

## A 题 核酸检测问题

2019 年底、2020 年初开始席卷全球的新冠疫情，给人类的生命安全带来了极大的威胁。为了有效控制新冠病毒的传播，核酸检测是一个非常重要而有效的手段。核酸检测需要一定的时间，在进行大规模核酸检测时，往往会因为来不及检测而耽误控制病毒传播的宝贵时间。为此，通常采用混合检测的方法，将若干人组成一组，把他们的采样样本混合起来一起进行检测，以加快总体检测速度。如果一组样本检测结果为阴性，那么这组样本对应的被检测者都是阴性的。如果一组样本检测结果为阳性，那么这组样本中至少有 1 人是阳性的，需要对这组样本的所有被检测者重新进行检测。重新检测时，采用单人单管检测的方法，以确定哪一个或哪几个被检测者是阳性的。

**问题 1** 请建立数学模型，分析说明多少人一组进行混检是比较理想的。

**问题 2** 收集相关数据，利用问题 1 的数学模型给出相应的混检方案。

**问题 3** 在出现疫情时，通常需要进行多轮检测。请利用建立的数学模型说明，在多轮检测中，是否需要调整混检方案。如果需要调整方案，如何进行调整。

## B 题 中证红利指数投资问题

中证红利指数 (000922.CSI)<sup>1</sup> 从沪深市场中选取现金股息率高、分红稳定、具有一定规模及流动性的 100 只上市公司证券作为指数样本，以反映沪深市场高红利上市公司证券的整体表现。其编制、调整和指数加权方式见中证指数公司官网。

对市场做如下假设：

- 初始总资金为 1 亿元人民币；
- 买卖股票没有手续费；
- 每周允许调仓一次；
- 当天涨停或跌停股票不能进行交易；
- 交易价格以收盘价格计算；
- 不利用其他衍生品；
- 不能做空或融券；
- 无风险年化收益率为 2.4%；
- 每只股票的仓位不能超过总资产的 20%。

**目标** 从 100 只样本股票中选取至多 10 只股票构建一个资产组合配置（允许空仓），每次调仓时可以重新选取股票。要求该资产组合每月收益率不能偏离中证红利指数当月收益率  $\pm 2\%$ （例如中证红利指数当月收益率为 1%，则资产组合当月收益率要求在  $[-1\%, 3\%]$ ）。在此基础上，实现年度超额收益率最高。

**问题** 请给出资产配置策略和求解算法，并对结果进行阐述和分析。

---

<sup>1</sup>详情请参考 <https://www.csindex.com.cn/#/indices/family/detail?indexCode=000922>

## C 题 多体协同调度问题

某机器人公司正在研发一款智能小车，为推销产品该公司计划制作一部宣传片。宣传片中需要将 36 辆小车在一个边长为 2 米的正方形区域内排列成指定的图案。小车只能由指挥中心统一调度，无法自行获得其它信息。已知每辆小车的最大线速度为 10 厘米/秒，并且小车在运动过程中严禁碰撞。

**问题 1** 如图 1 所示，初始状态下小车以 20 厘米的横向及纵向间距均匀分布在正方形左下方的一个等腰直角三角形区域内。每辆小车视为半径 1 厘米的圆盘。

请设计一种调度方案，使得小车以尽可能短的时间排成如图 2 所示的图案，并且小车在曲线上的分布尽量均匀。请以 1 秒为时间步长的快照形式对运动过程进行展示。

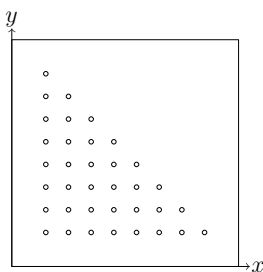


图 1

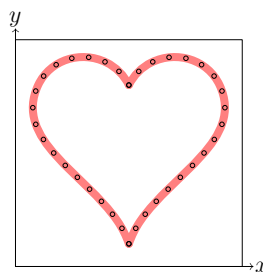


图 2

**问题 2** 如图 3 所示，初始状态下小车以 32 厘米为间距均匀分布在正方形区域内，目标是将它们排列成如图 4 所示的“SH”型曲线。每辆小车视为长 10 厘米的有向线段，运动终止时的朝向为曲线的切向正向。

已知每辆小车设计的最小转弯半径为 15 厘米，但实际有不超过 5% 的相对误差。指挥中心每隔 0.1 秒能获取所有小车当前的位置与朝向，来决定是否需要向小车发布新的指令来纠正其原有的操作指令序列。若指挥中心向小车发出一组新的指令，小车会在指令发出 0.2 秒后收到并响应新的指令，否则小车会按照原有的指令序列来运动。

请在这种情况下设计控制调度方案，使得小车能用尽可能短的时间排成如图 4 所示的图案，且小车在曲线上的分布尽量均匀。请以 1 秒为时间步长的快

照形式对运动过程进行展示。

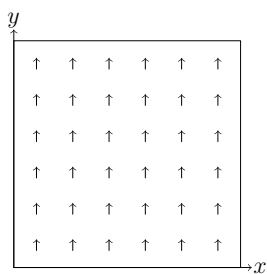


图 3

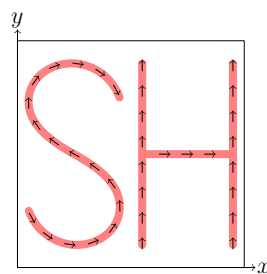


图 4

**注：**目标曲线的精确形状及小车的位置请自行建模，图 2 及图 4 仅供参考。