基于解析几何和平面几何的多波束测线模型

摘要

本文主要研究多波束测线测深，建立测深覆盖宽度模型和重叠率数学模型完成设计有效测深重叠率的最佳测线，以及进行实现实际数据布线需求。

针对问题一，根据中心点与发射测线位置的关系，结合正切函数和相似三角形性质，建立**海水深度模型。**利用正弦定理以及几何关系得到**覆盖宽度模型**，对重叠率η分三种取值情况考虑是否漏测和重叠，得到重叠率η求解公式。根据所得模型求解，发现计算结果良好，模型合理。

针对问题二，结合第一问所得的海水深度模型，建立直角坐标系，得到测线投影与水平面的夹角公式。然后根据测线位置的β角大小情况，得到**海底深度的模型**。结合第一问的覆盖宽度模型，计算条带所在平面与坡面的相交直线和水平面形成的夹角，代入相关变量，得到不同情况下的**覆盖宽度模型**。

针对问题三，当船**由西向东**行驶时，算出处于当前位置满足最高重叠率的测线间距，以及在这一测线间距下满足最低重叠率的位置离中心点的距离。再算出覆盖该区域的最小测线次数和测线长度，直到海域全部覆盖。当船**南北向**行驶时，根据前一位置和最小覆盖率算出后一位置离海域中心点的距离，直至测线覆盖整个海域。根据测线次数与海域宽度得出测线长度。对比发现船**东西向**行驶测线长度更小。

针对问题四，首先进行数据可视化分析，采用**微分**的思想，将海底地形分解为两个坡面进行分析，根据相似三角形定理求出边的长度，根据几何关系，不断求解坡面可以得到当前坡面的破面角。将重叠率 10%代入行驶测量布线模型求解相邻测线位置。基于优化原则，选择**遗传算法**，经验证求解处的模型得到的结果存在误差。

关键词：多波束测线、三角函数、几何、遗传算法

一、问题重述

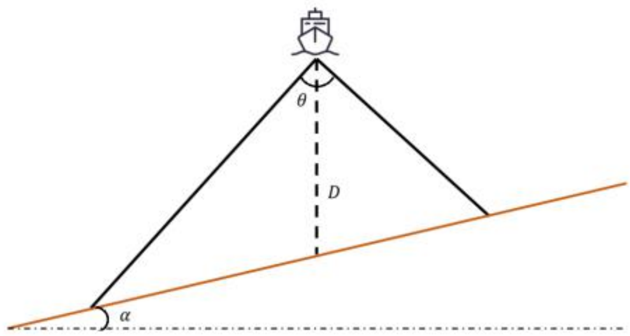
1.1 问题背景

多波束测深系统在与航迹垂直的平面内一次能发射出数十个乃至上百个波束，再由接收换能器接收由海底返回的声波。在海底平坦的海域内，能够测量出以测量船测线为轴线且具有一定宽度的全覆盖水深条带。

多波束测深条带的覆盖宽度 僜 随换能器开角ㄉ和水深傢的变化而变化。若测线相互平行且海底地形平坦，则相邻条带之间的重叠率定义为$\eta = 1 - \frac{d}{W}$ ，其中 傢 为相邻两条测线的间距，僜 为条带的覆盖宽度（图 4）。若 业 <0，则表示漏测。为保证测量的便利性和数据的完整性，相邻条带之间应 10%~20% 的重叠率。

1.2 问题的提出

问题一：与测线方向垂直的平面和海底坡面的交线构成一条如图所示的与水平面夹角为丶的斜线，称丶为坡度。建立多波束测深的覆盖宽度及相邻条带之间重叠率的数学模型。

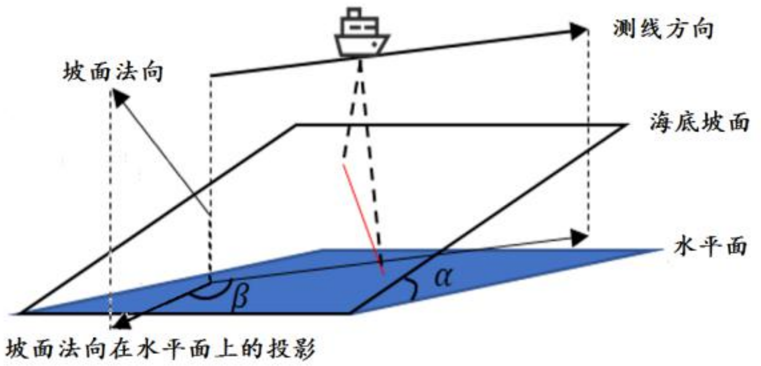


若多波束换能器的开角为 120 °，坡度为 1.5 °，海域中心点处的海水深度为 70 m，利用上述模型计算表 1 中所列位置的指标值。

表 1　问题 1 的计算结果

测线距中心点处的距离/m	−800	−600	−400	−200	0	200	400	600	800
海水深度/m					70				
覆盖宽度/m									
与前一条测线的重叠率/%	—								

问题二：在如图所示的一个矩形待测海域，测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角为 ヾ，建立多波束测深覆盖宽度的数学模型。



若多波束换能器的开角为 120˚，坡度为 1.5˚，海域中心点处的海水深度为 120m，利用上述模型计算表 2 中所列位置多波束测深的覆盖宽度。

表 2　问题 2 的计算结果

覆盖宽度/m		测量船距海域中心点处的距离/海里							
		0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1
测线方向夹角/°	0								
	45								
	90								
	135								
	180								
	225								
	270								
	315								

问题三：考虑一个南北长 2 海里、东西宽 4 海里的矩形海域内，海域中心点处的海水深度为 110m，西深东浅，坡度为 1.5˚，多波束换能器的开角为 120˚。

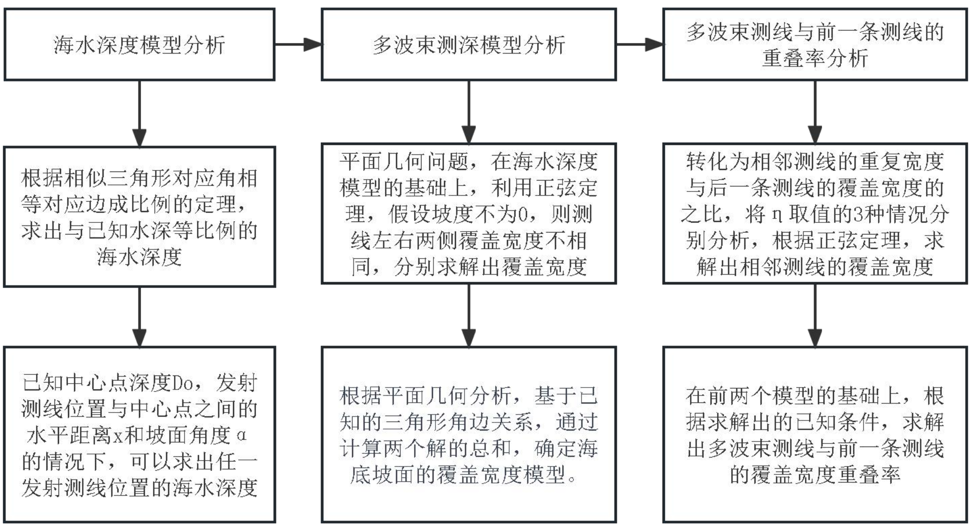
设计一组测量长度最短、可完全覆盖整个待测海域的测线，且相邻条带之间的重叠率满足 10%~20% 的要求。

问题四： 海水深度数据（附件.xlsx）是若干年前某海域（南北长 5 海里、东西宽 4 海里）单波束测量的测深数据，现希望利用这组数据为多波束测量船的测量布线提供帮助。在设计测线时，有如下要求：(1)沿测线扫描形成的条带尽可能地覆盖整个待测海域；(2)相邻条带之间的重叠率尽量控制在 20%以下；(3)测线的总长度尽可能短。在设计出具体的测线后，请计算如下指标：(1)测线的总长度；(2)漏测海区占总待测海域面积的百分比；(3)在重叠区域中，重叠率超过 20%部分的总长度。

二、问题分析

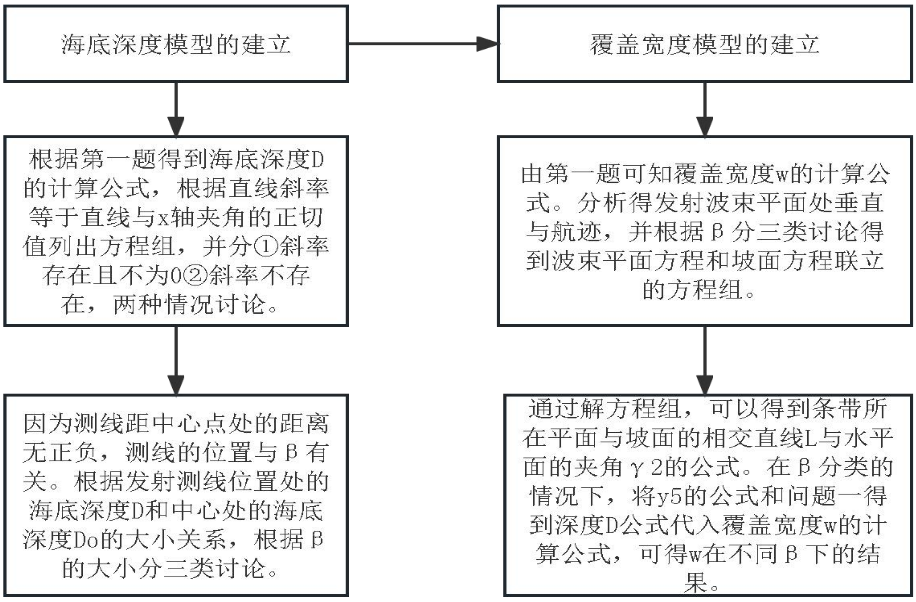
2.1 问题一

针对问题一，根据三角形几何关系和坡度计算出不同点的海水深度。再利用已知角度通过正弦定理和相似三角形定理计算出船处于不同点时的覆盖宽度和重复率。



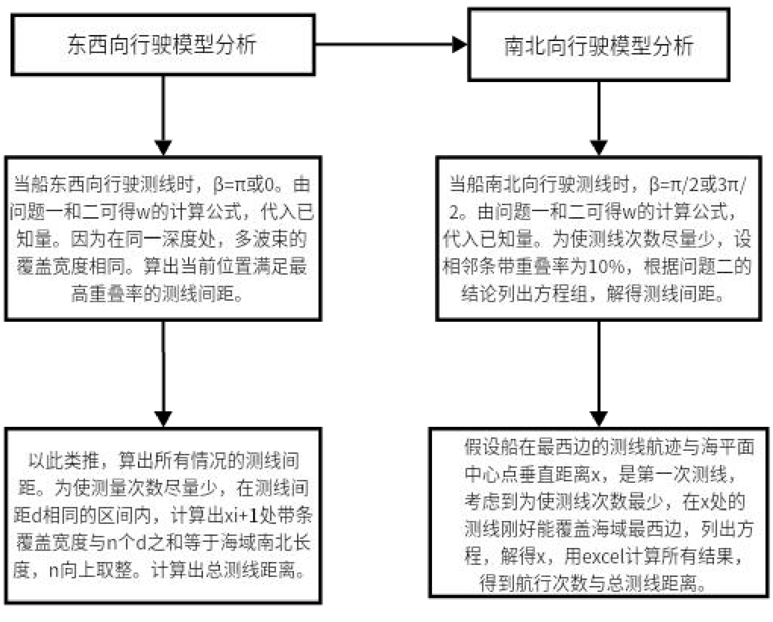
2.2 问题二

针对问题二，根据三角形位置关系，坡度和距离中心点处的距离计算出不同点的海水深度。在利用测线方向夹角角度通过正弦定理计算出船处于不同点时的覆盖宽度。



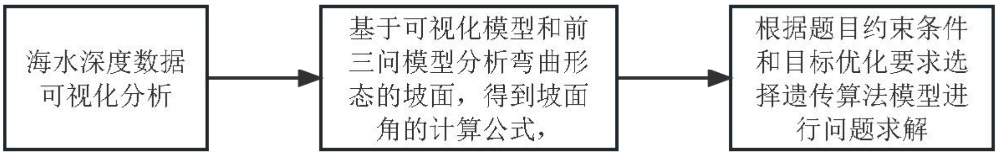
2.3 问题三

针对问题三，确定海域参数：海域长：2 海里，海域宽：4 海里，海水深度：110m，坡度：1.5°，波束开角：120°。根据前两问，船每次行驶的角度应相等。讨论船沿东西向或者南北向行驶，结合前两问模型得出测线总长度。



2.4 问题四

针对问题四，对附件数据进行基础模型分析，求解出坡面角计算方法，根据题目约束以及求解目标优化要求进行目标优化分析。



三、模型假设

1.数据完整性假设：附件所给的数据是完整的，没有任何遗漏或缺失。说明可以使用这些数据作为基础进行分析和建模，而不需要填补任何缺失的数值。

2.数据准确性假设：附件所给的数据的数值是准确的，没有明显的错误或误差。这说明可以在分析和建模过程中信任这些数值，而不需要对其进行额外的校正或纠正。

3.数据一致性假设：附件所给的数据在时间和空间上是一致的。说明可以将这些数据集合并在一起，并将它们视为相同时间段和地理位置下的观测数据。

四、符号说明

符号	说明
D	海水深度
α	海底坡面的坡度
D_o	位于测线距中心点处发射射线的水深
x	测线距中心点处的距离

w_1	测线左侧的覆盖宽度
w_2	测线右侧的覆盖宽度
w	多波束测深条带的的覆盖宽度
θ	随换能器开角大小
θ_1	测线左侧与海底坡面形成的夹角
θ_2	测线右侧与海底坡面形成的夹角
η	相邻条带之间的重叠率
d	相邻两条测线的间距
γ_1	测线方向在坡面上的投影与水平面的夹角
γ_2	测线与水平面的夹角

注：其他符号在文中说明

五、模型建立与求解

5.1 问题一模型建立与求解

5.1.1 海水深度模型分析

根据题意分析，发射测线位置 B 与测线距中心点 O 的位置分布有两种情况，如图 1 和图 2 所示。

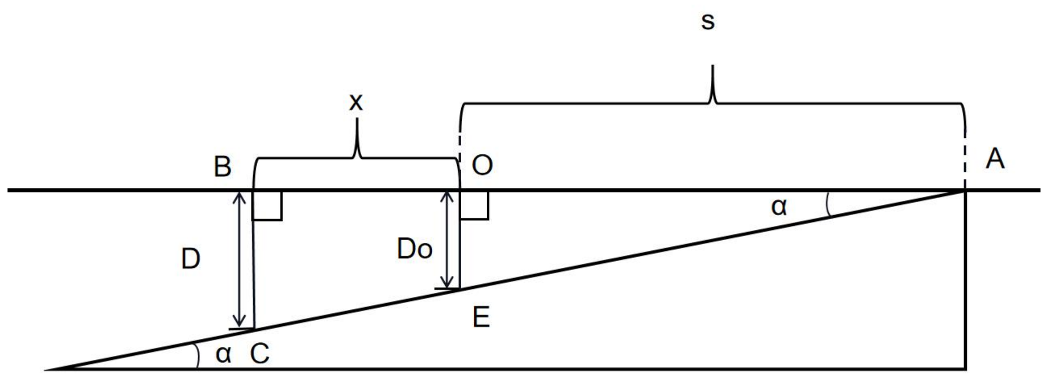


图 1 发射测线位置 B 位于测线距中心点左侧示意图

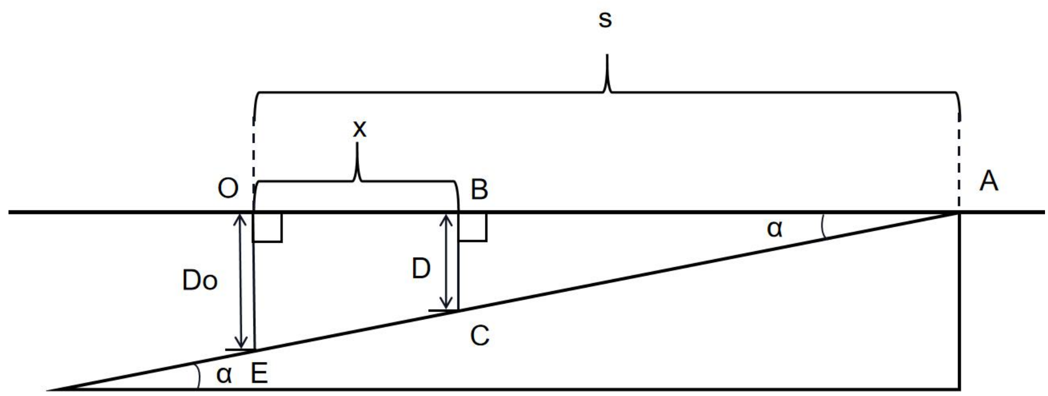


图 2 发射测线位置 B 位于测线距中心点右侧示意图

假设 O 点为海域中心点，A 点为坡面与海平面交点，直线 EA 为海底坡面，BC 垂直于 OA，C 为直线 AE 上任意一点，点 B 是任一发射测线的位置。假设海平面上中心点 O 到坡面的海水深度为 Do，令海平面上任一发射位置 B 垂直于海平面 OA 到坡面 AE 的交点为 C，海水深度 BC 设为 D，OB 之间的水平间距为 x。当 B 点在 O 点左边时，x 为负数；B 点在 O 点右边时，x 为正数。

由正切函数可知，在已知发射测线在海底坡面测得的海水深度以及坡度时，可以求出该发射测线与海底坡面之间形成的水平距离 s。

$$\tan\alpha = \frac{D_O}{s} \quad (1)$$

根据相似三角形对应角相等对应边成比例的定理可得，

$$\frac{s}{s-x}=\frac{D_O}{D} \quad (2)$$

联立两个方程，得到：

$$D=D_O-x\tan\alpha$$

因此，在已知中心点深度 Do，发射测线位置与中心点之间的水平距离 x 和坡面角度 α 的情况下，可以求出任一发射测线位置的海水深度。

5.1.2 多波束测深的覆盖宽度分析

测线在海底坡面的覆盖宽度如图 4 所示。如图 4 所示，假设测线左侧覆盖宽度 FC 为w_1，右侧覆盖宽度 CG 为w_2，测线左侧与海底坡面之间的夹角为θ_1，测线右侧与海底坡面之间的夹角为θ_2。过 G 点做水平面的平行线得到角度为 α 。

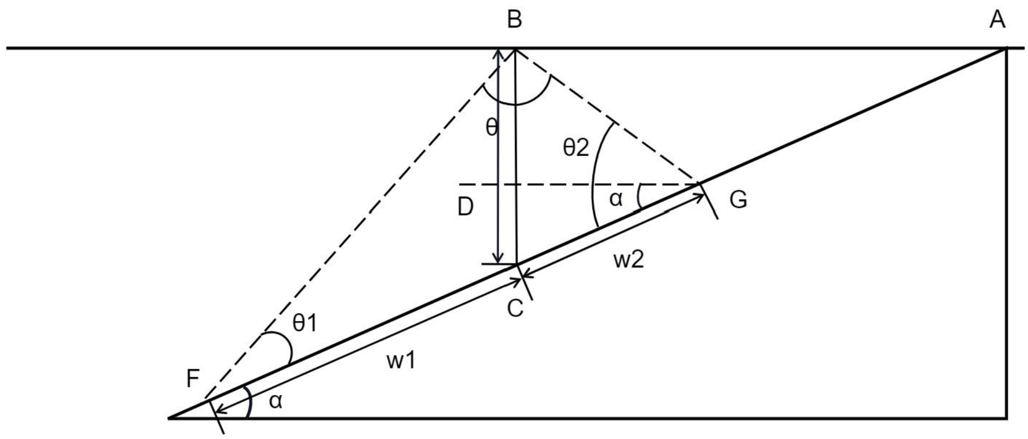


图 4 测线在海底坡面的覆盖宽度示意图

由等腰三角形得角度方程如下：

$$\begin{cases}\theta_1=\dfrac{(\pi-\theta)}{2}-\alpha\\ \theta_2=\dfrac{(\pi-\theta)}{2}+\alpha\end{cases}$$

根据几何关系，由三角形 BCF 和三角形 BCG 中的角边关系，利用正弦定理可以得到测线在海底坡面的覆盖宽度的模型表达式为：

$$\begin{cases} \dfrac{w_1}{\sin\dfrac{\theta}{2}} = \dfrac{D}{\sin\theta_1} \\ \dfrac{w_2}{\sin\dfrac{\theta}{2}} = \dfrac{D}{\sin\theta_2} \\ w = w_1 + w_2 \end{cases}$$

解方程组，得到 w 的计算公式为：

$$w = \frac{D \times \sin\dfrac{\theta}{2}}{\sin(\dfrac{\pi-\theta}{2} - \alpha)} + \frac{D \times \sin\dfrac{\theta}{2}}{\sin(\dfrac{\pi-\theta}{2} + \alpha)}$$

5.1.3 多波束测线与前一条测线的重叠率分析

由题可知，相邻条带之间的重叠率 η 可以为负数，表示条带之间存在测漏的情况。在两个相邻发射测线之间，条带位置关系存在三种情况，相邻条带之间存在测漏，相邻条带之间重叠，相邻条带之间刚好不测漏也不重叠。假设相邻条带之间重合的覆盖宽度为 Δw，相邻条带重合情况由图 5 所示。

本题中，定义与前一条测线的重复率为两条条带的重复面积与后一条测线的条带的面积之比。由于三角形相似，重复率可转化为两条测线覆盖宽度的重复宽度与后一条测线覆盖宽度的之比。

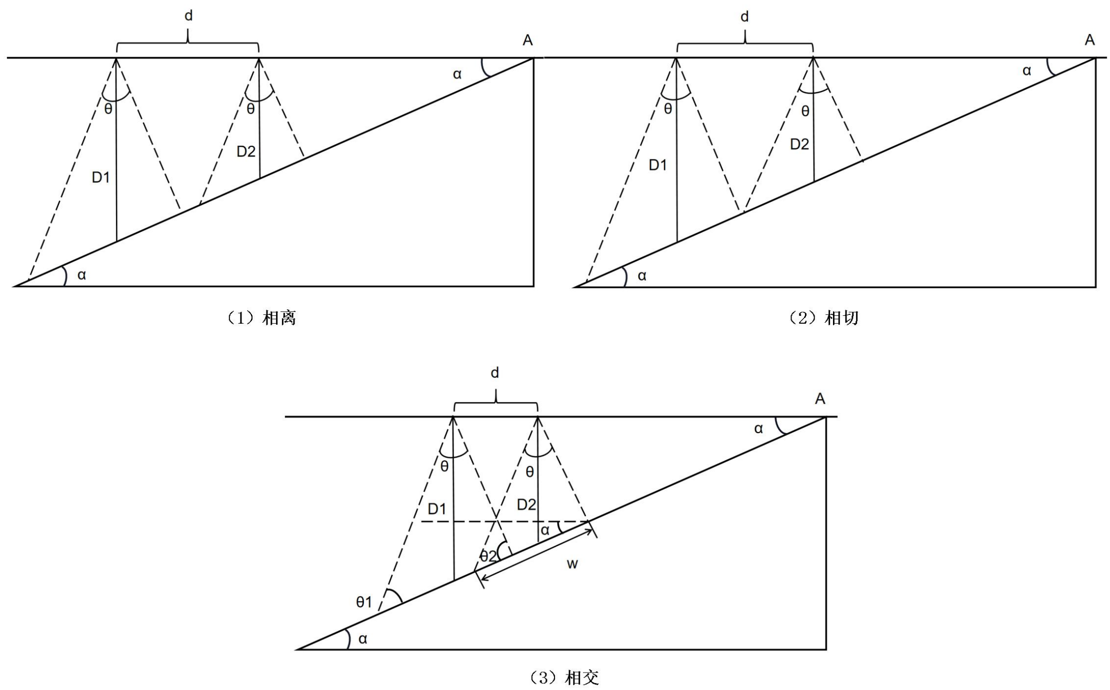


图 5 多波束测线与前一条测线的 3 种重叠情况示意图

由上述分析可知，η 可以存在三种取值情况：

$$\begin{cases}\eta<0,\text{ 相邻条带之间漏测}\\ \eta>0,\text{ 相邻条带之间有重叠}\\ \eta=0,\text{ 相邻条带之间刚好没有漏测也没有重叠}\end{cases}$$

因此，根据角度和边的关系，利用正弦定理，以上 3 种重叠情况均可以表达为一个方程式：

$$\begin{cases}\dfrac{\sin(\pi-\theta_2)}{d}=\dfrac{\sin\ (\theta_2-\alpha)}{\Delta w}\\ \eta=\dfrac{w-\Delta w}{w}\end{cases}$$

解方程组，η 得到的计算公式为：

$$\eta=1-\frac{d\times\sin\dfrac{\pi-\theta}{2}}{\sin\left(\pi-\dfrac{\pi-\theta}{2}-\alpha\right)\left(\dfrac{(D_O-x\tan\alpha)\times\sin\dfrac{\theta}{2}}{\sin\ \left(\dfrac{\pi-\theta}{2}-\alpha\right)}+\dfrac{(D_O-x\tan\alpha)\times\sin\dfrac{\theta}{2}}{\sin\left(\dfrac{\pi-\theta}{2}+\alpha\right)}\right)}$$

5.1.4 结论分析与运用

$$\begin{cases} D = D_O - x\tan\alpha \\ w = \dfrac{D\times\sin\dfrac{\theta}{2}}{\sin\left(\dfrac{\pi-\theta}{2}-\alpha\right)} + \dfrac{D\times\sin\dfrac{\theta}{2}}{\sin\left(\dfrac{\pi-\theta}{2}+\alpha\right)} \\ \eta = 1 - \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi-\theta}{2}\right)}{\sin\left(\pi-\dfrac{\pi-\theta}{2}-\alpha\right) * w} * d \end{cases}$$

根据以上公式，带入已知量，得到计算结果，如表 1 所示（保留两位小数）。

测线距中心点处的距离/m	-800	-600	-400	-200	0	200	400	600	800
海水深度/m	90.95	85.71	80.47	75.24	70.00	64.76	59.53	54.29	49.05
覆盖宽度/m	315.81	297.63	279.44	261.26	243.07	224.88	206.70	188.51	170.33
与前一条测线的重叠率/%	——	35.70	31.51	26.74	21.26	14.89	7.41	-1.53	-12.36

表 1 问题 1 的计算结果

5.2 问题二模型建立与求解

在解题过程中，假设坡西深东浅，船沿直线航行且海面平静，坡向为 x 轴负方向。

5.2.1 海底深度模型建立

由第一题可知，海底深度 D 的计算公式为：

$$D = D_0 - x\tan\alpha$$

其中 x 为测线距中心点处的距离，α 为坡度，即测线方向在坡面上的投影与水平面的夹角。

由题意可知，测线方向与坡向存在一定夹角 β，因此，如图 6 所示，测线时的真正坡度不一定等于 α。

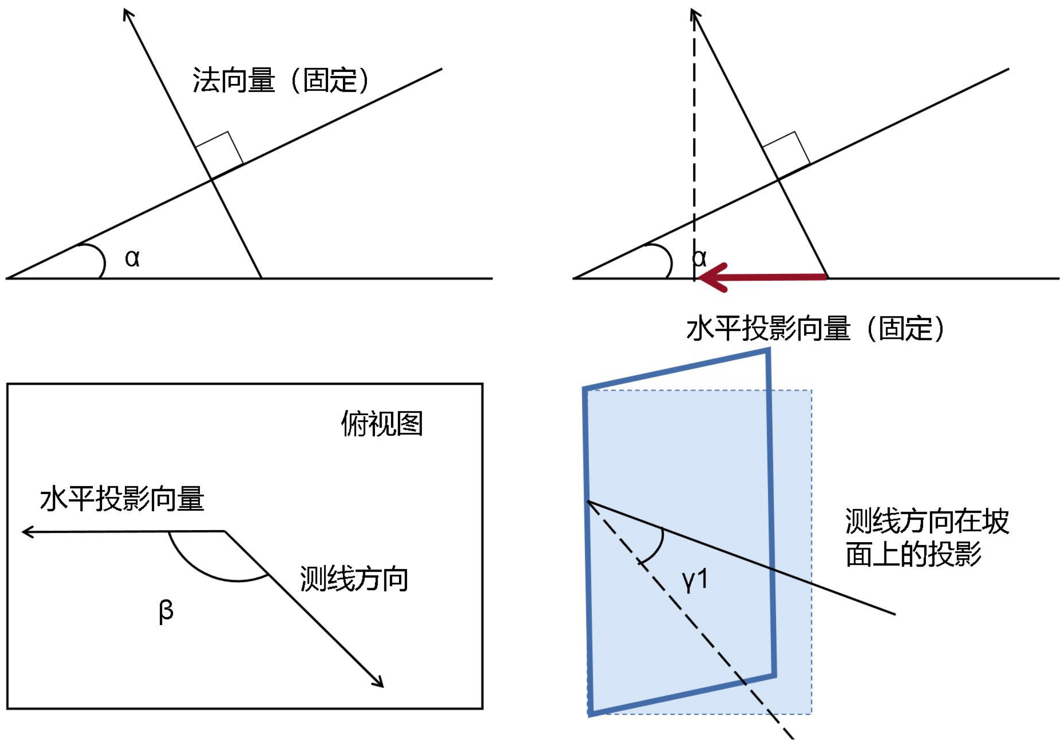


图 6

假设测线方向在坡面上的投影与水平面的夹角为γ_1，以海平面中心在坡面

上的为原点建立直角坐标系，如图 7 所示。面 ABCD 为坡面，面 OEF 为测线方向所在的直线的平面与水平面的垂面，直线 l 为测线航行路线在坡面上的投影。

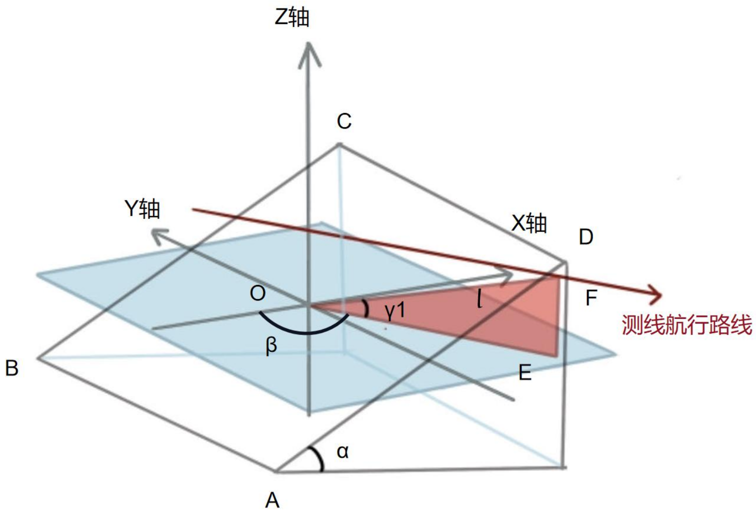


图 7

根据直线斜率等于直线与 x 轴夹角的正切值，可以列出方程组。由于测线航行直线方程 y 的斜率可能不存在，如图 8 所示。因此分为两类讨论。

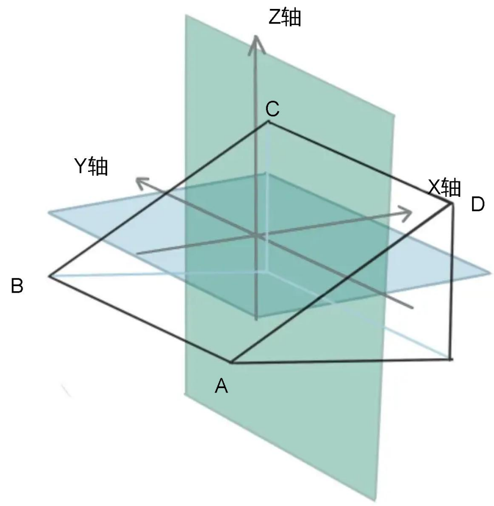


图 8

1.斜率存在。

当斜率存在时，可以根据角度与面面位置关系列出方程组：

$$\begin{cases} z = x\tan\alpha \\ y = x\tan\beta \end{cases}$$

解出方程组，得到两个面的相交直线 l 可以表示为：

$$\lambda（1，\tan\beta，\tan\alpha）$$

其中，λ 可以取任意值。由已知得，相交直线与 xoy 平面的夹角即为γ_1。根据相交直线表达式，得到公式：

$$\tan\gamma_1=\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan\beta^2}}$$

2.斜率不存在。

当斜率不存在时，测线方向和坡向相同或者相反。根据角度与面面位置关系列出方程组：

$$\begin{cases}z=x\tan\alpha\\x=0\end{cases}$$

解出方程组，得到两个面的相交直线 l 即为 y 轴，与水平面平行。所以γ_1等于 0°。

综上所述，测线方向在坡面上的投影与水平面的夹角γ_1的公式为：

$$\gamma_1=\begin{cases}\arctan\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan\beta^2}} & \beta\neq\frac{\pi}{2}，\frac{3\pi}{2}\\0 & \beta=\frac{\pi}{2}，\frac{3\pi}{2}\end{cases}$$

在第一题中，测线距中心点处的距离 x 有正负。而在第二问中测线距中心点处的距离无正负，测线的位置与 β 角的大小有关。因此，根据发射测线位置处的海底深度 D 和海域中心点处的海底深度 Do 的大小关系，分为三类讨论。

1、$\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{3\pi}{2}$

当带入 5.2.1 得到的γ_1角度公式，待测点的海底深度 D 的公式为：

$$D=D_O-x\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan\beta^2}}$$

2、$0<\beta<\frac{\pi}{2}，\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$

带入 5.2.1 得到的γ_1角度公式，待测点的海底深度 D 的公式为：

$$D = D_O + x\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan\beta^2}}$$

3、$\beta = \frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$

当 β =90 ° 或者 270 ° ，$\gamma_1 = 0$，$x\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan\beta^2}} \approx 0$。因此，在此种情况下，待测点的海底深度 D 的公式为：

$$D = D_O$$

综上所述，海底深度 D 的计算公式为：

$$D = \begin{cases} D_O - x\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan\beta^2}} & \frac{\pi}{2} < \beta < \frac{3\pi}{2} \\ D_O + x\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan\beta^2}} & 0 \le \beta < \frac{\pi}{2}，\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi \\ D_O & \beta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

5.2.2 覆盖宽度模型建立

由第一题可知，覆盖宽度 w 的计算公式为：

$$w = \frac{D \times \sin\frac{\theta}{2}}{\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2} - \alpha\right)} + \frac{D \times \sin\frac{\theta}{2}}{\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2} + \alpha\right)}$$

其中，D 为该点海水深度，α 为条带所在平面与坡面的相交直线和水平面形成的夹角。如图 9 所示，假设条带所在平面与坡面的相交直线为 L,L 与水平面的夹角γ_2。由题意可得，发射波束平面垂直于航迹。

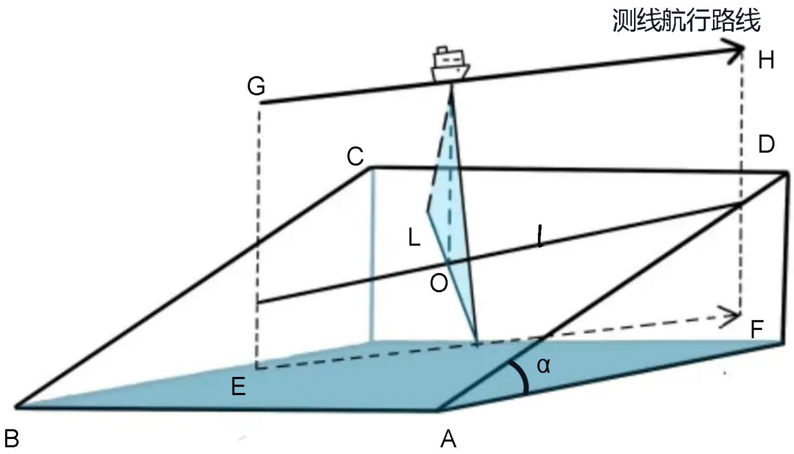


图 9 航行发射测线示意图

由于两直线垂直时斜率相乘为-1，已知测线方向所在的直线的平面与水平面的垂面 EFGH 方程，得到波束平面方程：

$$y=-x\frac{1}{\tan\beta}$$

分析方程，当 $\beta\in[0,2\pi]$时，$\tan\beta$ 的值可能为 0 和不存在，如图 10 所示。因此分为三类讨论。

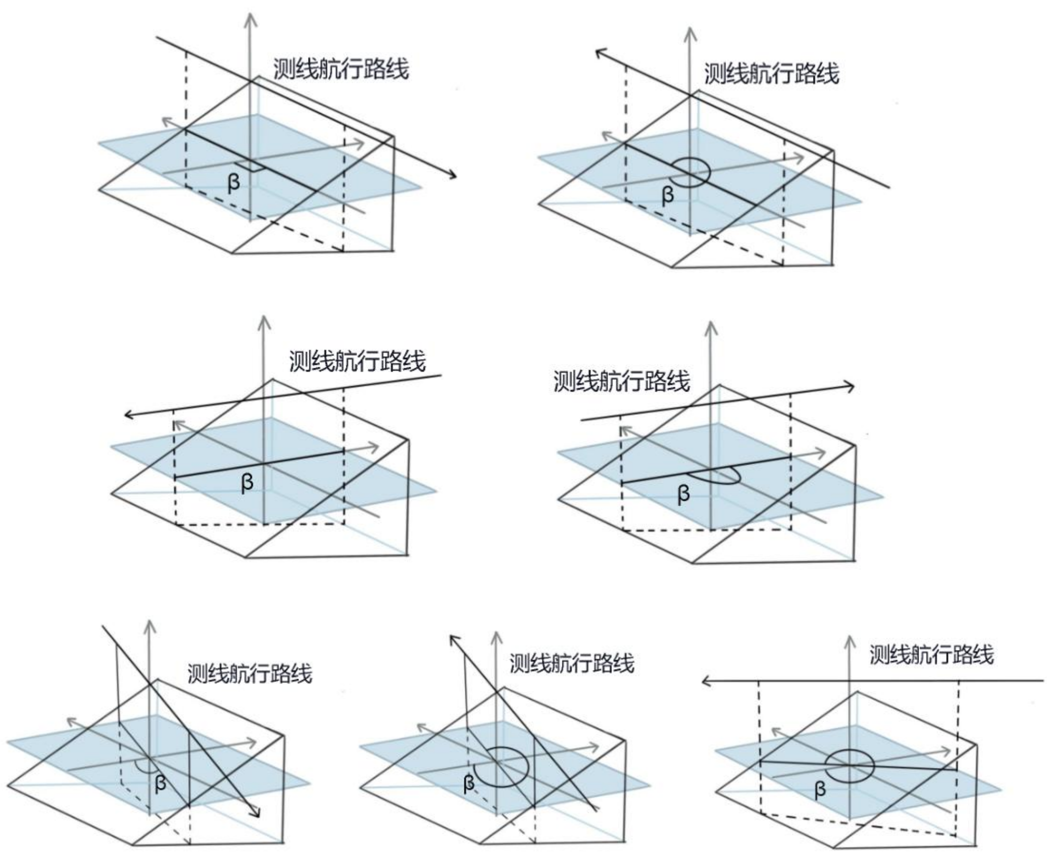


图 10 分类情况

1. $\beta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

由 5.2.1 的结论可知，当β等于 90°或者 270°时，面 GHFE 的方程表示为 x=0。根据垂直关系，波束平面方程与坡面方程联立得到的方程组为：

$$\begin{cases} z = x\tan\alpha \\ y = 0 \end{cases}$$

解出方程组，得到两个面的相交直线 L 可以表示为：

$$\lambda（1，0，\tan\alpha）$$

其中，λ 可以取任意值。由已知得，相交直线 L 与 xoy 平面的夹角即为γ_2。根据相交直线表达式，得到公式：

$$\tan\gamma_2 = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+0^2}} = \tan\alpha$$

由于γ_2为坡面中一条直线与水平面形成的线面角，小于等于坡面与水平面形成的二面角α，所以$\gamma_2 = \alpha$。

2. $\beta = 0, \pi$

由 5.2.1 的结论可知，当β等于 0°或者 180°时，面 GHFE 的方程表示为 y=0。根据垂直关系，波束平面方程与坡面方程联立得到的方程组为：

$$\begin{cases} z = x\tan\alpha \\ x = 0 \end{cases}$$

解出方程组，得到两个面的相交直线 L 即为 y 轴，与水平面平行。所以γ_2等于 0°。

3、$0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < \beta < \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$

波束平面方程与坡面方程联立得到的方程组为：

$$\begin{cases} z = x\tan\alpha \\ y = -x\frac{1}{\tan\beta} \end{cases}$$

解出方程组，得到两个面的相交直线 L 可以表示为：

$$\lambda\left(1,\ \frac{-1}{\tan\beta},\ \tan\alpha\right)$$

其中，λ 可以取任意值。由已知得，相交直线 L 与 xoy 平面的夹角即为γ_2。根据相交直线表达式，得到公式：

$$\tan\gamma_2 = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\beta}}}$$

综上所述，条带所在平面与坡面的相交直线 L 与水平面的夹角γ_2的公式为：

$$\gamma_2 = \begin{cases} \arctan\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\beta}}} & 0<\beta<\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}<\beta<\frac{3\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi \\ 0 & \beta=0,\ \pi \\ \alpha & \beta=\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

根据 5.2.2 得出夹角γ_2的公式与 5.2.1 得出的海底深度 D 的计算公式带入，覆盖宽度 w 的计算公式为：

1. $\beta=\frac{\pi}{2},\ \beta=\frac{3\pi}{2}$

$$w=\frac{Do\times\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}-\alpha\right)}+\frac{Do\times\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}+\alpha\right)}$$

2. $\beta=0,\ \beta=\pi$

$\beta=0$时，

$$w=\left(D_O+x\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}\right)\times\sin\frac{\theta}{2}\times\frac{2}{\sin\frac{\pi-\theta}{2}}$$

$\beta=\pi$时，

$$w=\left(D_O-x\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}\right)\times\sin\frac{\theta}{2}\times\frac{2}{\sin\frac{\pi-\theta}{2}}$$

3. $\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{3\pi}{2}$

$$w = \left(D_O - x\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}\right)\times\sin\frac{\theta}{2}\times\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2} - \arctan\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\beta}}}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2} + \arctan\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\beta}}}\right)}\right)$$

4. $0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \ \frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$

$$w = \left(D_O + x\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}\right)\times\sin\frac{\theta}{2}\times\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2} - \arctan\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\beta}}}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2} + \arctan\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\beta}}}\right)}\right)$$

5.2.3 结论分析与运用

根据以上公式，带入已知量，得到计算结果，如表 2 所示（保留两位小数）。

覆盖宽度/m		测量船距海域中心点处的距离/海里							
		0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1
测线方向夹角/°	0	415.69	466.09	516.49	566.89	617.29	667.69	718.09	768.48
	45	415.69	451.33	486.97	522.60	558.24	593.88	629.52	665.15
	90	416.69	416.69	416.69	416.69	416.69	416.69	416.69	416.69
	135	415.69	380.05	344.42	308.78	273.14	237.51	201.87	166.23
	180	415.69	365.29	314.89	264.50	214.10	163.70	113.30	62.90
	225	415.69	380.05	344.42	308.78	273.14	237.51	201.87	166.23
	270	416.69	416.69	416.69	416.69	416.69	416.69	416.69	416.69
	315	415.69	451.33	486.97	522.60	558.24	593.88	629.52	665.15

表 2 问题 2 的计算结果

5.3 问题三模型建立与求解

为保证测线长度尽量小，每一次测线方向应该相同[1]。

5.3.1 东西向行驶模型分析

由题意可知，当船东西向行驶测线时，β =π或 0。根据问题一和二的分析，覆盖宽度 w 的计算公式为：

$$w=(D_O-x\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\beta}})\times\sin\frac{\theta}{2}\times\frac{2}{\sin\frac{\pi-\theta}{2}}$$

其中，x 有正负取值。带入已知量，得到式子：

$$w=(D_O-x\tan 1.5°)\times\sin\frac{60°}{2}\times\frac{2}{\sin 30°}=2\sqrt{3}(D_O-x\tan 1.5°)$$

在同一深度处，多波束测深的覆盖宽度相同。

$$\eta=1-\frac{d}{2\sqrt{3}(D_O-x\tan 1.5°)}$$

分析得到的重复率表达式，重复率与该处的海底深度正相关，即海底深度越大，同一深度的条带重复率越大。根据题目要求，相邻条带之间的重叠率 10%~20%，设在 d 相同的情况下，x1 处相邻条带重复率为 20%，x2 处相邻条带重复率为 10%，且 x1 小于 x2。

设 w1 为 x1 处的条带覆盖宽度，列方程求出当 x1 处相邻条带重复率为 20% 时 d 的取值：

$$\begin{cases}w_1=2\sqrt{3}(D_O-x_1\tan 1.5°)\\ \eta=1-\dfrac{d}{w_1}=20\%\end{cases}$$

解出方程组，得到 d 为：

$$d=1.6\times\sqrt{3}(D_O-x_1\tan 1.5°)$$

设 w2 为 x1 处的条带覆盖宽度，列方程求出当 x2 处相邻条带重复率为 20%

时 x2 的取值：

$$\begin{cases} w_2 = 2\sqrt{3}(D_O - x_2\tan 1.5°) \\ \eta = 1 - \dfrac{d}{w_2} = 10\% \\ d = 1.6 \times \sqrt{3}(D_O - x_1\tan 1.5°) \end{cases}$$

解出方程组，得到 x2 为：

$$x2 = \frac{16\ (D_O - x_1\tan 1.5°)}{9\tan 1.5°} + D_O$$

依次类推，用 excel 计算出所有的情况(详情见附录表 1)。

为使测量次数尽量少，在测线间距 d 相同的区间$[x_i, x_{i+1}]$内，x_{i+1}处条带的覆盖宽度与n_i个d_i之和等于海域南北长度，n 向上取整。

$$n_i \times d_i + w_{i+1} = 2 \times 1852$$

测线距离 S 即为各区间的测线间距乘以测线次数之和。计算得出总测线距离为 86358.88 米，即 46.63 海里。

5.3.2 南北向行驶模型分析

由题意可知，当船由南向北或由北向南行驶测线时，β=π/2 或 3π/2。根据问题一和二的分析，覆盖宽度 w 的计算公式为：

$$\begin{cases} D = D_O - x\tan\alpha \\ w = \dfrac{D \times \sin\dfrac{\theta}{2}}{\sin\ (\dfrac{\pi-\theta}{2} - \alpha)} + \dfrac{D \times \sin\dfrac{\theta}{2}}{\sin(\dfrac{\pi-\theta}{2} + \alpha)} \end{cases}$$

其中，D 是该点深度，x 为离海面中心点的距离。分析公式可知，船在一次行驶测线的过程中，海底深度不变，覆盖宽度 w 不变。设船在前一次测线位置 x1 处的条带覆盖宽度为 w1，后一次测线位置 x2 处的条带覆盖宽度为 w2，x1<x2。为使测线次数尽量少，设相邻条带重叠率为 10%。根据问题二的结论，列出方程：

$$\begin{cases} D_2 = D_O - x_2 \tan\alpha \\ w_2 = \dfrac{D_2 \times \sin\dfrac{\theta}{2}}{\sin\left(\dfrac{\pi-\theta}{2} - \alpha\right)} + \dfrac{D_2 \times \sin\dfrac{\theta}{2}}{\sin\left(\dfrac{\pi-\theta}{2} + \alpha\right)} \\ \eta = 1 - \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi-\theta}{2}\right)}{\sin\left(\pi - \dfrac{\pi-\theta}{2} - \alpha\right) * w_2} * (x_2 - x_1) = 10\% \end{cases}$$

带入已知量$\theta = 120°$，$\alpha = 1.5°$，得到

$$\begin{cases} D_2 = D_O - x_2 \tan 1.5° \\ w_2 = \dfrac{D_2 \times \sin 60°}{\sin 31.5°} + \dfrac{D_2 \times \sin 60°}{\sin 28.5°} \\ \eta = 1 - \dfrac{\sin 30°}{\sin 148.5° \times w_2} \times (x_2 - x_1) = 10\% \end{cases}$$

解出方程组，得到 x2 的表达式：

$$x_2 = \frac{\sin 30° \times x_1 + 0.9 \times \sin 148.5° \sin 60° \left(\dfrac{1}{\sin 31.5°} + \dfrac{1}{\sin 28.5°}\right)}{\sin 30° + 0.9 \times \sin 148.5° \sin 60° \left(\dfrac{1}{\sin 31.5°} + \dfrac{1}{\sin 28.5°}\right) \tan 1.5°}$$

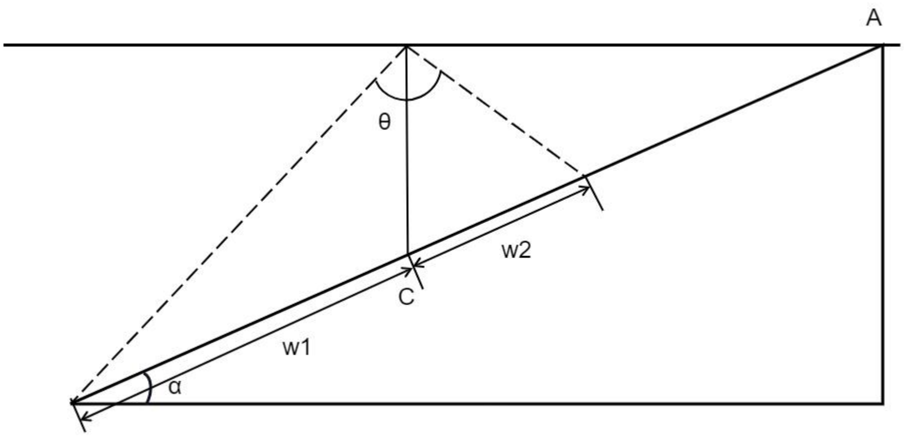


图 11 最西边覆盖示意图

假设船在最西边的测线航迹与海面海域中心点垂直距离 x，是第一次测线。

考虑到为使测线次数最少，在 x 处的测线刚好能覆盖海域最西边，如图 11 所示。列出方程：

$$\begin{cases} D = D_O - x\tan 1.5° \\ w_1 = \dfrac{D \times \sin\dfrac{\theta}{2}}{\sin\left(\dfrac{\pi-\theta}{2} - \alpha\right)} \\ x - w_1 = -2 * 1852 \end{cases}$$

解得 $x = -3345.36$ 。依次类推，用 excel 计算出所有的情况(详情见附录表 2)。根据计算结果，需要航行 34 趟。测线距离 S 即为海域宽度乘以测线次数。计算得出总测线距离为 68 海里。

5.3.3 模型评价

比较两个模型，发现船东西向行驶覆盖整个海域需要的测线长度小于南北向行驶。但是，在建模过程中还存在缺点：1.只考虑到覆盖整个海域需要的最小测线长度，没有关注船如何行驶。2.只考虑到东西向和南北向，未考虑其他行驶方向角度。

5.4 问题四模型建立与求解

5.4.1 测量布线模型基础优化分析

基于附件的横纵坐标对应的海水深度数据，进行可视化分析，如图 12 和图 13 所示。观察到海底坡面的三维图为呈现为弯曲的形态，整体呈现一测对角较深，一侧对角较浅的分布规律。因此，可以采用微分的思想，根据图 12 将海底地形分解为两个坡面进行分析，如图 13 所示。

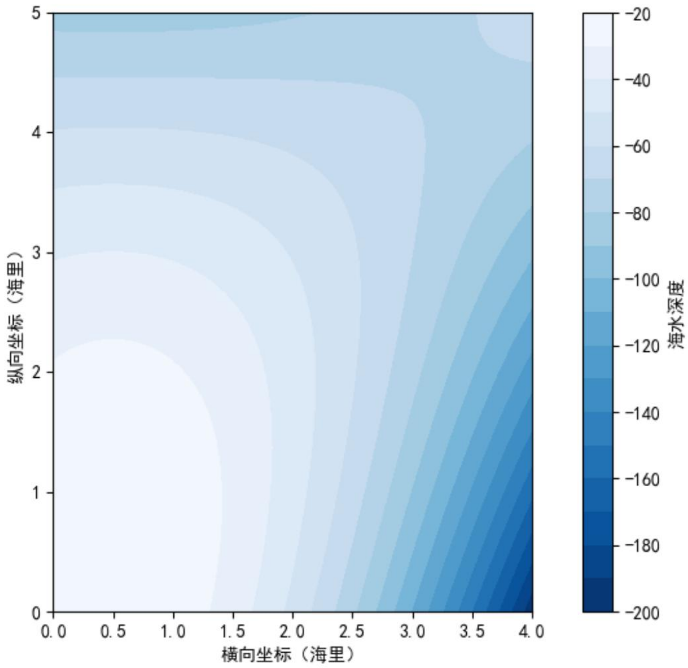


图 12 海底深度等高线平面图

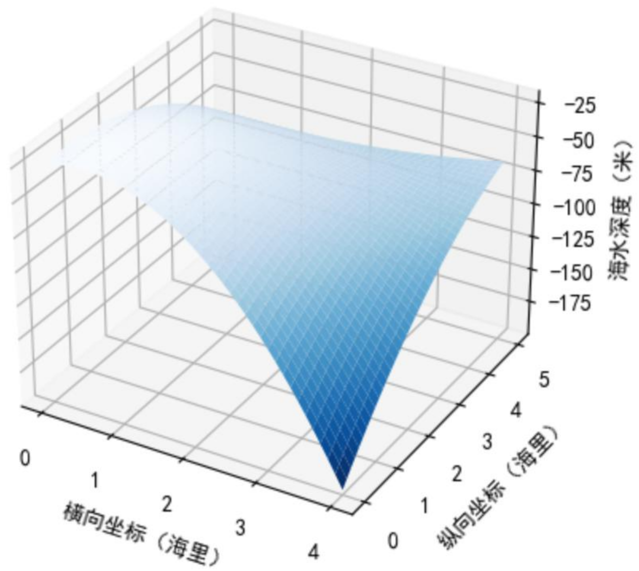


图 13 海底地形三维图

根据深度色块，估算四个顶点深度分别为 A(0,0,80),B(4,5,60)以及 D(4,5,200)。观察得到在 AC 边上一定有一个点 B'的深度等于点 B 的深度，根据相似三角形定理可以求出边 AB'和边 B'C 的长度。如图 14 所示。

$$\frac{\overline{AB'}}{5} = \frac{20}{60} \Rightarrow \begin{cases} \overline{AB'} = \dfrac{5}{3} \\ \overline{B'C} = \dfrac{10}{3} \end{cases} \qquad (1)$$

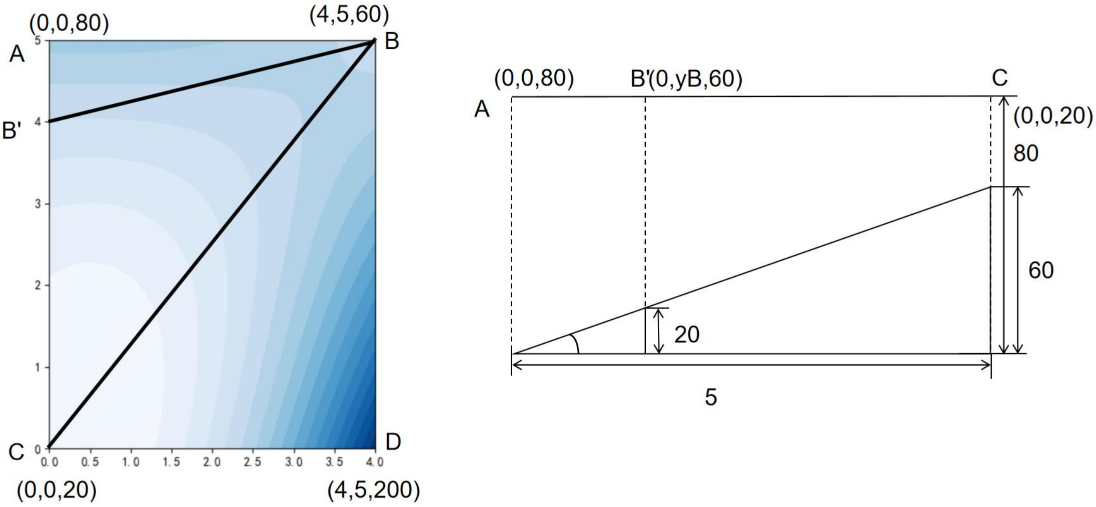


图 14

已知在对角线的左侧，坡面的坡度角度与边 BC 上的点 E 垂直于边 BB'。通过观察二维和三维图形，可以发现对角线 BC 存在一个高度差，从而形成了一个坡面，因此通过不断求解坡面可以得到分解的当前坡面的坡面角，分析过程如图 15 所示。

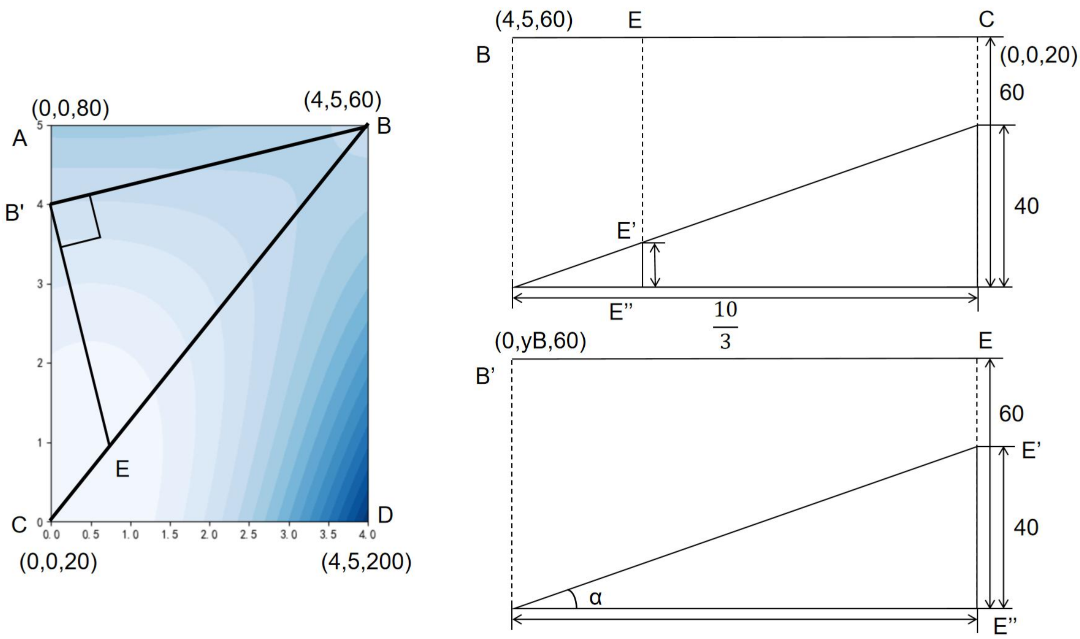


图 15

$$\begin{cases}\overline{BB'}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AB'}^2}=\frac{\sqrt{2329}}{3}\\ \angle ABC=\arctan\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\arctan\frac{5}{4}\\ \angle ABB'=\arctan\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}}=\arctan\frac{20}{3}\\ \angle B'BC=\angle ABC-\angle ABB'=\arctan\frac{5}{4}-\arctan\frac{20}{3}\end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases}\frac{\overline{E'E''}}{40}=\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}}\Rightarrow\overline{E'E''}=\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}}\times 40\\ \overline{BC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2}=\sqrt{41}\\ \overline{BE}\cos\angle B'BC=\overline{BB'}\Rightarrow\overline{BE}=\frac{\overline{BB'}}{\cos\angle B'BC}\\ \overline{B'E}=\overline{BE}\sin\angle B'BC\\ \tan\alpha=\frac{\overline{E'E''}}{\overline{B'E}}\Rightarrow\angle\alpha=\arctan\frac{\overline{E'E''}}{\overline{B'E}}\end{cases} \tag{3}$$

联立解出方程组，得到坡面的坡面角的表达式:

$$\angle\alpha=\arctan\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2}\times 40\tan\left(\arctan\frac{5}{4}-\arctan\frac{20}{3}\right)$$

5.4.2 测量布线模型目标优化分析

由第三问可知航线方向一定是互相平行的，为满足测线总长度尽可能短， 因此假设相邻条带重叠率为 10%， 测量船在当前的测线位于 x1，其条带的覆盖宽度为 w1，满足 x1<x2 条件的相邻测线位于 x2，其条带的覆盖宽度为 w2，满足 x1<x2。代入行驶测量布线模型求解相邻测线位置。

$$x_2=\frac{(1-\eta)\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}-\alpha\right)\sin\frac{\theta}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}+\alpha\right)\right]D_o+\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}+\alpha\right)\sin\frac{\pi-\theta}{2}x_1}{\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)+(1-\eta)\sin\left(\frac{\pi+\theta}{2}-\alpha\right)\sin\frac{\theta}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}+\alpha\right)\right]\tan\alpha}$$

基于数据可视化分析，可知两个坡度角不一致，在假设上述所计算的坡度角

所在坡面相邻条带重叠率为 10%的基础上, 坡度较更大的另一个坡面相邻条带重叠率一定大于 10%, 因此上述假设成立。

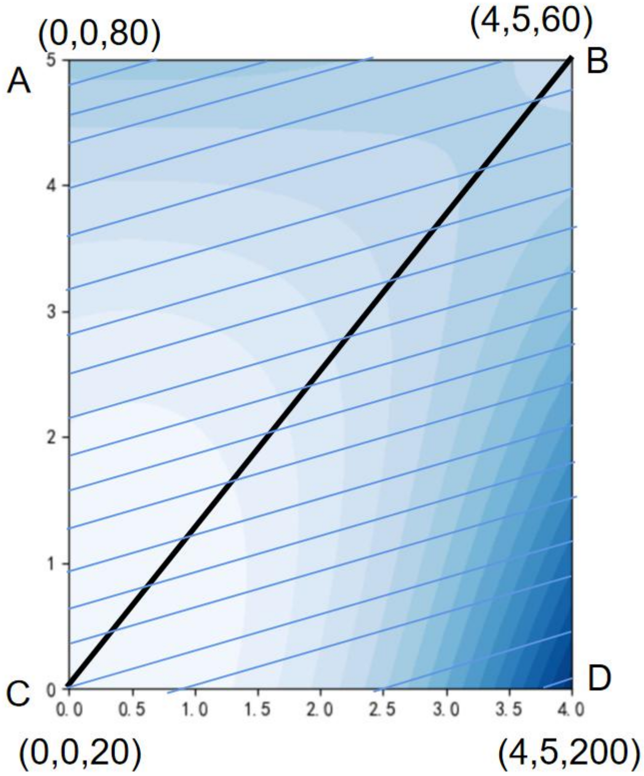


图 16 测量条带观测图

基于优化原则, 为遵循题目的深度约束和覆盖约束, 选择遗传算法来解决, 将深度坐标作为染色体, 采用线性插值获取对度坐标数据, 根据获取的海水深度数据, 基于上述几问建立的模型求解出最小和最大的测线间距, 在父代染色体的选取上, 对选取的染色体进行适应度的排序, 然后通过适应度函数对所选取的深度数据坐标进行评估, 借助轮盘赌选择法得出的两个概率值选择两个父代染色体。得到两个父代染色体后, 从父代染色体中通过单点交叉的思想, 选取出一个交叉点, 将两个父代染色体的一部分交叉得到了两个子代染色体。同时, 采用染色体突变的函数, 根据一定的突变率随机选择染色体中基因的位置生成一个突变值添加到选定位置的基因上。[2]

计算多波束测线的布线方案要求求解出测线的总长度，为满足优化坡面的方案导致海域面积漏测的区域站总待测区域的占比，以及重叠区域超过20%的总长度。

在本题分析中为满足数据要求，可以估测重叠率超过20%的总长度会分布在坡面角较大的坡面上，同时基于分解的不同坡面坡面角存在差异，平行的多波束测线的布线无法对另一个坡面采用上述几问的求得的模型进行方案设计，需采用点成线段根据优化得到的测线布局方案来单独计算求解结果。因此，求解出的模型得到的结果存在误差。

参考文献

[1] 基于遗传算法的测试用例自动生成方法研究 [J]. 杨文娟. 信息通信. 2015,第006期

[2] 舒升元,程龙.多波束系统在长江航道测量中的应用分析[J].中国水运,2017(09):46-47.DOI:10.13646/j.cnki.42-1395/u.2017.09.018.

附录

附录1

支撑材料的文件列表

1. 数据:

result1.xlsx

result2.xlsx

问题3附录表1.xlsx

问题 3 附录表 2.xlsx

2. 代码程序

question_1.py

question_4.py

附录 2

问题一代码(.py)

```
import math


# 定义位置信息的类
class Position:
    def __init__(self):
        self.x = 0.0
        self.w = 0.0
        self.depth = 0.0
        self.fraction_coverage = 0.0


# 根据题目的得到的条件
alpha = 1.5
theta = 120
PI = 180
D = 70
original_x = D / math.tan(math.radians(alpha))
w1_angle = (PI - theta) / 2 - alpha
w2_angle = (PI - theta) / 2 + alpha
w3_angle = PI - w1_angle - alpha
w4_angle = PI - w2_angle
w5_angle = w2_angle - alpha
```

```python
# 计算海水深度
def cal_depth(x):
    return ((original_x - x) * D) / original_x

# 计算左侧覆盖宽度
def cal_w1(x):
    return  x * math.sin(math.radians(theta / 2)) / math.sin(math.radians(w1_angle))

# 计算右侧覆盖宽度
def cal_w2(x):
    return x * math.sin(math.radians(theta / 2)) / math.sin(math.radians(w2_angle))



def solve():
    positions = [Position() for _ in range(9)]

    # 初始化测线距中心点处的距离
    for i in range(9):
        positions[i].x = (-4 + i) * 200.0

    # 计算海水深度、覆盖宽度
    for i in range(9):
        if i == 4:
            positions[i].depth = D
            w1 = cal_w1(D)
            w2 = cal_w2(D)
            positions[i].w = w1 + w2
        else:
            positions[i].depth = cal_depth(positions[i].x)
            w1 = cal_w1(positions[i].depth)
            w2 = cal_w2(positions[i].depth)
            positions[i].w = w1 + w2

    # 计算与前一条线的重叠率
```

```
    for i in range(1, 9, 1):
        diff1 = (positions[i].x - positions[i - 1].x) * math.sin(math.radians(w5_angle)) / math.sin(
            math.radians(w4_angle))
        diff2 = positions[i].w - diff1
        radio = diff2 / positions[i].w
        positions[i].fraction_coverage = radio * 100

    for i in range(9):
        print(f"测线距中心点处的距离：{positions[i].x}")
        print(f"海水深度：{positions[i].depth}")
        print(f"覆盖宽度：{positions[i].w}")
        if i == 0:
            print("与前一条线的重叠率：————")
        else:
            print(f"与前一条线的重叠率：{positions[i].fraction_coverage}%")


if __name__ == "__main__":
    solve()
```

附录 3

问题三模型数据对比

表 1 东西向模型数据

x_i	x_{i+1}	d	$x_{i+1}-x_i$	N 向上取整	各区间测线长度/米
−3704.00	−2825.70	573.63	878.30	6.00	3441.81
−2825.70	−2044.98	509.90	780.71	7.00	3569.28
−2044.98	−1351.01	453.24	693.97	8.00	3625.94

—1351.01	—734.15	402.88	616.86	9.00	3625.94
—734.15	—185.83	358.12	548.32	10.00	3581.17
—185.83	301.56	318.33	487.40	11.00	3501.59
301.56	734.80	282.96	433.24	12.00	3395.48
734.80	1119.91	251.52	385.10	14.00	3521.24
1119.91	1462.22	223.57	342.31	16.00	3577.14
1462.22	1766.50	198.73	304.28	18.00	3577.14
1766.50	2036.97	176.65	270.47	20.00	3532.97
2036.97	2277.39	157.02	240.42	23.00	3611.48
2277.39	2491.09	139.57	213.70	26.00	3628.93
2491.09	2681.05	124.07	189.96	29.00	3597.91
2681.05	2849.91	110.28	168.85	33.00	3639.27
2849.91	3000.00	98.03	150.09	37.00	3627.02
3000.00	3133.41	87.14	133.41	42.00	3659.69
3133.41	3252.00	77.45	118.59	47.00	3640.33
3252.00	3357.42	68.85	105.41	53.00	3648.93
3357.42	3451.12	61.20	93.70	60.00	3671.88
3451.12	3534.41	54.40	83.29	67.00	3644.68

3534.41	3608.44	48.35	74.04	76.00	
					3674.91
3608.44	3674.25	42.98	65.81	86.00	
					3696.40
3674.25	3704.00	38.21	29.75	96.00	
					3667.74
总计					86358.88

表 2 南北向模型数据

x	d	w	覆盖率
−3345.36	197.60	686.16	
−2750.87	182.03	632.10	0.10
−2203.22	167.69	582.30	0.10
−1698.71	154.48	536.43	0.10
−1233.94	142.31	494.17	0.10
−805.79	131.10	455.24	0.10
−411.37	120.77	419.37	0.10
−48.03	111.26	386.33	0.10
286.70	102.49	355.90	0.10
595.05	94.42	327.86	0.10
879.11	86.98	302.03	0.10
1140.79	80.13	278.24	0.10
1381.85	73.81	256.32	0.10
1603.93	68.00	236.12	0.10
1808.51	62.64	217.52	0.10
1996.97	57.71	200.39	0.10
2170.58	53.16	184.60	0.10
2330.52	48.97	170.06	0.10
2477.86	45.11	156.66	0.10
2613.59	41.56	144.32	0.10
2738.63	38.29	132.95	0.10
2853.81	35.27	122.47	0.10
2959.92	32.49	112.83	0.10
3057.68	29.93	103.94	0.10
3147.73	27.57	95.75	0.10

3230.68	25.40	88.21	0.10
3307.10	23.40	81.26	0.10
3377.51	21.56	74.85	0.10
3442.36	19.86	68.96	0.10
3502.11	18.29	63.53	0.10
3557.14	16.85	58.52	0.10
3607.85	15.53	53.91	0.10
3654.55	14.30	49.66	0.10
3697.58	13.18	45.75	0.10

附录 4

问题四代码(.jpynb)

```
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.interpolate import griddata
from deap import base, creator, tools, algorithms
import math
from openpyxl import Workbook
from IPython.display import display

# 导入数据
file_path = r'C:\Users\Administrator\Documents\WPSDrive\656140418\WPS 云盘\数学建模\附件数据.xlsx'
df = pd.read_excel(file_path, header=None)

# 获取海水深度数据
depth_data = df.iloc[1:, 1:].values.astype(float)

# 海域网格尺寸
grid_size_x = len(depth_data[0])
grid_size_y = len(depth_data)

# 将每个 z 轴坐标的数值乘以 -1
```

```python
depth_data *= -1

# 生成横纵坐标数据
x_data = np.linspace(0, width, grid_size_x)
y_data = np.linspace(0, length, grid_size_y)


# 生成 x 和 y 坐标网格
x_mesh, y_mesh = np.meshgrid(x_data, y_data)

plt.rcParams['font.sans-serif'] = ['SimHei']
plt.rcParams['axes.unicode_minus'] = False


# 绘制海底水深数据二维图
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.contourf(x_mesh, y_mesh, depth_data, cmap='Blues_r', levels=20)
plt.colorbar(label='海水深度')
plt.xlabel('横向坐标（海里）')
plt.ylabel('纵向坐标（海里）')


# 设置二维图坐标比例
plt.gca().set_aspect('equal', adjustable='box')

plt.show()


# 绘制海水深度数据三维图


fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

ax.plot_surface(x_mesh, y_mesh, depth_data, cmap='Blues_r')
```

```
ax.set_xlabel('横向坐标（海里）')
ax.set_ylabel('纵向坐标（海里）')
ax.set_zlabel('海水深度（米）')

plt.show()



x = df.iloc[0, 1:].values * 1852
y = df.iloc[1:, 0].values * 1852
z = df.iloc[1:, 1:].values

# 参数初始化
width = 4 * 1852
length = 5 * 1852
theta = np.radians(120)
alpha = np.radians(1.5)
PI = np.radians(180)
D = x[0]

original_x = D / np.tan(alpha)
w1_angle = (PI - theta) / 2 - alpha
w2_angle = (PI - theta) / 2 + alpha
w5_angle = w2_angle - alpha
w6_angle = (PI - theta) / 2



# 计算左侧覆盖宽度
def cal_w1(x):
    return   x * math.sin(math.radians(theta / 2)) / math.sin(math.radians(w1_angle))

# 计算右侧覆盖宽度
def cal_w2(x):
    return x * math.sin(math.radians(theta / 2)) / math.sin(math.radians(w2_angle))

# 创建深度缓存
depth_cache = {}
```

```python
# 使用线性插值从给定数据点获取深度值
def get_depth_at_point(x_point, y_point):
    global depth_cache
    if (x_point, y_point) in depth_cache:
        return depth_cache[(x_point, y_point)]

    X, Y = np.meshgrid(x, y)
    points = np.column_stack((X.ravel(), Y.ravel()))
    values = z.ravel()
    depth = griddata(points, values, (x_point, y_point), method='linear')
    depth_cache[(x_point, y_point)] = depth
    return depth



# 根据深度计算最小和最大的侧线间距
def get_dmin_dmax(depth):
    d_min = 2 * depth * np.tan(theta / 2) * (1 - 0.2)
    d_max = 2 * depth * np.tan(theta / 2) * (1 + 0.2)
    return d_min, d_max



 # 评估染色体的适应度
def fitness(chromosome):

    total_length = 0
    last_line = 0
    for line in chromosome:
        depth = get_depth_at_point(line, length / 2)
        coverage_width = 2 * depth * np.tan(theta / 2)
        overlap = coverage_width - (line - last_line)
        d_min, d_max = get_dmin_dmax(depth)
        if overlap < d_min or overlap > d_max:
            return 0
        total_length += line - last_line
        last_line = line
```

```
    if last_line + coverage_width < width:
        return 0

    return 1 / total_length



#使用轮盘赌选择法选择两个父代
def select_parents(population, fitness):
    idx = np.argsort(fitness)
    sorted_population = population[idx]
    sorted_fitness = np.array(fitness)[idx]
    total_fit = np.sum(sorted_fitness)
    r1 = np.random.rand() * total_fit
    r2 = np.random.rand() * total_fit
    idx1, idx2 = -1, -1
    for i, f in enumerate(sorted_fitness):
        r1 -= f
        if r1 <= 0:
            idx1 = i
            break
    for i, f in enumerate(sorted_fitness):
        r2 -= f
        if r2 <= 0:
            idx2 = i
            break
    return sorted_population[idx1], sorted_population[idx2]



# 使用单点交叉
def crossover(parent1, parent2):
    idx = np.random.randint(1, len(parent1))
    child1 = np.concatenate((parent1[:idx], parent2[idx:]))
    child2 = np.concatenate((parent2[:idx], parent1[idx:]))
    return child1, child2
```

```
# 使用均匀突变
def mutate(chromosome):

    idx = np.random.randint(0, len(chromosome))
    mutation_value = np.random.uniform(-mutation_rate, mutation_rate) * (d_max - d_min)
    chromosome[idx] += mutation_value

    positions = []
    x = D - cal_w1(D)
    while x <= width:
        position = Position()
        position.x = x
        position.depth = cal_depth(x)
        position.w1 = cal_w1(position.depth)
        position.w2 = cal_w2(position.depth)
        position.w = position.w1 + position.w2
        if x + position.w2 >= 3704.0:
            positions.append(position)
            break
        position.d = (0.9 * position.depth) / (0.9 * math.tan(math.radians(alpha)) +
math.sin(math.radians(w6_angle))) / (math.sin(math.radians(w5_angle)) * math.sin(math.radians(60))) * (1 /
math.sin(math.radians(w2_angle)) + 1 / math.sin(math.radians(w1_angle)))
        positions.append(position)
        x += position.d

    print(len(positions))
    for i in range(len(positions) - 1):
        print(f"该测线的覆盖宽度：{positions[i].w}")
        print(f"该一测线位置：{positions[i].x}")
        print(f"与后一条测线的距离：{positions[i].d}")

    workbook = Workbook()
    sheet = workbook.active

    # 将数据写入工作表
    for i, position in enumerate(positions, start=2):  # 从第二行开始写入数据
```

```
    sheet.cell(row=i, column=1, value=position.x)
    sheet.cell(row=i, column=2, value=position.depth)
    sheet.cell(row=i, column=3, value=position.w)
    sheet.cell(row=i, column=4, value=position.d)

# 保存 Excel 文件
save_path = 'output_data.xlsx'
workbook.save(save_path)
```