常 微 分 方 程

第五章 线性微分方程组

上海大学数学系

QQ 群: 104203390

2018 年 1 月 27 日

内容提要

内容提要

内容提要

内容提要

1. 线性方程组的矩阵表示

含有 n 个未知函数的线性微分方程组的一般表达式:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots a_{1n}(t)x_n \quad + f_1(t) \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases} \tag{1}$$

其中, $a_{ij}(t)$, $f_i(t)$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续.
若 $f_i(t) = 0$, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$, 则方程组 (1) 称为齐次线性微分方程组.
否则称为非齐次的.

线性方程组的矩阵表示

记 $A(t)=\begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$,

$$\overrightarrow{x}=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T,\ \overrightarrow{x}'=\left(x_1',x_2',\cdots,x_n'\right)^T$$

$$\overrightarrow{f}(t)=\left(f_1(t),f_2(t),\cdots,f_n(t)\right)^T.$$

则上述方程组(1)可表示为:

$$\overrightarrow{x}'(t)=A(t)\overrightarrow{x}+\overrightarrow{f}(t). \tag{2}$$

定义 1 (矩阵函数的连续性与可微性)

称矩阵函数 $A(t)$ 是连续的, 若它的每个元素都是连续函数;
称矩阵函数 $A(t)$ 是可微的, 若它的每个元素都是可微函数:

$$A'(t) = \left(a'_{ij}(t)\right)_{m\times n}$$

矩阵函数的性质:

1. $[A(t)+B(t)]' = A'(t)+B'(t)$;
2. $[A(t)\cdot B(t)]' = A'(t)B(t)+A(t)B'(t)$;
3. $[A(t)\cdot \overrightarrow{u}(t)]' = A'(t)\overrightarrow{u}(t)+A(t)\overrightarrow{u}'(t)$.

定义2 (矩阵函数的积分)

称矩阵函数 $A(t)$ 是可积的，若它的每个元素都是可积函数：

$$\int_a^b A(t)dt = \left(\int_a^b a_{ij}(t)dt\right)_{m\times n}$$

方程组的解: 设方程组 $\vec{x}' = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t)$ 的定义域为 $a \le t \le b$, 则在区域 $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ 上的解是定义在 $[\alpha,\beta]$ 上满足该方程组的连续可微向量 $\vec{u}(t)$. 若 $\vec{u}(t)$ 还满足初值条件 $\vec{x}(t_0) = \vec{\eta}$, 则称之为初值问题的解.

高阶方程的矩阵表示

考虑 n 阶方程初值问题:

$$\begin{cases} x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = f(t) \\ x(t_0) = \eta_1, x'(t_0) = \eta_2, \cdots, x^{(n-1)}(t_0) = \eta_n \end{cases} \tag{3}$$

其中 $a_i(t)$, $f(t)$ 均为连续函数, η_i 为已知常数.

高阶方程的矩阵表示

令 $x_1 = x, x_2 = x', \cdots, x_n = x^{(n-1)}$, 则初值问题 (3) 等价于如下方程组的初值问题:

$$\begin{cases} \vec{x}\,' = A(t)\vec{x} + \vec{f} \\ \vec{x}(t_0) = \vec{\eta} \end{cases} \tag{4}$$

其中 $\vec{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$, $\vec{f} = [0, 0, \cdots, 0, f(t)]^T$,

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

初值问题解的存在唯一性

初值问题

$$\begin{cases} \vec{x}'(t) = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t), \\ \vec{x}(t_0) = \vec{\eta}. \end{cases} \tag{5}$$

定理 1 (解的存在唯一性)

当 $A(t)$ 及 $\vec{f}(t)$ 均连续时，初值问题(5)的解存在且唯一.

本节目的 (重要结论)

包含 n 个未知函数的一阶齐次线性方程组(6)有且只有 n 个线性无关解.

即其所有解构成一个 n 维的线性空间, 称之为(6)的解空间.

齐次方程解的叠加性

齐次方程组

$$\vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}. \tag{6}$$

齐次方程组(6)的解具有**叠加性**. 即齐次方程组解的线性组合仍然是方程组的解.

由此可知齐次方程组所有的解构成一向量空间, 称之为解空间.

线性相关

定义 3 (向量函数的线性相关)

定义于 $[a,b]$ 上的 m 个向量函数 $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \cdots, \vec{x}_m(t)$ 称为是线性相关的, 若存在不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 使得

$$c_1\vec{x}_1(t) + c_2\vec{x}_2(t) + \cdots + c_m\vec{x}_m(t) = 0 \quad \forall t \in [a,b].$$

否则, 称 $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \cdots, \vec{x}_m(t)$ 线性无关.

朗斯基行列式

定义4 (向量函数的朗斯基行列式)

设 $\vec{x}_i(t) = \big(x_{i1}(t), x_{i2}(t), \cdots, x_{in}(t)\big)^T$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 为定义于 $[a, b]$ 上的 n 个向量函数. 行列式:

$$W(t) = \begin{vmatrix} \vec{x}_1(t) & \vec{x}_2(t) & \cdots & \vec{x}_n(t) \end{vmatrix}$$

称为 $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \cdots, \vec{x}_n(t)$ 的朗斯基行列式.

朗斯基行列式与线性相关

下面来看线性相关与朗斯基行列式之间的关系:

定理3 (相关性的行列式描述)

若函数向量 $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \cdots, \vec{x}_n(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上线性相关, 则

$$W[\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \cdots, \vec{x}_n(t)] \equiv 0, \ \forall t \in [a,b].$$

该定理的逆定理不成立.

方程组解的线性相关性

定理4 (解的线性相关性)

若齐次方程组(6)的解 $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \cdots, \vec{x}_n(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上线性无关，则 $W[\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \cdots, \vec{x}_n(t)] \neq 0,\ \forall t \in [a,b]$.

注: 定理中的朗斯基行列式不等于 0, 是指对所有的 $t \in [a,b]$, 都有 $W(t) \neq 0$. 即恒不等于 0.

结合定理 3 和定理 4 知:

相关性与行列式

对于齐次方程(6)的解而言, 其朗斯基行列式是否等于零跟他们是否线性相关是一致的. 并且其朗斯基行列式要么恒等于 0, 要么恒不等于 0. 因此要验证解是否线性相关, 只需在一点处看其朗斯基行列式是否等于 0 即可.

齐次方程组的无关解的最大个数

给定 n 组初值条件: $\vec{x}_i(t_0) = \vec{e}_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$
根据解的存在唯一性定理 1 知: 存在齐次方程 (6) 的 n 个解 $\vec{x}_i(t),\ i = 1, 2, \cdots, n$ 分别满足上述 n 组初值条件. 并且

$$W[\vec{x}_1(t_0), \vec{x}_2(t_0), \cdots, \vec{x}_n(t_0)] = |\mathrm{E}| = 1 \neq 0.$$

所以解 $\vec{x}_i(t),\ i = 1, 2, \cdots, n$ 线性无关.

结论:

含 n 个未知函数的齐次方程组(6)至少有 n 个线性无关的解.

齐次方程组的无关解的最大个数

定理5

若 $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \cdots, \vec{x}_n(t)$ 是齐次方程组 (6) 的 n 个线性无关解. 则其任一解 $\vec{\varphi}(t)$ 均可表示为:

$$\vec{\varphi}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{x}_i(t), \quad c_i \text{为常数}.$$

由此可知, 方程组(6)的所有解构成一个 n 维的线性空间. 要求(6)的所有解, 只要找到 n 个线性无关的解即可. 方程组(6)的 n 个线性无关的解称为它的一个**基础解系**, 由基础解系构成的矩阵, 称为方程组的**基解矩阵**.

上海大学 SHANGHAI UNIVERSITY

方程组解的矩阵表示

定理 1* 方程组(6)一定存在一个基解矩阵 $\Phi(t)$, 若 $\vec{\psi}(t)$ 是(6)的任意解, 则 $\vec{\psi}(t) = \Phi(t) \cdot \vec{c}$. 其中 $\vec{c}$ 为一 n 维列向量.

定理 2* 齐次方程组(6)的解矩阵 $\Phi(t)$ 是基解矩阵的充要条件是 $\det \Phi(t) \neq 0 (a \leq t \leq b)$. 而且对 $\forall t_0 \in [a, b]$,

$$\det \Phi(t_0) \neq 0 \Leftrightarrow \det \Phi(t) \neq 0, \ \forall t \in [a, b].$$

推论 1* 若 $\Phi(t)$ 是(6)的基解矩阵, $C_{n\times n}$ 是非奇异矩阵, 则 $\Psi(t)=\Phi(t)\cdot C_{n\times n}$ 也是基解矩阵.

推论 2* 若 $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ 是(6)的两个基解矩阵, 则存在一个非奇异矩阵 $C_{n\times n}$ 使得 $\Psi(t)=\Phi(t)\cdot C$.

结论(非齐次方程组解的结构)

非齐次方程组(2)的通解 = 相应齐次方程组(6)的通解 + 它自身的一个特解.

由此可知, 要求非齐次方程组(2)的所有解, 需要解决下面两个问题:

1. 求相应齐次方程的通解 (基础解系, 基解矩阵);
2. 求该非齐次方程的一个特解.

已知齐次方程组(6)的基解矩阵, 求非齐次方程组(2)的特解的方法——常数变异公式.

设 $\Phi(t)$ 是齐次方程 (6) 的一个基解矩阵, 则有常数变易法得 (2) 的一个特解为:

$$\overrightarrow{\varphi}(t) = \Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(s)^{-1}\overrightarrow{f}(s)ds. \tag{7}$$

所以方程(2)的通解为:

$$\overrightarrow{x}(t) = \Phi(t)\overrightarrow{c} + \Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)\overrightarrow{f}(s)ds. \tag{8}$$

由非齐次方程(2)的通解公式(8)知:

结论(满足特定初值条件的特解)

非齐次方程(2)满足初值条件 $\overrightarrow{\varphi}(t_0)=\overrightarrow{\eta}$ 的解为:

$$\overrightarrow{\varphi}(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\overrightarrow{\eta}+\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)\overrightarrow{f}(s)ds. \tag{9}$$

公式(9)称为常数变异公式.

高阶方程的常数变异公式

将方程组的特解公式(7)应用于 n 阶非齐次线性方程

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_0(t)x=f(t),$$

可得 n 阶线性方程的常数变易公式:

$$x_p(t)=\sum_{k=1}^{n}x_k(t)\int_{t_0}^{t}\frac{W_k[x_1(s),\cdots,x_n(s)]}{W[x_1(s),\cdots,x_n(s)]}f(s)ds \tag{10}$$

$$=\int_{t_0}^{t}\frac{W(s,t)}{W(s)}f(s)ds \tag{11}$$

高阶方程的常数变异公式

其中 $W_k[x_1(s),\cdots,x_n(s)]$ 是将朗斯基行列式 $W[x_1(s),\cdots,x_n(s)]$ 的第 k 列代之以 $(0,\cdots,0,1)^T$ 后所得的行列式.

$W(s,t)$ 是将朗斯基行列式 $W[x_1(s),\cdots,x_n(s)]$ 的第 n 行代之以 $\big(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)\big)$ 后所得的行列式.

特别的 2 阶非齐次线性方程的常数变易公式为:

$$x_p(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{x_1(s)x_2(t)-x_1(t)x_2(s)}{W(s)}f(s)ds \tag{12}$$

例 1 (常数变易法)

验证 $\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$ 是方程组:

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}$$

的基解矩阵. 并求初值问题的解:

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

例 3 (常数变易法)

试求方程 $x'' + x = \tan t$ 的一个特解.

解: 对应齐次方程 $x'' + x = 0$ 的基本基本解组为 $x_1(t) = \cos t$, $x_2(t) = \sin t$. 直接利用常数变易公式(12)得特解:

$$x_p(x) = \sin t - \cos t \ln|\sec t + \tan t|$$

因为 $\sin x$ 是对应齐次方程的解, 所以 $-\cos t \ln|\sec t + \tan t|$ 也是方程的一个特解.

二. 常系数齐次方程组的基解矩阵

本节来研究如何求解常系数齐次线性方程组

$$\overrightarrow{x}' = A\overrightarrow{x} \tag{13}$$

的标准基解矩阵 $\exp At$.

定义. 矩阵指数 e^A 定义为:

$$\exp A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = E + A + \frac{A^2}{2} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots$$

规定 $A^0 = E$, $0! = 1$. 若 A 为零矩阵, 定义 $\exp 0_{n\times n} = E$.

性质:

1. 当 $AB = BA$ 时, $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$;
2. 矩阵 e^A 是可逆矩阵, 其逆矩阵即为 e^{-A};
3. 相似变换: $e^{T^{-1}AT} = T^{-1}e^AT$;

定理6 (标准基解矩阵)

矩阵 $\Phi(t) = \exp At$ 是常系数齐次线性方程组(13) 的基解矩阵, 且满足

$$\Phi(0) = \mathrm{E}.$$

满足 $\Phi(0) = \mathrm{E}$ 的基解矩阵, 称为**标准基解矩阵**.

注: 满足初值条件 $\vec{x}(0) = \vec{\eta}$ 的特解为 $\vec{\varphi}(t) = e^{At} \cdot \vec{\eta}$.

例 1 (A 为对角矩阵的情况)

若 $A = diag(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 求 $\vec{x}' = A\vec{x}$ 的标准基解矩阵 $\exp At$.

例 2 (可分解为对角的情况)

求 $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}$ 的标准基解矩阵 $\exp At$.

4. 一般情况下标准基解矩阵的计算 I

当矩阵 A 不是上述特例的形式 (对角阵 & 次对角单位阵) 时, 可以经过相似变换把 A 化成 Jordan 标准形, 再利用上述特例的形式计算 $\exp At$.

$$e^{At} = e^{PJP^{-1}t} = Pe^{Jt}P^{-1} = P\begin{bmatrix} e^{J_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{J_m} \end{bmatrix}P^{-1} \tag{14}$$

由此可知需要计算矩阵 A 的 Jordan 标准形以及变换矩阵 P.

Note. 这样得到的 Pe^{Jt} 正是第二种方法中的基解矩阵 $\Phi(t)$, 而 P^{-1} 正是 $\Phi^{-1}(0)$.

Jordan 标准形需要计算矩阵的特征值 (及其重数) 与特征向量. 而变换矩阵 P 也正是由特征向量及广义特征向量组成: 设 $P=(P_1,\cdots,P_m)$, 其中 P_i 是与 J_i 有相同列的列子块. 由 $P^{-1}AP=J$ 得 $AP=PJ$, 即

$$A(P_1,\cdots,P_m)=(P_1,\cdots,P_m)\begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_m \end{bmatrix} \tag{15}$$

即

$$A\cdot P_i=P_i\cdot J_i,\ \ i=1,\cdots,m.$$

设 J_i 为特征值 λ_i 对应的 k 阶 Jordan 字块, $P_i = (\vec{p}_i^{\,1}, \cdots, \vec{p}_i^{\,k})$. 则

$$A(\vec{p}_i^{\,1}, \cdots, \vec{p}_i^{\,k}) = (\vec{p}_i^{\,1}, \cdots, \vec{p}_i^{\,k}) \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

所以有

$$(A - \lambda_i E)\vec{p}_i^{\,1} = 0, \ (A - \lambda_i E)\vec{p}_i^{\,j} = \vec{p}_i^{\,j-1}, j = 2, \cdots, k.$$

即

$$(A - \lambda_i E)^j \vec{p}_i^{\,j} = 0, \ j = 2, \cdots, k.$$

注意: 变换矩阵 P 的列向量排列有序; 每个广义特征向量都不唯一.

上海大学 SHANGHAI UNIVERSITY

4. 一般情况下标准基解矩阵的计算 II

$$\exp At = \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(0) \tag{16}$$

由此, 需要求解基解矩阵 $\Phi(t)$, 即求 n 个线性无关解.
类比于线性方程的解是指数函数的结果, 我们来寻求方程组形如 $\vec{\varphi}(t) = e^{\lambda t}\vec{c}$ 的解向量. 代入原方程组整理得

$$(\lambda E - A)\,\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$$

即 λ 为矩阵 A 的特征值, $\overrightarrow{c}$ 为相应的特征向量.

求矩阵 A 的特征根与特征向量.

特征方程 $|A-\lambda E|=0$ 的解称为矩阵 A 的特征根.

方程组 $(A-\lambda E)\vec{v}=0$ 的非零解 $\vec{v}$ 称为矩阵 A 相应于特征根 λ 的特征向量.

广义特征向量

设 λ_i 为矩阵 A 的 k 重特征根, 则方程组

$$(A-\lambda_i E)^k \overrightarrow{v} = 0 \tag{17}$$

的非零解 $\overrightarrow{v}$ 称为 “相应于特征根 λ 的广义特征向量”.
然后利用(17)寻求以这些广义特征向量 $\overrightarrow{v}$ 为初值的特解:

$$\overrightarrow{\varphi}(t) = e^{At}\overrightarrow{v} = e^{\lambda_i E t} e^{(A-\lambda_i E)t}\overrightarrow{v}.$$

做题步骤总结

1. 写出方程组 (13) 对应的系数矩阵 A;
2. 计算矩阵 A 的特征值 λ_i 与特征向量 $\vec{v}_i$ (广义特征向量);
3. 根据特征值与特征向量来求方程组对应的解

$$\vec{\varphi}_i(t) = \exp At \cdot \vec{v}_i = e^{\lambda_i t} e^{(A-\lambda_i E)t} \vec{v}_i, \ i = 1, 2, \cdots, n;$$

4. 写出基解矩阵 $\Phi(t) = \left(\vec{\varphi}_1(t), \vec{\varphi}_2(t), \cdots, \vec{\varphi}_n(t)\right)$;
5. 利用公式 $\exp At = \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(0)$ 求标准基解矩阵 $\exp At$;
6. 则满足初值条件 $\vec{\phi}(0) = \vec{\eta}$ 的解为 $\vec{\phi}(t) = \exp At \cdot \vec{\eta}$.

Note. 相对于第一种方法这里无需考虑特征向量的排列顺序!

例题

例 5

求方程组 $\vec{x}' = A\vec{x}$ 的标准基解矩阵 $\exp At$.

其中 $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

例 6

求方程组 $\vec{x}' = A\vec{x}$ 满足初值条件 $\vec{\varphi}(0) = \vec{\eta}$ 的解.

其中 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

例 7

求方程组 $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2' = 2x_1 + x_3 \\ x_3' = x_1 - x_2 + 2x_3 \end{cases}$ 满足初值条件 $\vec{\varphi}(0) = (0, 0, 1)^T$ 的解,

并求标准基解矩阵 $\exp At$.

解:

1. 写出系数矩阵: $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$
2. 特征值: 解 $|A - \lambda E| = 0 \xrightarrow{\text{得到特征值}} \lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 2.$
3. 特征向量: 解 $(A - \lambda_1 E)\vec{v} = 0 \xrightarrow{\text{得特征向量}} \vec{v}_1 = (0, 1, 1)^T.$

4. 解 $(A-\lambda_2 E)^2\overrightarrow{v}=0 \xrightarrow{\text{得广义特征向量}} \begin{cases} \overrightarrow{v}_2=(0,1,1)^T, \\ \overrightarrow{v}_3=(0,0,1)^T. \end{cases}$

5. 对应方程的解: $\begin{cases} \overrightarrow{\varphi}_1(t)=e^{\lambda_1 t}\overrightarrow{v}_1=e^t(0,0,1)^T \\ \overrightarrow{\varphi}_2(t)=e^{\lambda_2 t}\overrightarrow{v}_2=e^{2t}(1,1,0)^T \\ \overrightarrow{\varphi}_3(t)=e^{\lambda_3 t}[E+(A-\lambda_3 E)t]\overrightarrow{v}_3 \\ \qquad\quad =e^{2t}(t,t,1)^T \end{cases}$

6. 基解矩阵: $\Phi(t)=[\overrightarrow{\varphi}_1(t),\overrightarrow{\varphi}_2(t),\overrightarrow{\varphi}_3(t)]=\begin{bmatrix} 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ e^t & e^{2t} & te^{2t} \\ e^t & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$

7. 标准基解矩阵:

$$\exp At = \Phi(t)\cdot\Phi^{-1}(0) = \begin{bmatrix} (1+t)e^{2t} & -te^{2t} & te^{2t} \\ -e^t + (1+t)e^{2t} & e^t - te^{2t} & te^{2t} \\ e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}$$

8. 满足初值条件 $\overrightarrow{\varphi}(0) = \overrightarrow{\eta} = (0,01)^T$ 的特解为:

$$\overrightarrow{\varphi}(t) = \exp At \cdot \overrightarrow{\eta} = e^{2t}(t,t,1)^T$$

例 8 (三角矩阵)

若矩阵 $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, 试求 $\exp At$.

解: 注意到 $n = 5, \lambda = -4$ 是矩阵 A 的 5 重特征值, 且 $(A + \lambda E)^3 = 0$. 所以

$$\begin{aligned} \exp At =& \exp(-4Et)\exp(A+4E)t = e^{-4t}\exp(A+4E)t \\ =& e^{-4t}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}(A+4E)^k = e^{-4t}\sum_{k=0}^{2}\frac{t^k}{k!}(A+4E)^k \end{aligned}$$

例 1 (消元法)

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2, & (18) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = \dfrac{y_2^2}{y_1}. & (19) \end{cases}$$

解:

考虑如下方程组:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x; y_1, y_2, \cdots, y_n), \; i = 1, 2, \cdots, n \tag{20}$$

定义 1 (首次积分)

对方程组 (20), 非常值函数 $\psi(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 在区域 D 内有一阶连续偏导数. 若把方程组的任一组解 $y_i = \varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 代入函数 $\psi(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$, 都有 $\psi\big(x, \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)\big)$ 为一常数. 则称 $\psi(x, y_1, \cdots, y_n) = c$ 为方程的一个首次积分. 有时也简称函数 $\psi(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 为首次积分.

注: ψ 是在解上取常数的非常值 C^1 函数. 求解方程组(20)既是寻找 n 个独立的首次积分.

首次积分的性质

定理1 (首次积分的判别法)

若函数 $\varphi(x, y_1, \cdots, y_n)$ 不是常数, 在区域 D 内有连续的一阶偏导数, 则 $\varphi(x, y_1, \cdots, y_n) = c$ 是(20)的首次积分 $\Leftrightarrow$ 在区域 D 内, 恒成立

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} f_2 + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial y_n} f_n = 0$$

注: 由定理可知, 在方程组(20)的解曲线上, φ 为常数.

定理2 (首次积分消元法)

若已知(20)的一个首次积分, 则可使(20)的求解问题转化为含 $n-1$ 个方程的微分方程组的求解问题.

注: 因为 $\varphi(x, y_1, \cdots, y_n) = c$ 是一个首次积分, 则必有某个 y_i 使得 $\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \neq 0$, 否则由定理1知 $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$. 所以 φ 是个常数. 这与 $\varphi = c$ 是首次积分矛盾. 不妨设 $\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \neq 0$. 由隐函数定理得 $y_1 = f(x, y_2, \cdots, y_n, c)$. 代入(20)可得一个只含 $n-1$ 个方程的方程组.

定理3 (独立首次积分与通解)

若已知 $\varphi_i(x, y_1, \cdots, y_n) = c_i, i = 1, \cdots, n$ 是(20)的 n 个独立的首次积分, 即其雅可比行列式 $\frac{D(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)}{D(y_1,\cdots,y_n)} \neq 0$, 则由其所确定的隐函数组 $y_i = \psi_i(x, c_1, \cdots, c_n)$ 是(20)的通解.

注: 将 y_i 代入首次积分并对 x 求导得:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1}\psi_1' + \cdots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_n}\psi_n' = 0, \quad (i = 1, \cdots, n). \tag{21}$$

另一方面, 由首次积分的充要条件有

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1}f_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_n}f_n = 0, \quad (i = 1, \cdots, n). \tag{22}$$

上海大学 SHANGHAI UNIVERSITY

首次积分的性质

由(21)与(22)可得

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1}(\varphi_1' - f_1) + \cdots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_n}(\varphi_n' - f_n) = 0, \quad (i = 1, \cdots, n).$$

再由其雅可比行列式不等于 0 知 $\varphi_i' = f_i$. 即 φ_i 是方程组的解.

例 1 (解方程组)

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2 - z^2} & (23) \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{2xz}{x^2 - y^2 - z^2}. & (24) \end{cases}$$

例 2 (解方程组)

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \dfrac{x}{y_2} & (25) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = \dfrac{x}{y_1}. & (26) \end{cases}$$

例 3 (二体问题)

$$
\begin{cases}
x'' + \dfrac{\mu x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 & (27)\\
y'' + \dfrac{\mu y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 & (28)\\
z'' + \dfrac{\mu z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 & (29)
\end{cases}
$$

其中参数 $\mu = Gm_s > 0$ 为万有引力常数 G 与太阳质量 m_s 的乘积.

初值条件: $$\begin{cases} x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0,\ z(t_0) = z_0, \\ x'(t_0) = u_0,\ y'(t_0) = v_0,\ z'(t_0) = w_0. \end{cases} \qquad (30)$$

解: 由(27)–(29)可得首次积分

$$\begin{cases} zy' - yz' = c_1 & (31) \\ xz' - zx' = c_2 & (32) \\ xy' - yx' = c_3 & (33) \end{cases}$$

由此可得

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0.$$

从而可知地球的运动轨道在一个平面上.

不妨设地球的运动轨道在 $x-y$ 平面上, 即 $z=0$. 此时运动方程化为

$$\begin{cases} x''+\dfrac{\mu x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=0 & (34) \\ y''+\dfrac{\mu y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=0 & (35) \end{cases}$$

(34) $\cdot x' +$ (35) $\cdot y'$ 得

$$\frac{d}{dt}(x'^2+y'^2)-2\mu\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=0$$

从而有首次积分

$$x'^2+y'^2-\frac{2\mu}{\sqrt{x^2+y^2}}=c_4 \tag{36}$$

用极坐标表示上述首次积分(33)和(36):

$$
\begin{cases}
r'^2 + (r\theta')^2 - \dfrac{\mu}{r} = c_4 & (37) \\
r^2\theta' = -c_3 & (38)
\end{cases}
$$

由(37)和(38)得

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{c_4 + (\frac{\mu}{c_3})^2 - (\frac{c_3}{r} - \frac{\mu}{c_3})^2} \tag{39}$$

结合(38)可得

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm\frac{r^2}{c_3}\sqrt{c_4 + (\frac{\mu}{c_3})^2 - (\frac{c_3}{r} - \frac{\mu}{c_3})^2} \tag{40}$$

方程(40)是个关于 $\frac{c_3}{r}$ 的根式方程, 解得

$$\arccos\frac{\frac{c_3}{r}-\frac{\mu}{c_3}}{\sqrt{c_4+(\frac{\mu}{c_3})^2}}=\theta-c_5.$$

从而有

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_1)} \tag{41}$$

其中常数 $e=\frac{1}{\mu}\sqrt{c_3c_4+\mu^2}>0,\ p=\frac{c_3^2}{\mu}>0,\ \theta_1=c_5.$

有解析几何知识知, 函数(41)表示一条二次曲线. 参数 e 表示曲率, $e=0$ 时为圆, $0<e<1$ 时为椭圆, $e=1$ 时为抛物线, $e>1$ 时是双曲线.

初值条件(30)可以转化为极坐标下的初值条件

$$\begin{cases} r(\theta_0) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \\ \dfrac{dr}{d\theta}(\theta_0) = \dfrac{dr}{dt} \cdot \dfrac{dt}{d\theta}\Big|_{t=t_0} \end{cases} \tag{42}$$

其中 $\theta_0 = \theta(t_0)$. 另外注意到(40)在 t_0 处的取值, 可以确定常数 c_3 与 c_4 的关系, 即 c_3, c_4 不是独立的. 从而由初值条件(42)可以确定解(41)中的参数 p, e, θ_1.

作业 P244 习题 5.3

3 (1),(3);　4 (2),(3);　5 (3);　6 (1),(2).