

Министерство образования Российской Федерации
 Томский государственный университет
 Факультет прикладной математики и кибернетики

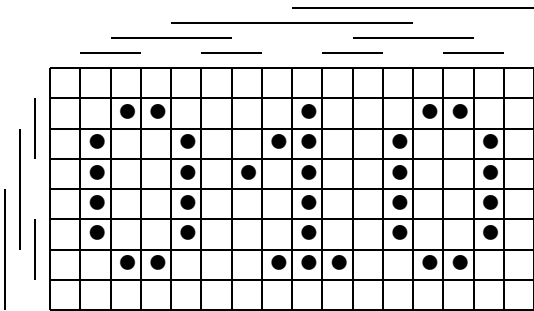
"УТВЕРЖДАЮ"

Декан ФПМК

профессор _____ А.М. Горцев

" ____ " _____ 2002 г.

БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ часть II



Учебно-методическое пособие

Томск
 2002

РАССМОТРЕНО и УТВЕРЖДЕНО методической комиссией
факультета прикладной математики и кибернетики

Председатель комиссии
профессор _____ С.Э. Воробейчиков
Протокол 15 от 27 ноября 2002 г.

В данной части пособия рассматриваются дизъюнктивные нормальные формы булевых функций: произвольная, совершенная, сокращенная, безызбыточная, кратчайшая и минимальная, а также совершенная конъюнктивная нормальная форма.

Пособие предназначено для студентов, изучающих теорию булевых функций.

Составители: доцент каф. ЗИК С.В. Быкова
программист каф. ВМиММ Ю.Б. Буркатовская

7. Разложение булевой функции по переменным и совершенные нормальные формы

7.1. Разложение Шеннона

Определение. *Разложением Шеннона* называется следующее разложение булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ по переменной x_i :

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_i f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) \vee \bar{x}_i f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Сомножитель $f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$ называется *коэффициентом разложения функции $f(x_1, \dots, x_n)$ по переменной x_i при x_i* , а сомножитель $f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$ – *коэффициентом разложения функции $f(x_1, \dots, x_n)$ по переменной x_i при \bar{x}_i* .

Пример. Функцию $f(x, y, z) = \bar{y} \sim x \bar{z} \rightarrow yz$ разложим по переменной x :

$$\bar{y} \sim x \bar{z} \rightarrow yz = x(\bar{y} \sim 1 \bar{z} \rightarrow yz) \vee \bar{x}(\bar{y} \sim 0 \bar{z} \rightarrow yz) =$$

[упростим коэффициенты разложения на основе свойств 0 и 1 для конъюнкции]

$$= x(\bar{y} \sim \bar{z} \rightarrow yz) \vee \bar{x}(\bar{y} \sim 0 \rightarrow yz) =$$

[продолжим упрощение коэффициента при \bar{x} на основе свойства 0 для эквивалентности; напомним, что способ получения таких свойств был рассмотрен в [1.С.30]]

$$= x(\bar{y} \sim \bar{z} \rightarrow yz) \vee \bar{x}(y \rightarrow yz),$$

в результате имеем следующие коэффициенты разложения, зависящие лишь от y и z :

$\bar{y} \sim \bar{z} \rightarrow yz$ – коэффициент разложения функции $f(x, y, z)$ по переменной x при x ;

$y \rightarrow yz$ – коэффициент разложения функции $f(x, y, z)$ по переменной x при \bar{x} .

7.2. Разложение функции по k переменным

Разложим функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ последовательно по двум переменным: сначала саму функцию по переменной x_1 , затем коэффициенты разложения по переменной x_2 .

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= x_1 f(1, x_2, \dots, x_n) \vee \bar{x}_1 f(0, x_2, \dots, x_n) = \\ &= x_1 [x_2 f(1, 1, x_3, \dots, x_n) \vee \bar{x}_2 f(1, 0, x_3, \dots, x_n)] \vee \\ &\vee \bar{x}_1 [x_2 f(0, 1, x_3, \dots, x_n) \vee \bar{x}_2 f(0, 0, x_3, \dots, x_n)] = \end{aligned}$$

[раскроем скобки по закону дистрибутивности]

$$\begin{aligned} &= x_1 x_2 f(1, 1, x_3, \dots, x_n) \vee x_1 \bar{x}_2 f(1, 0, x_3, \dots, x_n) \vee \\ &\vee \bar{x}_1 x_2 f(0, 1, x_3, \dots, x_n) \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 f(0, 0, x_3, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Введем обозначения: $x = x^1$, $\bar{x} = x^0$ (условимся читать символы x^c как " x в степени c "). Тогда разложение функции $f(x_1, \dots, x_n)$ по переменным x_1, x_2 в свернутой форме примет вид

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{c_1 c_2 \in B^2} x_1^{c_1} x_2^{c_2} f(c_1, c_2, x_3, \dots, x_n).$$

Пример. Продолжим разложение функции $f(x, y, z)$ из предыдущего примера. Мы уже получили ее разложение по x :

$$f(x, y, z) = \bar{y} \sim x \bar{z} \rightarrow y z = x(\bar{y} \sim \bar{z} \rightarrow y z) \vee \bar{x}(y \rightarrow y z).$$

Разложим теперь коэффициенты по переменной y :

$$x [y(\bar{1} \sim \bar{z} \rightarrow 1 z) \vee \bar{y}(\bar{0} \sim \bar{z} \rightarrow 0 z)] \vee \bar{x} [y(1 \rightarrow 1 z) \vee \bar{y}(0 \rightarrow 0 z)] =$$

[используем свойства 0 и 1 и раскроем квадратные скобки]

$$\begin{aligned} &= x [y(0 \sim \bar{z} \rightarrow z) \vee \bar{y}(1 \sim \bar{z} \rightarrow 0)] \vee \bar{x} [y(1 \rightarrow z) \vee \bar{y}(0 \rightarrow 0)] = \\ &= x y(z \rightarrow z) \vee x \bar{y}(\bar{z} \rightarrow 0) \vee \bar{x} y z \vee \bar{x} \bar{y} = \\ &= x y(z \rightarrow z) \vee x \bar{y} z \vee \bar{x} y z \vee \bar{x} \bar{y}. \end{aligned}$$

Решим теперь тот же пример, но не последовательным применением разложения Шеннона, а непосредственно по формуле разложения функции по двум переменным.

Пример. Найдем коэффициенты разложения булевой функции $f(x, y, z) = \overline{y} \sim x \overline{z} \rightarrow yz$ по переменным x и y :

$$\begin{aligned} f(1, 1, z) &= \overline{1} \sim 1 \overline{z} \rightarrow 1z = 0 \sim \overline{z} \rightarrow z = z \rightarrow z; \\ f(1, 0, z) &= \overline{0} \sim 1 \overline{z} \rightarrow 0z = 1 \sim \overline{z} \rightarrow 0 = \overline{z} \rightarrow 0 = z; \\ f(0, 1, z) &= \overline{1} \sim 0 \overline{z} \rightarrow 1z = 0 \sim 0 \rightarrow z = 1 \rightarrow z = z; \\ f(0, 0, z) &= \overline{0} \sim 0 \overline{z} \rightarrow 0z = 1 \sim 0 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow 0 = 1. \end{aligned}$$

Подставив коэффициенты разложения в формулу, получим

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x^1 y^1 f(1, 1, z) \vee x^1 y^0 f(1, 0, z) \vee x^0 y^1 f(0, 1, z) \vee \\ &\vee x^0 y^0 f(0, 0, z) = xy(z \rightarrow z) \vee x \overline{y} z \vee \overline{x} y z \vee \overline{x} \overline{y}. \end{aligned}$$

Заметим, что в данном случае оба способа привели к одинаковым формулам. В общем случае формулы могут не совпадать, но они с очевидностью равносильны, ибо задают одну функцию.

Разложение функции по k переменным имеет вид, аналогичный разложению функции по двум переменным:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{c_1 \dots c_k \in B^k} x_1^{c_1} \dots x_k^{c_k} f(c_1, \dots, c_k, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

7.3. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

Разложив булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ по k переменным при $k = n$, получим

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{c_1 \dots c_n \in B^n} x_1^{c_1} \dots x_n^{c_n} f(c_1, \dots, c_n).$$

Поскольку коэффициентами разложения здесь являются значения функции на всевозможных наборах, то возможны два случая:

- либо набор $c_1 \dots c_n \in M_f^0$, тогда $f(c_1, \dots, c_n) = 0$, и поэтому обращается в 0 соответствующее слагаемое правой части;
- либо набор $c_1 \dots c_n \in M_f^1$, тогда $f(c_1, \dots, c_n) = 1$, и слагаемое упрощается.

В результате имеем формулу разложения функции по всем переменным

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{c_1 \dots c_n \in M_f^1} x_1^{c_1} \dots x_n^{c_n}.$$

Пример. Найдем коэффициенты разложения той же булевой функции $f(x, y, z) = \bar{y} \sim x \bar{z} \rightarrow yz$ по всем переменным (для удобства наборы $c_1 \dots c_n \in B^n$ будем перебирать в естественном порядке):

$$\begin{aligned} f(0, 0, 0) &= \bar{0} \sim 0 \bar{0} \rightarrow 00 = 1 \sim 0 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow 0 = 1; \\ f(0, 0, 1) &= \bar{0} \sim 0 \bar{1} \rightarrow 01 = 1 \sim 0 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow 0 = 1; \\ f(0, 1, 0) &= \bar{1} \sim 0 \bar{0} \rightarrow 10 = 0 \sim 0 \rightarrow 0 = 1 \rightarrow 0 = 0; \\ f(0, 1, 1) &= \bar{1} \sim 0 \bar{1} \rightarrow 11 = 0 \sim 0 \rightarrow 1 = 1 \rightarrow 1 = 1; \\ f(1, 0, 0) &= \bar{0} \sim 1 \bar{0} \rightarrow 00 = 1 \sim 1 \rightarrow 0 = 1 \rightarrow 0 = 0; \\ f(1, 0, 1) &= \bar{0} \sim 1 \bar{1} \rightarrow 01 = 1 \sim 0 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow 0 = 1; \\ f(1, 1, 0) &= \bar{1} \sim 1 \bar{0} \rightarrow 10 = 0 \sim 1 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow 0 = 1; \\ f(1, 1, 1) &= \bar{1} \sim 1 \bar{1} \rightarrow 11 = 0 \sim 0 \rightarrow 1 = 1 \rightarrow 1 = 1. \end{aligned}$$

Подставив коэффициенты в формулу, получим

$$f(x, y, z) = \bar{x} \bar{y} \bar{z} \vee \bar{x} \bar{y} z \vee \bar{x} y z \vee x \bar{y} z \vee x y \bar{z} \vee x y z.$$

Нетрудно заметить, что вычисление коэффициентов разложения функции по всем переменным эквивалентно построчному построению ее таблицы истинности.

Определение. *Совершенная дизъюнктивная нормальная форма* функции $f(x_1, \dots, x_n)$ (*СовДНФ_f*) – это формула вида

$$\bigvee_{c_1 \dots c_n \in M_f^1} x_1^{c_1} \dots x_n^{c_n}.$$

Утверждение о единственности совершенной ДНФ. Любая булева функция, кроме константы 0, представима совершенной дизъюнктивной нормальной формой, единственной для данной функции.

Алгоритм построения совершенной ДНФ по таблице истинности (вытекает из определения совершенной ДНФ).

Начало: задана таблица истинности булевой функции.

Шаг 1: в векторе-столбце значений функции выбирается очередная единица. Если единицы исчерпаны, то идем на конец.

Шаг 2: по набору значений аргументов выбранной строки формируется конъюнкция всех аргументов с соблюдением следующего правила: если i -я компонента набора равна 0, то i -я переменная входит в конъюнкцию в степени 0 (с инверсией), иначе – в степени 1 (без инверсии). Полученная конъюнкция добавляется в формулу как очередное слагаемое. Идем на шаг 1.

Конец.

Пример. Применим алгоритм к той же функции $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 \sim x_1 \bar{x}_3 \rightarrow x_2 x_3$ (с переименованными аргументами).

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	
0	0	0	1	$x_1^0 x_2^0 x_3^0 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$
0	0	1	1	$x_1^0 x_2^0 x_3^1 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$
0	1	0	0	
0	1	1	1	$x_1^0 x_2^1 x_3^1 = \bar{x}_1 x_2 x_3$
1	0	0	0	
1	0	1	1	$x_1^1 x_2^0 x_3^1 = x_1 \bar{x}_2 x_3$
1	1	0	1	$x_1^1 x_2^1 x_3^0 = x_1 x_2 \bar{x}_3$
1	1	1	1	$x_1^1 x_2^1 x_3^1 = x_1 x_2 x_3$

Соединив полученные конъюнкции знаками дизъюнкции, имеем

$$\text{СовДНФ}_f = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3.$$

Обратим внимание на тот факт, что нам впервые удалось перейти от табличного способа задания функции к формульному!

Решение обратной задачи, то есть построение таблицы истинности по совершенной ДНФ, очевидно: степени переменных конъюнкций совершенной ДНФ задают наборы, на которых функция принимает значение 1. Это гораздо проще, чем построение таблицы истинности по совершенной ДНФ как по произвольной формуле.

7.4. Совершенная конъюнктивная нормальная форма

Определение. Совершенная конъюнктивная нормальная форма функции $f(x_1, \dots, x_n)$ (СовКНФ $_f$) – это формула вида

$$\bigwedge_{c_1 \dots c_n \in M_f^0} (x_1^{\bar{c}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{c}_n}).$$

Утверждение о единственности совершенной КНФ. Любая булева функция, кроме константы 1, представима совершенной конъюнктивной нормальной формой, единственной для данной функции.

Алгоритм построения совершенной КНФ по таблице истинности (вытекает из определения совершенной КНФ).

Начало: задана таблица истинности булевой функции.

Шаг 1: в векторе-столбце значений функции выбирается очередной ноль. Если нули исчерпаны, то идем на конец.

Шаг 2: по набору значений аргументов выбранной строки формируется дизъюнкция всех аргументов с соблюдением следующего правила: если i -я компонента набора равна 0, то i -я переменная входит в дизъюнкцию в степени 1 (без инверсии), иначе – в степени 0 (с инверсией). Полученная дизъюнкция добавляется в формулу как очередной сомножитель. Идем на шаг 1.

Конец.

Пример. Применим алгоритм к той же функции $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 \sim x_1 \bar{x}_3 \rightarrow x_2 x_3$.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$x_1^1 \vee x_2^0 \vee x_3^1 = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$$

$$x_1^0 \vee x_2^1 \vee x_3^1 = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3$$

Соединив полученные дизъюнкции знаками конъюнкции, имеем

$$\text{СовКНФ}_f = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3).$$

Построение таблицы истинности по совершенной КНФ, так же как и по совершенной ДНФ, выполняется значительно проще, чем по произвольной формуле, так как инверсии степеней переменных дизъюнкций совершенной КНФ задают наборы, на которых функция принимает значение 0.

7.5. Упражнения

Упр.1. Выполнить разложения функций $f_1 - f_4$ по указанным подмножествам переменных двумя способами (последовательным применением разложения Шеннона и непосредственно по формуле разложения функции k по переменным):

$$f_1(x, y, z, t) = (x \vee y \bar{z} t)(\bar{y} \rightarrow x \bar{y} \bar{z} \vee (x \vee z)) \quad \text{по } \{x, t\}, \{y, z\};$$

$$f_2(x, y, z, t) = (x \rightarrow y z)(y t \oplus z) \rightarrow x \bar{t} \vee \bar{x} \quad \text{по } \{x\}, \{y, z, t\};$$

$$f_3(x, y, z) = x \oplus y z \rightarrow (x \sim z \vee (x \sim y)) \quad \text{по } \{x\}, \{x, y, z\};$$

$$f_4(x, y, z, t) = y z \sim x t / (x \rightarrow z t) \oplus (x \vee y \vee z) \quad \text{по } \{x, y\}, \{z, t\}.$$

Показать равносильность формул, полученных двумя способами.

Упр.2. Построить совершенные ДНФ и совершенные КНФ функций $f_1 - f_8$.

x	y	z	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0

Проверить результаты, раскрыв скобки в совершенных КНФ и построив затем таблицы истинности.

8. Дизъюнктивная нормальная форма

8.1. Элементарная конъюнкция и ДНФ

Пусть имеем множество переменных $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Определение. *Элементарной конъюнкцией* назовем конъюнкцию переменных множества X , в которую каждая переменная входит не более одного раза (с инверсией или без инверсии).

Примеры. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, тогда $x_1\bar{x}_2x_4$, x_1x_3 , x_1 , 1 – элементарные конъюнкции, а $x_1x_1\bar{x}_2$, $x_1x_2\bar{x}_2x_4$ не являются элементарными.

Определение. Число переменных, образующих элементарную конъюнкцию, назовем ее *рангом*.

Примеры. Ранги элементарных конъюнкций $x_1\bar{x}_3x_4$ и 1 равны трем и нулю.

Определение. *Полной конъюнкцией* назовем элементарную конъюнкцию, состоящую из всех n переменных множества X , то есть конъюнкцию ранга n .

Пример. При $n = 4$ конъюнкция $x_1x_2\bar{x}_3x_4$ – полная.

Определение. Две конъюнкции называются *ортогональными по переменной x_i* , если эта переменная входит в одну конъюнкцию с инверсией, а в другую без инверсии.

Пример. Конъюнкции $x_1x_2\bar{x}_3$ и $\bar{x}_1x_3\bar{x}_4$ ортогональны по переменным x_1 и x_3 .

Определение. Две конъюнкции называются *смежными*, если они ортогональны по одной и только одной переменной x_i (принято также говорить "смежны по переменной x_i ").

Пример. Конъюнкции $x_1x_2\bar{x}_3$ и $x_1x_3\bar{x}_4$ являются смежными по переменной x_3 (ортогональны только по x_3).

Определение. Две конъюнкции называются *соседними*, если они ортогональны по одной и только одной переменной x_i и совпадают по остальным (принято также говорить "соседние по переменной x_i ").

Пример. Конъюнкции $x_1x_2\bar{x}_3$ и $x_1x_2x_3$ являются соседними по переменной x_3 (ортогональны только по x_3 и совпадают по x_1 и x_2).

Законы склеивания и обобщенного склеивания применяются, как нетрудно видеть, к соседним и смежным конъюнкциям соответственно. Поэтому их также называют законами *склеивания соседних конъюнкций* и *обобщенного склеивания смежных конъюнкций* и иногда добавляют, по какой переменной.

Примеры. Конъюнкции $x_1x_2\bar{x}_3$ и $x_1x_2x_3$ являются соседними по переменной x_3 , следовательно, к ним применим закон склеивания соседних конъюнкций по x_3 :

$$x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3 = x_1x_2.$$

Конъюнкции $x_1x_2\bar{x}_3$ и $x_1x_3\bar{x}_4$ являются смежными по переменной x_3 , следовательно, к ним применим закон обобщенного склеивания смежных конъюнкций по x_3 :

$$x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_3\bar{x}_4 = x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2\bar{x}_4.$$

Определение. Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ назовем дизъюнкцию различных элементарных конъюнкций, задающую функцию $f(x_1, \dots, x_n)$.

Пример. $x_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_3\bar{x}_4 = \text{ДНФ}$.

Очевидно, что совершенная ДНФ является частным случаем ДНФ, все конъюнкции которой полные.

Определение. Длиной ДНФ назовем число ее конъюнкций, а рангом ДНФ – сумму рангов конъюнкций.

Пример. Длина ДНФ из предыдущего примера равна трем, а ранг – восьми.

Будем применять обозначение ДНФ_f , если захотим отметить, что ДНФ представляет булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$.

8.2. Преобразование ДНФ в совершенную ДНФ

Алгоритм преобразования ДНФ в совершенную ДНФ (основан на законах склеивания $y = xy \vee \bar{x}y$ и идемпотентности $x \vee x = x$).

Начало: задана ДНФ_f .

Шаг 1: рассматриваем очередную конъюнкцию K исходной ДНФ $_f$. Если все конъюнкции исчерпаны, идем на конец.

Шаг 2: если конъюнкция K не является полной, то выбираем переменную x_i , которая не входит в K , и по закону склеивания заменяем K на дизъюнкцию двух конъюнкций: $K = Kx_i \vee K\bar{x}_i$ (в таком применении будем называть его законом *расклеивания соседних конъюнкций*). Если полученные слагаемые не являются полными конъюнкциями, то применяем к каждой из них закон расклеивания (шаг 2) до тех пор, пока не получим из конъюнкции K дизъюнкцию полных конъюнкций. Идем на шаг 1.

Конец: на основании закона идемпотентности приводим подобные среди одинаковых конъюнкций – получаем совершенную ДНФ функции $f(x_1, \dots, x_n)$.

Пример. Пусть ДНФ $_f = x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_3$, $n = 3$. Применим закон расклеивания к каждой конъюнкции:

$$x_1x_2 = x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3,$$

$$\bar{x}_1\bar{x}_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3,$$

$$x_3 = x_1x_3 \vee \bar{x}_1x_3 = \underline{x_1x_2x_3} \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee \underline{\bar{x}_1\bar{x}_2x_3}.$$

В последней строке подчеркнуты конъюнкции, совпадающие с полученными ранее. По закону идемпотентности они не войдут в совершенную ДНФ, которая примет вид

$$\text{СовДНФ}_f = x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3.$$

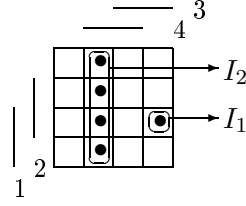
8.3. Элементарная конъюнкция и интервал

Утверждение о конъюнкции и интервале. Каждая элементарная конъюнкция K ранга r может быть задана интервалом I_K ранга r следующего вида: если переменная x_i не входит в K , то i -я компонента интервала I_K является внутренней; иначе i -я компонента является внешней, она равна 0, если переменная x_i входит в конъюнкцию K с инверсией, и равна 1, если переменная x_i входит в K без инверсии.

Примеры. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Рассмотрим три конъюнкции разных рангов и их задание интервалами, которые представим троичными векторами и на матрице Грея (здесь и везде

далее конъюнкции и задающему ее интервалу будем присваивать один и тот же номер).

$$\begin{aligned} K_1 &= x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4, & I_1 &= 1 \ 1 \ 1 \ 0; \\ K_2 &= \bar{x}_3 x_4, & I_2 &= - \ - \ 0 \ 1. \end{aligned}$$



Конъюнкция $K_3 = 1$ задается интервалом $I_3 = - - - -$, то есть всем булевым пространством B^4 . Результаты можно проверить построением характеристических множеств M^1 конъюнкций. Так множество M^1 конъюнкции $K_2 = \bar{x}_3 x_4$ (согласно определению конъюнкции) состоит из всех векторов, в которых третья компонента принимает значение 0, четвертая – 1, а значения остальных компонент произвольны, значит $M^1 = - - 0 \ 1$.

Справедливо и обратное утверждение о том, что любой интервал задает некоторую элементарную конъюнкцию.

Это взаимно-однозначное соответствие между элементарной конъюнкцией и интервалом позволяет рассматривать, например, закон склеивания соседних конъюнкций $xy \vee \bar{x}y = y$ и операцию склеивания соседних интервалов $I_{xy} \cup I_{\bar{x}y} = I_y$ как один и тот же закон, сформулированный на двух разных языках.

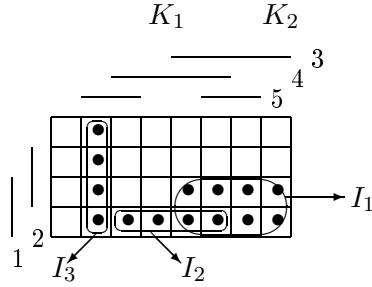
8.4. ДНФ и достаточное множество интервалов

Рассмотрим $\text{ДНФ}_f = K_1 \vee \dots \vee K_m$. По определению дизъюнкции, булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ принимает значение 1 тогда и только тогда, когда хотя бы одна из конъюнкций K_1, \dots, K_m принимает значение 1. Это означает, что соответствующие интервалы I_1, \dots, I_m образуют множество, достаточное для функции $f(x_1, \dots, x_n)$. Таким образом и в этом случае можно пользоваться двумя "параллельными" языками: языком ДНФ и языком интервалов. Последний оказывается наиболее наглядным при задании булевых функций матрицами Грея.

8.4.1. Построение матрицы Грея по ДНФ

Исходя из предыдущих рассуждений о ДНФ и достаточном множестве интервалов, построение матрицы Грея булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ по ДНФ $f = K_1 \vee \dots \vee K_m$ сводится к выделению на матрице интервалов I_1, \dots, I_m , задающих элементарные конъюнкции K_1, \dots, K_m .

Пример. Построим матрицу Грея функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ по ДНФ $f = x_1 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_4 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5$.



В частности, законы склеивания, обобщенного склеивания и поглощения могут быть продемонстрированы на матрицах Грея следующим образом.

Закон склеивания:
 $x y \vee \bar{x} y = y$

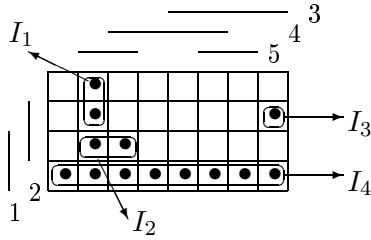
Закон поглощения:
 $x y \vee y = y$

Закон обобщенного склеивания:
 $x y \vee \bar{x} z = x y \vee \bar{x} z \vee y z$

8.4.2. Построение ДНФ по матрице Грея

Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ представлена матрицей Грея. Выделим на ней достаточное множество допустимых интервалов. Запишем дизъюнкцию элементарных конъюнкций, заданных этими интервалами – получим ДНФ $_f$.

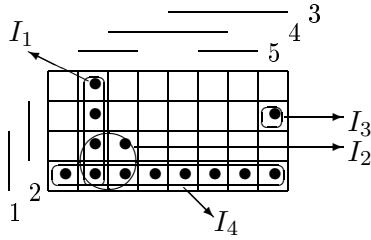
Пример.



$$\text{ДНФ}_f = \underbrace{\bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5}_{K_1} \vee \underbrace{x_1 x_2 \bar{x}_3 x_5}_{K_2} \vee \underbrace{\bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5}_{K_3} \vee \underbrace{x_1 \bar{x}_2}_{K_4}.$$

В [1.С.19] было показано, что булева функция может быть задана различными достаточными множествами интервалов. Из этого следует, что одна и та же функция в общем случае может быть задана различными ДНФ.

Пример. Рассмотрим функцию из предыдущего примера.



$$\text{ДНФ}'_f = \underbrace{\bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5}_{K_1} \vee \underbrace{x_1 \bar{x}_3 x_5}_{K_2} \vee \underbrace{\bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5}_{K_3} \vee \underbrace{x_1 \bar{x}_2}_{K_4}.$$

Заметим, что ДНФ $'_f$ проще, чем ДНФ $_f$, так как при одинаковой длине ДНФ $'_f$ имеет меньший ранг (13 вместо 15).

8.5. Построение ДНФ по формуле

Пусть булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ задана формулой. Применим к ней разложение Шеннона по любой переменной (наиболее предпочтительным, как правило, является выбор чаще встречающейся переменной, так как появление большого числа констант приводит к значительному упрощению формул). Если коэффициенты полученной формулы не являются ДНФ, то применим разложение Шеннона к коэффициентам, и так далее до тех пор, пока все очередные коэффициенты не превратятся в ДНФ, затем раскроем скобки – получим ДНФ _{f} .

Пример. Рассмотрим функцию трех переменных

$$f(x, y, z) = (x \rightarrow yz)/(x \oplus z).$$

Разложим ее по переменной x (она встречается в формуле чаще y и так же часто как z):

$$f(x, y, z) = x[(1 \rightarrow yz)/(1 \oplus z)] \vee \bar{x}[(0 \rightarrow yz)/(0 \oplus z)] =$$

[упростим выражение, используя свойства 0 и 1 для дизъюнкции с исключением ($0 \oplus a = a$, $1 \oplus a = \bar{a}$), для штриха Шеффера ($1/a = \bar{a}$) и для импликации ($0 \rightarrow a = 1$, $1 \rightarrow a = a$); способ получения этих свойств был рассмотрен в [1.С.30]]

$$= x[yz/\bar{z}] \vee \bar{x}[1/z] = x[yz/\bar{z}] \vee \bar{x}\bar{z} =$$

[разложим коэффициент при x по переменной z]

$$= x[z(y1/\bar{1}) \vee \bar{z}(y0/\bar{0})] \vee \bar{x}\bar{z} = x[z(y/0) \vee \bar{z}(0/1)] \vee \bar{x}\bar{z} =$$

[используем свойство 0 для штриха Шеффера ($0/a = 1$) и закон исключенного третьего]

$$= x[z1 \vee \bar{z}1] \vee \bar{x}\bar{z} = x[z \vee \bar{z}] \vee \bar{x}\bar{z} = x \vee \bar{x}\bar{z}.$$

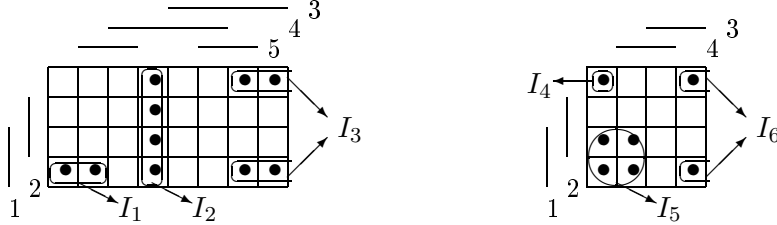
Полученная формула является ДНФ.

8.6. Упражнения

Упр.1. На матрице Грея для пяти переменных построить интервалы, задающие конъюнкции:

$$K_1 = x_1 \bar{x}_3 x_5, K_2 = x_2 \bar{x}_4, K_3 = x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5, K_4 = x_1, K_5 = x_2 x_3 x_4.$$

Упр.2. Записать конъюнкции, заданные интервалами $I_1 - I_6$.



Упр.3. Преобразовать $\text{ДНФ}_1 - \text{ДНФ}_4$ в совершенные ДНФ и проверить результат построением матриц Грея:

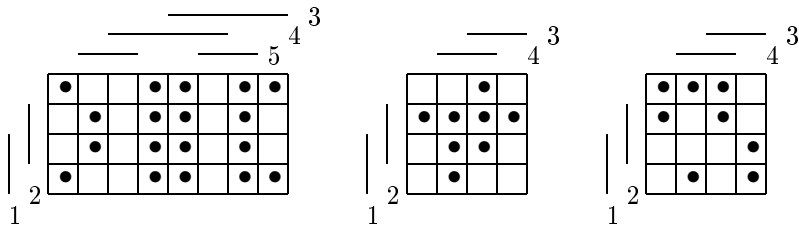
$$\text{ДНФ}_1 = x t \vee y z t \vee x \bar{y} t;$$

$$\text{ДНФ}_2 = x y \vee x z \vee \bar{x} \bar{y};$$

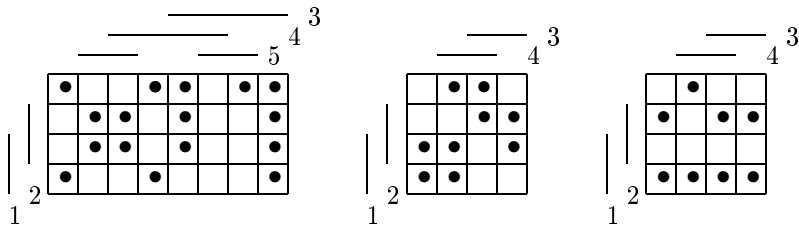
$$\text{ДНФ}_3 = x t \vee y t \vee x \bar{y};$$

$$\text{ДНФ}_4 = x y z t \vee \bar{x} y \vee x \bar{y} \bar{z}.$$

Упр.4. Построить ДНФ из конъюнкций ранга 3 и менее по матрицам Грея.



Упр.5. На каждой матрице Грея выделить достаточное множество максимальных интервалов и построить по ним ДНФ.



Упр.6. Построить ДНФ по формулам $F_1 - F_4$ и проверить правильность вычислений построением таблиц истинности:

$$F_1 = x \rightarrow y\bar{z} \rightarrow x\bar{y};$$

$$F_2 = x \oplus y \leftrightarrow (x \sim z);$$

$$F_3 = y \downarrow (x \sim y\bar{z}) \hookrightarrow y \vee z;$$

$$F_4 = xy/(z \leftarrow \bar{y}) \vee (x\bar{t} \sim y).$$

9. Сокращенная, кратчайшая, минимальная и безызбыточная ДНФ

9.1. Импликанты функции и сокращенная ДНФ

Рассмотрим булевы функции $f(x_1, \dots, x_n)$ и $g(x_1, \dots, x_n)$.

Определение. Булева функция $g(x_1, \dots, x_n)$ называется *импликантой функции* $f(x_1, \dots, x_n)$, если

$$g(x_1, \dots, x_n) \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \equiv 1.$$

Так как $x \rightarrow y = 0$ только на наборе 10, то для того, чтобы функция $g(x_1, \dots, x_n)$ была импликантой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ достаточно, чтобы на всех тех наборах α , на которых $g(\alpha) = 1$, функция $f(x_1, \dots, x_n)$ также принимала значение 1.

Примеры. Пусть функция $f(x_1, x_2, x_3)$ задана матрицей Грея (левая матрица на рисунке). Функция $g(x_1, x_2, x_3)$ и конъюнкции $K_1 = \bar{x}_1 x_2 x_3$, $K_2 = x_3$ (три правые матрицы) – ее импликанты.

$\begin{array}{c} \text{---} 3^2 \\ \quad \begin{array}{ c c c c } \hline & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline & \bullet & \bullet & \\ \hline \end{array} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{---} 3^2 \\ \quad \begin{array}{ c c c c } \hline & & \bullet & \bullet \\ \hline & \bullet & \bullet & \\ \hline \end{array} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{---} 3^2 \\ \quad \begin{array}{ c c c c } \hline & & & \bullet \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{---} 3^2 \\ \quad \begin{array}{ c c c c } \hline & \bullet & \bullet & \\ \hline & \bullet & \bullet & \\ \hline \end{array} \end{array}$
1 $f(x_1, x_2, x_3)$	1 $g(x_1, x_2, x_3)$	1 $K_1 = \bar{x}_1 x_2 x_3$	1 $K_2 = x_3$

Очевидно, что любая конъюнкция K ДНФ _{f} является импликантой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ и задается допустимым для функции $f(x_1, \dots, x_n)$ интервалом I_K .

Определение. Элементарная конъюнкция K называется *простой импликантой функции* $f(x_1, \dots, x_n)$, если она является импликантой этой функции, и не существует другой конъюнкции K' , которая является импликантой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ и поглощает конъюнкцию K .

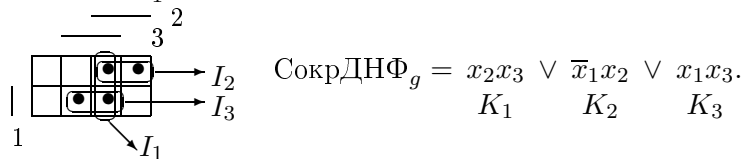
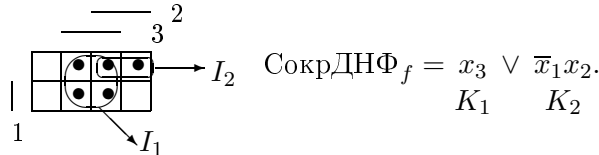
Примеры. Рассмотрим функцию $f(x_1, x_2, x_3)$ из предыдущего примера. Конъюнкция $K_2 = x_3$ – простая импликанта функции, конъюнкция $K_1 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$ – импликанта, но не простая, так как она поглощается импликантой K_2 .

Другими словами, простая импликанта функции – это такая импликанта-конъюнкция, которая не может быть упрощена выбрасыванием из нее переменных, то есть *неупрощаемая* конъюнкция. Это означает, что всякая простая импликанта K булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ задается максимальным для этой функции интервалом I_K .

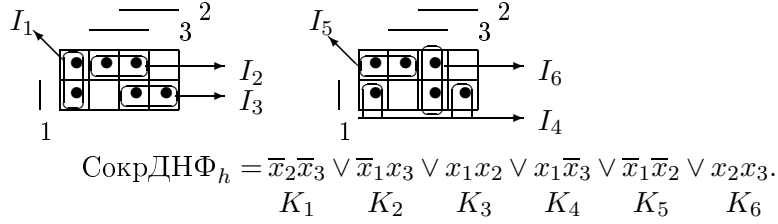
Определение. ДНФ, состоящая из всех простых импликант булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$, называется *сокращенной ДНФ* этой функции (СокрДНФ_f).

В общем случае построение сокращенной ДНФ является довольно сложной задачей, которая будет рассмотрена нами в следующей части пособия. Однако для булевой функции небольшого числа аргументов, заданной матрицей Грея, найти сокращенную ДНФ (или множество всех максимальных интервалов) довольно просто, и мы уже решали такую задачу для мажоритарной функции в [1.С.20], изучая интервальный способ задания булевой функции.

Примеры. Найдем сокращенные ДНФ функций из предыдущего примера: $f(x_1, x_2, x_3)$, $g(x_1, x_2, x_3)$, и функции $h(x_1, x_2, x_3)$.



СокрДНФ_h сложнее – она состоит из шести простых импликант, поэтому для наглядности изображена на двух матрицах Грея:



Обратим внимание на то, что термин "сокращенная" относится не к длине ДНФ (она может быть большой, значительно больше длины совершенной ДНФ), а к рангам отдельных конъюнкций – ранги неупрощаемых конъюнкций (именно из них состоит сокращенная ДНФ) не могут быть уменьшены.

9.2. Минимальная и кратчайшая ДНФ

Определение. Минимальной ДНФ (МинДНФ_f) булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ называется ДНФ наименьшего ранга из всех ДНФ, задающих функцию $f(x_1, \dots, x_n)$.

Определение. Кратчайшей ДНФ (КратДНФ_f) булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ называется ДНФ наименьшей длины из всех ДНФ, задающих функцию $f(x_1, \dots, x_n)$.

Методы поиска минимальной и кратчайшей ДНФ будут рассмотрены в следующей части пособия, пока же найдем их визуально по матрице Грея.

Примеры. Для функции $f(x_1, x_2, x_3)$ из предыдущего примера сокращенная ДНФ является и кратчайшей, и минимальной:

$$\text{МинДНФ}_f = \text{КратДНФ}_f = x_3 \vee \overline{x}_1x_2 \quad (\text{длины } 2, \text{ ранга } 3).$$

Однако эта функция имеет еще одну кратчайшую ДНФ:

$$\text{КратДНФ}'_f = x_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \quad (\text{длины } 2, \text{ ранга } 4).$$

КратДНФ $_f'$ отличается от предыдущей кратчайшей ДНФ тем, что ее вторая конъюнкция не является простой импликантой, так как может быть упрощена вычеркиванием \bar{x}_3 .

Теорема о кратчайшей ДНФ. Существует кратчайшая ДНФ булевой функции, состоящая из простых импликант.

Определение. *Простой кратчайшей ДНФ* булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ назовем ее кратчайшую ДНФ, состоящую из простых импликант.

Везде далее из всех кратчайших ДНФ нас будут интересовать только простые кратчайшие ДНФ, так как помимо минимальной длины они имеют и меньший ранг каждой отдельной конъюнкции. Однако называть и обозначать простые кратчайшие ДНФ функции $f(x_1, \dots, x_n)$ будем по-прежнему – КратДНФ $_f$.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x_1, x_2, x_3)$, которая имеет две простые кратчайшие ДНФ.

$$\begin{aligned} \text{КратДНФ}'_f &= x_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2, \\ &\quad K_1 \quad K_2 \quad K_3 \\ \text{КратДНФ}''_f &= x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_1x_3. \\ &\quad K_1 \quad K_3 \quad K_4 \end{aligned}$$

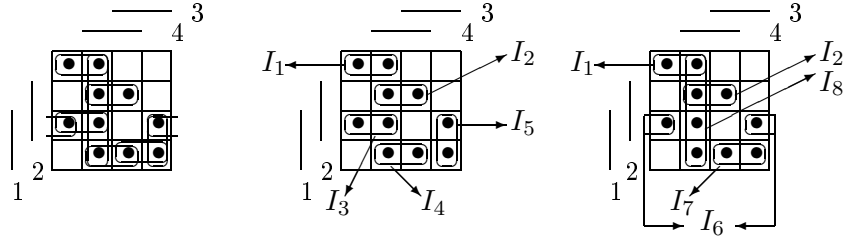
Для минимальных ДНФ справедливо более сильное утверждение, чем для кратчайших.

Теорема о минимальных ДНФ. Любая минимальная ДНФ булевой функции состоит из простых импликант.

Итак, если булева функция задана матрицей Грея, то:

- для построения сокращенной ДНФ необходимо выделить все максимальные интервалы;
- для построения кратчайшей ДНФ – их достаточное множество минимальной мощности;
- для построения минимальной ДНФ – такое достаточное множество максимальных интервалов, сумма рангов которых минимальна.

Примеры. Найдем сокращенную, кратчайшие и минимальные ДНФ функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$:



На левой матрице показано множество всех максимальных интервалов (их номера можно найти на двух других матрицах).

$$\begin{aligned} \text{СокрДНФ}_f = & \underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3}_{K_1} \vee \underbrace{\bar{x}_1x_2x_4}_{K_2} \vee \underbrace{x_1x_2\bar{x}_3}_{K_3} \vee \underbrace{x_1\bar{x}_2x_4}_{K_4} \vee \underbrace{x_1x_3\bar{x}_4}_{K_5} \\ & \vee \underbrace{x_1x_2\bar{x}_4}_{K_6} \vee \underbrace{x_1\bar{x}_2x_3}_{K_7} \vee \underbrace{\bar{x}_3x_4}_{K_8}. \end{aligned}$$

В центре показано достаточное множество из пяти максимальных интервалов $\{I_1, I_2, I_3, I_4, I_5\}$. Никакие четыре из восьми максимальных интервалов не образуют достаточного множества, следовательно, ДНФ, состоящая из конъюнкций, заданных интервалами $I_1 - I_5$, является кратчайшей (длины 5, ранга 15):

$$\text{КратДНФ}_f = \underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3}_{K_1} \vee \underbrace{\bar{x}_1x_2x_4}_{K_2} \vee \underbrace{x_1x_2\bar{x}_3}_{K_3} \vee \underbrace{x_1\bar{x}_2x_4}_{K_4} \vee \underbrace{x_1x_3\bar{x}_4}_{K_5}.$$

Справа показано достаточное множество из пяти максимальных интервалов $\{I_1, I_2, I_6, I_7, I_8\}$. Никакое другое достаточное множество не дает меньшей суммы рангов, следовательно, соответствующая ДНФ является минимальной (длины 5, ранга 14):

$$\text{МинДНФ}_f = \underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3}_{K_1} \vee \underbrace{\bar{x}_1x_2x_4}_{K_2} \vee \underbrace{x_1x_2\bar{x}_4}_{K_6} \vee \underbrace{x_1\bar{x}_2x_3}_{K_7} \vee \underbrace{\bar{x}_3x_4}_{K_8}.$$

Обратим внимание, что в данном случае КратДНФ $_f$ не является минимальной, а МинДНФ $_f$ является кратчайшей. Других кратчайших и минимальных ДНФ эта функция не имеет (напомним, что мы рассматриваем только простые кратчайшие ДНФ).

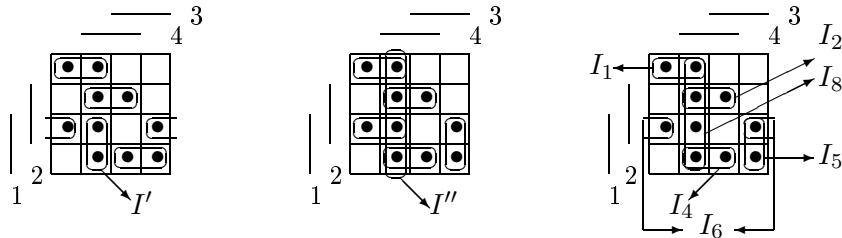
9.3. Безызбыточная ДНФ

Определение. ДНФ булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *безызбыточной ДНФ* (*БезДНФ $_f$*), если из нее нельзя удалить ни одной конъюнкции и ни одной переменной из конъюнкции так, чтобы она оставалась равносильной исходной ДНФ.

В частности, безызбыточной является любая минимальная и любая кратчайшая ДНФ (не простая кратчайшая ДНФ явно избыточна).

Методы поиска безызбыточных ДНФ будут рассмотрены в следующей части методического пособия. Здесь же мы найдем безызбыточную ДНФ по матрице Грея. Для этого выделим такое достаточное множество максимальных интервалов, чтобы при удалении любого интервала оно переставало быть достаточным.

Примеры. Рассмотрим функцию из предыдущего примера.



На матрице слева выделено достаточное множество из пяти интервалов, ни один из которых нельзя удалить так, чтобы множество оставалось достаточным. Но интервал I' не является максимальным, так как он может быть расширен до интервала, занимающего второй столбец, то есть из конъюнкции $K' = x_1 \bar{x}_3 x_4$ можно удалить переменную x_1 . Поэтому ДНФ, состоящая из конъюнкций, заданных пятью выделенными интервалами, не является безызбыточной, но если упростить K' , то ДНФ станет безызбыточной и совпадет с минимальной ДНФ из предыдущего примера.

В центре выделено достаточное множество из шести максимальных интервалов, которое является избыточным, так как интервал I'' может быть удален, а множество при этом останется достаточным. Поэтому ДНФ, состоящая из конъюнкций, заданных шестью выделенными интервалами, не является безызбыточной,

но если удалить интервал I'' , то ДНФ станет безызбыточной и совпадет с кратчайшей ДНФ из предыдущего примера.

На матрице справа выделено достаточное множество из шести максимальных интервалов $\{I_1, I_2, I_4, I_5, I_6, I_8\} = I$ (с номерами из предыдущего примера). Удаление любого из них приводит к тому, что множество перестает быть достаточным. Поэтому множество I задает безызбыточную ДНФ (длины 6, ранга 17):

$$\begin{aligned} \text{БезДНФ}_f = & \underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3}_{K_1} \vee \underbrace{\bar{x}_1x_2x_4}_{K_2} \vee \underbrace{x_1\bar{x}_2x_4}_{K_4} \vee \underbrace{x_1x_3\bar{x}_4}_{K_5} \\ & \vee \underbrace{x_1x_2\bar{x}_4}_{K_6} \vee \underbrace{\bar{x}_3x_4}_{K_8}. \end{aligned}$$

Сравнение длин и рангов ДНФ, полученных в двух последних примерах, показывает, что данная безызбыточная ДНФ не является ни кратчайшей, ни минимальной.

9.4. Кратчайшие ДНФ элементарных функций

Рассмотрим элементарные булевы функции двух аргументов. Формулы для конъюнкции ab и дизъюнкции $a \vee b$ являются их кратчайшими ДНФ. Представим остальные элементарные функции матрицами Грея и найдем их кратчайшие ДНФ.

$\begin{array}{c} \text{--- } b \\ \begin{array}{ c c } \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \\ \text{--- } a \end{array}$	$a \rightarrow b = \bar{a} \vee b$	$\begin{array}{c} \text{--- } b \\ \begin{array}{ c c } \hline & \\ \hline \end{array} \\ \text{--- } a \end{array}$	$a \hookrightarrow b = a\bar{b}$
$\begin{array}{c} \text{--- } b \\ \begin{array}{ c c } \hline \bullet & \\ \hline \end{array} \\ \text{--- } a \end{array}$	$a \leftarrow b = a \vee \bar{b}$	$\begin{array}{c} \text{--- } b \\ \begin{array}{ c c } \hline & \bullet \\ \hline \end{array} \\ \text{--- } a \end{array}$	$a \leftrightarrow b = \bar{a}b$
$\begin{array}{c} \text{--- } b \\ \begin{array}{ c c } \hline & \bullet \\ \hline \end{array} \\ \text{--- } a \end{array}$	$a \oplus b = a\bar{b} \vee \bar{a}b$	$\begin{array}{c} \text{--- } b \\ \begin{array}{ c c } \hline \bullet & \\ \hline \end{array} \\ \text{--- } a \end{array}$	$a \sim b = \bar{a}\bar{b} \vee ab$
$\begin{array}{c} \text{--- } b \\ \begin{array}{ c c } \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \\ \text{--- } a \end{array}$	$a/b = \bar{a} \vee \bar{b}$	$\begin{array}{c} \text{--- } b \\ \begin{array}{ c c } \hline \bullet & \\ \hline \end{array} \\ \text{--- } a \end{array}$	$a \downarrow b = \bar{a}\bar{b}$

Кратчайшие ДНФ элементарных булевых функций можно использовать для получения ДНФ функций, заданных произвольными формулами. При этом запоминать кратчайшие ДНФ совсем не обязательно, так как они легко выводятся.

Пример. Пусть булева функция задана формулой

$$f(x, y, z) = (x \rightarrow yz)/(x \oplus z).$$

Подставим в формулу кратчайшую ДНФ штриха Шеффера a/b при $a = (x \rightarrow yz)$ и $b = (x \oplus z)$:

$$f(x, y, z) = (x \rightarrow yz)/(x \oplus z) = \overline{(x \rightarrow yz)} \vee \overline{(x \oplus z)} =$$

[инверсию дизъюнкции с исключением заменим эквивалентностью, а инверсию импликации – не импликацией, подставим их кратчайшие ДНФ]

$$= (x \hookrightarrow yz) \vee (x \sim z) = (x\bar{y}\bar{z}) \vee (\bar{x}\bar{z} \vee xz) =$$

[используем закон де Моргана и законы ассоциативности и дистрибутивности]

$$= x(\bar{y} \vee \bar{z}) \vee (\bar{x}\bar{z} \vee xz) = x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z} \vee xz =$$

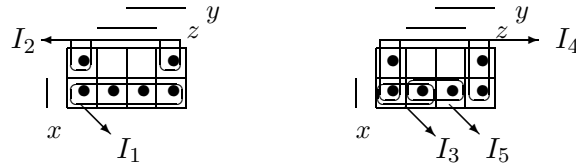
[упростим выражение на основании закона склеивания]

$$= x\bar{y} \vee \bar{z} \vee xz = \text{ДНФ}'_f.$$

В разделе 8.6 для этой же функции разложением Шеннона была получена другая $\text{ДНФ}_f = x \vee \bar{x}\bar{z}$. В результате имеем

$$\begin{array}{ccc} \text{ДНФ}_f = x \vee \bar{x}\bar{z} & \text{и} & \text{ДНФ}'_f = x\bar{y} \vee \bar{z} \vee xz. \\ K_1 & K_2 & K_3 \quad K_4 \quad K_5 \end{array}$$

Убедимся в том, что они равносильны, построив матрицы Грея:



9.5. Упражнения

Упр.1. Определить, являются ли элементарные конъюнкции $K_1 - K_3$ импликантами булевых функций $f_1 - f_3$ непосредственно по определению импликанты (тождественную истинность формул $K_i \rightarrow f_i$ проверять построением таблиц истинности):

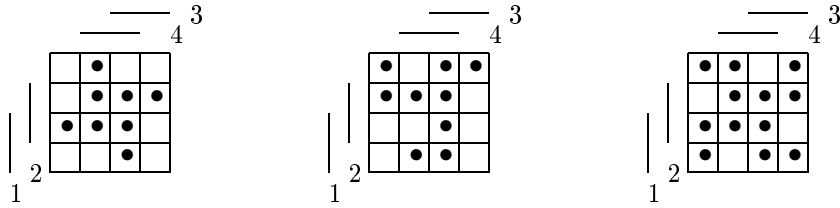
$$\begin{aligned} K_1 &= x_1 \bar{x}_2 x_3, & f_1 &= (x_1 (x_2 \oplus x_3) \oplus x_4) \rightarrow x_5; \\ K_2 &= x_1 x_3 x_4, & f_2 &= x_1 x_5 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_4 x_5; \\ K_3 &= \bar{x}_3 x_5, & f_3 &= ((x_1/x_2) \rightarrow \bar{x}_5) \downarrow (x_3 x_4). \end{aligned}$$

Упр.2. Из заданных множеств элементарных конъюнкций выделить простые импликанты функций $f_1 - f_3$, представив их матрицами Грея:

$$\begin{aligned} \{x_1 \bar{x}_3, x_1 x_2, x_1 x_3, x_1\}, & \quad f_1(x_1, x_2, x_3) = 00101111; \\ \{x_1 \bar{x}_2, x_2 x_3, x_1\}, & \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = 01111110; \\ \{x_2 \bar{x}_4, x_2 \bar{x}_3, \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3\}, & \quad f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1010111001011110. \end{aligned}$$

Найти все простые импликанты функций $f_1 - f_3$.

Упр.3. Найти сокращенную ДНФ, все кратчайшие ДНФ и все безыбыточные ДНФ следующих булевых функций:



Упр.4. Найти ДНФ булевых функций, заданных формулами $F_1 - F_4$, подстановкой кратчайших ДНФ элементарных булевых функций. Проверить правильность вычислений построением таблиц истинности:

$$\begin{aligned} F_1 &= x \rightarrow y \bar{z} \rightarrow x \bar{y}; \\ F_2 &= x \oplus y \leftrightarrow (x \sim z); \\ F_3 &= y \downarrow (x \sim y \bar{z}) \hookrightarrow y \vee z; \\ F_4 &= xy / (z \leftarrow \bar{y}) \vee (x \bar{t} \sim y). \end{aligned}$$

10. Контрольная работа

Тема контрольной работы : дизъюнктивная нормальная форма, совершенная, сокращенная и кратчайшая ДНФ.

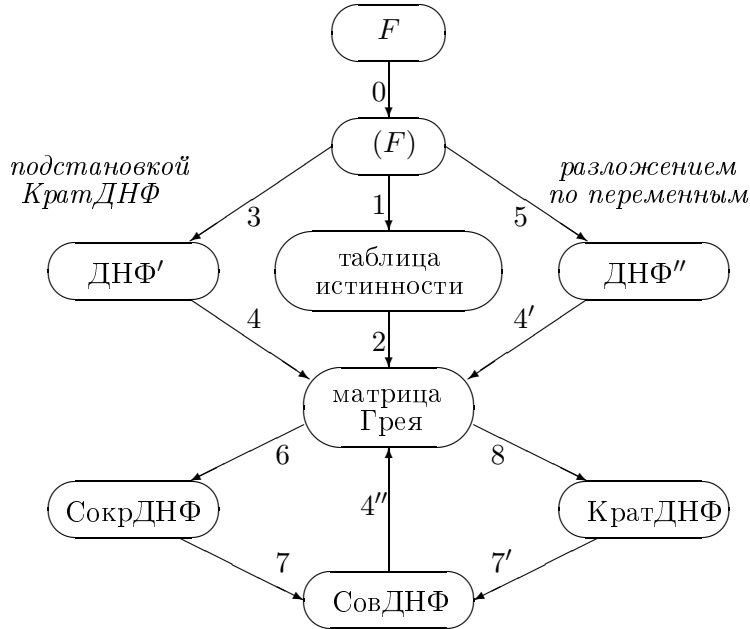


Схема контрольной работы (решение каждой из двенадцати предложенных здесь задач начинать с постановки задачи и делать вывод из сравнения матриц Грея, полученных разными способами; F обозначает формулу без лишних скобок, (F) – с недостающими скобками).

Задания на контрольную работу (формула F)

- | | |
|---|--|
| 1) $x \rightarrow y \rightarrow (\bar{x} \oplus z) \rightarrow xy \vee x \bar{y} \bar{z}$ | 6) $y \leftarrow x \rightarrow (\bar{z} \oplus x) \rightarrow xy \vee \bar{x} \bar{y} \bar{z}$ |
| 2) $z \rightarrow y \rightarrow (z \sim x) \rightarrow yz \vee \bar{x} \bar{y} \bar{z}$ | 7) $yz \leftarrow x \rightarrow (z \oplus x) \vee x \bar{y} z$ |
| 3) $x \rightarrow yz \rightarrow (\bar{x} \sim \bar{z}) \vee \bar{x} \bar{y} z$ | 8) $x \rightarrow yz \rightarrow (x \oplus z) \vee \bar{x} \bar{y} z$ |
| 4) $yz \leftarrow x \rightarrow (x \sim \bar{z}) \vee xy \bar{z}$ | 9) $z \sim y \rightarrow (\bar{x} \leftarrow yz) \vee \bar{x} \bar{y} \bar{z}$ |
| 5) $z \sim y \rightarrow (x \downarrow yz) \vee x \bar{y} z$ | 10) $x \leftarrow yz / (x \sim y) \vee xyz$ |

- 11) $xy \rightarrow z/(z \sim y) \vee xyz$ 21) $x \leftarrow yz/(x \oplus \bar{y}) \vee xyz$
12) $\bar{z} \oplus y \rightarrow (x \downarrow yz) \vee xy\bar{z}$ 22) $\bar{z} \oplus y \rightarrow (\bar{x} \leftarrow yz) \vee \bar{x}y\bar{z}$
13) $y \sim z \rightarrow (yz \rightarrow \bar{x}) \vee xy\bar{z}$ 23) $xy \rightarrow z/(\bar{z} \oplus y) \vee xyz$
14) $y \leftarrow x \rightarrow (z \sim \bar{x}) \rightarrow xy \vee x\bar{y}\bar{z}$ 24) $yz/\bar{x} \rightarrow (x \oplus y) \vee xyz$
15) $x \leftarrow yz \rightarrow (\bar{x} \sim y) \vee xyz$ 25) $x/\bar{y} \rightarrow (x \oplus z) \rightarrow xy \vee x\bar{y}\bar{z}$
16) $x \leftarrow yz \rightarrow (\bar{x} \sim y) \vee xyz$ 26) $x|\bar{y} \rightarrow (x \oplus z) \rightarrow xy \vee x\bar{y}\bar{z}$
17) $z \oplus \bar{y} \rightarrow (yz \rightarrow \bar{x}) \vee x\bar{y}z$ 27) $yz \leftarrow x \rightarrow (z \oplus x) \vee x\bar{y}z$
18) $yz|\bar{x} \rightarrow (x \oplus y) \vee xyz$ 28) $y \leftarrow x \rightarrow (z \sim \bar{x}) \rightarrow xy \vee x\bar{y}\bar{z}$
19) $xy \rightarrow z/(\bar{z} \oplus y) \vee xyz$ 29) $\bar{z} \oplus y \rightarrow (yz \rightarrow \bar{x}) \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$
20) $\bar{z} \oplus \bar{y} \rightarrow (x \downarrow \bar{y}z) \vee xy\bar{z}$ 30) $yz \rightarrow x/(x \oplus \bar{z}) \vee xyz$

Пример. Задана формула $F = \bar{x} \rightarrow \bar{y}z/(y \sim \bar{z}) \vee x\bar{y}z$.

0) *Расставим скобки в формуле F . Возьмем в скобки конъюнкции, затем остальные подформулы слева направо.*

$$(F) = ((\bar{x} \rightarrow (\bar{y}z))/(y \sim \bar{z})) \vee (x\bar{y}z).$$

1) *Построим таблицу истинности функции по формуле (F) .*

x	y	z	$((\bar{x} \rightarrow (\bar{y}z))/(y \sim \bar{z})) \vee (x\bar{y}z)$								f
0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1
			3	4	1	7	6	5	8	2	

2) *Построим матрицу Грея функции $f(x, y, z)$ по таблице истинности. Отметим на матрице наборы, на которых $f(x, y, z)=1$.*

				z^y
	•		•	•
	•	•	•	
x				

3) Получим ДНФ' по формуле (F) подстановкой кратчайших ДНФ элементарных функций. Для упрощения записи опустим скобки вокруг конъюнкций. Начнем с замены штриха Шеффера a/b ее кратчайшей ДНФ при $a = \bar{x} \rightarrow \bar{y}z$, $b = y \sim \bar{z}$:

$$\begin{array}{c} \overline{} \\ b \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \\ \hline \end{array} \\ a \end{array} \quad a/b = \bar{a} \vee \bar{b}$$

$$(F) = ((\bar{x} \rightarrow \bar{y}z)/(y \sim \bar{z})) \vee x\bar{y}z = ((\overline{\bar{x} \rightarrow \bar{y}z}) \vee \overline{y \sim \bar{z}}) \vee x\bar{y}z =$$

[заменим инверсию импликации на не импликацию и инверсию эквивалентности на дизъюнкцию с исключением]

$$= (\bar{x} \hookrightarrow \bar{y}z) \vee (y \oplus \bar{z}) \vee x\bar{y}z =$$

[найдем кратчайшие ДНФ не импликации и дизъюнкции с исключением]

$$\begin{array}{c} \overline{} \\ b \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \bullet & \\ \hline \end{array} \\ a \end{array} \quad a \hookrightarrow b = a\bar{b} \quad \begin{array}{c} \overline{} \\ b \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \\ \hline \end{array} \\ a \end{array} \quad a \oplus b = a\bar{b} \vee \bar{a}b$$

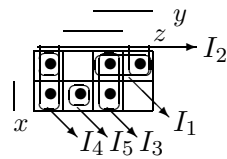
и подставим их в формулу]

$$= \bar{x}(\overline{\bar{y}z}) \vee (y \vee \bar{y}\bar{z}) \vee x\bar{y}z =$$

[применим закон де Моргана и законы дистрибутивности и ассоциативности]

$$\begin{aligned} &= \bar{x}(y \vee \bar{z}) \vee yz \vee \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z = \\ &= \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{z} \vee yz \vee \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z = \text{ДНФ}' \\ &\quad K_1 \quad K_2 \quad K_3 \quad K_4 \quad K_5 \end{aligned}$$

4) Построим матрицу Грея по ДНФ'.



5) Получим ДНФ'' по формуле (F) разложением по переменным. Применим к подформуле $(\bar{x} \rightarrow \bar{y}z)/(y \sim \bar{z})$ разложение Шеннона по переменной y (эта переменная встречается в подформуле чаще x и так же часто, как z).

$$(F) = ((\bar{x} \rightarrow \bar{y}z)/(y \sim \bar{z})) \vee x\bar{y}z = \\ = y[(\bar{x} \rightarrow \bar{1}z)/(1 \sim \bar{z})] \vee \bar{y}[(\bar{x} \rightarrow \bar{0}z)/(0 \sim \bar{z})] \vee x\bar{y}z =$$

[применим свойства 0 и 1 для конъюнкции]

$$= y[(\bar{x} \rightarrow 0)/(1 \sim \bar{z})] \vee \bar{y}[(\bar{x} \rightarrow z)/(0 \sim \bar{z})] \vee x\bar{y}z =$$

[выведем свойства 0 и 1 для импликации и эквивалентности

a	$a \rightarrow 0$	$1 \sim a$	$0 \sim a$
0	1	0	1
1	0	1	0

$$a \rightarrow 0 = \bar{a}$$

$$1 \sim a = a$$

$$0 \sim a = \bar{a}$$

и упростим выражение]

$$= y[x/\bar{z}] \vee \bar{y}[(\bar{x} \rightarrow z)/z] \vee x\bar{y}z =$$

[разложим коэффициенты при y и \bar{y} по переменной z]

$$= y[z(x/\bar{1}) \vee \bar{z}(x/\bar{0})] \vee \bar{y}[z((\bar{x} \rightarrow 1)/1) \vee \bar{z}((\bar{x} \rightarrow 0)/0)] \vee x\bar{y}z = \\ = y[z(x/0) \vee \bar{z}(x/1)] \vee \bar{y}[z((\bar{x} \rightarrow 1)/1) \vee \bar{z}((\bar{x} \rightarrow 0)/0)] \vee x\bar{y}z =$$

[выведем свойства 0 и 1 для импликации и штриха Шеффера

a	$a \rightarrow 1$	$a/0$	$a/1$
0	1	1	1
1	1	1	0

$$a \rightarrow 1 = 1$$

$$a/0 = 1$$

$$a/1 = \bar{a}$$

и упростим выражение]

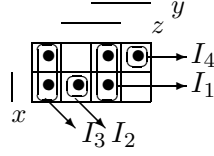
$$= y[z1 \vee \bar{z}\bar{x}] \vee \bar{y}[z(1/1) \vee \bar{z}(x/0)] \vee x\bar{y}z = \\ = y[z \vee \bar{z}\bar{x}] \vee \bar{y}[z0 \vee \bar{z}1] \vee x\bar{y}z =$$

[используем свойства 0 и 1 и закон дистрибутивности]

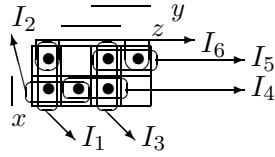
$$= yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z = \text{ДНФ''}.$$

K_1
 K_2
 K_3
 K_4

4') Построим матрицу Грея по ДНФ ''.



6) Построим сокращенную ДНФ по матрице Грея. Выделим все максимальные интервалы, они зададут конъюнкции сокращенной ДНФ.

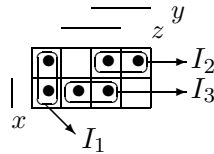


$$\text{СокрДНФ} = \underbrace{\bar{y}\bar{z}}_{K_1} \vee \underbrace{x\bar{y}}_{K_2} \vee \underbrace{yz}_{K_3} \vee \underbrace{xz}_{K_4} \vee \underbrace{\bar{x}y}_{K_5} \vee \underbrace{\bar{x}\bar{z}}_{K_6}.$$

7) Преобразуем сокращенную ДНФ в совершенную ДНФ. Используем закон расклеивания неполных конъюнкций, подчеркнем конъюнкции, совпадающие с полученными ранее, и по закону идемпотентности удалим их:

$$\begin{aligned} & \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y} \vee yz \vee xz \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{z} = \\ & = x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x y z \vee \bar{x} y z \vee \\ & \quad \vee x y z \vee x\bar{y}z \vee \bar{x} y z \vee \bar{x} y \bar{z} \vee \bar{x} y z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} = \\ & = \underbrace{x\bar{y}\bar{z}}_{K_1} \vee \underbrace{\bar{x}\bar{y}\bar{z}}_{K_2} \vee \underbrace{x\bar{y}z}_{K_3} \vee \underbrace{x y z}_{K_4} \vee \underbrace{\bar{x} y z}_{K_5} \vee \underbrace{\bar{x} y \bar{z}}_{K_6} = \text{СовДНФ}. \end{aligned}$$

8) Построим кратчайшую ДНФ по матрице Грея. Для этого выделим на матрице минимальное число максимальных интервалов, образующих достаточное множество, и по нему построим кратчайшую ДНФ.



$$\text{КратДНФ} = \underbrace{\bar{y}\bar{z}}_{K_1} \vee \underbrace{\bar{x}y}_{K_2} \vee \underbrace{xz}_{K_3}.$$

7') Преобразуем кратчайшую ДНФ в совершенную ДНФ .

$$\begin{aligned} & \overline{y} \overline{z} \vee \overline{x} y \vee x z = \\ & = x \overline{y} \overline{z} \vee \overline{x} \overline{y} \overline{z} \vee \overline{x} y z \vee \overline{x} y \overline{z} \vee x y z \vee x \overline{y} z = \text{СовДНФ}. \\ & \quad K_1 \quad K_2 \quad K_5 \quad K_6 \quad K_4 \quad K_3 \end{aligned}$$

Здесь конъюнкциям присвоены номера из совершенной ДНФ задачи 7), сравнение показывает, что совершенные ДНФ совпали.

4'') Построим матрицу Грея по совершенной ДНФ . Каждая полная конъюнкция задается точкой, которая на матрице обозначена номером конъюнкции в совершенной ДНФ.

		\overline{z}		y	
		\overline{z}		z	
x	2		5	6	
	1	3	4		

Вывод. Матрицы Грея, полученные при решении задач 2), 4), 4'), 4''), совпадают, следовательно, ошибок при выполнении контрольной работы не было (кроме, может быть, неправильной расстановки скобок).

Литература

1. Быкова С.В., Буркатовская Ю.Б. Булевы функции. Учебно-методическое пособие. Томск: ТГУ, 2002. Ч.1. 37 с.

Содержание

7. Разложение булевой функции по переменным и совершенные нормальные формы	3
7.1. Разложение Шеннона	3
7.2. Разложение функции по k переменным	4
7.3. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма	5
7.4. Совершенная конъюнктивная нормальная форма	8
7.5. Упражнения	9
8. Дизъюнктивная нормальная форма	10
8.1. Элементарная конъюнкция и ДНФ	10
8.2. Преобразование ДНФ в совершенную ДНФ	11
8.3. Элементарная конъюнкция и интервал	12
8.4. ДНФ и достаточное множество интервалов	13
8.4.1. Построение матрицы Грея по ДНФ	14
8.4.2. Построение ДНФ по матрице Грея	15
8.5. Построение ДНФ по формуле	16
8.6. Упражнения	17
9. Сокращенная, кратчайшая, минимальная и безызбыточная ДНФ	18
9.1. Импликанты функции и сокращенная ДНФ	18
9.2. Минимальная и кратчайшая ДНФ	20
9.3. Безызбыточная ДНФ	23
9.4. Кратчайшие ДНФ элементарных функций	24
9.5. Упражнения	26
10. Контрольная работа	27
Литература	32