Matematika 4 — Logika pre informatikov
12. sada teoretických úloh

Táto sada úloh obsahuje **prípravnú úlohu na písomnú skúšku** a **prémiovú úlohu**, ktorá je prípravou na ústnu skúšku.

Čísla úloh v zátvorkách odkazujú do zbierky[1], kde nájdete riešené príklady a ďalšie úlohy na precvičovanie.

Riešenia niektorých úloh si môžete skontrolovať pomocou editora rezolvenčných dôkazov[2].

Ak nie je uvedené inak, o každom použitom jazyku $\mathcal{L}$ logiky prvého rádu predpokladáme, že jeho množina indivíduových premenných $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}$ obsahuje všetky reťazce písmen nasledované číselnými indexmi, ktoré nie sú prvkami množín $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

[1] https://fmfi-uk-1-ain-412.github.io/lpi/teoreticke-ain/zbierka.pdf
[2] https://fmfi-uk-1-ain-412.github.io/resolution-editor/

Cvičenie 12.1. (7.7.3) Zistite, či sú nasledujúce dvojice postupností symbolov unifikovateľné (po prípadnom premenovaní premenných), a nájdite ich najvšeobecnejší unifikátor.

a) Arabela | $\text{prvý\_majiteľ}(x)$

b) $\text{kupujúci}(\text{Kolobežka6259}, y)$ | $\text{kupujúci}(t, \text{prvý\_majiteľ}(t))$

c) $\text{predaj}(u, u, w, r)$ | $\text{predaj}(\text{kupujúci}(y, t), y, t, p)$

d) $\text{predaj}(x, \text{Ingrid}, t, \text{cena}(t))$ | $\text{predaj}(\text{kupujúci}(x, t), x, t, p)$

Vyskúšajte si.

e) $\text{predaj}(x, \text{prvý\_majiteľ}(t), t, p)$ | $\text{predaj}(x, y, \text{Kolobežka6259}, \text{35eur})$

Cvičenie 12.2. (7.7.5) V rezolvenčnom kalkule dokážte nesplniteľnosť množín klauzúl:

a) $T = \{(\text{šteká}(x) \lor \neg\text{pes}(x)),\ (\neg\text{pes}(x) \lor \text{hryzie}(x)),$
$\qquad (\neg\text{pes}(x) \lor \neg\text{šteká}(x) \lor \neg\text{hryzie}(x)),\ \text{pes}(\text{Dunčo})\}$

b) $T = \{(\text{dom}(x) \lor \text{strom}(y) \lor \text{pri}(x, y)),$
$\qquad (\text{strom}(y) \lor \neg\text{pri}(x, y)),\ (\neg\text{dom}(x) \lor \neg\text{strom}(y))\}$

c) $T = \{(\text{c}(x, y) \lor \text{b}(x)),\ (\neg\text{c}(x, \text{L}) \lor \text{a}(\text{L})),\ (\text{c}(\text{P}, y) \lor \neg\text{b}(\text{P})),\ (\neg\text{a}(y) \lor \neg\text{c}(x, y))\}$

Vyskúšajte si. (7.7.4) Sfaktorizujte klauzuly:

a) $\neg\mathrm{dáma}(x) \lor \mathrm{urazil}(y, x) \lor \neg\mathrm{dáma}(\mathrm{Milagros})$

b) $\neg\mathrm{chráni}(\mathrm{osobný\_strážca}(x), x) \lor \neg\mathrm{chráni}(x, y)$

Cvičenie 12.3. (7.7.9) Uvažujme nasledovné tvrdenia a ich formalizáciu v jazyku logiky prvého rádu *bez rovnosti* $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathrm{Hanka}\}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \emptyset$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathrm{autíčko}^1$, $\mathrm{bábika}^1$, $\mathrm{červené}^1$, $\mathrm{dievčenské}^1$, $\mathrm{hračka}^1$, $\mathrm{hračkárstvo}^1$, $\mathrm{chlapčenské}^1$, $\mathrm{matfyzáčka}^1$, P^1, $\mathrm{šaty}^1$, mama^2, $\mathrm{má}^2$, $\mathrm{zakúpené\_v}^2$, $\mathrm{kúpi}^3\}$:

1. Autíčka sú chlapčenské hračky a bábiky sú dievčenské hračky.

$$\begin{aligned} &\forall x(\mathrm{autíčko}(x) \to \mathrm{chlapčenské}(x) \land \mathrm{hračka}(x)) \land \\ &\forall x(\mathrm{bábika}(x) \to \mathrm{dievčenské}(x) \land \mathrm{hračka}(x)) \end{aligned} \tag{A_1}$$

2. Hanka má dve autíčka.

$$\begin{aligned} &\exists x\, \exists y(\mathrm{P}(x) \land \neg \mathrm{P}(y) \land \\ &\qquad \mathrm{má}(\mathrm{Hanka}, x) \land \mathrm{autíčko}(x) \land \mathrm{má}(\mathrm{Hanka}, y) \land \mathrm{autíčko}(y)) \end{aligned} \tag{A_2}$$

3. Každá hračka bola zakúpená v hračkárstve.

$$\forall x(\mathrm{hračka}(x) \to \exists y\, (\mathrm{zakúpené\_v}(x, y) \land \mathrm{hračkárstvo}(y))) \tag{A_3}$$

4. Hanka je dievča, ktoré má bábiku, ktorá má červené šaty.

$$\begin{aligned} &(\mathrm{dievča}(\mathrm{Hanka}) \land \\ &\quad \exists x(\mathrm{má}(\mathrm{Hanka}, x) \land \mathrm{bábika}(x) \land \exists y(\mathrm{má}(x, y) \land \mathrm{červené}(y) \land \mathrm{šaty}(y)))) \end{aligned} \tag{A_4}$$

5. Každá mama kúpi svojmu dieťaťu nejakú hračku.

$$\forall x\, \forall y(\mathrm{mama}(x, y) \to \exists z(\mathrm{hračka}(z) \land \mathrm{kúpi}(x, y, z))) \tag{A_5}$$

6. Dievčatá, ktoré majú nejakú chlapčenskú hračku, sa stanú matfyzáčkami.

$$\forall x(\mathrm{dievča}(x) \to (\exists y(\mathrm{hračka}(y) \land \mathrm{chlapčenské}(y)) \to \mathrm{matfyzáčka}(x))) \tag{A_6}$$

Zistite pomocou rezolvencie, či v takomto prípade platí, že *ak každé dievča má aspoň jednu dievčenskú hračku, tak sa Hanka stane matfyzáčkou*. Teda, či z teórie $T = \{A_1, \dots, A_6\}$ vyplýva formula:

$$\begin{aligned} &\forall x\, \big(\mathrm{dievča}(x) \to \exists y(\mathrm{má}(x, y) \land \mathrm{dievčenské}(y) \land \mathrm{hračka}(y))\big) \\ &\quad \to \mathrm{matfyzáčka}(\mathrm{Hanka}) \end{aligned} \tag{X}$$

Príprava na písomnú skúšku

Nasledujúcu úlohu odporúčame prerieši pred písomnou skúškou a prípadne ju skonzultovať na pravidelných štvrtkových konzultáciách 12. alebo 19. mája.

Formalizáciu si môžete skontrolovať pomocou overovača formalizácií[3].

[3] https://fmfi-uk-1-ain-412.github.io/formalization-checker/

Úloha 12.4. (7.7.12) Uvažujme nasledujúce tvrdenia:

1. Každý, kto jazdí na nejakom Harleyi, je drsňák.
2. Všetci motorkári jazdia na niečom, čo je buď Harley alebo BMW.
3. Každý, kto jazdí na nejakom BMW, je karierista.
4. Každý karierista je právnik.
5. Dobré dievčatá nerandia s drsňákmi.
6. Danka je dobré dievča a Jonáš je motorkár.

Vyriešte nasledujúce úlohy:

a) Sformalizujte tvrdenia ako teóriu $T = \{B_1, \dots, B_6\}$ vo vhodnom jazyku logiky prvého rádu.

   Zvoľte predikátové a funkčné symboly podľa potreby tak, aby formalizácia dávala zmysel, teda aby sformalizované pojmy neboli izolované a formalizácia bola splniteľná.

b) Upravte teóriu T na ekvisplniteľnú klauzálnu teóriu T'.

c) Pre nasledujúcu otázku sformulujte príslušný logický problém a zodpovedzte problém aj otázku pomocou rezolvencie pre logiku prvého rádu:

   Je na základe tvrdení 1–6 pravda, že ak Jonáš nie je právnik, tak s ním Danka nerandí?

Príprava na ústnu skúšku

Riešenie prémiovej úlohy pošlite v PDF najneskôr v pondelok **23. mája 2022** na adresu lpi-team@lists.dai.fmph.uniba.sk.

Prémiová úloha 12.5. (1 bod, 4.3.1) Dokážte alebo vyvráťte:

a) Nech $\mathcal{L}$ je jazyk logiky prvého rádu bez funkčných symbolov ($\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \emptyset$). Jazyk $\mathcal{L}_1$ vytvoríme z $\mathcal{L}$ pridaním novej indivíduovej konštanty c a zmenou všetkých predikátových symbolov na funkčné, teda: $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_1} = \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \cup \{c\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1} = \emptyset$, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}_1} = \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$, $\mathcal{V}_{\mathcal{L}_1} = \mathcal{V}_{\mathcal{L}}$.

   Nech A je formula v jazyku $\mathcal{L}$. Formulu B v jazyku $\mathcal{L}_1$ vytvoríme tak, že každý predikátový atóm $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ v A nahradíme rovnostným atómom $P(a_1, a_2, \dots, a_n) \doteq c$. Potom platí:

   A je pravdivá v nejakej štruktúre pre $\mathcal{L}$ s aspoň dvojprvkovou doménou, vtt B je pravdivá v nejakej štruktúre pre $\mathcal{L}_1$ s aspoň dvojprvkovou doménou.

b) Ak vo výrokovologickej tautológii nahradíme všetky atómy prvorádovými formulami (tak, že za ten istý atóm vždy dosadíme tú istú formulu), dostaneme platnú prvorádovú formulu.