常微分方程

第四章　高阶微分方程

李 新 祥　@ F516

上海大学数学系

QQ 课件群: 104203390

上海大学 SHANGHAI UNIVERSITY

内容提要

内容提要

内容提要

上海大学 SHANGHAI UNIVERSITY

内容提要

内容提要

n 阶线性方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)x = f(t) \tag{1}$$

定理1 (解的存在唯一性)

若方程 (1) 中的系数 $a_i(t)\,(i=1,2,\cdots,n)$ 及 $f(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 则对 $\forall t_0 \in [a,b]; x_0, x_1, \cdots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$, 方程 (1) 存在唯一的解 $x=\phi(t)$, 在 $[a,b]$ 上有定义, 且满足初值条件

$$\phi^{(i)}(t_0) = x_i, \;\; i = 0, 1, \cdots, n-1.$$

齐次方程解的叠加原理

齐次方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)x = 0 \tag{2}$$

的解具有如下叠加性:

定理2 (叠加原理)

若 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$ 是方程 (2) 的解, 则其线性组合 $c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_kx_k(t)$ 也是方程 (2) 的解. 其中 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 为任意常数.

定义1 (线性相关)

考虑定义在 $[a,b]$ 上的函数 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$, 若存在不全为零的一组常数 $c_1, c_2, \cdots, c_k$, 使得

$$c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_kx_k(t) \equiv 0, \quad \forall t \in [a,b].$$

则称 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$ 线性相关.

反之, 称之为线性无关.

函数 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$ 的朗斯基行列式定义为:

$$
\begin{aligned}
W(t) =& W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)] \\
\triangleq& \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_k(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_k'(t) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ x_1^{(k-1)}(t) & x_2^{(k-1)}(t) & \cdots & x_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

下面来看线性相关与朗斯基行列式之间的关系:

定理3 (相关性的行列式描述)

若函数 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$ 在区间 $[a, b]$ 上线性相关, 则

$$W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)] = 0.$$

该定理的逆定理不成立. 请看如下反例:

反例

考虑下面的函数:

$$x_1(t)=\begin{cases}t^2, & -1\leqslant t<0\\ 0, & 0\leqslant t\leqslant 1\end{cases},\quad x_2(t)=\begin{cases}0, & -1\leqslant t<0\\ t^2, & 0\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

直接计算知, $W[x_1(t),x_2(t)]\equiv 0$, 但由定义可证, $x_1(t),x_2(t)$ 线性无关.

方程解的线性相关性

定理4 (解的线性相关性)

若齐次方程 (2) 的解 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上线性无关, 则 $W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)] \neq 0, \ \forall t \in [a,b]$.

注: 定理中的朗斯基行列式不等于 0, 是指对所有的 $t \in [a,b]$, 都有 $W(t) \neq 0$. 即恒不等于 0.

重要结论

结合定理 3 和定理 4 知:

相关性与行列式

对于齐次方程(2)的解而言, 其朗斯基行列式是否等于零跟他们是否线性相关是一致的. 并且其朗斯基行列式要么恒等于 0, 要么恒不等于 0. 因此要验证解是否线性相关, 只需在一点处看起朗斯基行列式是否等于 0 即可.

给定 n 组初值条件:

$$x_i^{(j-1)}(t_0) = \delta_i^j, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n$$

根据解的存在唯一性定理 (定理 1) 知, 存在齐次方程(2)的 n 个解 $x_i(t)$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 分别满足上述 n 组初值条件.
并且 $W[x_1(t_0), x_2(t_0), \cdots, x_n(t_0)] = |I| = 1 \neq 0$. 所以解 $x_i(t)$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 线性无关.

结论 1:

n 次齐次线性方程(2)至少有 n 个线性无关的解.

方程 (2) 的无关解的个数

n 阶齐次线性方程(2)恰有 n 个线性无关的解.

定理5 (通解的结构)

若 $x_i(t)$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 是齐次方程(2)的 n 个线性无关解, 则方程(2)的通解可以表示为:

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t).$$

且该通解包含了方程(2)的所有解.

方程(2)的 n 各无关解, 称为它的一个基本解组 (不唯一). 朗斯基行列式 $W(t_0) = 1$ 的基本解组称为标准基本解组 (不唯一).

非齐次方程与齐次方程解的关系

1. 若 $\bar{x}(t)$ 是非齐次方程 (1) 的解, $x(t)$ 是相应的齐次方程 (2) 的解, 则 $\bar{x}(t)+x(t)$ 也是非齐次方程 (1) 的解.
2. 非齐次方程 (1) 的任意两解之差为相应的齐次方程 (2) 的解.
3. 非齐次方程 (1) 的通解 $=$ 相应齐次方程 (2) 的通解 $+$ 非齐次方程 (1) 的一个特解.

于是, 求非齐次方程的通解

$\Leftrightarrow$ ①求相应齐次方程的通解 $+$ ②求非齐次方程的一个特解.

非齐次方程的特解—常数变易法

若已知相应齐次方程的通解, 如何求非齐次方程的一个特解?

令 $x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)x_i(t)$, 解方程组:

$$\begin{cases} x_1(t)c_1'(t) + x_2(t)c_2'(t) + \cdots + x_n(t)c_n'(t) = 0 \\ x_1'(t)c_1'(t) + x_2'(t)c_2'(t) + \cdots + x_n'(t)c_n'(t) = 0 \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_1^{(n-1)}(t)c_1'(t) + x_2^{(n-1)}c_2'(t) + \cdots + x_n^{(n-1)}c_n'(t) = f(t) \end{cases} \tag{4}$$

求出 $c_i(t)$, 从而得到原方程的一个特解:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)x_i(t).$$

例 2 (常数变易法)

求方程 $tx'' - x' = t^2$ 在 $t \neq 0$ 上的所有解.

解: 对应齐次方程的基本解组为 $x_1(t) = 1,\ x_2(t) = t^2$.

应用所得计算公式(4)计算可得:

$$x(t) = c_1 + c_2 t^2 + \frac{1}{3}t^3,\ \text{其中}\ c_1, c_2\ \text{为任意常数}.$$

注意(4)式的使用条件!

对于 n 阶常系数齐次线性方程,

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n x = 0. \tag{5}$$

如何找出它的 n 个线性无关解?

因为 $n = 1$ 时, 方程 $\frac{dy}{dx} = ay$ 的解是 $y = ce^{ax}$, c为任意常数.

即 $n = 1$ 时, e^{ax} 为其基本解组.

所以猜测高阶的常系数齐次线性方程的解也应该是指数函数

$$y = e^{\lambda x} \tag{6}$$

的形式.

将函数 (6) 带入方程 (5) 得:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0. \tag{7}$$

该代数方程称为 (5) 的特征方程. 特征方程的根称为特征根.
多项式

$$F(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n \tag{8}$$

称为方程 (5) 的特征多项式.

指数函数解

由复变函数的知识知, 特征方程 (7) 在复数域范围内一定有 n 个根 (重根重复计算).

设 $\lambda_i, \ i = 1, 2, \cdots, n$ 为特征方程 (7) 的 n 个根.

一, 若特征方程有 n 个互异的根

则此时 $x_i(t) = e^{\lambda_i t}, \ i = 1, 2, \cdots, n$ 为方程 (5) 的 n 个线性无关解.

二, 若 $\lambda = a + ib$ 为特征方程的复根

因为特征方程 (7) 是实系数多项式方程, 若 $\lambda = a + ib$ 为方程的一个复根, 则 $\bar{\lambda} = a - ib$ 也是方程的根. 因此对应方程 (5) 的复值解 $x_{1,2} = e^{(a \pm ib)t} = e^{at}(\cos bt \pm \sin bt)$ 的实部与虚部 $e^{at}\cos bt$ 和 $e^{at}\sin bt$ 都是方程 (5) 相应于特征根 λ与$\bar{\lambda}$ 的实值解.

$$x_{1,2} = \begin{cases} e^{(a+ib)t} = e^{at}(\cos bt + i\sin bt) & \text{(9a)} \\ e^{(a-ib)t} = e^{at}(\cos bt - i\sin bt) & \text{(9b)} \end{cases}$$

上海大学 SHANGHAI UNIVERSITY

三, λ 为 k 重特征根

$x_i(t) = e^{\lambda t} t^i,\ i = 0, 1, 2, \cdots, k-1$ 为方程 (5) 相应于特征根 λ 的 k 个解.

综合: 若 $\lambda = a + ib$ 为 k 重复根, 则有相应的 $2k$ 个实值解:

$$\begin{cases} x_i(t) = t^i e^{at} \cos bt,\ i = 0, 1, 2, \cdots, k-1 \\ x_j(t) = t^j e^{at} \sin bt,\ j = 0, 1, 2, \cdots, k-1 \end{cases}$$

结论：常系数线性方程解题步骤

1. 求解特征方程 $F(\lambda)=0$ 的所有特征根
2. 若特征根 λ 为单实根，则 $e^{\lambda t}$ 为方程相应的实值解
3. 若特征根为单复根 $\lambda=\alpha\pm i\beta$，则 $e^{\alpha t}\cos\beta t$ 和 $e^{\alpha t}\sin\beta t$ 为相应的实值解.
4. 若特征根 λ 为 k 重实根，则 $t^i e^{\lambda t}$，$i=0,1,2,\cdots,k-1$ 为相应的 k 个实值解.
5. 若特征根 $\lambda=\alpha\pm i\beta$ 为 k 重复根，则 $t^i e^{\alpha t}\cos\beta t$，和 $t^i e^{\alpha t}\sin\beta t$，$i=0,1,2,\cdots,k-1$ 为方程相应的 $2k$ 个实值解.

例题

例 1 (单根)

求解方程 $\dfrac{d^4x}{dt^4} - x = 0$

例 3 (重根)

求解方程 $\dfrac{d^3x}{dt^3} - 3\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dx}{dt} - x = 0$

引进微分算子: $\mathbb{L} \triangleq \dfrac{d^n}{dt^n} + a_1 \dfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n$.

则 n 阶常系数非齐次线性方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n x = f(t). \tag{10}$$

可以表示为:

线性方程的算子表示

$$\mathbb{L}[x] = \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n x = f(t).$$

观察下面几个例题特解的求法:

1. $y'' + 3y' + 4y = 3x + 2$
2. $y'' - 4y = 2e^{3x}$
3. $3y'' + y' - 2y = 2\cos x$
4. $y'' - 4y = 2e^{2x}$(齐次方程的解)
5. $y''' + y'' = 4x^2$(导数中有齐次方程的解)
6. $y'' - 2y' + y = 2e^x$

上述例子总结

若 $f(x)$ 是以下几种形式:

1. 关于 x 的多项式;
2. 指数函数形式 e^{rx};
3. 三角函数 $\cos kx$, 或 $\sin kx$.

或者上述三种形式乘积的形式.

规则 1. 若 $f(x)$ 及其各阶导数中不含有齐次方程 $\mathbb{L}[x]=0$ 的解, 则方程有 $f(x)$ 的各阶导数中 “独立项的线性组合” 形式的解.

含有齐次方程解的情况

例 4 中

- e^{2x} 是对应齐次方程的解.
- 只有 e^{2x} 的导数才是这种指数函数的形式.
- 考虑 xe^{2x} 形式的解, 可以使得左端不再为 0.

设 $y_p = Axe^{2x}$ 是方程的解, 代入原方程解得 $A = \frac{1}{2}$,

例 6 中

- 因为 e^x, xe^x 都是对应齐次方程的解, 所以寻求形如 x^2e^x 的解.

例 5 中

- 因为 $f(x)$ 各阶导数的独立项 $\{1, x, x^2\}$ 中,$1, x$ 都是对应齐次方程的解, 所以寻求 $x^2 \cdot \{1, x, x^2\}$ 组合形式的解, 使得每一项都不是齐次方程的解.

独立项中含有齐次方程的解

规则 2. 若 $f(x)$ 及其各阶导数的独立项中含有齐次方程的解, 则方程有如下形式的解

$$x^k \cdot [\text{独立项的线性组合}]$$

其中 k 是使得乘积之后各项都不是齐次方程解的最小正整数.

比较系数法

重要结论

若 $f(x)$ 为下列函数形式:

$$P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{或者} \quad P_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

则方程 (10) 有如下形式的特解:

$$y_p(x) = x^k\left[\left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right)e^{\alpha x}\cos\beta x + \left(\sum_{i=0}^{m} b_i x^i\right)e^{\alpha x}\sin\beta x\right].$$

其中 k 是特征根 $\lambda = \alpha + i\beta$ 的重数.

上海大学 SHANGHAI UNIVERSITY

例 7. 求下述方程的通解

$$y^{(3)} + y'' = 3e^x + 4x^2$$

解: 特征方程 $F(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0$(2 重), $\lambda_3 = -1$(1 重). 所以对应齐次方程的通解为 $y_c(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}$.
注意到 $\mathbb{L}[y] = f_1(x) + f_2(x)$ 的解可用 $\mathbb{L}[y] = f_1(x)$ 与 $\mathbb{L}[y] = f_2(x)$ 的解之和表示. 设特解分别为 $y_1 = Ae^x$, $y_2 = x^2(B + cx + Dx^2)$
或设整体特解为: $y_p(x) = Ae^x + x^2(B + cx + Dx^2)$
代入原方程解得 $A = \frac{3}{2}$, $B = 4$, $C = -\frac{4}{3}$, $D = \frac{1}{3}$.
所以通解为:

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + [\frac{3}{2}e^x + 4x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4].$$

如下形式的变系数线性方程称为欧拉方程:

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n y = 0 \tag{11}$$

解 题 思 想:

通过变量替换 $x = e^t$, 将一般项 $x^k \frac{d^k y}{dx^k}$ 变成常系数线性项.

欧拉方程解的形式——幂函数

从上述求解可知, 欧拉型方程的解是**幂函数**, 不再是指数函数.
知道方程解的形式就可以直接求欧拉方程幂函数 $y = x^\lambda$ 形式的解.
将 $y = x^\lambda$ 带入欧拉方程 (11) 得代数方程:

$$F(\lambda) = \prod_{i=0}^{n-1}(\lambda - i) + a_1 \prod_{i=0}^{n-2}(\lambda - i) + \cdots + a_n = 0 \tag{12}$$

该代数方程称为欧拉方程 (11) 的特征方程.

求出特征方程(12)的特征根之后, 可写出欧拉方程(11)的解.

解 的 形 式:

1. 若 λ 为单实根, 则 $y = x^\lambda$ 为其相应的方程的解
2. 若 $\lambda = a \pm ib$ 为一对单复根, 则 $y = x^a \cos(b \ln|x|)$ 和 $y = x^a \sin(b \ln|x|)$ 为方程相应的实值解.
3. 若 λ 为 k 重实根, 则 $y = x^\lambda \ln^i|x|,\ i = 0, 1, 2, \cdots, k-1$ 为方程相应的 k 个实值解.
4. 若 $\lambda = a \pm ib$ 为一对 k 重复根, 则相应的方程的 $2k$ 个实值解为: $x^a \cos(b \ln|x|) \ln^i|x|$ 和 $x^a \sin(b \ln|x|) \ln^i|x|,\ i = 0, 1, 2, \cdots, k-1$.

例 5. 求解方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

解: 寻找该欧拉方程形如 $y = x^k$ 的解. 代入原式得特征方程

$$k(k-1) - k + 1 = 0$$

解之得 $k_1 = k_2 = 1$.
所以原方程有解 x, $x\ln|x|$.
所以通解为 $y = c_1x + c_2x\ln|x|$, c_1, c_2 为任意常数.

例 6. 求解方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+5y=0$$

解: 寻找该欧拉方程形如 $y=x^k$ 的解. 代入原式得特征方程

$$k(k-1)+3k+5=0$$

解之得 $k_{1,2}=-1\pm 2i$.
所以原方程有解 $y_1=x^{-1}\cos(2\ln|x|)$, $y_2=x^{-1}\sin(2\ln|x|)$.
所以通解为 $y=c_1x^{-1}\cos(2\ln|x|)+c_2x^{-1}\sin(2\ln|x|)$, c_1,c_2 为任意常数.

从线性方程与欧拉方程的解可知，若知道了方程解的类型，就可以求出方程的解. 所以关键是要知道方程的解形式. 解析函数可以有个通用的表示形式：幂级数表示形式. 所以方程的解析解有望用通用的方法解出来.

引例

求方程 $y'' - 2xy' - 4y = 0$ 满足初值条件 $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ 的解.

解: 设引例的解为幂级数: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$
由初值条件可得 $a_0 = 0,\ a_1 = 1.$
所以 $y' = 1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots,$
$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots$. 代入方程得:

$$2a_2 + (6a_3 - 6)x + \cdots + [(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n - 4a_n]x^n + \cdots = 0$$

多项式恒为 0, 则各项系数均为 0, 所以

$$a_2 = 0,\ a_3 = 1,\ a_4 = 0, \cdots, a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n$$

由此可得 $a_{2k} = 0,\ a_{2k+1} = \frac{1}{k!}$. 从而方程的解为:

$$y = x\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{k!} + \cdots\right) = x e^{x^2}$$

上海大学 SHANGHAI UNIVERSITY

何时可用幂级数求解?

考虑二阶齐次线性方程:

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0' \end{cases} \tag{13}$$

不妨设 $x_0 = 0$, 否则令 $t = x - x_0$ 即可.

定理10 (幂级数解)

若(13)中 $p(x)$, $q(x)$ 都能展成 x 的幂级数, 且收敛区间为 $|x| < R$, 则(13)有级数解: $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, 也以 $|x| < R$ 为收敛区间.

何时可用幂级数求解?

定理11 (幂级数解)

若(13)中系数 $p(x)$, $q(x)$ 具有这样的性质:
$xp(x)$, $x^2q(x)$ 均能展成 x 的幂级数, 且以 $|x|<R$ 为收敛区间,
则(13)有解:

$$y = x^{\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \text{ 也以}|x|<R \text{ 为收敛区间}$$

α 待定. 可以要求上式中 $a_0 \neq 0$, 否则调整 α 大小即可.

一, 不含低阶导数项的方程

形如 $F(x; y^{(k)}, y^{(k+1)}, \cdots, y^{(n)}) = 0$ 的方程.
只需令 $z = y^{(k)}$, 即原将方程化为 $n-k$ 阶微分方程
$F(x; z, z', \cdots, z^{(n-k)}) = 0$

例 1. 解方程

$$x^{(5)} - \frac{1}{t} x^{(4)} = 0$$

解: $x^{(4)} = ct \Rightarrow x = c_1 t^5 + c_2 t^3 + c_3 t^2 + c_4 t + c_5$.

二, 不含自变量的方程

形如 $F(y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$ 的方程.
只需令 $z = y'$, 即原将方程化为 $n-1$ 阶微分方程
$F(y; z, z'_y, \cdots, z_y^{(n-1)}) = 0$

例 2. 解方程

$$xx'' + (x')^2 = 0$$

解: 令 $x' = y \Rightarrow xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$, 或 $y = \frac{c}{x}$.

$\Rightarrow x^2 = c_1 t + c_2 . c_1, c_2$ 为任意常数.

三, 恰当型方程

形如 $F(x;y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ 的方程. 若存在函数 $u(x;y,y',\cdots,y^{(n-1)})$, 使得

$$du(x;y,y',\cdots,y^{(n-1)})=F(x;y,y',\cdots,y^{(n)})$$

则原方程可化为 $n-1$ 阶微分方程:

$$u(x;y,y',\cdots,y^{(n-1)})=c,\ \text{其中}c\text{为任意常数}.$$

恰当型方程

例, 恰当型方程

$$yy'' - (y')^2 = 0$$

解: 因为 $\frac{yy''-(y')^2}{y^2} = \frac{d}{dx}(\frac{y'}{y})$, 所以 $\mu = \frac{1}{y^2}$ 是一个积分因子. 用该积分因子乘以方程两端解得 $\frac{y'}{y} = c \Rightarrow y = c_2 e^{c_1 x}, c_1, c_2$ 为任意常数.

线性方程的降阶法

若已知线性方程

$$\mathbb{L}[x] \triangleq \frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)x = 0 \tag{14}$$

的一个非零解 $x_1(t)$, 则可以通过变量替换 $x = yx_1(t)$ 将其化为“零阶导数项系数为零”, 未知函数 y 的线性方程:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + b_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + b_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + \mathbb{L}[x_1]y = 0.$$

从而方程可以降一阶. 令 $z = \frac{dy}{dt}$ 得:

$$\frac{d^{n-1}z}{dt^{n-1}} + b_1(t)\frac{d^{n-2}z}{dt^{n-2}} + \cdots + b_{n-1}(t)z = 0. \tag{15}$$

综合上述过程可得, 从方程(14)经变量替换 $z = \frac{d}{dt}(\frac{x}{x_1})$, 或者 $x = x_1 \int z dt$ 即得函数 z 的 $n-1$ 阶微分分方程(15).

若已知方程(14)的 k 个线性无关解 $x_i(t)$, $i = 1, 2, \cdots, k$, 则 $z_i = \frac{d}{dt}(\frac{x_i}{x_1}), i = 2, \cdots, k$ 是方程 (15) 的 $k-1$ 个线性无关解. 可以用同样的方法依次降阶, 将原方程化为 $n-k$ 阶线性方程.

结 论

已知线性方程的 k 个线性无关解, 则可以把方程降阶为 $n-k$ 阶线性方程.

例. 变系数线性方程

$$t(t-1)x''-2tx'+2x=0$$

解: 容易验证 $x=t$ 是方程的一个解. 做变换 $x=ty$, 方程化为:

$$y''-\left(\frac{2}{t-1}-\frac{2}{t}\right)y'=0$$

解之得 $y'=c_1\left(1-\frac{1}{t}\right)^2 \Rightarrow y=c_1\left(t-2\ln|t|-\frac{1}{t}\right)+c_2.$
所以

$$x=ty=c_1(t^2-2t\ln|t|-1)+c_2t.$$

特别的对于如下的 2 阶线性方程:

$$\mathbb{L}[x] \triangleq x'' + a(t)x' + b(t)x = f(t) \tag{16}$$

令 $x = \varphi(t)y$, 代入(16)整理得:

$$\varphi(t)y'' + \left[2\varphi'(t) + a(t)\varphi(t)\right]y' + \left[\varphi'' + a(t)\varphi' + b(t)\varphi\right]y = f(t) \tag{17}$$

一. 若 $\varphi(t)$ 是(16)对应齐次方程的解, 则(17)的 0 次导数项为 0. 这既是线性方程的降阶过程.

二. 若无法找到对应齐次方程的解, 寻找(17)中一阶导数项为零的 φ: $2\varphi'(t)+a(t)\varphi(t)=0 \Rightarrow \varphi(t)=e^{-\frac{1}{2}\int a(t)dt}$, 此时(17)化为:

$$y''+\left[b(t)-\frac{a^2(t)+2a'(t)}{4}\right]y=f(t)e^{\frac{1}{2}\int a(t)dt} \tag{18}$$

倘若 $b(t)-\frac{a^2(t)+2a'(t)}{4}$ 为一常数, 则方程化为常系数线性方程.

例. 解方程:

$$x'' + 2tx' + t^2x = 0$$

解: 因为 $b(t) - \frac{a^2(t)+2a'(t)}{4} = -1$ 为一常数, 所以取

$$\varphi(t) = e^{-\frac{1}{2}\int a(t)dt} = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

令 $x = \varphi(t)y$, 方程化为 $y'' - y = 0$. 其解为 $y = c_1e^{-t} + c_2e^t$.
所以

$$x = \varphi(t)y = e^{-\frac{t^2}{2}}\left(c_1e^{-t} + c_2e^t\right).$$

作业 P164

2, (4), (6), (9), (13), (15), (18);
4, (1)