

# Matematika (4): Logika pre informatikov

Poznámky z prednášok

Ján Kl'uka, Ján Mazák

Letný semester 2021/2022

Posledná aktualizácia: 21. februára 2022

## Obsah

<b>P1</b>	<b>Úvod. Atomické formuly</b>	<b>3</b>
<b>0</b>	<b>Úvod</b>	<b>3</b>
0.1	O logike . . . . .	3
0.2	O kurze . . . . .	10
<b>1</b>	<b>Atomické formuly</b>	<b>11</b>
1.1	Syntax atomických formúl . . . . .	15
1.2	Sémantika atomických formúl . . . . .	19
1.3	Zhrnutie . . . . .	23
<b>P2</b>	<b>Výrokovologické spojky</b>	<b>25</b>
<b>2</b>	<b>Výrokovologické spojky</b>	<b>25</b>
2.1	Boolovské spojky . . . . .	26
2.2	Implikácia . . . . .	31

2.3	Ekvivalencia . . . . .	33
2.4	Syntax výrokovologických formúl . . . . .	34
2.5	Sémantika výrokovologických formúl . . . . .	43
2.6	Teórie a ich modely . . . . .	45
2.7	Správnosť a vernosť formalizácie . . . . .	46

## 1. prednáška

# Úvod

## Atomické formuly

---

### 0 Úvod

#### 0.1 O logike

##### Čo je logika

Logika je vedná disciplína, ktorá študuje usudzovanie.

Správne, racionálne usudzovanie je základom vedy a inžinierstva.

Vyžaduje rozoznať správne úsudky z predpokladaných princípov a pozorovania od chybných úvah a špekulácií.

Správnosť úsudkov, zdá sa, nie je iba vec konvencie a dohody.

Logika skúma, *aké* sú zákonitosti správneho usudzovania a *prečo* sú zákonitosťami.

##### Ako logika študuje usudzovanie

Logika má dva hlavné predmety záujmu:

**Jazyk** zápis pozorovaní, definície pojmov, formulovanie teórií

*Syntax* pravidlá zápisu tvrdení

*Sémantika* význam tvrdení

**Usudzovanie (inferencia)** odvodzovanie nových *logických dôsledkov* z doterajších poznatkov. Aký má vzťah s jazykom, štruktúrou tvrdení?

##### Jazyk, poznatky a teórie

*Jazyk* slúži na formulovanie tvrdení, ktoré vyjadrujú poznatky o svete (princípy jeho fungovania aj pozorované fakty).

Súboru poznatkov, ktoré považujeme za pravdivé, hovoríme *teória*.

*Príklad 0.1 (Party time!).* Máme troch nových známych — Kim, Jima a Sarah. Organizujeme párty a P0: chceme na ňu pozvať niekoho z nich. Od spoločných kamarátov sme sa ale dozvedeli o ich požiadavkách:

P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.

P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.

P3: Sarah nepôjde bez Jima.

### Možné stavy sveta a modely

Jedna z otázok, ktoré si o teórii o party môžeme položiť, je: „V akých zostavách môžu noví známi prísť na párty tak, aby boli všetky podmienky splnené?“

Priamočiaro (aj keď pracne) to zistíme tak, že:

1. vymenujeme *všetky možné stavy sveta* (účasti nových známych),
2. zistíme, v ktorých sú všetky podmienky splnené.

K	J	S	P0	P1	P2	P3	
n	n	n	n				P0: Niekoľko z Kim, Jima, Sarah príde na párty.
n	n	p	p	p	p	n	P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.
n	p	n	p	p	n		
n	p	p	p	p	n		P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.
p	n	n	p	p	p	p	
p	n	p	p	n			
p	p	n	p	p	p	p	P3: Sarah nepôjde bez Jima.
p	p	p	p	n			

### Možné stavy sveta a modely

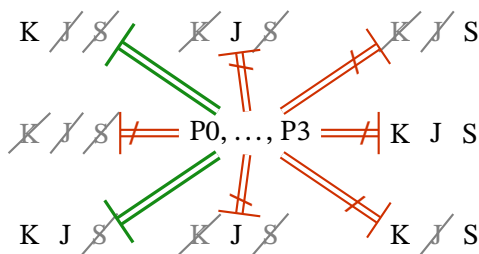
Teória rozdeľuje *možné stavy sveta* (interpretácie) na:

✔ stavy, v ktorých je pravdivá — *modely* teórie,

✘ stavy, v ktorých je nepravdivá.

Tvrdenie aj teória môžu mať viacero modelov, ale aj žiaden.

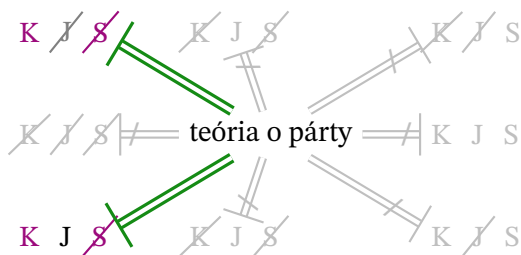
*Príklad 0.2.* Modelmi teórie P0, P1, P2, P3 sú dve situácie: keď Kim príde na párty a ostatní noví známi nie, a keď Kim a Jim prídu na párty a Sarah nie.



### Logické dôsledky

Často je zaujímavá iná otázka o teórii — musí byť nejaké tvrdenie pravdivé vždy, keď je pravdivá teória?

V našom prípade: Kto *musí* a kto *nesmie* prísť na párty, aby boli podmienky  $P_0, \dots, P_3$  splnené?



### Logické dôsledky

Logickými dôsledkami teórie sú tvrdenia, ktoré sú pravdivé vo všetkých modeloch teórie.

Príklad 0.3. Logickými dôsledkami teórie  $P_0, P_1, P_2, P_3$  sú napríklad:

- *Kim príde na párty.*
- *Sarah nepríde na párty.*

Logických dôsledkov je nekonečne veľa, môžu nimi byť ľubovoľne zložité tvrdenia:

- Na party príde Kim alebo Jim.

- Ak príde Sarah, tak príde aj Jim.
- Ak príde Jim, tak nepríde Sarah.
- 

### Logické usudzovanie

Preskúmať všetky stavy sveta je často nepraktické až nemožné.

Logické dôsledky ale môžeme *odvodzovať usudzovaním (inferovať)*.

Pri odvodení vychádzame z *premís* (predpokladov) a postupnosťou *správnych úsudkov* dospievame k *záverom*.

*Príklad 0.4.* Vieme, že ak na párty pôjde Kim, tak nepôjde Sarah (P1), a že ak pôjde Jim, tak pôjde Kim (P2).

1. Predpokladajme, že na párty pôjde Jim.
2. Podľa 1. a P2 pôjde aj Kim.
3. Podľa 2. a P1 nepôjde Sarah.

Teda podľa uvedenej úvahy: Ak na párty pôjde Jim, tak nepôjde Sarah.

### Dedukcia

Úsudok je správny (*korektný*) vtedy, keď *vždy*, keď sú pravdivé jeho premisy, je pravdivý aj jeho záver.

Ak sú všetky úsudky v odvodení správne, záver je *logickým dôsledkom* premís a odvodenie je jeho *dôkazom* z premís.

*Dedukcia* je usudzovanie, pri ktorom sa používajú iba správne úsudky.

Logika študuje dedukciu, ale aj niektoré nededuktívne úsudky, ktoré sú *vo všeobecnosti* nesprávne, ale sú správne v *špeciálnych* prípadoch alebo sú *užitočné*:

- indukcia — zovšeobecnenie;
- abdukcia — odvodzovanie možných príčin z následkov;
- usudzovanie na základe analógie (podobnosti).

## Kontrapríklady

Ak úsudok nie je správny, vieme nájsť *kontrapríklad* — stav sveta, v ktorom sú *predpoklady pravdivé*, ale *záver je nepravdivý*.

*Príklad 0.5.* Nesprávny úsudok: Ak platia tvrdenia teórie o party, na party príde Jim.

Kontrapríklad: Stav, kedy príde Kim, nepríde Jim, nepríde Sarah.

Teória je pravdivá, výrok „na party príde Jim“ nie je pravdivý.

## Matematická logika

### *Matematická logika*

- modeluje jazyk, jeho sémantiku a usudzovanie ako matematické objekty (množiny, postuposti, zobrazenia, stromy);
- rieši logické problémy matematickými metódami.

Rozvinula sa koncom 19. a v prvej polovici 20. storočia vďaka snahám vybudovať základy matematiky bez sporov a paradoxov, mechanizovať overovanie dôkazov alebo priamo matematických viet.

## Matematická logika a informatika

Informatika sa vyvinula z matematickej logiky (von Neumann, Turing, Church, ...)

Väčšina *programovacích jazykov* obsahuje logické prvky:

- $\text{all}(x > m \text{ for } x \text{ in } \text{arr})$ ,

fragmenty niektorých sú priamo preložiteľné na logické formuly:

- $\text{select } T1.x, T2.y \text{ from } T1 \text{ inner join } T2 \text{ on } T1.z = T2.z \text{ where } T1.z > 25$ ,

niektoré (Prolog) sú podmnožinou logických jazykov.

Metódami logiky sa dá *presne špecifikovať*, čo má program robiť, *popísať*, čo robí, a *dokázať*, že robí to, čo bolo špecifikované.

Vo *výpočtovej logike* a umelej inteligencii sa metódy logiky používajú na riešenie rôznych ťažkých problémov (plánovanie, rozvrh, hľadanie a overovanie dôkazov matematických tvrdení, hľadanie vysvetlení, ...).

## Formálne jazyky a formalizácia

Matematická logika nepracuje s prirodzeným jazykom, ale s jeho zjednodušenými modelmi — *formálnymi jazykmi*.

- Presne definovaná, zjednodušená syntax a sémantika.
- Obchádzajú problémy prirodzeného jazyka:  
viacznačnosť slov, nejednoznačné syntaktické vzťahy, zložitá syntaktickú analýzu, výminky, obraty s ustáleným významom, ...
- Niekoľko formálnych jazykov už poznáte: aritmetika, jazyky fyzikálnych a chemických vzorcov, programovacie jazyky, ...

Problémy z reálneho sveta opísané v prirodzenom jazyku musíme najprv *sformalizovať*, a potom naň môžeme použiť aparát matematickej logiky.

Formalizácia vyžaduje cvik — trocha veda, trocha umenie.

## Ťažkosti s prirodzeným jazykom

*Prirodzený jazyk je problematický:*

- Viacznačné slová: Milo *je* v posluchárni A.
- Viacznačné tvrdenia: Videl som dievča v sále *s d'alekohl'adom*.
- Ťažko syntakticky analyzovateľné tvrdenia:

Vlastníci bytov a nebytových priestorov v dome prijímajú rozhodnutia na schôdzi vlastníkov dvojtreťinovou väčšinou hlasov všetkých vlastníkov bytov a nebytových priestorov v dome, ak hlasujú o zmluve o úvere a o každom dodatku k nej, o zmluve o zabezpečení úveru a o každom dodatku k nej, o zmluve o nájme a kúpe veci, ktorú vlastníci bytov a nebytových priestorov v dome užívajú s právom jej kúpy po uplynutí dojednaného času užívania a o každom dodatku k nej, o zmluve o vstavbe alebo nadstavbe a o každom dodatku k nim, o zmene účelu užívania spoločných častí domu a spoločných zariadení domu a o zmene formy výkonu správy; ...

— Zákon č. 182/1993 Z. z. SR v znení neskorších predpisov

- Výnimky a obraty so špeciálnym ustáleným významom: Nikto *nie* je dokonalý.



## Formalizácia poznatkov

S formalizáciou ste sa už stretli — napríklad pri riešení slovných úloh:

Karol je trikrát starší ako Mária.  
Súčet Karolovho a Máriinho veku je 12 rokov.  $\rightsquigarrow$   $k = 3 \cdot m$   
Koľko rokov majú Karol a Mária?  $k + m = 12$

Stretli ste sa už aj s formálnym jazykom výrokovkej logiky.

*Príklad 0.6.* Sformalizujme náš párty príklad:

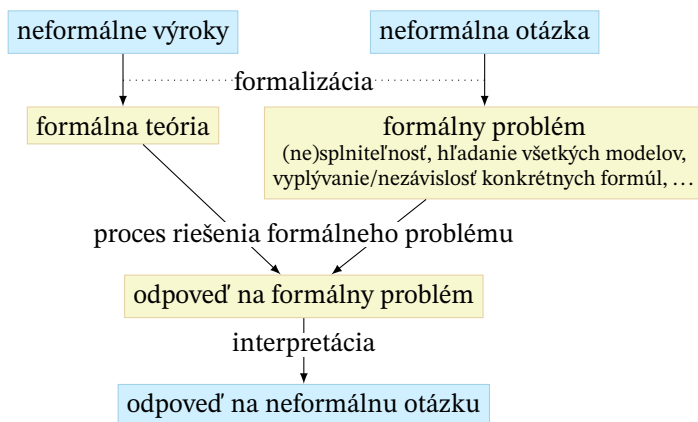
P0: Nieкто z trojice Kim, Jim, Sarah pôjde na párty.

P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.

P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.

P3: Sarah nepôjde bez Jima.

## Schéma riešenia problémov pomocou logiky



## Logika prvého rádu

*Jazyk logiky prvého rádu* (FOL) je jeden zo základných formálnych jazykov, ktorým sa logika zaoberá.

Do dnešnej podoby sa vyvinul koncom 19. a v prvej polovici 20. storočia — G. Frege, G. Peano, C. S. Peirce.

Výrokové spojky + kvantifikátory  $\forall$  a  $\exists$ .

Dá sa v ňom vyjadriť veľa zaujímavých tvrdení, bežne sa používa v matematike.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \dots$$

### Kalkuly — formalizácia usudzovania

Pre mnohé logické jazyky sú známe *kalkuly* — množiny usudzovacích pravidiel, ktoré sú

**korektné** — odvodzujú iba logické dôsledky,

**úplné** — umožňujú odvodiť všetky logické dôsledky.

Kalkuly sú bežné v matematike

- na počítanie s číslami, zlomkami (kalkul elementárnej aritmetiky),
- riešenie lineárnych rovníc (kalkul lineárnej algebry),
- derivovanie, integrovanie, riešenie diferenciálnych rovníc (kalkul matematickej analýzy)

⋮

Sú korektné, ale nie vždy úplné.

Poznáte už aj jeden logický kalkul — ekvivalentné úpravy.

## 0.2 O tomto kurze

### Prístup k logike na tomto predmete

Stredoškolský prístup príliš *neoddeľuje* jazyk výrokov od jeho významu a vlastne ani jednu stránku *redefinuje jasne*.

Prevedieme vás základmi matematickej a výpočtovej logiky pre (postupne čoraz zložitejšie) fragmenty jazykov logiky prvého rádu.

Pojmy z logiky (výrok, model, logický dôsledok, dôkaz, ...) budeme *definovať matematicky* (ako množiny, postupnosti, funkcie, ...) *zdanlivo* budeme o jednoduchých veciach hovoriť zložito, na praktických cvičeniach ako *dátové štruktúry*.

Budeme *dokazovať* ich vlastnosti a *programovať* algoritmy podľa konštruktívnych dôkazov.

Budeme vyjadrovať výpočtové problémy v logických jazykoch a hľadať ich riešenia pomocou hotových nástrojov na riešenie logických problémov.

### Organizácia kurzu — rozvrh, kontakty, pravidlá

Organizácia predmetu — rozvrh, kontakty a pravidlá absolvovania — sú popísané na oficiálnej webovej stránke predmetu:

**1-AIN-412** [https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics\\_4](https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics_4)

**1-INF-210** <http://www.dcs.fmph.uniba.sk/~mazak/vyucba/udml/>

## 1 Atomické formuly

### Jazyky logiky prvého rádu

Logika prvého rádu je trieda (rodina) formálnych jazykov.

Zdieľajú:

- časti abecedy — *logické symboly* (spojky, kvantifikátory)
- pravidlá tvorby *formúl* (slov)

Líšia sa v *mimologických symboloch* — časť abecedy, pomocou ktorej sa tvoria najjednoduchšie — *atomické formuly* (*atómy*).

### Atomické formuly a výroky v prirodzenom jazyku

Atomické formuly logiky prvého rádu zodpovedajú *pozitívnym jednoduchým vetám* o vlastnostiach, stavoch, vzťahoch a rovnosti *jednotlivých pomenovaných objektov*.

*Príklady 1.1.*

- ✓ Milo beží.
- ✓ Jarka vidí Mila.
- ✗ Milo beží, ale Jarka ho nevidí.

- ✗ Jarka vidí všetkých.
- ✓ Jarka dala Milovi Bobíka v sobotu.
- ✗ Jarka nie je doma.
- ✗ Niekto je doma.
- ✓ Súčet 2 a 2 je 3.
- ✓ Prezidentkou SR je Zuzana Čaputová.

### Individuové konštanty

*Individuové konštanty* sú symboly jazyka logiky prvého rádu, ktoré pomenúvajú jednotlivé, pevne zvolené objekty.

Zodpovedajú *približne* vlastným menám, jednoznačným pomenovaniám, niekedy zámenám; konštantám v matematike a programovacích jazykoch.

*Príklady 1.2.* Jarka, 2, Zuzana\_Čaputová, sobota,  $\pi$ , ...

### Individuové konštanty a objekty

Individuová konštantá

- vždy pomenúva skutočný, existujúci objekt (na rozdiel od vlastného mena *Zeus*);
- nikdy nepomenúva viac objektov (na rozdiel od vlastného mena *Jarka*).

### Objekt

- *môže byť* pomenovaný aj *viacerými* individuovými konštantami (napr. Prezidentka\_SR a Zuzana\_Čaputová);
- *nemusí* mať žiadne meno.

### Predikátové symboly

*Predikátové symboly* sú symboly jazyka logiky prvého rádu, ktoré vyjadrujú vlastnosti alebo vzťahy.

Jednoduché vety v slovenčine majú *podmetovú* (*subjekt*) a *prísudkovú* časť (*predikát*):

Jarka	vidí	Mila.
podmet	prísudok	predmet
podmetová časť	prísudková časť	

Do logiky prvého rádu prekladáme takéto tvrdenie pomocou predikátového symbolu *vidí*, ktorý má dva *argumenty* („podmety“): individuové konštanty Jarka a Milo.

Úloha argumentu v predikáte je daná jeho poradím (podobne ako pozičné argumenty funkcií/metód v prog. jazykoch).

### Arita predikátového symbolu

Predikátový symbol má pevne určený počet argumentov — *aritu*.

*Vždy* musí mať práve toľko argumentov, aká je jeho arita.

*Dohoda 1.3.* Aritu budeme *niekedy* písať ako horný index symbolu. Napríklad  $\text{beží}^1$ ,  $\text{vidí}^2$ ,  $\text{dal}^4$ ,  $<^2$ .

### Zamýšľaný význam predikátových symbolov

*Unárny* predikátový symbol (teda s aritou 1) zvyčajne označuje *vlastnosť*, druh, rolu, stav.

*Príklady 1.4.*

$\text{pes}(x)$	$x$ je pes
$\text{čierne}(x)$	$x$ je čierne
$\text{beží}(x)$	$x$ beží

*Binárny, ternárny, ...* predikátový symbol (s aritou 2, 3, ...) zvyčajne označuje *vzťah* svojich argumentov.

*Príklady 1.5.*

$\text{vidí}(x, y)$	$x$ vidí $y$
$\text{dal}(x, y, z, t)$	$x$ dal(a/o) objektu $y$ objekt $z$ v čase $t$

### Kategorickosť významu predikátových symbolov

V bežnom jazyku často nie je celkom jasné, či objekt má alebo nemá nejakú vlastnosť — kedy je niekto *mladý*?

Predikátové symboly predstavujú *kategorické* vlastnosti/vzťahy — pre každý objekt sa dá *jednoznačne rozhodnúť*, či má alebo nemá túto vlastnosť/vzťah s iným objektom či inými objektmi.

Význam predikátového symbolu preto často zodpovedá rovnakému slovenskému predikátu iba približne.

*Príklad 1.6.* Predikát mladší<sup>2</sup> môže označovať vzťah „ $x$  je mladší ako  $y$ “ presne.

Predikát mladý<sup>1</sup> zodpovedá vlastnosti „ $x$  je mladý“ iba približne.

Nekategorickými vlastnosťami sa zaoberajú *fuzzy* logiky. Predikáty v nich zachytávajú význam týchto vlastností presnejšie.

## Atomické formuly

*Atomické formuly* majú tvar

$$\text{predikát}(\text{argument}_1, \text{argument}_2, \dots, \text{argument}_k),$$

alebo

$$\text{argument}_1 \doteq \text{argument}_2,$$

pričom  $k$  je arita predikátu, a  $\text{argument}_1, \dots, \text{argument}_k$  sú (nateraz) individuové konštanty.

Atomická formula zodpovedá (jednoduchému) výroku v slovenčine, t.j. tvrdeniu, ktorého *pravdivostná hodnota* (pravda alebo nepravda) sa dá jednoznačne určiť, lebo predikát označuje kategorickú vlastnosť/vzťah a individuové konštanty jednoznačne označujú objekty.

## Formalizácia jednoduchých výrokov

*Formalizácia* je preklad výrokov z prirodzeného jazyka do formálneho logického jazyka.

*Nie je to jednoznačný proces.*

*Vopred daný* prvorádový jazyk (konštanty a predikáty) sa snažíme využiť čo najlepšie.

*Príklad 1.7.* Sformalizujme v jazyku s konštantami Evka, Jarka a Milo a predikátom vyšší<sup>2</sup> výroky:

$A_1$ : Jarka je vyššia ako Milo.  $\rightsquigarrow$  vyšší(Jarka, Milo)

$A_2$ : Evka je nižšia ako Milo.  $\rightsquigarrow$  vyšší(Milo, Evka)

Zanedbávame nepodstatné detaily — pomocné slovesá, predložky, skloňovanie, rod, ...:  $x$  je vyšší/vyššia/vyššie ako  $y \rightsquigarrow$  vyšší( $x, y$ ).

## Návrh jazyka pri formalizácii

Formalizácia spojená s *návrhom vlastného jazyka* je *iteratívna*: Postupne zisťujeme, aké predikáty a konštanty potrebujeme, upravujeme predchádzajúce formalizácie.

Príklady 1.8.  $A_1$ : Jarka dala Milovi Bobíka.

↪  ~~$d(Jarka)$~~   ~~$dalBobíka(Jarka, Milo)$~~   $dal(Jarka, Milo, Bobík)$

$A_2$ : Evka dostala Bobíka od Mila.

↪  ~~$dalBobíka(Milo, Evka)$~~   $dal(Milo, Evka, Bobík)$

$A_3$ : Evka dala Jarke Cilku.

↪  ~~$dalCilku(Evka, Jarka)$~~   $dal(Evka, Jarka, Cilka)$

$A_4$ : Bobík je pes.

↪  $pes(Bobík)$

## Návrh jazyka pri formalizácii

Minimalizujeme počet predikátov, uprednostňujeme flexibilnejšie, viacúčelovejšie ( $dal^3$  pred  $dalBobíka^2$  a  $dalCilku^2$ ).

Dosiahneme

- expresívnejší jazyk (vyjadrí viac menším počtom prostriedkov),
- zrejmejšie logické vzťahy výrokov.

Podobné normalizácii databázových schém.

## 1.1 Syntax atomických formúl

### Presné definície

Cieľom logiky je uvažovať o jazyku, výrokoch, vyplývaní, dôkazoch.

Výpočtová logika sa snaží automaticky riešiť konkrétne problémy vyjadrené v logických jazykoch.

Spolehľivé a overiteľné úvahy a výpočty vyžadujú *presnú* dohodu na tom, o čom hovoríme — *definíciu* logických pojmov (jazyk, výrok, pravdivosť, ...).

Pojmy (napr. *atomická formula*) môžeme zadať napríklad

- *matematicky* ako množiny,  $n$ -tice, relácie, funkcie, postupnosti, ...;
- *informaticky* tým, že ich *naprogramujeme*, napr. zadefinujeme triedu `AtomickaFormula` v Pythone.

Matematický jazyk je univerzálnejší ako programovací – abstraktnejší, menej nie až tak podstatných detailov.

### Syntax atomických formúl logiky prvého rádu

Najprv sa musíme dohodnúť na tom, aká je *syntax* atomických formúl logiky prvého rádu:

- z čoho sa skladajú,
- čím vlastne sú,
- akú majú štruktúru.

### Symboly jazyka atomických formúl logiky prvého rádu

Z čoho sa skladajú atomické formuly?

**Definícia 1.9.** *Symbolmi jazyka  $\mathcal{L}$  atomických formúl logiky prvého rádu sú mimologické, logické a pomocné symboly, pričom:*

*Mimologickými symbolmi sú*

- *individuové konštanty* z nejakej neprázdnej spočítateľnej množiny  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$
- *a predikátové symboly* z nejakej spočítateľnej množiny  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ .

Jediným *logickým symbolom* je  $\doteq$  (symbol rovnosti).

*Pomocnými symbolmi* sú  $(, )$  a  $,$  (ľavá, pravá zátvorka a čiarka).

Množiny  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$  a  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$  sú disjunktné. Pomocné symboly sa nevyskytujú v symboloch z  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$  ani  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ . Každému symbolu  $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$  je priradená *arita*  $\text{ar}_{\mathcal{L}}(P) \in \mathbb{N}^+$ .



## Abeceda jazyka atomických formúl logiky prvého rádu

Na Úvode do teoretickej informatiky/Formálnych jazykoch a automatoch by ste povedali, že *abecedou* jazyka  $\mathcal{L}$  atomických formúl logiky prvého rádu je  $\Sigma_{\mathcal{L}} = \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \cup \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \cup \{=, (, ), ,\}$ .

V logike sa väčšinou pojem *abeceda* nepoužíva, pretože potrebujeme rozlišovať rôzne druhy symbolov.

Namiesto *abeceda jazyka*  $\mathcal{L}$  hovoríme *množina všetkých symbolov jazyka*  $\mathcal{L}$  alebo len *symboly jazyka*  $\mathcal{L}$ .

Na zápise množiny  $\Sigma_{\mathcal{L}}$  však ľahko vidíme, čím sa rôzne jazyky atomických formúl logiky prvého rádu od seba líšia a čo majú spoločné.

## Príklady symbolov jazykov atomických formúl logiky prvého rádu

*Príklad 1.10.* Príklad o deťoch a zvieratkách sme sformalizovali v jazyku  $\mathcal{L}_{dz}$ , v ktorom

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\mathcal{L}_{dz}} &= \{\text{Bobík, Cilka, Evka, Jarka, Milo}\}, \\ \mathcal{P}_{\mathcal{L}_{dz}} &= \{\text{dal, pes}\}, \quad \text{ar}_{\mathcal{L}_{dz}}(\text{dal}) = 3, \quad \text{ar}_{\mathcal{L}_{dz}}(\text{pes}) = 1.\end{aligned}$$

*Príklad 1.11.* Príklad o návštevníkoch party by sme mohli sformalizovať v jazyku  $\mathcal{L}_{party}$ , kde

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\mathcal{L}_{party}} &= \{\text{Kim, Jim, Sarah}\}, \\ \mathcal{P}_{\mathcal{L}_{party}} &= \{\text{príde}\}, \quad \text{ar}_{\mathcal{L}_{party}}(\text{príde}) = 1.\end{aligned}$$

## Označenia symbolov

Keď budeme hovoriť o *ľubovoľnom* jazyku  $\mathcal{L}$ , často budeme potrebovať nejak označiť niektoré jeho konštanty alebo predikáty, aj keď nebudeme vedieť, aké konkrétne symboly to sú.

Na označenie symbolov použijeme *meta premenné*: premenné v (matematickej) slovenčine, pomocou ktorých budeme hovoriť o (po grécky *meta*) týchto symboloch.

*Dohoda 1.12.* Individuové konštanty budeme spravidla označovať meta premennými  $a, b, c, d$  s prípadnými dolnými indexmi.

Predikátové symboly budeme spravidla označovať meta premennými  $P, Q, R$  s prípadnými dolnými indexmi.

## Atomické formuly jazyka

Čo sú atomické formuly?

**Definícia 1.13.** Nech  $\mathcal{L}$  je jazyk atomických formúl logiky prvého rádu.

*Rovnostný atóm* jazyka  $\mathcal{L}$  je každá postupnosť symbolov  $c_1 \doteq c_2$ , kde  $c_1$  a  $c_2$  sú individuové konštanty z  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ .

*Predikátový atóm* jazyka  $\mathcal{L}$  je každá postupnosť symbolov  $P(c_1, \dots, c_n)$ , kde  $P$  je predikátový symbol z  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$  s aritou  $n$  a  $c_1, \dots, c_n$  sú individuové konštanty z  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ .

*Atomickými formulami* (skrátene *atómami*) jazyka  $\mathcal{L}$  súhrnne nazývame všetky rovnostné a predikátové atómy jazyka  $\mathcal{L}$ .

Množinu všetkých atómov jazyka  $\mathcal{L}$  označujeme  $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ .

## Slová jazyka atomických formúl logiky prvého rádu

Na Úvode do teoretickej informatiky by ste povedali, že jazyk  $\mathcal{L}$  atomických formúl logiky prvého rádu nad abecedou  $\Sigma_{\mathcal{L}} = \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \cup \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \cup \{\doteq, (, ), ,\}$  je množina slov

$$\{c_1 \doteq c_2 \mid c_1 \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}, c_2 \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}\} \\ \cup \{P(c_1, \dots, c_n) \mid P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}, \text{ar}_{\mathcal{L}}(P) = n, c_1 \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}, \dots, c_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}\}.$$

V logike sa jazyk takto nedefinuje, pretože potrebujeme rozlišovať *rôzne druhy slov*.

## Príklady atómov jazyka

*Príklad 1.14.* V jazyku  $\mathcal{L}_{\text{dz}}$ , kde  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_{\text{dz}}} = \{\text{Bobík, Cilka, Evka, Jarka, Milo}\}$ ,  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_{\text{dz}}} = \{\text{dal, pes}\}$ ,  $\text{ar}_{\mathcal{L}_{\text{dz}}}(\text{dal}) = 3$ ,  $\text{ar}_{\mathcal{L}_{\text{dz}}}(\text{pes}) = 1$ , sú *okrem iných* rovnostné atómy:

Bobík  $\doteq$  Bobík

Cilka  $\doteq$  Bobík

Evka  $\doteq$  Jarka

Bobík  $\doteq$  Cilka

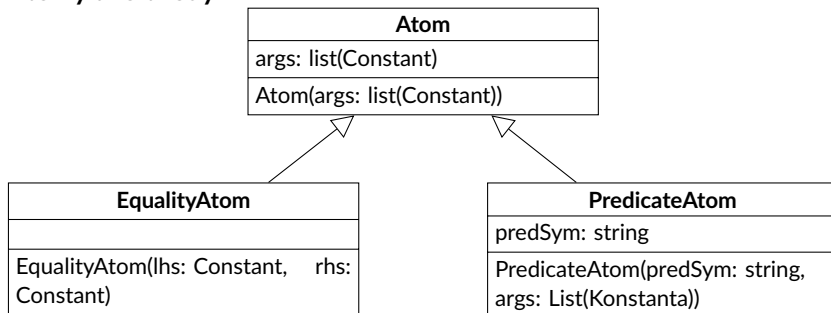
a predikátové atómy:

pes(Cilka)

dal(Cilka, Milo, Bobík)

dal(Jarka, Evka, Milo).

## Atómy ako triedy



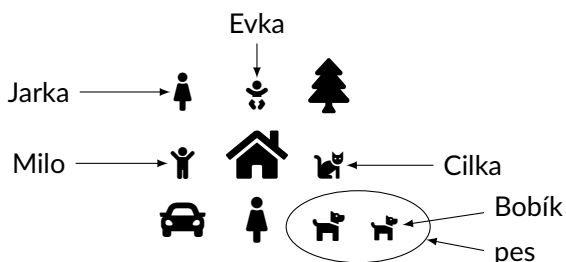
## 1.2 Sémantika atomických formúl

### Vyhodnotenie atomickej formuly

Ako zistíme, či je atomická formula `pes(Bobík)` pravdivá v nejakej situácii (napríklad u babky Evky, Jarky a Mila na dedine)?

Pozrieme sa na túto situáciu a zistíme:

1. aký objekt *b* pomenúva konštanta Bobík;
2. akú vlastnosť *p* označuje predikát pes;
3. či objekt *b* má vlastnosť *p*.



### Vyhodnotenie atomickej formuly

Ako môžeme tento postup matematicky alebo informaticky modelovať?  
Potrebujeme:

- matematický/informatický model situácie (stavu vybranej časti sveta),

- postup na jeho použitie pri vyhodnocovaní pravdivosti formúl.

### Matematický model stavu sveta

Ako môžeme matematicky popísať nejakú situáciu tak, aby sme pomocou tohto popisu mohli vyhodnocovať atomické formuly v nejakom jazyku logiky prvého rádu  $\mathcal{L}$ ?

### Matematický model stavu sveta

Potrebujeme vedieť:

- ktoré objekty sú v popisovanej situácii prítomné,
- ▶ množina všetkých týchto objektov — *doména*;
- jednoznačné priradenie významu všetkým individuovým konštantám a predikátom z jazyka  $\mathcal{L}$
- ▶ *interpretačná funkcia*;
- pre každú individuovú konštantu  $c$  z jazyka  $\mathcal{L}$ , ktorý *objekt* z domény konštanty  $c$  pomenúva,
- pre každý unárny predikát  $P$  z jazyka  $\mathcal{L}$ , ktoré objekty z domény majú vlastnosť označenú predikátom  $P$ ,
- ▶ tvoria *podmnožinu* domény;
- pre každý  $n$ -árny predikát  $R$  z jazyka  $\mathcal{L}$ ,  $n > 1$ , ktoré  $n$ -tice objektov z domény sú vo vzťahu ozn. pred.  $R$ ,
- ▶ tvoria  $n$ -árnu *reláciu* na doméne.

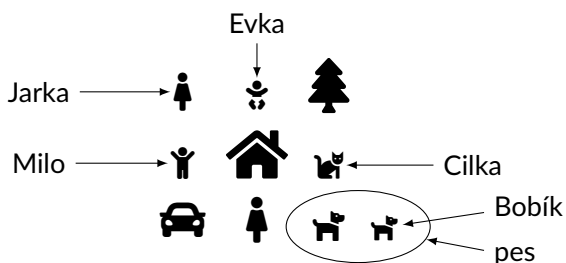
### Štruktúra pre jazyk

**Definícia 1.15.** Nech  $\mathcal{L}$  je jazyk atomických formúl logiky prvého rádu. *Štruktúrou* pre jazyk  $\mathcal{L}$  (niekedy *interpretáciou* jazyka  $\mathcal{L}$ ) nazývame dvojicu  $\mathcal{M} = (D, i)$ , kde  $D$  je ľubovoľná neprázdna množina nazývaná *doména* štruktúry  $\mathcal{M}$ ;  $i$  je zobrazenie, nazývané *interpretačná funkcia* štruktúry  $\mathcal{M}$ , ktoré

- každej individuovej konštante  $c$  jazyka  $\mathcal{L}$  prirad'uje prvok  $i(c) \in D$ ;
- každému predikátovému symbolu  $P$  jazyka  $\mathcal{L}$  s aritou  $n$  prirad'uje množinu  $i(P) \subseteq D^n$ .

Dohoda 1.16. Štruktúry označujeme veľkými *písanými* písmenami  $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \dots$

### Príklad štruktúry



Príklad 1.17.

$$\mathcal{M} = (D, i), \quad D = \left\{ \text{person with flower}, \text{person with flower}, \text{tree}, \text{person}, \text{house}, \text{cat}, \text{car}, \text{person with flower}, \text{dog}, \text{dog} \right\}$$

$$i(\text{Bobík}) = \text{dog}, \quad i(\text{Cilka}) = \text{cat}$$

$$i(\text{Evka}) = \text{person with flower}, \quad i(\text{Jarka}) = \text{person with flower}, \quad i(\text{Milo}) = \text{person}$$

$$i(\text{pes}) = \{ \text{dog}, \text{dog} \}$$

$$i(\text{dal}) = \left\{ (\text{person}, \text{person with flower}, \text{dog}), (\text{person with flower}, \text{person}, \text{dog}), (\text{person with flower}, \text{person}, \text{cat}) \right\}$$

### Štruktúra ako informatický objekt


Štruktúru sme definovali pomocou *matematických* objektov.










Aký *informatický* objekt sa podobá na štruktúru?

*Databáza:*

Predikátové symboly jazyka  $\sim$  veľmi zjednodušená schéma DB (arita  $\sim$  počet stĺpcov)

Interpretácia predikátových symbolov  $\sim$  konkrétne tabuľky s dátami

$i(\text{pes}^1)$
1


$i(\text{dal}^3)$		
1	2	3
		
		
		

## Štruktúry — upozornenia

Štruktúr pre daný jazyk je *nekonečne veľa*.

Doména štruktúry

- môže mať ľubovoľné prvky;
- nijak *nesúvisí* s intuitívnym významom interpretovaného jazyka;
- môže byť *nekonečná*.

Interpretácia symbolov konštánt:

- každej konštante je priradený objekt domény;
- nie každý objekt domény musí byť priradený nejakej konštante;
- rôznym konštantám môže byť priradený rovnaký objekt.

Interpretácie predikátových symbolov môžu byť *nekonečné*.

*Príklad 1.18* (Štruktúra s nekonečnou doménou).  $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, i)$        $i(\text{pes}) = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$   
 $i(\text{dal}) = \{(n, m, n + m) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$   
 $i(\text{Bobík}) = 0$        $i(\text{Cilka}) = 1$        $i(\text{Evka}) = 3$        $i(\text{Jarka}) = 5$        $i(\text{Milo}) = 0$

## Pravdivosť atomickej formuly v štruktúre

Ako zistíme, či je atomická formula pravdivá v štruktúre?

**Definícia 1.19.** Nech  $\mathcal{M} = (D, i)$  je štruktúra pre jazyk  $\mathcal{L}$  atomických forém jazyka logiky prvého rádu.

Rovnostný atóm  $c_1 \doteq c_2$  jazyka  $\mathcal{L}$  je *pravdivý v štruktúre*  $\mathcal{M}$  vtedy a len vtedy, keď  $i(c_1) = i(c_2)$ .

Predikátový atóm  $P(c_1, \dots, c_n)$  jazyka  $\mathcal{L}$  je *pravdivý* v štruktúre  $\mathcal{M}$  vtedy a len vtedy, keď  $(i(c_1), \dots, i(c_n)) \in i(P)$ .

Vzťah *atóm*  $A$  je *pravdivý* v štruktúre  $\mathcal{M}$  skráteno zapisujeme  $\mathcal{M} \models A$ . Hovoríme aj, že  $\mathcal{M}$  je *modelom*  $A$ .

Vzťah *atóm*  $A$  *nie je pravdivý* v štruktúre  $\mathcal{M}$  zapisujeme  $\mathcal{M} \not\models A$ . Hovoríme aj, že  $A$  je *nepravdivý* v  $\mathcal{M}$  a  $\mathcal{M}$  *nie je modelom*  $A$ .

*Príklad 1.20* (Určenie pravdivosti atómov v štruktúre).

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= (D, i), \quad D = \left\{ \text{ľudia, stromy, domy, zvieratá, vozidlá, zvieratá} \right\} \\ i(\text{Bobík}) &= \text{ľudia} & i(\text{Cilka}) &= \text{zvieratá} \\ i(\text{Evka}) &= \text{stromy} & i(\text{Jarka}) &= \text{ľudia} & i(\text{Milo}) &= \text{ľudia} \\ i(\text{pes}) &= \{ \text{ľudia}, \text{ľudia} \} \\ i(\text{dal}) &= \{ (\text{ľudia}, \text{stromy}, \text{ľudia}), (\text{ľudia}, \text{ľudia}, \text{ľudia}), (\text{stromy}, \text{ľudia}, \text{zvieratá}) \} \end{aligned}$$

Atóm  $\text{pes}(\text{Bobík})$  je *pravdivý* v štruktúre  $\mathcal{M}$ , t.j.,  $\mathcal{M} \models \text{pes}(\text{Bobík})$ , lebo objekt  $i(\text{Bobík}) = \text{ľudia}$  je prvkom množiny  $\{ \text{ľudia}, \text{ľudia} \} = i(\text{pes})$ .

Atóm  $\text{dal}(\text{Evka}, \text{Jarka}, \text{Cilka})$  je *pravdivý* v  $\mathcal{M}$ , t.j.,  $\mathcal{M} \models \text{dal}(\text{Evka}, \text{Jarka}, \text{Cilka})$ , lebo  $(i(\text{Evka}), i(\text{Jarka}), i(\text{Cilka})) = (\text{stromy}, \text{ľudia}, \text{zvieratá}) \in i(\text{dal})$ .

Atóm  $\text{Cilka} \doteq \text{Bobík}$  *nie je pravdivý* v  $\mathcal{M}$ , t.j.,  $\mathcal{M} \not\models \text{Cilka} \doteq \text{Bobík}$ , lebo  $i(\text{Cilka}) = \text{zvieratá} \neq \text{ľudia} = i(\text{Bobík})$ .

## 1.3 Zhrnutie

### Zhrnutie

- Logika prvého rádu je rodina formálnych jazykov.
- Každý jazyk logiky prvého rádu je daný neprázdnu množinou individuových konštánt a množinou predikátových symbolov.
- Atomické formuly sú základnými výrazmi prvorádového jazyka.
  - Postupnosti symbolov  $P(c_1, \dots, c_n)$  (predikátové) a  $c_1 \doteq c_2$  (rovnostné).
  - Zodpovedajú pozitívnym jednoduchým výrokom o vlastnostiach, stavoch, vzťahoch, rovnosti jednotlivých pomenovaných objektov.

- Význam jazyku dáva štruktúra — matematický opis stavu sveta
  - Skladá sa z neprázdnej domény a z interpretačnej funkcie.
  - Konštanty interpretuje ako prvky domény.
  - Predikáty interpretuje ako podmnožiny domény/relácie na doméne.
- Pravdivosť atómu určíme interpretovaním argumentov a zistením, či je výsledná  $n$ -tica objektov prvkom interpretácie predikátu, resp. pri rovnostnom atóme, či sa objekty rovnajú.



## 2. prednáška

# Výrokovologické spojky

---

### Rekapitulácia

Minulý týždeň sme si povedali:

- čo sú symboly jazyka *atomických formúl* logiky prvého rádu;
- čo sú atomické formuly;
- čo sú štruktúry:
  - modely stavu sveta,
  - neprázdna doména + interpretačná funkcia,
  - konštanty označujú objekty,
  - predikáty označujú vzťahy a vlastnosti;
- kedy sú atomické formuly pravdivé v danej štruktúre.
- Jazyk atomických formúl je oproti slovenčine veľmi slabý.
- Môžu byť pravdivé vo veľmi čudných štruktúrach.

## 2 Výrokovologické spojky

### Výrokovologické spojky

Atomické formuly logiky prvého rádu môžeme spájať do zložitejších tvrdení *výrokovologickými spojkami*.

- Zodpovedajú spojkám v slovenčine, ktorými vytvárame súvetia.
- Významom spojky je vždy *boolovská funkcia*, teda funkcia na pravdivostných hodnotách spájaných výrokov. Pravdivostná hodnota zloženého výroku závisí *iba* od pravdivostných hodnôt podvýrokov.

*Príklad 2.1.* Negácia, konjunkcia, disjunkcia, implikácia, ekvivalencia, ...

## Nevýrokovologické spojky

### Negatívny príklad

Spojka *pretože* nie je výrokovologická.

*Dôkaz.* Uvažujme o výroku „*Karol je doma, pretože Jarka je v škole*“.

*Je pravdivý v situácii:* Je 18:00 a Karol je doma, aby nakŕmil psíka. Ten by inak musel čakať na Jarku, ktorá šla dopoludnia do školy a vráti až o 19:30.

*Nie je pravdivý v situácii:* Jarka išla ráno do školy, ale Karol ostal doma, lebo je chorý. S Jarkinou prítomnosťou v škole to nesúvisí.

V oboch situáciách sú výroky „*Karol je doma*“ aj „*Jarka je v škole*“ pravdivé, ale pravdivostná hodnota zloženého výroku je rôzna. *Nezávisí* iba od pravdivostných hodnôt podvýrokov (ale od existencie vzťahu *príčina-následok* medzi nimi).

Spojka *pretože* teda nie je *funkciou* na pravdivostných hodnotách. □

## 2.1 Boolovské spojky

### Negácia

Negácia  $\neg$  je *unárna* spojka — má jeden argument, formulu.

Zodpovedá výrazom *nie*, „*nie je pravda, že ...*“, predpone *ne-*.

Ľubovoľne vnárateľná.

Formula vytvorená negáciou sa *nezátvorkuje*.

Okolo argumentu negácie *nepridávame* zátvorky, ale môže ich mať on sám, ak to jeho štruktúra vyžaduje.

*Príklad 2.2.*

$\neg \text{doma}(\text{Karol})$	Karol <i>nie</i> je doma.
$\neg \text{Jarka} \doteq \text{Karol}$	Jarka <i>nie</i> je Karol.
$\neg \neg \neg \text{poslúcha}(\text{Cilka})$	<i>Nie</i> je pravda, že <i>nie</i> je pravda, že Cilka <i>neposlúcha</i> .
<del><math>(\neg \text{doma}(\text{Karol}))</math></del>	nesprávna
<del><math>\neg(\text{doma}(\text{Karol}))</math></del>	syntax

### Konjunkcia

Konjunkcia  $\wedge$  je *binárna* spojka.

Zodpovedá spojкам *a*, *aj*, *i*, *tiež*, *ale*, *avšak*, *no*, *hoci*, *ani*, *ba* (*aj/ani*), ...

Formalizujeme ňou zlučovacie, stupňovacie a odporovacie súvetia:

- Jarka je doma *aj* Karol je doma.  
(doma(Jarka)  $\wedge$  doma(Karol))
- Jarka je v škole, *no* Karol je doma.  
(v\_škole(Jarka)  $\wedge$  doma(Karol))
- *Ani* Jarka nie je doma, *ani* Karol tam nie je.  
( $\neg$ doma(Jarka)  $\wedge$   $\neg$ doma(Karol))
- *Nielen* Jarka je chorá, *ale aj* Karol je chorý.  
(chorý(Jarka)  $\wedge$  chorý(Karol))

Zloženú formulu vždy *zátvorkujeme*.

### Formalizácia viacnásobných vetných členov konjunkciou

Zlučovacie viacnásobné vetné členy tiež formalizujeme ako konjunkcie:

- *Jarka aj Karol* sú doma.  
(doma(Jarka)  $\wedge$  doma(Karol))
- *Karol sa potkol a spadol*.  
(potkol\_sa(Karol)  $\wedge$  spadol(Karol))
- *Jarka dostala Bobíka od mamy a otca*.  
(dostal(Jarka, Bobík, mama)  $\wedge$  dostal(Jarka, Bobík, otec))

Podobne (jednoduché a viacnásobné zlučovacie) prívlastky vlastností:

- *Eismann je ruský špión*.  
(Rus(Eismann)  $\wedge$  špión(Eismann))
- *Bobík je malý čierny psík*.  
(((malý(Bobík)  $\wedge$  čierny(Bobík))  $\wedge$  pes(Bobík)))

### Stratené v preklade

Zlučovacie súvetia niekedy vyjadrujú časovú následnosť, ktorá sa pri priamočiarom preklade do logiky prvého rádu *stráca*:

- *Jarka a Karol sa stretli a išli do kina*.  
(stretli\_sa(Jarka, Karol)  $\wedge$  (do\_kina(Jarka)  $\wedge$  do\_kina(Karol)))

- Jarka a Karol išli do kina *a* stretli sa.  $((\text{do\_kina}(\text{Jarka}) \wedge \text{do\_kina}(\text{Karol})) \wedge \text{stretli\_sa}(\text{Jarka}, \text{Karol}))$

## Disjunkcia

Disjunkcia  $\vee$  je binárna spojka, ktorá zodpovedá spojкам *alebo*, či v *inkluzívnom* význame (môžu nastať aj obe možnosti). Inkluzívnu disjunkciu vyjadruje tiež „*alebo aj/i*“ a častice *respektíve, eventuálne, popripade, prípadne*.

Disjunkciou formalizujeme vylučovacie súvetia s inkluzívnym významom:

- Jarka je doma *alebo* Karol je doma.  $(\text{doma}(\text{Jarka}) \vee \text{doma}(\text{Karol}))$
- Bobík kúpe Jarka, prípadne ho kúpe Karol.  $(\text{kúpe}(\text{Jarka}, \text{Bobík}) \vee \text{kúpe}(\text{Karol}, \text{Bobík}))$

Zloženú formulu vždy *zátvorkujeme*.

## Formalizácia viacnásobných vetných členov disjunkciou

Viacnásobné vetné členy s vylučovacou spojkou (v inkluzívnom význame) tiež prekladáme ako disjunkcie:

- Doma je Jarka *alebo* Karol.  $(\text{doma}(\text{Jarka}) \vee \text{doma}(\text{Karol}))$
- Jarka je doma *alebo* v škole.  $(\text{doma}(\text{Jarka}) \vee \text{v\_škole}(\text{Jarka}))$
- Jarka dostala Bobíka od mamy *alebo* otca.  $(\text{dostal}(\text{Jarka}, \text{Bobík}, \text{mama}) \vee \text{dostal}(\text{Jarka}, \text{Bobík}, \text{otec}))$
- Bobík je čierny či tmavohnedý psík.  $((\text{čierny}(\text{Bobík}) \vee \text{tmavohnedý}(\text{Bobík})) \wedge \text{pes}(\text{Bobík}))$

## Exkluzívna disjunkcia

Konštrukcie „*bud' ... , alebo ...*“, „*bud' ... , bud' ...*“, „*alebo ... , alebo ...*“ *spravidla* (v matematike vždy) vyjadrujú *exkluzívnu* disjunkciu.

- Bud' je batéria vybitá *alebo* svieti kontrolka.

Exkluzívnu disjunkciu môžeme vyjadriť zložitejšou formulou:

$$((\text{vybitá}(\text{batéria}) \vee \text{svieti}(\text{kontrolka})) \wedge \\ \neg(\text{vybitá}(\text{batéria}) \wedge \text{svieti}(\text{kontrolka}))).$$

Niekedy aj samotné *alebo* spája možnosti, o ktorých vieme, že sú vzájomne vylučné (na základe znalostí o fungovaní domény alebo z kontextu):

- Jarka sa nachádza doma alebo v škole. (Nemôže byť súčasne na dvoch miestach.)

Vid' *Znalosti na pozadí* ďalej.

### Jednoznačnosť rozkladu

Formuly s binárnymi spojkami sú vždy uzátvorkované. Dajú sa jednoznačne rozložiť na podformuly a interpretovať.

Slovenské tvrdenia so spojkami nie sú vždy jednoznačné:

- Karol je doma a Jarka je doma alebo je Bobík šťastný.

❓  $((\text{doma}(\text{Karol}) \wedge \text{doma}(\text{Jarka})) \vee \text{šťastný}(\text{Bobík}))$

❓  $(\text{doma}(\text{Karol}) \wedge (\text{doma}(\text{Jarka}) \vee \text{šťastný}(\text{Bobík})))$

- Karol je doma alebo Jarka je doma a Bobík je šťastný.

❓  $((\text{doma}(\text{Karol}) \vee \text{doma}(\text{Jarka})) \wedge \text{šťastný}(\text{Bobík}))$

❓  $(\text{doma}(\text{Karol}) \vee (\text{doma}(\text{Jarka}) \wedge \text{šťastný}(\text{Bobík})))$

### Jednoznačnosť rozkladu v slovenčine

Slovenčina má prostriedky podobné zátvorkám:

- Viacnásobný vetný člen (+*obaja*, *niekto* z):

- Karol aj Jarka sú (obaja) doma alebo je Bobík šťastný.

$((\text{doma}(\text{Karol}) \wedge \text{doma}(\text{Jarka})) \vee \text{šťastný}(\text{Bobík}))$

- Doma je Karol alebo Jarka a Bobík je šťastný.

Niekoľko z dvojice Karol a Jarka je doma a Bobík je šťastný.

$((\text{doma}(\text{Karol}) \vee \text{doma}(\text{Jarka})) \wedge \text{šťastný}(\text{Bobík}))$

- Kombinácie spojok *bud' ... , alebo ... , alebo ... ; aj ... , aj ... ; ani ... , ani ... ; a pod.*
  - Karol je doma a *bud'* je doma Jarka, *alebo* je Bobík šťastný, *alebo* jedno *aj* druhé. *Aj* Karol je doma, *aj* je doma Jarka *alebo* je Bobík šťastný.  
 $(\text{doma}(\text{Karol}) \wedge (\text{doma}(\text{Jarka}) \vee \text{šťastný}(\text{Bobík})))$
  - *Bud'* je doma Karol, *alebo* je doma Jarka a Bobík je šťastný, *alebo* *aj* *aj*.  $(\text{doma}(\text{Karol}) \vee (\text{doma}(\text{Jarka}) \wedge \text{šťastný}(\text{Bobík})))$

### Oblasť platnosti negácie

Výskyt negácie sa vzťahuje na *najkratšiu nasledujúcu formulu* – *oblasť platnosti* tohto výskytu.

- $((\neg \text{doma}(\text{Karol}) \wedge \text{doma}(\text{Jarka})) \vee \text{šťastný}(\text{Bobík}))$
- $(\neg (\text{doma}(\text{Karol}) \wedge \text{doma}(\text{Jarka}))) \vee \text{šťastný}(\text{Bobík}))$

Argument negácie je *uzátvorkovaný práve vtedy*, keď je *priamo* vytvorený binárnou spojkou:

- ✓  $\neg \neg (\text{doma}(\text{Karol}) \wedge \text{doma}(\text{Jarka}))$
- ✗  $\neg (\neg (\text{doma}(\text{Karol}) \wedge \text{doma}(\text{Jarka})))$

### Negácia rovnostného atómu

Rovnosť nie je spojka, preto:

- ✓  $\neg \text{Jarka} \doteq \text{Karol}$  – Jarka *nie* je Karol.
- ✗  $\neg (\text{Jarka} \doteq \text{Karol})$

Zátvorky sú zbytočné, lebo čítanie „*«Nie je pravda, že Jarka» sa rovná Karol*“ je nezmyselné:

1. Syntakticky: Negácia sa vzťahuje na formulu. Konštanta nie je formula, rovnosť s oboma argumentmi je.

2. Sémanticky: Negácia je funkcia na pravdivostných hodnotách. Konštanty označujú objekty domény. Objekty nie sú pravdivé ani nepravdivé.

*Dohoda 2.3.* Formulu  $\neg\tau \doteq \sigma$  budeme skrátene zapisovať  $\tau \not\equiv \sigma$ .

## 2.2 Implikácia

## Implikácia

Implikácia  $\rightarrow$  je binárna spojka približne zodpovedajúca podmienkovému podrad'ovaciemu súvetiu *ak ..., tak ...*

Vo formule  $(A \rightarrow B)$  hovoríme podformule  $A$  *antecedent* a podformule  $B$  *konzekvent*.

Formula vytvorená implikáciou je *nepravdivá* v *jedinom* prípade: antecedent je pravdivý a konzekvent nepravdivý.

**!** Tomuto významu nezodpovedajú všetky súvetia *ak ..., tak ...*:

Napr. veta „*Ak by Sarah prišla, Jim by prišiel tiež*“ je nepravdivá, keď ňou chceme povedať, že si myslíme, že išli rovnakým autobusom, ale v skutočnosti Jim išiel iným a zmeškal ho.

Implikácia plne nevystihuje prípady, keď *ak ... , tak ...* vyjadruje (neboolovský) vzťah príčina-následok (ako *pretože*).

*Ked' ..., potom ...* má často význam časovej následnosti, ktorý implikácia tiež nepostihuje.

### Nutná a postačujúca podmienka

Implikáciu vyjadrujú aj súvetia:

Jim príde, *ak* príde Kim.

Jim príde, *iba ak* príde Kim.

Vedľajšie vety (*príde Kim*) sú *podmienkami* hlavnej vety (*Jim príde*).

Ale je medzi nimi *podstatný* rozdiel:

Jim príde, ak príde Kim.  
postačujúca  
podmienka

Jim príde, iba ak príde Kim.  
nutná  
podmienka

### Postačujúca podmienka

Jim príde, *ak* príde Kim.

- Na to, aby prišiel Jim, *stačí*, aby prišla Kim.

- Teda, ak príde Kim, tak príde aj Jim.
- Nepravdivé, keď Kim príde, ale Jim *ne*príde.
- Zodpovedá teda ( $\text{príde}(\text{Kim}) \rightarrow \text{príde}(\text{Jim})$ ).

Vo všeobecnosti:

$$A, \text{ ak } B. \quad \rightsquigarrow \quad (B \rightarrow A)$$

Iné vyjadrenia:

- Jim príde, *pokiaľ* príde Kim.

### Nutná podmienka

Jim príde, *iba ak* príde Kim.

- Na to, aby prišiel Jim, *je nevyhnutné*, aby prišla Kim, ale nemusí to stačiť.
- Teda, ak Jim príde, tak príde aj Kim.
- Nepravdivé, keď Jim príde, ale Kim *ne*príde.
- Zodpovedá teda ( $\text{príde}(\text{Jim}) \rightarrow \text{príde}(\text{Kim})$ ).

Vo všeobecnosti:

$$A, \text{ iba ak } B. \quad \rightsquigarrow \quad (A \rightarrow B)$$

Iné vyjadrenia:

- Jim príde, *iba pokiaľ* s Kim.
- Jim príde *iba* spolu s Kim.
- Jim *ne*príde *bez* Kim.



### Nutná a postačujúca podmienka rukolapne

Určite by sa vám páčilo, keby z pravidiel predmetu vyplývalo:

Z logiky prejdete, *ak* odovzdáte všetky domáce úlohy.

*Stačilo* by odovzdať úlohy a *nebolo by nutné* urobiť nič iné.

Žiaľ, z našich pravidiel vyplýva:

Z logiky prejdete, *iba ak* odovzdáte všetky domáce úlohy.

Odovzdať úlohy *je nutné*, ale na prejdenie to *nestačí*.

### Súvetia formalizované implikáciou

$(A \rightarrow B)$  formalizuje (okrem iných) zložené výroky:

- Ak  $A$ , tak  $B$ .
- Ak  $A$ , tak aj  $B$ .
- Ak  $A$ ,  $B$ .
- Pokiaľ  $A$ , [tak (aj)]  $B$ .
- $A$ , iba/len/jedine ak/pokiaľ(/ked')  $B$ .
- $A$  nastane iba spolu s  $B$ .
- $A$  nenastane bez  $B$ .
- $B$ , ak/pokiaľ(/ked')  $A$ .

## 2.3 Ekvivalencia

### Ekvivalencia

Ekvivalencia  $\leftrightarrow$  vyjadruje, že ňou spojené výroky majú rovnakú pravdivostnú hodnotu.

Zodpovedá slovenským výrazom *ak a iba ak*; *vtedy a len vtedy*, *keď*; *práve vtedy*, *keď*; *rovnaký ... ako ...*; *taký ... ako ...*.

- Jim príde, ak a iba ak príde Kim. ( $\text{príde}(\text{Jim}) \leftrightarrow \text{príde}(\text{Kim})$ )
- Číslo  $n$  je párne práve vtedy, keď  $n^2$  je párne. ( $\text{párne}(n) \leftrightarrow \text{párne}(n^2)$ )
- Müller je taký Nemec, ako je Stirlitz Rus. ( $\text{Nemec}(\text{Müller}) \leftrightarrow \text{Rus}(\text{Stirlitz})$ )

## Ekvivalencia

Ekvivalencia ( $A \leftrightarrow B$ ) zodpovedá tvrdeniu, že  $A$  je nutnou aj postačujúcou podmienkou  $B$ .

Budeme ju preto považovať za *skratku* za formulu

$$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)).$$

## Ďalšie spojky a vetné konštrukcie

V slovenčine a iných prirodzených aj umelých jazykoch sa dajú tvoriť aj oveľa komplikovanejšie podmienené tvrdenia:

- Karol je doma, *ak* je Jarka v škole, *inak* má Jarka obavy.
- Karol je doma, *ak* je Jarka v škole, *inak* má Jarka obavy, *okrem* prípadov, keď je Bobík s ním.

Výrokovologické spojky sa dajú vytvoriť aj pre takéto konštrukcie, ale väčšinou sa to nerobí.

Na ich vyjadrenie stačia aj základné spojky. Mohli by sme pre ne vymyslieť označenie a považovať aj ako skratky, podobne ako ekvivalenciu.

## 2.4 Syntax výrokovologických formúl

### Syntax a sémantika formúl s výrokovologickými spojkami

Podobne ako pri atomických formulách, aj pri formulách s výrokovologickými spojkami potrebujeme *zadefinovať* — presne a záväzne — ich *syntax* (skladbu) a *sémantiku* (význam).

Niektoré definície preberieme, iné rozšírime alebo modifikujeme, ďalšie pridáme.

*Syntax* výrokovologických formúl logiky prvého rádu špecifikuje:

- z čoho sa skladajú,
- čím sú a akú majú štruktúru.

## Symbyly výrokovologickej časti logiky prvého rádu

**Definícia 2.4.** *Symbylmi jazyka  $\mathcal{L}$  výrokovologickej časti logiky prvého rádu sú:*

*mimologicke symbyly, ktorými sú*

- *individuové konštanty z nejakej neprázdnej spočítateľnej množiny  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$*
- *a predikátové symbyly z nejakej spočítateľnej množiny  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ ;*

*logicke symbyly, ktorými sú*

- *vyrokovologicke spojky  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$  (nazývané, v uvedenom poradí, symbyl negácie, symbyl konjunkcie, symbyl disjunkcie, symbyl implikácie);*
- *a symbyl rovnosti  $\doteq$ ;*

*pomocné symbyly  $(, )$  a  $,$  (ľavá zátvorka, pravá zátvorka a čiarka).*

Množiny  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$  a  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$  sú disjunktné. Pomocné ani logicke symbyly sa nevyskytujú v symbyloch z  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$  ani  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ . Každému symbylu  $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$  je priradená arita  $\text{ar}_{\mathcal{L}}(P) \in \mathbb{N}^+$ .

### Atomické formuly

Definícia atomických formúl je takmer rovnaká ako doteraz:

**Definícia 2.5.** Nech  $\mathcal{L}$  je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.

*Rovnostný atóm jazyka  $\mathcal{L}$  je každá postupnosť symbylov  $c_1 \doteq c_2$ , kde  $c_1$  a  $c_2$  sú individuové konštanty z  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ .*

*Predikátový atóm jazyka  $\mathcal{L}$  je každá postupnosť symbylov  $P(c_1, \dots, c_n)$ , kde  $P$  je predikátový symbyl z  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$  s aritou  $n$  a  $c_1, \dots, c_n$  sú individuové konštanty z  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ .*

*Atomickými formulami (skrátene atómami) jazyka  $\mathcal{L}$  súhrnne nazývame všetky rovnostné a predikátové atómy jazyka  $\mathcal{L}$ .*

Množinu všetkých atómov jazyka  $\mathcal{L}$  označujeme  $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ .

## Čo sú výrokovologické formuly?

Majme jazyk  $\mathcal{L}$ , kde  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Kim}, \text{Jim}, \text{Sarah}\}$  a  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{príde}^1\}$ .

Čo sú formuly tohto jazyka?

- Samotné atómy, napr.  $\text{príde}(\text{Sarah})$ .
- Negácie atómov, napr.  $\neg \text{príde}(\text{Sarah})$ .
- Atómy alebo aj ich negácie spojené spojkou, napr.  $(\neg \text{príde}(\text{Kim}) \vee \text{príde}(\text{Sarah}))$ .
- Ale negovať a spájať spojkami môžeme aj zložitejšie formuly, napr.  $(\neg(\text{príde}(\text{Kim}) \wedge \text{príde}(\text{Sarah})) \rightarrow (\neg \text{príde}(\text{Kim}) \vee \neg \text{príde}(\text{Sarah})))$ .

Ako to presne a úplne popíšeme?

## Čo sú výrokovologické formuly?

Ako presne a úplne popíšeme, čo je formula?

*Induktívnou* definíciou:

1. Povieme, čo sú základné formuly, ktoré sa nedajú rozdeliť na menšie formuly.
  - Podobne ako báza pri matematickej indukcii.
2. Opíšeme, ako sa z jednoduchších formúl skladajú zložitejšie.
  - Podobne ako indukčný krok pri matematickej indukcii.
3. Zabezpečíme, že nič iné nie je formulou.

## Formuly jazyka výrokovologickej časti logiky prvého rádu

**Definícia 2.6.** Nech  $\mathcal{L}$  je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. *Množina  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$  formúl jazyka  $\mathcal{L}$  je (3.) najmenšia množina postupností symbolov, ktorá spĺňa všetky nasledujúce podmienky:*

1. Každý atóm z  $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$  je formulou z  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ .
- 2.1. Ak  $A$  patrí do  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ , tak aj postupnosť symbolov  $\neg A$  patrí do  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$  a nazývame ju *negácia* formuly  $A$ .

- 2.2. Ak  $A$  a  $B$  sú v  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ , tak aj postupnosti symbolov  $(A \wedge B)$ ,  $(A \vee B)$  a  $(A \rightarrow B)$  patria do  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$  a nazývame ich postupne *konjunkcia*, *disjunkcia* a *implikácia* formúl  $A$  a  $B$ .

Každý prvok  $A$  množiny  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$  nazývame *formulou* jazyka  $\mathcal{L}$ .

### Dohody • Vytvorenie formuly

*Dohoda 2.7.* Formuly označujeme meta premennými  $A, B, C, X, Y, Z$ , podľa potreby aj s dolnými indexmi.

*Dohoda 2.8.* Pre každú dvojicu formúl  $A, B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$  je zápis  $(A \leftrightarrow B)$  *skratka* za formulu  $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$ .

Technicky  $(\cdot \leftrightarrow \cdot): \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$  funkcia na formulách definovaná ako  $(A \leftrightarrow B) = ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$  pre každé dve formuly  $A$  a  $B$ .

*Príklad 2.9.* Ako by sme podľa definície 2.6 mohli dokázať, že  $(\neg \text{príde}(\text{Kim}) \rightarrow (\text{príde}(\text{Jim}) \vee \text{príde}(\text{Sarah})))$  je formula? Teda, ako by sme ju podľa definície 2.6 mohli vytvoriť?

### Indukcia na konštrukciu formuly

**Veta 2.10** (Princíp indukcie na konštrukciu formuly). *Nech  $P$  je ľubovoľná vlastnosť formúl ( $P \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ ). Ak platí súčasne*

1. *každý atóm z  $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$  má vlastnosť  $P$ ,*
- 2.1. *ak formula  $A$  má vlastnosť  $P$ , tak aj  $\neg A$  má vlastnosť  $P$ ,*
- 2.2. *ak formuly  $A$  a  $B$  majú vlastnosť  $P$ , tak aj každá z formúl  $(A \wedge B)$ ,  $(A \vee B)$  a  $(A \rightarrow B)$  má vlastnosť  $P$ ,*

*tak všetky formuly majú vlastnosť  $P$  ( $P = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ ).*

### Vytvárajúca postupnosť

**Definícia 2.11.** *Vytvárajúcou postupnosťou nad jazykom  $\mathcal{L}$  výrokovologickej časti logiky prvého rádu je ľubovoľná konečná postupnosť  $A_0, \dots, A_n$  postupností symbolov, ktorej každý člen*

- je atóm z  $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ , alebo
- má tvar  $\neg A$ , pričom  $A$  je niektorý predchádzajúci člen postupnosti, alebo
- má jeden z tvarov  $(A \wedge B)$ ,  $(A \vee B)$ ,  $(A \rightarrow B)$ , kde  $A$  a  $B$  sú niektoré predchádzajúce členy postupnosti.

Vytvárajúcou postupnosťou pre  $X$  je ľubovoľná vytvárajúca postupnosť, ktorej posledným prvkom je  $X$ .

### Formula a existencia vytvárajúcej postupnosti

**Tvrdenie 2.12.** *Postupnosť symbolov  $A$  je formulou vtt existuje vytvárajúca postupnosť pre  $A$ .*

Osnova dôkazu.  $(\Rightarrow)$  Indukciou na konštrukciu formuly

$(\Leftarrow)$  Indukciou na dĺžku vytvárajúcej postupnosti

□

vtt skracuje „vtedy a len vtedy, keď“.

Vytvárajúcu postupnosť by sme mohli použiť na alternatívnu definíciu formúl.

### (Ne)jednoznačnosť rozkladu formúl výrokovej logiky

Čo keby sme zadefinovali „formuly“ takto?

#### Definícia „formúl“



Nech  $\mathcal{L}$  je jazyk výrovkologickej časti logiky prvého rádu. Množina  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$  „formúl“ jazyka  $\mathcal{L}$  je (3.) *najmenšia* množina postupností symbolov, ktorá spĺňa všetky nasledujúce podmienky:

1. Každý atóm z  $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$  je „formulou“ z  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ .
- 2.1. Ak  $A$  patrí do  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ , tak aj postupnosť symbolov  $\neg A$  patrí do  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ .
- 2.2. Ak  $A$  a  $B$  sú v  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ , tak aj postupnosti symbolov  $A \wedge B$ ,  $A \vee B$  a  $A \rightarrow B$  patria do  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ .
- 2.3. ak  $A$  patrí do  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ , tak aj postupnosť symbolov  $(A)$  je v  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ .

Každý prvok  $A$  množiny  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$  nazývame „formulou“ jazyka  $\mathcal{L}$ .

Čo znamená „formula“ ( $\text{príde}(\text{Jim}) \rightarrow \text{príde}(\text{Kim}) \rightarrow \neg \text{príde}(\text{Sarah})$ )?

Formulu by sme mohli čítať ako  $A = (\text{príde}(\text{Jim}) \rightarrow (\text{príde}(\text{Kim}) \rightarrow \neg \text{príde}(\text{Sarah})))$  alebo ako  $B = ((\text{príde}(\text{Jim}) \rightarrow \text{príde}(\text{Kim})) \rightarrow \neg \text{príde}(\text{Sarah}))$ .

Čítanie  $A$  hovorí, že Sarah nepríde, ak prídu Jim a Kim súčasne. To neplatí v *práve jednej* situácii: keď všetci prídu.

Čítanie  $B$  hovorí, že Sarah nepríde, ak alebo nepríde Jim alebo príde Kim. To však neplatí v *aspoň dvoch* rôznych situáciách: keď prídu všetci a keď príde Sarah a Kim, ale nie Jim.

### Jednoznačnosť rozkladu formúl výrokovej logiky

Pre našu definíciu formúl platí:

**Tvrdenie 2.13** (o jednoznačnosti rozkladu). *Pre každú formulu  $X \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$  v jazyku  $\mathcal{L}$  platí práve jedna z nasledujúcich možností:*

- $X$  je atóm z  $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ .
- Existuje práve jedna formula  $A \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$  taká, že  $X = \neg A$ .
- Existujú práve jedna dvojica formúl  $A, B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$  a jedna spojka  $b \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$  také, že  $X = (A \ b \ B)$ .

### Problémy s vytvárajúcou postupnosťou

Vytvárajúca postupnosť popisuje konštrukciu formuly podľa definície formúl:

$\text{príde}(\text{Jim}), \text{príde}(\text{Sarah}), \neg \text{príde}(\text{Jim}), \text{príde}(\text{Kim}),$   
 $\neg \text{príde}(\text{Sarah}), (\neg \text{príde}(\text{Jim}) \wedge \text{príde}(\text{Kim})),$   
 $((\neg \text{príde}(\text{Jim}) \wedge \text{príde}(\text{Kim})) \rightarrow \neg \text{príde}(\text{Sarah}))$

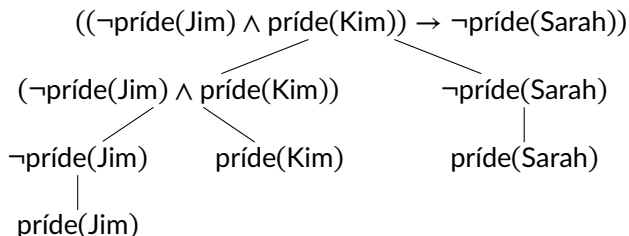
ale

- môže obsahovať „zbytočné“ prvky;
- nie je jasné *ktoré* z predchádzajúcich formúl sa *bezprostredne* použijú na vytvorenie nasledujúcej formuly.

Akou „dátovou štruktúrou“ vieme vyjadriť konštrukciu formuly bez týchto problémov?

## Vytvárajúci strom

Konštrukciu si vieme predstaviť ako *strom*:



Takéto stromy voláme *vytvárajúce*.

Ako ich *presne* a *všeobecne* popíšeme — zdefinujeme?

Podobne ako sa definuje napr. binárny vyhľadávací strom.

## Vytvárajúci strom formuly

**Definícia 2.14.** *Vytvárajúci strom*  $T$  pre formulu  $X$  je binárny strom obsahujúci v každom vrchole formulu, pričom platí:

- v koreni  $T$  je formula  $X$ ,
- ak vrchol obsahuje formulu  $\neg A$ , tak má práve jedno dieťa, ktoré obsahuje formulu  $A$ ,
- ak vrchol obsahuje formulu  $(A \ b \ B)$ , kde  $b$  je jedna z binárnych spojok, tak má dve deti, pričom ľavé dieťa obsahuje formulu  $A$  a pravé formulu  $B$ ,
- vrcholy obsahujúce atómy sú listami.

## Syntaktické vzťahy formúl

Uvažujme formulu:

$$((\neg \text{príde}(\text{Jim}) \wedge \text{príde}(\text{Kim})) \rightarrow \neg \text{príde}(\text{Sarah}))$$

Ako nazveme formuly, z ktorých vznikla?

$$\text{príde}(\text{Sarah}), \neg \text{príde}(\text{Jim}), (\neg \text{príde}(\text{Jim}) \wedge \text{príde}(\text{Kim})), \dots$$



Ako nazveme formuly, z ktorých *bezprostredne/priamo* vznikla?

$$(\neg \text{príde}(\text{Jim}) \wedge \text{príde}(\text{Kim})) \quad \text{a} \quad \neg \text{príde}(\text{Sarah})$$

Ako tieto pojmy presne zdefinujeme?

## Podformuly

**Definícia 2.15** (Priama podformula). Pre všetky formuly  $A$  a  $B$ :

- Priamou podformulou  $\neg A$  je formula  $A$ .
- Priamymi podformulami  $(A \wedge B)$ ,  $(A \vee B)$  a  $(A \rightarrow B)$  sú formuly  $A$  (ľavá priama podformula) a  $B$  (pravá priama podformula).

**Definícia 2.16** (Podformula). Vzťah *byť podformulou* je najmenšia relácia na formulách spĺňajúca pre všetky formuly  $X$ ,  $Y$  a  $Z$ :

- $X$  je podformulou  $X$ .
- Ak  $X$  je priamou podformulou  $Y$ , tak  $X$  je podformulou  $Y$ .
- Ak  $X$  je podformulou  $Y$  a  $Y$  je podformulou  $Z$ , tak  $X$  je podformulou  $Z$ .

Formula  $X$  je *vlastnou podformulou* formuly  $Y$  práve vtedy, keď  $X$  je podformulou  $Y$  a  $X \neq Y$ .

## Meranie syntaktickej zložitosti formúl

Miera zložitosti/veľkosti formuly:

- Jednoduchá: dĺžka, teda počet symbolov
  - Počíta aj pomocné symboly.
  - Nič nemá mieru 0, ani atómy.
- Lepšia: počet netriviálnych krokov pri konštrukcii formuly
  - pridanie negácie,
  - spojenie formúl spojkou.

Túto lepšiu mieru nazývame *stupeň formuly*.

*Príklad 2.17.* Aký je stupeň formuly  $((\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg \text{príde}(\text{Kim})) \wedge \neg (\text{príde}(\text{Sarah}) \rightarrow \text{príde}(\text{Kim})))$ ?

## Meranie syntaktickej zložitosti formúl

Ako stupeň zadefinujeme?

Podobne ako sme zadefinovali formuly – induktívne:

1. určíme hodnotu stupňa pre atomické formuly,
2. určíme, ako zo stupňa priamych podformúl vypočítame stupeň z nich zloženej formuly.

## Stupeň formuly

**Definícia 2.18** (Stupeň formuly). Pre všetky formuly  $A$  a  $B$  a všetky  $n, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ :

- Atomická formula je stupňa 0.
- Ak  $A$  je formula stupňa  $n$ , tak  $\neg A$  je stupňa  $n + 1$ .
- Ak  $A$  je formula stupňa  $n_1$  a  $B$  je formula stupňa  $n_2$ , tak  $(A \wedge B)$ ,  $(A \vee B)$  a  $(A \rightarrow B)$  sú stupňa  $n_1 + n_2 + 1$ .

**Definícia 2.18** (Stupeň formuly presnejšie a symbolicky). *Stupeň*  $\deg(X)$  formuly  $X \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$  definujeme pre všetky formuly  $A, B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$  nasledovne:

- $\deg(A) = 0$ , ak  $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ ,
- $\deg(\neg A) = \deg(A) + 1$ ,
- $\deg((A \wedge B)) = \deg((A \vee B)) = \deg((A \rightarrow B)) = \deg(A) + \deg(B) + 1$ .

## Indukcia na stupeň formuly

Pomocou stupňa vieme indukciu na konštrukciu formuly zredukovať na špeciálny prípad matematickej indukcie:

**Veta 2.19** (Princíp indukcie na stupeň formuly). *Nech  $P$  je ľubovoľná vlastnosť formúl ( $P \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ ). Ak platí súčasne*

1. *báza indukcie: každá formula stupňa 0 má vlastnosť  $P$ ,*
2. *indukčný krok: pre každú formulu  $X$  z predpokladu, že všetky formuly menšieho stupňa ako  $\deg(X)$  majú vlastnosť  $P$ , vyplýva, že aj  $X$  má vlastnosť  $P$ ,*

*tak všetky formuly majú vlastnosť  $P$  ( $P = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ ).*

## 2.5 Sémantika výrokovologických formúl

### Sémantika výrokovej logiky

Význam formúl výrokovologickej časti logiky prvého rádu popíšeme podobne ako význam atomických formúl pomocou *štruktúr*.

#### Štruktúra pre jazyk

Definícia štruktúry takmer nemeňte:

**Definícia 2.20.** Nech  $\mathcal{L}$  je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. *Štruktúrou* pre jazyk  $\mathcal{L}$  nazývame dvojicu  $\mathcal{M} = (D, i)$ , kde  $D$  je ľubovoľná neprázdna množina nazývaná *doména* štruktúry  $\mathcal{M}$ ;  $i$  je zobrazenie, nazývané *interpretačná funkcia* štruktúry  $\mathcal{M}$ , ktoré

- každému symbolu konštanty  $c$  jazyka  $\mathcal{L}$  priraduje prvok  $i(c) \in D$ ;
- každému predikátovému symbolu  $P$  jazyka  $\mathcal{L}$  s aritou  $n$  priraduje množinu  $i(P) \subseteq D^n$ .

#### Pravdivosť formuly v štruktúre

**Definícia 2.21.** Nech  $\mathcal{M} = (D, i)$  je štruktúra pre jazyk  $\mathcal{L}$  výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Reláciu *formula  $A$  je pravdivá v štruktúre  $\mathcal{M}$*  ( $\mathcal{M} \models A$ ) definujeme *induktívne* pre všetky arity  $n > 0$ , všetky predikátové symboly  $P$  s aritou  $n$  všetky konštanty  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , a všetky formuly  $A, B$  jazyka  $\mathcal{L}$  nasledovne:

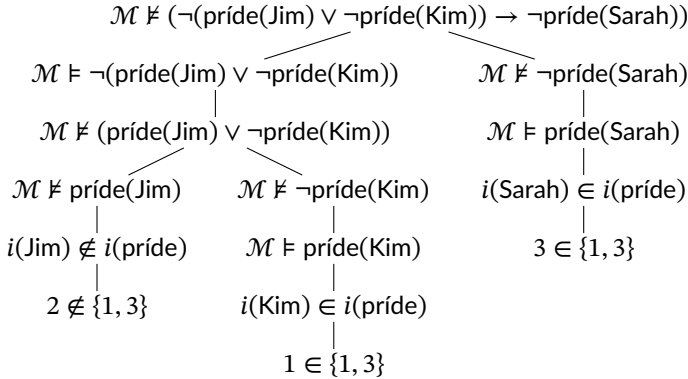
- $\mathcal{M} \models c_1 \doteq c_2$  vtt  $i(c_1) = i(c_2)$ ,
- $\mathcal{M} \models P(c_1, \dots, c_n)$  vtt  $(i(c_1), \dots, i(c_n)) \in i(P)$ ,
- $\mathcal{M} \models \neg A$  vtt  $\mathcal{M} \not\models A$ ,
- $\mathcal{M} \models (A \wedge B)$  vtt  $\mathcal{M} \models A$  a zároveň  $\mathcal{M} \models B$ ,
- $\mathcal{M} \models (A \vee B)$  vtt  $\mathcal{M} \models A$  alebo  $\mathcal{M} \models B$ ,
- $\mathcal{M} \models (A \rightarrow B)$  vtt  $\mathcal{M} \not\models A$  alebo  $\mathcal{M} \models B$ ,

kde  $\mathcal{M} \not\models A$  skrakuje  *$A$  nie je pravdivá v  $\mathcal{M}$* .

## Vyhodnotenie pravdivosti formuly

*Príklad 2.22* (Vyhodnotenie pravdivosti formuly v štruktúre). Majme štruktúru  $\mathcal{M} = (D, i)$  pre jazyk o party, kde  $D = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $i(\text{Kim}) = 1$ ,  $i(\text{Jim}) = 2$ ,  $i(\text{Sarah}) = 3$ ,  $i(\text{príde}) = \{1, 3\}$ .

Formuly vyhodnocujeme podľa definície postupom zdola nahor (od atómov cez zložitejšie podformuly k cieľovej formule):



## Vyhodnotenie pravdivosti formuly

*Príklad 2.23* (Vyhodnotenie pravdivosti formuly v štruktúre). Majme štruktúru  $\mathcal{M} = (D, i)$  pre jazyk o party, kde  $D = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $i(\text{Kim}) = 1$ ,  $i(\text{Jim}) = 2$ ,  $i(\text{Sarah}) = 3$ ,  $i(\text{príde}) = \{1, 3\}$ .

Vyhodnotenie pravdivosti môžeme zapísať aj tabuľkou:

	$p(J)$	$p(K)$	$\neg p(K)$	$(p(J) \vee \neg p(K))$	$\neg(p(J) \vee \neg p(K))$	...
$\mathcal{M}$	$\not\models$	$\models$	$\not\models$	$\not\models$	$\models$	

	$p(S)$	$\neg p(S)$	$(\neg(p(J) \vee \neg p(K)) \rightarrow \neg p(S))$
...	$\models$	$\not\models$	$\not\models$

kde  $p = \text{príde}$ ,  $K = \text{Kim}$ ,  $J = \text{Jim}$  a  $S = \text{Sarah}$ .

Všimnite si, že v záhlaví tabuľky je vytvárajúca postupnosť vyhodnovenanej formuly.

## Hľadanie štruktúry

*Príklad 2.24* (Nájdenie štruktúry, v ktorej je formula pravdivá). V akej štruktúre  $\mathcal{M} = (D, i)$  je pravdivá formula  $\mathcal{M} \models (\neg(\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg \text{príde}(\text{Kim})) \rightarrow \neg \text{príde}(\text{Sarah}))$ ?

Na zodpovedanie je dobré postupovať podľa definície pravdivosti zhora nadol (od cieľovej formuly cez podformuly k atómom):

$\mathcal{M} \models (\neg(\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg \text{príde}(\text{Kim})) \rightarrow \neg \text{príde}(\text{Sarah}))$  vtt  $\mathcal{M} \not\models \neg(\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg \text{príde}(\text{Kim}))$  alebo  $\mathcal{M} \models \neg \text{príde}(\text{Sarah})$  vtt  $\mathcal{M} \models (\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg \text{príde}(\text{Kim}))$  alebo  $\mathcal{M} \not\models \text{príde}(\text{Sarah})$  vtt  $\mathcal{M} \models \text{príde}(\text{Jim})$  alebo  $\mathcal{M} \models \neg \text{príde}(\text{Kim})$  alebo  $\mathcal{M} \not\models \text{príde}(\text{Sarah})$  vtt  $i(\text{Jim}) \in i(\text{príde})$  alebo  $i(\text{Kim}) \notin i(\text{príde})$  alebo  $i(\text{Sarah}) \notin i(\text{príde})$ .

## 2.6 Teórie a ich modely

### Teórie v neformálnej logike

Medzi základnými logickými pojmami z úvodnej prednášky boli teória a model.

Neformálne je *teória* súbor tvrdení, ktoré pokladáme za pravdivé.

Zvyčajne popisujú našu predstavu o zákonitostiach platných v nejakej časti sveta a pozorovania o jej stave.

*Príklad 2.25.* Máme troch nových známych — Kim, Jima a Sarah. Organizujeme párty a P0: chceme, aby na ňu prišiel niekto z nich. Od spoločných kamarátov sme sa ale dozvedeli o ich požiadavkách:

P1: Sarah nepríde na párty, ak príde Kim.

P2: Jim príde na párty, len ak príde Kim.

P3: Sarah nepríde bez Jima.

### Výrokovologické teórie

V logike prvého rádu tvrdenia zapisujeme formulami. Teóriu preto budeme chápať ako súbor (čiže množinu) formúl.

**Definícia 2.26.** Nech  $\mathcal{L}$  je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.

Každú množinu formúl jazyka  $\mathcal{L}$  budeme nazývať *teóriou* v jazyku  $\mathcal{L}$ .

Príklad 2.27.

$$T_{\text{party}} = \{((\text{príde}(\text{Kim}) \vee \text{príde}(\text{Jim})) \vee \text{príde}(\text{Sarah})), \\ (\text{príde}(\text{Kim}) \rightarrow \neg \text{príde}(\text{Sarah})), \\ (\text{príde}(\text{Jim}) \rightarrow \text{príde}(\text{Kim})), \\ (\text{príde}(\text{Sarah}) \rightarrow \text{príde}(\text{Jim}))\}$$

## Modely teórií

Neformálne je *modelom* teórie stav vybranej časti sveta, v ktorom sú všetky tvrdenia v teórii pravdivé.

Pre logiku prvého rádu stavy sveta vyjadrujú štruktúry.

Príklad 2.28 (Model teórie o party).

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= (\{k, j, s, e, h\}, i), \\ i(\text{Kim}) &= k, \quad i(\text{Jim}) = j, \quad i(\text{Sarah}) = s, \\ i(\text{príde}) &= \{k, j, e\}; \\ \left. \begin{aligned} \mathcal{M} &\models ((\text{príde}(\text{Kim}) \vee \text{príde}(\text{Jim})) \vee \text{príde}(\text{Sarah})) \\ \mathcal{M} &\models (\text{príde}(\text{Kim}) \rightarrow \neg \text{príde}(\text{Sarah})) \\ \mathcal{M} &\models (\text{príde}(\text{Jim}) \rightarrow \text{príde}(\text{Kim})) \\ \mathcal{M} &\models (\text{príde}(\text{Sarah}) \rightarrow \text{príde}(\text{Jim})) \end{aligned} \right\} \mathcal{M} \models T_{\text{party}} \end{aligned}$$

## Model teórie

**Definícia 2.29** (Model). Nech  $\mathcal{L}$  je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu a nech  $T$  je teória v jazyku  $\mathcal{L}$  a  $\mathcal{M}$  je štruktúra pre jazyk  $\mathcal{L}$ .

Teória  $T$  je *pravdivá* v  $\mathcal{M}$ , skrátene  $\mathcal{M} \models T$ , vtt každá formula  $X$  z  $T$  je pravdivá v  $\mathcal{M}$  (teda  $\mathcal{M} \models X$ ).

Hovoríme tiež, že  $\mathcal{M}$  je *modelom*  $T$ .

Teória  $T$  je *nepravdivá* v  $\mathcal{M}$ , skrátene  $\mathcal{M} \not\models T$ , vtt  $T$  nie je pravdivá v  $\mathcal{M}$ .

## 2.7 Správnosť a vernosť formalizácie

### Skúška správnosti formalizácie

*Správnou formalizáciou* výroku je taká formula, ktorá je pravdivá za tých istých okolností ako formalizovaný výrok.

Formuly dokážeme vyhodnocovať iba v štruktúrach.  
Preto *za tých istých okolností* znamená *v tých istých štruktúrach*.

### Vernosť formalizácie

Výrok „*Nie je pravda, že Jarka a Karol sú doma*“ sa dá *správne* formalizovať ako

$$\neg(\text{doma}(\text{Jarka}) \wedge \text{doma}(\text{Karol})),$$

ale rovnako *správna* je aj formalizácia

$$(\neg\text{doma}(\text{Jarka}) \vee \neg\text{doma}(\text{Karol})),$$

lebo je pravdivá v rovnakých štruktúrach.

Pri formalizácii sa snažíme o správnosť, ale zároveň *uprednostňujeme* formalizácie, ktoré *vernejšie* zachytávajú štruktúru výroku.

Zvyšuje to pravdepodobnosť, že sme neurobili chybu, a uľahčuje hľadanie chýb.

Prvá formalizácia je vernejšia ako druhá, a preto ju uprednostníme.

### Znalosti na pozadí

Na praktických cvičeniach ste sa stretli so *znalosťami na pozadí* (background knowledge): vzájomná výlučnosť vlastností *je Nemec a je Rus*, ktorá v úlohe nebola explicitne uvedená.

Uprednostňujeme ich vyjadrovanie *samostatnými formulami*.

Rovnaké dôvody ako pre vernosť.

### Skutočné súčasti významu a konverzačné implikatury

Niektoré tvrdenia *vyznievajú* silnejšie, ako naozaj sú:

- „*Prílohou sú zemiaky alebo šalát*“ môže niekomu znieť ako exkluzívna disjunkcia.
- „*Prejdete, ak všetky úlohy vyriešite na 100 %*“ znie mnohým ako ekvivalencia.

*Skutočnú časť významu* tvrdenia *nemôžeme poprieť* v dodatku k pôvodnému tvrdeniu bez sporu s ním.

- Keď k tvrdeniu „*Karol a Jarka sú doma*“ dodáme „*Ale Karol nie je doma*,“ dostaneme sa do sporu.

Takže „*Karol je doma*“ je skutočne časťou významu pôvodného výroku.

### Skutočné súčasti významu a konverzačné implikatúry

Časť významu tvrdenia, ktorú *môžeme poprieť* dodatkami bez sporu s pôvodným tvrdením, sa nazýva *konverzačná implikatúra* (H. P. Grice). *Nie je skutočnou časťou významu pôvodného tvrdenia.*

- Prílohou sú zemiaky alebo šalát. *Ale môžete si (pol na pol alebo za príplatok) dať aj oboje.*

Dodatok popiera exkluzívnosť, ale nie je v spore s tvrdením. Takže exkluzívnosť nie je súčasťou významu základného tvrdenia, je to iba konverzačná implikatúra.

- Prejdete, ak všetky úlohy vyriešite na 100 %. *Ale nemusíte mať všetko na 100 %, aby ste prešli.*

Dodatok popiera implikáciu „*Prejdete*, iba ak *všetky úlohy vyriešite na 100 %*,“ ale nie je v spore s pôvodným tvrdením. Táto implikácia teda nie je skutočne časťou významu základného tvrdenia, je to len konverzačná implikatúra.

## Literatúra