北京工业大学电控学院 2008——2009 学年第 2 学期

《电磁场与电磁波》 课程试题答案

一、（12 分）

研究矢量场的散度和旋度的意义何在？

已知位置矢量为：$\vec{r}=\vec{e}_x x+\vec{e}_y y+\vec{e}_z z$，

求：（1） $\nabla\bullet\vec{r}$；（2）$\nabla\times\vec{r}$；（3） $\nabla(\vec{k}\bullet\vec{r}),\vec{k}$是常矢量 。

解：根据亥姆霍兹定理，一个矢量场所具有的性质可以由它的散度和旋度来确定。所以只要知道了一个矢量场的散度和旋度，就可以完全确定了这个矢量。

（1）$\nabla\bullet\vec{r}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z\right)\bullet\left(\vec{e}_x x+\vec{e}_y y+\vec{e}_z z\right)=1+1+1=3$

（2）$\nabla\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=0$

（3）令$\vec{k}=a\vec{e}_x+b\vec{e}_y+c\vec{e}_z\ (a,b,c为常数)$

$\nabla(\vec{k}\bullet\vec{r})=\nabla\bullet$（ax+by+cz）$=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z\right)\bullet$（ax+by+cz）$=\vec{k}$

二、（15 分）

（1）写出麦克斯韦方程组的微分形式；

（2）导出稳态场（场量不随时间变化）的电场和磁场的场方程。

(3) 在无源的理想介质空间中， J=0， =0，导出电场和磁场的波动方程。

（提示：$\nabla\times\nabla\times\vec{E}=\nabla(\nabla\bullet\vec{E})-\nabla^2\vec{E}$）

解：（1）

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$
$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
$$\nabla\bullet\vec{B}=0$$
$$\nabla\bullet\vec{D}=$$

(2) 由于是稳态场，其磁场和电场不随时间变化

所以麦氏方程变为

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{H}&=\vec{J}\\ \nabla\times\vec{E}&=0\\ \nabla\bullet\vec{D}&=\rho\\ \nabla\bullet\vec{B}&=0\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\nabla\bullet\vec{D}=\rho\\ \nabla\times\vec{E}=0\end{cases}\quad\begin{cases}\nabla\times\vec{H}=\vec{J}\\ \nabla\bullet\vec{B}=0\end{cases}$$

(3) 无源场的麦氏方程为

$$\nabla\times\vec{H}=\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\qquad\text{(a)}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\qquad\text{(b)}$$

$$\nabla\bullet\vec{H}=0\qquad\text{(c)}$$

$$\nabla\bullet\vec{E}=0\qquad\text{(d)}$$

对（b）两边取旋度有

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{H}\right)$$

又 $\nabla\times\nabla\times\vec{E}=\nabla(\nabla\bullet\vec{E})-\nabla^2\vec{E}$，

$$\therefore\nabla(\nabla\bullet\vec{E})-\nabla^2\vec{E}=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{H}\right)$$

又 $\nabla\bullet\vec{E}=0$，$\nabla\times\vec{H}=\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

$$\therefore -\nabla^2\vec{E}=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

电场的波动方程为

$$\nabla^2\vec{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$$

同理可导出磁场的波动方程

$$\nabla^2\vec{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0$$

∴ 电场 和磁场的波动方程为

$$\nabla^2\vec{E}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$$

$$\nabla^2\vec{H}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0$$

其中 $v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

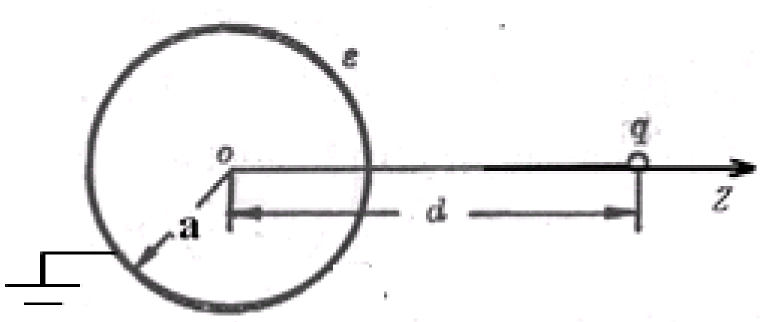
三、（15 分）（1）. 写出至少三种求解静电场问题的方法，简要说明其各自特点。

解：**镜像法**：它是一种间接求解边界问题的一种方法，用假想的简单电荷分布来等效代替分界面上复杂的电荷分布对电位的贡献，不求解泊松方程，只需求像电荷和边界内给定电荷共同产生的电位。

分离变量法：它是把待求的位函数表示为几个未知函数的乘积，该未知函数仅是一个坐标变量的函数，通过分离变量，把原偏微分方程化为几个常微分方程求解，最后代入边界条件求定解。

有限差分法：就是把求解场域内连续的场分布用求解网格节点上的离散数值解来代替，即用网格节点的差分方程近似代替场域内的偏微分方程来求解。

（2）一点电荷 q 位于一个半径为 a 的导体球外，与导体球的球心距离为 d，周围介质的介电常数为 ，如图。求点电荷与导体球的相互作用力。

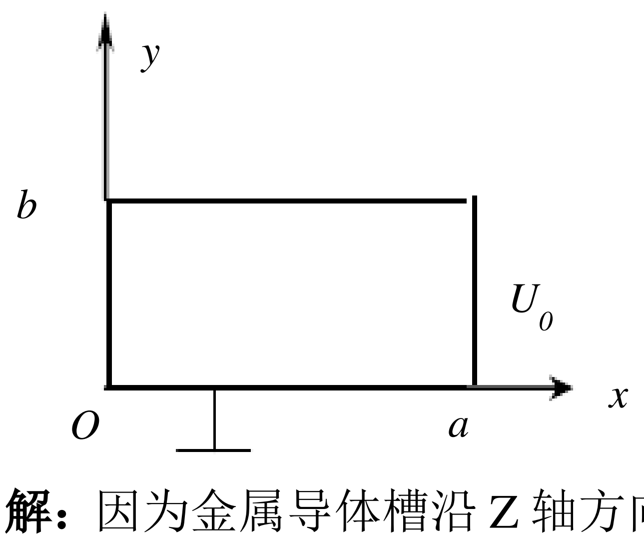


$$q' = -\frac{r}{d}q$$

解：$d_1 = \frac{r^2}{d}$

$$F = \frac{-\frac{r}{d}q \cdot q}{4\pi\varepsilon\left(d - d_1\right)^2} = \frac{-\frac{r}{d}q^2}{4\pi\varepsilon\left(d - \frac{r^2}{d}\right)^2} = \frac{-rdq^2}{4\pi\varepsilon\left(d^2 - r^2\right)^2}$$

四、(**10 分**)横截面为矩形的无限长接地金属导体槽，右侧有电位为 U0 的金属盖板，盖板与槽之间留有缝隙，保证绝缘。求导体槽内的电位分布。



解：因为金属导体槽沿 Z 轴方向为无限长，槽内空间的电位函数满足二维拉普拉斯方程。

边界条件为：

$$\begin{cases} \varphi(x,0) = 0, 0 \le x \le a \ (1) \\ \varphi(x,b) = 0, 0 \le x \le a \ (2) \\ \varphi(0,y) = 0, 0 \le y \le b \ (3) \\ \varphi(a,y) = U_0, 0 < y < b \ (4) \end{cases}$$

因为：

$$\varphi(x,y)=(A_0x+B_0)(C_0y+D_0)+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\sinh K_nx+B_n\cosh K_nx)(C_n\sin K_ny+D_n\cos K_ny)$$

代入（1）、（2）、（3）边界条件，得：

$$\varphi(x,y)=\sum_{n=1}C_n\sin\frac{n\pi y}{b}\times A_n\sinh\frac{n\pi x}{b}$$

代入（4），得：

$$U_0=\sum_{n=1}C_n\sin\frac{n\pi y}{b}\times A_n\sinh\frac{n\pi a}{b}$$

将 U0 进行傅里叶级数展开，得;

$$U_0=\sum_{n=1}f_n\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$f_n=\frac{2}{b}\int_0^b U_0\sin\frac{n\pi y}{b}dy=\begin{cases}\dfrac{4U_0}{n\pi},n=1,3,5,...\\0,n=2,4,6,...\end{cases}$$

$$C_nA_n=\frac{f_n}{\sin\frac{n\pi a}{b}}=\begin{cases}\dfrac{4U_0}{n\pi\sinh\frac{n\pi a}{b}},n=1,3,5,..\\0,n=2,4,6,...\end{cases}$$

$$\varphi(x,y)=\sum_{n=1,3,5,...}\frac{4U_0\sin\frac{n\pi y}{b}\sinh\frac{n\pi x}{b}}{n\pi\sinh\frac{n\pi a}{b}}$$

五、（15 分）

在自由空间传播的均匀平面波的电场强度复矢量为：

$$E=e_x10^{-4}e^{-j20\pi z}+e_y10^{-4}e^{-j(20\pi z-\frac{\pi}{2})}V/m$$

求：（1）平面波的传播方向和频率；

（2）波的极化方式；

（3）磁场强度 H；

解：（1）平面波的传播方向是沿 Z 轴。

波数　　$k=20\pi\ (rad/m)$

$$k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$$

$$\omega = \frac{k}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 6\pi \times 10^9$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 3 \times 10^9 (Hz)$$

（2）该电场可表示为：

$$\vec{E} = 10^{-4} e^{-j20\pi z}(\vec{e}_x + \vec{e}_y e^{\frac{\pi}{2}j}) = 10^{-4} e^{-j20\pi z}(\vec{e}_x + \vec{e}_y j)$$

所以该波为左旋圆极化波。

（3）由题意得：

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta_0}\vec{e}_z \times \vec{E}$$

$$\vec{H} = \frac{10^{-4}}{120\pi} e^{-j20\pi z}[\vec{e}_z \times \vec{e}_x + j(\vec{e}_z \times \vec{e}_y)]$$

$$= 2.65\times 10^{-7} e^{-j20\pi z}(\vec{e}_y - j\vec{e}_x)$$

$$= -2.65\times 10^{-7} e^{-j(20\pi z - \frac{\pi}{2})}\vec{e}_x + 2.65\times 10^{-7} e^{-j20\pi z}\vec{e}_y$$

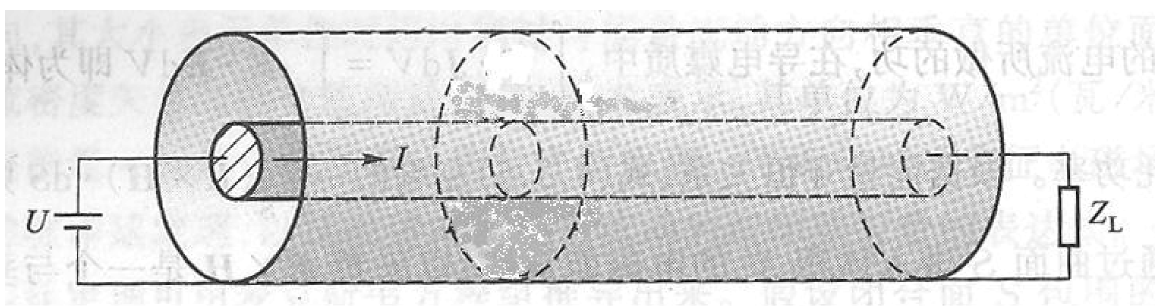
（六、七题任选一题）

六、（13 分）同轴线的内导体半径为 a，外导体半径为 b，其间填充均匀的理想介质。设内外导体间的电压为 U，导体中流过的电流为 I。

（1） 求单位长度的电容 C。

（2） 导体为理想导体时，计算同轴线中传输的功率；

（3） 当导体的电导率为σ，证明流入单位长度内导体内的功率等于其消耗的焦耳热。



解：（1）根据题意得：假设呢外导体的单位长度的带电量为ρ_l和-ρ_l，则

$$\vec{E}(\rho)=\vec{e}_{\rho}\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0\rho}$$

$$U=\int_a^b \vec{E}(\rho)\bullet\vec{e}_{\rho}d\rho=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}\int_a^b\frac{1}{\rho}d\rho=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

$$C_l=\frac{\rho_l}{U}=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln b/a}$$

（2）内外导体间的电场和磁场为：

$$\vec{E}=\vec{e}_{\rho}\frac{U}{\rho\ln(b/a)},(a<\rho<b)$$

$$\vec{H}=e_{\phi}\frac{I}{2\pi\rho},(a<\rho<b)$$

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\frac{UI}{2\pi\rho^2\ln(b/a)}\vec{e}_z$$

穿过任意横截面的功率为：

$$P=\int_s\vec{S}\bullet\vec{e}_z ds=\int_a^b\frac{UI}{2\pi\rho^2\ln(b/a)}2\pi\rho d\rho=UI$$

（3）当导体电导率为δ 有限时时，导体内部沿电流方向的电场为：

$$\vec{E}_{in}=\frac{\vec{J}}{\sigma}=\vec{e}_Z\frac{I}{\pi a^2\sigma}$$

根据边界条件，在内导体表面外侧的电场为：

$$\vec{E}_{out}\Big|_{\rho=a}=\vec{e}_{\rho}\frac{U}{a\ln(b/a)}+\vec{e}_z\frac{I}{\pi a^2\sigma}$$

$$\vec{H}_{out}\Big|_{\rho=a}=\vec{e}_{\phi}\frac{I}{2\pi a}$$

$$\vec{S}_{out}\Big|_{\rho=a}=\vec{E}_{out}\times\vec{H}_{out}\Big|_{\rho=a}=-\vec{e}_{\rho}\frac{I^2}{2\pi^2a^3\sigma}+\vec{e}_z\frac{UI}{2\pi a^2\ln(b/a)}$$

单位长度内导体的功率为：

$$P=\int_s\vec{S}_{out}\Big|_{\rho=a}\bullet(-\vec{e}_{\rho})dS=\int_0^1\frac{I^2}{2\pi^2a^3\sigma}2\pi a dz=\frac{I^2}{\pi a^2\sigma}=RI^2$$

$$R=\frac{1}{\pi a^2\sigma}$$

由此可见，流入单位长度导体内的功率等于其消耗的焦耳热。

七、（1）传输线有几种工作状态？

（2）平行双线传输线的线间距 D=8cm，导线的直径 d=1cm，周围是空气，试计算分布电感、分布电容和特征阻抗。

解：（1）传输线有三种传输状态。即行波状态、驻波状态和混合波状态。

（2）分布电容为;

$$E(x)=e_x\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{x}+\frac{1}{D-x})$$

两导线之间电位差：

$$U=\int_1^2 \vec{E}\bullet d\vec{l}=\int_a^{D-a}E(x)\bullet e_x dx$$

$$=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\int_a^{D-a}(\frac{1}{x}+\frac{1}{D-x})dx=\frac{\rho_l}{\pi\varepsilon_0}\ln(\frac{D-a}{a})$$

平行双线传输线单位长度的电容：

$$C_1=\frac{\rho_l}{U}=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln[(D-a)/a]}\approx\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln(D/a)}$$

$$C=\frac{\varepsilon\pi}{\ln(\frac{2D}{d})}=\frac{\varepsilon_0\pi}{\ln 16}=10(pF/m)$$

分布电感：

$$B(x)=\frac{\mu_0 I}{2\pi}(\frac{1}{x}+\frac{1}{D-x})e_y$$

穿过两导线轴线方向单位长度面积的外磁链

$$\Psi_0=\int_a^{D-a}\vec{B}(x)\bullet \vec{e}_y dx=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_a^{D-a}(\frac{1}{x}+\frac{1}{D-x})dx$$

$$=\frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{D-a}{a}$$

外自感：$L_0=\frac{\Psi_0}{I}=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{D-a}{a}\approx\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{D}{a}$

内自感：$L_i=2\times\frac{\mu_0}{8\pi}=\frac{\mu_0}{4\pi}$

总自感：$L=L_i+L_0=\frac{\mu_0}{4\pi}+\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{D}{a}$

$$L=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{2D}{d}=\frac{\mu_0}{\pi}\ln 16=1.11(uH/m)$$

阻抗为：

$$Z=\sqrt{\frac{L}{C}}=\sqrt{\frac{1.11\times 10^{-6}}{10^{-11}}}=333(\Omega)$$

八、（10 分）讨论电磁波在无限空间与理想导体构成的矩形波导中传播的各自特点。

设矩形波导尺寸为 a b，若传输 TE_{10} 波，截止频率及波导波长。

解：矩形波导中只能传播 TE 和 TM 波，而无限空间还可以传播 TEM 波。

对于 TE_{10} 来说，截止频率为：

$$f_c=\frac{1}{2\pi\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{m\pi}{a})^2}=\frac{1}{2\pi\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{(\frac{\pi}{a})^2}=\frac{1}{2a\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

波导波长为：

$$\lambda_g=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{2\pi}{k\sqrt{1-(\frac{f_c}{f})^2}}=\frac{2\pi}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{1-(\frac{f_c}{f})^2}}$$

九、（10 分）

（1）简述偶极子天线辐射远区场特性。

解：远区场是辐射场，电磁波沿径向辐射；是横电磁波；是非均匀平面波；具有方向性。

（2）一个对称天线，写出归一化半波天线方向性函数。

解：$F(\theta,\phi)\quad \dfrac{\cos(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta}$

（3）什么是天线阵的方向图相乘原理？

解：由于二元矩阵的方向性函数等于阵因子和元因子的乘积，这一原理对 N 元矩阵也成立，即为方向图相乘原理。

基本物理公式和常数：

真空磁导率和介电常数及光速，本征阻抗，

$\mu_0=4\pi\times10^{-7}H/m$，　　$\varepsilon_0=\dfrac{1}{4\pi\times9\times10^9}F/m$　　$c=\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=3\times10^8 m/s$

$$\eta_0=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}=120\pi(\Omega)$$