1. Вывод уравнения на завихренность

Запишем уравнение Навье-Стокса для течения под действием потенциальной силы g, зависящей только от координаты r (предполагаем невязкую несжимаемую жидкость):

$$\partial_t v_i + v_j \nabla_j v_i + \frac{1}{\rho} \nabla_i p = g_i \left(r \right).$$

Возьмем ротор (+ введем $\omega_m = e_{mni} \nabla_n v_i$) от уравнения:

$$\partial_t \omega_m + e_{mni} \nabla_n v_j \nabla_j v_i = 0. \tag{1}$$

Ротор градиента давления и потенциальной силы равны 0, потому что ротор градиента это 0. Рассмотрим компоненту векторного произведения:

$$\left(v \times [\nabla \times v] \right)_i = e_{ijk} v_j e_{kmn} \nabla_m v_n.$$

Поскольку

$$e_{ijk} e_{kmn} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm},$$

получим:

$$\begin{aligned} e_{ijk} v_j e_{kmn} \nabla_m v_n &= \left(\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm} \right) v_j \nabla_m v_n \\ &= v_n \nabla_i v_n - v_j \nabla_j v_i \\ &= v_j \nabla_i v_j - v_j \nabla_j v_i \\ &= \frac{1}{2} \nabla_i \left(v_j v_j \right) - v_j \nabla_j v_i. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} v_j \nabla_j v_i &= \frac{1}{2} \nabla_i \left(v_j v_j \right) - \left(v \times [\nabla \times v] \right)_i \\ &= \frac{1}{2} \nabla_i \left(v^2 \right) - \left(v \times \omega \right)_i \\ &= \frac{1}{2} \nabla_i \left(v^2 \right) - e_{ijk} v_j \omega_k. \end{aligned}$$

Подставляем и учитываем, что ротор градиента 0:

$$\begin{aligned} e_{mni} \nabla_n v_j \nabla_j v_i &= e_{mni} \nabla_n \left(\frac{1}{2} \nabla_i \left(v^2 \right) - e_{ijk} v_j \omega_k \right) \\ &= -e_{mni} \nabla_n e_{ijk} v_j \omega_k \\ &= - \left(\delta_{mj} \delta_{nk} - \delta_{mk} \delta_{nj} \right) \nabla_n \left(v_j \omega_k \right) \\ &= -\nabla_k \left(v_m \omega_k \right) + \nabla_j \left(v_j \omega_m \right) \\ &= -\omega_k \nabla_k v_m - v_m \nabla_k \omega_k + v_j \nabla_j \omega_m + \cancelto{0}{\omega_m \nabla_j v_j}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\nabla_k \omega_k = e_{kij} \nabla_k \nabla_i v_j = 0,$$

окончательно получим:

$$e_{mni} \nabla_n v_j \nabla_j v_i = -\omega_k \nabla_k v_m + v_j \nabla_j \omega_m.$$

Подставим это в (1):

$$\partial_t \omega - (\omega \nabla) v + (v \nabla) \omega = 0. \tag{2}$$

2. Возмущения

Представим скорость возмущенного течения как

$$v = U + u',$$

где $U = (U_x, 0, 0)$, u' – малое возмущение. Подставим в уравнение (2):

$$\begin{gathered}\partial_t \omega - (\omega \nabla)(U + u') + ((U + u') \nabla) \omega = 0 \\ \partial_t \omega - \underbrace{(\omega \nabla) u'}_{\text{2й поядок}} + U_x \nabla_x \omega + \underbrace{(u' \nabla) \omega} = 0\end{gathered}$$

Линеаризуем полученное уравнение, учитывая, что ω такого же порядка малости, что и u':

$$\partial_t \omega + U_x \nabla_x \omega = 0. \tag{3}$$

Решить это уравнение можно методом характеристик. Запишем уравнение характеристик для (3):

$$\frac{dx}{dt} = U_x,$$

решая которое получим $x = U_x t + F_1$, где F_1 – первый интеграл. Суть метода характеристик заключается в том, что решение можно выразить как функцию всех первых интегралов (в нашем случае у нас только один первый интеграл) $F_1 = x - U_x t$. Отсюда получаем общее решение:

$$\omega_j(x, y, z, t) = \omega_j(x - U_x t, y, z).$$

Теперь посмотрим на соотношение завихренности и скорости: $\omega_j = e_{jkm} \nabla_k v_m = e_{jkm} \nabla_k (U_m + u'_m) = e_{jkm} \nabla_k u'_m$ (отсюда видно, что ω связана с u', но не с U), тогда:

$$\omega_j(x - U_x t, y, z) = e_{jkm} \nabla_k u'_m(x, y, z, t). \tag{4}$$

Поскольку оператор ∇_k действует по пространству, но не по времени, можно заключить, что чтобы (4) выполнялось в любой момент времени, нужно, чтобы скорость зависела от времени так же, как и завихренность:

$$u'_m\left(x, y, z, t\right) = u'_m\left(x - U_x t, y, z\right).$$

Это означает, что возмущение, которое было в момент времени 0 в точке x, просто переносится со скоростью U_x вдоль оси x, без нарастания амплитуды. Значит, в линейном приближении завихренность не влияет на устойчивость.