北京工业大学 2015 ——2016 学年第 1 学期

《普通物理 I-1 》期末考试试卷 A 卷答案

一、(10 分) 已知质点的运动函数为 $\vec{r}=2t\vec{i}+(6-2t^2)\vec{j}$ (SI) ,求 t 时刻该质点的运动速度、加速度、切向加速度及该质点运动的轨道方程。

解：速度：$\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=2\vec{i}-4t\vec{j}$，(SI)

加速度：$\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=-4\vec{j}$，(SI)

切向加速度为加速度在速度方向的分量：$a_t=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|v|}=\dfrac{8t}{\sqrt{1+4t^2}}$ (SI)

或者由 $a_t=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d\sqrt{4+16t^2}}{dt}=\dfrac{1}{2}\dfrac{32t}{\sqrt{4+16t^2}}=\dfrac{8t}{\sqrt{1+4t^2}}$ 亦可得出结果。

轨道方程：$y=6-\dfrac{1}{2}x^2$ (SI)

二、(10 分) 在 t=0 时刻，质量为 m 的质点静止下落，若空气阻力大小 $f=kv$，其中 k 为大于 0 的常量，求质点在任意时刻 t (t>0)的速度及质点下落的终极速率。(取竖直向下为正方向，重力加速度为 g)

解：运动过程中，质量受到重力与空气阻力的作用。根据牛顿第二定律，质点运动的动力学方程为：

$$mg-kv=m\frac{dv}{dt}$$

分离变量并积分得：

$$\int_0^t dt=-\frac{m}{k}\int_0^v\frac{d(mg-kv)}{mg-kv}$$

$$t=-\frac{m}{k}\ln(mg-kv)\Big|_0^v=-\frac{m}{k}\ln\frac{mg-kv}{mg}\quad\rightarrow v=\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$$

t→∞时的速度为终极速率： $v_T=\dfrac{mg}{k}$

此步骤若利用受力平衡求解：$mg=kv\rightarrow v_T=\dfrac{mg}{k}$ 亦可

三、(10 分) 质量为 m 的质点的运动函数为 $\vec{r}=a\cos(\omega t)\vec{i}+b\sin(\omega t)\vec{j}$，其中 a，b，ω皆为常量，试求：

(1) t 时刻物体所受合外力对原点的力矩 $\vec{M}$；

(2) t 时刻物体对原点的角动量 $\vec{L}$.

(3) 该物体的角动量是否随时间变化？为什么？

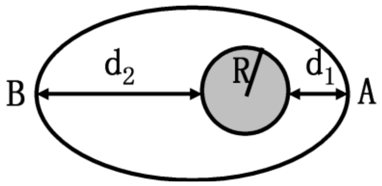
解：(1) $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times m\vec{a}=m\vec{r}\times\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}=0$

(2) $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=m\vec{r}\times\vec{v}=m\vec{r}\times\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

$$=m(a\cos\omega t\vec{i}+b\sin\omega t\vec{j})\times(-a\omega\sin\omega t\vec{i}+b\omega\cos\omega t\vec{j})=mab\omega\vec{k}$$

(3) 角动量不随时间改变，因为合外力矩为 0

四、(10 分) 我国第一颗人造地球卫星的质量 $m=173\,\mathrm{kg}$，近地点 A 距地面距离 $d_1=439\,\mathrm{km}$，远地点 B 距地面的距离 $d_2=2384\,\mathrm{km}$。设地球半径 $R_E=6378\,\mathrm{km}$，已知万有引力常量 $G=6.67\times10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$，地球质量 $\mathrm{M}=5.98\times10^{24}\,\mathrm{kg}$，求：



第四题图

(1) 以∞为势能零点，求近地点和远地点卫星-地球系统的引力势能 E_{PA}, E_{PB}；

(2) 卫星的近地速度 v_A 和远地速度 v_B；

(3) 卫星的掠面速度 v_a 及运动周期 T。(椭圆面积 $S=\dfrac{\pi}{2}(r_1+r_2)\sqrt{r_1r_2}$，π取 3.14)

解：(1) 以∞为势能零点，万有引力势能表达式为：$E_P=-\dfrac{GMm}{r}$

$$E_{PA}=-\frac{GMm}{d_1+R}\qquad E_{PB}=-\frac{GMm}{d_2+R}$$

将各量数值代入，可得：$E_{PA}=-1.01\times10^{10}\,\mathrm{J}$；$E_{PB}=-7.88\times10^{9}\,\mathrm{J}$

注意 km 非国际单位，应化为国际单位 m；不能将地球半径 R 落掉。

(2) 在近地点及远地点卫星的角动量守恒，有：$mv_1r_1=mv_2r_2$

在运动过程中系统机械能守恒，有：$\dfrac{1}{2}mv_1{}^2-\dfrac{GMm}{r_1}=\dfrac{1}{2}mv_2{}^2-\dfrac{GMm}{r_2}$

联立上式可得：$v_1=\sqrt{\dfrac{2G\,M_2 r}{r_1(r_1+r_2)}}$，$v_2=\sqrt{\dfrac{2G\,M_1 r}{r_2(r_1+r_2)}}$

将 $r_1=d_1+R_E=439+6378=6819\,\text{km}$，$r_2=d_2+R_E=2384+6378=8762\,\text{km}$

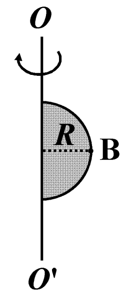
代入上式得：$v_1=8.11\times10^3\,\text{m/s}$，$v_2=6.31\times10^3\,\text{m/s}$

(3) 掠面速度为：$\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{L}{2m}=\dfrac{mv_1r_1}{2m}=\sqrt{\dfrac{1}{2}GM\dfrac{r_1r_2}{r_1+r_2}}$

卫星轨道的面积为：$S=\pi\dfrac{1}{2}(r_1+r_2)\sqrt{r_1r_2}$

$$T=\frac{S}{dS/dt}=\frac{\pi\left(\sqrt{r_1+r_2}\right)^3}{\sqrt{2GM}}=6.84\times10^3\ \text{S}$$

五、**(10 分)**如图，质量为 m、半径为 R 的均匀半圆盘可绕通过直径的光滑固定轴 OO' 转动，设半圆盘从静止开始在恒力矩 M 作用下转动(不考虑重力)，求：**(1)** 半圆盘相对于转轴 OO'的转动惯量 J；**(2)** t 秒后半圆盘边缘上 B 点的切向加速度 a_t 与法向加速度 a_n 的大小。



第五题图

解：（1）$J=\int r^2 dm=\int (r\cos\theta)^2\dfrac{m}{\frac{1}{2}\pi R^2}r\,dr\,d\theta$

$$=\frac{2m}{\pi R^2}\int_0^R r^3 dr\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\, d\theta=\frac{mR^2}{4}$$

（2）根据刚体定轴转动定律，$\because M=J\alpha\quad \alpha=\dfrac{M}{J}=\dfrac{4M}{mR^2}$

∵B 点绕 OO'做半径为 R 的圆周运动，

$$a_t=R\alpha=\frac{4M}{mR},\quad a_n=R\omega^2=R(\alpha t)^2=\frac{16M^2}{m^2R^3}t^2$$

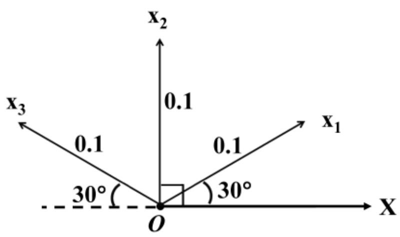
六、**(10 分)** 三个同方向，同频率的简谐运动为：$x_1=0.1\cos(100\pi t+\pi/6)$，$x_2=0.1\cos(100\pi t+\pi/2)$，$x_3=0.1\cos(100\pi t+5\pi/6)$，求：

(1) 利用旋转矢量法求合振动的角频率 ω，振幅 A，初相 φ_0 及振动表达式；

(2) 求合振动由初始位置运动到 $x=\sqrt{2}A/2$ 所需最短时间(A 为振幅)。

解：(1) 旋矢图如右所示，利用矢量合成法则计算， $\omega=100\pi$，$A=0.2m$，$\varphi_0=\pi/2$，

$$\rightarrow x=0.2\cos(100\pi t+\frac{\pi}{2})$$



(2) 从初始位置到 $x=\sqrt{2}A/2$ 位置，旋矢通过的角度为 $5\pi/4$，则所需时间为 $t=\dfrac{5\pi/4}{\omega}=\dfrac{5\pi/4}{100\pi}=\dfrac{1}{80}=0.0125\,\text{s}$

七、(10 分)设入射波的方程式为 $y_1=A\cos2\pi(\dfrac{x}{\lambda}+\dfrac{t}{T})$，在 x=0 处发生反射，反射点为一固定端，设反射时无能量损失，求：

(1) 入射波沿 X 轴正方向传输还是反方向传输，为什么？

(2) 反射点有无半波损失？求反射波的方程式；

(3) 合成的驻波的方程式；

(4) 波腹和波节的位置。

解：(1) 入射波沿 X 轴反方向传输，因为随着坐标 x 越小，波相越滞后（或回答相位中坐标 x 前面符号为负亦可）

（2）因反射点为固定端，故反射波有半波损失。在 x=0 处，入射波引起的振动为 $y_{10}=A\cos\dfrac{2\pi t}{T}$，相应的振动方程为 $y_{20}=A\cos(2\pi\dfrac{t}{T}+\pi)$，反射波沿+x 方向传播，波动方程为 $y_2=A\cos[2\pi(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{\lambda})+\pi]$

(3) 驻波方程式为： $y=y_1+y_2=2A\sin(\dfrac{2\pi x}{\lambda})\cos(\dfrac{2\pi t}{T}+\dfrac{\pi}{2})$

(4) 波腹：令 $\left|\sin\dfrac{2\pi x}{\lambda}\right|=1$，$\rightarrow \dfrac{2\pi x}{\lambda}=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$，$\rightarrow x=\dfrac{(2k+1)\lambda}{4}\ (k=0,1,2,\cdots)$

波节：令 $\left|\sin\dfrac{2\pi x}{\lambda}\right|=0$，$\rightarrow \dfrac{2\pi x}{\lambda}=k\pi$，$\rightarrow x=\dfrac{k\lambda}{2}\ (k=0,1,2,\cdots)$

八、**(10 分) 静止质量为 m_0 的粒子，其固有寿命为实验室测得寿命的 1/n，求：(1)实验室中测量该粒子的运动速度 v; (2) 实验室中测量该粒子的质量 m; (3) 该粒子的总能量 E；(4)该粒子的相对论动能 E_{kr}。**

解：(1) 由 $\tau = \dfrac{\tau_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \dfrac{\tau}{\tau_0} = n \rightarrow v = \dfrac{\sqrt{n^2-1}}{n}c$

(2) $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = nm_0$

(3) $E = mc^2 = nm_0c^2$

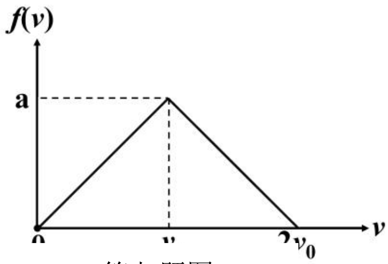
(4) $E_k = mc^2 - m_0c^2 = (n-1)m_0c^2$

九、**（10 分）分子的速率分布函数如图，求：**

(1) 写出分子的速率分布函数，并根据速率分布函数归一化条件求常量 a；

(2) 速率在 $[\frac{3}{2}v_0, 2v_0]$ 区间的分子占总分子数的比例；

(3) 分子的最概然速率 v_p、平均速率 $\bar{v}$ 及方均根速率 $\sqrt{\overline{v^2}}$；



第九题图

解： (1) 速率分布函数：
$$f(v) = \begin{cases} \dfrac{av}{v_0} & (0 \le v \le v_0) \\ \dfrac{a}{v_0}(2v_0 - v) & (v_0 \le v \le 2v_0) \\ 0 & (2v_0 \le v < \infty) \end{cases}$$

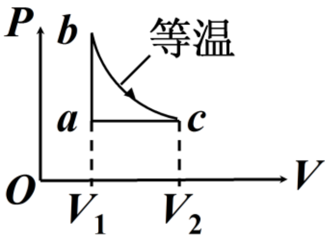
根据归一化条件，曲线下包围面积应为 1，$\frac{1}{2}\cdot 2v_0 \cdot a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{v_0}$

(2) 速率在 $[\frac{3}{2}v_0, 2v_0]$ 区间的分子数比例应为速率分布函数在 $[\frac{3}{2}v_0, 2v_0]$ 区间所包围的面积，$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}v_0\cdot\frac{1}{2}a = \frac{1}{8}$

(3) 由速率分布函数曲线观察可知，最概然速率：$v_p = v_0$

平均速率：$\bar{v} = \int_0^\infty vf(v)\mathrm{d}v = v_0$（由曲线对称性观察也可得到此结果）

方均根速率：$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\int_0^\infty v^2 f(v)\mathrm{d}v} = \sqrt{\frac{7}{6}}\cdot v_0$



第十题图

十、（10 分）常温下 1 摩尔刚性双原子理想气体作如图的正循环，其中 ab 为等体过程，bc 为等温过程，ca 为等压过程，并且 $\frac{V_2}{V_1}=3$。已知理想气体的定体摩尔热容 C_V 满足 $C_V=\frac{iR}{2}$，定压摩尔热容 $C_P=\frac{(i+2)R}{2}$，i 为自由度，R 为普适气体常量，试问：

(1) 该分子的自由度 i 是多少？若平衡态下热力学温度为 T，则一个分子的平均动能 $\bar{\varepsilon}$ 是多少？一摩尔分子的内能 E 是多少？

(2) 判断过程 ab、bc、ca 是吸热还是放热，并求出各过程所吸收或放出的热量。

(3) 求该循环的效率 η

解：(1) i=5；$\bar{\varepsilon}=\frac{5}{2}kT$ (k 为玻尔兹曼常量)；$E=\frac{5}{2}RT$

(2) ab 过程：T↑，E↑，A=0，→Q>0 （吸热）$Q_1=\nu C_V(T_2-T_1)=\frac{5R}{2}(T_b-T_a)$

bc 过程：T 不变，E 不变，A>0，→Q>0（吸热）$Q_2=\nu RT\ln\frac{V_2}{V_1}=RT_b\ln 3$

ca 过程：T↓，E↓，A<0，→Q<0 （放热）$Q_3=\nu C_P(T_2-T_1)=\frac{7R}{2}(T_a-T_c)$

(3) $$\eta=\frac{A}{Q_{吸}}=\frac{Q_1+Q_2+Q_3}{Q_1+Q_2}=\frac{\frac{5R}{2}(T_b-T_a)+RT_b\ln 3+\frac{7R}{2}(T_a-T_c)}{\frac{5R}{2}(T_b-T_a)+RT_b\ln 3}$$

$$=\frac{T_c\ln 3+(T_a-T_c)}{\frac{5}{2}(T_c-T_a)+T_c\ln 3}=\frac{\ln 3+(\frac{T_a}{T_c}-1)}{\frac{5}{2}(1-\frac{T_a}{T_c})+\ln 3}$$

根据过程 ca 可得：$\frac{T_a}{T_c}=\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{3}\rightarrow\eta\approx 15.5\%$