北京工业大学 2017——2018 学年第二学期

《 高等数学（工）_2 》期末考试试卷 A 卷

考试说明：

考试方式：闭卷。考试时间 95 分钟。考试日期： 2018 年 6 月 21 日。

承诺：

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，承诺在考试过程中自觉遵守有关规定，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

承诺人： ____________ **学号：** ____________ **班号：** ____________

注： 本试卷共 三 大题，共 8 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一草稿纸。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题号	一	二	三	总成绩
满分				
得分				

得 分

一、填空题（本大题共 10 道小题，每题 3 分，共 30 分）

1. 微分方程 $(x+1)\mathrm{d}y+(1-2e^{-y})\mathrm{d}x=0$ **错误！未找到引用源。** 的通解为 $\underline{(x+1)(2-e^{y})=C.}$

2. 函数 $u=xy^2z$ 在点 $P(1,-1,2)$ 处的梯度为 $\underline{(2,-4,1)}$.

3. 数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\dfrac{n+1}{n}$ 是条件收敛、绝对收敛、还是发散？条件收敛 .

4. 设曲线 L 为从 $(0,0)$ 到 $(1,0)$ 再到 $(1,1)$ 的折线段，则 $\int_L 3xy^2\mathrm{d}s=$ $\underline{1}$.

5. 交换积分次序：$\int_0^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\frac{1}{2}} f(x,y)\mathrm{d}x=$ ____ $\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$ ___.

6. 向量场 A $=(x^3+yz)i+(y^3+xz)j+(z^3+xy)k$ 的散度为 ________ $\underline{3(x^2+y^2+z^2)}$ _.

7. 旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,2,5)$ 处的切平面为 _____ $\underline{2x+4y-z=5}$.

8. 设函数 $z=e^{2x-3y}+2y$，则 $\mathrm{d}z\big|_{(1,0)}=$ ___ $\underline{2e^2dx+(2-3e^2)dy}$ __________.

9. 函数 $f(x)=\begin{cases}x, & -\pi<x\le 0,\\ 1+x, & 0<x\le\pi,\end{cases}$ 展开为以 2π 为周期的傅立叶级数，其和函数记为

$S(x)$，则 $S(\pi)=$ _______ 1/2 __________.

10. 设 Σ 是 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截部分，则该曲面的面积元素 $\mathrm{d}S$

_____ $\underline{\sqrt{2}dxdy}$ _____.

二、计算题（本大题共 6 道小题，每题 10 分，共 60 分）

得 分

11. 求函数 $f(x,y)=(x-4y+2y^2)\mathrm{e}^x$ 的极值.

解：令 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=(x-4y+2y^2+1)\mathrm{e}^x=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=(-4+4y)\mathrm{e}^x=0\end{cases}$ 得驻点 (1,1)

又 $A=\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}=(x-4y+2y^2+2)\mathrm{e}^x\big|_{(1,1)}=e$

$B=\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=(-4+4y)\mathrm{e}^x\big|_{(1,1)}=0$

$C=\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(1,1)}=4\mathrm{e}^x\big|_{(1,1)}=4e$

$AC-B^2=4e^2>0,$ 又 $A>0,$

所以函数 $f(x,y)$ 的极小值为： $f(1,1)=-e.$

得 分

12. 计算二重积分 $I=\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域 D 为 $x^2+y^2\le R^2$.

解：在极坐标系下化二重积分为二次积分：

$$\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\left(\frac{\cos^2\theta}{9}+\frac{\sin^2\theta}{16}\right)r^3dr$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^2\theta}{9}+\frac{\sin^2\theta}{16}\right)d\theta\int_0^R r^3dr=\frac{\pi R^4}{4}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\right).$$

得 分

13. 求微分方程 $y''+y'=(x^2+2)e^{-x}$ **错误!未找到引用源。**的通解.

解：对应其次方程的特征方程为$\lambda^2+\lambda=0$, 解得$\lambda_1=0,\lambda_2=-1$.

所以齐次方程的通解为 $y=C_1+C_2e^{-x}$.

设非齐次方程的特解为 $y^*=x(ax^2+bx+c)$,

代入原方程得 $a=\frac{1}{3},b=-1,c=2$.

因此原方程的通解为 $y=C_1+C_2e^{-x}+\frac{1}{3}x^3-x^2+2x$.

得 分

14. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+2}{3^n}x^{2n+1}$ 的收敛域，并求其和函数.

解：因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+4)x^{2n+3}}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{(2n+2)x^{2n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+4)x^2}{3(2n+2)}=\frac{x^2}{3}$,

故该级数的收敛域为 $\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$.

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+2}{3^n}x^{2n+1}$, 则

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x^{2n+2}\right)'}{3^n}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{3^n}\right)'=\left(\frac{\frac{x^4}{3}}{1-\frac{x^2}{3}}\right)'=\left(\frac{x^4}{3-x^2}\right)'$$

$$=\frac{4x^3\left(3-x^2\right)+2x^5}{\left(3-x^2\right)^2}=\frac{12x^3-2x^5}{\left(3-x^2\right)^2}=\frac{2x^3\left(6-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2},\quad x\in(-\sqrt{3},\sqrt{3}).$$

得 分

15. 求$\int_L (1+xe^{2y})\mathrm{d}x+(x^2e^{2y}-y^2)\mathrm{d}y$，其中L是从点$O(0,0)$经圆周$(x-2)^2+y^2=4$的上半部分到点$A(2,2)$的弧段.

解：积分路径如图所示：

$P(x,y)=1+xe^{2y}$, $Q(x,y)=x^2e^{2y}-y^2$, 所以 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$. 该曲线积分在任意单连通区域中与路径无关.选取新的路径 L_1+L_2, L_1为从点$O(0,0)$沿x轴到点$B(2,0)$, L_2为从点B平行于y轴到点$A(2,2)$.

$$\begin{cases} L_1: \quad y=0, \quad (0\le x\le 2), \\ L_2: \quad x=2, \quad (0\le y\le 2). \end{cases}$$

所以：原式$=\int_{L_1+L_2}(1+xe^{2y})\mathrm{d}x+(x^2e^{2y}-y^2)\mathrm{d}y$

$$=\int_0^2(1+x)dx+\int_0^2(4e^{2y}-y^2)dy$$

$$=\left(x+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2+2e^{2y}\Big|_0^2-\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^2=2e^4-\frac{2}{3}$$

得 分

16. 计算曲面积分$\iint_{\Sigma}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$\Sigma$是有向曲面$z=x^2+y^2,(0\le z\le 1)$的上侧.

解：设Σ_1为$z=1,(x^2+y^2\le 1)$的下侧，则Σ与Σ_1一起构成一个闭曲面，记它们围城的空间闭区域为Ω，由高斯公式得：

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(2x+z)dydz+zdxdy=-\iiint_{\Omega}(2+1)dxdydz$$

$$=-3\iiint_{\Omega}dxdydz=-3\int_0^1dz\iint_{x^2+y^2\le 1}dxdy=-3\int_0^1\pi zdz=-\frac{3\pi}{2}.$$

而$\iint_{\Sigma_1}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_1}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{x^2+y^2\le 1}dxdy=-\pi$,

因此，原式$= -\dfrac{3\pi}{2}+\pi = -\dfrac{\pi}{2}$.

三、证明题（本大题共 2 道小题，每题 5 分，共 10 分）

得 分

17. 设函数 $z(x,y)$ 由方程 $F\left(x+\dfrac{z}{y}, y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ 给出， F,z 都是可微函数，

证明： $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-xy$.

证明：设 $u=x+\dfrac{z}{y}, v=y+\dfrac{z}{x}$, 则有 $F(u,v)=0$ 将它两边分别对 x,y 求偏导数，得：

$$F'_u\left(1+y^{-1}\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F'_v\left(\frac{\partial z}{\partial x}x^{-1}-x^{-2}z\right)=0 \qquad (1)$$

$$F'_u\left(\frac{\partial z}{\partial y}y^{-1}-y^{-2}z\right)+F'_v\left(1+x^{-1}\frac{\partial z}{\partial xy}\right)=0 \qquad (2)$$

将(1)(2)联立，解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x^{-2}zF'_v-F'_u}{y^{-1}F'_u+x^{-1}F'_v}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y^{-2}zF'_u-F'_v}{y^{-1}F'_u+x^{-1}F'_v}$,

于是 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=x\dfrac{x^{-2}zF'_v-F'_u}{y^{-1}F'_u+x^{-1}F'_v}+y\dfrac{y^{-2}zF'_u-F'_v}{y^{-1}F'_u+x^{-1}F'_v}=z-xy$.

得 分

18. 已知 $a_n=\int_0^1 x^2(1-x)^n\mathrm{d}x, (n=1,2,...)$ ， 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为1.

证明：

$$a_n=-\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^2d(1-x)^{n+1}=-\frac{1}{n+1}\left[x^2(1-x)^{n+1}\right]_0^1+\frac{1}{n+1}\int_0^1 2x(1-x)^{n+1}dx$$

$$=\frac{2}{n+1}\int_0^1 x(1-x)^{n+1}dx=-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 xd(1-x)^{n+2}$$

$$=-\frac{1}{(n+1)(n+2)}[x(1-x)^{n+2}]\Big|_0^1+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\int_0^1(1-x)^{n+2}dx$$

$$=-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{n+3}(1-x)^{n+3}\Big|_0^1=\frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$得敛散性应与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$一致，所以原级数收敛.

$$S_n=\frac{2}{2\cdot3\cdot4}+\frac{2}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}.\qquad\cdots$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{6}.$