Математическая логика и теория алгоритмов
Лекция 4.
Применение нормальных форм. Теоремы

Куценко Дмитрий Александрович

Белгородский государственный технологический университет
имени В. Г. Шухова

Институт информационных технологий и управляющих систем

Кафедра программного обеспечения вычислительной техники
и автоматизированных систем

1 марта 2013 г.

Применение нормальных форм

Рассмотрим связь нормальных форм и классов формул (тождественно истинная/тождественно ложная/выполнимая) на примере следующей задачи.

Применение нормальных форм

Рассмотрим связь нормальных форм и классов формул (тождественно истинная/тождественно ложная/выполнимая) на примере следующей задачи.

Задача 1

Приведением к нормальной форме выясните, является ли формула $(X \to Y) \to \overline{X} \,\&\, Y \vee \overline{Y}$ тождественно истинной, тождественно ложной или выполнимой.

Решение задачи 1

Для решения этой задачи приведём следующие теоремы:

Решение задачи 1

Для решения этой задачи приведём следующие теоремы:

Теорема 1

Для того, чтобы формула алгебры логики была тождественно ложной, необходимо и достаточно, чтобы каждый элементарный конъюнкт, входящий в ДНФ этой формулы, содержал хотя бы одну переменную вместе с её отрицанием.

Решение задачи 1

Для решения этой задачи приведём следующие теоремы:

Теорема 1

Для того, чтобы формула алгебры логики была тождественно ложной, необходимо и достаточно, чтобы каждый элементарный конъюнкт, входящий в ДНФ этой формулы, содержал хотя бы одну переменную вместе с её отрицанием.

Теорема 2

Для того, чтобы формула алгебры логики была тождественно истинной, необходимо и достаточно, чтобы каждый элементарный дизъюнкт, входящий в КНФ этой формулы, содержал хотя бы одну переменную вместе с её отрицанием.

Решение задачи 1 (продолжение)

Приведём формулу к ДНФ:

Решение задачи 1 (продолжение)

Приведём формулу к ДНФ:

$$
\begin{aligned}
(X \to Y) \to \overline{X} \,\&\, Y \vee \overline{Y} &\equiv \overline{X} \vee Y \to \overline{X} \,\&\, Y \vee \overline{Y} \equiv \\
&\equiv \overline{\overline{X} \vee Y} \vee \overline{X} \,\&\, Y \vee \overline{Y} \equiv \\
&\equiv (X \,\&\, \overline{Y}) \vee (\overline{X} \,\&\, Y) \vee \overline{Y}.
\end{aligned}
$$

Решение задачи 1 (продолжение)

Приведём формулу к ДНФ:

$$
\begin{aligned}
(X \to Y) \to \overline{X} \mathbin{\&} Y \lor \overline{Y} &\equiv \overline{X} \lor Y \to \overline{X} \mathbin{\&} Y \lor \overline{Y} \equiv \\
&\equiv \overline{\overline{X} \lor Y} \lor \overline{X} \mathbin{\&} Y \lor \overline{Y} \equiv \\
&\equiv (X \mathbin{\&} \overline{Y}) \lor (\overline{X} \mathbin{\&} Y) \lor \overline{Y}.
\end{aligned}
$$

Полученная ДНФ не является тождественно ложной, так как каждый элементарный конъюнкт не содержит переменную и её отрицание.

Решение задачи 1 (окончание)

Теперь приведём формулу к КНФ:

Решение задачи 1 (окончание)

Теперь приведём формулу к КНФ:

$$\begin{aligned}(X \to Y) \to \overline{X} \mathbin{\&} Y \vee \overline{Y} &\equiv (X \mathbin{\&} \overline{Y}) \vee (\overline{X} \mathbin{\&} Y) \vee \overline{Y} \equiv \\ &\equiv \big(\overline{Y} \vee (X \mathbin{\&} \overline{Y})\big) \vee (\overline{X} \mathbin{\&} Y) \equiv \\ &\equiv \overline{Y} \vee (\overline{X} \mathbin{\&} Y) \equiv \\ &\equiv (\overline{Y} \vee \overline{X}) \mathbin{\&} (\overline{Y} \vee Y).\end{aligned}$$

Решение задачи 1 (окончание)

Теперь приведём формулу к КНФ:

$$
\begin{aligned}
(X \to Y) \to \overline{X} \,\&\, Y \vee \overline{Y} &\equiv (X \,\&\, \overline{Y}) \vee (\overline{X} \,\&\, Y) \vee \overline{Y} \equiv \\
&\equiv \big(\overline{Y} \vee (X \,\&\, \overline{Y})\big) \vee (\overline{X} \,\&\, Y) \equiv \\
&\equiv \overline{Y} \vee (\overline{X} \,\&\, Y) \equiv \\
&\equiv (\overline{Y} \vee \overline{X}) \,\&\, (\overline{Y} \vee Y).
\end{aligned}
$$

Полученная КНФ не является тождественно истинной, так как каждый элементарный дизъюнкт не содержит переменную и её отрицание.

Решение задачи 1 (окончание)

Теперь приведём формулу к КНФ:

$$
\begin{aligned}
(X \to Y) \to \overline{X} \,\&\, Y \vee \overline{Y} &\equiv (X \,\&\, \overline{Y}) \vee (\overline{X} \,\&\, Y) \vee \overline{Y} \equiv \\
&\equiv \left(\overline{Y} \vee (X \,\&\, \overline{Y})\right) \vee (\overline{X} \,\&\, Y) \equiv \\
&\equiv \overline{Y} \vee (\overline{X} \,\&\, Y) \equiv \\
&\equiv (\overline{Y} \vee \overline{X}) \,\&\, (\overline{Y} \vee Y).
\end{aligned}
$$

Полученная КНФ не является тождественно истинной, так как каждый элементарный дизъюнкт не содержит переменную и её отрицание.

Таким образом, формула $(X \to Y) \to \overline{X} \,\&\, Y \vee \overline{Y}$ является выполнимой.

Задача 2

При каких значениях пропозициональных переменных формула $(A \to B) \to C$ принимает ложные значения?

Решение

Приведём данную формулу к СКНФ:

Задача 2

При каких значениях пропозициональных переменных формула $(A \to B) \to C$ принимает ложные значения?

Решение

Приведём данную формулу к СКНФ:

$$(A \vee B \vee C) \,\&\, (A \vee \overline{B} \vee C) \,\&\, (\overline{A} \vee \overline{B} \vee C).$$

Задача 2

При каких значениях пропозициональных переменных формула $(A \to B) \to C$ принимает ложные значения?

Решение

Приведём данную формулу к СКНФ:

$$(A \vee B \vee C) \,\&\, (A \vee \overline{B} \vee C) \,\&\, (\overline{A} \vee \overline{B} \vee C).$$

Чтобы формула приняла ложное значение, достаточно, чтобы хотя бы один из дизъюнктов её СКНФ принял ложное значение.

Задача 2

При каких значениях пропозициональных переменных формула $(A \to B) \to C$ принимает ложные значения?

Решение

Приведём данную формулу к СКНФ:

$$(A \vee B \vee C) \,\&\, (A \vee \overline{B} \vee C) \,\&\, (\overline{A} \vee \overline{B} \vee C).$$

Чтобы формула приняла ложное значение, достаточно, чтобы хотя бы один из дизъюнктов её СКНФ принял ложное значение. Рассмотрим один из дизъюнктов: $(A \vee \overline{B} \vee C)$. Чтобы дизъюнкт принял ложное значение, необходимо, чтобы все составляющие его литералы приняли ложное значение. Данный дизъюнкт примет ложное значение на интерпретации $\{A = 0,\ B = 1,\ C = 0\}$.

Задача 2

При каких значениях пропозициональных переменных формула $(A \to B) \to C$ принимает ложные значения?

Решение

Приведём данную формулу к СКНФ:

$$(A \vee B \vee C)\,\&\,(A \vee \overline{B} \vee C)\,\&\,(\overline{A} \vee \overline{B} \vee C).$$

Чтобы формула приняла ложное значение, достаточно, чтобы хотя бы один из дизъюнктов её СКНФ принял ложное значение.
Рассмотрим один из дизъюнктов: $(A \vee \overline{B} \vee C)$. Чтобы дизъюнкт принял ложное значение, необходимо, чтобы все составляющие его литералы приняли ложное значение. Данный дизъюнкт примет ложное значение на интерпретации $\{A = 0,\ B = 1,\ C = 0\}$.
Итого, исходная формула принимает ложное значение на трёх интерпретациях:
$\{A = 0, B = 0, C = 0\}$, $\{A = 0, B = 1, C = 0\}$, $\{A = 1, B = 1, C = 0\}$.

Нахождение всех следствий из посылок

Как найти все формулы, являющиеся логическим следствием данного множества формул?

Нахождение всех следствий из посылок

Как найти все формулы, являющиеся логическим следствием данного множества формул?

Теорема

Формула $\mathfrak{B}$ (не являющаяся тавтологией) тогда и только тогда будет логическим следствием формул $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ (не все из которых являются тавтологиями), когда все дизъюнкты из разложения формулы $\mathfrak{B}$ в СКНФ входят в СКНФ формулы $\mathfrak{A}_1 \mathbin{\&} \mathfrak{A}_2 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \mathfrak{A}_n$.

Алгоритм нахождения всех следствий из посылок

Алгоритм нахождения всех неравносильных формул, являющихся логическими следствиями из посылок $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$

Алгоритм нахождения всех следствий из посылок

Алгоритм нахождения всех неравносильных формул, являющихся логическими следствиями из посылок $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$

1. Составить конъюнкцию $\mathfrak{A}_1 \,\&\, \mathfrak{A}_2 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_n$.

Алгоритм нахождения всех следствий из посылок

Алгоритм нахождения всех неравносильных формул, являющихся логическими следствиями из посылок $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$

1. Составить конъюнкцию $\mathfrak{A}_1 \,\&\, \mathfrak{A}_2 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_n$.
2. Найти СКНФ формулы $\mathfrak{A}_1 \,\&\, \mathfrak{A}_2 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_n$.

Алгоритм нахождения всех следствий из посылок

Алгоритм нахождения всех неравносильных формул, являющихся логическими следствиями из посылок $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$

1. Составить конъюнкцию $\mathfrak{A}_1 \mathbin{\&} \mathfrak{A}_2 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \mathfrak{A}_n$.
2. Найти СКНФ формулы $\mathfrak{A}_1 \mathbin{\&} \mathfrak{A}_2 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \mathfrak{A}_n$.
3. Выписать все дизъюнкты найденной СКНФ, а также все возможные конъюнкции этих дизъюнктов по два, по три и т. д.

Алгоритм нахождения всех следствий из посылок

Алгоритм нахождения всех неравносильных формул, являющихся логическими следствиями из посылок $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$

1. Составить конъюнкцию $\mathfrak{A}_1 \,\&\, \mathfrak{A}_2 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_n$.
2. Найти СКНФ формулы $\mathfrak{A}_1 \,\&\, \mathfrak{A}_2 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_n$.
3. Выписать все дизъюнкты найденной СКНФ, а также все возможные конъюнкции этих дизъюнктов по два, по три и т. д.

Выписанное множество формул является искомым.

Задача 3

Найти все не равносильные между собой и не тождественно истинные формулы алгебры высказываний, являющиеся логическими следствиями следующих формул (посылок):

$$X \to (Y \vee Z), \quad Z \to Y.$$

Задача 3

Найти все не равносильные между собой и не тождественно истинные формулы алгебры высказываний, являющиеся логическими следствиями следующих формул (посылок):

$$X \to (Y \vee Z), \quad Z \to Y.$$

Решение

Составим конъюнкцию посылок и эквивалентными преобразованиями приведём её к СКНФ:

Задача 3

Найти все не равносильные между собой и не тождественно истинные формулы алгебры высказываний, являющиеся логическими следствиями следующих формул (посылок):

$$X \to (Y \vee Z), \quad Z \to Y.$$

Решение

Составим конъюнкцию посылок и эквивалентными преобразованиями приведём её к СКНФ:

$$(X \to (Y \vee Z))\ \&\ (Z \to Y) \equiv (\overline{X} \vee Y \vee Z)\ \&\ (\overline{Z} \vee Y) \equiv$$
$$\equiv (\overline{X} \vee Y \vee Z)\ \&\ (X \vee Y \vee \overline{Z})\ \&\ (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}).$$

Задача 3 (продолжение)

Решение (окончание)

Логическими следствиями из данных посылок будут все дизъюнкты, входящие в полученную СКНФ, а также всевозможные конъюнкции этих дизъюнктов по два, по три и т. д.

Задача 3 (продолжение)

Решение (окончание)

Логическими следствиями из данных посылок будут все дизъюнкты, входящие в полученную СКНФ, а также всевозможные конъюнкции этих дизъюнктов по два, по три и т. д.

Выпишем получающиеся формулы и упростим их:

Задача 3 (продолжение)

Решение (окончание)

Логическими следствиями из данных посылок будут все дизъюнкты, входящие в полученную СКНФ, а также всевозможные конъюнкции этих дизъюнктов по два, по три и т. д.

Выпишем получающиеся формулы и упростим их:

1. $\overline{X} \vee Y \vee Z \equiv X \to (Y \vee Z)$ — первая посылка;

Задача 3 (продолжение)

Решение (окончание)

Логическими следствиями из данных посылок будут все дизъюнкты, входящие в полученную СКНФ, а также всевозможные конъюнкции этих дизъюнктов по два, по три и т. д.

Выпишем получающиеся формулы и упростим их:

1. $\overline{X} \vee Y \vee Z \equiv X \to (Y \vee Z)$ — первая посылка;
2. $X \vee Y \vee \overline{Z} \equiv Z \to (X \vee Z)$;

Задача 3 (продолжение)

Решение (окончание)

Логическими следствиями из данных посылок будут все дизъюнкты, входящие в полученную СКНФ, а также всевозможные конъюнкции этих дизъюнктов по два, по три и т. д.

Выпишем получающиеся формулы и упростим их:

1. $\overline{X} \vee Y \vee Z \equiv X \to (Y \vee Z)$ — первая посылка;
2. $X \vee Y \vee \overline{Z} \equiv Z \to (X \vee Z)$;
3. $\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z} \equiv (X \mathbin{\&} Z) \to Y$;

Задача 3 (продолжение)

Решение (окончание)

Логическими следствиями из данных посылок будут все дизъюнкты, входящие в полученную СКНФ, а также всевозможные конъюнкции этих дизъюнктов по два, по три и т. д.

Выпишем получающиеся формулы и упростим их:

1. $\overline{X} \vee Y \vee Z \equiv X \to (Y \vee Z)$ — первая посылка;
2. $X \vee Y \vee \overline{Z} \equiv Z \to (X \vee Z)$;
3. $\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z} \equiv (X \mathbin{\&} Z) \to Y$;
4. $(\overline{X} \vee Y \vee Z) \mathbin{\&} (X \vee Y \vee \overline{Z}) \equiv ((\overline{X} \vee Z) \mathbin{\&} (X \vee \overline{Z})) \vee Y \equiv (X \leftrightarrow Z) \vee Y$;

Задача 3 (продолжение)

Решение (окончание)

Логическими следствиями из данных посылок будут все дизъюнкты, входящие в полученную СКНФ, а также всевозможные конъюнкции этих дизъюнктов по два, по три и т. д.
Выпишем получающиеся формулы и упростим их:

1. $\overline{X} \vee Y \vee Z \equiv X \to (Y \vee Z)$ — первая посылка;
2. $X \vee Y \vee \overline{Z} \equiv Z \to (X \vee Z)$;
3. $\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z} \equiv (X \,\&\, Z) \to Y$;
4. $(\overline{X} \vee Y \vee Z) \,\&\, (X \vee Y \vee \overline{Z}) \equiv ((\overline{X} \vee Z) \,\&\, (X \vee \overline{Z})) \vee Y \equiv (X \leftrightarrow Z) \vee Y$;
5. $(\overline{X} \vee Y \vee Z) \,\&\, (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \equiv \overline{X} \vee Y \equiv X \to Y$;

Задача 3 (продолжение)

Решение (окончание)

Логическими следствиями из данных посылок будут все дизъюнкты, входящие в полученную СКНФ, а также всевозможные конъюнкции этих дизъюнктов по два, по три и т. д.

Выпишем получающиеся формулы и упростим их:

1. $\overline{X} \vee Y \vee Z \equiv X \to (Y \vee Z)$ — первая посылка;
2. $X \vee Y \vee \overline{Z} \equiv Z \to (X \vee Z)$;
3. $\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z} \equiv (X \,\&\, Z) \to Y$;
4. $(\overline{X} \vee Y \vee Z) \,\&\, (X \vee Y \vee \overline{Z}) \equiv ((\overline{X} \vee Z) \,\&\, (X \vee \overline{Z})) \vee Y \equiv (X \leftrightarrow Z) \vee Y$;
5. $(\overline{X} \vee Y \vee Z) \,\&\, (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \equiv \overline{X} \vee Y \equiv X \to Y$;
6. $(X \vee Y \vee \overline{Z}) \,\&\, (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \equiv Y \vee \overline{Z} \equiv Z \to Y$ — вторая посылка;

Задача 3 (продолжение)

Решение (окончание)

Логическими следствиями из данных посылок будут все дизъюнкты, входящие в полученную СКНФ, а также всевозможные конъюнкции этих дизъюнктов по два, по три и т. д.

Выпишем получающиеся формулы и упростим их:

1. $\overline{X} \vee Y \vee Z \equiv X \to (Y \vee Z)$ — первая посылка;
2. $X \vee Y \vee \overline{Z} \equiv Z \to (X \vee Z)$;
3. $\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z} \equiv (X \mathbin{\&} Z) \to Y$;
4. $(\overline{X} \vee Y \vee Z) \mathbin{\&} (X \vee Y \vee \overline{Z}) \equiv ((\overline{X} \vee Z) \mathbin{\&} (X \vee \overline{Z})) \vee Y \equiv (X \leftrightarrow Z) \vee Y$;
5. $(\overline{X} \vee Y \vee Z) \mathbin{\&} (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \equiv \overline{X} \vee Y \equiv X \to Y$;
6. $(X \vee Y \vee \overline{Z}) \mathbin{\&} (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \equiv Y \vee \overline{Z} \equiv Z \to Y$ — вторая посылка;
7. $(\overline{X} \vee Y \vee Z) \mathbin{\&} (X \vee Y \vee \overline{Z}) \mathbin{\&} (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \equiv (X \vee Z) \to Y$.

Задача 3 (окончание)

Ответ

Логическими следствиями посылок $X \to (Y \vee Z)$, $Z \to Y$ являются следующие формулы:

1. $X \to (Y \vee Z)$,
2. $Z \to (X \vee Z)$,
3. $(X \,\&\, Z) \to Y$,
4. $(X \leftrightarrow Z) \vee Y$,
5. $X \to Y$,
6. $Z \to Y$,
7. $(X \vee Z) \to Y$.

Нахождение посылок для данного следствия

Как найти все формулы, из которых логически следует данная формула?

Нахождение посылок для данного следствия

Как найти все формулы, из которых логически следует данная формула?

Алогитм нахождения всех формул, логическим следствием каждой из которых будет формула $\mathfrak{B}$

Нахождение посылок для данного следствия

Как найти все формулы, из которых логически следует данная формула?

Алогитм нахождения всех формул, логическим следствием каждой из которых будет формула $\mathfrak{B}$

1. Найти СКНФ для формулы $\mathfrak{B}$.

Нахождение посылок для данного следствия

Как найти все формулы, из которых логически следует данная формула?

Алогитм нахождения всех формул, логическим следствием каждой из которых будет формула $\mathfrak{B}$

1. Найти СКНФ для формулы $\mathfrak{B}$.
2. Выявить все совершенные дизъюнкты, которых нет в найденной СКНФ.

Нахождение посылок для данного следствия

Как найти все формулы, из которых логически следует данная формула?

Алогитм нахождения всех формул, логическим следствием каждой из которых будет формула $\mathfrak{B}$

1. Найти СКНФ для формулы $\mathfrak{B}$.
2. Выявить все совершенные дизъюнкты, которых нет в найденной СКНФ.
3. Составить всевозможные конъюнкции формулы $\mathfrak{B}$ с выявленными недостающими дизъюнктами по одному, по два и т. д.

Нахождение посылок для данного следствия

Как найти все формулы, из которых логически следует данная формула?

Алогитм нахождения всех формул, логическим следствием каждой из которых будет формула $\mathfrak{B}$

1. Найти СКНФ для формулы $\mathfrak{B}$.
2. Выявить все совершенные дизъюнкты, которых нет в найденной СКНФ.
3. Составить всевозможные конъюнкции формулы $\mathfrak{B}$ с выявленными недостающими дизъюнктами по одному, по два и т. д.

Получившееся множество формул (вместе с формулой $\mathfrak{B}$) бутет искомым.

Замечание 1

Замечание 1

Пусть m — количество дизъюнктов в СКНФ формулы $\mathfrak{B}$, а n — количество различных пропозициональных переменных, из которых состоит формула $\mathfrak{B}$.

Замечание 1

Замечание 1

Пусть m — количество дизъюнктов в СКНФ формулы $\mathfrak{B}$, а n — количество различных пропозициональных переменных, из которых состоит формула $\mathfrak{B}$.

Тогда количество недостающих дизъюнктов равно $2^n - m$.

Замечание 1

Замечание 1

Пусть m — количество дизъюнктов в СКНФ формулы $\mathfrak{B}$, а n — количество различных пропозициональных переменных, из которых состоит формула $\mathfrak{B}$.

Тогда количество недостающих дизъюнктов равно $2^n - m$.

Данное замечание очевидно, если рассматреть процесс построения СКНФ с помощью таблицы истинности. СКНФ строится из строк таблицы, в которых сответствующая булева функция принемает значение 0. Недостающие дизъюнкты сответствуют строкам, в которых функция принимает значение 1.

Замечание 1

Замечание 1

Пусть m — количество дизъюнктов в СКНФ формулы $\mathfrak{B}$, а n — количество различных пропозициональных переменных, из которых состоит формула $\mathfrak{B}$.

Тогда количество недостающих дизъюнктов равно $2^n - m$.

Данное замечание очевидно, если рассматреть процесс построения СКНФ с помощью таблицы истинности. СКНФ строится из строк таблицы, в которых сответствующая булева функция принемает значение 0. Недостающие дизъюнкты сответствуют строкам, в которых функция принимает значение 1.
СДНФ как раз и строится из этих строк, но при её построини иначе расставляются отрицания над переменными. Поэтому имеет место следующее замечание.

Замечание 2

Пусть X^σ — некоторый литерал.
Противоположным к нему будем называть литерал $\overline{X^\sigma}$.

Замечание 2

Пусть X^σ — некоторый литерал.
Противоположным к нему будем называть литерал $\overline{X^\sigma}$.

Другими словами, чтобы получить из данного литерала противоположный, нужно у соответствующей переменной убрать знак отрицания, если он есть, либо добавить его, если его нет.

Замечание 2

Пусть X^{σ} — некоторый литерал.
Противоположным к нему будем называть литерал $\overline{X^{\sigma}}$.

Другими словами, чтобы получить из данного литерала противоположный, нужно у соответствующей переменной убрать знак отрицания, если он есть, либо добавить его, если его нет.

Замечание 2

Все недостающие дизъюнкты можно получить, используя следующий алгоритм:

Замечание 2

Пусть X^σ — некоторый литерал.
Противоположным к нему будем называть литерал $\overline{X^\sigma}$.

Другими словами, чтобы получить из данного литерала противоположный, нужно у соответствующей переменной убрать знак отрицания, если он есть, либо добавить его, если его нет.

Замечание 2

Все недостающие дизъюнкты можно получить, используя следующий алгоритм:

1. Найти СДНФ формулы $\mathfrak{B}$.

Замечание 2

Пусть X^σ — некоторый литерал.
Противоположным к нему будем называть литерал $\overline{X^\sigma}$.

Другими словами, чтобы получить из данного литерала противоположный, нужно у соответствующей переменной убрать знак отрицания, если он есть, либо добавить его, если его нет.

Замечание 2

Все недостающие дизъюнкты можно получить, используя следующий алгоритм:

1. Найти СДНФ формулы $\mathfrak{B}$.
2. Найти двойственную формулу для найденной СДНФ (обозначим её $\mathfrak{B}^*$).

Замечание 2

Пусть X^σ — некоторый литерал.
Противоположным к нему будем называть литерал $\overline{X^\sigma}$.

Другими словами, чтобы получить из данного литерала противоположный, нужно у соответствующей переменной убрать знак отрицания, если он есть, либо добавить его, если его нет.

Замечание 2

Все недостающие дизъюнкты можно получить, используя следующий алгоритм:

1. Найти СДНФ формулы $\mathfrak{B}$.
2. Найти двойственную формулу для найденной СДНФ (обозначим её $\mathfrak{B}^*$).
3. В формуле $\mathfrak{B}^*$ заменить все литералы на противоположные.

Замечание 2

Пусть X^σ — некоторый литерал.
Противоположным к нему будем называть литерал $\overline{X^\sigma}$.

Другими словами, чтобы получить из данного литерала противоположный, нужно у соответствующей переменной убрать знак отрицания, если он есть, либо добавить его, если его нет.

Замечание 2

Все недостающие дизъюнкты можно получить, используя следующий алгоритм:

1. Найти СДНФ формулы $\mathfrak{B}$.
2. Найти двойственную формулу для найденной СДНФ (обозначим её $\mathfrak{B}^*$).
3. В формуле $\mathfrak{B}^*$ заменить все литералы на противоположные.

Полученная формула представляет собой конъюнкцию недостающих дизъюнктов.

Задача 4

Найти все посылки, для которых логическим следствием является формула $\mathfrak{B} = (X \mathbin{\&} Y) \leftrightarrow \overline{Z}$, кроме равносильных ей.

Задача 4

Найти все посылки, для которых логическим следствием является формула $\mathfrak{B} = (X \mathbin{\&} Y) \leftrightarrow \overline{Z}$, кроме равносильных ей.

Решение.

Найдём СКНФ формулы $\mathfrak{B} = (X \mathbin{\&} Y) \leftrightarrow \overline{Z}$ (см. Лекцию 2):

Задача 4

Найти все посылки, для которых логическим следствием является формула $\mathfrak{B} = (X \,\&\, Y) \leftrightarrow \overline{Z}$, кроме равносильных ей.

Решение.

Найдём СКНФ формулы $\mathfrak{B} = (X \,\&\, Y) \leftrightarrow \overline{Z}$ (см. Лекцию 2):

$$(X \vee Y \vee Z) \,\&\, (X \vee \overline{Y} \vee Z) \,\&\, (\overline{X} \vee Y \vee Z) \,\&\, (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}).$$

Задача 4

Найти все посылки, для которых логическим следствием является формула $\mathfrak{B} = (X \,\&\, Y) \leftrightarrow \overline{Z}$, кроме равносильных ей.

Решение.

Найдём СКНФ формулы $\mathfrak{B} = (X \,\&\, Y) \leftrightarrow \overline{Z}$ (см. Лекцию 2):

$$(X \vee Y \vee Z) \,\&\, (X \vee \overline{Y} \vee Z) \,\&\, (\overline{X} \vee Y \vee Z) \,\&\, (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}).$$

Из Замечания 1 устанавливаем, что недостаёт $2^3 - 4 = 4$ дизъюнкта.

Задача 4

Найти все посылки, для которых логическим следствием является формула $\mathfrak{B} = (X \mathbin{\&} Y) \leftrightarrow \overline{Z}$, кроме равносильных ей.

Решение.

Найдём СКНФ формулы $\mathfrak{B} = (X \mathbin{\&} Y) \leftrightarrow \overline{Z}$ (см. Лекцию 2):

$$(X \vee Y \vee Z) \mathbin{\&} (X \vee \overline{Y} \vee Z) \mathbin{\&} (\overline{X} \vee Y \vee Z) \mathbin{\&} (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}).$$

Из Замечания 1 устанавливаем, что недостаёт $2^3 - 4 = 4$ дизъюнкта. Найдём их, используя алгоритм из Замечания 2.

Задача 4

Найти все посылки, для которых логическим следствием является формула $\mathfrak{B} = (X \mathbin{\&} Y) \leftrightarrow \overline{Z}$, кроме равносильных ей.

Решение.

Найдём СКНФ формулы $\mathfrak{B} = (X \mathbin{\&} Y) \leftrightarrow \overline{Z}$ (см. Лекцию 2):

$$(X \vee Y \vee Z) \mathbin{\&} (X \vee \overline{Y} \vee Z) \mathbin{\&} (\overline{X} \vee Y \vee Z) \mathbin{\&} (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}).$$

Из Замечания 1 устанавливаем, что недостаёт $2^3 - 4 = 4$ дизъюнкта. Найдём их, используя алгоритм из Замечания 2.

Найдём СДНФ исходной формулы:

Задача 4

Найти все посылки, для которых логическим следствием является формула $\mathfrak{B} = (X \mathbin{\&} Y) \leftrightarrow \overline{Z}$, кроме равносильных ей.

Решение.

Найдём СКНФ формулы $\mathfrak{B} = (X \mathbin{\&} Y) \leftrightarrow \overline{Z}$ (см. Лекцию 2):

$$(X \vee Y \vee Z) \mathbin{\&} (X \vee \overline{Y} \vee Z) \mathbin{\&} (\overline{X} \vee Y \vee Z) \mathbin{\&} (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}).$$

Из Замечания 1 устанавливаем, что недостаёт $2^3 - 4 = 4$ дизъюнкта. Найдём их, используя алгоритм из Замечания 2. Найдём СДНФ исходной формулы:

$$(\overline{X} \mathbin{\&} \overline{Y} \mathbin{\&} Z) \vee (\overline{X} \mathbin{\&} Y \mathbin{\&} Z) \vee (X \mathbin{\&} \overline{Y} \mathbin{\&} Z) \vee (X \mathbin{\&} Y \mathbin{\&} \overline{Z}).$$

Задача 4

Найти все посылки, для которых логическим следствием является формула $\mathfrak{B} = (X \,\&\, Y) \leftrightarrow \overline{Z}$, кроме равносильных ей.

Решение.

Найдём СКНФ формулы $\mathfrak{B} = (X \,\&\, Y) \leftrightarrow \overline{Z}$ (см. Лекцию 2):

$$(X \vee Y \vee Z) \,\&\, (X \vee \overline{Y} \vee Z) \,\&\, (\overline{X} \vee Y \vee Z) \,\&\, (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}).$$

Из Замечания 1 устанавливаем, что недостаёт $2^3 - 4 = 4$ дизъюнкта. Найдём их, используя алгоритм из Замечания 2. Найдём СДНФ исходной формулы:

$$(\overline{X} \,\&\, \overline{Y} \,\&\, Z) \vee (\overline{X} \,\&\, Y \,\&\, Z) \vee (X \,\&\, \overline{Y} \,\&\, Z) \vee (X \,\&\, Y \,\&\, \overline{Z}).$$

Найдём формулу, двойственную к ней:

Задача 4

Найти все посылки, для которых логическим следствием является формула $\mathfrak{B} = (X \mathbin{\&} Y) \leftrightarrow \overline{Z}$, кроме равносильных ей.

Решение.

Найдём СКНФ формулы $\mathfrak{B} = (X \mathbin{\&} Y) \leftrightarrow \overline{Z}$ (см. Лекцию 2):

$$(X \vee Y \vee Z) \mathbin{\&} (X \vee \overline{Y} \vee Z) \mathbin{\&} (\overline{X} \vee Y \vee Z) \mathbin{\&} (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}).$$

Из Замечания 1 устанавливаем, что недостаёт $2^3 - 4 = 4$ дизъюнкта. Найдём их, используя алгоритм из Замечания 2. Найдём СДНФ исходной формулы:

$$(\overline{X} \mathbin{\&} \overline{Y} \mathbin{\&} Z) \vee (\overline{X} \mathbin{\&} Y \mathbin{\&} Z) \vee (X \mathbin{\&} \overline{Y} \mathbin{\&} Z) \vee (X \mathbin{\&} Y \mathbin{\&} \overline{Z}).$$

Найдём формулу, двойственную к ней:

$$(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z) \mathbin{\&} (\overline{X} \vee Y \vee Z) \mathbin{\&} (X \vee \overline{Y} \vee Z) \mathbin{\&} (X \vee Y \vee \overline{Z}).$$

Задача 4

Найти все посылки, для которых логическим следствием является формула $\mathfrak{B} = (X \mathbin{\&} Y) \leftrightarrow \overline{Z}$, кроме равносильных ей.

Решение.

Найдём СКНФ формулы $\mathfrak{B} = (X \mathbin{\&} Y) \leftrightarrow \overline{Z}$ (см. Лекцию 2):

$$(X \vee Y \vee Z) \mathbin{\&} (X \vee \overline{Y} \vee Z) \mathbin{\&} (\overline{X} \vee Y \vee Z) \mathbin{\&} (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}).$$

Из Замечания 1 устанавливаем, что недостаёт $2^3 - 4 = 4$ дизъюнкта. Найдём их, используя алгоритм из Замечания 2. Найдём СДНФ исходной формулы:

$$(\overline{X} \mathbin{\&} \overline{Y} \mathbin{\&} Z) \vee (\overline{X} \mathbin{\&} Y \mathbin{\&} Z) \vee (X \mathbin{\&} \overline{Y} \mathbin{\&} Z) \vee (X \mathbin{\&} Y \mathbin{\&} \overline{Z}).$$

Найдём формулу, двойственную к ней:

$$(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z) \mathbin{\&} (\overline{X} \vee Y \vee Z) \mathbin{\&} (X \vee \overline{Y} \vee Z) \mathbin{\&} (X \vee Y \vee \overline{Z}).$$

Заменим в ней все литералы на противоположные:

Задача 4

Найти все посылки, для которых логическим следствием является формула $\mathfrak{B} = (X \mathbin{\&} Y) \leftrightarrow \overline{Z}$, кроме равносильных ей.

Решение.

Найдём СКНФ формулы $\mathfrak{B} = (X \mathbin{\&} Y) \leftrightarrow \overline{Z}$ (см. Лекцию 2):

$$(X \vee Y \vee Z) \mathbin{\&} (X \vee \overline{Y} \vee Z) \mathbin{\&} (\overline{X} \vee Y \vee Z) \mathbin{\&} (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}).$$

Из Замечания 1 устанавливаем, что недостаёт $2^3 - 4 = 4$ дизъюнкта. Найдём их, используя алгоритм из Замечания 2. Найдём СДНФ исходной формулы:

$$(\overline{X} \mathbin{\&} \overline{Y} \mathbin{\&} Z) \vee (\overline{X} \mathbin{\&} Y \mathbin{\&} Z) \vee (X \mathbin{\&} \overline{Y} \mathbin{\&} Z) \vee (X \mathbin{\&} Y \mathbin{\&} \overline{Z}).$$

Найдём формулу, двойственную к ней:

$$(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z) \mathbin{\&} (\overline{X} \vee Y \vee Z) \mathbin{\&} (X \vee \overline{Y} \vee Z) \mathbin{\&} (X \vee Y \vee \overline{Z}).$$

Заменим в ней все литералы на противоположные:

$$(X \vee Y \vee \overline{Z}) \mathbin{\&} (X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \mathbin{\&} (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \mathbin{\&} (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z).$$

Задача 4 (продолжение)

Переобозначим найденные недостающие дизъюнкты:

Задача 4 (продолжение)

Переобозначим найденные недостающие дизъюнкты:
$\mathfrak{D}_1 = (X \vee Y \vee \overline{Z})$, $\mathfrak{D}_2 = (X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z})$, $\mathfrak{D}_3 = (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z})$,
$\mathfrak{D}_4 = (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z)$.
В итоге, получаем следующие посылки, для которых исходная формула является следствием:

Задача 4 (продолжение)

Переобозначим найденные недостающие дизъюнкты:
$\mathfrak{D}_1 = (X \vee Y \vee \overline{Z})$, $\mathfrak{D}_2 = (X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z})$, $\mathfrak{D}_3 = (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z})$,
$\mathfrak{D}_4 = (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z)$.
В итоге, получаем следующие посылки, для которых исходная формула является следствием:

1. $\mathfrak{B}$.
2. $\mathfrak{B}\ \&\ \mathfrak{D}_1$.
3. $\mathfrak{B}\ \&\ \mathfrak{D}_2$.
4. $\mathfrak{B}\ \&\ \mathfrak{D}_3$.
5. $\mathfrak{B}\ \&\ \mathfrak{D}_4$.
6. $\mathfrak{B}\ \&\ \mathfrak{D}_1\ \&\ \mathfrak{D}_2$.
7. $\mathfrak{B}\ \&\ \mathfrak{D}_1\ \&\ \mathfrak{D}_3$.
8. $\mathfrak{B}\ \&\ \mathfrak{D}_1\ \&\ \mathfrak{D}_4$.
9. $\mathfrak{B}\ \&\ \mathfrak{D}_2\ \&\ \mathfrak{D}_3$.
10. $\mathfrak{B}\ \&\ \mathfrak{D}_2\ \&\ \mathfrak{D}_4$.
11. $\mathfrak{B}\ \&\ \mathfrak{D}_3\ \&\ \mathfrak{D}_4$.
12. $\mathfrak{B}\ \&\ \mathfrak{D}_1\ \&\ \mathfrak{D}_2\ \&\ \mathfrak{D}_3$.
13. $\mathfrak{B}\ \&\ \mathfrak{D}_1\ \&\ \mathfrak{D}_2\ \&\ \mathfrak{D}_4$.
14. $\mathfrak{B}\ \&\ \mathfrak{D}_1\ \&\ \mathfrak{D}_3\ \&\ \mathfrak{D}_4$.
15. $\mathfrak{B}\ \&\ \mathfrak{D}_2\ \&\ \mathfrak{D}_3\ \&\ \mathfrak{D}_4$.
16. $\mathfrak{B}\ \&\ \mathfrak{D}_1\ \&\ \mathfrak{D}_2\ \&\ \mathfrak{D}_3\ \&\ \mathfrak{D}_4$.

Теоремы. Терминология

Теорема — утверждение, для которого в рассматриваемой теории существует доказательство его справедливости.

Теоремы. Терминология

Теорема — утверждение, для которого в рассматриваемой теории существует доказательство его справедливости.

В отличие от теорем, аксиомами называются утверждения, которые в рамках рассамтриваемой теории принимаются истинными без всяких доказательств.

Теоремы. Терминология

Теорема — утверждение, для которого в рассматриваемой теории существует доказательство его справедливости.

В отличие от теорем, аксиомами называются утверждения, которые в рамках рассамтриваемой теории принимаются истинными без всяких доказательств.

В математических текстах теоремами обычно называют только достаточно важные утверждения.

Теоремы. Терминология

Теорема — утверждение, для которого в рассматриваемой теории существует доказательство его справедливости.

В отличие от теорем, аксиомами называются утверждения, которые в рамках рассамтриваемой теории принимаются истинными без всяких доказательств.

В математических текстах теоремами обычно называют только достаточно важные утверждения.

Менее важные утверждения-теоремы обычно называют леммами, предложениями, следствиями, условиями и т. п.

Теоремы. Терминология

Теорема — утверждение, для которого в рассматриваемой теории существует доказательство его справедливости.

В отличие от теорем, аксиомами называются утверждения, которые в рамках рассамтриваемой теории принимаются истинными без всяких доказательств.

В математических текстах теоремами обычно называют только достаточно важные утверждения.

Менее важные утверждения-теоремы обычно называют леммами, предложениями, следствиями, условиями и т. п.

Утверждения, о которых неизвестно, являются ли они теоремами, обычно называют гипотезами.

Прямая и обратная теоремы

Многие математические теоремы имеют структуру, выражаемую формулой $P \to Q$.

Прямая и обратная теоремы

Многие математические теоремы имеют структуру, выражаемую формулой $P \to Q$.

Утверждение P в этом случае называется условием теоремы, а утверждение Q — её заключением.

Прямая и обратная теоремы

Многие математические теоремы имеют структуру, выражаемую формулой $P \to Q$.

Утверждение P в этом случае называется условием теоремы, а утверждение Q — её заключением.

Пример

Теорема: «Если в четырёхугольнике все стороны равны, то его диагонали перпендикулярны».

Прямая и обратная теоремы

Многие математические теоремы имеют структуру, выражаемую формулой $P \to Q$.

Утверждение P в этом случае называется условием теоремы, а утверждение Q — её заключением.

Пример

Теорема: «Если в четырёхугольнике все стороны равны, то его диагонали перпендикулярны».

Обозначим P — «Если в четырёхугольнике все стороны равны» (условие теоремы),

Прямая и обратная теоремы

Многие математические теоремы имеют структуру, выражаемую формулой $P \to Q$.

Утверждение P в этом случае называется условием теоремы, а утверждение Q — её заключением.

Пример

Теорема: «Если в четырёхугольнике все стороны равны, то его диагонали перпендикулярны».

Обозначим P — «Если в четырёхугольнике все стороны равны» (условие теоремы),
Q — «Диагонали четырёхугольника перпендикулярны» (заключение теоремы).

Прямая и обратная теоремы

Многие математические теоремы имеют структуру, выражаемую формулой $P \to Q$.

Утверждение P в этом случае называется условием теоремы, а утверждение Q — её заключением.

Пример

Теорема: «Если в четырёхугольнике все стороны равны, то его диагонали перпендикулярны».

Обозначим P — «Если в четырёхугольнике все стороны равны» (условие теоремы),
Q — «Диагонали четырёхугольника перпендикулярны» (заключение теоремы).

Тогда $P \to Q$.

Прямая и обратная теоремы (продолжение)

Если некоторая теорема имеет форму $P \to Q$, то утверждение $Q \to P$ называется обратным для данной теоремы.

Прямая и обратная теоремы (продолжение)

Если некоторая теорема имеет форму $P \to Q$, то утверждение $Q \to P$ называется обратным для данной теоремы.

Если $Q \to P$ справедливо, то оно называется теоремой, обратной для теоремы $P \to Q$.
В этом случае $P \to Q$ называют прямой теоремой.

Прямая и обратная теоремы (продолжение)

Если некоторая теорема имеет форму $P \to Q$, то утверждение $Q \to P$ называется обратным для данной теоремы.

Если $Q \to P$ справедливо, то оно называется теоремой, обратной для теоремы $P \to Q$.
В этом случае $P \to Q$ называют прямой теоремой.

Если $Q \to P$ не выполняется, то говорят, что обратная теорема для теоремы $P \to Q$ неверна.

Прямая и обратная теоремы (продолжение)

Если некоторая теорема имеет форму $P \to Q$, то утверждение $Q \to P$ называется обратным для данной теоремы.

Если $Q \to P$ справедливо, то оно называется теоремой, обратной для теоремы $P \to Q$.
В этом случае $P \to Q$ называют прямой теоремой.

Если $Q \to P$ не выполняется, то говорят, что обратная теорема для теоремы $P \to Q$ неверна.

Пример

Для теоремы «Если в четырёхугольнике все стороны равны, то его диагонали перпендикулярны» обратная теорема неверна,

Прямая и обратная теоремы (продолжение)

Если некоторая теорема имеет форму $P \to Q$, то утверждение $Q \to P$ называется обратным для данной теоремы.

Если $Q \to P$ справедливо, то оно называется теоремой, обратной для теоремы $P \to Q$.
В этом случае $P \to Q$ называют прямой теоремой.

Если $Q \to P$ не выполняется, то говорят, что обратная теорема для теоремы $P \to Q$ неверна.

Пример

Для теоремы «Если в четырёхугольнике все стороны равны, то его диагонали перпендикулярны» обратная теорема неверна,

а для теоремы «Если в треугольнике один из углов прямой, то квадрат длинны одной из его сторон равен сумме квадратов длин двух других сторон» обратная теорема справедлива.

Прямая и обратная теоремы (окончание)

Доказательство прямой теоремы не даёт оснований для вывода о том, что и обратная теорема также верна.

Прямая и обратная теоремы (окончание)

Доказательство прямой теоремы не даёт оснований для вывода о том, что и обратная теорема также верна.

Это обусловлено тем, что $P \rightarrow Q \not\equiv Q \rightarrow P$:

Прямая и обратная теоремы (окончание)

Доказательство прямой теоремы не даёт оснований для вывода о том, что и обратная теорема также верна.

Это обусловлено тем, что $P \to Q \not\equiv Q \to P$:

P	Q	$P \to Q$	$Q \to P$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Противоположная теорема

Для теоремы, сформулированной в виде $P \to Q$, кроме обратного утверждения $Q \to P$ можно сформулировать противоположное утверждение вида $\overline{P} \to \overline{Q}$.

Противоположная теорема

Для теоремы, сформулированной в виде $P \to Q$, кроме обратного утверждения $Q \to P$ можно сформулировать противоположное утверждение вида $\overline{P} \to \overline{Q}$.

Утверждение $\overline{P} \to \overline{Q}$ называют теоремой, противоположной теореме $P \to Q$, если оно истинно.

Противоположная теорема

Для теоремы, сформулированной в виде $P \to Q$, кроме обратного утверждения $Q \to P$ можно сформулировать противоположное утверждение вида $\overline{P} \to \overline{Q}$.

Утверждение $\overline{P} \to \overline{Q}$ называют теоремой, противоположной теореме $P \to Q$, если оно истинно.

Из доказательства прямой теоремы $P \to Q$ также не вытекает верность противоположной теоремы, так как $P \to Q \not\equiv \overline{P} \to \overline{Q}$:

Противоположная теорема

Для теоремы, сформулированной в виде $P \to Q$, кроме обратного утверждения $Q \to P$ можно сформулировать противоположное утверждение вида $\overline{P} \to \overline{Q}$.

Утверждение $\overline{P} \to \overline{Q}$ называют теоремой, противоположной теореме $P \to Q$, если оно истинно.

Из доказательства прямой теоремы $P \to Q$ также не вытекает верность противоположной теоремы, так как $P \to Q \not\equiv \overline{P} \to \overline{Q}$:

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \to Q$	$\overline{P} \to \overline{Q}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1

Обратная противоположной теорема

Наконец, для теоремы $P \to Q$ можно сформулировать теорему, обратную противоположной: $\overline{Q} \to \overline{P}$.

Обратная противоположной теорема

Наконец, для теоремы $P \to Q$ можно сформулировать теорему, обратную противоположной: $\overline{Q} \to \overline{P}$.

Закон контрапозиции

Обратная противоположной теорема $\overline{Q} \to \overline{P}$ верна тогда и только тогда, когда верна прямая теорема $P \to Q$:

$$P \to Q \equiv \overline{Q} \to \overline{P}.$$

Обратная противоположной теорема

Наконец, для теоремы $P \to Q$ можно сформулировать теорему, обратную противоположной: $\overline{Q} \to \overline{P}$.

Закон контрапозиции

Обратная противоположной теорема $\overline{Q} \to \overline{P}$ верна тогда и только тогда, когда верна прямая теорема $P \to Q$:

$$P \to Q \equiv \overline{Q} \to \overline{P}.$$

P	Q	$\overline{Q}$	$\overline{P}$	$P \to Q$	$\overline{Q} \to \overline{P}$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1

Тест № 1 на понимание логического следствия и закона контрапозиции

Известно, что если через проводник течёт ток, то проводник нагревается.
Какие из следующих высказываний истинны?

1. Если через проводник не течёт ток, то проводник не нагревается.
2. Через проводник течёт ток, если проводник нагревается.
3. Из того, что проводник не нагревается, следует, что через него ток не течёт.

Тест № 1 на понимание логического следствия и закона контрапозиции

Известно, что если через проводник течёт ток, то проводник нагревается.
Какие из следующих высказываний истинны?

1. Если через проводник не течёт ток, то проводник не нагревается.
2. Через проводник течёт ток, если проводник нагревается.
3. Из того, что проводник не нагревается, следует, что через него ток не течёт.

Тест № 2 на понимание логического следствия и закона контрапозиции

Известно, что если заслонка открыта, то из трубы идёт дым. Какие из следующих высказываний истинны?

1. Необходимым условием наличия дыма, выходящего из трубы, является открытая заслонка.
2. Для того, чтобы заслонка была закрыта, достаточно, чтобы из трубы не шёл дым.
3. Для того, чтобы заслонка была закрыта, необходимо, чтобы из трубы не шёл дым.

Тест № 2 на понимание логического следствия и закона контрапозиции

Известно, что если заслонка открыта, то из трубы идёт дым. Какие из следующих высказываний истинны?

1. Необходимым условием наличия дыма, выходящего из трубы, является открытая заслонка.
2. Для того, чтобы заслонка была закрыта, достаточно, чтобы из трубы не шёл дым.
3. Для того, чтобы заслонка была закрыта, необходимо, чтобы из трубы не шёл дым.

Методы доказательств теорем

Существует несколько стандартных методов доказательств теорем вида $P \to Q$, включая следующие:

Методы доказательств теорем

Существует несколько стандартных методов доказательств теорем вида $P \to Q$, включая следующие:

1. Прямое рассуждение.
   Предполагаем, что условие P истинно и показываем справедливость заключения Q.

Методы доказательств теорем

Существует несколько стандартных методов доказательств теорем вида $P \to Q$, включая следующие:

1. Прямое рассуждение.
   Предполагаем, что условие P истинно и показываем справедливость заключения Q.
   Такой способ доказательства основан на том, что исключается случай, когда P истинно, а Q — ложно, т. к. только в этом случае импликация $P \to Q$ принимает ложное значение.

Методы доказательств теорем

Существует несколько стандартных методов доказательств теорем вида $P \to Q$, включая следующие:

1. Прямое рассуждение.
   Предполагаем, что условие P истинно и показываем справедливость заключения Q.
   Такой способ доказательства основан на том, что исключается случай, когда P истинно, а Q — ложно, т. к. только в этом случае импликация $P \to Q$ принимает ложное значение.
2. Обратное рассуждение.
   Предполагаем, что заключение Q ложно и показываем ошибочность условия P.

Методы доказательств теорем

Существует несколько стандартных методов доказательств теорем вида $P \to Q$, включая следующие:

1. Прямое рассуждение.
   Предполагаем, что условие P истинно и показываем справедливость заключения Q.
   Такой способ доказательства основан на том, что исключается случай, когда P истинно, а Q — ложно, т. к. только в этом случае импликация $P \to Q$ принимает ложное значение.
2. Обратное рассуждение.
   Предполагаем, что заключение Q ложно и показываем ошибочность условия P.
   Т. е. здесь прямым способом проверяется истинность импликации $\overline{Q} \to \overline{P}$, эквивалентной исходному утверждению $P \to Q$ по закону контрапозиции.

Методы доказательств теорем

Существует несколько стандартных методов доказательств теорем вида $P \to Q$, включая следующие:

1. Прямое рассуждение.
   Предполагаем, что условие P истинно и показываем справедливость заключения Q.
   Такой способ доказательства основан на том, что исключается случай, когда P истинно, а Q — ложно, т. к. только в этом случае импликация $P \to Q$ принимает ложное значение.
2. Обратное рассуждение.
   Предполагаем, что заключение Q ложно и показываем ошибочность условия P.
   Т. е. здесь прямым способом проверяется истинность импликации $\overline{Q} \to \overline{P}$, эквивалентной исходному утверждению $P \to Q$ по закону контрапозиции.
3. Метод «от противного».
   Предположив, что условие P истинно, а заключение Q ложно, получают $\overline{P}$, что противоречит исходному утверждению X.

Методы доказательств теорем

Существует несколько стандартных методов доказательств теорем вида $P \to Q$, включая следующие:

1. Прямое рассуждение.
   Предполагаем, что условие P истинно и показываем справедливость заключения Q.
   Такой способ доказательства основан на том, что исключается случай, когда P истинно, а Q — ложно, т. к. только в этом случае импликация $P \to Q$ принимает ложное значение.
2. Обратное рассуждение.
   Предполагаем, что заключение Q ложно и показываем ошибочность условия P.
   Т. е. здесь прямым способом проверяется истинность импликации $\overline{Q} \to \overline{P}$, эквивалентной исходному утверждению $P \to Q$ по закону контрапозиции.
3. Метод «от противного».
   Предположив, что условие P истинно, а заключение Q ложно, получают $\overline{P}$, что противоречит исходному утверждению X.
   Здесь также исходная теорема $P \to Q$ подменяется обратной противоположной $\overline{Q} \to \overline{P}$ и используется закон контрапозиции.

Пример доказательства прямым методом

Докажите прямым способом рассуждений, что произведение xy двух нечётных целых чисел x и y всегда нечётно.

Пример доказательства прямым методом

Докажите прямым способом рассуждений, что произведение xy двух нечётных целых чисел x и y всегда нечётно.

Доказательство

Любое нечётное число a можно записать в виде $a = 2i + 1$, где i — целое число. Пусть $x = 2m + 1$, $y = 2n + 1$.

Пример доказательства прямым методом

Докажите прямым способом рассуждений, что произведение xy двух нечётных целых чисел x и y всегда нечётно.

Доказательство

Любое нечётное число a можно записать в виде $a = 2i + 1$, где i — целое число. Пусть $x = 2m + 1$, $y = 2n + 1$.

Значит, произведение

$$xy = (2m+1)(2n+1) = 4mn+2m+2n+1 = 2(2mn+m+n)+1$$

тоже является нечётным числом, что и требовалось доказать.

Пример доказательства обратным методом

Пусть n — натуральное число. Докажите обратным способом рассуждений, что если n^2 нечётно, то и n нечётно.

Пример доказательства обратным методом

Пусть n — натуральное число. Докажите обратным способом рассуждений, что если n^2 нечётно, то и n нечётно.

Доказательство

Отрицанием высказывания «n^2 нечётно» является высказывание «n^2 чётно», а отрицанием высказывания «n нечётно» является высказывание «n чётно».

Пример доказательства обратным методом

Пусть n — натуральное число. Докажите обратным способом рассуждений, что если n^2 нечётно, то и n нечётно.

Доказательство

Отрицанием высказывания «n^2 нечётно» является высказывание «n^2 чётно», а отрицанием высказывания «n нечётно» является высказывание «n чётно».
Т. о. нужно доказать прямым способом, что чётность числа n влечёт чётность его квадрата n^2.

Пример доказательства обратным методом

Пусть n — натуральное число. Докажите обратным способом рассуждений, что если n^2 нечётно, то и n нечётно.

Доказательство

Отрицанием высказывания «n^2 нечётно» является высказывание «n^2 чётно», а отрицанием высказывания «n нечётно» является высказывание «n чётно».
Т. о. нужно доказать прямым способом, что чётность числа n влечёт чётность его квадрата n^2.
Чётное число n можно записать в виде $n = 2m$,
где m — целое число.

Пример доказательства обратным методом

Пусть n — натуральное число. Докажите обратным способом рассуждений, что если n^2 нечётно, то и n нечётно.

Доказательство

Отрицанием высказывания «n^2 нечётно» является высказывание «n^2 чётно», а отрицанием высказывания «n нечётно» является высказывание «n чётно».
Т. о. нужно доказать прямым способом, что чётность числа n влечёт чётность его квадрата n^2.
Чётное число n можно записать в виде $n = 2m$, где m — целое число.
Следовательно, $n^2 = 4m^2 = 2(2m^2)$ — чётное число, что и требовалось доказать.

Пример доказательства методом «от противного»

Методом «от противного» докажите, что решение уравнения $x^2 = 2$ является иррациональным числом (т. е. не может быть записано в виде дроби с целыми числителем и знаменателем).

Пример доказательства методом «от противного»

Методом «от противного» докажите, что решение уравнения $x^2 = 2$ является иррациональным числом (т. е. не может быть записано в виде дроби с целыми числителем и знаменателем).

Доказательство

При использовании метода «от противного» следует допустить, что решение x уравнения $x^2 = 2$ рационально, т. е. записывается в виде несократимой дроби $x = \frac{m}{n}$ с целыми числами m и n.

Пример доказательства методом «от противного»

Методом «от противного» докажите, что решение уравнения $x^2 = 2$ является иррациональным числом (т. е. не может быть записано в виде дроби с целыми числителем и знаменателем).

Доказательство

При использовании метода «от противного» следует допустить, что решение x уравнения $x^2 = 2$ рационально, т. е. записывается в виде несократимой дроби $x = \frac{m}{n}$ с целыми числами m и n.
Предположив такое, необходимо получить противоречие либо с исходным условием, либо с каким-либо ранее доказанным фактом.

Пример доказательства методом «от противного»

Методом «от противного» докажите, что решение уравнения $x^2 = 2$ является иррациональным числом (т. е. не может быть записано в виде дроби с целыми числителем и знаменателем).

Доказательство

При использовании метода «от противного» следует допустить, что решение x уравнения $x^2 = 2$ рационально, т. е. записывается в виде несократимой дроби $x = \frac{m}{n}$ с целыми числами m и n.

Предположив такое, необходимо получить противоречие либо с исходным условием, либо с каким-либо ранее доказанным фактом.

По условию число x удовлетворяет уравнению $x^2 = 2$.

Пример доказательства методом «от противного»

Методом «от противного» докажите, что решение уравнения $x^2 = 2$ является иррациональным числом (т. е. не может быть записано в виде дроби с целыми числителем и знаменателем).

Доказательство

При использовании метода «от противного» следует допустить, что решение x уравнения $x^2 = 2$ рационально, т. е. записывается в виде несократимой дроби $x = \frac{m}{n}$ с целыми числами m и n.
Предположив такое, необходимо получить противоречие либо с исходным условием, либо с каким-либо ранее доказанным фактом.
По условию число x удовлетворяет уравнению $x^2 = 2$.
Значит, $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, откуда $m^2 = 2n^2$.

Пример доказательства методом «от противного» (окончание)

Доказательство (окончание)

Из равенства $m^2 = 2n^2$ следует, что число m^2 чётно.

Пример доказательства методом «от противного» (окончание)

Доказательство (окончание)

Из равенства $m^2 = 2n^2$ следует, что число m^2 чётно. Следовательно, m тоже чётно (см. предыдущий пример) и может быть представлено в виде $m = 2p$ для какого-то целого p.

Пример доказательства методом «от противного» (окончание)

Доказательство (окончание)

Из равенства $m^2 = 2n^2$ следует, что число m^2 чётно. Следовательно, m тоже чётно (см. предыдущий пример) и может быть представлено в виде $m = 2p$ для какого-то целого p.

Подставляя это в равенство $m^2 = 2n^2$, получим, что $4p^2 = 2n^2$, т. е. $n^2 = 2p^2$. Но тогда n тоже является чётным.

Пример доказательства методом «от противного» (окончание)

Доказательство (окончание)

Из равенства $m^2 = 2n^2$ следует, что число m^2 чётно. Следовательно, m тоже чётно (см. предыдущий пример) и может быть представлено в виде $m = 2p$ для какого-то целого p.
Подставляя это в равенство $m^2 = 2n^2$, получим, что $4p^2 = 2n^2$, т. е. $n^2 = 2p^2$. Но тогда n тоже является чётным.
Т. о. m и n — чётные числа, обладающие общим делителем 2.

Пример доказательства методом «от противного» (окончание)

Доказательство (окончание)

Из равенства $m^2 = 2n^2$ следует, что число m^2 чётно.
Следовательно, m тоже чётно (см. предыдущий пример) и может быть представлено в виде $m = 2p$ для какого-то целого p.
Подставляя это в равенство $m^2 = 2n^2$, получим, что $4p^2 = 2n^2$, т. е. $n^2 = 2p^2$. Но тогда n тоже является чётным.
Т. о. m и n — чётные числа, обладающие общим делителем 2.
Вспомним, что предполагалось отсутствие общих делителей у числителя и знаменателя $\frac{m}{n}$.

Пример доказательства методом «от противного» (окончание)

Доказательство (окончание)

Из равенства $m^2 = 2n^2$ следует, что число m^2 чётно.
Следовательно, m тоже чётно (см. предыдущий пример) и может быть представлено в виде $m = 2p$ для какого-то целого p.
Подставляя это в равенство $m^2 = 2n^2$, получим, что $4p^2 = 2n^2$, т. е. $n^2 = 2p^2$. Но тогда n тоже является чётным.
Т. о. m и n — чётные числа, обладающие общим делителем 2.
Вспомним, что предполагалось отсутствие общих делителей у числителя и знаменателя $\frac{m}{n}$.
Найденное противоречие приводит к выводу: решение уравнения $x^2 = 2$ не может быть рациональным числом, т. е. оно иррационально, что и требовалось доказать.