

北京工业大学 2021—2022 学年第二学期

《高等代数-2》期末考试试卷 A 卷

考试说明：解答本卷中证明题与计算题时必须给出必要的步骤，否则无分
 承诺：

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，承诺在考试过程中自觉遵守有关规定，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

承诺人：_____ 学号：_____ 班号：_____

.....
 注：本试卷共 四 大题，共 八 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一草稿纸。

卷面成绩汇总表（阅卷教师填写）

题号	一	二	三	四	总成绩
满分	15	21	48	16	
得分					

得分

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

- 下面说法中，正确的个数是（ ）
 - 两个子空间正交，则它们的和一定是直和；
 - 复数域作为实数域上的线性空间是 2 维的；
 - 两个子空间和的维数等于它们各自维数的和；
 - n 维欧氏空间 V 的每一个子空间 W 都存在唯一的正交补.

A) 4; B) 3; C) 2; D) 1.
- 下列关于有限维线性空间 V 中线性变换 T 的说法 **错误** 的是（ ）

A. T 的值域与核都是 T 的不变子空间； B. T 是单射当且仅当 T 是满射；

C. T 在两组不同基下的矩阵相似； D. T 的值域与核的和等于 V .
- 下列哪个条件 **不是** n 阶复矩阵 A 可对角化的充要条件（ ）

A) A 有 n 个线性无关的特征向量； B) A 的初等因子都是一次的；

- C) A 有 n 个不同的特征值; D) A 的不变因子没有重根.

4. 下面这些 λ -矩阵中, 可逆的是 ()

A) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$; D) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

5. 设 A 是 n 维欧氏空间中某组基的度量矩阵, 则以下 **不可能** 是 A 的迹 ($\text{tr}A$, 即 A 的主对角线元素之和) 的是 ()

- A) 1; B) 2; C) 3; D) -1.

得 分

二、填空题 (每空 3 分, 共 21 分)

1. 已知 3 阶 λ -矩阵, $A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) \end{pmatrix}$, 则 $A(\lambda)$ 的不变因子是_____

2. 设 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0)$, $\varepsilon_3 = (0, 0, 1)$ 及 $\eta_1 = (1, 2, 3)$, $\eta_2 = (0, 1, 2)$,

$\eta_3 = (0, 0, 1)$ 是线性空间 \mathbb{R}^3 中两组基, 则从第一组基到第二组基的过渡矩阵为

_____, 向量 $\alpha = (1, 3, 6)$ 在第二组基下的坐标为_____

3. 设 $V = \{A \in P^{n \times n} \mid A \text{ 是对称矩阵}\}$, 则 V 是线性空间且 $\dim V =$ _____

4. 若矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ 与矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 相似, 则 $x =$ _____

5. 若线性变换 \mathcal{A} 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 则 \mathcal{A} 在基 $\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1$ 下的矩阵

为 _____

6. 设欧氏空间 $\mathbb{R}^{2 \times 1}$ 中的内积为 $(\alpha, \beta) = \alpha^T A \beta$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, 则基 $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

在此内积之下的度量矩阵为 _____

得分

三、计算题（共 48 分）

1. （12 分）设 P 是一个数域，记 V_1 是由向量

$$\alpha_1 = (1, 0, 0, 0), \alpha_2 = (0, 1, 0, 0),$$

生成的 P^4 的子空间，即 $V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2)$. 记 V_2 是由向量

$$\beta_1 = (0, 0, 1, 1), \beta_2 = (1, 1, 1, 1).$$

生成的 P^4 的子空间，即 $V_2 = L(\beta_1, \beta_2)$.

- (1) 求 $V_1 \cap V_2$ 的维数和一组基.
- (2) 求 $V_1 + V_2$ 的维数和一组基.

2. (12 分) 已知 $P^{2 \times 2}$ 的线性变换 $\sigma(X) = MX$, $\forall X \in P^{2 \times 2}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

(1) 求 σ 在基 $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵.

(2) 求 σ 的值域的维数和一组基, 以及 σ 的核的维数和一组基.

3、(10 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 为复系数矩阵,

- (1) 求 $\lambda E - A$ 的各阶行列式因子;
- (2) 求 A 的初等因子;
- (3) 求 A 的若尔当标准形.

4. (14 分) 已知实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

的矩阵的特征值之和是 3.

- (1) 求参数 a , 并写出该实二次型的矩阵;
- (2) 用正交线性替换将上述二次型化为标准型.

得 分

四. 证明题 (16 分)

1. (8 分) 设 σ 是 4 维线性空间 V 上的线性变换, 且 σ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

证明: V 的包含 α_1 的 σ 不变子空间只有 V 本身.

2. (8 分) 设 σ 是 n 维欧氏空间 V 的对称变换, 即 σ 是 V 的线性变换, 且对任意 $\alpha, \beta \in V$ 都有 $(\sigma(\alpha), \beta) = (\alpha, \sigma(\beta))$.

证明: σ 的像子空间 $Im\sigma$ 是 σ 的核子空间 $\ker\sigma$ 的正交补子空间.

草 稿 纸

姓名: _____ 学号: _____