

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Белгородский государственный технологический университет  
им. В. Г. Шухова

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И ТЕОРИЯ ИГР**

Методические указания к выполнению лабораторных работ  
для студентов направлений бакалавриата 230100 «Информатика  
и вычислительная техника», 231000 «Программная инженерия»  
и специальности 090903 «Информационная безопасность автоматизированных  
систем»

Белгород  
2013

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Белгородский государственный технологический университет  
им. В. Г. Шухова  
Кафедра программного обеспечения вычислительной техники  
и автоматизированных систем

Утверждено  
научно-методическим советом  
университета

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И ТЕОРИЯ ИГР**

Методические указания к выполнению лабораторных работ  
для студентов направлений бакалавриата 230100 «Информатика  
и вычислительная техника», 231000 «Программная инженерия»  
и специальности 090903 «Информационная безопасность автоматизированных  
систем»

Белгород  
2013

УДК 519.8(07)  
ББК 22.1847  
И88

Составители: д-р физ.-мат. наук, проф. *А.Г. Брусенцев*,  
доц. *В.С. Брусенцева*

Рецензент д-р техн. наук, проф. *ГМ. Редькин*

**Исследование** операций и теория игр: методические указания  
И88 к выполнению лабораторных работ для студентов  
направлений бакалавриата 230100 «Информатика и  
вычислительная техника», 231000 «Программная инженерия»  
и специальности 090903 «Информационная безопасность  
автоматизированных систем» / сост.: А.Г. Брусенцев,  
В.С. Брусенцева. — Белгород: Изд-во БГТУ, 2013. — 47 с.

В методических указаниях представлены задания к выполнению лабораторных работ по дисциплине «Исследование операций и теория игр», а также контрольные вопросы по линейному и нелинейному программированию и теории игр.

Методические указания предназначены для студентов направлений бакалавриата 230100 «Информатика и вычислительная техника», 231000 «Программная инженерия» и специальности 090903 «Информационная безопасность автоматизированных систем»

Данное издание публикуется в авторской редакции.

**УДК 519.8**  
**ББК 22.12**

©Белгородский государственный технологический  
университет (БГТУ) им. В. Г. Шухова, 2013

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1. Исследование множества опорных планов системы ограничений задачи линейного программирования в канонической форме .....	3
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2. Симплекс-метод в чистом виде .....	8
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3. Модификации симплекс метода. Методы искусственного базиса и больших штрафов.....	14
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4. Закрытая транспортная задача .....	20
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5. Двойственный симплекс метод .....	27
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6. Нахождение седловой точки в смешанных стратегиях для матричной игры с нулевой суммой .....	34
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №7. Решение полностью целочисленных задач с помощью первого алгоритма Гомори, а также методом ветвей и границ .....	37
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №8. Задачи дробно-линейного программирования .....	40
Библиографический список .....	46

## **ВВЕДЕНИЕ**

На подготовку каждой из описанных ниже лабораторных работ отводится четыре часа аудиторных занятий. Большая часть этого времени посвящена практическим занятиям, на которых изучаются методы и алгоритмы решения соответствующих задач. После усвоения алгоритмов, студент приступает к их программной реализации при выполнении лабораторных работ. Предварительно студент должен выполнить задания для подготовки к работе. Письменная часть этих заданий выполняется в тетради для лабораторных работ и включает в себя в общем случае:

- 1) название;
- 2) цель работы;
- 3) задания к работе;
- 4) формулировку задачи конкретного варианта (номер варианта совпадает с номером студента в групповом журнале);
- 5) решение задачи конкретного варианта без использования ЭВМ;
- 6) описание алгоритма решения задачи в укрупненных блоках;
- 7) спецификацию основных подпрограмм.

После выполнения подготовительных заданий студент набирает программу, отлаживает ее, тестирует и исправляет допущенные ошибки. При защите лабораторных работ студент демонстрирует преподавателю работу программы на тестовых данных и отвечает на вопросы по теме работы, приведенные в разделе контрольных вопросов, или подобные им.

### **ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1**

#### ***Исследование множества опорных планов системы ограничений задачи линейного программирования (задачи ЛП) в канонической форме***

*Цель работы:* изучить метод Гаусса-Жордана и операцию замещения, а также освоить их применение к отысканию множества допустимых базисных видов системы линейных уравнений, и решению задачи линейного программирования простым перебором опорных решений.

#### **Задания для подготовки к работе**

1. Составить программу для отыскания всех базисных видов системы линейных уравнений.
2. Организовать отбор опорных планов среди всех базисных решений, а также нахождение оптимального опорного плана методом прямого перебора. Целевая функция выбирается произвольно.
3. Решить одну из следующих ниже задач вручную (подготовить тестовые данные).

## Варианты заданий

$$1. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_5 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 2 \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 - 2x_5 = 4 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 + 3x_5 = 12 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 12x_4 + 2x_5 = 14 \\ -3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 7x_4 - 4x_5 = 18 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 13x_4 + x_5 = 13 \\ 3x_1 - 6x_2 - 8x_3 - 7x_4 + 4x_5 = -18 \\ 3x_1 + 7x_3 + 4x_5 = 13 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} -2x_1 - 4x_2 + 13x_4 - x_5 = -13 \\ 4x_1 - 5x_2 - 7x_3 - 6x_4 + 5x_5 = -17 \\ -3x_1 - 7x_3 - 4x_5 = -13 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 2 \\ 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 - 2x_5 = 4 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 7x_5 + 10x_6 = 50 \\ 8x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 = -11 \\ x_1 - 4x_2 + 8x_3 + 9x_4 - 3x_5 - x_6 = 87 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + 9x_4 + 12x_5 + 16x_6 = 39 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_5 = 2 \\ -x_1 - 13x_2 + 7x_3 + 11x_4 = 17 \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = -6 \\ 5x_1 - 15x_2 + 9x_3 + 11x_4 + 5x_5 = 19 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 - 6x_6 = 41 \\ -8x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 - 6x_6 = 11 \\ x_1 - 4x_2 + 8x_3 + 9x_4 - 3x_5 - x_6 = 87 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 - 3x_5 + 5x_6 = 46 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 8x_3 + 9x_4 - 3x_5 - x_6 = 87 \\ 8x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 = 11 \\ 4x_1 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 - 5x_6 = 17 \\ -3x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 6x_4 - x_5 + 4x_6 = 70 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ 2x_1 - 9x_2 + 2x_3 + x_5 = 7 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 4x_4 + x_5 = 3 \\ 3x_1 - 14x_2 + 5x_3 + 4x_4 + x_5 = 11 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 22x_1 - 19x_2 + 8x_3 + 8x_4 + x_5 = 15 \\ -2x_1 + 9x_2 - 2x_3 - x_5 = -7 \\ 3x_1 - 14x_2 + 5x_3 + 4x_4 + x_5 = 11 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 8x_1 + x_2 - x_3 + 2x_5 + 3x_6 = 8 \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 6x_4 - x_6 = 9 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 9x_4 + x_5 + 7x_6 = 1 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 15x_4 + x_5 + 6x_6 = 10 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} -x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 6x_4 + x_6 = -9 \\ 8x_1 + x_2 - x_3 + 2x_5 + 3x_6 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 9x_4 + x_5 + 7x_6 = 1 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 2x_1 - 9x_2 + 2x_3 + x_5 = 7 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 4x_4 + x_5 = 3 \\ 3x_1 - 13x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 10 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x_1 - 13x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 10 \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 12x_4 + 2x_5 = 2 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ x_1 - 8x_2 - 2x_3 - 8x_4 + 2x_5 = 6 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 3x_1 - 6x_2 - 8x_3 - 7x_4 + 4x_5 = -18 \\ 3x_1 + 7x_3 + 4x_5 = 13 \\ x_1 - 10x_2 - 8x_3 + 6x_4 + 3x_5 = -31 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 = -1 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 - x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 29 \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 3 \\ 8x_1 + 10x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 29 \\ 6x_1 + 8x_2 + 5x_3 - x_4 + 4x_5 = 37 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 = 54 \\ x_1 + 7x_3 + 3x_4 + 8x_5 = 59 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 2 \\ 4x_1 + 7x_2 - 5x_3 + 3x_4 + 8x_5 = 30 \end{cases}$$

### Контрольные вопросы

1. Как формулируется общая задача линейного программирования?
2. Когда задача линейного программирования называется имеющей каноническую форму?
3. Какая форма задачи линейного программирования называется стандартной?
4. С помощью каких приемов производятся преобразования моделей линейного программирования?
5. Дайте определения базисного и допустимого базисного вида системы линейных уравнений, базисного и опорного решений такой системы.
6. Когда по базисному виду системы ограничений можно заключить, что задача ЛП в канонической форме не имеет решений по причине неограниченности целевой функции на области допустимых значений?
7. Опишите алгоритм метода Гаусса-Жордана с произвольным выбором разрешающего элемента.
8. Базисные и свободные переменные, отвечающие данному базисному виду системы уравнений. Операция замещения.
9. Сформулируйте фундаментальную теорему симплекс-метода.



## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

### Симплекс-метод в чистом виде

*Цель работы:* изучение симплекс-метода для решения задачи линейного программирования с использованием симплекс-таблиц, получение навыков кодирования изученного алгоритма, отладки и тестирования соответствующих программ.

### Задания для подготовки к работе

1. Выяснить: какой вид должна иметь задача ЛП, чтобы можно было применять симплекс-метод в чистом виде, а также как составляется первая симплекс-таблица?
2. Изучить алгоритм перехода от одной симплекс-таблицы к другой при решении задачи симплекс-методом.
3. Запрограммировать и отладить изученный алгоритм. В рамках подготовки тестовых данных решить вручную одну из следующих ниже задач.

### Варианты заданий

1.

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 + 4x_2 - 5x_4 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28, \\ -5x_1 + 5x_2 - 3x_4 + x_5 = 12, \\ 6x_1 - 2x_2 + 8x_4 + x_6 = 24, \end{cases} \\ x_i &\geq 0 \ (i = \overline{1,6}). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} z &= 6x_2 + 8x_4 + 3x_6 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} x_1 - 4x_2 - 5x_4 - 3x_6 = 9, \\ 7x_2 + 5x_4 + x_5 + 4x_6 = 26, \\ 3x_2 + x_3 - 5x_4 - 4x_6 = 10, \end{cases} \\ x_i &\geq 0 \ (i = \overline{1,6}). \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} z &= 7x_2 + 8x_4 + x_6 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_4 - 2x_6 = 10, \\ 5x_2 + 5x_4 + x_5 + x_6 = 26, \\ 4x_2 + x_3 - 6x_4 - 3x_6 = 12, \end{cases} \\ x_i &\geq 0 \ (i = \overline{1,6}). \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} z &= 4x_1 + 2x_2 - 5x_4 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 4x_4 + x_6 = 22, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 16, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 12, \end{cases} \\ x_i &\geq 0 \ (i = \overline{1,6}). \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} z &= 5x_1 + 2x_3 - 5x_6 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} x_1 + 3x_3 + x_5 - 4x_6 = 34, \\ -3x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_6 = 35, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 = 16, \end{cases} \\ x_i &\geq 0 \ (i = \overline{1,6}). \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 + 2x_5 - 5x_6 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_5 + 5x_6 = 34, \\ 4x_1 + x_3 + 2x_5 - 4x_6 = 28, \\ -3x_1 + x_4 - 3x_5 + 6x_6 = 24, \end{cases} \\ x_i &\geq 0 \ (i = \overline{1,6}). \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 + 3x_2 - x_4 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 18, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_4 + x_6 = 24, \end{cases} \\ x_i &\geq 0 \ (i = \overline{1,6}). \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} z &= x_1 + 3x_2 - 5x_4 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 27, \\ -4x_1 + 5x_2 - 3x_4 + x_5 = 32, \\ 5x_1 - 2x_2 + 8x_4 + x_6 = 24, \end{cases} \\ x_i &\geq 0 \ (i = \overline{1,6}). \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} z &= 7x_2 + 10x_4 + 3x_6 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_4 - 2x_6 = 8, \\ 6x_2 + 5x_4 + x_5 + 2x_6 = 28, \\ 3x_2 + x_3 - 5x_4 - 4x_6 = 10, \end{cases} \\ x_i &\geq 0 \ (i = \overline{1,6}). \end{aligned}$$

**10.**

$$\begin{aligned} z &= 6x_1 + 2x_2 - 5x_4 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 6x_4 + x_6 = 26, \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 14, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 12, \end{cases} \\ x_i &\geq 0 \ (i = \overline{1,6}). \end{aligned}$$

**11.**

$$\begin{aligned} z &= x_1 + 3x_2 - 5x_4 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28, \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + x_5 = 30, \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 + x_6 = 32, \end{cases} \\ x_i &\geq 0 \ (i = \overline{1,6}). \end{aligned}$$

**12.**

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 + 2x_3 - 6x_6 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 = 18, \\ -3x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_6 = 24, \\ x_1 + 3x_3 + x_5 - 4x_6 = 36, \end{cases} \\ x_i &\geq 0 \ (i = \overline{1,6}). \end{aligned}$$

**13.**

$$\begin{aligned} z &= 5x_2 + 7x_4 + 3x_6 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_4 - 2x_6 = 10, \\ 7x_2 + 5x_4 + x_5 + 4x_6 = 26, \\ 3x_2 + x_3 - 5x_4 - 4x_6 = 20, \end{cases} \\ x_i &\geq 0 \ (i = \overline{1,6}). \end{aligned}$$

**14.**

$$\begin{aligned} z &= 6x_2 + 9x_4 + 2x_6 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} 5x_2 + 5x_4 + x_5 + x_6 = 26, \\ x_1 - 3x_2 - 4x_4 - 2x_6 = 10, \\ 4x_2 + x_3 - 6x_4 - 3x_6 = 12, \end{cases} \\ x_i &\geq 0 \ (i = \overline{1,6}). \end{aligned}$$

**15.**

$$\begin{aligned} z &= 7x_1 + 2x_2 - 5x_4 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 4x_4 + x_6 = 20, \\ 6x_1 + x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 18, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 12, \end{cases} \\ x_i &\geq 0 \ (i = \overline{1,6}). \end{aligned}$$

**16.**

$$z = 2x_1 + 4x_2 - 2x_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_4 + x_6 = 23, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 18, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 15, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1,6}).$$

**17.**

$$z = 4x_1 + 2x_3 - 5x_6 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_6 = 25, \\ x_1 + 3x_3 + x_5 - 4x_6 = 35, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 = 17, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1,6}).$$

**18.**

$$z = 8x_2 + 7x_4 + x_6 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_4 - 2x_6 = 12, \\ 4x_2 + x_3 - 4x_4 - 3x_6 = 12, \\ 5x_2 + 5x_4 + x_5 + x_6 = 25, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1,6}).$$

**19.**

$$z = 2x_1 + x_3 - 4x_6 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_6 = 24, \\ x_1 + 3x_3 + x_5 - 4x_6 = 36, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 = 18, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1,6}).$$

**20.**

$$z = 3x_1 + 4x_2 - 2x_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 4x_4 + x_6 = 24, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 20, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 15, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1,6}).$$

### Контрольные вопросы

1. К какому виду должна быть приведена задача линейного программирования перед применением симплекс-метода?
2. Как составить первую симплекс-таблицу?
3. Опишите порядок работы с симплекс-таблицей. Сформулируйте правило выбора разрешающего элемента.
4. В чем заключается признак того, что симплекс-таблица является последней?
5. Как прочесть решение задачи по последней симплекс-таблице?

6. В каком случае по последней симплекс-таблице можно заключить, что задача не имеет решения по причине неограниченности целевой функции на области допустимых значений?
7. Как избежать заикливания симплекс алгоритма?
8. Что понимается под трудоемкостью симплекс метода? Что означает его экспоненциальная трудоемкость на классе всех задач линейного программирования?
9. Существуют ли алгоритмы решения задач линейного программирования полиномиальной трудоемкости? Обладает ли класс всех задач линейного программирования полиномиальной сложностью?

### **ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3**

#### ***Модификации симплекс метода. Методы искусственного базиса и больших штрафов***

*Цель работы:* изучение методов искусственного базиса и больших штрафов решения задач ЛП в канонической форме, не подготовленных к работе симплекс-методом в чистом виде.

#### **Задания для подготовки к работе**

1. Изучить метод и алгоритм искусственного базиса и составить программу решения задачи ЛП этим методом.
2. Изучить метод и алгоритм больших штрафов и составить программу решения задачи ЛП этим методом.
3. Запрограммировать изученные алгоритмы и отладить соответствующие программы. В рамках подготовки тестовых данных решить вручную одну из следующих ниже задач.

#### **Варианты заданий**

**1.**

$$z = 2x_1 + 6x_2 - x_3 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 12, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 9, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 10, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

**2.**

$$z = 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 + 6x_5 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 25, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 28, \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 30, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 5}).$$

3.

$$\begin{aligned} z &= x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 + 8x_6 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 + x_6 = 14, \\ 2x_1 + 9x_2 - 5x_3 - 7x_4 + 4x_5 + 2x_6 = 30, \end{cases} \\ x_i &\geq 0 \ (i = \overline{1, 6}). \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} z &= 6x_1 - 5x_2 + x_3 + 10x_4 - 4x_5 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 30, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 7x_4 - 2x_5 = 45, \\ -3x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 3x_4 - 7x_5 \geq 52, \end{cases} \\ x_i &\geq 0 \ (i = \overline{1, 5}). \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} z &= 9x_1 - 4x_2 + x_3 + 7x_4 - 6x_5 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 25, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 30, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 58, \end{cases} \\ x_i &\geq 0 \ (i = \overline{1, 5}). \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} z &= x_1 + 4x_2 - x_3 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 10, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 9, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \end{cases} \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} z &= 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 6x_5 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 20, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 28, \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 44, \end{cases} \\ x_i &\geq 0 \ (i = \overline{1, 5}). \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} z &= x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 + 8x_6 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 + x_6 = 14, \\ 2x_1 + 9x_2 - 5x_3 - 7x_4 + 4x_5 + 2x_6 = 32, \end{cases} \\ x_i &\geq 0 \ (i = \overline{1, 6}). \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} z &= 7x_1 - 5x_2 + x_3 + 10x_4 - 5x_5 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 22, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 45, \\ -2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 7x_5 \geq 62, \end{cases} \\ x_i &\geq 0 \ (i = \overline{1, 5}). \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned} z &= 10x_1 - 4x_2 + x_3 + 7x_4 - 5x_5 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 15, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 46, \\ -x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 8x_5 = 48, \end{cases} \\ x_i &\geq 0 \ (i = \overline{1, 5}). \end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 7, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 6, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \end{cases} \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned} z &= 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 6x_4 - 5x_5 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 25, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 30, \\ -2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 51, \end{cases} \\ x_i &\geq 0 \ (i = \overline{1, 5}). \end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 + 8x_6 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 + x_6 = 10, \\ 3x_1 + 9x_2 - 5x_3 - 7x_4 + 4x_5 + 2x_6 = 32, \end{cases} \\ x_i &\geq 0 \ (i = \overline{1, 6}). \end{aligned}$$

14.

$$\begin{aligned} z &= 12x_1 - 4x_2 + x_3 + 9x_4 - 5x_5 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 22, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 - 2x_5 \leq 46, \\ -x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 8x_5 \geq 62, \end{cases} \\ x_i &\geq 0 \ (i = \overline{1, 5}). \end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned} z &= 12x_1 - 4x_2 + x_3 + 8x_4 - 5x_5 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 18, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 - 2x_5 \leq 44, \\ -x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 8x_5 = 68, \end{cases} \\ x_i &\geq 0 \ (i = \overline{1, 5}). \end{aligned}$$

16.

$$\begin{aligned} z &= x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \end{cases} \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

17.

$$z = 8x_1 - 3x_2 + x_3 + 6x_4 - 5x_5 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 28, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 31, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 118, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 5}).$$

18.

$$z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 + 8x_6 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 + x_6 = 12, \\ 2x_1 + 9x_2 - 5x_3 - 7x_4 + 4x_5 + 2x_6 = 32, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 6}).$$

19.

$$z = -3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 + 8x_6 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 6x_5 + x_6 = 60, \\ 7x_1 - 17x_2 + 26x_3 + 31x_4 - 35x_5 + 6x_6 = 420, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 6}).$$

20.

$$z = 5x_1 - x_2 + 8x_3 + 10x_4 - 5x_5 + x_6 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_4 + x_5 - x_6 = 36, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_6 = 20, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 + x_6 = 30, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 6}).$$

### Контрольные вопросы

1. Для чего применяется метод искусственного базиса?
2. Как строится вспомогательная задача при работе методом искусственного базиса?
3. Какие основные случаи могут представиться при работе этим методом?
4. Опишите метод больших штрафов. Как составить  $M$ -задачу для задачи линейного программирования в канонической форме?
5. Опишите связь между исходной задачей и  $M$ -задачей. Как выбирается число  $M$ .
6. Как прочесть решение исходной задачи по решению  $M$ -задачи?



## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

### Закрытая транспортная задача

*Цель работы:* изучить математическую модель транспортной задачи, овладеть методами решения этой задачи.

### Задания для подготовки к работе

1. Изучить содержательную и математическую постановки закрытой транспортной задачи, методы нахождения первого опорного решения ее системы ограничений. Изучить понятие цикла пересчета в матрице перевозок. Овладеть распределительным методом и методом потенциалов, а также их алгоритмами.
2. Составить и отладить программы решения транспортной задачи распределительным методом и методом потенциалов.
3. Для подготовки тестовых данных решить вручную одну из следующих ниже задач.

### Варианты заданий

1.

$$\vec{a} = (41, 33, 25, 14);$$

$$\vec{b} = (34, 39, 24, 8, 8);$$

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 9 & 19 & 22 \\ 20 & 15 & 11 & 2 & 19 \\ 21 & 26 & 23 & 7 & 16 \\ 11 & 24 & 8 & 3 & 29 \end{pmatrix}$$

2

$$\vec{a} = (18, 12, 22, 19);$$

$$\vec{b} = (14, 11, 17, 15, 14);$$

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 21 & 22 & 14 & 10 \\ 30 & 34 & 42 & 23 & 26 \\ 8 & 17 & 30 & 27 & 9 \\ 11 & 20 & 24 & 7 & 25 \end{pmatrix}$$

3.

$$\vec{a} = (19, 19, 19, 19);$$

$$\vec{b} = (17, 17, 17, 17, 8);$$

$$C = \begin{pmatrix} 22 & 23 & 16 & 12 & 14 \\ 17 & 30 & 1 & 8 & 25 \\ 27 & 15 & 13 & 23 & 22 \\ 3 & 12 & 21 & 26 & 7 \end{pmatrix}$$

4.

$$\vec{a} = (36, 40, 25, 19);$$

$$\vec{b} = (24, 25, 30, 20, 21);$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 30 & 25 & 7 & 15 \\ 5 & 29 & 21 & 4 & 13 \\ 18 & 22 & 5 & 28 & 1 \\ 19 & 23 & 8 & 2 & 14 \end{pmatrix}$$

5.

$$\vec{a} = (31, 16, 20, 14);$$

$$\vec{b} = (15, 15, 18, 17, 16);$$

$$C = \begin{pmatrix} 14 & 6 & 1 & 12 & 19 \\ 28 & 13 & 22 & 18 & 4 \\ 21 & 27 & 30 & 10 & 14 \\ 2 & 5 & 6 & 25 & 7 \end{pmatrix}$$

6.

$$\vec{a} = (24, 21, 21, 24);$$

$$\vec{b} = (19, 25, 20, 13, 13);$$

$$C = \begin{pmatrix} 14 & 27 & 5 & 18 & 19 \\ 17 & 20 & 1 & 24 & 3 \\ 11 & 7 & 28 & 23 & 9 \\ 8 & 26 & 19 & 2 & 24 \end{pmatrix}$$

7.

$$\vec{a} = (33, 33, 35, 36);$$

$$\vec{b} = (22, 43, 20, 17, 35);$$

$$C = \begin{pmatrix} 23 & 2 & 1 & 4 & 12 \\ 24 & 17 & 27 & 3 & 5 \\ 26 & 2 & 19 & 22 & 11 \\ 7 & 1 & 2 & 14 & 9 \end{pmatrix}$$

8.

$$\vec{a} = (21, 22, 22, 20);$$

$$\vec{b} = (18, 20, 19, 19, 9);$$

$$C = \begin{pmatrix} 14 & 27 & 6 & 16 & 8 \\ 2 & 4 & 19 & 4 & 27 \\ 26 & 23 & 1 & 20 & 3 \\ 24 & 5 & 12 & 30 & 5 \end{pmatrix}$$

9.

$$\vec{a} = (15, 16, 15, 16);$$

$$\vec{b} = (11, 12, 13, 14, 12);$$

$$C = \begin{pmatrix} 29 & 4 & 8 & 11 & 5 \\ 10 & 19 & 26 & 1 & 27 \\ 16 & 7 & 4 & 29 & 23 \\ 9 & 10 & 24 & 25 & 17 \end{pmatrix}$$

10.

$$\vec{a} = (14, 14, 14, 14);$$

$$\vec{b} = (13, 5, 13, 12, 13);$$

$$C = \begin{pmatrix} 16 & 26 & 12 & 24 & 3 \\ 5 & 2 & 19 & 27 & 2 \\ 29 & 23 & 25 & 16 & 8 \\ 2 & 25 & 14 & 15 & 21 \end{pmatrix}$$

11.

$$\vec{a} = (33, 17, 15, 15);$$

$$\vec{b} = (13, 13, 13, 21, 20);$$

$$C = \begin{pmatrix} 39 & 28 & 37 & 27 & 46 \\ 21 & 4 & 20 & 3 & 14 \\ 25 & 27 & 25 & 24 & 29 \\ 12 & 26 & 10 & 5 & 22 \end{pmatrix}$$

12.

$$\vec{a} = (15, 19, 15, 11);$$

$$\vec{b} = (12, 18, 10, 10, 10);$$

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 7 & 19 & 18 & 27 \\ 1 & 21 & 8 & 20 & 12 \\ 5 & 17 & 14 & 23 & 21 \\ 7 & 4 & 29 & 18 & 22 \end{pmatrix}$$

13.

$$\vec{a} = (28, 15, 17, 14);$$

$$\vec{b} = (14, 15, 15, 15, 15);$$

$$C = \begin{pmatrix} 27 & 6 & 8 & 12 & 23 \\ 1 & 25 & 19 & 11 & 12 \\ 28 & 19 & 15 & 17 & 29 \\ 16 & 22 & 18 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

14.

$$\vec{a} = (23, 24, 21, 15);$$

$$\vec{b} = (19, 16, 16, 16, 16);$$

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 28 & 17 & 19 & 11 \\ 27 & 5 & 10 & 6 & 19 \\ 29 & 11 & 3 & 7 & 8 \\ 25 & 16 & 19 & 24 & 13 \end{pmatrix}$$

15.

$$\vec{a} = (24, 7, 16, 13);$$

$$\vec{b} = (11, 16, 11, 11, 11);$$

$$C = \begin{pmatrix} 25 & 18 & 14 & 3 & 16 \\ 29 & 15 & 27 & 16 & 17 \\ 21 & 2 & 29 & 2 & 22 \\ 5 & 13 & 1 & 5 & 17 \end{pmatrix}$$

**16.**

$$\vec{a} = (16, 17, 21, 16);$$

$$\vec{b} = (14, 14, 14, 18, 10);$$

$$C = \begin{pmatrix} 33 & 22 & 14 & 34 & 19 \\ 26 & 16 & 7 & 29 & 16 \\ 28 & 18 & 17 & 23 & 30 \\ 35 & 25 & 11 & 22 & 9 \end{pmatrix}$$

**17.**

$$\vec{a} = (19, 19, 19, 19);$$

$$\vec{b} = (15, 15, 16, 15, 15);$$

$$C = \begin{pmatrix} 21 & 17 & 12 & 24 & 30 \\ 6 & 1 & 9 & 5 & 9 \\ 7 & 5 & 24 & 6 & 13 \\ 29 & 22 & 21 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

**18.**

$$\vec{a} = (34, 35, 21, 10);$$

$$\vec{b} = (20, 20, 15, 15, 30);$$

$$C = \begin{pmatrix} 24 & 23 & 6 & 29 & 3 \\ 20 & 8 & 13 & 2 & 27 \\ 30 & 17 & 10 & 23 & 28 \\ 4 & 7 & 23 & 27 & 26 \end{pmatrix}$$

**19.**

$$\vec{a} = (33, 31, 33, 33);$$

$$\vec{b} = (25, 25, 25, 25, 30);$$

$$C = \begin{pmatrix} 24 & 19 & 5 & 9 & 23 \\ 15 & 16 & 3 & 13 & 6 \\ 7 & 5 & 24 & 11 & 23 \\ 4 & 28 & 29 & 21 & 20 \end{pmatrix}$$

**20.**

$$\vec{a} = (14, 14, 12, 16);$$

$$\vec{b} = (11, 11, 11, 8, 15);$$

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 14 & 28 & 1 \\ 16 & 7 & 30 & 8 & 29 \\ 1 & 21 & 22 & 19 & 12 \\ 8 & 25 & 28 & 5 & 19 \end{pmatrix}$$

## **Контрольные вопросы**

1. Как формулируется транспортная задача? Что такое матрица перевозок? Как выглядит математическая модель закрытой транспортной задачи?
2. Как записать транспортную задачу в форме таблицы данных?
3. Нахождение первого опорного решения системы ограничений транспортной задачи. В чем заключаются метод северо-западного угла и метод наименьшей стоимости?
4. Что называют циклом в матрице? Какими комбинаторными свойствами обладают циклы?
5. Означенный цикл. Что называют сдвигом по означенному циклу в матрице перевозок? Каким основным свойством обладает этот сдвиг?
6. Что называется циклом пересчета для данной свободной клетки?
7. Как находятся коэффициенты при свободных переменных в базисном виде системы ограничений транспортной задачи?
8. Как находится выражение целевой функции транспортной задачи через свободные переменные для произвольного базисного вида системы ограничений?
9. В чем заключается распределительный метод решения закрытой транспортной задачи?
10. Опишите порядок работы по методу потенциалов.

## **ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5**

### ***Двойственный симплекс метод***

*Цель работы:* изучить элементы теории двойственности, двойственный симплекс-метод для пары симметрично двойственных задач, а также метод последовательного уточнения оценок.

### **Задания для подготовки к работе**

1. Изучить правило составления двойственных задач, а также формулировки и применения первой, второй и третьей теорем двойственности.
2. Изучить двойственный симплекс-метод для симметрично двойственных задач. Составить и отладить программу решения пары симметрично двойственных задач двойственным симплекс-методом.
3. Изучить понятие псевдоплана, построение симплекс-таблицы, отвечающей псевдоплану. Освоить метод последовательного уточнения оценок. Составить и отладить программу решения задачи ЛП методом последовательного уточнения оценок.
4. Для подготовки тестовых данных решить вручную одну из следующих ниже задач двойственным симплекс-методом для пары симметрично двойственных задач, а также методом последовательного уточнения оценок.

## Варианты заданий

1.

$$z = -4x_1 + 10x_2 + x_3 + 5x_4 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} -6x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 \geq 14, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \geq 27, \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 26, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 4}).$$

2.

$$z = -2x_1 + 7x_2 + x_3 + 4x_4 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 16, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \geq 32, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 22, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 4}).$$

3.

$$z = 2x_1 - 7x_2 - x_3 - 4x_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 20, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \geq 32, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 \geq 26, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 4}).$$

4.

$$z = x_1 - 9x_2 - x_3 - 5x_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \geq 32, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 24, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 4}).$$

5.

$$z = -x_1 - 8x_2 - x_3 - 5x_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 20, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \geq 24, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 \geq 28, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 4}).$$

6.

$$z = -4x_1 + 9x_2 + x_3 + 4x_4 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 \geq 16, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \geq 30, \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 25, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 4}).$$

7.

$$z = 2x_1 - 7x_2 - x_3 - 4x_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 18, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \geq 32, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 24, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 4}).$$

8.

$$z = x_1 - 8x_2 - x_3 - 4x_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 10, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \geq 34, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 \geq 28, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 4}).$$

9.

$$z = x_1 - 9x_2 - x_3 - 5x_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 20, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \geq 32, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 \geq 26, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 4}).$$

10.

$$z = -3x_1 + 9x_2 + x_3 + 4x_4 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 \geq 15, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \geq 30, \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 25, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 4}).$$

11.

$$z = x_1 - 8x_2 - x_3 - 4x_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 10, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \geq 34, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 30, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 4}).$$

12.

$$z = 4x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 5x_4 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 - 6x_3 + x_4 \geq 15, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 \geq 26, \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 25, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 4}).$$

**13.**

$$\begin{aligned} z &= -3x_1 - 5x_2 - 7x_3 - 6x_4 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} -5x_1 + x_2 - 6x_3 + x_4 \geq 20, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \geq 27, \\ 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 24, \end{cases} \\ x_i &\geq 0 \ (i = \overline{1, 4}). \end{aligned}$$

**14.**

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 6x_4 \rightarrow \min; \\ \begin{cases} -5x_1 + x_2 - 6x_3 + x_4 \geq 18, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 \geq 27, \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 24, \end{cases} \\ x_i &\geq 0 \ (i = \overline{1, 4}). \end{aligned}$$

**15.**

$$\begin{aligned} z &= -5x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 6x_4 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} -3x_1 + x_2 - 6x_3 + x_4 \geq 22, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \geq 24, \\ -4x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq 18, \end{cases} \\ x_i &\geq 0 \ (i = \overline{1, 4}). \end{aligned}$$

**16.**

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 - 9x_2 - x_3 - 5x_4 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 12, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 \geq 35, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 32, \end{cases} \\ x_i &\geq 0 \ (i = \overline{1, 4}). \end{aligned}$$

**17.**

$$\begin{aligned} z &= -3x_1 + 9x_2 + x_3 + 7x_4 \rightarrow \min; \\ \begin{cases} -3x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 12, \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 \geq 30, \\ 7x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 26, \end{cases} \\ x_i &\geq 0 \ (i = \overline{1, 4}). \end{aligned}$$

**18.**

$$\begin{aligned} z &= 5x_1 - 8x_2 - x_3 - 9x_4 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 \leq 10, \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 \geq 28, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 20, \end{cases} \\ x_i &\geq 0 \ (i = \overline{1, 4}). \end{aligned}$$



**19.**

$$z = -2x_1 + 9x_2 + x_3 + 5x_4 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 14, \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 \geq 30, \\ 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 28, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 4}).$$

**20.**

$$z = 4x_1 - 9x_2 - x_3 - 8x_4 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 \geq 14, \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 \geq 28, \\ 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 22, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 4}).$$

### Контрольные вопросы

1. Сформулируйте правило составления задачи, двойственной по отношению к данной задаче линейного программирования в стандартной форме. Какие пары задач называют симметричными взаимно двойственными?
2. Несимметрично двойственные задачи. В чем состоит общее правило построения двойственных задач?
3. Сформулируйте первую теорему двойственности. Что позволяет сказать эта теорема о задаче линейного программирования, если известно решение двойственной задачи?
4. Сформулируйте вторую теорему двойственности. Какие задачи позволяет решать эта теорема?
5. Сформулируйте третью теорему двойственности.
6. В чем заключается двойственный симплекс-метод для пары симметрично двойственных задач?
7. Что называется псевдопланом задачи линейного программирования в канонической форме? Что представляет собой симплекс-таблица, отвечающая псевдоплану?
8. Опишите алгоритм последовательного уточнения оценок.

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6**  
**Нахождение седловой точки в смешанных стратегиях для матричной игры с нулевой суммой**

*Цель работы:* Освоить метод нахождения седловой точки в смешанных стратегиях с помощью построения пары двойственных задач ЛП.

**Задания для подготовки к работе**

1. Изучить основные понятия теории матричных игр двух игроков с нулевой суммой, анализ игры в чистых стратегиях, понятие смешанной стратегии и седловой точки в смешанных стратегиях, а также метод нахождения седловой точки в смешанных стратегиях с помощью построения пары двойственных задач ЛП.
2. Составить и отладить программу для нахождения седловой точки игры с помощью решения пары симметрично двойственных задач ЛП.
3. Для подготовки тестовых данных решить вручную одну из следующих ниже задач.

**Варианты заданий**

**1.**

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

**2.**

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 5 & 9 \\ 7 & 10 & 6 & 7 \\ 9 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

**3.**

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 & 7 & 6 \\ 9 & 8 & 10 & 7 \\ 12 & 6 & 4 & 3 \\ 7 & 13 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

**4.**

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 & 11 \\ 6 & 10 & 6 & 7 \\ 8 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

**5.**

$$\begin{pmatrix} 11 & 5 & 8 & 6 \\ 4 & 5 & 10 & 7 \\ 4 & 3 & 12 & 6 \\ 2 & 5 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

**6.**

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 9 \\ 9 & 12 & 5 \\ 10 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

**7.**

$$\begin{pmatrix} 7 & 10 & 27 & 9 & 12 \\ 6 & 21 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

**8.**

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 15 & 8 \\ 9 & 5 & 10 & 7 \\ 8 & 3 & 9 & 6 \\ 2 & 7 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

**9.**

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 9 \\ 10 & 7 \\ 3 & 4 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}$$

**10.**

$$\begin{pmatrix} 12 & 6 & 5 & 10 \\ 5 & 9 & 7 & 8 \\ 9 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

**11.**

$$\begin{pmatrix} 16 & 6 & 5 & 8 \\ 9 & 9 & 10 & 7 \\ 20 & 3 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

**12.**

$$\begin{pmatrix} 12 & 4 & 5 \\ 9 & 3 & 7 \\ 5 & 9 & 5 \\ 12 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

**13.**

$$\begin{pmatrix} 9 & 14 & 12 & 9 & 7 \\ 16 & 25 & 1 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

**14.**

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 6 & 5 \\ 21 & 8 \\ 3 & 4 \\ 18 & 13 \end{pmatrix}$$

**15.**

$$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 5 & 6 & 5 \\ 4 & 10 & 3 \\ 8 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

**16.**

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 8 \\ 3 & 6 & 4 & 5 \\ 10 & 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

**17.**

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 & 9 \\ 9 & 9 & 10 & 7 \\ 20 & 3 & 9 & 4 \\ 15 & 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

**18.**

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \\ 4 & 9 & 3 \\ 8 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

**19.**

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 6 \\ 7 & 6 & 5 \\ 3 & 9 & 4 \\ 5 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

**20.**

$$\begin{pmatrix} 32 & 7 & 9 & 3 & 10 \\ 3 & 15 & 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

### Контрольные вопросы

1. Что обычно называют конфликтной ситуацией? Как строится простейшая модель конфликтной ситуации в виде матричной игры двух игроков с нулевой суммой?
2. Как игроки оценивают свои стратегии в процессе анализа игры в чистых стратегиях? Что такое нижняя и верхняя цены игры в чистых стратегиях?
3. Что такое седловая точка игры в чистых стратегиях?
4. Что такое смешанная стратегия игрока? Дайте определение платежной функции игры.
5. Что такое седловая точка игры в смешанных стратегиях? Сформулируйте теорему фон Неймана о существовании седловой точки игры в смешанных стратегиях.
6. Как строится пара двойственных задач для определения седловой точки игры в смешанных стратегиях?
7. В чем состоит графический метод решения игр размера  $2 \times m$  и  $n \times 2$ ?
8. Как решить игру в смешанных стратегиях двойственным симплекс-методом?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7

### *Решение полностью целочисленных задач с помощью первого алгоритма Гомори, а также методом ветвей и границ*

**Цель работы:** Освоить метод отсечения Гомори для полностью целочисленных задач. Изучить алгоритм этого метода. Программно реализовать этот алгоритм.

#### **Задания для подготовки к работе**

1. Изучить возможные постановки задач целочисленного и частично-целочисленного программирования.
2. Ознакомиться с методами решения таких задач, в частности, с методами отсечения и методом ветвей и границ.
3. Выяснить для каких задач применяется первый алгоритм Гомори. Изучить этот алгоритм и написать реализующую его программу для ПЭВМ. Изучить и программно реализовать алгоритм метода ветвей и границ. В качестве тестовых данных использовать, решенную вручную одну из нижеследующих задач.

#### **Варианты заданий**

**1.**

$$z = x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 + x_3 = 25, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_4 = 10, \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 3, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, x_i - \text{целые } (i = \overline{1,5}).$$

**2.**

$$z = 3x_1 + x_2 - x_5 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 + x_3 = 28, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_4 = 14, \\ -3x_1 + 4x_2 + x_5 = 6, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, x_i - \text{целые } (i = \overline{1,5}).$$

**3.**

$$z = 9x_1 - 4x_2 + 3x_5 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + x_3 = 93, \\ 14x_1 - 5x_2 - x_4 = 26, \\ 2x_1 - 9x_2 - x_5 = 18, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, x_i - \text{целые } (i = \overline{1,5}).$$

**4.**

$$z = 6x_1 - 2x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 25, \\ 9x_1 - 4x_2 + x_4 = 6, \\ -4x_1 + x_2 + x_5 = 12, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, x_i - \text{целые } (i = \overline{1,5}).$$

**5.**

$$z = x_1 + 2x_2 + 4x_3 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 + x_3 = 24, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_4 = 9, \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 3, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, x_i - \text{целые } (i = \overline{1,5}).$$

**6.**

$$z = 7x_1 - x_2 + 2x_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + x_3 = 92, \\ 12x_1 - 3x_2 - x_4 = 25, \\ 2x_1 - 9x_2 - x_5 = 16, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, x_i - \text{целые } (i = \overline{1,5}).$$

7.

$$z = 10x_1 - 7x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 21x_1 + 5x_2 + x_3 = 50, \\ 8x_1 - 5x_2 + 6x_4 = 13, \\ -7x_1 + x_2 + x_5 = 25, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, x_i - \text{целые } (i = \overline{1,5}).$$

8.

$$z = 15x_1 - 8x_2 + x_3 + 6x_5 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 16x_1 + 3x_2 + x_3 = 45, \\ 8x_1 - 5x_2 + x_4 = 12, \\ -4x_1 + x_2 + x_5 = 21, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, x_i - \text{целые } (i = \overline{1,5}).$$

9.

$$z = 2x_1 + x_2 + 4x_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 + x_3 = 20, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_4 = 9, \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 5, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, x_i - \text{целые } (i = \overline{1,5}).$$

10.

$$z = 9x_1 + x_2 + 3x_5 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + x_3 = 40, \\ 9x_1 - 4x_2 + x_4 = 7, \\ -4x_1 + x_2 + x_5 = 14, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, x_i - \text{целые } (i = \overline{1,5}).$$

11.

$$z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_4 = 9, \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 5, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, x_i - \text{целые } (i = \overline{1,5}).$$

12.

$$z = 10x_1 - 7x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 20x_1 - 3x_2 + x_3 = 48, \\ 8x_1 - 5x_2 + x_4 = 12, \\ -7x_1 + x_2 + x_5 = 25, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, x_i - \text{целые } (i = \overline{1,5}).$$

13.

$$z = 2x_1 + x_3 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 + x_3 = 18, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_4 = 10, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_5 = 5, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, x_i - \text{целые } (i = \overline{1,5}).$$

14.

$$z = 5x_1 - 7x_2 + 6x_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 13x_1 + 3x_2 + x_3 = 46, \\ 9x_1 - 4x_2 + x_4 = 8, \\ -4x_1 + x_2 + x_5 = 21, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, x_i - \text{целые } (i = \overline{1,5}).$$

15.

$$z = 8x_1 - 2x_2 + 3x_5 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + x_3 = 93, \\ 12x_1 - 3x_2 - x_4 = 25, \\ 2x_1 - 9x_2 - x_5 = 18, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, x_i - \text{целые } (i = \overline{1,5}).$$

16.

$$z = 10x_1 - x_2 + 2x_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + x_3 = 80, \\ 15x_1 - 4x_2 - 2x_4 = 27, \\ 2x_1 - 9x_2 + x_5 = 16, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, x_i - \text{целые } (i = \overline{1,5}).$$

17.

$$z = 4x_1 - x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 14, \\ x_1 - 3x_2 + x_4 = 6, \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 10, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, x_i - \text{целые } (i = \overline{1,5}).$$

18.

$$z = 2x_1 + x_4 + x_5 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + x_3 = 18, \\ 4x_1 - 5x_2 + 4x_4 = 12, \\ -3x_1 + 4x_2 + x_5 = 6, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, x_i - \text{целые } (i = \overline{1,5}).$$

**19.**

$$z = 10x_1 - 5x_2 + 4x_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 + x_3 = 75, \\ 18x_1 - 4x_2 - 3x_4 = 22, \\ 2x_1 - 10x_2 + x_5 = 18, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, x_i - \text{целые } (i = \overline{1,5}).$$

**20.**

$$z = 4x_1 - x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 20, \\ 9x_1 - 4x_2 + x_4 = 6, \\ -4x_1 + x_2 + x_5 = 11, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, x_i - \text{целые } (i = \overline{1,5}).$$

### Контрольные вопросы

1. Какие задачи называют задачами линейного целочисленного (частично целочисленного, дискретного, частично дискретного) программирования?
2. Сформулируйте задачу о назначениях. В чем заключается связь между задачей о назначениях и транспортной задачей?
3. Сформулируйте задачу о ранце.
4. В чем заключается основная идея методов отсечений? Опишите первый алгоритм Гомори для полностью целочисленных задач.
5. Как строится сечение Гомори второго рода?
6. Какова роль двойственного симплекс метода (метода последовательного уточнения оценок) при применении сечений Гомори первого и второго рода?
7. В чем заключается метод ветвей и границ?
8. Что можно сказать о сложности задач дискретного программирования?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8

### Задачи дробно-линейного программирования (задачи ДЛП)

*Цель работы:* Освоить метод сведения задачи ДЛП к задаче линейного программирования с помощью введения новых переменных. Изучить алгоритм решения задачи ДЛП и реализовать программно этот алгоритм.

#### Задания для подготовки к работе

1. Изучить постановку задачи ДЛП, а также подходы к ее решению.
2. Ознакомиться с введением новых переменных, в которых задача ДЛП превращается в задачу ЛП.
3. Изучить метод и алгоритм решения задачи ДЛП, составить и отладить программу решения этой задачи, используя в качестве тестовых данных одну из нижеследующих задач, решенную вручную.

#### Варианты заданий

**1.**

$$z = \frac{-7x_1 + 2x_2}{3x_1 + 4x_2} \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 18, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 12, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_5 = 20, \\ x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 5}). \end{cases}$$

**2.**

$$z = \frac{9x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 250, \\ x_1 + 3x_3 + x_4 \leq 80, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 340, \\ x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 4}). \end{cases}$$

**3.**

$$z = \frac{-9x_1 + 2x_2}{3x_1 + 7x_2} \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 17, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_4 = 13, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_5 = 20, \\ x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 5}). \end{cases}$$

**4.**

$$z = \frac{10x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 240, \\ x_1 + 3x_3 + x_4 \leq 80, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 350, \\ x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 4}). \end{cases}$$

**5.**

$$z = \frac{10x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4}{2x_1 + x_2 + x_3 + x_4} \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 250, \\ x_1 + 3x_3 + x_4 \leq 90, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 290, \\ x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 4}). \end{cases}$$

**6.**

$$z = \frac{-5x_1 + 2x_2}{3x_1 + 7x_2} \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 21, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_4 = 13, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_5 = 22, \\ x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 5}). \end{cases}$$

**7.**

$$z = \frac{-6x_1 + x_2}{3x_1 + 7x_2} \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 15, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_4 = 14, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_5 = 22, \\ x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 5}). \end{cases}$$

**8.**

$$z = \frac{10x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4}{3x_1 + x_2 + x_3 + x_4} \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 260, \\ x_1 + 3x_3 + x_4 \leq 75, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 290, \\ x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 4}). \end{cases}$$

**9.**

$$z = \frac{-7x_1 + 3x_2}{3x_1 + 8x_2} \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 16, \\ 6x_1 + 3x_2 - x_4 = 14, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_5 = 23, \\ x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 5}). \end{cases}$$

**10.**

$$z = \frac{10x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4}{3x_1 + x_2 + x_3 + x_4} \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 250, \\ x_1 + 3x_3 + x_4 \leq 70, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 290, \\ x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 4}). \end{cases}$$

**11.**

$$z = \frac{-8x_1 + 3x_2}{3x_1 + 5x_2} \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + x_3 = 17, \\ 5x_1 + 3x_2 - x_4 = 15, \\ 6x_1 - 2x_2 + x_5 = 24, \\ x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 5}). \end{cases}$$

**12.**

$$z = \frac{9x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4}{2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4} \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 270, \\ x_1 + 3x_3 + x_4 \leq 70, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 245, \\ x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 4}). \end{cases}$$

**13.**

$$z = \frac{-10x_1 + 3x_2}{4x_1 + 7x_2} \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 + x_3 = 18, \\ 5x_1 + 3x_2 - x_4 = 15, \\ 6x_1 - 2x_2 + x_5 = 24, \\ x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 5}). \end{cases}$$

**14.**

$$z = \frac{9x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4}{2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4} \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 280, \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 \leq 70, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 320, \\ x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 4}). \end{cases}$$

**15.**

$$z = \frac{-10x_1 + 7x_2}{4x_1 + 9x_2} \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + x_3 = 20, \\ 5x_1 + 3x_2 - x_4 = 15, \\ 6x_1 - 2x_2 + x_5 = 25, \\ x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 5}). \end{cases}$$

**16.**

$$z = \frac{8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4}{2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4} \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 260, \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 \leq 60, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 320, \\ x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 4}). \end{cases}$$



**17.**

$$z = \frac{-5x_1 + 7x_2}{4x_1 + 9x_2} \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + x_3 = 21, \\ 5x_1 + 3x_2 - x_4 = 17, \\ 6x_1 - 2x_2 + x_5 = 25, \\ x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 5}). \end{cases}$$

**18.**

$$z = \frac{8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4}{2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4} \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 250, \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 \leq 65, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 320, \\ x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 4}). \end{cases}$$

**19.**

$$z = \frac{-5x_1 + 7x_2}{4x_1 - 3x_2} \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + x_3 = 18, \\ 5x_1 + 3x_2 - x_4 = 17, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_5 = 26, \\ x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 5}). \end{cases}$$

**20.**

$$z = \frac{5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4}{2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4} \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 9x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 250, \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 \leq 74, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 320, \\ x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 4}). \end{cases}$$

### Контрольные вопросы

1. Как формулируется задача дробно-линейного программирования?
2. Как истолковать эту задачу геометрически в случае двух переменных?
3. Как сводится задача дробно-линейного программирования к задаче линейного программирования с помощью введения новых переменных?
4. Дайте определение локального экстремума задачи нелинейного программирования. Что такое глобальный экстремум? Какие задачи называются одноэкстремальными?
5. Является ли задача ДЛП одноэкстремальной?

### ***Библиографический список***

1. *Акулич, И.Л.* Математическое программирование в примерах и задачах / И.Л. Акулич. — М.: Высш. шк., 1986. — 318 с.
2. *Болтянский, В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами / В.Г. Болтянский. — М.: Наука, 1973. — 446 с.
3. *Брусенцев А.Г.* Исследование операций и теория игр (Учебное пособие) / А.Г. Брусенцев, В.И. Петрашев, Ю.Д. Рязанов. — Белгород: Изд-во БГТУ им. В.Г. Шухова, 2012. — 258 с.
4. *Вагнер, Г.* Основы исследования операций / Г Вагнер. — М.: Мир, 1972 — 1973. Т.1 — 3. — 987 с.
5. *Вентцель, Е.С.* Исследование операций (Задачи, принципы, методология) / Е.С. Вентцель. — М: Наука, 1980. — 208 с.
6. *Волков, И.К.* Исследование операций / И.К. Волков, Е.А. Загоруйко. — М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. — 440 с.
7. *Гольштейн, Е.Г.* Задачи линейного программирования транспортного типа / Е.Г. Гольштейн, Д.Б. Юдин. — М.: Наука, 1969. — 382 с.
8. *Гольштейн, Е.Г.* Линейное программирование / Е.Г. Гольштейн, Д.Б. Юдин. — М.: Наука, 1969. — 387 с.
9. *Заславский, Ю.Л.* Сборник задач по линейному программированию / Ю.Л. Заславский. — М.: Наука, 1969. — 256с.
10. *Исследование операций в экономике* / под редакцией профессора Н.Ш. Кремера. — М.: ЮНИТИ, 2003. — 407с.
11. *Калихман, И.Л.* Сборник задач по математическому программированию / И.Л. Калихман. — М.: Высш.шк., 1975. —270 с.
12. *Карпелевич, Ф.И.* Элементы линейной алгебры и линейного программирования / Ф.И. Карпелевич, Л.Е. Садовский. — М.: Наука, 1967. — 274 с.
13. *Крушевский, А.В.* Теория игр / А.В. Крушевский. — Киев: Издательское объединение «Вища школа», 1977. — 216 с.
14. *Линейное и нелинейное программирование* / под редакцией профессора И.Н. Ляшенко. — Киев: Издательское объединение «Вища школа», 1975. — 370с.
15. *Морозов, В.В.* Исследование операций в задачах и упражнениях / В.В. Морозов, А.Г. Сухарев, В.В. Федоров. — М: Высш. шк., 1986. — 314 с.

Учебное издание

**Брусенцев Александр Григорьевич**  
**Брусенцева Валентина Станиславовна**

**Исследование операций и теория игр**  
Методические указания к выполнению лабораторных работ

Подписано в печать 17.10.13. Формат 60х84/16. Усл. печ.л. 2,7. Уч.-  
изд.л.2,9.

Тираж 52 экз.

Заказ

Цена

Отпечатано в Белгородском государственном технологическом университете  
им. В. Г. Шухова

308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46