, per semplicità, la notazione $X = (x, y, z)$ al posto di $X = (x_1, x_2, x_3)$. Allora, se $P = (2, 1, -1)$ e $N = (-1, 1, 3)$, l'equazione del piano passante per P e normale ad N diventa

$$-x + y + 3z = -2 + 1 - 3 \iff -x + y + 3z = -4.$$

[7] Equazione *implicita* di una retta: $ax + by + c = 0$, dove $a, b, c \in \mathbb{R}$ sono "fissati". Equazione *esplicita* di una retta: $y = mx + q$, dove $m, q \in \mathbb{R}$ sono fissati. In questo caso, m viene detto *coefficiente angolare* della retta.

Osservazione 4.5.1. Il precedente esempio mostra che tutte le volte che abbiamo un'equazione (implicita) di una retta $ax + by + c = 0$ (nel caso del piano) oppure di un piano $ax + by + cz + d = 0$ (nel caso del 3-spazio), allora *sappiamo subito trovare una direzione normale ad essi.* Infatti, nel primo caso essa è data da $N = (a, b)$, mentre nel secondo è $N = (a, b, c)$.

L'osservazione precedente vale anche nel caso generale dell'n-spazio.

Definizione 4.5.3 (Parallelismo)**.** Due vettori $A, B \in \mathbb{R}^n$ si dicono paralleli se esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $A = cB$. Due rette si dicono parallele se presi due punti qualsiasi P_1, Q_1 sulla prima e presi due punti qualsiasi P_2, Q_2 sulla seconda, si ha che $P_1 - Q_1$ è parallelo a $P_2 - Q_2$. Due iperpiani sono paralleli se i vettori ad essi normali sono paralleli. L'angolo tra due iperpiani è l'angolo tra i suoi vettori normali. Infine, due iperpiani sono perpendicolari se i vettori ad essi normali sono perpendicolari.

Quest'ultima nozione è particolarmente significativa nel caso di piani del 3-spazio.

Esempio 4.5.3. Trovare il coseno dell'angolo formato dai piani $2x - y + z = 0$ e $x + 2y - z = 1$.

N.B. Il coseno da trovare è quello dell'angolo formato dai vettori $(2, -1, 1)$ e $(1, 2, -1)$. Si calcola subito che è uguale a $-\frac{1}{6}$.

Esercizio 4.5.2. Trovare un'equazione parametrica della retta passante per i seguenti punti:

- $(1, 1, -1)$ e $(-2, 1, 3)$;
- $(-1, 5, 2)$ e $(3, -4, 1)$.

Esercizio 4.5.3. Trovare l'equazione della retta del piano passante per P e ortogonale a N nei casi seguenti:

- $P = (1, -1)$ e $N = (-5, 3)$;
- $P = (-5, 4)$ e $N = (3, 2)$.

Esercizio 4.5.4. Trovare l'equazione del piano nel 3-spazio passante per P e ortogonale a N nei casi seguenti:

- $P = (4, 2, -1)$ e $N = (1, -1, 3)$;
- $P = (-2, \pi, -5)$ e $N = (-3, -2, 4)$.

Esercizio 4.5.5. Quali, delle seguenti coppie di rette, sono ortogonali tra loro?

- $2x + 7y = 1$ e $x - y = 5$;
- $3x - 5y - 1 = 0$ e $2x + y = 2$.
- $x - 7y = 1$ e $7x + y = 5$;
- $6x + 8y - 1 = 0$ e $-4x + 3y = 2$.

Esercizio 4.5.6. Trovare il coseno formato dalle seguenti coppie di piani (nel 3-spazio):

- $x + y + z = 1$ e $x - y - z = 5$;
- $x - y - z = 1$ e $-x + 3y + z = 2$.

Esercizio 4.5.7. Trovare la formula generale per le coordinate del *punto medio* di un segmento $\overline{PQ}$ (passante cioè per i punti $P, Q \in \mathbb{R}^n$).

4.6 Numeri Complessi

Definizione 4.6.1 (Definizione 'assiomatica' di $\mathbb{C}$)**.** I numeri complessi sono "oggetti" che si possono addizionare e moltiplicare tra loro; somme e prodotti di numeri complessi sono ancora numeri complessi e inoltre, valgono le seguenti:

(C1) Ogni numero reale è complesso e, se α, β sono reali, la loro somma ed il loro prodotto come numeri complessi coincidono con la loro somma ed il loro prodotto come numeri reali.

(C2) Esiste un numero complesso, denotato come i, tale che $i^2 = -1$.

(C3) Ogni numero complesso si può scrivere in modo unico nella forma $a + ib$, dove a, b sono reali (ossia $a, b \in \mathbb{R}$).

(C4) Le usuali proprietà aritmetiche di addizione e moltiplicazione continuano a valere. Precisamente, si ha:

- se α, β, γ sono numeri complessi, allora si ha:
$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma), \qquad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma);$$
- se α, β, γ sono numeri complessi, allora si ha:
$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma, \qquad (\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha;$$

– se α, β sono numeri complessi, allora si ha:

$$\alpha\beta = \beta\alpha, \qquad \alpha + \beta = \beta + \alpha;$$

– se 1 denota il numero reale 'uno', allora per ogni numero complesso α si ha:

$$1\alpha = \alpha.$$

– se 0 denota il numero reale 'zero', allora per ogni numero complesso α si ha:

$$0\alpha = 0.$$

– per ogni numero complesso α si ha:

$$\alpha + (-1)\alpha = 0.$$

Notazione. Si denota con $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi. Se $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, si chiama *parte reale* di z la sua prima coordinata (puramente reale); inoltre, si chiama parte immaginaria di z la sua seconda coordinata (puramente immaginaria). Infine si usano le notazioni

$$\Re(z) := x, \quad \Im(z) = y$$

per indicare rispettivamente le parti reale e immaginaria di z.

L'insieme $\mathbb{C}$ è formato da elementi del tipo $a + ib$ e dunque si "identifica" all'insieme $\mathbb{R} \times i\mathbb{R}$. Più formalmente, si potrebbe identificare $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ossia vedere un elemento $a + ib$ di $\mathbb{C}$ come la coppia ordinata $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Così facendo, le operazioni di somma e prodotto, si potrebbero definire in modo rigoroso in termini di operazioni sui vettori del piano $\mathbb{R}^2$.

La precedente definizione (assiomatica) consente di ottenere facilmente tutte le proprietà "salienti" dei numeri complessi (ossia, gli elementi di $\mathbb{C}$). Vediamone alcune. In seguito, si assumerà che $\alpha = a_1 + ib_1$, $\beta = a_2 + ib_2 \in \mathbb{C}$.

- (Somma) Si ha $\alpha + \beta = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$. In termini di operazioni sui vettori di $\mathbb{R}^2$ (ossia, sulle coppie ordinate) ciò si può riscrivere così: $\alpha + \beta = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$.
  A parole, si sommano le coordinate corrispondenti.

- (Prodotto) Si ha

$$\begin{aligned}\alpha\beta = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) &= (a_1a_2 + i^2b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)\\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1).\end{aligned}$$

  In termini di operazioni sui vettori di $\mathbb{R}^2$ (ossia, sulle coppie ordinate) ciò si può riscrivere così:

$$\alpha\beta = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1).$$

- (Coniugato) Se $\alpha = a + ib$ si pone, per definizione, $\overline{\alpha} := a - ib$. Vale la seguente proprietà:

$$\alpha\overline{\alpha} = a^2 + b^2.$$

  In termini di operazioni sui vettori di $\mathbb{R}^2$, ciò si può riscrivere così:

$$\alpha\overline{\alpha} = \|(a, b)\|^2.$$

  (Cioè, il prodotto di un numero complesso per il suo coniugato uguaglia la norma al quadrato del 2-vettore associato ad α, ossia, uguaglia il quadrato della distanza del punto (a, b) dall'origine $\mathbf{0} = (0, 0)$ di $\mathbb{R}^2$.)

- (Valore assoluto) Se $\alpha = a + ib$, si pone per definizione

$$|\alpha| := \sqrt{a^2 + b^2}$$

  e si chiama *modulo* o *valore assoluto* di α.
  Per quanto appena visto, vale la seguente proprietà:

$$\alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2.$$

  In termini di operazioni sui vettori di $\mathbb{R}^2$, si può scrivere $|\alpha| = \|(a, b)\|$.

- (Argomento) Si chiama argomento di $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ l'angolo formato tra la semiretta congiungente 0 e α e la semiretta dei numeri reali positivi $\mathbb{R}_+$. Dunque $\arg(\alpha)$ resta definito a meno di multipli interi di 2π e si ha

$$\alpha = |\alpha|(\cos(\arg(\alpha)) + i\sin(\arg(\alpha))).$$

- (Disuguaglianza Triangolare) Vale la seguente proprietà del modulo:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \qquad \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

  Essa segue subito dalla stessa disuguaglianza valida per la norma.

- (Inverso) Se $\alpha = a + ib$, si pone per definizione
$$\alpha^{-1} := \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2}.$$
Vale la seguente proprietà: $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1$. Infatti, si noti che
$$\alpha\alpha^{-1} = \frac{\alpha\overline{\alpha}}{|\alpha|^2} = \frac{|\alpha|^2}{|\alpha|^2} = 1 = \frac{\overline{\alpha}\alpha}{|\alpha|^2} = \alpha^{-1}\alpha.$$
In altre parole, *il numero complesso α^{-1} è l'inverso moltiplicativo di α.*

Esercizio 4.6.1. Ecco qualche verifica elementare:

- Scrivere i seguenti numeri complessi nella forma $x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$: $(-1 + 3i)^{-1}$; $(1 + i)^{-1}$; $\frac{1+i}{i}$; $\frac{i}{1+i}$; $\frac{1}{-1+i}$; $\frac{2+i}{2-i}$.
- Scrivere i seguenti numeri complessi nella forma $x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$: $(-1 + 3i)(2 - i)i$; $(3i)(2\pi + i)i$; $(3i)^3(1 - i)$.

Esercizio 4.6.2. Se $\alpha = a + ib \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, trovare il modulo del numero $\frac{\alpha}{\overline{\alpha}}$. Trovare anche $\overline{\overline{\alpha}}$.

Esercizio 4.6.3. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dimostrare le seguenti proprietà:

- $\overline{\alpha}\overline{\beta} = \overline{\alpha\beta}$;
- $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$;
- $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$.

N.B. Il seguente esempio raccoglie alcune proprietà fondamentali dei numeri complessi.

Esercizio 4.6.4 (Forma esponenziale; prodotto; potenza n-esima; radice n-esima)**.** Sia $\theta \in \mathbb{R}$ e si ponga
$$e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta.$$
Si noti che $e^{i\theta}$ è un numero complesso di modulo uno (ossia $|e^{i\theta}| = 1|$), cioè si trova sulla circonferenza unitaria centrata nell'origine $\mathbf{0}$ di $\mathbb{R}^2$.

- Dimostrare che $e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$.
- ($\star$) Dimostrare che ogni numero complesso di modulo uno si può scrivere come e^{it} per qualche $t \in \mathbb{R}$.

- ($\star$) Dimostrare che ogni numero complesso $\alpha = a + ib$ si può scrivere nella forma $\alpha = re^{it}$ per qualche $r, t \in \mathbb{R}$, con $r \geq 0$.
- ($\star$) Sia $n \in \mathbb{N}$. Dimostrare che vale la seguente formula (anche detta *Formula di De Moivre*) per la potenza n-esima di un numero complesso $\alpha = a + ib = re^{it}$:
$$\alpha^n = r^n e^{int} = r^n(\cos(nt) + i\sin(nt)).$$
- ($\star$) Sia $n \in \mathbb{N}$. Dimostrare che per ogni $z = x + iy = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ esiste $w \in \mathbb{C}$ tale che $w^n = z$. Dimostrare inoltre che di tali numeri ne esistono precisamente n distinti (se $z \neq 0$).

In effetti, vale la seguente formula:
$$w_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\theta_k} \qquad k = 0, ..., n-1,$$
dove $\theta_k := \frac{\theta + 2k\pi}{n}$ per $k = 0, ..., n-1$. Ossia
$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right) \qquad k = 0, ..., n-1.$$

Osservazione 4.6.1. Si noti che la formula di De Moivre è completamente elementare: si può ad esempio provare per induzione. Ingrediente principale della prova sono le formule di addizione/sottrazione delle funzioni sin, cos.

L'ultima domanda (che è anche la più impegnativa) riguarda la cosiddetta *radice n-esima di un numero complesso.* Più in dettaglio, si parte dalla formula di De Moivre precedente. Allora se $w = \varrho e^{i\varphi}$ segue che $w^n = \varrho^n e^{in\varphi}$. Pertanto, se $z = re^{i\theta}$, ne segue
$$w^n = \varrho^n e^{in\varphi} = z = re^{i\theta}.$$
Tale uguaglianza vale se e solo se $\varrho = \sqrt[n]{r}$ e
$$n\varphi = \theta + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$
Cioè
$$\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$
Tuttavia adesso ci basta usare –solo– n valori consecutivi di k: in altre parole, qualsiasi altro valore si ripeterebbe infinite volte se k fosse un qualsiasi intero. Quindi, senza perdita di generalità, ci si può limitare all'insieme di indici $k \in \{0, 1..., n-1\}$. ■

Esercizio 4.6.5. Calcolare le seguenti radici complesse:

1. $\sqrt{1}$, $\sqrt{-1}$, $\sqrt{i}$, $\sqrt{-i}$.
2. $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{-1}$, $\sqrt[3]{i}$, $\sqrt[3]{-i}$.
3. $\sqrt[4]{1}$, $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[4]{i}$, $\sqrt[4]{-i}$.

Esercizio 4.6.6. Disegnare sulla circonferenza unitaria

$$\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

tutte le radici n-esime ($n = 2,3,4,5,6,8,...$) dell'unità (cioè di 1) verificando che esse descrivono il poligono regolare di n lati inscritto in $\mathbb{S}^1$ ed avente un vertice nel punto $(1,0)$.

N.B. Il Teorema Fondamentale dell'Algebra afferma che:
Un'equazione polinomiale di grado n, a coefficienti reali o complessi, del tipo

$$p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

ammette esattamente n radici complesse, contate con la loro molteplicità[8].

Osservazione 4.6.2 (Equazioni di secondo grado: formula risolutiva)**.** Data la generica equazione di secondo grado

$$az^2 + bz + c = 0,$$

vale la seguente formula risolutiva:

$$z_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La radice è da intendersi come radice quadrata complessa: per questa ragione si può omettere il "doppio" segno (ossia, $\pm$) e ricordare che ogni radice ammette esattamente due valori, che sono uno l'opposto dell'altro, in segno (quindi, se z_1 è una radice, anche $z_2 = -z_1$ lo è). ■

Esercizio 4.6.7. Usando la sostituzione $z = x + iy$ risolvere le seguenti:

$$iz^2 - 2z + 3i = 0, \qquad z^2 + z\overline{z} - 2 + i = 0.$$

[8] Per definizione, una radice a del polinomio $p(x)$ ha *molteplicità* m se l'equazione $p(x) = 0$ ha m soluzioni coincidenti uguali ad a.

Esercizio 4.6.8. Risolvere le seguenti equazioni:

1. $z^2 + z + 1 = 0; \quad z^2 - 6z + 5 - 4i = 0;$
2. $iz^2 + 2z - 2 = 0; \quad iz^2 - 2z + 3i = 0;$
3. $z^4 - (1+i)z^2 + i = 0$
   Suggerimento. Porre $z^2 = w$... risolvere e poi estrarre la radice quadrata complessa di w.

4.7 Approfondimenti: spazio vettoriale

Ricordiamo preliminarmente che un *campo* (numerico) è un insieme K che soddisfa le seguenti proprietà:

- (K0) I numeri 0 e 1 sono elementi di K.
- (K1) Se $x, y \in K$, allora $x + y$ e xy sono elementi di K.
- (K2) Se $x \in K$, allora $-x$ è elemento di K; se inoltre $x \neq 0$, allora anche x^{-1} è elemento di K.

Notare che sia $\mathbb{R}$ che $\mathbb{C}$ sono entrambi campi. Lo stesso è vero per $\mathbb{Q}$.

Definizione 4.7.1 (Spazio Vettoriale su K)**.** Sia K un campo. Si chiama spazio vettoriale su K un insieme di 'oggetti' V che si possono sommare tra loro e moltiplicare per elementi di K in modo tale che la somma di elementi di V sia un elemento di V, che il prodotto di un elemento di V con un elemento di K sia un elemento di V, e che valgano le seguenti proprietà:

1. Si ha
$$(u + v) + w = u + (v + w) \qquad \forall\, u, v, w \in V.$$
2. Esiste un elemento di V, indicato con $\mathbf{0}$, tale che
$$\mathbf{0} + u = u + \mathbf{0} = u \qquad \forall\, u \in V.$$
3. Per ogni $u \in V$ l'elemento $-u := (-1)u$ è tale che
$$u + (-1)u = \mathbf{0}.$$

4. Per ogni $u, v \in V$ si ha
$$u + v = v + u.$$

5. Per ogni $u, v \in V$ e per ogni $c \in K$ si ha $c(u + v) = cu + cv$.

6. Per ogni $a, b \in K$ e per ogni $u \in V$ si ha $(a + b)u = au + bu$.

7. Per ogni $a, b \in K$ e per ogni $u \in V$ si ha $(ab)u = a(bu) = abu$.

8. Per ogni $u \in V$ si ha $1u = u$.

Non daremo esempi "strani" di spazi vettoriali, ma solo i più importanti ed elementari, che sono lo spazio $\mathbb{R}^n$ (è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$) e lo spazio $\mathbb{C}^n$ (è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$). Notare che $\mathbb{R}^n$ *non* è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Invece, si può vedere che $\mathbb{C}^n$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.
D'ora in poi, assumeremo implicitamente che $K = \mathbb{R}$ e che $V = \mathbb{R}^n$: ciò al solo scopo di "esemplificare" le cose.

Terminiamo questa sezione, con alcune definizioni fondamentali che vedrete sviluppate nel corso di Algebra e Geometria.

Definizione 4.7.2 (Combinazione Lineare in V)**.** Siano $v_1, ..., v_n \in V$ e siano $k_1, ..., k_n \in K$. Si dice che l'elemento di V

$$k_1 v_1 + ... + k_n v_n$$

è *combinazione lineare* di $v_1, ..., v_n$.

Definizione 4.7.3 (Sottospazio vettoriale)**.** Sia $W \subseteq V$. Si dice che W è un *sottospazio di* V se valgono le seguenti proprietà:

1. Se $v, w \in V$ allora $v + w \in W$.

2. Se $v \in V$ e se $c \in K$ allora $vv \in W$.

3. Si ha $\mathbf{0} \in W$.

Queste proprietà dicono che W è a sua volta uno spazio vettoriale su K.

Esempio 4.7.1 (Sottospazio vettoriale generato da un insieme di elementi)**.** Siano $v_1, ..., v_n \in V$. Allora l'insieme

$$\mathrm{span}_K\{v_1, ..., v_n\} := \{k_1 v_1 + ... + k_n v_n : k_1, ..., k_n \in K\}$$

è un sottospazio vettoriale di V.

Definizione 4.7.4 (Dipendenza e indipendenza lineare)**.** Siano $v_1, ..., v_n \in V$. Si dice che $v_1, ..., v_n$ sono *linearmente indipendenti* se l'unica combinazione lineare di essi che uguaglia il vettore nullo $\mathbf{0}$ è quella i cui coefficienti sono tutti nulli[9]. Inoltre, si dice che $v_1, ..., v_n$ sono *linearmente dipendenti* se esiste una combinazione lineare di essi, a coefficienti non tutti nulli, che uguaglia il vettore nullo[10] $\mathbf{0}$.

Definizione 4.7.5 (Sistema di generatori/Base di V)**.** Si dice che gli elementi $v_1, ..., v_n \in V$ generano V se ogni elemento di V si può scrivere come una combinazione lineare (a coefficienti in K) degli elementi $v_1, ..., v_n$. Si dice inoltre che $\{v_1, ..., v_n\} \subset V$ è una base di V se $v_1, ..., v_n$ sono linearmente indipendenti e generano V.

Definizione 4.7.6. Si dice che una base $\{v_1, ..., v_n\} \subset V$ è *ortogonale* se

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_i^j \qquad \forall\, i, j = 1, ..., n,$$

dove la 'funzione' *delta di Kronecker* δ_i^j è definita come segue:

$$\delta_i^j = 0 \quad \text{se} \quad i \neq j \quad \text{e} \quad \delta_i^j = 1 \quad \text{se} \quad i = j.$$

Si dice infine che una base ortogonale $\{v_1, ..., v_n\} \subset V$ è *ortonormale* se si ha $\|v_i\| = 1$ per ogni $i = 1, ..., n$.

Esempio 4.7.2 (Base canonica di $\mathbb{R}^n$)**.** Si pone

$$\mathbf{e}_i := (0, ..., 0, \underbrace{1}_{i-esimo\, posto}, 0, ..., 0).$$

L'insieme di vettori $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 4.7.7 (Dimensione)**.** la dimensione di uno spazio vettoriale V è la cardinalità di una sua base, ovvero è il numero di vettori che la compongono.

Esempio 4.7.3. La dimensione di $\mathbb{R}^n$ è n. La dimensione di $\mathbb{C}^n$ come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ è n. La dimensione di $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ è 2.
La dimensione di $\mathbb{C}^n$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ è $2n$.

[9] Ossia, se $a_1 v_1 + ... + a_n v_n = \mathbf{0}$ con $a_1, ..., a_n \in K$, allora $a_1 = ... = a_n = 0$.
[10] Ossia, esistono $a_1, ..., a_n \in K$, non tutti nulli, tali che $a_1 v_1 + ... + a_n v_n = \mathbf{0}$.

4.7.1 Applicazioni lineari, matrici e forme quadratiche

Siano V, W spazi vettoriali sul campo K.

Definizione 4.7.8. Si chiama *applicazione lineare* di V in W ogni funzione $L : V \to W$ tale che per ogni $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ e per ogni $v_1, v_2 \in V$ si ha

$$L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2).$$

Per semplicità, assumiamo $K = \mathbb{R}$ e identifichiamo V con $\mathbb{R}^n$ e W con $\mathbb{R}^m$.
La teoria delle applicazioni lineari è l'argomento principale dell'Algebra Lineare. In particolare, osserviamo che esiste un legame fondamentale tra le applicazioni lineari e le matrici. Denotiamo con $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ delle matrici $m \times n$, dove

$$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \iff A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Le $m \times n$ entrate $a_{i,j}$ di A $(i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n)$ sono numeri in $\mathbb{R}$.

Un'operazione elementare che lega matrici di $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a vettori in $V \cong \mathbb{R}^n$ è la seguente:

Prodotto riga$\times$colonna. Siano $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ e $v \in \mathbb{R}^n$. S pone

$$A \cdot v = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}v_1 + a_{1,2}v_2 + ... + a_{1,n}v_n \\ a_{2,1}v_1 + a_{2,2}v_2 + ... + a_{2,n}v_n \\ \vdots \\ a_{m,1}v_1 + a_{m,2}v_2 + ... + a_{m,n}v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Si osservi che il prodotto appena definito consente di associare ad ogni matrice un'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definita come

$$L_A(v) := A \cdot v.$$

Osservazione 4.7.1. *Ad ogni applicazione lineare corrisponde una matrice* $A_L \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *e viceversa.*

Un'altra nozione collegata a queste e di notevole importanza è quella di *forma quadratica* in uno spazio vettoriale V su K. Ne diamo la definizione nel caso $V = \mathbb{R}^n$ e $K = \mathbb{R}$.

Si dice che la matrice A è *simmetrica* se

$$a_{i,j} = a_{j,i} \quad \forall\, i, j = 1, ..., n.$$

Definizione 4.7.9. Una forma quadratica reale associata ad una matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ è un applicazione $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita come

$$q(x) \stackrel{def.}{=} \langle A \cdot x, x \rangle \qquad \forall\, x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Esplicitamente, q è il polinomio omogeneo di secondo grado dato da

$$q(x) = \sum_{i,j=1,...,n} a_{i,j} x_j x_i.$$

È di grande importanza la *classificazione delle forme quadratiche.*

Definizione 4.7.10. Una forma quadratica q si dice:

1. *definita positiva* se $q(x) = \langle A \cdot x, x \rangle > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;
2. *definita negativa* se $q(x) = \langle A \cdot x, x \rangle < 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;
3. *semidefinita positiva* se $q(x) = \langle A \cdot x, x \rangle \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$ ed è nulla anche per vettori non nulli;
4. *semidefinita negativa* se $q(x) = \langle A \cdot x, x \rangle \leq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$ ed è nulla anche per vettori non nulli;
5. *indefinita* se $q(x)$ non è né definita, né semi-definita

Esempio 4.7.4. Una forma quadratica di $\mathbb{R}^2$ è un polinomio omogeneo di secondo grado del tipo

$$q(x, y) = ax^2 + cxy + by^2.$$

Sia ora

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$$

una matrice reale e simmetrica. Allora è evidente che

$$q(x, y) = \left\langle \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Osserviamo che il determinante di A, in questo caso, è l'espressione

$$\det A = ab - c^2.$$

Nel caso delle matrici 2×2 c'è un criterio molto semplice che consente una classificazione completa delle forme quadratiche.

Osservazione 4.7.2 (Classificazione delle forme quadratiche $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)**.** Sia $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica associata ad A. Vale il seguente risultato:

1. q è definita positiva se $a > 0$ e $\det A > 0$;
2. q è definita negativa se $a < 0$ e $\det A > 0$;
3. q è semi-definita positiva se $a, c \geq 0$ e $\det A = 0$;
4. q è semi-definita negativa se $a, c \leq 0$ e $\det A = 0$;
5. q è indefinita se $\det A < 0$.

In seguito, nel capitolo 13, mostreremo come queste ultime nozioni siano di grande interesse quando si vogliano studiare gli estremi di una funzione di due o più variabili. ■

Capitolo 5

Topologia della “retta euclidea” ($\mathbb{R}$)

5.1 Intervalli

Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Si pone per definizione

$$]a, b[\overset{def.}{=} \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

$$[a, b[\overset{def.}{=} \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \quad]a, b] \overset{def.}{=} \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},$$
$$[a, b] \overset{def.}{=} \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Queste notazioni individuano, rispettivamente, un *intervallo aperto*, *semiaperto* (a *ds* e a *sn*) e *chiuso*.

Se uno degli “estremi” è $\pm\infty$ (cioè $a = -\infty$ o $b = +\infty$) si pone:

$$]a, +\infty[\overset{def.}{=} \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, \quad]-\infty, a[\overset{def.}{=} \{x \in \mathbb{R} : x < a\},$$

$$[a, +\infty[\overset{def.}{=} \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, \quad]-\infty, a] \overset{def.}{=} \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\},$$
$$]-\infty, +\infty[\overset{def.}{=} \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}.$$

Questi ultimi sono tutti intervalli illimitati.

Se $x_0 \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$, si pone

$$B(x_0, \rho) \stackrel{def.}{=}]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$$

e si chiama[1] *intorno aperto di* x_0 di raggio $\rho \in \mathbb{R}_+$.

La famiglia degli intorni aperti di x_0 si denota come

$$\mathscr{U}_{x_0} \stackrel{def.}{=} \{]x_0 - \rho, x_0 + \rho[\, : \rho > 0 \} \, .$$

5.2 Punti di accumulazione, isolati e aderenti

Definizione 5.2.1. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Si dice che x_0 è un *punto di accumulazione* di A se per ogni $W \in \mathscr{U}_{x_0}$ si ha

$$A \setminus \{x_0\} \cap W \neq \varnothing.$$

Ossia se

$$(A \setminus \{x_0\}) \cap]x_0 - \rho, x_0 + \rho[\, \neq \varnothing \quad \forall \, \rho > 0.$$

L'insieme dei punti di accumulazione di A si chiama *derivato* di A; si scrive $D(A)$ per indicarlo. Per definizione, si pone $D(\varnothing) = \varnothing$. Se $x \in A$ e $x \notin D(A)$ si dice che x è un *punto isolato*.

Si osservi che, in generale, $D(A) \neq A$.

Lemma 5.2.1. *Se $A \subsetneq \mathbb{R}$ è un insieme finito, allora $D(A) = \varnothing$.*

Dimostrazione. Se $A = \varnothing$ non c'è nulla da dimostrare (infatti, per definizione, si è posto $D(\varnothing) = \varnothing$). Sia allora $A = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ (e li assumiamo tutti diversi tra loro). Vogliamo vedere che nessuno $z \in \mathbb{R}$ è punto di accumulazione per A, ossia che

$$z \notin D(A), \quad \forall \, z \in \mathbb{R}.$$

Ci sono solo due casi da analizzare.

(Caso 1) *Assumiamo che $z \in \mathbb{R} \setminus A$.* Ossia, $z \neq x_j$ per ogni $j = 1, ..., p$.
In questo caso, per definizione, poniamo

$$\rho := \{|z - x_j| : j = 1, ..., p\}.$$

[1] Al posto di "intorno aperto" si usa la terminologia "palla aperta"; cfr. Sezione 13.2.

Questo numero è positivo (essendo il minimo di un insieme finito di numeri –strettamente– positivi; notare che $|z - x_j| = 0$ solo se $z = x_j$ che è escluso dall'ipotesi $z \in \mathbb{R} \setminus A$). Inoltre, per costruzione, si ha

$$(A \setminus \{z\}) \cap]z - \rho, z + \rho[= \varnothing,$$

che è quanto volevamo dimostrare[2].

(Caso 2) *Assumiamo che $z \in A$.* Non lede la generalità supporre $z = x_1$. Poniamo

$$\rho := \{|x_1 - x_j| : j = 2, ..., p\}.$$

Si ha chiaramente $\rho > 0$ (visto che stiamo assumendo che tutti i punti $x_j \in A$ sono diversi tra loro). Con un ragionamento analogo a quello precedente, si vede che l'intorno aperto $B(x_1, \rho)$ di x_1 di raggio ρ esclude automaticamente qualsiasi altro punto di A, ossia soddisfa

$$\underbrace{(A \setminus \{x_1\})}_{=\{x_2,...,x_p\}} \cap \underbrace{]x_1 - \rho, x_1 + \rho[}_{=B(x_1,\rho)} = \varnothing.$$

Ciò conclude la dimostrazione.

□

Dal Lemma 5.2.1 segue subito la prossima

Proposizione 5.2.1. *Se $A \subseteq \mathbb{R}$ e $D(A) \neq \varnothing$ allora A è infinito.*

(Per dimostrarlo, basta "negare" il Lemma 5.2.1.) Notare che quest'ultima

è solo una condizione necessaria.

Esempio 5.2.1. $\mathbb{N}$ è infinito ma $D(\mathbb{N}) = \varnothing$.

Proposizione 5.2.2. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora*

$$x_0 \in D(A) \iff \exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{x_0\} : x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0.$$

Quest'ultima proposizione (di cui omettiamo la dimostrazione) si dimostra mediante l'assioma della scelta.

[2] In altre parole, se si prende ρ nel modo fatto, si vede che l'intorno di z di raggio ρ $B(z, \rho) =]z - \rho, z + \rho[$ esclude qualsiasi altro possibile punto di A.

Teorema 5.2.1. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, A infinito e limitato. Allora $D(A) \neq \varnothing$.*

Dimostrazione. Se A è infinito allora esiste $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tale che $x_n \neq x_m$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$. Poiché A è limitato si ha che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata. Il teorema di Bolzano-Weierstrass implica che esiste $\{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che

$$x_{k_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0 \in \mathbb{R}.$$

Se $x_{k_n} \neq x_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora $\{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ e converge ad x_0. Pertanto $x_0 \in D(A)$.

Invece se $x_{k_p} = x_0$ per un certo $p \in \mathbb{N}$, si ha che $\{x_{k_{n+p}}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ e $x_{k_{n+p}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$. Infatti $x_{k_n} \neq x_{k_p}$ per ogni $n \neq p$.

In ogni caso $\exists\, x_0 \in D(A)$. □

Definizione 5.2.2. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora x_0 è detto *aderente* ad A se

$$A \cap W \neq \varnothing \quad \forall\, W \in \mathscr{U}_{x_0}.$$

Ciò vuol dire che

$$A \cap \,]x_0 - \rho, x_0 + \rho[\, \neq \varnothing \quad \forall\, \rho > 0.$$

Si dice *chiusura* di A, $\bar{A}$, l'insieme dei punti aderenti ad A, cioè

$$\bar{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ è aderente ad } A\}.$$

Per convenzione, $\overline{\varnothing} = \varnothing$.

Segue subito dalle definizioni che $D(A) \subseteq \bar{A}$. Inoltre si ha $A \subseteq \bar{A}$.

Proposizione 5.2.3. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Allora $\bar{A} = A \cup D(A)$.*

Dimostrazione. Si ha $\bar{A} \supseteq A$ e $\bar{A} \supseteq D(A)$. Pertanto $\bar{A} \supseteq A \cup D(A)$. Dimostriamo l'opposta inclusione. Ossia

$$x_0 \in A \cup D(A) \quad \forall\, x_0 \in \bar{A}.$$

Se $x_0 \in A$ ovvio. Allora sia $x_0 \in \bar{A} \setminus A$. Segue che

$$A \cap W \neq \varnothing \quad \forall W \in \mathscr{U}_{x_0}.$$

Pertanto $(A \setminus \{x_0\}) = A$ e

$$A \setminus \{x_0\} \cap W \neq \varnothing \quad \forall W \in \mathscr{U}_{x_0}.$$

Ossia $x_0 \in D(A)$. □

Proposizione 5.2.4. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora*

$$x_0 \in \bar{A} \iff \exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A : x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0.$$

Dimostrazione. Come nel caso della Proposizione 5.2.2 la omettiamo. Osserviamo solo che anche questa dimostrazione richiede l'uso dell'assioma della scelta. $\square$

5.3 Insiemi aperti e chiusi. Insiemi compatti

Definizione 5.3.1. $A \subseteq \mathbb{R}$ è *chiuso* se $A = \bar{A}$.

Per quanto visto $A = \bar{A} \iff D(A) \subseteq A$.

Proposizione 5.3.1. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Le seguenti sono equivalenti:*

1) *A è chiuso;*

2) *Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ e $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$ allora $x_0 \in A$.*

Dimostrazione. 1) $\Rightarrow$ 2). Sia $A = \bar{A}$; sia $\{x_n\} \subseteq A$, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0 \in \mathbb{R}$. Per la Proposizione 5.2.4 deve essere $x_0 \in \bar{A}$. Ma $A = \bar{A}$; allora $x_0 \in A$.

2) $\Rightarrow$ 1). Se ogni successione di punti di A converge ad un punto di A (cioè, la 2) è vera) allora dimostriamo che $A = \bar{A}$.
Per assurdo, sia $A \neq \bar{A}$. Allora esiste $x_0 \in \bar{A} \setminus A$ e per la Proposizione 5.2.4

$$\exists \{x_n\} \subseteq A,\ x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0 \in \mathbb{R}.$$

Usando l'ipotesi (cioè che ogni successione in A converge ad un punto di A) ne segue un assurdo. $\square$

Definizione 5.3.2 (Compatto)**.** Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. A è detto *compatto* se da ogni successione di punti di A si può estrarre una sotto-successione convergente ad un punto di A. Cioè

$$A \text{ compatto} \iff \begin{cases} \forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \quad \exists \{x_{k_n}\} \text{ sotto-successione di } \{x_n\} \\ \exists\, x_0 \in A \text{ e si ha } \lim_{n\to+\infty} x_{k_n} = x_0. \end{cases}$$

Teorema 5.3.1. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Allora:*

$$A \text{ compatto} \iff A \text{ chiuso e limitato.}$$

Dimostrazione. ($1 \Rightarrow 2$). Sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$, $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0$. Dato che per ipotesi A è compatto

$$\exists\, \{x_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{e} \quad x_{k_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} y_0 \in A.$$

Ma $x_{k_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0$ (infatti, se $\{x_n\}$ converge allora ogni estratta ha lo stesso limite). Quindi $x_0 = y_0 \in A$, ossia A è chiuso.

Inoltre A è limitato perché altrimenti esisterebbe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tale che $\lim_{n \to +\infty} |x_n| = +\infty$. Per la compattezza di A possiamo estrarre una sotto-successione $\{x_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente ad un punto di A. Ma ciò è assurdo perché $|x_{k_n}| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ (cioè diverge).

($2 \Rightarrow 1$). Se A è chiuso e limitato dobbiamo vedere che A è compatto, ossia, data $\{x_n\}$ dobbiamo estrarre una sotto-successione convergente ad un $x_0 \in A$. Dato che A è limitato, lo è anche $\{x_n\}$. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass esistono $\{x_{k_n}\}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ con $x_{k_n} \to x_0$. Per la Proposizione 5.2.4 si ha $x_0 \in \bar{A}$. Ma $\bar{A} = A$. Cioè, $x_0 \in A$. □

Definizione 5.3.3. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che x_0 è *interno* ad A se esiste $\rho > 0$ tale che $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[\subseteq A$. Inoltre $A \subseteq \mathbb{R}$ è detto *aperto* se ogni suo punto è interno ad A.

Per convenzione, l'insieme $\varnothing$ è aperto.

Talvolta si scrive $\mathring{A}$ per indicare l'insieme dei punti *interni* di A. In altre parole, A è aperto $\iff A = \mathring{A}$.

Osservazione 5.3.1. $\mathbb{R}$, $\varnothing$ sono entrambi insiemi chiusi ed aperti. ■

Teorema 5.3.2. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Allora*

$$A \text{ aperto} \iff \mathbb{R} \setminus A \text{ è chiuso.}$$

Dimostrazione. Facoltativa. Se A non è aperto esiste $x_0 \in A$ tale che x_0 non è interno ad A. Pertanto

$$]x_0 - \rho, x_0 + \rho[\cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \varnothing \quad \forall\, \rho > 0$$

e quindi $x_0 \in \overline{\mathbb{R} \setminus A}$. Ciò prova che $\mathbb{R} \setminus A$ non è chiuso dato che $x_0 \notin \mathbb{R} \setminus A$.

Viceversa, se $\mathbb{R} \setminus A$ non è chiuso si ha che

$$\exists\, x_0 \in \overline{\mathbb{R} \setminus A} \setminus (\mathbb{R} \setminus A).$$

Ossia

$$(\mathbb{R} \setminus A) \cap \,]x_0 - \rho, x_0 + \rho[\, \neq \varnothing \quad \forall\, \rho > 0$$

e $x_0 \in A$. Allora $x_0 \in A$ e x_0 non è interno ad A. Pertanto A non è aperto. $\square$

Capitolo 6

Limiti per funzioni $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

6.1 Definizioni

Definizione 6.1.1 (Intorno di ∞)**.** Si dice *intorno di* $+\infty$ ogni insieme del tipo $]k, +\infty[$ con $k \in \mathbb{R}$. Si dice *intorno di* $-\infty$ ogni insieme del tipo $]-\infty, k[$ con $k \in \mathbb{R}$. Si pone $\mathscr{U}_{+\infty}$ e $\mathscr{U}_{-\infty}$ per indicare la famiglia degli intorni di $+\infty$ e $-\infty$, rispettivamente.

D'ora in poi si intenderà che se $A \subseteq \mathbb{R}$, allora

$$\sup A = +\infty \iff +\infty \in D(A),$$

$$\inf A = -\infty \iff -\infty \in D(A).$$

Si osservi che

$$\lambda \in \overline{\mathbb{R}} \iff \begin{array}{l} 1)\ \lambda \in \mathbb{R} \\ 2)\ \lambda = +\infty. \\ 3)\ \lambda = -\infty \end{array}$$

Definizione 6.1.2. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$, $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$. Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$. Per definizione, *$f(x)$ tende a λ per x che tende a x_0*

$$\overset{def.}{\iff} \boxed{\forall\, V \in \mathscr{U}_\lambda \quad \exists\, W \in \mathscr{U}_{x_0} : f(x) \in V \quad \forall\, x \in A \setminus \{x_0\} \cap W}.$$

In tal caso si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda,$$

oppure si usano le scritture equivalenti $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \lambda$ o $f(x) \to \lambda$ per $x \to x_0$. Inoltre, se ciò avviene si dice che λ è il *limite di f per $x \to x_0$*.

Supponiamo che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda$.

1) Siano $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora $\mathscr{U}_\lambda = \{]\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon[\,:\, \varepsilon > 0\}$, $\mathscr{U}_{x_0} = \{]x_0-\delta, x_0+\delta[\,:\, \delta > 0\}$. Perciò

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 : f(x) \in \,]\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon[\\ \forall\, x \in \,]x_0-\delta, x_0+\delta[\cap (A \setminus \{x_0\}) \end{cases}$$

$$\iff \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 : \forall\, x \in A \setminus \{x_0\} \; (|x-x_0| < \delta \implies |f(x)-\lambda| < \varepsilon)$$

oppure

$\iff \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0$ tale che $|f(x)-\lambda| < \varepsilon$ per ogni $x \in A \setminus \{x_0\}$, $|x-x_0| < \delta$.

2) Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\lambda = +\infty$ si ha

$$\mathscr{U}_\lambda = \mathscr{U}_{+\infty} = \{]k, +\infty[\,:\, k \in \mathbb{R}\} \quad \mathscr{U}_{x_0} = \{]x_0-\delta, x_0+\delta[\,:\, \delta > 0\}\,.$$

Pertanto

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff \begin{cases} \forall\, k \in \mathbb{R} \;\exists\, \delta > 0 : f(x) > k \\ \forall\, x \in (A \setminus \{x_0\}),\; |x-x_0| < \delta \end{cases}$$

oppure

$$\iff \forall\, k \in \mathbb{R} \;\exists\, \delta > 0 : \forall\, x \in A \setminus \{x_0\} \;\; (|x-x_0| < \delta \implies f(x) > k)\,.$$

3) Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\lambda = -\infty$ si ha

$$\mathscr{U}_\lambda = \mathscr{U}_{-\infty} = \{]-\infty, k[\,:\, k \in \mathbb{R}\}$$

Pertanto

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \iff \begin{cases} \forall\, k \in \mathbb{R} \;\exists\, \delta > 0 : f(x) < k \\ \forall\, x \in (A \setminus \{x_0\}),\; |x-x_0| < \delta \end{cases}$$

oppure

$$\iff \forall\, k \in \mathbb{R} \;\exists\, \delta > 0 : \forall\, x \in A \setminus \{x_0\} \;\; (|x-x_0| < \delta \implies f(x) < k)\,.$$

4) $x_0 = +\infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora $\mathscr{U}_\lambda = \{]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[\, : \varepsilon > 0\}$,
$\mathscr{U}_{x_0} = \mathscr{U}_{+\infty} = \{]M, +\infty[\, : M \in \mathbb{R}\}$. Pertanto

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lambda \iff \begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, M \in \mathbb{R} : |f(x) - \lambda| < \varepsilon \\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ x > M \end{cases}$$

oppure

$$\iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, M \in \mathbb{R} : \forall\, x \in \mathbb{R}\ \left(x > M \implies |f(x) - \lambda| < \varepsilon\right).$$

5) $x_0 = -\infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$. $\mathscr{U}_{-\infty} = \mathscr{U}_{x_0} = \{]-\infty, M[\, : M \in \mathbb{R}\}$. Pertanto

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lambda \iff \begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, M \in \mathbb{R} : |f(x) - \lambda| < \varepsilon \\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ x < M \end{cases}$$

oppure

$$\iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, M \in \mathbb{R} : \forall\, x \in \mathbb{R}\ \left(x < M \implies |f(x) - \lambda| < \varepsilon\right).$$

6) $x_0 = +\infty$, $\lambda = +\infty$. In tal caso

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \begin{cases} \forall\, k \in \mathbb{R}\ \exists\, M \in \mathbb{R} : f(x) > k \\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ x > M \end{cases}$$

oppure

$$\iff \forall\, k \in \mathbb{R}\ \exists\, M \in \mathbb{R} : \forall\, x\ \left(x > M \implies f(x) > k\right).$$

Esercizio 6.1.1. Riformulare le definizioni nei restanti casi, cioè

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty,\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty,\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

6.2 Teoremi sui limiti

Teorema 6.2.1. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e siano $x_0 \in D(A)$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$. Se esistono λ, $\mu \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \quad e \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \mu$$

allora $\lambda = \mu$.

Il precedente è detto, ovviamente, teorema di *unicità del limite*.

Dimostrazione. Occorre il seguente:

Lemma 6.2.1. *Siano λ, $\mu \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora*

$$\exists\, V \in \mathscr{U}_\lambda,\, W \in \mathscr{U}_\mu : V \cap W = \varnothing.$$

Dimostrazione del Lemma 6.2.1. Se $\lambda < \mu$ allora basta porre[1]

$$V = \left]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon\right[, W = \left]\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon\right[$$

con $0 < \varepsilon < \dfrac{\mu - \lambda}{2}$.

Gli altri casi sono simili e li omettiamo. □

Per assurdo, sia $\lambda \neq \mu$. Allora (per il Lemma 6.2.1)

$$\exists\, V \in \mathscr{U}_\lambda, \exists\, W \in \mathscr{U}_\mu : V \cap W = \varnothing.$$

Si noti che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda \iff \exists\, U_1 \in \mathscr{U}_{x_0} : f(x) \in V \quad \forall\, x \in (A \setminus \{x_0\}) \cap U_1$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = \mu \iff \exists\, U_2 \in \mathscr{U}_{x_0} : f(x) \in W \quad \forall\, x \in (A \setminus \{x_0\}) \cap U_2$. Pertanto

$$f(x) \in V \cap W \quad \forall\, x \in (A \setminus \{x_0\}) \cap (U_1 \cap U_2).$$

Questo è assurdo. Infatti, $U_1 \cap U_2 \in \mathscr{U}_{x_0}$; inoltre, dato che

$$x_0 \in D(A) \iff (A \setminus \{x_0\}) \cap (U_1 \cap U_2) \neq \varnothing,$$

si ha che $V \cap W \neq \varnothing$, ma ciò contraddice il fatto che $V \cap W = \varnothing$. □

Proposizione 6.2.1 ("Località" del limite)**.** *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$, dove s'intende che $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, e $f, g\colon A \to \mathbb{R}$. Se esiste $\widetilde{W} \in \mathscr{U}_{x_0}$ tale che*

$$f(x) = g(x) \quad \forall\, x \in \widetilde{W} \cap (A \setminus \{x_0\})$$

ed esiste $\lim_{x\to x_0} f(x)$*, allora esiste* $\lim_{x\to x_0} g(x)$ *e* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$.

[1] Osservare che $\frac{\lambda+\mu}{2}$ è il *punto medio* tra λ e μ. Inoltre, se $\lambda < \mu$, allora la *distanza* tra i punti λ e μ è $\mu - \lambda$. Se pertanto si sceglie $\varepsilon := \frac{\mu-\lambda}{2}$, si ha sicuramente quanto voluto.

Dimostrazione. Si ha $\lambda = \lim_{x\to x_0} f(x) \iff$

$$\forall\, V \in \mathscr{U}_\lambda\ \exists\, \widetilde{\widetilde{W}} \in \mathscr{U}_{x_0} : \forall\, x \in A \setminus \{x_0\}\ \left(x \in \widetilde{\widetilde{W}} \implies f(x) \in V\right).$$

Pertanto, posto $W = \widetilde{W} \cap \widetilde{\widetilde{W}}$, si ha $f(x) = g(x)$ su W (e su $W \cap (A \setminus \{x_0\})$). Dunque

$$\begin{aligned} &\forall\, V \in \mathscr{U}_\lambda\ \exists\, W \in \mathscr{U}_{x_0} : \forall\, x \in A \setminus \{x_0\}\ (x \in W \implies g(x) \in V) \\ \iff &\lim_{x\to x_0} g(x) = \lambda \end{aligned}$$ □

Esempio 6.2.1. Sia

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

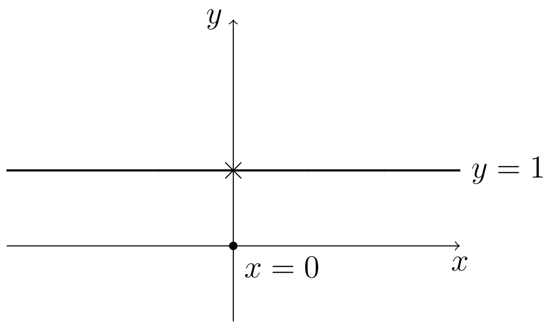


Figura 6.1: Grafico della funzione g

Si ha $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$. Infatti $g(x) = 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Proposizione 6.2.2 (Limite di restrizioni)**.** *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$ ($x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$) ed $f\colon A \to \mathbb{R}$. Siano $B \subseteq A$ e $x_0 \in D(B)$. Sia $f_{|B}$ la "restrizione" di f a B, cioè*

$$f_{|B}\colon B \to \mathbb{R}, \quad f_{|B}(x) = f(x) \quad \forall\, x \in B.$$

Allora se esiste $\lim_{x\to x_0} f(x)$, esiste anche $\lim_{x\to x_0} f_{|B}(x)$ (che è il limite della restrizione di f a B). Inoltre, tali limiti coincidono, cioè

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f_{|B}(x).$$

Dimostrazione. Sia $\lambda = \lim_{x\to x_0} f(x)$. Allora

$$\forall\, V \in \mathscr{U}_\lambda\ \exists\, W \in \mathscr{U}_{x_0} : \forall\, x \in A \setminus \{x_0\}\ \ (x \in W \implies f(x) \in V)\,.$$

Tuttavia

$$B \subseteq A \implies \forall\, V \in \mathscr{U}_\lambda\ \exists\, W \in \mathscr{U}_{x_0} : \forall\, x \in B\setminus\{x_0\}\ \big(x \in W \implies f_{|B}(x) \in V\big)\,.$$

□

Limite destro e sinistro

Se $A := \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ e $B =]x_0, +\infty[$, oppure $B =]-\infty, x_0[$, allora *limite destro* (ds) e *limite a sinistro* (sn) di f in x_0 sono definiti ponendo[2]

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) := \lim_{x\to x_0} f_{|]x_0,+\infty[}(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) := \lim_{x\to x_0} f_{|]-\infty,x_0[}(x).$$

Segue dalla proposizione precedente che se esiste $\lim_{x\to x_0} f(x)$ allora esistono $\lim_{x\to x_0^\pm} f(x)$ ed i limiti ds e sn coincidono.

Notare, ad esempio, che

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lambda \in \mathbb{R} \iff$$

$$\forall\, V \in \mathscr{U}_\lambda\ \exists\, \delta > 0 : \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}\ \ (x_0 < x < x_0 + \delta \implies f(x) \in V)\,.$$

Più semplicemente, il limite ds si definisce equivalentemente come segue:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : (x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - \lambda| < \varepsilon)\,.$$

N.B. Per quanto riguarda il limite sn, sempre nel caso $\lambda \in \mathbb{R}$, nella definizione precedente si deve usare un intorno sn di x_0, ossia $x_0 - \delta < x < x_0$. Questa è l'unica modifica da fare.

[2] Più in generale, posto $A^+_{x_0} := A\cap]x_0, +\infty[$ e $A^-_{x_0} := A\cap] - \infty, x_0[$, si definiscono i *limiti ds* e *sn* di f in x_0 come

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) := \lim_{x\to x_0} f_{A^+_{x_0}}(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) := \lim_{x\to x_0} f_{A^-_{x_0}}(x).$$

Esempi. (Importante)

1. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) \overset{def.}{=} \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$.

   Si ha
   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1.$$
   Pertanto
   $$\nexists \lim_{x\to 0} f(x).$$

2. Sia $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) \overset{def.}{=} \dfrac{1}{x}$. Si ha
   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty.$$
   Pertanto
   $$\nexists \lim_{x\to 0} f(x).$$

Teorema 6.2.2. *Siano* $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$, $\lambda, x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$. *Si ha*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda \iff \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lambda \quad \forall\, \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A\setminus\{x_0\},\ x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0.$$

E' un teorema fondamentale che riconduce il concetto di "limite per una funzione" a quello di "limite di successione".

Dimostrazione. Facoltativa. $(1 \Rightarrow 2)$. Sia $\lambda = \lim_{x\to x_0} f(x)$ e sia $\{x_n\} \subseteq A\setminus\{x_0\}$ tale che $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$. Allora

$$\forall\, V \in \mathscr{U}_\lambda\ \exists\, W \in \mathscr{U}_{x_0} : \forall\, x \in A\setminus\{x_0\}\ (x \in W \implies f(x) \in V)$$

ed

$$\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall\, n \in \mathbb{N}\ (n > \bar{n} \implies x_n \in W).$$

Essendo

$$x_n \in A\setminus\{x_0\} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

segue che

$$x_n \in (A\setminus\{x_0\}) \cap W \quad \forall\, n > \bar{n}.$$

Ossia

$$f(x_n) \in V \quad \forall\, n > \bar{n}.$$

Cioè

$$\forall\, V \in \mathscr{U}_\lambda \;\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall\, n \in \mathbb{N}\; (n > \bar{n} \implies f(x_n) \in V)$$

(notare che se $V = \left]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon\right[$ si ottiene l'"usuale" definizione di limite della successione $f(x_n)$).

($2 \Rightarrow 1$). Sia $f(x_n) \to \lambda$, $n \to +\infty$, per una qualsiasi $\{x_n\} \subseteq A \setminus \{x_0\}$, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$. Ragioniamo per assurdo. Allora (*per negazione*) si ha

$$\exists\, V \in \mathscr{U}_\lambda : \forall\, W \in \mathscr{U}_{x_0} \;\exists\, x \in (A \setminus \{x_0\}) \cap W \;\text{ e }\; f(x) \notin V. \tag{6.1}$$

Sia quindi

$$W_n \overset{def.}{=} \begin{cases} \left]x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right[& \text{se } x_0 \in \mathbb{R} \\ \left]n, +\infty\right[& \text{se } x_0 = +\infty \\ \left]-\infty, -n\right[& \text{se } x_0 = -\infty \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Sia inoltre $A_n \overset{def.}{=} \{x \in (A \setminus \{x_0\}) \cap W_n : f(x) \notin V\}$.
Per la (6.1) si ha

$$A_n \neq \varnothing \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Inoltre

$$A_n \subseteq A \setminus \{x_0\} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Per l'assioma della scelta

$$\exists\, x\colon \mathbb{N} \to A \setminus \{x_0\} \;:\; x_n \overset{def.}{=} x(n) \in A_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Ossia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ e

$$(x_n \in W_n \text{ e } f(x_n) \notin V)\; \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Quindi $x_n \to x_0$ e $f(x_n) \nrightarrow \lambda$. Ciò contraddice l'ipotesi. $\square$

Diamo, senza dimostrazione, il seguente *importantissimo*:

Teorema 6.2.3. *Siano* $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g\colon A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A) \cap \overline{\mathbb{R}}$. *Valgono le seguenti affermazioni.*

1) $$\left.\begin{aligned} f(x) &\xrightarrow[x\to x_0]{} \lambda \in \mathbb{R} \\ g(x) &\xrightarrow[x\to x_0]{} \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \implies \begin{cases} f(x)+g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \lambda+\mu & \textit{(somma)} \\ f(x)\cdot g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \lambda\cdot\mu & \textit{(prodotto)} \end{cases}.$$

   Se inoltre $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \lambda \in \mathbb{R}$, $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$, $g(x) \neq 0$ *in* $A \setminus \{x_0\}$, *allora*
   $$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} \frac{\lambda}{\mu}.$$

1)′ Casi $\pm\infty$. *Se f e g hanno limite $\pm\infty$, segni concordi, per $x \to x_0$ allora il limite della somma è $+\infty$ (o $-\infty$); il limite del prodotto è il prodotto dei limiti (il segno è dato dal prodotto dei segni).*

2) *Se* $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \pm\infty$, $f(x) \neq 0$ *in* $A \setminus \{x_0\}$, *allora*
   $$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$$
   Se $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$, $f(x) > 0$ (< 0) *in* $A \setminus \{x_0\}$, *allora*
   $$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty \ (-\infty).$$

3) *Se* $f(x) \leq g(x)$ *per ogni* $x \in A \setminus \{x_0\}$ *e se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *allora* $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.

3)′ *Se* $f(x) \leq g(x) \quad \forall\, x \in A\setminus\{x_0\}$ *e* $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} -\infty$ *allora* $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} -\infty$.

4) $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \lambda \implies |f(x)| \xrightarrow[x\to x_0]{} |\lambda|$.

N.B. Osservare che i "casi mancanti" corrispondono a *forme indeterminate* del tipo: $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, etc.

Teorema 6.2.4 (2 carabinieri)**.** *Siano* $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A) \cap \overline{\mathbb{R}}$, $f, g, h\colon A \to \mathbb{R}$. *Se esiste* $W \in \mathscr{U}_{x_0}$ *tale che*
$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \forall\, x \in (A \setminus \{x_0\}) \cap W$$
e se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, *allora* $\lim_{x\to x_0} h(x) = \lambda$.

Dimostrazione. Se $\lambda=\pm\infty$, la tesi segue dalle 3) e 3)$'$ del teorema precedente. Se $\lambda\in\mathbb{R}$, sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A\setminus\{x_0\}$, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$. Per ipotesi, si ha che $f(x_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\lambda$ e $g(x_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\lambda$. Inoltre, $x_n\xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$ implica che esiste $\bar{n}$ tale che $x_n\in(A\setminus\{x_0\})\cap W$ per ogni $n>\bar{n}$. Pertanto

$$f(x_n)\le h(x_n)\le g(x_n)\quad \forall\, n>\bar{n}.$$

Segue dal Teorema dei 2 carabinieri (per successioni) che $\lim_{n\to+\infty} h(x_n)=\lambda$. Ciò vale "per ogni" successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A\setminus\{x_0\}$, $x_n\to x_0$. La tesi segue dal Teorema 6.2.2. □

Teorema 6.2.5 (Cauchy)**.** *Siano $A\subseteq\mathbb{R}$, $x_0\in D(A)\cap\overline{\mathbb{R}}$, $f\colon A\to\mathbb{R}$. Sono equivalenti:*

1) $\exists\,\lambda\in\mathbb{R}:\lim_{x\to x_0} f(x)=\lambda$*;*

2) $\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,W\in\mathscr{U}_{x_0}:\forall\,x,y\in A\setminus\{x_0\}\;(x,y\in W\implies |f(x)-f(y)|<\varepsilon)$.

Notare che la condizione 2) si può scrivere, ad esempio, anche così

$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta:\forall\,x,y\in A\setminus\{x_0\}\;(x,y\in\,]x_0-\delta,x_0+\delta[\;\implies |f(x)-f(y)|<\varepsilon),$$

dove $]x_0-\delta,x_0+\delta[\,=$ è l'intorno di raggio δ di x_0.

Dimostrazione. 1) $\Rightarrow$ 2). Si ha

$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,W\in\mathscr{U}_{x_0}:|f(x)-\lambda|<\frac{\varepsilon}{2}\quad\forall\,x\in W\cap(A\setminus\{x_0\}).$$

Pertanto

$$\forall\,x,y\in W\cap(A\setminus\{x_0\})\quad\text{si ha}\quad |f(x)-f(y)|\le|f(x)-\lambda|+|\lambda-f(y)|<\cancel{2}\frac{\varepsilon}{\cancel{2}}=\varepsilon.$$

2) $\Rightarrow$ 1). Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A\setminus\{x_0\}$ di Cauchy e $x_n\xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$.
Per ipotesi

$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,W\in\mathscr{U}_{x_0}:\forall\,x,y\in A\setminus\{x_0\}\,(x,y\in W\implies |f(x)-f(y)|<\varepsilon).\quad(6.2)$$

Dato che $x_n\xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$ esiste $\bar{n}$ tale che $x_n\in W$ se $n>\bar{n}$. Pertanto la (6.2) implica che $|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$ per ogni $n,m>\bar{n}$. In altre parole, $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy. Per il Teorema 3.1.10 sulla completezza di $\mathbb{R}$ segue che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lambda$. La tesi seguirebbe non appena ciò fosse dimostrato per ogni altra successione $\{y_n\} \subseteq A \setminus \{x_0\}$, $y_n \to x_0$ (e questo in virtù del Teorema 6.2.2). Sia dunque

$$\{y_n\} \subseteq A \setminus \{x_0\} \quad \text{tale che} \quad y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0.$$

Deve dunque esistere $\bar{\bar{n}} \in \mathbb{N}$ tale che

$$n > \bar{\bar{n}} \implies y_n \in W \cap (A \setminus \{x_0\},$$

dove W è l'intorno nella condizione (6.2). Se $n > \max\{\bar{n}, \bar{\bar{n}}\}$ si deve avere che $x_n, y_n \in (A \setminus \{x_0\}) \cap W$ e per (6.2) si ha $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$. Pertanto $\lim_{n\to+\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0$. Dato che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lambda$ ne segue

$$\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \lambda$$

(e ciò dimostra l'"arbitrarietà" della tesi al variare di $\{y_n\}$). □

6.3 Limiti di funzioni monotone

Definizione 6.3.1. Siano $A \neq \varnothing$ e $f\colon A \to \mathbb{R}$. Si dice che f è *superiormente limitata* se è superiormente limitato l'insieme $f(A)$. Inoltre, si dice che f è *inferiormente limitata* se è inferiormente limitato l'insieme $f(A)$.
In simboli, nel primo caso si ha

$$\exists\, M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M \quad \forall\, x \in A.$$

Analogamente, nel secondo caso

$$\exists\, M \in \mathbb{R} : f(x) \geq M \quad \forall\, x \in A.$$

Infine, si dice che f è *limitata* se

$$\exists\, M > 0 \ : \ |f(x)| \leq M \quad \forall\, x \in A.$$

Notazione. Si pone

$$\sup_A f \overset{def.}{=} \sup(f(A)), \ \inf_A f = \inf(f(A)).$$

Osservazione 6.3.1. Si ha

$$\sup_A f = \lambda \iff \begin{array}{l} (1)\ f(x) \le \lambda \quad \forall\, x \in A; \\ (2)\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \bar{x} \in A : \lambda - \varepsilon < f(\bar{x}). \end{array}$$

Inoltre

$$\inf_A f = \mu \iff \begin{array}{l} (1)\ f(x) \ge \mu \quad \forall\, x \in A; \\ (2)\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \bar{x} \in A : \mu + \varepsilon > f(\bar{x}). \end{array}$$

Ovviamente

$$\sup_A f = +\infty \iff \forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, x \in A : f(x) > M,$$

$$\inf_A f = -\infty \iff \forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, x \in A : f(x) < M.$$

■

Se $f(A)$ ha max oppure min si pone

$$\max_A f = \max f(A) \quad \text{oppure} \quad \min_A f = \min f(A).$$

Si osservi che f ha max (o min) se e solo se:

$$\exists\, x_0 \in A \text{ tale che } f(x) \le f(x_0) \quad \forall\, x \in A$$

$$(\text{o } \exists\, x_0 \in A \text{ tale che } f(x) \ge f(x_0) \quad \forall\, x \in A).$$

Se ciò avviene

$$\max_A f = f(x_0) \quad (\text{o } \min_A f = f(x_0)).$$

Definizione 6.3.2 (Monotonia)**.** Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ ed $f\colon A \to \mathbb{R}$. Si dice che f è *monotona crescente* se

$$f(x) \le f(y) \quad \forall\, x, y \in A,\ x \le y.$$

Inoltre f è *monotona strettamente crescente* se

$$f(x) < f(y) \quad \forall\, x, y \in A,\ x < y.$$

N.B. Si dice che f è *monotona (strettamente) decrescente* se la precedente definizione vale con le disuguaglianze invertite.

Si usano le notazioni $f \nearrow$ ($\equiv f$ *crescente*) oppure $f \searrow$ ($\equiv f$ *decrescente*).

Teorema 6.3.1 (Limite per funzioni monotone)**.** *Siano* $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $f \nearrow$. *Allora valgono le seguenti:*

1) *se* $x_0 \in D\left(A \cap]x_0, +\infty[\,\right) \equiv D(A^+_{x_0})$ *allora esiste* $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ *e*
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \inf_{A\cap]x_0,+\infty[} f;$$
2) *se* $x_0 \in D\left(A \cap]-\infty, x_0[\,\right) \equiv D(A^-_{x_0})$ *allora esiste* $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ *e*
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \sup_{A\cap]-\infty,x_0[} f;$$
3) *Se* $+\infty \in D(A)$ *allora*
$$\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = \sup_A f;$$
4) *Se* $-\infty \in D(A)$ *allora*
$$\exists \lim_{x\to-\infty} f(x) = \inf_A f.$$

Se invece f *è monotona decrescente le stesse affermazioni valgono scambiando* inf *e* sup.

Omettiamo la dimostrazione che è basata sulle definizioni. Notiamo solo che il teorema appena enunciato è simile all'analogo risultato per successioni.

Osservazione 6.3.2. Si osservi che se $x_0 \in D(A^+_{x_0}) \cap D(A^-_{x_0})$ allora
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \le \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$
Inoltre, se $x_0 \in A$, si ha
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \le f(x_0) \le \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$
Se f è monotona decrescente tali affermazioni valgono con disuguaglianze invertite. ■

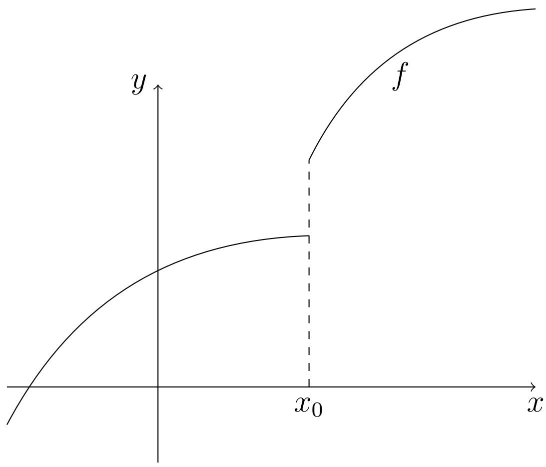


Figura 6.2: Funzione monotona strettamente crescente con un salto in x_0

Esempio 6.3.1. Elenchiamo alcuni esempi di funzioni monotone.

1. Funzioni esponenziali: sono funzioni monotone strettamente crescenti o decrescenti, a seconda che $a \in]1, +\infty[$ od $a \in]0, 1[$

2. Logaritmi: sono funzioni monotone strettamente crescenti o decrescenti, a seconda che $a \in]1, +\infty[$ od $a \in]0, 1[$.

3. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\qquad f(x) \overset{def.}{=} \begin{cases} 1 + x^2 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}.$

   Questa funzione è monotona crescente, ma non strettamente, dato che a sinistra di $x = 0$ è costante. Non è superiormente limitata, ma è inferiormente limitata.

4. $f(x) = \arctan(x)$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$ (ma limitata).

Capitolo 7

Funzioni continue

7.1 Definizione e proprietà elementari

Definizione 7.1.1. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$.

f è *continua* in x_0 $\overset{def.}{\iff}$

$$\forall\, V \in \mathscr{U}_{f(x_0)}\ \exists\, W \in \mathscr{U}_{x_0} : \forall\, x \in A\ (x \in W \implies f(x) \in V).$$

$$\text{ossia} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : \forall\, x \in A\ \ (|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)\,.$$

La funzione f si dice *continua* in A se lo è in ogni $x_0 \in A$. In questo caso si scrive $f \in C(A)$, oppure $f \in C(A, \mathbb{R}) \overset{def.}{=} \{f\colon A \to \mathbb{R} :\ f \text{ continua}\}$.

Osservazione 7.1.1 (Importante)**.** Segue dalla definizione precedente che:

1. Se $x_0 \notin D(A)$ allora f è continua in x_0, quale che sia f.
   Infatti
   $$x_0 \notin D(A) \Longrightarrow \exists\, W \in \mathscr{U}_{x_0} : A \cap W = \{x_0\}.$$
   Pertanto per ogni $V \in \mathscr{U}_{f(x_0)}$ si ha $f(x) \in V$ se $x \in A \cap W$, dato che
   $$x \in A \cap W \iff x = x_0.$$

2. Se $x_0 \in D(A)$ allora f è continua in x_0 se e solo se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

■

Teorema 7.1.1. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g \in C(A)$. Allora:*

1) $f + g \in C(A)$;
2) $f \cdot g \in C(A)$;
3) *se* $g \neq 0$ *in* A *allora* $\dfrac{f}{g} \in C(A)$;
4) $|f| \in C(A)$.

Dimostrazione. Semplice applicazione della definizione e del teorema sui limiti di somma, prodotto, etc. □

Teorema 7.1.2. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, $f \colon A \to \mathbb{R}$. Allora*

f *continua in* $x_0 \iff \forall\, \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A,\ x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$ *si ha* $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Dimostrazione. 1) $\Rightarrow$ 2). Sia f continua in x_0 e sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$. Allora

$$\forall\, V \in \mathscr{U}_{f(x_0)}\ \exists\, W \in \mathscr{U}_{x_0} : \forall\, x \in A\ (x \in W \implies f(x) \in V);$$

inoltre esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in W$ se $n > \bar{n}$. Dato che x_n è in A si ha $x_n \in W \cap A$ se $n > \bar{n}$.
Riassumendo:

$$\forall\, V \in \mathscr{U}_{f(x_0)}\ \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall\, n\ (n > \bar{n} \implies f(x_n) \in V).$$

Ossia $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

2) $\Rightarrow$ 1). Se

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_0) \quad \forall\, \{x_n\} \subseteq A$$

tale che $x_n \to x_0$, si deve provare la continuità in x_0 di f. Per assurdo. Sia f *non* continua in x_0. Allora

$$\exists\, V \in \mathscr{U}_{f(x_0)} : \forall\, W \in \mathscr{U}_{x_0}\ \exists\, x \in A \cap W \quad \text{e} \quad f(x) \notin V.$$

In particolare, si ha

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, x_n \in A \cap \left]x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right[\quad \text{e} \quad f(x_n) \notin V.$$

Ma allora $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$, $x_n \to x_0$, dato che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}.$$

Inoltre $f(x_n) \notin V$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ciò contraddice l'ipotesi. □

Teorema 7.1.3 (composizione)**.** *Siano $f \in C(A)$, $g \in C(B)$ dove $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Se $f(A) \subseteq B$, allora $g \circ f \in C(A)$.*

Dimostrazione. Basta osservare che $g \circ f$ è continua in x_0 se e solo se

$$(g \circ f)(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (g \circ f)(x_0) \quad \forall \{x_n\}_n \subseteq A,\ x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0 \in A.$$

Dato che $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_0)$ per la continuità di f, segue, per la continuità di g in $f(x_0)$, $g(f(x_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(f(x_0))$. Questo vale per ogni $x_0 \in A$ e ciò conclude la prova. □

Teorema 7.1.4 (Weierstrass)**.** *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un compatto. Se $f \in C(A)$ allora f ha* max *e* min *su A.*

Questo sopra è uno dei risultati fondamentali dell'Analisi Matematica. Notare che l'ipotesi di compattezza vale, ad esempio, se $A = [a, b]$, cioè se A è un intervallo chiuso e limitato.

Dimostrazione. La dimostrazione si può fare usando il seguente:

Lemma 7.1.1. *Sia $A \neq \varnothing$ un insieme e sia $f\colon A \to \mathbb{R}$.*

1) $\exists\, \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A : \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \sup_A f$;

2) $\exists\, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A : \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = \inf_A f$.

Tralasciamo la dimostrazione di questo lemma che è basata sulle proprietà di sup/inf (vedere l'Osservazione 6.3.1).
Dimostriamo che esiste $\max_A f$. Per la 1) del Lemma 7.1.1 esiste $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$

tale che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \sup_A f$. Dato che A è compatto, dalla $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si può estrarre una sotto-successione $\{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$, $x_{k_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0 \in A$. Per la continuità di f si ha $\lim_{n\to+\infty} f(x_{k_n}) = f(x_0)$. Inoltre deve essere $\lim_{n\to+\infty} f(x_{k_n}) = \sup_A f$. Per l'unicità del limite si ha $f(x_0) = \sup_A f$; ciò significa che $f(x_0) = \max_A f\ (= \sup_A f)$.

Per esercizio dimostrare l'esistenza del minimo. □

7.2 Funzioni continue su intervalli di $\mathbb{R}$

Un altro risultato veramente importante è il cosiddetto Teorema di Bolzano.

Teorema 7.2.1 (Bolzano)**.** *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ e sia $f \in C([a, b])$ (cioè $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua) tale che $f(a) \cdot f(b) \leq 0$. Allora esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Sia $c := \dfrac{a+b}{2}$, cioè il "punto medio" di $[a, b]$. Se $f(c) = 0$ abbiamo finito. Altrimenti, dev'essere $f(a) \cdot f(c) \leq 0$ oppure $f(b) \cdot f(c) \leq 0$ (perché altrimenti, se fosse $f(a) \cdot f(c) > 0$ e $f(b) \cdot f(c) > 0$, necessariamente sarebbe violata l'ipotesi $f(a) \cdot f(b) \leq 0$).
Nel primo caso si pone $a_1 = a$, $b_1 = c$; nel secondo caso si pone $a_1 = c$, $b_1 = b$. Come conseguenza si ha:

$$a \leq a_1 \leq b_1 \leq b, \quad f(a_1) \cdot f(b_1) \leq 0, \quad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}.$$

Sia ora $c_1 := \dfrac{a_1 + b_1}{2}$. Se $f(c_1) = 0$ abbiamo finito. Se no, si ragiona come sopra e pertanto $f(a_1) \cdot f(c_1) \leq 0$ o $f(c_1) \cdot f(b_1) \leq 0$. Nel primo caso si pone $a_2 = a_1$, $b_2 = c_1$; nel secondo caso si pone $a_2 = c_1$, $b_2 = b_1$. Pertanto

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq b_1, \quad f(a_2) \cdot f(b_2) \leq 0 \quad \text{e} \quad b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2} = \frac{b-a}{4}.$$

Così facendo, o per un certo $n \in \mathbb{N}$, si trova che $f(c_n) = 0$, oppure si ottengono due successioni $\{a_n\}, \{b_n\} \subseteq [a, b]$ tali che

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n, \quad f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0 \quad \text{e} \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Tali successioni sono monotone e limitate. Pertanto convergono. Dato che

$$\lim_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0,$$

si ha $\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n \stackrel{def.}{=} x_0 \in [a, b]$.
Dato che f è continua $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) \cdot f(b_n) = (f(x_0))^2$. Ma dev'essere $f^2(x_0) \leq 0$, visto che $f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Cioè $f(x_0) = 0$. $\square$

Corollario 7.2.1 (Teorema dei valori intermedi)**.** *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f \in C(I)$, f non costante. Allora per ogni $x_1, x_2 \in I$ tali che $f(x_1) < f(x_2)$ e per ogni $y \in]f(x_1), f(x_2)[$ esiste $x \in I$ tale che $f(x) = y$.*

A parole, *se f è continua allora l'immagine (tramite f) di un intervallo I è un intervallo, ossia $f(I)$ è un intervallo.*

Dimostrazione. Dato che $x_1 \neq x_2$ sia, per esempio, $x_1 < x_2$. Poniamo inoltre $g\colon [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - y$. Allora g è continua su $[x_1, x_2]$ e

$$g(x_1)g(x_2) = (f(x_1) - y)(f(x_2) - y) < 0.$$

Il teorema di Bolzano implica che esiste $x_0 \in [x_1, x_2]$ tale che $g(x_0) = 0$, ossia $f(x_0) = y$. $\square$

Conseguenze. Se $f\colon I \to \mathbb{R}$, f è continua allora $f(I)$ è un intervallo. Inoltre valgono le seguenti:

1) $f(I) =]\inf_I f, \sup_I f[$ se f *non* ha max e min;

2) $f(I) =]\inf_I f, \max_I f]$ se f ha max e non min;

3) $f(I) = [\min_I f, \sup_I f[$ se f ha min e non max;

4) $f(I) = [\min_I f, \max_I f]$ se f ha min e max.

Osservazioni importanti. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo. Valgono le seguenti:

1) Se $f \in C(I)$ e iniettiva allora f è monotona.

2) Se f è monotona e $f(I)$ è un intervallo allora $f \in C(I)$.

Teorema 7.2.2. *Sia $f \in C(I)$, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo. Se f è iniettiva, sia $J \overset{def.}{=} f(I)$. Valgono le seguenti:*

1) *J è un intervallo e $f\colon I \xrightarrow[1-1]{su} J$.*

2) *$f^{-1} \in C(J)$.*

7.3 Uniforme continuità

Finiamo questo capitolo con un'importante nozione teorica.

Definizione 7.3.1 (Uniforme continuità)**.** Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$. Si dice che f è *uniformemente continua* su A se

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : \forall\, x, y \in A\ \ (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon)\,.$$

Osservazione 7.3.1. Se f è continua non è vero che f è anche uniformemente continua. Viceversa, *se f è uniformemente continua allora f è continua.* ■

Proposizione 7.3.1. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ uniformemente continua su A. Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ è una successione di Cauchy allora $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy.*

Dimostrazione. L'uniforme continuità di f significa che

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : \forall\, x, y \in A\ \ (|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon)\,.$$

Essendo $\{x_n\} \subseteq A$ di Cauchy esiste $\bar{n}$ tale che $|x_n - x_m| < \delta$ se $n, m > \bar{n}$. Cioè

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall\, n, m\ \ (n, m > \bar{n} \implies |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon)\,.$$

Ciò coincide con la tesi. □

Esempio 7.3.1. La successione $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $]0,1]$ e $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Però se $f\colon]0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, si ottiene $f\left(\frac{1}{n}\right) = n \to +\infty$ che non è di Cauchy in quanto divergente. Ciò mostra che f non è uniformemente continua in $]0,1]$.

Teorema 7.3.1 (Heine-Cantor)**.** *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ compatto. Sia $f \in C(A)$. Allora f è uniformemente continua.*

A parole, *se f è continua su un compatto allora f è uniformemente continua.*

Dimostrazione. Facoltativa. Per assurdo, se f non è uniformemente continua si ha (per negazione)

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \forall\, \delta > 0\ \exists\, x, y \in A : |x - y| < \delta \quad \text{e} \quad |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Pertanto, in particolare, si ha che

$$\forall\, n\ \exists\, x_n, y_n \in A : |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Per la compattezza di A, esiste una sotto-successione $\{x_{k_n}\}$ di $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che converge ad un certo $x_0 \in A$. Si ha

$$|x_{k_n} - y_{k_n}| < \frac{1}{k_n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Ciò implica che anche $y_{k_n} \to x_0$ per $n \to +\infty$. Dalla continuità di f segue che

$$\lim_{n \to +\infty} (f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})) = f(x_0) - f(x_0) = 0.$$

Ciò è assurdo, visto che doveva essere

$$|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \geq \varepsilon > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Questo è assurdo, come dovevasi dimostrare. $\square$

Capitolo 8

Funzioni elementari

8.1 Funzioni esponenziali

Si sono già discusse le funzioni esponenziali $a^x\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ con base $a \in \mathbb{R}_+$. A questo punto introduciamo la definizione dell'esponenziale su $\mathbb{R}$. Con quanto studiato finora potremmo facilmente rendere "rigorosa" questa nozione ma, per semplicità, ometteremo molti dettagli tecnici.

Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Abbiamo in precedenza già definito la funzione a^x per $x \in \mathbb{Q}$. Estendiamo ad $\mathbb{R}$ questa funzione. Per farlo, sia $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e sia $x = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$ la rappresentazione decimale di x. Tronchiamo la successione delle cifre decimali di x all'n-esima cifra. Cioè, consideriamo la successione

$$x_n \overset{def.}{=} \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Definizione 8.1.1. Si pone

$$a^x \overset{def.}{=} \lim_{n\to+\infty} a^{x_n}.$$

In seguito useremo solo le proprietà di a^x per $x \in \mathbb{Q}$ assieme alla seguente:

Proprietà ($\clubsuit$). *Siano $x \in \mathbb{R}$ e $\{y_n\}_n \subseteq \mathbb{Q}$, $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. Allora*

$$\lim_{n\to+\infty} a^{y_n} = a^x.$$

Tale proprietà fornisce sostanzialmente la continuità dell'esponenziale.

Con questi ingredienti si riesce a dimostrare il seguente:

Teorema 6. *Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Valgono le seguenti:*

1) $a^{x+y} = a^x a^y \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$;

2) $a^x > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$;

3) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ *si ha* $\begin{cases} x < y \implies a^x < a^y & \text{se } a > 1 \\ x < y \implies a^y < a^x & \text{se } a \in \,]0,1[\end{cases}$;

4) $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \forall\, \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *si ha*

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \implies a^{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a^x;$$

5) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Osservazione 8.1.1. Sia $a > 0$. Si può dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} \left(= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} \right) = 1.$$

Questo "limite notevole" si può dimostrare per mezzo della disuguaglianza di Bernoulli. Usando questo fatto si riesce a dimostrare la Proprietà (♣). Il resto della dimostrazione del Teorema 6 una semplice applicazione del teorema sulle funzioni esponenziali in $\mathbb{Q}$.

Altrettanto importante dell'esponenziale a^x è la sua funzione inversa.

8.2 Funzioni logaritmiche

Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. D'ora in poi si chiamerà funzione esponenziale la funzione $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f_a(x) = a^x$. Dato che f_a è continua[1] si ha $f_a(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$ se $a \neq 1$. Inoltre si vede che $f_a\colon \mathbb{R} \xrightarrow[1-1]{su} \mathbb{R}_+$ è biiettiva. Perciò esiste $f_a^{-1}\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. D'ora in poi chiameremo *logaritmo in base a di* $y \in \mathbb{R}_+$ il numero reale $f_a^{-1}(y)$. Si pone

$$\log_a y := f_a^{-1}(y).$$

[1] Cfr. proprietà 4) del Teorema 6.

Per definizione di inversa si ha

$$\log_a y = x \iff y = a^x$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}_+$.

Elenchiamo alcune proprietà fondamentali che è bene conoscere:

1) $\log_a a^x = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

2) $a^{\log_a y} = y \quad \forall\, y \in \mathbb{R}_+$.

3) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+$.

Dimostrazione. La proprietà 3) si dimostra così. Si ha

$$xy = a^{\log_a(x\cdot y)} = \underbrace{a^{\log_a x}}_{x} \cdot \underbrace{a^{\log_a y}}_{y} = a^{\log_a x + \log_a y} \iff \log_a(x\cdot y) = \log_a x + \log_a y,$$

che è la tesi. □

4) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+$ si ha $x < y \implies \begin{cases} \log_a x < \log_a y & \text{se } a > 1 \\ \log_a y < \log_a x & \text{se } a \in \,]0,1[\end{cases}$.

5) $\forall\, y \in \mathbb{R}_+ \; \forall\, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$, si ha

$$y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y \implies \lim_{n\to+\infty} \log_a y_n = \log_a y.$$

6) $\log_a \alpha^\beta = \beta \log_a \alpha \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, \beta \in \mathbb{R}$.

7) $\log_a y = \log_a b \cdot \log_b y \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, y \in \mathbb{R}_+$.

Quest'ultima formula è nota come "formula del cambiamento di base".

Dimostrazione. Dimostriamo la 7). Si ha

$$a^{(\log_a b)\log_b y} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b y} = b^{\log_b y} = y = a^{\log_a y}.$$

□

Osservazione 8.2.1. C'è un'altra proprietà degli esponenziali intuitivamente ovvia, ma che abbiamo formulato soltanto per l'esponenziale su $\mathbb{Q}$.
Più precisamente, vale la seguente:

$$(\alpha^x)^y = \alpha^{xy} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}. \tag{8.1}$$

In effetti, per dimostrarla, si noti che la 6) implica che

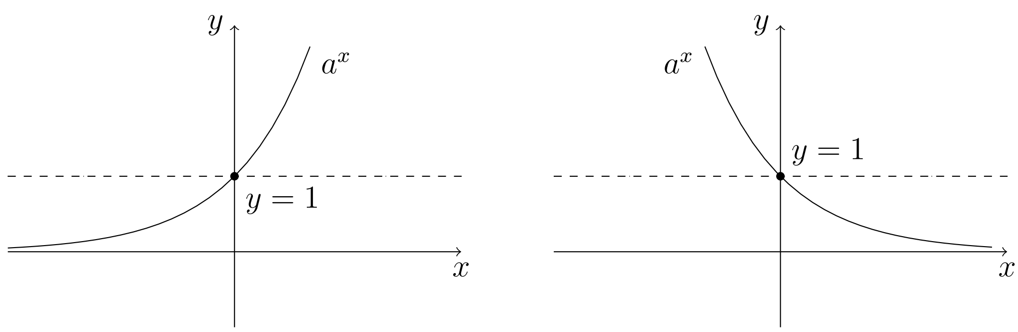
$$\log_a (\alpha^x)^y = y \log_a \alpha^x = yx \log_a \alpha = \log_a \alpha^{xy}.$$

Notazione. D'ora in poi se $a = e$ scriveremo equivalentemente

$$\log_e, \text{ lg}, \text{ log}, \text{ ln}$$

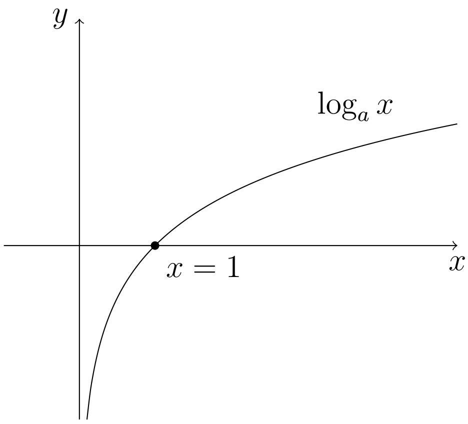
per indicare il cosiddetto "logaritmo naturale" (ossia in base e).

Grafici di esponenziali e logaritmi



(a) se $a > 1$ (b) se $a \in\,]0, 1[$

Figura 8.1: Grafici della funzione esponenziale a^x



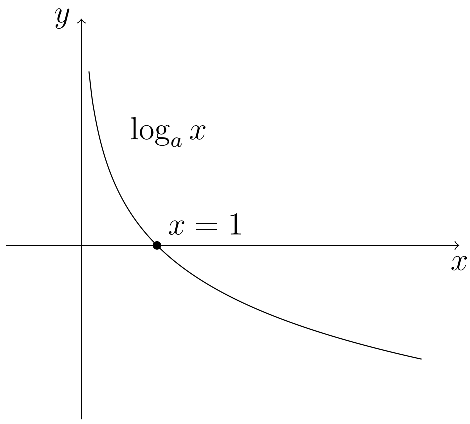


Figura 8.2: Grafici della funzione logaritmica $\log_a x$

8.3 Funzioni trigonometriche elementari

Ripassiamo alcuni fatti basilari della trigonometria. Partiamo con un grafico della circonferenza unitaria che ci consentirà di dare le principali definizioni.

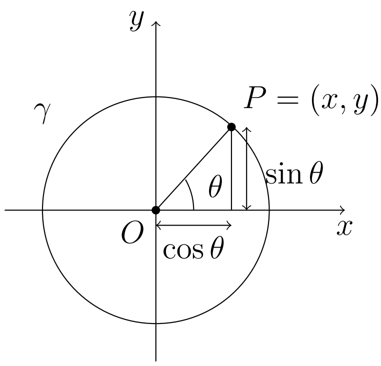


Figura 8.3: Circonferenza unitaria $x^2 + y^2 = 1$

Per costruzione, θ è l'angolo tra la semiretta $\overline{PO}$ e l'asse x e $P \in \gamma$, dove γ è la circonferenza unitaria descritta dall'equazione

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Per definizione si pone

$$x \stackrel{def.}{=} \cos\theta, \quad y \stackrel{def.}{=} \sin\theta.$$

Per costruzione risulta

$$\begin{cases} \cos(\theta + 2k\,\pi) = \cos\theta & \forall\, \theta \in [0, 2\pi[\\ \sin(\theta + 2k\,\pi) = \sin\theta & \forall\, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Si pone anche

$$\operatorname{tg}\theta \overset{def.}{=} \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \forall\, \theta \in \mathbb{R},\, \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Analogamente, si ha

$$\operatorname{tg}(\theta + k\,\pi) = \operatorname{tg}\theta \qquad \forall\, \theta \in \mathbb{R}, \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

La funzione reciproca della tangente si chiama *cotangente*, si indica come cotg. In altre parole, si ha

$$\operatorname{cotg}\theta := \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \forall\, \theta \in \mathbb{R},\, \theta \neq k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Tabella dei principali archi noti

θ	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$\operatorname{tg}\theta$
0	1	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1	$\nexists$

Elenchiamo qualche ben nota e utile proprietà. D'ora in poi assumeremo che $\theta = x$ (cioè, x diventerà la variabile indipendente).
Valgono le seguenti:

1) $|\sin x|,\ |\cos x| \leq 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

2) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

3) La funzione sin è dispari, mentre la funzione cos è pari, ossia

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}; \\ \cos(-x) &= \cos x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4) *Formule di addizione e sottrazione.* Valgono le seguenti:

$$\begin{cases} \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}; \\ \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Da queste formule si ottiene (per esercizio):

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

5) *Formule di duplicazione.* Vale la seguente (per esercizio):

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

.

6) Posto $t = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$, valgono le seguenti *formule parametriche:*

$$\sin x = \frac{2\,t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2\,t}{1-t^2}.$$

I grafici di sin, cos e tg sono (qualitativamente) i seguenti:

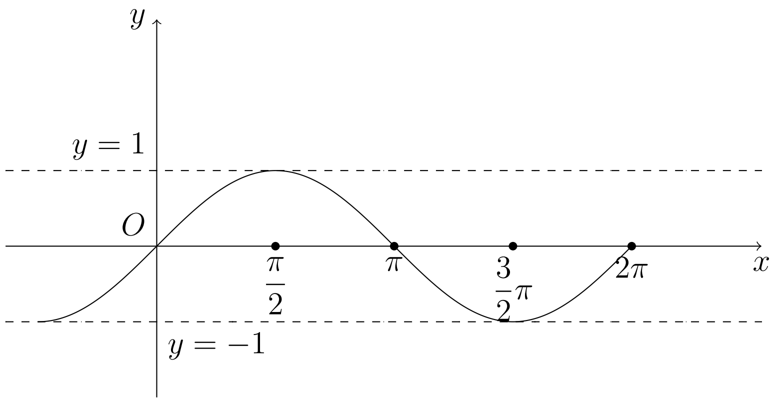


Figura 8.4: Grafico della funzione $y = \sin x$, $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$

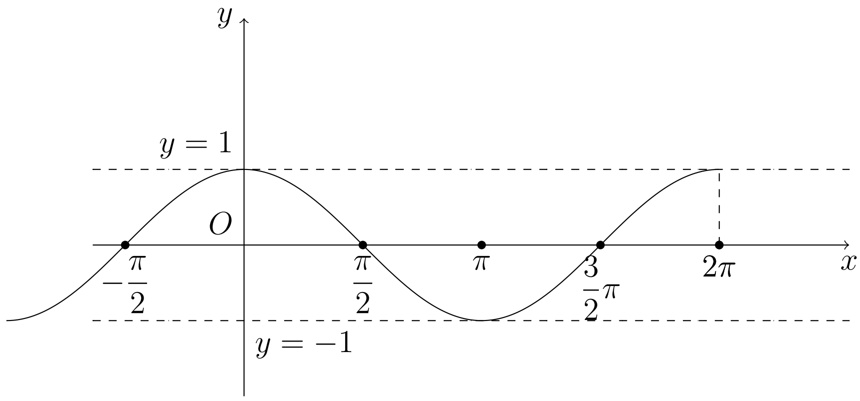


Figura 8.5: Grafico della funzione $y = \cos x$, $\cos\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$

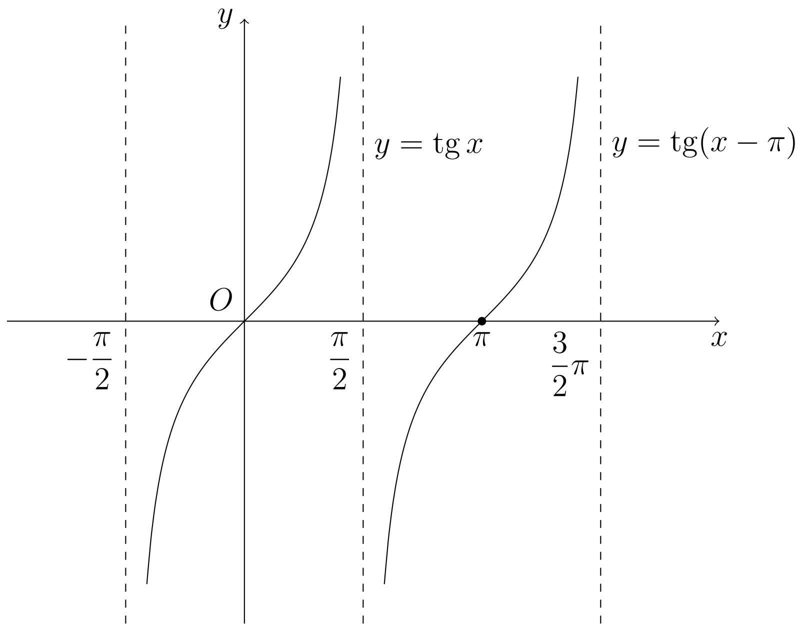


Figura 8.6: Grafico della funzione $y = \operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg}\colon \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[\to \mathbb{R}$

Discutiamo brevemente le "inverse" di sin, cos e tg.

Definizione 8.3.1.

1) L'inversa della funzione $x \to \sin x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ si chiama *arcoseno* e si denota come arcsin.

2) L'inversa della funzione $x \to \cos x,\ x \in [0, \pi]$ si chiama *arcocoseno* e si denota come arccos.

3) L'inversa della funzione $x \to \operatorname{tg} x,\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ si chiama *arcotangente* e si denota come arctg.

I grafici di queste funzioni sono qualitativamente i seguenti:

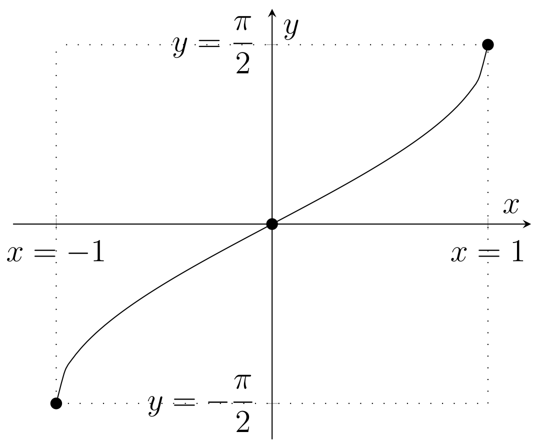


Figura 8.7: Grafico della funzione $y = \arcsin x$, $\arcsin\colon [-1, 1] \xrightarrow[1-1]{su} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

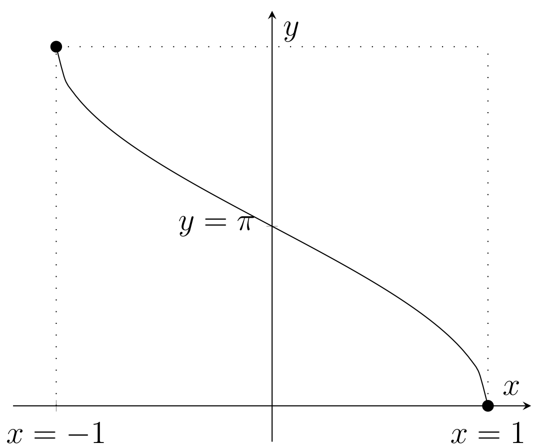


Figura 8.8: Grafico della funzione $y = \arccos x$, $\arccos\colon [-1, 1] \xrightarrow[1-1]{su} [0, \pi]$

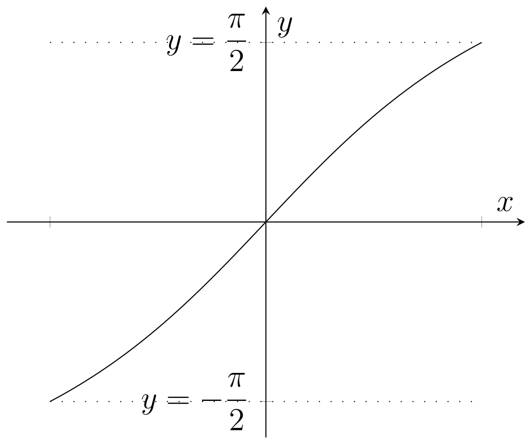


Figura 8.9: Grafico della funzione $y = \operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arctg}\colon \mathbb{R} \xrightarrow[1-1]{su}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

8.4 Funzioni iperboliche

Definizione 8.4.1. Si pone

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Si chiamano *seno iperbolico* e *coseno iperbolico*.

E' facile vedere che

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x \quad \text{(dispari)} \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

e che

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x \quad \text{(pari)} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Vale l'identità fondamentale (per esercizio):

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Tali funzioni sono pertanto legate da questa relazione (analogamente a quanto accade per sin e cos).

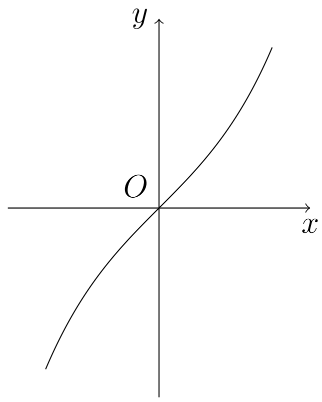


Figura 8.10: Grafico della funzione $y = \operatorname{sh} x$

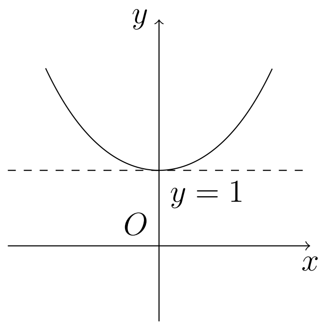


Figura 8.11: Grafico della funzione $y = \operatorname{ch} x$

Si incontrano talvolta sui libri di Analisi le funzioni tgh "tangente iperbolica"

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

e le inverse di sh, ch (denotate come settsh e settch oppure sh^{-1}, ch^{-1}, etc.). Torneremo su queste funzioni in seguito, nelle esercitazioni.

Osservazione 8.4.1. Concludiamo questa sezione osservando che, in alcuni esercizi sugli integrali indefiniti tornano utili alcune sostituzioni basate sulle funzioni iperboliche sinh, cosh. Per questa ragione enunciamo alcune formule simili a quelle valide per le funzioni trigonometriche sin, cos.
Precisamente, per ogni $x \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti:

- $\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1)$;
- $\cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$;
- $\sinh x \cosh x = \frac{\sinh 2x}{2}$.

■

Capitolo 9

Derivate di funzioni reali

9.1 Definizioni e proprietà elementari

Siano[1] $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A \cap D(A)$ ed $f\colon A \to \mathbb{R}$. Il *rapporto incrementale* di f di punto iniziale x_0 è la funzione

$$R_f(x_0)\colon A \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}, \quad R_f(x_0)(x) \overset{def.}{=} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Si dice che f è *derivabile* in x_0 se esiste finito il seguente limite:

$$\lim_{x \to x_0} R_f(x_0)(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (\in \mathbb{R}) \tag{9.1}$$

Questo limite si chiama *derivata* di f in x_0. Si pone

$$f'(x_0) \overset{def.}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Altre notazioni usate di frequente sono

$$Df(x_0), \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x = x_0}, \quad \dot{f}(x_0), \ldots$$

Se invece esiste $\lim_{x \to x_0} R_f(x_0)(x)$ ed è $+\infty$ o $-\infty$, si dice che f è *derivabile in senso esteso.*

[1] Per esempio, sia $A =]a, b[\subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in]a, b[$.

Osservazione 9.1.1. Il limite (9.1) è equivalente al seguente

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad (\text{porre } h = x - x_0).$$

■

Proposizione 9.1.1. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A \cap D(A)$, $f\colon A \to \mathbb{R}$. Si ha che*

$$f \text{ è derivabile in } x_0 \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R}, \exists\, \omega\colon A \to \mathbb{R} \text{ tale che } \omega(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \omega(x_0) = 0$$

$$\text{e} \qquad f(x) = f(x_0) + \lambda(x-x_0) + \omega(x)(x-x_0) \quad \forall\, x \in A. \tag{9.2}$$

In tal caso $\lambda = f'(x_0)$.

N.B. La funzione $\omega(x)$ è una funzione infinitesima per $x \to x_0$.

Dimostrazione. Se vale (9.2), si vede subito che per ogni $x \in A \setminus \{x_0\}$ si ha

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lambda + \omega(x).$$

Pertanto, se $x \to x_0$, si ha la derivabilità di f in x_0 e $f'(x_0) = \lambda$.

Viceversa se vale la (9.1) (cioè f è derivabile in x_0), allora poniamo

$$\begin{cases} \omega(x) \overset{def.}{=} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) & \forall\, x \in A \setminus \{x_0\} \\ \omega(x_0) \overset{def.}{=} 0 \end{cases} .$$

Pertanto $\omega(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0 = \omega(x_0)$. Inoltre, si ha

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \omega(x)(x-x_0),$$

ciò che dimostra (9.2) se si pone $\lambda = f'(x_0)$. □

Corollario 9.1.1. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A \cap D(A)$, $f\colon A \to \mathbb{R}$. Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0.*

Dimostrazione. Dalla (9.2) si ottiene che $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ e la tesi segue poiché x_0 è un punto di accumulazione di A. □

Osservazione 9.1.2 (Importante)**.** *Non è vero il viceversa.* Cioè esistono funzioni continue non derivabili. Per esempio, la funzione modulo

$$f(x) = |x|.$$

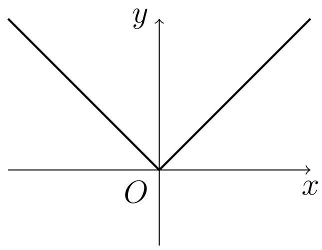


Figura 9.1: Grafico della funzione $f(x) = |x|$

Chiaramente f *non* è derivabile in $x = 0$, visto che

$$R_{|x|}(0) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x}.$$

Si ha

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

che non è definita in $x = 0$.
Più precisamente

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1.$$

Cioè $\dfrac{|x|}{x}$ non ha limite. ■

La derivabilità in senso esteso non implica la continuità.
Per esempio, si consideri la funzione

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \qquad \left(f \overset{def.}{\equiv} \operatorname{segn} \right).$$

In effetti $f = \operatorname{segn}$ non è continua in $x = 0$. Però f è derivabile in senso esteso:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty.$$

Esempio 9.1.1. La funzione $x \to e^x$ è derivabile in ogni punto di $\mathbb{R}$. Si ha

$$De^x = e^x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Infatti

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}e^x\left(\frac{e^h-1}{h}\right)=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x,$$

dove si è usato il limite notevole

$$\boxed{\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1}.$$

Teorema 9.1.1. *Siano $A\subseteq\mathbb{R}$, $x_0\in A\cap D(A)$, $f,g\colon A\to\mathbb{R}$ derivabili in x_0. Allora:*

1) *$f+g$ è derivabile in x_0 e si ha*

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

2) *$f\cdot g$ è derivabile in x_0 e si ha (regola Leibniz)*

$$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0);$$

3) *se $g(x_0)\neq 0$ allora $\dfrac{f}{g}$ è derivabile in x_0 e si ha*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Dimostrazione. 1) Per ogni $x\in A\setminus\{x_0\}$ si ha

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\xrightarrow[x\to x_0]{}f'(x_0)+g'(x_0).$$

2) Per ogni $x\in A\setminus\{x_0\}$ si ha

$$\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=g(x)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$(=g(x)R_f(x_0)(x)+f(x_0)R_g(x_0)(x))\xrightarrow[x\to x_0]{}g(x_0)f'(x_0)+f(x_0)g'(x_0),$$

dove si è usata la continuità in x_0 di $g(x)$ (che segue dal fatto che g è derivabile in x_0).

3) Per ogni $x \in A \setminus \{x_0\}$ si ha

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\,\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)} =$$

$$= \frac{1}{g(x)g(x_0)}\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x_0) - f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right) \to$$

$$\to \frac{1}{g^2(x_0)}(f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)),$$

dove si è usata anche la continuità in x_0 di g. $\square$

Teorema 9.1.2. *Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $g\colon B \to \mathbb{R}$, $f(A) \subseteq B$. Sia $x_0 \in A \cap D(A)$ e sia f derivabile in x_0. Assumiamo che $f(x_0) \in D(B)$ e che g sia derivabile in $f(x_0)$. Allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e vale*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Dimostrazione. Per la Proposizione 9.1.1, se g derivabile in $f(x_0)$ allora esiste $\omega\colon B \to \mathbb{R}$ continua in $f(x_0)$ e infinitesima per $y \to f(x_0)$, cioè $\omega(y) \xrightarrow[y \to f(x_0)]{} 0$, tale che

$$g(y) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(y - f(x_0)) + \omega(y)(y - f(x_0)).$$

Pertanto, per ogni $x \in A \setminus \{x_0\}$ si ha

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= g'(f(x_0))\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \underbrace{\underbrace{\omega(f(x))}_{\downarrow\, 0}\,\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\downarrow\, f'(x_0)}}_{\xrightarrow[x \to x_0]{} 0} \to g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Qui si è usato il fatto che $\omega(f(x)) \to \omega(f(x_0)) = 0$, ciò che è vero perché $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} f(x_0)$. □

Teorema 9.1.3. *Siano $I \neq \varnothing$ un intervallo non vuoto, $f\colon I \xrightarrow[1-1]{} \mathbb{R}$, $f \in C(I)$ (ossia continua e iniettiva). Sia $x_0 \in I$ e sia f derivabile in x_0 con $f'(x_0) \neq 0$. Allora l'inversa $f^{-1}\colon f(I) \to \mathbb{R}$ è derivabile in $f(x_0)$ $\Big(\overset{def.}{=} y_0\Big)$ e si ha*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \qquad \Big(\text{porre } x \overset{def.}{=} f^{-1}(y)\Big)$$

Sappiamo che f^{-1} è continua. Pertanto

$$x = f^{-1}(y) \xrightarrow[y\to y_0]{} x_0 = f^{-1}(y_0).$$

Dunque

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Esempi.

1. La funzione $y \to \lg y$ è derivabile in ogni $y \in \mathbb{R}_+$ e risulta

$$(\lg y)' = \frac{1}{y} \quad \forall\, y \in \mathbb{R}_+.$$

Come sappiamo, questa è l'inversa di $x \to e^x$. Applicando il precedente Teorema 9.1.3 si ha

$$(\lg y)'(y) = \frac{1}{De^x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

2. Si ha $D \operatorname{arctg} y = \dfrac{1}{D \operatorname{tg} x} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1}{1 + y^2}$

(dove $y = \operatorname{tg} x$ e si assume che $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$).

3. Si ha $D \arcsin y = \dfrac{1}{D \sin x} = \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

   (dove si sono usate la sostituzione $y = \sin x \ \forall\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, il fatto che $\cos x > 0$ e che $\sin \nearrow$).

4. Si ha $D \arccos y = \dfrac{1}{D \cos x} = \dfrac{-1}{\sin x} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$

   (dove si sono usate la sostituzione $y = \cos x \ \forall\ x \in \left]0, \pi\right[$, il fatto che $\sin x > 0$ e che $\cos \searrow$).

Definizione 9.1.1. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Si dice che x_0 è *punto di minimo* (*massimo*) *relativo per* f se

$$\exists\, \rho > 0 \ :\ f(x) \geq f(x_0) \text{ (risp. } \leq) \quad \forall\, x \in \left]x_0 - \rho, x_0 + \rho\right[.$$

Se le disuguaglianze sono strette si dice che x_0 è un *punto di minimo* (*massimo*) *relativo forte*. Si dice che x_0 è *punto estremante relativo* se è un min o max.

Teorema 9.1.4. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ derivabile. Sia $x_0 \in \mathring{A}$ (cioè nell'interno di A, ossia esiste un intorno di x_0 tutto incluso in A). Se x_0 è punto estremante relativo (cioè* min *o* max *relativo) allora $f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Se, per esempio, x_0 è max relativo, allora

$$\exists\, \rho > 0 \ :\ f(x) - f(x_0) \leq\ 0 \quad \forall\, x \in \left]x_0 - \rho, x_0 + \rho\right[.$$

Essendo x_0 interno si può anche supporre che quest'intervallo sia tutto incluso in A. Segue quindi che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \forall\, x \in \left]x_0, x_0 + h\right[$$

e

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \forall\, x \in \left]x_0 - h, x_0\right[.$$

Dalla derivabilità di f (anche in senso esteso) si ottiene che

$$\begin{cases} f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \\ \\ f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \end{cases},$$

cioè $f'(x_0) = 0$. $\square$

Quest'ultimo risultato è di grande importanza sia pratica che teorica.

Altri calcoli elementari (ma fondamentali) sono i seguenti.

1) Si ha
$$Dx^n = n\,x^{n-1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$
Infatti
$$(x+h)^n - x^n = h\big[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}\big]$$
$$\left(\text{ciò segue dalla formula } \frac{1-a^n}{1-a} = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} \quad (a \neq 1)\right).$$
Quindi si ottiene che
$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\big[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + x^{n-1}\big] = \\ = n\,x^{n-1}.$$
(si ottiene lo stesso risultato usando il Binomio di Newton).

2) Se $m \in \mathbb{Z}\,(m < 0)$ si ha
$$Dx^m = m\,x^{m-1} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$
Infatti
$$Dx^m = D\frac{1}{x^{-m}} = -\frac{Dx^{-m}}{(x^{-m})^2} = \frac{m\,x^{-m-1}}{x^{-2m}} = m\,x^{m-1}.$$

3) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha
$$Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+.$$
Infatti se $x > 0$ si ha
$$Dx^\alpha = De^{\alpha \lg x} = \underbrace{e^{\alpha \lg x}}_{x^\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$
Notare che 1) e 2) seguono facilmente da 3).

4) Si ha
$$D\sin x = \cos x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Infatti

$$\begin{aligned}\sin(x+h)-\sin x &= \sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x=\\ &=\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h\end{aligned}$$

e

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\sin x\left(\frac{\cos h-1}{h}\right)+\cos x\,\frac{\sin h}{h}.$$

Usando i limiti notevoli

$$\frac{\cos h-1}{h}\xrightarrow[h\to 0]{}0,\qquad \frac{\sin h}{h}\xrightarrow[h\to 0]{}1$$

si ottiene la tesi.
Analogamente si dimostra (per esercizio) che

$$D\cos x=-\sin x\quad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

5) Si ha

$$D\operatorname{ch}x=\operatorname{sh}x,\quad D\operatorname{sh}x=\operatorname{ch}x\quad \forall\, x\in\mathbb{R}$$

(per esercizio).

9.2 Teoremi sulle funzioni derivabili

Teorema 9.2.1 (Rolle)**.** *Siano $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ ed $f\in C([a,b])$. Sia inoltre f derivabile in $]a,b[$. Se $f(a)=f(b)$ allora*

$$\exists\, c\in\,]a,b[\ :\ f'(c)=0.$$

Dimostrazione. Dalle ipotesi fatte sappiamo che f è continua su $[a,b]$ e quindi il teorema di Weierstrass implica che esistono $x_1,x_2\in[a,b]$ punti di min e max assoluto su $[a,b]$. Ricordare che $[a,b]$ è compatto. Quindi

$$f(x_1)=\min_{[a,b]}f,\qquad f(x_2)=\max_{[a,b]}f.$$

Se $x_1,x_2\in\{a,b\}$ segue subito $f(x_1)=f(x_2)$ ed f è costante su tutto $[a,b]$. Da ciò segue

$$f'(c)=0\quad \forall\, c\in\,]a,b[.$$

Se invece almeno uno dei due punti è interno, per esempio $x_1\in\,]a,b[$, allora il Teorema 9.1.4 implica che $f'(x_1)=0$ (essendo minimo assoluto esso è anche minimo relativo). $\square$

Teorema 9.2.2 (Valor medio o Lagrange)**.** *Siano* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C([a, b])$ *e* f *derivabile su* $]a, b[$. *Allora*

$$\exists\, c \in\,]a, b[\ :\ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Dimostrazione. Sia $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) \overset{def.}{=} f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Si ha

$$g(a) = f(a), \quad g(b) = f(a) \quad \text{oppure} \quad g(a) = g(b).$$

Inoltre g è continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$. Per il Teorema di Rolle si ha

$$\exists\, c \in\,]a, b[\, : g'(c) = 0.$$

Ossia

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

che è la tesi. □

Teorema 9.2.3 (Cauchy)**.** *Siano* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *e siano* $f, g \in C([a, b])$ *e derivabili in* $]a, b[$. *Sia inoltre* $g' \neq 0$ *in* $]a, b[$. *Allora*

$$\exists\, c \in\,]a, b[\ :\ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Dimostrazione. Facoltativa. Si usa il teorema di Rolle. Precisamente si pone $h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $h(x) \overset{def.}{=} f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$. Si applica allora il teorema di Rolle alla funzione h. □

Proposizione 9.2.1. *Siano* $I \subseteq \mathbb{R}$ *un intervallo non vuoto ed* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *derivabile su* I. *Se* $f'(x) = 0$ *per ogni* $x \in I$ *allora* f *è costante su* I.

Dimostrazione. Siano $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Per definizione di intervallo, si ha $[x_1, x_2] \subseteq I$. Su $[x_1, x_2]$ la funzione f è derivabile e continua. Pertanto $f(x_2) - f(x_1) = f'(x)(x_2 - x_1)$ con $x \in\,]x_1, x_2[$ (per il teorema di Lagrange). Ma $f'(x) = 0$ per ipotesi. Pertanto $f(x_2) = f(x_1)$. □

Proposizione 9.2.2. *Sia* $I \subseteq \mathbb{R}$ *un intervallo non vuoto e sia* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *derivabile su* I. *Allora* f *è monotona crescente su* I *se e solo se*

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in I.$$

Dimostrazione. $(1 \Rightarrow 2)$. Se $f \nearrow$ allora

$$\forall\, x \in I \quad \forall\, y \in I \setminus \{x\} \quad \text{si ha} \quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0.$$

Dunque $\lim_{y \to x} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0 \quad \forall\, x \in I$.

$(2 \Rightarrow 1)$. Viceversa sia

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in I.$$

Siano $x_1, x_2 \in I$ e $x_1 < x_2$. Si ha (essendo I intervallo) $[x_1, x_2] \subseteq I$. Su $[x_1, x_2]$ f è derivabile (e continua). Perciò

$$\exists\, x \in \,]x_1, x_2[\; : \; f'(x) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Ma $f'(x) \geq 0$ per ipotesi. Pertanto $f(x_2) \geq f(x_1)$, che è la tesi. □

N.B. Se $f \searrow$ (e valgono le ipotesi della Proposizione 9.2.2) allora $f' \leq 0$ e viceversa. Cioè

$$f \searrow \iff f' \leq 0.$$

Infatti

$$f \searrow \iff -f \nearrow \iff -f' \geq 0 \iff f' \leq 0.$$

Teorema 9.2.4. *Si consideri un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, $I \neq \varnothing$. Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile su I. Allora f è monotona crescente strettamente se e solo se*

1) $f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in I$;

2) $\{x \in I : f'(x) = 0\}$ *non ha punti interni.*

Omettiamo la dimostrazione dell'ultimo risultato.
Nelle stesse ipotesi, si ha che f è strettamente decrescente se e solo se $f' \leq 0$ e $\{x \in I : f'(x) = 0\}$ non ha punti interni.

Teorema 9.2.5 (di Darboux)**.** *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo $\neq \varnothing$. Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile su I. Allora $f'(I) = \{f'(x) : x \in I\}$ è un intervallo di $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Facoltativa. Siano $x_1, x_2 \in I$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che

$$f'(x_1) < \alpha < f'(x_2).$$

Supponiamo, per esempio, che $x_1 < x_2$. Sia $g\colon [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \alpha x$. Si ha che g è continua e derivabile su $[x_1, x_2]$ e inoltre $g'(x) = f'(x) - \alpha$ per ogni

$x \in [x_1, x_2]$. Per costruzione $g'(x_1) = f'(x_1) - \alpha < 0$ e $g'(x_2) = f'(x_2) - \alpha > 0$. Dunque, g non è iniettiva (se lo fosse sarebbe $g \nearrow$ o $g \searrow$ e pertanto $g' \geq 0$ o $g' \leq 0$ su $[x_1, x_2]$). Perciò esistono $y_1, y_2 \in [x_1, x_2]$ con $y_1 < y_2$ tali che $g(y_1) = g(y_2)$. Per il teorema di Rolle esiste $x \in [y_1, y_2]$ tale che $g'(x) = 0$. Ossia $f'(x) = \alpha$. Ciò dimostra che

$$\forall\, \alpha \in \,]f'(x_1), f'(x_2)[\quad \exists\, x \in [x_1, x_2] \subseteq I \ : \ f'(x) = \alpha.$$

Quindi $f'(I)$ è un intervallo. $\square$

Osservazione 9.2.1. Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo ed $f \colon I \to \mathbb{R}$. Si definisce *primitiva* di f una qualsiasi funzione derivabile $\phi \colon I \to \mathbb{R}$ tale che

$$\phi'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in I.$$

Il Teorema di Darboux dice che, se esiste una primitiva di f su I allora $f(I) = \phi'(I)$ è un intervallo. Cioè, *condizione necessaria affinché f abbia una primitiva è che $f(I)$ sia un intervallo.* $\blacksquare$

Teorema 9.2.6 (Hôpital)**.** *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto e sia $a \in D(I)$. Siano $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ derivabili in ogni punto di $I \setminus \{a\}$ e sia $g'(x) \neq 0$ su $I \setminus \{a\}$. Sia inoltre*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0,$$

oppure

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = \lim_{x \to a} |g(x)| = +\infty.$$

Allora, se esiste $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ esiste $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ e si ha

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Non dimostriamo il precedente. Piuttosto ne riformuliamo un caso particolare, a titolo di esempio, e dimostriamo solo questo.

Teorema 9.2.7 (Hôpital: forma indeterminata $\frac{0}{0}$)**.** *Sian I un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathring{I}$ (cioè interno ad I). Per esempio, sia $I = [a, b]$, con $a < b$, e sia $a < x_0 < b$. Allora se $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ sono derivabili in x_0 e nulle in x_0 e se $g'(x_0) \neq 0$ si ha*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dimostrazione. Se $g'(x_0) \neq 0$ esiste un intorno di x_0 sul quale $g(x) \neq g(x_0)$ se $x \neq x_0$. Si ha quindi

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \, \frac{x - x_0}{g(x) - g(x_0)}$$

nei punti di tale intorno. Basta allora passare al limite per $x \to x_0$. □

Gli altri casi sono simili, anche se un po' più complicati formalmente.
Il precedente teorema è importante nel calcolo dei limiti. Troveremo tra poco un altro "strumento" utile a ciò: *la formula di Taylor*.

9.3 Derivate successive

Il concetto di derivata si generalizza "induttivamente". Ad esempio, sia $A \subseteq \mathbb{R}$ $(A \neq \varnothing)$ e sia $f\colon A \to \mathbb{R}$. Per semplicità, siano $A \subseteq D(A)$ e $x_0 \in A$.
La *derivata seconda* di f in x_0, se esiste, è data da

$$(f')'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(f')(x) - (f')(x_0)}{x - x_0} \quad (\in \mathbb{R})$$

Notazione. Si usano i simboli $f''(x_0)$, $\quad D^2 f(x_0)$, $\quad f^{(2)}(x_0)$, $\quad \left.\dfrac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_0}, \ldots$
Analogamente si pone

$$f^{(n)}(x_0), \quad D^n f(x_0), \quad \left.\frac{d^n f}{dx^n}\right|_{x=x_0}, \ldots,$$

per denotare la *derivata n-esima* di f in x_0, che è, per definizione, la derivata della funzione $f^{(n-1)}(x)$ in x_0. In altre parole, *f è derivabile n volte* in x_0 se è derivabile $(n-1)$ volte in x_0 e se esiste il seguente limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}.$$

In tal caso si pone

$$f^{(n)}(x_0) \overset{def.}{=} (f^{(n-1)})'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}.$$

D'ora in poi useremo la seguente notazione. Sia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Allora si pone

$$C^n(A) \overset{def.}{=} \left\{ \begin{array}{r} f\colon A \to \mathbb{R} : f \text{ è derivabile } n \text{ volte in } A \text{ e la} \\ \text{derivata } n\text{-esima di } f \text{ è continua} \end{array} \right\}$$

In particolare $C^0(A) = C(A)$ è l'insieme delle funzioni continue $f\colon A \to \mathbb{R}$.
Vedremo tra poco, come conseguenza della Proposizione 9.3.1, che $C^n(A)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Col simbolo $C^\infty(A)$ si indica lo spazio vettoriale delle funzioni $f\colon A \to \mathbb{R}$ infinitamente derivabili in A.
Valgono le seguenti inclusioni (strette):

$$C^0(A) \supsetneq C^1(A) \supsetneq C^2(A) \supsetneq \cdots \supsetneq C^n(A) \supsetneq C^{n+1}(A) \supsetneq \cdots \supsetneq C^\infty(A).$$

Si pone

$$C^\infty(A) \overset{def.}{=} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(A).$$

Osservazione 9.3.1. Che le inclusioni siano strette può essere dimostrato usando il seguente esempio. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $n < \alpha < n+1$. Sia

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|^\alpha.$$

Allora $f \in C^n(\mathbb{R})$. Ciò segue dal fatto che

$$D^n f(x) = \begin{cases} \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)|x|^{\alpha-n}(\operatorname{segn} x)^n & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}. \tag{9.3}$$

Per esercizio, dimostrare la formula (9.3).
La stessa formula dice che $D^{n+1}f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$. Pertanto $f \notin C^{n+1}(\mathbb{R})$. ■

Proposizione 9.3.1. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme aperto. Siano $f, g \in C^n(A)$, $n \geq 1$. Valgono le seguenti:*

1) *$f + g \in C^n(A)$ e*

$$D^n(f+g)(x) = D^n f(x) + D^n g(x) \quad \forall\, x \in A.$$

2) *Se $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\lambda f \in C^n(A)$ e*

$$D^n \lambda f = \lambda\, D^n f.$$

3) *Si ha che* $fg \in C^n(A)$ *e vale la formula*

$$D^n(fg)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k f(x) D^{n-k} g(x) \quad \forall\, x \in A.$$

Omettiamo, per semplicità, la dimostrazione. Si noti tuttavia che le prime due affermazioni sono evidenti, mentre l'ultima, cioè la 3), si dimostra per induzione. Si può anche notare una sua certa somiglianza formale con la formula del binomio di Newton. Infine, come anticipato, notare che le prime due proprietà dimostrano che it $C^n(A)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

9.4 Infinitesimi, O grande e o piccolo

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A) \cap \overline{\mathbb{R}}$ e siano $f, g \colon A \to \mathbb{R}$ con $g(x) \neq 0$ se $x \in A \setminus \{x_0\}$.

Definizione 9.4.1 (O grande)**.** Si dice che f *è un "O grande" di g per $x \to x_0$*, e in tal caso si pone

$$f = O(g) \quad \text{per } x \to x_0,$$

se

$$\exists\, M > 0 \ : \ \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq M \quad \forall\, x \in (A \setminus \{x_0\}) \cap W$$

per qualche intorno $W \in \mathscr{U}_{x_0}$.

In altre parole il quoziente $\left| \dfrac{f(x)}{g(x)} \right|$ è localmente limitato per $x \to x_0$.

Definizione 9.4.2 (o piccolo)**.** Se esiste $\omega \colon A \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \omega(x) \cdot g(x)$ e $\omega(x) \to 0$ per $x \to x_0$ si scrive

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0.$$

In questo caso si dice che f *è un "o piccolo" di g per $x \to x_0$.*

La definizione implica che

- se $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \in \mathbb{R}$ allora

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0.$$

- se $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ allora

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0.$$

Notare che se $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ allora è vero anche che $f(x) = O(g(x))$ per $x \to x_0$.

Esercizio 9.4.1. Fare ("costruire") esempi di f, g tali che $f = o(g)$ e $f = O(g)$ per $x \to x_0$.

9.5 Polinomi di Taylor

Definizione 9.5.1. Sia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Una funzione $p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è detta *polinomio* di grado $\leq n$ se esistono $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ (costanti) tali che

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Nel seguito si pone $\mathscr{P}_n$ per indicare la famiglia delle funzioni polinomiali $p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di grado $\leq n$. Si osservi che $\mathscr{P}_n$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Proposizione 9.5.1. *Se $p \in \mathscr{P}_n$ con $n \geq 1$, allora*

$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R}\ \exists\, b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R} \ : \ p(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione. Cenni. La prova si effettua per induzione. Verifichiamo cosa accade per $n = 1$. Se $p \in \mathscr{P}_1$ allora si ha $p(x) = a_0 + a_1 x$. Se $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_1 x_0.$$

Allora basta porre $b_0 \overset{def.}{=} a_0 + a_1 x_0$, $b_1 \overset{def.}{=} a_1$.

Il resto della prova è lasciato come esercizio facoltativo. □

Corollario 9.5.1. *Sia $p \in \mathscr{P}_n$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $p(x) = o((x - x_0)^n)$ per $x \to x_0$. Allora $p = 0$.*

Dimostrazione. Dalla proposizione precedente si ottiene che

$$\exists\, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \;:\; p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k.$$

Dobbiamo verificare che $a_0 = \dots = a_n = 0$. Ragioniamo per assurdo.
Allora esiste $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ tale che $a_k \neq 0$. Prendiamo il minimo di tali k, cioè $m \overset{def.}{\equiv} \min\{k : a_k \neq 0\}$. Si ha

$$p(x) = (x - x_0)^m \left(a_m + a_{m+1}(x - x_0) + \dots + a_n (x - x_0)^{n-m}\right)$$

e dunque

$$\frac{p(x)}{(x - x_0)^m} \xrightarrow[x \to x_0]{} a_m \neq 0. \tag{9.4}$$

Ma $m \leq n$ e, per ipotesi, $\dfrac{p(x)}{(x - x_0)^n} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$. Pertanto

$$\frac{p(x)}{(x - x_0)^m} = \underbrace{\frac{p(x)}{(x - x_0)^n}}_{\downarrow \atop 0} \cdot \underbrace{(x - x_0)^{n-m \,\geq 0}}_{\downarrow \atop 0} \to 0.$$

Ma questo contraddice (9.4). □

Lemma 9.5.1. *Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ fissato e sia $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Allora*

$$D^h (x - x_0)^k = \begin{cases} k! \, \dfrac{(x - x_0)^{k-h}}{(k-h)!} & \text{se } h \leq k \\ 0 & \text{se } h > k \end{cases}.$$

Dimostrazione. Per esercizio. □

Proposizione 9.5.2. *Se $p \in \mathscr{P}_n$ allora $p \in C^\infty(\mathbb{R})$ e per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione. Facoltativa. La prova è ovvia se $n = 0$. Se $n \geq 1$, esistono $b_0, \dots, b_n$ tali che

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{9.5}$$

(ciò segue dalla Proposizione 9.5.1). Dal Lemma 9.5.1 segue che $p \in C^\infty(\mathbb{R})$ e che (se $h \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $h \le n$)

$$D^h p(x) = \sum_{k=h}^{n} b_k k! \frac{(x-x_0)^{k-h}}{(k-h)!} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

In particolare, se si pone $x = x_0$, segue che

$$D^h p(x_0) = b_h h! \quad \forall\, h = 0, 1, \dots, n.$$

Ossia $b_h = \dfrac{D^h p(x_0)}{h!}$ e la tesi segue usando la (9.5). $\square$

Definizione 9.5.2 (Polinomio di Taylor)**.** Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo aperto. Sia $x_0 \in I$ e si assuma che f è derivabile n volte in x_0.
Si pone

$$T_n^{x_0} f(x) \overset{def.}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Il polinomio $T_n^{x_0}$ è il *polinomio di Taylor di f di ordine n, relativo al punto x_0.* Se $x_0 = 0$ si dice *polinomio di McLaurin di f di ordine n.*

Teorema 9.5.1 (Formula di Taylor con resto di Peano)**.** *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo aperto. Sia $x_0 \in I$ ed assumiamo che f è derivabile n volte in x_0. Allora esiste un unico polinomio $T \in \mathscr{P}_n$ tale che*

$$f(x) = T(x) + o((x-x_0)^n) \quad \textit{per } x \to x_0. \tag{9.6}$$

Inoltre $T = T_n^{x_0}$, cioè questo polinomio è il polinomio di Taylor di f relativo al punto x_0 e di ordine n.

Dimostrazione. Facoltativa.
(Unicità) Se T, $\overline{T}$ sono entrambi polinomi di grado n che soddisfano (9.6) allora

$$T(x) = \overline{T}(x) + o((x-x_0)^n)$$

ed il Corollario 9.5.1 implica che $T = \overline{T}$.

(Esistenza) Sia $T \overset{def.}{=} T_n^{x_0}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allora si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T(x)}{(x-x_0)^n} = 0. \tag{9.7}$$

Dimostriamo la (9.7).
Sappiamo che
$$T^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \text{per} \quad k = 0, \dots, n. \tag{9.8}$$
Dato che, se $x \to x_0$ allora $f(x) - T(x) \to f(x_0) - T(x_0)$ e dato che
$$(x - x_0)^n \xrightarrow[x \to x_0]{} 0,$$
allora (per il teorema dell'Hôpital) si ha
$$(9.7) \text{ è vera} \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - T'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = 0.$$
Si reitera questo ragionamento e si vede che
$$(9.7) \text{ è vera} \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - T^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} = 0.$$
Ora, dato che $\underbrace{f^{(n-1)}(x_0) = T^{(n-1)}(x_0)}_{\text{(si usa (9.8))}}$, se $x \to x_0$ si ha
$$\frac{f^{(n-1)}(x) - T^{(n-1)}(x)}{x - x_0} = \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - \frac{T^{(n-1)}(x) - T^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$$
$$\xrightarrow[x \to x_0]{} f^{(n)}(x_0) - T^{(n)}(x_0) = 0$$
(dove si è usata la (9.8)). □

Osservazione 9.5.1. La funzione $o((x - x_0)^n)$ è chiamata *resto di Peano* dell'approssimazione di f con il suo polinomio di Taylor $T_n^{x_0}$. ■

Vediamo ora la formula di Taylor con *resto di Lagrange.*

Lemma 9.5.2. *Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto, $x_0 \in I$, $f\colon I \to \mathbb{R}$, f derivabile n volte su I, $n \geq 1$. Supponiamo che $f^{(k)}(x_0) = 0$ per $0 \leq k \leq n - 1$. Allora*
$$\forall\, x \in I \setminus \{x_0\}\ \exists\, y \in \,]x_0, x[\ :\ \frac{f(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(y)}{n!}.$$

Dimostrazione. Per induzione.
Caso $n = 1$. Dato che $f(x_0) = 0$, il teorema di Lagrange implica che

$$f(x) = f'(y)(x - x_0),$$

per qualche $y \in\ ]x_0, x[$.

Dato che è vera nel caso n, proviamola nel caso $n + 1$. L'ipotesi induttiva si può applicare alla derivata f'. Allora $f'\colon I \to \mathbb{R}$ è derivabile n volte e

$$(f')^{(k)}(x_0) = D^{k+1} f(x_0) = 0$$

per $0 \le k \le n - 1$. Per il Teorema 9.2.3 (di Cauchy)

$$\exists\ z \in]x_0, x[\ :\ \frac{f(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f'(z)}{(n + 1)(z - x_0)^n}.$$

Usando l'ipotesi induttiva si ottiene che esiste y tale che

$$\frac{f(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f'(z)}{(n + 1)(z - x_0)^n} = \frac{(f')^{(n)}(y)}{(n + 1)\, n!} = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n + 1)!}.$$

Questo prova il lemma. □

Teorema 9.5.2 (Formula di Taylor con resto di Lagrange)**.** *Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto e $x_0 \in I$. Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile $n + 1$ volte su I. Allora*

$$\forall\ x \in I \setminus \{x_0\}\ \exists\ y \in]x_0, x[\ :\ \boxed{f(x) = T_n^{x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}}.$$

Dimostrazione. Posto $g \overset{def.}{=} f - T_n^{x_0}\colon I \to \mathbb{R}$, si ha che g è derivabile $n + 1$ volte su I e $g^{(k)}(x_0) = 0$ per $0 \le k \le n$. Dal Lemma 9.5.2 segue che per ogni $x \in \setminus\{x_0\}$ esiste $y \in]x_0, x[$ tale che

$$\frac{g(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{g^{(n+1)}(y)}{(n + 1)!},$$

ossia

$$\frac{f(x) - T_n^{x_0}(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{g(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n + 1)!}$$

ed il teorema è dimostrato.
Notare che si è usato il fatto che, essendo $T_n^{x_0}$ un polinomio di grado $\le n$, la sua derivata $(n + 1)$-esima è nulla su I. □

9.6 Polinomi di Taylor/McLaurin di funzioni elementari

Terminologia. Se il punto iniziale è $x_0 = 0$, allora i polinomi/sviluppi di Taylor si chiamano *polinomi/sviluppi di McLaurin* .

1) Sia $f(x) = e^x$.

Si ha $D^k e^x = e^x \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$. Quindi, se $x_0 = 0$ si ha

$$D^k f(0) = 1 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Ne segue la formula

$$T_n f(x) \overset{def.}{=} T_n^0 f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Usando i precedenti teoremi si ottiene

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\, x \neq 0, \quad \exists\, y \in \,]0, x[\, : \boxed{e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^y}{(n+1)!}\, x^{n+1}}.$$

Inoltre

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + O(x^{n+1}) \quad \text{per } x \to 0.$$

Ma anche

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0.$$

Notare che i primi termini sono

$$1,\, x,\, \frac{x^2}{2},\, \frac{x^3}{3!}, \ldots\ .$$

Talvolta, nelle applicazioni/esercizi, bastano pochi termini per avere informazioni interessanti. Per esempio, si usano spesso le formule

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad e^x = 1 + x + o(x) \quad (x \to 0).$$

2) Sia $f\colon]-1,+\infty[\, = I \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lg(1+x)$.

Si ha $f \in C^\infty(I)$ e

$$D^k f(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\ \forall\, x > -1.$$

Pertanto

$f^{(0)}(0) = f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1, \dots, f^{(k)} = (-1)^{k-1}(k-1)!$

dove $k \geq 1$. Quindi

$$T_n f(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}.$$

Inoltre, come nell'esempio precedente, si ha

$$\forall\, x \in I \quad \exists\, y \in \,]0,x[\, : \boxed{\lg(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^n \frac{(1+y)^{-(n+1)}}{n+1}\, x^{n+1}}.$$

Ne segue, in particolare, che

$$\lg(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \underbrace{O(x^{n+1})}_{oppure\ o(x^n)} \quad (x \to 0)$$

Notare che i primi termini sono $x, -\dfrac{x^2}{2}, \dfrac{x^3}{3}, \dfrac{x^4}{4} \dots$.

Pertanto, ad esempio, $\lg(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} + o(x^4)$ per $x \to 0$.

3) Sia $f\colon]-1,+\infty[\, = I \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si ha che $f \in C^\infty(I)$, e si può verificare che

$D^k(1+x)^\alpha = \alpha(\alpha-1)\cdot\ \dots\ \cdot(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, x > -1.$

Posto

$$\binom{\alpha}{k} \overset{def.}{=} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ \dots\ \cdot(\alpha-k+1)}{k!}$$

(questo numero coincide col coefficiente binomiale se $\alpha \in \mathbb{N}$) si ha

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

In particolare, usando la formula di McLaurin con resto di Lagrange, segue che

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \underbrace{O(x^{n+1})}_{oppure\ \ o(x^n)} \qquad \text{per } x \to 0.$$

Come esempio, si ha $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}\,x + o(x)$.

Per esercizio, sostituire ad α i valori $2, 3, \ldots, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \pi, e$, etc.

4) Sviluppi delle funzioni trigonometriche sin e cos.
Sia $f(x) = \sin x$. E' facile vedere che in $x_0 = 0$ si ha

$$(T_{2n+1} \sin)\,(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \,\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Notare che i coefficienti non nulli sono dispari.

Osservazione 9.6.1. Si ha

$$D \sin x = \cos x,\ D^2 \sin x = -\sin x,\ D^3 \sin x = -\cos x, \ldots$$

Pertanto, in $x_0 = 0$, risultano non nulli (e uguali a ± 1) solo i coefficienti dispari. Precisamente, si ha

$$D^{2k+1} \sin x\big|_{x=0} = (-1)^k.$$

■

Segue dalla formula di Taylor con resto di Lagrange[2] che

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \,\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + O(x^{2n+2}) \quad \text{per } x \to 0.$$

[2] Più precisamente, si ha

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ \ \exists\, y \in]0, x[\ :\ \boxed{\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \,\frac{x^{2k+1}}{2k+1!} + \frac{D^{2n+2}(\sin)(y)}{(2n+2)!} x^{2n+2}}.$$

Notare che $D^{2n+2}(\sin)(y) = \pm \sin(y)$.

Per esempio, si ha

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \underbrace{O(x^8)}_{\text{oppure } o(x^7)} \qquad \text{per } x \to 0$$

Considerazioni analoghe[3] si svolgono per i polinomio e gli sviluppi di McLaurin della funzione $f(x) = \cos x$. Si ha

$$(T_{2n} \cos)(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!}.$$

In generale, dalla formula di McLaurin con resto di Lagrange segue che

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!} + O(x^{2n+1}) \quad \text{per } x \to 0.$$

In particolare, si ha

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \underbrace{O(x^7)}_{\text{oppure } o(x^6)} \qquad \text{per } x \to 0.$$

Esercizio 9.6.1. Scrivere gli sviluppi (ed i polinomi) di Taylor delle funzioni iperboliche $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$ (cfr. sezione 8.4).
Suggerimento. Ricordare che $D \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x$ e $D \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x$.

[3] Ma il ruolo degli indici dispari viene in tal caso giocato dagli indici pari.

9.7 Funzioni convesse

Definizione 9.7.1. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo non banale (cioè, $\mathring{I} \neq \varnothing$)[4] e sia $f\colon I \to \mathbb{R}$. Si dice che f è *convessa*[5] su I se

$$\forall\, x_1, x_2 \in I,\ \forall\, t \in [0,1] \implies f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_2) \quad (9.9)$$

Osservazione 9.7.1. Sia $x = tx_1 + (1-t)x_2$. Allora si ha che

$$(9.9) \iff \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} \geq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \quad \forall\, x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \text{ e } \forall\, x \in \,]x_1, x_2[$$

oppure

$$(9.9) \iff \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \quad \forall\, x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \text{ e } \forall\, x \in \,]x_1, x_2[.$$

■

Notare che $x(t) = tx_1 + (1-t)x_2$ "parametrizza" il segmento che congiunge i punti x_1 e x_2. Cioè lo si percorre nel (parametro$\equiv$)tempo t, a partire da $t = 0$, e quindi dal punto x_2, fino al tempo $t = 1$, e quindi arrivando nel punto x_1. Posto

$$m_1 = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \quad m_2 = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \quad m_{12} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

si ottiene da quanto detto sopra che valgono le disuguaglianze

$$m_1 \leq m_{12} \leq m_2.$$

Si ha poi che tali disuguaglianze sono equivalenti alla seguente disuguaglianza

[4] Qui e altrove, $\mathring{I} \neq \varnothing$ significa che I non si riduce ad un punto (ossia è *non banale*), avendo interno non vuoto.

[5] La convessità è una nozione centrale in Analisi. Qui si è discussa solo per funzioni $f\colon I \to \mathbb{R}$, ma è un concetto che ha moltissime generalizzazioni. E' una nozione cruciale perché legata all'esistenza di minimi. Vedremo precisamente cosa s' intende con quest'ultima affermazione già nello studio qualitativo dei grafici di funzioni $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

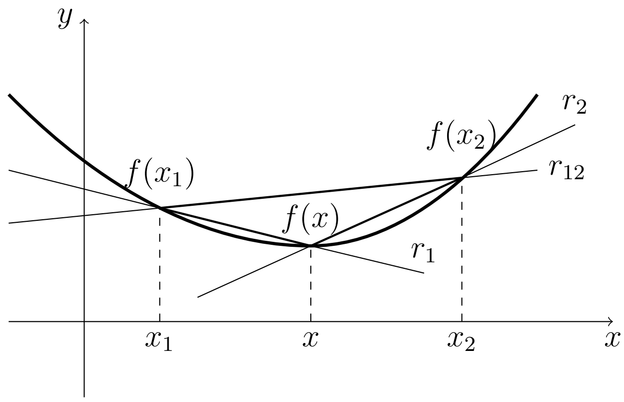


Figura 9.2: Grafico di una funzione f *convessa*

$$f(x) \leq \underbrace{f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)} \quad \forall\, x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2.$$

Questa è l'equazione esplicita di una retta passante per $(x_1, f(x_1))$ ed avente coefficiente angolare m_{12}, dato da $m_{12} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Teorema 9.7.1. *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo non banale e sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su I. Allora*

$$f \text{ convessa} \iff f' \nearrow \ (\text{ossia } f' \text{ è monotona crescente}).$$

Dimostrazione. Facoltativa. Segue dalle precedenti disuguaglianze usando la definizione di f'.

$(1 \Rightarrow 2)$. Se f è convessa, siano $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ e siano $y, z \in]x_1, x_2[$, $y < z$. Usando le disuguaglianze dell'Osservazione 9.7.1 si ha:

$$\frac{f(y) - f(x_1)}{y - x_1} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \leq \frac{f(x_2) - f(z)}{x_2 - z} = \frac{f(z) - f(x_2)}{z - x_2}$$

perciò

$$\frac{f(y) - f(x_1)}{y - x_1} \leq \frac{f(z) - f(x_2)}{z - x_2}.$$

Essendo f derivabile segue che se $y \to x_1^+$ e $z \to x_2^-$ allora $f'(x_1) \leq f'(x_2)$, ossia $f' \nearrow$.

$(2 \Rightarrow 1)$. Se invece $f' \nearrow$, siano $x_1, x_2, x \in I$, $x_1 \lneq x \lneq x_2$. Per il teorema di Lagrange si ha

$$\exists\, y_1, y_2 : f'(y_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1},\ f'(y_2) = \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2},$$

dove $y_1 \in]x_1, x[$ e $y_2 \in]x, x_2[$. Dato che

$$y_1 \leq y_2 \implies f'(y_1) \leq f'(y_2)$$

si ha

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}.$$

Da ciò si trae anche

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

e quindi anche che

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2),$$

cioè la convessità. □

Corollario 9.7.1. *Se $f \colon I \to \mathbb{R}$ è derivabile due volte su I allora*

$$f \text{ è convessa} \iff f''(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in I.$$

Dimostrazione. Se $f' \nearrow$ ed f ha due derivate in ogni punto allora $f'' \geq 0$ e viceversa.
Qui si è usato il fatto che, se g è derivabile, allora

$$g \nearrow \iff g' \geq 0.$$

□

Teorema 9.7.2. *Sia $f \colon I \to \mathbb{R}$, I intervallo non banale. Sia f derivabile due volte su I. Allora*

$$f \text{ è convessa} \iff f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \forall\, x_0 \in I.$$

Dimostrazione. Facoltativa. Sia f convessa. Allora, usando uno sviluppo di Taylor al 1° ordine con resto di Lagrange, si ha

$$T_1^{x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

e

$$\exists\, y \in \,]x_0, x[\quad \text{tale che} \quad f(x) - T_1^{x_0} f(x) = \frac{f''(y)}{2}\,(x - x_0)^2.$$

Per il Corollario 9.7.1 $f'' \geq 0$ su I. Pertanto $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Viceversa (per la formula di Taylor con resto di Peano) abbiamo

$$\frac{f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))}{(x - x_0)^2} =$$

$$= \frac{f(x) - \left(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2\right) + \dfrac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2} =$$

$$= \frac{f(x) - T_2^{x_0} f(x)}{(x - x_0)^2} + \frac{1}{2} f''(x_0) \xrightarrow[x \to x_0]{} \frac{1}{2} f''(x_0).$$

In altre parole

$$\overbrace{\frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{(x - x_0)^2}}^{\geq 0 \quad \text{per ipotesi}} \to \frac{f''(x_0)}{2}.$$

Cioè

$$f''(x_0) \geq 0 \quad \forall\, x_0 \in I.$$

Sempre dal Corollario 9.7.1 si deduce che f è convessa. □

Capitolo 10

Integrale di Riemann su $\mathbb{R}$

10.1 Definizione e proprietà

Poniamo $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ dove $a, b \in \mathbb{R}\,(a < b)$.

Definizione 10.1.1. Si chiama *scomposizione* di $I = [a, b]$, un sottoinsieme finito σ di $[a, b]$ tale che $a, b \in \sigma$.

D'ora in avanti penseremo a σ come ad un insieme ordinato di punti

$$\sigma = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad \text{dove } x_0 = a,\ x_n = b$$

e si assume che $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$.
Sia $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ per $k = 1, \dots, n$. Per definizione, si pone

$$\mathrm{mis}(I_k) = x_k - x_{k-1} \quad \text{per } k = 1, \dots, n.$$

Risulta

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{mis}(I_k) = b - a.$$

Infatti $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{mis}(I_k) = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = b - a.$
Il simbolo "mis" significa (e si legge) "*misura*".

Si pone anche

$$|\sigma| = \max\{\text{mis}(I_k) : k = 1, \dots, n\}.$$

Il numero $|\sigma|$ si chiama *finezza della scomposizione* σ.
L'insieme di tutte le scomposizioni di $[a, b]$ si indica come

$$\Omega_{[a,b]}.$$

Se $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega_{[a,b]}$ sono due scomposizioni di $[a, b]$ allora, per definizione, si dice che "*σ_1 è più fine di σ_2*" se $\sigma_2 \subseteq \sigma_1$. Ossia, σ_1 è più fine di σ_2 se contiene (almeno) tutti i punti di σ_2.

Spesso è utile pensare che, data una scomposizione σ_2, allora un'altra scomposizione σ_1 *più fine* di σ_2 si può costruire semplicemente "aggiungendo" un punto c che non sia già un punto di σ_2.

Osservazione 10.1.1. Se σ_1 è più fine di σ_2 allora, in particolare, $|\sigma_1| \leq |\sigma_2|$. Notare inoltre che l'*essere più fine* definisce una relazione d'ordine (non totale) sull'insieme $\Omega_{[a,b]}$ delle scomposizioni di $[a, b]$. ■

D'ora in poi $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione *limitata*[1].

Definizione 10.1.2 (Somme superiori ed inferiori)**.** Sia

$$\sigma = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\} \in \Omega_{[a,b]}.$$

Allora

$$S(f, \sigma) \overset{def.}{=} \sum_{k=1}^{n} \sup_{I_k} f \cdot \text{mis}(I_k)$$

si dice *somma superiore* di f su $[a, b]$ relativa alla scomposizione σ.
Analogamente, si pone

$$s(f, \sigma) \overset{def.}{=} \sum_{k=1}^{n} \inf_{I_k} f \cdot \text{mis}(I_k)$$

e si dice *somma inferiore* di f su $[a, b]$ relativa alla scomposizione σ.

[1]Osservare che, se f non fosse limitata, allora $\sup_{[a,b]} f$ potrebbe non essere finito, ossia potrebbe essere $\sup_{[a,b]} f = +\infty$. Analogamente, $\inf_{[a,b]} f$ potrebbe non essere finito, ossia potrebbe essere $\inf_{[a,b]} f = -\infty$.

Dalla definizione si ha subito che

$$s(f,\sigma) \le S(f,\sigma) \quad \forall\, \sigma \in \Omega_{[a,b]}.$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\inf_{[a,b]} f \,\cdot\, (b-a) &= \sum_{k=1}^{n} \inf_{[a,b]} f \,\cdot\, \mathrm{mis}(I_k) \le s(f,\sigma) \le S(f,\sigma) \le \\ &\le \sum_{k=1}^{n} \sup_{[a,b]} f \,\cdot\, \mathrm{mis}(I_k) = \sup_{[a,b]} f \cdot (b-a).\end{aligned}$$

Ossia

$$\inf_{[a,b]} f \,\cdot\, (b-a) \le s(f,\sigma) \le \sup_{[a,b]} f \cdot (b-a)$$

$$\inf_{[a,b]} f \,\cdot\, (b-a) \le S(f,\sigma) \le \sup_{[a,b]} f \cdot (b-a).$$

Dalla limitatezza di f su $[a,b]$ segue che entrambi i numeri $\inf_{[a,b]} f$ e $\sup_{[a,b]} f$ sono finiti. Dalle disuguaglianze appena enunciate, segue in particolare che qualsiasi somma inferiore e/o superiore è un numero (finito). Adesso, per definizione, poniamo

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \overset{def.}{=} \sup\left\{ s(f,\sigma) : \sigma \in \Omega_{[a,b]} \right\}$$

e lo chiamiamo *integrale inferiore* di f su $[a,b]$.
Inoltre, per definizione, poniamo

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \overset{def.}{=} \inf\left\{ S(f,\sigma) : \sigma \in \Omega_{[a,b]} \right\}$$

e lo chiamiamo *integrale superiore* di f su $[a,b]$.

Per quanto sopra, si ha che entrambe le quantità

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx, \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \quad \text{sono numeri reali (cioè, sono finiti).}$$

Inoltre vale la seguente:

Proposizione 10.1.1. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. Allora*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Prima di dimostrarla (vedi sotto) introduciamo un esempio.

Esempio 10.1.1 (Importante). Definiamo la *funzione di Dirichlet*

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) \overset{def.}{=} \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Notare che per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ segue che ogni intervallo (non banale) contenuto in $[0,1]$ contiene punti in cui f vale 1. Ossia, si ha

$$S(f,\sigma) = 1 \quad \forall\, \sigma \in \Omega_{[0,1]}.$$

Ma per la densità di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ segue che ogni sotto-intervallo (non banale) di $[0,1]$ possiede punti in cui f vale 0. Ossia

$$s(f,\sigma) = 0 \quad \forall\, \sigma \in \Omega_{[0,1]}.$$

Quindi

$$\overline{\int_0^1} f(x)\,dx = 1 \quad \text{e} \quad \underline{\int_0^1} f(x)\,dx = 0.$$

Cioè

$$0 = \underline{\int_0^1} f(x)\,dx < \overline{\int_0^1} f(x)\,dx = 1.$$

Di conseguenza, *esiste (almeno) una funzione f per cui*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \ne \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Definizione 10.1.3. Una funzione limitata $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è *integrabile secondo Riemann* su $[a,b]$ se

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

D'ora in poi, se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{def.}{=} \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Il valore comune di queste quantità (coincidente col primo membro) si chiama *integrale* di f su $[a,b]$.

Adesso torniamo alla Proposizione 10.1.1. Per dimostrarla useremo il seguente:

Lemma 10.1.1. *Siano* $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega_{[a,b]}$ *e* $\sigma_1 \supseteq \sigma_2$. *Allora*

$$S(f, \sigma_1) \leq S(f, \sigma_2) \tag{10.1}$$

e inoltre si ha

$$s(f, \sigma_2) \leq s(f, \sigma_1) \tag{10.2}$$

Dimostrazione del Lemma 10.1.1. L'idea è che a partire da σ_2, si provano le disuguaglianze nel caso $\sigma_1 = \{c\} \cup \sigma_2$, dove $c \in [a, b] \setminus \sigma_2$ (cioè "si aggiunge" un punto).
Proviamo la (10.1). Per esempio, sia $c \in \left]x_p, x_{p+1}\right[$, ossia $x_p < c < x_{p+1}$. Dalle definizioni si ha

$$\begin{aligned} S(f, \sigma_1) - S(f, \sigma_2) &= \sup_{[x_p,\, c]} f \cdot (c - x_p) + \sup_{[c,\, x_{p+1}]} f \cdot (x_{p+1} - c) - \\ &- \sup_{[x_p,\, x_{p+1}]} f \cdot (x_{p+1} - x_p) \leq \sup_{[x_p,\, x_{p+1}]} f \cdot (c - x_p) + \\ &+ \sup_{[x_p,\, x_{p+1}]} f \cdot (x_{p+1} - c) - \sup_{[x_p,\, x_{p+1}]} f \cdot (x_{p+1} - x_p) = 0 \end{aligned}$$

Ciò prova (10.1).
Analogamente, per quanto concerne (10.2), si ha

$$\begin{aligned} s(f, \sigma_1) - s(f, \sigma_2) &= \inf_{[x_p,\, c]} f \cdot (c - x_p) + \inf_{[c,\, x_{p+1}]} f \cdot (x_{p+1} - c) - \\ &- \inf_{[x_p,\, x_{p+1}]} f \cdot (x_{p+1} - x_p) \geq \inf_{[x_p,\, x_{p+1}]} f \cdot (c - x_p) + \\ &+ \inf_{[x_p,\, x_{p+1}]} f \cdot (x_{p+1} - c) - \inf_{[x_p,\, x_{p+1}]} f \cdot (x_{p+1} - x_p) = 0 \end{aligned}$$

La dimostrazione del caso generale si può fare in effetti "reiterando" l'idea precedente. □

Questo lemma ha un immediato corollario:

Corollario 10.1.1. *Per ogni* $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega_{[a,b]}$ *si ha*

$$s(f, \sigma_1) \leq S(f, \sigma_2).$$

Dimostrazione. Date $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega_{[a,b]}$ si pone $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$. Chiaramente $\sigma \supseteq \sigma_1$ e $\sigma \supseteq \sigma_2$, pertanto il lemma precedente implica

$$s(f,\sigma_1) \overset{\text{Lemma 10.1.1}}{\leq} s(f,\sigma) \overset{\text{ovvia}}{\leq} S(f,\sigma) \overset{\text{Lemma 10.1.1}}{\leq} S(f,\sigma_2).$$

$\square$

Possiamo finalmente dimostrare la Proposizione 10.1.1.

Dimostrazione della Proposizione 10.1.1. La tesi segue dal Corollario 10.1.1. $\square$

Notazione. D'ora in poi $\mathscr{R}_{[a,b]}$ denoterà l'insieme delle funzioni limitate $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ che sono integrabili (nel senso di Riemann).

Teorema 10.1.1 (Riemann)**.** *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. Allora*

$$f \in \mathscr{R}_{[a,b]} \overset{\textit{equivale}}{\iff} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \sigma \in \Omega_{[a,b]} : S(f,\sigma) - s(f,\sigma) < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Se $f \in \mathscr{R}_{[a,b]}$ si ha

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \sigma_1 \in \Omega_{[a,b]}\ :\ S(f,\sigma_1) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} = \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

ed

$$\exists\, \sigma_2 \in \Omega_{[a,b]}\ :\ s(f,\sigma_2) > \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2}.$$

N.B. Si sono usate le definizioni di $\overline{\int}$, $\underline{\int}$ e quella di integrabilità (notare[2] in effetti che, le definizioni di $\overline{\int}$ e $\underline{\int}$ coinvolgono i concetti di inf e sup).

---

[2]Ad esempio, si noti che la prima disuguaglianza usa il fatto che, l'inf della funzione $S(f,\cdot) : \Omega_{[a,b]} \to \mathbb{R}$ soddisfa la seguente proprietà:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \sigma \in \Omega_{[a,b]}\ :\ \overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf_{\sigma \in \Omega_{[a,b]}} S(f,\sigma) > S(f,\sigma) - \varepsilon.$$

Perché? Perché, altrimenti, si avrebbe che $\exists \varepsilon > 0\ :\ \forall \sigma \in \Omega_{[a,b]}$

$$\inf_{\sigma \in \Omega_{[a,b]}} S(f,\sigma) \leq S(f,\sigma) - \varepsilon,$$

ma ciò è assurdo, dato che contraddice il fatto che $\inf_{\sigma\in\Omega_{[a,b]}} S(f,\sigma)$ è il *massimo minorante dell'immagine di $S(f,\cdot)$*. In effetti, in tal caso, si avrebbe che $S(f,\sigma) - \varepsilon$ è un minorante dell'immagine di $S(f,\cdot)$, ma esso risulta certamente più grande dell'inf.

Pertanto sia $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$. (Allora $\sigma \supseteq \sigma_1$ e $\sigma \supseteq \sigma_2$). Perciò da quanto visto in precedenza si ha

$$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) \leq S(f,\sigma_1) - s(f,\sigma_2) < \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} -$$
$$- \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ossia $S(f,\sigma) - s(f,\sigma) < \varepsilon$.

Viceversa, se

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \sigma \in \Omega_{[a,b]}\ :\ S(f,\sigma) - s(f,\sigma) < \varepsilon,$$

allora

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq S(f,\sigma) - s(f,\sigma) < \varepsilon;$$

da ciò si deduce che

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx < \varepsilon.$$

Questo deve essere vero per ogni $\varepsilon > 0$ e dunque

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Dato che per la Proposizione 10.1.1 si ha pure

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

e da ciò segue che

$$\underbrace{\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx}_{\text{sono allora tutti uguali tra loro}} \iff f \text{ integrabile.}$$

$\square$

Teorema 10.1.2. *Se $f \in C([a,b])$ allora $f \in \mathscr{R}_{[a,b]}$.*

Dimostrazione. Essendo f continua sul compatto $[a, b]$ essa è limitata. Applicando pertanto il teorema di Heine-Cantor si ha che f è uniformemente continua su $[a, b]$. Cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\rho > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{se } x, y \in [a, b] \quad \text{e} \quad |x - y| < \rho. \tag{10.3}$$

Sia $\sigma \in \Omega_{[a,b]}$ e $|\sigma| < \rho$. Allora

$$S(f, \sigma) - s(f, \sigma) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f \right) \cdot \operatorname{mis}(I_k). \tag{10.4}$$

Per il teorema di Weierstrass si ha che se $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ allora esistono $x'_k, x''_k \in I_k = [x_{k-1}, x_k]$ tali che

$$f(x'_k) = \sup_{I_k} f \quad \text{e} \quad f(x''_k) = \inf_{I_k} f.$$

Ma (dato che $x'_k, x''_k \in I_k$) si deve avere

$$|x'_k - x''_k| \leq \operatorname{mis}(I_k) \leq |\sigma| < \rho.$$

Segue da (10.3) che

$$f(x'_k) - f(x''_k) = |f(x'_k) - f(x''_k)| < \varepsilon.$$

Usando (10.4) segue infine che

$$S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \sum_{k=1}^{n} \varepsilon \cdot \operatorname{mis}(I_k) = \varepsilon \cdot (b - a).$$

La tesi segue usando il teorema di Riemann. □

Osservazione 10.1.2. Nel teorema di Riemann (e nell'ultima dimostrazione) si è visto, in particolare, che

$$\forall\, \varepsilon > 0 \; \exists\, \rho > 0 : S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \varepsilon \tag{10.5}$$

per ogni decomposizione $\sigma \in \Omega_{[a,b]}$ tale che $|\sigma| < \rho$.
Questa proprietà si può usare per definire un "limite" nuovo, cioè per "definire" per prima cosa

$$\lim_{|\sigma| \to 0} S(f, \sigma) - s(f, \sigma) = 0.$$

Sappiamo inoltre che

$$S(f,\sigma)-s(f,\sigma)\geq S(f,\sigma)-\int_a^b f \quad \text{e} \quad S(f,\sigma)-s(f,\sigma)\geq \int_a^b f - s(f,\sigma)$$

(dalla definizione di integrale). Pertanto usando (10.5) si ottiene

$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\rho>0:\sigma\in\Omega_{[a,b]},\;|\sigma|<\rho\implies S(f,\sigma)-\int_a^b f<\varepsilon$$

$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\rho>0:\sigma\in\Omega_{[a,b]},\;|\sigma|<\rho\implies \int_a^b f-s(f,\sigma)<\varepsilon.$$

Ossia,

$$\lim_{|\sigma|\to 0} S(f,\sigma)=\int_a^b f$$

ed allo stesso modo

$$\lim_{|\sigma|\to 0} s(f,\sigma)=\int_a^b f.$$

■

Teorema 10.1.3. *Sia $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione limitata e tale che l'insieme $F=\{x\in[a,b]:f$ non è continua in $x\}$ è finito. Allora $f\in\mathscr{R}_{[a,b]}$.*

Omettiamo l'ultima dimostrazione.

Teorema 10.1.4. *Siano $f,g\in\mathscr{R}_{[a,b]}$. Valgono le seguenti:*

1) $f+g\in\mathscr{R}_{[a,b]}$ *e*

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx.$$

2) $\lambda\in\mathbb{R}\implies\lambda f\in\mathscr{R}_{[a,b]}$ *e si ha*

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx=\lambda\int_a^b f(x)\,dx.$$

3) $f(x)\leq g(x)$ *su* $[a,b]\implies \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b g(x)\,dx.$

4) $|f| \in \mathscr{R}_{[a,b]}$ *e si ha*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Anche in questo caso, ne omettiamo la dimostrazione.

Dei precedenti due teoremi gli enunciati sono di grande importanza ed è bene ricordarli. Segue, tra l'altro, dall'ultimo teorema che $\mathscr{R}_{[a,b]}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Proposizione 10.1.2. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monotona*[3]*. Allora $f \in \mathscr{R}_{[a,b]}$.*

Dimostrazione. Ad esempio, supponiamo che $f \nearrow$. Allora

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \forall\, x \in [a,b].$$

Pertanto f è limitata. Sia $\varepsilon > 0$ e sia $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \Omega_{[a,b]}$ tale che $|\sigma| < \varepsilon$. Allora

$$\begin{aligned} S(f,\sigma) - s(f,\sigma) &= \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) \cdot \operatorname{mis}(I_k) \leq \\ &\leq |\sigma| \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(f(x_k) - f(x_{k-1}))}_{(\star)} \leq \varepsilon(f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

N.B. La sommatoria il cui termine generico è $(\star)$ è "telescopica". Ciò vuol dire che di essa rimangono solo il primo e l'ultimo termine.
Per quanto visto sopra, usando il Teorema di Riemann segue che $f \in \mathscr{R}_{[a,b]}$. □

Teorema 10.1.5. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Sia $c \in \,]a,b[$. Allora $f \in \mathscr{R}_{[a,b]}$ se e solo se $f \in \mathscr{R}_{[a,c]}$ e $f \in \mathscr{R}_{[c,b]}$. In tal caso si ha*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \quad \big(\underline{\text{additività dell'integrale}}\big)\,.$$

[3]Osservare che, *se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è monotona, allora f è limitata.* Infatti si ha sempre che $\inf_{[a,b]} f = \min\{f(a), f(b)\}$ e $\sup_{[a,b]} f = \max\{f(a), f(b)\}$. È opportuno ricordare che le *discontinuità di una funzione monotona possono essere solo di tipo salto* (ossia con limite destro e limite sinistro in un punto entrambi finiti ma diversi) -sono anche dette discontinuità di prima specie-. Osserviamo infine che si può anche dimostrare che una *funzione monotona su un intervallo può avere solo un insieme finito od al più numerabile di discontinuità.*

Dimostrazione. Facoltativa (ma di grande importanza).
Siano $\sigma' \in \Omega_{[a,c]}$, $\sigma'' \in \Omega_{[c,b]}$ e $\sigma = \sigma' \cup \sigma''$. Allora $\sigma \in \Omega_{[a,b]}$ e

$$S(f,\sigma) = S(f,\sigma') + S(f,\sigma'').$$

Segue che

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \underset{(\star)}{\leq} S(f,\sigma) = S(f,\sigma') + S(f,\sigma''),$$

e da ciò deduciamo che

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \underset{(\star\star)}{\leq} \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx,$$

dove $(\star)$ segue dalla definizione di "integrale superiore" e $(\star\star)$ segue passando all'inf sulle scomposizioni $\sigma' \in \Omega_{[a,c]}$ e $\sigma'' \in \Omega_{[c,b]}$

Sia ora σ una arbitraria scomposizione di $[a,b]$ e sia $c \in [a,b]$. Sia $\sigma^* = \sigma \cup \{c\}$. Allora esistono $\sigma' \in \Omega_{[a,c]}$ e $\sigma'' \in \Omega_{[c,b]}$ tali che $\sigma^* = \sigma' \cup \sigma''$. Segue che

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx \leq S(f,\sigma') + S(f,\sigma'') = S(f,\sigma^*) \underset{(\star\star\star)}{\leq} S(f,\sigma),$$

dove $(\star\star\star)$ vale perché σ^* è più fine di σ.

Per l'arbitrarietà di σ segue che

$$\overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f \leq \overline{\int_a^b} f.$$

In altre parole, si ha

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx. \tag{10.6}$$

Allo stesso modo si riesce a dimostrare che

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx. \tag{10.7}$$

Osservazione 10.1.3. Dalle proprietà di $\underline{\int}$ e $\overline{\int}$, si ottiene che

$$\underline{\int_a^c} f \leq \overline{\int_a^c} f \quad \text{e} \quad \underline{\int_c^b} f \leq \overline{\int_c^b} f.$$

Ciò si userà nella terza equivalenza immediatamente sotto. ■

Vale quindi la seguente catena di equivalenze:

$$
\begin{aligned}
f \in \mathscr{R}_{[a,b]} &\iff \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \iff \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f = \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f \\
&\iff \underline{\int_a^c} f = \overline{\int_a^c} f \quad \text{e} \quad \underline{\int_c^b} f = \overline{\int_c^b} f \\
&\iff f \in \mathscr{R}_{[a,c]} \quad \text{e} \quad f \in \mathscr{R}_{[c,b]}.
\end{aligned}
$$

Sopra si è usato implicitamente il fatto che $\underline{\int_a^c} f - \overline{\int_a^c} f \leq 0$ e, viceversa, che $\overline{\int_c^b} f - \underline{\int_c^b} f \geq 0$. Insieme, queste disuguaglianze implicano il fatto che nella penultima equivalenza ci sono uguaglianze. □

N.B. La seconda parte del teorema segue dalle identità (10.6) e (10.7).

Teorema 10.1.6 (della media integrale)**.** *Se $f \in \mathscr{R}_{[a,b]}$ esiste $\mu \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\inf_{[a,b]} f \leq \mu \leq \sup_{[a,b]} f \quad e \quad \mu = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}.$$

Dimostrazione. Per ogni $\sigma \in \Omega_{[a,b]}$ si ha

$$\inf_{[a,b]} f \cdot (b-a) \leq S(f,\sigma) \leq \sup_{[a,b]} f \cdot (b-a)$$

e quindi, dato che $\overline{\int_a^b} f = \int_a^b f$, segue che

$$\inf_{[a,b]} f \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \sup_{[a,b]} f \cdot (b-a).$$

Basta ora porre

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

per avere la tesi. □

10.2 Derivazione ed integrazione: primitive ed integrazione per parti e per sostituzione

Teorema 10.2.1 (1° Teorema Fondamentale del Calcolo)**.** *Sia* $f \in \mathscr{R}_{[a,b]}$. *Posto* $I_f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$I_f(x) \stackrel{def.}{=} \int_a^x f(t)\,dt,$$

allora

(1) I_f *è continua su* $[a,b]$,

(2) *se* f *è continua in* $x_0 \in [a,b]$ *allora* I_f *è derivabile in* x_0 *e si ha*

$$\frac{d}{dx}\,I_f(x_0) = f(x_0).$$

Osservazione 10.2.1. Prima della prova, notare che il suo significato è che la derivata in ogni punto x_0 interno ad $[a,b]$ della funzione I_f (I_f è detta *funzione integrale di* f *su* $[a,b]$ *relativa al punto iniziale* a) esiste in ogni punto x_0 in cui f è continua e tale derivata coincide col valore di f in x_0, cioè $f(x_0)$. ■

D'ora in avanti useremo l'abbreviazione "T.F.C." al posto di "Teorema Fondamentale del Calcolo".

Dimostrazione. Sia $x_0 \in [a,b]$ e sia $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $x_0 + h \in [a,b]$. Allora

$$I_f(x_0+h) - I_f(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt = \mu(h)\cdot h$$

dove $\mu(h)$ è, per h fissato, il valor medio dato dal precedente teorema. Allora

$$\mu(h) = \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt}{h}$$

e ne segue inoltre

$$\inf_{]x_0,x_0+h[} f \le \mu(h) \le \sup_{]x_0,x_0+h[} f.$$

In particolare

$$\lim_{h\to 0}\,(I_f(x_0+h) - I_f(x_0)) = 0.$$

Ciò prova (1).
Sia x_0 un punto in cui la funzione f è continua. Allora
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \rho > 0$ tale che $\forall\, x \in [a,b]$ se $|x - x_0| < \rho$ si ha

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Quindi

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \quad \forall\, x \in \,]x_0, x_0 + h[\quad \text{se} \quad |h| < \rho.$$

In questo caso, cioè se $|h| < \rho$, si ha

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \mu(h) \leq f(x_0) + \varepsilon.$$

Allora $\lim\limits_{h \to 0} \mu(h) = f(x_0)$. Questo conclude la dimostrazione, dato che

$$\mu(h) = \frac{I_f(x_0 + h) - I_f(x_0)}{h}.$$

□

Corollario 10.2.1. *Se $f \in C([a,b])$ allora I_f è derivabile su $[a,b]$ e*

$$\frac{d}{dx} I_f(x) = f(x) \quad \forall\, x \in [a,b].$$

Corollario 10.2.2. *Se $f \in C([a,b])$ ed $x_0 \in [a,b]$. Posto*

$$G\colon [a,b] \to \mathbb{R}, \quad G(x) \overset{def.}{=} \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt,$$

risulta

$$G'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in [a,b].$$

Dimostrazione. Si ha

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = \underbrace{\int_{x_0}^{a} f(t)\, dt}_{=C} + \int_{a}^{x} f(t)\, dt = C + I_f(x) \quad \forall\, x \in [a,b].$$

Da ciò segue subito la tesi. □

Definizione 10.2.1. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Una *primitiva* di f è una funzione $\phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tale che

$$\phi'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in [a,b].$$

Osservazione 10.2.2. Il Corollario 10.2.2 dice che ogni funzione continua ha (almeno) una primitiva. Ma se ϕ è una primitiva, anche $\phi + C$ è una primitiva di f per ogni $C \in \mathbb{R}$. Pertanto, se ϕ_1 e ϕ_2 sono primitive di f, $\phi_1 - \phi_2$ è costante (ciò segue dal teorema che dice che se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è tale che $f'(x) = 0$ per ogni $x \in [a,b]$ allora f è costante su $[a,b]$). ■

Teorema 10.2.2 (2° Teorema Fondamentale del Calcolo)**.**
Sia $f \in C([a,b])$ e sia ϕ una primitiva di f su $[a,b]$. Allora

$$\int_a^b f(t)\,dt = \phi(b) - \phi(a).$$

Notazione. Si scrive anche $\phi\Big|_a^b$ (oppure $\phi\Big|_{x=a}^{x=b}$) col significato

$$\phi\Big|_a^b \overset{def.}{=} \phi(b) - \phi(a).$$

Dimostrazione. Segue dal 1° T.F.C. (o, per meglio dire, dal Corollario 10.2.1) che $I_f(x)$ è una primitiva di f. L'osservazione precedente dice che esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che

$$I_f(x) = \phi(x) + C \quad \forall\, x \in [a,b].$$

Pertanto

$$\int_a^b f(x)\,dx = I_f(b) = I_f(b) - \underbrace{I_f(a)}_{=0} = (\phi(b) + C) - (\phi(a) + C) = \phi(b) - \phi(a).$$

□

Teorema 10.2.3 (Integrazione per parti)**.** *Sia $f \in C([a,b])$ e sia $g \in C^1([a,b])$. Sia F una primitiva di f. Allora*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = F(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)\,g'(x)\,dx.$$

Dimostrazione. Poiché $Fg \in C^1([a,b])$ per il 2° T.F.C. si ha

$$\begin{aligned} F(x)\,g(x)\Big|_a^b &= \int_a^b (F(x)\,g(x))'\,dx = \int_a^b (F'(x)\,g(x) + F(x)\,g'(x))\,dx = \\ &= \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx + \int_a^b F(x)\,g'(x)\,dx. \end{aligned}$$

Segue la tesi. □

Teorema 10.2.4 (Integrazione per sostituzione)**.** *Sia* $f \in C([a,b])$ *e sia* $\varphi\colon [\alpha,\beta] \xrightarrow[1-1]{su} [a,b]$*, una biiezione. Se* $\varphi \in C^1([\alpha,\beta])$ *allora*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Dimostrazione. Posto

$$\begin{aligned} F&\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}, \quad F(t) = \int_a^{\varphi(t)} f(x)\,dx \\ G&\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}, \quad G(t) = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{t} f(\varphi(s))\,\varphi'(s)\,ds \end{aligned}$$

dal 1° T.F.C. si ha $F \in C^1([\alpha,\beta])$, $G \in C^1([\alpha,\beta])$ e

$$F'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t) = G'(t) \quad \forall\, t \in [\alpha,\beta].$$

Ne segue che $F - G$ è costante su $[\alpha,\beta]$. Poiché inoltre

$$F(\varphi^{-1}(a)) = 0 = G(\varphi^{-1}(a)),$$

si ha quindi $F = G$ su $[\alpha,\beta]$. Segue infine che

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(\varphi^{-1}(b)) = G(\varphi^{-1}(b)) = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

$\square$

10.3 Integrali generalizzati

Definizione 10.3.1. Siano $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ ed $f \in C([a,b[) := C([a,b[\,,\mathbb{R})$. Allora f è I.S.G. ($\equiv$ *integrabile in senso generalizzato*) su $[a,b[$ se esiste finito

$$\lim_{y\to b^-}\int_a^y f(x)\,dx \quad \left(\stackrel{def.}{\equiv}\int_a^b f(x)\,dx\right)$$

e in tal caso si dice che $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ è *convergente.*

Definizione 10.3.2. Siano $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in C(]a,b])$; allora f è I.S.G. su $]a,b]$ se esiste finito

$$\lim_{y\to a^+}\int_y^b f(x)\,dx \quad \left(\stackrel{def.}{\equiv}\int_a^b f(x)\,dx\right)$$

e si dice che $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ è *convergente.*

Definizione 10.3.3. Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, $f \in C(]a,b[)$; allora f è I.S.G. su $]a,b[$ se esiste $c \in\,]a,b[$ per cui esistono $\int_a^c f(x)\,dx$, $\int_c^b f(x)\,dx$ in S.G. ($\equiv$ senso generalizzato) e in tal caso si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx \stackrel{def.}{\equiv} \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Osservazione 10.3.1. L'ultima definizione è *indipendente* da c. Infatti, sia f I.S.G. su $]a,c]$ e su $[c,b[$. Se $\tilde{c} \in\,]a,b[$ allora

$$\int_a^{\tilde{c}} f(x)\,dx = \lim_{y\to a^+}\int_y^{\tilde{c}} f(x)\,dx = \lim_{y\to a^+}\left(\int_y^c f(x)\,dx + \int_c^{\tilde{c}} f(x)\,dx\right) \tag{10.8}$$

e inoltre

$$\int_{\tilde{c}}^b f(x)\,dx = \lim_{y\to b^-}\int_{\tilde{c}}^y f(x)\,dx = \lim_{y\to b^-}\left(\int_c^y f(x)\,dx + \int_{\tilde{c}}^c f(x)\,dx\right). \tag{10.9}$$

Pertanto

$$\int_a^{\tilde{c}} f(x)\,dx + \int_{\tilde{c}}^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx;$$

per vederlo basta infatti sommare le precedenti formule (10.8), (10.9) ed usare che $\int_c^{\tilde{c}} f(x)\,dx = -\int_{\tilde{c}}^c f(x)\,dx$. ■

Teorema 10.3.1. *$f \in C([a,b[)$ è I.S.G. su $[a,b[$ $\iff$*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, W \in \mathscr{U}_b : x, x' \in [a,b[\cap W \implies \left| \int_{x'}^{x} f(t)\, dt \right| < \varepsilon.$$

Notazione. Ricordo che $\mathscr{U}_b$ denota la famiglia degli intorni aperti di b. Ossia, W è un intorno di b del tipo $W =]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$ per qualche $\varepsilon > 0$.

Dimostrazione. Sia $F\colon [a,b[\to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. Per definizione, si ha

$$\int_a^b f(t)\, dt \text{ è convergente} \iff \exists \lim_{x \to b^-} F(x) \; (\in \mathbb{R}).$$

Ma allora per il Teorema di Cauchy[4] f è I.S.G. su $[a,b[$ $\iff$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, W \in \mathscr{U}_b : x, x' \in [a,b[\cap W \implies |F(x) - F(x')| < \varepsilon$$

che equivale alla tesi. Infatti per l'additività dell'integrale definito si ha

$$F(x) - F(x') = \int_a^x f(t)\, dt - \int_a^{x'} f(t)\, dt = \int_{x'}^{x} f(t)\, dt.$$

□

Vale un risultato del tutto analogo se $f \in C(]a,b])$.

Definizione 10.3.4. $f \in C([a,b[)$ è A.I.S.G. (cioè, *assolutamente integrabile in senso generalizzato*) su $[a,b[$ $\iff$ $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\, dt$ è convergente.
In altre parole, *f è A.I.S.G. se il valore assoluto $|f|$ di f è I.S.G.*.

Teorema 10.3.2. *Se $f \in C([a,b[)$ è A.I.S.G. allora f è I.S.G., ossia*

$$\int_a^b |f(t)|\, dt < \infty \implies \int_a^b f(t)\, dt < \infty.$$

Dimostrazione. Se $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\, dt$ è convergente allora

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, W \in \mathscr{U}_b : x, x' \in [a,b[\cap W \quad \text{si ha} \quad \left| \int_x^{x'} |f(t)|\, dt \right| < \varepsilon.$$

[4] Precisamente, si veda il Teorema 6.2.5.

Poiché

$$\left|\int_x^{x'} f(t)\,dt\right| \le \left|\int_x^{x'} |f(t)|\,dt\right|$$

ne segue che

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, W \in \mathscr{U}_b : x, x' \in [a,b[\, \cap W \quad \text{si ha} \quad \left|\int_x^{x'} f(t)\,dt\right| < \varepsilon,$$

ciò che equivale alla tesi, per il Teorema 10.3.1. $\square$

Teorema 10.3.3 (del confronto)**.** *Siano $f, g \in C([a,b[)$ tali che $f = O(g)$ per $x \to b$. Allora*

$$g \text{ è A.I.S.G.} \implies f \text{ è A.I.S.G.}.$$

Dimostrazione. Le ipotesi sono

(1) $\exists\, c \in [a,b[$ e $\exists\, M > 0 : |f(x)| \le M\,|g(x)| \quad \forall\, x \in [c,b[$;

(2) $\displaystyle\lim_{y\to b^-} \int_a^y |g(x)|\,dx < +\infty$ (cioè esiste finito).

Notare che

$$|f| \ge 0 \implies y \mapsto \int_a^y |f(x)|\,dx \text{ è } \nearrow,$$

(cioè, è una funzione monotona crescente in y).

Pertanto esiste $\displaystyle\lim_{y\to b^-} \int_a^y |f(x)|\,dx$ (ma non è necessariamente finito).

D'altra parte, per l'ipotesi (1) si ha

$$\int_a^y |f(t)|\,dt = \int_a^c |f(t)|\,dt + \int_c^y |f(t)|\,dt \le \int_a^c |f(t)|\,dt + M \int_c^y |g(t)|\,dt \quad \forall\, y \in [c,b[.$$

Ne segue

$$\lim_{y\to b^-}\int_a^y |f(t)|\,dt \le \int_a^c |f(t)|\,dt + M\lim_{y\to b^-}\int_c^y |g(t)|\,dt =$$

$$= \int_a^c |f(t)|\,dt + M\left\{\lim_{y\to b^-}\int_a^y |g(t)|\,dt - \int_a^c |g(t)|\,dt\right\} =$$

$$= \underbrace{\int_a^c |f(t)|\,dt - M\int_a^c |g(t)|\,dt}_{\text{è finito perché } f \text{ e } g \text{ sono in } C([a,c])} + \underbrace{M\lim_{y\to b^-}\int_a^y |g(t)|\,dt}_{\text{è finito per l'ipotesi (2)}}$$

$$< +\infty.$$

Ne segue che $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$ esiste in senso generalizzato, cioè f è A.I.S.G.. □

Analogo risultato vale per $f, g \in C(]a, b])$ o $f, g \in C(]a, b[)$.

Corollario 10.3.1. *Sia $f \in C(]a, b])$. Se esiste $\alpha < 1$ tale che*

$$f(x) = O\left(\frac{1}{(x-a)^\alpha}\right) \qquad x \to a^+,$$

allora f è A.I.S.G. su $]a, b]$.

Dimostrazione. Se $\alpha < 1$ si ha

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx = \lim_{y\to a^+}\int_y^b (x-a)^{-\alpha}\,dx = \lim_{y\to a^+}\left[\frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_{x=y}^{x=b} =$$

$$= \lim_{y\to a^+}\frac{(b-a)^{1-\alpha} - (y-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} =$$

$$= \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \in \mathbb{R} \quad \text{(cioè è finito).}$$

La tesi segue allora dal Teorema 10.3.3. □

Corollario 10.3.2. *Sia $f \in C([a,+\infty[)$. Se esiste $\alpha > 1$ tale che*

$$f(x) = O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \qquad x \to +\infty,$$

allora f è A.I.S.G. su $[a,+\infty[$.

Dimostrazione. Sia[5] $a > 0$. Allora

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{y\to+\infty} \int_a^y x^{-\alpha}\,dx = \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{x=a}^{x=y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{a^{1-\alpha}-y^{1-\alpha}}{\alpha-1} = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1} \in \mathbb{R}.$$

Perciò si usa il Teorema 10.3.3 e si ha la tesi. □

Teorema 10.3.4 (Convergenza degli integrali oscillanti)**.** *Siano $f \in C([a,b[)$, $g \in C^1([a,b[)$ e supponiamo che:*

1) *f ha primitiva limitata in $[a,b[$;*
2) *g è monotona (crescente o decrescente);*
3) $\lim\limits_{x\to b} g(x) = 0$.

Allora $\displaystyle\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ esiste in S.G., ossia, fg è I.S.G. in $[a,b[$.

Dimostrazione. L'ipotesi 1) implica che

$$\exists\, F \in C^1([a,b[),\ \exists\, M > 0 \ :\ F'(x) = f(x) \quad \text{e} \quad |F(x)| < M \quad \forall\, [a,b[.$$

L'ipotesi 3) è equivalente alla condizione

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, W \in \mathscr{U}_b : |g(y)| < \varepsilon \quad \forall\, y \in [a,b[\, \cap W.$$

Adesso integriamo per parti. Siano $y, y' \in [a,b[$. Allora

$$\int_{y'}^{y} f(x)\,g(x)\,dx = F(x)\,g(x)\Big|_{y'}^{y} - \int_{y'}^{y} F(x)\,g'(x)\,dx =$$

$$= F(y)\,g(y) - F(y')\,g(y') - \int_{y'}^{y} F(x)\,g'(x)\,dx.$$

[5]Notare che $\int_a^{+\infty}|f(t)|\,dt$ converge se e solo se $\int_c^{+\infty}|f(t)|\,dt < \infty$ per ogni $c > a$. Pertanto non lede la generalità assumere che $a > 0$.

Passando ai moduli si ottiene

$$\left|\int_{y'}^{y} f(x)\, g(x)\, dx\right| \le |F(y)|\, |g(y)| + |F(y')|\, |g(y')| + \left|\int_{y'}^{y} |F(x)|\, |g'(x)|\, dx\right|,$$

dove si è usato che

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$$

per ogni f Riemann integrabile su $[a,b]$. Inoltre, si è usata la disuguaglianza triangolare $|a+b| \le |a| + |b|$, valida per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. A questo punto usando l'ipotesi 1) e il fatto che $\operatorname{segn} g'$ è costante (per l'ipotesi 2)) si ottiene

$$\begin{aligned}\left|\int_{y'}^{y} f(x)\, g(x)\, dx\right| &\le M\left(|g(y)| + |g(y')| + \int_{y'}^{y} |g'(x)|\, dx\right) = \\ &= M\left(|g(y)| + |g(y')| + \left[\int_{y'}^{y} g'(x)\, dx\right] \operatorname{segn} g'\right) = \\ &= M(|g(y)| + |g(y')| + [g(y) - g(y')] \operatorname{segn} g') \le 2M(|g(y)| + |g(y')|).\end{aligned}$$

Ma l'ipotesi 3) dice che $g(x) \xrightarrow[x \to b^-]{} 0$. Ossia

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, W \in \mathscr{U}_b : \left|\int_{y'}^{y} f(x)\, g(x)\, dx\right| \le 4M\varepsilon \quad \forall\, y, y' \in [a, b[\cap W$$

e dunque, per il Teorema 10.3.1, si è provata la tesi. □

10.3.1 Esempi ed esercizi

Esempio 10.3.1 (Importante). Per ogni $\alpha > 0$ esiste

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$$

in senso generalizzato (abbreviato in S.G., d'ora in avanti).
Infatti $x \mapsto \sin x$ è continua con primitiva continua e limitata e si ha che $g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha} \searrow$ (ossia, g è monotona decrescente) e $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^\alpha} = 0$. Ciò significa che valgono le ipotesi 1), 2) e 3) del Teorema 10.3.4.

Osservazione 10.3.2. Si ha

$$A.I.S.G. \Longrightarrow I.S.G., \quad \text{ma} \quad I.S.G. \not\Longrightarrow A.I.S.G..$$

Infatti

$$h(x) = \frac{\sin x}{x^\alpha} \quad \text{è} \quad \begin{cases} A.I.S.G. \text{ su } [1, +\infty[& \text{se } \alpha > 1 \\ \text{non è } A.I.S.G. \text{ (ma solo } I.S.G.\text{) su } [1, +\infty[& \text{se } \alpha \in \,]0, 1]. \end{cases}$$

Dimostriamo queste affermazioni. Infatti

$$1 \geq |\sin x| \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \Longrightarrow |\sin x| \geq |\sin x|^2 = \sin^2 x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Ne segue che

$$\lim_{y\to+\infty} \int_1^y \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\, dx \geq \lim_{y\to+\infty} \int_1^y \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\, dx = \lim_{y\to+\infty} \left(\int_1^y \frac{1-\cos 2x}{2x^\alpha}\, dx \right) =$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{1}{2} \left(\int_1^y \frac{1}{x^\alpha}\, dx - \int_1^y \frac{\cos 2x}{x^\alpha}\, dx \right) \right),$$

dove abbiamo usato le *formule di duplicazione*[6] di sin e cos. ■

Esercizio 10.3.1. A partire dalle formule di "somma e sottrazione" per le funzioni sin e cos dimostrare le formule di duplicazione.

Riprendiamo l'esempio. Dall'ultima formula si trova che se $\alpha < 1$, allora il primo addendo soddisfa $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = +\infty$, cioè non è convergente in S.G. Si noti inoltre che $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^\alpha}\, dx$ è finito; dunque esiste in S.G. per la stessa ragione per cui esiste $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$ in S.G.(a tal fine basta il Teorema 10.3.4).

[6] Ricordare che

1) $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$,
2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

Per concludere la prova dell'affermazione iniziale, si osservi che

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\, dx \le \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

e quest'ultimo integrale converge se $\alpha > 1$.

Esercizio 10.3.2. Mostrare che $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\, dt$ converge.

Suggerimento: usare la sostituzione $x = t^2$ che è, in effetti, una biiezione di $[0, +\infty[$ in sé stesso.

Esercizio 10.3.3. Studiare la convergenza del seguente integrale

$$\int_0^1 \lg\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

Svolgimento. In un intorno destro di $x = 0$ si ha che

$$f(x) = \lg\left(\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty;$$

inoltre $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$. Dato che risulta

$$f \in C([\varepsilon, 1]) \quad \forall\, \varepsilon \in]0, 1[,$$

occorre studiare il comportamento asintotico di f in $x = 0$. Dato che

$$\lg y = o(y^\alpha) \quad \forall\, \alpha > 0 \quad y \to +\infty$$

si ha

$$\lg\left(\frac{1}{x}\right) = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \quad x \to 0^+ \quad \forall\, \alpha > 0.$$

Allora si prende $\alpha < 1$. Applicando il Corollario 10.3.1 si trova che f è A.I.S.G.. Notare che

$$f = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \quad x \to 0^+ \implies f = O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \quad x \to 0^+.$$

$\square$

Esercizio 10.3.4. Discutere l'integrabilità in senso generalizzato dei seguenti:

$$1)\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + x^3}, \qquad 2)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4}, \qquad 3)\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3 \lg x}\, dx.$$

Soluzioni.

(1) Si ha

$$\sqrt{x} = o(x^3) \quad x \to +\infty \quad \text{e}$$
$$x^3 = o(\sqrt{x}\,) \quad x \to 0^+.$$

Pertanto

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+x^3} \sim \begin{cases} \dfrac{1}{x^3} & x \to +\infty \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{x}} & x \to 0^+. \end{cases}$$

Applicando il Corollario 10.3.1 e il Corollario 10.3.2 si ottiene subito l'integrabilità in senso generalizzato e poiché $f \geq 0$ in $]0, +\infty[$ anche l'assoluta integrabilità in S.G. (cioè f è A.I.S.G.).

(2) Basta osservare che se $|x| \geq 1$ si ha

$$\frac{1}{1+x^4} \leq \frac{1}{1+x^2}$$

e che se $|x| < 1$ la funzione è continua. Pertanto per ogni $\xi > 1$ si ha

$$\int_\xi^y f(x)\,dx \leq \int_\xi^y \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x\Big|_\xi^y$$

$$\left(\text{stessa cosa vale se } \xi < -1, \text{ cioè } \int_y^\xi f(x)\,dx \leq \int_y^\xi \frac{1}{1+x^2}\,dx\right).$$

(3) Sia $f(x) = \dfrac{1}{x^3 \lg x}$. Allora $f(x) \to +\infty$ se $x \to 1^+$, mentre $f(x) \to 0$ se $x \to +\infty$. Più precisamente, in 1^- si usa lo sviluppo $\lg(1+y) \sim y \quad y \to 0$ e si ottiene

$$f(x) \sim \frac{1}{\lg x} \sim \frac{1}{x-1} \quad x \to 1^+.$$

Ciò si può riscrivere come segue:

$$f(x) = \frac{1}{\lg x} + O(1) = \frac{1}{x-1} + O(1) \quad (x \to 1^+).$$

Quindi in un intorno destro di 1, f non è integrabile in S.G.. Infatti basta osservare che $\dfrac{1}{x-1}$ non è integrabile in 1. Notare che, invece, all'infinito si avrebbe integrabilità visto che

$$f(x) = \frac{1}{x^3 \lg x} \leq \frac{1}{x^3},$$

che è integrabile in S.G.. Pertanto f risulta A.I.S.G. in $[1+\varepsilon, +\infty[$ per ogni $\varepsilon > 0$, ma non su $[1, +\infty[$.

$\square$

Esercizio 10.3.5. Calcolare esplicitamente i seguenti integrali generalizzati:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}, \quad \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx, \quad \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2}\,dx.$$

Esercizio 10.3.6. Studiare la convergenza dei seguenti ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

$$\int_0^{+\infty} \frac{(x^\alpha - 1)\operatorname{arctg} x}{(x^\beta + 1)}\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x^2)|}{x^\beta(x^\alpha + 3)}\,dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha(1+x)}\,dx, \qquad \int_3^{+\infty} \frac{|\cos x|\,|\sin x|}{(x+2)^\alpha(x^2-9)|x-3|^{2\beta+3}}\,dx$$

Capitolo 11

Equazioni differenziali

11.1 Equazioni lineari del 1° ordine

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo non banale ed $a, b \in C(I)$ (ossia funzioni continue su I). Allora $\varphi \in C^1(I)$ si dice soluzione di

$$y' = a(x)\, y + b(x) \quad \forall\, x \in I \tag{11.1}$$

se e solo se si ha che

$$\varphi'(x) = a(x)\varphi(x) + b(x) \quad \forall\, x \in I.$$

L'equazione (11.1) è detta *equazione differenziale lineare del primo ordine.*
Sia inoltre $x_0 \in I$. Se si richiede inoltre che la soluzione di (11.1) soddisfi la *condizione iniziale* $y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}$, si usa dire che questo è un *problema di Cauchy* associato all'equazione (11.1). In altre parole, si ha per definizione che un problema di Cauchy è un'equazine differenziale con in più una condizione iniziale che la soluzione trovata deve soddisfare.

Teorema 11.1.1. *Sia $x_0 \in I$. Allora $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ è soluzione di* (11.1) *se e solo se*

$$\varphi(x) = e^{A(x)} \left(C + \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{-A(t)}\, dt \right) \quad \forall\, x \in I, \tag{11.2}$$

dove $A(x) \overset{def.}{\equiv} \displaystyle\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt.$

Dimostrazione. Verifichiamo che ogni φ della forma (11.2) è soluzione di (11.1). Infatti

$$\varphi'(x) = e^{A(x)}A'(x)\left[C + \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{-A(t)}\, dt\right] + e^{A(x)}\left[b(x)\, e^{-A(x)}\right] =$$

$$= e^{A(x)}a(x)\left[C + \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{-A(t)}\, dt\right] + e^{A(x)}b(x)\, e^{-A(x)} =$$

$$= e^{A(x)}a(x)\left[C + \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{-A(t)}\, dt\right] + b(x).$$

Sostituendo in (11.1) si ottiene una identità:

$$e^{A(x)}\left[a(x)\cdot C + a(x)\int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{-A(t)}\, dt\right] + b(x) =$$

$$= a(x)\left[e^{A(x)}\left(C + \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{-A(t)}\, dt\right)\right] + b(x).$$

Ciò prova la prima implicazione. Ragioniamo sull'altra implicazione.
Sia $\varphi \in C^1(I)$ una soluzione di (11.1) e poniamo $\psi\colon I \to \mathbb{R}$, $\psi(x) = e^{-A(x)}\varphi(x)$.
Allora $\psi \in C^1(I)$ e

$$\psi'(x) = -A'(x)e^{-A(x)}\varphi(x)+e^{-A(x)}\varphi'(x) = e^{-A(x)}\left(\varphi'(x) - A'(x)\varphi(x)\right) = e^{-A(x)}b(x).$$

Ciò vuol dire che

$$\psi'(x) = e^{-A(x)}b(x) \quad \forall\, x \in I.$$

Dal 2° T.F.C. segue che

$$\psi(x) = \psi(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)}b(t)\, dt \quad \forall\, x \in I. \tag{TFC}$$

Per come è stata definita $\psi(x) = e^{-A(x)}\varphi(x)$ e pertanto $\psi(x_0) = \varphi(x_0)$. Quindi

$$e^{-A(x)}\varphi(x) = \psi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)}b(t)\, dt \implies$$

$$\varphi(x) = e^{A(x)}\left[\varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)}b(t)\, dt\right] \quad \forall\, x \in I.$$

Ma quest'ultima espressione coincide con la (11.1) se si pone $C = \varphi(x_0)$. $\square$

N.B. Nel seguito verrà spiegato un modo un po' diverso per risolvere ogni equazione lineare del 1° ordine (o un Problema di Cauchy associato ad essa).

Osservazione 11.1.1. Sia $y' = a(x)\,y \quad (x \in I)$. In tal caso l'equazione si dice "omogenea". Allora $y' = a(x)\,y$ e se supponiamo che $y \neq 0$ (ad esempio, $y > 0$) si ha

$$\frac{y'}{y} = \frac{d}{dx}(\lg y) = a(x) \quad (\forall\, x \in I)$$

ossia (integrando ambo i membri tra x_0 ed x)

$$\lg y = \lg y(x_0) + \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt \implies$$

$$y(x) = e^{\lg(y(x_0)) + \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt} = y(x_0) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt} = y(x_0) \cdot e^{A(x)}.$$

In altre parole, la funzione trovata risolve l'equazione omogenea associata. Osservare anche che la funzione $y(x) = C\,e^{A(x)}$ risolve *sempre* l'omogenea, quale che sia $C \in \mathbb{R}$.
Cerchiamo[1] ora, a partire dalla soluzione dell'omogenea, la soluzione generale dell'equazione $y' = ay + b$ (con $a, b \in C(I)$).

Sia $y(x) = C\,e^{A(x)} \quad (x \in I)$ dove ora C la penso come funzione (non più costante) incognita da determinare. In tal caso si ha

$$y' = C'e^A + CA'e^A = e^A(C' + Ca).$$

Allora

$$C' = e^{-A(x)}b(x) \quad \forall\, x \in I \implies C(x) = C(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)}b(t)\,dt.$$

Ne segue

$$y(x) = e^{A(x)}\left(C(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)}b(t)\,dt\right).$$

Se inoltre $y(x_0) = y_0$ $(\in \mathbb{R})$ si trova

$$y(x_0) = y_0 = e^{A(x_0)}C(x_0) \iff C(x_0) = e^{-A(x_0)}y_0 \iff C(x_0) = y_0.$$

Perciò

$$y(x) = e^{A(x)}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)}b(t)\,dt\right].$$

[1] Quello descritto è il caso più semplice del cosiddetto metodo della "*variazione delle costanti*".

Notare che si è usato che se $A(x_0) = 0$ allora $e^{-A(x_0)} = 1$.

In fin dei conti, abbiamo riottenuto lo stesso risultato di prima. ■

11.2 Equazioni a variabili separabili

Definizione 11.2.1. Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli aperti, $f \in C(I)$, $g \in C(J)$. Si dice *equazione a variabili separabili* ogni equazione del tipo

$$\begin{cases} y' = f(x)\, g(y) \quad \forall\, x \in I \quad (*) \\ (y(x_0) = y_0 \ \in J) \end{cases} \tag{11.3}$$

dove y è una funzione della variabile $x \in I$; se si impone una *condizione iniziale* $y(x_0) = y_0 \in J$ con $x_0 \in I$, il precedente è detto *problema di Cauchy* per l'equazione a variabili separabili $(*)$.

Osservazioni.

1) Se $g(y_0) = 0$ allora $y = y_0$ è soluzione (costante) del problema di Cauchy.

2) Sia $g(y_0) \neq 0$. Allora
$$\exists\, J_1 \subseteq J\, (J_1 \in \mathscr{U}_{y_0})$$
sul quale $g(y) \neq 0$ (ciò segue dal teorema della permanenza del segno). Adesso dividiamo ambo i membri per g. Si ha
$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x),$$
dove $x \in I_1 \subseteq I\, (I_1 \in \mathscr{U}_{x_0})$ e I_1 è tale che $y(x) \in J_1$ se $x \in I_1$ (ossia $y(I_1) \subseteq J_1$).
Sia dunque $G \in C^1(J_1)$ una primitiva di $\dfrac{1}{g}$. Allora G è definita in J_1 (sul quale $g \neq 0$) e
$$G' = \frac{1}{g} \neq 0.$$
Ciò implica che $G \nearrow$ oppure che $\searrow$, ma in entrambi i casi *strettamente*. Pertanto G è invertibile. Sia ora F una primitiva di f. Integrando si ha
$$G(y(x)) = F(x) + C \quad (x \in I_1,\ \text{dove } C \text{ è costante reale}).$$

Si ha inoltre

$$C = G(\underbrace{y(x_0)}_{=y_0}) - F(x_0) \implies y(x) = G^{-1}(F(x) - F(x_0) + G(y_0)) \quad (x \in I_1),$$

dove $G^{-1}\colon G(J_1) \to J_1$ è l'inversa di G.

Conclusione. Abbiamo due tipi di soluzioni:

1) costanti (se $g(y_0) = 0$) del tipo $y = y_0$;
2) soluzioni per cui $g(y) \neq 0$, se $y \in J_1$, per qualche opportuno intervallo $J_1 \in \mathscr{U}_{y_0}$, $J_1 \subseteq J$.

Teorema 11.2.1. *Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli aperti, $x_0 \in I$, $y_0 \in J$, $f \in C(I)$, $g \in C(J)$ e $g \neq 0$ in J. Allora il problema di Cauchy* (11.3) *ha soluzione unica $y \in C^1(I_1)$ data da*

$$y(x) = G^{-1}(F(x) - F(x_0) + G(y_0)) \quad \forall\, x \in I_1,$$

dove $I_1\,(\subseteq I)$ è un intervallo aperto, $x_0 \in I_1$, $y(I_1) \subseteq J$, G è una primitiva di $1/g$ in J con inversa $G^{-1}\colon G(J) \to J$, ed F è una primitiva di f in I_1.

Esercizi. Risolvere i seguenti esercizi.

1) $$\begin{cases} \dot{y} = \dfrac{y}{t} + 3t^3 \\ \\ y(-1) = 2 \end{cases}.$$

Soluzione. Si ha $a(t) = \dfrac{1}{t}$, $b(t) = 3t^3$, $t_0 = -1$, $y_0 = 2$; dato che $t_0 < 0$, si sceglie $I = \,]-\infty, 0[$. Si trova

$$A(t) = \int a(t)\,dt = \int \frac{dt}{t} = \lg(-t) + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R})$$

$$\implies y(t) = e^{\lg(-t)+C_1}\left(C_0 + \int 3t^3\, e^{-\lg(-t)-C_1}\,dt\right) =$$

$$= -t\left(\underbrace{e^{C_1}C_0}_{=C} + 3\,e^{C_1-C_1}\int \frac{t^3}{(-t)}\,dt\right) =$$

$$= -Ct + 3t\int t^2\,dt = -Ct + t^4 \quad (t \in I).$$

Ora si usa la C. I. $y(-1) = 2$. Si ha

$$y(-1) = 2 = -C(-1) + (-1)^4 = C + 1 \implies C = 1.$$

$\square$

2) Risolvere l'equazione

$$\dot{y} = 2t\sqrt{1-y^2} \quad \text{(senza condizioni iniziali)} \tag{11.4}$$

Soluzione. Si ha che le rette $y = \pm 1$ sono le soluzioni costanti di (11.4). Inoltre

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 2\int t\,dt + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Da ciò segue

$$\arcsin y = t^2 + C \implies y = \sin(C + t^2) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

$\square$

Osservazione 11.2.1. Le rette $y = \pm 1$ sono in effetti la frontiera del dominio della funzione $h(t, y) = 2t\sqrt{1-y^2}$ (verificarlo per esercizio). Esse sono anche "inviluppo" di tutte le soluzioni trovate sopra. In realtà sono delle soluzioni che non "rientrano" nella usuale teoria delle equazioni differenziali (cioè, non rientrano tra quelle postulate dal teorema di esistenza e unicità per le equazioni differenziali del primo ordine). $\blacksquare$

Esercizio 11.2.1.

$$\begin{cases} y' = y\cos x - \cos x \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Soluzione. E' un problema di Cauchy per un'equazione lineare del primo ordine. Allora

$$y(x) = e^{A(x)}\left(y(x_0) + \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{-A(t)}\, dt\right)$$

dove

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt = \int_{0}^{x} \cos t\, dt = \sin x$$

e dunque

$$y(x) = e^{\sin x}\left(-1 - \int_{0}^{x} \cos t\, e^{-\sin t}\, dt\right).$$

Poiché si ha
$$-\int e^{-\sin t}\cos t\,dt = \int d\left(e^{-\sin t}\right),$$

Nota. $d\left(e^{-\sin t}\right) = e^{-\sin t}(-\cos t)\,dt$.

ne segue
$$y(x) = e^{\sin x}\left(-1 + \left(e^{-\sin x} - 1\right)\right) = 1 - 2\,e^{\sin x}.$$

$\square$

Oppure, si può alternativamente risolvere così:
$$\begin{cases} y' = (y-1)\cos x \\ y(0) = -1 \end{cases}$$
la vedo come equazione a variabili separabili;

allora $\begin{cases} g(y) = y - 1, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = -1 \\ f(x) = \cos x \end{cases}$

Preliminarmente si osserva che: $y(0) = y(0) - 1 = -2 \neq 0$. Ora integriamo:
$$\int \frac{dy}{y-1} = \int \cos x\,dx + C \quad (C \in \mathbb{R});$$
quindi
$$\lg|y-1| = \sin x + C \qquad \text{e}$$
$$\lg|-2| = C \iff C = \lg 2.$$
Pertanto
$$\lg|y-1| = \sin x + \lg 2,$$
ossia
$$\lg\left(\frac{|y-1|}{2}\right) = \sin x \implies |y-1| = 2\,e^{\sin x}$$
e dunque sarebbe $y = 1 \pm 2\,e^{\sin x}$, ma in 0 si ha $y(0) = -1$ che implica $y = 1 - 2\,e^{\sin x}$, come già visto.

Osservazione 11.2.2 (più "algoritmicamente")**.** Su $J = \left]-\infty, 1\right[$, $g \neq 0$. Inoltre
$$G(y) = \int_{-1}^{y} \frac{1}{s-1}\,ds = \lg|s-1|\Big|_{s=-1}^{s=y} = \lg|y-1| - \lg 2 =$$

$$\underset{(\star)}{=} \lg(1-y) - \lg 2 = \lg\left(\frac{1-y}{2}\right).$$

N.B. La scelta $(\star)$ dipende dal fatto che stiamo su J e dunque $y-1<0$.

Si ha poi $F(x) = \displaystyle\int_0^x \cos t\, dt = \sin x$.

Usando la formula del teorema precedente (cfr. Teorema 11.2.1) si vede che

$$y(x) = G^{-1}(\underbrace{\sin x}_{=F(x)}) \quad \text{(dato che } C=0\text{)}.$$

Ossia $G(y) = F(x) = \sin x$. Ne segue

$$\lg\left(\frac{1-y}{2}\right) = \sin x \implies \frac{1-y}{2} = e^{\sin x} \iff y = 1 - 2\, e^{\sin x}.$$

■

Capitolo 12

Serie numeriche (reali)

12.1 Un esempio introduttivo

Sia $a \in \mathbb{R}$ e supponiamo $a \in \mathbb{R} \setminus \{-\mathbb{N}\}$ (cioè non è un intero negativo). Vogliamo studiare la somma infinita

$$\frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(a+2)(a+3)} + \cdots + \frac{1}{(a+n)(a+n+1)} + \cdots ,$$

cioè la sommatoria infinita (detta *serie*) dei numeri

$$\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}$$

"per n che va da 1 all'infinito". Ossia, in simboli, la quantità

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+n+1)}$$

(quest'ultimo simbolo risulta un po' ambiguo ma ne daremo quanto prima una definizione precisa). In altre parole vogliamo calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(a+k)(a+k+1)} \right).$$

Si ha subito che, posto

$$a_n = \frac{1}{(a+n)(a+n+1)},$$

allora

$$a_n = \frac{1}{a+n} - \frac{1}{a+n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Ne segue che, posto $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ (è la somma dei primi n termini e si chiama *somma parziale n-esima* della serie in oggetto), si ha

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{a+k} - \frac{1}{a+k+1} \right) = \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Pertanto deve essere

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{a+1},$$

ossia

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{a+1}.$$

Questo risultato è vero quindi per ogni numero $a \in \mathbb{R} \setminus \{-\mathbb{N}\}$.

Ci accontenteremo (il più delle volte) di sapere se una serie data "converge" o "diverge" o "non converge". Ciò significa che la successione $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ delle somme parziali di $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ "converge" o "diverge" oppure "non converge" (si dice in tal caso che "oscilla").

Un'applicazione. Notare che se $a = 0$ allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

e che se $a = -\frac{1}{2}$ allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{4k^2 - 1} = 2.$$

12.2 Serie numeriche reali[1]

Sia $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ una successione. Si dice che a_k è il "termine k-esimo" della serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (per il momento questo simbolo è ancora ambiguo, visto che non è detto che tale somma –infinita– esista).

Definizione 12.2.1. Data una successione reale $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ si chiama *somma parziale n-esima* la successione $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Si dice che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, diverge a $\pm\infty$ (ossia, positivamente o negativamente) oppure non converge[2] se la successione $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ converge, diverge a $\pm\infty$ oppure non converge (ossia, oscilla). In altre parole, se esiste, si ha

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Se $S \in \mathbb{R}$, si dice che S è la somma della serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

N.B. Come per le successioni, se una serie non converge si dice che essa *oscilla*.

Esempio 12.2.1 (Serie geometrica)**.** Si dice *serie geometrica* la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots .$$

Si ha

$$S_n = 1 + x + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \text{ se } x \neq 1$$

e

$$S_n = n \text{ se } x = 1 \text{ e in tal caso } \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty.$$

[1] Per semplicità tratteremo solo il caso di serie numeriche reali. Cenni alle serie numeriche complesse (ossia, a coefficienti in $\mathbb{C}$) saranno dati in seguito.

[2] Ossia è indeterminata o non regolare od oscillante: tutte queste espressioni hanno lo stesso significato.

Notare che $\lim_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{1-x} \in \mathbb{R}$ solo se $|x| < 1$.
Se invece $x \leq -1$, la serie data non converge. Infatti, se la sua somma esistesse, si avrebbe

$$\alpha = \lim_{n\to+\infty} x^{n+1} = \left(\lim_{n\to+\infty} x^n\right) \cdot x = \alpha \cdot x \iff x = 1,$$

ciò che è assurdo.

Riassumendo, si ha che la serie geometrica $\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} \left(= \sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)$ converge se e solo se $|x| < 1$ e, in tal caso, la sua somma è il numero $\dfrac{1}{1-x} \in \mathbb{R}$. Invece diverge se $x \geq 1$ e non converge (oscilla) se $x \leq -1$.

Esempio 12.2.2 (Serie telescopiche)**.** Sono serie del tipo seguente

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \beta_{k+1}).$$

Non è difficile vedere che

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (\beta_k - \beta_{k+1}) = (\beta_1 - \beta_2) + (\beta_2 - \beta_3) + \cdots + (\beta_n - \beta_{n+1}) = \beta_1 - \beta_{n+1}.$$

Pertanto

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \beta_1 - \lim_{n\to+\infty} \beta_{n+1},$$

ossia, si ha sempre

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \beta_{k+1}) = \beta_1 - \lim_{n\to+\infty} \beta_n.$$

In altre parole, la somma di una serie telescopica, se esiste, è data dall'ultima formula, ed esiste se e solo se esiste $\lim_{n\to+\infty} \beta_n$. Inoltre, tale serie diverge, se diverge questo limite, e non converge (oscilla), se non esiste questo limite.

Esempio. Si consideri la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Tale serie converge con somma 1.
Infatti
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$
e dunque
$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 1.$$

Osservazione 12.2.1. *Ogni successione è una serie.*
Basta porre
$$\beta_1 = a_1, \quad \beta_n = a_n - a_{n-1} \quad \text{se } n \geq 2.$$
Allora
$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k.$$
Basta passare al limite ambo i membri per capire che il limite della successione si può vedere come somma di una serie (di fatto telescopica). ■

12.2.1 Un'applicazione della serie geometrica

Sia
$$0,\overline{7} = 0,777\ldots7\ldots\ .$$
Si è già studiato (cfr. sezione 3.2, Rappresentazione di numeri reali) che il numero $0,\overline{7}$ si può pensare come somma di una serie. In effetti
$$S \overset{def.}{=} \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \cdots + \frac{7}{10^n} + \cdots$$
Mettendo in evidenza la frazione 7/10 si trova
$$S = \frac{7}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{7}{10^{n-1}} + \cdots\right).$$
Poniamo allora
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{7}{(10)^k}.$$
Allora
$$S_n = \frac{7}{10}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(10)^k}\right)$$

ma sappiamo che

$$1+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10^{n-1}}=\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{\frac{9}{10}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{10}{9}.$$

Pertanto

$$S=\frac{7}{\cancel{10}}\cdot\frac{\cancel{10}}{9}=\frac{7}{9}.$$

Quello appena descritto è il metodo per "generare" ogni numero periodico.

12.3 Criteri di convergenza

D'ora in avanti studieremo la teoria delle serie numeriche reali e, quindi, criteri di convergenza (e/o divergenza) per esse.

Teorema 12.3.1 (Linearità). *Date due serie convergenti ogni combinazione lineare di esse è convergente. Cioè, se* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *sono serie convergenti allora per ogni* $\lambda, \eta \in \mathbb{R}$ *si ha che la serie* $\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda\, a_k+\eta\, b_k)$ *converge e*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda\, a_k+\eta\, b_k)=\lambda\sum_{k=1}^{\infty} a_k+\eta\sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Dimostrazione. Per esercizio. □

Teorema 12.3.2 (di Cauchy). *La serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge se e solo se*

$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\bar n\in\mathbb{N}:\forall\,n,m\in\mathbb{N}\;\left(m\ge n>\bar n\implies\left|\sum_{k=n}^{m}a_k\right|<\varepsilon\right).$$

Dimostrazione. Segue dal criterio di convergenza di Cauchy per successioni, applicato al caso della successione delle somme parziali $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Infatti, questa condizione dice che

$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\bar n:\forall\,\tilde n,\tilde m\in\mathbb{N}\;(\tilde n,\tilde m>\bar n\implies|S_{\tilde n}-S_{\tilde m}|<\varepsilon)\,.$$

Posto allora $m := \tilde{m}$, $n := \tilde{n} - 1$, ed assumendo $m \geq n - 1 > \bar{n}$, segue che

$$|S_{\tilde{n}} - S_{\tilde{m}}| = |S_m - S_{n-1}| = |\underbrace{a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m}_{= \sum_{k=n}^{m} a_k}| < \varepsilon.$$

Ciò prova il teorema. □

In altre parole, si ha che $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge se e solo se* $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *è di Cauchy.*

Corollario 12.3.1. *Sia* $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ *una successione* $\nearrow$ *di numeri naturali*[3]*. Se la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge, allora si ha*

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=n}^{P_n} a_k \right) = 0.$$

In altre parole, la precedente è una condizione necessaria di convergenza.

Dimostrazione. Segue dal Teorema 12.3.2 con $P_n = m$. □

Corollario 12.3.2. *Se* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge allora* $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

Dimostrazione. Segue dal Corollario 12.3.1 con $P_n = n$. □

Esempio 12.3.1 (Serie armonica)**.** Si consideri la serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

È un esempio di fondamentale importanza. Essa non converge a un numero finito, ma *diverge positivamente.* Per provare queste affermazioni si può usare il Corollario 12.3.1 $\left(\text{ma non il Corollario 12.3.2, visto che } \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0\right)$. Sia a tal fine $P_n = 2\,n$. Si ha allora

$$\sum_{k=n}^{2\,n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n}^{2\,n} \frac{1}{2\,n} = \frac{n+1}{2\,n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\,n} > \frac{1}{2}.$$

[3] Dunque $P_n \geq n$.

In altre parole, non converge a zero la quantità

$$\left|\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}\right| > \frac{1}{2}.$$

Ma allora non può convergere la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Essendo poi a termini positivi, essa deve divergere positivamente. Riassumendo, abbiamo dimostrato che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Definizione 12.3.1. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è detta *assolutamente convergente* se $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ è convergente.

Teorema 12.3.3. *Ogni serie assolutamente convergente è convergente.*

Dimostrazione. Si assuma che $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è assolutamente convergente. Allora $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ è convergente. Per il teorema di Cauchy (per serie) si deve avere

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \bar{n} : \forall\, n, m\; \left(m \geq n > \bar{n} \implies \left|\sum_{k=n}^{m} |a_k|\right| < \varepsilon \right) \tag{12.1}$$

Ma dalla disuguaglianza triangolare segue subito che

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k|.$$

Pertanto, riusando la (12.1) si ottiene subito la tesi per il teorema di Cauchy. □

Osservazione 12.3.1. *Non è vero il viceversa del precedente teorema.*
Ad esempio, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

non è assolutamente convergente ma è convergente[4]*.* Infatti

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^k}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = +\infty.$$

■

Teorema 12.3.4. *Si assuma che* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *è una serie a termini positivi, cioè* $a_k \geq 0$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}$*. Allora la serie converge o diverge positivamente.*

Ossia, se una serie è a termini positivi *non può oscillare.*

Dimostrazione. La prova è basata sul teorema di esistenza del limite delle successioni monotone crescenti. Si ha

$$S_{n+1} = S_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq S_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Dunque $S_n \nearrow$ ed ha limite in $\overline{\mathbb{R}}$: sono possibili solo i casi $S \in \mathbb{R}$ o $S = +\infty$. □

12.3.1 Criteri di confronto

Teorema 12.3.5 (Criterio di confronto)**.** *Siano* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\,,\ \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *serie (reali). Supponiamo che valgano le seguenti ipotesi:*

1) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *converge assolutamente*

2) $a_k = O(b_k)$ *per* $k \to \infty$ $\left(\text{ossia } \exists\, M \in \mathbb{R}_+ \text{ tale che } \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{b_k}\right| < M\right).$

Allora $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge assolutamente.*

Dimostrazione. Basta provare che

$$\exists\, M > 0\ :\ \sum_{k=1}^{n}|a_k| \leq M \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

[4]La convergenza di questa serie si può dimostrare usando il cosiddetto criterio di Leibniz.

Dato che $a_k = O(b_k)$ $(k \to +\infty)$, esistono $M_1 > 0$ e un indice $p \in \mathbb{N}$ tali che

$$|a_k| \leq M_1 |b_k| \quad \forall\, k \in \mathbb{N},\ k \geq p.$$

Dato che $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ converge, allora

$$\exists\, M_0 > 0\ :\ \sum_{k=1}^{n} |b_k| \leq M_0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Posto $M_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} |a_k|$ segue che

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq M_2 \quad \text{se } n \leq p$$

e

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{p} |a_k| + \sum_{k=p}^{n} |a_k| \leq M_2 + M_1 \cdot M_0 \overset{def.}{\equiv} M.$$

Pertanto

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq M \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

che è quanto si doveva dimostrare. □

Una versione esemplificata dell'ultimo risultato è fornita dalla seguente:

Proposizione 12.3.1. *Siano* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *due serie a termini positivi e tali che che* $a_k \leq b_k$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}$. *Se* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *converge, allora converge anche* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$*; inoltre se* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *diverge, allora anche* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *diverge positivamente.*

La dimostrazione di questa proposizione è elementare e viene lasciata come esercizio.

Corollario 12.3.3. *Date due serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *tali che*

$$b_k \neq 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \quad e \quad \lim_{k \to +\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Si ha che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge assolutamente se e solo se la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *converge assolutamente.*

Dimostrazione. Immediata dal teorema precedente. Infatti la condizione del corollario implica subito che $a_k = O(b_k)$ per $k \to +\infty$. □

Teorema 12.3.6 (Confronto con l'integrale)**.** *Si* $f\colon [1, +\infty[\, \to \mathbb{R}$ *una funzione continua, monotona decrescente e non negativa*[5]*. Allora* $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ *converge se e solo se* $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ *è convergente.*

Dimostrazione. Siano $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ e $F(n) \overset{def.}{=} \int_1^n f(x)\, dx$. Allora S_n e $F(n)$ sono i termini generici di successioni non negative e monotone crescenti: perciò esse hanno limite. Inoltre $\lim_{n \to +\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ e si ha

$$\lim_{n \to +\infty} F(n) = \int_1^{+\infty} f(x)\, dx.$$

[5] Ossia, in simboli

$$f \in C([1, +\infty[), \quad f \geq 0, \quad f \searrow .$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha inoltre

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(k)\,dx \underset{(\star)}{\geq} \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx =$$

$$= \int_1^{n+1} f(x)\,dx = F(n+1); \quad (\text{cioè } S_n \geq F(n+1))$$

e

$$S_{n+1} = f(1) + \left(\sum_{k=1}^{n} f(k+1)\right) = f(1) + \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(k+1)\,dx \leq$$

$$\underset{\star}{\leq} f(1) + \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx = f(1) + \int_1^{n+1} f(x)\,dx =$$

$$= f(1) + F(n+1) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}; \quad (\text{cioè } S_{n+1} \leq f(1) + F(n+1)).$$

N.B. La disuguaglianza $(\star)$ è vera perché $f \searrow$.

Pertanto

$$F(n+1) \leq S_n \leq S_{n+1} \leq f(1) + F(n+1).$$

Ne segue che

$$\exists \lim_{n\to+\infty} S_n \in \mathbb{R} \iff \exists \lim_{n\to+\infty} F(n) \in \mathbb{R},$$

ciò che è la tesi. □

Esempio 12.3.2 (Serie armonica generalizzata)**.** Si consideri la serie armonica generalizzata, ossia la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Essa coincide con la serie armonica se $\alpha = 1$. Se $\alpha \leq 1$ *la serie diverge,* mentre *converge* se $\alpha > 1$. Ciò segue dallo studio dell'integrale generalizzato[6]

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx.$$

[6]Ricordare il secondo corollario del teorema del confronto per integrali generalizzati.

Sia $\alpha \neq 1$. Si ha

$$\int_1^k \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right|_1^k = \frac{k^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}.$$

Se $k \to +\infty$ allora $k^{1-\alpha} \to \begin{cases} +\infty & \text{se } 1-\alpha > 0 \\ 0 & \text{se } 1-\alpha < 0 \end{cases}$, ossia quanto già affermato; ricordare che se $\alpha = 1$ abbiamo già visto che $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge positivamente $\left(\text{osservare che } \int \frac{1}{x}\,dx = \lg|x| + C\right)$.

Esempio 12.3.3. Sia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}.$$

Possiamo usare il criterio di assoluta convergenza. Questo criterio implica che la serie in esame converge se converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n)|}{n^2}.$$

Dato che $|\sin(n)| \leq 1$ e che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (è infatti una serie armonica generalizzata, con $\alpha = 2 > 1$). Per confronto si ha dunque l'assoluta convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$ e da ciò segue la sua convergenza.

12.3.2 Criteri della radice e del rapporto

Proposizione 12.3.2 (Criterio della radice)**.** *Sia $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie a termini positivi (cioè $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$). Allora se esistono $l \in]0,1[$ ed $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tali che*

$$\sqrt[n]{a_n} \leq l \quad \forall\, n \geq \bar{n},$$

si ha che $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

Il caso $l = 0$ è ovvio.

Dimostrazione. Si ragiona usando il confronto con la serie geometrica. Si ha

$$a_n \leq l^n \quad \forall\, n \geq \bar{n}.$$

Ma la serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} l^n$ converge. Dunque converge la serie $\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} l^n$. Per confronto segue la convergenza di $\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a_n$ e di $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Proposizione 12.3.3 (Criterio del rapporto). *Sia $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie a termini positivi (cioè $a_n \geq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$). Se esistono $l \in\,]0, 1[$ ed $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tali che*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq l \quad \forall\, n \geq \bar{n},$$

allora $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è convergente.

Dimostrazione. Di nuovo si usa il confronto con la serie geometrica. Infatti se $n \geq \bar{n}$ si ha

$$a_n \leq l\, a_{n-1} \leq l^2\, a_{n-2} \leq \cdots \leq l^{n-\bar{n}}\, a_{\bar{n}}.$$

Poiché la serie $a_{\bar{n}}\, l^{-\bar{n}} \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} l^n$ converge, si ottiene la convergenza della serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. □

Esempio 12.3.4. Sia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \qquad a_n = \frac{n!}{n^n}.$$

Si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{\cancel{n+1}}{\cancel{n+1}} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e} < 1.$$

Pertanto la Proposizione 12.3.3 dice che questa serie converge.

Esempio 12.3.5. La serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$$
converge. Infatti
$$a_n = 2^{-n} = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
e pertanto, come ovvio, $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} < 1.$

12.3.3 Serie a segni alterni

Il prossimo teorema si occupa delle *serie a segni alterni.*

Teorema 12.3.7 (Criterio di Leibniz)**.** *Si consideri la serie* $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$*, dove*
$$a_k > 0 \,\forall \quad k \in \mathbb{N}.$$
Supponiamo inoltre che

1) $a_k \searrow$ *(ossia, è monotona decrescente);*

2) $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0.$

Allora $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ *è convergente.*

Dimostrazione. Facoltativa. Sia $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione delle somme parziali di $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$. Usando la monotonia di a_n segue che:

1) $S_{2n+2} = S_{2n} \underbrace{- a_{2n+1} + a_{2n+2}}_{\leq 0} \leq S_{2n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$

2) $S_{2n+1} = S_{2n-1} + \underbrace{a_{2n} - a_{2n+1}}_{\geq 0} \geq S_{2n-1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$

3) $S_{2n+1} = S_{2n} - \underbrace{a_{2n+1}}_{\geq 0} \leq S_{2n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Le 1), 2), 3) implicano la monotonia di entrambe le successioni considerate. Infatti si ha che $S_{2n} \searrow$ (monotona decrescente) e che $S_{2n+1} \nearrow$ (monotona crescente). Inoltre si ha $S_{2n+1} \leq S_{2n}$. Ne segue che

$$\exists\, S^1 \stackrel{def.}{=} \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} \quad \text{e} \quad \exists\, S^2 \stackrel{def.}{=} \lim_{n\to+\infty} S_{2n}.$$

Quindi, si deve avere

$$\underbrace{S^2 - S^1}_{\geq 0} = \lim_{n\to+\infty} (\underbrace{S_{2n} - S_{2n+1}}_{\geq 0}) = \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} \underset{(\star)}{=} 0.$$

N.B. L'uguaglianza $(\star)$ è vera per ipotesi. Inoltre, è bene ricordare che le disuguaglianze si conservano al limite.

Allora $S^2 = S^1 = \lim_{n\to+\infty} S_n$ (ciò segue facilmente dal criterio di Cauchy ma ne omettiamo la dimostrazione).
Segue che

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k\, a_k \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Esempio 12.3.6. Si consideri la serie a segni alterni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

Come già detto, questa serie converge se $\alpha > 0$. Dimostriamolo con l'ultimo teorema. Si ha

$$\frac{1}{n^\alpha} \searrow \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, \alpha > 0.$$

Pertanto, dato che

$$\frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

e che $\frac{1}{n^\alpha} > 0$, usando il teorema precedente si ottiene la tesi.

12.3.4 Esercizi

Esempio 12.3.7 (Importante)**.** Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}},$$

ci domandiamo per quali $x \in \mathbb{R}$ converge.

Poiché $|x^n| \leq |x|^n$, studiamone l'assoluta convergenza, come prima cosa.
Per il criterio della radice si ha

$$\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{\sqrt{n}}} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{\sqrt{n}}} = \frac{|x|}{n^{\frac{1}{2n}}} = |x| \left(\frac{1}{e^{\frac{\lg n}{2n}}} \right)$$

e perciò

$$\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} |x|.$$

Se quindi $|x| < 1$, allora la serie converge assolutamente (e dunque converge).
Lo stesso criterio implica che se $|x| > 1$, allora la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{\sqrt{n}}$ non converge assolutamente.

Cosa accade se $x = \pm 1$?
Se $x = 1$ si ha che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge positivamente $\left(\text{visto che } \alpha = \dfrac{1}{2} \text{ si ha che la serie armonica generalizzata } \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ diverge positivamente} \right)$.
Se $x = -1$, invece, il criterio di Leibniz dice subito che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
Riassumendo: la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ converge se $-1 \leq x < 1$; invece essa diverge positivamente se $x \geq 1$, ed è indeterminata se $x < -1$.

Esercizio 12.3.1. Studiare per quali $x \in \mathbb{R}$ convergono le seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^n}{(1+x)^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\, x^n}{1+e^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n\, x)^n}{n!}.$$

Esercizio 12.3.2. Studiare le seguenti serie:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lg n}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)+\cos(n)}{n^3}$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \, \frac{n}{n+1}$;

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, \frac{n}{n^2+9}$.

Capitolo 13

Cenni su alcune generalizzazioni

D'ora in poi raccogliamo in modo "informale" molte osservazioni sulle possibili generalizzazioni della teoria sviluppata in queste settimane. Quella che segue rappresenta una carrellata di risultati che, tra l'altro, serve a mostrare quali e quanti possono essere gli sviluppi delle idee introdotte in precedenza.

13.1 Equazioni differenziali lineari

Partiamo da un paio di importanti nozioni che hanno a che vedere con le cosiddette *equazioni differenziali –ordinarie– lineari.*

Definizione 13.1.1 (Equazione differenziale lineare di ordine n)**.** Sia $n \in \mathbb{N}$ e si assuma che $a_i \in C(I)$, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo aperto ($i = 0, 1, \ldots, n-1$). Si dice *equazione differenziale lineare di ordine* n*, omogenea* l'equazione

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2y^{(2)} + a_1y^{(1)} + a_0y = 0. \tag{13.1}$$

Se inoltre $b \in C(I)$ si chiama *equazione differenziale lineare non omogenea di ordine* n l'equazione

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2y^{(2)} + a_1y^{(1)} + a_0y = b. \tag{13.2}$$

Se $n = 1$ ne abbiamo studiato la teoria e abbiamo visto che esiste una formula risolutiva. Una teoria molto sviluppata per queste equazioni, nel caso generale, c'è, ma non così "precisa" e facile come nel caso $n = 1$.

E' facile vedere che l'equazione (13.1) è analoga, a patto di effettuare un semplice cambiamento di variabili, ad un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine.

Definizione 13.1.2 (Sistema di equazioni differenziali lineari del 1° ordine)**.** Sia $A(t)\colon I \to \mathcal{M}_n$ una funzione a valori in $\mathcal{M}_n$ (spazio delle matrici quadrate di ordine n, a coefficienti reali). Assumiamo che $A(t) = [a_{ij}(t)]_{i,j=1,\dots,n}$ e che $a_{ij} \in C(I)$, cioè le "entrate" della matrice $A(t)$ sono funzioni continue. Allora l'equazione

$$y' = A(t)y,$$

dove $y\colon I \to \mathbb{R}^n$ è il vettore "soluzione", si chiama *sistema di equazioni differenziali lineari omogenee del 1° ordine* in $\mathbb{R}^n$.

N.B. Se la matrice $A(t)$ è una matrice costante, il sistema si dice *autonomo,* cioè indipendente dal tempo

La soluzione di un sistema di questo genere è molto complessa ed è connessa alla teoria dei *sistemi lineari.*

Definizione 13.1.3. Sia $A(t)\colon I \to \mathcal{M}_n$ una funzione a valori in $\mathcal{M}_n$. Si assuma che $A(t) = [a_{ij}(t)]_{i,j=1,\dots,n}$ e che $a_{ij} \in C(I)$ (cioè, le "entrate" della matrice $A(t)$ sono funzioni continue). L'equazione vettoriale

$$y' = A(t)y + b(t),$$

dove $b\colon I \to \mathbb{R}^n$ è una funzione vettoriale continua su I (ossia, le sue componenti sono funzioni continue su I), si dice *equazione lineare non omogenea.*
Se si impone una condizione iniziale, essa diventa un *problema di Cauchy*, cioè

$$\begin{cases} y' = A(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \quad (t_0 \in I) \end{cases} \tag{13.3}$$

Ritornando all'equazione lineare di ordine n (omogenea o no) si ha un *problema di Cauchy*, quando si prescrivono le seguenti quantità:

$$y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_0^1 \in \mathbb{R}, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{n-1} \in \mathbb{R}.$$

In altre parole, serve fissare non solo il valore iniziale dell'incognita $y(t)$, ma anche di tutte le sue derivate, fino alla $n-1$-esima.
Notare che, nel caso $n = 1$, si prescrive *solo* il valore di $y(t_0)$.

13.1.1 Esempio fondamentale: equazioni lineari del 2° ordine a coefficienti costanti (caso omogeneo)

Si consideri l'equazione omogenea del 2° ordine a coefficienti costanti

$$y'' + ay' + by = 0, \tag{13.4}$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$. Le soluzioni della (13.4) sono legate a quelle dell'equazione di 2° grado

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

In effetti si hanno i seguenti casi.

(1) Si ha $\lambda_{1,2} = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ e $a^2 > 4b$.

In tal caso $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Se ciò accade, si ha che

$$y_1 = e^{\lambda_1 t}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 t}$$

sono soluzioni linearmente indipendenti della (13.4) e ogni combinazione lineare di y_1 e y_2 è anche soluzione di (13.4). Proprio per questa ragione si dice che l'equazione è lineare: ogni combinazione lineare di sue soluzioni è ancora una soluzione. Osservare inoltre che l'insieme delle soluzioni è, per questa ragione, uno *spazio vettoriale* 2*-dimensionale.*

(2) Se $a^2 = 4b$, si ha che $\lambda_1 = \lambda_2 \overset{def.}{=} \lambda \in \mathbb{R}$. Allora le funzioni

$$y_1 = e^{\lambda t}, \quad y_2 = t\, e^{\lambda t}$$

sono soluzioni linearmente indipendenti della (13.4) e ogni combinazione lineare di y_1 e y_2 è soluzione della (13.4).

(3) Si ha $\lambda = \lambda_1 \pm i\lambda_2$ (ossia $a^2 - 4b < 0$).
In tal caso si dimostra che le funzioni

$$y_1 = e^{\lambda_1 t}\cos(\lambda_2 t), \quad y_2 = e^{\lambda_1 t}\sin(\lambda_2 t)$$

sono soluzioni linearmente indipendenti della (13.4) e (anche in questo caso) ogni loro combinazione lineare è soluzione della (13.4).

Pertanto la funzione

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie, è la *soluzione generale* dell'equazione data (con y_1, y_2 date dalle (1), (2), (3), come sopra).

Osservazione 13.1.1. Le soluzioni y_1 e y_2 dell'equazione omogenea generano uno spazio vettoriale reale di dimensione 2. ■

Terminiamo osservando che il problema di Cauchy in questo caso si pone quando si prescrivono

$$y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad y'(t_0) = y_0^1 \in \mathbb{R},$$

ossia la "*posizione iniziale*" e la "*velocità iniziale*".

Esercizio 13.1.1. Calcolare le soluzioni generali delle equazioni differenziali lineari omogenee del 2° ordine:

1. $y'' - 5y' + 6y = 0;$
2. $y'' - 9y = 0;$
3. $y'' - y' = 0;$
4. $y'' - ky = 0 \quad k \neq 0;$
5. $y'' + 2y' + y = 0;$
6. $y'' - 4y' + 2y = 0.$

Più in generale, si chiama equazione differenziale lineare completa del 2° ordine (a coefficienti costanti) l'equazione

$$y'' + ay' + by = f(x), \tag{13.5}$$

dove f è una funzione nota.

Esercizio 13.1.2 (Sovrapposizione delle soluzioni)**.** Verificare quanto segue.
Se y_1 è soluzione dell'equazione $y'' + ay' + by = f_1(x)$ e y_2 è soluzione dell'equazione $y'' + ay' + by = f_2(x)$, allora la funzione $y := y_1 + y_2$ è soluzione dell'equazione $y'' + ay' + by = f_1(x) + f_2(x)$.

Il fenomeno descritto nell'esercizio è noto come *principio di sovrapposizione delle soluzioni* che ha importanti risvolti nella teoria e nelle applicazioni.

La teoria finora esposta consente con poco sforzo di risolvere le equazioni complete. Un metodo di soluzione è "algoritmico" e prende il nome di *metodo della variazione delle costanti.* Tale metodo generalizza la strategia risolutiva usata in precedenza nel caso delle equazioni del 1° ordine.

Osservazione 13.1.2 (Variazione delle costanti per equazioni non omogenee)**.** Si suppone che la soluzione dell'equazione 13.5 sia del tipo

$$y = c_1(t)y_1 + c_2(t)y_2,$$

dove y_1, y_2 sono le soluzioni dell'equzione omogenea associata 13.4 e $c_1(t), c_2(t)$ sono funzioni incognite (che si determineranno). Deriviamo la y. Si ha

$$y' = \underbrace{c_1'y_1 + c_2'y_2}_{=:\phi} + c_1y_1' + c_2y_2'.$$

Adesso, prima di derivare una seconda volta e poi inserire i valori trovati di y' e y'' nella 13.5, occorre imporre una condizione. Precisamente assumiamo che $\phi = 0$, cioè

$$\boxed{c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0}.$$

. Questa condizione ha come conseguenza che la derivata seconda y'' dipenderà solo dalle derivate prime c_1', c_2' di c_1 e c_2. Si ha infatti

$$y'' = c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_1y_1'' + c_2y_2''.$$

Quindi, inserendo i valori di y' e y'' nella 13.5 si ottiene

$$\begin{aligned} & c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_1y_1'' + c_2y_2'' + a(c_1y_1' + c_2y_2') + b(c_1y_1 + c_2y_2) = f \\ \iff & \ c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_1\underbrace{(y_1'' + ay_1' + by_1)}_{=0} + c_2\underbrace{(y_2'' + ay_2' + by_2)}_{=0} = f \\ \iff & \ c_1'y_1' + c_2'y_2' = f. \end{aligned}$$

Perciò siamo giunti al sistema lineare (non omogeneo) 2×2 dato da

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' = f \end{cases}$$

nelle incognite c_1' e c_2' (è bene osservare che y_1 e y_2 sono soluzioni "esplicite" dell'equazione omogenea). Risolvendo[1] questo sistema si trova che

$$c_1' = h_1, \quad c_2' = h_2,$$

dove h_1, h_2 sono funzioni note (che si determinano usando le espressioni di y_1, y_2 e di y_1', y_2'). Integrando direttamente le due equazioni si trovano le funzioni c_1 e c_2 e dunque, la soluzione particolare cercata.

[1] Si noti che ciò è sempre possibile dato che y_1 e y_2 sono soluzioni linearmente indipendenti dell' equazione omogenea. Quindi la matrice 2×2 associata al sistema ha determinante non nullo. Perciò esiste un'unica soluzione del sistema lineare considerato.

Esercizio 13.1.3. Usare il metodo della variazione delle costanti per risolvere l'equazione

$$y'' - y = \frac{1}{1+e^t}.$$

Soluzione. Cenni. Le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono le funzioni $y_1 = e^t$ e $y_2 = e^{-t}$. Si suppone che $y = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$ e che $c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0\,(\iff c_1' e^t + c_2' e^{-t} = 0)$. Si deve quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} c_1' e^t + c_2' e^{-t} = 0 \\ c_1' e^t - c_2' e{-}t = \frac{1}{1+e^t} \end{cases}.$$

Questo sistema ha come soluzioni le funzioni $c_1' = \frac{1}{2e^t(1+e^t)}$ e $c_2' = \frac{-e^t}{2(1+e^t)}$. Queste sono di fatto equazioni del 1° ordine che si integrano esplicitamente e si trova che

$$c_1(t) = \frac{1}{2}\left(\log(1+e^t) - e^{-t}\right), \quad c_2(t) = -\frac{1}{2}\log(1+e^t).$$

Da ciò segue che tutte le soluzioni dell'equazione iniziale sono

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{1}{2} e^t \log(1+e^t) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-t} \log(1+e^t) \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

13.2 Spazi metrici

Definizione 13.2.1 (Spazio metrico)**.** Sia $X \neq \varnothing$ un insieme non vuoto. Una funzione $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ si dice *distanza* se:

A1) $d(x,y) = 0 \iff x = y \quad \forall\, x, y \in X$;

A2) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall\, x, y \in X$;

A3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall\, x, y, z \in X$.

La coppia (X, d) si dice *spazio metrico.*

Esempio 13.2.1. Lo spazio $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, dove $d(x,y) \overset{def.}{=} |x-y|$, è uno spazio metrico ($|\cdot|$ è il modulo). Gli assiomi A1, A2, A3 di una funzione distanza valgono per il modulo della differenza di due qualsiasi elementi di $\mathbb{R}$.

Esempio 13.2.2. Lo spazio $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, dove $d(x,y) = \|x-y\|$, è uno spazio metrico detto *spazio euclideo n-dimensionale* ($\|\cdot\|$ è l'usuale norma euclidea). La distanza d è associata alla norma della differenza di due punti $x, y \in \mathbb{R}^n$. Ricordare che la "norma" si definisce esplicitamente come

$$\|x\| \coloneqq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2},$$

dove $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

N.B. In entrambi gli esempi sopra riportati, la norma induce la distanza.

Se X è uno spazio vettoriale (reale), una *norma su* X è una funzione

$$\|\cdot\|_X\colon X \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$

tale che

B1) $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \iff x = 0 \quad \forall\, x \in X$;

B2) $\|tx\| = |t|\,\|x\| \quad \forall\, t \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in X$;

B3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall\, x, y \in X$.

Uno spazio vettoriale X munito di una norma si dice *spazio vettoriale normato.* Ad esempio, $\mathbb{R}^n$ ha una norma naturale che è quella euclidea sopra definita.

In uno spazio metrico (X, d) si definisce una *topologia* (cioè, una "famiglia di intorni" di ogni punto) in modo naturale come segue.
Per prima cosa si definisce la *palla aperta* di centro $x \in X$ e raggio $r > 0$ come

$$B(x, r) \overset{def.}{\coloneqq} \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

La famiglia di tutte le palle aperte centrate in x si denota come

$$\mathscr{U}_x \overset{def.}{\coloneqq} \{B(x, r) : \forall\, r > 0\}.$$

N.B. In $\mathbb{R}$ sappiamo già cosa s'intenda: infatti, la palla $B(x, r) =]x - r, x + r[$ coincide cioè con l'intorno aperto centrato in x e di raggio r.

Nozioni fondamentali di topologia:

- $A \subseteq X$ si dice *aperto* se

$$\forall\, x \in A\ \exists\, r > 0 : B(x, r) \subseteq A.$$

- $C \subseteq X$ si dice *chiuso* se

$$\exists\, A \subseteq X \text{ aperto } : \ C = X \setminus A,$$

  cioè, C è il complementare di un aperto A.

- x_0 è detto *punto di accumulazione* di $V \subseteq X$ se

$$\forall\, r > 0 : (V \setminus \{x_0\}) \cap B(x_0, r) \neq \varnothing.$$

N.B. Sono definizioni analoghe a quelle già incontrate con lo spazio $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Analogamente, si parla di *chiusura* e di *interno* di un insieme $V \subseteq X$.

Come nel caso della topologia di $\mathbb{R}$, si ha che X e $\varnothing$ sono aperti e chiusi (contemporaneamente).

I risultati già visti per $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ sono "estendibili", in larga parte, al caso di uno spazio metrico.

Partiamo col concetto di “limite” di una successione $\{x_n\}_n \subseteq X$.

Definizione 13.2.2. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una *successione di elementi di* X; allora

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \iff \forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\bar{n} : \forall\,n\ (n > \bar{n} \implies d(x_n, x) < \varepsilon).$$

In tal caso, si scrive $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Una importante nozione, che si generalizza a spazi metrici, è la *compattezza* (*per successioni*).

Definizione 13.2.3. Lo spazio metrico (X, d) si dice *compatto* se

$$\forall\,\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X\ \exists\,\{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}\ :\ \lim_{n\to\infty} x_{k_n} = x \in X,$$

dove $k_n\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è una successione strettamente monotona crescente.

In altre parole, X è compatto se ogni successione ammette un'estratta convergente ad un elemento di X.

Discorso analogo vale per le nozioni di *successione di Cauchy* e di *completezza.* Tuttavia non ogni spazio metrico è completo. Spesso, se si lavora con una distanza “astratta”, quest'ultima diventa un'ipotesi conveniente da fare.

Definizione 13.2.4 (Limite)**.** Sia $f\colon (X, d_1) \to (Y, d_2)$ una funzione tra due spazi metrici. Siano $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Si pone

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \iff$$

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0 : \forall\,x \in X\ (d_1(x, x_0) < \delta \implies d_2(f(x), y_0) < \varepsilon).$$

N.B. E' analoga alla nozione data per $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D(A)$, $y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Analogamente, si dice che $f\colon (X, d_1) \to (Y, d_2)$ è *continua* in $x_0 \in X$ se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \iff$$

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ :\ \forall\,x \in X\ (d_1(x, x_0) < \delta \implies d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon).$$

Si scrive $C(X,Y)$ per denotare le funzioni $f\colon X \to Y$ che sono continue in ogni punto di X.

Si introducono nozioni analoghe se, invece di X, si considera un sottoinsieme A di X. In tal caso si può effettuare il limite nei punti di accumulazione di questo insieme. In particolare, si possono usare gli aperti di X. Infatti in un aperto ogni punto è di accumulazione.

Più in generale, se $A \subseteq X$ è aperto e se (Y, d_2) è $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, allora $C(A)$ è lo spazio delle funzioni continue $f\colon A \to \mathbb{R}$.

Vale il seguente importante risultato che riportiamo solo a titolo di esempio:

Teorema 13.2.1 (Weierstrass)**.** *Sia (X,d) uno spazio metrico compatto. Ogni funzione $f \in C(X)$ ammette* max *e* min *assoluti.*

13.2.1 Esempi di funzioni di più variabili

Rendiamo meno "astratta" la presentazione facendo alcuni esempi concreti di funzioni di più variabili.

Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Per semplicità, assumiamo che $n = 2$. In tal caso

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$$

e se $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ il suo "grafico" è per definizione l'insieme

$$\mathrm{graf}(f) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y) \quad \forall\,(x,y) \in A\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Si può sempre pensare al grafico di una funzione da $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e a valori in $\mathbb{R}$ come ad una (porzione di) "*superficie*" dello spazio $\mathbb{R}^3$ (e analogamente, se $n > 2$, il grafico di f è una porzione di "*ipersuperficie*" dello spazio $\mathbb{R}^{n+1}$).

Esempi.

1. L'insieme dei punti di $\mathbb{R}^3$ tali che $x^2 + y^2 = 1$ è un *clindro circolare* avente come asse di simmetria l'asse z. L'equazione che definisce questa superficie come sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ è indipendente dalla variabile z.

2. L'insieme dei punti di $\mathbb{R}^3$ tali che $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ è un *paraboloide circolare.* Si noti che in questo caso $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ e f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$.

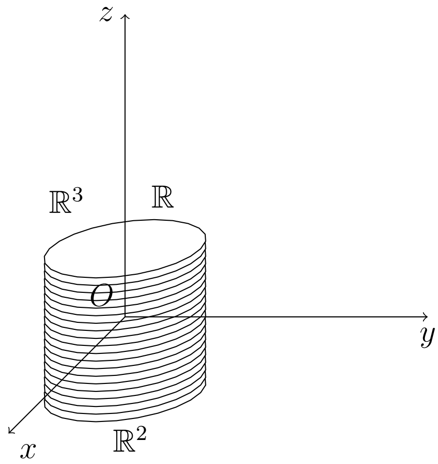


Figura 13.1: Cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con asse $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0,\ y = 0\}$

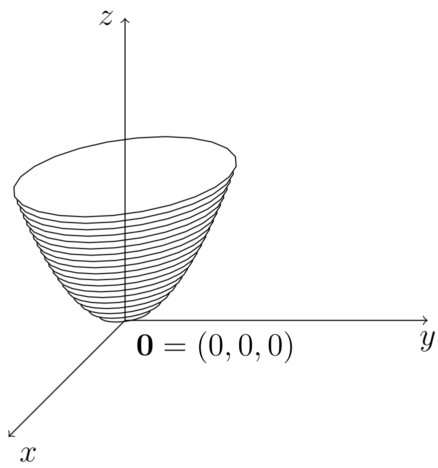


Figura 13.2: Grafico della funzione $z = f(x, y) = x^2 + y^2$

3. Sia $z = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$ $(=: f^+(x,y))$. In tal caso $\mathrm{Dom}\, f^+ \neq \mathbb{R}^2$. Precisamente si ha $\mathrm{Dom}\, f = \overline{B(0,1)} \subseteq \mathbb{R}^2$, dove

$$\overline{B(0,1)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$$

è la chiusura della palla aperta di $\mathbb{R}^2$ centrata in $O=(0,0) \in \mathbb{R}^2$.
Il suo grafico parametrizza una semisfera unitaria (cioè, di raggio 1) tutta contenuta nel semispazio (positivo) di $\mathbb{R}^3$ definito dalla disuguaglianza $z \geq 0$. Il polo nord di questa semisfera è il punto $N=(0,0,1)$.

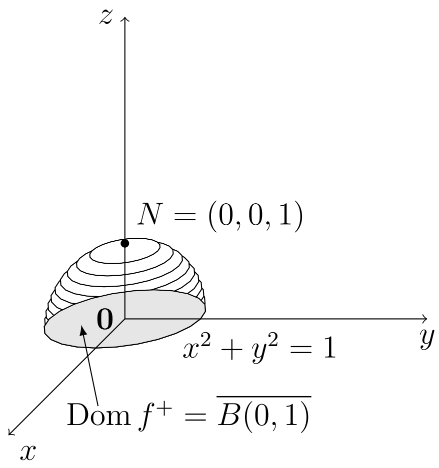


Figura 13.3: Grafico della funzione $z = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$

L'altro emisfero della sfera unitaria

$$\mathbb{S}^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\} \subsetneq \mathbb{R}^3$$

si può rappresentare usando la funzione $f^-(x,y) = -\sqrt{1-(x^2+y^2)}$; il grafico di questa funzione è l'emisfero sud della sfera unitaria, avente polo sud $S=(0,0,-1)$.

13.2.2 Curve parametriche

Illustriamo brevemente il caso particolare delle funzioni $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Queste funzioni si possono intuitivamente pensare come "*curve*".

Più precisamente, il *sostegno* Γ di f, cioè, l'immagine

$$f(I) = \{f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)) : t \in I\} \equiv \Gamma,$$

è un sottoinsieme dello spazio $\mathbb{R}^n$ di tipo *unidimensionale*. Ciò è vero a patto che f sia assunta "regolare", ossia f continua e derivabile[2] per ogni $t \in I$ e con $f'(t) \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ per ogni $t \in I$.

Ricordiamo che, in nel caso di una curva regolare, il vettore $f'(t)$ si chiama *vettore velocità di* f al tempo $t \in I$ (e se esiste, il vettore $f''(t)$ è il *vettore accelerazione di* f al tempo $t \in I$). Infine, la norma del vettore velocità $v = \|f'(t)\|$ è chiamata la *velocità scalare* di f in $t \in I$ e il versore $\mathbf{v}(t) := \frac{f'(t)}{v}$ è il *versore tangente* ad f in $y \in I$.

In particolare, la lunghezza $\ell(\Gamma)$ del sostegno Γ di f si calcola integrando la funzione velocità scalare nell'intervallo I, cioè, per definizione, si pone

$$\ell(\Gamma) := \int_I v(t)\, dt = \int_I \|f'(t)\|\, dt.$$

Esempio 13.2.3 (Elica circolare)**.** Sia $n = 3$. Si consideri la parametrizzazione $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, dove $t \in \mathbb{R}$ e

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = \alpha\, t \quad (\alpha \in \mathbb{R}_+) \end{cases} \qquad \text{(equazioni parametriche)}\ .$$

Il numero α è chiamato "passo" dell'elica.

Esempio 13.2.4 (Curve piane)**.** Sia

$$r(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in I.$$

Supponiamo che le componenti siano funzioni derivabili in I e che

$$(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0).$$

[2]Se $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, per *derivabilità* s'intende la *derivabilità* delle sue n componenti $f_i(t)$ $(i = 1, \dots, n)$. La seconda condizione $f'(t) \neq \mathbf{0}$ si interpreta di solito dicendo che la parametrizzazione f è una curva regolare, ossia senza "punti di arresto". Sono chiamati cosi i punti in cui la derivata di f si annulla e si dicono così, in quanto è come se la velocità del punto che si muove sul sostegno della curva si annulli in essi, cioè il punto si arresta.

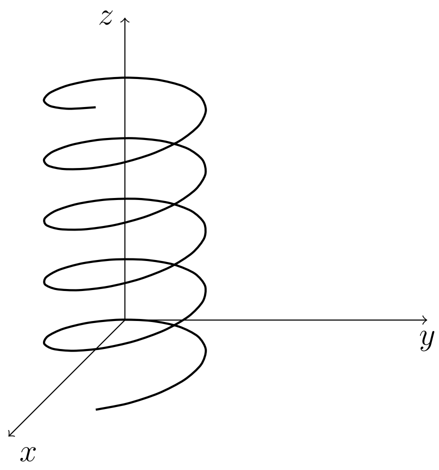


Figura 13.4: Elica circolare

In altre parole, $r(t)$ è una *curva piana regolare.*

Ad esempio, sia

$$r(t) = (\cos t, \sin t) \quad \forall\, t \in [0, 2\pi].$$

Il sostegno di questa curva è la circonferenza unitaria di $\mathbb{R}^2$, cioè

$$\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Con la parametrizzazione data essa viene percorsa una sola volta. Se invece si usa la seguente parametrizzazione

$$r(t) = (\cos 2t, \sin 2t) \quad \forall\, t \in [0, 2\pi],$$

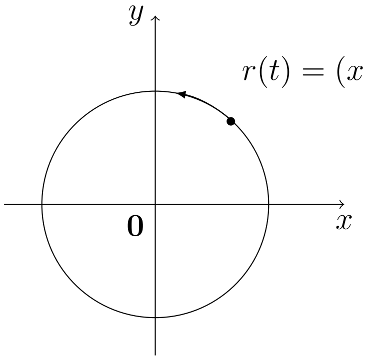
allora il suo sostegno è ancora la circonferenza unitaria $\mathbb{S}^1$, ma essa viene ora percorsa due volte.
Un altro esempio elementare di curva piana (regolare) è dato da una generica retta parametrica

$$r(t) = (x(t), y(t)) = (a_1 t + b_1, a_2 t + b_2) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

N.B. Le sue componenti sono polinomi di 1° grado del parametro $t \in \mathbb{R}$.

Se la curva è definita come $x(t) = t$, $y(t) = f(t)$ $(t \in I \subset \mathbb{R})$, allora il suo sostegno coincide col grafico della funzione di 1 variabile reale $f : I \to \mathbb{R}$, ossia

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x) \quad \forall\, x \in I\}.$$



$$r(t) = (x(t), y(t)) \quad (t \in I), \quad \text{dove} \quad \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}.$$

Figura 13.5

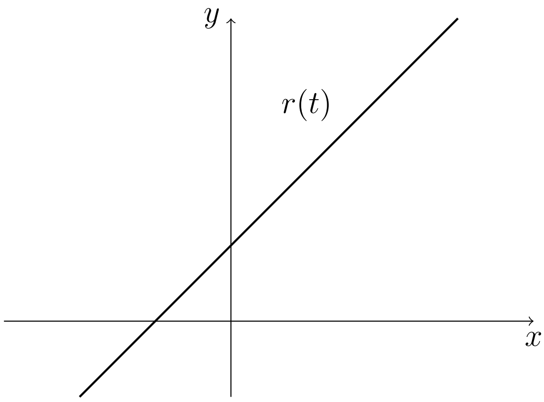


Figura 13.6

13.3 Derivate di funzioni $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Nell'illustrare i prossimi argomenti relativi a funzioni di più variabili reali ci restringeremo, senza perdità di generalità, al caso $m = 1$. Infatti molte nozioni si possono formulare in termini delle componenti di una generica funzione

$$f(x) = (f_1(x),\, f_2(x), \dots, f_m(x)),$$

ossia per ogni $f_i(x)$, $i = 1, \dots, m$.

Definizione 13.3.1. Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dove A è un insieme aperto (per semplicità, pensare $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$). Sia $x_0 \in A$ un punto fissato e si denoti con $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{i−esimo posto}}, 0, \dots, 0)$ l'i-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$. Allora, per definizione, si pone

$$f_{x_i}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\mathbf{e}_i) - f(x_0)}{t} \qquad \text{(derivata parziale } i\text{-esima)}$$

e se questo limite esiste e si chiama *derivata parziale i-esima di f in x_0*.
Se esistono tutte le derivate parziali di f in ogni punto di A e queste funzioni sono continue in A allora si dice che f è *di classe C^1 su A*, ossia

$$\begin{aligned} f \in C^1(A) \overset{def.}{\iff} \exists\, \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \quad \forall\, x_0 \in A, \quad \forall\, i = 1, \dots, n, \\ \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \in C(A) \quad \forall\, i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Teorema 13.3.1. *Se $f \in C^1(A)$ allora f è* differenziabile *su A. In altre parole*

$$\forall\, x_0 \in A \quad \exists \lim_{\substack{\|h\| \to 0 \\ h \in \mathbb{R}^n}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0),\, h \rangle}{\|h\|} = 0,$$

dove $\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$, *e $\langle a,\, b \rangle$ denota il prodotto scalare tra vettori in $\mathbb{R}^n$, cioè*

$$\langle a,\, b \rangle \overset{def.}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i \qquad \forall\, a = (a_1, \dots, a_n),\, b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Il vettore $\nabla f(x_0)$ si chiama gradiente *di f in x_0.*

Geometricamente ciò assicura che in ogni punto del grafico di una funzione f di classe C^1 esiste l'iperpiano tangente al grafico di f (nel caso $n = 2$ si chiama il *piano tangente*). Tale iperpiano è un sottospazio (affine) n dimensionale di $\mathbb{R}^{n+1}$. L'equazione dell'iperpiano tangente in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ al grafico $\mathrm{graf}(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ di f è la seguente:

$$x_{n+1} = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0),\, x - x_0 \rangle \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

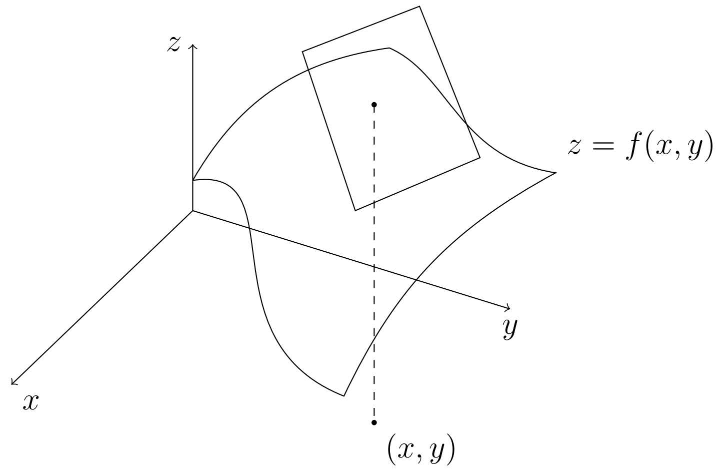


Figura 13.7

Queste nozioni generalizzano quanto detto a suo tempo sulla derivata come coefficiente angolare della retta tangente in un fissato punto.
Notare che la funzione, detta *differenziale di f in x_0*, definita come

$$T_{x_0}(h) = \langle \nabla f(x_0),\, h \rangle \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^n,$$

è un'applicazione lineare (o *funzionale*[3]) di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$, cioè

$$T_{x_0}(\alpha\, h_1 + \beta\, h_2) = \alpha\, T_{x_0}(h_1) + \beta\, T_{x_0}(h_2) \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall\, h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Si pone $df(x_0) := T_{x_0}$. Nel caso $n = 1$, il differenziale è una nozione che si incontra nel calcolo degli integrali. In particolare, se f è derivabile in x_0, si ha

$$df(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h \quad \forall\, h \in \mathbb{R}.$$

[3]Un'applicazione lineare si chiama *funzionale* se il suo codominio è $\mathbb{R}$.

Osservazione 13.3.1 (Caso $m > 1$)**.** Se $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, la derivata parziale i-esima di f in $x_0 \in A$ è il vettore che si ottiene derivando rispetto alla variabile x_i le componenti di f e si indica in modo analogo al caso $m = 1$, cioè $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ per $i = 1, ..., n$ (ma in questo caso è una funzione a valori in $\mathbb{R}^m$). La matrice che ha per colonne le derivate parziali di f in x_0 si chiama poi la *matrice Jacobiana di f in x_0* e si indica con la notazione $\mathcal{J}f(x_0)$. Si verifica facilmente che tale matrice ha come righe i gradienti delle componenti di f. In altre parole, si ha

$$\mathcal{J}f(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \nabla f_2(x_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_0) \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}).$$

Una funzione $f = (f_1, ..., f_m)$ si dice $C^1(A, \mathbb{R}^m)$ se esistono tutte le derivate parziali di f_i ($i = 1, ..., m$) rispetto alle variabili x_j ($j = 1, ..., n$) ed esse sono funzioni continue in A. Osserviamo che il Teorema 13.3.1 continua a valere, con le dovute modifiche. In effetti, si ha che se $f \in C^1(A, \mathbb{R}^m)$ allora f è differenziabile su A, cioè

$$\forall\, x_0 \in A \quad \exists \lim_{\substack{\|h\| \to 0 \\ h \in \mathbb{R}^n}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - [\mathcal{J}f(x_0)] \cdot h}{\|h\|} = 0,$$

dove nella definizione usata si è usato il prodotto matrice per colonna (cioè la matrice Jacobiana di f moltiplicata per l'incremento h). ■

Osservazione 13.3.2 (Matrice Hessiana)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Come nel caso delle funzioni di una variabile, si traggono molte informazioni su f dallo studio delle sue derivate seconde. Nel nostro caso, per "derivate seconde" si intendono le derivate parziali seconde miste definite iterando due volte le derivate parziali già introdotte (rispetto ad una qualsiasi coppia di variabili). Gioca quindi un ruolo importante una matrice, detta *Hessiana* di f, definita come $\mathrm{Hess}f := \mathcal{J}\nabla f$ (ossia, la matrice Jacobiana del gradiente di f). In altre parole, l'Hessiana di f è la matrice

$$\mathrm{Hess}f = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{i,j=1,\dots,n}.$$

Se le derivate parziali seconde esistono e sono funzioni continue in ogni punto di A, allora si dice che *f è di classe C^2 su A*. In tal caso si scrive $f \in C^2(A)$.

Sotto queste ipotesi, in particolare, si ha che le derivate seconde miste $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ sono funzioni simmetriche degli indici $i, j = 1, ..., n$. Cioè, si ha che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \qquad \forall\, i, j = 1, ..., n.$$

In questo caso, evidentemente, la matrice Hessiana è una matrice simmetrica. In particolare, se $n = 2$ si ha che

$$\mathrm{Hess} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

13.3.1 Estremi di funzioni scalari $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Il gradiente è un concetto importante tra l'altro perché il suo studio fornisce informazioni sul grafico di una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (esattamente come la derivata di una funzione di 1 variabile fornisce informazioni sul suo grafico).

A titolo di esempio, consideriamo il caso $n = 2$. Se $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ricordiamo che (x_0, y_0) si chiama *estremo relativo di f* (minimo o massimo) se esiste un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ per ogni $(x, y) \in U \cap A$ nel caso di un minimo, e $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ per ogni $(x, y) \in U \cap A$ nel caso di un massimo. Se le disuguaglianze sono strette, si chiamano *estremanti forti*. Gli estremanti (minimi/massimi) relativi di una funzione di due variabili "abbastanza regolare"[4] $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si studiano annullando il gradiente di f in A, ossia imponendo la condizione

$$\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0} \quad (x_0, y_0) \in A.$$

Notazione. Si scrive equivalentemente $f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ $\quad (i = 1, \ldots, n)$.
In particolare, se $n = 2$, si scrive

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

La precedente condizione significa che si cercano i punti $(x_0, y_0) \in A$ tali che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases},$$

[4] Ad esempio, si supponga d'ora in poi che $f \in C^1(A)$.

ossia i punti che hanno piano tangente in $\mathbb{R}^3$ parallelo al piano $z = 0$.

Tali punti sono i cosiddetti *punti critici* di f e tra di essi si trovano i punti estremanti (massimi/minimi) di f.

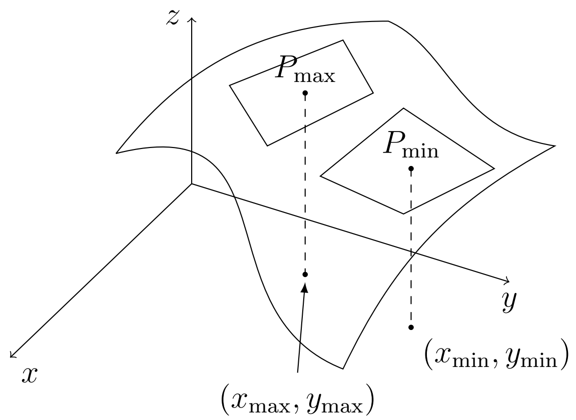


Figura 13.8

Più precisamente, abbiamo il seguente risultato.

Proposizione 13.3.1. *Siano dati $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme aperto, $f \in C^1(A)$ e $P_0 = (x_0, y_0) \in A$. Condizione necessaria affinché P_0 sia un estremante relativo è che sia $\nabla f(P_0) = \mathbf{0}$. Condizione sufficiente affinché P_0 sia un punto di minimo (massimo) relativo è che la forma quadratica associata alla matrice Hessiana di f in P_0 sia ivi definita positiva (negativa). Se invece la forma quadratica associata alla matrice Hessiana di f in P_0 è ivi indefinita, allora P_0 non è un estremo relativo di f.*

Esempio 13.3.1. Sia $f(x, y) = \frac{1}{2}(ax^2 + 2cxy + by^2)$. Allora f ha gradiente $\nabla f = (ax + cy, cx + by)$ e matrice Hessiana

$$\text{Hess} f = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}.$$

Se $P_0 = (x_0, y_0)$ è un punto critico, cioè $(ax_0 + cy_0, cx_0 + by_0) = (0, 0)$, allora per quanto ricordato sopra, valgono le seguenti caratterizzazioni:

1. se $a > 0$ e $\det \text{Hess} f = ab - c^2 > 0$, allora P_0 è un minimo relativo;
2. se $a < 0$ e $\det \text{Hess} f = ab - c^2 > 0$, allora P_0 è un massimo relativo;
3. se $\det \text{Hess} f = ab - c^2 < 0$, allora P_0 è non è un punto estremante.

Concludiamo questa rassegna illustrando in breve due argomenti.
Il primo riguarda le “funzioni implicite”, l’altro l’integrazione delle funzioni di più variabili.

In entrambi i casi, tratteremo solo il caso $n = 2$.

13.4 Teorema di Dini della funzione implicita

Il Teorema di Dini sulle funzioni implicite è di grande importanza teorica e pratica. Illustriamo il caso più semplice della teoria, cercando in seguito di spiegare in breve la portata di questo risultato e il perché sia importante.

Caso più semplice. Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dove A è aperto. Sia $(x_0, y_0) \in A$ e consideriamo l’equazione funzionale

$$f(x, y) = 0. \tag{13.6}$$

Più precisamente, assumiamo che il punto (x_0, y_0) sia “soluzione” dell’equazione data, cioè

$$f(x_0, y_0) = 0.$$

Sotto opportune ipotesi sulla funzione f è sempre possibile trovare un’unica *soluzione* dell’equazione (13.6) almeno nelle “vicinanze” del punto (x_0, y_0). Questo è il contenuto del teorema seguente:

Teorema 13.4.1 (Dini)**.** *Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dove A è un aperto. Sia $(x_0, y_0) \in A$ tale che $f(x_0, y_0) = 0$. Supponiamo inoltre che $f \in C^1(A)$ e che valga $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Allora esistono intorni aperti $U \in \mathscr{U}_{x_0}$ e $V \in \mathscr{U}_{y_0}$ ed esiste un’unica funzione $g\colon U \to V$ tale che l’equazione* (13.6) *abbia soluzione nel senso che*

$$f(x, g(x)) = 0 \quad \forall\, x \in U.$$

Inoltre $g \in C^1(U)$ e vale la formula

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}.$$

Osserviamo che la funzione g si chiama *funzione implicitamente definita.* È notevole che, pur non avendo in generale un’espressione esplicita di g, di essa possiamo calcolarne la derivata prima (e sotto ulteriori ipotesi su f, si possono calcolare anche le sue derivate successive $g^{(n)}(x)$, $n \geq 1$).

Esempio 13.4.1. Sia
$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1.$$
Si consideri l'equazione
$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$
Conosciamo già l'insieme dei punti che la risolvono: la circonferenza unitaria. Verifichiamo, ad esempio, che nel punto $P = (0,1)$ valga
$$f(P) = f(0,1) = 1 - 1 = 0.$$
Verifichiamo anche che
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 2y\big|_{(0,1)} = 2 \neq 0.$$

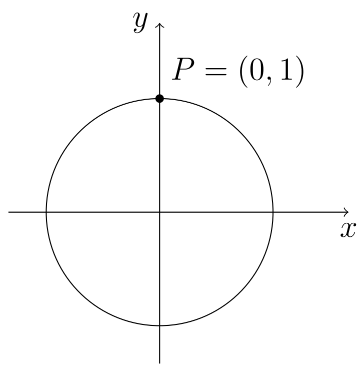


Figura 13.9

Notare che $f(x,y)$ è un *polinomio* e non è difficile vedere che è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$, non soltanto C^1.

Quindi, le ipotesi del teorema valgono. La tesi dice che esiste $g\colon U \to V$ (dove U, V sono "opportuni" intorni di $x_0 = 0$ e $y_0 = 1$) tale che $g \in C^1(U)$ e $f(x, g(x)) = 0$ per ogni $x \in U$. Infine sappiamo dal teorema che
$$g'(x) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))} = \frac{-2x}{2g(x)} = -\frac{x}{g(x)}.$$

Non sappiamo chi è g, ma solo come è fatta la sua derivata.
In questo caso particolare si è ottenuta un'equazione differenziale nell'incognita $g(x)$ che è a "variabili separabili". Non è difficile da risolvere. Infatti:

$$\begin{aligned} g'(x)\cdot g(x) = -x \iff 2gg' = -2x &\iff \frac{d}{dx}\, g^2(x) = -\frac{d}{dx}\, x^2 \\ &\iff \int \frac{d}{dx}\, g^2\, dx = -\int \frac{d}{dx}\,(x^2)\, dx \\ &\iff g^2(x) = -x^2 + C \quad (C \text{ costante arbitraria}). \end{aligned}$$

Ossia $g(x) = \pm\sqrt{C - x^2}$ che ha senso se e solo se $C - x^2 \geq 0$. Poiché $g(0) = 1$ essendo $P = (0,1)$, si ottiene $g(0) = 1 = \pm\sqrt{C - 0} = \pm\sqrt{C}$. È chiaro che la radice col segno negativo è da escludere e anche che dev'essere $C = 1$. Ossia

$$g(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Questa cosa era ovvia sin dall'inizio. Infatti

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \iff y^2 = 1 - x^2 \iff y = \pm\sqrt{1 - x^2},$$

ma se $P = (0,1)$ si deve escludere la soluzione negativa.

Analogo risultato vale scambiando la x con la y.

Osservazione 13.4.1. Se $f \in C^1(A)$ allora la condizione

$$\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$$

per $(x_0, y_0) \in A$ assicura che, *localmente attorno a questo punto*, l'insieme

$$\{(x, y) \in A : f(x, y) = 0\}$$

è una curva piana regolare contenuta in A.

Questo teorema ha ricadute notevoli in varie branche della matematica. Esso si generalizza a funzioni $F : A \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, di classe $C^1(A, \mathbb{R}^n)$. Questa versione generale è, ad esempio, alla base della teoria (fondamentale) delle cosiddette *varietà differenziabili*[5].

[5]Tali enti matematici generalizzano i concetti usuali di curve e superfici dello spazio ordinario.

13.5 Integrali doppi

Anche la teoria dell'integrale di Riemann si generalizza a dimensioni superiori. Ci occuperemo in seguito solo del caso 2-dimensionale e vedremo solo alcuni casi particolari di questa generalizzazione.

Un modo rapido di definire cos'è un integrale doppio è il seguente.

Definizione 13.5.1 (Integrale doppio definito come limite di somme doppie)**.** Sia $h : D \subsetneq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua definita in un insieme chiuso e limitato D. Si pone

$$\iint_D h(x,y)\,dx\,dy := \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_k \to 0}} \sum_i \sum_k h(x_i, y_k)\Delta x_i \Delta y_k,$$

dove

$$\Delta x_i := x_{i+1} - x_i, \qquad \Delta y_k := y_{k+1} - y_k,$$

e queste somme si estendono a tutti gli indici i, k tali che i punti $(x_i, y_k) \in D$.

In particolare, se $h(x,y) = 1$, si usa la precedente definizione per introdurre il concetto di "area di una figura piana". Precisamente, l'*area* $\mathcal{A}(D)$ dell'insieme $D \subsetneq \mathbb{R}^2$ è definita come

$$\mathcal{A}(D) := \iint_D dx\,dy.$$

Definizione 13.5.2 (Dominio normale)**.** Siano $f, g \colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni continue, dove $I = [a,b]$. Si assuma che

$$f(x) \le g(x) \quad \forall\, x \in I.$$

L'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x) \le y \le f(x) \quad \forall\, x \in I\}$$

si chiama *insieme normale* rispetto all'asse x.

Analogamente, siano $f, g \colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni continue (della variabile y), dove $J = [c,d]$ e

$$g(y) \le f(y) \quad \forall\, y \in J.$$

L'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(y) \le x \le f(y) \quad \forall\, y \in J\}$$

si chiama *insieme normale* rispetto all'asse y.

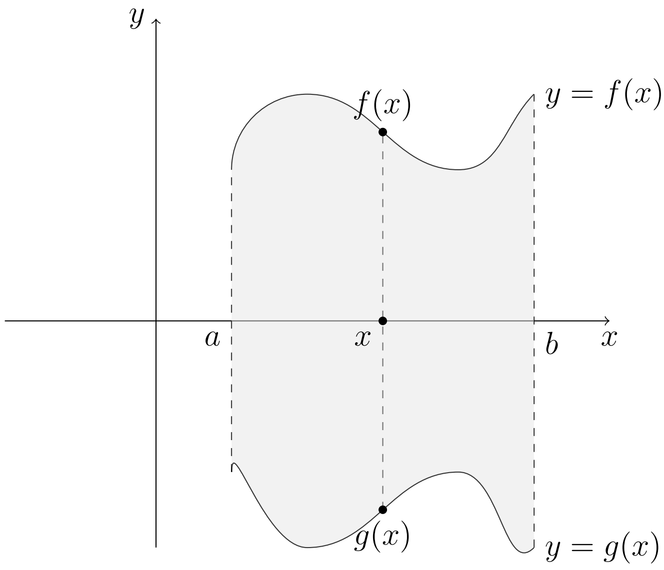


Figura 13.10: Dominio normale rispetto all'asse x

Per insiemi normali l'integrale doppio di una funzione h come sopra si calcola con la seguente formula "iterativa":

$$\boxed{\iint_D h(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{f(x)} h(x,y)\,dy \right)\,dx},$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x) \leq y \leq f(x) \quad \forall\, x \in [a,b]\}$.

Se $h(x,y)$ si integra su un dominio D normale rispetto all'asse y si ha

$$\boxed{\iint_D h(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{f(y)} h(x,y)\,dx \right)\,dy}.$$

Infine, sempre nelle precedenti ipotesi (cioè h è una funzione continua), se D è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ che è normale rispetto sia all'asse x che all'asse y, si può usare una o l'altra indifferentemente. Cioè, vale la possibilità dello "scambio" delle variabili di integrazione.

Si osservi che se $h \geq 0$, allora l'integrale

$$\iint_D h(x,y)\,dx\,dy$$

rappresenta il *volume* vol(E) del sottoinsieme E di $\mathbb{R}^3$ dato da

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq h(x, y) \quad \forall\, (x, y) \in D\}.$$

In altre parole, in tal caso, si pone

$$\mathrm{vol}(E) := \iint_D h(x, y)\, dx\, dy.$$

Esempio 13.5.1. Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 1 \quad \forall\, x \in [-1, 1]\}$ l'insieme in figura. Esso è un dominio normale rispetto all'asse x.

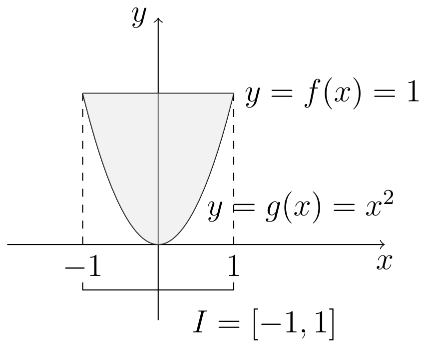


Figura 13.11: Esempio di dominio normale rispetto all'asse x

L'area $\mathcal{A}(D)$ si può calcolare usando la prima formula. Si trova

$$I = \iint_D dx\, dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{x^2}^{1} dy \right) dx = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= 2 - \frac{1}{3}\,(2) = 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

Quest'ultimo numero coincide anche con il volume del solido E in Figura 13.12, definito come

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1,\ x^2 \leq y \leq 1,\ -1 \leq x \leq 1\}.$$

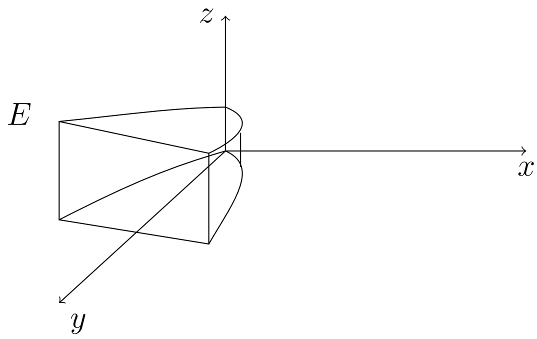


Figura 13.12: L'insieme solido E

Concludiamo questa sezioni sugli integrali doppi, ricordando una formula importante che consente di trasformare un dato integrale in un altro, mediante cambiamento di variabili. Più precisamente, sia $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una funzione di classe C^1, cioè $F \in C^1(A, \mathbb{R}^2)$. Possiamo allora considerarne la matrice Jacobiana

$$\mathcal{J}F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Si chiama *Jacobiano* di F, e si indica $\mathcal{J}ac\, F$, la quantità che si ottiene da $\mathcal{J}F$ effettuandone il determinante e prendendone il modulo, cioè

$$\mathcal{J}ac\, F \overset{def.}{=} |\det \mathcal{J}F|\,.$$

Tale quantità è cruciale nel cambiamento di variabili in due (o più) dimensioni.

Teorema 7. *Siano $A \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato, $f \in C(A)$ ed $F \in C^1(A, \mathbb{R}^2)$ tale che $\mathcal{J}ac\, F > 0$ su A. Vale la seguente formula del cambiamento di variabili*

$$\int_{F(A)} f(x, y)\, dxdy = \int_A (f \circ F)(u, v)\, \mathcal{J}ac\, F(u, v)\, dudv.$$

Esempio 13.5.2 (Coordinate polari nel piano)**.** Sia $F(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$ dove $\rho \in \mathbb{R}_+$ e $\theta \in]0, 2\pi[$. Le variabili (ρ, θ) si chiamano *coordinate polari* del piano euclideo. In effetti, risulta $\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{bmatrix}$ e quindi $\mathcal{J}ac\, F = \rho$. Quindi vale la seguente, utilissima, formula di *passaggio alle coordinate polari*

$$\int_D f(x, y)\, dxdy = \int_{F^{-1}(D)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\, d\rho d\theta.$$

Qui $D \subsetneq \mathbb{R}^2$ indica un insieme chiuso e limitato del piano.

13.6 Successioni e serie di funzioni in $\mathbb{C}$: cenni

13.6.1 Richiami sui numeri complessi

Ricordare che

$$\mathbb{C} = \{z = x + i\,y : x, y \in \mathbb{R}\}, \quad \text{dove} \quad i = \sqrt{-1}.$$

Si è visto che $\mathbb{C}$ è un *campo*, ma che esso non è linearmente ordinato, cioè non esiste su $\mathbb{C}$ una relazione d'ordine "naturale".

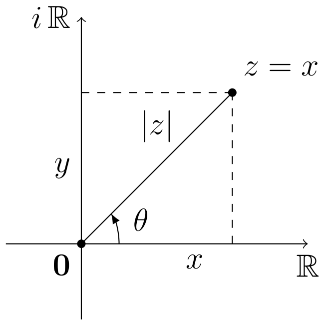


Figura 13.13: Rappresentazione geometrica dei numeri complessi

Si pone $|z| \stackrel{def.}{=} \sqrt{x^2 + y^2}$ per definire il modulo di z (ossia, la norma del vettore $(x, y) \in \mathbb{R}^2$). Vale la relazione

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}},$$

dove $\overline{z} = x - i\,y$ è il *coniugato* di $z = x + i\,y$. Ricordare anche che

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta),$$

dove θ è l'*argomento* di z, cioè l'angolo tra la semiretta $\overline{\mathbf{0}\,z}$ e l'asse x (l'argomento è determinato a meno di multipli interi di 2π).

N.B. Se $|z| = 1$, si ha che $z \in \mathbb{S}^1$, dove $\mathbb{S}^1$ indica la circonferenza unitaria del piano complesso.
In notazione complessa, questi punti sono quelli del tipo $\cos\theta + i\sin\theta$.
Per comodità, si introduce anche una notazione speciale, dovuta ad Eulero. Infatti si scrive

$$e^{i\,\theta} \stackrel{def.}{=} \cos\theta + i\sin\theta \qquad \forall\,\theta \in \mathbb{R}.$$

Concludiamo ricordando che vale la regola seguente:

$$e^{i\,\theta} \cdot e^{i\,\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)} \qquad \forall\,\theta,\,\varphi \in \mathbb{R}.$$

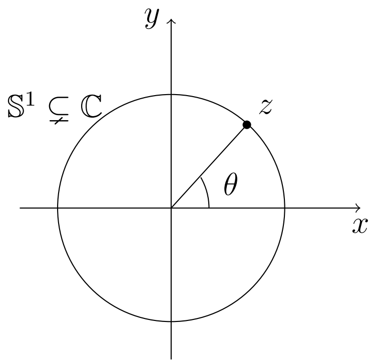


Figura 13.14: La circonferenza unitaria $\mathbb{S}^1$

13.6.2 Successioni e serie numeriche in $\mathbb{C}$

Per quanto riguarda le successioni i cui elementi sono numeri complessi valgono molti dei risultati visti nel caso reale (ma non i risultati che dipendono dalla relazione d'ordine $\leq$ di $\mathbb{R}$, come ad esempio la permanenza del segno).
Si ha che $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ è uno spazio metrico rispetto alla distanza $d(z,w) = |z-w|$ dove $|\cdot|$ è il modulo. Pertanto la teoria si generalizza nel modo già visto nel caso degli spazi metrici.

Osservare, che per definizione, la successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad un numero complesso $z = x+iy \in \mathbb{C}$ se e solo se sono convergenti (rispettivamente, ad x e y) le successioni $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ delle parti reali e immaginarie di z_n, cioè

$$z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} z \iff x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \quad \text{e} \quad y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y.$$

In altre parole, la scrittura

$$z_n = x_n + i\, y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} z = x + i\, y$$

significa che le successioni reali $\{x_n = \Re(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ e $\{y_n = \Im(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ soddisfano

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x = \mathbb{R}(z) \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} y_n = y = \Im(z).$$

Quanto detto per successioni si estende alle serie numeriche, essendo queste "particolari" successioni. È bene osservare che studiare l'*assoluta convergenza* di una serie complessa $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, dove $a_n \in \mathbb{C}\,(n \in \mathbb{N})$ significa studiarne la serie dei moduli, cioè $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, che è una serie (reale) a termini positivi. Si usano pertanto i criteri che conosciamo. L'unica differenza è che adesso le condizioni che si ottengono, riguardano non più numeri reali, ma numeri complessi, che sono quindi nel "piano", non più su di una retta.

Esempi.

1. **Serie geometrica.** E' la seguente serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n.$$
Tale serie converge a $\dfrac{1}{1-z} \in \mathbb{C}$ per ogni $|z| < 1$, cioè sulla palla aperta $x^2 + y^2 < 1$. La stessa serie *non converge* (oscilla) se $|z| \geq 1$.

2. **Serie esponenziale.** E' la seguente serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$
Come noto, la somma di questa serie è data dall'esponenziale complesso e^z per ogni $z \in \mathbb{C}$. In altre parole, vale l'identità
$$e^z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$
N.B. Una facile osservazione riguarda l'assoluta convergenza. Infatti
$$\frac{|z^n|}{n!} = \frac{|z|^n}{n!},$$
e dal criterio del rapporto ne segue l'assoluta convergenza in ogni punto (ciò che implica la convergenza semplice ovunque).

   In particolare, questo è uno dei modi standard di definire l'esponenziale complesso $e^z \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Questa funzione soddisfa la proprietà
$$e^z \cdot e^w = e^{z+w} \qquad \forall\, z,\, w \in \mathbb{C}.$$
Osservare infine che $e^z = e^{x+i\,y} = e^x \cdot e^{i\,y} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Per semplicità, sia $I = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$. Consideriamo la famiglia delle funzioni continue[6] $f\colon I \to \mathbb{R}$, $f \in C(I)$. L'insieme $C(I)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (cioè, $\forall\, f_1, f_2 \in C(I)$ si ha $\alpha\, f_1 + \beta\, f_2 \in C(I) \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$).
Si può "definire" facilmente una metrica su $C(I)$ nel modo seguente:

$$\forall\, f, g \in C(I) \quad d_\infty(f,g) \overset{def.}{=} \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|$$

(nel caso delle funzioni in $C(I)$ si può rimpiazzare il sup con il max; tuttavia ciò non è vero per le funzioni limitate). Quella appena definita è una distanza (tra funzioni continue definite in I).

Se consideriamo una successione in $C(I)$, ossia

$$\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C(I),$$

ogni $f_n\colon I \to \mathbb{R}$ ($\forall\, n \in \mathbb{N}$) è una funzione continua in I.

(D1) Cosa vuol dire *convergenza puntuale?*
Si dice che $f_n \to f$ *puntualmente* su I se per ogni $x \in I$ si ha

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x).$$

In altre parole, la successione numerica $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge per ogni $x \in I$. Se esiste $\lim_{n \to +\infty} f_n(x)$ allora si scrive

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x).$$

(D2) Cosa vuol dire *convergenza uniforme*?
Si pone $f_n \underset{n \to +\infty}{\rightrightarrows} f$, ossia f *converge ad f uniformemente su I*, se

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

In altre parole

$$d_\infty(f_n, f) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \qquad \left(\text{dove } d_\infty(f_n, f) := \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|\right).$$

Non è necessariamente vero che il limite puntuale di una successione di funzioni continue è una funzione continua. Invece vale il seguente:

[6] Alternativamente, si possono considerare le funzioni limitate.

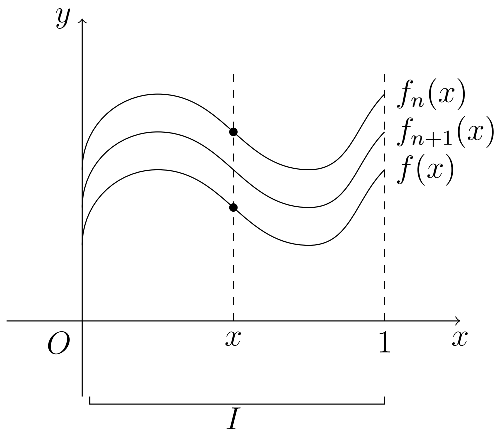


Figura 13.15: Convergenza puntuale

Teorema 13.6.1. *Il limite uniforme di una successione di funzioni continue è una funzione continua. Ossia, se $f_n\colon I \to \mathbb{R}$ è continua per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $f_n \underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} f$, allora f è continua su I.*

Usando quest'ultimo risultato si dimostra che lo spazio metrico $(C(I), d_\infty)$ è uno *spazio metrico completo.*

N.B. Gli esempi più semplici e importanti che abbiamo già visto di spazi metrici completi sono $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ e $(\mathbb{C}, |\cdot|)$. Più in generale si dimostra che $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ è completo. Tuttavia, tutti questi spazi sono finito-dimensionali. Invece, lo spazio $C(I)$ è uno spazio vettoriale infinito-dimensionale che, quando munito della distanza d_∞, risulta completo, cioè "ogni successione di Cauchy in esso è convergente".

Concludiamo questo capitolo con una osservazione sulle serie di funzioni. Se si studia una "serie di funzioni", cioè una serie in cui gli elementi sono, ad esempio, funzioni $f_n\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, quello che abbiamo visto nelle lezioni sulle serie numeriche (reali) si può applicare allo studio della *convergenza puntuale* della serie data. Ma è spesso essenziale studiare condizioni sotto le quali si abbia *convergenza uniforme.* Ciò significa studiare se

$$\sup_{x\in I}|S_n(x) - S(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

dove $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ è la "somma parziale n-esima" della serie data, ed $S(x)$ è una funzione su I. Se ciò avviene allora vuol dire che la serie *converge uniformemente* alla sua somma (puntuale) $S(x)$ che, se esiste, è data da

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Esempio 13.6.1. La serie di funzioni

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{R}$ alla sua somma puntuale e^x.
Ciò rimane vero anche se le funzioni sono funzioni complesse della variabile $z \in \mathbb{C}$: in tal caso, c'è convergenza uniforme sui compatti di $\mathbb{C}$ (sono gli insiemi chiusi e limitati).

Esempio 13.6.2. Senza saperlo, abbiamo già studiato molte serie di funzioni, cioè le serie di Taylor/McLaurin delle funzioni elementari, come ad esempio, quelle di e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, etc.
In questi esempi si può vedere che la serie di McLaurin di punto iniziale $x_0 = 0$ è data da una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \quad \text{dove} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

In tutti gli esempi ricordati sopra si può vedere che non solo c'è convergenza puntuale su tutto $\mathbb{R}$, ma su opportuni sottoinsiemi c'è convergenza uniforme della serie di Taylor di f ad f. Ad esempio, si ha che

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} \quad \text{e} \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n}\, \frac{x^{2\,n}}{2\,n!}$$

sui compatti di $\mathbb{R}$.

Quando una funzione coincide (localmente) con la sua serie di Taylor allora essa è detta *analitica*. L'analiticità è un concetto molto importante in vari aspetti dell'Analisi Matematica.

N.B. Una classe importante di serie di funzioni è quella costituita dalle *serie di potenze* (reali e/o complesse), che sono espressioni "formali" del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x^n$.
La teoria delle serie di potenze è alla base dell'Analisi Complessa .

Appendice A

Richiami e approfondimenti

A.1 Un po' di logica...

Nel nostro ambito si cerca di parlare/scrivere di matematica in modo semplice: tuttavia si ha bisogno di rigore nella esposizione (e ancor di più nella deduzione) dei risultati. In Matematica si ha spesso a che fare con *proposizioni.*
Ma definire cos'è una proposizione è abbastanza difficile.

Esempi.

- "$1 < 3$" (vera);
- "Per ogni insieme A si ha $\varnothing \subseteq A$" (vera);
- "$0 + 1 = 0$" (non vera $\equiv$ falsa).

N.B. Per convenzione "grafica", d'ora in poi, se una proposizione P è vera (oppure falsa) le assegniamo valore di verità 1 (oppure 0).
In alternativa, si usano i simboli $V = 1 =$ Vero, $F = 0 =$ Falso.

Un ragionamento o un discorso (matematico) si compone, in genere, di più proposizioni che si legano tra loro mediante *connettivi logici.*
Essi sono:

- Negazione $\neg$ ("NON");
- Congiunzione $\wedge$ ("E");
- Disgiunzione $\vee$ ("O" ossia "Oppure").

Le tabella di verità dei connettivi logici sono queste:

P	$\neg$ P
1	1
1	0

P	Q	P $\wedge$ Q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

P	Q	P $\vee$ Q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

.

Ricordiamo (anche in questo contesto) le leggi di De Morgan:

i) $\neg$ (P $\wedge$ Q)$=$ $\neg$ P $\vee$ $\neg$ Q;

ii) $\neg$ (P $\vee$ Q)$=$ $\neg$ P $\wedge$ $\neg$ Q.

La congiunzione $\wedge$ e la disgiunzione $\vee$ si possono esprimere una in funzione dell'altra mediante negazione. Ad esempio (per esercizio) è chiaro che:

j) P $\wedge$ Q $=$ $\neg$ ($\neg$ P $\vee$ $\neg$ Q);

jj) P $\vee$ Q $=$ $\neg$ ($\neg$ P $\vee$ $\neg$ Q).

Si usano spesso altri due connettivi: *Implicazione* ed *Equivalenza*:

- *Implicazione* (se P allora Q; in simboli, P $\Longrightarrow$ Q);
- *Equivalenza* (P equivale a Q, ossia, se P allora Q e –allo stesso tempo– se Q allora P; in simboli, P $\Longleftrightarrow$ Q).
  N.B. L'equivalenza "P $\Longleftrightarrow$ Q" si legge "P se e solo se Q".

È bene capire come tradurre l'implicazione (e perciò anche l'equivalenza, che è una doppia implicazione) in termini dei connettivi. Si ha:

$$(\star) \qquad \text{P} \Longrightarrow \text{Q} \qquad = \qquad \neg\, \text{P} \vee \text{Q}.$$

Le tabelle di verità di questi altri connettivi sono le seguenti:

P	Q	P $\Longrightarrow$ Q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

P	Q	P $\Longleftrightarrow$ Q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

.

A.1.1 Predicati e Quantificatori

Le proposizioni affermano qualcosa che riguarda "oggetti specifici" (come ad esempio, "$0 \cdot 1 = 0$"). Tuttavia, molte "frasi" matematiche riguardano "oggetti generici".

Definizione A.1.1 (Predicato)**.** Un *predicato* $\mathrm{P}(x)$ definito su un insieme A è un enunciato che associa ad ogni $a \in A$ la proposizione $\mathrm{P}(a)$. In altre parole, un predicato su A è una funzione da A a valori nell'insieme delle proposizioni.

In generale, un predicato $\mathrm{P}(x)$ non è né vero né falso: ciò che è vero/falso è invece la proposizione che si ottiene dal predicato $\mathrm{P}(x)$ quando si sostituisce la *variabile* x con un (qualsiasi fissato) elemento $a \in A$.

Esempio A.1.1. Siano $A = \mathbb{R}$ e $\mathrm{P}(x) =$ "$x > 0$". Allora, ad esempio, si ha $\mathrm{P}(0)$ è falsa, mentre $\mathrm{P}(1)$ è vera.

N.B. In generale un predicato può dipendere da più di una variabile: però ci interessano di più quelli che dipendono da una sola variabile: tali predicati sono dette *proprietà.*

Esempi di predicati (o proprietà) in $\mathbb{R}$ –ossia, di una variabile reale– sono le equazioni e disequazioni.

Esempio A.1.2. Sia $p(x)$ un polinomio (nella variabile $x \in \mathbb{R}$). Allora la proprietà $p(x) = 0$ è detta *equazione,* mentre la proprietà $p(x) > 0$ è detta *disequazione.*
N.B. *Sono disequazioni anche le proprietà* $p(x) < 0$, $p(x) \geq 0$, $p(x) \leq 0$.
Risolvere una equazione/disequazione significa trovare l'insieme:
$\{x \in \mathbb{R} : p(x) = 0\}$ *(ossia,* $\{x \in \mathbb{R} : \mathrm{P}(x) > 0\}$*).*

Si fa spesso uso dei cosiddetti *quantificatori.*

Definizione A.1.2 (Quantificatori)**.** Il quantificatore universale, in simboli $\forall$, significa (e si legge) "per ogni". Il quantificatore esistenziale, in simboli $\exists$, significa (e si legge) "esiste".

N.B. Se si scrive $\exists!$ si legge "esiste uno e uno solo".

Osservazione A.1.1. Si consideri la proposizione

$$\forall\, x \in A,\ \mathrm{P}(x)$$

(a parole, per ogni elemento x di A si ha $p(x)$). Adesso "neghiamola". Si ottiene
$$\neg\,(\forall\, x \in A,\, \mathrm{P}(x)) \quad = \quad \exists\, x \in A:\ \neg \mathrm{P}(x).$$

Analogamente, si consideri la proposizione

$$\exists\, x \in A:\ \mathrm{P}(x)$$

(che si legge "esiste almeno un elemento x di A tale che $p(x)$ è vera"). Adesso "neghiamola". Si ottiene

$$\neg\,(\exists\, x \in A:\ \mathrm{P}(x)) \quad = \quad \forall\, x \in A,\ \neg \mathrm{P}(x).$$

È anche utile ricordare che

$$\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q} \quad = \quad \neg \mathrm{Q} \Longrightarrow \neg \mathrm{P}.$$

Ciò si può appurare scrivendo le tabelle di verità dei due enunciati e verificando che esse coincidono. ■

Finiamo con un esempio/esercizio più "difficile".

Esempio A.1.3. Neghiamo l'implicazione $\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$.
Dato che $\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q} = \neg \mathrm{P} \vee \mathrm{Q}$, segue allora che

$$\neg(\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}) = \mathrm{P} \wedge \neg \mathrm{Q}.$$

Applichiamo questo alla definizione di "limite di una successione".
Si consideri l'enunciato:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall\, n \in \mathbb{N}\ (n > \bar{n} \implies |a_n - l| < \varepsilon),$$

ossia la definizione formale di esistenza del limite per una successione $\{a_n\}$. Adesso neghiamo tale enunciato. Si ottiene

$$\exists\, \varepsilon > 0\ :\ \forall \bar{n} \in \mathbb{N}\ \exists\, n \in \mathbb{N} : n > \bar{n}\ \wedge |a_n - l| \geq \varepsilon.$$

A.2 Equazioni e disequazioni di 2° grado

La generica equazione di 2° grado

$$p(x) := ax^2 + bx + c = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ha soluzioni date dalla seguente formula

$$x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Le radici (o soluzioni) sono di tre tipi diversi a seconda del segno del cosiddetto discriminante $\Delta := b^2 - 4ac$.

Caso 1) $\Delta > 0$ ($\implies$ radici reali e distinte). In tal caso si ha

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_+)(x - x_-).$$

Caso 2) $\Delta = 0$ ($\implies$ radici reali e coincidenti). In tal caso si ha

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_*)^2,$$

dove si è posto $x_* := x_+ = x_-$.

Caso 3) $\Delta < 0$ ($\implies$ radici complesse coniugate). Come nel Caso 1) si ha $ax^2 + bx + c = a(x - x_+)(x - x_-)$, ma ora $x_\pm$ sono coniugati l'uno dell'altro.

Osservazione A.2.1 (Completamento del quadrato)**.** Dato il trinomio di 2° grado ax^2+bx+c si chiama *completamento del quadrato* la seguente procedura:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x \pm \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \underbrace{- \frac{\Delta}{4a^2}}_{=:A}\right). \end{aligned} \tag{A.1}$$

A patto di effettuare un'altra messa in evidenza, abbiamo così ricondotto il trinomio, a meno della costante moltiplicativa $a|A|$, nella sua "forma canonica"

$$X^2 \pm 1,$$

dove $X = \frac{x+\frac{b}{2a}}{\sqrt{|A|}}$ e $A = -\frac{\Delta}{4a^2}$. ■

Le disequazioni di 2° grado $p(x) \geq 0$ (o $\leq$, $>$, $<$) hanno soluzioni in dipendenza dei segni di a e Δ. Precisamente, si ha che se $a > 0$ allora

1. $\Delta > 0 \implies (p(x) \geq 0 \iff x \in]-\infty, x_-[\cup]x_+, +\infty[)$;
2. $\Delta = 0 \implies (p(x) \geq 0 \,\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad p(x) = 0 \iff x = x_*)$;
3. $\Delta < 0 \implies \nexists\, x \in \mathbb{R} \,:\, p(x) \geq 0$ (nessuna soluzione).

Gli altri casi sono completamente analoghi.

Le soluzione delle disequazioni di 2° grado si possono convenientemente visualizzare, cioè pensare geometricamente, nel modo seguente. Si intersechino la parabola di equazione cartesiana $y = p(x)$ con la retta $y = 0$. Le intersezioni (se ci sono) sono le soluzioni dell'equazione associata $p(x) = 0$. Ad esempio, nel caso che $a > 0$, tale parabola ha concavità rivolta verso l'alto, e perciò se $\Delta > 0$, è chiaro che la disuguaglianza è vera solo quando la parabola "sta sopra" alla retta, cioè per gli x appartenenti alle semirette $]-\infty, x_-[$ e $]x_+, +\infty[$.

A.3 Disequazioni irrazionali

Siano $p(x), q(x)$ polinomi. Ricordiamo come si risolvono alcuni prototipi di disequazioni irrazionali.

Caso 1) (n pari)

$$(1_1) \quad \sqrt[n]{p(x)} > q(x); \qquad\qquad (1_2) \quad \sqrt[n]{p(x)} < q(x).$$

Nel primo sottocaso, si ha

$$\begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) < 0 \end{cases} \quad \bigvee \quad \begin{cases} p(x) > [q(x)]^n \\ q(x) \geq 0 \end{cases} .$$

Invece, nel secondo sotto-caso, si ha

$$\begin{cases} p(x) \geq 0 \\ p(x) < [q(x)]^n \end{cases} .$$

Caso 2) (n dispari)

$$(2_1) \quad \sqrt[n]{p(x)} > q(x); \qquad\qquad (2_2) \quad \sqrt[n]{p(x)} < q(x)$$

Nel primo sotto-caso, si ha

$$p(x) > [q(x)]^n,$$

mentre nel secondo sotto-caso, si ha

$$p(x) < [q(x)]^n.$$

Esercizio A.3.1. Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali:

1. $\sqrt{2 - x^2} > 2x - 1$.
2. $\sqrt{4 - x^2} < x - 3$.
3. $\sqrt[3]{8x^3 - 7} < 2x - 1$.

Nel primo esercizio, si ha che la disequazione equivale ai due sistemi

$$\begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ 2 - x^2 \geq 0 \end{cases} \qquad \bigvee \qquad \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 2 - x^2 \geq (2x-1)^2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow -\sqrt{2} \leq x < \frac{1}{2} \quad \bigvee \quad \frac{1}{2} \leq x < 1 \Longleftrightarrow -\sqrt{2} \leq x < 1.$$

Nel secondo esercizio, si ha che la disequazione equivale al sistema

$$\begin{cases} 4x^2 - 1 \geq 0 \\ x - 3 > 0 \\ 4x^2 - 1 < (x-3)^2 \end{cases} .$$

Ma tale sistema non ha soluzioni.
Nel terzo esercizio, si ha che la disequazione equivale a

$$8x^3 - 7 < (2x - 1)^3 \Longleftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 1,$$

dove si arriva al risultato dopo aver sviluppato il cubo ed effettuato le cancellazioni necessarie.

A.4 Divisione tra polinomi

In questa sezione i polinomi considerati saranno reali o complessi. Per semplicità, li scriveremo convenzionalmente ordinando i termini di ciascun polinomio secondo le potenze decrescenti (dalla più grande alla più piccola).

Ricordare che, dati due polinomi p e d, si dice che *p è divisibile per d* (oppure, *d è un divisore di p*) se esiste un polinomio q tale che

$$p = q \cdot d.$$

Vale l'algoritmo euclideo della divisione tra polinomi.

Proposizione A.4.1. *Dati i polinomi $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ e $d(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 + b_0$, dove $d \neq 0$, allora esistono due polinomi q ed r tali che*

$$p = q \cdot d + r,$$

dove $r = 0$, oppure grado$(r) <$ grado(d).

I polinomi q ed r si chiamano quoziente *e* resto *della divisione di p per d. In particolare, p è divisibile per d se e solo se $r = 0$.*

Descriviamo con un esempio come si effettua in pratica, la divisione tra due polinomi.

Esempio A.4.1. Dividiamo $p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$ per $d(x) = x^2 + 1$.
I termini del quoziente si ottengono dividendo ordinatamente i primi termini di p e p_1, per il primo termine del divisore, che è x^2. I calcoli si possono fare come descriviamo qui sotto:

$$\begin{array}{cccc|l}
x^3 & +2x^2 & -x & +1 & x^2+1 \\ \cline{5-5}
-\,x^3 & & -x & & x+2 \\ \cline{1-4}
// & 2x^2 & -2x & +1 & \\
 & -2x^2 & & -2 & \\ \cline{2-4}
 & // & -2x & -2 &
\end{array} \tag{A.2}$$

Sopra si è denotato con p_1 il polinomio che appare nella terza riga a destra, cioè $p_1(x) = 2x^2 - 2x + 1$.
Complessivamente, si è ottenuto che $q(x) = x + 2$, mentre $r(x) = -2x - 2$.

L'algoritmo si arresta perché il polinomio nell'ultima riga a destra ha grado strettamente minore del divisore.

A.5 Limiti notevoli: esempi ed esercizi

Osservazione A.5.1. Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Valgono le seguenti tabelle riassuntive dei limiti in $\overline{\mathbb{R}}$ di somma, prodotto, quoziente e potenza.

1. Somma:

$\lim_{x \to x_0} f(x)$	$\lim_{x \to x_0} g(x)$	$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x))$
a	b	$a + b$
a	$\pm\infty$	$\pm\infty$

2. Prodotto:

$\lim_{x \to x_0} f(x)$	$\lim_{x \to x_0} g(x)$	$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x))$
a	b	$a \cdot b$
$a > 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$a < 0$	$\pm\infty$	$\mp\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$
$\pm\infty$	$\mp\infty$	$-\infty$

3. Quoziente[1]:

$\lim_{x \to x_0} f(x)$	$\lim_{x \to x_0} g(x)$	$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
a	$b \neq 0$	$\frac{a}{b}$
a	$\pm\infty$	0
$\pm\infty$	$a > 0$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$a < 0$	$\mp\infty$
$a > 0$	0	$\begin{cases} +\infty & \text{se } g(x) > 0 \\ -\infty & \text{se } g(x) < 0 \\ \nexists & \end{cases}$
$a < 0$	0	$\begin{cases} -\infty & \text{se } g(x) > 0 \\ +\infty & \text{se } g(x) < 0 \\ \nexists & \end{cases}$

[1] Per quanto concerne le disuguaglianze che coinvolgono il segno di g, occorre e basta che siano verificate in un intorno forato di x_0.

4. Potenza:

$\lim_{x\to x_0} f(x)$	$\lim_{x\to x_0} g(x)$	$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$
$a > 0$	b	a^b
$a \in [0,1[$	$+\infty$	0
$a \in [0,1[$	$-\infty$	$+\infty$
$a > 1$	$+\infty$	$+\infty$
$a > 1$	$-\infty$	0
$+\infty$	$b > 0$	$+\infty$
$+\infty$	$b < 0$	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	0

Forme indeterminate
Come già visto per il caso delle successioni reali (cfr. sottosezione 3.1.1) in $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ vi sono alcune operazioni sui limiti che non hanno un significato preciso. Precisamente, i seguenti simboli <u>*non hanno senso*</u> in $\overline{\mathbb{R}}$:

- $(\pm\infty) - (\pm\infty)$ (ossia, $+\infty - \infty$ o $-\infty + \infty$);
- $0 \cdot (\pm\infty)$;
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$;
- $\frac{l}{0}$ per $l \in \overline{\mathbb{R}}$;
- $1^{\pm\infty}$;
- 0^0;
- $(+\infty)^0$.

Questi stessi simboli si usano per classificare tutti i limiti di cui, a priori, non si conosce il comportamento asintotico.

Esempio A.5.1 (I polinomi sono funzioni "continue in ogni punto")**.** Dato che $x \to x_0 \Longrightarrow f(x) = x \to x_0$ (questo fatto è tautologico), segue subito che

$$x \to x_0 \Longrightarrow f(x) = x^2 \to (x_0)^2, \quad .... \quad x \to x_0 \Longrightarrow f(x) = x^n \to (x_0)^n.$$

Inoltre, una funzione costante $f(x) = a \in \mathbb{R}$ ha per limite la costante a stessa. Allora (usando la 1) del Teorema 6.2.3) segue subito che un qualsiasi polinomio $p_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ ha limite $p_n(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + ... + a_n x_0^n$ $(x \to x_0)$.

Esempio A.5.2 (funzione senza limite in x_0)**.** La funzione $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ non ha limite per $x \to x_0 = 0$ (cioè, oscilla).

Si ha $\cos(2k\pi) = 1$ e $\cos((2k+1)\pi) = -1$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Allora $f(x) = \pm 1$ se $k \in \mathbb{Z}$ è pari/dispari. Ma allora in ogni intorno (arbitrariamente piccolo) di $x_0 = 0$ cadono infiniti punti in cui $f(x) = 1$ e infiniti punti in cui $f(x) = -1$. Questo contraddice la possibilità che f abbia limite in 0.

Esempio A.5.3 ($\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ e risultati collegati)**.** Dimostriamo che

$$(\spadesuit) \qquad \forall\, x\,:\, 0 < |x| \le \frac{\pi}{2} \quad \text{si ha} \qquad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Si consideri, nel piano $\overrightarrow{0XY}$ la circonferenza unitaria

$$\gamma := \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 : X^2 + Y^2 = 1\}$$

di centro $A \equiv (0,0)$ e siano $B = (1,0)$, $C = (\cos x, \sin x)$, $E = (\cos x, 0)$. Sia infine D il punto intersezione della tangente in B a γ (ossia, $X = 1$) con la retta per l'origine passante per C (ossia, $Y = \tan(x) \cdot X$). Quindi $D = (1, \tan(x))$. Allora i triangoli AEC e ABD sono simili e, evidentemente si ha $AEC \subsetneq ABD$. Si noti pure che il settore circolare $\text{Sett}(ABC)$ di vertici A, B, C contiene il triangolo ABC che inoltre contiene AEC. Infine, esso è contenuto in ABD. Ricapitolando:

$$ABC \subsetneq \text{Sett}(ABC) \subsetneq ABD$$

$$\Longrightarrow \text{Area}(ABC) < \text{Area}(\text{Sett}(ABC)) < \text{Area}(ABD)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2} \qquad \forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Se $x > 0$, moltiplicando per $\frac{2}{\sin x}$ si ottiene

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

e usando la parità delle funzioni in esame, segue la tesi.

Conseguenze:

1. Dato che nelle nostre ipotesi $\cos x > -1$ segue che
$$-1 < \frac{\sin x}{x} < 1 \Longleftrightarrow \frac{|\sin x|}{|x|} < 1.$$
Ciò implica $0 \le |\sin x| \le |x|$, che per il teorema dei 2 Carabinieri implica
$$(\heartsuit_1) \qquad \lim_{x\to 0} \sin x = 0.$$
Essendo $|x| < \frac{\pi}{2}$ si ha $0 < \cos x \le 1$ e perciò
$$0 \le 1 - \cos x = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} < \sin^2 x.$$
Ancora per il Teorema dei 2 Carabinieri, ciò implica
$$(\heartsuit_2) \qquad \lim_{x\to 0} \cos x = 1.$$

2. Si ha
$$(\diamondsuit_1) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$
Ciò segue da ($\spadesuit$) per il teorema dei 2 Carabinieri, mandando $x \to 0$.

3. Si ha
$$(\diamondsuit_2) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$
Infatti
$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x}.$$
La tesi segue subito perché $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ e $\cos x \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

Esempio A.5.4 (Razionalizzazione)**.** Si ha[2]

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}.$$

Ciò si ottiene razionalizzando[3]:

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+x}+1\right)}.$$

Dall'ultima uguaglianza segue subito la tesi, dato che il denominatore tende a 2 (mentre il numeratore è costante e uguale a 1) per $x \to 0$.

Questo metodo si userà spesso, anche per limiti di tipo differente.

Esempio A.5.5 (Numero di Nepero, o costante di Eulero)**.** Risulta che la funzione $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ ha un limite finito per $x \to 0$. Tale limite è il celebre numero di Nepero (anche detto *costante di Eulero*). In altre parole, si ha

$$(\star) \qquad \boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e}.$$

Ciò è stato dimostrato nell'ambito della teoria delle successioni. Tuttavia, più avanti ne dedurremo alcune conseguenze nel calcolo di limiti.

Ricordiamo pure che

$$e = 2,71828182....$$

è un numero *trascendente*[4].

N.B. Il limite notevole $(\star)$ si può prendere come definizione di e, ma ce ne sono anche altre possibili: una usa le *successioni,* ossia $e = \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; un'altra usa le *serie,* ossia $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

[2]Più in generale, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

[3]Ossia

$$\sqrt{A} - B = \frac{(\sqrt{A}-B)(\sqrt{A}+B)}{\sqrt{A}+B} = \frac{A-B^2}{\sqrt{A}+B},$$

dove si è usato $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

[4]La dimostrazione è di Charles Hermite (1873). Pochi anni dopo, nel 1882, Ferdinand von Lindemann dimostrò la trascendenza di π, ossia risolse –ma in senso negativo– il problema della *quadratura del cerchio.*

Esempio A.5.6 (Due limiti notevoli)**.** Si può dimostrare che valgono i seguenti limiti notevoli (ad esempio, usando i teoremi dell'Hôpital):

1. $\lim_{x\to 0} x^\beta \log_a x = 0 \qquad \forall\, a,\ \beta \in \mathbb{R}_+$.
2. $\lim_{x\to 0} x^x = 1$.

Il secondo limite segue subito dal primo. Infatti $x^x = e^{x\log x}$ e sapendo che $x\log x \to 0$ per $x \to 0$ ne segue la tesi (dato che $e^y \to 1$ per $y \to 0$).

Esempio A.5.7 (Funzioni razionali all'infinito)**.** Siano

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \\ q(x) &= b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + ... + b_1 x + b_0. \end{aligned}$$

Raccogliendo (cioè, mettendo in evidenza) il termine di grado massimo in entrambe le espressioni di p e q si trova

$$\frac{p(x)}{q(x)} = x^{n-k} \cdot \left(\frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + ...}{b_k + \frac{b_{k-1}}{x} + ...} \right)$$

e da ciò segue che

$$\lim_{x\to 0} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} +\infty \text{ se } n > k,\ \frac{a_n}{b_k} > 0 \\ -\infty \text{ se } n > k,\ \frac{a_n}{b_k} < 0 \\ \frac{a_n}{b_n} \quad \text{ se } n = k \\ 0 \quad\ \text{ se } n < k \end{cases} .$$

Esempio A.5.8. Sia $a > 0$. Vale il seguente

$$\lim_{x\to +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } a \in [0, 1[\\ 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \end{cases} .$$

Dimostrazione. È ovvia se $a = 0 \vee a = 1$. Siano $a \in]0, 1[$ e $\varepsilon > 0$. La tesi è che esiste $K > 0$ tale che $x > K \implies |a^x| < \varepsilon$. Essendo $a^x > 0$ si deve solo verificare che $a^x < \varepsilon$. Ciò avviene se $x > \log_a \varepsilon \left(= \frac{\log\varepsilon}{\log a}\right)$, dove si è usato che il $\log_a$ è decrescente se $0 < a < 1$ (e anche la formula del cambiamento di base). Quindi se $x > K = \frac{\log\varepsilon}{\log a}$ si ha $|a^x| < \varepsilon$, ossia la tesi.

Il caso $a > 1$ è analogo. Si vuole $a^x > M$ e ciò avviene se $x > \log_a \varepsilon \left(= \frac{\log\varepsilon}{\log a}\right)$, dove si è usato che il $\log_a$ è crescente se $a > 1$ (e ancora la formula del cambiamento di base).

Esempio A.5.9 (Razionalizzazioni)**.** Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}_{=f(x)} = 0.$$

Infatti

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}.$$

Il denominatore diverge a $+\infty$ e quindi ne segue l'asserto. Ad esempio, se si vuole che $0 < f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon$, si vede che basta scegliere $K = \frac{1}{\varepsilon^2}$. In tal modo si ha che se $x > K = \frac{1}{\varepsilon^2}$ allora $0 < f(x) < \varepsilon\, (\Longrightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon)$.

Analogamente, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}}-1\right) = \frac{1}{2}.$$

Infatti, razionalizzando come prima si trova

$$f(x) = x\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}}-1\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x}}+\frac{x-1}{x}}.$$

La tesi segue dal fatto che $\frac{x-1}{x} \to 1$ se $x \to +\infty$.

Esempio A.5.10 (limite mediante disuguaglianza di Bernoulli)**.** Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x = 1.$$

Infatti, si ha $(1+a)^n \geq 1+na$. Pertanto, ponendo $a = \frac{1}{x^2}$ e $n = [x]+1$ si deduce

$$1 > \left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x > \left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{[x]+1} \underbrace{\geq}_{\text{Bernoulli}} 1-\frac{1+[x]}{x^2} \geq 1-\frac{1+x}{x^2}.$$

La tesi segue dal teorema dei 2 Carabinieri.

Esempio A.5.11 (Fondamentale)**.** Ecco una lista di limiti notevoli che sono quasi immediate conseguenze dei precedenti (per i primi due, in particolare, si veda l'Esempio A.5.5). Si ha:

1. $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$;
2. $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$;
3. $\lim_{x\to\pm\infty} a^{\frac{1}{x}} = 0 \qquad (a > 0)$;
4. $\lim_{y\to+\infty} y^{\frac{1}{y}} = 1$;
5. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\beta} = 0 \qquad (a > 1,\ \beta > 0)$;
6. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{a^x} = 0 \qquad (a > 1,\ \beta > 0)$

N.B. Tutti questi limiti si svolgono per sostituzione (cioè, cambiamento di variabile) a partire da precedenti limiti notevoli. Come esempio, dimostriamo il primo. Posto $y = 1/x$ si ha $y > 0$ e $y \to 0$ se $x \to +\infty$ e

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to0^+}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

Dall'Esempio A.5.5 sappiamo che se $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$0 < |y| < \delta \Longrightarrow \left|(1+y)^{\frac{1}{y}} - e\right| < \varepsilon.$$

Ora se $x > K = \frac{1}{\delta}$ segue che $0 < y < \delta$ e quindi

$$\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right| = \left|(1+y)^{\frac{1}{y}} - e\right| < \varepsilon.$$

Esempio A.5.12. Sia $a > 1$. Vale il seguente

$$\lim_{x\to0^\pm} a^{\frac{1}{x}} = \begin{cases} +\infty & \text{(a ds di 0)} \\ 0 & \text{(a sn di 0)} \end{cases}.$$

Analogamente, se $a \in]0,1[$, allora

$$\lim_{x\to0^\pm} a^{\frac{1}{x}} = \begin{cases} 0 & \text{(a ds di 0)} \\ +\infty & \text{(a sn di 0)} \end{cases}.$$

Dimostrazione. Se $K > 1$, si ha $a^{\frac{1}{x}} > K$ se $\frac{1}{x} > \log_a K$ ossia se $0 < x < \frac{1}{\log_a K}$. Essendo $a > 1$ il secondo membro è positivo e allora basta prendere $\delta = \frac{1}{\log_a K}$. Ciò significa che la funzione in esame diverge positivamente.
Il limite sn si calcola, ad esempio, osservando che per quanto appena mostrato si ha $\lim_{x\to 0^-} a^{-\frac{1}{x}} = +\infty$. Allora

$$\lim_{x\to 0^-} a^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{a^{-\frac{1}{x}}} = 0.$$

La prova del secondo caso $a \in]0,1[$ si può fare riconducendosi al primo.

Esempio A.5.13. La funzione $\frac{1}{x}$ non ha limite per $x \to 0$. Analogamente, la funzione $\frac{\sin x}{|x|}$ non ha limite per $x \to 0$.

A.5.1 La formula di Stirling

In alcuni limiti di successioni, possono comparire molte difficoltà di calcolo dovute alla presenza del fattoriale. Queste difficoltà si potrebbero affrontare con l'aiuto di alcuni strumenti teorici "più raffinati" (ad esempio, i cosiddetti teoremi di Cesàro). Per brevità non abbiamo studiato questi risultati, ma in questa sezione richiamiamo un teorema di approssimazione del fattoriale.
Si tratta della cosiddetta *formula di Stirling*, dal nome di James Stirling che la pubblicò nel 1730. È un risultato "avanzato" che non dimostriamo, ma che potrà esservi utile nel calcolo di alcuni limiti.

Teorema 8. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $\theta(n) \in]0,1[$ tale che*

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \exp\left(\frac{\theta(n)}{n}\right).$$

In particolare, si ha quindi

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n + o\left(\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n\right) \qquad \textit{per} \qquad n \to +\infty.$$

Esercizio A.5.1. Calcolare il seguente

$$L = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!}.$$

[Risposta: $L = +\infty$]

Esercizio A.5.2. Calcolare il seguente

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!e^n\sqrt{n+1}}{(n+1)^{\frac{1}{n}}(n^{n+1} + \cos n)}.$$

[Risposta: $L = \sqrt{2\pi}$]

A.6 Studio di funzioni

Definizione A.6.1 (Classificazione delle discontinuità)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e si assuma che $x_0 \in D(A)$ è *punto di discontinuità* di f (cioè, in cui f non è continua). Si usa la seguente terminologia.

1. **Discontinuità eliminabile**. Esistono uguali e finiti i limiti destro e sinistro per $x \to x_0^{\pm}$ ma o il loro valore è diverso dal valore $f(x_0)$, oppure f non è definita in x_0.
   Esempi:
   $$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) := \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases},$$
   $$f_2 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \frac{\sin x}{x}.$$
2. **Discontinuità di 1° specie.** I limiti destro e sinistro per $x \to x_0^{\pm}$ esistono finiti, ma sono tra loro diversi. La funzione in tal caso ha un salto finito in x_0.
   Esempio:
   $$\operatorname{segn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}.$$
3. **Discontinuità di 2° specie.** Almeno uno dei limiti destro e sinistro per $x \to x_0^{\pm}$ è infinito ($\pm\infty$) oppure non esiste (in quest'ultimo caso si parla anche di *discontinuità essenziale*).
   Esempi:
   $$f_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \frac{1}{x}, \qquad f_2 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases},$$
   $$f_3 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Una funzione si dice *prolungabile per continuità* in una sua discontinuità eliminabile x_0 se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$. In tal caso, si pone

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ L & x = x_0 \end{cases}.$$

La funzione $\widetilde{f}$ è chiamata *prolungamento per continuità di f in x_0*.

Esempio A.6.1. La funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si prolunga per continuità ponendo

$$\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} .$$

Definizione A.6.2 (Simmetrie e T-periodicità)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Useremo la seguente terminologia.

- Si dice che f è *pari* se $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in A$.
- Si dice che f è *dispari* se $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in A$.
- Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *periodica di periodo* $T \in \mathbb{R}$ se
  (i) il dominio A è invariante per traslazione di T, ovvero
  $$A + t = \{a + T : a \in A\} = A;$$
  (ii) f è invariante per traslazione di T, ovvero per ogni $a \in A$ si ha
  $$f(a + T) = f(a) \qquad \forall\, a \in A.$$

Esempio A.6.2. Valgono i seguenti esempi.

1. La funzione $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos x$ è pari nel suo dominio.
2. La funzione $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$ è dispari nel suo dominio.
3. Le funzioni $|x|$, x^2, $\cos x$, $\cosh x$ sono pari su $\mathbb{R}$.
4. Le funzioni $\mathrm{segn}(x)$, x, x^3, $\sin x$, $\sinh x$ sono dispari su $\mathbb{R}$.
5. Le funzioni sin e cos sono 2π-periodiche su $\mathbb{R}$.
6. Le funzioni tg e $\mathrm{cotg} = \frac{1}{\mathrm{tg}}$ sono π-periodiche su $\mathbb{R}$.

A.6.1 Asintoti per funzioni di 1 variabile

Definizione A.6.3 (Asintoti a $+\infty$)**.** Sia $f :]x_0, +\infty[\to \mathbb{R}$. Si dice che la retta $y = mx + q$ è un asintoto a $+\infty$ di f se riesce

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0.$$

Analogamente, sia $f :] - \infty, x_0[\to \mathbb{R}$. Si dice che la retta $y = mx + q$ è un asintoto a $-\infty$ di f se riesce

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0.$$

Più semplicemente, se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = q \in \mathbb{R}$, si dice che la retta $y = q$ è un asintoto orizzontale di f a $\pm\infty$.

In pratica, come si trovano gli asintoti (orizzontali e/o obliqui) di f a $\pm\infty$?

1. Si cerca se esiste $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = q \in \mathbb{R}$: in tal caso, c'è solo un asintoto orizzontale a $\pm\infty$ di equazione $y = q$.
2. Altrimenti, si cerca se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$.
3. Se esiste un tale $m \in \mathbb{R}$, allora si cerca $q \in \mathbb{R}$ tale che
$$q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx].$$

Definizione A.6.4 (Asintoto verticale ds/sn)**.** Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A) \setminus A$ e $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si dice che la retta $x = x_0$ è un asintoto verticale per f a destra di x_0 se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$. Analogamente si dice che la retta $x = x_0$ è un asintoto verticale per f a sinistra di x_0 se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$.

Esempio A.6.3. Ecco una lista di esempi elementari:

1. La funzione $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ha un asintoto orizzontale a $\pm\infty$ dato dalla retta $y = 1$.
2. La funzione $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ ha un asintoto obliquo a $\pm\infty$ dato dalla retta $y = x$.
3. La funzione $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ha un asintoto obliquo a $+\infty$ dato dalla retta $y = x$ e un asintoto obliquo a $-\infty$ dato dalla retta $y = -x$
4. La funzione $f(x) = \frac{\log x}{x}$ definita in $\mathbb{R}_+$ ha un asintoto verticale a ds di 0 dato dalla retta $x = 0$ e nessun asintoto all'infinito (né obliquo, né orizzontale).

A.6.2 Punti di flesso, punti angolosi e cuspidi

Definizione A.6.5. Siano $I =]a, b[$, $f : I \to \mathbb{R}$ e si assuma che f è continua in $x_0 \in I$.

1. Si dice che x_0 è un *punto di flesso* di f se esiste $\delta > 0$ per cui f è concava (convessa) in $I \cap]x_0 - \delta, x_0[$ e convessa (concava) in $I \cap]x_0, x_0 + \delta[$.
   Se inoltre f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = 0$ si dice che x_0 è un *flesso a tangente orizzontale.*

2. Si dice che f ha un *flesso a tangente verticale* in $x_0 \in]a, b[$ se
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = +\infty \quad \text{oppure} \quad -\infty.$$

3. Si dice che f ha un *punto angoloso* in $x_0 \in]a, b[$ se esistono finite derivata destra e sinistra di f in x_0, ma sono diverse, cioè
$$\exists f'_{\pm}(x_0) \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \boxed{f'_{+}(x_0) \neq f'_{-}(x_0)},$$
   dove ricordiamo che
$$f'_{+}(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \qquad f'_{-}(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

4. Si dice che f ha una *cuspide* in $x_0 \in]a, b[$ se
$$f'_{+}(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = +\infty \;\; (\text{oppure} - \infty)$$
   e
$$f'_{-}(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = -\infty \;\; (\text{oppure} + \infty).$$
   Cioè, le derivate destra e sinistra di f sono entrambe infinite in x_0, ma hanno segno opposto.

Esempio A.6.4. Per ciascuna nozione sopra definita diamo un esempio:

1. La funzione $f(x) = x^3$ ha un *flesso a tangente orizzontale* in $x_0 = 0$.
2. La funzione $f(x) = \operatorname{segn}(x)\sqrt[3]{|x|}$ ha un *flesso a tangente verticale* in $x_0 = 0$.
3. La funzione $f(x) = |x|$ ha un *punto angoloso* in $x_0 = 0$.
4. La funzione $(x) = \sqrt{|x|}$ ha una *cuspide* in $x_0 = 0$.

A.6.3 Schema

Sia $y = f(x)$ una funzione assegnata. Uno schema che si può seguire per effettuare uno studio qualitativo del suo grafico è il seguente.

1. Si determina il dominio $\mathrm{Dom}(f)$ ($\equiv A$).
2. Si studiano le (eventuali) simmetrie, cioè se f è *pari* oppure *dispari*, la (eventuale) *periodicità* e il segno di f, cioè ad esempio, la disuguaglianza $f(x) \geq 0$.
3. Si cercano i punti di discontinuità di f. Si calcolano i limiti di f nei punti di accumulazione del dominio che non appartengono al dominio. Si determinano gli eventuali *prolungamenti per continuità* e gli asintoti.
4. Si studiano l'insieme di derivabilità di f e la natura dei punti di non derivabilità (flessi a tangente verticale, punti angolosi e cuspidi).
5. Si calcola la derivata prima di f determinando quindi gli intervalli di monotonia, cercando i punti critici (soluzioni dell'equazione $f'(x) = 0$) e classificandoli (massimi/minimi relativi e/o assoluti).
6. Si studia la derivata seconda di f determinando quindi gli intervalli di convessità/concavità e gli eventuali punti di flesso.

A.7 Tecniche di integrazione

A.7.1 Tabella degli integrali elementari

Nel seguito, $C \in \mathbb{R}$ sarà un'arbitraria costante reale.

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Allora $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.
2. Si ha $\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$.
3. Sia $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Allora $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$.
4. Sia $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Allora $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$ e analogamente $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \log\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$.

   N.B. Si calcolano col metodo dei fratti semplici (cfr. Sezione A.7.4)
5. Sia $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Allora $\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = \log|x + \sqrt{a+x^2}| + C$.
6. Sia $a > 0$. Allora $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C$.

   N.B. Alle formule dei punti 5 e 6 si arriva usando sostituzioni iperboliche e trigonometriche che saranno illustrate nelle prossime sottosezioni.
7. Sia $a > 0$. Allora $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\log a} + C$. In particolare $\int e^x \, dx = e^x + C$.
8. Si ha $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$ e $\int \cos x \, dx = \sin x + C$.
9. Si ha $\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$ e $\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$.
10. Si ha $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ e $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C$.
11. Si ha $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{tgh} x + C$ e $\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\operatorname{cotgh} x + C$.
12. Si ha $\int \frac{dx}{\sin x} = \log\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C$ e $\int \frac{dx}{\cos x} = \log\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

Esempio A.7.1. Molti integrali si calcolano riconducendosi a funzioni che si integrano come nella tabella. Ad esempio, si ha

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

A.7.2 Integrali per parti

Nel seguito, $C \in \mathbb{R}$ sarà un'arbitraria costante reale.

1. Si ha
$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int Dx \sin x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

2. Si ha
$$I \ := \ \int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - \int Dx^2 \sin x dx = x \sin x - 2 \int x \sin x dx.$$
Inoltre $\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = \sin x - x \cos x + C$. Pertanto $I = x^2 \sin x - 2(\sin x - x \cos x) + C$.

3. Si ha
$$\begin{aligned} \int \log x dx &= \int 1 \cdot \log x dx = \int Dx \cdot \log x dx = x \log x - \int \tfrac{x}{x} dx \\ &= x \log x - \int dx = x \log x - x + C = x(\log x - 1) + C. \end{aligned}$$
La stessa tecnica si usa anche, ad esempio, per gli integrali $\int \arctan x dx$, $\int \arcsin x dx$, etc..

4. Si ha
$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = e^x(x-1) + C.$$
Iterando la stessa tecnica, si può risolvere, ad esempio, $\int x^n e^x dx$ $(n \in \mathbb{N})$.

5. (Doppia integrazione per parti). Si ha
$$I := \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \underbrace{\int e^x \cos x dx}_{=:I_1}.$$
Inoltre
$$I_1 = e^x \sin x - \underbrace{\int e^x \sin x dx}_{=I}.$$
Pertanto, si ottiene $2I = e^x(\sin x - \cos x) + \widetilde{C}$ $(\widetilde{C} \in \mathbb{R})$, ossia
$$I = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$$

La stessa tecnica di questo esercizio si applica ai seguenti:

$$\int (\sin x)^2 dx, \quad \int (\cos x)^2 dx, \quad \int (\operatorname{sh} x)^2 dx, \quad \int (\operatorname{ch} x)^2 dx.$$

In tutti questi casi si utilizzano le relazioni fondamentali delle funzioni trigonometriche o iperboliche

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \qquad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

A.7.3 Integrali per sostituzione

Elenchiamo, in ordine crescente di difficoltà, alcuni calcoli di integrali fatti per sostituzione. Quando utile, evidenzieremo delle "sostituzioni tipiche". Nel seguito, $C \in \mathbb{R}$ sarà un'arbitraria costante reale.

1. Si ha
$$\int x^2 e^{x^3}\, dx \underset{y=x^3}{=} \frac{1}{3} \int e^y \, dy = \frac{e^y}{3} + C = \frac{e^{x^3}}{3} + C.$$

2. Si calcoli
$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}.$$
Con la sostituzione $y = 5x-2 \ \big(\iff x = \frac{y+2}{5}\big)$ si ha $dy = 5dx \ \big(\iff dx = \frac{dy}{5}\big)$. Quindi si trova
$$I \underset{y=5x-2}{=} \frac{1}{5} \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{2\sqrt{y}}{5} + C = \frac{2\sqrt{5x-2}}{5} + C.$$

3. Si ha
$$\begin{aligned} \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1+x^4}} \quad &\underset{y=x^2}{=} \quad \frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{2} \log \left| y + \sqrt{a+y^2} \right| + C \\ &= \quad \log \sqrt{\left| x^2 + \sqrt{1+x^4} \right|} + C. \end{aligned}$$

4. Si calcoli
$$I = \int x\sqrt{x-1}\, dx.$$
Con la sostituzione $t = \sqrt{x-1}$ si trova $x = t^2+1$ e $dx = 2t\, dt$. Quindi
$$\begin{aligned} I \quad &\underset{t=\sqrt{x-1}}{=} \quad \int (t^2+1) \cdot t \cdot 2t\, dt = 2 \int (t^4+t^2)\, dt = \frac{2t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + C \\ &= \quad \frac{2(x-1)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2(x-1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C. \end{aligned}$$

5. Si ha
$$\int \frac{dx}{x\log^2 x} \underset{y=\log x}{=} \int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} + C = -\frac{1}{\log x} + C.$$

6. Si ha
$$\int \frac{x\,dx}{\sin(x^2)} \underset{y=x^2}{=} \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sin y} = \frac{1}{2}\log\left|\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right| + C = \log\sqrt{\left|\operatorname{tg}\frac{x^2}{2}\right|} + C.$$

7. Si ha
$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{2-\sin^2 x}}\,dx \quad &\underset{y=\sin^2 x}{=} \quad \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{2-y^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) + C \\ &= \quad \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{2}}\right) + C.\end{aligned}$$

8. Si calcoli
$$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}.$$
Per risolvere quest'integrale introduciamo la sostituzione[5]
$$\boxed{t = \operatorname{tg} x}.$$
Questa sostituzione comporta che
$$\boxed{\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad x = \arctan t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}}.$$
Usando questa sostituzione si trova che
$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} &= \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C.\end{aligned}$$

N.B. La sostituzione $t = \operatorname{tg} x$ si può usare negli integrali del tipo
$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx,$$
dove R è una funzione razionale tale che
$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x).$$

[5]Cioè $x = \arctan y$ sottintendendo che tg è definita in $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Osservazione A.7.1 (Sostituzioni trigonometriche)**.** Si ricorre spesso alle seguenti sostituzioni. Nel seguito assumeremo che $a > 0$.

- Se l'integrale contiene la radice $\sqrt{a^2 - x^2}$, si pone $x = a \sin t$, da cui segue che $dx = a \cos t \, dt$ e che
$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t.$$
- Se l'integrale contiene la radice $\sqrt{x^2 - a^2}$, si pone $x = a \sec t$ $\left(= \frac{a}{\cos t}\right)$, da cui segue che $dx = a \sec t \cdot \operatorname{tg} t \, dt$ e che
$$\sqrt{x^2 - a^2} = a \operatorname{tg} t.$$
- Se l'integrale contiene la radice $\sqrt{x^2 + a^2}$, si pone $x = a \operatorname{tg} t$, da cui segue che $dx = a \sec^2 t \, dt$ e che
$$\sqrt{x^2 + a^2} = a \sec t.$$

N.B. Abbiamo usato la funzione *secante* $\sec x \overset{def.}{=} \frac{1}{\cos x}$ che è definita in $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ricordiamo en passant che la funzione *cosecante* è data da $\csc x \overset{def.}{=} \frac{1}{\sin x}$ ed è definita in $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
Infine valgono le formule di derivazione seguenti:
$$D \sec x = \operatorname{tg} x \sec x, \quad D \operatorname{tg} x = \sec^2 x$$
e
$$D \csc x = -\operatorname{cotg} x \csc x, \quad D \operatorname{cotg} x = -\csc^2 x.$$

■

9. Si ha
$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx \underset{x = a \sin t}{=} a \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t \, dt = a \int \cos^2 t \, dt.$$
L'ultimo integrale si risolve integrando due volte per parti (come fatto nell'esempio 5 della sottosezione A.7.2). Un altro metodo è di applicare identità trigonometriche[6] che consentono un'integrazione diretta.

[6]Infatti, dalle formule di duplicazione $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ e $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, si ottengono le seguenti *formule di riduzione*:
$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}}.$$

10. Integrali del tipo $\int \sin(mx)\cos(nx)\,dx$, $\int \sin(mx)\sin(nx)\,dx$, $\int \cos(nx)\cos(nx)\,dx$. Si risolvono usando le seguenti formule trigonometriche:

$$\begin{aligned}
\sin mx \cos nx &= \frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right) \\
\sin mx \sin nx &= \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right) \\
\cos mx \cos nx &= \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right).
\end{aligned}$$

Esercizio A.7.1. Dimostrare le precedenti identità.
Suggerimento. Usare le formule di somma e sottrazione si seno e coseno.

Ad esempio, si ha

$$\int \sin 9x \sin x\,dx = \int \frac{1}{2}\left(\cos 8x - \cos 10x\right)\,dx = \frac{1}{16}\sin 8x - \frac{1}{20}\sin 10x + C.$$

11. Integrali del tipo $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, dove R è una funzione razionale. Introduciamo la sostituzione

$$\boxed{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

Con questa sostituzione si ha

$$\boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}}.$$

Usando questa sostituzione l'integrando divventa una funzione razionale.

Ad esempio, si ha

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+\sin x + \cos x} &\underset{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{=} \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t} = \log|1+t| + C \\
&= \log\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.
\end{aligned}$$

Osservazione A.7.2 (Sostituzioni iperboliche)**.** Talvolta risultano utili le sostituzioni *iperboliche* $x = a\sinh t$ oppure $x = a\cosh t$. Ad esempio, nel primo caso si trova

$$\sinh t = \frac{x}{a}, \quad \cosh t = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}, \quad e^t = \cosh x + \sinh x, \quad dx = a\cosh t\,dt.$$

Quando si usano sostituzioni basate sulle funzioni iperboliche sinh, cosh, può essere utile ricordare le formule enunciate nell'Osservazione 8.4.1 della sezione 8.4. ■

12. Sia $A > 0$. Si ha

$$\int \sqrt{x^2 + A}\, dx \underset{x=\sqrt{A}\sinh t}{=} (\sqrt{A})^2 \int \sqrt{1 + \sinh^2 t}\cosh t\, dt = A \int \cosh^2 t\, dt.$$

Anche quest'ultimo integrale si può risolvere integrando due volte per parti (cfr. esempio 5 della sottosezione A.7.2) oppure usando le formule dell'Osservazione 8.4.1.

Esercizio A.7.2. Calcolare

$$\int \frac{x^2\, dx}{x^2 - a^2}$$

con la sostituzione $x = a \cosh x$.

A.7.4 Funzioni razionali fratte

Consideriamo una funzione razionale

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

quoziente di due polinomi p, q tali che grado$(p) \leq$ grado(p).

N.B. Se quest'ultima condizione non è soddisfatta, ci si riconduce ad essa applicando l'algoritmo della divisione tra polinomi.

In generale, si hanno due casi.

1. Il denominatore q ha m radici reali $a_1, ..., a_m$, ciascuna di molteplicità $\alpha_i \in \mathbb{N}\, (i = 1, ..., m)$. Allora

$$q(x) = C \cdot (x - a_1)^{\alpha_1} \cdot (x - a_2)^{\alpha_2} \ldots (x - a_m)^{\alpha_m}.$$

2. Tra le radici di q ci sono anche radici complesse (coniugate). Siano, ad esempio, $a_{1,2} = v \pm iw \in \mathbb{C}$ una coppia di radici di q di molteplicità $\alpha \in \mathbb{N}$. In tal caso, tra i fattori della fattorizzazione di q compare un polinomio di grado 2α, irriducibile in $\mathbb{R}$, del tipo $(x^2 + bx + c)^\alpha$, dove

$$x^2 + bx + c = (x - a_1)(x - a_2).$$

In altre parole, nel caso più generale possibile, il polinomio q si può *sempre* fattorizzare nel modo seguente:

$$q(x) = C\cdot(x-a_1)^{\alpha_1}\cdot(x-a_2)^{\alpha_2}\dots(x-a_m)^{\alpha_m}\cdot(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}\dots(x^2+b_rx+c_r)^{\beta_r}.$$

Si dimostra inoltre che esistono, e sono univocamente determinate, delle costanti reali A_l^s, B_l^s, C_l^s tali che

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \frac{A_1^1}{x-a_1} + \frac{A_2^1}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{\alpha_1}^1}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \\ & +\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\ & + \frac{A_1^m}{x-a_m} + \frac{A_2^m}{(x-a_m)^2} + \dots + \frac{A_{\alpha_m}^m}{(x-a_m)^{\alpha_m}} + \\ & + \frac{B_1^1x+C_1^1}{x^2+b_1x+c_1} + \frac{B_2^1x+C_2^1}{(x^2+b_1x+c_1)^2} + \dots + \frac{B_{\beta_1}^1x+C_{\beta_1}^1}{(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}} + \\ & +\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\ & + \frac{B_1^rx+C_1^r}{x^2+b_rx+c_r} + \frac{B_2^rx+C_2^r}{(x^2+b_rx+c_r)^2} + \dots + \frac{B_{\beta_r}^rx+C_{\beta_r}^r}{(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_r}}. \end{aligned}$$

Questa scomposizione si chiama *decomposizione in fratti semplici* di f.

Idea. Data una funzione razionale $f = p/q$, dopo essersi ricondotti (mediante divisione) al caso grado$(p) \leq$ grado(p), si decompone f in *fratti semplici.*
Si dimostra inoltre che ciascun addendo della precedente decomposizione si può integrare elementarmente. Pertanto, in questo modo, si può integrare una qualsiasi funzione razionale.

D'ora in poi, anche se è possibile trovare formule che risolvono in modo completo il caso generale, tratteremo solo esempi concreti.

Esempio A.7.2. Calcolare

$$I = \int \frac{3x+2}{x(x^2-1)}\,dx.$$

Il denominatore $q(x) = x(x^2-1)$ si fattorizza nel prodotto dei monomi x, $(x-1)$ e $(x+1)$. Pertanto, si impone che esistano $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{3x+2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+1}.$$

Quindi, deve valere l'uguaglianza

$$3x+2 = A_1(x^2-1) + A_2x(x+1) + A_3x(x-1).$$

A partire da quest'ultima relazione *determiniamo* le costanti A_1, A_2, A_3. Sviluppando (e uguagliando i coefficienti dello stesso grado di ambo i membri) si perviene all'uguaglianza

$$3x+2 = (A_1+A_2+A_3)x^2 + (A_2-A_3)x + (-A_1),$$

che è valida se e solo se

$$\begin{cases} A_1+A_2+A_3 = 0 \\ A_2-A_3 = 3 \\ -A_1 = 2 \end{cases}.$$

Tale sistema lineare si risolve elementarmente e si trova

$$A_1 = -2, \quad A_2 = -\frac{1}{2}, \quad A_3 = \frac{5}{2}.$$

Perciò

$$\begin{aligned} I &= -2\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{x+1} \\ &= -2\log|x| - \frac{1}{2}\log|x-1| + \frac{5}{2}\log|x+1| + C \\ &= \log\left(\frac{|x+1|^{\frac{5}{2}}}{x^2\sqrt{|x-1|}}\right) + C \qquad (C\in\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Esempio A.7.3. Calcolare

$$I = \int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}\,dx.$$

Si impone che esistano $A, B_1, B_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x-1)^2}.$$

Perciò deve valere l'uguaglianza

$$x = A(x+1)^2 + B_1(x-1)(x+1) + B_2(x-1).$$

Sulla base dell'ultima relazione, *determiniamo* le costanti. Sviluppando si perviene all'uguaglianza

$$x = (A + B_1)x^2 + (2A + B_2)x + (A - B_1 - B_2),$$

che è valida se e solo se

$$\begin{cases} A + B_1 = 0 \\ 2A + B_2 = 1 \\ A - B_1 - B_2 = 0 \end{cases} .$$

Tale sistema lineare si risolve elementarmente e si trova

$$A = \frac{1}{4}, \quad B_1 = -\frac{1}{4}, \quad B_2 = \frac{1}{2}.$$

Perciò

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2} \\ &= \frac{1}{4}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log|x+1| - \frac{1}{2(x-1)} + C \\ &= \frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2(x-1)} + C \qquad (C \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Esempio A.7.4. Calcolare

$$I = \int \frac{x-1}{x(x^2+1)}\, dx.$$

Si impone che esistano $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{x-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+1}.$$

Sulla base di questa relazione, determiniamo le costanti. Si ha l'uguaglianza

$$x - 1 = A(x^2 + 1) + Bx^2 + Cx$$

che è valida se e solo se

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 1 \\ A = -1 \end{cases} ,$$

ossia

$$A = -1, \quad B = 1, \quad C = 1.$$

Perciò

$$\begin{aligned} I &= -\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= -\log|x| + \frac{1}{2}\log|x^2+1| + \arctan x + C \\ &= \log\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|} + \arctan x + C \qquad (C \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Esempio A.7.5. Calcolare

$$I = \int \frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2}\,dx.$$

Il discriminante Δ di $r(x) := x^2 + 4x + 5$ soddisfa $\Delta = -4 < 0$, e perciò r è irriducibile in $\mathbb{R}$. D'altra parte, si vede che

$$x^2 + 4x + 5 = \underbrace{x^2 + 4x + 4}_{=(x+2)^2} + 1 = (x+2)^2 + 1.$$

Quindi, con la sostituzione $y = x + 2$, si ottiene

$$I = \int \frac{y-1}{(y^2+1)^2}\,dy.$$

Quest'ultimo si può calcolare con qualche opportuna manipolazione. Infatti

$$\begin{aligned} \int \frac{y-1}{(y^2+1)^2}\,dy &= \int \frac{y}{(y^2+1)^2}\,dy - \int \frac{(y^2+1)-y^2}{(y^2+1)^2}\,dy \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2y}{(y^2+1)^2}\,dy - \int \frac{1}{y^2+1}\,dy + \underbrace{\int \frac{y^2}{(y^2+1)^2}\,dy}_{=J}. \end{aligned}$$

Il primo integrale si integra con la sostituzione elementare $t = y^2$ e, trascurando la costante moltiplicativa $\frac{1}{2}$, esso diventa un integrale del tipo

$$\int \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{1}{t+1} + C_1 \qquad (C_1 \in \mathbb{R}).$$

Il secondo è un integrale immediato. In terzo integrale J invece richiede uno sforzo ulteriore. Esso si risolve integrando per parti[7] come segue.
Si ha

$$J = \int \frac{y^2}{(y^2+1)^2}\,dy = \int y \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\frac{2y}{(y^2+1)^2}\right)}_{=g(y)}\,dy$$

e (a meno di costanti arbitrarie) si trova

$$\int g(y)\,dy \underset{y^2=t}{=} \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{1}{2(t+1)} \underset{t=y^2}{=} -\frac{1}{2(y^2+1)}.$$

Come anticipato, integriamo per parti:

$$\begin{aligned} J &= \int y \cdot d\left(-\frac{1}{2(y^2+1)}\right) \\ &= -\frac{y}{2(y^2+1)} + \int \frac{dy}{2(y^2+1)} \\ &= -\frac{y}{2(y^2+1)} + \frac{\arctan y}{2} + C_2 \qquad (C_2 \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Sommando tutti gli addendi intermedi ottenuti, e ritornando alla variabile iniziale x, si trova infine (verificarlo) che

$$I = -\frac{x+3}{2(x^2+4x+5)} - \frac{\arctan(x+2)}{2} + C \qquad (C \in \mathbb{R}).$$

[7] Esistono formule iterative generali per risolvere integrali del tipo

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^k}\,dx.$$

Tali formule si ottengono esattamente nel modo in cui sopra affrontiamo il caso $k=2$, cioè integrando per parti.

A.7.5 Integrali di alcune funzioni irrazionali

Come altrove, $C \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria.

1. Integrali del tipo $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$.
   Ne vediamo due esempi significativi che spiegano come comportarsi.

   - (Caso A)

   $$\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2+3x+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{16} - \left(x - \frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x-3}{5} + C.$$

   - (Caso B)

   $$\begin{aligned} I := \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{y}} + 2 \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} =: I_1 + I_2, \end{aligned}$$

   dove $y = x^2 + 2x + 2$ e $t = x + 1$. Entrambi questi ultimi sono integrali elementari (cfr. sottosezione A.7.1). Infatti $I_1 = \sqrt{y} + C_1$ e $I_2 = 2 \log |t + \sqrt{1+t^2}| + C_2$ e da ciò segue che

   $$I = I_1 + I_2 = \sqrt{x^2+2x+2} + 2 \log \left|(x+1) + \sqrt{x^2+2x+2}\right|.$$

2. Integrali del tipo $\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$.
   Si trasformano in integrali del tipo precedente effettuando la sostituzione

   $$t = \frac{1}{mx+n}.$$

   - Calcoliamo

   $$I = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

   Posto

   $$t = \frac{1}{(x+1)} \iff x + 1 = \frac{1}{t},$$

   si ha $dx = -\frac{dt}{t^2}$ e si trova

   $$I := \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 + 1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-2t+2t^2}}$$

che rientra nel Caso B precedente e si calcola così:

$$
\begin{aligned}
I &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+\frac{1}{2}}\right| \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{x+1}\right| + C.
\end{aligned}
$$

3. Integrali del tipo $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$.
   Si risolvono completando il quadrato nel trinomio sotto il segno di radice e si riconducono ad uno degli integrali

$$
\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0) \qquad \int \sqrt{x^2+A}\,dx.
$$

Appendice B

Esercizi

B.1 Esercizi svolti

Calcolo Combinatorio e Induzione

Esercizio B.1.1. Quanti sono i numeri di 3 cifre decimali tutte diverse?

Soluzione. Le disposizioni di tre cifre (appartenenti all'insieme $\{0, 1, 2, ..., 9\}$) sono $D_{10,3} = 3!\binom{10}{3}$. Tuttavia non sono da considerare le stringhe del tipo $0ab$, dove $a, b \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$. Queste ultime sono esattamente $D_{9,2} = 2!\binom{9}{2}$.
La risposta è quindi $3!\binom{10}{3} - 2!\binom{9}{2} = 648$.

Esercizio B.1.2. Dato un poligono regolare di n lati, calcolare il numero d delle sue diagonali.

Soluzione. Le rette congiungenti gli n vertici sono tante quante le coppie (non ordinate) che si possono formare con n oggetti. Ossia $\binom{n}{2}$. Tuttavia occorre adesso sottrarre il numero di lati (ossia le n rette che congiungono le coppie di "vertici consecutivi"). La risposta è quindi

$$d = \binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Esercizio B.1.3. Dimostrare col principio d'induzione che si ha

$$(\star) \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Soluzione. Ovviamente $1 = \sum_{k=1}^{1} k = \frac{1(1+1)}{2} = 1$. Possiamo assumere $(\star)$ al passo n (è la nostra ipotesi iduttiva) e dimostrare la formula al passo $n+1$. Si ha

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Ciò prova $(\star)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio B.1.4. Dimostrare col principio d'induzione che si ha

$$(\star) \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$$

Soluzione. Ovviamente $1 = \sum_{k=1}^{1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{1} k\right)^2 = 1^2 = 1$. Possiamo assumere $(\star)$ al passo n (è la nostra ipotesi iduttiva) e dimostrare la formula al passo $n+1$. Si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^2(n+1) \\
&\underbrace{=}_{per(\star)} \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1)^2(n+1) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^2(n+1) \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + 2\frac{(n+1)^2 n}{2} + (n+1)^2 \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2} + n + 1\right)^2 \\
&= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2.
\end{aligned}$$

Ciò prova $(\star)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio B.1.5. Dimostrare col principio d'induzione che si ha

$$(\star) \qquad n! \geq 2^{n-1} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Soluzione. Ovviamente si ha $1 \geq 2^{1-1} = 1$. Assumendo ora $(\star)$ proviamo che $(n+1)! \geq 2^n$. In effetti, si ha

$$(n+1)! = n!(n+1) \underbrace{\geq}_{per(\star)} 2^{n-1}(n+1) \geq 2^{n-1} \cdot 2 = 2^n.$$

Ciò prova $(\star)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio B.1.6. Dimostrare col principio d'induzione che se $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, si ha

$$(\star) \qquad y^n - x^n = (y-x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + y\,x^{n-2} + x^{n-1}).$$

Soluzione. Ovviamente si ha $y^1 - x^1 = (y-x) \cdot 1$. Assumiamo la validità di $(\star)$ (è l'ipotesi induttiva) e proviamo che $(\star)$ vale con $(n+1)$ al posto di n. Cioè, dovremmo provare che

$$(I :=) \quad y^{n+1} - x^{n+1} \stackrel{?}{=} (y-x)(y^n + \underbrace{y^{n-1}x + \cdots + y\,x^{n-1} + x^n}_{=C}) \quad (=: II).$$

Osserviamo che

$$C = x\left(y^{n-1} + xy^{n-1} + \cdots + y\,x^{n-2} + x^{n-1}\right) \underset{\text{Hp Ind}}{=} x\left(\frac{y^n - x^n}{y-x}\right).$$

Allora

$$II = (y-x)(y^n + C) = (y-x)\left(y^n + x\left(\frac{y^n - x^n}{y-x}\right)\right) =$$

$$= (y-x)\left(\frac{y^{n+1} - y^n x + xy^n - x^{n+1}}{y-x}\right) = y^{n+1} - x^{n+1} = I \Longleftrightarrow I = II.$$

Ciò prova $(\star)$ nel caso $(n+1)$-esimo.
Dunque la tesi segue dal Principio di Induzione.

Esercizio B.1.7. Dimostrare col principio d'induzione che

$$(\star) \qquad n^n \geq n! \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Soluzione. Ovviamente si ha $1 = 1^1 \geq 1! = 1$. Assumiamo la validità di $(\star)$ (è l'ipotesi induttiva) e proviamo che $(\star)$ vale con $(n+1)$ al posto di n.
Cioè, dovremmo provare che

$$(n+1)^{n+1} \overset{?}{\geq} (n+1)!.$$

N.B. Quest'ultima è equivalente a

$$(I :=) \quad (n+1)^n \geq n! \quad (=: II).$$

Infatti ciò segue dividendo per $(n+1)$ ambo i membri della disuguaglianza precedente. A questo punto basta osservare che

$$n! \underset{\text{hp Ind.}}{\leq} n^n \leq (n+1)^n \Longleftrightarrow I \geq II,$$

che è quanto si doveva dimostrare. Ciò prova $(\star)$ nel caso $(n+1)$-esimo e la tesi segue dal Principio di Induzione.

Esercizio B.1.8. Dimostrare che $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ è numerabile.

Soluzione. Una strada molto rapida è questa: prima mostriamo che $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile. Questo si fa introducendo la funzione $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n,m) = 2^n \cdot 3^m$. Questa funzione è 1-1 ma non su. Ma restringendo il codominio all'immagine di f, cioè $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to f(\mathbb{N})$, tale funzione diventa automaticamente una biiezione. Ma $f(\mathbb{N})$ è un insieme infinito contenuto in un numerabile. Quindi è numerabile, per quanto dimostrato nella Teoria.

D'altra parte sappiamo (o possiamo assumere) che $\mathbb{Z}$ è numerabile. Quindi esiste $g : \mathbb{Z} \xrightarrow[su]{1-1} \mathbb{N}$. Allora $G : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $G(n,m) := (g(n), g(m))$ è una biiezione. Componendo le funzioni G ed f si ottiene la tesi.

Verificate, come esercizio, tutte le affermazioni fatte qui sopra.

Studio del dominio $D = \mathrm{Dom}(f)$ di $f : D \to \mathbb{R}$.

Esercizio B.1.9. Studiare il dominio di

$$f(x) = (\sqrt{-x^2+5x-6}+7-3x)^{\arctan\left(\frac{1}{x-2}\right)}.$$

Soluzione. Si ha che il dominio di una funzione $f(x) := h(x)^{g(x)}$ è dato da

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : h(x) > 0\} \cap \mathrm{Dom}(g).$$

Si ha che $\mathrm{Dom}(g) = \underbrace{\mathrm{Dom}(\arctan)}_{=\mathbb{R}} \cap \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}$.

Quindi $\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : h(x) > 0\} \setminus \{2\}$.
Occorre adesso studiare la disequazione

$$(\star) \quad \sqrt{-x^2+5x-6}+7-3x > 0.$$

È equivalente ai seguenti due sistemi:

$$\text{(I)} \begin{cases} 3x-7 \geq 0 \\ -x^2+5x-6 > (3x-7)^2 \end{cases} \qquad \text{(II)} \begin{cases} 3x-7 < 0 \\ -x^2+5x-6 \geq 0 \end{cases}.$$

(La soluzione di $(\star)$ è l'unione delle soluzioni dei sistemi (I) e (II). Notare che nel sistema (I) non appare la condizione di esistenza della radice quadrata, dato che questa è verificata automaticamente, in virtù della seconda disequazione).
Risolviamo (I).

La prima disequazione è risolta dagli $x \geq \frac{7}{3} = 2.\overline{3}$. Inoltre, la seconda disequazione è equivalente a

$$10x^2 - 47x + 55 < 0.$$

L'equazione associata ha soluzioni $x_{\pm} = \frac{47 \pm \sqrt{47^2 - 55 \cdot 40}}{20} = \frac{47 \pm 3}{20} = 2.2$ e 2.5. Quindi la disequazione è risolta per $x \in]2.2, 2.5[$ ed (I) ha per soluzione

$$]2.2, 2.5[\cap [2.\overline{3}, +\infty[= [2.\overline{3}, 2.5[.$$

Risolviamo (II).

La prima disequazione è risolta dagli $x < \frac{7}{3} = 2.\overline{3}$.
Inoltre, l'equazione $x^2 - 5x + 6 = 0$ ha soluzioni $x_{\pm} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = 2$ e 3. Segue che la seconda disequazione è risolta per $x \in [2, 3]$. Quindi (II) ha soluzione

$$[2, 3] \cap]-\infty, 2.\overline{3}[= [2, 2.\overline{3}[.$$

Allora la soluzione di $(\star)$ è

$$[2.\overline{3}, 2.5[\cup [2, 2.\overline{3}[= [2, 2.5[$$

e pertanto $\mathrm{Dom}(f) = [2, 2.5[\setminus \{2\} =]2, 2.5[$.

Esercizio B.1.10. Studiare il dominio di

$$f(x) = \left(\arccos\left(\frac{x}{x+4}\right) - \frac{\pi}{3}\right)^{\sin(x)}.$$

Soluzione. Si ha che il dominio di una funzione $f(x) := h(x)^{g(x)}$ è dato da

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : h(x) > 0\} \cap \mathrm{Dom}(g).$$

Si ha che $\mathrm{Dom}(g) = \mathrm{Dom}(\sin) = \mathbb{R}$. Si deve pertanto studiare la disequazione

$$\arccos\left(\frac{x}{x+4}\right) > \frac{\pi}{3}.$$

Notare che dev'essere $x \neq -4$. Inoltre ricordare che $\arccos y = \frac{\pi}{3}$ se e solo se $y = \frac{1}{2}$. Pertanto, dalla stretta decrescenza della funzione arccos sul suo dominio $[-1, 1]$, si ottiene che

$$\arccos y > \frac{\pi}{3} \Longleftrightarrow y \in \left[-1, \frac{1}{2}\right[.$$

Rimane quindi da studiare l'insieme

$$(\star) \qquad -1 \leq \frac{x}{x+4} < \frac{1}{2},$$

ossia il sistema

$$(I) \begin{cases} \frac{x}{x+4} < \frac{1}{2} \\ -1 \leq \frac{x}{x+4} \end{cases}.$$

La prima disequazione è risolta per $x \in]-4, 4[$. La seconda disequazione è invece risolta per $x \in]-\infty, -4[\cup [-2, +\infty[$. La soluzione è quindi

$$\mathrm{Dom}(f) = [-2, 4[.$$

Inf, Sup, Min, Max.

Esercizio B.1.11. Studiare inf / sup degli insiemi

$$A = \left\{ \frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad B = \left\{ \frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Soluzione. Dimostriamo che

$$\sup A = 1 = \inf B.$$

Dalla nota caratterizzazione del sup, si ha che $\sup A = 1$ se e solo se

$$\begin{array}{ll} 1) & a \le 1 \qquad \forall\, a \in A; \\ 2) & \forall \epsilon > 0 \; \exists\, a \in A : 1 - \epsilon < a. \end{array}$$

Poniamo ora $a_n := \frac{n-1}{n}$ e $b_n := \frac{n+1}{n}$. Evidentemente, si ha

$$a_n \le 1, \qquad b_n \ge 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Per cui 1) è vera. Per dimostrare 2) si osservi che

$$\frac{n-1}{n} + \epsilon > 1 \iff 1 - \frac{1}{n} + \epsilon > 1 \iff n > \frac{1}{\epsilon}.$$

Pertanto, dato $\epsilon > 0$ esiste $\overline{n}$ tale che se $n \ge \overline{n}$ allora $1 - \epsilon < a_n$. Infatti, basta[1] scegliere $\overline{n} > \frac{1}{\epsilon}$.

Il fatto che $\inf B = 1$ si dimostra analogamente, ma usando le proprietà caratteristiche dell'inf. Ossia, per definizione, si ha $\inf B = 1$ se e solo se

$$\begin{array}{ll} 1) & b \ge 1 \qquad \forall\, b \in B; \\ 2) & \forall \epsilon > 0 \; \exists\, b \in B : 1 + \epsilon > b. \end{array}$$

Notare che $1 \notin A \cup B$ (visto che $\frac{n \pm 1}{n} = 0 \iff \pm 1 = 0$, che è assurdo). Pertanto $\nexists \max A$ e $\nexists \min B$.

Infine è evidente che $\inf A = \min A = 0$ ed inoltre che $\sup B = \max B = 2$.

[1]Sia $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ la funzione **parte intera** definita come $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \le x\}$. Allora, per esempio, basta porre $\overline{n} = \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1$.

Esercizio B.1.12. Studiare inf / sup e/o min / max dell'insieme

$$A = \left\{ \frac{2n}{1+n^2} : n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Soluzione. Poniamo $a_n := \frac{2n}{1+n^2}$. Si ha

$$-1 \le a_n \le 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Dimostriamolo. Le due disequazioni sono evidentemente verificate essendo equivalenti alla disequazione $(n \pm 1)^2 \ge 0$ (sempre vera). Pertanto A è limitato e contenuto in $[-1, 1]$. Ma se $n = \pm 1$ si ottiene

$$a_{-1} = -1, \qquad a_1 = 1,$$

ossia i valori ± 1 sono assunti da elementi di A. Allora $\inf A = \min A = -1$ e $\sup A = \max A = 1$.

Esercizio B.1.13. Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ funzioni. Dimostrare che

$$\inf_X f + \inf_X g \le \inf_X (f+g), \qquad \sup_X f + \sup_X g \ge \sup_X (f+g).$$

Soluzione. Si ponga $m_1 := \inf_X f$, $m_2 := \inf_X g$ e $M_1 := \sup_X f$, $M_2 := \sup_X g$. Si ha sempre (per definizione di inf/sup) che

$$m_1 \le f(x), \quad m_2 \le g(x) \qquad \forall\, x \in X,$$

e

$$M_1 \ge f(x), \quad M_2 \ge g(x) \qquad \forall\, x \in X.$$

Pertanto, ad esempio, si ha

$$m_1 + m_2 \le f(x) + g(x) = (f+g)(x) \qquad \forall\, x \in X$$

che implica subito la prima disuguaglianza. Analogamente, si ha che l'altra diseguaglianza vale perché

$$M_1 \ge f(x), \quad M_2 \ge g(x) \qquad \forall\, x \in X,$$

implica

$$M_1 + M_2 \ge f(x) + g(x) = (f+g)(x) \qquad \forall\, x \in X.$$

Esercizio B.1.14. Studiare inf / sup e/o min / max dell'insieme

$$A = \left\{ n + \frac{2}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Soluzione. Si osservi che, posto $a_n := n + \frac{2}{n}$, si ha sempre

$$3 \le a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n < a_n < n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N},\, n > 2,$$

visto che $0 < \frac{2}{n} < 1$ se $n > 2$. Da ciò segue subito che $\inf A = \min A = 3$ e $\sup A = +\infty$.

Esercizio B.1.15. Studiare inf / sup e/o min / max dell'insieme

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq 2, \quad \left| \frac{x-3}{x+2} \right| \le 1 \right\}.$$

Soluzione. Si osservi che per $y \in \mathbb{R}$ la disequazione $|y| \le 1$ è equivalente a $-1 \le y \le 1$. Pertanto occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{x-3}{x+2} \le 1 \\ \frac{x-3}{x+2} \ge -1 \end{cases}.$$

La prima disequazione è risolta per $x > -2$. La seconda disequazione è invece risolta per $x \in]-\infty, -2[\cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. La soluzione è quindi $\mathrm{Dom}(f) = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Pertanto, dato che $A = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, segue subito che $\inf A = \min A = \frac{1}{2}$ e $\sup A = +\infty$. In particolare $\nexists \max A$.

Esercizio B.1.16. Studiare $\sup A$, dove $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^3 < 2\}$.

Soluzione. Cenni. Facciamo vedere che, posto $\sup A = M$, si deve avere $M^3 = 2$. Basterà mostrare che sono false entrambe le diseguaglianze $M^3 \gtrless 2$. Ciò sarà equivalente alla tesi.
Mostriamo solo che una delle due, ad esempio che $M^3 < 2$, è falsa. Per fare questo, dimostriamo che M non è maggiorante di A (che, a posteriori, è assurdo), ossia che esiste $x \in A$ con $x > M$. A tal fine, sia $x \in A$ (quindi $x^3 < 2$) e dimostriamo che esiste $\epsilon \in]0, 1]$ tale che $x = M + \epsilon$. Se $\epsilon \in]0, 1]$ allora $\epsilon^2 \le \epsilon$ e quindi anche $\epsilon^3 \le \epsilon$. Pertanto

$$(M + \epsilon)^3 = M^3 + 3M^2\epsilon + 3M\epsilon^2 + \epsilon^3 \le M^3 + \epsilon(3M^2 + 3M + 1).$$

Imponendo che il secondo membro sia < 2 segue che, se $\epsilon < \min\left\{1, \frac{2-M^3}{3M^2+3M+1}\right\}$, allora

$$(M + \epsilon)^3 < 2 \iff x = M + \epsilon \in A.$$

Ossia, M non è un maggiorante di A, ciò che è assurdo.

Limiti di funzioni (quiz e teoria)

Esercizio B.1.17. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$ ed $f\colon A \to \mathbb{R}$. Supponiamo che $f(x)$ tende a $-\infty$ per x che tende a x_0, ossia $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$. Ciò equivale alla seguente "scrittura":

(1) $\exists\, k \in \mathbb{R}\, \forall\, \delta > 0 : \forall\, x \in A \setminus \{x_0\}\ \ (|x - x_0| < \delta \implies f(x) < k)$

(2) $\forall\, k \in \mathbb{R}\, \exists\, \delta > 0 : \forall\, x \in A \setminus \{x_0\}\ \ (|x - x_0| < \delta \implies f(x) < k)$

(3) $\forall\, k \in \mathbb{R}\, \exists\, \delta > 0 : \forall\, x \in A \setminus \{x_0\}\ \ (|x - x_0| < \delta \implies f(x) > k)$

(4) $\forall\, k \in \mathbb{R}\, \exists\, \delta > 0 : \exists\, x \in A \setminus \{x_0\}\ \ (|x - x_0| < \delta \implies f(x) < k)$

Soluzione. Ricordiamo la definizione generale di limite (l'unica che si deve memorizzare). Se $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\mathscr{U}_a$ indica la "famiglia di intorni sferici di a".

Definizione B.1.1. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, x_0 pto di accumulazione di A e $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$. Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$. Si pone

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda \overset{def.}{\iff} \forall\, V \in \mathscr{U}_\lambda \quad \exists\, W \in \mathscr{U}_{x_0} : f(x) \in V \quad \forall\, x \in A \setminus \{x_0\} \cap W.$$

Se ciò avviene si dice che λ è il *limite di f per $x \to x_0$*.

Ritorniamo al quiz e partiamo dalla scrittura $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$. Selezioniamo la famiglia di intorni sferici di x_0 e quella di $-\infty$. Esse sono $\mathscr{U}_{x_0} = \{W =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[: \delta > 0\}$ e $\mathscr{U}_{-\infty} = \{V =]k, +\infty[: k \in \mathbb{R}\}$. Basta poi applicare la precedente definizione. Si trova

$\forall\ k \in \mathbb{R}\ \exists\ \delta > 0$ tale che se $x \in A\setminus\{x_0\}$ si ha che se $|x - x_0| < \delta$ allora $f(x) < k$.

Questa è la (2), che è la corretta definizione di limite. Le altre sono sbagliate:

- In (1) sono scambiati i connettivi esistenziali.
- La (3) è una definizione di limite corretta: ma il limite è un altro (ossia $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$).
- La (4) è sbagliata perché la definizione di limite deve valere non per un solo x in un intorno di x_0, ma per ogni x che sta dentro quell'intorno di x_0 (privato di x_0)[2].

[2] Si prende un intorno di x_0 e però, si deve togliere x_0. Infatti i limiti si calcolano nei pti di accumulazione, che possono anche non appartenere al dominio di f.

Esercizio B.1.18. Sia $A =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ e sia data $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione monotona crescente. Discutere l'esistenza dei limiti $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. Inoltre, cosa si può dire del limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$?

Soluzione. Essendo 0 pto di accumulazione per gli intervalli $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$, dalla teoria sappiamo che esistono entrambi i limiti (ds e sn) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. Precisamente (dal fatto che f è crescente) si ha che

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \sup_{x\in]-\infty,0[} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \inf_{x\in]0,+\infty[} f(x).$$

Per quanto riguarda il limite a $+\infty$ (che si può calcolare in quanto $+\infty$ è pto di acc. per A) possiamo affermare che esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e che

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \sup_{x\in]0,+\infty[} f(x).$$

Esercizio B.1.19. Sia $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione monotona crescente.
Discutere le seguenti affermazioni:

(1) Si ha sempre $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(2) Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, allora si ha

$$\forall\, K \in \mathbb{R}\ \exists\, M \in \mathbb{R} : \forall\, x \geq 0\, (x > M \Longrightarrow f(x) < K)\,.$$

(3) Si ha $\inf_{[0,+\infty[} f = f(0)$.

Soluzione. Evidentemente la (1) è falsa. Non è vero necessariamente che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Ad esempio, la restrizione della funzione $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ all'intervallo $[0, +\infty[$ è ivi monotona crescente ma $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}$.

Anche la (2) è falsa. Infatti l'affermazione è equivalente al fatto che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

(a parole, la tesi dice infatti che in un intorno di $+\infty$ la f è "arbitrariamente piccola", ossia più piccola di una qualsiasi fissata costante reale K). Pertanto è falsa, in quanto abbiamo invece come ipotesi che f tende a $+\infty$. L'affermazione sarebbe però vera se la disuguaglianza nella tesi fosse invertita (ossia se $>$ invece di $<$).

La (3) è invece vera. Infatti f è, per ipotesi, definita in 0. Quindi si ha che $f(0)$ coincide con la quantità $\inf_{[0,+\infty[} f$ (che a sua volta coincide con il $\lim_{x\to 0^+} f(x)$). In particolare, si può quindi affermare che 0 è un pto di minimo assoluto per f.

Esercizio B.1.20. Dimostrare, usando la definizione, che valgono i seguenti:

(A) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x+1} = 2$;

(B) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$;

(C) $\lim_{x\to -1^+} \frac{x}{x+1} = -\infty$.

Soluzione. (A). La scrittura $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x+1} = 2$ è un limite per $x \to +\infty$ di $f(x) = \frac{2x+1}{x+1} : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, che è definita su $A =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$.
La definizione da "verificare" è quindi

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, M \in \mathbb{R} : \forall\, x \in A\;\; (x > M \implies |f(x) - 2| < \varepsilon)\,.$$

A tal fine partiamo dallo studiare la disuguaglianza nella "tesi", cioè

$$\left|\frac{2x+1}{x+1} - 2\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{2(x+1)-1}{x+1} - 2\right| < \varepsilon$$
$$\iff \left|\frac{-1}{x+1}\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{1}{x+1}\right| < \varepsilon \iff |x+1| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Dato che il limite è in un intorno di $+\infty$, possiamo supporre che $x > -1$. Quindi $|x+1| = x+1 > 0$. Quindi la disuguaglianza della tesi (nella definizione di limite che dobbiamo verificare) è equivalente alla seguente

$$x > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Di conseguenza, se si pone

$$M := \frac{1}{\varepsilon} - 1,$$

la definizione di limite risulta (automaticamente) verificata.

(B). La scrittura $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ è un limite per $x \to 0$ della funzione $f(x) = \frac{1}{x^2} : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ che è definita su $A =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. La definizione da "verificare" è quindi

$$\forall\, K \in \mathbb{R}\; \exists\, \delta > 0 : \forall\, x \in A\;\; (|x| < \delta \implies f(x) > K)\,.$$

A tal fine partiamo dallo studiare la disuguaglianza nella "tesi", cioè

$$\frac{1}{x^2} > K \Longleftrightarrow x^2 < \frac{1}{K} \Longleftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{K}}.$$

Il limite è in un intorno sferico di 0 e la disuguaglianza della tesi (nella definizione di limite che dobbiamo verificare) è equivalente alla seguente

$$|x| < \frac{1}{\sqrt{K}}.$$

Di conseguenza, se si pone

$$\delta := \frac{1}{\sqrt{K}},$$

la precedente definizione di limite risulta (automaticamente) verificata.

(C). La scrittura

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x}{x+1} = -\infty$$

è un limite ds per $x \to 1^+$ della funzione $f(x) = \frac{x}{x+1} : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ che è definita su $A =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$. La definizione di limite ds da "verificare" è quindi

$$\forall\, K \in \mathbb{R}\ \exists\, \delta > 0 : \forall\, x \in A \cap]-1, +\infty[\ (|x+1| < \delta \implies f(x) < K)\,.$$

Si deve assumere che $x > -1$. Inoltre, non lede la generalità assumere che $K < 1$. Partiamo dallo studio della disuguaglianza nella "tesi", cioè

$$\frac{x}{x+1} < K \Longleftrightarrow \frac{x - K(x+1)}{x+1} < 0 \Longleftrightarrow \frac{x(1-K)-1}{x+1} < 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{1-K} \\ x > -1 \end{cases}$$

N.B. L'altro sistema è omesso, in quanto stiamo assumendo che $x > -1$.

Di conseguenza, se si pone

$$\delta := \frac{1}{1-K}$$

la precedente definizione di limite ds risulta (automaticamente) verificata.

Limiti svolti (senza Hôpital e/o Taylor)

Esercizio B.1.21. Studiare/calcolare i seguenti limiti:

1) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin\sqrt[3]{x}}{2x}$;

2) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\pi - 2x}$;

3) $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x}\right)^{6x}$;

4) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin(4x)}$;

5) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin(2x)}$;

6) $\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{x-3}{9-x^2}\right)^{x}$;

7) $\lim_{x\to \pm\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$;

8) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x^4)}{\sin^2 x}$;

9) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$;

10) $\lim_{x\to +\infty} x^{\sin\frac{1}{x}}$;

11) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^x - x^{x\log x} + 5x^2}{x^2 + x\sin(x^3)}$;

12) $\lim_{x\to 0} \left(\sqrt{1+x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$;

13) $(\star)$ $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{(\sqrt{e})^{\sin x} - \cos\sqrt{x}}{\log^2(1+\sqrt{x})}$;

14) $(\star)$ $\lim_{x\to 0} \left(\sqrt{4+x}-1\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$;

15) $(\star)$ $\lim_{x\to +\infty} [\log(\log x)]^{\log x} - x(\log x)^{\log(\log x)}$.

Soluzioni dell'Esercizio B.2.18

1) È una forma indeterminata (abbrev., f.i.) $\frac{0}{0}$. Si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[3]{x}\cdot x^{\frac{2}{3}}}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}}_{\xrightarrow[x\to 0]{}1}\underbrace{\left(\frac{1}{(x^2)^{\frac{1}{3}}}\right)}_{\xrightarrow[x\to 0]{}+\infty}=+\infty.$$

2) È una f.i. $\frac{0}{0}$. Si ha

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}\underbrace{=}_{\text{Sost. } y:=x-\frac{\pi}{2}}\lim_{y\to 0}\frac{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{-2y}=\lim_{y\to 0}\frac{\cancel{-}\sin y}{\cancel{-}2y}=\frac{1}{2},$$

dove si è usato che $\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin y$ (per esempio, usare le formule di addizione).

3) L'espressione da calcolare è una potenza avente come base una f.i. $\frac{\infty}{\infty}$. Questa ha limite 1. Pertanto, il limite è una f.i. 1^∞. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x}\right)^{6x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{6x}\underbrace{=}_{\text{se il lim. }\exists}\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right)^3=e^3,$$

dove si è usato che $(1+1/y)^y\xrightarrow[y\to\pm\infty]{}e$.

4) È una f.i. $\frac{0}{0}$. Si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sin(4x)}=\lim_{x\to 0}\underbrace{(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x})}_{\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\frac{4x}{\sin(4x)}}_{\xrightarrow[x\to 0]{}1}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}.$$

5) È una f.i. $\frac{0}{0}$. Si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin(2x)}\underbrace{=}_{\text{Form. Duplic.}}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{2\sin x\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\left(\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\right)}_{\xrightarrow[x\to 0]{}1}\cdot\frac{1}{2\cos x}=\frac{1}{2}.$$

6) È una f.i. 1^∞. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x-3}{9-x^2}\right)^x \underbrace{=}_{9-x^2=(3-x)(3+x)} \lim_{x\to+\infty}\underbrace{\left(1-\frac{1}{x+3}\right)^{x+3}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} e^{-1}=\frac{1}{e}}\underbrace{\left(1-\frac{1}{x+3}\right)^{-3}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}1^{-3}=1},$$

dove si è usato che $\forall\, a\in\mathbb{R}$ riesce $(1+a/y)^y \xrightarrow[y\to\pm\infty]{} e^a$.

7) È una f.i. 1^∞. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\pm\infty}\underbrace{\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{x-1}}_{\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}e^2}\underbrace{\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{-1}}_{\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}1} = e^2.$$

8) È una f.i. $\frac{0}{0}$. Si ha

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x^4)}{\sin^2 x} = \lim_{x\to0}\underbrace{\frac{1-\cos(x^4)}{x^8}}_{\xrightarrow[x\to0]{}\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\frac{x^2}{\sin^2 x}}_{\xrightarrow[x\to0]{}1^2=1}\cdot\underbrace{\frac{x^8}{x^2}}_{=x^6\xrightarrow[x\to0]{}0} = 0,$$

dove si è usato che $\frac{1-\cos y}{y^2}\xrightarrow[y\to0]{}\frac{1}{2}$.

9) È una f.i. $\frac{0}{0}$. Si ha

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\underbrace{=}_{\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\xrightarrow[x\to0]{}1}\cdot\underbrace{\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)}_{\xrightarrow[x\to0]{}\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\xrightarrow[x\to0]{}1}=\frac{1}{2}.$$

10) È una f.i. ∞^0. Si ha[3]

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\sin\frac{1}{x}}\underbrace{=}_{\text{Sost. }y:=\frac{1}{x}}\lim_{y\to0^+}\left(\frac{1}{y}\right)^{\sin y}=$$

[3]Ricordare che se $A>0$ allora $A=e^{\log A}$: benchè ovvio, questo è un "trucco" da ricordare e usare spesso, negli esercizi.

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y^{\sin y}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{e^{\log(y^{\sin y})}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{e^{\sin y\cdot\log y}} = 1,$$

dove l'ultima uguaglianza segue dai seguenti due limiti notevoli:

A) $\frac{\sin y}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} 1$.

B) $\forall\, a > 0,\ \forall\, b \in \mathbb{R}$, si ha $y^a \log^b y \xrightarrow[y\to 0]{} 0$.

N.B. Usando A) e B) si vede che $\sin y \log y = \dfrac{\sin y}{y} \cdot (y \log y) \to 0$ per $y \to 0$.

11) È una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Notare che $x^x = e^{\log x^x} = e^{x\log x}$. Quindi, se la funzione di cui si deve calcolare il limite è $f(x) := \dfrac{N(x)}{D(x)}$, si trova subito che il numeratore è dato da $N(x) = x^x - x^{x\log x} + 5x^2 = 5x^2$. Quindi, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^x - x^{x\log x} + 5x^2}{x^2 + x\sin(x^3)} = 5 \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}^2}{\cancel{x}^2\left(1 + \frac{\sin(x^3)}{x}\right)} = 5,$$

dove si è usato il fatto seguente:
il prodotto di una funzione infinitesima per una limitata è infinitesimo.
Quindi, ad esempio, si ha che $\frac{\sin(x^3)}{x} \to 0$ se $x \to \pm\infty$.

12) È una f.i. 0^∞. Si ha

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0} e^{\log\left(\sqrt{1+x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{2\cdot\sin x}\cdot\log(1+x)} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\log(1+x)}{2\cdot\sin x}}.$$

Allora ci serve (e basta) calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{2\cdot\sin x}.$$

Moltiplicando e dividendo l'espressione in esame per x si trova subito:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{2\cdot\sin x} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\log(1+x)}{x}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 1} \cdot \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 1} = \frac{1}{2}.$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

13) $(\star)$ È una f.i. $\frac{0}{0}$. Notare che $(\sqrt{e})^{\sin x} = e^{\frac{\sin x}{2}}$. Inoltre, ricordiamo i seguenti due limiti notevoli:

A) $\frac{e^y-1}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} 1$.

B) $\frac{1-\cos y}{y^2} \xrightarrow[y\to 0]{} \frac{1}{2}$.

N.B. Usando A) e B) si calcola il numeratore $N(x)$ come segue:

$$\begin{aligned}
N(x) &:= (\sqrt{e})^{\sin x} - \cos\sqrt{x} = \underbrace{e^{\frac{\sin x}{2}} - 1} + \underbrace{1 - \cos\sqrt{x}} \\
&= \frac{e^{\frac{\sin x}{2}} - 1}{\frac{\sin x}{2}} \cdot \frac{\sin x}{2\,x} \cdot x + \frac{1-\cos\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} \cdot x \\
&= x \cdot \left(\underbrace{\frac{e^{\frac{\sin x}{2}} - 1}{\frac{\sin x}{2}} \cdot \frac{\sin x}{2\,x}}_{\xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}}_{\xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{1}{2}} \right) =: x \cdot g(x),
\end{aligned}$$

dove $g(x) \to 1$ per $x \to 0^+$.

Quindi per quanto sopra, posto $f(x) := \frac{N(x)}{D(x)}$, si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\sqrt{e})^{\sin x} - \cos\sqrt{x}}{\log^2(1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x \cdot g(x)}{\log^2(1+\sqrt{x})}.$$

Adesso, ricordando che $\frac{\log(1+y)}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} 1$, ne segue che

$$D(x) = \log^2(1+\sqrt{x}) = \underbrace{\frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}}_{\xrightarrow[x\to 0^+]{} 1} \cdot \underbrace{\frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}}_{\xrightarrow[x\to 0^+]{} 1} \cdot x =: x \cdot h(x), \quad \text{dove} \quad h(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1.$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{N(x)}{D(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x} \cdot g(x)}{\cancel{x} \cdot h(x)} = 1.$$

14) ($\star$) È una f.i. 1^∞. Posto $f(x) := \sqrt{4+x}-1$ e $g(x) = e^x - 1$, si ha

$$\left(\sqrt{4+x}-1\right)^{\frac{1}{e^x-1}} = (f(x))^{\frac{1}{g(x)}} = e^{\log\left((f(x))^{\frac{1}{g(x)}}\right)} = e^{\frac{\log f(x)}{g(x)}}.$$

Calcoliamo a parte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log f(x)}{g(x)}.$$

Definiamo una funzione $h(x)$ mediante $\sqrt{4+x}-1 =: 1 + h(x)$, cioè $h(x) := \sqrt{4+x}-2$; notare che $h(x) \to 0$ se $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\log f(x)}{h(x)} \cdot \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\log(1+h(x))}{h(x)}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{x}{e^x-1}}_{\to 1} \cdot \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x}.$$

Calcoliamo quest'ultimo limite. Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\frac{x}{4}}-1}{4\cdot\frac{x}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\frac{x}{4}}-1}{\frac{x}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Ne segue che

$$\lim_{x\to 0} \left(\sqrt{4+x}-1\right)^{\frac{1}{e^x-1}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\log f(x)}{g(x)}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\log f(x)}{g(x)}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x}} = e^{\frac{1}{4}}.$$

15) ($\star$) È una f.i. $\infty - \infty$.
Poniamo $y = \log x$ (ossia, $x = e^y$) e notiamo che $y \to +\infty$ se $x \to +\infty$.

$$\begin{aligned} f(x) &:= [\log(\log x)]^{\log x} - x[\log x]^{\log(\log x)} \\ &= [\log y]^y - e^y y^{\log y} = e^{y\cdot\log(\log y)} - e^y \cdot e^{\log y \cdot \log y} \\ &= e^{y\cdot\log(\log y)} - e^{y+\log^2 y}. \end{aligned}$$

Occorre quindi capire qual è che diverge "prima" per $y \to +\infty$. Per farlo (poi se ne capirà il perché...) studiamo

$$\lim_{y\to+\infty} \left((y + \log^2 y) - (y\cdot\log(\log y))\right) =$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \underbrace{y}_{\to+\infty} \underbrace{\left(1 - \log(\log y)) + \frac{\log^2 y}{y}\right)}_{\to-\infty} = -\infty.$$

Ora, usando quest'ultimo risultato, calcoliamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{y\to+\infty} \left(e^{y\cdot\log(\log y)} - e^{y+\log^2 y}\right)\\ &= \lim_{y\to+\infty} e^{y\cdot\log(\log y)} \underbrace{\left(1 - e^{y+\log^2 y - y\cdot\log(\log y)}\right)}_{\to 1} = +\infty.\end{aligned}$$

Continuità e limiti unilaterali

Nei seguenti esercizi[4] analizzeremo la continuità in $x = 0$ di alcune funzioni, al variare di parametri reali. Notare che, fuori da 0 tali funzioni sono *sempre* continue in quanto somme e/o prodotti e/o composizioni di funzioni continue.

Esercizio B.1.22. *Studiare la continuità di $f(x)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}_+$:*

$$f(x) := \begin{cases} \frac{|x|^\alpha}{\sin(x)} + \frac{1+\sin(x)}{e^{\frac{1}{x}}+1} & x \in]-\pi, 0[\\ 0 & x = 0 \\ \sin\left(\beta^{\frac{1}{x}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{x^\beta}\right) - \frac{\pi}{2} & x > 0 \end{cases}.$$

Risposta: $f(x) \in C(]-\pi, +\infty[)$ se e solo se $\alpha = 1$ e $\beta > 1$.

Esercizio B.1.23. *Studiare la continuità di $f(x)$ al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:*

$$f(x) := \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) + \frac{2^{-\frac{1}{x}}}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ \beta \arccos(x) & x \in [-1\, 0[\end{cases}.$$

Risposta: $f(x) \in C([-1, +\infty[)$ se e solo se $\alpha < 0$ e $\beta > \frac{2}{\pi}$.

Soluzione. Si ha $\alpha < 0 \Rightarrow \frac{1}{x^\alpha} \to 0$ per $x \to 0^+$. Allora, usando il limite notevole $\sin x/x \to 1$ per $x \to 0$, si ottiene facilmente che $\lim_{x\to0^+} f(x) = 1$ se e solo se $\alpha < 0$. Tenere conto che $\frac{2^{-\frac{1}{x}}}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} \to 0$ per $x \to 0^+$ e che non è una forma indeterminata, essendo prodotto di funzioni infinitesime. A sn di 0 è evidente che $f(x) \to \beta \cdot \frac{\pi}{2}$. Dunque f può essere continua in 0 solo se $\beta = \frac{2}{\pi}$.

[4] Questi esercizi sono piuttosto impegnativi.

Esercizio B.1.24. *Studiare la continuità di $f(x)$ al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:*

$$f(x) := \begin{cases} |x|^{\frac{\sin(\beta x)}{x}} - \arccos(|x| - 1) & x \in [-2, 0[\\ -\pi & x = 0 \\ \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{x}\right)}{\log\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)} + \arctan\left(\frac{\alpha}{x}\right) - \frac{\pi}{2} & x > 0 \end{cases} .$$

Risposta: $f(x) \in C([-2, +\infty[)$ se e solo se $\alpha < 0$ e $\beta > 0$.
Soluzione. Notare che

$$\frac{\sin(\beta x)}{x} = \beta \frac{\sin(\beta x)}{\beta x} \to \beta \qquad (x \to 0)$$

per ogni $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Inoltre, se $\beta = 0$ si ha $\sin(\beta x) = 0$. Da ciò si ha

$$|x|^{\frac{\sin(\beta x)}{x}} \to \begin{cases} +\infty & \beta < 0 \\ 1 & \beta = 0 \\ 0 & \beta > 0 \end{cases}$$

per $x \to 0^-$. Allora, dato che $\arccos(-1) = \pi$, si ottiene che

$$f(x) \to \begin{cases} +\infty & \beta < 0 \\ 1 - \pi & \beta = -\pi \\ 0 & \beta > 0 \end{cases}$$

per $x \to 0^-$. Ne segue la continuità a sn di 0, per ogni $\beta > 0$.

A ds di 0, invece, si vede subito che $e^{\frac{1}{x}} \to +\infty$ per $x \to 0^+$. Questo implica che $\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{x}\right)}{\log\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)} \to 0$ per $x \to 0^+$. Poi $\arctan\left(\frac{\alpha}{x}\right)$ tende a $\pi/2$ se $\alpha > 0$, mentre tende a $-\pi/2$ se $\alpha < 0$, per $x \to 0^+$; infine è 0, se $\alpha = 0$. Ne segue che

$$f(x) \to \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \alpha = 0 \\ -\pi & \alpha < 0 \end{cases}$$

per $x \to 0^+$. Pertanto, deve essere $\alpha < 0$. Questo è ciò che si doveva dimostrare.

B.2 Esercizi proposti

Esercizio B.2.1. Siano $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $C = \{3, 4, 7, 8\}$ e $D = \{7, 8, 9\}$. Scrivere esplicitamente cosa sono gli insiemi $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cap C$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $B \cap C$, $B \cup D$, $A \cap B \cap D$. Rappresentare questi insiemi mediante diagrammi di Venn.

Esercizio B.2.2. Sia $f : A \longrightarrow B$ una funzione. Dire, nei seguenti casi, se f è suriettiva e/o iniettiva e determinare l'immagine inversa di $y \in B$.

- $A = \mathbb{R}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ e $f(x) = x^2$;
- $A = B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ e $f(x) = x^2$;
- $A = B = \mathbb{Z}$ e $f(x) = x^2$;
- $A = B = \mathbb{Z}$ e $f(x) = 2x$.

Esercizio B.2.3. Siano A, B insiemi non vuoti. Dimostrare che c'è (almeno) una funzione biunivoca di $A \times B$ in $B \times A$.

Esercizio B.2.4. È vero che $A \cap B = \emptyset$ implica necessariamente che $A \neq B$?

Esercizio B.2.5. Siano A, B insiemi, $f : A \longrightarrow B$, $X, Y \subseteq A$.
Dimostrare che:

- $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$;
- $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$.

Facoltativamente, notare che nel secondo caso non vale l'uguale.
Suggerimento. Ciò si potrebbe dimostrare col seguente esempio. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, e siano $X = [-1, 0]$, $Y = [0, 1]$. Completare il ragionamento...

Esercizio B.2.6. Siano A, B insiemi, $f : A \longrightarrow B$ e $X, Y \subseteq B$.
Dimostrare che:

- $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$;
- $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.

Esercizio B.2.7. Dimostrare che l'estremo superiore dell'insieme $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ è uguale ad 1, cioè $\sup A = 1$. Qual è, inoltre, l'estremo inferiore di A?

Esercizio B.2.8. Per definizione, si dice che un insieme è *infinito* se esiste una biezione di A con un suo sottoinsieme proprio[5]. Dimostrare che

- $\mathbb{Z}$ è infinito;
- $\mathbb{R}$ è infinito;
- se $B \subseteq A$ e B è infinito allora A è infinito.

Esercizio B.2.9 (Sup e Inf)**.** Sia $f : [0,5[\longrightarrow]-3,1]$ una funzione. Quali tra queste affermazioni sono vere?

- $\inf_{x\in[0,5[} f(x) = -3$.
- $\sup_{x\in[0,5[} f(x) \geq 0$.
- $\sup_{x\in[0,5[} f(x) = 1$.

E se invece f è suriettiva? Motivare brevemente le risposte date.

Esercizio B.2.10. Rappresentare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

- $\{x \in \mathbb{R} : -2 \leq 3x \leq 5\}$;
- $\{x \in \mathbb{R} : (x-1)^2 \leq (2x-1)^2 - 4\}$.

Esercizio B.2.11 (Facile)**.** Risolvere le seguenti disuguaglianze in $\mathbb{R}$:

- $2 - 3x \geq 0$;
- $\frac{3}{2-x} \geq 1$;
- $\frac{3-x}{3+x} \leq \frac{1}{2}$;
- $x^2 - 1 > 0$;
- $x^2 - x + 3 > 0$.

Precisare, qual è il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ in cui esse sono definite.

Esercizio B.2.12. Sia $A \neq \varnothing$ un insieme. Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Dimostrare che

$$\sup_A |f+g| \leq \sup_A |f| + \sup_A |g|.$$

[5] Un sottoinsieme non vuoto $B \subset A$ si dice *proprio* se $B \subseteq A$ e $B \neq A$.

Esercizio B.2.13. Calcolare quanto valgono inf e sup delle seguenti funzioni sugli insiemi indicati:

- $f(x) = x^3$ sull'insieme $]0, 1]$;
- $f(x) = 1 + 2x$ sull'insieme $[-1, 2]$;
- $f(x) = x^2$ sull'insieme $[-1, 2]$;
- $f(x) = \frac{1}{x}$ sull'insieme $\mathbb{N}$;
- $f(x) = \frac{x}{1+x}$ sull'insieme $[0, 1[$;
- $f(x) = \frac{1}{2+x}$ sull'insieme $]-2, 0]$.

Dire inoltre se questi sup ed inf sono anche massimi o minimi.

Esercizio B.2.14. Sia A un insieme non vuoto. Siano $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ e si assuma che $f(x) \le g(x)$ per ogni $x \in A$. Rispondere alle seguenti domande.

- Si ha $\inf_A f \le \inf_A g$. Vero o falso?
- Si ha $\sup_A f \le \sup_A g$. Vero o falso?
- Se $B \subseteq A$ allora $\inf_A f \le \inf_B f$. Vero o falso?
- Se $B \subseteq A$ allora $\sup_A f \le \sup_B f$. Vero o falso?

Esercizio B.2.15. Dimostrare, usando la definizione, che valgono i seguenti: $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$; $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$; $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Esercizio B.2.16 ($\star$)**.** Sia $x_1 = 0$ e si ponga $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponendo che esista, trovare il limite della successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Dimostrare poi l'esistenza di tale limite.

Esercizio B.2.17 (Importante)**.** Sia $A := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Descrivere derivato e chiusura dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$: $A \cup \{0\}$, $\mathbb{R} \setminus A$, $\mathbb{R} \setminus (A \cup \{0\})$, $]0, 1]$, $\{0, 1\}$, $[0, 1]$, $]0, 1[$, $]0, 1[\cup]2, 3[$, $[0, 1] \cup [2, 3]$, $]0, +\infty[$, $[0, +\infty[$, $]-\infty, 0[\cup\{1\}$. Capire inoltre se sono insiemi limitati, aperti, chiusi.

Grafici di funzioni elementari

Esercizio B.2.18 (Importante)**.** Sia f una funzione "elementare" a piacere (ad es., $f(x) = e^x$, $f(x) = x^a$, $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \arctan(x)$, etc.). Dopo aver disegnato in un piano cartesiano il grafico di questa funzione, disegnare i grafici delle seguenti:

- $g(x) = f(x + c)$ dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante reale;
- $g(x) = f(x) + c$ dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante reale;
- $g(x) = cf(x)$ dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante reale;
- $g(x) = f(cx)$ dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante reale.

Definizioni di limite e di funzione continua

Esercizio B.2.19. Siano $A = [1, +\infty)$ ed $f \colon A \to \mathbb{R}$. Supponiamo che $f(x)$ tende a -1 per x che tende a $+\infty$, ossia

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1.$$

Ciò equivale alla seguente "scrittura":

(1) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, M \in \mathbb{R} : \forall\, x \in A\ \ (x < M \implies |f(x) + 1| < \varepsilon)$

(2) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, M \in \mathbb{R} : \forall\, x \in A\ \ (x > M \implies |f(x) - 1| < \varepsilon)$

(3) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, M \in \mathbb{R} : \forall\, x \in A\ \ (x > M \implies |f(x) + 1| < \varepsilon)$

(4) $\exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, M \in \mathbb{R} : \forall\, x \in A\ \ (x > M \implies |f(x) + 1| < \varepsilon)$

Esercizio B.2.20. Dire se le seguenti funzioni sono continue:

- $f : [0, 1] \cup [2, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1], \\ \frac{1}{2} & \text{se } x \in [2, 3]. \end{cases}$$

- $f : [0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \in [0, 1], \\ 7 - x^2 & \text{se } x \in [2, 3]. \end{cases}$$

Esercizio B.2.21. Sia $f : [0,5] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1], \\ \frac{1}{2} & \text{se } x \in]1,5]. \end{cases}$$

- f è continua. Vero o falso?
- $f([0,5])$ è un intervallo. Vero o falso?
- f non è continua in 1. Vero o falso?

Esercizio B.2.22. Sia $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che esistano i limiti $\lim_{x\to 0} f(x) = 3$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 5$.

- esiste $\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 3$. Vero o falso?
- esiste $\lim_{n\to+\infty} f(n) = 5$. Vero o falso?
- non si hanno informazioni sufficienti a garantire l'esistenza dei limiti delle successioni $f(n)$ ed $f\left(\frac{1}{n}\right)$.

Esercizio B.2.23. Assumiamo che $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua. Rispondere alle seguenti domande.

- Esiste il limite $\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{2x^2+3}{x^2-x}\right)$. Vero o falso?
- Esiste il limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Vero o falso?
- Non si hanno informazioni sufficienti a garantire l'esistenza del limite $\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{e^x+3}{e^x-1}\right)$. Vero o falso?
- Esiste il limite $\lim_{x\to 4} f(x)$. Vero o falso?
- Esiste il limite $\lim_{x\to 0} f(x)$. Vero o falso?

Esercizio B.2.24. Sia $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che esista il limite $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Rispondere alle seguenti domande.

- f è inferiormente limitata. Vero o falso?
- Non si hanno informazioni sufficienti a garantire l'esistenza del minimo (assoluto) di f. Vero o falso?
- Il dominio $\mathrm{Dom}(f)$ è inferiormente limitato. Vero o falso?
- $\inf_{[0,+\infty[} f = -\infty$. Vero o falso?
- Esiste il minimo (assoluto) di f. Vero o falso?

Teoremi di Bolzano e dei valori intermedi

Esercizio B.2.25. Sia $f : [3,5] \cup [6,7] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e tale che $f(3) = -2$, $f(7) = 5$. Rispondere alle seguenti domande.

- Esiste $x \in [3,5] \cup [6,7]$ tale che $f(x) = 4$. Vero o falso?
- Non sono verificate le ipotesi del teorema di Bolzano e pertanto, in generale, non possiamo dire se la funzione si annulla. Vero o falso?

Esercizio B.2.26. Sia $f : [3,5] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e tale $f(3) = 2$, $f(5) = 7$. Allora esiste $x \in [3,5]$ tale che $f(x) = 4$. Vero o falso?

Esercizio B.2.27. Sia $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = -e^x + 4x + \cos(x)$.

- Esiste il limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Vero o falso?
- f ha almeno uno zero. Vero o falso?

Esercizio B.2.28. Sia $f :]-\infty, 5[\longrightarrow \mathbb{R}$ continua e tale che esiste $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$ e $f(4) = -2$.

- f ha almeno uno zero. Vero o falso?
- f assume tutti i valori in $]-2,2[$. Vero o falso?
- $f(]-\infty,4]) =]-2,2]$. Vero o falso?

Teorema di Weiestrass

Esercizio B.2.29. Rispondere alle seguenti domande.

- Sia $f : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{-x} + x^2 - 3$. Allora f ha massimo (assoluto). Vero o falso?
- Sia $f : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora f verifica le ipotesi del teorema di Weiestrass e pertanto ha massimo. Vero o falso?

Esercizio B.2.30. Sia data $f :]0,4[\longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{e^x+1}{x}$. Rispondere alle seguenti domande.

- f verifica le ipotesi del teorema di Weiestrass, e quindi ha massimo. Vero o falso?
- Si ha $\sup_{]0,4[} f = +\infty$ e pertanto f non ha massimo. Vero o falso?

Derivate

Esercizio B.2.31. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$f(x) = 5x^4 - 3x + 4;\ f(x) = \frac{x^2}{x+1};\ f(x) = \frac{\sqrt{x} - 6x^3}{x + x^4};\ f(x) = x\log x + x^4;$$
$$f(x) = e^x \sin(x);\ f(x) = \frac{\cos(x) + 3}{x + \sin(x)};\ f(x) = \sqrt{1 + e^x};\ f(x) = \tan(x^2);$$
$$f(x) = \tan(x)e^x;\ f(x) = \sin(x^2 + 3x - 2);\ f(x) = x\arctan(x^3 - 3);$$
$$f(x) = x^x;\ f(x) = (x^2 + 1)^{\log(x)}.$$

Esercizio B.2.32. Determinare il dominio delle funzioni date e l'insieme dei punti in cui è possibile calcolare la derivata; calcolarne poi la derivata.

$$f(x) = (x+2)e^{|x+3|};\ f(x) = \log(1 - |x|);\ f(x) = \arctan(4 - |x-1|);$$
$$f(x) = \sqrt{x(x+1)};\ f(x) = \sqrt{|x+2| - 3}.$$

Monotonia (studio di max/min relativi)

Esercizio B.2.33. Determinare massimo (assoluto) e minimo (assoluto) delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned}
&f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, && f(x) = x^2 - x^4;\\
&f : [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}, && f(x) = e^x|x-1|;\\
&f : [-1,2] \longrightarrow \mathbb{R}, && f(x) = x^2 e^{-x};\\
&f : \left[\frac{1}{e}, e\right] \longrightarrow \mathbb{R}, && f(x) = \log^2(x) + \log(x).
\end{aligned}$$

Esercizio B.2.34. Studiare la monotonia[6] e determinare massimi e/o minimi relativi delle seguenti funzioni, nel loro dominio:

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1};\ f(x) = x - \sqrt{|x-3|};\ f(x) = e^{-x^2+|x-2|};$$
$$f(x) = x\log(|x|);\ f(x) = \sin(x) - x;\ f(x) = \arctan(x) - \frac{1}{3}\log(x).$$

[6] Determinare, in altre parole, gli intervalli sui quali la funzione data è monotona crescente o decrescente, effettuando uno studio del segno della derivata prima.

Limiti (teorema dell'Hôpital e/o formula di Taylor)

Esercizio B.2.35. Calcolare i limiti delle seguenti funzioni:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^2+x};\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(x)-1}{x^a},\ a>0;\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\sin(x)-x};$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x-\tan(x)};\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^x-e^x}{\cos(x)-e^x};\quad \lim_{x\to 0} x\log^a(|x|),\ a>0.$$

Limiti (formula di Taylor)

Esercizio B.2.36. Calcolare i seguenti limiti:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}+\sin(x)-\cos(x)}{\cos^2(x)-\cos(x^2)}\qquad [L=-1]\,;$$

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x\sin(x)}-\cos(\sqrt{2}x)}{x^4}\qquad \left[L=\frac{1}{2}\right];$$

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{[e^x-\cos(x)]^2}{\sin(x)^2-\sin^2(x)}\qquad [L=+\infty]\,.$$

Limiti (ricapitolazione)

Esercizio B.2.37. Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$L\equiv\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(2x+3x^2)+3\sin x+\operatorname{ch}x-\cos x}{(\operatorname{sh}x)(\tan x)+\arctan(1-\cos x)}\qquad \left(=\lim_{x\to 0}f(x)\right).$$

Risposta: non esiste $L\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. In effetti, si ha che esiste il lim ds. $\lim_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$; inoltre esiste il lim sn. $\lim_{x\to 0^-}f(x)=-\infty$.

Esercizio B.2.38. Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$L\equiv\lim_{x\to+\infty}\frac{(\operatorname{ch}x)^x+\operatorname{sgn}x+x^x}{(\operatorname{sh}x)^{x^3}+(\arctan x)^{\frac{1}{x}}+e^{x^2}}.$$

Risposta: esiste $L=0$.

Esercizio B.2.39. Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$L \equiv \lim_{x\to+\infty} \frac{(\operatorname{ch} x)^x + \operatorname{sgn} x + x^x}{(\operatorname{sh} x)^{x^3} + (\arctan x)^{\frac{1}{x}} + e^{x^2}}.$$

Risposta: esiste $L = 0$.

Esercizio B.2.40. Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$L \equiv \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\frac{1}{|x|}\right)^{x^3} + \arctan(\sqrt{1+x^2}) + \cos(1+x^2)}{3^{x^2} - 2^{\sqrt{1+x^2}}}.$$

Risposta: esiste $L = +\infty$.

Esercizio B.2.41. Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$L \equiv \lim_{x\to0^+} \frac{2\log(1+x^2) + \log(\cos^2 x) + \sqrt{1-\cos x}}{(\arctan x)(\operatorname{sh} x) + \tan x + x^2}.$$

Risposta: esiste $L = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Esercizio B.2.42. Calcolare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste il seguente limite:

$$L \equiv \lim_{x\to0^+} \frac{e^{\sin(x^2)} - e^{x^\alpha}}{\log(1+\sqrt{x}) + 2\cos(\sqrt[4]{x}) - 2}.$$

Risposta: L esiste sempre. Inoltre si ha: $L = 0$ se $\alpha > 2$, $L = 0$ se $\alpha = 2$, ed infine, se $\alpha \in]0, 2[$ si hanno tre casi: $L = +\infty$ se $\alpha \in]0, 1[$; $L = 0$ se $\alpha \in]1, 2[$ e $L = \frac{12}{5}$ se $\alpha = 1$.

Esercizio B.2.43. Calcolare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste il seguente limite:

$$L \equiv \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x - e^{2\sqrt{1+x^2}}}{e^{\alpha x} + x^\alpha}.$$

Risposta: L esiste sempre. Inoltre si ha: $L = -\infty$ se $\alpha < 2$, $L = -1$ se $\alpha = 2$, ed infine $L = 0$ se $\alpha > 2$.

Studi di Funzione

Esercizio B.2.44. Studiare le seguenti funzioni nel loro dominio naturale:

1. $f(x) = |2x+1|e^{\frac{1}{x}}$
2. $f(x) = \log|e^{2x} - 3|$
3. $f(x) = \begin{cases} x\left(\log|x| - 1\right)^2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
4. $f(x) = e^{|x^2-3x+2|}$
5. $f(x) = \log|\log|x||$
6. $f(x) = e^{\frac{1}{\sin x}}$

Nel 6 si ometta lo studio (difficile) del segno della derivata seconda.

Esercizio B.2.45. Sia

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x}{|x|}\sqrt{(4-x)(x+2)} & \text{se } x \in [-2,4] \\ 5 & \text{se } x = 0 \end{cases} .$$

Studiare continuità, derivabilità e monotonia di f. Abbozzarne il grafico. Si può applicare il Teorema di Weierstrass alla funzione f? Perché?

Esercizio B.2.46. Sia

$$f(x) := \begin{cases} \frac{4-3|x|}{x^2+1} & \text{se } x \geq -1,\ x \neq 3 \\ 5 & \text{se } \ x = 3 \\ \frac{1}{2x^4} & \text{se } x < -1 \end{cases} .$$

Studiare i punti di non derivabilità; ricercare i punti di massimo/minimo relativo e assoluto; studiare gli eventuali asintoti; abbozzare il grafico di f.

Esercizio B.2.47. Sia

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{x^2 + |1-2x|} & \text{se } x \geq -1 \\ \sqrt{3-x} & \text{se } \ x < -1 \end{cases} .$$

Studiare i punti di non derivabilità; ricercare inoltre i punti di massimo/minimo relativo e assoluto; studiare gli eventuali asintoti; abbozzare il grafico di f (non si studi la f'').

Esercizio B.2.48. Sia $f(x) = \arctan(1/x) - 2x + 3$, definita in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Se ne studi la monotonia e si deduca se vale in $[3, +\infty)$ che $\arctan(1/x) < 2x - 3$. Sfruttando i teoremi sulle funzioni continue, dire quanti zeri ha f in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ed individuare un intervallo di appartenenza di tali zeri.

Esercizio B.2.49. Sia $f(x) := \sqrt{x^2+1} - \sqrt{|x^2-1|}$. Dire se f ammette max e min assoluti nel suo insieme di definizione, e in caso affermativo calcolarli. Trovare, se esistono, i punti di max e min relativi.

Integrali Definiti

Esercizio B.2.50. Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$\int_3^5 \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)}; \quad \int_0^4 \frac{x+1}{(x-5)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-7)}\, dx;$$
$$\int_3^5 \frac{dx}{x(1+x^2)}; \quad \int_{\frac{3}{2}}^5 \frac{2x^2-3x+1}{(1+x)(1-2x)} dx;$$
$$\int_{\frac{1}{e}}^1 x^2 \log(x)\, dx; \quad \int_0^1 x \arctan(2x)\, dx \qquad \text{[Suggerimento: per parti].}$$

Esercizio B.2.51. Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$\int_{-1}^1 x^2 e^{-x} dx; \quad \int_0^e \sin(x) e^x dx$$

Suggerimento. Effettuare una doppia integrazione per parti nel primo caso. Invece, nel secondo caso, usare la stessa tecnica usata in classe per calcolare gli integrali delle funzioni $\cos^2(x)$, $\cosh^2(x)$...

Esercizio B.2.52. Calcolare i seguenti integrali definiti (usando un'opportuna sostituzione):

$$\int_{-1}^2 \frac{x}{(1+x^2)^4}\, dx; \quad \int_0^1 \frac{\sin(x)\cos(x)}{(1+\cos^2(x))(1+\cos(x))}\, dx; \quad \int_1^e \frac{dx}{x(1+\log^2(x))}.$$

Integrali Generalizzati

Esercizio B.2.53. Calcolare (o dimostrare che non convergono) i seguenti integrali generalizzati:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\log^2(x)}; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}; \quad \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,dx; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot(x)\,dx.$$

Esercizio B.2.54. Studiare la convergenza dei seguenti integrali generalizzati:

$$\int_0^{100} \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{4}}+x^3}; \quad \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^5}}\,dx; \quad \int_1^2 \frac{dx}{\log(x}; \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,dx.$$

Esercizio B.2.55. Studiare la convergenza dei seguenti integrali generalizzati al variare dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^\alpha(1+x^\beta)}\,dx; \quad \int_3^{+\infty} \frac{x^\alpha \sin(x)}{x(x^2-9)^\beta}\,dx.$$

Serie

Esercizio B.2.56. Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right); \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right); \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log(n)}; \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log^2(n)}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-n}; \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log(n)}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n n!}{n^n}.$$

Esercizio B.2.57. Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ le seguenti serie convergono:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (2x)^n; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!x^n}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{x^n}.$$

N.B. Altri esempi ed esercizi si trovano nel Capitolo 12.

Equazioni Differenziali

Esercizio B.2.58. Risolvere le seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine usando le condizioni iniziali assegnate:

$$\begin{aligned} y' &= 2\frac{y}{t+2} \qquad y(1) = -1; \\ y' &= 2ty - 8t \qquad y(1) = 3; \\ y' &= ty - te^{t^2} \qquad y(1) = 2; \\ y' &= t^2 y \qquad y(1) = 1. \end{aligned}$$

N.B. Nell'esercizio precedente, notare che solamente la seconda e la terza equazione richiedono l'uso della formula risolutiva.

Esercizio B.2.59. Studiare e risolvere le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili utilizzando le condizioni iniziali assegnate::

$$\begin{aligned} y' &= 2\frac{y}{t+2} \qquad y(1) = 2; \\ y' &= \frac{te^t}{y+1} \qquad y(1) = 2; \\ y' &= y\cos(t) - \cos(t) \qquad y(0) = -1; \\ y' &= \frac{\log(t)}{y} \qquad y(1) = -1. \end{aligned}$$

Elenco delle figure