

Μοριοδότηση 2019

Ενδεικτικές απαντήσεις και από γραπτά μαθητών

Θέμα A

A1 - β

A2 - γ

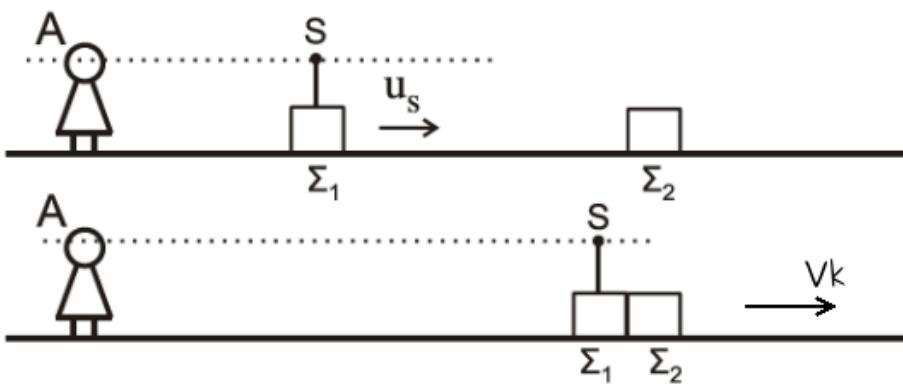
A3 - α

A4 - γ

A5: $\Lambda - \Sigma - \Lambda - \Sigma - \Sigma$

Θέμα B

B1-(ii) - 2 - 6



$$\vec{\Sigma F}_{\text{εξ}} = 0 \iff \text{Α.Δ.Ο.} \quad \vec{p}_{\text{πρω}} = \vec{p}_{\text{μετω}}$$

$$m \cdot u_s = (m + m) \cdot V_k \Rightarrow V_k = \frac{m \cdot u_s}{2 \cdot m} \Rightarrow V_k = \frac{u_H}{40}$$

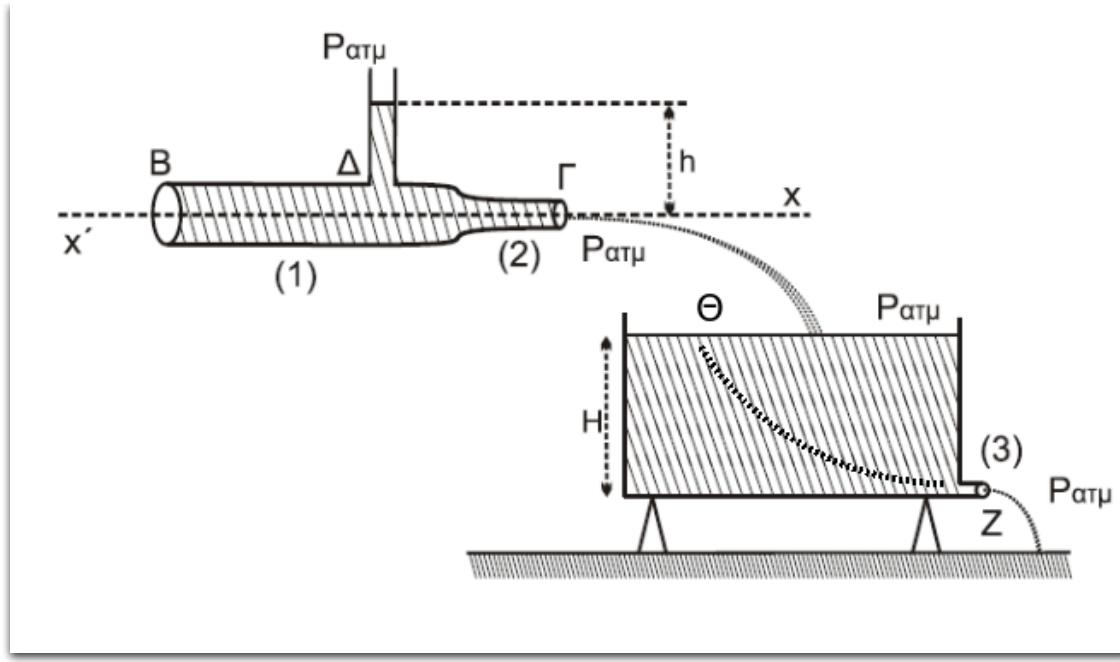
$$f_1 = \frac{u_H}{u_H + u_s} \cdot f_s$$

$$f_2 = \frac{u_H}{u_H + V_k} \cdot f_s$$

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{u_H + V_k}{u_H + u_s} = \frac{u_H + \frac{u_H}{40}}{u_H + \frac{u_H}{20}} = \frac{\frac{41u_H}{40}}{\frac{21u_H}{20}} = \frac{41}{42}$$

άρα σωστό το ii

B2 - (iii) - 2 - 6



Όταν σταθεροποιείται το ύψος στο δοχείο

$$\Pi_2 = \Pi_3 \Rightarrow A_2 \cdot v_2 = A_3 \cdot v_3 \xrightarrow{A_3 = \frac{A_2}{2}} v_2 = \frac{v_3}{2}$$

Εξίσωση Bernoulli για μια ρευματική γραμμή ($\Theta \rightarrow Z$)

$$P_\Theta + \frac{1}{2} \rho \cdot v_\Theta^2 + \rho \cdot g \cdot H = P_Z + \frac{1}{2} \rho \cdot v_Z^2 \Rightarrow P_{\alpha\tauμ} + \rho \cdot g \cdot H = P_{\alpha\tauμ} + \frac{1}{2} \rho \cdot v_Z^2$$

$$v_3 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$$

Εξίσωση συνέχειας ($\Delta \rightarrow \Gamma$)

$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \xrightarrow{A_1 = 2A_2} v_2 = 2v_1$$

Εξίσωση Bernoulli για μια οριζόντια ρευματική γραμμή ($\Delta \rightarrow \Gamma$)

$$P_\Delta + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = P_\Gamma + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2$$

$$P_\Delta = P_{\alpha\tauμ} + \rho \cdot g \cdot h$$

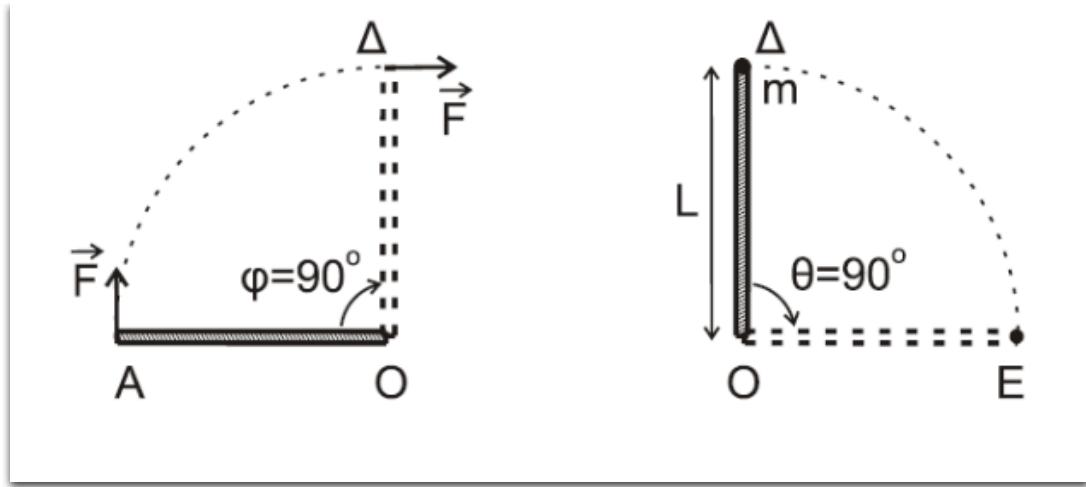
$$P_{\alpha\tauμ} + \rho \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = P_{\alpha\tauμ} + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 \Rightarrow g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (v_2^2 - v_1^2)$$

$$g \cdot h = \frac{3}{8} \cdot v_2^2 \xrightarrow{v_2 = \frac{v_3}{2}} g \cdot h = \frac{3}{8} \cdot \frac{v_3^2}{4}$$

$$v_3^2 = \frac{32}{3} \cdot g \cdot h \xrightarrow{v_3 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H}} 2 \cdot g \cdot H = \frac{32}{3} \cdot g \cdot h \Rightarrow \frac{h}{H} = \frac{3}{16}$$

άρα σωστό το *iii*

B3-(ii) - 2 - 7

α) τρόπος

$$\Sigma \vec{\tau} = I \cdot \vec{\alpha}_{\text{γων}} \Rightarrow F \cdot L = \frac{1}{3} \cdot M \cdot L^2 \cdot \alpha_{\text{γων}} \Rightarrow \alpha_{\text{γων}} = \frac{3F}{ML}$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \alpha_{\text{γων}} \cdot t^2 \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \alpha_{\text{γων}} \cdot t_{AD} \Rightarrow t_{AD} = \sqrt{\frac{\pi \cdot M \cdot L}{3F}}$$

$$\omega = \alpha_{\text{γων}} \cdot t_{AD} = \frac{3F}{ML} \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot M \cdot L}{3F}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3 \cdot F \cdot \pi}{M \cdot L}} \Rightarrow \omega = 3\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

β) τρόπος

$$\Theta \text{MKE}(A \rightarrow \Delta) \quad K_{\Delta} - K_A = \Sigma W_{\tau} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot I_p \cdot \omega^2 - 0 = \tau_F \cdot \theta$$

$$\frac{1}{2} \cdot I_p \cdot \omega^2 = F \cdot L \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{M}{3} \cdot L^2 \cdot \omega^2 = F \cdot L \cdot \pi$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3 \cdot F \cdot \pi}{M \cdot L}} = \sqrt{9 \cdot \frac{\pi^2}{L^2}}$$

$$\omega = 3\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\Sigma \vec{\tau}_{\text{εξ}} = 0 \iff A \cdot \Delta \cdot \Sigma \tau p_0 \Rightarrow \vec{L}_{\text{πρώ}} = \vec{L}_{\text{μετά}} \Rightarrow I_p \cdot \omega = (I_p + m \cdot L^2) \cdot \omega_k$$

$$\frac{1}{3} \cdot M \cdot L^2 \cdot \omega = (\frac{1}{3} \cdot M \cdot L^2 + m \cdot L^2) \cdot \omega_k \Rightarrow \omega = 2 \cdot \omega_k \Rightarrow \omega_k = \frac{\omega}{2}$$

Ομαλή στροφική κίνηση

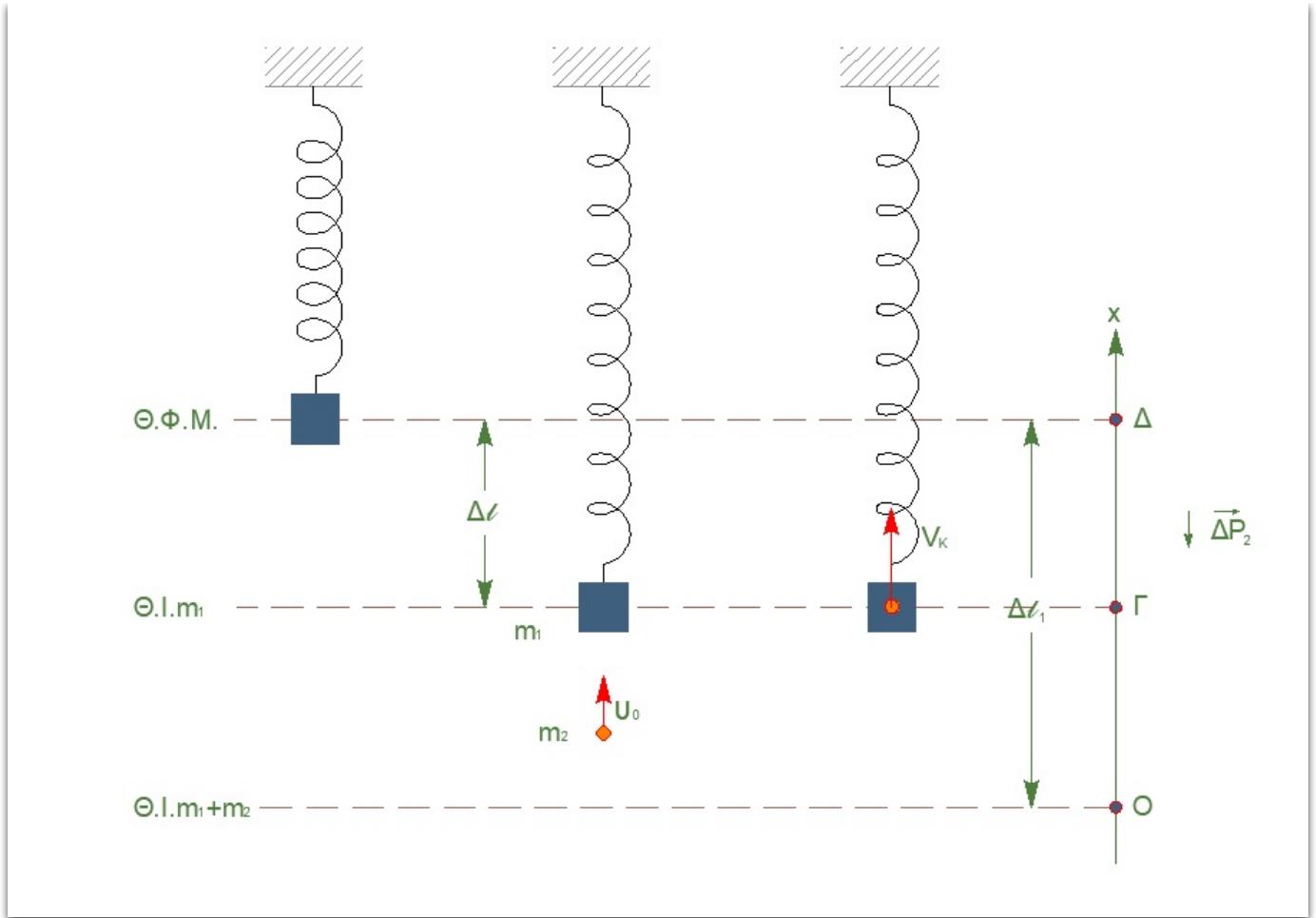
$$\Delta \theta = \omega_k \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta \theta}{\omega_k} = \frac{\Delta \theta}{\frac{\omega}{2}} = \frac{2 \Delta \theta}{\omega} = \frac{2 \cdot \frac{\pi}{2}}{\omega} = \frac{\pi}{\omega}$$

$$\Delta t = \frac{1}{3} \text{ s}$$

άρα σωστό το ii

Θέμα Γ

Γ1-(6)



$$(\Theta I_{m_1}) \quad \sum \vec{F} = 0 \Rightarrow$$

$$F_{\text{ελ}} = m_1 \cdot g \Rightarrow$$

$$k \cdot \Delta l = m_1 \cdot g \Rightarrow$$

$$k = \frac{m_1 \cdot g}{\Delta l} = 200 \frac{N}{m}$$

$$(\Theta I_{m_1, m_2}) \quad \sum \vec{F} = 0 \Rightarrow$$

$$F'_{\text{ελ}} = (m_1 + m_2) \cdot g \Rightarrow$$

$$k \cdot \Delta l_1 = (m_1 + m_2) \cdot g \Rightarrow$$

$$\Delta l_1 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot g}{k} \Rightarrow$$

$$\Delta l_1 = 0.1m$$

$$\text{Στην ακραία θέση } v_{\text{τωλ}} = 0 \Rightarrow A = 0.1m$$

Γ2(7)

$$\sum \vec{F}_{\text{εξ}} = 0 \iff \text{Α.Δ.Ο.} \quad \vec{p}_{\text{πρώ}} = \vec{p}_{\text{μετά}}$$

$$m_2 \cdot u_o = (m_1 + m_2) \cdot V_k$$

α) τρόπος

$$\Delta E_{\text{τωλ}} (\Gamma \rightarrow \Delta)$$

$$K_\Gamma + U_{\text{τωλ}\Gamma} = K_\Delta + U_{\text{τωλ}\Delta} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot V_k^2 + \frac{1}{2} \cdot D \cdot (\Delta l_1 - \Delta l)^2 = 0 + \frac{1}{2} \cdot D \cdot A^2$$

$$2V_k^2 + 200 \cdot 0.05^2 = 200 \cdot 0.01 \Rightarrow V_k^2 + 0.25 = 1 \Rightarrow V_k = \sqrt{0.75} \Rightarrow |V_k| = 0.5\sqrt{3} \frac{m}{s}, V_k > 0$$

β) τρόπος

$$\Theta MKE_{(\Gamma \rightarrow \Delta)} \quad \Delta K = \Sigma W$$

$$K_\Delta - K_\Gamma = W_B + W_{F_{\text{ex}}} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot V_k^2 = -(m_1 + m_2) \cdot g \cdot \Delta l + \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta l^2$$

$$-V_k^2 = -1 + 0.25 \Rightarrow V_k = \sqrt{0.75} \Rightarrow |V_k| = 0.5\sqrt{3} \frac{m}{s}$$

γ) τρόπος

$$D = k = (m_1 + m_2) \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \omega = 10 \frac{rad}{s}$$

$$x = A \cdot \eta \mu \varphi(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \eta \mu (\omega t + \varphi_0) = \frac{x}{A}$$

$$v = A\omega \cdot \sigma v \nu \varphi(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \sigma v \nu (\omega t + \varphi_0) = \frac{v}{A\omega}$$

$$\eta \mu^2 \varphi + \sigma v \nu^2 \varphi = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2 \omega^2}$$

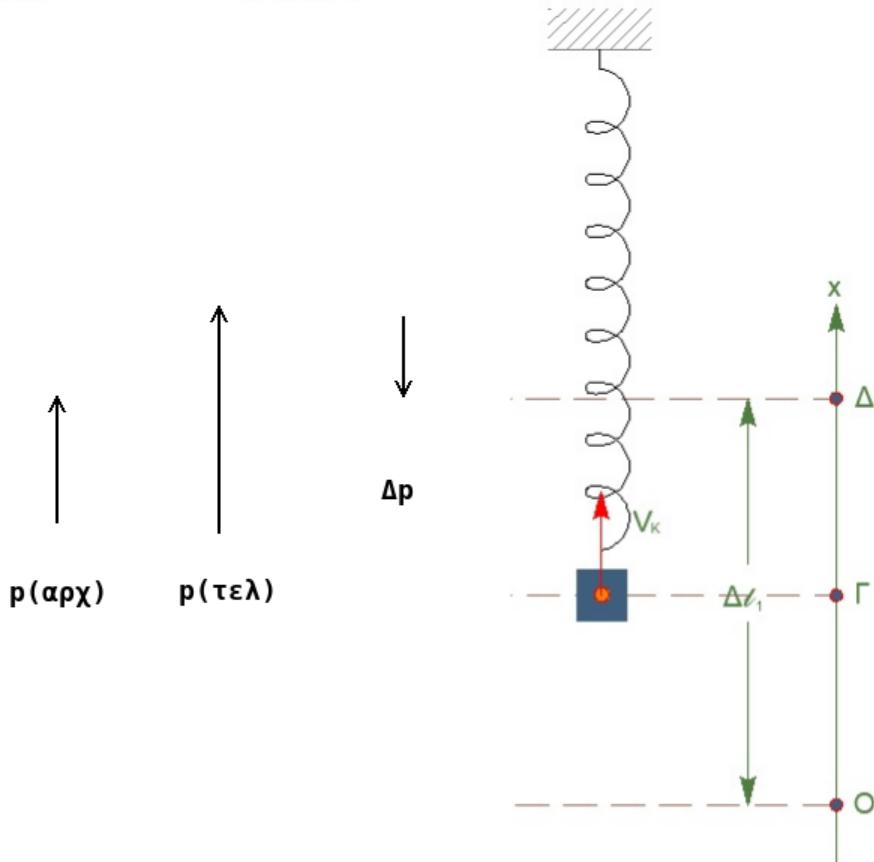
$$\frac{\frac{A^2}{4}}{A^2} + \frac{v^2}{A^2 \omega^2} \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_k = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m}{s}$$

$$K_2 = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot u_o^2 \Rightarrow K_2 = 1.5J$$

Γ3-(6)

$$\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_{\text{τελ}} - \vec{p}_{\text{αρχ}} \Rightarrow \Delta p_2 = m_2 \cdot V_k - m_2 \cdot u_o \Rightarrow \Delta p_2 = 0.5\sqrt{3} - \sqrt{3} \Rightarrow \Delta p_2 = -0.5\sqrt{3} kg \cdot \frac{m}{s}$$

$$|\Delta \vec{p}_2| = 0.5\sqrt{3} kg \cdot \frac{m}{s}$$



$$\Delta p_2 = -0.5\sqrt{3}kg \cdot \frac{m}{s}$$

Το πρόσημο δηλώνει την κατεύθυνση του διανύσματος. (σχήμα)

Γ4-(6)

$$D = k = (m_1 + m_2) \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \omega = 10 \frac{rad}{s}$$

α) τρόπος

$$t_o = 0, \quad y = +\frac{A}{2}, \quad v > 0$$

$$y = A \cdot \eta \mu (\omega t + \varphi_o) \Rightarrow \frac{A}{2} = A \cdot \eta \mu \varphi_o$$

$$\eta \mu \varphi_o = \frac{1}{2} \Rightarrow \eta \mu \varphi_o = \eta \mu \frac{\pi}{6} \Rightarrow \varphi_o = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{6}, & k = 0 \Rightarrow \varphi_o = \frac{\pi}{6} \\ 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, & k = 0 \Rightarrow \varphi_o = \frac{5\pi}{6} \end{cases} \quad v = v_m \cdot \sin \frac{\pi}{6} > 0 \quad v = v_m \cdot \sin \frac{5\pi}{6} < 0, \text{ απορρίπτεται}$$

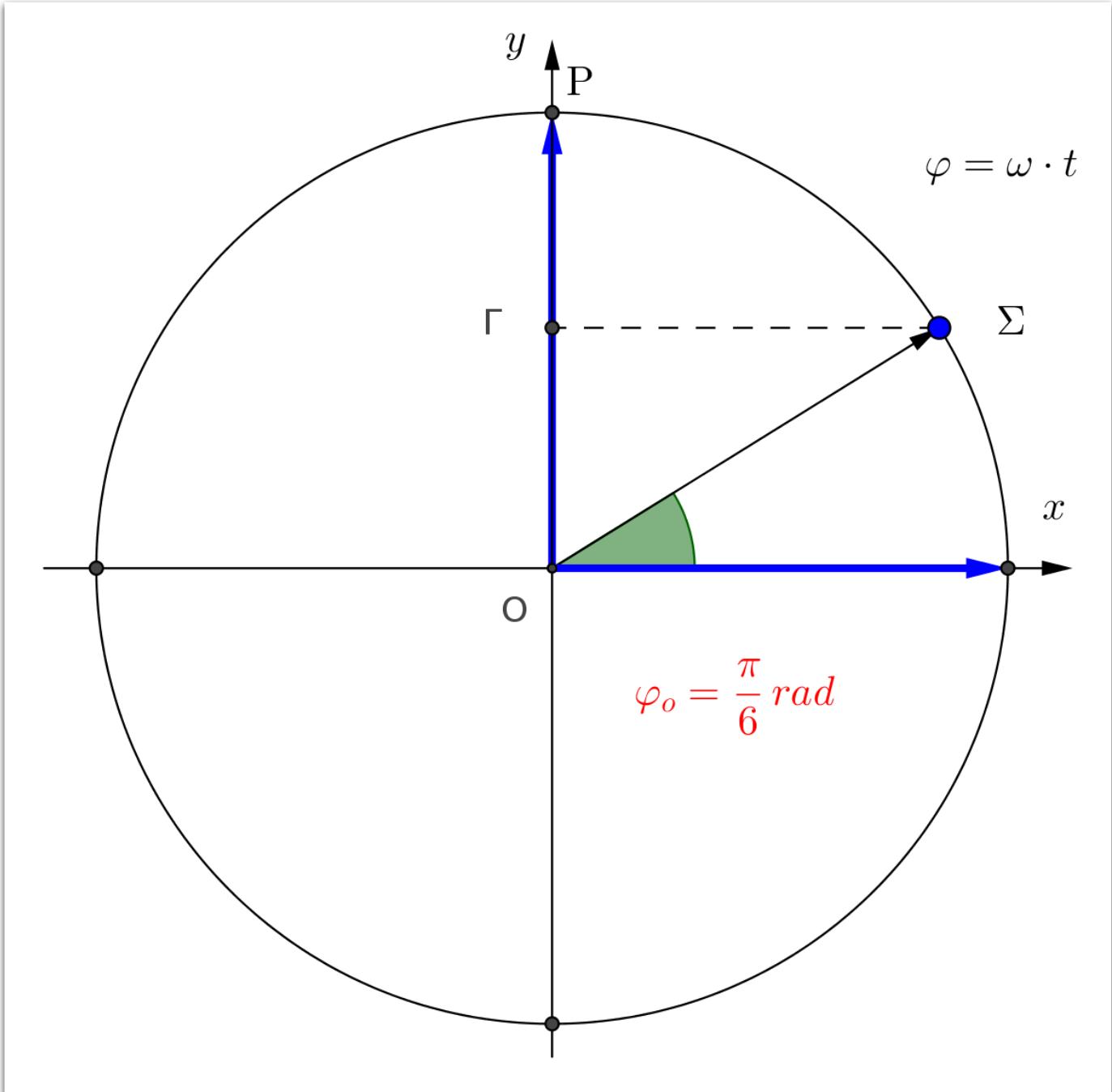
β) τρόπος

Περιστρεφόμενο διάνυσμα: Έστω Σ σημείο που εκτελεί Ο.Κ.Κ. με σταθερή ω , σε κύκλο ακτίνας A . Η γωνία που διαγράφει η επιβατική ακτίνα δίνεται από την σχέση $\varphi = \omega \cdot t$

Η προβολή του σημείου στον κατακόρυφο άξονα δίνεται από την σχέση

$$x = A \eta \mu \varphi \Rightarrow x = A \cdot \eta \mu \omega t$$

άρα η προβολή του σημείου Σ εκτελεί **A. A. T.**

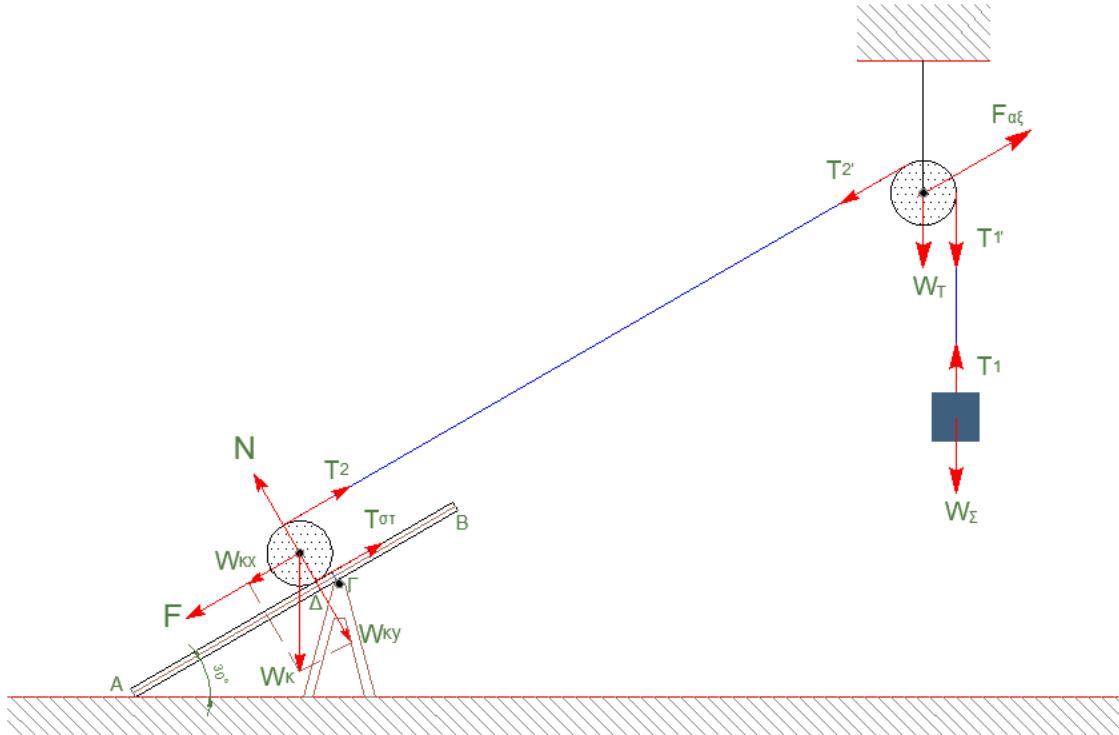


Αρχική φάση φ_0

$$\eta\mu\varphi_0 = \frac{y}{A} \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \frac{+\frac{A}{2}}{A} \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$y = 0.1 \cdot \eta\mu(10t + \frac{\pi}{6}), \quad S.I.$$

Θέμα Δ

**Δ1-(4)**

$$M_{\Sigma}, \text{ ισορροπία, } \Rightarrow \sum \vec{F} = 0$$

$$T_1 = M_{\Sigma} \cdot g \Rightarrow T_1 = 20N$$

$$M_T, \text{ ισορροπία, } \Rightarrow \sum \vec{\tau} = 0$$

$$T_1 \cdot R_T = T_2 \cdot R_T \Rightarrow T_2 = 20N$$

α) τρόπος

$$M_K, \text{ ισορροπία, } \Rightarrow \sum \vec{\tau}_{(K)} = 0$$

$$T_2 \cdot R_K = T_{\sigma\tau} \cdot R_K \Rightarrow T_2 = T_{\sigma\tau}$$

$$M_K, \text{ ισορροπία, } \Rightarrow \sum \vec{F} = 0$$

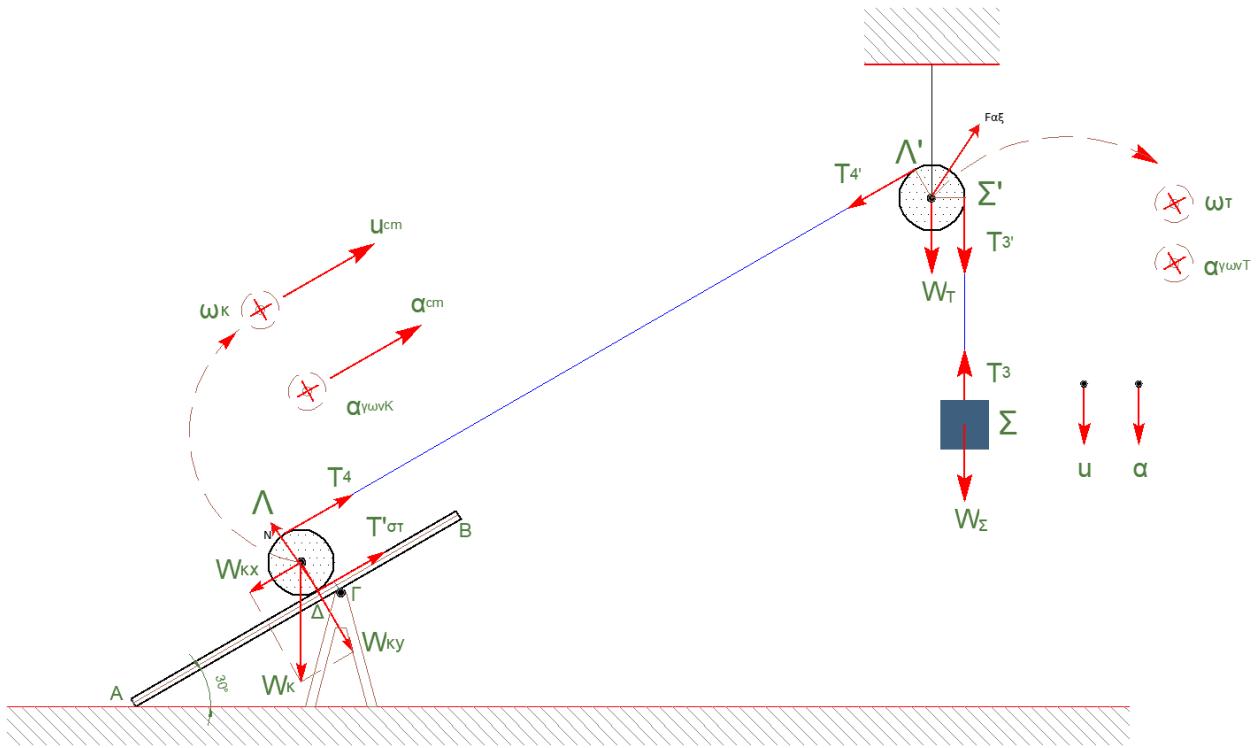
$$T_2 + T_{\sigma\tau} = F + M_K \cdot g \cdot \eta \mu \varphi \Rightarrow 2T_2 = F + 10 \Rightarrow F = 30N$$

β) τρόπος

$$M_K, \text{ ισορροπία, } \Rightarrow \sum \vec{\tau}_{(\Delta)} = 0$$

$$T_2 \cdot 2 \cdot R_K = (F + M_K \cdot g \cdot \eta \mu \varphi) \cdot R_K \Rightarrow 40 = F + 10 \Rightarrow F = 30N$$

Δ2-(8)



νήμα κατακόρυφο αβαρές, μη εκτατό

$$\alpha_{\Sigma} = \alpha_{\Sigma'} = \alpha_{\gamma p} = \alpha_{\gamma \omega \nu_T} \cdot R_T \Rightarrow \alpha_{\Sigma} = \alpha_{\gamma \omega \nu_T} \cdot R_T \quad (1)$$

νήμα πλάγιο αβαρές, μη εκτατό

$$\alpha_{\Lambda} = \alpha_{\Lambda'} = \alpha_{\gamma p} = \alpha_{\gamma \omega \nu_T} \cdot R_T \Rightarrow \alpha_{\Lambda} = \alpha_{\gamma \omega \nu_T} \cdot R_T \quad (2)$$

Κύλινδρος Κ.Χ.Ο.

$$v_A = 0 \Rightarrow v_{cm} = \omega \cdot R_K \Rightarrow \alpha_{cm} = \alpha_{\gamma \omega \nu_K} \cdot R_K \quad (3)$$

$$v_{\Lambda} = v_{cm} + \omega \cdot R_K \Rightarrow v_{\Lambda} = 2 \cdot v_{cm} \Rightarrow \alpha_{\Lambda} = 2 \cdot \alpha_{cm} \quad (4)$$

$$M_{\Sigma} : \text{ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ} \Rightarrow \vec{\Sigma F} = M_{\Sigma} \cdot \vec{\alpha}_{\Sigma}$$

$$M_{\Sigma} \cdot g - T_3 = M_{\Sigma} \cdot \alpha_{\Sigma} \Rightarrow 20 - T_3 = 2 \cdot \alpha_{\Sigma} \quad (5)$$

$$M_T : \text{ΣΤΡΟΦΙΚΗ} \Rightarrow \vec{\Sigma \tau} = I_T \cdot \vec{\alpha}_{\gamma \omega \nu_T}$$

$$T'_3 \cdot R_T - T'_4 \cdot R_T = \frac{1}{2} \cdot M_T \cdot R_T^2 \cdot \alpha_{\gamma \omega \nu_T} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} T_3 - T_4 = R_T \cdot \alpha_{\gamma \omega \nu_T} \quad (6)$$

α) τρόπος

$$M_K : \text{ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ} \Rightarrow \vec{\Sigma F} = M_K \cdot \vec{\alpha}_{cm}$$

$$T_4 + T_{\sigma \tau} - M_K \cdot g \cdot \eta \mu \varphi = M_K \cdot \alpha_{cm} \Rightarrow T_4 + T_{\sigma \tau} - 10 = 2 \cdot \alpha_{cm} \quad (7)$$

$$M_K : \text{ΣΤΡΟΦΙΚΗ} \Rightarrow \vec{\Sigma \tau} = I_K \cdot \vec{\alpha}_{\gamma \omega \nu_K}$$

$$T_4 \cdot R_K - T_{\sigma \tau} \cdot R_K = \frac{1}{2} \cdot M_K \cdot R_K^2 \cdot \alpha_{\gamma \omega \nu_K} \Rightarrow T_4 - T_{\sigma \tau} = R_K \cdot \alpha_{\gamma \omega \nu_K} \quad (8)$$

β) τρόπος

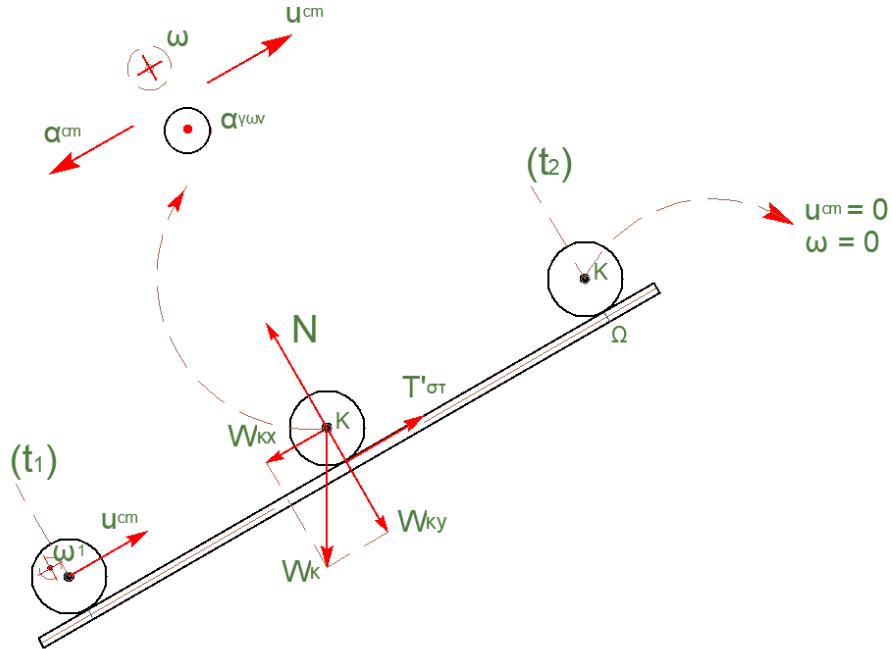
$$I_{K(\Delta)} = I_{cm} + M_K \cdot R_K^2 \Rightarrow I_{K(\Delta)} = \frac{3}{2} \cdot M_K \cdot R_K^2 \quad (7)$$

$$M_K : \Sigma\vec{\tau} = I_{K_\Delta} \cdot \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu_\Delta}$$

$$T_4 \cdot 2 \cdot R_K - M_K \cdot g \cdot \eta\mu\varphi \cdot R_K = \frac{3}{2} \cdot M_K \cdot R_K^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu_\Delta} \Rightarrow 2 \cdot T_4 - 10 = 3 \cdot R_K \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu_\Delta} \quad (8)$$

Λύση του μη γραμμικού συστήματος των 8 εξισώσεων με τους 10 αγνώστους $\alpha_\Sigma = 4 \frac{m}{s^2}$

Δ3-(6)



$$M_K : \text{ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ}, \quad 0 - t_1$$

$$v_{cm1} = \alpha_{cm} \cdot t_1 \Rightarrow v_{cm1} = 1 \frac{m}{s}$$

$$M_K : \text{ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ} \Rightarrow \Sigma\vec{F} = M_K \cdot \vec{\alpha}_{cm}$$

$$M_K \cdot g \cdot \eta\mu\varphi - T_{\sigma\tau} = M_K \cdot \alpha_{cm} \Rightarrow 10 - T_{\sigma\tau} = 2\alpha_{cm} \quad (1)$$

$$M_K : \Sigma\vec{\tau} = I_K \cdot \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu_K}$$

$$T_{\sigma\tau} \cdot R_K = \frac{1}{2} \cdot M_K \cdot R_K^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu_K} \Rightarrow T_{\sigma\tau} = R_K \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu_K} \Rightarrow T_{\sigma\tau} = \alpha_{cm} \quad (2)$$

$$(1) \wedge (2) \Rightarrow 10 - \alpha_{cm} = 2 \cdot \alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{10}{3} \frac{m}{s^2} \text{ (επιβράδυνση)}$$

$$v_{cm} = v_{cm1} - \alpha_{cm} \cdot \Delta t \Rightarrow 0 = 1 - \frac{10}{3} \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = 0.3s$$

$$t_2 = t_1 + \Delta t \Rightarrow t_2 = 0.8s$$

Δ4-(3)

$$M_K : \text{ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ}, \quad 0 - t_1$$

$$x_{cm1} = \frac{1}{2} \cdot \alpha_{cm} \cdot t_1^2 \Rightarrow x_{cm1} = 0.25m$$

α)τρόπος

***M_K* : МЕТАФОРИКН,** *t₁* – *t₂*

$$\Delta x_{cm} = v_{cm1} \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot a_{cm} \cdot \Delta t^2 \Rightarrow \Delta x_{cm} = 0.15m$$

β)τρόπος

Από την λύση του μη γραμμικού συστήματος έχουμε

$$\alpha_{cm} = 2 \frac{m}{s^2} \quad \alpha_{work} = \frac{2}{R_K}$$

$$v_{em1} = \alpha_{em} \cdot t_1 \Rightarrow v_{em1} = 1 \frac{m}{s}$$

$$\omega_1 = \alpha_{\gamma\omega_K} \cdot t_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{R_K} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$\Delta\Delta ME_{t_1 \rightarrow t_2}$

$$E_M^{t1} = E_M^{t2} \Rightarrow K_{\sigma\tau_0}^{t1} + K_{\mu\tau}^{t1} + U^{t1} = K_{\sigma\tau_0}^{t2} + K_{\mu\tau}^{t2} + U^{t2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} \cdot M_K \cdot v_{cm}^2 + 0 = 0 + 0 + M_K \cdot g \cdot h \Rightarrow h = 0.075m$$

$$\eta\mu\varphi = \frac{h}{\Delta x_{cm}} \Rightarrow \Delta x_{cm} = 0.15m$$

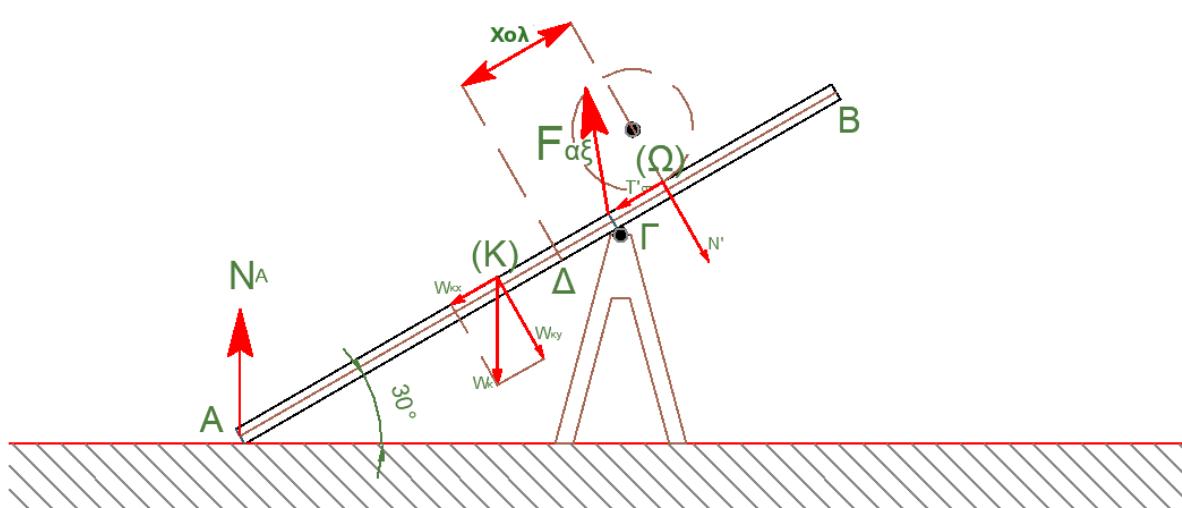
γ)τρόπος

$$\Theta \text{MKE}_{(t_1 \rightarrow t_2)} \quad \Delta K = \Sigma W$$

$$K_{t_2} - K_{t_1} = W_B + W_{T_{\text{start}}} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} \cdot M_K \cdot v_{cm1}^2 = -M_K \cdot g \cdot \eta \mu \varphi \cdot \Delta x_{cm} + T_{\text{start}} \cdot \Delta x_{cm} \Rightarrow \Delta x_{cm} = 0.15m$$

$$x_{o\lambda} = x_{cm} + \Delta x_{cm} \Rightarrow x_{o\lambda} = 0.4m$$

Δ5-(4)



α) τρόπος

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι κατά την διάρκεια της ανόδου του κυλίνδρου πάνω στην σανίδα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = t_2$, που ο κύλινδρος σταματάει στιγματία, η σανίδα δεν ανατρέπεται. Ο κύλινδρος ξεκινάει από τη θέση $\Delta(x = 0)$ και κινείται με ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση από την χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = t_1$. Όσο κινείται κάτω από τη θέση Γ η σανίδα δεν μπορεί να ανατραπεί αφού και η ροπή του βάρους της σανίδας και η ροπή του βάρους του κυλίνδρου στρέφουν την σανίδα αριστερόστροφα.

$$x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow (\Delta\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot a_{cm} \cdot t_\Gamma^2 \Rightarrow t_\Gamma = \sqrt{0,2} \Rightarrow t_\Gamma = \frac{\sqrt{5}}{5} s$$

$$v_\Gamma = a_{cm} \cdot t_\Gamma \Rightarrow v_\Gamma = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5} \frac{m}{s}$$

Από την χρονική στιγμή $t = t_\Gamma$ έως την χρονική στιγμή $t = t_1$ θα αποδείξουμε ότι ισχύει

$$\tau_{W_\Sigma} > \tau_{N'}$$

Όπου τ_{W_Σ} είναι η ροπή του βάρους της σανίδας και $\tau_{N'}$ είναι η ροπή της αντίδρασης του κυλίνδρου στην δράση N της σανίδας στον κύλινδρο. Θα χρησιμοποιήσουμε διπλές συνεπαγωγές

$$\begin{aligned} \tau_{W_\Sigma} > \tau_{N'} &\iff M_p \cdot g \cdot \text{συνφ} \cdot (K\Gamma) > M_k \cdot g \cdot \text{συνφ} \cdot (x - x_\Gamma) \\ (K\Gamma) > (x - x_\Gamma) &\iff 0.5 > v_\Gamma \cdot (t - t_\Gamma) + \frac{1}{2} \cdot a_{cm} \cdot (t - t_\Gamma)^2 - 0,2 \end{aligned}$$

και μετά τις πράξεις φτάνουμε στην ανίσωση

$$t^2 - \frac{4 \cdot \sqrt{5}}{5} \cdot t - 1.3 < 0$$

Η ανίσωση αληθεύει από την χρονική στιγμή $t = t_\Gamma = \frac{\sqrt{5}}{5} s$ έως την χρονική στιγμή $t = t_1 = 0.5s$

Από την χρονική στιγμή $t = t_1$ έως την χρονική στιγμή $t = t_2$ που ο κύλινδρος κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση $a_{cm} = \frac{10}{3} \frac{m}{s^2}$ θα αποδείξουμε ότι ισχύει

$$\tau_{W_\Sigma} > \tau_{N'}$$

Όπου τ_{W_Σ} είναι η ροπή του βάρους της σανίδας και $\tau_{N'}$ είναι η ροπή της αντίδρασης του κυλίνδρου στην δράση N της σανίδας στον κύλινδρο. Θα χρησιμοποιήσουμε διπλές συνεπαγωγές

$$\begin{aligned} \tau_{W_\Sigma} > \tau_{N'} &\iff M_p \cdot g \cdot \text{συνφ} \cdot (K\Gamma) > M_k \cdot g \cdot \text{συνφ} \cdot (x - x_1) \\ (K\Gamma) > (x - x_1) &\iff 0.5 > v_{cm1} \cdot (t - t_1) - \frac{1}{2} \cdot a_{cm} \cdot (t - t_1)^2 - 0,25 \end{aligned}$$

και μετά τις πράξεις φτάνουμε στην ανίσωση

$$5t^2 - 8 \cdot t + 5 > 0$$

Η ανίσωση αληθεύει από την χρονική στιγμή $t = t_1 = 0.5s$ έως την χρονική στιγμή $t = t_2 = 0.8s$

β) τρόπος

Έστω τυχαία θέση του κυλίνδρου για την οποία το σημείο επαφής του κυλίνδρου με την σανίδα έχει απομάκρυνση x από την θέση

Γ Η δύναμη N_A είναι από το λείο δάπεδο, και η N' είναι η αντίδραση του κυλίνδρου στην δράση Γ της σανίδας στον κύλινδρο.

Στον κάθετο στην σανίδα άξονα η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στον κύλινδρο είναι μηδέν, οπότε

$$N' = M_k \cdot g \cdot \sin\varphi$$

$$\sum \vec{\tau}_{(\Gamma)} = 0 \Rightarrow -\tau_{N_A} \cdot (A\Gamma) \cdot \sin\varphi - N' \cdot x + W_p \cdot \sin\varphi \cdot (K\Gamma) = 0$$

$$-N_A \cdot 2.5 \frac{\sqrt{3}}{2} + 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x$$

$$2.5 \cdot N_A = 10 - 20 \cdot x \Rightarrow N_A = \frac{10 - 20 \cdot x}{2.5}$$

Για να μην χάνεται η επαφή πρέπει

$$N_A \geq 0 \Rightarrow \frac{10 - 20 \cdot x}{2.5} \geq 0 \Rightarrow -20 \cdot x \geq -10 \Rightarrow x \leq 0.5m$$

δηλαδή για να μην ανατραπεί η σανίδα πρέπει ο κύλινδρος να φτάσει μέχρι $0,5m$ δεξιά του σημείου Γ .

Ο κύλινδρος την στιγμή t_2 έχει βρεθεί στην θέση $x = \Delta_{x_{\text{ol}}} - (\Delta\Gamma) = 0,2m$ οπότε η σανίδα στο δοσμένο χρονικό διάστημα δεν ανατρέπεται.

γ) τρόπος

$$(\Gamma\Delta) = 0.2m, \quad (K\Gamma) = 0.5m, \quad (\Gamma\Omega) = x_{\text{ol}} - (\Gamma\Delta) \Rightarrow (\Gamma\Omega) = 0.2m$$

$$|\tau_{W_p}| = M_p \cdot g \cdot \sin\varphi \cdot (K\Gamma) \Rightarrow |\tau_{W_p}| = 5\sqrt{3}N \cdot m$$

$$|\tau'_N| = M_k \cdot g \cdot \sin\varphi \cdot (\Gamma\Omega) \Rightarrow |\tau'_N| = 2\sqrt{3}N \cdot m$$

$$|\tau_{W_p}| > |\tau'_N|$$

άρα η σανίδα δεν ανατρέπεται.

δ) τρόπος

Την στιγμή που ανατρέπεται η σανίδα ισχύει οριακά $N_A = 0$, όπου N_A η δύναμη του δαπέδου, N' η δύναμη που ασκεί ο κύλινδρος κάθετα στην επιφάνεια της σανίδας και W_{K_y} η κάθετη συνιστώσα του βάρους της σανίδας και Ψ το σημείο στο οποίο αν τοποθετηθεί ο κύλινδρος η σανίδα οριακά θα ανατρέπεται.

$$\sum \vec{\tau}_{(\Gamma)} = 0 \Rightarrow N' \cdot (\Gamma\Psi) - W_{K_y} \cdot (K\Gamma) = 0 \Rightarrow M_k \cdot g \cdot \sin\varphi \cdot (\Omega\Gamma) - M_p \cdot g \cdot \sin\varphi \cdot (K\Gamma)$$

$$2 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x - 2 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow x = 0.5m$$

Δηλαδή το σημείο Ψ απέχει $0.5m$ από την άρθρωση Γ και $1m$ από το άκρο B της σανίδας.

Άρα η θέση ανατροπής είναι σε $x = 0.5m$ από το σημείο Γ . Όμως το σώμα φτάνει σε απόσταση $l = 0.2m$ πάνω από το Γ .

Αφού $l < x$ η σανίδα δεν ανατρέπεται.

ε) τρόπος

Η "εις άτοπον απαγωγή"

Έστω ότι την χρονική στιγμή t_2 , δηλαδή την στιγμή που ο κύλινδρος σταματά στιγμιαία, η σανίδα ανατρέπεται. Αυτό σημαίνει ότι η σανίδα δεν είναι σε επαφή με το δάπεδο δηλαδή ισχύει $N = 0 \Rightarrow \tau_N = 0$. Θεωρούμε θετική φορά για τις ροπές, αυτή των δεικτών του ρολογιού.

$$(\Gamma\Delta) = 0.2m, \quad (\mathrm{K}\Gamma) = 0.5m, \quad (\Gamma\Omega) = x_{\omega} - (\Gamma\Delta) \Rightarrow (\Gamma\Omega) = 0.2m$$

$$\tau_{W_p} = -M_p \cdot g \cdot \sin\varphi \cdot (\mathrm{K}\Gamma) \Rightarrow \tau_{W_p} = -5\sqrt{3}N \cdot m$$

$$\tau'_N = M_k \cdot g \cdot \sin\varphi \cdot (\mathrm{K}\Gamma) \Rightarrow \tau'_N = 2\sqrt{3}N \cdot m$$

$$\Sigma\tau_{(\Gamma)} = \tau'_N + \tau_{W_p} = 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} \Rightarrow \Sigma\tau_{(\Gamma)} < 0$$

Αυτό σημαίνει ότι η σανίδα θα περιστραφεί με φορά αντίθετη από αυτή την ρολογιών, δηλαδή θα έρθει σε επαφή με το δάπεδο άρα θα ασκεί δύναμη στο δάπεδο, άρα και το δάπεδο θα ασκεί δύναμη στην σανίδα, δηλαδή $N > 0$

Άρα άτοπο. Υποθέσαμε στην αρχή ότι η σανίδα ανατρέπεται δηλαδή $N = 0$ και οδηγηθήκαμε στο ότι $N > 0$ άρα η αρχική μας υπόθεση είναι εσφαλμένη. Άρα η σανίδα δεν ανατρέπεται.

Μπορείτε να εκτυπώσετε τις λύσεις σε μορφή pdf από εδώ και τα θέματα από εδώ

[← Previous](#) [Archive](#) [Next →](#)

0 Σχόλια Science Technology Engineering Mathematics

 Panagiotis Petridis

 Προτείνετε

 Tweet

 Κοινοποίηση

Ταξινόμηση με βάση τα καλύτερα



Ξεκινήστε την συζήτηση...

Γράψτε το πρώτο σχόλιο.

 Συνδρομή  Προσθέστε το Disqus στην ιστοσελίδα σας [Προσθέστε το Disqus](#)

 Πολιτική Απορρήτου [Πολιτική Απορρήτου](#) [Ιδιωτικότητα](#)

Published
12 June 2019

Category
[Άσκηση](#)

Tags

[Βαθμολογικό](#) ¹⁰

© 2019 Panagiotis Petridis with help from Jekyll Bootstrap and The Hooligan Theme