北京工业大学 2020 —2021 学年 第 I 学期末

“概率论与数理统计”课程 考试（经类，A 卷）参考答案

一、填空题（15 个空，每空 3 分，共 45 分）

1．设 A 和 B 为事件，且 $P(A)=0.4$, $P(A\bigcup B)=0.6$. 当 A 与 B 互不相容时， $P(B)=$ __0.2__；A 与 B 相互独立时, $P(B)=$ __1/3__.

2．设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} a+be^{-0.5x}, & x\ge 0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$ 其中 a 与 b 为常数，则 $a=$ __1__， $b=$ __－1__ .

2. 设 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$, 则 $E(X^2)=$ __6__.

3. 若 X 服从[0,1]区间上均匀分布，记 $A=\{0.1\le X\le 0.3\}$，Y 表示对 X 进行 20 次独立观测后事件 A 发生的次数。则 $E(Y)=$ __4__， $Var(Y)=$ __3.2__.

5. 设随机变量 X 可能取三个值-2, 0 和 1，且 $P(X=-2)=0.25$， $P(X=1)=0.35$， $E(X)=$ __−1.5__， $\mathrm{Var}(X)=$ __1.3275__.

6. 设随机变量 X_1, X_2 相互独立，且 $X_1\sim N(3,\ 3^2)$，$X_2\sim N(1,\ 2^2)$． 令 $X=X_1-2X_2$，则 $X\sim$ __$N(1, 5^2)$__． 进一步，若记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数，且已知 $\Phi(1)=0.8413$，$\Phi(2)=0.9772$，则 $P\{-4<X<11\}=$ __0.8185__.

7. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n>2)$ 为抽自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机样本，记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 .$$

则 $\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)/\sqrt{S^2}\sim$ __t_{n-1}__， $(n-1)S^2/\sigma^2\sim$ __χ^2_{n-1}__ .

8. 设 $X_1, \ldots, X_{10}$ 是抽自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的随机样本，经计算得 $\bar{x}=5,\ s^2=0.09$。根据本试卷第 5 页上的 t 分布表与 χ^2 分布表，得未知参数 μ 的置信系数为 0.95 的置信区间为[4.8762, 5.1238]， σ^2 的置信系数为 0.95 的置信区间为[0.05487, 0.17418].

二、（5 个小题，每小题 11 分，共 55 分）

注： 每题下列各题时必须有解题过程，无解题过程的不能得分.

1. 某一地区肺癌发病率为 0.005. 已知肺癌患者做肿瘤标记物试验，结果呈阳性概率为 0.95，非癌症患者做试验呈阳性概率为 0.03. 求：

(1) 任选一人做肿瘤标记物试验，结果呈阳性的概率；

(2) 一人做肿瘤标记物试验结果呈阳性，其是癌症患者和非癌症患者的概率.

解 设 A ={试验呈阳性}，B_1={肺癌患者}，B_2={非肺癌患者}，则

$$P(B_1) = 0.005, \quad P(B_2) = 0.995, \quad P(A \mid B_1) = 0.95, \quad P(A \mid B_2) = 0.03.$$

——写对假设 1 分、2 个概率与 2 个条件概率 1 分

(1) 由全概率公式，得

$$P(A) = P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2) = 0.005 \times 0.95 + 0.995 \times 0.03 = 0.0346;$$

——全概率公式 2 分，计算 1 分，结果 1 分

(2) 由贝叶斯公式，得

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(B_1)P(A \mid B_1)}{P(A)} = \frac{0.005 \times 0.95}{0.0346} = 0.13728,$$

$$P(B_2 \mid A) = 1 - 0.13728 = 0.86272.$$

——叶斯公式 2 分，计算 1 分，结果各 1 分

2. 设随机变量 X 服从区间 $(0,1]$ 上的均匀分布，令 $Y = -2\ln X$. 求 Y 的

(1) 分布函数 $F_Y(y)$； (2) 概率密度函数 $f_Y(y)$； (3) 期望 $E(Y)$.

解 (1) 记 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，则当 $y \geq 0$ 时，

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-2\ln X \leq y) = P(X \geq e^{-0.5y}) = 1 - e^{-0.5y};$$

——3 分

当 $y \leq 0$ 时，$F_Y(y) = 0$，故 $F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-0.5y}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0. \end{cases}$ ——2 分

(2) $f_Y(y) = \begin{cases} 0.5e^{-0.5y}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0. \end{cases}$ ——3 分

(3) $E(Y) = \int_0^{\infty} y f_Y(y) \mathrm{d}y = \int_0^{\infty} 0.5\mathrm{y}\mathrm{e}^{-0.5\mathrm{y}} \mathrm{d}y = 2\int_0^{\infty} x e^{-x} \mathrm{d}x = 2\Gamma(2) = 2.$

—— 表达式 1 分，定积分 1 分，结果 1 分

3. 设二维随机向量(X,Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} c\cdot e^{-y}, & 0\le x\le y<\infty, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求Y的常数 c；　(2) 求 X 和 Y 的边缘概率密度 $f_X(x)$ 与 $f_Y(y)$；

(3) 问 X 和 Y 是否独立？为什么？

解 (1) 由$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}\mathrm{d}y\int_0^{y} c\cdot e^{-y}\mathrm{d}x=c\int_0^{\infty} ye^{-y}\mathrm{d}x=c$，得

$c=1$；　—— 积分表达式 1 分，定积分 1 分，结果 1 分

(2)
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_x^{\infty} e^{-y}\mathrm{d}y, & x>0,\\ 0, & x\le 0\end{cases}=\begin{cases} e^{-x} & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^{y} e^{-y}\mathrm{d}x, & y>0,\\ 0, & y\le 0\end{cases}=\begin{cases} y\cdot e^{-y} & y>0,\\ 0, & y\le 0;\end{cases}$$

—— 各积分表达式 1 分，定积分 1 分，结果 1 分

(3) X 和 Y 不独立，因联合密度不等于边缘密度的乘积.

—— 原因、结论各结果 1 分

4. 设总体 X 有概率密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\lambda^2 x\, e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

其中$\lambda>0$为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为从总体 X 中抽出的随机样本. 求λ的：
(1)矩估计$\hat{\lambda}$；　(2)极大似然估计$\tilde{\lambda}$.

解 (1)记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，由$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\lambda^2x^2e^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\cdots=\frac{2}{\lambda}$.

------写出 E(X)式 1 分，算出结果 2 分

利用 $\overline{X}=E(X)$，得$\overline{X}=\frac{2}{\hat{\lambda}}$. 解该式，得 $\hat{\lambda}=\frac{2}{\overline{X}}$；

-------建立估计方程及求解各 1 分，矩估计结果 1 分

(2)记 $L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i)=\lambda^{2n}(\prod_{i=1}^{n} x_i)\, e^{-n\lambda\bar{x}}$ 为参数λ的似然函数，

-------似然函数 1 分

则　$\ln L(\lambda)=2n\ln\lambda+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-n\lambda\bar{x}$，　-------对数似然函数 1 分

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{2n}{\lambda}-n\bar{x}=0$，解得$\tilde{\lambda}=\frac{2}{\bar{x}}$. 故 $\tilde{\lambda}=\frac{2}{\overline{X}}$.

-------建立估计方程及求解各 1 分，极大似然估计 1 分

5. 设学生某次考试成绩服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，现从该总体中随机抽取 25 位的考试成绩，算得样本均值为 75.5，标准差为 3.95. 问在显著性水平 0.05 下，从样本看，(1) 是否接受“$\mu>75$”的假设？ (2) 是否接受“$\sigma=4$”的假设？

附 t 分布与 χ^2 分布表

$t_{24}(0.025)=2.0639$	$t_{24}(0.05)=1.7109$	$t_{25}(0.025)=2.0595$	$t_{25}(0.05)=1.7081$
$\chi^2_{24}(0.025)=39.364$	$\chi^2_{24}(0.05)=36.415$	$\chi^2_{25}(0.025)=40.646$	$\chi^2_{25}(0.05)=37.652$
$\chi^2_{24}(0.975)=12.401$	$\chi^2_{24}(0.95)=13.848$	$\chi^2_{25}(0.975)=13.120$	$\chi^2_{25}(0.95)=14.611$

解 $n=25$，$\mu_0=75,\ \sigma_0=4,\ \alpha=0.05,\ \bar{x}=75.5,\ s=3.95$. — 已知写正确 1 分

(1) 检验模型 $H_0:\mu\le\mu_0 \Leftrightarrow \mu>\mu_0$，由于

$$|\bar{x}-\mu_0|=|75.5-75|=0.5<\frac{s}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\alpha)=\frac{3.95}{5}\times 1.7109=1.3516，$$

知样本在原假设的接受域内，故接受原假设，即不接受“$\mu>75$”的假设；

（2）检验模型 $H_0:\sigma=\sigma_0 \Leftrightarrow \sigma\ne\sigma_0$，由于

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\frac{24\times 3.95^2}{4^2}=23.40375\in(12.401,39.364)=(\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2),\chi^2_{n-1}(\alpha/2))，$$

知样本在原假设的接受域内，即接受“$\sigma=4$”的假设。

——每问 5 分：模型正确 2 分，论证 2 分，结论 1 分

草稿纸　　　姓名：______________　　　学号：__________________