Лабораторная работа № 1
Метод Гаусса

Цель работы: изучить прямой и обратный ход метода Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений; изучить схему единственного деления с выбором максимального по модулю элемента; изучить применение метода Гаусса для вычисления определителя матрицы и обратной матрицы; получить практические навыки программной реализации метода Гаусса и решения поставленных задач методом Гаусса с помощью ЭВМ.

Задания к работе

1. Выполнить вручную действия над матрицами A и B из пункта 3 задания соответствующего варианта.
2. Выполнить следующие действия, не используя метод Гаусса:
   – решить вручную систему линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными из пункта 1 задания соответствующего варианта;
   – найти вручную определитель матрицы A из пункта 2 задания соответствующего варианта;
   – найти вручную матрицу A^{-1} обратную матрице A из пункта 2 задания соответствующего варианта.
3. Решить вручную методом Гаусса систему линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными из пункта 1 задания соответствующего варианта.
4. Найти вручную с помощью метода Гаусса определитель матрицы A из пункта 2 задания соответствующего варианта.
5. Найти вручную с помощью метода Гаусса матрицу A^{-1} обратную матрице A из пункта 2 задания соответствующего варианта.

Выполнить проверку полученной матрицы на соответствие условию:

$$A \cdot A^{-1} = E, \text{ где } E \text{ — единичная матрица.}$$

6. Создать модуль для работы с матрицами произвольного порядка, содержащий подпрограммы для умножения двух матриц, умножения числа на матрицу, сложения матриц, вычитания матриц, транспонирования матрицы, умножения матрицы на вектор, ввода и вывода матрицы.
7. Создать модуль, содержащий подпрограммы, реализующие прямой и обратный ход метода Гаусса для схемы единственного деления с выбором максимального по модулю элемента.
8. Создать программу для решения следующих задач:

– нахождение методом Гаусса решения системы линейных алгебраических уравнений с одной и той же матрицей коэффициентов при неизвестных и произвольным числом столбцах свободных членов.

Замечание. В прямом ходе метода Гаусса выполняется приведение расширенной матрицы (коэффициенты при неизвестных и свободные члены) к треугольному виду, и одновременно изменяются все столбцы свободных членов. На этапе обратного хода выполняется вычисление решения системы для каждого столбца свободных членов, составляется матрица решений.

– вычисление определителя заданной матрицы методом Гаусса;
– нахождение для заданной матрицы обратной матрицы методом Гаусса.

9. Решить все задания соответствующего варианта с помощью составленной программы. Выполнить проверку правильности найденного решения системы линейных уравнений и матрицы обратной к заданной матрице с помощью составленной программы, сравнить значения, полученные при решении заданий с помощью метода Гаусса и с использованием произвольного метода решения.

Содержание отчета

1. Титульный лист.
2. Цель работы. Вариант задания.
3. Текст задания к работе.
4. Выполнение задания соответствующего варианта вручную полностью. Все действия выполняемые при решении задачи вручную расписывать подробно с указанием всех промежуточных операций. Указание только окончательного ответа не допускается.
5. Текст программы, включающий необходимые комментарии и спецификации подпрограмм.
6. Результаты работы программы.

Основные теоретические сведения

Будем решать систему из n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = p_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = p_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}\,x_n = p_n \end{cases}$$

где x_i — искомые неизвестные; a_i — известные коэффициенты; p_i — свободные члены; $i = 1, 2, \ldots, n$.

Прямой ход схемы единственного деления.

Цель прямого хода метода Гаусса преобразование исходной системы уравнений к треугольной.

Составляем расширенную матрицу коэффициентов A, соответствующую системе (1.1):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & p_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & p_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & p_n \end{pmatrix}$$

Рассмотрим произвольный k-ый шаг метода Гаусса:

– выбирается ведущий элемент k-ого шага $a_{kk} \neq 0$.
– вычисляем числа, называемые множителями k-ого шага, используя

значения коэффициентов, полученные на предыдущем (k-1) шаге, по формуле:

$$\mu_{ik} = -\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}},\ i = k+1,...,n$$

− изменяем значения элементов по формулам:

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} + \mu_{ik} a_{kj}^{(k-1)},$$

$$p_i^{(k)} = p_i^{(k-1)} + \mu_{ik} p_k^{(k-1)}, \quad i = k+1,...,n;\ j = k,...,n$$

Результат прямого хода:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & ... & a_{1n}^{(0)} & p_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & ... & a_{2n}^{(1)} & p_2^{(1)} \\ .... & & & & \\ 0 & 0 & ... & a_{nn}^{(n-1)} & p_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Обратный ход схемы единственного деления.

Цель обратного хода — вычисление неизвестных, последовательно начиная с n-го, по формуле:

$$x_k = \frac{p_k^{(k-1)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k-1)} x_j}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad k = n, n-1, ..., 1$$

Выше описанная схема может быть модифицирована в схему с выбором максимального по модулю элемента в столбце.

Вычисление определителя матрицы.

Определитель матрицы A в результате применения к ней прямого хода метода Гаусса по схеме с выбором максимального по модулю элемента, вычисляется по формуле:

$$\det A = (-1)^k a_{11}^{(0)} a_{22}^{(1)} ... a_{nn}^{(n-1)}$$

где k — число реальных перестановок строк матрицы A.

Вычисление обратной матрицы.

Согласно определению обратной матрицы, верно равенство:

$$A \cdot A^{-1} = E \tag{1.1}$$

где E — единичная матрица.

Вычисление обратной матрицы методом Гаусса сводится к решению системы уравнений, которая в матричной форме имеет вид (1.1).

Варианты заданий

№	Задание		
	1	**2**	**3**
1	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$	$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$(A + B) \cdot (B - 2A)$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 5 & -6 & 1 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 10 \\ 0 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

№	Задание		
	1	**2**	**3**
2	$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2 \\ x_1+5x_2+x_3=6 \\ x_1+x_2-2x_3=-1 \end{cases}$	$A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	**B + 2A · (*A* - *B*)** $A=\begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & -6 & 6 \end{pmatrix}$
3	$\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3=2 \\ x_1+3x_2-x_3=2 \\ x_1+x_2+4x_3=5 \end{cases}$	$A=\begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 3 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	**2*B* + (*B* + *A* · *B*)** $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$
4	$\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3=4 \\ x_1+3x_2-x_3=2 \\ x_1+x_2+4x_3=5 \end{cases}$	$A=\begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{A + A^2 - B \cdot A}$ $A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -8 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 9 & 6 \\ 3 & 8 & -7 \end{pmatrix}$
5	$\begin{cases} 3x_1-3x_2+2x_3=4 \\ 2x_1+4x_2+x_3=9 \\ x_1+2x_2+3x_3=8 \end{cases}$	$A=\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 8 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	**(*A* - *B*) · (*B* + *A*)** $A=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$
6	$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=5 \\ 4x_1-x_2+2x_3=9 \\ 2x_1+2x_2+x_3=9 \end{cases}$	$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \\ 5 & -5 & -3 \end{pmatrix}$	***B* · (2*B* + *A*) – *A*** $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$
7	$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=2 \\ 4x_1+x_2+2x_3=8 \\ 2x_1+2x_2+x_3=6 \end{cases}$	$A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 8 & -4 & 0 \end{pmatrix}$	***0,5A* + *B* · *A* + 2*B*** $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 1 & -1 & 5 \\ 7 & 8 & -4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 7 & -7 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
8	$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=2 \\ 4x_1+x_2+2x_3=8 \\ 2x_1+2x_2+x_3=6 \end{cases}$	$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 8 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$	***B* - *A* · *B* + 2*A*** $A=\begin{pmatrix} 0 & 8 & -2 \\ 7 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 9 & -3 & 4 \end{pmatrix}$
9	$\begin{cases} 3x_1+2x_2-2x_3=2 \\ 4x_1+4x_2-3x_3=4 \\ 5x_1+2x_2+x_3=7 \end{cases}$	$A=\begin{pmatrix} -2 & 7 & 9 \\ 6 & 4 & 4 \\ 9 & 6 & 0 \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{A^2 \cdot B + \mathrm{B} - A}$ $A=\begin{pmatrix} 11 & 4 & 2 \\ 4 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & 6 & -12 \\ 8 & 9 & 1 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$
10	$\begin{cases} -3x_1+2x_2-x_3=3 \\ x_1-2x_2-3x_3=1 \\ 5x_1-2x_2+x_3=9 \end{cases}$	$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{B^2 + A^2 - 2BA}$ $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -3 & 7 & 0 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 6 & -8 & 8 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
11	$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=7 \\ x_1-2x_2+3x_3=7 \\ 3x_1-3x_2+x_3=6 \end{cases}$	$A=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -6 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{B + A + B^2 \cdot A}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \\ 3 & -8 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 8 & 5 & -3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
12	$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=5 \\ x_1-2x_2+3x_3=4 \\ 3x_1+3x_2-2x_3=6 \end{cases}$	$A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{A^2 - B^2 \cdot A}$ $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 7 & 7 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & 11 \end{pmatrix}$
13	$\begin{cases} 3x_1-8x_2+4x_3=7 \\ 2x_1-5x_2+x_3=3 \\ 6x_1-9x_2+2x_3=16 \end{cases}$	$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ -4 & -7 & 1 \\ 4 & 7 & -2 \end{pmatrix}$	**2*B* - 3*A* · *B*** $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

№	Задание		
	1	2	3
14	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 10 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 6 \end{cases}$	$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 6 & 5 & 7 \\ -6 & 0 & -4 \end{pmatrix}$	$B + A^2 \cdot (A - B)$ $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & 9 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 7 \\ 4 & 6 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$
15	$\begin{cases} 6x_1 - 8x_2 - 5x_3 = 13 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -1 \\ 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$	$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & -5 & 7 \end{pmatrix}$	$(2B^2 + A^2) + A$ $A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 3 \\ 6 & -17 & 0 \\ 8 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
16	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_3 = 5 \end{cases}$	$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 \\ 9 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$(B - A)^2 + A - B$ $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 8 & -2 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 9 \\ 7 & -3 & 4 \end{pmatrix}$
17	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 9 \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 = 3 \end{cases}$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & -5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$3B^2 \cdot (2A - B)$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -7 \\ 6 & 1 & 4 \\ 8 & 6 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 9 & 6 & 0 \\ 5 & -1 & 8 \end{pmatrix}$
18	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 5 \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$	$A = \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -8 & 11 & 0 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	$B + 3(A - B)^2$ $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 4 \\ -2 & 9 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 6 & 9 & 3 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$
19	$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 8 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 8 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 9 \end{cases}$	$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$	$B + A \cdot B - 3B^2$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 3 \\ 2 & -5 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
20	$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 9 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 14 \end{cases}$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 8 & 6 & 3 \\ 2 & -6 & 1 \end{pmatrix}$	$B^2 + \cdot (A - B)^2$ $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \\ -5 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
21	$\begin{cases} 2x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 7 \\ 2x_1 - 7x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$	$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$	$B \cdot (A^2 + 2B)$ $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$
22	$\begin{cases} 5x_1 - 9x_2 - x_3 = -9 \\ 4x_1 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 6 & -3 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$B \cdot (A - B) - A + B$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
23	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 13 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 9 \end{cases}$	$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$(B^3 \cdot A^2) + A$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 6 & 5 & 2 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 7 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$
24	$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 13 \\ 6x_1 + 5x_2 - 9x_3 = 13 \end{cases}$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$	$A \cdot (2A + 2B)^2$ $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 8 \\ 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$
25	$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 13 \\ x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 11 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 14 \end{cases}$	$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -8 \end{pmatrix}$	$(B\,A)^2 - B + A$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 1 & 9 & 6 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 \\ 5 & 7 & 9 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

Контрольные вопросы:

1. Определение матрицы. Правила выполнения действий над матрицами.
2. Форма записи системы линейных алгебраических уравнений.
3. Этапы схемы единственного деления метода Гаусса.
4. Описание первого шага прямого хода метода Гаусса. Условие его выполнимости.
5. Описание обратного хода метода Гаусса.
6. Недостатки схемы единственного деления метода Гаусса.
7. Вычисление определителя матрицы по методу Гаусса.
8. Решение методом Гаусса систем линейных уравнений с общей матрицей коэффициентов при неизвестных и произвольным числом столбцах свободных членов.
9. Понятие обратной матрицы. Связь между матрицей и обратной к ней матрицей. Вычисление обратной матрицы методом Гаусса.