

SUCCESSIONI: esercizi

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{3n^2 - 2n - 4}_{= a_n}$$

Sol. $a_n = 3n^2 - 2n - 4 = 3n^2 \left(1 - \frac{2}{3n} - \frac{4}{3n^2}\right)$

Dato che $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$ si ha

$$a_n = 3n^2 \underbrace{\left(1 + o(1)\right)}_{\substack{\rightarrow 1 \\ n \rightarrow +\infty}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} -2n^3 + n - 3$$

Sol. $a_n = -2n^3 + n - 3 = -2n^3 \left(1 - \frac{n}{2n^2} + \frac{3}{2n^3}\right)$

Dato che $\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$, allora

$$a_n = -2n^3 \left(1 + o(1)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty.$$

Osservazione:

In generale se $a_n = \sum_{j=0}^p \alpha_j n^j$, ossia

a_n = polinomio di grado p nell'indeterminata n , si ha che il limite sarà dipendente dal segno di α_p (coeff. del termine di grado massimo).

$$\begin{aligned} \text{Infatti } \sum_{j=0}^p \alpha_j n^j &= \alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_p n^p = \\ &= \alpha_p n^p \left(1 + \frac{\alpha_{p-1}}{\alpha_p n} + \dots + \frac{\alpha_0}{\alpha_p n^p} \right). \end{aligned}$$

Però se $\alpha_p > 0$ si ha $\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

$$\lim_n a_n = +\infty.$$

Se invece $\alpha_p < 0$, allora $\lim_n a_n = -\infty$. \square

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2}.$$

Sol. $a_n = \frac{n+1}{n+2} = \frac{\cancel{n} (1 + \frac{1}{n})}{\cancel{n} (1 + \frac{2}{n})}$, è dato che

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0, \text{ si ha } a_n = \frac{1+o(1)}{1+o(1)} \sim 1.$$

$$\text{cioè } \lim_n a_n = 1$$

$$4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n^2+2}$$

Sol. $a_n = \frac{n-1}{n^2+2} = \frac{\cancel{n} (1 - \frac{1}{n})}{n^2 (1 + \frac{2}{n^2})}$.

Dato che $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$ (per $n \rightarrow \infty$), si ha

$$a_n = \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1+o(1)}{1+o(1)} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

\swarrow \searrow
 0 1

Quindi $\lim_n a_n = 0.$

(*) Osservazione . Supponiamo che

$$a_n = \frac{\sum_{k=0}^q \alpha_k n^k}{\sum_{h=0}^p \beta_h n^h} . \quad \text{Cioè } a_n \text{ è una}$$

funzione (in n) "razionale" (quoziente di polinomi in n). Allora si mette in evidenza, a numeratore e a denominatore, il termine di grado massimo. Cioè:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\alpha_q n^q \left(1 + \frac{\alpha_{q-1} n^{q-1}}{\alpha_q n^q} + \dots + \frac{\alpha_0}{\alpha_q n^q} \right)}{\beta_p n^p \left(1 + \frac{\beta_{p-1}}{\beta_p n} + \dots + \frac{\beta_0}{\beta_p n^p} \right)} = \\ &= \frac{\alpha_q}{\beta_p} \cdot n^{q-p} \cdot \boxed{\frac{1 + o(1)}{1 + o(1)}} . \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Se } q > p, \lim_n a_n = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases} \quad \frac{\alpha_q}{\beta_p} \gtrless 0 \\ \text{Se } q < p, \lim_n a_n = 0 . \\ \text{Se } q = p, \lim_n a_n = \frac{\alpha_p}{\beta_p} \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Es.5 $a_n = \frac{n^4 + 3n^2}{n^4 + 2n^3}$ $\lim_n a_n = 1.$

Sol.
In fatti $a_n = \frac{\cancel{n^4} (1 + \frac{3}{n})}{\cancel{n^4} (1 + \frac{2}{n})} = \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} \sim 1.$

Es.6 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 + n^3 + 2}{\sqrt{2}n + 3n^3}$

Sol. $a_n = \frac{\cancel{n^4} (1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^4})}{3\cancel{n^3} (1 + \frac{\sqrt{2}}{3n^2})} = \frac{n}{3} \cdot \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)}$

Cioè $a_n \sim \frac{n}{3}$. Quindi $a_n \rightarrow +\infty.$

Es.7 $\lim_n a_n$, dove $a_n = \frac{n^3}{2n^2(n+1)}$.

Sol. $a_n = \frac{\cancel{n^3}}{2\cancel{n^3} (1 + \frac{1}{n})} = \frac{1}{2(1 + o(1))} \sim \frac{1}{2}$

Cioè $\lim_n a_n = \frac{1}{2}.$

Es. 8 $\lim_n \frac{(n+1)(n^3+1)}{n^2+3n+1}$

Sol. $a_n = \frac{n^4 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} =$

$$= n^2 \left[\frac{(1+o(1))(1+o(1))}{(1+o(1))} \right]$$

$n \rightarrow +\infty$
 \searrow
 1

Quindi $a_n \sim n^2$ e si ha

$$\lim a_n = +\infty$$

Es. 9 $\lim_n \frac{(2n+1)(3n^2-n^3+3)}{(n^2+2n+2)\left(\frac{n}{2}+1\right)}$

Sol. $a_n = \frac{2n \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \left[-n^3 \left(1 - \frac{3}{n} - \frac{3}{n^3}\right)\right]}{n^2 \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}\right) \cdot \frac{n}{2} \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)} =$

$$= \frac{-2n^4 (1+o(1))}{\frac{n^3}{2} (1+o(1))} = -4n \left(\frac{1+o(1)}{1+o(1)} \right)$$

$n \rightarrow +\infty$
 \searrow
 1

Quindi $a_n \sim -4n$ e $\lim a_n = -\infty$.

Le "tecniche" usate si applicano anche ai seguenti:

Es. 10 $\lim_n \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n}}$.

Sol. $a_n = \frac{\sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right)}{n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}} - \sqrt{\frac{1}{n}} \right)} =$
 $= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\overset{\nearrow 1}{\sqrt{1+o(1)}}}{\left(\underset{\searrow 1}{\sqrt{1+o(1)}} + \underset{\searrow 0}{\sqrt{o(1)}} \right)} =$
 $= \frac{1}{\sqrt{n}} (1+o(1))^{-1} . \quad \text{cioè} \quad a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$

Quindi $\lim_n a_n = 0$

Es. 11 $\lim_n \frac{\sqrt{2+n^2}}{2n+3}$.

$$a_n = \frac{n \sqrt{1 + 2/n^2}}{2n(1 + 3/2n)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\overset{\nearrow 1}{\sqrt{1+o(1)}}}{1+o(1)} \right) \sim \frac{1}{2} .$$

cioè $\lim a_n = \frac{1}{2} .$

Es. 12 Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_n \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, (b) $\lim_n \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$

(c) $\lim_n \sqrt{2n+3} - \sqrt{3n}$, (d) $\lim_n \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}$.

Soluzioni

(a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$
 $= \frac{\cancel{n+1} - \cancel{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

In fatti $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} = \sqrt{n} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right)$
 $= \sqrt{n} (1 + o(1)) \quad (n \rightarrow +\infty)$

Quindi $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

(c) $a_n = \sqrt{2n+3} - \sqrt{3n} = \frac{3-n}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{3n}} =$
 $= \frac{-n \left(1 - \frac{3}{n}\right)}{\sqrt{3n} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{n}}\right)} = -\frac{n}{\sqrt{3} \sqrt{n}} \cdot \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} = -\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{3}} (1 + o(1)) \rightarrow -\infty$

$\frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$

$$(b) \quad a_n = \frac{\left((n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}\right) \left((n+1)^{\frac{2}{3}} + (n+1)^{\frac{1}{3}} n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}}\right)}{(n+1)^{\frac{2}{3}} + (n+1)^{\frac{1}{3}} n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{n+1 - n}{(n+1)^{\frac{2}{3}} + (n+1)^{\frac{1}{3}} n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}}}.$$

Dato che ogni addendo del denominatore
 tende a $+\infty$, a_n deve essere infinitesima.

Quindi $\lim a_n = 0$.

NB $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

(d) Si risolve, ad esempio, usando le stesse
 idee di (a) e (b). Il risultato è
 $\lim a_n = +\infty$.

Esercizio Calcolare i seguenti limiti (se \exists).

a) $\lim_n (-1)^n \frac{n}{n+1}$

b) $\lim_n \frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{n}$

c) $\lim_n \frac{n^{(-1)^n}}{n^{3/2}}$

Sol: (a) $\begin{cases} a_{2n} = (-1)^{2n} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \sim 1 \\ a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = -\frac{2n+1}{2n+2} \sim -1 \end{cases}$

Cioè esistono limiti differenti per le sotto-sequenze a_{2n} e a_{2n+1} . Cioè a_n non converge (\nexists limite).

(b) Ricordare che $[x]$ = "parte intera".

Si ha $\frac{n-1}{2} \leq \left[\frac{n}{2}\right] \leq \frac{n}{2}$.

Perciò $\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2n}\right)^0 \leq \frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{n} \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N},$

Allora per il Thm. dei 2 carabinieri,

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

(C) Si ha che $n^{(-1)^n} = n$ se n è pari,

$n^{(-1)^n} = \frac{1}{n}$ se n è dispari. Perciò

$$\frac{1}{n \cdot n^{3/2}} \leq \frac{n^{(-1)^n}}{n^{3/2}} \leq \frac{n}{n^{3/2}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{n^{5/2}} \leq a_n \leq \frac{1}{n^{1/2}}. \quad \text{Perciò (2 carabinieri)}$$

dato che $\frac{1}{n^{1/2}}, \frac{1}{n^{5/2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, allora

$$\lim a_n = 0.$$

CRITERIO DEL RAPPORTO

Proposizione: Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n > 0$ e

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l. \quad \text{Allora}$$

- 1) se $l > 1$, $\lim_n a_n = +\infty$
- 2) se $l \in [0, 1[$ allora $\lim_n a_n = 0$.

Dimostrazione. Sia $l > 1$ e sia $\varepsilon > 0$ t.c.

$$l - \varepsilon > 1. \quad \text{Allora } \exists \bar{n} \text{ t.c. } \frac{a_{n+1}}{a_n} > \underbrace{l - \varepsilon}_{=: M}$$

per ogni $n > \bar{n}$. Ma allora

$$a_{n+1} > M a_n \quad \forall n > \bar{n}.$$

$$\text{Quindi } a_{\bar{n}+2} > M a_{\bar{n}+1}, a_{\bar{n}+3} > M^2 a_{\bar{n}+1}, \dots,$$

$$a_{\bar{n}+m} > M^{m-1} a_{\bar{n}+1}. \quad \forall m \geq 2.$$

La successione $b_m = a_{\bar{n}+m}$ deve divergere.

$$\text{Infatti } b_m > M^{m-1} a_{\bar{n}+1} \quad \text{e} \quad M^{m-1} \rightarrow +\infty.$$

$$\text{Allora } b_m \rightarrow +\infty.$$

Se $l \in [0, 1[$ sia $\varepsilon > 0$ tale che $\underbrace{l + \varepsilon}_{M :=} < 1$

Allora $\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n > \bar{n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \underbrace{l + \varepsilon}_{M} = M .$$

Quindi $\frac{a_{\bar{n}+2}}{a_{\bar{n}+1}} < M \Rightarrow a_{\bar{n}+2} < M \cdot a_{\bar{n}+1} ,$

$$a_{\bar{n}+3} < M a_{\bar{n}+2} < M^2 a_{\bar{n}+1} , \dots ,$$

$$a_{\bar{n}+m} < M^{m-1} \cdot a_{\bar{n}+1} . \quad \text{Posto } b_m = a_{\bar{n}+m},$$

si ha che $b_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$. Infatti

$$0 \leq b_m < M^{m-1} \cdot a_{\bar{n}+1} . \quad \text{Quindi } b_m \rightarrow 0 \text{ e}$$
$$\downarrow m \rightarrow +\infty$$
$$0$$

perciò $a_n \rightarrow 0$.

Questa proposizione è molto utile nella pratica.

Applicazioni del CRITERIO del RAPPORTO

Es 1) Sia $\alpha > 0$. Calcolare

$$\lim_n \frac{n^\alpha}{h^n} \quad (h \in \mathbb{R}_+).$$

$$\begin{aligned} \text{Sol.} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^\alpha}{h^{n+1}} \cdot \frac{h^n}{n^\alpha} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{h} = \\ &= \left(1 + \underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{\substack{\nearrow n \rightarrow +\infty \\ 0}}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{h} = (1 + o(1))^\alpha \cdot \frac{1}{h} = \end{aligned}$$

$$\text{Quindi} \quad \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{h} (= l)$$

$$\begin{cases} \text{Se } h > 1 \text{ allora } 0 < l < 1 \text{ e } \lim a_n = 0. \\ \text{Se } h \in]0, 1[\text{ allora } l > 1 \text{ e } \lim a_n = +\infty. \end{cases}$$

$$\text{Es 2)} \quad \lim_n \frac{h^n}{n!} \quad (h \in \mathbb{R}_+).$$

$$\text{Sol.} \quad a_n = \frac{h^n}{n!}, \quad \text{quindi} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{h^n}.$$

Perciò $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{h}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Quindi

$$\lim_n a_n = 0.$$

Es. 3 $\lim_n \frac{\alpha^n}{n^\beta}$ (con $\alpha > 1$ e $\beta > 0$).

Sol. $a_n = \frac{\alpha^n}{n^\beta}$ allora $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^\beta} \cdot \frac{n^\beta}{\alpha^n} =$

$$= \underbrace{\alpha}_{>1} \cdot \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^\beta}_{\downarrow \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha > 1.$$

Perciò $\lim a_n = +\infty$.

Es. 4 $\lim_n \frac{n^\beta}{n!}$ ($\beta > 0$).

Sol. $a_n = \frac{n^\beta}{n!}$ e quindi $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^\beta}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^\beta} =$

$$= \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^\beta}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0. \text{ Perciò } a_n \rightarrow 0.$$

Es.5 $\lim_n \frac{n^n}{n!}$

Sol. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} =$
 $= (n+1)^n \cdot \frac{1}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$
 $= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e > 1$

Perciò $\lim a_n = +\infty$.

Questo esercizio dice che $n! = o(n^n)$ per $n \rightarrow +\infty$.

SUCCESIONI PER RICORRENZA

Es.

Sia $\{a_n\}$ definita come

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2\sqrt{a_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Studiare il comportamento di $\{a_n\}$.

Sol. $a_0 = 1, \quad a_1 = 2\sqrt{1} = 2, \quad a_2 = 2\sqrt{2}, \dots,$
 $a_{n+1} = 2^{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}}.$

N.B. Se $\exists \lim a_n = l$, allora deve essere

$$\lim_n (a_{n+1}) = \lim_n 2\sqrt{a_n} \Leftrightarrow$$

$$l = 2\sqrt{l} \quad \Leftrightarrow \quad l^2 = 4l \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{l=4}.$$

Cioè, se \exists , allora $l=4$. Ma esiste?

Osservare che

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \Leftrightarrow$$

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \leq 2.$$

Quindi $0 < a_n \leq 2^2 = 4$.

Quindi $0 \leq a_n \leq 4$ e $\{a_n\}$ è limitata.

Vediamo che $a_n \nearrow$ (monotona crescente).

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2\sqrt{a_n}}{a_n} = \frac{2}{\sqrt{a_n}}. \quad \text{Se, per assurdo,}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \text{ allora } \frac{2}{\sqrt{a_n}} < 1 \Leftrightarrow 2 < \sqrt{a_n}$$

$$\Leftrightarrow 4 < a_n \text{ che è assurdo } (a_n \leq 4).$$

Perciò è vero che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Cioè $a_n \nearrow$ e perciò $\exists \lim_n a_n$.

Dato che $\exists \lim a_n = l$, e abbiamo visto che se $\exists l$ allora esso vale 4, si conclude che

$$\lim a_n = 4.$$

Esercizio Dimostrare che

$$\lim_n \sqrt[n]{\alpha} = 1 \quad (\alpha \in \mathbb{R}_+)$$

Soluzione. N.B. Usare la disug. di Bernoulli,

Se $\alpha = 1$ non c'è niente da dimostrare.

Sia $\alpha > 1$. Allora $\sqrt[n]{\alpha} > 1$ e posto

$$b_n \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[n]{\alpha} - 1 \quad \text{si ha } b_n > 0 \text{ e}$$

$$\alpha = (1 + b_n)^n \geq 1 + n b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(Bernoulli)

Perciò si trova $0 < b_n \leq \frac{\alpha - 1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Allora $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ (Thm 2 Cauchy-Weyl).

Quindi $\lim_n \sqrt[n]{\alpha} = 1$.

Osservazione .

A partire dal limite $\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$,
si dimostra che :

$$(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad \boxed{\lim_n \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a}$$

$$\text{Ad es.} \quad \lim_n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e} .$$

$$\text{Oppure} \quad \lim_n \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = e^3 .$$

Esercizio $\lim_n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Sol. Infatti} \quad a_n &= \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n}} = \\ &= \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} . \end{aligned}$$

Dato che $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \rightarrow e$, allora

$$\lim_n a_n = \lim_n e^{\frac{1}{n}} = 1 .$$

Esercizio Dimostrare che $\lim_n \frac{4n}{n+2} = 4$.

Soluzione. Si tratta di usare la definizione di limite:

$$(\star) \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \forall n (n > \bar{n} \Rightarrow |a_n - 4| < \varepsilon).$$

Sia quindi $\varepsilon > 0$. Si ha

$$\left| \frac{4n}{n+2} - 4 \right| = 4 \left| \frac{-2}{n+2} \right| = \frac{8}{n+2} \stackrel{(\star)}{<} \varepsilon$$

$$(*) \text{ se } 8 < (n+2)\varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{8}{\varepsilon} - 2.$$

Perciò se $\bar{n} \geq \frac{8}{\varepsilon} - 2$, allora vale (\star) .

Esercizio Dimostrare che $\lim_n (\sqrt{n} - 2n) = -\infty$.

Soluzione: $\forall M \exists \bar{n}: n > \bar{n} \Rightarrow a_n < M, (\star)$

$$\sqrt{n} - 2n = \sqrt{n} \underbrace{(1 - 2\sqrt{n})}_{\leq -1} \leq -\sqrt{n} \stackrel{?}{<} M \quad \forall n \geq 1.$$

$$\text{Se } -\sqrt{n} < M \text{ allora } \sqrt{n} > -M \quad (\Leftrightarrow n > M^2).$$

Perciò se $\bar{n} \geq M^2$ allora vale (\star) .