

## 北京工业大学 2019—2020 学年第一学期

## 《高等数学》期中试卷

学号\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 成绩\_\_\_\_\_

注意：本试卷共 6 页，19 道题。考试时间 95 分钟。考试日期：2019 年 11 月 11 日

题号	一	二	三	四	成绩	
分数	20	20	49	11	核分	
得分					复查	

一、单项选择题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。请将正确结果的字母写在括号内。

1. 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ，那么 【 B、C 】(A) 存在正数  $\varepsilon$ ，对任意给定的正整数  $N$ ，当  $n > N$  时，总有  $|x_n - a| < \varepsilon$ 。(B) 存在正数  $\varepsilon$ ，并且存在正整数  $N$ ，当  $n > N$  时，总有  $|x_n - a| < \varepsilon$ 。(C) 对任意给定的正数  $\varepsilon$ ，存在正整数  $N$ ，当  $n > N$  时，总有  $|x_n - a| < \varepsilon$ 。(D) 对任意给定的正数  $\varepsilon$ ，以及任意的正整数  $N$ ，当  $n > N$  时，总有  $|x_n - a| < \varepsilon$ 。2. 当  $x \rightarrow 0$  时，比其他三个更高阶的无穷小是 【 D 】(A)  $x^2$  (B)  $\sqrt{1-x^2} - 1$  (C)  $1 - \cos x$  (D)  $\sin x - \tan x$ 3. 设  $f(x) = |x(1-x)|$ ，则 【 D 】(A)  $x=0$  是  $f(x)$  的极值点， $(0,0)$  不是曲线  $y=f(x)$  的拐点。(B)  $x=0$  不是  $f(x)$  的极值点， $(0,0)$  不是曲线  $y=f(x)$  的拐点。(C)  $x=0$  不是  $f(x)$  的极值点， $(0,0)$  是曲线  $y=f(x)$  的拐点。(D)  $x=0$  是  $f(x)$  的极值点， $(0,0)$  是曲线  $y=f(x)$  的拐点。

高等数学（信、工—1）期中考试试卷 第 1 页 共 6 页

## 北京工业大学 19 级第一学期期中考试

4. 如果  $f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & x \leq 0 \\ b(1-x^2), & x > 0 \end{cases}$  处处可导，那么 【 D 】(A)  $a=1, b=1$  (B)  $a=-2, b=-1$ (C)  $a=1, b=0$  (D)  $a=0, b=1$ 5. 设  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ，则  $f(x)$  在  $x=0$  处 【 C 】

(A) 极限不存在 (B) 极限存在但是不连续

(C) 连续但不可导 (D) 可导

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分，把答案填在题中的横线上。

6. 设  $\begin{cases} x = te^t \\ e^t + e^t = 2 \end{cases}$ ，则  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \underline{\quad -1 \quad}$ ， $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0} = \underline{\quad 0 \quad}$ 。7. 已知当  $x \rightarrow 0$  时， $(1+\alpha x^2)^{\frac{1}{3}} - 1$  与  $\cos x - 1$  是等价无穷小，常数  $\alpha = \underline{\quad -\frac{3}{2} \quad}$ 8. 极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + \frac{1}{x})^x = \underline{\quad e^2 \quad}$ 9. 已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x) - f(0)] \sin 3x}{x^2} = 4$ ， $f'(0) = \underline{\quad \frac{4}{3} \quad}$ 10. 函数  $f(x) = \sqrt{x(10-x)}$  的最小值为 0 最大值为 5。

三、计算下列各题：本大题共 7 小题，每小题 7 分，共 49 分。解答应写出主要过程或演算步骤。

高等数学（信、工—1）期中考试试卷 第 2 页 共 6 页

## 北京工业大学 19 级第一学期期中考试

11. 求  $y = \frac{e^x - 1}{\frac{1}{e^x} + 1} + \cos(x-1) \cos \frac{1}{x-1}$  的间断点，并判断间断点的类型。间断点  $x=0, x=1$ 。 $\lim_{x \rightarrow 0+0} \left[ \frac{e^x - 1}{\frac{1}{e^x} + 1} + \cos(x-1) \cos \frac{1}{x-1} \right] = 1 + \cos^2(-1)$ ， $\lim_{x \rightarrow 0-0} \left[ \frac{e^x - 1}{\frac{1}{e^x} + 1} + \cos(x-1) \cos \frac{1}{x-1} \right] = -1 + \cos^2(-1)$  $x=0$  是跳跃间断点。函数在  $x=1$  点的左右极限都不存在， $x=1$  是振荡间断点。12. 设  $y = xf(e^{-x})$ ，其中  $f$  具有二阶导数，求  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ 。 $\frac{dy}{dx} = f(e^{-x}) - xe^{-x} f'(e^{-x})$  $\frac{d^2y}{dx^2} = -e^{-x} f'(e^{-x}) - e^{-x} f'(e^{-x}) + xe^{-x} f''(e^{-x}) + xe^{-2x} f''(e^{-x})$  $= -2e^{-x} f'(e^{-x}) + xe^{-x} f''(e^{-x}) + xe^{-2x} f''(e^{-x})$ 13. 设  $y = y(x)$  由方程  $x + \tan y = y$  确定，求  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ 。 $1 + \sec^2 y \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}$ ， $1 = (1 - \sec^2 y) \frac{dy}{dx}$ ， $\frac{dy}{dx} = -\cot^2 y$ ； $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \cot y \csc^2 y \frac{dy}{dx} = -2 \cot^3 y \csc^2 y$ 

高等数学（信、工—1）期中考试试卷 第 3 页 共 6 页

## 北京工业大学 19 级第一学期期中考试

14. 确定  $a$  与  $b$  的值，使曲线  $y = \ln \frac{x}{e}$  与曲线  $y = ax^2 + bx$  在  $x=1$  处有共同的切线。两条曲线在  $x=1$  处相切，必在  $x=1$  处相交。 $\ln \frac{1}{e} = a + b = -1$ 。两条曲线在  $x=1$  处相切，必在  $x=1$  处有相同的切线斜率。 $\frac{1}{x} = 2ax + b$ ， $1 = 2a + b$  解得  $a=2, b=-3$ 。15. 证明：当  $x > 0$  时， $(x^2 - 1) \ln x \geq (x-1)^2$ 。令  $F(x) = (x^2 - 1) \ln x - (x-1)^2$ ， $f(x) = (x+1) \ln x - (x-1)$ 。 $f'(x) = \ln x + \frac{x+1}{x} - 1 = \ln x + \frac{1}{x}$ 。 $x > 1$  时， $f'(x) > 0$ 。 $f(x) > f(1) = 0$ ， $F(x) = (x-1)f(x) > 0$ 。 $0 < x \leq 1$  时， $f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} < 0$ ， $f'(x)$  递减， $f'(1) > 0$ ， $\therefore f'(x) > 0$ ，

高等数学（信、工—1）期中考试试卷 第 4 页 共 6 页

## 北京工业大学 19 级第一学期期中考试

 $f(x)$  递增。 $f(1) = 0$ ，所以  $f(x) \leq 0$ ， $F(x) = (x-1)f(x) \geq 0$ 。 $(x^2 - 1) \ln x \geq (x-1)^2$ 。16. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} \right)$ 。 $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-x \ln x}{(x-1) \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\ln x-1}{\ln x + \frac{x-1}{x}}$  $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x \ln x}{x \ln x + x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\ln x-1}{\ln x+1} = -\frac{1}{2}$ 。17. 求函数  $y = x + \frac{1}{x}$  的极值。 $y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$ ，驻点  $x=-1, x=1$ ，不可导点  $x=0$ 。

$x$	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, 0)$	$0$	$(0, 1)$	$1$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	0	-	不存在	-	0	+
$f(x)$		极大				极小	

极大值  $f(-1) = -2$ 极小值  $f(1) = 2$ 

高等数学（信、工—1）期中考试试卷 第 5 页 共 6 页

## 北京工业大学 19 级第一学期期中考试

得，存在  $\xi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ， $f'(\xi) = 0$ 。但是，当  $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  时， $f'(x) = \cos x - 1 < 0$ 。所以，只有  $f(0) = 0$ ，即方程  $\sin x = x$  只有一个实根。

用单调性证明也可以。

高等数学（信、工—1）期中考试试卷 第 7 页 共 6 页