一、填空题

1. 设 $f(x,y)\quad 2(x-y)-x^2+y^2$，则 $f(x,y)$ 的驻点为______________ .

2. 微分方程 $ydy+xdx=0$ 的通解为__________________.

3. 函数 $z=xy^2$ 在 $(2,2)$ 点的全微分 $dz=$________________________ .

4. 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{1+n}$ 是条件收敛、绝对收敛、还是发散？___________ .

5. 设 $L: y = 2x, 0\le x\le 1$， 则 $\int_L (x+2y)ds=$__________________.

6. 曲线积分 $I\quad \int_{(0,0)}^{(1,1)} ydx+xdy$ 的值为 __________________.

7. 设 $\sum$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=9$，则 $\iint_\Sigma \frac{1}{x^2+y^2+z^2}dS=$____________.

8. 函数 $f(x)=\frac{1}{2-x}$ 的麦克劳林级数为________________________.

9. 试写出求解下列条件极值问题的拉格朗日函数：求函数 $f(x,y)=x+y$ 在条件 $x^2+y^2=1$ 下的极值. ______________________________.

10. 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的在点 $(4,1,1)$ 处的切平面方程为

_____________________________.

11. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，且 $f(x)=\begin{cases} x & 0<x<\pi \\ 0 & -\pi\le x\le 0\end{cases}$ ， $S(x)$ 是 $f(x)$ 的傅立叶级数的和函数，则 $S(36\pi)=$ _____________.

12. 设空间区域 Ω 由锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 与平面 $z=3$ 围成，其体积为_____________.

二、计算题

13. 已知区域 D 求由 $y=x$ 与 $y=x^2$ 所围成的图形，求

（1）区域 D 的面积 s .（2）二重积分 $\iint_D xy^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

14. 计算曲线积分

$$I=\int_L (x^2y+e^x\sin y)dx+(-xy^2+e^x\cos y)dy$$

其中 L 为沿着 $x^2+y^2=1$ 上从点 $A(1,0)$ 到点 $B(-1,0)$ 的半圆弧.

15. 求微分方程 $y''+2y'-3y=(x^2+2x-3)e^x$ 的通解.

16. 求：（1）幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$ 的收敛域及和函数.

（2）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}$ 的和.

17. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} y^2dydz+x^2dzdx+z^2dxdy$，其中 Σ 是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=2$ 所截部分的下侧.

三、证明题

18. 设 $z=xy+xF(\frac{y}{x})$，其中 F 为可微函数，试证明：

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+xy$$

19. 已知函数 $f(x)\geq 0$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，证明：当常数 $\alpha>0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}f(\frac{1}{n})$ 收敛.

一、填空题（本大题共 12 道小题，每题 3 分，共 36 分）

1. 设 $f(x,y)=2(x-y)-x^2+y^2$，则 $f(x,y)$ 的驻点为 $(1,1)$.

2. 微分方程 $ydy+xdx=0$ 的通解为 $x^2+y^2=C$.

3. 函数 $z=xy^2$ 在 $(2,2)$ 点的全微分 $dz=$ $4dx+8dy$.

4. 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{1+n}$ 是条件收敛、绝对收敛、还是发散？条件收敛

5. 设 $L: y=2x, 0\le x\le 1$， 则 $\int_L (x+2y)ds =$ $\underline{\quad \frac{5\sqrt{5}}{2} \quad}$.

6. 曲线积分 $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)} ydx+xdy$ 的值为 $\underline{\quad 1 \quad}$.

7. 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=9$，则 $\iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{x^2+y^2+z^2} dS =$ $\underline{\quad 4\pi \quad}$.

8. 函数 $f(x)=\frac{1}{2-x}$ 的麦克劳林级数为 $\underline{\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^n, (-2<x<2)}$.

9. 试写出求解下列条件极值问题的拉格朗日函数：求函数 $f(x,y)=x+y$ 在条件 $x^2+y^2=1$ 下的极值. $\underline{L=x+y+\lambda(x^2+y^2-1)}$.

10. 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的在点 $(4,1,1)$ 处的切平面方程为 $\underline{4x+2y+3z-21=0}$.

11. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，且 $f(x)=\begin{cases} x & 0<x<\pi \\ 0 & -\pi\le x\le 0 \end{cases}$ ， $S(x)$ 是 $f(x)$ 的傅立叶级数的和函数，则 $S(36\pi)=$ $\underline{\quad 0 \quad}$.

12. 设空间区域 Ω 由锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 与平面 $z=3$ 围成，其体积为 $\underline{\quad 3\pi \quad}$.

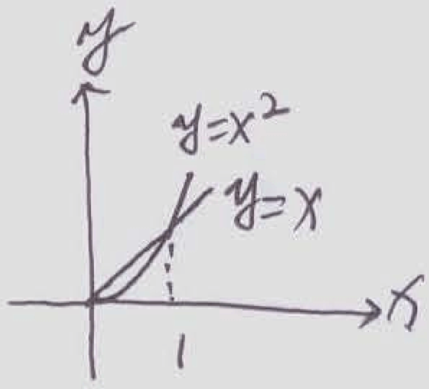
二、计算题（本大题共 5 道小题，每题 10 分，共 50 分）

得 分	评阅人

13. 已知区域 D 求由 $y=x$ 与 $y=x^2$ 所围成的图形，求

（1）区域 D 的面积 S .（2）二重积分 $\iint\limits_D xy^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(1) $D: \begin{cases} x^2\le y\le x \\ 0\le x\le 1 \end{cases}$



$S=\iint\limits_D d\sigma=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} dy=\int_0^1 (x-x^2)dx$

$=\frac{1}{6}$

(2) $\iint\limits_D xy^3 dxdy=\int_0^1 xdx\int_{x^2}^{x} y^3 dy=\frac{1}{60}$

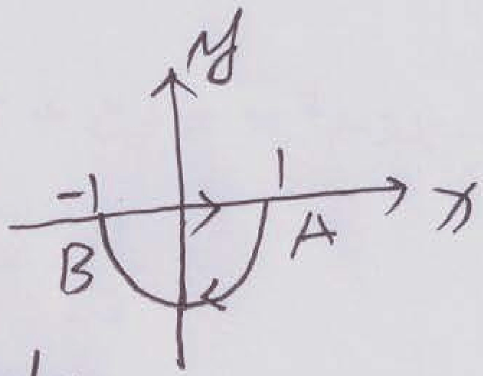
得 分	评阅人

14. 计算曲线积分

$$I=\int_L (x^2y+e^x\sin y)dx+(-xy^2+e^x\cos y)dy$$

其中 L 为沿着 $x^2+y^2=1$ 上从点 $A(1,0)$ 到点 $B(-1,0)$ 的半圆弧. (沿下半圆)

(1) 补充线段 $\overline{BA}$: $y=0$, $x: -1\to 1$.



$$I+\int_{\overline{BA}}$$

$$=-\iint_D(-y^2+e^x\cos y-x^2-e^x\cos y)dxdy$$

$$=\iint_D(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\int_{\pi}^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cdot r\,dr=\frac{\pi}{4}.$$

(2) $\int_{\overline{BA}}=0$

(3) $I=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$.

得 分	评阅人

15. 求微分方程 $y''+2y'-3y=(x^2+2x-3)e^x$ 的通解.

解: (1) 求齐次微分方程的通解.

特征方程 $\varphi(r)=r^2+2r-3=0. \Rightarrow r_1=-3, r_2=1.$

$\therefore$ 齐次方程的通解为 $Y=C_1e^{-3x}+C_2e^x.$

(2) 求非齐次微分方程的特解.

设 $y^*=Q(x)e^x=x(Ax^2+Bx+C)e^x$

代入公式

$$Q''(x)+\varphi'(\lambda)Q'(x)+\varphi(\lambda)Q(x)=P_m(x)$$

得

$$6Ax+2B+4(3Ax^2+2Bx+C)=x^2+2x-3$$

解得 $A=\frac{1}{12}$, $B=\frac{3}{16}$, $C=-\frac{27}{32}$

$\therefore$ 齐次微分方程的一个特解为

$$y^*=\left(\frac{1}{12}x^3+\frac{3}{16}x^2-\frac{27}{32}x\right)e^x$$

(3) 非齐次微分方程的通解为

$$y=Y+y^*=C_1e^{-3x}+\left(\frac{1}{12}x^3+\frac{3}{16}x^2-\frac{27}{32}x+C_2\right)e^x$$

得 分	评阅人

16. 求：（1）幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$ 的收敛域及和函数.

（2）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}$ 的和.

(1) 收敛域：

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1,\quad R=1.$$

$x=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 收敛.

$x=-1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{1}{n}$ 发散.

$\therefore$ 级数的收敛域为 $(-1,1]$.

设和函数为 $S(x)$, $x\in(-1,1]$

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n\right)'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}$$

$$=\frac{1}{1+x}$$

$$S(x)-S(0)=\int_0^x S'(x)dx=\int_0^x\frac{1}{1+x}dx$$

$$=\ln(1+x)\Big|_0^x$$

$$=\ln(1+x)$$

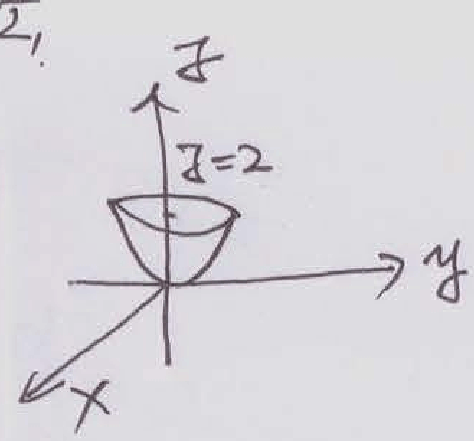
$\therefore S(x)=\ln(1+x)$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}=S(\frac{1}{2})=\ln(\frac{3}{2})$

得 分	评阅人

17. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} y^2dydz+x^2dzdx+z^2dxdy$，其中$\Sigma$是曲面$z=x^2+y^2$被平面$z=2$所截部分的下侧.

(1) 补平面: $z=2$, $x^2+y^2\le 2$, 取上侧. 记为Σ_1



$I+\iint\limits_{\Sigma_1}$

选用柱坐标

$\begin{cases} r^2\le z\le 2 \\ 0\le r\le\sqrt{2} \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$

$dv=r\,dr\,d\theta\,dz$

$\underline{\underline{\text{高斯公式}}}\ \iiint\limits_{\Omega} 2z\,dxdydz$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\,dr\int_{r^2}^{2}2z\,dz$

$=\frac{16}{3}\pi$

(2) $\iint\limits_{\Sigma_1}=\iint\limits_{D_{xy}}4\,dxdy=8\pi$

(3) $I=\frac{16}{3}\pi-8\pi=-\frac{8}{3}\pi$

三、证明题（本大题共 2 道小题，每题 7 分，共 14 分）

得 分	评阅人

18. 设$z=xy+xF(\frac{y}{x})$，其中F为可微函数，试证明：

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+xy$$

证明: $\frac{\partial z}{\partial x}=y+F(\frac{y}{x})+xF'(\frac{y}{x})\cdot(-\frac{y}{x^2})=y+F(\frac{y}{x})-\frac{y}{x}F'(\frac{y}{x})$.

$\frac{\partial z}{\partial y}=x+xF'(\frac{y}{x})\cdot\frac{1}{x}=x+F'(\frac{y}{x})$

$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+xF(\frac{y}{x})-yF'(\frac{y}{x})+xy+yF'(\frac{y}{x})$

$=xy+z$.

得 分	评阅人

19．已知函数 $f(x)\geq 0$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，证明：当常数 $\alpha>0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}f(\dfrac{1}{n})$ 收敛.

证明: $f(x)\geq 0$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{\alpha}}f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^{1+\alpha}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}=0.$$

$\because \alpha>0$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+\alpha}}$ 收敛.

由比较判别法知. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}f(\dfrac{1}{n})$ 收敛.