Математическая логика и теория алгоритмов
Лекция 5. Логика предикатов. Сколемизация

Куценко Дмитрий Александрович

Белгородский государственный технологический университет
имени В. Г. Шухова

Институт информационных технологий и управляющих систем

Кафедра программного обеспечения вычислительной техники
и автоматизированных систем

4 марта 2013 г.

Теоремы равносильности

Утверждения, содержащие оборот «тогда и только тогда», встречаются в математике очень часто.

Теоремы равносильности

Утверждения, содержащие оборот «тогда и только тогда», встречаются в математике очень часто.
Если мы сможем показать, что «A тогда и только тогда, когда B», то докажем, что A и B эквивалентные (равноесильные) утверждения, поскольку истинность (или ложность) одного из них влечёт истинность (или ложность) другого.

Теоремы равносильности

Утверждения, содержащие оборот «тогда и только тогда», встречаются в математике очень часто.
Если мы сможем показать, что «A тогда и только тогда, когда B», то докажем, что A и B эквивалентные (равноесильные) утверждения, поскольку истинность (или ложность) одного из них влечёт истинность (или ложность) другого.
Утверждение вида $A \leftrightarrow B$ заменяет сразу два высказывания: $A \to B$ и $B \to A$.

Теоремы равносильности

Утверждения, содержащие оборот «тогда и только тогда», встречаются в математике очень часто.
Если мы сможем показать, что «A тогда и только тогда, когда B», то докажем, что A и B эквивалентные (равноесильные) утверждения, поскольку истинность (или ложность) одного из них влечёт истинность (или ложность) другого.
Утверждение вида $A \leftrightarrow B$ заменяет сразу два высказывания: $A \rightarrow B$ и $B \rightarrow A$.
Т. о., доказательсва теорем вида $A \leftrightarrow B$ состоят из двух частей:

Теоремы равносильности

Утверждения, содержащие оборот «тогда и только тогда», встречаются в математике очень часто.
Если мы сможем показать, что «A тогда и только тогда, когда B», то докажем, что A и B эквивалентные (равноесильные) утверждения, поскольку истинность (или ложность) одного из них влечёт истинность (или ложность) другого.
Утверждение вида $A \leftrightarrow B$ заменяет сразу два высказывания: $A \to B$ и $B \to A$.
Т. о., доказательсва теорем вида $A \leftrightarrow B$ состоят из двух частей:

1. Необходимость: проверяется $A \to B$ («для A необходимо B»);

Теоремы равносильности

Утверждения, содержащие оборот «тогда и только тогда», встречаются в математике очень часто.

Если мы сможем показать, что «A тогда и только тогда, когда B», то докажем, что A и B эквивалентные (равноесильные) утверждения, поскольку истинность (или ложность) одного из них влечёт истинность (или ложность) другого.

Утверждение вида $A \leftrightarrow B$ заменяет сразу два высказывания: $A \to B$ и $B \to A$.

Т. о., доказательсва теорем вида $A \leftrightarrow B$ состоят из двух частей:

1. Необходимость: проверяется $A \to B$ («для A необходимо B»);
2. Достаточность: проверяется $B \to A$ («для A достаточно B»).

Теоремы равносильности

Утверждения, содержащие оборот «тогда и только тогда», встречаются в математике очень часто.
Если мы сможем показать, что «A тогда и только тогда, когда B», то докажем, что A и B эквивалентные (равноесильные) утверждения, поскольку истинность (или ложность) одного из них влечёт истинность (или ложность) другого.
Утверждение вида $A \leftrightarrow B$ заменяет сразу два высказывания: $A \to B$ и $B \to A$.
Т. о., доказательсва теорем вида $A \leftrightarrow B$ состоят из двух частей:

1. Необходимость: проверяется $A \to B$ («для A необходимо B»);
2. Достаточность: проверяется $B \to A$ («для A достаточно B»).

При работе над каждой частью можно использовать любой из известных методов доказательства.

Пример

Доказать, что ненулевое вещественное число положительно тогда и только тогда, когда положительно обратное к нему.

Пример

Доказать, что ненулевое вещественное число положительно тогда и только тогда, когда положительно обратное к нему.

Доказательство

Обозначим обе части утверждение так:

Пример

Доказать, что ненулевое вещественное число положительно тогда и только тогда, когда положительно обратное к нему.

Доказательство

Обозначим обе части утверждение так:

- A — «Вещественное число a положительно».

Пример

Доказать, что ненулевое вещественное число положительно тогда и только тогда, когда положительно обратное к нему.

Доказательство

Обозначим обе части утверждение так:

- A — «Вещественное число a положительно».
- B — «Число, обратное к a (т. е. a^{-1}), положительно».

Пример (продолжение)

Необходимость. $A \to B$ (для положительности числа a необходима положительность a^{-1}).

Пример (продолжение)

Необходимость. $A \to B$ (для положительности числа a необходима положительность a^{-1}).
Предполагаем, что $a > 0$ и доказываем, что $a^{-1} > 0$.

Пример (продолжение)

Необходимость. $A \to B$ (для положительности числа a необходима положительность a^{-1}).
Предполагаем, что $a > 0$ и доказываем, что $a^{-1} > 0$.

По определению обратного числа имеем, что $a \cdot a^{-1} = 1$.

Пример (продолжение)

Необходимость. $A \to B$ (для положительности числа a необходима положительность a^{-1}).
Предполагаем, что $a > 0$ и доказываем, что $a^{-1} > 0$.

По определению обратного числа имеем, что $a \cdot a^{-1} = 1$.

Т. о., число $a \cdot a^{-1} > 0$.

Пример (продолжение)

Необходимость. $A \to B$ (для положительности числа a необходима положительность a^{-1}).
Предполагаем, что $a > 0$ и доказываем, что $a^{-1} > 0$.

По определению обратного числа имеем, что $a \cdot a^{-1} = 1$.

Т. о., число $a \cdot a^{-1} > 0$.

По свойству вещественных чисел произведение сомножителей больше нуля только в двух случаях:

Пример (продолжение)

Необходимость. $A \to B$ (для положительности числа a необходима положительность a^{-1}).
Предполагаем, что $a > 0$ и доказываем, что $a^{-1} > 0$.

По определению обратного числа имеем, что $a \cdot a^{-1} = 1$.

Т. о., число $a \cdot a^{-1} > 0$.

По свойству вещественных чисел произведение сомножителей больше нуля только в двух случаях:

1. оба сомножителя положительны;

Пример (продолжение)

Необходимость. $A \to B$ (для положительности числа a необходима положительность a^{-1}).
Предполагаем, что $a > 0$ и доказываем, что $a^{-1} > 0$.

По определению обратного числа имеем, что $a \cdot a^{-1} = 1$.

Т. о., число $a \cdot a^{-1} > 0$.

По свойству вещественных чисел произведение сомножителей больше нуля только в двух случаях:

1. оба сомножителя положительны;
2. оба сомножителя отрицательны.

Пример (продолжение)

Необходимость. $A \to B$ (для положительности числа a необходима положительность a^{-1}).
Предполагаем, что $a > 0$ и доказываем, что $a^{-1} > 0$.

По определению обратного числа имеем, что $a \cdot a^{-1} = 1$.

Т. о., число $a \cdot a^{-1} > 0$.

По свойству вещественных чисел произведение сомножителей больше нуля только в двух случаях:

1. оба сомножителя положительны;
2. оба сомножителя отрицательны.

По определению $a > 0$.

Пример (продолжение)

Необходимость. $A \to B$ (для положительности числа a необходима положительность a^{-1}).
Предполагаем, что $a > 0$ и доказываем, что $a^{-1} > 0$.

По определению обратного числа имеем, что $a \cdot a^{-1} = 1$.

Т. о., число $a \cdot a^{-1} > 0$.

По свойству вещественных чисел произведение сомножителей больше нуля только в двух случаях:

1. оба сомножителя положительны;
2. оба сомножителя отрицательны.

По определению $a > 0$.

Следовательно, a^{-1} — положительное число.

Пример (окончание)

Достаточность. $B \to A$ (для положительности числа a достаточна положительность a^{-1}).

Пример (окончание)

Достаточность. $B \to A$ (для положительности числа a достаточна положительность a^{-1}).
Здесь мы считаем, что $a^{-1} > 0$ и доказываем положительность a.

Пример (окончание)

Достаточность. $B \to A$ (для положительности числа a достаточна положительность a^{-1}).
Здесь мы считаем, что $a^{-1} > 0$ и доказываем положительность a.

Как и в предыдущей части, $a \cdot a^{-1} = 1$, т. е. произведение $a \cdot a^{-1}$ положительно, причём (по предположению) $a^{-1} > 0$.

Пример (окончание)

Достаточность. $B \to A$ (для положительности числа a достаточна положительность a^{-1}).
Здесь мы считаем, что $a^{-1} > 0$ и доказываем положительность a.

Как и в предыдущей части, $a \cdot a^{-1} = 1$, т. е. произведение $a \cdot a^{-1}$ положительно, причём (по предположению) $a^{-1} > 0$. Значит, по упомянутому свойсву вещественных чисел, второй сомножитель произведения (число a) также положителен.

Пример (окончание)

Достаточность. $B \to A$ (для положительности числа a достаточна положительность a^{-1}).
Здесь мы считаем, что $a^{-1} > 0$ и доказываем положительность a.

Как и в предыдущей части, $a \cdot a^{-1} = 1$, т. е. произведение $a \cdot a^{-1}$ положительно, причём (по предположению) $a^{-1} > 0$. Значит, по упомянутому свойсву вещественных чисел, второй сомножитель произведения (число a) также положителен.

Теорема доказана.

Логика предикатов

Введение в логику предикатов

Логика высказываний является грубой моделью представления знаний. Высказывание здесь рассматривается как единое целое, без анализа его внутренней структуры.

Введение в логику предикатов

Логика высказываний является грубой моделью представления знаний. Высказывание здесь рассматривается как единое целое, без анализа его внутренней структуры.

Пример

Все люди смертны. Сократ — человек.
Следовательно, Сократ смертен.

Введение в логику предикатов

Логика высказываний является грубой моделью представления знаний. Высказывание здесь рассматривается как единое целое, без анализа его внутренней структуры.

Пример

Все люди смертны. Сократ — человек.
Следовательно, Сократ смертен.

С точки зрения логики это истинное умозаключение, однако оно выходит за рамки логики высказываний. С помощью пропозициональных связок и букв его можно записать в виде формулы $(A \,\&\, B) \to C$, но эта формула необщезначима!

Введение в логику предикатов

Логика высказываний является грубой моделью представления знаний. Высказывание здесь рассматривается как единое целое, без анализа его внутренней структуры.

Пример

Все люди смертны. Сократ — человек.
Следовательно, Сократ смертен.

С точки зрения логики это истинное умозаключение, однако оно выходит за рамки логики высказываний. С помощью пропозициональных связок и букв его можно записать в виде формулы $(A \mathbin{\&} B) \to C$, но эта формула необщезначима!

Логика предикатов — это расширение возможностей логики высказываний, позволяющее строить высказывания с учётом свойств изучаемых объектов или отношений между ними.

Одноместный предикат

Одноместный предикат $P(x)$ — это утверждение об объекте x, где x рассматривается как переменная.

Одноместный предикат

Одноместный предикат $P(x)$ — это утверждение об объекте x, где x рассматривается как переменная.
Одноместные предикаты выражают свойства объектов.

Одноместный предикат

Одноместный предикат $P(x)$ — это утверждение об объекте x, где x рассматривается как переменная.
Одноместные предикаты выражают свойства объектов.

Если в $P(x)$ вместо x подставить конкретный изучаемый объект a, то получаем высказывание, принадлежащее алгебре высказываний.

Одноместный предикат

Одноместный предикат $P(x)$ — это утверждение об объекте x, где x рассматривается как переменная.
Одноместные предикаты выражают свойства объектов.

Если в $P(x)$ вместо x подставить конкретный изучаемый объект a, то получаем высказывание, принадлежащее алгебре высказываний.
В таком случае $P(a) = 1$ или $P(a) = 0$.

Одноместный предикат

Одноместный предикат $P(x)$ — это утверждение об объекте x, где x рассматривается как переменная.
Одноместные предикаты выражают свойства объектов.

Если в $P(x)$ вместо x подставить конкретный изучаемый объект a, то получаем высказывание, принадлежащее алгебре высказываний.
В таком случае $P(a) = 1$ или $P(a) = 0$.

Пример

Пусть $W(x)$ — предикат «x — белого цвета».

Одноместный предикат

Одноместный предикат $P(x)$ — это утверждение об объекте x, где x рассматривается как переменная.
Одноместные предикаты выражают свойства объектов.

Если в $P(x)$ вместо x подставить конкретный изучаемый объект a, то получаем высказывание, принадлежащее алгебре высказываний.
В таком случае $P(a) = 1$ или $P(a) = 0$.

Пример

Пусть $W(x)$ — предикат «x — белого цвета».
Тогда если a — «Снег», а b — «Уголь», то $W(a) = 1$, $W(b) = 0$.

Многоместные предикаты

Многоместный предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$ — это утверждение об объектах $x_1, \ldots, x_n$, где $x_1, \ldots, x_n$ рассматриваются как переменные. Следовательно, при подстановке конкретных значений $a_1, \ldots, a_n$ получим высказывание $P(a_1, \ldots, a_n)$, являющееся истинным или ложным.

Многоместные предикаты

Многоместный предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$ — это утверждение об объектах $x_1, \ldots, x_n$, где $x_1, \ldots, x_n$ рассматриваются как переменные. Следовательно, при подстановке конкретных значений $a_1, \ldots, a_n$ получим высказывание $P(a_1, \ldots, a_n)$, являющееся истинным или ложным.
Многоместные предикаты выражают взаимодействия или отношения между объектами.

Многоместные предикаты

Многоместный предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$ — это утверждение об объектах $x_1, \ldots, x_n$, где $x_1, \ldots, x_n$ рассматриваются как переменные. Следовательно, при подстановке конкретных значений $a_1, \ldots, a_n$ получим высказывание $P(a_1, \ldots, a_n)$, являющееся истинным или ложным.

Многоместные предикаты выражают взаимодействия или отношения между объектами.

Пример

Рассмотрим высказывание «Анна — мама Бориса».

Многоместные предикаты

Многоместный предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$ — это утверждение об объектах $x_1, \ldots, x_n$, где $x_1, \ldots, x_n$ рассматриваются как переменные. Следовательно, при подстановке конкретных значений $a_1, \ldots, a_n$ получим высказывание $P(a_1, \ldots, a_n)$, являющееся истинным или ложным.

Многоместные предикаты выражают взаимодействия или отношения между объектами.

Пример

Рассмотрим высказывание «Анна — мама Бориса».

Его можно записать как $M(a, b)$, где $M(x, y)$ — предикат «x является матерью y», a — «Анна», b — «Борис».

Многоместные предикаты

Многоместный предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$ — это утверждение об объектах $x_1, \ldots, x_n$, где $x_1, \ldots, x_n$ рассматриваются как переменные. Следовательно, при подстановке конкретных значений $a_1, \ldots, a_n$ получим высказывание $P(a_1, \ldots, a_n)$, являющееся истинным или ложным.

Многоместные предикаты выражают взаимодействия или отношения между объектами.

Пример

Рассмотрим высказывание «Анна — мама Бориса».
Его можно записать как $M(a, b)$, где $M(x, y)$ — предикат «x является матерью y», a — «Анна», b — «Борис».
Истинность $M(a, b)$ зависит от того, о ком идёт речь.

Многоместные предикаты

Многоместный предикат $P(x_1, \dots, x_n)$ — это утверждение об объектах $x_1, \dots, x_n$, где $x_1, \dots, x_n$ рассматриваются как переменные. Следовательно, при подстановке конкретных значений $a_1, \dots, a_n$ получим высказывание $P(a_1, \dots, a_n)$, являющееся истинным или ложным.

Многоместные предикаты выражают взаимодействия или отношения между объектами.

Пример

Рассмотрим высказывание «Анна — мама Бориса».
Его можно записать как $M(a, b)$, где $M(x, y)$ — предикат «x является матерью y», a — «Анна», b — «Борис».
Истинность $M(a, b)$ зависит от того, о ком идёт речь.

Из примера видно, что аргументы предиката нельзя менять местами.

Обозначения

Пример 1

Задача. Записать символически утверждение «x больше 4».

Обозначения

Пример 1

Задача. Записать символически утверждение «x больше 4».
Решение. Введём $G(x, y)$ — «x больше y», и константу $a = 4$.

Обозначения

Пример 1

Задача. Записать символически утверждение «x больше 4».
Решение. Введём $G(x, y)$ — «x больше y», и константу $a = 4$.
Тогда исходное утверждение можно записать как $G(x, a)$.

Обозначения

Пример 1

Задача. Записать символически утверждение «x больше 4».
Решение. Введём $G(x, y)$ — «x больше y», и константу $a = 4$.
Тогда исходное утверждение можно записать как $G(x, a)$.

В этом примере $G(x, y)$ — предикат,
в котором G — предикатный символ,
x и y — (предметные) переменные,
a — (предметная) константа.

Обозначения

Пример 1

Задача. Записать символически утверждение «x больше 4».
Решение. Введём $G(x, y)$ — «x больше y», и константу $a = 4$.
Тогда исходное утверждение можно записать как $G(x, a)$.

В этом примере $G(x, y)$ — предикат,
в котором G — предикатный символ,
x и y — (предметные) переменные,
a — (предметная) константа.

Предикатные символы будем обозначать заглавными латинскими буквами $(A, B, \ldots, Z)$, переменные — строчными буквами из конца латинского алфавита $(\ldots, x, y, z)$, константы — строчными буквами из начала латинского алфавита $(a, b, c, \ldots)$.

Предикаты в языках программирования

Пример описания булевой функции

```
function implication(a, b: boolean): boolean
begin
  if (not a) and b then
    implication := false
  else
    implication := true;
end;
```

Предикаты в языках программирования

Пример описания булевой функции

```
function implication(a, b: boolean): boolean
begin
  if (not a) and b then
    implication := false
  else
    implication := true;
end;
```

Пример описания одноместного предиката

```
function isEmpty(const S: Stack): boolean
begin
  isEmpty := (S.size = 0);
end;
```

Функциональные символы

Для описания функциональных зависимостей между объектами требуются дополнительные обозначения.

Функциональные символы

Для описания функциональных зависимостей между объектами требуются дополнительные обозначения.

Пример 2

Задача. Записать с помощью символов математической логики утверждение «$\min\{x, y\} = \frac{1}{2}$».

Функциональные символы

Для описания функциональных зависимостей между объектами требуются дополнительные обозначения.

Пример 2

Задача. Записать с помощью символов математической логики утверждение «$\min\{x, y\} = \frac{1}{2}$».
Решение. Обозначим функцию $\min\{x, y\}$ как $m(x, y)$, ведём предикат $E(u, v)$ — «u равен v», и константу $a = \frac{1}{2}$.

Функциональные символы

Для описания функциональных зависимостей между объектами требуются дополнительные обозначения.

Пример 2

Задача. Записать с помощью символов математической логики утверждение «$\min\{x, y\} = \frac{1}{2}$».
Решение. Обозначим функцию $\min\{x, y\}$ как $m(x, y)$, ведём предикат $E(u, v)$ — «u равен v», и константу $a = \frac{1}{2}$.
Тогда исходное утверждение можно записать как $E\big(m(x, y), a\big)$.

Функциональные символы

Для описания функциональных зависимостей между объектами требуются дополнительные обозначения.

Пример 2

Задача. Записать с помощью символов математической логики утверждение «$\min\{x, y\} = \frac{1}{2}$».
Решение. Обозначим функцию $\min\{x, y\}$ как $m(x, y)$, ведём предикат $E(u, v)$ — «u равен v», и константу $a = \frac{1}{2}$.
Тогда исходное утверждение можно записать как $E(m(x, y), a)$.

В этом примере m — функциональный символ.

Функциональные символы

Для описания функциональных зависимостей между объектами требуются дополнительные обозначения.

Пример 2

Задача. Записать с помощью символов математической логики утверждение «$\min\{x, y\} = \frac{1}{2}$».
Решение. Обозначим функцию $\min\{x, y\}$ как $m(x, y)$, ведём предикат $E(u, v)$ — «u равен v», и константу $a = \frac{1}{2}$.
Тогда исходное утверждение можно записать как $E\big(m(x, y), a\big)$.

В этом примере m — функциональный символ.

Функциональные символы будем обозначать строчными латинскими буквами $(a, b, \ldots, z)$.

Дополнительные замечания

Не следует путать предикатные и функциональные символы — область значений предиката — $\{0, 1\}$, а область значений функции может быть произвольной.

Дополнительные замечания

Не следует путать предикатные и функциональные символы — область значений предиката — $\{0, 1\}$, а область значений функции может быть произвольной.

Аргументы предиката (предметные переменные и константы, а также функциональные символы) называют термами.

Кванторы

Для получения высказываний из предикатов помимо подстановки вместо переменных конкретных объектов применяются также кванторы: квантор всеобщности «$\forall$» и квантор существования «$\exists$».

Кванторы

Для получения высказываний из предикатов помимо подстановки вместо переменных конкретных объектов применяются также кванторы: квантор всеобщности «$\forall$» и квантор существования «$\exists$».

Пример

Пусть на множестве X простых чисел задан предикат $P(x)$ — «Простое число x — нечётно».

Кванторы

Для получения высказываний из предикатов помимо подстановки вместо переменных конкретных объектов применяются также кванторы: квантор всеобщности «$\forall$» и квантор существования «$\exists$».

Пример

Пусть на множестве X простых чисел задан предикат $P(x)$ — «Простое число x — нечётно».
Подставим перед ним слово «любое». Получим ложное высказывание «Любое простое число x нечётно» (оно ложно, так как 2 — простое чётное число).

Кванторы

Для получения высказываний из предикатов помимо подстановки вместо переменных конкретных объектов применяются также кванторы: квантор всеобщности «$\forall$» и квантор существования «$\exists$».

Пример

Пусть на множестве X простых чисел задан предикат $P(x)$ — «Простое число x — нечётно».
Подставим перед ним слово «любое». Получим ложное высказывание «Любое простое число x нечётно» (оно ложно, так как 2 — простое чётное число).
Подставив перед данным предикатом $P(x)$ слово «существует», получим истинное выказывание «Существует простое число x, являющееся нечётным» (например, 5).

Квантор всеобщности

Символ «$\forall x$» интерпретируется как фраза «для всех x».

Квантор всеобщности

Символ «$\forall x$» интерпретируется как фраза «для всех x». Знак «$\forall$» произошёл от 1-й буквы английского слова All — «все».

Квантор всеобщности

Символ «$\forall x$» интерпретируется как фраза «для всех x». Знак «$\forall$» произошёл от 1-й буквы английского слова All — «все».

При добавлении к предикату $P(x)$ квантора всеобщности мы получим высказывание $\forall x\, P(x)$.

Квантор всеобщности

Символ «$\forall x$» интерпретируется как фраза «для всех x».
Знак «$\forall$» произошёл от 1-й буквы английского слова All — «все».
При добавлении к предикату $P(x)$ квантора всеобщности мы получим высказывание $\forall x\, P(x)$.
Оно примет истинное значение, если предикат $P(x)$ выполняется для всех объектов $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$, которые можно подставить вместо x:

$$\forall x\, P(x) \equiv \mathop{\&}_{x} P(x) \equiv P(a_1) \,\&\, P(a_2) \,\&\, \ldots \,\&\, P(a_i) \,\&\, \ldots$$

Квантор всеобщности

Символ «$\forall x$» интерпретируется как фраза «для всех x».
Знак «$\forall$» произошёл от 1-й буквы английского слова All — «все».
При добавлении к предикату $P(x)$ квантора всеобщности мы получим высказывание $\forall x\, P(x)$.
Оно примет истинное значение, если предикат $P(x)$ выполняется для всех объектов $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$, которые можно подставить вместо x:

$$\forall x\, P(x) \equiv \underset{x}{\&} P(x) \equiv P(a_1) \,\&\, P(a_2) \,\&\, \ldots \,\&\, P(a_i) \,\&\, \ldots$$

Пример

Утверждение «Все люди смертны» можно записать так: $\forall x(H(x) \to D(x))$, где $H(x)$ — «x — человек», $D(x)$ — «x — смертен».

Квантор существования

Символ «$\exists x$» представляет фразу «существует x».

Квантор существования

Символ «$\exists x$» представляет фразу «существует x».
Знак «$\exists$» произошёл от 1-й буквы английского слова Exists — «существует».

Квантор существования

Символ «$\exists x$» представляет фразу «существует x».
Знак «$\exists$» произошёл от 1-й буквы английского слова Exists — «существует».
При добавлении данного квантора к предикату получаем также высказывание $\exists x\, P(x)$.

Квантор существования

Символ «$\exists x$» представляет фразу «существует x».
Знак «$\exists$» произошёл от 1-й буквы английского слова Exists — «существует».
При добавлении данного квантора к предикату получаем также высказывание $\exists x\, P(x)$.
Оно будет истинным, если предикат $P(x)$ выполняется хотя бы для одного из объектов $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$, которые можно подставить вместо x:

$$\exists x\, P(x) \equiv \bigvee_x P(x) \equiv P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_i) \vee \ldots$$

Квантор существования

Символ «$\exists x$» представляет фразу «существует x».
Знак «$\exists$» произошёл от 1-й буквы английского слова Exists — «существует».
При добавлении данного квантора к предикату получаем также высказывание $\exists x\, P(x)$.
Оно будет истинным, если предикат $P(x)$ выполняется хотя бы для одного из объектов $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$, которые можно подставить вместо x:

$$\exists x\, P(x) \equiv \bigvee_x P(x) \equiv P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_i) \vee \ldots$$

Пример

Утверждение «Некоторые студенты — отличники» можно записать так: $\exists x \big(S(x) \mathbin{\&} O(x)\big)$, где $S(x)$ — «x — студент», $O(x)$ — «x — отличник».

Дополнительные замечания

Имеются также и другие виды кванторов, например «$\exists! x$» — «существует единственный x», «$\mathbb{W} x$» — «для большинства x» и т. п., но мы их использовать не будем.

Свободные и связанные переменные

В формулах вида $\forall x \mathfrak{A}$ и $\exists x \mathfrak{A}$ формула $\mathfrak{A}$ называется областью действия квантора по переменной x.

Свободные и связанные переменные

В формулах вида $\forall x\mathfrak{A}$ и $\exists x\mathfrak{A}$ формула $\mathfrak{A}$ называется областью действия квантора по переменной x.

Переменная x, входящая в формулу $\mathfrak{A}$, называется связанной, если она находится в области действия квантора $\forall x$ или $\exists x$.

Свободные и связанные переменные

В формулах вида $\forall x \mathfrak{A}$ и $\exists x \mathfrak{A}$ формула $\mathfrak{A}$ называется областью действия квантора по переменной x.

Переменная x, входящая в формулу $\mathfrak{A}$, называется связанной, если она находится в области действия квантора $\forall x$ или $\exists x$.

В противном случае, переменная x в формуле $\mathfrak{A}$ является свободной.

Свободные и связанные переменные

В формулах вида $\forall x \mathfrak{A}$ и $\exists x \mathfrak{A}$ формула $\mathfrak{A}$ называется областью действия квантора по переменной x.

Переменная x, входящая в формулу $\mathfrak{A}$, называется связанной, если она находится в области действия квантора $\forall x$ или $\exists x$.

В противном случае, переменная x в формуле $\mathfrak{A}$ является свободной.

Пример

В формуле $\exists y \forall x\, P(x, y, z)$ переменные x и y связанные, а переменная z — свободная.

Свободные и связанные переменные

В формулах вида $\forall x \mathfrak{A}$ и $\exists x \mathfrak{A}$ формула $\mathfrak{A}$ называется областью действия квантора по переменной x.

Переменная x, входящая в формулу $\mathfrak{A}$, называется связанной, если она находится в области действия квантора $\forall x$ или $\exists x$.

В противном случае, переменная x в формуле $\mathfrak{A}$ является свободной.

Пример

В формуле $\exists y \forall x \, P(x, y, z)$ переменные x и y связанные, а переменная z — свободная.

Очевидно, что формула без свободных переменных является высказыванием.

Интерпретации

За каждой формулой скрывается её содержание. Содержательная часть формул, их смысл, относится к специальному разделу логики, называемому семантикой. Выяснить содержание формулы можно, обращаясь к реальному миру предметов. Делается это посредством интерпретации формулы.

Интерпретации

За каждой формулой скрывается её содержание. Содержательная часть формул, их смысл, относится к специальному разделу логики, называемому семантикой. Выяснить содержание формулы можно, обращаясь к реальному миру предметов. Делается это посредством интерпретации формулы.

Чтобы определить интерпретацию для формулы логики предикатов, мы должны указать предметную область (область значений предметных переменных) и значения констант, функциональных и предикатных символов, встречающихся в формуле.

Интерпретации

За каждой формулой скрывается её содержание. Содержательная часть формул, их смысл, относится к специальному разделу логики, называемому семантикой. Выяснить содержание формулы можно, обращаясь к реальному миру предметов. Делается это посредством интерпретации формулы.

Чтобы определить интерпретацию для формулы логики предикатов, мы должны указать предметную область (область значений предметных переменных) и значения констант, функциональных и предикатных символов, встречающихся в формуле.

Интерпретация формулы $\mathfrak{A}$ логики предикатов состоит из непустой (предметной) области $\mathscr{D}$ и указания значения всех констант, функциональных символов и предикатных символов, встречающихся в $\mathfrak{A}$.

Интерпретации (продолжение)

Таким образом, каждой константе мы ставим в соответствие некоторый элемент из $\mathscr{D}$, каждому n-местному функциональному символу $f(x_1, \ldots, x_n)$ мы ставим в соответствие отображение из $\mathscr{D}^n$ в $\mathscr{D}$:

$$\underbrace{\mathscr{D} \times \mathscr{D} \times \cdots \times \mathscr{D}}_{n \text{ раз}} \xrightarrow{f} \mathscr{D},$$

а каждому n-местному предикатному символу $P(x_1, \ldots, x_n)$ мы ставим в соответствие отображение из $\mathscr{D}^n$ в $\{0, 1\}$:

$$\underbrace{\mathscr{D} \times \mathscr{D} \times \cdots \times \mathscr{D}}_{n \text{ раз}} \xrightarrow{P} \{0, 1\}.$$

Интерпретации (окончание)

При интерпретации формулы наполняются содержанием благодаря тому, что элементы множества $\mathscr{D}$ уже привязаны к конкретной реальности, знакомы и понятны.

Интерпретации (окончание)

При интерпретации формулы наполняются содержанием благодаря тому, что элементы множества $\mathscr{D}$ уже привязаны к конкретной реальности, знакомы и понятны.

Пример

В случае, когда $\mathscr{D} = \mathbb{R}$, т. е. область $\mathscr{D}$ является множеством действительных чисел, под формулами мы понимаем сведения из математического анализа, который прочно привязан к практической деятельности инженеров, физиков, химиков и т. д.

Следовательно, нам становится ясным, когда формула при определённой фиксации своих переменных истинна, а когда ложна.

Истинность формул ЛП. Выполнимые формулы ЛП

Формула $\mathfrak{A}$ логики предикатов называется выполнимой в области $\mathscr{M}$ ($\mathscr{M} \subset \mathscr{D}$), если существуют значения переменных, входящих в эту формулу и отнесённых к области $\mathscr{M}$, при которых формула $\mathfrak{A}$ принимает истинные значения.

Истинность формул ЛП. Выполнимые формулы ЛП

Формула $\mathfrak{A}$ логики предикатов называется выполнимой в области $\mathscr{M}$ ($\mathscr{M} \subset \mathscr{D}$), если существуют значения переменных, входящих в эту формулу и отнесённых к области $\mathscr{M}$, при которых формула $\mathfrak{A}$ принимает истинные значения.

Формула $\mathfrak{A}$ логики предикатов называется выполнимой, если существует некоторая область значений переменных, на которой эта формула выполнима.

Тождественно истинные и тождественно ложные формулы ЛП

Формула $\mathfrak{A}$ логики предикатов называется тождественно истинной в области $\mathscr{M}$, если она принимает истинные значения для всех значений переменных, входящих в эту формулу и отнесённых к этой области.

Тождественно истинные и тождественно ложные формулы ЛП

Формула $\mathfrak{A}$ логики предикатов называется тождественно истинной в области $\mathscr{M}$, если она принимает истинные значения для всех значений переменных, входящих в эту формулу и отнесённых к этой области.

Формула $\mathfrak{A}$ логики предикатов называется тождественно ложной в области $\mathscr{M}$, если она принимает ложные значения для всех значений переменных, входящих в эту формулу и отнесённых к этой области.

Тождественно истинные и тождественно ложные формулы ЛП

Формула $\mathfrak{A}$ логики предикатов называется тождественно истинной в области $\mathscr{M}$, если она принимает истинные значения для всех значений переменных, входящих в эту формулу и отнесённых к этой области.

Формула $\mathfrak{A}$ логики предикатов называется тождественно ложной в области $\mathscr{M}$, если она принимает ложные значения для всех значений переменных, входящих в эту формулу и отнесённых к этой области.

Формула $\mathfrak{A}$ логики предикатов называется общезначимой (тавтологией), если она является тождественно истинной на всякой области (на любой модели).

Тождественно истинные и тождественно ложные формулы ЛП

Формула $\mathfrak{A}$ логики предикатов называется тождественно истинной в области $\mathscr{M}$, если она принимает истинные значения для всех значений переменных, входящих в эту формулу и отнесённых к этой области.

Формула $\mathfrak{A}$ логики предикатов называется тождественно ложной в области $\mathscr{M}$, если она принимает ложные значения для всех значений переменных, входящих в эту формулу и отнесённых к этой области.

Формула $\mathfrak{A}$ логики предикатов называется общезначимой (тавтологией), если она является тождественно истинной на всякой области (на любой модели).

Для общезначимой формулы будем использовать обозначение $\vdash \mathfrak{A}$. Если формула $\mathfrak{A}$ общезначимая, то формула $\overline{\mathfrak{A}}$ называется тождественно ложной, или противоречием.

Примеры

Пусть $P(x)$ — «x — положительное число».

Примеры

Пусть $P(x)$ — «x — положительное число».

Тогда формула $P(x)$ тождественно истинная в области $(5, \infty)$, тождественно ложная в области $[-10, -5]$, выполнимая в области $[-1, 2)$. Она также является выполнимой формулой.

Логическое следствие в ЛП

Пусть даны две формулы $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n)$.

Логическое следствие в ЛП

Пусть даны две формулы $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n)$.

Формула $\mathfrak{B}$ является логическим следствием формулы $\mathfrak{A}$, если во всякой интерпретации формула $\mathfrak{B}$ выполнена на каждом наборе переменных $(x_1 = a_1)$, $\ldots$, $(x_n = a_n)$, на котором выполнена формула $\mathfrak{A}$.

Логическое следствие в ЛП

Пусть даны две формулы $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n)$.

Формула $\mathfrak{B}$ является логическим следствием формулы $\mathfrak{A}$, если во всякой интерпретации формула $\mathfrak{B}$ выполнена на каждом наборе переменных $(x_1{=}a_1)$, $\ldots$, $(x_n{=}a_n)$, на котором выполнена формула $\mathfrak{A}$.

Символически для логического следствия используют обозначение $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$.

Логическое следствие в ЛП

Пусть даны две формулы $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n)$.

Формула $\mathfrak{B}$ является логическим следствием формулы $\mathfrak{A}$, если во всякой интерпретации формула $\mathfrak{B}$ выполнена на каждом наборе переменных $(x_1{=}\,a_1)$, $\ldots$, $(x_n{=}\,a_n)$, на котором выполнена формула $\mathfrak{A}$.

Символически для логического следствия используют обозначение $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$.

В логике предикатов выполняется теорема дедукции:

$\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда $\vdash \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$.

Равносильные формулы ЛП

Формулы $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n)$ называются равносильными, если $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} \vdash \mathfrak{A}$.

Равносильные формулы ЛП

Формулы $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n)$ называются равносильными, если $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} \vdash \mathfrak{A}$.

Для равносильных формул используется запись: $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Равносильные формулы ЛП

Формулы $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n)$ называются равносильными, если $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} \vdash \mathfrak{A}$.

Для равносильных формул используется запись: $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Примеры равносильных формул:

$$
\begin{aligned}
\forall x\,\mathfrak{A}(x) \,\&\, \mathfrak{B} &\equiv \forall x\big(\mathfrak{A}(x) \,\&\, \mathfrak{B}\big);\\
\exists x\,\mathfrak{A}(x) \,\&\, \mathfrak{B} &\equiv \exists x\big(\mathfrak{A}(x) \,\&\, \mathfrak{B}\big);\\
\forall x\,\mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B} &\equiv \forall x\big(\mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B}\big);\\
\exists x\,\mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B} &\equiv \exists x\big(\mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B}\big);\\
\overline{\forall x\,\mathfrak{A}(x)} &\equiv \exists x\,\overline{\mathfrak{A}(x)};\\
\overline{\exists x\,\mathfrak{A}(x)} &\equiv \forall x\,\overline{\mathfrak{A}(x)};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\forall x\,\mathfrak{A}(x) \,\&\, \forall x\,\mathfrak{B}(x) &\equiv \forall x\big(\mathfrak{A}(x) \,\&\, \mathfrak{B}(x)\big);\\
\exists x\,\mathfrak{A}(x) \vee \exists x\,\mathfrak{B}(x) &\equiv \exists x\big(\mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B}(x)\big);\\
\forall x\,\mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B} &\equiv \exists x\big(\mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B}\big);\\
\exists x\,\mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B} &\equiv \forall x\big(\mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B}\big);\\
\mathfrak{B} \to \forall x\,\mathfrak{A}(x) &\equiv \forall x\big(\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}(x)\big);\\
\mathfrak{B} \to \exists x\,\mathfrak{A}(x) &\equiv \exists x\big(\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}(x)\big).
\end{aligned}
$$

Силлогистика

Силлогистика — первая логическая дедуктивная теория.

Силлогистика

Силлогистика — первая логическая дедуктивная теория.
Автор силлогистики — Аристотель.

Силлогистика

Силлогистика — первая логическая дедуктивная теория.
Автор силлогистики — Аристотель.
Силлогистика послужила образцом для создания других аксиоматических теорий, например, геометрии Евклида.

Силлогистика

Силлогистика — первая логическая дедуктивная теория.
Автор силлогистики — Аристотель.
Силлогистика послужила образцом для создания других аксиоматических теорий, например, геометрии Евклида.

В силлогистике исследуются различные логические отношения между категорическими атрибутивными суждениями:

Силлогистика

Силлогистика — первая логическая дедуктивная теория.
Автор силлогистики — Аристотель.
Силлогистика послужила образцом для создания других аксиоматических теорий, например, геометрии Евклида.

В силлогистике исследуются различные логические отношения между категорическими атрибутивными суждениями:

- общеутвердительные (Всякий S есть H);
- частноутвердительные (Некоторый S есть H);
- общеотрицательные (Ни один S не есть H);
- частноотрицательные (Некоторый S не есть H);
- единичноутвердительные (b есть H);
- единичноотрицательные (b не есть H).

Категорические атрибутивные суждения в логике предикатов

Рассмотрим примеры формализации категорических атрибутивных суждений с помощью логики предикатов.

Категорические атрибутивные суждения в логике предикатов

Рассмотрим примеры формализации категорических атрибутивных суждений с помощью логики предикатов.

1. Общеутвердительное: «Все студенты — отличники»:
   $\forall x(S(x) \to H(x))$. Неправильно: $\forall x(S(x) \mathbin{\&} H(x))$

Категорические атрибутивные суждения в логике предикатов

Рассмотрим примеры формализации категорических атрибутивных суждений с помощью логики предикатов.

1. Общеутвердительное: «Все студенты — отличники»:
$\forall x(S(x) \to H(x))$. Неправильно: $\forall x(S(x) \,\&\, H(x))$
2. Частноутвердительное: «Некоторые студенты — отличники»:
$\exists x(S(x) \,\&\, H(x))$. Неправильно: $\exists x(S(x) \to H(x))$.

Категорические атрибутивные суждения в логике предикатов

Рассмотрим примеры формализации категорических атрибутивных суждений с помощью логики предикатов.

1. Общеутвердительное: «Все студенты — отличники»:
   $\forall x\big(S(x) \to H(x)\big)$. Неправильно: $\forall x\big(S(x) \,\&\, H(x)\big)$
2. Частноутвердительное: «Некоторые студенты — отличники»:
   $\exists x\big(S(x) \,\&\, H(x)\big)$. Неправильно: $\exists x\big(S(x) \to H(x)\big)$.
3. Общеотрицательное:
   «Никто из студентов не является отличником»:
   $\forall x\big(S(x) \to \overline{H(x)}\big)$. Другой способ: $\overline{\exists x\big(S(x) \,\&\, H(x)\big)}$.

Категорические атрибутивные суждения в логике предикатов

Рассмотрим примеры формализации категорических атрибутивных суждений с помощью логики предикатов.

1. Общеутвердительное: «Все студенты — отличники»: $\forall x(S(x) \to H(x))$. Неправильно: $\forall x(S(x) \,\&\, H(x))$
2. Частноутвердительное: «Некоторые студенты — отличники»: $\exists x(S(x) \,\&\, H(x))$. Неправильно: $\exists x(S(x) \to H(x))$.
3. Общеотрицательное: «Никто из студентов не является отличником»: $\forall x(S(x) \to \overline{H(x)})$. Другой способ: $\overline{\exists x(S(x) \,\&\, H(x))}$.
4. Частноотрицательное: «Некоторые студенты не является отличниками»: $\exists x(S(x) \,\&\, \overline{H(x)})$. Другой способ: $\overline{\forall x(S(x) \to H(x))}$.
5. Единичноутвердительное: «Боря — студент»: $S(b)$.

Категорические атрибутивные суждения в логике предикатов

Рассмотрим примеры формализации категорических атрибутивных суждений с помощью логики предикатов.

1. Общеутвердительное: «Все студенты — отличники»: $\forall x(S(x) \to H(x))$. Неправильно: $\forall x(S(x) \mathbin{\&} H(x))$
2. Частноутвердительное: «Некоторые студенты — отличники»: $\exists x(S(x) \mathbin{\&} H(x))$. Неправильно: $\exists x(S(x) \to H(x))$.
3. Общеотрицательное: «Никто из студентов не является отличником»: $\forall x(S(x) \to \overline{H(x)})$. Другой способ: $\overline{\exists x(S(x) \mathbin{\&} H(x))}$.
4. Частноотрицательное: «Некоторые студенты не является отличниками»: $\exists x(S(x) \mathbin{\&} \overline{H(x)})$. Другой способ: $\overline{\forall x(S(x) \to H(x))}$.
5. Единичноутвердительное: «Боря — студент»: $S(b)$.
6. Единичноотрицательное: «Боря — не отличник»: $\overline{H(b)}$.

Вывод в силлогистике

Силлогистика отличается значительной простотой, элегантностью и кажущейся самоочевидностью устанавливаемых в ней логических законов, формулируемых почти на естественном языке без использования сложной символики.

Вывод в силлогистике

Силлогистика отличается значительной простотой, элегантностью и кажущейся самоочевидностью устанавливаемых в ней логических законов, формулируемых почти на естественном языке без использования сложной символики.

Но не смотря на эти преимущества, силлогистика не позволяет производить доказательства в сложных случаях, которые могут возникнуть в рамках логики предикатов.

Вывод в силлогистике

Силлогистика отличается значительной простотой, элегантностью и кажущейся самоочевидностью устанавливаемых в ней логических законов, формулируемых почти на естественном языке без использования сложной символики.

Но не смотря на эти преимущества, силлогистика не позволяет производить доказательства в сложных случаях, которые могут возникнуть в рамках логики предикатов.

Для решения таких задач необходим более надёжный метод доказательства, который можно автоматизировать.

Приведённая форма

Аналогично КНФ и ДНФ в логике высказываний, всякую формулу логики предикатов с помощью эквивалентных преобразований можно привести к равносильной формуле в приведённой форме, в которой из логических операций используются только операции &, $\vee$, $\overline{}$, причём отрицания относятся только к предикатным символам и элементарным высказываниям.

Приведённая форма

Аналогично КНФ и ДНФ в логике высказываний, всякую формулу логики предикатов с помощью эквивалентных преобразований можно привести к равносильной формуле в приведённой форме, в которой из логических операций используются только операции $\&$, $\vee$, $\overline{}$, причём отрицания относятся только к предикатным символам и элементарным высказываниям.

Для этого применяют следующие преобразования:

Приведённая форма

Аналогично КНФ и ДНФ в логике высказываний, всякую формулу логики предикатов с помощью эквивалентных преобразований можно привести к равносильной формуле в приведённой форме, в которой из логических операций используются только операции &, $\vee$, $\overline{}$, причём отрицания относятся только к предикатным символам и элементарным высказываниям.

Для этого применяют следующие преобразования:

1. $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B} \Rightarrow (\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B})\ \&\ (\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{B}})$;

Приведённая форма

Аналогично КНФ и ДНФ в логике высказываний, всякую формулу логики предикатов с помощью эквивалентных преобразований можно привести к равносильной формуле в приведённой форме, в которой из логических операций используются только операции $\&$, $\vee$, $\overline{}$, причём отрицания относятся только к предикатным символам и элементарным высказываниям.

Для этого применяют следующие преобразования:

1. $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B} \Rightarrow (\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B})\ \&\ (\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{B}})$;
2. $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$;

Приведённая форма

Аналогично КНФ и ДНФ в логике высказываний, всякую формулу логики предикатов с помощью эквивалентных преобразований можно привести к равносильной формуле в приведённой форме, в которой из логических операций используются только операции &, $\vee$, $\overline{}$, причём отрицания относятся только к предикатным символам и элементарным высказываниям.

Для этого применяют следующие преобразования:

1. $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B} \Rightarrow (\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}) \,\&\, (\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{B}})$;
2. $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$;
3. - $\overline{\forall x\, \mathfrak{A}(x)} \Rightarrow \exists x\, \overline{\mathfrak{A}(x)}$;

Приведённая форма

Аналогично КНФ и ДНФ в логике высказываний, всякую формулу логики предикатов с помощью эквивалентных преобразований можно привести к равносильной формуле в приведённой форме, в которой из логических операций используются только операции $\&$, $\vee$, $\overline{}$, причём отрицания относятся только к предикатным символам и элементарным высказываниям.

Для этого применяют следующие преобразования:

1. $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B} \Rightarrow (\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}) \,\&\, (\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{B}})$;
2. $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$;
3.
   - $\overline{\forall x\, \mathfrak{A}(x)} \Rightarrow \exists x\, \overline{\mathfrak{A}(x)}$;
   - $\overline{\exists x\, \mathfrak{A}(x)} \Rightarrow \forall x\, \overline{\mathfrak{A}(x)}$;

Приведённая форма

Аналогично КНФ и ДНФ в логике высказываний, всякую формулу логики предикатов с помощью эквивалентных преобразований можно привести к равносильной формуле в приведённой форме, в которой из логических операций используются только операции &, $\vee$, $\overline{}$, причём отрицания относятся только к предикатным символам и элементарным высказываниям.

Для этого применяют следующие преобразования:

1. $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B} \Rightarrow (\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B})\ \&\ (\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{B}})$;
2. $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$;
3. - $\overline{\forall x\, \mathfrak{A}(x)} \Rightarrow \exists x\, \overline{\mathfrak{A}(x)}$;
   - $\overline{\exists x\, \mathfrak{A}(x)} \Rightarrow \forall x\, \overline{\mathfrak{A}(x)}$;
   - $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \Rightarrow \mathfrak{A}$;

Приведённая форма

Аналогично КНФ и ДНФ в логике высказываний, всякую формулу логики предикатов с помощью эквивалентных преобразований можно привести к равносильной формуле в приведённой форме, в которой из логических операций используются только операции $\&$, $\vee$, $\overline{}$, причём отрицания относятся только к предикатным символам и элементарным высказываниям.

Для этого применяют следующие преобразования:

1. $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B} \Rightarrow (\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}) \,\&\, (\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{B}})$;
2. $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$;
3.
   - $\overline{\forall x\, \mathfrak{A}(x)} \Rightarrow \exists x\, \overline{\mathfrak{A}(x)}$;
   - $\overline{\exists x\, \mathfrak{A}(x)} \Rightarrow \forall x\, \overline{\mathfrak{A}(x)}$;
   - $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \Rightarrow \mathfrak{A}$;
   - $\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \,\&\, \overline{\mathfrak{B}}$;

Приведённая форма

Аналогично КНФ и ДНФ в логике высказываний, всякую формулу логики предикатов с помощью эквивалентных преобразований можно привести к равносильной формуле в приведённой форме, в которой из логических операций используются только операции &, $\vee$, $\overline{}$, причём отрицания относятся только к предикатным символам и элементарным высказываниям.

Для этого применяют следующие преобразования:

1. $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B} \Rightarrow (\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B})\ \&\ (\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{B}})$;
2. $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$;
3.
   - $\overline{\forall x\, \mathfrak{A}(x)} \Rightarrow \exists x\, \overline{\mathfrak{A}(x)}$;
   - $\overline{\exists x\, \mathfrak{A}(x)} \Rightarrow \forall x\, \overline{\mathfrak{A}(x)}$;
   - $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \Rightarrow \mathfrak{A}$;
   - $\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}}\ \&\ \overline{\mathfrak{B}}$;
   - $\overline{\mathfrak{A}\ \&\ \mathfrak{B}} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}}$.

Пример

Получить приведённую форму формулы

$$\forall x\Big(P(x) \to \forall y\big(P(y) \to P(f(x,y))\big)\Big) \mathbin{\&} \overline{\forall y\big(Q(x,y) \to P(y)\big)}\Big).$$

Пример

Получить приведённую форму формулы

$$\forall x\Big(P(x) \to \forall y\Big(P(y) \to P\big(f(x,y)\big)\Big)\ \&\ \overline{\forall y\big(Q(x,y) \to P(y)\big)}\Big).$$

Решение

$$\forall x\Big(P(x) \to \forall y\Big(P(y) \to P\big(f(x,y)\big)\Big)\ \&\ \overline{\forall y\big(Q(x,y) \to P(y)\big)}\Big) \equiv$$

Пример

Получить приведённую форму формулы

$$\forall x\Big(P(x)\to\forall y\big(P(y)\to P(f(x,y))\big)\ \&\ \overline{\forall y(Q(x,y)\to P(y))}\Big).$$

Решение

$$\forall x\Big(P(x)\to\forall y\big(P(y)\to P(f(x,y))\big)\ \&\ \overline{\forall y(Q(x,y)\to P(y))}\Big)\equiv$$

$$\equiv\forall x\Big(\overline{P(x)}\vee\forall y\big(\overline{P(y)}\vee P(f(x,y))\big)\ \&\ \overline{\forall y(\overline{Q(x,y)}\vee P(y))}\Big)\equiv$$

Пример

Получить приведённую форму формулы

$$\forall x\Big(P(x)\to\forall y\big(P(y)\to P(f(x,y))\big)\ \&\ \overline{\forall y(Q(x,y)\to P(y))}\Big).$$

Решение

$$\forall x\Big(P(x)\to\forall y\big(P(y)\to P(f(x,y))\big)\ \&\ \overline{\forall y(Q(x,y)\to P(y))}\Big)\equiv$$

$$\equiv\forall x\Big(\overline{P(x)}\vee\forall y\big(\overline{P(y)}\vee P(f(x,y))\big)\ \&\ \overline{\forall y(\overline{Q(x,y)}\vee P(y))}\Big)\equiv$$

$$\equiv\forall x\Big(\overline{P(x)}\vee\forall y\big(\overline{P(y)}\vee P(f(x,y))\big)\ \&\ \exists y\,\overline{(\overline{Q(x,y)}\vee P(y))}\Big)\equiv$$

Пример

Получить приведённую форму формулы

$$\forall x\Big(P(x) \to \forall y\big(P(y) \to P(f(x,y))\big) \;\&\; \overline{\forall y\big(Q(x,y) \to P(y)\big)}\Big).$$

Решение

$$\forall x\Big(P(x) \to \forall y\big(P(y) \to P(f(x,y))\big) \;\&\; \overline{\forall y\big(Q(x,y) \to P(y)\big)}\Big) \equiv$$

$$\equiv \forall x\Big(\overline{P(x)} \vee \forall y\big(\overline{P(y)} \vee P(f(x,y))\big) \;\&\; \overline{\forall y\big(\overline{Q(x,y)} \vee P(y)\big)}\Big) \equiv$$

$$\equiv \forall x\Big(\overline{P(x)} \vee \forall y\big(\overline{P(y)} \vee P(f(x,y))\big) \;\&\; \exists y\big(\overline{\overline{Q(x,y)} \vee P(y)}\big)\Big) \equiv$$

$$\equiv \forall x\Big(\overline{P(x)} \vee \forall y\big(\overline{P(y)} \vee P(f(x,y))\big) \;\&\; \exists y\big(Q(x,y) \;\&\; \overline{P(y)}\big)\Big).$$

Предварённая нормальная форма

Всякую формулу логики предикатов, находящуюся в приведённой форме, с помощью эквивалентных преобразований можно привести к равносильной формуле в предварённой нормальной форме (ПНФ), в которой все кванторы стои́т в её начале, а область действия каждого из них распространяется до конца формулы, т. е. привести к виду

$$\underbrace{\mathsf{K}_1 x_1 \ldots \mathsf{K}_n x_n \ldots}_{\text{префикс}}\ \underbrace{\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n, \ldots)}_{\text{матрица}},$$

где $\mathsf{K}_1, \ldots, \mathsf{K}_n$ — кванторы (либо $\exists$, либо $\forall$), называемые префиксом, формула $\mathfrak{A}$ не содержит кванторов и называется матрицей.

Предварённая нормальная форма

Всякую формулу логики предикатов, находящуюся в приведённой форме, с помощью эквивалентных преобразований можно привести к равносильной формуле в предварённой нормальной форме (ПНФ), в которой все кванторы сто́ят в её начале, а область действия каждого из них распространяется до конца формулы, т. е. привести к виду

$$\underbrace{\text{Ӿ}_1 x_1 \ldots \text{Ӿ}_n x_n \ldots}_{\text{префикс}}\ \underbrace{\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n, \ldots)}_{\text{матрица}},$$

где $\text{Ӿ}_1, \ldots, \text{Ӿ}_n$ — кванторы (либо $\exists$, либо $\forall$), называемые префиксом, формула $\mathfrak{A}$ не содержит кванторов и называется матрицей.

Замечание

В ПНФ префикса может и не быть.

Предварённая нормальная форма (продолжение)

Для получения предварённой нормальной формы используют следующие преобразования:

Предварённая нормальная форма (продолжение)

Для получения предварённой нормальной формы используют следующие преобразования:

1. Разделение связанных переменных:

$$\rtimes_1 x\, \mathfrak{A}(\ldots \rtimes_2 x\, \mathfrak{B}(\ldots x \ldots) \ldots) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \rtimes_1 x\, \mathfrak{A}(\ldots \rtimes_2 y\, \mathfrak{B}(\ldots y \ldots) \ldots).$$

Предварённая нормальная форма (продолжение)

Для получения предварённой нормальной формы используют следующие преобразования:

1. Разделение связанных переменных:

$$\mathsf{K}_1 x\, \mathfrak{A}(\ldots \mathsf{K}_2 x\, \mathfrak{B}(\ldots x \ldots)\ldots) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathsf{K}_1 x\, \mathfrak{A}(\ldots \mathsf{K}_2 y\, \mathfrak{B}(\ldots y \ldots)\ldots).$$

   Теперь формула не содержит случайно совпадающих связанных переменных.

Предварённая нормальная форма (продолжение)

Для получения предварённой нормальной формы используют следующие преобразования:

1. Разделение связанных переменных:

$$\reflectbox{K}_1 x\, \mathfrak{A}(\ldots \reflectbox{K}_2 x\, \mathfrak{B}(\ldots x \ldots) \ldots) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \reflectbox{K}_1 x\, \mathfrak{A}(\ldots \reflectbox{K}_2 y\, \mathfrak{B}(\ldots y \ldots) \ldots).$$

   Теперь формула не содержит случайно совпадающих связанных переменных.

2. Приведение к предварённой форме:

$$\mathfrak{A} \vee \reflectbox{K}x\, \mathfrak{B}(x) \Rightarrow \reflectbox{K}x\big(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}(x)\big);$$

$$\mathfrak{A} \,\&\, \reflectbox{K}x\, \mathfrak{B}(x) \Rightarrow \reflectbox{K}x\big(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}(x)\big).$$

Предварённая нормальная форма (продолжение)

Для получения предварённой нормальной формы используют следующие преобразования:

1. Разделение связанных переменных:

$$\mathsf{X}_1 x\, \mathfrak{A}(\ldots \mathsf{X}_2 x\, \mathfrak{B}(\ldots x \ldots) \ldots) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathsf{X}_1 x\, \mathfrak{A}(\ldots \mathsf{X}_2 y\, \mathfrak{B}(\ldots y \ldots) \ldots).$$

   Теперь формула не содержит случайно совпадающих связанных переменных.

2. Приведение к предварённой форме:

$$\mathfrak{A} \vee \mathsf{X} x\, \mathfrak{B}(x) \Rightarrow \mathsf{X} x \big(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}(x)\big);$$
$$\mathfrak{A} \;\&\; \mathsf{X} x\, \mathfrak{B}(x) \Rightarrow \mathsf{X} x \big(\mathfrak{A} \;\&\; \mathfrak{B}(x)\big).$$

Замечание

Одна формула может допускать много эквивалентных предварённых нормальных форм.

Пример

Найти предварённую нормальную форму для формулы

$$\forall x\Big(P(x)\,\&\,\forall y\exists x\big(\overline{Q(x,y)}\vee R(a,x,y)\big)\Big).$$

Пример

Найти предварённую нормальную форму для формулы

$$\forall x\Big(P(x) \mathbin{\&} \forall y \exists x\big(\overline{Q(x,y)} \vee R(a,x,y)\big)\Big).$$

Решение

$$\forall x\Big(P(x) \mathbin{\&} \forall y \exists x\big(\overline{Q(x,y)} \vee R(a,x,y)\big)\Big) \equiv$$

Пример

Найти предварённую нормальную форму для формулы

$$\forall x \Big(P(x) \mathbin{\&} \forall y \exists x \big(\overline{Q(x,y)} \vee R(a,x,y) \big) \Big).$$

Решение

$$\forall x \Big(P(x) \mathbin{\&} \forall y \exists x \big(\overline{Q(x,y)} \vee R(a,x,y) \big) \Big) \equiv$$

$$\equiv \forall x \Big(P(x) \mathbin{\&} \forall y \exists z \big(\overline{Q(z,y)} \vee R(a,z,y) \big) \Big) \equiv$$

Пример

Найти предварённую нормальную форму для формулы

$$\forall x\Big(P(x)\ \&\ \forall y\exists x\big(\overline{Q(x,y)} \vee R(a,x,y)\big)\Big).$$

Решение

$$\forall x\Big(P(x)\ \&\ \forall y\exists x\big(\overline{Q(x,y)} \vee R(a,x,y)\big)\Big) \equiv$$

$$\equiv \forall x\Big(P(x)\ \&\ \forall y\exists z\big(\overline{Q(z,y)} \vee R(a,z,y)\big)\Big) \equiv$$

$$\equiv \forall x\forall y\exists z\Big(P(x)\ \&\ \big(\overline{Q(z,y)} \vee R(a,z,y)\big)\Big).$$

Сколемизация

Часто необходимы ещё более строгие формы, при этом достаточно, чтобы исходная $\mathfrak{A}$ и полученная $\mathfrak{A}'$ формулы были обе одновременно либо выполнимы, либо противоречивы:

$$\overline{\mathfrak{A}} \vdash \overline{\mathfrak{A}'},$$

Сколемизация

Часто необходимы ещё более строгие формы, при этом достаточно, чтобы исходная $\mathfrak{A}$ и полученная $\mathfrak{A}'$ формулы были обе одновременно либо выполнимы, либо противоречивы:

$$\overline{\mathfrak{A}} \vdash \overline{\mathfrak{A}'},$$

при этом в общем случае $\mathfrak{A}' \not\equiv \mathfrak{A}$.

Сколемизация

Часто необходимы ещё более строгие формы, при этом достаточно, чтобы исходная $\mathfrak{A}$ и полученная $\mathfrak{A}'$ формулы были обе одновременно либо выполнимы, либо противоречивы:

$$\overline{\mathfrak{A}} \vdash \overline{\mathfrak{A}'},$$

при этом в общем случае $\mathfrak{A}' \not\equiv \mathfrak{A}$.
Одной из таких форм является сколемовская нормальная форма — такая предварённая нормальная форма, в которой исключены кванторы существования.

Сколемизация

Часто необходимы ещё более строгие формы, при этом достаточно, чтобы исходная $\mathfrak{A}$ и полученная $\mathfrak{A}'$ формулы были обе одновременно либо выполнимы, либо противоречивы:

$$\overline{\mathfrak{A}} \vdash \overline{\mathfrak{A}'},$$

при этом в общем случае $\mathfrak{A}' \not\equiv \mathfrak{A}$.
Одной из таких форм является сколемовская нормальная форма — такая предварённая нормальная форма, в которой исключены кванторы существования.
Кванторы существования можно удалить (элиминировать), заменяя их на функции, называемые сколемовскими.

Сколемизация (продолжение)

Рассмотрим формулу $\forall y \exists x\, P(x, y)$.

Сколемизация (продолжение)

Рассмотрим формулу $\forall y \exists x\, P(x, y)$.

Здесь всё выражение выполняется для любого y и некоторого x, который, возможно, зависит от y.

Сколемизация (продолжение)

Рассмотрим формулу $\forall y \exists x\, P(x, y)$.

Здесь всё выражение выполняется для любого y
и некоторого x, который, возможно, зависит от y.

Эту зависимость можно обозначить явно с помощью некоторой функции $f(y)$, ставящей в соответствие каждому y
то значение x, которое существует.

Сколемизация (продолжение)

Рассмотрим формулу $\forall y \exists x\, P(x, y)$.

Здесь всё выражение выполняется для любого y
и некоторого x, который, возможно, зависит от y.

Эту зависимость можно обозначить явно с помощью некоторой функции $f(y)$, ставящей в соответствие каждому y
то значение x, которое существует.

Если заменить x на $f(y)$, то квантор $\exists x$ можно отбросить:

$$\forall y\, P(f(y), y).$$

Сколемизация (продолжение)

Рассмотрим формулу $\forall y \exists x\, P(x, y)$.

Здесь всё выражение выполняется для любого y и некоторого x, который, возможно, зависит от y.

Эту зависимость можно обозначить явно с помощью некоторой функции $f(y)$, ставящей в соответствие каждому y то значение x, которое существует.

Если заменить x на $f(y)$, то квантор $\exists x$ можно отбросить:

$$\forall y\, P(f(y), y).$$

Т. о. если в префиксе имеется пара кванторов $\forall y \exists x$, то $\exists x$ удаляется, а все вхождения связанной с ним переменной x заменяется на функцию $f(y)$.

Сколемизация (продолжение)

Аналогично, если в префиксе имеется набор кванторов $\forall y_1 \ldots \forall y_n \exists z$, то $\exists z$ удаляется, а z заменяется на функцию $g(y_1, \ldots, y_n)$.

Сколемизация (продолжение)

Аналогично, если в префиксе имеется набор кванторов $\forall y_1 \dots \forall y_n \exists z$, то $\exists z$ удаляется, а z заменяется на функцию $g(y_1, \dots, y_n)$.

Очевидно, что если самой левой группой кванторов являются кванторы существования $\exists x_1 \dots \exists x_{n_1}$, то они удаляются, а переменные $x_1 \dots x_{n_1}$ заменяются на константы $a_1, \dots, a_{n_1}$.

Сколемизация (продолжение)

Аналогично, если в префиксе имеется набор кванторов $\forall y_1 \ldots \forall y_n \exists z$, то $\exists z$ удаляется, а z заменяется на функцию $g(y_1, \ldots, y_n)$.
Очевидно, что если самой левой группой кванторов являются кванторы существования $\exists x_1 \ldots \exists x_{n_1}$, то они удаляются, а переменные $x_1 \ldots x_{n_1}$ заменяются на константы $a_1, \ldots, a_{n_1}$.

Правило элиминирования кванторов существования

Каждое вхождение переменной, относящейся к квантору существования, заменяется на сколемовскую функцию, аргументами которой являются те переменные, которые связаны с кванторами всеобщности, в область действия которых попал удаляемый квантор существования. Если левее квантора существования нет кванторов всеобщности, то соответствующая переменная заменяется на константу. Элиминирование происходит слева направо.

Пример

Приведём к сколемовской нормальной форме формулу

$$\exists x \forall y \forall z \exists u \forall v \exists w \, P(x, y, z, u, v, w).$$

Пример

Приведём к сколемовской нормальной форме формулу

$$\exists x \forall y \forall z \exists u \forall v \exists w\, P(x, y, z, u, v, w).$$

Кванторы существования элиминируем слева направо.

Пример

Приведём к сколемовской нормальной форме формулу

$$\exists x \forall y \forall z \exists u \forall v \exists w\, P(x, y, z, u, v, w).$$

Кванторы существования элиминируем слева направо.
В этой формуле левее $\exists x$ нет кванторов всеобщности, левее $\exists u$ стоят $\forall y$ и $\forall z$, а левее $\exists w$ стоят $\forall y$, $\forall z$ и $\forall v$.

Пример

Приведём к сколемовской нормальной форме формулу

$$\exists x \forall y \forall z \exists u \forall v \exists w\, P(x, y, z, u, v, w).$$

Кванторы существования элиминируем слева направо.
В этой формуле левее $\exists x$ нет кванторов всеобщности, левее $\exists u$ стоят $\forall y$ и $\forall z$, а левее $\exists w$ стоят $\forall y$, $\forall z$ и $\forall v$.
Отбросим все кванторы существования, а переменную x заменим на константу a, переменную u — на функцию $f(y, z)$, переменную w — на функцию $g(y, z, v)$.

Пример

Приведём к сколемовской нормальной форме формулу

$$\exists x \forall y \forall z \exists u \forall v \exists w\, P(x, y, z, u, v, w).$$

Кванторы существования элиминируем слева направо.
В этой формуле левее $\exists x$ нет кванторов всеобщности, левее $\exists u$ стоят $\forall y$ и $\forall z$, а левее $\exists w$ стоят $\forall y$, $\forall z$ и $\forall v$.
Отбросим все кванторы существования, а переменную x заменим на константу a, переменную u — на функцию $f(y, z)$, переменную w — на функцию $g(y, z, v)$.
Т. о. получим следующую форму:

$$\forall y \forall z \forall v\, P\big(a, y, z, f(y, z), v, g(y, z, v)\big).$$

Сколемизация (окончание)

Любую формулу логики предикатов можно привести к сколемовской нормальной форме с сохранением противоречивости.

Идея использования функций вместо групп кванторов восходит к работам Т. Ско́лема и Ж. Эрбра́на, поэтому такие функции называют сколемовскими или (реже) эрбрановскими, а их добавление — сколемизацией.

Туральф Ско́лем (1887—1963) — норвежский математик, логик и философ

Жак Эрбра́н (1908—1931) — французский математик