Математическая логика

Метод резолюций в логике предикатов

Куценко Дмитрий Александрович

14 июля 2011 г.

Приводятся сведения, отсутствующие в [4], касающиеся реализации метода резолюций в логике предикатов. Введены необходимые определения, рассмотрены такие понятия, как подстановки, их композиции, нахождение множества несогласованности для множества выражений, приведён алгоритм унификации множества выражений. Далее подробно рассматривается нахождение резольвент и сам метод резолюций. Для иллюстрации изложенного приведено множество примеров.

Материал основан на работах [1], [6], [8].

Содержание

1. Метод резолюций в логике предикатов

1.1. Основные определения

Введём рекурсивное определение *терма* логики предикатов:

1) любая предметная переменная x является термом;

2) любая предметная константа a является термом;

3) если f — n-местный функциональный символ, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $f(t_1, \ldots, t_n)$ является термом;

4) других термов не существует.

Фундаментальным будем называть терм, в котором нет переменных.

Пример 1.1. Следующие записи являются термами:

$$f\bigl(b, x, g(x, y)\bigr), \quad f(a, a, b), \quad b, \quad x, \quad g\Bigl(b, f\bigl(x, y, g(x, y)\bigr)\Bigr),$$

где f — трёхместный, g — двухместный функциональные символы, x, y — предметные переменные, a, b — предметные константы. Термы $f(a, a, b)$ и b являются фундаментальными.

Далее будем использовать следующие определения. Если P — n-местный предикатный символ и $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $P(t_1, \ldots, t_n)$ является *атомом. Литерой* будем называть атом или отрицание атома. Дизъюнкция литер образует *дизъюнкт. Множество литер* для удобства также будем рассматривать как дизъюнкт.

Пример 1.2. Дизъюнкт $P(x) \vee P(a) \vee R\bigl(f(x), y\bigr) \vee \overline{Q(y)}$ можно представить в виде множества литер $\bigl\{P(x),\ P(a),\ R\bigl(f(x), y\bigr),\ \overline{Q(y)}\bigr\}$.

Дизъюнкт, содержащий n литер, называется *n-литерным дизъюнктом. Однолитерный дизъюнкт* — это дизъюнкт, состоящий из одной литеры. Дизъюнкт, не содержащий литер, назовём *пустым дизъюнктом* (обозначается «$\square$»). Будем рассматривать *множество дизъюнктов* как конъюнкцию соответствующих дизъюнктов.

Пример 1.3. Множеству дизъюнктов

$$\bigl\{\overline{P\bigl(x, f(x)\bigr)},\ P(x, y) \vee \overline{R\bigl(x, g(y)\bigr)},\ Q(x) \vee P(x, a)\bigr\}$$

соответствует формула

$$\overline{P\bigl(x, f(x)\bigr)} \mathbin{\&} \Bigl(P(x, y) \vee \overline{R\bigl(x, g(y)\bigr)}\Bigr) \mathbin{\&} \bigl(Q(x) \vee P(x, a)\bigr).$$

Под *выражением* будем понимать терм, множество термов, множество атомов, литеру, дизъюнкт, множество дизъюнктов. *Фундаментальным выражением* будем называть такое выражение, в котором нет никаких переменных.

1.2. Подстановки

Подстановка — это конечное (возможно, пустое) множество $\{t_1/v_1, \ldots, t_n/v_n\}$, где каждая v_i — предметная переменная, каждый t_i — терм, запись «t_i/v_i» называется *подстановочной компонентой* и означает, что переменная v_i заменяется термом t_i, причём t_i отличается от v_i, а среди $v_1, \ldots, v_n$ нет одинаковых переменных. В этом случае v_i называют *переменной компоненты* t_i/v_i, а t_i — *термом* t_i/v_i. Подстановки будем обозначать строчными греческими буквами $(\alpha, \ldots, \omega)$. Подстановку, не содержащую элементов, будем называть *пустой* и обозначать буквой «ε». У каждой непустой подстановки $\theta = \{t_1/v_1, \ldots, t_n/v_n\}$ имеется *множество термов* $\{t_1, \ldots, t_n\}$ и *множество переменных* $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Подстановка называется *фундаментальной,* если все термы из её множества термов являются фундаментальными.

Пример 1.4. Следующие множества являются подстановками:

$$\theta = \{f(z)/x,\ y/z\}, \quad \sigma = \{a/x,\ g(y)/y,\ f\big(g(b)\big)/z\}, \quad \varepsilon = \{\}.$$

Пусть даны подстановка $\theta = \{t_1/v_1, \ldots, t_n/v_n\}$ и выражение $\mathfrak{E}$. *Конкретизацией* $\mathfrak{E}$ *посредством* θ называется операция, состоящая в замене одновременно всех вхождений переменных $v_1, \ldots, v_n$ на термы $t_1, \ldots, t_n$ соответственно. Получившееся выражение $\mathfrak{E}^\theta$ называется θ-*примером* $\mathfrak{E}$.

Пример 1.5. Рассмотрим подстановку $\theta = \{a/x,\ \ f(b)/y,\ \ c/z\}$ и выражение $\mathfrak{E} = P(x, y, z)$. В результате конкретизации выражения $\mathfrak{E}$ посредством подстановки θ получим θ-пример этого выражения, имеющий вид

$$\mathfrak{E}^\theta = P\big(a, f(b), c\big).$$

$\mathfrak{E}^\theta$ будет называться *фундаментальным примером* $\mathfrak{E}$, если θ — фундаментальная подстановка.

1.3. Композиция подстановок

Пусть $\theta = \{t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n\}$ и $\lambda = \{u_1/y_1, \ldots, u_1/y_m\}$ — две подстановки. *Композицией* θ *и* λ называют подстановку $\theta \circ \lambda$, которая получается из множества

$$\{t_1^\lambda/x_1, \ldots, t_n^\lambda/x_n,\ u_1/y_1, \ldots, u_m/y_m\}$$

вычёркиванием всех подстановочных компонент t_j^λ/x_j, для которых $t_j^\lambda = x_j$, а также всех подстановочных компонент u_i/y_i, таких, что $y_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Пример 1.6. Пусть даны подстановки

$$\begin{aligned} \theta &= \{t_1/x_1,\ t_2/x_2\} = \{f(y)/x,\ z/y\}, \\ \lambda &= \{u_1/y_1,\ u_2/y_2,\ u_3/y_3\} = \{a/x,\ b/y,\ y/z\}. \end{aligned}$$

Тогда их композиция образуется из следующего множества подстановочных компонент:

$$\{t_1^\lambda/x_1,\ \cancel{t_2^\lambda/x_2},\ \cancel{u_1/y_1},\ \cancel{u_2/y_2},\ u_3/y_3\} = \{f(b)/x,\ \cancel{y/y},\ \cancel{a/x},\ \cancel{b/y},\ y/z\}.$$

Мы вычеркнули подстановочную компоненту $t_2^\lambda/x_2 = y/y$, так как терм этой компоненты равен её переменной ($t_2^\lambda = x_2$, т. е. $y = y$), затем вычеркнули подстановочные компоненты $u_1/y_1 = a/x$ и $u_2/y_2 = b/y$, так как переменные y_1 и y_2 содержатся среди множества переменных $\{x_1, x_2\} = \{x, y\}$ подстановки θ. В итоге получаем

$$\theta \circ \lambda = \{f(b)/x,\ y/z\}.$$

Легко убедиться, что $\varepsilon \circ \theta = \theta \circ \varepsilon = \theta$ для любой подстановки θ. Кроме того, композиция подстановок *ассоциативна,* т. е. $(\theta\circ\lambda)\circ\mu = \theta\circ(\lambda\circ\mu)$ для любых подстановок θ, λ и μ, поэтому можно опускать скобки при записи кратных композиций подстановок. Также отметим, что для любых подстановок θ и σ справедливо следующее: если для каждого выражения $\mathfrak{E}$ имеет место равенство $\mathfrak{E}^\theta = \mathfrak{E}^\sigma$, то $\theta = \sigma$.

Сущность композиции операций подстановки состоит в том, что если $\mathfrak{E}$ — некоторое выражение, а $\sigma = \theta \circ \lambda$, то $\mathfrak{E}^\sigma = \mathfrak{E}^{\theta\circ\lambda} = (\mathfrak{E}^\theta)^\lambda$, т. е. $\mathfrak{E}^\sigma$ — это λ-пример $\mathfrak{E}^\theta$.

1.4. Множество несогласованности

Если $\mathscr{E}$ — множество выражений, то *множеством несогласованности* множества $\mathscr{E}$ называется множество всех тех подвыражений элементов множества $\mathscr{E}$, которые начинаются с того места, где не все выражения из $\mathscr{E}$ имеют один и тот же символ.

Пример 1.7. Рассмотрим множество выражений

$$\mathscr{E} = \bigl\{P\bigl(x, h(x,y), y\bigr),\ P\bigl(x, k(y), y\bigr),\ P(x,a,b)\bigr\}.$$

Множество несогласованности для $\mathscr{E}$ есть $\{h(x,y),\ k(y),\ a\}$.

Ясно, что если множество выражений $\mathscr{E}$ содержит более одного элемента, то множество несогласованности множества $\mathscr{E}$ также содержит более одного элемента.

1.5. Унификация

Пусть $\mathscr{E} = \{\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots, \mathfrak{E}_n\}$ — множество выражений, а θ — подстановка. Подстановка θ является *унификатором* $\mathscr{E}$ (иначе говоря, θ *унифицирует* $\mathscr{E}$) тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{E}_1^\theta = \mathfrak{E}_2^\theta = \ldots = \mathfrak{E}_n^\theta.$$

В этом случае будем считать, что множество $\mathscr{E}^\theta$ состоит из одного (уникального) элемента (можно записать, что $\mathscr{E}^\theta = \{\mathfrak{E}_1^\theta\}$).

Множество выражений *унифицируемо,* если для него существует унификатор.

Пример 1.8. Множество выражений $\bigl\{P(a,y), P\bigl(x, f(b)\bigr)\bigr\}$ унифицируемо, так как существует подстановка $\theta = \{a/x,\ f(b)/y\}$, являющаяся его унификатором.

Унификатор σ для множества выражений будет *наиболее общим унификатором (НОУ)* тогда и только тогда, когда для каждого унификатора θ для этого множества существует такая подстановка λ, что $\theta = \sigma \circ \lambda$.

Для поиска НОУ для конечного унифицируемого множества $\mathscr{W}$ непустых выражений разработан *алгоритм унификации,* который можно записать следующим образом:

Шаг 1. Положить $k = 0$, $\mathscr{W}_0 = \mathscr{W}$, $\sigma_0 = \varepsilon$ и перейти к шагу 2.

Шаг 2. Если $\mathscr{W}_k$ состоит из одного элемента (т. е. $|\mathscr{W}_k| = 1$), то выдать «σ_k — НОУ для $\mathscr{W}$» и окончить работу; в противном случае найти множество несогласованности $\mathscr{D}_k$ для $\mathscr{W}_k$ и перейти к шагу 3.

Шаг 3. Если в $\mathscr{D}_k$ существуют такие два элемента v_k и t_k, что v_k — переменная, не входящая в терм t_k, то обозначить $\lambda_k = \{t_k/v_k\}$ и перейти к шагу 4; в противном случае выдать «$\mathscr{W}$ неунифицируемо» и окончить работу.

Шаг 4. Положить $\sigma_{k+1} = \sigma_k \circ \lambda_k$, $\mathscr{W}_{k+1} = \mathscr{W}_k^{\lambda_k}$ и перейти к шагу 5. (Заметим, что $\mathscr{W}_{k+1} = \mathscr{W}^{\sigma_{k+1}}$).

Шаг 5. Увеличить значение k на 1 и возвратиться к шагу 2.

Если σ — НОУ для множества выражений $\mathscr{E}$, то говорят, что $\mathscr{E}$ является *общеунифицируемым множеством.*

Пример 1.9. Найдём НОУ для множества выражений

$$\mathscr{W} = \Big\{P\Big(a, x, f\big(g(y)\big)\Big),\ P\big(z, f(z), f(u)\big)\Big\}.$$

1. Положим $\sigma_0 = \varepsilon$ и $\mathscr{W}_0 = \mathscr{W}$.
2. Так как $|\mathscr{W}_0| \neq 1$, то σ_0 не является НОУ для $\mathscr{W}$. Поэтому находим множество несогласованности $\mathscr{D}_0 = \{a, z\}$.
3. В $\mathscr{D}_0$ имеется переменная $v_0 = z$, которая не встречается в $t_0 = a$. Пусть $\lambda_0 = \{t_0/v_0\} = \{a/z\}$.
4. Пусть $\sigma_1 = \sigma_0 \circ \lambda_0 = \varepsilon \circ \{a/z\} = \{a/z\}$,
$$\mathscr{W}_1 = \mathscr{W}_0^{\lambda_0} = \Big\{P\Big(a, x, f\big(g(y)\big)\Big),\ P\big(z, f(z), f(u)\big)\Big\}^{\{a/z\}} = \\ = \Big\{P\Big(a, x, f\big(g(y)\big)\Big),\ P\big(a, f(a), f(u)\big)\Big\}.$$
5. Так как $|\mathscr{W}_1| \neq 1$, то σ_1 не является НОУ для $\mathscr{W}$. Поэтому находим множество несогласованности $\mathscr{D}_1 = \{x, f(a)\}$.
6. В $\mathscr{D}_1$ имеется переменная $v_1 = x$, которая не встречается в $t_1 = f(a)$. Пусть $\lambda_1 = \{t_1/v_1\} = \{f(a)/x\}$.
7. Пусть $\sigma_2 = \sigma_1 \circ \lambda_1 = \{a/z\} \circ \{f(a)/x\} = \{a/z,\ f(a)/x\}$,
$$\mathscr{W}_2 = \mathscr{W}_1^{\lambda_1} = \Big\{P\Big(a, x, f\big(g(y)\big)\Big),\ P\big(a, f(a), f(u)\big)\Big\}^{\{f(a)/x\}} = \\ = \Big\{P\Big(a, f(a), f\big(g(y)\big)\Big),\ P\big(a, f(a), f(u)\big)\Big\}.$$
8. Так как $|\mathscr{W}_2| \neq 1$, то σ_2 не является НОУ для $\mathscr{W}$. Поэтому находим множество несогласованности $\mathscr{D}_2 = \{g(y), u\}$.
9. В $\mathscr{D}_2$ имеется переменная $v_2 = u$, которая не встречается в $t_2 = g(y)$. Пусть $\lambda_2 = \{t_2/v_2\} = \{g(y)/u\}$.
10. Пусть $\sigma_3 = \sigma_2 \circ \lambda_2 = \{a/z,\ f(a)/x\} \circ \{g(y)/u\} = \{a/z,\ f(a)/x,\ g(y)/u\}$,
$$\mathscr{W}_3 = \mathscr{W}_2^{\lambda_2} = \Big\{P\Big(a, f(a), f\big(g(y)\big)\Big),\ P\big(a, f(a), f(u)\big)\Big\}^{\{g(y)/u\}} = \\ = \Big\{P\Big(a, f(a), f\big(g(y)\big)\Big),\ P\Big(a, f(a), f\big(g(y)\big)\Big)\Big\} = \\ = \Big\{P\Big(a, f(a), f\big(g(y)\big)\Big)\Big\}.$$
11. Так как $|\mathscr{W}_3| = 1$, то $\sigma_3 = \{a/z,\ f(a)/x,\ g(y)/u\}$ — НОУ для $\mathscr{W}$.

Итак, подстановка $\{a/z,\ f(a)/x,\ g(y)/u\}$ является НОУ для множества выражений $\mathscr{W} = \Big\{P\Big(a, x, f\big(g(y)\big)\Big),\ P\big(z, f(z), f(u)\big)\Big\}$.

Пример 1.10. Определим, унифицируемо ли множество выражений

$$\mathscr{W} = \big\{Q\big(f(a), g(x)\big),\ Q(y, y)\big\}.$$

1. Положим $\sigma_0 = \varepsilon$ и $\mathscr{W}_0 = \mathscr{W}$.
2. Так как $|\mathscr{W}_0| \neq 1$, то σ_0 не является НОУ для $\mathscr{W}$. Поэтому находим множество несогласованности $\mathscr{D}_0 = \{f(a),\ y\}$.
3. В $\mathscr{D}_0$ имеется переменная $v_0 = y$, которая не встречается в $t_0 = f(a)$. Пусть $\lambda_0 = \{t_0/v_0\} = \{f(a)/y\}$.
4. Пусть $\sigma_1 = \sigma_0 \circ \lambda_0 = \varepsilon \circ \{f(a)/y\} = \{f(a)/y\}$,
$$\mathscr{W}_1 = \mathscr{W}_0^{\lambda_0} = \bigl\{Q\bigl(f(a), g(x)\bigr),\ Q\bigl(y, y\bigr)\bigr\}^{\{f(a)/y\}} = \\ = \bigl\{Q\bigl(f(a), g(x)\bigr),\ Q\bigl(f(a), f(a)\bigr)\bigr\}.$$
5. Так как $|\mathscr{W}_1| \neq 1$, то σ_1 не является НОУ для $\mathscr{W}$. Поэтому находим множество несогласованности $\mathscr{D}_1 = \{g(x),\ f(a)\}$.
6. В $\mathscr{D}_1$ нет элемента, который был бы переменной. Следовательно, $\mathscr{W}$ неунифицируемо.

Итак, множество выражений $\mathscr{W} = \bigl\{Q\bigl(f(a), g(x)\bigr),\ Q(y, y)\bigr\}$ неунифицируемо.

Отметим, что алгоритм унификации всегда завершает работу для любого конечного непустого множества выражений, так как иначе породилась бы бесконечная последовательность $\mathscr{W}^{\sigma_0}, \mathscr{W}^{\sigma_1}, \mathscr{W}^{\sigma_2}, \ldots$ конечных непустых множеств, обладающая тем свойством, что каждое последующее множество содержит на одну переменную меньше, чем предыдущее (а именно, $\mathscr{W}^{\sigma_k}$ содержит v_k, а $\mathscr{W}^{\sigma_{k+1}}$ её уже не содержит). Но это невозможно, так как $\mathscr{W}$ содержит только конечное число различных переменных.

1.6. Склейки и резольвенты

Если две или более литер (с одинаковым знаком) дизъюнкта $\mathfrak{C}$ имеют НОУ σ, то $\mathfrak{C}^\sigma$ называется *склейкой* $\mathfrak{C}$. Если склейка $\mathfrak{C}^\sigma$ — однолитерный дизъюнкт, то она называется *единичной склейкой.*

Пример 1.11. Пусть $\mathfrak{C} = P(x) \vee P\bigl(f(y)\bigr) \vee \overline{Q(x)}$. Тогда литеры $P(x)$ и $P\bigl(f(y)\bigr)$ имеют НОУ $\sigma = \{f(y)/x\}$. Следовательно, $\mathfrak{C}^\sigma = P\bigl(f(y)\bigr) \vee \overline{Q\bigl(f(y)\bigr)}$ есть склейка $\mathfrak{C}$.

Пусть $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$ — два дизъюнкта[1] (называемые *дизъюнктами-посылками*), которые не имеют никаких общих переменных. Пусть $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ — две литеры в $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$ соответственно (т. е. $\mathfrak{L}_1 \in \mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{L}_2 \in \mathfrak{C}_2$). Если $\mathfrak{L}_1$ и $\overline{\mathfrak{L}_2}$ имеют НОУ σ, то дизъюнкт

$$\bigl(\mathfrak{C}_1^\sigma \setminus \{\mathfrak{L}_1^\sigma\}\bigr) \cup \bigl(\mathfrak{C}_2^\sigma \setminus \{\mathfrak{L}_2^\sigma\}\bigr)$$

называется *(бинарной) резольвентой* $\mathfrak{C}_1$ *и* $\mathfrak{C}_2$. Литеры $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ называются *отрезаемыми литерами.*

Пример 1.12. Найдём бинарную резольвенту дизъюнктов

$$\mathfrak{C}_1 = P(x) \vee Q(x), \quad \mathfrak{C}_2 = \overline{P(a)} \vee R(x).$$

Так как переменная x входит и в $\mathfrak{C}_1$, и в $\mathfrak{C}_2$, то мы заменим переменную x на y в $\mathfrak{C}_2$, и тогда $\mathfrak{C}_2 = \overline{P(a)} \vee R(y)$. Выбираем литеры $\mathfrak{L}_1 = P(x)$ и $\mathfrak{L}_2 = \overline{P(a)}$. Так как $\overline{\mathfrak{L}_2} = P(a)$, то $\mathfrak{L}_1$ и $\overline{\mathfrak{L}_2}$ имеют НОУ $\sigma = \{a/x\}$. Следовательно,

$$\bigl(\mathfrak{C}_1^\sigma \setminus \{\mathfrak{L}_1^\sigma\}\bigr) \cup \bigl(\mathfrak{C}_2^\sigma \setminus \{\mathfrak{L}_2^\sigma\}\bigr) = \bigl(\{P(a), Q(a)\} \setminus \{P(a)\}\bigr) \cup \bigl(\{\overline{P(a)}, R(y)\} \setminus \{\overline{P(a)}\}\bigr) = \\ = \{Q(a)\} \cup \{R(y)\} = \{Q(a), R(y)\} = Q(a) \vee R(y).$$

[1] Дизъюнкты $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_1$ далее рассматриваются как множества литер, поэтому над ними можно выполнять такие операции, как вычитание «$\setminus$» и объединение «$\cup$» множеств (см. пример 1.2 на с. 2).

Таким образом, $Q(a) \vee R(y)$ — бинарная резольвента дизъюнктов $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$, а $P(x)$ и $\overline{P(a)}$ — отрезаемые литеры.

Резольвентой дизъюнктов-посылок $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$ может быть одна из следующих резольвент:

1) бинарная резольвента дизъюнктов $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$;
2) бинарная резольвента дизъюнкта $\mathfrak{C}_1$ и склейки $\mathfrak{C}_2$;
3) бинарная резольвента дизъюнкта $\mathfrak{C}_2$ и склейки $\mathfrak{C}_1$;
4) бинарная резольвента склейки $\mathfrak{C}_1$ и склейки $\mathfrak{C}_2$.

Пример 1.13. Пусть $\mathfrak{C}_1 = P(x) \vee P\big(f(y)\big) \vee R\big(g(y)\big)$ и $\mathfrak{C}_2 = \overline{P\Big(f\big(g(a)\big)\Big)} \vee Q(b)$. Склейкой $\mathfrak{C}_1$ является $\mathfrak{C}_1' = P\big(f(y)\big) \vee R\big(g(y)\big)$. Бинарной резольвентой $\mathfrak{C}_1'$ и $\mathfrak{C}_2$ является $R\Big(g\big(g(a)\big)\Big) \vee Q(b)$. Следовательно, $R\Big(g\big(g(a)\big)\Big) \vee Q(b)$ есть резольвента $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$.

1.7. Алгоритм метода резолюций

Основной идеей *метода резолюций* является проверка того, содержит ли множество дизъюнктов $\mathscr{K}$ пустой дизъюнкт $\Box$. Если это так, то $\mathscr{K}$ невыполнимо. Если $\mathscr{K}$ не содержит $\Box$, то следующие шаги заключаются в выводе новых дизъюнктов до тех пор, пока не будет получен $\Box$ (что всегда будет иметь место для невыполнимого $\mathscr{K}$). Таким образом, принцип резолюции рассматривается как правило вывода, с помощью которого из $\mathscr{K}$ порождаются новые дизъюнкты.

Сформулируем *алгоритм метода резолюций для логики предикатов.* Исходным данным для него является множество дизъюнктов $\mathscr{K}$, противоречивость которого нужно доказать.

Шаг 1. Если в $\mathscr{K}$ есть пустой дизъюнкт ($\Box \in \mathscr{K}$), то выдать «$\mathscr{K}$ противоречиво» и завершить работу. В противном случае перейти к шагу 2.

Шаг 2. Найти в $\mathscr{K}$ такие дизъюнкты или склейки дизъюнктов $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$, которые содержат унифицируемые литеры $\mathfrak{L}_1$ и $\overline{\mathfrak{L}_2}$ соответственно. Если таких дизъюнктов нет, то выдать «$\mathscr{K}$ непротиворечиво» и завершить работу. В противном случае перейти к шагу 3.

Шаг 3. Вычислить резольвенту $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$, добавить её в $\mathscr{K}$ и возвратиться к шагу 1.

Пример 1.14. Пусть задано множество дизъюнктов

$$\mathscr{K} = \{\overline{S(y)} \vee P(y),\ S(b),\ Q(a,b),\ \overline{P(z)} \vee \overline{Q(a,z)}\}.$$

Докажем его противоречивость с помощью метода резолюций.

1. Так как $\Box \notin \mathscr{K}$, то находим в $\mathscr{K}$ дизъюнкты-посылки $\mathfrak{C}_1 = \overline{S(y)} \vee P(y)$ и $\mathfrak{C}_2 = S(b)$. В этом случае отрезаемыми литерами являются $\mathfrak{L}_1 = \overline{S(y)}$ и $\mathfrak{L}_2 = S(b)$, их НОУ — $\{b/y\}$.
2. Резольвентой $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$ является $P(b)$. Добавляем её в $\mathscr{K}$.
3. Так как $\Box \notin \mathscr{K}$, то находим в $\mathscr{K}$ дизъюнкты-посылки $\mathfrak{C}_1 = P(b)$ и $\mathfrak{C}_2 = \overline{P(z)} \vee \overline{Q(a,z)}$. Отрезаемыми литерами являются $\mathfrak{L}_1 = P(b)$ и $\mathfrak{L}_2 = \overline{P(z)}$, их НОУ — $\{b/z\}$.
4. Резольвентой $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$ является $\overline{Q(a,b)}$. Добавляем её в $\mathscr{K}$.

5. Так как $\square \notin \mathscr{K}$, то находим в $\mathscr{K}$ дизъюнкты-посылки $\mathfrak{C}_1 = Q(a,b)$ и $\mathfrak{C}_2 = \overline{Q(a,b)}$. Отрезаемые литеры — $\mathfrak{L}_1 = Q(a,b)$ и $\mathfrak{L}_2 = \overline{Q(a,b)}$, их НОУ — ε.
6. Резольвента $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$ есть $\square$. Добавляем её в $\mathscr{K}$.
7. Так как $\square \in \mathscr{K}$, то $\mathscr{K}$ противоречиво, что и требовалось доказать.

Вывод пустого дизъюнкта может быть наглядно представлен с помощью *дерева вывода,* вершинами которого являются или исходные дизъюнкты, или резольвенты, а корнем — пустой дизъюнкт.

Пример 1.15. Дерево вывода для примера 1.14 изображено на рис. 1.1. Рядом с резольвентами указан НОУ их дизъюнктов-посылок.

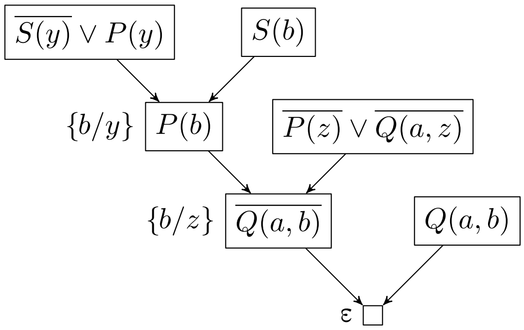

Рис. 1.1. Дерево вывода для примера 1.14

1.8. Стратегии метода резолюций

В множестве дизъюнктов существует, как правило, не одна пара дизъюнктов, к которым можно применить правило резолюций, поэтому при автоматическом доказательстве теорем методом резолюций бóльшая часть вычислений приходится на поиск дизъюнктов-посылок. Неограниченное применение правила резолюций может вызвать порождение большого количества излишних дизъюнктов.

Реализация процедуры выбора дизъюнктов-посылок из множества дизъюнктов называется *стратегией метода резолюций.*

Стратегии можно разделить на два класса:

1) *полные стратегии* — гарантируют нахождение доказательства теоремы, если оно существует (в их основе лежит полный перебор);

2) *неполные стратегии* — могут в некоторых случаях не находить доказательства, но они работают быстрее, чем полные.

Рассмотрим следующие полные стратегии.

1.8.1. Стратегия насыщения уровня

Пусть $\mathscr{K}$ — исходное множество дизъюнктов. Обозначим $\mathscr{K}_0$ само множество дизъюнктов и назовём его *уровнем нулевого порядка. Уровень первого порядка* $\mathscr{K}_1$ — объединение $\mathscr{K}$ с множеством всех резольвент, непосредственно порождённых от дизъюнктов $\mathscr{K}$. Тогда *уровень i-го порядка* $\mathscr{K}_i$ состоит из объединения множества $\mathscr{K}_{i-1}$ и множества резольвент, порождённых из $\mathscr{K}_{i-1}$. Значение i называется *уровнем опровержения*.

Стратегия насыщения уровня предполагает последовательное порождение всех резольвент уровня 1-го порядка, затем уровня 2-го порядка и т. д. до получения пустого дизъюнкта.

Таким образом, данная стратегия является стратегией *поиска в ширину*.

Пример 1.16. Докажем с помощью метода резолюций противоречивость множества дизъюнктов

$$\mathscr{K} = \{X \vee Y,\, \overline{X} \vee \overline{Y},\, X \vee Z,\, \overline{X} \vee Z,\, \overline{Z}\},$$

используя стратегию насыщения уровня.

Уровень нулевого порядка $\mathscr{K}_0$ составляют дизъюнкты

$\mathfrak{D}_1 = X \vee Y$,
$\mathfrak{D}_2 = \overline{X} \vee \overline{Y}$,
$\mathfrak{D}_3 = X \vee Z$,
$\mathfrak{D}_4 = \overline{X} \vee Z$.
$\mathfrak{D}_5 = \overline{Z}$.

Уровень первого порядка $\mathscr{K}_1$ будут составлять дизъюнкты из $\mathscr{K}_0$, а также

$\mathfrak{D}_6 = Y \vee \overline{Y}$ (резольвента $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$),
$\mathfrak{D}_7 = X \vee \overline{X}$ (резольвента $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$),
$\mathfrak{D}_8 = \overline{Y} \vee Z$ (резольвента $\mathfrak{D}_2$ и $\mathfrak{D}_3$),
$\mathfrak{D}_9 = Y \vee Z$ (резольвента $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_4$),
$\mathfrak{D}_{10} = Z$ (резольвента $\mathfrak{D}_3$ и $\mathfrak{D}_4$),
$\mathfrak{D}_{11} = X$ (резольвента $\mathfrak{D}_3$ и $\mathfrak{D}_5$),
$\mathfrak{D}_{12} = \overline{X}$ (резольвента $\mathfrak{D}_4$ и $\mathfrak{D}_5$).

Уровень второго порядка $\mathscr{K}_2$ будут составлять дизъюнкты из $\mathscr{K}_1$, а также

$\mathfrak{D}_{13} = X \vee Y$ (резольвента $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_6$),
$\mathfrak{D}_{14} = \overline{X} \vee \overline{Y}$ (резольвента $\mathfrak{D}_2$ и $\mathfrak{D}_6$),
$\mathfrak{D}_{15} = X \vee Y$ (резольвента $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_7$),
$\mathfrak{D}_{16} = \overline{X} \vee \overline{Y}$ (резольвента $\mathfrak{D}_2$ и $\mathfrak{D}_7$),
$\mathfrak{D}_{17} = X \vee Z$ (резольвента $\mathfrak{D}_3$ и $\mathfrak{D}_7$),
$\mathfrak{D}_{18} = \overline{X} \vee Z$ (резольвента $\mathfrak{D}_4$ и $\mathfrak{D}_7$),
$\mathfrak{D}_{19} = X \vee Z$ (резольвента $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_8$),
$\mathfrak{D}_{20} = \overline{Y} \vee Z$ (резольвента $\mathfrak{D}_6$ и $\mathfrak{D}_8$),
$\mathfrak{D}_{21} = \overline{X} \vee Z$ (резольвента $\mathfrak{D}_2$ и $\mathfrak{D}_9$),
$\mathfrak{D}_{22} = Y \vee Z$ (резольвента $\mathfrak{D}_6$ и $\mathfrak{D}_9$),
$\mathfrak{D}_{23} = Z$ (резольвента $\mathfrak{D}_8$ и $\mathfrak{D}_9$),
$\mathfrak{D}_{24} = \square$ (резольвента $\mathfrak{D}_5$ и $\mathfrak{D}_{10}$).

В итоге получили пустой дизъюнкт. Противоречивость $\mathscr{K}$ доказана (за 19 шагов).

Как видно из примера 1.16, порождено множество лишних дизъюнктов. Так, $\mathfrak{D}_6$ и $\mathfrak{D}_7$ — тождественно истинные дизъюнкты. Удаление или добавление тождественно истинного дизъюнкта не влияет на выполнтмость множества дизъюнктов, поэтому такие дизъюнкты должны быть удалены из вывода. Далее, некоторые дизъюнкты порождаются неоднократно, например, $X \vee Y$, $\overline{X} \vee \overline{Y}$, $Y \vee Z$. Это делает стратегию насыщения уровня неприменимой на практике.

1.8.2. Линейная стратегия

Если резольвента, полученная на i-м шаге вывода ($i > 0$), всегда имеет в качестве одного из своих родительских дизъюнктов (называемого *левым*) дизъюнкт, полученный на $(i-1)$-м шаге вывода, то такая стратегия называется *линейной*. При этом дизъюнкты-кандидаты на участие в резолюции просматриваются в простом линейном порядке. Линейная стратегия является стратегией *поиска в глубину*. Эта стратегия использовалась в примере 1.14. Она также используется в языке логического программирования «Пролог».

1.8.3. Стратегия предпочтения более коротких дизъюнктов

Заметим, что резольвентой двух однолитерных дизъюнктов может быть только пустой дизъюнкт. Верно и обратное утверждение. Значит, для наискорейшего получения пустого дизъюнкта необходимо обрабатывать в первую очередь короткие дизъюнкты.

В *стратегии предпочтения более коротких дизъюнктов* перебор дизъюнктов-посылок выполняется в порядке возрастания их длины. Вначале делается попытка построить резольвенты между однолитерными дизъюнктами. Если это удаётся, то сразу получается пустой дизъюнкт. В противном случае ищутся резольвенты для пар «однолитерный дизъюнкт — двулитерный дизъюнкт», затем «двулитерный дизъюнкт — двулитерный дизъюнкт» и т. д. Перебор пар дизъюнктов в данной стратегии должен выполняться таким образом, чтобы сумма длин родительских дизъюнктов в процессе перебора не убывала.

Пример 1.17. Для решения задачи из примера 1.16 воспользуемся стратегией предпочтения более коротких дизъюнктов.

В начале имеем следующие дизъюнкты:

$$\mathfrak{D}_1 = X \vee Y,$$

$$\mathfrak{D}_2 = \overline{X} \vee \overline{Y},$$

$$\mathfrak{D}_3 = X \vee Z,$$

$$\mathfrak{D}_4 = \overline{X} \vee Z.$$

$$\mathfrak{D}_5 = \overline{Z}.$$

Далее последовательно получаем следующие резольвенты, которые добавляем в $\mathscr{K}$.

$$\mathfrak{D}_6 = X \text{ (резольвента } \mathfrak{D}_5 \text{ и } \mathfrak{D}_3),$$

$$\mathfrak{D}_7 = \overline{X} \text{ (резольвента } \mathfrak{D}_5 \text{ и } \mathfrak{D}_4),$$

$$\mathfrak{D}_8 = \square \text{ (резольвента } \mathfrak{D}_6 \text{ и } \mathfrak{D}_7),$$

В итоге получили пустой дизъюнкт. Противоречивость $\mathscr{K}$ доказана (за 3 шага).

Литература

1. *Вагин, В. Н.* Достоверный и правдоподобный вывод в интеллектуальных системах / В. Н. Вагин, Е. Ю. Головина, А. А. Загорянская, М. В. Фомина ; под ред. В. Н. Вагина, Д. А. Поспелова. — М. : Физматлит, 2004. — 704 с. — ISBN 5-9221-0474-8.

2. *Гринченков, Д. В.* Математическая логика и теория алгоритмов для программистов: учеб. пособие / Д. В. Гринченков, С. И. Потоцкий. — М. : КноРус, 2010. — 208 с. — ISBN 978-5-406-00120-2.

3. *Гуц, А. К.* Математическая логика и теория алгоритмов : учеб. пособие / А. К. Гуц. — Омск : Наследие. Диалог-Сибирь, 2003. — 108 с. — ISBN 5-8239-0126-7.

4. *Куценко, Д. А.* Математическая логика и теория алгоритмов : учеб. пособие / Д. А. Куценко, Д. В. Терехов. — Белгород : Изд-во БГТУ, 2009. — 64 с.

5. *Новиков, Ф. А.* Дискретная математика для программистов : учебник для вузов / Ф. А. Новиков. — 3-е изд. — СПб. : Питер, 2008. — 384 с. — ISBN 978-5-91180-759-7.

6. *Робинсон, Дж.* Машинно-ориентированная логика, основанная на принципе резолюции / Дж. Робинсон // Кибернетический сборник. Н. С. — М. : Мир, 1970. — Вып. 7. — С. 194—218.

7. *Ручкин, В. Н.* Универсальный искусственный интеллект и экспертные системы / В. Н. Ручкин, В. А. Фулин. — СПб. : БХВ-Петербург, 2009. — 240 с. — ISBN 978-5-9775-0460-7.

8. *Чень, Ч.* Математическая логика и автоматическое доказательство теорем / Ч. Чень, Р. Ли ; под ред. С. Ю. Маслова. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. — 360 с.