

---

# Matematika 4 — Logika pre informatikov

## 2. sada teoretických úloh

---

Táto sada úloh obsahuje upravenú **hodnotenú časť**, pôvodne zverejnenú v 1. sade úloh. Jej riešenie odovzdajte najneskôr v **pondelok 28. februára 2022 o 9:00**.

Čísla úloh v zátvorkách odkazujú do zbierky<sup>1</sup>, kde nájdete riešené príklady a ďalšie úlohy na precvičovanie.

Pri riešení niektorých úloh vám môže pomôcť prieskumník štruktúr<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> <https://github.com/FMFI-UK-1-AIN-412/lpi/blob/master/teoreticke/zbierka.pdf>

<sup>2</sup> <https://fmfi-uk-1-ain-412.github.io/structure-explorer/>

**Cvičenie 2.1.** (2.1.1, 2.1.2) Rozhodnite, či nasledujúce postupnosti symbolov sú formulami nad nejakou množinou konštánt  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$  a predikátových symbolov  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ .

Kladnú odpoveď dokážte nájdením množín  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$  a  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$  a vytvárajúcej postupnosti pre formulu. Zápornú odpoveď stručne zdôvodnite.

- a)  $(\text{žena}(\text{Alex}) \wedge \text{muž}(\text{Alex}))$
- b)  $\neg(\text{má\_rād}(\text{Alex}, \text{Alex}))$
- c)  $(\neg(\text{muž}(\text{Alex}) \wedge \text{žena}(\text{Alex})) \rightarrow (\neg\text{muž}(\text{Alex}) \vee \neg\text{žena}(\text{Alex})))$
- d)  $(\neg\neg\text{starší}(\text{Alex}, \text{Edo}) \leftrightarrow (\text{starší}(\text{Alex}, \text{Edo}) \neg\wedge \text{muž}(\text{Edo})))$

**Vyskúšajte si.** Samostatne rozhodnite, či a nad akým jazykom sú postupnosti formulami:

- e)  $(\text{starší}(\text{Edo}, \text{Alex}) \rightarrow (\neg\text{starší}(\text{Alex}, \text{Edo})))$
- f)  $(\text{Alex} \vee \neg\text{oco})$

**Cvičenie 2.2.** (2.1.3, 2.1.4) Pre nasledujúcu formulu zapíšte vytvárajúcu postupnosť, zakreslite vytvárajúci strom a určte jej stupeň:

$$((\text{rodič}(\text{Bruno}, \text{Hugo}) \wedge \text{rodič}(\text{Bruno}, \text{Tereza})) \rightarrow \\ ((\neg\text{žena}(\text{Hugo}) \wedge \text{muž}(\text{Hugo})) \rightarrow \text{brat}(\text{Hugo}, \text{Tereza})))$$


**Cvičenie 2.3.** (2.2.1, 2.2.2) V štruktúre  $\mathcal{M} = (D, i)$ , kde

$$\begin{aligned} D &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \\ i(\text{Alex}) &= 1, \quad i(\text{Bruno}) = 2, \quad i(\text{Hugo}) = 5, \quad i(\text{Tereza}) = 6, \\ i(\text{žena}) &= \{1, 3, 4, 6\}, \\ i(\text{muž}) &= \{2, 4\}, \\ i(\text{má_rád}) &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 4), (5, 5), (5, 6)\}, \\ i(\text{brat}) &= \{(1, 2), (2, 1), (3, 1), (4, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 6)\}, \\ i(\text{rodič}) &= \{(1, 1), (2, 5), (2, 6), (1, 5), (3, 4), (4, 2), (1, 6), (5, 6), (6, 5)\}, \\ i(\text{starší}) &= \{(2, 1), (5, 6), (6, 5)\}, \end{aligned}$$

zistíte postupom *zdola nahor*, či sú formuly  $A_1$  a  $A_2$  pravdivé.

( $A_1$ )  $(\text{starší}(\text{Bruno}, \text{Alex}) \rightarrow \neg \text{starší}(\text{Alex}, \text{Bruno}))$

( $A_2$ )  $(\neg \text{má_rád}(\text{Alex}, \text{Bruno}) \leftrightarrow \neg \text{má_rád}(\text{Bruno}, \text{Alex}))$

**Vyskúšajte si.** Tipnite si, či je formula formula  $A_3$  pravdivá v štruktúre  $\mathcal{M}$  a overte svoje tip pomocou Henkinovej–Hintikkovej hry () v prieskumníku štruktúr:

( $A_3$ )  $((\text{rodič}(\text{Bruno}, \text{Hugo}) \wedge \text{rodič}(\text{Bruno}, \text{Tereza})) \rightarrow$

$((\neg \text{žena}(\text{Hugo}) \wedge \text{muž}(\text{Hugo})) \rightarrow \text{brat}(\text{Hugo}, \text{Tereza})))$

**Cvičenie 2.4.** (2.2.3, 2.2.4) Vytvorte štruktúru, ktorá je modelom teórie  $T = \{A_1, \dots, A_6\}$ :

( $A_1$ )  $\text{titul}(\text{Sofina\_voľba})$

( $A_2$ )  $\text{kniha}(\text{k325})$



( $A_3$ )  $\text{má\_autora}(\text{Sofina\_voľba}, \text{Styron})$

( $A_4$ )  $(\text{titul}(\text{Kto\_chytá\_v\_žite}) \wedge \text{má\_autora}(\text{Kto\_chytá\_v\_žite}, \text{Salinger}))$

( $A_5$ )  $(\neg(\text{číta}(\text{Adam}, \text{k325}) \wedge \text{obdivuje}(\text{Dana}, \text{Adam})) \rightarrow$

$\neg(\text{má\_titul}(\text{k325}, \text{Sofina\_voľba}) \vee \text{má\_titul}(\text{k325}, \text{Kto\_chytá\_v\_žite})))$

( $A_6$ )  $(\text{má\_titul}(\text{k325}, \text{Kto\_chytá\_v\_žite}) \leftrightarrow \neg \text{má\_titul}(\text{k325}, \text{Sofina\_voľba}))$


 **Pomôcka.** Aby ste zistili, ako majú byť v štruktúre interpretované predikáty, analyzujte význam formúl podľa definície pravdivosti postupom zhora nadol, ako sme ukázali na prednáške. Môže vám v tom pomôcť Henkinova–Hintikkova hra () v prieskumníku štruktúr.

**Cvičenie 2.5.** (2.3.1) Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho mimologických symbolov.

- ( $A_1$ ) Lucia a jej kamarát sú deti.
- ( $A_2$ ) Luciin kamarát má obľúbené hračky autíčko a koníka Blesk.
- ( $A_3$ ) Luciina obľúbená hračka je tiež autíčko, Sally, napriek tomu, že je dievča.
- ( $A_4$ ) Peter je meno spomínaného Luciinho kamaráta.
- ( $A_5$ ) Lucia je kamarátska, ale Peter je asi taký kamarátsky ako je skromný.
- ( $A_6$ ) Lucia sa preto hrá buď so svojim obľúbeným autíčkom alebo s Petrovým.
- ( $A_7$ ) V druhom prípade mu totiž musí to svoje požičať.
- ( $A_8$ ) S Bleskom sa nemôžu hrať obaja naraz.
- ( $A_9$ ) Ak je niektorá z menovaných hračiek poškodená, Peter a Lucia sa k nej správajú opatrne.
- ( $A_{10}$ ) Lucia je šťastná, keď sa s ňou Peter hrá.
- ( $A_{11}$ ) Peter je šťastný len za predpokladu, že je šťastná Lucia.

**Vyskúšajte si.** Samostatne doplňte teóriu formalizáciou nasledujúcich výrokov:

- ( $A_{12}$ ) Obe Petrove obľúbené hračky sú čierne, ale páčia sa aj Lucii, hoci jej obľúbená farba je modrá.
- ( $A_{13}$ ) Lucia sa vždy hrá so svojim autíčkom a buď ešte s bábikou Elzou alebo s kamarátovým čiernym koníkom (alebo s oboma naraz).
- ( $A_{14}$ ) Luciino autíčko je ale modré.
- ( $A_{15}$ ) Ak je slnečný deň, Peter sa hrá s loptou.
- ( $A_{16}$ ) Psa venčí, ak je pekne.
- ( $A_{17}$ ) S Luciou sa hrá, jedine ak nie je pekne.
- ( $A_{18}$ ) Pod nie je pekne myslíme, že nie je slnečný deň.

 **Pomôcka.** Vo výrokoch sa zjavne hovorí o konkrétnych objektoch (napríklad autíčko Luciinho kamaráta), ktoré ale nemajú mená. Pri formalizácii ich označte vhodnými konštantami. Ďalšou zaujímavosťou je počasie. Čoho by mohlo byť vlastnosťou?

## Hodnotená časť

⚠ Upravili sme formuláciu zadania v časti a), aby nezávadzala k nezamýšľanej formalizácii vzťahu *byť sestrou*. Zmenené slová sú vyznačené kurzívou.

Riešenie tejto hodnotenej časti **odovzdajte** najneskôr v pondelok **28. februára 2022 o 9:00** cez odovzdávací formulár pre tu01<sup>3</sup>. Riešenia odovzdané po termíne sa považujú za opravy neodovzdaných riešení s príslušnými dôsledkami podľa pravidiel<sup>4</sup>.

**Odovzdávajte jeden dokument vo formáte PDF** s dodatočnými obmedzeniami uvedenými vo formulári. Dokument musí obsahovať **celé riešenie** v textovej forme. Odovzdané riešenia musia byť **čitateľné** a mať primerane **malý** rozsah. Na riešenie sa vzťahujú všeobecné **pravidlá**<sup>4</sup>.

Ak pri riešení použijete prieskumník štruktúr<sup>2</sup>, odovzdajte (povinne) **aj export** z neho. **Pozor!** Informácie nachádzajúce sa **iba v exporte**, ale nie v PDF **nepovažujeme za súčasť riešenia**. Export však výrazne urýchli hodnotenie riešenia.

<sup>3</sup> <https://forms.gle/fbPMaE9KyGm6Tnk17>

<sup>4</sup> [https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics\\_4/sk#pravidla-uloh](https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics_4/sk#pravidla-uloh)

### Úloha 1.6. (2.2.3, 2.3.1, 2.3.4)

- a) Sformalizujte nasledujúce výroky ako teóriu  $T = \{A_1, \dots, A_9\}$  vo vhodne zvolenom jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu  $\mathcal{L}$ . Zapište množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

Snažte sa o to, aby počet predikátových symbolov bol čo najmenší. Zároveň ale nespájajte vzájomne nezávislé vlastnosti a vzťahy do jedného predikátového symbolu. Nevkladajte do formalizácie žiadne ďalšie intuitívne znalosti na pozadí (napr. ak je niekto zlý, nedopĺňajte, že nemôže byť dobrý).

(A<sub>1</sub>) V Čiernom lese stojí chalúpka, ktorá je z perníku.

(A<sub>2</sub>) Niekedy sa jej hovorí aj Perníková veža.

(A<sub>3</sub>) V Perníkovej veži býva zlá čarodejnica. A tiež chlapec Janko a Marienka, *ktorá je jeho súrodencom*.

(A<sub>4</sub>) Janko je chlapec, iba ak Marienka je zlá.

(A<sub>5</sub>) Janko a Marienka sú deti, čarodejnica nie.

(A<sub>6</sub>) Rovnako ako čarodejnica, aj Marienka je silná.

(A<sub>7</sub>) Janko alebo Marienka je chlapec.

- ( $A_8$ ) Ak je niekto (zo spomínaných) silný, nie je dievča a Janka ochráni.  
( $A_9$ ) Ak by to, že Marienka je *Jankovým súrodencom*, znamenalo, že ho ochráni, tak ho čarodejnica určite nezje.

V jazyku  $\mathcal{L}$  ďalej sformalizujte formulami  $B_1$ ,  $B_2$  a  $B_3$  výroky:

( $B_1$ ) Marienka je dievča.

( $B_2$ ) Janko je dievča.

( $B_3$ ) Ak je Marienka *Jankovým súrodencom*, čarodejnica zje Janka.

- b) Vytvorte štruktúru  $\mathcal{M}$  pre jazyk  $\mathcal{L}$ , ktorá je modelom teórie  $T$ .  
c) Pre každú z formúl  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  (jednotlivo) rozhodnite, či je možné, aby bola pravdivá v nejakom modeli teórie  $T$ .  
Svoju odpoveď detailne zdôvodnite na základe definície modelu, štruktúry a pravdivosti výrokovologických formúl v nej.