

# 房間佈置優化：模擬退火與精確解法的比較研究

李則霖  
軟創三乙 511172176  
資訊工程學系  
輔仁大學

**Abstract**—在有限室內空間中，自動化優化房間佈置能協助設計師快速找到高品質佈局方案。本研究比較模擬退火（**Simulated Annealing, SA**）與精確解法（**Exact Solver**）兩種方法在房間佈置優化問題中的表現。我們選取四種不同規模的房間案例（ $3 \times 3\text{m}$ 、 $5 \times 4\text{m}$ 、 $2.5 \times 2\text{m}$ 、 $6 \times 5\text{m}$ ）進行實驗，分析其運行時間與能量（品質）表現。結果顯示：精確解法在小規模問題中能快速求得最優解，SA 亦可達同品質解但耗時較長；在中大型問題中，精確解法無法求解（N/A），SA 則雖耗時但可取得可行解。此外，我們提供整合的能量與時間比較圖，以更清楚呈現兩方法的優缺點。

關鍵詞—模擬退火、精確解法、房間佈置、空間優化、自動化設計

## I. 引言

在室內設計中，家具的合理佈置攸關空間利用率與舒適度。傳統設計仰賴經驗，難以確保全域最優性。透過將問題轉化為組合優化並套用先進演算法，我們可在可控制時間內找到高品質解。

本研究比較模擬退火（SA）與精確解法（Exact Solver）於房間佈置優化問題之適用性。SA 可在大規模問題中尋得近似解 [1]，精確解法在小問題可保證最優解但不適用於中大型問題 [2]。

## II. 研究背景與方法

### A. 問題定義與能量機制

給定房間  $R(w, h)$  與家具集合  $F$ 。每家具具有固定尺寸與可擺放位置、旋轉方向（ $0^\circ$  或  $90^\circ$ ）。為衡量佈局品質，定義能量函數：

$$\min E = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n O_{ij} + \sum_{i=1}^n B_i, \quad (1)$$

$$O_{ij} = \max(0, \min(x_i + w_i, x_j + w_j) - \max(x_i, x_j)) \\ \times \max(0, \min(y_i + h_i, y_j + h_j) - \max(y_i, y_j)), \quad (2)$$

$$B_i = \max(0, x_i + w_i - R_w) + \max(0, y_i + h_i - R_h). \quad (3)$$

其中：

- $O_{ij}$  為家具  $i$  與家具  $j$  之間的重疊面積。當  $O_{ij} > 0$  時，表示兩家具重疊。
- $B_i$  為家具  $i$  的越界懲罰，確保家具不超出房間範圍。能量越低，佈局品質越佳。

### B. 模擬退火 (SA) 虛擬碼

SA 以高溫階段允許較差解被接受以逃離局部極值，隨降溫逐漸收斂至優解。

### Algorithm 1 Simulated Annealing (SA) Pseudocode

```
1: Generate initial solution  $S$ 
2:  $T = T_0$  (initial temperature)
3: while  $T > T_{\min}$  do
4:   for  $k = 1$  to  $L$  do
5:      $S' = \text{GenerateNeighbor}(S)$ 
6:      $\Delta E = E(S') - E(S)$ 
7:     if  $\Delta E < 0$  or  $e^{-\frac{\Delta E}{T}} > \text{rand}(0, 1)$  then
8:        $S \leftarrow S'$ 
9:     end if
10:   end for
11:    $T \leftarrow \alpha \cdot T$ 
12: end while
13: return  $S$ 
```

### C. 模擬退火 (SA) 數學描述

模擬退火是一種啟發式搜尋算法，用於在大規模搜索空間中找到近似全域最優解。

\*\* 接受新狀態的概率 \*\*：

$$P = \begin{cases} 1 & \Delta E \leq 0, \\ e^{-\frac{\Delta E}{T}} & \Delta E > 0. \end{cases}$$

其中：

- $\Delta E = E_{\text{new}} - E_{\text{current}}$  是新佈局的能量變化。
- $T$  是當前溫度，隨迭代逐漸降低。

\*\* 降溫公式 \*\*：

$$T_{\text{new}} = \alpha \cdot T_{\text{current}}$$

其中：

- $\alpha$  是降溫速率，程式中設置為 0.85。
- $T_{\text{initial}}$  是初始溫度，程式中設置為 5000。

### D. 精確解法 (Exact Solver) 虛擬碼

精確解法能對小問題快速找到最優解，但在中大型問題中計算爆炸性增長，以致無解（N/A），其完整虛擬碼放置於文後頁。

### E. 精確解法 (Exact Solver) 數學描述

暴力搜尋是一種枚舉所有可能佈局的算法，用於尋找全域最優解。

$$S = \prod_{i=1}^N P_i$$

---

**Algorithm 2** Exact Solver (Branch and Bound) Pseudocode

---

```

1: Initialize search tree node (empty layout),  $BestE = \infty$ 
2: while Queue not empty do
3:   Node = ExtractMin(Queue)
4:   if Node lower bound  $> BestE$  then
5:     Prune this node
6:   else
7:     Expand node: place next furniture
8:     for each feasible placement do
9:       Calculate  $E$  or lower bound
10:      if All furniture placed then
11:        if  $E < BestE$  then
12:           $BestE = E$ , update solution
13:        end if
14:      else
15:        Insert child node
16:      end if
17:    end for
18:  end if
19: end while
20: return BestSolution

```

---

其中：

- $N$  是家具的總數。
- $P_i$  是家具  $i$  的所有可能位置和旋轉的排列組合數。

描述：

- 每個家具的排列數由步進長度（如 0.25 m）和房間尺寸確定。
- 通過遍歷  $S$  找到能量最小的佈局，當  $E = 0$  時，即為最優解。

### III. 實驗設計

本研究測試四案例：

- **CASE1:** 3×3m（小規模）
- **CASE2:** 5×4m（中規模）
- **CASE3:** 2.5×2m（小規模）
- **CASE4:** 6×5m（大規模）

比較 SA 與精確解法之最終能量與時間。

### IV. 結果與分析

以下依案例展示最優解佈局圖（精確解法與 SA 各一張，部分案例僅有 SA 圖），再呈現整體能量與時間比較，最後以表格彙整。

#### A. CASE1 (3×3m)

小規模，精確解法可瞬間達能量 0，SA 亦能達 0 但較久。

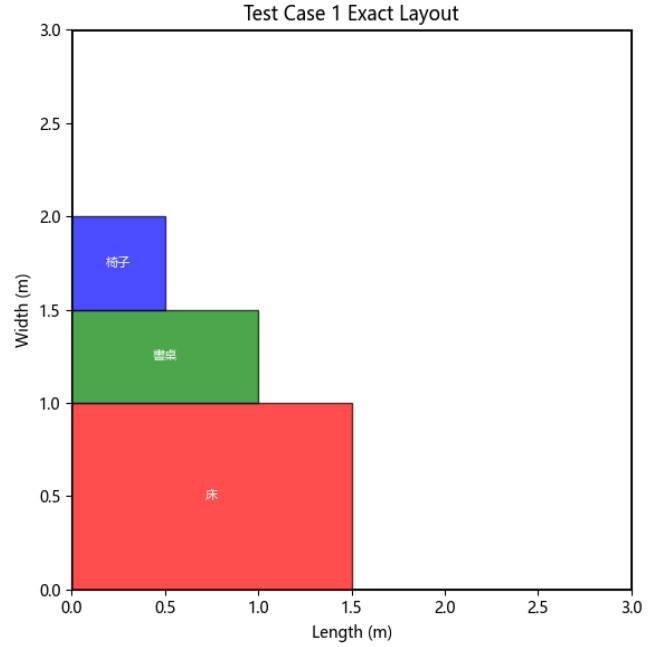


Fig. 1. CASE1 精確解法最優佈局示意圖

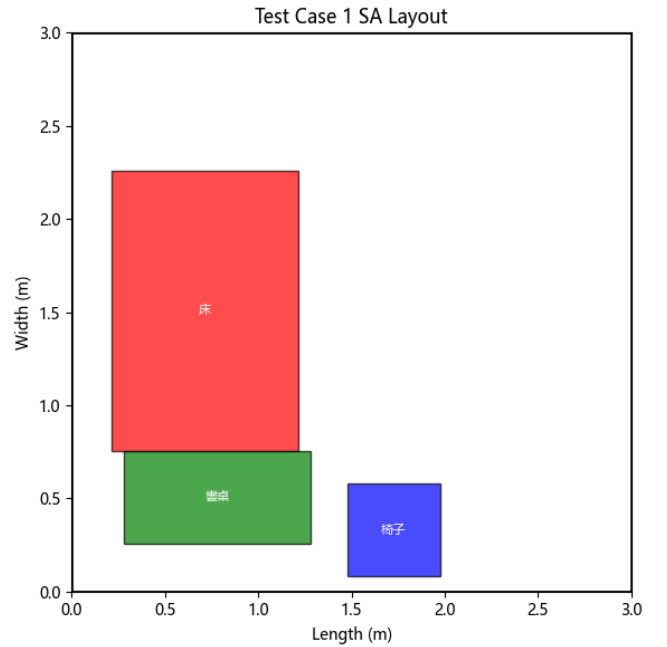


Fig. 2. CASE1 SA 最優佈局示意圖

### B. CASE2 (5×4m)

中規模，精確解法無解 (inf)，SA 約 8.7276 秒取得能量 0 解。

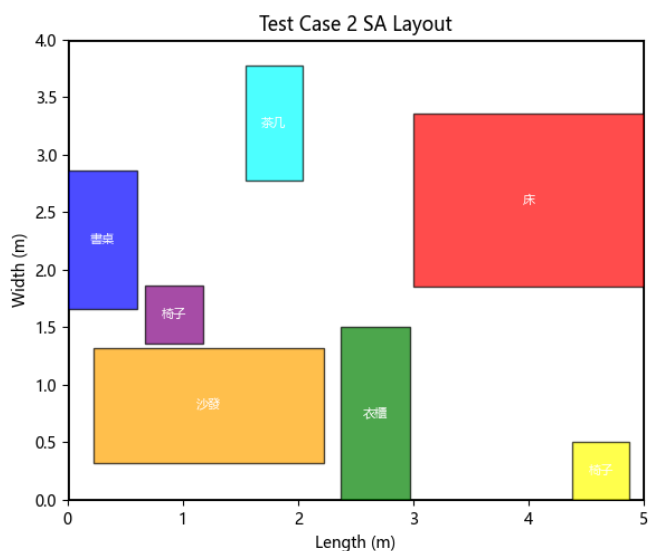


Fig. 3. CASE2 SA 最優佈局示意圖

### C. CASE3 (2.5×2m)

小規模類似 CASE1，精確解法快速 0 能量，SA 亦可但耗時較長。

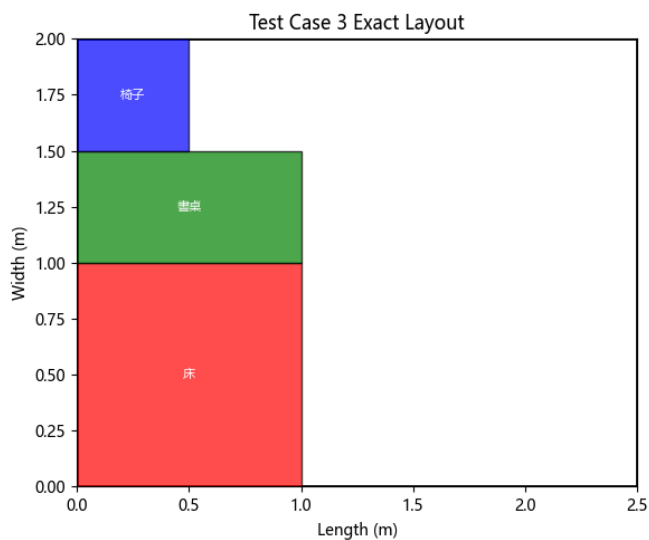


Fig. 4. CASE3 精確解法最優佈局示意圖

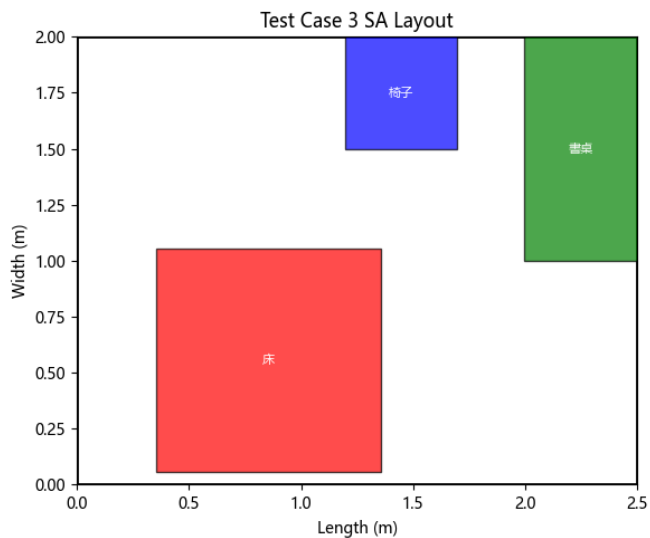


Fig. 5. CASE3 SA 最優佈局示意圖

### D. CASE4 (6×5m)

大規模，精確解法無法求解 (N/A)，SA 約 16.3204 秒取得能量 0.39 解。

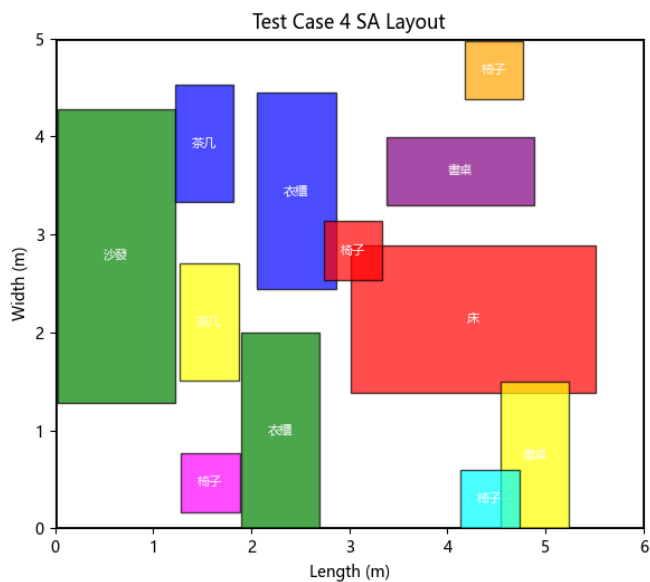


Fig. 6. CASE4 SA 最優佈局示意圖

### E. 整體能量比較

以下為 SA 與精確解法的能量比較圖：

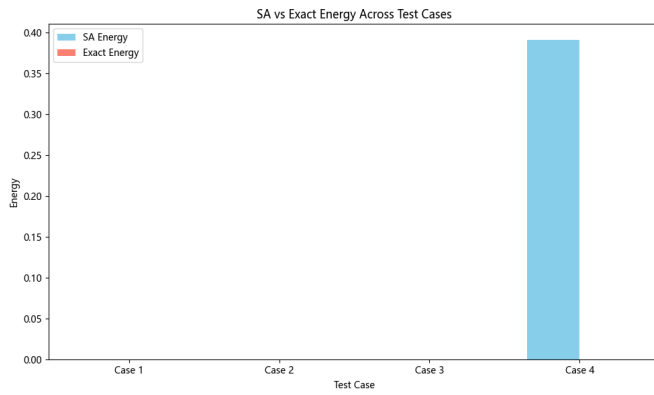


Fig. 7. 整體能量比較：小規模精確解法、SA 皆 0；中大型精確解法 N/A，SA 有可行解

## F. 整體時間比較

以下為 SA 與精確解法的時間比較圖：

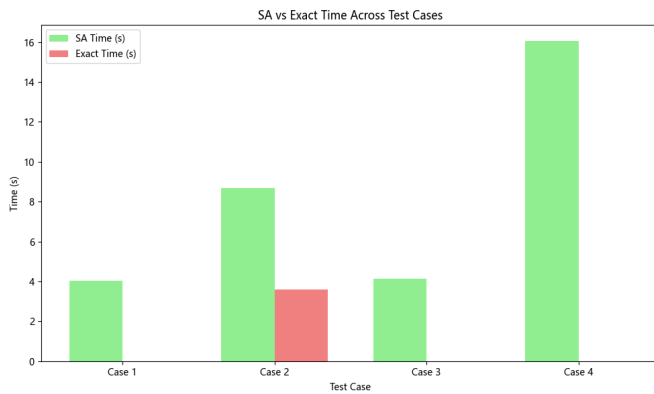


Fig. 8. 整體時間比較：小問題精確解法極快，SA 較久；中大型精確解法 N/A，SA 較久但有解

## G. 結果表格彙整

表 I 彙整四案例結果。

TABLE I  
四案例結果摘要

Test Case	Room Size	SA Energy	SA Time(s)	Exact Energy	Exact Time(s)
1	3x3m	0.00	4.0218s	0.00	0.0050s
2	5x4m	0.00	8.6686s	inf	3.5944s
3	2.5x2m	0.00	4.1367s	0.00	0.0029s
4	6x5m	0.39	16.0464s	N/A	N/A

## V. 結論與展望

本研究比較 SA 與精確解法在房間佈置優化問題下的表現。結果顯示：

- 小規模問題：精確解法能在極短時間內求得能量 0 最優解，SA 亦可達 0 但較耗時。
- 中大型問題：精確解法無法求解（N/A），SA 雖耗時但仍可取得可行解。

未來可考慮混合策略（如先由精確解法求解局部，再以 SA 全域優化）或增加實務約束，使結果更貼近真實設計需求。

## REFERENCES

- [1] Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D., & Vecchi, M. P. (1983). Optimization by simulated annealing. *Science*, 220(4598), 671–680. <https://doi.org/10.1126/science.220.4598.671>
- [2] Woeginger, G. J. (2003). Exact algorithms for NP-hard problems: A survey. In Jünger, M., Reinelt, G., & Rinaldi, G. (Eds.), *Combinatorial Optimization—Eureka, You Shrink! (Lecture Notes in Computer Science, vol. 2570)*. Springer, Berlin, Heidelberg. [https://doi.org/10.1007/3-540-36478-1\\_17](https://doi.org/10.1007/3-540-36478-1_17)