Výrokovologické vyplývanie

3. prednáška · Matematika (4): Logika pre informatikov

Ján Kľuka, Ján Mazák

Letný semester 2021/2022

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej informatiky

Obsah 3. prednášky

- Výrokovologické vyplývanie
  - Výrokovologické ohodnotenia
  - Výrokovologické teórie a modely
  - Vyplývanie, nezávislosť a nesplniteľnosť

Rekapitulácia

Minulý týždeň sme hovorili o tom,

- čo sú výrokovologické spojky,
- ako zodpovedajú slovenským spojkám,
- čo sú symboly jazyka výrokovologickej časti logiky prvého rádu,
- čo sú formuly tohto jazyka,
- kedy sú formuly pravdivé v danej štruktúre.
- čo je výrokovologická teória a jej model.

Výrokovologické vyplývanie

Logické dôsledky

Na 1. prednáške:

- Hovorili sme o tom, že logiku zaujíma,
  čo a prečo sú zákonitosti správneho usudzovania.
- Správne úsudky odvodzujú z predpokladov (teórií) závery,
  ktoré sú ich logickými dôsledkami.
- ***Logickými dôsledkami*** teórie sú tvrdenia,
  ktoré sú pravdivé vo **všetkých modeloch** teórie.

Minulý týždeň sme začali pracovať s **výrokovologickou** časťou logiky prvého rádu.

Už vieme, čo sú v nej teórie a modely.

Čo sú logické dôsledky?

Výrokovologické vyplývanie

Výrokovologické ohodnotenia

Nekonečne veľa štruktúr

Logickými dôsledkami teórie sú tvrdenia,
ktoré sú pravdivé vo všetkých modeloch teórie.

$$\begin{aligned}
T_{\text{party}} = \{&((\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}) \lor \mathtt{príde}(\mathtt{Jim})) \lor \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})),\\
&(\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}) \to \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})),\\
&(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \to \mathtt{príde}(\mathtt{Kim})),\\
&(\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}) \to \mathtt{príde}(\mathtt{Jim}))\}
\end{aligned}$$

Ale štruktúr je nekonečne veľa a ak má teória jeden model,
má aj nekonečne veľa ďalších:

$$\begin{array}{llll}
\mathcal{M}_1 = (\{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{s}\}, i_1) & \mathcal{M}'_1 = (\{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{s}, 0, 1\}, i'_1) & \mathcal{M}''_1 = (\{2, 4, 6\}, i''_1) & \cdots \\
i_1(\mathtt{Kim}) = \mathtt{k} & i'_1(\mathtt{Kim}) = \mathtt{k} & i''_1(\mathtt{Kim}) = 2 & \\
i_1(\mathtt{Jim}) = \mathtt{j} & i'_1(\mathtt{Jim}) = \mathtt{j} & i''_1(\mathtt{Jim}) = 4 & \\
i_1(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s} & i'_1(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s} & i''_1(\mathtt{Sarah}) = 6 & \\
i_1(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{k}, \mathtt{j}\} & i'_1(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{k}, \mathtt{j}, 1\} & i''_1(\mathtt{príde}) = \{2, 4\} &
\end{array}$$

Rozdiely modelov

V čom sa líšia a čo majú spoločné nasledujúce modely T_{party}?

$\mathcal{M}_1 = (\{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{s}, \mathtt{e}, \mathtt{h}\}, i_1)$	$\mathcal{M}_2 = (\{1, 2, 3\}, i_2)$	$\mathcal{M}_3 = (\{\mathtt{kj}, \mathtt{s}\}, i_3)$
$i_1(\mathtt{Kim}) = \mathtt{k}$	$i_2(\mathtt{Kim}) = 1$	$i_3(\mathtt{Kim}) = \mathtt{kj}$
$i_1(\mathtt{Jim}) = \mathtt{j}$	$i_2(\mathtt{Jim}) = 2$	$i_3(\mathtt{Jim}) = \mathtt{kj}$
$i_1(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s}$	$i_2(\mathtt{Sarah}) = 3$	$i_3(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s}$
$i_1(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{e}\}$	$i_2(\mathtt{príde}) = \{1, 2\}$	$i_3(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{kj}\}$

Rozdiely modelov

V čom sa líšia a čo majú spoločné nasledujúce modely T_{party}?

$\mathcal{M}_1 = (\{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{s}, \mathtt{e}, \mathtt{h}\}, i_1)$	$\mathcal{M}_2 = (\{1, 2, 3\}, i_2)$	$\mathcal{M}_3 = (\{\mathtt{kj}, \mathtt{s}\}, i_3)$
$i_1(\mathtt{Kim}) = \mathtt{k}$	$i_2(\mathtt{Kim}) = 1$	$i_3(\mathtt{Kim}) = \mathtt{kj}$
$i_1(\mathtt{Jim}) = \mathtt{j}$	$i_2(\mathtt{Jim}) = 2$	$i_3(\mathtt{Jim}) = \mathtt{kj}$
$i_1(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s}$	$i_2(\mathtt{Sarah}) = 3$	$i_3(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s}$
$i_1(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{e}\}$	$i_2(\mathtt{príde}) = \{1, 2\}$	$i_3(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{kj}\}$

Líšia sa doménami aj v interpretáciách.

Rozdiely modelov

V čom sa líšia a čo majú spoločné nasledujúce modely T_{party}?

$\mathcal{M}_1 = (\{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{s}, \mathtt{e}, \mathtt{h}\}, i_1)$	$\mathcal{M}_2 = (\{1, 2, 3\}, i_2)$	$\mathcal{M}_3 = (\{\mathtt{kj}, \mathtt{s}\}, i_3)$
$i_1(\mathtt{Kim}) = \mathtt{k}$	$i_2(\mathtt{Kim}) = 1$	$i_3(\mathtt{Kim}) = \mathtt{kj}$
$i_1(\mathtt{Jim}) = \mathtt{j}$	$i_2(\mathtt{Jim}) = 2$	$i_3(\mathtt{Jim}) = \mathtt{kj}$
$i_1(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s}$	$i_2(\mathtt{Sarah}) = 3$	$i_3(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s}$
$i_1(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{e}\}$	$i_2(\mathtt{príde}) = \{1, 2\}$	$i_3(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{kj}\}$

Líšia sa doménami aj v interpretáciách.

Líšia sa v pravdivosti rovnostných atómov, napr. $\mathtt{Kim} \doteq \mathtt{Jim}$.

Rozdiely modelov

V čom sa líšia a čo majú spoločné nasledujúce modely T_{party}?

$\mathcal{M}_1 = (\{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{s}, \mathtt{e}, \mathtt{h}\}, i_1)$	$\mathcal{M}_2 = (\{1, 2, 3\}, i_2)$	$\mathcal{M}_3 = (\{\mathtt{kj}, \mathtt{s}\}, i_3)$
$i_1(\mathtt{Kim}) = \mathtt{k}$	$i_2(\mathtt{Kim}) = 1$	$i_3(\mathtt{Kim}) = \mathtt{kj}$
$i_1(\mathtt{Jim}) = \mathtt{j}$	$i_2(\mathtt{Jim}) = 2$	$i_3(\mathtt{Jim}) = \mathtt{kj}$
$i_1(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s}$	$i_2(\mathtt{Sarah}) = 3$	$i_3(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s}$
$i_1(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{e}\}$	$i_2(\mathtt{príde}) = \{1, 2\}$	$i_3(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{kj}\}$

Líšia sa doménami aj v interpretáciách.

Líšia sa v pravdivosti rovnostných atómov, napr. $\mathtt{Kim} \doteq \mathtt{Jim}$.

Zhodujú sa na pravdivosti **všetkých predikátových** atómov $\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})$, $\mathtt{príde}(\mathtt{Jim})$, $\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$.

V T_{party} **na ničom inom nezáleží**.

Ohodnotenie atómov

Z každej zo štruktúr

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{M}_1 = (\{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{s}, \mathtt{e}, \mathtt{h}\}, i_1) & \mathcal{M}_2 = (\{1, 2, 3\}, i_2) & \mathcal{M}_3 = (\{\mathtt{kj}, \mathtt{s}\}, i_3) \\
i_1(\mathtt{Kim}) = \mathtt{k} & i_2(\mathtt{Kim}) = 1 & i_3(\mathtt{Kim}) = \mathtt{kj} \\
i_1(\mathtt{Jim}) = \mathtt{j} & i_2(\mathtt{Jim}) = 2 & i_3(\mathtt{Jim}) = \mathtt{kj} \\
i_1(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s} & i_2(\mathtt{Sarah}) = 3 & i_3(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s} \\
i_1(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{e}\} & i_2(\mathtt{príde}) = \{1, 2\} & i_3(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{kj}\}
\end{array}
$$

môžeme skonštruovať to isté ohodnotenie predikátových atómov:

$$
\begin{array}{ll}
v(\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) = t & \text{lebo } \mathcal{M}_j \models \mathtt{príde}(\mathtt{Kim}), \\
v(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim})) = t & \text{lebo } \mathcal{M}_j \models \mathtt{príde}(\mathtt{Jim}), \\
v(\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})) = f & \text{lebo } \mathcal{M}_j \not\models \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}).
\end{array}
$$

Všetky tieto štruktúry (a nekonečne veľa ďalších) vieme pri vyhodnocovaní formúl jazyka $\mathcal{L}_{\text{party}}$ nahradiť týmto ohodnotením.

Výrokovologické formuly, teórie a ohodnotenia

Definícia 3.1

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.

Množinu všetkých predikátových atómov jazyka $\mathcal{L}$ označujeme $\mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$.

Výrokovologickými formulami jazyka $\mathcal{L}$ nazveme všetky formuly jazyka $\mathcal{L}$, ktoré **neobsahujú symbol rovnosti**. Množinu všetkých výrokovologických formúl jazyka $\mathcal{L}$ označujeme $\mathcal{PE}_{\mathcal{L}}$.

Definícia 3.2

Nech (f, t) je usporiadaná dvojica ***pravdivostných hodnôt***, $f \neq t$, kde f predstavuje ***nepravdu*** a t predstavuje ***pravdu***.
Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.

Výrokovologickým ohodnotením pre $\mathcal{L}$, skrátene ***ohodnotením***, nazveme každé zobrazenie $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \to \{f, t\}$.

Pravdivé formuly v ohodnotení

Ako vyhodnotíme, či je formula pravdivá v nejakom ohodnotení?

Definícia 3.3

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, nech (f, t) sú pravdivostné hodnoty a nech $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \to \{f, t\}$ je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$. Reláciu ***výrokovologická formula** A **je pravdivá v ohodnotení** v* ($v \models_p A$) definujeme **induktívne** pre všetky predikátové atómy a a všetky výrokovologické formuly A, B jazyka $\mathcal{L}$ nasledovne:

- $v \models_p a$ vtt $v(a) = t$,
- $v \models_p \neg A$ vtt $v \not\models_p A$,
- $v \models_p (A \land B)$ vtt $v \models_p A$ a zároveň $v \models_p B$,
- $v \models_p (A \lor B)$ vtt $v \models_p A$ alebo $v \models_p B$,
- $v \models_p (A \to B)$ vtt $v \not\models_p A$ alebo $v \models_p B$,

kde **vtt** skracuje *vtedy a len vtedy* a $v \not\models_p A$ skracuje *A nie je pravdivá vo v*.

Vyhodnotenie formuly v ohodnotení

Príklad 3.4

Vyhodnoťme formulu

$$X = ((\texttt{príde}(\texttt{Jim}) \lor \neg\texttt{príde}(\texttt{Kim})) \to \texttt{príde}(\texttt{Sarah}))$$

vo výrokovologickom ohodnotení

$$v = \{\texttt{príde}(\texttt{Kim}) \mapsto t,\ \texttt{príde}(\texttt{Jim}) \mapsto t,\ \texttt{príde}(\texttt{Sarah}) \mapsto f\}$$

zdola nahor:

	$\texttt{p}(\texttt{Kim})$	$\texttt{p}(\texttt{Jim})$	$\texttt{p}(\texttt{Sarah})$	$\neg\texttt{p}(\texttt{Kim})$	$(\texttt{p}(\texttt{Jim}) \lor \neg\texttt{p}(\texttt{Kim}))$	X
v	$\models_{\texttt{p}}$	$\models_{\texttt{p}}$	$\not\models_{\texttt{p}}$	$\not\models_{\texttt{p}}$	$\models_{\texttt{p}}$	$\not\models_{\texttt{p}}$

$\texttt{príde}$ sme skrátili na $\texttt{p}$.

Ohodnotenie zhodné so štruktúrou

Definícia 3.5

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$, nech (f, t) sú pravdivostné hodnoty, $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \to \{f, t\}$ je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$ a $S \subseteq \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$ je množina predikátových atómov.

Ohodnotenie v a štruktúra $\mathcal{M}$ sú navzájom ***zhodné na S*** vtt pre každý predikátový atóm $A \in S$ platí

$$v(A) = t \text{ vtt } \mathcal{M} \models A.$$

Ohodnotenie v a štruktúra $\mathcal{M}$ sú navzájom ***zhodné*** vtt sú zhodné na $\mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$.

Konštrukcia ohodnotenia zhodného so štruktúrou

Ohodnotenie zhodné so štruktúrou zostrojíme ľahko:

Tvrdenie 3.6

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$ a (f, t) sú pravdivostné hodnoty. Zobrazenie $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \to \{f, t\}$ definované pre každý atóm $A \in \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$ nasledovne:

$$v(A) = \begin{cases} t, & \text{ak } \mathcal{M} \models A, \\ f, & \text{ak } \mathcal{M} \not\models A \end{cases}$$

je výrokovologické ohodnotenie zhodné s $\mathcal{M}$.

Dôkaz.

Pre každý atóm $A \in \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$ musíme dokázať, že $v(A) = t$ vtt $\mathcal{M} \models A$:
($\Leftarrow$) Priamo: Ak $\mathcal{M} \models A$, tak $v(A) = t$ podľa jeho definície v leme.
($\Rightarrow$) Nepriamo: Ak $\mathcal{M} \not\models A$, tak $v(A) = f$ podľa jeho definície v leme, a pretože $t \neq f$, tak $v(A) \neq t$. $\square$

Dokážeme zostrojiť aj štruktúru z ohodnotenia, aby boli zhodné?

Príklad 3.7 (Konštrukcia štruktúry zhodnej s ohodnotením)

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathtt{Kim}, \mathtt{Jim}, \mathtt{Sarah}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathtt{príde}\}$.

Nech v je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$, kde

$$v(\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) = t \quad v(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim})) = t \quad v(\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})) = f$$

Zostrojme štruktúru pre $\mathcal{L}$ zhodnú s v.

Dokážeme zostrojiť aj štruktúru z ohodnotenia, aby boli zhodné?

Príklad 3.7 (Konštrukcia štruktúry zhodnej s ohodnotením)

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathtt{Kim}, \mathtt{Jim}, \mathtt{Sarah}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathtt{príde}\}$.

Nech v je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$, kde

$$v(\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) = t \quad v(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim})) = t \quad v(\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})) = f$$

Zostrojme štruktúru pre $\mathcal{L}$ zhodnú s v.

Možnosťou, ktorú ľahko zovšeobecníme na všetky jazyky, je použiť ako doménu množinu konštánt:

$$\mathcal{M} = (\underbrace{\{\mathtt{Kim}, \mathtt{Jim}, \mathtt{Sarah}\}}_{\mathcal{C}_{\mathcal{L}}}, i)$$

Každú konštantu interpretujeme ňou samou:

$$i(\mathtt{Kim}) = \mathtt{Kim} \qquad i(\mathtt{Jim}) = \mathtt{Jim} \qquad i(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{Sarah}$$

predikát $\mathtt{príde}$ ako množinu tých c, pre ktoré $v(\mathtt{príde}(c)) = t$:

$$i(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{Kim}, \mathtt{Jim}\}$$

Konštrukcia štruktúry zhodnej s ohodnotením

Ako zostrojíme štruktúru zhodnú s ohodnotením pre hocijaký jazyk?

Tvrdenie 3.8

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu,
nech (f, t) sú pravdivostné hodnoty
a $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \to \{f, t\}$ je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$.

Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$ s doménou $D = \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$
a interpretačnou funkciou definovanou pre všetky $n > 0$, všetky konštanty c a všetky predikátové symboly $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ s aritou n takto:

$$i(c) = c$$
$$i(P) = \{ (c_1, \dots, c_n) \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}^n \mid v(P(c_1, \dots, c_n)) = t \}$$

Potom $\mathcal{M}$ je zhodná s v.

Štruktúram zo syntaktického materiálu sa hovorí herbrandovské.

Zhoda na všetkých výrokovologických formulách

Tvrdenie 3.9

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$ a v je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$ zhodné s $\mathcal{M}$. Potom pre každú výrokovologickú formulu $X \in \mathcal{PE}_{\mathcal{L}}$ platí, že $v \models_{\mathrm{p}} X$ vtt $\mathcal{M} \models X$.

Zhoda na všetkých výrokovologických formulách

Tvrdenie 3.9

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$ a v je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$ zhodné s $\mathcal{M}$. Potom pre každú výrokovologickú formulu $X \in \mathcal{PE}_{\mathcal{L}}$ platí, že $v \models_{\mathrm{p}} X$ vtt $\mathcal{M} \models X$.

Dôkaz indukciou na konštrukciu formuly.

1.1: Nech X je rovnostný atóm. Potom nie je výrokovologickou formulou a tvrdenie preň triviálne platí.
1.2: Nech X je predikátový atóm. Potom $v \models_{\mathrm{p}} X$ vtt $v(X) = t$ vtt $\mathcal{M} \models X$.
2.1: Indukčný predpoklad: Nech tvrdenie platí pre formulu X.
Dokážme tvrdenie pre $\neg X$. Ak X neobsahuje symbol rovnosti $\doteq$, potom $v \models_{\mathrm{p}} \neg X$ vtt $v \not\models_{\mathrm{p}} X$ vtt (podľa IP) $\mathcal{M} \not\models X$ vtt $\mathcal{M} \models \neg X$. Ak X obsahuje $\doteq$, $\neg X$ ho obsahuje tiež, teda nie je výrokovologická a tvrdenie pre ňu platí triviálne.
2.2: IP: Nech tvrdenie platí pre formuly X a Y. Ak X alebo Y obsahuje $\doteq$, tvrdenie platí pre $(X \wedge Y)$, $(X \vee Y)$, $(X \to Y)$ triviálne, lebo nie sú výrokovologické. Nech teda X ani Y neobsahuje $\doteq$. Potom platí $v \models_{\mathrm{p}} (X \to Y)$ vtt $v \not\models_{\mathrm{p}} X$ alebo $v \models_{\mathrm{p}} Y$ vtt (podľa IP) vtt $\mathcal{M} \not\models X$ alebo $\mathcal{M} \models Y$ vtt $\mathcal{M} \models (X \to Y)$. Podobne pre ďalšie spojky. $\square$

Výrokovologické vyplývanie

Výrokovologické teórie a modely

Výrokovologické teórie

Vráťme sa naspäť k teóriám, modelom a vyplývaniu.

Definícia 3.10

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.
Každú množinu výrokovologických formúl jazyka $\mathcal{L}$ budeme nazývať *výrokovologickou teóriou* v jazyku $\mathcal{L}$.

Príklad 3.11

Výrokovologickou teóriou je

$$\begin{aligned} T_{\text{party}} = \{ & ((\texttt{príde}(\texttt{Kim}) \lor \texttt{príde}(\texttt{Jim})) \lor \texttt{príde}(\texttt{Sarah})), \\ & (\texttt{príde}(\texttt{Kim}) \to \neg\texttt{príde}(\texttt{Sarah})), \\ & (\texttt{príde}(\texttt{Jim}) \to \texttt{príde}(\texttt{Kim})), \\ & (\texttt{príde}(\texttt{Sarah}) \to \texttt{príde}(\texttt{Jim}))\}, \end{aligned}$$

ale nie

$$T_{\text{party}} \cup \{\texttt{Kim} \doteq \texttt{Sarah}\}.$$

Príklad výrokovologického modelu

Príklad 3.12 (Výrokovologický model teórie o party)

$$v = \{\texttt{príde}(\texttt{Kim}) \mapsto t, \texttt{príde}(\texttt{Jim}) \mapsto t, \texttt{príde}(\texttt{Sarah}) \mapsto f\}$$

$$\left.\begin{aligned}
&v \models_{\mathrm{p}} ((\texttt{príde}(\texttt{Kim}) \lor \texttt{príde}(\texttt{Jim})) \lor \texttt{príde}(\texttt{Sarah}))\\
&v \models_{\mathrm{p}} (\texttt{príde}(\texttt{Kim}) \rightarrow \neg\texttt{príde}(\texttt{Sarah}))\\
&v \models_{\mathrm{p}} (\texttt{príde}(\texttt{Jim}) \rightarrow \texttt{príde}(\texttt{Kim}))\\
&v \models_{\mathrm{p}} (\texttt{príde}(\texttt{Sarah}) \rightarrow \texttt{príde}(\texttt{Jim}))
\end{aligned}\right\} v \models_{\mathrm{p}} T_{\mathsf{party}}$$

Výrokovologický model

Definícia 3.13 (Výrokovologický model)

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu a nech T je teória v jazyku $\mathcal{L}$ a v je výrokovologické ohodnotenie pre jazyk $\mathcal{L}$.

Teória T je ***pravdivá*** v ohodnotení v, skrátene $v \models_{\mathrm{p}} T$, vtt **každá** formula X z T je pravdivá vo v (teda $v \models_{\mathrm{p}} X$ pre každú $X \in T$).

Hovoríme tiež, že v je ***výrokovologickým modelom*** T.

Teória T je ***nepravdivá*** vo v, skrátene $v \not\models_{\mathrm{p}} T$, vtt T nie je pravdivá vo v.

Zrejme $v \not\models_{\mathrm{p}} T$ vtt $v \not\models_{\mathrm{p}} X$ pre **nejakú** $X \in T$.

Model teórie, splniteľnosť a nesplniteľnosť

Definícia 3.14 (Splniteľnosť a nesplniteľnosť)

Teória je ***výrokovologicky splniteľná*** vtt
má aspoň jeden výrokovologický model.

Teória je ***výrokovologicky nesplniteľná*** vtt
nemá žiaden výrokovologický model.

Zrejme teória nie je splniteľná vtt keď je nesplniteľná.

Príklad 3.15

T_{party} je evidentne splniteľná.

Výrokovologické vyplývanie

Vyplývanie, nezávislosť a nesplniteľnosť

Výrokovologické vyplývanie

Ak sú množiny konštánt a predikátových symbolov jazyka konečné, jazyk má konečne veľa predikátových atómov a teda aj **konečne veľa** ohodnotení.

Uvažovať o všetkých ohodnoteniach a modeloch teórie nie je také odstrašujúce. Napríklad si ľahšie predstavíme logický dôsledok:

Definícia 3.16

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu a nech T je výrokovologická teória a X je výrokovologická formula, obe v jazyku $\mathcal{L}$.

Formula X je ***výrokovologickým dôsledkom*** teórie T vtt
pre každé ohodnotenie v pre jazyk $\mathcal{L}$ platí, že ak $v \models_p T$, tak $v \models_p X$.

Hovoríme tiež, že X ***vyplýva*** z T a píšeme $T \models_p X$.

Ak X **ne**vyplýva z T, píšeme $T \not\models_p X$.

Príklad výrokovologického vyplývania

Príklad 3.17

Vyplýva `príde`(`Kim`) výrokovologicky z T_{party}?
Pretože vieme vymenovať všetky ohodnotenia pre $\mathcal{L}_{\text{party}}$, zistíme to ľahko:

	v_i			((p(K) ∨ p(J)) ∨ p(S))	(p(K) → ¬p(S))	(p(J) → p(K))	(p(S) → p(J))	T_{party}	p(K)
	p(K)	p(J)	p(S)						
v_0	f	f	f	$\not\models_p$				$\not\models_p$	
v_1	f	f	t	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	
v_2	f	t	f	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$		$\not\models_p$	
v_3	f	t	t	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$		$\not\models_p$	
v_4	t	f	f	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$
v_5	t	f	t	$\models_p$	$\not\models_p$			$\not\models_p$	
v_6	t	t	f	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$
v_7	t	t	t	$\models_p$	$\not\models_p$			$\not\models_p$	

Skrátili sme `príde` na `p`, `Kim` na `K`, `Jim` na `J`, `Sarah` na `S`.

Logický záver: Formula `príde`(`Kim`) výrokovologicky vyplýva z T_{party}.

Praktický záver: Aby boli všetky požiadavky splnené, Kim **musí** prísť na párty.

Príklad nezávislosti

Príklad 3.18

Vyplýva `príde(Jim)` výrokovologicky z T_{party}?

	v_i								
	p(K)	p(J)	p(S)	((p(K) ∨ p(J)) ∨ p(S))	(p(K) → ¬p(S))	(p(J) → p(K))	(p(S) → p(J))	T_{party}	p(J)
v_0	f	f	f	$\not\models_p$				$\not\models_p$	
v_1	f	f	t	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	
v_2	f	t	f	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$		$\not\models_p$	
v_3	f	t	t	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$		$\not\models_p$	
v_4	t	f	f	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$
v_5	t	f	t	$\models_p$	$\not\models_p$			$\not\models_p$	
v_6	t	t	f	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$
v_7	t	t	t	$\models_p$	$\not\models_p$			$\not\models_p$	

Logický záver: Formula `príde(Jim)` **nevyplýva** z T_{party}.

Výrokovologická nezávislosť

Vzťahu medzi $\texttt{príde}(\texttt{Jim})$ a T_{party} hovoríme **nezávislosť**.

Definícia 3.19

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu a nech T je výrokovologická teória a X je výrokovologická formula, obe v jazyku $\mathcal{L}$.

Formula X je ***výrokovologicky nezávislá*** od teórie T vtt existujú také ohodnotenia v_0 a v_1 pre jazyk $\mathcal{L}$, že $v_0 \models_{\mathrm{p}} T$ aj $v_1 \models_{\mathrm{p}} T$, ale $v_0 \not\models_{\mathrm{p}} X$ a $v_1 \models_{\mathrm{p}} X$.

Príklad 3.20 (pokračovanie príkladu 3.18)

Logický záver: Formula $\texttt{príde}(\texttt{Jim})$ je **nezávislá** od T_{party}.

Praktický záver: Všetky požiadavky budú naplnené **bez ohľadu na to**, či Jim príde alebo nepríde na párty. **Nie je nutné**, aby bol prítomý ani aby bol neprítomý. **Môže, ale nemusí** prísť. Jeho prítomnosť od požiadaviek **nezávisí**.

Príklad vyplývania negácie

Príklad 3.21

Je $\texttt{príde(Sarah)}$ výrokovologickým dôsledkom T_{party} alebo nezávislá od T_{party}?

	v_i			$((\mathrm{p(K)} \lor \mathrm{p(J)})$	$(\mathrm{p(K)} \to$	$(\mathrm{p(J)} \to$	$(\mathrm{p(S)} \to$		
	$\mathrm{p(K)}$	$\mathrm{p(J)}$	$\mathrm{p(S)}$	$\lor\, \mathrm{p(S)})$	$\neg \mathrm{p(S)})$	$\mathrm{p(K)})$	$\mathrm{p(J)})$	T_{party}	$\mathrm{p(S)}$
v_0	f	f	f	$\not\models_{\mathrm{p}}$				$\not\models_{\mathrm{p}}$	
v_1	f	f	t	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$	
v_2	f	t	f	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$		$\not\models_{\mathrm{p}}$	
v_3	f	t	t	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$		$\not\models_{\mathrm{p}}$	
v_4	t	f	f	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$
v_5	t	f	t	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$			$\not\models_{\mathrm{p}}$	
v_6	t	t	f	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$
v_7	t	t	t	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$			$\not\models_{\mathrm{p}}$	

Logický záver: Formula $\texttt{príde(Sarah)}$ nevyplýva z T_{party}, ale ani nie je nezávislá od T_{party}.

Vyplývanie negácie

Tvrdenie 3.22

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu a nech T je splniteľná výrokovologická teória a X je výrokovologická formula, obe v jazyku $\mathcal{L}$.

Formula X nevyplýva z teórie T a nie je výrokovologicky nezávislá od T vtt $\neg X$ vyplýva z T.

Príklad 3.23 (pokračovanie príkladu 3.21)

Logický záver: Z T_{party} vyplýva $\neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$.

Praktický záver: Aby boli všetky požiadavky naplnené, Sarah **nesmie** prísť na party.

Vzťahy teórií a formúl

Medzi ohodnotením a formulou sú iba dva vzájomne výlučné vzťahy:

Buď $v \models_p X$, alebo $v \not\models_p X$.

Medzi teóriou a formulou je viac možných vzťahov:

	existuje v také, že $v \models_p T$ a $v \models_p X$	pre všetky v, ak $v \models_p T$, tak $v \not\models_p X$
existuje v také, že $v \models_p T$ a $v \not\models_p X$	X je nezávislá od T $T \not\models_p X$ a $T \not\models_p \neg X$	$T \models_p \neg X$
pre všetky v, ak $v \models_p T$, tak $v \models_p X$	$T \models_p X$	

Vzťahy teórií a formúl

Medzi ohodnotením a formulou sú iba dva vzájomne výlučné vzťahy:

Buď $v \models_p X$, alebo $v \not\models_p X$.

Medzi teóriou a formulou je viac možných vzťahov:

	existuje v také, že $v \models_p T$ a $v \models_p X$	pre všetky v, ak $v \models_p T$, tak $v \not\models_p X$
existuje v také, že $v \models_p T$ a $v \not\models_p X$	X je nezávislá od T $T \not\models_p X$ a $T \not\models_p \neg X$	$T \models_p \neg X$ a $T \not\models_p X$
pre všetky v, ak $v \models_p T$, tak $v \models_p X$	$T \models_p X$	

Vzťahy teórií a formúl

Medzi ohodnotením a formulou sú iba dva vzájomne výlučné vzťahy:

Buď $v \models_p X$, alebo $v \not\models_p X$.

Medzi teóriou a formulou je viac možných vzťahov:

	existuje v také, že $v \models_p T$ a $v \models_p X$	pre všetky v, ak $v \models_p T$, tak $v \not\models_p X$
existuje v také, že $v \models_p T$ a $v \not\models_p X$	X je nezávislá od T $T \not\models_p X$ a $T \not\models_p \neg X$	$T \models_p \neg X$ a $T \not\models_p X$
pre všetky v, ak $v \models_p T$, tak $v \models_p X$	$T \models_p X$ a $T \not\models_p \neg X$	

Vzťahy teórií a formúl

Medzi ohodnotením a formulou sú iba dva vzájomne výlučné vzťahy:

Buď $v \models_p X$, alebo $v \not\models_p X$.

Medzi teóriou a formulou je viac možných vzťahov:

	existuje v také, že $v \models_p T$ a $v \models_p X$	pre všetky v, ak $v \models_p T$, tak $v \not\models_p X$
existuje v také, že $v \models_p T$ a $v \not\models_p X$	X je nezávislá od T $T \not\models_p X$ a $T \not\models_p \neg X$	$T \models_p \neg X$ a $T \not\models_p X$
pre všetky v, ak $v \models_p T$, tak $v \models_p X$	$T \models_p X$ a $T \not\models_p \neg X$	T je nesplniteľná $T \models_p X$ aj $T \models_p \neg X$

Nesplniteľná teória

Príklad 3.24

Je teória $T'_{\text{party}} = T_{\text{party}} \cup \{(\neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}) \to \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}))\}$ splniteľná?

	v_i			$((\mathtt{p}(\mathtt{K}) \lor \mathtt{p}(\mathtt{J})) \lor \mathtt{p}(\mathtt{S}))$	$(\mathtt{p}(\mathtt{K}) \to \neg\mathtt{p}(\mathtt{S}))$	$(\mathtt{p}(\mathtt{J}) \to \mathtt{p}(\mathtt{K}))$	$(\mathtt{p}(\mathtt{S}) \to \mathtt{p}(\mathtt{J}))$	$(\neg\mathtt{p}(\mathtt{S}) \to \neg\mathtt{p}(\mathtt{K}))$	T'_{party}
	$\mathtt{p}(\mathtt{K})$	$\mathtt{p}(\mathtt{J})$	$\mathtt{p}(\mathtt{S})$						
v_0	f	f	f	$\not\models_{\mathrm{p}}$					$\not\models_{\mathrm{p}}$
v_1	f	f	t	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$		$\not\models_{\mathrm{p}}$
v_2	f	t	f	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$			$\not\models_{\mathrm{p}}$
v_3	f	t	t	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$			$\not\models_{\mathrm{p}}$
v_4	t	f	f	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$
v_5	t	f	t	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$				$\not\models_{\mathrm{p}}$
v_6	t	t	f	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$
v_7	t	t	t	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$				$\not\models_{\mathrm{p}}$

Logický záver: T'_{party} je nesplniteľná, vyplýva z nej každá formula.

Praktický záver: T'_{party} nemá praktické dôsledky, lebo nevypovedá o žiadnom stave sveta. Na jej základe nevieme rozhodnúť, kto musí alebo nesmie prísť na párty.

Vyplývanie a nesplniteľnosť

Nesplniteľnosť ale nie neužitočná vlastnosť.

Tvrdenie 3.25

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu a nech T je splniteľná výrokovologická teória a X je výrokovologická formula, obe v jazyku $\mathcal{L}$.

Formula X výrokovologicky vyplýva z teórie T vtt $T \cup \{\neg X\}$ je výrokovologicky nesplniteľná.

Podľa tohto tvrdenia sa rozhodnutie vyplývania dá zredukovať na rozhodnutie splniteľnosti.

Výrokovologickú splniteľnosť rozhoduje SAT solver.

Množina atómov formuly a teórie

Definícia 3.26

Množinu atómov $\mathrm{atoms}(X)$ formuly $X \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ definujeme pre všetky formuly $A, B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ nasledovne:

- $\mathrm{atoms}(A) = \{A\}$, ak A je atóm,
- $\mathrm{atoms}(\neg A) = \mathrm{atoms}(A)$,
- $\mathrm{atoms}((A \land B)) = \mathrm{atoms}((A \lor B)) = \mathrm{atoms}((A \to B)) = \mathrm{atoms}(A) \cup \mathrm{atoms}(B)$.

Množinou atómov teórie T je

$$\mathrm{atoms}(T) = \bigcup_{X \in T} \mathrm{atoms}(X).$$

Ohodnotenia zhodné na atómoch teórie

Definícia 3.27

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, nech $M \subseteq \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$. Ohodnotenia v_1 a v_2 sa ***zhodujú*** na množine M vtt $v_1(A) = v_2(A)$ pre každý atóm $A \in M$.

Tvrdenie 3.28

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.
Pre každú výrokovologickú teóriu T a formulu X jazyka $\mathcal{L}$ a všetky ohodnotenia v_1 a v_2, ktoré zhodujú na množine $\mathrm{atoms}(T) \cup \mathrm{atoms}(X)$ platí

- $v_1 \models_{\mathrm{p}} T$ *vtt* $v_2 \models_{\mathrm{p}} T$,
- $v_1 \models_{\mathrm{p}} X$ *vtt* $v_2 \models_{\mathrm{p}} X$.

Ohodnotenia postačujúce na skúmanie teórií

Inak povedané: Pravdivosť formuly/teórie v ohodnotení závisí **iba** od pravdivostných hodnôt tých atómov, ktoré sa v nej vyskytujú.

Takže na zistenie vyplývania, nezávislosti, splniteľnosti stačí preskúmať všetky ohodnotenia, ktoré sa **líšia** na atómoch **vyskytujúcich** sa vo formule a teórii.

Pokiaľ je teória je konečná, stačí skúmať konečne veľa ohodnotení, aj keby bol jazyk nekonečný.

Výrokovologické vyplývanie

Rekapitulácia

Rekapitulácia

Dnes sme sa naučili:

- ako zjednodušiť štruktúry na výrokovologické ohodnotenia,
- čo je logické vyplývanie z teórie a logický dôsledok teórie,
- čo je nezávislosť formuly od teórie,
- štyri situácie vo vzťahoch teórií a formúl a ich praktické dôsledky,
- čo sú splniteľné a nesplniteľné teórie,
- ako súvisí nesplniteľnosť a vyplývanie.

Schéma riešenia problémov pomocou logiky