Математическая логика и теория алгоритмов Лекция 8 Формальные теории (продолжение)

Куценко Дмитрий Александрович

Белгородский государственный технологический университет имени В. Г. Шухова

Институт информационных технологий и управляющих систем

Кафедра программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем

27 октября 2017 г.

Теорема о дедукции и следствия из неё

В исчислении высказываний имеет место следующая теорема:

Теорема о дедукции и следствия из неё

В исчислении высказываний имеет место следующая теорема:

Теорема о дедукции

Теорема о дедукции и следствия из неё

В исчислении высказываний имеет место следующая теорема:

Теорема о дедукции

Если $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{m-1}, \mathfrak{A}_m \vdash \mathfrak{B}$ то $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{m-1} \vdash (\mathfrak{A}_m \to \mathfrak{B})$.

Теорема о дедукции и следствия из неё

В исчислении высказываний имеет место следующая теорема:

Теорема о дедукции

Если $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{m-1}, \mathfrak{A}_m \vdash \mathfrak{B}$ то $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{m-1} \vdash (\mathfrak{A}_m \to \mathfrak{B})$.
В частности, если $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$, то $\vdash (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$.

Теорема о дедукции и следствия из неё

В исчислении высказываний имеет место следующая теорема:

Теорема о дедукции

Если $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_{m-1}, \mathfrak{A}_m \vdash \mathfrak{B}$ то $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_{m-1} \vdash (\mathfrak{A}_m \to \mathfrak{B})$.
В частности, если $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$, то $\vdash (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$.

Следствия из теоремы о дедукции

1. $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_{m-1}, \mathfrak{A}_m \vdash \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_{m-1} \vdash (\mathfrak{A}_m \to \mathfrak{B})$.
2. $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_m \vdash \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда $\vdash (\mathfrak{A}_1 \to \dots \to (\mathfrak{A}_m \to \mathfrak{B}) \cdots)$.

Доказательство теоремы и её следствий см. в книге
Игошин В. И. Математическая логика и теория алгоритмов : учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / В. И. Игошин. — 3-е изд., стер. — М. : Издательский центр «Академия», 2008 на стр. 125—127.

Теорема о дедукции и следствия из неё

В исчислении высказываний имеет место следующая теорема:

Теорема о дедукции и следствия из неё

В исчислении высказываний имеет место следующая теорема:

Теорема о дедукции

Если $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_{m-1}, \mathfrak{A}_m \vdash \mathfrak{B}$ то $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_{m-1} \vdash (\mathfrak{A}_m \to \mathfrak{B})$.
В частности, если $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$, то $\vdash (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$.

Следствия из теоремы о дедукции

1. $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_{m-1}, \mathfrak{A}_m \vdash \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_{m-1} \vdash (\mathfrak{A}_m \to \mathfrak{B})$.
2. $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_m \vdash \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда $\vdash (\mathfrak{A}_1 \to \dots \to (\mathfrak{A}_m \to \mathfrak{B}) \cdots)$.

Теорема о дедукции и следствия из неё

В исчислении высказываний имеет место следующая теорема:

Теорема о дедукции

Если $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{m-1}, \mathfrak{A}_m \vdash \mathfrak{B}$ то $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{m-1} \vdash (\mathfrak{A}_m \to \mathfrak{B})$.
В частности, если $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$, то $\vdash (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$.

Следствия из теоремы о дедукции

1. $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{m-1}, \mathfrak{A}_m \vdash \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{m-1} \vdash (\mathfrak{A}_m \to \mathfrak{B})$.
2. $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m \vdash \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда $\vdash (\mathfrak{A}_1 \to \ldots \to (\mathfrak{A}_m \to \mathfrak{B}) \cdots)$.

Доказательство теоремы и её следствий см. в книге
Игошин В. И. Математическая логика и теория алгоритмов : учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / В. И. Игошин. — 3-е изд., стер. — М. : Издательский центр «Академия», 2008 на стр. 125—127.

Производные правила вывода

При помощи теоремы о дедукции и следствий из неё можно получить вторичные правила вывода, которые называются производными правилами вывода.

Производные правила вывода

При помощи теоремы о дедукции и следствий из неё можно получить вторичные правила вывода, которые называются производными правилами вывода.

Пусть Γ — множество формул (возможно, пустое).

Производные правила вывода

При помощи теоремы о дедукции и следствий из неё можно получить вторичные правила вывода, которые называются производными правилами вывода.

Пусть Γ — множество формул (возможно, пустое).

1. Введение импликации: $\dfrac{\Gamma, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}(\to_{\text{В}})$.

Производные правила вывода

При помощи теоремы о дедукции и следствий из неё можно получить вторичные правила вывода, которые называются производными правилами вывода.

Пусть Γ — множество формул (возможно, пустое).

1. Введение импликации: $\dfrac{\Gamma, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}} (\to_{\text{В}})$.
2. Введение конъюнкции: $\dfrac{\Gamma \vdash \mathfrak{A}; \Gamma \vdash \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \mathfrak{A} \mathbin{\&} \mathfrak{B}} (\&_{\text{В}})$.

Производные правила вывода

При помощи теоремы о дедукции и следствий из неё можно получить вторичные правила вывода, которые называются производными правилами вывода.

Пусть Γ — множество формул (возможно, пустое).

1. Введение импликации: $\dfrac{\Gamma, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}(\to_{\text{В}})$.
2. Введение конъюнкции: $\dfrac{\Gamma \vdash \mathfrak{A}; \Gamma \vdash \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}(\&_{\text{В}})$.
3. Введение дизъюнкции: $\dfrac{\Gamma \vdash \mathfrak{A}}{\Gamma \vdash \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}(\vee_{\text{В}})$, $\dfrac{\Gamma \vdash \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}(\vee_{\text{В}})$.

Производные правила вывода

При помощи теоремы о дедукции и следствий из неё можно получить вторичные правила вывода, которые называются производными правилами вывода.

Пусть Γ — множество формул (возможно, пустое).

1. Введение импликации: $\dfrac{\Gamma, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}(\to_{\text{В}})$.
2. Введение конъюнкции: $\dfrac{\Gamma \vdash \mathfrak{A}; \Gamma \vdash \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}(\&_{\text{В}})$.
3. Введение дизъюнкции: $\dfrac{\Gamma \vdash \mathfrak{A}}{\Gamma \vdash \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}(\vee_{\text{В}})$, $\dfrac{\Gamma \vdash \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}(\vee_{\text{В}})$.
4. Введение отрицания: $\dfrac{\Gamma, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}; \Gamma, \mathfrak{A} \vdash \overline{\mathfrak{B}}}{\Gamma \vdash \overline{\mathfrak{A}}}(\neg_{\text{В}})$.

5. Удаление импликации: $\dfrac{\Gamma \vdash \mathfrak{A}; \Gamma \vdash \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \mathfrak{B}}(\to\text{у})$.

5. Удаление импликации: $\dfrac{\Gamma \vdash \mathfrak{A}; \Gamma \vdash \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \mathfrak{B}}(\to_{\text{у}})$.
6. Удаление конъюнкции: $\dfrac{\Gamma \vdash \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \mathfrak{A}}(\&_{\text{у}})$, $\dfrac{\Gamma \vdash \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \mathfrak{B}}(\&_{\text{у}})$.

5. Удаление импликации: $$\frac{\Gamma \vdash \mathfrak{A}; \Gamma \vdash \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \mathfrak{B}}(\to\text{у}).$$
6. Удаление конъюнкции: $$\frac{\Gamma \vdash \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \mathfrak{A}}(\&\text{у}),\quad \frac{\Gamma \vdash \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \mathfrak{B}}(\&\text{у}).$$
7. Удаление дизъюнкции: $$\frac{\Gamma \vdash \overline{\mathfrak{A}}; \Gamma \vdash \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \mathfrak{B}}(\vee\text{у}).$$

5. Удаление импликации: $\dfrac{\Gamma \vdash \mathfrak{A}; \Gamma \vdash \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \mathfrak{B}}(\to_{\text{у}})$.
6. Удаление конъюнкции: $\dfrac{\Gamma \vdash \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \mathfrak{A}}(\&_{\text{у}})$, $\dfrac{\Gamma \vdash \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \mathfrak{B}}(\&_{\text{у}})$.
7. Удаление дизъюнкции: $\dfrac{\Gamma \vdash \overline{\mathfrak{A}}; \Gamma \vdash \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \mathfrak{B}}(\vee_{\text{у}})$.
8. Удаление отрицания: $\dfrac{\Gamma \vdash \overline{\overline{\mathfrak{A}}}}{\Gamma \vdash \mathfrak{A}}(\neg_{\text{у}})$.

5. Удаление импликации: $\dfrac{\Gamma \vdash \mathfrak{A}; \Gamma \vdash \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \mathfrak{B}} (\to у)$.
6. Удаление конъюнкции: $\dfrac{\Gamma \vdash \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \mathfrak{A}} (\&у)$, $\dfrac{\Gamma \vdash \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \mathfrak{B}} (\&у)$.
7. Удаление дизъюнкции: $\dfrac{\Gamma \vdash \overline{\mathfrak{A}}; \Gamma \vdash \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \mathfrak{B}} (\vee у)$.
8. Удаление отрицания: $\dfrac{\Gamma \vdash \overline{\overline{\mathfrak{A}}}}{\Gamma \vdash \mathfrak{A}} (\neg у)$.

Используя полученные производные правила вывода, можно построить исчисление без аксиом, называемое натуральным исчислением высказываний.

Пример доказательства на естественном языке

Докажем, что $P \,\&\, (R \vee Q)$ следует из $P \,\&\, Q$,
т. е. формула $P \,\&\, (R \vee Q)$ истинна на любой интерпретации, на которой истинна $P \,\&\, Q$.

Пример доказательства на естественном языке

Докажем, что $P \mathbin{\&} (R \vee Q)$ следует из $P \mathbin{\&} Q$,
т. е. формула $P \mathbin{\&} (R \vee Q)$ истинна на любой интерпретации, на которой истинна $P \mathbin{\&} Q$.
Это можно записать в следующей форме:

Пример доказательства на естественном языке

Докажем, что $P \mathbin{\&} (R \vee Q)$ следует из $P \mathbin{\&} Q$,
т. е. формула $P \mathbin{\&} (R \vee Q)$ истинна на любой интерпретации, на которой истинна $P \mathbin{\&} Q$.
Это можно записать в следующей форме:

Теорема

Посылка:	$P \mathbin{\&} Q$
Заключение:	$P \mathbin{\&} (R \vee Q)$

Пример доказательства на естественном языке

Докажем, что $P \mathbin{\&} (R \vee Q)$ следует из $P \mathbin{\&} Q$,
т. е. формула $P \mathbin{\&} (R \vee Q)$ истинна на любой интерпретации, на которой истинна $P \mathbin{\&} Q$.
Это можно записать в следующей форме:

Теорема

Посылка: $P \mathbin{\&} Q$
Заключение: $P \mathbin{\&} (R \vee Q)$

Докажем это на естественном языке:

Пример доказательства на естественном языке

Докажем, что $P \mathbin{\&} (R \vee Q)$ следует из $P \mathbin{\&} Q$,
т. е. формула $P \mathbin{\&} (R \vee Q)$ истинна на любой интерпретации, на которой истинна $P \mathbin{\&} Q$.
Это можно записать в следующей форме:

Теорема

Посылка: $P \mathbin{\&} Q$
Заключение: $P \mathbin{\&} (R \vee Q)$

Докажем это на естественном языке:

Доказательство

Т. к. $P \mathbin{\&} Q$ истинна, то истинна P и истинна Q.

Пример доказательства на естественном языке

Доказаем, что $P \mathbin{\&} (R \vee Q)$ следует из $P \mathbin{\&} Q$,
т. е. формула $P \mathbin{\&} (R \vee Q)$ истинна на любой интерпретации, на которой истинна $P \mathbin{\&} Q$.
Это можно записать в следующей форме:

Теорема

Посылка: $P \mathbin{\&} Q$
Заключение: $P \mathbin{\&} (R \vee Q)$

Докажем это на естественном языке:

Доказательство

Т. к. $P \mathbin{\&} Q$ истинна, то истинна P и истинна Q. Одно из свойств связки «$\vee$» заключается в том, что для любого значения R формула $R \vee Q$ истинна, если Q истинна. Поэтому $R \vee Q$ истинна.

Пример доказательства на естественном языке

Докажем, что $P \mathbin{\&} (R \vee Q)$ следует из $P \mathbin{\&} Q$,
т. е. формула $P \mathbin{\&} (R \vee Q)$ истинна на любой интерпретации, на которой истинна $P \mathbin{\&} Q$.
Это можно записать в следующей форме:

Теорема

Посылка:	$P \mathbin{\&} Q$
Заключение:	$P \mathbin{\&} (R \vee Q)$

Докажем это на естественном языке:

Доказательство

Т. к. $P \mathbin{\&} Q$ истинна, то истинна P и истинна Q. Одно из свойств связки «$\vee$» заключается в том, что для любого значения R формула $R \vee Q$ истинна, если Q истинна. Поэтому $R \vee Q$ истинна. Наконец, поскольку и P, и $R \vee Q$ истинны, свойство связки «&» позволяет нам заключить, что $P \mathbin{\&} (R \vee Q)$ также истинна. $\square$

Пример доказательства на естественном языке

Схема этого доказательства в более формальном виде:

Пример доказательства на естественном языке

Схема этого доказательства в более формальном виде:

Из $P \mathbin{\&} Q$ получить $P \mathbin{\&} (R \vee Q)$

Пример доказательства на естественном языке

Схема этого доказательства в более формальном виде:

Из $P \mathbin{\&} Q$ получить $P \mathbin{\&} (R \vee Q)$

(1)	$P \mathbin{\&} Q$	гипотеза (посылка);
(2)	P	свойство & для (1);
(3)	Q	свойство & для (1);
(4)	$R \vee Q$	свойство $\vee$ для (3);
(5)	$P \mathbin{\&} (R \vee Q)$	свойство & для (2) и (4).

Пример доказательства на естественном языке

Схема этого доказательства в более формальном виде:

Из $P \,\&\, Q$ получить $P \,\&\, (R \vee Q)$

(1)	$P \,\&\, Q$	гипотеза (посылка);
(2)	P	свойство & для (1);
(3)	Q	свойство & для (1);
(4)	$R \vee Q$	свойство $\vee$ для (3);
(5)	$P \,\&\, (R \vee Q)$	свойство & для (2) и (4).

Здесь используются следующие правила вывода:

Пример доказательства на естественном языке

Схема этого доказательства в более формальном виде:

Из $P \mathbin{\&} Q$ получить $P \mathbin{\&} (R \vee Q)$

(1)	$P \mathbin{\&} Q$	гипотеза (посылка);
(2)	P	свойство & для (1);
(3)	Q	свойство & для (1);
(4)	$R \vee Q$	свойство $\vee$ для (3);
(5)	$P \mathbin{\&} (R \vee Q)$	свойство & для (2) и (4).

Здесь используются следующие правила вывода:

- Удаление конъюнкции: $\dfrac{\mathfrak{A} \mathbin{\&} \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$, $\dfrac{\mathfrak{A} \mathbin{\&} \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$;

Пример доказательства на естественном языке

Схема этого доказательства в более формальном виде:

Из $P \,\&\, Q$ получить $P \,\&\, (R \vee Q)$

(1)	$P \,\&\, Q$	гипотеза (посылка);
(2)	P	свойство & для (1);
(3)	Q	свойство & для (1);
(4)	$R \vee Q$	свойство $\vee$ для (3);
(5)	$P \,\&\, (R \vee Q)$	свойство & для (2) и (4).

Здесь используются следующие правила вывода:

- Удаление конъюнкции: $\dfrac{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$, $\dfrac{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$;
- Введение дизъюнкции: $\dfrac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}$;

Пример доказательства на естественном языке

Схема этого доказательства в более формальном виде:

Из $P \,\&\, Q$ получить $P \,\&\, (R \vee Q)$

(1)	$P \,\&\, Q$	гипотеза (посылка);
(2)	P	свойство & для (1);
(3)	Q	свойство & для (1);
(4)	$R \vee Q$	свойство $\vee$ для (3);
(5)	$P \,\&\, (R \vee Q)$	свойство & для (2) и (4).

Здесь используются следующие правила вывода:

- Удаление конъюнкции: $\dfrac{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}, \quad \dfrac{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}};$
- Введение дизъюнкции: $\dfrac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}};$
- Введение конъюнкции: $\dfrac{\mathfrak{A},\ \mathfrak{B}}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}.$

Натуральное исчисление высказываний

1. Алфавит:

Натуральное исчисление высказываний

1. Алфавит:
    1. пропозициональные переменные $A, B, \ldots, X_1, X_2, \ldots$;

Натуральное исчисление высказываний

1. Алфавит:
   1. пропозициональные переменные $A, B, \ldots, X_1, X_2, \ldots$;
   2. пропозициональные связки «$\&$», «$\vee$», «$\overline{\quad}$», «$\rightarrow$»;

Натуральное исчисление высказываний

1. Алфавит:
   1. пропозициональные переменные $A, B, \ldots, X_1, X_2, \ldots$;
   2. пропозициональные связки «&», «$\vee$», « », «$\to$»;
   3. скобки «(», «)».

Натуральное исчисление высказываний

1. Алфавит:
   1. пропозициональные переменные $A, B, \ldots, X_1, X_2, \ldots$;
   2. пропозициональные связки «$\&$», «$\vee$», « », «$\rightarrow$»;
   3. скобки «$($», «$)$».
2. Формулы:

Натуральное исчисление высказываний

1. Алфавит:
   1. пропозициональные переменные $A, B, \ldots, X_1, X_2, \ldots$;
   2. пропозициональные связки «$\&$», «$\vee$», «$\neg$», «$\rightarrow$»;
   3. скобки «$($», «$)$».
2. Формулы:
   1. пропозициональная переменная есть формула;

Натуральное исчисление высказываний

1. Алфавит:
   1. пропозициональные переменные $A, B, \ldots, X_1, X_2, \ldots$;
   2. пропозициональные связки «&», «$\vee$», «$\neg$», «$\to$»;
   3. скобки «(», «)».
2. Формулы:
   1. пропозициональная переменная есть формула;
   2. если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то $(\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ — формулы;

Натуральное исчисление высказываний

1. Алфавит:
   1. пропозициональные переменные $A, B, \ldots, X_1, X_2, \ldots$;
   2. пропозициональные связки «$\&$», «$\vee$», «$\overline{}$», «$\to$»;
   3. скобки «(», «)».
2. Формулы:
   1. пропозициональная переменная есть формула;
   2. если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то $(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ — формулы;
   3. если $\mathfrak{A}$ — формула, то $\overline{\mathfrak{A}}$ — формула.

Натуральное исчисление высказываний

1. Алфавит:
   1. пропозициональные переменные $A, B, \ldots, X_1, X_2, \ldots$;
   2. пропозициональные связки «$\&$», «$\vee$», «$\overline{}$», «$\rightarrow$»;
   3. скобки «(», «)».
2. Формулы:
   1. пропозициональная переменная есть формула;
   2. если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то $(\mathfrak{A} \mathbin{\&} \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})$ — формулы;
   3. если $\mathfrak{A}$ — формула, то $\overline{\mathfrak{A}}$ — формула.
3. Аксиомы: нет.

Натуральное исчисление высказываний

1. Алфавит:
   1. пропозициональные переменные $A, B, \ldots, X_1, X_2, \ldots$;
   2. пропозициональные связки «$\&$», «$\vee$», «$\overline{}$», «$\to$»;
   3. скобки «(», «)».
2. Формулы:
   1. пропозициональная переменная есть формула;
   2. если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то $(\mathfrak{A} \mathbin{\&} \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ — формулы;
   3. если $\mathfrak{A}$ — формула, то $\overline{\mathfrak{A}}$ — формула.
3. Аксиомы: нет.
4. Правила вывода:

Натуральное исчисление высказываний

1. Алфавит:
   1. пропозициональные переменные $A, B, \ldots, X_1, X_2, \ldots$;
   2. пропозициональные связки «$\&$», «$\vee$», «$\overline{}$», «$\to$»;
   3. скобки «(», «)».
2. Формулы:
   1. пропозициональная переменная есть формула;
   2. если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то $(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ — формулы;
   3. если $\mathfrak{A}$ — формула, то $\overline{\mathfrak{A}}$ — формула.
3. Аксиомы: нет.
4. Правила вывода:

$$\frac{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}(\&\text{в}), \quad \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}(\vee\text{в}), \quad \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}(\vee\text{в}),$$

Натуральное исчисление высказываний

1. Алфавит:
   1. пропозициональные переменные $A, B, \ldots, X_1, X_2, \ldots$;
   2. пропозициональные связки «$\&$», «$\vee$», «$\overline{}$», «$\rightarrow$»;
   3. скобки «(», «)».
2. Формулы:
   1. пропозициональная переменная есть формула;
   2. если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то $(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})$ — формулы;
   3. если $\mathfrak{A}$ — формула, то $\overline{\mathfrak{A}}$ — формула.
3. Аксиомы: нет.
4. Правила вывода:

$$\frac{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}(\&\text{в}), \quad \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}(\vee\text{в}), \quad \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}(\vee\text{в}),$$

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{B}}(\rightarrow\text{в}), \quad \frac{\mathfrak{B}, \overline{\mathfrak{B}}}{\overline{\mathfrak{C}}}(\neg\text{в}),$$

где $\mathfrak{C}$ — последняя гипотеза,

Натуральное исчисление высказываний

1. Алфавит:
   1. пропозициональные переменные $A, B, \dots, X_1, X_2, \dots$;
   2. пропозициональные связки «$\&$», «$\vee$», «$\overline{}$», «$\to$»;
   3. скобки «(», «)».
2. Формулы:
   1. пропозициональная переменная есть формула;
   2. если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то $(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ — формулы;
   3. если $\mathfrak{A}$ — формула, то $\overline{\mathfrak{A}}$ — формула.
3. Аксиомы: нет.
4. Правила вывода:

$$\frac{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}(\&\text{в}), \quad \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}(\vee\text{в}), \quad \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}(\vee\text{в}),$$

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C} \to \mathfrak{B}}(\to\text{в}), \quad \frac{\mathfrak{B}, \overline{\mathfrak{B}}}{\overline{\mathfrak{C}}}(\neg\text{в}),$$ где $\mathfrak{C}$ — последняя гипотеза,

$$\frac{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}(\&\text{у}), \quad \frac{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}(\&\text{у}), \quad \frac{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \overline{\mathfrak{A}}}{\mathfrak{B}}(\vee\text{у}), \quad \frac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}, \mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}(\to\text{у}), \quad \frac{\overline{\overline{\mathfrak{A}}}}{\mathfrak{A}}(\neg\text{у}).$$

Вывод в натуральном исчислении высказываний

Выводом в натуральном исчислении высказываний называется непустая конечная линейно упорядоченная последовательность формул $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_n$, удовлетворяющая условиям:

Вывод в натуральном исчислении высказываний

Выводом в натуральном исчислении высказываний называется непустая конечная линейно упорядоченная последовательность формул $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_n$, удовлетворяющая условиям:

1. Каждая $\mathfrak{C}_i$ есть либо гипотеза, либо получена из предыдущих формул по одному из правил вывода.

Вывод в натуральном исчислении высказываний

Выводом в натуральном исчислении высказываний называется непустая конечная линейно упорядоченная последовательность формул $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_n$, удовлетворяющая условиям:

1. Каждая $\mathfrak{C}_i$ есть либо гипотеза, либо получена из предыдущих формул по одному из правил вывода.
2. Если в выводе применялись правила $\to_{\text{B}}$ или $\neg_{\text{B}}$, то все формулы, начиная с последней гипотезы и вплоть до результата применения данного правила, исключаются из участия в дальнейших шагах вывода.

Вывод в натуральном исчислении высказываний

Выводом в натуральном исчислении высказываний называется непустая конечная линейно упорядоченная последовательность формул $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_n$, удовлетворяющая условиям:

1. Каждая $\mathfrak{C}_i$ есть либо гипотеза, либо получена из предыдущих формул по одному из правил вывода.
2. Если в выводе применялись правила $\to_{\mathrm{B}}$ или $\neg_{\mathrm{B}}$, то все формулы, начиная с последней гипотезы и вплоть до результата применения данного правила, исключаются из участия в дальнейших шагах вывода.

Удобно использовать флаговую нотацию, при которой исключаемые гипотезы помещаются в прямоугольники, от которых слева вниз ведётся черта, отмечающая формулы, исключаемые из вывода.

Пример 1

Докажем, что $(P \to Q), (Q \to R), P \vdash R$.

Пример 1

Докажем, что $(P \to Q), (Q \to R), P \vdash R$.

Доказательство

Пример 1

Докажем, что $(P \to Q), (Q \to R), P \vdash R$.

Доказательство

(1)	$P \to Q$	гипотеза;
(2)	$Q \to R$	гипотеза;
(3)	P	гипотеза;
(4)	Q	$\to$у для (1) и (3);
(5)	R	$\to$у для (2) и (4).

Эвристики

Под эвристикой будем понимать некоторый способ уменьшения числа переборов.

Эвристики

Под эвристикой будем понимать некоторый способ уменьшения числа переборов.

Пусть нужно доказать, что $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$.

Эвристики

Под эвристикой будем понимать некоторый способ уменьшения числа переборов.

Пусть нужно доказать, что $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$.

1. Если можно представить $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$, то нужно взять $\mathfrak{B}_1$ в качестве дополнительной гипотезы.

Эвристики

Под эвристикой будем понимать некоторый способ уменьшения числа переборов.

Пусть нужно доказать, что $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$.

1. Если можно представить $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$, то нужно взять $\mathfrak{B}_1$ в качестве дополнительной гипотезы.

   Данную эвристику нужно применять максимальное число раз.

Эвристики

Под эвристикой будем понимать некоторый способ уменьшения числа переборов.

Пусть нужно доказать, что $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$.

1. Если можно представить $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$, то нужно взять $\mathfrak{B}_1$ в качестве дополнительной гипотезы.

   Данную эвристику нужно применять максимальное число раз.

   Дополнительные гипотезы устраняются с помощью $\to_{\text{В}}$.

Эвристики

Под эвристикой будем понимать некоторый способ уменьшения числа переборов.

Пусть нужно доказать, что $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$.

1. Если можно представить $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$, то нужно взять $\mathfrak{B}_1$ в качестве дополнительной гипотезы.

   Данную эвристику нужно применять максимальное число раз.

   Дополнительные гипотезы устраняются с помощью $\to_\text{В}$.

   Вывод, который основан только на 1-й эвристике, называется прямым.

Эвристики

Под эвристикой будем понимать некоторый способ уменьшения числа переборов.

Пусть нужно доказать, что $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$.

1. Если можно представить $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$, то нужно взять $\mathfrak{B}_1$ в качестве дополнительной гипотезы.

   Данную эвристику нужно применять максимальное число раз.

   Дополнительные гипотезы устраняются с помощью $\to_{\text{в}}$.

   Вывод, который основан только на 1-й эвристике, называется прямым.

2. Если не получился сделать прямой вывод, то в качестве дополнительной гипотезы нужно взять $\overline{\mathfrak{B}_2}$ и перейти, т. о., к доказательству от противного.

Эвристики

Под эвристикой будем понимать некоторый способ уменьшения числа переборов.
Пусть нужно доказать, что $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$.

1. Если можно представить $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$, то нужно взять $\mathfrak{B}_1$ в качестве дополнительной гипотезы.

   Данную эвристику нужно применять максимальное число раз.

   Дополнительные гипотезы устраняются с помощью $\to_\text{В}$.

   Вывод, который основан только на 1-й эвристике, называется прямым.

2. Если не получился сделать прямой вывод, то в качестве дополнительной гипотезы нужно взять $\overline{\mathfrak{B}_2}$ и перейти, т. о., к доказательству от противного.

   Противоречие устраняется с помощью $\neg_\text{В}$, затем искомая $\mathfrak{B}_2$ получается с помощью $\neg_\text{У}$.

Пример 2

Докажем, что $\vdash (P \to Q) \to \big((Q \to R) \to (P \to R)\big)$.

Пример 2

Докажем, что $\vdash (P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$.

Доказательство

Пример 2

Докажем, что $\vdash (P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$.

Доказательство

(1)	$\boxed{P \to Q}$	гипотеза;
(2)	$\boxed{Q \to R}$	гипотеза;
(3)	$\boxed{P}$	гипотеза;
(4)	Q	$\to$у для (1) и (3);
(5)	R	$\to$у для (2) и (4);
(6)	$P \to R$	$\to$в для (5);
(7)	$(Q \to R) \to (P \to R)$	$\to$в для (6);
(8)	$(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$	$\to$в для (7).

Эвристики (продолжение)

3. Если в выводе имеется формула вида $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, то в качестве дополнительной гипотезы можно взять формулу $\overline{\mathfrak{A}}$ и после этого получить по $\vee$у формулу $\mathfrak{B}$.

Эвристики (продолжение)

3. Если в выводе имеется формула вида $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, то в качестве дополнительной гипотезы можно взять формулу $\overline{\mathfrak{A}}$ и после этого получить по $\vee_{\text{У}}$ формулу $\mathfrak{B}$.
   Если в выводе имеется формула вида $\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}$, то в качестве дополнительной гипотезы можно взять формулу $\mathfrak{A}$ и вывести по $\vee_{\text{В}}$ противоречие.

Пример 3

Докажем, что $\vdash (P \vee Q) \to (Q \vee P)$.

Пример 3

Докажем, что $\vdash (P \vee Q) \to (Q \vee P)$.

Доказательство

Пример 3

Докажем, что $\vdash (P \vee Q) \to (Q \vee P)$.

Доказательство

(1)	$\boxed{P \vee Q}$	гипотеза;
(2)	$\boxed{\overline{Q \vee P}}$	гипотеза;
(3)	$\boxed{\overline{P}}$	гипотеза;
(4)	Q	$\vee_{\mathbf{у}}$ для (1) и (3);
(5)	$Q \vee P$	$\vee_{\mathbf{в}}$ для (4);
(6)	$\overline{\overline{P}}$	$\neg_{\mathbf{в}}$ для (2) и (5);
(7)	P	$\neg_{\mathbf{у}}$ для (6);
(8)	$Q \vee P$	$\vee_{\mathbf{в}}$ для (7);
(9)	$\overline{\overline{Q \vee P}}$	$\neg_{\mathbf{в}}$ для (2) и (8);
(10)	$Q \vee P$	$\neg_{\mathbf{у}}$ для (9);
(11)	$(P \vee Q) \to (Q \vee P)$	$\to_{\mathbf{в}}$ для (10).

Исчисление предикатов

Исчисление предикатов — это формальная теория, получаемая за счёт добавления к исчислению высказываний новых знаков, понятия терма, новых типов формул и новых правил вывода.

Исчисление предикатов

Исчисление предикатов — это формальная теория, получаемая за счёт добавления к исчислению высказываний новых знаков, понятия терма, новых типов формул и новых правил вывода.

1. Алфавит:

Исчисление предикатов

Исчисление предикатов — это формальная теория, получаемая за счёт добавления к исчислению высказываний новых знаков, понятия терма, новых типов формул и новых правил вывода.

1. Алфавит:
   1. знаки предметных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$;

Исчисление предикатов

Исчисление предикатов — это формальная теория, получаемая за счёт добавления к исчислению высказываний новых знаков, понятия терма, новых типов формул и новых правил вывода.

1. Алфавит:
   1. знаки предметных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$;
   2. знаки предметных констант $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$;

Исчисление предикатов

Исчисление предикатов — это формальная теория, получаемая за счёт добавления к исчислению высказываний новых знаков, понятия терма, новых типов формул и новых правил вывода.

1. Алфавит:
   1. знаки предметных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$;
   2. знаки предметных констант $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$;
   3. знаки предикатов $P_1^{n_1}\underbrace{(\cdot, \ldots, \cdot)}_{n_1 \text{ мест}},\ P_2^{n_2}\underbrace{(\cdot, \ldots, \cdot)}_{n_2 \text{ мест}},\ \ldots$;

Исчисление предикатов

Исчисление предикатов — это формальная теория, получаемая за счёт добавления к исчислению высказываний новых знаков, понятия терма, новых типов формул и новых правил вывода.

1. Алфавит:
   1. знаки предметных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$;
   2. знаки предметных констант $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$;
   3. знаки предикатов $P_1^{n_1}(\underbrace{\cdot, \dots, \cdot}_{n_1 \text{ мест}}),\ P_2^{n_2}(\underbrace{\cdot, \dots, \cdot}_{n_2 \text{ мест}}),\ \dots;$
   4. знаки операций (функции)

$$f_1^{n_1}(\underbrace{\cdot, \dots, \cdot}_{n_1 \text{ мест}}),\ f_2^{n_2}(\underbrace{\cdot, \dots, \cdot}_{n_2 \text{ мест}}),\ \dots;$$

Исчисление предикатов

Исчисление предикатов — это формальная теория, получаемая за счёт добавления к исчислению высказываний новых знаков, понятия терма, новых типов формул и новых правил вывода.

1. Алфавит:
   1. знаки предметных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$;
   2. знаки предметных констант $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$;
   3. знаки предикатов $P_1^{n_1}(\underbrace{\cdot, \ldots, \cdot}_{n_1 \text{ мест}}),\ P_2^{n_2}(\underbrace{\cdot, \ldots, \cdot}_{n_2 \text{ мест}}),\ \ldots$;
   4. знаки операций (функции)

      $$f_1^{n_1}(\underbrace{\cdot, \ldots, \cdot}_{n_1 \text{ мест}}),\ f_2^{n_2}(\underbrace{\cdot, \ldots, \cdot}_{n_2 \text{ мест}}),\ \ldots;$$

   5. логические знаки (кванторы) «$\forall$», «$\exists$».

2. Термы:

2. Термы:
   1. переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — это термы;

2. Термы:
   1. переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — это термы;
   2. константы $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ — это термы;

2. Термы:
   1. переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — это термы;
   2. константы $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ — это термы;
   3. если $f_m^n(\cdot, \ldots, \cdot)$ — n-местный знак операции, $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $f_m^n(t_1, \ldots, t_n)$ — терм.

2. Термы:
   1. переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — это термы;
   2. константы $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ — это термы;
   3. если $f_m^n(\cdot, \ldots, \cdot)$ — n-местный знак операции, $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $f_m^n(t_1, \ldots, t_n)$ — терм.
3. Формулы:

2. Термы:
   1. переменные $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ — это термы;
   2. константы $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ — это термы;
   3. если $f_m^n(\cdot, \dots, \cdot)$ — n-местный знак операции, $t_1, \dots, t_n$ — термы, то $f_m^n(t_1, \dots, t_n)$ — терм.
3. Формулы:
   1. если $P_m^n(\cdot, \dots, \cdot)$ — n-местный знак предиката, $t_1, \dots, t_n$ — термы, то $P_m^n(t_1, \dots, t_n)$ — формула;

2. Термы:
   1. переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — это термы;
   2. константы $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ — это термы;
   3. если $f_m^n(\cdot, \ldots, \cdot)$ — n-местный знак операции, $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $f_m^n(t_1, \ldots, t_n)$ — терм.
3. Формулы:
   1. если $P_m^n(\cdot, \ldots, \cdot)$ — n-местный знак предиката, $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $P_m^n(t_1, \ldots, t_n)$ — формула;
   2. если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то $(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ — формулы;

2. Термы:
   1. переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — это термы;
   2. константы $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ — это термы;
   3. если $f_m^n(\cdot, \ldots, \cdot)$ — n-местный знак операции, $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $f_m^n(t_1, \ldots, t_n)$ — терм.
3. Формулы:
   1. если $P_m^n(\cdot, \ldots, \cdot)$ — n-местный знак предиката, $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $P_m^n(t_1, \ldots, t_n)$ — формула;
   2. если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то $(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ — формулы;
   3. если $\mathfrak{A}$ — формула, то $\overline{\mathfrak{A}}$ — формула;

2. Термы:
   1. переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — это термы;
   2. константы $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ — это термы;
   3. если $f_m^n(\cdot, \ldots, \cdot)$ — n-местный знак операции, $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $f_m^n(t_1, \ldots, t_n)$ — терм.
3. Формулы:
   1. если $P_m^n(\cdot, \ldots, \cdot)$ — n-местный знак предиката, $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $P_m^n(t_1, \ldots, t_n)$ — формула;
   2. если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то $(\mathfrak{A} \mathbin{\&} \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ — формулы;
   3. если $\mathfrak{A}$ — формула, то $\overline{\mathfrak{A}}$ — формула;
   4. если $\mathfrak{A}(x)$ — формула, содержащая переменную x, то $\forall x\, \mathfrak{A}(x)$, $\exists x\, \mathfrak{A}(x)$ — формулы.

2. Термы:
   1. переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — это термы;
   2. константы $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ — это термы;
   3. если $f^n_m(\cdot, \ldots, \cdot)$ — n-местный знак операции, $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $f^n_m(t_1, \ldots, t_n)$ — терм.
3. Формулы:
   1. если $P^n_m(\cdot, \ldots, \cdot)$ — n-местный знак предиката, $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $P^n_m(t_1, \ldots, t_n)$ — формула;
   2. если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то $(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ — формулы;
   3. если $\mathfrak{A}$ — формула, то $\overline{\mathfrak{A}}$ — формула;
   4. если $\mathfrak{A}(x)$ — формула, содержащая переменную x, то $\forall x\, \mathfrak{A}(x)$, $\exists x\, \mathfrak{A}(x)$ — формулы.
4. Аксиомы — как в любом аксиоматическом исчислении высказываний, плюс аксиомы Бернайса:

2. Термы:
   1. переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — это термы;
   2. константы $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ — это термы;
   3. если $f_m^n(\cdot, \ldots, \cdot)$ — n-местный знак операции, $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $f_m^n(t_1, \ldots, t_n)$ — терм.
3. Формулы:
   1. если $P_m^n(\cdot, \ldots, \cdot)$ — n-местный знак предиката, $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $P_m^n(t_1, \ldots, t_n)$ — формула;
   2. если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то $(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ — формулы;
   3. если $\mathfrak{A}$ — формула, то $\overline{\mathfrak{A}}$ — формула;
   4. если $\mathfrak{A}(x)$ — формула, содержащая переменную x, то $\forall x\, \mathfrak{A}(x)$, $\exists x\, \mathfrak{A}(x)$ — формулы.
4. Аксиомы — как в любом аксиоматическом исчислении высказываний, плюс аксиомы Бернайса:
   - Б1 $\forall x\, \mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{A}(t)$;

2. Термы:
   1. переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — это термы;
   2. константы $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ — это термы;
   3. если $f^n_m(\cdot, \ldots, \cdot)$ — n-местный знак операции, $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $f^n_m(t_1, \ldots, t_n)$ — терм.
3. Формулы:
   1. если $P^n_m(\cdot, \ldots, \cdot)$ — n-местный знак предиката, $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $P^n_m(t_1, \ldots, t_n)$ — формула;
   2. если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то $(\mathfrak{A} \mathbin{\&} \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ — формулы;
   3. если $\mathfrak{A}$ — формула, то $\overline{\mathfrak{A}}$ — формула;
   4. если $\mathfrak{A}(x)$ — формула, содержащая переменную x, то $\forall x\, \mathfrak{A}(x)$, $\exists x\, \mathfrak{A}(x)$ — формулы.
4. Аксиомы — как в любом аксиоматическом исчислении высказываний, плюс аксиомы Бернайса:
   - Б1 $\forall x\, \mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{A}(t)$;
   - Б2 $\mathfrak{A}(t) \to \exists x\, \mathfrak{A}(x)$.

2. Термы:
   1. переменные $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ — это термы;
   2. константы $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ — это термы;
   3. если $f_m^n(\cdot, \dots, \cdot)$ — n-местный знак операции, $t_1, \dots, t_n$ — термы, то $f_m^n(t_1, \dots, t_n)$ — терм.
3. Формулы:
   1. если $P_m^n(\cdot, \dots, \cdot)$ — n-местный знак предиката, $t_1, \dots, t_n$ — термы, то $P_m^n(t_1, \dots, t_n)$ — формула;
   2. если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то $(\mathfrak{A} \mathbin{\&} \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ — формулы;
   3. если $\mathfrak{A}$ — формула, то $\overline{\mathfrak{A}}$ — формула;
   4. если $\mathfrak{A}(x)$ — формула, содержащая переменную x, то $\forall x\, \mathfrak{A}(x)$, $\exists x\, \mathfrak{A}(x)$ — формулы.
4. Аксиомы — как в любом аксиоматическом исчислении высказываний, плюс аксиомы Бернайса:
   - Б1 $\forall x\, \mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{A}(t)$;
   - Б2 $\mathfrak{A}(t) \to \exists x\, \mathfrak{A}(x)$.

   Здесь $t = t(x_1, \dots, x_n)$ — терм, а в формуле $\mathfrak{A}$ нет кванторов, связывающих его переменные $x_1, \dots, x_n$.

5. Правила вывода — как в любом аксиоматическом исчислении высказываний, плюс

5. Правила вывода — как в любом аксиоматическом исчислении высказываний, плюс
   1. $\dfrac{\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}(x)}{\mathfrak{B} \to \forall x\, \mathfrak{A}(x)}$ $(\forall_{\text{В}})$ — правило обобщения;

5. Правила вывода — как в любом аксиоматическом исчислении высказываний, плюс
   1. $\dfrac{\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}(x)}{\mathfrak{B} \to \forall x\, \mathfrak{A}(x)}$ $(\forall_{\text{B}})$ — правило обобщения;
   2. $\dfrac{\mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B}}{\exists x\, \mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B}}$ $(\exists_{\text{B}})$ — правило конкретизации.

5. Правила вывода — как в любом аксиоматическом исчислении высказываний, плюс
   1. $\dfrac{\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}(x)}{\mathfrak{B} \to \forall x\, \mathfrak{A}(x)}(\forall_{\text{В}})$ — правило обобщения;
   2. $\dfrac{\mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B}}{\exists x\, \mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B}}(\exists_{\text{В}})$ — правило конкретизации.

Приведённое описание образует узкое исчислением предикатов.

5. Правила вывода — как в любом аксиоматическом исчислении высказываний, плюс
   1. $\dfrac{\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}(x)}{\mathfrak{B} \to \forall x\, \mathfrak{A}(x)} (\forall_\text{В})$ — правило обобщения;
   2. $\dfrac{\mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B}}{\exists x\, \mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B}} (\exists_\text{В})$ — правило конкретизации.

Приведённое описание образует узкое исчислением предикатов.

Появление в теории аксиом, разрешающих «навешивание» кванторов по знакам операций или предикатов, приводит к исчислениям высших порядков.

5. Правила вывода — как в любом аксиоматическом исчислении высказываний, плюс
   1. $\dfrac{\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}(x)}{\mathfrak{B} \to \forall x\, \mathfrak{A}(x)}(\forall_{\text{В}})$ — правило обобщения;
   2. $\dfrac{\mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B}}{\exists x\, \mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B}}(\exists_{\text{В}})$ — правило конкретизации.

Приведённое описание образует узкое исчислением предикатов.

Появление в теории аксиом, разрешающих «навешивание» кванторов по знакам операций или предикатов, приводит к исчислениям высших порядков.

Рассмотренное исчисление предикатов — теория первого порядка.

5. Правила вывода — как в любом аксиоматическом исчислении высказываний, плюс
   1. $\dfrac{\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}(x)}{\mathfrak{B} \to \forall x\, \mathfrak{A}(x)}\,(\forall_\text{В})$ — правило обобщения;
   2. $\dfrac{\mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B}}{\exists x\, \mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B}}\,(\exists_\text{В})$ — правило конкретизации.

Приведённое описание образует узкое исчислением предикатов.

Появление в теории аксиом, разрешающих «навешивание» кванторов по знакам операций или предикатов, приводит к исчислениям высших порядков.

Рассмотренное исчисление предикатов — теория первого порядка.

Без доказательства отметим, что исчисление предикатов является полной и непротиворечивой теорией.

Пример (3.3)

Доказать, что формула $\forall x\, P(x) \to \exists x\, P(x)$ является теоремой исчисления предикатов.

Пример (3.3)

Доказать, что формула $\forall x\, P(x) \to \exists x\, P(x)$ является теоремой исчисления предикатов.

Доказательство

Для доказательства построим вывод этой формулы из аксиом:

Пример (3.3)

Доказать, что формула $\forall x\, P(x) \to \exists x\, P(x)$ является теоремой исчисления предикатов.

Доказательство

Для доказательства построим вывод этой формулы из аксиом:

- Аксиома $\mathfrak{A}_1 = \forall x\, P(x) \to P(y)$ получена из аксиомы Б1 с помощью подстановок $P(x)/\mathfrak{A}(x)$ и y/t.

Пример (3.3)

Доказать, что формула $\forall x\, P(x) \to \exists x\, P(x)$ является теоремой исчисления предикатов.

Доказательство

Для доказательства построим вывод этой формулы из аксиом:

- Аксиома $\mathfrak{A}_1 = \forall x\, P(x) \to P(y)$ получена из аксиомы Б1 с помощью подстановок $P(x)/\mathfrak{A}(x)$ и y/t.
- Аксиома $\mathfrak{A}_2 = P(y) \to \exists x\, P(x)$ получена из аксиомы Б2 с помощью подстановок $P(x)/\mathfrak{A}(x)$ и y/t.

Пример (3.3)

Доказать, что формула $\forall x\, P(x) \to \exists x\, P(x)$ является теоремой исчисления предикатов.

Доказательство

Для доказательства построим вывод этой формулы из аксиом:

- Аксиома $\mathfrak{A}_1 = \forall x\, P(x) \to P(y)$ получена из аксиомы Б1 с помощью подстановок $P(x)/\mathfrak{A}(x)$ и y/t.
- Аксиома $\mathfrak{A}_2 = P(y) \to \exists x\, P(x)$ получена из аксиомы Б2 с помощью подстановок $P(x)/\mathfrak{A}(x)$ и y/t.
- Теорема $\mathfrak{A}_3 = \forall x\, P(x) \to \exists x\, P(x)$ — получена по правилу $\frac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{B},\ \mathfrak{B}\to\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}\to\mathfrak{C}}$ при $\mathfrak{A} = \forall x\, P(x)$, $\mathfrak{B} = P(y)$ и $\mathfrak{C} = \exists x\, P(x)$.

Пример (3.3)

Доказать, что формула $\forall x\, P(x) \to \exists x\, P(x)$ является теоремой исчисления предикатов.

Доказательство

Для доказательства построим вывод этой формулы из аксиом:

- Аксиома $\mathfrak{A}_1 = \forall x\, P(x) \to P(y)$ получена из аксиомы Б1 с помощью подстановок $P(x)/\mathfrak{A}(x)$ и y/t.
- Аксиома $\mathfrak{A}_2 = P(y) \to \exists x\, P(x)$ получена из аксиомы Б2 с помощью подстановок $P(x)/\mathfrak{A}(x)$ и y/t.
- Теорема $\mathfrak{A}_3 = \forall x\, P(x) \to \exists x\, P(x)$ — получена по правилу $\frac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{B},\ \mathfrak{B}\to\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}\to\mathfrak{C}}$ при $\mathfrak{A} = \forall x\, P(x)$, $\mathfrak{B} = P(y)$ и $\mathfrak{C} = \exists x\, P(x)$.

Доказательство выполнено.

Об идее формализации

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716) — немецкий (саксонский) философ, математик, юрист, дипломат.

Лейбниц мечтал «идеи заменить вычислениями» — так сформулировать правила математического доказательства, чтобы при их применении уже не потребовались рассуждения о содержательном смысле математических выражений. Он хотел создать исчисление, в котором естественные доказательства были бы заменены формальными вычислениями и тем самым стали бы предметом математики.

Развитие логики привело к появлению новой области математики — оснований математики, предметом изучения которой стало строение математических теорий и утверждений.

Она пытается ответить на такие вопросы, как «является ли данная теория непротиворечивой» или «достаточно ли строги доказательства теории».

Эгалитарные теории

Теория, содержащая исчисление предикатов, называется *эгалита́рной*, если она имеет дополнительный двухместный предикат равенства $=(\cdot,\cdot)$.

Эгалитарные теории

Теория, содержащая исчисление предикатов, называется эгалитáрной, если она имеет дополнительный двухместный предикат равенства $=(\cdot,\cdot)$.

Вместо префиксной формы записи $=(x, y)$ обычно используют инфиксную форму: $x = y$.

Эгалитарные теории

Теория, содержащая исчисление предикатов, называется эгалитáрной, если она имеет дополнительный двухместный предикат равенства $=(\cdot,\cdot)$.

Вместо префиксной формы записи $=(x, y)$ обычно используют инфиксную форму: $x = y$.

Для предиката равенства вводятся две нелогические аксиомы равенства:

Эгалитарные теории

Теория, содержащая исчисление предикатов, называется эгалитáрной, если она имеет дополнительный двухместный предикат равенства $=(\cdot,\cdot)$.

Вместо префиксной формы записи $=(x,y)$ обычно используют инфиксную форму: $x = y$.

Для предиката равенства вводятся две нелогические аксиомы равенства:

- $=_1$ $\forall z (z = z)$ — рефлексивность равенства;

Эгалитарные теории

Теория, содержащая исчисление предикатов, называется эгалита́рной, если она имеет дополнительный двухместный предикат равенства $=(\cdot,\cdot)$.

Вместо префиксной формы записи $=(x,y)$ обычно используют инфиксную форму: $x = y$.

Для предиката равенства вводятся две нелогические аксиомы равенства:

1. $\forall z(z = z)$ — рефлексивность равенства;
2. $(x = y) \to (\mathfrak{A}(\ldots,x,\ldots,y,\ldots) \to \mathfrak{A}(\ldots,y,\ldots,x,\ldots))$ — замена равного равным (схема аксиом).

Эгалитарные теории

Теория, содержащая исчисление предикатов, называется эгалита́рной, если она имеет дополнительный двухместный предикат равенства $=(\cdot,\cdot)$.

Вместо префиксной формы записи $=(x,y)$ обычно используют инфиксную форму: $x = y$.

Для предиката равенства вводятся две нелогические аксиомы равенства:

1. $\forall z(z = z)$ — рефлексивность равенства;
2. $(x = y) \to (\mathfrak{A}(\ldots, x, \ldots, y, \ldots) \to \mathfrak{A}(\ldots, y, \ldots, x, \ldots))$ — замена равного равным (схема аксиом).

Здесь $\mathfrak{A}$ — произвольная формула, x, y — свободные предметные переменные.

Эгалитарные теории

Теория, содержащая исчисление предикатов, называется эгалита́рной, если она имеет дополнительный двухместный предикат равенства $=(\cdot,\cdot)$.

Вместо префиксной формы записи $=(x, y)$ обычно используют инфиксную форму: $x = y$.

Для предиката равенства вводятся две нелогические аксиомы равенства:

1. $\forall z(z = z)$ — рефлексивность равенства;
2. $(x = y) \to (\mathfrak{A}(\ldots, x, \ldots, y, \ldots) \to \mathfrak{A}(\ldots, y, \ldots, x, \ldots))$ — замена равного равным (схема аксиом).

Здесь $\mathfrak{A}$ — произвольная формула, x, y — свободные предметные переменные.

Т. о., эгалитарная теория — теория первого порядка с равенством.

Формальная арифметика

Формальная арифметика — это эгалитарная теория, в которую добавлены следующие компоненты:

Формальная арифметика

Формальная арифметика — это эгалитарная теория, в которую добавлены следующие компоненты:

1. Предметная константа «$\emptyset$» (нуль).

Формальная арифметика

Формальная арифметика — это эгалитарная теория, в которую добавлены следующие компоненты:

1. Предметная константа «$\emptyset$» (нуль).
2. Двухместные операции сложения «$+$» и умножения «$\times$» и одноместная операция инкремента «$'$».

Формальная арифметика

Формальная арифметика — это эгалитарная теория, в которую добавлены следующие компоненты:

1. Предметная константа «$\emptyset$» (нуль).
2. Двухместные операции сложения «$+$» и умножения «$\times$» и одноместная операция инкремента «$'$».
3. Нелогические аксиомы равенства (=1, =2) и следующие нелогические аксиомы арифметики:

Формальная арифметика

Формальная арифметика — это эгалитарная теория, в которую добавлены следующие компоненты:

1. Предметная константа «$\emptyset$» (нуль).
2. Двухместные операции сложения «$+$» и умножения «$\times$» и одноместная операция инкремента «$'$».
3. Нелогические аксиомы равенства (=1, =2) и следующие нелогические аксиомы арифметики:
   - A1 $\Big(\mathfrak{A}(\emptyset) \mathbin{\&} \forall x\big(\mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{A}(x')\big)\Big) \to \forall x\, \mathfrak{A}(x)$,
   - A2 $(t_1' = t_2') \to (t_1 = t_2)$,
   - A3 $(t_1 = t_2) \to (t_1' = t_2')$,
   - A4 $(t_1 = t_2) \to \big((t_2 = t_3) \to (t_1 = t_3)\big)$,
   - A5 $\overline{t' = \emptyset}$,
   - A6 $(t + \emptyset) = t$,
   - A7 $(t \times \emptyset) = \emptyset$,
   - A8 $(t_1 + t_2') = (t_1 + t_2)'$,
   - A9 $(t_1 \times t_2') \to \big((t_1 \times t_2) + t_1\big)$,

   где $\mathfrak{A}$ — любая формула, а t, t_1 и t_2 — любые термы.

Аксиома A1 — это метод доказательства посредством математической индукции.

Аксиома A1 — это метод доказательства посредством математической индукции.
Если вместо t' написать $t+1$, то становится очевидным, что t' — следующее натуральное число, идущее за t.

Аксиома A1 — это метод доказательства посредством математической индукции.
Если вместо t' написать $t + 1$, то становится очевидным, что t' — следующее натуральное число, идущее за t.

Т. о., аксиомы арифметики определяют натуральные числа и правила их сложения и умножения.

Аксиома A1 — это метод доказательства посредством математической индукции.
Если вместо t' написать $t + 1$, то становится очевидным, что t' — следующее натуральное число, идущее за t.

Т. о., аксиомы арифметики определяют натуральные числа и правила их сложения и умножения.

Метод математической индукции A1 может быть усилен за счёт расширения области его применения до трансфинитных чисел.

Аксиома A1 — это метод доказательства посредством математической индукции.
Если вместо t' написать $t + 1$, то становится очевидным, что t' — следующее натуральное число, идущее за t.

Т. о., аксиомы арифметики определяют натуральные числа и правила их сложения и умножения.

Метод математической индукции A1 может быть усилен за счёт расширения области его применения до трансфинитных чисел.
Под трансфинитными числами понимают некоторое обобщение понятия натуральных чисел «за пределы бесконечности».

Аксиома A1 — это метод доказательства посредством математической индукции.
Если вместо t' написать $t+1$, то становится очевидным, что t' — следующее натуральное число, идущее за t.

Т. о., аксиомы арифметики определяют натуральные числа и правила их сложения и умножения.

Метод математической индукции A1 может быть усилен за счёт расширения области его применения до трансфинитных чисел. Под трансфинитными числами понимают некоторое обобщение понятия натуральных чисел «за пределы бесконечности».

Получается более мощный способ доказательства теорем, названный методом трансфинитной индукции.

Частично упорядоченные множества

Множество частично упорядочено (partially ordered), если указано, какие элементы следуют за какими.

Частично упорядоченные множества

Множество частично упорядочено (partially ordered), если указано, какие элементы следуют за какими.
При этом (в общем случае) может оказаться так, что некоторые пары элементов не связаны отношением «следует за».

Частично упорядоченные множества

Множество частично упорядочено (partially ordered), если указано, какие элементы следуют за какими.
При этом (в общем случае) может оказаться так, что некоторые пары элементов не связаны отношением «следует за».

Пример

Совокупность подмножеств множества $\{x, y, z\}$, упорядоченная по отношению включения, частично упорядочена:
$\{x\} \subset \{x, y\} \subset \{x, y, z\}$, однако, например, $\{x\}$ и $\{y, z\}$ не связаны отношением включения.

Линейно упорядоченные множества

Линейно упорядоченное множество (linear ordered set) — частично упорядоченное множество, в котором для любой пары элементов a и b имеет место $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$.

Линейно упорядоченные множества

Линейно упорядоченное множество (linear ordered set) — частично упорядоченное множество, в котором для любой пары элементов a и b имеет место $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$.

Пример

Слова в орфографическом словаре линейно упорядочены (лексикографически).

Фундированные множества

Фундированное множество (well-founded set) — частично упорядоченное множество, в любом непустом подмножестве которого есть минимальный элемент.

Фундированные множества

Фундированное множество (well-founded set) — частично упорядоченное множество, в любом непустом подмножестве которого есть минимальный элемент.

Вполне упорядоченное множество (well-ordered set) — линейно упорядоченное множество, в любом непустом подмножестве которого есть минимальный элемент (т. е. это фундированное множество с линейным порядком).

Фундированные множества

Фундированное множество (well-founded set) — частично упорядоченное множество, в любом непустом подмножестве которого есть минимальный элемент.

Вполне упорядоченное множество (well-ordered set) — линейно упорядоченное множество, в любом непустом подмножестве которого есть минимальный элемент (т. е. это фундированное множество с линейным порядком).

Пример

Множество натуральных чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ вполне упорядочено, а множество целых чисел $\mathbb{Z} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$— нет, т. к. оно содержит подмножество отрицательных чисел $\{\ldots, -3, -2, -1\}$, у которого нельзя отыскать минимальный элемент.

Метод трансфинитной индукции

Метод трансфинитной индукции основан на следующем утверждении:

Метод трансфинитной индукции

Метод трансфинитной индукции основан на следующем утверждении:

Пусть задано вполне упорядоченное множество $\mathscr{M}$ и некоторое утверждение $P(x)$, где $x \in \mathscr{M}$.

Метод трансфинитной индукции

Метод трансфинитной индукции основан на следующем утверждении:

Пусть задано вполне упорядоченное множество $\mathscr{M}$ и некоторое утверждение $P(x)$, где $x \in \mathscr{M}$.
Пусть для любого $x \in \mathscr{M}$ из того, что $P(y) = 1$ для всех $y < x$, следует, что $P(x) = 1$,
и пусть если x_0 — минимальный элемент $\mathscr{M}$, то $P(x_0) = 1$.

Метод трансфинитной индукции

Метод трансфинитной индукции основан на следующем утверждении:

Пусть задано вполне упорядоченное множество $\mathscr{M}$ и некоторое утверждение $P(x)$, где $x \in \mathscr{M}$.
Пусть для любого $x \in \mathscr{M}$ из того, что $P(y) = 1$ для всех $y < x$, следует, что $P(x) = 1$,
и пусть если x_0 — минимальный элемент $\mathscr{M}$, то $P(x_0) = 1$.
Тогда $P(x) = 1$ для любого x.

Метод трансфинитной индукции

Метод трансфинитной индукции основан на следующем утверждении:

Пусть задано вполне упорядоченное множество $\mathscr{M}$ и некоторое утверждение $P(x)$, где $x \in \mathscr{M}$.
Пусть для любого $x \in \mathscr{M}$ из того, что $P(y) = 1$ для всех $y < x$, следует, что $P(x) = 1$,
и пусть если x_0 — минимальный элемент $\mathscr{M}$, то $P(x_0) = 1$.
Тогда $P(x) = 1$ для любого x.

Математическая индукция является частным случаем трансфинитной индукции.

Метод трансфинитной индукции

Метод трансфинитной индукции основан на следующем утверждении:

Пусть задано вполне упорядоченное множество $\mathscr{M}$ и некоторое утверждение $P(x)$, где $x \in \mathscr{M}$.
Пусть для любого $x \in \mathscr{M}$ из того, что $P(y) = 1$ для всех $y < x$, следует, что $P(x) = 1$,
и пусть если x_0 — минимальный элемент $\mathscr{M}$, то $P(x_0) = 1$.
Тогда $P(x) = 1$ для любого x.

Математическая индукция является частным случаем трансфинитной индукции.
Отметим без доказательства следующий факт:

Метод трансфинитной индукции

Метод трансфинитной индукции основан на следующем утверждении:

Пусть задано вполне упорядоченное множество $\mathscr{M}$ и некоторое утверждение $P(x)$, где $x \in \mathscr{M}$.
Пусть для любого $x \in \mathscr{M}$ из того, что $P(y) = 1$ для всех $y < x$, следует, что $P(x) = 1$,
и пусть если x_0 — минимальный элемент $\mathscr{M}$, то $P(x_0) = 1$.
Тогда $P(x) = 1$ для любого x.

Математическая индукция является частным случаем трансфинитной индукции.
Отметим без доказательства следующий факт:

Непротиворечивость формальной арифметики можно доказать только в более широкой формальной теории, содержащей арифметику и принцип трансфинитной индукции.

Проблемы Гильберта

Давид Гильберт (1862—1943) — выдающийся немецкий математик. В 1910—1920-е годы был признанным мировым лидером математиков.

Гильберт в 1900 году в Париже на II Международном Конгрессе математиков представил список из 23 кардинальных проблем математики.

Тогда эти проблемы (охватывающие основания математики, алгебру, теорию чисел, геометрию, топологию, алгебраическую геометрию, группы Ли, вещественный и комплексный анализ, дифференциальные уравнения, математическую физику и теорию вероятностей, а также вариационное исчисление) не были решены.

На данный момент решены 16 проблем из 23. Ещё 2 оказались некорректными математическими проблемами.

Вторая проблема Гильберта

Курт Фридрих Гёдель (1906—1978) — австрийский логик, математик и философ.

Вторая из математических проблем Гильберта звучит так: аксиомы арифметики противоречивы или нет?

До сих пор среди математического сообщества нет консенсуса относительно того, решена она или нет.

Гёдель в 1930 г. доказал, что непротиворечивость аксиом формальной арифметики нельзя доказать, исходя из самих аксиом этой формальной арифметики.

Из лекции 9

Напомним, что теория, в которой множество теорем покрывает всё множество формул (все формулы являются теоремами), называется противоречивой.
В противном случае теория называется непротиворечивой.

Из лекции 9

Напомним, что теория, в которой множество теорем покрывает всё множество формул (все формулы являются теоремами), называется противоречивой.
В противном случае теория называется непротиворечивой.

Теория называется полной, если в ней для любой формулы $\mathfrak{A}$ выводима либо сама $\mathfrak{A}$, либо её отрицание $\overline{\mathfrak{A}}$.

Теорема Гёделя о неполноте

Теорема Гёделя о неполноте

Если формальная арифметика непротиворечива, то в ней существует такая формула $\mathfrak{A}$, что ни $\mathfrak{A}$, ни $\overline{\mathfrak{A}}$ не являются доказуемыми.

Теорема Гёделя о неполноте

Теорема Гёделя о неполноте

Если формальная арифметика непротиворечива, то в ней существует такая формула $\mathfrak{A}$, что ни $\mathfrak{A}$, ни $\overline{\mathfrak{A}}$ не являются доказуемыми.

Вторая теорема Гёделя

Утверждение о непротиворечивости формальной арифметики — это формула, которая не является доказуемой средствами самой формальной арифметики.

Теорема Гёделя о неполноте

Теорема Гёделя о неполноте

Если формальная арифметика непротиворечива, то в ней существует такая формула $\mathfrak{A}$, что ни $\mathfrak{A}$, ни $\overline{\mathfrak{A}}$ не являются доказуемыми.

Вторая теорема Гёделя

Утверждение о непротиворечивости формальной арифметики — это формула, которая не является доказуемой средствами самой формальной арифметики.

В обобщённой форме вышесказанное звучит так:

Теорема Гёделя о неполноте

Теорема Гёделя о неполноте

Если формальная арифметика непротиворечива, то в ней существует такая формула $\mathfrak{A}$, что ни $\mathfrak{A}$, ни $\overline{\mathfrak{A}}$ не являются доказуемыми.

Вторая теорема Гёделя

Утверждение о непротиворечивости формальной арифметики — это формула, которая не является доказуемой средствами самой формальной арифметики.

В обобщённой форме вышесказанное звучит так:

Всякая достаточно сильная непротиворечивая теория первого порядка неполна.

Теоремы Гёделя говорят о том, что в любой достаточно богатой теории существуют высказывания, которые воспринимаются как истинные и разумные, но тем не менее они не могут быть доказаны теми средствами, которые предоставляет теория.

Теоремы Гёделя говорят о том, что в любой достаточно богатой теории существуют высказывания, которые воспринимаются как истинные и разумные, но тем не менее они не могут быть доказаны теми средствами, которые предоставляет теория.

Для доказательства полноты над каждой теорией нужно надстраивать более изощрённую метатеорию, над метатеорией — метаметатеорию и т. д.

Теоремы Гёделя говорят о том, что в любой достаточно богатой теории существуют высказывания, которые воспринимаются как истинные и разумные, но тем не менее они не могут быть доказаны теми средствами, которые предоставляет теория.

Для доказательства полноты над каждой теорией нужно надстраивать более изощрённую метатеорию, над метатеорией — метаметатеорию и т. д.

Так вышло с доказательством непротиворечивости формальной арифметики (доказывается введением метода трансфинитной индукции).

Теоремы Гёделя говорят о том, что в любой достаточно богатой теории существуют высказывания, которые воспринимаются как истинные и разумные, но тем не менее они не могут быть доказаны теми средствами, которые предоставляет теория.

Для доказательства полноты над каждой теорией нужно надстраивать более изощрённую метатеорию, над метатеорией — метаметатеорию и т. д.

Так вышло с доказательством непротиворечивости формальной арифметики (доказывается введением метода трансфинитной индукции).

Кроме того, теорема Гёделя говорит о несостоятельности идеи полной формализации мира.

Теоремы Гёделя говорят о том, что в любой достаточно богатой теории существуют высказывания, которые воспринимаются как истинные и разумные, но тем не менее они не могут быть доказаны теми средствами, которые предоставляет теория.

Для доказательства полноты над каждой теорией нужно надстраивать более изощрённую метатеорию, над метатеорией — метаметатеорию и т. д.

Так вышло с доказательством непротиворечивости формальной арифметики (доказывается введением метода трансфинитной индукции).

Кроме того, теорема Гёделя говорит о несостоятельности идеи полной формализации мира.

Не всё может быть полностью формализовано, как бы этого ни хотелось математикам.

Связь с парадоксами

В своей стандартной интерпретации гёделевская неразрешимая формула $\mathfrak{A}$ имеет вид:

Связь с парадоксами

В своей стандартной интерпретации гёделевская неразрешимая формула $\mathfrak{A}$ имеет вид:

$\mathfrak{A}$ — «Не существует вывода формулы $\mathfrak{A}$».

Связь с парадоксами

В своей стандартной интерпретации гёделевская неразрешимая формула $\mathfrak{A}$ имеет вид:

$\mathfrak{A}$ — «Не существует вывода формулы $\mathfrak{A}$».

Она является аналогом известного парадокса лжеца:

Связь с парадоксами

В своей стандартной интерпретации гёделевская неразрешимая формула $\mathfrak{A}$ имеет вид:

$\mathfrak{A}$ — «Не существует вывода формулы $\mathfrak{A}$».

Она является аналогом известного парадокса лжеца:

То, что я утверждаю сейчас, ложно.

Связь с парадоксами

В своей стандартной интерпретации гёделевская неразрешимая формула $\mathfrak{A}$ имеет вид:

$\mathfrak{A}$ — «Не существует вывода формулы $\mathfrak{A}$».

Она является аналогом известного парадокса лжеца:

То, что я утверждаю сейчас, ложно.

Иначе говоря, если это высказывание истинно, то оно ложно, и в тоже время, если оно ложно, то истинно.

Связь с парадоксами

В своей стандартной интерпретации гёделевская неразрешимая формула $\mathfrak{A}$ имеет вид:

$\mathfrak{A}$ — «Не существует вывода формулы $\mathfrak{A}$».

Она является аналогом известного парадокса лжеца:

То, что я утверждаю сейчас, ложно.

Иначе говоря, если это высказывание истинно, то оно ложно, и в тоже время, если оно ложно, то истинно.

Считается, что парадокс лжеца в формальной логике вообще не является логическим утверждением.

Связь с парадоксами

В своей стандартной интерпретации гёделевская неразрешимая формула $\mathfrak{A}$ имеет вид:

$\mathfrak{A}$ — «Не существует вывода формулы $\mathfrak{A}$».

Она является аналогом известного парадокса лжеца:

То, что я утверждаю сейчас, ложно.

Иначе говоря, если это высказывание истинно, то оно ложно, и в тоже время, если оно ложно, то истинно.

Считается, что парадокс лжеца в формальной логике вообще не является логическим утверждением.
Попытки «втиснуть» его в рамки теории приводят к отказу от закона исключённого третьего и появлению неклассических логик.