Πανελλαδικές 2019

Θέμα Α

A1 - β

A2 - γ

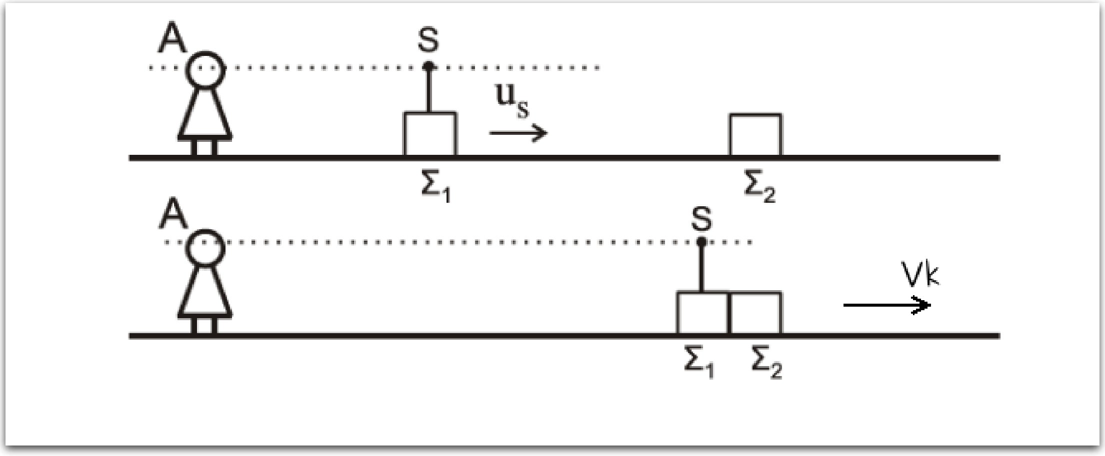
A3 - α

A4 - γ

A5: $\Lambda - \Sigma - \Lambda - \Sigma - \Sigma$

Θέμα Β

B1-$(ii) - 2 - 6$



$$\Sigma\overrightarrow{F_{\varepsilon\xi}} = 0 \iff \text{Α.Δ.Ο.} \quad \vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\alpha}$$

$$m \cdot u_s = (m + m) \cdot V_k \Rightarrow V_k = \frac{m \cdot u_s}{2 \cdot m} \Rightarrow V_k = \frac{u_H}{40}$$

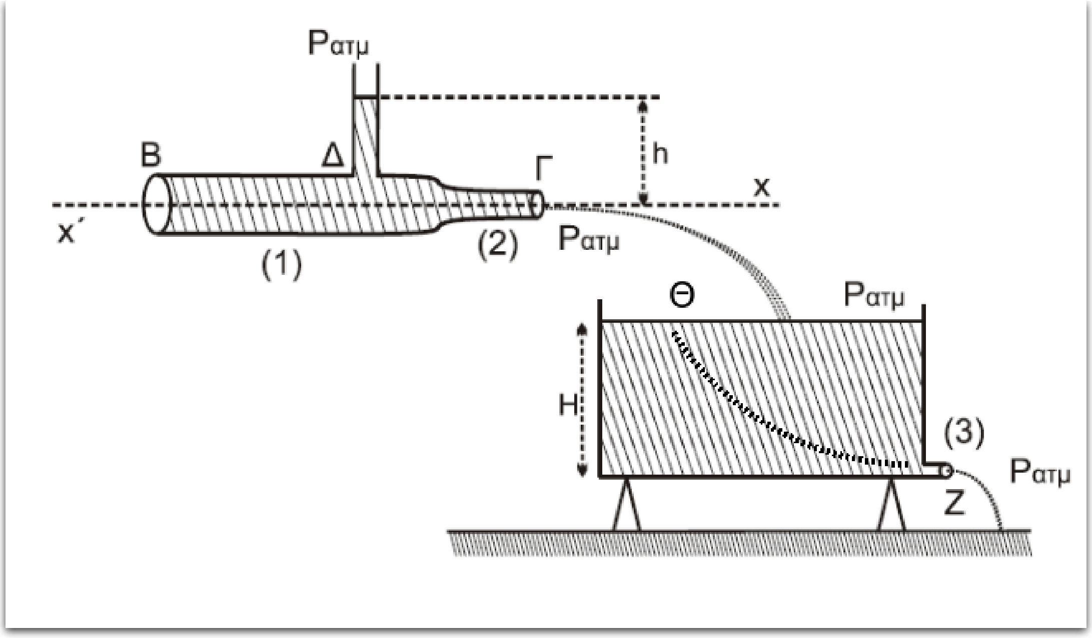
$$f_1 = \frac{u_H}{u_H + u_s} \cdot f_s$$

$$f_2 = \frac{u_H}{u_H + V_k} \cdot f_s$$

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{u_H + V_k}{u_H + u_s} = \frac{u_H + \frac{u_H}{40}}{u_H + \frac{u_H}{20}} = \frac{\frac{41u_H}{40}}{\frac{21u_H}{20}} = \frac{41}{42}$$

άρα σωστό το ii

B2 - $(iii) - 2 - 6$



Όταν σταθεροποιείται το ύψος στο δοχείο

$$\Pi_2 = \Pi_3 \Rightarrow A_2 \cdot \upsilon_2 = A_3 \cdot \upsilon_3 \overset{A_3=\frac{A_2}{2}}{\Longrightarrow} \upsilon_2 = \frac{\upsilon_3}{2}$$

Εξίσωση Bernoulli για μια ρευματική γραμμή $(\Theta \rightarrow Z)$

$$P_\Theta + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_\Theta^2 + \rho \cdot g \cdot H = P_Z + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_3^2 \Rightarrow P_{\alpha\tau\mu} + \rho \cdot g \cdot H = P_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_3^2$$

$$\upsilon_3 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$$

Εξίσωση συνέχειας $(\Delta \rightarrow \Gamma)$

$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1 \cdot \upsilon_1 = A_2 \cdot \upsilon_2 \overset{A_1=2A_2}{\Longrightarrow} \upsilon_2 = 2\upsilon_1$$

Εξίσωση Bernoulli για μια οριζόντια ρευματική γραμμή $(\Delta \rightarrow \Gamma)$

$$P_\Delta + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_2^2$$

$$P_\Delta = P_{\alpha\tau\mu} + \rho \cdot g \cdot h$$

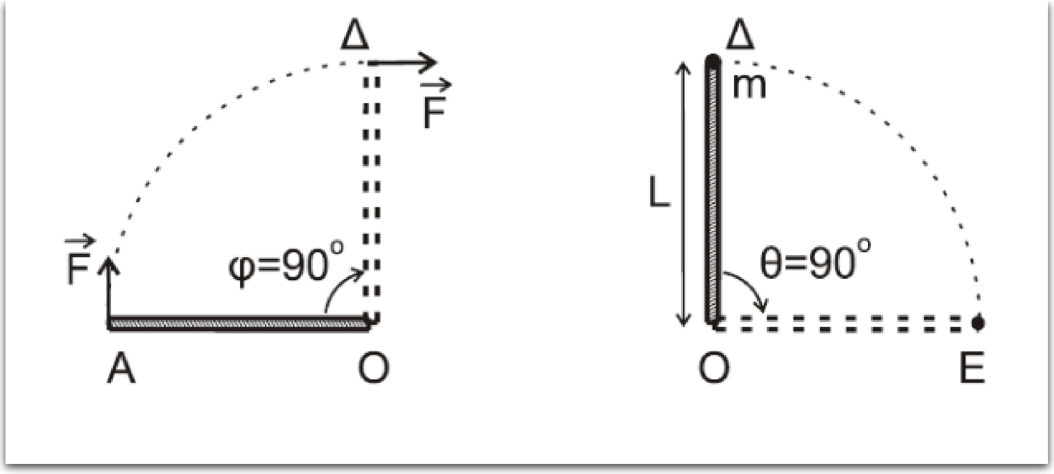
$$P_{\alpha\tau\mu} + \rho \cdot g \cdot h + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_1^2 = P_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_2^2 \Rightarrow g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2)$$

$$g \cdot h = \frac{3}{8} \cdot \upsilon_2^2 \overset{\upsilon_2=\frac{\upsilon_3}{2}}{\Longrightarrow} g \cdot h = \frac{3}{8} \cdot \frac{\upsilon_3^2}{4}$$

$$\upsilon_3^2 = \frac{32}{3} \cdot g \cdot h \overset{\upsilon_3=\sqrt{2 \cdot g \cdot H}}{\Longrightarrow} 2 \cdot g \cdot H = \frac{32}{3} \cdot g \cdot h \Rightarrow \frac{h}{H} = \frac{3}{16}$$

άρα σωστό το iii

B3 - $(ii) - 2 - 7$



α)τρόπος

$$\Sigma\vec{\tau} = I \cdot \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F \cdot L = \frac{1}{3} \cdot M \cdot L^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{3F}{ML}$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t^2 \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t_{A\Delta} \Rightarrow t_{A\Delta} = \sqrt{\frac{\pi \cdot M \cdot L}{3F}}$$

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t_{A\Delta} = \frac{3F}{ML} \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot M \cdot L}{3F}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3 \cdot F \cdot \pi}{M \cdot L}} \Rightarrow \omega = 3\pi\frac{rad}{s}$$

β)τρόπος

$$\Theta MKE(A \rightarrow \Delta) \quad K_\Delta - K_A = \Sigma W_\tau \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot I_\rho \cdot \omega^2 - 0 = \tau_F \cdot \theta$$

$$\frac{1}{2} \cdot I_\rho \cdot \omega^2 = F \cdot L \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{M}{3} \cdot L^2 \cdot \omega^2 = F \cdot L \cdot \pi$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3 \cdot F \cdot \pi}{M \cdot L}} = \sqrt{9 \cdot \pi^2}$$

$$\omega = 3\pi\frac{rad}{s}$$

$$\Sigma\vec{\tau}_{\varepsilon\xi} = 0 \iff A.\Delta.\Sigma\tau\rho_0 \Rightarrow \vec{L}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{L}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow I_\rho \cdot \omega = (I_\rho + m \cdot L^2) \cdot \omega_k$$

$$\frac{1}{3} \cdot M \cdot L^2 \cdot \omega = (\frac{1}{3} \cdot M \cdot L^2 + m \cdot L^2) \cdot \omega_k \Rightarrow \omega = 2 \cdot \omega_k \Rightarrow \omega_k = \frac{\omega}{2}$$

Ομαλή στροφική κίνηση

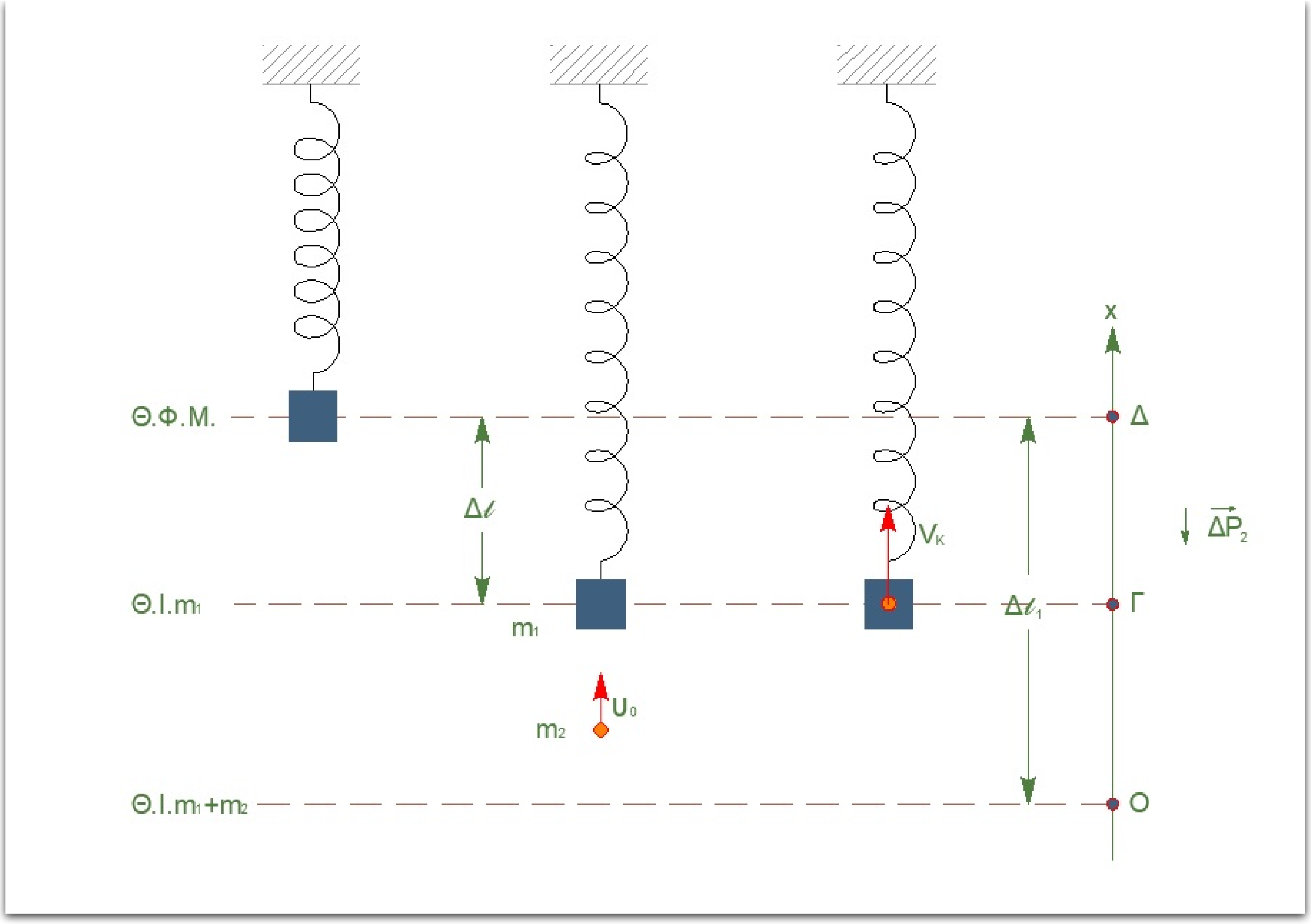
$$\Delta\theta = \omega_k \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega_k} = \frac{\Delta\theta}{\frac{\omega}{2}} = \frac{2\Delta\theta}{\omega} = \frac{2 \cdot \frac{\pi}{2}}{\omega} = \frac{\pi}{\omega}$$

$$\Delta t = \frac{1}{3}s$$

άρα σωστό το ii

Θέμα Γ

Γ1-(6)



$$(\Theta I_{m_1}) \quad \Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow$$
$$F_{\varepsilon\lambda} = m_1 \cdot g \Rightarrow$$
$$k \cdot \Delta l = m_1 \cdot g \Rightarrow$$
$$k = \frac{m_1 \cdot g}{\Delta l} = 200\frac{N}{m}$$

$$(\Theta I_{m_1,m_2}) \quad \Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow$$
$$F'_{\varepsilon\lambda} = (m_1 + m_2) \cdot g \Rightarrow$$
$$k \cdot \Delta l_1 = (m_1 + m_2) \cdot g \Rightarrow$$
$$\Delta l_1 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot g}{k} \Rightarrow$$
$$\Delta l_1 = 0.1m$$

Στην ακραία θέση $\upsilon_{\tau\alpha\lambda} = 0 \Rightarrow A = 0.1m$

Γ2-(7)

$$\Sigma\overrightarrow{F_{\varepsilon\xi}} = 0 \iff \mathrm{A.\Delta.O.} \quad \vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\alpha}$$
$$m_2 \cdot u_o = (m_1 + m_2) \cdot V_k$$

α)τρόπος

$$\mathrm{A\Delta E_{\tau\alpha\lambda}}(\Gamma \to \Delta)$$
$$K_\Gamma + U_{\tau\alpha\lambda\Gamma} = K_\Delta + U_{\tau\alpha\lambda\Delta} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot V_k^2 + \frac{1}{2} \cdot D \cdot (\Delta l_1 - \Delta l)^2 = 0 + \frac{1}{2} \cdot D \cdot A^2$$
$$2V_k^2 + 200 \cdot 0.05^2 = 200 \cdot 0.01 \Rightarrow V_k^2 + 0.25 = 1 \Rightarrow V_k = \sqrt{0.75} \Rightarrow |V_k| = 0.5\sqrt{3}\frac{m}{s}, V_k > 0$$

β)τρόπος

$$\Theta MKE_{(\Gamma\rightarrow\Delta)} \quad \Delta K = \Sigma W$$

$$K_\Delta - K_\Gamma = W_B + W_{F_{\varepsilon\lambda}} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}\cdot(m_1+m_2)\cdot V_k^2 = -(m_1+m_2)\cdot g\cdot \Delta l + \frac{1}{2}\cdot k\cdot \Delta l^2$$

$$-V_k^2 = -1 + 0.25 \Rightarrow V_k = \sqrt{0.75} \Rightarrow |V_k| = 0.5\sqrt{3}\frac{m}{s}$$

γ)τρόπος

$$D = k = (m_1+m_2)\cdot\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} \Rightarrow \omega = 10\frac{rad}{s}$$

$$x = A\cdot \eta\mu\varphi(\omega t+\varphi_o) \Rightarrow \eta\mu(\omega t+\varphi_o) = \frac{x}{A}$$

$$\upsilon = A\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi(\omega t+\varphi_o) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi_o) = \frac{\upsilon}{A\omega}$$

$$\eta\mu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{\upsilon^2}{A^2\omega^2}$$

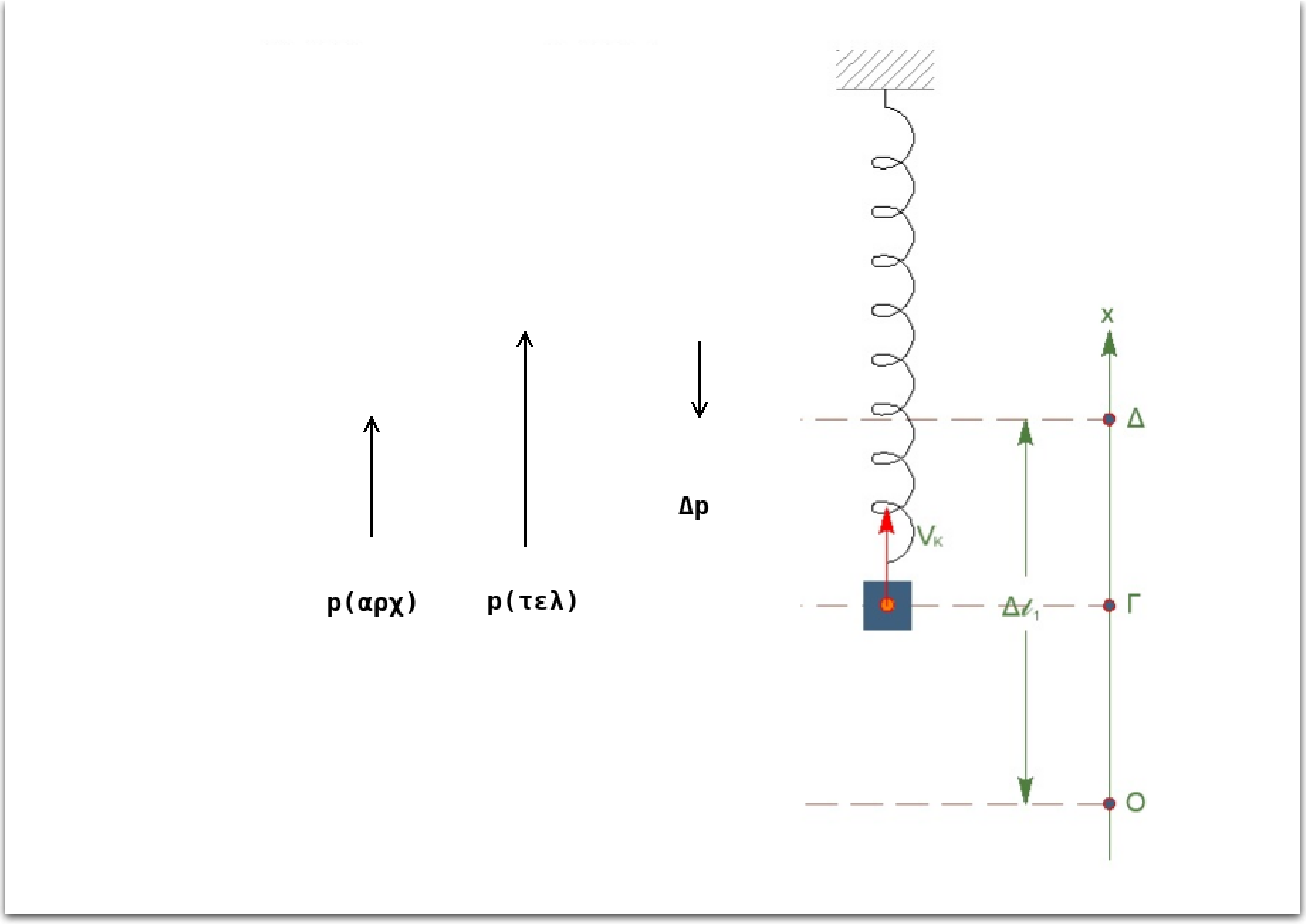
$$\frac{\frac{A^2}{4}}{A^2} + \frac{\upsilon^2}{A^2\omega^2} \Rightarrow \upsilon = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_k = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{m}{s}$$

$$K_2 = \frac{1}{2}\cdot m_2\cdot u_o^2 \Rightarrow K_2 = 1.5J$$

Γ3-(6)

$$\Delta\overrightarrow{p_2} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{p}_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow \Delta p_2 = m_2\cdot V_k - m_2\cdot u_o \Rightarrow \Delta p_2 = 0.5\sqrt{3} - \sqrt{3} \Rightarrow \Delta p_2 = -0.5\sqrt{3}kg\cdot\frac{m}{s}$$

$$|\Delta\overrightarrow{p_2}| = 0.5\sqrt{3}kg\cdot\frac{m}{s}$$



$$\Delta p_2 = -0.5\sqrt{3}kg \cdot \frac{m}{s}$$

Το πρόσημο δηλώνει την κατεύθυνση του διανύσματος. (σχήμα)

Γ4-(6)

$$D = k = (m_1 + m_2) \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \omega = 10\frac{rad}{s}$$

α)τρόπος

$$t_o = 0, \quad y = +\frac{A}{2}, \quad \upsilon > 0$$

$$y = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_o) \Rightarrow \frac{A}{2} = A \cdot \eta\mu\varphi_o$$

$$\eta\mu\varphi_o = \frac{1}{2} \Rightarrow \eta\mu\varphi_o = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow \varphi_o = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{6}, & k = 0 \Rightarrow \varphi_o = \frac{\pi}{6} \quad \upsilon = \upsilon_m \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} > 0 \\ 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, & k = 0 \Rightarrow \varphi_o = \frac{5\pi}{6} \quad \upsilon = \upsilon_m \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} < 0, \text{απορρίπτεται} \end{cases}$$

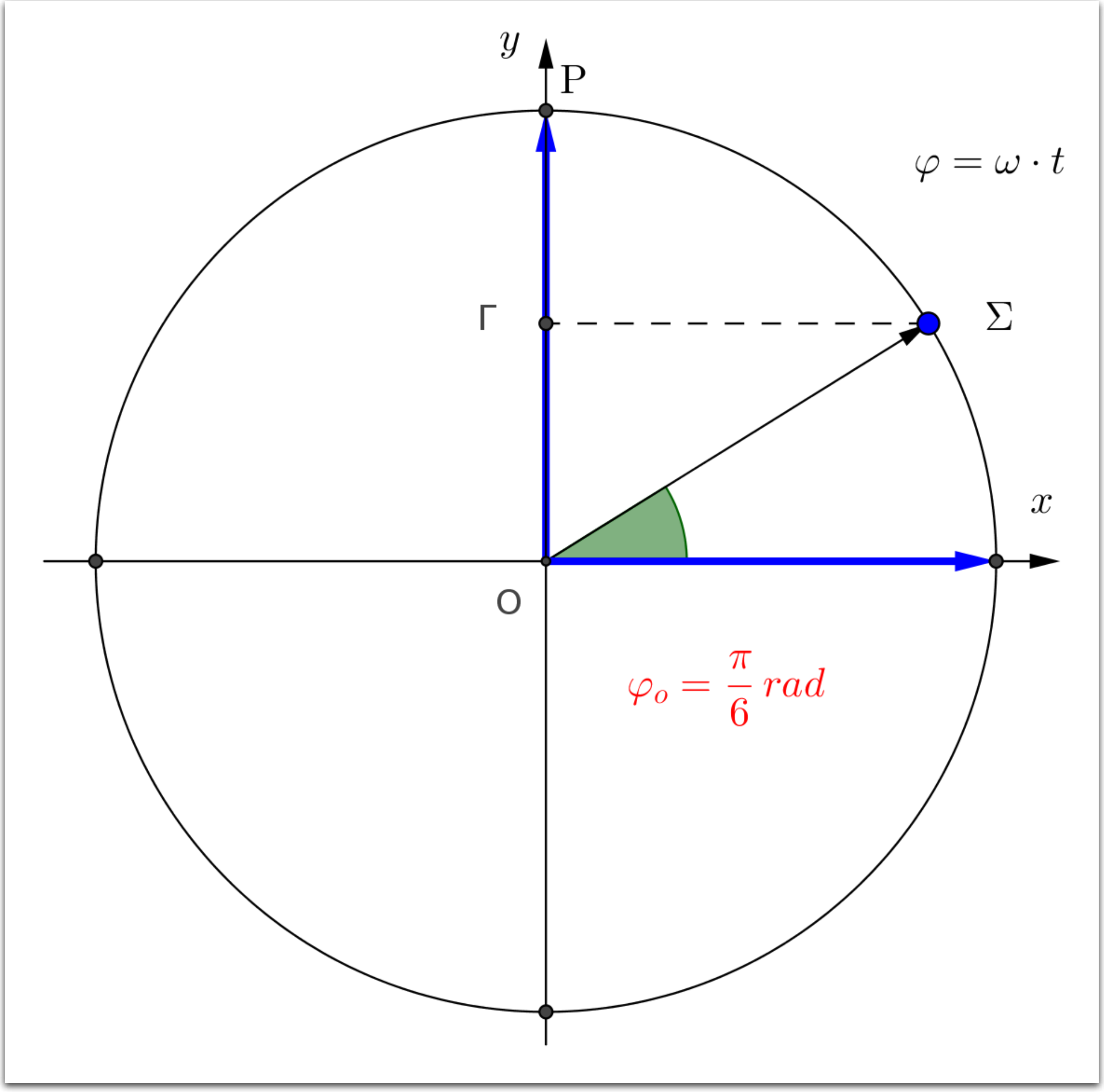
β)τρόπος

Περιστρεφόμενο διάνυσμα: Έστω Σ σημείο που εκτελεί Ο. Κ. Κ. με σταθερή ω, σε κύκλο ακτίνας A. Η γωνία που διαγράφει η επιβατική ακτίνα δίνεται από την σχέση $\varphi = \omega \cdot t$

Η προβολή του σημείου στον κατακόρυφο άξονα δίνεται από την σχέση

$$x = A\eta\mu\varphi \Rightarrow x = A \cdot \eta\mu\omega t$$

άρα η προβολή του σημείου Σ εκτελεί Α. Α. Τ.

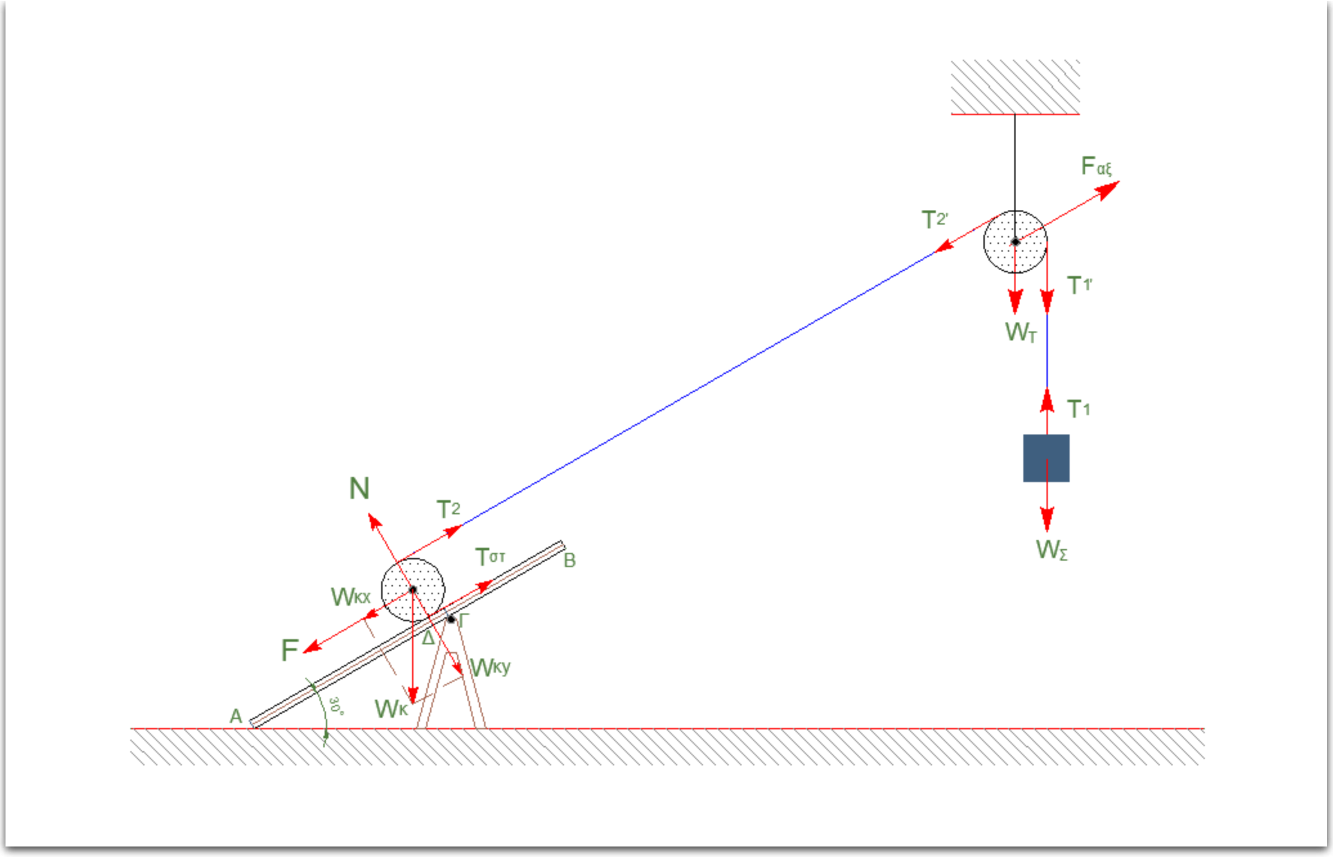


Αρχική φάση φ_o

$$\eta\mu\varphi_o = \frac{y}{A} \Rightarrow \eta\mu\varphi_o = \frac{+\frac{A}{2}}{A} \Rightarrow \eta\mu\varphi_o = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_o = \frac{\pi}{6} rad$$

$$y = 0.1 \cdot \eta\mu(10t + \frac{\pi}{6}), \quad S.I.$$

Θέμα Δ



Δ1-(4)

$$M_{\Sigma}, \quad \text{ισορροπία}, \Rightarrow \Sigma\vec{F} = 0$$

$$T_1 = \mathrm{M}_{\Sigma} \cdot g \Rightarrow T_1 = 20N$$

$$M_T, \quad \text{ισορροπία}, \Rightarrow \Sigma\vec{\tau} = 0$$

$$T_1 \cdot R_T = T_2 \cdot R_T \Rightarrow T_2 = 20N$$

α)<u>τρόπος</u>

$$M_K, \quad \text{ισορροπία}, \Rightarrow \Sigma\vec{\tau}_{(K)} = 0$$

$$T_2 \cdot R_K = T_{\sigma\tau} \cdot R_{\mathrm{K}} \Rightarrow T_2 = \mathrm{T}_{\sigma\tau}$$

$$M_K, \quad \text{ισορροπία}, \Rightarrow \Sigma\vec{F} = 0$$

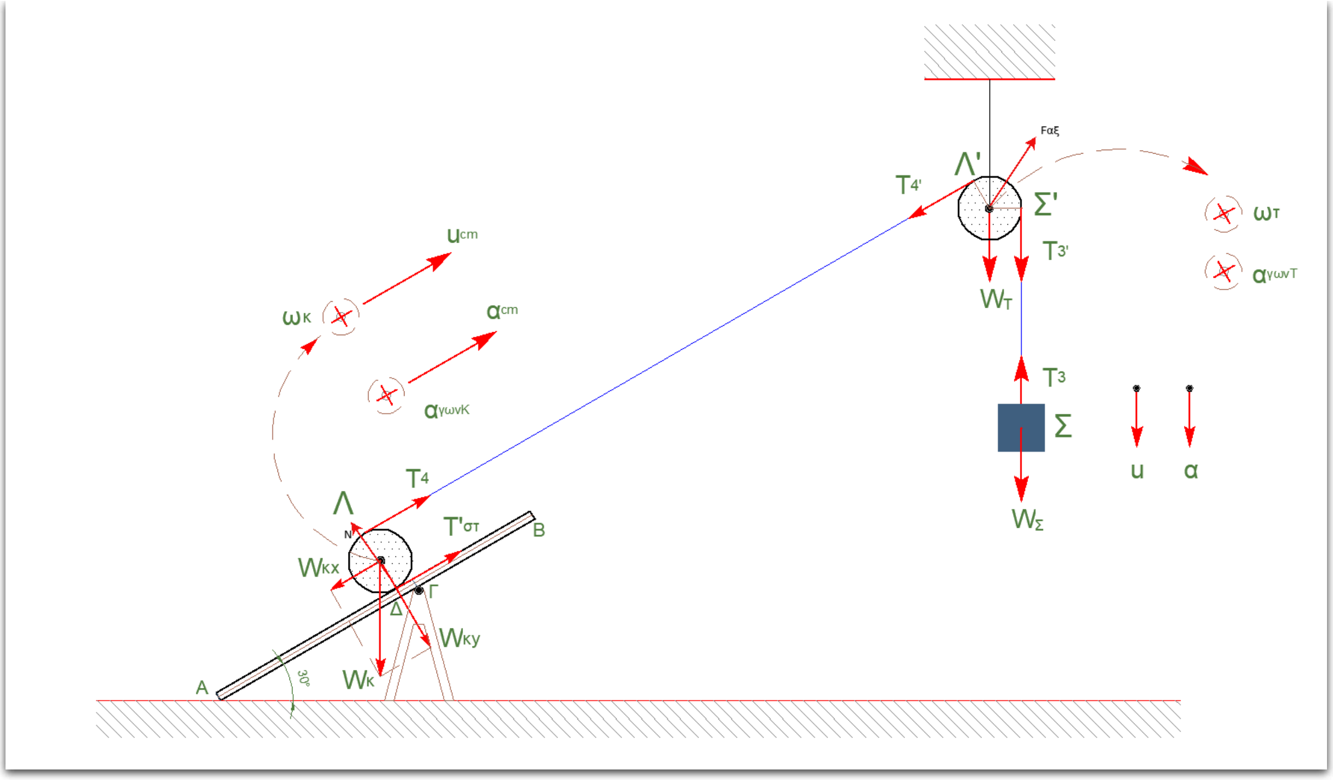
$$T_2 + \mathrm{T}_{\sigma\tau} = F + \mathrm{M_K} \cdot g \cdot \etaμφ \Rightarrow 2T_2 = F + 10 \Rightarrow F = 30N$$

β)<u>τρόπος</u>

$$M_K, \quad \text{ισορροπία}, \Rightarrow \Sigma\vec{\tau}_{(\Delta)} = 0$$

$$T_2 \cdot 2 \cdot R_K = (F + \mathrm{M_K} \cdot g \cdot \etaμφ) \cdot R_K \Rightarrow 40 = F + 10 \Rightarrow F = 30N$$

Δ2-(8)



νήμα κατακόρυφο αβαρές, μη εκτατό

$$\alpha_{\Sigma} = \alpha'_{\Sigma} = \alpha_{\gamma\rho} = \alpha_{\gamma\omega\nu_T} \cdot R_T \Rightarrow \alpha_{\Sigma} = \alpha_{\gamma\omega\nu_T} \cdot R_T \quad (1)$$

νήμα πλάγιο αβαρές, μη εκτατό

$$\alpha_{\Lambda} = \alpha'_{\Lambda} = \alpha_{\gamma\rho} = \alpha_{\gamma\omega\nu_T} \cdot R_T \Rightarrow \alpha_{\Lambda} = \alpha_{\gamma\omega\nu_T} \cdot R_T \quad (2)$$

Κύλινδρος $\mathrm{K.X.O.}$

$$\upsilon_{A} = 0 \Rightarrow \upsilon_{cm} = \omega \cdot R_K \Rightarrow \alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu_K} \cdot R_K \quad (3)$$

$$\upsilon_{\Lambda} = \upsilon_{cm} + \omega \cdot R_K \Rightarrow \upsilon_{\Lambda} = 2 \cdot \upsilon_{cm} \Rightarrow \alpha_{\Lambda} = 2 \cdot \alpha_{cm} \quad (4)$$

$$M_{\Sigma}: \quad META\Phi OPIKH \Rightarrow \Sigma\vec{F} = M_{\Sigma} \cdot \vec{\alpha}_{\Sigma}$$

$$\mathrm{M}_{\Sigma} \cdot g - T_3 = M_{\Sigma} \cdot \alpha_{\Sigma} \Rightarrow 20 - T_3 = 2 \cdot \alpha_{\Sigma} \quad (5)$$

$$M_T: \quad \Sigma TPO\Phi IKH \Rightarrow \Sigma\vec{\tau} = \mathrm{I}_T \cdot \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu_T}$$

$$T'_3 \cdot R_T - T'_4 \cdot R_T = \frac{1}{2} \cdot M_T \cdot R_T^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu_T} \overset{(2)}{\Longrightarrow} T_3 - T_4 = R_T \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu_T} \quad (6)$$

<u>α)τρόπος</u>

$$M_{\mathrm{K}}: \quad META\Phi OPIKH \Rightarrow \Sigma\vec{F} = \mathrm{M}_{\mathrm{K}} \cdot \vec{\alpha}_{cm}$$

$$T_4 + T_{\sigma\tau} - \mathrm{M}_{\mathrm{K}} \cdot g \cdot \eta\mu\varphi = \mathrm{M}_{\mathrm{K}} \cdot \alpha_{cm} \Rightarrow T_4 + T_{\sigma\tau} - 10 = 2 \cdot \alpha_{cm} \quad (7)$$

$$M_K: \quad \Sigma TPO\Phi IKH \Rightarrow \Sigma\vec{\tau} = \mathrm{I}_K \cdot \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu_K}$$

$$T_4 \cdot R_K - T_{\sigma\tau} \cdot R_K = \frac{1}{2} \cdot M_K \cdot R_K^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu_K} \Rightarrow T_4 - T_{\sigma\tau} = R_K \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu_K} \quad (8)$$

<u>β)τρόπος</u>

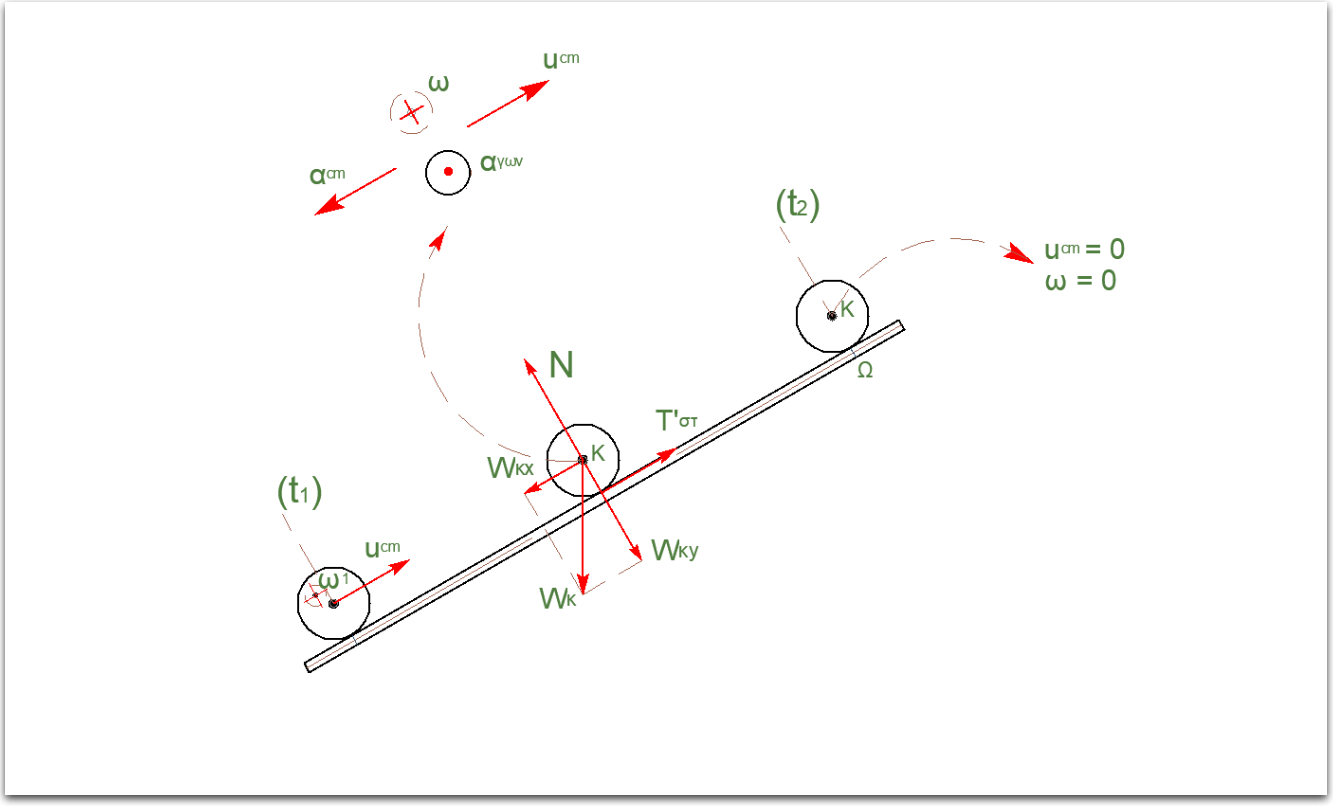
$$\mathrm{I}_{K(\Delta)} = \mathrm{I}_{cm} + M_K \cdot R_K^2 \Rightarrow \mathrm{I}_{K(\Delta)} = \frac{3}{2} \cdot M_K \cdot R_K^2 (7)$$

$$M_K: \quad \text{ΣΤΡΟΦΙΚΗ} \Rightarrow \Sigma\vec{\tau} = I_{K_\Delta} \cdot \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu_\Delta}$$

$$T_4 \cdot 2 \cdot R_K - M_K \cdot g \cdot \eta\mu\varphi \cdot R_K = \frac{3}{2} \cdot M_K \cdot R_K^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu_\Delta} \Rightarrow 2 \cdot T_4 - 10 = 3 \cdot R_K \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu_\Delta} \quad (8)$$

Λύση του μη γραμμικού συστήματος των 8 εξισώσεων με τους 10 αγνώστους $\alpha_\Sigma = 4\frac{m}{s^2}$

Δ3-(6)



$$M_K: \text{ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ}, \quad 0 - t_1$$

$$\upsilon_{cm1} = \alpha_{cm} \cdot t_1 \Rightarrow \upsilon_{cm1} = 1\frac{m}{s}$$

$$M_K: \quad \text{ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ} \Rightarrow \Sigma\vec{F} = M_K \cdot \vec{\alpha}_{cm}$$

$$M_K \cdot g \cdot \eta\mu\varphi - T_{\sigma\tau} = M_K \cdot \alpha_{cm} \Rightarrow 10 - T_{\sigma\tau} = 2\alpha_{cm} \quad (1)$$

$$M_K: \quad \text{ΣΤΡΟΦΙΚΗ} \Rightarrow \Sigma\vec{\tau} = I_K \cdot \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu_K}$$

$$T_{\sigma\tau} \cdot R_K = \frac{1}{2} \cdot M_K \cdot R_K^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu_K} \Rightarrow T_{\sigma\tau} = R_K \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu_K} \Rightarrow T_{\sigma\tau} = \alpha_{cm} \quad (2)$$

$$(1)\Lambda(2) \Rightarrow 10 - \alpha_{cm} = 2 \cdot \alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{10}{3}\frac{m}{s^2}(\text{επιβράδυνση})$$

$$\upsilon_{cm} = \upsilon_{cm1} - \alpha_{cm} \cdot \Delta t \Rightarrow 0 = 1 - \frac{10}{3} \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = 0.3s$$

$$t_2 = t_1 + \Delta t \Rightarrow t_2 = 0.8s$$

Δ4-(3)

$$M_K: \text{ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ}, \quad 0 - t_1$$

$$x_{cm1} = \frac{1}{2} \cdot \alpha_{cm} \cdot t_1^2 \Rightarrow x_{cm1} = 0.25m$$

α)<u>τρόπος</u>

$$M_K : \text{ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ}, \quad t_1 - t_2$$

$$\Delta x_{cm} = \upsilon_{cm1} \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot \alpha_{cm} \cdot \Delta t^2 \Rightarrow \Delta x_{cm} = 0.15m$$

β)τρόπος

Από την λύση του μη γραμμικού συστήματος έχουμε

$$\alpha_{cm} = 2\frac{m}{s^2} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu_K} = \frac{2}{R_K}$$

$$\upsilon_{cm1} = \alpha_{cm} \cdot t_1 \Rightarrow \upsilon_{cm1} = 1\frac{m}{s}$$

$$\omega_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu_K} \cdot t_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{R_K}\frac{rad}{s}$$

$$\text{ΑΔΜΕ}_{t1 \to t_2}$$

$$E_M^{t1} = E_M^{t2} \Rightarrow K_{\sigma\tau\rho}^{t1} + K_{\mu\varepsilon\tau}^{t1} + U^{t1} = K_{\sigma\tau\rho}^{t2} + K_{\mu\varepsilon\tau}^{t2} + U^{t2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} \cdot M_K \cdot \upsilon_{cm}^2 + 0 = 0 + 0 + M_K \cdot g \cdot h \Rightarrow h = 0.075m$$

$$\eta\mu\varphi = \frac{h}{\Delta x_{cm}} \Rightarrow \Delta x_{cm} = 0.15m$$

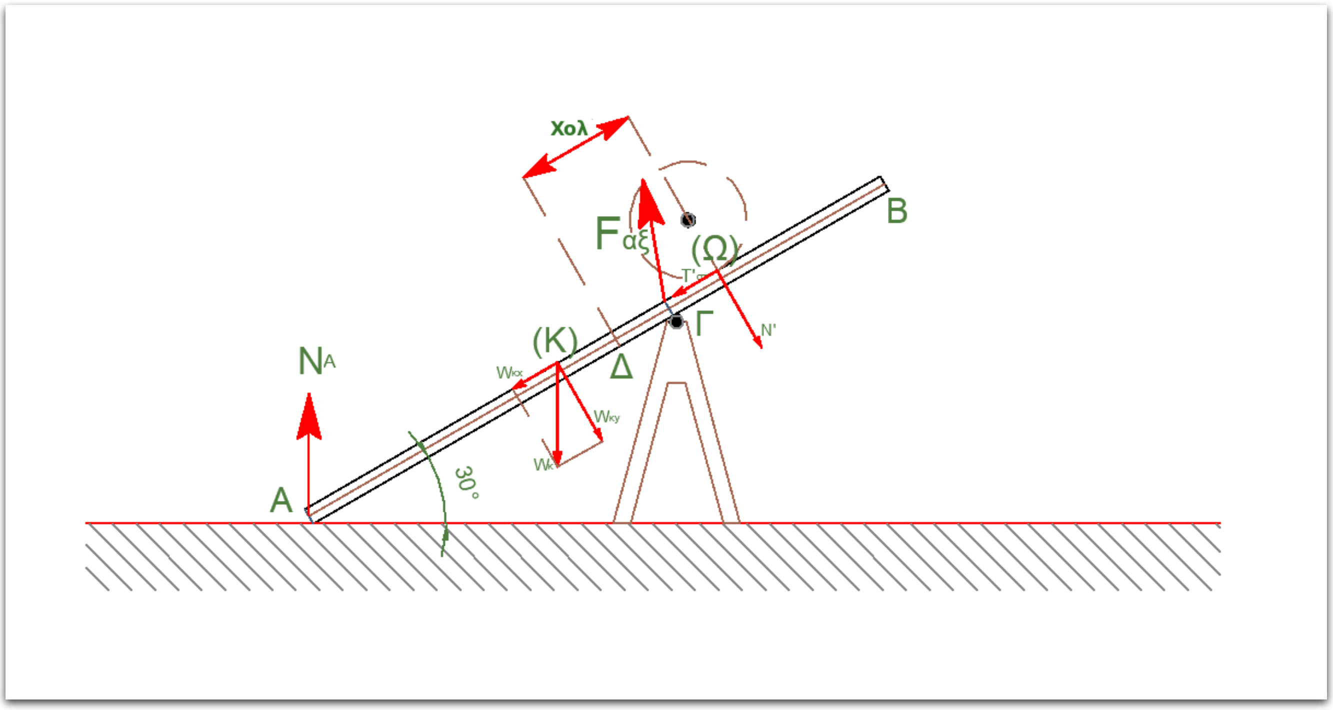
γ)τρόπος

$$\Theta\text{ΜΚΕ}_{(t_1 \to t_2)} \quad \Delta K = \Sigma W$$

$$K_{t_2} - K_{t_1} = W_B + W_{T_{\sigma\tau\alpha\tau}} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} \cdot M_K \cdot \upsilon_{cm1}^2 = -M_K \cdot g \cdot \eta\mu\varphi \cdot \Delta x_{cm} + T_{\sigma\tau\alpha\tau} \cdot \Delta x_{cm} \Rightarrow \Delta x_{cm} = 0.15m$$

$$x_{o\lambda} = x_{cm1} + \Delta x_{cm} \Rightarrow x_{o\lambda} = 0.4m$$

Δ5-(4)



α)τρόπος

$$(\Gamma\Delta) = 0.2m, \quad (K\Gamma) = 0.5m, \quad (\Gamma\Omega) = x_{o\lambda} - (\Gamma\Delta) \Rightarrow (\Gamma\Omega) = 0.2m$$

$$|\tau_{W_\rho}| = M_\rho \cdot g \cdot συνφ \cdot (KΓ) \Rightarrow |\tau_{W_\rho}| = 5\sqrt{3}N \cdot m$$

$$|\tau'_N| = M_k \cdot g \cdot συνφ \cdot (ΓΩ) \Rightarrow |\tau'_N| = 2\sqrt{3}N \cdot m$$

$$|\tau_{W_\rho}| > |\tau'_N|$$

άρα η σανίδα δεν ανατρέπεται.

β)τρόπος

Την στιγμή που ανατρέπεται η σανίδα ισχύει οριακά $N_A = 0$, όπου N_A η δύναμη του δαπέδου, N' η δύναμη που ασκεί ο κύλινδρος κάθετα στην επιφάνεια της σανίδας και W_{K_y} η κάθετη συνιστώσα του βάρους της σανίδας και Ψ το σημείο στο οποίο αν τοποθετηθεί ο κύλινδρος η σανίδα οριακά θα ανατραπεί.

$$\Sigma\vec{\tau}_{(Γ)} = 0 \Rightarrow N' \cdot (ΓΨ) - W_{K_y} \cdot (KΓ) = 0 \Rightarrow M_K \cdot g \cdot συνφ \cdot (ΩΓ) - M_\rho \cdot g \cdot συνφ \cdot (KΓ)$$

$$2 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x - 2 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow x = 0.5m$$

Δηλαδή το σημείο Ψ απέχει $0.5m$ από την άρθρωση Γ και $1m$ από το άκρο B της σανίδας.

Άρα η θέση ανατροπής είναι σε $x = 0.5m$ από το σημείο Γ. Όμως το σώμα φτάνει σε απόσταση $l = 0.2m$ πάνω από το Γ. Αφού $l < x$ η σανίδα δεν ανατρέπεται.

γ)τρόπος

Έστω τυχαία θέση του κυλίνδρου για την οποία το σημείο επαφής του κυλίνδρου με την σανίδα έχει απομάκρυνση x από την θέση Γ Η δύναμη N_A είναι από το λείο δάπεδο, και η N' είναι η αντίδραση του κυλίνδρου στην δράση N της σανίδας στον κύλινδρο. Στον κάθετο στην σανίδα άξονα η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στον κύλινδρο είναι μηδέν, οπότε $N' = M_\kappa \cdot g \cdot συνφ$

$$\Sigma\vec{\tau}_{(Γ)} = 0 \Rightarrow -\tau_{N_A} \cdot (AΓ) \cdot συνφ - N' \cdot x + W_\rho \cdot συνφ \cdot (KΓ) = 0$$

$$-N_A \cdot 2.5\frac{\sqrt{3}}{2} + 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x$$

$$2.5 \cdot N_A = 10 - 20 \cdot x \Rightarrow N_A = \frac{10 - 20 \cdot x}{2.5}$$

Για να μην χάνεται η επαφή πρέπει

$$N_A \geqslant 0 \Rightarrow \frac{10 - 20 \cdot x}{2.5} \geqslant 0 \Rightarrow -20 \cdot x \geqslant -10 \Rightarrow x \leq 0.5m$$

δηλαδή για να μην ανατραπεί η σανίδα πρέπει ο κύλινδρος να φτάσει μέχρι $0,5m$ δεξιά του σημείου Γ.

Ο κύλινδρος την στιγμή t_2 έχει βρεθεί στην θέση $x = \Delta_{x_{ολ}} - (ΔΓ) = 0,2m$ οπότε η σανίδα στο δοσμένο χρονικό διάστημα δεν ανατρέπεται.

δ)τρόπος

Την στιγμή που ανατρέπεται η σανίδα ισχύει οριακά $N_A = 0$, όπου N_A η δύναμη του δαπέδου, N' η δύναμη που ασκεί ο κύλινδρος κάθετα στην επιφάνεια της σανίδας και W_{K_y} η κάθετη συνιστώσα του βάρους της σανίδας και Ψ το σημείο στο οποίο αν τοποθετηθεί ο κύλινδρος η σανίδα οριακά θα ανατραπεί.

$$\Sigma\vec{\tau}_{(Γ)} = 0 \Rightarrow N' \cdot (ΓΨ) - W_{K_y} \cdot (KΓ) = 0 \Rightarrow M_K \cdot g \cdot συνφ \cdot (ΩΓ) - M_\rho \cdot g \cdot συνφ \cdot (KΓ)$$

$$2 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x - 2 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow x = 0.5m$$

Δηλαδή το σημείο Ψ απέχει $0.5m$ από την άρθρωση Γ και $1m$ από το άκρο B της σανίδας.

Για την δύναμη N_A που ασκεί το δάπεδο στην σανίδα ισχύει η σχέση $N_A > 0$ για κάθε θέση του κυλίνδρου από την θέση Δ έως την θέση Ψ για την οποία δείξαμε ότι απέχει $0.5m$ από την άρθρωση Γ και $1m$ από το άκρο B της σανίδας.

Έστω ότι την χρονική στιγμή t_2 που ο κύλινδρος σταματά στιγμιαία, η σανίδα δεν ανατρέπεται. Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της ανάλυσης και με ισοδύναμες προτάσεις θα φτάσουμε σε κάτι που ισχύει για την συγκεκριμένη χρονική στιγμή, δηλαδή στην σχέση $N_A > 0$. Αφού η σανίδα δεν ανατρέπεται ισχύει

$$\Sigma\vec{\tau}_{(\Gamma)} = 0 \Rightarrow N_A \cdot (A\Gamma) \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi + N' \cdot (O\Gamma) - W_\rho \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot (K\Gamma) = 0$$

$$N_A \cdot (A\Gamma) \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi + M_K \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot (O\Gamma) - M_\rho \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot (K\Gamma) = 0$$

$$N_A \cdot (A\Gamma) = M_\rho \cdot g \cdot (K\Gamma) - M_K \cdot g \cdot (O\Gamma)$$

$$N_A = \frac{20 \cdot 0.5 - 20 \cdot 0.2}{2.5} \Rightarrow N_A = \frac{6}{2.5} \Rightarrow N_A = 2.4N$$

Άρα το δάπεδο εκείνη την χρονική στιγμή που ο κύλινδρος σταματά, είναι σε επαφή με την σανίδα αφού της ασκεί δύναμη θετική $N_A = 2.4N$ Άρα η σανίδα δεν ανατρέπεται.

ε)τρόπος

Η "εις άτοπον απαγωγή"

Έστω ότι την χρονική στιγμή t_2, δηλαδή την στιγμή που ο κύλινδρος σταματά στιγμιαία, η σανίδα ανατρέπεται. Αυτό σημαίνει ότι η σανίδα δεν είναι σε επαφή με το δάπεδο δηλαδή ισχύει $N = 0 \Rightarrow \tau_N = 0$. Θεωρούμε θετική φορά για τις ροπές, αυτή των δεικτών του ρολογιού.

$$(\Gamma\Delta) = 0.2m, \quad (K\Gamma) = 0.5m, \quad (\Gamma\Omega) = x_{o\lambda} - (\Gamma\Delta) \Rightarrow (\Gamma\Omega) = 0.2m$$

$$\tau_{W_\rho} = -M_\rho \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot (K\Gamma) \Rightarrow \tau_{W_\rho} = -5\sqrt{3}N \cdot m$$

$$\tau'_N = M_k \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot (K\Gamma) \Rightarrow \tau'_N = 2\sqrt{3}N \cdot m$$

$$\Sigma\tau_{(\Gamma)} = \tau'_N + \tau_{W_\rho} = 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} \Rightarrow \Sigma\tau_{(\Gamma)} < 0$$

Αυτό σημαίνει ότι η σανίδα θα περιστραφεί με φορά αντίθετη από αυτή την ρολογιών, δηλαδή θα έρθει σε επαφή με το δάπεδο άρα θα ασκεί δύναμη στο δάπεδο, άρα και το δάπεδο θα ασκεί δύναμη στην σανίδα, δηλαδή $N > 0$

Άρα άτοπο. Υποθέσαμε στην αρχή ότι η σανίδα ανατρέπεται δηλαδή $N = 0$ και οδηγηθήκαμε στο ότι $N > 0$ άρα η αρχική μας υπόθεση είναι εσφαλμένη. Άρα η σανίδα δεν ανατρέπεται.

Μπορείτε να εκτυπώσετε τις λύσεις σε μορφή pdf από εδώ και τα θέματα από εδώ