計測システム工学 第四回課題

Ec5 24 番 平田 蓮

a) $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

測定データを $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots (x_N, y_N)\}$ とする。

$x_i = x^i$ とすると、$y = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i$ であるので n 変数一次式の場合を 1 変数として同様に考えることができる。

$$\begin{pmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{N} x_i^n \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} x_i^2 & \sum_{i=1}^{N} x_i^3 & \cdots & \sum_{i=1}^{N} x_i^{n+1} \\ \sum_{i=1}^{N} x_i^2 & \sum_{i=1}^{N} x_i^3 & \sum_{i=1}^{N} x_i^4 & \cdots & \sum_{i=1}^{N} x_i^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{N} x_i^n & \sum_{i=1}^{N} x_i^{n+1} & \sum_{i=1}^{N} x_i^{n+2} & \cdots & \sum_{i=1}^{N} x_i^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i^2 y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N} x_i^n y_i \end{pmatrix}$$

この連立方程式を解くことで各係数を求めることができる。

b) $y = a_0 + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \sin ix$

測定データを $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots (x_N, y_N)\}$ とする。

$i > 0$ について $x_i = \sin ix$ とすると $y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ となり、前問と同様に考えることができる。

$$\begin{pmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} \sin x_i & \sum_{i=1}^{N} \sin 2x_i & \cdots & \sum_{i=1}^{N} \sin nx_i \\ \sum_{i=1}^{N} \sin x_i & \sum_{i=1}^{N} \sin^2 x_i & \sum_{i=1}^{N} \sin x_i \sin 2x_i & \cdots & \sum_{i=1}^{N} \sin x_i \sin nx_i \\ \sum_{i=1}^{N} \sin 2x_i & \sum_{i=1}^{N} \sin x_i \sin 2x_i & \sum_{i=1}^{N} \sin^2 2x_i & \cdots & \sum_{i=1}^{N} \sin 2x_i \sin nx_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{N} \sin nx_i & \sum_{i=1}^{N} \sin x_i \sin nx_i & \sum_{i=1}^{N} \sin 2x_i \sin nx_i & \cdots & \sum_{i=1}^{N} \sin^2 nx_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} \sin x_i \cdot y_i \\ \sum_{i=1}^{N} \sin 2x_i \cdot y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N} \sin nx_i \cdot y_i \end{pmatrix}$$

この連立方程式を解けば良い。

c) $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} = a_0 \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}$

測定データを $\{(x_{11}, x_{21}, \cdots x_{n1}; y_1), (x_{12}, x_{22}, \cdots x_{n2}; y_2), \cdots (x_{1N}, x_{2N}, \cdots x_{nN}; y_N)\}$ とする。

与式の対数を取ると、$\ln y = \ln a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \ln x_i$ となる。よって、$i > 0$ について $x_i = \ln x_i$ とすると、$\ln y = \ln a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ とでき、これまで同様に近似を行うことができる。

$$
\begin{pmatrix}
N & \sum_{i=1}^{N} \ln x_{1i} & \sum_{i=1}^{N} \ln x_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^{N} \ln x_{ni} \\
\sum_{i=1}^{N} \ln x_{1i} & \sum_{i=1}^{N} \ln^2 x_{1i} & \sum_{i=1}^{N} \ln x_{1i} \ln x_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^{N} \ln x_{1i} \ln x_{ni} \\
\sum_{i=1}^{N} \ln x_{2i} & \sum_{i=1}^{N} \ln x_{1i} \ln x_{2i} & \sum_{i=1}^{N} \ln^2 x_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^{N} \ln x_{2i} \ln x_{ni} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\sum_{i=1}^{N} \ln x_{ni} & \sum_{i=1}^{N} \ln x_{1i} \ln x_{ni} & \sum_{i=1}^{N} \ln x_{2i} \ln x_{ni} & \cdots & \sum_{i=1}^{N} \ln^2 x_{ni}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\ln a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\sum_{i=1}^{N} \ln y_i \\
\sum_{i=1}^{N} \ln x_{1i} \ln y_i \\
\sum_{i=1}^{N} \ln x_{2i} \ln y_i \\
\vdots \\
\sum_{i=1}^{N} \ln x_{ni} \ln y_i
\end{pmatrix}
$$

この連立方程式を解けば $\ln a_0$ と各係数を求めることができるので、元の式に代入して近似ができる。