Trovare l'ordine di infinitesimo/infinito delle seguenti funzioni.

1) $f(x) = e^{-x} + \sin x - \cos x$ per $x \to 0$.

Soluzione: Si ha $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ per $y \to 0$,

$\sin x = \underbrace{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)}_{= o(x^2)}$ e $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

per $x \to 0$. Si noti che $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Perciò $f(x) = \underbrace{\cancel{1} \cancel{- x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}_{= e^{-x}} + \underbrace{\cancel{x} + o(x^2)}_{= \sin x} - \underbrace{\left[\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right]}_{= \cos x}$

$= x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + o(x^2) = \underline{x^2 + o(x^2)}$

$= x^2(1 + o(1))$, ossia

$f(x) \sim x^2$ per $x \to 0$.

2) $f(x) = \cos^2 x - \cos(x^a)$, $a \in \mathbb{R}_+$.

Soluzione Si ha $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ $(x \to 0)$.

Perciò $\cos^2 x = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{x^2}{2}\right) + o(x^2)$

$$= 1 - x^2 + o(x^2).$$

N.B. Stiamo approssimando al 2° ordine e per questa ragione nel calcolare il quadrato abbiamo lasciato solo i termini di grado ≤ 2.

D'altra parte, dato che $a > 0$, $x^a \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, e possiamo usare lo sviluppo

$$\cos(x^a) = 1 - \frac{(x^a)^2}{2} + o(x^{2a}) \quad \text{per } x \to 0.$$

Quindi $f(x) = \underbrace{1 - x^2 + o(x^2)}_{= \cos^2 x} - \Big(\underbrace{1 - \frac{x^{2a}}{2} + o(x^{2a})}_{= \cos(x^a)}\Big)$.

La soluzione dipende da a e ci sono 3 casi:

A) $0 < a < 1$. Allora $x^2 = o(x^{2a})$ e perciò

$$f(x) = \frac{x^{2a}}{2} + o(x^{2a}) \quad \text{ossia}$$

$$f(x) \sim \frac{x^{2a}}{2} \quad \text{per } x \to 0.$$

B) $a = 1$. Allora $f(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ e

$$f(x) \sim -\frac{x^2}{2} \quad \text{per } x \to 0.$$

C) $a > 1$. Allora $f(x) = -x^2 + o(x^2)$ e

$$f(x) \sim -x^2 \quad \text{per } x \to 0.$$

N.B. Se $a > 1$ allora $x^{2a} = o(x^2)$ per $x \to 0$.

3) $f(x) = x^x - e^x + x^a \qquad (a \in \mathbb{R})$

Soluzione Ricordare che se $A > 0$ allora $A = e^{\lg A}$.

Si ha $x^x = e^{\lg x^x} = e^{x \lg x}$. Ricordiamo che

$$x^\alpha \lg^\beta x \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \quad \forall \alpha, \beta > 0. \text{ Quindi}$$

$$x \lg x \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \quad e \quad x^x \xrightarrow[x \to 0]{} 1.$$

Poniamo $g(x) = x^x - e^x$. Allora

$$g(x) = [\cancel{1} + x \lg x + o(x \lg x)] - [\cancel{1} + x + o(x)]$$
$$= x \lg x + o(x \lg x) - (x + o(x)).$$

Osservare che $x = o(x \lg x)$ per $x \to 0$.

Infatti $\dfrac{x}{x \lg x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. A maggior ragione

$o(x) = o(x \lg x)$ (cioè lo inglobiamo dentro).

In altre parole $g(x) = x \lg x + o(x \lg x)$
$= x \lg x \, (1 + o(1))$, ossia

$$g(x) \sim x \lg x \qquad \text{per } x \to 0^+$$

D'altra parte ci serve "confrontare" g con x^a.

Si ha
$$\frac{g(x)}{x^a} = \frac{x \lg(x)\,(1+o(1))}{x^a}$$
$$= \frac{\lg x}{x^{a-1}} \cdot (1 + o(1))$$

Ci sono due possibilità:

- $a < 1 \Rightarrow \dfrac{g(x)}{x^a} \sim x^{1-a} \cdot \lg x \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$

- $a \geq 1 \Rightarrow \dfrac{g(x)}{x^a} \sim \dfrac{\lg x}{x^{a-1}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$

4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4 - x^2 + 1} - x^2}{x^2}$ $(x \longrightarrow +\infty)$

Soluzione Per usare lo sviluppo $\sqrt{1+y} \underset{(y\to 0)}{=} 1 + \frac{y}{2} + o(y)$

occorre mettere in evidenza la potenza più grande.

Posto $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$, si ha

$$N(x) = x^2\Big(\sqrt{\underbrace{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}_{=y}} - 1\Big).$$

Usiamo lo sviluppo di $\sqrt{1+y}$ per $y \to 0$.

Si ha $\sqrt{\underbrace{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}_{=y}} = 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) + o\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right).$

Dobbiamo essere più precisi: infatti $\frac{1}{x^4} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

e $o\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ per $x \longrightarrow +\infty$.

Quindi $N(x) = x^2\left\{\left[\cancel{1} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] - \cancel{1}\right\}$ e

$f(x) = -\frac{1}{2x^2}(1 + o(1))$ con $\mathrm{ord}(f) = 2$.

Limiti : Approssimazione polinomiale

1) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - e^{\frac{x}{2}} \lg(1+x)}{\sin x - \lg(1+x)}$$

Soluzione

Poniamo $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$. Inoltre valgono gli sviluppi :

- $\sin x = x - \underbrace{\frac{x^3}{3!} + o(x^3)}_{= o(x^2)}$
- $\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
- $e^{\frac{x}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \underbrace{\frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^3 + o(x^3)}_{= o(x^2)}$

$$N(x) = \sin x - e^{\frac{x}{2}} \lg(1+x)$$
$$= \underbrace{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}\ - \underbrace{\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right)}\underbrace{\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)}$$
$$= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \left\{ \underbrace{x + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{8}} \underbrace{- \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^3}{4}} + \underbrace{\frac{x^3}{3}} + o(x^3) \right\}$$
$$= x^3 \underbrace{\left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)}_{= -\frac{3}{8}} + o(x^3) = x^3 \left(-\frac{3}{8} + o(1)\right) \sim -\frac{3}{8} x^3 .$$

$$D(x) = \sin x - \lg(1+x)$$

$$= \left(x + o(x^2)\right) - \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

$$= \frac{x^2}{2} + o(x^2) = x^2\left(\frac{1}{2} + o(1)\right) \sim \frac{x^2}{2} .$$

Perciò $\quad f(x) = \dfrac{-\frac{3}{8}x^3 \cdot (1+o(1))}{\frac{x^2}{2}(1+o(1))} =$

$$= -\frac{3}{4}x\,(1+o(1))$$

$$\sim -\frac{3}{4}x \qquad \text{per } x \longrightarrow 0$$

Pertanto $\quad \lim_{x\to 0} f(x) = 0 .$

2) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\lg(1+\sin x) - e^{\sin x} + 1}{(\sin x - 1)\,\mathrm{tg}(3x^2)}$.

Soluzione Ricordiamo gli sviluppi $(y \to 0)$:

- $\lg(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \underbrace{\frac{y^3}{3} + o(y^3)}_{=o(y^2)} = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$,

- $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$,

- $\mathrm{tg}\, y = y + o(y)$.

Se $y = \sin x$, si ha: $x \to 0 \Rightarrow \sin x = y \to 0$.

Perciò $N(y) = \lg(1+y) - e^y + 1$ e si trova

$$N(y) = \underbrace{\cancel{y} - \frac{y^2}{2} + o(y^2)}_{\lg(1+y)} - \underbrace{(\cancel{1} + \cancel{y} + \frac{y^2}{2} + o(y^2))}_{e^y} + \cancel{1}$$

$$= y^2\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + o(y^2) = -y^2 + o(y^2)$$

$$= -y^2(1 + o(1)) \quad \text{per } y \to 0 .$$

Pertanto $N(x) = -\sin^2 x\,(1+o(1))$ per $x \to 0$,

ossia $N(x) \sim -\sin^2 x$ per $x \to 0$.

D'altra parte $\sin x - 1 \sim -1$ per $x \to 0$ e

$tg(3x^2) \sim 3x^2$ per $x \to 0$.

Perciò $$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} \sim \frac{-\sin^2 x}{-3x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} +\frac{1}{3},$$

dove si è usato il limite notevole $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

---

3) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^x \operatorname{ch} x}{\cos x - \operatorname{ch} x}$

Soluzione Usiamo gli sviluppi

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
- $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

Poniamo $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$.

Allora $$D(x) = \underbrace{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}_{\cos x} - \underbrace{1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}_{\operatorname{ch} x}$$

$$= -x^2(1+o(1)) \sim -x^2.$$

Sviluppiamo il numeratore :

$$N(x) = \Big(\underbrace{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}_{\cos x}\Big) - \Big(\underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}_{e^x}\Big)\cdot\Big(\underbrace{1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}_{\operatorname{ch} x}\Big)$$

$$= \Big(\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\Big) - \Big\{\cancel{1} + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\Big\}$$

$$= -x + o(x) \qquad \text{per } x \to 0 .$$

N.B. Tutti i termini di 2° grado sono confluiti nel termine $o(x)$.

In conclusione $\displaystyle f(x) = \frac{-x\,(1 + o(1))}{-x^2\,(1 + o(1))} =$

$$= -\frac{1}{x}\,(1 + o(1)) .$$

Quindi $f(x) \sim -\frac{1}{x}$ e $\nexists \lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

4) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x - \cos x \cdot \operatorname{sh} x}{\sin x - \operatorname{sh} x}$

Soluzione Ricordiamo gli sviluppi :

- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)$
- $\operatorname{sh} x = x + \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)$
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

validi per $x \longrightarrow 0$.

Poniamo $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$. Studiamo $N(x)$ per $x \to 0$.

Si ha (per $x \longrightarrow 0$):

$$N(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$$

$$= \left(\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left\{\cancel{x} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right\}$$

$$= x^3\Big(\underbrace{-\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}}_{=\frac{1}{6}}\Big) + o(x^3) = \frac{x^3}{6}\left(1 + o(1)\right) \sim \frac{x^3}{6}.$$

Inoltre

$$D(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$$

$$= -\frac{x^3}{3} + o(x^3) = -\frac{x^3}{3}\left(1 + o(1)\right)$$

$$\sim -\frac{x^3}{3} \quad \text{per } x \to 0 \, .$$

In conclusione

$$f(x) \sim \frac{\frac{x^3}{6}}{-\frac{x^3}{3}} = -\frac{1}{2} \, ,$$ cioè

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\frac{1}{2} \, .$$

5) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(2x) - 4\lg(1+x^2)}{(\cos x - e^{x^2})^2}$.

Soluzione Partiamo dal denominatore $D(x)$:

$D(x) = (\cos x - e^{x^2})^2$. Ricordiamo che

- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $x \to 0$
- $e^y = 1 + y + o(y)$, $y \to 0$.

Perciò $D(x) = \Big[\underbrace{(\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}_{=\cos x} - \underbrace{(\cancel{1} + x^2 + o(x^2))}_{=e^{x^2}}\Big]^2$

$= \left[-\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)\right]^2 = \frac{9}{4}x^4(1+o(1))$

per $x \to 0$. Cioè $\boxed{D(x) \sim \frac{9}{4}x^4}$ $(x\to 0)$.

N.B. $(1+o(1))^2 = 1 + o(1)$.

Ora studiamo il numeratore $N(x)$ per $x \to 0$.

Si ha

$$N(x) = \sin^2(2x) - 4\lg(1+x^2)$$

$$= \left(2x - \frac{(2x)^3}{6} + o(x^3)\right)^2 - 4\left(x^2 - \frac{(x^2)^2}{2} + o(x^4)\right).$$

dove si è usato che $(y \to 0)$:

- $\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + o(y^3)$
- $\lg(1+y) = y - \frac{y^3}{3} + o(y^3)$.

Ora si osservi che dobbiamo sviluppare al 4° ordine, e tutti i termini di grado > 4 confluiranno nell'"o-piccolo" $o(x^4)$:

$$N(x) = 4x^2 - 2(2x)\cdot\frac{8x^3}{6} - 4x^2 + 2x^4 + o(x^4)$$

$$= -\frac{10}{3}x^4 + o(x^4) = -\frac{10}{3}x^4(1+o(1)),$$

cioè $\quad N(x) \sim -\frac{10}{3}x^4 \quad$ per $x \to 0$.

In conclusione

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} \sim \frac{-\frac{10}{3}x^4}{\frac{9}{4}x^4} = -\frac{40}{27} \quad ,$$

cioè $\quad \lim_{x \to 0} f(x) = -\frac{40}{27}$.

---

6) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x^2 + 1} - 2x^2}{x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}$

Soluzione   Studiamo il denominatore $D(x)$ per $x \longrightarrow +\infty$. Sappiamo che

$\sin y \sim y$ per $y \longrightarrow 0^+$. Quindi se

$y = \frac{1}{x}$ allora $y \longrightarrow 0^+$ se $x \longrightarrow +\infty$.

Perciò $\quad D(x) \sim x^3 \cdot \frac{1}{x} = x^2 \quad$ per $x \to +\infty$.

N.B. Per studiare il numeratore $N(x)$ useremo lo sviluppo $\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} + o(y)$ valido per $y \longrightarrow 0$.

Si ha (mettendo in evidenza x^2):

$$N(x) = \sqrt{x^4 - x^2 + 1} - 2x^2 = x^2\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} - 2\right)$$

$$= x^2\left(\sqrt{1 \underbrace{- \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{= y}} - 2\right) =$$

$$= x^2\left(1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) - 2\right) =$$

$$= x^2\left(-1 \underbrace{- \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{= o(1)}\right) \quad \text{per } x \to +\infty .$$

Cioè $N(x) \sim -x^2$ per $x \to +\infty$.

Quindi $f(x) \sim \dfrac{-x^2}{x^2} = -1$, cioè

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1 .$$

N.B. se il numeratore fosse stato $N(x) = \sqrt{x^4 - x^2 + 1} - x^2$, l'approssimazione 1º ordine non sarebbe stata sufficiente.

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\sqrt{1+x+x^2} - \lg(1+e^x)}_{=f(x)}$

Soluzione Per usare gli sviluppi occorre mettere in evidenza i termini di ordine maggiore.

$$f(x) = \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} - \lg\left(e^x(1+e^{-x})\right) =$$

$$= |x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - \left[\lg e^x + \lg(1+e^{-x})\right]$$

se $x \to +\infty$

$$= x\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{=y \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}} - \left[x + \lg(1+\underbrace{e^{-x}}_{\to 0 \ x\to+\infty})\right].$$

Ricordiamo che:

- $\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} + o(y)$ per $y \to 0$
- $\lg(1+y) = y + o(y)$ per $y \to 0$.

Perciò $f(x) = x\left(\cancel{1} + \frac{1}{2x}\left(1+\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x}\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)\right) +$

$$-\left[\cancel{x} + e^{-x} + o(e^{-x})\right] \quad \text{per } x \to +\infty.$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x}\right) + o\left(1+\frac{1}{x}\right) - \left[e^{-x} + o(e^{-x})\right].$$

Si osservi che $e^{-x} = o\left(\frac{1}{x}\right)$ e che $\frac{1}{x} = o(1)$

per $x \longrightarrow +\infty$. Perciò

$$f(x) \sim \frac{1}{2} \quad \left(\text{ossia } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}\right).$$

8) $$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \underbrace{\left(x^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}}\right)}_{=g(x)} x^a \qquad (a>0).$$

Soluzione Posto $g(x) = x^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}}$, si ha

$f(x) = g(x)\cdot x^a$ e la natura del limite dipende

dall'ordine di g all'∞ e da $a \in \mathbb{R}_+$.

Studio $g(x)$. $g(x) = e^{\frac{\lg x}{x}} - e^{\frac{1}{x}}$. Inoltre

sappiamo che $\frac{\lg x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Quindi usando

lo sviluppo $e^y = 1 + y + o(y)$ per $y \to 0$

si trova
$$g(x) = \cancel{1} + \frac{\lg x}{x} + o\left(\frac{\lg x}{x}\right) - \left[\cancel{1} + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{x}(\lg x - 1) + o\left(\frac{\lg x}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Per andare avanti occorre fare qualche semplice osservazione:

$$\boxed{\frac{1}{x} = o\left(\frac{\lg x}{x}\right)} \quad \text{per } x \longrightarrow +\infty. \text{ Infatti}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\lg x}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\lg x} = 0.$$

Ovviamente

$$o\left(\frac{1}{x}\right) = o\left(\frac{\lg x}{x}\right) \quad \text{per } x \longrightarrow +\infty.$$

Perciò $f(x) \sim \frac{\lg x}{x} \cdot x^a$ per $x \longrightarrow +\infty$.

Ci sono tre casi:

1) $a > 1$. Allora $f(x) \sim x^{a-1} \lg x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

2) $a = 1$. Allora $f(x) \sim \lg x$ per $x \longrightarrow +\infty$.

Quindi anche in questo caso $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3) $a < 1$. In questo caso $f(x) \sim \frac{\lg x}{x^{1-a}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

N.B. Si ha che $o\left(\frac{1}{x}\right) = o\left(\frac{\lg x}{x}\right)$ per $x \to +\infty$.

Infatti, posto $h(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ allora si deve verificare che $\lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{\frac{\lg x}{x}} = 0$. Ma per definizione

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{\frac{1}{x}} = 0$$

e perciò a maggior ragione

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{\lg x} = 0 .$$