

## 北京工业大学 2015—2016 学年第 2 学期

## 《高等数学 (管) -2》 考试试卷

考试说明： 考试时长：95 分钟 考试方式：闭卷 适用专业：经管学院专业

承诺：

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，承诺在考试过程中自觉遵守有关规定，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

承诺人：\_\_\_\_\_ 学号：\_\_\_\_\_ 班号：\_\_\_\_\_

注：本试卷共二大题，满分 100 分。

得分登记 (由阅卷老师填写)

得分登记 (由阅卷老师填写)

题号	一	二	成绩
分数			

一、填空题 (每小题 3 分，共 30 分)

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dx} = \underline{\frac{1}{2}}$

2.  $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \underline{\frac{1}{2}}$

3. 判定级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$  是否收敛 收敛

4.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$  的收敛半径是  $R=2$

5. 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n}$  的收敛域是  $[4, 6)$

6. 由  $y = x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$  所围成的图形的面积是  $\frac{1}{3}$

7.  $y'' + y' - 2y = 0$  的通解是  $C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$

8.  $\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx = \underline{2\sqrt{2}}$  ( $x > 0$ )

9. 要使  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$  ( $a > 0$ ) 收敛, 则  $a$  的取值范围是  $a > 1$

10.  $[\sin(e^x - y)^2]_y' = \underline{-2(e^x - y) \cos(e^x - y)^2}$

## 二、计算题

1. 计算定积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$  (8 分)

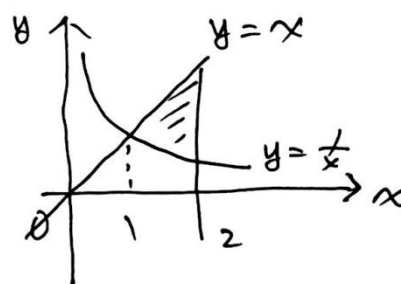
$$\text{设 } I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx, \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 - I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \ln(\sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

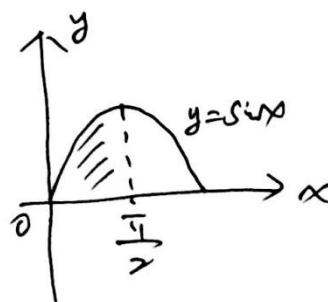
$$\Rightarrow 2I_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I_1 = \frac{\pi}{4}.$$

2. 求由  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = x$ ,  $x = 2$  所围图形的面积 (8 分)

$$S = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^2 - \ln x \Big|_1^2 = \frac{3}{2} - \ln 2.$$

3. 求由  $y = \sin x$ ,  $y = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$  所围图形绕  $x$  轴一周旋转体的体积 (8 分)

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi^2}{4}.$$



4. 设  $z = x \ln(xy)$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  (8 分)

$$z = x \ln(xy)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \ln(xy) + 1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{y}.$$

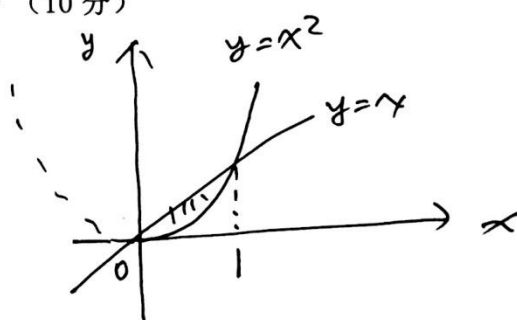
5. 设  $z = f(x+y, xy)$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  (8 分)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' + y f_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{11}'' + x f_{12}'' + f_2' + y f_{21}'' + xy f_{22}''$$

6. 交换积分次序并计算  $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} \frac{\sin x}{x} dx$  (10 分)

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \int_{x^2}^x \frac{\sin x}{x} dy \\ &= \int_0^1 \frac{\sin x}{x} (x - x^2) dx \\ &= \dots = 1 - \sin 1. \end{aligned}$$



7. 求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  的收敛域及和函数并求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  的和 (10 分)

$R=1$ , 收敛域为  $[-1, 1)$ . 设  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ .

$$\Rightarrow S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow S(x) = -\ln(1-x), \quad |x| < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} [-\ln(1-x)] = -\ln 2$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$$

8. 求微分方程  $xy'' = 2y' + x^3 + x$  的通解 (10 分)

$$y'' = \frac{2}{x} y' + x^2 + 1 \quad \text{令 } y' = p \Rightarrow y'' = \frac{dp}{dx} x^{-1}$$

$$\frac{dp}{dx} - \frac{2}{x} p = x^2 + 1 \Rightarrow p = \left( \int (x^2 + 1) e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx + C_1 \right) e^{\int \frac{2}{x} dx}$$

~~$$= \left( \int (x^2 + 1) e^{-\ln x^2} dx + C_1 \right) e^{\ln x^2}$$~~

$$= \left( \int (x^2 + 1) \frac{1}{x^2} dx + C_1 \right) x^2$$

$$= \left( \int \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) dx + C_1 \right) x^2 \quad \text{[crossed out]} \quad \left( x - \frac{1}{x} + C_1 \right) x^2$$

$$= x^3 - x + C_1 x^2 \Rightarrow y' = x^3 - x + C_1 x^2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{C_1}{3} x^3 + C_2$$