北京工业大学电控学院 2009——2010 学年第 2 学期
《电磁场与电磁波》 课程试卷 A

一、简答题（**30 分**）

1. 写出静电场的电位泊松方程，并给出其两种理想介质分界面的边界条件。

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon};$$

在两种完纯介质分界面上电位满足的边界条件：

$$\varphi_1=\varphi_2$$

$$\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}=-\rho_s$$

2. 讨论均匀平面波在无界空间传播时本征阻抗与波阻抗的区别。
3. 写出均匀平面波在无界良导体中传播时相速的表达式。
4. 写出时谐电磁场条件下亥姆霍兹方程。
5. 写出传输线输入阻抗公式。
6. 证明电场矢量和磁场矢量垂直。

证明：任意的时变场(静态场是时变场的特例)在一定条件下都可以通过Fourier展开为不同频率正弦场的叠加。

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$-j\vec{k}\times\vec{E}=-j\omega\vec{B}$$

$$\vec{k}\times\vec{E}=\omega\vec{B}$$

根据 X 乘定义，可知 $\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 垂直。

$\because$ $\vec{B}$ 与 $\vec{H}$ 垂直

$\therefore$ $\vec{H}$ 也与 $\vec{E}$ 垂直。

7. 写出线性各向同性的电介质、磁介质和导电介质的本构关系式。

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$$

$$\vec{B}=\mu\vec{H}$$

$$\vec{J}=\sigma\vec{E}$$

8. 写出均匀平面波在两介质分界面的发射系数和投射系数表达式。

$$\Gamma=\frac{E_{rm}}{E_{im}}=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}$$

$$\tau=\frac{E_{tm}}{E_{im}}=\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}$$

9.写出对称天线的归一化方向函数。
10.解释 TEM、TE、TM 波的含义。

二、计算题

1. **（10 分）**已知矢量 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x(x^2+axz)+\boldsymbol{e}_y(xy^2+by)+\boldsymbol{e}_z(z-z^2+czx-2xyz)$，试确定常数 a、b、c 使 $\boldsymbol{E}$ 为无源场。

解 由 $\nabla\bullet\boldsymbol{E}=(2x+az)+(2xy+b)+(1-2z+cx-2xy)=0$，得

$$a=2,b=-1,c=-2$$

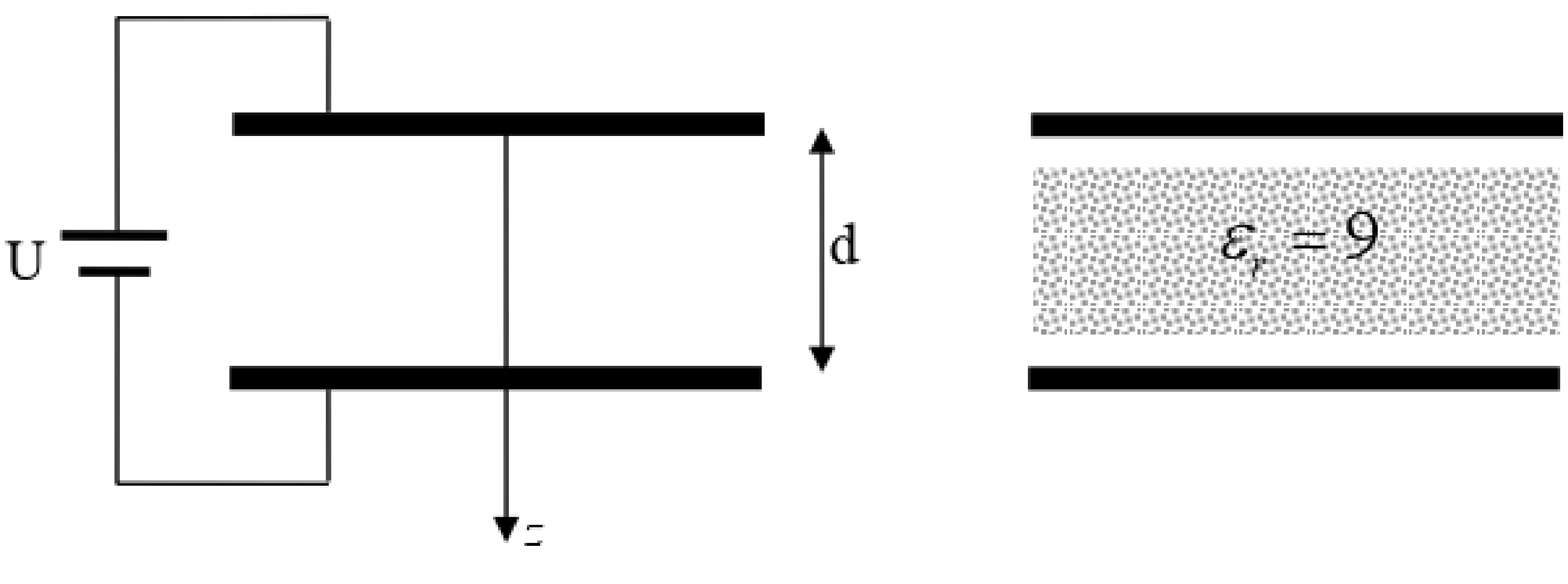
2.已知标量函数 $u=x^2+2y^2+3z^2+3x-2y-6z$。（1）求 ∇u；（2）在哪些点上 ∇u 等于零。

解 （1）$\nabla u=\boldsymbol{e}_x\dfrac{\partial u}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\dfrac{\partial u}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\dfrac{\partial u}{\partial z}=\boldsymbol{e}_x(2x+3)+\boldsymbol{e}_y(4y-2)+\boldsymbol{e}_z(6z-6)$；

（2）由 $\nabla u=\boldsymbol{e}_x(2x+3)+\boldsymbol{e}_y(4y-2)+\boldsymbol{e}_z(6z-6)=0$，得

$x=-3/2,y=1/2,z=1$

3． 两块很大的平行导体板，板间距离为 d，且 d 比极板的长和宽都小得多。两板接上直流电压为 U 的电源充电后又断开电源，然后在板间放入一块均匀介质板，它的相对介电常数为 $\varepsilon_r=9$ ，厚度比 d 略小一点，留下一小空气隙，如图所示。试求放入介质板前后，平行导体板间各处的电场强度。并由此讨论电介质的作用。（20 分）



解：

（1）建立坐标系如图。加入介质板前，因两极板已充电，板间电压为 U，间距 d 远小于平板尺寸，可以认为极板间电场均匀，方向与极板垂直。所以板间电场为

$$\boldsymbol{E}_0 = -\boldsymbol{e}_z \frac{U}{d}$$

设两极板上所带自由电荷面密度分别为 ρ_s 和 $-\rho_s$，根据高斯定理

$$\oint_s \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_s \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_0 \cdot d\boldsymbol{S} = Q = \rho_s \Delta S$$

即

$$D_0 = \varepsilon_0 E_0 \Delta S = \rho_s \Delta S$$

得

$$D_0 = \varepsilon_0 E_0 = \rho_s = \varepsilon_0 \frac{U}{d}$$

（2）加入介质板后，因充电后电源断开，所以极板上的自由电荷面密度保持不变。应用高斯定理，可求得极板间任一点的电位移矢量

$$\boldsymbol{D} = -\boldsymbol{e}_z D = -\boldsymbol{e}_z \rho_s = -\boldsymbol{e}_z \varepsilon_0 \frac{U}{d}$$

根据 $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ 的关系得空气隙中的电场强度为

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon_0} = -\boldsymbol{e}_z \frac{U}{d}$$

电介质中的电场强度

$$\boldsymbol{E}_2 = \frac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon} = -\boldsymbol{e}_z \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = -\boldsymbol{e}_z \frac{1}{9} \cdot \frac{U}{d}$$

可见空气隙中的电场强度与未加介质板前相同，而介质板中的电场强度却只有未加介质板前场强的 1/9。

4.求下列情况下的位移电流密度的大小：

某移动天线发射的电磁波的磁场强度

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{e}_x 0.15 \cos\left(9.36 \times 10^8 t - 3.12 y\right) \quad \text{A/m}；$$

由 $\nabla \times \boldsymbol{H} = \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ 得

$$\boldsymbol{J}_d = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \nabla \times \boldsymbol{H} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{e}_z \frac{\partial H_x}{\partial y} =$$

$$-\boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial y}\left[0.15 \cos\left(9.36 \times 10^8 t - 3.12 y\right)\right] =$$

$$-\boldsymbol{e}_z 0.468 \sin\left(9.36 \times 10^8 t - 3.12 y\right) \quad \text{A/m}^2$$

故

$$\left|\boldsymbol{J}_d\right| = 0.468 \quad \mathrm{A/m^2}$$

5. 无限长线电荷通过点（6，8，0）且平行于 z 轴，线电荷密度为 ρ_l；试求点 $P(x,y,z)$ 处的电场强度 $\boldsymbol{E}$。

解 线电荷沿 z 方向为无限长，故电场分布与 z 无关。设点 P 位于 z=0 平面上，如题 2.9 图所示，线电荷与点 P 的距离矢量为

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{e}_x(x-6) + \boldsymbol{e}_y(y-8)$$

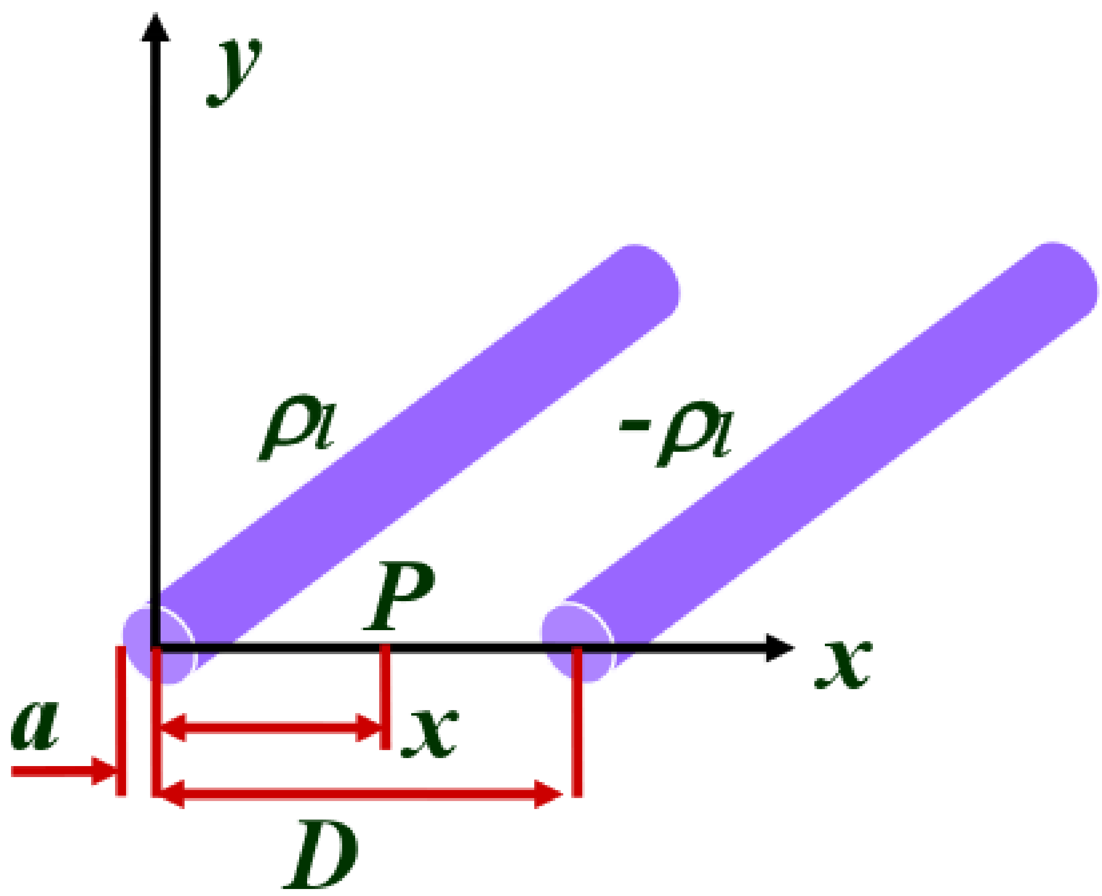
$$|\boldsymbol{R}| = \sqrt{(x-6)^2 + (y-8)^2}$$

$$\boldsymbol{e}_R = \frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|} = \frac{\boldsymbol{e}_x(x-6) + \boldsymbol{e}_y(y-8)}{\sqrt{(x-6)^2 + (y-8)^2}}$$

根据高斯定律得点 P 处的电场强度为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_R \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{R}|} = \frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|} \cdot \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{R}|} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\boldsymbol{e}_x(x-6) + \boldsymbol{e}_y(y-8)}{(x-6)^2 + (y-8)^2}$$

6. 如图所示的平行双线传输线，导线的半径为 a，两导线的轴线相距为 D，且 $D>>a$。试求传输线单位长度的电容。



由于 $D>>a$，近似认为电荷均匀分布在导体表面，且可将导线看成线电荷，则利用高斯定理得 x 轴上的电场分布

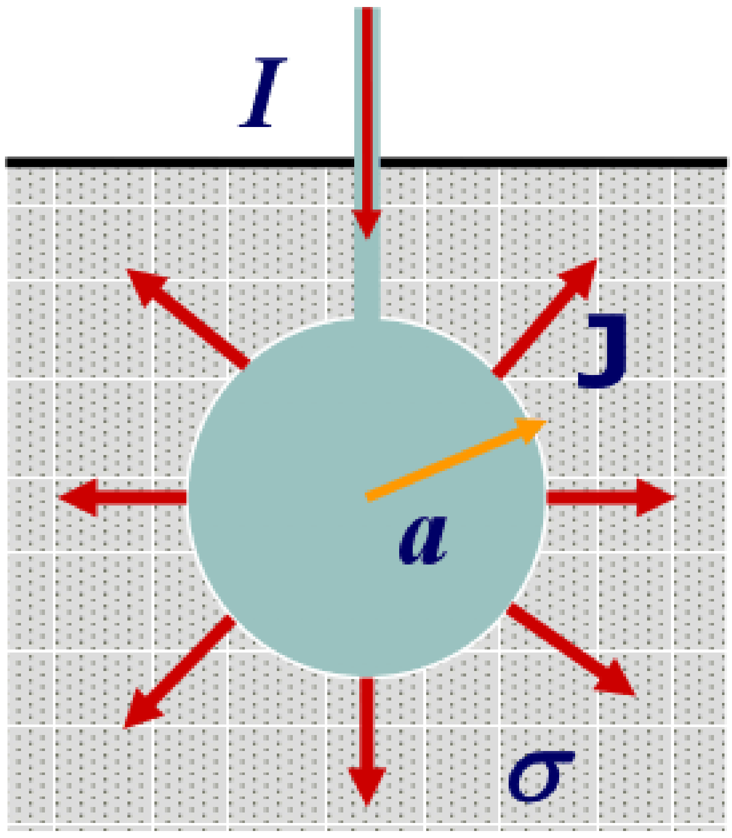
$$\boldsymbol{E}(x) = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x}\right)\boldsymbol{e}_x$$

两导线间的电位差为

$$U = \int_a^{D-a} \boldsymbol{E}(x) \cdot \boldsymbol{e}_x dx = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\int_a^{D-a}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x}\right)dx = \frac{\rho_l}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D-a}{a}$$

两导线间单位长度的电容为 $C_l = \dfrac{\rho_l}{U} = \dfrac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{D-a}{a}} \approx \dfrac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{D}{a}}$

7. 求半径为 a 的金属导体球形接地器的接地电阻。土壤的电导率为σ。



解：导体深埋，不考虑地表对接地电阻的影响

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{e}_r\frac{I}{4\pi r^2}\Rightarrow \boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_r\frac{I}{4\pi\sigma r^2}\Rightarrow U=\int_a^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}=\frac{I}{4\pi\sigma a}$$

$$\Rightarrow R=\frac{U}{I}=\frac{1}{4\pi\sigma a}\Rightarrow G=4\pi\sigma a$$

8.自由空间中的电磁场为

$$\boldsymbol{E}(z,t)=\boldsymbol{e}_x 1000\cos(\omega t-kz)\quad \text{V/m}$$

$$\boldsymbol{H}(z,t)=\boldsymbol{e}_y 2.65\cos(\omega t-kz)\quad \text{A/m}$$

式中 $k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=0.42\,\text{rad/m}$ 。求：

（1）瞬时坡印廷矢量；
（2）平均坡印廷矢量；

解 （1）瞬时坡印廷矢量

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_z 2650\cos^2(\omega t-kz)\ \mathrm{W/m^2}$$

（2）平均坡印廷矢量

$$\boldsymbol{S}_{av}=\boldsymbol{e}_z\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}2650\cos^2(\omega t-kz)\mathrm{d}t=\boldsymbol{e}_z 1325\quad \mathrm{W/m^2}$$

9.在半径为a、电导率为σ的无限长直圆柱导线中，沿轴向通以均匀分布的恒定电流I，且导线表面上有均匀分布的电荷面密度ρ_S。求导线表面外侧的坡印廷矢量$\boldsymbol{S}$。

解：当导线的电导率σ为有限值时，导线内部存在沿电流方向的电场

$$\boldsymbol{E}_i=\frac{\boldsymbol{J}}{\sigma}=\boldsymbol{e}_z\frac{I}{\pi a^2\sigma}$$

根据边界条件，在导线表面上电场的切向分量连续，即$E_{iz}=E_{oz}$。因此，在导线表面外侧的电场的切向分量为

$$E_{oz}\big|_{\rho=a}=\frac{I}{\pi a^2\sigma}$$

又利用高斯定理，容易求得导线表面外侧的电场的法向分量为

$$E_{o\rho}\big|_{\rho=a}=\frac{\rho_S}{\varepsilon_0}$$

故导线表面外侧的电场为

$$\boldsymbol{E}_o\big|_{\rho=a}=\boldsymbol{e}_\rho\frac{\rho_S}{\varepsilon_0}+\boldsymbol{e}_z\frac{I}{\pi a^2\sigma}$$

利用安培环路定理，可求得导线表面外侧的磁场为

$$\boldsymbol{H}_o\big|_{\rho=a}=\boldsymbol{e}_\phi\frac{I}{2\pi a}$$

故导线表面外侧的坡印廷矢量为

$$\boldsymbol{S}_o\big|_{\rho=a}=(\boldsymbol{E}_o\times\boldsymbol{H}_o)\big|_{\rho=a}=-\boldsymbol{e}_\rho\frac{I^2}{2\pi^2a^3\sigma}+\boldsymbol{e}_z\frac{\rho_S I}{2\pi\varepsilon_0 a}\qquad \mathrm{W/m^2}$$

10. 已知土壤相对介电常数εr=10，电导率σ=10-2S/m,磁导率$\mu=\mu 0$=4π×10-7H/m。f=100MHz 的均匀平面波在其中传播时，如其电场为$E(z,t)$=ex0.2e-αzcos(ωt-βz) (V/m)，试计算传播常数、相速、本征阻抗和平均功率密度。

$$\boldsymbol{\alpha}=\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1\right]}=0.592,\quad \boldsymbol{\beta}=\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right]}=6.65$$

$$\gamma=\alpha+j\beta=0.592+j6.65,\ v_p=\frac{\omega}{\beta}=0.94\times10^8,\ \eta_c=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}}=117.5+j10.49$$

$$\bar{S} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[E(z)\times H^*(z)\right] = e_z \frac{E_{xm}^2}{2|\eta_c|}e^{-2\alpha z}\cos\varphi =$$

$$= e_z \frac{0.2^2}{2\times 118}e^{-2\times 0.592z}\cos 5.1^\circ = e_z\, 169e^{-1.184z}$$

11.已知平面波的电场$\vec{E}(z)=\vec{e}_x E_m e^{-jkz}+j\vec{e}_y E_m e^{-jkz}$，*说明它的极化形式。*

12.已知平面波的电场$\vec{E}(z)=\vec{e}_x E_m e^{-jkz}+\vec{e}_y E_m e^{-jkz}$，*试将其分解为两个振幅相等，旋向相反的圆极化波。*

13. 一圆极化波自空气中垂直入射于一介质板上，介质板的本征阻抗为η2.入射波电场为 $\vec{E}(z)=\vec{e}_x E_m e^{-j\beta z}+j\vec{e}_y E_m e^{-j\beta z}$ 。 求反射波与透射波的电场，它们的极化情况如何？

$$\Gamma = \frac{\eta_2-\eta_0}{\eta_2+\eta_0} \qquad \tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_0}$$

$$\overrightarrow{E_m^{-1}} = \Gamma E_m(\overrightarrow{e_x}+\overrightarrow{e_y}j)e^{j\beta z}$$

反射波的电场两个分量的振幅相等，相位与入射波相比无变化，故为右旋极化波

$$\overrightarrow{E_2} = \tau E_m(\overrightarrow{e_x}+\overrightarrow{e_y}j)e^{-j\beta z}$$

透射波沿+z 方向传播的左旋圆极化波

14 设矩形波导中传输 TE10 波，求填充介质（介电常数为ε）时的截止频率及波导波长。

解：截止频率：

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

对于TE_{10}波$m=1, n=0 \therefore f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\varepsilon}}$

波导波长$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\quad} = \frac{\lambda}{\quad}$

15.平行双线传输线的线间距 D=8cm，导线的直径 d=1cm,周围是空气，试计算分布电感和分布电容；

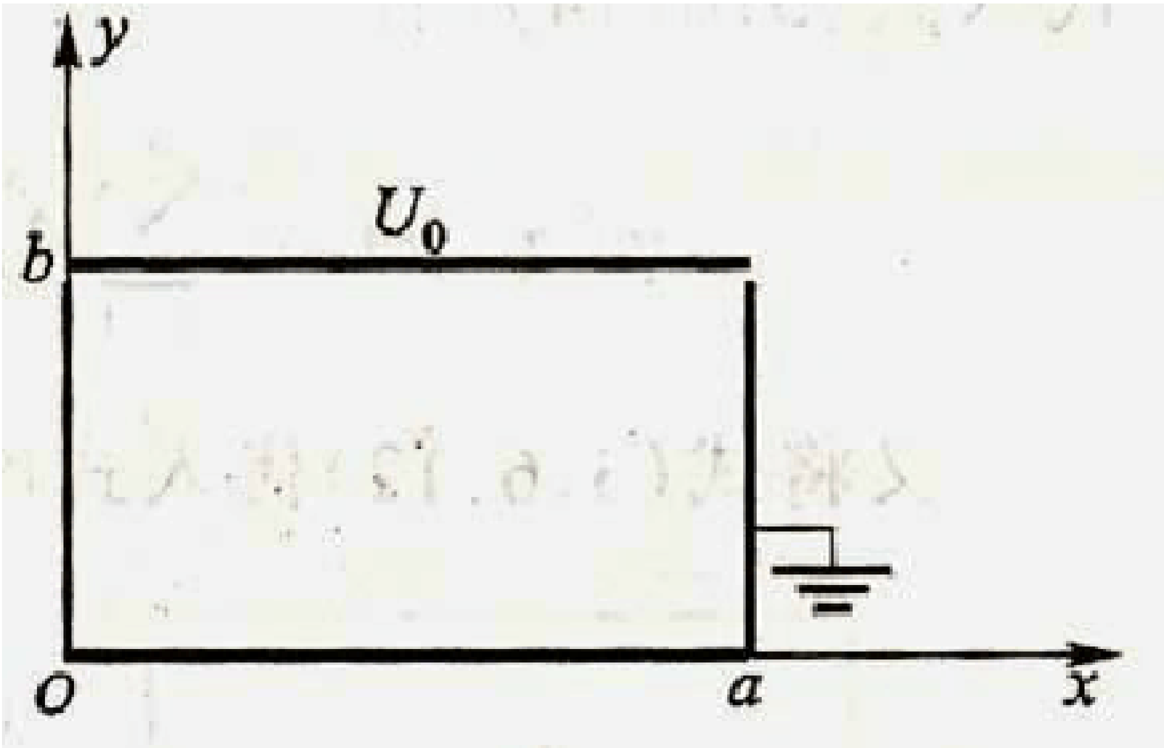
$$\overrightarrow{\mathrm{E}_{\mathrm{x}}}=\overrightarrow{e_x}\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{x}+\frac{1}{D-x})$$

$$U=\int_a^{D-a}\vec{E}\bullet d\vec{l}=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\int_a^{D-a}(\frac{1}{x}+\frac{1}{D-x})dx=\frac{\rho_l}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D-a}{a}$$

$$C_1=\frac{\rho_l}{U}=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln[(D-a)/a]}\approx\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln(D/a)}=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln(2D/d)}F/m$$

$$\mathrm{C}_1=\frac{\varepsilon\pi}{\ln\frac{2\mathrm{D}}{\mathrm{d}}}=\frac{\varepsilon\pi}{\ln 16}=$$

16.横截面为矩形的无限长接地金属导体槽，上部有电位为 U0 的金属盖板；导体槽的侧壁与盖板间有非常小的间隙以保证相互绝缘，求此导体槽内的电位分布



$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

$$\begin{cases}\varphi(0,y)=0 \quad (0\le y<b)\\ \varphi(a,y)=0 \quad (0\le y<b)\\ \varphi(x,0)=0 \quad (0\le x\le a)\\ \varphi(x,b)=U_0 \quad (0\le x\le a)\end{cases}$$

$$f(x)=A\sin(k_x x)$$
$$f(0)=A\sin(k_x 0)=0$$
$$f(a)=A\sin(k_x a)=0$$

满足边界条件

$$k_x x=n\pi,k_x=\frac{n\pi}{a},n=1,2,3.$$

本征值$k_x^2=(\frac{n\pi}{a})^2$

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(\frac{n\pi}{a}x)$,$A_n$为待定的常数

$$k_x^2+k_y^2=0\Rightarrow k_y^2=-k_x^2$$

$$g(y)=B_1\sinh(k_x y)+B_2\cosh(k_x y)$$

$y=0,g(0)=0$只能有$B_2=0\Rightarrow g(y)=B_1\sinh(k_x y)$

通解形式：

$$\varphi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin(\frac{n\pi}{a}x)\sinh(\frac{n\pi}{a}y)$$

$$y=b,\varphi(x,b)=U_0$$

$$U_0=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin(\frac{n\pi}{a}x)\sinh(\frac{n\pi}{a}b)$$

$$\int_0^a \sin(\frac{m\pi}{a}x)\mathrm{U}_0 dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh(\frac{n\pi}{a}b)\int_0^a \sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{a}x)dx$$

$$\int_0^a \sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{a}x)dx = \int_0^a \frac{1}{2}(\cos(\frac{(m-n)\pi}{a}x) - \cos(\frac{(m+n)\pi}{a}x)dx$$

$$= \begin{cases} \int_0^a \frac{1}{2}(1-\cos(\frac{2n\pi}{a}x)dx & m=n \\ \int_0^a \frac{1}{2}(\cos(\frac{(m-n)\pi}{a}x) - \cos(\frac{(m+n)\pi}{a}x)dx & m\neq n \end{cases}$$

$$\int_0^a \cos(\frac{(m-n)\pi}{a}x)dx = \frac{a}{(m-n)\pi}\sin(\frac{(m-n)\pi}{a}x)\bigg|_0^a = 0$$

$$\int_0^a \sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{a}x)dx = \begin{cases} \frac{1}{2}a & m=n \\ 0 & m\neq n \end{cases}$$

$$\int_0^a U_0 \sin(\frac{n\pi}{a}x)dx = \int_0^a C_n \sinh(\frac{n\pi}{a}b)\sin^2(\frac{n\pi}{a}x)dx$$

$$\int_0^a U_0 \sin(\frac{n\pi}{a}x)dx = -\frac{aU_0}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{a}x\bigg|_0^a = \frac{U_0 a}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

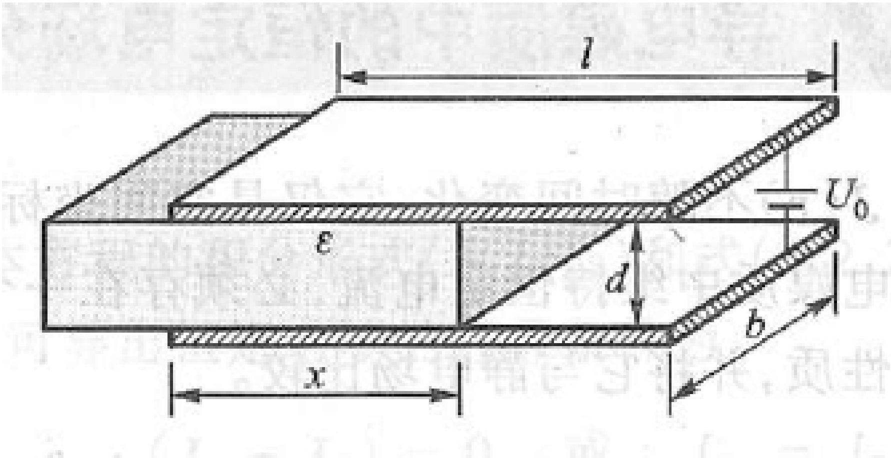
$$\int_0^a C_n \sinh(\frac{n\pi}{a}b)\sin^2(\frac{n\pi}{a}x)dx = \frac{C_n}{2}a\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow C_n = \frac{4U_0}{n\pi\sinh\frac{n\pi b}{a}}\left(n=1.3.5\cdots\cdots\right)$$

把C_n代入φ中得到：

$$\varphi = \sum_{n=1.3.5\ldots}^{\infty}\frac{4U_0}{n\pi}\frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}$$

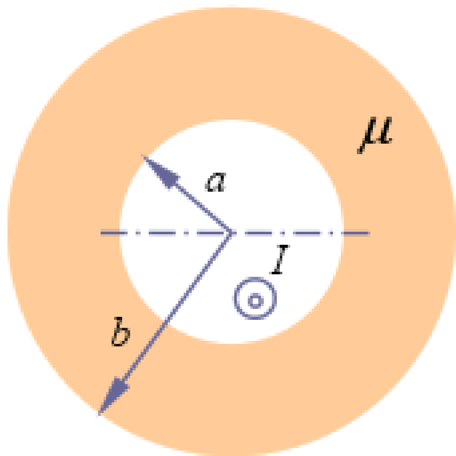
3．（15 分）如图。平行板电容器。结构参数见图示。用一块介电常数为**ε**的介质填充在极板之间（**x<l**）.设极板间外加电压为 **U0**，求介质片所受的静电力。



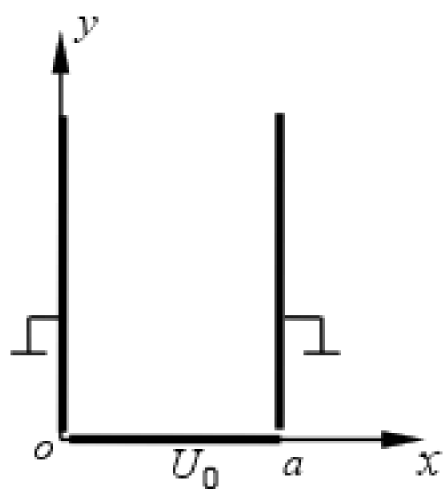
4. **（10 分）**同轴线的内导体是半径为a的圆柱，外导体是半径为b的薄圆柱面，其厚度可忽略不计。内、外导体间填充有磁导率分别为μ两种不同的磁介质，如题图所示。设同轴线中通过的电流为I，试求：

（1）同轴线中单位长度所储存的磁场能量；

（2）单位长度的自感。



5.**（10 分）**如题图所示的导体槽，底面保持电位 U_0，其余两面电位为零，求槽内的电位的解。



6、（15 分）一线性极化的均匀平面波在海水中沿+x 方向传播，已知海水的特性参数为 $\mu_r=1$，$\varepsilon_r=81$，$\gamma=4S/m$。均匀平面波的频率 f＝10KHz, 在 x=0 处，$\vec{E}=\vec{e}_y 10\cos(\omega t-\frac{\pi}{6})V/m$。求：（1）求衰减系数、相位系数、本征阻抗、相速、波长及透入深度，（2）写出$\vec{E}(x,t)$和$\vec{H}(x,t)$的表达，并写出其复数表达式。

基本物理公式和常数：

真空磁导率和介电常数及光速

$\mu_0=4\pi\times10^{-7}H/m$，　$\varepsilon_0=\dfrac{1}{4\pi\times9\times10^9}F/m$　　$c=\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=3\times10^8 m/s$