


Matematika 4 — Logika pre informatikov

7. sada teoretických úloh

 Táto sada úloh nemá hodnotenú časť, ale obsahuje úlohy, ktoré vám odporúčame preriešiť pred midtermom.

 Čísla úloh v zátvorkách odkazujú do zbierky¹, v ktorej nájdete ďalšie úlohy na precvičovanie a vzorové riešenia.

¹ <https://fmfi-uk-1-ain-412.github.io/lpi/teoreticke-ain/zbierka.pdf>

Cvičenie 7.1. (5.3.1) Dokážte, že nasledujúce tablové pravidlá sú korektné:

$$\frac{T(X \rightarrow Y) \quad F Y}{F X} \text{ (MT)} \qquad \frac{T(X \leftrightarrow Y)}{T(X \wedge Y) \mid F(X \vee Y)} \text{ (ECDT)}$$


Cvičenie 7.2. (5.4.1) Dokážte alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenia:


- c) Existujú označené formuly A^+ typu α a B^+ typu β také, že α_2 pre A^+ je rovnaká ako β_1 pre B^+ .
- d) Nech π je *uzavretá* vetva v ľubovoľnom table. Nech β, β_1, β_2 sú označené formuly podľa niektorého β pravidla. Ak sa β nachádza na π , tak aj β_1 a β_2 sa nachádzajú na π .
- g) Nech π je *úplná a uzavretá* vetva v ľubovoľnom table. Nech $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ sú označené formuly podľa niektorej dvojice α pravidiel. Nech β, β_1, β_2 sú označené formuly podľa niektorého β pravidla. Ak sa α a β nachádzajú na π , tak aspoň jedna z α_1, β_1 je tiež na π .


Cvičenie 7.3. (5.4.2) Dokážte alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenia:

- c) Nech S je množina formúl a X je formula. Nech \mathcal{T} je ľubovoľné tablo pre množinu označených formúl $\{T A \mid A \in S\} \cup \{F X\}$. Ak je v \mathcal{T} niektorá vetva úplná otvorená a iná uzavretá, tak X je nezávislá od S .

Príprava na midterm

 Odporúčame vám preriešiť si nasledujúce úlohy pred midtermom.

 Svoje tablá si môžete skontrolovať pomocou *nového* editora tabiel. V menu pod tlačidlom *Basic propositional* ▼ vyberte sadu pravidiel *Propositional*, ktorá obsahuje základné pravidlá α , β a všetky pravidlá z úlohy 5.3.1 v zbierke.

 Nový editor tabiel nevie overiť, či je vetva otvorená a úplná. Skontrolovať to musíte sami.

² <https://fmfi-uk-1-ain-412.github.io/tableauEditor/>

Úloha 7.4. (5.3.1) Pre každú dvojicu výrokovologických formúl A a B v jazyku \mathcal{L} zdefinujeme $(A \rightarrow B)$ ako skratku za formulu $(A \wedge \neg B)$.

Sformulujte tablové pravidlá pre označené formuly $\mathbf{T}(A \rightarrow B)$ a $\mathbf{F}(A \rightarrow B)$ podobné pravidlám α a β pre základné výrokovologické spojky.

Dokážte, že tieto pravidlá sú korektné.


Úloha 7.5. (5.3.3, 5.2.3) Detektívi Miller a Skillová riešia prípad bankovej lúpeže. Partia lupičov v sejfe vylomila aj bezpečnostné schránky a nie je úplne jasné, čo z nich ukradli, pretože klienti si nespomínajú alebo nechcú spomenúť, čo v nich mali. Detektívom sa však podarilo zúžiť okruh podozrivých a získať tieto indície:

1. Bloom sa dá nahovoriť iba na takú prácu, pri ktorej ide o drahokamy, a vždy spolupracuje s Yarrom alebo Malloyom.
2. Malloy sa špecializuje výhradne na cenné papiere.
3. Podľa dôveryhodného informátora sa drahokamy nekradnú, ak je v partii Pakľúč a nie Ocean.
4. Ak bol medzi lupičmi Yarr, tak v partii nebol Ryan, s ktorým sa Yarr len ťažko znesie, alebo išlo o zlato, kvôli ktorému je Yarr ochotný spolupracovať skoro s hocikým.
5. Ocean zásadne nekradne zlato.
6. Pod prezývkou Pakľúč je známy Ryan.
7. Bloomovu tvár zaznamenala bezpečnostná kamera v okolí banky, pri vystupovaní z auta tesne pred lúpežou, a všetci klienti banky potvrdili, že im neukradli cenné papiere.

Pomôžte Skillovej a Millerovi na základe týchto indícií rozhodnúť, či lupil alebo nelupil Ryan, a o tom, či lupiči ukradli zlato.

Pri riešení tejto úlohy:

- i. Určte **aké logické problémy** je potrebné vyriešiť, aby ste mohli urobiť požadované rozhodnutie.
- ii. Vyriešte **všetky** logické problémy použitím **tablového** kalkulu rozšíreného o korektné pravidlá z úlohy 5.3.1 v zbierke. Tieto pravidlá použijete **všade**, kde je to možné a užitočné z hľadiska veľkosti tabla.
- iii. Zdôvodnite, **ako a prečo** použité tablo či tablá riešia určené logické problémy.
- iv. Vyjadrite **riešenia určených logických problémov**.
- v. Vывod'te **požadované rozhodnutie**.

 **Pomôcka.** Indície sformalizujeme v jazyku \mathcal{L} s $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{lúpil}^1, \text{cp}^1, \text{drahokamy}^1, \text{zlato}^1\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{lup}, \text{Bloom}, \text{Malloy}, \text{Ocean}, \text{Paklúč}, \text{Ryan}, \text{Yarr}\}$. Konštanta lup označuje množinu ulúpených cenností, ostatné konštanty označujú jednotlivých podozrivých. Zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
$\text{lúpil}(x)$	x sa zúčastnil predmetnej lúpeže
$\text{cp}(x)$	x obsahuje cenné papiere
$\text{drahokamy}(x)$	x obsahuje drahokamy
$\text{zlato}(x)$	x obsahuje zlato

Formalizácia indícií je potom nasledovná:

$$(A_1) (\text{lúpil}(\text{Bloom}) \rightarrow (\text{drahokamy}(\text{lup}) \wedge (\text{lúpil}(\text{Yarr}) \vee \text{lúpil}(\text{Malloy}))))$$

$$(A_2) (\text{lúpil}(\text{Malloy}) \rightarrow \text{cp}(\text{lup}))$$

$$(A_3) ((\text{lúpil}(\text{Paklúč}) \wedge \neg \text{lúpil}(\text{Ocean})) \rightarrow \neg \text{drahokamy}(\text{lup}))$$

$$(A_4) (\text{lúpil}(\text{Yarr}) \rightarrow (\neg \text{lúpil}(\text{Ryan}) \vee \text{zlato}(\text{lup})))$$

$$(A_5) (\text{lúpil}(\text{Ocean}) \rightarrow \neg \text{zlato}(\text{lup}))$$

$$(A_6) (\text{lúpil}(\text{Paklúč}) \leftrightarrow \text{lúpil}(\text{Ryan}))$$

$$(A_7) (\text{lúpil}(\text{Bloom}) \wedge \neg \text{cp}(\text{lup}))$$

Odporúčame vám označiť atomické formuly vhodnými meta premennými, napr. $B = \text{lúpil}(\text{Bloom})$, ktoré potom použijete v tabľách.