

工程力学总复习（大题）

老师最后两节课画的重点题,仅供参考,最好都看。

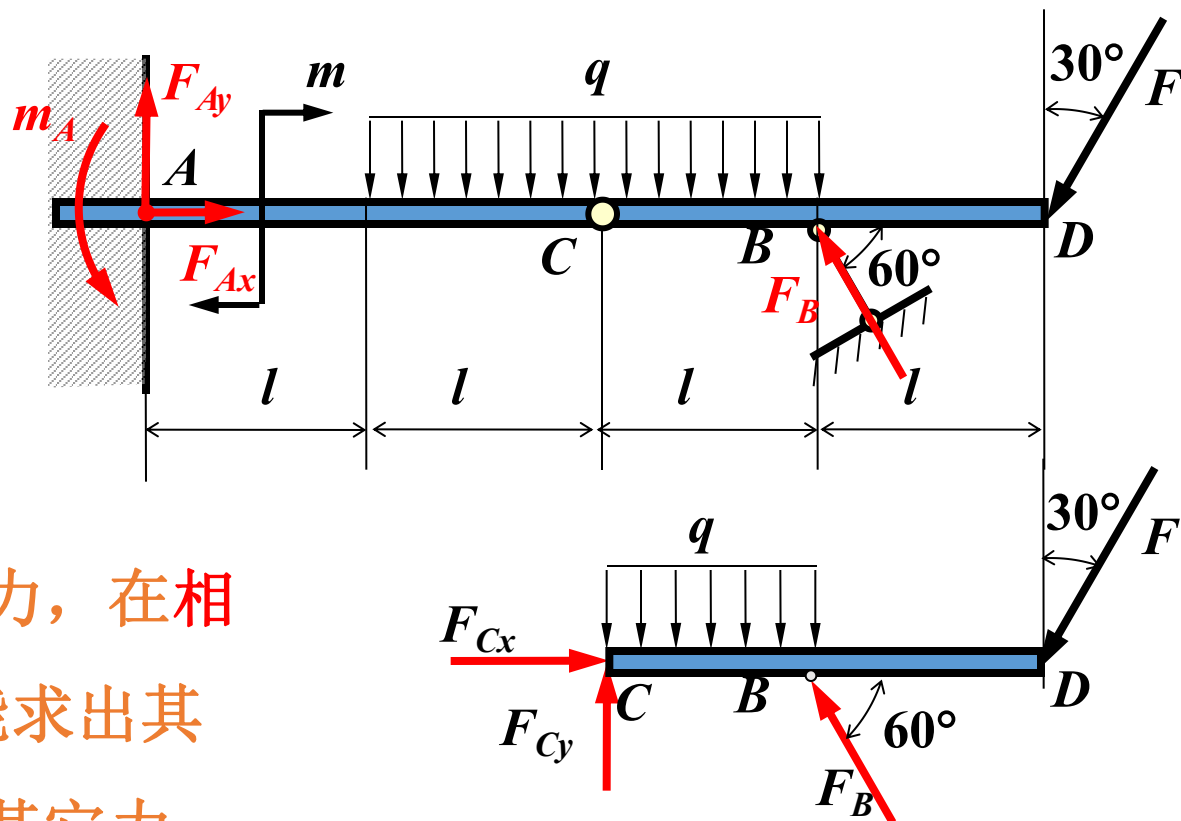
第二章 平面力系的简化与平衡

例2-13组合梁由AC、CD铰接而成。已知 $F=20\text{kN}$ ， $q=10\text{kN/m}$ ， $m=20\text{kN}\cdot\text{m}$ ， $l=1\text{m}$ 。求固定端A和链杆约束B的约束力。

解：

受力分析：

先分析整体受力



整体上4个要求的力，在相关的受力图上若能求出其中1个力，即可求其它力。

相关物体CD上有3个要求的力，可解。

解题方案：

CD和整体

例2-13 已知 $F=20kN$, $q=10kN/m$, $m=20kN\cdot m$, $l=1m$ 。求固定端A和链杆约束B的约束力。

解:

(1) 研究对象: CD

$$\sum M_C = 0$$

$$-q \times l \times \frac{l}{2} + F_B \sin 60^\circ \times l - F \cos 30^\circ \times 2l = 0$$

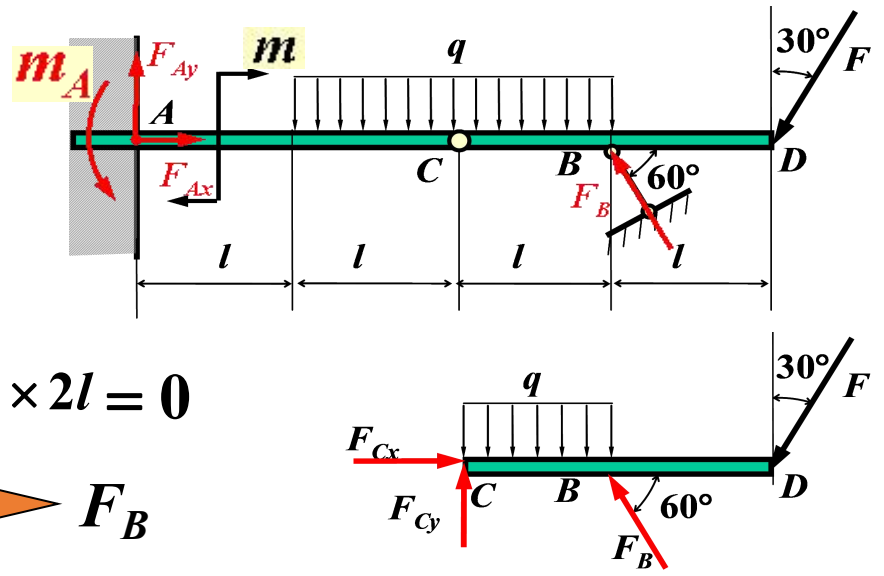
$$\Rightarrow F_B$$

(2) 研究对象: 整体

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} - F_B \cos 60^\circ - F \sin 30^\circ = 0 \quad \Rightarrow F_{Ax}$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} - q \times 2l + F_B \sin 60^\circ - F \cos 30^\circ = 0 \quad \Rightarrow F_{Ay}$$

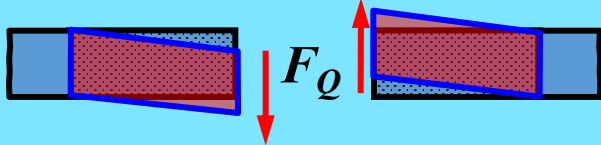
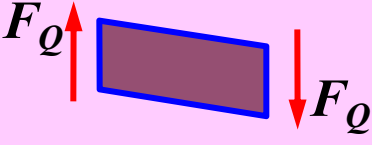
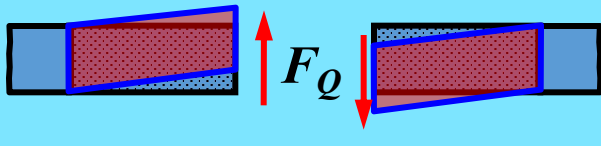
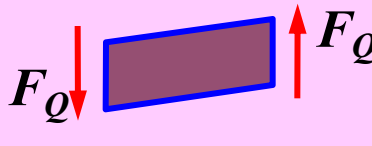
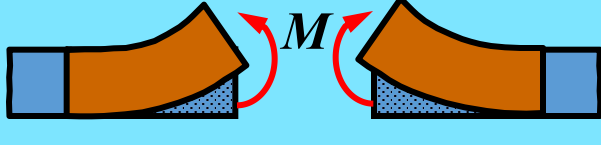
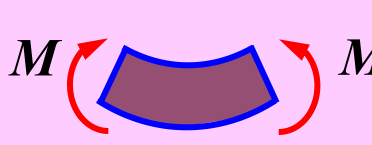
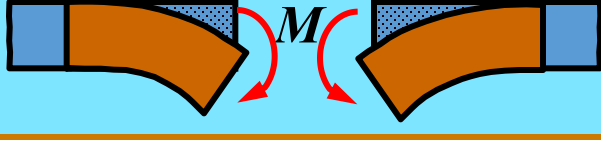
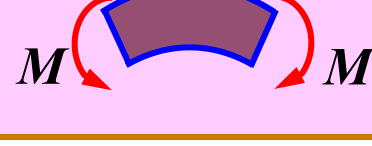
$$\sum M_A = 0 \quad m_A - m - q \times 2l \times l + F_B \sin 60^\circ \times 3l - F \cos 30^\circ \times 4l = 0 \quad \Rightarrow m_A$$



第四章 材料力学基本概念

4. 5. 3平面弯曲

梁的变形及内力的符号规定

	变 形 形 态		符 号
	F_Q 、 M	F_Q, M 引起的变形	
剪力 F_Q			+
			-
弯矩 M			+
			-

第五章 轴向拉伸和压缩

5.1 杆件轴向拉压的概念与轴力图

5.1.2 拉压杆的轴力和轴力图

为了**直观表示**轴力随截面位置的变化规律，画出轴力沿杆轴线方向变化的图形，即**轴力图**。

例5-1：作出杆的轴力图。

轴力图的横坐标表示横截面位置，纵坐标表示轴力大小

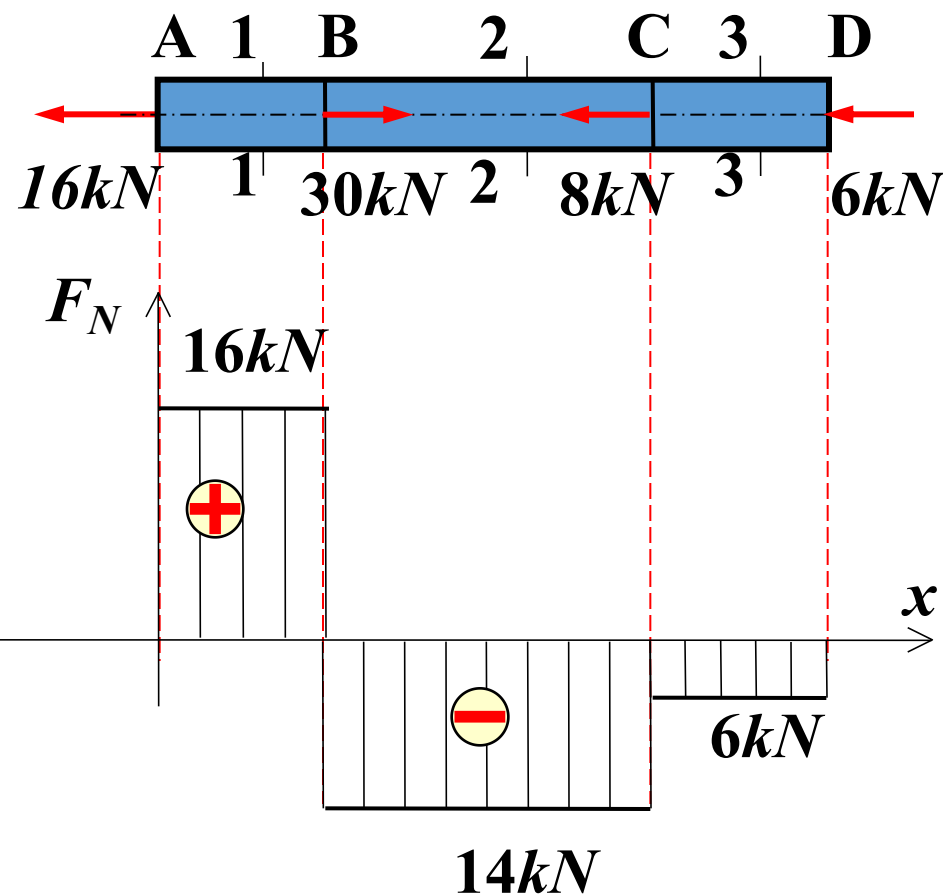
解：

分段求内力：

AB段 $F_{N1} = 16kN$
左侧

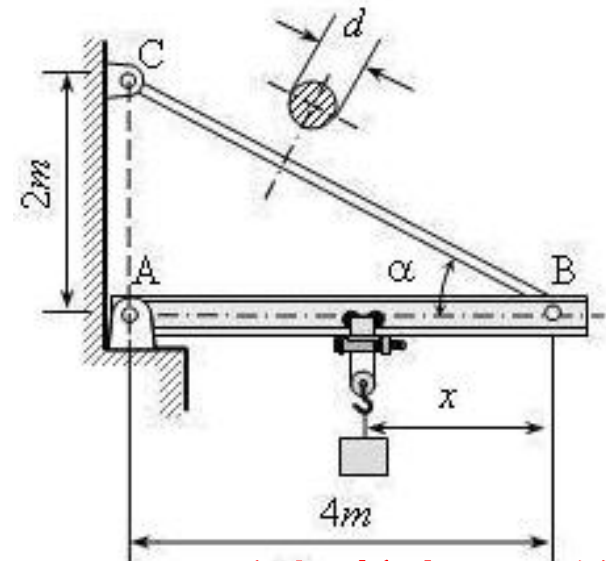
BC段 $F_{N2} = -8 - 6 = -14kN$
右侧

CD段 $F_{N3} = -6kN$
右侧

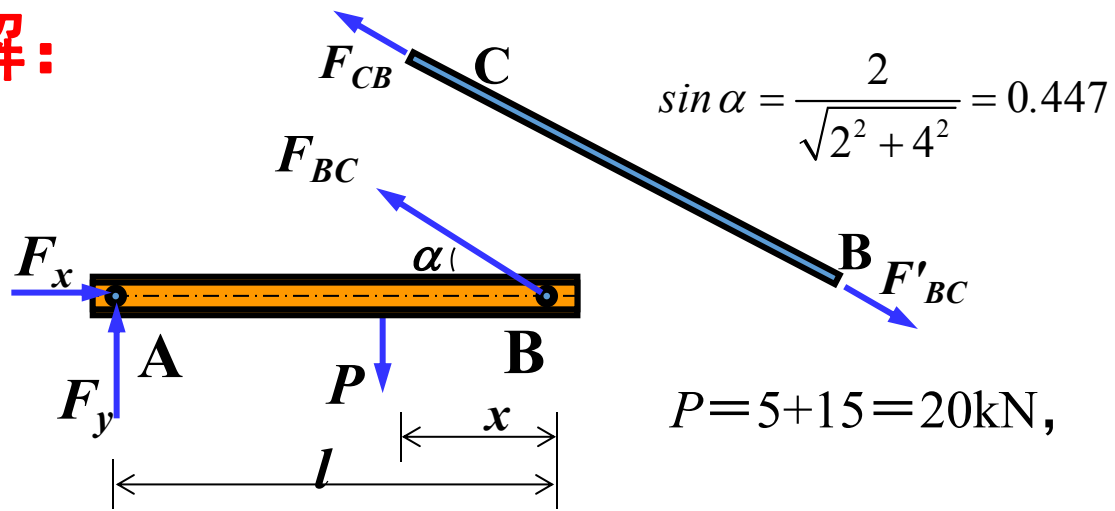


5.2.2 拉压杆的强度计算

例5-3 悬臂吊车如图。已知电葫芦的自重 $G=5\text{kN}$ ，起重量 $Q=15\text{kN}$ 。拉杆BC的材料为Q235钢，许用应力 $[\sigma]=120\text{MPa}$ ，试设计拉杆BC的直径。若把BC换为两根等边角钢，试确定角钢的号数。



解：



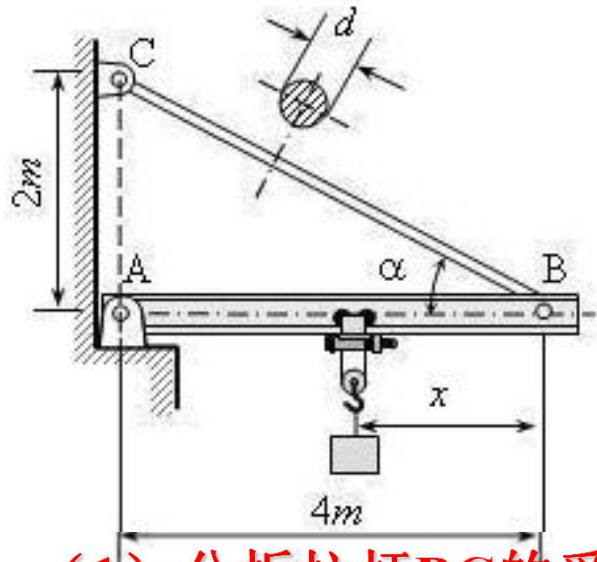
(1) 分析拉杆BC的受力：

由 $\sum m_A(F) = 0 \quad F_{BC} \sin \alpha \times l - P \times (l - x) = 0$ 解得： $F_{BC} = \frac{P \times (l - x)}{\sin \alpha \times l}$

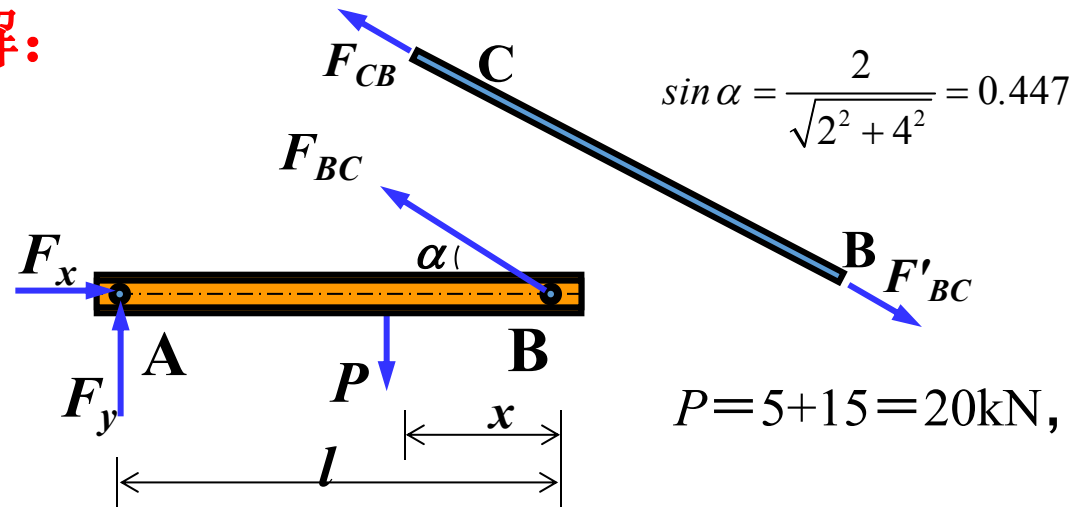
当 $x=0$ 时， F_{BC} 最大： $F_{BC, \max} = \frac{P}{\sin \alpha} = \frac{20}{0.447} = 44.7\text{kN}$

由作用反作用公理，BC杆所受拉力为44.7kN。

例5-3 悬臂吊车如图。已知电葫芦的自重 $G=5\text{kN}$ ，起重量 $Q=15\text{kN}$ 。拉杆BC的材料为Q235钢，许用应力 $[\sigma]=120\text{MPa}$ ，试设计拉杆BC的直径。若把BC换为两根等边角钢，试确定角钢的号数。



解：



(1) 分析拉杆BC的受力：BC杆所受拉力为44.7kN。

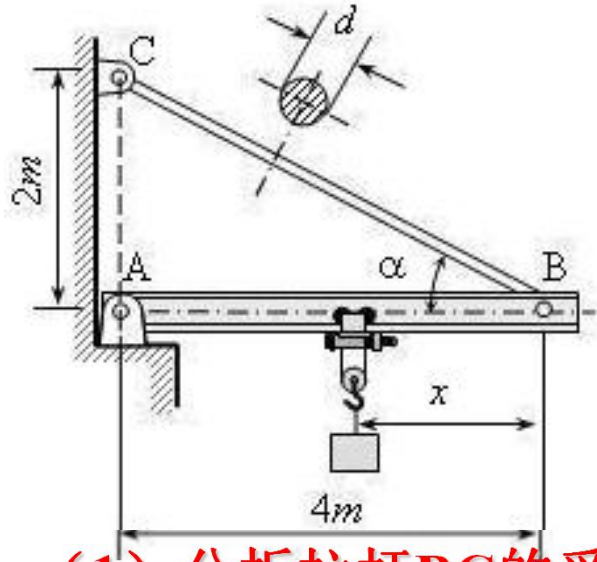
(2) BC杆的最大轴力： $F_{N\max} = F_{BC,\max} = 44.7\text{kN}$

(3) 由强度条件确定BC杆的截面尺寸：

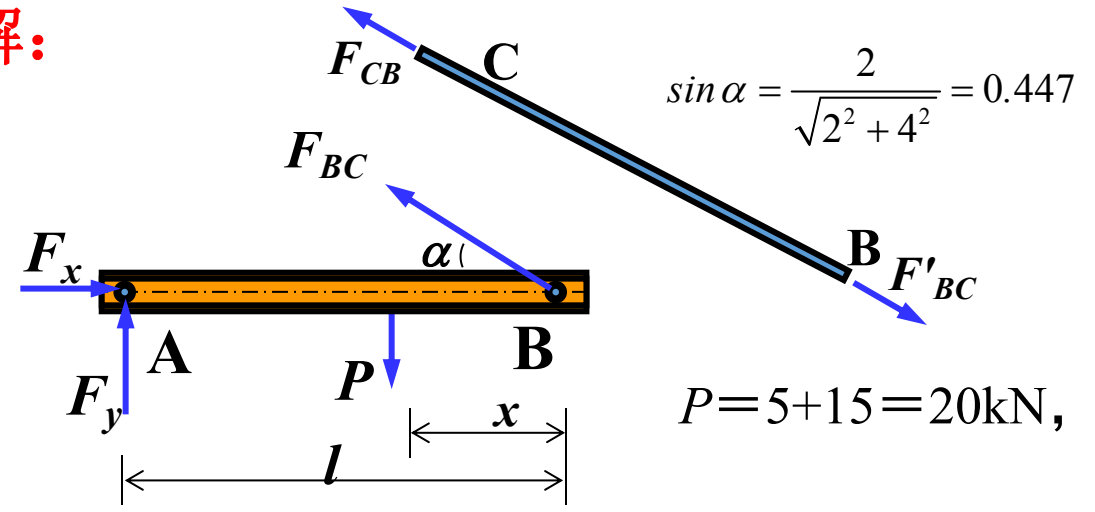
$$\frac{\pi}{4} d^2 \geq \frac{F_{N,\max}}{[\sigma]} = \frac{44.7 \times 10^3}{120} = 372.5\text{mm}^2 \qquad d \geq \sqrt{\frac{4 \times 372.5}{\pi}} = 21.78\text{mm}$$

因此，圆截面杆直径可取为 $d = 25\text{mm}$

例5-3 悬臂吊车如图。已知电葫芦的自重 $G=5\text{kN}$ ，起重量 $Q=15\text{kN}$ 。拉杆BC的材料为Q235钢，许用应力 $[\sigma]=120\text{MPa}$ ，试设计拉杆BC的直径。若把BC换为两根等边角钢，试确定角钢的号数。



解：



(1) 分析拉杆BC的受力：BC杆所受拉力为44.7kN。

(2) BC杆的最大轴力： $F_{N\max} = F_{BC,\max} = 44.7\text{kN}$

例5-3 悬臂吊车如图。已知电葫芦的自重 $G=5\text{kN}$ ，起重量 $Q=15\text{kN}$ 。拉杆BC的材料为Q235钢，许用应力 $[\sigma]=120\text{MPa}$ ，试设计拉杆BC的直径。若把BC换为两根等边角钢，试确定角钢的号数。

解： 若采用两根等边角钢，设每根横截面积为 A'

$$\text{则 } 2A' = 372.5\text{mm}^2 \quad \text{从而 } A' = 186.25\text{mm}^2$$

查型钢表，2.5号角钢（ $\angle 25 \times 25 \times 4$ ）面积为： $A_0 = 185.9\text{mm}^2$

对应2.5号角钢制成的拉杆，最大工作应力为：

$$\sigma_{\max} = \frac{F_{N,\max}}{A} = \frac{44.7 \times 10^3}{2 \times 185.9} = 120.23\text{MPa}$$

未超出许用应力的5%，是满足强度要求的。

因此，BC杆可采用两根2.5号等边角钢（ $\angle 25 \times 25 \times 4$ ）。

第六章 圆轴扭转

例6-1 已知轴的转速 $n=300r/min$ ，主动轮A输入功率 $N_A=36.7kW$ ，从动轮B、C、D输出功率分别为 $N_B=14.7kW$ ， $N_C=N_D=11kW$ 。试画轴的扭矩图。

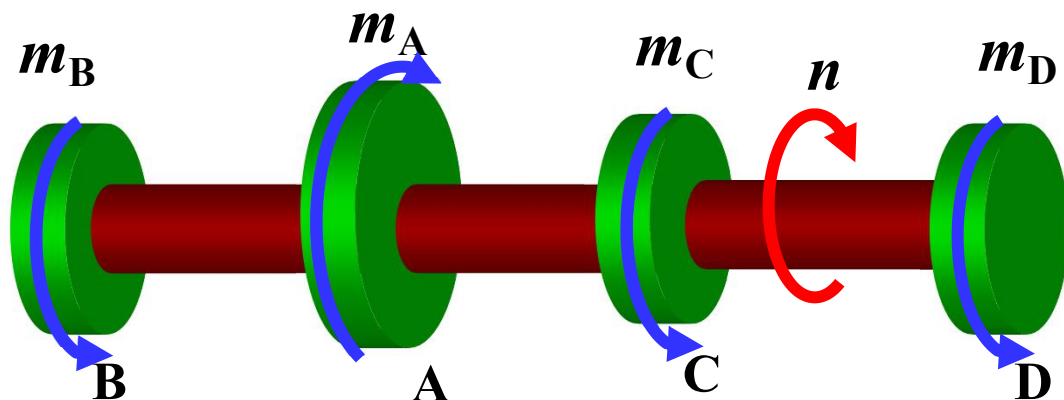
解：

(1) 计算外力偶矩

$$m_A = 9550 \frac{N_A}{n} = 9550 \frac{36.7}{300} = 1168 Nm$$

$$m_B = 9550 \frac{N_B}{n} = 9550 \frac{14.7}{300} = 468 Nm$$

$$m_C = m_D = 9550 \frac{N_C}{n} = 9550 \frac{11}{300} = 350 Nm$$



主动轮上的力偶与轴的转动方向一致

从动轮上的力偶与轴的转动方向相反

(2) 分段求扭矩

BA段

$$M_{T1} = -468Nm$$

AC段

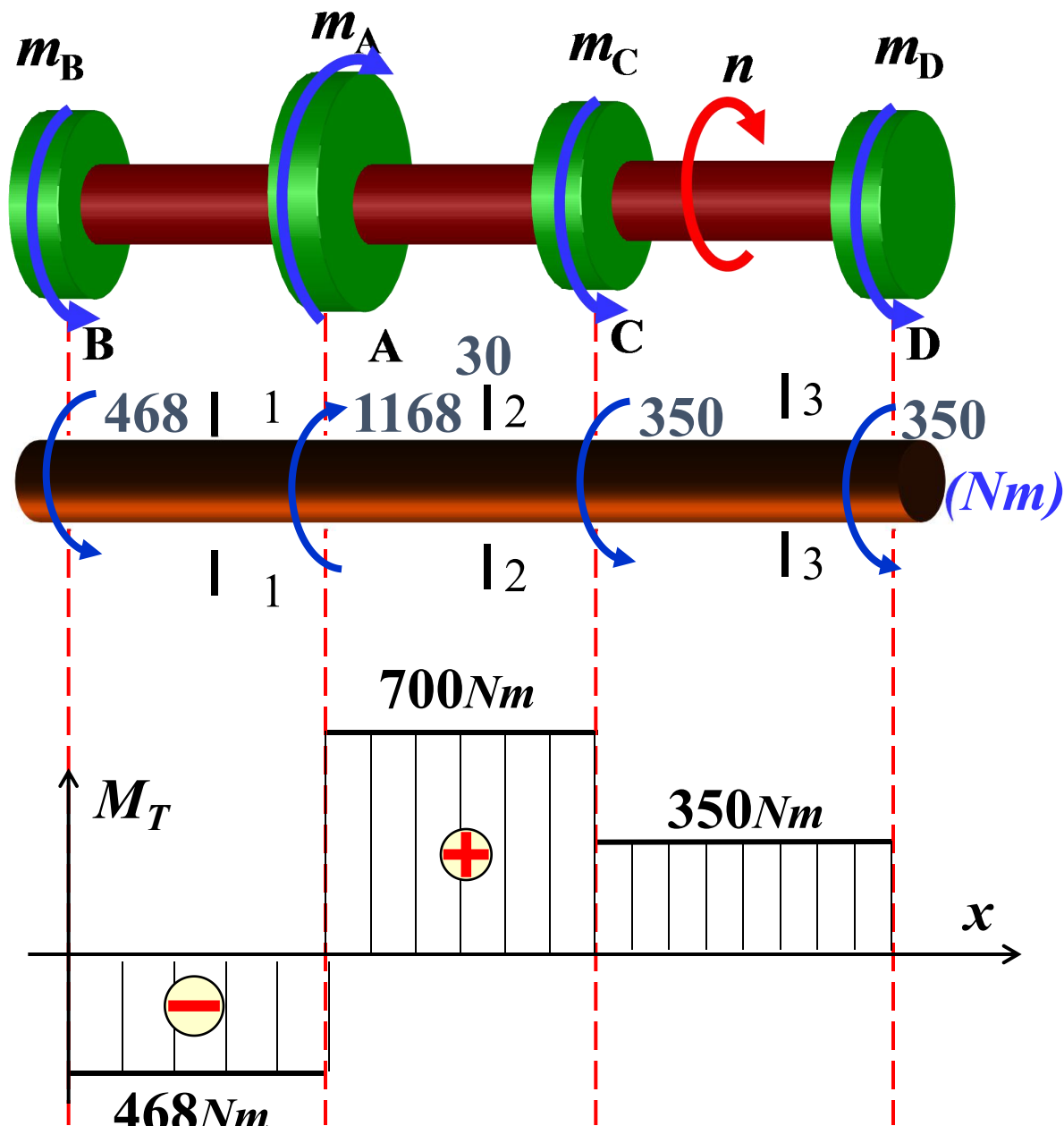
$$\begin{aligned} M_{T2} &= -468 + 1168 \\ &= 700Nm \end{aligned}$$

AD段

$$M_{T3} = 350Nm$$

(3) 画扭矩图

$$M_{Tmax} = 700Nm$$



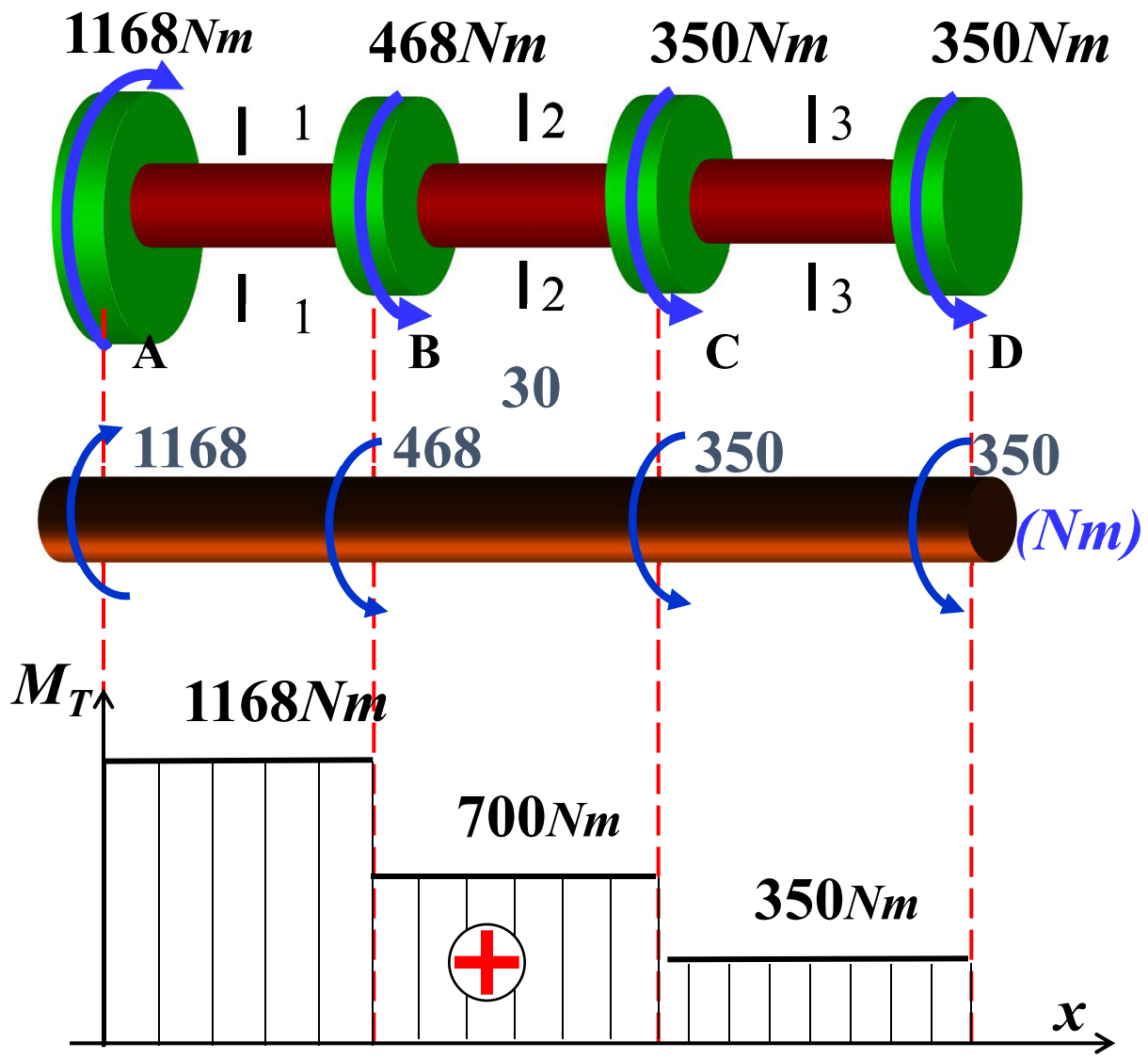
当主动轮A和从动轮B的位置交换，是否合理？

$M_{T1}_{左} = 1168Nm$

$M_{T2}_{左} = 1168 - 468$
 $= 700Nm$

$M_{T3}_{右} = 350Nm$

$M_{Tmax} = 1168Nm$



轴上轮子的合理布置方式是：使轴内绝对值最大的扭矩尽可能小。

例6-4 传动轴如图所示，主动轮A输入功率 $N_A=50\text{kW}$ ，从动轮B、C、D输出功率分别为 $N_B=N_C=15\text{kW}$ ， $N_D=20\text{kW}$ ，轴的转速 $n=300\text{r/min}$ ，已知 $[\tau]=40\text{MPa}$ ， $G=80\text{GPa}$ ， $[\theta]=0.5^\circ/\text{m}$ ，试设计轴的直径。

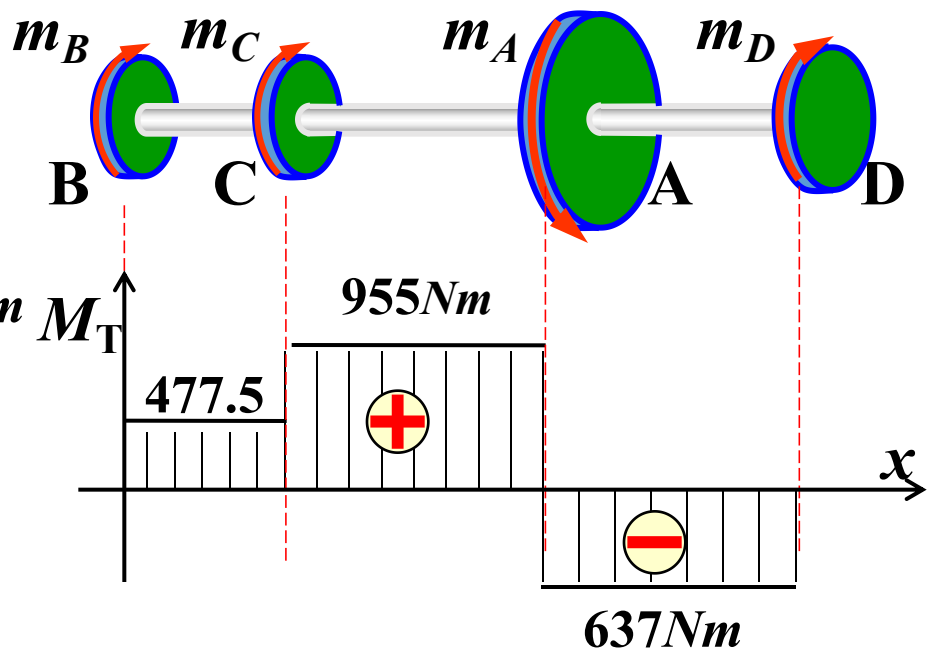
解：（1）计算外力偶矩

$$m_A = 9550 \frac{N_A}{n} = 9550 \frac{50}{300} = 1592 \text{ Nm}$$

$$m_B = m_C = 9550 \frac{N_B}{n} = 9550 \frac{15}{300} = 477.5 \text{ Nm}$$

$$m_D = 9550 \frac{N_D}{n} = 9550 \frac{20}{300} = 637 \text{ Nm}$$

（2）画扭矩图 $M_{T\max} = 955 \text{ Nm}$



（3）设计轴直径

由强度条件：

$$\tau_{\max} = \frac{M_{T\max}}{W_P} = \frac{16M_T}{\pi D^3} \leq [\tau]$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 \times M_{T\max}}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 955 \times 10^3}{3.14 \times 40}} = 49.5 \text{ mm}$$

由刚度条件：

$$\theta_{\max} = \frac{M_{T\max}}{GI_P} \times \frac{180}{\pi} = \frac{M_T}{G \frac{\pi D^4}{32}} \times \frac{180}{\pi} \leq [\theta]$$

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_{T\max}}{\pi G [\theta]} \times \frac{180}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{32 \times 955}{\pi \times 80 \times 10^9 \times 0.5} \times \frac{180}{\pi}} = 0.061 \text{ m} = 61 \text{ mm}$$

取：d=62mm

第七章 平面弯曲

图示说明:

F_Q 、 M 图的突变规律

从梁的左端向右端分析,

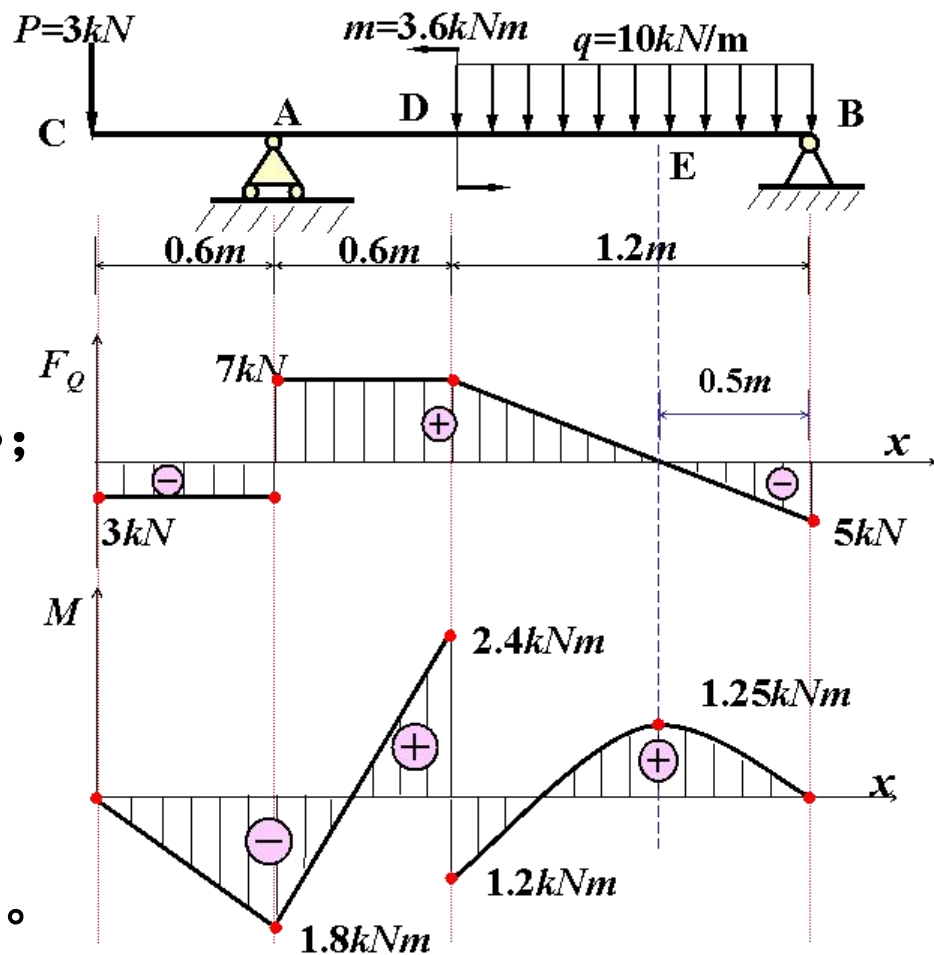
在集中力作用点, 剪力图有
(力偶) (弯矩图)

突变, 突变量等于集中力的大小;
(力偶矩)

弯矩值不变。
(剪力)

遇 $\uparrow P$, F_Q 图 \uparrow ; 遇 $\downarrow P$, F_Q 图 \downarrow 。

遇 $(m, M$ 图 \uparrow ; 遇 m), M 图 \downarrow 。



● 载荷集度、剪力和弯矩之间的微分关系

图示说明微分关系:

$$\frac{dF_Q}{dx} = q$$

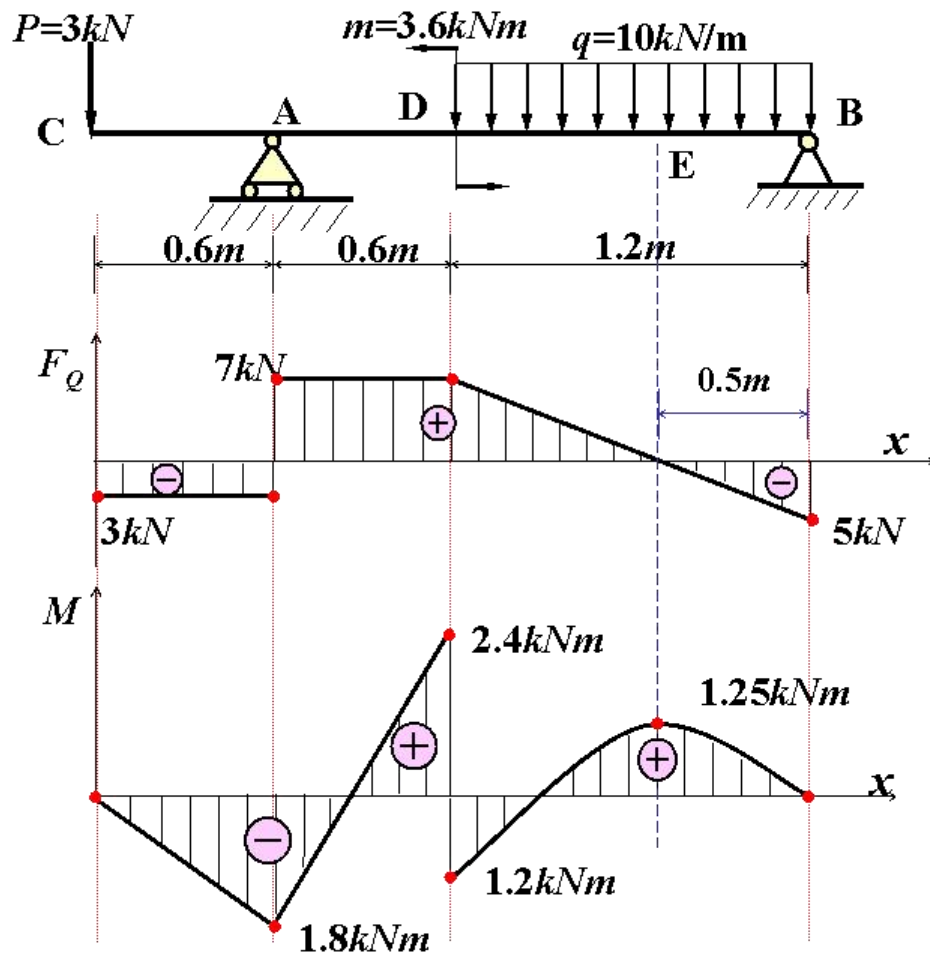
$$\frac{dM}{dx} = F_Q$$

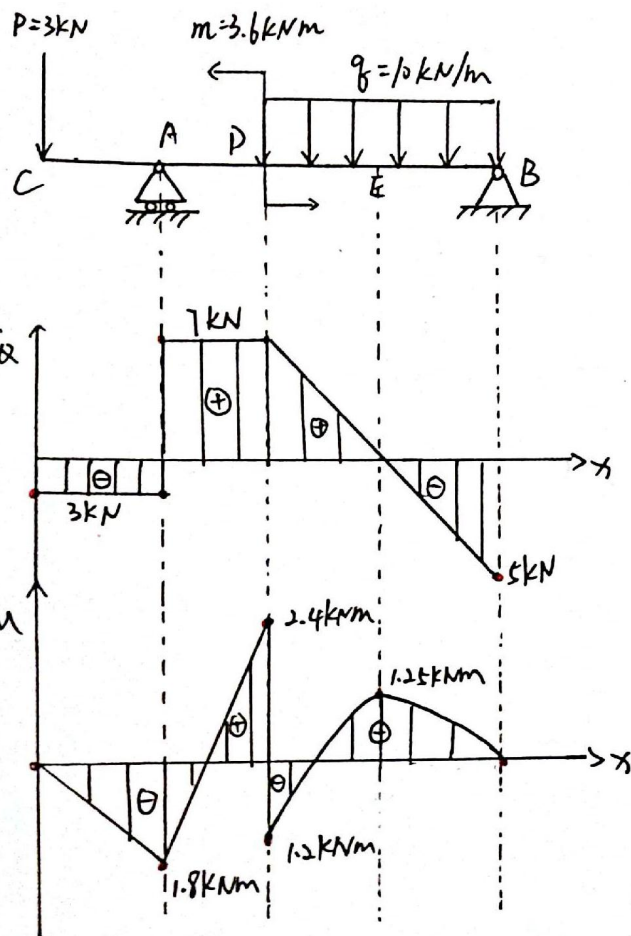
$$\frac{d^2 M}{dx^2} = q$$

- 1、 $q=0$ 段, F_Q 图水平; M 图斜直线。
 $F_Q > 0$, $M /$;
 $F_Q < 0$, $M \backslash$ 。
- 2、 $q \downarrow = \text{常数} < 0$, F_Q 图为下斜直线; M 图抛物线, 开口向下。

$F_Q \searrow$, $M \cap$

$F_Q=0$ 的截面, M 有极值。

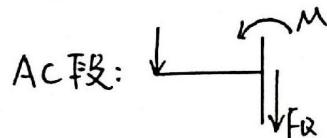




解: ① 求支座反力

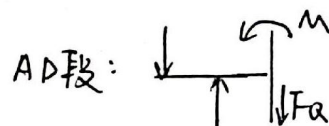
$$Y_A = 10 \text{ kN} \quad Y_B = 5 \text{ kN}$$

② 列弯矩、剪力方程



$$F_Q(x) = -3, \quad (0 \leq x \leq 0.6 \text{ m})$$

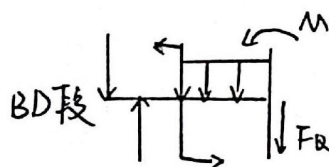
$$M(x) = -3x \quad (0 \leq x \leq 0.6 \text{ m})$$



$$F_Q(x) = -3 + 10 = 7 \quad (0.6 < x < 1.2)$$

$$M(x) = -3x + 10(x - 0.6)$$

$$= 7x - 6 \quad (0.6 < x < 1.2)$$



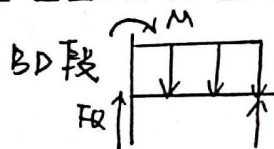
$$F_Q(x) = -3 + 10 - 10(x + 1.2)$$

$$= 17 - 10x \quad (1.2 < x < 2.4)$$

$$M(x) = -3x + 10(x - 0.6) - 3.6 - 10(x + 1.2) \frac{x + 1.2}{2}$$

$$= -3x + 10x - 9.6 - 5(x - 1.2)^2$$

$$(1.2 < x < 2.4)$$



$$F_Q(x) = -5 + (2.4 - x) \times 10$$

$$= 19 - 10x \quad (1.2 < x < 2.4)$$

$$M = 5(2.4 - x) - 10(2.4 - x) \frac{2.4 - x}{2}$$

$$= -3x + 10x - 9.6 - 5(x - 1.2)^2$$

$$(1.2 < x < 2.4)$$

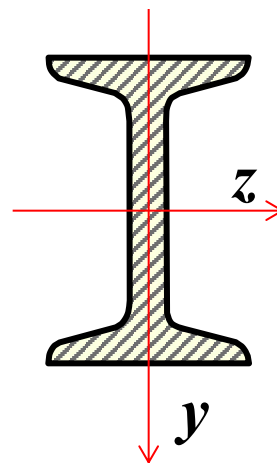
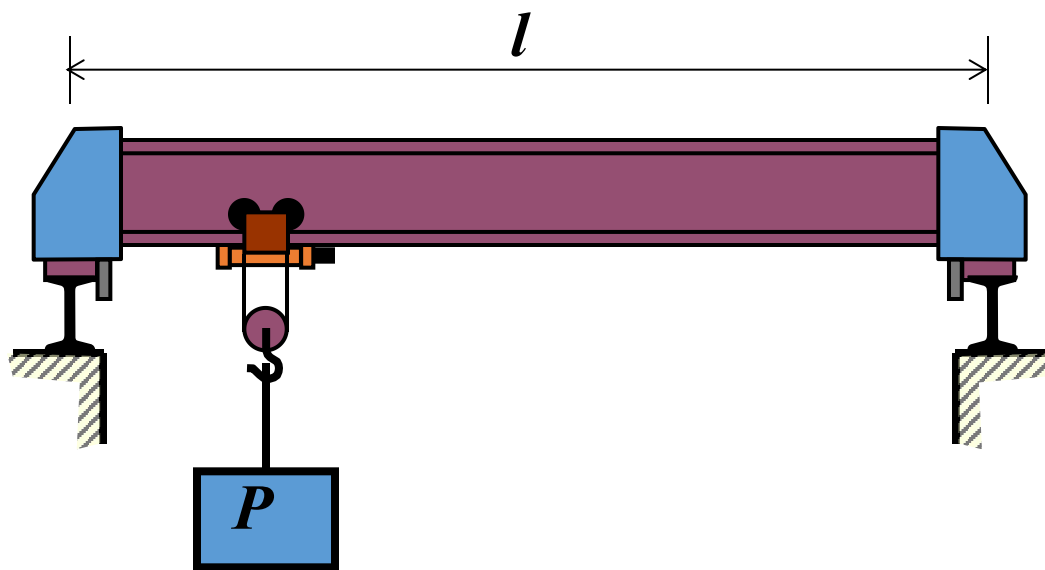
必会题

作业7.1-7.8好好看

例7-7 单梁吊车，45a号工字钢， $W_z=1430\text{cm}^3$ ， $[\sigma]=140\text{MPa}$ ， $l=10.5\text{m}$ ，电葫芦自重 $G=15\text{kN}$ ，额定吊重 50kN ，不记自重。

1、若起重 $P=70\text{kN}$ ，校核梁的强度。

2、求梁可能承受的起重重量。

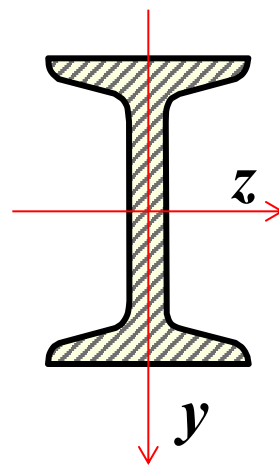
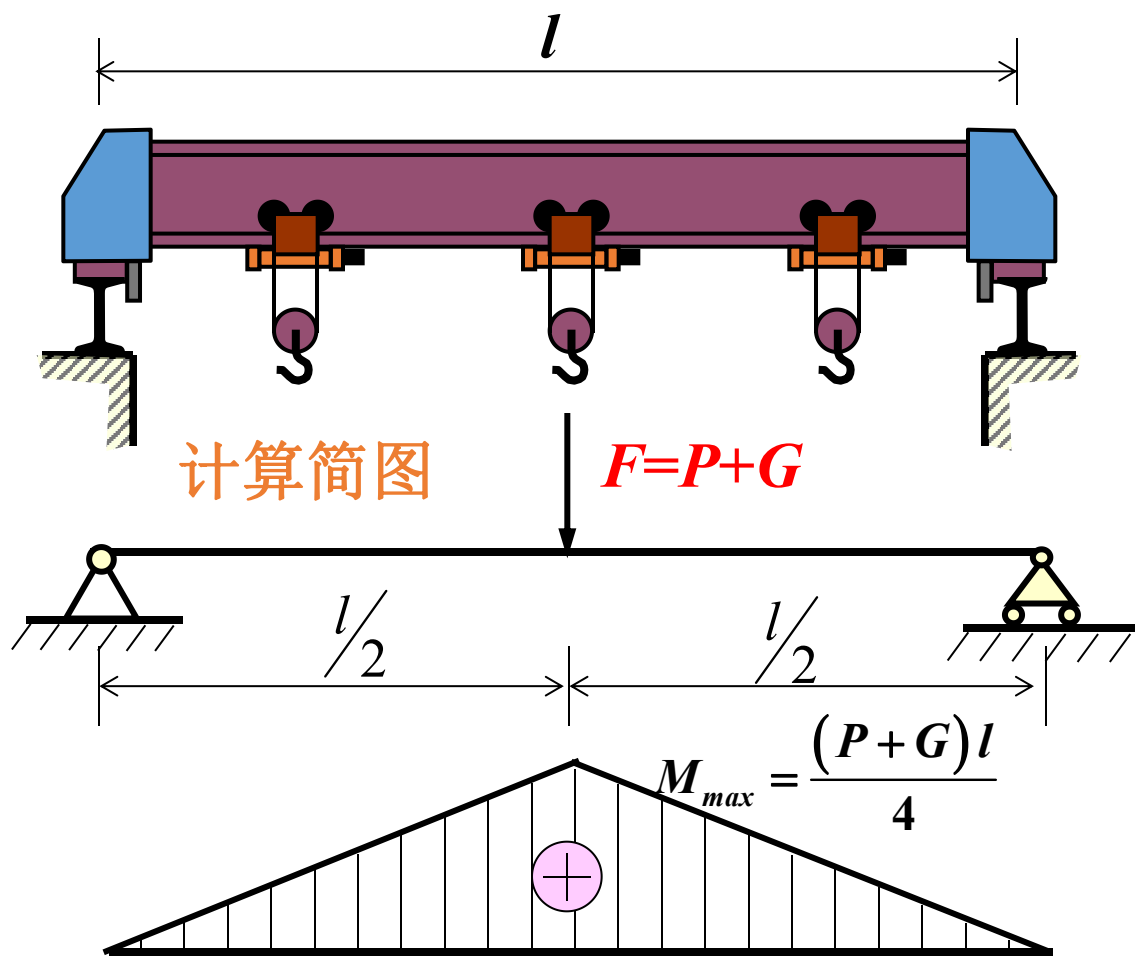


强度计算的依据

例7-7 单梁吊车，45a号工字钢， $W_z=1430\text{cm}^3$ ， $[\sigma]=140\text{MPa}$ ， $l=10.5\text{m}$ ，电葫芦自重 $G=15\text{kN}$ ，额定吊重 50kN ，不记自重。

1、若起重 $P=70\text{kN}$ ，校核梁的强度。

2、求梁可能承受的起重重量。



强度计算的依据

应考虑梁承载后**最危险**的情况：即电葫芦行至梁中点时弯矩最大，破坏的可能性也最大。

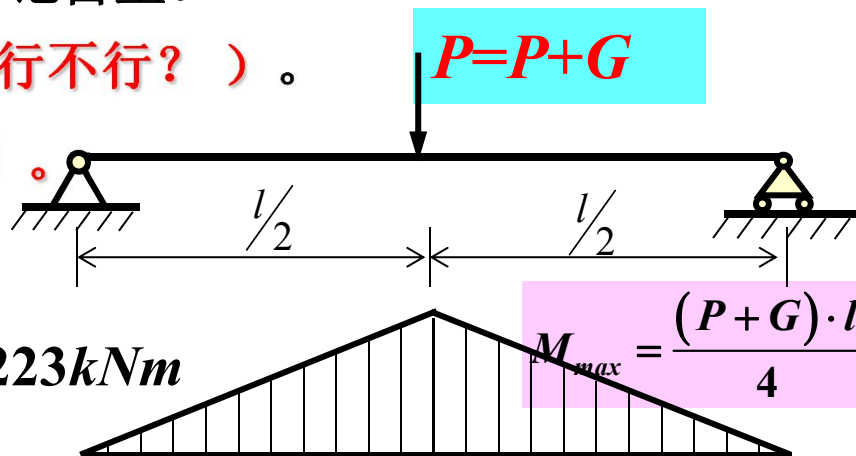
例7-7 单梁吊车，45a号工字钢， $W_z=1430\text{cm}^3$ ， $[\sigma]=140\text{MPa}$ ， $l=10.5\text{m}$ ，电葫芦自重 $G=15\text{kN}$ ，额定吊重 50kN ，不记自重。

1、若起重 $P=70\text{kN}$ ，校核梁的强度。（行不行？）。

2、求梁可能承受的起重量（最大吊重）。

解：

$$(1) M_{\max} = \frac{(P+G) \cdot l}{4} = \frac{(70+15)}{4} \times 10.5 = 223\text{kNm}$$



$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{223 \times 10^6}{1430 \times 10^3} = 156\text{MPa} > [\sigma] = 140\text{MPa}$$

不安全，不能吊起70kN的重物。

$$(2) \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma] \quad M_{\max} \leq [\sigma] \times W \quad M_{\max} = \frac{(P+G) \cdot l}{4} \leq [\sigma] \times W$$

$$P \leq \frac{4[\sigma] \cdot W}{l} - G = \frac{4 \times 140 \times 1430 \times 10^3}{10.5 \times 10^3} - 15 \times 10^3 = 62747\text{N} = 62.7\text{kN}$$

最大吊重为62.7kN。

例7-7 45a工字钢梁只能吊起62.7kN的重物。为使吊车起重量达到 70kN，在工字钢的上下翼缘加焊两块盖板，如图。

要求校核强度。(加盖板后能否吊起70kN)

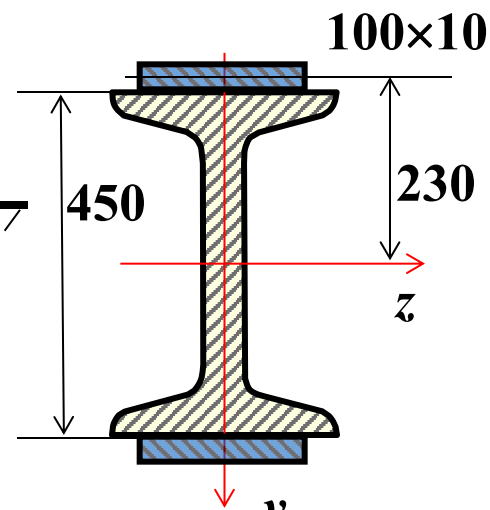
解：

首先计算惯性矩：

工字钢： $I_z' = 32200 \text{ cm}^4$

一块矩形： $I_z'' = \frac{10 \times 1^3}{12} + 23^2 \times 10 \times 1 = 0.83 + 5290 \approx 5290 \text{ cm}^4$

总惯性矩： $I_z = 32200 + 2 \times 5290 = 42780 \text{ cm}^4$



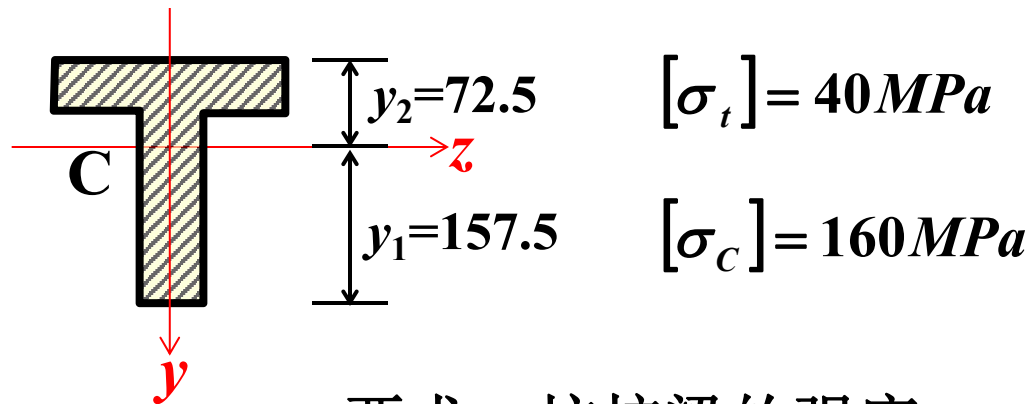
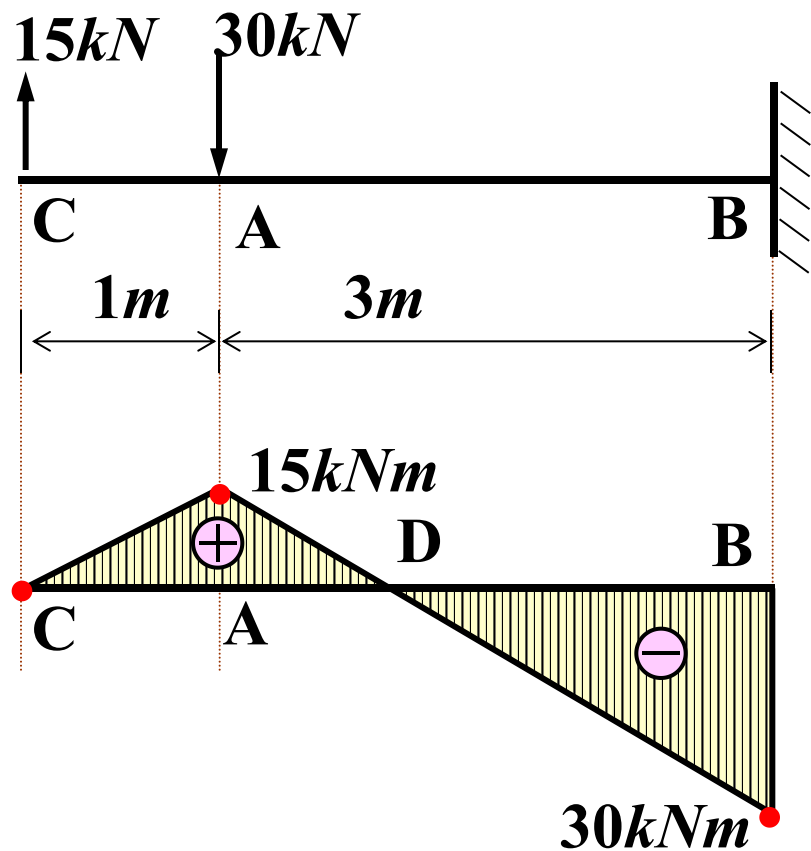
然后校核强度

$$M_{\max} = \frac{(P + G) \cdot l}{4} = \frac{(70 + 15)}{4} \times 10.5 = 223 \text{ kNm}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \times y_{\max}}{I_z} = \frac{223 \times 10^6 \times 230}{42780 \times 10^4} = 120 \text{ MPa} < [\sigma] = 140 \text{ MPa}$$

安全，加焊盖板后能吊起70kN的重物。

例7-3 已知T字形截面铸铁梁如图，C为形心。 $I_z=6013\times10^4mm^4$



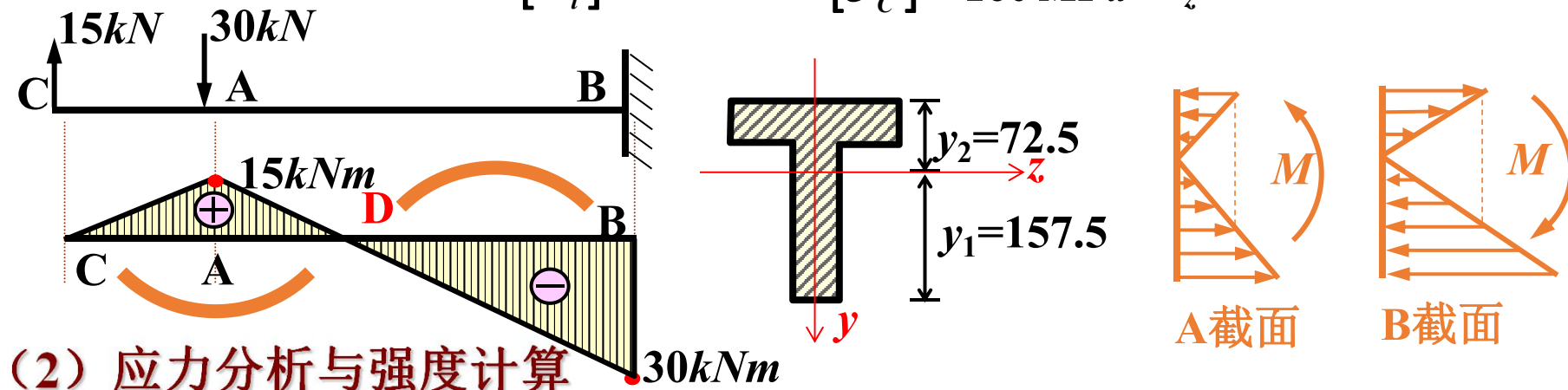
要求：校核梁的强度。

解：

(1) 画内力图

例7-3

$$[\sigma_t] = 40 \text{ MPa} \quad [\sigma_c] = 160 \text{ MPa} \quad I_z = 6013 \times 10^4 \text{ mm}^4$$



(2) 应力分析与强度计算

正弯矩段： CD段，上压、下拉。最大拉压应力发生在A截面 (M_{+max})

$$\sigma_{tmax} = \frac{M_A y_1}{I_z} = \frac{15 \times 10^6 \times 157.5}{6013 \times 10^4} = 39.3 \text{ MPa} \quad \sigma_{Cmax} = \frac{M_A y_2}{I_z} = \frac{15 \times 10^6 \times 72.5}{6013 \times 10^4} = 18.1 \text{ MPa}$$

负弯矩段： DB段，上拉、下压。最大拉压应力发生在B截面 (M_{-max})

$$\sigma_{tmax} = \frac{M_B y_2}{I_z} = \frac{30 \times 10^6 \times 72.5}{6013 \times 10^4} = 36.2 \text{ MPa} \quad \sigma_{Cmax} = \frac{M_B y_1}{I_z} = \frac{30 \times 10^6 \times 157.5}{6013 \times 10^4} = 78.6 \text{ MPa}$$

梁上最大拉、压应力：

$$\sigma_{tmax} = 39.3 \text{ MPa} < [\sigma_t]$$

$$\sigma_{Cmax} = 78.3 \text{ MPa} < [\sigma_c]$$

强度满足要求。

第八章 应力状态与强度理论

例8-1： 求图示单元体斜截面上的应力及其主应力并画出主单元体。

解： 建立坐标系如图， 由符号规定：

$$\sigma_x = -40 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 60 \text{ MPa}$$

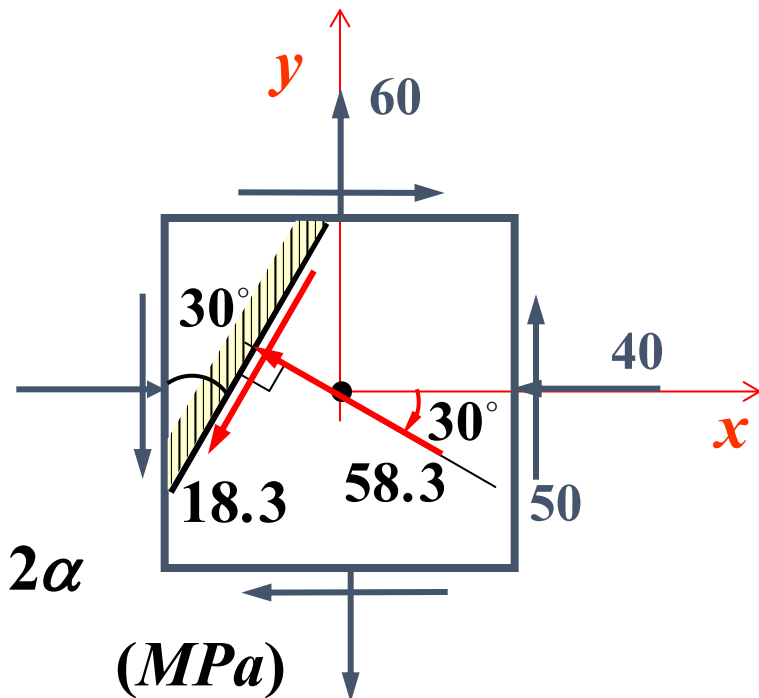
$$\tau_x = -50 \text{ MPa} \quad \alpha = -30^\circ$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$$

$$\sigma_{-30^\circ} = \frac{-40 + 60}{2} + \frac{-40 - 60}{2} \cos 2(-30^\circ) - (-50) \sin 2(-30^\circ) = -58.3 \text{ MPa}$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha$$

$$\tau_{-30^\circ} = \frac{-40 - 60}{2} \sin 2(-30^\circ) + (-50) \cos 2(-30^\circ) = 18.3 \text{ MPa}$$



例8-1 求图示单元体斜截面上的应力，并求主应力并画出主单元体。

解： 建立坐标系如图， 由符号规定：

$$\sigma_x = -40 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 60 \text{ MPa}$$

$$\tau_x = -50 \text{ MPa} \quad \alpha = -30^\circ$$

求主应力

$$\left. \begin{array}{l} \sigma'_{max} \\ \sigma'_{min} \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_x^2}$$

$$= \frac{-40 + 60}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-40 - 60}{2} \right)^2 + 50^2} = \begin{cases} +80.7 \text{ MPa} \\ -60.7 \text{ MPa} \end{cases}$$

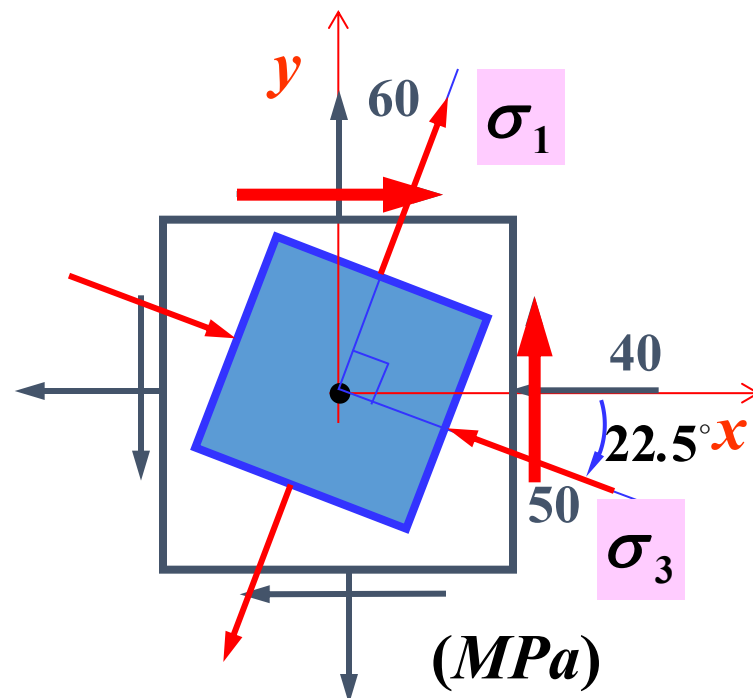
$$\sigma_1 = 80.7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -60.7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x < \sigma_y \text{ 时}$$

$$\alpha_0 \rightarrow \sigma'_{min},$$



求主平面

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \times (-50)}{-40 - 60} = -1$$

$$\alpha_0 = -22.5^\circ$$

例8-2:讨论圆轴扭转时的表面上一点的应力状态。

分析圆轴扭转破坏。

解: 1) 求圆轴横截面上的最大应力

$$M_T = m \quad \tau = \frac{M_T}{W_P}$$

2) 围绕圆轴外表面一点取单元体

$$\tau_x = \tau$$

3) 任意斜截面上的应力:

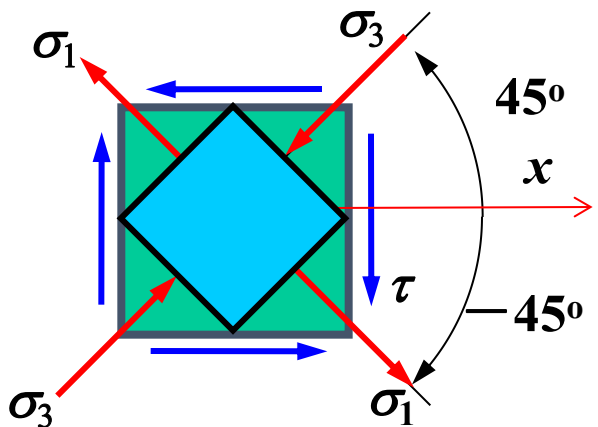
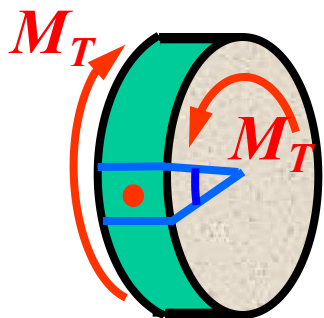
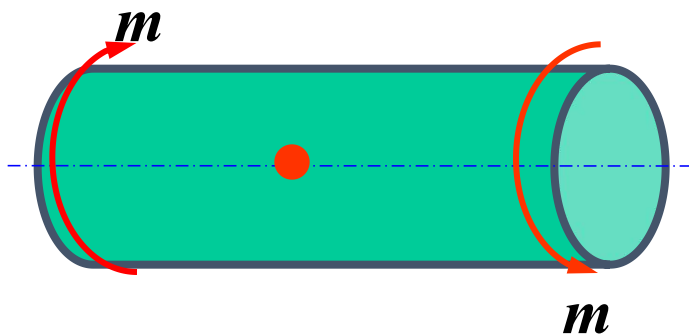
$$\sigma_\alpha = -\tau_x \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \tau_x \cos 2\alpha$$

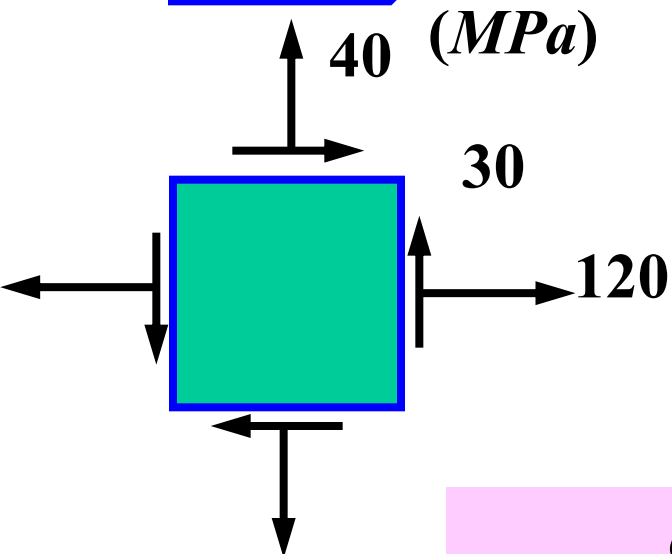
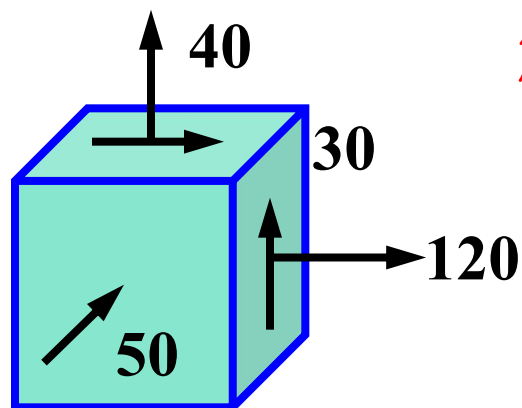
$$\alpha = -45^\circ \text{ 时, } \sigma'_{\max} = \sigma_1 = \tau$$

$$\alpha = 45^\circ \text{ 时, } \sigma'_{\min} = \sigma_3 = -\tau$$

4) 画出主单元体



例8-4 求图示单元体的主应力和最大切应力。



$$\sigma_1 = 130 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 30 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = -50 \text{ MPa}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \\ &= \frac{130 - (-50)}{2} \\ &= 90 \text{ MPa} \end{aligned}$$

解： 已知一个主平面上的主应力，大小为 -50 MPa 。

另外两个主平面与前后面垂直；

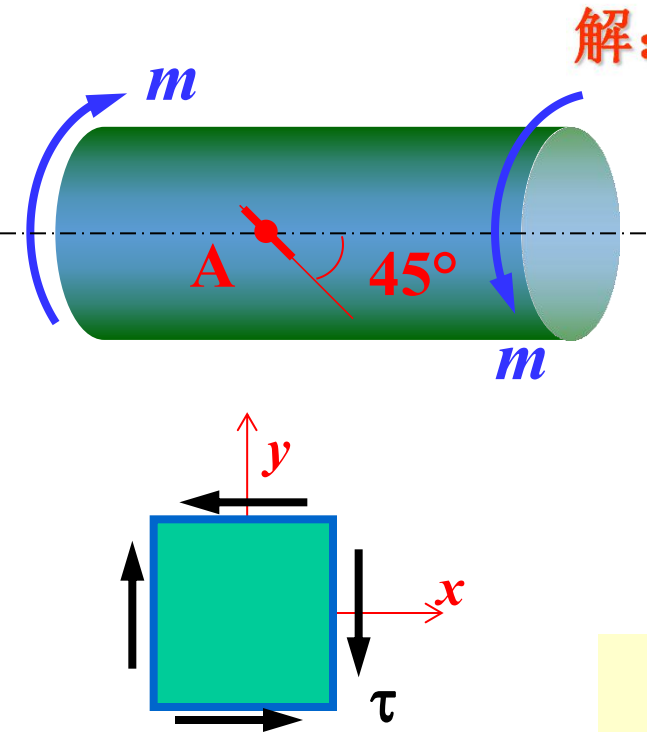
其上应力与已知主应力无关。

为求另外的两个主应力，将单元体投影到已知主平面上。

$$\left. \begin{array}{l} \sigma'_{\max} \\ \sigma'_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_x^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{120 + 40}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{120 - 40}{2} \right)^2 + (-30)^2} \\ &= 80 \pm 50 = \begin{cases} 130 \text{ MPa} \\ 30 \text{ MPa} \end{cases} \end{aligned}$$

例8-5钢制圆轴如图，直径 $d=60mm$ ，材料的弹性模量 $E=210GPa$ ，泊松比 $\mu=0.28$ ，用电测法测得A点与水平线成 45° 方向的线应变 $\varepsilon_{45^\circ}=431 \times 10^{-6}$ ，求轴所受的外力偶矩 m 。



解：

(1) 过A点横截面上的应力 $\tau = \frac{M_T}{W_p} = \frac{16m}{\pi d^3}$

(2) 围绕A点截取单元体

(3) 建立坐标系 xy ， 则： $\varepsilon_{-45^\circ} = 431 \times 10^{-6}$

$$\tau_x = \tau$$

(4) 求与 ε_{-45° 有关的应力

$$\sigma_{-45^\circ} = \tau$$

$$\sigma_{+45^\circ} = -\tau$$

(5) 代入广义胡克定律

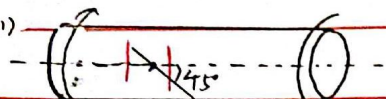
$$\varepsilon_{-45^\circ} = \frac{1}{E} [\sigma_{-45^\circ} - \mu \sigma_{+45^\circ}] = \frac{1+\mu}{E} \cdot \tau = \frac{(1+\mu)16m}{E\pi \cdot d^2}$$

$$m = \frac{E\pi \cdot d^3 \varepsilon_{-45^\circ}}{16(1+\mu)} = \frac{210 \times 10^3 \times \pi \times 60^3 \times 431 \times 10^{-6}}{16(1+0.28)} = 2997436 Nmm$$

$$= 3kNm$$

例 8-5.

解: 11)

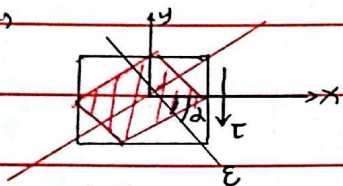


取单元体: $\tau_{max} = \frac{M}{W_p}$ $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$

$\tau_{max} = \frac{16m}{\pi d^3}$



12)



$\sigma_a = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$

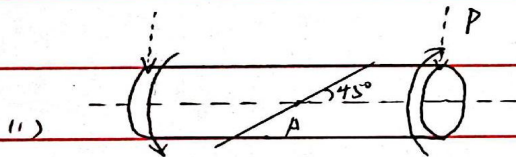
$\sigma_x = 0$ $\sigma_y = 0$ $\tau_x = \tau$ $\alpha = -45^\circ$ $\sigma_{45^\circ} = \tau$

$\sigma_{45^\circ} = -\tau$

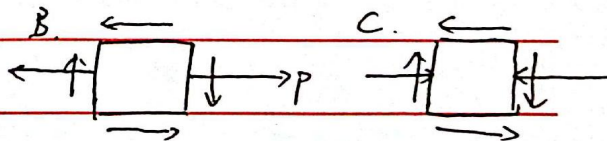
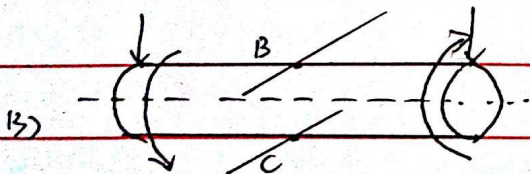
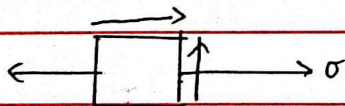
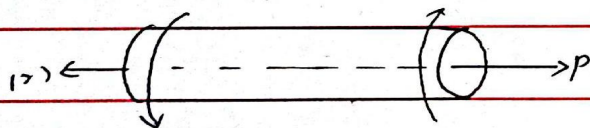
13) $\epsilon_a = \frac{1}{E} (\sigma_a - \mu \sigma_a + 90^\circ) \therefore \epsilon_{-45^\circ} = \frac{1}{E} (\sigma_{45^\circ} - \mu \sigma_{45^\circ}) = \frac{1+\mu}{E} \tau = \frac{(1+\mu)16m}{E \pi d^3}$

$m = \frac{E \pi d^3 \epsilon}{16(1+\mu)} = \frac{210 \times 10^3 \times \pi \times 10^3 \times 431 \times 10^{-6}}{16(1+0.28)} = 2997436 \text{ Nmm}$

变形:



A点位于中性层上, 主应力为0.



第九章 组合变形

例9-2 起重机的横梁用25a号工字钢制成如图，梁长 $l = 4\text{m}$ ，拉杆与横梁夹角为 30° ，电葫芦自重为 4kN 最大起吊重量为 20kN 许用应力为 $[\sigma] = 100\text{MPa}$ 要求校核横梁的强度。

解： (1)外力分析：起重机的力学计算简图

取梁AB为研究对象 $P = 4 + 20 = 24\text{kN}$
 横梁产生压缩与弯曲组合变形

由平衡条件得： $F_{Ay} = F_{By} = 12\text{kN}$
 $F_{Ax} = F_{Bx} = \frac{F_{By}}{\tan 30^\circ} = 20.8\text{kN}$

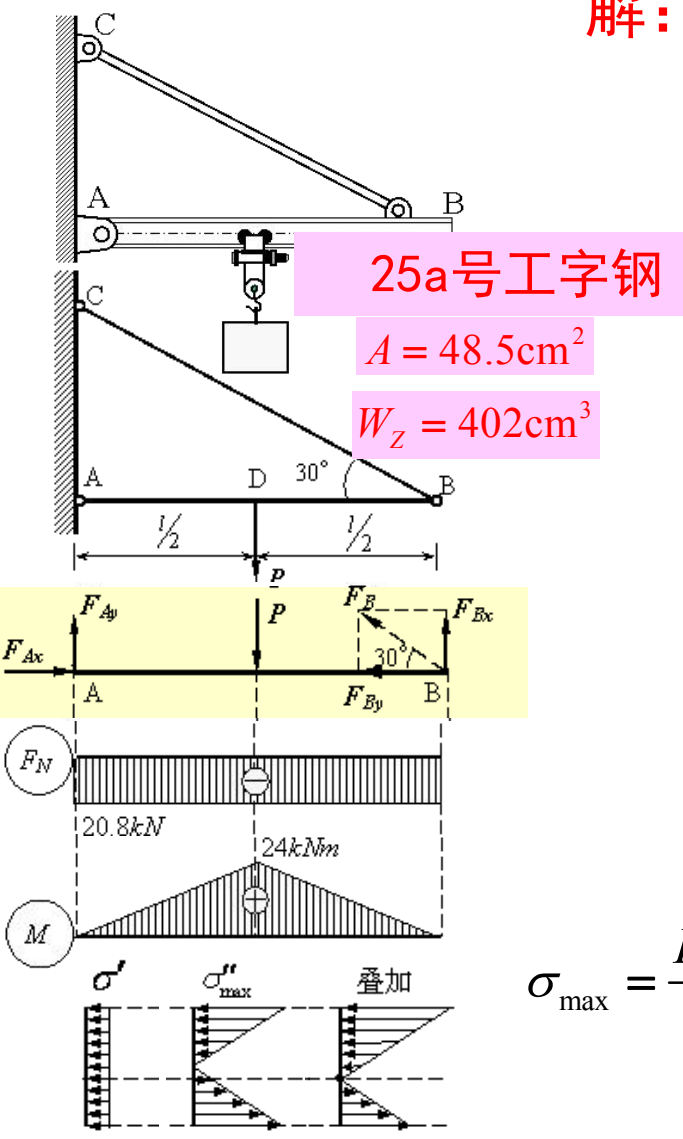
(2)内力分析： 梁中点D截面为危险截面。

(3) 应力分析： $\sigma' = \frac{F_N}{A}$ $\sigma''_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z}$

叠加，梁上的压应力的值最大，发生在D截面的上边缘，为：

$$\sigma_{\max} = \frac{F_N}{A} + \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{20.8 \times 10^3}{48.5 \times 10^2} + \frac{24 \times 10^6}{402 \times 10^3} = 4.3 + 59.7 = 64\text{MPa} \leq [\sigma]$$

横梁的强度满足要求。



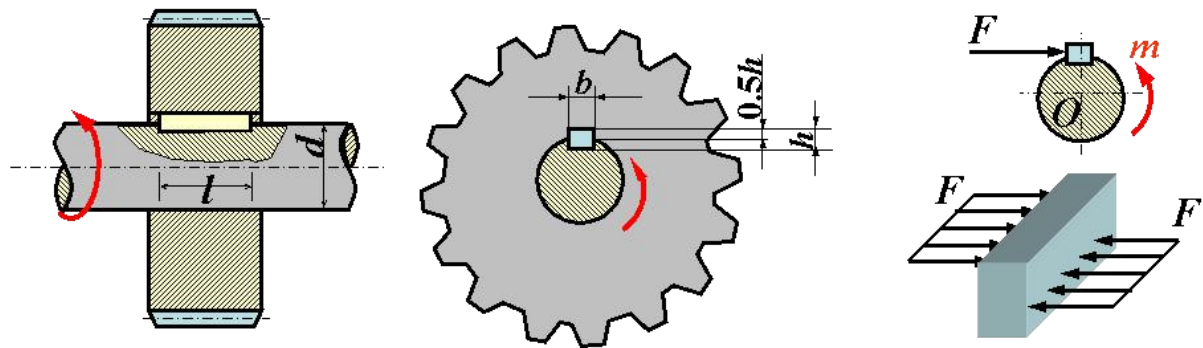
第十章 压力的近似计算

例10.1 齿轮传动轴，轴的直径 $d = 50\text{ mm}$ ，通过平键将转矩 $m = 720\text{ N}\cdot\text{m}$ 传递给齿轮。已知平键宽 $b = 16\text{ mm}$ ，键高 $h = 10\text{ mm}$ ，键长 $l = 45\text{ mm}$ ，键材料的许用应力 $[\tau] = 110\text{ MPa}$ ，许用挤压应力 $[\sigma_{bs}] = 250\text{ MPa}$ 。试校核平键的强度。

解：

键的受力分析与计算：

$$F_Q = F_C = F = 28.8\text{ kN}$$



(1)平键剪切强度校核：

$$\tau = \frac{F_Q}{A} = \frac{F}{bl} = \frac{28.8 \times 10^3}{16 \times 45} = 40\text{ MPa} < [\tau]$$

满足剪切强度条件

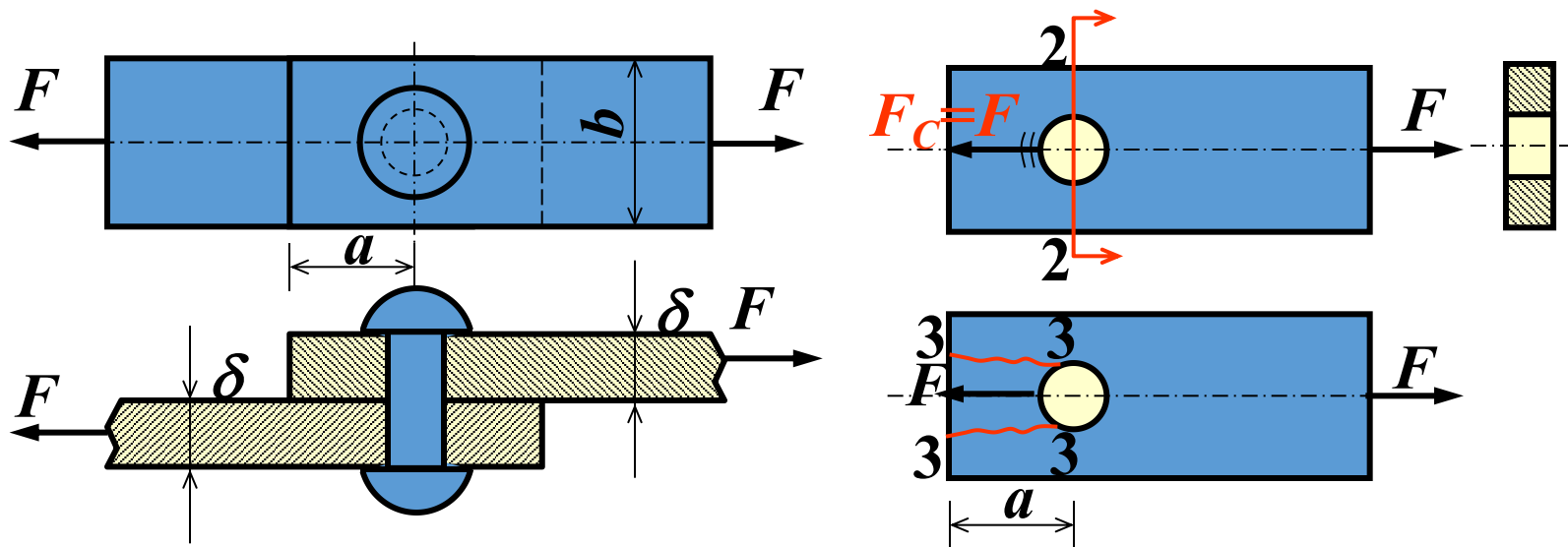
(2)平键挤压强度校核：

$$\sigma_{bs} = \frac{F_C}{A_{bs}} = \frac{F}{lh/2} = \frac{28.8 \times 10^3 \times 2}{45 \times 10} = 128\text{ MPa} < [\sigma_{bs}]$$

满足挤压强度条件

综上，键是安全的。

例10-2 铆接接头板厚 $\delta=2\text{mm}$ ，板宽 $b=15\text{mm}$ ，铆钉直径 $d=4\text{mm}$ 。两者材料相同。 $[\tau]=100\text{MPa}$ ， $[\sigma_{bs}]=300\text{MPa}$ ， $[\sigma]=160\text{MPa}$ 。要求确定拉力的许可值。



解： 接头强度分析：

铆钉的剪切与挤压

板在2—2截面的拉伸

板在孔处的挤压和3—3截面的剪切

实验表明：当 $a > 2d$ 时，拉板在3~3截面上是安全的。

例10-2 铆接接头板厚 $\delta=2\text{mm}$ ，板宽 $b=15\text{mm}$ ，铆钉直径 $d=4\text{mm}$ 。两者材料相同。 $[\tau]=100\text{MPa}$ ， $[\sigma_{bs}]=300\text{MPa}$ ， $[\sigma]=160\text{MPa}$ 。要求确定拉力的许可值。

解：

(1) 铆钉的剪切强度计算

$$F_Q = F$$

$$\tau = \frac{F_Q}{A} = \frac{4F}{\pi d^2} \leq [\tau]$$

$$F \leq \frac{\pi d^2 [\tau]}{4} = \frac{\pi \times 4^2 \times 100}{4} = 1256\text{N}$$

(2) 铆钉的挤压强度计算

挤压力 $F_C = F$ 计算挤压面 $A_{bs} = d\delta$

$$\sigma_{bs} = \frac{F_c}{A_{bs}} = \frac{F}{\delta d} \leq [\sigma_{bs}]$$

$$F \leq \delta d [\sigma_{bs}] = 2 \times 4 \times 300 = 2400\text{N}$$

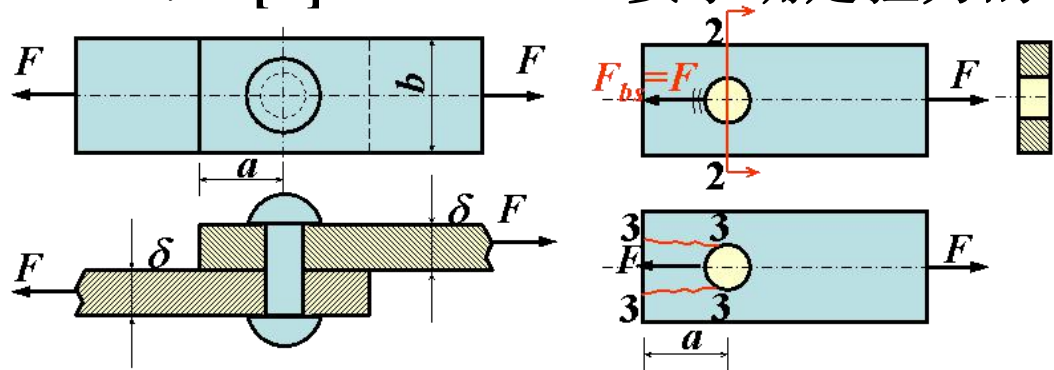
(3) 板在2—2截面的拉伸强度计算 $F_N = F$

$$\sigma = \frac{F}{(b-d)\delta} \leq [\sigma]$$

$$F \leq (b-d)\delta [\sigma] = (15-4) \times 2 \times 160 = 3520\text{N}$$

综上：

$$[F] = 1256\text{N} = 1.256\text{kN}$$



例 10-3 搭接铆接件受拉力 $F_p = 100kN$ ，许用拉应力 $[\sigma] = 170MPa$ ，许用切应力 $[\tau] = 140MPa$ ，许用挤压应力 $[\sigma_{bs}] = 200MPa$ ，试校核该铆接头的强度。
已知钢板和铆钉的材料相同。 $d = 16mm$ ， $\delta = 10mm$ ， $b = 100mm$ 。

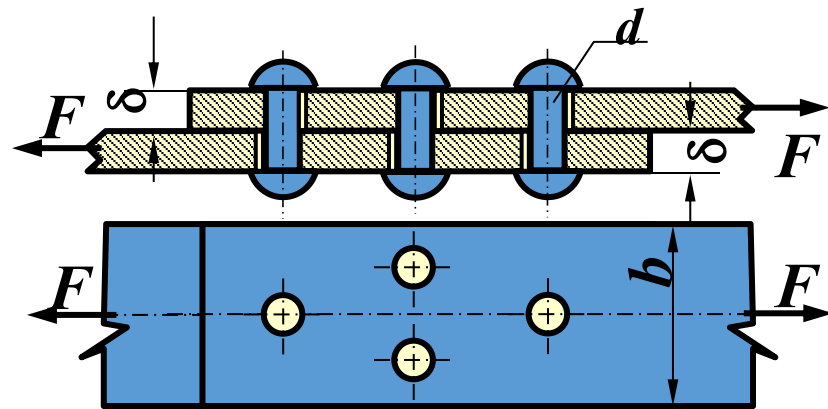
解：

依题意需进行三方面的强度校核：

(1) 铆钉的剪切强度校核；

(2) 铆钉(或钢板)的挤压强度校核：

(3) 钢板的拉伸强度校核。

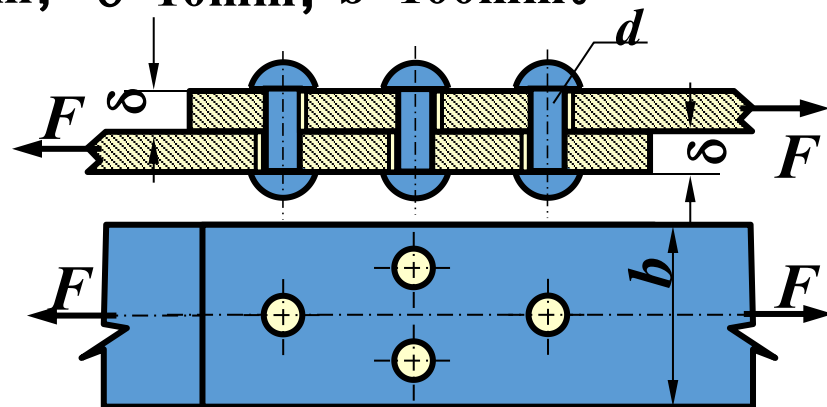


例 10-3 搭接铆接件受拉力 $F_p = 100kN$ ，许用拉应力 $[\sigma] = 170MPa$ ，许用切应力 $[\tau] = 140MPa$ ，许用挤压应力 $[\sigma_{bs}] = 200MPa$ ，试校核该铆接头的强度。

已知钢板和铆钉的材料相同。 $d=16mm$ ， $\delta=10mm$ ， $b=100mm$ 。

解：(1) 铆钉的剪切强度校核；

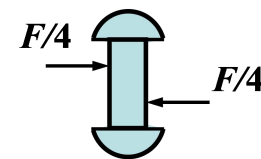
若外力的作用线通过铆钉组横截面的形心，且同一组内各铆钉的材料和直径均相同，可假设每个铆钉受力相等。



剪切面上的剪力

$$F_s = F/4$$

$$\tau = \frac{F_s}{A} = \frac{F/4}{\pi d^2/4} = \frac{100 \times 10^3}{\pi \times 16^2} = 124 MPa < [\tau] \quad \text{铆钉满足剪切强度条件。}$$



(2) 铆钉(或钢板)的挤压强度校核

每个铆钉与板孔壁的挤压力 $F_C = F/4$

$$\sigma_{bs} = \frac{F_C}{A_{bs}} = \frac{F/4}{\delta d} = \frac{100 \times 10^3}{4 \times 10 \times 16} = 156 MPa < [\sigma_{bs}]$$

铆钉和钢板都满足挤压强度条件

例 10-3 搭接铆接件受拉力 $F_p = 100kN$ ，许用拉应力 $[\sigma] = 170MPa$ ，许用切应力 $[\tau] = 140MPa$ ，许用挤压应力 $[\sigma_{bs}] = 200MPa$ ，试校核该铆接头的强度。

已知钢板和铆钉的材料相同。 $d=16mm$ ， $\delta=10mm$ ， $b=100mm$ 。

解：(1) 铆钉的剪切强度校核；

满足剪切强度条件。

(2) 铆钉(或钢板)的挤压强度校核

满足挤压强度条件。

(3) 钢板的拉伸强度校核：

上、下两块钢板的受力和开孔情况相同，故只需校核其中一块。

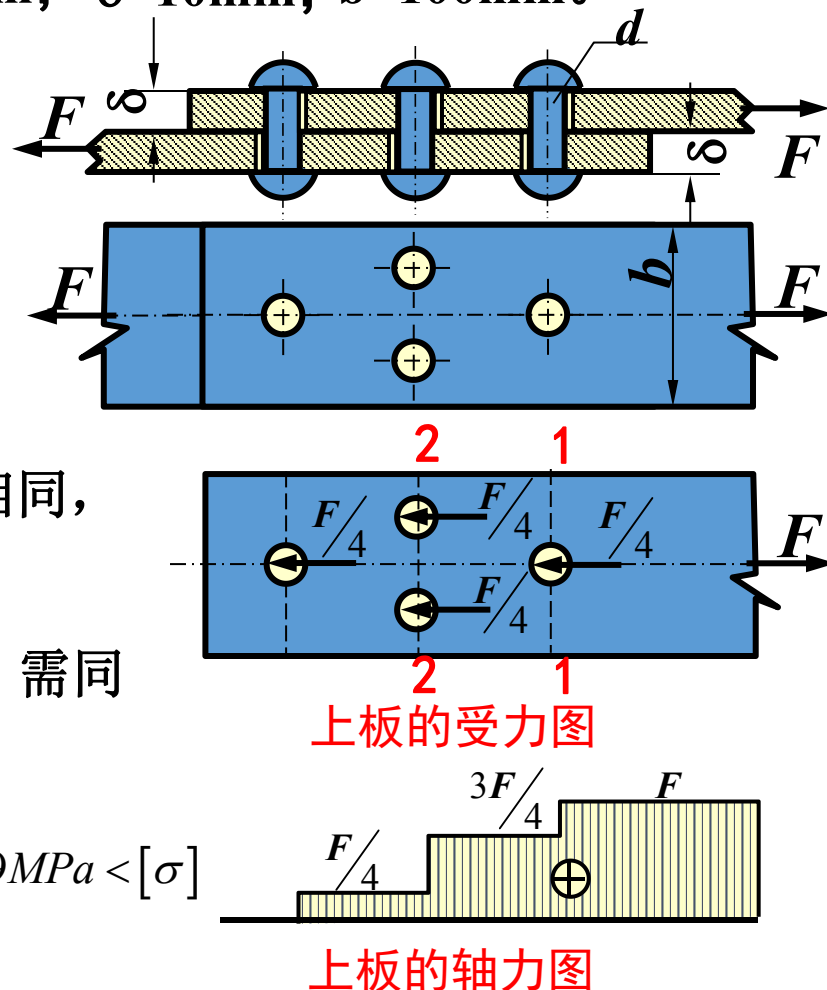
综合分析轴力与截面被削弱的情况，需同时对1-1，2-2截面进行校核。

$$(\sigma)_{1-1} = \frac{F_{N1}}{(b-d)\delta} = \frac{F}{(b-d)\delta} = \frac{100 \times 10^3}{(100-16) \times 10} = 119MPa < [\sigma]$$

$$(\sigma)_{2-2} = \frac{F_{N2}}{(b-2d)\delta} = \frac{3F/4}{(b-2d)\delta} = \frac{3 \times 100 \times 10^3}{4 \times (100 - 2 \times 16) \times 10} = 110MPa < [\sigma]$$

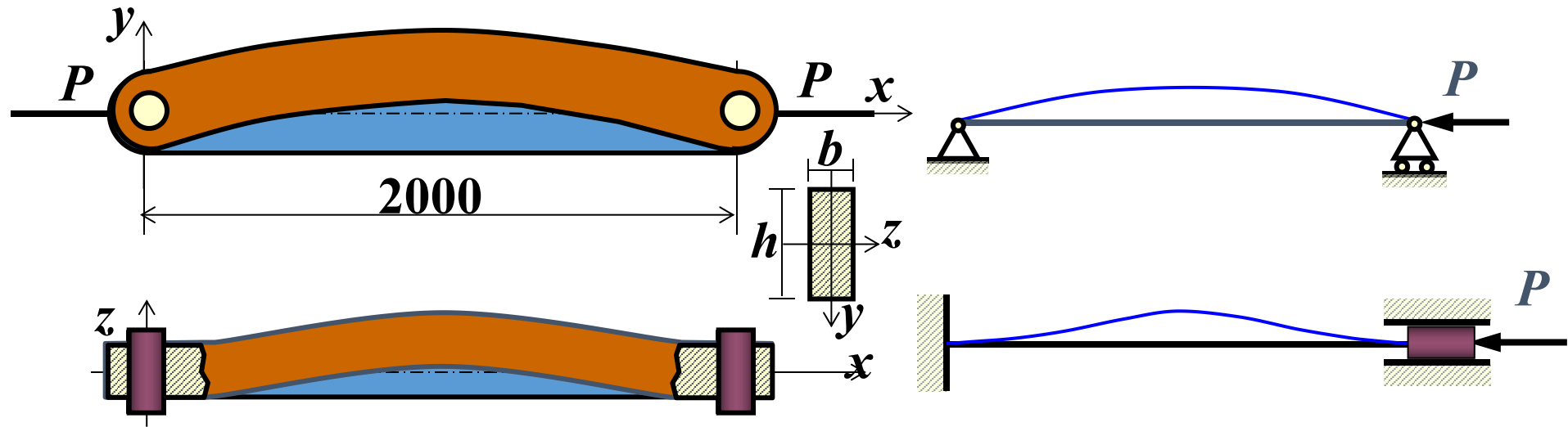
钢板满足拉伸强度。

综上分析，整个搭接接头是安全的。



第十一章 压杆稳定

例11-3 一矩形截面杆，两端为柱铰。材料为Q235， $E=210GPa$ ，截面边长 $b=40mm$ ， $h=60mm$ ，。求临界载荷。



解：

(1) 在 xy 面，两端铰支 $\mu=1$ ，若失稳弯曲， z 为中性轴。

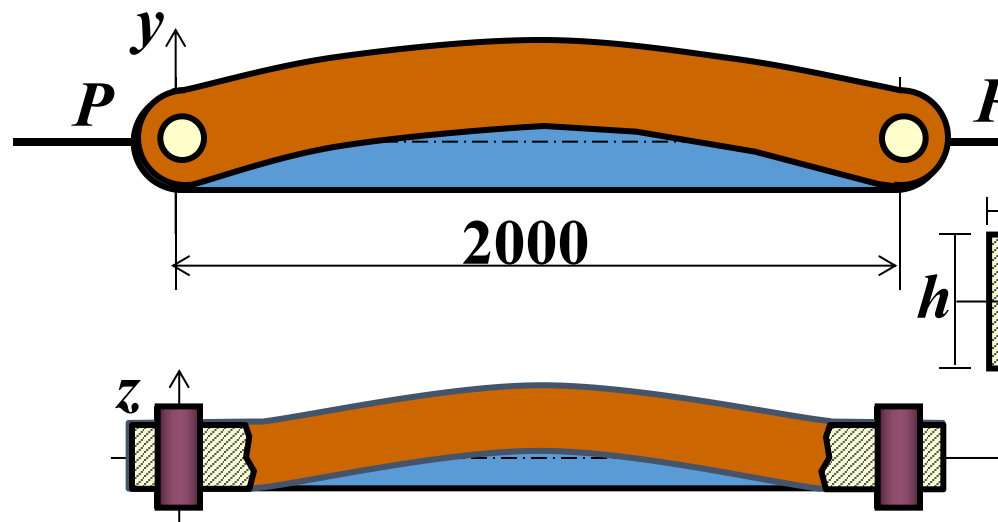
$$I_z = \frac{bh^3}{12} \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 17.32mm \quad \lambda_z = \frac{\mu l}{i_z} = \frac{1 \times 2000}{17.32} = 115$$

(2) 在 xz 面，两端固定 $\mu=0.5$ ，若失稳弯曲， y 为中性轴。

$$I_y = \frac{hb^3}{12} \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 11.55mm \quad \lambda_y = \frac{\mu l_1}{i_y} = \frac{0.5 \times 2000}{11.55} = 86.6 < \lambda_z$$

连杆在 xy 面属于细长杆，在 xz 面不属于细长杆。

例11-3 一矩形截面杆，两端为柱铰。材
 $b=40\text{mm}$ ， $h=60\text{mm}$ ，。求临界载荷。



(3) $\lambda_z > \lambda_y$ ，连杆在xy面容易失稳
 计算临界载荷应以 λ_z 计算。

$\lambda_z = 115 > 100$ ，属于细长杆。

用欧拉公式。

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{3.14^2 \times 210 \times 10^3}{115^2} = 156 \text{ MPa}$$

$$P_{cr} = A \sigma_{cr} = 40 \times 60 \times 156 = 374 \text{ kN}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \times 210 \times 10^3 \times 40 \times 60^3 / 12}{(0.5 \times 2000)^2} = 374 \text{ kN}$$

解： (1) 在xy面，两端铰支 $\mu=1$ ，

$$I_z = \frac{bh^3}{12} \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 17.32 \text{ mm}$$

(2) 在xz面，两端固定 $\mu=0.5$ ，若失稳弯曲，y为中性轴。

$$I_y = \frac{hb^3}{12} \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 11.55 \text{ mm} \quad \lambda_y = \frac{\mu l_1}{i_y} = \frac{0.5 \times 2000}{11.55} = 86.6 < \lambda_z$$

连杆在xy面属于细长杆，在xz面不属于细长杆。