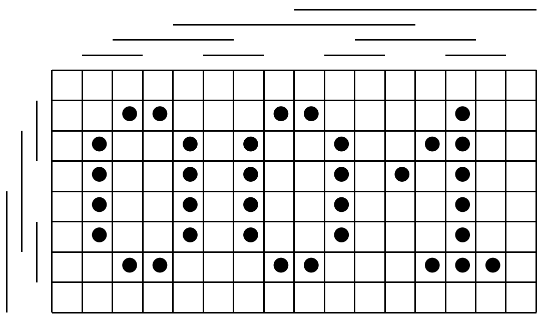
Министерство образования Российской Федерации
Томский государственный университет
Факультет прикладной математики и кибернетики

БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ



Учебно-методическое пособие
часть I

Томск
2002

"УТВЕРЖДАЮ"
Декан ФПМК
профессор ____________ А.М. Горцев
1 декабря 2002 г.

РАССМОТРЕНО и УТВЕРЖДЕНО методической комиссией факультета прикладной математики и кибернетики

Председатель комиссии
профессор ____________ С.Э. Воробейчиков
Протокол 15 от 27 ноября 2002 г.

Предлагаемое учебно-методическое пособие состоит из нескольких частей. В данной части вводится понятие булевой функции, и предлагаются различные способы ее задания. Рассматриваются двойственные функции и двойственные формулы. Изложение опирается на курс лекций, читаемых на ФПМК и РФФ, и поэтому утверждения и алгоритмы приводятся без доказательства. Каждый раздел сопровождается упражнениями, и в заключение приводится контрольная работа по изложенному материалу с полным разбором примера.

Пособие предназначено для студентов, изучающих теорию булевых функций.

Составители: доцент каф. ЗИК С.В. Быкова
программист каф. ВМиММ Ю.Б. Буркатовская

1. Булевы константы и векторы

1.1. Булевы константы

Определение. *Булевыми константами* называются символы 0 и 1.

Они могут интерпретироваться как числа: ноль и единица, знаки: минус и плюс, потенциалы: низкий и высокий, высказывания: ложь и истина, и многое другое.

Определение. *Булевым множеством* называется множество булевых констант $B = \{0, 1\}$.

1.2. Булев вектор

Определение. *Булев вектор* это последовательность булевых констант, называемых *компонентами* булева вектора.

Договоримся обозначать булевы векторы греческими буквами, а компоненты вектора – латинскими с указанием номеров компонент.

Примеры. $\alpha = a_1 a_2 ... a_6 = 010101$, $\beta = b_1 b_2 ... b_8 = 11110000$.

Определение. *Длиной* булева вектора назовем количество его компонент, а *весом* вектора – количество компонент, равных единице.

Пример. Длина булева вектора $\alpha = 101010$ равна шести, а вес – трем.

Теорема о числе булевых векторов. Число различных булевых векторов длины n равно 2^n.

Примеры. Имеется 4 булевых вектора длины два: 00, 01, 10, 11, и 8 булевых векторов длины три: 000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111.

Представление булевыми векторами подмножеств. Пусть заданы множество $M = \{m_1, m_2, ..., m_n\}$ и его подмножество A. Построим булев вектор $\alpha = a_1 a_2 ... a_n$, представляющий подмножество A, следующим образом: зафиксируем порядок элементов в множестве M и положим

$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad m_i \in A; \\ 0, & \text{если} \quad m_i \notin A. \end{cases}$$

Примеры. Булев вектор $\alpha = 11101$ выделяет в множестве $M = \{2, 6, 4, 7, 8\}$ подмножество четных чисел, вектор $\beta = 10010$ выделяет подмножество простых чисел.

Представление булевыми векторами целых неотрицательных чисел. Введем следующее соответствие между булевым вектором $\alpha = a_1 a_2 ... a_n$ и числом $a \in \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$:

$$a = \sum_{i=1}^{n} a_i \times 2^{n-i}$$

(здесь компоненты булева вектора интерпретируются как числа 0 и 1).

Примеры.

Задан булев вектор $\alpha = 1001$; подставив его компоненты в формулу, получим число $a = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 8 + 1 = 9$.

Задано число $a = 13$; разложив его, согласно формуле, на сумму степеней двойки: $13 = 8 + 4 + 1 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$, получим булев вектор $\alpha = 1101$.

Данный алгоритм построения булева вектора по числу легко применим лишь для малых чисел, но в общем случае применяется другой вариант алгоритма.

Алгоритм построения вектора, представляющего число (использует целочисленное деление, результатом которого являются два целых числа: неполное частное и остаток).

Начало: задано целое число $a \geq 0$.

Шаг 1: поделим a на 2, запомним неполное частное и остаток.

Шаг 2: если полученное частное не равно нулю, то поделим его на 2, запомним новые неполное частное и остаток и повторим шаг 2.

Конец: выпишем остатки в обратном порядке – получим искомый булев вектор.

Пример. $a = 36;$ $\begin{array}{r} \text{частные: } 18,\ 9,\ 4,\ 2,\ 1,\ 0; \\ \text{остатки: } \underleftarrow{0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1}. \end{array}$

Выписав остатки в обратном порядке, получим булев вектор $\alpha = 100100$, представляющий число 36.

1.3. Пара булевых векторов

Рассмотрим два булевых вектора одинаковой длины и договоримся для наглядности писать их один под другим

$\alpha = a_1\, a_2 \ldots a_n,$

$\beta = b_1\, b_2 \ldots b_n.$

Определение. Говорят, что булевы векторы α и β *ортогональны по i-й компоненте*, если $a_i \neq b_i$.

Пример. Булевы векторы $\begin{array}{c} \alpha = 1010 \\ \beta = 1000 \end{array}$ ортогональны по 3-й компоненте.

Определение. *Расстоянием* между булевыми векторами называют число ортогональных компонент в данной паре векторов (его еще называют *расстоянием по Хэммингу*).

Пример. Расстояние по Хэммингу между векторами $\begin{array}{c} \alpha = 1010 \\ \beta = 1001 \end{array}$ равно двум.

Определение. Булевы векторы называются *соседними* (*соседями*), если они ортогональны по одной и только одной компоненте, т.е. расстояние по Хэммингу между векторами равно единице.

Пример. Булевы векторы $\begin{array}{c} \alpha = 1010 \\ \beta = 1000 \end{array}$ – соседи (по третьей компоненте).

Определение. Булевы векторы называются *противоположными* (*антиподами*), если они ортогональны по всем компонентам, т.е. расстояние по Хэммингу между векторами равно их длине.

Пример. Булевы векторы $\begin{array}{c} \alpha = 1010 \\ \beta = 0101 \end{array}$ – антиподы.

Определение. Говорят, что булев вектор $\alpha = a_1 a_2 \ldots a_n$ *предшествует* булеву вектору $\beta = b_1 b_2 \ldots b_n$ (и это отношение обозначают $\alpha \preceq \beta$), если для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ выполняется условие

$a_i \leq b_i$ (здесь компоненты булевых векторов интерпретируются как числа 0 и 1). В этом случае говорят также, что булев вектор β *следует за* α, булев вектор α называют *предшественником*, а β – *последователем.*

Пример. $\begin{matrix} \alpha = 0010 \\ \beta = 1011 \end{matrix} : \alpha \preceq \beta.$

Определение. Булевы векторы α и β называются *сравнимыми*, если $\alpha \preceq \beta$ или $\beta \preceq \alpha$, в противном случае говорят, что они *несравнимы*.

Примеры. Рассмотрим две пары векторов $\begin{matrix} \alpha = 1011 \\ \beta = 1001 \end{matrix}, \begin{matrix} \alpha' = 1010 \\ \beta' = 1001 \end{matrix}.$ Векторы α и β сравнимы, причем $\beta \preceq \alpha$, а α' и β' несравнимы.

1.4. Упражнения

Упр.1. Определить длину и вес булевых векторов:

$$\begin{matrix} \alpha_1 = 00011100, & \alpha_2 = 0001010, & \alpha_3 = 11111, & \alpha_4 = 1101000, \\ \alpha_5 = 1, & \alpha_6 = 001, & \alpha_7 = 0000, & \alpha_8 = 1001. \end{matrix}$$

Какие натуральные числа они представляют?

Упр.2. Какими булевыми векторами представляются числа 5, 7, 21, 32, 40, 2002?

Упр.3. Задано множество $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Представить булевыми векторами его подмножества:

A_1 – четных чисел;
A_2 – простых чисел;
A_3 – чисел, кратных 3;
A_4 – целых чисел.

Упр.4. Какие из следующих векторов являются соседними? Противоположными? Сравнимыми?

$$\begin{matrix} \alpha_1 = 00000011, & \alpha_2 = 00000111, & \alpha_3 = 10100001, & \alpha_4 = 01010101, \\ \alpha_5 = 11111100, & \alpha_6 = 10000001, & \alpha_7 = 01010100, & \alpha_8 = 01111110. \end{matrix}$$

Каким из перечисленных векторов предшествуют α_1, α_7? Каково расстояние по Хэммингу между векторами α_3 и α_7, α_1 и α_5, α_6 и α_8?

Упр.5. Могут ли соседние векторы быть антиподами?

Упр.6. Могут ли быть сравнимыми различные векторы одинакового веса?

Упр.7. Сколько соседей у вектора длины n?

2. Булево пространство, интервал в булевом пространстве

2.1. Булево пространство и способы его задания

Определение. *Булевым пространством* B^n *размерности* n называется множество всех булевых векторов длины n, расстояние между которыми вычисляется по Хэммингу.

Примеры. $B^1 = \{0, 1\} = B, \quad B^2 = \{00, 01, 10, 11\}$.

Булево пространство может быть задано несколькими способами. Рассмотрим два из них.

1) Явным перечислением векторов.

Пример. $B^3 = \{000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111\}$.

2) Матрицей в коде Грея. Булево пространство размерности n представляется матрицей, состоящей из 2^s строк и 2^p столбцов, где s и p – целые числа, такие что $s + p = n$ и $s = p$ либо $s = p - 1$. Строкам матрицы поставлены в соответствие булевы векторы длины s (их называют *кодами строк*), а столбцам – булевы векторы длины p (*коды столбцов*).

Коды столбцов упорядочены по следующему принципу:

– младшая компонента кодов, т.е. компонента с меньшим номером, равна 0 в первой половине столбцов и равна 1 во второй их половине (например, если столбцов восемь, то младшая компонента принимает значения 00001111);

– следующая компонента равна 0 в первой четверти кодов и равна 1 во второй четверти, после чего значения симметрично повторяются, т.е. равны 1 в третьей четверти и 0 в четвертой (в примере: 00111100) – симметрирование происходит в момент, когда предыдущая компонента меняет свое значение с 0 на 1;

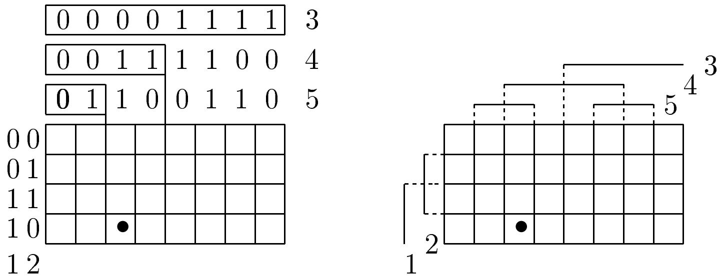
– следующая компонента равна 0 в первой осьмушке кодов и равна 1 во второй их осьмушке, после чего ее значения дважды симметрично повторяются (в примере: 01100110) – симметрирование происходит в моменты, когда вторая компонента, а затем первая, меняют свои значения с 0 на 1;

– и так далее (за 1/8 следуют 1/16, 1/32, ...).

Коды строк строятся аналогично.

Элемент матрицы, стоящий в i–й строке и j–м столбце, задает булев вектор, который получается приписыванием к коду строки i кода столбца j.

Пример. Пусть $n = 5$. На левой матрице показан процесс построения кодов столбцов. Выделенная клетка задает булев вектор 10011.



Договоримся изображать коды условно: единицу – черточкой, а ноль – ее отсутствием: такой код более нагляден, да и быстрее рисуется (он показан на правой матрице предыдущего примера).

На правой матрице пунктирными линиями обозначены места смены значений компонент, эти линии называются *осями симметрии* компонент. Каждая ось имеет свою *зону симметрии*, т.е. область, на которую распространяется ее действие:

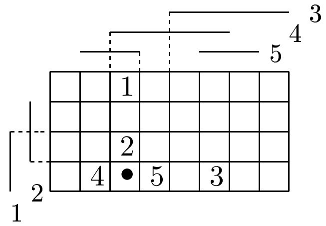
– зоной симметрии оси младшей компоненты (в примере: первой для строк и третьей для столбцов) является вся матрица;

– зонами симметрии двух осей следующих компонент (в примере: второй для строк и четвертой для столбцов) являются половины матрицы;

– и так далее (с каждым разом размер зоны уменьшается в два раза, а число осей увеличивается в два раза).

Нетрудно заметить, что пара соседних векторов располагается в матрице симметрично относительно оси той компоненты, по которой векторы ортогональны.

Пример. Каждый из соседей выделенного вектора отмечен номером ортогональной компоненты.



Симметричное расположение соседей на матрице Грея упрощает их поиск и делает представление булева пространства наглядным, тем более, что код Грея рисуется просто.

Алгоритм рисования кода Грея для столбцов матрицы.

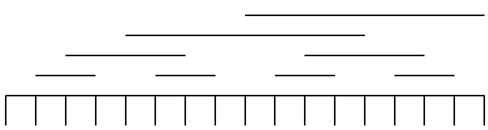
Начало: задана матрица из 2^p столбцов.

Шаг 1: отступив от края матрицы один столбец, нарисуем черточку над двумя столбцами, затем, пропустив два столбца, нарисуем черточку над двумя следующими столбцами и так далее до конца матрицы – в результате получим ряд черточек, симметрично расположенных относительно середины матрицы.

Шаг 2: отступив от полученного ряда черточек немного вверх, начнем следующий ряд: нарисуем черту от середины первой до середины второй черточки предыдущего ряда, затем – от середины третьей до середины четвертой черточки предыдущего ряда и так далее до конца матрицы. Повторим шаг 2, пока это возможно (последнюю черту, которая начнется с середины матрицы, оборвем у правого края).

Конец.

Пример. Матрица содержит 16 столбцов.



Код Грея для строк рисуется аналогично.

2.2. Интервал в булевом пространстве

2.2.1. Определение интервала и алгоритм его распознавания

Пусть задана пара булевых векторов одинаковой длины:
$\alpha = a_1\, a_2 \dots a_n$,
$\beta = b_1\, b_2 \dots b_n$.

Определение. *Интервалом* $I(\alpha, \beta)$ в булевом пространстве B^n, заданным парой булевых векторов α и β, таких что $\alpha \preceq \beta$, называется множество всех булевых векторов γ длины n, удовлетворяющих условию $\alpha \preceq \gamma \preceq \beta$, т.е. $I(\alpha, \beta) = \{\gamma \in B^n : \ \alpha \preceq \gamma \preceq \beta\}$. Булевы векторы α и β называются *границами интервала* , вектор α – *наименьшим элементом* интервала, а β – *наибольшим*.

Пример. $I(000, 101) = \{000, 001, 100, 101\}$, граница $\alpha = 000$ – наименьший элемент, граница $\beta = 101$ – наибольший элемент.

Из определения интервала следует, что либо границы α и β совпадают в i-й компоненте ($a_i = b_i$), тогда все векторы γ интервала $I(\alpha, \beta)$ имеют в i-й компоненте то же значение, либо границы не совпадают ($a_i < b_i$), тогда такие компоненты принимают в векторах γ все возможные значения.

Определение. Компоненты, по которым границы (а значит и все векторы интервала) совпадают, называются *внешними* компонентами интервала, остальные – *внутренними.* Число внешних компонент называется *рангом* интервала (r), а число внутренних – его *размерностью* (s).

Пример. В предыдущем примере вторая компонента – внешняя, первая и третья – внутренние, ранг $r = 1$, размерность $s = 2$.

Договоримся для наглядности записывать булевы векторы интервала один под другим и опускать фигурные скобки; кроме того, введем компактное представление интервала *троичным вектором*, в котором 0 и 1 задают значения внешних компонент, а черточки отмечают внутренние компоненты.

Пример. $I(000, 101) = \begin{matrix} 0\,0\,0 \\ 0\,0\,1 \\ 1\,0\,0 \\ 1\,0\,1 \end{matrix} = -0-.$

Рассмотрим крайние случаи:

$I(\alpha, \alpha) = \{\alpha\}$, границы интервала совпадают, значит он состоит из одного булева вектора, ранг $r = n$, размерность $s = 0$;

$I(00...0, 11...1) = - - ... -$, интервал – все булево пространство B^n, ранг $r = 0$, размерность $s = n$.

Утверждение о мощности интервала. Мощность интервала размерности s равна 2^s.

Примеры. Мощность интервала $-0-$ из предыдущего примера равна $2^2 = 4$, мощность интервала 101 равна $2^0 = 1$, мощность интервала $- - -$ равна $2^3 = 8$.

Алгоритм распознавания интервала и поиска его границ (основан на утвеждждении о мощности интервала и на теореме о числе векторов).

Начало: задано множество A булевых векторов длины n.

Шаг 1: если мощность множества A не является целой степенью двойки, т.е. $|A| \neq 2^c$, где c – целое, то A не является интервалом, идем на конец.

Шаг 2: считаем число s несовпадающих компонент в векторах множества A, т.е. число компонент, претендующих быть внутренними. Если $s \neq c$, то A – не интервал, идем на конец; иначе A является интервалом, s – его размерность, $r = n - s$ – ранг.

Шаг 3: находим границы α и β интервала. Вектор минимального веса (из всех векторов множества A) – это наименьший элемент интервала (α), а вектор максимального веса – наибольший элемент (β).

Конец.

Примеры.

$A = \{010, 011, 001\}$: множество не образует интервал, так как его мощность, равная 3, целой степенью двойки не является.

$A = \{0010, 0011, 0001, 1000\}$: множество не образует интервал – мощность является целой степенью двойки, но показатель степени $c = 2$ не совпадает с количеством компонент $s = 3$, претендующих быть внутренними (это первая, третья и четвертая компоненты).

$A = \{010, 011, 001, 000\}$: множество образует интервал, так как его мощность является целой степенью двойки ($c = 2$), и эта степень совпадает с количеством компонент $s = 2$, претендующих быть внутренними (это вторая и третья компоненты). Границы интервала: $\alpha = 000$, $\beta = 011$.

2.2.2. Способы задания интервалов

Мы уже пользовались тремя способами задания интервалов.

1) Границами интервала.

2) Явным перечислением векторов интервала.

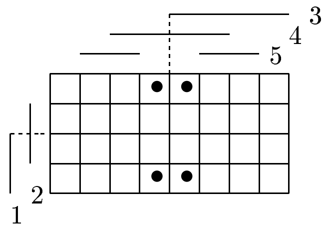
3) Троичным вектором.

Рассмотрим еще один способ.

4) На матрице Грея. Булево пространство представляется матрицей Грея, а все булевы векторы (клетки), образующие интервал, отмечаются.

Чтобы нарисовать интервал, совсем не обязательно получать в явном виде каждый из его булевых векторов и отмечать соответствующую клетку на матрице. Достаточно найти все строки и все столбцы, коды которых совпадают с векторами интервала по внешним компонентам – на их пересечении и будет лежать интервал.

Пример. $I = -\,0 - 1\,0$: находим строки матрицы Грея, в кодах которых вторая компонента равна 0 (верхняя и нижняя строки), и столбцы, в кодах которых четвертая компонента равна 1, а пятая – 0 (два средних столбца), – на их пересечении лежит заданный интервал.



Поскольку код Грея обладает свойством симметрии, то элементы интервала лежат симметрично относительно осей внутренних компонент (в примере это первая и третья компоненты). Это позволяет распознавать интервалы на матрице Грея, не переходя к явному перечислению векторов.

Алгоритм распознавания интервала на матрице Грея.

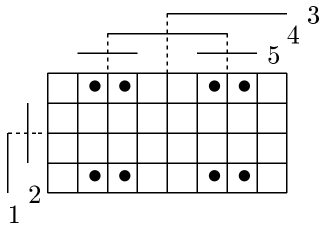
Начало: задана матрица Грея с отмеченными клетками, которые образуют множество A.

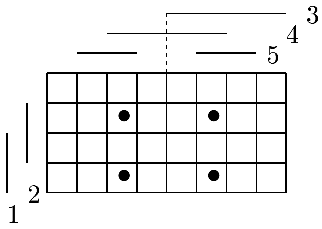
Шаг 1: если число клеток множества A не является целой степенью двойки, т.е. $|A| \neq 2^c$, то A – не интервал, идем на конец.

Шаг 2: если множество A лежит симметрично относительно осей симметрии c компонент (его можно "разрезать" осями на симметричные половины, затем половины на симметричные четвертины, затем четвертины на симметричные осьмушки и так далее до тех пор, пока множество A не "разрежется" на отдельные клетки), то A – интервал, идем на конец, иначе A – не интервал.

Конец.

Примеры.





На левой матрице задан интервал $-0--1$ (8 клеток и оси симметрии трех компонент), на правой – не интервал (4 клетки и ось симметрии лишь одной компоненты).

Очевидно, что интервалами являются следующие множества:

– каждая отдельная клетка,
– любая пара симметричных клеток, в том числе рядом лежащих,
– любая строка и любой столбец,
– любая пара симметричных строк или столбцов, в том числе рядом лежащих,
– любой "квадрат" размером 2×2,
– любая половина или четвертина матрицы,

– четверка клеток, лежащих в углах матрицы,
– и не только они.

2.2.3. Соседние интервалы

Рассмотрим два интервала булева пространства B^n: $I_1(\alpha_1, \beta_1)$ и $I_2(\alpha_2, \beta_2)$.

Определение. Интервалы I_1, I_2 называют *соседними* (*соседями*), если они совпадают по номерам внешних компонент, но различаются по значению одной из них; ее называют *ортогональной* компонентой, а интервалы I_1, I_2 – *соседями по данной компоненте.*

Примеры. Рассмотрим три пары интервалов:

$I_1 = 0\,1 - - -,\quad I_1' = 0\,1 - - -,\quad I_1'' = 0\ 1 - - -,$
$I_2 = 1\,1 - - -;\quad I_2' = 1\,0 - - -;\quad I_2'' = 0 - - -\ 1.$

Интервалы I_1 и I_2 являются соседями (по первой компоненте), I_1' и I_2' не являются соседями (различаются по двум внешним компонентам), I_1'' и I_2'' также не соседи (различаются по номерам внешних компонент).

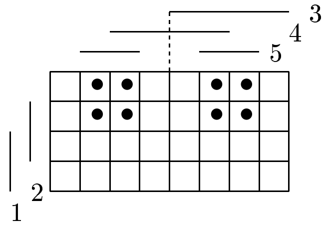
Утверждение о соседних интервалах. Два соседних интервала ранга r (размерности s) не пересекаются, а их объединение образует интервал ранга $r-1$ (размерности $s+1$).

Определение. Операцию объединения двух интервалов I_1 и I_2, соседних по i-й компоненте, назовем *склеиванием* интервалов i-й компоненте, а результат их склеивания $I = I_1 \bigcup I_2$ – *расширением* каждого из интервалов I_1 и I_2 по i-й компоненте.

Пример. Соседние интервалы $\begin{matrix} I_1 = 0 - 0 - 1 \\ I_2 = 0 - 1 - 1 \end{matrix}$ ранга 3 склеиваются, образуя интервал $I = 0 - - - 1$ ранга 2 (он является расширением интервалов I_1 и I_2 по третьей компоненте).

Очевидно, что на матрице в коде Грея соседние по i-й компоненте интервалы располагаются симметрично относительно оси симметрии этой компоненты.

Пример. На матрице показаны интервалы из предыдущего примера, которые располагаются симметрично относительно оси симметрии третьей компоненты.



2.3. Упражнения

Упр.1. Перечислить булевы векторы, образующие следующие интервалы:

$I_1(0001, 1001)$, $I_2(01010, 11011)$, $I_3(0000, 1100)$, $I_4(000, 111)$. Задать эти интервалы на матрице Грея и вычислить их ранги.

Упр.2. Перечислить все интервалы ранга 1 в булевом пространстве B^3, представив их троичными векторами.

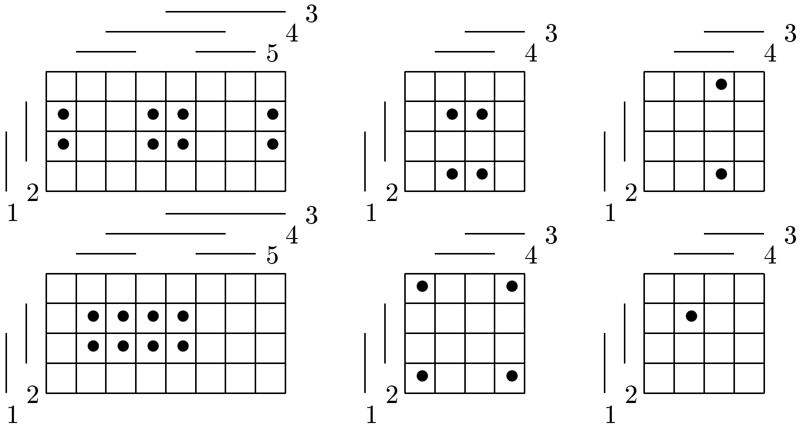
Упр.3. Перечислить все интервалы в пространстве B^5, первая и четвертая компоненты которых являются внешними, а все остальные – внутренними. Представить интервалы на матрице Грея.

Упр.4. Являются ли следующие множества булевых векторов интервалами, и если да, то какими троичными векторами они представляются?

$A_1 =$ 00000	$A_2 =$ 01100	$A_3 =$ 0101	$A_4 =$ 0001	$A_5 =$ 10011
00001	01101	1011	0101	
01000	00000	1101		
01001	00001	0001		
10000	00100			
	00101			
	01000			
	01101			

Упр.5. Найти на матрице Грея все интервалы, соседние интервалу $I = 1\,0 - 0\,-$.

Упр.6. Образуют ли интервал векторы, выделенные на матрице Грея? Если да, то представить интервал троичным вектором и найти границы интервала.



3. Булевы переменные, булевы функции, фиктивные переменные

3.1. Булевы переменные

Определение. *Булева переменная* – это переменная со значениями из булева множества $B = \{0, 1\}$.

Обозначаются булевы переменные символами: $a, b, c, ..., x, y, z$, или теми же символами с индексами: $x_1, x_2, ..., x_n$.

Определение. Последовательность значений $a_1, a_2, ..., a_n$ булевых переменных назовем *набором значений переменных* (или просто *набором*) и будем перечислять их без запятых.

Пример. Набор $a_1a_2a_3a_4a_5a_6 = 010100$.

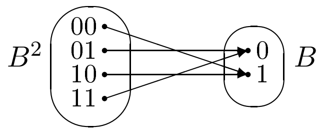
3.2. Булевы функции

Дадим два эквивалентных определения булевой функции.

Определение 1. Функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ назовем *булевой*, если она сама и ее аргументы принимают значения 0 и 1.

Определение 2. *Булевой функцией* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ назовем однозначное отображение булева пространства B^n в булево множество B, т.е. $f : B^n \to B$.

Пример. Булева функция двух аргументов, принимающая на наборах 01 и 11 значение 0, а на наборах 00 и 10 значение 1:



$f : B^2 \to B$

Определение. Булевы функции *равны*,

$$f_1(x_1, ..., x_n) = f_2(x_1, ..., x_n),$$

если на одинаковых наборах они принимают одинаковые значения.

3.3. Способы задания булевых функций

1) Задание булевой функции таблицей истинности. Так называется таблица, состоящая из двух частей: в левой части перечисляются все наборы значений аргументов (булевы векторы пространства B^n) в естественном порядке, т.е. по возрастанию значений чисел, представляемых этими векторами, а в правой части – значения булевой функции на соответствующих наборах.

	x_1	x_2	...	x_n	$f(x_1, x_2, ..., x_n)$
0	0	0	...	0	$f(0, 0, ..., 0)$
1	0	0	...	1	$f(0, 0, ..., 1)$
...	...	...	...	...	...
a	a_1	a_2	...	a_n	$f(a_1, a_2, ..., a_n)$
...	...	...	...	...	...
$2^n - 1$	1	1	...	1	$f(1, 1, ..., 1)$

Пример. Рассмотрим булеву функцию трех аргументов, называемую *мажоритарной* (или функцией голосования): она принимает значение 1 на тех и только тех наборах, в которых единиц больше, чем нулей (major – больший).

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Очевидно, что левая часть таблицы истинности постоянна для всех функций с одинаковым числом аргументов. Поэтому, задавая несколько таких функций, можно не повторять левую часть таблицы, а в ее правой части перечислить столбцы значений всех функций.

Пример. Булевы функции $f_1(x_1, x_2)$, $f_2(x_1, x_2)$ и $f_3(x_1, x_2)$ могут быть заданы общей таблицей

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3
0	0	0	0	1
0	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	1	0	1

Теорема о числе булевых функций. Число различных булевых функций, зависящих от n переменных, равно 2^{2^n}.

2) Задание булевой функции характеристическими множествами. Так называются два множества:

M_f^1, состоящее из всех наборов, на которых функция принимает значение 1, т.е. $M_f^1 = \{\alpha \in B^n : f(\alpha) = 1\}$;

M_f^0, состоящее из всех наборов, на которых функция принимает значение 0, т.е. $M_f^0 = \{\alpha \in B^n : f(\alpha) = 0\}$.

Пример (мажоритарная функция).

$M_f^1 = \{011, 101, 110, 111\}, \quad M_f^0 = \{000, 001, 010, 100\}$.

3) Задание булевой функции вектором ее значений.

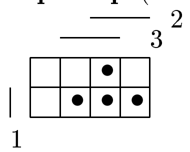
$\varphi_f = f(0, 0, ..., 0) f(0, 0, ..., 1) ... f(1, 1, ..., 1)$.

Пример (мажоритарная функция).

$\varphi_f = 00010111$.

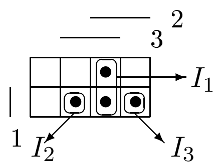
4) Задание булевой функции матрицей Грея. Булево пространство задается матрицей Грея, и наборы (клетки матрицы), на которых булева функция $f(x_1, ..., x_n)$ принимает значение 1, отмечаются и называются *точками*.

Пример (мажоритарная функция).



5) Интервальный способ задания булевой функции. Булева функция $f(x_1, ..., x_n)$ задается таким множеством интервалов $I_f = \{I_1, I_2, ..., I_k\}$, объединение которых образует характеристическое множество M_f^1, т.е. $I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_k = M_f^1$. Множество I_f называется *достаточным* для функции f.

Пример. Мажоритарная функция может быть задана достаточным множеством $I_f = \{I_1, I_2, I_3\}$ интервалов:

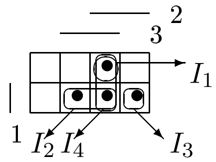


$I_1 = -\,1\,1$
$I_2 = 1\,0\,1$
$I_3 = 1\,1\,0$

Здесь интервалы представлены троичными векторами и изображены на матрице Грея.

В отличие от предыдущих, интервальный способ задания функций многовариантен (одну и ту же булеву функцию можно представить разными множествами интервалов).

Пример. Зададим мажоритарную функцию другим множеством $I'_f = \{I_1, I_2, I_3, I_4\}$ интервалов:

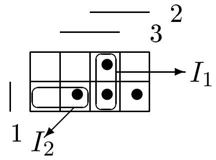


$I_1 = 0\ 1\ 1$
$I_2 = 1\ -\ 1$
$I_3 = 1\ 1\ 0$
$I_4 = -\ 1\ 1$

Очевидно, что это множество интервалов избыточно: первый интервал (011) можно удалить.

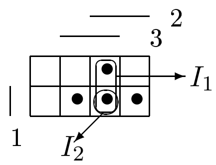
Определение. Интервал назовем *допустимым для булевой функции*, если на всех его наборах функция равна 1.

Примеры. $I_1 = -11$ – допустимый интервал для мажоритарной функции, $I_2 = 10-$ – не допустимый.

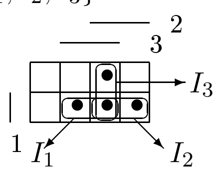


Определение. Интервал I назовем *максимальным для булевой функции* $f(x_1, ..., x_n)$, если он является допустимым для этой функции, и не существует другого допустимого интервала I', такого что $I \subset I'$.

Пример. $I_1 = -11$ является максимальным интервалом для мажоритарной функции, а допустимый интервал $I_2 = 111$ не является максимальным, т.к. $I_2 \subset I_1$.



Пример. Зададим мажоритарную функцию множеством $I''_f = \{I_1, I_2, I_3\}$ всех максимальных интервалов.



$I_1 = 1\ -\ 1$
$I_2 = 1\ 1\ -$
$I_3 = -\ 1\ 1$

6) Задание булевой функции формулами будет рассмотрено несколько позже.

3.4. Фиктивные переменные

Определение. Говорят, что булева функция $f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)$ *существенно зависит от переменной* x_i, если выполняется условие

$$f(x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n) \neq f(x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n).$$

В этом случае также говорят, что переменная x_i *существенная*, в противном случае ее называют *фиктивной* переменной.

Пример. Рассмотрим булеву функцию $f(x_1, x_2, x_3)$ и исследуем ее переменные x_1 и x_3.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

x_2	x_3	$f(0, x_2, x_3) \neq$	$f(1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	0

x_1	x_2	$f(x_1, x_2, 0) =$	$f(x_1, x_2, 1)$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Из таблиц истинности видно, что переменная x_1 булевой функции $f(x_1, x_2, x_3)$ существенная, так как $f(0, x_2, x_3) \neq f(1, x_2, x_3)$. Переменная x_3 фиктивная, так как $f(x_1, x_2, 0) = f(x_1, x_2, 1)$.

Очевидно, что для выявления фиктивных переменных можно не строить в явном виде таблиц истинности левой и правой частей неравенства, а сравнивать соответствующие части вектора-столбца значений функции.

Алгоритм распознавания фиктивной переменной по таблице истинности.

– Для переменной x_1 сравниваются половины столбца значений функции: верхняя и нижняя, так как именно в верхней половине $x_1 = 0$, а в нижней $x_1 = 1$; если они совпадают, то переменная x_1 фиктивна;

– для переменной x_2 сравниваются четвертины столбца в каждой половине, так как именно в верхних четвертинах $x_2 = 0$, а в нижних $x_2 = 1$; если четвертины в каждой половине совпадают, то переменная x_2 фиктивна;

– и так далее (за четвертинами следуют 1/8, 1/16, ...).

Пример. Для функции из предыдущего примера переменная x_1 существенна, так как верхняя половина столбца значений функции (0011) не равна нижней половине (1100). Переменная x_2 существенна, так как четвертины уже в первой половине различаются (00 и 11). Переменная x_3 фиктивна, так как осьмушки в каждой четвертине равны (0 и 0, 1 и 1, 1 и 1, 0 и 0).

Выявление фиктивных переменных можно ускорить, используя следующее очевидное утверждение.

Достаточное условие отсутствия фиктивных переменных. Если вес вектора-столбца значений функции нечетен, то функция не может содержать фиктивных переменных.

Алгоритм удаления фиктивной переменной x_i состоит в вычеркивании из таблицы истинности всех строк, в которых $x_i = 0$ (или всех строк, в которых $x_i = 1$), и столбца x_i.

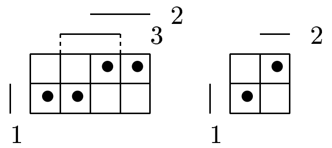
Пример (функция та же). После удаления фиктивной переменой x_3 имеем

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Алгоритм распознавания фиктивной переменной по матрице Грея.

Переменная фиктивна тогда и только тогда, когда точки на матрице расположены симметрично относительно осей этой переменной. Упрощенная матрица – это одна из ее симметричных половин.

Пример (функция та же и представлена на левой матрице). Переменная x_3 функции фиктивна. Справа показан результат ее удаления.



Определение. Булевы функции назовем *равными с точностью до фиктивных переменных*, если равны (в смысле, определенном ранее) функции, полученные из исходных удалением фиктивных переменных (и именно это расширенное толкование равенства функций мы будем иметь в виду во всех дальнейших рассуждениях).

Пример. Рассмотрим функции $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_2)$. Удалив фиктивную переменную x_1 функции $f_1(x_1, x_2)$ и фиктивную переменную x_2 функции $f_2(x_1, x_2)$, получим равные функции $f_1(x_2) = f_2(x_1) = f(x)$. Значит, исходные функции равны с точностью до фиктивных переменных.

x_1	x_2	$f_1(x_1, x_2)$	$f_2(x_1, x_2)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

x_2	$f_1(x_2)$
0	0
1	1

x_1	$f_2(x_1)$
0	0
1	1

3.5. Элементарные булевы функции

Рассмотрим все булевы функции двух и менее аргументов.

При $n = 0$ имеем две функции: *константу 0* и *константу 1*.

При $n = 1$ имеем четыре функции:

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Функции f_0 и f_3 зависят от x несущественно, поэтому равны двум рассмотренным ранее функциям. Введем названия и обозначения для остальных двух функций:

$f_1(x) = x$ – *тождественная* функция (читается "x"),

$f_2(x) = \overline{x}$ – функция *отрицания* (а также *инверсия*, *НЕ*) (читается "не x").

При $n = 2$ имеем 16 функций:

x_1 x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
		$\wedge$	$\hookrightarrow$		$\hookleftarrow$		$\oplus$	$\vee$	$\downarrow$	$\sim$		$\leftarrow$		$\rightarrow$	$/$	

Функции f_0, f_3, f_5, f_{10}, f_{12}, f_{15} содержат фиктивные переменные и поэтому уже рассмотрены ранее. Обозначения остальных функций указаны в нижней строке таблицы, а названия их таковы:

$f_1(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$ – *конъюнкция* (*логическое умножение*, *И*) (читается "x_1 и x_2"),

$f_7(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$ – *дизъюнкция* (*логическое сложение*, *ИЛИ*) (читается "x_1 или x_2"),

$f_6(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ – *дизъюнкция с исключением* (*сложение по модулю 2*) (читается "x_1 плюс x_2"),

$f_9(x_1, x_2) = x_1 \sim x_2$ – *эквивалентность* (читается "x_1 эквивалентно x_2"),

$f_8(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2$ – *стрелка Пирса* (*НЕ-ИЛИ*) (читается "x_1 стрелка x_2"),

$f_{14}(x_1, x_2) = x_1 / x_2$ – *штрих Шеффера* (*НЕ-И*) (читается "x_1 штрих x_2"),

$f_{13}(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$ – *импликация* (*логическое следование*) (читается "x_1 имплицирует x_2"),

$f_2(x_1, x_2) = x_1 \hookrightarrow x_2$ – *не импликация* (читается "x_1 не имплицирует x_2"),

$f_{11}(x_1, x_2) = x_1 \leftarrow x_2$ – *обратная импликация* (читается "x_1 обратно имплицирует x_2"),

$f_4(x_1, x_2) = x_1 \hookleftarrow x_2$ – *не обратная импликация* (читается "x_1 не обратно имплицирует x_2").

Определение. Булевы функции двух и менее аргументов назовем *элементарными булевыми функциями*.

Пары инверсных элементарных функций:

$$0\ 1, \qquad \vee\ \downarrow, \qquad \wedge\ /, \qquad \oplus\ \sim, \qquad \leftarrow\ \hookleftarrow, \qquad \to\ \hookrightarrow,$$

кроме того, пару составляют тождественная функция и инверсия.

3.6. Упражнения

Упр.1. Задать с помощью таблиц истинности, характеристических множеств, векторов, матриц Грея и интервалов следующие булевы функции:

$f_1 : B^3 \to B$; функция равна единице на тех и только тех наборах, вес которых больше единицы;

$f_2 : B^4 \to B$; функция равна единице на тех и только тех наборах, которые представляют числа большие или равные 7;

$f_3 : B^3 \to B$; функция равна нулю на всех наборах с четным весом, и только на них.

Упр.2. Привести примеры таблиц истинности булевых функций:

$f_1 : B^3 \to B$; функция принимает различные значения на противоположных наборах;

$f_2 : B^3 \to B : f(\alpha) \le f(\beta)$ если $\alpha \preceq \beta$.

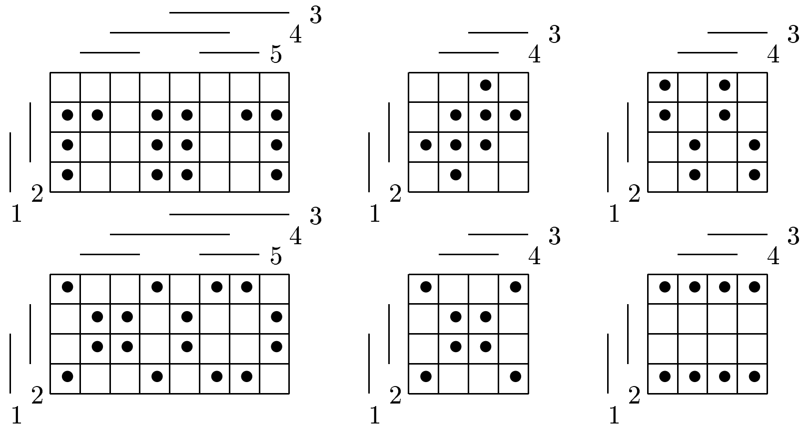
Упр.3. Соревнования обслуживают три судьи, один из них главный. Вес считается поднятым, если "за" проголосовало большинство судей, в том числе и главный. Построить таблицу истинности булевой функции, описывающей такое голосование.

Упр.4. Вдоль длинного коридора размещены лампы. Включение и выключение света управляется тремя выключателями, два из которых расположены в концах коридора, а третий – посередине. При нажатии любого выключателя все лампы включаются, если были выключены, и выключаются, если были включены. Построить таблицу истинности булевой функции, описывающей управление освещением коридора.

Упр.5. Найти и удалить фиктивные переменные следующих булевых функций:

x y z	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
0 0 0	0	0	1	0	1	1	1	0
0 0 1	0	1	0	1	0	1	1	1
0 1 0	1	1	0	0	0	0	1	0
0 1 1	1	0	1	1	0	1	1	1
1 0 0	1	0	1	0	0	1	0	1
1 0 1	1	1	0	1	0	0	0	0
1 1 0	0	1	0	0	0	0	0	1
1 1 1	0	0	1	1	1	1	0	0

Упр.6. Найти и удалить фиктивные переменные следующих булевых функций:



Упр.7. Представить все элементарные булевы функции матрицами Грея и разбить их на пары инверсных функций.

4. Формулы и равносильности

4.1. Формула как способ задания функции

Определение (индуктивное). Пусть даны $\varPhi$ – множество символов функций и X – множество символов переменных.

База индукции. Если f_i – символ n-местной функции из множества $\varPhi$, а $x_1, x_2, ..., x_n$ – переменные из множества X, то последовательность символов $f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ – *формула над $\varPhi$ и X.*

Индуктивный переход. Если f_j – символ m-местной функции из $\varPhi$, а $A_1, A_2, ..., A_m$ – переменные из X или формулы, то последовательность символов $f_j(A_1, A_2, ..., A_m)$ – *формула над $\varPhi$ и X,* а $A_1, A_2, ..., A_m$ – ее *подформулы.*

Заключительная фраза. Других формул нет.

Если множество $\varPhi = \{0, 1, \ , ^-, \vee, \wedge, \oplus, \sim, \to, \leftarrow, \hookrightarrow, \hookleftarrow, \downarrow, /\}$, а множество $X = \{a, b, ..., z, x_1, x_2, ..., x_n\}$, то формулу над данными множествами $\varPhi$ и X договоримся называть просто *формулой* (обратим внимание на "пустой" символ, стоящий в множестве $\varPhi$ после 1 – это символ тождественной функции).

Примеры. $\wedge(c, a)$; $\quad \downarrow (b, c)$; $\quad ^-(x)$; $\quad \vee(\oplus(x, y), ^- (z))$.

Эти формулы написаны по всем правилам, оговоренным в определении, но мы будем использовать более привычный и уже введенный нами способ записи формул для элементарных булевых функций: $c \wedge a$, $b \downarrow c$, $\overline{x}$ и т.д.

Чтобы указать порядок подстановки подформул $A_1, A_2, ..., A_m$ в формулу, то есть порядок вычисления значения формулы, будем брать все подформулы, кроме инверсии, в скобки. Договоримся обозначать формулы большими латинскими буквами.

Пример. Последняя формула предыдущего примера примет вид $F = (x \oplus y) \vee \overline{z}$.

Разрешим опускать скобки вокруг конъюнкции и те скобки, которые бы указывали, что функции вычисляются в порядке их следования слева направо. Кроме того, разрешим опускать знак конъюнкции. Все это означает, что при вычислении по формуле конъюнкция имеет приоритет, а остальные функции вычисляются слева направо, но с учетом скобок.

Пример. Формула $F = (x \oplus (y \wedge z)) \vee (x \to \overline{z})$ примет вид $F = x \oplus yz \vee (x \to \overline{z})$.

Определение. Говорят, что формула F *задает* булеву функцию $f(x_1, ..., x_n)$, а функция *реализует* формулу, и в этом случае используют обозначение F_f.

Пример. Построим таблицу истинности функции f, реализующей предыдущую формулу $F_f = x \oplus yz \vee (x \to \overline{z})$. Порядок вычисления значений подформул обозначен цифрами внизу таблицы. Столбец значений функции выписан справа в рамке.

x	y	z	x	$\oplus$	yz	$\vee$	$(x$	$\to$	$\overline{z})$	f
0	0	0		0	0	1		1	1	1
0	0	1		0	0	1		1	0	1
0	1	0		0	0	1		1	1	1
0	1	1		1	1	1		1	0	1
1	0	0		1	0	1		1	1	1
1	0	1		1	0	1		0	0	1
1	1	0		1	0	1		1	1	1
1	1	1		0	1	0		0	0	0
				2	1	5		4	3	

Определение. Формулу назовем *тождественно истинной* (обозначается $F \equiv 1$), если на всех наборах она принимает значение 1, и *тождественно ложной* (обозначается $F \equiv 0$), если на всех наборах она принимает значение 0.

Пример. Исследуем формулу $F = x \vee \overline{x}y \vee \overline{y}$, построив по ней таблицу истинности (здесь мы демонстрируем другой способ построения таблицы истинности – построчный).

x	y	$x \vee \overline{x}y \vee \overline{y}$
0	0	$0 \vee \overline{0}0 \vee \overline{0} = 0 \vee 0 \vee 1 = 1$
0	1	$0 \vee \overline{0}1 \vee \overline{1} = 0 \vee 1 \vee 0 = 1$
1	0	$1 \vee \overline{1}0 \vee \overline{0} = 1 \vee 0 \vee 1 = 1$
1	1	$1 \vee \overline{1}1 \vee \overline{1} = 1 \vee 0 \vee 0 = 1$

Формула является тождественно истинной.

4.2. Равносильность формул

Определение. Две формулы F' и F'' называются *равносильными*, если они задают равные функции. В этом случае пишут $F' = F''$.

Доказывать равносильности можно с помощью таблиц истинности или рассуждений, опирающихся на свойства элементарных булевых функций.

Пример. Докажем равносильность $\overline{x \vee y} = \overline{x}\,\overline{y}$, построив таблицы истинности для левой и правой формул.

x y	$\overline{x \vee y}$	$\overline{x}\,\overline{y}$
0 0	1	1
0 1	0	0
1 0	0	0
1 1	0	0

Пример. $(x \to y) \vee 1 = 1$. Для доказательства этой равносильности можно не строить таблиц истинности, а воспользоваться следующими рассуждениями: так как один из аргументов дизъюнкции равен 1, то левая часть тождественно равна 1 и поэтому равна правой.

Кроме предложенных, существуют и другие способы доказательства равносильностей, например, приведением формул к каноническому виду. Этот способ будет рассмотрен позже.

4.3. Основные равносильности

К основным относят следующие равносильности, которые рекомендуется запомнить и применять при упрощении формул.

Свойства 0 *и* 1: $x0 = 0, \quad x1 = x,$
$x \vee 0 = x, \quad x \vee 1 = 1,$
$x \oplus 0 = x, \quad x \oplus 1 = \overline{x}.$

Закон двойного отрицания: $\overline{\overline{x}} = x$.

Закон противоречия: $x\,\overline{x} = 0$.

Закон исключенного третьего: $x \vee \overline{x} = 1$.
Законы идемпотентности: $xx = x$,
$x \vee x = x$.
Законы де Моргана: $\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}$,
$\overline{x \vee y} = \overline{x}\,\overline{y}$.
Законы коммутативности: $x \vee y = y \vee x$,
$x \oplus y = y \oplus x$,
$xy = yx$.
Законы ассоциативности: $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = x \vee y \vee z$,
$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z = x \oplus y \oplus z$,
$x(yz) = (xy)z = xyz$.
Законы дистрибутивности: $x(y \vee z) = xy \vee xz$,
$x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$,
$x(y \oplus z) = xy \oplus xz$.
Законы поглощения: $x \vee xy = x$,
$x(x \vee y) = x$.
Законы склеивания: $xy \vee \overline{x}y = y$,
$(x \vee y)(\overline{x} \vee y) = y$.
Закон обобщенного склеивания: $xy \vee \overline{x}z = xy \vee \overline{x}z \vee yz$.

4.4. Свойства 0 и 1

Свойства 0 и 1 для дизъюнкции, конъюнкции и суммы по модулю 2 приведены в списке основных равносильностей. Для остальных функций аналогичные свойства при необходимости можно получать самостоятельно построением таблиц истинности.

Пример. Свойства 0 и 1 для импликации.

x	$x \to 0$	$x \to 1$	$0 \to x$	$1 \to x$
0	1	1	1	0
1	0	1	1	1

Отсюда получаем следующие равносильности:
$x \to 0 = \overline{x}$, $\quad x \to 1 = 1$, $\quad 0 \to x = 1$, $\quad 1 \to x = x$.

4.5. Упражнения

Упр.1. Построить таблицы истинности для функций, заданных формулами:

$F_1 = xy \to (y \vee z)$;

$F_2 = x \to y \vee (x \to z)$;

$F_3 = y \oplus (\overline{x} \vee z)\,(y \sim z)$;

$F_4 = x\,(x \downarrow y) \vee (y \downarrow z)$;

$F_5 = (x \oplus y \downarrow (y \oplus z))\,\overline{y}z$;

$F_6 = x \downarrow y \downarrow (y \downarrow z) \to xz$.

Упр.2. Проверить равносильности:

1) $x \vee (y \sim z) = (x \vee y) \sim (x \vee z)$;

2) $x \to (y \sim z) = (x \to y) \sim (x \to z)$;

3) $x(y \sim z) = xy \sim xz$;

4) $x \to (y \vee z) = (x \to y) \vee (x \to z)$;

5) $x \oplus (y \to z) = (x \oplus y) \to (x \oplus z)$;

6) $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$.

Упр.3. Доказать основные равносильности, пользуясь различными способами.

Упр.4. Проверить, являются ли формулы тождественно истинными либо тождественно ложными:

$F_1 = x \to yz \vee \overline{y} \vee \overline{z}$;

$F_2 = (x \oplus z)\,(xy \sim z) \to y$;

$F_3 = (x \oplus y \downarrow (y \oplus z))\,\overline{y}z$;

$F_4 = x \downarrow y \downarrow (y \downarrow z) \to xz$.

5. Двойственная функция и двойственная формула

5.1. Двойственная функция

Определение. Булева функция $f^*(x_1, ..., x_n)$ называется *двойственной булевой функции* $f(x_1, ..., x_n)$, если она получена из функции $f(x_1, ..., x_n)$ инверсией всех аргументов и самой функции, т.е.

$$f^*(x_1, ..., x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n).$$

Пример. Построим функцию, двойственную импликации.

x y	$x \to y$	$\overline{\overline{x} \to \overline{y}}$
0 0	1	0
0 1	1	1
1 0	0	0
1 1	1	0

Алгоритм построения таблицы истинности двойственной функции (основан на определении двойственной функции).

Инверсия всех переменных превращает наборы в их антиподы. Поскольку в таблице истинности антипод первого набора расположен последним, антипод второго набора – предпоследним и так далее, то для построения функции $f(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n)$ нужно перевернуть вектор-столбец значений исходной функции $f(x_1, ..., x_n)$, а для получения функции $\overline{f}(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n)$ еще и инвертировать компоненты столбца.

Пример. Построим функцию, двойственную импликации.

x y	$x \to y$	$\overline{x} \to \overline{y}$	$\overline{\overline{x} \to \overline{y}}$
0 0	1	1	0
0 1	1	0	1
1 0	0	1	0
1 1	1	1	0

Пары двойственных элементарных функций:

$$0\,1, \qquad \vee\,\wedge, \qquad \downarrow\,/, \qquad \oplus\,\sim, \qquad \leftarrow\,\hookrightarrow, \qquad \to\,\hookleftarrow\,.$$

Тождественная функция и инверсия двойственны каждая самой себе.

5.2. Двойственная формула

Определение. Формула F^* называется *двойственной формуле* F, если она получена из F заменой символов функций на символы двойственных им функций.

Пример. $F = x \downarrow (y \oplus (\overline{x} \vee yz)) \to (y \sim \overline{x})$,
$F^* = x / (y \sim \overline{x}(y \vee z)) \hookleftarrow (y \oplus \overline{x})$.

Теорема (*принцип двойственности.*) Если формула F задает булеву функцию $f(x_1, ..., x_n)$, то двойственная ей формула F^* задает двойственную функцию $f^*(x_1, ..., x_n)$.

Пример. Рассмотрим формулу $F = \overline{x \vee y}$, задающую функцию НЕ-ИЛИ, то есть стрелку Пирса. Двойственная ей формула $F^* = \overline{xy}$ должна задавать функцию, двойственную стрелке Пирса – это штрих Шеффера: в самом деле $F^* = \overline{xy}$ – это функция НЕ-И, то есть штрих Шеффера.

5.3. Способы получения двойственной функции

Из материала, изложенного в предыдущих двух подразделах, следует, что если булева функция $f(x_1, ..., x_n)$ задана формулой F_f, то двойственная ей функция $f^*(x_1, ..., x_n)$ может быть получена из F_f следующими тремя способами:

– по определению двойственной функции – инверсией в формуле F_f всех аргументов и самой функции;

– по определению двойственной формулы и принципу двойственности – заменой в формуле F_f символов функций на символы двойственных функций;

– построением таблицы истинности исходной функции по заданной формуле F_f, а затем переходом к таблице истинности двойственной функции (переворотом и инверсией столбца значений исходной функции).

5.4. Упражнения

Упр.1. Построить формулы для функций, двойственных данным, пользуясь двумя разными способами: определением двойственной функции и принципом двойственности. Сравнить таблицы истинности, построенные по полученным формулам.

$F_1 = x\,y \vee y\,z \vee x\,t \vee z\,t$;

$F_2 = x \oplus 1 \vee y(z\,t \vee 0) \vee \overline{x}\,y\,z;$
$F_3 = (x \to y) \oplus ((x \downarrow y)/(\overline{x} \sim y\,z));$
$F_4 = (x \vee y \vee (y\overline{z} \oplus 1)) \to 1.$

Упр.2. По таблицам истинности функций $f_1 - f_8$ построить двойственные им функции.

$x\ y\ z$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
0 0 0	0	0	1	0	1	1	1	1
0 0 1	0	1	0	1	0	1	1	0
0 1 0	1	1	0	0	0	1	1	1
0 1 1	1	0	1	1	1	1	1	1
1 0 0	1	0	1	0	0	1	0	0
1 0 1	1	1	1	1	0	0	0	0
1 1 0	0	1	1	0	1	1	0	1
1 1 1	0	0	1	1	1	1	0	0

Упр.3. Являются ли двойственными формулы F_f и G_g? Являются ли двойственными функции f и g?

1) $F_f = x\,y \oplus x\,z \oplus y\,z,$
$G_g = \overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{x}\,\overline{z} \vee \overline{y}\,\overline{z};$
2) $F_f = (\overline{x} \to \overline{y}) \to (y \to x),$
$G_g = (x \to y)(\overline{y} \to \overline{x});$
3) $F_f = x\,y \downarrow x\,z,$
$G_g = (x \vee y)/(x \vee z).$

Упр.4. Показать, что $f^* = g$.

1) $F_f = \overline{x}yz \vee x(y \oplus z),$
$\varphi_g = 10010111;$
2) $F_f = x \oplus y \oplus z,$
$F_g = x \oplus y \oplus z;$
3) $F_f = xy \vee xz \vee yz,$
$F_g = xy \vee xz \vee yz;$
4) $M_f^1 = \{0101, 0110, 1001, 1010\},$

$$I_g = \{I_1, I_2, I_3, I_4\},\quad \begin{array}{l} I_1 = 0\ 0\ -\ - \\ I_2 = 1\ 1\ -\ - \\ I_3 = -\ -\ 0\ 0 \\ I_4 = -\ -\ 1\ 1 \end{array}$$

6. Контрольная работа

Тема контрольной работы: булевы функции, фиктивные переменные, двойственные функции и двойственные формулы.

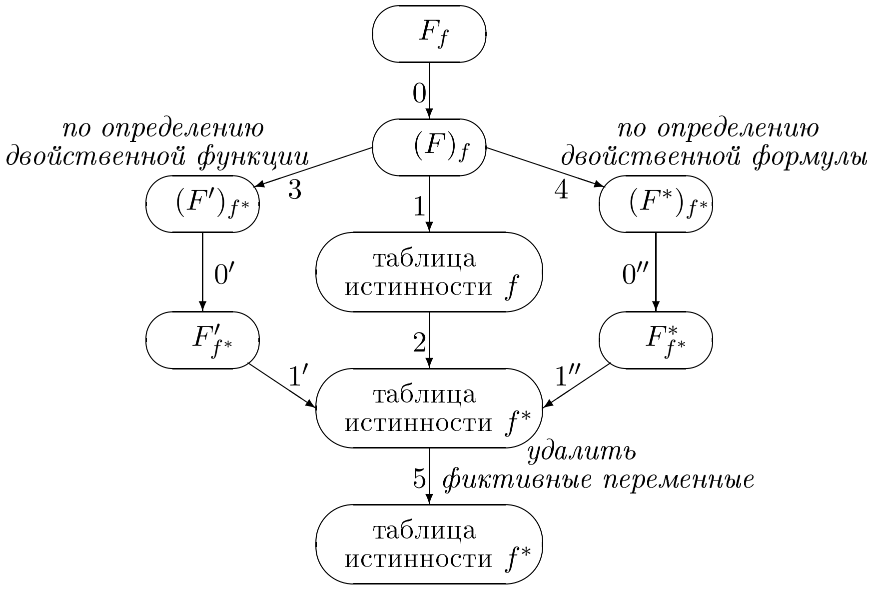


Схема контрольной работы (решение каждой из десяти предложенных здесь задач начинать с постановки задачи и делать вывод из сравнения таблиц истинности функции f^*, полученных разными способами; F обозначает формулу без лишних скобок, (F) – с недостающими скобками).

Задания на контрольную работу (формула F_f)

1) $x \to y \to (z \oplus \overline{x}y)$	6) $x\overline{z} \downarrow y/(y \oplus x)$	11) $y \oplus \overline{z} \to \overline{y}(x \downarrow z)$
2) $x \leftarrow \overline{y} \leftarrow (z \oplus \overline{x}y)$	7) $z \oplus y \leftarrow (\overline{x} \sim \overline{y})$	12) $x \oplus \overline{z} \to \overline{x}(y/z)$
3) $x/y/(\overline{z} \sim \overline{x}y)$	8) $x \vee \overline{z} \downarrow y/(y \sim x)$	13) $xy \vee \overline{z}/(x \to z)$
4) $z \to \overline{y} \to (x \oplus \overline{z}y)$	9) $x\overline{z} \to y \downarrow (y \oplus x)$	14) $y \sim \overline{z} \to \overline{y}(\overline{x}/\overline{z})$
5) $\overline{x} \to \overline{y} \to (z \sim \overline{x}y)$	10) $x\overline{z} \oplus y \to (x \sim y)$	15) $x \to \overline{z}/\overline{x}(y \downarrow z)$

16) $x \to \overline{y} \to (y \oplus \overline{x}z)$
17) $y \leftarrow \overline{y} \leftarrow (z \oplus \overline{x}y)$
18) $\overline{x}/\overline{y} \to (z \sim \overline{x}y)$
19) $z \to x\overline{y} \to (x \oplus \overline{z})$
20) $\overline{x} \to x\overline{y} \to (z \sim y)$
21) $\overline{z} \sim xy \to (\overline{x} \downarrow \overline{y})$
22) $\overline{x}z \downarrow y/x(y \oplus z)$
23) $x \vee y\overline{z} \downarrow (y \sim x)$
24) $z \downarrow xy \sim (\overline{x} \to \overline{z})$
25) $x\overline{y} \downarrow x/(x \oplus y)$
26) $y \oplus \overline{z}y/\overline{y}(x \downarrow \overline{z})$
27) $x/\overline{z} \to \overline{y}(x \downarrow z)$
28) $\overline{x}/\overline{z} \to y(x \to z)$
29) $x \sim \overline{z} \to \overline{y}(x/\overline{z})$
30) $x \to y/\overline{x}(y \downarrow z)$

Пример. Задана формула $F_f = z \oplus y \leftarrow (\overline{x} \leftarrow \overline{y}z)$.

0) *Расставим недостающие скобки в формуле* F_f. Возьмем в скобки конъюнкцию, затем остальные подформулы слева направо.

$(F)_f = (z \oplus y) \leftarrow (\overline{x} \leftarrow (\overline{y}z))$.

1), 2) *Построим таблицу истинности функции* f *по формуле* $(F)_f$. *Получим таблицу истинности двойственной функции* f^* *по таблице истинности функции* f, переворачивая и инвертируя столбец значений функции f.

x	y	z	$(z \oplus y)$	$\leftarrow$	$(\overline{x}$	$\leftarrow$	$(\overline{y}z))$	f	f^*
0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1	0	0	1
			2	5	3	4	1		

3) *По определению двойственной функции получим из формулы* $(F)_f$ *формулу двойственой функции* $(F')_{f^*}$, инвертируя переменные и саму функцию f.

$(F')_{f^*} = \overline{(\overline{z} \oplus \overline{y}) \leftarrow (x \leftarrow (y\overline{z}))}$.

Упростим формулу $(F')_{f^*}$, заменив инверсию функции обратной импликации на не обратную импликацию.

$(F')_{f^*} = (\overline{z} \oplus \overline{y}) \hookleftarrow (x \leftarrow (y\overline{z}))$.

$0'$) *Уберем лишние скобки в формуле* $(F')_{f^*}$ вокруг конъюнкции и первой слева функции $(\oplus)$.

$F'_{f^*} = \overline{z} \oplus \overline{y} \hookleftarrow (x \leftarrow y\overline{z})$.

4) *Построим формулу, двойственную* $(F)_f$. Заменим в формуле $(F)_f$ символы элементарных функций на символы двойственных им функций.

$(F^*)_{f^*} = (z \sim y) \hookrightarrow (\overline{x} \hookrightarrow (\overline{y} \vee z))$.

$0''$) *Уберем лишние скобки в формуле* $(F^*)_{f^*}$. Опустим скобки вокруг первой слева функции $(\sim)$.

$F^*_{f^*} = z \sim y \hookrightarrow (\overline{x} \hookrightarrow (\overline{y} \vee z))$.

$1'$) *Построим таблицу истинности двойственной функции* f^* *по формуле* F'_{f^*}.

x y z	$\overline{z}$	$\oplus$	$\overline{y}$	$\hookleftarrow$	$(x \leftarrow$	$y\overline{z})$	f^*
0 0 0	1	0	1	1	1	0	1
0 0 1	0	1	1	0	1	0	0
0 1 0	1	1	0	0	0	1	0
0 1 1	0	0	0	1	1	0	1
1 0 0	1	0	1	1	1	0	1
1 0 1	0	1	1	0	1	0	0
1 1 0	1	1	0	0	1	1	0
1 1 1	0	0	0	1	1	0	1
	2	4	3	6	5	1	

$1''$) *Построим таблицу истинности двойственной функции f^* по формуле $F^*_{f^*}$.*

x y z	$z \sim y \hookrightarrow (\overline{x} \hookrightarrow (\overline{y} \vee z))$						f^*
0 0 0	1	1	1	0	1	1	1
0 0 1	0	0	1	0	1	1	0
0 1 0	0	0	1	1	0	0	0
0 1 1	1	1	1	0	0	1	1
1 0 0	1	1	0	0	1	1	1
1 0 1	0	0	0	0	1	1	0
1 1 0	0	0	0	0	0	0	0
1 1 1	1	1	0	0	0	1	1
	1	6	2	5	3	4	

Вывод. Три таблицы истинности двойственной функции f^*, полученные в 2), $1'$), $1''$), совпадают, следовательно, все задачи решены верно (кроме, может быть, задачи 0).

5) *Удалим фиктивные переменные функции f^* в ее таблице истинности.* Так как вес столбца значений функции четный, то переменные функции могут быть фиктивными. Рассмотрим переменную x. Верхняя половина столбца значений функции f^* (1001) равна нижней половине (1001), следовательно, переменная x является фиктивной. Удаляем из таблицы истинности столбец x и все строки, в которых x принимает значение 0.

y z	f^*
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	1

В полученной таблице истинности верхняя половина столбца значений функции f^* (10) не равна нижней половине (01), значит, переменная y существенна. Четвертины первой же половины не равны, значит, переменная z тоже существенна.

Содержание