

SUCCESSIONI : esercitazioni

1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{3n^2 - 2n - 4}_{= a_n}$

Sol. $a_n = 3n^2 - 2n - 4 = 3n^2 \left(1 - \frac{2}{3n} - \frac{4}{3n^2}\right)$

Dato che $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$ si ha

$$a_n = 3n^2 \underbrace{\left(1 + o(1)\right)}_{\substack{\rightarrow 1 \\ n \rightarrow +\infty}} \rightarrow +\infty .$$

2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2n^3 + n - 3$

Sol. $a_n = -2n^3 + n - 3 = -2n^3 \left(1 - \frac{n}{2n^2} + \frac{3}{2n^3}\right)$

Dato che $\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$, allora

" $a_n = -2n^3 \left(1 + o(1)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty .$

Osservazione :

In generale se $a_n = \sum_{j=0}^p \alpha_j n^j$, ossia
 a_n = polinomio di grado p nell'indeterminata
 n , si ha che il limite sarà dipendente
dal segno di α_p (coeff. del termine di
grado massimo).

Infatti $\sum_{j=0}^p \alpha_j n^j = \alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_p n^p =$
 $= \alpha_p n^p \left(1 + \underbrace{\frac{\alpha_{p-1}}{\alpha_p n} + \dots + \frac{\alpha_0}{\alpha_p n^p}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} \right)$.

Perciò se $\alpha_p > 0$ si ha

$$\lim_n a_n = +\infty.$$

Se invece $\alpha_p < 0$, allora $\lim_n a_n = -\infty$. \square

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2} .$$

$\underbrace{\frac{n+1}{n+2}}_{=a_n}$

Sol. $a_n = \frac{n+1}{n+2} = \frac{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})}{\cancel{n}(1+\frac{2}{n})}$, e' obiettivo

$\frac{1}{n} \rightarrow 0$, si ha $a_n = \frac{1+O(1)}{1+O(1)} \sim 1$.

cioe' $\lim_n a_n = 1$

$$4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n^2+2}$$

Sol. $a_n = \frac{n-1}{n^2+2} = \frac{\cancel{n}(1-\frac{1}{n})}{\cancel{n}^2(1+\frac{2}{n^2})}$.

Dato che $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$ (per $n \rightarrow \infty$), si ha

$$a_n = \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1+O(1)}{1+O(1)} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 .$$

0 1

Quindi $\lim_n a_n = 0$.

(*) Osservazione. Supponiamo che

$$a_n = \frac{\sum_{k=0}^q \alpha_k n^k}{\sum_{h=0}^p \beta_h n^h}. \quad \text{cioè } a_n \text{ è una}$$

funzione (in n) "razionale" (quoziente di polinomi in n). Allora si mette in evidenza, a numeratore e a denominatore, il termine di grado massimo. Cioè:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\alpha_q n^q \left(1 + \frac{\alpha_{q-1} n^{q-1}}{\alpha_q n^q} + \dots + \frac{\alpha_0}{\alpha_q n^q} \right)}{\beta_p n^p \left(1 + \frac{\beta_{p-1}}{\beta_p n} + \dots + \frac{\beta_0}{\beta_p n^p} \right)} = \\ &= \frac{\alpha_q}{\beta_p} \cdot n^{q-p} \cdot \boxed{\frac{1 + o(1)}{1 + o(1)}}. \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Se } q > p, \lim_n a_n = \begin{cases} +\infty & \frac{\alpha_q}{\beta_p} \geq 0 \\ -\infty & \frac{\alpha_q}{\beta_p} < 0 \end{cases} \\ \text{Se } q < p, \lim_n a_n = 0. \\ \text{Se } q = p, \lim_n a_n = \frac{\alpha_p}{\beta_p} \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$$\underline{\text{E.S.5}} \quad a_n = \frac{n^4 + 3n^2}{n^4 + 2n^3} \quad \lim_n a_n = 1.$$

Sol. Infatti $a_n = \frac{n^4 \left(1 + \frac{3}{n}\right)}{n^4 \left(1 + \frac{2}{n}\right)} = \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} \sim 1.$

$$\underline{\text{E.S.6}} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 + n^3 + 2}{\sqrt{2}n + 3n^3}$$

Sol. $a_n = \frac{n^4 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^4}\right)}{3n^3 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{3n^2}\right)} = \frac{n}{3} \cdot \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)}$

Cioè $a_n \sim \frac{n}{3}$. Quindi $a_n \rightarrow +\infty$.

$$\underline{\text{E.S.7}} \quad \lim_n a_n, \text{ dove } a_n = \frac{n^3}{2n^2(n+1)}.$$

Sol. $a_n = \frac{n^3}{2n^3 \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2(1 + o(1))} \sim \frac{1}{2}$

Cioè $\lim_n a_n = \frac{1}{2}$.

$$\text{E.s.8} \quad \lim_n \frac{(n+1)(n^3+1)}{n^2 + 3n + 1}$$

$$\begin{aligned}\text{Sol.} \quad a_n &= \frac{n^4 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \\ &= n^2 \underbrace{\left[\frac{\left(1 + o(1)\right) \left(1 + o(1)\right)}{\left(1 + o(1)\right)} \right]}_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ \downarrow 1}}.\end{aligned}$$

Quindi $a_n \sim n^2$ e si ha

$$\lim a_n = +\infty$$

$$\text{E.s.9} \quad \lim_n \frac{(2n+1)(3n^2-n^3+3)}{(n^2+2n+2)\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

$$\begin{aligned}\text{Sol.} \quad a_n &= \frac{2n \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \left[-n^3 \left(1 - \frac{3}{n} - \frac{3}{n^3}\right)\right]}{n^2 \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}\right) \cdot \frac{n}{2} \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)} = \\ &= -\frac{2n^4 \left(1 + o(1)\right)}{\frac{n^3}{2} \left(1 + o(1)\right)} = -4n \underbrace{\left(\frac{1 + o(1)}{1 + o(1)}\right)}_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ \downarrow 1}}\end{aligned}$$

Quindi $a_n \sim -4n$ e $\lim a_n = -\infty$.

Le "tecniche" usate in applicano anche ai seguenti:

$$\underline{\text{E.s.10}} \quad \lim_n \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n}} .$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{Sot.}} \quad a_n &= \frac{\sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right)}{n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}} - \sqrt{\frac{1}{n}} \right)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{1 + o(1)} \xrightarrow{1}}{\left(\sqrt{1 + o(1)} + \sqrt{o(1)} \right)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} (1 + o(1)) \xrightarrow[0]{1}. \quad \text{cioè} \quad a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Quindi $\lim_n a_n = 0$

$$\underline{\text{E.s.11}} \quad \lim_n \frac{\sqrt{2+n^2}}{2n+3} .$$

$$a_n = \frac{n \sqrt{1 + 2/n^2}}{2n(1 + 3/2n)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + o(1)}}{1 + o(1)} \right) \xrightarrow[0]{1} \frac{1}{2} .$$

Cioè $\lim a_n = \frac{1}{2} .$

Esercizio 12 Calcolare i seguenti limiti:

$$(a) \lim_n \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad (b) \lim_n \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$$

$$(c) \lim_n \sqrt{2n+3} - \sqrt{3n}, \quad (d) \lim_n \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}$$

Soluzioni

$$\begin{aligned} (a) \quad a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \\ &= \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Infatti } \sqrt{n+1} + \sqrt{n} &= \sqrt{n} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right) \\ &= \sqrt{n} \left(1 + o(1) \right) \quad (n \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

$$\text{Quinow } a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

$$\begin{aligned} (c) \quad a_n = \sqrt{2n+3} - \sqrt{3n} &= \frac{3-n}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{3n}} = \\ &= \frac{-n \left(1 - \frac{3}{n} \right)}{\sqrt{3n} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{n}} \right)} = -\frac{n}{\sqrt{3} \sqrt{n}} \cdot \frac{1+o(1)}{1+o(1)} = -\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{3}} \left(1 + o(1) \right) \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

$$\frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

$$(b) \quad a_n = \frac{(n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}}{(n+1)^{\frac{2}{3}} + (n+1)^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}}} \\ = \frac{n+1 - n}{(n+1)^{\frac{2}{3}} + (n+1)^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}}}.$$

Dato che ogni addendo del denominatore
tende a $+\infty$, a_n deve essere infinitesima.

Oppure $\lim a_n = 0$.

NB $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

(d) si risolve, ad esempio, moltiplicando le stesse
espressioni di (a) e (b). Il risultato è
 $\lim a_n = +\infty$.

Esercizio Calcolare i seguenti limiti (se f).

a) $\lim_n (-1)^n \frac{n}{n+1}$

b) $\lim_n \frac{\left[\frac{n}{2} \right]}{n}$

c) $\lim_n \frac{n^{(-1)^n}}{n^{3/2}}$

Sol: (a)
$$\begin{cases} a_{2n} = (-1)^{2n} \frac{2n}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \sim 1 \\ a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} \frac{2n+1}{2n+2} = -\frac{2n+1}{2n+2} \sim -1 \end{cases}$$

Cioè esistono limiti differenti per le sotto-successioni a_{2n} e a_{2n+1} . Cioè a_n non converge (non ha limite).

(b) Ricordare che $\left[x \right] = \text{"parte intera"}$.

Si ha $\frac{n-1}{2} \leq \left[\frac{n}{2} \right] \leq \frac{n}{2}$.

Perciò $\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2n} \right)^0 \leq \frac{\left[\frac{n}{2} \right]}{n} \leq \frac{1}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

Allora per il Thm. dei 2 Criteri inferi,

$$\underline{\overline{a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\cdot} \frac{1}{2}}}.$$

(C) Si ha che $n^{(-1)^n} = n$ se n è pari,

$n^{(-1)^n} = \frac{1}{n}$ se n è dispari. Perciò

$$\frac{1}{n \cdot n^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{n^{(-1)^n}}{n^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{n}{n^{\frac{3}{2}}} \iff$$

$$\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} \leq a_n \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}. \quad \text{Perciò [2 criteri inferi]}$$

dato che $\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\cdot} 0$, allora

$$\lim a_n = 0.$$

CRITERIO DEL RAPPORTO

Proposizione: Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n > 0$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l. \quad \text{Allora}$$

1) se $l > 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

2) se $l \in [0, 1]$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Dimostrazione. Sia $l > 1$ e sia $\varepsilon > 0$ t.c.

$$l - \varepsilon > 1. \quad \text{Allora } \exists \bar{n} \text{ t.c. } \frac{a_{n+1}}{a_n} > \underbrace{l - \varepsilon}_{=: M}$$

per ogni $n > \bar{n}$. Ma allora

$$a_{n+1} > M a_n \quad \forall n > \bar{n}.$$

Quindi $a_{\bar{n}+2} > M a_{\bar{n}+1}$, $a_{\bar{n}+3} > M^2 a_{\bar{n}+1}$, ...

$$a_{\bar{n}+m} > M^{m-1} a_{\bar{n}+1}. \quad \forall m \geq 2.$$

La successione $b_m = a_{\bar{n}+m}$ deve divergere.

Infatti $b_m > M^{m-1} a_{\bar{n}+1}$ e $M^{m-1} \rightarrow +\infty$.

Allora $b_m \rightarrow +\infty$.

Se $\ell \in [0,1[$ ma $\varepsilon > 0$ tale che $\frac{\ell + \varepsilon}{M} < 1$

Allora $\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n > \bar{n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \underbrace{\ell + \varepsilon}_M .$$

Quindi $\frac{a_{\bar{n}+2}}{a_{\bar{n}+1}} < M \Rightarrow a_{\bar{n}+2} < M \cdot a_{\bar{n}+1} ,$

$$a_{\bar{n}+3} < M a_{\bar{n}+2} < M^2 a_{\bar{n}+1} , \dots ,$$

$$a_{\bar{n}+m} < M^{m-1} \cdot a_{\bar{n}+1} . \text{ Posto } b_m = a_{\bar{n}+m},$$

si ha che $b_m \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} 0$. Infatti:

$$0 \leq b_m < M^{m-1} \cdot a_{\bar{n}+1} . \text{ Quindi } b_m \rightarrow 0 \text{ e}$$
$$\downarrow m \rightarrow +\infty$$
$$0$$

$$\text{perciò } a_n \rightarrow 0 .$$

Questa proposizione è molto utile nella pratica.

Applicazioni del CRITERIO del RAPPORTO

Ese-1) Sia $\alpha > 0$. Calcolare

$$\lim_n \frac{n^\alpha}{h^n} \quad (h \in \mathbb{R}_+).$$

$$\begin{aligned} \text{Sol. } \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^\alpha}{h^{n+1}} \cdot \frac{h^n}{n^\alpha} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{h} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{h} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1 + 0(1) \cdot \frac{1}{h} \end{aligned}$$

Quindi $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{h} (= l)$

$$\begin{cases} \text{Se } h > 1 \text{ allora } 0 \leq l < 1 \text{ e } \lim a_n = 0. \\ \text{Se } h \in]0, 1[\text{ allora } l > 1 \text{ e } \lim a_n = +\infty. \end{cases}$$

Ese-2) $\lim_n \frac{h^n}{n!} \quad (h \in \mathbb{R}_+).$

Sol. $a_n = \frac{h^n}{n!}$, quindi $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{h^{n+1}}{n+1!} \cdot \frac{n!}{h^n}.$

Percio' $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{h}{h+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Quindi

$$\lim_n a_n = 0.$$

E.s. 3 $\lim_n \frac{\alpha^n}{n^\beta}$ (con $\alpha > 1$ e $\beta > 0$) .

Sol. $a_n = \frac{\alpha^n}{n^\beta}$ allora $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^\beta} \cdot \frac{n^\beta}{\alpha^n} =$

$$= \underbrace{\alpha}_{>1} \cdot \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^\beta}_{\substack{\downarrow \\ n \rightarrow +\infty}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha > 1.$$

Percio' $\lim a_n = +\infty$.

E.s. 4 $\lim_n \frac{n^\beta}{n!}$ ($\beta > 0$) .

Sol. $a_n = \frac{n^\beta}{n!}$ e quindi $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^\beta}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^\beta} =$

$$= \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^\beta}_{\substack{\rightarrow 1}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\substack{\rightarrow 0}} \longrightarrow 0. \text{ Perciò } a_n \rightarrow 0.$$

Es.5 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!}$

Sol.
$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n^n}} = \\ &= (n+1)^n \cdot \frac{1}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e > 1\end{aligned}$$

Perciò $\lim a_n = +\infty$.

Questo esercizio dice che $n! = o(n^n)$ per $n \rightarrow \infty$.

SUCCESSIONI PER RICORRENZA

Es.

Sia $\{a_n\}$ definita come

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2 \sqrt{a_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Studiare il comportamento di $\{a_n\}$.

Sol. $a_0 = 1, a_1 = 2\sqrt{1} = 2, a_2 = 2\sqrt{2}, \dots,$
 $a_{n+1} = 2^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^n}}.$

N.B. Se $\exists \lim a_n = l$, allora deve essere

$$\lim_n (a_{n+1}) = \lim_n 2\sqrt{a_n} \Leftrightarrow \\ l = 2\sqrt{l} \Leftrightarrow l^2 = 4l \Leftrightarrow \boxed{l=4}.$$

Cioè, se \exists , allora $l=4$. Ma esiste?

Osservare che

$$(1 - \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}) = (1 - (\frac{1}{2})^{n+1}) \Leftrightarrow \\ 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \leq 2.$$

Quindi: $0 < a_n \leq 2^2 = 4$.

Quindi $0 < a_n \leq 4$ e $\{a_n\}$ è limitata.

Vediamo che $a_n \nearrow$ (monotone crescente).

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2\sqrt{a_n}}{a_n} = \frac{2}{\sqrt{a_n}}. \quad \text{Se , per errore,}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 , \text{ allora } \frac{2}{\sqrt{a_n}} < 1 \Leftrightarrow 2 < \sqrt{a_n}$$

$\Leftrightarrow 4 < a_n$ che è errore (ans4).

Perciò è vero che $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Cioè $a_n \nearrow$ e perciò $\exists \lim_n a_n$.

Dato che $\lim_n a_n = l$, e abbiamo visto che se $\exists l$ allora esso vale 4, si conclude che

$$\lim a_n = 4.$$

Esercizio Dimostrare che

$$\lim_n \sqrt[n]{\alpha} = 1 \quad (\alpha \in \mathbb{R}_+)$$

Soluzione. N.B. Usare la dimostrazione di Bernoulli,

Se $\alpha = 1$ non c'è niente da dimostrare.

Sia $\alpha > 1$. Allora $\sqrt[n]{\alpha} > 1$ e posto

$$b_n \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[n]{\alpha} - 1 \quad \text{si ha } b_n > 0 \quad \text{e}$$

$$\alpha = (1 + b_n)^n > 1 + nb_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \\ (\text{Bernoulli})$$

$$\text{Perciò si trova } 0 < b_n \leq \frac{\alpha-1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Allora $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (Thm 2 Corollari).

Quindi

$$\boxed{\lim_n \sqrt[n]{\alpha} = 1}.$$

Osservazione

A partire dal limite $\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$,
si dimostra che:

$$(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad \boxed{\lim_n \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a}$$

Ad es. $\lim_n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Oppure $\lim_n \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = e^3$.

Esercizio $\lim_n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = 1$.

Sol. Infatti $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n}} =$
 $= \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n^2}}\right]^{\frac{n^2}{n}}$.

Dato che $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \rightarrow e$, allora

$$\lim_n a_n = \lim_n e^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Esercizio Dimostrare che $\lim_n \frac{4n}{n+2} = 4$.

Soluzione: si tratta di usare la definizione di limite:

(*) $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \forall n (n > \bar{n} \Rightarrow |a_n - 4| < \varepsilon)$.

Sia quindi $\varepsilon > 0$. Si ha

$$\left| \frac{4n}{n+2} - 4 \right| = 4 \left| \frac{-2}{n+2} \right| = \frac{8}{n+2} \underset{(*)}{<} \varepsilon$$

$$(*) \text{ Se } 8 < (n+2)\varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{8}{\varepsilon} - 2.$$

Perciò se $\bar{n} \geq \frac{8}{\varepsilon} - 2$, allora vale (*).

Esercizio Dimostrare che $\lim_n (\sqrt{n} - 2n) = -\infty$.

Soluzione: $\forall M \exists \bar{n}: n > \bar{n} \Rightarrow a_n < M$, (*)

$$\sqrt{n} - 2n = \sqrt{n} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}} \right) \leq -\sqrt{n} \underset{?}{<} M \quad \forall n \geq 1.$$

$$\text{Se } -\sqrt{n} \not< M \text{ allora } \sqrt{n} \overset{<-1}{\geq} -M \quad (\Rightarrow n > M^2).$$

Perciò se $\bar{n} \geq M^2$ allora vale (*).