Математическая логика и теория алгоритмов
Лекция 15
Нечёткий логический вывод

Куценко Дмитрий Александрович

Белгородский государственный технологический университет
имени В. Г. Шухова

Институт информационных технологий и управляющих систем

Кафедра программного обеспечения вычислительной техники
и автоматизированных систем

31 мая 2013 г.

Нечёткие переменные

Нечёткая переменная характеризуется тройкой $\langle \alpha, X, \widetilde{A} \rangle$, где

- α — имя этой переменной,
- X — базовое множество (область определения α),
- $\widetilde{A} \in \mathrm{Fuzzy}(X)$ — нечёткое множество, своей функцией принадлежности $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ описывающее ограничения на значения нечёткой переменной α.

Функции принадлежности

Рассмотрим нечёткое множество $\widetilde{A} \in \mathrm{Fuzzy}(X)$, причём $X = [x_{\min}, x_{\max}]$.

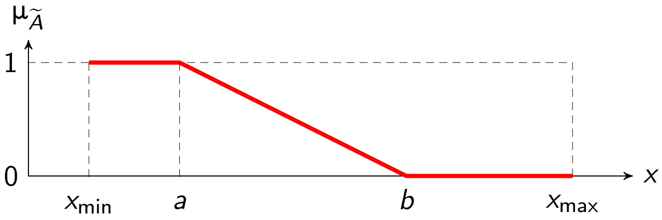
Наиболее часто используются кусочно-линейные функции принадлежности следующей формы:

- Z-образная;
- S-образная;
- треугольная;
- трапециевидная.

Z-образная функция принадлежности

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leqslant a, \\ \frac{b-x}{b-a}, & \text{если } a < x < b, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

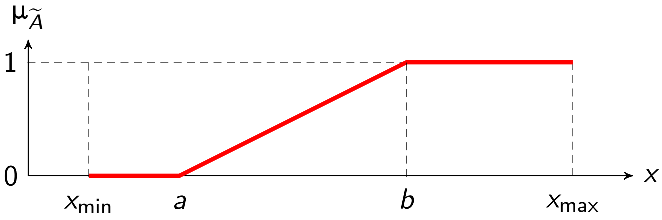
при $a < b$.



S-образная функция принадлежности

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } a < x < b, \\ 1 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

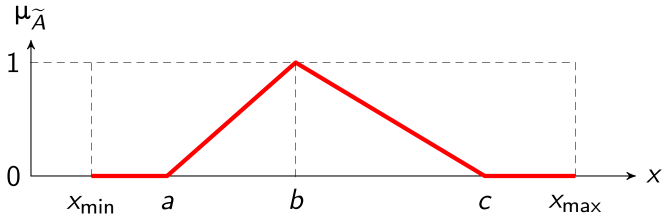
при $a < b$.



Треугольная функция принадлежности

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } a < x \leqslant b, \\ \frac{c-x}{c-b}, & \text{если } b < x < c, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

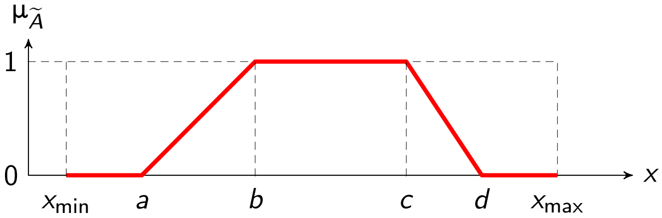
при $a < b < c$.



Трапециевидная функция принадлежности

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } a < x < b, \\ 1, & \text{если } b \leqslant x \leqslant c, \\ \frac{d-x}{d-c}, & \text{если } c < x < d, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

при $a < b < c < d$.



Замечания о функциях принадлежности

Достоинства кусочно-линейных функций принадлежности:

- Для их задания требуется малый объем данных.
- Простота модификации параметров (модальных значений) функции принадлежности на основе измеряемых значений входных и выходных величин системы.
- Возможность получения в рамках модели отображения «вход $\rightarrow$ выход» в виде гиперповерхности, состоящей из линейных участков.
- Для многоугольных функций принадлежности легко обеспечивается выполнение условия разбиения единицы (в соответствии с которым сумма степеней принадлежности для любого элемента x должна равняться 1).

Недостаток: многоугольные функции принадлежности не являются непрерывно дифференцируемыми.

Лингвистические переменные

Лингвистическая переменная — переменная, которая может принимать значения фраз из естественного или искусственного языка.

Лингвистическая переменная характеризуется пятёркой $\langle \beta, T, X, G, M \rangle$, где

- β — её имя;
- T — множество её значений (терм-множество), состоящее из имён нечётких переменных (термов), определённых на базовом множестве X;
- G — синтаксическая процедура для генерации новых термов из T;
- M — семантическая процедура, позволяющая превратить каждое новое значение лингвистической переменной, образуемое с помощью G, в соответствующее нечёткое множество.

Нечёткие высказывания

Нечёткими высказываниями будем называть высказывания следующего вида:

1. Высказывание $\langle x$ есть $\widetilde{A}\rangle$, где x — имя лингвистической переменной, $\widetilde{A}$ — её значение, которому соответствует нечёткое множество на базовом множестве X.
2. Высказывание $\langle x$ есть $m\widetilde{A}\rangle$, где m — модификатор, которому соответствуют слова «не», «очень», «более или менее», «намного больше» и др.
3. Сложные высказывания, образованные из высказываний вида 1 и 2 и связок «и», «или», «Если. . . , то. . . » и др.

Модификаторы

- Модификатор «не»:

$$\mu_{\text{не }\widetilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\widetilde{A}}(x);$$

- Модификатор «очень»:

$$\mu_{\text{очень }\widetilde{A}}(x) = \left(\mu_{\widetilde{A}}(x)\right)^2;$$

- Модификатор «более-менее»:

$$\mu_{\text{более-менее }\widetilde{A}}(x) = \sqrt{\mu_{\widetilde{A}}(x)}.$$

Связка «и»

Связка «и» может моделироваться с помощью треугольных норм (t-норм):

- t-норма Заде:

$$\mu_{\widetilde{A}\text{ и }\widetilde{B}}(x) = \min\{\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(x)\};$$

- вероятностная t-норма:

$$\mu_{\widetilde{A}\text{ и }\widetilde{B}}(x) = \mu_{\widetilde{A}}(x) \cdot \mu_{\widetilde{B}}(x);$$

- t-норма Лукасевича:

$$\mu_{\widetilde{A}\text{ и }\widetilde{B}}(x) = \max\{0, \mu_{\widetilde{A}}(x) + \mu_{\widetilde{B}}(x) - 1\}.$$

Связка «или»

Связка «или» может моделироваться с помощью треугольных конорм (t-конорм), двойственных соответствующим t-нормам:

- t-конорма Заде:

$$\mu_{\widetilde{A}\text{ или }\widetilde{B}}(x) = \max\{\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(x)\};$$

- вероятностная t-конорма:

$$\mu_{\widetilde{A}\text{ или }\widetilde{B}}(x) = \mu_{\widetilde{A}}(x) + \mu_{\widetilde{B}}(x) - \mu_{\widetilde{A}}(x) \cdot \mu_{\widetilde{B}}(x);$$

- t-конорма Лукасевича:

$$\mu_{\widetilde{A}\text{ или }\widetilde{B}}(x) = \min\{1, \mu_{\widetilde{A}}(x) + \mu_{\widetilde{B}}(x)\}.$$

Связка «Если. . . , то. . . »

Связка «Если. . . , то. . . » моделируется либо с использованием t-нормы, либо с использованием нечёткой импликации:

- Импликация Гёделя:

$$\mu_{\text{Если } \widetilde{A}, \text{ то } \widetilde{B}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu_{\widetilde{A}}(x) \leqslant \mu_{\widetilde{B}}(x); \\ \mu_{\widetilde{B}}(x), & \text{если } \mu_{\widetilde{A}}(x) > \mu_{\widetilde{B}}(x). \end{cases}$$

- Импликация Клини—Динса:

$$\mu_{\text{Если } \widetilde{A}, \text{ то } \widetilde{B}}(x) = \max\{1 - \mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(x)\}$$

- Импликация Лукасевича:

$$\mu_{\text{Если } \widetilde{A}, \text{ то } \widetilde{B}}(x) = \min\{1, 1 - \mu_{\widetilde{A}}(x) + \mu_{\widetilde{B}}(x)\}$$

Нечёткие отношения

Пусть X, Y — некоторые чёткие множества. Под нечётким бинарным отношением $R_{X \times Y}$ понимают нечёткое подмножество декартова произведения $X \times Y$ с функцией принадлежности $\mu_R(x, y)$:

$$R_{X \times Y} \in \mathrm{Fuzzy}(X \times Y), \quad \mu_{R_{X \times Y}} : X \times Y \to [0, 1].$$

Если задан набор чётких множеств $X_1, \ldots, X_n$, то на нём можно задать n-арное нечёткое отношение $R_{X_1 \times \ldots \times X_n}$ с функцией принадлежности $\mu_{R_{X_1 \times \ldots \times X_n}}(x_1, \ldots, x_n)$:

$$R_{X_1 \times \ldots \times X_n} \in \mathrm{Fuzzy}(X_1 \times \ldots \times X_n), \quad \mu_{R_{X_1 \times \ldots \times X_n}} : X_1 \times \ldots \times X_n \to [0, 1].$$

Композиция нечётких отношений

Максиминной композицией нечётких бинарных отношений $R_1 \in \mathrm{Fuzzy}(X \times Y)$ и $R_2 \in \mathrm{Fuzzy}(Y \times Z)$ называется следующее нечёткое бинарное отношение $R \in \mathrm{Fuzzy}(X \times Z)$:

$$R = R_1 \circ R_2,$$
$$\mu_R(x, z) = \sup_{y \in Y} \min\{\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(y, z)\}.$$

Принцип расширения

Пусть $f\colon X \to Y$ — некоторая чёткая функция, $f^{-1}\colon Y \to X$ — обратная к ней, $\widetilde{A}$ — нечёткое подмножество базового множества X. Тогда значение $f(\widetilde{A}) \in \mathrm{Fuzzy}(Y)$, согласно принципу расширения, определяется следующим образом:

$$\mu_{f(\widetilde{A})}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu_{\widetilde{A}}(x), & \text{если } f^{-1}(y) \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если } f^{-1}(y) = \varnothing. \end{cases}$$

Пусть задана n-арная функция $f\colon X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$ и n нечётких множеств $\widetilde{A}_1, \ldots, \widetilde{A}_n$, определённых на базовых множествах $X_1, \ldots, X_n$ соответственно. Тогда $f(\widetilde{A}_1, \ldots, \widetilde{A}_n) \in \mathrm{Fuzzy}(Y)$ задаётся следующим образом:

$$\mu_{f(\widetilde{A}_1,\ldots,\widetilde{A}_n)}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1,\ldots,x_n) \in f^{-1}(y)} \left(\min\limits_{i=1,\ldots,n} (\mu_{\widetilde{A}_i}(x_i)) \right), & \text{если } f^{-1}(y) \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если } f^{-1}(y) = \varnothing. \end{cases}$$

Композиционное правило вывода

Пусть $f: X \to Y$ — некоторая чёткая функция. Известно, что $x = a$. Тогда имеем:

- $y = f(x)$ — функция, т. е. отображение, описывающее связь X с Y,
- $x = a$ — посылка,
- $b = f(a)$ — следствие.

Т. е. $b = f(a)$ является решением системы уравнений

$$\begin{cases} y = f(x); \\ x = a. \end{cases}$$

В нечётком случае имеем систему $\begin{cases} R_{X \times Y} = f; \\ R_X = \widetilde{A}. \end{cases}$

Решением этой системы согласно композиционному правилу вывода будет $\widetilde{B} = R_Y = \widetilde{A} \circ R_{X \times Y}$,
т. е. $\mu_{\widetilde{B}}(y) = \sup\limits_{x \in X} \min\{\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{R_{X \times Y}}(x, y)\}$.

Обобщённое правило modus ponens

Вспомним modus ponens из классической логики:

$$\frac{A,\ A \to B}{B}.$$

Здесь A и $A \to B$ — посылки, B — следствие.

Пусть $\widetilde{A},\ \widetilde{A}' \in \mathrm{Fuzzy}(X)$, $\widetilde{B},\ \widetilde{B}' \in \mathrm{Fuzzy}(Y)$, $R \in \mathrm{Fuzzy}(X \times Y)$, $R = \widetilde{A} \to \widetilde{B}$.
Обобщённое правило modus ponens будет выглядеть так:

$$\begin{array}{ll} \widetilde{A}' & \text{— первая посылка (нечёткий вход),} \\ \widetilde{A} \to \widetilde{B} & \text{— вторая посылка (правило),} \\ \hline \widetilde{B}' & \text{— заключение.} \end{array}$$

Т. о. $\mu_{\widetilde{B}'}(y) = \sup\limits_{x \in X} \min\{\mu_{\widetilde{A}'}(x),\ \mu_{\widetilde{A}}(x) \to \mu_{\widetilde{B}}(y)\}$.

Чёткое входное значение

Пусть $\widetilde{A}'$ — чёткое одноточечное значение:

$$\mu_{\widetilde{A}'}(x) = \delta(x, x') = \begin{cases} 1, & \text{если } x = x', \\ 0, & \text{если } x \neq x'. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mu_{\widetilde{B}'}(y) &= \sup_{x \in X} \min\{\mu_{\widetilde{A}'}(x), \mu_{\widetilde{A}}(x) \to \mu_{\widetilde{B}}(y)\} = \\ &= \sup_{x \in X} \begin{cases} \min\{1, \mu_{\widetilde{A}}(x) \to \mu_{\widetilde{B}}(y)\}, & \text{если } x = x', \\ \min\{0, \mu_{\widetilde{A}}(x) \to \mu_{\widetilde{B}}(y)\}, & \text{если } x \neq x'. \end{cases} \end{aligned}$$

Т. о. $\mu_{\widetilde{B}'}(y) = \mu_{\widetilde{A}}(x') \to \mu_{\widetilde{B}}(y)$.
Данный случай соответствует нечёткой продукционной системе с одним чётким входом, одним нечётким выходом и одним нечётким правилом.

Продукционная система со многими входами

Пусть у нас n чётких входных значений $x_1', \ldots, x_n'$, поступающих на нечёткие входы $x_1', \ldots, x_n'$, представляющие собой лингвистические переменные, термы которых определены на базовых множествах $X_1, \ldots, X_n$ соответственно,
а также K правил вида $(k = 1, \ldots, K)$:

$$H_k\colon \quad \text{Если } \langle x_1 \text{ есть } \widetilde{A}_{1\,k}\rangle \text{ и } \ldots \text{ и } \langle x_n \text{ есть } \widetilde{A}_{n\,k}\rangle, \text{ то } \langle y \text{ есть } \widetilde{B}_k\rangle.$$

Если в качестве импликации используется t-норма Заде,
то получаем метод вывода Мамдани:

$$\mu_{\widetilde{B}'}(y) = \max_{k=1,\ldots,K}(\mu_{\widetilde{B}_k'}(y)) =$$
$$= \max_{k=1,\ldots,K}\Big(\min\{\mu_{\widetilde{A}_{1\,k}}(x_1'), \ldots, \mu_{\widetilde{A}_{n\,k}}(x_n'), \mu_{\widetilde{B}_k}(y)\}\Big),$$

где $\mu_{\widetilde{B}_k'}(y)$ — результат вывода по k-му правилу.

Дефаззификация

В общем случае, будучи дизъюнкцией нечётких множеств, результат $\widetilde{B}'$ может быть очень неточным, и в своей работе Заде не объяснил, как использовать такое множество на практике, а именно, как извлечь точное значение y'.
В оригинальной статье Мамдани есть такая фраза: «должно выбираться то действие, которое имеет наибольшую степень принадлежности».

Дефаззификация методами максимумов

В методе дефаззификации «Первый из максимумов» в качестве результата выдаётся элемент с наименьшим значением из имеющих максимальную степень принадлежности, что можно выразить формулой:

$$y' = \mathrm{FOM}(\widetilde{B}') = \min\left\{ y \;\middle|\; y \in Y,\ \mu_{\widetilde{B}'}(y) = \sup_{t \in Y} \mu_{\widetilde{B}'}(t) \right\}.$$

Аналогично, в методе дефаззификации «Последний из максимумов» выдаётся элемент с наибольшим значением из имеющих максимальную степень принадлежности:

$$y' = \mathrm{LOM}(\widetilde{B}') = \max\left\{ y \;\middle|\; y \in Y,\ \mu_{\widetilde{B}'}(y) = \sup_{t \in Y} \mu_{\widetilde{B}'}(t) \right\}.$$

Дефаззификация методом середины максимумов

В случае «плато» Мамдани рекомендует использовать его середину, т. е.

$$y' = \frac{\mathrm{FOM}(\widetilde{B}') + \mathrm{LOM}(\widetilde{B}')}{2}.$$

Это так называемый метод середины максимумов.

Дефаззификация методом центра тяжести

Для получения чёткого выходного значения y' также можно использовать метод центра тяжести:

$$y' = \frac{\int\limits_{y \in Y} y \cdot \mu_{\widetilde{B}'}(y)\, dy}{\int\limits_{y \in Y} \mu_{\widetilde{B}'}(y)\, dy}.$$

Общий результат по K правилам

Если $\mu_{\widetilde{B}'}(y) = \max\limits_{k=1,\ldots,K}\left(\mu_{\widetilde{B}'_k}(y)\right)$, то нахождение максимального значения можно расписать следующим образом:

$$\max_{k=1,\ldots,K}\left(\mu_{\widetilde{B}'_k}(y)\right) = \sum_{k=1}^{K}\mu_{\widetilde{B}'_k}(y) - \sum_{\substack{i,j=\overline{1,K}\\ i<j}} \min\{\mu_{\widetilde{B}'_i}(y),\, \mu_{\widetilde{B}'_j}(y)\}.$$

Заметим, что $\sum\limits_{\substack{i,j=\overline{1,K}\\ i<j}} \min\{\mu_{\widetilde{B}'_i}(y),\, \mu_{\widetilde{B}'_j}(y)\} = 0$, если $\widetilde{B}'_k$ попарно не пересекаются. Если данным членом пренебречь, то получаем выражение

$$\mu_{\widetilde{B}'}(y) = \sum_{k=1}^{K}\mu_{\widetilde{B}'_k}(y).$$

Метод дефаззификации «Центр сумм»

Подставив

$$\mu_{\widetilde{B}'}(y) = \sum_{k=1}^{K} \mu_{\widetilde{B}'_k}(y)$$

в

$$y' = \frac{\int\limits_{y\in Y} y \cdot \mu_{\widetilde{B}'}(y)\, dy}{\int\limits_{y\in Y} \mu_{\widetilde{B}'}(y)\, dy},$$

получим следующую формулу, соответствующую методу центра сумм:

$$y' = \frac{\int\limits_{y\in Y} y \cdot \sum\limits_{k=1}^{K} \mu_{\widetilde{B}'_k}(y)\, dy}{\int\limits_{y\in Y} \sum\limits_{k=1}^{K} \mu_{\widetilde{B}'_k}(y)\, dy} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{K} \int\limits_{y\in Y} y \cdot \mu_{\widetilde{B}'_k}(y)\, dy}{\sum\limits_{k=1}^{K} \int\limits_{y\in Y} \mu_{\widetilde{B}'_k}(y)\, dy}.$$

Реализация метода центра сумм

Метод центра сумм обладает рядом преимуществ перед методом центра тяжести, его можно эффективно программно реализовать.

Если обозначить

$$M_k = \int\limits_{y \in Y} y \cdot \mu_{\widetilde{B}'_k}(y)\,dy,$$

$$S_k = \int\limits_{y \in Y} \mu_{\widetilde{B}'_k}(y)\,dy,$$

то можно записать, что

$$y' = \frac{\sum_{k=1}^{K} M_k}{\sum_{k=1}^{K} S_k}.$$

Дело в том, что M_k и S_k для конкретных функций принадлежности можно выразить аналитически и избавиться от численного вычисления интегралов, значительно сэкономив машинное время.

Метод дефаззификации по среднему центру

Рассмотрим случай, когда $\widetilde{B}_k$ являются одноточечными множествами, т. е.

$$\mu_{\widetilde{B}_k}(x) = \delta(y_k, y'_k), \quad k = \overline{1, K}.$$

Тогда чёткое выходное значение y' можно получить по следующей формуле, известной как метод дефаззификации по среднему центру, которая легко получается из метода центра сумм:

$$y' = \frac{\sum\limits_{k=1}^{K} y'_k \cdot \mu_{\widetilde{B}'_k}(y'_k)}{\sum\limits_{k=1}^{K} \mu_{\widetilde{B}'_k}(y'_k)}.$$

Построение базы правил

Одной из проблем автоматизированного построения нечётких продукционных систем является получение базы правил. Задачу можно поставить следующим образом:

Входные данные: таблица обучающих данных, представляющая собой N строк чисел $(x'_{1\,j}, \ldots, x'_{n\,j}, y'_j)$, $j = 1, \ldots, N$.

Выходные данные: множество правил вида «Если $\langle x_1$ есть $\widetilde{A}_{1\,k}\rangle$ и …и $\langle x_n$ есть $\widetilde{A}_{n\,k}\rangle$, то $\langle y$ есть $\widetilde{B}_k\rangle$», $k = 1, \ldots, K$, $K \leqslant N$.

Алгоритм Вана—Менделя

Наиболее простой алгоритм решения данной задачи был предложен Ваном и Менделем в 1992 г.

Алгоритм можно сформулировать следующим образом:

1. Сначала следует взять пустую базу правил.
2. По входным и выходным значениям очередной строки таблицы с обучающими данными находим термы соответствующих лингвистических переменных, у которых наибольшая степень принадлежности на этих значениях.
3. Из множества выбранных термов входных лингвистических переменных формируем конъюнкцию, представляющую антецедент формируемого правила.
4. Выбранный терм выходной переменной используем для создания консеквента этого правила.

Алгоритм Вана—Менделя (окончание)

5. Если в базе правил есть правило с таким же антецедентом, то:
   - Если степень принадлежности консеквента нового правила больше, чем степень принадлежности консеквента старого правила на момент помещения в базу правил, то старое правило удаляем, а новое добавляем в базу.
   - Иначе новое правило удаляем.
6. Переходим к следующей строке таблицы с обучающими данными.