# 北京工业大学 2012-2013 学年第一学期期末

## 数理统计与随机过程(研) 课程试卷

学号______________ 姓名______________ 成绩____________

**注意**：试卷共七道大题，请写明详细解题过程。数据结果保留 3 位小数。

**考试方式**：半开卷，考试时**只允许看教材**《概率论与数理统计》 浙江大学 盛骤等编第三版（或第四版）高等教育出版社，不能携带和查阅任何其他书籍、纸张、资料等。考试时**允许使用计算器**。

考试时间 120 分钟。考试日期：2013 年 1 月日

一、(10 分) 欲对某班《数理统计与随机过程》的期末考试成绩作分析。假设这门课成绩 $X$ （单位：分）服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$。若班级平均成绩在 75 分以上则认为该班成绩良好。现从该班中随机抽取 9 $n=9$ 名同学，得到他们成绩的平均分为 78.44，标准差为 11.40。请根据以上结果回答如下问题：
$\bar{x}=78.44$. $S=11.40$.

（1）取显著性水平 $\alpha$=0.05，分别给出下述两个问题的检验结果：

检验问题 I “$H_0$: $\mu \le 75$，$H_1$: $\mu > 75$”

检验问题 II “$H_0$: $\mu \ge 75$，$H_1$: $\mu < 75$”

（2）对以上结论你如何解释？

解：（1）由书中结论知，检验问题 I 的拒绝域为

$$\frac{\bar{X}-75}{S/\sqrt{n}} \ge t_\alpha(n-1)$$

检验问题 II 的拒绝域为

$$\frac{\bar{X}-75}{S/\sqrt{n}} \le -t_\alpha(n-1)$$

而由题设知 $\bar{X}=78.44$，$S=10.4$，$n=9$，故 $\dfrac{\bar{X}-75}{S/\sqrt{n}}=\dfrac{78.44-75}{11.4/3}=0.905$

查表得 $t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(8)$=1.8595。

由此易见，两个检验问题的检验结果都是“接受原假设 $H_0$”。

（2）表面上看，这两个结论是对立的。但是，由于考虑到显著性检验只控制了犯第一类错误的概率，因而接受原假设时，犯第二类错误的概率可能很大，故此时的检验结果不是都很可信，因而从这个意义上来说并不矛盾。

二、(15 分) 将酵母细胞的稀释液置于某种计量仪器上，数出每一小格内的酵母细胞数 $X$，共观察了 413 个小方格，结果见下表。试问根据该资料，$X$ 是否服从 Poisson 分布？(显著性水平取 $\alpha=0.05$)

| 方格内细胞数 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 实际方格数 | 103 | 143 | 98 | 42 | 18 | 6 | 2 | 1 |

解：$\hat{\lambda}=\dfrac{0*103+1*143+\cdots+7*1}{413}=1.41889$

<table>
<tr><th>$A_i$</th><th colspan="2">$f_i$</th><th>$\hat{p}_i$</th><th colspan="2">$n\hat{p}_i$</th><th>$f_i^2/n\hat{p}_i$</th></tr>
<tr><td>$A_0$</td><td colspan="2">103</td><td>0.24198</td><td colspan="2">99.939</td><td>106.1548</td></tr>
<tr><td>$A_1$</td><td colspan="2">143</td><td>0.34335</td><td colspan="2">141.802</td><td>144.2081</td></tr>
<tr><td>$A_2$</td><td colspan="2">98</td><td>0.24359</td><td colspan="2">100.601</td><td>95.4663</td></tr>
<tr><td>$A_3$</td><td colspan="2">42</td><td>0.11521</td><td colspan="2">47.58</td><td>37.0744</td></tr>
<tr><td>$A_4$</td><td colspan="2">18</td><td>0.04087</td><td colspan="2">16.878</td><td>19.1966</td></tr>
<tr><td>$A_5$</td><td>6</td><td rowspan="3">9</td><td>0.01160</td><td>4.79</td><td rowspan="3">6.201</td><td rowspan="2">13.0624</td></tr>
<tr><td>$A_6$</td><td>2</td><td>0.00274</td><td>1.133</td></tr>
<tr><td>$A_7$</td><td>1</td><td>0.00067</td><td>0.278</td><td>$\sum=415.1626$</td></tr>
</table>

并组后 $k$=6。而此处 $r=1$, 故$\chi^2$分布自由度为$k-r-1$=4。而

$415.1626-413=2.1626=\chi^2<\chi_4^2(0.05)=9.488$

三、（15 分）某公司在为期 8 个月内的利润表如下：

| 月份 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 利润 | 1.88 | 2.15 | 2.09 | 2.30 | 2.26 | 2.39 | 2.62 | 2.58 |

(1)求该公司月利润对月份的线性回归方程；(2)对回归方程进行显著性检验：（取 $\alpha=0.05$）；(3)解释回归系数的意义；(4) 求第 11 月利润的预测区间（取 $\alpha=0.05$）。(本题计算结果保留两位小数)。

解答：

| x | y | $x^2$ | $y^2$ | xy |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.88 | 1 | 3.5344 | 1.88 |
| 2 | 2.15 | 4 | 4.6225 | 4.30 |
| 3 | 2.09 | 9 | 4.3681 | 6.27 |
| 4 | 2.30 | 16 | 5.29 | 9.20 |
| 5 | 2.26 | 25 | 5.1076 | 11.30 |
| 6 | 2.39 | 36 | 5.7121 | 14.34 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 7 | 2. 62 | 49 | 6. 8644 | 18. 34 |
| 8 | 2. 58 | 64 | 6. 6564 | 20. 64 |
| $\sum$ 36 | 18. 27 | 204 | 42. 1555 | 86. 27 |

$$\text{Sxx}=\sum_{i=1}^{8}x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{8}x_i\right)^2=204-\frac{1}{8}36^2=42$$

$$\text{Sxy}=\sum_{i=1}^{8}x_i y_i-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{8}x_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{8}y_i\right)=86.27-\frac{1}{8}36\times 18.27=4.055$$

$$\hat{b}=\frac{s_{xy}}{s_{xx}}=0.09656$$

$$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=\frac{1}{8}\times 18.27-0.09655\times\frac{1}{8}\times 36=1.8493.$$

$\therefore$(1)得经验回归方程为:$\hat{y}=1.8493+0.09656x$

（2）对回归方程进行检验： $H_0:b=0$

$$\text{Syy}=\sum_{i=1}^{8}y_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{8}y_i\right)^2=42.1555-\frac{1}{8}18.27^2=0.43139$$

$$Q_e=S_{yy}-\hat{b}S_{xy}=0.43139-0.09656\times 4.055=0.03984$$

$$\therefore\ \hat{\sigma}^2=\frac{Q_e}{n-2}=\frac{0.60989}{6}=0.00664;\ \sigma=0.081486$$

$$|t|=\frac{|\hat{b}|}{\hat{\sigma}}\sqrt{S_{xx}}=\frac{0.09656}{0.081486}\sqrt{42}=7.6853$$

$$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)=t_{0.025}(8)=2.306$$

$\because |t|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)\ \therefore$ 拒绝原假设,回归方程很显著。

（3）表明公司月利润逐月增长率为 0. 0965；

（4）

区间预测:$\left(\hat{a}+\hat{b}x_0\pm t_{\alpha/2}(n-2)\sigma\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\overline{x})^2}{S_{xx}}}\right)$

代入数值计算得：[2.620, 3.203].

四、（15 分）某消防队要考察 4 种不同型号冒烟报警器的反应时间（单位：秒）。今将每种型号的报警器随机抽取 5 个安装在同一条烟道中，当烟量均匀时观测报警器的反应时间，得数据如下：

| 报警器型号 | 反应时间 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A 型 | 5.2 | 6.3 | 4.9 | 3.2 | 6.8 |
| B 型 | 7.4 | 8.1 | 5.9 | 6.5 | 4.9 |
| C 型 | 3.9 | 6.4 | 7.9 | 9.2 | 4.1 |
| D 型 | 12.3 | 9.4 | 7.8 | 10.8 | 8.5 |

（1） 各种型号的报警器的反应时间有无显著性差异？（显著性水平 $\alpha=0.05$）

（2） 如果各种型号的报警器的反应时间有显著性差异，求均值差 $\mu_A-\mu_B$ 的置信水平为 95%的置信区间。

解:

(1)在 1 中，s=4，$n_1=n_2=n_3=n_4=5$，$n$=20，列方差分析表如下：

| 来源 | 平方和 | 自由度 | 均方和 | $F$值 |
|---|---|---|---|---|
| 因素 $A$ | 56.29 | 3 | 18.76 | $F$=6.15 |
| 误差 | 48.77 | 16 | 3.05 | |

$F_{0.05}$（3，16）=3.24 ＜ F=6.15，

检验结果拒绝 $H_0$

(2)

$$\overline{X}_1=5.28 \quad \overline{X}_2=6.56 \quad \overline{X}_3=6.30 \quad \overline{X}_4=9.76$$

$$\hat{\mu}_1=5.28 \quad \hat{\mu}_2=6.56 \quad \hat{\mu}_3=6.30 \quad \hat{\mu}_4=9.76$$

则$\sigma^2=\dfrac{S_E}{n-s}=48.77/16=3.105$；

$$t_{0.025}(n-s)=t_{0.025}(16)=2.1199$$

$$t_{0.025}(16)\sqrt{S_E(\frac{1}{n_j}+\frac{1}{n_k})}=2.1199\sqrt{3.105\times\frac{2}{5}}=2.3625$$

，

故置信区间为：

$$5.25-6.56\pm2.3625=-1.28\pm2.3625=(-3.64,\ \ 1.08).$$

五、（15 分）设$\{N(t),t\geq 0\}$是强度为$\lambda=2$的 Poisson 过程，试求

(1) $P\{N(1)<2\}$；

(2) $P\{N(1)=1$ 且 $N(2)=3\}$；

(3) $P\{N(1)\geq 2|N(1)\geq 1\}$.

解：(1) $P(N(1)<2)=\sum_{k=0}^{1}\dfrac{2^k e^{-2}}{k!}=3e^{-2}$

(2)

$$
\begin{aligned}
&P(N(1)=1, N(2)=3) = P(N(1)=1, N(2)-N(1)=2) \\
&= P(N(1)=1)P(N(2)-N(1)=2) \\
&= \frac{2^1 e^{-2}}{1!}\frac{2^2 e^{-2}}{2!} = 4e^{-4}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
P(N(1)\ge 2 | N(1)\ge 1) = \frac{P(N(1)\ge 2, N(1)\ge 1)}{P(N(1)\ge 1)} = \frac{P(N(1)\ge 2)}{P(N(1)\ge 1)}
$$

$$
= \frac{1-P(N(1)<2)}{1-P(N(1)<1)} = \frac{1-\dfrac{2^0 e^{-2}}{0!}-\dfrac{2^1 e^{-2}}{1!}}{1-\dfrac{2^0 e^{-2}}{0!}} = \frac{1-3e^{-2}}{1-e^{-2}}
$$

六、（15分）设$\{X_n, n\ge 0\}$为时齐马氏链，状态空间$I=\{1,2,3\}$，一步转移概率矩阵为

$$
P=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \end{array}
$$

初始分布P（$X_0=1$）=P（$X_0=2$）=0.25。

(1)求P（$X_0=1, X_1=3, X_3=2$, $X_4=3$）的值；

(2)求P（$X_0=3$ ，$X_3=1$| $X_1=1$，$X_2=2$）的值；

(3)判断$\{X_n, n\ge 0\}$是否为遍历的，请说明理由；若是遍历的，求其平稳分布。

解：

$$
P^2=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}
$$

（1）P($X_0=1$，$X_1=3$，$X_3=2$，$X_4=3$,)＝P（$X_0=1$）P($X_1=3|X_0=1$) P($X_3=2|X_1=3$,) P（$X_4=3|X_3=2$)

=0.25×0.5×0.25×0.5=1/64

（2）P（$X_0=3$ ，$X_3=1$| $X_1=1$，$X_2=2$） = P（$X_0=3$ ，$X_3=1$， $X_1=1$，$X_2=2$）/ P（$X_1=1$，$X_2=2$）

＝P（$X_0=3$）P（$X_1=1|X_0=3$）P（$X_2=2|X_1=1$）P（$X_3=1|X_2=2$）/[ P（$X_1=1$）P（$X_2=2|X_1=1$）]

=0.5×0.5×0.5×0.5÷0.375÷0.5=1/3

（3） $P^2$ 皆正元 ，故遍历。

设平稳分布为（$x_1$，$x_2$, $x_3$），由（$x_1$，$x_2$, $x_3$）P=（$x_1$，$x_2$, $x_3$）及 $x_1+x_2+x_3=1$

可得平稳分布为（1/3，1/3，1/3）。

七、（15 分）设有随机过程 $X(t)=A\cos(\omega t+\Theta)$，式中 $A$ 是服从瑞利分布的随机变量，其概率密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

$\Theta\sim U(0,2\pi)$，且 $\Theta$ 与 $A$ 相互独立，$\omega$ 为常数，证明 $X(t)$ 为平稳过程。
（提示：$X,Y$ 是相互独立随机变量，且 $f(x),g(y)$ 是连续函数，则 $f(X),g(Y)$ 仍然是相互独立的随机变量。）

解：由题设随机变量 $\Theta$ 与 $A$ 相互独立，于是 $\cos(\omega t+\Theta)$ 与 $A$ 也相互独立，又 $\cos(\omega t+\Theta)\cos(\omega s+\Theta)$ 与 $A^2$ 也相互独立，所以，由期望的性质知：

$$E(X(t))=E(A\cos(\omega t+\Theta))=EA\bullet E(\cos(\omega t+\Theta))=0$$

又因为：

$$\int_0^{2\pi}\theta\cos(\omega s+\omega t+2\theta)\,d\theta$$

$$E\cos(\omega t+\Theta)\cos(\omega s+\Theta)$$

$$=E\left[\frac{1}{2}\cos\omega(s-t)+\frac{1}{2}\cos(\omega s+\omega t+2\Theta)\right] \quad \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\theta\, d\sin(\omega s+\omega t+2\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\cos\omega(s-t)+\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\cos[\omega(s+t)+2\Theta]d\Theta \quad \frac{1}{2}\theta\cdot\sin(\omega s+\omega t+2\theta)\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin(\omega s+\omega t+2\theta)\,d\theta$$

$$=0$$

$$=\frac{1}{2}\cos\omega(s-t)$$

及：

$$EA^2=\int_0^\infty\frac{x^3}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}dx=\int_0^\infty(-x^2)d\left(\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}\right)$$

$$=-x^2\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}\Bigg|_0^\infty+\int_0^\infty 2x\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}dx \quad -\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}d(x^2)$$

$$=-2\sigma^2\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}\Bigg|_0^\infty=2\sigma^2 \quad \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx^2$$

$$-2\sigma^2e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\Big|_0^{+\infty}$$

$$(0-1)$$

$$2\sigma^2$$

故得：

$$R_X(t,s)=EA^2[\cos(\omega t+\Theta)\cos(\omega s+\Theta)]$$
$$=EA^2E(\cos(\omega t+\Theta)\cos(\omega s+\Theta))$$
$$=\sigma^2\cos\omega(s-t)$$

所以，$X(t)$ 是平稳过程。