Matematika 4 — Logika pre informatikov
11. sada teoretických úloh

Čísla úloh v zátvorkách odkazujú do zbierky[1], kde nájdete riešené príklady a ďalšie úlohy na precvičovanie.

Riešenia niektorých úloh si môžete skontrolovať pomocou prieskumníka štruktúr[2]alebo editora tabiel[3].

Ak nie je uvedené inak, o každom použitom jazyku $\mathcal{L}$ logiky prvého rádu predpokladáme, že jeho množina indivíduových premenných $\mathcal{V}_\mathcal{L}$ obsahuje všetky reťazce písmen nasledované číselnými indexmi, ktoré nie sú prvkami množín $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ a $\mathcal{P}_\mathcal{L}$.

[1] https://fmfi-uk-1-ain-412.github.io/lpi/teoreticke-ain/zbierka.pdf
[2] https://fmfi-uk-1-ain-412.github.io/structure-explorer/
[3] https://fmfi-uk-1-ain-412.github.io/tableauEditor/

Cvičenie 11.1. (7.5.1) Uvažujme doménu rodinných vzťahov, ktorú opisujeme jazykom $\mathcal{L}$ logiky prvého rádu, ktorý obsahuje predikáty ako žena^1, muž^1, rodič^2, súrodenec^2, manželia^2 so zamýšľaným významom:

Predikát	Význam
žena(x)	x je žena
muž(x)	x je muž
rodič(x, y)	x je (vlastným) rodičom y
súrodenec(x, y)	x je (pokrvným) súrodencom y
manželia(x, y)	x a y sú manželmi

Sformulujte slovenské definície nasledovných odvodených pojmov (tak, ako ich poznáte z prirodzeného jazyka) a zapíšte ich ako definície predikátov, ktorými rozšírime jazyk $\mathcal{L}$:

(D_1) prastarý_rodič^2

(D_2) sesternica^2

(D_3) jedináčik^1

Sesternica nie je sestra.

Vyskúšajte si. Ďalej zadefinujte:

(D_4) macocha^2

Cvičenie 11.2. (7.5.2) Zostrojte štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk z predchádzajúcej úlohy ďalej rozšírený o symboly konštánt Andrea, Cyril, Boris, Diana tak, aby $\mathcal{M}$ splnila všetky definície predikátov z úlohy 11.1 a súčasne nasledujúce formuly v každom ohodnotení:

(A_1) $((\text{rodič}(\text{Andrea}, \text{Cyril}) \land \exists x\, \text{rodič}(\text{Andrea}, x)) \land \text{rodič}(\text{Boris}, \text{Diana}))$,

(A_2) $\exists x\, \exists y\, \exists z((\text{rodič}(x, \text{Andrea}) \land (\text{rodič}(x, \text{Boris}) \land \text{žena}(x))) \land (\text{rodič}(y, \text{Andrea}) \land \text{rodič}(z, \text{Andrea})))$,

(A_3) $(\forall x\, \neg\text{rodič}(x, x) \land \forall x\, \forall y(\text{rodič}(x, y) \to \neg\text{rodič}(y, x)))$,

(A_4) $\forall x((\text{žena}(x) \lor \text{muž}(x)) \land \neg(\text{žena}(x) \land \text{muž}(x)))$,

(A_5) $\forall x\, \forall y(\text{rodič}(x, y) \to \exists z(\text{rodič}(z, y) \land (\text{muž}(x) \leftrightarrow \neg\text{muž}(z))))$,

(A_6) $\forall p\, \forall r\, \forall x(((\text{rodič}(p, x) \land \text{rodič}(r, x)) \land (\text{žena}(p) \leftrightarrow \text{žena}(r))) \to p \doteq r)$,

(A_7) $\forall x\, \forall y(\text{súrodenec}(x, y) \leftrightarrow (\neg x \doteq y \land \exists z(\text{rodič}(z, x) \land \text{rodič}(z, y))))$;

(B_1) $\exists x\, \exists y\, \text{prastarý\_rodič}(x, y)$,

(B_2) $\exists x(\text{jedináčik}(x) \land \forall y(\text{rodič}(y, x) \to \text{jedináčik}(y)))$.

Vyskúšajte si. Upravte model, aby bola súčasne splnená aj formula:

(B_3) $\exists x\, \exists y(\text{macocha}(x, y) \land \exists z\, \text{rodič}(x, z))$.

Všímajte si, ktoré formuly skutočne vynútia pridanie nových objektov do domény a ktoré splníte aj pomocou existujúcich objektov.

Nezabudnite, že na splnenie definície nejakého predikátu musíte zabezpečiť, aby súčasne:

- všetky objekty (n-tice), ktoré patria do interpretácie predikátu, mali vlastnosti požadované definíciou;
- všetky objekty (n-tice), ktoré majú požadované vlastnosti, patrili do interpretácie predikátu.

Cvičenie 11.3. (7.5.3) Dokážte, že z teórie, pozostávajúcej zo (sformalizovaných) tvrdení:

1. Definícia A_7 pojmu súrodenec z cvičenia 11.2.
2. Definícia D_2 pojmu sesternica z cvičenia 11.1.
3. Definícia D_3 pojmu jedináčik z cvičenia 11.1.

4. Každý rodičovský pár má svoje najstaršie dieťa.
   $\forall x\, \forall y(\, (\, x \not\doteq y \land \exists z(\, \text{rodič}(x, z) \land \text{rodič}(y, z)\,)\,) \rightarrow$
   $(\, \text{rodič}(x, \text{nstd}(x, y)) \land \text{rodič}(y, \text{nstd}(x, y))\,)\,)$
5. Najstaršie dieťa rodičovského páru je staršie ako všetky ostatné deti tohto páru.
   $\forall x\, \forall y\, \forall z(\, (\, (\, (\, \text{rodič}(x, z) \land \text{rodič}(y, z)\,) \land x \not\doteq y\,) \land \text{nstd}(x, y) \not\doteq z\,) \rightarrow$
   $\text{starší}(\text{nstd}(x, y), z)\,)$

vyplýva:

a) Pre každých dvoch jedináčikov platí, že nie sú súrodenci.
   $\forall x\, \forall y(\, (\, \text{jedináčik}(x) \land \text{jedináčik}(y)\,) \rightarrow \neg\text{súrodenec}(x, y)\,)$

Vyskúšajte si. Ďalej dokážte:

b) Dieťa jedináčikov nemá žiadne sesternice.
c) Každý jedináčik je najstarším dieťaťom svojho rodičovského páru.

Vyskúšajte si. (7.3.3) Dokážte, že nasledujúce formuly sú platné, resp. vyplývajú z uvedenej teórie:

a) $\models \exists x(\text{pije}(x) \rightarrow \forall y\, \text{pije}(y))$,
b) $\models \forall x(\exists y\, \text{pozna}(x, \text{otec}(y)) \rightarrow \exists y\, \text{pozna}(x, y))$,
c) $\{\forall x(\text{socialny}(\text{najKam}(x)) \rightarrow \exists y\, \text{pozna}(x, \text{najKam}(y)))\}$
   $\models \exists x(\text{socialny}(x) \rightarrow \forall y\, \exists z\, \text{pozna}(\text{matka}(y), z))$.

Dôkazy platnosti prvých dvoch formúl sú prípravou na dôkaz vyplývania v tretej časti. Odporúčame vám skontrolovať tablo pomocou editora prvorádových tabiel.

Prémiová časť, príprava na skúšku

Riešenie prémiovej úlohy pridajte do PDF s riešením hodnotených úloh z 10. cvičenia alebo ho pošlite v PDF najneskôr v stredu 17. mája 2022 na adresu lpi-team@lists.dai.fmph.uniba.sk.

Prémiová úloha 11.4. (1 bod, 4.3.5) Zadefinujte vzťah *z teórie T vyplýva formula X* ($T \models_{\mathrm{p}} X$) a pojem *nesplniteľná formula* vo výrokovologickej časti logiky prvého rádu.

Dokážte alebo vyvráťte: Nech S je množina výrokovologických formúl a nech X je výrokovologická formula. Ak X je nesplniteľná a $S \models_{\mathrm{p}} X$, tak S je nesplniteľná.