Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej informatiky

Zbierka úloh z Logiky pre informatikov

Ján Kľuka, Júlia Pukancová,
Martin Homola, Jozef Šiška

Letný semester 2021/2022

Posledná aktualizácia: 9. mája 2022

Obsah

1 Atomické formuly

1.1 Sémantika atomických formúl

1.1.1 Príklad. Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ logiky prvého rádu s množinami symbolov $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Anna}, \text{Boris}, \text{mama}, \text{oco}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{dievča}^1, \text{chlapec}^1, \text{sestra}^2, \text{uprednostňuje}^3\}$, pričom zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
dievča(x)	x je žena
chlapec(x)	x je chlapec
sestra(x, y)	x je sestra y
uprednostňuje(x, y, z)	x uprednostňuje y pred z

Preložte nasledujúce atomické formuly do čo najprirodzenejších výrokov v slovenčine:

(A_1) dievča(Anna)

(A_2) chlapec(Boris)

(A_3) sestra(Anna, Boris)

(A_4) uprednostňuje(mama, Anna, Boris)

(A_5) uprednostňuje(Boris, Boris, Anna)

(B_1) dievča(mama)

(B_2) chlapec(oco)

(B_3) uprednostňuje(mama, Boris, Anna)

(B_4) uprednostňuje(oco, Boris, Anna)

Riešenie. Každú atomickú formulu zo zadania preložíme do vety v prirodzenom jazyku.

(A_1) Anna je dievča.

(A_2) Boris je chlapec.

(A_3) Anna je sestra Borisa.

(A_4) Mama uprednostňuje Annu pred Borisom.

(A_5) Boris uprednostňuje samého seba pred Annou.

(B_1) Mama je dievča.

(B_2) Oco je chlapec.

(B_3) Mama uprednostňuje Borisa pred Annou.

(B_4) Oco uprednostňuje Borisa pred Annou.

♮

1.1.2 Príklad. Koľko atomických formúl môžeme zostrojiť v jazyku $\mathcal{L}$ z úlohy 1.1.1?

Riešenie. Počet atomických formúl v jazyku $\mathcal{L}$ závisí od počtu indivíduových konštánt v jazyku $\mathcal{L}$ (teda od kardinality množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$) a od jednotlivých arít jednotlivých predikátov z množiny $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

V jazyku $\mathcal{L}$ máme $|\mathcal{C}_{\mathcal{L}}| = 4$.

Pomocou predikátového symbolu, ktorého arita je 1 teda môžeme vytvoriť v jazyku $\mathcal{L}$ 4 atomické formuly. Kedže unárne predikátové symboly máme v $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ dva (dievča a chlapec), dokopy vytvoríme 8 atomických formúl.

> **Pomôcka.** Vo všeobecnosti platí, že pre ľubovoľný predikátový symbol $p \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ s aritou k a pre $|\mathcal{C}_{\mathcal{L}}| = n$ môžeme v jazyku $\mathcal{L}$ vytvoriť n^k atomických formúl.

Pre binárny predikátový symbol (sestra) vieme vytvoriť 4^2 atomických formúl, teda 16. K tejto možnosti treba prirátať aj rovnostné atomické formuly, ktoré vytvoríme pomocou symbolu rovnosti $\doteq$. Tento symbol je tiež binárny, a teda formúl bude opäť 16.

Analogicky pre ternárny predikátový symbol (uprednostňuje) vytvoríme $4^3 = 64$ atomických formúl.

Celkovo teda v jazyku $\mathcal{L}$ môžeme zostrojiť $8 + 16 + 16 + 64 = 104$ atomických formúl. ♮

1.1.3 Príklad. Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ a atomické formuly z úlohy 1.1.1. Rozhodnite, ktoré z formúl $A_1, \ldots, A_5, B_1, \ldots, B_4$ sú pravdivé v štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$\begin{aligned}
D &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \\
i(\text{Anna}) &= 1, \quad i(\text{Boris}) = 2, \quad i(\text{mama}) = 3, \quad i(\text{oco}) = 4, \\
i(\text{dievča}) &= \{1, 5\}, \\
i(\text{chlapec}) &= \{2, 4, 5\}, \\
i(\text{sestra}) &= \{(3, 4), (1, 2)\}, \\
i(\text{uprednostňuje}) &= \{(3, 1, 2), (3, 2, 1), (5, 4, 1), (5, 3, 5)\}.
\end{aligned}$$

Riešenie.

(A_1) dievča(Anna) je pravdivé v $\mathcal{M}$, skrátene $\mathcal{M} \models$ dievča(Anna), pretože $i(\text{Anna}) = 1 \in \{1, 5\} = i(\text{dievča})$.

(A_2) $\mathcal{M} \models$ chlapec(Boris), pretože $i(\text{Boris}) = 2 \in i(\text{chlapec})$.

(A_3) $\mathcal{M} \models$ sestra(Anna, Boris), pretože $(i(\text{Anna}), i(\text{Boris})) = (1, 2) \in i(\text{sestra})$.

(A_4) $\mathcal{M} \models$ uprednostňuje(mama, Anna, Boris), pretože $(i(\text{mama}), i(\text{Anna}), i(\text{Boris})) \in i(\text{uprednostňuje})$.

(A_5) uprednostňuje(Boris, Boris, Anna) nie je pravdivé v $\mathcal{M}$, skrátene $\mathcal{M} \not\models$ uprednostňuje(Boris, Boris, Anna), pretože $(i(\text{Boris}), i(\text{Boris}), i(\text{Anna})) \notin i(\text{uprednostňuje})$.

(B_1) $\mathcal{M} \not\models$ dievča(mama), pretože $i(\text{mama}) \notin i(\text{dievča})$.

(B_2) $\mathcal{M} \models$ chlapec(oco), pretože i(oco) $\in i$(chlapec).

(B_3) $\mathcal{M} \models$ uprednostňuje(mama, Boris, Anna),
pretože (i(mama), i(Boris), i(Anna)) $\in i$(uprednostňuje).

(B_4) $\mathcal{M} \not\models$ uprednostňuje(oco, Boris, Anna),
pretože (i(oco), i(Boris), i(Anna)) $\notin i$(uprednostňuje). ♮

1.1.4 Príklad. Uvažujme opäť jazyk $\mathcal{L}$ a atomické formuly z úlohy 1.1.1. Zostrojte štruktúry $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ a $\mathcal{M}_3$ pre jazyk $\mathcal{L}$ tak, aby každá z nich *súčasne* bola modelom všetkých formúl $A_1, \dots, A_5$, ale nebola modelom žiadnej z formúl $B_1, \dots, B_4$ a aby *zároveň*:

a) doména štruktúry $\mathcal{M}_1$ mala aspoň 5 prvkov;

b) doména štruktúry $\mathcal{M}_2$ mala najviac 3 prvky;

c) doména štruktúry $\mathcal{M}_3$ mala najviac 1 prvok.

Riešenie.

a) Štruktúra $\mathcal{M}_1$ s aspoň 5 prvkami v doméne:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 &= (\{a, b, c, d, m, o\}, i_1) \\
i_1(\text{Anna}) &= a, \quad i_1(\text{Boris}) = b, \quad i_1(\text{mama}) = m, \quad i_1(\text{oco}) = o, \\
i_1(\text{dievča}) &= \{a\}, \\
i_1(\text{chlapec}) &= \{b\}, \\
i_1(\text{sestra}) &= \{(a, b), (c, d)\}, \\
i_1(\text{uprednostňuje}) &= \{(m, a, b), (o, a, b), (b, b, a)\}.
\end{aligned}$$

b) Štruktúra $\mathcal{M}_2$ s najviac 3 prvkami v doméne:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_2 &= (\{a, b, c\}, i_2) \\
i_2(\text{Anna}) &= a, \quad i_2(\text{Boris}) = b, \quad i_2(\text{mama}) = c, \quad i_2(\text{oco}) = c, \\
i_2(\text{dievča}) &= \{a\}, \\
i_2(\text{chlapec}) &= \{b\}, \\
i_2(\text{sestra}) &= \{(a, b), (c, c)\}, \\
i_2(\text{uprednostňuje}) &= \{(c, a, b), (b, b, a)\}.
\end{aligned}$$

c) Nie je možné zostrojiť $\mathcal{M}_3$ tak, aby mala najviac 1 prvok a súčasne bola modelom všetkých formúl $A_1, \dots, A_5$, ale nebola modelom žiadnej z formúl $B_1, \dots, B_4$.

Doména štruktúry nemôže byť prázdna, preto $\mathcal{M}_3$ by mala mať práve jeden prvok, teda $\mathcal{M}_3 = (\{a\}, i_3)$ pre nejaký prvok a.

Problém nastáva už pri A_1 a B_1. Keďže v doméne $\mathcal{M}_3$ je jediný prvok, musia ho pomenúvať všetky indivíduové konštanty, teda $i_3(\text{Anna}) = a$, ale aj $i_3(\text{mama}) = a$. Aby bola A_1 pravdivá v $\mathcal{M}_3$, potom musí byť $a \in i_3(\text{dievča})$, teda $i_3(\text{dievča})$ musí byť $\{a\}$. Zároveň má byť B_1 nepravdivá, teda $a \notin i_3(\text{dievča})$, čo nie je možné. $\natural$

1.1.5 Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ logiky prvého rádu s množinami symbolov $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Alex}, \text{Beáta}, \text{Cyril}, \text{Dana}, \text{Edo}, \text{Gabika}, \text{oco}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{žena}^1, \text{rodič}^2, \text{dieťa}^3, \text{starší}^2\}$, pričom zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
žena(x)	x je žena
rodič(x, y)	x je rodičom y
dieťa(u, x, y)	u je dieťaťom matky x a otca y
starší(x, y)	x je starší ako y

Preložte nasledujúce atomické formuly do čo najprirodzenejších výrokov v slovenčine:

(A_1) žena(Beáta)

(A_2) dieťa(Cyril, Gabika, Edo)

(A_3) starší(Dana, Cyril)

(A_4) žena(Dana)

(A_5) rodič(Dana, Alex)

(A_6) rodič(Dana, Beáta)

(A_7) dieťa(Alex, Dana, Cyril)

(B_1) rodič(Edo, Edo)

(B_2) starší(Beáta, Cyril)

(B_3) Cyril $\doteq$ oco

(B_4) žena(Alex)

(B_5) dieťa(Beáta, Gabika, oco)

(B_6) starší(Gabika, Cyril)

1.1.6 Koľko atomických formúl môžeme zostrojiť v jazyku $\mathcal{L}$ z úlohy 1.1.5?

1.1.7 Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ a atomické formuly z úlohy 1.1.5. Rozhodnite, ktoré z formúl $A_1, \ldots, A_7, B_1, \ldots, B_6$ sú pravdivé v štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$
$$i(\text{Alex}) = 1, \quad i(\text{Beáta}) = 2, \quad i(\text{Cyril}) = 3, \quad i(\text{Dana}) = 4,$$
$$i(\text{Edo}) = 9, \quad i(\text{Gabika}) = 7, \quad i(\text{oco}) = 3,$$
$$i(\text{žena}) = \{1, 2, 3, 8\},$$
$$i(\text{rodič}) = \{(4, 1), (9, 9), (2, 3), (3, 4), (8, 7)\},$$
$$i(\text{dieťa}) = \{(3, 7, 9), (2, 7, 3), (8, 9, 1)\},$$

$$i(\text{starší}) = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,7),(3,4),(7,3),(8,7)\}.$$

💡 Všimnite si, že hoci každá indivíduová konštanta musí byť interpretovaná ako niektorý objekt domény (teda pomenúvať ho), nie všetky objekty musia byť pomenované a viacero indivíduových konštánt môže pomenúvať ten istý objekt.

💡 Lepšiu predstavu o štruktúre často získate, keď si ju znázorníte ako graf, v ktorom sú uzlami prvky domény. Pomôcť vám pritom môže prieskumník štruktúr.

1.1.8 Uvažujme opäť jazyk $\mathcal{L}$ a atomické formuly z úlohy 1.1.5. Zostrojte štruktúry $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ a $\mathcal{M}_3$ pre jazyk $\mathcal{L}$ tak, aby každá z nich bola modelom všetkých formúl A_1, …, A_7, ale *súčasne* nebola modelom žiadnej z formúl $B_1, \ldots, B_6$ a aby *zároveň*:

a) doména štruktúry $\mathcal{M}_1$ mala aspoň 9 prvkov;

b) doména štruktúry $\mathcal{M}_2$ mala najviac 5 prvkov;

c) doména štruktúry $\mathcal{M}_3$ mala najviac 2 prvky.

Ak doména s požadovanou kardinalitou neexistuje, detailne zdôvodnite, prečo to tak je, na základe definície štruktúry a pravdivosti atómov v nej.

1.2 Formalizácia do jazyka atomických formúl

1.2.1 Príklad. Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom* jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

(A_1) Jozef je profesor.

(A_2) Jozef a jeho kolegyňa profesorka obedujú.

(A_3) Jozef je žemľovku, zatiaľ čo kolegyňa má na obed rezeň.

(A_4) Márii, ako sa Jozefova kolegyňa volá, obed chutí.

(A_5) Aj Jozefovi jeho obed chutí, má žemľovku rád.

(A_6) Aj pani upratovačka je kolegyňa Jozefa a Márie.

(A_7) Pani upratovačka má menší plat ako Mária, ale väčší ako Jozef.

(A_8) Jozef učí predmet *Dejiny antického Ríma* vo veľkej posluchárni P42.

(A_9) Tento predmet (vždy) niekto navštevuje.

(A_{10}) Chodí naň aj pani upratovačka.

Riešenie. Postupne sformalizujeme atomické výroky a budeme pritom dbať na to, aby sme volili vhodný spoločný jazyk a zbytočne ho nerozširovali. Tvrdenie (A_1) je jednoduché: keďže Jozef je jednoznačne konkrétnou osobou z domény, ktorú popisuje úloha, zvolíme si pre jeho reprezentáciu indivíduovú konštantu Jozef. Ďalej keďže *byť profesorom* je Jozefova vlastnosť, zvolíme si pre ňu unárny predikátový symbol profesor^{1}. Samotný výrok môžeme teraz vyjadriť atomickou formulou:

(A_1) profesor(Jozef)

Pozrime sa na dve alternatívne riešenia, ktoré ale nie sú správne. Prvým je formula je(Jozef, profesor). Čo by v tomto prípade znamenala indivíduová konštanta profesor? Zmyslom slova *profesor* vo vete (A_1) nie je konkrétny profesor, ale trieda/množina/kategória/súbor všetkých profesorov. Preto je správne voliť predikátový symbol.

Z podobných dôvodov je nesprávna aj formula Jozef $\doteq$ profesor. Keby sme profesorov zapisovali týmto spôsobom, v skutočnosti by boli všetci profesori stotožnení do jedného objektu domény, čo v tomto prípade celkom určite nechceme.

(Zatiaľ) nevieme meno Jozefovej kolegyne z tvrdenia (A_2), ale určite je to tiež konkrétna osoba. Vytvoríme si preto novú indivíduovú konštantu o_1 aby sme mohli všetky výroky o nej zapísať. Tvrdenie (A_2) sa v skutočnosti skladá z viacerých atomických výrokov. V prvej časti sa dozvieme, že o_1 je profesorka, tu použijeme opäť unárny predikátový symbol profesor^{1}. Tiež sa dozvieme, že ide o Jozefovu kolegyňu. Keďže *byť kolegom (alebo kolegyňou)* je vzťah dvoch ľudí (elementov z domény), vytvoríme si pre jeho reprezentáciu binárny predikátový symbol kolega^{2}. V ďalšej časti tvrdenia sa dozvieme, že obaja obedujú — toto korešponduje ďalším dvom atomickým výrokom, ktoré vieme ľahko zapísať napríklad pomocou unárneho predikátového symbolu obeduje^{1}:

$(A_{2.1})$ profesor(o_1)

$(A_{2.2})$ kolega(Jozef, o_1)

$(A_{2.3})$ obeduje(Jozef)

$(A_{2.4})$ obeduje(o_1)

Všimnime si, že v prípade Jozefovej kolegyne o_1 sme nevytvorili nový predikátový symbol profesorka^{1}, ale rovnako ako v prípade Jozefa sme použili symbol profesor^{1}. Hoci v slovenčine na to máme dve samostatné slová, ich význam pre školskú doménu je rovnaký — je to symbol pre skupinu všetkých elementov domény, ktoré predstavujú profesorov. Ak by sme na napr. pýtali na všetkých profesorov, iste by sme zahrnuli aj o_1. Podobne aj v prípade vzťahu *byť kolegom alebo kolegyňou* budeme používať vždy len jeden predikátový symbol kolega^{2} a nebudeme vytvárať symbol kolegyňa^{2}.

Podobne ako v prípade Jozefovej kolegyne profesorky, aj v nasledujúcom tvrdení (A_3) sa stretneme s konkrétnymi objektmi, ktoré sú pomenované len menami všeobecných „kategórií“, do ktorých patria. Vytvoríme si preto dva nové indivíduové konštanty p_1 a p_2 pre konkrétne porcie jedla, pričom to, že p_1 je (jedlo z kategórie) žemľovka a p_2 je (jedlo z kategórie) rezeň, vyjadríme vhodne zvolenými unárnymi predikátovými symbolmi:

($A_{3.1}$) $\mathsf{je}(\mathsf{Jozef}, \mathsf{p}_1)$

($A_{3.2}$) $\mathsf{je}(\mathsf{o}_1, \mathsf{p}_2)$

($A_{3.3}$) $\mathsf{žemľovka}(\mathsf{p}_1)$

($A_{3.4}$) $\mathsf{rezeň}(\mathsf{p}_2)$

Pre vyjadrenie vzťahu *konzumovať niečo* sme použili predikátový je^2, hoci v prirodzenom jazyku to bolo vyjadrené rôznymi spôsobmi — ich význam v tomto kontexte je však rovnaký. Okrem toho to, že obaja jedia obed, sme už vyjadrili samostatným tvrdením s predikátovým symbolom $\mathsf{obeduje}^1$.

💡 Šikovný a krátky predikátový symbol je^2 tu môžeme použiť vo význame *konzumuje* aj preto, že v tvrdení (A_1), kde sme zvažovali jeho použitie *v inom význame*, sme ho nakoniec nepoužili. Použitiu jedného symbolu v dvoch rôznych zamýšľaných významoch sa musíme vyhnúť.

💡 Povedzme si ešte, prečo jednoduchšie riešenie je(Jozef, žemľovka) (a analogicky pre rezeň) nie je správne. Striktne vzaté, konštanty pre konkrétne porcie (či iné objekty) si môžeme nazvať, ako chceme — v tom problém nie je. Toto riešenie však nevyjadruje, že konštanta žemľovka je jedlo typu žemľovka, pretože to musíme vyjadriť ako vlastnosť pomocou unárneho predikátového symbolu. Riešenie je(Jozef, žemľovka) a žemľovka(žemľovka) zasa nie je správne, pretože množiny predikátových symbolov a indivíduových konštánt musia byť disjunktné. Pre jedno z použití musíme preto zvoliť iný symbol.

Tvrdenie (A_4), že Márii obed chutí, sformalizujeme jednoducho atomickou formulou s predikátovým symbolom $\mathsf{chutí}^2$. Musíme sa však vysporiadať s novou informáciou, že Mária je vlastne už vyššie spomínaná Jozefova kolegyňa. Jedno z korektných riešení využije rovnosť:

($A_{4.1}$) $\mathsf{chutí}(\mathsf{Mária}, \mathsf{p}_2)$

($A_{4.2}$) $\mathsf{Mária} \doteq \mathsf{o}_1$

💡 Iným prípustným riešením je vybrať si len jednu z dvoch indivíduových konštánt o_1, Mária a používať ju konzistentne všade. V prípade, že si ale vyberieme a budeme všade používať o_1, stratíme informáciu, že o_1 je osoba s menom Mária.

Ďalšia možnosť je to, že sa niekto nejako volá vyjariť binárnym predikátom volá_sa[2] a nie pomocou rovnosti. Potom by však analogicky konzistentne bolo potrebné postupovať aj v prípade Jozefa a ďalších osôb, či objektov, ktoré majú meno.

Prvú časť tvrdenia (A_5) teraz poľahky sformalizujeme analogicky, zaraziť nás však môže jeho druhá časť. To, že Jozefovi chutí konkrétna porcia žemľovky a to, že má rád žemľovku vo všeobecnosti, sú dve rôzne informácie, preto je potrebné každú vyjadriť nezávislým predikátovým symbolom. Keďže však žemľovka[1] je predikátový symbol, nemôže nikdy stáť zároveň ako argument predikátu. Nevieme teda atomickou formulou binárnym vzťahom medzi dvoma objektmi vyjadriť to, že Jozefovi chutí žemľovka vo všeobecnosti, pretože pre žemľovku vo všeobecnosti nemáme indivíduovú konštantu. Vieme si však vytvoriť predikátový symbol, ktorého zamýšľaným významom budú tie elementy z domény, ktoré majú rady žemľovku:

($A_{5.1}$) chutí(Jozef, p_1)

($A_{5.2}$) má_rád_žemľovku(Jozef)

Nasledujúce tvrdenie (A_6) poľahky sformalizujeme v súlade s tým, čo sme už videli vyššie:

($A_{6.1}$) upratovačka(o_2)

($A_{6.2}$) kolega(Jozef, o_2)

($A_{6.3}$) kolega(Mária, o_2)

Všimnime si, že tentoraz sme zvolili ženský rod pre predikátový symbol upratovačka[1]. Nevadí to, pokiaľ ho konzistentne použijeme aj v prípade mužov-upratovačov. Dôležité je len to aby, sme pre tú istú vec konzistentne stále používali ten istý predikátový symbol.

Tvrdenie (A_7) zodpovedá dvom atomickým formulám:

($A_{7.1}$) má_väčší_plat_ako(Mária, o_2)

($A_{7.2}$) má_väčší_plat_ako(o_2, Jozef)

Všimnime si, že sme zaviedli len jeden predikátový symbol má_väčší_plat_ako[2], ale úmyselne sme sa vyhli zavedeniu analogického symbolu má_menší_plat_ako[2]. Ide tu totiž o dva vzťahy, ktoré sú navzájom inverzné. Takéto dva predikátové symboly by však boli od seba nezávislé, teda ak platí má_väčší_plat_ako(Mária, o_2), nijako z toho nevyplýva, že platí aj má_menší_plat_ako(o_2, Mária). Toto ale zrejme nie je zamýšľané. Jazyk atomických formúl nemá dostatočnú silu na to, aby sme mohli dva navzájom inverzné predikáty nejako vyjadriť. Musíme si preto vystačiť s jedným predikátom a používať ho vždy správnym smerom.

Tvrdenie (A_8) by nám už teraz nemalo robiť žiadne problémy. Musíme len správne rozpoznať všetky konkrétne objekty, o ktorých tvrdenie hovorí. Vyjde nám pri tom, že učí^3 bude ternárny predikátový symbol. Pri dvoch nových indivíduových konštantách, ktoré pre tieto objekty zavedieme, z tvrdenia tiež vyčítame, do akej „skupiny" patria, čo vyjadríme samostatnými atomickými formulami:

$(A_{8.1})$ učí(Jozef, DAR, P42)

$(A_{8.2})$ predmet(DAR)

$(A_{8.3})$ poslucháreň(P42)

$(A_{8.4})$ veľký(P42)

Keďže *byť veľký* a *byť poslucháreň* sú dve samostatné, nezávislé vlastnosti, použijeme dva samostatné predikátové symboly veľký^1 a poslucháreň^1.

Na záver sa zamerajme na posledné dve tvrdenia (A_9) a (A_{10}). To, že *Dejiny antického Ríma* niekto (teda aspoň jeden študent) navštevuje, vieme pomocou atomickej formuly vyjadriť tak, že to vyjadríme pre nejakú konštantu. Mohli by sme si zvoliť úplne novú (napr. študent o_3), ale keďže z tvrdenia (A_{10}) vieme, že tam chodí (teda ho navštevuje) aj pani upratovačka, pre ktorú už konštantný symbol máme, môžeme obe tieto tvrdenia vyjadriť jednou atomickou formulou:

(A_9) navštevuje(o_2, DAR)

Použitie indivíduovej konštanty, aby sme vyjadrili, že existuje aspoň jeden objekt, pre ktorý niečo platí, je tak trochu trik, ktorý ale môžeme využiť. V tomto prípade nám ani nič iné neostáva, keďže máme len atomické formuly. Neskôr sa naučíme aj iný, krajší spôsob.

Uvedieme ešte množiny indivíduových konštánt a predikátových symbolov, ktoré sme použili:

$$\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{DAR}, \text{Jozef}, \text{Mária}, \mathsf{o}_1, \mathsf{o}_2, \mathsf{p}_1, \mathsf{p}_2, \text{P42}\},$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{chutí}^2, \text{je}^2, \text{kolega}^2, \text{má\_rád\_žemľovku}^1, \text{má\_väčší\_plat\_ako}^2, \text{navštevuje}^2, \text{obeduje}^1, \text{poslucháreň}^1, \text{predmet}^1, \text{profesor}^1, \text{rezeň}^1, \text{učí}^3, \text{upratovačka}^1, \text{veľký}^3, \text{žemľovka}^1\}.$$

A vysvetlime ich význam:

Symbol	Význam
DAR	predmet *Dejiny antického Ríma*
Jozef, Mária, o_1, o_2	konkrétne osoby
p_1, p_2	konkrétne porcie jedla
P42	poslucháreň P42
chutí(x, y)	osobe x chutí jedlo y
je(x, y)	x konzumuje y
kolega(x, y)	x je kolegom y
má_rád_žemľovku(x)	x má rád žemľovku
má_väčší_plat_ako(x, y)	x má väčší plat ako y
navštevuje(x, y)	osoba x navštevuje predmet y
obeduje(x)	x konzumuje obed
poslucháreň(x)	x je poslucháreň
predmet(x)	x je predmet (v zmysle *kurz*)
profesor(x)	x je profesor(ka)
rezeň(x)	x je rezeň
učí(x, y, z)	x učí predmet y v miestnosti z
upratovačka(x)	x je upratovačka (alebo upratovač)
veľký(x)	x je veľké (v zmysle *rozmerné*)
žemľovka(x)	x je žemľovka

⚠ Ako je vidieť z riešenia, symboly jazyka pridávame priebežne, podľa potreby. Vo vypracovaných zadaniach však býva zvykom uviesť ich na začiatku spolu s vysvetlením ich významu. ♮

1.2.2 Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom* jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

(A_1) Peter je muž.

(A_2) Peter je študent.

(A_3) Lucia je žena a študentka.

(A_4) Lucia je staršia ako Peter.

(A_5) Matematiku učí Eugen.

(A_6) Peter a Lucia sú od neho mladší.

(A_7) Peter dostal z Matematiky od Eugena známku A.

(A_8) Eugen má rád Luciu.

(A_9) Aj keď má Lucia z Matematiky (od neho) známku „dostatočný“.

(A_{10}) Známka „dostatočný“ je len iný názov pre E-čko, a podobne „výborný“ značí to isté ako A-čko.

(A_{11}) Eugen sa má rád.

(A_{12}) Je Učiteľom roka 2020.

(A_{13}) Matematika je povinný predmet.

(A_{14}) Všetci vyššie menovaní študenti majú radi Telocvik.

(A_{15}) Okrem Eugena (a ďalších učiteľov) v škole pracuje aj školník, upratovačka a riaditeľ.

(A_{16}) Peter má rád Matematiku.

(A_{17}) Lucia má rada Petra.

(A_{18}) Telocvik je voliteľný predmet.

⚠ Na vyjadrenie nezávislých vlastností (napr. byť študentom/študentkou, byť ženou, byť mužom) použite samostatné predikátové symboly a podľa potreby jeden výrok sformalizujte viacerými atómami.

Nezavádzajte zbytočne nové predikátové symboly, ak sa význam výroku dá vyjadriť už použitými.

1.2.3

a) Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom*, vhodne zvolenom jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

Snažte sa o to, aby počet predikátových symbolov bol čo najmenší. Zároveň ale nespájajte vzájomne nezávislé vlastnosti a vzťahy do jedného predikátového symbolu.

(A_1) Janko je chlapec.

(A_2) Marienka je jeho najlepšia kamarátka.

(A_3) Marienka je dievča – hoci keď (u nich doma) hovoria o Máriovi, ide v skutočnosti o Marienku. (Poznáte tieto prezývky, vlastne sa už nikto nepamätá, ako to vzniklo.)

(A_4) V Čiernom lese stojí chalúpka z perníku.

(A_5) Táto chalúpka je obrovská, niektorí jej hovoria aj Perníková veža.

(A_6) V Perníkovej veži býva zlá a škaredá čarodejnica.

(A_7) Čarodejnica má bradavicu na nose.

(A_8) Janko sa bojí čarodejnice.

(B_1) Marienka je chlapec.

(B_2) Marienka sa bojí čarodejnice.

(B_3) Janko je Marienkin najlepší kamarát.

(B_4) Čarodejnica Janka zjedla.

(C_1) Mário je chlapec.

b) Vytvorte štruktúru $\mathcal{M}$ pre jazyk $\mathcal{L}$ tak, aby všetky formuly, ktorými ste sformalizovali výroky zo skupiny A, boli v $\mathcal{M}$ pravdivé, ale *súčasne* boli všetky formuly, ktorými ste sformalizovali výroky zo skupiny B, v $\mathcal{M}$ nepravdivé.

c) Je možné, aby v nejakej štruktúre boli súčasne všetky formuly podľa výrokov zo skupiny A pravdivé, všetky formuly podľa výrokov z B nepravdivé a formula pre výrok (C_1) pravdivá?

Svoju odpoveď detailne zdôvodnite na základe definície štruktúry a pravdivosti atómov v nej.

1.2.4 (pre odvážnejších) Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom* jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov. Snažte sa o to aby počet predikátových symbolov bol čo najmenší, ale nespájajte nezávislé vlastnosti a vzťahy do jedného predikátu.

Následne vytvorte štruktúru tak, aby formuly, ktorými ste sformalizovali výroky zo skupiny A, boli všetky pravdivé a formuly, ktoré formalizujú výroky skupiny B, všetky nepravdivé.

(A_1) Janka je dievča a Jurko je chlapec.

(A_2) Chlapci a dievčatá sú deti.

(A_3) Ňufko je Jankine zvieratko.

(A_4) Je to myš.

(A_5) Ňufko je veľký. Je väčší než Jurkov škrečok Chrumko.

(A_6) Jurko si Chrumka kúpil sám.

(A_7) Jurko v noci chodí kŕmiť potkana Smraďocha.

(A_8) Smraďoch však v skutočnosti je Ňufko, ktorý v tme vyzerá ako potkan.

(A_9) Všetky deti majú rady zvieratká, ktorá vlastnia, a tiež tie, ktoré kŕmia.

(B_1) Janka sa Smraďocha bojí.

(B_2) Jurko má rád potkany, nebojí sa ich.

(B_3) Ňufko je menší ako Chrumko.

(B_4) Janka má rada Jurka.

(B_5) Ňufko a Chrumko sú deti.

(B_6) Ňufka a Chrumka deťom kúpila ich mama.

2 Výrokovologické spojky

2.1 Syntax výrokovologických formúl

2.1.1 Príklad. Rozhodnite, či nasledujúce postupnosti symbolov sú formulami nad nejakou množinou konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$. V prípade kladnej odpovede určte množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$. Svoje odpovede stručne zdôvodnite.

a) (futbalista(Adam))

b) (futbalista(Adam) $\land$ vlastní(Adam, BT001AA) $\land$ BMW(BT001AA))

c) $\neg\neg$(ľúbi(Barbora, Adam) $\to$ šťastný(Adam))

d) (šťastný(Adam) $\leftrightarrow$ šťastný($\neg$Barbora))

Riešenie. a) Postupnosť symbolov (futbalista(Adam)) nie je formulou. Keďže postupnosť začína symbolom zátvorky (a končí symbolom zátvorky), musí sa vo vnútri zátvorky nachádzať výraz $A\,b\,B$, kde A a B sú ľubovoľné formuly a b je binárna spojka. V tomto prípade sa vo vnútri zátvoriek ale nachádza atomická formula.

b) Postupnosť symbolov (futbalista(Adam) $\land$ vlastní(Adam, BT001AA) $\land$ BMW(BT001AA)) nie je formulou. Keďže postupnosť začína symbolom zátvorky (a končí symbolom zátvorky), musí sa vo vnútri zátvorky nachádzať výraz $A\ b\ B$, kde A a B sú ľubovoľné formuly a b je binárna spojka. V tomto prípade sa vo vnútri zátvoriek nachádzajú tri atomické formuly a medzi nimi dve binárne spojky $\land$.

c) Postupnosť symbolov $\neg\neg$(ľúbi(Barbora, Adam) $\to$ šťastný(Adam)) je formulou napríklad nad množinou predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{$ľúbi, šťastný$\}$ a množinou konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{$Adam, Barbora$\}$ (množiny $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ môžu obsahovať aj ľubovoľné ďalšie prvky). Postupnosť symbolov sa začína symbolom negácie $\neg$, za ňou sa musí nachádzať formula A. Keďže v tomto prípade $A = \neg$(ľúbi(Barbora, Adam) $\to$ šťastný(Adam)), opäť ide o formulu v tvar $\neg B$, kde $B =$ (ľúbi(Barbora, Adam) $\to$ šťastný(Adam)). Formula B je ohraničená zátvorkami, musí byť teda v tvare $(C\ b\ D)$. V prípade tejto formuly teda bude $C =$ ľúbi(Barbora, Adam) a $D =$ šťastný(Adam) a binárna spojka b zodpovedá implikácii $\to$.

d) Postupnosť symbolov (šťastný(Adam) $\leftrightarrow$ šťastný($\neg$Barbora)) nie je formulou. Postupnosť je ohraničená zátvorkami a v ich vnútri sa naozaj nachádza výraz v tvare $A\,b\,B$. B však nie je formulou, pretože argumentom potenciálneho predikátového symbolu šťastný musí byť konštanta, ale $\neg$Barbora nie je správnou konštantou, lebo symboly konštánt a predikátové symboly nemôžu obsahovať žiadnu z logických spojok. $\natural$

2.1.2 Rozhodnite, či nasledujúce postupnosti symbolov sú formulami nad nejakou množinou konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

Kladnú odpoveď dokážte nájdením množín $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ a vytvárajúcej postupnosti pre formulu. Zápornú odpoveď stručne zdôvodnite.

a) $(\mathsf{žena}(\mathsf{Alex}) \land \mathsf{muž}(\mathsf{Alex}))$

b) $\neg(\mathsf{má\_rád}(\mathsf{Alex}, \mathsf{Alex}))$

c) $\big(\mathsf{starší}(\mathsf{Edo}, \mathsf{Alex}) \to (\neg\mathsf{starší}(\mathsf{Alex}, \mathsf{Edo}))\big)$

d) $(\mathsf{Alex} \lor \neg\mathsf{oco})$

e) $\big(\neg(\mathsf{muž}(\mathsf{Alex}) \land \mathsf{žena}(\mathsf{Alex})) \to (\neg\mathsf{muž}(\mathsf{Alex}) \lor \neg\mathsf{žena}(\mathsf{Alex}))\big)$

f) $\big(\neg\neg\mathsf{starší}(\mathsf{Alex}, \mathsf{Edo}) \leftrightarrow (\mathsf{starší}(\mathsf{Alex}, \mathsf{Edo}) \neg\land \mathsf{muž}(\mathsf{Edo}))\big)$

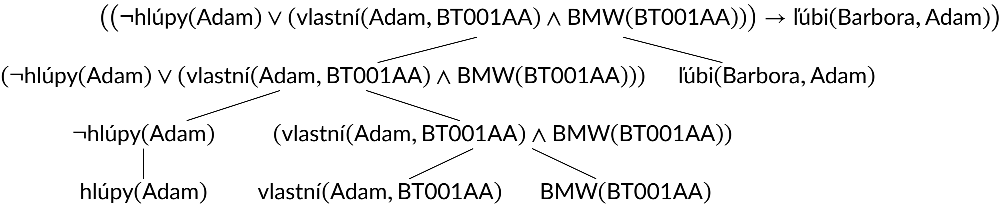
2.1.3 Príklad. Pre nasledujúcu formulu zapíšte vytvárajúcu postupnosť, zakreslite vytvárajúci strom a určte jej stupeň:

$$\big((\neg\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Adam}) \lor (\mathsf{vlastní}(\mathsf{Adam}, \mathsf{BT001AA}) \land \mathsf{BMW}(\mathsf{BT001AA})))\\ \to \mathsf{ľúbi}(\mathsf{Barbora}, \mathsf{Adam})\big)$$

Riešenie. Vytvárajúcou postupnosťou pre zadanú formulu je napríklad nasledujúca postupnosť:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{BMW}(\mathsf{BT001AA}),\\
&\mathsf{vlastní}(\mathsf{Adam}, \mathsf{BT001AA}),\\
&(\mathsf{vlastní}(\mathsf{Adam}, \mathsf{BT001AA}) \land \mathsf{BMW}(\mathsf{BT001AA})),\\
&\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Adam}),\\
&\neg\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Adam}),\\
&(\neg\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Adam}) \lor (\mathsf{vlastní}(\mathsf{Adam}, \mathsf{BT001AA}) \land \mathsf{BMW}(\mathsf{BT001AA}))),\\
&\mathsf{ľúbi}(\mathsf{Barbora}, \mathsf{Adam}),\\
&\big((\neg\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Adam}) \lor (\mathsf{vlastní}(\mathsf{Adam}, \mathsf{BT001AA}) \land \mathsf{BMW}(\mathsf{BT001AA})))\\
&\qquad \to \mathsf{ľúbi}(\mathsf{Barbora}, \mathsf{Adam})\big).
\end{aligned}$$

Nasledujúci strom predstavuje vytvárajúci strom pre zadanú formulu.



Stupeň zadanej formuly vypočítame ako:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{deg}\Big(((\neg\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Adam}) \lor (\mathsf{vlastní}(\mathsf{Adam}, \mathsf{BT001AA}) \land \mathsf{BMW}(\mathsf{BT001AA})))\\
&\qquad\qquad \to \mathsf{ľúbi}(\mathsf{Barbora}, \mathsf{Adam}))\Big)\\
&\quad = \mathrm{deg}\big((\neg\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Adam}) \lor (\mathsf{vlastní}(\mathsf{Adam}, \mathsf{BT001AA}) \land \mathsf{BMW}(\mathsf{BT001AA})))\big)\\
&\qquad + \mathrm{deg}(\mathsf{ľúbi}(\mathsf{Barbora}, \mathsf{Adam}))\\
&\qquad + 1\\
&\quad = \mathrm{deg}(\neg\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Adam}))\\
&\qquad + \mathrm{deg}((\mathsf{vlastní}(\mathsf{Adam}, \mathsf{BT001AA}) \land \mathsf{BMW}(\mathsf{BT001AA})))\\
&\qquad + 1\\
&\qquad + 1\\
&\quad = \mathrm{deg}(\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Adam})) + 1\\
&\qquad + \mathrm{deg}(\mathsf{vlastní}(\mathsf{Adam}, \mathsf{BT001AA})) + \mathrm{deg}(\mathsf{BMW}(\mathsf{BT001AA})) + 1\\
&\qquad + 1 + 1\\
&\quad = 1 + 1 + 1 + 1 = 4
\end{aligned}
$$

♮

2.1.4 Pre nasledujúcu formulu zapíšte vytvárajúcu postupnosť, zakreslite vytvárajúci strom a určte jej stupeň:

$$
\begin{aligned}
&\big((\mathsf{rodič}(\mathsf{Bruno}, \mathsf{Hugo}) \land \mathsf{rodič}(\mathsf{Bruno}, \mathsf{Tereza})) \to\\
&\quad ((\neg\mathsf{žena}(\mathsf{Hugo}) \land \mathsf{muž}(\mathsf{Hugo})) \to \mathsf{brat}(\mathsf{Hugo}, \mathsf{Tereza}))\big)
\end{aligned}
$$

2.1.5 Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte nasledujúce funkcie nad jeho formulami:

a) $\mathrm{atoms}\colon\ \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \to \mathcal{P}(\mathcal{A}_{\mathcal{L}})$
atoms(A) je množina všetkých atómov vyskytujúcich sa vo formule A;

b) $\mathrm{acnt}\colon\ \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \to \mathbb{N}$
acnt(A) je počet výskytov atómov vo formule A;

c) $\mathrm{acount}\colon\ \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{A}_{\mathcal{L}} \to \mathbb{N}$
acount(A, a) je počet výskytov atómu a vo formule A;

d) $\mathrm{subfs}\colon\ \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \to \mathcal{P}(\mathcal{E}_{\mathcal{L}})$
subfs(A) je množina všetkých podformúl formuly A;

e) $\mathrm{pcount}\colon\ \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{A}_{\mathcal{L}} \to \mathbb{N}$
pcount(A) je počet výskytov zátvoriek vo formule A;

f) $\mathrm{cons}: \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \to \mathcal{P}(\{\neg, \land, \lor, \to\})$
$\mathrm{cons}(A)$ je množina všetkých logických spojok vyskytujúcich sa vo formule A;

g) $\mathrm{ccount}: \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{A}_{\mathcal{L}} \to \mathbb{N}$
$\mathrm{ccount}(A)$ je počet výskytov logických spojok vo formule A;

h) $\mathrm{bccount}: \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \times \{\land, \lor, \to\} \to \mathbb{N}$
$\mathrm{bccount}(A, b)$ je počet výskytov binárnej spojky b vo formule A.

Riešenie. f)

Funkciu cons zadefinujeme induktívnou definíciou. Musíme *jednoznačne* určiť hodnotu funkcie pre *každý* z možných tvarov formúl. Smieme sa pritom odvolávať na hodnoty tej istej funkcie pre formuly *nižšieho* stupňa. Na začiatku definície musíme deklarovať, aké druhy objektov predstavujú jednotlivé metapremenné (podobne ako sa v mnohých programovacích jazykoch deklarujú typy argumentov funkcií, procedúr, metód).

Definícia. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Pre každý atóm $a \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ a pre všetky formuly A, B z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ definujeme:

$$\begin{aligned}
\mathrm{cons}(a) &= \emptyset \\
\mathrm{cons}(\neg A) &= \{\neg\} \cup \mathrm{cons}(A) \\
\mathrm{cons}((A \land B)) &= \{\land\} \cup \mathrm{cons}(A) \cup \mathrm{cons}(B) \\
\mathrm{cons}((A \lor B)) &= \{\lor\} \cup \mathrm{cons}(A) \cup \mathrm{cons}(B) \\
\mathrm{cons}((A \to B)) &= \{\to\} \cup \mathrm{cons}(A) \cup \mathrm{cons}(B)
\end{aligned}$$

Pretože prípady pre rôzne binárne výrokové spojky sú si navzájom dostatočne podobné, môžeme ich spojiť napríklad takto:

Definícia. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Pre všetky atómy $a \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$, pre všetky formuly A, B z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ a všetky binárne spojky $b \in \{\land, \lor, \to\}$ definujeme:

$$\begin{aligned}
\mathrm{cons}(p) &= \emptyset \\
\mathrm{cons}(\neg A) &= \{\neg\} \cup \mathrm{cons}(A) \\
\mathrm{cons}((A\ b\ B)) &= \{b\} \cup \mathrm{cons}(A) \cup \mathrm{cons}(B)
\end{aligned}$$ ♮

2.1.6 Dokážte alebo vyvráťte:

a) Príklad. [Tvrdenie 2.12] Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Postupnosť symbolov A je formulou jazyka $\mathcal{L}$ vtt existuje vytvárajúca postupnosť pre A v jazyku $\mathcal{L}$.

b) Príklad. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Pre každú výrokovologickú formulu A v jazuku $\mathcal{L}$ platí:

$$\mathrm{atoms}(A) \subseteq \mathrm{subfs}(A)$$

c) Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Pre každú výrokovologickú formulu A v jazuku $\mathcal{L}$ platí:

$$\mathrm{acnt}(A) \leq \deg(A) + 1$$

Riešenie príkladu a). Tvrdenie a) platí. Nech $\mathcal{L}$ je ľubovoľný jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Postupne dokážeme obe implikácie vhodnou indukciou.

($\Leftarrow$) Predpokladáme, že A je formulou v jazyku $\mathcal{L}$. Existenciu vytvárajúcej postupnosti pre A dokážeme štrukturálnou indukciou na A:

1. Báza indukcie: Ak A je atóm (či už predikátový alebo rovnostný), jednoprvková postupnosť (A) je vytvárajúcou postupnosťou pre A.
2. Indukčný krok:
    1. Indukčný predpoklad: Nech A je formula a nech pre A existuje vytvárajúca postupnosť.

       Dokážme, že vytvárajúca postupnosť existuje aj pre $\neg A$: Podľa indukčného predpokladu existuje vytvárajúca postupnosť $A_1, A_2, \dots, A_m$ taká, že $A_m = A$. Zostrojme postupnosť $(A_1, A_2, \dots, A_n, A_{m+1})$. Nech A_i pre nejaké $1 \leq i \leq m + 1$ je ľubovoľný prvok tejto postupnosti:

       Ak $i = m+1$, tak $A_{m+1} = \neg A = \neg A_m$ a $m < m+1$, takže A_{m+1} spĺňa podmienky kladené na prvok vytvárajúcej postupnosti.

       Ak $1 \leq i \leq m$, tak A_i tiež spĺňa podmienky kladené na prvok vytvárajúcej postupnosti, lebo $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ je vytvárajúca postupnosť.

       Preto $(A_1, A_2, \dots, A_m, A_{m+1})$ je vytvárajúca postupnosť a keďže jej posledným prvkom je $\neg A$, je to aj vytvárajúca postupnosť pre $\neg A$.
    2. IP: Nech A a B sú formuly a nech existuje vytvárajúca postupnosť pre A a existuje vytvárajúca postupnosť pre B.

       Dokážme, že vytvárajúca postupnosť existuje aj pre $(A\ b\ B)$ pre ľubovoľnú binárnu spojku $b \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$: Podľa indukčného predpokladu existuje vytvárajúca postupnosť $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ taká, že $A_m = A$, a vytvárajúca postupnosť $(B_1, B_2, \dots, B_n)$ taká, že $B_n = B$. Zostrojme postupnosť

       $$(C_1, C_2, \dots, C_{m+n+1}) = (A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_n, (A\ b\ B))$$

       Nech C_i pre nejaké $1 \leq i \leq m + n + 1$ je ľubovoľný prvok tejto postupnosti:

Ak $i = m + n + 1$, tak $C_{m+n+1} = (A \, b \, B) = (A_m \, b \, B_n) = (C_m \, b \, C_{m+n})$, pričom zrejme $m < m + n + 1$ a $m + n < m + n + 1$, takže C_{m+n+1} spĺňa podmienky kladené na prvok vytvárajúcej postupnosti.

Ak $1 \leq i \leq m$, tak $C_i = A_i$ spĺňa podmienky kladené na prvok vytvárajúcej postupnosti, lebo $(C_1, A_2, \dots, C_m) = (A_1, A_2, \dots, A_m)$ je vytvárajúca postupnosť.

Ak $m + 1 \leq i \leq m + n$, tak prvok $C_i = B_{i-m}$ tiež spĺňa podmienky kladené na prvok vytvárajúcej postupnosti, lebo $(C_{m+1}, C_{m+2}, \dots, C_{m+n}) = (B_1, B_2, \dots, B_n)$ je vytvárajúca postupnosť.

Preto $(C_1, C_2, \dots, C_{m+n+1})$ je vytvárajúca postupnosť a keďže jej posledným prvkom je $(A \, b \, B)$, je to vytvárajúca postupnosť pre $(A \, b \, B)$.

($\Rightarrow$) Implikácia *Ak existuje vytvárajúca postupnosť pre A v jazyku $\mathcal{L}$, tak A je formulou jazyka $\mathcal{L}$,* vyplýva z tvrdenia: *Pre každé kladné prirodzené číslo n, ak $(A_1, \dots, A_n)$ je vytvárajúca postupnosť v jazyku $\mathcal{L}$, tak A_n je formula.* Toto tvrdenie dokážeme úplnou indukciou na n.

Nech n je ľubovoľné kladné prirodzené číslo. Indukčný predpoklad: Nech pre každé kladné prirodzené číslo $m < n$ je pravda, že ak $(A_1, \dots, A_m)$ je vytvárajúca postupnosť v jazyku $\mathcal{L}$, tak A_m je formula.

Dokážme tvrdenie pre n. Predpokladajme, že $(A_1, \dots, A_n)$ je vytvárajúca postupnosť v jazyku $\mathcal{L}$. Potom pre jej posledný prvok, postupnosť symbolov A_n v jazyku $\mathcal{L}$ môže nastať niektorá z týchto možností:

- A_n je atóm. Potom A_n je samozrejme formula.
- $A_n = \neg A_i$ pre nejaké $i < n$. Ľahko sa presvedčíme, že $(A_1, \dots, A_i)$ je vytvárajúca postupnosť v jazyku $\mathcal{L}$. Pretože $i < n$, je podľa indukčného predpokladu postupnosť symbolov A_i formula. Potom ale aj $A_n = \neg A_i$ je formula.
- $A_n = (A_i \, b \, A_j)$ pre nejakú binárnu spojku $b \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ a pre nejaké $i < n$ a $j < n$. Opäť sa ľahko presvedčíme, že $(A_1, \dots, A_i)$ aj $(A_1, \dots, A_j)$ sú vytvárajúce postupnosti v jazyku $\mathcal{L}$. Pretože $i < n$ aj $j < n$, sú podľa indukčného predpokladu postupnosti symbolov A_i aj A_j formuly. Potom ale aj $A_n = (A_i \, b \, A_j)$ je formula. ♮

Riešenie príkladu b).

Pripomeňme, že funkciu atoms : $\mathcal{E}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{A}_{\mathcal{L}})$ sme zadefinovali na prednáške (Def. 3.26). Predpokladáme, že funkciu subfs : $\mathcal{E}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{E}_{\mathcal{L}})$ ste zadefinovali pri riešení predchádzajúceho cvičenia 2.1.5.

Tvrdenie b) platí. Nech $\mathcal{L}$ je ľubovoľný jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Tvrdenie dokážeme indukciou na konštrukciu formuly A.

1. Báza indukcie: Nech A je atóm. Potom $\mathrm{atoms}(A) = \{A\}$. Taktiež $\mathrm{subfs}(A) = \{A\}$, a teda platí $\mathrm{atoms}(A) \subseteq \mathrm{subfs}(A)$.
2. Indukčné kroky:

2.1. Indukčný predpoklad: Nech A je ľubovoľná formula a nech pre ňu tvrdenie platí, teda $\mathrm{atoms}(A) \subseteq \mathrm{subfs}(A)$. Dokážme tvrdenie aj pre $\neg A$:

Z definície funkcie atoms vieme, že $\mathrm{atoms}(\neg A) = \mathrm{atoms}(A)$. Súčasne podľa definície funkcie subfs máme $\mathrm{subfs}(\neg A) = \mathrm{subfs}(A) \cup \{\neg A\}$. Keďže podľa indukčného predpokladu $\mathrm{atoms}(A) \subseteq \mathrm{subfs}(A)$, dostávame

$$\mathrm{atoms}(\neg A) = \mathrm{atoms}(A) \subseteq \mathrm{subfs}(A) \subseteq \mathrm{subfs}(A) \cup \{\neg A\} = \mathrm{subfs}(\neg A),$$

teda $\mathrm{atoms}(\neg A) \subseteq \mathrm{subfs}(\neg A)$.

2.2. IP: Nech A a B sú ľubovoľné formuly a nech tvrdenie pre ne platí (teda $\mathrm{atoms}(A) \subseteq \mathrm{subfs}(A)$ a $\mathrm{atoms}(B) \subseteq \mathrm{subfs}(B)$). Dokážme ho aj pre $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$:

Podľa definícií funkcií atoms a subfs vieme, že pre ľubovoľnú spojku $b \in \{\land, \lor, \to\}$ platí

$$\begin{aligned} & \mathrm{atoms}((A\ b\ B)) = \mathrm{atoms}(A) \cup \mathrm{atoms}(B) \\ \text{a} \quad & \mathrm{subfs}((A\ b\ B)) = \mathrm{subfs}(A) \cup \mathrm{subfs}(B) \cup \{(A\ b\ B)\}. \end{aligned}$$

Vďaka IP platí $\mathrm{atoms}(A) \cup \mathrm{atoms}(B) \subseteq \mathrm{subfs}(A) \cup \mathrm{subfs}(B) \cup \{(A\ b\ B)\}$, a teda $\mathrm{atoms}((A\ b\ B)) \subseteq \mathrm{subfs}((A\ b\ B))$ pre ľubovoľné $b \in \{\land, \lor, \to\}$.

Túto úvahu môžeme stručnejšie a azda aj prehľadnejšie zapísať takto:

Podľa IP a definícií funkcií atoms a subfs pre ľubovoľnú spojku $b \in \{\land, \lor, \to\}$ platí

$$\begin{aligned} \mathrm{atoms}((A\ b\ B)) &\overset{\text{def}}{=} \mathrm{atoms}(A) \cup \mathrm{atoms}(B) \\ &\overset{\text{IP}}{\subseteq} \mathrm{subfs}(A) \cup \mathrm{subfs}(B) \\ &\subseteq \mathrm{subfs}(A) \cup \mathrm{subfs}(B) \cup \{(A\ b\ B)\} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{subfs}((A\ b\ B)), \end{aligned}$$

teda $\mathrm{atoms}((A\ b\ B)) \subseteq \mathrm{subfs}((A\ b\ B))$ pre ľubovoľné $b \in \{\land, \lor, \to\}$. ♮

2.2 Sémantika výrokovologických formúl

2.2.1 Príklad. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologických formúl logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Karol}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{profesor}^1, \text{hlúpy}^1, \text{sčítaný}^1\}$. V štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk $\mathcal{L}$, kde

$$\begin{aligned} D &= \{\text{barča}, \text{janči}, \text{karči}\} \\ i(\text{Karol}) &= \text{karči} \\ i(\text{profesor}) &= \{\text{karči}, \text{janči}\} \\ i(\text{hlúpy}) &= \{\text{janči}\} \end{aligned}$$

$$i(\text{sčítaný}) = \{\text{barča}, \text{karči}\}$$

vyhodnoťte nasledujúcu formulu postupom *zdola nahor* a postupom *zhora nadol*.

$$\big(\text{profesor}(\text{Karol}) \to (\neg\text{hlúpy}(\text{Karol}) \land \text{sčítaný}(\text{Karol}))\big)$$

Riešenie. 1. spôsob — zdola nahor: Pravdivosť danej formuly určíme podľa definície 2.21 postupným vyhodnotením všetkých prvkov jej vytvárajúcej postupnosti:

$$\text{profesor}(\text{Karol}), \quad \text{sčítaný}(\text{Karol}), \quad \text{hlúpy}(\text{Karol}), \quad \neg\text{hlúpy}(\text{Karol}),$$
$$(\neg\text{hlúpy}(\text{Karol}) \land \text{sčítaný}(\text{Karol})), \quad \big(\text{profesor}(\text{Karol}) \to (\neg\text{hlúpy}(\text{Karol}) \land \text{sčítaný}(\text{Karol}))\big)$$

Dostávame:

1. $i(\text{Karol}) \in i(\text{profesor})$, teda $\mathcal{M} \models \text{profesor}(\text{Karol})$
2. $i(\text{Karol}) \in i(\text{sčítaný})$, teda $\mathcal{M} \models \text{sčítaný}(\text{Karol})$
3. $i(\text{Karol}) \notin i(\text{hlúpy})$, teda $\mathcal{M} \not\models \text{hlúpy}(\text{Karol})$
4. $\mathcal{M} \not\models \text{hlúpy}(\text{Karol})$, teda $\mathcal{M} \models \neg\text{hlúpy}(\text{Karol})$
5. Keďže $\mathcal{M} \models \neg\text{hlúpy}(\text{Karol})$ a $\mathcal{M} \models \text{sčítaný}(\text{Karol})$, tak $\mathcal{M} \models (\neg\text{hlúpy}(\text{Karol}) \land \text{sčítaný}(\text{Karol}))$
6. Keďže $\mathcal{M} \models (\neg\text{hlúpy}(\text{Karol}) \land \text{sčítaný}(\text{Karol}))$, tak $\mathcal{M} \models (\text{profesor}(\text{Karol}) \to (\neg\text{hlúpy}(\text{Karol}) \land \text{sčítaný}(\text{Karol})))$

Vyhodnotenie spôsobom *zdola nahor* môžeme prehľadnejšie zapísať do tabuľky, v ktorej $h = \text{hlúpy}$, $p = \text{profesor}$, $s = \text{sčítaný}$ a $K = \text{Karol}$:

	$p(K)$	$s(K)$	$h(K)$	$\neg h(K)$	$(\neg h(K) \land s(K))$	$(p(K) \to (\neg h(K) \land s(K)))$
$\mathcal{M}$	$\models$	$\models$	$\not\models$	$\models$	$\models$	$\models$

alebo (trocha menej prehľadne):

	(	profesor(Karol)	$\to$	(	$\neg$	hlúpy(Karol)	$\land$	sčítaný(Karol)	))
$\mathcal{M}$		$\models$	$\models$		$\models$	$\not\models$	$\models$	$\models$	

Nesmieme pritom zabúdať, že odvodenie je založené na definícii 2.21 pravdivosti formuly v štruktúre.

Aby prvá tabuľka nebola príliš široká, celkom prirodzene sme si konkrétne symboly jazyka $\mathcal{L}$ označili meta premennými p, s, h a K. Tieto premenné nie sú súčasťou jazyka $\mathcal{L}$, slúžia nám, aby sme mohli stručne písať o jeho symboloch (predložka *o* sa po grécky povie *meta*) . Konkrétne symboly (napr. Karol) si môžeme predstaviť ako konkrétne reťazce (`'Karol'`) napríklad v jazyku Python. Meta premenné (napr. K) ako pythonovské *premenné*, do ktorých reťazce priraďujeme. Skrátený zápis $\neg h(K)$ formuly ¬hlúpy(Karol) zodpovedá (oveľa menej prehľadnému) pythonovskému výrazu `'¬'` $+\, h \,+$ `'('` $+\, K \,+$ `')'`.

2. spôsob — zhora nadol: Podľa definície 2.21 vzťahu pravdivosti ($\models$) a podľa definície danej štruktúry $\mathcal{M}$ platí:

$$\begin{array}{ccc}
\multicolumn{3}{c}{\mathcal{M} \models (\text{profesor}(\text{Karol}) \to (\neg\text{hlúpy}(\text{Karol}) \land \text{sčítaný}(\text{Karol})))} \\
\multicolumn{3}{c}{\text{vtt}} \\
\mathcal{M} \not\models \text{profesor}(\text{Karol}) & \text{alebo} & \mathcal{M} \models (\neg\text{hlúpy}(\text{Karol}) \land \text{sčítaný}(\text{Karol})) \\
\text{vtt} & & \text{vtt} \\
i(\text{Karol}) \notin i(\text{profesor}) & & \mathcal{M} \models \neg\text{hlúpy}(\text{Karol}) \text{ a } \mathcal{M} \models \text{sčítaný}(\text{Karol})) \\
\text{nepravda} & & \begin{array}{cc} \text{vtt} & \text{vtt} \\ \mathcal{M} \not\models \text{hlúpy}(\text{Karol}) & i(\text{Karol}) \in i(\text{sčítaný}) \\ \text{vtt} & \text{pravda} \\ i(\text{Karol}) \notin i(\text{hlúpy}) & \\ \text{pravda} & \end{array}
\end{array}$$

Pretože pri vyhodnocovaní implikácie sme zistili, že jej antecedent profesor(Karol) nie je nepravdivý v $\mathcal{M}$, museli sme vyhodnotiť aj konzekvent (¬hlúpy(Karol) ∧ sčítaný(Karol)). Ten je konjunkciou dvoch formúl, o ktorých sme zistili, že sú pravdivé v $\mathcal{M}$. Preto je v $\mathcal{M}$ pravdivý aj konzekvent, a teda celá implikácia.

Istou výhodou vyhodnocovania pravdivosti zhora nadol je, že ho niekedy môžeme ukončiť skôr. Keby sme napríklad zistili, že antecedent implikácie je nepravdivý, mohli by sme hneď skonštatovať, že implikácia je pravdivá a konzekventom sa nezaoberať. ♮

2.2.2 V štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$\begin{aligned}
D &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \\
i(\text{Alex}) = 1, \quad i(\text{Bruno}) &= 2, \quad i(\text{Hugo}) = 5, \quad i(\text{Tereza}) = 6, \\
i(\text{žena}) &= \{1, 3, 4, 6\}, \\
i(\text{muž}) &= \{2, 4\}, \\
i(\text{má_rád}) &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 4), (5, 5), (5, 6)\}, \\
i(\text{brat}) &= \{(1, 2), (2, 1), (3, 1), (4, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 6)\}, \\
i(\text{rodič}) &= \{(1, 1), (2, 5), (2, 6), (1, 5), (3, 4), (4, 2), (1, 6), (5, 6), (6, 5)\}, \\
i(\text{starší}) &= \{(2, 1), (5, 6), (6, 5)\},
\end{aligned}$$

zistite postupom *zdola nahor*, či sú formuly A_1 a A_2 pravdivé. Tipnite si, či je formula formula A_3 pravdivá v štruktúre $\mathcal{M}$ a overte svoje tip postupom *zhora nadol* pomocou Henkinovej–Hintikkovej hry (🎮) v prieskumníku štruktúr.

(A_1) (starší(Bruno, Alex) → ¬starší(Alex, Bruno))

(A_2) $(\neg$má_rád(Alex, Bruno) $\leftrightarrow \neg$má_rád(Bruno, Alex))

(A_3) $\big($(rodič(Bruno, Hugo) $\land$ rodič(Bruno, Tereza)) $\to$

$\quad\big($($\neg$žena(Hugo) $\land$ muž(Hugo)) $\to$ brat(Hugo, Tereza)$\big)\big)$

2.2.3 Vytvorte takú štruktúru, v ktorej budú všetky nasledujúce formuly pravdivé:

(A_1) (profesor(Alena) $\land$ učiteľ(Alena))

(A_2) (profesor(Karol) $\leftrightarrow$ učiteľ(Karol))

(A_3) ($\neg$profesor(Karol) $\to$ ($\neg$pozná(Karol, Alena) $\lor$ $\neg$vychádza(Karol, Alena)))

(A_4) Karol $\not\doteq$ Alena

Riešenie. Hľadáme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ tak, aby $\mathcal{M} \models A_1, \dots, \mathcal{M} \models A_4$.

Hľadanie štruktúry je najlepšie začať tak, že sa snažíme splniť tzv. fakty — atomické formuly a ich negácie.

Pri zložitejších formulách nám pomôže, keď podľa definície pravdivosti postupom zhora nadol rozoberieme, kedy majú byť v hľadanej štruktúre pravdivé. Napr. pre najkomplikovanejšiu formulu A_3 tak zistíme, že $\mathcal{M} \models A_3$ vtt $\mathcal{M} \models$ profesor(Karol) alebo $\mathcal{M} \not\models$ pozná(Karol, Alena) alebo $\mathcal{M} \not\models$ vychádza(Karol, Alena).

Vyberieme si poslednú možnosť, lebo predikát vychádza sa v inej formule nenachádza. Môžeme ho teda pokojne interpretovať podľa potrieb pravdivosti A_3. Interpretáciu predikátu vychádza[2] ľahko zvolíme tak, aby $(i(\text{Karol}), i(\text{Alena})) \notin i(\text{vychádza})$, môže byť napríklad prázdna. Samozrejme, často takúto slobodu nemáme a musíme hľadať iné možnosti, ako zabezpečiť pravdivosť zložitých formúl.

Nech

$$
\begin{aligned}
D &= \{\text{školník}, \text{učiteľka218}, \text{upratovačka1}, \text{upratovačka2}\}\\
i(\text{Alena}) &= \text{učiteľka218}\\
i(\text{Karol}) &= \text{školník}\\
i(\text{profesor}) &= \{\text{učiteľka218}\}\\
i(\text{učiteľ}) &= \{\text{učiteľka218}\}\\
i(\text{pozná}) &= \{(\text{školník}, \text{učiteľka218}), (\text{učiteľka218}, \text{školník}),\\
&\qquad (\text{upratovačka1}, \text{upratovačka2})\}\\
i(\text{vychádza}) &= \{(\text{upratovačka1}, \text{upratovačka2}), (\text{upratovačka2}, \text{upratovačka1})\}
\end{aligned}
$$

V tejto štruktúre sú pravdivé všetky formuly A_1–A_4. Zdôvodnenie môžeme spraviť analogicky ako v úlohe 2.2.1. ♮

2.2.4 Vytvorte štruktúru, v ktorej budú súčasne pravdivé všetky nasledujúce formuly:

(A_1) titul(Sofiina_voľba)

(A_2) kniha(k325)

(A_3) má_autora(Sofiina_voľba,Styron)

(A_4) (titul(Kto_chytá_v_žite) ∧ má_autora(Kto_chytá_v_žite, Salinger))

(A_5) (¬(číta(Adam, k325) ∧ obdivuje(Dana, Adam)) →
¬(má_titul(k325, Sofiina_voľba) ∨ má_titul(k325, Kto_chytá_v_žite)))

(A_6) (má_titul(k325, Kto_chytá_v_žite) ↔ ¬má_titul(k325, Sofiina_voľba))

Pomôcka. Aby ste zistili, ako majú byť v štruktúre interpretované predikáty, analyzujte význam formúl podľa definície pravdivosti postupom zhora nadol, ako sme ukázali na prednáške.

2.2.5 Sformulujte základné definície syntaxe (symboly jazyka, atomická formula, formula, podformula) a sémantiky (pravdivosť formuly v štruktúre) pre výrokovú časť logiky prvého rádu:

a) s binárnymi spojkami → (implikácia) a $\nrightarrow$ („a nie“), pričom neformálny význam $(A \nrightarrow B)$ je „A a nie je pravda, že B“.

b) s binárnymi spojkami → (implikácia) a $\veebar$ (exkluzívne alebo, XOR), pričom neformálny význam $(A \veebar B)$ je: buď je pravdivé A, alebo je pravdivé B, ale nie obe súčasne.

Formuly podľa vašich definícií nebudú obsahovať iné spojky okrem vyššie uvedených.

Zadefinujte štandardné spojky (∧, ∨, ¬) ako skratky (teda funkcie nad formulami podobne, ako sme zadefinovali ↔ v dohode 2.8) tak, aby formuly nimi vytvorené mali štandardný význam. Dokážte, že ho majú.

Účelom tejto úlohy je, aby ste si prečítali a upravili definície 2.4–2.21 z prednášky a pokúsili sa osvojiť si spôsob vyjadrovania, ktorý sa v nich používa. Môže vám pripadať ťažkopádny, je však presný. Ak vám nejaká formulácia pripadá zbytočne komplikovaná, môžete sa ju pokúsiť zjednodušiť, no snažte sa, aby ste nezmenili jej význam.

Schopnosť presne sa vyjadriť je potrebná pri programovaní (počítaču musíte všetko vysvetliť do detailov), ale napríklad aj pri písaní špecifikácií softvéru, či požiadaviek na vašu bakalársku prácu.

2.2.6 Sformalizujte nasledujúce skutočnosti do teórie T tak, aby T bola splniteľná. Formalizujte tak, aby každý konkrétny objekt, ktorý sa spomína bol označený indivíduovou konštantou; a aby všetky vlastnosti a vzťahy boli vyjadrené samostatným predikátovým symbolom:

1. Peter si obliekol nohavice a buď tričko alebo košeľu, nie však oboje. Pred odchodom si ešte zobral aj klobúk.
2. Vieme, že tričko nosí len k džínsovým nohaviciam. Tiež vieme, že džínsy si určite neobliekol, ak má klobúk.
3. Do práce Peter tiež chodí iba v džínsach.
4. Ak má Peter rande s Marikou, určite si vzal červenú alebo zelenú košeľu.
5. S Katkou má rande, len ak si zobral si zelenú.
6. Ak nemá rande (ani s jednou), obliekol si tričko.

Ďalej je vašou úlohou:

a) Splniteľnosť T dokážte nájdením štruktúry $\mathcal{M}_1$ takej, že $\mathcal{M}_1 \models T$.

b) Je za daných okolností *možné*, že Peter pôjde do práce? Ak áno, doložte to vhodnou štruktúrou $\mathcal{M}_2$. Ak nie, dokážte, že taká štruktúra $\mathcal{M}_2$ neexistuje.

2.3 Formalizácia do výrokovologických formúl

2.3.1 Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho mimologických symbolov.

(A_1) Lucia a jej kamarát sú deti.

(A_2) Luciin kamarát má obľúbené hračky autíčko a koníka Blesk.

(A_3) Luciina obľúbená hračka je tiež autíčko, Sally, napriek tomu, že je dievča.

(A_4) Peter je meno spomínaného Luciinho kamaráta.

(A_5) Lucia je kamarátska, ale Peter je asi taký kamarátsky ako je skromný.

(A_6) Lucia sa preto hrá buď so svojím obľúbeným autíčkom alebo s Petrovým.

(A_7) V druhom prípade mu totiž musí to svoje požičať.

(A_8) S Bleskom sa nemôžu hrať obaja naraz.

(A_9) Ak je niektorá z menovaných hračiek poškodená, Peter a Lucia sa k nej správajú opatrne.

(A_{10}) Lucia je šťastná, keď sa s ňou Peter hrá.

(A_{11}) Peter je šťastný len za predpokladu, že je šťastná Lucia.

(A_{12}) Obe Petrove obľúbené hračky sú čierne, ale páčia sa aj Lucii, hoci jej obľúbená farba je modrá.

(A_{13}) Lucia sa vždy hrá so svojím autíčkom a buď ešte s bábikou Elzou alebo s kamarátovým čiernym koníkom (alebo s oboma naraz).

(A_{14}) Luciino autíčko je ale modré.

(A_{15}) Ak je slnečný deň, Peter sa hrá s loptou.

(A_{16}) Psa venčí, ak je pekne.

(A_{17}) S Luciou sa hrá, jedine ak nie je pekne.

(A_{18}) Pod nie je pekne myslíme, že nie je slnečný deň.

Pomôcka. Vo výrokoch sa zjavne hovorí o konkrétnych objektoch (napríklad autíčko Luciinho kamaráta), ktoré ale nemajú mená. Pri formalizácii ich označte vhodnými konštantami. Ďalšou zaujímavosťou je počasie. Čoho by mohlo byť vlastnosťou?

2.3.2 Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho mimologických symbolov.

Vytvorte štruktúru, v ktorej budú všetky vaše formuly súčasne pravdivé.

(A_1) Do baru vošli Freddy a George.

(A_2) Barmanka naliala drink Freddymu.

(A_3) Barmankou je buď Mary alebo Jane. Službu má vždy len jedna z nich.

(A_4) Harry nie je v bare, len ak nemá službu Mary, a naopak.

(A_5) Freddy, George a Harry sú kamaráti. Barmanky sa však spolu nekamarátia.

(A_6) Freddymu jeho drink chutí, ak je to whisky, ale nie, ak je to koňak. Vtedy by však určite chutil Georgeovi.

(A_7) Freddymu jeho drink nechutí.

(A_8) Ak je barmankou Mary, tak naliala Freddymu whisky alebo koňak.

(A_9) Jane nalieva Freddymu vždy iba whisky.

(A_{10}) Iné drinky Mary ani Jane nenalievajú, pokiaľ nie je v bare prítomný Harry.

Pomôcka. Všeobecné tvrdenia A_9–A_{10} aplikujte na Freddyho drink. Napíšte teda také formuly, aby tvrdenia A_9–A_{10} platili pre Freddyho drink, ktorý mu barmanka naliala v A_2.

2.3.3 Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho mimologických symbolov.

Vytvorte štruktúru, v ktorej budú všetky vaše formuly súčasne pravdivé.

(A_0) (V bare pracujú traja zamestnanci: Ema, Fero a Gigi. Zároveň sú v bare štyri pracovné pozície: barman/barmanka, časník/čašníčka, upratovačka a vyhadzovač.)

(A_1) Každá pozícia je určite niekým obsadená.

(A_2) Gigi je žena.

(A_3) Fero je buď čašník alebo vyhadzovač. Čašníkom je však, len ak si popri tom privyrába ešte na ďalšej pozícii.

(A_4) V bare pracuje iba jeden vyhadzovač.

(A_5) Ema tiež pracuje na niektorej pozícii. Nie je ale čašníčka, ani upratovačka.

(A_6) Ak je Ema barmankou, nerobí nič iné.

(A_7) Fero sa kamaráti s Emou alebo s Gigi, nie však s oboma.

(A_8) Ema sa kamaráti s Gigi, ale Gigi s ňou nie.

(A_9) Gigi sa kamaráti s Emou, iba ak obe pracujú na rovnakej pozícii.

(A_{10}) Ema sa kamaráti sama so sebou. Fero však nie.

(A_{11}) Fero sa určite kamaráti so všetkými barmanmi.

(A_{12}) Vyhadzovač sa s nikým nekamaráti.

(A_{13}) Vyhadzovačom je žena, len ak aj všetci ostatní zamestnanci sú ženy.

(A_{14}) Bonus: Ak je upratovačka žena, Gigi ňou nie je.

(A_{15}) Bonus: Keď sa Ema kamaráti s Gigi, len ak aj Gigi s ňou, potom je aj Ema žena.

💡 Tvrdenie (A_0) neformalizujte, ale použite ho na špecializáciu nasledujúcich všeobecných tvrdení na uvedených zamestnancov a pracovné pozície.

Okrem tejto výnimky každé tvrdenie formalizujte **verne** a **osobitne**, bez ohľadu na iné tvrdenia. Teda **neprenášajte informácie** z jedného tvrdenia do iných tvrdení. Niektoré formuly budú potom možno rozsiahlejšie, ale z hľadiska kontrolovateľnosti riešenia a hľadania chýb je tento prístup istejší.

2.3.4

a) Sformalizujte nasledujúce výroky ako teóriu $T = \{A_1, \dots, A_9\}$ vo vhodne zvolenom jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

   Snažte sa o to, aby počet predikátových symbolov bol čo najmenší. Zároveň ale nespájajte vzájomne nezávislé vlastnosti a vzťahy do jedného predikátového symbolu. Nevkladajte do formalizácie žiadne ďalšie intuitívne znalosti na pozadí (napr. ak je niekto zlý, nedopĺňajte, že nemôže byť dobrý).

   (A_1) V Čiernom lese stojí chalúpka, ktorá je z perníku.

   (A_2) Niekedy sa jej hovorí aj Perníková veža.

   (A_3) V Perníkovej veži býva zlá čarodejnica. A tiež chlapec Janko a Marienka, *ktorá je jeho súrodencom*.

   (A_4) Janko je chlapec, iba ak Marienka je zlá.

   (A_5) Janko a Marienka sú deti, čarodejnica nie.

   (A_6) Rovnako ako čarodejnica, aj Marienka je silná.

   (A_7) Janko alebo Marienka je chlapec.

   (A_8) Ak je niekto (zo spomínaných) silný, nie je dievča a Janka ochráni.

   (A_9) Ak by to, že Marienka *je Jankovým súrodencom*, znamenalo, že ho ochráni, tak ho čarodejnica určite nezje.

   V jazyku $\mathcal{L}$ ďalej sformalizujte formulami B_1, B_2 a B_3 výroky:

   (B_1) Marienka je dievča.

   (B_2) Janko je dievča.

   (B_3) Ak je Marienka *Jankovým súrodencom*, čarodejnica zje Janka.

b) Vytvorte štruktúru $\mathcal{M}$ pre jazyk $\mathcal{L}$, ktorá je modelom teórie T.

c) Pre každú z formúl B_1, B_2, B_3 (jednotlivo) rozhodnite, či je možné, aby bola pravdivá v nejakom modeli teórie T.

Svoju odpoveď detailne zdôvodnite na základe definície modelu, štruktúry a pravdivosti výrokovologických formúl v nej.

3 Výrokovologické vyplývanie

3.1 Ohodnotenia

3.1.1 Príklad. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokových formúl logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Alena}, \text{Karol}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{učiteľ}, \text{pozná}\}$. Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$, kde:

$$\begin{aligned} D &= \{\text{školník}, \text{učiteľka218}, \text{upratovačka1}, \text{upratovačka2}\} \\ i(\text{Alena}) &= \text{učiteľka218} \\ i(\text{Karol}) &= \text{školník} \\ i(\text{učiteľ}) &= \{\text{učiteľka218}\} \\ i(\text{pozná}) &= \{(\text{školník}, \text{učiteľka218}), (\text{učiteľka218}, \text{školník}), \\ &\qquad (\text{upratovačka1}, \text{upratovačka2})\} \end{aligned}$$

Zostrojte výrokologické ohodnotenie v pre $\mathcal{L}$ zhodné s $\mathcal{M}$.

Riešenie. Na to, aby sme zostrojili výrokovologické ohodnotenie v zhodné s $\mathcal{M}$, musia sa zhodovať na všetkých predikátových atómoch jazyka $\mathcal{L}$, t.j., $v \models A$ vtt $\mathcal{M} \models A$ pre každý atóm $A \in \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$. Preto potrebujeme pre každý predikátový atóm $A \in \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$ rozhodnúť, či je v $\mathcal{M}$ pravdivý alebo nie. V prípade pravdivosti mu v ohodnotení v priradíme hodnotu t, v opačnom prípade hodnotu f.

Zostrojme teda množinu všetkých predikátových atómov jazyka $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} = \{&\text{učiteľ}(\text{Alena}), \text{učiteľ}(\text{Karol}), \\ &\text{pozná}(\text{Alena}, \text{Alena}), \text{pozná}(\text{Karol}, \text{Karol}), \text{pozná}(\text{Alena}, \text{Karol}), \text{pozná}(\text{Karol}, \text{Alena})\} \end{aligned}$$

Následne zostrojíme hľadané ohodnotenie v tak, že pre každý atóm určíme, či je alebo nie je pravdivý v $\mathcal{M}$, a podľa toho mu vo v priradíme príslušnú pravdivostnú hodnotu:

$$\begin{array}{rl} i(\text{Alena}) \in i(\text{učiteľ}) \text{ takže } \mathcal{M} \models \text{učiteľ}(\text{Alena}) & v = \{\text{učiteľ}(\text{Alena}) \mapsto t, \\ i(\text{Karol}) \notin i(\text{učiteľ}) \text{ takže } \mathcal{M} \not\models \text{učiteľ}(\text{Karol}) & \quad \text{učiteľ}(\text{Karol}) \mapsto f, \\ (i(\text{Alena}), i(\text{Alena})) \notin i(\text{pozná}) \text{ takže } \mathcal{M} \not\models \text{pozná}(\text{Alena}, \text{Alena}) & \quad \text{pozná}(\text{Alena}, \text{Alena}) \mapsto f, \\ (i(\text{Karol}), i(\text{Karol})) \notin i(\text{pozná}) \text{ takže } \mathcal{M} \not\models \text{pozná}(\text{Karol}, \text{Karol}) & \quad \text{pozná}(\text{Karol}, \text{Karol}) \mapsto f, \\ (i(\text{Alena}), i(\text{Karol})) \in i(\text{pozná}) \text{ takže } \mathcal{M} \models \text{pozná}(\text{Alena}, \text{Karol}) & \quad \text{pozná}(\text{Alena}, \text{Karol}) \mapsto t, \\ (i(\text{Karol}), i(\text{Alena})) \in i(\text{pozná}) \text{ takže } \mathcal{M} \models \text{pozná}(\text{Karol}, \text{Alena}) & \quad \text{pozná}(\text{Karol}, \text{Alena}) \mapsto t\} \end{array}$$ ♮

3.1.2 Príklad. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{Adam}, \mathsf{Karol}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{študent}^1, \mathsf{profesor}^1, \mathsf{učí}^2\}$. Nech

$$\begin{aligned} v = \{&\mathsf{študent}(\mathsf{Adam}) \mapsto t, && \mathsf{študent}(\mathsf{Karol}) \mapsto f, \\ &\mathsf{profesor}(\mathsf{Adam}) \mapsto f, && \mathsf{profesor}(\mathsf{Karol}) \mapsto t, \\ &\mathsf{učí}(\mathsf{Adam}, \mathsf{Karol}) \mapsto f, && \mathsf{učí}(\mathsf{Karol}, \mathsf{Adam}) \mapsto f\} \end{aligned}$$

je čiastočné ohodnotenie predikátových atómov jazyka $\mathcal{L}$. Zostrojte štruktúru $\mathcal{M}$ zhodnú s v na dom v.

Riešenie. Na to, aby sme zostrojili štruktúru $\mathcal{M}$ zhodnú s v na dom v, teda na definičnom obore ohodnotenia v, potrebujeme pre každý predikátový atóm $A \in \operatorname{dom} v$, pre ktorý $v(A) = t$ zabezpečiť, aby bol A pravdivý v $\mathcal{M}$, teda $\mathcal{M} \models A$. Naopak, pre každý predikátový atóm $B \in \operatorname{dom} v$, pre ktorý $v(B) = f$ musíme zabezpečiť, aby $\mathcal{M} \not\models B$. Konkrétne:

$$\begin{aligned} &v(\mathsf{študent}(\mathsf{Adam})) = t, && \text{takže } \mathcal{M} \models \mathsf{študent}(\mathsf{Adam}), && \text{teda } i(\mathsf{Adam}) \in i(\mathsf{študent}); \\ &v(\mathsf{študent}(\mathsf{Karol})) = f, && \text{takže } \mathcal{M} \not\models \mathsf{študent}(\mathsf{Karol}), && \text{teda } i(\mathsf{Karol}) \notin i(\mathsf{študent}); \\ &v(\mathsf{profesor}(\mathsf{Adam})) = f, && \text{takže } \mathcal{M} \not\models \mathsf{profesor}(\mathsf{Adam}), && \text{teda } i(\mathsf{Adam}) \notin i(\mathsf{profesor}); \\ &v(\mathsf{profesor}(\mathsf{Karol})) = t, && \text{takže } \mathcal{M} \models \mathsf{profesor}(\mathsf{Karol}), && \text{teda } i(\mathsf{Karol}) \in i(\mathsf{profesor}); \\ &v(\mathsf{učí}(\mathsf{Adam}, \mathsf{Karol})) = f, && \text{takže } \mathcal{M} \not\models \mathsf{učí}(\mathsf{Adam}, \mathsf{Karol}), && \text{teda } (i(\mathsf{Adam}), i(\mathsf{Karol})) \notin i(\mathsf{učí}); \\ &v(\mathsf{učí}(\mathsf{Karol}, \mathsf{Adam})) = f, && \text{takže } \mathcal{M} \not\models \mathsf{učí}(\mathsf{Karol}, \mathsf{Adam}), && \text{teda } (i(\mathsf{Karol}), i(\mathsf{Adam})) \notin i(\mathsf{učí}). \end{aligned}$$

Všimnime si, že ohodnotenie v nepriraďuje pravdivostnú hodnotu všetkým predikátovým atómom z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$. V prípade týchto atómov nezáleží, či budú alebo nebudú pravdivé v $\mathcal{M}$. Teraz už jednoducho zostrojíme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ napríklad takto:

Zvolíme si doménu s prinajmenšom rovnakou kardinalitou ako množina konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a každou konštantou pomenujeme iný prvok:

$$\begin{aligned} D &= \{s352, s667, s986, p520, p830, p921\}, \\ i(\mathsf{Adam}) &= s667, \\ i(\mathsf{Karol}) &= p830. \end{aligned}$$

Následne skonštruujeme interpretácie predikátov tak, aby v interpretujúcich množinách boli resp. neboli tieto prvky alebo ich n-tice tak, ako sme zistili vyššie:

$$\begin{aligned} i(\mathsf{študent}) &= \{s352, s667, s986\}, \\ i(\mathsf{profesor}) &= \{p520, p830, p921\}, \\ i(\mathsf{učí}) &= \{(p520, s667), (p830, s352), (p830, s986)\}. \end{aligned}$$ ♮

3.1.3

a) Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Jack}, \text{Corona}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{pivo}^1, \text{pije}^2\}$. Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$, kde:

$$\begin{aligned} D &= \{s1, s2, s3, p1, p2\} \\ i(\text{Jack}) &= s3, \\ i(\text{Corona}) &= p1, \\ i(\text{pivo}) &= \{p1, p2\}, \\ i(\text{pije}) &= \{(s1, p1), (s2, p1), (s2, p2)\} \end{aligned}$$

Zostrojte výrokovologické ohodnotenie v pre $\mathcal{L}$ zhodné so štruktúrou $\mathcal{M}$.

b) Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Andy}, \text{Woody}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{hračka}^1, \text{chlapec}^1, \text{hrá\_sa}^2\}$. Nech

$$\begin{aligned} v = \{&\text{hračka(Woody)} \mapsto t, && \text{hračka(Andy)} \mapsto f, \\ &\text{chlapec(Andy)} \mapsto t, && \text{chlapec(Woody)} \mapsto f, \\ &\text{hrá\_sa(Andy, Woody)} \mapsto t, && \text{hrá\_sa(Woody, Andy)} \mapsto f\} \end{aligned}$$

je čiastočné ohodnotenie predikátových atómov jazyka $\mathcal{L}$. Zostrojte štruktúru $\mathcal{M}$ zhodnú s v na dom v.

3.2 Vyplývanie, nezávislosť, nesplniteľnosť

3.2.1 Majme výrokovologickú teóriu T:

$$T = \left\{ \begin{aligned} &A_1\colon \big(\text{tancuje\_s(A, B)} \to (\text{frajer(A)} \lor \text{spieva(A)})\big), \\ &A_2\colon (\neg\text{tancuje\_s(A, B)} \lor \neg\text{spieva(A)}), \\ &A_3\colon (\neg\text{spieva(A)} \to \text{frajer(A)}) \end{aligned} \right\}.$$

O každej z formúl X_1–X_3 rozhodnite, či a) vyplýva z teórie T, b) je nezávislá od T, alebo c) ani z T nevyplýva, ani od nej nie je nezávislá:

(X_1) (tancuje_s(A, B) → frajer(A)),

(X_2) ¬spieva(A),

(X_3) (¬spieva(A) ∧ ¬frajer(A)).

Aká formula vyplýva z teórie v prípade c)?

3.2.2 Príklad. (Variácia na Smullyana [5]) V prípade bankovej lúpeže inšpektor Nick Fishtrawn zaistil dvoch podozrivých Andrewsa a Browna, pričom zistil nasledujúce skutočnosti:

(A_1) Andrews nikdy nepracuje sám.

(A_2) Nikto ďalší do prípadu už zapletený nie je.

Pomôžte inšpektorovi Fishtrawnovi zistiť, kto z podozrivých je určite vinný a má ho obviniť, kto je naopak určite nevinný a má ho oslobodiť, a o koho vine či nevine nemožno rozhodnúť. Svoje odpovede dokážte.

Riešenie. Zistenia A_1–A_2 sformalizujeme ako teóriu v jazyku výrokových formúl logiky prvého rádu s množinou konštantných symbolov $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$ (kde A značí Andrews a B značí Brown) a s množinou predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{vinný}^1\}$ (kde vinný(x) znamená, že x je vinný).

Ostatné skutočnosti, ako napr. konkrétny prípad, kto s kým pracuje a kto je do prípadu zapletený, nepotrebujeme reprezentovať indivíduovými konštantami alebo predikátovými symbolmi, pretože hovoria iba o vine alebo nevine podozrivých, a to už máme dostatočne reprezentované predikátovým symbolom $\mathsf{vinný}^1$.

Teória T je nasledovná:

$$T = \left\{\begin{aligned} &A_1\colon (\mathsf{vinný}(\mathsf{A}) \to \mathsf{vinný}(\mathsf{B})), \\ &A_2\colon (\mathsf{vinný}(\mathsf{A}) \lor \mathsf{vinný}(\mathsf{B})) \end{aligned}\right\}.$$

Najprv zistíme, či je teória T splniteľná. Nájdeme všetky výrokové ohodnotenia atomických formúl, ktorá sa v nej nachádzajú, a zistíme, či je aspoň v jednom pravdivá:

	v_i				T	
	vinný(A)	vinný(B)	vinný(A)	vinný(B)	(vinný(A) → vinný(B))	(vinný(A) ∨ vinný(B))
v_1	f	f	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$
v_2	t	f	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$
v_3	f	t	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$
v_4	t	t	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$

Zistili sme, že T je splniteľná, keďže napr. $v_3 \models_p T$. Teória má dva modely, v_3 a v_4.

Môžeme teda prejsť na rozhodnutie o vine alebo nevine podozrivých. Urobíme tak na základe vyplývania:

- $T \models_{\mathrm{p}}$ vinný(B), pretože $v_i \models_{\mathrm{p}}$ vinný(B) pre oba modely v_i, $i \in \{3, 4\}$. Vieme teda určite rozhodnúť, že Brown je vinný.
- Keďže pre žiadneho podozrivého x neplatí $T \models_{\mathrm{p}} \neg$vinný$(x)$, nevieme o nikom rozhodnúť, že je nevinný.
- Pretože $T \not\models_{\mathrm{p}}$ vinný(A), keďže $v_3 \not\models_{\mathrm{p}}$ vinný(A), a zároveň $T \not\models_{\mathrm{p}} \neg$vinný(A), keďže $v_4 \models_{\mathrm{p}}$ vinný(A) – čiže formula vinný(A) je nezávislá od T – tak o Adamsovej vine na základe zistených skutočností nemožno rozhodnúť.

Uvedomme si, že záver, že je Brown vinný, môžeme zo zistenia $T \models_{\mathrm{p}}$ vinný(B) urobiť len vďaka tomu, že sme predtým overili splniteľnosť T. Ak by totiž teória T bola nesplniteľná, nemožno takýto ani žiadny iný záver vyvodiť. Z nesplniteľnej teórie totiž vyplýva každá formula, teda aj to, že je Brown vinný, aj to že je nevinný. Na základe takejto teórie nemôžeme vyvodiť žiadne zmysluplné závery. ♮

3.2.3 (Variácia na Smullyana [5]) Inšpektor Scotland Yardu Nick Fishtrawn predviedol troch podozrivých z lúpeže klenotov v obchodnom dome Harrods: Daviesa, Milesa a Parkera. Inšpektor vyšetrovaním zistil nasledovné indície:

(A_1) Miles nikdy nepracuje sám, teda lúpil, iba ak sa na lúpeži podieľal aspoň jeden zo zvyšných dvoch podozrivých.

(A_2) Davies vždy pracuje s Parkerom.

(A_3) Parker sa s Milesom neznáša, preto určite nelúpili spolu.

(A_4) Z lúpeže môžu byť vinní len títo traja podozriví a nikto iný.

Sformalizujte zistené skutočnosti ako výrokovologickú teóriu T v jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu s vhodne zvolenými množinami $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

a) Využitím splniteľnosti, vyplývania a nezávislosti rozhodnite, koho z podozrivých môže inšpektor s istotou obviniť, koho môže bez obáv prepustiť, lebo sa krádeže určite nezúčastnil, a koho musí prepustiť pre nedostatok dôkazov.

b) Aké by boli vaše závery, keby inšpektor zistil aj nasledujúcu skutočnosť?

   (A_5) Milesa videli dvaja spoľahliví svedkovia utekať s lupom z obchodného domu, takže je určite vinný.

Pomôcka. Formalizáciu tentoraz obmedzte na skutočnosti, ktoré sú postačujúce k vyriešeniu úlohy (teda sústreďte sa na vinu podozrivých, ak je to postačujúce).

3.2.4 (Variácia na Smullyana [5]) Inšpektor Nick Fishtrawn rieši ďalší zapeklitý prípad lúpeže. Podozriví sú Addams, Doyle a Harris. Inšpektor zistil nasledujúce skutočnosti:

(A_1) Ak pršalo, určite je vinný Harris.

(A_2) Naopak, ak nepršalo, vinný je jeden zo zvyšných dvoch podozrivých.

(A_3) Harris má vždy najviac jedného kumpána.

(A_4) Addams pracuje, ak je jeho kumpánom Doyle.

(A_5) Addams pracuje, len ak prší.

(A_6) Nikto iný nie je podozrivý.

Sformalizujte zistené skutočnosti ako výrokovologickú teóriu T v jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu s vhodne zvolenými množinami $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

S využitím splniteľnosti, vyplývania a nezávislosti rozhodnite o vine a nevine jednotlivých podozrivých, pokiaľ to je možné.

Pomôcka. Pri formalizácii by vám mali stačiť 4 predikátové atómy.

3.2.5 (Ghidini a Serafini [1]) Prechádzate labyrintom a ocitnete sa na križovatke, z ktorej vedú tri možné cesty: cesta naľavo je vydláždená zlatom, cesta pred vami je vydláždená mramorom a cesta napravo je vysypaná kamienkami. Každú cestu stráži strážnik a každý z nich vám povie niečo o cestách:

Strážnik zlatej cesty: „Táto cesta vedie priamo do stredu labyrintu. Navyše, ak vás kamienky dovedú do stredu, tak vás do stredu dovedie aj mramor.“

Strážnik mramorovej cesty: „Ani zlato, ani kamienky nevedú do stredu labyrintu.“

Strážnik kamienkovej cesty: „Nasledujte zlato a dosiahnete stred, nasledujte mramor a stratíte sa.“

Viete, že všetci strážnici stále klamú.

i. Dá sa na základe uvedených informácií rozhodovať o tom, ktoré cesty vedú a ktoré nevedú do stredu labyrintu?

ii. O ktorých cestách môžete s istotou povedať, že vedú do stredu labyrintu?

iii. Ktoré z ciest určite nevedú do stredu labyrintu?

iv. O ktorých cestách sa nedá rozhodnúť, že do stredu labyrintu vedú alebo nevedú?

Vašou úlohou je:

a) Sformalizovať uvedené skutočnosti ako výrokologickú teóriu vo vhodnom jazyku, pričom význam symbolov stručne vysvetlíte.
b) Určiť, aké logické problémy zodpovedajú otázkam i–iv (napr. rozhodnutie, či nejaká konkrétna formula vyplýva z konkrétnej teórie, je od nej nezávislá, teória je (ne)splniteľná, nájdenie všetkých modelov a pod.).
c) Vyriešiť logické problémy, ktoré ste určili.
d) Zodpovedať otázky i–iv na základe riešení logických problémov.

Pomôcka. Pri formalizácii by vám mali stačiť 3 predikátové atómy.

Vyriešenie samotnej hádanky je len malá časť tejto úlohy. Dôsledne vyriešte všetky podúlohy.

3.2.6 Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho predikátových symbolov.

(A_1) Ak Minister nie je schopný, Premiér ho odvolá. Alebo je Premiérov kamarát.

(A_2) Minister je Premiérov kamarát, ak ho Premiér neodvolal.

(A_3) Minister, ktorý účinne zasiahol proti pandémii, je schopný.

(A_4) Premiér Ministra neodvolal, napriek tomu, že Minister proti pandémii účinne nezasiahol.

Pomocou vašej teórie využitím výrokovologickej splniteľnosti, vyplývania a nezávislosti rozhodnite (ak je to možné), či na základe výrokov A_1–A_4:

(C_1) je Minister schopný,

(C_2) Premiér Ministra odvolá,

(C_3) Minister je Premiérov kamarát.

Pomôcka. V tomto zadaní chápeme Ministra a Premiéra ako konkrétne osoby, nie ako roly nejakých nepomenovaných osôb.

3.2.7 Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho predikátových symbolov.

(A_1) Keď Rusko zaútočilo na Ukrajinu, tak porušilo Budapeštianske memorandum alebo Putin klame.

(A_2) Rusko je agresor, ak porušilo Budapeštianske memorandum a na Ukrajinu zaútočilo.

(A_3) Rusko neporušilo Budapeštianske memorandum, len ak Putin neklame.

(A_4) Ak to, že Rusko zaútočilo na Ukrajinu, znamená, že porušilo Budapeštianske memorandum, tak Putin klame.

Pomocou vašej teórie využitím výrokovologickej splniteľnosti, vyplývania a nezávislosti zistite, ktoré z nasledujúcich výrokov (C_1)–(C_3) sú na základe výrokov (A_1)–(A_4) určite pravdivé, určite nepravdivé, a o ktorých to nemožno rozhodnúť:

(C_1) Putin klame,

(C_2) Rusko Budapeštianske memorandum neporušilo,

(C_3) Rusko je agresor, iba ak zaútočilo na Ukrajinu.

4 Vlastnosti a vzťahy výrokovologických formúl

4.1 Tautológie, splniteľné, falzifikovateľné a nesplniteľné formuly

4.1.1 Majme jazyk $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{\text{pekné}, \text{rýchle}, \text{ekologické}\}$ a $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{\text{moje\_auto}\}$. Označme $P = \text{pekné}(\text{moje\_auto})$, $R = \text{rýchle}(\text{moje\_auto})$ a $E = \text{ekologické}(\text{moje\_auto})$.

Rozhodnite o každej z nasledujúcich formúl nad jazykom $\mathcal{L}$, či je i. tautológia, ii. splniteľná, iii. falzifikovateľná, iv. nesplniteľná. Pri každej formule rozhodnite o *všetkých* uvedených vlastnostiach a rozhodnutia zdôvodnite.

a) $(\neg(P \land E) \to (\neg P \land \neg E))$
b) $((P \lor \neg P) \land \neg(E \lor \neg E))$
c) $(P \to (P \to (P \to P)))$
d) $(P \land (E \lor \neg(P \to R)))$
e) $(((P \to P) \to P) \to \neg P)$
f) $\neg(P \leftrightarrow \neg P)$
g) $((P \land \neg P) \lor (P \lor \neg P))$
h) $(P \land \neg P)$
i) $(((P \to R) \to P) \to P)$
j) $\neg\neg\neg(P \lor P)$
k) $((P \land E) \to (\neg P \land E))$
l) $\neg((P \lor R) \lor (\neg P \lor E))$
m) $\big(((E \lor \neg R) \land (P \to \neg R)) \to (\neg R \to (\neg P \land E))\big)$
n) $\big((P \to (\neg R \to E)) \land ((\neg P \lor \neg E) \land \neg(P \to R))\big)$

Riešenie. a) Aby sme rozhodli, akého druhu je formula $A = (\neg(P \land E) \to (\neg P \land \neg E))$, podľa tvrdení 4.3 a 4.4 stačí preskúmať všetky rôzne ohodnotenia výrokovologických atómov, ktoré sa vyskytujú v A:

Keďže v A sa vyskytujú dva atómy, takéto ohodnotenia sú štyri. Podobne ako v úlohách o vyplývaní výsledok nášho skúmania, ako aj čiastkové výsledky, zapíšeme do tabuľky.

	v_i							
	P	E	$\neg P$	$\neg E$	$(P \land E)$	$\neg(P \land E)$	$(\neg P \land \neg E)$	$(\neg(P \land E) \to (\neg P \land \neg E))$
v_1	f	f	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$
v_2	t	f	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$
v_3	f	t	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$
v_4	t	t	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$

Keďže máme rozhodnúť o vlastnostiach formuly A, nezabudneme vysloviť závery a zdôvodniť ich:

i. Keďže $v_2 \not\models_p A$, teda A *nie je pravdivá vo všetkých* ohodnoteniach, tak A *nie je* tautológiou.

ii. Keďže $v_1 \models_p A$, teda A *je pravdivá v aspoň jednom* ohodnotení, tak A *je* splniteľná.

iii. Keďže $v_2 \not\models_p A$, teda A *je nepravdivá v aspoň jednom* ohodnotení, tak A *je* aj falzifikovateľná.

iv. Keďže $v_1 \models_p A$, teda *nie je pravda*, že A je *nepravdivá vo všetkých* ohodnoteniach, tak A *nie je* nesplniteľná. ♮

4.1.2 O každej z nasledujúcich formúl nad jazykom $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{ľúbi}\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{P}, \text{L}\}$, pričom P značí Peter a L značí Lucia rozhodnite, či je i. tautológia, ii. splniteľná, iii. falzifikovateľná, iv. nesplniteľná. Rozhodnite o všetkých možnostiach a rozhodnutia zdôvodnite.

(X_1) ((¬ľúbi(P, L) → ¬ľúbi(L, P)) ∧ (ľúbi(P, L) ∨ ľúbi(L, P)))

(X_2) (¬(ľúbi(P, L) ∧ ľúbi(L, P)) ↔ (¬ľúbi(P, L) ∨ ¬ľúbi(L, P)))

(X_3) ((¬ľúbi(P, L) → ľúbi(L, P)) ∧ ¬(ľúbi(P, L) ∨ ľúbi(L, P)))

4.1.3 Nech $\mathcal{L}$ je ľubovoľný jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Nech A a B sú ľubovoľné výrokovologické formuly jazyka $\mathcal{L}$.

O každej z nasledujúcich formúl v jazyku $\mathcal{L}$ rozhodnite, či je i. tautológia, ii. splniteľná, iii. falzifikovateľná, iv. nesplniteľná. Rozhodnite o všetkých možnostiach a rozhodnutia zdôvodnite.

(X_1) $\neg(\neg(A \land B) \leftrightarrow (\neg A \lor \neg B))$

(X_2) $((\neg A \to \neg B) \land (A \lor B))$

(X_3) $\neg((\neg A \to B) \land \neg(A \lor B))$

Riešenie pre X_1. Nech A a B sú ľubovoľné výrokovologické formuly jazyka $\mathcal{L}$.

> Pretože formuly A a B nemusia byť atomické, **nemôžeme** vymenovať ich ohodnotenia tak ako v riešení úlohy 4.1.1. $v(A)$ nie je definované, ak A nie je predikátový atóm.
>
> **Môžeme** však zobrať ľubovoľné ohodnotenie v pre jazyk $\mathcal{L}$ a skúmať rôzne prípady pravdivosti ($\models_{\mathrm{p}}$) formúl A a B. Kvôli prehľadnosti zapíšeme možné prípady do tabuľky. **Všimnite si** však, ako sa táto tabuľka líši od tabuľky z riešenia úlohy 4.1.1.

Nech v je ľubovoľné ohodnotenie pre jazyk $\mathcal{L}$. Preskúmajme, ako pravdivosť a nepravdivosť formúl A a B vo v ovplyvňuje pravdivosť formuly X_1:

v								$X_1 =$
A	B	$(A \land B)$	$\neg(A \land B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A \lor \neg B)$	$(\neg(A \land B) \leftrightarrow (\neg A \lor \neg B))$	$\neg(\neg(A \land B) \leftrightarrow (\neg A \lor \neg B))$
$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$
$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$
$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$
$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$

Rozobrali sme všetky prípady pravdivosti A a B v ohodnotení v. Ako vidíme, v každom prípade je formula X_1 nepravdivá.

Pretože v bolo ľubovovoľné ohodnotenie, môžeme naše zistenie zovšeobecniť: X_1 je nepravdivá v každom ohodnotení v pre jazyk $\mathcal{L}$. Z definícií vlastností formúl teda vyplýva, že formula X_1:

i. nie je tautológia,

ii. nie je splniteľná,

iii. je falzifikovateľná,

iv. je nesplniteľná. ♮

Riešenie pre X_2. Nech A a B sú ľubovoľné výrokovologické formuly jazyka $\mathcal{L}$. Nech v je ľubovoľné ohodnotenie pre jazyk $\mathcal{L}$. Preskúmajme, ako pravdivosť a nepravdivosť formúl A a B vo v ovplyvňuje pravdivosť formuly X_2:

v						$X_2 =$
A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A \to \neg B)$	$(A \lor B)$	$((\neg A \to \neg B) \land (A \lor B))$
$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$
$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$
$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$
$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$

Rozobrali sme všetky prípady pravdivosti A a B v ohodnotení v. V prípade, že $v \models_{\mathrm{p}} A$, je formula X_2 v v pravdivá, kým v opačnom prípade je nepravdivá.

Tento výsledok sa **nedá** jednoducho zovšeobecniť. Bez ďalších informácií o formulách A a B nemôžeme rozhodnúť **o žiadnej** z požadovaných vlastností formuly X_2.

Tento záver na prvý pohľad môže zdať prehnane pesimistický. Z tabuľky sa predsa **zdá**, že by X_2 mala byť splniteľná aj falzifikovateľná a nemala by byť tautológia ani nesplniteľná. Ale nie je to tak:

Keď zvolíme formulu A tak, že je nesplniteľná, nebudú existovať žiadne ohodnotenia, kde by bola pravdivá. Potom môžu nastať iba prípady z prvých dvoch riadkov našej tabuľky, teda v každom ohodnotení bude formula $((\neg A \to \neg B) \land (A \lor B))$ nepravdivá, a teda bude nesplniteľná a zároveň falzifikovateľná (a preto nebude taulógia ani splniteľná).

Ak ale napríklad vyberieme za A tautológiu a za B nesplniteľnú formulu, v každom ohodnotení nastane iba 3. prípad, preto $((\neg A \to \neg B) \land (A \lor B))$ bude tautológia (a teda splniteľná atď.).

Nakoniec, ak A bude napríklad nejaký predikátový atóm $P(c)$ z jazyka $\mathcal{L}$ a $B = \neg P(c)$, v ohodnotení v_1, kde $v_1(P(c)) = f$ bude $((\neg A \to \neg B) \land (A \lor B))$ pravdivá (2. prípad), kým v ohodnotení v_2, kde $v_2(P(c)) = t$ bude $((\neg A \to \neg B) \land (A \lor B))$ nepravdivá (3. prípad). V tomto prípade bude teda formula $((\neg A \to \neg B) \land (A \lor B))$ splniteľná aj falzifikovateľná. ♮

4.2 Ekvivalencia

4.2.1 Dokážte, že nasledujúce dvojice formúl nad jazykom $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{f}^1, \mathsf{h}^1, \mathsf{b}^1, \mathsf{NHL}^1, \mathsf{i}^1, \mathsf{r}^1, \mathsf{m}^1\}$, kde f značí futbalista, h značí hokejista, b značí bohatý, NHL značí hráč NHL, i značí inteligentná, r značí rozumná, a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{M}, \mathsf{E}\}$, kde M značí Miro, E značí Eva, sú (sémanticky) ekvivalentné

a) de Morganove pravidlá:
$\neg(\mathsf{f}(\mathsf{M}) \land \mathsf{h}(\mathsf{M}))$ a $(\neg\mathsf{f}(\mathsf{M}) \lor \neg\mathsf{h}(\mathsf{M}))$,
$\neg(\mathsf{f}(\mathsf{M}) \lor \mathsf{h}(\mathsf{M}))$ a $(\neg\mathsf{f}(\mathsf{M}) \land \neg\mathsf{h}(\mathsf{M}))$;

b) $(\mathsf{h}(\mathsf{M}) \to (\mathsf{b}(\mathsf{M}) \to \mathsf{NHL}(\mathsf{M}))$ a $((\mathsf{h}(\mathsf{M}) \land \mathsf{b}(\mathsf{M})) \to \mathsf{NHL}(\mathsf{M})))$;

c) $\neg(\mathsf{i}(\mathsf{E}) \land (\mathsf{r}(\mathsf{E}) \lor \mathsf{b}(\mathsf{E})))$ a $(\neg\mathsf{i}(\mathsf{E}) \lor \neg\mathsf{r}(\mathsf{E})) \land (\neg\mathsf{i}(\mathsf{E}) \lor \neg\mathsf{b}(\mathsf{E})))$.

d) $\neg\big(\mathsf{i}(\mathsf{E}) \to (\mathsf{r}(\mathsf{E}) \land \mathsf{b}(\mathsf{E}))\big)$ a $\big(\neg(\mathsf{i}(\mathsf{E}) \to \mathsf{r}(\mathsf{E})) \lor (\mathsf{i}(\mathsf{E}) \land \neg\mathsf{b}(\mathsf{E}))\big)$

Riešenie. a) Dokážme ekvivalentnosť formúl de Morganovo pravidla pre konjunkciu. Preverme pravdivosť formúl $\neg(\mathsf{f}(\mathsf{M})\land\mathsf{h}(\mathsf{M}))$ a $(\neg\mathsf{f}(\mathsf{M})\lor\neg\mathsf{h}(\mathsf{M}))$ vo všetkých rôznych ohodnotenia tých predikátových atómov, ktoré sa v skúmaných formulách vyskytujú:

	v_i						
	f(M)	h(M)	¬f(M)	¬h(M)	(f(M) ∧ h(M))	¬(f(M) ∧ h(M))	(¬f(M) ∨ ¬h(M))
v_1	f	f	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$
v_2	t	f	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$
v_3	f	t	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$
v_4	t	t	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$

Z tabuľky vidíme, že skutočne pre každé ohodnotenie v_i, $i \in \{1, \dots, 4\}$, platí $v_i \models_p$ ¬(f(M) ∧ h(M)) vtt $v_i \models_p$ (¬f(M) ∨ ¬h(M)). Z toho, z tvrdenia 4.3 z prednášky a z definície ekvivalencie 4.10 vyplýva, že formuly ¬(f(M) ∧ h(M)) a (¬f(M) ∨ ¬h(M)) sú ekvivalentné.

Podobne ako pri skúmaní sémantických vlastností jednotlivých formúl či overovaní vyplývania, nezabudnime vysloviť záver, ktorý z preskúmania všetkých ohodnotení vyvodzujeme.

♮

4.3 Tvrdenia o vyplývaní, splniteľnosti, atď.

4.3.1 Príklad. Dokážte: Nech $\mathcal{L}_1$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti s množinami indivíduových konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$ a predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$, pričom z $\notin \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$. Potom existuje jazyk $\mathcal{L}_2$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti s množinou indivíduových konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_2} = \{\mathrm{z}\}$ a množinou predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}$, taký že pre ľubovoľnú výrokovologickú formulu A v jazyku $\mathcal{L}_1$ existuje formula B v jazyku $\mathcal{L}_2$ taká, že

a) A je výrokovologicky splniteľná *vtt* B je výrokovologicky splniteľná (teda výrokové ohodnotenie v_1 také, že $v_1 \models_p A$, existuje *vtt* existuje výrokové ohodnotenie v_2 také, že $v_2 \models_p B$).

b) Štruktúra $\mathcal{M}_1$ taká, že $\mathcal{M}_1 \models A$, existuje *vtt* existuje štruktúra $\mathcal{M}_2$ taká, že $\mathcal{M}_2 \models B$.

Riešenie. Nech $\mathcal{L}_1$ je jazyk podľa predpokladov. Jazyk $\mathcal{L}_2$ skonštruujeme tak, že $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_2} = \{\mathrm{z}\}$ (tu ani nemáme inú možnosť) a

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2} = \{ P\_c_1\_\dots\_c_n{}^1 \mid P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1},\ \mathrm{ar}_{\mathcal{L}_1}(P) = n,\ c_1, \dots, c_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1} \}.$$

Každý predikátový symbol jazyka $\mathcal{L}_2$ je teda unárny a vznikne spojením (pomocou podčiarnikov) niektorého pôvodného predikátového symbolu P a toľkých pôvodných indivíduových konštánt, aká je arita predikátu P. Jazyk $\mathcal{L}_2$ obsahuje všetky možné také kombinácie.

Nech A je ľubovoľná formula v jazyku $\mathcal{L}_1$. Formulu B v jazyku $\mathcal{L}_2$ skonštruujeme z formuly A tak, že každý výskyt atómu $P(c_1, \dots, c_n)$ nahradíme atómom $P\_c_1\_ \dots \_c_n(\mathrm{z})$, pre všetky $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$ a $c_1, \dots, c_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$, kde n je arita predikátového symbolu P. (Teda napr. ak A = (ľúbi(Peter, Lucia) → naliala(Lucia, Peter, Pivo)), tak B = (ľúbi_Peter_Lucia(z) → naliala_Lucia_Peter_Pivo(z)).)

Dokážme najprv časť a), ⇒: Nech v_1 je výrokové ohodnotenie také, že $v_1 \models A$. Výrokové ohodnotenie v_2 skonštruujeme nasledovne:

$$v_2(P\_c_1\_ \dots \_c_n(\mathrm{z})) = v_1(P(c_1, \dots, c_n)), \qquad \text{pre každý } P\_c_1\_ \dots \_c_n \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}.$$

Ostáva nám dokázať, že platí $v_1 \models A$ vtt $v_2 \models B$. Dôkaz urobíme indukciou na konštrukciu formuly A:

- Nech A je atomická formula. Ak A je predikátový atóm, má tvar $A = P(c_1, \dots, c_n)$, pre nejaký n-árny predikátový symbol $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$ a nejaké indivíduové konštanty $c_1, \dots, c_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$, a jej zodpovedajúca formula $B = P\_c_1\_ \dots \_c_n(\mathrm{z})$.

  Keďže v_2 sme skonštruovali tak, že oba atómy A aj B sú príslušným ohodnotením ohodnotené rovnako (t.j. $v_1(A) = v_2(B)$), vidíme, že platí $v_1 \models_p A$ vtt $v_2 \models_p B$.

  Ak A je rovnostný atóm, tvrdenie preň triviálne platí. Tvrdenie máme dokázať iba pre výrokovologické formuly, teda také, v ktorých sa rovnosť nevyskytuje.
- Nech A je v tvare $\neg A_1$. Potom B je v tvare $\neg B_1$, pričom B_1 je zodpovedajúca formula k formule A_1. Z indukčného predpokladu máme $v_1 \models_p A_1$ vtt $v_2 \models_p B_1$. Z definície pravdivosti formuly v ohodnotení pre $\neg$ potom platí aj $v_1 \models_p A$ vtt $v_1 \not\models_p A_1$ vtt $v_2 \not\models_p B_1$ vtt $v_2 \models_p B$.
- Nech A je v tvare $(A_1 \land A_2)$. Potom B je v tvare $(B_1 \land B_2)$, pričom B_1, B_2 sú zodpovedajúce formuly k formulám A_1, A_2 (v tomto poradí). Z indukčného predpokladu máme $v_1 \models_p A_1$ vtt $v_2 \models_p B_1$ ako aj $v_1 \models_p A_2$ vtt $v_2 \models_p B_2$. Z definície pravdivosti formuly v ohodnotení $(\land)$ potom platí aj $v_1 \models_p A$ vtt $v_1 \models_p A_1$ a $v_1 \models_p A_2$ vtt $v_2 \models_p B_1$ a $v_2 \models_p B_2$ vtt $v_2 \models_p B$.
- Nech A je v tvare $(A_1 \lor A_2)$. Potom B je v tvare $(B_1 \lor B_2)$, pričom B_1, B_2 sú zodpovedajúce formuly k formulám A_1, A_2 (v tomto poradí). Z indukčného predpokladu máme $v_1 \models_p A_1$ vtt $v_2 \models_p B_1$ ako aj $v_1 \models_p A_2$ vtt $v_2 \models_p B_2$. Z definície pravdivosti formuly v ohodnotení $(\lor)$ potom platí aj $v_1 \models_p A$ vtt $v_2 \models_p B$ podobne ako v prípade konjunkcie.
- Nech A je v tvare $(A_1 \to A_2)$. Potom B je v tvare $(B_1 \to B_2)$, pričom B_1, B_2 sú zodpovedajúce formuly k formulám A_1, A_2 (v tomto poradí). Z indukčného predpokladu máme $v_1 \models_p A_1$ vtt $v_2 \models_p B_1$ ako aj $v_1 \models_p A_2$ vtt $v_2 \models_p B_2$. Z definície pravdivosti formuly v ohodnotení $(\to)$ potom platí aj $v_1 \models_p A$ vtt $v_2 \models_p B$ podobne ako v prípade konjunkcie.

Časť a), $\Leftarrow$ je analogická, konštrukciu otočíme: Nech v_2 je výrokové ohodnotenie také, že $v_2 \models_p B$. Výrokové ohodnotenie v_1 skonštruujeme nasledovne:

$$v_1(P(c_1, \dots, c_n)) = v_2(P\_c_1\_ \dots \_c_n(\mathrm{z})),$$

pre všetky $P^n \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$ a $c_1, \dots, c_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$. V prípade atomickej formuly A opäť priamo z konštrukcie vyplýva, že $v_1 \models_p A$ vtt $v_2 \models_p B$. Indukciou na konštrukciu formuly poľahky dokážeme to isté pre ľubovoľné (neatomické) výrokovologické formuly vo všeobecnosti.

Dokážme teraz časť b), $\Rightarrow$: Nech $\mathcal{M}_1 = (D_1, i_1)$ je štruktúra taká, že $\mathcal{M}_1 \models A$. Štruktúru $\mathcal{M}_2 = (D_2, i_2)$ skonštruujeme nasledovne:

$$\begin{aligned}
D_2 &= \{7\},\\
i_2(\mathrm{z}) &= 7,\\
i_2(P_c_1_ \dots _c_n) &= \begin{cases} \{7\}, & \text{ak } (i_1(c_1), \dots, i_1(c_n)) \in i_1(P),\\ \emptyset, & \text{inak,} \end{cases}
\end{aligned}$$

pre každý $P\_c_1\_ \dots \_c_n \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}$.

Ak $A = P(c_1, \dots, c_n)$ je atomická formula (a teda $B = P\_c_1\_ \dots \_c_n(\mathrm{z})$), tak z definície pravdivosti formuly v štruktúre a z konštrukcie $\mathcal{M}_2$ máme:

$$\mathcal{M}_1 \models A \quad \text{vtt} \quad (i_1(c_1), \dots, i_1(c_n)) \in i_1(P) \quad \text{vtt} \quad i_2(\mathrm{z}) = 7 \in i_2(P\_c_1\_ \dots \_c_n) \quad \text{vtt} \quad \mathcal{M}_2 \models B.$$

Indukciou na konštrukciu formuly opäť poľahky dokážeme to isté aj pre ľubovoľné (neatomické) formuly.

Dokážme teraz časť b), $\Leftarrow$: Nech $\mathcal{M}_2 = (D_2, i_2)$ je štruktúra taká, že $\mathcal{M}_2 \models B$. Štruktúru $\mathcal{M}_1 = (D_1, i_1)$ skonštruujeme nasledovne:

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{ \heartsuit_c \mid c \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1} \},\\
i_1(c) &= \heartsuit_c && \text{pre každú } c \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1},\\
i_1(P) &= \{ (\heartsuit_{c_1}, \dots, \heartsuit_{c_n}) \mid i_2(\mathrm{z}) \in i_2(P_c_1_ \dots _c_n),\ c_1, \dots, c_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1} \}\\
& && \text{pre každý } P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}, \text{ kde } n \text{ je arita } P.
\end{aligned}$$

Vďaka tejto konštrukcii je zvyšok dôkazu rovnaký ako v prípade $\Leftarrow$. Opäť sa poľahky presvedčíme, že ak $A = P(c_1, \dots, c_n)$ je atomická formula, a teda $B = P\_c_1\_ \dots \_c_n(\mathrm{z})$, tak z definície pravdivosti formuly v štruktúre a z konštrukcie $\mathcal{M}_2$ máme:

$$\mathcal{M}_1 \models A \quad \text{vtt} \quad (i_1(c_1), \dots, i_1(c_n)) \in i_1(P) \quad \text{vtt} \quad i_2(\mathrm{z}) \in i_2(P\_c_1\_ \dots \_c_n) \quad \text{vtt} \quad \mathcal{M}_2 \models B.$$

Následne indukciou na konštrukciu formuly dokážeme to isté aj pre ľubovoľné formuly.

V dôkaze časti b) v smere $\Leftarrow$ samozrejme nezáleží na konkrétnom objekte, ktorý použijeme v doméne D_2.

Podobne ani v smere $\Rightarrow$ nie sú podstatné konkrétne objekty v doméne D_1, pokiaľ zabezpečíme, že každej indivíduovej konštante sa dá priradiť unikátny prvok domény, teda že interpretácia konštánt bude injektívna funkcia (prečo?). My sme si zvolili doménu pozostávajúcu zo symbolov $\heartsuit_c$ pre každú konštantu c. Rovnako dobre by sme mohli konštanty zoradiť do postupnosti a i-tu konštantu interpretovať jej poradovým číslom i. Dokonca by ako D_1 poslúžila priamo množina všetkých konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$ — takej štruktúre sa hovorí *herbrandovská interpretácia*. ♮

4.3.2 Nech $\mathcal{L}_1$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu s množinami indivíduových konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_1} = \{$prof_Mráček, doc_Uhladená, Kiki, Veve, študent$_1$, …, študent$_7$, Mat_1, …, Mat_4, Prog_1, Prog_2, null, A, B, …, FX, riadny, 1.opravný, 2.opravný$\}$ a predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1} = \{$milý^1, prísny^1, študent^1, učiteľ^1, usilovný^1, školiteľ^2, učiteľ_predmetu^2, hodnotenie$^5\}$.

Dokážte, že existuje jazyk $\mathcal{L}_2$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu s vhodne zvolenou množinou indivíduových konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_2}$ a množinou predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2} = \{$platí$^2\}$ taký, že pre ľubovoľnú výrokovologickú formulu A v jazyku $\mathcal{L}_1$ existuje výrokovologická formula B v jazyku $\mathcal{L}_2$, pre ktorú platí:

a) Výrokové ohodnotenie v_1 také, že $v_1 \models_p A$, existuje *vtt* existuje výrokové ohodnotenie v_2 také, že $v_2 \models_p B$.

b) Štruktúra $\mathcal{M}_1$ taká, že $\mathcal{M}_1 \models A$, existuje *vtt* existuje štruktúra $\mathcal{M}_2$ taká, že $\mathcal{M}_2 \models B$.

4.3.3 Dokážte: Nech $\mathcal{L}_1$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti s množinami indivíduových konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$ a predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$. Potom existuje jazyk $\mathcal{L}_2$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti s množinou indivíduových konštantánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_2}$ a množinou predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}$, takou, že $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}$ obsahuje iba *unárne* predikátové symboly a zároveň $|\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}| = |\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}|$, taký že pre ľubovoľnú formulu A v jazyku $\mathcal{L}_1$ existuje formula B v jazyku $\mathcal{L}_2$, pre ktorú platí:

a) Výrokové ohodnotenie v_1 také, že $v_1 \models_p A$, existuje *vtt* existuje výrokové ohodnotenie v_2 také, že $v_2 \models_p B$.

b) Štruktúra $\mathcal{M}_1$ taká, že $\mathcal{M}_1 \models A$, existuje *vtt* existuje štruktúra $\mathcal{M}_2$ taká, že $\mathcal{M}_2 \models B$.

Pomôcka. Riešenie cvičenia 4.3.1, tiež obsahuje transformáciu, ktorej výsledkom sú iba unárne predikátové symboly. Na rozdiel od cvičenia 4.3.1 je však v tejto úlohe potrebné jazyk $\mathcal{L}_1$ preložiť do jazyka $\mathcal{L}_2$ tak, aby sa počet predikátových symbolov nezmenil ($|\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}| = |\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}|$). Môžete teda napr. skúsiť takú transformáciu, že predikátové symboly „zachováte", iba im zmeníte aritu na 1, a potrebný výsledok dosiahnete vhodnou transformáciou množiny indivíduových konštánt.

4.3.4 Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti a nech $a \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ je nejaká jeho indivíduová konštanta.

Nech A je ľubovoľná výrokovologická formula jazyka $\mathcal{L}$ a nech B vznikne z A nahradením všetkých výskytov všetkých indivíduových konštánt konštantou a.

Dokážte alebo vyvráťte:

a) Ak A je splniteľná, tak aj B je splniteľná.

b) Ak B je splniteľná, tak aj A je splniteľná.

4.3.5 Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti. Nech X a Y sú ľubovoľné výrokovologické formuly jazyka $\mathcal{L}$, nech T je ľubovoľná výrokovologická teória v $\mathcal{L}$. Dokážte alebo vyvráťte:

a) $\{\} \vDash_{\mathrm{p}} X$ vtt X je tautológia.

b) Formuly X a Y sú ekvivalentné vtt $(X \leftrightarrow Y)$ je tautológia.

c) Ak $T \vDash_{\mathrm{p}} \neg X$, tak $T \nvDash_{\mathrm{p}} X$.

d) Ak $T \nvDash_{\mathrm{p}} X$, tak $T \vDash_{\mathrm{p}} \neg X$.

e) $T \vDash_{\mathrm{p}} (X \to Y)$ vtt $T \cup \{X\} \vDash_{\mathrm{p}} Y$.

f) Ak $T \vDash_{\mathrm{p}} (X \to Y)$, tak $T \nvDash_{\mathrm{p}} X$ alebo $T \vDash_{\mathrm{p}} Y$.

g) Ak $T \nvDash_{\mathrm{p}} X$ alebo $T \vDash_{\mathrm{p}} Y$, tak $T \vDash_{\mathrm{p}} (X \to Y)$.

h) Ak $T \vDash_{\mathrm{p}} (X \lor Y)$, tak $T \vDash_{\mathrm{p}} X$ alebo $T \vDash_{\mathrm{p}} Y$.

i) Ak $T \vDash_{\mathrm{p}} X$ alebo $T \vDash_{\mathrm{p}} Y$, tak $T \vDash_{\mathrm{p}} (X \lor Y)$.

j) $T \vDash_{\mathrm{p}} X$ a $T \vDash_{\mathrm{p}} Y$ vtt $T \vDash_{\mathrm{p}} (X \land Y)$.

k) Formula $(X \to Y)$ je nesplniteľná vtt X je tautológia a Y je nesplniteľná.

l) Formula X je nezávislá od $\{\}$ vtt X je splniteľná a falzifikovateľná.

m) Ak formula X logicky nevyplýva z T a ani nie je nezávislá od T, tak T je splniteľná a vyplýva z nej negácia X.

n) Ak $T \vDash_{\mathrm{p}} (A \to B)$, tak $T \cup \{\neg B\} \vDash_{\mathrm{p}} \neg A$.

o) Ak $T \nvDash_{\mathrm{p}} (A \land B)$, tak $T \vDash_{\mathrm{p}} \neg A$ alebo $T \vDash_{\mathrm{p}} \neg B$.

p) Ak $T \nvDash_{\mathrm{p}} (A \lor B)$, tak $T \nvDash_{\mathrm{p}} A$ a $T \nvDash_{\mathrm{p}} B$.

q) Ak $T \vDash_{\mathrm{p}} (A \to B)$, tak $T \nvDash_{\mathrm{p}} (A \land \neg B)$.

r) Nech T je teória a X je formula. Ak T je nesplniteľná, tak nemožno rozhodnúť, či $T \models_p X$ alebo $T \not\models_p X$.

Riešenie. a) Dokážme alebo vyvráťme: $\{\} \models_p X$ vtt X je tautológia.

Na prednáškach ste už videli dôkaz podobného tvrdenia 4.14c). Dôkaz tvrdenia a) podrobne okomentujeme, aby ste podľa neho dokázali robiť vlastné.

Tvrdenia, ktoré majú formu ekvivalencie, zvyčajne dokazujeme ako implikácie v oboch smeroch. Inak povedané, musíme dokázať, že $\{\} \models_p X$ je postačujúcou (⇒) aj nutnou (⇐) podmienkou toho, že X je tautológia, teda:

(⇒) ak $\{\} \models_p X$, tak X je tautológia; (⇐) ak X je tautológia, $\{\} \models_p X$.

(⇒) a (⇐) sú zvyčajné označenia dvoch implikácií, ktoré tvoria ekvivalenciu (*nezamieňajte* ich so symbolom implikácie →). Obe dokážeme priamymi dôkazmi.

Pri priamom dôkaze implikácie predpokladáme jej antecedent (ľavú stranu) a snažíme sa ukázať, že z jeho platnosti a z doteraz známych definícií a tvrdení vyplýva konzekvent (pravá strana).

(⇒) Nech X je ľubovoľná formula. Predpokladajme, že $\{\} \models_p X$. Chceme ukázať, že potom X je tautológia.

Podľa definície vyplývania teda predpokladáme, že v každom ohodnotení v, v ktorom je pravdivá teória $\{\}$, je pravdivá aj formula X. Podľa definície tautológie chceme dokázať, že X je pravdivá v každom ohodnotení v.

Najprv si uvedomíme, ako sú definované pojmy, ktoré sa v tvrdení vyskytujú. Tým si vyjasníme, čo vlastne predpokladáme a čo dokazujeme.

Zoberme teda ľubovoľné ohodnotenie v. Pretože teória $\{\}$ neobsahuje žiadne formuly, triviálne platí, že všetky formuly z $\{\}$ sú pravidvé vo v, a teda podľa definície pravdivosti teórie v ohodnotení, $v \models_p \{\}$. Z predpokladu, že z $\{\}$ vyplýva X, potom máme, že $v \models_p X$. Na základe tohto zistenia a preto, že v bolo ľubovoľné, môžeme konštatovať, že X je pravdivá v každom ohodnotení v, teda X je tautológia, čo bolo treba dokázať.

Keď máme dokázať, že *všetky* objekty nejakého typu (ohodnotenia) majú nejakú vlastnosť (je v nich pravdivá X), zoberieme si hocijaký taký objekt a ukážeme, že keď poctivo preskúmame všetky možnosti, ktoré môžu nastať, tento objekt bude vždy mať požadovanú vlastnosť.

(⇐) Nech X je ľubovoľná formula. Predpokladajme, že X je tautológia, teda že (podľa definície tautológie) X je pravdivá vo všetkých ohodnoteniach. Chceme dokázať, že potom $\{\} \models_p X$ teda, že (podľa definície vyplývania) vo všetkých ohodnoteniach, v ktorých je pravdivá $\{\}$, je pravdivá aj X.

Jasnejšia formulácia tvrdenia *„Vo všetkých ohodnoteniach, v ktorých je pravdivá $\{\}$, je pravdivá aj X,“* je *„Pre všetky ohodnotenia v, ak $v \models_p \{\}$, tak $v \models_p X$“*. Ide opäť o všeobecne kvantifikovanú implikáciu. Postup na jej dôkaz bude teda: Zobrať ľubovoľný objekt požadovaného typu, predpokladať antecedent a dokázať konzekvent.

Zoberme teda ľubovoľné ohodnotenie v. Predpokladajme, že $v \models_p \{\}$, a ukážme, že $v \models_p X$. To však máme priamo z predpokladu, že X je tautológia. Teda zovšeobecňujeme, že v každom ohodnotení, v ktorom je pravdivá $\{\}$, je pravdivá aj X, teda z $\{\}$ vyplýva X, čo bolo treba dokázať.

Dokázaním tvrdení ($\Rightarrow$) a ($\Leftarrow$) sme dokázali tvrdenie a).

Pri dôkazoch iných tvrdení možno budete navyše potrebovať techniku *rozboru prípadov*, ktorú sme na prednáške použili pri dôkaze prvej ekvivalencie z vety 4.11 a tvrdenia 4.14c)($\Leftarrow$).

c) Dokážme alebo vyvráťme: Ak $T \models_p \neg X$, tak $T \not\models_p X$.

Pokúsme sa tvrdenie dokázať. Je to implikácia, takže predpokladáme pravdivosť jej antecedentu (ľavej strany) a snažíme sa ukázať pravdivosť konzekventu (pravej strany).

Predpokladajme, že $T \models_p \neg X$. Naším cieľom je dokázať, že potom $T \not\models_p X$.

Uvedomíme si definíciu vyplývania a aplikujeme ju na náš prípad:

Podľa predpokladu v každom ohodnotení v, v ktorom je pravdivá T, je pravdivá aj $\neg X$. Máme dokázať, že nie je pravda, že v každom ohodnotení v, v ktorom je pravdivá T, je pravdivá aj X. To znamená, že musíme nájsť nejaké ohodnotenie v, v ktorom je T pravdivá, ale X nepravdivá.

Zdá sa, že s nájdením ohodnotenia by nám mohol pomôcť nasledujúci rozbor prípadov.

Pre každú teóriu sú dve možnosti: buď existuje ohodnotenie, v ktorom je pravdivá, alebo také ohodnotenie neexistuje.

- Ak existuje v, v ktorom je T pravdivá, tak podľa predpokladu $v \models_p \neg X$, a teda $v \not\models_p X$. V tomto prípade teda existuje ohodnotenie, v ktorom je T pravdivá, ale X nepravdivá.
- Ak neexistuje v, v ktorom je T pravdivá, tak neexistuje ani ohodnotenie, v ktorom je T pravdivá a navyše X nepravdivá. Požadovaný cieľ v tomto prípade **nie je možné dosiahnuť**.

  Situáciu by ešte mohlo zachrániť, keby prípad „neexistuje v, v ktorom je T pravdivá“ nemohol nastať, lebo je v spore s nejakým predchádzajúcim predpokladom. To však nie je pravda, čo dokážeme nájdením ***konkrétnej*** teórie T a formuly X, pre ktoré sú predpoklady pravdivé, ale záver nie.

Zoberme jazyk $\mathcal{L}$ s $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{\mathrm{a}\}$ a $\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{\mathrm{p}\}$, teóriu $T = \{(\mathrm{p(a)} \land \neg\mathrm{p(a)})\}$ a formulu $X = \mathrm{p(a)}$. T je nesplniteľná, a preto triviálne platí, že z T vyplýva $\neg X$ (pretože pre každé ohodnotenie v

je implikácia „ak $v \models_{\mathrm{p}} T$, tak $v \models_{\mathrm{p}} \neg X$“ pravdivá, pretože jej antecedent je nepravdivý). Zároveň ale žiadne ohodnotenie nemá vlastnosť, že je v ňom T pravdivá a X nepravdivá.

Konštatujeme teda, že tvrdenie c) **neplatí**. Vyššie uvedená teória a formula tvoria jeden z jeho ***kontrapríkladov***.

d) Dokážme alebo vyvráťme: Ak $T \not\models_{\mathrm{p}} X$, tak $T \models_{\mathrm{p}} \neg X$.

Predpokladajme, že $T \not\models_{\mathrm{p}} X$, a zistime, či $T \models_{\mathrm{p}} \neg X$. Podľa predpokladu existuje nejaké ohodnotenie v, pre ktoré platí $v \models_{\mathrm{p}} T$, ale $v \not\models_{\mathrm{p}} X$. Máme dokázať, že potom pre každé ohodnotenie w platí, že ak $w \models_{\mathrm{p}} T$, tak $w \models_{\mathrm{p}} \neg X$.

Zoberme teda ľubovoľné ohodnotenie w a predpokladajme, že $w \models_{\mathrm{p}} T$. Ak $w = v$, tak $w \not\models_{\mathrm{p}} X$, a teda $w \models_{\mathrm{p}} \neg X$. Ak však $w \neq v$, túto úvahu uplatniť nemôžeme. Nie je ťažké si uvedomiť, že predpoklad tvrdenia a tento prípad vieme dosiahnuť pre konkrétne T, X a ohodnotenie v, pričom však v nejakom inom ohodnotení budú T aj X pravdivé, a teda $\neg X$ nepravdivé.

Máme teda dôvod sa domnievať, že tvrdenie neplatí. Potvrdíme to nájdením ***konkrétneho*** kontrapríkladu.

Zoberme jazyk $\mathcal{L}$ s $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathrm{p}\}$, teóriu $T = \{\mathrm{p(a)}\}$ a formulu $X = \mathrm{p(b)}$. Potom $T \not\models_{\mathrm{p}} X$, lebo pre ohodnotenie $v = \{\mathrm{p(a)} \mapsto t, \mathrm{p(b)} \mapsto f\}$ máme $v \models_{\mathrm{p}} T$ a $v \not\models_{\mathrm{p}} X$. Zároveň pre ohodnotenie $w = \{\mathrm{p(a)} \mapsto t, \mathrm{p(b)} \mapsto t\}$ máme $w \models_{\mathrm{p}} T$ a $w \models_{\mathrm{p}} X$, teda $w \not\models_{\mathrm{p}} \neg X$. Preto $T \not\models_{\mathrm{p}} \neg X$. Našli sme kontrapríklad, takže tvrdenie d) **neplatí**. ♮

5 Dôkazy a výrokovologické tablá

5.1 Vyplývanie a tautológie v tablách

5.1.1 Príklad. (Smullyan [5]) Na políciu predviedli troch podozrivých Adamsovú, Millsa a Doylea. Počas vyšetrovania sa zistilo:

1. Doyle je vinný, ak je Adamsová vinná a Mills nevinný.
2. Doyle nikdy nepracuje sám.
3. Adamsová nikdy nepracuje s Doyleom.
4. Do prípadu nie je zapletený nikto okrem Adamsovej, Millsa a Doylea a aspoň jeden z nich je vinný.

Je na základe týchto skutočností Mills určite vinný?

Úlohu riešte pomocou tablového kalkulu. Dôkaz vyplývania formuly preložte do slovenčiny.

Riešenie. Na zodpovedanie otázky musíme vyriešiť dva logické problémy:

i. Vyplýva tvrdenie *Mills je vinný* zo zistení 1–4?
ii. Sú tieto zistenia splniteľné?

Druhý problém musíme vyriešiť, pretože na základe nesplniteľných informácií nemôžeme niekoho obviniť.

Oba neformálne logické problémy vyriešime pomocou ich formalizácie vo výrokovologickej časti logiky prvého rádu, ktorá na tento účel postačuje.

Pri formalizácii sme v úlohe rozpoznali tri atomické formuly vinný(Mills), vinný(Doyle) a vinný(Adamsová) v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{vinný}\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Mills, Doyle, Adamsová}\}$. Pre lepšiu čitateľnosť riešenia si jednotlivé atomické formuly pomenujeme nasledovne: $M =$ vinný(Mills), $D =$ vinný(Doyle) a $A =$ vinný(Adamsová).

Zistenia a) — d) sme sformalizovali do nasledovnej teórie:

$$T = \left\{ \begin{array}{c} ((A \land \neg M) \to D)), \\ (D \to (A \lor M)), \\ (A \to \neg D), \\ (A \lor (M \lor D)) \end{array} \right\}.$$

Dokazované tvrdenie sformalizujeme atomickou formulou M. To, že dokazované tvrdenie zodpovedá atomickej formule, samozrejme, nie je pravidlo.

Na to, aby sme dokázali Millsovu vinu na základe teórie T, potrebujeme najprv overiť, či je splniteľná. Na to postačuje nájsť hocijaký model teórie T, teda také ohodnotenie v, že $v \models_p T$. Ľahko si overíme, že takýmto modelom je napríklad $v = \{$vinný(Mills) $\mapsto t$, vinný(Doyle) $\mapsto f$, vinný(Adamsová) $\mapsto f\}$.

Neskôr budeme na overovanie splniteľnosti teórie využívať iné, formálne metódy.

To, že formula M, t.j. vinný(Mills), vyplýva z teórie T (teda $T \models_p M$, resp. $T \models_p$ vinný(Mills)), sa pokúsime dokázať nájdením uzavretého tabla pre množinu označených formúl $T^+_M = \{\mathbf{T}((A \land \neg M) \to D)), \mathbf{T}(D \to (A \lor M)), \mathbf{T}(A \to \neg D), \mathbf{T}(A \lor (M \lor D)), \mathbf{F}\, M\}$.

<table>
<tr><td colspan="9">1. $\mathbf{T}\,((A \land \neg M) \to D)$ T^+_M
2. $\mathbf{T}\,(D \to (A \lor M))$ T^+_M
3. $\mathbf{T}\,(A \to \neg D)$ T^+_M
4. $\mathbf{T}\,(A \lor (M \lor D))$ T^+_M
5. $\mathbf{F}\,M$ T^+_M</td></tr>
<tr><td colspan="4">6. $\mathbf{T}\,A$ $\beta 4$</td><td colspan="5">15. $\mathbf{T}\,(M \lor D)$ $\beta 4$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">7. $\mathbf{F}\,A$ $\beta 3$
$*$ 6, 7</td><td colspan="3">8. $\mathbf{T}\,\neg D$ $\beta 3$
9. $\mathbf{F}\,D$ $\alpha 8$</td><td rowspan="4">16. $\mathbf{T}\,M$ $\beta 15$
$*$ 5, 16</td><td colspan="4">17. $\mathbf{T}\,D$ $\beta 15$</td></tr>
<tr><td colspan="2">10. $\mathbf{F}\,(A \land \neg M)$ $\beta 1$</td><td rowspan="3">14. $\mathbf{T}\,D$ $\beta 1$
$*$ 9, 14</td><td rowspan="3">18. $\mathbf{F}\,D$ $\beta 2$
$*$ 17, 18</td><td colspan="3">19. $\mathbf{T}\,(A \lor M)$ $\beta 2$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">11. $\mathbf{F}\,A$ $\beta 10$
$*$ 6, 11</td><td rowspan="2">12. $\mathbf{F}\,\neg M$ $\beta 10$
13. $\mathbf{T}\,M$ $\alpha 12$
$*$ 5, 13</td><td colspan="2">20. $\mathbf{T}\,A$ $\beta 19$</td><td rowspan="2">24. $\mathbf{T}\,M$ $\beta 19$
$*$ 5, 24</td></tr>
<tr><td>21. $\mathbf{F}\,A$ $\beta 3$
$*$ 20, 21</td><td>22. $\mathbf{T}\,\neg D$ $\beta 3$
23. $\mathbf{F}\,D$ $\alpha 22$
$*$ 17, 23</td></tr>
</table>

Podarilo sa nám zostrojiť uzavreté tablo pre množinu T^+_M, a teda podľa dôsledku 5.18 vety o korektnosti tablového kalkulu sme dokázali, že $T \models_p$ vinný(Mills).

Teda tvrdenie, že Mills je vinný vyplýva zo zistení 1–4. Pretože zároveň vieme, že tieto zistenia sú splniteľné, polícia na ich základe môže usúdiť, že Mills je určite vinný.

Napíšme teraz s pomocou tohto tabla slovný dôkaz toho, že zo zistení a) — d) vyplýva, že Mills je vinný.

Tablo sa dá priamočiaro čítať ako dôkaz sporom, aj keď toto čítanie môže pôsobiť „umelo“ (viď nižšie). Pre lepšiu orientáciu v dôkaze v zátvorkách uvádzame čísla uzlov tabla, ktoré zodpovedajú práve vyjadrenej úvahe.

Dôkaz (sporom). Predpokladajme, že zistenia 1–4 sú pravdivé (1–4), ale Mills je nevinný (5).

Podľa d) vieme, že aspoň jeden z trojice Adamsová, Mills, Doyle je vinný — preskúmame teda všetky tri možnosti:

Možnosť, že je vinný Mills (16) je v spore s predpokladom.

V prípade, že je vinná Adamsová (6), podľa c) nie je vinný Doyle (7, 8, 9). Podľa tvrdenia a) však potom nemôže byť pravda, že je vinná Adamsová a Mills nevinný (10, 14). To znamená, že buď nie je Adamsová vinná (11), čo je spor s predpokladom tohto prípadu, alebo nie je Mills nevinný (12), teda Mills je vinný (13), čo je spor s predpokladom celého dôkazu.

Ostala nám posledná možnosť — Doyle je vinný (17). Podľa tvrdenia b) je potom vinná Adamsová alebo Mills (18, 19). Vina Millsa (24) je však v spore s úvodným predpokladom. V prípade viny Adamsovej (20) musíme na základe tvrdenia c) uvažovať nevinu Doyla (21, 22), čo je tiež spor.

Preskúmali sme všetky možnosti, akými by zistenia a) — d) mohli byť pravdivé, ale Mills by bol nevinný. Žiadna z nich nemôže nastať, pretože viedla k sporu. Preto Mills je vinný, ak sú pravdivé a) — d). Millsova vina teda vyplýva z teórie tvorenej zisteniami a) — d). □

Použitie pravidla β na disjunkciu zvyčajne čítame ako rozbor možných prípadov. Viacero použití pravidla β na vnorené disjunkcie (napr. $(A \lor (M \lor D))$) spájame v slovnom dôkaze do jedného rozboru.

Použitie pravidla β na implikáciu, pri ktorom sa hneď uzavrie ľavá vetva, sa dá čítať ako modus ponens: „Pretože ak X, tak Y, a platí X, platí aj Y." V tomto dôkaze sa hodí pri implikáciách b) a c).

Keď sa pravidlo β použije na implikáciu a hneď sa uzavrie pravá vetva, môžeme ho čítať ako modus tolens: „Pretože ak X, tak Y, a neplatí Y, neplatí ani X." To sa hodí pre implikáciu a).

Predchádzajúci dôkaz sporom pôsobil „umelo". „Skutočné" dôkazy sporom z negácie dokazovaného tvrdenia odvodia nejaké dôsledky a až o nich ukážu, že sú v spore s dôsledkami predpokladov. My sme však predpoklad dôkazu sporom (Mills je nevinný) použili vždy iba vo chvíli, keď sme úvahou dospeli k opačnému tvrdeniu (Mills je vinný).

Naše tablo je preto „prirodzenejšie" čítať ako priamy dôkaz. Formulu M označenú znamienkom **F** chápeme ako *cieľ*, ktorý chceme dokázať. Formuly označené znamienkom **T** stále chápeme ako *predpoklady*.

Dôkaz (priamy). Predpokladajme, že zistenia a) — d) sú pravdivé (1–4). Dokážme, že Mills je vinný (5). Podľa tvrdenia d) je vinný niekto z podozrivých Adamsová, Mills, alebo Doyle. V prípade, že je vinný Mills (16), dokazované tvrdenie triviálne platí. Rozoberme teda zvyšné dva prípady:

Prepokladajme najprv, že je vinná Adamsová (6). Podľa c) teda nie je vinný Doyle (7, 8, 9). Preto podľa a) nie je pravda, že Adamsová je vinná a Mills je nevinný (10, 14). Teda Adamsová nie je vinná alebo Mills nie je nevinný. Prvú možnosť (11) vylučuje predpoklad tohto prípadu. Ostáva teda druhá možnosť (12), čiže Mills je vinný (13).

Teraz predpokladajme, že je vinný Doyle (17). Podľa b) je vinná Adamsová alebo je vinný Mills (19). Keby bola vinná Adamsová (20), podľa c) by bol Doyle nevinný (21, 22), čo je však v spore s predpokladom tohto prípadu. Preto opäť ostáva iba možnosť, že Mills je vinný (24).

Z predpokladu pravdivosti zistení a) — d) sme teda vo všetkých možných prípadoch dospeli k tomu, že Mills je vinný, čo bolo treba dokázať. □

V prípade priameho dôkazu je ešte jedna možnosť (okrem vyššie uvedených), ako čítať použitie pravidla β na implikáciu $\mathbf{T}(X \to Y)$ — nahradenie doterajšieho cieľa jeho postačujúcou podmienkou: „Pretože ak X, tak Y, a máme dokázať Y, postačí dokázať X.“

Keď naopak *dokazujeme* implikáciu, teda tablo obsahuje označenú formulu $\mathbf{F}(X \to Y)$, zvyčajne na ňu aplikujeme pravidlá α s dôsledkami $\mathbf{T}\,X$ a $\mathbf{F}\,Y$. Obvyklé čítanie týchto krokov je: „Chceme dokázať, že ak X, tak Y. Predpokladajme teda X a dokážme Y.“

Pri našom dôkaze sa síce tieto situácie nevyskytli, ale nájdu využitie napríklad pri čítaní tabiel v iných úlohách. ♮

5.1.2 Dokážte, že $T \vDash_{\mathrm{p}} X$, pričom $T = \{A_1, \dots, A_7\}$ a T je splniteľná, kde:

(A_1) $\big(\mathsf{kino}(\mathsf{Fero}, \mathsf{Anka}) \lor (\mathsf{pocuva}(\mathsf{Fero}, \mathsf{PinkFloyd}) \lor \mathsf{hra}(\mathsf{Fero}, \mathsf{FerovaPS}))\big)$

(A_2) $(\mathsf{kapela}(\mathsf{PinkFloyd}) \land \mathsf{hraciaKonzola}(\mathsf{FerovaPS}))$

(A_3) $(\neg\mathsf{frustrovany}(\mathsf{Fero}) \to \mathsf{kino}(\mathsf{Fero}, \mathsf{Anka}))$

(A_4) $\big(\mathsf{frustrovany}(\mathsf{Fero}) \to (\mathsf{pocuva}(\mathsf{Fero}, \mathsf{PinkFloyd}) \lor \mathsf{hra}(\mathsf{Fero}, \mathsf{FerovaPS}))\big)$

(A_5) $\neg\big(\mathsf{kino}(\mathsf{Fero}, \mathsf{Anka}) \land (\mathsf{pocuva}(\mathsf{Fero}, \mathsf{PinkFloyd}) \land \mathsf{hra}(\mathsf{Fero}, \mathsf{FerovaPS}))\big)$

(A_6) $(\mathsf{hra}(\mathsf{Fero}, \mathsf{FerovaPS}) \to \mathsf{pocuva}(\mathsf{Fero}, \mathsf{PinkFloyd}))$

(A_7) $(\mathsf{pocuva}(\mathsf{Fero}, \mathsf{PinkFloyd}) \to \neg\mathsf{frustrovany}(\mathsf{Fero}))$

výrokovologicky vyplýva formula:

(X) $(\neg\mathsf{hra}(\mathsf{Fero}, \mathsf{FerovaPS}) \to \mathsf{kino}(\mathsf{Fero}, \mathsf{Anka}))$

Preložte teóriu, formulu aj dôkaz jej vyplývania do slovenčiny. Premyslite si, prečo je formula logickým dôsledkom, a snažte sa zostrojiť tablo tak, aby zodpovedalo vášmu zdôvodneniu.

5.1.3 Dokážte, že z teórie $T = \{A_1, \dots, A_5\}$, kde:

(A_1) $(\mathsf{mam}(\mathsf{dazdnik}, \mathsf{den}) \to \neg\mathsf{prsi}(\mathsf{den}))$

(A_2) $(\mathsf{mokry}(\mathsf{cesta}, \mathsf{den}) \to (\mathsf{prsi}(\mathsf{den}) \lor \mathsf{preslo}(\mathsf{umyvacieAuto}, \mathsf{cesta}, \mathsf{den})))$

(A_3) $(\mathsf{vikend}(\mathsf{den}) \to \neg\mathsf{preslo}(\mathsf{umyvacieAuto}, \mathsf{cesta}, \mathsf{den}))$

$$(A_4)\quad \big((\mathsf{utorok}(\mathsf{den}) \to \mathsf{idemElektrickou}(\mathsf{den})) \land ((\neg\mathsf{utorok}(\mathsf{den}) \land \neg\mathsf{vikend}(\mathsf{den})) \to \neg\mathsf{idemElektrickou}(\mathsf{den}))\big)$$

(A_5) $(\mathsf{idemElektrickou}(\mathsf{den}) \rightarrow \neg\mathsf{mam}(\mathsf{dazdnik}, \mathsf{den}))$

výrokovologicky vyplýva

(X) $((\mathsf{mam}(\mathsf{dazdnik}, \mathsf{den}) \land \mathsf{mokry}(\mathsf{cesta}, \mathsf{den})) \rightarrow \neg\mathsf{vikend}(\mathsf{den}))$

Preložte teóriu, formulu aj dôkaz jej vyplývania do slovenčiny. Premyslite si, prečo je formula logickým dôsledkom, a snažte sa zostrojiť tablo tak, aby zodpovedalo vášmu zdôvodneniu.

5.1.4 Dokážte, že z tvrdení:

(A_1) Vianočný darček kúpil otec alebo ho kúpila mama.

(A_2) Darček kúpil otec a Ondrej je šťastný, len ak to bude spoločný darček s Hankou a aj ona je šťastná.

(A_3) Určite sa nestane, aby ani Ondrej ani Hanka neboli šťastní.

(A_4) Otec neznáša nakupovanie, takže sa z toho vždy vyvlečie.

vyplýva tvrdenie:

(X) Ak by bol Ondro šťastný, iba ak by darček kúpil otec, tak nakupovala mama a Hanka je šťastná.

Tvrdenia sformalizujte v jazyku s $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{kúpil}^2, \mathsf{šťastný}^1\}$, dokážte vyplývanie tablom a dôkaz prepíšte do čo najprirodzenejšej slovenskej formy.

5.1.5 O trojici detí sme sa dozvedeli tieto informácie:

1. Janko sa hrá s autíčkom alebo s bábikou.
2. Ak by to, že sa nehrá s autíčkom znamenalo, že sa hrá s bábikou, tak sa určite nehrá s vláčikom.
3. Miško, ak sa hrá s autíčkom alebo s vláčikom, je šťastný.
4. Hanka je šťastná, ak je aspoň jeden z chlapcov šťastný.

Je na základe týchto informácií isté, že *ak sa Janko nehrá s vláčikom, len ak sa s ním hrá Miško, tak sú Miško aj Hanka šťastní*?

Na zodpovedanie otázky tvrdenia sformalizujte vo vhodne zvolenom jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu a využite tablo.

> ⚠ Na rozdiel od úloh 5.1.2 a 5.1.3, v tejto odpovedáte na neformálnu otázku. Preto potrebujete overiť splniteľnosť.

⚠ Výroky **formalizujte verne**, zachovajte ich spojky, nevyužívajte ekvivalentné úpravy. Vybrali sme ich tak, aby vám umožnili precvičiť si tablové pravidlá pre rôzne spojky s rôznymi znamienkami.

Vaše tablo by malo mať **najviac 28 uzlov**.

5.1.6 Predmet môže študent úspešne absolvovať iba vtedy, keď odovzdá domáce úlohy a úspešne absolvuje (spraví) riadny alebo náhradný test. Náhradný test môžu písať iba tí, čo boli chorí, ale keďže býva ľahký, tak ho aj hneď spravia (teda iba chorí mohli spraviť náhradný test). Riadny test spravia iba tí, ktorí sa učili alebo aspoň riešili domáce úlohy. Študenti, ktorí odovzdali domáce úlohy, ich buď riešili alebo odpísali. Odpisujú ich ale iba flákači, čo sa neučia.

Dokážte v tablovom kalkule, že ak som predmet úspešne absolvoval a nebol som pri tom chorý, musel som riešiť domáce úlohy.

5.1.7 Pomocou tablového kalkulu vyriešte nasledujúce úlohy:

a) Keď Katka nakreslí obrázok, je na ňom buď mačka alebo pes. Obrázok mačky Katkin pes vždy hneď roztrhá. Ak jej pes roztrhá obrázok, Katka je smutná.
Dokážte, že ak Katka nakreslila obrázok a je šťastná (nie je smutná), tak na jej obrázku je pes.

b) Bez práce nie sú koláče. Ak niekto nemá ani koláče, ani chleba, tak bude hladný. Na chlieb treba múku.
Dokážte, že ak niekto nemá múku a je najedený (nie je hladný), tak pracoval.

c) Bez oblakov niet dažďa (ak nie sú oblaky, nemôže pršať). Ak je cesta mokrá, tak prší alebo práve prešlo umývacie auto. Umývacie autá nechodia v sobotu (ak je sobota, tak umývacie autá nechodia).
Dokážte, že ak je sobota a je mokrá cesta, tak je oblačno.

5.1.8 (Smullyan [5]) Inšpektor Nick Fishtrawn zaistil podozrivých Browna, Smitha, Taylora a McDonnalda, pričom zistil, že:

(A_1) Brown a Smith sú súčasne vinní, iba ak je Taylor ich spolupáchateľom.

(A_2) Ak je Brown vinný, tak aspoň jeden z Smith, Taylor je jeho spolupáchateľom.

(A_3) Taylor nikdy nepracuje bez McDonnalda.

(A_4) McDonnald je vinný, ak je Brown nevinný.

Dokážte pomocou tablového kalkulu, že z týchto skutočností vyplývajú nasledujúce tvrdenia (X) a (Y).

(X) Ak je Taylor nevinný, tak je nevinný aj Brown.

(Y) McDonnald je vinný.

5.1.9 Nech A, B a C sú ľubovoľné formuly v ľubovoľnom jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Dokážte v tablovom kalkule, že nasledujúce formuly sú tautológie:

a) $\big((A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))\big)$,

b) $((\neg A \to \neg B) \leftrightarrow (B \to A))$,

c) $(\neg\neg A \leftrightarrow A)$,

d) $\big(((A \to B) \land (A \to \neg B)) \to \neg A\big)$,

e) $\big(A \to (\neg B \to \neg(A \to B))\big)$,

f) $\big((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))\big)$,

g) $\big(A \to (B \to (A \land B))\big)$,

h) $\big(((A \to C) \land (B \to C)) \to ((A \lor B) \to C)\big)$,

i) $(A \to (B \to A))$,

j) $(A \to (A \lor B))$,

k) $(\neg A \to (A \to B))$,

l) $(\neg(A \land B) \leftrightarrow (\neg A \lor \neg B))$,

m) $(\neg(A \lor B) \leftrightarrow (\neg A \land \neg B))$,

n) $(\neg(A \to B) \leftrightarrow (A \land \neg B))$,

o) $\big((A \land (B \lor C)) \leftrightarrow ((A \land B) \lor (A \land C))\big)$,

p) $\big((A \lor (B \land C)) \leftrightarrow ((A \lor B) \land (A \lor C))\big)$,

q) $\big((A \lor (A \land B)) \leftrightarrow A\big)$.

r) $\big((A \land (A \to B)) \to B\big)$,

s) $\big((\neg B \land (A \to B)) \to \neg A\big)$.

t) $\big((C \to A) \to (((A \to B) \to C) \to A)\big)$

u) $\big((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \land B) \lor (\neg A \land \neg B))\big)$,

v) $\big(\neg(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \land \neg B) \lor (A \land \neg B))\big)$,

w) $\big(\neg(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \lor B) \land \neg(A \land B))\big)$,

x) $\big((A \to (B \leftrightarrow C)) \leftrightarrow ((A \land B) \leftrightarrow (A \land C))\big)$,

y) $\big((A \lor (B \leftrightarrow C)) \leftrightarrow ((A \lor B) \leftrightarrow (A \lor C))\big)$,

Riešenie.

Na začiatok je dobré si uvedomiť, že tablo pre množinu označených formúl môžeme konštruovať aj bez toho, aby sme poznali všetky ich detaily, teda v našom prípade podformuly A, B, C.

b) Zoberme ľubovoľné formuly A a B. Aby sme dokázali, že $((\neg A \to \neg B) \leftrightarrow (B \to A))$ je tautológia, stačí zistiť, či je množina $S^+ = \{\mathbf{F}((\neg A \to \neg B) \leftrightarrow (B \to A))\}$ nesplniteľná, teda či pre ňu existuje uzavreté tablo.

💡 Pre formuly $(X \leftrightarrow Y)$ nemáme špeciálne tablové pravidlá, pretože tieto formuly sú iba skratky za $((X \to Y) \land (Y \to X))$. V table preto pracujeme s neskrátenou verziou.

1.	$\mathbf{F}\,(((\neg A \to \neg B) \to (B \to A)) \land ((B \to A) \to (\neg A \to \neg B)))$	S^+

Ľavá vetva:

2.	$\mathbf{F}\,((\neg A \to \neg B) \to (B \to A))$	$\beta 1$
3.	$\mathbf{T}\,(\neg A \to \neg B)$	$\alpha 2$
4.	$\mathbf{F}\,(B \to A)$	$\alpha 2$
5.	$\mathbf{T}\,B$	$\alpha 4$
6.	$\mathbf{F}\,A$	$\alpha 4$

7.	$\mathbf{F}\,\neg A$	$\beta 3$
8.	$\mathbf{T}\,A$	$\alpha 7$
	$*$	$6, 8$

9.	$\mathbf{T}\,\neg B$	$\beta 3$
10.	$\mathbf{F}\,B$	$\beta 9$
	$*$	$6, 10$

Pravá vetva:

11.	$\mathbf{F}\,((B \to A) \to (\neg A \to \neg B))$	$\beta 1$
12.	$\mathbf{T}\,(B \to A)$	$\alpha 11$
13.	$\mathbf{F}\,(\neg A \to \neg B)$	$\alpha 11$
14.	$\mathbf{T}\,\neg A$	$\alpha 13$
15.	$\mathbf{F}\,\neg B$	$\alpha 13$
16.	$\mathbf{F}\,A$	$\alpha 14$
17.	$\mathbf{T}\,B$	$\alpha 15$

18.	$\mathbf{F}\,B$	$\beta 12$
	$*$	$17, 18$

19.	$\mathbf{T}\,A$	$\beta 12$
	$*$	$19, 16$

Našli sme uzavreté tablo pre množinu $S^+ = \{\mathbf{F}((\neg A \to \neg B) \leftrightarrow (B \to A))\}$, ktorá je teda nesplniteľná, a preto $((\neg A \to \neg B) \leftrightarrow (B \to A))$ je tautológia. ♮

5.2 Splniteľnosť, falzifikovateľnosť a nesplniteľnosť v tablách

5.2.1 O nasledujúcich formulách v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{\mathsf{p}, \mathsf{q}, \mathsf{r}, \mathsf{s}\}$ a $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{\mathsf{c}\}$ rozhodnite pomocou tablového kalkulu, či sú splniteľné, nesplniteľné, tautológie, alebo falzifikovateľné. Pri každej formule sa vyjadrite ku všetkým 4 vlastnostiam.

(X_1) $((\mathsf{p}(\mathsf{c}) \to \mathsf{q}(\mathsf{c})) \lor (\neg\mathsf{q}(\mathsf{c}) \to \mathsf{r}(\mathsf{c})))$

(X_2) $(((\mathsf{p}(\mathsf{c}) \to \mathsf{r}(\mathsf{c})) \to \mathsf{p}(\mathsf{c})) \to \mathsf{p}(\mathsf{c}))$

(X_3) $((\mathsf{s}(\mathsf{c}) \lor \mathsf{r}(\mathsf{c})) \to (\neg\mathsf{p}(\mathsf{c}) \land (\neg\mathsf{s}(\mathsf{c}) \to \mathsf{r}(\mathsf{c}))))$

(X_4) $((\mathsf{p}(\mathsf{c}) \to \mathsf{r}(\mathsf{c})) \land \neg(\mathsf{r}(\mathsf{c}) \lor \neg\mathsf{p}(\mathsf{c})))$

(X_5) $((\mathsf{p}(\mathsf{c}) \to (\mathsf{p}(\mathsf{c}) \lor \mathsf{r}(\mathsf{c}))) \to \neg(\neg\mathsf{p}(\mathsf{c}) \lor (\mathsf{p}(\mathsf{c}) \lor \mathsf{r}(\mathsf{c}))))$

(X_6) $(\neg((\mathsf{p}(\mathsf{c}) \lor \mathsf{r}(\mathsf{c})) \to \mathsf{s}(\mathsf{c})) \leftrightarrow ((\neg\mathsf{p}(\mathsf{c}) \land \neg\mathsf{r}(\mathsf{c})) \land \mathsf{s}(\mathsf{c})))$

(X_7) $(\neg((\mathsf{p}(\mathsf{c}) \lor \mathsf{r}(\mathsf{c})) \to \mathsf{s}(\mathsf{c})) \leftrightarrow ((\mathsf{p}(\mathsf{c}) \land \mathsf{r}(\mathsf{c})) \land \neg\mathsf{s}(\mathsf{c})))$

(X_8) $(((\mathsf{p}(\mathsf{c}) \to \mathsf{s}(\mathsf{c})) \land (\mathsf{r}(\mathsf{c}) \to \mathsf{s}(\mathsf{c}))) \land \neg((\mathsf{p}(\mathsf{c}) \lor \mathsf{r}(\mathsf{c})) \to \mathsf{s}(\mathsf{c})))$,

(X_9) $(((\neg\mathsf{p}(\mathsf{c}) \to (\mathsf{p}(\mathsf{c}) \land \mathsf{q}(\mathsf{c}))) \lor ((\mathsf{p}(\mathsf{c}) \land \mathsf{q}(\mathsf{c})) \land \neg\mathsf{q}(\mathsf{c}))) \lor ((\mathsf{p}(\mathsf{c}) \to \mathsf{s}(\mathsf{c})) \lor \neg\mathsf{p}(\mathsf{c})))$

Riešenie. (X_1) Preverovanie vlastností formuly $X_1 = ((\mathsf{p}(\mathsf{c}) \to \mathsf{q}(\mathsf{c})) \lor (\mathsf{q}(\mathsf{c}) \to \mathsf{r}(\mathsf{c})))$ začneme tým, že sa pokúsime dokázať, že je tautológia, podobne ako v úlohe 5.1.9. Pokúsime sa teda uzavrieť tablo pre $S^+ = \{\mathbf{F}((\mathsf{p}(\mathsf{c}) \to \mathsf{q}(\mathsf{c})) \lor (\mathsf{q}(\mathsf{c}) \to \mathsf{r}(\mathsf{c})))\}$. Ak tablo uzavrieme v každej vetve, formula je tautológia. Naopak, ak nájdeme aspoň jednu úplnú a otvorenú vetvu, vieme z nej vyčítať ohodnotenie, v ktorom formula nie je pravdivá:

1.	$\mathbf{F}\,((\mathsf{p}(\mathsf{c}) \to \mathsf{q}(\mathsf{c})) \lor (\mathsf{q}(\mathsf{c}) \to \mathsf{r}(\mathsf{c})))$	S^+
2.	$\mathbf{F}\,(\mathsf{p}(\mathsf{c}) \to \mathsf{q}(\mathsf{c}))$	$\alpha 1$
3.	$\mathbf{F}\,(\neg\mathsf{q}(\mathsf{c}) \to \mathsf{r}(\mathsf{c}))$	$\alpha 1$
4.	$\mathbf{T}\,\mathsf{p}(\mathsf{c})$	$\alpha 2$
5.	$\mathbf{F}\,\mathsf{q}(\mathsf{c})$	$\alpha 2$
6.	$\mathbf{T}\,\neg\mathsf{q}(\mathsf{c})$	$\alpha 3$
7.	$\mathbf{F}\,\mathsf{r}(\mathsf{c})$	$\alpha 3$

Toto tablo má síce iba jednu vetvu, ale tá je úplná (viď definícia 5.24 z prednášky), ale nie je uzavretá (teda je otvorená). Formula X_1 teda *nie je tautológia*, lebo z úplnej a otvorenej vetvy končiacej v liste 7 môžeme skonštruovať ohodnotenie $v_1 = \{\mathsf{p}(\mathsf{c}) \mapsto t, \mathsf{q}(\mathsf{c}) \mapsto f, \mathsf{r}(\mathsf{c}) \mapsto f\}$, v ktorom je naša formula nepravdivá. Formula X_1 teda *je falzifikovateľná*.

Ďalej potrebujeme ešte preveriť, či existuje aj nejaké ohodnotenie, v ktorom je formula pravdivá, (teda či je splniteľná) alebo také ohodnotenie neexistuje (a teda formula je nesplniteľná). Aby sme to zistili, pokúsime sa v table pre množinu $S^+ = \{\mathbf{T}((\mathsf{p}(\mathsf{c}) \to \mathsf{q}(\mathsf{c})) \lor (\mathsf{q}(\mathsf{c}) \to \mathsf{r}(\mathsf{c})))\}$, nájsť aspoň jednu úplnú otvorenú vetvu, alebo naopak toto tablo uzavrieť:

<table>
<tr><td colspan="3">1. $\mathbf{T}\,((\mathsf{p}(\mathsf{c}) \to \mathsf{q}(\mathsf{c})) \lor (\mathsf{q}(\mathsf{c}) \to \mathsf{r}(\mathsf{c})))$ S^+</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. $\mathbf{T}\,(\mathsf{p}(\mathsf{c}) \to \mathsf{q}(\mathsf{c}))$ $\beta 1$</td><td rowspan="2">5. $\mathbf{T}\,(\neg\mathsf{q}(\mathsf{c}) \to \mathsf{r}(\mathsf{c}))$ $\beta 1$</td></tr>
<tr><td>3. $\mathbf{F}\,\mathsf{p}(\mathsf{c})$ $\beta 2$</td><td>4. $\mathbf{T}\,\mathsf{q}(\mathsf{c})$ $\beta 2$</td></tr>
</table>

Tablo sme ani nemuseli dokončiť, pretože po aplikovaní dvoch β-pravidiel (najprv pre disjunkciu, a potom pre implikáciu na ľavej strane) sme našli hneď dve otvorené a úplné vetvy (s listami 3 a 4). Z nich vieme vyčítať, že vo všetkých ohodnoteniach v, pre ktoré $v(\mathsf{p}(\mathsf{c})) = f$ alebo $v(\mathsf{q}(\mathsf{c})) = t$, je formula X_1 pravdivá. Konkrétne je napríklad podľa vetvy s listom 3 pravdivá v ohodnotení $v_2 = \{\mathsf{p}(\mathsf{c}) \mapsto f, \mathsf{q}(\mathsf{c}) \mapsto f, \mathsf{r}(\mathsf{c}) \mapsto f\}$. Formula X_1 teda *je splniteľná* a *nie je nesplniteľná*. Tým sme zodpovedali všetky otázky zo zadania. ♮

Pokiaľ sa nám podarí správne uhádnuť, že je formula X tautológia, postačí, ak urobíme tablo pre $\{\mathbf{F}\,X\}$ a všetky vetvy sa nám podarí uzavrieť. Keďže tým dokážeme, že formula je pravdivá vo všetkých ohodnoteniach, nie je už potrebné hľadať nejaké konkrétne — formula je splniteľná (je pravdivá napríklad v ohodnotení, kde sú všetky atómy nepravdivé), nie je falzifikovateľná ani nesplniteľná.

Podobne, ak sa nám zdá, že je formula nesplniteľná, môžeme začať tablom pre $\{\mathbf{T}\,X\}$. Ak sa nám ho podarí uzavrieť, nemusíme už robiť tablo pre $\{\mathbf{F}\,X\}$. Vieme, že X je nepravdivá vo všetkých ohodnoteniach, teda je falzifikovateľná, nie je splniteľná ani tautológia.

⚠ Študenti sa občas pokúšajú vyjadrovať k vlastnostiam formuly na základe *uzavretých* vetiev v úplných, ale *otvorených tablách*. Samotná uzavretá vetva nám však neposkytuje *žiadne informácie*, lebo nezodpovedá žiadnemu ohodnoteniu. Keby zodpovedala, nejaká formula by v tomto ohodnotení musela byť súčasne pravdivá aj nepravdivá, čo nie je možné.

Závery teda môžeme vyvodzovať iba z dvoch stavov tabla:

- Tablo je uzavreté, t.j. *všetky* vetvy sú uzavreté. Potom je množina označených formúl, pre ktorú sme tablo vytvorili, nesplniteľná.
- Tablo obsahuje *otvorenú a úplnú* vetvu. Potom je množina, pre ktorú sme tablo vytvorili, splniteľná. Z vetvy môžeme určiť aspoň jedno ohodnotenie, v ktorom je pravdivá.

  Špeciálny prípad tejto možnosti je, že je otvorené a úplné celé tablo (všetky vetvy sú úplné alebo uzavreté, niektorá je otvorená). Vtedy môžeme z vetiev určiť postupne *všetky* ohodnotenia, v ktorých je množina označených formúl, pre ktorú sme tablo vytvorili, pravdivá.

5.2.2 Pomocou tablového kalkulu nájdite aspoň dve ohodnotenia predikátových atómov, v ktorých sú pravdivé nasledujúce teórie v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{p}, \mathsf{r}, \mathsf{s}\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{a}, \mathsf{c}\}$. Vyznačte časť tabla, ktorá dokazuje vašu odpoveď a zdôvodnite ju.

$$T_1 = \{(\mathsf{p}(\mathsf{a}) \to (\mathsf{r}(\mathsf{c}) \lor \mathsf{s}(\mathsf{c}))), (\mathsf{p}(\mathsf{a}) \lor \mathsf{r}(\mathsf{c}))\},$$

$$T_2 = \{((\mathsf{r}(\mathsf{c}) \land \mathsf{s}(\mathsf{c})) \to \mathsf{p}(\mathsf{a})), (\mathsf{p}(\mathsf{a}) \lor \mathsf{r}(\mathsf{c}))\},$$

$$T_3 = \{(\mathsf{p}(\mathsf{a}) \to (\mathsf{r}(\mathsf{c}) \lor \mathsf{s}(\mathsf{c}))), (\neg\mathsf{r}(\mathsf{c}) \lor \neg\mathsf{s}(\mathsf{c}))\}.$$

5.2.3 Príklad. (Smullyan [5]) Pripomeňme si prípad lúpeže v klenotníctve z úlohy 5.1.1: Na políciu predviedli troch podozrivých Adamsovú, Millsa a Doylea. Počas vyšetrovania sa zistilo:

a) Doyle je vinný, ak je Adamsová vinná a Mills nevinný.

b) Doyle nikdy nepracuje sám.

c) Adamsová nikdy nepracuje s Doyleom.

d) Do prípadu nie je zapletený nikto okrem Adamsovej, Millsa a Doylea a aspoň jeden z nich je vinný.

Pomocou tablového kalkulu rozhodnite, kto z podozrivých je vinný, kto nevinný, a o koho vine alebo nevine nemožno rozhodnúť. Svoje závery slovne zdôvodnite.

Riešenie. Naším cieľom je zistiť, ktorého z podozrivých možno s istotou obviniť, ktorý je určite nevinný, a vinu ktorého nemôžeme s istotou ani potvrdiť ani vyvrátiť.

Pri formalizácii sme v úlohe rozpoznali tri atomické formuly vinný(Mills), vinný(Doyle) a vinný(Adamsová) v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{vinný}\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Mills, Doyle, Adamsová}\}$. Pre lepšiu čitateľnosť riešenia si jednotlivé atomické formuly označíme nasledovne: $M = \text{vinný(Mills)}$, $D = \text{vinný(Doyle)}$ a $A = \text{vinný(Adamsová)}$. Zistenia a)–d) sme sformalizovali do nasledovnej teórie:

$$T = \left\{ \begin{array}{c} ((A \land \neg M) \to D)), \\ (D \to (A \lor M)), \\ (A \to \neg D), \\ (A \lor (M \lor D)) \end{array} \right\}.$$

Úlohu riešime tablovým kalkulom.

Aby sme mohli naše logické závery interpretovať vo svete slovnej úlohy (teda odvodzovať praktické dôsledky), musíme najprv preveriť, či je T splniteľná. Na to sa v table pre $T^+ = \{\mathbf{T}((A \land \neg M) \to D)), \mathbf{T}(D \to (A \lor M)), \mathbf{T}(A \to \neg D), \mathbf{T}(A \lor (M \lor D))\}$ pokúsime nájsť aspoň jednu úplnú otvorenú vetvu:

1. $\mathbf{T}((A \land \neg M) \to D)$ T^+
2. $\mathbf{T}(D \to (A \lor M))$ T^+
3. $\mathbf{T}(A \to \neg D)$ T^+
4. $\mathbf{T}(A \lor (M \lor D))$ T^+

<table>
<tr><td>5. $\mathbf{F}(A \land \neg M)$ $\beta 1$</td><td colspan="6">6. $\mathbf{T}D$ $\beta 1$</td></tr>
<tr><td></td><td>7. $\mathbf{F}D$ $\beta 2$
$*$ 6, 7</td><td colspan="5">8. $\mathbf{T}(A \lor M)$ $\beta 2$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>9. $\mathbf{T}A$ $\beta 8$</td><td colspan="4">10. $\mathbf{T}M$ $\beta 8$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="3">11. $\mathbf{F}A$ $\beta 3$</td><td>16. $\mathbf{T}\neg D$ $\beta 3$
17. $\mathbf{F}D$ $\alpha 16$
$*$ 6, 17</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>12. $\mathbf{T}A$ $\beta 4$
$*$ 11, 12</td><td colspan="2">13. $\mathbf{T}(M \lor D)$ $\beta 4$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>14. $\mathbf{T}M$ $\beta 13$</td><td>15. $\mathbf{T}D$ $\beta 13$</td><td></td></tr>
</table>

Toto sa nám aj podarilo, keďže vetvy končiace v 14 a 15 sú obe otvorené a úplné. Teda T je splniteľná. Na otázku, ktorý z obvinených je určite vinný či nevinný, môžeme teda zmysluplne odpovedať pomocou vyplývania.

V riešení úlohy 5.1.1 sme už dokázali, že $T \vDash M$. Presnejšie, podarilo sa nám uzavrieť všetky vetvy tabla pre množinu $T^+_M = \{\mathbf{T}((A \land \neg M) \to D)), \mathbf{T}(D \to (A \lor M)), \mathbf{T}(A \to \neg D), \mathbf{T}(A \lor (M \lor D)), \mathbf{F}M\}$. Keďže T je splniteľná teória, môžeme usúdiť, že Mills je vinný.

O vine, či nevine Adamsovej a Doylea môžeme rozhodnúť obdobným postupom. Pre dôkaz viny Adamsovej, teda vyplývania $T \vDash A$, by sme potrebovali nájsť uzavreté tablo pre množinu $T^+_A = \{\mathbf{T}((A \land \neg M) \to D)), \mathbf{T}(D \to (A \lor M)), \mathbf{T}(A \to \neg D), \mathbf{T}(A \lor (M \lor D)), \mathbf{F}\,A\}$, podobne ako pre dôkaz viny Millsa. Ak sa nám tablo nepodarí uzavrieť, teda aspoň jedna vetva tabla bude úplná otvorená, Adamsovú obviniť nemôžeme.

To však ešte nestačí na rozhodnutie o tom, či je Adamsová *určite* nevinná. Na to potrebujeme dokázať, že tvrdenie „Adamsová je nevinná" vyplýva z T, čiže $T \models \neg A$. Dosiahneme to nájdením uzavretého tabla pre množinu $T^+_{\neg A} = \{\mathbf{T}((A \land \neg M) \to D)), \mathbf{T}(D \to (A \lor M)), \mathbf{T}(A \to \neg D), \mathbf{T}(A \lor (M \lor D)), \mathbf{F}\,\neg A\}$.

Ak aj teraz dospejeme k tablu s aspoň jednou úplnou otvorenou vetvou, nemôžeme o Adamsovej na základe našej konzistentnej teórie T rozhodnúť ani to, že je nevinná. Formula A je potom nezávislá od teórie T: Z úplnej otvorenej vetvy prvého tabla skonštruujeme ohodnotenie, v ktorom je pravdivá T, ale A je nepravdivá. Z úplnej otvorenej vetvy druhého tabla skonštruujeme iné ohodnotenie, v ktorom je pravdivá T, ale $\neg A$ je nepravdivá, teda A je pravdivá. Adamsovú vtedy nemôžeme s istotou obviniť, ani si nemôžeme byť istí jej nevinou. Polícia v takých prípadoch podozdivých prepúšťa pre nedostatok dôkazov. ♮

5.2.4 (Smullyan [5]) Pripomeňme si prípad bankovej lúpeže z úlohy 5.1.8: Inšpektor Nick Fishtrawn zaistil podozrivých Browna, Smitha, Taylora, a McDonnalda, pričom zistil, že:

(A_1) Brown a Smith sú súčasne vinní, iba ak je Taylor ich spolupáchateľom.

(A_2) Ak je Brown vinný, tak aspoň jeden z Smith, Taylor je jeho spolupáchateľom.

(A_3) Taylor nikdy nepracuje bez McDonnalda.

(A_4) McDonnald je vinný, ak je Brown nevinný.

Zistili sme, že vinný je McDonnald. Dokážte jeho vinu tablovým kalkulom. Podobne dokážte, že Browna nemožno obviniť, ani jeho vinu vyvrátiť. Svoje závery slovne zdôvodnite.

5.2.5 Inšpektorka Veszprémiová zistila, že lúpež v Budapeštianskej záložni spáchal niekto z dvoch podozrivých: Balogh alebo Cucz. Inšpektorka vie, že Balogh nikdy nepracuje sám. Svedok Nagy vypovedal, že Cucz bol v čase lúpeže spolu s ním v kine Uránia na filme *Čas sa zastaví*.

Koho môže inšpektorka na základe týchto informácií obviniť? Úlohu riešte tablovým kalkulom.

5.2.6 (Smullyan [5]) Londýnsky obchodník, pán McConnor, telefonoval do Scotland Yardu, že sa stal obeťou lúpeže. Detektívi predviedli na výsluch troch podozrivých X, Y, Z a zistili nasledujúce fakty:

(A_1) Každý z podozrivých X, Y, Z bol v McConnorovom obchode v deň lúpeže a nik iný tam v ten deň nebol.

(A_2) X vždy pracuje s práve jedným spoločníkom.

(A_3) Z nie je vinný alebo je vinný Y.

(A_4) Ak sú vinní práve dvaja, tak X je jedným z nich.

(A_5) Y je vinný, iba ak je vinný aj Z.

Koho má inšpektorka Fishcousová obviniť?

5.2.7 (Smullyan [5]) Inšpektor Herring so Scotland Yardu predviedol na výsluch troch podozrivých z prepadnutia taxíka: Parkera, Robertsa a Smitha. Na výsluchu boli zistené nasledujúce skutočnosti:

(A_1) Taxík bol prepadnutý potom, ako bol privolaný do hostinca, v ktorom v tom čase popíjali Parker a Roberts. V hostinci bol s nimi už len hostinský Smith.

(A_2) Parker je známy lupič, vie sa však o ňom, že má vždy komplica.

(A_3) Roberts bol v čase incidentu natoľko podguráženy, že nebol pri zmysloch, a nemohol sa teda na lúpeži podieľať.

Pomocou tablového kalkulu zistite o každom z podozrivých, či je ho možné obviniť, či je naopak nevinný, alebo či ho bude musieť inšpektor Herring so škrípajúcimi zubami prepustiť pre nedostatok dôkazov.

5.2.8 (Smullyan [5]) Z lúpeže v Miláne polícia podozrieva tri známe kriminálničky: Aidu P., Biancu D. a Chiaru P. Aida a Chiara sú identické dvojičky a málokto ich dokáže rozoznať. Všetky podozrivé majú bohaté trestné spisy a policajti dobre poznajú ich povahy a zvyky. Konkrétne, dvojičky sú dosť nesmelé a žiadna by sa neodvážila na záťah bez spolupáchateľa. Bianca D. je naopak veľmi odvážna a neznáša spoliehať sa na komplicov. Niekoľko svedkov tiež uviedlo, že v čase lúpeže videli jednu z dvojičiek v bare v Janove, ale nevie sa, o ktorú z nich išlo.

Za predpokladu, že nikto okrem podozrivých sa lúpeže nezúčastnil, ktoré z nich sú vinné a ktoré nevinné?

5.2.9 Pomocou formalizácie a tablového kalkulu vyriešte nasledujúce problémy nájdením dôkazu alebo kontrapríkladu.

a) Chceme na párty pozvať niekoho z trojice Jim, Kim a Sára, bohužiaľ každý z nich má nejaké svoje podmienky: Sára nepôjde na párty, ak pôjde Kim. Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim. Sára nepôjde bez Jima.

   Je pravda, že na párty pôjde Kim a nepôjde Sára?

b) Anka ide do práce autom vždy, keď prší. Ak neprší, ide do práce na bicykli. Keď ide do práce na bicykli, má celý deň dobrú náladu.

   Je pravda, že ak Anka nejde do práce autom, má celý deň dobrú náladu?

c) Ak by metalová kapela nemohla hrať alebo by občerstvenie nedodali načas, silvestrovská oslava by sa musela zrušiť a Rudy by zúril. Ak by sa oslava musela zrušiť, organizátori by vrátili vstupné. Organizátori vstupné nevrátili.

   Je pravda, že metalová kapela mohla hrať?

5.2.10 Pomocou formalizácie a tablového kalkulu overte správnosť úsudkov a ich zdôvodnení, pričom:

- ak je úsudok chybný, nájdite kontrapríklad;
- ak je chybné zdôvodnenie, vysvetlite, kde a aké sú v ňom chyby;
- ak je úsudok správny, ale zdôvodnenie chybné, napíšte podľa tablového dôkazu správne slovné zdôvodnenie.

Pracujte s nasledujúcimi úsudkami a zdôvodneniami. V prvom prípade sme premisy a záver úsudku a jeho zdôvodnenie vyznačili. V druhom prípade sami rozpoznajte tieto časti.

a) *Premisy:* Do laboratória sa dostanem, ak si nezabudnem čipovú kartu. Vždy, keď si zabudnem čipovú kartu, nemám ani peňaženku.

   Záver: Takže ak nemám peňaženku, nedostanem sa do laboratória.

   Zdôvodnenie: Je to tak preto, že keď nemám peňaženku, zabudol som si čipovú kartu, a teda sa nemám ako dostať do laboratória.

b) Ak by na protest neprišli desaťtisíce občanov alebo by boli jeho účastníci agresívni, protest by nebol úspešný a predseda vlády by neodstúpil. Ak by boli účastníci protestu agresívni, zasiahla by polícia. Polícia nezasiahla. Preto ak predseda vlády odstúpil, na protest prišli desaťtisíce občanov.

   Pretože polícia nezasiahla, účastníci protestu neboli agresívni. Predpokladajme, že predseda vlády odstúpil. Protest bol teda úspešný, a preto naň prišli desaťtisíce občanov alebo jeho účastníci boli agresívni. Už sme však zistili, že druhá možnosť nenastala. Preto musí platiť prvá, teda na protest prišli desaťtisíce občanov, čo sme chceli dokázať.

5.2.11 Príklad. Alica a Bonifác si plánujú spoločný valentínsky večer. Rozhodujú sa, či pôjdu na večeru, do kina, do divadla, do wellnessu, alebo do baru. Majú však nasledujúce podmienky:

1. Alica usúdila, že ak by šli na večeru a tiež do divadla, wellness by už určite nestihli.
2. Bonifác zhodnotil, že potom ale určite musia ísť do wellnessu, ak nepôjdu na večeru ani do divadla.
3. Alici sa zdá divadlo nezlúčiteľné s wellnessom.
4. Bonifác trvá na tom, že aspoň nejaké kultúrne podujatie absolvovať musia (a teda trvá na divadle alebo kine).
5. Alica uznala argument o kultúre, ale nechce ísť do divadla, keďže by si nestihla kúpiť vhodné šaty.

Podarí sa Alici a Bonifácovi vybrať nejaký program? Aké majú možnosti?

Na otázky odpovedajte pomocou tablového kalkulu. Jasne vyjadrite:

- akému logickému problému zodpovedá vyriešenie slovnej úlohy,
- ako vaše tablo alebo tablá tento logický problém riešia,
- akému riešeniu slovnej úlohy zodpovedá nájdené riešenie logického problému.

Riešenie.

Na riešenie tejto slovnej úlohy použijeme zvyčajný postup:

i. Sformalizujeme tvrdenia zodpovedajúcimi formulami vo vhodnom jazyku.

ii. Určíme logické problémy, ktoré musíme vyriešiť na zodpovedanie otázok z úlohy.

iii. Vyriešime tieto problémy vhodnými prostriedkami (v tomto prípade máme použiť tablá) a sformulujeme príslušné logické závery.

iv. Zinterpretujeme logické závery ako odpovede na otázky zo slovnej úlohy.

Aby bolo jasnejšie, v ktorej fáze sa nachádzame, tieto kroky v riešení vyznačíme.

i. Cieľom úlohy je zistiť, či a ako môžu Alica s Bonifácom stráviť valentínske rande. Zvolíme si prvorádový jazyk $\mathcal{L}$, ktorý mám umožní sformalizovať ich podmienky bez nepodstatných detailov. Postačia nám na to mimologické symboly $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{$ v_kine^1, v_divadle^1, na_večeri^1, vo_wellness^1, v_bare$^1\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{r\}$, pričom konštanta r označuje Alicino a Bonifácovo rande a zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
v_divadle(x)	rande x sa odohrá v divadle
v_kine(x)	rande x sa odohrá v kine
na_večeri(x)	rande x sa odohrá na večeri
vo_wellness(x)	rande x sa odohrá vo wellness
v_bare(x)	rande x sa odohrá v bare

Alicine a Bonifácove podmienky potom sformalizujeme ako teóriu $T = \{A_1, \dots, A_5\}$ s nasledujúcimi formulami:

(A_1) ((na_večeri(r) ∧ v_divadle(r)) → ¬vo_wellness(r))

(A_2) (¬(na_večeri(r) ∨ v_divadle(r)) → vo_wellness(r))

(A_3) (v_divadle(r) → ¬vo_wellness(r))

(A_4) (v_divadle(r) ∨ v_kine(r))

(A_5) ¬v_divadle(r)

Otázky v tejto úlohe nesmerujú k zisteniu, aký program *musia* Alica a Bonifác *nutne* mať, aby splnili svoje podmienky. Z logického hľadiska sa teda **nepýtame na vyplývanie**.

Pýtame sa na to, aké majú (všetky) *možnosti* stráviť rande tak, aby boli podmienky splnené. Rôzne možnosti splnenia podmienok v logike predstavujú rôzne *modely* teórie T, ktorá tieto podmienky formalizuje. Ak by napríklad v nejakom modeli T boli pravdivé atómy v_divadle(r), vo_wellness(r) a nepravdivé atómy v_kine(r), na_večeri(r), v_bare(r), znamenalo by to, že podmienky 1–5 by boli splnené, keby Alica a Bonifác išli na rande (zrejme v nejakom poradí) do divadla a do wellness, ale zároveň nie do kina, ani na večeru, ani do baru.

Úlohám tohto typu sa hovorí *konfiguračné*.

ii. Otázku, či sa Alici a Bonifácovi podarí vybrať nejaký program, zodpovieme na základe vyriešenia logického problému, či je teória T splniteľná. V prípade, že by teória bola nesplniteľná, teda nemala by žiadne modely, neexistuje možnosť, ako vyhovieť súčasne všetkým Bonifácovým a Aliciným požiadavkám, program sa im teda vybrať nepodarí. Rovnako by sme interpretovali stav, kedy by teória mala len jeden model a v ňom by jednotlivým predikátovým atómom predstavujúcim formu rande bola priradený pravdivostná hodnota f.

Interpretácia modelu, v ktorom sú všetky atómy nepravdivé, závisí od úlohy. Napríklad pri konfigurácii doplnkovej výbavy auta môže taký model zodpovedať základnej výbave.

Otázku, aké možnosti majú Alica a Bonifác na svojom rande, zodpovieme nájdením *všetkých modelov* teórie T.

iii. Modely teórie nájdeme skonštruovaním tabla pre množinu označených formúl $S^+ = \{\mathbf{T}\, A_1, \dots, \mathbf{T}\, A_5\}$. Týmto tablom vieme overiť splniteľnosť, podobne ako v úlohe 5.2.1, nájdením aspoň jednej otvorenej a úplnej vetvy. Ako už vieme zo spomínanej úlohy, tejto vetve zodpovedá jedno či viac ohodnotení, v ktorých je S^+ (a teda aj T) pravdivá.

💡 Keď sa predikátový atóm $P(c)$ z jazyka $\mathcal{L}$ skúmanej teórie *nenachádza* v otvorenej a úplnej vetve ani so znamienkom **T**, ani so znamienkom **F**, znamená to, že tejto vetve zodpovedá viac modelov, v ktorých môže tento atóm mať ľubovoľnú pravdivostnú hodnotu.

Z vetvy teda vyčítame jednak modely v_i, v ktorých $P(c) \mapsto t$, ale tiež modely v_j, v ktorých $P(c) \mapsto f$. Počet modelov, ktoré z otvorenej a úplnej vetvy vyčítame, teda závisí od počtu predikátových atómov, ktoré nevystupujú v tejto vetve so žiadnym znamienkom. ⭐ Ako?

V našej úlohe hľadáme *všetky* modely. Neuspokojíme sa preto s nájdením jednej otvorenej a úplnej vetvy, ale tablo pre S^+ spravíme úplné — *všetky* vetvy budú úplné alebo uzavreté. Všetky ohodnotenia, v ktorých je S^+ pravdivá, potom vyčítame z tých vetiev, ktoré sú otvorené a úplné.

⚠ Uzavretá vetva nezodpovedá žiadnemu ohodnoteniu. Keby zodpovedala, nejaká formula by v tomto ohodnotení musela byť súčasne pravdivá aj nepravdivá, čo nie je možné.

Pre prehľadnosť riešení v zbierke takéto tablo neuvádzame. Vypracujte ho samostatne. Z jeho úplných a otvorených vetiev by ste mali potom určiť nasledujúce modely:

$$v_1 = \{\text{v\_divadle(r)} \mapsto f, \text{v\_kine(r)} \mapsto t, \text{na\_večeri(r)} \mapsto t, \text{vo\_wellness(r)} \mapsto f, \text{v\_bare(r)} \mapsto f\}$$
$$v_2 = \{\text{v\_divadle(r)} \mapsto f, \text{v\_kine(r)} \mapsto t, \text{na\_večeri(r)} \mapsto f, \text{vo\_wellness(r)} \mapsto t, \text{v\_bare(r)} \mapsto f\}$$
$$v_3 = \{\text{v\_divadle(r)} \mapsto f, \text{v\_kine(r)} \mapsto t, \text{na\_večeri(r)} \mapsto t, \text{vo\_wellness(r)} \mapsto t, \text{v\_bare(r)} \mapsto f\}$$
$$v_4 = \{\text{v\_divadle(r)} \mapsto f, \text{v\_kine(r)} \mapsto t, \text{na\_večeri(r)} \mapsto t, \text{vo\_wellness(r)} \mapsto f, \text{v\_bare(r)} \mapsto t\}$$
$$v_5 = \{\text{v\_divadle(r)} \mapsto f, \text{v\_kine(r)} \mapsto t, \text{na\_večeri(r)} \mapsto f, \text{vo\_wellness(r)} \mapsto t, \text{v\_bare(r)} \mapsto t\}$$
$$v_6 = \{\text{v\_divadle(r)} \mapsto f, \text{v\_kine(r)} \mapsto t, \text{na\_večeri(r)} \mapsto t, \text{vo\_wellness(r)} \mapsto t, \text{v\_bare(r)} \mapsto t\}.$$

Nájdením úplných otvorených vetiev v table a k nim prislúchajúcich modelov sme súčasne overili splniteľnosť teórie.

💡 Všimnite si, že modely v_i a v_{i+3} pre $i = 1, \dots, 3$ sa líšia iba pravdivostnou hodnotou atómu v_bare(r), ktorý je súčasťou jazyka $\mathcal{L}$, ale nevyskytuje sa v teórii, a teda ani v žiadnej otvorenej a úplnej vetve tabla.

iv. Vďaka menovaným modelom teórie T vieme odpovedať na otázky zo zadania: Alici a Bonifácovi sa podarí vybrať program na valentínsky večer (pretože teória T je splniteľná). Majú pritom šesť možností, ako ho stráviť (i-ta možnosť zodpovedá modelu v_i):

1. Pôjdu do kina a na večeru, pričom nepôjdu do divadla, ani do wellness, ani do baru.
2. Pôjdu do kina a do wellness, no nepôjdu na večeru, ani do divadla, ani do baru.
3. Pôjdu aj do kina, aj na večeru, aj do wellness, no nepôjdu do divadla, ani do baru.
4. Pôjdu do kina, na večeru a do baru, pričom nepôjdu do divadla a do wellness.

5. Pôjdu do kina, do wellness a do baru, no nepôjdu na večeru a do divadla.
6. Pôjdu aj do kina, aj na večeru, aj do wellness, aj do baru, no nepôjdu do divadla. ♮

5.2.12 Pani Betka si chce kúpiť auto. Zohľadnením Betkinych preferencií ako aj možností dodávateľa zistite, aké typy karosérie (sedan, kombi, …) a v akých farbách pripadajú do úvahy:

1. Betka si kúpi auto. Určite však nie čierne.
2. Každé auto (u predajcu, ktorého si vybrala) je buď sedan, kombi, alebo kabriolet.
3. Kabriolety majú len červené.
4. Sedany a kombi mali zasa len biele alebo čierne.
5. Ak kúpi biele auto, určite to nebude sedan.
6. Kabriolety nie sú kombi; kabriolety tiež nie sú sedany; ani sedany nie sú kombi. (Čiže typy karosérie sú navzájom disjunktné.)
7. Červené veci nie sú čierne; červené veci nie sú ani biele; ani čierne veci nie sú biele. (Opäť ide o vzájomnú disjunktnosť.)

Na otázku odpovedzte pomocou tablového kalkulu.

Pomôcka. Všeobecné tvrdenia vhodne špecializujte. Číslovanie tvrdení je iba orientačné. Tvrdenia, ktoré majú povahu konjunkcie viacerých častí, je výhodnejšie sformalizovať viacerými formulami.

Jasne vyjadrite:

- ako úlohu formalizujete,
- akému logickému problému zodpovedá vyriešenie úlohy,
- ako vaše tablo alebo tablá tento logický problém riešia,
- čo je riešením logického problému,
- aká je odpoveď na položenú otázku.

Na riešenie nie je potrebné tablo či tablá s viac ako 60 uzlami.

5.2.13 Anna sa rozhoduje, čo si oblečie na sestrinu svadbu.

1. Mohla by si totiž dať šaty, sukňu s blúzkou, alebo nohavicový kostým.
2. Pochopiteľne, ak si oblečie jednu z týchto možností, neoblečie si inú.

3. Kostým má len modrý.
4. Šaty, prípadne sukňu s blúzkou, by si na svadbu určite nedala v bielej farbe (vraj sa to nehodí).
5. V Anninom šatníku sa však okrem bielych a modrých vecí nachádzajú už len červené.
6. Vždy sa oblieka jednofarebne, ani sukňu s blúzkou by si nedala v rôznych farbách.
7. Určite nechce sestre pokaziť náladu tým, že by si obliekla niečo modré, lebo modrú jej sestra naozaj nemá rada.

Čo a v akých farbách si Anna môže za týchto podmienok obliecť? Nájdite všetky prípustné kombinácie, aby si z nich mohla ľahko vybrať.

Na otázku odpovedzte pomocou tablového kalkulu.

Jasne vyjadrite:

- ako úlohu formalizujete,
- akému logickému problému zodpovedá vyriešenie úlohy,
- ako vaše tablo alebo tablá tento logický problém riešia,
- čo je riešením logického problému,
- aká je odpoveď na položenú otázku.

Na riešenie nie je potrebné tablo či tablá s viac ako 40 uzlami.

5.2.14 Tri kamarátky sa zídu v kaviarni, ktorá ponúka kávu, čokoládu, prosecco a nič iné.

1. Vieme, že Frederika si dá prosecco alebo čokoládu.
2. Ak by to, že si nedá čokoládu, znamenalo, že si dá prosecco, tak si určite nedá kávu.
3. Hana je spokojná, ak si dá čokoládu alebo kávu.
4. Ak je aspoň jedna z jej kamošiek spokojná, potom aj Gerta je spokojná.

Na základe uvedených informácií odpovedzte na otázky:

a) Je isté, že *ak si Frederika nedá kávu, len ak si ju dá Hana, tak sú Hana aj Gerta spokojné*?

b) Predpokladajme, že Gerta spokojná nie je. Aké nápoje z ponuky kaviarne si Frederika a Hana mohli objednať?

Na zodpovedanie otázok tvrdenia sformalizujte vo vhodne zvolenom jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu a využite tablá.

Jasne vyjadrite:

- ako úlohu formalizujete,
- aké logické problémy treba vyriešiť, aby ste zodpovedali otázky a) a b),
- ako vaše tablo alebo tablá tieto logické problémy riešia,
- aké sú riešenia logických problémov,
- aké sú neformálne odpovede na neformálne otázky a) a b).

Na rozdiel od úloh 5.1.2 a 5.1.3, v tejto odpovedáte na neformálne otázky. Preto potrebujete **overiť splniteľnosť** (nie nutne tablom).

Výroky **formalizujte verne**, zachovajte ich spojky, nevyužívajte ekvivalentné úpravy. Vybrali sme ich tak, aby vám umožnili precvičiť si tablové pravidlá pre rôzne spojky s rôznymi znamienkami.

Na vyriešenie úlohy nie sú potrebné tablá s viac ako **28 uzlami**.

5.3 Korektné pravidlá

5.3.1 Dokážte, že nasledujúce tablové pravidlá sú korektné:

$$\frac{\mathsf{T}(X \to Y) \quad \mathsf{T}\,X}{\mathsf{T}\,Y} \ (\mathrm{MP}) \qquad \frac{\mathsf{T}(X \to Y) \quad \mathsf{F}\,Y}{\mathsf{F}\,X} \ (\mathrm{MT})$$

$$\frac{\mathsf{T}(X \lor Y) \quad \mathsf{F}\,X}{\mathsf{T}\,Y} \ (\mathrm{DS}) \qquad \frac{\mathsf{T}(X \lor Y) \quad \mathsf{F}\,Y}{\mathsf{T}\,X} \ (\mathrm{DS})$$

$$\frac{\mathsf{F}(X \land Y) \quad \mathsf{T}\,X}{\mathsf{F}\,Y} \ (\mathrm{NCS}) \qquad \frac{\mathsf{F}(X \land Y) \quad \mathsf{T}\,Y}{\mathsf{F}\,X} \ (\mathrm{NCS})$$

$$\frac{}{\mathsf{T}\,X \mid \mathsf{F}\,X} \ (\mathrm{cut}) \qquad \frac{\mathsf{T}(X \to Y) \quad \mathsf{T}(Y \to Z)}{\mathsf{T}(X \to Z)} \ (\mathrm{HS})$$

$$\frac{\mathsf{T}(X_1 \leftrightarrow X_2) \quad \mathsf{T}\,X_i}{\mathsf{T}\,X_{3-i}} \ (\mathrm{ESTT}) \qquad \frac{\mathsf{T}(X_1 \leftrightarrow X_2) \quad \mathsf{F}\,X_i}{\mathsf{F}\,X_{3-i}} \ (\mathrm{ESTF})$$

$$\frac{\mathsf{F}(X_1 \leftrightarrow X_2) \quad \mathsf{T}\,X_i}{\mathsf{F}\,X_{3-i}} \ (\mathrm{ESFT}) \qquad \frac{\mathsf{F}(X_1 \leftrightarrow X_2) \quad \mathsf{F}\,X_i}{\mathsf{T}\,X_{3-i}} \ (\mathrm{ESFF})$$

$$\frac{\mathsf{T}(X \leftrightarrow Y)}{\mathsf{T}(X \land Y) \mid \mathsf{F}(X \lor Y)} \ (\mathrm{ECDT}) \qquad \frac{\mathsf{F}(X \leftrightarrow Y)}{\mathsf{T}(X \land \neg Y) \mid \mathsf{F}(X \lor \neg Y)} \ (\mathrm{ECDF})$$

Tieto pravidlá sa nazývajú: (MP) modus ponens, (MT) modus tolens, (DS) disjunktívny sylogizmus, (HS) hypotetický sylogizmus, (cut) rez. Pravidlo (NCS) je variácia (DS) pre nesplnenú konjunkciu. Pravidlá (ES..) sú verziami (MP) a (MT) pre ekvivalenciu. V nich $i \in \{1, 2\}$ a všimnite si, že $3 - 1 = 2$ a $3 - 2 = 1$. Pravidlo (ECDT) redukuje pravdivú ekvivalenciu na prípady, že sú jej „priame“ podformuly obe pravdivé alebo obe nepravdivé. Pravidlo (ECDF) je analogické.

Pomôcka. Definíciu korektnosti pravidla a príklady jej dôkazov nájdete v poznámkach z prednášok.

V nasledujúcich úlohách môžete použiť tablový kalkul rozšírený o vyššie uvedené pravidlá. Vzniknú tak pravdepodobne prehľadnejšie a menšie tablá, ktoré sa ľahšie interpretujú ako dôkaz v prirodzenom jazyku.

5.3.2 Malá firma vyrába prístrojové skrinky z viacerých materiálov, s rôznymi povrchovými úpravami a v niekoľkých farbách. Aj keď je zdanlivo možných viac ako tisíc kombinácií, nie všetky sa dajú vyrobiť. Vybavenie firmy, vlastnosti materiálov a výrobné postupy kladú nasledujúce obmedzenia:

(X_1) Skrinky sa vyrábajú materiálov: hliník, oceľ, plast.

(X_2) Hliník a oceľ sú kovy.

(X_3) Iba oceľ sa dá lakovať.

(X_4) Brúsenú povrchovú úpravu môžu mať iba nelakované kovové skrinky.

(X_5) Lakované skrinky aj plastové skrinky sú čierne, biele, alebo zelené.

(X_6) Nelakované oceľové skrinky korodujú.

(X_7) Koróziu spôsobí aj kombinácia dvoch rôznych kovov.

(X_8) Eloxovať sa dajú iba hliníkové skrinky a po tejto úprave sú buď sivé alebo čierne.

(X_9) Korózia je neprípustná.

Zákazník požaduje eloxovanú čierno-bielu skrinku. Môže mu firma vyhovieť? Ak áno, z ktorých materiálov a z ktorých ich kombinácií môže byť taká skrinka vyhotovená?

Obchodný zástupca si chce ujasniť možné kombinácie. Domnieva sa, že skrinka s brúsenou povrchovou úpravou je sivá alebo čierna. Usúdil správne?

Vašou úlohou je:

a) Sformalizovať uvedené skutočnosti ako výrokovologickú teóriu vo vhodnom jazyku a stručne popísať význam jeho symbolov.

b) Pojmami výrokovej logiky (napr. tautológia, splnenie, vyplývanie a pod.) vyjadriť otázky z predloženého problému.

c) Zodpovedať otázky a odpovede dokázať *pomocou tablového kalkulu*.

5.3.3 Detektívi Miller a Skillová riešia prípad bankovej lúpeže. Partia lupičov v sejfe vylomila aj bezpečnostné schránky a nie je úplne jasné, čo z nich ukradli, pretože klienti si nespomínajú alebo nechcú spomenúť, čo v nich mali. Detektívom sa však podarilo zúžiť okruh podozrivých a získať tieto indície:

1. Bloom sa dá nahovoriť iba na takú prácu, pri ktorej ide o drahokamy, a vždy spolupracuje s Yarrom alebo Malloyom.
2. Malloy sa špecializuje výhradne na cenné papiere.
3. Podľa dôveryhodného informátora sa drahokamy nekradnú, ak je v partii Pakľúč a nie Ocean.
4. Ak bol medzi lupičmi Yarr, tak v partii nebol Ryan, s ktorým sa Yarr len ťažko znesie, alebo išlo o zlato, kvôli ktorému je Yarr ochotný spolupracovať skoro s hocikým.
5. Ocean zásadne nekradne zlato.

6. Pod prezývkou Pakľúč je známy Ryan.
7. Bloomovu tvár zaznamenala bezpečnostná kamera v okolí banky, pri vystupovaní z auta tesne pred lúpežou, a všetci klienti banky potvrdili, že im neukradli cenné papiere.

Pomôžte Skillovej a Millerovi na základe týchto indícií rozhodnúť, či lúpil alebo nelúpil Ryan, a o tom, či lupiči ukradli zlato.

Pri riešení tejto úlohy:

i. Určte **aké logické problémy** je potrebné vyriešiť, aby ste mohli urobiť požadované rozhodnutie.
ii. Vyriešte **všetky** logické problémy použitím **tablového** kalkulu rozšíreného o korektné pravidlá z úlohy 5.3.1 v zbierke. Tieto pravidlá použite **všade**, kde je to možné a užitočné z hľadiska veľkosti tabla.
iii. Zdôvodnite, **ako a prečo** použité tablo či tablá riešia určené logické problémy.
iv. Vyjadrite **riešenia určených logických problémov**.
v. Vyvoďte **požadované rozhodnutie**.

Pomôcka. Indície sformalizujeme v jazyku $\mathcal{L}$ s $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{lúpil}^1, \text{cp}^1, \text{drahokamy}^1, \text{zlato}^1\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{lup}, \text{Bloom}, \text{Malloy}, \text{Ocean}, \text{Pakľúč}, \text{Ryan}, \text{Yarr}\}$. Konštanta lup označuje množinu ulúpených cenností, ostatné konštanty označujú jednotlivých podozrivých. Zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
lúpil(x)	x sa zúčastnil predmetnej lúpeže
cp(x)	x obsahuje cenné papiere
drahokamy(x)	x obsahuje drahokamy
zlato(x)	x obsahuje zlato

Formalizácia indícií je potom nasledovná:

(A_1) $\big(\text{lúpil(Bloom)} \to \big(\text{drahokamy(lup)} \land (\text{lúpil(Yarr)} \lor \text{lúpil(Malloy)})\big)\big)$

(A_2) $(\text{lúpil(Malloy)} \to \text{cp(lup)})$

(A_3) $\big((\text{lúpil(Pakľúč)} \land \neg\text{lúpil(Ocean)}) \to \neg\text{drahokamy(lup)}\big)$

(A_4) $\big(\text{lúpil(Yarr)} \to (\neg\text{lúpil(Ryan)} \lor \text{zlato(lup)})\big)$

(A_5) $(\text{lúpil(Ocean)} \to \neg\text{zlato(lup)})$

(A_6) $(\text{lúpil(Pakľúč)} \leftrightarrow \text{lúpil(Ryan)})$

(A_7) (lúpil(Bloom) $\land$ ¬cp(lup))

Odporúčame vám označiť atomické formuly vhodnými meta premennými, napr. B = lúpil(Bloom), ktoré potom použijete v tablách.

Svoje tablá si môžete skontrolovať pomocou editora tabiel. V menu pod tlačidlom *Basic propositional* ▾ vyberte sadu pravidiel *Propositional*, ktorá obsahuje základné pravidlá α, β a všetky pravidlá z úlohy 5.3.1.

⚠ Tento editor tabiel nevie overiť, či je vetva otvorená a úplná. Skontrolovať to musíte sami.

5.4 Meta tvrdenia o tablách

5.4.1 Dokážte alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenia:

a) Nech π je *úplná* vetva v ľubovoľnom table. Nech α, α_1, α_2 sú označené formuly podľa niektorej dvojice α pravidiel. Ak sa α nachádza na π, potom aj α_1 a α_2 sa nachádzajú na π.

b) Nech π je *úplná* vetva v ľubovoľnom table. Nech α, α_1, α_2 sú označené formuly podľa niektorej dvojice α pravidiel. Ak sa α_1 a α_2 nachádzajú na π, tak sa aj α nachádza na π.

c) Existujú označené formuly A^+ typu α a B^+ typu β také, že α_2 pre A^+ je rovnaká ako β_1 pre B^+.

d) Nech π je *uzavretá* vetva v ľubovoľnom table. Nech β, β_1, β_2 sú označené formuly podľa niektorého β pravidla. Ak sa β nachádza na π, tak aj β_1 a β_2 sa nachádzajú na π.

e) Nech π je *úplná* vetva v ľubovoľnom table. Nech β, β_1, β_2 sú označené formuly podľa niektorého β pravidla. Ak sa β_1 alebo β_2 nachádza na π, tak sa aj β nachádza na π.

f) Nech π je *uzavretá* vetva v ľubovoľnom table. Nech α, α_1, α_2 sú označené formuly podľa niektorej dvojice α pravidiel. Ak sa α nachádza na π, tak aspoň jedna z α_1, α_2 sa nachádza na π.

g) Nech π je *úplná a uzavretá* vetva v ľubovoľnom table. Nech α, α_1, α_2 sú označené formuly podľa niektorej dvojice α pravidiel. Nech β, β_1, β_2 sú označené formuly podľa niektorého β pravidla. Ak sa α a β nachádzajú na π, tak aspoň jedna z α_1, β_1 je tiež na π.

Riešenie. Vyriešime časti a) a b) ako vzor. Ostatné časti vyriešte samostatne.

Tvrdenie a) platí.

Dôkaz. Nech $\mathcal{T}$ je ľubovoľné tablo a nech π je ľubovoľná úplná vetva v $\mathcal{T}$. Nech α je ľubovoľná označená formula typu α, ktorá sa nachádza na π. Nech α_1 a α_2 sú dôsledky oboch pravidiel pre formulu α:

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} \qquad \frac{\alpha}{\alpha_2}.$$

Keďže π je úplná vetva $\mathcal{T}$, tak podľa definície 5.24 úplnosti vetvy musí platiť, že aj α_1 a rovnako aj α_2 sa nachádzajú na π.

Tvrdenie b) neplatí.

Kontrapríklad. Nájdeme konkrétnu formulu typu α a konkrétne tablo s úplnou vetvou π, na ktorej sa budú nachádzať α_1 aj α_2 pre formulu α, ale samotná α sa na vetve π nachádzať nebude.

Nech $S^+ = \{\mathbf{F}(\neg \mathsf{p(c)} \to \mathsf{r(c)})\}$. Tablo pre S^+ vyzerá nasledovne:

1.	$\mathbf{F}\,(\mathsf{r(c)} \to \neg\mathsf{p(c)})$	S^+
2.	$\mathbf{T}\,\mathsf{r(c)}$	$\alpha 1$
3.	$\mathbf{F}\,\neg\mathsf{p(c)}$	$\alpha 1$
4.	$\mathbf{T}\,\mathsf{p(c)}$	$\alpha 3$

Toto tablo má jedinú vetvu, ktorá je úplná. Označme ju π. Zoberme si teraz nasledovný pár inštancií pravidiel α pre konjunkciu:

$$\frac{\mathbf{T}(\mathsf{p(c)} \land \mathsf{r(c)})}{\mathbf{T}\,\mathsf{p(c)}} \qquad \frac{\mathbf{T}(\mathsf{p(c)} \land \mathsf{r(c)})}{\mathbf{T}\,\mathsf{r(c)}}$$

Teda $\alpha = \mathbf{T}(\mathsf{p(c)} \land \mathsf{r(c)})$, $\alpha_1 = \mathbf{T}\,\mathsf{p(c)}$ a $\alpha_2 = \mathbf{T}\,\mathsf{r(c)}$. Vidíme, že formuly α_1 a α_2 sa na vetve π nachádzajú (konkrétne v uzloch 4 a 2). Formula α sa ale na π nenachádza.

Našli sme teda kontrapríklad k tvrdeniu b), a tvrdenie b) tým pádom neplatí. ♮

5.4.2 Dokážte alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenia:

a) Nech $\mathcal{T}$ je ľubovoľné tablo pre množinu označených formúl $\{\mathbf{F}\,X\}$. Ak je v $\mathcal{T}$ niektorá vetva uzavretá, tak X je splniteľná.

b) Nech $\mathcal{T}$ je ľubovoľné tablo pre $\{\mathbf{F}\,X\}$. Ak je v $\mathcal{T}$ niektorá vetva uzavretá, tak X je falzifikovateľná.

c) Nech S je množina formúl a X je formula. Nech $\mathcal{T}$ je ľubovoľné tablo pre množinu označených formúl $\{\,\mathbf{T}\,A \mid A \in S\,\} \cup \{\mathbf{F}\,X\}$. Ak je v $\mathcal{T}$ niektorá vetva otvorená a úplná a iná vetva uzavretá, tak X je nezávislá od S.

Riešenie. a)

💡 Nakoľko je tvrdenie a) všeobecné (hovorí, že čosi platí pre všetky formuly X a všetky tablá s nejakými vlastnosťami), je dobré začať o jeho pravdivosti rozmýšľať, akoby sme ho chceli dokazovať sporom, teda pokúsiť sa jeho pravdivosť spochybniť: Kedy by mohlo a) byť nepravdivé? Keby sa našla aspoň jedna formula X a aspoň jedno tablo pre $\{\mathbf{F}\, X\}$, ktoré má uzavretú vetvu, ale pritom by X bola nesplniteľná. Pretože X má byť nesplniteľná, tablo zrejme bude mať aj nejaké otvorené vetvy.

Veľmi jednoduchá nesplniteľná formula je napríklad $Z = (\mathrm{p(c)} \land \neg\mathrm{p(c)})$, ale úplné tablo pre ňu má dve otvorené vetvy.

Na druhej strane, keď chceme formulu Y, aby tablo pre $\{\mathbf{F}\, Y\}$ malo uzavretú vetvu, môžeme za Y zvoliť tautológiu, napríklad $(\mathrm{p(c)} \lor \neg\mathrm{p(c)})$.

Vieme tieto dve formuly spojiť tak, aby sme dostali aj nesplniteľnú formulu aj úplnú vetvu? Áno. Stačí si uvedomiť, že konjunkcia nesplniteľnej formuly s hocijakou je stále nesplniteľná. Keď na $\mathbf{F}(Y \land Z)$ použijeme pravidlo β, dostaneme dve vetvy. V ľavej bude $\mathbf{F}\, Y$, a teda ju vieme uzavrieť. Tým sme v podstate prišli na kontrapríklad a ostáva nám iba poctivo ho zapísať a zdôvodniť.

Iný spôsob ako nájsť kontrapríklad je uvedomiť si, že $(A \land \neg A)$ je nesplniteľná pre hocijakú formulu A. Ľavá vetva v table pre $\{\mathbf{F}(A \land \neg A)\}$ začína označenou formulou $\mathbf{F}\, A$, a keď A je tautológia, táto vetva sa dá uzavrieť.

Tvrdenie a) je nepravdivé. Pretože ide o všeobecné tvrdenie, vyvrátime ho nájdením kontrapríkladu.

Kontrapríklad. Potrebujeme nájsť formulu X a tablo $\mathcal{T}$ pre $\{\mathbf{F}\, X\}$, pre ktoré bude platiť: tablo $\mathcal{T}$ má aspoň jednu uzavretú vetvu a súčasne X je nesplniteľná.

Zoberme si teda napríklad formulu $X = \big((\mathrm{p(c)} \lor \neg\mathrm{p(c)}) \land (\mathrm{p(c)} \land \neg\mathrm{p(c)})\big)$ v jazyku $\mathcal{L}$ s $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathrm{p}\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathrm{c}\}$. Jej nesplniteľnosť si vieme overiť rýchlou analýzou ohodnotení:

	v_i				
	p(c)	¬p(c)	(p(c) ∨ ¬p(c))	(p(c) ∧ ¬p(c))	((p(c) ∨ ¬p(c)) ∧ (p(c) ∧ ¬p(c)))
v_1	f	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$
v_2	t	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$

Keďže pre obe ohodnotenia v_1 a v_2 pre jazyk $\mathcal{L}$ platí, že X v nich nie je pravdivá, X je nesplniteľná.

Skonštruujme teraz tablo $\mathcal{T}$ pre $\{\mathbf{F}\, X\}$, v ktorom nájdeme aspoň jednu uzavretú vetvu:

1. $\mathbf{F}\big((\mathrm{p(c)} \lor \neg\mathrm{p(c)}) \land (\mathrm{p(c)} \land \neg\mathrm{p(c)})\big)$ $\{\mathbf{F}\,X\}$

2.	$\mathbf{F}\,(\mathrm{p(c)} \lor \neg\mathrm{p(c)})$	$\beta 1$	6.	$\mathbf{F}\,(\mathrm{p(c)} \land \neg\mathrm{p(c)})$	$\beta 1$
3.	$\mathbf{F}\,\mathrm{p(c)}$	$\alpha 2$			
4.	$\mathbf{F}\,\neg\mathrm{p(c)}$	$\alpha 2$			
5.	$\mathbf{T}\,\mathrm{p(c)}$	$\alpha 4$			
	$*$	$3, 5$			

Tvrdenie a) je príkladom chybných úsudkov, ktoré občas študenti robia, keď majú pomocou tabiel rozhodnúť, či je formula tautológia, splniteľná, falzifikovateľná, alebo nesplniteľná.

Pravdepodobne je to spôsobené falošnou analógiou medzi ohodnoteniami a vetvami tabla. Je pravda, že formula X je tautológiou vtt je X pravdivá vo *všetkých* ohodnoteniach. Tiež je pravda, že formula X je tautológiou vtt *všetky* vetvy v table pre $\{\mathbf{F}\,X\}$ sú uzavreté. Falošná analógia spočíva v tom, že na základe predchádzajúcich faktov a toho, že formula X je splniteľná vtt je X pravdivá v *aspoň jednom* ohodnotení, študent usúdi, že to nastáva vtt *aspoň jedna* vetva v table pre $\{\mathbf{F}\,X\}$ je uzavretá, ako keby uzavretá vetva zodpovedala ohodnoteniu, v ktorom je $\mathbf{F}\,X$ nepravdivá a X pravdivá.

Uzavretá vetva však nezodpovedá žiadnemu ohodnoteniu (ako sme poznamenali pri viacerých predchádzajúcich príkladoch). $\natural$

6 Kvantifikátory

6.1 Syntax a jednoduchá formalizácia

6.1.1 Sformalizujte nasledujúce tvrdenia ako ucelenú teóriu vo vhodnom jazyku v logiky prvého rádu:

1. Evka je doktorandka a má školiteľa.
2. Všetko sú ľudia.
3. Všetci doktorandi sú študenti.
4. Niektorí doktorandi sú aj učiteľmi.
5. Nikto nemôže učiť sám seba.
6. Žiaden profesor nemôže byť doktorand.
7. Niektorí študenti samozrejme nie sú doktorandi.
8. Doktorandi profesora Nového sú cvičiaci buď na Teórii všetkého alebo Úvode do abstrakcie.
9. Učitelia okrem asistentov sú profesori a docenti.
10. Adamov školiteľ musí byť docent alebo profesor v prípade, že je Adam doktorand.
11. Docentka Mladá školí iba takých študentov, ktorí absolvovali s vyznamenaním Kurz pre náročných, ale nie sú doktorandi.
12. Predmet Teória všetkého si nemôžu zapísať tí, čo neabsolvovali ani Kurz pre náročných, ani Úvod do abstrakcie.
13. Ak nejaký kurz učí profesor Nový, tak ide o neobľúbený kurz.
14. Doktorandi profesora Nového cvičiaci Teóriu všetkého sú veľmi bystrí.
15. Ak je nejaký Mladej doktorand bystrý, tak je šťastná.
16. Nový je šťastný, iba ak ho obľubuje aspoň jeden študent.

6.2 Sémantika

6.2.1 Nech $\mathcal{L}$ je jazyk relačnej logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{\text{Boris}, \text{Etela}, \text{Klára}\}$, $\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{\text{muž}^1, \text{žena}^1, \text{manželia}^2\}$. Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$, kde:

$$D = \{1, 2, 3\}$$

$$\begin{aligned} i(\text{Etela}) &= 1 & i(\text{muž}) &= \{2\} \\ i(\text{Klára}) &= 1 & i(\text{žena}) &= \{1\} \\ i(\text{Boris}) &= 3 & i(\text{manželia}) &= \{(1,1), (1,2), (2,1)\} \end{aligned}$$

Zistite, či sú nasledujúce formuly pravdivé alebo nepravdivé v štruktúre $\mathcal{M}$. Každú formulu preložte do čo najprirodzenejšieho slovenského tvrdenia.

(A_1) $(\exists x\, \text{žena}(x) \land \exists y\, \text{muž}(y))$

(A_2) $(\forall x\, \text{muž}(x) \lor \exists y\, \text{muž}(y))$

(A_3) $\forall x(\text{žena}(x) \to \neg\text{muž}(x))$

(A_4) $\exists x(\text{žena}(x) \land \text{muž}(x))$

(A_5) $\forall x(\text{žena}(x) \to \text{muž}(x))$

(A_6) $\exists x(\text{žena}(x) \to \text{muž}(x))$

(A_7) $\exists x(\text{manželia}(x, \text{Klára}) \land (\text{muž}(x) \lor \text{žena}(x)))$

(A_8) $\forall x(\text{manželia}(x, \text{Etela}) \to \text{žena}(x))$

(A_9) $\forall x((\text{žena}(x) \land \neg\text{manželia}(x, \text{Klára})) \to \text{manželia}(x, \text{Boris}))$

(A_{10}) $\neg \forall x((\text{muž}(x) \land \neg\text{manželia}(x, \text{Klára})) \to \text{manželia}(x, \text{Etela}))$

(A_{11}) $\exists x((\text{žena}(x) \land \text{manželia}(x, \text{Klára})) \to \text{manželia}(x, \text{Etela}))$

(A_{12}) $\neg \forall x(\text{muž}(x) \lor \text{žena}(x))$

(A_{13}) $\neg \exists y\, \text{manželia}(\text{Boris}, y)$

(A_{14}) $\forall x\, \forall y(\text{manželia}(x, y) \to \text{manželia}(y, x))$

(A_{15}) $\exists x(\text{žena}(x) \to (\text{žena}(x) \land \text{muž}(x)))$

(A_{16}) $\forall x(\text{manželia}(x, \text{Boris}) \to (\text{žena}(x) \land \text{muž}(x)))$

6.2.2 Nech $\mathcal{L}$ je jazyk relačnej logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{\text{Matematika}\}$, $\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{\text{depresivny}^1, \text{lenivy}^1, \text{sikovny}^1, \text{student}^1, \text{uspesny}^1, \text{maRad}^2\}$.

Zostrojte štruktúru $\mathcal{M}$ pre jazyk $\mathcal{L}$ tak, aby bola modelom teórie tvorenej všetkými nasledujúcimi formulami.

Každú formulu preložte do čo najprirodzenejšieho slovenského tvrdenia.

(A_1) $\forall x(\mathsf{student}(x) \to (\mathsf{sikovny}(x) \lor \mathsf{lenivy}(x)))$

(A_2) $\forall x(\mathsf{sikovny}(x) \to \neg\mathsf{lenivy}(x))$

(A_3) $(\exists x(\mathsf{student}(x) \land \mathsf{lenivy}(x)) \land \exists x(\mathsf{student}(x) \land \neg\mathsf{lenivy}(x)))$

(A_4) $\forall x(\mathsf{student}(x) \to (\mathsf{sikovny}(x) \to \mathsf{maRad}(x, \mathsf{Matematika})))$

(A_5) $\forall x(\mathsf{maRad}(x, \mathsf{Matematika}) \to \mathsf{uspesny}(x))$

(A_6) $(\neg \forall x \neg\mathsf{sikovny}(x) \to \neg \exists x(\neg\mathsf{depresivny}(x) \land \mathsf{uspesny}(x)))$

(A_7) $\neg \forall x(\neg\mathsf{uspesny}(x) \to \neg\mathsf{depresivny}(x))$

6.2.3 Sformalizujte nasledujúce tvrdenia ako ucelenú teóriu T vo vhodnom jazyku $\mathcal{L}$ relačnej logiky prvého rádu:

1. Poznáme červené ovocie.
2. Jablko je ovocie.
3. Jablká sú červené, zelené, ale aj žlté.
4. Darinka je mandarínka.
5. Mandarínky a pomaranče sú oranžové ovocie.
6. Nič oranžové nie je červené.
7. Žiadne ovocie nie je nezdravé, ibaže by bolo hnilé či plesnivé.
8. Afrika je kontinent a ovocie, ktoré z nej pochádza, považujeme za exotické.
9. Čo nie je americké, to nie je z Kalifornie.
10. Aj Darinka musí odniekiaľ pochádzať.
11. Janko má rád africké ovocie, ak je zelené, a americké, iba ak je červené.

Pred uvedením formalizácie zadefinujte použitý jazyk $\mathcal{L}$ a vysvetlite význam jeho symbolov.

Následne:

a) Zostrojte štruktúru $\mathcal{M}_1$ pre $\mathcal{L}$, ktorá bude modelom vašej teórie T.

b) Je za daných okolností *možné*, že Janko má rád Darinku, keď Darinka pochádza z Kalifornie? Ak áno, doložte to vhodnou štruktúrou $\mathcal{M}_2$. Ak nie, dokážte, že taká štruktúra $\mathcal{M}_2$ neexistuje.

6.2.4 Dokážte, že nasledujúce formuly sú splniteľné, ale nie platné:

a) $\big(\forall x(\text{doktorand}(x) \to \text{študent}(x)) \to \forall x(\text{doktorand}(x) \land \text{študent}(x))\big)$,

b) $\big(\forall x\, \exists y(\text{páči}(x,y) \to \text{zaľúbený}(x)) \to \forall x(\exists y\, \text{páči}(x,y) \to \text{zaľúbený}(x))\big)$,

c) $\big(\forall x\, \exists y\, \text{rodič}(x,y) \to \exists x\, \forall y\, \text{rodič}(x,y)\big)$.

d) $\big(\exists x(\text{pes}(x) \to \text{zly}(x)) \to \exists x(\text{pes}(x) \land \text{zly}(x))\big)$,

e) $\big(\forall x\, \exists y(\text{skolitel}(x,y) \to \text{docent}(x)) \to \forall x\, \forall y(\text{skolitel}(x,y) \to \text{docent}(x))\big)$,

f) $\big(\neg \exists x \neg \exists y(\text{student}(x) \land \text{skolitel}(x,y)) \to \neg \exists x\, \exists y(\text{student}(x) \land \text{skolitel}(x,y))\big)$,

g) $\big(\neg \exists x \neg \exists y(\text{student}(x) \land \neg \text{skolitel}(x,y)) \to \neg \exists x\, \exists y(\text{student}(x) \land \text{skolitel}(x,y))\big)$.

Tieto formuly zachytávajú **časté chyby pri formalizácii**. Všímajte si **rozdiely vo význame** ľavých a pravých strán implikácií. Aby ste ich naozaj pochopili:

- splniteľnosť dokážte tým, že splníte konzekvent formuly;
- skúmajte štruktúry s aspoň 4-prvkovými doménami, v ktorých sú, pokiaľ je to možné, interpretácie všetkých predikátov neprázdne;
- štruktúru znázornite kombináciou Vennovho diagramu pre unárne predikáty a orientovaného grafu pre binárne predikáty.

Riešenie. a) Pre zostručnenie označme

$$A_1 = \forall x(\text{doktorand}(x) \to \text{študent}(x)), \qquad A_2 = \forall x(\text{doktorand}(x) \land \text{študent}(x)),$$
$$A = (A_1 \to A_2).$$

Napríklad v štruktúre $\mathcal{M}_1 = (D_1, i_1)$, kde:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{\text{Janka}, \text{Mišo}, \text{Števo}, \text{Zuzka}\} \\ i_1(\text{doktorand}) &= \{\text{Janka}, \text{Mišo}, \text{Števo}, \text{Zuzka}\} \\ i_1(\text{študent}) &= \{\text{Janka}, \text{Mišo}, \text{Števo}, \text{Zuzka}\} \end{aligned}$$

je pravdivá formula A_2, a teda $\mathcal{M}_1 \models A$, preto A je splniteľná.

Všimnite si, že A_2 požaduje, aby všetky prvky z domény mali **obe** vlastnosti — študent aj doktorand.

V štruktúre $\mathcal{M}_2 = (D_2, i_2)$, kde:

$$D_2 = \{\text{Janka}, \text{Mišo}, \text{Števo}, \text{Zuzka}\}$$

$$i_2(\text{doktorand}) = \{\text{Mišo}\}$$
$$i_2(\text{študent}) = \{\text{Janka, Mišo}\}$$

je pravdivá A_1, ale nie A_2, teda $\mathcal{M}_2 \nvDash A$, preto A nie je platná. ♮

6.2.5 Dokážte, že nasledujúce formuly sú splniteľné, ale nie platné:

a) $\neg\forall x\, P(x) \to \forall x \neg P(x)$,

b) $\exists x \neg P(x) \to \neg\exists x\, P(x)$,

c) $\forall x(P(x) \lor Q(x)) \to (\forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x))$,

d) $(\forall x\, P(x) \to \forall x\, Q(x)) \to \forall x(P(x) \to Q(x))$,

e) $(\neg\forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x)) \to \forall x(P(x) \to Q(x))$,

f) $(\exists x\, P(x) \land \exists x\, Q(x)) \to \exists x(P(x) \land Q(x))$,

g) $\forall x(P(x) \lor Q(x)) \to \forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x)$,

h) $\neg\forall x(P(x) \land Q(x)) \to \neg\forall x\, P(x) \lor \neg\forall x\, Q(x)$,

i) $\neg\exists x(P(x) \land Q(x)) \to \neg\exists x\, P(x) \lor \neg\exists x\, Q(x)$.

Tieto formuly ukazujú prípady, v ktorých **nie je** možné distribuovať („presúvať") kvantifikátory cez logické spojky tak, aby táto úprava bola ekvivalentná.

Dodržte odporúčania k predchádzajúcej úlohe.

Riešenie pre c). $\forall x(P(x) \lor Q(x)) \to (\forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x))$

Napríklad štruktúra $\mathcal{M}_1 = (D_1, i_1)$, pričom:

$$D_1 = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$i_1(P) = \emptyset$$
$$i_1(Q) = \{1, 2, 3, 4\}$$

spĺňa formulu c), ale štruktúra $\mathcal{M}_2 = (D_2, i_2)$, kde:

$$D_2 = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$i_2(P) = \{2, 4\}$$
$$i_2(Q) = \{1, 3\}$$

ju nespĺňa. Formula c) teda nie je ani platná, ani nesplniteľná. ♮

6.2.6 Sformalizujte nasledujúce tvrdenia ako ucelenú teóriu T vo vhodnom jazyku $\mathcal{L}$ relačnej logiky prvého rádu.

1. V bare U Zubatej určite pracuje barman.
2. Okrem barmanov tam pracujú už len čašníci, vyhadzovači a upratovačky.
3. Bar má vyhadzovača, ak má upratovačku.
4. Fero sa kamaráti iba s takými barmanmi, ktorí sú aj čašníkmi.
5. Vyhadzovačka Gigi sa nekamaráti s nikým, kto nie je tiež vyhadzovač.
6. Kto sa kamaráti s ňou, ten U Zubatej nepracuje.
7. Bar má ženskú vyhadzovačku, len ak sú aj všetci ostatní vyhadzovači, ktorí tam pracujú, ženy.

Pred uvedením formalizácie zadefinujte použitý jazyk $\mathcal{L}$ a vysvetlite význam jeho symbolov.

Následne:

a) Zostrojte štruktúru $\mathcal{M}_1$ pre $\mathcal{L}$, ktorá bude modelom vašej teórie T.

b) Je zadaných okolností možné, že Gigi sa kamaráti s Ferom? Ak áno, doložte to vhodnou štruktúrou $\mathcal{M}_2$. Ak nie, dokážte, že taká štruktúra $\mathcal{M}_2$ neexistuje.

Pomôcka. Ako obvykle, zanedbajte rôzne slová pre profesie v mužskom a ženskom rode. Konštanty použite len na formalizáciu objektov, ktoré majú vlastné mená.

6.2.7 Sformalizujte čo najvernejšie nasledujúce tvrdenia ako ucelenú teóriu T vo vhodnom jazyku $\mathcal{L}$ relačnej logiky prvého rádu:

1. Vegán konzumuje iba rastlinné produkty.
2. Kto jazdí na starom bicykli, je hipster.
3. Kto nosí bradu a falošné okuliare, je hipster.
4. Každý vegán má aspoň jedného kamaráta, ktorý konzumuje mäso.
5. Žiadne mäso nie je rastlinný produkt.
6. Každý hipster má za kamarátov len hipsterských vegánov.
7. Každý hipster, ktorý má záhradu, v nej chová kozu.
8. Je taká koza, ktorá má za kamarátov všetkých hipsterov.
9. Žiadny vegán nikde nechová žiadnu kozu, ktorá konzumuje mäso.

10. Kamarátstvo nie je vždy vzájomné.
11. Niekto jazdí na aspoň dvoch bicykloch, z ktorých práve jeden je starý.

Pred uvedením formalizácie zadefinujte použitý jazyk $\mathcal{L}$ a vysvetlite význam jeho symbolov.

Následne:

a) Zostrojte štruktúru $\mathcal{M}_1$ pre $\mathcal{L}$, ktorá bude modelom vašej teórie T.

b) Je za daných okolností *možné*, aby vôbec hipster mal kamaráta? Ak áno, doložte to vhodnou štruktúrou $\mathcal{M}_2$. Ak nie, dokážte, že taká štruktúra $\mathcal{M}_2$ neexistuje.

Pomôcka. V jazyku $\mathcal{L}$ nepotrebujete konštanty, lebo vo výrokoch sa nevyskytujú vlastné mená.

6.3 Formalizácia s viacerými kvantifikátormi

6.3.1 Príklad. Sformalizujte nasledujúce tvrdenia ako ucelenú teóriu T vo vhodnom jazyku $\mathcal{L}$ relačnej logiky prvého rádu:

1. Je aspoň jeden študent, ktorý je chlapec, a jedna študentka (ktorá je teda dievča), a sú spolužiaci.
2. Učiteľ, ktorý je profesorom, musí byť školiteľom aspoň jedného študenta.
3. Vzťah „byť spolužiakom“ je symetrický a tranzitívny.
4. Študenti a školitelia sú disjunktní.
5. Študent absolvuje predmet, iba ak ho má zapísaný.
6. Študent, ktorý absolvoval predmet, je spokojný.
7. Každý študent má medzi študentami aspoň dvoch kamarátov, pričom s jedným sa kamaráti viac než s tým druhým.
8. Každý študent má najviac jedného školiteľa.
9. Každá študentka má práve jednu spolužiačku, ktorá jej je ktorá je jej najlepšou kamarátkou.
10. Nikto si nezapisuje výberové predmety.

Riešenie. Tvrdenia sformalizujeme v jazyku, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{chlapec}^1, \mathsf{dievca}^1, \mathsf{predmet}^1, \mathsf{profesor}^1, \mathsf{student}^1, \mathsf{ucitel}^1, \mathsf{vyberovy}^1, \mathsf{absolvoval}^2, \mathsf{kamarat}^2, \mathsf{skolitel}^2, \mathsf{zapisany}^2, \mathsf{spoluziaci}^2, \mathsf{lepsi\_kamarat}^3\}$, pričom zamýšľaný význam predikátových symbolov je nasledovný:

Predikát	Význam
$P(x)$	x je P — pre každý unárny predikát P
$\mathsf{absolvoval}(x, y)$	x absolvoval y
$\mathsf{kamarat}(x, y)$	x je kamarát s y
$\mathsf{skolitel}(x, y)$	x je školiteľom y
$\mathsf{spoluziaci}(x, y)$	x a y sú spolužiaci
$\mathsf{zapisany}(x, y)$	x má zapísaný y
$\mathsf{lepsi\_kamarat}(x, y, z)$	x je lepší kamarát s y ako so z

1. Je aspoň jeden študent, ktorý je chlapec, a jedna študentka (ktorá je teda dievča), a sú spolužiaci.

   $\exists x\, \exists y(\mathsf{student}(x) \land \mathsf{chlapec}(x) \land \mathsf{student}(y) \land \mathsf{dievca}(y) \land \mathsf{spoluziaci}(x, y))$

2. Učiteľ, ktorý je profesorom, musí byť školiteľom aspoň jedného študenta.

   $\forall x\big((\mathsf{ucitel}(x) \land \mathsf{profesor}(x)) \to \exists y\,(\mathsf{student}(y) \land \mathsf{skolitel}(x, y))\big)$

3. Vzťah „byť spolužiakom" je symetrický a tranzitívny.

   Symetria:
   $\forall x\, \forall y(\mathsf{spoluziaci}(x, y) \to \mathsf{spoluziaci}(y, x))$

   Tranzitivita:
   $\forall x\, \forall y\, \forall z\big((\mathsf{spoluziaci}(x, y) \land \mathsf{spoluziaci}(y, z)) \to \mathsf{spoluziaci}(x, z)\big)$
   alebo ekvivalentne:
   $\forall x\, \forall z\big(\exists y(\mathsf{spoluziaci}(x, y) \land \mathsf{spoluziaci}(y, z)) \to \mathsf{spoluziaci}(x, z)\big)$

4. Študenti a školitelia sú disjunktní.

   $\forall x(\mathsf{student}(x) \to \neg\, \exists y\, \mathsf{skolitel}(x, y))$

5. Študent absolvuje predmet, iba ak ho má zapísaný.

   $\forall x\, \forall y\big((\mathsf{student}(x) \land \mathsf{absolvoval}(x, y) \land \mathsf{predmet}(y)) \to \mathsf{zapisany}(x, y)\big)$

6. Študent, ktorý absolvoval predmet, je spokojný.

   $\forall x\big((\mathsf{student}(x) \land \exists y(\mathsf{predmet}(y) \land \mathsf{absolvoval}(x, y))) \to \mathsf{spokojny}(x)\big)$

7. Každý študent má medzi študentami aspoň dvoch kamarátov, pričom s jedným sa kamaráti viac než s tým druhým.

   $$\begin{aligned}&\forall x\big(\mathsf{student}(x) \to \\ &\qquad \exists y\, \exists z(\neg\, z \doteq y \land \mathsf{student}(y) \land \mathsf{student}(z) \land \mathsf{kamarat}(x, y) \land \mathsf{kamarat}(x, z) \\ &\qquad\qquad \land \mathsf{lepsi\_kamarat}(x, y, z) \land \neg\, z \doteq x \land \neg\, y \doteq x)\big)\end{aligned}$$

8. Každý študent má najviac jedného školiteľa.

$\forall x\, \forall y\big((\text{student}(x) \land \text{skolitel}(y, x)) \to \forall z(\text{skolitel}(z, x) \to z \doteq y)\big)$
alebo ekvivalentne:
$\forall x\, \forall y\big((\text{student}(x) \land \text{skolitel}(y, x)) \to \neg \exists z(\text{skolitel}(z, x) \land \neg z \doteq y)\big)$
alebo ekvivalentne:
$\forall x\big((\text{student}(x) \to \forall y\, \forall z((\text{skolitel}(y, x) \land \text{skolitel}(z, x)) \to y \doteq z)\big)$

9. Každá študentka má práve jednu spolužiačku, ktorá je jej najlepšou kamarátkou.

$$
\begin{aligned}
&\forall x\Big((\text{student}(x) \land \text{dievca}(x)) \to \\
&\quad \exists y\Big(\text{student}(y) \land \text{dievca}(y) \land \text{spoluziaci}(x, y) \land \text{kamarat}(x, y) \\
&\qquad \land \neg \exists z(\text{lepsi\_kamarat}(x, z, y) \land \neg z \doteq y) \\
&\qquad \land \forall v\big((\text{student}(v) \land \text{dievca}(v) \land \text{spoluziaci}(x, v) \land \text{kamarat}(x, v) \\
&\qquad\qquad \land \neg \exists z(\text{lepsi\_kamarat}(x, z, v) \land \neg z \doteq v)\big) \\
&\qquad\quad \to v \doteq y)\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

To, že existuje *práve jeden objekt* s nejakou vlastnosťou P, vyjadruje formula:

$$\exists x(P(x) \land \forall y(P(y) \to x \doteq y)),$$

ekvivalentne:

$$\exists x(P(x) \land \neg \exists y(P(y) \land \neg x \doteq y)).$$

V tomto prípade je vlastnosť P veľmi zložitá: Pre danú študentku x má existovať jednoznačne určený objekt y, ktorý je jednak študentkou, spolužiačkou aj kamarátkou x a navyše najlepšou. Preto výsledná formula pôsobí komplikovane.

To, že y je najlepšou kamarátkou x sa dá vyjadriť dvoma spôsobmi — tak, že nikto iný ako y nie je lepším kamarátom x (y je *maximálnym* prvkom množiny kamarátov x), alebo tak, že y je lepšou kamarátkou x ako všetci ostatní (y je *najväčším* prvkom množiny kamarátov x).

Vybrali sme si (možno trocha kontroverzne) prvý spôsob. Zapíšte druhý spôsob!

10. Nikto si nezapisuje výberové predmety.
$\neg \exists x\, \exists y(\text{predmet}(y) \land \text{vyberovy}(y) \land \text{zapisany}(x, y))$ ♮

6.3.2 Uvažujme vetu: „Každé zvieratko niekto kŕmi.“ Ktorá z nasledovných formúl zodpovedá tejto vete? Akým vetám zodpovedajú zvyšné formuly?

(A_1) $\forall x\big(\text{človek}(x) \to \exists y(\text{zvieratko}(y) \land \text{kŕmi}(x, y))\big)$

(A_2) $\forall y\big(\text{zvieratko}(y) \to \exists x(\text{človek}(x) \land \text{kŕmi}(x, y))\big)$

(A_3) $\exists x\big(\text{človek}(x) \land \forall y(\text{zvieratko}(y) \to \text{kŕmi}(x, y))\big)$

(A_4) $\exists y\big(\text{zvieratko}(y) \land \forall x(\text{človek}(x) \to \text{kŕmi}(x, y))\big)$

Formuly A_1–A_4 možno vyabstrahovať do nasledovných štyroch všeobecných schém, kde P, Q a R označujú *formuly* s voľnými premennými x a y (teda nie nutne iba jednoduché predikáty):

(B_1) $\forall x\big(P(x) \to \exists y(Q(y) \land R(x,y))\big)$

(B_2) $\forall x\big(P(x) \to \exists y(Q(y) \land R(y,x))\big)$

(B_3) $\exists x\big(P(x) \land \forall y(Q(y) \to R(x,y))\big)$

(B_4) $\exists x\big(P(x) \land \forall y(Q(y) \to R(y,x))\big)$

Určte, ktorej schéme zodpovedá každé z nasledujúcich tvrdení (v zátvorkách je odporúčaná formula R):

1. V ZOO je zvieratko, ktoré chodia kŕmiť všetky deti.
   ($\mathsf{kŕmi}(x,y)$ — x chodí kŕmiť y)
2. Každý týždeň na Obchodnej zbijú cudzinca.
   ($\mathsf{zbijú}(x,t)$ — na Obchodnej zbijú x v období t)
3. Každú hodinu mi vyvoláva nejaký otravný predajca.
   ($\mathsf{volá}(x,\mathsf{ja},t)$ — telefonicky ma otravuje x v čase t)
4. Každý študent má kamaráta, ktorý je tiež študent.
   ($\mathsf{kamarát}(x,y)$ — x a y sú kamaráti)
5. Jeden študent sa kamaráti so všetkými študentami.

6.3.3 Uvažujme znova jazyk $\mathcal{L}$ a teóriu T z úlohy 6.3.1. Rozšírte teóriu T o formalizáciu nasledujúcich tvrdení na teóriu T' vo vhodnom rozšírení $\mathcal{L}'$ jazyka $\mathcal{L}$:

1. Každý študent študuje nejaký študijný program.
2. Garantom študijného programu je *iba* profesor.
3. Študent, ktorý absolvoval *všetky* predmety nejakého študijného programu, absolvoval tento program.
4. Vzťah „byť školiteľom“ je ireflexívny a asymetrický.
5. *Nie* každý študent má školiteľa, ktorý je profesor.
6. Každý profesor má *práve* dvoch podriadených docentov.
7. *Nikto ne*učí ani si *ne*zapíše *ne*aktívny predmet.
8. Študent môže byť hodnotený známkou „Fx“ *najviac* na dvoch predmetoch.
9. Pokiaľ má nejaký študent *samé* A-čka, učitelia sú spokojní.
10. Peter má dve také spolužiačky, ktoré sú *obe súčasne* jeho *naj*lepšie kamarátky.

Pred uvedením formalizácie zadefinujte celý použitý jazyk $\mathcal{L}'$ a vysvetlite význam symbolov, ktoré ste použili na formalizáciu nových tvrdení. Z teórie T' uveďte iba nové formuly (teda $T' \setminus T$).

6.3.4 Sformalizujte nasledujúce znalosti z oblasti univerzitného vzdelávania ako teóriu v logike prvého rádu:

a) Každý študent študuje nejaký študijný program.
b) Učiteľ, ktorý je profesorom, musí byť školiteľom aspoň jedného študenta.
c) Evka a Ferko sú študenti. Evka je dievča.
d) Študent absolvuje predmet, iba ak ho má zapísaný.
e) Každý študent má školiteľa.
f) Garantom študijného programu je iba profesor.
g) Každý predmet sa vyučuje v práve jednom semestri.
h) Evkina školiteľka je učiteľka, ale nie je profesorka.
i) Predmet je aktívny, ak sú naň zapísaní aspoň dvaja študenti, alebo ak je naň zapísaný hoc aj len jeden študent a je to dievča.
j) Nikto neučí ani si nezapíše neaktívny predmet.
k) Sú práve dva rôzne semestre – letný a zimný.
l) Študent môže byť hodnotený známkou „Fx“ najviac na dvoch predmetoch v tom istom semestri.
m) Pokiaľ má nejaký študent samé A-čka, učitelia sú spokojní.

6.3.5 Zadefinujte nasledujúcej pojmy v logike prvého rádu

a) Hovoríme, že učiteľ učí študenta vtedy a len vtedy, keď učí predmet, ktorý má študent zapísaný, alebo je študentovým školiteľom.
b) Povinný predmet v danom študijnom programe je práve taký predmet, ktorý absolvuje každý študent tohto študijného programu.

Pomocou zadefinovaných pojmov formalizujte nasledujúce tvrdenie:

- Nikto si nezapisuje ťažké predmety, ak nie sú povinné v ich študijnom programe.

6.3.6 Pojmami prvorádovej logiky vyjadrite nasledujúce otázky. Otázky zodpovedzte a odpovede dokážte.

a) Môže byť profesorom niekto, kto nie je školiteľom žiadneho študenta?

b) Bude predmet Základy základov aktívny, ak sa naň zapíše Evka?

c) Sú všetci školitelia profesormi?

d) Profesor Šašo tvrdí, že jeho predmet sa vyučuje aj v letnom, aj v zimnom semestri. Môžeme mu veriť?

e) Je pravda, že nikto neabsolvuje neaktívny predmet?

6.3.7 Sformalizujte nasledujúce tvrdenia ako teóriu v relačnej logike prvého rádu. Vhodne zvoľte spoločný jazyk a vysvetlite význam jeho mimologických symbolov.

a) Vzťah súrodenec je symetrický a všetci súrodenci sa majú radi.

b) Nikto nemá rád nikoho, kto sa posmieva jeho súrodencovi.

c) Ak jedného súrodenca uprednostní niektorý z rodičov pred druhým súrodencom, je z toho ten druhý prirodzene smutný.

d) Každý sa nahnevá, keď mu súrodenec zoberie hračku, alebo mu na oplátku tiež nejakú zoberie.

e) Ak nejakí súrodenci dostanú hračky rôznej značky, zaručene si budú navzájom závidieť.

6.3.8 Sformalizujte čo najvernejšie nasledujúce tvrdenia ako ucelenú teóriu T vo vhodnom jazyku $\mathcal{L}$ relačnej logiky prvého rádu:

1. Peťo má cestný bicykel, Marlon trojkolku.
2. Bicykel má 2 kolesá, kým trojkolka má 3.
3. Cestný bicykel má úzke kolesá a pevnú vidlicu.
4. Cestný bicykel s rovnými riadidlami sa nazýva fitness bicykel.
5. Žiadne fitness trojkolky nie sú. Sú ale trojkolky so širokými kolesami.
6. Takýmto trojkolkám hovoríme terénne.
7. Čo je úzke, nie je široké.
8. Marlonovi sa páčia bicykle, ak majú úzke kolesá, a trojkolky, len ak sú terénne.
9. Majiteľ bicykla alebo trojkolky na nich aj jazdí.

10. Žiadny majiteľ bicykla nejazdí na žiadnej trojkolke.

Pred uvedením formalizácie zadefinujte použitý jazyk $\mathcal{L}$ a vysvetlite význam jeho symbolov.

Následne:

a) Zostrojte štruktúru $\mathcal{M}_1$ pre $\mathcal{L}$, ktorá bude modelom vašej teórie T.

b) Je za daných okolností *možné*, aby Marlon nejazdil na žiadnej trojkolke? Ak áno, doložte to vhodnou štruktúrou $\mathcal{M}_2$. Ak nie, dokážte, že taká štruktúra $\mathcal{M}_2$ neexistuje.

6.3.9 Sformalizujte v naznačenom alebo vhodne zvolenom jazyku logiky prvého rádu nasledujúce tvrdenia:

a) Bez práce nie sú koláče. (má(kto, $čo$), práca(x), koláč(x)).

b) Pomôž iným, pomôžeš aj sebe.

c) Kto druhému jamu kope, sám do nej spadne.

d) Tí, čo iným jamy nekopú, nie sú intrigáni.

e) Aký otec, taký syn. (má_vlastnosť(kto, $vlastnosť$), je_syn(kto, $koho$)).

f) Nepriatelia mojich nepriateľov sú mojimi priateľmi. (priateľ(kto, $koho$))

6.3.10 (Lenhart K. Schubert prostredníctvom Pelletiera [3]) Zvoľte vhodný jazyk logiky prvého rádu a sformalizujte v ňom nasledujúci detektívny príbeh:

> Someone in Dreadsbury Mansion killed Aunt Agatha. Agatha, the butler, and Charles live in Dreadsbury Mansion, and are the only ones to live there. A killer always hates, and is no richer than his victim. Charles hates no one whom Agatha hates. Agatha hates everybody except the butler. The butler hates everyone not richer than Aunt Agatha. The butler hates everyone whom Agatha hates. No one hates everyone. Who killed Agatha?
>
> Niekto v Dreadsburskom kaštieli zabil tetu Agátu. V Dreadsburskom kaštieli bývajú Agáta, komorník a Karol a nikto iný okrem nich tam nebýva. Vrah vždy nenávidí svoju obeť a nie je od nej bohatší. Karol neprechováva nenávisť k nikomu, koho nenávidí Agáta. Agáta nenávidí každého okrem komorníka. Komorník nenávidí každého, kto nie je bohatší ako Agáta. Komorník nenávidí každého, koho nenávidí Agáta. Niet toho, kto by nenávidel všetkých. Kto zabil Agátu?

6.3.11 (Novak [2]) Sformalizujte v jazyku logiky prvého rádu.

(A_1) Každý kojot naháňa nejakého roadrunnera.

(A_2) Každý roadrunner, ktorý robí „beep-beep“, je múdry.

(A_3) Žiadny kojot nechytí roadrunnera, ktorý je múdry.

(A_4) Kojot, ktorý naháňa roadrunnera, a nechytí ho, je frustrovaný

(X) Ak všetky roadrunnery robia „beep-beep“, tak všetky kojoty sú frustrované.

6.3.12 Vyjadrite čo najprirodzenejšími slovenskými vetami nasledujúcu formalizáciu zistení o deťoch a Vianociach v jazyku $\mathcal{L}$ s množinami symbolov $\mathcal{V}_\mathcal{L} = \{u, v, w, x, y, z\}$, $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{\text{Vianoce, Ježiško, Santa, Anička}\}$ a $\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{\text{autíčko}^1, \text{blud}^1, \text{dieťa}^1, \text{dobrý}^1, \text{dostane}^2, \text{chlapec}^1, \text{kriticky\_myslí}^1, \text{teší\_sa\_na}^2, \text{uhlie}^1, \text{verí\_v}^2\}$:

(V_1) $\forall x\big((\text{dieťa}(x) \land (\text{verí\_v}(x, \text{Ježiško}) \lor \text{verí\_v}(x, \text{Santa}))\big) \to$
$\text{teší\_sa\_na}(x, \text{Vianoce})\big)$,

(V_2) $\forall x\big((\text{dieťa}(x) \land \neg\text{verí\_v}(x, \text{Santa})) \to (\text{verí\_v}(x, \text{Ježiško}) \lor \text{kriticky\_myslí}(x))\big)$,

(V_3) $\forall x\big(\text{kriticky\_myslí}(x) \to \forall y(\text{blud}(y) \to \neg\text{verí\_v}(x, y))\big)$,

(V_4) $\forall x\big(\neg\text{dobrý}(x) \to \big(\neg\exists y\, \text{dostane}(x, y) \lor$
$(\text{verí\_v}(x, \text{Santa}) \to \exists y(\text{dostane}(x, y) \land \text{uhlie}(y)))\big)\big)$,

(V_5) $\forall x\big((\text{dobrý}(x) \land \text{chlapec}(x)) \to \exists y(\text{dostane}(x, y) \land \text{autíčko}(y))\big)$.

6.4 Tablá pre kvantifikátory

6.4.1 (Novak [2]) Majme teóriu $T = \{A_1, \dots, A_4\}$ v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{\text{John}\}$, $\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{\text{pes}^1, \text{macka}^1, \text{mys}^1, \text{LS}^1, \text{steka}^1, \text{ma}^2\}$, pričom význam $\text{LS}(x)$ je x *má ľahký spánok*. Rozhodnite, či z teórie T, kde

(A_1) $\forall x(\text{pes}(x) \to \text{steka}(x))$

(A_2) $\forall x\, \forall y((\text{ma}(x, y) \land \text{macka}(y)) \to \neg\, \exists z(\text{ma}(x, z) \land \text{mys}(z)))$

(A_3) $\forall x(\text{LS}(x) \to \neg\, \exists y(\text{ma}(x, y) \land \text{steka}(y)))$

(A_4) $\exists x(\text{ma}(\text{John}, x) \land (\text{macka}(x) \lor \text{pes}(x)))$

vyplývajú formuly:

(X_1) $(\exists x(\text{ma}(\text{John}, x) \land \neg\text{steka}(x)) \to \text{LS}(\text{John}))$

(X_2) $(\text{LS}(\text{John}) \to \forall x(\text{ma}(\text{John}, x) \to \neg\text{mys}(x)))$

💡 Teóriu aj formuly X_1 a X_2 si najprv pozorne prečítajte, pochopte ich význam a intuitívne si premyslite, **prečo** X_1 resp. X_2 vyplýva alebo nevyplýva z teórie. Intuícia vás potom dovedie ku konštrukcii správneho tabla alebo štruktúry.

⚠ V logike prvého rádu vo všeobecnosti **nemôžeme použiť tablá na hľadanie spĺňajúcich štruktúr**, pretože úplné tablo môže byť nekonečné.

6.4.2 (Novak [2]) Rozhodnite, či z teórie $T = \{A_1, \dots, A_4\}$, kde

(A_1) $\forall x(\mathrm{kojot}(x) \to \exists y(\mathrm{roadrunner}(y) \land \mathrm{nahana}(x, y)))$

(A_2) $\forall x((\mathrm{roadrunner}(x) \land \mathrm{trubi}(x)) \to \mathrm{mudry}(x))$

(A_3) $\forall x\, \forall y((\mathrm{kojot}(x) \land (\mathrm{roadrunner}(y) \land \mathrm{mudry}(y))) \to \neg\mathrm{chyti}(x, y))$

(A_4) $\forall x(\mathrm{kojot}(x) \to$
$(\exists y(\mathrm{roadrunner}(y) \land (\mathrm{nahana}(x, y) \land \neg\mathrm{chyti}(x, y))) \to \mathrm{frustrovany}(x)))$

vyplývajú formuly:

(X_1) $(\forall x(\mathrm{roadrunner}(x) \to \mathrm{trubi}(x)) \to \forall x(\mathrm{kojot}(x) \to \mathrm{frustrovany}(x)))$

(X_2) $(\exists x(\mathrm{kojot}(x) \land \neg\mathrm{frustrovany}(x)) \to \neg \exists x(\mathrm{roadrunner}(x) \land \mathrm{trubi}(x)))$

Vyplývanie dokážte tablom. Nevyplývanie nájdením štruktúry.

6.4.3 Príklad. Dokážte v tablovom kalkule:

$$\vDash ((\exists x\, \mathrm{muž}(x) \land \exists x\, \mathrm{žena}(x)) \to \exists x(\mathrm{muž}(x) \lor \mathrm{žena}(x)))$$

Riešenie. Máme dokázať, že formula zo zadania je platná. Vybudujeme preto tablo pre množinu označených formúl $S^+ = \{\mathbf{F}((\exists x\, \mathrm{muž}(x) \land \exists x\, \mathrm{žena}(x)) \to \exists x(\mathrm{muž}(x) \lor \mathrm{žena}(x)))\}$.

💡 Zápis formuly je zjednodušený podľa pravidiel z prednášky. Jej plne uzátvorkovaný tvar je $\big((\exists x\, \mathrm{muž}(x) \land \exists x\, \mathrm{žena}(x)) \to \exists x(\mathrm{muž}(x) \lor \mathrm{žena}(x))\big)$. Formula je teda **implikáciou**, ktorej antecedent je konjunkcia dvoch existenčne kvantifikovaných formúl a konzekvent je existenčná kvantifikácia disjunkcie. Tablové pravidlá musíme aplikovať **v súlade** s touto štruktúrou.

1.	**F** $((\exists x\,$muž$(x) \wedge \exists x\,$žena$(x)) \to \exists x($muž$(x) \vee$ žena$(x)))$	S^+
2.	**T** $(\exists x\,$muž$(x) \wedge \exists x\,$žena$(x))$	$\alpha 1$
3.	**F** $\exists x($muž$(x) \vee$ žena$(x))$	$\alpha 1$
4.	**T** $\exists x\,$muž(x)	$\alpha 2$
5.	**T** $\exists x\,$žena(x)	$\alpha 2$
6.	**T** muž(y)	$\delta 4\{x \mapsto y\}$
7.	**T** žena(z)	$\delta 5\{x \mapsto z\}$
8.	**F** (muž$(z) \vee$ žena$(z))$	$\gamma 3\{x \mapsto z\}$
9.	**F** muž(z)	$\alpha 8$
10.	**F** žena(z)	$\alpha 8$
	$*$	$7, 10$

Pravidlo δ sme v table použili dvakrát (uzly 6 a 7, aj keď 6 sme vlastne nepotrebovali). **Vždy** sme za pôvodne viazanú premennú x substituovali **novú** voľnú premennú (v 6 to bola y, potom v 7 to bola z, lebo v tej chvíli sa už y vo vetve vyskytovala voľná). Bolo by **chybou** použiť premennú, ktorá **sa už predtým** vo vetve tabla **vyskytla voľná**. Dôvod je nasledovný:

O objekte, ktorý existuje podľa formuly 4, je známe **iba** to, že má vlastnosť muž. Podobne o objekte, ktorý existuje podľa formuly 5, je známe **iba** to, že má vlastnosť žena. Tento objekt pravdepodobne **nebude rovnaký** ako objekt, ktorý má vlastnosť muž. **Nesmieme** ich preto označiť rovnakou premennou. Nemohli by sme použiť ani inú premennú, ktorá by sa už v table predtým vyskytla voľná, lebo aj o ňou označenom objekte by už boli známe nejaké ďalšie skutočnosti. Tento princíp platí pri všetkých formulách typu δ.

Formuly typu γ hovoria, že nimi opísanú vlastnosť (pozitívnu či negatívnu) majú **všetky** objekty. Preto:

- Pri ich použití (8) môžeme za pôvodne viazanú premennú substituovať **ľubovoľný term** (premennú, konštantu, aplikáciu funkčného symbolu na ľubovoľné argumenty) — samozrejme, táto substitúcia musí byť **aplikovateľná**.
- Tú istú formulu typu γ môžeme použiť **viackrát**, pričom substitujeme rôzne termy. V tomto table stačilo jedno použitie.

Opakovane môžeme použiť formulu každého typu, ale iba pri type γ dostaneme skutočne rôzne výsledky. Pri opakovanom použití formuly typu δ nás pravidlo donúti zaviesť novú premennú, ale získame rovnakú informáciu ako pri prvom použití (rôzne premenné môžu označovať ten istý objekt).

Tablo je uzavreté, takže množina S^+ je nesplniteľná. Neexistuje teda štruktúra, v ktorej by formula $((\exists x\,$muž$(x) \wedge \exists x\,$žena$(x)) \to \exists x($muž$(x) \vee$ žena$(x)))$ pri nejakom ohodnotení bola nesplnená, a preto je táto formula platná. ♮

6.4.4 Rozhodnite, či formula vyplýva z teórie. Vyplývanie dokážte tablom, nevyplývanie nájdením štruktúry, ktorá je kontrapríkladom.

a) $\{\exists x\,\neg\text{myš}(x) \lor \forall x\,\text{hlodavec}(x)\} \vDash \forall x(\text{myš}(x) \to \text{hlodavec}(x))$

b) $\{\forall x(\text{myš}(x) \to \text{hlodavec}(x))\} \vDash \exists x\,\neg\text{myš}(x) \lor \forall x\,\text{hlodavec}(x)$

c) $\{\forall x\,\exists y(\text{hladný}(x) \land \text{zje}(x,y) \to \text{bude\_sýty}(x))\}$
$\vDash \forall x(\text{hladný}(x) \land \exists y\,\text{zje}(x,y) \to \text{bude\_sýty}(x))$

d) $\{\forall x(\text{hladný}(x) \land \exists y\,\text{zje}(x,y) \to \text{sýty}(x))\}$
$\vDash \forall x\,\exists y(\text{hladný}(x) \land \text{zje}(x,y) \to \text{sýty}(x))$

⚠ Na rozdiel od výrokovej logiky, v logike prvého rádu sme nedefinovali, kedy je vetva tabla *úplná*. Keby sme tak urobili, úplná vetva by musela obsahovať použitia každej formuly typu γ so **všetkými** možnými substitúciami. Tých je vo všeobecnosti nekonečne veľa.

Tablo, ktoré sa nám napriek správnemu používaniu pravidiel, trpezlivosti a skúšaniu rôznych prístupov **nedarí uzavrieť**, preto iba **naznačuje, ale nedokazuje**, že formula z teórie nevyplýva (resp. že začiatočná množina označených formúl je splniteľná). Na to, aby sme tento fakt naozaj **dokázali**, musíme skonštruovať vhodnú štruktúru. Otvorené vetvy v table nám v tom môžu pomôcť, pretože naznačujú, ktoré podformuly (možno atomické) má štruktúra spĺňať a ktoré nie.

6.4.5 (Novak [2]) Rozhodnite, či z teórie $T = \{A_1, \dots, A_5\}$, kde

(A_1) $\forall x(\text{dieta}(x) \to \exists y(\text{carodejnica}(y) \land \text{vidi}(x,y)))$

(A_2) $\neg\exists x(\text{carodejnica}(x) \land (\exists y(\text{ma}(x,y) \land \text{klobuk}(y)) \land \exists y(\text{ma}(x,y) \land \text{macka}(y))))$

(A_3) $\forall x(\text{carodejnica}(x) \to (\text{dobra}(x) \lor \text{zla}(x)))$

(A_4) $\forall x((\text{dieta}(x) \land \exists y(\text{carodejnica}(y) \land (\text{dobra}(y) \land \text{vidi}(x,y)))) \to \exists y(\text{dostane}(x,y) \land \text{sladkost}(y)))$

(A_5) $\forall x((\text{carodejnica}(x) \land \text{zla}(x)) \to \exists y(\text{ma}(x,y) \land \text{macka}(y)))$

vyplýva formula:

(X) $(\forall x((\text{carodejnica}(x) \land \exists y(\text{dieta}(y) \land \text{vidi}(y,x))) \to \exists y(\text{ma}(x,y) \land \text{klobuk}(y))) \to \forall x(\text{dieta}(x) \to \exists y(\text{dostane}(x,y) \land \text{sladkost}(y))))$

Vyplývanie dokážte tablom. Nevyplývanie nájdením štruktúry.

6.4.6 (Novak [2]) Rozhodnite, či z teórie $T = \{A_1, \dots, A_4\}$, kde

(A_1) ∀x(∃y vynika(x, y) → ((vela_studuje(x) ∨ sikovny(x)) ∨ stastlivec(x)))

(A_2) ∀x ∃y(ziska_znamku(x, A) → vynika(x, y))

(A_3) ∀x(studuje(x, AIN) → ¬stastlivec(x))

(A_4) ∀x(pije_pivo(x) → ¬vela_studuje(x))

vyplýva formula:

(X) (∀x(studuje(x, AIN) → ziska_znamku(x, A)) →
∀x((studuje(x, AIN) ∧ pije_pivo(x)) → sikovny(x)))

Vyplývanie dokážte tablom. Nevyplývanie nájdením štruktúry.

Pomôcka. V prípade dokazovania vyplývania si najprv premyslite, prečo formula vyplýva, a následne tablom sledujte svoju úvahu. Pravidlá pre kvantifikátory používajte, iba keď sú naozaj potrebné. Čo najviac využite už známe výrokovologické korektné pravidlá (MP, MT, DS, NCS).

V editore tabiel vyberte sadu pravidiel *Basic FOL*.

Tablo by nemalo mať viac ako 35 uzlov.

6.4.7 Dokážte v tablovom kalkule, že nasledujúce formuly sú platné:

a) $(\forall x\, P(x) \to \exists x\, P(x))$

b) $(\forall x\, P(x) \to \forall y\, P(y))$

c) $(\exists x\, P(x) \to \exists y\, P(y))$

d) $(\forall x\, P(x) \to \exists y\, P(y))$

e) $\forall y(\forall x\, P(x) \to P(y))$

f) $\exists y(P(y) \to \forall x\, P(x))$

g) $(\neg\exists y\, P(y) \to \forall y(\exists x\, P(x) \to P(y)))$

Tieto formuly ilustrujú niekoľko základných vlastností kvantifikátorov: Zoslabenie všeobecného kvantifikátora na existenčný (a, d), možnosť premenovať viazanú premennú (b, c) možnosť odvodiť ľubovoľnú inštanciu všeobecne kvantifikovanej formuly (e, základ pravidla γ), existencia kontrapríkladu (f, základ pravidla δ), dôkaz sporom z neexistencie (g).

6.4.8 Dokážte v tablovom kalkule, že nasledujúce formuly sú platné:

a) $\neg\forall x\, P(x) \leftrightarrow \exists x\, \neg P(x)$

b) $\neg\exists x\, P(x) \leftrightarrow \forall x\, \neg P(x)$

c) $\exists x(P(x) \lor Q(x)) \leftrightarrow \exists x\, P(x) \lor \exists x\, Q(x)$

d) $\forall x(P(x) \land Q(x)) \leftrightarrow \forall x\, P(x) \land \forall x\, Q(x)$

e) $\exists x(P(x) \land Q(x)) \to \exists x\, P(x) \land \exists x\, Q(x)$

f) $\forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x) \to \forall x(P(x) \lor Q(x))$

Tieto formuly ilustrujú de Morganove (a, b) a distributívne zákony pre kvantifikátory (c, d).

Platnosť formuly e) a neplatnosť 6.2.5f) ukazujú, že existenčný kvantifikátor je možné distribuovať do konjunkcie, ale nemožno ho pred konjunkciu „vyňať“.

Duálne, platnosť formuly f) a neplatnosť 6.2.5g) ukazujú, že všeobecný kvantifikátor možno „vyňať“ pred disjunkciu, ale nemožno ho do nej distribuovať.

6.4.9 Dokážte v tablovom kalkule, že nasledujúce formuly sú platné:

a) $\exists x(P(x) \lor R(y)) \leftrightarrow \exists x\, P(x) \lor R(y)$

b) $\forall x(P(x) \lor R(y)) \leftrightarrow \forall x\, P(x) \lor R(y)$

c) $\forall x(P(x) \land R(y)) \leftrightarrow \forall x\, P(x) \land R(y)$

d) $\exists x(P(x) \land R(y)) \leftrightarrow \exists x\, P(x) \land R(y)$

e) $\exists x\, R(y) \leftrightarrow R(y)$

f) $\forall x\, R(y) \leftrightarrow R(y)$

g) $\exists x(P(x) \to R(y)) \leftrightarrow (\forall x\, P(x) \to R(y))$

h) $\forall x(P(x) \to R(y)) \leftrightarrow (\exists x\, P(x) \to R(y))$

i) $\forall x(R(y) \to P(x)) \leftrightarrow (R(y) \to \forall x\, P(x))$

j) $\exists x(R(y) \to P(x)) \leftrightarrow (R(y) \to \exists x\, P(x))$

Tieto formuly ilustrujú distributívne zákony pre kvantifikátory v prípade, že v jednej z podformúl (predstavuje ju atóm $R(y)$) sa kvantifikovaná premenná (x) nevyskytuje voľná.

6.4.10 (Quine [4]) Dokážte, že z faktov:

(A_1) Ak všetci uchádzači, ktorí dostali pozvánku na pohovor, sú z ročníka 2016, tak niektorí uchádzači pozvánku na pohovor nedostali.

(A_2) Všetci uchádzači dostali pozvánku na pohovor, alebo sú všetci uchádzači z ročníka 2016.

vyplýva záver

(X) Ak všetci uchádzači z ročníka 2016 dostali pozvánku na pohovor, tak aj niektorí uchádzači, ktorí nie sú z ročníka 2016, dostali pozvánku na pohovor.

7 Logika prvého rádu

7.1 Funkčné symboly — formalizácia a sémantika

7.1.1 Sformalizujte nasledujúce tvrdenia v jazyku prvorádovej logiky s funkčnými symbolmi a s rovnosťou. Zamýšľanou doménou sú ľudia. V maximálnej miere využite funkčné symboly na vyjadrenie vzťahov so vždy existujúcich a jednoznačným predmetom.

1. Každého matka je žena a otec je muž.
2. Každý má práve dvoch rodičov, svoju matku a svojho otca.
3. Súrodenec je niekto a len niekto, s kým máte spoločného rodiča, ale nie ste to vy.
4. Každý, kto má súrodenca, má aj najvyššieho súrodenca.
5. Každý rodičovský pár má najstaršie dieťa.
6. Najstaršie dieťa rodičovského páru je staršie ako všetky ostatné deti tohto páru.
7. Kto je jedináčik, je najstarším dieťaťom svojich dvoch rodičov.

7.1.2 Nájdite model teórie tvorenej všetkými formulami, ktoré vznikli formalizáciou výrokov z cvičenia 7.1.1, a formulou

$$\exists x\, \exists y\, \text{súrodenec}(x, y) \land \exists x\, \forall y\, \neg\text{súrodenec}(x, y)$$

V riešení uveďte aj túto teóriu.

7.1.3 Nájdite štruktúru, ktorá splní prvorádovú teóriu $T = \{A_1, \dots, A_6\}$ v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} = \{u, v, w, x, y, z\}$,
$\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Andrea}, \text{Danka}, \text{Hanka}, \text{Janka}, \text{Max}, \text{Nikita}\}$,
$\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \{\text{manžel}^1, \text{manželka}^1, \text{prvorodené\_dieťa}^2\}$,
$\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{Lekár}^1, \text{Manželia}^2, \text{Muž}^1, \text{Právnik}^1, \text{Žena}^1\}$.

(A_1) $\forall x \forall y(\text{Manželia}(x, y) \to \text{Manželia}(y, x))$

(A_2) $\forall x \forall y\big(\text{Manželia}(x, y) \to$
$(\text{Muž}(x) \to x \doteq \text{manžel}(y)) \land (\text{Žena}(x) \to x \doteq \text{manželka}(y))\big)$

(A_3) $\forall x \forall y\big(\text{Manželia}(x, y) \land \text{Muž}(x) \land \text{Žena}(y) \to$
$\text{Lekár}(\text{prvorodené\_dieťa}(x, y)) \lor \text{Právnik}(\text{prvorodené\_dieťa}(x, y))\big)$

(A_4) $\text{Manželia}(\text{Hanka}, \text{Max}) \land \text{Žena}(\text{Hanka}) \land \text{Muž}(\text{Max})$

(A_5) $\text{Manželia}(\text{Danka}, \text{Janka}) \land \text{Žena}(\text{Danka}) \land \text{Žena}(\text{Janka})$

(A_6) $\text{Manželia}(\text{Andrea}, \text{Nikita}) \land \text{Muž}(\text{Andrea})$

7.2 Substitúcie, voľné a viazané premenné

7.2.1 Uvažujme nasledujúce postupnosti symbolov:

(X_1) $\text{matka}(\text{matka}(x))$

(X_2) $y \doteq \text{matka}(x)$

(X_3) $\forall x\, \forall y(y \doteq \text{matka}(x) \to \text{dieťa}(x, y))$

(X_4) $\exists x(\text{ľúbi}(x, y) \lor \neg\text{ľúbi}(x, y))$

(X_5) $\forall x\, P(x) \land Q(x)$

(X_6) $\exists x\, \exists y\, R(x, y) \lor \forall y\, S(x, y)$

(X_7) $\exists x\big(P(f(x)) \land \forall x\, \forall y\big(Q(x, x) \to P(g(x)) \lor R(x, y)\big)\big)$

Pre každú z nich:

a) vyznačte oblasti platnosti kvantifikátorov, ktoré sa v nej vyskytujú;

b) vyznačte voľné a viazané výskyty premenných x, y;

c) zistite, či je premenná y voľná;

d) určte množinu voľných premenných.

7.2.2 Zistite, či je v nasledujúcich prípadoch substitúcia aplikovateľná; ak áno, určte výsledok substitúcie:

a) $x\{x \mapsto f(y)\}$

b) $y\{x \mapsto f(y)\}$

c) $g(x, y)\{x \mapsto y\}$

d) $h(x, a, g(x, y))\{x \mapsto f(a)\}$

e) $(\neg P(x,y) \lor Q(x,y))\{y \mapsto a\}$

f) $(\exists x \neg P(x,y) \lor Q(x,y))\{y \mapsto a\}$

g) $(\exists x\, P(x,y) \lor Q(x,y))\{x \mapsto g(b,y)\}$

h) $(\forall z\,(P(x,z) \land Q(x, g(y,z))))\{x \mapsto f(z), z \mapsto g(x,y)\}$

i) $(P(x) \land \exists x\,(Q(x) \lor R(x)) \to S(x))\{x \mapsto c\}$

j) $(\forall z\,(P(x,z) \land Q(x, g(y,z))))\{x \mapsto f(y), y \mapsto g(x,y)\}$

k) $(P(y) \land \exists x(Q(x,y) \lor R(x)) \to S(x))\{x \mapsto c, y \mapsto f(x)\}$

l) $\forall z\big(P(x,z) \land \exists w\big(R(w) \to Q(x, g(y,z))\big) \to P(z,w)\big)$
$\{x \mapsto f(y), y \mapsto g(x,y), w \mapsto g(a), z \mapsto x\}$

7.3 Vzťah kvantifikátorov a funkčných symbolov

7.3.1 Dokážte v tablovom kalkule, že nasledujúce formuly sú platné:

a) $\forall x\, P(x) \to \forall x\, P(f(x))$

b) $\exists x\, P(f(x)) \to \exists x\, P(x)$

7.3.2 Dokážte nájdením štruktúry, že nasledujúce formuly nie sú platné:

a) $\forall x\, P(f(x)) \to \forall x\, P(x)$

b) $\exists x\, P(x) \to \exists x\, P(f(x))$

Predchádzajúce úlohy ilustrujú, že obor hodnôt interpretácie funkčného symbolu je podmnožinou domény (7.3.1) a môže byť *vlastnou* podmnožinou domény (7.3.2). Túto skutočnosť je dobré si uvedomovať pri nasledujúcej úlohe.

7.3.3 Dokážte, že nasledujúce formuly sú platné, resp. vyplývajú z uvedenej teórie:

a) $\models \exists x(\mathrm{pije}(x) \to \forall y\, \mathrm{pije}(y))$,

b) $\models \forall x(\exists y\, \mathrm{pozna}(x, \mathrm{otec}(y)) \to \exists y\, \mathrm{pozna}(x,y))$,

c) $\{\forall x(\mathrm{socialny}(\mathrm{najKam}(x)) \to \exists y\, \mathrm{pozna}(x, \mathrm{najKam}(y)))\}$
$\models \exists x(\mathrm{socialny}(x) \to \forall y\, \exists z\, \mathrm{pozna}(\mathrm{matka}(y), z))$.

Dôkazy platnosti prvých dvoch formúl sú prípravou na dôkaz vyplývania v tretej časti. Odporúčame vám skontrolovať tablo pomocou editora prvorádových tabiel.

7.3.4 Rozhodnite, či je formula platná, resp. či vyplýva z teórie. Vyplývanie dokážte tablom, nevyplývanie nájdením štruktúry, ktorá je kontrapríkladom.

a) $\models \forall x\big(\forall y\, R(x, g(x, y)) \to \forall y\, R(x, y)\big)$

b) $\{\neg \exists x \neg \exists y\big(\text{panovník}(x) \to \text{panovník}(\text{potomok}(x, y))\big)\} \models$
$\neg \exists x\, \exists y\big(\text{panovník}(x) \land \neg\text{panovník}(\text{potomok}(x, y))\big)$

c) $\{\neg \exists x\, \exists y\big(\text{panovník}(x) \land \neg\text{panovník}(\text{potomok}(x, y))\big)\} \models$
$\neg \exists x \neg \exists y\big(\text{panovník}(x) \to \text{panovník}(\text{potomok}(x, y))\big)$

d) $\big\{\forall x\big(P(x) \land \exists y\, \forall z\, Q(f(x, y), z)\big)\big\} \models \exists x\big(P(g(x)) \land \forall y\, Q(x, g(y))\big)$

7.4 Rovnosť

7.4.1 Prvorádovými tablami (teda tablami s pravidlami $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, pravidlom reflexivity a Leibnitzovým pravidlom) dokážte:

a) $\models x \doteq y \land \neg\text{študent}(y) \to \neg\text{študent}(x)$

b) $\{x \doteq y, \text{rodič}(\text{matka}(v), x), \neg\text{rodič}(\text{matka}(w), y)\} \models w \not\doteq v$

c) $\{f(f(f(x))) \doteq x, f(f(f(x))) \doteq f(f(x))\} \models f(x) \doteq x$

7.4.2 (Smullyan [5]) Nasledujúca úvaha môže vyzerať prekvapujúco:

Každý sa bojí Drakulu. Drakula sa bojí iba mňa. Takže som Drakula.

Sformalizujte úvahu v jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Drakula}, \text{ja}\}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \emptyset$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{bojí\_sa}^2\}$ a dokážte, že je správna, prvorádovým tablom.

Riešenie. Tvrdenia si najprv sformalizujeme:

(A_1) $\forall x\, \text{bojí\_sa}(x, \text{Dracula})$

(A_2) $(\text{bojí\_sa}(\text{Dracula}, \text{ja}) \land \forall x(\text{bojí\_sa}(\text{Dracula}, x) \to x \doteq \text{ja}))$

(A_3) $\text{ja} \doteq \text{Dracula}$

Teraz sa môžeme zamyslieť nad tým, čo znamená, že úvaha je správna. Prvé dve tvrdenia evidentne popisujú nejaké skutočnosti. Tretia veta vyjadruje, že na základe prvých dvoch skutočností by malo platiť, že som Drakula. Z toho jasne vidíme, že potrebujeme tablom dokázať, že teórie tvorenej formulami A_1 a A_2 vyplýva formula A_3 t.j., $\{A_1, A_2\} \vDash A_3$. Potrebujeme teda zostrojiť uzavreté tablo pre množinu označených formúl $S^+ = \{\mathbf{T}\,A_1, \mathbf{T}\,A_2\} \cup \{\mathbf{F}\,A_3\}$. Dôkaz tablom bude nasledujúci:

1.	$\mathbf{T}\,\forall x\ \mathsf{boj\acute{i}\_sa}(x, \mathsf{Dracula})$	S^+
2.	$\mathbf{T}\,(\mathsf{boj\acute{i}\_sa}(\mathsf{Dracula}, \mathsf{ja}) \land \forall x\,(\mathsf{boj\acute{i}\_sa}(\mathsf{Dracula}, x) \to x \doteq \mathsf{ja}))$	S^+
3.	$\mathbf{F}\,\mathsf{ja} \doteq \mathsf{Dracula}$	S^+
4.	$\mathbf{T}\,\mathsf{boj\acute{i}\_sa}(\mathsf{Dracula}, \mathsf{ja})$	$\alpha 2$
5.	$\mathbf{T}\,\forall x\,(\mathsf{boj\acute{i}\_sa}(\mathsf{Dracula}, x) \to x \doteq \mathsf{ja})$	$\alpha 2$
6.	$\mathbf{T}\,\mathsf{boj\acute{i}\_sa}(\mathsf{Dracula}, \mathsf{Dracula})$	$\gamma 1\{x \mapsto \mathsf{Dracula}\}$
7.	$\mathbf{T}\,(\mathsf{boj\acute{i}\_sa}(\mathsf{Dracula}, \mathsf{Dracula}) \to \mathsf{Dracula} \doteq \mathsf{ja})$	$\gamma 5\{x \mapsto \mathsf{Dracula}\}$
8.	$\mathbf{T}\,\mathsf{Dracula} \doteq \mathsf{ja}$	MP 7, 6
9.	$\mathbf{T}\,\mathsf{Dracula} \doteq \mathsf{Dracula}$	reflex.
10.	$\mathbf{T}\,\mathsf{ja} \doteq \mathsf{Dracula}$	Leibnitz 8, 9
	$*\ 3, 10$	

Uzavretým tablom pre S^+ sme dokázali, že $\{A_1, A_2\} \vDash A_3$. Znamená to teda, že úvaha je správna.

Všimnite si, ako sme v 9. a 10. uzle tabla využili reflexivitu a Leibnitzovo pravidlo na odvodenie symetrickej rovnosti ja $\doteq$ Dracula k rovnosti Dracula $\doteq$ ja. ♮

7.4.3 Aj nasledujúca úvaha môže prekvapiť:

> Drakula je nadprirodzená bytosť. Nadprirodzené bytosti sa boja iba nadprirodzených bytostí. Drakula sa však bojí tých a jedine tých, ktorí zjedli cesnak. Takže ak som zjedol cesnak, som nadprirodzená bytosť.

Sformalizujte úvahu v jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{\mathsf{Drakula}, \mathsf{ja}\}$, $\mathcal{F}_\mathcal{L} = \emptyset$. Množinu $\mathcal{P}_\mathcal{L}$ si vhodne zvoľte. Dokážte správnosť úvahy prvorádovým tablom. Snažte sa o čo najkratší dôkaz s využitím korektných pravidiel ako MP, MT, ale tiež pravidiel pre ekvivalenciu a kvantifikátory.

7.4.4 Sformalizujte nasledujúce tvrdenia v jazyku prvorádovej logiky s funkčnými symbolmi a s rovnosťou. V maximálnej miere využite funkčné symboly na vyjadrenie vzťahov so vždy existujúcich a jednoznačným predmetom.

1. Alica je šachistka a šachistky najviac obdivujú iba tých najinteligentnejších.
2. Najinteligentnejším študentom všetci študenti závidia.

3. Keď je niekto inteligentnejší ako všetci ostatní, hovoríme, že je najinteligentnejší.
4. Boris neobdivuje nikoho iného okrem toho, koho obdivuje najviac.
5. Dávida najviac obdivuje Boris a Alica, ale Dávid najviac obdivuje Alicu.

Tablovým kalkulom dokážte, že z tvrdení 1.–5. vyplýva:

- Alica závidí každému, koho obdivuje Boris, ak sú všetci študenti.

7.4.5 Pripomeňme si formalizáciu záhady vraždy tety Agáty z Dreadbury (6.3.10):

(A_1) $\exists x(\mathsf{vDreadbury}(x) \land \mathsf{zabil}(x, \mathsf{Agáta}))$

(A_2) $\forall x(\mathsf{vDreadbury}(x) \leftrightarrow x \doteq \mathsf{Agáta} \lor x \doteq \mathsf{Komorník} \lor x \doteq \mathsf{Charles})$

(A_3) $\forall x\, \forall y(\mathsf{zabil}(x, y) \to \mathsf{nenávidí}(x, y))$

(A_4) $\forall x\, \forall y(\mathsf{zabil}(x, y) \to \neg\mathsf{bohatší\_ako}(x, y))$

(A_5) $\forall x(\mathsf{nenávidí}(\mathsf{Agáta}, x) \to \neg\mathsf{nenávidí}(\mathsf{Charles}, x))$

(A_6) $\forall x(\neg x \doteq \mathsf{Komorník} \to \mathsf{nenávidí}(\mathsf{Agáta}, x))$

(A_7) $\forall x(\neg\mathsf{bohatší\_ako}(x, \mathsf{Agáta}) \to \mathsf{nenávidí}(\mathsf{Komorník}, x))$

(A_8) $\forall x(\mathsf{nenávidí}(\mathsf{Agáta}, x) \to \mathsf{nenávidí}(\mathsf{Komorník}, x))$

(A_9) $\forall x\, \exists y(\mathsf{vDreadbury}(y) \land \neg\mathsf{nenávidí}(x, y))$

(A_{10}) $\neg\mathsf{Agáta} \doteq \mathsf{Komorník}$

Nech $T = \{A_1, \dots, A_{10}\}$ (pozor na zmenu vo formulách A_2, A_9 a A_{10} oproti praktickým cvičeniam). Dokážte tablovým kalkulom, kto zabil Agátu, teda dokážte že platí $T \models \mathsf{zabil}(v, \mathsf{Agáta})$, keď za v dosadíte správneho vraha.

Symboly predikátov a konštánt si vhodne skráťte. Použite prvorádové tablo rozšírené o pravidlá γ^* a δ^* z prednášky (tvrdenie 13.10), pravidlá z úlohy 5.3.1.

7.4.6 Dokážte alebo vyvráťte:

a) Existuje formula bez rovnosti, ktorá je splnená iba v štruktúre, ktorá má:
   i. najviac dvojprvkovú doménu;
   ii. aspoň dvojprvkovú doménu.

b) Existuje formula s rovnosťou, ktorá je splnená iba v štruktúre, ktorá má:
   i. najviac dvojprvkovú doménu;
   ii. aspoň dvojprvkovú doménu.

7.4.7 Dokážte nasledujúce tvrdenia pomocou prvorádových tabiel s pridanými pravidlami γ^* a δ^*:

a) Predpokladajme, že vieme iba o vlastnostiach sčítania $+$, ktoré popisuje teória $\{A_1, A_2, A_3\}$. Dokážte, že z nich vyplýva X.

(A_1) $\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x + (y + z)) \doteq ((x + y) + z)$

(A_2) $\exists o_1\,\forall x\,(o_1 + x) \doteq x$

(A_3) $\exists o_2\,\forall x\,(x + o_2) \doteq x$

(X) $\exists o\,\forall x\big((o + x) \doteq x \land (x + o) \doteq x\big)$

A_1 hovorí, že sčítanie je asociatívne. A_2 a A_3 hovoria, že existuje „ľavá nula“ o_1 a „pravá nula“ o_2. X hovorí, že existuje nula o, ktorá je pravá aj ľavá.

Pomôcka: Odvoďte, že $o_1 \doteq o_2$.

b) Predpokladajme, že vieme iba o vlastnostiach sčítania $+$, ktoré popisuje teória $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$. Dokážte, že z nich vyplýva Y.

(B_1) $\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x + (y + z)) \doteq ((x + y) + z)$

(B_2) $\forall x\,(x + 0) \doteq x$

(B_3) $\forall y\,\exists i_1\,(i_1 + y) \doteq 0$

(B_4) $\forall y\,\exists i_2\,(y + i_2) \doteq 0$

(Y) $\forall y \exists i\big((i + y) \doteq 0 \land (y + i) \doteq 0\big)$

B_1 hovorí, že sčítanie je asociatívne. B_2 hovorí, že 0 je pravá nula sčítania (nevieme, či je aj ľavou nulou). B_3 a B_4 hovoria, že ku každému číslu y existuje ľavé, resp. pravé opačné číslo (ako $-y$). Y hovorí, že ku každému číslu y existuje opačné číslo (je súčasne ľavým aj pravým opačným číslom pre y).

Pomôcka: Odvoďte najprv využitím asociativity (B_1), že pre zvolené číslo x, jeho ľavé opačné číslo u a pravé opačné číslo v platí $u \doteq (0 + v)$. Odtiaľ ľahko dostanete, že u je aj pravým opačným číslom k x.

c) Predpokladajme, že vieme iba o vlastnostiach sčítania $+$, ktoré popisuje teória $\{C_1, C_2, C_3\}$. Dokážte, že z nich vyplýva Z.

(C_1) $\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x + (y + z)) \doteq ((x + y) + z)$

(C_2) $\forall x\,(x + 0) \doteq x$

(C_3) $\forall y\,\exists i((y + i) \doteq 0 \land (i + y) \doteq 0)$

(Z) $\forall x\,\forall y\,\forall z\big((x + z) \doteq (y + z) \to x \doteq y\big)$ (zákon pravého krátenia)

Pomôcka: Začnite tak, že odstránite kvantifikátory a zjednodušíte implikáciu v Z, reflexivitou pripočítate vhodný prvok k $(x + z)$, Leibnitzovym pravidlom nahradíte $(x + z)$ na pravej strane za $(y + z)$.

7.5 Definície pojmov a dôkazy s nimi

7.5.1 Uvažujme doménu rodinných vzťahov, ktorú opisujeme jazykom $\mathcal{L}$ logiky prvého rádu, ktorý obsahuje predikáty ako žena^1, muž^1, rodič^2, súrodenec^2, manželia^2 so zamýšľaným významom:

Predikát	Význam
žena(x)	x je žena
muž(x)	x je muž
rodič(x, y)	x je (vlastným) rodičom y
súrodenec(x, y)	x je (pokrvným) súrodencom y
manželia(x, y)	x a y sú manželmi

Sformulujte slovenské definície nasledovných odvodených pojmov (tak, ako ich poznáte z prirodzeného jazyka) a zapíšte ich ako definície predikátov, ktorými rozšírime jazyk $\mathcal{L}$:

(D_1) súrodenec^2

(D_2) starý_rodič^2

(D_3) sesternica^2

(D_4) bratranec^2

(D_5) prastarý_rodič^2

(D_6) prasesternica^2 (teda sesternica „z druhého kolena“)

(D_7) $\text{nevlastný\_súrodenec}^2$

(D_8) macocha^2

(D_9) jedináčik^1

⚠ Sesternica nie je sestra.

Riešenie. Napríklad prvé dve definície môžu byť nasledovné:

(D_1) $\forall x \forall y \big(\text{súrodenec}(x, y) \leftrightarrow (\neg\, x \doteq y \land \exists z(\text{rodič}(z, x) \land \text{rodič}(z, y)))\big)$,

(D_2) $\forall x \forall y \big(\text{starý\_rodič}(x, y) \leftrightarrow (\neg\, x \doteq y \land \exists z(\text{rodič}(x, z) \land \text{rodič}(z, y)))\big)$. ♮

7.5.2 Zostrojte štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk z predchádzajúcej úlohy ďalej rozšírený o symboly konštánt Andrea, Cyril, Boris, Diana tak, aby $\mathcal{M}$ splnila všetky definície predikátov z úlohy 7.5.1 a súčasne nasledujúce formuly v každom ohodnotení:

(A_1) $(\,(\text{rodič}(\text{Andrea}, \text{Cyril}) \land \exists x\, \text{rodič}(\text{Andrea}, x)) \land \text{rodič}(\text{Boris}, \text{Diana})\,)$,

(A_2) $\exists x\, \exists y\, \exists z(\,(\text{rodič}(x, \text{Andrea}) \land (\text{rodič}(x, \text{Boris}) \land \text{žena}(x))) \land$
$(\text{rodič}(y, \text{Andrea}) \land \text{rodič}(z, \text{Andrea}))\,)$

(A_3) $(\,\forall x\, \neg\text{rodič}(x, x) \land \forall x\, \forall y(\text{rodič}(x, y) \to \neg\text{rodič}(y, x))\,)$,

(A_4) $\forall x(\,(\text{žena}(x) \lor \text{muž}(x)) \land \neg(\text{žena}(x) \land \text{muž}(x))\,),$

(A_5) $\forall x\,\forall y(\text{rodič}(x,y) \to \exists z(\text{rodič}(z,y) \land (\text{muž}(x) \leftrightarrow \neg\text{muž}(z))))$

(A_6) $\forall p\,\forall r\,\forall x(\,((\text{rodič}(p,x) \land \text{rodič}(r,x)) \land (\text{žena}(p) \leftrightarrow \text{žena}(r))) \to p \doteq r\,),$

(A_7) $\forall x\,\forall y(\,\text{súrodenec}(x,y) \leftrightarrow (\,\neg\, x \doteq y \land \exists z(\text{rodič}(z,x) \land \text{rodič}(z,y))\,)\,);$

(B_1) $\exists x\,\exists y\,\text{prastarý\_rodič}(x,y),$

(B_2) $\exists x(\,\text{jedináčik}(x) \land \forall y(\text{rodič}(y,x) \to \text{jedináčik}(y))\,),$

(B_3) $\exists x\,\exists y(\text{macocha}(x,y) \land \exists z\,\text{rodič}(x,z)).$

💡 Všímajte si, ktoré formuly skutočne vynútia pridanie nových objektov do domény a ktoré splníte aj pomocou existujúcich objektov.

⚠ Nezabudnite, že na splnenie definície nejakého predikátu musíte zabezpečiť, aby súčasne:

- všetky objekty (n-tice), ktoré patria do interpretácie predikátu, mali vlastnosti požadované definíciou;
- všetky objekty (n-tice), ktoré majú požadované vlastnosti, patrili do interpretácie predikátu.

7.5.3 Dokážte, že z teórie, pozostávajúcej zo (sformalizovaných) tvrdení:

1. Definícia D_1 pojmu súrodenec z cvičenia 7.5.1.
2. Definícia D_3 pojmu sesternica z cvičenia 7.5.1.
3. Definícia D_9 pojmu jedináčik z cvičenia 7.5.1.
4. Každý rodičovský pár má svoje najobľúbenejšie dieťa, ktoré je dieťaťom tohto páru a tento pár ho preferuje pred svojimi ostatnými deťmi.

vyplýva:

a) Pre každých dvoch jedináčikov platí, že nie sú súrodenci.

b) Dieťa jedináčikov nemá žiadne sesternice.

c) Každý jedináčik je najobľúbenejším dieťaťom svojho rodičovského páru.

7.5.4 Uvažujme relačný prvorádový jazyk $\mathcal{L}$ pre doménu vysokoškolského štúdia, kde $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{$Evka, Ferko, LPI, DDB, A, Fx$\}$ a $\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{$A-čkar^1, aktívny^1, bakalárska-práca^1, dievča^1, diplomová-práca^1, dizertačná-práca^1, doktorand^1, predmet^1, PhD-program^1, profesor^1, študent^1, štud-program^1, učiteľ^1, záverečná-práca^1, absolvuje^2, autor^2, školiteľ^2, študuje^2, učí^2, zapísaný^2, hodnotený$^3\}$.

Sformalizujte nasledujúce definície pojmov v jazyku $\mathcal{L}$:

(D_1) Učiteľ sa definuje ako ten, kto učí nejaký predmet.

(D_2) Každý, kto je študuje nejaký PhD program, je doktorandom a nikto iný doktorandom nie je.

(D_3) Študent absolvuje predmet práve vtedy, keď je z neho hodnotený známkou inou ako Fx.

(D_4) A-čkar je práve taký študent, ktorý absolvoval aspoň jeden predmet a má známku A z každého predmetu, z ktorého je hodnotený.

7.5.5 Sformalizujte v logike prvého rádu nasledujúce tvrdenia o deťoch a hračkách.

Následne tablovým kalkulom dokážte, že z tvrdení 1–9 vyplýva každé z tvrdení 10–19.

Využite korektné pravidlá z prednášky (tvrdenie 13.10) a úlohy 5.3.1.

1. Dieťa je skromné práve vtedy, keď chce najviac jednu hračku.
2. Rozmaznané sú také deti, ktoré sú spokojné iba vtedy, keď dostali všetky hračky, ktoré chcú. Iné deti rozmaznané nie sú.
3. Za vďačné považujeme také a iba také dieťa, ktorému na spokojnosť stačí, že dostalo akúkoľvek hračku.
4. Ako náročné definujeme tie deti, ktorých spokojnosť vyžaduje, aby dostali iba také hračky, ktoré chcú.
5. Ak sa dieťa hnevá, hoci dostalo všetky hračky, ktoré chce, tak hovoríme, že zlostí. Platí to aj naopak.
6. Nikto spokojný sa nehnevá.
7. Každý má práve jednu vytúženú hračku. Túto hračku chce.
8. Každý má aj práve jednu obľúbenú hračku. Ak vôbec dostal nejakú hračku, tak aj túto.
9. Žirafa Irma je hračka.

$\therefore$

10. Každé spokojné rozmaznané dieťa dostalo aspoň jednu hračku.
11. Každá hračka, ktorú chce skromné dieťa, je jeho vytúžená.
12. Vďačné deti zlostia, len ak nedostali žiadnu hračku.
13. Každé skromné a rozmaznané dieťa, ktoré je spokojné, dostalo svoju vytúženú hračku.
14. Spokojné, skromné, ale náročné dieťa dostalo nanajvýš svoju vytúženú hračku.

15. Ak skromné, ale náročné dieťa dostalo žirafu Irmu a je spokojné, tak je to jeho vytúžená hračka.
16. Ak skromné, ale náročné dieťa dostalo nejakú hračku a je spokojné, tak je to jeho obľúbená aj vytúžená hračka zároveň.
17. Rozmaznané a náročné deti sú spokojné, iba keď dostali práve tie hračky, ktoré chcú.
18. Rozmaznané, náročné a skromné dieťa, ktoré je spokojné, dostalo svoju *obľúbenú* hračku a je to jediná hračka, ktorú dostalo.
19. Rozmaznané, náročné a skromné dieťa, ktoré je spokojné, dostalo svoju *vytúženú* hračku a je to jediná hračka, ktorú dostalo.

Pomôcka 1. Definované vlastnosti prisudzujeme deťom, ale v definíciách to nemusíte uvádzať. Teda aj keď by si úplná formalizácia vyžadovala napr. pre definíciu skromného dieťaťa formulu v tvare: $\forall x(\text{dieta}(x) \to (\text{skromne}(x) \leftrightarrow \cdots))$, môžete to zjednodušiť na: $\forall x(\text{skromne}(x) \leftrightarrow \cdots)$. Zjednodušíte si tým dôkaz.

Pomôcka 2. Vzťahy s jednoznačne priradenými objektmi formalizujte funkčnými symbolmi. Tým automaticky dostanete existenciu a jednoznačnosť priradených objektov. Potom stačí sformalizovať iba ich druh a ďalšie vlastnosti. Použitie predikátov v týchto prípadoch by veľmi skomplikovalo formalizáciu a najmä dôkazy.

Napríklad, keď chceme jazyk a teóriu z cvičení 7.5.1 a 7.5.2 rozšíriť o formalizáciu tvrdenia: *Každý má práve jednu mamu, ženu, ktorá je jeho rodičom*, existenciu a jednoznačnosť mamy pre každý objekt zabezpečíme pridaním funkčného symbolu matka do jazyka. Vlastnosti a vzťahy mamy, o ktorých sa v tvrdení ďalej hovorí, potom môžeme vyjadriť použitím tohto funkčného symbolu: $\forall x(\text{žena}(\text{matka}(x)) \land \text{rodič}(\text{matka}(x), x))$.

7.5.6 V logike prvého rádu môžeme sformalizovať (axiomatizovať) teóriu množín. Úplná formalizácia je pomerne komplikovaná. Pre naše účely postačí nasledujúci fragment T_{set} so základnými vzťahmi a operáciami v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\varnothing\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\in^2, \subseteq^2\}$ a $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \{\cup^2, \cap^2, \setminus^2, \mathsf{P}^2\}$.

$$\forall x\,\forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x \doteq y) \qquad \text{(extenzionalita)}$$
$$\forall x\,\forall y(x \subseteq y \leftrightarrow \forall z(z \in x \to z \in y)) \qquad \text{(podmnožina)}$$
$$\forall x\,\forall y\,\forall z(z \in \mathsf{P}(x, y) \leftrightarrow (z \doteq x \lor z \doteq y)) \qquad \text{(dvojica)}$$
$$\forall z\, \neg z \in \varnothing \qquad \text{(prázdna mn.)}$$
$$\forall x\,\forall y\,\forall z(z \in (x \cap y) \leftrightarrow (z \in x \land z \in y)) \qquad \text{(prienik)}$$
$$\forall x\,\forall y\,\forall z(z \in (x \cup y) \leftrightarrow (z \in x \lor z \in y)) \qquad \text{(zjednotenie)}$$

$$\forall x\,\forall y\,\forall z(z \in (x \setminus y) \leftrightarrow (z \in x \land \neg z \in y)) \qquad \text{(rozdiel)}$$

Prvorádovými tablami rozšírenými o pravidlá γ^* a δ^*, pravidlá pre ekvivalenciu, a pravidlá z úlohy 5.3.1 dokážte, že z T_{set} vyplývajú nasledujúce formuly:

(A_1) $\forall x\, x \subseteq x$

(A_2) $\forall x\,\forall y\,\forall z(x \subseteq y \land y \subseteq z \to x \subseteq z)$

(A_3) $\forall x\,\forall y(x \subseteq y \land y \subseteq x \to x \doteq y)$

(A_4) $\forall x\,\forall y((x \cup y) \doteq x \to y \subseteq x)$

(A_5) $\forall x\,\forall y((x \cap y) \doteq y \to y \subseteq x)$

(A_6) $\forall x\,\forall y((x \setminus y) \doteq \emptyset \to x \subseteq y)$

(A_7) $\forall x\,\forall y\,(x \cap y) \subseteq x$

(A_8) $\forall x\,\forall y\, x \subseteq (x \cup y)$

(A_9) $\forall x\,\forall y\,(x \cap y) \doteq (y \cap x)$

(A_{10}) $\forall x\,\forall y\,(x \cup y) \doteq (y \cup x)$

(A_{11}) $\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x \cap (y \cup z)) \doteq ((x \cap y) \cup (x \cap z))$

(A_{12}) $\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x \cup (y \cap z)) \doteq ((x \cup y) \cap (x \cup z))$

(A_{13}) $\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x \cap (y \setminus z)) \doteq ((x \cap y) \setminus z)$

(A_{14}) $\forall u\,\forall x\,\forall y\,(u \setminus (x \cap y)) \doteq ((u \setminus x) \cup (u \setminus y))$

(A_{15}) $\forall u\,\forall x\,\forall y\,(u \setminus (x \cup y)) \doteq ((u \setminus x) \cap (u \setminus y))$

(A_{16}) $\forall u\,\forall x\,\forall y\,(u \setminus (x \setminus y)) \doteq ((u \setminus x) \cup (u \cap y))$

(A_{17}) $\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x \subseteq (y \cap z) \leftrightarrow x \subseteq y \land x \subseteq z)$

(A_{18}) $\forall x\,\forall y\,\forall z(x \subseteq y \lor x \subseteq z \to x \subseteq (y \cup z))$

(A_{19}) $\neg \forall x\,\forall y\,\forall z(x \subseteq (y \cup z) \to x \subseteq y \lor x \subseteq z)$

(A_{20}) $\neg \exists x\,\forall z(z \in x \leftrightarrow \neg z \in z)$

(A_{21}) $\exists x\,\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in z) \to \neg \forall x\,\exists y\,\forall z(z \in y \leftrightarrow \neg z \in x)$

Riešenie (A_4). Aby sme dokázali, že $T_{\text{set}} \models A_4$, vybudujeme tablo pre množinu označených formúl $S^+ = \{\mathbf{T}\,A \mid A \in T_{\text{set}}\} \cup \{\mathbf{F}\,A_4\}$.

⚠ Je dôležité uvedomovať si, čo máme dokázať, prečo by to mala byť to pravda a budovať tablo tak, aby zodpovedalo dôkazu tvrdenia v prirodzenom jazyku. Inak sa v ňom ľahko stratíme a urobíme chybu alebo dôkaz nikam nepovedie.

Tvrdenie A_4 hovorí, že ak je zjednotenie množín x a y rovné x, musí byť y podmnožinou x. Ak totiž $x \cup y = x$, tak v y nie sú žiadne prvky, ktoré by už neboli v x, teda každý prvok z y je v x, teda y je podmnožinou x.

Rovnako ľahko to dokážeme sporom: Nech $x \cup y = x$, ale $y \nsubseteq x$. Potom je nejaký prvok p, ktorý patrí do y ($p \in y$), ale $p \notin x$. Pretože ale $p \in y$, tak $p \in (x \cup y)$. Lenže $x \cup y = x$, teda $p \in x$, čo je spor s úvodným predpokladom.

Tento dôkaz sporom teraz podrobne a formálne zapíšeme ako tablo.

1.	$\mathbf{F}\,\forall x\,\forall y((x \cup y) \doteq x \to y \subseteq x)$	S^+
2.	$\mathbf{F}\,(v \cup w) \doteq v \to w \subseteq v$	$\delta^* 1\{x \mapsto v, y \mapsto w\}$
3.	$\mathbf{T}\,(v \cup w) \doteq v$	$\alpha 2$
4.	$\mathbf{F}\,w \subseteq v$	$\alpha 2$
5.	$\mathbf{T}\,\forall x\,\forall y(x \subseteq y \leftrightarrow \forall z(z \in x \to z \in y))$	S^+
6.	$\mathbf{T}\,w \subseteq v \leftrightarrow \forall z(z \in w \to z \in v)$	$\gamma^* 5\{x \mapsto w, y \mapsto v\}$
7.	$\mathbf{F}\,\forall z(z \in w \to z \in v)$	$\mathrm{ESTF} 6, 4$
8.	$\mathbf{F}\,p \in w \to p \in v$	$\delta 7\{z \mapsto p\}$
9.	$\mathbf{T}\,p \in w$	$\alpha 8$
10.	$\mathbf{F}\,p \in v$	$\alpha 8$
11.	$\mathbf{T}\,(v \cup w) \doteq (v \cup w)$	Refl
12.	$\mathbf{T}\,v \doteq (v \cup w)$	$\mathrm{Leibnitz} 3, 11$
13.	$\mathbf{F}\,p \in (v \cup w)$	$\mathrm{Leibnitz} 12, 10$
14.	$\mathbf{T}\,\forall x\,\forall y\,\forall z(z \in (x \cup y) \leftrightarrow (z \in x \lor z \in y))$	S^+
15.	$\mathbf{T}\,p \in (v \cup w) \leftrightarrow (p \in v \lor p \in w)$	$\gamma^* 14\{x \mapsto v, y \mapsto w, z \mapsto p\}$
16.	$\mathbf{F}\,p \in v \lor p \in w$	$\mathrm{ESTF} 15, 13$
17.	$\mathbf{F}\,p \in v$	$\alpha 16$
18.	$\mathbf{F}\,p \in w$	$\alpha 16$
	$*\,9, 18$	

Tablo začneme priamo formulou **F** A_4, ktorej vyplývanie chceme (sporom) dokázať (1). Ostatné formuly z S^+, teda formuly z T_{set} označené **T** budeme pridávať podľa potreby, lebo ich je veľa a nie všetky využijeme.

Tvrdenie A_4 je všeobecne kvantifikovaná implikácia. Pretože predpokladáme, že nie je splnené, jeho bezkvantifikátorová podformula je nesplnená pre nejaké konkrétne, ale nie presne známe množiny v a w (2). Teda zjednotením v a w je v (3), ale pritom w nie je podmnožinou v (4).

Aby sme zistili, či sú tieto fakty sporné, potrebujeme vedieť, ako ich naša teória definuje. Väčšinou sa oplatí začať nesplneným faktom, teda faktom 4. Vyberieme si z teórie definíciu vzťahu *byť podmnožinou* (5) a aplikujeme ju na w a v (6). Musí byť nesplnené, že všetky prvky množiny w sú prvkami v (7). Teda niektoré, nie presne známe prvky w nie sú prvkami v. Označme niektorý z nich p (8). Teda p patrí do w (9), ale p nepatrí do v (10).

Pretože $(v \cup w)$ sa rovná v (3), zrejme p nepatrí ani do $(v \cup w)$. Odvodiť v table to vieme Leibnitzovým pravidlom, ktoré ale používa rovnosť iba smere zľava doprava. Odvodíme teda symetrickú rovnosť k rovnosti 3: Reflexivitou pridáme rovnosť $(v \cup w) \doteq (v \cup w)$ (11) a Leibnitzovým pravidlom podľa 3 jej ľavú stranu nahradíme v (12). Následne ďalším použitím Leibnitzovho pravidla dostaneme, že nie je splnené $p \in (v \cup w)$ (13).

Podľa definície zjednotenia z teórie (14), je p prvkom zjednotenia množín v a w práve vtedy, keď je prvkom niektorej z nich (15). V našom prípade p nie je prvkom zjednotenia, teda nie je prvkom ani jednej z týchto množín (16), teda ani w (18), čo je ale v spore s tým, že $p \in w$ (9).

Keďže tablo je uzavreté, množina S^+ je nesplniteľná, a teda z T_{set} vyplýva A_4. ♮

7.5.7 Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Vierka}, \text{Jarko}\}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \{\text{mama}^1, \text{otec}^1\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{bývaV}^2, \text{spolubývajúci}^2, \text{manželia}^2, \text{bezdomovec}^1\}$ a teóriu $T = \{A_1, \dots, A_7\}$ v jazyku $\mathcal{L}$:

(A_1) $\forall x\, \forall y\big(\text{spolubývajúci}(x, y) \leftrightarrow x \not\doteq y \land \exists z\big(\text{bývaV}(x, z) \land \text{bývaV}(y, z)\big)\big)$,

(A_2) $\forall x\big(\text{bezdomovec}(x) \leftrightarrow \forall z\, \neg\text{bývaV}(x, z)\big)$,

(A_3) $\forall x\, \forall y\big(\text{manželia}(x, y) \to \forall z\big(\text{bývaV}(x, z) \to \text{bývaV}(y, z)\big)\big)$,

(A_4) $\forall x\, \forall y\big(\text{manželia}(x, y) \to \text{manželia}(y, x)\big)$,

(A_5) $\forall x\, \forall y\big(\text{manželia}(x, y) \to x \not\doteq y\big)$,

(A_6) $\exists x\, \exists y\, \text{manželia}(x, y)$,

(A_7) $\text{spolubývajúci}(\text{otec}(\text{Vierka}), \text{mama}(\text{Jarko}))$.

Rozhodnite, či nasledujúce formuly vyplývajú z teórie T. Vyplývanie dokážte tablom, nevyplývanie nájdením štruktúry, ktorá je kontrapríkladom.

(X_1) $\forall x\, \forall y\big(\text{manželia}(x, y) \to \text{spolubývajúci}(x, y)\big)$

(X_2) $\exists x\big(\text{manželia}(\text{mama}(x), \text{otec}(x)) \land \neg\text{spolubývajúci}(\text{mama}(x), \text{otec}(x))\big)$
$\to \exists x\, \text{bezdomovec}(x)$

7.5.8 Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ s $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Edo}\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{amatér}^1, \text{baví}^2, \text{má}^2, \text{práca}^1, \text{rocker}^1, \text{šťastlivec}^1, \text{zamestnaný}^1\}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \emptyset$ a teóriu $T = \{A_1, \dots, A_6\}$ o pomeroch v populárnej hudbe v jazyku $\mathcal{L}$:

(A_1) $\forall x\big(\text{rocker}(x) \to \exists y(\text{má}(x, y) \land \text{kapela}(y))\big)$,

(A_2) $\forall x\, \forall y\big(\text{má}(x, y) \land \text{kapela}(y) \to \text{baví}(y, x)\big)$,

(A_3) $\forall x\big(\exists y(\text{má}(x, y) \land \text{kapela}(y) \land \neg\text{práca}(y)) \to \text{amatér}(x)\big)$,

(A_4) $\forall x\big(\text{šťastlivec}(x) \leftrightarrow \exists y(\text{má}(x, y) \land \text{práca}(y) \land \text{baví}(y, x))\big)$,

(A_5) $\forall x\big(\text{zamestnaný}(x) \leftrightarrow \exists y(\text{má}(x, y) \land \text{práca}(y))\big)$,

(A_6) $\text{šťastlivec}(\text{Edo})$.

Rozhodnite, či nasledujúce formuly vyplývajú z teórie T. Vyplývanie dokážte tablom, nevyplývanie nájdením štruktúry, ktorá je kontrapríkladom:

(X_1) $\forall x\big(\mathsf{rocker}(x) \land \neg\mathsf{amatér}(x) \to \mathsf{šťastlivec}(x)\big)$,

(X_2) $\forall x(\mathsf{zamestnaný}(x) \land \mathsf{rocker}(x)) \to \forall x\, \mathsf{šťastlivec}(x)$.

7.5.9 Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \emptyset$, $\mathcal{F}_\mathcal{L} = \emptyset$, $\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{\mathsf{kľúč}^1, \mathsf{odomkne}^2, \mathsf{univerzálny}^1, \mathsf{zámka}^1\}$, a teóriu $T = \{A_1, \dots, A_3\}$ v jazyku $\mathcal{L}$:

(A_1) $\forall x\big(\mathsf{univerzálny}(x) \leftrightarrow \forall y(\mathsf{zámka}(y) \to \mathsf{odomkne}(x, y))\big)$,

(A_2) $\forall x\big(\mathsf{kľúč}(x) \to \exists y(\mathsf{zámka}(y) \land \mathsf{odomkne}(x, y))\big)$,

(A_3) $\forall x\big(\exists y\, \mathsf{odomkne}(x, y) \to \mathsf{kľúč}(x)\big)$.

Rozhodnite, či nasledujúce formuly vyplývajú z teórie T. Vyplývanie dokážte tablom, nevyplývanie nájdením štruktúry, ktorá je kontrapríkladom:

(X_1) $\exists x\, \mathsf{zámka}(x) \to \forall y(\mathsf{univerzálny}(y) \to \mathsf{kľúč}(y))$,

(X_2) $\forall x(\mathsf{univerzálny}(x) \to \mathsf{kľúč}(x))$,

(X_3) $\exists x\, \mathsf{univerzálny}(x) \to \exists y\, \mathsf{zámka}(y)$,

(X_4) $\forall x\, \mathsf{zámka}(x) \to \forall y\big(\mathsf{univerzálny}(y) \to \exists z(\mathsf{odomkne}(z, z) \land \mathsf{kľúč}(z))\big)$.

7.5.10 Uvažujme teóriu $T = \{A_1, \dots, A_4\}$ v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \emptyset$, $\mathcal{F}_\mathcal{L} = \{\mathsf{úhlavný\_nepriateľ}^1\}$, $\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{\mathsf{hrdina\_pre}^2, \mathsf{nepriateľ}^2, \mathsf{porazí}^2, \mathsf{superhrdina}^1\}$, s formulami:

(A_1) $\forall x\big(\mathsf{superhrdina}(x) \leftrightarrow \forall y\big(\forall z\, \mathsf{nepriateľ}(y, z) \to \mathsf{porazí}(x, y)\big)\big)$,

(A_2) $\forall x\, \forall y\big(\mathsf{hrdina\_pre}(x, y) \leftrightarrow \mathsf{porazí}(x, \mathsf{úhlavný\_nepriateľ}(y))\big)$,

(A_3) $\exists x\, \mathsf{superhrdina}(x) \land \exists x\, \forall y\, \mathsf{nepriateľ}(x, y)$,

(A_4) $\forall x\, \mathsf{nepriateľ}(\mathsf{úhlavný\_nepriateľ}(x), x)$.

Nech ďalej

$$X = \forall x\big(\forall y\, \mathsf{hrdina\_pre}(x, y) \to \mathsf{superhrdina}(x)\big).$$

Rozhodnite, či (i) z teórie T vyplýva X, a tiež rozhodnite, či (ii) X je nezávislá od T.

Rozhodnutia zdôvodnite na základe definícií vzťahov vyplývania a nezávislosti a dokážte podľa potreby *tablom* alebo *nájdením príslušných štruktúr*.

7.5.11 (Quine [4]) Uvažujme teóriu $T = \{A_1, \dots, A_4\}$ v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Jones}\}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \emptyset$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{lupič}^1, \text{prehľadal}^2, \text{sprievodca}^2, \text{strážnik}^1, \text{vstúpil}^1, \text{zamestnanec}^1\}$ s formulami:

(A_1) $\forall x\big(\text{strážnik}(x) \leftrightarrow$
$\quad\quad \forall y\big(\text{vstúpil}(y) \land \forall z(\text{zamestnanec}(z) \to \neg\text{sprievodca}(z, y))$
$\quad\quad\quad \to \text{prehľadal}(x, y)\big)\big)$,

(A_2) strážnik(Jones),

(A_3) $\exists x\big(\text{lupič}(x) \land \text{vstúpil}(x) \land \forall y(\text{sprievodca}(y, x) \to \text{lupič}(y))\big)$,

(A_4) $\forall x\big(\text{lupič}(x) \to \neg \exists y\, \text{prehľadal}(y, x)\big)$.

Pomocou *tablového kalkulu* dokážte, že z teórie T vyplýva formula X (t.j. $T \models X$), vysvetlite vzťah tabla k vyplývaniu:

$$X = \exists x(\text{lupič}(x) \land \text{zamestnanec}(x)).$$

V table môžete využiť známe korektné pravidlá a skrátiť symboly predikátov nasledovne:
lupič $\rightsquigarrow$ L, prehľadal $\rightsquigarrow$ P, sprievodca $\rightsquigarrow$ Sp, strážnik $\rightsquigarrow$ St, vstúpil $\rightsquigarrow$ V, zamestnanec $\rightsquigarrow$ Z.

7.5.12 Uvažujme teóriu $T = \{A_1, \dots, A_4\}$ v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \emptyset$, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \emptyset$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{dobre\_sformátovaný}^1, \text{edituje}^2, \text{má\_rád\_tabulátory}^1, \text{obsahuje\_medzery}^1, \text{obsahuje\_tab}^1, \text{programátor}^1, \text{spokojný}^1, \text{zdroják}^1\}$, s formulami:

(A_1) $\forall x\big(\text{zdroják}(x) \to$
$\quad\quad \big(\text{dobre\_sformátovaný}(x) \leftrightarrow \neg(\text{obsahuje\_medzery}(x) \land \text{obsahuje\_tab}(x))\big)\big)$

(A_2) $\forall x\big(\text{programátor}(x) \land \neg\text{má\_rád\_tabulátory}(x)$
$\quad\quad\quad \land \forall y\big(\text{zdroják}(y) \land \text{edituje}(x, y) \to \neg\text{obsahuje\_tab}(y)\big)$
$\quad\quad \to \text{spokojný}(x)\big)$

(A_3) $\forall x\big(\text{zdroják}(x) \to \text{obsahuje\_medzery}(x)\big)$

(A_4) $\exists x\big(\neg\text{spokojný}(x) \land \text{programátor}(x) \land \neg\text{má\_rád\_tabulátory}(x)\big)$

Dokážte *tablom*, že nasledujúca formula X vyplýva z teórie T.

(X) $\exists x\big(\text{zdroják}(x) \land \neg\text{dobre\_sformátovaný}(x)\big)$

V table môžete využiť známe korektné pravidlá a skrátiť symboly nasledovne: dobre_sformátovaný $\rightsquigarrow$ D,edituje $\rightsquigarrow$ E, má_rád_tabulátory $\rightsquigarrow$ R, obsahuje_medzery $\rightsquigarrow$ M, obsahuje_tab $\rightsquigarrow$ T, programátor $\rightsquigarrow$ P, spokojný $\rightsquigarrow$ S, zdroják $\rightsquigarrow$ Z.

7.5.13 (Novak [2]) Uvažujme teóriu $T = \{A_1, \dots, A_6\}$ v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{lotéria}\}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \{\text{podporovateľ}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{gambler}^1, \text{hlasuje}^1, \text{konzervatívec}^1, \text{lotéria}^1, \text{namieta}^1, \text{oddaný}^1, \text{proti}^2, \text{schváli\_sa}^1, \text{účastník}^2, \text{za}^2\}$, s formulami:

(A_1) $\forall x\bigl(\neg\text{schváli\_sa}(x) \to \text{za}(\text{podporovateľ}(x), x) \land \text{namieta}(\text{podporovateľ}(x))\bigr)$

(A_2) $\forall x\, \forall y\bigl(\text{účastník}(x, y) \land \text{lotéria}(y) \to \text{gambler}(x)\bigr)$,

(A_3) $\forall x\bigl(\text{za}(x, \text{návrh\_lotérie}) \to \exists y\bigl(\text{účastník}(x, y) \land \text{lotéria}(y)\bigr)\bigr)$,

(A_4) $\forall x\bigl(\text{za}(x, \text{návrh\_lotérie}) \lor \text{proti}(x, \text{návrh\_lotérie})\bigr)$,

(A_5) $\forall x\bigl(\text{konzervatívec}(x) \to \text{hlasuje}(x) \land \text{proti}(x, \text{návrh\_lotérie})\bigr)$
$\to \neg\text{schváli\_sa}(\text{návrh\_lotérie})$,

(A_6) $\neg\, \exists x\bigl(\text{konzervatívec}(x) \land \text{oddaný}(x) \land \text{gambler}(x)\bigr)$.

Dokážte *tablom*, že nasledujúca formula X vyplýva z teórie T.

(X) $\forall x\, \neg\text{namieta}(x) \land \forall x\bigl(\text{konzervatívec}(x) \to \text{hlasuje}(x)\bigr)$
$\to \exists x\bigl(\text{konzervatívec}(x) \land \neg\text{oddaný}(x)\bigr)$

V table môžete využiť známe korektné pravidlá a skrátiť symboly predikátov nasledovne:
gambler $\rightsquigarrow$ G, hlasuje $\rightsquigarrow$ H, konzervatívec $\rightsquigarrow$ K, lotéria $\rightsquigarrow$ L, namieta $\rightsquigarrow$ N, oddaný $\rightsquigarrow$ O, podporovateľ $\rightsquigarrow$ pp, proti $\rightsquigarrow$ P, schváli_sa $\rightsquigarrow$ S, účastník $\rightsquigarrow$ U, za $\rightsquigarrow$ Z, návrh_lotérie $\rightsquigarrow$ nl.

7.6 Alternatívne definície logiky prvého rádu

7.6.1 Zadefinujte syntax logiky prvého rádu s kvantifikátorom $\leqslant 1$ („pre najviac jedno“) namiesto klasických kvantifikátorov — teda jazyk a pojmy ako *term*, *formula*. Zadefinujte pojem *splnenia formuly v štruktúre pri ohodnotení* pre formuly v tejto syntaxi.

7.6.2 Zadefinujte syntax logiky prvého rádu s funkčnými symbolmi a s kvantifikátorom $\geqslant 2$ („pre aspoň dve“) namiesto klasických kvantifikátorov — teda jazyk a pojmy ako *term*, *formula*.

Zadefinujte pojmy *hodnota termu v štruktúre pri ohodnotení* a *štruktúra spĺňa formulu pri ohodnotení* pre formuly v tejto syntaxi.

7.7 Rezolvencia

7.7.1 Nech A, B, C, D sú ľubovoľné atómy. V rezolvenčnom kalkule dokážte nesplniteľnosť množín klauzúl:

a) $T = \{(A \vee B), (\neg B \vee \neg A), (C \vee \neg D), (\neg C \vee D)\}$

b) $T = \{(A \vee B \vee C), (B \vee \neg C), (\neg A \vee \neg B)\}$

c) $T = \{(A \vee B \vee C), (B \vee \neg C), \neg A, \neg B\}$

d) $T = \{(A \vee B), (\neg A \vee C), (\neg A \vee \neg C), (A \vee \neg B)\}$

e) $T = \{A, (B \vee \neg A), (\neg A \vee \neg B \vee C), (\neg A \vee \neg C)\}$

f) $T = \{(B \vee \neg C), (A \vee \neg B), (B \vee C), (\neg B \vee \neg A)\}$

g) $T = \{(C \vee B), (\neg C \vee A), (C \vee \neg B), (\neg A \vee \neg C)\}$

h) $T = \{(\neg A \vee C), (A \vee B), (\neg A \vee \neg C), (\neg B \vee A)\}$

Riešenie. d) Pokúsime sa nájsť rezolvenčné zamietnutie množiny klauzúl T:

Pri hľadaní zamietnutia môžeme do rezolvenčného odvodenia kedykoľvek pridávať klauzuly teórie T. Ak T nie je príliš veľká, môžeme všetky jej klauzuly pridať hneď na začiatku.

1.	A	T
2.	$B \vee \neg A$	T
3.	$\neg A \vee \neg B \vee C$	T
4.	$\neg A \vee \neg C$	T

Následne aplikujeme pravidlá rezolvencie a idempotencie. Pretože cieľom je dospieť k prázdnej klauzule, preferujeme rezolvenciu, v ktorej jedna klauzula je jednotková (má iba jeden literál). Rezolventa bude vtedy skrátením druhej klauzuly o jeden literál. Teória T umožňuje takýto postup v každom kroku, ale nie je to tak pri každej teórii.

5.	B	rezolvencia 1 a 2 na A
6.	$\neg A \vee C$	rezolvencia 3 a 5 na B
7.	C	rezolvencia 1 a 6 na A
8.	$\neg A$	rezolvencia 4 a 7 na C
9.	$\square$	rezolvencia 1 a 8 na A

Keďže sme pomocou rezolvencie dospeli k prázdnej klauzule, množina T je nesplniteľná.

♮

7.7.2 Nech P, Q, R, S sú ľubovoľné atómy a nech

$$T = \left\{\begin{matrix} (P \to Q), \\ ((Q \to P) \vee (S \to R)), \\ (\neg P \to (\neg R \wedge S)) \end{matrix}\right\}$$

Pomocou rezolvenčného kalkulu zistite, či z T vyplýva formula $((P \wedge Q) \to R)$.

7.7.3 Zistite, či sú nasledujúce dvojice postupností symbolov unifikovateľné, a nájdite ich najvšeobecnejší unifikátor.

a) Arabela — prvý_majiteľ(x)

b) kupujúci(Kolobežka6259, y) — kupujúci(t, prvý_majiteľ(t))

c) predaj(x, prvý_majiteľ(t), t, p) — predaj(x, y, Kolobežka6259, 35eur)

d) predaj(u, u, w, r) — predaj(kupujúci(y, t), y, t, p)

e) predaj(x, Ingrid, t, cena(t)) — predaj(kupujúci(y, t), y, t, p)

7.7.4 Sfaktorizujte klauzuly:

a) ¬dáma(x) ∨ urazil(y, x) ∨ ¬dáma(Milagros)

b) ¬chráni(osobný_strážca(x), x) ∨ ¬chráni(x, y)

7.7.5 V rezolvenčnom kalkule dokážte nesplniteľnosť množín klauzúl:

a) T = {(šteká(x) ∨ ¬pes(x)), (¬pes(x) ∨ hryzie(x)),
(¬pes(x) ∨ ¬šteká(x) ∨ ¬hryzie(x)), pes(Dunčo)}

b) T = {(dom(x) ∨ strom(y) ∨ pri(x, y)),
(strom(y) ∨ ¬pri(x, y)), (¬dom(x) ∨ ¬strom(y))}

c) T = {(c(x, y) ∨ b(x)), (¬c(x, L) ∨ a(L)), (c(P, y) ∨ ¬b(P)), (¬a(y) ∨ ¬c(x, y))}

7.7.6 Zrezolvujte a prípadne aj sfaktorizujte nasledujúce množiny klauzúl v logike prvého rádu:

a) Každý cvičiaci je buď doktorand alebo asistent. Profesor Krhlička nie je ani doktorand, ani asistent, ale je cvičiaci.

{¬cvičiaci(x) ∨ doktorand(x) ∨ asistent(x),
¬doktorand(Krhlička), ¬asistent(Krhlička), cvičiaci(Krhlička)}

b) Ak má Tom rád Jerryho, potom existuje mačka, ktorá neznáša Toma. Jerryho majú všetci radi.
$\{\neg\text{má\_rád}(\text{Tom}, \text{Jerry}) \lor \text{mačka}(\text{M}_1),$
$\neg\text{má\_rád}(\text{Tom}, \text{Jerry}) \lor \text{neznáša}(\text{M}_1, \text{Tom}),$
$\text{má\_rád}(x, \text{Jerry})\}$

c) Kubkovi chutia všetky čokolády. Maťkovi nechutí Milka.
$\{\neg\text{čokoláda}(x) \lor \text{chutí}(x, \text{Kubko}), \quad \neg\text{chutí}(\text{Milka}, \text{Maťko})\}$

d) Vždy, keď niekto niečo dokončí, dostane za to príslušnú odmenu. Keď Medard dokončí polievanie záhrady, nedostane nič.
$\{\neg\text{dokončí}(x, y) \lor \text{dostane}(x, \text{odmena}(x, y)),$
$\neg\text{dokončí}(\text{Medard}, \text{polievanie\_záhrady}) \lor \neg\text{dostane}(\text{Medard}, y)\}$

7.7.7 Nájdite na ekvisplniteľné množiny klauzúl k nasledujúcim formulám:

a) $\exists x\, \text{muž}(x) \land \exists x\, \text{žena}(x) \to \exists x\big(\text{muž}(x) \lor \text{žena}(x)\big)$

b) $\forall x\big(\text{zelenina}(x) \lor \text{ovocie}(x)\big) \to \forall x\, \text{zelenina}(x) \lor \forall x\, \text{ovocie}(x)$

c) $\neg \forall x\big(\exists y\, P(x, y) \land \exists y\, Q(x, y) \to \exists y\big(P(x, y) \lor Q(x, y)\big)\big)$

d) $\neg \forall x\big(\exists y\big(P(x, y) \lor Q(x, y)\big) \to \exists y\, P(x, y) \land \exists y\, Q(x, y)\big)$

e) $\forall x\big(P(x) \to \exists y\, \forall z\, Q(f(x, y), z)\big)$

f) $\forall x\big(\exists y\, \forall z\, Q(f(x, y), z) \to P(x)\big)$

7.7.8 Prvorádovou rezolvenciou dokážte správnosť nasledujúcich úsudkov:

a) Každý je chlapec alebo dievča. Každé dievča má nejakú bábiku. Janka nie je chlapec. Potom Janka má aspoň jednu bábiku.
Teda formálne: Nech

$$T = \left\{\begin{array}{c} \forall x(\text{chlapec}(x) \lor \text{dievča}(x)), \\ \forall x(\text{dievča}(x) \to \exists y(\text{má}(x, y) \land \text{bábika}(y))), \\ \neg\text{chlapec}(\text{Janka}) \end{array}\right\}$$

Dokážte, že $T \models \exists y(\text{má}(\text{Janka}, y) \land \text{bábika}(y))$.

b) Predpokladajme, že všetko je pes alebo mačka, a že každý pes vlastní aspoň jednu pískaciu hračku. Z toho vyplýva, že ak Dunčo nie je mačka, vlastní nejakú pískaciu hračku.

c) Tí, čo nie sú maškrtníci, sú posadnutí štíhlou líniou. Kto nikdy nezjedol nejakú čokoládu, nie je maškrtník. Preto ak Garfield nie je posadnutý štíhlou líniou, tak niekedy zjedol aspoň jednu čokoládu.

d) Každého, kto urazí dámu, potrestá nejaký gentleman. Milagros je dáma. Takže ak Doña Angélica urazí Milagros, niekto ju (Doñu Angélicu) určite potrestá.

Riešenie. d) Najprv si sformalizujeme teóriu:

$$T = \left\{\begin{matrix}\forall x\big(\text{dáma}(x) \to \forall y\big(\text{urazí}(y,x) \to \exists z(\text{potrestá}(z,y) \land \text{gentleman}(z))\big)\big), \\ \text{dáma}(\text{Milagros})\end{matrix}\right\}$$

Sformalizujeme tiež tvrdenie, ktorého vyplývanie chceme dokázať:

$$X = \text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, \text{Milagros}) \to \exists x\, \text{potrestá}(x, \text{Doña\_Angélica}).$$

Keďže $T \models X$ vtt $T' = T \cup \{\neg X\}$ je nesplniteľné a dôkaz chceme vykonať pomocou rezolvenčného kalkulu, T' si postupne upravíme do ekvisplniteľnej klauzálnej teórie. Úprava formuly $\forall x\big(\text{dáma}(x) \to \forall y\big(\text{urazí}(y,x) \to \exists z(\text{potrestá}(z,y) \land \text{gentleman}(z))\big)\big)$ je nasledujúca:

1. $\forall x\big(\text{dáma}(x) \to \forall y\big(\text{urazí}(y,x) \to \exists z(\text{potrestá}(z,y) \land \text{gentleman}(z))\big)\big)$

2. $\forall x\big(\neg\text{dáma}(x) \lor \forall y\big(\text{urazí}(y,x) \to \exists z(\text{potrestá}(z,y) \land \text{gentleman}(z))\big)\big)$
   (nahradenie implikácie)

3. $\forall x\big(\neg\text{dáma}(x) \lor \forall y\big(\neg\text{urazí}(y,x) \lor \exists z(\text{potrestá}(z,y) \land \text{gentleman}(z))\big)\big)$
   (nahradenie implikácie)

4. $\forall x\big(\neg\text{dáma}(x) \lor \forall y\big(\neg\text{urazí}(y,x) \lor (\text{potrestá}(\text{pomstiteľ}(x,y),y)$
   $\land\, \text{gentleman}(\text{pomstiteľ}(x,y)))\big)\big)$
   (skolemizácia)

5. $\forall x\, \forall y\big(\neg\text{dáma}(x) \lor \big(\neg\text{urazí}(y,x) \lor (\text{potrestá}(\text{pomstiteľ}(x,y),y)$
   $\land\, \text{gentleman}(\text{pomstiteľ}(x,y)))\big)\big)$
   (konverzia do PNF)

6. $\forall x\, \forall y\big(\big(\neg\text{dáma}(x) \lor \neg\text{urazí}(y,x) \lor \text{potrestá}(\text{pomstiteľ}(x,y),y)\big)\land$
   $\land\, \big(\neg\text{dáma}(x) \lor \neg\text{urazí}(y,x) \lor \text{gentleman}(\text{pomstiteľ}(x,y))\big)\big)$
   (distributívnosť)

7. $\{\neg\text{dáma}(x) \lor \neg\text{urazí}(y,x) \lor \text{potrestá}(\text{pomstiteľ}(x,y),y),$
   $\neg\text{dáma}(x) \lor \neg\text{urazí}(y,x) \lor \text{gentleman}(\text{pomstiteľ}(x,y))\}$
   (vytvorenie množiny klauzúl)

Formula dáma(Milagros) už v CNF je. Ostalo nám teda upraviť do CNF $\neg X$:

1. $\neg(\text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, \text{Milagros}) \rightarrow \exists x\, \text{potrestá}(x, \text{Doña\_Angélica}))$
2. $\neg(\neg\text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, \text{Milagros}) \lor \exists x\, \text{potrestá}(x, \text{Doña\_Angélica}))$
   (nahradenie implikácie)
3. $(\text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, \text{Milagros}) \land \forall x\, \neg\text{potrestá}(x, \text{Doña\_Angélica}))$
   (NNF)
4. $\forall x(\text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, \text{Milagros}) \land \neg\text{potrestá}(x, \text{Doña\_Angélica}))$
   (PNF)
5. $\{\text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, \text{Milagros}), \neg\text{potrestá}(x, \text{Doña\_Angélica})\}$
   (vytvorenie množiny klauzúl)

Výsledná ekvisplniteľná teória T_c' je teda nasledujúca:

$$T_c' = \left\{\begin{array}{l}
\neg\text{dáma}(x) \lor \neg\text{urazí}(y, x) \lor \text{potrestá}(\text{pomstiteľ}(x, y), y),\\
\neg\text{dáma}(x) \lor \neg\text{urazí}(y, x) \lor \text{gentleman}(\text{pomstiteľ}(x, y)),\\
\text{dáma}(\text{Milagros}),\\
\text{urazí}(\text{Doña_Angélica}, \text{Milagros}),\\
\neg\text{potrestá}(x, \text{Doña_Angélica})
\end{array}\right\}$$

Teraz dokážme nesplniteľnosť T_c' rezolvenčným kalkulom:

1.	$\neg\text{dáma}(x) \lor \neg\text{urazí}(y, x)$ $\lor\, \text{potrestá}(\text{pomstiteľ}(x, y), y)$	T_c'
2.	$\text{dáma}(\text{Milagros})$	T_c'
3.	$\text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, \text{Milagros})$	T_c'
4.	$\neg\text{potrestá}(x, \text{Doña\_Angélica})$	T_c'
5.	$\neg\text{dáma}(x) \lor \neg\text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, x)$	rezolvencia 1 a 4$\{x \mapsto z\}$ na potrestá, $\sigma_5 = \{y \mapsto \text{Doña\_Angélica}, z \mapsto \text{pomstiteľ}(x, \text{Doña\_Angélica})\}$
6.	$\neg\text{dáma}(\text{Milagros})$	rezolvencia 3 a 5 na urazí, $\sigma_6 = \{x \mapsto \text{Milagros}\}$
7.	$\square$	rezolvencia 2 a 6 na dáma, $\sigma_7 = \{\}$

Celé použitie pravidla prvorádovej rezolvencie na klauzuly 1 a 4 sa dá predstaviť ako postupný proces:

$$\dfrac{\begin{array}{c} \text{1.}\quad \neg \mathrm{d}(x) \lor \neg \mathrm{u}(y,x) \lor \mathrm{potr}(\mathrm{pom}(x,y),y) \\ \downarrow \sigma_5 \\ \neg \mathrm{d}(x) \lor \neg \mathrm{u}(\mathrm{DA},x) \lor \mathrm{potr}(\mathrm{pom}(x,\mathrm{DA}),\mathrm{DA}) \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{4.}\quad \neg \mathrm{potr}(x,\mathrm{DA}) \\ \downarrow \{x \mapsto z\} \\ \neg \mathrm{potr}(z,\mathrm{DA}) \\ \downarrow \sigma_5 \\ \neg \mathrm{potr}(\mathrm{pom}(x,\mathrm{DA}),\mathrm{DA}) \end{array}}{\neg \mathrm{d}(x) \lor \neg \mathrm{u}(\mathrm{DA},x)}$$

V rezolvenčnom odvodení však celý tento proces tvorí **jeden krok**. Do odvodenia nepíšeme medziprodukty, iba výslednú rezolventu, klauzulu 5.

Pri rezolvovaní klauzúl 1 a 4 sme **museli premenovať** premennú x v jednej z nich na novú premennú z. Substitúciou σ_5 sme potom zunifikovali atómy potrestá(pomstiteľ$(x, y), y)$ z klauzuly 1 a potrestá($\boldsymbol{z}$, Doña_Angélica) z klauzuly 4$\{x \mapsto z\}$ (teda 4 po premenovaní).

Premenovanie premenných je štandardnou súčasťou rezolvencie, pričom ich môže premenovať viacero súčasne. Na význame klauzúl nič nemení, lebo premenné v rôznych klauzulách sú všeobecne kvantifikované nezávisle od seba a na konkrétnom mene premennej nezáleží (pokiaľ nie je rovné menu inej premennej).

Bez premenovania atómy potrestá(pomstiteľ$(x, y), y)$ a potrestá($\boldsymbol{x}$, Doña_Angélica) v klauzulách 1 a 4 **nie sú unifikovateľné**, pretože nie sú unifikovateľné prvé argumenty predikátového symbolu potrestá. Termy $\boldsymbol{x}$ a pomstiteľ($\boldsymbol{x}$, Doña_Angélica), kde je premenná x argumentom funkčného symbolu, by boli unifikovateľné, iba keby sme mali nekonečné termy.

Keďže sme pomocou rezolvencie našli zamietnutie pre T'_{c}, čo je ekvisplniteľná klauzálna teória pre teóriu $T \cup \{\neg X\}$, tak $T \vDash X$, čiže

$$T \vDash \text{urazí(Doña\_Angélica, Milagros)} \rightarrow \exists x\, \text{potrestá}(x, \text{Doña\_Angélica}).$$

Úsudok d) je teda správny. ♮

7.7.9 Uvažujme nasledovné tvrdenia a ich formalizáciu v jazyku logiky prvého rádu *bez rovnosti* $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Hanka}\}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \emptyset$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{autíčko}^1, \text{bábika}^1, \text{červené}^1, \text{dievčenské}^1, \text{hračka}^1, \text{hračkárstvo}^1, \text{chlapčenské}^1, \text{matfyzáčka}^1, \text{P}^1, \text{šaty}^1, \text{mama}^2, \text{má}^2, \text{zakúpené\_v}^2, \text{kúpi}^3\}$:

1. Autíčka sú chlapčenské hračky a bábiky sú dievčenské hračky.

$$\begin{aligned} &\forall x(\text{autíčko}(x) \rightarrow \text{chlapčenské}(x) \land \text{hračka}(x)) \land \\ &\forall x(\text{bábika}(x) \rightarrow \text{dievčenské}(x) \land \text{hračka}(x)) \end{aligned} \tag{A_1}$$

2. Hanka má dve autíčka.

$$\begin{aligned} &\exists x\, \exists y(\text{P}(x) \land \neg\text{P}(y) \land \\ &\qquad \text{má}(\text{Hanka}, x) \land \text{autíčko}(x) \land \text{má}(\text{Hanka}, y) \land \text{autíčko}(y)) \end{aligned} \tag{A_2}$$

3. Každá hračka bola zakúpená v hračkárstve.

$$\forall x(\text{hračka}(x) \rightarrow \exists y\,(\text{zakúpené\_v}(x,y) \wedge \text{hračkárstvo}(y))) \qquad (A_3)$$

4. Hanka je dievča, ktoré má bábiku, ktorá má červené šaty.

$$\begin{aligned}&(\text{dievča}(\text{Hanka}) \wedge \\ &\quad \exists x(\text{má}(\text{Hanka},x) \wedge \text{bábika}(x) \wedge \exists y(\text{má}(x,y) \wedge \text{červené}(y) \wedge \text{šaty}(y))))\end{aligned} \qquad (A_4)$$

5. Každá mama kúpi svojmu dieťaťu nejakú hračku.

$$\forall x\,\forall y(\text{mama}(x,y) \rightarrow \exists z(\text{hračka}(z) \wedge \text{kúpi}(x,y,z))) \qquad (A_5)$$

6. Dievčatá, ktoré majú nejakú chlapčenskú hračku, sa stanú matfyzáčkami.

$$\forall x(\text{dievča}(x) \rightarrow (\exists y(\text{hračka}(y) \wedge \text{chlapčenské}(y)) \rightarrow \text{matfyzáčka}(x))) \qquad (A_6)$$

Zistite pomocou rezolvencie, či v takomto prípade platí, že *ak každé dievča má aspoň jednu dievčenskú hračku, tak sa Hanka stane matfyzáčkou*. Teda, či z teórie $T = \{A_1, \dots, A_6\}$ vyplýva formula:

$$\begin{aligned}&\forall x\,\big(\text{dievča}(x) \rightarrow \exists y(\text{má}(x,y) \wedge \text{dievčenské}(y) \wedge \text{hračka}(y))\big) \\ &\quad \rightarrow \text{matfyzáčka}(\text{Hanka})\end{aligned} \qquad (X)$$

7.7.10 (Novak [2]) Sformalizujte nasledujúce tvrdenia a dokážte rezolvenčným kalkulom, že $\{A_1, \dots, A_4\} \vDash X$:

(A_1) Psy v noci zavýjajú.

(A_2) Kto má mačku, nemá myši.

(A_3) Tí, čo majú ľahký spánok, nemajú nič, čo v noci zavýja.

(A_4) Juro má mačku alebo psa.

(X) Ak má Juro ľahký spánok, tak nemá myši.

7.7.11 (Novak [2]) Uvažujme nasledujúce tvrdenia:

(V_1) Každý vták spí na nejakom strome.

(V_2) Potápky sú vtáky a sú tiež vodnými živočíchmi.

(V_3) Strom, na ktorom spí nejaký vodný vták, sa nachádza blízko jazera.

(V_4) Všetko, čo spí na niečom, čo sa nachádza blízko nejakého jazera, sa živí rybami.

Vyriešte nasledujúce úlohy:

a) Sformalizujte tvrdenia ako teóriu $T = \{V_1, \dots, V_4\}$ vo vhodnom jazyku logiky prvého rádu.

Zvoľte predikátové a funkčné symboly podľa potreby tak, aby formalizácia dávala zmysel, teda aby sformalizované pojmy neboli izolované a formalizácia bola splniteľná.

b) Upravte teóriu T na ekvisplniteľnú klauzálnu teóriu T'.

c) Sformulujte a zodpovedzte pomocou rezolvencie pre logiku prvého rádu nasledujúcu otázku:

Je pravda, že každá potápka sa živí rybami?

7.7.12 (Novak [2]) Uvažujme nasledujúce tvrdenia:

1. Každý, kto jazdí na nejakom Harleyi, je drsňák.
2. Všetci motorkári jazdia na niečom, čo je buď Harley alebo BMW.
3. Každý, kto jazdí na nejakom BMW, je karierista.
4. Každý karierista je právnik.
5. Dobré dievčatá nerandia s drsňákmi.
6. Danka je dobré dievča a Jonáš je motorkár.

Vyriešte nasledujúce úlohy:

a) Sformalizujte tvrdenia ako teóriu $T = \{B_1, \dots, B_6\}$ vo vhodnom jazyku logiky prvého rádu.

Zvoľte predikátové a funkčné symboly podľa potreby tak, aby formalizácia dávala zmysel, teda aby sformalizované pojmy neboli izolované a formalizácia bola splniteľná.

b) Upravte teóriu T na ekvisplniteľnú klauzálnu teóriu T'.

c) Pre nasledujúcu otázku sformulujte príslušný logický problém a zodpovedzte problém aj otázku pomocou rezolvencie pre logiku prvého rádu:

Je na základe tvrdení 1–6 pravda, že ak Jonáš nie je právnik, tak s ním Danka nerandí?

7.7.13 Použite rezolvenciu na riešenie úloh 6.4.3–6.4.10.

7.7.14 (Pre ambicióznych, „Schubertov parný valec"; Schubert [2, 3]) Uvažujme nasledujúci úsudok:

> Wolves, foxes, birds, caterpillars, and snails are animals, and there are some of each of them. Also there are some grains, and grains are plants. Every animal either likes to eat all plants or all animals much smaller than itself that like to eat some plants. Caterpillars and snails are much smaller than birds, which are much smaller than foxes, which in turn are much smaller than wolves. Wolves do not like to eat foxes or grains, while birds like to eat caterpillars but not snails. Caterpillars and snails like to eat some plants.
>
> Therefore there is an animal that likes to eat a grain-eating animal.

Dokážte (napríklad rezolvenciou), že tento úsudok je správny.

Literatúra

[1] Chiara Ghidini and Luciano Serafini. *Mathematical Logic Exercises*. University of Trento, 2014. http://disi.unitn.it/~ldkr/ml2014/ExercisesBooklet.pdf.

[2] Gordon S. Novak Jr. Resolution example and exercises. [online]. https://www.cs.utexas.edu/users/novak/reso.html.

[3] Francis Jeffry Pelletier. Seventy-five problems for testing automatic theorem provers. *J. Autom. Reasoning*, 2(2):191–216, 1986.

[4] Willard Van Orman Quine. *Methods of Logic*. Holt, Rinehart and Winston, revised edition, 1959.

[5] Raymond M. Smullyan. *What Is the Name of This Book?—The Riddle of Dracula and Other Logical Puzzles*. Prentice-Hall, 1978.