
Matematika 4 — Logika pre informatikov

2. sada teoretických úloh

Táto sada úloh obsahuje upravenú **hodnotenú časť**, pôvodne zverejnenú v 1. sade úloh. Jej riešenie odovzdajte najneskôr v **pondelok 28. februára 2022 o 9:00**.

Čísla úloh v zátvorkách odkazujú do zbierky¹, kde nájdete riešené príklady a ďalšie úlohy na precvičovanie.

Pri riešení niektorých úloh vám môže pomôcť prieskumník štruktúr².

¹ <https://fmfi-uk-1-ain-412.github.io/lpi/teoreticke-ain/zbierka.pdf>

² <https://fmfi-uk-1-ain-412.github.io/structure-explorer/>

Cvičenie 2.1. (2.1.1, 2.1.2) Rozhodnite, či nasledujúce postupnosti symbolov sú formulami nad nejakou množinou konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

Kladnú odpoveď dokážte nájdením množín $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ a vytvárajúcej postupnosti pre formulu. Zápornú odpoveď stručne zdôvodnite.

- a) $(\text{žena}(\text{Alex}) \wedge \text{muž}(\text{Alex}))$
- b) $\neg(\text{má_rād}(\text{Alex}, \text{Alex}))$
- c) $(\neg(\text{muž}(\text{Alex}) \wedge \text{žena}(\text{Alex})) \rightarrow (\neg\text{muž}(\text{Alex}) \vee \neg\text{žena}(\text{Alex})))$
- d) $(\neg\neg\text{starší}(\text{Alex}, \text{Edo}) \leftrightarrow (\text{starší}(\text{Alex}, \text{Edo}) \neg\wedge \text{muž}(\text{Edo})))$

Vyskúšajte si. Samostatne rozhodnite, či a nad akým jazykom sú postupnosti formulami:

- e) $(\text{starší}(\text{Edo}, \text{Alex}) \rightarrow (\neg\text{starší}(\text{Alex}, \text{Edo})))$
- f) $(\text{Alex} \vee \neg\text{oco})$

Cvičenie 2.2. (2.1.3, 2.1.4) Pre nasledujúcu formulu zapíšte vytvárajúcu postupnosť, zakreslite vytvárajúci strom a určte jej stupeň:

$$((\text{rodič}(\text{Bruno}, \text{Hugo}) \wedge \text{rodič}(\text{Bruno}, \text{Tereza})) \rightarrow \\ ((\neg\text{žena}(\text{Hugo}) \wedge \text{muž}(\text{Hugo})) \rightarrow \text{brat}(\text{Hugo}, \text{Tereza})))$$


Cvičenie 2.3. (2.2.1, 2.2.2) V štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$\begin{aligned} D &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \\ i(\text{Alex}) &= 1, \quad i(\text{Bruno}) = 2, \quad i(\text{Hugo}) = 5, \quad i(\text{Tereza}) = 6, \\ i(\text{žena}) &= \{1, 3, 4, 6\}, \\ i(\text{muž}) &= \{2, 4\}, \\ i(\text{má_rád}) &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 4), (5, 5), (5, 6)\}, \\ i(\text{brat}) &= \{(1, 2), (2, 1), (3, 1), (4, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 6)\}, \\ i(\text{rodič}) &= \{(1, 1), (2, 5), (2, 6), (1, 5), (3, 4), (4, 2), (1, 6), (5, 6), (6, 5)\}, \\ i(\text{starší}) &= \{(2, 1), (5, 6), (6, 5)\}, \end{aligned}$$

zistíte postupom *zdola nahor*, či sú formuly A_1 a A_2 pravdivé.

(A_1) $(\text{starší}(\text{Bruno}, \text{Alex}) \rightarrow \neg \text{starší}(\text{Alex}, \text{Bruno}))$

(A_2) $(\neg \text{má_rád}(\text{Alex}, \text{Bruno}) \leftrightarrow \neg \text{má_rád}(\text{Bruno}, \text{Alex}))$

Vyskúšajte si. Tipnite si, či je formula formula A_3 pravdivá v štruktúre \mathcal{M} a overte svoje tip pomocou Henkinovej–Hintikkovej hry () v prieskumníku štruktúr:

(A_3) $((\text{rodič}(\text{Bruno}, \text{Hugo}) \wedge \text{rodič}(\text{Bruno}, \text{Tereza})) \rightarrow$

$((\neg \text{žena}(\text{Hugo}) \wedge \text{muž}(\text{Hugo})) \rightarrow \text{brat}(\text{Hugo}, \text{Tereza})))$

Cvičenie 2.4. (2.2.3, 2.2.4) Vytvorte štruktúru, ktorá je modelom teórie $T = \{A_1, \dots, A_6\}$:

(A_1) $\text{titul}(\text{Sofina_voľba})$

(A_2) $\text{kniha}(\text{k325})$



(A_3) $\text{má_autora}(\text{Sofina_voľba}, \text{Styron})$

(A_4) $(\text{titul}(\text{Kto_chytá_v_žite}) \wedge \text{má_autora}(\text{Kto_chytá_v_žite}, \text{Salinger}))$

(A_5) $(\neg(\text{číta}(\text{Adam}, \text{k325}) \wedge \text{obdivuje}(\text{Dana}, \text{Adam})) \rightarrow$

$\neg(\text{má_titul}(\text{k325}, \text{Sofina_voľba}) \vee \text{má_titul}(\text{k325}, \text{Kto_chytá_v_žite})))$

(A_6) $(\text{má_titul}(\text{k325}, \text{Kto_chytá_v_žite}) \leftrightarrow \neg \text{má_titul}(\text{k325}, \text{Sofina_voľba}))$


 **Pomôcka.** Aby ste zistili, ako majú byť v štruktúre interpretované predikáty, analyzujte význam formúl podľa definície pravdivosti postupom zhora nadol, ako sme ukázali na prednáške. Môže vám v tom pomôcť Henkinova–Hintikkova hra () v prieskumníku štruktúr.

Cvičenie 2.5. (2.3.1) Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho mimologických symbolov.

- (A_1) Lucia a jej kamarát sú deti.
- (A_2) Luciin kamarát má obľúbené hračky autíčko a koníka Blesk.
- (A_3) Luciina obľúbená hračka je tiež autíčko, Sally, napriek tomu, že je dievča.
- (A_4) Peter je meno spomínaného Luciinho kamaráta.
- (A_5) Lucia je kamarátska, ale Peter je asi taký kamarátsky ako je skromný.
- (A_6) Lucia sa preto hrá buď so svojim obľúbeným autíčkom alebo s Petrovým.
- (A_7) V druhom prípade mu totiž musí to svoje požičať.
- (A_8) S Bleskom sa nemôžu hrať obaja naraz.
- (A_9) Ak je niektorá z menovaných hračiek poškodená, Peter a Lucia sa k nej správajú opatrne.
- (A_{10}) Lucia je šťastná, keď sa s ňou Peter hrá.
- (A_{11}) Peter je šťastný len za predpokladu, že je šťastná Lucia.

Vyskúšajte si. Samostatne doplňte teóriu formalizáciou nasledujúcich výrokov:

- (A_{12}) Obe Petrove obľúbené hračky sú čierne, ale páčia sa aj Lucii, hoci jej obľúbená farba je modrá.
- (A_{13}) Lucia sa vždy hrá so svojim autíčkom a buď ešte s bábikou Elzou alebo s kamarátovým čiernym koníkom (alebo s oboma naraz).
- (A_{14}) Luciino autíčko je ale modré.
- (A_{15}) Ak je slnečný deň, Peter sa hrá s loptou.
- (A_{16}) Psa venčí, ak je pekne.
- (A_{17}) S Luciou sa hrá, jedine ak nie je pekne.
- (A_{18}) Pod nie je pekne myslíme, že nie je slnečný deň.

 **Pomôcka.** Vo výrokoch sa zjavne hovorí o konkrétnych objektoch (napríklad autíčko Luciinho kamaráta), ktoré ale nemajú mená. Pri formalizácii ich označte vhodnými konštantami. Ďalšou zaujímavosťou je počasie. Čoho by mohlo byť vlastnosťou?

Hodnotená časť

⚠ Upravili sme formuláciu zadania v časti a), aby nevádzala k nezamýšľanej formalizácii vzťahu *byť sestrou*. Zmenené slová sú vyznačené kurzívou.

Riešenie tejto hodnotenej časti **odovzdajte** najneskôr v pondelok **28. februára 2022 o 9:00** cez odovzdávací formulár pre tu01³. Riešenia odovzdané po termíne sa považujú za opravy neodovzdaných riešení s príslušnými dôsledkami podľa pravidiel⁴.

Odovzdávajte jeden dokument vo formáte PDF s dodatočnými obmedzeniami uvedenými vo formulári. Dokument musí obsahovať **celé riešenie** v textovej forme. Odovzdané riešenia musia byť **čitateľné** a mať primerane **malý** rozsah. Na riešenie sa vzťahujú všeobecné **pravidlá**⁴.

Ak pri riešení použijete prieskumník štruktúr², odovzdajte (povinne) **aj export** z neho. **Pozor!** Informácie nachádzajúce sa **iba v exporte**, ale nie v PDF **nepovažujeme za súčasť riešenia**. Export však výrazne urýchli hodnotenie riešenia.

³ <https://forms.gle/JGQ1QigW5YF9SA7W8>

⁴ https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics_4/sk#pravidla-uloh

Úloha 1.6. (2.2.3, 2.3.1, 2.3.4)

- a) Sformalizujte nasledujúce výroky ako teóriu $T = \{A_1, \dots, A_9\}$ vo vhodne zvolenom jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu \mathcal{L} . Zapište množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

Snažte sa o to, aby počet predikátových symbolov bol čo najmenší. Zároveň ale nespájajte vzájomne nezávislé vlastnosti a vzťahy do jedného predikátového symbolu. Nevkladajte do formalizácie žiadne ďalšie intuitívne znalosti na pozadí (napr. ak je niekto zlý, nedopĺňajte, že nemôže byť dobrý).

(A₁) V Čiernom lese stojí chalúpka, ktorá je z perníku.

(A₂) Niekedy sa jej hovorí aj Perníková veža.

(A₃) V Perníkovej veži býva zlá čarodejnica. A tiež chlapec Janko a Marienka, *ktorá je jeho súrodencom*.

(A₄) Janko je chlapec, iba ak Marienka je zlá.

(A₅) Janko a Marienka sú deti, čarodejnica nie.

(A₆) Rovnako ako čarodejnica, aj Marienka je silná.

(A₇) Janko alebo Marienka je chlapec.

- (A_8) Ak je niekto (zo spomínaných) silný, nie je dievča a Janka ochráni.
(A_9) Ak by to, že Marienka je *Jankovým súrodencom*, znamenalo, že ho ochráni, tak ho čarodejnica určite nezje.

V jazyku \mathcal{L} ďalej sformalizujte formulami B_1 , B_2 a B_3 výroky:

(B_1) Marienka je dievča.

(B_2) Janko je dievča.

(B_3) Ak je Marienka *Jankovým súrodencom*, čarodejnica zje Janka.

- b) Vytvorte štruktúru \mathcal{M} pre jazyk \mathcal{L} , ktorá je modelom teórie T .
c) Pre každú z formúl B_1 , B_2 , B_3 (jednotlivo) rozhodnite, či je možné, aby bola pravdivá v nejakom modeli teórie T .
Svoju odpoveď detailne zdôvodnite na základe definície modelu, štruktúry a pravdivosti výrokovologických formúl v nej.