（1986 年全国高中数学联赛题）

解：∵ $c=2R\sin C=2\sin C$.

又 ∵ $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{4}$,

∴ $abc=1$，于是

$$t=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$
$$=\frac{bc+ac+ab}{abc}=ab+bc+ac$$
$$=(\sqrt{ab})^2+(\sqrt{bc})^2+(\sqrt{ca})^2$$
$$\geqslant\sqrt{ab^2c}+\sqrt{abc^2}+\sqrt{a^2bc}$$
$$=\sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$$
$$=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=s.$$

且等号取不到，否则 $a=b=c=R=1$，是不可能的，选(C).

六、综合法

例 11 设 α,β,γ 是一个三角形的三个内角，p,q 为满足 $p+q=1$ 的任意实数，则必有不等式

$$p\sin^2\alpha+q\sin^2\beta>pq\sin^2\gamma.$$

（1980 年长沙市高中数学赛题）

分析：要证不等式

$$p\sin^2\alpha+q\sin^2\beta>pq\sin^2\gamma,$$

即比较两数 $p\sin^2\alpha+q\sin^2\beta$，$pq\sin^2\gamma$ 的大小.

令 $k=p\sin^2\alpha+q\sin^2\beta-pq\sin^2\gamma$.

∵ $p+q=1$,

∴ 上式可改写成

$$k=p\sin^2\alpha+(1-p)\sin^2\beta-p(1-p)\sin^2\gamma$$
$$=p^2\sin^2\gamma+(\sin^2\alpha-\sin^2\beta-\sin^2\gamma)p+\sin^2\beta.$$

由此可知 k 是关于 p 的二次三项式，其判别式

$$\Delta=(\sin^2\alpha-\sin^2\beta-\sin^2\gamma)^2-4\sin^2\gamma\sin^2\beta$$
$$=(\sin^2\alpha-\sin^2\beta-\sin^2\gamma+2\sin\gamma\sin\beta)\cdot(\sin^2\alpha-\sin^2\beta-\sin^2\gamma-2\sin\gamma\sin\beta)$$
$$=[\sin^2\alpha-(\sin\beta-\sin\gamma)^2]\cdot[\sin^2\alpha-(\sin\beta+\sin\gamma)^2]$$
$$=-(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)\cdot(\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma)\cdot(\sin\alpha+\sin\gamma-\sin\beta)\cdot(\sin\beta+\sin\gamma-\sin\alpha).$$

设三角形中 α,β,γ 所对的边分别为 a,b,c，外接圆半径为 R，由正弦定理，有

$$\sin\alpha=\frac{a}{2R},\quad \sin\beta=\frac{b}{2R},\quad \sin\gamma=\frac{c}{2R}.$$

$$\therefore\ \Delta=-\left(\frac{1}{2R}\right)^4(a+b+c)(a+b-c)\cdot(a+c-b)(b+c-a).$$

∵ $k>0, a+b+c>$，$b+c-a>0$，$a+b-c>0$，$a+c-b>0$，从而 $\Delta<0$.

又 ∵ 这个二次三项式二次项系数 $\sin^2\gamma>0$,

∴ $k>0$，即

$$p\sin^2\alpha+q\sin^2\beta>pq\sin^2\gamma.$$

1 的 n 次单位根的性质及应用

沈　文　选

（湖南师大数学系　410006）

1 的 n 次方根称为 n 次单位根，或者说，一个复数 ε 的 n 次幂等于 1，即 $\varepsilon^n=1$，那么这个复数 ε 就叫做 1 的一个 n 次单位根. 1 的 n 次单位根有很好的性质，运用这些性质处理某些数学问题是方便的，本文略作介绍.

一、1 的 n 次单位根的性质

性质一 1 的 n 次单位根有 n 个，它们分别是 $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$. ($k=0,1,\cdots,n-1$).

性质二 $(\varepsilon_k)^n=1$；$\varepsilon_k=(\varepsilon_1)^k$，$|\varepsilon_k|=1$,

$(k=0,1,2,\cdots,n-1)$.

性质三 当 n 为奇数时，$\varepsilon_0=1$ 是其唯一实根；当 n 为偶数时，$\varepsilon_0=1$，$\varepsilon_{\frac{n}{2}}=-1$ 是其两实根．其余各个虚根成对共轭，即 ε_k 与 ε_{n-k} 互为共轭虚根，且 $\varepsilon_k\varepsilon_{n-k}=1$．$(k=0,1,\cdots,n-1)$.

性质四 $\{\varepsilon_k\}$ 对于乘法、除法是封闭的，或者说，方程 $x^n-1=9$ 的若干个根的乘积也是这个方程的根；这个方程的两个根的商也是这个方程的根．

性质五 $1+\varepsilon_k^p+\varepsilon_k^{2p}+\cdots+\varepsilon_k^{(n-1)p}$

$$=\begin{cases} n, & \text{当 } p \text{ 是 } n \text{ 的整数倍或 } k=0 \text{ 时；} \\ o. & \text{当 } p \text{ 不是 } n \text{ 的整数倍且 } k\neq 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

特别地 $1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_{n-1}=0$，

或 $k\neq 0$ 时，$1+\varepsilon_k+\varepsilon_k^2+\cdots+\varepsilon_k^{n-1}=0$.

性质六 若 $P_1,P_2,\cdots,P_m$ 是两两互素的正整数，且 $n=P_1P_2\cdots P_m$，则 1 的 n 个 n 次单位根可由 1 的 P_1 个 P_1 次单位根分别乘以 1 的 P_2 个 P_2 次单位根，…，再分别乘以 1 的 P_m 个 P_m 次单位根而得到．

性质七 $\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k=\prod\limits_{k=1}^{n-1}(x-\varepsilon_k)$.

特别地，$x=1$ 时，$n=\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1-\varepsilon_k)$.

性质八 ε_k 表示复平面上单位圆周的 n 等分点（或单位圆的内接正 n 边形的顶点），其中 $\varepsilon_0=1$ 是单位圆周与正实轴的交点．

我们称 1 的某个 n 次单位根，叫做 1 的 n 次单位根（简称原根），当且仅当 $m<n$ 时，不是 1 的 m 次单位根．例如 1 的 3 次单位原根是 $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 和 $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$；1 的 4 次单位原根是 i 和 i 等等．

性质九 1 的一切 n 次单位原根，可以在所有单位根 $\varepsilon_k(k=0,1,\cdots,n-1)$ 中赋予 k 以小于 n 且与 n 互质的一切正整数的值而得出；且 1 的 n 次原根的个数，等于小于 n 而与 n 互质的那些数的个数，记为 $\varphi(n)$．当 p、q 互质时，有

$$\varphi(p\cdot q)=\varphi(p)\cdot\varphi(q).$$

性质十 1 的所有 n 次单位根，由它的任何一个原根的 n 个连接整数次幂构成；若 $n=p_1p_2\cdots p_m$ 且 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 两两互质，则 1 的一切原根可由 1 的 p_1 次原根乘以 p_2 次原根，…，乘以 p_m 次原根而得到．

例如 1 的 4 个 4 次单位根可由 i 的 k、$k+1$、$k+2$、$k+3$ 次幂得到；1 的 12 次原根可由 1 的 3 次原根乘以 1 的 4 次原根而得到，即 $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{i}{2}$ 等 4 个．

以上性质的证明不难，留给读者作为练习．

二、应用

1. 在复数计算中的应用

例 1 方程 $z^6+z^3+1=0$ 有一个复数根，在复平面上这个根的辐角在 90° 和 180° 之间，求辐角的大小．

解：由 $(z^3-1)(z^6+z^3+1)=z^9-1$，知满足方程 $z^6+z^3+1=0$ 的复数根为 1 的 9 次原根：

$$z_1=\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9},$$
$$z_2=\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9},$$
$$z_4=\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9},$$
$$z_5=\cos\frac{10\pi}{9}+i\sin\frac{10\pi}{9},$$
$$z_7=\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9},$$
$$z_8=\cos\frac{16\pi}{9}+i\sin\frac{16\pi}{9}.$$

符合在 90°～180° 的只有 $\frac{8\pi}{9}\Longrightarrow 160°$，故辐角为 160°.

2. 在解方程（组）中的应用

例 2 在复数集内解方程 $x^{60}-1=0$.

略解：方程 $x^3-1=0$，$x^4-1=0$，$x^5-1=0$ 根分别各自相乘即得所求的 60 个根．

例 3 解联立方程组

$$\begin{cases} x+y+z=3, & (1) \\ x^2+y^2+z^2=3, & (2) \\ x^5+y^5+z^5=3. & (3) \end{cases}$$

解：设 x、y、z 是三次方程 $r^3-ar^2+br-c=0$ 的根，则

$$a = x + y + z = 3,$$
$$b = xy + yz + zx, \quad c = xyz$$

且可求得 $b=3$.

令 $c=1+m^3$，则上述三次方程变为 $(r-1)^3=m^3$，

若令 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，则

$$r = 1 + m, \quad 1 + \omega m, \quad 1 + \omega^2 m.$$

又由(3)式有

$$(1+m)^5+(1+\omega m)^5+(1+\omega^2 m)^5=3,$$

展开并注意到

$$1+\omega^k+\omega^{2k}=\begin{cases}0, & k\text{ 不为 3 的倍数；}\\ 3, & k\text{ 为 3 的倍数.}\end{cases}$$

可得到 $m=0$. 因此所求的根为 $x=y=z=1$.

3. 在整除问题中的应用

例 4　试证 $x^{999}+x^{888}+\cdots+x^{111}+1$ 可被 $x^9+x^8+\cdots+x+1$ 整除.

略证：设 ε 是任一异于 1 的 1 的 10 次单位根. 由

$$\varepsilon^{999}+\varepsilon^{888}+\cdots+\varepsilon^{111}+1$$
$$=\varepsilon^9+\varepsilon^8+\cdots+\varepsilon+1=0$$

即证.

例 5　试确定出所有的正整数对 (m,n)，使得 $(1+x^n+x^{2n}+\cdots+x^{mn})$ 能被 $(1+x+x^2+\cdots+x^m)$ 整除.

解：设 ε 是 1 的异于 1 的 $m+1$ 次单位根，则

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^m = 0,$$

要使　$1+\varepsilon^n+\varepsilon^{2n}+\cdots+\varepsilon^{mn}=0$.

由性质五知，只要 n 不是 $m+1$ 的整数倍，即 n. $m+1$ 互质即可，从而求得 (m,n).

4. 在恒等式证明中的应用

例 6　求证

$$C_n^1+C_n^5+\cdots+C_n^{4m-3}$$
$$=\frac{1}{2}(2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}),$$

其中 $4m-3$ 为不大于 n 的最大整数.

证明：设 $\varepsilon_1=i$ 为 1 的一个 4 次单位根，由

$$(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n, \quad (1)$$
$$(1+\varepsilon_1)^n=C_n^0+C_n^1\varepsilon_1+C_n^2\varepsilon_1^2+\cdots+C_n^n\varepsilon_1^n, \quad (2)$$
$$(1+\varepsilon_1^3)^n=C_n^0+C_n^1\varepsilon_1^2+C_n^2\varepsilon_1^4+\cdots+C^{nn}\varepsilon_1^{2n}, \quad (3)$$
$$(1+\varepsilon_1^3)^n=C_n^0+C_n^1\varepsilon_1^3+C_n^2\varepsilon_1^6+\cdots+C_n^n\varepsilon_1^{3n}. \quad (4)$$

以 ε_1^3 乘(2)式，ε_1^2 乘(3)式，ε_1 乘(4)式，然后与(1)式一起将等边两边相加.

和式右边，由性质五得

$$4(C_n^1 + C_n^5 + \cdots + C_n^{4m-3}),$$

和式左边

$$2^n+(1+\varepsilon_1)^n\varepsilon_1^3+(1+\varepsilon_1^2)\varepsilon_1^2+(1+\varepsilon_1^3)\varepsilon_1$$
$$=2^n+2^{\frac{n}{2}+1}\sin\frac{n\pi}{4}.$$

比较和式两边，原等式即得证.

5. 在解三角题中的应用

例 7　求证 $\sqrt{n} = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}$. $(n\in N)$

证明：考虑 1 的 $2n$ 次单位根

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{2n}+i\sin\frac{2k\pi}{2n},$$

$(k=0,1,2,\cdots,2n-1)$

由性质三

$$\varepsilon_k+\varepsilon_{2n-k}=2\cos\frac{2k\pi}{2n}, \quad \varepsilon_k\varepsilon_{2n-k}=1,$$

从而

$$\sum_{k=0}^{2n}x^k=\prod_{k=0}^{2n-1}(x-\varepsilon_k)$$
$$=(x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n}+1).$$

$$\therefore\ x^{2n-2}+x^{2n-4}+\cdots+x^2+1$$
$$=\prod_{k=1}^{n-1}(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n}+1). \quad (*)$$

在(*)式中，令 $x=1$ 得

$$n=\prod_{k=1}^{n-1}2(1-\cos\frac{2k\pi}{2n})$$
$$=\prod_{k=1}^{n-1}4\sin^2\frac{k\pi}{2n}=(2^{n-1})^2\prod_{k=1}^{n-1}\sin^2\frac{k\pi}{2n}.$$

故　$$\sqrt{n}=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}.$$

类似于上例可证明 $\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$ 等.

例 8　求和 $\sum_{k=0}^{2n}\cos(\alpha+\frac{2k\pi}{2n+1})$.

解：当 $k=0,1,2,\cdots,2n$ 时，令

$$z_k=\cos(\alpha+\frac{2k\pi}{2n+1})+i\sin(\alpha+\frac{2k\pi}{2n+1}),$$

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+i\sin\frac{2k\pi}{2n+1},$$

则

$$W=z_0+z_1+z_2+\cdots+z_{2n}$$
$$=z_0+z_0\varepsilon_1+z_0\varepsilon_2+\cdots+z_0\varepsilon_{2n}$$
$$=z_0(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_{2n})=0.$$

而 $\sum\limits_{k=0}^{2n}\cos(\alpha+\frac{2k\pi}{2n+1})$ 是复数 W 的实数，故所求和

$$\sum_{k=0}^{2n}\cos(\alpha+\frac{2k\pi}{2n+1})=0.$$

例 9　设

$$\sin A+\sin B+\sin C$$
$$=\cos A+\cos B+\cos C=0,$$

求证：

$$\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=3\cos(A+B+C),$$
$$\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=3\sin(A+B+C).$$

证明：由条件知 $C\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，且有

$$(\cos A+i\sin A)+(\cos B+i\sin B)$$
$$+(\cos C+i\sin C)=0,$$

即

$$[\cos(A-C)+i\sin(A-C)]+1$$
$$=-[\cos(B-C)+i\sin(B-C)],$$

将上式两边取共轭复数，有

$$[\cos(A-C)-i\sin(A-C)]+1$$
$$=-[\cos(B-C)-i\sin(B-C)],$$

再将上面两个等式两边分别相乘，有

$$[\cos(A-C)+i\sin(A-C)]$$
$$+[\cos(A-C)-i\sin(A-C)]+1=0.$$

即知 $\cos(A-C)+i\sin(A-C)=\omega$ 或 ω^2.（$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$）.

同理　$\cos(B-C)+i\sin(B-C)=\omega$ 或 ω^2.

可用反证法证得上述两式不可能同取 ω 或 ω^2，只能是 $\cos(A-C)+i\sin(A-C)=\omega$ 时，$\cos(B-C)+i\sin(B-C)=\omega^2$（或者相反）.

$$\therefore\quad \cos A+i\sin A=\omega(\cos C+i\sin C),$$
$$\cos B+i\sin B=\omega^2(\cos C+i\sin C),$$

故

$$(\cos 3A+i\sin 3A)+(\cos 3B+i\sin 3B)$$
$$+(\cos 3C+i\sin 3C)$$
$$=(\cos A+i\sin A)^3+(\cos B+i\sin B)^3$$
$$+(\cos C+i\sin C)^3$$
$$=(\cos C+i\sin C)^3(\omega^3+\omega^6+1)$$
$$=3(\cos 3C+i\sin 3C).$$

又

$$(\cos A+i\sin A)(\cos B+i\sin B)(\cos C+i\sin C)$$
$$=(\cos C+i\sin C)^3\omega^3=\cos 3C+i\sin 3C$$
$$=\cos(A+B+C)+i\sin(A+B+C),$$

由此即证.

6. 在解平几题中的应用

例 10　设 $A_1A_2\cdots A_n$ 是半径为 r，中心为 O 之圆的一内接正多边形，P 是 OA_1 延长线上一点. 试证：

(1) $\prod\limits_{i=1}^{n}|PA_i|=|OP|^n-r^n$；

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n}|PA_i|^2=n(r^2+OP^2)$.

证明：不妨假定这正多边形在复平面上，圆心在原点，A_1 在正实轴上，则其它顶点对应复数 $r\varepsilon, r\varepsilon^2, \cdots, r\varepsilon^{n-1}$，这里 ε 是 1 的单个异于 1 的 n 次单位根（或 n 次原根），又设 P 点对应的复数为 x，则

$$|PA_i|=|x-r\varepsilon^{i-1}|\ (i=1,2,\cdots,n).$$

(1) 由性质七，有

$$\prod_{i=1}^{n}(x-\varepsilon^{i-1})=x^n-1.$$

$$\therefore\quad \prod_{i=1}^{n}|PA_i|=\prod_{i=1}^{n}|x-r\varepsilon^{i-1}|$$
$$=r^n\prod_{i=1}^{n}|\frac{x}{r}-\varepsilon^{i-1}|=r^n|(\frac{x}{r})^n-1|$$
$$=|x^n-r^n|=x^n-r^n=|OP|^n-r^n.$$

(2) 由

$$|PA_i|^2=|x-r\varepsilon^{i-1}|^2$$
$$=(x-r\varepsilon^{i-1})(\overline{x}-\overline{r\varepsilon^{i-1}})$$
$$=x\cdot\overline{x}+r^2\cdot\varepsilon^{i-1}\cdot\overline{\varepsilon^{i-1}}-\overline{x}r\varepsilon^{i-1}-xr\,\overline{\varepsilon^{i-1}}$$
$$=OP^2+r^2-\overline{x}r\varepsilon^{i-1}-xr\,\overline{\varepsilon^{i-1}}.$$

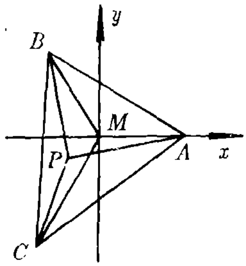
$$\therefore\quad \sum_{i=1}^{n}|PA_i|^2$$
$$=n(OP^2+r^2)$$
$$-\overline{x}r(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{n-1})$$
$$-xr(1+\overline{\varepsilon}+\overline{\varepsilon^2}+\cdots+\overline{\varepsilon^{n-1}})$$
$$=n(OP^2+r^2).$$

例 11　设 M 是锐角$\triangle ABC$ 内一点,并使

$$\angle AMB=\angle BMC=\angle CMA=120^\circ,$$

又 P 为$\triangle ABC$ 内任意点,试证:

$$PA+PB+PC\geqslant MA+MB+MC.$$



证明:如图,建立复平面,M点在原点,设 A、B、C三点在对应的复数分别为 z_A、z_B、z_C,P点对应的复数为 z_P. 注意到1的3次单位根的性质,于是

$$|z_A-z_P|+|z_B-z_P|+|z_C-z_P|$$
$$=|z_A-z_P|+|(z_B-z_P)\omega|+|(z_C-z_P)\omega^2|$$
$$\geqslant|(z_A+z_B\omega+z_C\omega^2)-z_P(1+\omega+\omega^2)|$$
$$=|z_A+z_B\omega+z_C\omega^2|.\qquad(*)$$

由于不等式(*)右端为定值. 由(*)的证明过程知,不等式(*)中等号成立的条件是三个复数 z_A-z_P, $(z_B-z_P)\omega$, $(z_C-z_P)\omega^2$ 所对应的向量方向相同. 而复数乘法的几何意义知,此时 z_A-z_P、z_B-z_P、z_C-z_P 所对应的向量$\overrightarrow{PA}$、$\overrightarrow{PB}$、$\overrightarrow{PC}$两两夹角为 120°,即 P 重合于 M 点. 故

$$PA+PB+PC\geqslant MA+MB+MC.$$

1993年高考数学试题评析

任樟辉　黄美剑

对于今年普通高等学校招生全国统一考试(常规卷理科及文科)的数学试题,我们根据参加评卷工作的体会,并与近几年高考数学试题进行比较分析,觉得总的特点是:能紧扣教学大纲和教材,整卷结构符合考试说明的规定. 题型稳定,内容要求恰当. 知识点复盖及基本数学思想、方法和能力的考查较全面合理. 难度布局有所调整. 同时也有一些问题值得进一步探索研究. 下面对此作出具体的评析.

一、试题内容效度分析

关于整卷试题内容的效度,即是考察试题涉及的知识点的复盖及其分布是否恰当;各试题得满分时所需的考生学习水平的层次是否符合教学大纲及考试说明的要求;以及试题解答过程中可能使用的解题思想方法与数学能力的考查是否较为全面和合理.

对于知识点的划分,93 年的考试说明[1]实际上仍是重复了教学大纲中规定的必学内容. 它们基本上是教材中章以下各节的小标题,大体上已经能够反映"知识点是由概念、定理及相关技能组成的相对独立的最小知识单元"[2]这一理解. 考试说明对高考内容划分的知识点应以句号为分界. 因此,在圆锥曲线部分中,"椭圆及其标准方程. 焦点、焦距."实际仅是一个知识点,应将中间句号改为逗号. 同样地,涉及双曲线、抛物线的叙述处也应作同样修改. 这样的话,考试说明所列数学科高考知识点总数应为 127 个而不是 123 个[2].

对于学习水平层次的划分,按考试说明分为"了解、理解、掌握、灵活运用和综合运用"四个层次. 如果划分得更细一些,则分为识记、领会、应用、分析、综合、创新这六个层次也比较合理. 特别是今后如果能在试题中引入真正的"探索性问题",则创新(对学生而言)这一最高层次的学习水平也将得到更好的反映.

下面根据我们的体会对今年数学试题的内容分析作出若干表解.