Лабораторная работа №5
Численные методы решения задачи Коши

Цель работы: изучить численные методы решения задачи Коши; получить практические навыки приближенного решения дифференциальных уравнений с помощью ЭВМ.

Задания к работе

1. Вычислить «вручную» приближенное решение *y(x)* задачи Коши методом последовательного дифференцирования.

Замечание. Ряд Тейлора ограничить значением производной третьего порядка.

2. Вычислить значение функции *φ(x)*, которая является точным решением задачи Коши и функции *y(x)*, которая является приближенным решением задачи Коши по методу последовательного дифференцирования, в точке $x = b$.

Замечание. $x = b$ – правый конец указанного в задании отрезка, которому принадлежит значение *x*, $a \le x \le b$.

$$x = b = x_0 + ih,\ h>0 \text{ — шаг сетки, } x_0 = a.$$

3. Определить относительную и абсолютную погрешности вычисления приближенного решения задачи Коши методом последовательного дифференцирования.

Значения погрешностей внести в соответствующие ячейки таблицы 4.

4. Вычислить «вручную» приближенное решение *y(x)* задачи Коши четырьмя численными методами решения:

- методом Эйлера;
- методом Эйлера-Коши;
- модифицированным методом Эйлера;
- методом Рунге-Кутты.

Сначала выполнить вычисления с шагом $h = 0{,}2$, а затем с шагом $h = 0{,}1$.

Вычисления вручную можно выполнить с помощью MS Excel или другой программы и *обязательно* их включать в отчет.

5. Сравнить полученные в пункте 4 значения приближенного решения дифференциального уравнения *y(x)* с точным значением решения дифференциального уравнения *φ(x)* в точке $x = b$.

6. Определить относительную и абсолютную погрешности вычисления приближенного решения задачи Коши заданными численными методами.

Значения погрешностей внести в соответствующие ячейки таблицы 4.

7. Описать в модуле функции, каждая из которых возвращает приближенное значение решения задачи Коши:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

в точке $x = b$ с точностью ε, реализующие метод Эйлера, метод Эйлера-Коши, модифицированный метод Эйлера и метод Рунге-Кутты. Оценка точности вычисления должна осуществляться по принципу Рунге.

8. Составить программу для вычисления приближенных значений решения задачи Коши с точностью ε на отрезке $[a, b]$ с шагом h для соответствующего варианта задания с использованием всех функций, описанных в модуле.

Результат работы программы таблица значений приближенного решения задачи Коши для заданного отрезка $a \le x \le b$.

Предусмотреть возможность сохранения результата работы программы в файл.

Таблица 4. Оценка погрешности численных методов решения задачи Коши

Погрешность	Вычислительный метод				
	Последовательного дифференцирования	Эйлера	Эйлера-Коши	Модифицированный метод Эйлера	Рунге-Кутта
h=0,2					
Δ					
δ					
h=0,1					
Δ					
δ					

Основные теоретические сведения

Задачей Коши для дифференциального уравнения порядка m называется задача нахождения такого решения дифференциального уравнения: $y = y(x)$, которое удовлетворяет заданным m начальным условиям.

Метод последовательного дифференцирования

Решение $y = y(x)$ ищут в виде ряда Тейлора с центром в точке x_0:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{y^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m + \ldots$$

Производные порядка 0, 1, …, m находятся из начальных условий, а следующие вычисляются из данного дифференциального уравнения.

Для дифференциального уравнения первого порядка задача Коши имеет вид:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Результат применения любого численного метода — это таблица значений:

x_i	y_i
x_0	y_0
x_1	y_1
…	…
x_n	y_n

где y_i — приближенное значение решения задачи Коши в точке x_i,

$$x_i = x_0 + ih,\ i = 1,\ \ldots n.$$

h — шаг сетки, x_0 — начально значение переменной x.

Метод Эйлера

Задано дифференциальное уравнение первого порядка и начальное условие $y(x_0) = y_0$.

Точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ образуют сетку на оси OX.

Если сетка неравномерна, то значения y_i находятся по формуле

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i),\ \ i = 0, 1, \ldots, n-1$$

Если сетка равномерна, то значения y_i находятся по формуле

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i),\ \ i = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$x_i = a + ih = x_0 + ih$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$[a, b]$ — отрезок на котором лежат точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Метод Эйлера имеет первый порядок точности.

Метод Эйлера-Коши

$$y_{k+1}^{Э-К} = y_k^{Э-К} + \frac{1}{2} h\left(f\left(x_k, y_k^{Э-К}\right) + f\left(x_k + h, y_k^{Э-К} + hf\left(x_k, y_k^{Э-К}\right)\right)\right), \; k = 0, ..., n-1$$

Метод Эйлера-Коши имеет второй порядок точности.

Модифицированный метод Эйлера

$$y_{k+1}^{МЭ} = y_k^{МЭ} + h\; f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k^{МЭ} + \frac{h}{2}\, f\left(x_k, y_k^{МЭ}\right)\right), \; k = 0, ..., n-1$$

Модифицированный метод Эйлера имеет второй порядок точности.
При i=0 получаем:

$$y_0^{Э-К} = y_0^{МЭ} = y_0 = y(x_0)$$

Метод Рунге-Кутты

$$y_{k+1}^{РК} = y_k^{РК} + \frac{h}{6}\left(m_k^{(1)} + 2m_k^{(2)} + 2m_k^{(3)} + m_k^{(4)}\right), \; k = 0, ..., n-1$$

$$m_k^{(1)} = f(x_k, y_k)$$

$$m_k^{(2)} = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} m_k^{(1)}\right)$$

$$m_k^{(3)} = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} m_k^{(2)}\right)$$

$$m_k^{(4)} = f\left(x_k + h, y_k + hm_k^{(3)}\right)$$

Метод Рунге-Кутты имеет четвертый порядок точности.

Практическая оценка погрешности численных методов решения задачи Коши выполняется по принципу Рунге.

После применения любой численной формулы вычисления с шагом h, уменьшаем шаг вдвое, и повторяем вычисления с шагом (h/2), получим два приближенных значения функции в одной и той же точке x_k.

Введем обозначение погрешности:

$$\delta = \frac{y_{k+1}^{(h/2)} - y_{k+1}^{(h)}}{2^p - 1}$$

$y_{k+1}^{(h/2)}, y_{k+1}^{(h)}$ – приближенные значения решения задачи Коши, вычисленные с шагом h и с шагом (h/2) на одном и том же отрезке $[x_0, x_n]$.

Вычисления выполняются пока модуль полученной погрешности больше заданной точности. В итоге решение задачи Коши формируется в виде:

$$y^T(x_{k+1}) \approx y_{k+1}^{(h/2)} + \delta$$

Варианты заданий

№	Задача Коши	Точное решение
1	$y' - \frac{3y}{x} = x^3 + x, \quad y\big\|_{x=1} = 3, \quad 1 \le x \le 2$	$\varphi(x) = x^4 - x^2 + 2x^3$

2	$y' - \frac{y}{x} = x^2, \quad y\big|_{x=1} = 0, \quad 1 \le x \le 2$	$\varphi(x) = \frac{x^3 - x}{2}$
3	$y' - y\,\mathrm{ctg}\,x = 2x\sin x, y\Big|_{x=\pi/2} = 0, \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} + 1$	$\varphi(x) = \left(x^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)\sin x$
4	$y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y\big|_{x=-1} = 1.5, \quad 1.5 \le x \le 2.5$	$\varphi(x) = \frac{(x^2+2)(x+2)}{2}$
5	$y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x, y\Big|_{x=\pi/4} = \frac{1}{2}, \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4} + 1$	$\varphi(x) = \sin x \cdot \cos x$
6	$y' - \frac{1}{x+1} y = e^x (x+1), \quad y\big|_{x=0} = 1, \quad 0 \le x \le 2$	$\varphi(x) = e^x (x+1)$
7	$y' - \frac{y}{x} = x\sin x, \quad y\Big|_{x=\pi/2} = 1, \quad \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} + 1$	$\varphi(x) = x\left(\frac{2}{\pi} - \cos x\right)$
8	$y' + \frac{y}{x} = \sin x, \quad y\Big|_{x=\pi} = \frac{1}{\pi}, \quad \pi \le x \le \pi + 1$	$\varphi(x) = \frac{\sin x - x\cos x + 1 - \pi}{x}$
9	$y' + \frac{y}{2x} = x^2, \quad y\big|_{x=1} = 1, \quad 1 \le x \le 2$	$\varphi(x) = \frac{2}{7}x^3 + \frac{5}{7\sqrt{x}}$
10	$y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}, \quad y\Big|_{x=0} = \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3} \le x \le \frac{5}{3}$	$\varphi(x) = \frac{2(x^3+1)}{3(x^2+1)}$
11	$y' - \frac{2x-5}{x^2} y = 5, \quad y\big|_{x=2} = 4, \quad 2 \le x \le 4$	$\varphi(x) = x^2$
12	$y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x, \quad y\big|_{x=1} = e, \quad 1 \le x \le 2$	$\varphi(x) = e^x$
13	$y' - \frac{y}{x} = -2\frac{\ln x}{x}, \quad y\big|_{x=1} = 1, \quad 1 \le x \le 2$	$\varphi(x) = 2(\ln x + 1) - x$
14	$y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, \quad y\big|_{x=1} = 4, \quad 1 \le x \le 2$	$\varphi(x) = \frac{4}{x^2}$
15	$y' + \frac{2y}{x} = x^3, \quad y\Big|_{x=1} = -\frac{5}{6}, \quad 1 \le x \le 2$	$\varphi(x) = \frac{x^4}{6} - \frac{1}{x^2}$
16	$y' + \frac{y}{x} = 3x, \quad y\big|_{x=1} = 1, \quad 1 \le x \le 3$	$\varphi(x) = x^2$
17	$y' - \frac{2xy}{x^2+1} = x^2 + 1, \quad y\big|_{x=1} = 3, \quad 1 \le x \le 2$	$\varphi(x) = x^3 + 0.5x^2 + x + 0.5$
18	$y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1, \quad y\big|_{x=1} = 1, \quad 1 \le x \le 2$	$\varphi(x) = x^2\left(2e^{1/x-1} - 1\right)$
19	$y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, \quad y\big|_{x=1} = 1, \quad 1 \le x \le 3$	$\varphi(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
20	$y' + 2xy = -2x^3, \quad y\Big|_{x=1} = \frac{1}{e}, \quad 1 \le x \le 2$	$\varphi(x) = -x^2 + 1 + e^{-x^2}$
21	$y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}, \quad y\Big|_{x=0} = \frac{2}{3}, \quad 0 \le x \le 2$	$\varphi(x) = \sqrt[4]{1-x^2} - \frac{1}{3}(1-x^2)$
22	$y' + xy = -x^3, \quad y\big|_{x=0} = 3, \quad 0 \le x \le 2$	$\varphi(x) = 1 - x^2 + e^{-x^2/2}$
23	$y' - \frac{2}{x+1} y = e^x (1+x)^2, \quad y\big|_{x=0} = 1, \quad 1 \le x \le 2$	$\varphi(x) = e^x (x+1)^2$
24	$y' + 2xy = xe^{-x^2}\sin x, \quad y\big|_{x=0} = 1, \quad 0 \le x \le 1$	$\varphi(x) = e^{-x^2}(-x\cos x + \sin x + 1)$

25	$y' + \frac{2y}{x+1} = (1+x)^2, \quad y\Big\|_{x=0} = \frac{1}{2}, \quad 0 \le x \le 2$	$\varphi(x) = \frac{x^4}{2} + 2x^3 + 3x^2 + 2x + \frac{1}{2}$
26	$y' - y\cos x = -\sin 2x, y\Big\|_{x=0} = 3, 0 \le x \le 2$	$\varphi(x) = 2(\sin x + 1) + e^{\sin x}$
27	$y' - 4xy = -4x^3, y\Big\|_{x=0} = -\frac{1}{2}, 0 \le x \le 2$	$\varphi(x) = 2x - 4xe^{2x^2}$
28	$y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, \quad y\Big\|_{x=1} = 1, \quad 1 \le x \le 2$	$\varphi(x) = \ln x + 1$
29	$y' - y\cos x = \sin 2x, y\Big\|_{x=0} = -1, 0 \le x \le 1$	$\varphi(x) = -2(\sin x + 1) + e^{\sin x}$
30	$y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}, \quad y\Big\|_{x=1} = 1, \quad 1 \le x \le 2$	$\varphi(x) = \frac{1}{x}$

Контрольные вопросы

1. Определение дифференциального уравнения (ДУ). Порядок ДУ. Определение решения ДУ.
2. Постановка задачи Коши. Решение задачи Коши.
3. Понятие аналитического метода приближенного решения задачи Коши.
4. Понятие численного метода приближенного решения задачи Коши.
5. Метод последовательного дифференцирования.
6. Геометрический смысл метода Эйлера.
7. Методы второго порядка точности: формулы вычисления.
8. Метод Рунге-Кутты: формулы вычисления.
9. Относительная и абсолютная погрешность.
10. Применение принципа Рунге для достижения заданной точности. Приближенное значение функции в точке по методу Рунге.