Лабораторная работа № 2
Интерполяция функций

Цель работы: изучить понятие интерполяционного многочлена; изучить способы построения интерполяционного многочлена для случая равномерной и неравномерной сетки интерполяции; получить практические навыки решения задачи интерполяции с помощью ЭВМ.

Задания к работе

1. Найти область допустимых значений переменной x для функции $y= f(x)$ задания соответствующего варианта.
2. Составить таблицу значений функции $y = f(x)$, используя ($n \geq 6$) узлов интерполяции ($x_i \neq a$, где a точка, не являющаяся узлом интерполяционной сетке, в которой необходимо приближенно вычислить значение функции в соответствии с вариантом задания; $x_0<a< x_n$).
3. По полученной таблице значений функции $y = f(x)$ составить интерполяционный многочлен Лагранжа для случаев линейной, квадратичной и кубической интерполяции: $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$.

Замечание. Интервал (x_0, x_n), $n = 1, 2, 3$, используемый для построения интерполяционного многочлена Лагранжа должен содержать точку a.

4. По таблице значений функции составить интерполяционный многочлен Ньютона $I_n(x)$. При построении интерполяционного многочлена Ньютона необходимо использовать конечные разности для случая равномерной сетки интерполяции и разделенные разности для неравномерной сетки интерполяции. Можно построить таблицу значений функции для равномерной сетки, выполнить построение многочлена Ньютона с конечными разностями, затем убрать 1 значение из середины таблицы и выполнить построение многочлена Ньютона с разделенными разностями для получившейся неравномерной сетки интерполяции.
5. Вычислить точное значение функции $y = f(x)$ при $x=a$ ($y_T = f(a)$).
6. Вычислить приближенное значение функции при $x=a$ по всем полученным интерполяционным многочленам.
7. Определить абсолютную Δ и относительную δ погрешность вычисления значения функции для каждого интерполяционного многочлена (интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона) при заданном значении $x=a$.
8. Построить в одной системе координат графики полученных интерполяционных функций (многочлены Лагранжа и Ньютона), исходной функции $y= f(x)$ и отметить значения функций в точке $x=a$.
9. Представить полученные результаты в виде таблицы (см. табл. 1).
10. Составить программу, реализующую вычисление приближенного значения функции в произвольной точке путем построения интерполяционного многочлена Ньютона для случая равномерной и неравномерной сетки.

Таблица 1. Оценка погрешности интерполяционного многочлена

	Многочлен Лагранжа			Многочлен Ньютона	
Погрешность	линейная интерполяция	квадратичная интерполяция	кубическая интерполяция	разделенные разности	конечные разности
Δ					
δ					

Входные данные: значения узлов интерполяционной сетки x_i, значения функции в узлах интерполяции y_i. Предусмотреть возможность ввода значений с клавиатуры и из файла.

В программе выполняется проверка равномерности заданной интерполяционной сетки и в зависимости от результата используется метод конечных или разделенных разностей.

Результатом работы программы является таблица конечных или разделенных разностей и значение интерполяционного многочлена в произвольной точке $x=a$, удовлетворяющей условию: $x_0<a<x_n$.

Содержание отчета

1. Титульный лист.
2. Цель работы. Вариант задания.
3. Текст задания к работе.
4. Выполнение задания соответствующего варианта вручную полностью. Все действия выполняемые при решении задачи вручную расписывать подробно с указанием всех промежуточных операций. Указание только окончательного ответа не допускается.
5. Текст программы, включающий необходимые комментарии и спецификации подпрограмм.
6. Результаты работы программы.

Основные теоретические сведения

Пусть известно $(n+1)$ попарно различных точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$, для каждой из которых известно значение функции $y = f(x)$, то есть известны числа $y_i = f(x_i)$, $i=0,\ldots,n$.

Числа x_i называют узлами интерполяции, а набор точек x_i образует интерполяционную сетку на оси OX.

Интерполяционная сетка является равномерной с шагом $h>0$, если

$$x_i = x_0 + ih,\ i=0,\ldots,n.$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа.

Интерполяционный многочлен Лагранжа имеет вид:

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n} y_j l_j^{(n)}(x) = y_0 l_0^{(n)}(x)+y_1 l_1^{(n)}(x)+\ldots y_n l_n^{(n)}(x)$$

Вспомогательный многочлен n-ой степени:

$$l_j^{(n)}(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_n)}$$

$$l_j^{(n)}(x_i)=\begin{cases}1,\ i=j\\0,\ i\neq j\end{cases}$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа степени 1, 2 и 3: линейная, квадратичная и кубическая интерполяция.

Метод разделенных разностей.

Разделенными разностями k-го порядка называются числа:

$$y(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k})=\frac{y(x_{i+1},\ldots,x_{i+k})-y(x_i,\ldots,x_{i+k-1})}{x_{i+k}-x_i},\ i=0,1,\ldots,n-k$$

Интерполяционный многочлен Ньютона с разделенными разностями имеет вид:

$$I_n(x)=y_0+y(x_0,x_1)(x-x_0)+y(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1)+y(x_0,x_1,x_2,x_3)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+$$
$$+\ldots..+y(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n)(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

Метод конечных разностей

Конечными разностями $(k+1)$-го порядка называются числа:

$$\Delta^{(k+1)}y_i=\Delta^{(k)}y_{i+1}-\Delta^{(k)}y_i,\ i=0,1,\ldots,n-k-1$$

Интерполяционный многочлен Ньютона с конечными разностями для интерполирования вперед имеет вид:

$$I_n(x) = y_0 + \Delta y_0 t + \frac{\Delta^{(2)} y_0}{2!} t(t-1) + \frac{\Delta^{(3)} y_0}{3!} t(t-1)(t-2) + \ldots + \frac{\Delta^{(n)} y_0}{n!} t(t-1)\ldots(t-n+1)$$

$$t = \frac{x - x_0}{h}$$

Интерполяционный многочлен Ньютона с конечными разностями для интерполирования назад имеет вид:

$$I_n(x) = y_n + \Delta y_{n-1} q + \frac{\Delta^{(2)} y_{n-2}}{2!} q(q+1) + \frac{\Delta^{(3)} y_{n-3}}{3!} q(q+1)(q+2) + \ldots + \frac{\Delta^{(n)} y_0}{n!} q(q+1)\ldots(q+n-1)$$

$$q = \frac{x - x_n}{h}$$

Варианты заданий

№	**Функция *y = f(x)***	***a***
1	$cos\ (2x)$	35
2	$lg\ (x + 15)$	40
3	$0.5\ ln\ (x)$	25
4	$3 + sin\ (x)$	45
5	$4\ log_3\ (x)$	63
6	$2 + lg\ (x – 4)$	28
7	$3\ log_2\ x$	30
8	$cos^2\ x$	55
9	$2\ tg\ x$	40
10	$0.5\ lg\ x$	15
11	$2\ sec\ x$	64
12	$ln^2\ x$	45
13	$cosec\ (x +2\ )$	38
14	$- 2\ cos\ x$	27
15	$- tg\ x$	5
16	$sin^4\ x$	44
17	$log_3\ x$	29
18	$tg\ (x^3)$	14
19	$3\ cos^2\ x$	48
20	$4\ \lg\ (x – 2)$	13
21	$ln\ (x^{0.5})$	48
22	$sec^3\ x$	33
23	$x + lg\ x$	15
24	$sin\ (5x) - 1$	28
25	$cos\ (4x) + 2$	21

sec x = 1 / (cos x) — секанс x
cosec x = 1 / (sin x) — косеканс x

Контрольные вопросы:

1. Понятие интерполяционного многочлена и его свойства.
2. Форма записи интерполяционного многочлена степени n.
3. Интерполяционный многочлен Лагранжа: понятие, форма записи.
4. Определение разделенных разностей: первого, второго, k-го порядка.
5. Определение конечных разностей: первого, второго, k-го порядка.
6. Интерполяционный многочлен Ньютона: интерполирование вперед,

интерполирование назад.

7. Увеличение числа узлов интерполяционной сетки.
8. Свойства конечных и разделенных разностей.
9. Погрешность интерполяционного многочлена.
10. Принцип Рунге для оценки погрешности вычислений.