Математическая логика и теория алгоритмов
Лекция 7
Введение в формальные теории

Куценко Дмитрий Александрович

Белгородский государственный технологический университет
имени В. Г. Шухова

Институт информационных технологий и управляющих систем

Кафедра программного обеспечения вычислительной техники
и автоматизированных систем

25 марта 2013 г.

Эффективные процедуры

Пусть заданы элементы некоторого множества $\mathscr{M}$, часть из которых может обладать некоторым свойством U.

Эффективные процедуры

Пусть заданы элементы некоторого множества $\mathscr{M}$, часть из которых может обладать некоторым свойством U.

Будем считать, что задана эффективная процедура, если:

Эффективные процедуры

Пусть заданы элементы некоторого множества $\mathscr{M}$, часть из которых может обладать некоторым свойством U.

Будем считать, что задана эффективная процедура, если:

1. есть предписание, определяющее последовательность преобразований, которые надо применять одно за другим к элементу из $\mathscr{M}$;

Эффективные процедуры

Пусть заданы элементы некоторого множества $\mathscr{M}$, часть из которых может обладать некоторым свойством U.

Будем считать, что задана эффективная процедура, если:

1. есть предписание, определяющее последовательность преобразований, которые надо применять одно за другим к элементу из $\mathscr{M}$;
2. если элемент x из $\mathscr{M}$ задан, предписание однозначно определяет такую последовательность преобразований, которая за конечное число шагов позволяет выяснить, обладает x свойством U или нет.

Эффективные процедуры

Пусть заданы элементы некоторого множества $\mathscr{M}$, часть из которых может обладать некоторым свойством U.

Будем считать, что задана эффективная процедура, если:

1. есть предписание, определяющее последовательность преобразований, которые надо применять одно за другим к элементу из $\mathscr{M}$;
2. если элемент x из $\mathscr{M}$ задан, предписание однозначно определяет такую последовательность преобразований, которая за конечное число шагов позволяет выяснить, обладает x свойством U или нет.

Иными словами, если задана эффективная процедура, то для любого элемента из $\mathscr{M}$ за конечное число шагов выясняем, обладает заданный элемент свойством U или нет.

Пример эффективной процедуры

Пусть $\mathscr{M} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Пример эффективной процедуры

Пусть $\mathscr{M} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Пусть $U(x)$ — «Число x — квадрат какого-либо числа из $\mathscr{M}$».

Пример эффективной процедуры

Пусть $\mathscr{M} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Пусть $U(x)$ — «Число x — квадрат какого-либо числа из $\mathscr{M}$».

Эффективной процедурой для выяснения, обладает ли элемент x из $\mathscr{M}$ свойством U, может быть следующая:

Пример эффективной процедуры

Пусть $\mathscr{M} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Пусть $U(x)$ — «Число x — квадрат какого-либо числа из $\mathscr{M}$».

Эффективной процедурой для выяснения, обладает ли элемент x из $\mathscr{M}$ свойством U, может быть следующая:

> Берём последовательно $a = 1, \ldots, (x-1)$ и проверяем, выполняется равенство $a^2 = x$ или нет.

Пример эффективной процедуры

Пусть $\mathscr{M} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Пусть $U(x)$ — «Число x — квадрат какого-либо числа из $\mathscr{M}$».

Эффективной процедурой для выяснения, обладает ли элемент x из $\mathscr{M}$ свойством U, может быть следующая:

Берём последовательно $a = 1, \dots, (x-1)$ и проверяем, выполняется равенство $a^2 = x$ или нет.

Очевидно, что таким образом мы всегда сможем выяснить для любого x за конечное число шагов, обладает ли x свойством U.

Полуэффективные процедуры

В отличие от эффективной процедуры полуэффективной процедурой считается некоторая процедура, которая не всегда позволяет для произвольного элемента x из $\mathscr{M}$ за конечное число шагов выяснить, обладает x свойством U или нет.

Полуэффективные процедуры

В отличие от эффективной процедуры полуэффективной процедурой считается некоторая процедура, которая не всегда позволяет для произвольного элемента x из $\mathscr{M}$ за конечное число шагов выяснить, обладает x свойством U или нет.

Точнее будем считать, что полуэффективная процедура задана, если выполняется вышеуказанное условие 1, а вместо условия 2 используется следующее:

Полуэффективные процедуры

В отличие от эффективной процедуры полуэффективной процедурой считается некоторая процедура, которая не всегда позволяет для произвольного элемента x из $\mathscr{M}$ за конечное число шагов выяснить, обладает x свойством U или нет.

Точнее будем считать, что полуэффективная процедура задана, если выполняется вышеуказанное условие 1, а вместо условия 2 используется следующее:

2. если элемент x из $\mathscr{M}$ задан, предписание однозначно определяет такую последовательность преобразований, что если x обладает свойством U, то это можно выяснить за конечное число шагов; если же x не обладает свойством U, то, возможно, это нельзя выяснить за конечное число шагов.

Пример полуэффективной процедуры

Пусть $\mathscr{M}$ — множество положительных рациональных чисел.

Пример полуэффективной процедуры

Пусть $\mathscr{M}$ — множество положительных рациональных чисел.

Пусть $V(x)$ — «$\sqrt{x}$ — положительное рациональное число».

Пример полуэффективной процедуры

Пусть $\mathscr{M}$ — множество положительных рациональных чисел.

Пусть $V(x)$ — «$\sqrt{x}$ — положительное рациональное число».

Полуэффективной процедурой для выяснения, обладает ли элемент x из $\mathscr{M}$ свойством V, может быть следующая:

Пример полуэффективной процедуры

Пусть $\mathscr{M}$ — множество положительных рациональных чисел.

Пусть $V(x)$ — «$\sqrt{x}$ — положительное рациональное число».

Полуэффективной процедурой для выяснения, обладает ли элемент x из $\mathscr{M}$ свойством V, может быть следующая:

Берём последовательно $a = 1, 2, 3, \ldots$, затем последовательно берём $b = 1, \ldots, a$ и проверяем, выполняется или нет хотя бы одно из равенств

$$x = \frac{a^2}{b^2}, \quad x = \frac{b^2}{a^2}.$$

Пример полуэффективной процедуры

Пусть $\mathscr{M}$ — множество положительных рациональных чисел.

Пусть $V(x)$ — «$\sqrt{x}$ — положительное рациональное число».

Полуэффективной процедурой для выяснения, обладает ли элемент x из $\mathscr{M}$ свойством V, может быть следующая:

Берём последовательно $a = 1, 2, 3, \ldots$, затем последовательно берём $b = 1, \ldots, a$ и проверяем, выполняется или нет хотя бы одно из равенств

$$x = \frac{a^2}{b^2}, \quad x = \frac{b^2}{a^2}.$$

Например, для $x = \frac{441}{1369}$ вышеуказанная процедура завершится за конечное число шагов (при $a = 37$, $b = 21$), а для $x = \frac{1}{2}$ — нет.

Дедукция и индукция

Дедукция — форма мышления, когда заключение выводится по правилам логики из некоторых данных посылок.

Дедукция и индукция

Дедукция — форма мышления, когда заключение выводится по правилам логики из некоторых данных посылок.

Пример дедуктивного рассуждения

Все люди смертны. Сократ — человек. Следовательно, Сократ смертен.

Дедукция и индукция

Дедукция — форма мышления, когда заключение выводится по правилам логики из некоторых данных посылок.

Пример дедуктивного рассуждения

Все люди смертны. Сократ — человек. Следовательно, Сократ смертен.

Индукция — форма мышления, посредством которой от некоторых фактов или истинных высказываний переходят к некоторой гипотезе (общему утверждению).

Дедукция и индукция

Дедукция — форма мышления, когда заключение выводится по правилам логики из некоторых данных посылок.

Пример дедуктивного рассуждения

Все люди смертны. Сократ — человек. Следовательно, Сократ смертен.

Индукция — форма мышления, посредством которой от некоторых фактов или истинных высказываний переходят к некоторой гипотезе (общему утверждению).

Пример индуктивного рассуждения 1

График функции $y = 2x + 3$ — прямая, график функции $y = 3x + 1$ — прямая, следовательно, график функции вида $y = kx + b$ — прямая.

Дедукция и индукция

Дедукция — форма мышления, когда заключение выводится по правилам логики из некоторых данных посылок.

Пример дедуктивного рассуждения

Все люди смертны. Сократ — человек. Следовательно, Сократ смертен.

Индукция — форма мышления, посредством которой от некоторых фактов или истинных высказываний переходят к некоторой гипотезе (общему утверждению).

Пример индуктивного рассуждения 1

График функции $y = 2x + 3$ — прямая, график функции $y = 3x + 1$ — прямая, следовательно, график функции вида $y = kx + b$ — прямая.
Полученная здесь гипотеза оказывается истинной.

Дедукция и индукция (продолжение)

Пример индуктивного рассуждения 2

Рассмотрим предположение Ферма, что числа $p = 2^{2^n} + 1$ являются простыми для всех $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Дедукция и индукция (продолжение)

Пример индуктивного рассуждения 2

Рассмотрим предположение Ферма, что числа $p = 2^{2^n} + 1$ являются простыми для всех $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

При $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ Ферма получил соответственно простые числа $p = 3,\ 5,\ 17,\ 257,\ 65\,537$.

Дедукция и индукция (продолжение)

Пример индуктивного рассуждения 2

Рассмотрим предположение Ферма, что числа $p = 2^{2^n} + 1$ являются простыми для всех $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
При $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ Ферма получил соответственно простые числа $p = 3,\ 5,\ 17,\ 257,\ 65\,537$.
Но Эйлер показал, что при $n = 5$ получается число $p = 4\,294\,967\,297$, которое делится на 641.

Дедукция и индукция (продолжение)

Пример индуктивного рассуждения 2

Рассмотрим предположение Ферма, что числа $p = 2^{2^n} + 1$ являются простыми для всех $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

При $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ Ферма получил соответственно простые числа $p = 3,\ 5,\ 17,\ 257,\ 65\,537$.

Но Эйлер показал, что при $n = 5$ получается число $p = 4\,294\,967\,297$, которое делится на 641.

Замечание

Заключение, полученное дедуктивным способом, уже не нуждается в доказательстве, а заключение, полученное индуктивным способом, требует доказательства своей истинности.

Формальные теории

Формальная теория — результат строгой формализации теории, предполагающей полную абстракцию от смысла слов используемого языка, причём все условия, регулирующие употребление этих слов в теории, явно высказаны посредством аксиом и правил, позволяющих вывести одну фразу из других.

Формальные теории

Формальная теория — результат строгой формализации теории, предполагающей полную абстракцию от смысла слов используемого языка, причём все условия, регулирующие употребление этих слов в теории, явно высказаны посредством аксиом и правил, позволяющих вывести одну фразу из других. Формальная теория считается определённой, если:

Формальные теории

Формальная теория — результат строгой формализации теории, предполагающей полную абстракцию от смысла слов используемого языка, причём все условия, регулирующие употребление этих слов в теории, явно высказаны посредством аксиом и правил, позволяющих вывести одну фразу из других. Формальная теория считается определённой, если:

1. Задано конечное или счётное множество произвольных символов, называемое алфавитом теории.

Формальные теории

Формальная теория — результат строгой формализации теории, предполагающей полную абстракцию от смысла слов используемого языка, причём все условия, регулирующие употребление этих слов в теории, явно высказаны посредством аксиом и правил, позволяющих вывести одну фразу из других.

Формальная теория считается определённой, если:

1. Задано конечное или счётное множество произвольных символов, называемое алфавитом теории.
   Конечные последовательности символов называются выражениями теории.

Формальные теории

Формальная теория — результат строгой формализации теории, предполагающей полную абстракцию от смысла слов используемого языка, причём все условия, регулирующие употребление этих слов в теории, явно высказаны посредством аксиом и правил, позволяющих вывести одну фразу из других.
Формальная теория считается определённой, если:

1. Задано конечное или счётное множество произвольных символов, называемое алфавитом теории.
   Конечные последовательности символов называются выражениями теории.
2. Имеется подмножество выражений, называемых формулами.

Формальные теории

Формальная теория — результат строгой формализации теории, предполагающей полную абстракцию от смысла слов используемого языка, причём все условия, регулирующие употребление этих слов в теории, явно высказаны посредством аксиом и правил, позволяющих вывести одну фразу из других.
Формальная теория считается определённой, если:

1. Задано конечное или счётное множество произвольных символов, называемое алфавитом теории.
   Конечные последовательности символов называются выражениями теории.
2. Имеется подмножество выражений, называемых формулами.
3. Выделено подмножество формул, называемых аксиомами.

Формальные теории

Формальная теория — результат строгой формализации теории, предполагающей полную абстракцию от смысла слов используемого языка, причём все условия, регулирующие употребление этих слов в теории, явно высказаны посредством аксиом и правил, позволяющих вывести одну фразу из других. Формальная теория считается определённой, если:

1. Задано конечное или счётное множество произвольных символов, называемое алфавитом теории. Конечные последовательности символов называются выражениями теории.
2. Имеется подмножество выражений, называемых формулами.
3. Выделено подмножество формул, называемых аксиомами.
4. Имеется конечное множество отношений между формулами, называемых правилами вывода.

Формальные теории (продолжение)

Обычно имеется эффективная процедура, позволяющая по данному выражению определить, является ли оно формулой.

Формальные теории (продолжение)

Обычно имеется эффективная процедура, позволяющая по данному выражению определить, является ли оно формулой.

Часто множество формул задаётся индуктивным определением. Как правило, это множество бесконечно.

Формальные теории (продолжение)

Обычно имеется эффективная процедура, позволяющая по данному выражению определить, является ли оно формулой.

Часто множество формул задаётся индуктивным определением. Как правило, это множество бесконечно.

Множество символов и множество формул в совокупности определяют язык формальной теории.

Формальные теории (продолжение)

Обычно имеется эффективная процедура, позволяющая по данному выражению определить, является ли оно формулой.

Часто множество формул задаётся индуктивным определением. Как правило, это множество бесконечно.

Множество символов и множество формул в совокупности определяют язык формальной теории.

Чаще всего имеется возможность эффективно выяснять, является ли данная формула аксиомой; в таком случае теория называется аксиоматической.

Формальные теории (продолжение)

Обычно имеется эффективная процедура, позволяющая по данному выражению определить, является ли оно формулой.

Часто множество формул задаётся индуктивным определением. Как правило, это множество бесконечно.

Множество символов и множество формул в совокупности определяют язык формальной теории.

Чаще всего имеется возможность эффективно выяснять, является ли данная формула аксиомой; в таком случае теория называется аксиоматической.

Множество аксиом может быть конечным или бесконечным.

Формальные теории (продолжение)

Обычно имеется эффективная процедура, позволяющая по данному выражению определить, является ли оно формулой.

Часто множество формул задаётся индуктивным определением. Как правило, это множество бесконечно.

Множество символов и множество формул в совокупности определяют язык формальной теории.

Чаще всего имеется возможность эффективно выяснять, является ли данная формула аксиомой; в таком случае теория называется аксиоматической.

Множество аксиом может быть конечным или бесконечным.

Если множество аксиом бесконечно, то, как правило, оно задаётся с помощью конечного числа схем аксиом и правил порождения конкретных аксиом из схемы аксиом.

Формальные теории (окончание)

Обычно аксиомы делятся на два вида:

Формальные теории (окончание)

Обычно аксиомы делятся на два вида:

1. логические аксиомы — общие для целого класса формальных теорий;

Формальные теории (окончание)

Обычно аксиомы делятся на два вида:

1. логические аксиомы — общие для целого класса формальных теорий;
2. нелогические или собственные аксиомы — определяют специфику и содержание конкретной теории.

Формальные теории (окончание)

Обычно аксиомы делятся на два вида:

1. логические аксиомы — общие для целого класса формальных теорий;
2. нелогические или собственные аксиомы — определяют специфику и содержание конкретной теории.

Для каждого правила вывода R и для каждой формулы $\mathfrak{A}$ эффективно решается вопрос о том, находится ли выбранный набор формул $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ в отношении R с формулой $\mathfrak{A}$, и если да, то $\mathfrak{A}$ называется непосредственным следствием данных формул по правилу R:

Формальные теории (окончание)

Обычно аксиомы делятся на два вида:

1. логические аксиомы — общие для целого класса формальных теорий;
2. нелогические или собственные аксиомы — определяют специфику и содержание конкретной теории.

Для каждого правила вывода R и для каждой формулы $\mathfrak{A}$ эффективно решается вопрос о том, находится ли выбранный набор формул $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ в отношении R с формулой $\mathfrak{A}$, и если да, то $\mathfrak{A}$ называется непосредственным следствием данных формул по правилу R:

$$\frac{\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n}{\mathfrak{A}}(\mathrm{R}).$$

Выводимость

Выводом формулы $\mathfrak{A}$ из формул $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ называется всякая последовательность формул $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_k$, в которой $\mathfrak{C}_k = \mathfrak{A}$, каждая формула $\mathfrak{C}_i$ $\big(i = 1, \ldots, (k-1)\big)$ — либо аксиома, либо одна из $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$, либо непосредственное следствие предшествующих формул по одному из правил вывода.

Выводимость

Выводом формулы $\mathfrak{A}$ из формул $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ называется всякая последовательность формул $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_k$, в которой $\mathfrak{C}_k = \mathfrak{A}$, каждая формула $\mathfrak{C}_i$ $\big(i = 1, \ldots, (k-1)\big)$ — либо аксиома, либо одна из $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$, либо непосредственное следствие предшествующих формул по одному из правил вывода.

Если в теории существует вывод формулы $\mathfrak{A}$ из формул $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$, то говорят, что $\mathfrak{A}$ выводима из $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$:

Выводимость

Выводом формулы $\mathfrak{A}$ из формул $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ называется всякая последовательность формул $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_k$, в которой $\mathfrak{C}_k = \mathfrak{A}$, каждая формула $\mathfrak{C}_i$ $\big(i = 1, \ldots, (k-1)\big)$ — либо аксиома, либо одна из $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$, либо непосредственное следствие предшествующих формул по одному из правил вывода.
Если в теории существует вывод формулы $\mathfrak{A}$ из формул $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$, то говорят, что $\mathfrak{A}$ выводима из $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$:

$$\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n \vdash \mathfrak{A}.$$

Выводимость

Выводом формулы $\mathfrak{A}$ из формул $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ называется всякая последовательность формул $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_k$, в которой $\mathfrak{C}_k = \mathfrak{A}$, каждая формула $\mathfrak{C}_i$ $\big(i = 1, \ldots, (k-1)\big)$ — либо аксиома, либо одна из $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$, либо непосредственное следствие предшествующих формул по одному из правил вывода.

Если в теории существует вывод формулы $\mathfrak{A}$ из формул $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$, то говорят, что $\mathfrak{A}$ выводима из $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$:

$$\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n \vdash \mathfrak{A}.$$

Формулы $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ называют гипотезами (или посылками) вывода.

Выводимость

Выводом формулы $\mathfrak{A}$ из формул $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ называется всякая последовательность формул $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_k$, в которой $\mathfrak{C}_k = \mathfrak{A}$, каждая формула $\mathfrak{C}_i$ $\big(i = 1, \ldots, (k-1)\big)$ — либо аксиома, либо одна из $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$, либо непосредственное следствие предшествующих формул по одному из правил вывода.
Если в теории существует вывод формулы $\mathfrak{A}$ из формул $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$, то говорят, что $\mathfrak{A}$ выводима из $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$:

$$\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n \vdash \mathfrak{A}.$$

Формулы $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ называют гипотезами (или посылками) вывода.
Формула $\mathfrak{A}$ называется теоремой, если она выводима из пустого множества гипотез (т. е. только из аксиом):

Выводимость

Выводом формулы $\mathfrak{A}$ из формул $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ называется всякая последовательность формул $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_k$, в которой $\mathfrak{C}_k = \mathfrak{A}$, каждая формула $\mathfrak{C}_i$ $\big(i = 1, \ldots, (k-1)\big)$ — либо аксиома, либо одна из $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$, либо непосредственное следствие предшествующих формул по одному из правил вывода.
Если в теории существует вывод формулы $\mathfrak{A}$ из формул $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$, то говорят, что $\mathfrak{A}$ выводима из $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$:

$$\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n \vdash \mathfrak{A}.$$

Формулы $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ называют гипотезами (или посылками) вывода.
Формула $\mathfrak{A}$ называется теоремой, если она выводима из пустого множества гипотез (т. е. только из аксиом):

$$\vdash \mathfrak{A}.$$

Дедуктивные теории

Дедуктивная теория считается заданной, если:

Дедуктивные теории

Дедуктивная теория считается заданной, если:

1. Задан алфавит и правила образования слов в этом алфавите.

Дедуктивные теории

Дедуктивная теория считается заданной, если:

1. Задан алфавит и правила образования слов в этом алфавите.
2. Заданы правила образования формул (правильно построенных выражений) языка.

Дедуктивные теории

Дедуктивная теория считается заданной, если:

1. Задан алфавит и правила образования слов в этом алфавите.
2. Заданы правила образования формул (правильно построенных выражений) языка.
3. Из множества всех формул языка выделено некоторым дедуктивным способом подмножество $\mathscr{T}$, элементы которого будем называть теоремами.

Дедуктивные теории

Дедуктивная теория считается заданной, если:

1. Задан алфавит и правила образования слов в этом алфавите.
2. Заданы правила образования формул (правильно построенных выражений) языка.
3. Из множества всех формул языка выделено некоторым дедуктивным способом подмножество $\mathscr{T}$, элементы которого будем называть теоремами.

В зависимости от того, как задано подмножество $\mathscr{T}$, будем различать получающиеся при этом дедуктивные теории.

Дедуктивные теории (продолжение)

Подмножество $\mathscr{T}$ может задаваться одним из следующих способов.

Дедуктивные теории (продолжение)

Подмножество $\mathscr{T}$ может задаваться одним из следующих способов.

1. **Задаются аксиомы и конечное число правил вывода:**
   - из множества формул выделяется подмножество $\mathscr{A}$ (конечное или бесконечное), элементы которого называются аксиомами;

Дедуктивные теории (продолжение)

Подмножество $\mathscr{T}$ может задаваться одним из следующих способов.

1. **Задаются аксиомы и конечное число правил вывода:**
    - из множества формул выделяется подмножество $\mathscr{A}$ (конечное или бесконечное), элементы которого называются аксиомами;
    - задаётся конечное число правил вывода, используя которые (и только их) из аксиом можно получать теоремы.

Дедуктивные теории (продолжение)

Подмножество $\mathscr{T}$ может задаваться одним из следующих способов.

1. **Задаются аксиомы и конечное число правил вывода:**
   - из множества формул выделяется подмножество $\mathscr{A}$ (конечное или бесконечное), элементы которого называются аксиомами;
   - задаётся конечное число правил вывода, используя которые (и только их) из аксиом можно получать теоремы.

   Если теоремы заданы указанным образом, то эта дедуктивная теория называется формальной аксиоматической теорией или формальным (логическим) исчислением.

Дедуктивные теории (окончание)

2. **Задаются только аксиомы, а правила вывода считаются общеизвестными:**

Дедуктивные теории (окончание)

2. **Задаются только аксиомы, а правила вывода считаются общеизвестными:**
   - из множества формул выделяется подмножество $\mathscr{A}$ (конечное или бесконечное), элементы которого называются аксиомами;

Дедуктивные теории (окончание)

2. **Задаются только аксиомы, а правила вывода считаются общеизвестными:**
   - из множества формул выделяется подмножество $\mathscr{A}$ (конечное или бесконечное), элементы которого называются аксиомами;
   - правила вывода (методы доказательства) теорем считаются известными из опыта изучения математики.

Дедуктивные теории (окончание)

2. **Задаются только аксиомы, а правила вывода считаются общеизвестными:**
   - из множества формул выделяется подмножество $\mathscr{A}$ (конечное или бесконечное), элементы которого называются аксиомами;
   - правила вывода (методы доказательства) теорем считаются известными из опыта изучения математики.

При таком задании теорем дедуктивная теория называется полуформальной аксиоматической теорией.

Дедуктивные теории (окончание)

2. **Задаются только аксиомы, а правила вывода считаются общеизвестными:**
   - из множества формул выделяется подмножество $\mathscr{A}$ (конечное или бесконечное), элементы которого называются аксиомами;
   - правила вывода (методы доказательства) теорем считаются известными из опыта изучения математики.

При таком задании теорем дедуктивная теория называется полуформальной аксиоматической теорией.

Пример: геометрия.

Дедуктивные теории (окончание)

2. **Задаются только аксиомы, а правила вывода считаются общеизвестными:**
   - из множества формул выделяется подмножество $\mathscr{A}$ (конечное или бесконечное), элементы которого называются аксиомами;
   - правила вывода (методы доказательства) теорем считаются известными из опыта изучения математики.

   При таком задании теорем дедуктивная теория называется полуформальной аксиоматической теорией.

   Пример: геометрия.
3. **Аксиом нет, а задаётся только конечное число правил вывода, с помощью которых и получают теоремы.**

Дедуктивные теории (окончание)

2. **Задаются только аксиомы, а правила вывода считаются общеизвестными:**
   - из множества формул выделяется подмножество $\mathscr{A}$ (конечное или бесконечное), элементы которого называются аксиомами;
   - правила вывода (методы доказательства) теорем считаются известными из опыта изучения математики.

   При таком задании теорем дедуктивная теория называется полуформальной аксиоматической теорией.

   Пример: геометрия.

3. **Аксиом нет, а задаётся только конечное число правил вывода, с помощью которых и получают теоремы.**

   Такую дедуктивную теорию называют теорией естественного вывода.

Дедуктивные теории (окончание)

2. **Задаются только аксиомы, а правила вывода считаются общеизвестными:**
   - из множества формул выделяется подмножество $\mathscr{A}$ (конечное или бесконечное), элементы которого называются аксиомами;
   - правила вывода (методы доказательства) теорем считаются известными из опыта изучения математики.

   При таком задании теорем дедуктивная теория называется полуформальной аксиоматической теорией.

   Пример: геометрия.
3. **Аксиом нет, а задаётся только конечное число правил вывода, с помощью которых и получают теоремы.**

   Такую дедуктивную теорию называют теорией естественного вывода.

   Пример: метод резолюций.

Свойства дедуктивных теорий

1. **Противоречивость**

Свойства дедуктивных теорий

1. **Противоречивость**
   Теория, в которой множество теорем покрывает всё множество формул (все формулы являются теоремами), называется противоречивой. В противном случае теория называется непротиворечивой. Выяснение противоречивости теории — одна из важнейших (и иногда сложнейших) задач формальной логики.

Свойства дедуктивных теорий

1. **Противоречивость**

   Теория, в которой множество теорем покрывает всё множество формул (все формулы являются теоремами), называется противоречивой. В противном случае теория называется непротиворечивой. Выяснение противоречивости теории — одна из важнейших (и иногда сложнейших) задач формальной логики.

   После того, как теория признана противоречивой, она, как правило, не имеет дальнейшего ни теоретического, ни практического применения.

Свойства дедуктивных теорий

1. **Противоречивость**
   Теория, в которой множество теорем покрывает всё множество формул (все формулы являются теоремами), называется противоречивой. В противном случае теория называется непротиворечивой. Выяснение противоречивости теории — одна из важнейших (и иногда сложнейших) задач формальной логики.
   После того, как теория признана противоречивой, она, как правило, не имеет дальнейшего ни теоретического, ни практического применения.
2. **Разрешимость**

Свойства дедуктивных теорий

1. **Противоречивость**

   Теория, в которой множество теорем покрывает всё множество формул (все формулы являются теоремами), называется противоречивой. В противном случае теория называется непротиворечивой. Выяснение противоречивости теории — одна из важнейших (и иногда сложнейших) задач формальной логики.

   После того, как теория признана противоречивой, она, как правило, не имеет дальнейшего ни теоретического, ни практического применения.

2. **Разрешимость**

   Теория называется разрешимой, если в ней понятие теоремы эффективно, то есть существует эффективная процедура, позволяющий для любой формулы за конечное число шагов определить, является она теоремой или нет.

Свойства дедуктивных теорий (окончание)

3. **Полнота**

Свойства дедуктивных теорий (окончание)

3. **Полнота**
   Теория называется полной, если в ней для любой формулы $\mathfrak{A}$ выводима либо сама $\mathfrak{A}$, либо её отрицание $\overline{\mathfrak{A}}$.

Свойства дедуктивных теорий (окончание)

3. **Полнота**

   Теория называется полной, если в ней для любой формулы $\mathfrak{A}$ выводима либо сама $\mathfrak{A}$, либо её отрицание $\overline{\mathfrak{A}}$. В противном случае теория содержит недоказуемые утверждения (утверждения, которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть средствами самой теории), и называется неполной.

Свойства дедуктивных теорий (окончание)

3. **Полнота**
   Теория называется полной, если в ней для любой формулы $\mathfrak{A}$ выводима либо сама $\mathfrak{A}$, либо её отрицание $\overline{\mathfrak{A}}$. В противном случае теория содержит недоказуемые утверждения (утверждения, которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть средствами самой теории), и называется неполной.
4. **Независимость аксиом**

Свойства дедуктивных теорий (окончание)

3. **Полнота**
   Теория называется полной, если в ней для любой формулы $\mathfrak{A}$ выводима либо сама $\mathfrak{A}$, либо её отрицание $\overline{\mathfrak{A}}$. В противном случае теория содержит недоказуемые утверждения (утверждения, которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть средствами самой теории), и называется неполной.
4. **Независимость аксиом**
   Отдельная аксиома теории считается независимой, если эту аксиому нельзя вывести из остальных аксиом. Зависимая аксиома избыточна, и её удаление из системы аксиом никак не отразится на теории. Вся система аксиом теории называется независимой, если каждая аксиома в ней независима.

Исчисления высказываний

Исчисление высказываний — это формальная аксиоматическая теория, определяемая следующим образом:

Исчисления высказываний

Исчисление высказываний — это формальная аксиоматическая теория, определяемая следующим образом:

1. Алфавит:

Исчисления высказываний

Исчисление высказываний — это формальная аксиоматическая теория, определяемая следующим образом:

1. Алфавит:
    1. пропозициональные переменные $A, B, \ldots, X_1, X_2, \ldots$;

Исчисления высказываний

Исчисление высказываний — это формальная аксиоматическая теория, определяемая следующим образом:

1. Алфавит:
    1. пропозициональные переменные $A, B, \ldots, X_1, X_2, \ldots$;
    2. пропозициональные связки «$\&$», «$\vee$», «$\overline{}$», «$\rightarrow$»;

Исчисления высказываний

Исчисление высказываний — это формальная аксиоматическая теория, определяемая следующим образом:

1. Алфавит:
   1. пропозициональные переменные $A, B, \ldots, X_1, X_2, \ldots$;
   2. пропозициональные связки «&», «$\vee$», «$\overline{}$», «$\rightarrow$»;
   3. скобки «(», «)».

Исчисления высказываний

Исчисление высказываний — это формальная аксиоматическая теория, определяемая следующим образом:

1. Алфавит:
   1. пропозициональные переменные $A, B, \ldots, X_1, X_2, \ldots$;
   2. пропозициональные связки «$\&$», «$\vee$», «$\overline{\ \ }$», «$\rightarrow$»;
   3. скобки «$($», «$)$».
2. Формулы:

Исчисления высказываний

Исчисление высказываний — это формальная аксиоматическая теория, определяемая следующим образом:

1. Алфавит:
   1. пропозициональные переменные $A, B, \ldots, X_1, X_2, \ldots$;
   2. пропозициональные связки «$\&$», «$\vee$», «$\overline{\ \ }$», «$\rightarrow$»;
   3. скобки «(», «)».
2. Формулы:
   1. пропозициональная переменная есть формула;

Исчисления высказываний

Исчисление высказываний — это формальная аксиоматическая теория, определяемая следующим образом:

1. Алфавит:
    1. пропозициональные переменные $A, B, \ldots, X_1, X_2, \ldots$;
    2. пропозициональные связки «$\&$», «$\vee$», «$\overline{}$», «$\rightarrow$»;
    3. скобки «(», «)».
2. Формулы:
    1. пропозициональная переменная есть формула;
    2. если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то $(\mathfrak{A} \mathbin{\&} \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})$ — формулы;

Исчисления высказываний

Исчисление высказываний — это формальная аксиоматическая теория, определяемая следующим образом:

1. Алфавит:
   1. пропозициональные переменные $A, B, \ldots, X_1, X_2, \ldots$;
   2. пропозициональные связки «$\&$», «$\vee$», «$\overline{}$», «$\rightarrow$»;
   3. скобки «(», «)».
2. Формулы:
   1. пропозициональная переменная есть формула;
   2. если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то $(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})$ — формулы;
   3. если $\mathfrak{A}$ — формула, то $\overline{\mathfrak{A}}$ — формула.

3. Схемы аксиом:

3. Схемы аксиом:
   1. $\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{A})$;
   2. $(\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})) \to ((\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}))$;
   3. $(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}) \to \mathfrak{A}$;
   4. $(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}) \to \mathfrak{B}$;
   5. $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to \Big((\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}) \to (\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C}))\Big)$;
   6. $\mathfrak{A} \to (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$;
   7. $\mathfrak{B} \to (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$;
   8. $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}) \to \Big((\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}) \to ((\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \to \mathfrak{C})\Big)$;
   9. $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to (\overline{\mathfrak{B}} \to \overline{\mathfrak{A}})$;
   10. $\mathfrak{A} \to \overline{\overline{\mathfrak{A}}}$;
   11. $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \to \mathfrak{A}$.

3. Схемы аксиом:
   1. $\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{A})$;
   2. $(\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})) \to ((\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}))$;
   3. $(\mathfrak{A} \mathbin{\&} \mathfrak{B}) \to \mathfrak{A}$;
   4. $(\mathfrak{A} \mathbin{\&} \mathfrak{B}) \to \mathfrak{B}$;
   5. $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to \Big((\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}) \to (\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \mathbin{\&} \mathfrak{C}))\Big)$;
   6. $\mathfrak{A} \to (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$;
   7. $\mathfrak{B} \to (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$;
   8. $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}) \to \Big((\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}) \to ((\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \to \mathfrak{C})\Big)$;
   9. $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to (\overline{\mathfrak{B}} \to \overline{\mathfrak{A}})$;
   10. $\mathfrak{A} \to \overline{\overline{\mathfrak{A}}}$;
   11. $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \to \mathfrak{A}$.

Правило порождения аксиом из схем:

3. Схемы аксиом:
    1. $\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{A})$;
    2. $(\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})) \to ((\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}))$;
    3. $(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}) \to \mathfrak{A}$;
    4. $(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}) \to \mathfrak{B}$;
    5. $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to \Big((\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}) \to (\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C}))\Big)$;
    6. $\mathfrak{A} \to (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$;
    7. $\mathfrak{B} \to (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$;
    8. $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}) \to \Big((\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}) \to ((\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \to \mathfrak{C})\Big)$;
    9. $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to (\overline{\mathfrak{B}} \to \overline{\mathfrak{A}})$;
    10. $\mathfrak{A} \to \overline{\overline{\mathfrak{A}}}$;
    11. $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \to \mathfrak{A}$.

Правило порождения аксиом из схем:

вместо $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ можно подставить любые формулы.

4. Правило вывода:

4. Правило вывода:
Правило заключения (modus ponens). Если $\mathfrak{A}$ и $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ — выводимые формулы, то $\mathfrak{B}$ — также выводимая формула:

4. Правило вывода:
Правило заключения (modus ponens). Если $\mathfrak{A}$ и $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ — выводимые формулы, то $\mathfrak{B}$ — также выводимая формула:

$$\frac{\mathfrak{A},\ \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}\,(\mathrm{MP}).$$

4. Правило вывода:
   Правило заключения (modus ponens). Если $\mathfrak{A}$ и $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ — выводимые формулы, то $\mathfrak{B}$ — также выводимая формула:
   $$\frac{\mathfrak{A},\ \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}\,(\mathrm{MP}).$$

Отметим (без доказательства), что исчисление высказываний является полной и непротиворечивой теорией.

Пример

Доказать выводимость формулы $A \to A$ в рассмотренном выше исчислении высказываний.

Пример

Доказать выводимость формулы $A \to A$ в рассмотренном выше исчислении высказываний.

Доказательство

Пример

Доказать выводимость формулы $A \to A$ в рассмотренном выше исчислении высказываний.

Доказательство

Имеем следующий вывод:

Пример

Доказать выводимость формулы $A \to A$ в рассмотренном выше исчислении высказываний.

Доказательство

Имеем следующий вывод:

- Аксиома $\mathfrak{C}_1 = A \to ((A \to A) \to A)$ — получена из схемы аксиом 1 при $\mathfrak{B} = A \to A$.

Пример

Доказать выводимость формулы $A \to A$ в рассмотренном выше исчислении высказываний.

Доказательство

Имеем следующий вывод:

- Аксиома $\mathfrak{C}_1 = A \to ((A \to A) \to A)$ — получена из схемы аксиом 1 при $\mathfrak{B} = A \to A$.
- Аксиома $\mathfrak{C}_2 = \Big(A \to ((A \to A) \to A)\Big) \to \Big((A \to (A \to A)) \to (A \to A)\Big)$ — получена из схемы аксиом 2 при $\mathfrak{B} = A \to A$ и $\mathfrak{C} = A$.

Пример

Доказать выводимость формулы $A \to A$ в рассмотренном выше исчислении высказываний.

Доказательство

Имеем следующий вывод:

- Аксиома $\mathfrak{C}_1 = A \to ((A \to A) \to A)$ — получена из схемы аксиом 1 при $\mathfrak{B} = A \to A$.
- Аксиома $\mathfrak{C}_2 = \Big(A \to ((A \to A) \to A)\Big) \to \Big((A \to (A \to A)) \to (A \to A)\Big)$ — получена из схемы аксиом 2 при $\mathfrak{B} = A \to A$ и $\mathfrak{C} = A$.
- Теорема $\mathfrak{C}_3 = (A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ — получена с помощью правила заключения для аксиом $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$.

Пример

Доказать выводимость формулы $A \to A$ в рассмотренном выше исчислении высказываний.

Доказательство

Имеем следующий вывод:

- Аксиома $\mathfrak{C}_1 = A \to ((A \to A) \to A)$ — получена из схемы аксиом 1 при $\mathfrak{B} = A \to A$.
- Аксиома $\mathfrak{C}_2 = \big(A \to ((A \to A) \to A)\big) \to \big((A \to (A \to A)) \to (A \to A)\big)$ — получена из схемы аксиом 2 при $\mathfrak{B} = A \to A$ и $\mathfrak{C} = A$.
- Теорема $\mathfrak{C}_3 = (A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ — получена с помощью правила заключения для аксиом $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$.
- Аксиома $\mathfrak{C}_4 = A \to (A \to A)$ — получена из схемы аксиом 1 при $\mathfrak{B} = A$.

Пример

Доказать выводимость формулы $A \to A$ в рассмотренном выше исчислении высказываний.

Доказательство

Имеем следующий вывод:

- Аксиома $\mathfrak{C}_1 = A \to ((A \to A) \to A)$ — получена из схемы аксиом 1 при $\mathfrak{B} = A \to A$.
- Аксиома $\mathfrak{C}_2 = \big(A \to ((A \to A) \to A)\big) \to \big((A \to (A \to A)) \to (A \to A)\big)$ — получена из схемы аксиом 2 при $\mathfrak{B} = A \to A$ и $\mathfrak{C} = A$.
- Теорема $\mathfrak{C}_3 = (A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ — получена с помощью правила заключения для аксиом $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$.
- Аксиома $\mathfrak{C}_4 = A \to (A \to A)$ — получена из схемы аксиом 1 при $\mathfrak{B} = A$.
- Теорема $\mathfrak{C}_5 = A \to A$ — получена с помощью правила заключения для аксиомы $\mathfrak{C}_4$ и теоремы $\mathfrak{C}_3$.

Пример

Доказать выводимость формулы $A \to A$ в рассмотренном выше исчислении высказываний.

Доказательство

Имеем следующий вывод:

- Аксиома $\mathfrak{C}_1 = A \to ((A \to A) \to A)$ — получена из схемы аксиом 1 при $\mathfrak{B} = A \to A$.
- Аксиома $\mathfrak{C}_2 = \big(A \to ((A \to A) \to A)\big) \to \big((A \to (A \to A)) \to (A \to A)\big)$ — получена из схемы аксиом 2 при $\mathfrak{B} = A \to A$ и $\mathfrak{C} = A$.
- Теорема $\mathfrak{C}_3 = (A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ — получена с помощью правила заключения для аксиом $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$.
- Аксиома $\mathfrak{C}_4 = A \to (A \to A)$ — получена из схемы аксиом 1 при $\mathfrak{B} = A$.
- Теорема $\mathfrak{C}_5 = A \to A$ — получена с помощью правила заключения для аксиомы $\mathfrak{C}_4$ и теоремы $\mathfrak{C}_3$.

Выводимость доказана.

Если правило порождения аксиом из схем объявить как ещё одно правило вывода, тогда получим следующую формальную аксиоматическую систему:

Если правило порождения аксиом из схем объявить как ещё одно правило вывода, тогда получим следующую формальную аксиоматическую систему:

1. Алфавит — аналогичен ранее рассмотренному;

Если правило порождения аксиом из схем объявить как ещё одно правило вывода, тогда получим следующую формальную аксиоматическую систему:

1. Алфавит — аналогичен ранее рассмотренному;
2. Формулы — определяются аналогично;

Если правило порождения аксиом из схем объявить как ещё одно правило вывода, тогда получим следующую формальную аксиоматическую систему:

1. Алфавит — аналогичен ранее рассмотренному;
2. Формулы — определяются аналогично;
3. Аксиомы:

Если правило порождения аксиом из схем объявить как ещё одно правило вывода, тогда получим следующую формальную аксиоматическую систему:

1. Алфавит — аналогичен ранее рассмотренному;
2. Формулы — определяются аналогично;
3. Аксиомы:
    1. $A \to (B \to A)$;
    2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$.
    3. $(A \,\&\, B) \to A$;
    4. $(A \,\&\, B) \to B$;
    5. $(A \to B) \to \big((A \to C) \to (A \to (B \,\&\, C))\big)$.
    6. $A \to (A \vee B)$;
    7. $B \to (A \vee B)$;
    8. $(A \to C) \to \big((B \to C) \to ((A \vee B) \to C)\big)$.
    9. $(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$;
    10. $A \to \overline{\overline{A}}$;
    11. $\overline{\overline{A}} \to A$.

4. Правила вывода:

4. Правила вывода:
   1. Правило подстановки. Пусть $\mathfrak{A}$ — формула, содержащая некоторую переменную X. Тогда, если $\mathfrak{A}$ — выводимая формула, то, заменив в ней переменную X всюду, где она входит, произвольной формулой $\mathfrak{B}$, мы также получим выводимую формулу. Такую подстановку обозначим $\mathfrak{B}/X$

4. Правила вывода:
   1. Правило подстановки. Пусть $\mathfrak{A}$ — формула, содержащая некоторую переменную X. Тогда, если $\mathfrak{A}$ — выводимая формула, то, заменив в ней переменную X всюду, где она входит, произвольной формулой $\mathfrak{B}$, мы также получим выводимую формулу. Такую подстановку обозначим $\mathfrak{B}/X$
   2. Правило заключения (modus ponens):

$$\frac{\mathfrak{A},\ \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}.$$

Пример

Доказать выводимость формулы $A \to A$ в рассмотренном выше исчислении высказываний.

Пример

Доказать выводимость формулы $A \to A$ в рассмотренном выше исчислении высказываний.

Доказательство

Пример

Доказать выводимость формулы $A \to A$ в рассмотренном выше исчислении высказываний.

Доказательство

Имеем следующий вывод:

Пример

Доказать выводимость формулы $A \to A$ в рассмотренном выше исчислении высказываний.

Доказательство

Имеем следующий вывод:

- Теорема $\mathfrak{C}_1 = A \to ((A \to A) \to A)$ — получена из аксиомы 1 применением подстановки $(A \to A)/B$.

Пример

Доказать выводимость формулы $A \to A$ в рассмотренном выше исчислении высказываний.

Доказательство

Имеем следующий вывод:

- Теорема $\mathfrak{C}_1 = A \to ((A \to A) \to A)$ — получена из аксиомы 1 применением подстановки $(A \to A)/B$.
- Теорема $\mathfrak{C}_2 = \big(A \to ((A \to A) \to A)\big) \to \big((A \to (A \to A)) \to (A \to A)\big)$ — получена из аксиомы 2 применением подстановок $(A \to A)/B$ и A/C.

Пример

Доказать выводимость формулы $A \to A$ в рассмотренном выше исчислении высказываний.

Доказательство

Имеем следующий вывод:

- Теорема $\mathfrak{C}_1 = A \to ((A \to A) \to A)$ — получена из аксиомы 1 применением подстановки $(A \to A)/B$.
- Теорема $\mathfrak{C}_2 = \big(A \to ((A \to A) \to A)\big) \to \big((A \to (A \to A)) \to (A \to A)\big)$ — получена из аксиомы 2 применением подстановок $(A \to A)/B$ и A/C.
- Теорема $\mathfrak{C}_3 = (A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ — получена с помощью правила заключения для теорем $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$.

Пример

Доказать выводимость формулы $A \to A$ в рассмотренном выше исчислении высказываний.

Доказательство

Имеем следующий вывод:

- Теорема $\mathfrak{C}_1 = A \to ((A \to A) \to A)$ — получена из аксиомы 1 применением подстановки $(A \to A)/B$.
- Теорема $\mathfrak{C}_2 = \big(A \to ((A \to A) \to A)\big) \to \big((A \to (A \to A)) \to (A \to A)\big)$ — получена из аксиомы 2 применением подстановок $(A \to A)/B$ и A/C.
- Теорема $\mathfrak{C}_3 = (A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ — получена с помощью правила заключения для теорем $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$.
- Теорема $\mathfrak{C}_4 = A \to (A \to A)$ — получена из аксиомы 1 применением подстановки A/B.

Пример

Доказать выводимость формулы $A \to A$ в рассмотренном выше исчислении высказываний.

Доказательство

Имеем следующий вывод:

- Теорема $\mathfrak{C}_1 = A \to ((A \to A) \to A)$ — получена из аксиомы 1 применением подстановки $(A \to A)/B$.
- Теорема $\mathfrak{C}_2 = \big(A \to ((A \to A) \to A)\big) \to \big((A \to (A \to A)) \to (A \to A)\big)$ — получена из аксиомы 2 применением подстановок $(A \to A)/B$ и A/C.
- Теорема $\mathfrak{C}_3 = (A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ — получена с помощью правила заключения для теорем $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$.
- Теорема $\mathfrak{C}_4 = A \to (A \to A)$ — получена из аксиомы 1 применением подстановки A/B.
- Теорема $\mathfrak{C}_5 = A \to A$ — получена с помощью правила заключения для теорем $\mathfrak{C}_4$ и $\mathfrak{C}_3$.

Пример

Доказать выводимость формулы $A \to A$ в рассмотренном выше исчислении высказываний.

Доказательство

Имеем следующий вывод:

- Теорема $\mathfrak{C}_1 = A \to \big((A \to A) \to A\big)$ — получена из аксиомы 1 применением подстановки $(A \to A)/B$.
- Теорема $\mathfrak{C}_2 = \Big(A \to ((A \to A) \to A)\Big) \to \Big(\big(A \to (A \to A)\big) \to (A \to A)\Big)$ — получена из аксиомы 2 применением подстановок $(A \to A)/B$ и A/C.
- Теорема $\mathfrak{C}_3 = \big(A \to (A \to A)\big) \to (A \to A)$ — получена с помощью правила заключения для теорем $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$.
- Теорема $\mathfrak{C}_4 = A \to (A \to A)$ — получена из аксиомы 1 применением подстановки A/B.
- Теорема $\mathfrak{C}_5 = A \to A$ — получена с помощью правила заключения для теорем $\mathfrak{C}_4$ и $\mathfrak{C}_3$.

Выводимость доказана.

Оставим только связки «$\overline{}$» и «$\to$».

Оставим только связки «$\overline{}$» и «$\to$».

При этом $A \,\&\, B$ ➠ $\overline{A \to \overline{B}}$, $A \vee B$ ➠ $\overline{A} \to B$.

Оставим только связки «$\overline{}$» и «$\to$».

При этом $A \,\&\, B$ ➠ $\overline{A \to \overline{B}}$, $A \vee B$ ➠ $\overline{A} \to B$.

Тогда исчисление примет вид:

Оставим только связки «$\overline{\ \ }$» и «$\to$».

При этом $A \,\&\, B$ ➠ $\overline{A \to \overline{B}}$, $A \vee B$ ➠ $\overline{A} \to B$.

Тогда исчисление примет вид:

1. Алфавит:

Оставим только связки «$\overline{}$» и «$\to$».

При этом $A \mathbin{\&} B$ ➠ $\overline{A \to \overline{B}}$, $A \vee B$ ➠ $\overline{A} \to B$.

Тогда исчисление примет вид:

1. Алфавит:
    1. пропозициональные переменные $A, B, \ldots, X_1, X_2, \ldots$;

Оставим только связки «$\overline{}$» и «$\rightarrow$».

При этом $A \,\&\, B \Rightarrow \overline{A \rightarrow \overline{B}}$, $A \vee B \Rightarrow \overline{A} \rightarrow B$.

Тогда исчисление примет вид:

1. Алфавит:
   1. пропозициональные переменные $A, B, \ldots, X_1, X_2, \ldots$;
   2. пропозициональные связки «$\overline{}$», «$\rightarrow$»;

Оставим только связки «$\overline{\ }$» и «$\to$».

При этом $A \,\&\, B$ ➠ $\overline{A \to \overline{B}}$, $A \vee B$ ➠ $\overline{A} \to B$.

Тогда исчисление примет вид:

1. Алфавит:
    1. пропозициональные переменные $A, B, \ldots, X_1, X_2, \ldots$;
    2. пропозициональные связки «$\overline{\ }$», «$\to$»;
    3. скобки «(», «)».

Оставим только связки «$\overline{}$» и «$\to$».

При этом $A \,\&\, B$ ➠ $\overline{A \to \overline{B}}$, $A \vee B$ ➠ $\overline{A} \to B$.

Тогда исчисление примет вид:

1. Алфавит:
   1. пропозициональные переменные $A, B, \ldots, X_1, X_2, \ldots$;
   2. пропозициональные связки «$\overline{}$», «$\to$»;
   3. скобки «(», «)».
2. Формулы:

Оставим только связки «$\overline{}$» и «$\rightarrow$».

При этом $A \,\&\, B$ ➠ $\overline{A \rightarrow \overline{B}}$, $A \vee B$ ➠ $\overline{A} \rightarrow B$.

Тогда исчисление примет вид:

1. Алфавит:
    1. пропозициональные переменные $A, B, \ldots, X_1, X_2, \ldots$;
    2. пропозициональные связки «$\overline{}$», «$\rightarrow$»;
    3. скобки «(», «)».
2. Формулы:
    1. пропозициональная переменная есть формула;

Оставим только связки «$\overline{}$» и «$\rightarrow$».

При этом $A \,\&\, B$ ➠ $\overline{A \rightarrow \overline{B}}$, $A \vee B$ ➠ $\overline{A} \rightarrow B$.

Тогда исчисление примет вид:

1. Алфавит:
   1. пропозициональные переменные $A, B, \ldots, X_1, X_2, \ldots$;
   2. пропозициональные связки «$\overline{}$», «$\rightarrow$»;
   3. скобки «(», «)».
2. Формулы:
   1. пропозициональная переменная есть формула;
   2. если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})$ — формула;

Оставим только связки «$\overline{}$» и «$\to$».

При этом $A \mathbin{\&} B$ ➠ $\overline{A \to \overline{B}}$, $A \vee B$ ➠ $\overline{A} \to B$.

Тогда исчисление примет вид:

1. Алфавит:
   1. пропозициональные переменные $A, B, \ldots, X_1, X_2, \ldots$;
   2. пропозициональные связки «$\overline{}$», «$\to$»;
   3. скобки «(», «)».
2. Формулы:
   1. пропозициональная переменная есть формула;
   2. если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ — формула;
   3. если $\mathfrak{A}$ — формула, то $\overline{\mathfrak{A}}$ — формула.

Оставим только связки «$\overline{}$» и «$\to$».

При этом $A \,\&\, B$ ➠ $\overline{A \to \overline{B}}$, $A \vee B$ ➠ $\overline{A} \to B$.

Тогда исчисление примет вид:

1. Алфавит:
   1. пропозициональные переменные $A, B, \ldots, X_1, X_2, \ldots$;
   2. пропозициональные связки «$\overline{}$», «$\to$»;
   3. скобки «(», «)».
2. Формулы:
   1. пропозициональная переменная есть формула;
   2. если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ — формула;
   3. если $\mathfrak{A}$ — формула, то $\overline{\mathfrak{A}}$ — формула.
3. Аксиомы:

Оставим только связки $\overline{\text{«\ »}}$ и «$\to$».

При этом $\quad A \,\&\, B \Rrightarrow \overline{A \to \overline{B}}, \quad A \vee B \Rrightarrow \overline{A} \to B.$

Тогда исчисление примет вид:

1. Алфавит:
   1. пропозициональные переменные $A, B, \ldots, X_1, X_2, \ldots$;
   2. пропозициональные связки «$\overline{\ \ }$», «$\to$»;
   3. скобки «(», «)».
2. Формулы:
   1. пропозициональная переменная есть формула;
   2. если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ — формула;
   3. если $\mathfrak{A}$ — формула, то $\overline{\mathfrak{A}}$ — формула.
3. Аксиомы:
   1. $A \to (B \to A)$;

Оставим только связки $\overline{«\ \ »}$ и «$\to$».
При этом $A \mathbin{\&} B$ ➠ $\overline{A \to \overline{B}}$, $A \vee B$ ➠ $\overline{A} \to B$.
Тогда исчисление примет вид:

1. Алфавит:
    1. пропозициональные переменные $A, B, \ldots, X_1, X_2, \ldots$;
    2. пропозициональные связки «$\overline{\ \ }$», «$\to$»;
    3. скобки «(», «)».
2. Формулы:
    1. пропозициональная переменная есть формула;
    2. если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ — формула;
    3. если $\mathfrak{A}$ — формула, то $\overline{\mathfrak{A}}$ — формула.
3. Аксиомы:
    1. $A \to (B \to A)$;
    2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

Оставим только связки «$\overline{}$» и «$\rightarrow$».

При этом $A \mathbin{\&} B$ ➠ $\overline{A \rightarrow \overline{B}}$, $A \vee B$ ➠ $\overline{A} \rightarrow B$.

Тогда исчисление примет вид:

1. Алфавит:
   1. пропозициональные переменные $A, B, \ldots, X_1, X_2, \ldots$;
   2. пропозициональные связки «$\overline{}$», «$\rightarrow$»;
   3. скобки «(», «)».
2. Формулы:
   1. пропозициональная переменная есть формула;
   2. если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})$ — формула;
   3. если $\mathfrak{A}$ — формула, то $\overline{\mathfrak{A}}$ — формула.
3. Аксиомы:
   1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$;
   2. $\big(A \rightarrow (B \rightarrow C)\big) \rightarrow \big((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\big)$;
   3. $(\overline{B} \rightarrow \overline{A}) \rightarrow \big((\overline{B} \rightarrow A) \rightarrow B\big)$.

Оставим только связки «$\overline{\ \ }$» и «$\to$».

При этом $A \mathbin{\&} B$ ➠ $\overline{A \to \overline{B}}$, $A \vee B$ ➠ $\overline{A} \to B$.

Тогда исчисление примет вид:

1. Алфавит:
   1. пропозициональные переменные $A, B, \ldots, X_1, X_2, \ldots$;
   2. пропозициональные связки «$\overline{\ \ }$», «$\to$»;
   3. скобки «(», «)».
2. Формулы:
   1. пропозициональная переменная есть формула;
   2. если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ — формула;
   3. если $\mathfrak{A}$ — формула, то $\overline{\mathfrak{A}}$ — формула.
3. Аксиомы:
   1. $A \to (B \to A)$;
   2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;
   3. $(\overline{B} \to \overline{A}) \to ((\overline{B} \to A) \to B)$.
4. Правила вывода: правило подстановки и modus ponens.

Оставим только связки «$\overline{}$» и «$\to$».

При этом $A \mathbin{\&} B \Rightarrow \overline{A \to \overline{B}}$, $A \vee B \Rightarrow \overline{A} \to B$.

Тогда исчисление примет вид:

1. Алфавит:
   1. пропозициональные переменные $A, B, \ldots, X_1, X_2, \ldots$;
   2. пропозициональные связки «$\overline{}$», «$\to$»;
   3. скобки «(», «)».
2. Формулы:
   1. пропозициональная переменная есть формула;
   2. если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ — формула;
   3. если $\mathfrak{A}$ — формула, то $\overline{\mathfrak{A}}$ — формула.
3. Аксиомы:
   1. $A \to (B \to A)$;
   2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;
   3. $(\overline{B} \to \overline{A}) \to ((\overline{B} \to A) \to B)$.
4. Правила вывода: правило подстановки и modus ponens.

Рассмотренный выше пример соответствует и этому исчислению.