Математическая логика и теория алгоритмов
Лекция 16
Дополнительные главы математической логики

Куценко Дмитрий Александрович

Белгородский государственный технологический университет
имени В. Г. Шухова

Институт информационных технологий и управляющих систем

Кафедра программного обеспечения вычислительной техники
и автоматизированных систем

14 июня 2013 г.

Нотация Айверсона

Нотация Айверсона (скобка Айверсона) — математическое обозначение, согласно которому истинное или ложное утверждение, заключённое в квадратные скобки, равно числу 1, если данное утверждение истинно, и 0, если данное утверждение ложно.

Нотация Айверсона

Нотация Айверсона (скобка Айверсона) — математическое обозначение, согласно которому истинное или ложное утверждение, заключённое в квадратные скобки, равно числу 1, если данное утверждение истинно, и 0, если данное утверждение ложно.

Если P — некоторое логическое высказывание, то

$$[P] = \begin{cases} 1, & \text{если } P \text{ истинно}, \\ 0, & \text{если } P \text{ ложно}. \end{cases}$$

Нотация Айверсона

Нотация Айверсона (скобка Айверсона) — математическое обозначение, согласно которому истинное или ложное утверждение, заключённое в квадратные скобки, равно числу 1, если данное утверждение истинно, и 0, если данное утверждение ложно.

Если P — некоторое логическое высказывание, то

$$[P] = \begin{cases} 1, & \text{если } P \text{ истинно,} \\ 0, & \text{если } P \text{ ложно.} \end{cases}$$

Обозначение введено Кеннетом Айверсоном в его языке программирования APL.

Нотация Айверсона

Нотация Айверсона (скобка Айверсона) — математическое обозначение, согласно которому истинное или ложное утверждение, заключённое в квадратные скобки, равно числу 1, если данное утверждение истинно, и 0, если данное утверждение ложно.

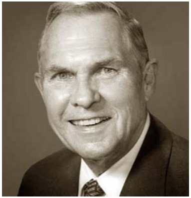
Если P — некоторое логическое высказывание, то

$$[P] = \begin{cases} 1, & \text{если } P \text{ истинно,} \\ 0, & \text{если } P \text{ ложно.} \end{cases}$$

Обозначение введено Кеннетом Айверсоном в его языке программирования APL.

Оно оказалась очень удобным математическим обозначением, т. к. позволяет смешивать логические и числовые величины.

Кеннет Айверсон



Кеннет Юджин А́йверсон (1920—2004) — канадский учёный в области теории вычислительных систем, программист, лауреат премии Тьюринга (1979).

Частные случаи нотации Айверсона

- Символ Кронекера δ_{ij} (дельта-функция):

$$\delta_{ij} = [i = j].$$

Частные случаи нотации Айверсона

- Символ Кронекера δ_{ij} (дельта-функция):

$$\delta_{ij} = [i = j].$$

- Характеристическая функция множества A:

$$\chi_A(y) = [y \in A].$$

Частные случаи нотации Айверсона

- Символ Кронекера δ_{ij} (дельта-функция):
$$\delta_{ij} = [i = j].$$

- Характеристическая функция множества A:
$$\chi_A(y) = [y \in A].$$

- Функция знака числа:
$$\operatorname{sgn}(x) = [x > 0] - [x < 0].$$

Частные случаи нотации Айверсона

- Символ Кронекера δ_{ij} (дельта-функция):
$$\delta_{ij} = [i = j].$$
- Характеристическая функция множества A:
$$\chi_A(y) = [y \in A].$$
- Функция знака числа:
$$\mathrm{sgn}(x) = [x > 0] - [x < 0].$$
- Использование со знаком суммы (позволяет выражать суммы без ограничений на индекс суммирования):
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k} a_k \cdot [1 \leqslant k \leqslant n]; \qquad \sum_{P(k)} a_k = \sum_{k} a_k \cdot [P(k)].$$

Нотация Айверсона и обозначение целой части числа

Для целой части числа x (обычно это округление x до ближайшего целого в меньшую сторону) долгое время использовалось совпадающее с нотацией Айверсона обозначение $[x]$, введённое Гауссом $\big($так называемое антье (фр. entier)$\big)$.

Нотация Айверсона и обозначение целой части числа

Для целой части числа x (обычно это округление x до ближайшего целого в меньшую сторону) долгое время использовалось совпадающее с нотацией Айверсона обозначение $[x]$, введённое Гауссом (так называемое антье (фр. entier)).
В 1962 г. Айверсон предложил округления числа x до ближайшего целого в меньшую и большую стороны называть «пол» (англ. floor) и «потолок» (англ. ceil) и обозначать $\lfloor x \rfloor$ и $\lceil x \rceil$ соответственно:

Нотация Айверсона и обозначение целой части числа

Для целой части числа x (обычно это округление x до ближайшего целого в меньшую сторону) долгое время использовалось совпадающее с нотацией Айверсона обозначение $[x]$, введённое Гауссом (так называемое антье (фр. entier)).
В 1962 г. Айверсон предложил округления числа x до ближайшего целого в меньшую и большую стороны называть «пол» (англ. floor) и «потолок» (англ. ceil) и обозначать $\lfloor x \rfloor$ и $\lceil x \rceil$ соответственно:

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\};$$
$$\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geqslant x\}.$$

Нотация Айверсона и обозначение целой части числа

Для целой части числа x (обычно это округление x до ближайшего целого в меньшую сторону) долгое время использовалось совпадающее с нотацией Айверсона обозначение $[x]$, введённое Гауссом $\big($так называемое антье (фр. entier)$\big)$.
В 1962 г. Айверсон предложил округления числа x до ближайшего целого в меньшую и большую стороны называть «пол» (англ. floor) и «потолок» (англ. ceil) и обозначать $\lfloor x \rfloor$ и $\lceil x \rceil$ соответственно:

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\};$$
$$\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geqslant x\}.$$

В частности,

$$\lfloor 2{,}7 \rfloor = 2; \quad \lfloor -2{,}7 \rfloor = -3;$$
$$\lceil 2{,}7 \rceil = 3; \quad \lceil -2{,}7 \rceil = -2.$$

Нотация Айверсона и обозначение целой части числа

Для целой части числа x (обычно это округление x до ближайшего целого в меньшую сторону) долгое время использовалось совпадающее с нотацией Айверсона обозначение $[x]$, введённое Гауссом $\big($так называемое антье (фр. entier)$\big)$.
В 1962 г. Айверсон предложил округления числа x до ближайшего целого в меньшую и большую стороны называть «пол» (англ. floor) и «потолок» (англ. ceil) и обозначать $\lfloor x \rfloor$ и $\lceil x \rceil$ соответственно:

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\};$$
$$\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geqslant x\}.$$

В частности,

$$\lfloor 2{,}7 \rfloor = 2; \quad \lfloor -2{,}7 \rfloor = -3;$$
$$\lceil 2{,}7 \rceil = 3; \quad \lceil -2{,}7 \rceil = -2.$$

В современной математике существует тенденция перехода к терминологии и обозначениям Айверсона.
Одна из причин — неоднозначность традиционного понятия «целая часть числа».

Псевдобулевы функции

Псевдобулевой называется функция $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ от n булевых переменных $x_1, \ldots, x_n$:

$$f\colon \{0, 1\}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Псевдобулевы функции

Псевдобулевой называется функция $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ от n булевых переменных $x_1, \ldots, x_n$:

$$f\colon \{0, 1\}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

В частности, если y принимает лишь два значения $\{0, 1\}$, то функция f будет просто булевой.

Псевдобулевы функции

Псевдобулевой называется функция $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ от n булевых переменных $x_1, \ldots, x_n$:

$$f\colon \{0,\, 1\}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

В частности, если y принимает лишь два значения $\{0,\, 1\}$, то функция f будет просто булевой.
Любую псевдобулеву функцию можно выразить с помощью полинома

$$f(x_1,\, x_2, \ldots) = a + \sum_i a_i[x_i] + \sum_{i<j} a_{ij}[x_i][x_j] + \sum_{i<j<k} a_{ijk}[x_i][x_j][x_k] + \ldots$$

Псевдобулевы функции

Псевдобулевой называется функция $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ от n булевых переменных $x_1, \ldots, x_n$:

$$f\colon \{0, 1\}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

В частности, если y принимает лишь два значения $\{0, 1\}$, то функция f будет просто булевой.
Любую псевдобулеву функцию можно выразить с помощью полинома

$$f(x_1, x_2, \ldots) = a + \sum_i a_i[x_i] + \sum_{i<j} a_{ij}[x_i][x_j] + \sum_{i<j<k} a_{ijk}[x_i][x_j][x_k] + \ldots$$

К использованию псевдобулевых функций сводится ряд оптимизационных задач.