6 一北京工业大学 2013-2014 学年第一学期期末

数理统计与随机过程(研) 课程试卷

学号______________ 姓名______________ 成绩____________

注意：试卷共七道大题，请写明详细解题过程。数据结果保留 3 位小数。

考试方式：半开卷，考试时**只允许看教材**《概率论与数理统计》 浙江大学 盛骤等编第三版（或第四版）高等教育出版社，不能携带和查阅任何其他书籍、纸张、资料等。考试时**允许使用计算器。**

考试时间 120 分钟。

一、(10 分) 设学生某次考试成绩服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，现从中随机抽取 36 位的考试成绩，算得平均分为 66.5，标准差为 15 分。问在显著性水平 0.05 下，从样本看，

(1) 是否接受"$\mu=70$"的假设？

(2) 是否接受"$\sigma^2 \le 16^2$"的假设？

解：已知 $\overline{X}=66.5, S=15, n=36, \alpha=0.05$

（1） $H_0:\mu=70, H_1:\mu\ne 70$

由书中结论知，检验问题的拒绝域为

$$\left|\frac{\overline{X}-70}{S/\sqrt{n}}\right| \ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

$\left|\frac{\overline{X}-70}{S/\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{66.5-70}{15/\sqrt{36}}\right| = 1.4$，查表得 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(35)=2.0301$，所以，接受原假设。

,

（2） $H_0:\sigma^2\le 16^2, H_1:\sigma^2>16^2$

检验问题的拒绝域为

$$\frac{(n-1)S^2}{16^2} \ge \chi^2_{\alpha}(n-1)$$

$\frac{(n-1)S^2}{16^2} = \frac{(36-1)15^2}{16^2} = 30.7617$， $\chi^2_{\alpha}(n-1)=\chi^2_{0.05}(36-1)=49.802$，所以，接受原假设。

~~二~~、（15 分）在某公路上观察汽车通过情况，取 15 秒为一个时间单位，记下锅炉汽车的辆数。连续观察 200 个单位时间，得数据如下：

过路的辆数	0	1	2	3	4	≥ 5
频数	92	68	28	11	1	0

问在一个时间单位内通过公路的汽车辆数 X 的分布能否看成是 Poisson 分布？（显著性水平取 $\alpha = 0.05$）

解：$\hat{\lambda} = \bar{x} = \dfrac{0*92+1*68+2*28+3*11+4*1}{200} = 0.805$

A_i	f_i		$\hat{p}_i$	$n\hat{p}_i$		$f_i^2 / n\hat{p}_i$
A_0	92		0.447	89.4		94.676
A_1	68		0.360	72		64.222
A_2	28		0.145	29		27.034
A_3	11	12	0.039	7.8	9.6	15
A_4	1		0.008	1.6		
A_5	0		0.001	0.2		$\sum = 200.932$

并组后 k=4, 而此处 r=1, 故自由度为 k-r-1=2,
200.932-200=0.932< $\chi^2_{0.05}(2) = 5.991$, 所以是 Poisson 分布

三、（15 分）为考察某种维尼纶纤维的耐水性能，安排了一组试验，测得甲醇浓度 x 及相应的“缩醇化度” y 数据如下：

x	18	20	22	24	26	28	30
y	26.86	28.35	28.75	28.87	29.75	30	30.36

(1) 建立“缩醇化度” y 对甲醇浓度 x 的一元线性回归方程；
(2) 对建立的回归方程进行显著性检验：（取 $\alpha = 0.01$）；
(3) 在 x_0=36 时，给出相应的 y 的预测区间（取 $\alpha = 0.01$）。

$\hat{a}+\hat{b}x_0 \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)\hat{\sigma}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_{xx}}}$

解答：

x	y	x^2	y^2	xy
18	26.86	324	721.4596	483.48
20	28.35	400	803.7225	567
22	28.75	484	826.5625	632.5
24	28.87	576	833.4769	692.88

26	29.75	676	885.0625	773.5
28	30	784	900	840
30	30.36	900	921.7296	910.8
$\sum 168$	202.94	4144	5892.0136	4900.16

$$S_{xx}=\sum_{i=1}^{7}x_i^2-\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{7}x_i)^2=4144-\frac{1}{7}168^2=112$$

$$S_{xy}=\sum_{i=1}^{7}x_iy_i-\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{7}x_i)(\sum_{i=1}^{7}y_i)=4900.16-\frac{1}{7}168*202.94=29.6$$

$$S_{yy}=\sum_{i=1}^{7}y_i^2-\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{7}y_i)^2=5892.0136-\frac{1}{7}202.94^2=8.4931$$

$$\hat{b}=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}=\frac{29.6}{112}=0.2643,\quad \hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=22.6486$$

于是，一元线性回归方程为

$$\hat{y}=22.6486+0.2643x$$

（2）对回归方程进行检验： $H_0:b=0$

$$Q_e=S_{yy}-\hat{b}S_{xy}=8.4831-0.2643*29.6=0.6598$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{Q_e}{n-2}=0.13196,\quad \hat{\sigma}=0.3633$$

$$|t|=\frac{|\hat{b}|}{\hat{\sigma}}\sqrt{S_{xx}}=\frac{0.2643}{0.3633}\sqrt{112}=7.699$$

$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)=t_{0.05}(5)=2.0150$，$|t|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)$，所以拒绝原假设，回归方程很显著。

（3）区间预测：

$$(\hat{a}+\hat{b}x_0\pm t_{\alpha/2}(n-2)\hat{\sigma}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_{xx}}})$$

代入数值计算得，(31.066，33.3332)

四、(15 分) 茶是世界上最为广泛的一种饮料，但很少人知其营养价值。任一种茶叶都含有叶酸，它是一种维他命 B。如今已有测定茶叶中叶酸含量的方法。为研究各产地的绿茶的叶酸含量是否有显著差异，特选三个产地绿茶，其中每个产地的绿茶制作了 5 个样品，共 15 个样品。按随机次序测试其叶酸含量（单位：mg），测试结果如下：

产地 A	叶酸含量

A_1	7.3	8.3	7.6	8.4	8.3
A_2	5.4	7.4	7.1	6.8	5.3
A_3	7.9	9.5	10.0	9.8	8.4

(1)三个产地的绿茶的叶酸含量有无显著性差异？（显著性水平 $\alpha=0.05$）
(2)如果三个产地的绿茶的叶酸含量有显著性差异，求均值差 $\mu_{A_1}-\mu_{A_2}$ 的置信水平为95%的置信区间。

解： s=3, $n_1==n_2=n_3=5$， $n=15$，

$T_{\bullet 1}=\sum_{i=1}^{n_1}X_{ij}=39.9$, $T_{\bullet 2}=\sum_{i=1}^{n_{21}}X_{ij}=32$ $T_{\bullet 3}=\sum_{i=1}^{n_{31}}X_{ij}=45.6$,

$T_{\bullet\bullet}=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}X_{ij}=117.5$ $\overline{X}=7.8333$

$S_T=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}X_{ij}^2-\frac{T_{\bullet\bullet}^2}{n}=947.31-920.4167=26.8933$

$S_A=\sum_{j=1}^{s}\frac{T_{\bullet j}^2}{n_j}-\frac{T_{\bullet\bullet}^2}{n}=939.092-920.4167=18.6753$

$S_E=S_T-S_A=8.218$

列方差分析表如下：

来源	平方和	自由度	均方	F值
因素 A	18.6753	2	9.3377	F=13.6356
误差	8.218	12	0.6848	

$F_{0.05}$（2，12）=3.89 ＜ F=13.6353,
检验结果拒绝 H_0

(2) $\overline{X}_1=7.98$， $\overline{X}_2=6.4$，

则 $\hat{\sigma}^2=\frac{S_E}{n-s}=0.6848$；

$t_{0.025}(n-s)=t_{0.025}(12)=2.1788$

$t_{0.025}(16)\sqrt{S_E(\frac{1}{n_j}+\frac{1}{n_k})}=2.1788\sqrt{0.6848\times\frac{2}{5}}=1.1403$，

故置信区间为：

$7.98-6.4\pm1.1403=1.58\pm1.1403=(0.4397,\ \ 2.7203)$.

五、（15 分）顾客依 Poisson 过程到达某商店，速率为 $\lambda=4$ 人/小时。已知商店上午 9：00 开门。
（1）试求到 9：30 时仅到一位顾客，而到 11：30 时总计已到达 5 位顾客的概率。
（2）试求到 10：00 时仅到两位顾客的条件下，下午 1：00 时已到达 10 位顾客的概

$EN(t)=\lambda t$

$\lambda=\frac{EN(t)}{t}=E\frac{N(t)}{t}$ 速率

率；

（3）试求此 Poisson 过程$\{N(t),t\geq 0\}$的协方差函数$C_N(s,t)$，写出推导过程。

解：令 t 的计时单位为小时，并以 9：00 为起始时刻。

(1) $P\{N(\frac{1}{2})-N(0)=1,\ N(\frac{5}{2})-N(0)=5\} = P\{N(\frac{1}{2})=1,\ N(\frac{5}{2})-N(\frac{1}{2})=4\} = P\{N(\frac{1}{2})=1\}\cdot P\{N(\frac{5}{2})-N(\frac{1}{2})=4\}$

$N(0)$

$$P\{N(\frac{1}{2})=1, N(\frac{5}{2})=5\} = P\{N(\frac{1}{2})=1, N(\frac{5}{2})-N(\frac{1}{2})=4\}$$

$$=\{\frac{e^{-4*\frac{1}{2}}*4*\frac{1}{2}}{1!}\}\{\frac{e^{-4*2}(4*2)^4}{4!}\}=\frac{1024}{3}e^{-10}=\cancel{0.0155}$$

(2)

(3) $Cov(X,Y)=E(X-EX)(Y-EY)$
$=EXY-EXEY$

$EX^2=D(X)+(EX)^2$

$EN(s)^2=D(N(s))+[EN(s)]^2$
$=\lambda s+(\lambda s)^2$

$$P\{N(4)=10\mid N(1)=2\}=\frac{P\{N(4)=10,N(1)=2\}}{P\{N(1)=2\}}$$

$$=\frac{P\{N(1)=2,N(4)-N(1)=8\}}{P\{N(1)=2\}}=\frac{P\{N(1)=2\}P\{N(4)-N(1)=8\}}{P\{N(1)=2\}}$$

$$=\frac{(4*3)^8e^{-4*3}}{8!}=0.0665$$

① 若 $0<s<t$

3) $C_N(s,t)=EN(s)N(t)-EN(s)\cdot EN(t)$
$=EN(s)[N(t)-N(s)+N(s)]-\lambda s\cdot\lambda t$
$=E\{N(s)[N(t)-N(s)]+N(s)^2\}-\lambda^2 st$
$=EN(s)\cdot[N(t)-N(s)]+EN(s)^2-\lambda^2 st$
$=EN(s)\cdot E[N(t)-N(s)]+\lambda s+(\lambda s)^2-\lambda^2 st$
$=\lambda s(\lambda t-\lambda s)+\lambda s+(\lambda s)^2-\lambda^2 st=\lambda s$

② 若 $0<t<s$，同理，$C_N(s,t)=\lambda t$.

写上s,t谁大谁小

(3) $C_N(s,t)=\lambda\min\{s,t\}$，s, t>0, 过程略。

六、（15分）设$\{X_n,n\geq 0\}$为时齐马氏链，状态空间$I=\{0,1,2\}$，一步转移概率矩阵为

$D(X)=Var(X)$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & P=\begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{bmatrix} \end{array}$$

初始分布P（X₀=0）=0.3，P（X₀=1）=0.4，P（X₀=2）=0.3。

(1) 求概率P（$X_0=0, X_1=1, X_2=2$）；

(2) 求概率P（$X_0=1\mid X_1=0,\ X_2=2$）；

(3) 判断$\{X_n,n\geq 0\}$是否为遍历的，请说明理由；若是遍历的，求其平稳分布。

解：

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & P^2=\begin{bmatrix} 0.26 & 0.6 & 0.14 \\ 0.18 & 0.19 & 0.63 \\ 0.74 & 0.18 & 0.08 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\frac{P(X_1=1)P(X_0=0)}{P}$ $\frac{P(AB)}{PB}$

$\frac{P\{X_1=1,X_0=0\}}{P\{X_0=0\}}$

(1)

$P(X_0=0,X_1=1,X_2=2)=P(X_2=2\mid X_1=1)P(X_1=1\mid X_0=0)P(X_0=0)$
$=0.63*0.6*0.3=0.1134$

$P(X_2=2\mid X_1=1,X_0=0)$

$P\{X_1=1,X_0=0\}$

$P_{12}(2)\ P_0(1)\ P_0(0)$
0.63 0.6 0.3

$\cancel{P(X_1=0)}$ $(P_1,P_2,P_3) = (0.3,0.4,0.3)\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix}$ $= (\ \ \ -\ \ -)$

X_1	0	1	2
P	P_1	P_2	P_3

$\therefore P\{X_1=0\} = \cancel{0.42}\ (0.3, 0.4\ 0.3)\begin{pmatrix}0.1\\0.9\\0.1\end{pmatrix} = 0.42$

$P_0(1)$, (P_1,P_2,P_3)

(2) $P(X_0=1\mid X_1=0,X_2=2)=\dfrac{P(X_0=1,X_1=0,X_2=2)}{P(X_1=0,X_2=2)}$

$=\dfrac{P(X_2=2\mid X_1=0)P(X_1=0\mid X_0=1)P(X_0=1)}{P(X_2=2\mid X_1=0)P(X_1=0)}=\dfrac{\cancel{0.14*0.18*0.4}\ \ 0.7\times0.9\times0.4}{\cancel{0.14*0.3}\ \ 0.7\times0.42}=0.24$

（3）P^2 皆正元，故遍历。

设平稳分布为(π_1,π_2,π_3)，由$(\pi_1,\pi_2,\pi_3)P=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)$及$\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$可得平稳分布为$(\frac{81}{223},\frac{79}{223},\frac{63}{223})$。

$$\begin{cases} 0.1\pi_1+0.9\pi_2+0.1\pi_3=\pi_1 \\ 0.2\pi_1+0.1\pi_2+0.8\pi_3=\pi_2 \\ 0.7\pi_1+0.1\pi_3=\pi_3 \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1 \end{cases}$$

七、（15 分）设Z_1和Z_2是独立同分布的随机变量。$P(Z_1=-1)=P(Z_2=1)=\frac{1}{2}$。记$X(t)=Z_1\cos\lambda t+Z_2\sin\lambda t$，$t\in R$。证明$X(t)$是平稳过程。

Z_1	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

解：由已知，$EZ_1=EZ_2=-1*\frac{1}{2}+1*\frac{1}{2}=0$，

$E(X(t))=E(Z_1\cos\lambda t+Z_2\sin\lambda t)=\cos\lambda tEZ_1+\sin\lambda tEZ_2=0$

又因为：$EZ_1^2=EZ_2^2=(-1)^2*\frac{1}{2}+1^2*\frac{1}{2}=1$，

由Z_1,Z_2的独立性，$EZ_1Z_2=EZ_1EZ_2=0$，

故得：

$t+l=s$

$t-s=(l)$

$R_X(t,s)=E(Z_1\cos\lambda t+Z_2\sin\lambda t)(Z_1\cos\lambda s+Z_2\sin\lambda s)$

$=E(Z_1^2\cos\lambda t\cos\lambda s+Z_2^2\sin\lambda t\sin\lambda s+Z_1Z_2(\cos\lambda t\sin\lambda s+\sin\lambda t\cos\lambda s))$

$=\cos\lambda t\cdot\cos\lambda s\,EZ_1^2+\sin\lambda t\cdot\sin\lambda s\,EZ_2^2+(\cos\lambda t\sin\lambda s+\sin\lambda t\cos\lambda s)E(Z_1Z_2)$

$=\cos(\lambda(t-s))$

所以，$X(t)$是平稳过程。