Математическая логика и теория алгоритмов
Лекция 1. Введение. Логика высказываний

Куценко Дмитрий Александрович

Белгородский государственный технологический университет
имени В. Г. Шухова

Институт информационных технологий и управляющих систем

Кафедра программного обеспечения вычислительной техники
и автоматизированных систем

15 февраля 2013 г.

Структура курса

Курс «Математическая логика и теория алгоритмов» состоит из двух частей, из которых мы будем изучать следующие подразделы:

Структура курса

Курс «Математическая логика и теория алгоритмов» состоит из двух частей, из которых мы будем изучать следующие подразделы:

1. Математическая логика:
   - логика высказываний;
   - логика предикатов;
   - формальные теории (исчисления).

Структура курса

Курс «Математическая логика и теория алгоритмов» состоит из двух частей, из которых мы будем изучать следующие подразделы:

1. Математическая логика:
   - логика высказываний;
   - логика предикатов;
   - формальные теории (исчисления).
2. Теория алгоритмов:
   - машины Тьюринга и Поста;
   - рекурсивные функции;
   - нормальные алгоритмы Маркова.

Структура курса

Курс «Математическая логика и теория алгоритмов» состоит из двух частей, из которых мы будем изучать следующие подразделы:

1. Математическая логика:
   - логика высказываний;
   - логика предикатов;
   - формальные теории (исчисления).
2. Теория алгоритмов:
   - машины Тьюринга и Поста;
   - рекурсивные функции;
   - нормальные алгоритмы Маркова.

Кроме этого, в курсе будут рассмотрены некоторые дополнительные темы, например метод резолюций и язык Brainfuck.

Рекомендуемая литература

1. *Куценко Д. А., Терехов Д. В.* Математическая логика и теория алгоритмов.
2. *Игошин В. И.* Математическая логика и теория алгоритмов.
3. *Игошин В. И.* Задачи и упражнения по математической логике.
4. *Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г.* Математическая логика.
5. *Кондаков Н. И.* Логический словарь-справочник.
6. *Мальцев А. И.* Алгоритмы и рекурсивные функции.
7. *Новиков Ф. А.* Дискретная математика для программистов.
8. *Чень Ч., Ли Р.* Математическая логика и автоматическое доказательство теорем.

Что такое «математическая логика»?

Логика —

Что такое «математическая логика»?

Логика — наука о законах и формах мышления.

Что такое «математическая логика»?

Логика — наука о законах и формах мышления.

Формальная логика —

Что такое «математическая логика»?

Логика — наука о законах и формах мышления.

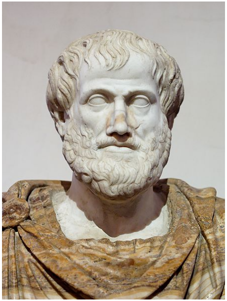
Формальная логика — часть логики, изучающая формы правильных рассуждений.

Что такое «математическая логика»?

Логика — наука о законах и формах мышления.

Формальная логика — часть логики, изучающая формы правильных рассуждений.

Основателем формальной логики считается древнегреческий философ Аристотель (384 до н. э.—322 до н. э.).

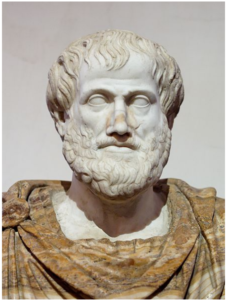


Что такое «математическая логика»?

Логика — наука о законах и формах мышления.

Формальная логика — часть логики, изучающая формы правильных рассуждений.

Основателем формальной логики считается древнегреческий философ Аристотель (384 до н. э.—322 до н. э.).



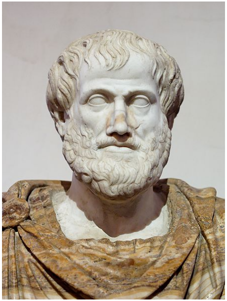
Математическая логика —

Что такое «математическая логика»?

Логика — наука о законах и формах мышления.

Формальная логика — часть логики, изучающая формы правильных рассуждений.

Основателем формальной логики считается древнегреческий философ Аристотель (384 до н. э.—322 до н. э.).



Математическая логика — раздел формальной логики, изучающий формы рассуждений, принятые в математике.

Примеры логических задач

1. Рыцари и Лжецы

   Рыцари говорят только правду. Лжецы всегда лгут.

   Вы встретили двух человек — A и B.

   A говорит: «B — рыцарь».

   B говорит: «Один из нас рыцарь, а другой — лжец».

   Вопрос: Кто такие A и B?

Примеры логических задач

1. **Рыцари и Лжецы**

   Рыцари говорят только правду. Лжецы всегда лгут.

   Вы встретили двух человек — A и B.

   A говорит: «B — рыцарь».

   B говорит: «Один из нас рыцарь, а другой — лжец».

   Вопрос: Кто такие A и B?

2. **Расследование убийства**

   Трое подозреваются в убийстве Купера: Смит, Джонс и Уильямс.

   Смит: «Купер был другом Джонса, а Уильямсу Купер не нравился».

   Джонс: «Я не знаю Купера, и я был за городом в день убийства».

   Уильямс: «Я видел Смита и Джонса с Купером в тот день, кто-то из них убил его».

   Вопрос: Кто убийца?

Традиционная логика. Объекты. Свойства. Отношения

Окружающий нас мир состоит из объектов — животных, домов, книг, автомобилей, гор и т. д.

Традиционная логика. Объекты. Свойства. Отношения

Окружающий нас мир состоит из объектов — животных, домов, книг, автомобилей, гор и т. д.

При изучении объектов мы интересуемся их свойствами — массой, формой, цветом и т. п.

Традиционная логика. Объекты. Свойства. Отношения

Окружающий нас мир состоит из объектов — животных, домов, книг, автомобилей, гор и т. д.

При изучении объектов мы интересуемся их свойствами — массой, формой, цветом и т. п.

Свойства могут выражаться числами (76 кг, 100 м) или иным образом (белый, блестящий, небольшой, очень тяжёлый).

Традиционная логика. Объекты. Свойства. Отношения

Окружающий нас мир состоит из объектов — животных, домов, книг, автомобилей, гор и т. д.

При изучении объектов мы интересуемся их свойствами — массой, формой, цветом и т. п.

Свойства могут выражаться числами (76 кг, 100 м) или иным образом (белый, блестящий, небольшой, очень тяжёлый).

Между объектами существуют различные отношения, например:

Традиционная логика. Объекты. Свойства. Отношения

Окружающий нас мир состоит из объектов — животных, домов, книг, автомобилей, гор и т. д.

При изучении объектов мы интересуемся их свойствами — массой, формой, цветом и т. п.

Свойства могут выражаться числами (76 кг, 100 м) или иным образом (белый, блестящий, небольшой, очень тяжёлый).

Между объектами существуют различные отношения, например:

- Вася живёт в этом доме.
- Данная книга сто́ит в том шкафу.
- Страница является частью книги.

Традиционная логика. Объекты. Свойства. Отношения

Окружающий нас мир состоит из объектов — животных, домов, книг, автомобилей, гор и т. д.

При изучении объектов мы интересуемся их свойствами — массой, формой, цветом и т. п.

Свойства могут выражаться числами (76 кг, 100 м) или иным образом (белый, блестящий, небольшой, очень тяжёлый).

Между объектами существуют различные отношения, например:

- Вася живёт в этом доме.
- Данная книга сто́ит в том шкафу.
- Страница является частью книги.

Свойства и отношения являются признаками — т. е. тем, чем объекты сходны друг с другом и чем они отличаются друг от друга.

Суждения. Классы объектов

Говоря об объектах и их признаках, мы высказываем те или иные суждения:

Суждения. Классы объектов

Говоря об объектах и их признаках, мы высказываем те или иные суждения:

- Рост Ивана равен 180 см.
- Книга лежит в шкафу.

Суждения. Классы объектов

Говоря об объектах и их признаках, мы высказываем те или иные суждения:

- Рост Ивана равен 180 см.
- Книга лежит в шкафу.

Многие суждения относятся не к отдельным объектам, а к классам объектов, например:

Суждения. Классы объектов

Говоря об объектах и их признаках, мы высказываем те или иные суждения:

- Рост Ивана равен 180 см.
- Книга лежит в шкафу.

Многие суждения относятся не к отдельным объектам, а к классам объектов, например:

- Все волки — млекопитающие.
- Некоторые волки живут в зоопарке.
- Ни один человек не весит более тонны.

Понятие

Классы тесно связаны с такой формой представления знаний, как *понятие*.

Понятие

Классы тесно связаны с такой формой представления знаний, как *понятие*.

Понятие — это мысль, которая посредством указания на некоторый признак выделяет из окружающего мира и собирает в класс все объекты, обладающие этим признаком.

Понятие

Классы тесно связаны с такой формой представления знаний, как *понятие*.

Понятие — это мысль, которая посредством указания на некоторый признак выделяет из окружающего мира и собирает в класс все объекты, обладающие этим признаком.

Аналогично, суждение — это мысль, содержащая утверждение о наличии или отсутствии в действительности некоторой ситуации.

Абстрагирование. Идеализация

Для научного исследования характерно использование абстрактных понятий — «химический элемент», «масса», «геометрическая фигура».

Абстрагирование. Идеализация

Для научного исследования характерно использование абстрактных понятий — «химический элемент», «масса», «геометрическая фигура».

При введении таких понятий приходится отвлекаться (абстрагироваться) от многих признаков реальных объектов.

Абстрагирование. Идеализация

Для научного исследования характерно использование абстрактных понятий — «химический элемент», «масса», «геометрическая фигура».

При введении таких понятий приходится отвлекаться (абстрагироваться) от многих признаков реальных объектов.

Например, рассматривая объект как геометрическую фигуру, абстрагируются от его цвета, массы и т д., а интересуются лишь его формой и размерами.

Абстрагирование. Идеализация

Для научного исследования характерно использование абстрактных понятий — «химический элемент», «масса», «геометрическая фигура».

При введении таких понятий приходится отвлекаться (абстрагироваться) от многих признаков реальных объектов.

Например, рассматривая объект как геометрическую фигуру, абстрагируются от его цвета, массы и т д., а интересуются лишь его формой и размерами.

Помимо этого объекты при рассмотрении идеализируют.

Абстрагирование. Идеализация

Для научного исследования характерно использование абстрактных понятий — «химический элемент», «масса», «геометрическая фигура».

При введении таких понятий приходится отвлекаться (абстрагироваться) от многих признаков реальных объектов.

Например, рассматривая объект как геометрическую фигуру, абстрагируются от его цвета, массы и т д., а интересуются лишь его формой и размерами.

Помимо этого объекты при рассмотрении идеализируют.

Например, в геометрии отрезки считают бесконечно делимыми, отвлекаясь от того, что реальные тела состоят из атомов и не могут разделяться на сколь угодно малые части.

Абстрагирование. Идеализация

Для научного исследования характерно использование абстрактных понятий — «химический элемент», «масса», «геометрическая фигура».

При введении таких понятий приходится отвлекаться (абстрагироваться) от многих признаков реальных объектов.

Например, рассматривая объект как геометрическую фигуру, абстрагируются от его цвета, массы и т д., а интересуются лишь его формой и размерами.

Помимо этого объекты при рассмотрении идеализируют.

Например, в геометрии отрезки считают бесконечно делимыми, отвлекаясь от того, что реальные тела состоят из атомов и не могут разделяться на сколь угодно малые части.
При изучении свойств куба отвлекаются от того, что реальные тела не могут иметь идеально гладкую поверхность и равные рёбра.

Объём понятия. Обобщения. Частный случай.

Каждому понятию отвечает его объём, т. е. совокупность реальных и идеализированных объектов, охватываемых этим понятием.

Объём понятия. Обобщения. Частный случай.

Каждому понятию отвечает его объём, т. е. совокупность реальных и идеализированных объектов, охватываемых этим понятием.

Например, в понятие «слон» входят все слоны, как живущие сейчас на Земле, так и вымершие (и даже игрушечные).

Объём понятия. Обобщения. Частный случай.

Каждому понятию отвечает его объём, т. е. совокупность реальных и идеализированных объектов, охватываемых этим понятием.

Например, в понятие «слон» входят все слоны, как живущие сейчас на Земле, так и вымершие (и даже игрушечные).

Если объём одного понятия составляет часть объёма второго понятия, то второе понятие называют обобщением первого, а первое — частным случаем второго.

Объём понятия. Обобщения. Частный случай.

Каждому понятию отвечает его объём, т. е. совокупность реальных и идеализированных объектов, охватываемых этим понятием.

Например, в понятие «слон» входят все слоны, как живущие сейчас на Земле, так и вымершие (и даже игрушечные).

Если объём одного понятия составляет часть объёма второго понятия, то второе понятие называют обобщением первого, а первое — частным случаем второго.

Например, понятие «квадрат» — частный случай понятия «прямоугольник», а понятие «часть речи» — обобщение понятия «глагол».

Логика высказываний. Высказывания

Логика высказываний (пропозициональная логика) — это формальная теория, основным объектом которой служит понятие логического *высказывания.*

Логика высказываний. Высказывания

Логика высказываний (пропозициональная логика) — это формальная теория, основным объектом которой служит понятие логического *высказывания.*

Высказывание — повествовательное предложение какого-либо языка (естественного или искусственного) с зафиксированным смыслом (т. е. выражающее определённое суждение), рассматриваемое лишь с точки зрения того, *истинно* оно или *ложно*.

Логика высказываний. Высказывания

Логика высказываний (пропозициональная логика) — это формальная теория, основным объектом которой служит понятие логического *высказывания.*

Высказывание — повествовательное предложение какого-либо языка (естественного или искусственного) с зафиксированным смыслом (т. е. выражающее определённое суждение), рассматриваемое лишь с точки зрения того, *истинно* оно или *ложно*.
Таким образом каждому высказыванию соответствует известное истинностное значение.

Логика высказываний. Высказывания

Логика высказываний (пропозициональная логика) — это формальная теория, основным объектом которой служит понятие логического *высказывания.*

Высказывание — повествовательное предложение какого-либо языка (естественного или искусственного) с зафиксированным смыслом (т. е. выражающее определённое суждение), рассматриваемое лишь с точки зрения того, *истинно* оно или *ложно*.
Таким образом каждому высказыванию соответствует известное истинностное значение.

В традиционной двузначной логике рассматривается два истинностных значения: «истина» (1) и «ложь» (0).

Логика высказываний. Высказывания

Логика высказываний (пропозициональная логика) — это формальная теория, основным объектом которой служит понятие логического *высказывания.*

Высказывание — повествовательное предложение какого-либо языка (естественного или искусственного) с зафиксированным смыслом (т. е. выражающее определённое суждение), рассматриваемое лишь с точки зрения того, *истинно* оно или *ложно*.
Таким образом каждому высказыванию соответствует известное истинностное значение.

В традиционной двузначной логике рассматривается два истинностных значения: «истина» (1) и «ложь» (0).
Высказывание истинно тогда и только тогда, когда описываемая в нём ситуация имеет место в действительности, в противном случае оно считается ложным.

Упражнение

Найдите среди предложений логические высказывания и определите их истинностные значения.

1. Ж — буква русского алфавита.
2. Нью-Йорк — столица США.
3. $2 + 2 = 4$.
4. Который час?
5. Уходя, выключайте свет.
6. $\sqrt{25}$.
7. $x + 1 > 5$.
8. Москва — столица России.
9. $1 + 1 = 10$.

Простые и сложные высказывания

Высказывание называется простым или элементарным, если его нельзя разложить на части, которые также являются высказываниями.

Простые и сложные высказывания

Высказывание называется простым или элементарным, если его нельзя разложить на части, которые также являются высказываниями.

В противном случае оно называется сложным или составным.

Простые и сложные высказывания

Высказывание называется простым или элементарным, если его нельзя разложить на части, которые также являются высказываниями.

В противном случае оно называется сложным или составным.

Примеры составных высказываний

1. 5 — нечётное число, меньшее 10.
2. Если идёт дождь, то дорога мокрая.
3. $2 + 2 = 5$, а Пушкин — великий русский математик.

Пропозициональные переменные

Для формального логического анализа сложных высказываний необходимо абстрагироваться от того, о каких именно объектах идёт речь и что именно о них говорится.

Пропозициональные переменные

Для формального логического анализа сложных высказываний необходимо абстрагироваться от того, о каких именно объектах идёт речь и что именно о них говорится.

При этом нельзя упускать такую информацию, потеря которой может изменить истинность исследуемых высказываний.

Пропозициональные переменные

Для формального логического анализа сложных высказываний необходимо абстрагироваться от того, о каких именно объектах идёт речь и что именно о них говорится.

При этом нельзя упускать такую информацию, потеря которой может изменить истинность исследуемых высказываний.

При таком подходе понятие «простое высказывание» замещается понятием «пропозициональная переменная».

Пропозициональные переменные

Для формального логического анализа сложных высказываний необходимо абстрагироваться от того, о каких именно объектах идёт речь и что именно о них говорится.

При этом нельзя упускать такую информацию, потеря которой может изменить истинность исследуемых высказываний.

При таком подходе понятие «простое высказывание» замещается понятием «пропозициональная переменная».

Область значений таких переменных состоит из всевозможных высказываний.

Пропозициональные переменные

Для формального логического анализа сложных высказываний необходимо абстрагироваться от того, о каких именно объектах идёт речь и что именно о них говорится.

При этом нельзя упускать такую информацию, потеря которой может изменить истинность исследуемых высказываний.

При таком подходе понятие «простое высказывание» замещается понятием «пропозициональная переменная».

Область значений таких переменных состоит из всевозможных высказываний.

Пропозициональные переменные будем обозначать заглавными латинскими буквами A, B, C и т. д., возможно с индексами, например X_2.

Пропозициональные переменные

Для формального логического анализа сложных высказываний необходимо абстрагироваться от того, о каких именно объектах идёт речь и что именно о них говорится.

При этом нельзя упускать такую информацию, потеря которой может изменить истинность исследуемых высказываний.

При таком подходе понятие «простое высказывание» замещается понятием «пропозициональная переменная».

Область значений таких переменных состоит из всевозможных высказываний.

Пропозициональные переменные будем обозначать заглавными латинскими буквами A, B, C и т. д., возможно с индексами, например X_2.

После такого абстрагирования от высказывания остаётся лишь его логическая форма.

Примеры

Пример 1

Пусть A — «Марс — планета Солнечной системы»,
B — «У прямоугольного треугольника все стороны равны».
Тогда $A = 1$, а $B = 0$.

Примеры

Пример 1

Пусть A — «Марс — планета Солнечной системы»,
B — «У прямоугольного треугольника все стороны равны».
Тогда $A = 1$, а $B = 0$.

Пример 2

Пусть P — на улице идёт дождь,
Q — дорога мокрая.
Тогда высказыванию
«Если на улице идёт дождь, то дорога мокрая»
соответствует логическая форма «Если P, то Q».

Пропозициональные связки

Сложные высказывания строятся из простых с помощью пропозициональных связок «$\&$», «$\vee$», «$\rightarrow$», «$\leftrightarrow$», «$\overline{}$»:

Пропозициональные связки

Сложные высказывания строятся из простых с помощью пропозициональных связок «&», «$\vee$», «$\rightarrow$», «$\leftrightarrow$», «$\overline{}$»:

$$A \mathbin{\&} B, \quad A \vee B, \quad A \rightarrow B, \quad A \leftrightarrow B, \quad \overline{A}.$$

Пропозициональные связки

Сложные высказывания строятся из простых с помощью пропозициональных связок «$\&$», «$\vee$», «$\to$», «$\leftrightarrow$», «$\overline{}$»:

$$A \,\&\, B, \quad A \vee B, \quad A \to B, \quad A \leftrightarrow B, \quad \overline{A}.$$

Связь, выраженная с помощью пропозициональных связок, предполагается не обязательно по смыслу, а берётся только по истинностному значению.

Конъюнкция

Связка «&» соответствует союзам «и», «а», «но» естественного языка и называется конъюнкцией.

Конъюнкция

Связка «&» соответствует союзам «и», «а», «но» естественного языка и называется конъюнкцией.

Пример

Пусть A — «Число 10 делится на 2»,
B — «Число 10 делится на 5».
Тогда $A \,\&\, B$ — «Число 10 делится на 2 и на 5».

Конъюнкция

Связка «&» соответствует союзам «и», «а», «но» естественного языка и называется конъюнкцией.

Пример

Пусть A — «Число 10 делится на 2»,
B — «Число 10 делится на 5».
Тогда $A \,\&\, B$ — «Число 10 делится на 2 и на 5».

Сложное высказывание, образованное из простых с помощью конъюнкции, истинно только в том случае, когда все составляющие его высказывания истинны. В других случаях оно ложно.

Конъюнкция

Связка «&» соответствует союзам «и», «а», «но» естественного языка и называется конъюнкцией.

Пример

Пусть A — «Число 10 делится на 2»,
B — «Число 10 делится на 5».
Тогда $A \,\&\, B$ — «Число 10 делится на 2 и на 5».

Сложное высказывание, образованное из простых с помощью конъюнкции, истинно только в том случае,
когда все составляющие его высказывания истинны.
В других случаях оно ложно.

В приведённом примере $A \,\&\, B = 1$.

Конъюнкция

Связка «&» соответствует союзам «и», «а», «но» естественного языка и называется конъюнкцией.

Пример

Пусть A — «Число 10 делится на 2»,
B — «Число 10 делится на 5».
Тогда $A \,\&\, B$ — «Число 10 делится на 2 и на 5».

Сложное высказывание, образованное из простых с помощью конъюнкции, истинно только в том случае,
когда все составляющие его высказывания истинны.
В других случаях оно ложно.

В приведённом примере $A \,\&\, B = 1$.

Другие обозначения: $A \wedge B$, $A \cdot B$, AB.

Амперсанд

Амперсанд, «&», использующийся для обозначения конъюнкции, является графическим сокращением (лигатурой) латинского союза «et» (и) — это хорошо видно на изображении амперсанда в некоторых шрифтах:

Амперсанд

Амперсанд, «&», использующийся для обозначения конъюнкции, является графическим сокращением (лигатурой) латинского союза «et» (и) — это хорошо видно на изображении амперсанда в некоторых шрифтах:

Амперсанд

Амперсанд, «&», использующийся для обозначения конъюнкции, является графическим сокращением (лигатурой) латинского союза «et» (и) — это хорошо видно на изображении амперсанда в некоторых шрифтах:

К началу XIX века знак «&» вошёл в английский алфавит. Он шёл последним, про него говорили: «and, per se and» (и, сама по себе «и»). В 1837 г. в английских словарях было зафиксировано слово «ampersand».

Дизъюнкция

Связка «$\vee$» соответствует союзам «или», «либо» и называется дизъюнкцией.

Дизъюнкция

Связка «$\vee$» соответствует союзам «или», «либо» и называется дизъюнкцией.

Пример

Пусть A — «Зачёт можно получить, выполнив все задания из части 1», B — «Зачёт можно получить, выполнив одно из заданий из части 2».

Тогда $A \vee B$ — «Зачёт можно получить, выполнив все задания из части 1 или одно из заданий части 2».

Дизъюнкция

Связка «$\vee$» соответствует союзам «или», «либо» и называется дизъюнкцией.

Пример

Пусть A — «Зачёт можно получить, выполнив все задания из части 1», B — «Зачёт можно получить, выполнив одно из заданий из части 2».

Тогда $A \vee B$ — «Зачёт можно получить, выполнив все задания из части 1 или одно из заданий части 2».

Сложное высказывание, образованное из простых с помощью дизъюнкции, истинно, когда хотя бы одно из составляющих его высказываний истинно.
Ложно оно только в том случае, когда все составляющие его высказывания ложны.

Дизъюнкция

Связка «$\vee$» соответствует союзам «или», «либо» и называется дизъюнкцией.

Пример

Пусть A — «Зачёт можно получить, выполнив все задания из части 1»,
B — «Зачёт можно получить, выполнив одно из заданий из части 2».

Тогда $A \vee B$ — «Зачёт можно получить, выполнив все задания из части 1 или одно из заданий части 2».

Сложное высказывание, образованное из простых с помощью дизъюнкции, истинно, когда хотя бы одно из составляющих его высказываний истинно.
Ложно оно только в том случае, когда все составляющие его высказывания ложны.

Другие обозначения: $A + B$, $A \mid B$.

Соединительно-разъединительная и исключающая дизъюнкции

Под связкой «$\vee$» будем понимать соединительно-разъединительную дизъюнкцию, обозначающую союз «или» в неисключающем смысле ($A \vee B$ — «или A, или B, или то и другое вместе», т. е. истинность одного высказывания не исключает истинности другого).

Соединительно-разъединительная и исключающая дизъюнкции

Под связкой «$\vee$» будем понимать соединительно-разъединительную дизъюнкцию, обозначающую союз «или» в неисключающем смысле ($A \vee B$ — «или A, или B, или то и другое вместе», т. е. истинность одного высказывания не исключает истинности другого).

Кстати, обозначение «$\vee$» (клин) — первая буква латинского союза «vel» (или).

Соединительно-разъединительная и исключающая дизъюнкции

Под связкой «$\vee$» будем понимать соединительно-разъединительную дизъюнкцию, обозначающую союз «или» в неисключающем смысле ($A \vee B$ — «или A, или B, или то и другое вместе», т. е. истинность одного высказывания не исключает истинности другого).

Кстати, обозначение «$\vee$» (клин) — первая буква латинского союза «vel» (или).

Исключающую (строгую) дизъюнкцию $A \oplus B$ («либо A, либо B») использовать не будем, заменим её на $(A \vee B) \,\&\, \overline{A \,\&\, B}$ или на $\overline{A \leftrightarrow B}$.

Импликация

Связка «$\rightarrow$» выражает причинно-следственную связь между двумя высказываниями и называется импликацией.

Импликация

Связка «→» выражает причинно-следственную связь между двумя высказываниями и называется импликацией.

Сложное высказывание, образованное из двух простых с помощью импликации, называется условным.

Импликация

Связка «$\to$» выражает причинно-следственную связь между двумя высказываниями и называется импликацией.

Сложное высказывание, образованное из двух простых с помощью импликации, называется условным.

В условном высказывании $A \to B$ высказывание A называется антецедентом, а высказывание B — консеквентом.

Импликация

Связка «$\to$» выражает причинно-следственную связь между двумя высказываниями и называется импликацией.

Сложное высказывание, образованное из двух простых с помощью импликации, называется условным.

В условном высказывании $A \to B$ высказывание A называется антецедентом, а высказывание B — консеквентом.

Условное высказывание ложно только в том случае, когда его антецедент истинен, а консеквент ложен
(«из истины не может следовать ложь»).
В остальных случаях оно истинно
(«из истины может следовать только истина»,
«из лжи может следовать всё что угодно»).

Импликация

Запись $A \to B$ соответствует логическим формам «если A, то B», «A, следовательно B», «A влечёт B», «B, если A», «при наличии A следует B», «B при условии, что A».

Импликация

Запись $A \to B$ соответствует логическим формам «если A, то B», «A, следовательно B», «A влечёт B», «B, если A», «при наличии A следует B», «B при условии, что A».

Пример

Пусть A — «По проводу идёт ток»,
B — «Провод нагревается».
Тогда $A \to B$ — «Если по проводу идёт ток, то провод нагревается».

Импликация

Запись $A \to B$ соответствует логическим формам «если A, то B», «A, следовательно B», «A влечёт B», «B, если A», «при наличии A следует B», «B при условии, что A».

Пример

Пусть A — «По проводу идёт ток»,
B — «Провод нагревается».
Тогда $A \to B$ — «Если по проводу идёт ток, то провод нагревается».

Другие обозначения: $A \Rightarrow B$, $A \supset B$.

Скрытая импликация

Союз «и» также будет соответствовать импликации, а не конъюнкции, если им выражается причинно-следственная связь.

Скрытая импликация

Союз «и» также будет соответствовать импликации, а не конъюнкции, если им выражается причинно-следственная связь.

Пример

Сравните: «Он испугался и выстрелил» и «Он выстрелил и испугался».

Эквивалентность

Связка «$\leftrightarrow$» называется эквивалентностью.

Эквивалентность

Связка «$\leftrightarrow$» называется эквивалентностью.
Запись $A \leftrightarrow B$ соответствует высказываниям «A тогда и только тогда, когда B», «A равносильно B», «Для A необходимо и достаточно B», «A, если и только если B».

Эквивалентность

Связка «$\leftrightarrow$» называется эквивалентностью.
Запись $A \leftrightarrow B$ соответствует высказываниям «A тогда и только тогда, когда B», «A равносильно B», «Для A необходимо и достаточно B», «A, если и только если B».

Пример

Пусть A — «Четырёхугольник является прямоугольником»,
B — «Все углы четырёхугольника равны 90°».
Тогда $A \leftrightarrow B$ — «Четырёхугольник является прямоугольником тогда и только тогда, когда все его углы равны 90°».

Эквивалентность

Связка «$\leftrightarrow$» называется эквивалентностью.
Запись $A \leftrightarrow B$ соответствует высказываниям «A тогда и только тогда, когда B», «A равносильно B», «Для A необходимо и достаточно B», «A, если и только если B».

Пример

Пусть A — «Четырёхугольник является прямоугольником»,
B — «Все углы четырёхугольника равны 90°».
Тогда $A \leftrightarrow B$ — «Четырёхугольник является прямоугольником тогда и только тогда, когда все его углы равны 90°».

Сложное высказывание, образованное с помощью эквивалентности, истинно только в том случае, когда истинностные значения входящих в него простых высказываний равны. В противном случае оно ложно.

Эквивалентность

Связка «$\leftrightarrow$» называется эквивалентностью.
Запись $A \leftrightarrow B$ соответствует высказываниям «A тогда и только тогда, когда B», «A равносильно B», «Для A необходимо и достаточно B», «A, если и только если B».

Пример

Пусть A — «Четырёхугольник является прямоугольником»,
B — «Все углы четырёхугольника равны 90°».
Тогда $A \leftrightarrow B$ — «Четырёхугольник является прямоугольником тогда и только тогда, когда все его углы равны 90°».

Сложное высказывание, образованное с помощью эквивалентности, истинно только в том случае, когда истинностные значения входящих в него простых высказываний равны. В противном случае оно ложно.

Другие обозначения: $A \Leftrightarrow B$, $A \sim B$, $A \equiv B$, $A = B$.

Отрицание

Связка «$\overline{A}$» понимается как «не A», «не верно, что A», «A не имеет места» и называется отрицанием высказывания A.

Отрицание

Связка «$\overline{A}$» понимается как «не A», «не верно, что A», «A не имеет места» и называется отрицанием высказывания A.

Пример

Если A — «Автомобиль новый»,
то $\overline{A}$ — «Автомобиль не новый».

Отрицание

Связка «$\overline{A}$» понимается как «не A», «не верно, что A», «A не имеет места» и называется отрицанием высказывания A.

Пример

Если A — «Автомобиль новый»,
то $\overline{A}$ — «Автомобиль не новый».

В классической математической логике считается, что высказывание $\overline{A}$ ложно, когда высказывание A истинно, и истинно, когда высказывание A ложно.

Отрицание

Связка «$\overline{A}$» понимается как «не A», «не верно, что A», «A не имеет места» и называется отрицанием высказывания A.

Пример

Если A — «Автомобиль новый»,
то $\overline{A}$ — «Автомобиль не новый».

В классической математической логике считается, что высказывание $\overline{A}$ ложно, когда высказывание A истинно, и истинно, когда высказывание A ложно.

Другие обозначения: $\neg A$, A'.

Логические законы

Сложные высказывания, истинные при любых истинностных значениях входящих в них простых высказываний, называют тавтологиями.

Логические законы

Сложные высказывания, истинные при любых истинностных значениях входящих в них простых высказываний, называют тавтологиями.

Например, высказывание «Сегодня идёт дождь или не идёт» является тавтологией.

Логические законы

Сложные высказывания, истинные при любых истинностных значениях входящих в них простых высказываний, называют тавтологиями.

Например, высказывание «Сегодня идёт дождь или не идёт» является тавтологией.

Сами же логические формы таких высказываний называют логическими законами.

Основные законы логики

Логику называют классической, если она основывается на следующих четырёх законах:

Основные законы логики

Логику называют классической, если она основывается на следующих четырёх законах:

1. Закон тождества: каждое высказывание при повторении должно иметь одно и тоже определённое устойчивое содержание.

Основные законы логики

Логику называют классической, если она основывается на следующих четырёх законах:

1. Закон тождества: каждое высказывание при повторении должно иметь одно и тоже определённое устойчивое содержание.
2. Закон (запрета) противоречия: любое высказывание и его отрицание об одном и том же вместе не могут быть истинными.

Основные законы логики

Логику называют классической, если она основывается на следующих четырёх законах:

1. Закон тождества: каждое высказывание при повторении должно иметь одно и тоже определённое устойчивое содержание.
2. Закон (запрета) противоречия: любое высказывание и его отрицание об одном и том же вместе не могут быть истинными.
3. Закон исключённого третьего: либо данное высказывание ложно, либо его отрицание ложно, третьего не дано.

Основные законы логики

Логику называют классической, если она основывается на следующих четырёх законах:

1. Закон тождества: каждое высказывание при повторении должно иметь одно и тоже определённое устойчивое содержание.
2. Закон (запрета) противоречия: любое высказывание и его отрицание об одном и том же вместе не могут быть истинными.
3. Закон исключённого третьего: либо данное высказывание ложно, либо его отрицание ложно, третьего не дано.
4. Закон достаточного основания: всякое истинное высказывание должно быть обосновано другими высказываниями, истинность которых доказана.

Основные законы логики

Логику называют классической, если она основывается на следующих четырёх законах:

1. Закон тождества: каждое высказывание при повторении должно иметь одно и тоже определённое устойчивое содержание.
2. Закон (запрета) противоречия: любое высказывание и его отрицание об одном и том же вместе не могут быть истинными.
3. Закон исключённого третьего: либо данное высказывание ложно, либо его отрицание ложно, третьего не дано.
4. Закон достаточного основания: всякое истинное высказывание должно быть обосновано другими высказываниями, истинность которых доказана.

Если какой-либо из перечисленных законов не выполняется, то логику называют неклассической.