常微分方程

第一章　一阶常微分方程

李新祥　@ **F516**

上海大学数学系

QQ 课件群: 104203390

内容提要

1. 常微分方程的基本概念

内容提要

1. 常微分方程的基本概念
2. 线性方程
   - 分离变量法
   - 常数变易法

内容提要

上海大学 SHANGHAI UNIVERSITY

内容提要

内容提要

内容提要

1. 常微分方程的基本概念
2. 线性方程
   - 分离变量法
   - 常数变易法
3. 非线性方程
   - 伯努利方程
   - 黎卡提方程
4. 恰当方程与积分因子
5. 隐式方程
6. 解题的灵活性举例
   - 引进适当的变换
   - 交换 x 与 y 的地位
   - 改变方程的形式

常微分方程的基本概念

定义 7.1 (常微分方程)

含有 “未知函数的微分” 的等式叫做微分方程. 若所含未知函数是一元函数, 则称为常微分方程 $O.D.E.$(***Ordinary Differential Equation***), 若是多元函数, 这其中的微分为偏微分, 这样的方程称为偏微分方程 $(P.D.E.)$.

定义 7.1 (常微分方程)

含有“未知函数的微分”的等式叫做微分方程. 若所含未知函数是一元函数, 则称为常微分方程 $O.D.E.$(***Ordinary Differential Equation***), 若是多元函数, 这其中的微分为偏微分, 这样的方程称为偏微分方程 $(P.D.E.)$.

微分方程中所含未知函数的最高阶导数的阶数, 称为**微分方程的阶数**.

以此可以将微分方程分为**一阶方程**和**高阶方程**.

- 人们通常认为常微分方程的开端工作是由意大利科学家 Galileo 完成的. 他的《关于两门新科学的对话》一书中, 对弹性理论的研究成果成为常微分方程的开端.
- 微分方程的发展主要经历了以下阶段
  - 18 世纪及其以前 $\longrightarrow$ 常微分方程经典阶段;

微分方程的发展历史

- 人们通常认为常微分方程的开端工作是由意大利科学家 Galileo 完成的. 他的《关于两门新科学的对话》一书中, 对弹性理论的研究成果成为常微分方程的开端.
- 微分方程的发展主要经历了以下阶段
  - 18 世纪及其以前 $\longrightarrow$ 常微分方程经典阶段;
  - 19 世纪初期和中期 $\longrightarrow$ 常微分方程适定性理论阶段;

微分方程的发展历史

- 人们通常认为常微分方程的开端工作是由意大利科学家 Galileo 完成的. 他的《关于两门新科学的对话》一书中, 对弹性理论的研究成果成为常微分方程的开端.
- 微分方程的发展主要经历了以下阶段
  - 18 世纪及其以前 $\longrightarrow$ 常微分方程经典阶段;
  - 19 世纪初期和中期 $\longrightarrow$ 常微分方程适定性理论阶段;
  - 19 世纪末期及 20 世纪初期 $\longrightarrow$ 常微分方程解析理论阶段;

上海大学 SHANGHAI UNIVERSITY

微分方程的发展历史

- 人们通常认为常微分方程的开端工作是由意大利科学家 Galileo 完成的. 他的《关于两门新科学的对话》一书中, 对弹性理论的研究成果成为常微分方程的开端.
- 微分方程的发展主要经历了以下阶段
  - 18 世纪及其以前 $\longrightarrow$ 常微分方程经典阶段;
  - 19 世纪初期和中期 $\longrightarrow$ 常微分方程适定性理论阶段;
  - 19 世纪末期及 20 世纪初期 $\longrightarrow$ 常微分方程解析理论阶段;
  - 20 世纪中期以后 $\longrightarrow$ 常微分方程定性理论阶段;
    - 从线性方程到黎卡提方程;
    - 从牛顿 (2 体问题, 开普勒定律, 海王星发现) 到庞加莱;

微分方程的发展历史

- 人们通常认为常微分方程的开端工作是由意大利科学家 Galileo 完成的. 他的《关于两门新科学的对话》一书中, 对弹性理论的研究成果成为常微分方程的开端.
- 微分方程的发展主要经历了以下阶段
  - 18 世纪及其以前 $\longrightarrow$ 常微分方程经典阶段;
  - 19 世纪初期和中期 $\longrightarrow$ 常微分方程适定性理论阶段;
  - 19 世纪末期及 20 世纪初期 $\longrightarrow$ 常微分方程解析理论阶段;
  - 20 世纪中期以后 $\longrightarrow$ 常微分方程定性理论阶段;
    - 从线性方程到黎卡提方程;
    - 从牛顿 (2 体问题, 开普勒定律, 海王星发现) 到庞加莱;
  - 微分方程 $+$ 计算机——微分方程的数值计算理论;

上海大学 SHANGHAI UNIVERSITY

微分方程的解

微分方程的一般形式:

$$F(x;y,y',\cdots,y^{(n)})=0$$

满足微分方程的任意函数 $y=f(x)$ 称为微分方程的**解**.

n 阶微分方程的含有 n 个独立任意常数的解, 称为方程的**通解**.

满足初值条件 $y(x_0)=y_1, y'(x_0)=y_2,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_n$ 的解

$y=\phi(x)$ 称为微分方程的**定解**.

任何一个特定的解, 都称为方程的**特解**.

注意区分概念: 通解, 特解, 所有解的差别

关于通解

1. 通解形式不唯一, 比如$y = e^c e^x$ 与 $y = ce^x$, 从定义上都是 $y' = y$ 的通解, 但前者只包含部分解, 而后者包含了方程的所有解.
2. 求通解时, 尽量使之包含尽可能多的解.
3. 通解在局部上确实包含了方程全部的解.
4. 通解中的所有常数都取定时, 通解就成了特解.
5. 通解中常数独立性的定义其实就是高阶方程解空间的维数的问题. 这些参数独立意义上就是这些参数后所乘项是独立的函数.

自治方程与非自治方程

一阶微分方程的常用表达形式:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

如果上式中的右端项 $f(x, y)$ 不含自变量 x, 则称该方程为自治的 (驻定的). 否则称为非自治的 (非驻定).

物理系统中, 自变量通常是时间. 这时自治系统通常表示其中的物理规律不随时间变化的系统, 也就是说空间中每一点的性质在过去, 现在和将来都是一样的.

理论上, 所有的动力系统都可以转化为自治系统 (维度增加).

线性方程

定义 7.2 (线性方程)

若微分方程 $F(x; y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$ 中的函数 $F(x; y, y', \cdots, y^{(n)})$ 关于未知函数的各阶导数 $y,\ y',\ \cdots,\ y^{(n)}$ 是线性函数, 则称微分方程为**线性方程**. 否则称之为**非线性方程**.

线性方程

定义 7.2 (线性方程)

若微分方程 $F(x; y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$ 中的函数 $F(x; y, y', \cdots, y^{(n)})$ 关于未知函数的各阶导数 $y,\ y',\ \cdots,\ y^{(n)}$ 是线性函数，则称微分方程为**线性方程**. 否则称之为**非线性方程**.

以此可以将微分方程分为**线性方程**与**非线性方程**.

上海大学 SHANGHAI UNIVERSITY

线性方程的一般形式

n 阶线性方程的一般形式:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x)y = f(x) \tag{1}$$

线性方程的一般形式

n 阶线性方程的一般形式:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x)y = f(x) \tag{1}$$

当方程 (1) 中的 $f(x)$ 恒等于 0 时, 称之为齐次线性方程; 否则称为非齐次线性方程.

线性方程的一般形式

n 阶线性方程的一般形式:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x)y = f(x) \tag{1}$$

当方程 (1) 中的 $f(x)$ 恒等于 0 时, 称之为齐次线性方程; 否则称为非齐次线性方程.

问题

请写出一阶齐次线性方程的一般表达式.

对于一阶方程而言，我们习惯上把它写成 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ 的形式，这种可以把函数的微分用 x 和 y 的函数显式表示出来的方程，我们称之为**显式方程**. 否则称为**隐式方程.**

最简单的方程莫过于一阶齐次线性方程 $\frac{dy}{dx} + a(x)y = 0$. 习惯上我们把它写成下面的显示形式:

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y \tag{2}$$

对于一阶齐次线性方程有

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y \Longrightarrow \frac{dy}{y} = p(x)dx, \quad (y \neq 0).$$

两端取不定积分得:

$\ln|y| = \int p(x)dx + c \Longrightarrow y = ce^{\int p(x)dx}$, c 为任意非零常数.

容易验证, $y = 0$ 也是方程的解. 所以方程所有的解为

$$\boxed{y = ce^{\int p(x)dx}, \ c \text{ 为任意常数.}}$$

分离变量法

观察上述求解一阶齐次线性方程的过程，可见其中的关键在于**能够将变量分离，从而两端可以取不定积分**．显然，只要方程可以进行分离变量，上述方法就可行，所以分离变量法不止局限于一阶齐次线性方程．

变量可分离方程

凡是形如 $\dfrac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ 的方程，均可应用分离变量法求解．这种方程统称为**变量可分离方程**．

例 1. 求解方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

隐式通解为: $x^2 + y^2 = c$, c 为一正常数.

例 2. 求解 Malthus 模型:

人口增长率为常数: $N(t+\Delta t)-N(t)=rN(t)\Delta t$,
$\Rightarrow\ \frac{dN}{dt}=rN.\longrightarrow$ 变量分离方程.

$$N=ce^{rt}$$

满足初值条件 $N(t_0)=N_0$ 的解为:

$$N(t)=N_0e^{r(t-t_0)}$$

例 3. 求解 Logistic 模型:

$$\frac{dN}{dt} = r(1 - \frac{N}{N_m})N, \quad N(t_0) = N_0$$

分离变量: $rdt = \frac{N_m dN}{(N_m - N)N} = \frac{dN}{N} + \frac{dN}{N_m - N}$

$$\Rightarrow N = \frac{N_m}{1 + c_1 e^{-rt}}, \quad c_1 = e^{-c} > 0.$$

$$\Rightarrow N = \frac{N_m}{1 + (\frac{N_m}{N_0} - 1)e^{-r(t - t_0)}}$$

例 4. 齐次线性方程:

求方程 $\frac{dy}{dx} = p(x)y$ 的通解. 其中 $p(x)$ 是 x 的连续函数.

解: 分离变量: $\frac{dy}{y} = p(x)dx$.

注: $y \equiv 0$ 是丢失解

两端积分: $\ln|y| = \int p(x)dx + c_1$, c_1 为任意常数.

$\Rightarrow y = \pm e^{c_1} e^{\int p(x)dx} = ce^{\int p(x)dx}$, $c \neq 0$

因为 $y \equiv 0$ 也是解, 所以通解为:

$$y = ce^{\int p(x)dx}, \quad c\text{为任意常数}$$

1. 齐次方程

形如 $\dfrac{dy}{dx} = f(\dfrac{y}{x})$ 的方程, 称为**齐次方程**.

对于齐次方程, 只需做变量替换 $u = \dfrac{y}{x}$, 即可将其化为变量可分离方程:

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}$$

例 6. 齐次方程

求方程 $x\frac{dy}{dx}+2\sqrt{xy}=y,\ (x<0)$ 的通解.

解: 原式 $\Rightarrow \frac{dy}{dx}-2\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{y}{x}$

令 $\frac{y}{x}=u$, 则 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

代入原式整理得: $\frac{du}{2\sqrt{u}}=\frac{dx}{x}$, 注: $u\equiv 0$ 是丢掉的解

$\Rightarrow \sqrt{u}=\ln|x|+c,\quad c$ 为任意常数

所以 $u=[\ln|x|+c]^2$, $\ln|x|+c>0$, 即 $x<-e^{-c}$

$\Rightarrow y=ux=x[\ln|x|+c]^2,\ x<-e^{-c}$

另外, 由 $u\equiv 0$ 得 $y\equiv 0$ 也是解.

上海大学 SHANGHAI UNIVERSITY

可化为变量可分离方程的方程

2. 分式线性方程

形如 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$ 的方程, 可经变量替换化为变量可分离方程.

分三种情况:

1. 直线重合: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k$
   方程化为 $\frac{dy}{dx} = k$. 其通解为 $y = kx + c$. c 为任意常数.
2. 直线平行不重合: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k \neq \frac{c_1}{c_2}$
   令 $u = a_2x + b_2y$, 则

$$\frac{du}{dx} = a_2 + b_2\frac{dy}{dx} = a_2 + b_2\frac{ku + c_1}{u + c_2}$$

   也是变量可分离方程.

可化为变量可分离方程的方程

3. 直线相交: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$
   (1) 交点在原点: $c_1 = c_2 = 0$.
   此时方程为其次方程, 可按齐次方程方法化为变量分离方程.
   (2) 交点不在原点: c_1, c_2 至少一个不为 0. 设两条直线的交点为 (α, β), 令

$$\begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases}$$

原方程化为

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a_1 X + b_1 Y}{a_2 X + b_2 y} = g(\frac{Y}{X})$$

为齐次方程.

例 7. 分式线性方程

求解: $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+1}{x+y-3}$.

解: 直线交点:

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

令 $\begin{cases} X = x - 1, \\ Y = y - 2. \end{cases}$ 则原方程化为齐次方程 $\frac{dY}{dX} = \frac{X-Y}{X+Y}$.

解得: $Y^2 + 2XY - X^2 = c$,

所以原方程的解为: $y^2 + 2xy - x^2 - 6y - 2x = c$, c 为任意常数.

一阶非齐次线性方程

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x) \tag{3}$$

的解与齐次方程 (2) 的解密切相关 (当 $q(x) \equiv 0$ 时, 就是齐次方程 (2) 的解).

齐次方程 (2) 的解 $y = ce^{\int p(x)dx}$ 中能够包含 $q(x)$ 的部分只能在常数 c 上, 所以猜测非齐次方程 (3) 的解的形式应为:

$$y = c(x)e^{\int p(x)dx} \tag{4}$$

常数变易法

将(4)带入非齐次方程 (3) 得:

$$c'(x) = e^{-\int p(x)dx} q(x)$$

所以 $c(x) = \int e^{-\int p(x)dx} q(x)dx + c$, c 为任意常数.

从而 $y = e^{p(x)dx}\left(\int e^{-\int p(x)dx} q(x)dx + c\right)$, c为任意常数

为非齐次方程 (3) 的通解.

非齐次方程解的结构

非齐次方程 (3) 的解

$$
\begin{aligned}
y =& e^{\int p(x)dx}\left(\int e^{-\int p(x)dx} q(x)dx + c\right) \\
=& ce^{\int p(x)dx} + e^{\int p(x)dx}\int e^{-\int p(x)dx} q(x)dx
\end{aligned}
$$

重要结论

非齐次方程的通解 = 齐次方程的通解 + 非齐次方程的一个特解

例 1. 非齐次方程的解

求解 $(x+1)\frac{dy}{dx}-ny=e^x(x+1)^{n+1}$

解: 原式 $\Rightarrow\ \frac{dy}{dx}-\frac{n}{x+1}y=e^x(x+1)^n$
首先求齐次方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{n}{x+1}y=0$ 的通解得

$$y=c(x+1)^n)$$

再利用常数变易法解的原方程的通解为:

$$y=(x+1)^n(e^x+c),c \text{ 为任意常数}$$

例 2. 非齐次方程的解

求方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x-y^2}$ 的解.

解: 原式$\Rightarrow$ $\frac{dx}{dy} = \frac{2x-y^2}{y} = \frac{2}{y}x - y$ 是关于函数 x 的线性方程.(失根)
首先求齐次方程 $\frac{dx}{dy} = \frac{2}{y}x$ 的通解得

$$x = cy^2$$

再利用常数变易法解的原方程的通解为:

$$x = y^2(c - \ln|y|)$$

另外容易验证 $y \equiv 0$ 也是原方程的解.

最简单的非线性方程——Bernoulli 方程:

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + r(x)y^n, \quad n \neq 0, 1. \tag{5}$$

它是由一个 "齐次线性方程"+"非线性项: $r(x)y^n$".

解法: 方程两端同时除以 y^n(失根 $y \equiv 0$), 然后做变量替换$u = y^{1-n}$, 将 (5) 化为线性方程:

$$\frac{du}{dx} = (1-n)p(x)u + (1-n)r(x).$$

例 1. 伯努利方程

解方程: $\frac{dy}{dx} = 6\frac{y}{x} - xy^2$

解: 伯努利型方程, 首先 $y \equiv 0$ 是方程的一个解.
当 $y \neq 0$ 时, 方程两边同时乘以 y^{-2} 得: $-\frac{d}{dx}(\frac{1}{y}) = 6\frac{1}{x}\frac{1}{y} - x$.
令 $u = \frac{1}{y}$ 得 $\frac{du}{dx} = -\frac{6}{x}u + x$,
解此线性方程得: $u = \frac{c}{x^6} + \frac{x^2}{8}$.
所以原方程解为: $y = (\frac{c}{x^6} + \frac{x^2}{8})^{-1}$.

从伯努利方程到黎卡提方程

进一步考虑如下形式的非线性方程:

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x) + r(x)y^n, \quad n \neq 0, 1$$

它由 "**非齐次线性方程**+**非线性项**" 组成.

黎卡提方程

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x) + r(x)y^2$$

Riccati: 若已知方程的一个解 $y = \phi(x)$, 则令 $y = u + \phi(x)$, 方程可化为 Bernoulli 方程 (齐次 $+$ 非线性项), 从而可解.

Daniel Bernoulli: 考虑形如 $\dfrac{dy}{dx} = x^\alpha + y^2$ 的方程.

结论: 当 $\dfrac{\alpha}{2\alpha+4}$ 为整数或∞ 时, 方程可通过有限次变量替换求解 (1724 年).

Liouville: 当 $\dfrac{\alpha}{2\alpha+4}$ 不是整数或∞ 时, 方程不能用初等解法求解 (1841 年).

一阶微分方程也可以写成对称的形式:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{6}$$

若存在一个二元函数$u(x,y)$, 使得

$$du(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy,$$

则称 (6) 为恰当方程. 其解为:

$$u(x,y) = c, \quad c \text{ 为任意常数.}$$

恰当方程

恰当方程的充要条件

方程 (6) 是恰当方程的充要条件为:

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}N(x,y).$$

当一个方程为恰当方程时, 利用分项组合的方法, 想办法把 $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ 写成全微分 $du(x,y)$ 的形式. 则方程 (6) 的解即为:

$$u(x,y)=c,\quad c\text{为任意常数}$$

例 1. 求方程的通解

$$(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$$

解: $M=3x^2+6xy^2, \quad N=6x^2y+4y^3$

$\Rightarrow M_y=N_x=12xy$, 所以是恰当方程.

$$\begin{aligned}\text{左端} &= 3x^2dx+6xy^2dx+6x^2ydy+4y^3dy\\ &= dx^3+dy^4+3(2xy^2dx+2x^2ydy)\\ &= d(x^3+3x^2y^2+y^4)\end{aligned}$$

所以原方程的通解为

$$x^3+3x^2y^2+y^4=c,\ c\ \text{为任意常数}$$

恰当方程

常用全微分公式

$$ydx + xdy = d(xy), \quad \frac{ydx - xdy}{y^2} = d(\frac{x}{y})$$

$$\frac{-ydx + xdy}{x^2} = d(\frac{y}{x}), \quad \frac{ydx - xdy}{xy} = d(\ln|\frac{y}{x}|)$$

$$\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = d(\arctan\frac{x}{y}), \quad \frac{ydx - xdy}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2}d(\ln|\frac{x-y}{x+y}|)$$

积分因子

若方程 (6) 不是恰当方程, 但是存在一个函数$\mu(x,y)$, 使得 $\mu(x,y)\big(M(x,y)dx+N(x,y)dy\big)=0$ 是恰当方程, 则称函数 μ 为方程 (6) 的**积分因子**.

Remark

理论上, 只要方程 (6) 可积, 则一定存在积分因子, 并且积分因子不唯一. 但是, 对于一般的积分因子来说, 很难找得到, 只能找到一些特殊的积分因子: 只含有一个变量的积分因子.

只含一个变量的积分因子

可求出的一元积分因子

方程 (6) 有只含 x 的积分因子 $\Leftrightarrow \dfrac{M_y - N_x}{N} = \phi(x)$ 此时,
$\mu(x) = e^{\int \phi(x)dx}$ 为其积分因子.
方程 (6) 有只含 y 的积分因子 $\Leftrightarrow \dfrac{M_y - N_x}{M} = \psi(y)$ 此时,
$\mu(y) = e^{-\int \psi(y)dy}$ 为其积分因子.

例 4. 用积分因子方法求解线性方程

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)$$

解: 原式 $\Rightarrow [P(x)y + Q(x)]dx - dy = 0$

$M(x,y) = P(x)y + Q(x), \quad N(x,y) = -1.$

$\frac{M_y - N_x}{N} = -P(x)$, 方程有只含 x 的积分因子 $\mu(x) = e^{-\int P(x)dx}$

方程两端同时乘以 $\mu(x)$ 得

$e^{-\int P(x)dx}P(x)ydx - e^{-\int P(x)dx}dy + e^{-\int P(x)dx}Q(x)dx = 0$

$\Rightarrow -d(e^{-\int P(x)dx}y) + e^{-\int P(x)dx}Q(x)dx = 0$

所以原方程的通解为:

$$y = e^{\int P(x)dx}\left(\int e^{-\int P(x)dx}Q(x)dx + c\right), \quad c \text{ 为任意常数}$$

例 6. 求方程的通解

$$ydx+(y-x)dy=0$$

法 1. 积分因子法: 因为 $\frac{M_y-N_x}{M}=\frac{2}{y}$

所以有积分因子 $\mu=e^{\int(-\frac{2}{y})dy}=\frac{1}{y^2}$

方程两端同时乘以该积分因子得:

$$\frac{1}{y}dx+\frac{1}{y}dy-\frac{x}{y^2}dy=0,\quad (\text{失根 } y\equiv 0)$$

$\Rightarrow d(\frac{x}{y})+d\ln|y|=0$

所以原方程的通解为

$$\frac{x}{y}+\ln|y|=c,\ c \text{ 为任意常数}$$

综合应用

法 2. 原式 $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x-y}$ 是齐次方程.

按照齐次方程的解法可解得其通解为

$$\frac{x}{y} + \ln|y| = c, \ c \text{ 为任意常数}$$

另外易验证 $y \equiv 0$ 也是原方程的解.

法 3. 原式 $\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - 1$ 是关于 x 的线性方程.

按照线性方程的解法可解得其通解为

$$\frac{x}{y} + \ln|y| = c,\ c \text{ 为任意常数}$$

另外易验证 $y \equiv 0$ 也是原方程的解.

法 4. 分项组合方法: 原式 $\Rightarrow ydx - xdy + ydy = 0.$

前两项有积分因子: $\mu = \frac{1}{y^2}$ 或 $\mu = \frac{1}{x^2}$, 而第二项有积分因子 $Q(y)$.

因此他们有公共的积分因子 $\mu = \frac{1}{y^2}$,

方程两端同时乘以该积分因子 (失根 $y \equiv 0$), 解得

$$\frac{x}{y} + \ln|y| = c, \ c \text{ 为任意常数}$$

较复杂的积分因子

P61 习题 2.3 中 2(11) 求通解:

$$x(4ydx+2xdy)+y^3(3ydx+5xdy)=0$$

解: 左端 $=4xydx+2x^2dy+3y^4dx+5xy^3dy$
$=2d(x^2y)+(3y^4dx+5xy^3dy)$

第一项有积分因子 $g_1(x^2y)$,

第二项有只与 x 有关的积分因子: $\mu(x)=x^{\frac{7}{5}}$

而 $\mu(x)(3y^4dx+5xy^3dy)=\frac{5}{4}d(x^{\frac{12}{5}}y^4)$,

所以第二项还有形如 $x^{\frac{7}{5}}g_2(x^{\frac{12}{5}}y^4)$ 的积分因子.

则原方程有形如 $g(x,y)=g_1(x^2y)=x^{\frac{7}{5}}g_2(x^{\frac{12}{5}}y^4)$ 的积分因子.

所以可以选取 $g_1(x)=x,\ g_2(x)=x^{\frac{1}{4}}$, 既得一积分因子 $g(x,y)=x^2y$. 由此积分因子既可解得原方程的通解为

$$(x^2y)^2+x^3y^5=c,\ c \text{ 为任意常数}$$

一阶方程

$$F(x;y,y')=0, \tag{7}$$

若不能解出 y', 写成 $y'=f(x,y)$ 的形式, 即无法表示成显式形式时, 如何求解微分方程?

可解出 x, 或者 y 的隐式方程

若方程可写成 $y=f(x,y')$ 或者 $x=f(y,y')$ 的形式, 令 $p=y'$, 并对方程两端求导, 化为关于 p 的一阶显式方程. 然后按相应的显式方程求解即可.

可解出 y 或 x 的情况

例 2. 可解出 y 的隐式方程

$$y = (\frac{dy}{dx})^2 - x\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2}$$

例 3. 可解出 x 的隐式方程

$$(\frac{dy}{dx})^3 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

即可解出 x 也可解出 y, 试用两种方法计算之.

若方程 (7) 中, x, y, y' 都不能解出, 但是函数 $F(x; y, y')$ 只与两个变量有关时, 即方程 (7) 是 $F(x, y') = 0$ 或者 $F(y, y') = 0$ 的形式时.

$F(x, y') = 0$ 或者 $F(y, y') = 0$

将方程的参数表示写出来, 然后带入恒等式 $dy = y'dx$ 中, 化为关于 y 与 t 的一阶显式方程, 或者 x 与 t 的一阶显式方程, 然后按照显式方程的方法求解之.

例 4. 不显含 y 的隐式方程

$$x^3 + (y')^3 - 3xy' = 0$$

例 5. 不显含 x 的隐式方程

$$y^2(1-y')=(2-y')^2$$

例 1. 高次项非线性方程

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}+4x^2y^2+1=0$$

例 2. 指数项非线性

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}(x^2 e^y - 1)$$

例 3. 高次非线性

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+y)^2+y}{x}$$

引进适当变换

例 4. 分数次非线性

$$\frac{dy}{dx} = 6x\sqrt{x^4 + y}$$

引进适当变换

例 5. Riccati 方程

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{2}{x^2}$$

例 6. 伯努利方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - y^2}{x^2 - 2xy}$$

例 7. 恰当方程/变量替换

$$(\ln x + xy^2)dx + 2x^2ydy = 0$$

例 8. 变量可分离方程

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0$$

例 9. 积分因子

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

若 M,N 为同次齐次函数 (如同为 m 次). 且 $xM+yN\neq 0$.

求证: $\mu=\frac{1}{xM+yN}$ 是其积分因子.

齐次: 作为 x,y 两个变量的函数, 每一项的次数是一样的. 比如 2 次齐次函数: $M(x,y)=x^2+xy$. 具有性质: $M(ax,ay)=a^2M(x,y)$.

作业

作业

P42, 习题 2.1	1, (2), (5), (10); 2,(1), (3), (6); 3
P48, 习题 2.2	1, (1), (2), (5), (10), (15); 7(1), (3)
P60, 习题 2.3	1,(1), (3); 2,(1), (4), (8), (10)
P69, 习题 2.4	1,(1), (4)