Matematika 4 — Logika pre informatikov
9. sada teoretických úloh

Čísla úloh v zátvorkách odkazujú do zbierky[1], kde nájdete riešené príklady a ďalšie úlohy na precvičovanie.

Riešenia niektorých úloh si môžete skontrolovať pomocou prieskumníka štruktúr[2]alebo editora tabiel[3].

Ak nie je uvedené inak, o každom použitom jazyku $\mathcal{L}$ relačnej logiky prvého rádu predpokladáme, že jeho množina indivíduových premenných $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}$ obsahuje všetky reťazce písmen nasledované číselnými indexmi, ktoré nie sú prvkami množín $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

[1] https://fmfi-uk-1-ain-412.github.io/lpi/teoreticke-ain/zbierka.pdf
[2] https://fmfi-uk-1-ain-412.github.io/structure-explorer/
[3] https://fmfi-uk-1-ain-412.github.io/tableauEditor/

Cvičenie 9.1. (6.4.1) Majme teóriu $T = \{A_1, \dots, A_4\}$ v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{John}\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{pes}^1, \text{macka}^1, \text{mys}^1, \text{LS}^1, \text{steka}^1, \text{ma}^2\}$, pričom význam $\text{LS}(x)$ je *x má ľahký spánok*. Rozhodnite, či z teórie T, kde

(A_1) $\forall x(\text{pes}(x) \to \text{steka}(x))$

(A_2) $\forall x \forall y((\text{ma}(x, y) \land \text{macka}(y)) \to \neg \exists z(\text{ma}(x, z) \land \text{mys}(z)))$

(A_3) $\forall x(\text{LS}(x) \to \neg \exists y(\text{ma}(x, y) \land \text{steka}(y)))$

(A_4) $\exists x(\text{ma}(\text{John}, x) \land (\text{macka}(x) \lor \text{pes}(x)))$

vyplývajú formuly:

(X_1) $(\exists x(\text{ma}(\text{John}, x) \land \neg\text{steka}(x)) \to \text{LS}(\text{John}))$

(X_2) $(\text{LS}(\text{John}) \to \forall x(\text{ma}(\text{John}, x) \to \neg\text{mys}(x)))$

Teóriu aj formuly X_1 a X_2 si najprv pozorne prečítajte, pochopte ich význam a intuitívne si premyslite, **prečo** X_1 resp. X_2 vyplýva alebo nevyplýva z teórie. Intuícia vás potom dovedie ku konštrukcii správneho tabla alebo štruktúry.
V logike prvého rádu vo všeobecnosti **nemôžeme použiť tablá na hľadanie spĺňajúcich štruktúr**, pretože úplné tablo môže byť nekonečné.

Cvičenie 9.2. (6.3.1) Sformalizujte nasledujúce tvrdenia ako ucelenú teóriu T vo vhodnom jazyku $\mathcal{L}$ relačnej logiky prvého rádu:

1. Je aspoň jeden študent, ktorý je chlapec, a jedna študentka (ktorá je teda dievča), a sú spolužiaci.
2. Učiteľ, ktorý je profesorom, musí byť školiteľom aspoň jedného študenta.
3. Vzťah „byť spolužiakom" je symetrický a tranzitívny.
4. Študenti a školitelia sú disjunktní.
5. Študent absolvuje predmet, iba ak ho má zapísaný.
6. Študent, ktorý absolvoval predmet, je spokojný.
7. Každý študent má medzi študentami aspoň dvoch kamarátov, pričom s jedným sa kamaráti viac než s tým druhým.
8. Každý študent má najviac jedného školiteľa.
9. Každá študentka má práve jednu spolužiačku, ktorá jej je najlepšia kamarátka.
10. Nikto si nezapisuje výberové predmety.

Vyskúšajte si. (6.3.2) Uvažujme výrok: „Každé zvieratko niekto kŕmi." Ktorá z nasledujúcich formúl zodpovedá tomuto výroku? Akým výrokom zodpovedajú zvyšné formuly?

(A_1) $\forall x\big(\text{človek}(x) \to \exists y(\text{zvieratko}(y) \land \text{kŕmi}(x, y))\big)$

(A_2) $\forall y\big(\text{zvieratko}(y) \to \exists x(\text{človek}(x) \land \text{kŕmi}(x, y))\big)$

(A_3) $\exists x\big(\text{človek}(x) \land \forall y(\text{zvieratko}(y) \to \text{kŕmi}(x, y))\big)$

(A_4) $\exists y\big(\text{zvieratko}(y) \land \forall x(\text{človek}(x) \to \text{kŕmi}(x, y))\big)$

Formuly A_1–A_4 možno vyabstrahovať do nasledovných štyroch všeobecných schém, kde P, Q a R označujú *formuly* s voľnými premennými x a y (teda nie nutne iba jednoduché predikáty):

(B_1) $\forall x\big(P(x) \to \exists y(Q(y) \land R(x, y))\big)$

(B_2) $\forall x\big(P(x) \to \exists y(Q(y) \land R(y, x))\big)$

(B_3) $\exists x\big(P(x) \land \forall y(Q(y) \to R(x, y))\big)$

(B_4) $\exists x\big(P(x) \land \forall y(Q(y) \to R(y, x))\big)$

Určte, ktorej schéme zodpovedá každý z nasledujúcich výrokov (v zátvorkách je odporúčaná formula R):

1. V ZOO je zvieratko, ktoré chodia kŕmiť všetky deti.
   (kŕmi(x, y) — x chodí kŕmiť y)
2. Každý týždeň na Obchodnej zbijú cudzinca.
   (zbijú(x, t) — na Obchodnej zbijú x v období t)
3. Každú hodinu mi vyvoláva nejaký otravný predajca.
   (volá(x, ja, t) — telefonicky ma otravuje x v čase t)
4. Každý študent má kamaráta, ktorý je tiež študent.
   (kamarát(x, y) — x a y sú kamaráti)
5. Jeden študent sa kamaráti so všetkými študentmi.

Cvičenie 9.3. (6.2.4) Dokážte, že nasledujúce formuly sú splniteľné, ale nie platné:

a) $\big(\forall x(\text{doktorand}(x) \to \text{študent}(x)) \to \forall x(\text{doktorand}(x) \land \text{študent}(x))\big)$,

b) $\big(\forall x\, \exists y(\text{páči}(x, y) \to \text{zaľúbený}(x)) \to \forall x(\exists y\, \text{páči}(x, y) \to \text{zaľúbený}(x))\big)$,

c) $\big(\forall x\, \exists y\, \text{rodič}(x, y) \to \exists x\, \forall y\, \text{rodič}(x, y)\big)$.

Vyskúšajte si.

d) $\big(\exists x(\text{pes}(x) \to \text{zly}(x)) \to \exists x(\text{pes}(x) \land \text{zly}(x))\big)$,

e) $\big(\forall x\, \exists y(\text{skolitel}(x, y) \to \text{docent}(x)) \to \forall x\, \forall y(\text{skolitel}(x, y) \to \text{docent}(x))\big)$,

f) $\big(\neg \exists x \neg \exists y(\text{student}(x) \land \text{skolitel}(x, y)) \to \neg \exists x\, \exists y(\text{student}(x) \land \text{skolitel}(x, y))\big)$,

g) $\big(\neg \exists x \neg \exists y(\text{student}(x) \land \neg \text{skolitel}(x, y)) \to \neg \exists x\, \exists y(\text{student}(x) \land \text{skolitel}(x, y))\big)$.

Tieto formuly zachytávajú **časté chyby pri formalizácii**. Všímajte si **rozdiely vo význame** ľavých a pravých strán implikácií. Aby ste ich naozaj pochopili:

- splniteľnosť dokážte tým, že splníte konzekvent formuly;
- skúmajte štruktúry s aspoň 4-prvkovými doménami, v ktorých sú, pokiaľ je to možné, interpretácie všetkých predikátov neprázdne;
- štruktúru znázornite kombináciou Vennovho diagramu pre unárne predikáty a orientovaného grafu pre binárne predikáty.