Korektné tablové pravidlá. DPLL

7. prednáška · Matematika (4): Logika pre informatikov

Ján Kľuka, Ján Mazák

Letný semester 2021/2022

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej informatiky

Obsah 7. prednášky

Rekapitulácia

Minulý týždeň:

- Dokázali sme korektnosť tabiel.
- Preskúmali sme, čo vedia tablá povedať o splniteľnosti.
- Dokázali sme úplnosť tabiel.

Tento týždeň:

- Pohodlnejšie a intuitívnejšie tablá pomocou ďalších korektných pravidiel.
- SAT solver a algoritmus DPLL.

Dôkazy a výrokovologické tablá

Dôkazy a výrokovologické tablá

Nové korektné pravidlá

Problémy so základnými pravidlami

Základné tablové pravidlá sú jednoduché, ľahko overiteľné a analytické — z (ne)pravdivosti zloženej formuly odvodzujú (ne)pravdivosť jej priamych podformúl.

Nie sú ale úplne pohodlné ani prirodzené, hlavne β.

Príklad 5.1

Dokážme, že pre všetky formuly A, B, C, X, Y, Z:

$$\{(A \to C), (B \to C), (C \to X), (C \to Y), ((X \land Y) \to Z)\} \\ \vdash_{\mathrm{p}} ((A \lor B) \to Z)$$

Všimnime si:

- časté použitia pravidla β na implikáciu, kde sa jedna vetva ihneď uzavrie;
- opakovanie jedného podstromu dôkazu.

Riešenie príkladu 5.1

Tablo pre

$$S^+ = \{\mathbf{T}(A \to C), \mathbf{T}(B \to C), \mathbf{T}(C \to X), \mathbf{T}(C \to Y), \mathbf{T}((X \land Y) \to Z),$$
$$\mathbf{F}((A \lor B) \to Z)\}$$

1. $\mathbf{T}\,(A \to C)$	S^+
2. $\mathbf{T}\,(B \to C)$	S^+
3. $\mathbf{T}\,(C \to X)$	S^+
4. $\mathbf{T}\,(C \to Y)$	S^+
5. $\mathbf{T}\,((X \land Y) \to Z)$	S^+
6. $\mathbf{F}\,((A \lor B) \to Z)$	S^+
7. $\mathbf{T}\,(A \lor B)$	$\alpha 6$
8. $\mathbf{F}\,Z$	$\alpha 6$

9. $\mathbf{F}\,(X \land Y)\ \beta 5$ | 28. $\mathbf{T}\,Z\ \beta 5$ $*\ 8, 28$

10. $\mathbf{T}\,A\ \beta 7$ | 19. $\mathbf{T}\,B\ \beta 7$

11. $\mathbf{F}\,A\ \beta 1$ $*\ 10, 11$ | 12. $\mathbf{T}\,C\ \beta 1$ | 20. $\mathbf{F}\,B\ \beta 2$ $*\ 19, 20$ | 21. $\mathbf{T}\,C\ \beta 2$

13. $\mathbf{F}\,C\ \beta 3$ $*\ 12, 13$ | 14. $\mathbf{T}\,X\ \beta 3$ | 22. $\mathbf{F}\,C\ \beta 3$ $*\ 21, 22$ | 23. $\mathbf{T}\,X\ \beta 3$

15. $\mathbf{F}\,C\ \beta 4$ $*\ 12, 15$ | 16. $\mathbf{T}\,Y\ \beta 4$ | 24. $\mathbf{F}\,C\ \beta 4$ $*\ 21, 24$ | 25. $\mathbf{T}\,Y\ \beta 4$

17. $\mathbf{F}\,X\ \beta 9$ $*\ 14, 17$ | 18. $\mathbf{F}\,Y\ \beta 9$ $*\ 16, 18$ | 26. $\mathbf{F}\,X\ \beta 9$ $*\ 23, 26$ | 27. $\mathbf{F}\,Y\ \beta 9$ $*\ 25, 27$

Odstránenie problémov — nové pravidlá

Keby tablový kalkul obsahoval napríklad veľmi prirodzené pravidlá *modus ponens*, *modus tolens* a *rez*:

$$\frac{\mathtt{T}(X \to Y) \quad \mathtt{T}\,X}{\mathtt{T}\,Y} \tag{MP}$$

$$\frac{\mathtt{T}(X \to Y) \quad \mathtt{F}\,Y}{\mathtt{F}\,X} \tag{MT}$$

$$\frac{}{\mathtt{T}\,X \mid \mathtt{F}\,X} \tag{cut}$$

dôkaz v príklade by sa dal sprehľadniť a odstránila by sa duplicita.

Riešenie príkladu 5.1 s modus ponens a modus tolens

1.	$\mathbf{T}(A \to C)$	S^{+}
2.	$\mathbf{T}(B \to C)$	S^{+}
3.	$\mathbf{T}(C \to X)$	S^{+}
4.	$\mathbf{T}(C \to Y)$	S^{+}
5.	$\mathbf{T}((X \land Y) \to Z)$	S^{+}
6.	$\mathbf{F}((A \lor B) \to Z)$	S^{+}
7.	$\mathbf{T}(A \lor B)$	$\alpha 6$
8.	$\mathbf{F}\,Z$	$\alpha 6$
9.	$\mathbf{F}(X \land Y)$	MT $5, 8$

<table>
<tr>
<td colspan="2">10. $\mathbf{T}\,A$ $\beta 7$
11. $\mathbf{T}\,C$ MP $1, 10$
12. $\mathbf{T}\,X$ MP $3, 11$
13. $\mathbf{T}\,Y$ MP $4, 11$</td>
<td colspan="2">16. $\mathbf{T}\,B$ $\beta 7$
17. $\mathbf{T}\,C$ MP $2, 16$
18. $\mathbf{T}\,X$ MP $3, 17$
19. $\mathbf{T}\,Y$ MP $4, 17$</td>
</tr>
<tr>
<td>14. $\mathbf{F}\,X$ $\beta 9$
$* \; 12, 14$</td>
<td>15. $\mathbf{F}\,Y$ $\beta 9$
$* \; 13, 15$</td>
<td>20. $\mathbf{F}\,X$ $\beta 9$
$* \; 18, 20$</td>
<td>21. $\mathbf{F}\,Y$ $\beta 9$
$* \; 19, 21$</td>
</tr>
</table>

Riešenie príkladu 5.1 s rezom, modus ponens a modus tolens

1.	$\mathbf{T}(A \to C)$	S^+
2.	$\mathbf{T}(B \to C)$	S^+
3.	$\mathbf{T}(C \to X)$	S^+
4.	$\mathbf{T}(C \to Y)$	S^+
5.	$\mathbf{T}((X \land Y) \to Z)$	S^+
6.	$\mathbf{F}((A \lor B) \to Z)$	S^+
7.	$\mathbf{T}(A \lor B)$	$\alpha 6$
8.	$\mathbf{F}Z$	$\alpha 6$
9.	$\mathbf{F}(X \land Y)$	MT $5, 8$

10. $\mathbf{T}C$ cut
11. $\mathbf{T}X$ MP $3, 10$
12. $\mathbf{T}Y$ MP $4, 10$

13. $\mathbf{F}X$ $\beta 9$
$* \; 11, 13$

14. $\mathbf{F}Y$ $\beta 9$
$* \; 12, 14$

15. $\mathbf{F}C$ cut

16. $\mathbf{T}A$ $\beta 7$
17. $\mathbf{T}C$ MP $1, 16$
$* \; 15, 17$

18. $\mathbf{T}B$ $\beta 7$
19. $\mathbf{F}B$ MT $2, 15$
$* \; 18, 19$

Ingrediencie korektnosti a úplnosti tabiel

Všimnite si:

Na dokázanie **korektnosti** tablového kalkulu stačilo, aby mali pravidlá vlastnosť:

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} \qquad \frac{\alpha}{\alpha_2}$$

$$\frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2} \qquad \frac{}{A^+}\; A^+ \in S^+$$

Nech v je ľubovoľné ohodnotenie, v ktorom je pravdivá S^+.
Ak je vo v pravdivá premisa, tak je vo v pravdivý aspoň jeden záver.

- Vďaka tejto vlastnosti zo splniteľnej množiny S^+ skonštruujeme iba splniteľné tablá.
- Netreba opačnú implikáciu (ak je vo v pravdivý aspoň jeden záver, tak je vo v pravdivá premisa).

Na dôkaz **úplnosti** stačili pravidlá (S^+), α, β, pretože stačia na vybudovanie úplného tabla.

Nové pravidlo

Čo sa stane, ak pridáme nové pravidlo, napríklad modus ponens:

$$\frac{\mathbf{T}(X \to Y) \quad \mathbf{T}\,X}{\mathbf{T}\,Y} \quad ? \qquad \text{(MP)}$$

Upravíme definíciu priameho rozšírenia:

Úprava definície tabla

… Nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé ***priame rozšírenie*** $\mathcal{T}$ ktorýmkoľvek z pravidiel:

α: $\cdots$

$\vdots$

MP: Ak sa na vetve π_y nachádzajú *obe* formuly $\mathbf{T}(X \to Y)$ a $\mathbf{T}\,X$, tak ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci $\mathbf{T}\,Y$.

Nové pravidlo vs. korektnosť a úplnosť

Korektnosť tabiel s MP:

Pri dôkaze lemy K1

> *Nech S^+ je množina označených formúl v jazyku $\mathcal{L}$, nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a v je ohodnotenie pre $\mathcal{L}$. Ak sú S^+ a $\mathcal{T}$ pravdivé vo v, tak je vo v pravdivé aj každé priame rozšírenie tabla $\mathcal{T}$.*

využijeme

Tvrdenie 5.2 (Korektnosť pravidla MP)

Nech X a Y sú ľubovoľné formuly a v je ľubovoľné ohodnotenie. Ak sú vo v pravdivé $\mathbf{T}(X \to Y)$ a $\mathbf{T}\,X$, tak je vo v pravdivá $\mathbf{T}\,Y$.

Dôkaz.

Keďže $v \models_p \mathbf{T}(X \to Y)$, tak $v \models_p (X \to Y)$, teda $v \not\models_p X$ alebo $v \models_p Y$. Pretože ale $v \models_p \mathbf{T}\,X$, tak $v \models_p X$. Takže $v \models_p Y$, a teda $v \models_p \mathbf{T}\,Y$. □

Dôkaz lemy K2 a samotnej vety o korektnosti — bez zmeny.

Úplnosť — bez zmeny, úplné tablo vybudujú základné pravidlá.

Tablové pravidlá vo všeobecnosti — problém

Zadefinovať vo všeobecnosti, čo je pravidlo a kedy je korektné, nie je také jednoduché.

Potrebujeme zachytiť, že pravidlo:

- má premisy, ktoré nejaký tvar a zdieľajú nejaké podformuly, napr. moduls tolens (MT) má premisy $\mathbf{T}(X \to Y)$ a $\mathbf{F}\, Y$;
- odvodzuje z nich závery, ktoré tiež zdieľajú podformuly s premisami, napr. $\mathbf{F}\, X$ (alebo medzi sebou v prípade rezu).

pre všetky možné zdieľané podformuly, v našom príklade X a Y.

Tablové pravidlá vo všeobecnosti — vzor

Pravidlo sa dá predstaviť nasledovne:

Pravidlo má **vzor** — dvojicu tvorenú vzormi premís a záverov, kde spoločné podformuly predstavujú **konkrétne atómy**, napr. vzor pravidla MT:

$$\frac{\mathbf{T}(\mathrm{p}(\mathrm{c}) \to \mathrm{q}(\mathrm{c})) \quad \mathbf{F}\,\mathrm{q}(\mathrm{c})}{\mathbf{F}\,\mathrm{p}(\mathrm{c})}$$

Tablové pravidlá vo všeobecnosti — inštancia

Každý konkrétny prípad — inštancia pravidla vznikne substitúciou ľubovoľných formúl za atómy vo vzore:

$$\frac{\begin{array}{c}\mathbf{T}(\mathtt{p}(\mathtt{c}) \to \mathtt{q}(\mathtt{c}))_{[\mathtt{p}(\mathtt{c})|(\mathtt{sedan}(\mathtt{a}) \land \mathtt{biely}(\mathtt{a})),\ \mathtt{q}(\mathtt{c})|\mathtt{kupi}(\mathtt{B},\mathtt{a})]} \\ \mathbf{F}\,\mathtt{q}(\mathtt{c})_{[\mathtt{p}(\mathtt{c})|(\mathtt{sedan}(\mathtt{a}) \land \mathtt{biely}(\mathtt{a})),\ \mathtt{q}(\mathtt{c})|\mathtt{kupi}(\mathtt{B},\mathtt{a})]}\end{array}}{\mathbf{F}\,\mathtt{p}(\mathtt{c})_{[\mathtt{p}(\mathtt{c})|(\mathtt{sedan}(\mathtt{a}) \land \mathtt{biely}(\mathtt{a})),\ \mathtt{q}(\mathtt{c})|\mathtt{kupi}(\mathtt{B},\mathtt{a})]}}$$

$$= \frac{\begin{array}{c}\mathbf{T}((\mathtt{sedan}(\mathtt{a}) \land \mathtt{biely}(\mathtt{a})) \to \mathtt{kupi}(\mathtt{B},\mathtt{a})) \\ \mathbf{F}\,\mathtt{kupi}(\mathtt{B},\mathtt{a})\end{array}}{\mathbf{F}(\mathtt{sedan}(\mathtt{a}) \land \mathtt{biely}(\mathtt{a}))}$$

Tablové pravidlá vo všeobecnosti — pravidlo

Samotné pravidlo je množina všetkých inštancií vzoru:

$$\mathrm{MT} = \left\{ \left. \frac{\begin{array}{c}\mathbf{T}(\mathtt{p}(\mathtt{c}) \to \mathtt{q}(\mathtt{c}))_{[\mathtt{p}(\mathtt{c})|X,\ \mathtt{q}(\mathtt{c})|Y]} \\ \mathbf{F}\,\mathtt{q}(\mathtt{c})_{[\mathtt{p}(\mathtt{c})|X,\ \mathtt{q}(\mathtt{c})|Y]}\end{array}}{\mathbf{F}\,\mathtt{p}(\mathtt{c})_{[\mathtt{p}(\mathtt{c})|X,\ \mathtt{q}(\mathtt{c})|Y]}} \,\right|\, X, Y \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \right\}$$

Samozrejme, *konkrétne* pravidlo vieme zapísať aj bez substitúcie:

$$\mathrm{MT} = \left\{ \left. \frac{\mathbf{T}(X \to Y) \quad \mathbf{F}\,Y}{\mathbf{F}\,X} \,\right|\, X, Y \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \right\}$$

Definícia 5.3 (Vzor tablového pravidla)

Nech $n \geq 0$ a $k > 0$ sú prirodzené čísla, nech $P_1^+, \ldots, P_n^+$, $C_1^+, \ldots, C_k^+$ sú označené formuly.

Dvojicu tvorenú n-ticou $(P_1^+, \ldots, P_n^+)$ a k-ticou $(C_1^+, \ldots, C_k^+)$ a zapisovanú

$$\begin{array}{c}
P_1^+ \quad \cdots \quad P_n^+ \\
\hline
\begin{array}{c|c|c} C_1^+ & \cdots & C_k^+ \end{array}
\end{array}$$

nazývame ***vzorom tablového pravidla***.

Označené formuly $P_1^+, \ldots, P_n^+$ nazývame ***vzory premís***, označené formuly $C_1^+, \ldots, C_k^+$ nazývame ***vzory záverov***.

Definícia 5.4 (Tablové pravidlo a jeho inštancia)

Nech

$$\begin{array}{c|c|c} P_1^+ & \cdots & P_n^+ \\ \hline C_1^+ & \cdots & C_k^+ \end{array}$$

je vzor tablového pravidla a $a_1, \ldots, a_m$ sú všetky atómy, ktoré sa vyskytujú v označených formulách $P_1^+, \ldots, P_n^+, C_1^+, \ldots, C_k^+$.

Tablové pravidlo R je množina

$$R = \left\{ \begin{array}{c|c|c} P_1^+[a_1|X_1,\ldots,a_m|X_m] & \cdots & P_n^+[a_1|X_1,\ldots,a_m|X_m] \\ \hline C_1^+[a_1|X_1,\ldots,a_m|X_m] & \cdots & C_k^+[a_1|X_1,\ldots,a_m|X_m] \end{array} \;\middle|\; X_1,\ldots,X_m \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \right\},$$

Každý prvok množiny R nazývame *inštanciou* pravidla R.

Nové pravidlá vo všeobecnosti

Keď už vieme, čo je pravidlo, môžeme povedať, kedy je korektné:

Definícia 5.5 (Tablové pravidlo a jeho korektnosť)

Tablové pravidlo R je *korektné* vtt
pre každú inštanciu pravidla R

$$\frac{P_1^+ \quad \cdots \quad P_n^+}{C_1^+ \;\big|\; \cdots \;\big|\; C_k^+}$$

a pre každé ohodnotenie v platí, že
ak sú vo v pravdivé **všetky** premisy $P_1^+, \dots, P_n^+$,
tak je vo v pravdivý **niektorý** záver $C_1^+, \dots, C_k^+$.

Nové pravidlá vo všeobecnosti

Úprava definície tabla

…

- …
- Nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé *priame rozšírenie* $\mathcal{T}$ ktorýmkoľvek z pravidiel:

  $\vdots$

  ***R*:** Ak sa pre nejakú inštanciu pravidla R

$$\frac{P_1^+ \quad \cdots \quad P_n^+}{C_1^+ \mid \cdots \mid C_k^+}$$

  na vetve π_y nachádzajú *všetky* premisy $P_1^+, \ldots, P_n^+$, tak k uzlu y pripojíme k nových vrcholov obsahujúcich postupne závery $C_1^+, \ldots, C_k^+$.

Príklad: Korektnosť rezu

To, že rez

$$\frac{}{\mathbf{T}\,X \mid \mathbf{F}\,X}$$

je korektné pravidlo, dokážeme veľmi ľahko:

Tvrdenie 5.6 (Korektnosť pravidla rezu)

Nech X je ľubovoľná formula a v je ľubovoľné ohodnotenie.
Potom je vo v pravdivý niektorý zo záverov pravidla rezu
$\mathbf{T}\,X$ *alebo* $\mathbf{F}\,X$.

Dôkaz.

Formula X je vo v buď pravdivá alebo nepravdivá.
V prvom prípade $v \models_p \mathbf{T}\,X$. V druhom prípade $v \models_p \mathbf{F}\,X$.
Teda v oboch prípadoch platí, že vo v je pravdivý niektorý zo záverov $\mathbf{T}\,X$ alebo $\mathbf{F}\,X$ pravidla rezu. □

SAT a DPLL

SAT a DPLL

Problém výrokovologickej splniteľnosti (SAT)

Problém SAT

Definícia 6.1 (Problém SAT)

Problémom výrokovologickej splniteľnosti (*SAT*) je problém určenia toho, či je daná množina výrokovologických formúl splniteľná.

- Zvyčajne sa redukuje na problém splniteľnosti klauzálnej teórie (teda formuly v CNF).
- *SAT solver* je program, ktorý rieši problém SAT.

Príklad 6.2

Nech a, b, c sú predikátové atómy.
Nech $S = \{(a \lor b), (a \lor \neg b), (\neg a \lor b), (\neg a \lor \neg b \lor \neg c), (\neg a \lor c)\}$.
Je množina klauzúl S splniteľná?

Tabuľková metóda

Tabuľková metóda:

- Skúma *všetky* ohodnotenia predikátových atómov
- Trvá $\mathrm{O}(s \cdot 2^N)$ krokov,
  - N je počet atómov a s je súčet veľkostí klauzúl
  - 2^N ohodnotení, pre každé treba zistiť, či sú všetky klauzuly pravdivé
- Zaberá priestor $\mathrm{O}(k \cdot 2^N)$
  - k je počet klauzúl
  - Pamätáme si (píšeme na papier) celú tabuľku
- Tabuľka slúži aj ako dôkaz prípadnej nesplniteľnosti

SAT a DPLL

Naivný backtracking

Naivný backtracking v Pythone

```python
#!/usr/bin/env python3
class Sat(object):
    def __init__(self, n, clauses):
        self.n, self.clauses, self.solution = n, clauses, None
    def checkClause(self, v, c):
        return any( ( v[abs(lit)] if lit > 0 else not v[abs(lit)] )
                      for lit in c )
    def check(self, v):
        return all( self.checkClause(v, cl) for cl in self.clauses )
    def solve(self, i, v):
        if i >= self.n: # ohodnotili sme vsetky atomy
            if self.check(v):
                self.solution = v
                return True
            return False
        for b in [True, False]:
            v[i] = b
            if self.solve(i+1, v):
                return True
        return False
Sat(20, [[]]).solve(0, {})
```

Čas: $O(s \cdot 2^N)$, priestor: $O(s+N)$;

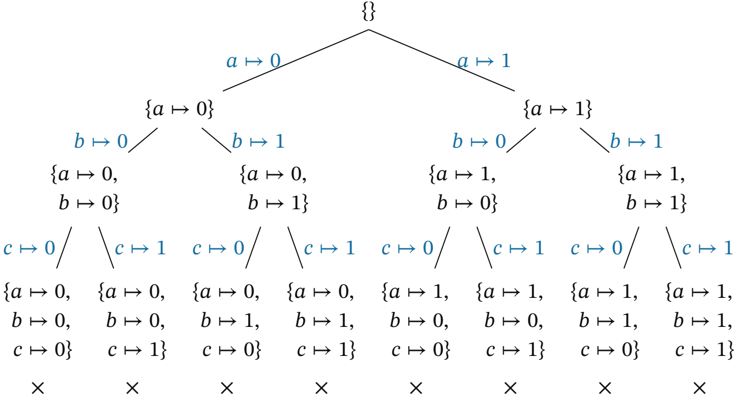
N — počet atómov,

s — súčet veľkostí klauzúl

Strom prehľadávania ohodnotení

$S = \{(a \vee b), (a \vee \neg b), (\neg a \vee b), (\neg a \vee \neg b \vee \neg c), (\neg a \vee c)\}$

$\times$ znamená $v \nvDash_{\mathrm{p}} S$ $\qquad$ $f := 0, t := 1$



SAT a DPLL

Optimalizácia backtrackingu

Priebežné vyhodnocovanie klauzúl

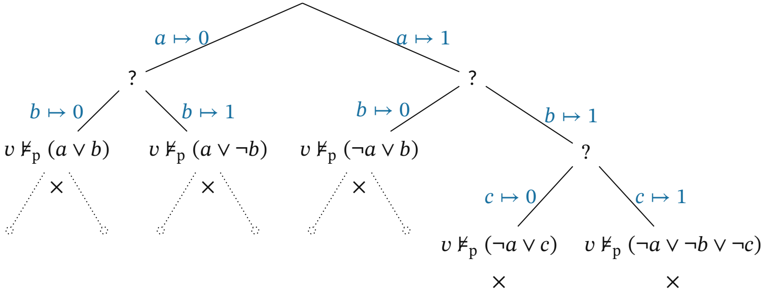
Strom ohodnotení:

- List — ohodnotenie všetkých premenných
- Každý uzol — *čiastočné ohodnotenie*
- Ohodnotenie v uzle je *rozšírením* ohodnotenia v rodičovi
- Niektoré klauzuly sa dajú vyhodnotiť aj v čiastočnom ohodnotení
  - V čiastočnom ohodnotení $v = \{a \mapsto 0, b \mapsto 1\}$
    sa dá určiť pravdivosť $(a \lor b)$, $(a \lor \neg b)$, $(\neg a \lor b)$ z našej S
- Ak nájdeme nepravdivú, môžeme hneď „backtracknúť" — zastaviť prehľadávanie vetvy a vrátiť sa o úroveň vyššie
  - V čiastočnom ohodnotení $v = \{a \mapsto 0, b \mapsto 0\}$
    je nepravdivá $(a \lor b)$ z S

Prehľadávanie s priebežným vyhodnocovaním

$$S = \{(a \lor b), (a \lor \neg b), (\neg a \lor b), (\neg a \lor \neg b \lor \neg c), (\neg a \lor c)\}$$

$\times$ znamená $v \nvDash_{\mathrm{p}} S$? znamená zatiaľ žiadna nepravdivá klauzula



Zjednodušenie množiny klauzúl podľa literálu

Nech v je čiastočné ohodnotenie, v ktorom $v(a) = 1$.

V každom rozšírení ohodnotenia v:

- sú pravdivé klauzuly obsahujúce a
  - $\{a \mapsto 1, ...\} \models_{\mathrm{p}} (a \lor b)$
  - $\{a \mapsto 1, ...\} \models_{\mathrm{p}} (a \lor \neg b)$
- je pravdivá klauzula $(\ell_1 \lor \cdots \lor \neg a \lor \cdots \lor \ell_n)$ obsahujúca $\neg a$ **vtt** je pravdivá **zjednodušená** klauzulu $(\ell_1 \lor \cdots \lor \cdots \lor \ell_n)$
  - $\{a \mapsto 1, ...\} \models_{\mathrm{p}} (\neg a \lor \neg b \lor \neg c)$ vtt $\{a \mapsto 1, ...\} \models_{\mathrm{p}} (\neg b \lor \neg c)$

Takže množinu S môžeme **zjednodušiť**:

- klauzuly s a môžeme **vynechať**;
- klauzuly s $\neg a$ môžeme **zjednodušiť**.

Zjednodušenie množiny klauzúl podľa literálu

Množinu klauzúl

$$S = \{(a \lor b), (a \lor \neg b), (\neg a \lor b), (\neg a \lor \neg b \lor \neg c), (\neg a \lor c)\}$$

môžeme ***zjednodušiť podľa $a \mapsto 1$*** na

$$S|_{a \mapsto 1} = \{ \quad b, \quad (\neg b \lor \neg c), \quad c \quad \}.$$

Analogicky môžeme S zjednodušiť podľa $a \mapsto 0$ na

$$S|_{a \mapsto 0} = \{ \quad b, \quad \neg b \quad \}.$$

Zjednodušenie množiny klauzúl podľa literálu

Definícia 6.3

Nech P je predikátový atóm, S je množina klauzúl, (t, f) je dvojica pravdivostných hodnôt. Potom definujeme

$$S|_{P \mapsto f} = \{(\ell_1 \lor \cdots \lor \cdots \lor \ell_n) \mid (\ell_1 \lor \cdots \lor P \lor \cdots \lor \ell_n) \in S\}$$
$$\cup \{C \mid C \in S, \text{v } C \text{ sa nevyskytuje } P \text{ ani } \neg P\}$$
$$S|_{P \mapsto t} = \{(\ell_1 \lor \cdots \lor \cdots \lor \ell_n) \mid (\ell_1 \lor \cdots \lor \neg P \lor \cdots \lor \ell_n) \in S\}$$
$$\cup \{C \mid C \in S, \text{v } C \text{ sa nevyskytuje } P \text{ ani } \neg P\}$$
$$S|_{\neg P \mapsto t} = S|_{P \mapsto f}$$
$$S|_{\neg P \mapsto f} = S|_{P \mapsto t}$$

Tvrdenie 6.4

Nech P je predikátový atóm, S je množina klauzúl, (t, f) dvojica pravdivostných hodnôt. Nech $b \in \{t, f\}$ a v je ohodnotenie také, že $v(P) = b$. Potom $v \models_{\mathrm{p}} S$ vtt $v \models_{\mathrm{p}} S|_{P \mapsto b}$.

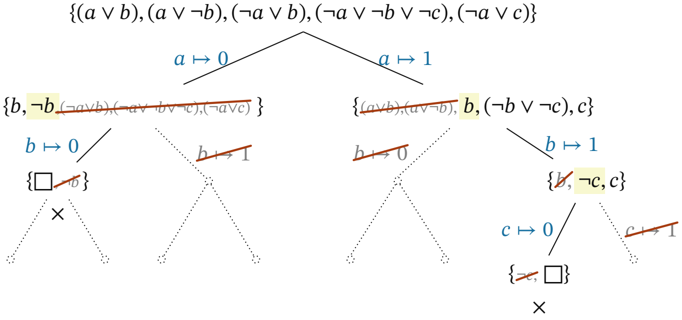
Propagácia jednotkových klauzúl

Nech $T = \{(a \vee \neg b), (a \vee b \vee c)\}$.
Začnime zjednodušením podľa $a \mapsto 0$:

- $T' := T|_{a \mapsto 0} = \{\neg b, (b \vee c)\}$
  - $\neg b$ — ***jednotková klauzula*** (*unit clause* alebo iba ***unit***)
  - T' spĺňajú **iba** ohodnotenia v, kde $v(b) = 0$
  - Takže T' zjednodušíme podľa $b \mapsto 0$
- $T'' := T'|_{b \mapsto 0} = \{c\}$
  - c — jednotková klauzula
  - T'' spĺňajú iba ohodnotenia v, kde $v(c) = 1$
  - Takže T'' zjednodušíme podľa c
- $T''' := T''|_{c \mapsto 1} = \{\}$ prázdna, pravdivá v hocijakom ohodnotení. Podľa tvrdenia 6.4:
  - T'' je pravdivá v každom ohodnotení, kde $v(c) = 1$.
  - T' je pravdivá v každom ohodnotení, kde $v(b) = 0, v(c) = 1$.
  - T je pravdivá v ohodnotení $v = \{a \mapsto 0, b \mapsto 0, c \mapsto 1\}$.

Prehľadávanie so zjednodušovaním klauzúl a unit propagation

Propagácia jednotkových klauzúl (*unit propagation*) je proces opakovaného rozširovania ohodnotení podľa jednotkových klauzúl a zjednodušovania.



Eliminácia nezmiešaných literálov

Všimnime si literál u v množine klauzúl:

$$T = \{(\neg a \vee \neg b \vee c), (\neg a \vee P), (\neg b \vee P), a, b, \neg c\}$$

Literál P je ***nezmiešaný*** (angl. *pure*) v T:
P sa vyskytuje v T, ale jeho komplement $\neg P$ sa tam nevyskytuje.

Nech $T' := T|_{P \mapsto 1} = \{(\neg a \vee \neg b \vee c), a, b, \neg c\}$

- Ak nájdeme ohodnotenie $v \models_{\mathrm{p}} T'$,
  tak $v_0 := v[P \mapsto 0]$ aj $v_1 := v[P \mapsto 1]$ sú modelmi T'
  a v_1 je navyše modelom T, teda T je splniteľná.
- Ak je T' nesplniteľná,
  tak je nesplniteľná každá jej nadmnožina, teda aj T.

Z hľadiska splniteľnosti sú klauzuly obsahujúce P nepodstatné.
Stačí uvažovať $T|_{P \mapsto 1}$.

Eliminácia nezmiešaných literálov

Definícia 6.5

Nech P je predikátový atóm premenná.

Komplementom literálu P je $\neg P$. ***Komplementom literálu $\neg P$*** je P.

Komplement literálu ℓ označujeme $\bar{\ell}$.

Definícia 6.6

Nech ℓ je literál a S je množina klauzúl.

Literál ℓ je ***nezmiešaný*** (*pure*) v S vtt ℓ sa vyskytuje v niektorej klauzule z S, ale jeho komplement $\bar{\ell}$ sa nevyskytuje v žiadnej klauzule z S.

Tvrdenie 6.7

Nech ℓ je literál a S je množina klauzúl.

Ak ℓ je nezmiešaný v S, tak S je splniteľná vtt $S|_{\ell \mapsto 1}$ je splniteľná.

SAT a DPLL

DPLL a sledované literály

DPLL

Algoritmus 6.8 (Davis and Putnam [1960], Davis et al. [1962])

def DPLL($\varPhi, v$)**:**
    if $\varPhi$ obsahuje prázdnu klauzulu**:**
        return False
    if v ohodnocuje všetky atómy**:**
        return True
    while existuje jednotková (unit) klauzula ℓ vo $\varPhi$**:**
        $\varPhi, v =$ unit-propagate($\ell, \varPhi, v$)
    while existuje nezmiešaný (pure) literál ℓ vo $\varPhi$**:**
        $\varPhi, v =$ pure-literal-assign($\ell, \varPhi, v$)
    $x =$ choose-branch-atom($\varPhi, v$)
    return DPLL($\varPhi|_{x \mapsto t}, v(x \mapsto t)$) **or** DPLL($\varPhi|_{x \mapsto f}, v(x \mapsto f)$)

Technika sledovaných literálov (watched literals)

Aby sme nemuseli zjednodušovať množinu klauzúl:

- Pre každú klauzulu vyberieme 2 **sledované literály**.

  $(\neg a \lor \neg b \lor \neg c)$

- Sledovaný literál musí byť **nenastavený** alebo **true**, ak sa to dá.
- Ak sa sledovaný literál stane *true*: nič nemusíme robiť.

  $\{a \mapsto 0\} \qquad (\neg a \lor \neg b \lor \neg c)$

- Ak sa sledovaný literál stane *false*: musíme nájsť iný.

  $\{a \mapsto 1\} \qquad (\neg a \lor \neg b \lor \neg c)$

  Ak iný nie je, práve sme vyrobili jednotkovú klauzulu
  (všetky literály okrem druhého sledovaného sú *false*),

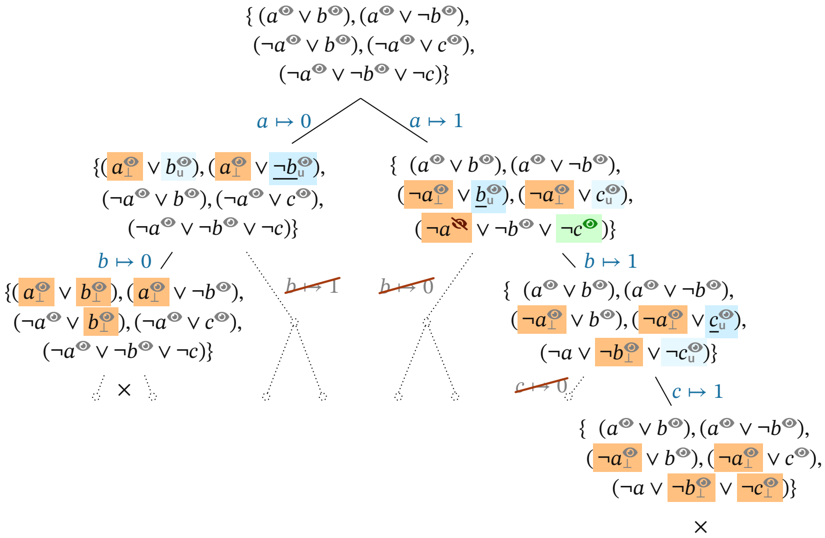
  $\{a \mapsto 1, b \mapsto 1\} \qquad (\neg a \lor \neg b_{\perp} \lor \underline{\neg c}_{u})$

  alebo spor (aj druhý sledovaný je už *false*).

  $\{a \mapsto 1, b \mapsto 1, c \mapsto 0\} \qquad (\neg a_{\perp} \lor c_{\perp})$

- Keď backtrackujeme: nič nemusíme robiť
  (možno sa niektoré sledované literály stanú *nenastavenými*).

Prehľadávanie s unit propagation a sledovaním



SAT solver

Moderné SAT solvery:

- algoritmus DPLL:
  backtracking + propagácia jednotkových klauzúl;
- sledovanie literálov

\+ ďalšie techniky

Tento týždeň na praktických cvičeniach:
reprezentácia klauzúl, ohodnotení, sledovanie literálov

Budúci týždeň:
DPLL — propagácia jednotkových klauzúl, backtracking

Súťaž o najrýchlejší SAT solver — do konca výučby.
Bonus až 6 bodov (podľa umiestnenia)

Literatúra

Martin Davis and Hillary Putnam. A computing procedure for quantification theory. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 7:201–215, 1960.

Martin Davis, George Logemann, and Donald Loveland. A machine program for theorem-proving. *Communications of the ACM*, 5(7):394–397, 1962.