Korektnosť prvorádových tabiel. Explicitné definície

11. prednáška · Matematika (4): Logika pre informatikov

Ján Kľuka, Ján Mazák

Letný semester 2021/2022

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej informatiky

Obsah 11. prednášky

Korektnosť tablového kalkulu
pre logiku prvého rádu

- Vlastnosti ohodnotení a substitúcie
- Korektnosť tabiel
- Ďalšie korektné pravidlá

Definície

Korektnosť tablového kalkulu pre logiku prvého rádu

Korektnosť tablového kalkulu pre logiku prvého rádu

Vlastnosti ohodnotení a substitúcie

Voľné premenné a hodnota termu, splnenie formuly, teórie

Tvrdenie 13.1

Nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$, nech e_1 a e_2 sú ohodnotenia, nech t je term, A je formula a S je množina formúl jazyka $\mathcal{L}$.

- *Ak sa ohodnotenia e_1 a e_2 zhodujú na (voľných) premenných termu t (teda $e_1(x) = e_2(x)$ pre každú $x \in \mathrm{free}(t)$), tak $t^{\mathcal{M}}[e_1] = t^{\mathcal{M}}[e_2]$.*
- *Ak sa ohodnotenia e_1 a e_2 zhodujú na voľných premenných formuly X, tak $\mathcal{M} \models A[e_1]$ vtt $\mathcal{M} \models A[e_2]$.*
- *Ak sa ohodnotenia e_1 a e_2 zhodujú na voľných premenných všetkých formúl z S, tak $\mathcal{M} \models S[e_1]$ vtt $\mathcal{M} \models S[e_2]$.*

Substitúcia a hodnota termu

Ako súvisí hodnota termu po substitúcii s hodnotou termu, do ktorého sa substituuje?

Príklad 13.2

Zoberme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$i(\mathtt{c}) = 3, \qquad i(\mathtt{d}) = 4$$

$$i(\mathtt{f}) = \{1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 5,\ 3 \mapsto 1,\ 4 \mapsto 1,\ 5 \mapsto 5\}$$

Nech $e = \{x \mapsto 3,\ y \mapsto 4\}$.

$$\begin{aligned}
((\mathtt{f}(x))\{x \mapsto \mathtt{f}(y)\})^{\mathcal{M}}[e] &= (\mathtt{f}(\mathtt{f}(y)))^{\mathcal{M}}[e] \\
&= i(\mathtt{f})(\,i(\mathtt{f})(4)\,) = i(\mathtt{f})(1) = 2 \\
&= (\mathtt{f}(x))^{\mathcal{M}}[e(x/1)] \\
&= (\mathtt{f}(x))^{\mathcal{M}}[e(x/(\mathtt{f}(y))^{\mathcal{M}}[e])]
\end{aligned}$$

Substitúcia vs. hodnota termu a splnenie formuly

Hodnota termu $t\sigma$/splnenie formuly $A\sigma$ po substitúcii
$\sigma = \{x_1 \mapsto t_1, \dots, x_n \mapsto t_n\}$ pri ohodnotení e
sa rovná hodnote termu t/splneniu formuly A pri ohodnotení e', ktoré

- každej substituovanej premennej x_i priradí hodnotu za ňu substituovaného termu t_i pri ohodnotení e,
- ostatným premenným priraďuje rovnaké hodnoty ako e.

Tvrdenie 13.3

Nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$ e je ohodnotenie ind. premenných a nech $\sigma = \{x_1 \mapsto t_1, \dots, x_n \mapsto t_n\}$ je substitúcia.

- *Nech t je term jazyka $\mathcal{L}$. Potom* $(t\sigma)^{\mathcal{M}}[e] = t^{\mathcal{M}}[e(x_1/t_1^{\mathcal{M}}[e]) \cdots (x_n/t_n^{\mathcal{M}}[e])]$.
- *Nech A je formula jazyka $\mathcal{L}$ a σ je aplikovateľná na A. Potom* $\mathcal{M} \models A\sigma[e]$ vtt $\mathcal{M} \models A[e(x_1/t_1^{\mathcal{M}}[e]) \cdots (x_n/t_n^{\mathcal{M}}[e])]$.

Korektnosť tablového kalkulu pre logiku prvého rádu

Korektnosť tabiel

Korektnosť tablových pravidiel

Tvrdenie 13.4

Nech S^+ je množina označených formúl v jazyku $\mathcal{L}$, nech x a y sú premenné, nech s, t sú termy, nech α, β, γ, δ sú ozn. formuly príslušného typu, A je ozn. formula.

- *Ak $\alpha \in S^+$, tak S^+ je splniteľná vtt $S^+ \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ je splniteľná.*
- *Ak $\beta \in S^+$, tak S^+ je splniteľná vtt $S^+ \cup \{\beta_1\}$ je splniteľná alebo $S^+ \cup \{\beta_2\}$ je splniteľná.*
- *Ak $\gamma(x) \in S^+$ a t je term substituovateľný za x v $\gamma_1(x)$, tak S^+ je splniteľná vtt $S^+ \cup \{\gamma_1(t)\}$ je splniteľná.*
- *Ak $\delta(x) \in S^+$, y je substituovateľná za x v $\delta_1(x)$ a y nemá voľný výskyt v S^+, tak S^+ je splniteľná vtt $S^+ \cup \{\delta_1(y)\}$ je splniteľná.*
- *S^+ je splniteľná vtt $S^+ \cup \{\mathbf{T}\, t \doteq t\}$ je splniteľná.*
- *Ak $\{\mathbf{T}\, s \doteq t, A^+\{x \mapsto s\}\} \subseteq S^+$, s a t sú substituovateľné za x v A^+, tak S^+ je splniteľná vtt $S^+ \cup \{A^+\{x \mapsto t\}\}$ je splniteľná.*

Korektnosť tablových pravidiel — dôkaz

Dôkaz (čiastočný, pre pravidlo δ v smere $\Rightarrow$).

Zoberme ľubovoľné S^+, x, y a $\delta(x)$ spĺňajúce predpoklady tvrdenia.
Nech S^+ je splniteľná,
teda existuje štruktúra $\mathcal{M} = (D, i)$ a ohodnotenie e také, že $\mathcal{M} \models S^+[e]$.
Preto aj $\mathcal{M} \models \delta(x)[e]$.
Podľa tvaru $\delta(x)$ môžu nastať nasledujúce dva prípady:

- Ak $\delta(x) = \mathbf{T}\, \exists x\, A$ pre nejakú formulu A, tak podľa def. splnenia ozn. formuly $\mathcal{M} \models \exists x\, A[e]$ a podľa def. splnenia formuly máme nejakého *svedka* $m \in D$ takého, že $\mathcal{M} \models A[e(x/m)]$.
  Podľa tvr. 13.3 potom $\mathcal{M} \models A\{x \mapsto y\}[e(x/m)(y/m)]$.
  Prem. x nie je voľná v $A\{x \mapsto y\}$,
  preto podľa tvr. 13.1 $\mathcal{M} \models A\{x \mapsto y\}[e(y/m)]$,
  teda $\mathcal{M} \models \mathbf{T}\, A\{x \mapsto y\}[e(y/m)]$, teda $\mathcal{M} \models \delta_1(y)[e(y/m)]$.

Korektnosť tablových pravidiel — dôkaz

Dôkaz (čiastočný, pre pravidlo δ v smere $\Rightarrow$, pokračovanie).

- Ak $\delta(x) = \mathbf{F}\,\forall x\, A$ pre nejakú formulu A, tak podľa def. splnenia ozn. formuly $\mathcal{M} \not\models \forall x\, A[e]$ a podľa def. splnenia formuly neplatí, že $\mathcal{M} \models A[e(x/m)]$ pre každé $m \in D$.
  Preto máme nejaký *kontrapríklad* $m \in D$ taký, že $\mathcal{M} \not\models A[e(x/m)]$.
  Podľa tvr. 13.3 potom $\mathcal{M} \not\models A\{x \mapsto y\}[e(x/m)(y/m)]$.
  Prem. x nie je voľná v $A\{x \mapsto y\}$,
  preto podľa tvr. 13.1 $\mathcal{M} \not\models A\{x \mapsto y\}[e(y/m)]$,
  teda $\mathcal{M} \models \mathbf{F}\, A\{x \mapsto y\}[e(y/m)]$, čiže $\mathcal{M} \models \delta_1(y)[e(y/m)]$.

Navyše y nie je voľná v žiadnej formule z S^+, preto $\mathcal{M} \models S^+[e(y/m)]$.
Teda $\mathcal{M} \models (S^+ \cup \{\delta_1(y)\})[e(y/m)]$.
Preto je $S^+ \cup \{\delta_1(y)\}$ splniteľná. $\square$

Korektnosť — pravdivosť priameho rozšírenia tabla

Vetva sa správa ako konjunkcia svojich označených formúl — všetky musia byť naraz splnené.

Tablo sa správa ako disjunkcia vetiev — niektorá musí byť splnená.

Definícia 13.5

Nech S^+ je množina označených formúl v jazyku $\mathcal{L}$, nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+, nech π je vetva tabla $\mathcal{T}$. Nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$ a e je ohodnotenie indivíduových premenných. Potom:

- ***štruktúra $\mathcal{M}$ spĺňa vetvu π pri e*** vtt $\mathcal{M}$ spĺňa **všetky** označené formuly vyskytujúce sa na vetve π pri e.
- ***štruktúra $\mathcal{M}$ spĺňa tablo $\mathcal{T}$ pri e*** vtt $\mathcal{M}$ spĺňa **niektorú** vetvu v table $\mathcal{T}$ pri e.

Pomocné tvrdenia pre korektnosť prvorádových tabiel

Lema 13.6 (K1)

Nech S^+ je množina ozn. formúl v jazyku $\mathcal{L}$, nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+. Nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$ a e je ohodnotenie ind. premenných. Ak $\mathcal{T}$ a S^+ sú splnené štruktúrou $\mathcal{M}$ pri e, tak aj každé priame rozšírenie $\mathcal{T}$ a S^+ sú splnené štruktúrou $\mathcal{M}$ pri nejakom ohodnotení e'.

Definícia 13.7

Nech $\mathcal{T}$ je tablo pre nejakú množinu označených formúl. Tablo $\mathcal{T}$ je ***splniteľné*** vtt existuje štruktúra, ktorá spĺňa $\mathcal{T}$ pri nejakom ohodnotení indivíduových premenných.

Lema 13.8 (K2)

Nech S^+ je množina ozn. formúl v jazyku $\mathcal{L}$, nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+. Ak S^+ je splniteľná, tak aj $\mathcal{T}$ je splniteľné.

Korektnosť prvorádových tabiel

Otvorené a uzavreté vetvy a tablá sú definované rovnako ako pri tablách pre výrokovú logiku.

Veta 13.9 (Korektnosť tablového kalkulu)

Nech S^+ je množina označených formúl.
Ak existuje uzavreté tablo $\mathcal{T}$ pre S^+, tak je množina S^+ nesplniteľná.

Dôkaz (sporom).

Nech S^+ je množina označených formúl.
Nech existuje uzavreté tablo $\mathcal{T}$ pre S^+, ale S^+ je splniteľná. Pretože $\mathcal{T}$ je uzavreté, pre každú jeho vetva π existuje formula X taká, že $\mathbf{T}\,X$ a $\mathbf{F}\,X$ sa vyskytuje na π, a teda π je nesplniteľná. Preto $\mathcal{T}$ je nesplniteľné. To je v spore s lemou K2, podľa ktorej je $\mathcal{T}$ splniteľné, pretože S^+ je splniteľná. $\square$

Korektnosť tablového kalkulu pre logiku prvého rádu

Ďalšie korektné pravidlá

Pohodlnejšie verzie pravidiel γ a δ

Tvrdenie 13.10

Nasledujúce pravidlá sú korektné:

$$\gamma^* \quad \frac{\mathbf{T}\,\forall x_1 \dots \forall x_n\, A}{\mathbf{T}\, A\{x_1 \mapsto t_1, \dots, x_n \mapsto t_n\}} \qquad \frac{\mathbf{F}\,\exists x_1 \dots \exists x_n\, A}{\mathbf{F}\, A\{x_1 \mapsto t_1, \dots, x_n \mapsto t_n\}}$$

$$\delta^* \quad \frac{\mathbf{F}\,\forall x_1 \dots \forall x_n\, A}{\mathbf{F}\, A\{x_1 \mapsto y_1, \dots, x_n \mapsto y_n\}} \qquad \frac{\mathbf{T}\,\exists x_1 \dots \exists x_n\, A}{\mathbf{T}\, A\{x_1 \mapsto y_1, \dots, x_n \mapsto y_n\}}$$

kde A je formula, $x_1, \ldots, x_n$ sú premenné, $t_1, \ldots, t_n$ sú termy,
$y_1, \ldots, y_n$ sú navzájom rôzne premenné,
*ktoré sa **nevyskytujú voľné** vo vetve, v liste ktorej je pravidlo použité,*
*pričom pre každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je term t_i **substituovateľný** za x_i v A*
*a premenná y_i je **substituovateľná** za x_i v A.*

Pravidlá pre ekvivalenciu

Tvrdenie 13.11

Nasledujúce pravidlá sú korektné:

$$\text{ESTT}\quad \frac{\mathbf{T}(A_1 \leftrightarrow A_2) \quad \mathbf{T}\,A_i}{\mathbf{T}\,A_{3-i}} \qquad \text{ESTF}\quad \frac{\mathbf{T}(A_1 \leftrightarrow A_2) \quad \mathbf{F}\,A_i}{\mathbf{F}\,A_{3-i}}$$

$$\text{ESFT}\quad \frac{\mathbf{F}(A_1 \leftrightarrow A_2) \quad \mathbf{T}\,A_i}{\mathbf{F}\,A_{3-i}} \qquad \text{ESFF}\quad \frac{\mathbf{F}(A_1 \leftrightarrow A_2) \quad \mathbf{F}\,A_i}{\mathbf{T}\,A_{3-i}}$$

kde A_1 a A_2 sú formuly, $i \in \{1, 2\}$.

Všimnite si: $3 - 1 = 2$ a $3 - 2 = 1$.

Definície

Pojmy

V mnohých doménach sú zaujímavé komplikovanejšie kombinácie základných vlastností alebo vzťahov:

- x *má spoločného rodiča s* y*, ale* x *je rôzne od* y
  $\exists z(\mathtt{rodič}(z, x) \land \mathtt{rodič}(z, y)) \land \neg\, x \doteq y$
- x *je živočích, ktorý konzumuje iba rastliny*
  $\mathtt{živočích}(x) \land \forall y(\mathtt{konzumuje}(x, y) \to \mathtt{rastlina}(y))$

Často sa vyskytujúce kombinácie vzťahov a vlastností je výhodné:

- **pomenovať**
- a jasne **vyjadriť význam** nového mena
  pomocou doteraz známych vlastností a vzťahov,

teda *zadefinovať pojem*.

Definície pojmov

Definícia je tvrdenie, ktoré vyjadruje význam pojmu.

Explicitná definícia (najčastejší druh definície) je

ekvivalencia medzi pojmom a opisom jeho významu,
v ktorom sa definovaný pojem sám *nevyskytuje*.

Príklad 14.1

- *Objekt x je **súrodencom** objektu y práve vtedy, keď x nie je y a x má spoločného rodiča s y.*

  $$\forall x \, \forall y \big(\mathtt{súrodenec}(x, y) \leftrightarrow \\ \big(x \not\doteq y \land \exists z(\mathtt{rodič}(z, x) \land \mathtt{rodič}(z, y))\big)\big)$$

- *Objekt x je **bylinožravec** vtedy a len vtedy, keď x je živočích, ktorý konzumuje iba rastliny.*

  $$\forall x \big(\mathtt{bylinožravec}(x) \leftrightarrow \\ \big(\mathtt{živočích}(x) \land \forall y(\mathtt{konzumuje}(x, y) \to \mathtt{rastlina}(y))\big)\big)$$

Explicitná def. a nutná a postačujúca podmienka

Všimnite si:

Definícia pojmu *súrodenec* vyjadruje **nutnú aj postačujúcu** podmienku toho, aby medzi dvoma objektmi bol súrodenecký vzťah.

- $\rightarrow$ Pre každú dvojicu objektov x a y, ktoré označíme za súrodencov, **musí** existovať ich spoločný rodič a musia byť navzájom rôzne.
- $\leftarrow$ Každé dva navzájom rôzne objekty x a y, ktoré majú spoločného rodiča, **musia** byť súrodenci.

Podobne pre iné definície.

Použitie pojmov

Využitím definovaného pojmu

- skracujeme tvrdenia: *Škrečky sú bylinožravce.*
  $\forall x(\mathtt{škrečok}(x) \to \mathtt{bylinožravec}(x))$
- jednoduchšie definujeme ďalšie pojmy:
  Objekt x je ***sestrou*** *objektu y práve vtedy,*
  keď x je žena, ktorá je súrodencom y.
  $\forall x\,\forall y\big(\mathtt{sestra}(x, y) \leftrightarrow (\mathtt{žena}(x) \land \mathtt{súrodenec}(x, y))\big)$

Vyskúšajte si 14.1

Zadefinujte pojem *teta* (chápaný ako vzťah dvoch ľudí)
neformálne (v slovenčine)
aj formálne (formulou logiky prvého rádu).

Podmienené definície

Niekedy má pojem význam iba pre niektoré druhy objektov,
alebo má ten istý pojem rôzne významy pre rôzne druhy objektov.

Vtedy môžeme definície **podmieniť** druhmi:

- *Študent absolvuje predmet vtt*
  je z neho hodnotený inou známkou ako Fx.
  $$\forall x\,\forall y\Big(\mathtt{študent}(x) \land \mathtt{predmet}(y) \to \Big(\mathtt{absolvuje}(x, y) \leftrightarrow \exists z(\mathtt{hodnotený}(x, y) \doteq z \land \mathtt{známka}(z) \land z \not\doteq \mathtt{Fx})\Big)\Big)$$
- *Študent absolvuje študijný program vtt*
  absolvuje každý jeho povinný predmet.
  $$\forall x\,\forall y\Big(\mathtt{študent}(x) \land \mathtt{št\_prog}(y) \to \Big(\mathtt{absolvuje}(x, y) \leftrightarrow \forall z(\mathtt{pov\_predmet\_prog}(z, y) \to \mathtt{absolvuje}(x, z))\Big)\Big)$$

Explicitná definícia presne

Definícia 14.2

Nech $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}_1$ sú jazyky logiky prvého rádu.
Jazyk $\mathcal{L}_1$ je ***rozšírením*** jazyka $\mathcal{L}$ vtt $\mathcal{V}_{\mathcal{L}_1} = \mathcal{V}_{\mathcal{L}}$, $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{L}_1}$.

Definícia 14.3

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk logiky prvého rádu, T je teória v jazyku $\mathcal{L}$, a $\mathcal{L}_P$ je rozšírenie jazyka o predikátový symbol P je s aritou n, ktorý sa nevyskytuje v $\mathcal{L}$. Teóriu v jazyku $\mathcal{L}_P$

$$T \cup \{\forall x_1 \dots \forall x_n (P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow A)\},$$

kde A je formula, v ktorej sa nevyskytuje P, nazývame ***rozšírením teórie T explicitnou definíciou*** $\forall x_1 \dots \forall x_n (P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow A)$ predikátového symbolu P.

Jednoznačnosť interpretácie definovaného predikátu

Význam explicitne definovaného predikátu je jednoznačne určený.

Príklad 14.4

Majme nejakú teóriu T v jazyku $\mathcal{L}$ s $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathtt{rodič}^2\}$.
Rozšírme T o $X = \forall x \forall y \big(\mathtt{súrodenec}(x, y) \leftrightarrow$

$$\big(x \not\doteq y \land \exists z(\mathtt{rodič}(z, x) \land \mathtt{rodič}(z, y))\big)\big).$$

Nech $\mathcal{M} = ($ {👩$_\mathrm{I}$, 👶$_\mathrm{J}$, 👧$_\mathrm{K}$, 👨$_\mathrm{L}$, 👩$_\mathrm{M}$, 👨$_\mathrm{N}$, 👨$_\mathrm{O}$}, $i)$ je model T, kde

$i(\mathtt{rodič}) = \{$(👩$_\mathrm{I}$, 👩$_\mathrm{M}$), (👨$_\mathrm{L}$, 👩$_\mathrm{M}$), (👩$_\mathrm{I}$, 👨$_\mathrm{N}$), (👨$_\mathrm{O}$, 👨$_\mathrm{N}$), (👩$_\mathrm{M}$, 👧$_\mathrm{K}$), (👩$_\mathrm{M}$, 👶$_\mathrm{J}$)$\}$

Potom sa $\mathcal{M}$ dá jednoznačne rozšíriť na model $T \cup \{X\}$:
$\mathcal{M}_1 = ($ {👩$_\mathrm{I}$, 👶$_\mathrm{J}$, 👧$_\mathrm{K}$, 👨$_\mathrm{L}$, 👩$_\mathrm{M}$, 👨$_\mathrm{N}$, 👨$_\mathrm{O}$}, $i_1)$, $i_1(\mathtt{rodič}) = i(\mathtt{rodič})$,

$i(\mathtt{súrodenec}) =$

Jednoznačnosť interpretácie definovaného predikátu

Význam explicitne definovaného predikátu je jednoznačne určený.

Príklad 14.4

Majme nejakú teóriu T v jazyku $\mathcal{L}$ s $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathtt{rodič}^2\}$.
Rozšírme T o $X = \forall x \forall y \big(\mathtt{súrodenec}(x, y) \leftrightarrow$

$$\big(x \not\doteq y \land \exists z(\mathtt{rodič}(z, x) \land \mathtt{rodič}(z, y))\big)\big).$$

Nech $\mathcal{M} = (\{\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K}, \mathrm{L}, \mathrm{M}, \mathrm{N}, \mathrm{O}\}, i)$ je model T, kde

$$i(\mathtt{rodič}) = \{(\mathrm{I}, \mathrm{M}), (\mathrm{L}, \mathrm{M}), (\mathrm{I}, \mathrm{N}), (\mathrm{O}, \mathrm{N}), (\mathrm{M}, \mathrm{K}), (\mathrm{M}, \mathrm{J})\}$$

Potom sa $\mathcal{M}$ dá jednoznačne rozšíriť na model $T \cup \{X\}$:
$\mathcal{M}_1 = (\{\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K}, \mathrm{L}, \mathrm{M}, \mathrm{N}, \mathrm{O}\}, i_1)$, $i_1(\mathtt{rodič}) = i(\mathtt{rodič})$,

$$i(\mathtt{súrodenec}) = \{(\mathrm{M}, \mathrm{N}), (\mathrm{N}, \mathrm{M}), (\mathrm{K}, \mathrm{J}), (\mathrm{J}, \mathrm{K})\}$$

Definícia ako dopyt

Explicitne definovaný predikát sa správa
ako **dopyt** alebo **pohľad** nad ostatnými predikátmi.

Príklad 14.5

rodič

r	d
I	M
L	M
I	N
O	N
M	K
M	J

```
CREATE VIEW súrodenec AS
SELECT r1.d AS d1, r2.d AS d2
FROM rodič AS r1
JOIN rodič AS r2 ON r1.r = r2.r
WHERE r1.d <> r2.d
```

$$\forall x \forall y \Big(\text{súrodenec}(x, y) \leftrightarrow \big(x \neq y \land \exists z(\text{rodič}(z, x) \land \text{rodič}(z, y))\big)\Big)$$

súrodenec

d1	d2
M	N
N	M
K	J
J	K

Jednoznačnosť definičného rozšírenia

Definícia 14.6

Nech $\mathcal{L}_2$ je rozšírenie jazyka $\mathcal{L}_1$. Nech $\mathcal{M}_1 = (D_1, i_1)$ je štruktúra pre $\mathcal{L}_1$ a $\mathcal{M}_2 = (D_2, i_2)$ je štruktúra pre $\mathcal{L}_2$.
Potom $\mathcal{M}_2$ je ***rozšírením*** $\mathcal{M}_1$ vtt $D_2 = D_1$ a $i_2(s) = i_1(s)$ pre každý mimologický symbol s jazyka $\mathcal{L}_1$.

Tvrdenie 14.7

Nech T je teória v jazyku $\mathcal{L}$ a T' je rozšírenie T explicitnou definíciou nejakého predikátového symbolu.
Potom pre každý model teórie T existuje práve jedno jeho rozšírenie, ktoré je modelom teórie T'
a každý model teórie T' je rozšírením práve jedného modelu teórie T.

Konzervativita definičného rozšírenia

Tvrdenie 14.8

Nech T je teória v jazyku $\mathcal{L}$ a T' je rozšírenie T explicitnou definíciou nejakého predikátového symbolu.
Nech X je uzavretá formula jazyka $\mathcal{L}$.
Potom $T \models X$ vtt $T' \models X$.

Dokazovanie s explicitnými definíciami a rovnosťou

Využime nové pravidlá na dôkaz vyplývania z teórie s definíciou:

Príklad 14.9

Dokážme tablom, že $T \models X$ pre

$$
\begin{aligned}
T = \{&\forall x\, \forall y\big(\mathtt{študent}(x) \land \mathtt{predmet}(y) \to \\
&\qquad\qquad \big(\mathtt{absolvuje}(x, y) \leftrightarrow \\
&\qquad\qquad\ \exists z(\mathtt{známka}(z) \land \mathtt{hodnotený}(x, y) \doteq z \land z \not\doteq \mathtt{Fx})\big)\big), \\
&\forall x\, \forall y\big(\mathtt{študent}(x) \land \mathtt{št\_prog}(y) \to \\
&\qquad\qquad \big(\mathtt{absolvuje}(x, y) \leftrightarrow \\
&\qquad\qquad\ \forall z(\mathtt{pov\_predmet\_prog}(z, y) \to \mathtt{absolvuje}(x, z))\big)\big), \\
&\forall x\big(\mathtt{št\_prog}(x) \to \exists y\, \mathtt{pov\_predmet\_prog}(z, x)\big), \\
&\forall x\big(\exists y\, \mathtt{pov\_predmet\_prog}(x, y) \to \mathtt{predmet}(x)\big)\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X = {}&\forall x\, \forall y\big(\mathtt{študent}(x) \land \mathtt{št\_prog}(y) \land \mathtt{absolvuje}(x, y) \to \\
&\qquad \exists y\, \mathtt{hodnotený}(x, y) \not\doteq \mathtt{Fx}\big)
\end{aligned}
$$