北京工业大学2022—2023学年第二学期
《高等数学(工)—2》期末考试试卷A卷

考试说明：考试日期:2023年6月13日、考试时间:95分钟、考试方式：闭卷

承诺:

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，在考试过程中自觉遵守有关规定和纪律，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考，若有违反，愿接受相应处分。

承诺人：__________ 学号：__________ 班号：

注：本试卷共__三__大题，共__6__页，满分100分，考试时必须使用卷后附加的统一草稿纸。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题号	一	二	三	总成绩
满分	30	60	10	
得分				

得分

一、填空题：（本大题共10小题，每小题3分，共30分）

1．已知函数 $f(x,y,z)=z\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，则 $\mathrm{d}f(1,1,1)=$ __$\dfrac{1}{2}\mathrm{d}x-\dfrac{1}{2}\mathrm{d}y+\mathrm{d}z$__.

2. 设 L 是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$,其周长为 a ,则 $\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=$ __$12a$____.

3．设 $f(x,y,z)=\sqrt{3+x^2+y^2+z^2}$，则 $\mathbf{grad}f(1,-1,2)=$ __$(\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3})$______.

4．级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{\cos(an)}{n^2}+(-1)^n\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right]$ 是条件收敛、绝对收敛,还是发散？_条件收敛_.

5． $f(x)=\dfrac{x}{3(1-x)}$ 展开成 x 的幂级数为__$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{3}$，$x\in(-1,1)$_____.

6. 设Σ为上半球面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$，则$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{\mathrm{d}S}{2+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=$___$2\pi$____.

7. 微分方程$xy'+y=\mathrm{e}^{2x}$满足$y\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\mathrm{e}$的特解为__$y=\dfrac{1}{2x}(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e})$_____.

8. 曲线$\begin{cases}x=\sin^2 t\\ y=5\sin 2t\\ z=3\cos^2 t\end{cases}$在$t=\dfrac{\pi}{4}$处的一个单位切向量为_$(\dfrac{1}{\sqrt{10}},0,-\dfrac{3}{\sqrt{10}})$ 或 $(-\dfrac{1}{\sqrt{10}},0,\dfrac{3}{\sqrt{10}})$____.

9. 交换积分次序$\int_0^{2\sqrt{\ln 3}}\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{\ln 3}}f(x,y)\mathrm{d}x=$_$\int_0^{\sqrt{\ln 3}}\mathrm{d}x\int_0^{2x}f(x,y)\mathrm{d}y$_______.

10. 设$f(x)=\begin{cases}1, & -\pi\le x<0\\ 1+x^2, & 0\le x<\pi\end{cases}$是以$2\pi$为周期的函数, 其傅立叶级数的和函数记为$S(x)$，则$S(2023\pi)=$____$1+\dfrac{\pi^2}{2}$________.

二、计算题:（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

得分

11. 求函数$f(x,y)=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$的极值，并指出是极大值还是极小值.

解：由$f'_x=y-\dfrac{50}{x^2}=0,\qquad f'_y=x-\dfrac{20}{y^2}=0,$ ---2’

解得驻点为$(5,2)$， ---3’

又$f''_{xx}=\dfrac{100}{x^3}$，$f''_{xy}=1$，$f''_{yy}=\dfrac{40}{y^3}$， ---6’

所以$A=\dfrac{4}{5},B=1,C=5,\quad AC-B^2=3>0,$ ---9’

故函数在$(5,2)$取得极小值，极小值为$f(5,2)=30$. ---10’

得分

12. 求由曲面 $z=6-2x^2-y^2$ 与曲面 $z=x^2+2y^2$ 所围立体的体积.

解：设两曲面所围立体空间区域为 Ω，

$$V=\iiint\limits_{\Omega} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \qquad ---2'$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} r\mathrm{d}r\int_{r^2(1+\sin^2\theta)}^{6-r^2(1+\cos^2\theta)}\mathrm{d}z \qquad ---5'$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} r(6-3r^2)\mathrm{d}r \qquad ---7'$$

$$=2\pi\left(3r^2-\frac{3}{4}r^4\right)\Big|_0^{\sqrt{2}} \qquad ---8'$$

$$=6\pi \qquad ---10'$$

得分

13. 求微分方程 $y''-6y'+5y=xe^x$ 的通解.

解：先求对应齐次方程 $y''-6y'+5y=0$ 的通解.

特征方程 $r^2-6r+5=0$， ---1'

特征根 $r_1=5,\ r_2=1,$ ---3'

故齐次方程通解为 $Y=C_1e^x+C_2e^{5x}.$ ---4'

设非齐次方程特解为 $y^*=ze^x,$ ---5'

得 $z''-4z'=x,$ ---6'

设 $z'=ax+b,$ 解得 $a=-\frac{1}{4},b=-\frac{1}{16}.$ ---8'

取 $z=-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x,$ 所以非齐次方程的特解为 $y^*=\left(-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x\right)e^x,$ ---9'

原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{5x}+\left(-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x\right)e^x.$ ---10'

得分

14. $I=\int_L(3xy+x\sin x)\mathrm{d}x+(x^2-ye^y)\mathrm{d}y$，其中 L 是曲线 $y=x^2-1$ 上由点 $A(1,0)$ 到点 $B(-1,0)$ 沿顺时针方向的一段弧.

解：补充直线 $\overline{BA}: y=0 \quad (-1\le x\le 1)$. 记 L 与 $\overline{BA}$ 围成的区域为 D. ---2’

$I=\oint_{L+\overline{BA}}(3xy+x\sin x)\mathrm{d}x+(x^2-ye^y)\mathrm{d}y-\int_{\overline{BA}}(3xy+x\sin x)\mathrm{d}x+(x^2-ye^y)\mathrm{d}y$ ---3’

由格林公式 $\oint_{L+\overline{BA}}(3xy+x\sin x)\mathrm{d}x+(x^2-ye^y)\mathrm{d}y=-\iint\limits_D(2x-3x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ---5’

$=\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=0$. ---6’

$\int_{\overline{BA}}(3xy+x\sin x)\mathrm{d}x+(x^2-ye^y)\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}x\sin x\mathrm{d}x$ ---8’

$=-\int_{-1}^{1}x\mathrm{d}\cos x$

$=-x\cos x\Big|_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\cos x\mathrm{d}x$

$=2\sin 1-2\cos 1$. ---9’

所以 $I=2\cos 1-2\sin 1$. ---10’

得分

15. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2-y^2z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2-xz+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(3z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为曲面 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}\ (0\le z\le 2)$ 的上侧.

解：补充平面 $\Sigma_1: z=0\ (x^2+y^2\le 4)$, 取下侧， ---2’

记 Σ 与 Σ_1 围成的闭区域为 Ω

$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(x^2-y^2z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2-xz+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(3z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2-y^2z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2-xz+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(3z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

---3’

$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(x^2-y^2z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2-xz+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(3z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(2x+2y+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ---5’

$=3\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$=3\cdot\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 2^2\cdot 2$

$$=8\pi.$$ ---6’

而 $\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2-y^2z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2-xz+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(3z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ---8’

$$=-4\pi,$$ ---9’

故 $I=8\pi+4\pi=12\pi.$ ---10’

得 分

16. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n5^n}$ 的收敛域及和函数.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n5^n}{(n+1)5^{n+1}}\right|=\dfrac{1}{5}$，所以收敛半径 $R=5$. ---2’

而 $x=5$ 时，幂级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{5n}$，发散. $x=-5$ 时，幂级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{5n}$，收敛.

故幂级数的收敛域为 $x\in[-5,5)$. ---4’

设 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n5^n}$，$x\in[-5,5)$，

则 $\left(xs(x)\right)'=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n5^n}\right)'=\dfrac{1}{5}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x}{5}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{5}}=\dfrac{1}{5-x}$，$x\in[-5,5)$

---7’

两边积分得 $xs(x)=\left[-\ln(5-x)\right]\Big|_0^x=\ln 5-\ln(5-x)$, ---9’

又 $s(0)=\dfrac{1}{5}$,

故 $s(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{5}{5-x}, & x\neq 0\text{且}x\in[-5,5)\\ \dfrac{1}{5}, & x=0\end{cases}$ ---10’

三、证明题:(本大题共 2 小题,每小题 5 分,共 10 分)

得 分

17. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n - u_{n-1})$ 收敛,且正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,

证明:级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n^2$ 收敛.

证明:设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n - u_{n-1})$ 的部分和为 s_n,它的和为 s.

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n - u_{n-1})$ 收敛,有 $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(u_n - u_0) = s$,

所以 $\lim_{n\to\infty} u_n = s + u_0$. ---1'

由收敛数列的局部有界性,$\exists N_1 \in \mathrm{N}^+, M > 0,$ 当 $n > N_1$ 时,$|u_n| \le M$.

---2'

由正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛有 $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$, ---3'

$\exists N_2 \in \mathrm{N}^+$, 当 $n > N_2$ 时,$|v_n| < 1$, 有 $v_n^2 < v_n$,

由正项级数比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 收敛, ---4'

所以 $|u_n v_n^2| \le M v_n^2 \quad (n > \max\{N_1, N_2\})$,

由正项级数比较审敛法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n^2$ 收敛. ---5'

得 分

18. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $\frac{x}{z} = \varphi\left(\frac{y}{z}\right)$ 所确定,其中 $z = z(x, y)$,

$\varphi(u)$ 都具有连续导数. 证明: $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

证明：设 $F(x,y,z)=x-z\varphi\left(\frac{y}{z}\right)$，则 $F_x'=1$， $F_y'=-z\varphi'\left(\frac{y}{z}\right)\cdot\frac{1}{z}=-\varphi'\left(\frac{y}{z}\right)$，

$$F_z'=-\varphi\left(\frac{y}{z}\right)-z\varphi'\left(\frac{y}{z}\right)\left(-\frac{y}{z^2}\right)=\frac{y\varphi'\left(\frac{y}{z}\right)-z\varphi\left(\frac{y}{z}\right)}{z}=\frac{y\varphi'\left(\frac{y}{z}\right)-x}{z}.$$

---3'

故 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=\frac{z}{x-y\varphi'\left(\frac{y}{z}\right)}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=\frac{-z\varphi'\left(\frac{y}{z}\right)}{x-y\varphi'\left(\frac{y}{z}\right)}$，

所以 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{x-y\varphi'\left(\frac{y}{z}\right)}-\frac{yz\varphi'\left(\frac{y}{z}\right)}{x-y\varphi'\left(\frac{y}{z}\right)}=z$. ---5'