
Matematika 4 — Logika pre informatikov

3. sada teoretických úloh

Táto sada úloh obsahuje **hodnotenú časť**. Jej riešenie odovzdajte najneskôr v **pondelok 14. marca 2022 o 9:00**.

Číslo úloh v zátvorkách odkazujú do zbierky¹, kde nájdete riešené príklady a ďalšie úlohy na precvičovanie.

¹ <https://fmfi-uk-1-ain-412.github.io/lpi/teoreticke-ain/zbierka.pdf>

Cvičenie 3.1. (3.1.1, 3.1.2, 3.1.3; Def. 3.5, tvrdenia 3.6 a 3.8)

- a) Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Jack, Corona}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{pivo}^1, \text{pije}^2\}$. Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk \mathcal{L} , kde:

$$\begin{aligned} D &= \{s1, s2, s3, p1, p2\} \\ i(\text{Jack}) &= s3, \\ i(\text{Corona}) &= p1, \\ i(\text{pivo}) &= \{p1, p2\}, \\ i(\text{pije}) &= \{(s1, p1), (s2, p1), (s2, p2)\} \end{aligned}$$

Zostrojte výrokovologické ohodnotenie v pre \mathcal{L} zhodné so štruktúrou \mathcal{M} .

- b) Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Andy, Woody}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{hračka}^1, \text{chlapec}^1, \text{hrá_sa}^2\}$. Nech

$$\begin{aligned} v &= \{\text{hračka}(\text{Woody}) \mapsto t, & \text{hračka}(\text{Andy}) \mapsto f, \\ & \text{chlapec}(\text{Andy}) \mapsto t, & \text{chlapec}(\text{Woody}) \mapsto f, \\ & \text{hrá_sa}(\text{Andy, Woody}) \mapsto t, & \text{hrá_sa}(\text{Woody, Andy}) \mapsto f\} \end{aligned}$$

je čiastočné ohodnotenie predikátových atómov jazyka \mathcal{L} . Zostrojte štruktúru \mathcal{M} zhodnú s v na dom v .

Cvičenie 3.2. (3.2.1, 3.2.2) Majme výrokovologickú teóriu T :


$$T = \left\{ \begin{aligned} &A_1: (\text{tancuje_s}(A, B) \rightarrow (\text{frajer}(A) \vee \text{spieva}(A))), \\ &A_2: (\neg \text{tancuje_s}(A, B) \vee \neg \text{spieva}(A)), \\ &A_3: (\neg \text{spieva}(A) \rightarrow \text{frajer}(A)) \end{aligned} \right\}.$$

O každej z formúl X_1 – X_3 rozhodnite, či a) vyplýva z teórie T , b) je nezávislá od T , alebo c) ani z T nevyplýva, ani od nej nie je nezávislá:

$(X_1) (\text{tancuje}_s(A, B) \rightarrow \text{frajer}(A)),$

$(X_2) \neg \text{spieva}(A),$

$(X_3) (\neg \text{spieva}(A) \wedge \neg \text{frajer}(A)).$

 Aká formula vyplýva z teórie v prípade c)?

Cvičenie 3.3. (3.2.3, 3.2.2) Inšpektor Scotland Yardu Nick Fishtrawn predviedol troch podozrivých z lúpeže klenotov v obchodnom dome Harrods: Daviesa, Milesa a Parkera. Inšpektor vyšetrovaním zistil nasledovné indície:

(A_1) Miles nikdy nepracuje sám, teda lúpil, iba ak sa na lúpeži podieľal aspoň jeden zo zvyšných dvoch podozrivých.

(A_2) Davies vždy pracuje s Parkerom.

(A_3) Parker sa s Milesom neznáša, preto určite nelúpili spolu.


(A_4) Z lúpeže môžu byť vinní len títo traja podozriví a nikto iný.

Sformalizujte zistené skutočnosti ako výrokovologickú teóriu T v jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu s vhodne zvolenými množinami $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

a) Využitím splniteľnosti, vyplývania a nezávislosti rozhodnite, koho z podozrivých môže inšpektor s istotou obviňovať, koho môže bez obáv prepustiť, lebo sa krádeže určite nezúčastnil, a koho musí prepustiť pre nedostatok dôkazov.

b) Aké by boli vaše závery, keby inšpektor zistil aj nasledujúcu skutočnosť?

(A_5) Milesa videli dvaja spoľahliví svedkovia utekať s lupom z obchodného domu, takže je určite vinný.

 **Pomôcka.** Formalizáciu tentoraz obmedzte na skutočnosti, ktoré sú postačujúce k vyriešeniu úlohy (teda sústreďte sa na vinu podozrivých, ak je to postačujúce).

Hodnotená časť

Riešenie hodnotenej časti tejto úlohy **odovzdajte** najneskôr v pondelok **14. marca 2022 o 9:00** cez odovzdávací formulár pre tu03². Riešenia odovzdané po termíne sa považujú za opravy neodovzdaných riešení s príslušnými dôsledkami podľa pravidiel³.

Odozdváajte jeden dokument vo formáte PDF s dodatočnými obmedzeniami uvedenými vo formulári. Dokument musí obsahovať **celé riešenie** v textovej forme. Odozdané riešenia musia byť **čitateľné** a mať primerane **malý** rozsah. Na riešenie sa vzťahujú všeobecné **pravidlá**³.

² <https://forms.gle/zRZNeVKNWt5xYrnU6>

³ https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics_4/sk#pravidla-uloh

Úloha 3.4. (3.2.7, 3.2.2) Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho predikátových symbolov.

- (A₁) Keď Rusko zaútočilo na Ukrajinu, tak porušilo Budapeštianske memorandum alebo Putin klame.
- (A₂) Rusko je agresor, ak porušilo Budapeštianske memorandum a na Ukrajinu zaútočilo.
- (A₃) Rusko neporušilo Budapeštianske memorandum, len ak Putin neklame.
- (A₄) Ak to, že Rusko zaútočilo na Ukrajinu, znamená, že porušilo Budapeštianske memorandum, tak Putin klame.

Pomocou vašej teórie využitím výrokovologickej splniteľnosti, vyplývania a nezávislosti zistíte, ktoré z nasledujúcich výrokov (C₁)–(C₃) sú na základe výrokov (A₁)–(A₄) určite pravdivé, určite nepravdivé, a o ktorých to nemožno rozhodnúť:

- (C₁) Putin klame,
- (C₂) Rusko Budapeštianske memorandum neporušilo,
- (C₃) Rusko je agresor, iba ak zaútočilo na Ukrajinu.

Úloha 3.5. (2.1.5) Zadefinujte funkciu $\text{acnt} : \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathbb{N}$ takú, že $\text{acnt}(A)$ je počet výskytov atómov vo výrokovologickej formule A .

Úloha 3.6. (2.1.6) Dokážte alebo vyvráťte: Pre každú výrokovologickú formulu A platí:

$$\text{acnt}(A) \leq \deg(A) + 1$$

Prémiová úloha 3.7. (1,5 bodu, 2.2.5) Sformulujte základné definície syntaxe (symboly jazyka, atomická formula, formula, podformula) a sémantiky (pravdivosť formuly v štruktúre) pre výrokovú časť logiky prvého rádu s binárnymi spojkami \rightarrow (a nie) a \vee (exkluzívne alebo, XOR). Formuly nebudú obsahovať *žiadne iné spojky* (teda ani negáciu).

Neformálny význam ($A \nrightarrow B$) je „ A a nie je pravda, že B “. Neformálny význam ($A \underline{\vee} B$) je „buď A , alebo B , ale nie obe naraz“.

Zadefinujte štandardné spojky (\neg, \wedge, \vee) ako skratky (teda funkcie nad formulami podobne, ako sme zdefinovali \leftrightarrow v dohode 2.8) tak, aby formuly nimi vytvorené mali štandardný význam. Dokážte, že ho majú.

💡 Účelom tejto úlohy je, aby ste si prečítali a upravili definície 2.4–2.21 z prednášky a pokúsili sa osvojiť si spôsob vyjadrovania, ktorý sa v nich používa. Môže vám pripadať ťažkopádny, je však presný. Ak vám nejaká formulácia pripadá zbytočne komplikovaná, môžete sa ju pokúsiť zjednodušiť, no snažte sa, aby ste nezmenili jej význam.

V definícii pravdivosti formuly v štruktúre vyjadrite význam spojok iba pomocou slovenských spojok *a* a *alebo* a pomocou pravdivosti a nepravdivosti priamych podformúl.