Математическая логика и теория алгоритмов
Лекция 12
Неклассические логики

Куценко Дмитрий Александрович

Белгородский государственный технологический университет
имени В. Г. Шухова

Институт информационных технологий и управляющих систем

Кафедра программного обеспечения вычислительной техники
и автоматизированных систем

13 мая 2013 г.

Классическая логика (из лекции 1)

Логику называют классической, если она основывается на следующих четырёх законах:

Классическая логика (из лекции 1)

Логику называют классической, если она основывается на следующих четырёх законах:

1. Закон тождества: каждое высказывание при повторении должно иметь одно и тоже определённое устойчивое содержание ($A \equiv A$).

Классическая логика (из лекции 1)

Логику называют классической, если она основывается на следующих четырёх законах:

1. Закон тождества: каждое высказывание при повторении должно иметь одно и тоже определённое устойчивое содержание ($A \equiv A$).
2. Закон (запрета) противоречия: любое высказывание и его отрицание об одном и том же вместе не могут быть истинными ($\overline{A \,\&\, \overline{A}} \equiv 1$).

Классическая логика (из лекции 1)

Логику называют классической, если она основывается на следующих четырёх законах:

1. Закон тождества: каждое высказывание при повторении должно иметь одно и тоже определённое устойчивое содержание ($A \equiv A$).
2. Закон (запрета) противоречия: любое высказывание и его отрицание об одном и том же вместе не могут быть истинными ($\overline{A \mathbin{\&} \overline{A}} \equiv 1$).
3. Закон исключённого третьего: либо данное высказывание ложно, либо его отрицание ложно, третьего не дано ($A \vee \overline{A} \equiv 1$).

Классическая логика (из лекции 1)

Логику называют классической, если она основывается на следующих четырёх законах:

1. Закон тождества: каждое высказывание при повторении должно иметь одно и тоже определённое устойчивое содержание ($A \equiv A$).
2. Закон (запрета) противоречия: любое высказывание и его отрицание об одном и том же вместе не могут быть истинными ($\overline{A \mathbin{\&} \overline{A}} \equiv 1$).
3. Закон исключённого третьего: либо данное высказывание ложно, либо его отрицание ложно, третьего не дано ($A \vee \overline{A} \equiv 1$).
4. Закон достаточного основания: всякое истинное высказывание должно быть обосновано другими высказываниями, истинность которых доказана.

Принципы, лежащие в основе классической логики

Можно также выделить два основополагающих принципа:

Принципы, лежащие в основе классической логики

Можно также выделить два основополагающих принципа:

1. Принцип двузначности (бивалентности):

Принципы, лежащие в основе классической логики

Можно также выделить два основополагающих принципа:

1. Принцип двузначности (бивалентности):
   всякое высказывание имеет в точности одно из двух значений — значение «истина» или значение «ложь».

Принципы, лежащие в основе классической логики

Можно также выделить два основополагающих принципа:

1. Принцип двузначности (бивалентности):
   всякое высказывание имеет в точности одно из двух значений — значение «истина» или значение «ложь».
2. Принцип взаимозаменяемости (экстенсиональности):

Принципы, лежащие в основе классической логики

Можно также выделить два основополагающих принципа:

1. Принцип двузначности (бивалентности):
   всякое высказывание имеет в точности одно из двух значений — значение «истина» или значение «ложь».
2. Принцип взаимозаменяемости (экстенсиональности):
   значение сложного выражения зависит только от значений составляющих его выражений.

Неуниверсальность принципов классической логики

Принципы, на которых базируется классическая логика, устанавливают исследователю весьма жёсткие рамки в процессе осуществления логических операций.

Неуниверсальность принципов классической логики

Принципы, на которых базируется классическая логика, устанавливают исследователю весьма жёсткие рамки в процессе осуществления логических операций. Использование классической логики часто огрубляет предмет исследования и процедуры рассуждения, представляет их в упрощённом и схематизированном виде.

Неуниверсальность принципов классической логики

Принципы, на которых базируется классическая логика, устанавливают исследователю весьма жёсткие рамки в процессе осуществления логических операций. Использование классической логики часто огрубляет предмет исследования и процедуры рассуждения, представляет их в упрощённом и схематизированном виде.

Следствиями пересмотра классических принципов и законов являются различные системы неклассических логик.

Общая характеристика неклассических логик

Неклассические логики могут строиться двумя способами:

Общая характеристика неклассических логик

Неклассические логики могут строиться двумя способами:

1. **как альтернативы классической логике:**

Общая характеристика неклассических логик

Неклассические логики могут строиться двумя способами:

1. **как альтернативы классической логике:** они формируются в том же языке, что и классическая логика, но символы интерпретируются иначе или же видоизменяются некоторые исходные понятия и правила.

Общая характеристика неклассических логик

Неклассические логики могут строиться двумя способами:

1. **как альтернативы классической логике:**
   они формируются в том же языке, что и классическая логика, но символы интерпретируются иначе или же видоизменяются некоторые исходные понятия и правила. Этот способ построения характерен для ряда многозначных логик, интуиционистской логики и др.

Общая характеристика неклассических логик

Неклассические логики могут строиться двумя способами:

1. **как альтернативы классической логике:**
   они формируются в том же языке, что и классическая логика, но символы интерпретируются иначе или же видоизменяются некоторые исходные понятия и правила. Этот способ построения характерен для ряда многозначных логик, интуиционистской логики и др.
2. **как расширения классической логики:**

Общая характеристика неклассических логик

Неклассические логики могут строиться двумя способами:

1. **как альтернативы классической логике:** они формируются в том же языке, что и классическая логика, но символы интерпретируются иначе или же видоизменяются некоторые исходные понятия и правила. Этот способ построения характерен для ряда многозначных логик, интуиционистской логики и др.
2. **как расширения классической логики:** язык классической логики обогащается новыми логическими константами, все классические законы сохраняются, но к ним добавляются новые законы, характеризующие свойства введённых констант.

Общая характеристика неклассических логик

Неклассические логики могут строиться двумя способами:

1. **как альтернативы классической логике:**
   они формируются в том же языке, что и классическая логика, но символы интерпретируются иначе или же видоизменяются некоторые исходные понятия и правила. Этот способ построения характерен для ряда многозначных логик, интуиционистской логики и др.
2. **как расширения классической логики:**
   язык классической логики обогащается новыми логическими константами, все классические законы сохраняются, но к ним добавляются новые законы, характеризующие свойства введённых констант. Обычно таким образом строятся различные системы модальных логик.

Многозначные логики

Многозначные логики — раздел неклассической логики, который объединяет логические теории, основанные на принципе многозначности, т. е. теории, допускающие, что высказывания могут быть не только истинными и ложными, но и могут иметь другие истинностные значения.

Многозначные логики

Многозначные логики — раздел неклассической логики, который объединяет логические теории, основанные на принципе многозначности, т. е. теории, допускающие, что высказывания могут быть не только истинными и ложными, но и могут иметь другие истинностные значения.

Т. о., в многозначных логиках не действует классический принцип двузначности. Взамен принимается принцип многозначности:

Многозначные логики

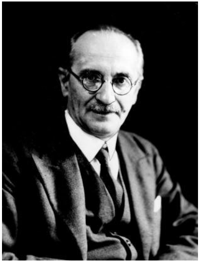
Многозначные логики — раздел неклассической логики, который объединяет логические теории, основанные на принципе многозначности, т. е. теории, допускающие, что высказывания могут быть не только истинными и ложными, но и могут иметь другие истинностные значения.

Т. о., в многозначных логиках не действует классический принцип двузначности. Взамен принимается принцип многозначности:

Принцип многозначности

Всякое высказывание имеет более чем два возможных логических значения.

Трёхзначная логика Лукасевича

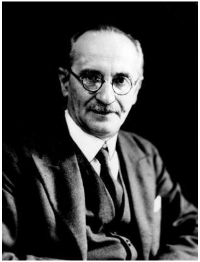


Ян Лукасе́вич (1878—1956) — польский логик и философ

Трёхзначная логика впервые была предложена Лукасевичем в 1920 году.

Поскольку высказывания о случайном будущем нельзя оценить как истинные или ложные, Лукасевич предложил ввести для них новое, третье значение — «случайно» (не определено, неизвестно, возможно).

Трёхзначная логика Лукасевича



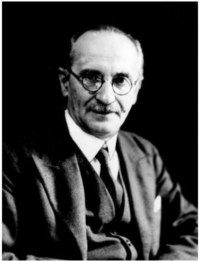
Ян Лукасе́вич (1878—1956) — польский логик и философ

Трёхзначная логика впервые была предложена Лукасевичем в 1920 году.

Поскольку высказывания о случайном будущем нельзя оценить как истинные или ложные, Лукасевич предложил ввести для них новое, третье значение — «случайно» (не определено, неизвестно, возможно).

Т. о., взамен принципа двузначности Лукасевич предложил такой принцип:

Трёхзначная логика Лукасевича



Ян Лукасéвич (1878—1956) — польский логик и философ

Трёхзначная логика впервые была предложена Лукасевичем в 1920 году.

Поскольку высказывания о случайном будущем нельзя оценить как истинные или ложные, Лукасевич предложил ввести для них новое, третье значение — «случайно» (не определено, неизвестно, возможно).

Т. о., взамен принципа двузначности Лукасевич предложил такой принцип:

Принцип трёхзначности Лукасевича

Всякое высказывание либо истинно, либо ложно, либо случайно.

Истинностные значения логики Лукасевича

Истинностные значения логики Лукасевича удобно выражать с помощью чисел:

Истинностные значения логики Лукасевича

Истинностные значения логики Лукасевича удобно выражать с помощью чисел:

- «ложно» — «0»;

Истинностные значения логики Лукасевича

Истинностные значения логики Лукасевича удобно выражать с помощью чисел:

- «ложно» — «0»;
- «исинно» — «1»;

Истинностные значения логики Лукасевича

Истинностные значения логики Лукасевича удобно выражать с помощью чисел:

- «ложно» — «0»;
- «исинно» — «1»;
- «случайно» — «½».

Истинностные значения логики Лукасевича

Истинностные значения логики Лукасевича удобно выражать с помощью чисел:

- «ложно» — «0»;
- «исинно» — «1»;
- «случайно» — «½».

При этом Лукасевич предложил соблюдать максимальную преемственность по отношению к принятым в классической логике определениям пропозициональных связок:

Истинностные значения логики Лукасевича

Истинностные значения логики Лукасевича удобно выражать с помощью чисел:

- «ложно» — «0»;
- «исинно» — «1»;
- «случайно» — «½».

При этом Лукасевич предложил соблюдать максимальную преемственность по отношению к принятым в классической логике определениям пропозициональных связок:

Принцип преемственности

Истинностные значения логики Лукасевича

Истинностные значения логики Лукасевича удобно выражать с помощью чисел:

- «ложно» — «0»;
- «исинно» — «1»;
- «случайно» — «½».

При этом Лукасевич предложил соблюдать максимальную преемственность по отношению к принятым в классической логике определениям пропозициональных связок:

Принцип преемственности

При значениях аргументов «1» и «0» формулы должны принимать в многозначной логике те же самые значения, что и в классической двузначной логике.

Истинностные значения пропозициональных связок

В трёхзначной логике Лукасевича пропозициональные связки задаются следующими таблицами истинности:

Истинностные значения пропозициональных связок

В трёхзначной логике Лукасевича пропозициональные связки задаются следующими таблицами истинности:

A	$\overline{A}$
0	1
½	½
1	0

A	B	$A \,\&\, B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	½	0	½	1	½
0	1	0	1	1	0
½	0	0	½	½	½
½	½	½	½	1	1
½	1	½	1	1	½
1	0	0	1	0	0
1	½	½	1	½	½
1	1	1	1	1	1

Истинностные значения пропозициональных связок

В трёхзначной логике Лукасевича пропозициональные связки задаются следующими таблицами истинности:

A	$\overline{A}$
0	1
½	½
1	0

A	B	$A \,\&\, B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	½	0	½	1	½
0	1	0	1	1	0
½	0	0	½	½	½
½	½	½	½	1	1
½	1	½	1	1	½
1	0	0	1	0	0
1	½	½	1	½	½
1	1	1	1	1	1

Очевидно, что в трёхзначной логике таблица истинности для формулы с n переменными будет содержать 3^n строк.

Расширенные операции

Если рассматривать значения 0, ½ и 1 как вещественные числа, то можно заметить, что в логике Лукасевича

$$\begin{aligned} \overline{A} &= 1 - A; \\ A \mathbin{\&} B &= \min(A,\ B); \\ A \vee B &= \max(A,\ B); \\ A \to B &= \min(1,\ 1 + B - A); \\ A \leftrightarrow B &= (A \to B) \mathbin{\&} (B \to A). \end{aligned}$$

Расширенные операции

Если рассматривать значения 0, ½ и 1 как вещественные числа, то можно заметить, что в логике Лукасевича

$$
\begin{aligned}
\overline{A} &= 1 - A;\\
A \mathbin{\&} B &= \min(A,\ B);\\
A \vee B &= \max(A,\ B);\\
A \to B &= \min(1,\ 1 + B - A);\\
A \leftrightarrow B &= (A \to B) \mathbin{\&} (B \to A).
\end{aligned}
$$

Для их построения Лукасевич использовал в качестве основы отрицание и импликацию:

$$
\begin{aligned}
A \vee B &= (A \to B) \to B;\\
A \mathbin{\&} B &= \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}.
\end{aligned}
$$

Пример

Построим таблицу истинности для формул $\overline{P} \vee P$, $\overline{P \mathbin{\&} \overline{P}}$ и $P \to P$ трёхзначной логики Лукасевича:

Пример

Построим таблицу истинности для формул $\overline{P} \vee P$, $\overline{P \,\&\, \overline{P}}$ и $P \to P$ трёхзначной логики Лукасевича:

P	$\overline{P}$	$P \vee \overline{P}$	$P \,\&\, \overline{P}$	$\overline{P \,\&\, \overline{P}}$	$P \to P$
0	1	1	0	1	1
½	½	½	½	½	1
1	0	1	0	1	1

Пример

Построим таблицу истинности для формул $\overline{P} \vee P$, $\overline{P \mathbin{\&} \overline{P}}$ и $P \to P$ трёхзначной логики Лукасевича:

P	$\overline{P}$	$P \vee \overline{P}$	$P \mathbin{\&} \overline{P}$	$\overline{P \mathbin{\&} \overline{P}}$	$P \to P$
0	1	1	0	1	1
½	½	½	½	½	1
1	0	1	0	1	1

Из таблицы видно, что импликация Лукасевича не поддерживает правило разложения импликации $(A \to B \equiv \overline{A} \vee B)$, определённое в классической логике.

Общезначимость

Формула $\mathfrak{A}$ общезначима (является законом, тавтологией) в трёхзначной логике Лукасевича тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ принимает значение «1» при любых наборах значений (из множества $\{1, ½, 0\}$) пропозициональных переменных, входящих в $\mathfrak{A}$.

Общезначимость

Формула $\mathfrak{A}$ общезначима (является законом, тавтологией) в трёхзначной логике Лукасевича тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ принимает значение «1» при любых наборах значений (из множества $\{1, ½, 0\}$) пропозициональных переменных, входящих в $\mathfrak{A}$.

Из предыдущего примера видно, что классические законы исключённого третьего $(P \vee \overline{P})$ и противоречия $(\overline{P \mathbin{\&} \overline{P}})$ не общезначимы в трёхзначной логике Лукасевича, в то время как классический закон тождества $(P \to P)$ является в ней законом.

Логическое следствие

В трёхзначной логике Лукасевича из множества формул $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ логически следует формула $\mathfrak{B}$ (т. е. $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \vdash \mathfrak{B}$) тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B}$ принимает значение 1 на всех наборах значений (из множества $\{1, ½, 0\}$) пропозициональных переменных, входящих в $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ или в $\mathfrak{B}$, на которых каждая из формул $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ принимает значение 1.

Логическое следствие

В трёхзначной логике Лукасевича из множества формул $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ логически следует формула $\mathfrak{B}$ (т. е. $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \vdash \mathfrak{B}$) тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B}$ принимает значение 1 на всех наборах значений (из множества $\{1, ½, 0\}$) пропозициональных переменных, входящих в $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ или в $\mathfrak{B}$, на которых каждая из формул $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ принимает значение 1.

Теорема о дедукции, играющая важную роль в классической логике, в трёхзначной логике Лукасевича не выполняется:

Логическое следствие

В трёхзначной логике Лукасевича из множества формул $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ логически следует формула $\mathfrak{B}$ (т. е. $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \vdash \mathfrak{B}$) тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B}$ принимает значение 1 на всех наборах значений (из множества $\{1, ½, 0\}$) пропозициональных переменных, входящих в $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ или в $\mathfrak{B}$, на которых каждая из формул $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ принимает значение 1.

Теорема о дедукции, играющая важную роль в классической логике, в трёхзначной логике Лукасевича не выполняется:

Можно подобрать такие $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, что $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$, но $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \neq 1$.

Например, $\quad \mathfrak{A} = (P \mathbin{\&} \overline{P}), \quad \mathfrak{B} = Q.$

Нечёткая логика

Лотфи Аскер Заде́ (р. 1921) — американский математик, инженер, информатик.

Нечёткая логика и теория нечётких множеств — раздел математики, являющийся обобщением классической логики и теории множеств.

Понятие нечёткой логики было впервые введено Заде в 1965 году.

Заде расширил понятие множества допущением, что функция принадлежности элемента к множеству может принимать любые значения в интервале $[0, 1]$, а не только из множества $\{0, 1\}$.

Нечёткая логика

Лотфи Аскер Заде́ (р. 1921) — американский математик, инженер, информатик.

Нечёткая логика и теория нечётких множеств — раздел математики, являющийся обобщением классической логики и теории множеств.

Понятие нечёткой логики было впервые введено Заде в 1965 году.

Заде расширил понятие множества допущением, что функция принадлежности элемента к множеству может принимать любые значения в интервале $[0, 1]$, а не только из множества $\{0, 1\}$.

Такие множества он назвал нечёткими (fuzzy).

Нечёткая логика

Лотфи Аскер Заде́ (р. 1921) — американский математик, инженер, информатик.

Нечёткая логика и теория нечётких множеств — раздел математики, являющийся обобщением классической логики и теории множеств.
Понятие нечёткой логики было впервые введено Заде в 1965 году.
Заде расширил понятие множества допущением, что функция принадлежности элемента к множеству может принимать любые значения в интервале $[0, 1]$, а не только из множества $\{0, 1\}$.
Такие множества он назвал нечёткими (fuzzy).
Также Заде были введены различные логические операции над нечёткими множествами и предложено понятие лингвистической переменной, в качестве значений которой выступают нечёткие множества.

Чёткие множества

Множество A в классическом понимании можно представить с помощью следующей записи:

$$A = \{x \mid P(x)\},$$

где $P(x)$ — характеристическая функция (предикат), определяющая, принадлежит элемент x множеству A или нет.

Чёткие множества

Множество A в классическом понимании можно представить с помощью следующей записи:

$$A = \{x \mid P(x)\},$$

где $P(x)$ — характеристическая функция (предикат), определяющая, принадлежит элемент x множеству A или нет. Существуют два возможных случая:

1. Элемент x принадлежит множеству A (т. е. $x \in A$), тогда $P(x) = 1$.

Чёткие множества

Множество A в классическом понимании можно представить с помощью следующей записи:

$$A = \{x \mid P(x)\},$$

где $P(x)$ — характеристическая функция (предикат), определяющая, принадлежит элемент x множеству A или нет. Существуют два возможных случая:

1. Элемент x принадлежит множеству A (т. е. $x \in A$), тогда $P(x) = 1$.
2. Элемент x не принадлежит множеству A (т. е. $x \notin A$), тогда $P(x) = 0$.

Чёткие множества

Множество A в классическом понимании можно представить с помощью следующей записи:

$$A = \{x \mid P(x)\},$$

где $P(x)$ — характеристическая функция (предикат), определяющая, принадлежит элемент x множеству A или нет. Существуют два возможных случая:

1. Элемент x принадлежит множеству A (т. е. $x \in A$), тогда $P(x) = 1$.
2. Элемент x не принадлежит множеству A (т. е. $x \notin A$), тогда $P(x) = 0$.

Подобные множества назовём чёткими.

Пример

Деталь считается стандартной, если её длина находится в пределах от 100 до 105 мм включительно.

Пример

Деталь считается стандартной, если её длина находится в пределах от 100 до 105 мм включительно.
Тогда множество стандартных деталей можно описать так:

Пример

Деталь считается стандартной, если её длина находится в пределах от 100 до 105 мм включительно.
Тогда множество стандартных деталей можно описать так:

$$S = \{x \mid 100 \leqslant x \leqslant 105\}.$$

Пример

Деталь считается стандартной, если её длина находится в пределах от 100 до 105 мм включительно.
Тогда множество стандартных деталей можно описать так:

$$S = \{x \mid 100 \leqslant x \leqslant 105\}.$$

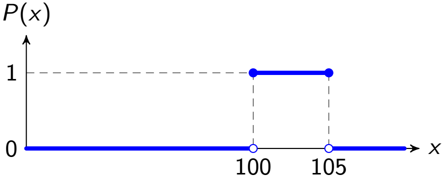
Здесь x — длина детали в мм, $P(x) = (x \geqslant 100) \,\&\, (x \leqslant 105)$.
Изобразим график $y = P(x)$:

Пример

Деталь считается стандартной, если её длина находится в пределах от 100 до 105 мм включительно.
Тогда множество стандартных деталей можно описать так:

$$S = \{x \mid 100 \leqslant x \leqslant 105\}.$$

Здесь x — длина детали в мм, $P(x) = (x \geqslant 100) \,\&\, (x \leqslant 105)$.
Изобразим график $y = P(x)$:



Операции над чёткими множествами

Операции над чёткими множествами связаны с логикой предикатов следующим образом.

Операции над чёткими множествами

Операции над чёткими множествами связаны с логикой предикатов следующим образом.
Пусть $A = \{x \mid P(x)\}$, $B = \{x \mid Q(x)\}$.

Операции над чёткими множествами

Операции над чёткими множествами связаны с логикой предикатов следующим образом.
Пусть $A = \{x \mid P(x)\}$, $B = \{x \mid Q(x)\}$.

- Объединение множеств A и B:

$$A \cup B = \{x \mid P(x) \vee Q(x)\}.$$

Операции над чёткими множествами

Операции над чёткими множествами связаны с логикой предикатов следующим образом.
Пусть $A = \{x \mid P(x)\}$, $B = \{x \mid Q(x)\}$.

- Объединение множеств A и B:

$$A \cup B = \{x \mid P(x) \vee Q(x)\}.$$

- Пересечение множеств A и B:

$$A \cap B = \{x \mid P(x) \,\&\, Q(x)\}.$$

Операции над чёткими множествами

Операции над чёткими множествами связаны с логикой предикатов следующим образом.
Пусть $A = \{x \mid P(x)\}$, $B = \{x \mid Q(x)\}$.

- Объединение множеств A и B:

$$A \cup B = \{x \mid P(x) \vee Q(x)\}.$$

- Пересечение множеств A и B:

$$A \cap B = \{x \mid P(x) \,\&\, Q(x)\}.$$

- Дополнение множества A:

$$A^{\complement} = \{x \mid \overline{P(x)}\}.$$

Нечёткие множества

Пусть задана функция $\mu(x)$, такая что

$$\mu\colon B \longrightarrow [0,\ 1],$$

т. е. каждому элементу чёткого множества B ставится в соответствие число из интервала $[0,\ 1]$.

Нечёткие множества

Пусть задана функция $\mu(x)$, такая что

$$\mu\colon B \longrightarrow [0,\ 1],$$

т. е. каждому элементу чёткого множества B ставится в соответствие число из интервала $[0,\ 1]$.
Множество, у которого вместо характеристической функции используется вышеуказанная функция $\mu(x)$, называется **нечётким**.

Нечёткие множества

Пусть задана функция $\mu(x)$, такая что

$$\mu\colon B \longrightarrow [0,\ 1],$$

т. е. каждому элементу чёткого множества B ставится в соответствие число из интервала $[0,\ 1]$.
Множество, у которого вместо характеристической функции используется вышеуказанная функция $\mu(x)$, называется нечётким.
Нечёткие множества обычно обозначаются заглавными латинскими буквами с тильдой: $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \ldots$

Нечёткие множества

Пусть задана функция $\mu(x)$, такая что

$$\mu\colon B \longrightarrow [0,\ 1],$$

т. е. каждому элементу чёткого множества B ставится в соответствие число из интервала $[0,\ 1]$.
Множество, у которого вместо характеристической функции используется вышеуказанная функция $\mu(x)$, называется нечётким.
Нечёткие множества обычно обозначаются заглавными латинскими буквами с тильдой: $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \ldots$
Функция $\mu(x)$ называется функцией принадлежности.

Нечёткие множества

Пусть задана функция $\mu(x)$, такая что

$$\mu\colon B \longrightarrow [0,\ 1],$$

т. е. каждому элементу чёткого множества B ставится в соответствие число из интервала $[0,\ 1]$.
Множество, у которого вместо характеристической функции используется вышеуказанная функция $\mu(x)$, называется нечётким.
Нечёткие множества обычно обозначаются заглавными латинскими буквами с тильдой: $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \ldots$
Функция $\mu(x)$ называется функцией принадлежности.
Обычно функцию принадлежности нечёткого множества $\widetilde{A}$ обозначают как $\mu_{\widetilde{A}}(x)$.

Базовые множества нечётких подмножеств

Если элементы x, составляющие нечёткое множество, выбираются из некоторого чёткого множества B, то множество B называется базовым.

Базовые множества нечётких подмножеств

Если элементы x, составляющие нечёткое множество, выбираются из некоторого чёткого множества B, то множество B называется базовым.

Тот факт, что множество B является базовым для нечёткого множества $\widetilde{A}$ (соответственно, $\widetilde{A}$ является нечётким подмножеством чёткого множества B), обозначим так:

Базовые множества нечётких подмножеств

Если элементы x, составляющие нечёткое множество, выбираются из некоторого чёткого множества B, то множество B называется базовым.

Тот факт, что множество B является базовым для нечёткого множества $\widetilde{A}$ (соответственно, $\widetilde{A}$ является нечётким подмножеством чёткого множества B), обозначим так:

$$\widetilde{A} \in \mathrm{Fuzzy}(B),$$

Базовые множества нечётких подмножеств

Если элементы x, составляющие нечёткое множество, выбираются из некоторого чёткого множества B, то множество B называется базовым.

Тот факт, что множество B является базовым для нечёткого множества $\widetilde{A}$ (соответственно, $\widetilde{A}$ является нечётким подмножеством чёткого множества B), обозначим так:

$$\widetilde{A} \in \mathrm{Fuzzy}(B),$$

где $\mathrm{Fuzzy}(B)$ — множество всех нечётких подмножеств чёткого множества B.

Пример

Рассмотрим нечёткое подмножество $\widetilde{M}$ — «Молодой» базового чёткого множества $A = [0,\ 100]$ — «Возраст человека», которое измеряется в годах от рождения.

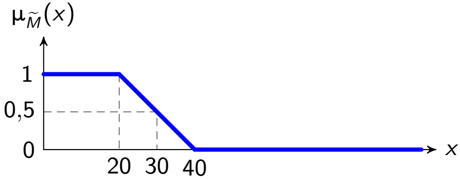
Пример

Рассмотрим нечёткое подмножество $\widetilde{M}$ — «Молодой» базового чёткого множества $A = [0,\ 100]$ — «Возраст человека», которое измеряется в годах от рождения.
Функцию принадлежности $\mu_{\widetilde{M}}(x)$ можно изобразить различными способами (каждый понимает характеристику «Молодой» по-своему!), например, так:

Пример

Рассмотрим нечёткое подмножество $\widetilde{M}$ — «Молодой» базового чёткого множества $A = [0,\ 100]$ — «Возраст человека», которое измеряется в годах от рождения.

Функцию принадлежности $\mu_{\widetilde{M}}(x)$ можно изобразить различными способами (каждый понимает характеристику «Молодой» по-своему!), например, так:



Операции над нечёткими множествами

Пусть $\widetilde{A}, \widetilde{B} \subset \mathrm{Fuzzy}(X)$, $x \in X$.

Операции над нечёткими множествами

Пусть $\widetilde{A}, \widetilde{B} \subset \mathrm{Fuzzy}(X)$, $x \in X$.
Заде определил операции над нечёткими множествами следующим образом:

Операции над нечёткими множествами

Пусть $\widetilde{A}, \widetilde{B} \subset \mathrm{Fuzzy}(X)$, $x \in X$.
Заде определил операции над нечёткими множествами следующим образом:

- Объединение $\widetilde{A} \cup \widetilde{B}$:

$$\mu_{\widetilde{A} \cup \widetilde{B}}(x) = \max\left\{\mu_{\widetilde{A}}(x),\ \mu_{\widetilde{B}}(x)\right\}.$$

Операции над нечёткими множествами

Пусть $\widetilde{A}, \widetilde{B} \subset \mathrm{Fuzzy}(X)$, $x \in X$.
Заде определил операции над нечёткими множествами следующим образом:

- Объединение $\widetilde{A} \cup \widetilde{B}$:

$$\mu_{\widetilde{A} \cup \widetilde{B}}(x) = \max\left\{\mu_{\widetilde{A}}(x),\ \mu_{\widetilde{B}}(x)\right\}.$$

- Пересечение $\widetilde{A} \cap \widetilde{B}$:

$$\mu_{\widetilde{A} \cap \widetilde{B}}(x) = \min\left\{\mu_{\widetilde{A}}(x),\ \mu_{\widetilde{B}}(x)\right\}.$$

Операции над нечёткими множествами

Пусть $\widetilde{A}, \widetilde{B} \subset \mathrm{Fuzzy}(X)$, $x \in X$.
Заде определил операции над нечёткими множествами следующим образом:

- Объединение $\widetilde{A} \cup \widetilde{B}$:

$$\mu_{\widetilde{A} \cup \widetilde{B}}(x) = \max\left\{\mu_{\widetilde{A}}(x),\ \mu_{\widetilde{B}}(x)\right\}.$$

- Пересечение $\widetilde{A} \cap \widetilde{B}$:

$$\mu_{\widetilde{A} \cap \widetilde{B}}(x) = \min\left\{\mu_{\widetilde{A}}(x),\ \mu_{\widetilde{B}}(x)\right\}.$$

- Дополнение $\widetilde{A}^{\complement}$:

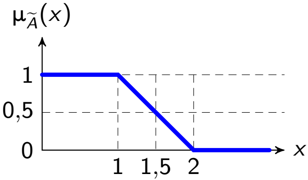
$$\mu_{\widetilde{A}^{\complement}}(x) = 1 - \mu_{\widetilde{A}}(x).$$

Пример

Пусть нечёткие множества $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ задаются следующим образом, причём $\widetilde{A}^{\complement} = \widetilde{B}$:

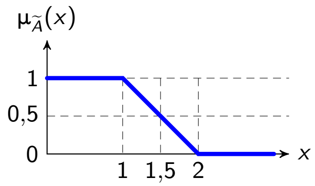
Пример

Пусть нечёткие множества $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ задаются следующим образом, причём $\widetilde{A}^{\complement} = \widetilde{B}$:



Пример

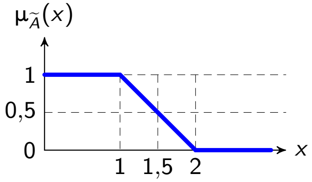
Пусть нечёткие множества $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ задаются следующим образом, причём $\widetilde{A}^{\complement} = \widetilde{B}$:



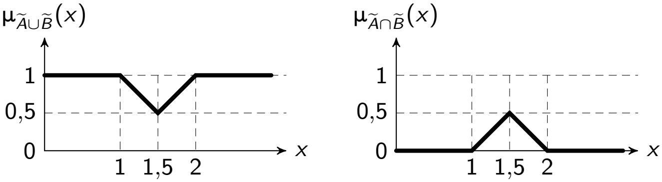
Тогда их объединение и пересечение будут выглядеть так:

Пример

Пусть нечёткие множества $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ задаются следующим образом, причём $\widetilde{A}^{\complement} = \widetilde{B}$:



Тогда их объединение и пересечение будут выглядеть так:



Ассерторические и модальные высказывания

Ранее мы рассматривали лишь такие высказывания, в которых утверждался сам факт наличия или отсутствия чего-либо. Такие высказывания называют ассерторическими.

Ассерторические и модальные высказывания

Ранее мы рассматривали лишь такие высказывания, в которых утверждался сам факт наличия или отсутствия чего-либо. Такие высказывания называют ассерторическими.

Примеры ассерторических высказываний

- Дождь не идёт.

Ассерторические и модальные высказывания

Ранее мы рассматривали лишь такие высказывания, в которых утверждался сам факт наличия или отсутствия чего-либо. Такие высказывания называют ассерторическими.

Примеры ассерторических высказываний

- Дождь не идёт.
- Всякий человек разумен.

Ассерторические и модальные высказывания

Ранее мы рассматривали лишь такие высказывания, в которых утверждался сам факт наличия или отсутствия чего-либо. Такие высказывания называют ассерторическими.

Примеры ассерторических высказываний

- Дождь не идёт.
- Всякий человек разумен.
- Иван старше Петра.

Ассерторические и модальные высказывания

Ранее мы рассматривали лишь такие высказывания, в которых утверждался сам факт наличия или отсутствия чего-либо. Такие высказывания называют ассерторическими.

Примеры ассерторических высказываний

- Дождь не идёт.
- Всякий человек разумен.
- Иван старше Петра.

Существуют и другие высказывания, которые, помимо утверждения фактов, дают ещё и оценку описываемой ситуации. Такие высказывания называют модальными.

Ассерторические и модальные высказывания

Ранее мы рассматривали лишь такие высказывания, в которых утверждался сам факт наличия или отсутствия чего-либо. Такие высказывания называют ассерторическими.

Примеры ассерторических высказываний

- Дождь не идёт.
- Всякий человек разумен.
- Иван старше Петра.

Существуют и другие высказывания, которые, помимо утверждения фактов, дают ещё и оценку описываемой ситуации. Такие высказывания называют модальными.

Примеры модальных высказываний

- Хорошо, что дождь не идёт.

Ассерторические и модальные высказывания

Ранее мы рассматривали лишь такие высказывания, в которых утверждался сам факт наличия или отсутствия чего-либо. Такие высказывания называют ассерторическими.

Примеры ассерторических высказываний

- Дождь не идёт.
- Всякий человек разумен.
- Иван старше Петра.

Существуют и другие высказывания, которые, помимо утверждения фактов, дают ещё и оценку описываемой ситуации. Такие высказывания называют модальными.

Примеры модальных высказываний

- Хорошо, что дождь не идёт.
- Всякий человек с необходимостью разумен.

Ассерторические и модальные высказывания

Ранее мы рассматривали лишь такие высказывания, в которых утверждался сам факт наличия или отсутствия чего-либо. Такие высказывания называют ассерторическими.

Примеры ассерторических высказываний

- Дождь не идёт.
- Всякий человек разумен.
- Иван старше Петра.

Существуют и другие высказывания, которые, помимо утверждения фактов, дают ещё и оценку описываемой ситуации. Такие высказывания называют модальными.

Примеры модальных высказываний

- Хорошо, что дождь не идёт.
- Всякий человек с необходимостью разумен.
- Иван полагает, что он старше Петра.

Модальности

Модальными называют высказывания, содержащие дополнительную информацию оценочного характера относительно ситуаций или взаимосвязей между ними, или присущности признаков предметам.

Модальности

Модальными называют высказывания, содержащие дополнительную информацию оценочного характера относительно ситуаций или взаимосвязей между ними, или присущности признаков предметам.

Модальности — это термины, посредством которых осуществляется оценка, квалификация ситуаций, взаимосвязей между ними и присущности свойств и отношений предметам в модальных высказываниях.

Модальности

Модальными называют высказывания, содержащие дополнительную информацию оценочного характера относительно ситуаций или взаимосвязей между ними, или присущности признаков предметам.

Модальности — это термины, посредством которых осуществляется оценка, квалификация ситуаций, взаимосвязей между ними и присущности свойств и отношений предметам в модальных высказываниях.

Примеры модальностей

«хорошо», «плохо», «запрещено», «необходимо», «полагает», «с неизбежностью приводит», «а затем» и т. д.

Виды модальностей

В зависимости от того, под каким углом зрения осуществляется модальная квалификация, выделяют следующие виды модальностей.

Виды модальностей

В зависимости от того, под каким углом зрения осуществляется модальная квалификация, выделяют следующие виды модальностей.

1. Алетические модальности оценивают ситуации или связь признаков с предметами с точки зрения некоторого множества законов (физических, биологических, математических и т. п.)

Виды модальностей

В зависимости от того, под каким углом зрения осуществляется модальная квалификация, выделяют следующие виды модальностей.

1. Алетические модальности оценивают ситуации или связь признаков с предметами с точки зрения некоторого множества законов (физических, биологических, математических и т. п.)
   Сюда относятся модальности «необходимо», «возможно», «случайно», «невозможно» и др.

Виды модальностей

В зависимости от того, под каким углом зрения осуществляется модальная квалификация, выделяют следующие виды модальностей.

1. Алетические модальности оценивают ситуации или связь признаков с предметами с точки зрения некоторого множества законов (физических, биологических, математических и т. п.)
   Сюда относятся модальности «необходимо», «возможно», «случайно», «невозможно» и др.
2. Деонтические модальности оценивают ситуации с точки зрения некоторого кодекса норм — юридических или этических.

Виды модальностей

В зависимости от того, под каким углом зрения осуществляется модальная квалификация, выделяют следующие виды модальностей.

1. Алетические модальности оценивают ситуации или связь признаков с предметами с точки зрения некоторого множества законов (физических, биологических, математических и т. п.)
   Сюда относятся модальности «необходимо», «возможно», «случайно», «невозможно» и др.
2. Деонтические модальности оценивают ситуации с точки зрения некоторого кодекса норм — юридических или этических.
   Сюда относятся модальности «обязательно», «разрешено», «запрещено» и др.

Виды модальностей (продолжение)

3. Аксиологические модальности оценивают ситуации с точки зрения некоторой системы ценностей.

Виды модальностей (продолжение)

3. Аксиологические модальности оценивают ситуации с точки зрения некоторой системы ценностей. Сюда относятся модальности «хорошо», «плохо», «прекрасно», «хуже», «равноценно» и др.

Виды модальностей (продолжение)

3. Аксиологические модальности оценивают ситуации с точки зрения некоторой системы ценностей. Сюда относятся модальности «хорошо», «плохо», «прекрасно», «хуже», «равноценно» и др.
4. Временны́е модальности соотносят ситуацию с временны́м рядом, указывая, когда имела место ситуация или как соотносятся ситуации во времени.

Виды модальностей (продолжение)

3. Аксиологические модальности оценивают ситуации с точки зрения некоторой системы ценностей. Сюда относятся модальности «хорошо», «плохо», «прекрасно», «хуже», «равноценно» и др.
4. Временны́е модальности соотносят ситуацию с временны́м рядом, указывая, когда имела место ситуация или как соотносятся ситуации во времени. Сюда относятся модальности «было», «всегда будет», «иногда», «а затем» и др.

Виды модальностей (продолжение)

3. Аксиологические модальности оценивают ситуации с точки зрения некоторой системы ценностей.
   Сюда относятся модальности «хорошо», «плохо», «прекрасно», «хуже», «равноценно» и др.
4. Временны́е модальности соотносят ситуацию с временны́м рядом, указывая, когда имела место ситуация или как соотносятся ситуации во времени.
   Сюда относятся модальности «было», «всегда будет», «иногда», «а затем» и др.
5. Эпистемические модальности оценивают ситуации с позиций некоторой познавательной системы, такой как научная теория, или с миром знаний, мнений, убеждений, верований некоторого познающего субъекта.

Виды модальностей (продолжение)

3. Аксиологические модальности оценивают ситуации с точки зрения некоторой системы ценностей.
   Сюда относятся модальности «хорошо», «плохо», «прекрасно», «хуже», «равноценно» и др.
4. Временны́е модальности соотносят ситуацию с временны́м рядом, указывая, когда имела место ситуация или как соотносятся ситуации во времени.
   Сюда относятся модальности «было», «всегда будет», «иногда», «а затем» и др.
5. Эпистемические модальности оценивают ситуации с позиций некоторой познавательной системы, такой как научная теория, или с миром знаний, мнений, убеждений, верований некоторого познающего субъекта.
   Сюда относятся модальности «доказано», «опровергнуто», «знает», «сомневается», «уверен», «верит», «убеждён» и др.

Алетическая логика

Для примера рассмотрим простую неклассическую логику, расширяющую классическую логику предикатов.

Алетическая логика

Для примера рассмотрим простую неклассическую логику, расширяющую классическую логику предикатов.

Логическая система, базирующаяся на операторах «возможно, что» и «необходимо, чтобы», называется алетической логикой.

Алетическая логика

Для примера рассмотрим простую неклассическую логику, расширяющую классическую логику предикатов.

Логическая система, базирующаяся на операторах «возможно, что» и «необходимо, чтобы», называется алетической логикой. Для обозначения модальностей вводится символика:

Алетическая логика

Для примера рассмотрим простую неклассическую логику, расширяющую классическую логику предикатов.

Логическая система, базирующаяся на операторах «возможно, что» и «необходимо, чтобы», называется алетической логикой. Для обозначения модальностей вводится символика:

- «$\Box$» — обозначает модальность «необходимо». Формула вида $\Box\mathfrak{A}$ читается «необходимо, чтобы $\mathfrak{A}$» или «$\mathfrak{A}$ необходимо».

Алетическая логика

Для примера рассмотрим простую неклассическую логику, расширяющую классическую логику предикатов.

Логическая система, базирующаяся на операторах «возможно, что» и «необходимо, чтобы», называется алетической логикой. Для обозначения модальностей вводится символика:

- «$\Box$» — обозначает модальность «необходимо». Формула вида $\Box\mathfrak{A}$ читается «необходимо, чтобы $\mathfrak{A}$» или «$\mathfrak{A}$ необходимо».
- «$\Diamond$» — обозначает модальность «возможно». Формула вида $\Diamond\mathfrak{A}$ читается «возможно, что $\mathfrak{A}$» или «$\mathfrak{A}$ возможно».

Алетическая логика

Для примера рассмотрим простую неклассическую логику, расширяющую классическую логику предикатов.

Логическая система, базирующаяся на операторах «возможно, что» и «необходимо, чтобы», называется алетической логикой. Для обозначения модальностей вводится символика:

- «$\Box$» — обозначает модальность «необходимо». Формула вида $\Box\mathfrak{A}$ читается «необходимо, чтобы $\mathfrak{A}$» или «$\mathfrak{A}$ необходимо».
- «$\Diamond$» — обозначает модальность «возможно». Формула вида $\Diamond\mathfrak{A}$ читается «возможно, что $\mathfrak{A}$» или «$\mathfrak{A}$ возможно».

Имеет место следующее соотношение:

Алетическая логика

Для примера рассмотрим простую неклассическую логику, расширяющую классическую логику предикатов.

Логическая система, базирующаяся на операторах «возможно, что» и «необходимо, чтобы», называется алетической логикой. Для обозначения модальностей вводится символика:

- «$\Box$» — обозначает модальность «необходимо». Формула вида $\Box\mathfrak{A}$ читается «необходимо, чтобы $\mathfrak{A}$» или «$\mathfrak{A}$ необходимо».
- «$\Diamond$» — обозначает модальность «возможно». Формула вида $\Diamond\mathfrak{A}$ читается «возможно, что $\mathfrak{A}$» или «$\mathfrak{A}$ возможно».

Имеет место следующее соотношение:

$$\Box\mathfrak{A} = \overline{\Diamond\overline{\mathfrak{A}}}.$$

Примеры

1. Запишем утверждение:
«Необходимо, чтобы Саша передал Маше книгу».

Примеры

1. Запишем утверждение:
   «Необходимо, чтобы Саша передал Маше книгу».
   Пусть $P(x, y, z)$ — предикат «x передал y объект z».
   Введём также константы s — Саша, m — Маша, b — книга.

Примеры

1. Запишем утверждение:
   «Необходимо, чтобы Саша передал Маше книгу».
   Пусть $P(x, y, z)$ — предикат «x передал y объект z».
   Введём также константы s — Саша, m — Маша, b — книга.
   Тогда исходное утверждение будет выглядеть так:
   $\Box P(s, m, b)$.

Примеры

1. Запишем утверждение:
   «Необходимо, чтобы Саша передал Маше книгу».
   Пусть $P(x, y, z)$ — предикат «x передал y объект z».
   Введём также константы s — Саша, m — Маша, b — книга.
   Тогда исходное утверждение будет выглядеть так:
   $\Box P(s, m, b)$.
2. Запишем утверждение:
   «Невозможно, чтобы Саша передал кому-нибудь что-нибудь».

Примеры

1. Запишем утверждение:
   «Необходимо, чтобы Саша передал Маше книгу».
   Пусть $P(x, y, z)$ — предикат «x передал y объект z».
   Введём также константы s — Саша, m — Маша, b — книга.
   Тогда исходное утверждение будет выглядеть так:
   $\Box P(s, m, b)$.
2. Запишем утверждение:
   «Невозможно, чтобы Саша передал кому-нибудь что-нибудь».
   Это утверждение будет выглядеть так: $\overline{\Diamond(\exists x \exists z\, P(s, x, z))}$.

Связь алетической логики с трёхзначной логикой Лукасевича

Связь алетической логики с трёхзначной логикой Лукасевича можно выразить следующей таблицей истинности:

Связь алетической логики с трёхзначной логикой Лукасевича

Связь алетической логики с трёхзначной логикой Лукасевича можно выразить следующей таблицей истинности:

A	$\Box A$	$\Diamond A$
0	0	0
½	0	1
1	1	1