

Korektnosť a úplnosť výrokovologických tabiel

6. prednáška · Matematika (4): Logika pre informatikov

Ján Klúka, Ján Mazák

Letný semester 2021/2022

Univerzita Komenského v Bratislave

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Katedra aplikovanej informatiky

Dôkazy a výrokovologické tablá

Výrokovologické tablá — opakovanie

Korektnosť tabiel

Testovanie nesplniteľnosti, splniteľnosti a falzifikovateľnosti

Úplnosť

Minulý týždeň:

- Sformalizovali sme dôkazy sporom pomocou tabiel.
- Vyslovili, ale nedokázali tvrdenie o **korektnosti tabiel**:
uzavreté tablo dokazuje výrokovologickú **nesplniteľnosť**
- a dôsledky pre dokazovanie vyplývania a tautológií.

Dnes:

- **Dokážeme** korektnosť tabiel.
- Preskúmame, čo vedia tablá povedať o **splniteľnosti**.
- **Dokážeme** úplnosť tabiel.

Dôkazy a výrokovologické tablá

Dôkazy a výrokovologické tablá

Výrokovologické tablá – opakovanie

Definícia 5.1 (Tablo pre množinu označených formúl)

Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene *tablo pre S^+*) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných indukčných pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+ .

Definícia 5.1 (Tablo pre množinu označených formúl)

Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene *tablo pre S^+*) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných indukčných pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+ .
- Nech \mathcal{T} je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé *priame rozšírenie* \mathcal{T} ktorýmkoľvek z pravidiel:

Definícia 5.1 (Tablo pre množinu označených formúl)

Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene *tablo pre S^+*) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných indukčných pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+ .
- Nech \mathcal{T} je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé *priame rozšírenie* \mathcal{T} ktorýmkoľvek z pravidiel:
 - α : Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula α , tak ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci α_1 alebo α_2 .

Definícia 5.1 (Tablo pre množinu označených formúl)

Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene *tablo pre S^+*) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných indukčných pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+ .
- Nech \mathcal{T} je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé *priame rozšírenie* \mathcal{T} ktorýmkoľvek z pravidiel:
 - α : Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula α , tak ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci α_1 alebo α_2 .
 - β : Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula β , tak ako deti y pripojíme dva nové vrcholy, pričom ľavé dieťa bude obsahovať β_1 a pravé β_2 .

Definícia 5.1 (Tablo pre množinu označených formúl)

Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene *tablo pre S^+*) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných indukčných pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+ .
- Nech \mathcal{T} je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé *priame rozšírenie* \mathcal{T} ktorýmkoľvek z pravidiel:
 - α : Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula α , tak ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci α_1 alebo α_2 .
 - β : Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula β , tak ako deti y pripojíme dva nové vrcholy, pričom ľavé dieťa bude obsahovať β_1 a pravé β_2 .
- S^+ : Ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci ľubovoľnú označenú formulu $A^+ \in S^+$.

Definícia 5.1 (Tablo pre množinu označených formúl)

Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene *tablo pre S^+*) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných indukčných pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+ .
- Nech \mathcal{T} je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé *priame rozšírenie* \mathcal{T} ktorýmkoľvek z pravidiel:
 - α : Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula α , tak ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci α_1 alebo α_2 .
 - β : Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula β , tak ako deti y pripojíme dva nové vrcholy, pričom ľavé dieťa bude obsahovať β_1 a pravé β_2 .
 - S^+ : Ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci ľubovoľnú označenú formulu $A^+ \in S^+$.

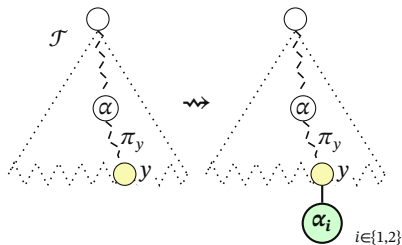
Nič iné nie je tablom pre S^+ .

Tablá a tablové pravidlá

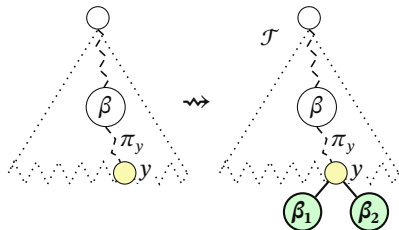
Pôvodné tablo

Možné priame rozšírenie

Pravidlá a označené formuly v nich



α	α	α	α_1	α_2
α_1	α_2	T ($X \wedge Y$)	T X	T Y
		F ($X \vee Y$)	F X	F Y
		F ($X \rightarrow Y$)	T X	F Y
		T $\neg X$	F X	F X
		F $\neg X$	T X	T X

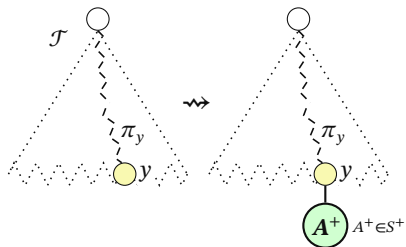


β	β	β_1	β_2
$\beta_1 \mid \beta_2$	F ($X \wedge Y$)	F X	F Y
	T ($X \vee Y$)	T X	T Y
	T ($X \rightarrow Y$)	F X	T Y

Legenda: y je list v table \mathcal{T} , π_y je cesta od koreňa k y

Tablá a tablové pravidlá (pokračovanie)

Pôvodné tablo	Možné priame rozšírenie	Pravidlá a označené formuly v nich
---------------	-------------------------	------------------------------------



$\overline{A^+}$

$A^+ \in S^+$

Legenda: y je list v table \mathcal{T} , π_y je cesta od koreňa k y

Uzavretosť a otvorenosť vetvy a tabla

Definícia 5.2

Vetvou tabla \mathcal{T} je každá cesta od koreňa \mathcal{T} k niektorému listu \mathcal{T} .

Označená formula X^+ sa **vyskytuje na vetve** π v \mathcal{T}
vtt X^+ sa nachádza v niektorom vrchole na π .

Skrátene to budeme zapisovať $X^+ \in \text{formulas}(\pi)$.

Tablo \sim dôkaz sporom.

Vetvenie \sim rozbor možných prípadov.

\implies Spor musí nastať vo všetkých vetvách.

Definícia 5.3

Vetva π tabla \mathcal{T} je **uzavretá** vtt na π sa súčasne vyskytujú označené
formuly $\mathbf{F}X$ a $\mathbf{T}X$ pre nejakú formulu X .

Inak je π **otvorená**.

Tablo \mathcal{T} je **uzavreté** vtt každá jeho vetva je uzavretá.

Naopak, \mathcal{T} je **otvorené** vtt aspoň jedna jeho vetva je otvorená.

Príklad — vetvy a uzavretosť

Príklad 5.4 (Vetvy a uzavretosť)

Určme vetvy v table a zistíme, či sú uzavreté a či je uzavreté tablo:

1.	$\mathbf{T}(p(A) \rightarrow (p(B) \wedge p(C)))$	S^+
2.	$\mathbf{T}((p(B) \vee p(D)) \rightarrow p(E))$	S^+
3.	$\mathbf{T}(p(F) \rightarrow \neg p(E))$	S^+
4.	$\mathbf{F}(p(A) \rightarrow \neg p(F))$	S^+
5.	$\mathbf{T} p(A)$	$\alpha 4$
6.	$\mathbf{F} \neg p(F)$	$\alpha 4$
7.	$\mathbf{T} p(F)$	$\alpha 6$
8.	$\mathbf{F} p(F)$	$\beta 3$
*7, 8		
9.	$\mathbf{T} \neg p(E)$	$\beta 3$
10.	$\mathbf{F} p(E)$	$\alpha 9$
11.	$\mathbf{F} p(A)$	$\beta 1$
*5, 11		
12.	$\mathbf{T}(p(B) \wedge p(C))$	$\beta 1$
13.	$\mathbf{T} p(B)$	$\alpha 12$
14.	$\mathbf{F}(p(B) \vee p(D))$	$\beta 2$
15.	$\mathbf{T} p(E)$	$\beta 2$
*10,15		

Dôkazy a výrokovologické tablá

Korektnosť tabiel

Korektnosť tablového kalkulu

Veta 5.16 (Korektnosť tablového kalkulu)

Nech S^+ je množina označených formúl a \mathcal{T} je uzavreté tablo pre S^+ .
Potom je množina S^+ nesplniteľná.

Dôsledok 5.17

Nech S je výrokovologická teória a X je výrokovologická formula.
Ak existuje uzavreté tablo pre $\{\mathbf{T} A \mid A \in S\} \cup \{\mathbf{F} X\}$ (skrát. $S \vdash_p X$),
tak z S výrokovologicky vyplýva X ($S \models_p X$).

Dôsledok 5.18

Nech X je výrokovologická formula.
Ak existuje uzavreté tablo pre $\{\mathbf{F} X\}$ (skrátene $\vdash_p X$),
tak X je tautológia ($\models_p X$).

Aby sme dokázali korektnosť tabiel, dokážeme postupne dve lemy:

K1: Ak máme tablo pre splniteľnú množinu S^+
s aspoň jednou splniteľnou vetvou,
tak každé jeho **priame rozšírenie** má tiež splniteľnú vetvu.

K2: Každé tablo pre splniteľnú množinu S^+
má aspoň jednu splniteľnú vetvu.

Z toho ľahko sporom dokážeme, že množina, pre ktorú sme našli uzavreté tablo je nespľniteľná.

Korektnosť — pravdivosť priameho rozšírenia tabla

Všimnime si:

Vetva sa správa ako konjunkcia svojich označených formúl — všetky musia byť naraz pravdivé.

Tablo sa správa ako disjunkcia vetiev — niektorá musí byť pravdivá.

Definícia 5.19

Nech S^+ je množina označených formúl v jazyku \mathcal{L} , nech \mathcal{T} je tablo pre S^+ , nech π je vetva tabla \mathcal{T} a nech v je výrokovologické ohodnotenie pre \mathcal{L} . Potom:

- **vetva π je pravdivá vo v** ($v \models_p \pi$) vtt vo v sú pravdivé **všetky** označené formuly vyskytujúce sa na vetve π .
- **tablo \mathcal{T} je pravdivé vo v** ($v \models_p \mathcal{T}$) vtt **niektorá** vetva v table \mathcal{T} je pravdivá.

Pomocou predchádzajúcej definície sformulujeme lemu K1 takto:

Lema 5.20 (K1)

Nech S^+ je množina označených formúl v jazyku \mathcal{L} , nech \mathcal{T} je tablo pre S^+ a nech v je výrokovologické ohodnotenie pre \mathcal{L} .

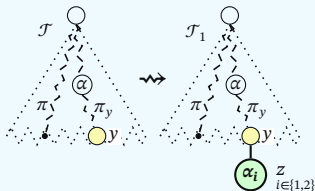
*Ak S^+ a \mathcal{T} sú pravdivé vo v ,
tak aj každé priame rozšírenie \mathcal{T} je pravdivé vo v .*

Dôkaz lemy K1.

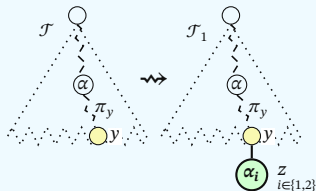
Nech $v \models_p S^+$ a nech \mathcal{T} je pravdivé vo v . Potom je pravdivá niektorá vetva v \mathcal{T} .

Zoberme jednu takú vetvu a označme ju π . Nech \mathcal{T}_1 je priame rozšírenie \mathcal{T} . Nastáva jeden z prípadov:

- \mathcal{T}_1 vzniklo z \mathcal{T} pravidlom α , pridaním nového dieťaťa z nejakému listu y v \mathcal{T} , pričom z obsahuje α_1 alebo α_2 pre nejakú formulu α na vetve π_y .



Ak $\pi \neq \pi_y$, tak \mathcal{T}_1 obsahuje π ,
a teda aj \mathcal{T}_1 je pravdivé vo v .



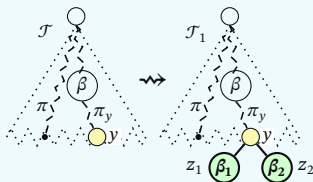
Ak $\pi = \pi_y$, tak α je pravdivá vo v ,
pretože α je na π . Potom aj α_1 a α_2 sú
pravdivé vo v (pozorovanie 5.8).
Vetva π_z v table \mathcal{T}_1 rozširuje vetvu π
pravdivú vo v o vrchol z obsahujúci
ozn. formulu α_1 alebo α_2 pravdivú
vo v . Preto π_z je pravdivá vo v , a teda
aj tablo \mathcal{T}_1 je pravdivé vo v .

Dôkaz lemy K1.

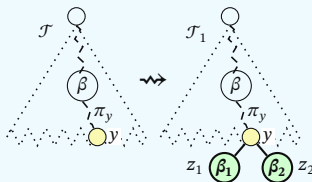
Nech $v \models_p S^+$ a nech \mathcal{T} je pravdivé vo v . Potom je pravdivá niektorá vetva v \mathcal{T} .

Zoberme jednu takú vetvu a označme ju π . Nech \mathcal{T}_1 je priame rozšírenie \mathcal{T} . Nastáva jeden z prípadov:

- \mathcal{T}_1 vzniklo z \mathcal{T} pravidlom β , pridaním detí z_1 a z_2 nejakému listu y v \mathcal{T} , pričom z_1 obsahuje β_1 a z_2 obsahuje β_2 pre nejakú formulu β na vetve π_y .



Ak $\pi \neq \pi_y$, tak \mathcal{T}_1 obsahuje π ,
a teda aj \mathcal{T}_1 je pravdivé vo v .



Ak $\pi = \pi_y$, tak $v \models_p \beta$, pretože β je
na π . Potom $v \models_p \beta_1$ **alebo** $v \models_p \beta_2$
(poz. 5.11).

Ak $v \models_p \beta_1$,

tak $v \models_p \pi_{z_1}$, a teda $v \models_p \mathcal{T}_1$.

Ak $v \models_p \beta_2$,

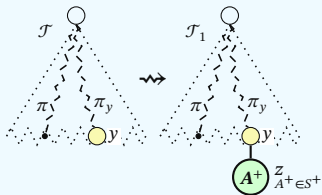
tak $v \models_p \pi_{z_2}$, a teda $v \models_p \mathcal{T}_1$.

Dôkaz lemy K1.

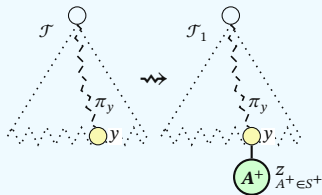
Nech $v \models_p S^+$ a nech \mathcal{T} je pravdivé vo v . Potom je pravdivá niektorá vetva v \mathcal{T} .

Zoberme jednu takú vetvu a označme ju π . Nech \mathcal{T}_1 je priame rozšírenie \mathcal{T} . Nastáva jeden z prípadov:

- \mathcal{T}_1 vzniklo z \mathcal{T} pravidlom S^+ , pridaním nového dieťaťa z nejakému listu y v \mathcal{T} , pričom z obsahuje formulu $A^+ \in S^+$.



Ak $\pi \neq \pi_y$, tak \mathcal{T}_1 obsahuje π ,
a teda aj \mathcal{T}_1 je pravdivé vo v .



Ak $\pi = \pi_y$, tak π_z v table \mathcal{T}_1 je
pravdivá vo v , pretože je rozšírením
vetvy π pravdivej vo v o vrchol z
obsahujúci formulu A^+ pravdivú vo v
(pretože $v \models_p S^+$ a $A^+ \in S^+$).
Preto tablo \mathcal{T}_1 je pravdivé vo v . \square

Korektnosť — pravdivosť množiny a tabla pre ňu

Lema 5.21 (K2)

Nech S^+ je množina označených formúl v jazyku \mathcal{L} , nech \mathcal{T} je tablo pre S^+ a nech v je ohodnotenie pre \mathcal{L} .

Ak S^+ je pravdivá vo v , tak aj \mathcal{T} je pravdivé vo v .

Dôkaz lemy K2.

Nech S^+ je množina označených formúl, nech v je ohodnotenie a nech $v \models_p S^+$. Úplnou indukciou na počet vrcholov tabla \mathcal{T} dokážeme, že vo v je pravdivé každé tablo \mathcal{T} pre S^+ .

Ak má \mathcal{T} jediný vrchol, tento vrchol obsahuje formulu $A^+ \in S^+$, ktorá je pravdivá vo v . Preto je pravdivá jediná vetva v \mathcal{T} , teda aj \mathcal{T} .

Ak \mathcal{T} má viac ako jeden vrchol, je priamym rozšírením nejakého tabla \mathcal{T}_0 , ktoré má o 1 alebo o 2 vrcholy menej ako \mathcal{T} .

Podľa indukčného predpokladu je \mathcal{T}_0 pravdivé vo v .

Podľa lemy K1 je potom vo v pravdivé aj \mathcal{T} .



Dôkaz vety o korektnosti 5.16.

Nech S^+ je množina označených formúl a \mathcal{T} je uzavreté tablo pre S^+ .

Sporom: Predpokladajme, že existuje ohodnotenie, v ktorom je S^+ pravdivá. Označme ho v .

Potom podľa lemy K2 je vo v pravdivé tablo \mathcal{T} , teda vo v je pravdivá niektorá vetva π v \mathcal{T} .

Pretože \mathcal{T} je uzavreté, aj vetva π je uzavretá. Na π sa teda nachádzajú označené formuly $\mathbf{T}X$ a $\mathbf{F}X$ pre nejakú formulu X .

Pretože π je pravdivá vo v , musia byť vo v pravdivé všetky formuly na nej. Ale $v \models_p \mathbf{T}X$ vtt $v \models_p X$ a $v \models_p \mathbf{F}X$ vtt $v \not\models_p X$.

Teda $\mathbf{T}X$ a $\mathbf{F}X$ nemôžu byť obe pravdivé, čo je spor.



Dôkazy a výrokovologické tablá

Testovanie nespľniteľnosti, splniteľnosti
a falzifikovateľnosti

Príklad 5.22

Zistíme tablom, či

$$\{((\text{rychly}(p) \vee \text{spravny}(p)) \wedge (\text{citatelny}(p) \vee \text{rychly}(p)))\} \\ \models_p (\text{rychly}(p) \wedge (\text{spravny}(p) \vee \text{citatelny}(p))).$$

Vybudujeme tablo pre množinu označených formúl:

$$S^+ = \{\mathbf{T}((\text{rychly}(p) \vee \text{spravny}(p)) \wedge (\text{citatelny}(p) \vee \text{rychly}(p))), \\ \mathbf{F}(\text{rychly}(p) \wedge (\text{spravny}(p) \vee \text{citatelny}(p)))\}$$

Podarí sa nám ho uzavrieť?

Úplná vetva a tablo

Nech v príklade tablové pravidlá používame akokoľvek,

- **nenájdeme uzavreté** tablo, ale
- ak pravidlá nepoužívame opakovane na rovnakú formulu v rovnakej vetve, po čase **vybudujeme úplné** a **otvorené** tablo.

Definícia 5.23 (Úplná vetva a úplné tablo)

Nech S^+ je množina označených formúl a \mathcal{T} je tablo pre S^+ .

Vetva π v table \mathcal{T} **je úplná** vtt má všetky nasledujúce vlastnosti:

- pre každú označenú formulu α , ktorá sa vyskytuje na π , sa **obidve** označené formuly α_1 a α_2 vyskytujú na π ;
- pre každú označenú formulu β , ktorá sa vyskytuje na π , sa **aspoň jedna** z označených formúl β_1, β_2 vyskytuje na π ;
- **každá** $X^+ \in S^+$ sa vyskytuje na π .

Tablo \mathcal{T} je úplné vtt **každá** jeho vetva je buď **úplná alebo uzavretá**.

Otvorené tablo a splniteľnosť

Z **otvoreného** a **úplného** tabla pre S^+ môžeme vytvoriť ohodnotenie v :

1. nájdeme otvorenú vetvu π ,
2. pre každý atóm A
 - ak sa na π nachádza $\mathbf{T} A$, definujeme $v(A) = t$;
 - ak sa na π nachádza $\mathbf{F} A$, definujeme $v(A) = f$;
 - inak definujeme $v(A)$ ľubovoľne.

V tomto v je pravdivá π , a preto je v ňom **pravdivá aj S^+** (všetky formuly z S^+ sa vyskytujú na π , lebo π je úplná).

Otázka

- Dá sa vždy nájsť úplné tablo pre S^+ ?
- Naozaj sa z úplného otvoreného tabla dá vytvoriť model S^+ ?

Lema 5.24 (o existencii úplného tabla)

Nech S^+ je konečná množina označených formúl.

Potom existuje úplné tablo pre S^+ .

Dôkaz.

Vybudujeme tablo \mathcal{T}_0 pre S^+ tak, že do koreňa vložíme niektorú formulu z S^+ a opakovaním spravidla S^+ postupne doplníme ostatné.

Potom tablo postupne rozširujeme tak, že vyberieme ľubovoľný list y tabla \mathcal{T}_i , ktorého vetva π_y je otvorená a nie je úplná.

Potom nastane aspoň jedna z možností:

- Na π_y sa nachádza nejaká formula α ,
ale nenachádza sa **niektorá** z formúl α_1 a α_2 .
- Na π_y sa nachádza nejaká formula β ,
ale nenachádza sa **ani jedna** z formúl β_1 a β_2 .

Ak platí prvá alebo obe možnosti, aplikujeme pravidlo α .

Ak platí druhá možnosť, aplikujeme pravidlo β .

Získame tablo \mathcal{T}_{i+1} , s ktorým proces opakujeme.

Tento proces po konečnom počte krokov (prečo?) vytvorí nejaké tablo \mathcal{T}_n , v ktorom už neexistuje vetva, ktorá by bola otvorená a nebola úplná.

Teda každá vetva v \mathcal{T}_n je buď uzavretá alebo úplná, čiže \mathcal{T}_n je úplné. □

Dôkazy a výrokovologické tablá

Úplnosť

Definícia 5.25

Množina označených formúl S^+ sa nazýva **nadol nasýtená** vtt platí:

H_0 : v S^+ sa nevyskytujú naraz **T** A a **F** A
pre žiaden predikátový atóm A ;

H_1 : ak $\alpha \in S^+$, tak $\alpha_1 \in S^+$ a $\alpha_2 \in S^+$;

H_2 : ak $\beta \in S^+$, tak $\beta_1 \in S^+$ alebo $\beta_2 \in S^+$.

Pozorovanie 5.26

Nech π je úplná otvorená vetva nejakého tabla \mathcal{T} .

Potom množina všetkých označených formúl na π je nadol nasýtená.

Lema 5.27 (Hintikkova)

Každá nadol nasýtená množina S^+ je splniteľná.

Dôkaz Hintikkovej lemy.

Chceme dokázať, že existuje ohodnotenie v , v ktorom sú pravdivé všetky označené formuly z S^+ . Definujme v pre každý predikátový atóm A takto:

$$v(A) = \begin{cases} t, & \text{ak } \mathbf{T} A \in S^+; \\ f, & \text{ak } \mathbf{F} A \in S^+; \\ t, & \text{ak ani } \mathbf{T} A \text{ ani } \mathbf{F} A \text{ nie sú v } S^+. \end{cases}$$

v je korektne definované vďaka H_0 (každému atómu priradí t alebo f , žiadnemu nepriradí obe).

Indukciou na stupeň formuly dokážeme, že vo v sú pravdivé všetky formuly z S^+ :

- 1° Všetky označené predikátové atómy (formuly stupňa 0) z S^+ sú pravdivé vo v .
- 2° Nech $X^+ \in S^+$ a nech platí IP: Vo v sú pravdivé všetky formuly z S^+ nižšieho stupňa ako X^+ . X^+ je buď α alebo β :

Ak X^+ je α , potom obidve $\alpha_1, \alpha_2 \in S^+$ (H_1), sú nižšieho stupňa ako X^+ , a teda podľa indukčného predpokladu sú pravdivé vo v , preto (podľa poz. 5.8) je v ňom pravdivá aj α .

Ak X^+ je β , potom aspoň jedna z β_1, β_2 je v S^+ (H_2). Nech je to ktorákoľvek, má nižší stupeň ako X^+ , teda podľa IP je pravdivá vo v , a preto (podľa poz. 5.11) je vo v pravdivá aj β .



Úplnosť kalkulu *neformálne*:

Ak je nejaké tvrdenie pravdivé, tak existuje jeho dôkaz v kalkule.

Veta 5.28 (o úplnosti tablového kalkulu)

Nech S^+ je konečná nesplniteľná množina označených formúl.

Potom existuje uzavreté tablo pre S^+ .

Dôsledok 5.29

Nech S je konečná teória a X je formula.

Ak $S \models_p X$, tak $S \vdash_p X$.

Dôsledok 5.30

Nech X je formula. Ak $\models_p X$, tak $\vdash_p X$.

Úplnosť platí aj pre nekonečné množiny, ale dôkaz je ťažší.

Dôkaz vety o úplnosti.

Zoberme ľubovoľnú konečnú nespĺniteľnú množinu označených formúl S^+ .

Podľa lemy o existencii úplného tabla vieme pre S^+ nájsť úplné tablo \mathcal{T} , teda také, že každá vetva je buď uzavretá alebo úplná.

Ak by niektorá vetva bola otvorená, potom musí byť úplná, a teda nadol nasýtená. Podľa Hintikkovej lemy by bola splniteľná. Pretože obsahuje všetky formuly z S^+ , bola by aj S^+ splniteľná, čo je spor s nespĺniteľnosťou S^+ .

Preto musia byť všetky vetvy tabla \mathcal{T} uzavreté.



Literatúra
