5

# 北京工业大学 2015-2016 学年第一学期期末

## 数理统计与随机过程(研) 课程试卷

学号______________ 姓名______________ 成绩___________

**注意**：试卷共七道大题，请写明详细解题过程。数据结果保留 3 位小数。

考试方式：半开卷，考试时**只允许看教材**《概率论与数理统计》 浙江大学 盛骤等编第三版（或第四版）高等教育出版社，不能携带和查阅任何其他书籍、纸张、资料等。考试时**允许使用计算器**。

考试时间 120 分钟。考试日期：2016 年 1 月 4 日

一、（10 分）一灯泡使用寿命 $X$ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，现从中任取 25 只，测得寿命（单位：小时）平均值和样本方差分别为 $\overline{X}=153, S^2=64$。取显著性水平为 $\alpha$=0.01，

（1）可否认为 $\mu=150$？

（2）可否认为 $\sigma^2\geq 60$？

解：$\overline{X}=153$　$S^2=64$　$n=25$　$\alpha=0.01$

(1) $H_0: \mu=150$，$H_1: \mu\neq 150$

拒绝域为 ~~$|t|\geq$~~

$|t|\geq t_{\alpha/2}(n-1)$

$|t|=\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|$

$=\left|\dfrac{153-150}{8/5}\right|$

$=1$

$t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.005}(24)=2.7969$

$|t|<t_{\alpha/2}(n-1)$

不在拒绝域内，接受 $H_0$

(2) $H_0: \sigma^2\geq 60$　$H_1: \sigma^2<60$

拒绝域为

$\chi^2\geq\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ 或 $\chi^2\leq\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$

$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

$=\dfrac{24\times 64}{60}$

$=25.6$

$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.005}(24)=45.558$

$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.995}(24)=9.886$

$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)<\chi^2<\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$

不在拒绝域内，接受原假设

二、（15 分）观察某地区每日交通情况，100 天的纪录如下：

| 事故数 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ≥6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 天数 | 35 | 40 | 19 | 3 | 2 | 1 | 0 |

初步推测每日发生的事故数服从 Poisson 分布，试用 $\chi^2$ 检验法检验之（$\alpha = 0.05$）.

解

$e^{-1} = 0.3679$

$n = 100$

要检验的问题为

$H_0$: 总体X服从泊松分布

$P\{X=i\} = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$，$i = 0, 1, 2 \cdots$

由最大似然估计法得 $\lambda = \bar{X} = \frac{\sum i f_i}{n} = \frac{40+38+9+8+5}{100} = 1$

$p_i = P\{X=i\} = \frac{e^{-1}}{i!}$

$p_0 = \frac{e^{-1}}{0!} = 0.3679$

$p_1 = \frac{e^{-1}}{1!} = 0.3679$

$p_2 = P\{X=2\} = \frac{e^{-1}}{2!} = 0.1839$

$p_3 = P\{X=3\} = \frac{e^{-1}}{3!} = 0.06132$

$p_4 = P\{X=4\} = \frac{e^{-1}}{4!} = 0.01533$

$p_5 = P\{X=5\} = \frac{e^{-1}}{5!} = 0.00307$

$p_6 = P\{X \geq 6\} = 1 - \sum_{i=0}^{5} p_i = 0.00058$

$\chi^2$拟合检验计算表

| $A_i$ | $f_i$ | $p_i$ | $np_i$ | $f_i^2/np_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_0$ | 35 | 0.3679 | 36.79 | 33.297 |
| $A_1$ | 40 | 0.3679 | 36.79 | 43.4901 |
| $A_2$ | 19 | 0.1839 | 18.39 | 19.6302 |
| $A_3$ | 3 | 0.06132 | 6.132 | |
| $A_4$ | 2 (6) | 0.01533 | 1.533 (8.03) | 4.4832 |
| $A_5$ | 1 | 0.00307 | 0.307 | |
| $A_6$ | 0 | 0.00058 | 0.058 | |

$\sum = 100.9005$

并组后 $k = 4$，因在计算中估计了一个参数$\lambda$，故 $r = 1$

$\chi^2$的自由度为 $k - r - 1 = 2$

$\therefore \chi^2_\alpha(k-r-1) = \chi^2_{0.05}(2) = 5.992$.

$\chi^2 = 100.9005 - 100 = 0.9005 < 5.992$.

不在拒绝域内，接受$H_0$

三、（15 分）假定一保险公司希望确定居民住宅火灾造成的损失数额与该住户到最近的消防站的距离之间的相关关系，以便准确地定出保险金额。下面列出了 8 起火灾事故的损失及火灾发生地与最近的消防站的距离。

| 距消防站的距离 x（km） | 3.4 | 1.8 | 2.1 | 2.6 | 4.6 | 2.3 | 3.1 | 5.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 火灾损失 Y（千元） | 26.2 | 17.8 | 24.0 | 19.6 | 31.3 | 23.1 | 27.5 | 36.0 |

(1) 求 Y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$；

(2) 对回归方程进行显著性检验（取 $\alpha=0.05$）；

(3) 求 $b$ 的置信水平为 0.95 的置信区间。

解. $n=8$

| $x$ | $y$ | $x^2$ | $y^2$ | $xy$ |
|---|---|---|---|---|
| 3.4 | 26.2 | 11.56 | 686.44 | 89.08 |
| 1.8 | 17.8 | 3.24 | 316.84 | 32.04 |
| 2.1 | 24.0 | 4.41 | 576 | 50.4 |
| 2.6 | 19.6 | 6.76 | 384.16 | 50.96 |
| 4.6 | 31.3 | 21.16 | 979.69 | 143.98 |
| 2.3 | 23.1 | 5.29 | 533.61 | 53.13 |
| 3.1 | 27.5 | 9.61 | 756.25 | 85.25 |
| 5.5 | 36.0 | 30.25 | 1296 | 198 |
| 25.4 | 205.5 | 92.28 | 5528.99 | 702.84 |

(1) $S_{xx}=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$

$=92.28-\frac{1}{8}\times(25.4)^2$

$=11.635$

$S_{yy}=\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2$

$=5528.99-\frac{1}{8}\times(205.5)^2$

$=250.20875$

$S_{xy}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)$

$=702.84-\frac{1}{8}\times25.4\times205.5$

$=50.3775$

$\hat{b}=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}=\frac{50.3775}{11.635}=4.3298$

$\hat{a}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\hat{b}$

$=\frac{1}{8}\times205.5-\frac{1}{8}\times25.4\times4.3298$

$=11.9404$

∴ Y关于x的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$　$\hat{y}=11.9404+4.3298x$

(2) 对回归方程~~进行显著性检验~~ ~~即需检验~~假设

$H_0: b=0$

$H_1: b\neq0$

$Q_e=S_{yy}-\hat{b}S_{xy}$

$=250.20875-4.3298\times50.3775$

$=32.0843$

$\hat{\sigma}^2=\frac{Q_e}{n-2}=\frac{32.0843}{8-2}=5.3474$

$\hat{\sigma}=2.3124$　$t_{\alpha/2}(n-2)=t_{0.025}(6)=2.4469$

$H_0$的拒绝域为

$|t|=\frac{|\hat{b}|}{\hat{\sigma}}\sqrt{S_{xx}}$

$=\frac{4.3298}{2.3124}\times\sqrt{11.635}$

$=6.3869>2.4469$

拒绝$H_0$，回归效果显著

~~0.05~~ 0.025

(3) b的置信水平为0.95的置信区间

$\left(\hat{b}\pm t_{\alpha/2}(n-2)\times\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{S_{xx}}}\right)$

$\left(4.3298\pm2.4469\times\frac{2.3124}{\sqrt{11.635}}\right)$

$(4.3298\pm1.6588)$

$(2.671, 5.9886)$

四、（15 分）某粮食加工厂试验三种储藏方法对粮食含水率有无显著影响。现取一批粮食分成若干份，分别用三种不同方法储藏，过一段时间后测得和含水率如下：

| 储藏方法 | 含水率数据 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7.3 | 8.3 | 7.6 | 8.4 | 8.3 |
| 2 | 5.4 | 7.4 | 7.1 | 6.8 | 5.3 |
| 3 | 7.9 | 9.5 | 10.0 | 9.8 | 8.4 |

（1） 假定各种方法储藏粮食的含水率服从正态分布，且方差相等，试在 $\alpha = 0.05$ 水平下检验着三种方法对含水率有无显著影响；

（2） 如果有显著影响，求均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 95%的置信区间。

解：(1) 分别假设三种方法含水率为 $\mu_1\ \mu_2\ \mu_3$

则检验问题为 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

$H_1: \mu_1\ \mu_2\ \mu_3$ 不全相等

$s = 3$, $n_1 = n_2 = n_3 = 5$, $n = 15$

~~令~~ $T_{\cdot 1} = 7.3+8.3+7.6+8.4+8.3 = 39.9$

$T_{\cdot 2} = 5.4+7.4+7.1+6.8+5.3 = 32$

$T_{\cdot 3} = 7.9+9.5+10.0+9.8+8.4 = 45.6$

$S_T = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{5} X_{ij}^2 - \frac{T_{\cdot\cdot}^2}{15}$

$= 947.31 - \frac{13806.25}{15}$

$= 26.893$

$S_A = \sum_{j=1}^{3} \frac{T_{\cdot j}^2}{n_j} - \frac{T_{\cdot\cdot}^2}{n}$

$= \frac{1}{5}(39.9^2 + 32^2 + 45.6^2) - \frac{13806.25}{15}$

~~=27.4953~~

$= 18.6573$

$S_E = S_T - S_A = 8.2357$

$S_T, S_A, S_E$ 的自由度依次为 $n-1 = 14$, $s-1 = 2$, $n-s = 12$

得方差分析表： $\bar{S}_A = \frac{S_A}{s-1}$ $\bar{S}_E = \frac{S_E}{n-s}$

| 方差来源 | 平方和 | 自由度 | 均方 | F比 |
|---|---|---|---|---|
| 因素 | 18.6573 | 2 | 9.3287 | 13.5927 |
| 误差 | 8.2357 | 12 | 0.6863 | |
| 总和 | 26.893 | 14 | | |

拒绝域 ~~F=13.5927~~ $F = \frac{S_A/(s-1)}{S_E/(n-s)} = 13.5927 > 3.89$

$F_\alpha(s-1, n-s) = F_{0.05}(2, 12) = 3.89$ ∴ 拒绝 $H_0$ 有显著差异

(2) $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间

$\left(\bar{X}_{\cdot 1} - \bar{X}_{\cdot 2} \pm t_{\alpha/2}(n-s)\sqrt{\bar{S}_E\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}\right)$

$\left(\frac{39.9-32}{5} \pm t_{0.025}(12)\sqrt{0.6863\times\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)}\right)$

$(1.58 \pm 2.1788 \times 0.5239)$

$(1.58 \pm 1.1415)$

$(0.4385, 2.7215)$

五、（15 分）设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度为 $\lambda$ 的 Poisson 过程，对任意的 $t > s > 0$ 及整数 m 和 n, 试求

(1) $P\{N(s)=m, N(t)=m+n\}$；

(2) $E[N(s)N(t)]$；

(3) $D[N(t)-N(s)]$.

$$P_k(t_0,t) = P\{N(t_0,t)=k\} = \frac{[\lambda(t-t_0)]^k}{k!} e^{-\lambda(t-t_0)}$$

解

(1) $P\{N(s)=m, N(t)=m+n\}$

$= P\{N(s)=m, N(t)-N(s)=n\}$

$= P\{N(s)=m\} P\{N(t)-N(s)=n\}$

$= \frac{(\lambda s)^m}{m!} e^{-\lambda s} \cdot \frac{\lambda(t-s)^n}{n!} e^{-\lambda(t-s)}$

(2) $E[N(s)N(t)]$ 假设 $s<t$

$= E(N(s)[N(t)-N(s)+N(s)])$

$= E(N(s)[N(t)-N(s)]) + E([N(s)]^2)$

$= E[N(s)]\,E[N(t)-N(s)] + D[N(s)] + (E[N(s)])^2$

$= \lambda s \cdot \lambda(t-s) + \lambda s + \lambda^2 s^2$

$= \lambda^2 st + \lambda s$

当 $t<s$ 时

$E[N(s)N(t)] = \lambda^2 st + \lambda t$

$\therefore E[N(s)N(t)] = \lambda^2 st + \lambda \min(s,t)$

(3) $\cancel{D[N(t)-N(s)]}$

$\cancel{= E([N(t)-N(s)]^2) - (E[N(t)-N(s)])^2}$

$\cancel{= E[N^2(t) - 2N(t)N(s) + N^2(s)] - E^2[N(t)-N(s)]}$

$\cancel{= E}$

$\cancel{D[N(t)-N(s)]}$

$\cancel{= E[N(t)-N(s)]^2 - E^2[N(t)-N(s)]}$

$= E[\cancel{N^2(t) - 2N(t)N(s) + N^2(s)}] - \cancel{E^2[N(t)-N(s)]}$

$D[N(t)-N(s)]$

$= D[N(t-s)-N(s-s)]$

$= D[N(t-s)] = \lambda(t-s)$

六、（15分）设$\{X_n, n\geq 0\}$为时齐次马氏链，状态空间$I=\{1,2,3\}$，一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

初始分布 $P\{X_0=1\}=1/2,\ P\{X_0=2\}=1/3,\ P\{X_0=3\}=1/6$

(1)求P（$X_0=1, X_2=3$）的值；

(2)求P（$X_2=2$）的值；

(3)判断$\{X_n, n\geq 0\}$是否为遍历的，请说明理由；若是遍历的，求其平稳分布。

解

二步转移概率矩阵

$$P(2)=P^2=\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{6}{16} \\ 2 & \frac{4}{16} & \frac{6}{16} & \frac{6}{16} \\ 3 & \frac{2}{16} & \frac{4}{16} & \frac{10}{16} \end{array}$$

(1) $P(X_0=1, X_2=3)$

$= P(X_2=3)\ P(X_0=1 \mid X_2=3)$

$\frac{2}{16}$

$$\boxed{\begin{aligned} &P(X_0=1, X_2=3) \\ &= P(X_0=1)\ P(X_2=3 \mid X_0=1) \\ &= \frac{3}{16} \quad P_{13}(2) \end{aligned}}$$

$\frac{6}{16}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$

$P(X_2=3)$

$\cancel{= P\{X_0=1 \mid X_2=3\}}$

$= P(X_0=1, X_2=3) + P(X_0=2, X_2=3) + P(X_0=3, X_2=3)$

$= P(X_0=1)\ P(X_2=3 \mid X_0=1) + P(X_0=2)\ P(X_2=3 \mid X_0=2) + P(X_0=3)\ P(X_2=3 \mid X_0=3)$

$= \frac{1}{2}\times\frac{6}{16} + \frac{1}{3}\times\frac{6}{16} + \frac{1}{6}\times\frac{10}{16}$

$= \frac{5}{12}$

~~(3)~~ $P(X_0=1, X_2=3)$

$= \frac{5}{12}\times\frac{2}{16}$

$= \frac{5}{96}$

(2) $P(X_2=2)$

$= P(X_0=1)P(X_2=2 \mid X_0=1) + P(X_0=2)P(X_2=2 \mid X_0=2)$

$\quad + P(X_0=3)P(X_2=2 \mid X_0=3)$

$= \frac{1}{2}\times\frac{5}{16} + \frac{1}{3}\times\frac{6}{16} + \frac{1}{6}\times\frac{4}{16}$

$= \cancel{\frac{11}{32}}\ \frac{31}{96}$

(3) P(2) 皆正元，~~遍历~~

设平稳分布为 ~~$\pi$~~ $(\pi_1, \pi_2, \pi_3)$

$\therefore \begin{cases} \pi = \pi P \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 \\ \pi_2 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_3 \\ \pi_3 = \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{3}{4}\pi_3 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{5} \\ \pi_2 = \frac{3}{10} \\ \pi_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\therefore$ 平稳分布 $\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{1}{2}\right)$

七、（15 分）设 随机序列$\{X(t)=\sin(2\pi tX),t\in T\}$
（0，1）上的均匀分布，证明此随机序列为宽平稳序列。

证明

概率密度 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$E[X(t)]$

$=E[\sin(2\pi tX)]$

$=\int_0^1 \sin 2\pi tX\cdot\frac{1}{2}dx$

$=-\frac{1}{4\pi t}\cos 2\pi tX\Big|_0^1$

$=0$

均值必为常数

~~$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]$~~

~~$=\int_0^1 \sin 2\pi t\cdot t\ \sin 2\pi t s$~~

$R_X(m,n)=E[X(m)X(n)]$

$=E[\sin 2\pi tm\cdot\sin 2\pi tn]$

$=\int_0^1 \sin 2\pi Xm\cdot\sin 2\pi Xn\cdot\frac{1}{2}dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^1 -\frac{1}{2}[\cos x(m+n)-\cos x(m-n)]$

$=-\frac{1}{4}\int_0^1[\cos(m+n)x-\cos(m-n)x]dx$

$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{m+n}\int_0^1\cos(m+n)x\,d(m+n)x+\frac{1}{4}\frac{1}{m-n}\int_0^1\cos$

$=\frac{1}{-4(m+n)}\sin(m+n)x\Big|_0^1+\frac{1}{4\pi(m-n)}\sin(m-n)x\Big|_0^1$

$=0.$