常微分方程

第二章　解的存在唯一性

李 新 祥　@ F516

上海大学数学系

QQ 课件群: 104203390

内容提要

1 解的存在唯一性

上海大学 SHANGHAI UNIVERSITY

内容提要

1. 解的存在唯一性
2. 解的延拓

内容提要

1. 解的存在唯一性
2. 解的延拓
3. 解对初值的连续性与可微性

内容提要

1. 解的存在唯一性
2. 解的延拓
3. 解对初值的连续性与可微性
4. 奇解与包络 *

内容提要

1. 解的存在唯一性
2. 解的延拓
3. 解对初值的连续性与可微性
4. 奇解与包络 *
5. 数值解 *

内容提要

1. 解的存在唯一性
2. 解的延拓
3. 解对初值的连续性与可微性
4. 奇解与包络 *
5. 数值解 *
6. 作业

定解问题

本节考虑初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

解的存在唯一性. 该初值问题又称为柯西问题.

记区域 $D : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$.

定理1 (解的存在唯一性)

若 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续, 且关于 y 满足 Lipschitz 条件. 则方程(1) 存在唯一的解 $y = \varphi(x)$ 在区间 $|x - x_0| \leq h$ 上有定义, 且满足初值条件 $\varphi(x_0) = y_0$.

其中

$$h = \min\{a, \frac{b}{M}\}, \ M = \max_{(x,y)\in D} |f(x,y)|.$$

仅在 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上证明之. 另一边的证明完全一样.

引进积分方程

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds. \tag{2}$$

将定理 1 的证明分为以下 5 个命题来证明之.

命题1 (等价积分形式)

初值问题(1)的解等价于积分方程(2)的连续解.

构造皮卡迭代序列:

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = y_0, \\ \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_{n-1}(s))ds, \ \ n = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{3}$$

命题2

对于所有的 $n \in \mathbb{Z}^+$, (3) 中定义的函数 $\varphi_n(x)$ 在 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上有定义, 连续, 且满足 $|\varphi_n(x) - y_0| \le b$.

命题3 (皮卡序列的一致收敛性)

皮卡序列 $\varphi_n(x)$ 在 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上是一致收敛的.

证明: 只需证明 $\varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} [\varphi(x)_k - \varphi_{k-1}(x)]$ 一致收敛即可.

归纳假设:

$$|\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)| \le \frac{ML^{n-1}}{n!}(x - x_0)^n. \tag{4}$$

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| &\le \int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_n(t)) - f(t, \varphi_{n-1}(t))| dt \\ &\le L \int_{x_0}^{x} |\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)| dt \\ &\le \frac{ML^n}{(n+1)!} h^{n+1}. \end{aligned} \tag{5}$$

假设 $\varphi_n(x)$ 一致收敛到 $\varphi(x)$, 则

命题4

$\varphi(x)$ 在 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上有定义, 连续, 并且是积分方程 (2) 的解. 从而也是初值问题 (1) 的解.

定理 1 的证明

命题5 (解的唯一性)

设 $\psi(x)$ 是积分方程(2)的另一个定义于 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上的连续解,

则 $\varphi(x) = \psi(x) \quad \forall x \in [x_0, x_0 + h]$.

证明 (利用极限的唯一性).

只需证明解 $\psi(x)$ 也是皮卡序列 $\varphi_n(x)$ 的一致极限即可.

$$|\varphi_n(x) - \psi(x)| \le \frac{ML^n}{(n+1)!} h^{n+1} \tag{6}$$

□

证明 Gronwall 不等式

设 K 为非负常数, $f(t)$, $g(t)$ 为 $\alpha \leq x \leq \beta$ 上的非负连续函数, 且满足不等式

$$f(t) \leq K + \int_{\alpha}^{t} f(s)g(s)ds, \ \alpha \leq t \leq \beta,$$

则有

$$f(t) \leq K \cdot \exp[\int_{\alpha}^{t} g(s)ds], \ \alpha \leq t \leq \beta.$$

证明: 令

$$R(t) = \int_\alpha^t f(s)g(s)ds.$$

由 $K \geq 0,\ g(t) \geq 0$ 有

$$R'(t) = f(t)g(t) \leq Kg(t) + R(t)g(t),$$

即

$$R'(t) - R(t)g(t) \leq Kg(t).$$

两边乘以 $\exp[-\int_\alpha^t g(u)du]$ 并在 $[\alpha, t]$ 上积分既可.

用 Gronwall 不等式证明唯一性

证明: 设积分方程 $y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds$ 有两个解 $\varphi(x)$, $\psi(x)$. 则

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \le \int_{x_0}^{x} \mathrm{L}|\varphi(s) - \psi(s)|ds$$

对比 Gronwall 不等式有, $\mathrm{K} = 0$, $g(x) = \mathrm{L}$.
所以

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \le \mathrm{K} \cdot \exp[\int_{x_0}^{x} \mathrm{L}ds] = 0$$

隐式方程解的存在唯一性

考虑如下一阶隐式方程:

$$F(x,y,y')=0. \tag{7}$$

定理2 (一阶隐式方程解的存在唯一性)

若在 (x_0,y_0,y_0') 的某个临域中有

1. $F(x,y,y')$ 对所有变元都连续, 且存在连续偏导数.
2. $F(x_0,y_0,y_0')=0$.
3. $\frac{\partial F(x_0,y_0,y_0')}{\partial y'}\neq 0$.

则方程 (7) 有唯一解 $y=y(x)$ 满足初始条件 $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0'$.

利用公式 (6), 可以对真实解 $\psi(x)$ 与近似解 $\varphi_n(x)$ 之间的误差作估计, 从而可以用来做近似计算.

例 1 (近似解)

方程 $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ 定义在 $D: \ -1 \leq x \leq 1, \ -1 \leq y \leq 1$ 上, 试利用存在唯一性定理确定经过点 $(0,0)$ 的解的存在区间, 并求此区间上误差不超过 0.05 的近似解.

例 1 (近似解)

方程 $\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$ 定义在 $D:\ -1\leq x\leq 1,\ -1\leq y\leq 1$ 上, 试利用存在唯一性定理确定经过点 $(0,0)$ 的解的存在区间, 并求此区间上误差不超过 0.05 的近似解.

解: $M=\max\limits_{(x,y)\in D}|f(x,y)|=2,\ h=\min\{a,\frac{b}{M}\}=\frac{1}{2}.$

$L=\max\limits_{(x,y)\in D}|f'_y(x,y)|=2.$

由 (6) 知: $|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\leq\frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}<0.05$ 所以最小取 3 即可.

解的最大存在区间有多大?

定理(解的延拓定理)

在满足解的存在唯一性条件时:

$$\begin{cases} f(x,y) \text{ 在区域 } D \text{ 中连续;} \\ f(x,y) \text{ 在区域 } D \text{ 中关于 } y \text{ 局部 Lipschitz 连续 .} \end{cases} \tag{8}$$

则所有解都可以延拓到区域 D 的边界, D 是任意形状的区域(包括无界区域).

注: 区域 D 的边界并不一定是自变量 x 的边界.

推论1

如果 G 是无界区域，在满足延拓定理的条件下，以 x 增大方向的饱和解来说有以下两种情况：

1. 解 $y=\phi(t)$ 可以向右延拓到 $[x_0,+\infty)$.
2. 解 $y=\phi(t)$ 可以向右延拓到 $[x_0,d)$ 上，且当 $x\to d$ 时 $\phi(x)$ 无界，或者 $(x,\phi(x))$ 趋于 G 的边界.

饱和解例

例 1

讨论方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-1}{2}$ 分别过 $(0,0)$, $(\ln 2,-3)$ 的解的存在区间.

解: 由分离变量法可求其通解为

$$y=\frac{1+ce^x}{1-ce^x}$$

故过 $(0,0)$ 的解为 $y=\frac{1-e^x}{1+e^x}$, 解的存在区间为 $(-\infty,+\infty)$.

过 $(\ln 2,-3)$ 的解为 $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$, 解的存在区间为 $(0,+\infty)$.

饱和解例

例 2

讨论方程 $\frac{dy}{dx} = 1 + \ln x$ 满足 $y(1) = 0$ 的解的存在区间.

解: 方程右端函数 $f(x, y) = 1 + \ln x$ 的定义域为 $\{x > 0\}$, 即右半平面. 由分离变量法可求该初值问题的解为

$$y = x \ln x.$$

当 $x \to 0+$ 时, $y \to 0-$, 即解的存在区间为 $(0, +\infty)$.

推论2

若 $f(x,y)$ 在整个平面上都有定义，并且连续有界，同时关于 y 有一阶连续偏导数，则方程 (1)的解必然可以延拓到 $(-\infty,+\infty)$ 上.

注:

1. $f(x,y)$ 的有界性保证解曲线的有限增长性，必不可少. 如 $\frac{dy}{dx}=y^2$ 的解 $y=\frac{1}{c-x}$ 定义域就达不到 $(-\infty,+\infty)$.
2. 关于 y 的一阶连续偏导数保证 $f(x,y)$ 关于 y 的局部 Lipschitz 性质.

初值问题(1)的解即依赖于方程又依赖于初值条件 (x_0, y_0). 所以可以将其解记为 $y = \phi(x, x_0, y_0)$.

结论 1 (解关于初值的对称性)

设初值问题 (1) 有唯一解 $y = \phi(x, x_0, y_0)$, 则 (x, y) 与 (x_0, y_0) 可对调位置. 即有

$$y_0 = \phi(x_0, x, y).$$

解关于初值的连续性

如果初值有一个小扰动, 解会如何变化? 解的变化对初值扰动的依赖关系, 即解关于初值的连续性问题.

引理

若 $f(x, y)$ 在区域 D 内连续, 关于 y 满足 Lipschitz 条件 (Lipschitz 常数为 L), 则任意两个解 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 在他们的公共存在区间内成立:

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq |\varphi(x_0) - \psi(x_0)|e^{L|x-x_0|}.$$

该引理说明方程解的误差的增长由初值误差以及一个指数函数所控制.
换句话说, 误差的增长速度几乎可以达到指数级的增长速度.

关于引理的注:

1. 完全类似的可以证明:

$$|\varphi(x)-\psi(x)| \geq |\varphi(x_0)-\psi(x_0)|e^{-L|x-x_0|}. \tag{9}$$

2. 引理说明方程解的误差的增长由初值误差以及一个指数函数所控制.

换句话说, 误差的增长速度几乎可以达到指数级的增长速度.

3. 不等式(9)说明了误差的衰减速度也不会超过一个负指数函数.

解关于初值的连续性

定理3 (解关于初值的连续性)

设 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续且关于 y 局部 Lipschitz 连续. $(x_0,y_0)\in G$, $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 是初值问题 (1) 的解. 该解在区间 $[a,b]$ 上有定义 $(a\le x_0\le b)$. 则对任意给定的 $\epsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\epsilon,a,b,x_0,y_0)>0$, 使得当 $(x_0-\bar{x}_0)^2+(y_0-\bar{y}_0)^2\le\delta^2$ 时, 方程过 $(\bar{x}_0,\bar{y}_0)$ 的解 $y=\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)$ 在区间 $[a,b]$ 上存在, 并且

$$|\varphi(x,x_0,y_0)-\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)|<\epsilon,\quad \forall a\le x\le b.$$

结论: 加上解本身的连续性, 所以在满足条件(8)时, 初值问题(1)的解 $\varphi(x;x_0,y_0)$ 作为 (x,x_0,y_0) 三个变元的函数是个三元连续函数.

定理4 (解关于初值的可微性)

若 $f(x,y)$, $f_y(x,y)$ 都在区域 G 内连续. 则初值问题 (1) 的解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 作为 (x,x_0,y_0) 的函数, 在其存在区间内连续可微.

注意: $f_y(x,y)$ 的连续性保证了 $f(x,y)$ 关于 y 的局部 Lipschitz 性质.

奇解与包络

定义1 (奇解)

微分方程不包含于通解的一个特解, 在该特解的每一点处都有通解中的一条解曲线与之切于该点. 这样的解称为方程的奇解.

定义2 (包络)

给定单参数曲线族 $\Phi(x,y,c)=0$, c 为参数. $\Phi(x,y,c)$ 是 (x,y) 的连续可微函数. 该曲线族的包络是指这样的曲线 $y=\varphi(x)$:

1° 曲线本身不含与该曲线族;

2° $y=\varphi(x)$ 上每一点都有曲线族中的一条曲线与之切于该点.

从定义可知, 奇解就是通解的包络.

奇解的求法

由解的存在唯一性定理知: 若 $F(x,y,y')$ 连续可微, 只要 $\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$, 则解存在唯一. 所以要使得方程有奇解 (解不唯一), 必然有:

$$\begin{cases} F(x,y,y') = 0, \\ \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} = 0. \end{cases}$$

由以上两式消去 y' 既得 p-判别曲线, 再验证该曲线是否是奇解即可.

事实上, 上述 p-判别曲线方法也正是求包络的方法!

上海大学 SHANGHAI UNIVERSITY

克莱罗方程

形如 $y = xp + f(p)$, $(p = \frac{dy}{dx})$ 的方程称为**克莱罗方程**.

例 3 (克莱罗方程)

求解方程 $y = xp + \frac{1}{p}$.

解: 首先按照可解出 y 的隐式方程求其通解为:

$$y = cx + \frac{1}{c}$$

从

$$\begin{cases} y = px + \frac{1}{p} \\ x - \frac{1}{p^2} = 0. \end{cases}$$

消去 p 可得奇解

$$y^2 = 4x.$$

是通解的包络.

数值解

由前面的学习我们已经知道, 即便方程满足解的存在唯一性条件, 但是也仍有很多方程的解无法用初等函数表示. 对于这类方程的处理主要有两个方向:

1. 定性分析: 在不给出方程的解析解的情况下, 通过方程本身来分析方程解的性质 (稳定性, 周期性, 分支与混沌等). 已发展成新的学科—微分方程定性理论.
2. 数值解: 虽然无法给出方程的精确解, 但是可以给出它的近似数值解. 已发展成新的学科—数值计算.

习题 3.1 P88

1; 3; 6.