Математическая логика и теория алгоритмов Лекция 3. Релейно-контактные схемы, двойственность, логическое следствие

Куценко Дмитрий Александрович

Белгородский государственный технологический университет имени В. Г. Шухова

Институт информационных технологий и управляющих систем

Кафедра программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем

12 февраля 2013 г.

Алгоритм получения СДНФ/СКНФ с использованием эквивалентных преобразований

Алгоритм получения СДНФ/СКНФ с использованием эквивалентных преобразований

1. Для формулы $\mathfrak{A}$ получить любую ДНФ (КНФ).

Алгоритм получения СДНФ/СКНФ с использованием эквивалентных преобразований

1. Для формулы $\mathfrak{A}$ получить любую ДНФ (КНФ).
2. Если в ДНФ (КНФ) есть конъюнкт (дизъюнкт) $\mathfrak{B}$, не содержащий переменную X_i, то необходимо её добавить, используя правила расщепления: $\mathfrak{B} \equiv (\mathfrak{B} \mathbin{\&} X_i) \vee (\mathfrak{B} \mathbin{\&} \overline{X_i})$ — для ДНФ, $\mathfrak{B} \equiv (\mathfrak{B} \vee X_i) \mathbin{\&} (\mathfrak{B} \vee \overline{X_i})$ — для КНФ.

Алгоритм получения СДНФ/СКНФ с использованием эквивалентных преобразований

1. Для формулы $\mathfrak{A}$ получить любую ДНФ (КНФ).
2. Если в ДНФ (КНФ) есть конъюнкт (дизъюнкт) $\mathfrak{B}$, не содержащий переменную X_i, то необходимо её добавить, используя правила расщепления: $\mathfrak{B} \equiv (\mathfrak{B} \mathbin{\&} X_i) \vee (\mathfrak{B} \mathbin{\&} \overline{X_i})$ — для ДНФ, $\mathfrak{B} \equiv (\mathfrak{B} \vee X_i) \mathbin{\&} (\mathfrak{B} \vee \overline{X_i})$ — для КНФ.
3. Если в ДНФ (КНФ) встречаются равные конъюнкты (дизъюнкты), то лишние нужно отбросить.

Алгоритм получения СДНФ/СКНФ с использованием эквивалентных преобразований

1. Для формулы $\mathfrak{A}$ получить любую ДНФ (КНФ).
2. Если в ДНФ (КНФ) есть конъюнкт (дизъюнкт) $\mathfrak{B}$, не содержащий переменную X_i, то необходимо её добавить, используя правила расщепления: $\mathfrak{B} \equiv (\mathfrak{B} \,\&\, X_i) \vee (\mathfrak{B} \,\&\, \overline{X_i})$ — для ДНФ, $\mathfrak{B} \equiv (\mathfrak{B} \vee X_i) \,\&\, (\mathfrak{B} \vee \overline{X_i})$ — для КНФ.
3. Если в ДНФ (КНФ) встречаются равные конъюнкты (дизъюнкты), то лишние нужно отбросить.
4. Если в ДНФ (КНФ) в некотором конъюнкте (дизъюнкте) литерал X_i встречается несколько раз, то лишние нужно отбросить.

   Если в ДНФ (КНФ) в некотором конъюнкте (дизъюнкте) литерал $\overline{X_i}$ встречается несколько раз, то лишние нужно отбросить.

Алгоритм получения СДНФ/СКНФ с использованием эквивалентных преобразований

1. Для формулы $\mathfrak{A}$ получить любую ДНФ (КНФ).
2. Если в ДНФ (КНФ) есть конъюнкт (дизъюнкт) $\mathfrak{B}$, не содержащий переменную X_i, то необходимо её добавить, используя правила расщепления: $\mathfrak{B} \equiv (\mathfrak{B} \,\&\, X_i) \vee (\mathfrak{B} \,\&\, \overline{X_i})$ — для ДНФ, $\mathfrak{B} \equiv (\mathfrak{B} \vee X_i) \,\&\, (\mathfrak{B} \vee \overline{X_i})$ — для КНФ.
3. Если в ДНФ (КНФ) встречаются равные конъюнкты (дизъюнкты), то лишние нужно отбросить.
4. Если в ДНФ (КНФ) в некотором конъюнкте (дизъюнкте) литерал X_i встречается несколько раз, то лишние нужно отбросить.

   Если в ДНФ (КНФ) в некотором конъюнкте (дизъюнкте) литерал $\overline{X_i}$ встречается несколько раз, то лишние нужно отбросить.
5. Если в ДНФ некоторый конъюнкт содержит конъюнкцию $X_i \,\&\, \overline{X_i}$, то данный конъюнкт нужно отбросить.

   Если в КНФ некоторый дизъюнкт содержит дизъюнкцию $X_i \vee \overline{X_i}$, то данный дизъюнкт нужно отбросить.

Пример получения СКНФ

Получить СКНФ формулы $(A \vee C) \,\&\, (\overline{B} \vee C)$.

Пример получения СКНФ

Получить СКНФ формулы $(A \vee C)\,\&\,(\overline{B} \vee C)$.

Решение

$$(A \vee C)\,\&\,(\overline{B} \vee C) \equiv (A \vee C \vee B)\,\&\,(A \vee C \vee \overline{B})\,\&\,(\overline{B} \vee C) \equiv$$
$$\equiv (A \vee C \vee B)\,\&\,(A \vee C \vee \overline{B})\,\&\,(\overline{B} \vee C \vee A)\,\&\,(\overline{B} \vee C \vee \overline{A}) \equiv$$
$$\equiv (A \vee B \vee C)\,\&\,(A \vee \overline{B} \vee C)\,\&\,(\overline{A} \vee \overline{B} \vee C).$$

Ответ: $(A \vee B \vee C)\,\&\,(A \vee \overline{B} \vee C)\,\&\,(\overline{A} \vee \overline{B} \vee C)$.

Алгоритм получения СДНФ с использованием эквивалентных преобразований

1. Для формулы $\mathfrak{A}$ получить любую ДНФ.
2. Если в ДНФ есть конъюнкт $\mathfrak{C}$, не содержащий переменную X_i, то необходимо её добавить, используя правила расщепления: $\mathfrak{C} \equiv (\mathfrak{C} \,\&\, X_i) \vee (\mathfrak{C} \,\&\, \overline{X_i})$.
3. Если в ДНФ встречаются равные конъюнкты, то повторяющиеся нужно отбросить.
4. Если в ДНФ в некотором конъюнкте литерал X_i встречается несколько раз, то повторяющиеся нужно отбросить.

   Если в ДНФ в некотором конъюнкте литерал $\overline{X_i}$ встречается несколько раз, то повторяющиеся нужно отбросить.
5. Если в ДНФ некоторый конъюнкт содержит конъюнкцию $X_i \,\&\, \overline{X_i}$, то данный конъюнкт нужно отбросить.

Алгоритм получения СКНФ с использованием эквивалентных преобразований

1. Для формулы $\mathfrak{A}$ получить любую КНФ.
2. Если в КНФ есть дизъюнкт $\mathfrak{D}$, не содержащий переменную X_i, то необходимо её добавить, используя правила расщепления: $\mathfrak{D} \equiv (\mathfrak{D} \vee X_i) \,\&\, (\mathfrak{D} \vee \overline{X_i})$.
3. Если в КНФ встречаются равные дизъюнкты, то повторяющиеся нужно отбросить.
4. Если в КНФ в некотором дизъюнкте литерал X_i встречается несколько раз, то повторяющиеся нужно отбросить.

   Если в КНФ в некотором дизъюнкте литерал $\overline{X_i}$ встречается несколько раз, то повторяющиеся нужно отбросить.
5. Если в КНФ некоторый дизъюнкт содержит дизъюнкцию $X_i \vee \overline{X_i}$, то данный дизъюнкт нужно отбросить.

Двойственные функции

Функция алгебры логики f^* называется двойственной для функции f, если таблицу истинности для f^* можно получить из таблицы для f, заменив в ней всюду 1 на 0 и 0 на 1,

Двойственные функции

Функция алгебры логики f^* называется двойственной для функции f, если таблицу истинности для f^* можно получить из таблицы для f, заменив в ней всюду 1 на 0 и 0 на 1, т. е. функция $f^*(X_1, \ldots, X_n)$, двойственная к функции $f(X_1, \ldots, X_n)$, удовлетворяет равенству

$$f^*(X_1, \ldots, X_n) = \overline{f(\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_n})}.$$

Двойственные функции

Функция алгебры логики f^* называется двойственной для функции f, если таблицу истинности для f^* можно получить из таблицы для f, заменив в ней всюду 1 на 0 и 0 на 1, т. е. функция $f^*(X_1, \ldots, X_n)$, двойственная к функции $f(X_1, \ldots, X_n)$, удовлетворяет равенству

$$f^*(X_1, \ldots, X_n) = \overline{f(\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_n})}.$$

Например, конъюнкция и дизъюнкция двойственны друг другу:

A	B	$A \,\&\, B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$A \,\&\, B \equiv \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$ $\quad$ $A \vee B \equiv \overline{\overline{A} \,\&\, \overline{B}}$

Самодвойственные функции

Функция, совпадающая со своей двойственной, называется самодвойственной.

Самодвойственные функции

Функция, совпадающая со своей двойственной, называется самодвойственной.

Самодвойственная функция на противоположных наборах $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ и $\overline{\sigma_1}, \ldots, \overline{\sigma_n}$ принимает противоположные значения.

Самодвойственные функции

Функция, совпадающая со своей двойственной, называется **самодвойственной**.

Самодвойственная функция на противоположных наборах $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ и $\overline{\sigma_1}, \ldots, \overline{\sigma_n}$ принимает противоположные значения.

Примером самодвойственной функции является отрицание:

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Двойственные формулы

Если в формуле $\mathfrak{A}$ заменить знаки всех логических функций на знаки двойственных функций, то получится двойственная формула $\mathfrak{A}^*$, реализующая функцию, двойственную той, которая реализуется формулой $\mathfrak{A}$.

Двойственные формулы

Если в формуле $\mathfrak{A}$ заменить знаки всех логических функций на знаки двойственных функций, то получится двойственная формула $\mathfrak{A}^*$, реализующая функцию, двойственную той, которая реализуется формулой $\mathfrak{A}$.

Если некоторая формула алгебры логики содержит только операции $\&, \vee, \overline{}$ (не содержит операций $\rightarrow$ и $\leftrightarrow$), то получить двойственную к ней можно заменой $\&, \vee, 1, 0$ соответственно на $\vee, \&, 0, 1$.

Двойственные формулы

Если в формуле $\mathfrak{A}$ заменить знаки всех логических функций на знаки двойственных функций, то получится двойственная формула $\mathfrak{A}^*$, реализующая функцию, двойственную той, которая реализуется формулой $\mathfrak{A}$.

Если некоторая формула алгебры логики содержит только операции $\&, \vee, \overline{}$ (не содержит операций $\to$ и $\leftrightarrow$), то получить двойственную к ней можно заменой $\&, \vee, 1, 0$ соответственно на $\vee, \&, 0, 1$.

Пример

$$\mathfrak{A} = (\overline{X} \,\&\, \overline{Z}) \vee ((\overline{X} \vee Z) \,\&\, Y),$$
$$\mathfrak{A}^* = (\overline{X} \vee \overline{Z}) \,\&\, ((\overline{X} \,\&\, Z) \vee Y).$$

Принцип двойственности

Принцип двойственности:

Если верно $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, то верно и $\mathfrak{A}^* \equiv \mathfrak{B}^*$.

Принцип двойственности

Принцип двойственности:

Если верно $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, то верно и $\mathfrak{A}^* \equiv \mathfrak{B}^*$.

Равенство $\mathfrak{A}^* \equiv \mathfrak{B}^*$ называется двойственным равенству $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Принцип двойственности

Принцип двойственности:

Если верно $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, то верно и $\mathfrak{A}^* \equiv \mathfrak{B}^*$.

Равенство $\mathfrak{A}^* \equiv \mathfrak{B}^*$ называется двойственным равенству $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Другими словами, если две формулы равносильны, то двойственные им формулы тоже равносильны.

Принцип двойственности

Принцип двойственности:

Если верно $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, то верно и $\mathfrak{A}^* \equiv \mathfrak{B}^*$.

Равенство $\mathfrak{A}^* \equiv \mathfrak{B}^*$ называется двойственным равенству $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

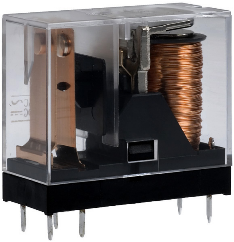
Другими словами, если две формулы равносильны, то двойственные им формулы тоже равносильны.

Каждая КНФ имеет двойственную ей ДНФ.

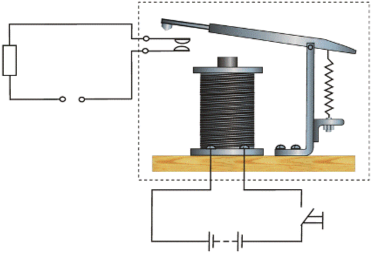
Примеры двойственных равенств

$$
\begin{aligned}
A \,\&\, B \equiv B \,\&\, A, &\quad A \vee B \equiv B \vee A;\\
(A \,\&\, B) \,\&\, C \equiv A \,\&\, (B \,\&\, C), &\quad (A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C);\\
A \,\&\, A \equiv A, &\quad A \vee A \equiv A;\\
A \,\&\, (B \vee C) \equiv (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C), &\quad A \vee (B \,\&\, C) \equiv (A \vee B) \,\&\, (A \vee C);\\
A \,\&\, 0 \equiv 0, &\quad A \vee 1 \equiv 1;\\
A \vee 0 \equiv A, &\quad A \,\&\, 1 \equiv A;\\
\overline{A \,\&\, B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}, &\quad \overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \,\&\, \overline{B};\\
A \,\&\, \overline{A} \equiv 0, &\quad A \vee \overline{A} \equiv 1;\\
A \,\&\, (A \vee B) \equiv A, &\quad A \vee (A \,\&\, B) \equiv A;\\
(A \vee \overline{B}) \,\&\, (A \vee B) \equiv A, &\quad (A \,\&\, \overline{B}) \vee (A \,\&\, B) \equiv A.
\end{aligned}
$$

Электрическое реле



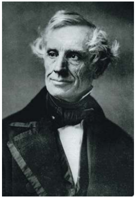
Внешний вид



Внутреннее устройство

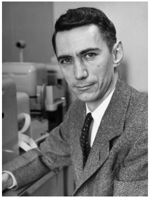
Изобретатели релейно-контактных схем

Джозеф Ге́нри (1797—1878) — американский физик.



Сэмюэл Финли Бриз Мо́рзе (1791—1872) — американский изобретатель и художник.

Пауль Э́ренфест (1880—1933) — Австрийский и нидерландский физик-теоретик.



Клод Элвуд Ше́ннон (1916—2001) — американский математик и инженер.

Релейно-контактные схемы в математической логике

Каждой булевой функции можно поставить в соответствие релейно-контактную схему (РКС).

Релейно-контактные схемы в математической логике

Каждой булевой функции можно поставить в соответствие релейно-контактную схему (РКС).

РКС строится в предположении, что переменная X — это замыкающий контакт в электрической схеме, который замкнут при подаче управляющего тока X, т. е. $X = 1$, и разомкнут при его отсутствии — $X = 0$.

Релейно-контактные схемы в математической логике

Каждой булевой функции можно поставить в соответствие релейно-контактную схему (РКС).

РКС строится в предположении, что переменная X — это замыкающий контакт в электрической схеме, который замкнут при подаче управляющего тока X, т. е. $X = 1$, и разомкнут при его отсутствии — $X = 0$.

Формуле $\overline{X}$ отвечает размыкающий контакт, который замкнут, т. е. $\overline{X} = 1$, пока нет тока $(X = 0)$, и размыкается — $\overline{X} = 0$, когда ток есть $(X = 1)$.

Схема работы замыкающего и размыкающего контактов

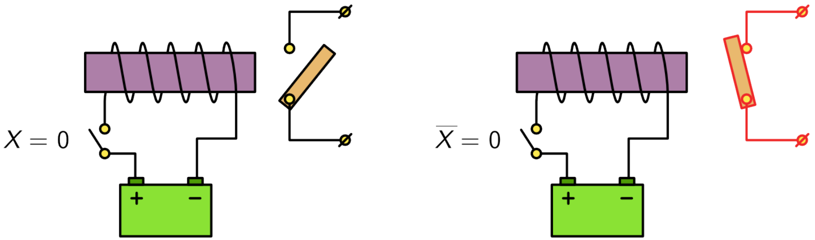
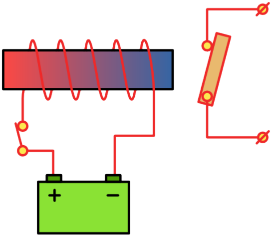
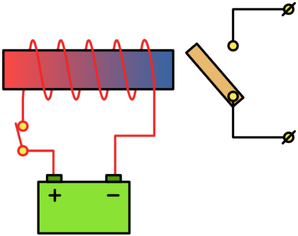


Схема работы замыкающего и размыкающего контактов

$X = 1$

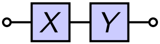


$\overline{X} = 1$



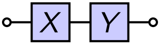
Простейшие РКС

Конъюнкции $X \mathbin{\&} Y$ соответствует последовательное соединение контактов:

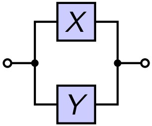


Простейшие РКС

Конъюнкции $X \mathbin{\&} Y$ соответствует последовательное соединение контактов:



Дизъюнкции $X \vee Y$ — параллельное соединение:



Пример РКС для сложной функции

Из простейших легко собираются произвольные РКС.

Пример РКС для сложной функции

Из простейших легко собираются произвольные РКС.

Построим РКС для булевой функции

$$f(U, W, X, Y, Z) = \big(X \mathbin{\&} W \mathbin{\&} (\overline{Z} \vee Y)\big) \vee (U \mathbin{\&} \overline{X})$$

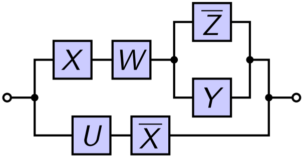
Пример РКС для сложной функции

Из простейших легко собираются произвольные РКС.

Построим РКС для булевой функции

$$f(U, W, X, Y, Z) = \big(X \,\&\, W \,\&\, (\overline{Z} \vee Y)\big) \vee (U \,\&\, \overline{X})$$

Решение:



Рассуждения

Рассуждение — это последовательность высказываний, которые связаны между собой по смыслу таким образом, что из одних высказываний вытекают другие высказывания, содержащие новую информацию.

Рассуждения

Рассуждение — это последовательность высказываний, которые связаны между собой по смыслу таким образом, что из одних высказываний вытекают другие высказывания, содержащие новую информацию.

Высказывания, содержащие исходную информацию, называются посылками.

Рассуждения

Рассуждение — это последовательность высказываний, которые связаны между собой по смыслу таким образом, что из одних высказываний вытекают другие высказывания, содержащие новую информацию.

Высказывания, содержащие исходную информацию, называются посылками.

Высказывания, которые выводятся из исходных посредством некоторых процедур, называются заключениями.

Рассуждения

Рассуждение — это последовательность высказываний, которые связаны между собой по смыслу таким образом, что из одних высказываний вытекают другие высказывания, содержащие новую информацию.

Высказывания, содержащие исходную информацию, называются посылками.

Высказывания, которые выводятся из исходных посредством некоторых процедур, называются заключениями.

Пример

Этот человек по типу — врач, но выправка у него военная. Значит, военный врач.

(А. К. Дойл, «Этюд в багровых тонах»)

Истинность полученных заключений

Новая информация, выраженная в заключениях, может быть как истинной, так и ложной.

Истинность полученных заключений

Новая информация, выраженная в заключениях, может быть как истинной, так и ложной.

Цель любого рассуждения — получить истинные заключения.

Истинность полученных заключений

Новая информация, выраженная в заключениях, может быть как истинной, так и ложной.

Цель любого рассуждения — получить истинные заключения.

Условия истинности заключений:

Истинность полученных заключений

Новая информация, выраженная в заключениях, может быть как истинной, так и ложной.

Цель любого рассуждения — получить истинные заключения.

Условия истинности заключений:

1. Информация, содержащаяся в посылках, должна быть истинной.

Истинность полученных заключений

Новая информация, выраженная в заключениях, может быть как истинной, так и ложной.

Цель любого рассуждения — получить истинные заключения.

Условия истинности заключений:

1. Информация, содержащаяся в посылках, должна быть истинной.
2. Процедуры, посредством которых выводятся заключения, должны быть правильными.

Истинность полученных заключений

Новая информация, выраженная в заключениях, может быть как истинной, так и ложной.

Цель любого рассуждения — получить истинные заключения.

Условия истинности заключений:

1. Информация, содержащаяся в посылках, должна быть истинной.
2. Процедуры, посредством которых выводятся заключения, должны быть правильными.

Сами же процедуры логического вывода считаются правильными, если выполняются следующие условия:

Истинность полученных заключений

Новая информация, выраженная в заключениях, может быть как истинной, так и ложной.

Цель любого рассуждения — получить истинные заключения.

Условия истинности заключений:

1. Информация, содержащаяся в посылках, должна быть истинной.
2. Процедуры, посредством которых выводятся заключения, должны быть правильными.

Сами же процедуры логического вывода считаются правильными, если выполняются следующие условия:

1. Посылки и заключения должны быть связаны между собой по смыслу.

Истинность полученных заключений

Новая информация, выраженная в заключениях, может быть как истинной, так и ложной.

Цель любого рассуждения — получить истинные заключения.

Условия истинности заключений:

1. Информация, содержащаяся в посылках, должна быть истинной.
2. Процедуры, посредством которых выводятся заключения, должны быть правильными.

Сами же процедуры логического вывода считаются правильными, если выполняются следующие условия:

1. Посылки и заключения должны быть связаны между собой по смыслу.
2. Между заключением и посылками должно иметь место отношение логического следствия.

Логическое следствие

Пусть даны формулы $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}$.

Логическое следствие

Пусть даны формулы $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}$.

Формула $\mathfrak{B}$ является логическим следствием формул $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m$, если, придавая значения переменным $X_1, X_2, \ldots, X_n$, от которых зависят все рассматриваемые формулы, всякий раз, когда истинны одновременно все формулы $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m$, истинна и формула $\mathfrak{B}$.

Логическое следствие

Пусть даны формулы $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}$.

Формула $\mathfrak{B}$ является логическим следствием формул $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m$, если, придавая значения переменным $X_1, X_2, \ldots, X_n$, от которых зависят все рассматриваемые формулы, всякий раз, когда истинны одновременно все формулы $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m$, истинна и формула $\mathfrak{B}$.

Для логического следствия используется запись

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m \vdash \mathfrak{B}.$$

Логическое следствие

Пусть даны формулы $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}$.

Формула $\mathfrak{B}$ является логическим следствием формул $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m$, если, придавая значения переменным $X_1, X_2, \ldots, X_n$, от которых зависят все рассматриваемые формулы, всякий раз, когда истинны одновременно все формулы $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m$, истинна и формула $\mathfrak{B}$.

Для логического следствия используется запись

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m \vdash \mathfrak{B}.$$

Слева от знака «$\vdash$» располагаются посылки, справа — заключения.

Дедукция. Теорема о дедукции

Форму мышления, при которой новая мысль выводятся по правилам логики из некоторых исходных мыслей-посылок, называют дедукцией.

Дедукция. Теорема о дедукции

Форму мышления, при которой новая мысль выводятся по правилам логики из некоторых исходных мыслей-посылок, называют дедукцией.

Теорема о дедукции

$\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда $\vdash (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$.

Дедукция. Теорема о дедукции

Форму мышления, при которой новая мысль выводятся по правилам логики из некоторых исходных мыслей-посылок, называют дедукцией.

Теорема о дедукции

$\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда $\vdash (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$.

Важное следствие теоремы о дедукции, показывающее связь между отношением логического следствия и операцией импликации:

Следствие теоремы о дедукции

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m \vdash \mathfrak{B}$$

тогда и только тогда, когда

$$\vdash (\mathfrak{A}_1 \mathbin{\&} \mathfrak{A}_2 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \mathfrak{A}_m) \to \mathfrak{B}.$$

Пример решения задачи

Проверить правильность рассуждения: *Алексей старше Бориса или Борис старше Виктора. Однако, Борис не старше Виктора. Следовательно, Алексей старше Бориса.*

Пример решения задачи

Проверить правильность рассуждения: *Алексей старше Бориса или Борис старше Виктора. Однако, Борис не старше Виктора. Следовательно, Алексей старше Бориса.*

Решение

Введём следующие обозначения:

Пример решения задачи

Проверить правильность рассуждения: *Алексей старше Бориса или Борис старше Виктора. Однако, Борис не старше Виктора. Следовательно, Алексей старше Бориса.*

Решение

Введём следующие обозначения:

A — «Алексей старше Бориса»;

Пример решения задачи

Проверить правильность рассуждения: *Алексей старше Бориса или Борис старше Виктора. Однако, Борис не старше Виктора. Следовательно, Алексей старше Бориса.*

Решение

Введём следующие обозначения:

A — «Алексей старше Бориса»;

B — «Борис старше Виктора».

Пример решения задачи

Проверить правильность рассуждения: *Алексей старше Бориса или Борис старше Виктора. Однако, Борис не старше Виктора. Следовательно, Алексей старше Бориса.*

Решение

Введём следующие обозначения:

A — «Алексей старше Бориса»;

B — «Борис старше Виктора».

Исходную задачу можем переформулировать следующим образом: *верно ли, что формула A является логическим следствием формул $A \vee B$ и $\overline{B}$?*

Пример решения задачи (продолжение)

Построим таблицу истинности для этих формул:

A	B	$A \vee B$	$\overline{B}$	A
0	0	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	**1**	**1**	**1**
1	1	1	0	1

Пример решения задачи (продолжение)

Построим таблицу истинности для этих формул:

A	B	$A \vee B$	$\overline{B}$	A
0	0	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	**1**	**1**	**1**
1	1	1	0	1

Из выделенной строки таблицы видно, что формула A действительно является логическим следствием формул $A \vee B$ и $\overline{B}$
(следствие истинно, когда истинны одновременно все посылки).

Пример решения задачи (продолжение)

Построим таблицу истинности для этих формул:

A	B	$A \vee B$	$\overline{B}$	A
0	0	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	**1**	**1**	**1**
1	1	1	0	1

Из выделенной строки таблицы видно, что формула A действительно является логическим следствием формул $A \vee B$ и $\overline{B}$
(следствие истинно, когда истинны одновременно все посылки).

Другой способ: доказать с помощью равносильных преобразований, что $(A \vee B)\,\&\,\overline{B} \rightarrow A \equiv 1$.

Бинарные отношения и их свойства

R называют бинарным отношением на множестве $\mathscr{A}$, если $R \subset \mathscr{A} \times \mathscr{A}$.

Бинарные отношения и их свойства

R называют бинарным отношением на множестве $\mathscr{A}$, если $R \subset \mathscr{A} \times \mathscr{A}$.

Вместо записи $(x, y) \in R$ часто используют запись xRy.

Бинарные отношения и их свойства

R называют бинарным отношением на множестве $\mathscr{A}$, если $R \subset \mathscr{A} \times \mathscr{A}$.
Вместо записи $(x, y) \in R$ часто используют запись xRy.

Некоторые из свойств, которыми могут обладать бинарные отношения:

Бинарные отношения и их свойства

R называют бинарным отношением на множестве $\mathscr{A}$, если $R \subset \mathscr{A} \times \mathscr{A}$.
Вместо записи $(x,\ y) \in R$ часто используют запись xRy.

Некоторые из свойств, которыми могут обладать бинарные отношения:

- Рефлексивность: для любых x выполняется xRx;

Бинарные отношения и их свойства

R называют бинарным отношением на множестве $\mathscr{A}$, если $R \subset \mathscr{A} \times \mathscr{A}$.
Вместо записи $(x, \ y) \in R$ часто используют запись xRy.

Некоторые из свойств, которыми могут обладать бинарные отношения:

- Рефлексивность: для любых x выполняется xRx;
- Симметричность: для любых x, y выполняется $xRy \to yRx$;

Бинарные отношения и их свойства

R называют бинарным отношением на множестве $\mathscr{A}$, если $R \subset \mathscr{A} \times \mathscr{A}$.
Вместо записи $(x,\ y) \in R$ часто используют запись xRy.

Некоторые из свойств, которыми могут обладать бинарные отношения:

- Рефлексивность: для любых x выполняется xRx;
- Симметричность: для любых x, y выполняется $xRy \to yRx$;
- Транзитивность: для любых x, y, z выполняется $(xRy \ \&\ yRz) \to xRz$.

Бинарные отношения и их свойства

R называют бинарным отношением на множестве $\mathscr{A}$, если $R \subset \mathscr{A} \times \mathscr{A}$.
Вместо записи $(x,\ y) \in R$ часто используют запись xRy.

Некоторые из свойств, которыми могут обладать бинарные отношения:

- Рефлексивность: для любых x выполняется xRx;
- Симметричность: для любых x, y выполняется $xRy \to yRx$;
- Транзитивность: для любых x, y, z выполняется $(xRy \mathbin{\&} yRz) \to xRz$.

Логическое следствие обладает отношением рефлексивности ($\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{A}$), транзитивности (если $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} \vdash \mathfrak{C}$, то $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{C}$), но не обладает свойством симметричности (в общем случае не верно, что если $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{B} \vdash \mathfrak{A}$).

Силлогизмы

Силлогизм — правило, основанное на отношении порядка, позволяющее из истинных высказываний получать новые истинные высказывания.

Силлогизм является схемой правильного рассуждения.

Силлогизмы

Силлогизм — правило, основанное на отношении порядка, позволяющее из истинных высказываний получать новые истинные высказывания.
Силлогизм является схемой правильного рассуждения.

Обычно силлогизмы записываются в виде дроби:

$$\frac{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n}{\mathfrak{B}}.$$

Силлогизмы

Силлогизм — правило, основанное на отношении порядка, позволяющее из истинных высказываний получать новые истинные высказывания.
Силлогизм является схемой правильного рассуждения.

Обычно силлогизмы записываются в виде дроби:

$$\frac{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n}{\mathfrak{B}}.$$

Формула, расположенная в нижней части силлогизма (под чертой), является логическим следствием формул, расположенных в верхней части силлогизма (над чертой).

Силлогизмы

Силлогизм — правило, основанное на отношении порядка, позволяющее из истинных высказываний получать новые истинные высказывания.
Силлогизм является схемой правильного рассуждения.

Обычно силлогизмы записываются в виде дроби:

$$\frac{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n}{\mathfrak{B}}.$$

Формула, расположенная в нижней части силлогизма (под чертой), является логическим следствием формул, расположенных в верхней части силлогизма (над чертой).

Т. о. $\dfrac{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n}{\mathfrak{B}} \quad \equiv \quad \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n \vdash \mathfrak{B}$.

Неполный список силлогизмов

1. $\frac{A,\ A\to B}{B}$ — modus ponens;
2. $\frac{A\to B,\ \overline{B}}{\overline{A}}$ — modus tollens;
3. $\frac{A\to B,\ B\to C}{A\to C}$ — цепное заключение;
4. $\frac{A,\ B}{A\&B}$ — введение конъюнкции;
5. $\frac{A\&B}{A}$; $\frac{A\&B}{B}$ — удаление конъюнкции;
6. $\frac{A\vee B,\ \overline{B}}{A}$ — modus tollendo ponens;
7. $\frac{\overline{A\&B},\ A}{\overline{B}}$ — modus ponendo tollens;
8. $\frac{A\to(B\to C)}{B\to(A\to C)}$ — перестановка посылок;
9. $\frac{A\to(B\to C)}{(A\&B)\to C}$ — соединение посылок;
10. $\frac{(A\&B)\to C}{A\to(B\to C)}$ — разъединение посылок.

Достаточные и необходимые условия

В условном высказывании вида $A \to B$ отражаются достаточные и необходимые условия наступления какого-то факта, события.

Достаточные и необходимые условия

В условном высказывании вида $A \to B$ отражаются достаточные и необходимые условия наступления какого-то факта, события.

Условия являются достаточными, если при их выполнении всегда наступает данное событие.

Достаточные и необходимые условия

В условном высказывании вида $A \to B$ отражаются достаточные и необходимые условия наступления какого-то факта, события.

Условия являются достаточными, если при их выполнении всегда наступает данное событие.

Условия являются необходимыми, если без их выполнения данное событие никогда не наступает.

Достаточные и необходимые условия

В условном высказывании вида $A \to B$ отражаются достаточные и необходимые условия наступления какого-то факта, события.

Условия являются достаточными, если при их выполнении всегда наступает данное событие.

Условия являются необходимыми, если без их выполнения данное событие никогда не наступает.

Из определения истинностного значения импликации $A \to B$ следует, что антецедент A является достаточным условием для консеквента B, а консеквент B — необходимым условием для антецедента A.

Достаточные и необходимые условия

В условном высказывании вида $A \to B$ отражаются достаточные и необходимые условия наступления какого-то факта, события.
Условия являются достаточными, если при их выполнении всегда наступает данное событие.
Условия являются необходимыми, если без их выполнения данное событие никогда не наступает.

Из определения истинностного значения импликации $A \to B$ следует, что антецедент A является достаточным условием для консеквента B, а консеквент B — необходимым условием для антецедента A.

Поэтому запись $A \to B$ также соответствует высказываниям «для A необходимо B», «для B достаточно A», «необходимым условием A является B», «достаточным условием B является A».

Достаточные и необходимые условия: пример

Пример

Пусть A — «Идёт дождь»,
B — «Дорога мокрая».

Тогда $A \to B$ можно прочитать как
«Необходимым условием того, что прошёл дождь, является мокрая дорога»
или «Для того, чтобы дорога стала мокрой, достаточно, чтобы прошёл дождь».