

**S.T.E.M.**

# Μοριοδότηση 2019

Ενδεικτικές απαντήσεις και από γραπτά μαθητών

**Θέμα Α**

A1- $\beta$

A2- $\gamma$

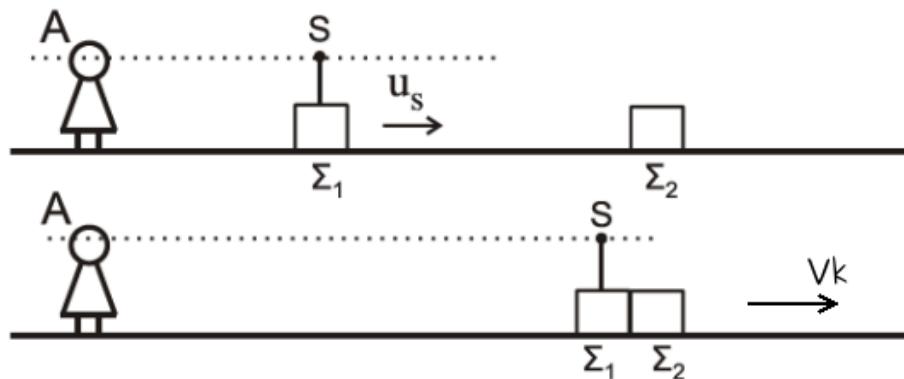
A3- $\alpha$

A4- $\gamma$

A5:  $\Lambda - \Sigma - \Lambda - \Sigma - \Sigma$

**Θέμα Β**

B1(ii) - 2 - 6



$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0 \iff \text{Α.Δ.Ο.} \quad \vec{p}_{\text{πρώ}} = \vec{p}_{\text{μετα}}$$

$$m \cdot u_s = (m + m) \cdot V_k \Rightarrow V_k = \frac{m \cdot u_s}{2 \cdot m} \Rightarrow V_k = \frac{u_H}{40}$$

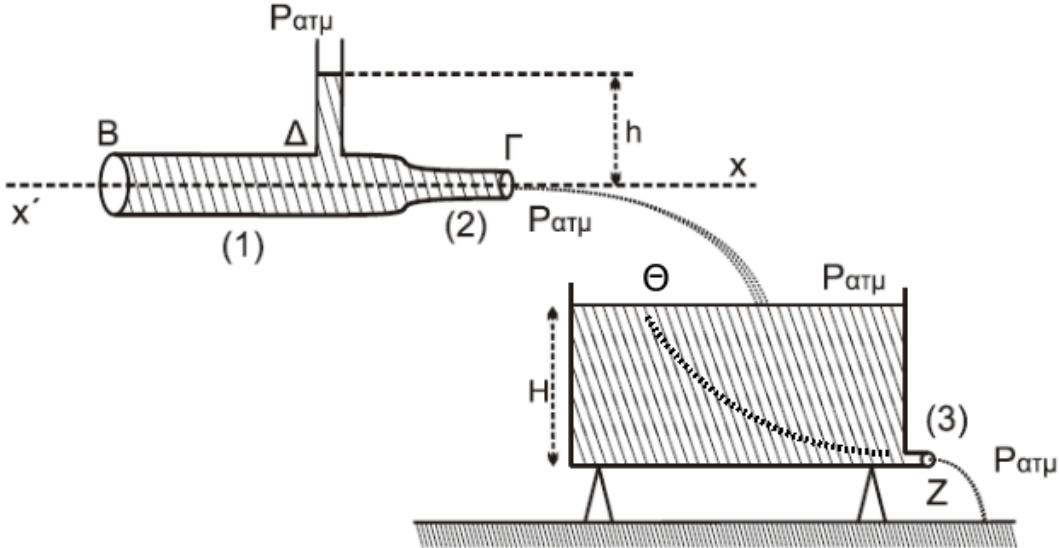
$$f_1 = \frac{u_H}{u_H + u_s} \cdot f_s$$

$$f_2 = \frac{u_H}{u_H + V_k} \cdot f_s$$

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{u_H + V_k}{u_H + u_s} = \frac{u_H + \frac{u_H}{40}}{u_H + \frac{u_H}{20}} = \frac{\frac{41u_H}{40}}{\frac{21u_H}{20}} = \frac{41}{42}$$

άρα σωστό το ii

B2-(iii) - 2 - 6



Όταν σταθεροποιείται το ύψος στο δοχείο

$$\Pi_2 = \Pi_3 \Rightarrow A_2 \cdot v_2 = A_3 \cdot v_3 \xrightarrow{A_3 = \frac{A_2}{2}} v_2 = \frac{v_3}{2}$$

Εξίσωση Bernoulli για μια ρευματική γραμμή ( $\Theta \rightarrow Z$ )

$$P_\Theta + \frac{1}{2} \rho \cdot v_\Theta^2 + \rho \cdot g \cdot H = P_Z + \frac{1}{2} \rho \cdot v_Z^2 \Rightarrow P_{\text{atm}} + \rho \cdot g \cdot H = P_{\text{atm}} + \frac{1}{2} \rho \cdot v_3^2$$

$$v_3 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$$

Εξίσωση συνέχειας ( $\Delta \rightarrow \Gamma$ )

$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \xrightarrow{A_1 = 2A_2} v_2 = 2v_1$$

Εξίσωση Bernoulli για μια οριζόντια ρευματική γραμμή ( $\Delta \rightarrow \Gamma$ )

$$P_\Delta + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2$$

$$P_\Delta = P_{\text{atm}} + \rho \cdot g \cdot h$$

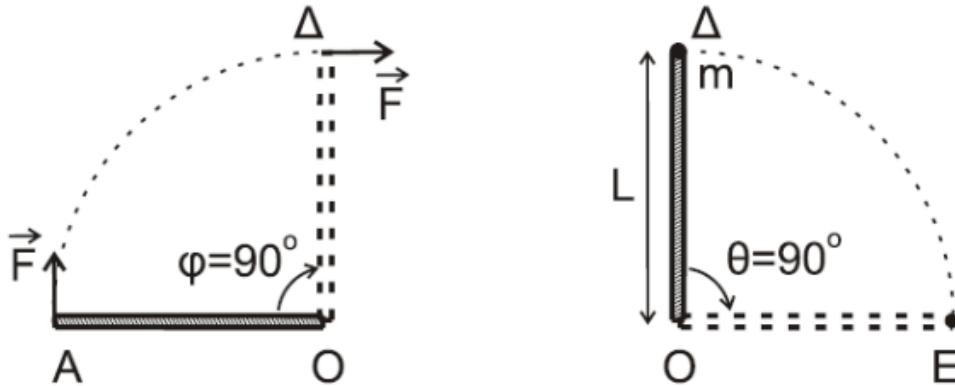
$$P_{\text{atm}} + \rho \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = P_{\text{atm}} + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 \Rightarrow g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (v_2^2 - v_1^2)$$

$$g \cdot h = \frac{3}{8} \cdot v_2^2 \xrightarrow{v_2 = \frac{v_3}{2}} g \cdot h = \frac{3}{8} \cdot \frac{v_3^2}{4}$$

$$v_3^2 = \frac{32}{3} \cdot g \cdot h \xrightarrow{v_3 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H}} 2 \cdot g \cdot H = \frac{32}{3} \cdot g \cdot h \Rightarrow \frac{h}{H} = \frac{3}{16}$$

άρα σωστό το *ii*

B3-(ii) - 2 - 7

α) τρόπος

$$\sum \vec{\tau} = I \cdot \vec{\alpha}_{\text{rot}} \Rightarrow F \cdot L = \frac{1}{3} \cdot M \cdot L^2 \cdot \alpha_{\text{rot}} \Rightarrow \alpha_{\text{rot}} = \frac{3F}{ML}$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \alpha_{\text{rot}} \cdot t^2 \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \alpha_{\text{rot}} \cdot t_{AD} \Rightarrow t_{AD} = \sqrt{\frac{\pi \cdot M \cdot L}{3F}}$$

$$\omega = \alpha_{\text{rot}} \cdot t_{AD} = \frac{3F}{ML} \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot M \cdot L}{3F}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3 \cdot F \cdot \pi}{M \cdot L}} \Rightarrow \omega = 3\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

β) τρόπος

$$\Theta \text{MKE}(A \rightarrow \Delta) \quad K_{\Delta} - K_A = \Sigma W_{\tau} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot I_p \cdot \omega^2 - 0 = \tau_F \cdot \theta$$

$$\frac{1}{2} \cdot I_p \cdot \omega^2 = F \cdot L \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{M}{3} \cdot L^2 \cdot \omega^2 = F \cdot L \cdot \pi$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3 \cdot F \cdot \pi}{M \cdot L}} = \sqrt{9 \cdot \pi^2}$$

$$\omega = 3\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = 0 \iff A, \Delta, \Sigma \tau p_0 \Rightarrow \vec{L}_{\text{pretot}} = \vec{L}_{\text{posttot}} \Rightarrow I_p \cdot \omega = (I_p + m \cdot L^2) \cdot \omega_k$$

$$\frac{1}{3} \cdot M \cdot L^2 \cdot \omega = (\frac{1}{3} \cdot M \cdot L^2 + m \cdot L^2) \cdot \omega_k \Rightarrow \omega = 2 \cdot \omega_k \Rightarrow \omega_k = \frac{\omega}{2}$$

Ομαλή στροφική κίνηση

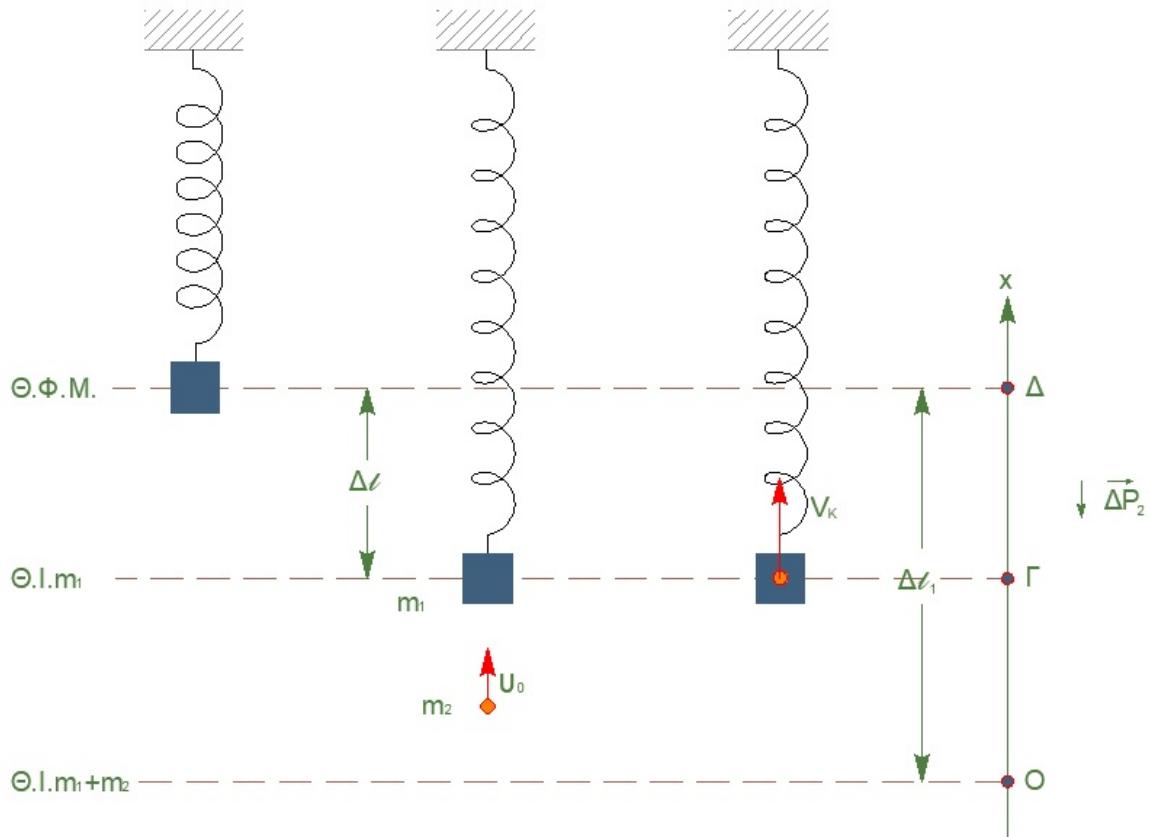
$$\Delta \theta = \omega_k \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta \theta}{\omega_k} = \frac{\Delta \theta}{\frac{\omega}{2}} = \frac{2 \Delta \theta}{\omega} = \frac{2 \cdot \frac{\pi}{2}}{\omega} = \frac{\pi}{\omega}$$

$$\Delta t = \frac{1}{3} \text{ s}$$

άρα σωστό το ii

Θέμα Γ

Γ1-(6)



$$(\Theta I_{m_1}) \quad \sum \vec{F} = 0 \Rightarrow$$

$$F_{\text{el}} = m_1 \cdot g \Rightarrow$$

$$k \cdot \Delta l = m_1 \cdot g \Rightarrow$$

$$k = \frac{m_1 \cdot g}{\Delta l} = 200 \frac{N}{m}$$

$$(\Theta I_{m_1, m_2}) \quad \sum \vec{F} = 0 \Rightarrow$$

$$F'_{\text{el}} = (m_1 + m_2) \cdot g \Rightarrow$$

$$k \cdot \Delta l_1 = (m_1 + m_2) \cdot g \Rightarrow$$

$$\Delta l_1 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot g}{k} \Rightarrow$$

$$\Delta l_1 = 0.1m$$

Στην ακραία θέση  $v_{\text{tot}} = 0 \Rightarrow A = 0.1m$

Γ2-(7)

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0 \iff \text{Α.Δ.Ο.} \quad \vec{p}_{\text{πρωτ}} = \vec{p}_{\text{μετα}}$$

$$m_2 \cdot u_0 = (m_1 + m_2) \cdot V_k$$

α) τρόπος

$$\Delta E_{\text{tot}} (\Gamma \rightarrow \Delta)$$

$$K_\Gamma + U_{\text{tot}, \Gamma} = K_\Delta + U_{\text{tot}, \Delta} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot V_k^2 + \frac{1}{2} \cdot D \cdot (\Delta l_1 - \Delta l)^2 = 0 + \frac{1}{2} \cdot D \cdot A^2$$

$$2V_k^2 + 200 \cdot 0.05^2 = 200 \cdot 0.01 \Rightarrow V_k^2 + 0.25 = 1 \Rightarrow V_k = \sqrt{0.75} \Rightarrow |V_k| = 0.5\sqrt{3} \frac{m}{s}, V_k > 0$$

$\beta) \underline{\tau\rho\pi\varsigma}$

$$\Theta MKE_{(\Gamma \rightarrow \Delta)} \quad \Delta K = \Sigma W$$

$$K_\Delta - K_\Gamma = W_B + W_{F_{ek}} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot V_k^2 = -(m_1 + m_2) \cdot g \cdot \Delta l + \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta l^2$$

$$-V_k^2 = -1 + 0.25 \Rightarrow V_k = \sqrt{0.75} \Rightarrow |V_k| = 0.5\sqrt{3} \frac{m}{s}$$

$\gamma) \underline{\tau\rho\pi\varsigma}$

$$D = k = (m_1 + m_2) \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \omega = 10 \frac{rad}{s}$$

$$x = A \cdot \eta \mu \varphi(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \eta \mu (\omega t + \varphi_0) = \frac{x}{A}$$

$$v = A\omega \cdot \sigma \nu \varphi(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \sigma \nu (\omega t + \varphi_0) = \frac{v}{A\omega}$$

$$\eta \mu^2 \varphi + \sigma \nu^2 \varphi = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2 \omega^2}$$

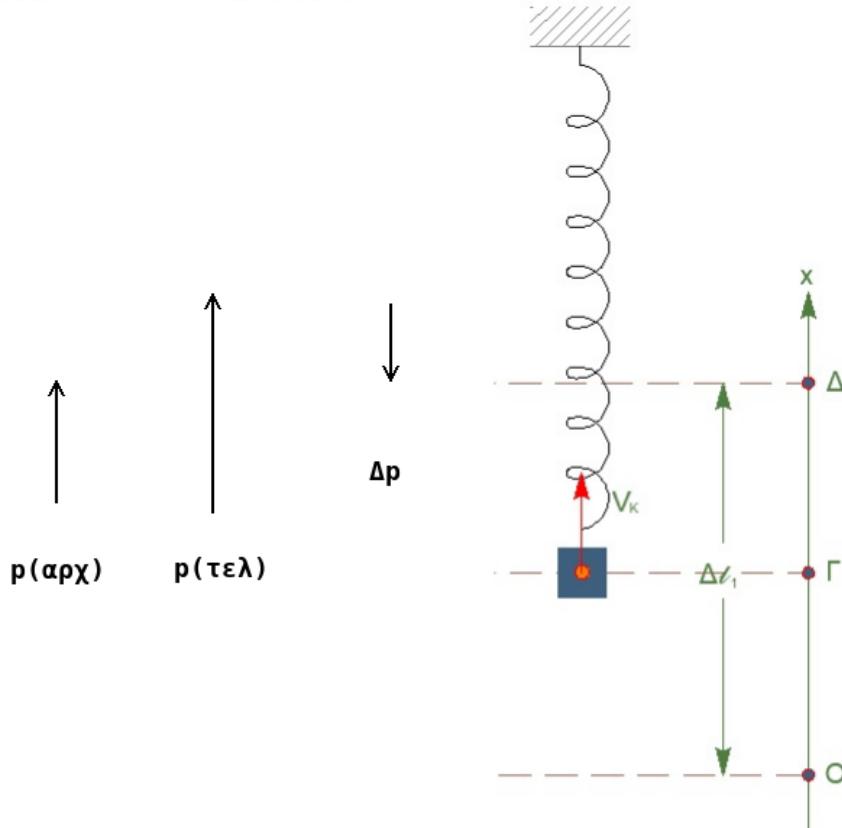
$$\frac{\frac{A^2}{4}}{A^2} + \frac{v^2}{A^2 \omega^2} \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_k = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m}{s}$$

$$K_2 = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot u_o^2 \Rightarrow K_2 = 1.5J$$

### Γ3-(6)

$$\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_{\text{τελ}} - \vec{p}_{\text{αρχ}} \Rightarrow \Delta p_2 = m_2 \cdot V_k - m_2 \cdot u_o \Rightarrow \Delta p_2 = 0.5\sqrt{3} - \sqrt{3} \Rightarrow \Delta p_2 = -0.5\sqrt{3}$$

$$|\Delta \vec{p}_2| = 0.5\sqrt{3} kg \cdot \frac{m}{s}$$



$$\Delta p_2 = -0.5\sqrt{3}$$

Το πρόσημο δηλώνει την κατεύθυνση του διανύσματος. (σχήμα)

#### Γ4(6)

$$D = k = (m_1 + m_2) \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

α) τρόπος

$$t_o = 0, \quad y = +\frac{A}{2}, \quad v > 0$$

$$y = A \cdot \eta \mu (\omega t + \Phi_o) \Rightarrow \frac{A}{2} = A \cdot \eta \mu \Phi_o$$

$$\eta \mu \Phi_o = \frac{1}{2} \Rightarrow \eta \mu \Phi_o = \eta \mu \frac{\pi}{6} \Rightarrow \Phi_o = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{6}, & k = 0 \Rightarrow \Phi_o = \frac{\pi}{6} \quad \text{συν}\Phi_o > 0 \\ 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, & k = 0 \Rightarrow \Phi_o = \frac{5\pi}{6} \quad \text{συν}\Phi_o < 0, \text{ απορρίπτεται} \end{cases}$$

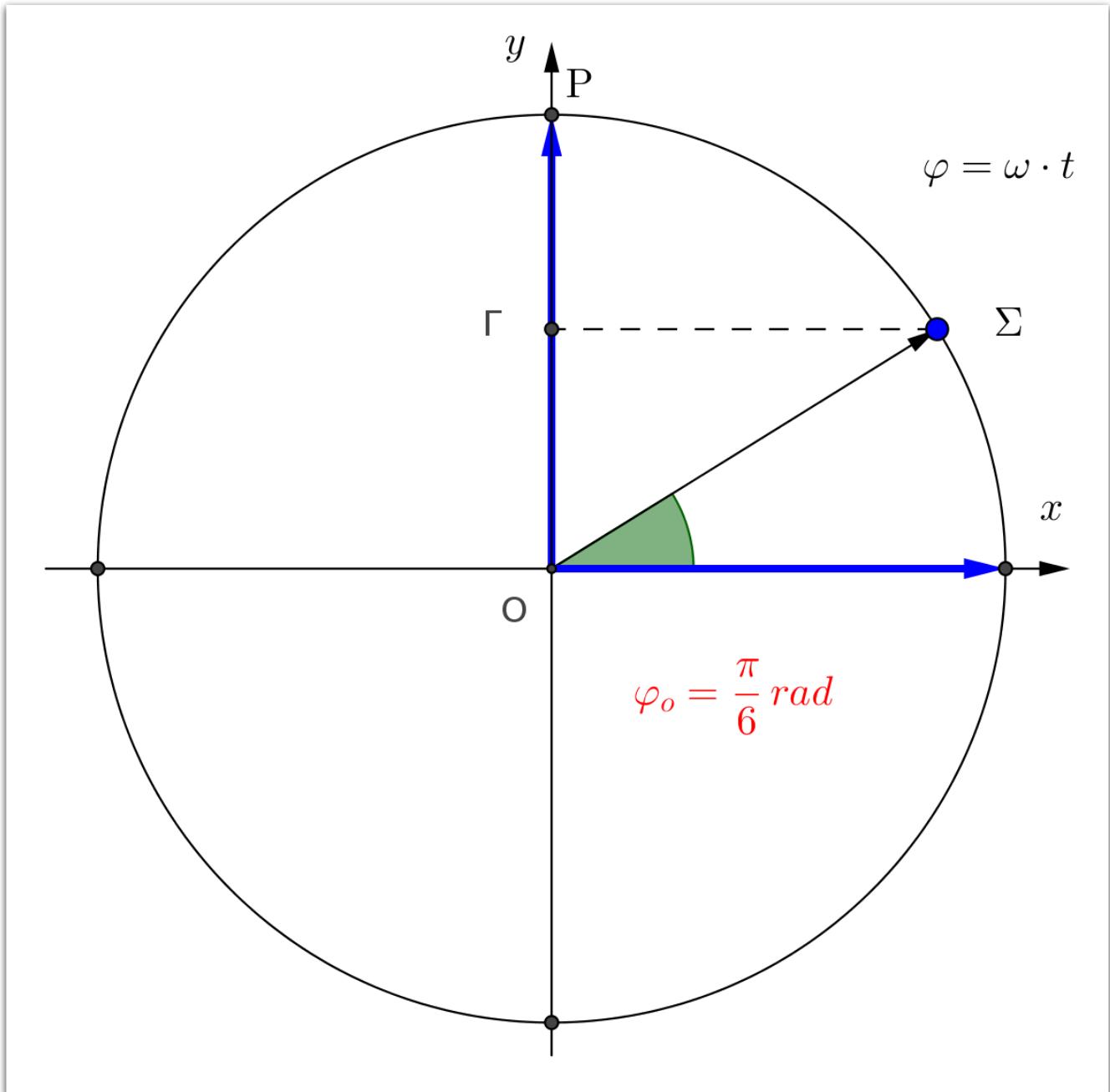
β) τρόπος

Περιστρεφόμενο διάνυσμα: Έστω  $\Sigma$  σημείο που εκτελεί Ο. Κ. Κ. με σταθερή  $\omega$ , σε κύκλο ακτίνας  $A$ . Η γωνία που διαγράφει η επιβατική ακτίνα δίνεται από την σχέση  $\varphi = \omega \cdot t$

Η προβολή του σημείου στον κατακόρυφο άξονα δίνεται από την σχέση

$$x = A \eta \mu \varphi \Rightarrow x = A \cdot \eta \mu \omega t$$

άρα η προβολή του σημείου  $\Sigma$  εκτελεί Α. Α. Τ.

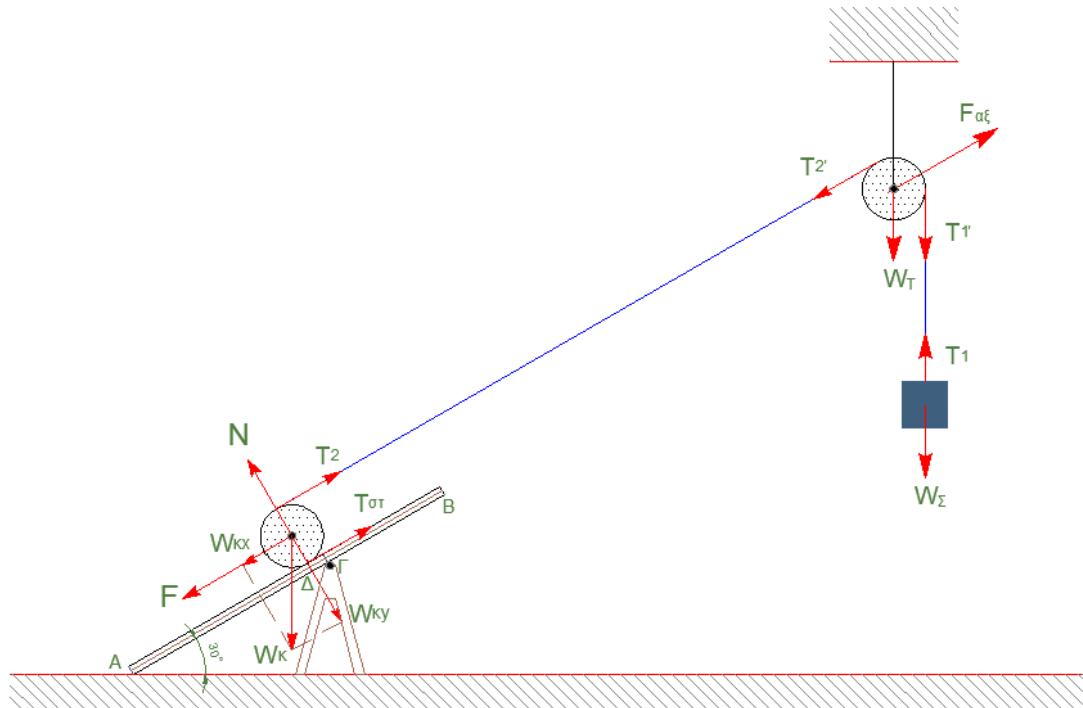


Αρχική φάση  $\varphi_0$

$$\eta\mu\varphi_0 = \frac{y}{A} \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \frac{\frac{A}{2}}{A} \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$y = 0.1 \cdot \eta\mu(10t + \frac{\pi}{6}), \quad S.I.$$

Θέμα Δ

**Δ1-(4)**

$$M_{\Sigma}, \text{ ισορροπία, } \Rightarrow \sum \vec{F} = 0$$

$$T_1 = M_{\Sigma} \cdot g \Rightarrow T_1 = 20N$$

$$M_T, \text{ ισορροπία, } \Rightarrow \sum \vec{\tau} = 0$$

$$T_1 \cdot R_T = T_2 \cdot R_T \Rightarrow T_2 = 20N$$

α) τρόπος

$$M_K, \text{ ισορροπία, } \Rightarrow \sum \vec{\tau}_{(K)} = 0$$

$$T_2 \cdot R_K = T_{\sigma\tau} \cdot R_K \Rightarrow T_2 = T_{\sigma\tau}$$

$$M_K, \text{ ισορροπία, } \Rightarrow \sum \vec{F} = 0$$

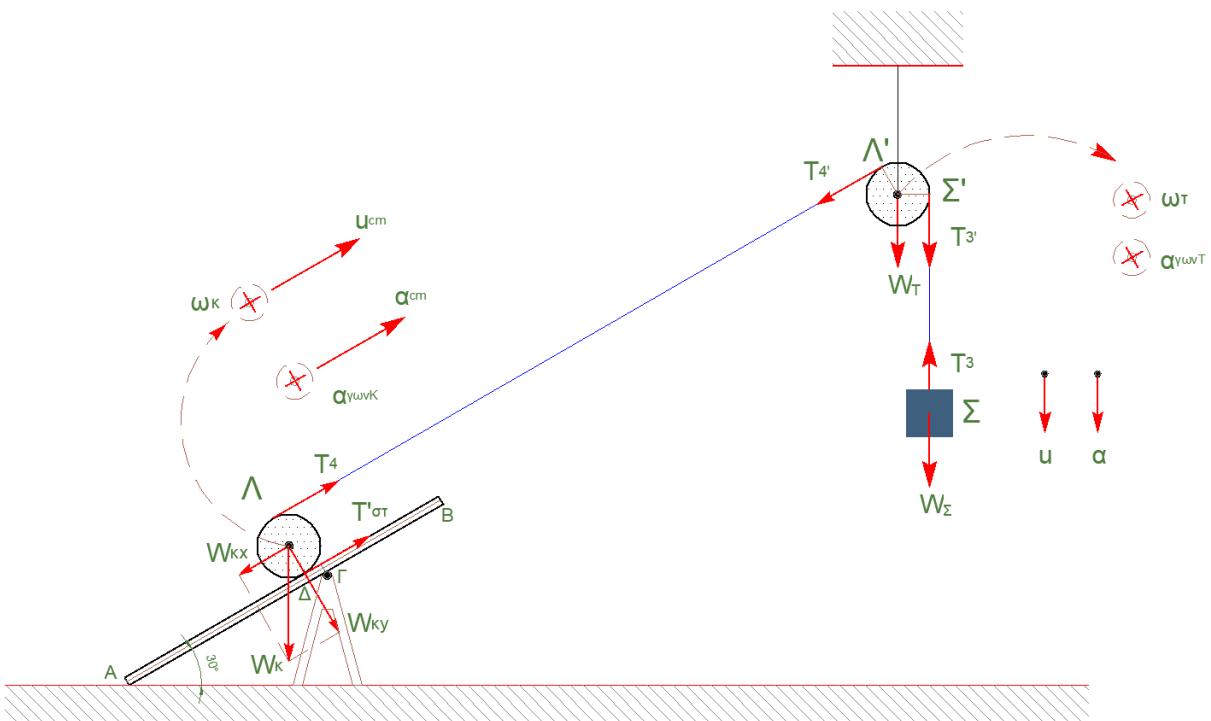
$$T_2 + T_{\sigma\tau} = F + M_K \cdot g \cdot \eta \mu \varphi \Rightarrow 2T_2 = F + 10 \Rightarrow F = 30N$$

β) τρόπος

$$M_K, \text{ ισορροπία, } \Rightarrow \sum \vec{\tau}_{(\Delta)} = 0$$

$$T_2 \cdot 2 \cdot R_K = (F + M_K \cdot g \cdot \eta \mu \varphi) \cdot R_K \Rightarrow 40 = F + 10 \Rightarrow F = 30N$$

**Δ2-(8)**



νήμα καπακόρυφο αβαρές, μη εκτατό

$$\alpha_\Sigma = \alpha'_\Sigma = \alpha_{\gamma p} = \alpha_{\gamma \omega \nu_T} \cdot R_T \Rightarrow \alpha_\Sigma = \alpha_{\gamma \omega \nu_T} \cdot R_T \quad (1)$$

νήμα πλάγιο αβαρές, μη εκτατό

$$\alpha_\Lambda = \alpha'_\Lambda = \alpha_{\gamma p} = \alpha_{\gamma \omega \nu_T} \cdot R_T \Rightarrow \alpha_\Lambda = \alpha_{\gamma \omega \nu_T} \cdot R_T \quad (2)$$

### Κύλινδρος K.X.O.

$$v_A = 0 \Rightarrow v_{cm} = \omega \cdot R_K \Rightarrow \alpha_{cm} = \alpha_{\gamma \omega \nu_K} \cdot R_K \quad (3)$$

$$v_\Lambda = v_{cm} + \omega \cdot R_K \Rightarrow v_\Lambda = 2 \cdot v_{cm} \Rightarrow \alpha_\Lambda = 2 \cdot \alpha_{cm} \quad (4)$$

$$M_\Sigma : \text{ ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ } \Rightarrow \vec{\Sigma F} = M_\Sigma \cdot \vec{\alpha}_\Sigma$$

$$M_\Sigma \cdot g - T_3 = M_\Sigma \cdot \alpha_\Sigma \Rightarrow 20 - T_3 = 2 \cdot \alpha_\Sigma \quad (5)$$

$$M_T : \text{ ΣΤΡΟΦΙΚΗ } \Rightarrow \vec{\Sigma \tau} = I_T \cdot \vec{\alpha}_{\gamma \omega \nu_T}$$

$$T'_3 \cdot R_T - T'_4 \cdot R_T = \frac{1}{2} \cdot M_T \cdot R_T^2 \cdot \alpha_{\gamma \omega \nu_T} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} T_3 - T_4 = R_T \cdot \alpha_{\gamma \omega \nu_T} \quad (6)$$

### α) τρόπος

$$M_K : \text{ ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ } \Rightarrow \vec{\Sigma F} = M_K \cdot \vec{\alpha}_{cm}$$

$$T_4 + T_{\sigma\tau} - M_K \cdot g \cdot \eta \mu \varphi = M_K \cdot \alpha_{cm} \Rightarrow T_4 + T_{\sigma\tau} - 10 = 2 \cdot \alpha_{cm} \quad (7)$$

$$M_K : \text{ ΣΤΡΟΦΙΚΗ } \Rightarrow \vec{\Sigma \tau} = I_K \cdot \vec{\alpha}_{\gamma \omega \nu_K}$$

$$T_4 \cdot R_K - T_{\sigma\tau} \cdot R_K = \frac{1}{2} \cdot M_K \cdot R_K^2 \cdot \alpha_{\gamma \omega \nu_K} \Rightarrow T_4 - T_{\sigma\tau} = R_K \cdot \alpha_{\gamma \omega \nu_K} \quad (8)$$

### β) τρόπος

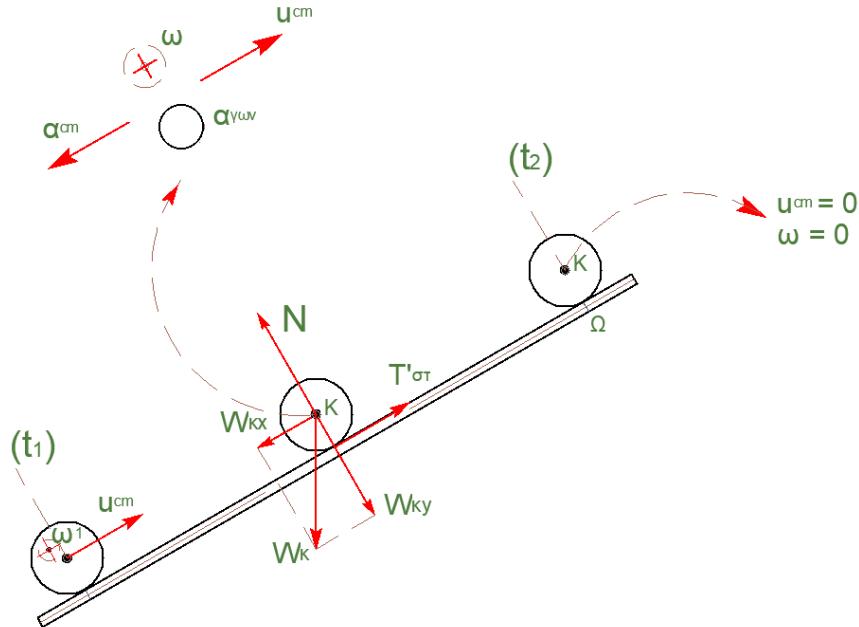
$$I_{K(\Delta)} = I_{cm} + M_K \cdot R_K^2 \Rightarrow I_{K(\Delta)} = \frac{3}{2} \cdot M_K \cdot R_K^2 \quad (7)$$

$$M_K : \Sigma \vec{\tau} = \bar{I}_{K_\Delta} \cdot \vec{\alpha}_{\gamma \omega \nu_\Delta}$$

$$T_4 \cdot 2 \cdot R_K - M_K \cdot g \cdot \eta \mu \varphi \cdot R_K = \frac{3}{2} \cdot M_K \cdot R_K^2 \cdot \alpha_{\gamma \omega \nu_\Delta} \Rightarrow 2 \cdot T_4 - 10 = 3 \cdot R_K \cdot \alpha_{\gamma \omega \nu_\Delta} \quad (8)$$

Λύση του μη γραμμικού συστήματος των 8 εξισώσεων με τους 10 αγνώστους  $\alpha_{\Sigma} = 4 \frac{m}{s^2}$

### Δ3-(6)



$$M_K : \text{ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ}, \quad 0 - t_1$$

$$v_{cm1} = \alpha_{cm} \cdot t_1 \Rightarrow v_{cm1} = 1 \frac{m}{s}$$

$$M_K : \text{ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ} \Rightarrow \Sigma \vec{F} = M_K \cdot \vec{\alpha}_{cm}$$

$$M_K \cdot g \cdot \eta \mu \varphi - T_{\sigma\tau} = M_K \cdot \alpha_{cm} \Rightarrow 10 - T_{\sigma\tau} = 2 \alpha_{cm} \quad (1)$$

$$M_K : \text{ΣΤΡΟΦΙΚΗ} \Rightarrow \Sigma \vec{\tau} = I_K \cdot \vec{\alpha}_{\gamma \omega \nu_K}$$

$$T_{\sigma\tau} \cdot R_K = \frac{1}{2} \cdot M_K \cdot R_K^2 \cdot \alpha_{\gamma \omega \nu_K} \Rightarrow T_{\sigma\tau} = R_K \cdot \alpha_{\gamma \omega \nu_K} \Rightarrow T_{\sigma\tau} = \alpha_{cm} \quad (2)$$

$$(1) \wedge (2) \Rightarrow 10 - \alpha_{cm} = 2 \cdot \alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{10}{3} \frac{m}{s^2}$$

$$v_{cm} = v_{cm1} - \alpha_{cm} \cdot \Delta t \Rightarrow 0 = 1 - \frac{10}{3} \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = 0.3s$$

$$t_2 = t_1 + \Delta t \Rightarrow t_2 = 0.8s$$

### Δ4-(3)

$$M_K : \text{ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ}, \quad 0 - t_1$$

$$x_{cm1} = \frac{1}{2} \cdot \alpha_{cm} \cdot t_1^2 \Rightarrow x_{cm1} = 0.25m$$

$\alpha$ ) τρόπος $M_K : \text{ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ}, \quad t_1 - t_2$ 

$$\Delta x_{cm} = v_{cm1} \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot \alpha_{cm} \cdot \Delta t^2 \Rightarrow \Delta x_{cm} = 0.15m$$

 $\beta$ ) τρόπος

Από την λύση του μη γραμμικού συστήματος έχουμε

$$\alpha_{cm} = 2 \frac{m}{s^2} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu_K} = \frac{2}{R_K}$$

$$v_{cm1} = \alpha_{cm} \cdot t_1 \Rightarrow v_{cm1} = 1 \frac{m}{s}$$

$$\omega_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu_K} \cdot t_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{R_K} \frac{\text{rad}}{s}$$

 $\Delta ME_{t_1 \rightarrow t_2}$ 

$$E_M^{t_1} = E_M^{t_2} \Rightarrow K_{\sigma\tau\rho}^{t_1} + K_{\mu\epsilon\tau}^{t_1} + U^{t_1} = K_{\sigma\tau\rho}^{t_2} + K_{\mu\epsilon\tau}^{t_2} + U^{t_2}$$

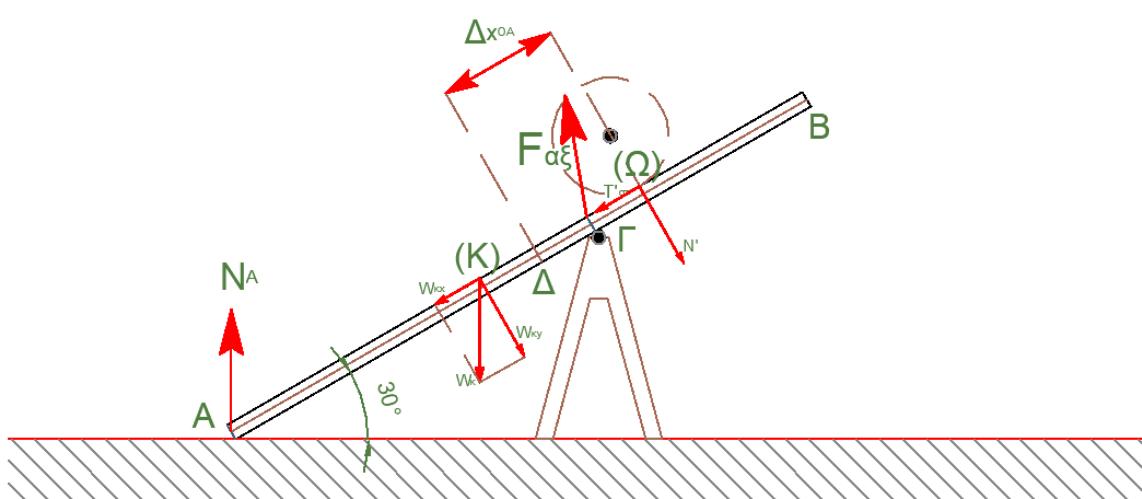
$$\frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} \cdot M_K \cdot v_{cm}^2 + 0 = 0 + 0 + M_K \cdot g \cdot h \Rightarrow h = 0.075m$$

$$\eta\mu\varphi = \frac{h}{\Delta x_{cm}} \Rightarrow \Delta x_{cm} = 0.15m$$

 $\gamma$ ) τρόπος $\Theta MKE_{(t_1 \rightarrow t_2)} \quad \Delta K = \Sigma W$ 

$$K_{t_2} - K_{t_1} = W_B + W_{T_{\text{επειτ}}} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} \cdot M_K \cdot v_{cm1}^2 = -M_K \cdot g \cdot \eta\mu\varphi \cdot \Delta x_{cm} + T_{\text{επειτ}} \cdot \Delta x_{cm} \Rightarrow \Delta x_{cm} = 0.15m$$

$$x_{o\lambda} = x_{cm1} + \Delta x_{cm} \Rightarrow x_{o\lambda} = 0.4m$$

 $\Delta 5(4)$ 

**α) τρόπος**

$$\begin{aligned}
 (\Gamma\Delta) &= 0.2m, \quad (\mathrm{K}\Gamma) = 0.5m, \quad (\Gamma\Omega) = x_{\text{ολ}} - (\Gamma\Delta) \Rightarrow (\Gamma\Omega) = 0.2m \\
 |\tau_{W_p}| &= M_p \cdot g \cdot \sin\varphi \cdot (\mathrm{K}\Gamma) \Rightarrow |\tau_{W_p}| = 5\sqrt{3}N \cdot m \\
 |\tau'_N| &= M_k \cdot g \cdot \sin\varphi \cdot (\Gamma\Omega) \Rightarrow |\tau'_N| = 2\sqrt{3}N \cdot m \\
 |\tau_{W_p}| &> |\tau'_N|
 \end{aligned}$$

άρα η σανίδα δεν ανατρέπεται.

**β) τρόπος**

Την στιγμή που ανατρέπεται η σανίδα ισχύει οριακά  $N_A = 0$ , όπου  $N_A$  η δύναμη του δαπέδου,  $N'$  η δύναμη που ασκεί ο κύλινδρος κάθετα στην επιφάνεια της σανίδας και  $W_K$ , η κάθετη συνιστώσα του βάρους της σανίδας και  $\Psi$  το σημείο στο οποίο αν τοποθετηθεί ο κύλινδρος η σανίδα οριακά θα ανατραπεί.

$$\begin{aligned}
 \sum \vec{\tau}_{(\Gamma)} &= 0 \Rightarrow N' \cdot (\Gamma\Psi) - W_K \cdot (\mathrm{K}\Gamma) = 0 \Rightarrow M_K \cdot g \cdot \sin\varphi \cdot (\Omega\Gamma) - M_p \cdot g \cdot \sin\varphi \cdot (\mathrm{K}\Gamma) \\
 2 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x - 2 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} &\Rightarrow x = 0.5m
 \end{aligned}$$

Δηλαδή το σημείο  $\Psi$  απέχει  $0.5m$  από την άρθρωση  $\Gamma$  και  $1m$  από το άκρο  $B$  της σανίδας.

Άρα η θέση ανατροπής είναι σε  $x = 0.5m$  από το σημείο  $\Gamma$ . Όμως το σώμα φτάνει σε απόσταση  $l = 0.2m$  πάνω από το  $\Gamma$ . Αφού  $l < x$  η σανίδα δεν ανατρέπεται.

**γ) τρόπος**

Έστω τυχαία θέση του κυλίνδρου για την οποία το σημείο επαφής του κυλίνδρου με την σανίδα έχει απομάκρυνση  $x$  από την θέση  $\Gamma$ . Η δύναμη  $N_A$  είναι από το λείο δάπεδο, και η  $N'$  είναι η αντίδραση του κυλίνδρου στην δράση  $N$  της σανίδας στον κύλινδρο. Στον κάθετο στην σανίδα άξονα η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στον κύλινδρο είναι μηδέν, οπότε  $N' = M_k \cdot g \cdot \sin\varphi$

$$\begin{aligned}
 \sum \vec{\tau}_{(\Gamma)} &= 0 \Rightarrow -\tau_{N_A} \cdot (A\Gamma) \cdot \sin\varphi - N' \cdot x + W_p \cdot \sin\varphi \cdot (\mathrm{K}\Gamma) = 0 \\
 -N_A \cdot 2.5 \frac{\sqrt{3}}{2} + 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x & \\
 2.5 \cdot N_A = 10 - 20 \cdot x \Rightarrow N_A &= \frac{10 - 20 \cdot x}{2.5}
 \end{aligned}$$

Για να μην χάνεται η επαφή πρέπει

$$N_A \geq 0 \Rightarrow \frac{10 - 20 \cdot x}{2.5} \geq 0 \Rightarrow -20 \cdot x \geq -10 \Rightarrow x \leq 0.5m$$

δηλαδή για να ανατραπεί η σανίδα πρέπει ο κύλινδρος να φτάσει μέχρι  $0.5m$  δεξιά του σημείου  $\Gamma$ .

Ο κύλινδρος την στιγμή  $t_2$  έχει βρεθεί στην θέση  $x = \Delta_{x_{\text{ολ}}} - (\Delta\Gamma) = 0.2m$  οπότε η σανίδα στο διασμένο χρονικό διάστημα δεν ανατρέπεται.

**δ) τρόπος**

Την στιγμή που ανατρέπεται η σανίδα ισχύει οριακά  $N_A = 0$ , όπου  $N_A$  η δύναμη του δαπέδου,  $N'$  η δύναμη που ασκεί ο κύλινδρος κάθετα στην επιφάνεια της σανίδας και  $W_K$ , η κάθετη συνιστώσα του βάρους της σανίδας και  $\Psi$  το σημείο στο οποίο αν τοποθετηθεί ο κύλινδρος η σανίδα οριακά θα ανατραπεί.

$$\Sigma \vec{\tau}_{(\Gamma)} = 0 \Rightarrow N' \cdot (\Gamma\Psi) - W_{K_y} \cdot (K\Gamma) = 0 \Rightarrow M_K \cdot g \cdot \text{συνφ} \cdot (\Omega\Gamma) - M_p \cdot g \cdot \text{συνφ} \cdot (K\Gamma)$$

$$2 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x - 2 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow x = 0.5m$$

Δηλαδή το σημείο  $\Psi$  απέχει  $0.5m$  από την άρθρωση  $\Gamma$  και  $1m$  από το άκρο  $B$  της σανίδας.

Για την δύναμη  $N_A$  που ασκεί το δάπεδο στην σανίδα ισχύει η σχέση  $N_A > 0$  για κάθε θέση του κυλίνδρου από την θέση  $\Delta$  έως την θέση  $\Psi$  για την οποία δείξαμε ότι απέχει  $0.5m$  από την άρθρωση  $\Gamma$  και  $1m$  από το άκρο  $B$  της σανίδας.

Έστω ότι την χρονική στιγμή  $t_2$  που ο κύλινδρος σταματά στιγμιαία, η σανίδα δεν ανατρέπεται. Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της ανάλυσης και με ισοδύναμες προτάσεις θα φτάσουμε σε κάτι που ισχύει για την συγκεκριμένη χρονική στιγμή, δηλαδή στην σχέση  $N_A > 0$ . Αφού η σανίδα δεν ανατρέπεται ισχύει

$$\Sigma \vec{\tau}_{(\Gamma)} = 0 \Rightarrow N_A \cdot (A\Gamma) \cdot \text{συνφ} + N' \cdot (O\Gamma) - W_p \cdot \text{συνφ} \cdot (K\Gamma) = 0$$

$$N_A \cdot (A\Gamma) \cdot \text{συνφ} + M_K \cdot g \cdot \text{συνφ} \cdot (O\Gamma) - M_p \cdot g \cdot \text{συνφ} \cdot (K\Gamma) = 0$$

$$N_A \cdot (A\Gamma) = M_p \cdot g \cdot (K\Gamma) - M_K \cdot g \cdot (O\Gamma)$$

$$N_A = \frac{20 \cdot 0.5 - 20 \cdot 0.2}{2.5} \Rightarrow N_A = \frac{6}{2.5} \Rightarrow N_A = 2.4N$$

Άρα το δάπεδο εκείνη την χρονική στιγμή που ο κύλινδρος σταματά, είναι σε επαφή με την σανίδα αφού της ασκεί δύναμη θετική  $N_A = 2.4N$  Άρα η σανίδα δεν ανατρέπεται.

### ε)τρόπος

Η "εις άτοπον απαγωγή"

Έστω ότι την χρονική στιγμή  $t_2$ , δηλαδή την στιγμή που ο κύλινδρος στιγμιαία ισορροπεί, η σανίδα ανατρέπεται. Αυτό σημαίνει ότι η σανίδα δεν είναι σε επαφή με το δάπεδο δηλαδή ισχύει  $N = 0 \Rightarrow \tau_N = 0$ . Θεωρούμε θετική φορά για τις ροπές, αυτή των δεικτών του ρολογιού.

$$(A\Delta) = 0.2m, \quad (K\Gamma) = 0.5m, \quad (O\Omega) = x_{o\lambda} - (A\Delta) \Rightarrow (O\Omega) = 0.2m$$

$$\tau_{W_p} = -M_p \cdot g \cdot \text{συνφ} \cdot (K\Gamma) \Rightarrow \tau_{W_p} = -5\sqrt{3}N \cdot m$$

$$\tau'_N = M_k \cdot g \cdot \text{συνφ} \cdot (K\Gamma) \Rightarrow \tau'_N = 2\sqrt{3}N \cdot m$$

$$\Sigma \tau_{(\Gamma)} = \tau'_N + \tau_{W_p} = 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} \Rightarrow \Sigma \tau_{(\Gamma)} < 0$$

Αυτό σημαίνει ότι η σανίδα θα περιστραφεί με φορά αντίθετη από αυτή την ρολογιών, δηλαδή θα έρθει σε επαφή με το δάπεδο άρα θα ασκεί δύναμη στο δάπεδο, άρα και το δάπεδο θα ασκεί δύναμη στην σανίδα, δηλαδή  $N > 0$

Άρα άτοπο. Υποθέσαμε στην αρχή ότι η σανίδα ανατρέπεται δηλαδή  $N = 0$  και οδηγηθήκαμε στο ότι  $N > 0$  άρα η αρχική μας υπόθεση είναι εσφαλμένη. Άρα η σανίδα δεν ανατρέπεται.

Μπορείτε να εκτυπώσετε τις λύσεις σε μορφή pdf από [εδώ](#) και τα θέματα από [εδώ](#)