Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej informatiky

Zbierka úloh z Logiky pre informatikov

Ján Kľuka, Júlia Pukancová,
Martin Homola, Jozef Šiška

Letný semester 2021/2022

Posledná aktualizácia: 14. februára 2022

Obsah

1 Atomické formuly

1.1 Sémantika atomických formúl

1.1.1 Príklad. Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ logiky prvého rádu s množinami symbolov $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{\text{Anna}, \text{Boris}, \text{mama}, \text{oco}\}$ a $\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{\text{dievča}^1, \text{chlapec}^1, \text{sestra}^2, \text{uprednostňuje}^3\}$, pričom zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
dievča(x)	x je žena
chlapec(x)	x je chlapec
sestra(x, y)	x je sestra y
uprednostňuje(x, y, z)	x uprednostňuje y pred z

Preložte nasledujúce atomické formuly do čo najprirodzenejších výrokov v slovenčine:

(A_1) dievča(Anna)

(A_2) chlapec(Boris)

(A_3) sestra(Anna, Boris)

(A_4) uprednostňuje(mama, Anna, Boris)

(A_5) uprednostňuje(Boris, Boris, Anna)

(B_1) dievča(mama)

(B_2) chlapec(oco)

(B_3) uprednostňuje(mama, Boris, Anna)

(B_4) uprednostňuje(oco, Boris, Anna)

Riešenie. Každú atomickú formulu zo zadania preložíme do vety v prirodzenom jazyku.

(A_1) Anna je dievča.

(A_2) Boris je chlapec.

(A_3) Anna je sestra Borisa.

(A_4) Mama uprednostňuje Annu pred Borisom.

(A_5) Boris uprednostňuje samého seba pred Annou.

(B_1) Mama je dievča.

(B_2) Oco je chlapec.

(B_3) Mama uprednostňuje Borisa pred Annou.

(B_4) Oco uprednostňuje Borisa pred Annou.

♮

1.1.2 Príklad. Koľko atomických formúl môžeme zostrojiť v jazyku $\mathcal{L}$ z úlohy 1.1.1?

Riešenie. Počet atomických formúl v jazyku $\mathcal{L}$ závisí od počtu indivíduových konštánt v jazyku $\mathcal{L}$ (teda od kardinality množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$) a od jednotlivých arít jednotlivých predikátov z množiny $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

V jazyku $\mathcal{L}$ máme $|\mathcal{C}_{\mathcal{L}}| = 4$.

Pomocou predikátového symbolu, ktorého arita je 1 teda môžeme vytvoriť v jazyku $\mathcal{L}$ 4 atomické formuly. Kedže unárne predikátové symboly máme v $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ dva (dievča a chlapec), dokopy vytvoríme 8 atomických formúl.

Pomôcka. Vo všeobecnosti platí, že pre ľubovoľný predikátový symbol $p \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ s aritou k a pre $|\mathcal{C}_{\mathcal{L}}| = n$ môžeme v jazyku $\mathcal{L}$ vytvoriť n^k atomických formúl.

Pre binárny predikátový symbol (sestra) vieme vytvoriť 4^2 atomických formúl, teda 16. K tejto možnosti treba prirátať aj rovnostné atomické formuly, ktoré vytvoríme pomocou symbolu rovnosti $\doteq$. Tento symbol je tiež binárny, a teda formúl bude opäť 16.

Analogicky pre ternárny predikátový symbol (uprednostňuje) vytvoríme $4^3 = 64$ atomických formúl.

Celkovo teda v jazyku $\mathcal{L}$ môžeme zostrojiť $8 + 16 + 16 + 64 = 104$ atomických formúl. ♮

1.1.3 Príklad. Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ a atomické formuly z úlohy 1.1.1. Rozhodnite, ktoré z formúl $A_1, \ldots, A_5, B_1, \ldots, B_4$ sú pravdivé v štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$\begin{aligned}
D &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \\
i(\text{Anna}) &= 1, \quad i(\text{Boris}) = 2, \quad i(\text{mama}) = 3, \quad i(\text{oco}) = 4, \\
i(\text{dievča}) &= \{1, 5\}, \\
i(\text{chlapec}) &= \{2, 4, 5\}, \\
i(\text{sestra}) &= \{(3, 4), (1, 2)\}, \\
i(\text{uprednostňuje}) &= \{(3, 1, 2), (3, 2, 1), (5, 4, 1), (5, 3, 5)\}.
\end{aligned}$$

Riešenie.

(A_1) dievča(Anna) je pravdivé v $\mathcal{M}$, skrátene $\mathcal{M} \models$ dievča(Anna), pretože $i(\text{Anna}) = 1 \in \{1, 5\} = i(\text{dievča})$.

(A_2) $\mathcal{M} \models$ chlapec(Boris), pretože $i(\text{Boris}) = 2 \in i(\text{chlapec})$.

(A_3) $\mathcal{M} \models$ sestra(Anna, Boris), pretože $(i(\text{Anna}), i(\text{Boris})) = (1, 2) \in i(\text{sestra})$.

(A_4) $\mathcal{M} \models$ uprednostňuje(mama, Anna, Boris), pretože $(i(\text{mama}), i(\text{Anna}), i(\text{Boris})) \in i(\text{uprednostňuje})$.

(A_5) uprednostňuje(Boris, Boris, Anna) nie je pravdivé v $\mathcal{M}$, skrátene $\mathcal{M} \not\models$ uprednostňuje(Boris, Boris, Anna), pretože $(i(\text{Boris}), i(\text{Boris}), i(\text{Anna})) \notin i(\text{uprednostňuje})$.

(B_1) $\mathcal{M} \models$ chlapec(oco), pretože $i(\text{oco}) \in i(\text{chlapec})$.

(B_2) $\mathcal{M} \models$ upprednostňuje(mama, Boris, Anna),
pretože $(i(\text{mama}), i(\text{Boris}), i(\text{Anna})) \in i(\text{upprednostňuje})$.

(B_3) $\mathcal{M} \not\models$ upprednostňuje(oco, Boris, Anna),
pretože $(i(\text{oco}), i(\text{Boris}), i(\text{Anna})) \notin i(\text{upprednostňuje})$. ♮

1.1.4 Príklad. Uvažujme opäť jazyk $\mathcal{L}$ a atomické formuly z úlohy 1.1.1. Zostrojte štruktúry $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ a $\mathcal{M}_3$ pre jazyk $\mathcal{L}$ tak, aby každá z nich *súčasne* bola modelom všetkých formúl $A_1, \dots, A_5$, ale nebola modelom žiadnej z formúl $B_1, \dots, B_4$ a aby *zároveň*:

a) doména štruktúry $\mathcal{M}_1$ mala aspoň 5 prvkov;
b) doména štruktúry $\mathcal{M}_2$ mala najviac 3 prvky;
c) doména štruktúry $\mathcal{M}_3$ mala najviac 1 prvok.

Riešenie.

a) Štruktúra $\mathcal{M}_1$ s aspoň 5 prvkami v doméne:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 &= (\{a, b, c, d, m, o\}, i_1) \\
i_1(\text{Anna}) &= a, \quad i_1(\text{Boris}) = b, \quad i_1(\text{mama}) = m, \quad i_1(\text{oco}) = o, \\
i_1(\text{dievča}) &= \{a\}, \\
i_1(\text{chlapec}) &= \{b\}, \\
i_1(\text{sestra}) &= \{(a, b), (c, d)\}, \\
i_1(\text{upprednostňuje}) &= \{(m, a, b), (o, a, b), (b, b, a)\}.
\end{aligned}$$

b) Štruktúra $\mathcal{M}_2$ s najviac 3 prvkami v doméne:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_2 &= (\{a, b, c\}, i_2) \\
i_2(\text{Anna}) &= a, \quad i_2(\text{Boris}) = b, \quad i_2(\text{mama}) = c, \quad i_2(\text{oco}) = c, \\
i_2(\text{dievča}) &= \{a\}, \\
i_2(\text{chlapec}) &= \{b\}, \\
i_2(\text{sestra}) &= \{(a, b), (c, c)\}, \\
i_2(\text{upprednostňuje}) &= \{(c, a, b), (b, b, a)\}.
\end{aligned}$$

c) Nie je možné zostrojiť $\mathcal{M}_3$ tak, aby mala najviac 1 prvok a súčasne bola modelom všetkých formúl $A_1, \dots, A_5$, ale nebola modelom žiadnej z formúl $B_1, \dots, B_4$.
Doména štruktúry nemôže byť prázdna, preto $\mathcal{M}_3$ by mala mať práve jeden prvok, teda $\mathcal{M}_3 = (\{a\}, i_3)$ pre nejaký prvok a.
Problém nastáva už pri A_1 a B_1. Keďže v doméne $\mathcal{M}_3$ je jediný prvok, musia ho pomenúvať všetky indivíduové konštanty, teda $i_3(\text{Anna}) = a$, ale aj $i_3(\text{mama}) = a$. Aby bola A_1 pravdivá v $\mathcal{M}_3$, potom musí byť $a \in i_3(\text{dievča})$, teda $i_3(\text{dievča})$ musí byť $\{a\}$. Zároveň má byť B_1 nepravdivá, teda $a \notin i_3(\text{dievča})$, čo nie je možné. ♮

1.1.5 Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ logiky prvého rádu s množinami symbolov $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{$Alex, Beáta, Cyril, Dana, Edo, Gabika, oco$\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{$žena^1, rodič^2, dieťa^3, starší$^2\}$, pričom zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
žena(x)	x je žena
rodič(x, y)	x je rodičom y
dieťa(u, x, y)	u je dieťaťom matky x a otca y
starší(x, y)	x je starší ako y

Preložte nasledujúce atomické formuly do čo najprirodzenejších výrokov v slovenčine:

(A_1) žena(Beáta)

(A_2) dieťa(Cyril, Gabika, Edo)

(A_3) starší(Dana, Cyril)

(A_4) žena(Dana)

(A_5) rodič(Dana, Alex)

(A_6) rodič(Dana, Beáta)

(A_7) dieťa(Alex, Dana, Cyril)

(B_1) rodič(Edo, Edo)

(B_2) starší(Beáta, Cyril)

(B_3) Cyril $\doteq$ oco

(B_4) žena(Alex)

(B_5) dieťa(Beáta, Gabika, oco)

(B_6) starší(Gabika, Cyril)

1.1.6 Koľko atomických formúl môžeme zostrojiť v jazyku $\mathcal{L}$ z úlohy 1.1.5?

1.1.7 Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ a atomické formuly z úlohy 1.1.5. Rozhodnite, ktoré z formúl $A_1, \ldots, A_7, B_1, \ldots, B_6$ sú pravdivé v štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$
\begin{aligned}
D &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \\
i(\text{Alex}) &= 1, \quad i(\text{Beáta}) = 2, \quad i(\text{Cyril}) = 3, \quad i(\text{Dana}) = 4, \\
i(\text{Edo}) &= 9, \quad i(\text{Gabika}) = 7, \quad i(\text{oco}) = 3, \\
i(\text{žena}) &= \{1, 2, 3, 8\}, \\
i(\text{rodič}) &= \{(4, 1), (9, 9), (2, 3), (3, 4), (8, 7)\}, \\
i(\text{dieťa}) &= \{(3, 7, 9), (2, 7, 3), (8, 9, 1)\}, \\
i(\text{starší}) &= \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 7), (3, 4), (7, 3), (8, 7)\}.
\end{aligned}
$$

Všimnite si, že hoci každá indivíduová konštanta musí byť interpretovaná ako niektorý objekt domény (teda pomenúvať ho), nie všetky objekty musia byť pomenované a viacero indivíduových konštánt môže pomenúvať ten istý objekt.

💡 Lepšiu predstavu o štruktúre často získate, keď si ju znázorníte ako graf, v ktorom sú uzlami prvky domény. Pomôcť vám pritom môže prieskumník štruktúr.

1.1.8 Uvažujme opäť jazyk $\mathcal{L}$ a atomické formuly z úlohy 1.1.5. Zostrojte štruktúry $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ a $\mathcal{M}_3$ pre jazyk $\mathcal{L}$ tak, aby každá z nich bola modelom všetkých formúl A_1, $\ldots$, A_7, ale *súčasne* nebola modelom žiadnej z formúl $B_1, \ldots, B_6$ a aby *zároveň*:

a) doména štruktúry $\mathcal{M}_1$ mala aspoň 9 prvkov;

b) doména štruktúry $\mathcal{M}_2$ mala najviac 5 prvkov;

c) doména štruktúry $\mathcal{M}_3$ mala najviac 2 prvky.

Ak doména s požadovanou kardinalitou neexistuje, detailne zdôvodnite, prečo to tak je, na základe definície štruktúry a pravdivosti atómov v nej.

1.2 Formalizácia do jazyka atomických formúl

1.2.1 Príklad. Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom* jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

(A_1) Jozef je profesor.

(A_2) Jozef a jeho kolegyňa profesorka obedujú.

(A_3) Jozef je žemľovku, zatiaľ čo kolegyňa má na obed rezeň.

(A_4) Márii, ako sa Jozefova kolegyňa volá, obed chutí.

(A_5) Aj Jozefovi jeho obed chutí, má žemľovku rád.

(A_6) Aj pani upratovačka je kolegyňa Jozefa a Márie.

(A_7) Pani upratovačka má menší plat ako Mária, ale väčší ako Jozef.

(A_8) Jozef učí predmet *Dejiny antického Ríma* vo veľkej poslucharni P42.

(A_9) Tento predmet (vždy) niekto navštevuje.

(A_{10}) Chodí naň aj pani upratovačka.

Riešenie. Postupne sformalizujeme atomické výroky a budeme pritom dbať na to, aby sme volili vhodný spoločný jazyk a zbytočne ho nerozširovali. Tvrdenie (A_1) je jednoduché: keďže Jozef je jednoznačne konkrétnou osobou z domény, ktorú popisuje úloha, zvolíme si pre jeho reprezentáciu indivíduovú konštantu Jozef. Ďalej keďže *byť profesorom* je Jozefova vlastnosť, zvolíme si pre ňu unárny predikátový symbol profesor[1]. Samotný výrok môžeme teraz vyjadriť atomickou formulou:

(A_1) profesor(Jozef)

Pozrime sa na dve alternatívne riešenia, ktoré ale nie sú správne. Prvým je formula je(Jozef, profesor). Čo by v tomto prípade znamenala indivíduová konštanta profesor? Zmyslom slova *profesor* vo vete (A_1) nie je konkrétny profesor, ale trieda/množina/kategória/súbor všetkých profesorov. Preto je správne voliť predikátový symbol.

Z podobných dôvodov je nesprávna aj formula Jozef $\doteq$ profesor. Keby sme profesorov zapisovali týmto spôsobom, v skutočnosti by boli všetci profesori stotožnení do jedného objektu domény, čo v tomto prípade celkom určite nechceme.

(Zatiaľ) nevieme meno Jozefovej kolegyne z tvrdenia (A_2), ale určite je to tiež konkrétna osoba. Vytvoríme si preto novú indivíduovú konštantu o_1 aby sme mohli všetky výroky o nej zapísať. Tvrdenie (A_2) sa v skutočnosti skladá z viacerých atomických výrokov. V prvej časti sa dozvieme, že o_1 je profesorka, tu použijeme opäť unárny predikátový symbol $\mathrm{profesor}^1$. Tiež sa dozvieme, že ide o Jozefovu kolegyňu. Keďže *byť kolegom (alebo kolegyňou)* je vzťah dvoch ľudí (elementov z domény), vytvoríme si pre jeho reprezentáciu binárny predikátový symbol kolega^2. V ďalšej časti tvrdenia sa dozvieme, že obaja obedujú — toto korešponduje ďalším dvom atomickým výrokom, ktoré vieme ľahko zapísať napríklad pomocou unárneho predikátového symbolu $\mathrm{obeduje}^1$:

$(A_{2.1})$ profesor(o_1)

$(A_{2.2})$ kolega(Jozef, o_1)

$(A_{2.3})$ obeduje(Jozef)

$(A_{2.4})$ obeduje(o_1)

Všimnime si, že v prípade Jozefovej kolegyne o_1 sme nevytvorili nový predikátový symbol $\mathrm{profesorka}^1$, ale rovnako ako v prípade Jozefa sme použili symbol $\mathrm{profesor}^1$. Hoci v slovenčine na to máme dve samostatné slová, ich význam pre školskú doménu je rovnaký — je to symbol pre skupinu všetkých elementov domény, ktoré predstavujú profesorov. Ak by sme na napr. pýtali na všetkých profesorov, iste by sme zahrnuli aj o_1. Podobne aj v prípade vzťahu *byť kolegom alebo kolegyňou* budeme používať vždy len jeden predikátový symbol kolega^2 a nebudeme vytvárať symbol $\mathrm{kolegyňa}^2$.

Podobne ako v prípade Jozefovej kolegyne profesorky, aj v nasledujúcom tvrdení (A_3) sa stretneme s konkrétnymi objektmi, ktoré sú pomenované len menami všeobecných „kategórií“, do ktorých patria. Vytvoríme si preto dva nové indivíduové konštanty p_1 a p_2 pre konkrétne porcie jedla, pričom to, že p_1 je (jedlo z kategórie) žemľovka a p_2 je (jedlo z kategórie) rezeň, vyjadríme vhodne zvolenými unárnymi predikátovými symbolmi:

$(A_{3.1})$ je(Jozef, p_1)

($A_{3.2}$) je(o_1, p_2)

($A_{3.3}$) žemľovka(p_1)

($A_{3.4}$) rezeň(p_2)

Pre vyjadrenie vzťahu *konzumovať niečo* sme použili predikátový je^2, hoci v prirodzenom jazyku to bolo vyjadrené rôznymi spôsobmi — ich význam v tomto kontexte je však rovnaký. Okrem toho to, že obaja jedia obed, sme už vyjadrili samostatným tvrdením s predikátovým symbolom obeduje^1.

Šikovný a krátky predikátový symbol je^2 tu môžeme použiť vo význame *konzumuje* aj preto, že v tvrdení (A_1), kde sme zvažovali jeho použitie *v inom význame*, sme ho nakoniec nepoužili. Použitiu jedného symbolu v dvoch rôznych zamýšľaných významoch sa musíme vyhnúť.

Povedzme si ešte, prečo jednoduchšie riešenie je(Jozef, žemľovka) (a analogicky pre rezeň) nie je správne. Striktne vzaté, konštanty pre konkrétne porcie (či iné objekty) si môžeme nazvať, ako chceme — v tom problém nie je. Toto riešenie však nevyjadruje, že konštanta žemľovka je jedlo typu žemľovka, pretože to musíme vyjadriť ako vlastnosť pomocou unárneho predikátového symbolu. Riešenie je(Jozef, žemľovka) a žemľovka(žemľovka) zasa nie je správne, pretože množiny predikátových symbolov a indivíduových konštánt musia byť disjunktné. Pre jedno z použití musíme preto zvoliť iný symbol.

Tvrdenie (A_4), že Márii obed chutí, sformalizujeme jednoducho atomickou formulou s predikátovým symbolom chutí^2. Musíme sa však vysporiadať s novou informáciou, že Mária je vlastne už vyššie spomínaná Jozefova kolegyňa. Jedno z korektných riešení využije rovnosť:

($A_{4.1}$) chutí(Mária, p_2)

($A_{4.2}$) Mária $\doteq$ o_1

Iným prípustným riešením je vybrať si len jednu z dvoch indivíduových konštánt o_1, Mária a používať ju konzistentne všade. V prípade, že si ale vyberieme a budeme všade používať o_1, stratíme informáciu, že o_1 je osoba s menom Mária.

Ďalšia možnosť je to, že sa niekto nejako volá vyjariť binárnym predikátom volá_sa^2 a nie pomocou rovnosti. Potom by však analogicky konzistentne bolo potrebné postupovať aj v prípade Jozefa a ďalších osôb, či objektov, ktoré majú meno.

Prvú časť tvrdenia (A_5) teraz poľahky sformalizujeme analogicky, zaraziť nás však môže jeho druhá časť. To, že Jozefovi chutí konkrétna porcia žemľovky a to, že má rád žemľovku vo všeobecnosti, sú dve rôzne informácie, preto je potrebné každú vyjadriť nezávislým predikátovým symbolom. Keďže však žemľovka^1 je predikátový symbol, nemôže nikdy stáť zároveň ako argument predikátu. Nevieme teda atomickou formulou binárnym vzťahom medzi dvoma objektmi vyjadriť to, že Jozefovi chutí žemľovka vo všeobecnosti, pretože pre žemľovku vo všeobecnosti nemáme indivíduovú konštantu. Vieme si však vytvoriť predikátový symbol, ktorého zamýšľaným významom budú tie elementy z domény, ktoré majú rady žemľovku:

$(A_{5.1})$ chutí(Jozef, p_1)

$(A_{5.2})$ má_rád_žemľovku(Jozef)

Nasledujúce tvrdenie (A_6) poľahky sformalizujeme v súlade s tým, čo sme už videli vyššie:

$(A_{6.1})$ upratovačka(o_2)

$(A_{6.2})$ kolega(Jozef, o_2)

$(A_{6.3})$ kolega(Mária, o_2)

Všimnime si, že tentoraz sme zvolili ženský rod pre predikátový symbol upratovačka^1. Nevadí to, pokiaľ ho konzistentne použijeme aj v prípade mužov-upratovačov. Dôležité je len to aby, sme pre tú istú vec konzistentne stále používali ten istý predikátový symbol.

Tvrdenie (A_7) zodpovedá dvom atomickým formulám:

$(A_{7.1})$ má_väčší_plat_ako(Mária, o_2)

$(A_{7.2})$ má_väčší_plat_ako(o_2, Jozef)

Všimnime si, že sme zaviedli len jeden predikátový symbol má_väčší_plat_ako^2, ale úmyselne sme sa vyhli zavedeniu analogického symbolu má_menší_plat_ako^2. Ide tu totiž o dva vzťahy, ktoré sú navzájom inverzné. Takéto dva predikátové symboly by však boli od seba nezávislé, teda ak platí má_väčší_plat_ako(Mária, o_2), nijako z toho nevyplýva, že platí aj má_menší_plat_ako(o_2, Mária). Toto ale zrejme nie je zamýšľané. Jazyk atomických formúl nemá dostatočnú silu na to, aby sme mohli dva navzájom inverzné predikáty nejako vyjadriť. Musíme si preto vystačiť s jedným predikátom a používať ho vždy správnym smerom.

Tvrdenie (A_8) by nám už teraz nemalo robiť žiadne problémy. Musíme len správne rozpoznať všetky konkrétne objekty, o ktorých tvrdenie hovorí. Vyjde nám pri tom, že učí^3 bude ternárny predikátový symbol. Pri dvoch nových indivíduových konštantách, ktoré pre tieto objekty zavedieme, z tvrdenia tiež vyčítame, do akej „skupiny“ patria, čo vyjadríme samostatnými atomickými formulami:

$(A_{8.1})$ učí(Jozef, DAR, P42)

$(A_{8.2})$ predmet(DAR)

$(A_{8.3})$ poslucháreň(P42)

$(A_{8.4})$ veľký(P42)

Keďže *byť veľký* a *byť poslucháreň* sú dve samostatné, nezávislé vlastnosti, použijeme dva samostatné predikátové symboly veľký^1 a poslucháreň^1.

Na záver sa zamerajme na posledné dve tvrdenia (A_9) a (A_{10}). To, že *Dejiny antického Ríma* niekto (teda aspoň jeden študent) navštevuje, vieme pomocou atomickej formuly vyjadriť tak, že to vyjadríme pre nejakú konštantu. Mohli by sme si zvoliť úplne novú (napr. študent o_3), ale keďže z tvrdenia (A_{10}) vieme, že tam chodí (teda ho navštevuje) aj pani upratovačka, pre ktorú už konštantný symbol máme, môžeme obe tieto tvrdenia vyjadriť jednou atomickou formulou:

(A_9) navštevuje(o_2, DAR)

Použitie indivíduovej konštanty, aby sme vyjadrili, že existuje aspoň jeden objekt, pre ktorý niečo platí, je tak trochu trik, ktorý ale môžeme využiť. V tomto prípade nám ani nič iné neostáva, keďže máme len atomické formuly. Neskôr sa naučíme aj iný, krajší spôsob.

Uvedieme ešte množiny indivíduových konštánt a predikátových symbolov, ktoré sme použili:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\mathcal{L}} &= \{\text{DAR}, \text{Jozef}, \text{Mária}, \text{o}_1, \text{o}_2, \text{p}_1, \text{p}_2, \text{P42}\},\\ \mathcal{P}_{\mathcal{L}} &= \{\text{chutí}^2, \text{je}^2, \text{kolega}^2, \text{má\_rád\_žemľovku}^1, \text{má\_väčší\_plat\_ako}^2, \text{navštevuje}^2, \text{obeduje}^1,\\ &\qquad \text{poslucháreň}^1, \text{predmet}^1, \text{profesor}^1, \text{rezeň}^1, \text{učí}^3, \text{upratovačka}^1, \text{veľký}^3, \text{žemľovka}^1\}.\end{aligned}$$

A vysvetlime ich význam:

Symbol	Význam
DAR	predmet *Dejiny antického Ríma*
Jozef, Mária, o_1, o_2	konkrétne osoby
p_1, p_2	konkrétne porcie jedla
P42	poslucháreň P42
chutí(x, y)	osobe x chutí jedlo y
je(x, y)	x konzumuje y
kolega(x, y)	x je kolegom y
má_rád_žemľovku(x)	x má rád žemľovku
má_väčší_plat_ako(x, y)	x má väčší plat ako y
navštevuje(x, y)	osoba x navštevuje predmet y
obeduje(x)	x konzumuje obed
poslucháreň(x)	x je poslucháreň
predmet(x)	x je predmet (v zmysle *kurz*)
profesor(x)	x je profesor(ka)
rezeň(x)	x je rezeň
učí(x, y, z)	x učí predmet y v miestnosti z
upratovačka(x)	x je upratovačka (alebo upratovač)
veľký(x)	x je veľké (v zmysle *rozmerné*)
žemľovka(x)	x je žemľovka

⚠ Ako je vidieť z riešenia, symboly jazyka pridávame priebežne, podľa potreby. Vo vypracovaných zadaniach však býva zvykom uviesť ich na začiatku spolu s vysvetlením ich významu. ♮

1.2.2 Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom* jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

(A_1) Peter je muž.

(A_2) Peter je študent.

(A_3) Lucia je žena a študentka.

(A_4) Lucia je staršia ako Peter.

(A_5) Matematiku učí Eugen.

(A_6) Peter a Lucia sú od neho mladší.

(A_7) Peter dostal z Matematiky od Eugena známku A.

(A_8) Eugen má rád Luciu.

(A_9) Aj keď má Lucia z Matematiky (od neho) známku „dostatočný“.

(A_{10}) Známka „dostatočný“ je len iný názov pre E-čko, a podobne „výborný“ značí to isté ako A-čko.

(A_{11}) Eugen sa má rád.

(A_{12}) Je Učiteľom roka 2020.

(A_{13}) Matematika je povinný predmet.

(A_{14}) Všetci vyššie menovaní študenti majú radi Telocvik.

(A_{15}) Okrem Eugena (a ďalších učiteľov) v škole pracuje aj školník, upratovačka a riaditeľ.

(A_{16}) Peter má rád Matematiku.

(A_{17}) Lucia má rada Petra.

(A_{18}) Telocvik je voliteľný predmet.

⚠ Na vyjadrenie nezávislých vlastností (napr. byť študentom/študentkou, byť ženou, byť mužom) použite samostatné predikátové symboly a podľa potreby jeden výrok sformalizujte viacerými atómami.

Nezavádzajte zbytočne nové predikátové symboly, ak sa význam výroku dá vyjadriť už použitými.

1.2.3

a) Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom*, vhodne zvolenom jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

Snažte sa o to, aby počet predikátových symbolov bol čo najmenší. Zároveň ale nespájajte vzájomne nezávislé vlastnosti a vzťahy do jedného predikátového symbolu.

(A_1) Janko je chlapec.

(A_2) Marienka je jeho najlepšia kamarátka.

(A_3) Marienka je dievča – hoci keď (u nich doma) hovoria o Máriovi, ide v skutočnosti o Marienku. (Poznáte tieto prezývky, vlastne sa už nikto nepamätá, ako to vzniklo.)

(A_4) V Čiernom lese stojí chalúpka z perníku.

(A_5) Táto chalúpka je obrovská, niektorí jej hovoria aj Perníková veža.

(A_6) V Perníkovej veži býva zlá a škaredá čarodejnica.

(A_7) Čarodejnica má bradavicu na nose.

(A_8) Janko sa bojí čarodejnice.

(B_1) Marienka je chlapec.

(B_2) Marienka sa bojí čarodejnice.

(B_3) Janko je Marienkin najlepší kamarát.

(B_4) Čarodejnica Janka zjedla.

(C_1) Mário je chlapec.

b) Vytvorte štruktúru $\mathcal{M}$ pre jazyk $\mathcal{L}$ tak, aby všetky formuly, ktorými ste sformalizovali výroky zo skupiny A, boli v $\mathcal{M}$ pravdivé, ale *súčasne* boli všetky formuly, ktorými ste sformalizovali výroky zo skupiny B, v $\mathcal{M}$ nepravdivé.

c) Je možné, aby v nejakej štruktúre boli súčasne všetky formuly podľa výrokov zo skupiny A pravdivé, všetky formuly podľa výrokov z B nepravdivé a formula pre výrok (C_1) pravdivá?

Svoju odpoveď detailne zdôvodnite na základe definície štruktúry a pravdivosti atómov v nej.

1.2.4 (pre odvážnejších) Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom* jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov. Snažte sa o to aby počet predikátových symbolov bol čo najmenší, ale nespájajte nezávislé vlastnosti a vzťahy do jedného predikátu.

Následne vytvorte štruktúru tak, aby formuly, ktorými ste sformalizovali výroky zo skupiny A, boli všetky pravdivé a formuly, ktoré formalizujú výroky skupiny B, všetky nepravdivé.

(A_1) Janka je dievča a Jurko je chlapec.

(A_2) Chlapci a dievčatá sú deti.

(A_3) Ňufko je Jankine zvieratko.

(A_4) Je to myš.

(A_5) Ňufko je veľký. Je väčší než Jurkov škrečok Chrumko.

(A_6) Jurko si Chrumka kúpil sám.

(A_7) Jurko v noci chodí kŕmiť potkana Smraďocha.

(A_8) Smraďoch však v skutočnosti je Ňufko, ktorý v tme vyzerá ako potkan.

(A_9) Všetky deti majú rady zvieratká, ktorá vlastnia, a tiež tie, ktoré kŕmia.

(B_1) Janka sa Smraďocha bojí.

(B_2) Jurko má rád potkany, nebojí sa ich.

(B_3) Ňufko je menší ako Chrumko.

(B_4) Janka má rada Jurka.

(B_5) Ňufko a Chrumko sú deti.

(B_6) Ňufka a Chrumka deťom kúpila ich mama.

Literatúra