Ex. $\overbrace{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}^{:= g(x)} \to 0 \quad x \to +\infty$

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \sim \frac{1}{x} \quad \text{per } x \to +\infty$$

N.B. $\operatorname{arctg} y \sim y \quad (y \to 0)$

Sol. • Infatti

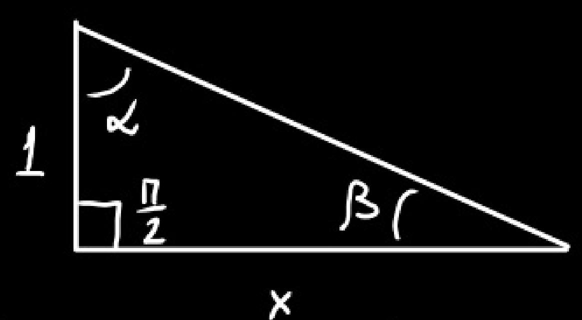
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{Hôp}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{-}\frac{1}{1+x^2}}{\cancel{-}\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \overset{\text{Hôp}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{2x}}{\cancel{2x}} = 1$$

• N.B.

Un altro modo è usare l'identità:

$$g(x) = \boxed{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}$$



$$\begin{cases} x = \operatorname{tg} \alpha \\ 1 = x \operatorname{tg} \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \operatorname{arctg} x \\ \beta = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \end{cases} \quad \text{e} \quad \boxed{\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}}$$

Perciò $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ e perciò $g(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x} \quad (x \to +\infty)$

Ex. Sia $f(x) = \begin{cases} (x-\beta)^2, & x \geq 0 \\ \alpha \sin x, & x < 0 \end{cases}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Studiare continuità, derivabilità e continuità di f'.

Sol. Ovviamente $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ e $f \in C^\infty(\mathbb{R}_-)$. Infatti a dx di $x=0$ è un pol. di 2° grado, mentre a sx di $x=0$ è, a meno di una costante, la funzione sin.

Si deve verificare che $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$ per la continuità in $x=0$ (e quindi in $\mathbb{R}$).

- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \beta^2$. Perciò f continua se e solo se $\beta = 0$

D'altra parte si deve studiare la derivabilità in $x=0$.

Si ha
$$f'(x) = \begin{cases} D\,x^2 & x \geq 0 \\ D\,\alpha \sin x & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ \alpha \cos x & x < 0 \end{cases}$$

e quindi
$$\begin{cases} f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} 2x = 0 \\ f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \alpha \cos x = \alpha \end{cases}$$

Perciò, se $\boxed{\alpha \neq 0}$, f non è derivabile in $x=0$.

Viceversa, se $\alpha = 0$ f è derivabile e la sua derivata è continua anche in $x=0$. Infatti

$$R_0(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{x}} & x \geq 0 \\ \alpha \dfrac{\sin x}{x} & x < 0 \end{cases} \quad \text{e } \exists \lim_{x \to 0} R_0(f)(x) = f'(0) = \begin{cases} 0 \\ \alpha \end{cases} \overset{!!}{=} 0$$

se e solo se $\boxed{\alpha = 0}$

dev'essere zero

Perciò f è derivabile in $x=0$ se e solo se $\alpha=\beta=0$.

In tal caso è anche vero, come già osservato, che $\exists \lim_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$. Cioè f' è continua in $x=0$ (oltre che in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$).

Perciò $\boxed{f \text{ è } C^1(\mathbb{R})}$.

Ex $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3}\, e^{2x} - 2\sqrt{3}x + 2x^2 - \sqrt{3}}{3 + x^2 - 3e^{x^2} + x^4 \cos\frac{6}{x}}$ $\left(= \lim_{x\to 0} f(x) ,\quad f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} \right)$

Sol. $N(x) \longrightarrow 0$, $D(x) \longrightarrow 0 \implies f(x)$ f. ind. $\frac{0}{0}$.

$$N(x) = \sqrt{3}\left(1 + 2x + \underbrace{\frac{(2x)^2}{2}}_{4x^2} + o(x^2)\right) - 2\sqrt{3}\,x + 2x^2 - \sqrt{3}$$

$$= 2(\sqrt{3}+1)\,x^2 + o(x^2)$$

$$D(x) = 3 + x^2 - 3\underbrace{\left(1 + x^2 + \overbrace{\frac{x^4}{2} + o(x^4)}^{o(x^2)}\right)}_{e^{x^2}} + \underbrace{x^4 \cos\frac{6}{x}}_{= O(x^4) = o(x^2)}$$

N.B. $\left|\cos\frac{6}{x}\right| \le 1$ e $x^4 \cos\frac{6}{x} = o(x^2)$

$$= -2x^2 + o(x^2).$$

Perciò $f(x) \underset{\text{per } x\to 0}{\sim} \dfrac{2(\sqrt{3}+1)\,x^2}{-2x^2} = \boxed{-(\sqrt{3}+1)}$.

Ex (*) $\lim_{x \to +\infty} \underbrace{3^{x+1} - 3^{\sqrt{1+x^2}}}_{=f(x)}$

$A = e^{\lg A} \quad (A > 0)$

Sol$_1$

N.B. $f(x)$ e' una f. ind. $\infty - \infty$.

Si ha

$$f(x) = e^{\lg 3^{x+1}} - e^{\lg 3^{\sqrt{x^2+1}}}$$

$$= e^{(x+1)\lg 3} - e^{\sqrt{x^2+1}\,\lg 3}.$$

- $\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} + o(y)$ $(y \to 0)$

Occorre confrontare 3^{x+1} con $3^{\sqrt{x^2+1}}$:

$$\frac{e^{(x+1)\lg 3}}{e^{\sqrt{x^2+1}\,\lg 3}} = e^{(x+1)\lg 3 - \sqrt{x^2+1}\,\lg 3} = e^{\overbrace{\lg 3 \cdot (x+1-\sqrt{x^2+1})}^{=g(x)}}$$

$$g(x) = \lg 3 \cdot (x+1-\sqrt{x^2+1}) = \lg 3 \cdot x \cdot \left(1 + \frac{1}{x} - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) =$$

$$= \lg 3 \cdot x \cdot \left(1 + \frac{1}{x} - 1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

Perciò $\quad g(x) = \lg 3 \cdot x \cdot \left(1 + \frac{1}{x} - 1 - \underbrace{\frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{= o\left(\frac{1}{x}\right)}\right)$ per $x \to +\infty$

$$= \lg 3 \cdot \cancel{x} \cdot \left(\frac{1}{\cancel{x}} + o\left(\frac{1}{\cancel{x}}\right)\right)$$

$$= \lg 3 \cdot (1 + o(1))$$

OSS. $\quad \underline{x \cdot o\left(\frac{1}{x}\right) = o(1)}$ per $x \to +\infty$.

Infatti ciò è come dire che $\frac{o(1)}{x} = o\left(\frac{1}{x}\right)$,

cioè che $\frac{\frac{o(1)}{\cancel{x}}}{\frac{1}{\cancel{x}}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, ciò che è vero!.

Quindi $g(x) \sim \lg 3$ $\left(\text{cioè } \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lg 3 \right)$.

Perciò $$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{3^{x+1}}{3^{\sqrt{x^2+1}}} = \lim_{x \to +\infty} e^{g(x)} = \underline{3}}$$

Ma allora

$$\lim_{x \to +\infty} \left(3^{x+1} - 3^{\sqrt{x^2+1}} \right) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{3^{\sqrt{x^2+1}}}_{\downarrow \, +\infty} \underbrace{\left(\overbrace{\frac{3^{x+1}}{3^{\sqrt{x^2+1}}}}^{\to 3} - 1 \right)}_{\xrightarrow{x \to +\infty} 2}$$

$= +\infty$.

In altre parole: $\boxed{f(x) \sim 2 \cdot 3^{\sqrt{x^2+1}}}$ per $x \to +\infty$.

Ex. Determinare l'ordine e calcolare il limite per $x \to +\infty$ della funzione $f(x)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \lg\Big[\underbrace{x}_{\to +\infty}\Big(\underbrace{e^{\frac{1}{x}} - 1}_{\to 0} - \underbrace{\frac{\alpha}{x}}_{\to 0}\Big)\Big] \quad \big(= \lg g(x)\big)$$

Sol. Partiamo dallo sviluppo $e^{y} = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$.
$y \to 0$

Sia

$y \stackrel{def}{=} \frac{1}{x} \longrightarrow 0$ per $x \to +\infty$. Allora

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \underbrace{\frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{= o\left(\frac{1}{x}\right)} \quad \text{per } x \to +\infty$$

Allora $g(x) = x \cdot \left(\cancel{1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \cancel{1} - \frac{\alpha}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$

$$g(x) = x\left(\frac{1-\alpha}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$= (1-\alpha) + \underbrace{\frac{1}{2x}}_{\downarrow \atop 0} + \underbrace{o\left(\frac{1}{x}\right)}_{\downarrow \atop 0}) \qquad \text{per } x \to +\infty$$

Conclusione:

se $\alpha \neq 1$ $\quad g(x) \longrightarrow 1-\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lg(1-\alpha).$$

Altrimenti, se $\alpha = 1$, $\quad g(x) \sim \frac{1}{2x}$ e perciò

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \lg\left(\underbrace{\frac{1}{2x}}_{\downarrow \atop 0^+}\right) = -\infty \quad \text{e} \quad \boxed{f(x) \sim -\lg x}$$

N.B. Infatti $\lg\left(\frac{1}{2x}\right) = \underbrace{\lg 1}_{=0} - \lg(2x) =$

$= -\lg 2 - \lg x$

$= -\lg x + o(\lg x)$

(infatti $\lg 2 = o(\lg x)$ per $x \to +\infty$)

Ex. Scrivere l'eq. della retta tg. al grafico di

$$f(x) = x^2 + \sqrt{5+4e^{-x}} \quad \text{nel pto } x=0$$

Sol. Si ha

$$y = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)}_{= T^1_{x_0}(f)(x)}$$

pol. di Taylor al 1° ordine

- $x_0 = 0$
- $f(0) = \sqrt{5+4} = 3$
- $f'(x) = 2x + \dfrac{(-4e^{-x})}{2\sqrt{5+4e^{-x}}}$ e $f'(0) = \dfrac{-\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{2}\sqrt{5+4}} = \dfrac{-2}{3}$

Perciò

$$y = 3 - \frac{2x}{3} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{2}{3}x + 3}$$

eq. retta tg. in $(0, f(0))$

Ex. Scrivere lo sviluppo di Taylor al 2° ordine con resto in forma di Lagrange delle funzioni:

1) $f(x) = \lg(x)$ $\quad x_0 = 3$

2) $f(x) = e^x$ $\quad x_0 = e$

3) $f(x) = \sin(x)$ $\quad x_0 = \frac{\pi}{4}$

Soluz. 1) $D \lg x = \frac{1}{x}$, $D\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$, $D\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^3}$

Perciò $f(3) = \lg 3$, $f'(3) = \frac{1}{3}$, $f''(3) = -\frac{1}{9}$ e quindi

$$(*)\begin{cases} f(x) = \lg x = \lg 3 + \frac{1}{3}(x-3) + \frac{1}{2!}\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)\cdot(x-3)^2 + \boxed{\frac{1}{3!}\,\frac{2}{y^3}\cdot(x-3)^3} \\ = \lg 3 + \frac{x-3}{3} - \frac{(x-3)^2}{18} + \boxed{\frac{(x-3)^3}{2y^3}}. \end{cases}$$

resto $\quad y \in]3, x[$

N.B. Per ogni $x \in]0, +\infty[$ $\exists\, y \in]3, x[$ tale che valga $(*)$.

2) $e^x = e^{x-x_0+x_0} = e^{x-x_0} \cdot e^{x_0} \quad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}.$

Perciò, posto $z = x - x_0$, si ha

$$e^x = e^z \cdot e^{x_0} \quad e \quad x \to x_0 \Rightarrow z \to 0.$$

Ne segue che posso usare $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \boxed{\frac{e^y}{3!} z^3}$

Perciò $e^x = e^{x_0} \cdot e^{\overbrace{x-x_0}^{=z}}$

$$= e^{x_0}\left(1 + (x-x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} + \frac{e^y}{3!} \cdot (x-x_0)^3\right)$$

N.B. $y \in]0, x-x_0[\iff 0 < y < x - x_0 \iff x_0 + y \in]x_0, x[$

Perciò $e^{x_0} = e^{x_0} + e^{x_0}(x-x_0) + e^{x_0}\frac{(x-x_0)^2}{2} + \boxed{\frac{e^{x_0+y}}{6} \cdot (x-x_0)^3}$

Alternativamente ...

$De^x = e^x$ e quindi per ogni $x \in \mathbb{R}$ $\exists w \in]x_0, x[$ t.c.

$$e^x = e^{x_0} + e^{x_0}(x-x_0) + e^{x_0}\frac{(x-x_0)^2}{2} + \boxed{\frac{e^w}{3!}(x-x_0)^3} .$$

$$w \in]x_0, x[$$

3) $D \sin x = \cos x$, $D \cos x = -\sin x$ etc.

Il calcolo si può fare perciò direttamente.

Oppure, come in (2), facciamo così:

$$\sin x = \sin(x - x_0 + x_0) = \text{"}\sin(\underbrace{x-x_0}_{y})\text{"} \cdot \cos x_0 + \sin x_0 \text{"}\cos(\underbrace{x-x_0}_{y})\text{"}$$

↑ formula di somma del sin

$x \to x_0 \iff y \to 0$

Per concludere si possono usare gli sviluppi di sin e cos in 0

$$\begin{cases} \cos y = 1 - \dfrac{y^2}{2} + O(y^3) \\ \sin y = y - \underbrace{\dfrac{y^3}{3!} + o(y^3)}_{= O(y^3)} \end{cases} \quad \text{per } y \to 0$$

Perciò:

$$\sin x = \cos x_0 \left(y + O(y^3) \right) + \sin x_0 \cdot \left(1 - \frac{y^2}{2} + O(y^3) \right)$$

$$= \sin x_0 + \cos x_0 \cdot y - \frac{\sin x_0}{2} \cdot y^2 + \boxed{O(y^3)} \qquad y = x - x_0 \to 0 \text{ per } x \to x_0$$

$(y = x - x_0)$

N.B. L'espressione del resto si può rendere più precisa:

$$D^3 \sin x = D^2 \cos x = D(-\sin x) = -\cos x \Rightarrow$$

$$\text{Resto}(x) = -\frac{\cos W}{3!} \cdot (x - x_0)^3.$$