
Matematika 4 — Logika pre informatikov

1. sada teoretických úloh

Táto sada úloh obsahuje **hodnotenú časť**. Jej riešenie odovzdajte najneskôr v **pondelok 28. februára 2022 o 9:00**.

Čísla úloh v zátvorkách odkazujú do zbierky¹, kde nájdete riešené príklady a ďalšie úlohy na precvičovanie.

Pri riešení niektorých úloh vám môže pomôcť prieskumník štruktúr².

¹ <https://github.com/FMFI-UK-1-AIN-412/lpi/blob/master/teoreticke/zbierka.pdf>

² <https://bl96.github.io/structure-explorer/>

Cvičenie 1.1. (1.1.1, 1.1.5) Uvažujme jazyk \mathcal{L} logiky prvého rádu s množinami symbolov $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Alex, Beáta, Cyril, Dana, Edo, Gabika, oco}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{žena}^1, \text{rodič}^2, \text{dieťa}^3, \text{starší}^2\}$, pričom zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
$\text{žena}(x)$	x je žena
$\text{rodič}(x, y)$	x je rodičom y
$\text{dieťa}(u, x, y)$	u je dieťaťom matky x a otca y
$\text{starší}(x, y)$	x je starší ako y

Preložte nasledujúce atomické formuly do čo najprirodzenejších výrokov v slovenčine:

(A_1) žena(Beáta)

(B_1) rodič(Edo, Edo)

(A_2) dieťa(Cyril, Gabika, Edo)

(B_2) starší(Beáta, Cyril)

(A_3) starší(Dana, Cyril)

(B_3) Cyril \doteq oco

Vyskúšajte si. Samostatne preložte formuly:

(A_4) žena(Dana)

(B_4) žena(Alex)

(A_5) rodič(Dana, Alex)

(B_5) dieťa(Beáta, Gabika, oco)

(A_6) rodič(Dana, Beáta)

(B_6) starší(Gabika, Cyril)

(A_7) dieťa(Alex, Dana, Cyril)

Cvičenie 1.2. (1.1.2, 1.1.6) Koľko atomických formúl môžeme zostrojiť v jazyku \mathcal{L} z úlohy 1.1?

Cvičenie 1.3. (1.1.3, 1.1.7) Uvažujme jazyk \mathcal{L} a atomické formuly z úlohy 1.1. Rozhodnite, ktoré z formúl $A_1, \dots, A_3, B_1, \dots, B_3$ sú pravdivé v štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$\begin{aligned} D &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \\ i(\text{Alex}) &= 1, \quad i(\text{Beáta}) = 2, \quad i(\text{Cyril}) = 3, \quad i(\text{Dana}) = 4, \\ i(\text{Edo}) &= 9, \quad i(\text{Gabika}) = 7, \quad i(\text{oco}) = 3, \\ i(\text{žena}) &= \{1, 2, 3, 8\}, \\ i(\text{rodič}) &= \{(4, 1), (9, 9), (2, 3), (3, 4), (8, 7)\}, \\ i(\text{dieťa}) &= \{(3, 7, 9), (2, 7, 3), (8, 9, 1)\}, \\ i(\text{starší}) &= \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 7), (3, 4), (7, 3), (8, 7)\}. \end{aligned}$$

Vyskúšajte si. Samostatne rozhodnite o pravdivosti formúl $A_4, \dots, A_7, B_4, \dots, B_6$ v štruktúre \mathcal{M} .

💡 Všimnite si, že hoci každá individuová konštanta musí byť interpretovaná ako niektorý objekt domény (teda pomenúvať ho), nie všetky objekty musia byť pomenované a viacero individuových konštánt môže pomenúvať ten istý objekt.

💡 Lepšiu predstavu o štruktúre často získate, keď si ju znázorníte ako graf, v ktorom sú uzlami prvky domény. Pomôcť vám pritom môže prieskumník štruktúr.

Cvičenie 1.4. (1.1.4, 1.1.8) Uvažujme opäť jazyk \mathcal{L} a atomické formuly z úlohy 1.1. Zostrojte štruktúry $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ a \mathcal{M}_3 pre jazyk \mathcal{L} tak, aby každá z nich bola modelom všetkých formúl A_1, \dots, A_7 , ale *súčasne* nebola modelom žiadnej z formúl B_1, \dots, B_6 a aby *zároveň*:

- doména štruktúry \mathcal{M}_1 mala aspoň 9 prvkov;
- doména štruktúry \mathcal{M}_2 mala najviac 5 prvkov;
- doména štruktúry \mathcal{M}_3 mala najviac 2 prvky.

Ak doména s požadovanou kardinalitou neexistuje, detailne zdôvodnite, prečo to tak je, na základe definície štruktúry a pravdivosti atómov v nej.


Cvičenie 1.5. (1.2.1, 1.2.2) Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom* jazyku logiky prvého rádu \mathcal{L} . Zapište množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

(A_1) Peter je muž.

- (A₂) Peter je študent.
- (A₃) Lucia je žena a študentka.
- (A₄) Lucia je staršia ako Peter.
- (A₅) Matematiku učí Eugen.
- (A₆) Peter a Lucia sú od neho mladší.
- (A₇) Peter dostal z Matematiky od Eugena známku A.
- (A₈) Eugen má rád Luciu.
- (A₉) Aj keď má Lucia z Matematiky (od neho) známku „dostatočný“.
- (A₁₀) Znáмка „dostatočný“ je len iný názov pre E-čko, a podobne „výborný“ značí to isté ako A-čko.
- (A₁₁) Eugen sa má rád.
- (A₁₂) Je Učiteľom roka 2020.
- (A₁₃) Matematika je povinný predmet.
- (A₁₄) Všetci vyššie menovaní študenti majú radi Telocvik.
- (A₁₅) Okrem Eugena (a ďalších učiteľov) v škole pracuje aj školník, upratovačka a riaditeľ.

Vyskúšajte si. Samostatne sformalizujte v jazyku \mathcal{L} alebo jeho rozšírení aj výroky:

- (A₁₆) Peter má rád Matematiku.
- (A₁₇) Lucia má rada Petra.
- (A₁₈) Telocvik je voliteľný predmet.

 Na vyjadrenie nezávislých vlastností (napr. byť študentom/študentkou, byť ženou, byť mužom) použite samostatné predikátové symboly a podľa potreby jeden výrok sformalizujte viacerými atómami.

Nezavádzajte zbytočne nové predikátové symboly, ak sa význam výroku dá vyjadriť už použitými.

Hodnotená časť

Riešenie tejto hodnotenej časti **odovzdajte** najneskôr v pondelok **28. februára 2022 o 9:00** cez odovzdávací formulár pre tu01³. Riešenia odovzdané po termíne sa považujú za opravy neodovzdaných riešení s príslušnými dôsledkami podľa pravidiel⁴.

Odovzdávajte jeden dokument vo formáte PDF s dodatočnými obmedzeniami uvedenými vo formulári. Dokument musí obsahovať **celé riešenie** v textovej forme. Odovzdané riešenia musia byť **čitateľné** a mať primerane **malý** rozsah. Na riešenie sa vzťahujú všeobecné **pravidlá**⁴.

Ak pri riešení použijete prieskumník štruktúr², odovzdajte (povinne) **aj export** z neho. **Pozor!** Informácie nachádzajúce sa **iba v exporte**, ale nie v PDF **nepovažujeme za súčasť riešenia**. Export však výrazne urýchli hodnotenie riešenia.

³ <https://forms.gle/JGQ1QigW5YF9SA7W8>

⁴ https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics_4/sk#pravidla-uloh

i Aj keď na vyriešenie nasledujúcej úlohy sú potrebné vedomosti, ktorým sa budeme venovať budúci týždeň, odporúčame vám pokúsiť sa ju čiastočne vyriešiť už teraz.

Môžete napríklad navrhnúť vhodný jazyk logiky prvého rádu, sformalizovať výroky na základe stredoškolských vedomostí a neformálne sa zamyslieť nad poslednou časťou.

Úloha 1.6.

- a) Sformalizujte nasledujúce výroky ako teóriu $T = \{A_1, \dots, A_9\}$ vo vhodne zvolenom jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu \mathcal{L} . Zapište množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

Snažte sa o to, aby počet predikátových symbolov bol čo najmenší. Zároveň ale nespájajte vzájomne nezávislé vlastnosti a vzťahy do jedného predikátového symbolu. Nevkladajte do formalizácie žiadne ďalšie intuitívne znalosti na pozadí (napr. ak je niekto zlý, nedopĺňajte, že nemôže byť dobrý).

(A_1) V Čiernom lese stojí chalúpka, ktorá je z perníku.

(A_2) Niekedy sa jej hovorí aj Perníková veža.

(A_3) V Perníkovej veži býva zlá čarodejnica. A tiež chlapec Janko a Marienka, jeho sestra.

(A_4) Janko je chlapec, iba ak Marienka je zlá.

(A_5) Janko a Marienka sú deti, čarodejnica nie.

(A_6) Rovnako ako čarodejnica, aj Marienka je silná.

(A_7) Janko alebo Marienka je chlapec.

(A_8) Ak je niekto (zo spomínaných) silný, nie je dievča a Janka ochráni.

(A_9) Ak by to, že Marienka je Jankova sestra, znamenalo, že ho ochráni, tak ho čarodejnica určite nezje.

V jazyku \mathcal{L} ďalej sformalizujte formulami B_1 , B_2 a B_3 výroky:

(B_1) Marienka je dievča.

(B_2) Janko je dievča.

(B_3) Ak je Marienka Jankova sestra, Čarodejnica zje Janka.

b) Vytvorte štruktúru \mathcal{M} pre jazyk \mathcal{L} , ktorá je modelom teórie T .

c) Pre každú z formúl B_1 , B_2 , B_3 (jednotlivo) rozhodnite, či je možné, aby bola pravdivá v nejakom modeli teórie T .

Svoju odpoveď detailne zdôvodnite na základe definície modelu, štruktúry a pravdivosti výrokovologických formúl v nej.