La proposizione scritta
in questo riquadro
è falsa.

4. Lezione Corso di Logica 2021/2022

8 ottobre 2021

Maria Emilia Maietti

email: maietti@math.unipd.it

alla ricerca della verità

la Logica si occupa di studiare la verità

di un’argomentazione o proposizione

SOLTANTO in base alla sua forma logica

per definire quando una proposizione formale è **vera**

ci serviamo delle **tabelle di verità**

introdotte nei lavori di:

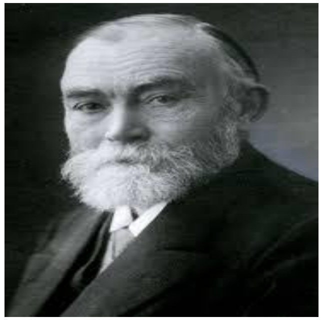
Frege	Post	Russell	Wittgenstein
			

Tabella di verità di una proposizione

Ad ogni proposizione $\equiv \texttt{conn}(V_1, \ldots, V_n)$

costruita dalle proposizione atomiche $V_1, \ldots V_n$

si può associare una funzione

$$\texttt{Tab}_{\texttt{conn}(V_1,\ldots,V_n)} \; : \; \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$$

rappresentata dalla tabella di verità

V_1	V_2	$\ldots$	V_n	$\mathtt{conn}(V_1, \ldots, V_n)$
0	1	$\ldots$	$\ldots$	c_1
0	0	$\ldots$	$\ldots$	c_2
1	1	$\ldots$	$\ldots$	c_3
1	0	$\ldots\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

che associa a $\mathtt{conn}(V_1, \ldots, V_n)$ un valore IN USCITA c_i che può solo essere 1 (per vero) oppure 0 (per falso)

al variare delle combinazioni di valori 0 e 1 associate alle proposizioni atomiche V_i per $i = 1, \ldots, n$

Come costruire le tabella di verità?

La tabella di ogni proposizione formale si costruisce componendo (come funzioni) le tabelle dei connettivi

$$\neg\,,\ \vee\,,\ \&\,,\ \rightarrow$$

che compongono la proposizioni

che sono definite a priori come segue.

Tabella di verità di $\neg$

si ottiene considerando che

$\neg A$ è vero sse A è falso

ed è la funzione unaria

A	$\neg A$
0	1
1	0

Tabella di verità di $\&$

si ottiene considerando che

$A\&B$ è vero sse A è vero e B è vero

ed è la funzione binaria

A	B	$A\&B$
0	1	0
0	0	0
1	1	1
1	0	0

Tabella di verità di $\vee$

si ottiene considerando che

$A \vee B$ è vero sse A è vero o B è vero o sono veri entrambi

ed è la funzione binaria

A	B	$A \vee B$
0	1	1
0	0	0
1	1	1
1	0	1

Tabella di verità di $\rightarrow$

si ottiene considerando che

$A \rightarrow B$ è vero sse $\neg A \vee B$ è vero

ed è la funzione binaria

A	B	$A \rightarrow B$
0	1	1
0	0	1
1	1	1
1	0	0

VERITÀ in logica CLASSICA di una proposizione

la proposizione `pr` si dice vera in **logica classica**

e nel gergo logico `pr` si dice **TAUTOLOGIA**

sse

la tabella di verità di `pr` dà sempre 1 in uscita

Esempio di uso tabelle di verità

$(A \rightarrow B) \& A$ è una tautologia?

Esempio di uso tabelle di verità

Se facciamo la tabella di verità per $(A \rightarrow B) \& A$

A	B	$A \rightarrow B$	$(A \rightarrow B) \& A$
0	1	1	0
0	0	1	0
1	1	1	1
1	0	0	0

concludiamo che $(A \rightarrow B) \& A$ NON è una tautologia

perchè la sua tabella NON ha TUTTI $\mathbf{1}$ in uscita!!

un esempio di tautologia ??

La formalizzazione (letterale) dell'enunciato

> "**Se voi passerete l'esame di logica allora avete una zia con i calli**
>
> **oppure se avete una zia con i calli allora passerete l'esame di logica**"

usando:

A="**Voi passerete l'esame di logica**"

B="**Avete una zia con i calli**"

è una **tautologia**?

Esempio controintuitivo di tautologia

La formalizzazione (letterale) dell'enunciato

"**Se voi passerete l'esame di logica allora avete una zia con i calli**

oppure se avete una zia con i calli allora passerete l'esame di logica"

usando:

A="**Voi passerete l'esame di logica**"

B="**Avete una zia con i calli**"

è la seguente proposizione:

$$(\ \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}\ ) \vee (\ \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}\ )$$

e se si construisce la sua tabella di verità si scopre che

$(\ \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}\ ) \vee (\ \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}\ )$ è una **tautologia** in quanto la sua tabella ha TUTTI $\mathbf{1}$ in uscita!!!

Esempio controintuitivo di tautologia

La proposizione $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$

è quindi (sorprendentemente!) una **TAUTOLOGIA**

ovvero sempre vera per ogni proposizione sostituita al posto di $\mathbf{A}$ e di $\mathbf{B}$

secondo la logica classica di Aristotele

L'implicazione classica è una DISGIUNZIONE!!!

Guardando alla tabella di verità del connettivo d'implicazione classica

si nota che l'implicazione classica

$$pr_1 \rightarrow pr_2$$

significa in realtà $\neg(pr_1) \vee (pr_2)$

secondo la logica classica di Aristotele

Chiarimento della verità logica di

"Se voi passerete l'esame di logica allora avete una zia con i calli

oppure se avete una zia con i calli allora passerete l'esame di logica"

La **forma logica** $(\ \mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}\ ) \vee (\ \mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A}\ )$ dell'enunciato

"**Se voi passerete l'esame di logica allora avete una zia con i calli**

oppure se avete una zia con i calli allora passerete l'esame di logica"

usando:

A="**Voi passerete l'esame di logica**"

B="**Avete una zia con i calli**"

secondo la **logica classica** ha la stessa tabella di verità di :

$$(\ \neg A \vee B\ ) \vee (\ \neg B \vee A\ )$$

ovvero di "**O voi non passerete l'esame di logica oppure avete una zia con i calli,**

oppure non avete una zia con i calli oppure passerete l'esame di logica"

che è *chiaramente vera sempre*!!!

stessa tabella per proposizioni diverse??

Se due proposizioni formali $\mathtt{pr}_1$ e $\mathtt{pr}_2$

hanno la STESSA tabella di verità

allora $\mathtt{pr}_1$ e $\mathtt{pr}_2$ sono la STESSA PROPOSIZIONE ??

NOOO !!

esempio di proposizioni diverse con stessa tabella

la tabella di $\neg A$

A	$\neg A$
0	1
1	0

è anche la tabella di verità per $\neg A \& \neg A$

e anche per $(\ \neg A \& \neg A\ ) \& \neg A$

e per $(\ (\ \neg A \& \neg A\ ) \& \neg A\ ) \& \neg A$

che sono però proposizioni sintatticamente diverse!!!

esempio di proposizioni diverse con stessa tabella

la tabella di $\neg A$

A	$\neg A$
0	1
1	0

è anche la tabella di verità per $A \rightarrow \perp$

A	$A \rightarrow \perp$
0	1
1	0

proposizioni equivalenti= proposizioni con ugual tabella

Diciamo che

“$\texttt{pr}_1$ è equivalente a “$\texttt{pr}_2$”

se e solo se

$\texttt{pr}_1$ e $\texttt{pr}_2$ hanno la stessa tabella di verità

Connettivo equivalenza

Indichiamo con il segno

$$\leftrightarrow$$

il connettivo equivalenza come **ABBREVIAZIONE** di:

date proposizioni formali $\mathtt{pr}_1$ e $\mathtt{pr}_2$

$$\mathtt{pr}_1 \leftrightarrow \mathtt{pr}_2 \equiv (\,\mathtt{pr}_1 \rightarrow \mathtt{pr}_2\,)\ \&\ (\,\mathtt{pr}_2 \rightarrow \mathtt{pr}_1\,)$$

che si legge "$\mathtt{pr}_1$ è equivalente a "$\mathtt{pr}_2$"

Tabella di verità di equivalenza

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \; \& \; (B \to A)$$

ha la seguente tabella di verità

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	1	0
0	0	1
1	1	1
1	0	0

uguaglianza semantica di proposizioni = **equivalenza logica**

Teorema: Date proposizioni $\mathtt{pr}_1$ e $\mathtt{pr}_2$, allora

$\mathtt{pr}_1$ e $\mathtt{pr}_2$ hanno la stessa tabella di verità (contenente tutte le variabili che compaiono in entrambe)

sse

$\mathtt{pr}_1 \leftrightarrow \mathtt{pr}_2$ è una **tautologia**

Infatti dalla tabella di $\leftrightarrow$ segue che:

$\mathtt{pr}_1 \leftrightarrow \mathtt{pr}_2$ è **tautologia**

(ovvero la sua tabella ha tutti $\mathbf{1}$ in uscita)

se e solo se

$\mathtt{pr}_1$ e $\mathtt{pr}_2$ hanno la stessa tabella di verità

ovvero $\mathtt{pr}_1$ e $\mathtt{pr}_2$ sono **equivalenti**

perchè la tabella di $\mathtt{pr}_1 \leftrightarrow \mathtt{pr}_2$ è ottenuta da quelle di $\mathtt{pr}_1$ e $\mathtt{pr}_2$

componendo con la tabella di $\leftrightarrow$

e quindi la tabella di $\mathtt{pr}_1 \leftrightarrow \mathtt{pr}_2$ su una stessa riga d'entrata dà $\mathbf{1}$ in uscita

se e solo se le tabelle di $\mathtt{pr}_1$ e $\mathtt{pr}_2$ sulla stessa entrata

danno tutti e due $\mathbf{1}$ oppure tutti e due $\mathbf{0}$

ovvero le loro tabelle concordano in uscita su una stessa entrata e sono quindi uguali!

esempio di equivalenza logica

$A \& A$ ed $(\ A \& A\ ) \& A$ sono equivalenti

nel senso che

$$A \& A \quad \leftrightarrow \quad (\ A \& A\ ) \& A$$

è una **TAUTOLOGIA**

classificazione in logica classica delle proposizioni formali

Per ogni proposizione formale pr definiamo

pr **TAUTOLOGIA**	pr **OPINIONE**	pr PARADOSSO
TUTTE le uscite 1 nella tabella di pr	ALMENO un'uscita 1 + ALMENO un'uscita 0 nella tabella di pr	TUTTE le uscite 0 nella tabella di pr

Esempi

TAUTOLOGIA	OPINIONE	PARADOSSO
$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$	A	$\mathbf{A} \;\&\; \neg\mathbf{A}$


Russell

‘Nel villaggio di Cantù

c’e’ un barbiere

che rade tutti e soli i barbieri che non si radono da soli

significato della negazione di una proposizione

$\neg A$ è equivalente a $A \rightarrow \perp$ nel senso che

$$\neg A \leftrightarrow (A \rightarrow \perp)$$

è una **TAUTOLOGIA**

spiegazione paradosso del barbiere di **Russell**

Se esistesse un barbiere

che chiamiamo **RAD***, che rade tutti e soli i barbieri che non si radono da sè*

allora da quanto assunto ne seguirebbe che

per ogni barbiere, che indichiamo con la lettera **B** accade che

proprietà (+++)

il barbiere **RAD** rade **B**
sse
B NON rade **B**

Ora possiamo sostituire al posto di **B** il barbiere **RAD** stesso

ottenendo che

proprietà (***)	**RAD** si rade sse **RAD NON** si rade

Poi osserviamo che si possono verificare solo due casi:

o **RAD** *si rade* oppure **RAD NON** *si rade*.

Caso (1): **RAD** *si rade*.

In tal caso dalla proprietà (***) segue che pure **RAD NON** *si rade* ovvero

RAD *si rade* e **RAD NON** *si rade*

che è una contraddizione!! Quindi questo caso non può verificarsi.

Caso (2): si verifica che **RAD NON** *si rade*.

Pure in tal caso dalla proprietà (***) segue che vale anche che **RAD** *si rade* ovvero

RAD NON *si rade* e **RAD** *si rade*

che è una contraddizione!!

Quindi anche questo caso non può verificarsi.

Conclusione: siccome NON si possono verificare nè il caso (1) e nè il caso (2) che sono gli UNICI casi possibili ne segue che *il barbiere* **RAD** **NON** *può esistere*!!!

Lettura più approfondita della conclusione su NON esistenza di RAD

ponendo $\mathcal{R}$=" *Esiste un barbiere con la proprietà di* **RAD**

ovvero che rade tutti e soli i barbieri che non si radono da sè' "

Abbiamo dimostrato che dalla verità di $\mathcal{R}$ segue una contraddizione,

che indichiamo con la proposizione costante falso $\perp$,

ovvero

abbiamo dimostrato che vale $\mathcal{R} \rightarrow \perp$

e per il significato della negazione

essendo che $\mathcal{R} \rightarrow \perp$ è equivalente a $\neg\mathcal{R}$

concludiamo che vale $\neg\mathcal{R}$ ovvero che

"**Non** *esiste un barbiere con la proprietà di* **RAD**

ovvero che rade tutti e soli i barbieri che non si radono da sè."

Forma logica alla base della contraddizione di Russell

Come si formalizza

proprietà (***) $\boxed{\begin{array}{c}\textbf{RAD} \text{ si rade} \\ \text{sse} \\ \textbf{RAD NON} \text{ si rade}\end{array}}$

tramite

$\mathbf{A}$= **RAD** `si rade`

??

Forma logica alla base della contraddizione di Russell

proprietà (***)

RAD si rade
sse
RAD **NON** si rade

si formalizza in

$$\mathbf{A} \leftrightarrow \neg \mathbf{A}$$

tramite

$\mathbf{A}$= **RAD** `si rade`

Esempio principale di Paradosso logico proposizionale

$$\mathbf{A} \leftrightarrow \neg\mathbf{A}$$