Matematika 4 — Logika pre informatikov
8. sada teoretických úloh

Táto sada úloh obsahuje **hodnotenú časť**. Jej riešenie odovzdajte najneskôr v **pondelok 25. apríla 2022 o 9:00**.

Čísla úloh v zátvorkách odkazujú do zbierky[1], kde nájdete riešené príklady a ďalšie úlohy na precvičovanie.

Riešenia niektorých úloh si môžete skontrolovať pomocou prieskumníka štruktúr[2].

Ak nie je uvedené inak, o každom použitom jazyku $\mathcal{L}$ relačnej logiky prvého rádu predpokladáme, že jeho množina indivíduových premenných $\mathcal{V}_\mathcal{L}$ obsahuje všetky reťazce písmen nasledované číselnými indexmi, ktoré nie sú prvkami množín $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ a $\mathcal{P}_\mathcal{L}$.

[1] https://fmfi-uk-1-ain-412.github.io/lpi/teoreticke-ain/zbierka.pdf
[2] https://fmfi-uk-1-ain-412.github.io/structure-explorer/

Cvičenie 8.1. (6.1.1) Sformalizujte nasledujúce tvrdenia ako ucelenú teóriu vo vhodnom jazyku logiky prvého rádu:

1. Evka je doktorandka a má školiteľa.
2. Všetko sú ľudia.
3. Všetci doktorandi sú študenti.
4. Niektorí doktorandi sú aj učiteľmi.
5. Nikto nemôže učiť sám seba.
6. Žiaden profesor nemôže byť doktorand.
7. Niektorí študenti samozrejme nie sú doktorandi.
8. Doktorandi profesora Nového sú cvičiaci buď na Teórii všetkého alebo Úvode do abstrakcie.
9. Učitelia okrem asistentov sú profesori a docenti.
10. Adamov školiteľ musí byť docent alebo profesor v prípade, že je Adam doktorand.
11. Docentka Mladá školí iba takých študentov, ktorí absolvovali s vyznamenaním Kurz pre náročných, ale nie sú doktorandi.
12. Predmet Teória všetkého si nemôžu zapísať tí, čo neabsolvovali ani Kurz pre náročných, ani Úvod do abstrakcie.

13. Ak nejaký kurz učí profesor Nový, tak ide o neobľúbený kurz.
14. Doktorandi profesora Nového cvičiaci Teóriu všetkého sú veľmi bystrí.
15. Ak je nejaký Mladej doktorand bystrý, tak je šťastná.
16. Nový je šťastný, iba ak ho obľubuje aspoň jeden študent.

Cvičenie 8.2. (6.2.1) Nech $\mathcal{L}$ je jazyk relačnej logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Boris}, \text{Etela}, \text{Klára}\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{muž}^1, \text{žena}^1, \text{manželia}^2\}$. Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$, kde:

$$D = \{1, 2, 3\}$$

$$\begin{aligned} i(\text{Etela}) &= 1 & i(\text{muž}) &= \{2\} \\ i(\text{Klára}) &= 1 & i(\text{žena}) &= \{1\} \\ i(\text{Boris}) &= 3 & i(\text{manželia}) &= \{(1,1),(1,2),(2,1)\} \end{aligned}$$

Zistite, či sú nasledujúce formuly pravdivé alebo nepravdivé v štruktúre $\mathcal{M}$. Každú formulu preložte do čo najprirodzenejšieho slovenského tvrdenia.

(A_1) $(\exists x\, \text{žena}(x) \land \exists y\, \text{muž}(y))$

(A_2) $(\forall x\, \text{muž}(x) \lor \exists y\, \text{muž}(y))$

(A_3) $\forall x(\text{žena}(x) \to \neg\text{muž}(x))$

(A_4) $\exists x(\text{žena}(x) \land \text{muž}(x))$

(A_5) $\forall x(\text{žena}(x) \to \text{muž}(x))$

(A_6) $\exists x(\text{žena}(x) \to \text{muž}(x))$

(A_7) $\exists x(\text{manželia}(x, \text{Klára}) \land (\text{muž}(x) \lor \text{žena}(x)))$

(A_8) $\forall x(\text{manželia}(x, \text{Etela}) \to \text{žena}(x))$

(A_9) $\forall x((\text{žena}(x) \land \neg\text{manželia}(x, \text{Klára})) \to \text{manželia}(x, \text{Boris}))$

(A_{10}) $\neg \forall x((\text{muž}(x) \land \neg\text{manželia}(x, \text{Klára})) \to \text{manželia}(x, \text{Etela}))$

(A_{11}) $\exists x((\text{žena}(x) \land \text{manželia}(x, \text{Klára})) \to \text{manželia}(x, \text{Etela}))$

(A_{12}) $\neg \forall x(\text{muž}(x) \lor \text{žena}(x))$

(A_{13}) $\neg \exists y\, \text{manželia}(\text{Boris}, y)$

(A_{14}) $\forall x\, \forall y(\text{manželia}(x, y) \to \text{manželia}(y, x))$

Vyskúšajte si.

(A_{15}) $\exists x(\text{žena}(x) \to (\text{žena}(x) \land \text{muž}(x)))$

(A_{16}) $\forall x(\text{manželia}(x, \text{Boris}) \to (\text{žena}(x) \land \text{muž}(x)))$

Cvičenie 8.3. (6.2.2) Nech $\mathcal{L}$ je jazyk relačnej logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Matematika}\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{depresivny}^1, \text{lenivy}^1, \text{sikovny}^1, \text{student}^1, \text{uspesny}^1, \text{maRad}^2\}$.

Zostrojte štruktúru $\mathcal{M}$ pre jazyk $\mathcal{L}$ tak, aby bola modelom teórie tvorenej všetkými nasledujúcimi formulami.

Každú formulu preložte do čo najprirodzenejšieho slovenského tvrdenia.

(A_1) $\forall x(\text{student}(x) \to (\text{sikovny}(x) \lor \text{lenivy}(x)))$

(A_2) $\forall x(\text{sikovny}(x) \to \neg\text{lenivy}(x))$

(A_3) $(\exists x(\text{student}(x) \land \text{lenivy}(x)) \land \exists x(\text{student}(x) \land \neg\text{lenivy}(x)))$

(A_4) $\forall x(\text{student}(x) \to (\text{sikovny}(x) \to \text{maRad}(x, \text{Matematika})))$

(A_5) $\forall x(\text{maRad}(x, \text{Matematika}) \to \text{uspesny}(x))$

(A_6) $(\neg\forall x\,\neg\text{sikovny}(x) \to \neg\exists x(\neg\text{depresivny}(x) \land \text{uspesny}(x)))$

(A_7) $\neg\forall x(\neg\text{uspesny}(x) \to \neg\text{depresivny}(x))$

Hodnotená časť

Riešenie **odovzdajte** najneskôr v pondelok **25. apríla 2022 o 9:00** cez odovzdávací formulár pre tu08[3].

Odovzdávajte:

- **Jeden dokument vo formáte PDF** obsahujúci text **celého riešenia aj matematický zápis štruktúry/štruktúr**. Riešenie musí byť **čitateľné** a mať primerane **malý** rozsah.
- **Export(y) z prieskumníka štruktúr**[2] — povinne, ak ho pri riešení použijete.
- **Export z editora tabiel**[4] — povinne, ak ho pri riešení použijete.

Na riešenie sa vzťahujú všeobecné **pravidlá**[5]. Riešenia odovzdané po termíne sa považujú za opravy neodovzdaných riešení s príslušnými dôsledkami podľa pravidiel.

[3] https://forms.gle/rEje9BrWJzs9rqsp7
[4] https://fmfi-uk-1-ain-412.github.io/tableauEditor/
[5] https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics_4/sk#pravidla-uloh

Úloha 8.4. (6.2.7) Sformalizujte čo najvernejšie nasledujúce tvrdenia ako ucelenú teóriu T vo vhodnom jazyku $\mathcal{L}$ relačnej logiky prvého rádu:

1. Vegán konzumuje iba rastlinné produkty.
2. Kto jazdí na starom bicykli, je hipster.
3. Kto nosí bradu a falošné okuliare, je hipster.

4. Každý vegán má aspoň jedného kamaráta, ktorý konzumuje mäso.
5. Žiadne mäso nie je rastlinný produkt.
6. Každý hipster má za kamarátov len hipsterských vegánov.
7. Každý hipster, ktorý má záhradu, v nej chová kozu.
8. Je taká koza, ktorá má za kamarátov všetkých hipsterov.
9. Žiadny vegán nikde nechová žiadnu kozu, ktorá konzumuje mäso.
10. Kamarátstvo nie je vždy vzájomné.
11. Niekto jazdí na aspoň dvoch bicykloch, z ktorých práve jeden je starý.

Pred uvedením formalizácie zadefinujte použitý jazyk $\mathcal{L}$ a vysvetlite význam jeho symbolov.

Následne:

a) Zostrojte štruktúru $\mathcal{M}_1$ pre $\mathcal{L}$, ktorá bude modelom vašej teórie T.
b) Je za daných okolností *možné*, aby vôbec hipster mal kamaráta? Ak áno, doložte to vhodnou štruktúrou $\mathcal{M}_2$. Ak nie, dokážte, že taká štruktúra $\mathcal{M}_2$ neexistuje.

Pomôcka. V jazyku $\mathcal{L}$ nepotrebujete konštanty, vo výrokoch sa nevyskytujú vlastné mená.

Úloha 8.5. (6.4.6) Rozhodnite, či z teórie $T = \{A_1, \dots, A_4\}$, kde

(A_1) $\forall x(\, \exists y\, \mathsf{vynika}(x, y) \to ((\mathsf{vela\_studuje}(x) \lor \mathsf{sikovny}(x)) \lor \mathsf{stastlivec}(x))\,)$

(A_2) $\forall x\, \exists y(\mathsf{ziska\_znamku}(x, \mathsf{A}) \to \mathsf{vynika}(x, y))$

(A_3) $\forall x(\mathsf{studuje}(x, \mathsf{AIN}) \to \neg\mathsf{stastlivec}(x))$

(A_4) $\forall x(\mathsf{pije\_pivo}(x) \to \neg\mathsf{vela\_studuje}(x))$

vyplýva formula:

$$(X)\ \ (\ \forall x(\, \mathsf{studuje}(x, \mathsf{AIN}) \to \mathsf{ziska\_znamku}(x, \mathsf{A})\,) \to \\ \forall x(\, (\mathsf{studuje}(x, \mathsf{AIN}) \land \mathsf{pije\_pivo}(x)) \to \mathsf{sikovny}(x)\,)\,)$$

Vyplývanie dokážte tablom. Nevyplývanie nájdením štruktúry.

Pomôcka. V prípade dokazovania vyplývania si najprv premyslite, prečo formula vyplýva, a následne tablom sledujte svoju úvahu. Pravidlá pre kvantifikátory používajte, iba keď sú naozaj potrebné. Čo najviac využite už známe výrokovologické korektné pravidlá (MP, MT, DS, NCS).

V editore tabiel vyberte sadu pravidiel *Basic FOL*.

Tablo by nemalo mať viac ako 35 uzlov. Za každý uzol navyše stratíte 0,05 bodu.