线性代数模拟题 1-4 参考答案

附件 7 线代期末复习补充题（一）

得分

一. 填空题（每小题 3 分，共 30 分. 注意：所有题目需给出计算结果；$a=a$ 型答案无效；"或者 a 或者 b" 型答案无效）

范德蒙德 $a(1+3)5(a+1)(1)(a-1)(a-2)=0$.

1. $A=\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ -3 & 1 & 2 & a \\ 9 & 1 & 4 & a^2 \\ -27 & 1 & 8 & a^3 \end{pmatrix}$. 若方程组 $AX=0$ 有非零解，且 $a>1$，则 $a=$ ~~3~~ 2

$|A|=0$. $-3, 1, 2$.

注意求伴随矩阵 不乘 a_{ij}. $(-1)^{i+j}$.

2. A^* 是 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵，$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，则 $\beta^T A^* \beta=$ 81

A^{-1} 不可逆 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^*$. $|A|\neq 0$. 用法上应注意什么?

伴随矩阵 A^* 的计算方法

3. 若 A 是 3×5 型实矩阵，且齐次线性方程组 $A^T X=0$ 只有零解，则 $AX=0$ 的基础解系中含有解向量的个数是 2.

同定义：说明行向量不相关，列向量线性...

$|A|\neq 0 \Rightarrow$ 说明没有非零行 $\Rightarrow$ 秩 $=3$. 基础解系 $=5-3=2$.

4. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\0&1&6&8\\0&-1&5&8\end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\0&-1&5&8\\0&1&6&8\end{pmatrix}$

行列式左乘相当于对行列式行变换. 行列式右乘 相当于对行列式列变换.

5. 若 $\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$ 合同，则二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+bx_2^2+cx_3^2$ 的正惯性指数 $=$ 0

A 与 B 合同，则 $A=C^TBC$

A 与 B 相似，则 $A=P^{-1}BP$.

合同 正惯性指数相同 / 同号<0 / 正惯性=0

6. A 是 2 阶实方阵，若齐次线性方程组 $(A-2E)X=0$ 和 $(3A+E)X=0$ 均有非零解，则行列式 $|9A^*+A^{-1}+E|=$ -24.

$\frac{2}{-3}$ $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ $|A|=-\frac{2}{3}$ $A^*=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&0\\0&2\end{pmatrix}$ $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&-3\end{pmatrix}$

$|A-2E|=0$, $|2E-A|=0$, $\lambda_1=2$, $|3A+E|=0$, $|A+\frac{1}{3}E|=0$, $|-\frac{1}{3}E-A|=0$, $\lambda_2=-\frac{1}{3}$, $|A|=\lambda_1\lambda_2=-\frac{2}{3}$, A^{-1}: $\lambda_1'=\frac{1}{\lambda_1}=\frac{1}{2}$, $\lambda_2'=\frac{1}{\lambda_2}=-3$, $A^*=|A|\cdot A^{-1}$: $\lambda_1''=-\frac{1}{3}$, $\lambda_2''=2$

$9A^*+A^{-1}+E$ 的特征值: $9\times(-\frac{1}{3})+\frac{1}{2}+1=-\frac{3}{2}$, $9\times 2-3+1=16$, 行列式值为 $-\frac{3}{2}\times 16=-24$. 注意特征值.

7. 若 A 是 2 阶实方阵，α_1,α_2 是线性无关的 2 维实列向量，满足 $A\alpha_1=\alpha_1+5\alpha_2$，$A\alpha_2=2\alpha_1-8\alpha_2$，则 A 的负特征值是 -9

$A=\begin{bmatrix}1&2\\5&-8\end{bmatrix}$

8. $A=\begin{pmatrix}3&3&3&-3\\3&-3&3&3\\3&3&-3&3\\-3&3&3&3\end{pmatrix}$. 与正交矩阵相联系，可知 $A^{-1}=$ $\frac{1}{36}A$

对称矩阵 化成单位向量. $AA^T=E$, $AA^{-1}=E$, $A^T=A^{-1}$

$(\frac{1}{6}A)^{-1}=(\frac{1}{6}A)^T=\frac{1}{6}A$. $\therefore 6A^{-1}=\frac{1}{6}A$. $\therefore A^{-1}=\frac{1}{36}A$.

正交矩阵有什么性质：行(列)向量是正交单位向

A 为正交矩阵 $\Longleftrightarrow$ A 的每行(列) 向量组是正交单位向量组. 内积为 0.

9. 已知3维实（列）向量空间 R^3 中的两个向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 β_1,β_2 满足

线性有关

$R(A^*)=\begin{cases} n, & R(A)=n \\ 1, & R(A)=n-1 \\ 0, & R(A)<n-1 \end{cases}$

$\begin{cases}\alpha_1=6\beta_1+2\beta_2\\ \alpha_2=-\beta_1+2\beta_2\\ \alpha_3=\beta_1+5\beta_2\end{cases}$，而且，$\beta_1,\beta_2$ 线性无关；若记以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1$ 为列向量的矩

A: 三行四列. AA^T: 3行3列.

A^T: 4行3列

阵 $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1)$ 为 A，则 AA^T 伴随矩阵 $(AA^T)^*$ 的秩 $R\{(AA^T)^*\}=$ ~~2~~ 1.

$R(A)=2$

$R(AA^T)=2$

$R(AA^T)^*=1$

10. 若实矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ a_2 & b_1 & b_2 & b_3\\ a_3 & b_2 & c_1 & c_2\\ a_4 & b_3 & c_2 & d\end{pmatrix}$ 满足 $A^{11}+2A^9+8A+11E=0$，则行列式

$A<0$.

$f(A)=$

$f(\lambda)=$

$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_2\\ b_2 & a_2 & b_1\\ c_1 & a_3 & b_2\end{vmatrix}$ < 0（填比较符号 >,<,= 之一）.

$f(\lambda)=\lambda^{11}+2\lambda^9+8\lambda+11=0$

若 $\lambda>0$ 则 $f(\lambda)>0$

因此 $\lambda<0$，故 $|A|<0$.

d41 1 <0.

得 分

二（10分）．计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & -3 & 2\\ 2 & -3 & 6 & -3 & 2\\ 2 & -3 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -2 & 0\end{vmatrix}$（要求出具体数值）.

$=50$

得 分

三（10分）．用初等变换的方法，解方程 $\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$. $X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}-1&\frac{1}{2}\\2&-\frac{3}{2}\\2&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

得 分

四（10分）．a 取何值时，线性方程组 $\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3-x_4=3\\ x_1+2x_2+x_3-x_4=-1\\ x_1-12x_2-x_3+x_4=a\end{cases}$ 有解？

基础解系

通解 = 特解 + 通解.

有解时，写出其通解.

$a=9$. $(4,0,-5,0)^T+C_1(15,1,-7,0)^T+C_2(0,0,1,1)^T$

去掉特解常数

C_1,C_2 为常数

~~通解为 $(-\frac{5}{7},\frac{3}{7},0,0)^T+C_1(-\frac{32}{7},\frac{2}{7},7,0)+C_2(\frac{38}{7},-\frac{12}{7},0,7)$. ($C_1,C_2$ 为常数)~~

得 分

五（12分）． 已知 $A=\begin{pmatrix}1&-6&-6\\-6&1&-6\\-6&-6&1\end{pmatrix}$．求一个可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵；并求出这一对角矩阵.

思路.

解：设 $|\lambda E-A|=0$.

$(\lambda+11)(\lambda-7)^2=0$

$\lambda_1=-11$（一重） $\lambda=7$（二重）.

$Ax=0$.

$P=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$?

$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-11&0&0\\0&7&0\\0&0&7\end{bmatrix}$

$\lambda_1=a+b+b=1-6-6=-11$

$\lambda_2=a-b=1+6=7$

得 分

六（12分）．给定列向量组

$$\alpha_1=(0,1,-1,-1)^T,\ \alpha_2=(1,-2,1,-1)^T,$$
$$\alpha_3=(1,1,-1,0)^T,\ \alpha_4=(2,1,-2,-3)^T,\ \alpha_5=(13,-2,-6,-17)^T.$$

1 求该向量组的秩：$R=3$.

2 求该向量组的一个极大线性无关组：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

3 把其余向量用问题 2 中求出的极大线性无关组线性表出．

$$\begin{cases}\alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\\ \alpha_5=9\alpha_1+8\alpha_2+5\alpha_3\end{cases}$$

得 分

P134

七（8分）．A 是 $m\times n$ 型实矩阵．证明：$R(A^TA)=R(A)=R(AA^T)$.

得 分

$AA^T=E$

八（8分）．证明：若 A,B 是 n 阶正定矩阵，则 $A+B$ 也是正定矩阵．

对称

$\lambda>0$

七. 这类问题可用证明齐次线性方程组同解的方法.

显然 $Ax=0$ 的解都是 $A^TAx=0$ 的解.

反之，若 x_1 是 $A^TAx=0$ 的解. 则 $A^TAx_1=0$.

$\therefore\ x_1^T(A^TAx_1)=0$.

故 $(Ax_1)^T(Ax_1)=0$.

所以有 $Ax_1=0$.

即 $A^TAx=0$ 的解是 $Ax=0$ 的解.

故 $Ax=0$ 与 $A^TAx=0$ 同解.

$\therefore\ R(A)=R(A^TA)$.

同理 $R(A)=R(AA^T)$.

$\therefore\ R(A^TA)=R(A)=R(AA^T)$.

$\boxed{证明}$：七：只需证方程组 $A^TAX=0$ 与 $AX=0$，$A^TX=0$ 与 $AA^TX=0$ 同解即可.

$$R(A^TA)=R(A)\Leftarrow\begin{cases}AX=0\Rightarrow A^TAX=0\\ A^TAX=0\Rightarrow X^TA^TAX=0\Rightarrow (AX)^TAX=0\\ \qquad\Rightarrow AX=0\ (利用\ A^TA=0\Rightarrow A=0\ 得到)\end{cases}$$

$$R(AA^T)=R(A^T)\Leftarrow\begin{cases}A^TX=0\Rightarrow AA^TX=0\\ AA^TX=0\Rightarrow (A^T)^TA^TX=0\Rightarrow X^T(A^T)^TA^TX=0\\ \qquad\Rightarrow (A^TX)^TA^TX=0\Rightarrow A^TX=0\end{cases}$$

因为 $R(A)=R(A^T)$

故 $R(A^TA)=R(A)=R(AA^T)$

需灵活运用：① $R(A)=R(A^T)$ ② $(A^T)^T=A$ ③ $A^TA=0\Rightarrow A=0$ ④ $AX=0\Rightarrow BAX=0$ ⑤ $A^TB^T=(BA)^T$

$\boxed{证明八.}$ 证明正定矩阵的一般步骤.

① 证明矩阵是对称矩阵，即 $A^T=A$

② 证明特征值>0或直接通过 $f(x)=X^TAX>0$ 证明.

证明：$(A+B)^T=A^T+B^T$，因为 $A、B$ 为正定，则 $A^T=A$，$B^T=B$，故 $(A+B)^T=A+B$，对称矩阵

$f(x)=X^T(A+B)X=X^TAX+X^TBX$，$\because X^TAX>0$，$X^TBX>0$，故 $f(x)>0$，正定

附件10 线代期末复习补充题（四）

一. 填空题（每小题3分，共30分. 注意：所有题目需给出计算结果；$a=a$型答案无效）

1、若3×2型实矩阵 $A_{3\times2}$ 和2×3型实矩阵 $B_{2\times3}$ 满足 $AB=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&3&0\\3&7&-2\end{pmatrix}$，则 $BX=0$ 的基础解系中含有解向量的个数是 $\underline{\quad 1 \quad}$

$R(AB)=2 \quad R(AB)\le \min\{R(A),R(B)\}$

$R(B)\ge 2,\ R(B_{2\times3})\le \min\{2,3\}=2$

$\begin{cases}R(B)\ge 2\\ R(B)\le 2\end{cases} \Rightarrow R(B)=2 \qquad k=\underset{n}{3}-\underset{r}{2}=1$

2、$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1&-3\\0&1&2&5\\3&1&0&-1\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}1&0&-1&-3\\2&1&0&-1\\3&1&0&-1\end{pmatrix}}$

3、$A=\begin{pmatrix}1&a&a^2\\1&-1&1\\1&3&9\end{pmatrix}$. 若 $AX=0$ 有非零解，且 $a>0$，则 $a=\underline{\quad 3 \quad}$

$|A|=0$. $A\to\begin{bmatrix}1&a&a^2\\0&-1-a&1-a^2\\0&3-a&9-a^2\end{bmatrix}$ $\frac{-1-a}{3-a}=\frac{1-a^2}{9-a^2}$ 不满足，故 $r=3$ （复杂，由题意化简）也可以 $|A|$ 化简 $=0$ 则 $a=3$

4、A是2阶实方阵. 若齐次线性方程组 $(A+E)X=0$ 和 $(A-2E)X=0$ 均有非零解，则行列式 $|A^*-A^{-1}+A-E|=\underline{\quad -\frac{1}{2} \quad}$

$-1 \qquad 2 \qquad A=\begin{bmatrix}-1&0\\0&2\end{bmatrix} \quad A^{-1}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&\frac12\end{bmatrix}$

5、如果A是2阶实方阵；α_1,α_2 是线性无关的2维实列向量，且满足 $A\alpha_1=3\alpha_2$，$A\alpha_2=\alpha_1+2\alpha_2$. 则A的负特征值是 $\underline{\quad -1 \quad}$

$A=\begin{bmatrix}0&3\\1&2\end{bmatrix}$

6、若 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\-1&-1&-1&-1\\-1&1&1&-1\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=\underline{\quad \frac14 A \quad}$

正交矩阵

$(\frac12 A)^T(\frac12 A)=E$.

$(\frac12 A)^T=(\frac12 A)^{-1}=\frac12 A$.

$\therefore A^{-1}=\frac14 A$.

相似题 给出A的部分 未知数而 使 $|A|=0$

7、$A=\begin{pmatrix}a+1&1&1\\-2&2a-6&2\\-2&-9&a-1\end{pmatrix}$. 使得齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解的a的所有的值之积 $=\underline{\quad -12 \quad}$

$|A|=0 \Rightarrow (a+1)(2a^2-8a+24)+6a$

$-\frac{d}{a}=-12$

韦达定理 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}\\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{c}{a}\\ x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}\end{cases}$

8、如果 $\underset{A}{\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}}$ 和 $\underset{B}{\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}}$ 相似，且 $a\ne0$，则 $a=\underline{\quad 3 \quad}$

$A=P^{-1}BP$.

相似矩阵具有相同的特征多项式 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$

9、如果3阶实方阵 $A=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$ 的列向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 与线性无关向量组 $\{\beta_1,\beta_2\}$ 具

本题 注意相似矩阵性质

① $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$（相同的λ与迹）

② $|A|=|B|$

③ $r(A)=r(B)$

④ $A^m=B^m$

由 $r(A)=r(B)$ 且 $a\ne0$ 得 $b=0,\ c=0$

由相同的迹 得 $1+1+1=a+b+c$

即 $a=3$.

有关系$\begin{cases}\alpha_1 = 2\beta_1 + \beta_2 \\ \alpha_2 = -\beta_1 + 3\beta_2 \\ \alpha_3 = \beta_1 - \beta_2\end{cases}$，则齐次线性方程组$AX=0$的一般解中自由未知量的个数是 1

$R(A)=2$　　$3-2=1$

$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

☆10、若 3 阶实方阵 A 是可逆的，则矩阵 A^TA 的正特征值的个数是 3.

也可用合同处理，A^TEA，顺序正值为3

→ 取特殊，设 $A=E$.

方法很好：$A^TA=E$

$|\lambda E-E|=(\lambda-1)E|$

$=(\lambda-1)^3=0$

$\lambda=1$ 三重根.

二（10 分）. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 8 & 3\ - \\ -2 & 2 & 5 - 1 & \\ -6 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$（要求出具体数值）.

三（10 分）.用初等变换的方法，解方程$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

四（10 分）.

a 取何值时，线性方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = -2 \\ 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = a \end{cases}$ 有解？有解时，写出其通解.

五（12 分）.

已知$A=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 6 & 1 & 6 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$. 求一个可逆矩阵 P，使得$P^{-1}AP$是对角矩阵；求出这对角矩阵.

$\lambda_1 = 1+6+6=13$

$\lambda_{23} = 1-6=-5$

六（12 分）. 给定列向量组

$$\alpha_1=(0,0-1,1)^T, \alpha_2=(-1,0,0,2)^T,$$
$$\alpha_3=(-1,1,-2,3)^T, \alpha_4=(-3,1,-3,8)^T, \alpha_5=(-6,3,-7,16)$$

1、求该向量组的秩；

2、求该向量组的一个极大线性无关组；

3、把其余向量用问题 2 中求出的极大线性无关组线性表出.

七（8 分）.若λ_1,λ_2是实方阵A的两个不同的特征值：α_1,α_2是属于λ_1的线性无关的特征向量；β_1,β_2是属于λ_2的线性无关的特征向量，则$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$是线性无关的.

八（8 分）. 若实方阵$A\neq aE,bE$，且$(A-aE)(A-bE)=0$，则a,b都是A的特征值.

证明八. 令 $A-bE=X$，则 $(A-aE)X=0$. 因为 $A-aE$ 为方阵，故 $|A-aE|=0$ 且 $X\neq0$

即 a 为A的特征值

同理可得 b 为 A 特征值.

想证明 谁是谁特征值，关键是得到 $|\lambda E-A|=0$，同时注意 老是 $A-aE$，$A-bE$ 都是矩阵 不是行列式值.

类似题：证明 A可以对角化. （见反面）

七. 由题设知.

$A\alpha_i = \lambda_1 \alpha_i \ (i=1,2)$

$A\beta_i = \lambda_2 \beta_i \ (i=1,2)$

$$\begin{cases} A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1. \\ A\alpha_2 = \lambda_1\alpha_2. \\ A\beta_1 = \lambda_2\beta_1 \\ A\beta_2 = \lambda_2\beta_2. \end{cases}$$

假设. $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\beta_1 + k_4\beta_2 = 0$ · ①

①式左乘 A.

$A(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\beta_1 + k_4\beta_2) = 0$.

$\therefore \lambda_1(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2) + \lambda_2(k_3\beta_1 + k_4\beta_2) = 0$. ②

② $-\lambda_2$① ∴ 得.

$(\lambda_1 - \lambda_2)(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2) = 0$.

又 ∵ $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0$.

以仅要推到这步才有作用，不然无法得证 ∞ k_1 为何值 k_1 (只有在 $k_1\alpha_1 + k_n\alpha_n = 0$ 有用)

又 ∵ α_1, α_2 线性无关 $\Rightarrow k_1 = 0, k_2 = 0$.

$\therefore k_3\beta_1 + k_4\beta_2 = 0$. 又 β_1、β_2 线性无关.

$\therefore k_3 = k_4 = 0$

$\therefore k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$.

∴ 得 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 是线性无关的.

证明向量组线性有无关的一般步骤.

① 假设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots k_n\alpha_n = 0$

② 由条件推 $k_1, k_2, k \ldots k_n$ 与0关系.

☆ $A_{m\times n}$, $B_{n\times m}$, $m > n$, 证 $|AB| = 0$

$R(A) \le n$, $R(B) \le n$, 由乘法规则 $AB_{m\times m}$ (至少行不满秩)

$R(AB) \le n < m$

因此 $|AB| = 0$ (降秩矩阵) 例

试证明: A 是 $n\ (n>2)$ 阶方阵, 证明 $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$

证明: $B^*B = |B|E$

采用代换法, 令 $B = A^*$

则 $(A^*)^*A^* = |A^*|E$

而 $|A^*| = |A|^{n-1}$, $A^* = |A|A^{-1}$

故 $(A^*)^*|A|A^{-1} = |A|^{n-1}$

若 $|A| \neq 0$ 则 $(A^*)^*A^{-1}\cdot A = |A|^{n-2}A$

$(A^*)^* = |A|^{n-2}A$

若 $|A| = 0$ (则 $R(A) < n$)

若 $R(A) = n-1$, 则 $R(A^*) = 1$, $R[(A^*)^*] = 0$

故 $(A^*)^* = 0$, $|A| = 0$ 不影响.

若 $R(A) < n-1$, 则 $R(A^*) = 0$

故 $A^* = 0$, 因此 $(A^*)^* = 0$, $|A|$ 不影响.

因此得证.

$\boxed{\text{总结}}$ ① 代换法

② 证明:

$A=0$	可用 $R(A)=0$
$\lvert A\rvert=0$	可用 $R(A)<n$, 此时不可逆
$\lvert A\rvert\neq0$	可用 $R(A)=n$, 此时可逆

③ $R(A^*) = \begin{cases} n & R(A)=n \\ 1 & R(A)=n-1 \\ 0 & R(A)<n-1 \end{cases}$ (用②即可证明)

($|A|=0$ $|A^*| \neq 0 \Leftrightarrow R(A)=n$

$|A|=0$ $|A^*|=0 \Leftrightarrow R(A)<n$

☆

若 $a \neq b$, 且 $(A-aE)(A-bE)=0$, 证明 A 可以对角化.

证明: 对角化的证明可以转化为秩的问题. 即证 $n - r(A-aE) + n - r(A-bE) = n$

由于秩可线性替换, 即 $r(A-aE) = r(aE-A)$

故 $r(A-aE) + r(A-bE) = r(aE-A) + r(A-bE) \geq r(aE-A+A-bE)$ $A^T = A$

$= r[(a-b)E] = n$

由: $r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$ 可得

$0 \geq r(A) + r(B) - n$ 即 $r(A-aE) + r(A-bE) \le n$

因此 $r(A-aE) + r(A-bE) = n$. 可对角化.

类似证明还有: 若 A 是 n 阶幂等矩阵, 即 $A^2 = A$, 则 $R(A) + R(A-E) = n$.

转化为 $A^2 - A = 0$ 即 $A(A-E) = 0$ 与例题类似.

附件 8 线代期末复习补充题（二）

1. 向量 $(0,-1,-2)$，$(1,0,3)$，$(2,-3,0)$ 线性 相关（填"无关"或"相关"）

2. 若方程 $\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda-1 & -2 \\ -1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix}=0$ 的三个根是 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，则乘积 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=$ 6

3. A 是 2 阶实方阵，$A+2E, E-2A$ 均不可逆，则行列式 $|A^2+A+E|=$ $\frac{21}{4}$

4. 若 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$，则 $A^*X=0$ 的基础解系中含有解向量的个数为 2

5. 矩阵 $A=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $A^{-1}=$

6. 若 n 阶实对称矩阵 A 满足 $A^5+A^3+A=3E$，则 A 的特征值是 1

7. 若 3 阶实方阵 A 和 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 相似，则 $A-3E$ 的所有特征值是 -3,-3,0

8. 二次型 $(x,y,z)\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 的正、负惯性指数之和是 2

二. 计算中心对称行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 8 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 的值.

三. 用初等变换，找一对 3×2 型矩阵 A、2×3 型矩阵 B，使得 $AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$。

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

四. a 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=1 \\ x_1-3x_2-x_3+x_4=0 \\ 3x_1-x_2+x_3-x_4=a \end{cases}$ 有解？有解时，写出其通解。

证明题解法:

① 证明正交矩阵: 利用 $AA^T=E$, 正交矩阵性质: ① $|A|=1$ ② $AA^T=E$

例: 证正交矩阵A的 A^* 也是正交矩阵

证明: A为正交矩阵, $\begin{cases} AA^T=E,\ A^{-1}=A^T \\ |A|=1 \end{cases}$

$$A^*=|A|A^{-1}=|A|A^T$$

$$(A^*)^T=(|A|A^T)^T=|A|(A^T)^T=|A|A$$

$$A^*(A^*)^T=|A|A^T|A|A=|A|^2A^TA=|A|^2E=E$$ 得证.

② 证明基础解系问题.

(1) 证明向量 α_i 是 $Ax=0$ 的解 (2) 证明向量组 α_i 线性无关 (3) 证明向量组 α_i 能够线性表示 $Ax=0$ 的所有解 (即 解向量的个数 $=n-r(A)$)

例: 设 $|A|=0$, a_{kl} 代数余子式 $A_{kl}\neq 0$, 证: $(A_{k1},A_{k2},A_{k3}\cdots A_{kn})^T$ 是 $Ax=0$ 一个基础解系

证明: (1) $a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+\cdots+a_{kn}A_{kn}=|A|=0$

由此可知, 向量满足 $Ax=0$

(2) 由于 $A_{kl}\neq 0$, 而 $|A|=0$, 则 $a_{ki}\neq 0$ 因此 线性无关可证.

(3) 由 $|A|=0$ 得 $R(A)<n$, 由 $A_{kl}\neq 0$ 得 $A^*\neq 0$ 得 $R(A)\geq n-1$

因此 $R(A)=n-1$, 解向量个数 $=n-(n-1)=1$ 因此满足.

五.给定列向量组

$\alpha_1=(-1,1,$

(1) 求秩

(2)

附件 9 线代期末复习补充题（三）

一. 填空题（每小题 3 分，共 30 分. 注意：所有题目需给出计算结果；$a=a$ 型答案无效）

1. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1&2\\2&4&6&8\\1&1&1&1\end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&2&4&6\\1&1&1&1\end{pmatrix}$

左乘 — 行变换
右乘 — 列变换

2. 记 $\begin{vmatrix}1&2&1&1\\-1&3&-2&3\\1&5&4&9\\-1&7&-8&27\end{vmatrix}$ 第二列四个位置的代数余子式分别是 $A_{12},A_{22},A_{32},A_{42}$. 若

$(-1-a)(-1+2)(-1-3)(a+2)(a-3)(-2-3)=0$

$\therefore a=-1$ $\quad -2 \quad 3.$

$A_{12}+aA_{22}+a^2A_{32}+a^3A_{42}=0$，且 $a>0$. 则 $a=$ 3.

3. 在行列式 $\begin{vmatrix}x&x^2&2\\x&3&x\\-1&2x&1\end{vmatrix}$ 的完全展开式中，合并同类项后，x^3 的系数是 -4.

$-1+(-1-2)=-4$

4. 3 阶实方阵 A 和非零向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 满足：$A\alpha_1=\alpha_1, A\alpha_2=2\alpha_2, A\alpha_3=-\alpha_3$. 若记以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为列向量组的矩阵为 $P=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$，则 $P^{-1}AP=$ $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$（写出具体的矩阵）.

相似 → 具有相同的特征值.

5. 若 3×2 型、2×3 型实矩阵 A,B 满足 $AB=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&-1&1\\8&-1&7\end{pmatrix}$，则 A,B 的秩之和

P134

$R(AB)=2.$

$R(A)+R(B)=$ 4

6. A 是 2 阶实方阵. 若齐次线性方程组 $(A-E)X=0$ 和 $(2A-E)X=0$ 均有非零解，

$\lambda_1=1 \quad \lambda_2=\frac{1}{2} \quad A=\begin{bmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$

则行列式 $|A^*+A^{-1}+2E|=$ $\frac{25}{2}$

$AX=0.$

7. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是齐次线性方程组 $\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&2&3\\-1&0&1&-2\\-1&-2&7&0\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ 的解空间中的线性无关向量组，则 m 能取到的最大值是 2.

$R(A)=2.$

$4-2=2.$

8. 若3阶实方阵 $A=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$ 的列向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 与线性无关向量组 $\{\beta_1,\beta_2\}$ 满足

$$\begin{cases}\alpha_1=3\beta_1-\beta_2\\ \alpha_2=\beta_1+2\beta_2\\ \alpha_3=5\beta_1-\beta_2\end{cases}$$

，则 A 的阶梯化矩阵中非零行的行数是 2

$A=\begin{bmatrix}3&1&5\\-1&2&-1\end{bmatrix}$ 非零行2.

9. 方程 $\begin{vmatrix}x+1&2&3\\-4&2x+6&8\\1&-1&1-x\end{vmatrix}=0$ 的根 x_1,x_2,x_3 之和 $x_1+x_2+x_3=$ ______.

$=-\frac{b}{a}$.

10. 若 Q 是 n（$n>1$）阶实方阵，且齐次线性方程组 $QX=0$ 只有零解，$A=Q^TQ$，则 A 的特征值 > 0（填">,<,="之一）.

$|Q|\neq 0\to R(Q)=n$. A, E合同 ⇓ A正定 ⇓ $\lambda>0$

二（10分）. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}0&-1&-5&-2&3\\1&3&-1&1&0\\1&8&-3&-8&1\\0&-1&-1&-3&1\\3&2&-5&1&0\end{vmatrix}$（要求出具体数值）.

三（10分）. 用初等变换的方法，解方程 $X\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$.

合同 → 二次型
相似 → 特 λ相同.

四（10分）. a 取何值时，线性方程组 $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3+x_4=3\\ x_1+x_2-x_3+2x_4=0\\ x_1-5x_2+7x_3-4x_4=a\end{cases}$ 有解？

有解时，写出其通解.

五（12分）. 已知 $A=\begin{pmatrix}2&8&8\\8&2&8\\8&8&2\end{pmatrix}$. 求一个可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵；并求出这一对角矩阵.

六（12分）. 给定列向量组

$\alpha_1=(0,-1,2,1,0)^T,\alpha_2=(1,1,-1,0,3)^T,\alpha_3=(1,0,-2,1,2)^T,$
$\alpha_4=(5,-2,-3,7,11)^T,\alpha_5=(9,-5,-5,14,19).$

1 求该向量组的秩；

2 求该向量组的一个极大线性无关组；

3 把其余向量用问题2中求出的极大线性无关组线性表出.