S.T.E.M.

Μοριοδότηση 2019

Ενδεικτικές απαντήσεις και από γραπτά μαθητών

Θέμα Α

A1 - β

A2 - γ

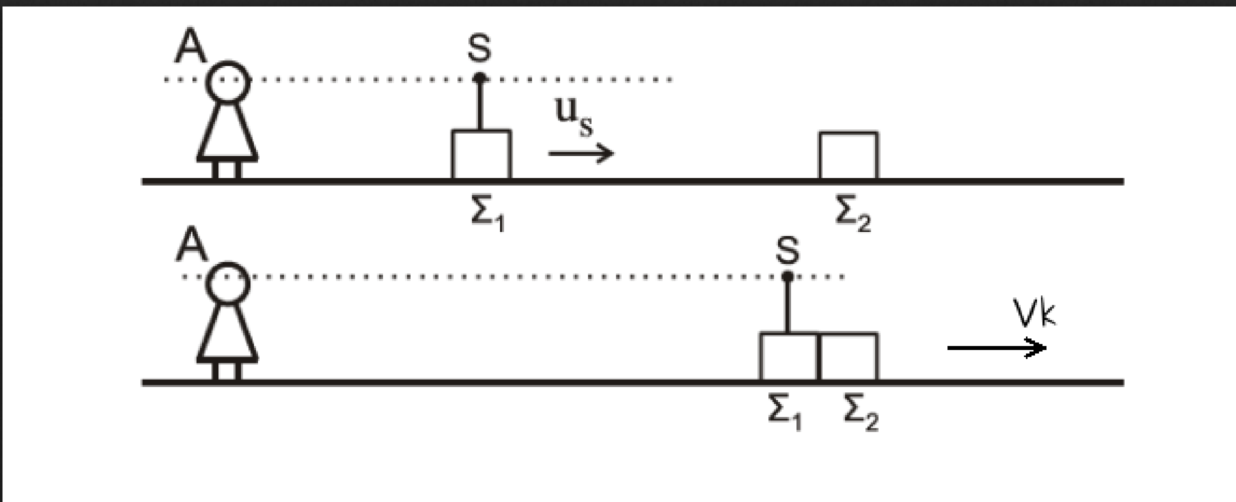
A3 - α

A4 - γ

A5: $\Lambda - \Sigma - \Lambda - \Sigma - \Sigma$

Θέμα Β

Β1-$(ii) - 2 - 6$



$$\Sigma\overrightarrow{F_{\varepsilon\xi}} = 0 \Rightarrow \mathrm{A.\Delta.O.} \quad \vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\alpha}$$

$$m \cdot u_s = (m+m) \cdot V_k \Rightarrow V_k = \frac{m \cdot u_s}{2 \cdot m} \Rightarrow V_k = \frac{u_{\mathrm{H}}}{40}$$

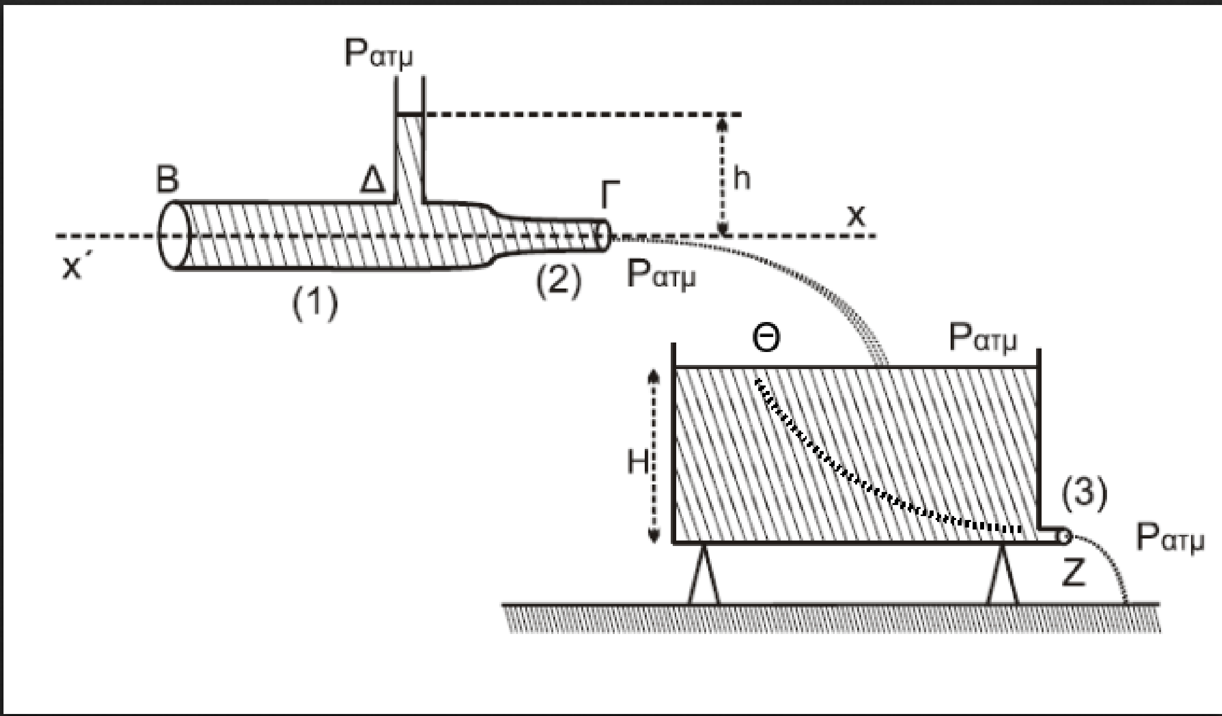
$$f_1 = \frac{u_H}{u_H + u_s} \cdot f_s$$

$$f_2 = \frac{u_H}{u_H + V_k} \cdot f_s$$

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{u_H + V_k}{u_H + u_s} = \frac{u_H + \frac{u_H}{40}}{u_H + \frac{u_H}{20}} = \frac{\frac{41 u_H}{40}}{\frac{21 u_H}{20}} = \frac{41}{42}$$

άρα σωστό το ii

B2 - $(iii) - 2 - 6$



Όταν σταθεροποιείται το ύψος στο δοχείο

$$\Pi_2 = \Pi_3 \Rightarrow A_2 \cdot \upsilon_2 = A_3 \cdot \upsilon_3 \xRightarrow{A_3 = \frac{A_2}{2}} \upsilon_2 = \frac{\upsilon_3}{2}$$

Εξίσωση Bernoulli για μια ρευματική γραμμή $(\Theta \to Z)$

$$P_\Theta + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_\Theta^2 + \rho \cdot g \cdot H = P_Z + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_3^2 \Rightarrow P_{\alpha\tau\mu} + \rho \cdot g \cdot H = P_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_3^2$$

$$\upsilon_3 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$$

Εξίσωση συνέχειας $(\Delta \to \Gamma)$

$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1 \cdot \upsilon_1 = A_2 \cdot \upsilon_2 \xRightarrow{A_1 = 2A_2} \upsilon_2 = 2\upsilon_1$$

Εξίσωση Bernoulli για μια οριζόντια ρευματική γραμμή $(\Delta \to \Gamma)$

$$P_\Delta + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_2^2$$

$$P_\Delta = P_{\alpha\tau\mu} + \rho \cdot g \cdot h$$

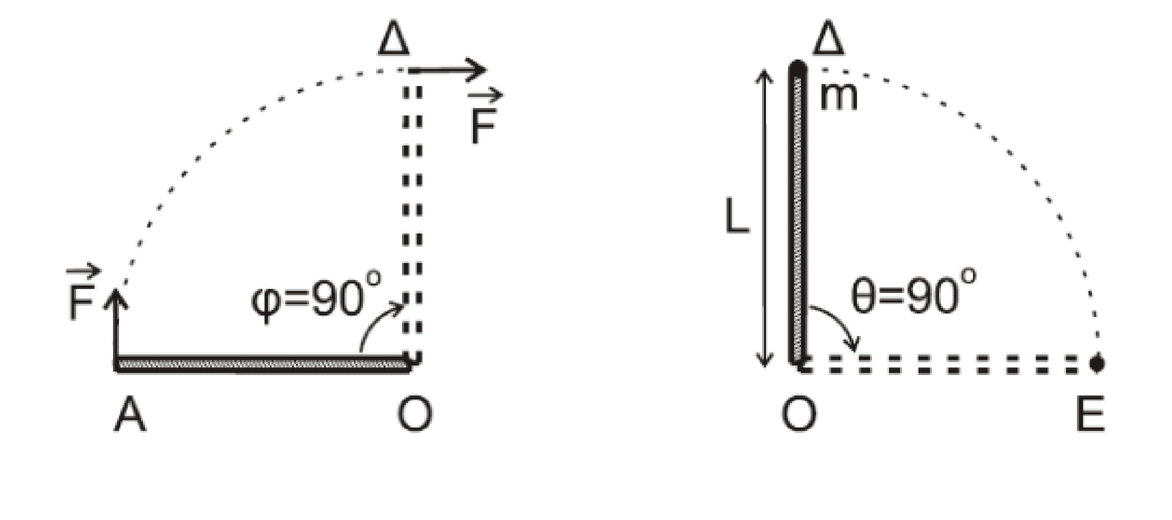
$$P_{\alpha\tau\mu} + \rho \cdot g \cdot h + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_1^2 = P_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_2^2 \Rightarrow g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2)$$

$$g \cdot h = \frac{3}{8} \cdot \upsilon_2^2 \xRightarrow{\upsilon_2 = \frac{\upsilon_3}{2}} g \cdot h = \frac{3}{8} \cdot \frac{\upsilon_3^2}{4}$$

$$\upsilon_3^2 = \frac{32}{3} \cdot g \cdot h \xRightarrow{\upsilon_3 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H}} 2 \cdot g \cdot H = \frac{32}{3} \cdot g \cdot h \Rightarrow \frac{h}{H} = \frac{3}{16}$$

άρα σωστό το iii

Β3 - $(ii) - 2 - 7$



$$\alpha)\underline{\tau\rho\acute{o}\pi o\varsigma}$$

$$\Sigma\vec{\tau} = \mathrm{I} \cdot \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F \cdot L = \frac{1}{3} \cdot M \cdot L^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{3F}{ML}$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t^2 \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t_{\mathrm{A}\Delta} \Rightarrow t_{\mathrm{A}\Delta} = \sqrt{\frac{\pi \cdot M \cdot L}{3F}}$$

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t_{\mathrm{A}\Delta} = \frac{3F}{ML} \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot M \cdot L}{3F}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3 \cdot F \cdot \pi}{M \cdot L}} \Rightarrow \omega = 3\pi\frac{rad}{s}$$

$$\beta)\underline{\tau\rho\acute{o}\pi o\varsigma}$$

$$\Theta\mathrm{MKE}(\mathrm{A} \rightarrow \Delta) \quad \mathrm{K}_\Delta - \mathrm{K}_\mathrm{A} = \Sigma W_\tau \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \mathrm{I}_\rho \cdot \omega^2 - 0 = \tau_F \cdot \theta$$

$$\frac{1}{2} \cdot \mathrm{I}_\rho \cdot \omega^2 = F \cdot L \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{M}{3} \cdot L^2 \cdot \omega^2 = F \cdot L \cdot \pi$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3 \cdot F \cdot \pi}{\mathrm{M} \cdot L}} = \sqrt{9 \cdot \pi^2}$$

$$\omega = 3\pi\frac{rad}{s}$$

$$\Sigma\vec{\tau}_{\varepsilon\xi} = 0 \Rightarrow A.\Delta.\Sigma\tau\rho_0 \Rightarrow \vec{L}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{L}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow I_\rho \cdot \omega = (\mathrm{I}_\rho + m \cdot L^2) \cdot \omega_k$$

$$\frac{1}{3} \cdot M \cdot L^2 \cdot \omega = (\frac{1}{3} \cdot M \cdot L^2 + m \cdot L^2) \cdot \omega_k \Rightarrow \omega = 2 \cdot \omega_k \Rightarrow \omega_k = \frac{\omega}{2}$$

Ομαλή στροφική κίνηση

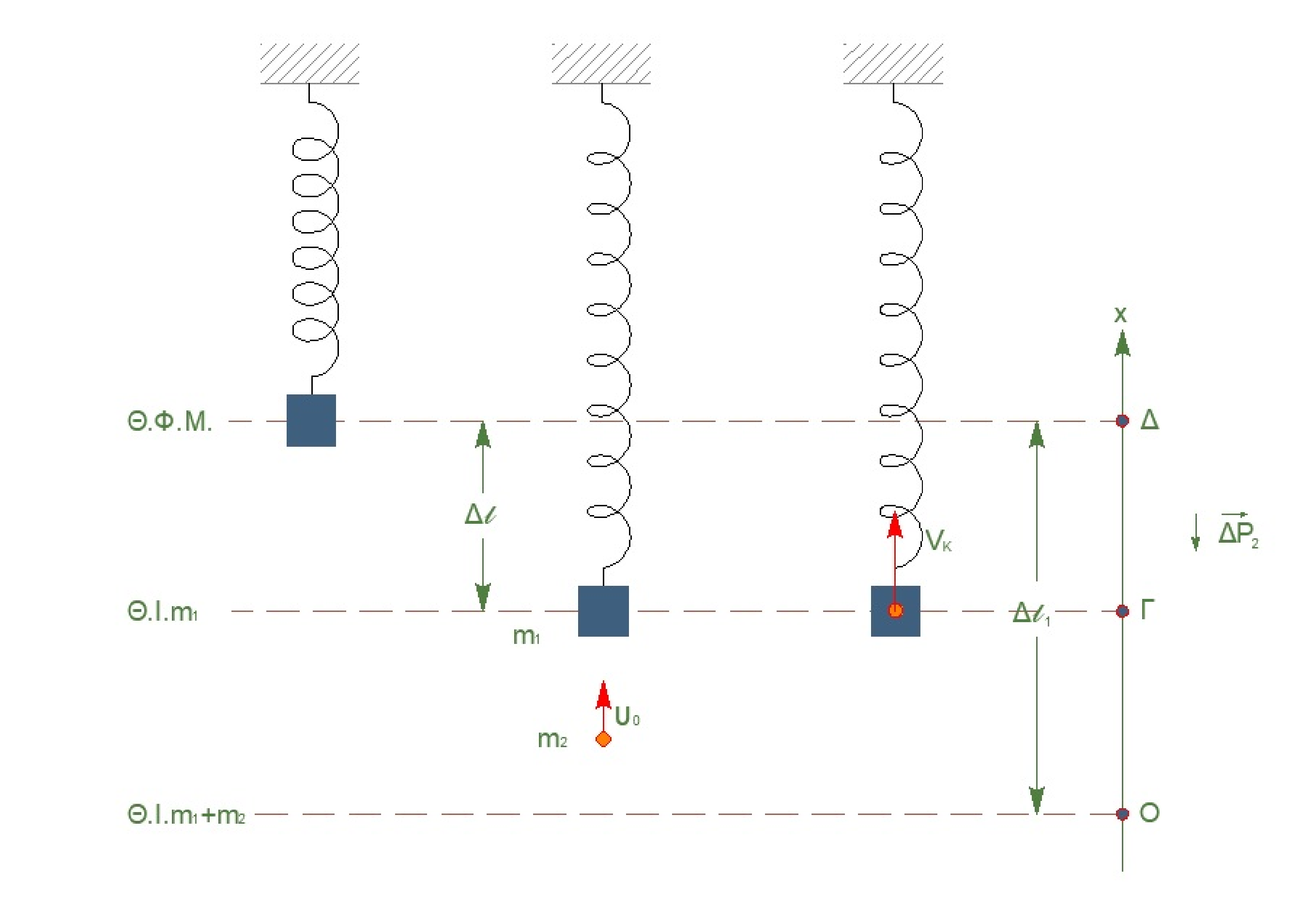
$$\Delta\theta = \omega_k \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega_k} = \frac{\Delta\theta}{\frac{\omega}{2}} = \frac{2\Delta\theta}{\omega} = \frac{2 \cdot \frac{\pi}{2}}{\omega} = \frac{\pi}{\omega}$$

$$\Delta t = \frac{1}{3}s$$

άρα σωστό το ii

Θέμα Γ

Γ1-(6)



$$(\Theta \mathrm{I}_{m_1}) \quad \Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow$$
$$F_{\varepsilon\lambda} = m_1 \cdot g \Rightarrow$$
$$k \cdot \Delta l = m_1 \cdot g \Rightarrow$$
$$k = \frac{m_1 \cdot g}{\Delta l} = 200\frac{N}{m}$$
$$(\Theta \mathrm{I}_{m_1, m_2}) \quad \Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow$$
$$F'_{\varepsilon\lambda} = (m_1 + m_2) \cdot g \Rightarrow$$
$$k \cdot \Delta l_1 = (m_1 + m_2) \cdot g \Rightarrow$$
$$\Delta l_1 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot g}{k} \Rightarrow$$
$$\Delta l_1 = 0.1m$$

Στην ακραία θέση $\upsilon_{\tau\alpha\lambda} = 0 \Rightarrow A = 0.1m$

Γ2-(7)

$$\Sigma \overrightarrow{F_{\varepsilon\xi}} = 0 \Rightarrow \mathrm{A.\Delta.O.} \quad \vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\alpha}$$

$$m_2 \cdot u_o = (m_1 + m_2) \cdot V_k$$

α)τρόπος

$$\text{ΑΔΕ}_{\tau\alpha\lambda}(\Gamma \rightarrow \Delta)$$

$$K_\Gamma + U_{\tau\alpha\lambda\Gamma} = K_\Delta + U_{\tau\alpha\lambda\Delta} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot(m_1+m_2)\cdot V_k^2 + \frac{1}{2}\cdot D\cdot(\Delta l_1 - \Delta l)^2 = 0 + \frac{1}{2}\cdot D\cdot A^2$$

$$2V_k^2 + 200\cdot 0.05^2 = 200\cdot 0.01 \Rightarrow V_k^2 + 0.25 = 1 \Rightarrow V_k = \sqrt{0.75} \Rightarrow |V_k| = 0.5\sqrt{3}\frac{m}{s}, V_k > 0$$

β)τρόπος

$$\Theta\text{ΜΚΕ}_{(\Gamma\rightarrow\Delta)} \quad \Delta\text{K} = \Sigma W$$

$$K_\Delta - \text{K}_\Gamma = W_B + W_{F_{\varepsilon\lambda}} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}\cdot(m_1+m_2)\cdot V_k^2 = -(m_1+m_2)\cdot g\cdot\Delta l + \frac{1}{2}\cdot k\cdot\Delta l^2$$

$$-V_k^2 = -1 + 0.25 \Rightarrow V_k = \sqrt{0.75} \Rightarrow |V_k| = 0.5\sqrt{3}\frac{m}{s}$$

γ)τρόπος

$$D = k = (m_1+m_2)\cdot\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} \Rightarrow \omega = 10\frac{rad}{s}$$

$$x = A\cdot\eta\mu\varphi(\omega t+\varphi_o) \Rightarrow \eta\mu(\omega t+\varphi_o) = \frac{x}{A}$$

$$\upsilon = A\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi(\omega t+\varphi_o) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi_o) = \frac{\upsilon}{A\omega}$$

$$\eta\mu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{\upsilon^2}{A^2\omega^2}$$

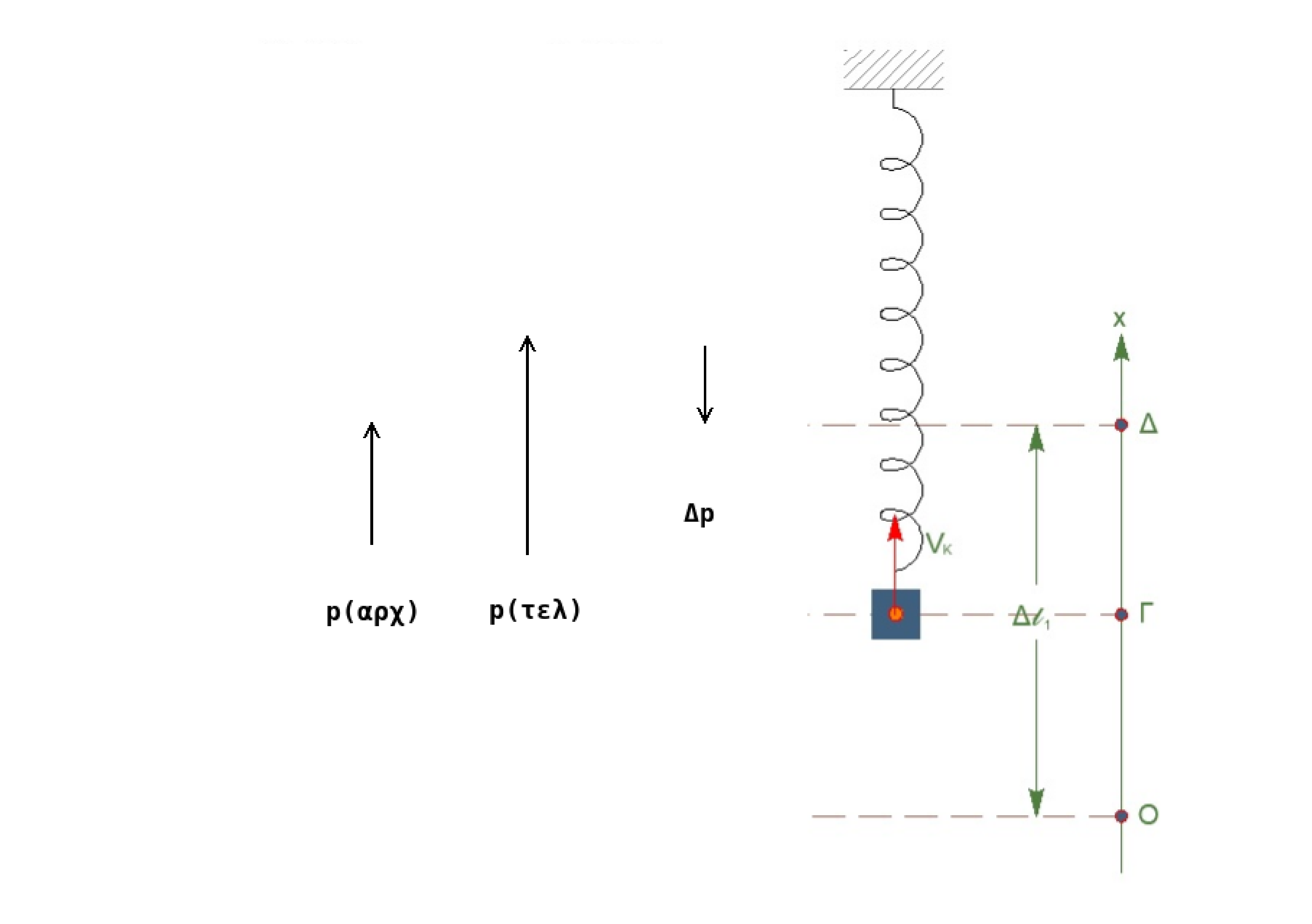
$$\frac{\frac{A^2}{4}}{A^2} + \frac{\upsilon^2}{A^2\omega^2} \Rightarrow \upsilon = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_k = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{m}{s}$$

$$K_2 = \frac{1}{2}\cdot m_2\cdot u_o^2 \Rightarrow K_2 = 1.5J$$

Γ3-(6)

$$\Delta\overrightarrow{p_2} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{p}_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow \Delta p_2 = m_2\cdot V_k - m_2\cdot u_o \Rightarrow \Delta p_2 = 0.5\sqrt{3} - \sqrt{3} \Rightarrow \Delta p_2 = -0.5\sqrt{3}$$

$$|\Delta\overrightarrow{p_2}| = 0.5\sqrt{3}kg\cdot\frac{m}{s}$$



$$\Delta p_2 = -0.5\sqrt{3}$$

Το πρόσημο δηλώνει την κατεύθυνση του διανύσματος. (σχήμα)

Γ4-(6)

$$D = k = (m_1 + m_2)\cdot\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} \Rightarrow \omega = 10\frac{rad}{s}$$

$$\alpha)\underline{\tau\rho\acute{o}\pi o\varsigma}$$

$$t_o = 0, \quad y = +\frac{A}{2}, \quad \upsilon > 0$$

$$y = A\cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_o) \Rightarrow \frac{A}{2} = A\cdot\eta\mu\varphi_o$$

$$\eta\mu\varphi_o = \frac{1}{2} \Rightarrow \eta\mu\varphi_o = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow \varphi_o = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{6}, & k = 0 \Rightarrow \varphi_o = \frac{\pi}{6} \quad \sigma\upsilon\nu\varphi_o > 0 \\ 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, & k = 0 \Rightarrow \varphi_o = \frac{5\pi}{6} \quad \sigma\upsilon\nu\varphi_o < 0, \alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota \end{cases}$$

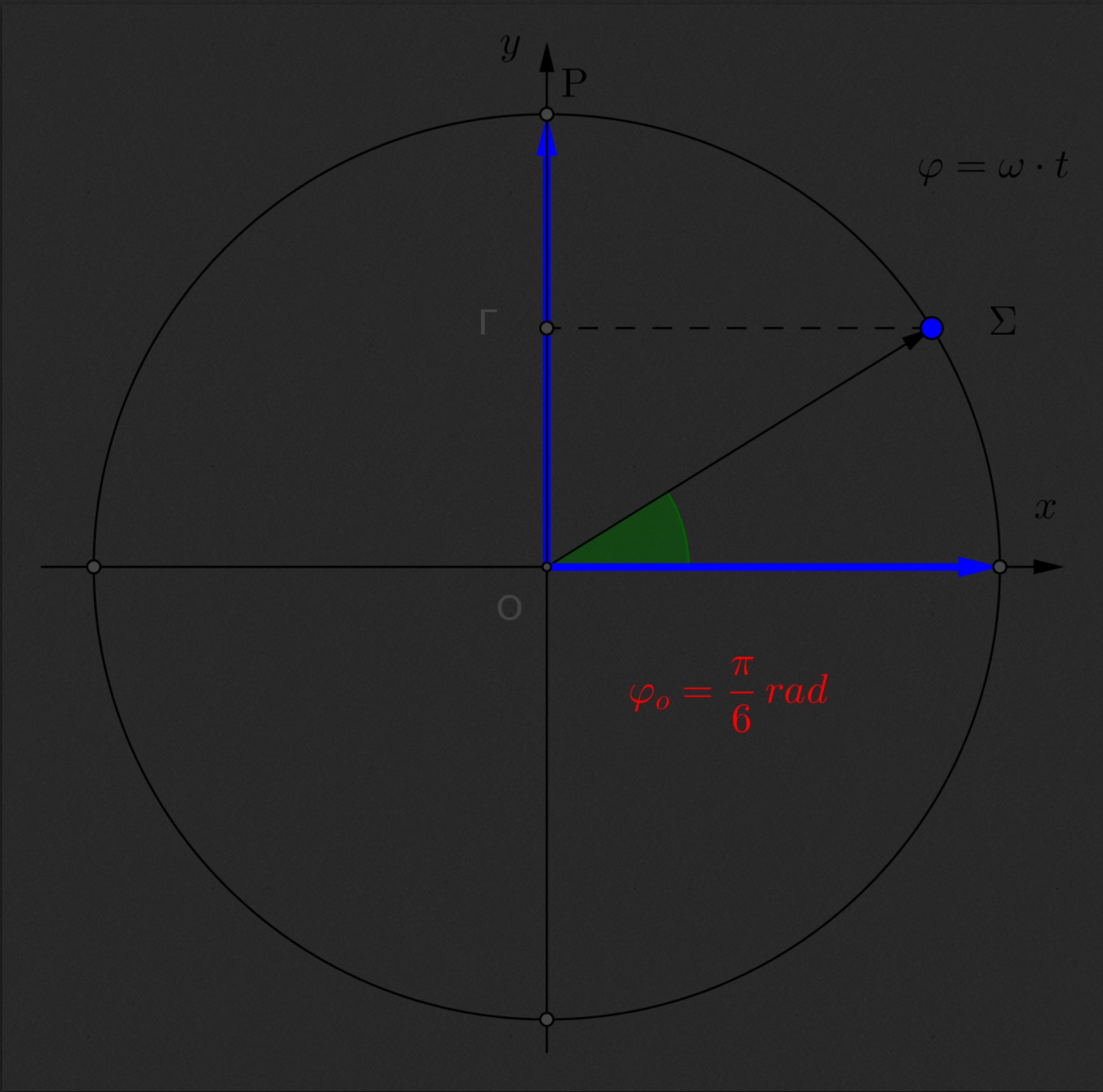
$$\beta)\underline{\tau\rho\acute{o}\pi o\varsigma}$$

Περιστρεφόμενο διάνυσμα: Έστω Σ σημείο που εκτελεί $Ο.Κ.Κ.$ με σταθερή ω, σε κύκλο ακτίνας A. Η γωνία που διαγράφει η επιβατική ακτίνα δίνεται από την σχέση $\varphi = \omega\cdot\tau$

Η προβολή του σημείου στον κατακόρυφο άξονα δίνεται από την σχέση

$$x = A\eta\mu\varphi \Rightarrow x = A\cdot\eta\mu\omega t$$

άρα η προβολή του σημείου Σ εκτελεί $\mathrm{A.A.T.}$

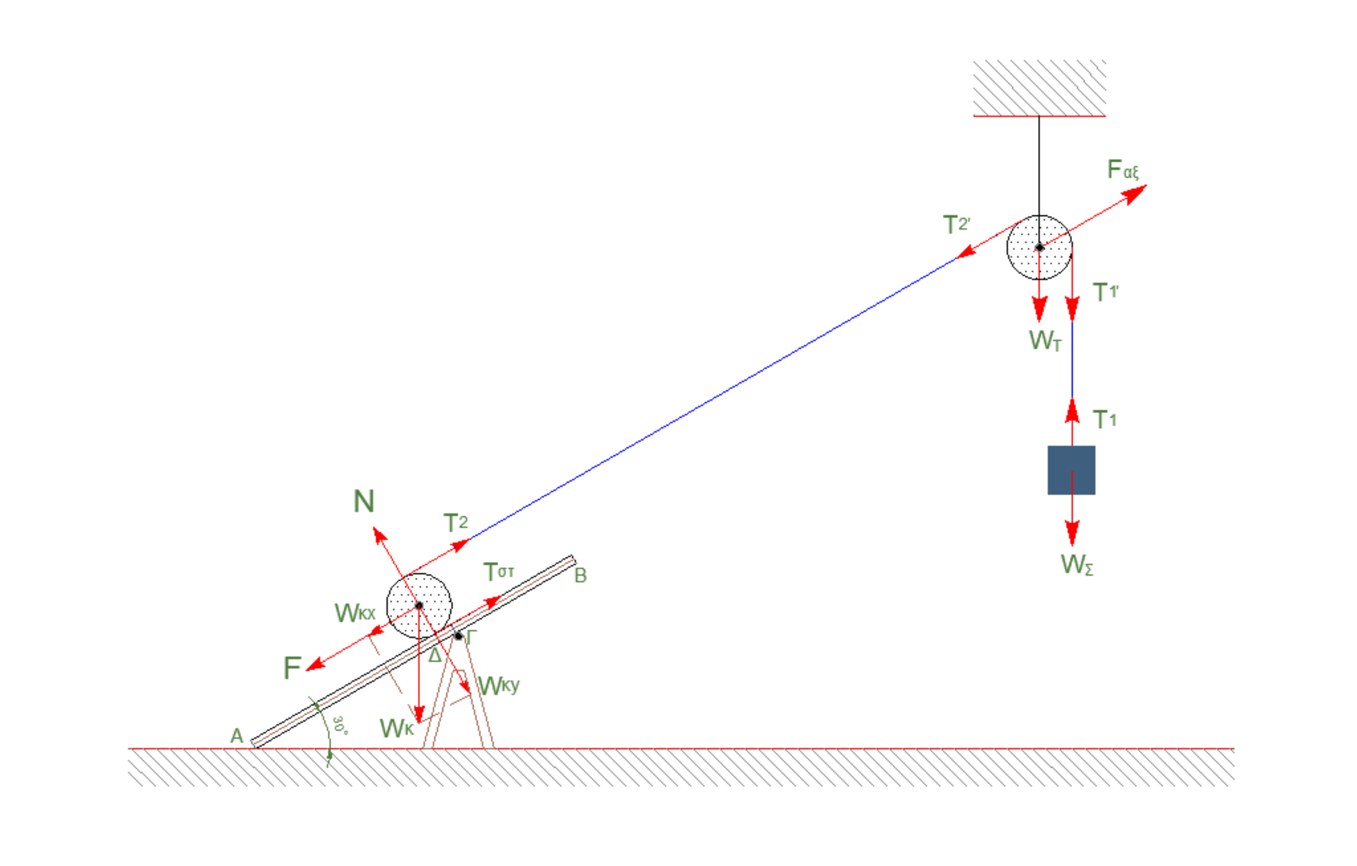


Αρχική φάση φ_o

$$\eta\mu\varphi_o = \frac{y}{A} \Rightarrow \eta\mu\varphi_o = \frac{+\frac{A}{2}}{A} \Rightarrow \eta\mu\varphi_o = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_o = \frac{\pi}{6} rad$$

$$y = 0.1 \cdot \eta\mu(10t + \frac{\pi}{6}), \quad S.I.$$

Θέμα Δ



Δ1-(4)

$$M_\Sigma, \quad \text{ισορροπία}, \Rightarrow \Sigma\vec{F} = 0$$

$$T_1 = \mathrm{M}_\Sigma \cdot g \Rightarrow T_1 = 20N$$

$$M_T, \quad \text{ισορροπία}, \Rightarrow \Sigma\vec{\tau} = 0$$

$$T_1 \cdot R_T = T_2 \cdot R_T \Rightarrow T_2 = 20N$$

$$\alpha)\underline{\text{τρόπος}}$$

$$M_K, \quad \text{ισορροπία}, \Rightarrow \Sigma\vec{\tau}_{(K)} = 0$$

$$T_2 \cdot R_K = T_{\sigma\tau} \cdot R_\mathrm{K} \Rightarrow T_2 = \mathrm{T}_{\sigma\tau}$$

$$M_K, \quad \text{ισορροπία}, \Rightarrow \Sigma\vec{F} = 0$$

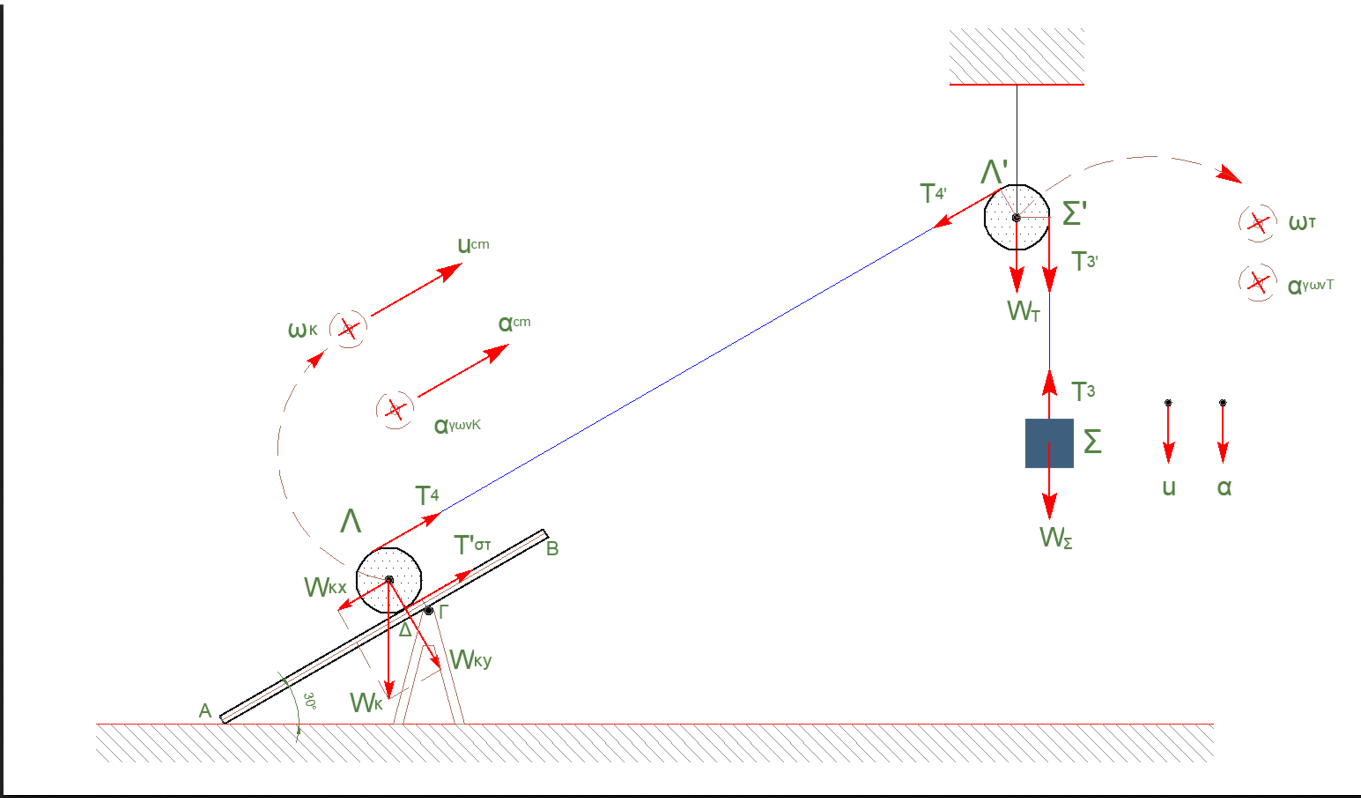
$$T_2 + \mathrm{T}_{\sigma\tau} = F + \mathrm{M_K} \cdot g \cdot \eta\mu\varphi \Rightarrow 2T_2 = F + 10 \Rightarrow F = 30N$$

$$\beta)\underline{\text{τρόπος}}$$

$$M_K, \quad \text{ισορροπία}, \Rightarrow \Sigma\vec{\tau}_{(\Delta)} = 0$$

$$T_2 \cdot 2 \cdot R_K = (F + \mathrm{M_K} \cdot g \cdot \eta\mu\varphi) \cdot R_K \Rightarrow 40 = F + 10 \Rightarrow F = 30N$$

Δ2-(8)



νήμα κατακόρυφο αβαρές, μη εκτατό

$$\alpha_{\Sigma} = \alpha'_{\Sigma} = \alpha_{\gamma\rho} = \alpha_{\gamma\omega\nu_{T}} \cdot R_T \Rightarrow \alpha_{\Sigma} = \alpha_{\gamma\omega\nu_{T}} \cdot R_T \quad (1)$$

νήμα πλάγιο αβαρές, μη εκτατό

$$\alpha_{\Lambda} = \alpha'_{\Lambda} = \alpha_{\gamma\rho} = \alpha_{\gamma\omega\nu_{T}} \cdot R_T \Rightarrow \alpha_{\Lambda} = \alpha_{\gamma\omega\nu_{T}} \cdot R_T \quad (2)$$

Κύλινδρος $\mathrm{K.X.O.}$

$$\upsilon_{A} = 0 \Rightarrow \upsilon_{cm} = \omega \cdot R_K \Rightarrow \alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu_{K}} \cdot R_K \quad (3)$$

$$\upsilon_{\Lambda} = \upsilon_{cm} + \omega \cdot R_K \Rightarrow \upsilon_{\Lambda} = 2 \cdot \upsilon_{cm} \Rightarrow \alpha_{\Lambda} = 2 \cdot \alpha_{cm} \quad (4)$$

$$M_{\Sigma}: \quad META\Phi OPIKH \Rightarrow \Sigma\vec{F} = M_{\Sigma} \cdot \vec{\alpha_{\Sigma}}$$

$$\mathrm{M}_{\Sigma} \cdot g - T_3 = M_{\Sigma} \cdot \alpha_{\Sigma} \Rightarrow 20 - T_3 = 2 \cdot \alpha_{\Sigma} \quad (5)$$

$$M_T: \quad \Sigma\mathrm{TPO\Phi IKH} \Rightarrow \Sigma\vec{\tau} = \mathrm{I}_T \cdot \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu_{T}}$$

$$T'_3 \cdot R_T - T'_4 \cdot R_T = \frac{1}{2} \cdot M_T \cdot R_T^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu_{T}} \stackrel{(2)}{\Longrightarrow} T_3 - T_4 = R_T \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu_{T}} \quad (6)$$

$$\underline{\alpha)\tau\rho\acute{o}\pi o\varsigma}$$

$$M_{\mathrm{K}}: \quad META\Phi OPIKH \Rightarrow \Sigma\vec{F} = \mathrm{M_K} \cdot \vec{\alpha}_{cm}$$

$$T_4 + T_{\sigma\tau} - \mathrm{M_K} \cdot g \cdot \eta\mu\varphi = \mathrm{M_K} \cdot \alpha_{cm} \Rightarrow T_4 + T_{\sigma\tau} - 10 = 2 \cdot \alpha_{cm} \quad (7)$$

$$M_K: \quad \Sigma\mathrm{TPO\Phi IKH} \Rightarrow \Sigma\vec{\tau} = \mathrm{I}_K \cdot \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu_{K}}$$

$$T_4 \cdot R_K - T_{\sigma\tau} \cdot R_{\mathrm{K}} = \frac{1}{2} \cdot M_{\mathrm{K}} \cdot R_{\mathrm{K}}^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu_{\mathrm{K}}} \Rightarrow T_4 - T_{\sigma\tau} = R_K \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu_{\mathrm{K}}} \quad (8)$$

$$\underline{\beta)\tau\rho\acute{o}\pi o\varsigma}$$

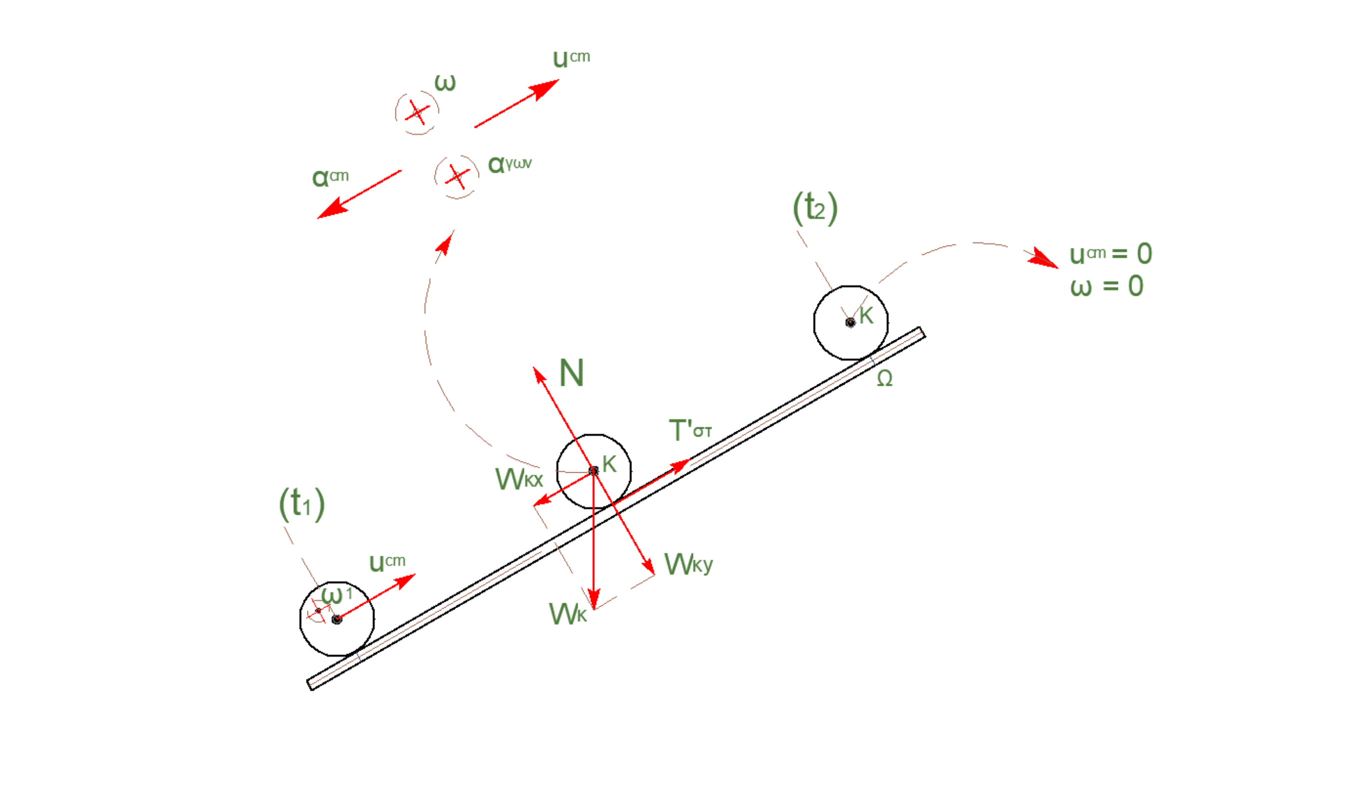
$$\mathrm{I}_{K(\Delta)} = \mathrm{I}_{cm} + M_{K} \cdot R_K^2 \Rightarrow \mathrm{I}_{K(\Delta)} = \frac{3}{2} \cdot M_K \cdot R_K^2 (7)$$

$$M_K : \quad \Sigma\mathrm{TPO\Phi IKH} \Rightarrow \Sigma\vec{\tau} = \mathrm{I}_{K_\Delta} \cdot \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu_\Delta}$$

$$T_4 \cdot 2 \cdot R_K - M_K \cdot g \cdot \eta\mu\varphi \cdot R_K = \frac{3}{2} \cdot M_K \cdot R_K^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu_\Delta} \Rightarrow 2 \cdot T_4 - 10 = 3 \cdot R_K \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu_\Delta} \quad (8)$$

Λύση του μη γραμμικού συστήματος των 8 εξισώσεων με τους 10 αγνώστους $\alpha_\Sigma = 4\frac{m}{s^2}$

Δ3-(6)



$$M_K : \mathrm{META\Phi OPIKH}, \quad 0 - t_1$$

$$\upsilon_{cm1} = \alpha_{cm} \cdot t_1 \Rightarrow \upsilon_{cm1} = 1\frac{m}{s}$$

$$M_K : \quad META\Phi OPIKH \Rightarrow \Sigma\vec{F} = \mathrm{M_K} \cdot \vec{\alpha}_{cm}$$

$$\mathrm{M_K} \cdot g \cdot \eta\mu\varphi - T_{\sigma\tau} = \mathrm{M_K} \cdot \alpha_{cm} \Rightarrow 10 - \mathrm{T}_{\sigma\tau} = 2\alpha_{cm} \quad (1)$$

$$M_K : \quad \Sigma\mathrm{TPO\Phi IKH} \Rightarrow \Sigma\vec{\tau} = \mathrm{I}_K \cdot \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu_K}$$

$$T_{\sigma\tau} \cdot R_K = \frac{1}{2} \cdot M_K \cdot R_K^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu_K} \Rightarrow T_{\sigma\tau} = R_K \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu_K} \Rightarrow T_{\sigma\tau} = \alpha_{cm} \quad (2)$$

$$(1)\Lambda(2) \Rightarrow 10 - \alpha_{cm} = 2 \cdot \alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{10}{3}\frac{m}{s^2}$$

$$\upsilon_{cm} = \upsilon_{cm1} - \alpha_{cm} \cdot \Delta t \Rightarrow 0 = 1 - \frac{10}{3} \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = 0.3s$$

$$t_2 = t_1 + \Delta t \Rightarrow t_2 = 0.8s$$

Δ4-(3)

$$M_K \ : \text{ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ}, \quad 0 - t_1$$

$$x_{cm1} = \frac{1}{2} \cdot \alpha_{cm} \cdot t_1^2 \Rightarrow x_{cm1} = 0.25m$$

$$\alpha)\underline{\text{τρόπος}}$$

$$M_K \ : \text{ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ}, \quad t_1 - t_2$$

$$\Delta x_{cm} = \upsilon_{cm1} \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot \alpha_{cm} \cdot \Delta t^2 \Rightarrow \Delta x_{cm} = 0.15m$$

$$\beta)\underline{\text{τρόπος}}$$

Από την λύση του μη γραμμικού συστήματος έχουμε

$$\alpha_{cm} = 2\frac{m}{s^2} \qquad \alpha_{\gamma\omega\nu_K} = \frac{2}{R_K}$$

$$\upsilon_{cm1} = \alpha_{cm} \cdot t_1 \Rightarrow \upsilon_{cm1} = 1\frac{m}{s}$$

$$\omega_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu_K} \cdot t_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{\mathrm{P_K}} \frac{rad}{s}$$

$$\text{ΑΔΜΕ}_{t1 \to t_2}$$

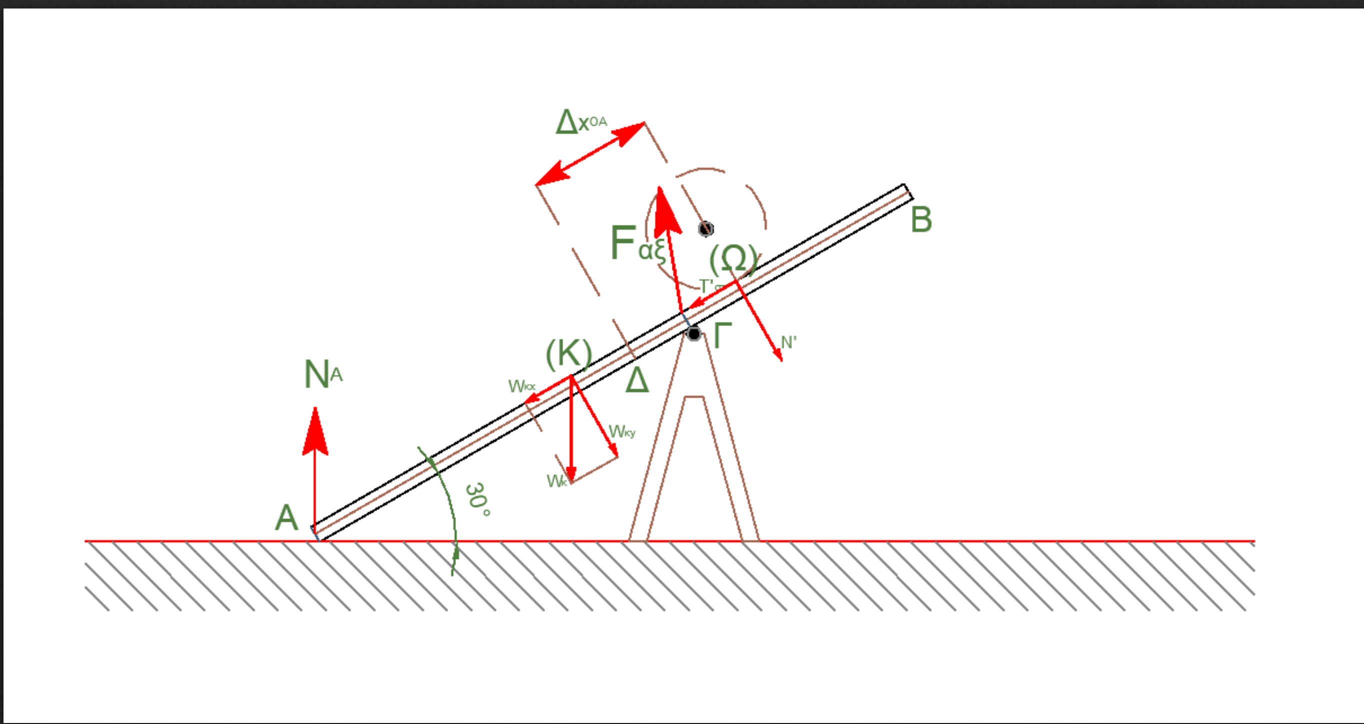
$$E_M^{t1} = E_M^{t2} \Rightarrow K_{\sigma\tau\rho}^{t1} + K_{\mu\varepsilon\tau}^{t1} + U^{t1} = K_{\sigma\tau\rho}^{t2} + K_{\mu\varepsilon\tau}^{t2} + U^{t2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} \cdot M_K \cdot \upsilon_{cm}^2 + 0 = 0 + 0 + M_K \cdot g \cdot h \Rightarrow h = 0.075m$$

$$\eta\mu\varphi = \frac{h}{\Delta_{x_{cm}}} \Rightarrow \Delta_{x_{cm}} = 0.15m$$

$$x_{o\lambda} = x_{cm1} + \Delta x_{cm} \Rightarrow x_{o\lambda} = 0.4m$$

Δ5-(4)



α)τρόπος

$$(\Gamma\Delta) = 0.2m, \quad (\mathrm{K}\Gamma) = 0.5m, \quad (\Gamma\Omega) = x_{o\lambda} - (\Gamma\Delta) \Rightarrow (\Gamma\Omega) = 0.2m$$

$$|\tau_{W_\rho}| = \mathrm{M}_\rho \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot (\mathrm{K}\Gamma) \Rightarrow |\tau_{W_\rho}| = 5\sqrt{3}N \cdot m$$

$$|\tau'_N| = \mathrm{M}_k \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot (\mathrm{K}\Gamma) \Rightarrow |\tau'_N| = 2\sqrt{3}N \cdot m$$

$$|\tau_{W_\rho}| > |\tau'_N|$$

άρα η σανίδα δεν ανατρέπεται.

β)τρόπος

Την στιγμή που ανατρέπεται η σανίδα ισχύει οριακά $\mathrm{N_A} = 0$, όπου N_A η δύναμη του δαπέδου, N′ η δύναμη που ασκεί ο κύλινδρος κάθετα στην επιφάνεια της σανίδας και W_{K_y} η κάθετη συνιστώσα του βάρους της σανίδας και Ψ το σημείο στο οποίο αν τοποθετηθεί ο κύλινδρος η σανίδα οριακά θα ανατραπεί.

$$\Sigma\vec{\tau}_{(\Gamma)} = 0 \Rightarrow N' \cdot (\Gamma\Psi) - W_{K_y} \cdot (\mathrm{K}\Gamma) = 0 \Rightarrow M_\mathrm{K} \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot (\Omega\Gamma) - \mathrm{M}_\rho \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot (\mathrm{K}\Gamma)$$

$$2 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x - 2 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow x = 0.5m$$

Δηλαδή το σημείο Ψ απέχει $0.5m$ από την άρθρωση Γ και $1m$ από το άκρο B της σανίδας.

Άρα η θέση ανατροπής είναι σε $x = 0.5m$ από το σημείο Γ. Όμως το σώμα φτάνει σε απόσταση $l = 0.2m$ πάνω από το Γ. Αφού $l < x$ η σανίδα δεν ανατρέπεται.

γ)τρόπος

Έστω τυχαία θέση του κυλίνδρου για την οποία το σημείο επαφής του κυλίνδρου με την σανίδα έχει απομάκρυνση x από την θέση Γ Η δύναμη $\mathrm{N_A}$ είναι από το λείο δάπεδο, και η N' είναι η αντίδραση του κυλίνδρου στην δράση N της σανίδας στον κύλινδρο. Στον κάθετο στην σανίδα άξονα Γ η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στον κύλινδρο είναι μηδέν, οπότε $\mathrm{N}' = \mathrm{M}_\kappa \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$

$$\Sigma\vec{\tau}_{(\Gamma)} = 0 \Rightarrow -\tau_{\mathrm{N_A}} \cdot (A\Gamma) \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi - \mathrm{N}' \cdot x + W_\rho \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot (\mathrm{K}\Gamma) = 0$$

$$-N_A \cdot 2.5\frac{\sqrt{3}}{2} + 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x$$

$$2.5 \cdot N_A = 10 - 20 \cdot x \Rightarrow N_A = \frac{10 - 20 \cdot x}{2.5}$$

Για να μην χάνεται η επαφή πρέπει $N_A \geqslant 0 \Rightarrow x \leq 0.5m$ δηλαδή για να μην ανατραπεί η σανίδα πρέπει ο κύλινδρος να φτάσει μέχρι $0,5m$ δεξιά του σημείου Γ. Ο κύλινδρος την στιγμή t_2 έχει βρεθεί στην θέση $x = \Delta_{x_{o\lambda}} - (\Delta\Gamma) = 0,2m$ οπότε η σανίδα στο δοσμένο χρονικό διάστημα δεν ανατρέπεται.

δ)τρόπος

Την στιγμή που ανατρέπεται η σανίδα ισχύει οριακά $\mathrm{N_A} = 0$, όπου N_A η δύναμη του δαπέδου, N′ η δύναμη που ασκεί ο κύλινδρος κάθετα στην επιφάνεια της σανίδας και W_{K_y} η κάθετη συνιστώσα του βάρους της σανίδας και Ψ το σημείο στο οποίο αν τοποθετηθεί ο κύλινδρος η σανίδα οριακά θα ανατραπεί.

$$\Sigma\vec{\tau}_{(\Gamma)} = 0 \Rightarrow N' \cdot (\Gamma\Psi) - W_{K_y} \cdot (K\Gamma) = 0 \Rightarrow M_K \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot (\Omega\Gamma) - M_\rho \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot (K\Gamma)$$

$$2 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x - 2 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow x = 0.5m$$

Δηλαδή το σημείο Ψ απέχει $0.5m$ από την άρθρωση Γ και $1m$ από το άκρο B της σανίδας.

Για την δύναμη N_A που ασκεί το δάπεδο στην σανίδα ισχύει η σχέση $N_A > 0$ για κάθε θέση του κυλίνδρου από την θέση Δ έως την θέση Ψ για την οποία δείξαμε ότι απέχει $0.5m$ από την άρθρωση Γ και $1m$ από το άκρο B της σανίδας.

Έστω ότι την χρονική στιγμή t_2 που ο κύλινδρος σταματά στιγμιαία, η σανίδα δεν ανατρέπεται. Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της ανάλυσης και με ισοδύναμες προτάσεις θα φτάσουμε σε κάτι που ισχύει για την συγκεκριμένη χρονική στιγμή, δηλαδή στην σχέση $N_A > 0$. Αφού η σανίδα δεν ανατρέπεται ισχύει

$$\Sigma\vec{\tau}_{(\Gamma)} = 0 \Rightarrow N_A \cdot (A\Gamma) \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi + N' \cdot (O\Gamma) - W_\rho \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot (K\Gamma) = 0$$

$$N_A \cdot (A\Gamma) \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi + M_K \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot (O\Gamma) - M_\rho \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot (K\Gamma) = 0$$

$$N_A \cdot (A\Gamma) = M_\rho \cdot g \cdot (K\Gamma) - M_K \cdot g \cdot (O\Gamma)$$

$$N_A = \frac{20 \cdot 0.5 - 20 \cdot 0.2}{2.5} \Rightarrow N_A = \frac{6}{2.5} \Rightarrow N_A = 2.4N$$

Άρα το δάπεδο εκείνη την χρονική στιγμή που ο κύλινδρος σταματά, είναι σε επαφή με την σανίδα αφού της ασκεί δύναμη θετική $N_A = 2.4N$ Άρα η σανίδα δεν ανατρέπεται.

ε) τρόπος

Η "εις άτοπον απαγωγή"

Έστω ότι την χρονική στιγμή t_2, δηλαδή την στιγμή που ο κύλινδρος στιγμιαία ισορροπεί, η ράβδος ανατρέπεται. Αυτό σημαίνει ότι η σανίδα δεν είναι σε επαφή με το δάπεδο δηλαδή ισχύει $N = 0 \Rightarrow \tau_N = 0$. Θεωρούμε θετική φορά για τις ροπές, αυτή των δεικτών του ρολογιού.

$$(\Gamma\Delta) = 0.2m, \quad (K\Gamma) = 0.5m, \quad (\Gamma\Omega) = x_{o\lambda} - (\Gamma\Delta) \Rightarrow (\Gamma\Omega) = 0.2m$$

$$\tau_{W_\rho} = -M_\rho \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot (K\Gamma) \Rightarrow \tau_{W_\rho} = -5\sqrt{3}N \cdot m$$

$$\tau'_N = M_k \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot (K\Gamma) \Rightarrow \tau'_N = 2\sqrt{3}N \cdot m$$

$$\Sigma\tau_{(\Gamma)} = \tau'_N + \tau_{W_\rho} = 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} \Rightarrow \Sigma\tau_{(\Gamma)} < 0$$

Αυτό σημαίνει ότι η ράβδος θα περιστραφεί με φορά αντίθετη από αυτή την ρολογιών, δηλαδή θα ασκεί δύναμη στο δάπεδο, άρα και το δάπεδο θα ασκεί δύναμη στην ράβδο, δηλαδή $N > 0$

Άρα άτοπο. Υποθέσαμε στην αρχή ότι η σανίδα ανατρέπεται δηλαδή $N = 0$ και οδηγηθήκαμε στο ότι $N > 0$ άρα η αρχική μας υπόθεση είναι εσφαλμένη. Άρα η σανίδα δεν ανατρέπεται.

Μπορείτε να εκτυπώσετε τις λύσεις σε μορφή pdf από εδώ και τα θέματα από εδώ