数理工学実験レポート
常微分方程式の数値解法

実験日: 10 月 11, 17, 18, 24 日
実験場所: 工学部総合校舎 数理計算機室

情報学科 2 回生 平田 蓮（学籍番号 1029342830）

2022 年 10 月 12 日

1　目的

多くの数理モデルには、微分方程式が現れる。これの解を解析的に得ることは一般的には難しいため、数値計算でその近似解求めるためのアルゴリズムを学習する。

2　原理

本章では、続く課題で用いるアルゴリズムについて述べる。

2.1　オイラー法

以下の関数を考える。

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{dt}}(t) = f(t, u(t)),\ u(0) = u_0 \tag{1}$$

この式の両辺を t について、$[t_a, t_b]$ の範囲で積分すると、

$$u(t_b) - u(t_a) = \int_{t_a}^{t_b} f(t, u(t))\mathrm{d}t$$

を得る。$\Delta t = t_b - t_a$ とすると、範囲内の積分を幅 Δt、高さ $f(t_a, u(t_a))$ の長方形の面積で近似でき、

$$\begin{aligned} u(t_b) - u(t_a) &\approx f(t_a, u(t_a))\Delta t \\ \to u(t_b) \qquad &\approx u(t_a) + f(t_a, u(t_a))\Delta t \end{aligned}$$

と書ける。ここで (a, b) を $(n, n+1)$ に置き換え、さらに $u(t_n)$ を u_n に書き換えると、

$$u_{n+1} = u_n + f(t_n, u_n)\Delta t \tag{2}$$

を得る。この式を n に対して繰り返し適用することで、式 (1) を満たす関数を数値計算することができる。積分を近似する際に t_a での値を用いたため、これは前進オイラー法を呼ばれる。一方、t_b を用いても近似ができるが、こちらは後進オイラー法と呼ばれ、前進オイラー法と同様に導かれる次式で表される。

$$u_{n+1} = u_n + f(t_{n+1}, u_{n+1})\Delta t$$

参考文献

[1] 実験演習ワーキンググループ, “数理工学実験 2022 年度版”, 京都大学工学部情報学科数理工学コース