Dôkazy a výrokovologické tablá

5. prednáška · Matematika (4): Logika pre informatikov

Ján Kľuka, Ján Mazák

Letný semester 2021/2022

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej informatiky

Obsah 5. prednášky

Rekapitulácia

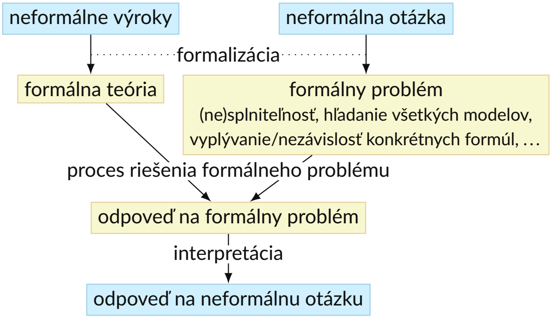
Minulý týždeň sme sa zaoberali:

- vlastnosťami formúl vzhľadom na všetky ohodnotenia:
  - tautológia,
  - splniteľnosť,
  - falzifikovateľnosť,
  - nesplniteľnosť;
- vzťahmi formúl:
  - ekvivalencia;
- vzťahom vyplývania a ekvivalencie s tautológiami;
- transformáciou formúl medzi jazykmi so zachovaním splniteľnosti.

Dôkazy a výrokovologické tablá

Riešenie slovných úloh pomocou formálnej logiky

V 3. sade teoretických úloh (AIN) sme riešili neformálne zadané problémy pomocou ich formálnej verzie:



Formálny problém sme riešili hrubou silou a sémanticky — rozborom všetkých ohodnotení. Žiadne naozajstné usudzovanie. Výsledok zodpovedal výsledku neformálneho úsudku o probléme.

Dôkazy neformálnych meta tvrdení

V 4. sade teoretických úloh sme
dokazovali tvrdenia o vyplývaní, splniteľnosti a tautológiách:

- matematické tvrdenia v slovenčine;
- dôkazy tiež v slovenčine.

Usudzovanie, ale neformálne.

Formalizácia dôkazov

Logiku zaujíma jazyk a usudzovanie.

Výroky v slovenčine (jazyk) sme sformalizovali
ako formuly v jazyku logiky prvého rádu

- matematická „dátová štruktúra“:
  postupnosti symbolov s induktívnymi pravidlami konštrukcie;
- javovská dátová štruktúra:
  stromy objektov podtried triedy `Formula`.

Dôkazy (usudzovanie) začneme formalizovať tento týždeň.

Čo sú dôkazy a prečo sa dokazuje

Dôkaz je úvaha, ktorá zdôvodňuje, prečo je nejaký záver logickým dôsledkom predpokladov.

Načo sú vlastne dobré **dôkazy**?

- Môžeme nimi **presvedčiť** iných o pravdivosti svojich záverov.
- Zvyčajne sú menej prácne a **pochopiteľnejšie** ako rozbor všetkých možností.

  Už 16 možností v 3. sade úloh bolo prácne rozobrať.

  Ak je možností nekonečne veľa, rozbor všetkých možností ani nie je možný.
- Odvodzovaním podľa pravidiel dôkazov môžeme skúmať, aké dôsledky má naša teória aj bez konkrétneho cieľa.

Prečo formalizovať dôkazy

Načo je dobré formalizovať dôkazy?

- Aby sme si ujasnili, čo sú dôkazy a kedy sú správne.
  Správna argumentácia nie je dôležitá iba v matematike:
  - uvažovanie o správnosti našich programov či dopytov,
  - základ kritického/vedeckého myslenia v bežnom živote.
- Aby sme vedeli naprogramovať dátové štruktúry na ich reprezentáciu v počítači.
- Aby sme mohli dokazovanie automatizovať.
  - Automatické dokazovanie je jeden z cieľov umelej inteligencie.
- Aby sme zistili, čo sa dá a čo sa nedá dokázať.
  - Prakticky:
    Čo sa nedá dokázať, toho dôkaz sa nedá automatizovať.
  - Filozoficky:
    Hranice poznania a chápania.

Dôkazy a výrokovologické tablá

Druhy dôkazov

Druhy dôkazov

V matematike sa na to používa viac typov dôkazov:

- priamy,
- sporom,
- nepriamy,
- analýzou prípadov,

ktoré sa často kombinujú.

Priamy dôkaz a analýza prípadov

Priamy dôkaz

Z predpokladov postupným odvodzovaním jednoduchých logických dôsledkov dospejeme k požadovanému záveru.

Dôkaz analýzou (rozborom) prípadov

Keď predpoklady obsahujú **disjunkciu**, dokážeme požadovaný záver **z každého disjunktu** a ostatných predpokladov **nezávisle** od ostatných disjunktov.

Ak aj predpoklady disjunkciu neobsahujú, môžeme rozoberať prípady, že je nejaké pomocné tvrdenie pravdivé alebo nepravdivé.

Príklad priameho dôkazu s analýzou prípadov

Príklad 5.1 (Párty po covide · priamy dôkaz s analýzou prípadov)

(A_1) Anka príde, iba ak príde Betka a Cyril.

(A_2) Ak príde Betka alebo Dávid, príde aj Evka.

(A_3) Evka nepríde, ak príde Fero.

Teda: (X) Ak príde Anka, tak nepríde Fero.

Dôkaz (priamo). Predpokladajme, že tvrdenia A_1 až A_3 sú pravdivé.
Dokážme X.

Príklad priameho dôkazu s analýzou prípadov

Príklad 5.1 (Párty po covide · priamy dôkaz s analýzou prípadov)

(A_1) Anka príde, iba ak príde Betka a Cyril.
(A_2) Ak príde Betka alebo Dávid, príde aj Evka.
(A_3) Evka nepríde, ak príde Fero.

Teda: (X) Ak príde Anka, tak nepríde Fero.

Dôkaz (priamo). Predpokladajme, že tvrdenia A_1 až A_3 sú pravdivé.
Dokážme X.

Ak nepríde Anka, X je pravdivé (X je implikácia a jej antecedent je nepravdivý).

Preto predpokladajme, že Anka príde.
Podľa A_1 potom musia prísť aj Betka a Cyril.
Preto príde Betka, a teda príde Betka alebo Dávid.
Podľa A_2 potom príde aj Evka.
Pretože podľa A_3 by Evka neprišla, ak by prišiel Fero, ale Evka príde,
musí byť pravda, že Fero nepríde.
Preto je tvrdenie X opäť pravdivé (X je implikácia a jej konzekvent je pravdivý).

Dôkaz sporom a nepriamy dôkaz

Dôkaz sporom

Príjmeme predpoklady, ale **spochybníme záver** — predpokladáme, že je nepravdivý.
Postupným odvodzovaním jednoduchých logických dôsledkov dospejeme k **sporu** s predpokladom alebo iným dôsledkom.
Záver teda nemôže byť nepravdivý,
preto ak sú pravdivé predpoklady, je nutne pravdivý, vyplýva z nich.

Nepriamy dôkaz — variácia dôkazu sporom

Predpokladáme, že záver je nepravdivý. Postupným odvodzovaním jednoduchých logických dôsledkov dospejeme k nepravdivosti niektorého z predpokladov.
Tým dokážeme:
Ak je nepravdivý záver, tak sú nepravdivé predpoklady.
Obmena: Ak sú pravdivé predpoklady, je pravdivý záver.

Príklad dôkazu sporom

Príklad 5.2 (Párty po covide · dôkaz sporom)

(A_1) Anka príde, iba ak príde Betka a Cyril.
(A_2) Ak príde Betka alebo Dávid, príde aj Evka.
(A_3) Evka nepríde, ak príde Fero.

Teda: (X) Ak príde Anka, tak nepríde Fero.

Dôkaz (sporom). Predpokladajme, že tvrdenia A_1 až A_3 sú pravdivé, ale X je nepravdivé.

Príklad dôkazu sporom

Príklad 5.2 (Párty po covide · dôkaz sporom)

(A_1) Anka príde, iba ak príde Betka a Cyril.
(A_2) Ak príde Betka alebo Dávid, príde aj Evka.
(A_3) Evka nepríde, ak príde Fero.

Teda: (X) Ak príde Anka, tak nepríde Fero.

Dôkaz (sporom). Predpokladajme, že tvrdenia A_1 až A_3 sú pravdivé, ale X je nepravdivé.

Predpokladáme teda, že príde Anka a príde aj Fero.
Preto príde Fero, a teda podľa predpokladu A_3 Evka nepríde.
Zároveň vieme, že príde Anka, a podľa A_1 teda prídu aj Betka a Cyril.
Preto príde Betka, a teda príde Betka alebo Dávid.
Podľa A_2 potom príde aj Evka.
To je však spor z predchádzajúcim dôsledkom A_3, že Evka nepríde.

Predpoklad, že X je nepravdivé viedol k sporu,
preto X je pravdivé.

Výhody dôkazu sporom

Dôkaz sporom je veľmi konkrétna ukážka kritického,
vedeckého myslenia:

1. Pochybujeme o pravdivosti tvrdenia.
2. Vyvrátením tejto pochybnosti sa presvedčíme o pravdivosti.

Má ale aj „technickú“ výhodu:
Nemusíme pri ňom až tak tápať, ako dospejeme k cieľu, pretože

- dostaneme viac predpokladov;
- máme jednoduchý cieľ: nájsť spor;
- väčšinou stačí tvrdenia iba zjednodušovať.

Odvodzovanie jednoduchých dôsledkov

Kroky dôkazu by mali odvodzovať jednoduché dôsledky.

Tie potom používame na odvodenie ďalších dôsledkov.

Aký dôsledok je jednoduchý?

Závisí od čitateľa dôkazu — musí byť schopný ho overiť.

Matematici (a učitelia) radi robia väčšie skoky
a nechajú čitateľa (študenta) domýšľať si, prečo ich mohli urobiť.

Vyučujúci chcú od študentov malé kroky —
aby si overili, že študent skutočne uvažuje správne.

Dôkazy a výrokovologické tablá

Výrokovologické tablá

Jednoduché dôsledky podľa definície pravdivosti formúl

Pozrime sa znova na príklad dôkazu sporom:

1. Sformalizujme ho.
2. Uvedomme si, čo vlastne dokazujeme.
3. Všímajme si, aké kroky robíme.

Príklad dôkazu sporom s formulami

Príklad 5.3 (Párty po covide · formalizovaný dôkaz sporom)

Dokážme, že z teórie $T = \{A_1, A_2, A_3\}$, kde

$A_1 = (\mathtt{p}(\mathtt{A}) \to (\mathtt{p}(\mathtt{B}) \land \mathtt{p}(\mathtt{C})))$	Anka príde, iba ak príde Betka a Cyril.
$A_2 = ((\mathtt{p}(\mathtt{B}) \lor \mathtt{p}(\mathtt{D})) \to \mathtt{p}(\mathtt{E}))$	Ak príde Betka alebo Dávid, príde aj Evka.
$A_3 = (\mathtt{p}(\mathtt{F}) \to \neg\mathtt{p}(\mathtt{E}))$,	Evka nepríde, ak príde Fero.

vyplýva formula X, pričom

$X = (\mathtt{p}(\mathtt{A}) \to \neg\mathtt{p}(\mathtt{F}))$	Ak príde Anka, tak nepríde Fero.

Príklad 5.3 (Párty po covide · formal. dôkaz sporom, pokrač.)

Dôkaz (sporom). Predpokladajme, pre nejaké ohodnotenie v platí, že

(1) $v \models_{p} (\mathtt{p}(\mathtt{A}) \to (\mathtt{p}(\mathtt{B}) \land \mathtt{p}(\mathtt{C})))$,

(2) $v \models_{p} ((\mathtt{p}(\mathtt{B}) \lor \mathtt{p}(\mathtt{D})) \to \mathtt{p}(\mathtt{E}))$,

(3) $v \models_{p} (\mathtt{p}(\mathtt{F}) \to \neg\mathtt{p}(\mathtt{E}))$, ale

(4) $v \not\models_{p} (\mathtt{p}(\mathtt{A}) \to \neg\mathtt{p}(\mathtt{F}))$.

Podľa definície pravdivosti v ohodnotení, potom máme:

(5) $v \models_{p} \mathtt{p}(\mathtt{A})$ zo (4) a súčasne

(6) $v \not\models_{p} \neg\mathtt{p}(\mathtt{F})$ zo (4), teda

(7) $v \models_{p} \mathtt{p}(\mathtt{F})$ z (6). Ďalej

(8) $v \not\models_{p} \mathtt{p}(\mathtt{F})$, alebo (9) $v \models_{p} \neg\mathtt{p}(\mathtt{E})$ podľa (3).

čo je v spore so (7),

(10) $v \not\models_{p} \mathtt{p}(\mathtt{E})$ z (9). Zároveň

(11) $v \not\models_{p} \mathtt{p}(\mathtt{A})$, alebo (12) $v \models_{p} (\mathtt{p}(\mathtt{B}) \land \mathtt{p}(\mathtt{C}))$ podľa (1).

čo je v spore s (5),

(13) $v \models_{p} \mathtt{p}(\mathtt{B})$ z (12). Potom podľa (2):

(14) $v \not\models_{p} (\mathtt{p}(\mathtt{B}) \lor \mathtt{p}(\mathtt{D}))$, alebo (15) $v \models_{p} \mathtt{p}(\mathtt{E})$,

(16) $v \not\models_{p} \mathtt{p}(\mathtt{B})$ zo (14), spor s (13); spor s (10).

Tablový kalkul

Z takýchto dôkazov sporom vychádza **tablový kalkul** —
jeden z **formálnych deduktívnych systémov**
pre výrokovologickú časť logiky prvého rádu

Formálny deduktívny systém je systém odvodzovacích pravidiel na konštrukciu dôkazov vyplývania formúl z teórií.

Nami používaná verzia tablového kalkulu
pochádza od Raymonda M. Smullyana [Smullyan, 1979].

Postupne si ukážeme, ako predchádzajúci dôkaz premeníme na **tablo**
— formálny dôkaz v tablovom kalkule.

Označené formuly a ich sémantika

Zbavme sa najprv opakovania $v \models_p \cdots$ a $v \not\models_p \cdots$.

Definícia 5.4

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.
Nech X je výrokovologická formula jazyka $\mathcal{L}$.
Postupnosti symbolov $\mathbf{T}\,X$ a $\mathbf{F}\,X$ nazývame ***označené formuly***.

Definícia 5.5

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, v je ohodnotenie pre $\mathcal{L}$ a X je výrokovologická formula v $\mathcal{L}$. Potom

- *vo v je pravdivá $\mathbf{T}\,X$* (skrátene $v \models_p \mathbf{T}\,X$) vtt vo v je pravdivá X;
- *vo v je pravdivá $\mathbf{F}\,X$* (skr. $v \models_p \mathbf{F}\,X$) vtt vo v nie je pravdivá X.

Znamienko $\mathbf{F}$ sa teda správa ako negácia a $\mathbf{T}$ nemení význam formuly.
Znamienka $\mathbf{F}$ a $\mathbf{T}$ sa nesmú objaviť v podformulách.
Vďaka znamienkam stačí hovoriť iba o pravdivých ozn. formulách.

Príklad 5.5 (Párty po covide · dôkaz s označenými formulami)

Predpokladajme, pre nejakom ohodnotení v sú pravdivé označené formuly

(1) $\mathbf{T}(\mathtt{p(A)} \rightarrow (\mathtt{p(B)} \wedge \mathtt{p(C)}))$,

(2) $\mathbf{T}((\mathtt{p(B)} \vee \mathtt{p(D)}) \rightarrow \mathtt{p(E)})$,

(3) $\mathbf{T}(\mathtt{p(F)} \rightarrow \neg\mathtt{p(E)})$, ale

(4) $\mathbf{F}(\mathtt{p(A)} \rightarrow \neg\mathtt{p(F)})$.

Podľa definície pravdivosti, sú vo v pravdivé:

(5) $\mathbf{T}\,\mathtt{p(A)}$ zo (4) a súčasne

(6) $\mathbf{F}\,\neg\mathtt{p(F)}$ zo (4), teda

(7) $\mathbf{T}\,\mathtt{p(F)}$ z (6). Ďalej

<table>
<tr><td colspan="4">(8) $\mathbf{F}\,\mathtt{p(F)}$, alebo (9) $\mathbf{T}\,\neg\mathtt{p(E)}$ podľa (3).</td></tr>
<tr><td>čo je</td><td colspan="3">(10) $\mathbf{F}\,\mathtt{p(E)}$ z (9). Zároveň</td></tr>
<tr><td>v spore</td><td colspan="3">(11) $\mathbf{F}\,\mathtt{p(A)}$, alebo (12) $\mathbf{T}(\mathtt{p(B)} \wedge \mathtt{p(C)})$ z (1).</td></tr>
<tr><td>so (7),</td><td>čo je</td><td colspan="2">(13) $\mathbf{T}\,\mathtt{p(B)}$ z (12). Potom podľa (2)</td></tr>
<tr><td></td><td>v spore</td><td colspan="2">(14) $\mathbf{F}(\mathtt{p(B)} \vee \mathtt{p(D)})$, alebo (15) $\mathbf{T}\,\mathtt{p(E)}$,</td></tr>
<tr><td></td><td>s (5),</td><td>(16) $\mathbf{F}\,\mathtt{p(B)}$ zo (14),
spor s (13);</td><td>spor s (10).</td></tr>
</table>

Kroky odvodenia

Všimnime si teraz kroky, ktoré sme v dôkaze robili:

- Niektoré z pravdivosti formuly priamo odvodili pravdivosť niektorej priamej podformuly, napr.:
  - z (4) $\mathbf{F}(\mathtt{p}(\mathtt{A}) \rightarrow \neg\mathtt{p}(\mathtt{F}))$ sme odvodili (5) $\mathbf{T}\,\mathtt{p}(\mathtt{A})$;
  - z (4) $\mathbf{F}(\mathtt{p}(\mathtt{A}) \rightarrow \neg\mathtt{p}(\mathtt{F}))$ sme odvodili (6) $\mathbf{F}\,\neg\mathtt{p}(\mathtt{F})$;
  - z (9) $\mathbf{T}\,\neg\mathtt{p}(\mathtt{E})$ sme odvodili (10) $\mathbf{F}\,\mathtt{p}(\mathtt{E})$.
- Iné viedli k analýze prípadov pravdivosti oboch priamych podformúl:
  - (2) $\mathbf{T}((\mathtt{p}(\mathtt{B}) \vee \mathtt{p}(\mathtt{D})) \rightarrow \mathtt{p}(\mathtt{E}))$ viedla k analýze prípadov: (14) $\mathbf{F}(\mathtt{p}(\mathtt{B}) \vee \mathtt{p}(\mathtt{D}))$ alebo (15) $\mathbf{T}\,\mathtt{p}(\mathtt{E})$.

Priame odvodenie pravdivosti priamych podformúl

Z definície pravdivosti formúl ľahko dostaneme:

Pozorovanie 5.6

Nech v je ľubovoľné ohodnotenie pre jazyk $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Nech X a Y sú ľubovoľné formuly $\mathcal{L}$:

Ak $v \models_p \neg X$, *tak* $v \not\models_p X$.	*Ak* $v \models_p \mathbf{T}\,\neg X$, *tak* $v \models_p \mathbf{F}\,X$.
Ak $v \not\models_p \neg X$, *tak* $v \models_p X$.	*Ak* $v \models_p \mathbf{F}\,\neg X$, *tak* $v \models_p \mathbf{T}\,X$.
Ak $v \models_p (X \land Y)$, *tak* $v \models_p X$.	*Ak* $v \models_p \mathbf{T}(X \land Y)$, *tak* $v \models_p \mathbf{T}\,X$.
Ak $v \models_p (X \land Y)$, *tak* $v \models_p Y$.	*Ak* $v \models_p \mathbf{T}(X \land Y)$, *tak* $v \models_p \mathbf{T}\,Y$.
Ak $v \not\models_p (X \lor Y)$, *tak* $v \not\models_p X$.	*Ak* $v \models_p \mathbf{F}(X \lor Y)$, *tak* $v \models_p \mathbf{F}\,X$.
Ak $v \not\models_p (X \lor Y)$, *tak* $v \not\models_p Y$.	*Ak* $v \models_p \mathbf{F}(X \lor Y)$, *tak* $v \models_p \mathbf{F}\,Y$.
Ak $v \not\models_p (X \to Y)$, *tak* $v \models_p X$.	*Ak* $v \models_p \mathbf{F}(X \to Y)$, *tak* $v \models_p \mathbf{T}\,X$.
Ak $v \not\models_p (X \to Y)$, *tak* $v \not\models_p Y$.	*Ak* $v \models_p \mathbf{F}(X \to Y)$, *tak* $v \models_p \mathbf{F}\,Y$.

Zjednodušujúce tablové pravidlá

Z pozorovania 5.6 môžeme sformulovať pravidlá, ktoré priamo odvodzujú z označených formúl ich označené podformuly:

$$\frac{\mathbf{T}\,\neg X}{\mathbf{F}\,X} \qquad \frac{\mathbf{F}\,\neg X}{\mathbf{T}\,X} \qquad \frac{\mathbf{T}(X \land Y)}{\mathbf{T}\,X} \qquad \frac{\mathbf{F}(X \lor Y)}{\mathbf{F}\,X} \qquad \frac{\mathbf{F}(X \to Y)}{\mathbf{T}\,X}$$

$$\frac{\mathbf{T}(X \land Y)}{\mathbf{T}\,Y} \qquad \frac{\mathbf{F}(X \lor Y)}{\mathbf{F}\,Y} \qquad \frac{\mathbf{F}(X \to Y)}{\mathbf{F}\,Y}$$

Na tieto pravdidlá sa dá pozerať ako na **špeciálne prípady jedného pravidla**, ktorému sa hovorí α, *zjednodušenie* alebo *sploštenie* (angl. *flatten*), pre rôzne spojky.

Jednotný zápis označených formúl typu α

Definícia 5.7 (Jednotný zápis označených formúl typu α)

Označená formula A^+ je ***typu α*** vtt má jeden z tvarov v ľavom stĺpci tabuľky pre nejaké formuly X a Y.
Takéto formuly budeme označovať písmenom α;
α_1 bude označovať príslušnú označenú formulu zo stredného stĺpca,
α_2 príslušnú formulu z pravého stĺpca.

α	α_1	α_2
$\mathbf{T}(X \land Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$
$\mathbf{F}(X \lor Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{F}(X \to Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{T}\,\neg X$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,X$
$\mathbf{F}\,\neg X$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,X$

Pozorovanie 5.8 (Stručne vďaka jednotnému zápisu)

*Nech v je ľubovoľné ohodnotenie pre jazyk $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Potom $v \models_p \alpha$ vtt $v \models_p \alpha_1$ **a** $v \models_p \alpha_2$.*

Analýza prípadov pravdivosti priamych podformúl

Z definície pravdivosti formúl ľahko dostaneme:

Pozorovanie 5.9

Nech v je ľubovoľné ohodnotenie pre jazyk $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Nech X a Y sú ľubovoľné formuly $\mathcal{L}$:

- *Ak $v \not\models_{\mathrm{p}} (X \land Y)$, tak $v \not\models_{\mathrm{p}} X$ alebo $v \not\models_{\mathrm{p}} Y$.*
  Ak $v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{F}(X \land Y)$, tak $v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{F}\,X$ alebo $v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{F}\,Y$.
- *Ak $v \models_{\mathrm{p}} (X \lor Y)$, tak $v \models_{\mathrm{p}} X$ alebo $v \models_{\mathrm{p}} Y$.*
  Ak $v \models_{\mathrm{p}} (X \lor Y)$, tak $v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{T}\,X$ alebo $v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{T}\,Y$.
- *Ak $v \models_{\mathrm{p}} (X \to Y)$, tak $v \not\models_{\mathrm{p}} X$ alebo $v \models_{\mathrm{p}} Y$.*
  Ak $v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{T}(X \to Y)$, tak $v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{F}\,X$ alebo $v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{T}\,Y$.

Rozvetvujúce tablové pravidlá

Z pozorovania 5.9 môžeme sformulovať pravidlá, ktoré vedú k analýze prípadov pravdivosti priamych podformúl:

$$\frac{\mathbf{F}(X \land Y)}{\mathbf{F}\,X \;\mid\; \mathbf{F}\,Y} \qquad \frac{\mathbf{T}(X \lor Y)}{\mathbf{T}\,X \;\mid\; \mathbf{T}\,Y} \qquad \frac{\mathbf{T}(X \to Y)}{\mathbf{F}\,X \;\mid\; \mathbf{T}\,Y}$$

Aj na tieto pravdidlá sa dá pozerať ako na špeciálne prípady jedného pravidla, ktorému sa hovorí β, *vetvenie* alebo *rozdelenie* (angl. *split*), pre rôzne spojky.

Jednotný zápis označených formúl typu β

Definícia 5.10 (Jednotný zápis označených formúl typu β)

Označená formula B^+ je ***typu β*** vtt má jeden z tvarov v ľavom stĺpci tabuľky pre nejaké formuly X a Y.
Takéto formuly budeme označovať písmenom β;
β_1 bude označovať príslušnú označenú formulu zo stredného stĺpca,
β_2 príslušnú formulu z pravého stĺpca.

β	β_1	β_2
$\mathbf{F}(X \land Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{T}(X \lor Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$
$\mathbf{T}(X \to Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$

Pozorovanie 5.11 (Stručne vďaka jednotnému zápisu)

*Nech v je ľubovoľné ohodnotenie pre jazyk $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Potom $v \models_p \beta$ vtt $v \models_p \beta_1$ **alebo** $v \models_p \beta_2$.*

Označovanie označených formúl a ich množín

Čo vlastne dokazujeme v našom príklade?

To, že predpoklad existencie ohodnotenia v, v ktorom sú pravdivé všetky prvky množiny označených formúl

$$\begin{aligned} S^+ = \{\, & \mathbf{T}(\mathtt{p}(\mathtt{A}) \to (\mathtt{p}(\mathtt{B}) \land \mathtt{p}(\mathtt{C}))), \\ & \mathbf{T}((\mathtt{p}(\mathtt{B}) \lor \mathtt{p}(\mathtt{D})) \to \mathtt{p}(\mathtt{E})), \\ & \mathbf{T}(\mathtt{p}(\mathtt{F}) \to \neg\mathtt{p}(\mathtt{E})), \\ & \mathbf{F}(\mathtt{p}(\mathtt{A}) \to \neg\mathtt{p}(\mathtt{F})) \,\} \end{aligned}$$

vedie k sporu, teda že S^+ je **nesplniteľná**.

Dohoda 5.12

Pre označené formuly budeme používať veľké písmená zo začiatku a konca abecedy s horným indexom + a prípadne s dolnými indexmi, napr. A^+, X_7^+.

Pre množiny označených formúl budeme používať písmená S, T s horným indexom + a prípadne s dolnými indexmi, napr. S^+, T_3^+.

Príklad 5.12 (Párty po covide · tablo)

1. $\mathbf{T}(\mathrm{p}(\mathrm{A}) \to (\mathrm{p}(\mathrm{B}) \land \mathrm{p}(\mathrm{C})))$ $\quad S^+$
2. $\mathbf{T}((\mathrm{p}(\mathrm{B}) \lor \mathrm{p}(\mathrm{D})) \to \mathrm{p}(\mathrm{E}))$ $\quad S^+$
3. $\mathbf{T}(\mathrm{p}(\mathrm{F}) \to \neg\mathrm{p}(\mathrm{E}))$ $\quad S^+$
4. $\mathbf{F}(\mathrm{p}(\mathrm{A}) \to \neg\mathrm{p}(\mathrm{F}))$ $\quad S^+$
5. $\mathbf{T}\,\mathrm{p}(\mathrm{A})$ $\quad \alpha 4$
6. $\mathbf{F}\,\neg\mathrm{p}(\mathrm{F})$ $\quad \alpha 4$
7. $\mathbf{T}\,\mathrm{p}(\mathrm{F})$ $\quad \alpha 6$

---

8. $\mathbf{F}\,\mathrm{p}(\mathrm{F})$ $\quad \beta 3$

   $*7, 8$

9. $\mathbf{T}\,\neg\mathrm{p}(\mathrm{E})$ $\quad \beta 3$
10. $\mathbf{F}\,\mathrm{p}(\mathrm{E})$ $\quad \alpha 9$

---

11. $\mathbf{F}\,\mathrm{p}(\mathrm{A})$ $\quad \beta 1$

    $*5, 11$

12. $\mathbf{T}(\mathrm{p}(\mathrm{B}) \land \mathrm{p}(\mathrm{C}))$ $\quad \beta 1$
13. $\mathbf{T}\,\mathrm{p}(\mathrm{B})$ $\quad \alpha 12$

---

14. $\mathbf{F}(\mathrm{p}(\mathrm{B}) \lor \mathrm{p}(\mathrm{D}))$ $\quad \beta 2$
16. $\mathbf{F}\,\mathrm{p}(\mathrm{B})$ $\quad \alpha 14$

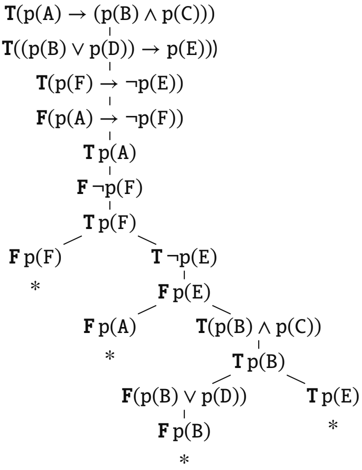
    $*13, 16$

15. $\mathbf{T}\,\mathrm{p}(\mathrm{E})$ $\quad \beta 2$

    $*10,15$

Štruktúra tabla

Čo je teda tablo? Aká „dátová štruktúra“? Čo v nej musí platiť?



Definícia 5.13 (Tablo pre množinu označených formúl)

Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene ***tablo pre*** S^+) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly
a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných induktívnych pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+.

Definícia 5.13 (Tablo pre množinu označených formúl)

Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene ***tablo pre*** S^+) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly
a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných induktívnych pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+.
- Nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé ***priame rozšírenie*** $\mathcal{T}$ ktorýmkoľvek z pravidiel:

Definícia 5.13 (Tablo pre množinu označených formúl)

Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene ***tablo pre S^+***) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly
a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných induktívnych pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+.
- Nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé ***priame rozšírenie*** $\mathcal{T}$ ktorýmkoľvek z pravidiel:
  - $\boldsymbol{\alpha}$: Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula α, tak ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci α_1 alebo α_2.

Definícia 5.13 (Tablo pre množinu označených formúl)

***Analytické tablo pre množinu označených formúl** S^+* (skrátene ***tablo pre** S^+*) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných induktívnych pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+.
- Nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé ***priame rozšírenie*** $\mathcal{T}$ ktorýmkoľvek z pravidiel:
  - **α**: Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula α, tak ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci α_1 alebo α_2.
  - **β**: Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula β, tak ako deti y pripojíme *dva* nové vrcholy, pričom ľavé dieťa bude obsahovať β_1 a pravé β_2.

Definícia 5.13 (Tablo pre množinu označených formúl)

Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene ***tablo pre*** S^+) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných induktívnych pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+.
- Nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé ***priame rozšírenie*** $\mathcal{T}$ ktorýmkoľvek z pravidiel:
  - $\boldsymbol{\alpha}$: Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula α, tak ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci α_1 alebo α_2.
  - $\boldsymbol{\beta}$: Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula β, tak ako deti y pripojíme *dva* nové vrcholy, pričom ľavé dieťa bude obsahovať β_1 a pravé β_2.
  - $\boldsymbol{S^+}$: Ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci ľubovoľnú označenú formulu $A^+ \in S^+$.

Definícia 5.13 (Tablo pre množinu označených formúl)

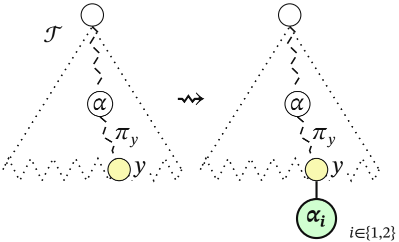
Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene ***tablo pre*** S^+) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných induktívnych pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+.
- Nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé ***priame rozšírenie*** $\mathcal{T}$ ktorýmkoľvek z pravidiel:
  - $\boldsymbol{\alpha}$: Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula α, tak ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci α_1 alebo α_2.
  - $\boldsymbol{\beta}$: Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula β, tak ako deti y pripojíme *dva* nové vrcholy, pričom ľavé dieťa bude obsahovať β_1 a pravé β_2.
  - $\boldsymbol{S^+}$: Ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci ľubovoľnú označenú formulu $A^+ \in S^+$.

Nič iné nie je tablom pre S^+.

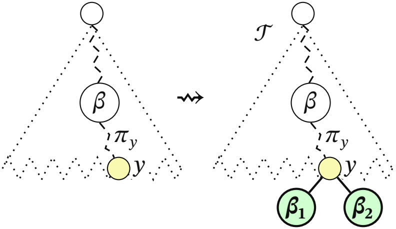
Tablá a tablové pravidlá

Pôvodné tablo **Možné priame rozšírenie** **Pravidlá a označené formuly v nich**



$$\frac{\alpha}{\alpha_1} \qquad \frac{\alpha}{\alpha_2}$$

α	α_1	α_2
$\mathbf{T}(X \land Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$
$\mathbf{F}(X \lor Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{F}(X \to Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{T}\,\neg X$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,X$
$\mathbf{F}\,\neg X$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,X$

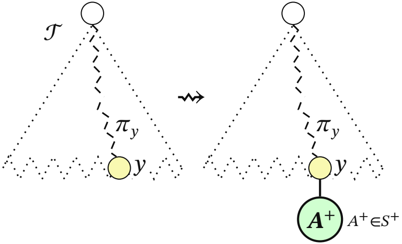


$$\frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

β	β_1	β_2
$\mathbf{F}(X \land Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{T}(X \lor Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$
$\mathbf{T}(X \to Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$

Legenda: y je list v table $\mathcal{T}$, π_y je cesta od koreňa k y

Tablá a tablové pravidlá (pokračovanie)

Pôvodné tablo	**Možné priame rozšírenie**	**Pravidlá a označené formuly v nich**
		$\dfrac{}{A^+}$ $\qquad A^+ \in S^+$

Legenda: y je list v table $\mathcal{T}$, π_y je cesta od koreňa k y

Uzavretosť a otvorenosť vetvy a tabla

Definícia 5.14

Vetvou tabla $\mathcal{T}$ je každá cesta od koreňa $\mathcal{T}$ k niektorému listu $\mathcal{T}$.

Označená formula X^+ sa ***vyskytuje na vetve*** π v $\mathcal{T}$
vtt X^+ sa nachádza v niektorom vrchole na π.
Skrátene to budeme zapisovať $X^+ \in \mathrm{formulas}(\pi)$.

Tablo $\sim$ dôkaz sporom. Vetvenie $\sim$ rozbor možných prípadov.
$\implies$ Spor musí nastať vo všetkých vetvách.

Definícia 5.15

Vetva π tabla $\mathcal{T}$ je ***uzavretá*** vtt na π sa súčasne vyskytujú označené formuly $\mathbf{F}\,X$ a $\mathbf{T}\,X$ pre nejakú formulu X.
Inak je π ***otvorená***.

Tablo $\mathcal{T}$ ***je uzavreté*** vtt *každá* jeho vetva je uzavretá.
Naopak, $\mathcal{T}$ je ***otvorené*** vtt *aspoň jedna* jeho vetva je otvorená.

Príklad — vetvy a uzavretosť

Príklad 5.16 (Vetvy a uzavretosť)

Určme vetvy v table a zistime, či sú uzavreté a či je uzavreté tablo:

<table>
<tr><td colspan="2">

1. $\mathbf{T}(p(A) \to (p(B) \land p(C)))$ S^{+}
2. $\mathbf{T}((p(B) \lor p(D)) \to p(E))$ S^{+}
3. $\mathbf{T}(p(F) \to \neg p(E))$ S^{+}
4. $\mathbf{F}(p(A) \to \neg p(F))$ S^{+}
5. $\mathbf{T}\, p(A)$ $\alpha 4$
6. $\mathbf{F}\, \neg p(F)$ $\alpha 4$
7. $\mathbf{T}\, p(F)$ $\alpha 6$

</td></tr>
<tr>
<td>8. $\mathbf{F}\, p(F)$ $\beta 3$
$*7, 8$</td>
<td>
<table>
<tr><td colspan="2">9. $\mathbf{T}\, \neg p(E)$ $\beta 3$
10. $\mathbf{F}\, p(E)$ $\alpha 9$</td></tr>
<tr>
<td>11. $\mathbf{F}\, p(A)$ $\beta 1$
$*5, 11$</td>
<td>
<table>
<tr><td colspan="2">12. $\mathbf{T}(p(B) \land p(C))$ $\beta 1$
13. $\mathbf{T}\, p(B)$ $\alpha 12$</td></tr>
<tr>
<td>14. $\mathbf{F}(p(B) \lor p(D))$ $\beta 2$</td>
<td>15. $\mathbf{T}\, p(E)$ $\beta 2$
$*10,15$</td>
</tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

Korektnosť tablového kalkulu

Nabudúce dokážeme:

Veta 5.17 (Korektnosť tablového kalkulu)

Nech S^+ *je množina označených formúl a* $\mathcal{T}$ *je uzavreté tablo pre* S^+*.*
Potom je množina S^+ *nesplniteľná.*

Dôsledok 5.18

Nech S *je výrokovologická teória a* X *je výrokovologická formula.*
Ak existuje uzavreté tablo pre $\{\,\mathbf{T}\,A \mid A \in S\,\} \cup \{\mathbf{F}\,X\}$ *(skrát.* $S \vdash_{\mathrm{p}} X$*),*
tak z S *výrokovologicky vyplýva* X *(*$S \vDash_{\mathrm{p}} X$*).*

Dôsledok 5.19

Nech X *je výrokovologická formula.*
Ak existuje uzavreté tablo pre $\{\mathbf{F}\,X\}$ *(skrátene* $\vdash_{\mathrm{p}} X$*),*
tak X *je tautológia (*$\vDash_{\mathrm{p}} X$*).*

Spomeňte si 5.1

1. Má každé tablo *aspoň* jedno priame rozšírenie?
2. Má každé tablo *najviac* jedno priame rozšírenie?

Literatúra

Raymond M. Smullyan. *Logika prvého rádu*. Alfa, 1979. Z angl. orig. *First-Order Logic*, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1968 preložil Svätoslav Mathé.